УДК 534.222

ФОКУСИРОВКА АКУСТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ В СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОМ ВОЛНОВОДЕ МЕТОДОМ ОБРАЩЕНИЯ ВРЕМЕНИ

А. Л. Вировлянский, А. Ю. Казарова, Л. Я. Любавин

Институт прикладной физики РАН, г. Нижний Новгород, Россия

Выполнен теоретический анализ метода фокусировки поля в случайно-неоднородном волноводе путём переизлучения принятого сигнала с обращением течения времени. Рассматривается простейшая ситуация, когда для излучения и приёма используются точечные источники и приёмники. В качестве примера выбран волновод, моделирующий подводный звуковой канал с флуктуациями показателя преломления, вызванными случайными внутренними волнами. В подводной акустике обсуждаемый метод фокусировки поля обычно применяется на относительно коротких дистанциях, меньше или порядка 10 км. В данной работе речь идёт о гораздо более длинных трассах, на которых звуковые волны распространяются в условиях развитого лучевого и волнового хаоса. Основное внимание уделено исследованию ширины фокального пятна и амплитуды поля в его центре. Показано, что распределение амплитуды в вертикальном сечении фокального пятна и пиковое значение амплитуды в его центре можно оценить аналитически с использованием стохастической лучевой теории.

ВВЕДЕНИЕ

Известный метод фокусировки волнового поля в окрестности заданной точки среды основан на переизлучении в обратном направлении сигнала, принятого из этой точки, с изменением знака времени [1–3]. Он не требует знания детальной информации о таких характеристиках среды, как форма границ, распределение показателя преломления и др. Наличие случайных неоднородностей не ухудшает качества фокусировки, а приводит к уменьшению фокального пятна. Размер последнего в случайно-неоднородной среде может быть существенно меньше размера пятна, созданного с помощью той же самой приёмно-излучающей антенны в однородном пространстве. Этот эффект иногда называют сверхразрешением и говорят, что наличие случайных неоднородностей позволяет преодолеть дифракционный предел для минимального размера фокального пятна [4].

Количественное описание влияния случайных неоднородностей требует применения методов теории распространения волн в случайных средах. Распределение амплитуды поля внутри фокального пятна выражается через функцию когерентности поля, расчёт которой является одной из классических задач данной теории. Эта задача решается в статистически однородной среде с использованием марковского приближения [5, 6]. Обобщение этого результата на случай нерегулярного волновода требует введения дополнительных приближений и существенного усложнения выкладок [4, 7]. Главной трудностью при этом является учёт совместного влияния детерминированной и стохастической многолучёвости.

Однако данная задача может иметь неожиданно простое решение. Далее на конкретном примере показано, что приближённая аналитическая оценка функции когерентности, полученная в рамках лучевого подхода, неплохо описывает распределение амплитуды поля внутри фокального пятна даже в условиях развитого лучевого и волнового хаоса. Рассматриваемый пример взят из акустики океана, в которой теоретическому и экспериментальному изучению фокусировки поля методом обращения времени уделяется значительное внимание [2–4, 7–11]. В большинстве работ по этой тематике изучается применение данного метода в подводных звуковых каналах на относительно коротких дистанциях, меньше или порядка 10 км. На таких расстояниях влияние флуктуаций скорости звука ещё не очень велико. В данной работе мы обсуждаем применение указанного метода на гораздо более длинных трассах, на которых распространение звуковых волн происходит в условиях развитого лучевого и волнового хаоса [12, 13]. В ней рассматривается простейшая ситуация, когда для приёма пробного импульса и его переизлучения с обращением времени используется всего один точечный приёмно-излучающий элемент. Аналитические оценки для описания распределения амплитуды поля внутри фокального пятна получены на основе стохастической лучевой теории, развитой в работах [14–16]. Предсказания теории сопоставлены с результатами численного моделирования фокусировки поля в отдельных реализациях случайно-неоднородного подводного звукового канала.

1. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Пренебрегая горизонтальной рефракцией волн, рассмотрим двумерную модель подводного звукового канала в глубоком море. В приближении замороженных неоднородностей поле скорости звука представим в виде $c(r,z) = \bar{c}(z) + \delta c(r,z)$, где r — дистанция, z — глубина, $\bar{c}(z)$ — невозмущённый профиль скорости звука, а $\delta c(r,z)$ — слабое возмущение, вызванное случайными внутренними волнами. Полагаем, что статистика последних задаётся эмпирическим спектром Гарретта—Манка [16–18].

Комплексная амплитуда поля монохроматического точечного источника, расположенного в точке с координатами $r = 0$ и $z = z_0$ и излучающего сигнал, в комплексном представлении пропорциональный $\exp(-i\Omega t)$, является решением уравнения Гельмгольца

$$\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\,r\,\frac{\partial G}{\partial r} + \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} + \frac{\Omega^2}{c^2(r,z)}\,G = -2\,\frac{\delta(r)}{r}\,\delta(z - z_0). \tag{1}$$

Если источник излучает звуковой импульс

$$w(t) = \int \mathrm{d}\Omega\,\tilde{w}(\Omega)\exp(-i\Omega t), \tag{2}$$

то возбуждаемое поле может быть синтезировано из решений уравнения (1) для разных частот Ω по формуле

$$u(r,z,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\Omega\, G(r,z,\Omega)\tilde{w}(\Omega)\exp(-i\Omega t). \tag{3}$$

Фокусировка поля методом обращения времени в заданной точке с координатами r, $\bar{z}$ выполняется в два этапа. Вначале из данной точки следует излучить пробный импульс $w(t)$, который должен быть зарегистрирован в точке расположения нашего приёмно-излучающего элемента $(0, z_0)$. По теореме взаимности регистрируемый сигнал может быть выражен с помощью формулы (3). Он равен $u(r,\bar{z},t)$. Следующий шаг заключается в переизлучении этого сигнала с изменением знака времени. Это значит, что источник должен излучить звуковой импульс $w_1(t) = u(r,\bar{z},T-t)$, где T — некоторое время задержки. Пользуясь ещё раз формулой (3), находим, что возбуждённое таким образом поле равно [4, 7]

$$u_1(r,z,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\Omega\, G(r,z,\Omega)G^*(r,\bar{z},\Omega)\tilde{w}^*(\Omega)\exp[i\Omega\,(T - t)], \tag{4}$$

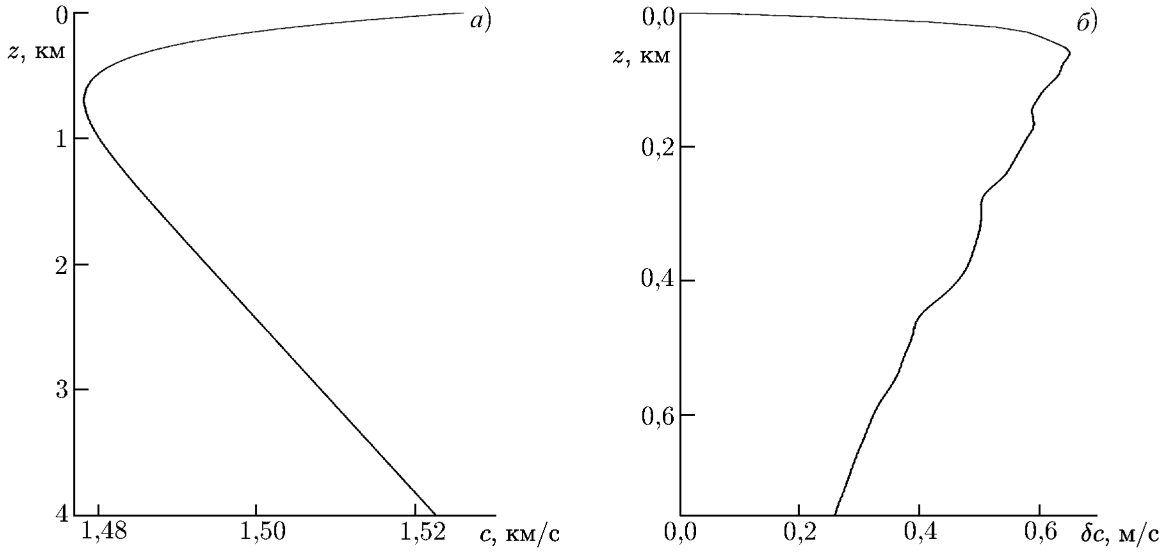

Рис. 1. Невозмущённый профиль скорости звука $\bar{c}(z)$ (a) и зависимость от глубины среднеквадратичных флуктуаций скорости звука δc ($б$)

где символ $*$ означает комплексное сопряжение. Для простоты далее будем считать, что $T = 0$. Максимального значения по координате z и времени амплитуда сигнала u_1 достигает при $z = \bar{z}$, т. е. в выбранной точке фокусировки, в момент времени $t = 0$.

Проиллюстрируем эффект фокусировки на конкретном примере. Рассмотрим волновод с профилем скорости звука $\bar{c}(z)$, показанном на рис. 1a. Для описания возмущения воспользуемся методом, предложенным в работе [18]. Он позволяет моделировать отдельные реализации возмущения $\delta c(r, z)$, вызванного случайными внутренними волнами. Более подробное описание используемой нами статистической модели глубоководного подводного звукового канала приведено в работах [14–16]. На рис. 1$б$ показана зависимость от глубины среднеквадратичного разброса δc. Среднее значение δc на всех глубинах равно нулю. Расчёты функций Грина уравнения Гельмгольца $G(r, z, \Omega)$ выполним в параболическом приближении. Дело в том, что на рассматриваемых нами длинных трассах «выживают» только волны с малыми углами скольжения, которые захватываются подводным звуковым каналом и распространяются без отражения от сильно поглощающего дна. Поэтому функцию Грина можно представить в виде

$$G(r, z, \Omega) = r^{-1/2} g(r, z, \Omega) \exp(ikr), \tag{5}$$

где $k = \Omega / c_0$, c_0 — значение скорости звука, удовлетворяющее условию $|c(z) - c_0| \ll c_0$, а $g(r, z, \Omega)$ — плавная огибающая. Последняя является решением параболического уравнения [19–21]

$$2ik \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} - 2k^2 \left[U(z) + V(r, z)\right] g = 2ik\delta(z - z_0), \tag{6}$$

где

$$U(z) = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{c_0^2}{\bar{c}^2(z)}\right], \qquad V(r, z) = \frac{\delta c(r, z)}{c_0}\,. \tag{7}$$

Переход от уравнения Гельмгольца (1) к параболическому уравнению (6) кардинально упрощает численное моделирование. Для решения (6) мы пользуемся модифицированным вариантом программы MMPE [22], исходный вариант которой ориентирован на решение широкоугольного параболического уравнения [21]. Все приведённые ниже расчёты выполнены для ситуации, когда

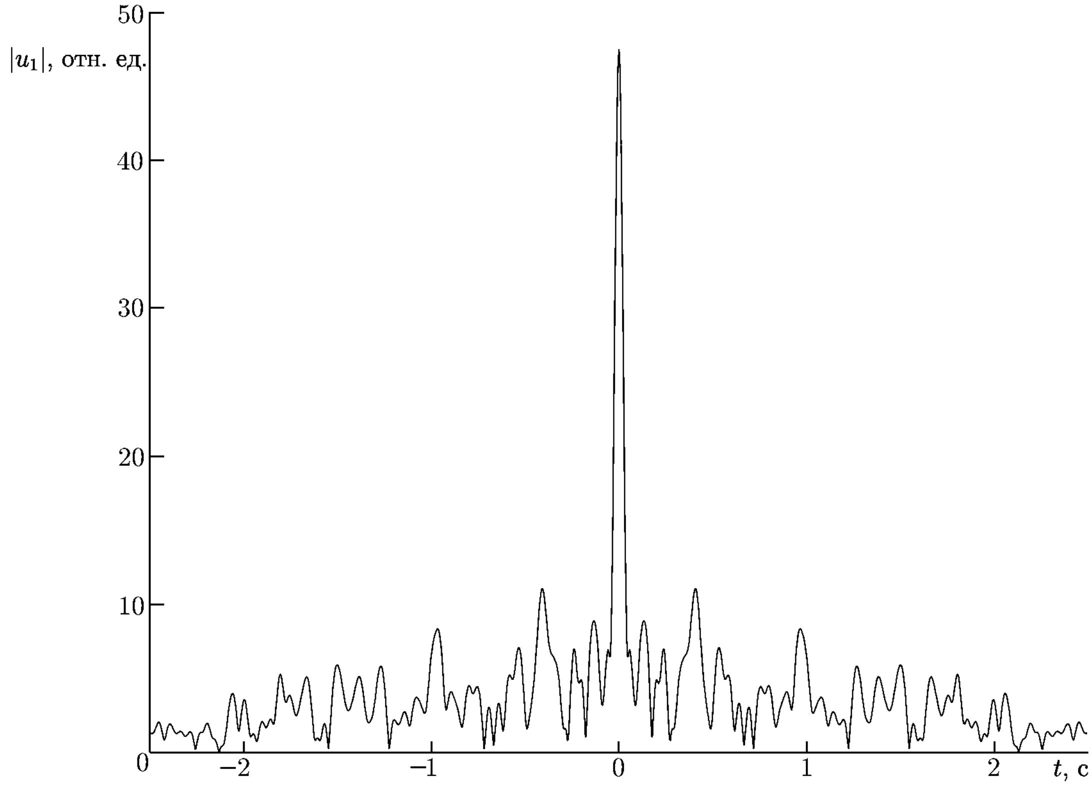

Рис. 2. Звуковой импульс в точке наблюдения с координатами $r = 1\,000$ км и $\bar{z} = 1{,}5$ км, сфокусированный методом обращения времени

приёмно-излучающий элемент расположен на глубине $z_0 = 0{,}7$ км, а пробный импульс имеет форму

$$w(t) = \exp\left(-\frac{\pi t^2}{2T_0^2} - i\Omega_0 t\right). \tag{8}$$

На рис. 2 показан сигнал $|u_1(r, \bar{z}, t)|$ в точке фокусировки с координатами $r = 1\,000$ км и $\bar{z} = 1{,}5$ км. Расчёт выполнен для пробного импульса с эффективной длительностью $T_0 = 0{,}033$ с и с центральной частотой $f_0 = \Omega_0/(2\pi) = 400$ Гц. Как и должно быть, сигнал в точке фокусировки имеет ярко выраженный максимум при $t = 0$.

На рис. 3 показана функция $|u_1(r, z, 0)|$ при $r = 1\,000$ км, т. е. амплитуда поля в момент времени $t = 0$ в вертикальном сечении волновода на данной дистанции наблюдения. Отмеченный стрелкой максимум на глубине $\bar{z}$ представляет собой вертикальное сечение фокального пятна. Нашей целью является определение формы этого пика и оценка его максимального значения. Для решения этой задачи воспользуемся лучевым подходом.

2. ОБРАЩЕНИЕ ВРЕМЕНИ В ПРИБЛИЖЕНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ

В приближении геометрической оптики поле в любой точке подводного звукового канала представляет собой суперпозицию сигналов, пришедших по различным лучевым траекториям. В рамках гамильтонова формализма траектория в каждой точке дистанции задаётся своей координатой z и обобщённым импульсом, или, для краткости, просто импульсом $p = \operatorname{tg}\chi$, где χ —

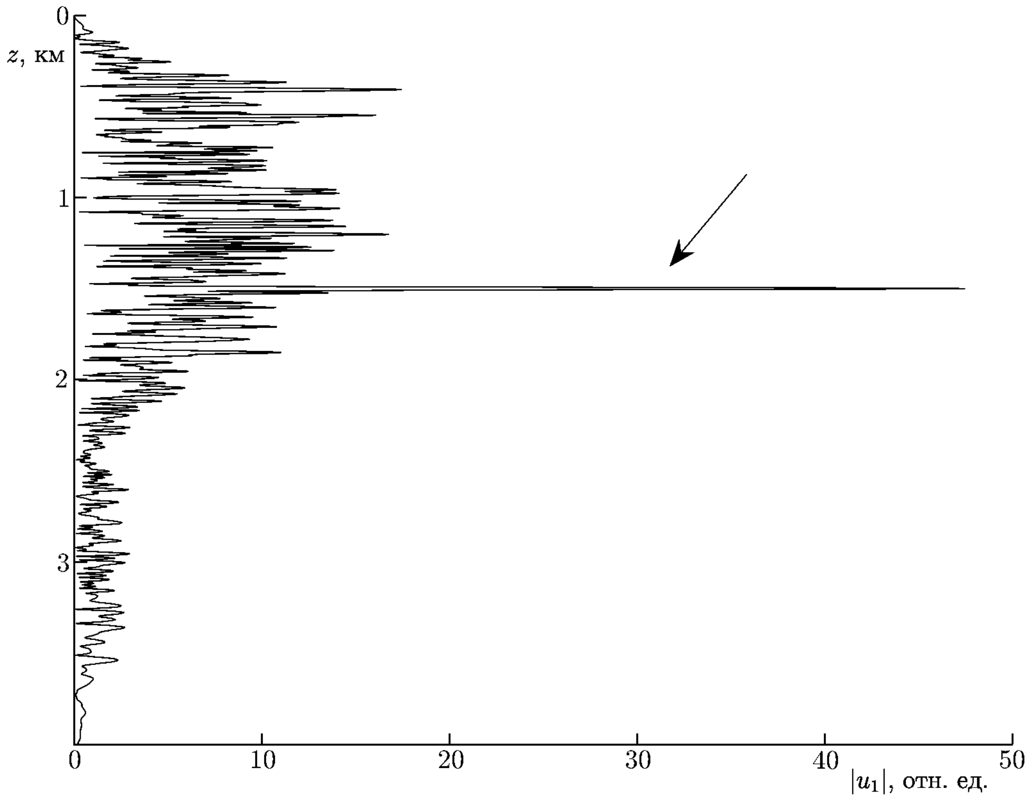

Рис. 3. Вертикальное сечение распределения поля на дистанции наблюдения $r = 1\,000$ км. Стрелкой показан пик, представляющий собой вертикальное сечение фокального пятна

угол скольжения луча [14–16]. Выражение для функции $g(r, z, \Omega)$, фигурирующей в формуле (5), имеет вид

$$g(r, z, \Omega) = \sum_{\nu} A_\nu \exp(i\Omega S_\nu / c_0), \tag{9}$$

где индекс ν нумерует лучи, попадающие в точку с координатами r, z, а $S_\nu(r, z)$ и $A_\nu(r, z)$ — соответственно эйконал и амплитуда ν-го луча. Явное выражение для амплитуды луча в малоугловом приближении имеет вид [14–16]

$$A_\nu = \sqrt{\frac{k_0}{2\pi \left|\partial z / \partial p_0\right|_{p_0 = p_{0,\nu}}}}\,, \tag{10}$$

где $k_0 = \Omega_0 / c_0$, p_0 — начальный импульс луча. Подставляя (9) и (10) в (4), получаем

$$u_1(r, z, t) = \sum_{\nu, \nu'} A_\nu A_{\nu'} w[t - S_\nu(r, z)/c_0 + S_{\nu'}(r, \bar{z})/c_0]\,. \tag{11}$$

На достаточно длинной трассе, например на дистанции $r = 1\,000$ км в рассмотренном выше примере, лучевой хаос уже хорошо развит и общее количество лучей, попадающих в точку с координатами r, z велико, а их фазы независимы [13]. Поэтому при $t = 0$ и $z = \bar{z}$ в (11) естественно ограничиться учётом только слагаемых с $\nu = \nu'$, которые имеют одинаковые фазы. Аналогично поступим и в точках с координатами z, близкими к $\bar{z}$. Пользуясь известной формулой $\partial S / \partial z = p$ [23], фигурирующую в правой части (11) разность эйконалов для z, близких к $\bar{z}$, представим в виде $S_\nu(r,z) - S_\nu(r,\bar{z}) \approx p_\nu\,(z-\bar{z})$, где p_ν — импульс ν-го луча. Эта формула выражает тот факт, что приход луча в точку наблюдения фактически означает приход квазиплоской волны, а $\chi_\nu = \operatorname{arctg} p_\nu$ — угол скольжения этой волны на глубинах, близких к $\bar{z}$.

Сохраняя в сумме (11) лишь слагаемые с $\nu = \nu'$, получаем

$$u_1(r,z,0) = \sum_\nu A_\nu^2 \exp\left[-\frac{p_\nu^2\,(z-\bar{z})^2}{2T_0^2 c_0^2} - ik_0 p_\nu\,(z-\bar{z})^2\right]. \tag{12}$$

Как уже говорилось, на длинных трассах «выживают» только лучи, захваченные подводным звуковым каналом. Углы их скольжения не превышают некоторого максимального значения $\chi_{\max}$, которому отвечает импульс $p_{\max} = \operatorname{tg}\chi_{\max}$. Для координат z, удовлетворяющих условию

$$|z-\bar{z}| \ll T_0 c_0/p_{\max}, \tag{13}$$

первым слагаемым в показателе экспоненты в правой части (12) можно пренебречь.

В условиях развитого хаоса количество лучей, попадающих в точку наблюдения, экспоненциально растёт с дистанцией. Поэтому на длинных трассах количество слагаемых в сумме (12) становится очень большим. Наше предположение заключается в том, что суммирование по ν можно интерпретировать как статистическое усреднение. Длина трассы многократно превышает масштабы корреляции случайного поля δc вдоль координаты r, которые меняются от единиц до десятков километров, и поэтому в силу центральной предельной теоремы импульс p_ν можно моделировать гауссовой случайной величиной. Среднеквадратичный разброс импульсов лучей σ_p определим соотношением

$$\sigma_p^2 = \left\langle p_\nu^2 - \langle p_\nu\rangle^2 \right\rangle, \tag{14}$$

где скобки означают усреднение по всем лучам, попадающим в точку наблюдения.

Полагая, что амплитуда A_ν и импульс p_ν луча статистически независимы, из гауссового распределения импульса p_ν получаем $u_1(r,z,0) = V v(z)$, где

$$v(z) = \exp\left[-\frac{k_0^2\sigma_p^2\,(z-\bar{z})^2}{2}\right], \tag{15}$$

а V — не зависящий от z амплитудный множитель. Следует заметить, что при получении (15) не проводилось усреднение по ансамблю случайных неоднородностей среды. Предполагается, что величина σ_p примерно одинакова для разных реализаций возмущения δc. Отметим, что формула (15) применима не только в волноводе, но и в любой неоднородной среде с флуктуациями показателя преломления, вызывающими стохастическую многолучёвость. Она, в частности, справедлива в статистически однородной среде. В пределе малых длин волн она следует из общеизвестного выражения для функции когерентности, полученного в марковском приближении [5, 6].

Численный расчёт параметров лучей, попадающих в заданную точку волновода, в условиях развитого хаоса невозможен из-за экспоненциальной неустойчивости лучевых траекторий. При оценке σ_p мы полагали, что статистические характеристики траекторий, попадающих в близкие точки вертикального сечения, примерно одинаковы. Для отдельной реализации возмущения $\delta c(r,z)$ рассчитывался веер из 300 000 лучей, выходящих из точки с координатами 0, z_0 с начальными импульсами p_0, равномерно заполняющими интервал от $-p_{\max}$ до $p_{\max}$, отвечающий $\chi_{\max} = 14^\circ$. Были отобраны лучи, глубины которых на дистанции наблюдения $r = 1\,000$ км попадали в интервал $\bar{z} \pm \delta z$ с $\delta z = 0{,}05$ км. Оценка σ_p выполнялась по формуле (14) с величинами p_ν, представляющими импульсы этих лучей. Численное моделирование подтвердило наше предположение о том, что σ_p слабо зависит от конкретной реализации возмущения $\delta c(r,z)$. В следующем

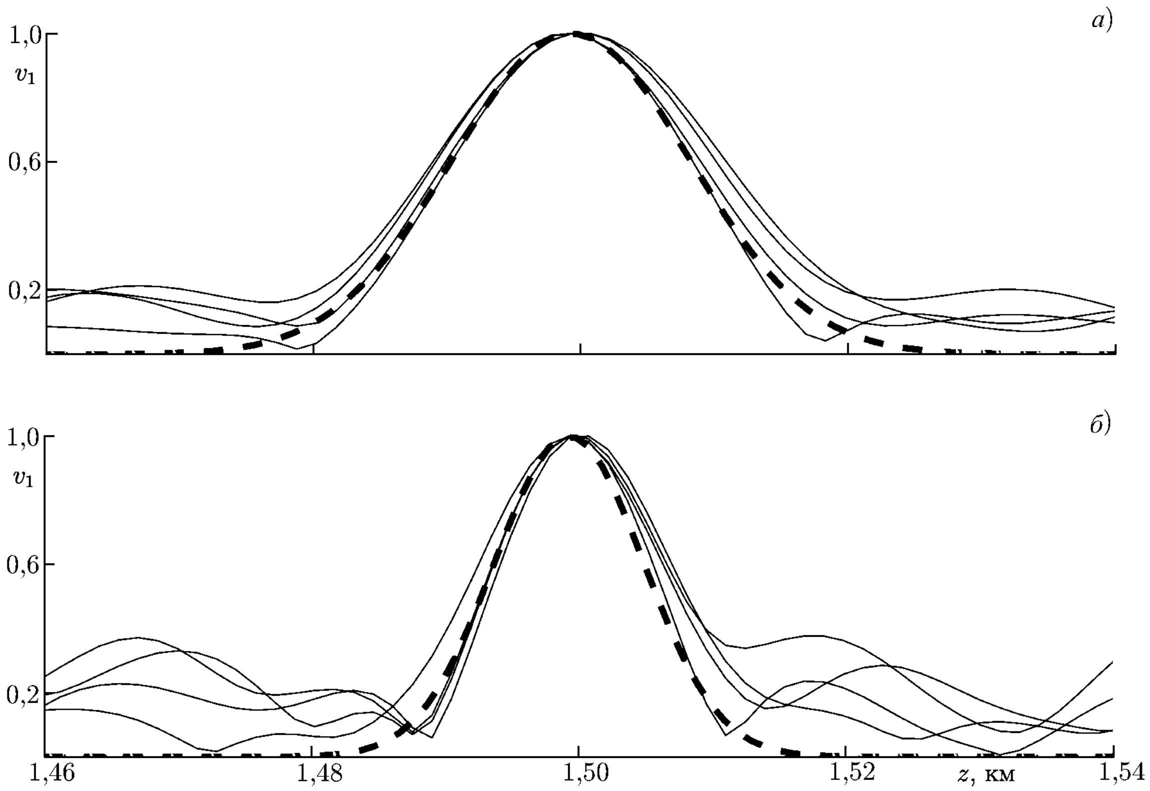

Рис. 4. Нормированные зависимости амплитуды поля от глубины в вертикальном сечении фокального пятна для четырёх реализаций случайного возмущения (сплошные линии). Пунктирная кривая представляет теоретическую оценку. Расчёты выполнены для звуковых импульсов с центральными частотами 250 Гц (*а*) и 400 Гц (*б*)

разделе показано, что альтернативную оценку σ_p можно получить, пользуясь стохастической лучевой теорией, развитой в работах [14–16]. Оба подхода дают близкие результаты. В частности, для выбранной точки наблюдения получаем $\sigma_p \approx 0{,}1$. Пунктирные линии на рис. 4 показывают функции $v(z)$ с данным σ_p для центральных частот $f_0 = 250$ Гц (*а*) и 400 Гц (*б*). Сплошные кривые на этом рисунке изображают функции $v_1(z) = |u_1(r,z,0)/u_1(r,\bar{z},0)|$ при $r = 1\,000$ км для z, близких к $\bar{z}$, вычисленные для четырёх реализаций случайного поля $\delta c(r,z)$. Расчёт выполнен для пробного импульса (8) с $T_0 = 0{,}033$ с и $f_0 = 250$ Гц (*а*) и 400 Гц (*б*). Как видим, функция (15) хорошо аппроксимирует зависимость амплитуды поля, нормированной на своё максимальное значение, от глубины в вертикальном сечении фокального пятна.

Обратимся к оценке амплитудного множителя V, равного пиковому значению амплитуды поля в центре фокального пятна. Согласно (12)

$$V = \sum_{\nu} A_{\nu}^2 = \frac{k_0}{2\pi} \sum_{\nu} \frac{1}{|\partial z/\partial p_0|_{p_0=p_{0,\nu}}} = \frac{k_0}{2\pi} \int \mathrm{d}p_0\, \delta[z - z(r,p_0,z_0)]. \tag{16}$$

В последнем равенстве мы воспользовались известным свойством дельта-функции. В обсуждаемом здесь приближении V представляет собой некогерентную сумму интенсивностей лучей. Отдельные слагаемые в сумме по ν могут обращаться в бесконечность на каустиках. В подводной акустике некогерентное суммирование лучей обычно применяется при оценке интенсивности поля, усреднённой по некоторой области волновода [21]. Рассмотрим величину V на дистанции наблюдения r, усреднённую по интервалу глубин $\bar{z} \pm \delta z$. Из последнего равенства в (16) видно,

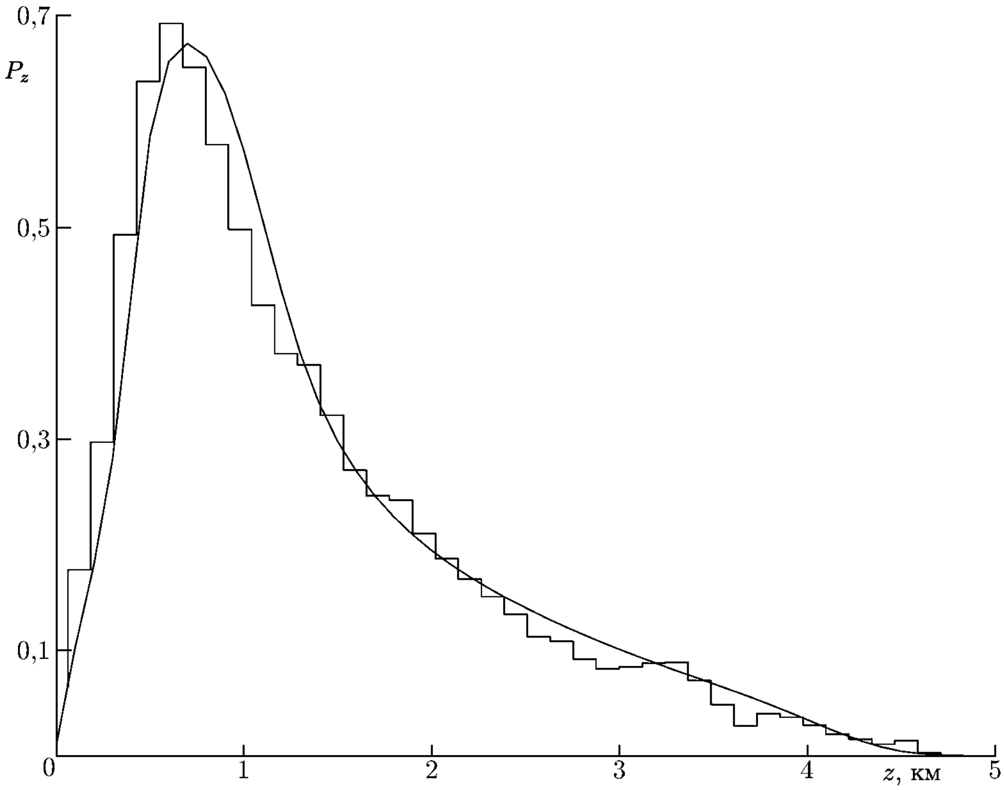

Рис. 5. Плотность вероятности координат лучей на дистанции наблюдения. Ступенчатая линия — результат прямого расчёта траекторий 300 000 лучей в отдельной реализации случайно-неоднородного подводного звукового канала. Сплошная линия — аналитическая оценка

что усреднение снимает, по крайней мере формально, проблему с каустиками. Согласно (16)

$$V_s \equiv \frac{1}{\delta z} \int\limits_{\bar{z}-\delta z}^{\bar{z}+\delta z} \mathrm{d}z\; V(z) = \frac{k_0}{2\pi}\, \frac{\delta p_0}{\delta z}\,, \tag{17}$$

где δp_0 — суммарная длительность интервалов начальных импульсов p_0, отвечающих лучам, которые на дистанции наблюдения r попадают в интервал глубин $\bar{z} \pm \delta z$. В нашем случае V_s задаёт среднее значение амплитуды в точке фокусировки при варьировании глубины этой точки в указанном интервале.

Для оценки V_s воспользуемся подходом для описания статистики хаотических лучей, развитым в работах [14–16]. В условиях развитого лучевого хаоса, т. е. на достаточно длинных трассах, величину $\delta p_0/(2p_{\max})$ можно интерпретировать как вероятность того, что луч с произвольно выбранным начальным обобщённым импульсом p_0 попадёт в интервал $\bar{z} \pm \delta z$. Символом $P_z(z)$ обозначим плотность вероятности распределения координат z лучей на дистанции наблюдения. При δz, малом по сравнению с характерным масштабом функции $P_z(r,z)$, имеет место равенство $\delta p_0/(2p_{\max}) = P_z(z)\,\delta z$. Подставляя его в (17), получаем

$$V_s = \frac{f_0}{c_0}\, p_{\max} P_z(\bar{z}). \tag{18}$$

Плотность вероятности $P_z(z)$ можно найти, пользуясь результатами расчёта веера лучевых траекторий, о котором шла речь выше. Оценку $P_z(z)$ даёт нормированная гистограмма распределения координат z этих лучей на дистанции наблюдения. Пример такой гистограммы, рассчитанной для дистанции 1 000 км, показан на рис. 5. На длинных трассах гистограмма слабо зависит от конкретной реализации неоднородностей, использованной в расчётах. В следующем разделе мы обсудим, каким образом оценка функции $P_z(z)$ может быть получена аналитически.

В табл. 1 и 2 приведены значения V_s для частот f_0, равных 250 и 400 Гц, рассчитанные на дистанциях 500, 1 000 и 1 500 км по формуле (18) с масштабом сглаживания $\delta z = 0{,}1$ км для точки фокусировки $\bar{z} = 1{,}5$ км. Там же приведены значения V_s, найденные на основе расчёта поля методом параболического уравнения для одной из реализаций возмущения $\delta c(r,z)$. Результаты вычислений, представленные в данных таблицах, подтверждают применимость оценки (18). Об этом же свидетельствуют не вошедшие в таблицы результаты вычисления V_s для других реализаций случайного возмущения, а также для других глубин $\bar{z}$ точки фокусировки.

Таблица 1. Оценка максимальной интенсивности поля в центре фокального пятна на частоте 250 Гц

r, км	V_s в численном расчёте поля, км$^{-1}$	Оценка V_s по формуле (18), км$^{-1}$
500	25	24
1 000	28	26
1 500	28	27

Таблица 2. То же на частоте 400 Гц

r, км	V_s в численном расчёте поля, км$^{-1}$	Оценка V_s по формуле (18), км$^{-1}$
500	40	34
1 000	45	39
1 500	45	39

3. АНАЛИТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ

Стохастическая лучевая теория, развитая в работах [14–16], базируется на использовании гамильтонова формализма, выраженного в переменных действие—угол I,θ [23]. Переменная действия I определяет амплитуду и период луча, а угловую переменную θ можно интерпретировать как фазу лучевой траектории.

В невозмущённом волноводе, когда $\delta c = 0$, связь между переменными I, θ и использованными выше переменными импульс—координата p, z задаётся следующим образом [14–16]. Гамильтониан $H = p^2/2 + U(z)$, сохраняющийся вдоль невозмущённой лучевой траектории, рассматривается как функция I, неявно заданная выражением

$$I = \frac{1}{\pi} \int\limits_{z_{\min}}^{z_{\max}} \mathrm{d}z\, \sqrt{2\,[H - U(z)]}\,, \tag{19}$$

где $z_{\min}$ и $z_{\max}$ — корни уравнения $U(z) = H$, т. е. горизонты поворота луча. Каноническое преобразование

$$p = p(I,\theta), \qquad z = z(I,\theta), \tag{20}$$

связывающее переменные импульс—координата p, z и действие—угол I, θ, определено соотношениями [23, 24]

$$p = \partial G/\partial z, \qquad \theta = \partial G/\partial I, \tag{21}$$

где

$$G(I,z) = \int \mathrm{d}z\ \sqrt{2\,[H(I) - U(z)]} \tag{22}$$

— производящая функция. Подробное описание производящей функции, включая выбор пределов интегрирования в (22), дано в работах [14–16].

Введённое таким образом определение переменных I, θ может быть использовано и при наличии возмущения. В работах [14–16] показано, что в моделях подводного звукового канала подобных рассматриваемой нами, угловая переменная θ быстро хаотизируется и на дистанциях порядка нескольких сотен километров её уже можно считать равномерно распределённой в интервале от 0 до 2π. При этом вариации переменной действия I хорошо аппроксимируются винеровским случайным процессом и условная плотность вероятности этой переменной на дистанции r выражается формулой

$$P_{I|I_0}(I, r \mid I_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi B(I_0) r}} \left\{ \exp\left[-\frac{(I - I_0)^2}{2B(I_0) r} \right] + \exp\left[-\frac{(I + I_0)^2}{2B(I_0) r} \right] \right\}, \tag{23}$$

где I_0 — начальное значение переменной действия луча при $r = 0$, а $B(I_0)$ — коэффициент диффузии переменной действия. При выбранной глубине источника z_0 начальная переменная действия луча I_0 является функцией угла его выхода из источника χ_0. Углам χ_0 и $-\chi_0$ отвечают одинаковые I_0. Коэффициент диффузии B при этом также является функцией угла χ_0. Вид этой функции для нашей модели волновода показан на рис. 6. Строго говоря, формула (23) получена для постоянного коэффициента диффузии B. Однако в нашем случае, когда зависимость $B(I_0)$ выражается относительно плавной функцией, выражение (23) остаётся в силе.

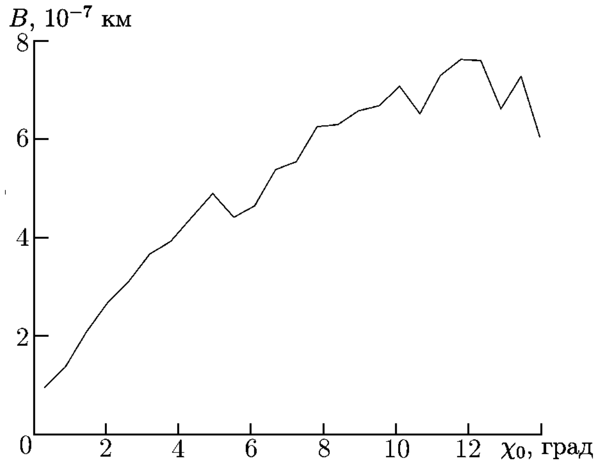

Рис. 6. Зависимость коэффициента диффузии переменной действия луча от угла его выхода из источника

Формально считая начальный импульс луча p_0 равномерно распределенным в диапазоне от $-p_{\max}$ до $p_{\max}$ и пользуясь стандартными формулами теории вероятностей, из соотношений (20) и (23) легко находим совместную плотность вероятности распределения импульсов p и координат z лучей на дистанции наблюдения r:

$$P_{pz}(r,p,z) = \frac{1}{4\pi p_{\max}} \int\limits_{-p_{\max}}^{p_{\max}} \mathrm{d}p_0\ P_{I|I_0}[I(p,z), r \mid I(p_0, z_0)]\,. \tag{24}$$

Каноническое преобразование (20), якобиан которого согласно теореме Лиувилля равен единице, здесь выступает как нелинейная замена переменных.

Условная плотность вероятности импульса для лучей, попадающих в точку фокусировки $(r, \bar{z})$, равна

$$P_{p|z}(p \mid \bar{z}) = P_{pz}(r,p,\bar{z}) \Big/ \int \mathrm{d}p\, P_{pz}(r,p,\bar{z}).$$

Пользуясь этой формулой, легко получаем оценку σ_p — среднеквадратичного разброса значений импульса луча на глубине $\bar{z}$. Найденные таким образом значения σ_p мало отличаются от оценок σ_p, полученных путём прямого численного расчёта веера лучевых траекторий, о котором шла речь в предыдущем разделе.

Интегрируя $P_{pz}(r,p,z)$ по p и полагая r равным дистанции наблюдения, находим оценку плотности вероятности распределения координаты луча $P_z(z)$, фигурирующую в (18). Полученная таким образом $P_z(z)$ на рис. 5 изображена плавной кривой.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основными результатами данной работы являются оценки (15) и (18), полученные в приближении геометрической оптики для количественного описания фокального пятна в условиях развитого лучевого и волнового хаоса. В обеих формулах фигурируют величины (это σ_p в (15) и $P_z(z)$ в (18)), которые можно найти двумя способами: либо на основе численного расчёта веера лучевых траекторий в отдельных реализациях нашего случайно-неоднородного подводного звукового канала, либо аналитически с помощью стохастической лучевой теории, развитой в работах [14–16]. Оба подхода дают близкие результаты.

Формула (15) задаёт зависимость амплитуды от глубины в вертикальном сечении фокального пятна. Сопоставление с результатами прямого расчёта поля методом параболического уравнения показывает, что эти формулы можно применять и при описании фокальных пятен в отдельных реализациях случайно-неоднородного подводного звукового канала в условиях развитого лучевого и волнового хаоса. В частном случае статистически однородной среды формула (15) может быть получена исходя из известных результатов теории распространения волн в случайных средах [5, 6]. Наше утверждение заключается в том, что эта простейшая оценка применима на столь длинных трассах, где флуктуации показателя преломления приводят к кардинальному изменению формы лучевой траектории и детерминированная многолучёвость сочетается со стохастической. Более того, оказывается, что эта оценка хорошо работает не только для амплитуды, усреднённой по ансамблю неоднородностей среды, но и в отдельных реализациях случайно-неоднородного подводного звукового канала. Предполагается, что в отдельной реализации роль усреднения по ансамблю играет усреднение по многочисленным хаотическим лучам, соединяющим источник и точку наблюдения. При этом на длинной трассе результат слабо зависит от конкретной реализации возмущения $\delta c(r,z)$.

Из (15) следует, что эффективная ширина фокального пятна пропорциональна центральной частоте излучаемого импульса. Зависимость от дистанции r определяется зависимостью от этой переменной величины σ_p — среднеквадратичного разброса импульсов лучей в точке фокусировки. Численное моделирование показывает, что σ_p слабо зависит от расстояния: при изменении дистанции наблюдения от 500 до 1 500 км σ_p^2 увеличивается, а размер пятна, соответственно, уменьшается, всего на 10 %.

Формула (18) предсказывает пиковое значение амплитуды поля V_s в центре фокального пятна. Оно пропорционально центральной частоте импульса. Сравнение с результатами численного моделирования показывает, что погрешность данной формулы обычно не превышает $20\div30$ %. Максимальное значение амплитуды пропорционально плотности вероятности распределения координат z лучей в точке фокусировки. Подобно σ_p, плотность вероятности $P_z(\bar{z})$, а вместе с ней и V_s, в условиях развитого хаоса слабо зависит от дистанции.

Теоретические оценки и результаты численного моделирования демонстрируют, что фокусировка поля на длинных трассах в среде со случайными неоднородностями может быть эффективно осуществлена с помощью лишь одного точечного приёмно-излучающего элемента.

Несмотря на то, что тестирование формул (15) и (18) проведено на примере модели подводного акустического волновода, естественно ожидать, что сами эти формулы имеют общий характер и могут быть использованы в волноводах другой физической природы. Вопрос о границах их применимости в сущности остаётся открытым и требует дальнейшего исследования. Аналогичные трудности всегда возникают при анализе применимости лучевого подхода на длинных трассах. Подтверждением применимости наших формул служит лишь сопоставление их предсказаний с данными прямого численного расчёта поля методом параболического уравнения.

Практическое значение формул (15) и (18) для подводной акустики существенно снижается тем фактом, что они получены в приближении замороженных неоднородностей. Дистанцию 1 000 км звуковой сигнал проходит за 11 мин, что сопоставимо с минимальным временны́м масштабом возмущения, индуцированного внутренними волнами [17, 19]. Поэтому за время распространения сигнала на тысячекилометровой трассе в реальном океане параметры среды могут заметно измениться. В таких условиях пробный и переизлучённый сигналы могут проходить через отнюдь не одинаковые неоднородности. Однако нашей задачей было лишь продемонстрировать применимость лучевого приближения для описания метода обращения времени на очень длинной трассе в случайно-неоднородном волноводе и возможность аналитической оценки параметров фокального пятна. Влияние нестационарности возмущения, т. е. различия неоднородностей подводного звукового канала, проходимых пробным и переизлучённым сигналами, также сравнительно просто можно учесть в рамках приближения геометрической оптики. Этот вопрос мы планируем рассмотреть в другой работе.

Работа выполнена при поддержке программы ОФН РАН «Фундаментальные основы акустической диагностики искусственных и природных сред», РФФИ (грант 10–02–00228) и Министерства образования и науки РФ по программам «Ведущие научные школы» (грант НШ-3700.2010.2) и «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (контракт 02.740.11.0565).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Fouque J.-P., Garnier J., Papanicolaou G., Solna K. Wave propagation and time reversal in randomly layered media. Berlin: Springer Science, 2007. 612 p.
2. Fink M., Prada C. // Inverse Problems. 2001. V. 17. P. R1.
3. Jackson D. R., Dowling D. R. // J. Acoust. Soc. Am. 1991. V. 89, No. 1. P. 171.
4. Blomgrena P., Papanicolaou G., Zhaoc H. // J. Acoust. Soc. Am. 2002. V. 111, No. 1. P. 230.
5. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. Ч. II. Случайные поля. М.: Наука, 1978. 464 с.
6. Исимару А. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. Т. 2. М.: Мир, 1981. 317 с.
7. Dowling D. R., Jackson D. R. // J. Acoust. Soc. Am. 1992. V. 91, No. 6. P. 3 257.
8. Зверев В. А., Коротин П. И., Стромков А. А. // Акуст. журн. 2008. Т. 54, № 1. С. 69.
9. Зверев В. А., Коротин П. И., Стромков А. А. // Акуст. журн. 2008. Т. 54, № 5. С. 823.
10. Derode A., Tourin A., Fink M. // J. Acoust. Soc. Am. 2000. V. 107, No. 6. P. 2 987.
11. Kim S., Kuperman W. A., Hodgkiss W. S., et al. // J. Acoust. Soc. Am. 2004. V. 115, No. 4. P. 1 525.
12. Brown M. G., Colosi J. A., Tomsovic S., et al. // J. Acoust. Soc. Am. 2003. V. 113, No. 5. P. 2 533.
13. Beron-Vera F. J., Brown M. G., Colosi J. A., et al. // J. Acoust. Soc. Am. 2003. V. 114, No. 3. P. 1 226.
14. Вировлянский А. Л. // Акуст. журн. 2005. Т. 51, № 1. С. 90.
15. Virovlyansky A. L., Kazarova A. Yu., Lyubavin L. Ya. // J. Acoust. Soc. Am. 2007. V. 121, No. 5. P. 2 542.

16. Makarov D., Prants S., Virovlyansky A., Zaslavsky G. Ray and wave chaos in ocean acoustics. New Jersey: Word Scientific, 2010. 389 p.
17. Распространение звука во флуктуирующем океане / Под ред. С. Флатте. М.: Мир, 1982. 336 с.
18. Colosi J. A., Brown M. G. // J. Acoust. Soc. Am. 1998. V. 103. P. 2 232.
19. Бреховских Л. М., Лысанов Ю. П. Теоретические основы акустики океана. М.: Наука, 2007. 370 с.
20. Tappert F. D. // Lecture Notes in Physics. Berlin: Springer-Verlag, 1977. V. 70. Wave Propagation and Underwater Acoustics. P. 224.
21. Jensen F. B., Kuperman W. A., Porter M. B., Schmidt H. Computational ocean acoustics. New York: Woodbury, 1994.
22. Smith K. B. // J. Comp. Acoust. 2001. V. 9, No. 1. P. 243.
23. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. М.: Наука, 1973. 208 с.
24. Абдуллаев С. С., Заславский Г. М. // УФН. 1991. Т. 161, № 8. С. 1.

Поступила в редакцию 20 апреля 2011 г.; принята в печать 29 мая 2011 г.

FOCUSING OF ACOUSTIC FIELDS IN AN ARBITRARILY INHOMOGENEOUS WAVEGUIDE BY USING TIME REVERSAL

A. L. Virovlyanskiy, A. Yu. Kazarova, and L. Ya. Lyubavin

We performed theoretical analysis of the method of field focusing in an arbitrarily inhomogeneous waveguide using re-radiation of the received signal with time reversal. The simplest case is considered, when point sources and receivers are used for emission and reception. As an example, the waveguide is chosen, which simulates an underwater audio channel with refractive-index fluctuations caused by arbitrary internal waves. In underwater acoustics, the considered method of field focusing is usually applied at relatively short distances being shorter than or approximately equal to 10 km. this paper deals with much longer paths, along which sound waves are propagating under the conditions of well-developed ray and wave chaos. Main attention is given to studying the width of the focal spot and the field amplitude at its center. It is shown that the amplitude distribution in the vertical section of the focal spot and the peak amplitude value at its center can be evaluated analytically using the stochastic ray theory.