УДК 534.6+534.23

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕКОНСТРУКЦИИ ДИАГРАММЫ НАПРАВЛЕННОСТИ ВЫТЯНУТОГО ИСТОЧНИКА ПО ИЗМЕРЕНИЯМ В БЛИЖНЕМ ПОЛЕ

И. Ш. Фикс, Г. Е. Фикс

Институт прикладной физики РАН, г. Нижний Новгород, Россия

Предложен метод определения диаграммы направленности вытянутого излучателя по измерению давления в его ближнем поле. Метод основан на параметризации излучателя набором сферических источников. Параметры (амплитуды сферических гармоник, определяемые путём решения обратной задачи) используются для расчёта диаграммы направленности излучателя. Основное внимание уделено случаю, когда излучатель имеет вытянутую форму. Приводятся результаты численного моделирования.

ВВЕДЕНИЕ

Интенсивное развитие методов определения дальних полей пространственно развитых излучающих систем по измерениям в их ближней зоне началось почти 50 лет назад. Наиболее часто использовался классический подход, базирующийся на интегральных преобразованиях полей, характеристики которых заданы на некоторой замкнутой поверхности, окружающей произвольный излучатель. Полагается известной функция Грина первой краевой задачи для этой поверхности (часто называемой поверхностной функцией Грина или функцией Грина второго рода) и распределение поля давления на ней (применительно к акустике). В этом случае угловая зависимость поля источника в дальней зоне определяется путём интегрального преобразования распределения поля на поверхности с ядром, представляющим функцию Грина (здесь и далее имеется в виду функция Грина первой краевой задачи).

В основном для измерений использовались простые поверхности, для которых функции Грина известны аналитически: плоская или цилиндрическая, реже — сферическая поверхность. К сожалению, для произвольной поверхности функция Грина может быть рассчитана только численно, что требует значительных вычислительных затрат и предполагает детальное исследование вопросов сходимости (основные идеи и методы изложены в [1]). Отметим, что в последнее время разрабатываемые и исследуемые в работах [2–4] методы решения дифракционных задач позволили достичь определённого прогресса в вопросах численного расчёта функций Грина. Важно, что при таком подходе не требуется дополнительная информация ни о самом источнике, ни о его расположении относительно измерительных элементов [1]. В принципе, если геометрия излучающей апертуры известна, то, решая тем или иным способом обратную задачу, мы можем непосредственно реконструировать на ней распределения давления и колебательной скорости [5]. И далее, используя определённые приближения, рассчитать поле такого источника.

Альтернативный подход к задаче реконструкции дальних полей излучателей заключается в использовании параметрических методов для оценивания их характеристик. Эти методы базируются на представлении излучателя набором сторонних источников, создающих измеряемое поле. Затем решается обратная задача: по измеренным значениям ближнего поля реконструируется

[1] Конечно, на практике, когда измерения проводятся на «ограниченных» или незамкнутых поверхностях такая информация становится необходимой для определения области, в которой дальнее поле источника будет вычисляться с «контролируемой» погрешностью.

амплитудно-фазовое распределение сторонних источников, на основе которых и рассчитывается дальнее поле излучателя [6–8]. Обычно при параметризации использовались достаточно простые модели распределений сторонних источников (монополи, диполи). Преимущество такого подхода очевидно: «произвольность» конфигурации поверхности, на которой измеряется поле (известен ли вид функции Грина для неё или нет, никакой роли не играет). Наибольшая проблема здесь состоит в адекватности описания излучателя набором сторонних источников. Её решение требует исследования «устойчивости» полученных результатов (реконструированных дальних полей) к используемой параметризации излучателя.

Предлагаемая работа направлена на обоснование подхода, использующего описание излучателя набором сторонних источников, для решения задачи определения его диаграммы направленности по измерениям ближнего поля. Сформулировано необходимое и достаточное условие для того, чтобы поле реального излучателя звука на «измерительной» поверхности и, соответственно, и вне неё, могло быть описано системой сферических источников. Параметры этих источников — амплитуды сферических гармоник, определяемые по результатам измерения ближнего поля излучателя путём решения обратной задачи, используются для расчёта его диаграммы направленности. Для случая, когда излучатель имеет вытянутую форму, предложено приближённое решение задачи, позволяющее существенно снизить требования к вычислительным ресурсам.

1. ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть имеется замкнутая поверхность S_0, внутри которой находятся источники звука, излучающие на частоте ω; вне S_0 источников нет. Отметим, что S_0 может являться поверхностью излучателя, а может и просто ограничивать объём, в котором располагаются источники звука. Общая задача состоит в том, чтобы по измерениям поля этих источников на поверхности S, охватывающей S_0, рассчитать дальнее поле излучателя. Очевидно, что для её решения будет достаточно определить амплитуды описывающих его расходящихся сферических волн.

Учтём, что поле вне объёмного излучателя звука может быть воссоздано эквивалентной системой распределённых точечных монопольных источников, расположенных в занимаемой им области [10]. Тогда, в принципе, можно было бы просто параметризовать излучатель дискретными монополями, расположенными внутри S_0. Однако, хорошо известно, что на практике при численных расчётах определение их амплитуд с приемлемой точностью невозможно из-за крайне плохой обусловленности обращаемой матрицы при решении обратной задачи. Тем самым встаёт вопрос о параметризации излучателя, обеспечивающей, во-первых, описание его поля в каждой точке измерительной поверхности в виде расходящихся волн, и, во-вторых, приемлемую обусловленность обращаемой матрицы.

Дальнейшее рассмотрение будет основываться на так называемом мультипольном разложении [9, 10]: поле излучателя вне охватывающей его сферической поверхности представимо в виде суммы расходящихся из её центра сферических волн (или может быть непосредственно описано с помощью суперпозиции мультипольных источников). В работе ограничимся описанием поля сферическими волнами. Сторонний источник, порождающий такие сферические волны (гармоники), будем называть сферическим источником.

Отметим, что количество требуемых сферических источников для того, чтобы поле на измерительной поверхности представляло бы собой суперпозицию расходящихся волн, будет зависеть от конфигурации и взаимного расположения поверхности S и излучателя. Так очевидно, что в простейшем случае, когда измерительная поверхность S охватывает сферу S_1, внутри которой расположен излучатель, ограниченный поверхностью S_0 (см. рис. 1*a*), достаточно одного сферического источника, расположенного в центре S_1.

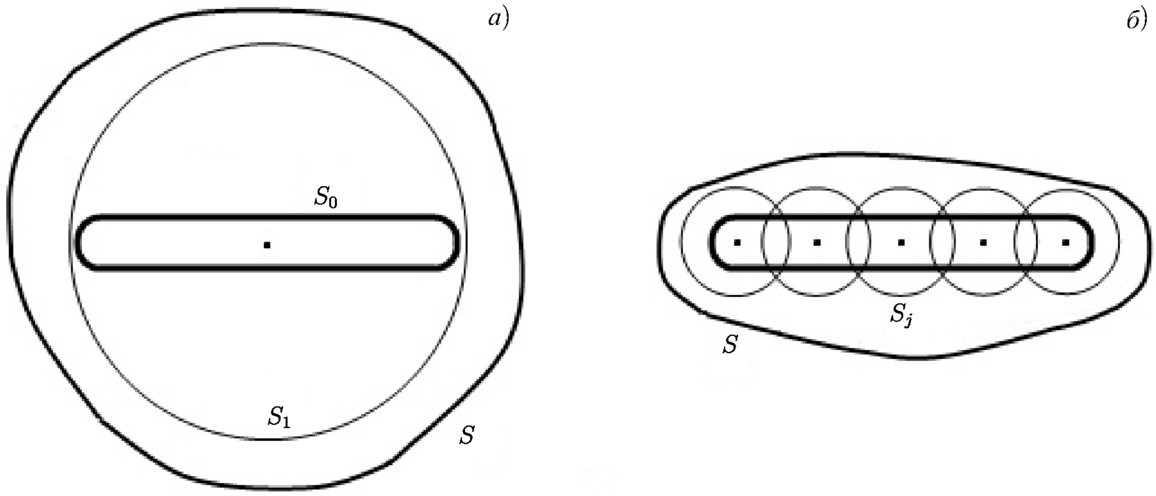

Рис. 1. Взаимное расположение измерительной поверхности и излучателя

Рассмотрим более общий случай, когда точки измерительной поверхности S могут располагаться внутри сферы, окружающей излучатель. На таких участках поверхности S поле излучателя при его параметризации одним сферическим источником будет представлять собой неразделимую смесь расходящихся и «приходящих» волн [1], что не допустимо при решении задачи. Для того, чтобы поле в каждой точке измерительной поверхности являлось бы суммой только расходящихся волн, необходимо разделить излучатель на области так, что описывающие их сферы целиком лежали бы внутри измерительной поверхности. Мы всегда можем это сделать, учитывая принцип суперпозиции и возможность описания поля вне излучателя посредством введения эквивалентной плотности распределения монопольных источников (либо из принципа суперпозиции, применяя интегральную формулу Грина и учитывая полноту и ортогональность сферических функций) [9, 10]. Наглядное представление даёт рис. 1*б*: система J сферических поверхностей S_j, $j = 1, \ldots, J$, с одной стороны, полностью содержит излучатель (область внутри S_0), с другой — находится внутри измерительной поверхности. При выполнении этого условия поле излучателя в любой точке пространства, расположенной вне системы S_j, будет представлять собой сумму расходящихся из центров этих поверхностей (точки на рисунке) сферических волн. Таким образом, для описания поля на поверхности S при её близком расположении к излучателю может понадобиться много сферических источников.

Заметим, что выбор количества сторонних источников и расположения координат их центров o_j в большой степени произволен — необходимо лишь соблюдение вышеприведённого условия, которое формально выглядит следующим образом. Для любой точки внутри S_0 должна существовать по крайней мере одна точка o_j, такая, что расстояние между ними было бы меньше расстояния от o_j до любой точки поверхности S. Это условие, которое в дальнейшем будем считать выполненным, является необходимым и достаточным для того, чтобы поле реального излучателя звука, ограниченного поверхностью S_0, на поверхности S, а, следовательно, в силу теоремы единственности [9, 10] и вне неё, было бы описано с помощью системы сферических источников, расположенных в точках o_j. Естественно, что такая параметризация излучателя не единственная. Например, при заданном взаимном расположении поверхностей S и S_0 можно определить лишь минимальное число сферических источников. Далее, наличие «общих» областей внутри S_0, т. е. точек, для которых приведённое выше формальное условие выполняется одновременно для двух или более точек o_j, не позволит однозначно определить амплитуды сферических гармоник таких источников (появляются их линейно зависимые комбинации). Так очевидно, что поле источника, расположенного в общей области пересечения сфер S_j, вне S_j может быть представлено в виде бесконечной суммы сферических гармоник с центрами в любой из точек o_j. Однако ясно, что такая неоднозначность никак не скажется на значениях поля на поверхности S и вне неё.

Таким образом, сформулированная выше задача сводится к определению амплитуд сферических гармоник сторонних источников, описывающих излучатель. Амплитуды гармоник могут быть найдены по измерениям поля на поверхности S путём решения обратной задачи. При известных амплитудах расчёт поля излучателя вне поверхности S тривиален. Определение свойств поверхности S выходит за рамки статьи [2]. С учётом того, что измерения предполагается проводить в конечном числе точек, определение свойств S здесь не является принципиальным.

Перейдём теперь к формальной постановке задачи. Введём J локальных сферических систем координат r^j, θ^j, φ^j с центрами в точках o_j. Тогда поле сферических источников звука (временна́я зависимость $\exp(-i\omega t)$), расположенных в o_j, на поверхности S и вне неё может быть записано в виде:

$$p^j(r^j,\theta^j,\varphi^j)=\sum_{n=0}^{\infty}h_n^{(1)}(kr^j)\sum_{m=0}^{n}P_n^m(\cos\theta^j)\,[a_{nm}^j\cos(m\varphi^j)+b_{nm}^j\sin(m\varphi^j)],\tag{1}$$

где $P_n^m(\cos\theta^j)$ — присоединённые функции Лежандра первого рода, $h_n^{(1)}(kr^j)$ — сферические функции Бесселя третьего рода, k — волновое число, a_{nm}^j, b_{nm}^j — коэффициенты разложения или амплитуды сферических волн, подлежащие определению. Коэффициенты b_{n0}^j в (1) полагаются равными нулю (формально они должны отсутствовать, но были введены для краткости записи). Таким образом, поле излучателя, параметризованного сферическими источниками, на поверхности S есть сумма их полей:

$$p=\sum_{j=1}^{J}p^j(r_s^j,\theta_s^j,\varphi_s^j),\tag{2}$$

где $(r_s^j,\theta_s^j,\varphi_s^j)\in S$.

Полагая, что поле $p=p_l$ задано (или измерено) в конечном числе точек $l=1,\ldots,L$ на поверхности S, сведём (2) к конечномерной системе линейных алгебраических уравнений. Для этого пока независимо от j ограничим верхний предел внешней суммы (1) числом N и введём векторно-матричные обозначения. Величины p_l будем рассматривать как элементы $L\times 1$ вектора-столбца $\mathbf{p}$. Аналогично введём векторы-столбцы $\mathbf{c}^j$, элементы которых есть упорядоченные по парам индексов n,m значения амплитуд сферических гармоник a_{nm}^j и b_{nm}^j. Полное число компонент каждого вектора $\mathbf{c}^j$ есть $(N+1)^2$. Далее введём матрицы $\mathbf{G}^j$, элементы которых представляют собой упорядоченные коэффициенты, связывающие значение поля p_l и амплитуду соответствующей гармоники (см. (1)). В этих обозначениях правая часть (1) запишется в виде $\mathbf{G}^j\mathbf{c}^j$, и для (2) мы получим $\mathbf{p}=\sum_j\mathbf{G}^j\mathbf{c}^j$. Обозначив $\mathbf{G}=\left[\mathbf{G}^1,\mathbf{G}^2,\ldots,\mathbf{G}^J\right]$ и $\mathbf{c}=\left[\mathbf{c}^1,\mathbf{c}^2,\ldots,\mathbf{c}^J\right]^{\mathrm{T}}$, индекс T обозначает транспонирование, вместо (2) окончательно получим систему линейных уравнений

$$\mathbf{p}=\mathbf{G}\mathbf{c}.\tag{3}$$

Далее будем считать, что число точек L, по значениям поля в которых определяются амплитуды гармоник, достаточно для описания всех $J\,(N+1)^2$ гармоник. Строго говоря, соотношение

[2] С одной стороны, по-видимому, достаточно, чтобы она была поверхностью Ляпунова [10]. С другой стороны, ясно, что по измерениям, например, на поверхности куба, которая не является поверхностью Ляпунова, можно определить амплитуды сферических гармоник, расходящихся из его центра, т. е., имеются случаи, где достаточно, чтобы поверхность S была кусочно-гладкой.

между ними должно определяться из конкретной зависимости амплитуд гармоник от их номера. В отсутствие такой информации обычно полагают $L \gg J\,(N+1)^2$.

Теперь заметим, что число гармоник каждого сферического источника, требующих восстановления, очевидно зависит от того, на каком удалении от излучателя предполагается реконструировать его поле. Так, при реконструкции диаграммы направленности излучателя не имеет смысла учитывать гармоники, поля которых быстрого спадают с расстоянием. В этом случае число гармоник $(N_0+1)^2$, определяющих дальнее поле каждого сферического источника, сравнительно невелико. Приближённо при $kR/J \gg 1$ можно ограничиться величиной N_0, не превосходящей $(2{\div}3)\,kR/J$, а при $kR/J < 1$ — величиной $N_0 = 3$; здесь R — максимальное из расстояний от точек o_j до поверхности S_0. Однако, учитывая, что определённый соответствующим образом вектор $\mathbf{c}$ не является сингулярным вектором матрицы $\mathbf{G}$, для качественного восстановления его элементов (амплитуд гармоник) требуется, чтобы каждый сферический источник описывался бы гармониками степени $N \gg N_0$. Следовательно, для уменьшения ошибки реконструкции требуется привлечение большого числа гармоник.

Таким образом, учитывая большое число $J\,(N+1)^2$ параметров, подлежащих определению, и вид элементов матрицы $\mathbf{G}$, можно с определённостью сказать следующее: в общем случае, особенно при больших J, матрица $\mathbf{G}$ будет столь плохо обусловлена, что на примере её численное обращение не представляется возможным. Использование обычных процедур регуляризации затруднительно, т. к. основной вклад в дальнее поле определяют элементы векторов $\mathbf{c}$, имеющих существенные проекции на те сингулярные векторы матрицы $\mathbf{G}$, которым отвечают очень маленькие сингулярные числа. Поэтому для улучшения обусловленности представляется целесообразным с учётом конкретной геометрии поверхности S_0 уменьшить число реконструируемых параметров, не изменяя величины N.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ В СЛУЧАЕ ВЫТЯНУТОГО ИЗЛУЧАТЕЛЯ

Примем, что ограничивающая излучатель поверхность S_0 вытянута вдоль оси z. Для наглядности положим, что S_0 является поверхностью вытянутого цилиндра с осью z (или, например, вписана в неё), радиусы оснований $r_{\rm c}$, координаты их центров $\pm z_{\rm c}$. Далее ограничимся рассмотрением ситуации, когда сторонние источники, описывающие излучатель, расположены эквидистантно на оси z (см. рис. 1*б*). Очевидно, что минимальное число сторонних источников определяется удалением точек поверхности S от S_0. Для определённости положим, что измерения проводятся на поверхности параллелепипеда, бóльшая ось которого совпадает с осью z, основания — квадраты со стороной $2r_{\rm p}$, координаты центров оснований $\pm z_{\rm p}$). Тогда при условии $z_{\rm p} > z_{\rm c} + r_{\rm c}$ легко видеть, что минимальное число сферических источников J равно $z_{\rm c}/\sqrt{r_{\rm p}^2 - r_{\rm c}^2}$ с округлением до целого в большую сторону. В этом случае координаты точек o_j есть $z_j = z_{\rm c}\,(2j - 1 - J)/J$. Например, для описания поля излучателя на поверхности S при $r_{\rm p} > \sqrt{z_{\rm c}^2 + r_{\rm c}^2}$ будет достаточно одного сферического источника (см. рис. 1*а*); при уменьшении r_p их число естественно увеличивается.

Допустим, что число сторонних источников J велико и расстояние между соседними источниками $2z_{\rm c}/J$ существенно меньше $r_{\rm c}$ и длины волны. Тогда, в первом приближении при расчёте (2), суммируя поля сферических источников при j, отличном от 1 и J, мы можем ограничиться во внутренней сумме (1) только членами с $n = m$. Грубо говоря, такое приближение соответствует тому, что зависимость поля от координаты z на поверхности S может быть описана более простым распределением амплитуд сферических гармоник, центры которых расположены на оси z, от которой отсчитывается полярный угол θ. Соответствующие такому приближённому описанию матрицы будем отмечать нижним индексом: $\mathbf{G}_{\mathrm{a}}^{j}$. Таким образом $\mathbf{G}_{\mathrm{a}} = \left[\mathbf{G}^1, \mathbf{G}_{\mathrm{a}}^2, \ldots, \mathbf{G}_{\mathrm{a}}^{J-1}, \mathbf{G}^J\right]$. Отметим, что число гармоник (элементов вектора $\mathbf{c}$), подлежащих определению, уменьшится и составит $2\,(N+1)^2 + (J-2)\,(2N+1)$ против $J\,(N+1)^2$ в общем случае. Это, в свою очередь, позволит значительно снизить требования к вычислительным ресурсам, необходимым для решения задачи.

Таким образом, вместо системы (3) получим

$$\mathbf{p} = \mathbf{G}_{\mathrm{a}}\mathbf{c}. \tag{4}$$

Решив эту систему, можно найти вектор $\mathbf{c}_0$, зная который, мы можем легко рассчитать поле в любой точке вне поверхности S.

3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Вначале отметим, что система (4) является переопределённой: число неизвестных (компоненты вектора $\mathbf{c}$) меньше числа уравнений L, и матрица $\mathbf{G}_{\mathrm{a}}$ в силу дискретного расположения точек, в которых проводятся измерения, и конечного числа гармоник имеет полный ранг, хотя и может быть очень близка к вырожденной.

Важно отметить, что строго получить истинные значения амплитуд сферических гармоник при $J > 1$ по измерениям суммы порождаемых ими полей практически невозможно. Полученный в результате решения (4) или (3) вектор $\mathbf{c}_0$ может значительно отличаться от истинного. Однако при этом поле на измерительной поверхности $\mathbf{G}_{\mathrm{a}}\mathbf{c}_0$, рассчитанное по найденному решению, может оказаться весьма близким к измеренному $\mathbf{p}$. Очевидно, что в случае, когда величина отличия полей $\mathbf{G}\mathbf{c}_0$ и $\mathbf{p}$ будет пренебрежимо мала, поле снаружи поверхности S, рассчитанное на основе полученного решения, будет мало отличаться от поля излучателя.

Далее ограничимся наиболее простым критерием близости измеренного и реконструированного полей и будем искать решение (4) в среднеквадратическом приближении, т. е. решение, минимизирующее ошибку $\|\mathbf{p} - \mathbf{G}_{\mathrm{a}}\mathbf{c}\|^2$. Такое решение хорошо известно:

$$\mathbf{c}_0 = (\mathbf{G}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{H}}\mathbf{G}_{\mathrm{a}})^{-1}\,\mathbf{G}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{H}}\mathbf{p}, \tag{5}$$

где индекс H обозначает эрмитово сопряжение. По найденному решению $\mathbf{c}_0$ легко рассчитать поле $p(r,\theta,\varphi)$ в любой точке вне поверхности S и, в частности, угловую зависимость дальнего поля излучателя или его диаграмму направленности, которую определим как

$$d(\theta,\varphi) = \lim_{r\to\infty}[r\exp(-ikr)p(r,\theta,\varphi)].$$

Поле $p(r,\theta,\varphi)$ тривиально определяется по найденным амплитудам сферических гармоник — элементам вектора (5). Заметим, что используемая параметризация излучателя эквивалентна его представлению в виде эквидистантной дискретной линейной антенны, элементы которой являются сферическими источниками.

Остановимся на ограничениях возможности реконструкции диаграммы направленности в рамках используемой модели представления поля излучателя: конечное число сферических гармоник, приближённое описание $\mathbf{G}_{\mathrm{a}}$ вместо строгого $\mathbf{G}$ и критерий малости невязки $\|\mathbf{p} - \mathbf{G}_{\mathrm{a}}\mathbf{c}\|^2$ на S. Ниже рассмотрим два первостепенных фактора, которые на практике препятствуют привлечению для описания поля излучателя большого числа сферических гармоник, обеспечивающих, как отмечалось ранее, малость ошибки реконструкции. Исследования проиллюстрируем численно для случая, когда измерительная поверхность S представляет собой параллелепипед с $r_{\mathrm{p}} = 1$ м,

$z_{\rm p} = 7$ м, а излучатель описывается $J = 8$ сферическими источниками (ограничивающая его поверхность S_0 — цилиндр с $r_{\rm c} = 0{,}5$ м, $z_{\rm c} = 5$ м). Волновое число $k = 1$ м$^{-1}$.

Во-первых, число гармоник не должно превышать некоторого значения, при котором ещё можно получить решение системы (4) с предельной точностью. Для этого требуется, чтобы при численных расчётах $q \ll 1/\delta_0$, где q — число обусловленности обращаемой матрицы, δ_0 — погрешность проведения вычислений [3]. Учитывая, что в подавляющем большинстве случаев вычисления проводятся с двойной точностью (числа двойной точности с плавающей запятой обеспечивают относительную точность около 16 десятичных цифр), можно положить $\delta_0 \approx 10^{-16}$. Таким образом, число обусловленности обращаемой матрицы не должно превышать величины порядка 10^{14}. С этой точки зрения, при практических вычислениях вместо (5) более предпочтительна запись решения в виде

$$\mathbf{c}_0 = \mathbf{G}_{\rm a}^{+}\mathbf{p}, \tag{6}$$

где $\mathbf{G}_{\rm a}^{+}$ — псевдообратная $\mathbf{G}_{\rm a}$ матрица [11] (матрица Мура—Пенроуза). Для её вычисления использовался хорошо известный алгоритм SVD [11]. Очевидно, что при использовании для расчётов формулы (6) число обусловленности матрицы $\mathbf{G}_{\rm a}$ не должно превышать 10^{14}, тогда как использование (5) очевидно ограничивает q величиной порядка 10^{7}. Далее для улучшения обусловленности целесообразно предварительно провести масштабирование столбцов $\mathbf{G}_{\rm a}$ [12] с использованием диагональной матрицы, элементы которой обратно пропорциональны нормам полей соответствующих гармоник на сфере радиуса r_p с весами, отвечающими их вкладу в дальнее поле. На рис. 2*а* приведены зависимости чисел обусловленности матриц $\mathbf{G}_{\rm a}$, приближённо описывающих излучатель (кривая *1* с масштабированием и кривая *3* — без масштабирования) и для матриц $\mathbf{G}$, используемых при полном описании (кривые *2* и *4* соответственно). Отчётливо видно, что применение масштабирования приводит к существенному увеличению предельного значения степени N привлекаемых для реконструкции гармоник (в дальнейшем расчёты будут приводиться только для матриц с масштабированием).

Во-вторых, диаграмма направленности, построенная на основе полученного решения $\mathbf{c}_0$, должна быть устойчива, т. е. величина ошибки, появляющейся в ней из-за отклонений элементов вектора $\mathbf{p}$ от заданных значений, связанных, например, с погрешностью измерений или внешней помехой, должна быть мала. Конечно, с учётом корректности прямой задачи определения диаграммы направленности по значениям поля на поверхности S с использованием функции Грина, соответствующая величина ошибки не может быть большой. Однако в рассматриваемой постановке задачи есть промежуточный этап — построение вектора $\mathbf{c}_0$, которое в силу конечной точности вычислений может в итоге привести к значительным ошибкам в диаграмме направленности. Определить граничное значение N, при котором происходит потеря устойчивости, наиболее просто по характеру зависимости величины среднеквадратического отклонения (СКО) реконструированной диаграммы направленности, рассчитанной в предположении, что вариации измеренного поля, связанные, например, с собственными шумами приёмников, в различных точках независимы и имеют одинаковую дисперсию ε, а поле излучателя отсутствует. На рис. 2*б* приведены зависимости среднеквадратического отклонения диаграммы направленности, вычисленные для случаев приближённого и полного описания излучателя: кривые *1* и *2* соответственно.

Из приведённых данных видно, что потеря устойчивости в случае использования строгого описания излучателя (матрица $\mathbf{G}$) ограничивает степень привлекаемых для реконструкции гармоник значением $N = 13$, при этом число обусловленности $q \approx 6 \cdot 10^{13}$. В то же время, в случае приближённого описания, ограничение наступает гораздо позднее — при $N = 26$. Следует отме-

[3] Отметим, что невыполнение приведённого условия в рассматриваемой постановке задачи не обязательно должно привести к потере точности при реконструкции диаграммы направленности.

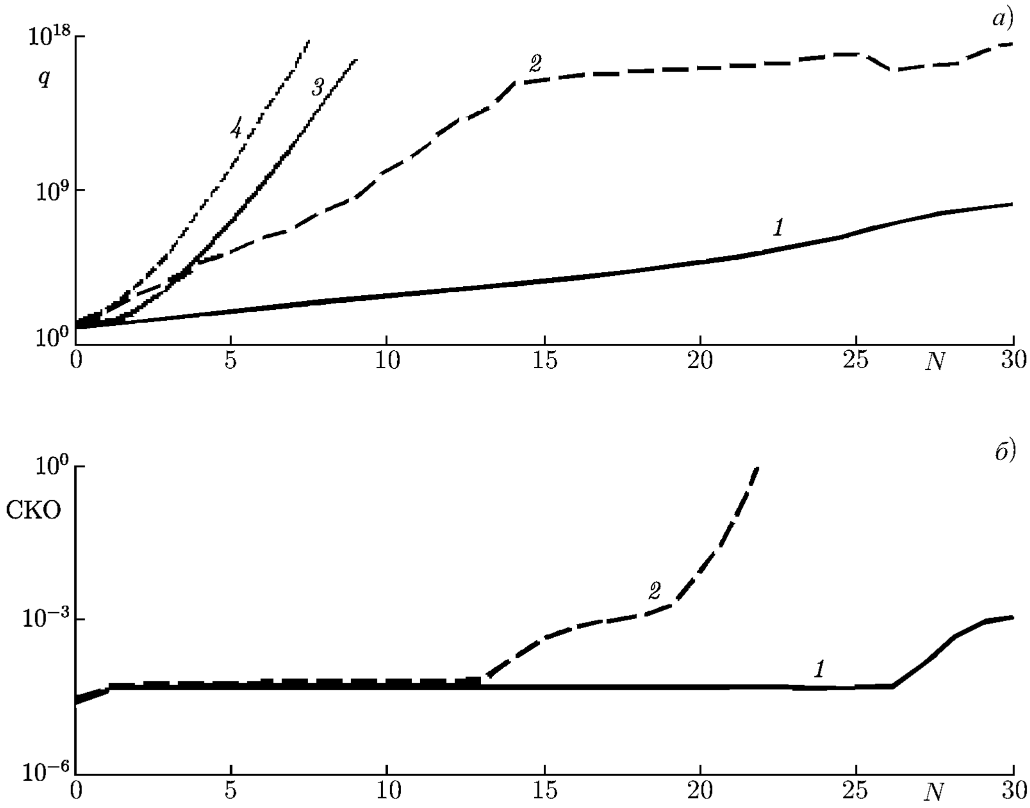

Рис. 2. Зависимости чисел обусловленности (a) и среднеквадратического отклонения диаграммы направленности ($б$) от степени привлекаемых для реконструкции гармоник

тить, что в последнем случае $q \approx 7 \cdot 10^6$, что значительно меньше допустимого значения 10^{14}.

Таким образом, степень старшей гармоники можно определить минимальным значением N, при котором либо обусловленность соответствующей матрицы превысит допустимую величину, либо решение станет неустойчивым.

4. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

При моделировании конфигурации поверхностей S и S_0 значения числовых параметров такие же, как и в предыдущем разделе. Погрешность реконструкции диаграммы направленности характеризовалась величиной ошибки

$$\delta = \left(\frac{1}{4\pi} \int\limits_{4\pi} \Bigl| d_0(\theta,\varphi) - d(\theta,\varphi) \Bigr|^2 \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi \right)^{1/2}, \tag{7}$$

где $d_0(\theta,\varphi)$ и $d(\theta,\varphi)$ — точное (тестовое) и реконструированное значения диаграммы направленности соответственно. В качестве тестового излучателя был выбран монополь единичной амплитуды. Проведённые расчёты показали, что наибольшая ошибка соответствует случаю, когда тестовый монополь располагался в самых удалённых от начала координат точках поверхности цилиндра; ниже данные расчётов приводятся для одной из таких точек: $r = 0{,}5$ м, $z = 5$ м.

Далее ошибка вычислялась для случая, когда измерения давления проводятся в присутствии аддитивной внешней помехи — к правой части (3) или (4) добавлялся вектор, элементы которого являлись независимыми случайными величинами, распределёнными по нормальному закону с

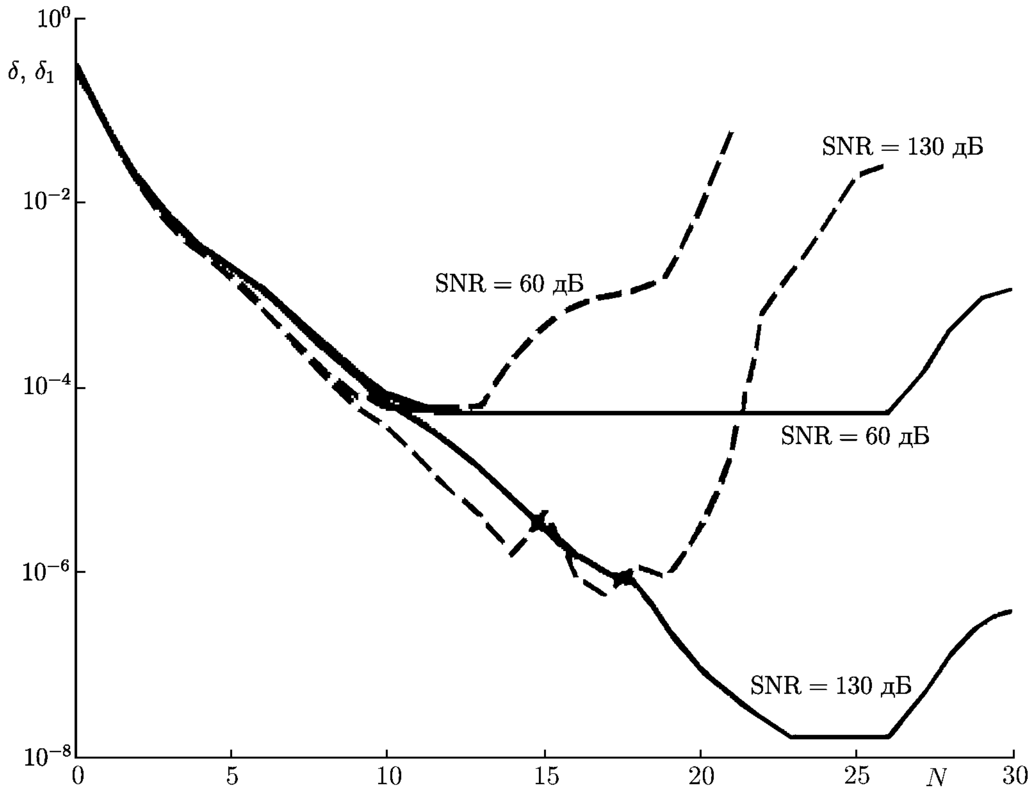

Рис. 3. Зависимости ошибок реконструкции диаграммы направленности от N для различных отношений сигнал/помеха (SNR); штриховая линия — строгое решение, сплошная линия — приближённое решение

нулевым средним и одинаковой дисперсией ε. Число случайных реализаций вектора при определении ошибки составляло 500.

На рис. 3 приведены зависимости ошибок реконструкции диаграммы направленности δ от N при двух значениях среднего по всем 6 000 точкам измерения отношения сигнал/помеха SNR = = 60 дБ и SNR = 130 дБ. Из рисунка видно, что предельно достижимая величина ошибки реконструкции диаграммы направленности при SNR = 60 дБ не зависит от используемого описания излучателя (значение ε, соответствующее SNR = 60 дБ, использовалось при построении кривых на рис. 2*б*). Однако при увеличении SNR использование приближённого описания позволяет достигнуть существенно большей точности реконструкции. Отметим, что эти данные достаточно хорошо иллюстрируют справедливость приведённого выше критерия выбора значения степени старшей гармоники.

На рис. 4 для случая приближённого описания излучателя приведены зависимости ошибок реконструкции диаграммы направленности от числа сферических источников при различных значениях SNR. Там же приведена относительная ошибка детерминированной компоненты поля на измерительной поверхности $\delta_1 = \|\mathbf{p} - \mathbf{G}_{\mathrm{a}}\mathbf{c}_0\|/\|\mathbf{p}\|$. Отметим, что представление излучателя набором сферических источников в рассматриваемой ситуации справедливо при $J \geq 6$. В этой области величина δ_1 крайне мала. Следовательно, можно ожидать, что и ошибка реконструкции поля вне измерительной поверхности (в частности, ошибка δ) будет также мала, что хорошо видно из приведённой при большом значении SNR = 130 дБ зависимости. При меньших SNR величина ошибки реконструкции диаграммы направленности определяется уровнем шумов. По мере сокращения числа J обе ошибки нарастают, что объясняется нарушением условия описания поля излучателя по числу сферических источников.

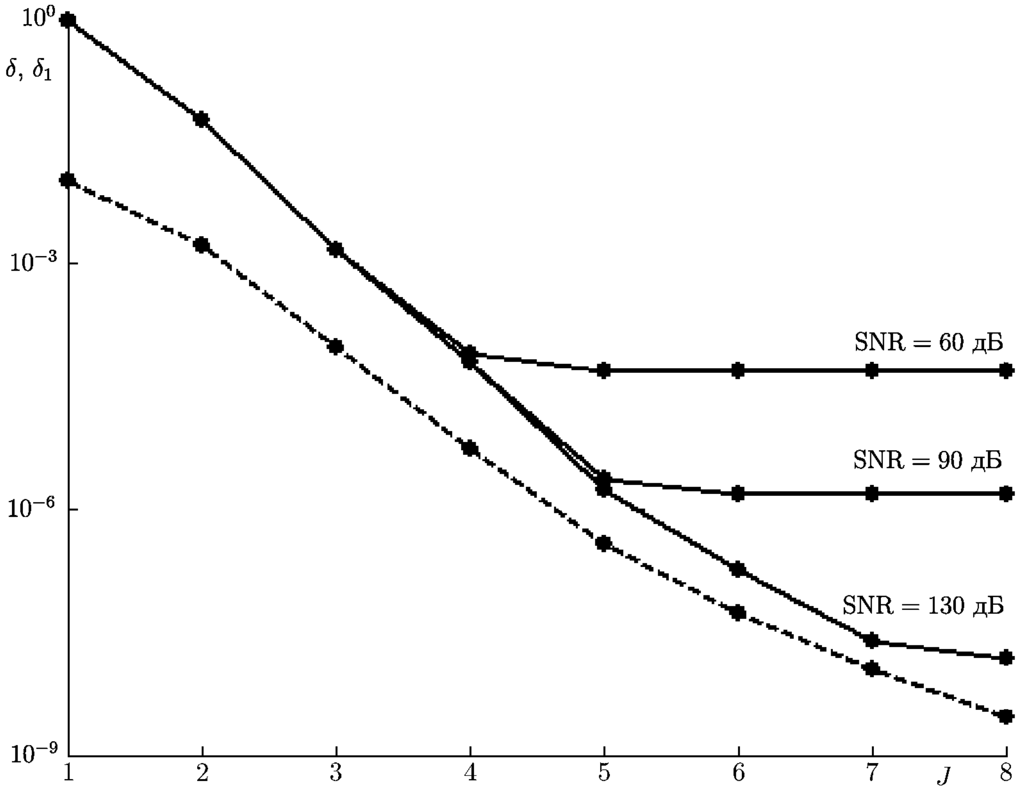

Рис. 4. Зависимости ошибок δ (сплошные линии) и δ_1 (штриховая линия) от числа сферических источников

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен способ определения дальнего поля источника звука по измерению давления в ближней зоне, основанный на его параметризации набором сферических источников. Сформулировано необходимое и достаточное условие для того, чтобы поле реального излучателя звука на поверхности измерений, а, соответственно, и вне неё, могло быть описано системой таких источников. Параметры — амплитуды сферических гармоник, определяемые путём решения обратной задачи, используются для расчёта диаграммы направленности излучателя. Для случая, когда излучатель имеет вытянутою форму, предложено приближённое решение задачи, позволяющее существенно снизить требования к вычислительным ресурсам. Результаты проведённого численного моделирования показали, что при выполнении соответствующих условий ошибка реконструкции диаграммы направленности источника может быть достаточно малой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шендеров Е. Л. Излучение и рассеяние звука. Л.: Судостроение, 1989. 304 с.
2. Кюркчан А. Г., Смирнова Н. И. // Радиотехника и электроника. 2005. Т. 50, № 10. С. 1 231.
3. Кюркчан А. Г., Смирнова Н. И. // Электромагнитные волны и электронные системы. 2008. Т. 13, № 8. С. 78.
4. Кюркчан А. Г., Смирнова Н. И. // Акуст. журн. 2009. Т. 55, № 6. С. 691.
5. Сапожников О. А., Пищальников Ю. А., Морозов А. В. // Акуст. журн. 2003. Т. 49, № 3. С. 416.
6. Фикс Г. Е., Фикс И. Ш. // Изв. вузов. Радиофизика. 2004. Т. 47, № 3. С. 245.

7. Турчин В. И., Фикс И. Ш. // Системы наблюдения, измерения и контроля в вибро- и гидроакустике: Сб. трудов. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 2002. С. 84.
8. Калью В. А. // Сб. трудов XIII сессии РАО. Т. 1. М.: ГЕОС, 2003. С. 234.
9. Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Т. 2: Пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 886 с.
10. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1970. 712 с.
11. Деммель Дж. Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения: Пер. с англ. М.: Мир, 2001. 430 с.
12. Форсайт Дж., Молер К. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений. М.: Мир, 1969. 167 с.

Поступила в редакцию 21 февраля 2011 г.; принята в печать 14 апреля 2011 г.

PARAMETRIC METHOD FOR RECONSTRUCTION OF THE RADIATION PATTERN OF AN ELONGATED SOURCE BY NEAR-FIELD MEASUREMENTS

I. Sh. Fiks and G. E. Fiks

We propose a method for determining the radiation pattern of an elongated source by near-field pressure measurements. The method is based on parameterization of the transducer by a set of spherical sources. The parameters (spherical-harmonic amplitudes defined by solving the inverse problem) are used to calculate the radiation pattern of the transducer. The main attention is paid to the case where the transducer has an elongated shape. The results of numerical simulation are reported.