

УДК 537.876.45+621.372.8

МЕТОД РАСЧЁТА СОБСТВЕННЫХ МОД ВИНТОВОГО ВОЛНОВОДА, ОСНОВАННЫЙ НА РЕШЕНИИ ЭКВИВАЛЕНТНОЙ ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ПУТЁМ РАЗЛОЖЕНИЯ ПОЛЕЙ ПО МОДАМ КРУГЛОГО ВОЛНОВОДА

С. В. Мишакин, С. В. Самсонов

Институт прикладной физики РАН, г. Нижний Новгород, Россия

Представлен метод расчёта дисперсии нормальных волн металлических волноводов с винтовой гофрировкой внутренней поверхности, основанный на переходе к новой неортогональной системе координат. В новой системе координат задача поиска мод винтового волновода строго эквивалентна задаче поиска мод круглого волновода единичного радиуса с анизотропным заполнением, однородным в продольном направлении. Для решения эквивалентной задачи применено разложение поля искомой собственной волны по модам пустого круглого волновода единичного радиуса. В результате задача сведена к решению обобщённой алгебраической задачи на собственные значения. Как показало сравнение с результатами трёхмерных расчётов, выполненных ранее, развитый метод обеспечивает достаточную точность определения характеристик винтовых волноводов для ряда важных с практической точки зрения случаев при существенно меньших затратах вычислительных ресурсов.

ВВЕДЕНИЕ

Металлические структуры круглого сечения с винтовой гофрировкой внутренней поверхности (винтовые волноводы) широко используются в СВЧ электронике больших мощностей. В частности, они находят применение в качестве селективных электродинамических элементов, таких, как преобразователи или отражатели волн круглого волновода (см., например, [1–3]). Кроме того, винтовые структуры используются или рассматриваются в качестве рабочих электродинамических систем различных электронных приборов [4–7]. В настоящее время наиболее активно развиваются два направления, в которых волноводы с винтовой гофрировкой играют ключевую роль. Первое направление — разработка гироприборов с высоким уровнем непрерывной или средней мощности и широкой полосой перестройки частоты в миллиметровом диапазоне длин волн [8], второе — создание пассивного компрессора СВЧ импульсов для достижения мультигигаваттного уровня мощности в 3-сантиметровом и 8-миллиметровом диапазонах длин волн [9, 10].

Разработка указанных устройств невозможна без точного и сравнительно быстрого расчёта электродинамических характеристик винтовых волноводов, среди которых наиболее важными являются дисперсия и структура электромагнитного поля собственных волн. В общем случае винтовой волновод имеет форму, не допускающую использование метода разделения переменных или других точных аналитических методов. Кроме того, собственные волны в таких волноводах не разделяются на волны магнитного и электрического типа, вследствие чего для решения уравнений Максвелла требуется анализ полной векторной задачи.

Существовавшие до последнего времени методы расчёта дисперсии винтовых волноводов можно условно разделить на два класса. К первому относятся методы, в которых гофрировка волновода рассматривается как небольшое возмущение цилиндрической поверхности. Несмотря на простоту реализации и высокую скорость расчёта, такие методы обладают существенным недостатком: точность результатов, полученных на их основе, приемлема только при сравнительно неглубокой гофрировке (много меньшей длины волны) с большим продольным периодом (больше или порядка длины волны) [1, 2]. Ко второму классу относятся методы расчёта дисперсии

С. В. Мишакин, С. В. Самсонов

195

винтового волновода, основанные на прямом конечно-разностном решении векторных уравнений Максвелла в трёхмерной области. Вследствие продольной периодичности винтового волновода расчётная область трёхмерных кодов ограничивается одним периодом гофрировки с граничными условиями Флоке на поперечных сечениях [11–14]. Трёхмерные коды позволяют вычислять дисперсию собственных волн винтового волновода с необходимой точностью и, таким образом, снять ограничения на глубину и период гофрировки, неизбежные в расчётах по теории возмущений. Существенным недостатком трёхмерных кодов является рост потребляемых вычислительных ресурсов с повышением желаемой точности расчётов и увеличением поперечных размеров структур в масштабе длины волны.

Сравнительно недавно в работах [15, 16] было показано, что при переходе к «винтовым» координатам [17, 18] полый винтовой волновод с поперечным сечением некоторой формы с электродинамической точки зрения строго эквивалентен прямому цилиндрическому волноводу с тем же поперечным сечением, но с анизотропным диэлектрическим и магнитным заполнением, однородным в продольном направлении. Однородность задачи в продольном направлении определяет экспоненциальную зависимость полей от продольной координаты, сводя тем самым задачу в трёхмерной области к двумерной задаче в плоскости поперечного сечения. Для решения эквивалентной задачи ранее применялись наиболее универсальные методы — конечных элементов [16] и конечных разностей [19].

В настоящей работе представлен метод расчёта собственных волн волноводов, обладающих винтовой симметрией, также основанный на решении двумерной эквивалентной задачи в поперечном сечении. Так же, как и в [15, 16], для решения задачи применён проекционный метод Галёркина, однако в качестве функций разложения использованы поперечные и продольные поля мод круглого полого волновода единичного радиуса. Для этого в данной работе применено более сложное преобразование координат, являющееся суперпозицией «винтового» преобразования [17], переводящего исходный винтовой волновод в прямой волновод с тем же поперечным сечением, и преобразования [13], отображающего прямой волновод на круглый волновод единичного радиуса. Данный метод имеет ряд достоинств по сравнению с более универсальным методом конечных элементов. Наиболее важными достоинствами предложенного метода являются простота реализации, высокая скорость расчёта в случае умеренно сверхразмерных систем, а также возможность получения полей собственных волн в виде суперпозиции аналитических функций, удобном для последующего анализа.

При использовании предлагаемого метода электродинамическая задача определения нормальных волн винтового волновода сводится к решению обобщённой задачи на собственные значения, где в качестве собственного значения выступает частота собственной моды. Для проверки представленного метода полученные с его помощью результаты сравниваются с результатами трёхмерных расчётов, выполненных ранее в работах [8, 9].

1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КООРДИНАТ

Поле \mathbf{E} , \mathbf{H} электромагнитных гармонических колебаний в волноводе с винтовой гофрировкой поверхности (рис. 1а) описывается системой уравнений Максвелла (предполагается, что зависимость полей от времени имеет вид $\exp(-i\omega t)$)

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = -ik\mathbf{E}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = ik\mathbf{H} \quad (1)$$

с граничным условием

$$[\mathbf{E} \times \mathbf{n}]_{\Sigma} = 0 \quad (2)$$

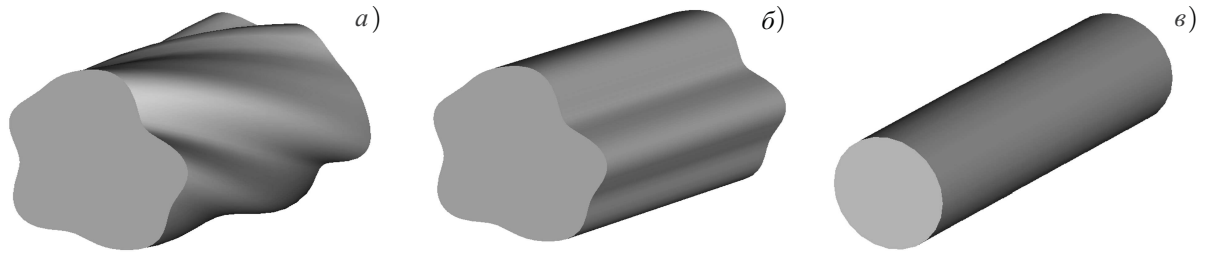


Рис. 1. Геометрия исходного винтового волновода (а), геометрия волновода при переходе к винтовым координатам (б) и круглый волновод единичного радиуса (в)

на идеально проводящей поверхности, где $k = \omega/c$, c — скорость света в вакууме, \mathbf{n} — нормаль к поверхности волновода Σ . В отношении боковой поверхности рассматриваемого волновода предполагаем, что, во-первых, Σ — гладкая поверхность, и, во-вторых, каждое поперечное сечение волновода представляет собой звёздную область относительно точки пересечения оси волновода с данным поперечным сечением [20]. В этом случае в цилиндрических координатах (r, φ, z) поверхность волновода описывается однозначной гладкой функцией $r = r(\varphi, z)$.

Уравнение боковой поверхности волновода, обладающего винтовой симметрией, может быть записано в виде

$$r(\varphi, z) = r_w(\varphi - \alpha z), \quad (3)$$

где r_w — гладкая функция, описывающая поперечное сечение волновода, α — постоянная величина. Как следует из формулы (3), поперечное сечение винтового волновода, сохраняя свою форму, поворачивается вокруг оси волновода с постоянной «угловой скоростью» α при равномерном поступательном движении вдоль оси z .

Введём новую систему координат (ρ, θ, ζ) , связанную с исходными цилиндрическими координатами (r, φ, z) следующими соотношениями:

$$\rho = r/r_w(\varphi - \alpha z), \quad \theta = \varphi - \alpha z, \quad \zeta = z \iff r = \rho r_w(\theta), \quad \varphi = \theta + \alpha \zeta, \quad z = \zeta. \quad (4)$$

Данное преобразование представляет собой суперпозицию двух последовательных преобразований координат. Первое соответствует переходу к «винтовым» координатам [17], в которых поперечное сечение волновода остаётся неизменным (рис. 1б), второе отображает волновод, полученный при первом преобразовании, на круглый волновод единичного радиуса [13] (рис. 1в).

Аналогично тому, как это сделано в работах [11–14], можно показать, что в новой системе координат (4) задача о распространении колебаний в пустом винтовом волноводе строго эквивалентна задаче о распространении колебаний в волноводе с регулярной боковой поверхностью $\rho = 1$, но с анизотропным диэлектрическим и магнитным заполнением:

$$\text{rot } \mathbf{H}_{\text{new}} = -ik\varepsilon \mathbf{E}_{\text{new}}, \quad \text{rot } \mathbf{E}_{\text{new}} = ik\boldsymbol{\mu} \mathbf{H}_{\text{new}}. \quad (5)$$

При этом между электромагнитными полями в исходной и эквивалентной задачах существует взаимно однозначное соответствие.

Тензоры диэлектрической и магнитной проницаемостей среды, заполняющей волновод в эквивалентной задаче, в общем случае определяются метрическим тензором преобразования координат. В рассматриваемом случае данные тензоры имеют вид

$$\varepsilon = \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 1 + \eta_w^2 (1 + \alpha^2 \rho^2 r_w^2) & -\eta_w (1 + \alpha^2 \rho^2 r_w^2) & \alpha \rho \eta_w r_w \\ -\eta_w (1 + \alpha^2 \rho^2 r_w^2) & 1 + \alpha^2 \rho^2 r_w^2 & -\alpha \rho r_w^2 \\ \alpha \rho \eta_w r_w & -\alpha \rho r_w^2 & r_w^2 \end{pmatrix}, \quad (6a)$$

где $\eta_w(\theta) = (dr_w(\theta)/d\theta)/r_w(\theta)$. Представляют интерес также тензоры, обратные тензорам $\boldsymbol{\varepsilon}$ и $\boldsymbol{\mu}$:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{-1} = \boldsymbol{\mu}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \eta_w & 0 \\ \eta_w & 1 + \eta_w^2 & \alpha\rho \\ 0 & \alpha\rho & r_w^{-2} + \alpha^2\rho^2 \end{pmatrix}. \quad (66)$$

Граничные условия (2) в новой системе координат записываются в виде

$$[\mathbf{E}_{\text{new}} \times \mathbf{i}_\rho] \Big|_{\rho=1} = 0, \quad (7)$$

где $\mathbf{i}_\rho = \{1, 0, 0\}^T$, индекс T обозначает транспонирование, что соответствует граничным условиям на идеально проводящей поверхности круглого цилиндра единичного радиуса.

В результате преобразований (4) параметры среды (6а) и граничные условия (7) оказываются не зависящими от продольной координаты ζ . Таким образом, задача сводится к поиску мод продольно-однородного круглого цилиндрического волновода единичного радиуса с поперечно-неоднородным анизотропным заполнением.

От системы уравнений (5) можно перейти к одному уравнению второго порядка:

$$\text{rot}(\boldsymbol{\mu}^{-1} \text{rot} \mathbf{E}_{\text{new}}) = k^2 \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{E}_{\text{new}}. \quad (8)$$

Вследствие того, что волновод является продольно-однородным, решение этого уравнения может быть записано в виде

$$\mathbf{E}_{\text{new}} = \mathbf{E}_0(\rho, \theta) \exp(i\beta\zeta), \quad (9)$$

где β — продольное волновое число в эквивалентной задаче. Подставляя (9) в (8), получим

$$\exp(-i\beta\zeta) \text{rot}[\boldsymbol{\mu}^{-1} \text{rot}(\mathbf{E}_0 \exp(i\beta\zeta))] = k^2 \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{E}_0. \quad (10)$$

Очевидно, что после раскрытия дифференциальных операторов в уравнении (10) зависимость от продольной координаты ζ исчезает.

Граничные условия для поля \mathbf{E}_0 будут иметь тот же вид, что и (7):

$$[\mathbf{E}_0 \times \mathbf{i}_\rho] \Big|_{\rho=1} = 0. \quad (11)$$

2. ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ

Для реализации численного алгоритма решения уравнения (10) перейдем к так называемой слабой форме [21] данного уравнения. Для этого умножим скалярно левую и правую части на достаточно гладкую тестовую функцию \mathbf{T} , удовлетворяющую тем же граничным условиям, что и поле \mathbf{E}_0 . Проинтегрируем полученное равенство по поперечному сечению S_1 круглого волновода единичного радиуса, используя формулу интегрирования по частям и принимая во внимание граничные условия для электрического поля:

$$\int_{S_1} \text{rot}_\perp(\mathbf{T}^*) \boldsymbol{\mu}^{-1} \text{rot}_\perp(\mathbf{E}_0) + i\beta \left[\text{rot}_\perp(\mathbf{T}^*) \boldsymbol{\mu}^{-1} [\mathbf{i}_\zeta \times \mathbf{E}_0] - [\mathbf{i}_\zeta \times \mathbf{T}]^* \boldsymbol{\mu}^{-1} \text{rot}_\perp(\mathbf{E}_0) \right] + \\ + \beta^2 [\mathbf{i}_\zeta \times \mathbf{T}]^* \boldsymbol{\mu}^{-1} [\mathbf{i}_\zeta \times \mathbf{E}_0] dS_\perp = k^2 \int_{S_1} \mathbf{T}^* \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{E}_0 dS_\perp, \quad (12)$$

где $\text{rot}_\perp(\mathbf{X}) = [\nabla_\perp \times \mathbf{X}]$, а индекс $*$ обозначает комплексное сопряжение.

Искомое поле \mathbf{E}_0 может быть разложено на поперечную и продольную составляющие:

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_{0\perp} + E_{0\zeta} \mathbf{i}_\zeta. \quad (13)$$

Как известно [14], наилучшими в смысле скорости сходимости являются численные схемы, в которых приближённое решение удовлетворяет тем же граничным условиям, что и точное решение. Будем искать поперечное электрическое поле в виде сумм по поперечным полям мод круглого волновода единичного радиуса, образующих полную систему вектор-функций [13, 14]:

$$\mathbf{E}_{0\perp} = \sum_j A_j \mathbf{e}_j^{(h)} + \sum_s B_s \mathbf{e}_s^{(e)}, \quad (14)$$

где $\mathbf{e}_j^{(h)}$ и $\mathbf{e}_s^{(e)}$ — поперечные электрические поля ТЕ- и ТМ-мод соответственно. Продольное поле, в свою очередь, может быть разложено по полной системе скалярных функций, являющихся продольными электрическими полями ТМ-волн:

$$E_{0\zeta} = \sum_s C_s e_s^{(\zeta)}. \quad (15)$$

Каждое слагаемое в суммах (14), (15) удовлетворяет граничному условию (11), вследствие чего согласно [14] сходимость рядов (14), (15) является равномерной.

Функции, по которым производится разложение, имеют вид

$$\mathbf{e}_s^{(h)} = \frac{1}{N_s^{(h)}} [\mathbf{i}_\zeta \times \nabla_\perp \psi_s^{(h)}], \quad \mathbf{e}_s^{(e)} = \frac{1}{N_s^{(e)}} \nabla_\perp \psi_s^{(e)}, \quad e_s^{(\zeta)} = \frac{1}{N_s^{(\zeta)}} \psi_s^{(e)}, \quad (16)$$

где $N_s^{(e)}$, $N_s^{(h)}$ и $N_s^{(\zeta)}$ — нормировочные постоянные, $\psi_s^{(h)}$ и $\psi_s^{(e)}$ — мембранные функции круглого волновода единичного радиуса для граничных условий Неймана (ТЕ-моды) и Дирихле (ТМ-моды) соответственно; мультииндекс s — совокупность азимутального и радиального индексов. Мембранные функции имеют вид

$$\psi_s^{(h)} = J_m(\nu_{mn}\rho) \exp(im\theta), \quad \psi_s^{(e)} = J_m(\chi_{mn}\rho) \exp(im\theta), \quad (17)$$

где $J_m(x)$ — функция Бесселя порядка m , χ_{mn} — нули функции Бесселя m -го порядка, ν_{mn} — нули производной функции Бесселя m -го порядка, m и n — азимутальный и радиальный индексы соответственно.

При практической реализации численного метода в суммах (14), (15) неизбежно приходится ограничиваться конечным числом слагаемых, при этом равенства в (14), (15) будут приближёнными.

Следуя процедуре Галёркина, выберем в качестве \mathbf{T} тот же набор функций, который был использован в разложениях (14) и (15). Подстановка представления поля \mathbf{E}_0 и последовательно каждой из функций \mathbf{T} в уравнение (12) в слабой форме приводит к обобщённой алгебраической проблеме собственных значений:

$$\mathbf{S} \mathbf{X} = k^2 \mathbf{M} \mathbf{X}, \quad (18)$$

где $k^2 = (\omega/c)^2$ играет роль собственного значения, $\mathbf{X} = \{A_0, A_2, \dots, B_1, B_2, \dots, C_1, C_2, \dots\}^T$ — собственный вектор, состоящий из коэффициентов разложения искомого поля по полям мод круглого волновода; \mathbf{S} и \mathbf{M} — квадратные матрицы.

Для определения элементов матриц \mathbf{S} и \mathbf{M} требуется вычисление двойных интегралов по площади единичного круга от функции двух переменных. Подынтегральные выражения в этих интегралах можно представить в виде конечных сумм, каждое из слагаемых которых является произведением двух функций разных переменных. Двойные интегралы, таким образом, сводятся к произведению однократных, что значительно упрощает процедуру их вычисления:

$$\iint_{S_1} H(\rho, \theta) dS_{\perp} = \iint_{S_1} \sum_j F_j(\rho) G_j(\theta) dS_{\perp} = \sum_j \int_0^1 F_j(\rho) \rho d\rho \int_0^{2\pi} G_j(\theta) d\theta. \quad (19)$$

При этом многие из интегралов по переменной ρ являются табличными. Кроме того, используя выражения (12)–(17), легко показать, что каждая из функций $G_j(\theta)$ имеет вид

$$G_j(\theta) = \Phi_j(\theta) \exp[i(m - q)\theta], \quad (20)$$

где $\Phi_j(\theta)$ — некоторая функция, зависимость которой от θ определяется только геометрией поперечного сечения $r_w(\theta)$, m и q — азимутальные индексы мод, по которым разлагается поле искомой волны.

Расчёт дисперсионной характеристики волновода состоит в поиске набора собственных частот для различных значений волнового числа β . В уравнении (18) матрица \mathbf{S} зависит от волнового числа β , однако оно входит в \mathbf{S} только как множитель в первой и второй степенях перед несколькими достаточно громоздкими подматрицами, составляющими данную матрицу. Указанные подматрицы могут быть вычислены один раз и не пересчитываться для каждого нового значения β , что значительно сокращает объём необходимых вычислений.

Важным классом винтовых волноводов являются волноводы, поперечное сечение которых обладает осевой симметрией, т. е. переходит само в себя при повороте на угол $2\pi/m_B$ вокруг оси волновода, где $m_B > 0$ — целое число, называемое далее числом заходов винтовой гофрировки. Данное свойство может быть записано как

$$r_w(\theta) = r_w(\theta + 2\pi/m_B). \quad (21)$$

В этом случае функция $\Phi_j(\theta)$ из (20) является периодической с периодом $2\pi/m_B$, вследствие чего интеграл от $G_j(\theta)$ по θ отличен от нуля только при выполнении условия

$$m - q = km_B, \quad (22)$$

где k — целое число. Таким образом, в суммах (14) и (15) достаточно учитывать совокупность мод с азимутальными индексами, удовлетворяющими условию

$$m = m_0 + nm_B, \quad (23)$$

где n — совокупность целых чисел, определяющая используемые в разложении моды, m_0 — фиксированное целое число. Величина m_0 , определённая с точностью до величины m_B , является параметром, характеризующим симметрию определённой собственной моды.

Величина β , играющая роль продольного волнового числа в эквивалентной задаче, не является волновым числом в исходной задаче. В силу продольной периодичности винтового волновода понятие продольного числа, обычно вводимое в случае регулярного волновода, видоизменяется — зависимость поля от продольной координаты представляет теперь бесконечную совокупность пространственных гармоник. Волновые числа, соответствующие данным пространственным гармоникам, отличаются друг от друга на величину, кратную $h_B = 2\pi/d$, где d — продольный период

винтового волновода. В качестве волнового числа в исходной задаче, таким образом, может быть принято волновое число пространственной гармоника, лежащее в диапазоне $h \in [-h_B/2, h_B/2]$.

При переходе к исходной системе координат зависимость полей от продольной координаты z будет представлять собой произведение периодической (с периодом d) функции и множителя $\exp[i(\beta - \alpha m_0)z]$. Таким образом, волновое число в исходной задаче может быть записано в виде

$$h = \beta - \alpha m_0 + p h_B, \quad (24)$$

где p — целое число, выбираемое из условия $h \in [-h_B/2, h_B/2]$.

В случае волновода с симметрией поперечного сечения параметр α определяется как $\alpha = h_B/m_B$, и (24) записывается в виде

$$h = \beta - \frac{h_B}{m_B} m_0 + p h_B. \quad (25)$$

3. ПРИМЕРЫ РАСЧЁТОВ

Для иллюстрации возможностей представленного метода и оценки его точности выполним анализ двух винтовых волноводов, параметры которых были рассчитаны ранее с помощью конечно-разностного 3-мерного кода «CST MicroWave Studio Eigenmode Solver» [22], сокращённо обозначаемого далее как MWS. Рассматриваемые структуры обладают синусоидальным профилем гофрировки, так что их поверхность в цилиндрических координатах имеет вид

$$r(\varphi, z) = r_0 + l_0 \cos(m_B \varphi - 2\pi z/d), \quad (26)$$

где r_0 и l_0 — средний радиус волновода и амплитуда винтовой гофрировки соответственно.

3.1. Расчёт дисперсии 3-заходной винтовой структуры

Одной из рассматриваемых структур является волновод с 3-заходной винтовой гофрировкой, который использовался в качестве электродинамической системы giro-ЛБВ 8-миллиметрового диапазона длин волн [8]. Параметры данной структуры ($r_0 = 4$ мм, $d = 8,5$ мм, $l_0 = 0,74$ мм, $m_B = 3$, см. рис. 2а) выбирались таким образом, чтобы обеспечить необходимую дисперсию одной из нормальных волн, образованных за счёт резонансной связи на гофрировке двух противоположно вращающихся мод гладкого волновода — $TE_{1,1}$ и $TE_{2,1}$ [8]. Рабочей модой giroусилителя, характеристики которой в данном случае представляют наибольший интерес, является мода с параметром m_0 , равным 2, которая переходит в моду $TE_{2,1}$ круглого волновода при стремлении глубины гофрировки к нулю.

Для применения развитого в данной работе метода необходимо выбрать совокупность мод разложения. Выбор азимутальных индексов мод разложения определяется неоднородностью поля собственной волны в азимутальном направлении, которое заранее неизвестно. Согласно (23) азимутальные индексы мод разложения в данном примере волновода определяются выражением

$$m = m_0 + 3n. \quad (27)$$

Доминирующей является мода с $n = 0$, поэтому для адекватного представления поля собственной волны выберем равное количество мод, лежащих слева и справа от m_0 , т. е. с индексом n , меняющимся в диапазоне от $-(N-1)/2$ до $(N-1)/2$. Выбор радиальных индексов мод разложения определяется неоднородностью собственной моды в поперечном направлении, которая также заранее неизвестна. Поэтому для достаточно точного представления поля собственной волны

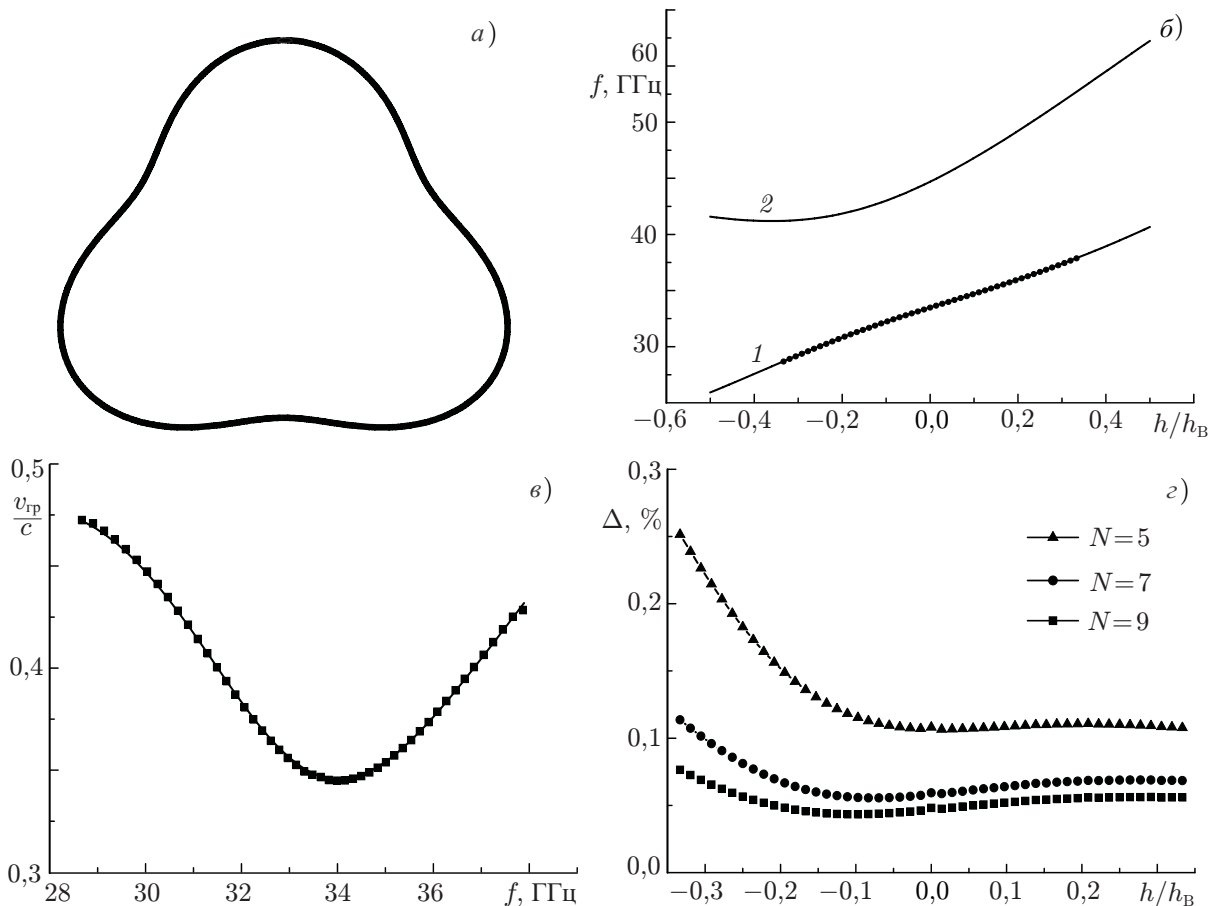


Рис. 2. Результаты расчёта дисперсии винтового волновода gyro-ЛБВ: (а) поперечное сечение волновода, (б) дисперсионные кривые мод в рабочем диапазоне частот (кривая 1 — рабочая мода, кривая 2 — нерабочая мода), (в) групповая скорость $v_{гр}$ рабочей волны (сплошные линии на панелях (б) и (в) соответствуют расчёту представленным методом при $N = 9$, точки — расчёту с помощью MWS), (г) относительная разность Δ собственных частот, найденных представленным методом и с помощью MWS

необходимо использовать моды разложения с радиальными индексами, меняющимися от единицы до величины, превышающей радиальные индексы мод круглого волновода, связываемых данной гофрировкой в рассматриваемом частотном диапазоне (в данном случае мод $TE_{1,1}$ и $TE_{2,1}$). Для представленных далее расчётов радиальные индексы мод разложения k были выбраны в диапазоне от 1 до N , что позволило избежать введения ещё одного параметра для идентификации мод разложения и их количества. Поскольку в разложении поля используются три типа функций (16), суммарное число мод разложения и соответствующих им неизвестных коэффициентов равно

$$Q = 3N^2. \tag{28}$$

Как показали расчёты, результаты, полученные представленным методом, уже при сравнительно небольшом количестве мод, использованных в разложении поля, очень близки к результатам, полученным с помощью 3-мерного кода MWS (рис. 2). При $N \geq 9$ относительная разность собственных частот, найденных этими методами, составляет около 0,05 % (рис. 2г). При этом следует учесть, что при сетке, выбранной в расчётах с помощью MWS (около $2,3 \cdot 10^5$ прямоугольных параллелепипедов, заполнявших объём одного периода волновода) точность тестового

расчёта дисперсии волновода круглого сечения составляла $0,05 \div 0,1$ %. При выбранной сетке время расчёта дисперсионной диаграммы (73 точки по оси фазы или продольного волнового числа) на персональном компьютере с двухядерным процессором с тактовой частотой 2,4 ГГц и достаточным объёмом оперативной памяти для MWS составило около 6 часов, в то время как при использовании представленного метода расчёт того же числа точек дисперсионной характеристики занимает около 4 минут.

3.2. Расчёт 5-заходной винтовой структуры

Другим примером использования предложенного метода является расчёт дисперсионной характеристики винтового волновода с 5-заходной гофрировкой и увеличенным поперечным сечением, который является ключевым элементом компрессора частотно-модулированных СВЧ импульсов до мультигигаваттных значений пиковой мощности [9, 10]. Из-за требований, предъявляемых к электропрочности, данная система является более сверхразмерной, чем волновод для гиро-ЛБВ. Кроме того, групповая скорость рабочей волны в волноводе компрессора должна гораздо сильнее зависеть от частоты в достаточно узком интервале частот. В данном случае в качестве рабо-

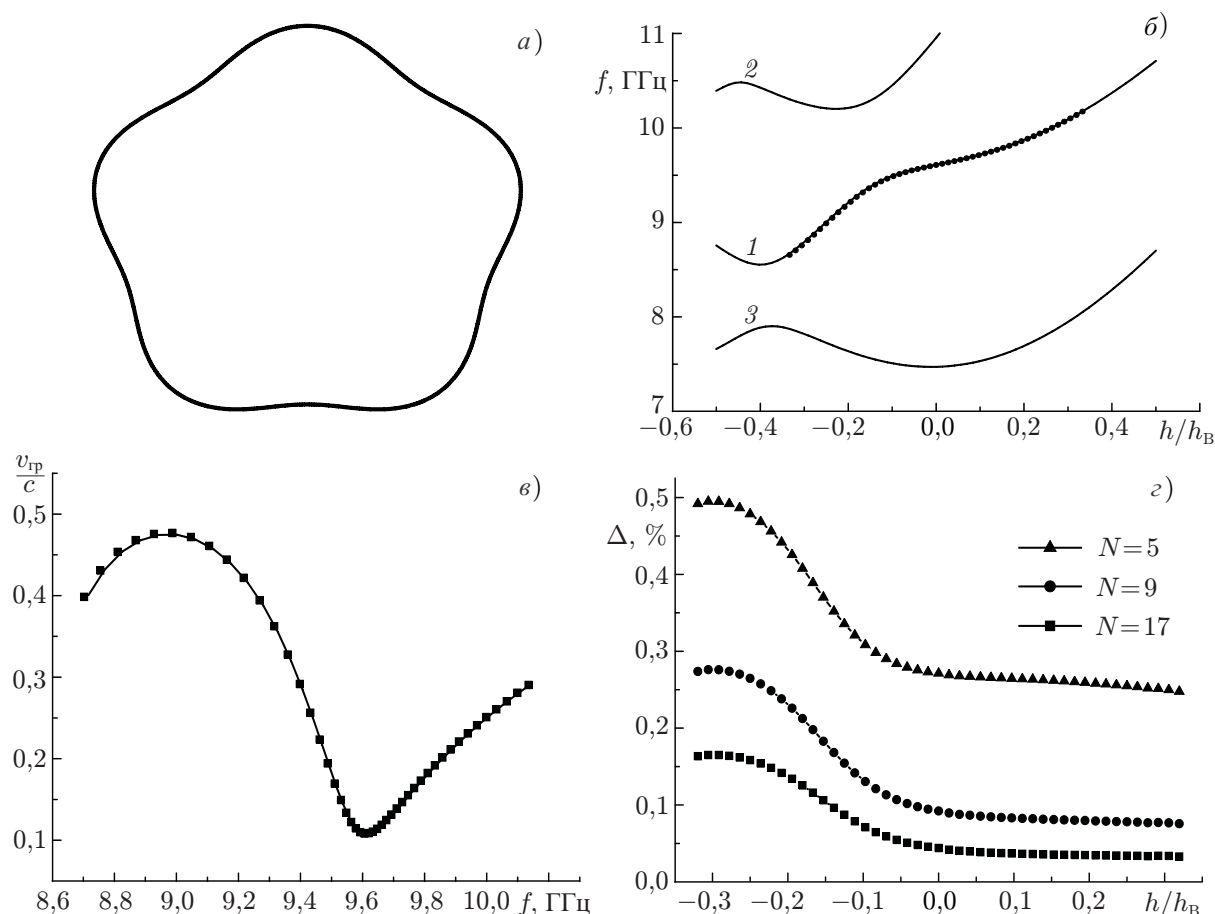


Рис. 3. Результаты расчёта дисперсии винтового волновода компрессора: (а) поперечное сечение волновода, (б) дисперсионные кривые мод в рабочем диапазоне частот (кривая 1 — рабочая мода, 2 и 3 — нерабочие моды), (в) групповая скорость $v_{гр}$ рабочей волны (сплошные линии на панелях (б) и (в) соответствуют расчёту представленным методом при $N = 17$, точки — расчёту с помощью MWS), (г) относительная разность Δ собственных частот, найденных представленным методом и с помощью MWS

чей пары мод гладкого волновода используются бегущая $TE_{3,1}$ - и квазикритическая $TE_{2,2}$ -моды противоположного вращения. Параметры рассчитываемого волновода были выбраны следующими: $r_0 = 32,84$ мм, $d = 33,26$ мм, $l_0 = 2,43$ мм, $m_B = 5$ (см. рис. 3а), а представляющие интерес частоты лежат в диапазоне $8 \div 11$ ГГц.

С увеличением параметра сверхразмерности структуры по сравнению с предыдущим случаем реализация рассматриваемого метода потребовала соответствующего увеличения количества мод (до $N = 17$) для достижения, по крайней мере, точности, обеспечиваемой с помощью MWS. В данном случае при расчётах с помощью MWS количество элементарных численных ячеек составляло $7,6 \cdot 10^5$, что для тестового волновода круглого сечения обеспечивало точность нахождения дисперсии около 0,05 %, а время расчёта дисперсионной диаграммы составило около 125 часов. В то же время расчёты предлагаемым в данной статье методом заняли примерно 1,5 часа.

Кроме дисперсионных соотношений важной характеристикой рассматриваемых волноводов является распределение амплитуды электромагнитного поля той или иной собственной моды по поперечному сечению и на стенках волновода. При расчётах представленным методом и с помощью MWS эти характеристики также находятся в удовлетворительном соответствии друг с другом. Так, например, на частоте 9,6 ГГц, соответствующей минимальной групповой скорости рабочей волны волновода-компрессора, при мощности 1 ГВт максимальная амплитуда электрического поля на стенке составляет 0,38 и 0,34 МВ/см согласно расчётам с помощью MWS и представленным методом соответственно. Отметим, что точность порядка 10 % для значений полей в выбранной точке пространства (в отличие от интегральных характеристик, таких, как полная мощность, энергия поля в объёме, содержащем большое количество численных ячеек, или дисперсия той или иной волны), как правило, является типичной для большинства сеточных методов.

Дисперсионные характеристики рабочих волн рассчитанных волноводов были также измерены в соответствующих экспериментах [8, 9]. Относительная погрешность измерений и точность изготовления структур, как правило, находились в диапазоне $0,2 \div 0,3$ %. Примерно в таком же диапазоне лежали и отличия измеренных данных от расчётных, что было достаточно для последующего использования винтовых волноводов для указанных приложений.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрен метод расчёта дисперсионных характеристик круглых волноводов с винтовой гофрировкой поверхности, основанный на переходе к новой системе координат, в которой исходный винтовой волновод преобразуется в круглый волновод единичного радиуса с поперечно-неоднородным анизотропным заполнением. Процедура поиска собственных мод, основанная на разложении искомого поля собственной волны по полям мод незаполненного волновода единичного радиуса, приводит к решению обобщённой алгебраической задачи на собственные значения.

Для демонстрации представленного метода в работе рассмотрены два примера расчётов характеристик винтовых структур с синусоидальным профилем гофрировки. Полученные результаты сопоставлены с результатами расчётов, выполненных ранее с помощью одного из универсальных трёхмерных кодов. На рассмотренных примерах продемонстрировано, что представленный метод позволяет обеспечить заведомо достаточную точность расчёта характеристик винтовых волноводов для ряда важных с практической точки зрения случаев при существенно меньших затратах вычислительных ресурсов, что позволяет использовать данный метод для точного расчёта характеристик ещё более сверхразмерных структур.

Кроме того, рассмотренный метод позволяет адекватно учитывать небольшие (иногда меньшие, чем размер пространственной ячейки существующих коммерческих трёхмерных кодов), но,

тем не менее, важные с точки зрения некоторых паразитных эффектов, отклонения от заданного профиля поперечного сечения реального волновода, неизбежно возникающие в процессе его изготовления.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 10-02-00975) и Программой Президиума РАН «Проблемы физической электроники, пучков заряженных частиц, генерации электромагнитного излучения в системах большой мощности». Авторы выражают благодарность В. Л. Братману и Г. Г. Денисову за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ковалёв Н. Ф., Орлова И. М., Петелин М. И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1968. Т. 11, № 5. С. 783.
2. Денисов Г. Г., Резников М. Г. // Изв. вузов. Радиофизика. 1982. Т. 25, № 5. С. 562.
3. Fuks M. I., Kovalev N. F. // IEEE Trans. Plasma Sci. 2002. V. 30, No. 3. P. 1147.
4. Bratman V. L., Denisov G. G., Kol'chugin B. D., et al. // Int. J. Infrared Millimeter Waves. 1984. V. 5, No. 9. P. 1311.
5. Абубакиров Э. Б., Ковалёв Н. Ф., Колганов Н. Г., Фукс М. И. // Тез. докл. 7-го Всесоюз. симп. по сильноточной электронике. Томск, 1988. Ч. 1. С. 185.
6. Гольденберг А. Л., Нусинович Г. С., Павельев А. Б. // Гиротроны. Горький: ИПФ АН СССР, 1981. С. 91.
7. Ginzburg N. S., Malkin A. M., Peskov N. Yu., et al. // Phys. Rev. Spec. Topics Accel. Beams. 2005. V. 8. Art. no. 040705.
8. Братман В. Л., Денисов Г. Г., Самсонов С. В. и др. // Изв. вузов. Радиофизика. 2007. Т. 50, № 2. С. 104.
9. Братман В. Л., Денисов Г. Г., Самсонов С. В. и др. // Изв. вузов. Радиофизика. 2007. Т. 50, № 1. С. 40.
10. Братман В. Л., Денисов Г. Г., Колганов Н. Г. и др. // ЖТФ. 2011. Т. 81. С. 113.
11. Ильинский А. С., Альховский Э. А., Данилова А. Г. // Изв. вузов. Радиофизика. 1973. Т. 26, № 10. С. 1583.
12. Альховский Э. А., Ильинский А. С., Трошин Г. И. // Радиотехника и электроника. 1975. № 11. С. 2250.
13. Свешников А. Г. // Научн. докл. высш. шк. Сер. физ.-мат. науки. 1959. № 2. С. 162.
14. Свешников А. Г. // Журн. выч. мат. и мат. физ. 1963. Т. 2, № 2. С. 314.
15. Nicolet A., Zolla F., Guenneau S. // Eur. Phys. J. Appl. Phys. 2004. V. 28. P. 153.
16. Nicolet A., Zolla F. // IET Science, Measurement and Technology. 2007. V. 1, No. 1. P. 67.
17. Левин Л. Теория волноводов. Методы решения волноводных задач. М.: Радио и связь, 1981. 312 с.
18. Yabe H., Nishio K., Mushiake Y. // IEEE Trans. Microwave Theory Tech. 1984. V. 32, No. 1. P. 91.
19. Wilson J. L., Wang C., Fathy A. E., Kang Y. W. // IEEE Trans. Microwave Theory Tech. 2009. V. 57, No. 1. P. 130.
20. Ильинский А. С., Кравцов В. В., Свешников А. Г. Математические модели электродинамики. М.: Высшая школа, 1991. 224 с.
21. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галёркина. М.: Мир, 1988. 352 с.
22. <https://www.cst.com>.

Поступила в редакцию 22 декабря 2010 г.; принята в печать 27 марта 2011 г.

**METHOD FOR CALCULATION OF HELICAL-WAVEGUIDE EIGENMODES ON
THE BASIS OF SOLVING THE EQUIVALENT TWO-DIMENSIONAL PROBLEM
BY FIELD EXPANSION IN CIRCULAR-WAVEGUIDE MODES**

S. V. Mishakin and S. V. Samsonov

We present a method for calculation of the dispersion of eigenmodes in metal waveguides with helical corrugations on the inner surface, which is based on the transition to a new, non-orthogonal system of coordinates. Within the new coordinate system, the problem of finding helical-waveguide modes is strictly equivalent to the problem of finding the modes of a circular unit-radius waveguide with anisotropic filling, which is homogenous in the longitudinal direction. To solve the equivalent problem, we use the expansion of the field of the desired eigenmode in the modes of an empty circular unit-radius waveguide. As a result, the problem is reduced to solving of a generalized algebraic eigenvalue problem. The comparison with the results of earlier three-dimensional calculations showed that the developed method allows one to determine characteristics of helical waveguides with the accuracy being sufficient for many actual applications, while ensuring significantly lower costs of calculations.