УДК 621.391.019.4

ПЕРЕДАЧА ИНФОРМАЦИИ И ИЗБЫТОЧНОСТЬ

М. В. Литвин

Нижегородский госуниверситет им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия

В статье рассмотрен канал связи с помехами, в котором дискретные сообщения передаются цифровыми сигналами с избыточностью. Показано, что вероятность истинных гипотез может быть сколь угодно близкой к единице, если используется оптимальное кодирование и отношение сигнал/шум превышает пороговую величину. Это позволило получить для рассматриваемого случая формулировку теоремы Шеннона, в которой понятия пропускной способности и энтропии не используются.

ВВЕДЕНИЕ

Условия передачи дискретных сообщений по каналу связи с помехами со сколько угодно малой вероятностью ошибок определяются теоремой Шеннона [1, с. 40–41; 2, с. 97–98]. Возможность такой передачи сообщений связывается с избыточностью. Как отмечал Шеннон [1, с. 43], в случае передачи с избыточностью и изменения сигнала помехами «... это изменение не делает принимаемый сигнал ближе к другим возможным сигналам, чем к оригиналу», т. е. предполагается, что избыточность позволит увеличить до необходимых величин «расстояния» между применяемыми сигналами. Однако в доказательствах теоремы, изложенных в [1–4], избыточность не используется и не содержится в конечных результатах.

Более конкретно об использовании избыточности изложено в работах [3, 4] в связи с анализом передачи сообщений по каналу связи и исправлением ошибок. Но и здесь при доказательстве теоремы используется идея Шеннона о случайном выборе сигналов для передачи несмотря на то, что в [3] при анализе возможностей исправления ошибок подробно исследованы коды Хэмминга и способы поиска таких сигналов.

Следует отметить, что и в этих работах не рассматриваются вопросы о связи избыточности с качеством передачи и отношением сигнал/шум. Это тем более странно, поскольку в [4, с. 133] при анализе блок-схемы канала связи принимается очевидное соотношение между длительностями отдельных элементов преобразованного сообщения $\tau_{\rm s}$ и сигнала $\tau_{\rm c}$ на входе канала:

$$L\tau_{\rm s} = N\tau_{\rm c}. \tag{1}$$

Здесь L и N — соответствующие количества элементов. Однако далее все оценки качества передачи выполняются только для сигналов. Соотношение (1) не учитывается при определении отношения сигнал/шум, и вероятность ошибки определяется не на одно сообщение, а на блок из N элементов. Основное внимание при доказательстве уделено определению границ для вероятностей ошибок передачи. При этом рассмотрены разные аппроксимации вероятностей, но их различие не связывается с оптимизацией условий передачи сообщений.

Доказательства теоремы из [1, 2], как сказано в [1, с. 43], являются доказательствами существования, поскольку даже при упоминании о полезности избыточности не получены количественные оценки её влияния на качество передачи. Получается, что, возможно, коды с избыточностью обеспечат вероятность ошибки меньше средней, о которой идёт речь в теореме, поскольку «... по крайней мере, один код из ансамбля должен иметь вероятность ошибки столь же малую, как и эта вероятность. Это следствие не даёт способа отыскания такого кода и было бы удивительно, если бы случайный код имел вероятность ошибки гораздо бо́льшую, чем средняя вероятность» [4, с. 156].

Использование избыточности предполагает увеличение количества элементов сигнала по сравнению с количеством элементов сообщения, что создаёт условия для исправления искажений элементов сигнала. Но в реальных условиях передачи мощность сигнала неизменна, поэтому введение избыточности может привести к уменьшению отношения сигнал/шум. В связи с этим при анализе качества передачи с использованием избыточности необходимо исследовать и случай, когда избыточности нет, поскольку такая оценка определит полезность введения избыточности при передаче информации.

Следует отметить, что в [1–4] при доказательствах теоремы решалась задача определения вероятности ошибки. Однако таких ошибок, особенно в случае использования цифрового сигнала с избыточностью, довольно много, что создаёт трудности в их определении. Поэтому далее при исследовании влияния избыточности на качество передачи сообщений используется вероятность истинной гипотезы, определение которой, как и в случае ортонормированных сигналов [5, 6], позволяет получить простые критерии качества передачи.

В статье на основе оценки вероятности истинной гипотезы исследуется качество передачи дискретных сообщений при наличии избыточности и использовании кодов с исправлением ошибок. Определяется критерий реализации передачи со сколько угодно малой вероятностью ошибок и анализируется связь этого критерия и вероятности истинной гипотезы с избыточностью и отношением сигнал/шум.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И УСЛОВИЯ РЕШЕНИЯ

Рассмотрим источник с M равновероятными независимыми сообщениями, смена которых происходит через время $T_{\rm s}$, а действующий в канале связи шум является аддитивным, «белым» и гауссовым. Таким образом, производительность источника определяется соотношением

$$C_{\text{ист}} = \frac{H(\mathrm{s})}{T_{\rm s}} = \frac{\log_2 M}{T_{\rm s}}\,, \tag{2}$$

где $H(\mathrm{s})$ — энтропия сообщения. Как и в [3, 4], в качестве сигналов рассматриваются двоичные цифровые сигналы. Для передачи M сообщений достаточно иметь двоичный сигнал с $n_{\rm s} = \log_2 M$ разрядами. В случае передачи с избыточностью разрядность сигнала увеличивается до $n > n_{\rm s}$. Количество сигналов при этом равно 2^n, но для передачи используется их часть $2^{n_{\rm s}} = M$.

При оптимальном кодировании передаются не появляющиеся через $T_{\rm s}$ отдельные сообщения (рис. 1*а*), а группы из k последовательных сообщений [1, с. 66]. Поэтому число сообщений источника, подлежащих передаче, возрастает до M^k. Ясно, что для передачи такого количества сообщений достаточно в k раз увеличить разрядность используемых сигналов. Тогда при передаче без избыточности потребуется $2^{kn_{\rm s}} = M^k$ сигналов, а в случае её наличия необходимые M^k сигналов выбираются из множества 2^{kn} (рис. 1*б*).

Рис. 1

2. ИЗБЫТОЧНОСТЬ И ИСПРАВЛЕНИЕ ИСКАЖЕНИЙ

Рассмотрим теперь связь между избыточностью и количеством исправляемых искажений в принятом сигнале. В общем случае при передаче группы из k сообщений избыточность равна [1, с. 26]:

$$\delta H = 1 - \frac{H(\mathrm{s})}{H_{\max}} = 1 - \frac{n_{\mathrm{s}}}{n}\,, \tag{3}$$

где $H_{\max}$ — максимальная возможная энтропия. Из (3) следует, что избыточность не зависит от количества сообщений в группе, а определяется разрядами цифрового сигнала, соответствующего количеству сообщений, и сигнала, используемого при передаче сообщений, порождаемых на интервале T_{s} (рис. 1a).

Для оценки количества исправляемых искажений сигнала $i_{\max}$ в [3, с. 41] используется анализ геометрии сигнальных пространств. В результате для кодов Хэмминга предлагается следующее соотношение:

$$M \sum_{i=0}^{i_{\max}} C_n^i \le 2^n \text{ или } \sum_{i=0}^{i_{\max}} C_n^i \le 2^{n-n_{\mathrm{s}}}, \tag{4}$$

где C_n^i — число сочетаний из n по i. Сумма в (4) определяет полное число используемых n-разрядных сигналов, в которых исправляются от 1 до $i_{\max}$ искажений, и, кроме этого, к ним добавлен неискажённый сигнал C_n^0. Поскольку эти соотношения справедливы для каждого передаваемого сообщения, то общее число исправляемых сигналов не может превышать их максимальное количество.

Если учесть равенство $\sum_{i=0}^{n} C_n^i = 2^n$, то из (4) следует, что n ошибок можно исправить при передаче только одного сообщения, что не представляет практического интереса. Если n нечётно, то справедливо равенство $\sum_{i=0}^{(n-1)/2} C_n^i = 2^{n-1}$. Поэтому согласно (4) при $M = 2$ можно учесть искажения, возникающие в разрядах $1, 2, \ldots, (n-1)/2$ сигнала. В этом случае принимаемые сигналы можно разделить на две равные группы, количество искажений в которых составляет от 1 до $(n-1)/2$ и от $(n+1)/2$ до n. При этом одинаковые принимаемые сигналы могут появиться только при разных искажениях. Таким образом, выбор гипотез согласуется с критерием максимальной апостериорной вероятности или минимальной удалённости от передаваемого сигнала. Если n чётное, то ситуация иная. Дело в том, что при максимальном числе искажений, когда помеха поражает $n/2$ разрядов, одинаковые сигналы могут возникнуть при передаче каждого из двух сообщений. Поэтому при таких сигналах провести обоснованный выбор гипотезы невозможно.

Изложенное выше иллюстрирует табл. 1 искажений сигналов для случая $M = 2$ и $n = 4$. В табл. 1 в первом столбце помещены сигналы, а далее — количество искажений, т. е. число разрядов, в которых из-за действия помехи изменилась цифра в разряде и сигнал стал одним из множества принимаемых искажённых сигналов $2^4 - 1$. Очевидно, что сумма искажений, при которых образуется один и тот же сигнал, равна числу разрядов сигнала. Так, одно искажение сигнала 0000 и три искажения сигнала 1111 приводят к одинаковым сигналам. Сигналов с одним искажением может быть C_4^1, и все они позволяют сделать обоснованный выбор гипотезы

Таблица 1

0000	0	1	1	2	1	2	2	3	1	2	2	3	2	3	3	4
1111	4	3	3	2	3	2	2	1	3	2	2	1	2	1	1	0

относительно переданного сигнала, поскольку одинаковые искажённые сигналы могут появиться только при разном количестве искажений. В случае двух искажений (C_4^2) обоснованный выбор гипотез невозможен, поскольку во всех этих случаях искажённые таким образом сигналы могут появиться при передаче разных сообщений.

Для $n = 3$ таблица искажений будет отличаться от табл. 1 тем, что будет содержать половинное число сигналов с искажениями от 1 до 3 для сигнала 000 и те же искажения в обратном порядке для сигнала 111. Поэтому все искажённые сигналы могут быть образованы только при действии разных помех, и сомнений при выборе гипотез нет.

Приведённый в табл. 1 сигнал относится к кодам Хэмминга. Основная трудность связана с отысканием этих кодов [3, с. 142–151]. При приёме ситуация существенно проще, поскольку сигналы с $i_{\max}$ искажениями образуют непересекающиеся группы, связанные с передаваемыми сообщениями. Состав этих групп может быть определён априори при анализе параметров канала связи. Поэтому в процессе передачи сообщений при принятии гипотез достаточно простого учёта искажений, а не исправления ошибок с использованием специальных вычислений [7, с. 35–39].

3. ПРИЁМ ДВОИЧНЫХ СИГНАЛОВ

Рассмотрим вопросы, связанные с приёмом двоичных сигналов. С учётом избыточности (3) число разрядов сигнала удовлетворяет неравенству $n > n_{\rm s} = \log_2 M$. Мощность сигнала $P_{\rm s}$ предполагается постоянной, а оптимальный приём ограничивается применением согласованной фильтрации импульсов, определяющих разряды цифровых сигналов. Поэтому отношение сигнал/шум, актуальное для принятия решений по каждому разряду сигнала, составляет

$$\rho_{{\rm s}n} = \frac{E_n}{g_0} = \frac{P_{\rm s} T_{{\rm s}n}}{g_0} = \frac{P_{\rm s} T_{\rm s}}{g_0 n} = \frac{\rho_{\rm s}}{n}\,. \qquad (5)$$

Здесь $T_{\rm s}$ — интервал времени, через который обновляются сообщения, g_0 — спектральная плотность мощности шума. При этом, если иметь в виду соотношение (1), то по аналогии с (5) необходимое отношение $\rho_{{\rm s}N} = P_{\rm s} L \tau_{\rm s}/(N g_0)$ оказывается зависимым от параметров сообщения и сигнала.

Рассмотрим сигналы с активной паузой, когда в качестве разрядных цифр используются напряжения U и $-U$, а не 0, U. Учитывая гауссов характер распределения напряжения на выходе согласованного фильтра [8, с. 192], после нормирования его на $g_0\sqrt{\rho_{{\rm s}n}}$ получаем для условной плотности вероятности преобразованного напряжения ξ

$$p(\xi \mid \pm U) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp[-(\xi \mp \sqrt{\rho_{{\rm s}n}})^2/2]. \qquad (6)$$

Условные вероятности правильного и ложного приёма одиночных разрядов сигнала равны соответственно

$$P(1 \mid 1) = P(0 \mid 0) = \int\limits_0^{\infty} p(\xi \mid +U)\,{\rm d}\xi = \frac{1 + \Phi(\sqrt{\rho_{{\rm s}n}})}{2} = P_{11},$$

$$P(0 \mid 1) = P(1 \mid 0) = \int\limits_{-\infty}^{0} p(\xi \mid +U)\,{\rm d}\xi = P_{01} = 1 - P_{11}. \qquad (7)$$

Здесь $\Phi(x) = \sqrt{2/\pi}\int_0^x \exp(-t^2/2)\,{\rm d}t$ — интеграл вероятности, $\rho_{{\rm s}n}$ — отношение сигнал/шум из (5). Следует отметить, что применение оптимального кодирования не изменяет вероятностей (7). Это связано с тем, что при передаче k объединённых сообщений не нарушается временно́й баланс сигналов, происходит лишь удлинение сигнала и такое же увеличение числа разрядов в нём (рис. 1*б*). Поэтому нет причин для изменения мощности сигнала, поэтому не изменяется и отношение сигнал/шум (5).

4. ВЕРОЯТНОСТИ ГИПОТЕЗ

При введении избыточности появляется возможность учёта искажений от 1 до $i_{\max}$ разрядов используемого двоичного сигнала с kn разрядами. Если учесть, что количество сигналов с i искажениями равно C_{kn}^{i} (4), то с учётом (7) вероятность истинной гипотезы

$$P_{\rm ss} = \sum_{i=0}^{i_{\max}} C_{kn}^{i} P_{11}^{kn-i} P_{01}^{i}. \qquad (8)$$

Сложность оценки вероятности $P_{\rm ss}$ связана с определением $i_{\max}$. Однако определение вероятности ложных гипотез существенно сложнее. Дело в том, что при передаче с избыточностью, оптимальном кодировании и учёте искажений (4) полное количество сигналов, приводящих к ложным гипотезам, равно

$$2^{kn} - \sum_{i=0}^{i_{\max}} C_{kn}^{i}.$$

С увеличением избыточности (3) и k число таких сигналов среди всего их множества 2^{kn} быстро растёт. При этом увеличивается не только число таких сигналов, но и разнообразие искажений, что затрудняет непосредственный расчёт вероятностей ошибок. Именно поэтому оценка качества приёма исследуется с использованием вероятностей истинных гипотез (8). Использование данной оценки предпочтительнее, поскольку она одинакова для всех сообщений, и условие $P_{\rm ss} \to 1$ однозначно определяет качество передачи.

5. ВЕРОЯТНОСТЬ ИСТИННОЙ ГИПОТЕЗЫ

В соответствии с (8), для определения вероятности истинной гипотезы необходимо оценить число искажений в принятом сигнале $i_{\max}$, которые могут быть учтены. Для этого в соотношении (4) следует учесть использование оптимального кодирования ($k > 1$) при передаче сообщений. Рассмотрим функцию

$$C(i) = \sum_{m=0}^{i} C_{kn}^{m}. \qquad (9)$$

В случае нечётных kn справедливо $C[(kn-1)/2] = 2^{kn-1}$. Поэтому из (4) с учётом (9) следует

$$\delta = \frac{C(i_{\max})}{C(kn/2)} \le 2^{1-kn_{\rm s}}. \qquad (10)$$

Из этого соотношения видно, что при увеличении числа k объединяемых сообщений относительное число исправляемых искажений уменьшается. Определить $i_{\max}$ можно непосредственным вычислением из (4), которое с учётом (9) можно привести к условию

$$C(i_{\max}) \le 2^{k\,(n-n_{\rm s})}. \qquad (11)$$

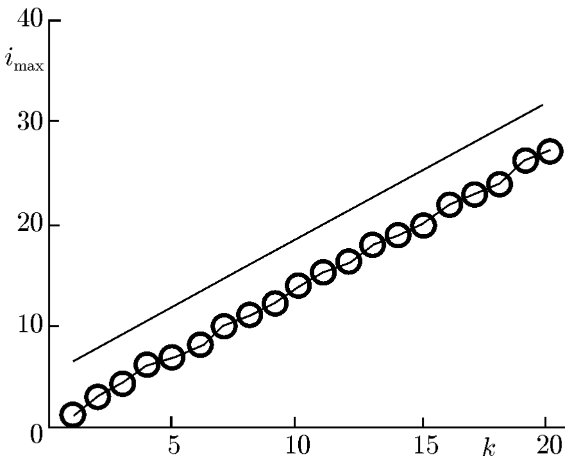

Рис. 2

Из (11) следует, что количество исправляемых искажений растёт с увеличением k и разности $n - n_{\rm s}$. Если учесть (3), то ясно, что число $i_{\max}$ увеличивается вместе с информационной избыточностью и разрядностью используемого сигнала kn. Однако относительное число исправляемых искажений, как следует из (10), уменьшается. На рис. 2 представлена зависимость $i_{\max}(k)$ при $n_{\rm s} = 6$ и $n = 12$, определённая из условия (11), и её линейная аппроксимация $i_{\max}^{(\rm approx)}(k)$, к которой для наглядности прибавлено 5 единиц,

$$i_{\max}^{(\rm approx)}(k) = k\,\frac{i_{\max}(k_{\max})}{k_{\max}}\,. \qquad (12)$$

Здесь $k_{\max}$ — максимальное число объединяемых при оптимальном кодировании сообщений. Как видно из рис. 2, функция $i_{\max}(k)$ нелинейная. Это объясняется структурой уравнения (11), правая и левая части которого различным образом зависят от k, что и приводит к нелинейности $i_{\max}(k)$. Ошибки аппроксимации $\Delta i_{\max}(k) = i_{\max}^{(\rm approx)}(k) - i_{\max}(k)$ по модулю не превышают 1 и приближение (12) может быть использовано для определения вероятности истинной гипотезы (8).

Однако нас интересуют не конкретные значения вероятности $P_{\rm ss}$, а её изменения в зависимости от k и параметров сигнала, которые определяют качество передачи. Из (8) следует, что $P_{\rm ss}$ представляет собой вероятность нахождения случайной величины i, имеющей биномиальное распределение [9, с. 109], ниже или на уровне $i_{\max}$. Среднее и дисперсия данного распределения равны соответственно

$$E(i) = kn\,(1 - P_{11}), \qquad D(i) = knP_{11}\,(1 - P_{11}), \qquad (13)$$

где P_{11} — вероятность превышения нулевого уровня из (7). Из (13) следует, что $E(i)$ линейно зависит от k; зависимость от k приближённого порогового значения $i_{\max}^{(\rm approx)}$ (12), определяющего согласно (8) вероятность $P_{\rm ss}$, также линейна. Таким образом, изменение относительного положения $i_{\max}$ и $E(i)$ при увеличении k определяет значения вероятности $P_{\rm ss}$. Действительно, если $i_{\max} > E(i)$, то с увеличением k это неравенство усиливается, и $P_{\rm ss}$ увеличивается, поскольку всё большее количество вероятностей $C_{kn}^{i} P_{11}^{kn-i} P_{01}^{i}$ участвует в образовании $P_{\rm ss}$ из (8). Если неравенство обратное, т. е. $i_{\max} < E(i)$, то при увеличении k количество суммируемых вероятностей в (8) и, соответственно, $P_{\rm ss}$ уменьшаются. Поэтому равенство $i_{\max} = E(i)$ определяет условия, в которых относительное положение $i_{\max}$ и $E(i)$ не зависит от k. Очевидно, что в этом случае вероятность $P_{\rm ss}$ тоже не зависит от k, а равенство $i_{\max} = E(i)$ с учётом (7), (12), (13) позволяет определить необходимое для этого пороговое отношение сигнал/шум $\rho_{{\rm s}*}$.

Таким образом, в случае передачи с использованием двоичных сигналов оказывается справедливой лемма о существовании порогового отношения сигнал/шум, доказанная в [5, с. 144] для ортонормированных сигналов. Однако для большей убедительности необходимо получить приближение (12) более строгим методом, результатом которого было бы его алгебраическое выражение. Рассмотрим для этого логарифм функции $C(i)$ из (9), нормированной на $C(i_{\max *}) = 2^{k\,(n-n_{\rm s})}$

$$C_{\log}(i) = \log_2 \frac{C(i)}{C(i_{\max *})} = \log_2 C(i) - k\,(n - n_{\rm s}). \qquad (14)$$

Здесь $i_{\max *}$ определяет приближённое значение, которое соответствует равенству в условии (11). При этом $i_{\max *}$ не отличается от точного значения $i_{\max}$, определённого из (11), более, чем на единицу. Используя значения функции (9) на краях интервала при $i = 0$, $i = kn$ и соответствующие им величины из (14) $C_{\log}(0) = -k\,(n - n_{\rm s})$ и $C_{\log}(kn) = kn_{\rm s}$, несложно показать, что функцию (14) можно представить в виде

$$C_{\exp}(i) = kn_{\rm s} - kn\exp(-i/\tau), \tag{15}$$

где $\tau = kb(n)$. Точность аппроксимации определена величиной $b(n)$, которая расположена в интервале 0,5÷2,5. На рис. 3 изображены обе эти функции для $n_{\rm s} = 6$ и $n = 12$. Интересующее нас приближённое значение $i_{\max *}$ определяется из условия $C_{\log}(i_{\max *}) = 0$, следующего из (14). С учётом (15) получаем оценку числа учитываемых искажений сигнала

$$i_{\max *} = kb(n)\ln(n/n_{\rm s}) = kb(n)(\ln n - \ln n_{\rm s}). \tag{16}$$

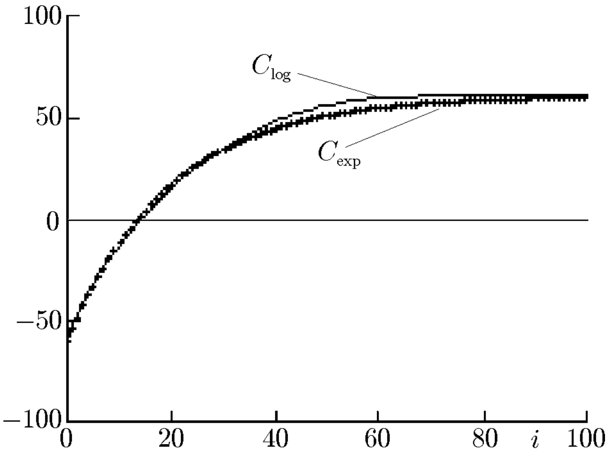

Рис. 3

Согласно (16) $i_{\max *}$ пропорционально k и, как определено в (4), уменьшается при увеличении числа передаваемых сообщений, а при $k = 1$ обращается в нуль. Таким образом, оценки (7), (13) и (16) приводят к аналогичному условию для одинаковых изменений $i_{\max *}$ и среднего $E(i)$, которое позволяет определить уравнение для пороговой величины ρ_{s*}:

$$1 - P_{11} = b(n)\,\frac{\ln(n/n_{\rm s})}{n} \ \text{ или } \Phi(\sqrt{\rho_{s*}/n}) = 1 - 2b(n)\,\frac{\ln(n/n_{\rm s})}{n}\,. \tag{17}$$

Использование аппроксимации в форме алгебраического выражения (16) ещё раз подтверждает существование пороговой величины отношения сигнал/шум. Только при выполнении условия

$$\rho_{\rm s} > \rho_{\rm s*} \tag{18}$$

использование оптимального кодирования эффективно и позволяет реализовать передачу информации с вероятностью истинной гипотезы сколько угодно близкой к единице. Пороговое значение $\rho_{\rm s*}$, определяемое (17), обладает следующими свойствами: $\rho_{\rm s*}$ возрастает с увеличением M ($M = 2^{n_{\rm s}}$), не зависит от k и практически не меняется при увеличении разрядности сигнала n. Зависимость $\rho_{1{\rm s}*}(n_{\rm s})$, соответствующая (17), приведена на рис. 4 вместе с аналогичной зависимостью $\rho_{2{\rm s}*}(n_{\rm s}) = 2\ln M \approx 1{,}4 n_{\rm s}$ для передачи с использованием ортонормированных сигналов [5, с. 144]. Зависимости получены при $n = 12$. Видно, что пороговое отношение сигнал/шум для ортонормированных сигналов увеличивается медленнее, что объяснимо лучшим использованием энергии сигнала при оптимальном кодировании и согласованной фильтрации ортонормированных сигналов.

Влияние отношения сигнал/шум $\rho_{\rm s}$ на качество передачи в условиях оптимального кодирования видно из приведённых на рис. 5 зависимостей вероятности истинной гипотезы $P_{\rm ss}(k)$ для $\rho_{\rm s} = \rho_{\rm s*} = 6{,}88$ (кривая *2*), определённого из (17) при $n_{\rm s} = 3$, $n = 12$, и $\rho_{\rm s} = \rho_{\rm s*} - 2{,}5$ (кривая *1*), $\rho_{\rm s} = \rho_{\rm s*} + 2{,}5$ (кривая *3*). Как следует из графиков, только при выполнении условия (18) вероятность $P_{\rm ss}$ может быть приближена к единице. Таким образом, при передаче информации с использованием цифровых двоичных сигналов проявляются те же закономерности, что и в

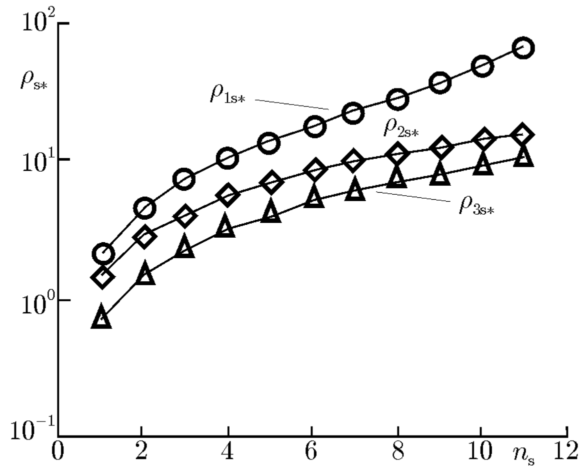

Рис. 4

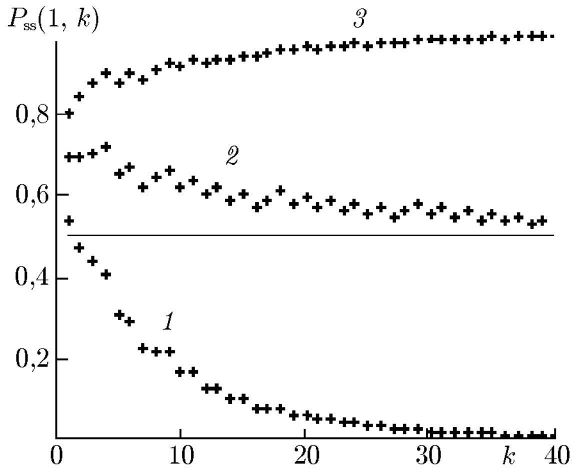

Рис. 5

случае ортонормированных сигналов, и условие передачи сообщений со сколько угодно малыми ошибками (18) полностью определяется отношением сигнал/шум [5, 6]. При этом величина ρ_{s*} тоже связана с количеством передаваемых сообщений $M = 2^{n_s}$, но другим соотношением (17).

Ещё одна особенность рассматриваемого случая заключается в механизме увеличения вероятности P_{ss}. В случае ортонормированных сигналов это является следствием увеличения отношения сигнал/шум $\rho_{sk} = k\rho_s$ при передаче k последовательных сообщений с использованием сигналов с длительностью kT_s (рис. 1*б*). В случае двоичных сигналов увеличение вероятности P_{ss} происходит за счёт суммирования вероятностей (9), соответствующих приёму искажённых сигналов, в которых исправлено i_{max} искажений. Число таких сигналов зависит от разности $n - n_s$ и увеличивается вместе с ней и числом k (11), что и обеспечивает увеличение вероятности P_{ss}. Однако такое увеличение P_{ss} в случае двоичных сигналов оказывается менее эффективным, чем прямое увеличение интенсивности при ортонормированных сигналах (см. рис. 4). Здесь уместна аналогия с некогерентным и более эффективным когерентным накоплением сигналов, при котором происходит суммирование идентичных по форме сигналов [7, с. 222–248].

6. ИНФОРМАЦИЯ НА ВЫХОДЕ КАНАЛА

Оценим теперь информацию на выходе канала связи в рассматриваемых условиях. Для этого следует использовать матрицу условных вероятностей $P(H_j \mid S_m)$. Если учесть оптимальное кодирование, то $m, j \in [1, M^k]$, а число разрядов двоичного сигнала равно kn. При $j = m$ имеем истинную гипотезу с вероятностью P_{ss} из (8). Как показано в разделе 4, вероятности ложных гипотез $P_{\bar{s}sj}$ определить сложнее, поскольку они различны при действии одного сигнала. Кроме этого следует учесть, что с увеличением k количество используемых при передаче сигналов $M_k = 2^{kn_s}$ по отношению к их общему количеству 2^{kn} быстро уменьшается. Поэтому увеличивается число искажённых помехой сигналов, которые оказываются вне областей, где учитываются i_{max} искажений (4). При оценке количества информации на выходе канала связи, следуя методике [5, с. 142], разделим ложные гипотезы на две группы. К первой группе отнесём ложные гипотезы, которые принимаются в соответствии с учётом i_{max} искажений. Их вероятность $P_{\bar{s}sj}$ зависит от рассматриваемой гипотезы H_j с $j \in [1, M^k]$, $j \neq M$. Во второй группе — одна гипотеза H_0, которая принимается в случае приёма сигналов с более, чем i_{max} искажениями. Её вероятность равна P_0.

Используя выражение количества информации на выходе канала в виде $I_{вых} = H(\mathrm{h}) - H(\mathrm{h} \mid \mathrm{s})$

[2, с. 39], где h, s — гипотезы и сообщения, просто показать, что в рассматриваемом случае информация на выходе канала, приходящаяся на одно сообщение,

$$I_{\text{вых}} = (1/k)\times$$
$$\times \left\{ -\left(P_{\text{ss}} + \sum_{j=1}^{M^k} P_{\bar{\text{s}}\text{s}j}\right) \log_2 \left[\left(P_{\text{ss}} + \sum_{j=1}^{M^k} P_{\bar{\text{s}}\text{s}j}\right) \Big/ M^k\right] + P_{\text{ss}} \log_2 P_{\text{ss}} + \sum_{j=1}^{M^k} P_{\bar{\text{s}}\text{s}j} \log_2 P_{\bar{\text{s}}\text{s}j} \right\}. \quad (19)$$

Заметим, что вероятность ложных гипотез P_0 в (19) учтена, поскольку все они образуют полную группу событий и $P_{\text{ss}} + \sum_{j=1}^{M^k} P_{\bar{\text{s}}\text{s}j} + P_0 = 1$.

Из (19) следует, что при $\rho_{\text{s}} > \rho_{\text{s}*}$ и $k \to \infty$, когда вероятность $P_{\text{ss}} \to 1$, для информации на выходе канала имеем

$$\lim_{k\to\infty} I_{\text{вых}} = \log_2 M = H(\text{s}), \quad (20)$$

т. е. на выход канала поступает вся информация источника.

Интересно сравнить этот результат с аналогичным, который можно получить с использованием пропускной способности канала из теоремы Шеннона в [2, с. 97–98]. Согласно условию передачи информации без ошибок $H(s) < CT_{\text{s}}$ пороговое отношение сигнал/шум определяется из уравнения

$$CT_{\text{s}} = n \log_2(1 + \rho_{\text{s}*}/n) = H(s) = n_{\text{s}}. \quad (21)$$

На рис. 4 представлена полученная из (21) пороговая величина $\rho_{3\text{s}*}$, которая меньше порогового значения $\rho_{1\text{s}*}$, определённого из (17), и $\rho_{2\text{s}*}$, соответствующего ортонормированным сигналам. Следовательно, использование оптимального кодирования не может обеспечить передачу информации без ошибок с использованием сигналов с избыточностью.

Если $n = n_{\text{s}}$, то, как следует из (3), избыточности нет, согласно (11) $i_{\max} = 0$, и учесть искажения сигналов невозможно. Поэтому при передаче k объединённых сигналов, т. е. оптимальном кодировании, матрица условных вероятностей $P(H_j \mid S_m)$ имеет размер $2^{kn_{\text{s}}} \times 2^{kn_{\text{s}}}$, поскольку число сообщений и гипотез одинаково. С учётом (7) вероятности истинной и ложных гипотез в этом случае равны $P_{\text{ss}} = P_{11}^{kn_{\text{s}}}$ и $P_{\bar{\text{s}}\text{s}j} = C_{kn_{\text{s}}}^{j} P_{11}^{kn_{\text{s}}-j} P_{01}^{j}$ соответственно. Используя эти вероятности, можно показать, что информация на выходе канала, приходящаяся на одно сообщение,

$$I_{\text{вых}} = \frac{kn_{\text{s}}\,(1 + P_{11}\log_2 P_{11} + P_{01}\log_2 P_{01})}{k} = H(\text{s})\,[1 + H(\text{s} \mid \text{h})], \quad (22)$$

где $H(\text{s} \mid \text{h})$ — ненадёжность канала связи. Из (22) следует, что информация на выходе канала не зависит от k, и, как и следовало ожидать, применение оптимального кодирования в этом случае не имеет смысла, поскольку потери информации [1, с. 37] определяются ненадёжностью канала. Как следует из (7), для источников сообщений с $T_{\text{s}} = \text{const}$ вероятность P_{11}, т. е. и информация на выходе канала (22), уменьшается при увеличении M. Устранение потерь информации в этом случае возможно только за счёт увеличения отношения сигнал/шум до $\rho_{\text{s}} > 10n_{\text{s}}$.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведённое исследование задачи о передаче сообщений с использованием двоичных сигналов, в отличие от [1–4], основано только на анализе вероятности истинной гипотезы P_{ss}, которая определена с учётом идей статистической теории связи, и в ней учитываются свойства сигналов, соотношение их интенсивностей и избыточность. Использование вероятности истинной гипотезы (8) позволило просто, только через пороговое отношение сигнал/шум $\rho_{\text{s}*}$, определить условие безошибочной передачи сообщений (см. (18) и рис. 5). При этом ρ_{s*} связано с основными параметрами сообщений, сигналов и избыточностью (3), (17).

Следует отметить, что введение избыточности требует излишней разрядности используемого сигнала (11), которая приводит к изначальному уменьшению отношения сигнал/шум (5) и вероятности P_{ss} при $k = 1$ (8). Только оптимальное кодирование и возможность «исправления» искажений принятого сигнала позволяют при увеличении k сколько угодно приблизить P_{ss} к единице. Однако эффективность передачи сообщений в этом случае ниже, чем при передаче с использованием ортонормированных сигналов [5, 6].

Из проведённого исследования следует идентичность результатов для ортонормированных и цифровых сигналов в части существования порогового отношения сигнал/шум, обеспечивающего передачу сообщений без ошибок. Поэтому и в этом случае возможна аналогичная с таковой из [5, с. 147; 6, с. 96] формулировка теоремы Шеннона: передача дискретных сообщений по каналу связи с помехами и использованием двоичных сигналов при сколько угодно малой вероятности ошибок возможна, если отношение сигнал/шум превышает пороговое значение и применяются оптимальное кодирование и избыточность. Как видно, в формулировке не используется достаточно сложное понятие пропускной способности канала связи, что существенно упрощает как саму формулировку, так и её применение в исследованиях каналов связи.

Автор благодарен И. Я. Орлову за полезные советы при обсуждении статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шэннон К. Статистическая теория передачи электрических сигналов. М.: Изд-во иностр. лит., 1953. С. 7.
2. Шеннон К. Связь при наличии шума. М.: Физматлит, 1959. 328 с.
3. Хэмминг Р. В. Теория кодирования и теория информации. М.: Радио и связь, 1983. 176 с.
4. Галлагер Р. Теория информации и надёжная связь. М.: Сов. радио, 1974. 720 с.
5. Литвин М. В. // Тр. НГТУ «Радиоэлектронные и телекоммуникационные системы и устройства». Нижний Новгород, 2007. Т. 64, вып. 11. С. 141.
6. Литвин М. В. // Вестник ННГУ им. Н. И. Лобачевского. Радиофизика. 2011. № 4. С. 89.
7. Виноград С., Коуэн Дж. Д. Надёжные вычисления при наличии шумов. М.: Наука, 1968. 112 с.
8. Вайнштейн Л. А., Зубаков В. Д. Выделение сигналов на фоне случайных помех. М.: Сов. радио, 1960. 447 с.
9. Королюк В. С., Портенко Н. И., Скороход А. В., Турбин А. Ф. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. М.: Наука, 1985. 640 с.

Поступила в редакцию 26 июля 2011 г.; принята в печать 23 ноября 2011 г.

INFORMATION TRANSMISSION AND REDUNDANCY

M. V. Litvin

We consider a noisy communication channel in which discrete messages are transmitted by redundant digital signals. It is shown that the probability of true hypotheses can be arbitrary close to unity if optimal coding is used and the signal-to-noise ratio exceeds the threshold value. In this case, this allowed us to obtain the Shannon-theorem formulation in which the throughput and entropy notions are not used.