

УДК 621.321

ОБНАРУЖЕНИЕ СИГНАЛА С НЕИЗВЕСТНЫМИ АМПЛИТУДОЙ И ДЛИТЕЛЬНОСТЬЮ

А. П. Трифонов, Ю. Э. Корчагин, П. А. Кондратович

Воронежский госуниверситет, г. Воронеж, Россия

Синтезирован максимально правдоподобный алгоритм обнаружения сигнала произвольной формы с неизвестными длительностью и амплитудой, наблюдаемого на фоне аддитивного гауссовского белого шума. Выполнен анализ синтезированного алгоритма в предположении достаточно больших отношений сигнал/шум. Найдены асимптотически точные выражения для вероятностей ошибок обнаружения. С помощью численного моделирования проверена работоспособность синтезированного алгоритма, а также определены границы применимости асимптотических выражений.

ВВЕДЕНИЕ

Задача обнаружения сигнала с неизвестной длительностью, актуальная для многих практических приложений радиолокации, навигации и сейсмологии, рассматривалась в ряде работ [1–5]. В работах [1, 2] исследованы алгоритмы приёма прямоугольного импульса с неизвестной длительностью на фоне белого шума. Задача обнаружения сигнала произвольной формы с неизвестной длительностью исследована в [3]. Однако в ряде практических приложений неизвестной оказывается мощность принимаемого сигнала. Поэтому целесообразно рассмотреть обнаружение сигнала произвольной формы с неизвестной амплитудой. В работе [5] исследованы алгоритмы приёма сигнала с неизвестными амплитудой и длительностью, но лишь для прямоугольного импульса. В данной работе выполнен синтез и анализ максимально правдоподобного алгоритма обнаружения сигнала произвольной формы с неизвестными длительностью и амплитудой.

Рассмотрим задачу обнаружения сигнала

$$s(t, a, \tau) = \begin{cases} af(t), & 0 \leq t \leq \tau; \\ 0, & t < 0, \quad t > \tau, \end{cases}$$

наблюдаемого в течение интервала времени $[0, T]$ на фоне аддитивного гауссовского белого шума $n(t)$ с односторонней спектральной плотностью N_0 . Здесь $f(t)$ — функция, описывающая форму сигнала. Будем считать, что длительность сигнала принимает значения из априорного интервала

$$\tau \in [T_1, T_2]. \quad (1)$$

Реализация наблюдаемых данных при этом запишется в виде $\xi(t) = \gamma_0 s(t, a_0, \tau_0) + n(t)$. Индекс 0 здесь и далее означает истинное значение соответствующего параметра. Параметр γ_0 дискретный и принимает два значения: $\gamma_0 = 0$ (в наблюдаемой реализации сигнал отсутствует) и $\gamma_0 = 1$ (в наблюдаемой реализации сигнал присутствует). По наблюдаемой реализации $\xi(t)$ необходимо решить, какое значение принимает параметр γ_0 .

1. АЛГОРИТМ ОБНАРУЖЕНИЯ И СВОЙСТВА РЕШАЮЩЕЙ СТАТИСТИКИ

При неизвестных параметрах сигнала имеет место априорная параметрическая неопределённость относительно амплитуды и длительности. В этом случае логарифм функционала отношения правдоподобия (ФОР) зависит от трёх неизвестных параметров [2, 6, 7] и может быть записан

в виде

$$L(\gamma, a, \tau) = \frac{2a\gamma}{N_0} \int_0^\tau f(t) [\xi(t) - af(t)/2] dt.$$

В соответствии с максимально правдоподобным алгоритмом [6, 7] оценка дискретного параметра γ может быть найдена как

$$\gamma_m = \arg \sup_{\gamma} \left[\sup_{a, \tau} L(\gamma, a, \tau) \right]. \quad (2)$$

Аналогично [5–7] вместо алгоритма (2) можно использовать обобщённый максимально правдоподобный алгоритм обнаружения, основанный на сравнении абсолютного максимума логарифма ФОП с некоторым порогом h . Если

$$L > h,$$

выносится решение о наличии сигнала ($\gamma_m = 1$), если $L < h$ — о его отсутствии ($\gamma_m = 0$). Для величины максимума логарифма ФОП можно записать

$$L = \sup_{\tau} L(\tau), \quad L(\tau) = \sup_a L(a, \tau) = L(a_m, \tau), \quad a_m = \arg \sup_a L(a, \tau).$$

где

$$L(a, \tau) = L(\gamma = 1, a, \tau), \quad (3)$$

$L(\tau)$ — логарифм ФОП (3), в который вместо неизвестной амплитуды подставлена её оценка максимального правдоподобия a_m , что равносильно максимизации логарифма ФОП по неизвестной амплитуде. Максимизацию логарифма ФОП (3) по амплитуде можно выполнить аналитически. Для этого приравняем нулю производную функции (3) по переменной a :

$$\left. \frac{dL(a, \tau)}{da} \right|_{a_m} = \frac{2}{N_0} \int_0^\tau \xi(t) f(t) dt - \frac{2a_m}{N_0} \int_0^\tau f^2(t) dt = 0$$

и решим полученное уравнение относительно a_m :

$$a_m = \frac{2}{N_0} \int_0^\tau \xi(t) f(t) dt \bigg/ \int_0^\tau f^2(t) dt. \quad (4)$$

Заменяя в (3) априори неизвестную амплитуду a на её оценку, основанную на максимально правдоподобном алгоритме (4), получим

$$L(\tau) = \frac{1}{N_0} \left(\int_0^\tau \xi(t) f(t) dt \right)^2 \bigg/ \int_0^\tau f^2(t) dt. \quad (5)$$

Выражение (5) определяет структуру приёмного устройства. Приёмник должен формировать случайный процесс (5) для всех возможных значений длительности (1) и находить величину его наибольшего максимума. В результате сравнения величины максимума с порогом выносится решение о наличии или отсутствии сигнала. Блок-схема приёмного устройства изображена на рис. 1, где цифрой 1 обозначен интегратор на интервале времени $[0, t]$, $t \in [0, T_2]$, 2 — пиковый детектор, определяющий наибольшее значение сигнала, 3 — решающее устройство, осуществляющее

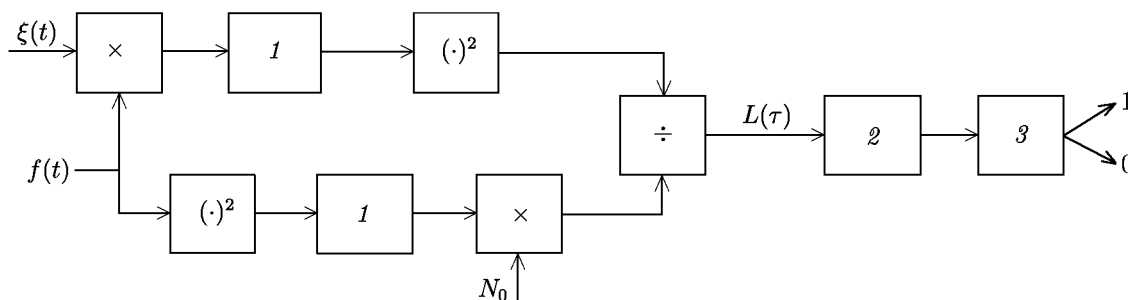


Рис. 1

сравнение выходного сигнала пикового детектора с порогом и выносящее решение о наличии или отсутствии сигнала.

Для анализа максимально правдоподобного алгоритма обнаружения рассмотрим вспомогательный случайный процесс

$$M(\tau) = \int_0^\tau \xi(t)f(t) dt. \tag{6}$$

Этот процесс является гауссовским с математическим ожиданием

$$S_M(\tau) = \langle M(\tau) \rangle = a_0\gamma_0 \int_0^{\min(\tau, \tau_0)} f^2(t) dt = \frac{N_0q(\tau_0)\gamma_0}{2a_0} \min\left[\frac{q(\tau)}{q(\tau_0)}, 1\right].$$

Корреляционная функция процесса $M(\tau)$ запишется как

$$K_M(\tau_1, \tau_2) = \frac{N_0}{2} \int_0^{\min(\tau_1, \tau_2)} f^2(t) dt = \frac{N_0^2}{4a_0^2} q[\min(\tau_1, \tau_2)] = \frac{N_0^2q(\tau_0)}{4a_0^2} \min\left[\frac{q(\tau_1)}{q(\tau_0)}, \frac{q(\tau_2)}{q(\tau_0)}\right],$$

где

$$q(\tau) = \frac{2a_0^2}{N_0} \int_0^\tau f^2(\tau) dt \tag{7}$$

— отношение сигнал/шум (ОСШ) на выходе приёмника, основанного на максимально правдоподобном алгоритме для сигнала с длительностью τ .

Перейдём в (6) к новой переменной $l = q(\tau)/q(\tau_0)$, $l \in [L_1, L_2]$, $L_1 = q(T_1)/q(\tau_0)$, $L_2 = q(T_2)/q(\tau_0)$. Тогда для случайного процесса (6) как функции переменной l можно записать

$$M(\tau) = M[\tau(l)] \equiv \chi(l) = \frac{N_0q(\tau_0)}{2a_0} \left[\gamma_0 \min(l, 1) + \frac{\omega(l)}{\sqrt{q(\tau_0)}} \right].$$

Здесь $\tau(l)$ определяется из решения уравнения $q(\tau)/q(\tau_0) = l$, а $\omega(l)$ — стандартный винеровский процесс. Используя случайный процесс (6), решающую статистику (5) как функцию переменной l мы можем представить в виде

$$L(l) = \frac{2a_0^2\chi^2(l)}{N_0^2q(\tau_0)l} = z_0^2 \frac{[\gamma_0 \min(l, 1) + \omega(l)/z_0]^2}{2l}, \tag{8}$$

где $z_0^2 = q(\tau_0)$ — отношение сигнал/шум на выходе приёмника для принятого сигнала.

2. ХАРАКТЕРИСТИКИ ОБНАРУЖЕНИЯ

Основными характеристиками качества обнаружения являются вероятность ложной тревоги и вероятность пропуска сигнала [7]. Для нахождения вероятности ложной тревоги обнаружителя, основанного на максимально правдоподобном алгоритме, необходимо найти функцию распределения абсолютного максимума случайного процесса

$$L_0(l) = L(l | \gamma_0 = 0) = \frac{1}{2} \left[\omega(l) / \sqrt{l} \right]^2, \quad (9)$$

который имеет математическое ожидание $\langle L_0(l) \rangle = 1/2$, коэффициент корреляции $R(l_1, l_2) = \min^2(l_1, l_2) / (l_1 l_2)$ и одномерную плотность вероятности $W_0(x) = \exp(-x) / \sqrt{\pi x}$. Перепишем выражение (9) в виде

$$L_0(l) = X^2(l) / 2, \quad (10)$$

где $X(l) = \omega(l) / \sqrt{l}$ — гауссовский случайный процесс с нулевым математическим ожиданием, единичной дисперсией и коэффициентом корреляции $R_X(l_1, l_2) = \min(l_1, l_2) / \sqrt{l_1 l_2}$. Выполним в выражении (10) замену переменной $\theta = \ln[2a_0^2 l / (N_0 z_0^2)]$, $\theta \in [\theta_{1m}, \theta_{2m}]$, $\theta_{1m} = \ln[2a_0^2 L_1 / (N_0 z_0^2)]$, $\theta_{2m} = \ln[2a_0^2 L_2 / (N_0 z_0^2)]$. Тогда решающая статистика $L_0(\theta)$ как функция переменной θ может быть представлена в виде

$$L_0(\theta) = X^2(\theta) / 2, \quad (11)$$

где $X(\theta)$ — стационарный гауссовский случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и коэффициентом корреляции $R_X(\theta_1, \theta_2) = \exp(-|\theta_1 - \theta_2|/2)$. Известно [8], что $X(\theta)$ является марковским случайным процессом и удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$dX(\theta) = -X(\theta) d\theta / 2 + d\omega(\theta), \quad (12)$$

записанному в симметризованной форме. Умножим правую и левую часть уравнения (12) на $X(\theta)$. Учитывая, что $dL_0(\theta) = X(\theta) dX(\theta)$ и $X(\theta) = \sqrt{2L_0(\theta)}$, получим стохастическое дифференциальное уравнение для решающей статистики $L_0(\theta)$

$$dL_0(\theta) = -L_0(\theta) d\theta + \sqrt{2L_0(\theta)} d\omega(\theta).$$

Используя результаты [7], находим, что с увеличением порога h и длины априорного интервала $[\theta_{1m}, \theta_{2m}]$ вероятность недостижения порога случайным процессом $L_0(\theta)$ имеет предельное значение

$$P[\sup L_0(\theta) < h] \xrightarrow{h \rightarrow \infty} \exp\left[-(\theta_{2m} - \theta_{1m}) \sqrt{h/\pi} \exp(-h)\right].$$

Возвращаясь в этой формуле к переменной $l = N_0 z_0^2 / (2a_0^2) \exp(\theta)$, получаем для больших значений порога и отношения L_2/L_1

$$P[\sup L_0(l) < h] \approx (L_1/L_2) \sqrt{h/\pi} \exp(-h).$$

Поскольку эта функция является неубывающей функцией h только при $h > 1/2$, будем использовать аппроксимацию

$$P[\sup L_0(\theta) < h] \approx \begin{cases} (L_1/L_2) \sqrt{h/\pi} \exp(-h), & h \geq 1/2; \\ 0, & h < 1/2. \end{cases}$$

Отсюда находим приближённое выражение для вероятности ложной тревоги

$$\alpha = P[\sup L_0(\theta) > h] \approx \begin{cases} 1 - \left(\int_0^{T_1} f^2(t) dt / \int_0^{T_2} f^2(t) dt \right)^{\sqrt{h/\pi} \exp(-h)}, & h \geq 1/2; \\ 1, & h < 1/2. \end{cases} \quad (13)$$

Точность этой формулы возрастает с увеличением порога h и отношения L_2/L_1 .

Перейдём к определению вероятности пропуска. При наличии сигнала в наблюдаемой реализации решающая статистика (8) принимает вид

$$L_1(l) \equiv L(l | \gamma_0 = 1) = z_0^2 \frac{\min^2(1, l)}{2l} + z_0 \frac{\min(1, l)}{l} \omega(l) + \frac{\omega^2(l)}{2l}. \quad (14)$$

Для больших отношений сигнал/шум последним слагаемым в (14) можно пренебречь и записать приближённо

$$L_1(l) = z_0^2 \frac{\min^2(1, l)}{2l} + z_0 \frac{\min(1, l)}{l} \omega(l). \quad (15)$$

Выполним в (15) ещё одну замену переменных $\lambda = q(\tau_0)l = z_0^2 l$, причём $\lambda \in [\Lambda_1, \Lambda_2]$, $\Lambda_1 = q(T_1)$, $\Lambda_2 = q(T_2)$, $\lambda_0 = q(\tau_0) = z_0^2$. Тогда можно переписать решающую статистику (15) как функцию переменной λ :

$$\mu_1(\lambda) = L_1[l(\lambda)] = L_1[\lambda/z_0^2] = \frac{\min^2(\lambda, \lambda_0)}{2\lambda} + \frac{\min(\lambda, \lambda_0)}{\lambda} \omega(\lambda). \quad (16)$$

Эта функция представляет собой гауссовский случайный процесс с математическим ожиданием

$$S_1(\lambda) = \frac{\min^2(\lambda, \lambda_0)}{2\lambda} \quad (17)$$

и корреляционной функцией

$$K_1(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\min(\lambda_1, \lambda_0) \min(\lambda_2, \lambda_0)}{\lambda_1 \lambda_2} \min(\lambda_1, \lambda_2).$$

Коэффициент корреляции решающей статистики (16)

$$R(\lambda_1, \lambda_2) = \min(\lambda_1, \lambda_2) / \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}$$

удовлетворяет условию [8, 9]

$$R(x, y) = R(x, t)R(t, y), \quad x > t > y.$$

Следовательно, случайный процесс (16) является марковским с коэффициентами сноса и диффузии [8]

$$k_1(\lambda) = \begin{cases} 1/2, & \lambda < \lambda_0; \\ -\lambda_0^2/(2\lambda^2), & \lambda \geq \lambda_0, \end{cases} \quad k_2(\lambda) = \begin{cases} 1, & \lambda < \lambda_0; \\ \lambda_0^2/\lambda^2, & \lambda \geq \lambda_0. \end{cases}$$

При больших отношениях сигнал/шум положение максимума решающей статистики (16) располагается в малой окрестности положения максимума её математического ожидания [2]. Математическое ожидание (17) достигает максимального значения при $\lambda = \lambda_0$. Введём величину $\varepsilon = (\lambda - \lambda_0)/\lambda_0$, абсолютное значение которой уменьшается с ростом отношения сигнал/шум $\lambda_0 = z_0^2$, и перепишем коэффициенты сноса и диффузии в виде

$$k_1(\lambda) = \begin{cases} 1/2, & \lambda < \lambda_0; \\ -(1 + \varepsilon)^{-2}/2, & \lambda \geq \lambda_0, \end{cases} \quad k_2(\lambda) = \begin{cases} 1, & \lambda < \lambda_0; \\ (1 + \varepsilon)^{-2}, & \lambda \geq \lambda_0. \end{cases}$$

Поскольку $\varepsilon \rightarrow 0$ при $z_0 \rightarrow \infty$, то при больших отношениях сигнал/шум решающую статистику (16) в окрестности точки $\lambda = \lambda_0$ можно аппроксимировать гауссовским марковским случайным процессом $\mu_1(\lambda)$ с коэффициентами сноса и диффузии

$$k_1(\lambda) = \frac{1}{2} \begin{cases} 1, & \lambda < \lambda_0; \\ -1, & \lambda \geq \lambda_0. \end{cases} \quad k_2(\lambda) = 1.$$

Будем использовать эту аппроксимацию на всём интервале возможных значений параметра $\lambda \in [\Lambda_1, \Lambda_2]$.

Вероятность пропуска сигнала по определению равна вероятности неперевышения порога h случайным процессом $\mu_1(\lambda)$

$$\beta = P\{-\infty < \mu_1(\lambda) < h, \lambda \in [\Lambda_1, \Lambda_2]\}. \quad (18)$$

Для нахождения вероятности (18) воспользуемся методикой [2, 3]. Введём вспомогательный случайный процесс $y(\lambda) = h - \mu_1(\lambda)$, который является гауссовским марковским процессом с коэффициентами сноса и диффузии

$$k_1(\lambda) = \begin{cases} -1/2, & \lambda < \lambda_0; \\ 1/2, & \lambda \geq \lambda_0. \end{cases} \quad k_2(\lambda) = 1. \quad (19)$$

Тогда вероятность пропуска (18)

$$\beta = P\{y(\lambda) > 0, \lambda \in [\Lambda_1, \Lambda_2]\}$$

представляет собой вероятность недостижения границ $y = 0$ и $y = +\infty$ марковским случайным процессом $y(\lambda)$ на отрезке $\lambda \in [\Lambda_1, \Lambda_2]$. Согласно [8] для искомой вероятности можно записать

$$\beta = \int_0^{\infty} W(y, \Lambda_2) dy. \quad (20)$$

Здесь $W(y, \lambda)$ — решение уравнения Фоккера—Планка—Колмогорова [2, 8]

$$\frac{\partial W(y, \lambda)}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial y} [k_1 W(y, \lambda)] - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} [k_2 W(y, \lambda)] = 0 \quad (21)$$

при граничных условиях $W(y = 0, \lambda) = W(y = \infty, \lambda) = 0$ и начальном условии

$$W(y, \lambda)|_{\lambda=\Lambda_1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Lambda_1}} \exp\left[-\frac{(y-h+\Lambda_1/2)^2}{2\Lambda_1}\right].$$

Применяя метод отражения с переменной знака [8], находим решение уравнения (21) с коэффициентами (19) отдельно для случаев $\lambda \in [\Lambda_1, \lambda_0]$ и $\lambda \in [\lambda_0, \Lambda_2]$. Подставляя найденные решения в формулу (20), получаем выражение для вероятности пропуска сигнала в виде

$$\begin{aligned} \beta = & \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda_0}} \int_0^{\infty} \exp\left[-\frac{(\xi + \lambda_0/2)^2 + h^2 - h\lambda_0}{2\lambda_0}\right] \left[\Phi\left(\frac{\sqrt{\Lambda_2 - \lambda_0}}{2} + \frac{\xi}{\sqrt{\Lambda_2 - \lambda_0}}\right) - \right. \\ & \left. - \exp(-\xi) \Phi\left(\frac{\sqrt{\Lambda_2 - \lambda_0}}{2} - \frac{\xi}{\sqrt{\Lambda_2 - \lambda_0}}\right) \right] \left\{ \Phi\left(h\sqrt{\frac{\lambda_0 - \Lambda_1}{\lambda_0\Lambda_1}} + \xi\sqrt{\frac{\Lambda_1}{\lambda_0(\lambda_0 - \Lambda_1)}}\right) \times \right. \end{aligned}$$

$$\times \exp\left(\frac{h\xi}{\lambda_0}\right) - \Phi\left(h\sqrt{\frac{\lambda_0 - \Lambda_1}{\lambda_0\Lambda_1}} - \xi\sqrt{\frac{\Lambda_1}{\lambda_0(\lambda_0 - \Lambda_1)}}\right) \exp\left(-\frac{h\xi}{\lambda_0}\right) \} d\xi. \quad (22)$$

Последнее выражение совпадает с выражением для вероятности пропуска сигнала, найденном в [3] для алгоритма обнаружения сигнала с неизвестной длительностью и априори известной амплитудой. Следовательно, при больших отношениях сигнал/шум вероятность пропуска инвариантна к отсутствию априорной информации об амплитуде сигнала.

В качестве примера конкретизируем полученные выражения для прямоугольного импульса со скошенной вершиной. Функцию, описывающую форму импульса, запишем в виде

$$f(t) = (1 + bt/T_2) / \sqrt{1 + b + b^2/3}. \quad (23)$$

Параметр b характеризует наклон скошенной вершины. Множитель $(1 + b + b^2/3)^{-1/2}$ введён для того, чтобы энергия нормированного сигнала максимальной длительности

$$E = \int_0^{T_2} f^2(t) dt = \int_0^{T_2} \frac{(1 + bt/T_2)^2}{1 + b + b^2/3} dt = T_2$$

не зависела от наклона вершины импульса, что даёт возможность сравнивать эффективность обнаружения сигналов с разным наклоном вершины, но одинаковой энергией.

Вычислим функцию (7) примирительно к сигналу (23):

$$q(\tau) = \lambda = \frac{2a_0^2\tau}{N_0} \frac{1 + b\tau/T_2 + b^2\tau^2/(3T_2^2)}{1 + b + b^2/3}.$$

Введём нормированную длительность $\eta = \tau/T_2$, $\eta \in [1/\kappa, 1]$, где $\kappa = T_2/T_1$ — динамический диапазон возможных значений длительности. Находим далее параметры

$$\Lambda_1 = q(T_1) = \frac{z_r^2}{k} \frac{1 + b/k + b^2/(3k^2)}{1 + b + b^2/3}, \quad \lambda_0 = q(\tau_0) = z_0^2 = z_r^2\eta_0 \frac{1 + b\eta_0 + b^2\eta_0^2/3}{1 + b + b^2/3},$$

$$\Lambda_2 = q(T_2) = z_r^2.$$

Здесь обозначено $\eta_0 = \tau_0/T_2$, $z_r^2 = 2a_0^2T_2/N_0$ — максимально возможное отношение сигнал/шум для обнаруживаемого сигнала.

На рис. 2 и 3 показаны зависимости вероятности ложной тревоги (13) от порога h для сигнала (23) при $\kappa = 2$ и $\kappa = 10$ соответственно. Сплошные кривые соответствуют убывающему импульсу с наклоном ($b = -1$), штриховые — прямоугольному ($b = 0$), штрихпунктирные — возрастающему импульсу ($b = 1$). На рис. 4 изображены зависимости вероятности пропуска сигнала (22) от отношения сигнал/шум z_r при заданных уровнях вероятности ложной тревоги $\alpha = 10^{-2}$ (кривые 1) и $\alpha = 10^{-3}$ (кривые 2). При расчёте вероятности пропуска предполагалось $\kappa = 10$, а истинная длительность сигнала была выбрана в середине априорного интервала

$$\tau_0 = (T_1 + T_2)/2, \quad \eta_0 = (1 + 1/\kappa)/2 = (\kappa + 1)/(2\kappa).$$

Порог h находился из критерия Неймана—Пирсона [7]. Сплошные линии на рис. 4 соответствуют убывающему импульсу с наклоном ($b = -1$), штриховые — прямоугольному ($b = 0$), штрихпунктирные — возрастающему импульсу ($b = 1$). Как видно из рис. 2–4, наименьшими вероятностями ложной тревоги и пропуска сигнала обладает импульс с убывающей вершиной. С ростом

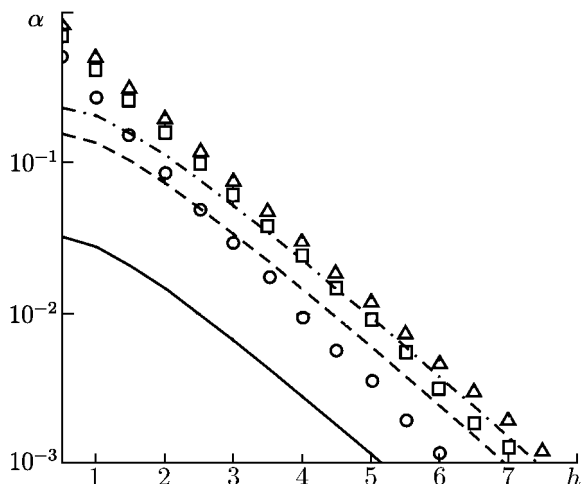


Рис. 2

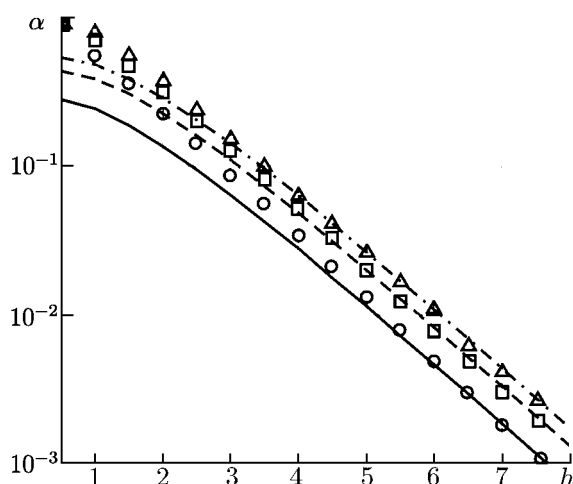


Рис. 3

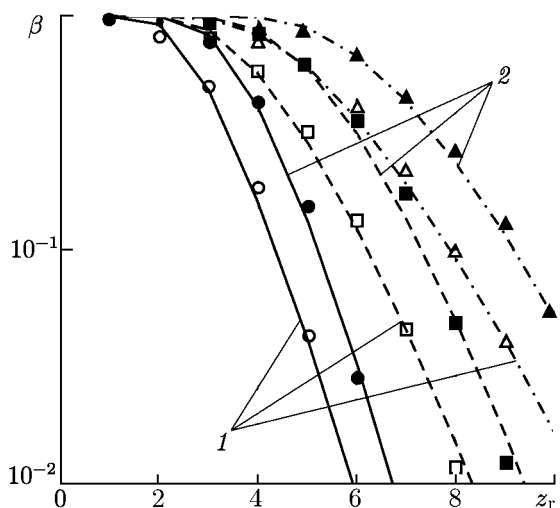


Рис. 4

параметра наклона b вероятности ошибок обнаружения увеличиваются. Наклон импульса в большей степени влияет на качество обнаружения при малом динамическом диапазоне κ .

Влияние априорного незнания амплитуды на эффективность обнаружения можно количественно охарактеризовать величиной

$$\chi = \beta(h', z_r) / \beta(h'', z_r), \tag{24}$$

представляющей собой отношение вероятности пропуска сигнала с неизвестными длительностью и амплитудой к вероятности пропуска сигнала с неизвестной длительностью и априори известной амплитудой. В (24) h' — порог, найденный из решения уравнения $\alpha(h') = p$, а h'' — из решения уравнения $\alpha_0(h'', z_r) = p$. Величина $\beta(h, z_r)$ определяется выражением (22), $\alpha(h, z_r)$ — выражением (13), а

$$\alpha_0(h, z_r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Lambda_1}} \int_0^\infty \exp\left[-\frac{(\xi - c - \Lambda_1/2)^2}{2\Lambda_1}\right] \left\{ \Phi\left(\frac{\sqrt{\Lambda_2 - \Lambda_1}}{2} + \frac{\xi}{\sqrt{\Lambda_2 - \Lambda_1}}\right) - \exp(-\xi) \Phi\left(\frac{\sqrt{\Lambda_2 - \Lambda_1}}{2} - \frac{\xi}{\sqrt{\Lambda_2 - \Lambda_1}}\right) \right\} d\xi$$

— вероятность ложной тревоги при обнаружении сигнала с известной амплитудой и неизвестной длительностью, заимствованная из [3], p — заранее заданный согласно критерию Неймана—Пирсона уровень ложной тревоги.

На рис. 5 показаны зависимости проигрыша (24) в эффективности обнаружения сигнала (23) вследствие незнания его амплитуды от ОСШ z_r при $\kappa = 10$. Сплошными линиями построены

графики для убывающего импульса с наклоном вершины $b = -1$, штрихпунктирными — для возрастающего импульса с наклоном $b = 1$. Кривые 1 соответствуют вероятности ложной тревоги $p = 10^{-2}$, кривые 2 — вероятности $p = 10^{-3}$. Как видно из рисунков, проигрыш в эффективности обнаружения из-за незнания амплитуды сигнала может быть достаточно большим и растёт с уменьшением величины скачка заднего фронта сигнала.

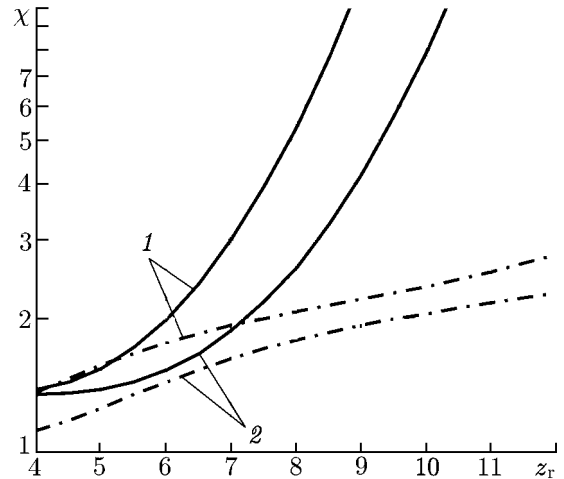


Рис. 5

3. РЕЗУЛЬТАТЫ СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

С целью проверки работоспособности синтезированного алгоритма обнаружения, а также с целью определения границ применимости найденных асимптотических выражений для вероятностей ошибок, было выполнено статистическое численное моделирование максимально правдоподобного алгоритма обнаружения прямоугольного импульса со скошенной вершиной (23). Логарифм ФОП (5) представлялся в виде

$$L_i(\eta) = \frac{[z_r i S(\eta, \eta_0) + N(\eta)]^2}{2(1 + b\eta + b^2\eta^2/3)},$$

$$S(\eta, \eta_0) = \min(\eta, \eta_0) [1 + b \min(\eta, \eta_0) + b^2 \min(\eta, \eta_0)^2/3] / \sqrt{1 + b + b^2/3},$$

$$N(\eta) = \sqrt{\frac{T_2}{N_0}} \int_0^\eta n(T_2 x) (1 + bx) dx,$$

где $\eta = \tau/T_2$, $i = 0$ соответствует отсутствию сигнала в принятой реализации, а $i = 1$ — наличию сигнала. При моделировании с шагом $\Delta\eta = 10^{-6}$ вырабатывались отсчёты функции $N(\eta)$, на основе которых реализация логарифма ФОП аппроксимировалась ступенчатой функцией с максимальной относительной среднеквадратической погрешностью $\varepsilon = 0,1$. Соответственно, дискретные отсчёты логарифма ФОП представлялись в виде

$$L_i(n \Delta\eta) = \frac{[z_r i S(n \Delta\eta, n_0 \Delta\eta) + \sqrt{\Delta\eta/2} \sum_{k=1}^n (1 + bk \Delta\eta) x_k]^2}{2[1 + bn \Delta\eta + b^2 n^2 (\Delta\eta)^2/3]}, \quad (25)$$

где x_k — гауссовские статистически независимые случайные величины с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией, $n = n_1, n_1 + 1, \dots, n_2$; $n_1 = 1/(\kappa \Delta\eta)$, $n_2 = 1/\Delta\eta$, $n_0 = \eta_0/\Delta\eta$.

Для моделирования максимально правдоподобного алгоритма обнаружения на основе отсчётов (25) вырабатывались величины

$$L_i = \max_n L_i(n \Delta\eta)$$

и сравнивались с порогом. Если при $i = 0$ порог был превышен, то фиксировалась ложная тревога. Аналогично, если порог не был превышен при $i = 1$, то фиксировалась ошибка пропуска сигнала. В качестве оценок вероятностей ложной тревоги и пропуска использовались относительные частоты появления соответствующих ошибок. В процессе моделирования было реализовано 10^5 циклов испытаний для каждого z_r . Следовательно, с вероятностью 0,9 границы доверительных интервалов отклоняются от экспериментальных значений вероятностей ложной тревоги и пропуска сигнала не более чем на 15% при $\{\alpha, \beta\} > 10^{-3}$.

Результаты моделирования приведены на рис. 2–4. На рис. 2 и 3 кружками (для $b = -1$), квадратами (для $b = 0$) и треугольниками (для $b = 1$) нанесены экспериментальные значения вероятности ложной тревоги. Как видно из рисунков, точность асимптотического выражения (13) для вероятности ложной тревоги возрастает с ростом динамического диапазона изменения неизвестной длительности κ . Выражение (13) удовлетворительно описывает экспериментальные данные при $\kappa \geq 10$.

На рис. 4 кружками (для $b = -1$), квадратами (для $b = 0$) и треугольниками (для $b = 1$) нанесены экспериментальные значения вероятности пропуска сигнала при $\kappa = 10$. Порог при моделировании вычислялся из заданного уровня вероятности ложной тревоги $\alpha(h) = p$ с использованием асимптотического выражения (13). Заштрихованные фигуры соответствуют $p = 10^{-3}$, полые — вероятности $p = 10^{-2}$. Из рисунков видно, что асимптотические выражения для вероятности пропуска сигнала удовлетворительно описывают экспериментальные данные.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Априорное незнание амплитуды сигнала произвольной формы с неизвестной длительностью приводит к усложнению структуры обнаружителя. Показано, что форма сигнала может оказывать существенное влияние на эффективность обнаружения. Проигрыш в эффективности обнаружения вследствие априорного незнания амплитуды может быть значительным и возрастает с уменьшением величины скачка заднего фронта сигнала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Трифонов А. П. // Радиотехника и электроника. 1977. Т. 22, № 1. С. 90.
2. Трифонов А. П., Шинаков Ю. С. Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. М.: Радио и связь, 1986.
3. Трифонов А. П., Корчагин Ю. Э. // Изв. вузов. Радиофизика. 2002. Т. 45, № 7. С. 625.
4. Мальцев А. А., Силаев А. М. // Радиотехника и электроника. 1987. Т. 32, № 6. С. 1241.
5. Трифонов А. П., Бутейко В. К. // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1981. Т. 27, № 8. С. 28.
6. Тихонов В. И. Оптимальный приём сигналов. М.: Радио и связь, 1983.
7. Теория обнаружения сигналов. М.: Радио и связь, 1984.
8. Тихонов В. И., Миронов М. А. Марковские процессы. М.: Радио и связь, 1977.
9. Сосулин Ю. Г. Теория обнаружения и оценивания стохастических сигналов. М.: Сов. радио, 1978.

Поступила в редакцию 6 декабря 2010 г.; принята в печать 30 мая 2011 г.

DETECTION OF SIGNAL WITH UNKNOWN AMPLITUDE AND DURATION

A. P. Trifonov, Yu. E. Korchagin, and P. A. Kondratovich

Maximum likelihood algorithm for detecting an arbitrary-shaped signal with unknown amplitude and duration, which was observed against a background of additive Gaussian white noise, has been synthesized. The synthesized algorithm is analyzed on the assumption of sufficiently large signal-to-noise ratios. Asymptotically accurate expressions for the detection-error probabilities are found. The synthesized algorithm efficiency is estimated by numerical simulation and the applicability range of asymptotic expressions is determined.