

УДК 537.862

УСЛОВИЯ И ОСОБЕННОСТИ ЛАЗЕРНОЙ ГЕНЕРАЦИИ В ЛОВУШКАХ ДЛЯ БОЗЕ-КОНДЕНСАЦИИ ДИПОЛЯРНЫХ ЭКСИТОНОВ

П. А. Калинин¹, В. В. Кочаровский^{1,2}, Вл. В. Кочаровский¹

¹ Институт прикладной физики РАН, г. Нижний Новгород, Россия

² Texas A&M University, College Station, USA

В работе рассматриваются условия возникновения и особенности лазерной генерации поляритонных мод в ловушках для бозе-конденсации диполярных экситонов. Обсуждаются вопросы ширины спектра генерируемых мод и роль неоднородного пространственного и неоднородного спектрального распределения экситонов. Подробно исследуется возможность генерации мод в условиях, близких к порогу бозе-конденсации экситонов. Анализируется влияние неоднородного уширения линии экситонов на устойчивость стационарной генерации. Предлагаются эксперименты, которые могут дать дополнительную информацию о процессах лазерной генерации мод в полупроводниковых структурах, предназначенных для бозе-конденсации экситонов.

ВВЕДЕНИЕ

Экситоны — это связанные состояния электрона и дырки в полупроводнике, аналогичные по структуре атому водорода. Они обладают достаточно малой массой, благодаря чему возможна их бозе-конденсация при достаточно высоких температурах порядка нескольких кельвин [1–3]. В связи с этим в последнее время проводится множество экспериментов, направленных на получение конденсата экситонов в специальных ловушках, основанных на гетероструктурах с квантовыми ямами [2–4]. В большинстве экспериментов исследуется оптическое рекомбинационное излучение экситонов из подобных структур, в котором наблюдаются интерференционные эффекты [5], линейная поляризация [6] и двухфотонные корреляции [7]. Поэтому представляется интересным и теоретический анализ явлений, связанных с взаимодействием экситонов и когерентного электромагнитного поля, резонансного их рекомбинационному переходу.

Ловушки, в которых накапливаются экситоны, могут служить низкодобротными резонаторами для электромагнитного поля [8, 9]; поэтому в них могут возбуждаться поляритонные моды — самосогласованные колебания электромагнитного поля и поляризации экситонов. В условиях постоянной достаточно мощной накачки эти моды будут входить в режим лазерной генерации, тем самым существенно влияя на процессы, протекающие в ловушке, в частности увеличивая скорость рекомбинации электрон-дырочных пар, а следовательно, ограничивая формирование их бозе-конденсата.

Кроме того, генерируемые моды будут определять когерентные свойства излучения, выходящего из ловушки. Вообще говоря, пространственная когерентность излучения экситонов может иметь место даже при спонтанной рекомбинации сконденсировавшихся экситонов, находящихся в основном квантовом состоянии и потому «размазанных» по ловушке, но модовая лазерная генерация кардинально усиливает когерентность излучения, обеспечивая её даже для рекомбинационного излучения несконденсировавшихся экситонов.

В экспериментах [4–7], на которые мы будем ориентироваться в дальнейшем, полупроводниковая гетероструктура содержала широкую квантовую яму из материала GaAs с толщиной $l = 25$ нм в слое $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ с $x = 0,33$. Этот слой имел толщину $H = 220$ нм и был выращен на подложке, верхний слой которой был сделан высокопроводящим. Гетероструктура была

покрыта сверху металлической плёнкой, в которой протравливались круглые окна с диаметром $D = 5$ мкм. Вся структура была помещена в постоянное электрическое поле, приложенное между высокопроводящей подложкой и металлической плёнкой. Постоянная оптическая накачка создавала свободные электроны и дырки в толще структуры, откуда они дрейфовали в квантовую яму и там объединялись в экситоны. Благодаря наличию постоянного электрического поля электрон и дырка в экситоне смещались относительно друг друга и экситон приобретал постоянный дипольный момент, т. е. становился дипольным. В результате время его жизни увеличивалось до единиц и даже десятков наносекунд, что превышает время термализации экситонов и поэтому позволяет получить бозе-конденсат. В экспериментах наблюдалось излучение из окон в металлической плёнке на частоте рекомбинационного перехода описанных пространственно-непрямых экситонов.

Для простейшего описания динамики экситонного слоя мы используем стандартные уравнения Блоха для двухуровневой системы [10, 11], характеризуя экситоны их плотностью $N(\mathbf{r}_\tau, \Delta, t)$ и дипольным моментом $\mathbf{d}(\mathbf{r}_\tau, \Delta, t)$, зависящими от координаты в плоскости квантовой ямы $\mathbf{r}_\tau$, отстройки Δ от некоторой «центральной» частоты экситонного спектра ω_0 и времени t , и отнесёнными на единицу площади и на единицу частотной отстройки. Электромагнитное поле в резонаторе, «укороченное» по высокой частоте ω_0 , представим в виде суперпозиции комплексных парциальных мод «холодного» резонатора: $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_m C_m(t) \mathbf{E}_m(\mathbf{r})$, где $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ — электрическое поле в ловушке, $\mathbf{E}_m(\mathbf{r})$ — пространственная структура поля m -ой моды, а $C_m(t)$ — её комплексный коэффициент возбуждения.

С учётом этих обозначений в рамках приближения медленно меняющихся амплитуд динамика поля и экситонной системы описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{d}} &= -(\nu_2 + i\Delta) \mathbf{d} + i\chi N \sum_m C_m \mathbf{E}_m, \\ \dot{N} &= \frac{N_p - N}{T_1} + \frac{2}{\hbar} \text{Im} \left(\mathbf{d} \sum_m C_m^* \mathbf{E}_m^* \right), \\ \dot{C}_m &= -i\delta_m C_m + i \frac{2\pi\omega_0}{M_m} \int \mathbf{d} \mathbf{E}_m^* d\Delta d^2\mathbf{r}_\tau, \end{aligned} \quad (1)$$

где T_1 и $T_2 = \nu_2^{-1}$ — времена жизни плотности экситонов и их поляризации соответственно, $\chi = |p_0|^2/\hbar$, p_0 — дипольный момент рекомбинационного перехода экситонов, $M_m = \int \epsilon |\mathbf{E}_m|^2 d^3\mathbf{r}$ — нормировочный коэффициент m -ой моды, определяемый интегралом по объёму ловушки, δ_m — комплексная отстройка частоты m -ой моды от ω_0 , мнимая часть которой $\text{Im} \delta_m$ отвечает за затухание моды, N_p — плотность экситонов, создаваемая накачкой в отсутствие электромагнитных полей, а ϵ — диэлектрическая проницаемость объёмного полупроводника без экситонов. В дальнейшем мы также будем использовать суммарную плотность экситонов $N^\Sigma(\mathbf{r}_\tau, t) = \int N(\mathbf{r}_\tau, \Delta, t) d\Delta$ и общее их количество $N_{\text{tot}}(t) = \int N^\Sigma(\mathbf{r}_\tau, t) d^2\mathbf{r}_\tau$.

В работе [12] мы рассмотрели возможные режимы стационарной и нестационарной лазерной генерации в рамках системы (1). В данной статье мы более подробно остановимся на условиях возникновения и особенностях лазерной генерации, ориентируясь на параметры конкретных экспериментов. А именно, в разделе 1 мы детально проанализируем различные временные масштабы задачи, в разделе 2 выясним некоторые особенности спектра поляритонных мод для типичных параметров экспериментов, в разделе 3 рассмотрим влияние существенно неоднородного распределения экситонов по ловушке на неустойчивость отдельных мод, в разделе 4 изучим возможность возникновения генерации в окрестности порога бозе-конденсации с учётом конкретной структуры экситонной линии, т. е. спектрально-неоднородного распределения экситонов, в разделе 5 исследуем устойчивость стационарной генерации поляритонных мод для различного неоднородного

уширения экситонной линии, и в разделе 6 обсудим возможные дополнительные эксперименты по исследованию лазерной генерации поляритонных мод.

1. ТИПИЧНЫЕ ВРЕМЕННЫЕ МАСШТАБЫ ЗАДАЧИ

В работе [4] стационарное значение плотности экситонов N^Σ оценено величиной порядка 10^{10} см^{-2} , поэтому мы будем использовать значения параметра накачки N_p^Σ , лежащие в основном в интервале от 10^{10} до 10^{11} см^{-2} . В соответствии с результатами работы [13], время жизни экситонов можно оценить величиной $T_1 = 2 \cdot 10^{-9} \text{ с}$. Скорость релаксации поля в резонаторе $|\text{Im } \delta_m|$ определим, взяв коэффициент отражения электромагнитного поля от боковой поверхности ловушки равным 0,7 по амплитуде и диаметр ловушки равным 5 мкм; тогда получаем $|\text{Im } \delta_m| = 5 \times 10^{12} \text{ с}^{-1}$. При этом мы рассматриваем моды, в которых поле испытывает практически полное внутреннее отражение от поверхности открытой гетероструктуры, а также от подстилающего высокопроводящего слоя на поверхности подложки [8].

С учётом принятых значений для неустойчивости и начала лазерной генерации оказываются необходимы весьма малые значения однородной и неоднородной ширины линии. А именно, значение скорости релаксации поляризации, т. е. однородная ширина линии ν_2 , должно быть порядка $2 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}$, а неоднородная ширина должна быть не намного больше. Эти значения меньше, чем можно было ожидать исходя из простых оценок по ширине линии наблюдаемого из ловушки излучения. Однако следует отметить, что, во-первых, последняя даёт лишь грубую оценку сверху для величины ν_2 , а во-вторых, в процессе бозе-конденсации при уменьшении температуры как неоднородная, так и однородная ширины линии значительно уменьшаются.

Спектральная структура электромагнитных парциальных мод в нашей модели характеризуется, в первую очередь, средним спектральным расстоянием между соседними модами $|\text{Re } \delta_m - \text{Re } \delta_{m+1}|$. Этот межмодовый интервал можно оценить стандартными способами исходя из размеров ловушки, см. [9]; при размерах ловушки порядка нескольких микрон получаем, что спектральное расстояние между модами должно быть порядка величины $\Omega_0 = 2 \cdot 10^{11} \text{ с}^{-1}$.

Одной из важнейших особенностей приведённых параметров является то, что время жизни поляризации экситонов ν_2^{-1} много больше времени жизни фотона в резонаторе $|\text{Im } \delta_m|^{-1}$. Такая ситуация соответствует лазерам класса D [10, 11] и означает, что для описания нестационарной лазерной генерации требуется корректный учёт динамики поляризации, в то время как в лазерах классов A и B поляризация адиабатически исключается и динамика описывается балансными уравнениями. На самом деле, именно узкая спектральная линия экситонов является основной особенностью бозе-конденсата, которая важна для лазерной генерации; прочие свойства конденсата не играют принципиальной роли (хотя, например, особенности спонтанного излучения «размытых» по ловушке экситонов в основном квантовом состоянии влияют на ширину спектра излучения отдельных мод, а форма спектрального распределения надконденсатных экситонов в существенной мере определяет спектр возможной многомодовой генерации). Отметим, что уменьшения ширины экситонной линии следует ожидать при понижении температуры экситонов ещё не доходя до порога их конденсации, поэтому неустойчивость поляритонных мод может проявиться даже в отсутствие бозе-конденсата; см. более подробное обсуждение этого обстоятельства в разделе 4.

Используемая для дальнейших расчётов ширина экситонной линии ν_2 также много меньше, чем среднее межмодовое расстояние Ω_0 . Поэтому в общем грубом случае ни одна парциальная электромагнитная мода не попадает в экситонную линию. Одновременно с этим следует отметить, что скорость релаксации электромагнитного поля в резонаторе, т. е. ширина линии парциальной электромагнитной моды $|\text{Im } \delta_m|$, в свою очередь, много больше межмодового расстояния.

В большинстве случаев оказывается, что динамика электромагнитных мод слабо чувствительна к небольшим по сравнению с шириной их линии изменениям частоты, что является вполне естественным. Поэтому конкретное положение электромагнитных мод в области с шириной порядка Ω_0 , которая много меньше $|\text{Im } \delta_m|$, в окрестности экситонного резонанса не столь важно; см. также обсуждение в разделе 2.

Ещё одним временным масштабом в нашей задаче является эффективная кооперативная частота экситонной среды $\tilde{\omega}_c = \sqrt{2\pi |p_0|^2 N^\Sigma \omega_0 / (\hbar \epsilon H)}$, определяемая общей плотностью экситонов и учитывающая диэлектрическую проницаемость полупроводника и небольшой объём, занимаемый экситонами. Она входит в условие неустойчивости поляритонных мод, которое для одной парциальной электромагнитной моды, находящейся в точном резонансе с экситонами, в случае, когда линия экситонов является полностью однородной, имеет вид [8]

$$\tilde{\omega}_c^2 = \nu_2 |\text{Im } \delta_m|. \quad (2)$$

С учётом неравенства $\nu_2 \ll |\text{Im } \delta_m|$ ясно, что на пороге неустойчивости эффективная кооперативная частота $\tilde{\omega}_c$ должна быть много больше ν_2 , но много меньше $|\text{Im } \delta_m|$; например, для характерного значения $N^\Sigma = 4 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-2}$ частота $\tilde{\omega}_c$ равна $2 \cdot 10^{11} \text{ с}^{-1}$. Эти значения кооперативной частоты оказываются совпадающими по порядку величины с парциальным межмодовым спектральным расстоянием Ω_0 .

Эксперименты проводятся при температурах порядка нескольких кельвин; для определённости ниже мы будем использовать значение $T = 1 \text{ К}$. Ему соответствует спектральный масштаб $\theta = T/\hbar = 1,3 \cdot 10^{11} \text{ с}^{-1}$. Эта величина много больше, чем декремент затухания поляризации, т. е. ширина однородной линии ν_2 , но много меньше, чем $\text{Im } \delta_m$. Обсуждение влияния температуры на неустойчивость поляритонных мод см. в разделе 4.

2. СПЕКТР ПОЛЯРИТОННЫХ МОД

Для расчёта спектра поляритонных мод в ловушке в общем случае можно воспользоваться уравнениями Максвелла в полупроводнике, поставив соответствующие граничные условия на поверхности и на подложке ловушки, а также на экситонном слое; такой подход применялся в [8]. Можно также воспользоваться теорией возмущений, рассматривая экситоны как самосогласованные токи, возбуждающие электромагнитный резонатор [8, 9]. Именно в рамках такого подхода и получена система (1). В любом случае спектр поляритонных мод с учётом указанного выше условия низкой добротности резонатора $|\text{Im } \delta_m| \gg \{\nu_2, \tilde{\omega}_c\}$ имеет несколько ветвей, из которых неустойчивость возможна только на одной. Частота поляритонной моды на этой ветви зависит от частоты парциальной электромагнитной моды следующим образом:

$$\text{Re } \frac{\omega_u}{\nu_2} = \frac{\Pi x}{1 + x^2}, \quad \text{Im } \frac{\omega_u}{\nu_2} = -1 + \frac{\Pi}{1 + x^2}, \quad (3)$$

где ω_u — комплексная отстройка от экситонного резонанса ω_0 частоты нормальной поляритонной моды, соответствующей парциальной электромагнитной моде с комплексной отстройкой δ_m , причём условие $\text{Im } \omega_u > 0$ отвечает неустойчивости, $\Pi = \tilde{\omega}_c^2 / (\nu_2 |\text{Im } \delta_m|)$ — превышение накачки над порогом ($\Pi = 1$ на пороге неустойчивости), $x = \text{Re } \delta_m / |\text{Im } \delta_m|$ — нормированная отстройка частоты парциальной электромагнитной моды.

Указанная ветвь является почти экситонной: в соответствующих модах поляризационная компонента превалирует над электромагнитной. Частоты мод этой ветви не сильно удаляются от частоты экситонного резонанса ω_0 , стремясь к ней как при приближении к точному резонансу,

т.е. при $\text{Re } \delta_m \rightarrow 0$, так и при большом удалении от него, т.е. при $\text{Re } \delta_m \rightarrow \pm\infty$; максимальная отстройка частоты ω_u от ω_0 достигается при $x \sim 1$, т.е. при $|\text{Re } \delta_m| \sim |\text{Im } \delta_m|$, и вблизи порога, т.е. при $\Pi \sim 1$, оказывается порядка ν_2 , а при значительном превышении порога — порядка $\Pi\nu_2$. Более того, у ближайших к резонансу мод вещественная часть отстройки $\text{Re } \delta_m$ порядка среднего расстояния между модами Ω_0 , которое много меньше величины мнимой части отстройки $\text{Im } \delta_m$, и поэтому для этих мод $|x| \ll 1$, т.е. величина отстройки $\text{Re } \omega_u$ много меньше ν_2 при $\Pi < |\text{Im } \delta_m|/\Omega_0$.

В частности, поэтому при лазерной генерации поляритонных мод следует ожидать сравнительно узкого спектра в полосе с шириной меньше или порядка ν_2 , даже если парциальные электромагнитные моды отстроены по частоте от резонанса намного дальше. Это справедливо, по крайней мере, при не слишком больших уровнях накачки, пока амплитуды мод не слишком велики и их взаимодействие не приводит к большему уширению линии генерации.

Из формул (3) также видно, что порог неустойчивости поляритонных мод слабо зависит от величины отстройки частоты парциальной электромагнитной моды $\text{Re } \delta_m$, пока последняя меньше декремента затухания $|\text{Im } \delta_m|$. Поскольку $\Omega_0 \ll |\text{Im } \delta_m|$, в диапазон ширины порядка $|\text{Im } \delta_m|$ попадает много мод, поэтому первой начнёт генерироваться та из них, которая имеет меньший декремент затухания, а не та, которая расположена ближе к резонансу. Если же несколько мод имеют близкие декременты затухания, то их пороги генерации будут очень близки.

3. ВЛИЯНИЕ НЕОДНОРОДНОГО ПРОСТРАНСТВЕННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭКСИТОНОВ

Условие неустойчивости (2) и спектр мод (3) приведены для однородного пространственного распределения экситонов. В случае слабой пространственной неоднородности распределения экситонов спектр и порог неустойчивости можно по-прежнему приближённо описывать теми же формулами; неоднородность тогда скажется только на деталях лазерной генерации, например, приводя к различию уровней генерации разных мод или влияя на их конкуренцию при нестационарной генерации, см. [12].

Сильная же неоднородность может существенно изменить порог неустойчивости для разных мод, понизив его для мод, имеющих большее перекрытие с экситонами, и повысив для мод, имеющих меньшее перекрытие. В частности, по этой причине в круглых ловушках, подобных использовавшимся в работах [4–7], в которых экситоны сосредоточены, по-видимому, вдоль края ловушки, предпочтение получают прижатые к краям моды высокого порядка типа мод «шепчущей галереи»; эти же моды за счёт их скользящего отражения от краёв ловушки, скорее всего, имеют меньшие парциальные декременты.

Рассмотрим случай сильно неоднородного распределения экситонов подробнее. Для него выражения (3) будут по-прежнему верны, но параметр Π в них будет учитывать перекрытие мод с экситонами, т.е. будет разным для разных мод:

$$\Pi_m \propto \frac{\int N^\Sigma(\mathbf{r}_\tau) |\mathbf{E}_m|^2 d^2\mathbf{r}_\tau}{\int |\mathbf{E}_m|^2 d^2\mathbf{r}_\tau}. \quad (4)$$

Будем считать, что при изменении накачки относительное пространственное распределение экситонов не меняется, т.е. $N^\Sigma(\mathbf{r}_\tau) = N_0\eta(\mathbf{r}_\tau)$, где N_0 — величина, определяемая накачкой, а $\eta(\mathbf{r}_\tau)$ — безразмерная функция распределения экситонов по ловушке, не зависящая от накачки. Тогда в выражении (3) легко отделить зависимость от частотной отстройки и структуры моды и зависимость от остальных параметров ловушки:

$$\begin{aligned} \varkappa \operatorname{Re} \frac{\omega_u}{\nu_2} &= \frac{x}{1+x^2} \frac{\int \eta(\mathbf{r}_\tau) |\mathbf{E}_m|^2 d^2 \mathbf{r}_\tau}{\int |\mathbf{E}_m|^2 d^2 \mathbf{r}_\tau} \equiv \operatorname{Re} \xi_m, \\ \varkappa \operatorname{Im} \frac{\omega_u}{\nu_2} + 1 &= \frac{1}{1+x^2} \frac{\int \eta(\mathbf{r}_\tau) |\mathbf{E}_m|^2 d^2 \mathbf{r}_\tau}{\int |\mathbf{E}_m|^2 d^2 \mathbf{r}_\tau} \equiv \operatorname{Im} \xi_m, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\varkappa$ — некоторый множитель, одинаковый для всех мод ($\varkappa \propto N_0$), а

$$\xi_m = \frac{\int \eta(\mathbf{r}_\tau) |\mathbf{E}_m|^2 d^2 \mathbf{r}_\tau}{\int |\mathbf{E}_m|^2 d^2 \mathbf{r}_\tau} \frac{|\operatorname{Im} \delta_m|}{\delta_m} \quad (6)$$

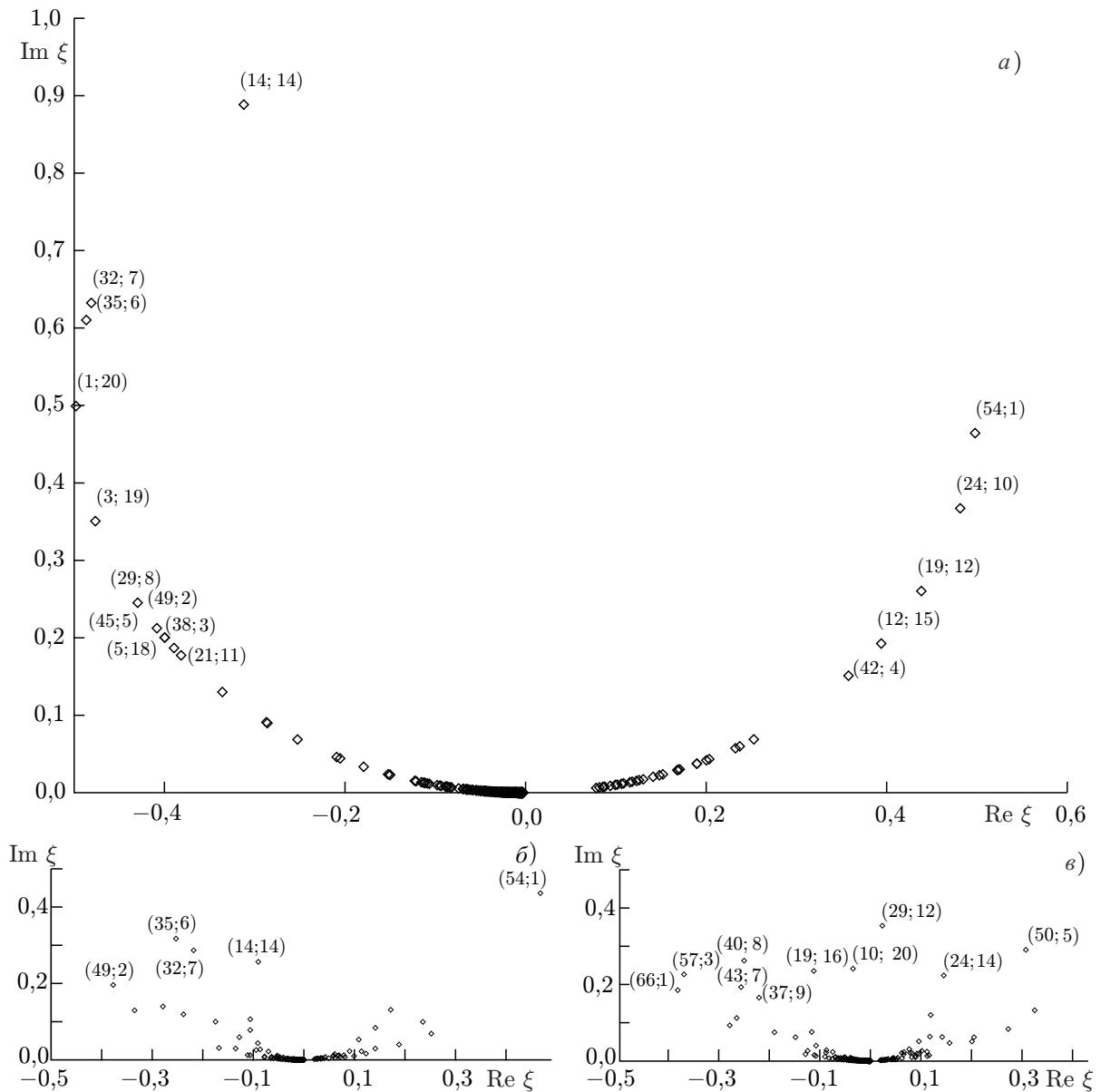


Рис. 1. Параметр ξ для мод TM_{mn} в резонаторе с идеально отражающими боковыми стенками. Каждая точка, имеющая $\operatorname{Im} \xi > 0,15$, подписана индексами $(m; n)$ соответствующей моды. На панели а параметры $\alpha = 0$, $R = 2,5 \mu\text{м}$; б — $\alpha = 0,8$, $R = 2,5 \mu\text{м}$; в — $\alpha = 0,8$, $R = 3 \mu\text{м}$

— безразмерная величина, учитывающая отстройку моды от резонанса и перекрытие моды с экситонами; именно различие в величине ξ определяет различие в порогах неустойчивости у разных мод.

Для иллюстрации влияния пространственного распределения экситонов и отстроек мод на величину ξ рассмотрим ТМ-моды с конкретной структурой вдоль направления, перпендикулярного плоскости квантовой ямы, в круглой ловушке радиуса R , считая её внешней стенку идеально проводящей. Будем полагать, что экситоны сосредоточены в кольце $\alpha R < r < R$, где $0 \leq \alpha < 1$; возьмём все парциальные декременты затухания электромагнитных мод одинаковыми. На рис. 1 приведена зависимость величины ξ для разных мод ТМ_{*mn*} при различных радиусах ловушки и различных α . Каждая точка подписана индексами (*m*; *n*) соответствующей моды. На рис. 1а представлен случай $\alpha = 0$, когда экситоны распределены по ловушке радиуса $R = 2,5$ мкм равномерно и величина ξ полностью определяется отстройкой парциальной электромагнитной моды от резонанса. Видно, что большинство мод сосредоточено в окрестности $\xi = 0$; для этих мод $|\operatorname{Re} \delta_m| \gg |\operatorname{Im} \delta_m|$. Те моды, которые находятся достаточно близко к резонансу, имеют большие значения ξ . Отметим, что здесь для простоты приведены не все моды, существующие в подобной ловушке: не учтены ТЕ-моды, а также моды с другой поперечной структурой.

На рис. 1б и в приведены значения ξ для $\alpha = 0,8$ и двух значений радиусов ловушки: $R = 2,5$ мкм и $R = 3$ мкм. Видно, что, как и ожидалось, приоритет получают моды с большими азимутальными индексами *m*, которые прижаты к краям ловушки, но конкретные индексы наиболее добротных мод существенно зависят от радиуса ловушки.

Естественно, и в ловушках более сложной структуры большое перекрытие моды с экситонами даёт ей преимущество при генерации. Однако отстройки частот мод от резонанса и поэтому конкретные пороги неустойчивости существенно зависят также от формы ловушки и граничных условий на её поверхности; поэтому даже в немного различающихся ловушках могут генерироваться разные моды.

4. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПОЛЯРИТОННЫХ МОД И РОЛЬ НЕСКОНДЕНСИРОВАВШИХСЯ ЭКСИТОНОВ

В соответствии с изложенным выше, в процессе бозе-конденсации экситонов можно ожидать возникновения неустойчивости поляритонных мод. В общем случае условие конденсации и условие неустойчивости существенно различны и, вообще говоря, неустойчивость поляритонных мод не обязательно связана с конденсацией, и уж тем более из наблюдения лазерной генерации поляритонных мод нельзя делать однозначный вывод о конденсации. С точки зрения лазерной генерации, основным и практически единственным свойством бозе-конденсации, используемым в данной работе, является достаточно узкая ширина спектральной линии и, следовательно, высокая спектральная плотность экситонов.

Тем не менее, обсудим подробнее условия возникновения генерации поляритонных мод в окрестности порога конденсации. При приближении к последнему спектральное распределение экситонов определяется спектральной плотностью их возможных состояний и профилем распределения Бозе—Эйнштейна с химическим потенциалом, стремящимся к энергии наинизшего экситонного состояния. При фиксированной температуре при повышении уровня накачки после порога конденсации населённость основного, низшего, состояния начинает расти, а плотность экситонов в остальных (надконденсатных) состояниях практически фиксируется на уровне, отвечающем порогу конденсации. Таким образом, в общем случае в окрестности порога конденсации спектральное распределение экситонов состоит из двух компонент: узкой однородно уширенной компоненты, соответствующей наинизшему состоянию, и сравнительно широкой, связанной

с тепловым хвостом. Соответственно, для грубого качественного анализа лазерной генерации при подобном распределении можно отдельно рассмотреть возможность генерации за счёт каждой из компонент.

Конденсат в рамках рассматриваемой модели лазера представляет собой просто активную среду с однородно уширенной линией, и поэтому условие неустойчивости поляритонных мод даётся уравнением (2), в котором при вычислении величины $\tilde{\omega}_c^2$ надо учитывать общее количество экситонов в конденсате.

Условия лазерной генерации на тепловом хвосте распределения экситонов являются не столь очевидными и рассматриваются ниже. Для их определения необходимо учитывать конкретную структуру линии надконденсатных экситонов. Будем считать, что экситоны распределены по дискретным уровням ловушки, нумеруемым индексом k ; отстройку частоты k -ого уровня от частоты рекомбинации основного состояния обозначим Δ_k , количество экситонов на нём во всей ловушке — N_k . Учитывая одну парциальную электромагнитную моду с комплексной отстройкой частоты от частоты рекомбинации основного состояния $\delta_m = \delta_0 - i\nu_c$, где δ_0 — вещественная часть отстройки, а ν_c — декремент затухания моды, в рамках сосредоточенной модели, т. е. заменяя интегрирование по объёму на умножение на объём ловушки V , несложно получить уравнение для комплексного инкремента нормальной поляритонной моды $\Gamma = \Gamma_0 - i\Omega$:

$$\Gamma_0 + \nu_c = \alpha \sum_k \frac{\Gamma_0 + \nu_2}{(\Gamma_0 + \nu_2)^2 + (\Delta_k - \Omega)^2} N_k, \quad (7a)$$

$$\delta_0 - \Omega = \alpha \sum_k \frac{\Omega - \Delta_k}{(\Gamma_0 + \nu_2)^2 + (\Delta_k - \Omega)^2} N_k, \quad (7b)$$

где $\alpha = 2\pi\omega_0 |p_0|^2 / (\hbar\epsilon V)$. Отметим, что эта же величина входит в формулу для кооперативной частоты $\tilde{\omega}_c$ как коэффициент пропорциональности между $\tilde{\omega}_c^2$ и общим количеством экситонов в ловушке $N_{\text{tot}} = N^\Sigma S$, где S — площадь ловушки.

Непосредственный смысл условий (7) таков: это система из двух уравнений с двумя неизвестными, которая позволяет по известным параметрам ловушки и парциальной электромагнитной моды определить вещественную частоту Ω и декремент затухания Γ_0 соответствующей нормальной моды. Однако их можно трактовать и по-другому, как условия на параметры ловушки и на частоту парциальной моды, обеспечивающие существование нормальной моды с данными Ω и Γ_0 . В частности, если нас интересует порог неустойчивости, то в уравнения надо подставить $\Gamma_0 = 0$. После этого вещественная частота парциальной моды входит только в уравнение (7b) и поэтому уравнение (7a) можно рассматривать как условие на параметры ловушки, в том числе на декремент затухания парциальной электромагнитной моды ν_c , определяемый добротностью резонатора в отсутствие экситонов, а уравнение (7b) — как формулу для определения требуемой вещественной отстройки моды δ_0 . Нас интересует порог, на котором неустойчивой становится хотя бы одна мода; поэтому можно считать, что в ловушке существуют парциальные электромагнитные моды со всеми возможными δ_0 и полагать условие (7b) выполненным автоматически для произвольных Ω . Уравнение же (7a) теперь определяет порог неустойчивости нормальной моды на частоте Ω ; среди всех частот Ω нам нужно будет в итоге выбрать ту, для которой этот порог минимален; соответствующий порог и будет искомым порогом лазерной генерации поляритонных мод в ловушке.

Таким образом, условие неустойчивости нормальной поляритонной моды с частотой Ω имеет вид

$$\nu_c \nu_2 = \alpha \sum_k \frac{\nu_2^2 N_k}{\nu_2^2 + (\Delta_k - \Omega)^2}. \quad (8)$$

Отметим, что в случае одного уровня, т.е. однородно уширенной линии, и $\Delta_k = \Omega$ это условие приобретает вид $\nu_c \nu_2 = \alpha N_{\text{tot}} = \tilde{\omega}_c^2$ в полном соответствии с (2); здесь и далее $N_{\text{tot}} = \sum_k N_k$ — общее количество экситонов в ловушке. В общем случае условие неустойчивости имеет такой же вид, только вместо общего количества экситонов N_{tot} в него надо подставлять эффективное количество экситонов $\tilde{N}_{\text{tot}}$, учитывающее профиль однородной экситонной линии:

$$\tilde{N}_{\text{tot}} = \sum_k \frac{\nu_2^2 N_k}{\nu_2^2 + (\Delta_k - \Omega)^2}. \quad (9)$$

Физический смысл этого выражения прост: на возможность генерации на данной частоте Ω влияют только экситоны, расположенные в полосе ширины ν_2 около Ω . Грубо говоря, условие неустойчивости на частоте Ω совпадает с условием неустойчивости (2) для однородно уширенной линии, куда вместо общего количества экситонов подставлено количество экситонов в полосе с шириной ν_2 вокруг частоты Ω . В частности, для большинства плавных распределений экситонов по частотам типа гауссового или лоренцевого с шириной ν_* , много большей ν_2 , можно ожидать, что количество экситонов в этой полосе будет в ν_*/ν_2 раз меньше, чем общее количество экситонов, и тогда условие неустойчивости поляритонных мод можно также определять уравнением (2), в котором вместо ν_2 подставлено ν_* , а при вычислении $\tilde{\omega}_c$ учитываются все экситоны, присутствующие в ловушке. Таким образом, для подобных линий порог генерации должен быть в порядка ν_*/ν_2 раз выше, чем для однородно уширенной линии, содержащей столько же экситонов.¹ Отметим, что для лоренцевой линии с $\nu_* \gg \nu_2$ этот результат является точным.

Рассмотрим теперь конкретную структуру неоднородной линии экситонов в двумерной ловушке. Количество экситонов на данном уровне определяется распределением Бозе—Эйнштейна

$$N_k = \frac{1}{\exp[(\Delta_k - \zeta)/\theta] - 1}, \quad (10)$$

где $\zeta = \mu/\hbar$ и $\theta = T/\hbar$ — частоты, соответствующие химическому потенциалу μ и температуре T соответственно; химический потенциал будем отсчитывать от нижнего уровня ловушки. Таким образом, всегда $\zeta < 0$.

Стандартным образом не учитывая первый уровень и переходя с учётом двумерности ловушки от суммирования к интегрированию в (9), можно получить для эффективного количества экситонов $\tilde{N}_{\text{tot}}$ следующее выражение:

$$\tilde{N}_{\text{tot}} = \frac{\pi}{4\gamma} \int_{\gamma}^{\infty} \frac{\nu_2^2}{\nu_2^2 + (t - \Omega)^2} \frac{dt}{\exp[(t - \zeta)/\theta] - 1}, \quad (11)$$

где $\gamma = \hbar\pi^2/(2mS)$ — отстройка первого уровня, m — масса экситона; для параметров экспериментов [4–7] имеем $\gamma \sim 10^8 \text{ с}^{-1}$, и следовательно $\gamma \ll \nu_2$.

¹ Во всём разделе 4 количество экситонов на каждом уровне, и поэтому их суммарное количество, определяется используемым распределением экситонов и его параметрами. Ниже по тексту будет рассматриваться распределение Бозе—Эйнштейна, в котором суммарное количество экситонов определяется температурой и химическим потенциалом. В результате суммарное количество экситонов входит в условия порога неявно, через эти параметры, и поэтому рассуждать о пороге генерации по населённости достаточно сложно. Поэтому далее, для определённости и для нахождения простейших количественных характеристик порога генерации, мы будем говорить о пороге генерации по времени жизни фотона в резонаторе ν_c^{-1} , что при фиксированной частоте перехода ω_0 равносильно порогу по добротности резонатора. Таким образом, здесь и далее фразы типа «порог увеличивается в x раз» следует понимать как «при фиксированных остальных параметрах пороговое значение времени жизни фотона в резонаторе ν_c^{-1} увеличивается в x раз».

Общее количество экситонов в ловушке в этих же обозначениях имеет вид

$$N_{\text{tot}} = \frac{\pi}{4\gamma} \int_{\gamma}^{\infty} \frac{dt}{\exp[(t - \zeta)/\theta] - 1} \equiv \frac{\pi\theta}{4\gamma} \left(\frac{\gamma - \zeta}{\theta} - \ln\{\exp[(\gamma - \zeta)/\theta] - 1\} \right). \quad (12)$$

В соответствии с изложенным выше, для определения глобального порога неустойчивости необходимо использовать частоту Ω , дающую наибольшее значение $\tilde{N}_{\text{tot}}$. Можно показать, что при $\Omega = \gamma$ значение $\tilde{N}_{\text{tot}}$ будет отличаться от максимального не более чем в два раза; поэтому ниже для определённости мы будем использовать значение $\Omega = \gamma$. Вместе с тем, надо отметить, что максимальное значение $\tilde{N}_{\text{tot}}$ может достигаться при больших Ω , вплоть до значений, при которых становится существенным уменьшение спектральной плотности экситонов согласно (10). При этом во всём этом интервале частот Ω в принципе возможна лазерная генерация, поскольку значения $\tilde{N}_{\text{tot}}$, а следовательно и инкременты мод, после превышения порога сравнимы по порядку величины.

Для конкретизации дальнейшего исследования выделим несколько частных случаев.

4.1. Окрестность порога конденсации

Рассмотрим область параметров, где $\gamma - \zeta \ll \{\nu_2, \theta\}$. Поскольку, как было отмечено выше, в рассматриваемых экспериментах $\gamma \ll \nu_2$, в эту область попадает порог конденсации $\zeta = 0$, окрестность порога в области до конденсации, а также вся область существования конденсата. Последнее обусловлено тем, что после конденсации распределение несконденсированных экситонов всегда описывается выражением (10) с $\zeta = 0$. Величина интеграла (11) в основном определяется областью $t - \gamma \lesssim \nu_2$. Поэтому экспоненту под знаком интеграла можно разложить в ряд:

$$\frac{1}{\exp[(t - \zeta)/\theta] - 1} \approx \frac{\theta}{t - \zeta}, \quad (13)$$

после чего интеграл вычисляется аналитически:

$$\tilde{N}_{\text{tot}} = \frac{\pi\theta}{4\gamma} \frac{\nu_2^2}{\nu_2^2 + (\gamma - \zeta)^2} \left(\frac{\pi}{2} \frac{\gamma - \zeta}{\nu_2} + \ln \frac{\nu_2}{\gamma - \zeta} \right). \quad (14)$$

С учётом неравенства $\gamma - \zeta \ll \nu_2$, эффективное количество экситонов записывается в виде

$$\tilde{N}_{\text{tot}} = \frac{\pi\theta}{4\gamma} \ln \frac{\nu_2}{\gamma - \zeta} \equiv N_{\text{tot}} \frac{\ln[\nu_2/(\gamma - \zeta)]}{\ln[\theta/(\gamma - \zeta)]}, \quad (15)$$

а условие порога — в виде

$$\nu_c \nu_2 = \frac{\pi\alpha\theta}{4\gamma} \ln \frac{\nu_2}{\gamma - \zeta}. \quad (16)$$

Приведём также уже учтённое в (15) выражение для общего количества экситонов в тепловом хвосте в этом пределе:

$$N_{\text{tot}} = \frac{\pi\theta}{4\gamma} \ln \left(\frac{\theta}{\gamma - \zeta} \right). \quad (17)$$

Из полученных выражений можно сделать несколько выводов.

1) Эффективное количество экситонов лишь незначительно отличается от общего количества экситонов в ловушке. На пороге конденсации, когда $\zeta = 0$, отношение логарифмов, входящее в

правую часть (15), для параметров экспериментов [4–7] равно 2,5; это означает, что порог генерации для распределения (10) всего в 2,5 раза выше, чем для однородно уширенной линии, содержащей столько же экситонов. Отметим, что можно было бы ожидать увеличения порога конденсации в $\theta/\nu_2 \approx 60$ раз в соответствии с соображениями, приведёнными после формулы (9), но они в данном случае неприменимы из-за особой структуры линии (13), имеющей вид $1/x$. Благодаря последнему обстоятельству температура, которую можно было бы считать шириной линии, входит в величину $\tilde{N}_{\text{tot}}$ лишь логарифмически и оказывается, что в интервале частот ширины порядка ν_2 , примыкающем к конденсату, но не включающем его, сосредоточено 40 % от общего количества экситонов.

2) В частности, если генерация на тепловом хвосте, т.е. за счёт надконденсатных экситонов, существенно невозможна, т.е. условие генерации нарушается, к примеру, в десять раз, то генерация на конденсате, т.е. в условиях однородно уширенной линии, потребует значительного превышения порога конденсации, в данном примере — в 4 раза, и наоборот. Другими словами, непосредственно факт образования конденсата упрощает достижение порога генерации, но не во много раз.

3) Для параметров экспериментов [4–7] (см. раздел 1) при начале конденсации порог неустойчивости генерации на тепловом хвосте оказывается превышен примерно на 25 %. С учётом того обстоятельства, что большинство параметров установки известны с не столь хорошей точностью, уверенно утверждать, что в эксперименте достигается генерация на тепловом хвосте, нельзя, но видно, что она вполне возможна. С учётом 2) это также означает, что для генерации на конденсате нужно, чтобы в нём скопилось всего около 30 % экситонов, т.е. не требуется существенного превышения порога конденсации.

4) Формула (16) показывает, что порог генерации уменьшается почти линейно с ростом температуры. Точнее говоря, она означает, что если повышать температуру, одновременно увеличивая количество экситонов так, чтобы всё время оставаться на пороге конденсации, то для лазерной генерации будет достаточно всё меньшего и меньшего времени жизни фотона в резонаторе ν_c^{-1} , или, что эквивалентно, всё меньшей и меньшей добротности резонатора. Этот несколько неожиданный результат легко объясняется следующими соображениями. При повышении температуры общее количество экситонов, требуемое для конденсации, в соответствии с (17), с точностью до логарифмического множителя, растёт практически пропорционально температуре. Одновременно с этим, конечно, растёт ширина спектрального распределения экситонов, но последняя, как уже было отмечено, входит в условие порога лишь логарифмически. Поэтому при росте температуры генерацию на пороге конденсации становится получить проще.

4.2. Больцмановский предел

Предел $\gamma - \zeta \gg \{\theta, \nu_2\}$ соответствует области малого количества экситонов вдали от порога конденсации. В этом случае распределение экситонов (10) переходит в распределение Больцмана, т.е. N_k становится пропорциональным $\exp(-\Delta_k/\theta)$. Последнее практически не меняется в существенном для (11) интервале частот ширины порядка ν_2 . Поэтому в интеграле (11) можно считать распределение экситонов равномерным, в результате чего их эффективное количество становится равным

$$\tilde{N}_{\text{tot}} = \frac{\pi^2 \nu_2}{8\gamma} \exp(-|\zeta|/\theta) \equiv \frac{\pi \nu_2}{2\theta} N_{\text{tot}}. \quad (18)$$

Здесь учтено, что общее количество экситонов в конденсате в этом пределе равно

$$N_{\text{tot}} = \frac{\pi \theta}{4\gamma} \exp(-|\zeta|/\theta). \quad (19)$$

В итоге условие неустойчивости принимает вид

$$\nu_c \theta = \frac{\pi \alpha}{2} N_{\text{tot}} \equiv \frac{\pi}{2} \tilde{\omega}_c^2, \quad (20)$$

где в ω_c^2 учитывается общее количество экситонов.

Таким образом, в этом пределе, с точностью до множителя $\pi/2$, условие неустойчивости аналогично условию неустойчивости для однородно уширенной линии (2) с заменой ν_2 на θ , в полном соответствии со сказанным после формулы (9). При фиксированном количестве экситонов пороговое значение $\tilde{\omega}_c^2$ для генерации растёт пропорционально температуре, которая в этом случае определяет эффективную ширину спектральной линии.

4.3. Промежуточная область

Рассмотрим также область $\nu_2 \ll \gamma - \zeta \ll \theta$. Поскольку $\gamma \ll \nu_2$, в этой области $\gamma \ll |\zeta|$. Здесь по-прежнему можно воспользоваться приближением (13), получив выражение для эффективного количества экситонов в виде (14), но далее можно учесть, что $\gamma \ll \nu_2 \ll |\zeta|$ и, следовательно,

$$\tilde{N}_{\text{tot}} = \frac{\pi^2 \theta \nu_2}{8\gamma |\zeta|}. \quad (21)$$

Общее количество экситонов в этой области, как и в разделе 4.1, определяется выражением (17), поэтому условие порога генерации записывается в виде

$$\nu_c |\zeta| = \frac{\alpha \pi^2 \theta}{8\gamma} \equiv \frac{\alpha \pi}{2} \frac{N_{\text{tot}}}{\ln(\theta/|\zeta|)}. \quad (22)$$

Оно отличается от условия генерации для однородно уширенной линии множителем $\pi/2$, логарифмическим множителем $\ln(\theta/|\zeta|)$, а также заменой ν_2 на $|\zeta|$.

Как и в непосредственной окрестности порога конденсации (раздел 4.1), здесь распределение экситонов описывается выражением (13), т. е. гиперболической зависимостью вида $1/t$, сдвинутой влево на величину ζ , и поэтому можно было бы ожидать, что, как и в разделе 4.1, ширина линии войдёт лишь в логарифмический множитель. Однако, поскольку в этом случае сдвиг гиперболы ζ становится больше ширины ν_2 спектра участвующих в генерации экситонов, характер зависимости N_{tot} существенно меняется, так что роль эффективной ширины линии в условии порога лазерной генерации теперь играет, с точностью до множителя порядка единицы, величина $|\zeta|$.

4.4. Изменение условия начала генерации с удалением от порога конденсации

Рассмотрим изменение условия начала генерации с удалением от порога конденсации, а именно с ростом температуры при фиксированном общем количестве экситонов в ловушке или с уменьшением количества экситонов при фиксированной температуре. Выражая все условия порога (16), (20), (22) только через общее количество экситонов N_{tot} , т. е. подставляя химический потенциал как функцию N_{tot} , получим условия порога в следующем виде:

$$\nu_c = \begin{cases} \frac{\alpha}{\nu_2} \left(N_{\text{tot}} - \frac{\pi \theta}{4\gamma} \ln \frac{\theta}{\nu_2} \right), & \frac{\pi \theta}{4\gamma} \ln \frac{\theta}{\nu_2} \ll N_{\text{tot}} < \frac{\pi \theta}{4\gamma} \ln \frac{\theta}{\gamma}, \\ \frac{\pi^2 \alpha}{8\gamma} \exp \left(\frac{4\gamma}{\pi \theta} N_{\text{tot}} \right), & \frac{\pi \theta}{2\gamma} \ll N_{\text{tot}} \ll \frac{\pi \theta}{4\gamma} \ln \frac{\theta}{\nu_2}, \\ \frac{\pi \alpha}{2\theta} N_{\text{tot}}, & N_{\text{tot}} \ll \frac{\pi \theta}{2\gamma}. \end{cases} \quad (23)$$

Здесь самая верхняя граница $N_{\text{tot}}^{\text{th}} = (\pi\theta/4\gamma) \ln(\theta/\gamma)$ — порог конденсации; первый случай соответствует разделу 4.1, второй — разделу 4.3, третий — разделу 4.2.²

Пусть мы уменьшаем количество экситонов N_{tot} при фиксированной температуре θ , удаляясь от порога конденсации. Сначала пороговое значение ν_c падает с уменьшением N_{tot} медленно (линейно), что соответствует росту требуемой добротности резонатора, но уже при уменьшении N_{tot} в $\ln(\theta/\gamma)/\ln(\theta/\nu_2)$ раз, что равно примерно 1,7 для параметров рассматриваемых экспериментов, уменьшение величины ν_c становится заметно более быстрым (экспоненциальным). После уменьшения N_{tot} относительно порогового значения примерно в $\ln(\theta/\gamma)/2$ раз, что равно примерно 3,4 для параметров рассматриваемых экспериментов, уменьшение ν_c становится опять медленным (линейным, даже пропорциональным N_{tot}), но уже с существенно, в $\theta/\nu_2 \approx 60$ раз, меньшим коэффициентом перед N_{tot} , чем на начальном участке её зависимости от N_{tot} .

Аналогично меняется условие порога генерации при повышении температуры при фиксированном N_{tot} . Первое приближение верно на небольшом участке температур $\theta_{\text{th}} < \theta \ll \theta_1$, где θ_{th} — температура конденсации, $\theta_{\text{th}} \ln(\theta_{\text{th}}/\gamma) = 4\gamma N_{\text{tot}}/\pi$, а θ_1 определяется условием $\theta_1 \ln(\theta_1/\nu_2) = 4\gamma N_{\text{tot}}/\pi$, так что $\theta_1/\theta_{\text{th}} \approx 1,5$ для параметров рассматриваемых экспериментов. Здесь пороговое значение ν_c меняется достаточно медленно, варьируясь не более, чем в несколько раз на этом участке, но при дальнейшем росте температуры уменьшение величины ν_c становится очень быстрым, пропорциональным $\exp(\text{const}/\theta)$, и при приближении температуры к значению $\theta_2 = 2\gamma N_{\text{tot}}/\pi \approx 2,5\theta_{\text{th}}$ значение ν_c уже оказывается в десятки раз ниже, чем на пороге конденсации, после чего меняется вновь достаточно медленно, пропорционально $1/\theta$.

Таким образом, мы видим, что указанные в разделе 4.1 эффекты существенного понижения порога лазерной генерации на надконденсатных экситонах за счёт гиперболического профиля распределения Бозе—Эйнштейна в двумерной ловушке имеют место лишь в очень узкой окрестности порога, т. е. при удалении от него не более чем в $1,5 \div 2$ раза по количеству экситонов и/или температуре. Основное повышение порога генерации (в десятки раз) происходит при удалениях от порога конденсации в $2 \div 3$ раза, после чего порог генерации растёт линейно с повышением температуры или понижением количества экситонов, но уже является недостижимым в существующих экспериментальных установках.

5. ВЛИЯНИЕ НЕОДНОРОДНОГО УШИРЕНИЯ НА ВТОРОЙ ЛАЗЕРНЫЙ ПОРОГ

В работе [12] нами было показано, что при небольшом превышении порога лазерной генерации в рассматриваемых лазерах класса D стационарный режим генерации может оказываться неустойчивым и сменяться импульсным режимом. Это происходит начиная с так называемого «второго» лазерного порога. В соответствии с результатами численного моделирования системы (1) в работе [12], указанный второй порог для рассматриваемых экситонных ловушек в случае однородно уширенной линии очень высок и превышает первый порог на три порядка. Од-

² Отметим, что запись условий применимости трёх рассматриваемых приближений в виде ограничений на N_{tot} с использованием знаков много меньше в (23) может вызвать удивление, поскольку левая и правая границы этих областей достаточно близки: их отношение равно примерно 2 для рассматриваемых параметров. Но на самом деле условия применимости определяются приведёнными в разделах 4.1–4.3 неравенствами на величины ν_2 , θ и ζ , а в окрестности порога конденсации даже небольшое изменение количества экситонов N_{tot} вызывает существенное (экспоненциальное) изменение химического потенциала ζ . Поэтому знаки много меньше в формуле (23) следует понимать как требование того, чтобы химический потенциал был много больше или много меньше соответствующих значений; по отношению к величине N_{tot} это означает, что количество экситонов должно отличаться от граничного как минимум на десяток процентов. Аналогично следует трактовать и знаки много меньше в ограничениях на температуру ниже по тексту.

нако он становится сравним с первым порогом, если ширина неоднородной спектральной линии в несколько раз больше ширины однородной.

В связи с этим, а также с отмеченной в разделе 4 возможностью генерации как на однородно, так и на неоднородно уширенной части спектральной линии экситонов, представляет интерес теоретическое исследование устойчивости стационарного режима лазерной генерации. Рассмотрим эту задачу в простейшем варианте одной парциальной электромагнитной моды и сосредоточенной модели лазера. Будем считать также, что экситонная линия состоит из двух однородно уширенных компонент с отстройками $\Delta_1 = -\Delta$ и $\Delta_2 = \Delta$, где величина Δ характеризует неоднородную ширину экситонной линии. Парциальную электромагнитную моду будем полагать находящейся точно посередине между компонентами экситонной линии, т. е. $\text{Re } \delta_m = 0$; декремент её затухания, как и в предыдущем разделе, обозначим $|\text{Im } \delta_m| = \nu_c$.

С учётом симметричности выбранной спектральной структуры экситонов и электромагнитной моды, система (1) допускает класс «симметричных» решений, в которых $\mathbf{d}_1(t) = -\mathbf{d}_2^*(t)$ и $N_1(t) = N_2(t)$; в этот класс входит, в том числе, и стационарное решение системы. Здесь $\mathbf{d}_1$ и $\mathbf{d}_2$ — дипольные моменты в первой и второй компоненте экситонной линии, N_1 и N_2 — соответствующие населённости; звёздочка обозначает комплексное сопряжение. Ограничимся исследованием устойчивости стационарного решения только в рамках данного класса решений, т. е. будем рассматривать только такие возмущения, которые не выводят решение из симметричного класса. Отметим, что учёт остальных возмущений может понизить, но не повысить, порог неустойчивости стационарного решения.

В рамках класса симметричных решений рассматриваемая физическая система описывается двумя комплексными и одним вещественным уравнениями:

$$\dot{d}_1 = (-\nu_2 + i\Delta) d_1 - iN_1 C, \quad \dot{C} = -\nu_c C - 2\text{Im } d_1, \quad \dot{N}_1 = \nu_1 (N_p - N_1) + \text{Im}(d_1 C^*). \quad (24)$$

Здесь мы учли, что компоненты вектора $\mathbf{d}_1$, перпендикулярные электрическому полю моды $\mathbf{E}$, не участвуют в общей динамике и затухают, поэтому в уравнениях через d_1 обозначена компонента дипольного момента, параллельная электрическому полю моды. Само поле моды $\mathbf{E}$ взято равным по модулю единице, т. е. вся размерность электрического поля отнесена к коэффициенту возбуждения C . Для краткости индекс m у величин, относящихся к электромагнитной моде, опущен. Величины χ , ω_0 , M_m , $\hbar$ и числовые коэффициенты исключены из системы за счёт соответствующей нормировки величин d_1 , C и N_1 . Величина ν_1 есть декремент затухания населённости: $\nu_1 = T_1^{-1}$.

Из (24) видно, что мнимая часть коэффициента возбуждения моды C быстро (с декрементом ν_c) затухает, поэтому в дальнейшем будем считать величину C вещественной.

Стационарное решение уравнений (24) имеет следующий вид:

$$N_1(t) = \frac{\nu_c \Delta^2}{2\nu_2} + \frac{\nu_2 \nu_c}{2} \equiv N_0, \quad C^2(t) = \frac{2\nu_1}{\nu_c} (N_p - N_0) \equiv C_0^2, \\ d(t) = \frac{\nu_c}{2} \left(\frac{\Delta}{\nu_2} - i \right) C_0 \equiv d_0. \quad (25)$$

Оно существует только при накачке N_p , превосходящей первый лазерный порог N_0 ; в этом решении концентрация экситонов фиксируется на значении N_0 и не меняется с дальнейшим ростом накачки, а последний сказывается на росте амплитуды возбуждения моды C_0 . В дальнейших формулах в качестве характеристики накачки, т. е. степени превышения ею порогового значения, мы будем использовать величину C_0^2 , а не N_p , поскольку это приводит к более компактным формулам. При необходимости во все дальнейшие формулы можно, в соответствии с (25), вместо C_0 подставить её выражение через накачку и параметры системы.

Линеаризуя стандартным образом систему (24) в окрестности стационарного решения (25) и исследуя решения, пропорциональные $\exp(-i\Omega t)$, получаем для частоты возмущений Ω уравнение следующего вида:

$$\Omega^4 + ia\Omega^3 + b\Omega^2 + ic\Omega + d = 0, \quad (26)$$

где коэффициенты a , b , c и d выражаются через параметры задачи ν_1 , ν_2 , ν_c , Δ и C_0^2 . Нас интересует условие второго лазерного порога, когда теряется устойчивость решения (25), т. е. при котором уравнение (26) имеет как минимум один вещественный корень. Предполагая, что частота Ω вещественна, в (26) можно отделить вещественную и мнимую части, после чего получается условие второго порога в виде

$$ac < 0, \quad c^2 - abc + a^2d = 0. \quad (27)$$

Подставляя выражения величин a , b , c , d через параметры задачи, получаем квадратное уравнение на величину C_0^2 . Решая его, можно найти выражения для двух корней квадратного уравнения, один из которых всегда меньше нуля и поэтому не имеет смысла. Второй корень для большинства параметров положителен и соответствует второму лазерному порогу; в небольшой области параметров второй корень отрицателен, что означает, что в указанной области устойчивое стационарное решение не существует и второй лазерный порог совпадает с первым.

Точные выражения для корней мы не будем приводить в силу их громоздкости, укажем только асимптотические формулы в пределе большой величины ν_c , что типично для экситонных ловушек:

$$(C_0^2)_1 = \frac{\nu_c}{\nu_2} (\nu_1 \nu_2 - \Delta^2), \quad (28a)$$

$$(C_0^2)_2 = \frac{\nu_1 (\Delta^2 - \nu_c^2) (\Delta^2 - \nu_1 \nu_2 - \nu_2^2)}{2\nu_2 (\Delta^2 - \nu_1 \nu_2)} \approx \frac{\nu_1 (\Delta^2 - \nu_2^2)^2}{2\nu_2 \Delta^2}, \quad (28b)$$

где во втором уравнении приближённое равенство относится к случаю малого ν_1 .

В области $\Delta^2 < \nu_1 \nu_2$ выражение (28a) с достаточной точностью соответствует большему (положительному) корню уравнения (27), а выражение (28b) — меньшему (отрицательному); в противоположном случае $\Delta^2 > \nu_1 \nu_2$, наоборот, выражение (28a) отвечает меньшему (отрицательному) корню, а выражение (28b) — большему (почти всегда положительному) корню. Поэтому в области $\Delta^2 < \nu_1 \nu_2$ условие второго порога приближённо задаётся выражением (28a), а в области $\Delta^2 > \nu_1 \nu_2$ — выражением (28b).

На рис. 2 приведены графики зависимостей точных корней уравнения (27) и приближённых выражений (28) от параметра ширины неоднородной линии Δ . Ещё раз подчеркнём, что значения $C_0^2 < 0$ имеют смысл как корни уравнения (27), которое содержит только чётные степени переменной C_0^2 , но не имеют физического смысла как стационарные значения амплитуды возбуждения парциальной электромагнитной моды (25). В области, где оба корня C_0^2 отрицательны, второй порог совпадает с первым.

Из формул (28) и рис. 2 видны следующие особенности поведения второго порога в зависимости от параметров задачи:

1) При $\Delta = 0$, что соответствует однородно уширенной линии, порог отвечает значению $C_0^2 = \nu_c \nu_1$. Это соответствует нормированным значениям суммарной накачки в две линии $N_p^\Sigma = 2N_p = \nu_c^2$ и большому превышению над порогом $\Pi \equiv N_p^\Sigma / (\nu_2 \nu_c) = \nu_c / \nu_2 \gg 1$. Для параметров, обсуждавшихся в разделе 1, последняя величина равна 2300, что достаточно точно соответствует результатам численного моделирования. Тот факт, что эта величина много больше единицы, означает, как отмечалось в [12], что подобный нестационарный режим не может быть соотнесён с экспериментами по бозе-конденсации диполярных экситонов.

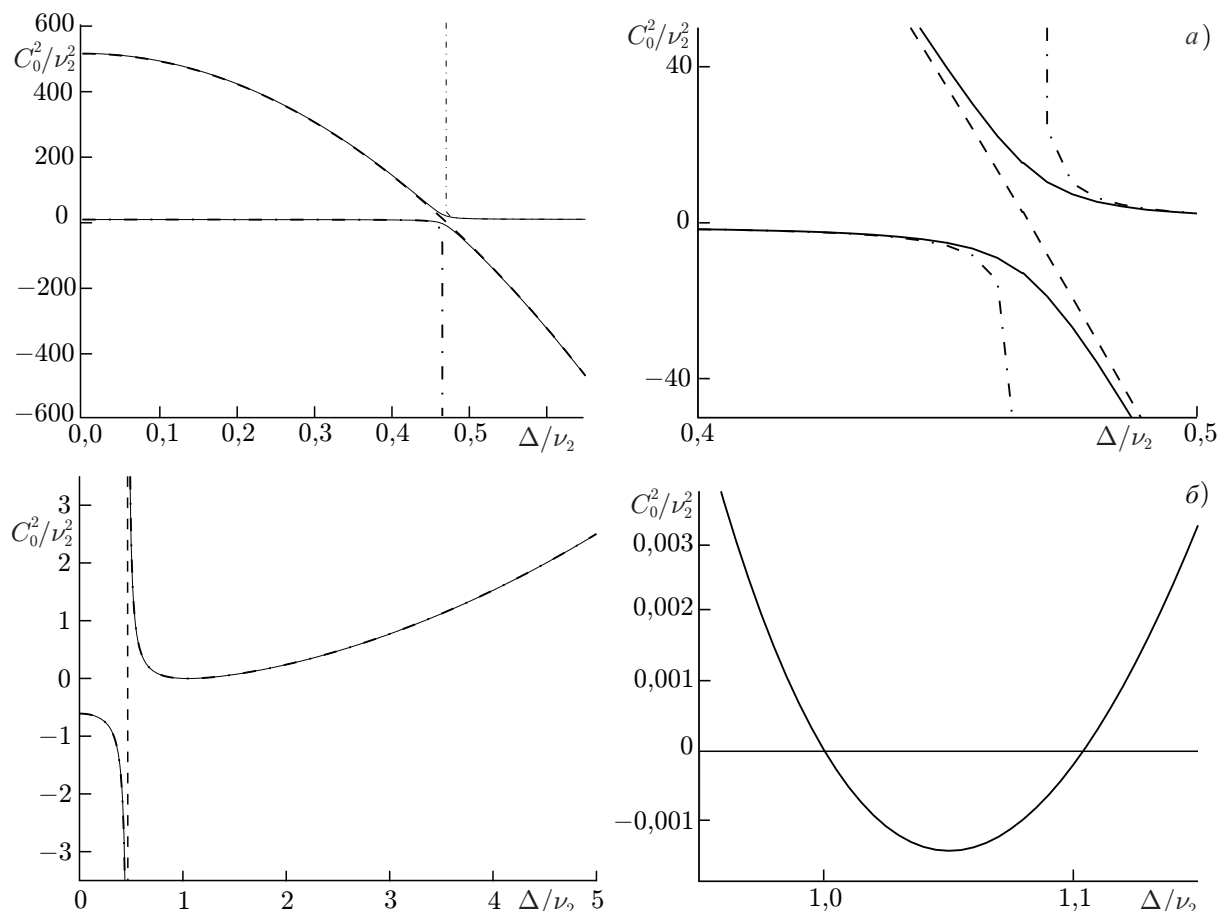


Рис. 2. Зависимость порога неустойчивости стационарного решения, т. е. второго лазерного порога, от параметра ширины неоднородной линии Δ . Сплошные линии — точные корни уравнения (27). Пунктир — приближение (28а). Штрихпунктир — приближение (28б). Все расчёты выполнены для параметров, приведённых в разделе 1. (а) Уменьшение второго порога с увеличением Δ . Справа — тот же график в области $\Delta^2 \approx \nu_2 \nu_1$. (б) Тот же график в области существенного неоднородного уширения (здесь штрихпунктир с высокой точностью совпадает со сплошной линией). Справа — тот же график в окрестности области, в которой первый порог совпадает со вторым

2) С другой стороны, при неоднородном уширении Δ , сравнимом или даже большем однородного уширения ν_2 , порог отвечает значениям $C_0^2 \sim \nu_2 \nu_1$, что соответствует небольшому превышению порога $\Pi \sim 1$, т. е. тому, что второй порог не очень удалён от первого. Например, при $\Delta = 2\nu_2$ имеем пороговое значение $\Pi \approx 1,22$. Это качественно согласуется с результатами численных расчётов для пяти точек по частоте, приведённым в [12].

3) В узкой области параметров $\nu_2^2 < \Delta^2 < \nu_2^2 + \nu_1 \nu_2$ оба корня уравнения отрицательны, т. е. второй порог совпадает с первым.

Таким образом, мы видим, что неоднородное уширение приводит к потере устойчивости стационарного решения при значительно меньших величинах накачки, т. е. к резкому снижению второго лазерного порога; в рамках нашей модели даже наблюдается область, в которой второй порог совпадает с первым. Ясно, что для реальных профилей экситонных линий, содержащих много частотных компонент, основной результат проведённого анализа, т. е. снижение второго порога, сохранится, но, возможно, исчезнет область, в которой второй порог совпадает с первым.

6. О НЕКОТОРЫХ МОДИФИКАЦИЯХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ, НАПРАВЛЕННЫХ НА ИССЛЕДОВАНИЕ ЛАЗЕРНОЙ ГЕНЕРАЦИИ

После превышения накачкой порога генерации поляритонных мод пространственная, в том числе когерентная, структура излучения из ловушки будет определяться в основном структурой генерируемых мод. Реальные пространственные структуры мод не обсуждались выше, поскольку они не важны для выяснения качественных особенностей лазерной генерации и зависят от деталей устройства ловушки. Тем не менее, результаты моделирования позволяют высказать предположения о природе отдельных особенностей пространственных структур излучения, наблюдаемых в экспериментах [4–7]. Например, рассмотрим структуру из четырёх пятен в круглых ловушках (см. рис. 14bc в [4] и рис. 3bc в [5]), которая появлялась при превышении накачкой некоторого порога и в которой была обнаружена когерентность [5], линейная поляризация [6] и двухфотонные корреляции [7]. В рамках вышеизложенного эта структура может быть объяснена, например, биениями двух мод с близкими азимутальными индексами, различающимися на 4, или быть обусловлена генерацией нескольких мод, соответствующих разным пятнам, например двумя парами мод, причём в каждой такой паре азимутальные индексы мод различаются на 2, а структура поля мод одной пары развёрнута относительно структуры мод другой пары на 90° . В последнем случае различная яркость пятен может быть объяснена неоднородностью пространственного распределения экситонов, обусловленной в нашей модели неоднородностью накачки N_p , а следовательно, разными амплитудами поля в парах мод, см. также [12]; она же может объяснить и то, что ориентация пятен фиксирована относительно кристаллографических осей. Тем не менее, подробный анализ пространственно-корреляционной структуры излучения требует детального исследования пространственной структуры лазерных мод и выходит за рамки данной работы.

Лазерная генерация поляритонных мод также должна влиять на спектр наблюдаемого излучения. В рамках рассмотренной простейшей модели последний при невысокой мощности накачки определяется в первую очередь участком неустойчивой ветви поляритонного спектра, которая (см. раздел 2) отклоняется от резонансной частоты экситонов не более чем на величину однородного уширения экситонной линии ν_2 , умноженную на параметр надпороговости Π . При высоких мощностях накачки может возникнуть дополнительное уширение спектра из-за взаимодействия мод. Ширина линии определяется в случае одномодовой стационарной генерации различными шумами (техническими, квантовыми и т. д.) и может быть определена стандартными методами, разработанными для лазеров класса В [10]. В случае многомодовой генерации общая ширина спектра, как уже было сказано, определяется генерируемыми модами, но в любом случае при не слишком больших накачках не превосходит ν_2 . При этом, вообще говоря, ширина спектра лазерной генерации не обязательно напрямую соответствует ширине спектра наблюдаемого из ловушки излучения и вопрос о связи этих величин также требует отдельного рассмотрения, прежде всего, анализа рассеяния поля лазерных мод на носителях, тепловых колебаниях и неоднородностях в ловушке, а также спонтанной рекомбинации сконденсировавшихся экситонов. Однако в любом случае исходная линия лазерной генерации с точностью до величины ν_2 привязана к рекомбинационной частоте основного состояния экситонов в ловушке.

Существующие экспериментальные данные не позволяют в деталях исследовать процессы лазерной генерации в ловушках для дипольных экситонов, поэтому представляют интерес дальнейшие эксперименты, направленные на исследование распределения экситонов и свойств их излучения. Например, это могут быть эксперименты для исследования временных и/или пространственных корреляций $\langle \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) \mathbf{E}(t + \tau, \mathbf{r}') \rangle$ для одинаковых ($\mathbf{r} = \mathbf{r}'$) или разных пространственных точек, а также для исследования интерференции излучения от соседних пятен с учётом их различной поляризации. К сожалению, полученные во всех проведённых экспериментах данные

ограничены сигналами, накопленными на больших промежутках времени и поэтому не позволяющими детально исследовать динамику экситонов и поляритонных мод. Поэтому представляют особый интерес эксперименты по исследованию временной динамики на наносекундных масштабах, если они возможны с учётом достаточно низкого уровня излучения из ловушки. С другой стороны, все выполненные и указанные выше эксперименты базируются на анализе рекомбинационного излучения экситонов; поэтому другие, независимые способы исследования процессов, протекающих в ловушке, также представляют интерес.

Другим важным направлением экспериментальных исследований лазерной генерации в экситонных ловушках является расширение диапазона параметров с целью реализации различных возможных режимов многомодовой генерации, см. [12]. Большинство предложенных ниже модификаций параметров могут быть сравнительно легко реализованы на существующих установках. К примеру, изменение межмодового расстояния Ω_0 может быть достигнуто за счёт использования различных форм ловушки: для увеличения Ω_0 можно использовать квазиодномерные прямоугольные ловушки с длиной L и дифракционно ограниченной шириной b такой, что $L\lambda \gtrsim b^2$, где λ — длина волны рекомбинационного излучения в полупроводнике. Уменьшить Ω_0 можно, обеспечив существование в окрестности экситонного резонанса почти вырожденных мод, например в высоко симметричных ловушках, скажем, круглой, квадратной или треугольной формы с различной ориентацией по отношению к кристаллографическим осям. Декремент затухания парциальных электромагнитных мод $|\text{Im } \delta_m|$ может быть уменьшен за счёт увеличения коэффициента отражения поля от боковых сторон ловушки. В простейшем случае можно протравливать канавку вдоль края ловушки; при этом, если эта канавка будет достаточно глубокой, чтобы затронуть квантовую яму, то будет улучшена и локализация экситонов в ловушке. Ещё более эффективным способом обеспечения отражения от боковых сторон ловушки может быть вытравливание вообще всей гетероструктуры вплоть до высокопроводящего слоя за пределами ловушки и заполнение вытравленной области диэлектриком с малой диэлектрической проницаемостью $\epsilon \sim 1$, благодаря чему образуется резкий скачок проницаемости на границе ловушки, ср. структуры в [14, 15]; подобную структуру можно покрывать сплошной полупрозрачной металлической плёнкой для подачи постоянного напряжения, требуемого в экспериментах с дипольными экситонами. Уменьшению потерь электромагнитного поля, помимо перечисленных мер, способствует также увеличение отражения от подложки и поверхности ловушки, что может быть достигнуто за счёт изготовления структур с брэгговскими зеркалами, подобных используемым в поверхностно-излучающих лазерах с вертикальным резонатором (VCSEL).

Одним из способов изменения формы экситонной линии и спектральной плотности экситонов может быть выращивание нескольких квантовых ям, разделённых достаточно широкими барьерами. С одной стороны, это увеличит неоднородное уширение из-за неизбежных различий параметров ям; с другой стороны, это позволит получать более высокую спектральную плотность экситонов до достижения порога конденсации, тем самым обеспечивая лазерную генерацию поляритонных мод на неоднородно уширенной линии (см. раздел 4). Более того, при использовании нескольких квантовых ям конденсаты в отдельных ямах могут взаимодействовать через общее электромагнитное поле, что представляется весьма интересным и с точки зрения фундаментальных аспектов квантовой механики мезоскопических систем.

Следует также отметить возможность использования импульсной накачки, которая позволит создать высокую спектральную плотность экситонов не в наинизшем состоянии за счёт конечного времени релаксации экситонов и за счёт их взаимодействия, что может обеспечить лазерную генерацию на несконденсированных экситонах. Мы не будем более подробно обсуждать эти и другие возможные эксперименты. Отметим лишь, что указанная область исследования является многообещающей как с экспериментальной, так и с теоретической точки зрения.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе рассмотрены условия реализации и различные особенности лазерной генерации поляритонных мод, имеющие как общий характер, так и связанные с деталями конкретной экспериментальной установки для получения бозе-конденсата диполярных экситонов. Показано, что для типичных параметров, соответствующих лазерам класса D, неустойчивая ветвь поляритонного спектра лежит в достаточно узкой полосе около рекомбинационной частоты основного состояния экситонов и поэтому лазерная генерация также происходит в сравнительно узком диапазоне частот, практически определяемом однородной шириной спектральной линии экситонов, даже если соответствующие парциальные электромагнитные моды имеют гораздо более широкое спектральное распределение. Исследовано влияние неоднородного распределения экситонов по ловушке на селекцию мод, участвующих в генерации. Изучено поведение порога неустойчивости поляритонных мод в окрестности порога бозе-конденсации и обнаружено, что при приближении к последнему по концентрации или температуре экситонов незадолго до конденсации происходит резкое снижение порога генерации за счёт сужения спектра надконденсатных экситонов; дальнейшее образование конденсата и формирование отвечающей ему однородно уширенной спектральной линии уже не приводит к столь сильному снижению порога лазерной генерации. В рамках простейшей модели получено условие порога неустойчивости стационарной лазерной генерации, т. е. второго лазерного порога, и показано, что для неоднородно уширенной линии экситонов он намного ниже, чем для однородной линии; в рамках этой модели существует даже узкая, но конечная область параметров, в которой второй порог совпадает с первым, т. е. в которой сразу после достижения порога генерации стационарный режим является неустойчивым и поэтому должен реализоваться импульсный или даже квазихаотический режим.

В статье также предложены некоторые эксперименты, позволяющие более подробно изучить детали лазерной генерации и реализовать её различные режимы. Осуществление подобных экспериментов и дальнейшее исследование процессов лазерной генерации поляритонных мод в гетероструктурах с экситонами даст дополнительную информацию как о процессах, протекающих в экситонной ловушке, так и о фундаментальных процессах, связанных с бозе-конденсацией в неравновесных системах.

Работа поддержана РФФИ (грант 09-02-00909-а) и программой фундаментальных исследований президиума РАН (проект 1.7.9).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лозовик Ю. Е. // Успехи физических наук. 2009. Т. 179, № 3. С. 309.
2. Deng H., Haug H., Yamamoto Y. // Rev. Mod. Phys. 2010. V. 82, No. 2. P. 1489.
3. Butov L. V. // J. Physics: Condensed Matter. 2004. V. 16, No. 50. P. R1577.
4. Timofeev V. B., Gorbunov A. V., Larionov A. V. // J. Physics: Condensed Matter. 2007. V. 19, No. 29. Art. no. 295209.
5. Горбунов А. В., Тимофеев В. Б. // Письма в ЖЭТФ. 2006. Т. 84, № 6. С. 290.
6. Горбунов А. В., Тимофеев В. Б. // Письма в ЖЭТФ. 2008. Т. 87, № 12. С. 797.
7. Горбунов А. В., Тимофеев В. Б., Демин Д. А., Дремин А. А. // Письма в ЖЭТФ. 2009. Т. 90, № 2. С. 156.
8. Калинин П. А., Кочаровский В. В., Кочаровский Вл. В. // Квантовая электроника. 2009. Т. 39, № 11. С. 1086.

9. Kalinin P. A., Kocharovsky V. V., Kocharovsky Vl. V. // Laser Physics. 2010. V. 20, No. 12. P. 2011.
10. Khanin Ya. I. Fundamentals of laser dynamics. Cambridge International Science Publishing, 2006. 361 p.
11. Belyanin A. A., Kocharovsky V. V., Kocharovsky Vl. V. // Quantum and Semiclassical Optics. B. 1997. V. 9, No. 1. P. 1.
12. Калинин П. А., Кочаровский В. В., Кочаровский Вл. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 2011. Т. 54, № 4. С. 291.
13. Горбунов А. В., Ларионов А. В., Тимофеев В. Б. // Письма в ЖЭТФ. 2007. Т. 86, № 1. С. 48.
14. Bajoni D., Senellart P., Wertz E., et al. // Phys. Rev. Lett. 2008. V. 100, No. 4. Art. no. 047401.
15. Blokhin S., Lott J., Mutig A., et al. // Electron. Lett. 2009. V. 45, No. 10. P. 501.

Поступила в редакцию 17 мая 2011 г.; принята в печать 30 мая 2011 г.

CONDITIONS AND FEATURES OF LASING IN TRAPS FOR BOSE-CONDENSATION OF DIPOLAR EXCITONS

P. A. Kalinin, V. V. Kocharovsky, and Vl. V. Kocharovsky

We study the conditions and features of polariton mode lasing in traps for Bose-condensation of dipolar excitons. We discuss the spectral linewidth of lasing modes and effects of spatial and spectral inhomogeneity of exciton distribution. We study in details the possibility of polariton mode lasing in the vicinity of condensation threshold. We examine the impact of inhomogeneous broadening of the exciton line on the stability of stationary lasing. We also propose additional experiments aimed on obtaining more information about polariton mode lasing in semiconductor structures for Bose-condensation of excitons.