

УДК 530.1

ПРИМЕНЕНИЕ ЛЕММЫ ЛОРЕНЦА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛНОВЫХ ПАКЕТОВ В НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЕ

Г. И. Фрейдман

Институт прикладной физики РАН, г. Нижний Новгород, Россия

В спектральной и пространственно-временной форме получены интегральные соотношения, выражающие амплитуду поля волнового пакета на выходной поверхности слоя через его амплитуду на входной поверхности, поля на боковой поверхности слоя и интеграл от нелинейных токов внутри слоя в предыдущие моменты времени. Эти соотношения позволяют проводить исследования и создавать алгоритмы численного моделирования распространения и взаимодействия волновых пакетов с широким частотным и угловым спектром, в том числе рассчитывать возбуждение нераспространяющихся волн при острой фокусировке или образовании сверхтонких нитей. На основе полученных соотношений предложен алгоритм, использующий простую итерацию первого порядка и позволяющий существенно увеличить скорость расчётов. Показана возможность применения быстрого преобразования Фурье для разработки алгоритмов численного моделирования краевых задач нелинейной оптики.

ВВЕДЕНИЕ

Укороченные уравнения для электромагнитного поля широко применяются при рассмотрении распространения световых пучков и импульсов в нелинейных средах, в том числе при численном моделировании нелинейных оптических процессов. На первом этапе этих исследований использовалось приближение геометрической оптики, т. е. приближение взаимодействия плоских волн [1, 2], и параболическое приближение [3–5]. При исследовании распространения фемтосекундных импульсов появилась необходимость учёта более высоких порядков дисперсии и отклонения от параксиальности [6–19]. Можно выделить три основных подхода к решению этой задачи.

Для исследования параметрического взаимодействия частотно-модулированных («чирпированных») фемтосекундных импульсов, «растянутых» до длительности $T > 1 \div 1000$ пс, можно применять уравнения квазистатического или квазистационарного приближения [18, 19]. При рассмотрении распространения ультракоротких фемтосекундных импульсов в ряде работ (см., например, [6–8]) волновое уравнение для напряжённости электрического поля записывается в приближении волнового уравнения «безотражательного» распространения. При этом автоматически считается, что зависящая от частоты часть диэлектрической проницаемости много меньше её постоянной составляющей, а линейная дисперсия среды определяется модельными выражениями, допускающими простое аналитическое описание. Утверждается, что полученное уравнение описывает распространение волнового пакета как для видеоимпульсов, так и для высокочастотных импульсов с шириной спектра, меньшей ширины полосы прозрачности. Следует, однако, иметь в виду, что дифракцию это уравнение описывает только в параболическом приближении, которое справедливо, когда неоднородности в поперечном сечении волнового пакета много больше длины волны. Оно также не учитывает влияние дисперсии среды на дифракцию волнового пакета, например зависимости координаты фокусировки от частоты. Кроме того, упрощённое модельное описание линейной дисперсии затрудняет исследование процессов в конкретных случаях.

Другой подход основан на рассмотрении распространения пакетов электромагнитных волн, которые в линейном приближении являются точными решениями уравнений Максвелла и в линейной среде распространяются без взаимодействия, изменяясь только вследствие дифракции и

дисперсии. Нелинейность среды влияет на распространение этих пакетов и приводит к их взаимодействию при возбуждении волновыми полями нелинейных токов или нелинейной поляризации. Уравнения «однонаправленного» распространения волновых пакетов, которые получаются при таком подходе, в том или ином виде применяются, например, в работах [9–17]. В операторной форме такой подход сформулирован в [16, 17]. В спектральной формулировке он наиболее полно изложен, например, в работе [14]. В принципе, указанный подход позволяет выводить укороченные уравнения и достаточно полно исследовать распространение и взаимодействие широкополосных волновых пакетов с конечной расходимостью. Эти уравнения можно назвать нелинейными уравнениями Шрёдингера высокого порядка. Однако в опубликованных работах они получены только в дифференциальной форме для сред с локальной нелинейностью и в параболическом приближении, которое неприменимо вблизи точки нелинейного фокуса [15]. Кроме того, в них не учитывается влияние дисперсии на дифракцию волн, которое может быть существенным, например, при самофокусировке импульсов с предельно короткой длительностью, близкой к периоду светового поля.

Последние годы характеризуются бурным развитием вычислительной техники и широким применением алгоритмов быстрого преобразования Фурье. Поэтому становится актуальной задача численного моделирования нелинейных оптических процессов, позволяющего провести их детальный теоретический анализ. Такие исследования представляют интерес, например, для разработки методов измерения пиковой мощности импульсов предельно малой длительности, методов их формирования с помощью параметрического усиления [18, 19], методов удвоения частоты [20, 21] и описания процессов самомодуляции [22], а также процессов вынужденного рассеяния при взаимодействии встречных волновых пакетов.

В настоящей работе для решения указанной задачи, а также для анализа процессов распространения и взаимодействия пакетов электромагнитных волн рассматривается возможность применения интегральных соотношений для их амплитуд и возбуждаемых полей нелинейных токов. Для поля излучения, т. е. вихревого, или поперечного, поля, последние выводятся в данной работе с помощью леммы Лоренца. Полученные соотношения для изменений амплитуд парциальных волн и амплитуд волновых пакетов вследствие дисперсии и нелинейности среды являются точными и справедливыми при малых длительности волнового пакета и масштабах поперечных неоднородностей порядка и менее длины волны. При достаточно малой ширине частотного и углового спектра из них получаются уравнения для амплитуд взаимодействующих волновых пакетов в виде уравнений, которые можно назвать улучшенными нелинейными уравнениями Шрёдингера высокого порядка, записанными в интегральной форме.

Полученные соотношения расширяют возможности численного анализа широкого круга процессов распространения и взаимодействия широкополосных волновых пакетов. Это подтверждается приведёнными конкретными примерами полученных на их основе алгоритмов компьютерного моделирования.

1. ПРИМЕНЕНИЕ ЛЕММЫ ЛОРЕНЦА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИЗМЕНЕНИЙ АМПЛИТУД ВОЛНОВЫХ ПАКЕТОВ

Рассмотрим распространение и взаимодействие волновых пакетов, возбуждаемых в слое диэлектрика падающими на его торцевые поверхности с координатами $z = 0$ и $z = d$ пучками. Нелинейные свойства диэлектрика определяются в общем случае оператором диэлектрической проницаемости $\bar{\mathbf{D}} = \hat{\epsilon} \bar{\mathbf{E}}$ [23]. Взаимодействие и самовоздействие пакетов происходит за счёт нелинейного тока $\bar{\mathbf{j}}_{nl}$, который зависит от полей $\bar{\mathbf{E}}$ и $\bar{\mathbf{H}}$. В общем случае плотность тока $\bar{\mathbf{j}}_{nl}$ содержит как вихревую, т. е. «поперечную» ($\bar{\mathbf{j}}_{nl;t}$), так и «продольную» ($\bar{\mathbf{j}}_{nl;l}$) составляющие, причём $\text{div } \bar{\mathbf{j}}_{nl;t}(t; \bar{\mathbf{r}}) = 0$

и $\text{rot } \bar{\mathbf{j}}_{\text{nl};l}(t; \bar{\mathbf{r}}) = 0$. На эти составляющие можно разделить и плотность тока [24], причём изменение плотности заряда ρ определяется продольной составляющей плотности тока: $\bar{\mathbf{j}}_{\text{nl}} = \bar{\mathbf{j}}_{\text{nl};t} + \bar{\mathbf{j}}_{\text{nl};l}$; $\partial\rho/\partial t = -\text{div } \bar{\mathbf{j}}_{\text{nl};l}(t; \bar{\mathbf{r}})$.

В общем случае, кроме поля излучения $\bar{\mathbf{E}}(t; \bar{\mathbf{r}})$, $\bar{\mathbf{H}}(t; \bar{\mathbf{r}})$, зарядами и продольными токами возбуждается продольное поле $\mathbf{E}_l(t; \bar{\mathbf{r}})$, $\mathbf{H}_l(t; \bar{\mathbf{r}})$, которое можно, в принципе, вычислять отдельно от поля излучения. Мы будем рассматривать только волновые поля, возбуждаемые вихревыми токами, считая продольные токи и поля включёнными в уравнения связи, определяющие вихревые токи. При возникновении свободных зарядов так можно делать, например, при исследовании распространения в плазме низкой плотности световых импульсов умеренной длительности, не превышающей примерно $5 \div 10$ фс, когда можно считать, что их спектры лежат в высокочастотной области $\omega > \omega_p = \sqrt{4\pi e^2 n_e / m_e}$, где e и m_e — заряд и масса электрона, n_e — электронная концентрация. Спектр продольного поля и связанного с ним поперечного находится в терагерцовой области, и для описания связанных с этими полями процессов применяется численное моделирование на основе метода крупных частиц [25]. Не исключено, однако, что при таких исследованиях в некоторых случаях целесообразно раздельное вычисление этих полей. При этом поперечное поле можно вычислять методом, аналогичным изложенному ниже, а для вычисления продольного поля применять другие методы, например метод крупных частиц. Интегральные соотношения, определяющие изменения компонент продольного поля, можно получить с помощью теоремы Грина. В настоящей работе этот вопрос рассматриваться не будет.

В случае отсутствия свободных зарядов, когда $\bar{\mathbf{j}}_{\text{nl}} \equiv \bar{\mathbf{j}}_{\text{nl};t}$, $\text{div } \bar{\mathbf{j}}_{\text{nl};t} \equiv 0$, который мы и будем в основном анализировать, нелинейный ток равен производной по времени от нелинейной поляризации: $\bar{\mathbf{j}}_{\text{nl}} \equiv \partial \bar{\mathbf{P}}_{\text{nl}} / \partial t$. Ограничимся задачами с нулевыми начальными условиями, когда при $t \leq 0$ все поля и токи внутри слоя равны нулю. В этом случае процессы распространения электромагнитных волн определяются уравнениями Максвелла для вихревого поля, дивергенция которого равна нулю, и уравнениями связи, определяющими изменения нелинейных токов под действием электромагнитных полей.

Применим к уравнениям Максвелла преобразование Лапласа, точнее Фурье—Лапласа [26–30]: $\bar{\mathbf{E}}(\omega, \bar{\mathbf{r}}) = \int_0^\infty dt \exp(-pt) \bar{\mathbf{E}}(t, \bar{\mathbf{r}})$ и т. д., где $p = -i\omega + \sigma \rightarrow 0$.¹ С учётом нулевых начальных условий уравнения Максвелла для спектральных составляющих запишутся в виде

$$\begin{aligned} \text{rot } \bar{\mathbf{H}}(\omega; \bar{\mathbf{r}}) + i \frac{\omega}{c} \hat{\varepsilon}(\omega) \bar{\mathbf{E}}(\omega; \bar{\mathbf{r}}) &= \frac{4\pi}{c} \bar{\mathbf{j}}_{\text{nl}}(\omega; \bar{\mathbf{r}}), \\ \text{rot } \bar{\mathbf{E}}(\omega; \bar{\mathbf{r}}) - i \frac{\omega}{c} \bar{\mathbf{H}}(\omega; \bar{\mathbf{r}}) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Для спектральных составляющих вспомогательного «пробного» поля $\bar{\mathbf{E}}_1$, $\bar{\mathbf{H}}_1$ в линейной среде, где $\bar{\mathbf{j}}_{\text{nl}} = 0$, созданных источниками вне слоя, будут выполняться аналогичные однородные уравнения. Поэтому для расположенной внутри слоя замкнутой поверхности лемма Лоренца [23, 31] для спектральных составляющих полей $\bar{\mathbf{E}}_1$, $\bar{\mathbf{H}}_1$ и $\bar{\mathbf{E}}$, $\bar{\mathbf{H}}$ примет вид

$$\oint ds \{ [\bar{\mathbf{E}}_1(\omega; \bar{\mathbf{r}}), \bar{\mathbf{H}}(\omega; \bar{\mathbf{r}})] - [\bar{\mathbf{E}}(\omega; \bar{\mathbf{r}}), \bar{\mathbf{H}}_1(\omega; \bar{\mathbf{r}})] \} = \frac{4\pi}{c} \int dV \bar{\mathbf{j}}_{\text{nl}}(\omega; \bar{\mathbf{r}}) \bar{\mathbf{E}}(\omega; \bar{\mathbf{r}}). \quad (2)$$

Поля в нелинейной среде будем искать в виде суперпозиции распространяющихся в противоположных направлениях волновых пакетов плоских неоднородных волн (см. Приложение) с зависящей от продольной координаты z спектральной амплитудой парциальной волны $\bar{A}_{\pm s}(\omega, \mathbf{q}; z)$. Аналогичные результаты получатся при использовании волновых пакетов цилиндрических волн.

¹ В работе используется $\exp(-i\omega t)$ -представление [23, 24, 27–29]. В алгоритмах быстрого преобразования Фурье обычно применяется $\exp(+i\omega t)$ -представление. Соответствующие этому представлению выражения равны выражениям, комплексно-сопряжённым полученным в настоящей работе.

Эти волновые пакеты при не зависящей от z амплитуде $\bar{A}_{\pm s}(\omega, \mathbf{q}; z) = \bar{A}_{\pm s}(\omega, \mathbf{q}; 0)$ являются точным решением однородных линейных уравнений Максвелла. В процессе взаимодействия спектральных амплитуд и волновых пакетов за счёт нелинейности кроме зависимости $\bar{A}_{\pm s}$ от z может возникать продольное поле \bar{E}_{znl} :

$$\bar{\mathbf{E}}(t; \bar{\mathbf{r}}; z) = \bar{\mathbf{E}}_{+s}(t; \bar{\mathbf{r}}; z) + \bar{\mathbf{E}}_{-s}(t; \bar{\mathbf{r}}; z) + \mathbf{z}_0 \bar{E}_{znl}, \quad \bar{\mathbf{H}}(t; \mathbf{r}; z) = \bar{\mathbf{H}}_{+s}(t; \mathbf{r}; z) + \bar{\mathbf{H}}_{-s}(t; \mathbf{r}; z), \quad (3a)$$

$$\bar{\mathbf{E}}_{\pm s}(t; \mathbf{r}; z) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iint d^2\mathbf{q} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \mathbf{e}_{\pm s; \mathbf{q}} \bar{A}_{\pm s}(\omega, \mathbf{q}; z) \exp[-i\omega t \pm i(k_{\pm s; z} z + \mathbf{q}\mathbf{r})],$$

$$\bar{\mathbf{H}}_{\pm s}(t; \mathbf{r}; z) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iint d^2\mathbf{q} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \mathbf{h}_{\pm s; \mathbf{q}} \bar{A}_{\pm s}(\omega, \mathbf{q}; z) \exp[-i\omega t \pm i(k_{\pm s; z} z + \mathbf{q}\mathbf{r})]. \quad (3б)$$

Здесь $\mathbf{e}_{\pm s; \mathbf{q}}$ и $\mathbf{h}_{\pm s; \mathbf{q}}$ — собственные векторы поляризации парциальных волн с индексом $s = 1, 2$; $k_{\pm s; z}(\omega; \mathbf{q}) = k_{\pm s; 1; z} + ik_{\pm s; 2; z}$ — их продольные волновые числа.

Вместо спектральных амплитуд $\bar{A}_{\pm s}(\omega, \mathbf{q}; z)$ удобно ввести спектральные амплитуды поля волнового пакета $\bar{E}_{\pm s}(\omega, \mathbf{q}; z) = \bar{A}_{\pm s}(\omega, \mathbf{q}; z) \exp(\pm ik_{\pm s; z} z)$, в которых учитывается изменение фаз парциальных волн вследствие линейной дисперсии, а также затухание их поля:

$$\bar{\mathbf{E}}_{\pm s}(t; \mathbf{r}; z) \equiv \frac{1}{(2\pi)^3} \iint d^2\mathbf{q} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \mathbf{e}_{\pm s; \mathbf{q}} \exp(\pm i\mathbf{q}\mathbf{r}) \bar{E}_{\pm s}(\omega, \mathbf{q}; z) \exp(-i\omega t),$$

$$\bar{\mathbf{H}}_{\pm s}(t; \mathbf{r}; z) \equiv \frac{1}{(2\pi)^3} \iint d^2\mathbf{q} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \mathbf{h}_{\pm s; \mathbf{q}} \exp(\pm i\mathbf{q}\mathbf{r}) \bar{E}_{\pm s}(\omega, \mathbf{q}; z) \exp(-i\omega t). \quad (3в)$$

Векторы поляризации встречных парциальных волн в определённом смысле ортогональны:

$$\{[\mathbf{e}_{\mp s; \mathbf{q}}, \mathbf{h}_{\pm p; \mathbf{q}}] - [\mathbf{e}_{\pm p; \mathbf{q}}, \mathbf{h}_{\mp s; \mathbf{q}}]\}_z = \pm 2n_{s; \mathbf{q}} \delta_{s; p}, \quad (4)$$

где $\delta_{s; p}$ — символ Кронекера. Здесь принято, что «амплитуды» векторов поляризации (см. Приложение) $a_{\pm s; \mathbf{q}} = 1$. Коэффициент $n_{s; \mathbf{q}}$ при $|\mathbf{q}| \ll |k_0| \equiv |\omega/c|$ стремится к показателю преломления парциальной волны $n_s(\omega)$. Например, для ТН- и ТЕ-волн в изотропной среде $n_{TE; \mathbf{q}} = n_{TN; \mathbf{q}} = k_z/k_0$; для обыкновенных волн в одноосных кристаллах и изотропной среде, т. е. волн с y -поляризацией (см. Приложение), $n_{o; \mathbf{q}} = (k_{o; z}^2 + q_y^2)/(k_0 k_{o; z})$, где $k_{\pm o; z} = k_{o; z} = \sqrt{\varepsilon_o(\omega) k_0^2 - \mathbf{q}^2}$. Поэтому $n_{s; \mathbf{q}}$ можно назвать обобщённым показателем преломления.

Аналогичные соотношения выполняются и для волн в волноводах и световодах. В этом случае в приведённых ниже соотношениях можно считать, что $n_{s; \mathbf{q}} = n_s(\omega) Q_{s; \mathbf{q}}$, где $Q_{s; \mathbf{q}}$ — эффективная площадь сечения моды с поляризацией s и поперечным индексом \mathbf{q} .

Учитывая (4), с помощью леммы Лоренца (2) можно получить интегральные соотношения, определяющие зависимость амплитуд парциальных волн от продольной координаты z при известных токах $\bar{\mathbf{j}}_{nl}(\omega; \mathbf{r}; z)$, т. е., другими словами, записать уравнения Максвелла для пучков электромагнитных волн в интегральном виде. Для определённости в дальнейшем будем говорить о волновых пакетах, распространяющихся в направлении оси z . Для волновых пакетов, распространяющихся в противоположном направлении, выполняются аналогичные соотношения.

В качестве вспомогательного «пробного» поля $\bar{\mathbf{E}}_1(\omega; \mathbf{r}; z)$, $\bar{\mathbf{H}}_1(\omega; \mathbf{r}; z)$, аналогично рассмотрению возбуждения волн заданными токами в волноводах (см., например, [31]), возьмём плоскую

волну единичной амплитуды (см. (П1)), распространяющуюся навстречу парциальной волне, изменение амплитуды которой на отрезке от z_n до z_{n+1} необходимо определить. Применим лемму Лоренца к ограниченному плоскостями z_n и z_{n+1} цилиндрическому слою, который будем называть элементарным слоем. Поперечные размеры цилиндра $2R_x$ и $2R_y$ возьмём настолько большими, что на его боковой поверхности и вне её поле настолько мало, что плотность тока $\bar{\mathbf{j}}_{\text{nl}}(\omega; \mathbf{r}; z)$ в этой области можно считать равной нулю. В этом случае суммарное поле $\bar{\mathbf{E}}_S(t; \mathbf{R}; z)$, $\bar{\mathbf{H}}_S(t; \mathbf{R}; z)$ на боковой поверхности цилиндра можно разделить на падающее на эту поверхность «внешнее» поле $\bar{\mathbf{E}}_V(t; \mathbf{r}; z)$, $\bar{\mathbf{H}}_V(t; \mathbf{r}; z)$, которое можно тем или иным способом определить, и поле $\bar{\mathbf{E}}_{+s}(t; \mathbf{r}; z)$, $\bar{\mathbf{H}}_{+s}(t; \mathbf{r}; z)$, падающее на боковую поверхность изнутри, которое при достаточно малой длине интервала $\Delta d \equiv z_{n+1} - z_n$ определяется амплитудами парциальных волн на торцевых плоскостях элементарного слоя:

$$\mathbf{E}_{+S}(t; \mathbf{R}; z) = \mathbf{E}_{+V}(t; \mathbf{R}; z) + \bar{\mathbf{E}}_{+s}(t; \mathbf{R}; z), \quad \mathbf{H}_{+S}(t; \mathbf{R}; z) = \mathbf{H}_{+V}(t; \mathbf{R}; z) + \bar{\mathbf{H}}_{+s}(t; \mathbf{R}; z). \quad (5)$$

Такая ситуация может реализоваться, например, при аксиконной фокусировке пучка.

Из леммы Лоренца следует, что приращение спектральной амплитуды парциальной волны $\bar{A}_{+s}(\omega; \mathbf{q}; z)$ на интервале от z_n до z_{n+1} будет определено через интеграл по объёму цилиндра от компонент нелинейного тока и интеграл по его боковой поверхности от компонент суммарного поля на этой поверхности:

$$\begin{aligned} \bar{A}_{+s}(\omega; \mathbf{q}; z_{n+1}) &= \bar{A}_{+s}(\omega; \mathbf{q}; z_n) - \frac{2\pi}{cn_{s;q}} \int_{z_n}^{z_{n+1}} dz_1 \exp(-ik_{+s;z}z_1) \mathbf{j}_{\text{nl}}(\omega; \mathbf{q}; z_1) \mathbf{e}_{-s;\mathbf{q}} - \frac{1}{2n_{s;q}} \times \\ &\times \int_{z_n}^{z_{n+1}} dz_1 \oint_R ds \mathbf{n}_s \{ [\mathbf{e}_{-s;\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{H}}_S(\omega; \mathbf{R}; z_1)] - [\bar{\mathbf{E}}_S(\omega; \mathbf{R}; z_1), \mathbf{h}_{-s;\mathbf{q}}] \} \exp[-ik_{+s;z}(\omega; \mathbf{q})z_1 - i\mathbf{q}\mathbf{R}]. \end{aligned} \quad (6a)$$

Изменения спектральных амплитуд поля связано также с набегом их фаз и затуханием. Для них из (6a) следует, что внутри элементарного слоя

$$\begin{aligned} \bar{E}_{+s}(\omega; \mathbf{q}; z) &= \bar{E}_{+s}(\omega; \mathbf{q}; z_n) \exp(ik_{+s;z}zz_n) - \frac{2\pi}{cn_{s;q}} \int_{z_n}^z dz_1 \exp(ik_{+s;z}zz_1) \bar{\mathbf{j}}_{\text{nl}}(\omega; \mathbf{q}; z_1) \mathbf{e}_{-s;\mathbf{q}} - \\ &- \frac{1}{2n_{s;q}} \int_{z_n}^z dz_1 \oint_R ds \{ [\mathbf{e}_{-s;\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{H}}_S(\omega; \mathbf{R}; z_1)] - [\bar{\mathbf{E}}_S(\omega; \mathbf{R}; z_1), \mathbf{h}_{-s;\mathbf{q}}] \} \exp[ik_{+s;z}zz_1 + i\mathbf{q}\mathbf{R}]. \end{aligned} \quad (6b)$$

Здесь $zz_k = z - z_k > 0$. При конкретных вычислениях можно считать, что слой имеет прямоугольное сечение и трансформировать интегралы по поперечным волновым числам в соотношениях (3) в ряды Фурье с шагами $\Delta q_x = \pi/R_x$, $\Delta q_y = \pi/R_y$, причём $\mathbf{q}(k_x; k_y) = \mathbf{x}_0(\Delta q_x k_x) + \mathbf{y}_0(\Delta q_y k_y)$.

Продольное поле $\bar{E}_{z\text{nl}}$, т. е. поле «деполяризации», возбуждается продольной составляющей тока $\bar{j}_{\text{nl};z}$ и существенно только при значительной величине последней, например при острой фокусировке пучков или при образовании сверхтонких нитей в процессе самофокусировки. Согласно [31] это поле можно выразить через $\bar{j}_{\text{nl};z}$, используя продольную составляющую первого уравнения Максвелла (1). Для изотропной среды из этого уравнения следует, что

$$\bar{E}_{z\text{nl}}(\omega; \mathbf{q}; z) = \frac{4\pi}{i\omega\varepsilon(\omega)} j_{\text{nl};z}(\omega; \mathbf{q}; z) = -\frac{4\pi}{\varepsilon(\omega)} \bar{P}_{\text{nl};z}(\omega; \mathbf{q}; z). \quad (7)$$

Из соотношений (6) и теоремы о свёртке [25–30] (которая заключается в утверждении, что в случае $F(\Omega) = F_1(\Omega)g(\Omega)$ справедливо соотношение $F(t) = \int_0^t d\tau F_1(t-\tau)G(\tau)$, где $G(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\Omega g(\Omega) \exp(-i\Omega\tau)$), следует, что внутри элементарного слоя в момент времени t амплитуда поля пакета распространяющихся вдоль оси z парциальных волн с поперечным волновым вектором \mathbf{q} определяется его амплитудой на входной для этих волн поверхности слоя и нелинейными токами внутри слоя в предыдущие моменты времени с соответствующим длине пути zz_k запаздыванием. Ограничимся случаями, когда можно считать $R \rightarrow \infty$. Тогда из (6) следует, что

$$\begin{aligned} \bar{E}_{+s}(t; \mathbf{q}; z) = & \int_0^t d\tau \bar{E}_{+s}(t-\tau; \mathbf{q}; z_n) \bar{G}_{+s}(\tau; zz_n; \mathbf{q}) - \\ & - \frac{2\pi}{c} \int_{z_n}^z dz_1 \int_0^t d\tau \bar{\mathbf{J}}_{nl}(t-\tau; \mathbf{q}; z_1) \bar{\mathbf{G}}_{+sj}(\tau; zz_1; \mathbf{q}). \end{aligned} \quad (8a)$$

Здесь «функции Грина» (т. к. это не функции Грина в строгом смысле [31], то правильнее было бы называть их функциями Грина–Лоренца) – действительные функции

$$\begin{aligned} \bar{G}_{+s}(\tau; zz_n; \mathbf{q}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \exp(-i\omega\tau + ik_{+s; z}zz_n), \\ \bar{\mathbf{G}}_{+sj}(\tau; zz_1; \mathbf{q}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{\mathbf{e}_{-s; \mathbf{q}}}{n_{s; \mathbf{q}}} \exp(-i\omega\tau + ik_{+s; z}zz_1). \end{aligned} \quad (8b)$$

Поля волнового пакета выражаются через эту амплитуду с помощью соотношений (3), которые с помощью теоремы о свёртке также можно записать во временном представлении:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{E}}_{\pm s}(t; \mathbf{q}; z) &= \int_0^t d\tau \bar{E}_{\pm s}(t-\tau; \mathbf{q}; z) \mathbf{e}_{\pm s; \mathbf{q}}(\tau), \quad \bar{\mathbf{H}}_{\pm s}(t; \mathbf{q}; z) = \int_0^t d\tau \bar{E}_{\pm s}(t-\tau; \mathbf{q}; z) \mathbf{h}_{\pm s; \mathbf{q}}(\tau), \\ \bar{E}_{z; nl}(t; \mathbf{q}; z) &= -4\pi \int_0^t d\tau \bar{P}_{z; nl}(t-\tau; \mathbf{q}; z) p_z(\tau). \end{aligned} \quad (9a)$$

Функции связи $\mathbf{e}_{\pm s; \mathbf{q}}(\tau)$, $\mathbf{h}_{\pm s; \mathbf{q}}(\tau)$, $p_z(\tau)$ удобно записать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{\pm s; \mathbf{q}}(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \mathbf{e}_{\pm s; \mathbf{q}} \exp(-i\omega\tau), \quad \mathbf{h}_{\pm s; \mathbf{q}}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \mathbf{h}_{\pm s; \mathbf{q}} \exp(-i\omega\tau), \\ p_z(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{\exp(-i\omega\tau)}{\varepsilon(\omega)}. \end{aligned} \quad (9b)$$

При малой дисперсии и малых углах распространения волновых пакетов, когда $|\mathbf{q}|/|k_s| < 1$, эти функции пропорциональны сумме функции $\delta(\tau)$ и её производных.

1.1. Полосовые спектры

В задачах нелинейной оптики спектр волновых пакетов, как правило, сосредоточен в интервале от минимальной частоты $\omega_m > 0$ до максимальной частоты ω_M . Эти частоты обычно лежат либо в первой, либо во второй полосе прозрачности. Для случаев таких «полосовых» спектров, которые мы и будем ниже рассматривать, приведённые выше соотношения можно записать в более удобном для исследования и создания алгоритмов численного моделирования виде.

При «полосовых» спектрах волновых пакетов интегралы в выражениях (3) удобно представить в виде суммы интегралов по положительным и отрицательным частотам и, поскольку $k_{\pm s; z}(-\omega; \mathbf{q}) = k_{\pm s; z}^*(\omega; \mathbf{q})$ [23], записать их в виде суммы комплексных полей $\tilde{\mathbf{E}}$, $\tilde{\mathbf{H}}$ и сопряжённых им величин:

$$\bar{\mathbf{E}}(t, \mathbf{r}; z) \equiv \frac{1}{2} \left[\tilde{\mathbf{E}}(t, \mathbf{r}; z) + \tilde{\mathbf{E}}^*(t, \mathbf{r}; z) \right], \quad \bar{\mathbf{H}}(t, \mathbf{r}; z) \equiv \frac{1}{2} \left[\tilde{\mathbf{H}}(t, \mathbf{r}; z) + \tilde{\mathbf{H}}^*(t, \mathbf{r}; z) \right]. \quad (10a)$$

Кроме того, часто удобно ввести среднюю, т. е. несущую, частоту волнового пакета $\bar{\omega} = (\omega_M + \omega_m)/2$ и его ширину $\Delta\bar{\omega} = (\omega_M - \omega_m)/2$ (индекс волнового пакета будем опускать), а также волновое число $\bar{k}_s = k_{+s; z}(\bar{\omega}; 0) \equiv k_{-s; z}(\bar{\omega}; 0)$ (см. Приложение) и комплексные амплитуды полей волновых пакетов:

$$\mathbf{E}_{\pm s; \bar{\omega}}(t, \mathbf{r}; z) = \exp[i(\bar{\omega}t \mp \bar{k}_s z)] \tilde{\mathbf{E}}_{\pm s}(t, \mathbf{r}; z), \quad \mathbf{H}_{\pm s; \bar{\omega}}(t, \mathbf{r}; z) = \exp[i(\bar{\omega}t \mp \bar{k}_s z)] \tilde{\mathbf{H}}_{\pm s}(t, \mathbf{r}; z). \quad (10b)$$

Эти комплексные амплитуды поля, как следует из (3), выражаются через комплексные спектральные амплитуды поля $E_{\pm s; \bar{\omega}}(\Omega; \mathbf{q}; z) = \exp(\mp i \bar{k}_s z) \tilde{E}_{\pm s}(\omega; \mathbf{q}; z)/2$ (здесь и ниже $\omega = \bar{\omega} + \Omega$):

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\pm s}(t, \mathbf{r}; z) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \iint d^2\mathbf{q} \int_{-\Delta\bar{\omega}}^{+\Delta\bar{\omega}} d\Omega \mathbf{e}_{\pm s; \mathbf{q}} E_{\pm s}(\Omega, \mathbf{q}; z) \exp[-i(\Omega t \mp \mathbf{q}\mathbf{r})], \\ \mathbf{H}_{\pm s}(t, \mathbf{r}; z) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \iint d^2\mathbf{q} \int_{-\Delta\bar{\omega}}^{+\Delta\bar{\omega}} d\Omega \mathbf{h}_{\pm s; \mathbf{q}} E_{\pm s}(\Omega, \mathbf{q}; z) \exp[-i(\Omega t \mp \mathbf{q}\mathbf{r})]. \end{aligned} \quad (11)$$

Из (6)–(11) следует, что изменение комплексных спектральных амплитуд поля для распространяющегося вдоль оси z волнового пакета на отрезке от z_n до z_{n+1} определяется соотношением, аналогичным (6), в котором проведены замены $\tilde{E}_{\pm s}(\omega; \mathbf{q}; z) \rightarrow E_{\pm s}(\Omega; \mathbf{q}; z)$ и т. д., а также

$$\begin{aligned} k_{\pm s; z} &\rightarrow \Delta k_{\pm s; z} = [k_{\pm s; z}(\bar{\omega} + \Omega; \mathbf{q}) - \bar{k}_s], \\ \bar{\mathbf{j}}_{\text{nl}}(\omega, \mathbf{q}; z) &\rightarrow \mathbf{j}_{\pm s; \text{nl}}(\Omega, \mathbf{q}; z) \equiv \bar{\mathbf{j}}_{\text{nl}}(\omega, \mathbf{q}; z) \exp(\mp i \bar{k}_s z). \end{aligned} \quad (12)$$

1.2. Локальные уравнения связи; однонаправленные волновые пакеты

Приведённые выше соотношения позволяют составлять алгоритмы расчёта изменения полей внутри слоя по заданным на его границах значениям поля, если известны зависимости от этих полей нелинейных токов $\bar{\mathbf{j}}_{\text{nl}}$, т. е. нелинейные уравнения связи. В этом пункте будем рассматривать «локальные» уравнения связи, когда изменения $\bar{\mathbf{j}}_{\text{nl}}$ в данной точке определяются полями в этой же точке пространства. Простейшим примером таких уравнений связи являются уравнения для нелинейной поляризации в средах с безынерционной квадратичной и кубичной нелинейностями: $\bar{P}_{\text{nl}; i}(t; \mathbf{r}; z) = \chi_{i; jk} \bar{E}_j(t; \mathbf{r}; z) \bar{E}_k(t; \mathbf{r}; z) + \chi_{i; jkl} \bar{E}_j(t; \mathbf{r}; z) \bar{E}_k(t; \mathbf{r}; z) \bar{E}_l(t; \mathbf{r}; z)$. В средах с инерционной нелинейностью зависимость компонент поляризации от полей определяется либо аналогичными

интегральными по времени соотношениями, либо уравнениями в обыкновенных производных, коэффициенты в которых зависят от амплитуд полей в данной точке (см., например, [1, 2, 7, 9–14]). Эти уравнения могут быть нелинейными. Если нелинейный ток возникает вследствие ионизации среды, то определяющие его уравнения будут локальными, если несущественно макроскопическое движение электронов (см., например, [14]).

1.3. Однонаправленные волновые пакеты

Кроме вида спектров волновых пакетов и вида уравнений связи алгоритм расчётов зависит от граничных условий на «входной» и «выходной» поверхностях слоя, т. е. при $z_0 = 0$ и $z_d = d$. Если взаимодействующие волновые пакеты распространяются в одном направлении (граничные задачи), то поля и токи внутри элементарного слоя определяются полями на его входной поверхности z_n и падающими на боковую поверхность цилиндра полями, которые считаются известными. При достаточно малой толщине слоя $\Delta d = z_{n+1} - z_n$ эти величины в нулевом приближении определяются соотношением (6) при замене (12). Это позволяет с помощью итераций найти нелинейные токи и последующие приближения. Для ограниченных во времени импульсов при вычислениях интегралов по t и Ω , а также по \mathbf{r} , \mathbf{R} и \mathbf{q} , можно применять быстрое преобразование Фурье. Таким образом, задача о распространении в среде с локальной нелинейностью однонаправленных ограниченных во времени волновых пакетов с полосовыми спектрами решается с помощью последовательного пересчёта полей из одного элементарного слоя в другой с помощью приведённых выше выражений (6), (10)–(12). Обычно толщину слоёв $z_{n+1} - z_n$ выбирают настолько малой, что изменения полей достаточно точно определяются первым приближением.

При таком подходе поле в середине элементарного слоя вычисляется в линейном приближении. Затем в этой плоскости находится нулевое приближение нелинейного тока $\mathbf{j}_{nl}^{(0)}(\Omega; \mathbf{q}; \Delta d/2)$, а интеграл от этого тока по толщине элементарного слоя в (6) принимается равным умноженному на Δd значению $\mathbf{j}_{nl}^{(0)}(\Omega; \mathbf{q}; \Delta d/2)$. Ошибка при таком алгоритме пропорциональна квадрату отношения Δd к длине нелинейного взаимодействия L_{nl} , а интегральная ошибка на толщине нелинейного слоя пропорциональна первой степени этого отношения.

Из соотношений (6) легко видеть, что уточнение вычисления нелинейного тока в середине элементарного слоя с помощью простой итерации первого порядка приведёт к уменьшению ошибки вычислений примерно в $\Delta d/L_{nl}$ раз. Для этого в нулевом приближении нелинейный ток вычисляется на расстоянии $\Delta d/4$ от входной поверхности слоя и с помощью процедуры, аналогичной указанной выше, определяется величина поля в середине слоя и первое приближение для нелинейного тока в этой плоскости. Затем определяется поле на выходе слоя. При этом длительность цикла расчётов увеличивается примерно на 30 %, но количество элементарных слоёв, необходимое для достижения высокой точности вычисления интеграла энергии порядка $10^{-3} \div 10^{-4}$, уменьшается больше, чем на порядок. Вычисления, проведённые для задачи о самомодуляции импульсов в слое кристалла DKDP в одномерном приближении (аналогичной задаче о самомодуляции волн в световоде [22]) и задачи об удвоении частоты импульсов с длительностью $\tau_0 \sim 10$ фс [20, 21] в слое этого кристалла, подтвердили данный вывод.

1.4. Малоугловое и параболическое приближения

Соотношения (6) и (10)–(12) позволяют численно моделировать указанным выше способом изменение распространяющихся вдоль оси z волновых пакетов с широким спектром даже при возбуждении за счёт нелинейных эффектов нераспространяющихся волн (см. Приложение), т. е.

при возникновении в пучке поперечной структуры с масштабом порядка и меньше несущей длины волны. При этом предположение о слабости возбуждения встречных волн можно проверять, рассчитывая на каждом шаге их амплитуду, определяемую нелинейным током, создаваемым основным волновым пакетом. Если же поля в распространяющихся вдоль z пучках в поперечном направлении мало меняются на масштабе порядка длины волны, то соотношение (6) можно, проведя обратное преобразование Фурье по поперечным координатам, записать в спектрально-координатной форме, что в ряде случаев упрощает анализ процессов распространения:

$$E_{+s}(\Omega; \mathbf{r}; z) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\mathbf{r}_1 E_{+s}(\Omega; \mathbf{r}_1; z_n) G_{+s}(\Omega; z z_n; \mathbf{r}_0) + \\ + \frac{2\pi}{c n_s(\omega)} \int_{z_n}^z dz_1 \int d^2 \mathbf{r}_1 \mathbf{j}_{+s;nl}(\Omega; \mathbf{r}_1; z_1) \mathbf{G}_{+s}(\Omega; z z_1; \mathbf{r}_0). \quad (13)$$

Здесь $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}$; функции Грина $G_{+s}(\Omega; z z_n; \mathbf{r}_0)$ и $\mathbf{G}_{+s}(\Omega; z z_n; \mathbf{r}_0)$ записаны в «малоугловом» приближении, когда в предэкспоненциальных выражениях с точностью до слагаемых порядка $\mathbf{q}^2/k_{s;z}^2 < 1$ можно считать, что $n_{s;\mathbf{q}} \approx n_s(\omega)$. Их можно вычислить в явном виде. Например, для обыкновенных волн в параболическом приближении ($\mathbf{q}^2/k_{s;z}^2 \ll 1$) получим

$$G_{+o;\pm}(\Omega; z z_n; \mathbf{r}_0) = \mathbf{y}_0 G_{+o}(\Omega; z z_n; \mathbf{r}_0), \\ G_{+o}(\Omega; z z_n; \mathbf{r}_0) \approx \exp[i \Delta k_o(\Omega) z z_n] \frac{1}{2\pi \Lambda^2} \exp\left(-\frac{r_0^2}{2\Lambda^2}\right) \approx \\ \approx \exp[i \Delta k_o(\Omega) z z_n] \left[1 + i \frac{z z_n}{2k_o(\omega)} \left(\Delta_{\perp} + \frac{\Delta_{\perp}^2}{4k_o^2(\omega)}\right)\right] \delta(\mathbf{r}_0), \quad (14a)$$

$$G_{+o;z}(\Omega; z z_n; \mathbf{r}_0) \approx \frac{\exp[i \Delta k_o(\Omega) z z_1]}{2\pi \Lambda^2} \left[\exp\left(-\frac{\mathbf{r}_0^2}{2\Lambda^2}\right) \frac{i r_{0y}}{k_o(\omega)}\right] \approx \\ \approx \exp[i \Delta k_o(\Omega) z z_1] \frac{1}{k_o(\omega)} \frac{\partial}{\partial y} \delta(\mathbf{r}_0), \quad (14b)$$

где $\delta(\mathbf{r}_0)$ — двумерная дельта-функция. Здесь $\Lambda^2 = R_0^2 + i z z_j / k_s(\omega)$; $R_0^2 \approx \bar{\lambda}^2$. В правую часть (14a) добавлено слагаемое следующего приближения. Продольная компонента электрического поля определяется соотношением

$$\tilde{E}_{+o;z}(\Omega; \mathbf{r}; z) \approx \exp(+i \bar{k}_o z) \frac{1}{k_o(\omega)} \frac{\partial E_{+o}(\Omega; \mathbf{r}; z)}{\partial y} - \frac{4\pi}{\varepsilon(\omega)} \tilde{P}_{z;nl}(\omega; \mathbf{r}; z). \quad (15)$$

Из выражений (13)–(15) видно, что в симметричных и гладких на входе в нелинейную среду пучках при учёте влияния продольной компоненты электрического поля и нелинейного тока на возбуждение волн будет появляться несимметричная составляющая с более быстрой, чем у основного пучка, зависимостью от поперечных координат. Амплитуда этой составляющей пропорциональна отношению длины волны к радиусу основного пучка и может быть существенна только для пучков с поперечными неоднородностями порядка и меньше длины волны. Для пучков с более гладкой поперечной структурой влияние продольного поля мало и их распространение определяется уравнением (13) и соотношениями (14) при $G_{+o;z}(\Omega; z z_n; \mathbf{r}_0) = 0$. Это уравнение можно назвать улучшенным нелинейным уравнением Шрёдингера в спектральном представлении и интегральном виде. От обычного нелинейного уравнения Шрёдингера оно отличается более

точным описанием дифракции и влияния на неё дисперсии (оно описывает, например, возбуждение и распространение «наклонных» импульсов и зависимость координаты фокусировки от частоты), а также точным учётом дисперсии любого порядка.

1.5. Взаимодействие встречных волновых пакетов; нелокальные уравнения связи

При исследовании распространения импульсов в среде с нелокальной нелинейностью или исследовании взаимодействия волновых пакетов, распространяющихся во встречных направлениях (другими словами, при решении краевых задач), необходимо рассчитывать изменение их амплитуд в каждом элементарном слое за достаточно короткий интервал времени ΔT_{nl} , в течение которого эти амплитуды за счёт нелинейных процессов меняются мало. Соответствующие выражения для комплексных полей могут быть получены из общих соотношений (8) и (9), если учесть, что для волновых пакетов с полосовыми спектрами выполняются следующие равенства:

$$\bar{G}(t; \mathbf{r}; z) \equiv \tilde{G}(t; \mathbf{r}; z) + \tilde{G}^*(t; \mathbf{r}; z),$$

$$\int_0^t d\tau \tilde{E}_{+s}(t - \tau; \mathbf{q}; z_n) \tilde{G}_{+s}^*(\tau; z z_n; \mathbf{q}) \equiv \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty d\omega \bar{A}_{+s}(\omega; \mathbf{q}; z_n) \exp[-i\omega + ik_{s;z}(\omega; \mathbf{q}) z z_1] \times \\ \times \int_0^\infty d\omega_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \exp[i(\omega + \omega_1)\tau - ik_{s;z}^*(\omega_1; \mathbf{q}) z z_1] \equiv 0.$$

Аналогичные равенства выполняются для векторной функции Грина $\bar{\mathbf{G}}_j(t; \mathbf{r}; z)$. Тогда из соотношения (8а) следует, что внутри слоя с границами z_n и z_{n+1} комплексная амплитуда $E_{+s}(t; \mathbf{q}; z)$ пакета распространяющихся вдоль оси z парциальных волн с поперечным волновым вектором \mathbf{q} в момент времени t определяется его амплитудой на входной для этих волн поверхности слоя и нелинейными токами внутри слоя в предыдущие моменты времени с соответствующим расстоянием $z z_n$ и $z z_1$ запаздыванием:

$$E_{+s}(t; \mathbf{q}; z) = \int_0^t d\tau E_{+s}(t - \tau; \mathbf{q}; z_n) G_{+s}(\tau; z z_n; \mathbf{q}) + \\ + \frac{2\pi}{c} \int_{z_n}^z dz_1 \int_0^t d\tau \mathbf{j}_{+s;nl}(t - \tau; \mathbf{q}; z_1) \mathbf{G}_{+sj}(\tau; z z_1; \mathbf{q}). \quad (16)$$

Здесь $\mathbf{j}_{+s;nl}(t_1; \mathbf{q}; z_1) = \exp(-i\bar{k}_s z_1) \tilde{\mathbf{j}}_{nl}(t_1; \mathbf{q}; z_1)$, функции Грина G_{+s} и \mathbf{G}_{+sj} , а также функции связи $\mathbf{e}_{\pm s; \mathbf{q}}(\tau)$, $\mathbf{h}_{\pm s; \mathbf{q}}(\tau)$ и $p_z(\tau)$ комплексных полей с комплексной амплитудой в каждой полосе прозрачности можно записать в виде

$$G_{+s}(\tau; z z_n; \mathbf{q}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\Omega \Pi_s(\Omega) \exp[-i\Omega\tau z z_n + i\Delta\bar{k}_{s;z}(\Omega; \mathbf{q}) z z_n], \quad (17a)$$

$$\mathbf{G}_{+sj}(\tau; z z_1; \mathbf{q}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\Omega \Pi_s(\Omega) \frac{\mathbf{e}_{-s; \mathbf{q}}}{n_{s; \mathbf{q}}} \exp[-i\Omega\tau z z_n + i\Delta\bar{k}_{s;z}(\Omega; \mathbf{q}) z z_1], \quad (17b)$$

$$\mathbf{e}_{\pm s; \mathbf{q}}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\Omega \mathbf{e}_{\pm s; \mathbf{q}} \exp(-i\Omega\tau), \quad \mathbf{h}_{\pm s; \mathbf{q}}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\Omega \mathbf{h}_{\pm s; \mathbf{q}} \exp(-i\Omega\tau),$$

$$p_z(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\Omega \frac{\exp(-i\Omega\tau)}{\varepsilon(\bar{\omega} + \Omega)}. \quad (17\text{в})$$

Здесь $\tau_{zz_n} = \tau - S_M z z_n$, $\Delta \bar{k}_{s; z}(\Omega; \mathbf{q}) = \Delta k_{s; z}(\Omega; \mathbf{q}) - S_M \Omega$,

$$\Pi_s(\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < \Delta \bar{\omega}; \\ 0, & |\Omega| > \Delta \bar{\omega}. \end{cases}$$

Величину лучевого вектора S_M удобно брать соответствующей либо групповой скорости на центральной частоте волнового пакета, т. е. считать, что $S_M = S_{\bar{\omega}} = k'_s(\bar{\omega})$, либо равной $\partial k_s(\bar{\omega} + \Omega)/\partial \Omega|_{\Omega=\Omega_M} \equiv 1/V_M$, т. е. величине лучевого вектора, соответствующего максимальной групповой скорости волн в рассматриваемом волновом пакете или полосе прозрачности.

Функции $G_{\pm s}(\tau; z z_1; \mathbf{q})$ и $\mathbf{G}_{\pm s j}(\tau; z z_1; \mathbf{q})$ могут быть с той или иной точностью найдены либо численно, либо с помощью ряда приближений аналитически. Поэтому соотношения (16), (17) (и аналогичные соотношения для встречных волновых пакетов) позволяют составлять алгоритмы расчёта изменения полей в плоскостях z_{n+1} и z_n за малый промежуток времени, если известны поля в предыдущие моменты. Мы не будем рассматривать такие алгоритмы, т. к. они довольно очевидны; проблема их реализации заключается в корректном вычислении интегралов от сложных функций. Коротко остановимся только на случае медленных в масштабе $\tau_{\min} = 1/\Delta \bar{\omega}$ изменений полей, когда функции Грина могут быть найдены аналитически. При этом ограничимся описанием поперечной структуры пучков в параболическом приближении.

При медленных изменениях полей спектральные амплитуды волновых пакетов можно считать равными нулю при $|\Omega| \leq \Delta \bar{\Omega} \ll \{\Delta \bar{\omega}, \bar{\omega}\}$. Это позволяет разложить $\Delta \bar{k}_{s; z}(\Omega; \mathbf{q}) = \Delta k_{s; z}(\Omega; \mathbf{q}) - S_M \Omega$ в ряд по степеням параметров $\Delta \bar{\Omega}/\bar{\omega}$ и $\mathbf{q}^2/k_s^2(\bar{\omega})$ и ограничиться конечным числом слагаемых, например

$$\Delta \bar{k}_{s; z}(\Omega; \mathbf{q}) \approx -\frac{\mathbf{q}^2}{2k_s} \left(1 - \frac{k'_s}{k_s} \Omega - \frac{k_s k''_s - k_s'^2}{2k_s^2} \Omega^2 \right) + \frac{k''_s}{2} \Omega^2 + \frac{k_s'''}{6} \Omega^3. \quad (18)$$

Здесь принято, что $S_M = S_{\bar{\omega}}$. Кроме того, Π -образные функции в выражениях (17) можно заменить гауссовой функцией с шириной $\Delta \approx \bar{\omega} \gg \Delta \bar{\Omega}$. При достаточно малой толщине слоя $z_{n+1} z_n = z_{n+1} - z_n$, когда $|T_{3z}^3| (\Delta \bar{\Omega})^3/6 \equiv |k_s''' z z_n| (\Delta \bar{\Omega})^3/6 \ll \pi/2$, экспоненту в выражении (17) можно записать в виде

$$\exp[i \Delta \bar{k}_{s z}(\Omega; \mathbf{q}) z z_n] \approx \left\{ 1 + i \left[-\frac{\mathbf{q}^2 z z_n}{2k_s} \left(1 - \frac{k'_s}{k_s} \Omega - \frac{k_s k''_s - k_s'^2}{2k_s^2} \Omega^2 \right) + \frac{T_{3z}^3}{6} \Omega^3 \right] \right\} \exp\left(i \frac{T_{2s}^2 \Omega^2}{2}\right),$$

где $T_{2s}^2 = k_s'' z z_n + i/\bar{\Delta}^2$. Тогда интегралы в (17) и интегралы обратного преобразования Фурье по поперечному волновому вектору \mathbf{q} вычисляются в явном виде [29] и для координатно-временной функции Грина получается выражение

$$G_{+s}(\tau; z z_n; \mathbf{r}_0) = \exp(-\bar{k}_{2s} z z_n) \sqrt{\frac{i}{2\pi T_{2s}^2}} \exp\left(-i \frac{\tau z z_n}{2T_{2s}^2}\right) \times$$

$$\times \left\{ 1 + i \left[\frac{zz_n}{2k_s(\bar{\omega})} \Delta_{\perp} \left(1 - \frac{\tau_{zz_n}}{2T_{2s}^2} \frac{k'_s}{k_s(\bar{\omega})} + i \frac{k_s k''_s - k_s'^2}{2k_s^2} \frac{1 - 2i\tau_{zz_n}^2/T_{2s}^2}{2T_{2s}^2} \right) + \frac{T_{3z}^3}{6} \frac{\tau_{zz_n}}{T_{2s}^4} \left(3 - i \frac{\tau_{zz_n}^2}{T_{2s}^2} \right) \right] \right\} \delta(\mathbf{r}_0). \quad (19a)$$

Если «ширина» функции Грина $\Delta T_L \approx |T_{2s}|$ много меньше характерного времени изменения амплитуды волнового пакета, то эту амплитуду и нелинейный ток можно разложить в ряд по τ_{zz_n} и, вычислив интегралы в (16), получить, что

$$G_{+s}(\tau; zz_n; \mathbf{r}_0) \approx \exp(-\bar{k}_{2s} zz_n) \times \\ \times \left\{ 1 + zz_n \left[\frac{i}{2k_s} \Delta_{\perp} \left(1 - i \frac{k'_s}{k_s} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{k_s k''_s - k_s'^2}{2k_s^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - i \frac{k''_s}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{k_s'''}{6} \frac{\partial^3}{\partial t^3} + \dots \right] \right\} \delta(\tau_{zz_n}) \delta(\mathbf{r}_0), \\ \mathbf{G}_{+sj}(\tau; zz_n; \mathbf{r}_0) = \frac{\mathbf{e}_{-s}}{n_s(\bar{\omega})} G_{+s}[\tau; zz_n; \mathbf{r}_0]. \quad (19b)$$

Здесь \bar{k}_{2s} — параметр затухания на несущей частоте.

Соотношения (19б) и (16) можно назвать улучшенным нелинейным уравнением Шрёдингера в интегральном виде. От обычного нелинейного уравнения Шрёдингера оно отличается более точным описанием влияния дисперсии на дифракцию: оно описывает, например, возбуждение и распространение «наклонных» импульсов, а также зависимость координаты точки фокусировки от частоты парциальных волн. Кроме того, в этих соотношениях в явном виде содержится алгоритм их применения для численного моделирования при решении как граничных, так и краевых задач.

2. ПРИМЕНЕНИЕ БЫСТРОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Приведённые выше соотношения позволяют составлять алгоритмы численного моделирования процессов распространения волновых пакетов в среде с нелокальной нелинейностью и процессов взаимодействия встречных волновых пакетов с помощью вычисленных тем или иным способом функций Грина. Ниже мы покажем возможность создания алгоритма решения таких задач для широкополосных импульсов с помощью быстрого преобразования Фурье без вычисления этих функций в явном виде.

Для волновых пакетов с конечной шириной спектра можно считать, что временная ширина функций Грина $\Delta T_L \approx (S_m - S_M) z_{n1} z_n$, где $S_m = 1/V_{\min}$ и $S_M = 1/V_{\max}$, меньше минимального времени $T_{\min} = S_M z_{n+1} z_n$ распространения света между плоскостями z_n и z_{n+1} , ограничивающими элементарный слой. Поэтому для расчёта амплитуды $E_{+s}(t; \mathbf{r}; z_{n+1})$ в плоскости z_{n+1} на интервале времени от t до $t + T_{\min}$ необходимо знать её значения в плоскости z_n на предыдущем интервале от $t - (T_{\min} + \Delta T_L)$ до t , а также нелинейные токи в соответствующей пространственно-временной области (см. рис. 1). Согласно (16) при достаточно малой толщине слоёв эти нелинейные токи в первом приближении определяются значениями полей на интервале от $t - (T_{\min} + \Delta T_L)$ до t на плоскостях z_n и z_{n+1} , а также на соседних с ними плоскостях. Таким образом, задачу о вычислении изменения амплитуды $E_{+s}(t; \mathbf{r}; z_{n+1})$ за счёт нелинейных эффектов в первом приближении, т. е. с точностью до $|\mathbf{j}_{nl}| (\Delta d)^2 \sim (\Delta d/L_{nl})^2$, можно считать решённой, если в линейном приближении будет разработан достаточно точный алгоритм расчёта этой амплитуды на интервале от t до $t + \bar{T}_{\min}$ по её значениям на предыдущем интервале от $t - T_{\max}$ до t . Здесь

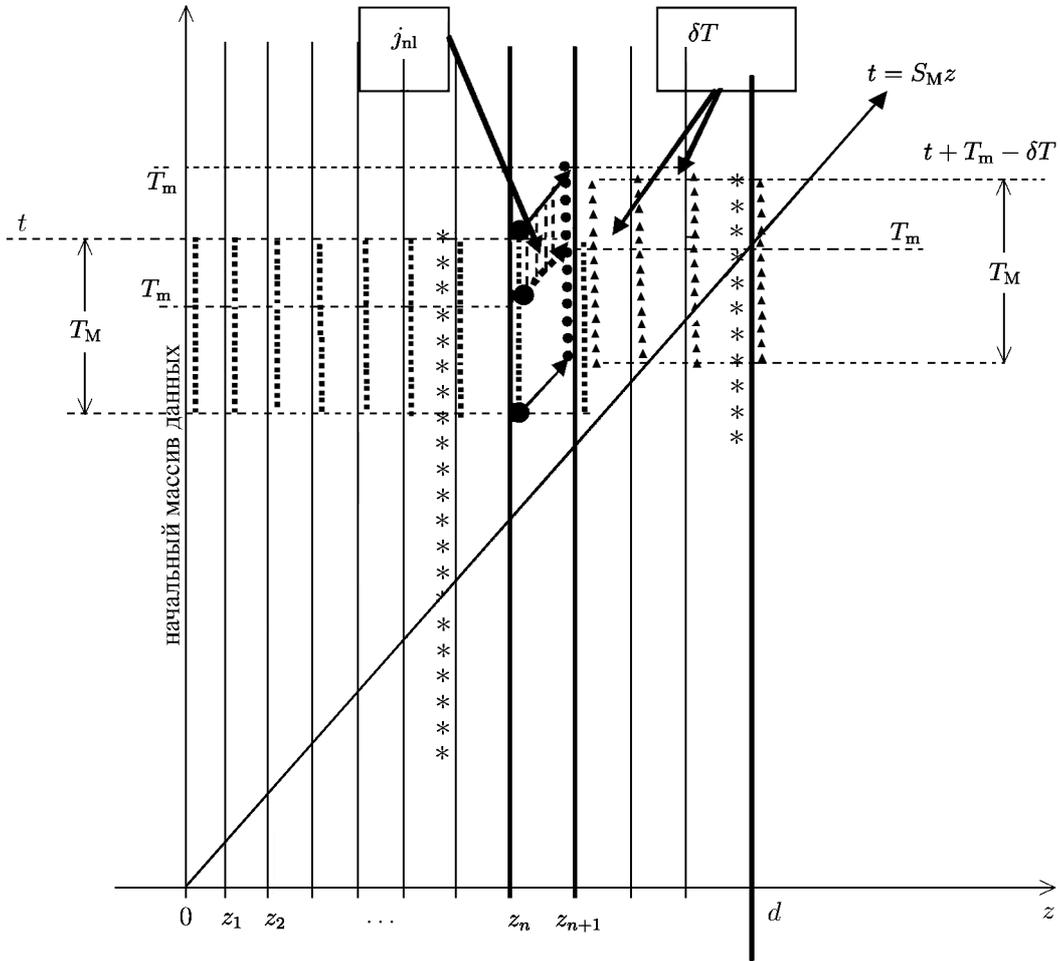


Рис. 1. Схема алгоритма: начальный массив данных; результаты расчётов на интервале от $t - T_M$ до t (квадраты); результат пересчёта на интервал от $t + T_m - T_M$ до $t + T_m$ (окружности); результаты расчётов на интервале от $(t + T_m - \delta T) - T_M$ до $t + T_m - \delta T$ (треугольники); результаты расчётов на промежуточной и конечной плоскости (звёздочки)

$\bar{T}_{\min} = T_{\min} - \delta T$, $T_{\max} \equiv T_M = M T_{\min}$; параметры δT и M удовлетворяют следующим условиям: $\Delta T_L < \delta T < T_{\min}$ и $M > 1$.

Такой алгоритм можно создать на основе быстрого преобразования Фурье при определённом подборе параметров δT_m и M , а также фильтрации высоких гармоник, вызывающих быстрые осцилляции, если амплитуда волнового пакета на краях интервала от $t - T_{\max}$ до t не равна нулю. Схема алгоритма показана на рис. 1; коротко её можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}
 E_{+s}(t_0; \mathbf{q}; z_n)\theta(t_0) &\rightarrow \text{быстрое преобразование Фурье} \rightarrow E_{+s}(\Omega; \mathbf{q}; z_n)\bar{\Pi}_s(\Omega) \times \\
 &\times \exp[-i\Omega\tau_{zz_n} + i\Delta\bar{k}_{s;z}(\Omega, \mathbf{q})zz_n] \rightarrow \text{обратное быстрое преобразование Фурье} \rightarrow \\
 &\rightarrow E_{+s}(t_0 + \bar{T}_{\min}; \mathbf{q}; z_{n+1}) + \Delta E_{nl;n}. \quad (20)
 \end{aligned}$$

Здесь

$$\theta(t_0) = \begin{cases} 1, & t - T_M < t_0 \leq t; \\ 0, & t_0 = t - T_M, \end{cases}$$

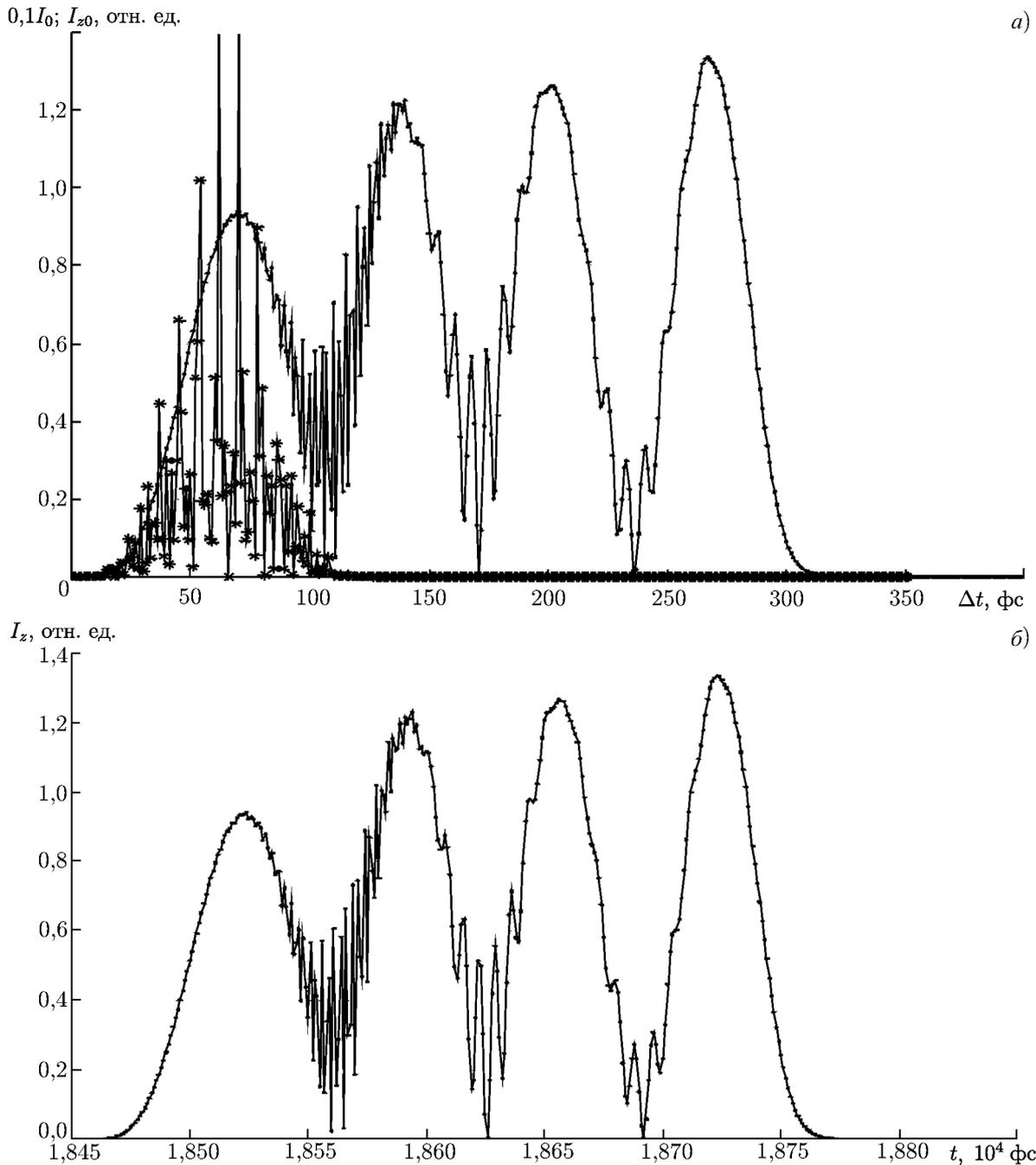


Рис. 2. Зависимость от времени интенсивности суммы четырёх волновых пакетов на выходе из слоя: (а) точный расчёт I_{z0} , звёздочками обозначены точки, определяющие форму импульса на входе, I_0 ; (б) расчёт с помощью приближённого алгоритма (I_z). Величина $\Delta t = (t - S_M z)$

$\bar{P}_s(\Omega)$ — передаточная функция частотного фильтра. Вычисление связанного с нелинейными токами изменения амплитуды $\Delta E_{nl;n} \sim z_{n+1} z_n \mathbf{j}_{nl} \mathbf{e}_q / (cn_s)$ при достаточно малой толщине слоёв $z_{n+1} z_n$ можно проводить без учёта дисперсии, поскольку связанная с этим ошибка пропорциональна $(z_{n+1} z_n^2)$ и не накапливается.

Проверка точности алгоритма и оптимизация его параметров M и $\delta T_m / T_{\min}$, а также числа точек nt на интервале T_{\min} проводится сравнением результатов расчётов с точным решением

задачи, которое легко находится при $\bar{j}_{nl} \equiv 0$. На рис. 2 приведены результаты точного расчёта (рис. 2а) и расчёта по приближённому алгоритму (рис. 2б), который позволяет, в принципе, учитывать нелинейные токи, связанные либо с нелокальной нелинейностью, либо с воздействием встречных волновых пакетов. Упрощённая схема такого алгоритма показана на рис. 1. С его помощью рассчитывалось распространение четырёх волновых пакетов с одинаковой амплитудой и квадратичной фазовой модуляцией, но разными несущими частотами, которые на входе в слой были совмещены во времени (рис. 2а). На рис. 3 показан спектр волновых пакетов и определяющая дисперсию зависимость группового запаздывания от частоты, вычисленная для обыкновенной волны в кристалле DKDP.

Приведённая на рис. 2б зависимость получена при $M = 7$, $\delta T/T_{\min} = 1/8$ и $nt = 65$. При таких значениях параметров она отличается от точной зависимости (рис. 2а) не больше, чем на несколько процентов. Это значит, что ошибка в вычислении разности фаз парциальных волн на всём интервале расчёта меньше $\pi/2$. Уменьшение параметра M до 6 не изменяет заметно точность расчёта. Она существенно ухудшается при уменьшении M до 4 или отношения $\delta T_m/T_{\min}$ до $1/16$. Таким образом, рассмотренный пример показывает возможность подбора параметров алгоритма, позволяющих проводить достаточно точные расчёты даже при большой дисперсии в нужной полосе частот.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В спектральной и пространственно-временной форме получены интегральные соотношения, выражающие амплитуду волнового пакета на выходной поверхности элементарного слоя через его амплитуду на входной поверхности, поля на боковой поверхности этого слоя и интеграл от нелинейных токов внутри слоя в предыдущие моменты времени. Эти соотношения позволяют создавать алгоритмы численного моделирования распространения и взаимодействия волновых пакетов с широкими частотным и угловым спектрами, в том числе описывать возбуждение нераспространяющихся волн при острой фокусировке или образовании сверхтонких нитей, когда возникает асимметрия пучков.

Для волновых пакетов с достаточно малой шириной спектра и угловой расходимостью в малоугловом и параболическом приближениях получены соотношения, которые можно назвать улучшенными нелинейными уравнениями Шрёдингера высокого порядка, записанными в интегральной форме. От обычного нелинейного уравнения Шрёдингера они отличаются более точным учётом дифракции и влиянием на неё дисперсии.

На основе полученных соотношений предложен алгоритм численного моделирования с использованием простой итерации первого порядка, который, по сравнению с традиционным алгоритмом, для широкого круга задач улучшает точность расчётов пропорционально отношению ширины элементарного слоя Δd к длине нелинейного взаимодействия L_{nl} .

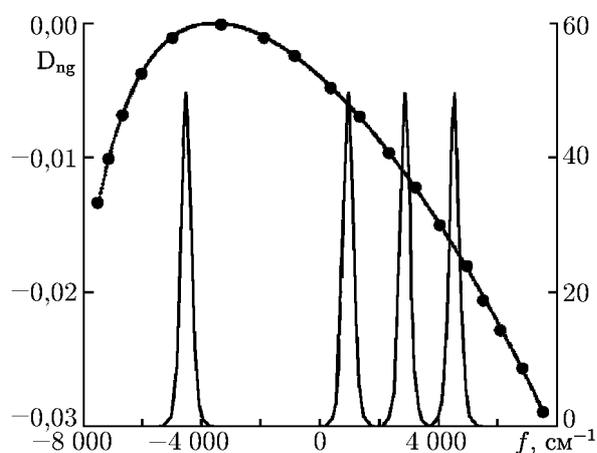


Рис. 3. Зависимость от частоты нормированной разности между величиной лучевого вектора и её максимальным значением, $D_{ng} = (S - S_M) c$ (точки, левая шкала) и спектр волновых пакетов в относительных единицах (сплошная линия, правая шкала)

Показана возможность применения быстрого преобразования Фурье для разработки алгоритмов численного моделирования краевых задач нелинейной оптики.

В Приложении показано, что в изотропной среде, кроме ТЕ- и ТМ-волн, могут распространяться пакеты волн с «заданной» поляризацией. Приведены характеристики этих волн при произвольном поперечном волновом векторе, а также некоторые характеристики волн в одноосных кристаллах.

Автор признателен С. Н. Власову за интерес к работе и обсуждение её результатов.

Работа поддержана Программой ведущих научных школ (грант НШ-6237.2010.2), а также Программой Президиума РАН «Экстремальные световые поля и их приложения».

ПРИЛОЖЕНИЕ

Плоские неоднородные волны

Однородные уравнения Максвелла для волновых полей имеют решения, которые называются плоскими неоднородными волнами:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{\pm s; \mathbf{q}}(t, \mathbf{r}; z) &= \mathbf{e}_{\pm s; \mathbf{q}} \exp\{-i\omega t \pm i[k_{\pm s; z}(\omega; \mathbf{q})z + \mathbf{q}\mathbf{r}]\}, \\ \mathbf{h}_{\pm s; \mathbf{q}}(t, \mathbf{r}; z) &= \mathbf{h}_{\pm s; \mathbf{q}} \exp\{-i\omega t \pm i[k_{\pm s; z}(\omega; \mathbf{q})z + \mathbf{q}\mathbf{r}]\}. \end{aligned} \quad (\text{П1})$$

Здесь поперечный волновой вектор $\mathbf{q} = \mathbf{x}_0 q_x + \mathbf{y}_0 q_y$ имеет реальные составляющие. Продольное волновое число $k_{\pm s; z}(\omega; \mathbf{q})$ определяется из условия совместности уравнений для векторов поляризации $\mathbf{e}_{\pm s; \mathbf{q}}$ и $\mathbf{h}_{\pm s; \mathbf{q}}$ однородных уравнений Максвелла и линейного уравнения связи:

$$k_0 \mathbf{h}_{\pm s; \mathbf{q}} = [\mathbf{k}_{\pm s}, \mathbf{e}_{\pm s; \mathbf{q}}], \quad k_0 \mathbf{d}_{\pm s; \mathbf{q}} = -[\mathbf{k}_{\pm s}, \mathbf{h}_{\pm s; \mathbf{q}}], \quad \mathbf{d}_{\pm s; \mathbf{q}}(\omega) = \hat{\varepsilon}(\omega) \mathbf{e}_{\pm s; \mathbf{q}}(\omega), \quad (\text{П2})$$

где $k_0 = \omega/c$; $\mathbf{k}_{\pm s} = \pm(k_{\pm s; z} \mathbf{z}_0 + q_x \mathbf{x}_0 + q_y \mathbf{y}_0)$. Из этих уравнений можно получить три однородных уравнения для трёх составляющих $e_{\pm s; k}$ вектора $\mathbf{e}_{\pm s; \mathbf{q}}$ [23]. Из условия совместности этих уравнений следует соотношение, определяющее функцию $k_{\pm s; z}(\omega; \mathbf{q})$ — дисперсионную характеристику волн.

Одноосные кристаллы

Будем считать, что оптическая ось кристалла z_1 (главная диэлектрическая ось) лежит в параллельной главным диэлектрическим осям x_1, z_1 плоскости xz и направлена под углом θ к оси z . Соответствующее главное значение тензора $\hat{\varepsilon}$ обозначим через $\bar{\varepsilon}_{z_1 z_1} = \varepsilon_e$, а главные значения $\bar{\varepsilon}_{x_1 x_1} = \bar{\varepsilon}_{y_1 y_1} = \varepsilon_o$. Координаты $\mathbf{R}_i = (x, y, z)$ связаны с координатами $\mathbf{R}_i = (x_1, y_1, z_1)$ матрицей преобразований T_{ik} [30]. Поэтому в координатах $\mathbf{R}_i = (x, y, z)$

$$\hat{\varepsilon} = \mathbf{T}^{-1} \hat{\varepsilon} \mathbf{T} = \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & \Delta \bar{\varepsilon}_{oe} \\ 0 & \varepsilon_o & 0 \\ \Delta \bar{\varepsilon}_{oe} & 0 & \varepsilon_{zz} \end{vmatrix}. \quad (\text{П3})$$

Здесь

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_e \sin^2 \theta + \varepsilon_o \cos^2 \theta, \quad \varepsilon_{zz} = \varepsilon_o \sin^2 \theta + \varepsilon_e \cos^2 \theta,$$

$$\Delta\bar{\varepsilon}_{oe} = (\Delta\varepsilon_{oe}/2) \sin(2\theta), \quad \Delta\varepsilon_{oe} = \varepsilon_o - \varepsilon_e, \quad (\text{П4})$$

θ — угол поворота z_1 относительно z (отсчитываемый по часовой стрелке).

Дисперсионное уравнение распадается на два уравнения, определяющие дисперсионные зависимости для обыкновенных $k_{o;z}(\omega; \mathbf{q})$ и необыкновенных $K_{\pm e;z}(\omega; \mathbf{q})$ волн [23]. Из уравнения Френеля [23], учитывая формулу (П3), можно получить, что

$$k_{\pm o;z}(\omega; \mathbf{q}) \equiv k_{o;z}(\omega; \mathbf{q}) = \sqrt{k_o^2 - \mathbf{q}^2}, \quad k_{\pm e;z}(\omega; \mathbf{q}) = \mp \beta q_x + \sqrt{K_\theta^2 - q_x^2 \left(\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{zz}} - \beta^2 \right) - \frac{\varepsilon_o}{\varepsilon_{zz}} q_y^2}. \quad (\text{П5})$$

Здесь $k_o^2 = \varepsilon_o k_0^2$, $K_\theta^2 = \varepsilon_o \varepsilon_e k_0^2 / \varepsilon_{zz}$ и $\beta = \Delta\varepsilon_{oe} \sin(2\theta) / (2\varepsilon_{zz})$ — угол двулучепреломления.

Необыкновенные волны поляризованы в плоскости, проходящей через оптическую ось кристалла z_1 и направление распространения волны, определяемое вектором $\mathbf{k}_{\pm e}$. Продольную составляющую электрического поля этих волн $e_{\pm e;z}$ и составляющую $e_{\pm e;y}$ можно выразить через $e_{\pm e;x} = a_{\pm e}$, которую будем называть амплитудой необыкновенной волны. Компоненты магнитного поля можно выразить через амплитуду волны из первого уравнения Максвелла: $\mathbf{h}_{\pm e;q} = [\mathbf{k}_{\pm e;q}, \mathbf{e}_{\pm e;q}] / k_0$. Выпишем выражения для компонент полей через амплитуду волны для двух интересных случаев.

Если волны распространяются под малым углом к оси z , т. е. $\mathbf{q}^2 / k_{e;z}^2 \ll 1$, то приближённо можно считать, что

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{\pm e;q} &= \left[\mathbf{x}_0 - \mathbf{z}_0 \left(\beta \pm \frac{k_{\pm e;z} q_x}{K_\theta^2} \right) \right] a_{\pm e;q}, \\ \mathbf{h}_{\pm e;q} &= \left\{ \pm \frac{y_0}{k_0} K_\theta \pm \mathbf{z}_0 \frac{q_y}{k_0} \right\} a_{\pm e;q}. \end{aligned} \quad (\text{П6})$$

При конечных значениях углов простые соотношения получаются, если оптическая ось кристалла перпендикулярна оси z :

$$\begin{aligned} e_{\pm e;x} &= a_{\pm e;q}, & e_{\pm e;y} &= \frac{\varepsilon_e}{\varepsilon_o} \frac{q_x q_y}{k_{e;z}^2 + q_y^2} a_{\pm e;q}, & e_{\pm e;z} &= \mp \frac{\varepsilon_e}{\varepsilon_o} \frac{k_{e;z} q_x}{k_{e;z}^2 + q_y^2} a_{\pm e;q}, \\ h_{\pm e;x} &= 0, & h_{\pm e;y} &= \pm \frac{k_{e;z}}{k_0} \frac{k_e^2}{k_{e;z}^2 + q_y^2} a_{\pm e;q}, & h_{\pm e;z} &= - \frac{k_e^2 q_y}{k_0 (k_{e;z}^2 + q_y^2)} a_{\pm e;q}. \end{aligned} \quad (\text{П7})$$

Обыкновенная волна поляризована в плоскости yz . Компоненты полей этой волны выражаются через поперечную составляющую $e_{\pm o;y} = a_{\pm o}$:

$$\begin{aligned} e_{\pm o;x} &= 0, & e_{\pm o;y} &= a_{\pm o;q}, & e_{\pm o;z} &= \mp \frac{q_y}{k_{o;z}} a_{\pm o;q}, \\ h_{\pm o;x} &= \mp \frac{k_{o;z}^2 + q_y^2}{k_0 k_{o;z}} a_{\pm o;q}, & h_{\pm o;y} &= \pm \frac{q_x q_y}{k_0 k_{o;z}} a_{\pm o;q}, & h_{\pm o;z} &= \frac{q_x}{k_0} a_{\pm o;q}. \end{aligned} \quad (\text{П8})$$

В изотропной среде имеет место вырождение волн по поляризации. В ряде задач целесообразно разделять волновые пучки на пучки ТМ- и ТЕ-волн [32]. У ТМ-волн вектор электрического поля лежит в плоскости падения волны на слой, а магнитное поле перпендикулярно оси z (волны с p -поляризацией). У волн второго типа перпендикулярно оси z электрическое поле волны (волны с s -поляризацией).

Нетрудно видеть, что в изотропной среде могут распространяться также пучки, электрическое поле которых лежит либо в плоскости xz , либо в плоскости yz , аналогичные пучкам обыкновенных волн в одноосных кристаллах. Для поляризованных в плоскости yz волн (о-волны)

компоненты полей выражаются через поперечную составляющую электрического поля $a_{\pm 0}$ с помощью соотношений (П8). Для поляризованных в перпендикулярной плоскости волн (е-волн) получаются аналогичные выражения:

$$e_{\pm e;x} = a_{\pm e;\mathbf{q}}, \quad e_{\pm e;y} = 0, \quad e_{\pm e;z} = \mp \frac{q_x}{k_{e;z}} a_{\pm e;\mathbf{q}},$$

$$h_{\pm e;x} = \mp \frac{q_x q_y}{k_0 k_{e;z}} a_{\pm e;\mathbf{q}}, \quad h_{\pm e;y} = \pm \frac{k_{e;z}^2 + q_x^2}{k_0 k_{e;z}} a_{\pm e;\mathbf{q}}, \quad h_{\pm e;z} = -\frac{q_y}{k_0} a_{\pm e;\mathbf{q}}. \quad (\text{П9})$$

Нераспространяющиеся волны

В области прозрачности мнимая часть диэлектрической проницаемости $\hat{\epsilon} = \hat{\epsilon}_1 + i\hat{\epsilon}_2$ много меньше действительной. Поэтому при достаточно малых длинах поперечного волнового вектора \mathbf{q} мнимая часть продольного волнового числа $k_z = k_{1z} + ik_{2z}$ тоже будет относительно мала. Например, для случая изотропной среды, рассмотрением которого мы ограничимся, из дисперсионного соотношения следует

$$k_{1z}^2 \equiv \frac{k_1^2 - \mathbf{q}^2}{2} + \sqrt{\frac{|k_1^2 - \mathbf{q}^2|^2}{4} + \frac{\epsilon_2^2 k_0^4}{4}}, \quad k_{2z} = \frac{\epsilon_2 k_0^2}{2k_{1z}}, \quad (\text{П10})$$

где $k_1^2 = \epsilon_1(\omega)k_0^2$.

С возрастанием длины поперечного вектора \mathbf{q} затухание волн вследствие их поглощения увеличивается, а при $|\mathbf{q}| > k_1$ волны не распространяются вдоль оси z :

$$k_{2z}^2 \equiv \frac{\mathbf{q}^2 - k_1^2}{2} + \sqrt{\frac{|k_1^2 - \mathbf{q}^2|^2}{4} + \frac{\epsilon_2^2 k_0^4}{4}} > k_{1z} = \frac{\epsilon_2 k_0^2}{2k_{2z}}. \quad (\text{П11})$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Armstrong A., Bloembergen N., Ducuing J., Pershan P. S. // Phys. Rev. 1962. V. 127. P. 1918.
2. Ахманов С. А., Хохлов Р. В. Проблемы нелинейной оптики. М., 1964.
3. Таланов В. И. // Письма ЖЭТФ. 1965. Т. 2. С. 222.
4. Kelley P. L. // Phys. Rev. Lett. 1965. V. 15. P. 1005.
5. Беспалов В. И., Литвак А. Г., Таланов В. И. // Нелинейная оптика. М.: Наука, 1968. С. 428.
6. Беленов Э. М., Назаркин А. В. // Письма в ЖЭТФ. 1991. Т. 53, вып. 4. С. 188.
7. Азаренков А. Н., Альтшулер Г. Б., Белашенков Н. Р., Козлов С. А. // Квантовая электроника. 1993. Т. 20, № 8. С. 733.
8. Балакин А. А., Литвак А. Г., Миронов В. А., Скобелев С. А. // ЖЭТФ. 2007. Т. 131, вып. 3. С. 408.
9. Ахманов С. А., Чиркин А. С., Выслоух В. А. Оптика фемтосекундных лазерных импульсов. М.: Наука, 1988.
10. Сухоруков А. П. Нелинейные волновые взаимодействия в оптике и радиофизике. М.: Наука, 1988.
11. Агравал Г. П. Нелинейная волоконная оптика. М.: Мир, 1996.
12. Brabec T., Krausz F. // Phys. Rev. Lett. 1997. V. 78. P. 3282.
13. Kolesik M., Moloney J. V., Mlejnek M. // Phys. Rev. Lett. 2002. V. 89. Art. no. 283902.
14. Kolesik M., Moloney J. V. // Phys. Rev. E. 2004. V. 70. Art. no. 036604.
15. Власов С. Н. // Квантовая электроника. 1987. Т. 14, № 9. С. 1868.

16. Feit M. D., Flek J. A. // *J. Opt. Soc. Am. B.* 1988. V. 5, No. 3. P. 633.
17. Власов С. Н., Копосова Е. В., Таланов В. И. // *Изв. вузов. Радиофизика.* 2006. Т. 49, № 4. С. 321.
18. Ross I. N., Matousek P., Towrie M., et al. // *Opt. Commun.* 1991. V. 144. P. 125.
19. Власов С. Н., Копосова Е. В., Фрейдман Г. И. // *Квантовая электроника.* 2009. Т. 39. С. 393.
20. Ditmire T., Rubenchik A. M., Eimerl D., Perry M. D. // *Opt. Soc. Am.* 1996. V. 13, No. 4. P. 649.
21. Mironov S. Yu., Lozhkarev V. V., Ginzburg V. N., Khazanov E. A. // *Appl. Opt.* 2009. V. 48. P. 2051.
22. Gopinath J. T., Shen H. M., Sotobayashi H., Ippen E. P. // *Opt. Express.* 2004. V. 12, No. 23. P. 5697.
23. Ландау Л. Д. *Электродинамика сплошных сред.* М.: Физматлит, 2005.
24. Джексон Дж. *Классическая электродинамика.* М.: Мир, 1965.
25. Pukhov A. // *Rep. Progr. Phys.* 1997. V. 4, No. 1. P. 217.
26. Конторович М. И. *Операционное исчисление и нестационарные явления в электрических цепях.* М.: Изд-во. тех.-теорет. лит., 1955.
27. Морс Ф. М., Фешбах Г. *Методы теоретической физики.* М.: Изд-во иностр. лит., 1960.
28. Силин В. П. *Введение в кинетическую теорию газов.* М.: Наука, 1971.
29. Рыжик И. М., Градштейн И. С. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.* М., Л.: Изд-во тех.-теорет. лит., 1951.
30. Корн Г., Корн Т. *Справочник по математике для научных работников и инженеров.* М.: Наука, 1968.
31. Каценеленбаум Б. З. *Высокочастотная электродинамика.* М.: Наука, 1966.
32. Власов С. Н., Копосова Е. В. // *Изв. вузов. Радиофизика.* 2005. Т. 48, № 4. С. 340.

Поступила в редакцию 30 декабря 2010 г.; принята в печать 23 января 2011 г.

THE LORENTZ LEMMA USED TO STUDY THE WAVE-PACKET PROPAGATION IN A NONLINEAR MEDIUM

G. I. Freydmann

Integral relationships expressing the wave-packet field amplitude on the output surface in terms of its amplitude on the input surface, the side-surface field, and the integral of the nonlinear currents inside the layer at the previous times are obtained in the spectral and spatial-temporal form. These relationships allow one to study and develop numerical-simulation algorithms of propagation and interaction of the wave packets with the wide frequency and angular spectra, including calculations of nonpropagating-wave excitation in the case of sharp focusing or formation of superfine fibers. On the basis of the obtained relationships, we propose the algorithm which uses simple iteration of the first order and allows one to significantly improve the calculation rate. The possibility of using the fast Fourier transform for developing the algorithm for numerical simulation of the boundary-value problems of nonlinear optics is demonstrated.