

УДК 621.391:621.376.4

ПОЛИСПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ОПТИМИЗАЦИЯ ФАЗОРАЗНОСТНОЙ МОДУЛЯЦИИ В ЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТИ

*Г. Н. Бочков*¹, *К. В. Горохов*^{1,2}, *А. В. Колобков*^{1,2}

¹ Нижегородский госуниверситет им. Н. И. Лобачевского;

² ФГУП «Научно-производственное предприятие «Полёт», г. Нижний Новгород, Россия

В работе на базе математического аппарата спектров высоких порядков (полиспектров) рассмотрены вопросы синтеза оптимальных вариантов фазоразностной модуляции высоких порядков в частотной области. Предлагаемый подход позволяет свести все возможные варианты фазоразностной модуляции 2-го порядка в частотной области к модуляции фазы специального вида спектра 4-го порядка (триспектра) — трифазы. Построены оптимальные варианты модуляции трифаз, обладающие наибольшей спектральной эффективностью и превосходящие по помехоустойчивости ранее известные варианты фазоразностной модуляции 2-го порядка, а в каналах с одновременными отстройками сигнала по частоте и времени — и фазоразностную модуляцию 1-го порядка.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время в технике цифровой связи различных частотных диапазонов широкое распространение получили многочастотные (параллельные) системы связи с ортогональным частотным уплотнением или OFDM-системы (OFDM — Orthogonal Frequency Division Multiplexing), использующие в качестве передаваемого сигнала совокупность взаимно ортогональных отрезков гармонических колебаний (поднесущих). Это обусловлено такими их достоинствами, как отсутствие межсимвольной интерференции при многолучёвости за счёт введения временного защитного интервала при сохранении высокой спектральной эффективности и сравнительная простота формирования и приёма сигнала благодаря использованию вычислительно эффективных алгоритмов быстрого преобразования Фурье. В то же время OFDM-системы обладают повышенной чувствительностью к фазовым искажениям из-за нестабильности фазовых характеристик канала, частотного и временного сдвигов сигнала [1, 2].

Изобретение фазоразностной модуляции и развитие её методов стали принципиальными шагами в решении «фазовой проблемы» [3–5]. Оказалось, что устранить или ослабить влияние фазовых искажений в канале передачи информации можно, если применять инвариантную к ним фазоразностную модуляцию определённого порядка и соответствующие алгоритмы некогерентного приёма [5–8]. В OFDM-системах можно использовать как традиционную фазоразностную модуляцию k -го порядка во временной области (ВФРМ- k), так и фазоразностную модуляцию k -го порядка в частотной области (ЧФРМ- k) [9, 10]. В первом случае в качестве информационного параметра выступает разность фаз k -го порядка одной и той же поднесущей на разных символьных интервалах, а во втором — разность фаз k -го порядка различных поднесущих внутри одного и того же символьного интервала. Наиболее широкое распространение получили фазоразностная модуляция 1-го порядка, обеспечивающая инвариантность к общему повороту фаз поднесущих, и фазоразностная модуляция 2-го порядка, дополнительно обладающая инвариантностью к линейному по времени и частоте сдвигу фаз поднесущих сигнала.

Отмеченное в [6, 8, 9] увеличение помехоустойчивости приёма вариантов фазоразностной модуляции k -го порядка (ФРМ- k) с разнесёнными разностями фаз $(k - 1)$ -го порядка относительно классических ФРМ- k со смежными разностями [4] приводит к идее повышения помехоустойчивости приёма за счёт оптимизации дифференциального кодирования фаз. В [8, 9] анализ способов

дифференциального кодирования фаз был проведён на основе математического аппарата мгновенных моментов высокого порядка и принципа причинности. Однако, т. к. приём сигналов с фазоразностной модуляцией в частотной области является принципиально блочным, то принцип причинности для них является излишним ограничением на возможные способы выбора разностей фаз.

В данной работе вопросы синтеза оптимальных вариантов ЧФРМ старших порядков предлагается рассматривать на базе математического аппарата спектров высоких порядков (полиспектров). Полиспектральный анализ широко применяется в физике и технике как адекватный метод получения принципиально новой информации о нелинейных свойствах объектов и сред, в задачах нелинейной спектроскопии, диагностики, идентификации и передачи информации, существенно дополняя спектрально-корреляционный подход к решению подобных задач (см. монографии [11–13] и библиографию [14]). Он является адекватным инструментом исследования стационарных (инвариантных к сдвигу по времени) фазовых взаимосвязей разночастотных составляющих сложных информационных сигналов [15–18]. Подобно тому, как различные способы ВФРМ- k выведены в [8] на основе анализа способов задания специального вида «мгновенных моментов 2^k -го порядка», различные способы ЧФРМ- k при $k > 1$ можно получить из анализа способов задания специального вида спектров 2^k -го порядка.

Целью данной статьи является полиспектральный анализ и синтез оптимальных вариантов для простейшей фазоразностной модуляции старшего порядка в частотной области — ЧФРМ-2.

В разделе 1 единым образом описывается использование фазоразностной модуляции 1-го и 2-го порядков в частотной и временной областях в OFDM-системах, сравниваются спектральные эффективности и отношения сигнал-шум на выходах соответствующих некогерентных демодуляторов в зависимости от задержек по времени и доплеровских смещений по частоте в линии связи. Обосновывается метод повышения помехоустойчивости сигналов с ЧФРМ-2, предполагающий разработку новых семейств сигналов с общими для всех ФРМ-2-символов опорными поднесущими. В разделе 2 на основе анализа адекватного ЧФРМ-2 вида спектра 4-го порядка (триспектра) исследованы возможные способы выбора разностей фаз 2-го порядка и выделен среди них класс способов с двумя опорными поднесущими. В разделе 3 представлены результаты численного исследования помехоустойчивости новых видов ЧФРМ-2 с двумя опорными поднесущими в сравнении с известными видами фазоразностной модуляции во временной и частотной областях, демонстрирующие их преимущества в каналах с аддитивным белым гауссовым шумом, неопределённой фазой и отстройках сигнала по времени и частоте. В заключении суммируются основные полученные результаты.

1. МОДЕЛЬ OFDM-СИСТЕМЫ С ФАЗОРАЗНОСТНОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ

1.1. Модуляция и формирование передаваемого сигнала

Рассмотрим OFDM-систему с N поднесущими, расположенными в частотной полосе системы F с шагом $\Delta f = F/N = 1/T$. В передатчике передаваемое сообщение с объёмом $I = K_I N_I \log_2 M$ бит при использовании M -позиционной модуляции разбивается на K_I блоков $\mathbf{m}[k] = (m_0[k], \dots, m_{N_I-1}[k])^T$ по N_I элементов в каждом, где индекс T обозначает транспонирование, $0 \leq k \leq K_I - 1$ и каждый элемент может принимать одно из M значений: $m_n[k] = 0, \dots, M - 1$. В зависимости от вида модуляции для передачи K_I блоков используется K OFDM-символов. Блок, передаваемый в k -м OFDM-символе, кодирует набор N комплексных величин $\mathbf{X}[k] = (X_0[k], \dots, X_{N-1}[k])^T$. Комплексная огибающая k -го символа формируется по-

средством обратного преобразования Фурье

$$x^{[k]}(t) = \sum_{n=0}^{N-1} X_n[k] \exp(i 2\pi n t / T), \quad (1)$$

поэтому $X_n[k] = A_n[k] \exp(i\theta_n[k])$ — комплексная амплитуда n -ой поднесущей при передаче k -го символа. При фазовых видах модуляции амплитуды $A_n[k]$ фиксированы и обычно одинаковы при всех n и k , а информация «закладывается» в значения фаз $\theta_n[k]$ или их комбинации.

Заметим, что OFDM-систему с фазоразностной модуляцией во временной области можно рассматривать как многоканальную систему с частотным разделением, где N поднесущих образуют $N_I = N$ независимых подканалов с фазоразностной модуляцией (в дальнейшем ФРМ-подканалов), передающих блоки по $L_I = K_I$ элементов сообщения. Аналогично система с фазоразностной модуляцией в частотной области является многоканальной системой с временным разделением, где K OFDM-символов образуют $K_I = K$ независимых ФРМ-подканалов, передающих блоки по $L_I = N_I$ информационных элементов.

Для того, чтобы единым образом описать фазоразностную модуляцию во временной и частотной областях, введём следующие обозначения: вектор-столбец $\mathbf{r} = (n, k)^T$ с элементами n и k , равными номеру поднесущей и номеру OFDM-символа соответственно, где $0 \leq n \leq N - 1$ и $0 \leq k \leq K - 1$; $\Delta \mathbf{r} = (0, 1)^T$ для ВФРМ и $\Delta \mathbf{r} = (1, 0)^T$ для ЧФРМ. Пусть $s^{(j)}[\mathbf{r}] = S^{(j)}[\mathbf{r}] \exp(i\theta^{(j)}[\mathbf{r}]) = s_n^{(j)}[k]$ — ФРМ-символ, сопоставленный информационному элементу $m[\mathbf{r}] = m_n[k]$ при фазоразностной модуляции j -го порядка, где $\theta^{(j)}[\mathbf{r}] = (2\pi/M)m[\mathbf{r}]$ — информационная фаза и $S^{(j)}[\mathbf{r}]$ — заданная произвольно амплитуда ФРМ-символа. Подобную сокращённую систему обозначений будем применять и для других величин. Например, $X[\mathbf{r}] = X_n[k]$, $A[\mathbf{r}] = A_n[k]$, $\theta[\mathbf{r}] = \theta_n[k]$.

При ФРМ-1 информационными фазами являются разности

$$\theta^{(1)}[\mathbf{r}] = \theta[\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}] - \theta[\mathbf{r}]. \quad (2)$$

При ФРМ-2 сообщение кодирует разности величин (2). При этом различают следующие два вида ФРМ-2. Непосредственным обобщением ФРМ-1 является традиционная схема ФРМ-2, при которой информационными фазами являются разности смежных разностей фаз 1-го порядка (СР-ФРМ-2)

$$\theta^{(2.1)}[\mathbf{r}] = \theta^{(1)}[\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}] - \theta^{(1)}[\mathbf{r}] = \theta[\mathbf{r} + 2\Delta \mathbf{r}] - 2\theta[\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}] + \theta[\mathbf{r}]. \quad (3a)$$

Альтернативой является манипуляция разностей фаз 2-го порядка с использованием разделённых разностей фаз 1-го порядка (РР-ФРМ-2)

$$\theta^{(2.2)}[\mathbf{r}] = \theta^{(1)}[\mathbf{r} + 2\Delta \mathbf{r}] - \theta^{(1)}[\mathbf{r}] = \theta[\mathbf{r} + 3\Delta \mathbf{r}] - \theta[\mathbf{r} + 2\Delta \mathbf{r}] - \theta[\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}] + \theta[\mathbf{r}]. \quad (3b)$$

По сравнению с предыдущей, эта схема ФРМ-2 требует для инициализации передачи дополнительного опорного символа или поднесущей. Однако, как известно [8], она обеспечивает более высокое отношение сигнал-шум на выходе демодулятора. В (3) и далее для различения характеристик различных видов ФРМ-2 используются обозначения вида $\theta^{(2.l)}$, где $l = 1$ для СР-ФРМ-2 и $l = 2$ для РР-ФРМ-2.

Рекуррентные алгоритмы формирования комплексных амплитуд поднесущих для сигналов с ФРМ-1 и ФРМ-2 имеют вид

$$X[\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}] = s^{(1)}[\mathbf{r}] / X^*[\mathbf{r}], \quad (4a)$$

$$X[\mathbf{r} + (l + 1)\Delta \mathbf{r}] = s^{(2.l)}[\mathbf{r}] / (X^*[\mathbf{r} + l\Delta \mathbf{r}] X^*[\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}] X[\mathbf{r}]) \quad (l = 1, 2), \quad (4b)$$

где символ звёздочка обозначает комплексное сопряжение.

Для защиты от межсимвольной интерференции между последовательными символами вставляется защитный интервал. Его длительность T_G должна быть больше максимальной ожидаемой величины рассеяния по времени в канале. Обычно защитный интервал используют для передачи так называемого циклического префикса, который представляет собой последние T_G секунд следующего за ним символа. В этом случае комплексную огибающую низкочастотного сигнала, передающего с тактовым интервалом $T_S = T + T_G$ всё сообщение за время $T_\Sigma = KT_S$, можно представить в виде

$$x(t) = \sum_{k=0}^{K-1} x^{[k]}(t - T_G - T_S k) \Pi_{T_S}(t - T_S k) = \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{n=0}^{N-1} X_n[k] \exp[i 2\pi n(t - T_G - T_S k)/T] \Pi_{T_S}(t - T_S k), \quad (5)$$

где $\Pi_T(t) = \{1, t \in [0, T]; 0, t \notin [0, T]\}$ обозначает прямоугольный импульс с единичной амплитудой и длительностью T .

Сравним спектральную эффективность способов модуляции (4), т. е. удельную скорость $c \equiv I/(T_\Sigma F)$:

$$c^{(j)} = c^{(0)} / (1 + \alpha^{(j)} / L_I), \quad (6)$$

где $c^{(0)} = \log_2 M / (1 + T_G/T)$ — удельная скорость абсолютной M -позиционной фазовой модуляции; $L_I = K - \alpha^{(j)}$ для ВФРМ и $L_I = N - \alpha^{(j)}$ для ЧФРМ; $\alpha^{(1)} = 1$ и $\alpha^{(2,l)} = l + 1$ ($l = 1, 2$). Из (6) следует, что ВФРМ обладает более высокой спектральной эффективностью при длинных сеансах с передачей большого числа OFDM-символов (при $L_I = K_I > N_I = N$), а ЧФРМ эффективнее при коротких сеансах с высокой степенью параллельности (при $L_I = N_I > K_I = K$).

1.2. Модель линии связи

Идеализированная модель однолучевой линии связи с задержкой по времени и доплеровским смещением по частоте представлена на рис. 1. В смесителе 1 на передающей стороне низкочастотный сигнал (5) модулирует несущее колебание с частотой f_0 . Обратная операция осуществляется в смесителе 2 на принимающей стороне. Фазы генераторов несущих колебаний φ_T и φ_R рассматриваем как случайные величины, не учитывая тем самым их флуктуации во времени. Мультипликативные искажения сигнала при распространении описываются линейным каналом с нестационарной импульсной характеристикой $h_0(t, \tau) = h_0 \exp(i 2\pi \nu_0 t) \delta(\tau - \tau_0)$, где $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака, ν_0 и τ_0 — доплеровское смещение по частоте и задержка по времени соответственно, h_0 — комплексный коэффициент передачи, моделирующий общие замирания. На входе смесителя в приёмнике сигнал искажается аддитивным белым гауссовым шумом $n_I(t)$, который на выходе порождает аддитивный белый гауссов шум $n(t) = n_I(t) \exp[-i(2\pi f_0 t + \varphi_R)]$ с $\langle n(t) \rangle = 0$, $\langle n(t)n(t + \tau) \rangle = 0$ и $\langle n(t)n^*(t + \tau) \rangle = N_0 \delta(\tau)$.

1.3. Восстановление сообщения в приёмнике

Принимаемый сигнал

$$y(t) = \exp\{i(\varphi_T - \varphi_R - 2\pi f_0 \tau_0 + 2\pi \nu_0 t)\} h_0 x(t - \tau_0) + n(t) \quad (7)$$

строится, и выделяются отрезки $y^{[k]}(t) = y(t + T_G + kT_S) \Pi_T(t)$, соответствующие отдельным OFDM-символам с отброшенным префиксом, по которым вычисляются наборы $\mathbf{Y}[k] =$

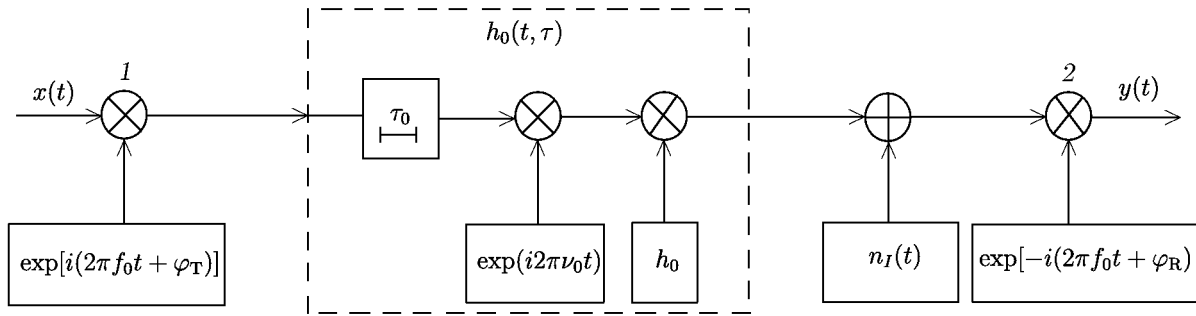


Рис. 1. Модель линии связи

$= (Y_0[k], \dots, Y_{N-1}[k])^T$ комплексных амплитуд поднесущих

$$Y_n[k] = \frac{1}{T} \int_0^T \exp(-i 2\pi n t / T) y^{[k]}(t) dt. \tag{8}$$

В случае $T_G > \tau_0$, когда защитный интервал достаточен для полного подавления межсимвольной интерференции, комплексные амплитуды поднесущих имеют вид

$$Y_n[k] = h_0 \exp(i\xi_0 + ik\zeta_0^{(TD)}) \times \sum_{m=0}^{N-1} X_m[k] \exp(-im\zeta_0^{(FD)}) (-1)^{n-m} \text{sinc}[\pi(n - m - \nu_0 T)] + N_n[k], \tag{9}$$

где $\text{sinc } x = \sin(x)/x$;

$$\xi_0 = \varphi_T - \varphi_R - 2\pi f_0 \tau_0 + \pi \nu_0 (2T_G + T), \quad \zeta_0^{(TD)} = 2\pi \nu_0 T_S, \quad \zeta_0^{(FD)} = 2\pi \tau_0 / T \tag{10}$$

— общий поворот и линейные приращения по времени (TD) и частоте (FD) в фазах поднесущих соответственно. Аддитивная помеха $N_n[k] = (1/T) \int_0^T \exp(-i 2\pi n t / T) n(t + T_G + kT_S) dt$ представляет собой последовательность независимых гауссовых случайных величин с $\langle N_n[k] \rangle = 0$ и $\langle N_n^2[k] \rangle = 0$ и $\langle |N_n[k]|^2 \rangle = N_0/T$. Если $\nu_0 T \ll 1$, то можно пренебречь межканальной интерференцией и вместо (9) в сокращённом виде записать

$$Y[\mathbf{r}] = X[\mathbf{r}] \alpha_0 \exp(i\xi_0 + i\mathbf{r}^T \zeta_0) + N[\mathbf{r}], \tag{11}$$

где $\alpha_0 = h_0 \text{sinc}(\pi \nu_0 T)$, $\zeta_0 = (-\zeta_0^{(FD)}, \zeta_0^{(TD)})$.

При поэлементном приёме по алгоритмам, обратным правилам синтеза (4), вычисляются оценки переданных ФРМ-символов

$$\hat{s}^{(1)}[\mathbf{r}] = Y[\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}] Y^*[\mathbf{r}], \tag{12a}$$

$$\hat{s}^{(2.l)}[\mathbf{r}] = Y[\mathbf{r} + (l + 1) \Delta\mathbf{r}] Y^*[\mathbf{r} + l \Delta\mathbf{r}] Y^*[\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}] Y[\mathbf{r}] \quad (l = 1, 2), \tag{12b}$$

на основе которых принимаются решения

$$\hat{m}[\mathbf{r}] = \arg \min_{0 \leq m \leq M-1} \left| \arg \hat{s}^{(j)}[\mathbf{r}] - \frac{2\pi m}{M} \right|. \tag{13}$$

1.4. Об отношении сигнал-шум для демодуляторов сигналов с фазоразностной модуляцией

Сравним отношения сигнал-шум для статистик (12). Поскольку амплитуды статистик $\hat{s}^{(j)}[\mathbf{r}]$ не влияют на решения (13), то отношение сигнал-шум определим выражением

$$\rho^{(j)}[\mathbf{r}] = \frac{|\langle \hat{s}^{(j)}[\mathbf{r}] \rangle|^2}{\left\langle \left| \hat{s}^{(j)}[\mathbf{r}] - |\hat{s}^{(j)}[\mathbf{r}]| \exp(i \arg s^{(j)}[\mathbf{r}]) \right|^2 \right\rangle}, \quad (14)$$

где в знаменателе, в качестве мощности шума, фигурирует среднеквадратичное отклонение статистики $\hat{s}^{(j)}[\mathbf{r}]$ от ожидаемого значения для несмещённой по фазе оценки.

Можно показать, что в условиях справедливости выражения (11)

$$1/\rho^{(1)}[\mathbf{r}] = 4 \sin^2(\Delta \mathbf{r}^T \zeta_0/2) + (1 + d_0^{-1}[\mathbf{r}]) (1 + d_1^{-1}[\mathbf{r}]) - 1, \quad (15a)$$

$$1/\rho^{(2,1)}[\mathbf{r}] = (1 + d_0^{-1}[\mathbf{r}]) (1 + 4d_1^{-1}[\mathbf{r}] + 2d_1^{-2}[\mathbf{r}]) (1 + d_2^{-1}[\mathbf{r}]) - 1, \quad (15б)$$

$$1/\rho^{(2,2)}[\mathbf{r}] = \prod_{k=0}^3 (1 + d_k^{-1}[\mathbf{r}]) - 1, \quad (15в)$$

где $d_l[\mathbf{r}] = |\alpha_0|^2 A^2[\mathbf{r} + l \Delta \mathbf{r}]T/N_0$ — отношения сигнал-шум на входе в полосе $1/T$. Если все амплитуды передаваемого сигнала одинаковы: $A[\mathbf{r}] \equiv A$, то $d_l[\mathbf{r}] = d^{(0)}/(1 + \alpha^{(j)}/L_l)$, где $d^{(0)} = c^{(0)} |\alpha_0|^2 E_b/N_0$ — отношение сигнал-шум в подканалах поэлементного приёма эквивалентной по значению E_b/N_0 (относительных энергетических затрат на передачу одного бита сообщения) когерентной OFDM-системы с фазовой модуляцией при идеальной компенсации фазовых искажений.

Соотношение (15a) демонстрирует, что, вследствие инвариантности ФРМ-1 к общему фазовому повороту и отсутствия линейных по фазе искажений в соответствующих ФРМ-подканалах, ВФРМ-1 нечувствительна к задержке по времени, а ЧФРМ-1 — к частотному сдвигу. Минимальный проигрыш систем с фазоразностной модуляцией относительно систем с фазовой модуляцией и идеальной компенсацией фазовых искажений обеспечивается в асимптотике достаточно больших входных отношений сигнал-шум и длинных информационных блоков в ФРМ-подканалах (см. рис. 2). Для ФРМ-1 при отсутствии линейных по фазе искажений в ФРМ-подканалах этот проигрыш составляет 3 дБ. Однако, как демонстрирует рис. 2, наличие даже достаточно слабых линейных фазовых искажений существенно ухудшает помехоустойчивость ФРМ-1.

Дополнительная инвариантность ФРМ-2 к линейным фазовым искажениям, как свидетельствуют (15б), (15в) и рис. 2, приводит к нечувствительности любой ФРМ-2 как к временным, так и к частотным сдвигам. Однако это преимущество ФРМ-2 достигается за счёт существенного уменьшения отношения сигнал-шум на выходе демодуляторов. Причём, если для традиционной СР-ФРМ-2 минимальный проигрыш относительно фазовой модуляции составляет 7,8 дБ, то для РР-ФРМ-2 он уменьшается до 6 дБ.

Для повышения помехоустойчивости OFDM-сигналов с ЧФРМ-2 в работе предлагаются новые виды сигналов с опорными поднесущими, которые являются общими для всех ФРМ-2-символов. Для этих сигналов существует возможность оптимального перераспределения мощности OFDM-сигнала между поднесущими в пользу опорных. Отметим, что для ВФРМ-2 равнозначным было бы изменение мощности отдельных OFDM-символов, что при заданной мощности передатчика нецелесообразно.

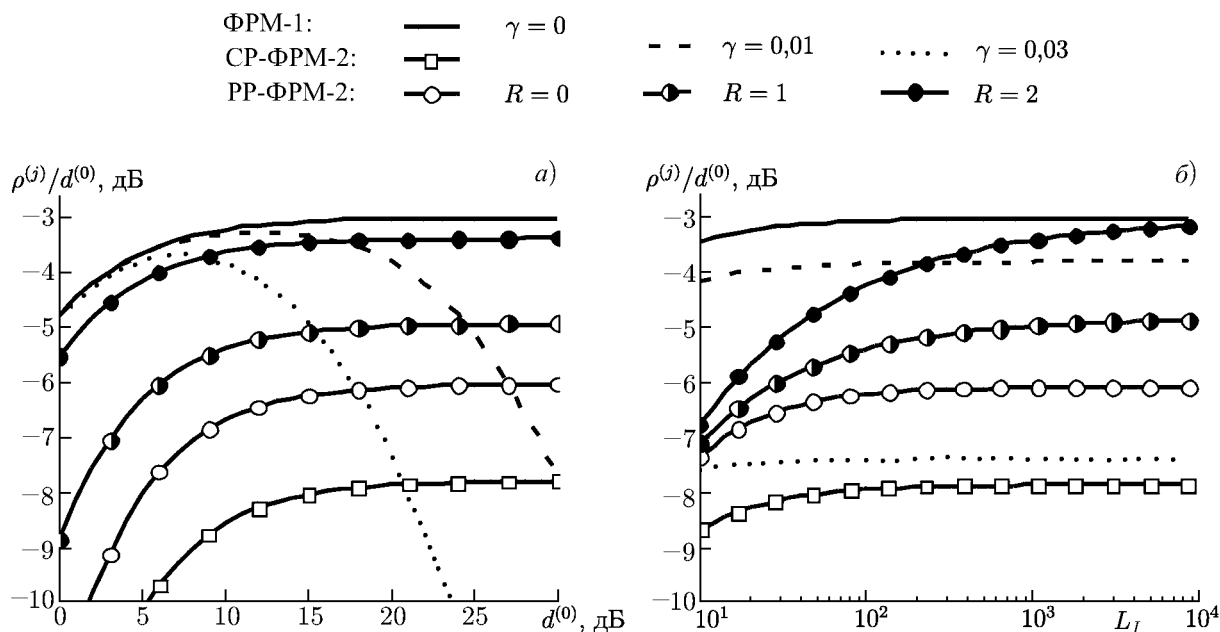


Рис. 2. Отношение сигнал-шум на выходах поэлементных демодуляторов для OFDM-систем с фазоразностной модуляцией, рассчитанные для каналов со смещениями сигнала по частоте (ν_0) и по времени (τ_0) относительно значений отношения сигнал-шум ($d^{(0)}$) эквивалентной по энергетике системы с фазовой модуляцией при идеальной компенсации фазовых искажений. На графиках представлены зависимости отношения сигнал-шум от $d^{(0)}$ при длине информационного блока в независимом ФРМ-подканале $L_I = 1024$ (а) и от L_I при $d^{(0)} = 20$ дБ (б); $\gamma = \nu_0 T_S$ для ВФРМ-1, $\gamma = \tau_0/T$ для ЧФРМ-1. Кривые $R = 1$ и $R = 2$ демонстрируют возможность повышения помехоустойчивости систем с ФРМ-2 при использовании новых видов РР-ФРМ-2 с одной и двумя опорными составляющими соответственно и оптимальном перераспределении мощности сигнала

Обоснование нашего подхода представлено на рис. 2 зависимостями выходных отношений сигнал-шум для гипотетических видов РР-ФРМ-2 с одной и двумя опорными составляющими при оптимальном перераспределении мощности сигнала. Они рассчитаны по формуле (15в) при $d_i[\mathbf{r}] = pd[\mathbf{r}]$ для R опорных составляющих и $d_i[\mathbf{r}] = d[\mathbf{r}] = d^{(0)}/[1 + (3 - R + Rp)/L_I]$ для остальных составляющих, где величина $p = \sqrt{(L_I + 2 - R)/(4 - R)}$ — асимптотически оптимальное при $d^{(0)} \rightarrow \infty$ значение относительной мощности опорных составляющих. Как видим, РР-ФРМ-2 с двумя опорными составляющими является наилучшим видом ФРМ-2 среди представленных на рис. 2 и при достаточно больших входных отношениях сигнал-шум и длинных информационных блоках в ФРМ-подканалах стремится по помехоустойчивости к ФРМ-1.

2. ТРИСПЕКТРАЛЬНЫЙ СИНТЕЗ СИГНАЛОВ С ЧФРМ-2

2.1. Обобщённая ЧФРМ-2 и адекватная ей форма триспектра

Класс обобщённой ВФРМ-2, выведенный в работе [8] на основе математического аппарата мгновенных моментов высоких порядков, в работе [9] преобразован посредством перехода от временной к частотной области в класс обобщённой ЧФРМ-2 с информационными фазами

$$\theta_m^{[2.(m_1, m_2)]} = \theta_m - \theta_{m-m_1} - \theta_{m-m_2} + \theta_{m-m_1-m_2}, \quad (16)$$

где (m_1, m_2) — параметры, определяющие отдельный элемент класса ЧФРМ-2- (m_1, m_2) . Здесь и далее рассматривается отдельный OFDM-символ и поэтому зависимость от номера символа

опускается. Исходя из принципа причинности автор [9] ограничил этот класс условием $m > m_2 \geq m_1 \geq 1$, с учётом которого легко найти область определения для текущего индекса m в (16): $m_1 + m_2 \leq m \leq N - 1$.

Поскольку в частотной области принцип причинности не имеет смысла и приём сигналов с ЧФРМ является принципиально блочным, то более общим является класс ЧФРМ-2 с информационными фазами

$$\theta_{n_1, n_2, n_3, n_4}^{(2)} = \theta_{n_1} - \theta_{n_3} - \theta_{n_4} + \theta_{n_2}, \tag{17}$$

где инвариантность к общему повороту фаз поднесущих $\theta_{n_i} \rightarrow \theta_{n_i} + \xi_0$ осуществляется автоматически, а инвариантность к линейному фазовому сдвигу $\theta_{n_i} \rightarrow \theta_{n_i} + n_i \xi_0$ обеспечивается специальным соотношением между номерами (т. е. безразмерными частотами) поднесущих:

$$n_1 + n_2 = n_3 + n_4. \tag{18}$$

Поэтому информационную фазу (17) и соответствующий ЧФРМ-2 символ можно рассматривать как функцию трёх переменных, например

$$s_{\mathbf{n}}^{(2)} = s_{n_1, n_2, n_3}^{(2)} = X_{n_1} X_{n_2} X_{n_3}^* X_{n_1+n_2-n_3}^*. \tag{19}$$

В (19) и далее для сокращения записей используется обозначение $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$.

В принципе при решении задачи построения OFDM-сигналов с оптимальным способом ЧФРМ-2 можно не привлекать никаких дополнительных понятий, а на основе анализа соотношения (17) найти оптимальные наборы информационных символов $\{s_{\mathbf{n}}^{(2)}\}$ и правила формирования спектральных компонент $\{X_n\}$ для них.

С другой стороны, нетрудно дать интерпретацию соотношений (17)–(19) на основе использования понятий, известных из математического аппарата полиспектрального анализа [17, 18]. Действительно, соотношения (17), (18) могут пониматься, как условия полиспектральной связанности спектральных компонент для специального вида спектра 4-го порядка (т. е. триспектра) T -финитных комплексных сигналов [17]

$$G_T(f_1, f_2, f_3) = (1/T) \langle X_T(f_1) X_T(f_2) X_T^*(f_3) X_T^*(f_1 + f_2 - f_3) \rangle. \tag{20}$$

Спектральные компоненты $X_T(f) = \int_0^T \exp(-i2\pi ft) x(t) dt$ для T -финитного аналитического сигнала однозначно определяются коэффициентами $X_n = X_T(n/T)/T$ ряда Фурье (1), в общем случае при $N \rightarrow \infty$. Очевидно, что для сигналов с конечным числом слагаемых в разложении (1) триспектр (20) однозначно определяется дискретными отсчётами

$$G_{\mathbf{n}} = T^3 G_T(n_1/T, n_2/T, n_3/T) = \langle X_{n_1} X_{n_2} X_{n_3}^* X_{n_1+n_2-n_3}^* \rangle, \tag{21}$$

$\mathbf{n} \in \Lambda_N$, где $\Lambda_N = \{\mathbf{n} \mid 0 \leq n_k < N, 1 \leq k \leq 4, n_4 = n_1 + n_2 - n_3\}$. Заметим, что при детерминированных амплитудах $|X_n|$ и заданных

$$\psi_{\mathbf{n}} = \arg G_{\mathbf{n}} = \theta_{n_1} + \theta_{n_2} - \theta_{n_3} - \theta_{n_1+n_2-n_3} \tag{22}$$

скобки статистического усреднения в правой части (21) можно опустить. Учитывая это и сравнивая (17), (19) с (22), (21), приходим к выводу о том, что информационные комбинации фаз (17) – это фазы (22), которые называются трифазами, а обобщённая ЧФРМ-2, по сути, является трифазовой модуляцией.

В силу свойств симметрии триспектра (21):

$$\begin{aligned} G_T(f_1, f_2, f_3) &= G_T(f_2, f_1, f_3) = G_T(f_2, f_1, f_1 + f_2 - f_3), \\ G_T^*(f_1, f_2, f_3) &= G_T(f_3, f_1 + f_2 - f_3, f_2) = G_T(f_1 + f_2 - f_3, f_3, f_1), \end{aligned} \tag{23}$$

его область определения для сигнала в полосе от 0 до $F_N = (N - 1)/T$ разбивается на восемь областей симметрии (см. рис. 3), каждая из которых представляет собой четырёхгранник. Задание триспектра в любой из них достаточно для полного его описания. Например, в качестве базовой области можно выбрать четырёхгранник $0 \leq f_3 \leq f_2 \leq f_1 \leq F_N - f_2 + f_3$ (рёбра которого выделены на рис. 3). Отметим, что на грани $f_2 = f_3$ базовой области триспектр принимает вещественные значения и трифазы отсчётов на этой грани не могут быть переносчиками информации. Поэтому в дальнейшем ограничимся рассмотрением триспектральных отсчётов с координатами из множества $\Omega_N = \{\mathbf{n} \mid 0 \leq n_3 < n_2 \leq n_1 < N - 1 - n_2 + n_3\}$, содержащего $M = [(N^2 - 1)(2N - 3)/24]$ элементов (здесь и далее, $[x]$ — целая часть числа x).

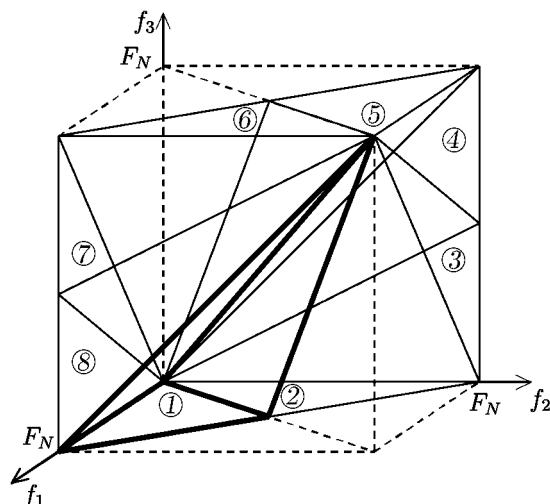


Рис. 3. Области симметрии триспектра аналитического сигнала в полосе от 0 до F_N

2.2. Общие принципы и алгоритмы синтеза сигналов с трифазовой модуляцией

Вводя векторы фаз $\tilde{\theta}_N = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{N-1})^T$ и трифаз ψ_N , представим соотношение (22) в матричной форме

$$\tilde{\mathbf{A}}_N \tilde{\theta}_N = \psi_N, \tag{24}$$

где $\tilde{\mathbf{A}}_N = \{a_{mn}\} = (\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{N-1}) = (\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{M-1})^T$ — матрица с размером $(M \times N)$, a_{mn} — её элемент на пересечении m -й строки (\mathbf{b}_m^T) и n -го столбца (\mathbf{a}_n). Исследуем свойства этой матрицы.

Заметим, что каждая строка $\mathbf{b}_m^T = \mathbf{b}_n^T$ отвечает соотношению (22) для некоторого триспектрального отсчёта с координатами $\mathbf{n} \in \Omega_N$ и обладает следующими свойствами:

$$\mathbf{b}_m^T \mathbf{1}_N = 0, \quad \mathbf{b}_m^T \mathbf{f}_N = 0, \tag{25}$$

где $\mathbf{1}_N = (1, 1, \dots, 1)^T$ — вектор с длиной N и единичными элементами, $\mathbf{f}_N = (0, 1, \dots, N-1)^T$ — вектор-столбец безразмерных частот поднесущих. Первое из соотношений (25) обеспечивает инвариантность трифазы к общему повороту: $\psi_n = \mathbf{b}_n^T(\tilde{\theta}_N + \xi_0 \mathbf{1}_N) = \mathbf{b}_n^T \tilde{\theta}_N$, а второе — к линейному фазовому сдвигу: $\psi_n = \mathbf{b}_n^T(\tilde{\theta}_N + \zeta_0 \mathbf{f}_N) = \mathbf{b}_n^T \tilde{\theta}_N$. С помощью (25) нетрудно найти соответствующие соотношения для матрицы в целом и её столбцов:

$$\tilde{\mathbf{A}}_N \mathbf{1}_N = \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{a}_n = \mathbf{0}_M, \quad \tilde{\mathbf{A}}_N \mathbf{f}_N = \sum_{n=0}^{N-1} n \mathbf{a}_n = \mathbf{0}_M, \tag{26}$$

где $\mathbf{0}_M = (0, 0, \dots, 0)^T$ — нулевой вектор с длиной M . Комбинируя соотношения (26), имеем

$$\sum_{n=0}^{N-1} (n - c) \mathbf{a}_n = \mathbf{0}_M. \tag{27}$$

При целочисленных значениях $c \in \{0, 1, \dots, N - 1\}$ уравнение (27) выражает линейную связь между $N - 1$ столбцами $\{a_n \mid n \neq c\}$, а при остальных значениях c — между всеми N столбцами. Поэтому ранг матрицы $\tilde{\mathbf{A}}_N$ не превышает $N - 2$.

Рассмотрим рекуррентный с увеличением полосы сигнала способ упорядочивания элементов вектора ψ_N и, следовательно, строк матрицы $\tilde{\mathbf{A}}_N$ по «срезам», состоящим из триспектральных отсчётов с одинаковым значением частоты $n_4 = n_1 + n_2 - n_3$ образующей их четвёртой поднесущей. Этот способ упорядочивания характеризуется следующей рекуррентной формой записи множества координат триспектральных отсчётов:

$$\Omega_{N+1} = \Omega_N \cup \left\{ \mathbf{n} \mid 0 \leq n_3 \leq N - 2, n_3 + 1 \leq n_2 \leq \left\lfloor \frac{n_3 + N}{2} \right\rfloor, n_1 = N + n_3 - n_2 \right\}. \quad (28)$$

Как показывает (28), при добавлении к сигналу, состоящему из N поднесущих, ещё одной на частоте N к множеству триспектральных отсчётов добавляются отсчёты с одинаковым значением частоты $n_4 = N$, и поэтому справедливо рекуррентное соотношение

$$\tilde{\mathbf{A}}_{N+1} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_N & \mathbf{0}_M \\ \tilde{\mathbf{C}}_N & -\mathbf{1}_{[N^2/4]} \end{pmatrix}, \quad (29)$$

где $\tilde{\mathbf{C}}_N$ — матрица с размером $[N^2/4] \times N$. Поскольку $\tilde{\mathbf{A}}_3 = (-1 \ 2 \ -1)$ и $\text{rank } \tilde{\mathbf{A}}_3 = 1$, то на основе (29) легко показать, что $\text{rank } \tilde{\mathbf{A}}_{N+1} = \text{rank } \tilde{\mathbf{A}}_N + 1$ при любых $N \geq 3$, и, тем самым, по индукции доказать свойство

$$\text{rank } \tilde{\mathbf{A}}_N = L_I = N - 2. \quad (30)$$

Это означает, что из M трифаз линейно независимыми являются лишь L_I . Множество независимых трифаз образует базис Ψ_n^I , который в упорядоченном виде представляет L_I -вектор информационных трифаз — ψ_N^I . Остальные трифазы составляют $(M - L_I)$ -вектор сопутствующих трифаз — ψ_N^C .

Для того, чтобы определить алгоритм синтеза OFDM-сигнала с трифазовой модуляцией при заданных информационных трифазах, необходимо выразить через них фазы поднесущих $\tilde{\theta}_N$. Вследствие (30) при решении уравнения (24) относительно элементов вектора $\tilde{\theta}_N$ необходимо задать фазы θ_r и θ_g для двух любых «инициализирующих» поднесущих ($r < g$), а затем найти фазы $\theta_N = [\theta_0, \dots, \theta_{r-1}, \theta_{r+1}, \dots, \theta_{g-1}, \theta_{g+1}, \dots, \theta_{N-1}]^T$ остальных поднесущих. Определим матрицу \mathbf{A}_N , удалив из матрицы $\tilde{\mathbf{A}}_N$ столбцы \mathbf{a}_r и \mathbf{a}_g , отвечающие инициализирующим поднесущим. Перестановкой строк в системе уравнений (24) можно выделить соотношения для информативных и сопутствующих трифаз

$$\begin{pmatrix} \psi_N^I \\ \psi_N^C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_N^I \\ \mathbf{A}_N^C \end{pmatrix} \theta_N + \begin{pmatrix} \mathbf{a}_r^I \\ \mathbf{a}_r^C \end{pmatrix} \theta_r + \begin{pmatrix} \mathbf{a}_g^I \\ \mathbf{a}_g^C \end{pmatrix} \theta_g, \quad (31)$$

из которых при произвольных значениях фаз инициализирующих поднесущих получаем

$$\theta_N = (\mathbf{A}_N^I)^{-1} (\psi_N^I - \mathbf{a}_r^I \theta_r - \mathbf{a}_g^I \theta_g). \quad (32)$$

Данное выражение описывает синтез сигналов с трифазовой модуляцией для любого выбора набора информационных трифаз и инициализирующих поднесущих. При заданном значении N существует большое число способов выбора базиса из всей совокупности трифаз и, следовательно, различных вариантов трифазовой модуляции. Формула (32), являясь общей, выражает связь в матричной форме и неудобна для практического использования. В каждом конкретном случае,

переставляя строки в системе уравнений (31) и приводя матрицу \mathbf{A}_N^I к треугольному виду, из (32) мы можем получить рекуррентный алгоритм вычисления фаз поднесущих.

Рассмотрим для примера класс вариантов трифазовой модуляции с рекуррентным способом формирования базиса в направлении увеличения частоты, соответствующий упорядочиванию (28) элементов вектора ψ_N . В этом случае инициализирующими будут поднесущие с номерами 0 и 1, а для матрицы информационных трифаз справедливо рекуррентное соотношение

$$\mathbf{A}_{m+1}^I = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_m^I & \mathbf{0}_{m-2} \\ \mathbf{c}_m^T & -1 \end{pmatrix} \quad (33)$$

с начальным условием $\mathbf{A}_3^I = (-1)$, соответствующим начальному элементу $\psi_0^I = (\psi_N^I)_0 = \psi_{1,1,0}$. Для остальных элементов $\psi_{m-2}^I = (\psi_N^I)_{m-2} = \psi_{n_1, n_2, n_1+n_2-m}$, где $3 \leq m \leq N-1$, выбор в качестве информационной одной из трифаз среза $n_4 = m$, т. е. строки \mathbf{c}_m^T из матрицы $\tilde{\mathbf{C}}_m$ с размером $[m^2/4] \times (m-2)$ без столбцов с номерами 0 и 1, можно проводить произвольным способом. Это означает, что таким образом можно построить $\prod_{m=3}^{N-1} [m^2/4]$ различных вариантов трифазовой модуляции.

Используя в (32) обращение (33)

$$(\mathbf{A}_{m+1}^I)^{-1} = \begin{pmatrix} (\mathbf{A}_m^I)^{-1} & \mathbf{0}_{m-2} \\ \mathbf{c}_m^T (\mathbf{A}_m^I)^{-1} & -1 \end{pmatrix},$$

получаем формулу

$$\theta_{m+1} = \begin{pmatrix} \theta_m \\ \theta_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathbf{A}_m^I)^{-1} & \mathbf{0}_{m-2} \\ \mathbf{c}_m^T (\mathbf{A}_m^I)^{-1} & -1 \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} \psi_m^I \\ \psi_{m-2}^I \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{a}_0^I \\ a_{m,0}^I \end{pmatrix} \theta_0 - \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^I \\ a_{m,1}^I \end{pmatrix} \theta_1 \right\},$$

из которой находим рекуррентный алгоритм вычисления фаз поднесущих

$$\theta_2 = 2\theta_1 - \theta_0 - \psi_0^I; \quad \theta_m = \mathbf{c}_m^T \theta_m - \psi_{m-2}^I + a_{m,0}^I \theta_0 + a_{m,1}^I \theta_1, \quad 3 \leq m \leq N-1. \quad (34)$$

Для уменьшения сложности синтеза и приёма сигнала целесообразно осуществлять выбор информационных трифаз единообразно от среза к срезу по какому-либо закону. В простейшем случае, когда связь между тройками частот поднесущих, образующих различные триспектральные отсчёты базиса, линейная, эти отсчёты будут лежать на некоторой прямой в трёхмерном пространстве частот. Для рассматриваемого рекуррентного способа формирования базиса необходимо, чтобы эта прямая проходила через какой-либо отсчёт каждого среза $n_4 = m$. Срезы $n_4 = 2$ и $n_4 = 3$ содержат один и два отсчёта соответственно, через которые можно провести лишь две прямые. Отсчёты базиса на первой прямой ($n_2 = 1, n_3 = 0$) соответствуют одному из возможных видов оптимальной трифазовой модуляции с двумя общими поднесущими (см. ниже), а вторая прямая $n_1 = n_2 = n_3 + 1$ — СР-ЧФРМ-2.

Отметим, что СР-ЧФРМ-2, как ЧФРМ-2-(1,1), является единственным элементом класса ЧФРМ-2 из работы [9], который обладает полной информативностью трифазовой модуляции. Действительно, отдельный элемент этого класса — ЧФРМ-2-(m_1, m_2) — содержит $N - m_1 - m_2$ информационных фаз $\theta_n^{(2.(m_1, m_2))} = -\psi_{n-m_1, n-m_2, n-m_1-m_2}$, которые образуют (с точностью до не принципиального инвертирования) набор трифаз, отвечающих триспектральным отсчётам на отрезке прямой ($n_1 - n_2 = m_2 - m_1, n_2 - n_3 = m_1$). Поскольку этот отрезок начинается со среза $n_4 = m_1 + m_2$, то для преобразования данного вида ЧФРМ-2 в один из вариантов трифазовой модуляции с рекуррентным формированием базиса в направлении увеличения частоты в качестве недостающих элементов базиса необходимо добавить по одному отсчёту из срезов $n_4 = n$

при $2 \leq n < m_1 + m_2$. Например, чтобы расширить до базиса набор информационных фаз для РР-ЧФРМ-2 (т. е. ЧФРМ-2-(1, 2)), необходимо добавить к нему отсчёт с трифазой $\psi_{1,1,0}$.

Ясно, что рассмотренный класс вариантов трифазовой модуляции не является единственно возможным. В частности, совершенно равноценным является класс вариантов трифазовой модуляции с рекуррентным способом формирования базиса в направлении уменьшения частоты. Этот способ соответствует упорядочиванию триспектральных отсчётов по срезам $n_3 = m$ с одинаковым значением минимальных частот у образующих триспектральные отсчёты четвёрок поднесущих в направлении от $m = N - 3$ до $m = 0$. Нетрудно показать, что, вследствие инвариантности условия триспектральной связанности частот (18) к замене $n_i \rightarrow N - 1 - n_i$ ($1 \leq i \leq 4$), каждый вариант трифазовой модуляции этого класса взаимоднозначно соответствует некоторому варианту из рассмотренного выше класса, и переход от одного к другому осуществляется посредством замены координат информационных триспектральных отсчётов: $(n_1, n_2, n_3) \rightarrow (N - 1 - n_2, N - 1 - n_1, N - 1 - n_1 - n_2 + n_3)$.

2.3. Синтез сигналов с оптимальной трифазовой модуляцией

Перейдём к синтезу оптимальных видов трифазовой модуляции с опорными поднесущими, используемыми при образовании всех элементов базиса Ψ_N^I . Отметим, что, поскольку фиксация тройки поднесущих задаёт единственный триспектральный отсчёт, то вариантов трифазовой модуляции с тремя опорными поднесущими не существует. Поэтому оптимальными по выходному отношению сигнал-шум, как было показано в разделе 1.4, являются варианты трифазовой модуляции с двумя опорными поднесущими (ОТФМ). Исследуем и классифицируем их.

Очевидно, что фиксация пары частот опорных поднесущих $(p, p + q)$ выделяет в Ω_N подмножества координат триспектральных отсчётов $L_{ij} = L_{ij}(p, q) = \Omega_N \cap (n_i = p, n_j = p + q)$, лежащих на отрезках прямых в трёхмерном пространстве. В табл. 1 представлены шесть непересекающихся множеств L_{ij} с ненулевой мощностью $l_{ij} = |L_{ij}|$ при параметрах $(p, q) \in D_{ij}$. Отметим, что при построении этих множеств «диагональный» элемент $(p + q, p + q, p) = (n_3 = p, n_2 = p + q) \cap (n_3 = p, n_1 = p + q)$ отнесён к множеству L_{32} , а элемент $(p, p, p - q) = (n_1 = p, n_4 = p + q) \cap (n_2 = p, n_4 = p + q)$ — к множеству L_{14} .

Для каждого из множеств L_{ij} целесообразно определить четыре множества $K_{ij}^{(m)} = \{n_m \mid \mathbf{n} \in L_{ij}, n_4 = n_1 + n_2 - n_3\}$. Объединение $K_{ij} = \bigcup_{m=1}^4 K_{ij}^{(m)}$ образует множество частот всех поднесущих, которые участвуют в образовании триспектральных отсчётов с трифазам из набора $\Psi_{ij} = \{\psi_{\mathbf{n}} \mid \mathbf{n} \in L_{ij}\}$. Для упрощения записей и облегчения понимания структуры соотношений с трифазам введём для них обозначения вида $\psi_{\mathbf{n}}^{(ij)}$, где верхний индекс указывает на то, что $\psi_{\mathbf{n}} \in \Psi_{ij}$. Заметим, что для любого из множеств Ψ_{ij} каждой трифазе $\psi_{\mathbf{n}}^{(ij)}$ взаимоднозначно соответствуют частоты из представленных в табл. 1 множеств $K_{ij}^{(m)}$ и $K_{ij}^{(l)}$, где $m \notin \{i, j\}$ и $l \notin \{i, j\}$, и $K_{ij}^{(m)} \setminus (K_{ij}^{(m)} \cap K_{ij}^{(l)}) \neq \emptyset$. Поэтому в наборе Ψ_{ij} найдётся, по крайней мере, одна трифаза, формируемая с участием фазы поднесущей, которая не участвует в образовании остальных трифаз, и, следовательно, элементы множества Ψ_{ij} линейно независимы.

Из соотношений $K_{24}^{(3)} \cap K_{34} = \emptyset$, $K_{31}^{(4)} \cap (K_{34} \cup K_{24}) = \emptyset$, $K_{32}^{(4)} \cap (K_{31} \cup K_{34} \cup K_{24}) = \emptyset$, $K_{14}^{(3)} \cap (K_{32} \cup K_{31} \cup K_{34} \cup K_{24}) = \emptyset$ следует, что для каждого из множеств Ψ_{ij} , объединяемых в $\Psi_B = \Psi_{32} \cup \Psi_{31} \cup \Psi_{34} \cup \Psi_{24} \cup \Psi_{14}$, имеется собственный набор поднесущих, фазы которых участвуют в формировании трифаз лишь из данного множества. Поэтому элементы объединения Ψ_B линейно независимы. Вследствие того, что $K_{21}^{(3)} \subset (K_{24}^{(3)} \cup K_{14}^{(3)})$ и $K_{21}^{(4)} \subset (K_{32}^{(4)} \cup K_{31}^{(4)})$, множество Ψ_{21} линейно зависит от множества Ψ_B .

Таблица 1. Множество L_{ij} , его мощность l_{ij} , область определения D_{ij} по параметрам (p, q) и множества $K_{ij}^{(m)} (m \notin \{i, j\})$

1	$L_{32} = \{\mathbf{n} \mid n_3 = p, n_2 = p + q, n_1 \in K_{32}^{(1)}\}; \quad l_{32} = \max(0, N - p - 2q);$ $D_{32} = \{(p, q) \mid 0 \leq p \leq N - 3, 1 \leq q \leq [(N - p - 1)/2]\};$ $K_{32}^{(1)} = \{n \mid p + q \leq n \leq N - 1 - q\}; \quad K_{32}^{(4)} = \{n \mid p + 2q \leq n \leq N - 1\}.$
2	$L_{31} = \{\mathbf{n} \mid n_3 = p, n_1 = p + q, n_2 \in K_{31}^{(2)}\}; \quad l_{31} = \min(q, N - p - q) - 1;$ $D_{31} = \{(p, q) \mid 0 \leq p \leq N - 4, 2 \leq q \leq N - 2 - p\};$ $K_{31}^{(2)} = \{n \mid p + 1 \leq n \leq \min(p + q, N - q) - 1\};$ $K_{31}^{(4)} = \{n \mid p + q + 1 \leq n \leq \min(p + 2q, N) - 1\}.$
3	$L_{34} = \{\mathbf{n} \mid n_3 = p, n_2 \in K_{34}^{(2)}, n_1 = 2p + q - n_2\}; \quad l_{34} = [q/2];$ $D_{34} = \{(p, q) \mid 0 \leq p \leq N - 3, 2 \leq q \leq N - 1 - p\};$ $K_{34}^{(2)} = \{n \mid p + 1 \leq n \leq p + [q/2]\}; \quad K_{34}^{(1)} = \{n \mid p + [(q + 1)/2] \leq n \leq p + q - 1\}.$
4	$L_{21} = \{\mathbf{n} \mid n_2 = p, n_1 = p + q, n_3 \in K_{21}^{(3)}\}; \quad l_{21} = \min(p, N - 1 - p - q);$ $D_{21} = \{(p, q) \mid 1 \leq p \leq N - 3, 1 \leq q \leq N - 2 - p\};$ $K_{21}^{(3)} = \{n \mid \max(2p + q + 1 - N, 0) \leq n \leq p - 1\};$ $K_{21}^{(4)} = \{n \mid p + q + 1 \leq n \leq \min(2p + q, N - 1)\}.$
5	$L_{24} = \{\mathbf{n} \mid n_2 = p, n_1 \in K_{24}^{(1)}, n_3 = n_1 - q\}; \quad l_{24} = \min(q - 1, p);$ $D_{24} = \{(p, q) \mid 1 \leq p \leq N - 3, 2 \leq q \leq N - 1 - p\};$ $K_{24}^{(3)} = \{n \mid \max(p - q + 1, 0) \leq n \leq p - 1\}; \quad K_{24}^{(1)} = \{n \mid \max(p + 1, q) \leq n \leq p + q - 1\}.$
6	$L_{14} = \{\mathbf{n} \mid n_1 = p, n_2 \in K_{14}^{(2)}, n_3 = n_2 - q\}; \quad l_{14} = \max(0, p - q + 1);$ $D_{14} = \{(p, q) \mid 1 \leq p \leq N - 2, 1 \leq q \leq \min(p, N - 1 - p)\};$ $K_{14}^{(3)} = \{n \mid 0 \leq n \leq p - q\}; \quad K_{14}^{(2)} = \{n \mid q \leq n \leq p\}.$

Таким образом, максимальное количество линейно-независимых трифаз с двумя общими поднесущими равно $|\Psi_B| = L_I - [(q - 1)/2]$ и, следовательно, базис из L_I информационных трифаз с двумя опорными поднесущими возможен лишь при задании параметров (p, q) из множества $D_B = \{(p, q) \mid q \in \{1, 2\}, 0 \leq p \leq N - 1 - q\}$.

Объединение всех вариантов ОТФМ с базисами $\Psi_N^I = \Psi_B$ при $(p, q) \in D_B$ образует базовый подкласс ОТФМ, который обозначим ОТФМ-0. Каждый его элемент однозначно задаётся параметрами (p, q) и поэтому может быть обозначен ОТФМ-0- (p, q) . В табл. 2 сформулирован общий алгоритм формирования фаз поднесущих для ОТФМ-0, который легко выводится на основе следующих соображений. Для ОТФМ выбор фаз опорных поднесущих θ_p и θ_{p+q} в качестве инициализирующих фаз является естественным. При $q = 1$ множества Ψ_{31}, Ψ_{34} и Ψ_{24} пустые, а при $q = 2$ они содержат трифазы $\psi_{p+2,p+1,p}^{(31)}, \psi_{p+1,p+1,p}^{(34)}$ и $\psi_{p+1,p,p-1}^{(24)}$, с использованием которых можно вычислить фазы

$$\begin{aligned} \theta_{p+1} &= (\theta_p + \theta_{p+2} + \psi_{p+1,p+1,p}^{(34)})/2; & \theta_{p-1} &= \theta_{p+1} + \theta_p - \theta_{p+2} - \psi_{p+1,p,p-1}^{(24)} (p \geq 1); \\ \theta_{p+3} &= \theta_{p+2} + \theta_{p+1} - \theta_p - \psi_{p+2,p+1,p}^{(31)} (p \leq N - 4). \end{aligned} \tag{35}$$

Остальные фазы можно найти на основе формул

$$\theta_n = \theta_{n-q} + \theta_{p+q} - \theta_p - \psi_{n-q,p+q,p}^{(32)} \quad (n \in K_{32}^{(4)}), \tag{36a}$$

$$\theta_n = \theta_p + \theta_{n+q} - \theta_{p+q} - \psi_{p,n+q,n}^{(14)} \quad (n \in K_{14}^{(3)}), \tag{36б}$$

Таблица 2. Рекуррентный алгоритм формирования фаз для ОТФМ-0-(p, q), где (p, q) ∈ D_B

Шаг 1. Задать значения трифаз из множества $\Psi_B = \Psi_{32} \cup \Psi_{31} \cup \Psi_{34} \cup \Psi_{24} \cup \Psi_{14}$ и начальных фаз $\{\theta_p, \theta_{p+q}\}$.
Шаг 2. Если $q = 2$, то по формуле (35) вычислить существующие фазы из набора $\{\theta_{p+1}, \theta_{p-1}, \theta_{p+3}\}$.
Шаг 3. а) Если $p \leq N - 1 - 2q$, то по формуле (36а) рекуррентно вычислить фазы $\{\theta_n \mid p + 2q \leq n \leq N - 1\}$, начиная с $n = p + 2q$. б) Если $p \geq q$, то по формуле (36б) рекуррентно вычислить фазы $\{\theta_n \mid 0 \leq n \leq p - q\}$, начиная с $n = p - q$.

которые рекуррентно выражают фазы поднесущих из собственных наборов $K_{32}^{(4)}$ и $K_{14}^{(3)}$ через трифазы $\psi_{n-q,p+q,p}^{(32)}$ и $\psi_{p,n+q,n}^{(14)}$ соответственно при направлении рекурсии от соседних с опорными до граничных поднесущих. Отметим, что шаги 3а и 3б из табл. 2 можно выполнять в любой последовательности.

Остальные варианты ОТФМ при заданных $(p, q) \in D_B$ можно синтезировать из ОТФМ-0-(p, q) посредством замены части трифаз из множества Ψ_B на трифазы из Ψ_{21} . Правила такой замены можно сформулировать на основе соотношений

$$\psi_{p+q,p,n}^{(21)} = \psi_{n+q,p,n}^{(24)} + \psi_{p+q,2p-n,p}^{(31)} - \psi_{2p-n,n+q,p}^{(34)}, \quad n \in K_{21}^{(3)} \cap K_{24}^{(3)}; \tag{37a}$$

$$\begin{aligned} \psi_{p+q,p,n}^{(21)} &= \sum_{m=0}^{c-1} (\psi_{p,n+mq+q,n+mq}^{(14)} + \psi_{2p-n-mq,p+q,p}^{(32)}) + (1 - \delta_{n+qc,p}) \times \\ &\times (\psi_{n+cq+q,p,n+cq}^{(24)} + \psi_{p+q,2p-n-cq,p}^{(31)} - \psi_{2p-n-cq,n+cq+q,p}^{(34)}), \quad n \in K_{21}^{(3)} \cap K_{14}^{(3)}; \end{aligned} \tag{37б}$$

где $c = [(p - n)/q]$, $\delta_{nm} = \{1, n = m; 0, n \neq m\}$ — символ Кронекера. Эти соотношения можно получить, выражая фазы θ_n и θ_{2p+q-n} , входящие в образование $\psi_{p+q,p,n}^{(21)}$ через трифазы из Ψ_B . Следует заметить, что (37б) легче всего вывести посредством рекуррентного использования соотношения

$$\psi_{p+q,p,n}^{(21)} = \psi_{p,n+q,n}^{(14)} + \psi_{2p-n,p+q,p}^{(32)} + \psi_{p+q,p,n+q}^{(21)}, \quad n \in K_{21}^{(3)} \cap K_{14}^{(3)}. \tag{38}$$

Среди большого числа вариантов ОТФМ, базис которых содержит трифазы из множества Ψ_{21} , выделим класс вариантов с базисами, образованными из множества Ψ_B при замене целиком одного или двух его подмножеств Ψ_{ij} на множество Ψ_{21} . Обозначим этот класс ОТФМ-1.

Согласно (37а) при $q = 2$ и $1 \leq p \leq N - 4$ существуют три варианта замены одной из трифаз $\psi_{p+1,p+1,p}^{(34)}$, $\psi_{p+1,p,p-1}^{(24)}$ или $\psi_{p+2,p+1,p}^{(31)}$ на $\psi_{p+2,p,p-1}^{(21)}$, которым соответствуют следующие формулы вычисления фаз $\{\theta_{p+1}, \theta_{p-1}, \theta_{p+3}\}$:

$$\begin{aligned} \theta_{p+1} &= (\theta_p + \theta_{p+2} + \psi_{p+2,p+1,p}^{(31)} + \psi_{p+1,p,p-1}^{(24)} - \psi_{p+2,p,p-1}^{(21)})/2, \\ \theta_{p+3} &= \theta_{p+2} + \theta_{p+1} - \theta_p - \psi_{p+2,p+1,p}^{(31)}, \quad \theta_{p-1} = \theta_{p+2} + \theta_p - \theta_{p+3} - \psi_{p+2,p,p-1}^{(21)}; \end{aligned} \tag{39a}$$

$$\begin{aligned} \theta_{p+1} &= (\theta_p + \theta_{p+2} + \psi_{p+1,p+1,p}^{(34)})/2; \quad \theta_{p+3} = \theta_{p+2} + \theta_{p+1} - \theta_p - \psi_{p+2,p+1,p}^{(31)}; \\ \theta_{p-1} &= \theta_{p+2} + \theta_p - \theta_{p+3} - \psi_{p+2,p,p-1}^{(21)}; \end{aligned} \tag{39б}$$

$$\theta_{p+1} = (\theta_p + \theta_{p+2} + \psi_{p+1,p+1,p}^{(34)})/2; \quad \theta_{p-1} = \theta_{p+1} + \theta_p - \theta_{p+2} - \psi_{p+1,p,p-1}^{(24)};$$

Таблица 3. Рекуррентный алгоритм формирования фаз для ОТФМ-1-(p, q, m), где $m \in \{1, 2, 3\}$, $q \in \{1, 2\}$, $1 \leq p \leq N - 2 - q$

Шаг 1. Задать значения для трифаз из базиса $\Psi_{21} \cup \Psi_L \cup \Psi_S$ и начальных фаз $\{\theta_p, \theta_{p+q}\}$, где $\Psi_L = \begin{cases} \Psi_{32}, & p \leq (N - 1 - q)/2; \\ \Psi_{14}, & p > (N - 1 - q)/2; \end{cases}$ $\Psi_S = \begin{cases} \Psi_{24} \cup \Psi_{31}, & q = 2 \wedge m = 1; \\ \Psi_{31} \cup \Psi_{34}, & q = 2 \wedge m = 2; \\ \Psi_{34} \cup \Psi_{24}, & q = 2 \wedge m = 3; \\ \emptyset, & q = 1. \end{cases}$
Шаг 2. Если $q = 2$, то фазы из набора $\{\theta_{p+1}, \theta_{p-1}, \theta_{p+3}\}$ вычислить по формуле (39а) при $m = 1$, (39б) при $m = 2$ и (39в) при $m = 3$.
Шаг 3. а) Если $p \leq (N - 1 - q)/2$, то по формуле (36а) рекуррентно вычислить фазы $\{\theta_n \mid p + 2q \leq n \leq N - 1\}$, начиная с $n = p + 2q$. В противном случае по формуле (36б) рекуррентно вычислить фазы $\{\theta_n \mid 0 \leq n \leq p - q\}$, начиная с $n = p - q$.
б) Если $p \leq (N - 1 - q)/2$, то по формуле (40) рекуррентно вычислить фазы $\{\theta_n \mid 0 \leq n \leq p - q\}$, начиная с $n = p - q$. В противном случае по формуле (41) рекуррентно вычислить фазы $\{\theta_n \mid p + 2q \leq n \leq N - 1\}$, начиная с $n = p + 2q$.

$$\theta_{p+3} = \theta_{p+2} + \theta_p - \theta_{p-1} - \psi_{p+2,p,p-1}^{(21)}. \quad (39в)$$

Из соотношения (38) следует, что замена $\Psi_{14} \rightarrow \{\psi_{p+q,p,n}^{(21)} \mid n \in K_{21}^{(3)} \cap K_{14}^{(3)}\}$ возможна при выполнении условия $K_{21}^{(3)} \cap K_{14}^{(3)} = K_{14}^{(3)}$, которое удовлетворяется, если $1 \leq p \leq (N - 1 - q)/2$. Выражая с помощью (38) $\psi_{p,n+q,n}^{(14)}$ через $\psi_{p+q,p,n}^{(21)}$ и фазы, определяющие остальные трифазы в правой части (38), подставляя результат в выражение (36б), мы можем получить вместо него следующее правило рекуррентного вычисления фаз низкочастотных поднесущих:

$$\theta_n = \theta_p + \theta_{p+q} - \theta_{2p+q-n} - \psi_{p+q,p,n}^{(21)} \quad (n \in K_{14}^{(3)}). \quad (40)$$

Заметим, что для вычислений необходимо, чтобы фазы высокочастотных поднесущих $\{\theta_{2p+q-n}\}$ были уже определены на основе (36а). Аналогично, для альтернативной замены $\Psi_{32} \rightarrow \{\psi_{p+q,p,2p+q-n}^{(21)} \mid n \in K_{21}^{(4)} \cap K_{32}^{(4)}\}$ необходимо выполнение условия $K_{21}^{(4)} \cap K_{32}^{(4)} = K_{32}^{(4)}$, которое справедливо, если $(N - 1 - q)/2 \leq p \leq N - 2 - q$. В этом случае с помощью (36а) и (38) можно найти соотношение для рекуррентного вычисления фаз высокочастотных поднесущих

$$\theta_n = \theta_p + \theta_{n+q} - \theta_{2p+q-n} - \psi_{p+q,p,2p+q-n}^{(21)} \quad (n \in K_{32}^{(4)}) \quad (41)$$

после вычислений по формуле (36б) фаз низкочастотных поднесущих $\{\theta_{2p+q-n}\}$.

Для упрощения параметризации элементов класса ОТФМ-1, объединяющего рассмотренные выше способы замены множеств Ψ_{ij} на множество Ψ_{21} , удобно пренебречь в случае $p = (N - 1 - q)/2$ возможностью обеих замен $\Psi_{14} \rightarrow \{\psi_{p+q,p,n}^{(21)} \mid n \in K_{14}^{(3)}\}$ и $\Psi_{32} \rightarrow \{\psi_{p+q,p,2p+q-n}^{(21)} \mid n \in K_{32}^{(4)}\}$ в пользу, например, последней из них. С учётом этого ограничения каждый элемент этого класса можно задать тройкой параметров (p, q, m) и обозначить ОТФМ-1-(p, q, m), где m — параметр, существенный лишь при $q = 2$, т. к. он является номером одного из вариантов, соответствующих формулам (39). В табл. 3 представлено правило выбора базиса в зависимости от параметров (p, q, m) и сформулирован общий алгоритм формирования фаз поднесущих для ОТФМ-1. Отметим, что в отличие от ОТФМ-0, шаг 3б из табл. 3 должен выполняться после шага 3а.

3. ИССЛЕДОВАНИЕ ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТИ

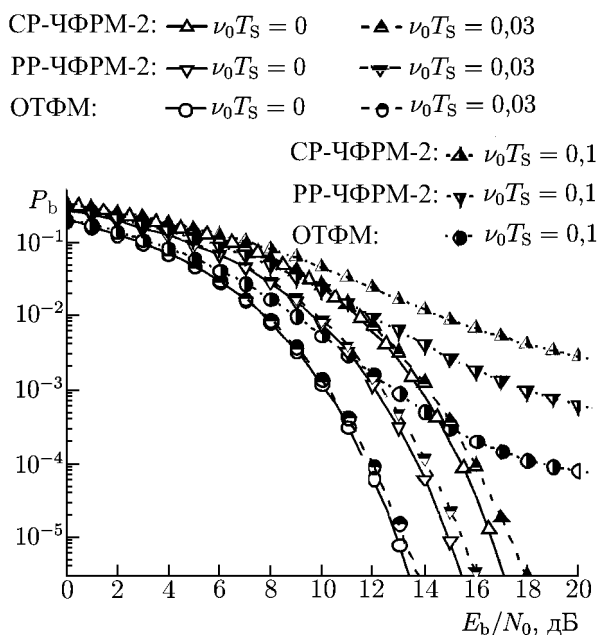


Рис. 4. Помехоустойчивость SR-ЧФРМ-2, PR-ЧФРМ-2 и ОТФМ в каналах с аддитивным белым гауссовым шумом и доплеровским смещением частоты ν_0 , $T_G/T = 0,1$, $\tau_0/T = 0$

Исследование и сравнительный анализ помехоустойчивости некогерентного приёма OFDM-сигналов с ФРМ-1, ФРМ-2 и ОТФМ было проведено посредством компьютерного моделирования в низкочастотной однолучевой модели канала с неопределённой фазой, задержкой по времени, доплеровским смещением по частоте и аддитивным белым гауссовым шумом. Моделирование выполнялось при частоте дискретизации комплексных сигналов $F_d = 132/T$ и относительной длине защитного интервала $T_G/T = 0,1$. Число информационных элементов $L_I = 128$, передаваемых OFDM-символом с различными видами фазоразностной модуляции в частотной области, было равно количеству поднесущих при ВФРМ-1, а позиционность информационных элементов $M = 4$. В качестве PR-ЧФРМ-2 исследовался вариант с полной информативностью, обеспеченной дополнительным отсчётом с трифазой $\psi_{1,1,0}$, а в качестве ОТФМ — вариант ОТФМ-0-(0,1). При моделировании проводилась оценка вероятности битовой ошибки P_b в зависимости от относительных энергетических затрат на передачу одного бита сообщения E_b/N_0 .

Результаты представлены на рис. 4 и 5.

Кривые помехоустойчивости для SR-ЧФРМ-2, PR-ЧФРМ-2 и ОТФМ на рис. 4 подтверждают то, что среди этих вариантов трифазовой модуляции наилучшей помехоустойчивостью обладает ОТФМ. В канале с аддитивным белым гауссовым шумом при отсутствии смещения частоты энергетический выигрыш ОТФМ составляет не менее 2 дБ по отношению к PR-ЧФРМ-2 и более 3,5 дБ относительно SR-ЧФРМ-2. При наличии смещения частоты преимущество ОТФМ возрастает.

На рис. 5 сопоставлены графики помехоустойчивости для ВФРМ-1, ЧФРМ-1 и ОТФМ. Рис. 5а демонстрирует высокую чувствительность ЧФРМ-1 к задержке по времени, а рис. 5б — сильную неустойчивость ВФРМ-1 к смещению по частоте. Даже при небольших смещениях по времени (по частоте) наблюдается значительное ухудшение помехоустойчивости ЧФРМ-1 (ВФРМ-1). Ожидаемая инвариантность ВФРМ-1 и ОТФМ к задержкам по времени (см. рис. 5а, в) реализуется благодаря эффективной борьбе с межсимвольной интерференцией при длине защитного интервала, превышающей возможные задержки. Нарушение инвариантности ЧФРМ-1 и ОТФМ из-за межканальной интерференции (см. рис. 5б, г) становится существенным при $\nu_0 T_S > 0,03$ и для больших отстроек по частоте ($\nu_0 T_S = 0,1$) приводит к значительному снижению помехоустойчивости с появлением при больших значениях E_b/N_0 нескратимой вероятности ошибки. Рисунки 5в, г демонстрируют, что уже при достаточно малых одновременных отстройках по времени и частоте ($\tau_0 = 0,03T$, $\nu_0 = 0,03/T_S$) ОТФМ превосходит по помехоустойчивости как ВФРМ-1, так и ЧФРМ-1 более чем на 1 дБ для $P_b \sim 10^{-4}$. Причём, если при фиксированной отстройке ν_0 и дальнейшем увеличении смещения по времени преимущество ОТФМ возрастает лишь от-

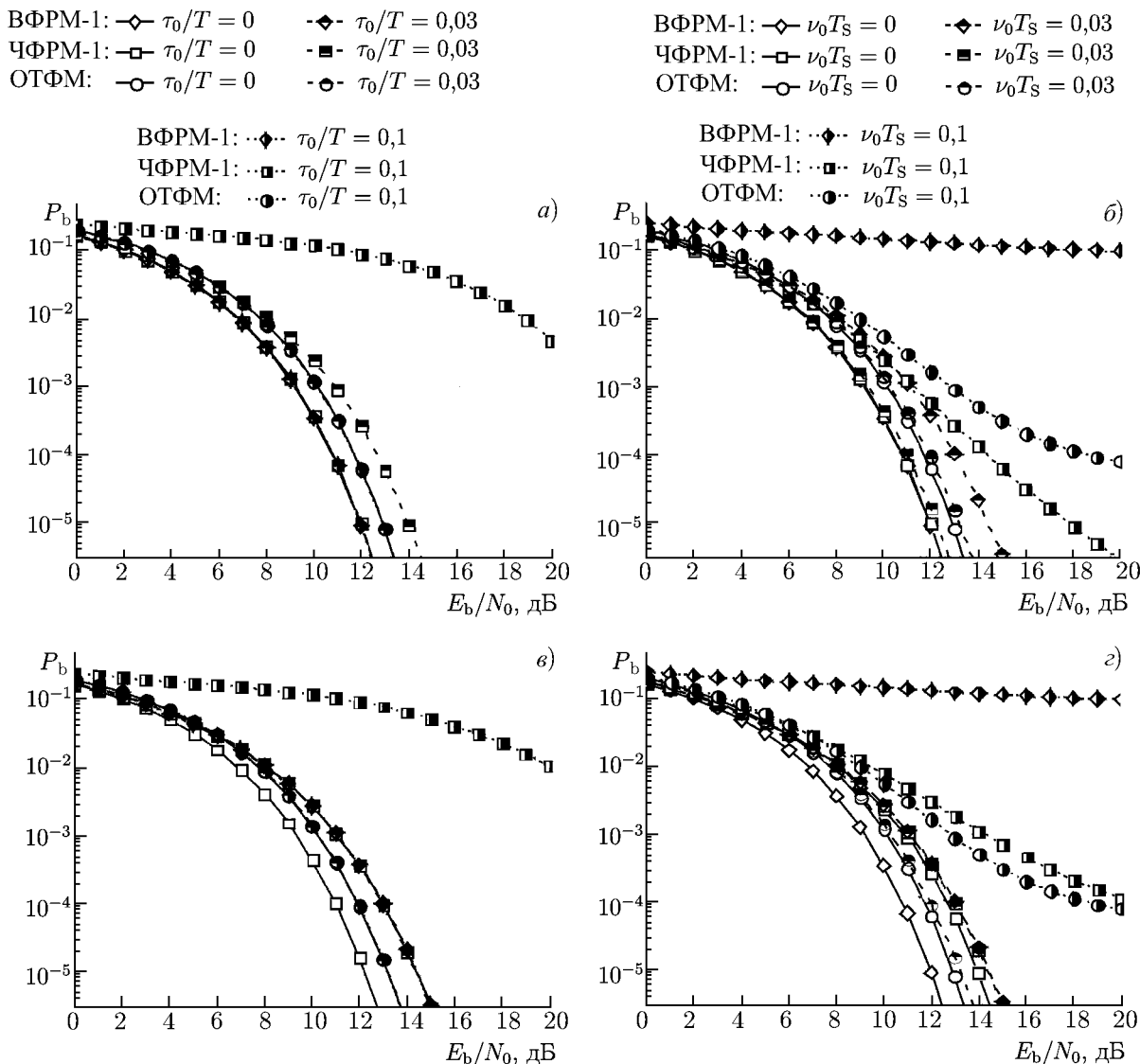


Рис. 5. Помехоустойчивость ВФРМ-1, ЧФРМ-1 и ОТФМ в каналах с аддитивным белым гауссовым шумом и смещениями по частоте ν_0 и времени τ_0 при $T_G/T = 0,1$ в следующих условиях: $\nu_0 T_S = 0$ (а); $T_G/T = 0$ (б); $\tau_0/T_S = 0,03$ (в); $\tau_0/T = 0,03$ (г). Обозначения кривых при фиксированных значениях τ_0/T относятся к панелям (а) и (в), а при фиксированных значениях $\nu_0 T_S$ — к панелям (б) и (г)

носителю ЧФРМ-1, то при фиксированной задержке τ_0 и увеличении частотного сдвига оно становится больше относительно обоих видов ФРМ-1.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Установлено, что трифазовая модуляция образует наиболее общий класс ЧФРМ-2, описывая все возможные способы выбора разностей фаз 2-го порядка поднесущих OFDM-символа. На основе математического аппарата триспектрального анализа исследованы принципы и получены алгоритмы синтеза OFDM-сигналов с трифазовой модуляцией. Показано, что подкласс вариантов трифазовой модуляции с двумя опорными поднесущими (ОТФМ), используемыми при образова-

нии всех информационных разностей фаз 2-го порядка, в каналах с аддитивным белым гауссовым шумом с рассеянием во времени и по частоте при оптимальном перераспределении энергии сигнала в пользу опорных поднесущих позволяет обеспечить наилучшую помехоустойчивость среди различных видов трифазовой модуляции. Получено асимптотически оптимальное по критерию максимизации отношения сигнал-шум на выходе поэлементного некогерентного демодулятора значение относительной мощности опорных составляющих. Исследованы и классифицированы различные варианты ОТФМ, выведены рекуррентные алгоритмы синтеза OFDM-сигналов с ОТФМ. Посредством моделирования продемонстрировано, что при достаточно больших отстройках одновременно по времени и по частоте ОТФМ превосходит по помехоустойчивости как ВФРМ-1, так и ЧФРМ-1, и это превосходство растёт с увеличением отстроек.

Работа выполнена при поддержке министерства промышленности и инноваций Нижегородской области (грант «РФФИ-Поволжье» 08-07-97016) и федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (госконтракт 02.740.11.0003).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Van Nee R., Prasad R. OFDM for wireless multimedia communication. Boston, London: Artech House Publishers, 2000. 260 p.
2. Bahai A. R. S., Saltzberg B. R., Ergen M. Multi-carrier digital communications. Boston: Springer Science, 2004. 411 p.
3. Петрович Н. Т. Передача дискретной информации в каналах с фазовой манипуляцией. М.: Сов. радио, 1965. 263 с.
4. Заездный А. М., Окунев Ю. Б., Рахович Л. М. Фазоразностная модуляция и её применение для передачи дискретной информации. М.: Связь, 1967. 304 с.
5. Окунев Ю. Б. Цифровая передача информации фазомодулированными сигналами. М.: Радио и связь, 1991. 296 с.
6. Divsalar D., Simon M. K. // IEEE Trans. Commun. 1992. V. 40, No. 2. P. 278.
7. Van Alphen D. K., Lindsey W. C. // IEEE Trans. Commun. 1994. V. 42, No. 2-4. P. 440.
8. Gini F., Giannakis G. B. // IEEE Trans. Signal Processing. 1998. V. 46, No. 11. P. 2967.
9. Dehghani M. J. // EURASIP J. Wireless Commun. Networking. 2006. No. 2. P. 6.
10. Lott M. // Proc. IEEE 49th Veh. Technol. Conf. Houston. 1999. V. 2. P. 877.
11. Nikias C. L., Petropulu A. P. Higher-order spectral analysis: a nonlinear signal processing framework. New Jersey: Prentice-Hall, 1993.
12. Новиков А. К. Полиспектральный анализ. СПб.: ЦНИИ им. А. Н. Крылова, 2002. 180 с.
13. Бочков Г. Н., Горохов К. В. Полиспектральный анализ и синтез сигналов: Учебно-методический материал по программе повышения квалификации «Новые подходы к проблемам генерации, обработки, передачи, хранения, защиты информации и их применения». Нижний Новгород, 2007. 113 с. (<http://www.unn.ru/pages/e-library/aids/2007/26.pdf>).
14. Swami A., Giannakis G. B., Zhou G. // Signal Processing. 1997. V. 60. P. 65.
15. Бочков Г. Н., Горохов К. В., Дубков А. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 2005. Т. 48, № 2. С. 159.
16. Бочков Г. Н., Горохов К. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1997. Т. 40, № 11. С. 1388.
17. Бочков Г. Н., Горохов К. В., Колобков А. В. // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. 2009. № 2. С. 62.
18. Schreier P. J., Scharf L. L. // Signal Processing. 2006. V. 86. P. 3321.

Поступила в редакцию 11 сентября 2010 г.; принята в печать 30 сентября 2010 г.

**POLYSPECTRUM ANALYSIS AND OPTIMIZATION OF THE
FREQUENCY-DOMAIN DIFFERENTIAL PHASE MODULATION**

G. N. Bochkov, K. V. Gorokhov, and A. V. Kolobkov

Using the mathematical tool of high-order spectra (polyspectra), we consider the synthesis of optimal variants of high-order differential phase modulation in the frequency domain. The proposed approach allows all possible variants of the second-order differential phase modulation to be reduced to phase modulation of a special form of the fourth-order spectrum (trispectrum) — triphase modulation. The optimal triphase modulation variants which have the best spectral efficiency and outperform the known variants of the second-order differential phase modulation in noise immunity are devised. It is shown that noise immunity of the proposed modulation is higher than that of the first-order differential phase modulation in the channels with simultaneous time and frequency offsets.