

УДК 537.874.35+534.222.1

ОСОБЕННОСТИ ТОЧНОЙ РЕКОНСТРУКЦИИ СТРУКТУРЫ ПЛОСКОНЕОДНОРОДНЫХ СРЕД ПО ОТРАЖЁННЫМ И ПРОШЕДШИМ ИМПУЛЬСНЫМ СИГНАЛАМ

*С. П. Скулжин*¹, *В. И. Турчин*²

¹ ОАО «Гипрогазцентр»;

² Институт прикладной физики РАН, г. Нижний Новгород, Россия

Рассмотрен точный итерационный алгоритм решения прямой и обратной задачи рассеяния на одномерно-неоднородном полупространстве с использованием кусочно-постоянной аппроксимации профиля материальных параметров (например, показателя преломления). Получена новая модификация уравнения Гельфанда—Левитана для решения обратной задачи рассеяния. Приводятся численные примеры, обсуждаются эффекты, связанные с ограниченной шириной спектра зондирующего импульса.

ВВЕДЕНИЕ

Задача реконструкции пространственной структуры неоднородных сред по данным их зондирования широкополосными сигналами имеет многочисленные приложения в сейсморазведке, морской акустике, ультразвуковой диагностике, георадарной технике, оптике и т. п. Этой проблеме посвящены многочисленные публикации, использующие самые различные подходы; их полный анализ затруднителен даже в специальном обзоре. Отметим только, что в общем случае трёхмерно-неоднородных сред методы реконструкции являются приближёнными, что налагает известные ограничения на достоверность результатов.

В частном, но достаточно важном случае плоскостной среды можно, однако, построить точные решения как прямой, так и обратной задачи [1]. Исследования в этом направлении важны по двум причинам. Во-первых, имея точные решения для одномерного случая, можно в известной степени судить о допустимости тех или иных приближений для решений более высокой размерности. Во-вторых, для многих природных сред зависимость параметров от координат существенно сильнее выражена именно в одном направлении, поэтому в некоторых случаях точные решения одномерной задачи могут иметь практический смысл.

Насколько известно, впервые точные решения обратной задачи были получены в 40–50-х годах прошлого века в квантовой теории рассеяния: связь между одномерным потенциалом, отличным от нуля на полупрямой, и функцией рассеяния устанавливалась с помощью уравнения Гельфанда—Левитана (см., например, [2, 3]). Данный результат, однако, не мог быть напрямую использован в задаче реконструкции применительно к зондированию неоднородных сред звуковыми или электромагнитными сигналами из-за различия между уравнением Штурма и одномерным уравнением Гельмгольца¹. Решение как прямой, так и обратной задачи для уравнения Гельмгольца строилось в рамках кусочно-постоянной аппроксимации профиля параметров среды и итерационных способов нахождения профиля по временной форме отражённого сигнала

¹ Уравнение Гельмгольца достаточно легко преобразовать в уравнение Штурма с помощью замены переменных, однако при этом новая переменная выражается через неизвестную функцию (например, профиль показателя преломления), что и создаёт трудности прямого переноса результатов обратной квантовой задачи рассеяния для зондирования неоднородной среды.

(см., например, [1, 4]); при этом был также получен дискретный аналог уравнения Гельфанда—Левитана уже для задачи зондирования неоднородной среды. В дальнейшем, однако, особенности точного решения практически не исследовались.

В настоящей работе даётся вывод точных процедур решения прямой и обратной задачи (построения профиля параметров неоднородной среды по временной зависимости отражённого сигнала), несколько отличающийся от приведённого в [1, 4]: решение обобщено на случай падения плоской волны на неоднородный слой под произвольным углом, рассматривается возможность реконструкции профиля параметров по прошедшему сигналу и т. д. На основе различных численных примеров иллюстрируется ряд важных особенностей точных решений. Особое внимание уделено возможности использования приближения однократного рассеяния, в рамках которого решение обратной задачи оказывается достаточно простым.

1. КУСОЧНО-ПОСТОЯННАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ СРЕДЫ. РЕКОНСТРУКЦИЯ ПРОФИЛЯ ПАРАМЕТРОВ ПО ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ

Будем рассматривать неоднородный слой, лежащий между плоскостями $z = 0$ и $z = H$. Из однородного полупространства $z < 0$ со скоростью распространения c_0 на слой падает плоская волна единичной амплитуды под углом θ к оси z . Поле φ (звуковое давление либо одна из компонент электромагнитного поля) в этом полупространстве представляется в виде

$$\varphi(x, z) = [\exp(ikz \cos \theta) + V(\kappa) \exp(-ikz \cos \theta)] \exp(ikx \sin \theta), \quad z \leq 0, \quad (1)$$

где $\kappa = \omega/c_0$, ω — круговая частота, $V(\kappa)$ — наблюдаемый коэффициент отражения от неоднородного слоя. В однородном полупространстве $z > H$ со скоростью распространения c_H :

$$\varphi(x, z) = W(\kappa) \exp\left[ik\left(z\sqrt{(c_0/c_H)^2 - \sin^2 \theta} + x \sin \theta\right)\right], \quad z > H, \quad (2)$$

где $W(\kappa)$ — коэффициент прохождения через неоднородный слой. Следуя известному матричному подходу [5], разобьём неоднородную среду на M однородных слоёв с постоянными значениями параметров, в частности — показателя преломления n_m , т. е. воспользуемся кусочно-постоянной аппроксимацией непрерывного профиля. Внутри m -го слоя зависимость поля φ от z (множитель $\exp(ikx \sin \theta)$ может быть опущен) представляется в виде

$$\varphi(z) = W_m \exp[i\kappa n_m^{(s)} z] + V_m \exp[-i\kappa n_m^{(s)} z], \quad z_{m-1} < z \leq z_m, \quad (3)$$

$n_m^{(s)} = \sqrt{n_m^2 - \sin^2 \theta}$, z_m — координаты границ между слоями; $z_0 = 0$ и $z_M = H$. Будем полагать в дальнейшем, что $\sin \theta < n_m$: случай полного внутреннего отражения требует отдельного рассмотрения. Связь между коэффициентами отражения V_{m+1} , V_m и прохождения W_{m+1} , W_m определяется матрицей \mathbf{P}_m с размерностью 2×2 :

$$\mathbf{u}_{m+1} = \gamma_m \mathbf{P}_m \mathbf{u}_m, \quad \mathbf{P}_m = \begin{pmatrix} \exp(i\kappa h_{\Delta,m}) & -v_m \exp(i\kappa h_{\Sigma,m}) \\ -v_m \exp(-i\kappa h_{\Sigma,m}) & \exp(-i\kappa h_{\Delta,m}) \end{pmatrix}, \quad m = 0, 1, \dots, M, \quad (4)$$

где $\mathbf{u}_m = (V_m, W_m)^T$ — вектор с размерностью 2×1 , объединяющий коэффициенты отражения и прохождения, индекс Т обозначает транспонирование, $\gamma_m = (1 - v_m)^{-1}$. Величины v_m представляют собой коэффициенты отражения от $(m+1)$ -го слоя в m -й слой; они определены известными формулами Френеля [6] и могут быть выражены через импедансы слоёв Z_m :

$$v_m = \frac{Z_{m+1} - Z_m}{Z_{m+1} + Z_m}. \quad (5)$$

Например, для жидкой среды $Z_m = \rho_m c_0 / n_m^{(s)}$, где ρ_m — плотность в m -м слое,

$$h_{\Delta,m} = (n_{m+1}^{(s)} - n_m^{(s)}) z_m, \quad h_{\Sigma,m} = (n_{m+1}^{(s)} + n_m^{(s)}) z_m. \quad (6)$$

Обозначая $\gamma = \prod_{j=0}^M \gamma_j$ и $\mathbf{P}^{(m)} = \prod_{j=0}^m \mathbf{P}_{m-j}$, приходим к уравнению $\mathbf{u}_{M+1} = \gamma \mathbf{P}^{(M)} \mathbf{u}_0$, где $\mathbf{u}_0 = (V, 1)^T$, $\mathbf{u}_{M+1} = (0, W)^T$, откуда коэффициенты отражения и прохождения выражаются в явном виде через элементы $\mathbf{P}^{(M)}$ и γ с учётом того, что $P_{22}^{(M)} = P_{11}^{(M)*}$, $P_{21}^{(M)} = P_{12}^{(M)*}$:

$$V = -\frac{P_{12}^{(M)}}{P_{11}^{(M)}}, \quad W = \frac{w_M^{(0)}}{P_{11}^{(M)}}, \quad (7)$$

где

$$w_M^{(0)} = \prod_{j=0}^M (1 + v_j). \quad (8)$$

Матричные элементы $P_{11}^{(m)}$, $P_{12}^{(m)}$ находятся с помощью рекуррентного соотношения $\mathbf{P}^{(m)} = \mathbf{P}_m \mathbf{P}^{(m-1)}$, $\mathbf{P}^{(0)} = \mathbf{P}_0$, причём из элементов $\mathbf{P}^{(m)}$ удобно исключить фазовый набег $\phi_m = \kappa \sum_{l=0}^m h_{\Delta,l}$, переходя к $\bar{P}_{11}^{(m)} = \exp(-i\phi_m) P_{11}^{(m)}$ и $\bar{P}_{12}^{(m)} = \exp(-i\phi_m) P_{12}^{(m)}$. Рекуррентные соотношения для элементов матрицы при этом принимают вид

$$\bar{P}_{11}^{(m)} = \bar{P}_{11}^{(m-1)} - v_m \exp(2i\Phi_m) \bar{P}_{12}^{(m-1)*}, \quad \bar{P}_{12}^{(m)} = \bar{P}_{12}^{(m-1)} - v_m \exp(2i\Phi_m) \bar{P}_{11}^{(m-1)*}, \quad (9)$$

где

$$\Phi_m = \kappa \sum_{l=1}^m (z_l - z_{l-1}) n_l^{(s)}. \quad (10)$$

Отметим, что замена $P_{11}^{(m)}$, $P_{12}^{(m)}$ на $\bar{P}_{11}^{(m)}$, $\bar{P}_{12}^{(m)}$ в (7) не меняет коэффициент отражения и исключает полное запаздывание из коэффициента прохождения.

Выражения (4)–(8) представляют простой способ вычисления коэффициентов отражения и прохождения, V и W , для фиксированных значений частоты и угла падения и известных профилей импеданса и показателя преломления. Для решения обратной задачи — определения профиля импеданса по наблюдаемым $V(\kappa)$ или $W(\kappa)$, — а также для быстрого вычисления передаточной функции — временной зависимости отражённого и прошедшего сигнала при зондировании среды δ -импульсом, необходимо перейти от частотного к временному представлению. При этом принципиальным обстоятельством, необходимым для построения замкнутых алгоритмов решения обратной задачи, является следующее условие: все слои должны иметь одинаковую оптическую толщину², т. е.

$$z_1 n_1^{(s)} = (z_2 - z_1) n_2^{(s)} = \dots = (z_M - z_{M-1}) n_M^{(s)} = d. \quad (11)$$

В этом случае $\Phi_m = \kappa d m$, и $\bar{P}_{11}^{(m)}$, $\bar{P}_{12}^{(m)}$ становятся тригонометрическими полиномами от $\zeta = \exp(2i\kappa d)$ степени m ; определим эти полиномы как $P_m^{(1)}(\zeta) = \bar{P}_{11}^{(m)}[\exp(2i\kappa d)]$; $P_m^{(2)}(\zeta) = \bar{P}_{12}^{(m)}[\exp(2i\kappa d)]$. Коэффициенты полиномов, $a_{m,l}^{(1)}$ и $a_{m,l}^{(2)}$, $l = 0, \dots, m$, удовлетворяют рекуррентным соотношениям, следующим из (9) [4]:

$$a_{m,l}^{(1)} = a_{m-1,l}^{(1)} - v_m a_{m-1,m-l}^{(2)}, \quad a_{m,l}^{(2)} = a_{m-1,l}^{(2)} - v_m a_{m-1,m-l}^{(1)}, \quad (12)$$

² Введение этого условия имеет простой физический смысл. При отражении импульса от нескольких слоёв с произвольным положением границ времена прихода многократно отражённых импульсов будут хаотически распределены на временной оси, а при условии равенства оптических толщин слоёв времена прихода всех многократных отражений образуют регулярную эквидистантную сетку.

где $l = 1, \dots, m - 1$, и явным выражением для 0-го и m -го коэффициентов:

$$a_{m,0}^{(1)} = 1, \quad a_{m,0}^{(2)} = -v_0, \quad a_{m,m}^{(1)} = v_0 v_m, \quad a_{m,m}^{(2)} = -v_m. \tag{13}$$

Совокупности полиномиальных коэффициентов $a_{m,l}^{(1)}, a_{m,l}^{(2)}$ удобно рассматривать как треугольные матрицы $\mathbf{A}_{1,2} = \left\| a_{m,l}^{(1,2)} \right\|$ с размерностью $(M + 1) \times (M + 1)$ и нулевыми элементами при $l > m$.

Для перехода во временную область представим коэффициенты отражения и прохождения в виде Z -преобразований:

$$V(\zeta) = \sum_{l=0}^{\infty} r_l \zeta^l, \quad W(\zeta) = \sum_{l=0}^{\infty} q_l \zeta^l, \tag{14}$$

где r_l, q_l пропорциональны отсчётам импульсных передаточных функций среды на отражение и прохождение в моменты $t_l = 2dl/c_0$ ($l = 0, 1, \dots$); параметры среды при этом, естественно, полагаются частотно-независимыми. После Z -преобразования выражения (7) переходят в

$$P_m^{(1)}(\zeta)V(\zeta) = -P_m^{(2)}(\zeta); \quad P_m^{(1)}(\zeta)W(\zeta) = w_0^{(M)}, \tag{15}$$

где $m = M$. Таким образом, решение как прямой, так и обратной задач сводится к установлению явной связи между последовательностями r_0, r_1, \dots или q_0, q_1, \dots и последовательностью коэффициентов отражения от границ слоёв v_0, v_1, \dots, v_M . Как следует из (14), (15), эта связь устанавливается через коэффициенты полиномов $a_{m,l}^{(1)}$ и $a_{m,l}^{(2)}$:

$$r_0 = -a_{0,0}^{(2)} = v_0; \quad r_l = -a_{m,l}^{(2)} - \sum_{l'=0}^{l-1} r_{l'} a_{m,l-l'}^{(1)}, \quad 1 \leq l \leq m, \tag{16}$$

$$q_0 = w_0^{(m)}; \quad q_l = -\sum_{l'=0}^{l-1} q_{l'} a_{m,l-l'}^{(1)}, \quad 1 \leq l \leq m. \tag{17}$$

При решении прямой задачи по известным v_0, v_1, \dots, v_M элементы матриц $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ находятся последовательно с помощью рекуррентных соотношений (16) и (12); заполнение матриц производится, начиная с вершины треугольника вниз по строкам. Временная последовательность отсчётов передаточной функции на прохождение q_0, q_1, \dots находится с помощью (8), (12), (17), где мы должны положить $m = M$. При определении временной последовательности r_0, r_1, \dots можно не фиксировать в (16) $m = M$, а брать последовательно значения $m = 1, 2, \dots$, поскольку m -й отсчёт отражённого сигнала зависит только от характеристик слоёв с номерами $1, \dots, m + 1$. Полагая в (16) $l = m$, находим решение прямой задачи для профиля передаточной характеристики на отражение в виде

$$r_0 = v_0; \quad r_m = v_m - \sum_{l=0}^{m-1} r_l a_{m,m-l}^{(1)}, \quad m = 1, \dots, M. \tag{18}$$

Для $m > M$, т. е. для времён, превышающих приход отражения от последней границы, r_m и q_m находятся одинаковым образом:

$$r_m = -\sum_{l=1}^M r_{m-l} a_{M,l}^{(1)}, \quad q_m = -\sum_{l=1}^M q_{m-l} a_{M,l}^{(1)}. \tag{19}$$

Обратная задача — нахождение последовательности v_0, v_1, \dots, v_M по отсчётам отражённого сигнала r_0, r_1, \dots — может быть решена двумя способами.

Первый способ [1, 4] основан на том, что значение m в (18) для отражённого сигнала может не фиксироваться, а увеличиваться последовательно, начиная с 1. Подставляя в (18) первое из рекуррентных соотношений (12), находим

$$v_m = \frac{r_m + \sum_{l=1}^{m-1} r_l a_{m-1, m-l}^{(1)}}{1 + \sum_{l=0}^{m-1} r_l a_{m-1, l}^{(2)}}, \quad m = 2, 3, \dots \quad (20)$$

В (20) входят строки матриц $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ с номером $m-1$, которые вычисляются по коэффициентам v_0, \dots, v_{m-1} , найденным на предыдущем шаге. Для $m=0; 1$ коэффициенты v_0, v_1 и 0-ая и 1-ая строки $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ находятся явным образом: $v_0 = r_0, v_1 = r_1/(1-r_0^2)$.

Второй способ несколько более громоздок, однако с его помощью решение обратной задачи может быть найдено для фиксированного $m=M$ в (18). Заметим, прежде всего, что матрица \mathbf{A}_1 явным образом выражается через \mathbf{A}_2 :

$$a_{m,l}^{(1)} = - \sum_{j=l}^m r_{j-l} a_{m,j}^{(2)}. \quad (21)$$

Подставляя (21) в (18) и меняя порядок суммирования, получаем систему линейных уравнений относительно элементов m -й строки матрицы \mathbf{A}_2 :

$$r_l + a_{m,l}^{(2)} - \sum_{s=1}^m \bar{r}_{l,s} a_{m,s}^{(2)} = 0, \quad (22)$$

с матрицей системы $\mathbf{I} - \|\bar{r}_{l,s}\|$ с размерностью $(m+1) \times (m+1)$, где \mathbf{I} — единичная матрица и

$$\bar{r}_{s,l} = \sum_{j=1}^{\min\{s,l\}} r_{l-j} r_{s-j}. \quad (23)$$

Полагая $m=M$ и решая (22), находим последнюю M -ю строку матрицы \mathbf{A}_2 и, в соответствии с (21), последнюю строку \mathbf{A}_1 , после чего можно полностью восстановить эти матрицы, используя рекуррентные соотношения (12), «развёрнутые» в обратном направлении:

$$a_{m-1,l}^{(1)} = \frac{1}{1 - [a_{m,m}^{(2)}]^2} (a_{m,l}^{(1)} - a_{m,m}^{(2)} a_{m,m-l}^{(2)}), \quad a_{m-1,l}^{(2)} = \frac{1}{1 - [a_{m,m}^{(2)}]^2} (a_{m,l}^{(2)} - a_{m,m}^{(2)} a_{m,m-l}^{(1)}), \quad (24)$$

где $l = 1, \dots, m-1$. Искомые коэффициенты v_0, \dots, v_m представлены диагональю \mathbf{A}_2 (см. (13)).

Решение обратной задачи по отсчётам прошедшего импульса q_0, q_1, \dots представляет более сложную проблему. Нижняя строка матрицы \mathbf{A}_1 находится как

$$a_{M,1}^{(1)} = -q_1/q_0; \quad a_{M,l}^{(1)} = -\frac{1}{q_0} \left(q_1 + \sum_{j=1}^{l-1} q_j a_{M,l-j}^{(1)} \right), \quad l = 2, \dots, M, \quad (25)$$

однако аналога (22) в этом случае не существует. Последовательность v_0, v_1, \dots, v_M , определяемая по нижней строке \mathbf{A}_1 и первому отсчёту прошедшего импульса $w_M^{(0)}$, оказывается неоднозначной. Во-первых, строки \mathbf{A}_1 не зависят от порядка следования v_m , т. е. инвариантны к замене

v_0, v_1, \dots, v_M на v_M, v_{M-1}, \dots, v_0 . Далее, поскольку строки \mathbf{A}_1 представляют суммы произведений $\prod_{j=l}^n v_j$ с числом сомножителей 2, 4, ..., в конечном итоге коэффициенты отражения определяются как корни полиномов. Например, для $M = 2$ три коэффициента v_0, v_1, v_2 находятся из решения двух квадратных уравнений, т. е. всего может быть найдено 4 комбинации коэффициентов отражения. Две из них отличаются лишь порядком следования коэффициентов, а две другие дают разные числовые значения. Если, например, исходно задана последовательность v_0, v_1, v_2 , то решениями обратной задачи будут последовательности $v_0, v_1, v_2; v_2, v_1, v_0; v'_0, v'_1, v'_2$ и v'_2, v'_1, v'_0 . Вещественные решения v'_m могут при определённых значениях v_0, v_1, v_2 существовать либо не существовать, что не приводит в общем случае к устранению неоднозначности. При увеличении M число возможных решений возрастает.

Приведённые выше выражения устанавливают взаимно-однозначное соответствие между вектором отсчётов передаточной функции на отражение $\mathbf{r} = (r_0, \dots, r_M)^T$ ³ и вектором коэффициентов $\mathbf{v} = (v_0, \dots, v_M)^T$, характеризующим профиль импеданса в неоднородной среде с учётом постоянства оптической толщины всех однородных слоёв. При решении прямой задачи, когда профиль показателя преломления и профиль импеданса заданы, проблем не возникает. Переход от координаты z к текущей оптической толщине среды $x(z)$ осуществляется по формуле

$$x(z) = \int_0^z \sqrt{n^2(z') - \sin^2 \theta} dz', \quad (26)$$

параметр d для заданного числа разбиений M находится как $d = x(H)/M$, а координаты слоёв z_m — как корни уравнения $x(z_m) = md$.

При решении обратной задачи фактически находятся импедансы слоёв Z_m для текущей оптической длины $x_m = md$; роль параметра d в этом случае играет временной шаг дискретизации Δt отражённого импульсного сигнала $d = c_0 \Delta t/2$:

$$Z_{m+1} = Z_0 \prod_{l=0}^m \frac{v_l - 1}{v_l + 1} \approx Z_0 \exp\left(2 \sum_{l=0}^m v_l\right), \quad m = 0, \dots, M + 1. \quad (27)$$

Значения импеданса воспроизводятся точно, но его дискретным аргументом является текущая оптическая длина (26). Чтобы перейти к зависимости от глубины z , из профиля импеданса должен быть выделен профиль показателя преломления. При зондировании среды электромагнитным полем (например, в оптике) обычно считается, что неоднородность создаётся за счёт изменения диэлектрической проницаемости. В этом случае \mathbf{v} однозначно определяется профилем показателя преломления. Полагая $n_m^{(s)} = Z_0/Z_m$, получаем

$$z_m = d \sum_{l=1}^m 1/n_l^{(s)}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (28)$$

При зондировании среды продольными звуковыми волнами неоднородность определяется как профилем скорости звука, так и профилем плотности, и при фиксированном θ возникает неопределённость. Можно, однако, воспользоваться эмпирическими соотношениями, связывающими скорость продольных волн и плотность природных сред (см., например, [7]) и с их помощью выделить из импеданса показатель преломления.

³ Вектор \mathbf{r} имеет, вообще говоря, бесконечную длину, однако при ограниченной длине \mathbf{v} для нахождения последнего достаточно знать столько же первых элементов \mathbf{r} ; остальные элементы определяются в соответствии с (19).

Далее, непосредственно из (20), (25) следует

$$r_m = v_m + o(v_m^3), \quad m = 0, 1, \dots, \quad (29)$$

$$q_m = w_M^{(0)} \left(\sum_{l=0}^{M-m} v_l v_{l+m} + o(v_l^4) \right), \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad (30)$$

и при малых градиентах импеданса можно пренебречь следующими порядками малости v_m , что соответствует приближению однократного рассеяния. В этом приближении решение как прямой, так и обратной задачи становится тривиальным в случае наблюдения отражённых сигналов. Собственно, полученные выше точные решения прямой задачи и позволяют исследовать корректность данного приближения.

2. ПЕРЕХОД К НЕПРЕРЫВНОМУ ПРЕДСТАВЛЕНИЮ ПРОФИЛЕЙ

Полагая $v_m/d = v(x_m)$ и устремляя шаг разбиения d к нулю, мы можем перейти к непрерывной зависимости локального коэффициента отражения $v(x)$ от текущей оптической толщины x (26); в соответствии с (5)

$$v(x) = -Z'(x)/[2Z(x)], \quad (31)$$

где $Z(x)$ — непрерывный профиль импеданса. Аналогично вводится непрерывная зависимость передаточной характеристики $r(y)$ от времени $y = c_0 t/2$: $r(md) = r_m/d$. Тогда треугольные матрицы \mathbf{A}_1 и \mathbf{A}_2 можно рассматривать как функции непрерывного аргумента $A_1(x, y)$ и $A_2(x, y)$, определённые в треугольной области $0 < y \leq x$. В этом случае непосредственно из (22), (23) следует модифицированное уравнение Гельфанда—Левитана

$$r(y) - \int_0^x \bar{r}(y, s) A_2(x, s) ds + A_2(x, y) = 0, \quad 0 < y \leq x, \quad (32)$$

$$\bar{r}(y, s) = \int_0^{\min\{y, s\}} r(y - s') r(s - s') ds', \quad (33)$$

при этом $v(x) = -A_2(x, x)$. Уравнение (32) отличается от канонической формы уравнения Гельфанда—Левитана [2, 3] и его модификации в [1, 4]: в (32) используется итерированное ядро (33). Приведённые в предыдущем разделе алгоритмы можно рассматривать как варианты сеточной схемы решения уравнения (32), однако решение (32) можно также искать методом простых итераций, полагая на j -м шаге

$$A_2^{(j+1)}(x, y) = -r(y) + \int_0^x \bar{r}(y, s) A_2^{(j)}(x, s) ds, \quad (34)$$

с начальным приближением $A_2^{(0)}(x, y) = -r(y)$, $0 < y \leq x$. Итерационная процедура быстро сходится, если импеданс среды меняется плавно, т. е. $|v(x)| \ll 1$. Тогда можно вообще ограничиться начальным приближением, соответствующим однократному рассеянию, полагая $r(x) \approx v(x)$.

3. ЧИСЛЕННЫЕ ПРИМЕРЫ

Здесь мы ограничимся иллюстрацией основных свойств точных решений. В качестве первого примера покажем, как меняется их характер в зависимости от ограничений сверху на величины $|v_m| \leq v^{(0)}$. Рассмотрим преобразование $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{r}$ и обратное преобразование $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{v}'$, где \mathbf{v} и \mathbf{v}' могут несколько различаться из-за ошибок округления. На рис. 1 приведены графики последовательностей \mathbf{v} и \mathbf{r} для \mathbf{v} , взятого в виде случайного вектора с числом компонент $M = 150$ и равномерным распределением в интервале $[-v^{(0)}, v^{(0)}]$. Как видно из рис. 1, характер отражённого сигнала существенно меняется в зависимости от $v^{(0)}$: при $v^{(0)} = 0,07$ $r_m \approx v_m$, и максимальная погрешность реконструкции $\max_m |v_m - v'_m|$ составляет $3,5 \cdot 10^{-17}$, а при $v^{(0)} = 0,6$ последовательность $|r_m|$ быстро убывает с ростом m : имеет место так называемый эффект кажущегося ослабления, подробно рассмотренный в литературе (см., например, [8]). Погрешность реконструкции при этом ещё имеет приемлемую величину $1,3 \cdot 10^{-3}$, но увеличивается примерно на 14 порядков, что и показывает границу неустойчивости обратной задачи, появляющейся с увеличением M и $v^{(0)}$. В данном примере погрешность реконструкции уже имела неприемлемую величину порядка 1 при $v^{(0)} = 0,6$ и $M > 180 \div 190$.

При реконструкции непрерывных профилей с уменьшением шага дискретизации d одновременно уменьшаются величины v_m и увеличивается длина обрабатываемого вектора M , что требует отдельного анализа. Результаты реконструкции для этого случая при $\theta = 0$ проиллюстрируем на примере слоя с линейно меняющимся показателем преломления: $n(z) = 1$ при $z < z_0$; $n(z) = 1 + (n_H - 1)(z - z_0)/H$, $z_0 \leq z < H + z_0$ и $n(z) = n_H$, $z \geq H + z_0$. Производная импеданса здесь

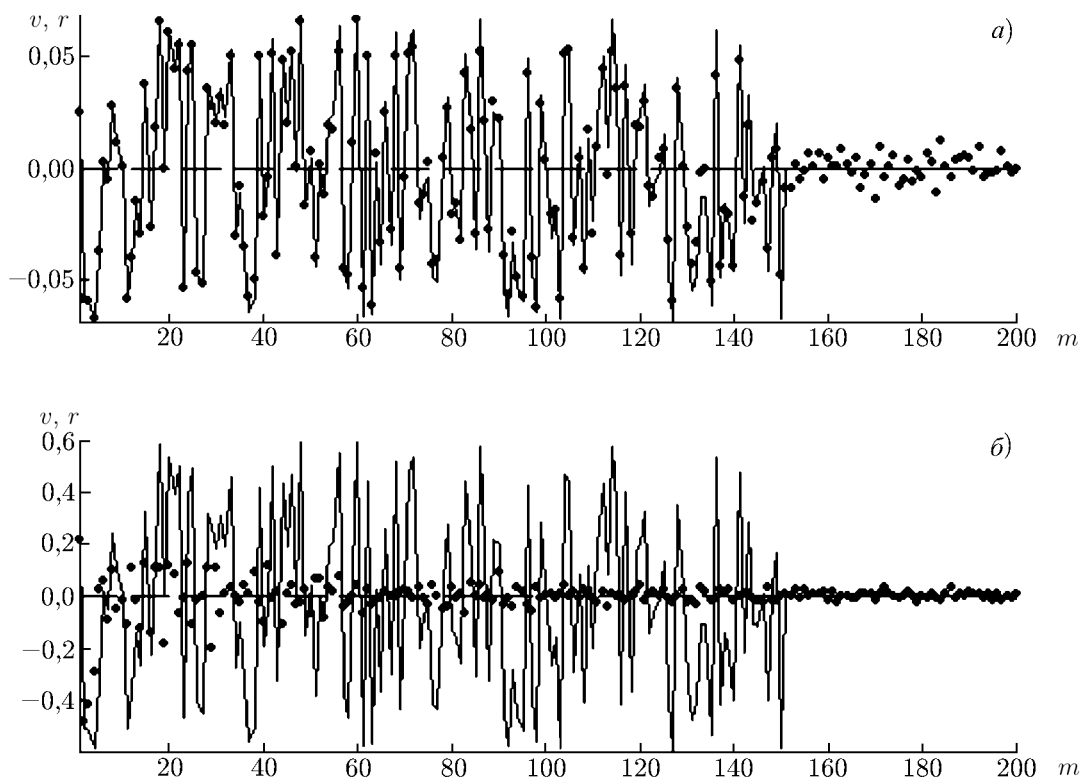


Рис. 1. Последовательности отсчётов передаточной функции на отражение r_m (точки) и коэффициентов отражений v_m (сплошные линии), взятых случайным образом в интервалах $-v^{(0)} \leq v_m \leq v^{(0)}$ для двух значений $v^{(0)} = 0,07$ (а) и $v^{(0)} = 0,6$ (б)

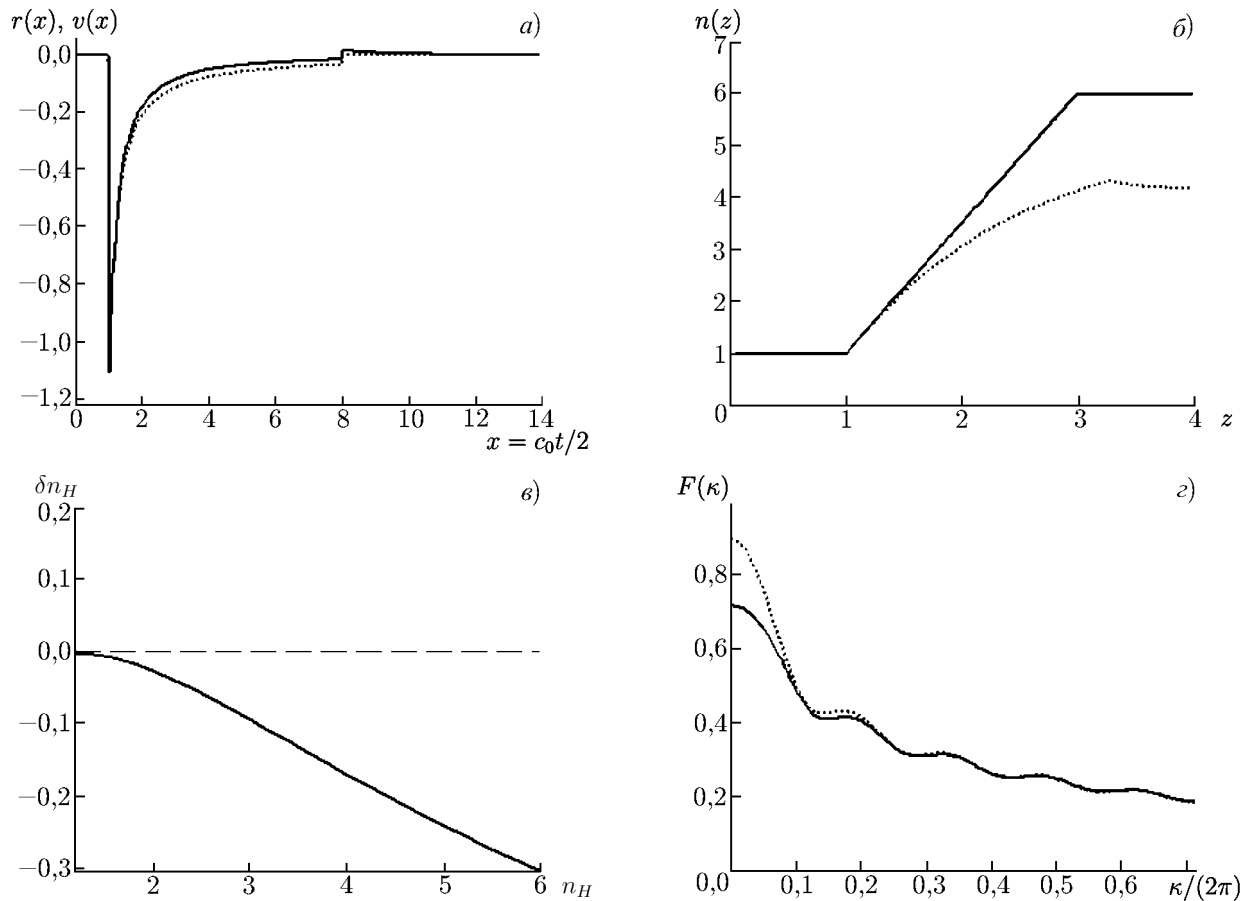


Рис. 2. (а) Переходная характеристика отражения $r(x)$ (сплошная линия) от линейного слоя и производная импеданса $v(x)$ (пунктирная линия); (б) профиль показателя преломления, реконструированный с использованием преобразования $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{v}$ (сплошная линия) и построенный непосредственно по переходной характеристике r (пунктирная линия); (в) относительная погрешность определения n_H непосредственно по переходной характеристике в зависимости от величины n_H ; (г) фурье-спектры $r(x)$ (сплошная линия) и $v(x)$ (пунктирная линия). На панелях (а), (б), (г) $n_H = 6,0$, $H = 2,0$

находится в явном виде

$$v(x) = -\frac{n'(x)}{2n(x)} = -\frac{n_H - 1}{2[H + 2(n_H - 1)(x - z_0)]}, \quad z_0 \leq x < H(n_H + 1)/2 + z_0, \quad (35)$$

и $v(x) = 0$ при $x < z_0$ и $x \geq H(n_H + 1)/2 + z_0$. Соответственно для различных M брались $v_m = dv[(m + 1/2)d]$. Моделирование показало, что графики $r(x)$ практически перестают меняться при $M > 100 \div 120$. На рис. 2а показаны зависимости $v(x)$ и $r(x)$ в случае $n_H = 6$; на рис. 2б приведены результаты реконструкции профиля $n(z)$ с использованием преобразования $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{v}$ (этот профиль точно совпадает с исходным), и при подстановке в (27), (28) вместо v_m непосредственно отсчетов передаточной функции (отражённого сигнала) r_m , как это обычно делается на практике. Хотя отличия $v(x)$ и $r(x)$ невелики, во втором случае отклонение реконструированного профиля достаточно заметно. На рис. 2в приведён график относительной погрешности оценки показателя преломления в полупространстве $z > H$, $\delta n_H = \hat{n}_H/n_H - 1$, в зависимости от n_H , когда для оценки \hat{n}_H преобразование $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{v}$ не используется. Как следует из графика, при до-

пустимой погрешности порядка 10% можно не прибегать к преобразованию $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{v}$ до значений $n_H < 3$. Численное моделирование, выполненное для различных толщин слоя H и разных профилей перехода от $n = 1$ к $n = n_H$ (рассматривались гладкие монотонные профили), показало, что погрешность оценки n_H зависит только от его величины, т. е. эффекты многократного рассеяния определяются только изменением показателя преломления.

На практике реально наблюдается отражённый сигнал вида $r(t) \otimes s(t)$, где $s(t)$ представляет форму зондирующего импульса, спектр которого сосредоточен в ограниченной области частот $f_{\min} < f < f_{\max}$, символ \otimes обозначает свёртку. Расчёты показали, что ширина импульса порядка $1/(f_{\max} - f_{\min})$ не играет существенной роли: применение процедуры $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{v}$ к наблюдаемому сигналу приводит к сглаженному профилю без искажения количественных характеристик. Более существенным оказывается пропуск нижних частот. На рис. 2г приведены модули фурье-спектров $F(\kappa)$ функций $v(x)$, $r(x)$; здесь $\kappa = 4\pi f/c_0$. Заметим, что спектр функции $r(x)$, $F_r(\kappa)$, тождественно совпадает с коэффициентом отражения от слоя $V(\kappa)$ (см. (1))⁴. Эти спектры имеют главный максимум с шириной $\Delta\kappa/(2\pi) \sim 2/[(n_H + 1)H]$. Соответственно спектр зондирующего импульса должен «захватывать» этот главный максимум, т. е. должно выполняться условие

$$f_{\min} \ll 2\bar{c}/H = 2|dc/dz|, \quad (36)$$

где $\bar{c} = c_0/\bar{n}_H$, $\bar{n}_H = (n_H + 1)/2$. В противном случае непрерывные компоненты профиля импеданса просто не будут воспроизводиться.

В качестве иллюстрации возможного влияния многократных переотражений на экспериментальные данные приведём вид передаточной функции для одной из многочисленных моделей реальных профилей параметров среды (Карпенский свод), взятой из [9] и представляющей собой дискретно-слоистое распределение по глубине продольной скорости звука и плотности. На рис. 3а, б приведены профили скорости звука и плотности одного из таких распределений; на глубинах, больших 3 км, среда считалась однородной. Для полупространства $z < 0$ бралось $c_0 = 1500$ м/с (скорость звука в воде) и единичная плотность. На рис. 3в даны последовательности v_m и r_m , на рис. 3г представлены результаты реконструкции относительного импеданса $Z(x)/Z_0$ в соответствии с (27) без преобразования $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{v}$. На рис. 3г хорошо видна область глубин, меньших 600 ÷ 700 м, для которых справедливо приближение однократного рассеяния. Для больших глубин промежутки между отражениями от границ слоёв уже начинают заполняться многократными переотражениями, а конфигурация реконструированного импеданса начинает достаточно сильно отличаться от исходного. Заметим, что глубина, где выполняются условия однократного рассеяния, меньше глубин, характерных для сейсморазведки. В действительности вклад многократного рассеяния в отражённый сигнал будет меньше, во-первых, из-за убывания зондирующего поля с дистанцией при зондировании среды источником сферической волны, что и используется на практике, и, во-вторых, за счёт поглощения в среде.

Оценка этих эффектов в рамках прямой задачи не представляет существенных трудностей: используя известное разложение сферической волны по плоским волнам, можно проинтегрировать (7) по угловой переменной, а затем перейти во временную область. Решение обратной задачи с учётом многократного рассеяния при зондировании сферической волной связано с определёнными трудностями: для каждого направления падения плоской волны должен браться свой шаг дискретизации d , что делает использованную выше полиномиальную технику либо очень громоздкой, либо вообще неприменимой. Продолжение исследований в этом направлении, однако, представляется весьма перспективным, поскольку, как следует из приведённого выше рассмотрения, эффекты многократного рассеяния достаточно сильно влияют на точность определения

⁴ Как видно из рис. 2г, с ростом частоты влияние многократного рассеяния существенно уменьшается.

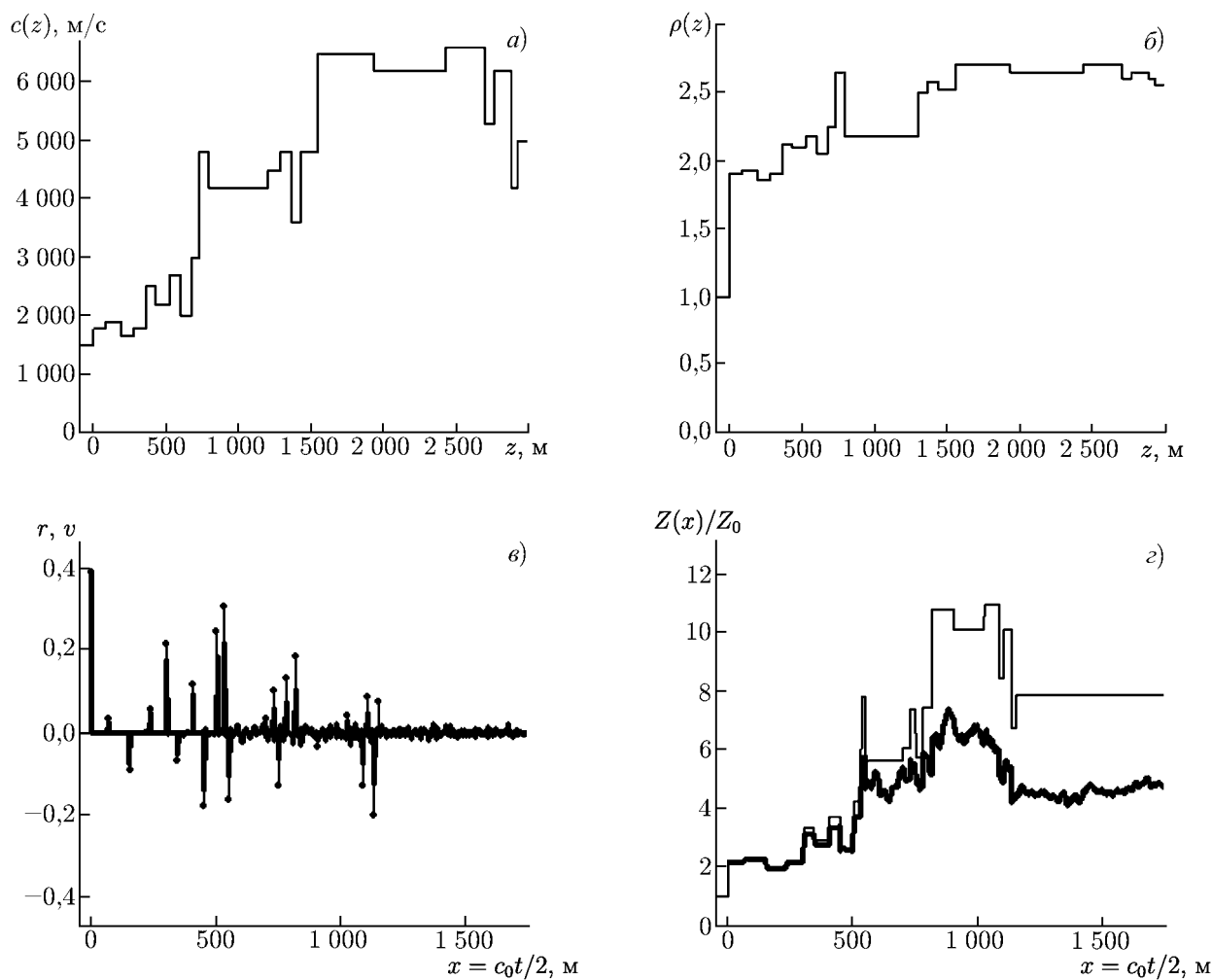


Рис. 3. Профили скорости звука $c(z)$ (а) и плотности $\rho(z)$ (б), распределение по временной оси коэффициентов отражения от границ слоёв v_m (линия с точками) и переходной характеристики на отражение $r(x)$ (сплошная линия) с учётом многократного рассеяния (в); профили исходного (тонкая линия) и реконструированного (жирная линия) в приближении однократного рассеяния относительных импедансов (г)

характеристик неоднородной среды. К этому следует также отнести исследование возможности независимого определения профилей различных параметров, например, скорости звука и плотности, при одновременном анализе зависимостей временных профилей отражённых сигналов и зависимостей от угла падения при использовании распределённых приёмных систем (методы реконструкции профилей скорости звука по зависимости от угла падения в рамках приближения геометрической оптики достаточно хорошо известны — см., например, [10]), более детальный анализ эффектов, связанных с наличием минимальной частоты в спектре зондирующего импульса, и ряд других вопросов.

Работа поддержана РФФИ (гранты 08-02-00670 и 08-05-97014).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аки К., Ричардс П. Количественная сейсмология: Теория и методы. Т. 2: Пер. с англ. М.: Мир, 1983. 360 с.
2. Левитан Б. М. Обратные задачи Штурма—Лиувилля. М.: Наука, 1984. 240 с.
3. Марченко В. А. Операторы Штурма—Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова думка, 1977. 332 с.
4. Робинсон Э. А. // ТИИЭР. 1982. Т. 70, № 9. С. 153.
5. Молотков Л. А. Матричный метод в теории распространения волн в слоистых упругих и жидких средах. Л.: Наука, 1984. 201 с.
6. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 343 с.
7. Mavko G., Mukerji T., Dvorkin J. The rock physics handbook. Tools for seismic analysis in porous media. Cambridge University Press, 1998. 329 p.
8. Maweu J. M., Margrave G. F. // CREWES Res. Rep. 2007. V. 19. P. 1.
9. Кутьина О. Г., Кутьин А. Б. Прослеживание сейсмических границ. М.: Недра, 1993. 268 с.
10. Бяков А. Г., Глумов И. Ф., Коган Л. И. и др. Широкоугольное глубинное сейсмическое профилирование дна акватории. Ч. 1. М.: Наука, 2001. 134 с.

Поступила в редакцию 29 июня 2010 г.; принята в печать 28 июля 2010 г.

**CHARACTERISTICS OF EXACT RECONSTRUCTION OF THE STRUCTURE
OF PLANE-LAYERED MEDIA USING REFLECTED AND TRANSMITTED
PULSE SIGNALS**

S. P. Skulkin and V. I. Turchin

We consider the exact iterative algorithm for solution of the direct and inverse scattering problems in 1D inhomogeneous half-space using piecewise-constant approximation of the constitutive parameter profiles (e.g., refractive index). A novel modification of the Gelfand–Levitan equation is derived for solution of the inverse scattering problem. Numerical examples are given and the effects related to a finite frequency band of the sounding pulse are discussed.