

УДК 534.232

РАССЕЯНИЕ ПОВЕРХНОСТНОЙ АКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ РЭЛЕЯ НА НЕОДНОРОДНОСТИ МАЛЫХ РАЗМЕРОВ В ТВЁРДОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

А. В. Разин

Научно-исследовательский радиофизический институт, г. Нижний Новгород, Россия

В борновском приближении метода возмущений решена задача о рассеянии гармонической поверхностной акустической волны Рэлея на слабоконтрастной неоднородности малых по сравнению с длиной волны размеров, находящейся в упругом полупространстве вблизи его границы. Материал неоднородности отличается от материала полупространства только плотностью. Падающая на неоднородность волна Рэлея возбуждается монохроматическим поверхностным силовым источником, действующим по нормали к границе полупространства. Получены выражения для полей смещений в рассеянных сферических продольной и поперечных (SV- и SH-поляризации) волнах. Детально исследовано рассеяние рэлеевской волны в рэлеевскую волну. Получены выражения для вертикальных и горизонтальных компонент вектора смещений в рассеянной рэлеевской волне, а также для её мощности излучения. Установлено, что поле рассеянной поверхностной волны создаётся главным образом вертикальными колебаниями неоднородности в поле падающей волны. При этом зависимость мощности излучения рассеянной рэлеевской волны, создаваемой вертикальными движениями неоднородности в поле падающей волны, от глубины расположения неоднородности пропорциональна четвёртой степени функции, описывающей известную зависимость вертикальных смещений в поверхностной волне Рэлея от глубины. Соответственно, зависимость мощности излучения рассеянной рэлеевской волны, возникающей из-за горизонтальных движений неоднородности, от глубины расположения этой неоднородности пропорциональна четвёртой степени зависимости горизонтальных смещений в поверхностной волне Рэлея от глубины. Выполнены расчёты отношения мощности излучения рассеянной волны Рэлея и мощности излучения падающей волны Рэлея при различных соотношениях между скоростями продольной и поперечной волн в твёрдом теле. Показано, что мощность излучения рассеянной поверхностной волны резко падает с увеличением глубины расположения подповерхностной неоднородности, поэтому рассеяние рэлеевской волны в рэлеевскую волну оказывается относительно эффективным лишь в тех случаях, когда неоднородность находится на глубине, не превышающей приблизительно треть длины поперечной волны в упругой среде.

ВВЕДЕНИЕ

Исследование рассеяния волн различной физической природы на локализованных неоднородностях среды представляет значительный теоретический и практический интерес. Данная тематика охватывает весьма широкий круг явлений, и ей посвящено большое количество работ. Наряду с электромагнитными и акустическими волнами интенсивно изучается распространение поверхностных акустических волн. Это необходимо для решения задач сейсмологии и сейсморазведки [1–3], а также твердотельной микроэлектроники [4, 5].

Простейшим видом поверхностных акустических волн является волна Рэлея, которая может распространяться вдоль границы однородного изотропного упругого полупространства с вакуумом. Её скорость составляет приблизительно от 87 до 96 процентов скорости поперечной волны в твёрдой среде в зависимости от соотношения между модулями упругости [6]. Соответствующие рэлеевской волне возмущения захватывают приповерхностный слой с толщиной порядка длины волны. В случае источника ограниченных размеров амплитуда рэлеевской волны убывает с горизонтальным расстоянием r как $r^{-1/2}$ [1], т. е. по закону цилиндрической, а не сферической геометрической расходимости. Таким образом, волна данного типа может эффективно распространяться на значительные расстояния от источника.

К настоящему времени в ряде работ рассмотрено рассеяние волн Рэлея на как регулярных, так и случайных неровностях поверхности упругой среды. Результаты этих исследований обобщены в монографии [5]. Между тем при решении задач подповерхностной сейсмической локализации и неразрушающего контроля материалов возникает необходимость исследования процессов распространения упругих волн вблизи границы твёрдого полупространства при наличии в нём подповерхностной неоднородности с ограниченными размерами (подповерхностного включения). Представляет интерес исследование взаимодействия зондирующих сигналов с неоднородностью и возбуждения рассеянных упругих волн. Для решения обратной задачи, т. е. определения местоположения и восстановления размеров, формы и физических характеристик неоднородности, необходимо предварительно детально проанализировать решение прямой задачи.

Рассеяние упругих волн в полубезграничных твёрдых средах изучено недостаточно полно. В частности, не решены задачи, связанные с расчётами полей и энергетических характеристик волн, рассеянных подповерхностными неоднородностями, находящимися на глубинах меньше длины поверхностной волны Рэлея, когда влияние границы среды наиболее существенно.

Важные для практики вопросы, связанные с обнаружением и идентификацией подповерхностных объектов, возникают уже в рамках наиболее простой модели, когда исследуемая «фоновая» среда моделируется однородным изотропным упругим полупространством, а лоцируемая неоднородность является слабоконтрастной, т. е. её акустические свойства мало отличаются от свойств «фоновой» среды. При этом целесообразно ограничиться первым (борновским) приближением метода возмущений (см., например, [5, 7]). Данное приближение позволяет считать, что рассеянное поле возбуждается силовыми источниками, распределёнными по занятой неоднородностью области твёрдого тела, причём конфигурация источников и их зависимость от времени определяется формой и внутренним строением неоднородности, а также пространственным распределением поля падающей волны. Задача рассеяния, таким образом, сводится к задаче о возбуждении упругих волн в твёрдом полупространстве зависящими от времени силами, произвольно распределёнными внутри твёрдого тела.

Распространение плоских продольной и поперечной волн в безграничной слабонеоднородной твёрдой среде в борновском приближении метода возмущений рассмотрено в [2].

При действии вибрационных источников на границу упругой среды сферические продольные и поперечные волны (объёмные волны) распространяются преимущественно вглубь, от границы среды [8, 9]. Их использование для зондирования целесообразно в тех случаях, когда неоднородность находится на значительном по сравнению с длинами волн расстоянии от поверхности полупространства.

Если неоднородность располагается вблизи границы среды и на относительно большом горизонтальном расстоянии от источника, более эффективным для сейсмолокации и неразрушающего контроля материалов представляется применение поверхностных волн Рэлея.

При прохождении рэлеевской волны лоцируемая неоднородность совершает сложные колебания, т. е. представляет собой некоторый подповерхностный источник упругих волн, имеющий достаточно общий вид. Зондирующий сигнал (падающая волна Рэлея) при этом рассеивается как в рэлеевскую волну, так и в объёмные продольную и поперечные (SV- и SH-поляризации) волны. Наибольший интерес представляют рассеянные рэлеевские волны, поскольку они могут быть легко зарегистрированы на поверхности упругой среды. В связи с этим в данной работе основное внимание будет уделено рассеянию рэлеевской волны в рэлеевскую волну.

Амплитуды вертикальных и горизонтальных смещений частиц среды в поверхностной волне имеют достаточно сложную зависимость от глубины [1, с. 157; 6, с. 31; 10, с. 232]. Поэтому представляет интерес выяснить, при каких именно глубинах расположения неоднородности рассеянное волновое поле формируется наиболее эффективно. Для этого необходимо рассмотреть рассе-

иватель, вертикальные размеры которого много меньше длины волны Рэлея. Если и горизонтальные размеры рассеивателя малы, то его можно приближённо считать точечным объектом. Данное приближение является весьма удобным, поскольку позволяет сравнительно просто осуществить все необходимые вычисления.

В связи с использованием приближения точечного рассеивателя необходимо сделать следующее замечание. Точечный объект не может эффективно рассеивать акустические волны. Хорошо известна задача о рассеянии звука на диске малых размеров [11]. Учитывая связь между задачами излучения и рассеяния, можно представить рассеивающий диск как силовой источник, действующий в среде. Направленное действие сосредоточенной силы на какую-либо точку, находящуюся на поверхности или внутри идеальной жидкости, не приводит к возбуждению акустических волн. Эффективно возбуждать акустические волны в жидкости или в газе может только точечный источник типа центра расширения (центра давления). Если же сила приложена к какой-либо точке в упругой среде, то возбуждаются продольные и поперечные сферические волны (объёмные волны), и, если точка приложения силы находится вблизи поверхности упругой среды (или на самой поверхности), поверхностная волна Рэлея [12, 13]. В связи с этим можно предположить, что объект с малыми по сравнению с длинами упругих волн размерами в твёрдой среде будет достаточно эффективным рассеивателем.

В настоящей работе в борновском приближении решена задача о рассеянии гармонической поверхностной волны Рэлея на слабоконтрастной подповерхностной неоднородности с малыми по сравнению с длиной волны размерами (подповерхностном включении). Для точек наблюдения, находящихся на больших расстояниях от рассеивателя, получены приближённые аналитические выражения для полей смещений рассеянных продольной, поперечных (SV- и SH-поляризаций) и рэлеевской волн. Подробно исследована мощность излучения рассеянной волны Рэлея.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНЫХ ИСТОЧНИКОВ РАССЕЯННЫХ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ

Пусть плоскость $z = 0$ декартовой системы координат совпадает с поверхностью изотропного твёрдого тела, занимающего полупространство $z \geq 0$ и характеризуемого плотностью ρ , модулем всестороннего сжатия κ и модулем чистого сдвига μ . Скорости продольной c_l и поперечной c_t волн выражаются через плотность и параметры упругости твёрдого тела формулами [14]

$$c_l = [(\kappa + 4\mu/3)/\rho]^{1/2}, \quad c_t = (\mu/\rho)^{1/2}. \quad (1)$$

Внутри твёрдого тела находится неоднородность (подповерхностное включение), геометрический центр которой располагается на глубине $z = h$ под началом координат.

Иногда вместо модуля всестороннего сжатия κ вводится параметр Ламэ $\lambda = \kappa - 2\mu/3$. Параметр Ламэ λ самостоятельного физического смысла не имеет и вводится в теорию для удобства. Отметим, что модуль чистого сдвига μ также называется параметром Ламэ.

В общем случае лоцируемая неоднородность отличается от фоновой среды плотностью, а также модулями упругости, которые являются функциями пространственных координат.

Уравнение, описывающее гармонические смещения \mathbf{u} в упругих волнах с циклической частотой ω в неоднородной твёрдой среде [2, 10], после некоторых преобразований можно представить в виде (временной множитель $\exp(-i\omega t)$ опущен)

$$\rho\omega^2 u_j + \left(\kappa + \frac{\mu}{3}\right) \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_k} + \mu \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{\partial \kappa}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \frac{\partial \mu}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \frac{\partial \mu}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) = -f v_j. \quad (2)$$

В (2) индексы j и k принимают значения 1, 2, 3, которые соответствуют декартовым координатам x, y, z , причём по дважды повторяющимся индексам проводится суммирование от 1 до 3. В правой части (2) стоит соответствующая компонента периодической силы $\mathbf{f}_V(x, y, z)$, действующей на единицу объёма твёрдого тела. Уравнение (2) необходимо решать с учётом условий излучения [15] и граничных условий на поверхности полупространства, которые будут указаны ниже.

Плотность среды и модули сжатия и сдвига представим в виде

$$\rho = \rho_0 + \rho'(x, y, z), \quad \kappa = \kappa_0 + \kappa'(x, y, z), \quad \mu = \mu_0 + \mu'(x, y, z). \quad (3)$$

Здесь ρ_0, κ_0 и μ_0 — постоянные «фоновые» значения параметров твёрдого тела, а ρ', κ' и μ' — малые по сравнению с фоновыми значениями величины (слабоконтрастные неоднородности):

$$|\rho'| \ll \rho_0, \quad |\kappa'| \ll \kappa_0, \quad |\mu'| \ll \mu_0.$$

Смещения частиц среды \mathbf{u} представим в виде суммы некоторого поля \mathbf{u}_0 , которое существовало бы в однородной упругой среде с параметрами ρ_0, κ_0 и μ_0 (поле падающей зондирующей волны), и рассеянного поля \mathbf{u}_1 , связанного с наличием в среде неоднородностей:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1.$$

Учитывая малость изменения параметров среды, будем считать, что $|\mathbf{u}_1| \ll |\mathbf{u}_0|$. Для зондирующего волнового поля \mathbf{u}_0 справедливо уравнение Ламэ:

$$\rho_0 \omega^2 u_{0j} + \left(\kappa_0 + \frac{\mu_0}{3} \right) \frac{\partial^2 u_{0k}}{\partial x_j \partial x_k} + \mu_0 \frac{\partial^2 u_{0j}}{\partial x_k \partial x_k} = -f_{Vj}. \quad (4)$$

Уравнение для рассеянного поля \mathbf{u}_1 получим, вычитая (4) из (2) с учётом (3) и пренебрегая затем членами второго порядка малости в соответствии с борновским приближением [5, 7]:

$$\rho_0 \omega^2 u_{1j} + \left(\kappa_0 + \frac{\mu_0}{3} \right) \frac{\partial^2 u_{1k}}{\partial x_j \partial x_k} + \mu_0 \frac{\partial^2 u_{1j}}{\partial x_k \partial x_k} = -f_{Vj}^{\text{eff}}, \quad (5)$$

где

$$f_{Vj}^{\text{eff}} = \rho' \omega^2 u_{0j} + \left(\kappa' + \frac{\mu'}{3} \right) \frac{\partial^2 u_{0k}}{\partial x_j \partial x_k} + \mu' \frac{\partial^2 u_{0j}}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{\partial \kappa'}{\partial x_j} \frac{\partial u_{0k}}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \frac{\partial \mu'}{\partial x_j} \frac{\partial u_{0k}}{\partial x_k} + \frac{\partial \mu'}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u_{0k}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{0j}}{\partial x_k} \right). \quad (6)$$

Для рассеянного поля \mathbf{u}_1 на поверхности упругого полупространства выполняются условия, соответствующие свободной границе, т. е. отсутствуют касательные и нормальные напряжения:

$$\sigma_{xz}^{(1)} = \sigma_{yz}^{(1)} = 0, \quad \sigma_{zz}^{(1)} = 0, \quad (7)$$

где $\sigma_{ij}^{(1)}$ — тензор напряжений, соответствующий смещениям \mathbf{u}_1 . Компоненты тензора напряжений связаны со смещениями формулой

$$\sigma_{ij}^{(1)} = \lambda_0 \operatorname{div} \mathbf{u}_1 \delta_{ij} + \mu_0 \left(\frac{\partial u_{1i}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{1j}}{\partial x_i} \right), \quad (8)$$

где $i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3;$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

— символ Кронекера.

Правая часть (6) уравнения (5) имеет размерность силы, отнесённой к единице объёма, и представляет собой некоторый эффективный силовой источник, параметры которого определяются характеристиками неоднородности ρ', κ' и μ' и конфигурацией падающего поля \mathbf{u}_0 .

Проанализируем вклад неоднородностей параметров упругой среды в эффективность возбуждения рассеянных волн. Пусть источник зондирующего сигнала находится на значительном горизонтальном расстоянии от области, занятой подповерхностной неоднородностью. Падающую волну Рэлея, распространяющуюся в положительном направлении оси x , при этом можно считать локально плоской и представить соответствующие данной волне смещения в следующем общем виде:

$$u_{0x} = D_x \nu_x(z) \exp(ik_R x), \quad u_{0y} = 0, \quad u_{0z} = D_z \nu_z(z) \exp(ik_R x). \quad (9)$$

В (9) k_R — волновое число рэлеевской волны, функции $\nu_x(z)$ и $\nu_z(z)$ описывают зависимости соответственно горизонтальных и вертикальных смещений от координаты z , величины D_x и D_z определяются параметрами упругой среды и конфигурацией источника зондирующего сигнала. В дальнейшем перечисленные функции будут записаны в явном виде.

Подставляя смещения (9) в формулу (6), получаем выражение для эффективной силы. При этом оказывается, что данную силу удобно представить в виде суммы трёх слагаемых:

$$\mathbf{f}_V^{\text{eff}} = \mathbf{f}^{\text{inh}} + \mathbf{f}^{\text{mon}} + \mathbf{f}^\mu. \quad (10)$$

Часть \mathbf{f}^{inh} связана непосредственно с величинами ρ', κ' и μ' , часть \mathbf{f}^{mon} определяется пространственными изменениями (т. е. производными по координатам) как модуля всестороннего сжатия κ' , так и модуля чистого сдвига μ' , слагаемое \mathbf{f}^μ отражает лишь пространственные вариации параметра μ' .

Эффективные силовые источники сейсмоизлучения имеют следующий явный вид:

$$f_x^{\text{inh}} = \left\{ \rho' \omega^2 D_x \nu_x(z) + \left(\kappa' + \frac{\mu'}{3} \right) \left[-k_R^2 D_x \nu_x(z) + ik_R D_z \frac{d\nu_z}{dz} \right] + \mu' \left[-k_R^2 D_x \nu_x(z) + D_x \frac{d^2 \nu_x}{dz^2} \right] \right\} \exp(ik_R x), \quad (11)$$

$$f_z^{\text{inh}} = \left\{ \rho' \omega^2 D_z \nu_z(z) + \left(\kappa' + \frac{\mu'}{3} \right) \left(ik_R D_x \frac{d\nu_x}{dz} + D_z \frac{d^2 \nu_z}{dz^2} \right) + \mu' D_z \left[\frac{d^2 \nu_z}{dz^2} - k_R^2 \nu_z(z) \right] \right\} \exp(ik_R x), \quad (12)$$

$$\mathbf{f}^{\text{mon}} = \left[\text{grad} \left(\kappa' - \frac{2}{3} \mu' \right) \right] \left[ik_R D_x \nu_x(z) + D_z \frac{d\nu_z}{dz} \right] \exp(ik_R x), \quad (13)$$

$$f_x^\mu = \left\{ 2 \frac{\partial \mu'}{\partial x} ik_R D_x \nu_x(z) + \frac{\partial \mu'}{\partial z} \left[D_x \frac{d\nu_x}{dz} + ik_R D_z \nu_z(z) \right] \right\} \exp(ik_R x), \quad (14)$$

$$f_z^\mu = \left\{ \frac{\partial \mu'}{\partial x} \left[D_x \frac{d\nu_x}{dz} + ik_R D_z \nu_z(z) \right] + 2 \frac{\partial \mu'}{\partial z} D_z \frac{d\nu_z}{dz} \right\} \exp(ik_R x). \quad (15)$$

У векторов \mathbf{f}^{inh} и \mathbf{f}^μ отсутствует компонента вдоль оси y , однако $f_y^{\text{mon}} \neq 0$.

Как следует из выражений (11)–(15), при произвольных зависимостях величин ρ' , κ' и μ' от пространственных координат эффективные силовые источники имеют достаточно общий вид.

Рассмотрим неоднородность малых по сравнению с длиной волны размеров. Тогда \mathbf{f}^{inh} представляет собой сосредоточенную силу, а \mathbf{f}^{mon} — точечный монополюсный источник. Такой источник называется центром давления. Математически источник типа центра давления описывается градиентом трёхмерной пространственной дельта-функции Дирака [10].

Источник типа центра давления, называемый иногда также центром расширения, возбуждает в твёрдом теле только продольные волны. Источники такого типа изучены как для случая безграничной упругой среды [16, 17], так и для случая твёрдого полупространства [18–21].

Эффективный силовой источник \mathbf{f}^μ (14), (15) представляет собой некоторую комбинацию пар сил. Нетрудно видеть, что этот источник имеет как потенциальную, так и вихревую части, и, следовательно, возбуждает как продольную, так и поперечную волны.

2. РАССЕЯНИЕ ВОЛНЫ РЭЛЕЯ НА ТОЧЕЧНОМ ПОДПОВЕРХНОСТНОМ ВОЗМУЩЕНИИ ПЛОТНОСТИ

В связи со сложностью эффективных силовых источников (10)–(15) в дальнейшем целесообразно ограничиться случаем, когда имеют место только неоднородности плотности: $\rho'(x, y, z) \neq 0$, а модули упругости среды постоянны: $\kappa' = \mu' = 0$. Данное предположение позволяет значительно упростить расчёты, поскольку производные плотности по координатам не входят (в отличие от производных модулей упругости) в уравнение (2), описывающее волновые движения упругой среды, и в то же время проанализировать основные закономерности процесса рассеяния, в частности детально исследовать поля и энергетические характеристики рассеянных сигналов.

Таким образом, для определения рассеянного поля \mathbf{u}_1 необходимо задать падающее зондирующее поле (на практике это поле определяется имеющимися в наличии сейсмовибраторами), а также указать сейсмоакустические свойства неоднородности.

Если вертикальные размеры неоднородности малы по сравнению с длиной волны, то добавочную плотность $\rho'(x, y, z)$ можно представить в виде

$$\rho'(x, y, z) = m(x, y) \delta(z - h), \quad (16)$$

где $m(x, y)$ — избыточная масса неоднородности, приходящаяся на единицу площади плоскости $z = h$, $\delta(z)$ — дельта-функция Дирака.

Пусть зондирующий сигнал представляет собой гармоническую поверхностную волну Рэлея с циклической частотой ω , распространяющуюся вдоль границы упругого полупространства в направлении оси x . Глубина расположения лоцируемой неоднородности h не должна превышать длины λ_R рэлеевской волны (в противном случае рассеянный сигнал будет экспоненциально малым). При этом рассеянные волновые поля будут возбуждаться эффективным гармоническим источником, действующим на единицу площади плоскости $z = h$ с силой

$$\mathbf{f}^{\text{eff}} = m(x, y) \omega^2 \mathbf{u}_0(x, y, h). \quad (17)$$

В формуле (17) $\mathbf{u}_0(x, y, h)$ представляет собой вектор смещений в зондирующей поверхностной волне Рэлея. Выражения для компонент этого вектора будут приведены ниже.

Таким образом, для решения задачи рассеяния необходимо предварительно решить задачу о возбуждении упругих волн в твёрдом полупространстве со свободной границей гармоническими силами, произвольно распределёнными по плоскости $z = h$.

Решение данной задачи в виде интегралов Фурье получено в [22, 23]. Согласно [22, 23] решение задачи о возбуждении упругих волн в твёрдом полупространстве подповерхностными источниками, распределёнными по плоскости $z = h$, следует рассматривать в двух областях: $0 \leq z \leq h$ и $z \geq h$. На горизонте приложения силы $z = h$ выполняются условия равенства трёх компонент вектора смещений (условие отсутствия разрывов в среде):

$$u_{2x} = u_{3x}, \quad u_{2y} = u_{3y}, \quad u_{2z} = u_{3z}, \quad (18)$$

(индексы 2 и 3 относятся к слою $0 \leq z \leq h$ и к полупространству $z \geq h$ соответственно). Условия для тангенциальных и нормальных компонент тензора напряжений на горизонте приложения силы $z = h$ имеют вид [22, 23]

$$\sigma_{xz}^{(2)} - \sigma_{xz}^{(3)} = f_x(x, y), \quad \sigma_{yz}^{(2)} - \sigma_{yz}^{(3)} = f_y(x, y), \quad \sigma_{zz}^{(2)} - \sigma_{zz}^{(3)} = f_z(x, y). \quad (19)$$

На свободной поверхности упругой среды $z = 0$ выполняются условия отсутствия напряжений:

$$\sigma_{zz}^{(2)} = 0, \quad \sigma_{xz}^{(2)} = \sigma_{yz}^{(2)} = 0. \quad (20)$$

При этом смещения в твёрдом теле будут описываться однородным уравнением Ламэ:

$$\rho_0 \omega^2 \mathbf{u}_\alpha + (\lambda_0 + \mu_0) \text{grad div } \mathbf{u}_\alpha + \mu_0 \Delta \mathbf{u}_\alpha = 0, \quad (21)$$

где индекс α принимает значения 2 либо 3. При решении уравнения (21) с граничными условиями (18)–(20) необходимо также учесть условия излучения при $z \rightarrow \infty$ [15].

Волновые возмущения удобно описывать с помощью скалярных (ψ_2, ψ_3) и векторных ($\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3$) потенциалов, которые связаны со смещениями соотношениями:

$$\mathbf{u}_\alpha = \text{grad } \psi_\alpha + \text{rot } \mathbf{A}_\alpha. \quad (22)$$

Для потенциалов справедливы уравнения

$$\Delta \psi_\alpha + k_l^2 \psi_\alpha = 0, \quad (23)$$

$$\Delta \mathbf{A}_\alpha + k_t^2 \mathbf{A}_\alpha = 0, \quad (24)$$

где $k_l = \omega/c_l$ и $k_t = \omega/c_t$ — волновые числа продольной и поперечной волн соответственно, $\alpha = 2, 3$. Уравнения (23), (24) необходимо решать совместно с граничными условиями (18)–(20) и условиями излучения.

В области $z \geq h$ существуют продольная волна и поперечные SV- и SH-волны, распространяющиеся вглубь полупространства (в положительном направлении оси z). В слое $0 \leq z \leq h$ указанные три типа волн распространяются как от источника к границе (против оси z), так и от границы по оси z , поэтому потенциалы представим в виде

$$\psi_2 = \psi_2^{(+)} + \psi_2^{(-)}, \quad \mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_2^{(+)} + \mathbf{A}_2^{(-)}, \quad (25)$$

где верхний индекс (+) означает, что волна распространяется в сторону возрастающих значений z , а индекс (–) означает, что волна распространяется в сторону убывающих значений z .

Для решения уравнений (23), (24) воспользуемся методом преобразований Фурье. Введём интегральное представление трёхмерных гармонических силовых источников

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{F}(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) d\mathbf{k} \quad (26)$$

с формулой обращения

$$\mathbf{F}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{f}(\mathbf{r}) \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}) \, d\mathbf{r}. \quad (27)$$

В (26), (27) $\mathbf{F}(\mathbf{k})$ — пространственный спектр функции $\mathbf{f}(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} = (x, y)$ — двумерный радиус-вектор, а $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ — двумерный волновой вектор в плоскости xy , $\mathbf{k}\mathbf{r} = k_x x + k_y y$, $d\mathbf{k} = dk_x dk_y$, $d\mathbf{r} = dx dy$.

Выражения для потенциалов $\psi_2^{(+)}$, $\psi_2^{(-)}$, $\mathbf{A}_2^{(+)}$, $\mathbf{A}_2^{(-)}$, ψ_3 и \mathbf{A}_3 в виде двойных интегралов Фурье получены в [22, 23] и здесь не приводятся из-за их громоздкости. Эти двойные интегралы Фурье можно приближённо вычислить в волновой зоне. Для этого в подынтегральных выражениях следует перейти к полярным координатам (r, φ) на плоскости xy и (k, φ') на плоскости $k_x k_y$:

$$r = (x^2 + y^2)^{1/2}, \quad \varphi = \arctg(y/x), \quad k = (k_x^2 + k_y^2)^{1/2}, \quad \varphi' = \arctg(k_y/k_x).$$

Интеграл по полярному углу φ' приближённо вычисляется методом стационарной фазы. Это приводит к выражениям для потенциалов в виде однократных интегралов по модулю волнового вектора. Данное преобразование имеет следующий общий вид:

$$\begin{aligned} \iint_{-\infty}^{+\infty} \Phi(k_x, k_y) \exp[i(\kappa z + \mathbf{k}\mathbf{r})] \, dk_x \, dk_y &\approx \\ &\approx \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right) \int_{\infty \exp(i\pi)}^{\infty} \Phi(k \cos \varphi, k \sin \varphi) \exp[i(\kappa z + kr)] \sqrt{k} \, dk, \end{aligned} \quad (28)$$

где величина Φ обозначает соответствующую часть подынтегральной функции, κ принимает значения $\kappa_1 = (k_1^2 - k^2)^{1/2}$ либо $\kappa_t = (k_t^2 - k^2)^{1/2}$, $k = |\mathbf{k}|$. Для сходимости интегралов вида (28) при $z \rightarrow \infty$ необходимо определить аналитические функции κ_1 и κ_t на комплексной плоскости k следующим образом:

$$\kappa_1 = i \left| (k^2 - k_1^2)^{1/2} \right|, \quad k > k_1, \quad \kappa_t = i \left| (k^2 - k_t^2)^{1/2} \right|, \quad k > k_t.$$

Для вычисления полей объёмных волн в оставшемся однократном интеграле по модулю волнового вектора k (см. правую часть (28)) следует перейти к сферическим координатам (R, θ, φ) :

$$R = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}, \quad \theta = \arccos(z/R), \quad \varphi = \arctg(y/x).$$

Данный интеграл также следует вычислять методом стационарной фазы. Выражения для смещений получаются с помощью соотношения (22). Отметим, что при вычислении полей объёмных волн двойные интегралы Фурье могут быть приближённо оценены двумерным методом стационарной фазы [24].

Расчёт показывает, что, как и следовало ожидать, в волновой зоне смещения в продольной волне (P-волне) имеют только радиальную компоненту, а векторы смещений в поперечной волне вертикальной поляризации (SV-волне) и в поперечной волне горизонтальной поляризации (SH-волне) — лишь широтную и азимутальную компоненты соответственно:

$$u_P^{(R)} = \frac{\pi}{\rho_0 c_1^2 R_0(k_1 \sin \theta)} \frac{\exp(ik_1 R)}{R} \left\{ \left[R_0(k_1 \sin \theta) \exp(-ik_1 h \cos \theta) - \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& - R_m(k_1 \sin \theta) \exp(ik_1 h \cos \theta) + 4k_1 \cos \theta (k_t^2 - 2k_1^2 \sin^2 \theta) \times \\
& \times \sqrt{k_t^2 - k_1^2 \sin^2 \theta} \exp\left(ih \sqrt{k_t^2 - k_1^2 \sin^2 \theta}\right) \Big] F_r(\mathbf{k}_1^{(s)}) \sin \theta + \\
& + \left[R_0(k_1 \sin \theta) \exp(-ik_1 h \cos \theta) + R_m(k_1 \sin \theta) \exp(ik_1 h \cos \theta) + \right. \\
& \left. + 4k_1^2 \sin^2 \theta (k_t^2 - 2k_1^2 \sin^2 \theta) \exp\left(ih \sqrt{k_t^2 - k_1^2 \sin^2 \theta}\right) \Big] F_z(\mathbf{k}_1^{(s)}) \cos \theta \Big\}, \quad (29)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{SV}^{(\theta)} = & - \frac{\pi}{\rho_0 c_t^2 R_0(k_t \sin \theta)} \frac{\exp(ik_t R)}{R} \left\{ \left[R_0(k_t \sin \theta) \exp(-ik_t h \cos \theta) + R_m(k_t \sin \theta) \exp(ik_t h \cos \theta) + \right. \right. \\
& + 4k_t^4 \sin^2 \theta (1 - 2 \sin^2 \theta) \exp\left(ih \sqrt{k_t^2 - k_1^2 \sin^2 \theta}\right) \Big] F_r(\mathbf{k}_t^{(s)}) \cos \theta - \\
& - \left[R_0(k_t \sin \theta) \exp(-ik_t h \cos \theta) - R_m(k_t \sin \theta) \exp(ik_t h \cos \theta) + \right. \\
& \left. + 4k_t^3 \cos \theta (1 - 2 \sin^2 \theta) \sqrt{k_t^2 - k_1^2 \sin^2 \theta} \exp\left(ih \sqrt{k_t^2 - k_1^2 \sin^2 \theta}\right) \Big] F_z(\mathbf{k}_t^{(s)}) \sin \theta \right\}, \quad (30)
\end{aligned}$$

$$u_{SH}^{(\varphi)} = \frac{2\pi}{\rho_0 c_t^2} \frac{\exp(ik_t R)}{R} F_\varphi(\mathbf{k}_t^{(s)}) \cos(k_t h \cos \theta). \quad (31)$$

В (29)–(31) введены обозначения

$$\begin{aligned}
R_0(k) &= (k_t^2 - 2k^2)^2 + 4k^2 \kappa_1 \kappa_t, & R_m(k) &= (k_t^2 - 2k^2)^2 - 4k^2 \kappa_1 \kappa_t; \\
\mathbf{k}_1^{(s)} &= (k_1 \sin \theta \cos \varphi, k_1 \sin \theta \sin \varphi), & \mathbf{k}_t^{(s)} &= (k_t \sin \theta \cos \varphi, k_t \sin \theta \sin \varphi)
\end{aligned}$$

— волновые векторы, соответствующие точкам стационарной фазы;

$$F_r(\mathbf{k}_1^{(s)}) = F_x(\mathbf{k}_1^{(s)}) \cos \varphi + F_y(\mathbf{k}_1^{(s)}) \sin \varphi, \quad F_r(\mathbf{k}_t^{(s)}) = F_x(\mathbf{k}_t^{(s)}) \cos \varphi + F_y(\mathbf{k}_t^{(s)}) \sin \varphi, \quad (32)$$

и

$$F_\varphi(\mathbf{k}_t^{(s)}) = F_y(\mathbf{k}_t^{(s)}) \cos \varphi - F_x(\mathbf{k}_t^{(s)}) \sin \varphi \quad (33)$$

— соответственно горизонтальная радиальная и азимутальная составляющие пространственного спектра вектора силы, R — расстояние до точки наблюдения.

Для вычисления поля поверхностной волны Рэлея следует взять вычеты в полюсах $k = k_R$ подынтегральных выражений в соответствующих интегралах вида (28). Волновое число k_R рэле-евской волны определяется из решения уравнения $R_0(k) = 0$. Выражения для смещений получаются с помощью соотношения (22). В результате для горизонтальной $u_{Rr}(r, \varphi, z)$ и вертикальной $u_{Rz}(r, \varphi, z)$ компонент смещений в поверхностной волне Рэлея получаем (в цилиндрических координатах)

$$\begin{aligned}
u_{Rr}(r, \varphi, z) = & \frac{1}{q_1} D \left[i(k_t^2 - 2k_R^2) \nu_x(h) F_r(k_R \cos \varphi, k_R \sin \varphi) + \right. \\
& \left. + 2k_R q_1 \nu_z(h) F_z(k_R \cos \varphi, k_R \sin \varphi) \right] \nu_x(z) \exp(ik_R r), \quad (34)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{Rz}(r, \varphi, z) = & - \frac{1}{q_t} D \left[2k_R q_t \nu_x(h) F_r(k_R \cos \varphi, k_R \sin \varphi) - \right. \\
& \left. - i(k_t^2 - 2k_R^2) \nu_z(h) F_z(k_R \cos \varphi, k_R \sin \varphi) \right] \nu_z(z) \exp(ik_R r). \quad (35)
\end{aligned}$$

В (34), (35) использованы обозначения

$$F_r(k_R \cos \varphi, k_R \sin \varphi) = F_x(k_R \cos \varphi, k_R \sin \varphi) \cos \varphi + F_y(k_R \cos \varphi, k_R \sin \varphi) \sin \varphi, \quad (36)$$

$$\nu_x(\eta) = 2\xi^2 \exp(-k_t \eta \sqrt{\xi^2 - n^2}) + (1 - 2\xi^2) \exp(-k_t \eta \sqrt{\xi^2 - 1}), \quad (37)$$

$$\nu_z(\eta) = (1 - 2\xi^2) \exp(-k_t \eta \sqrt{\xi^2 - n^2}) + 2\xi^2 \exp(-k_t \eta \sqrt{\xi^2 - 1}), \quad (38)$$

$$D = \frac{\pi k_t^2 (2k_R^2 - k_t^2)}{2\rho_0 c_t^2 k_R R'_0(k_R)} \sqrt{\frac{2\pi}{k_R r}} \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right), \quad (39)$$

$$q_1 = \sqrt{k_R^2 - k_t^2}, \quad q_t = \sqrt{k_R^2 - k_t^2}, \quad (40)$$

$$R'_0(k_R) = \left. \frac{dR_0}{dk} \right|_{k=k_R} = \frac{2}{k_R (2k_R^2 - k_t^2)^2} [k_t^6 (4k_R^2 - k_t^2) - 8k_R^6 (k_t^2 - k_1^2)]; \quad (41)$$

$\xi = c_t/c_R$ — отношение скоростей поперечной и рэлеевской волн, $n = c_t/c_1$ — отношение скоростей поперечной и продольной волн в твёрдой среде.

Выражения (29)–(31), (34) и (35) позволяют вычислять поля смещений продольных, поперечных и поверхностных рэлеевских волн, возбуждаемых в упругом полупространстве гармоническими силовыми источниками, произвольно распределёнными по плоскости $z = h$. В частном случае $h = 0$ из формул (29)–(31), (34) и (35) следуют известные выражения [25], описывающие смещения в продольной, поперечных (SV- и SH-поляризации) и рэлеевской волнах, возбуждаемых в упругом полупространстве гармоническими силовыми источниками, произвольно распределёнными по его поверхности.

Для получения выражений для смещений в упругих волнах, рассеянных неоднородностью вида (16), в выражения (29)–(31), (34) и (35) необходимо подставить пространственный спектр эффективного силового источника

$$\mathbf{F}^{\text{eff}}(\mathbf{k}) = \frac{\omega^2}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} m(x, y) \mathbf{u}_0(x, y, h) \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}) \, d\mathbf{r}. \quad (42)$$

Если горизонтальные размеры неоднородности малы, то в (16) можно приближённо положить

$$m(x, y) = \Delta m \delta(x) \delta(y), \quad (43)$$

где Δm — избыточная масса неоднородности (точечная неоднородность). Из (17), (42) и (43) следует, что в случае точечной неоднородности компоненты вектора пространственного спектра эффективного силового источника имеют вид

$$F_x(k_x, k_y) = \frac{\omega^2}{(2\pi)^2} \Delta m u_{0x}(0, 0, h), \quad (44)$$

$$F_z(k_x, k_y) = \frac{\omega^2}{(2\pi)^2} \Delta m u_{0z}(0, 0, h). \quad (45)$$

Из геометрии задачи очевидно, что при распространении зондирующей волны вдоль оси x в области неоднородности компонента u_y вектора смещений в падающей волне равна нулю, поэтому согласно (32), (36)

$$F_r(\mathbf{k}_1^{(s)}) = F_x(\mathbf{k}_1^{(s)}) \cos \varphi, \quad F_r(\mathbf{k}_t^{(s)}) = F_x(\mathbf{k}_t^{(s)}) \cos \varphi, \quad (46)$$

$$F_r(k_R \cos \varphi, k_R \sin \varphi) = F_x(k_R \cos \varphi, k_R \sin \varphi) \cos \varphi. \quad (47)$$

Для того, чтобы конкретизировать вид спектров (44), (45), необходимо задать конфигурацию падающей волны.

Остановимся подробнее на выборе зондирующего сигнала. Пусть для определённости падающая на неоднородность рэлеевская волна возбуждается точечным гармоническим поверхностным силовым источником, действующим по нормали к поверхности упругой среды. Источник расположен в точке с координатами $(-x_0, 0, 0)$ и имеет амплитуду силы f_0 . Как следует из общих выражений (34), (35) (см. также [8, 9]), в точке расположения неоднородности $(0, 0, h)$ компоненты вектора смещений в зондирующей волне Рэля имеют вид

$$u_x(0, 0, h) = D_0 \frac{k_t^2 - 2k_R^2}{2k_R} \nu_x(h) \exp(ik_R x_0), \quad (48)$$

$$u_z(0, 0, h) = D_0 \sqrt{k_R^2 - k_t^2} \nu_z(h) \exp[i(k_R x_0 + \pi/2)], \quad (49)$$

где

$$D_0 = \frac{f_0}{\rho_0 c_t^2} \sqrt{\frac{k_R}{2\pi x_0}} \frac{k_t^2}{R'_0(k_R)} \exp(i3\pi/4). \quad (50)$$

Подставляя в формулы (29)–(31), (34), (35) пространственные спектры эффективных силовых источников (44)–(47) с учётом (48) и (49), получаем выражения для полей рассеянных объёмных и поверхностной рэлеевской волн.

Аналитическое исследование выражений для смещений (29)–(31) оказывается затруднительным из-за их громоздкости. Относительно простыми являются выражения для горизонтальной U_{Rr}^{scat} и вертикальной U_{Rz}^{scat} компонент вектора смещений в рассеянной волне Рэля. Из выражений (34), (35), (44), (45), (47)–(49) получаем

$$U_{Rr}^{\text{scat}}(r, \varphi, z) = -\frac{2k_R^2 - k_t^2}{4\pi\rho_0^2 c_t^2 q^2(\xi)} \Delta m f_0 \frac{\exp(ik_R x_0)}{\sqrt{x_0}} \left[q_t \nu_x^2(h) \cos \varphi + q_l \nu_z^2(h) \right] \nu_x(z) \frac{\exp(ik_R r)}{\sqrt{r}}, \quad (51)$$

$$U_{Rz}^{\text{scat}}(r, \varphi, z) = \frac{k_R q_l}{2\pi\rho_0^2 c_t^2 q^2(\xi)} \Delta m f_0 \frac{\exp(ik_R x_0)}{\sqrt{x_0}} \times \\ \times \left[q_t \nu_x^2(h) \cos \varphi + q_l \nu_z^2(h) \right] \nu_z(z) \frac{\exp[i(k_R r + \pi/2)]}{\sqrt{r}}, \quad (52)$$

где

$$q(\xi) = \frac{R'_0(k_R)}{k_t^3} = \frac{2}{\xi(2\xi^2 - 1)^2} [4\xi^2 - 1 - 8\xi^6(1 - n^2)]. \quad (53)$$

Воспользовавшись соотношением

$$2k_R^2 - k_t^2 = 2k_R \sqrt{q_l} \sqrt{q_t},$$

выражения (51), (52) можно переписать в виде

$$U_{Rr}^{\text{scat}}(r, \varphi, z) = -Q \sqrt{q_t} \nu_x(z) \frac{\exp(ik_R r)}{\sqrt{r}}, \quad (54)$$

$$U_{Rz}^{\text{scat}}(r, \varphi, z) = Q \sqrt{q_l} \nu_z(z) \frac{\exp[i(k_R r + \pi/2)]}{\sqrt{r}}, \quad (55)$$

где

$$Q = \frac{k_R \sqrt{q_1}}{2\pi \rho_0^2 c_t^2 q^2(\xi)} \Delta m f_0 \frac{\exp(ik_R x_0)}{\sqrt{x_0}} [q_t \nu_x^2(h) \cos \varphi + q_1 \nu_z^2(h)]. \quad (56)$$

Входящие в (34), (35), (48), (49), (51), (52) и (54), (55) функции $\nu_x(z)$ (37) и $\nu_z(z)$ (38) описывают зависимости соответствующих компонент смещений в волне Рэлея от вертикальной координаты. Эти зависимости хорошо известны (см., например, рис. 6.5 на с. 31 в [6] и рис. 16 на с. 57 в [26]).

Первое слагаемое в квадратных скобках в (51), (52) описывает те части смещений в рассеянной волне Рэлея, которые связаны с горизонтальными движениями неоднородности в поле зондирующей волны. Наличие в данном слагаемом множителя $\cos \varphi$ показывает, что величина этой части смещений зависит от направления в горизонтальной плоскости. Второе слагаемое в указанных квадратных скобках определяется вертикальными колебаниями неоднородности. Соответствующая им часть смещений в рассеянной волне Рэлея обладает цилиндрической симметрией в горизонтальной плоскости.

Функции $\nu_x^2(h) = \zeta_x(h)$ и $\nu_z^2(h) = \zeta_z(h)$ описывают зависимости амплитуд смещений, связанных соответственно с горизонтальными и вертикальными движениями неоднородности в поле зондирующей волны, от глубины расположения этой неоднородности. Функции $\zeta_x(h)$ и $\zeta_z(h)$ подробно исследованы в [22, 23]. Согласно результатам [22, 23] всегда $\zeta_z(z) > \zeta_x(h)$; кроме того, $q_1 > q_t$, и, следовательно, определяющий вклад в поле рассеянной волны Рэлея дают вертикальные колебания неоднородности.

Наряду с вычислением волновых полей значительный интерес представляют также расчёты энергетических характеристик различных типов рассеянных волн — плотности потока энергии излучения и мощности излучения. Выражения для смещений (29)–(31), (34) и (35) позволяют вычислить потоки энергии излучения. Мощности излучения получаются путём интегрирования этих потоков через поверхность полусферы большого радиуса с центром в начале координат для объёмных волн и через поверхность полубесконечного цилиндра с осью, совпадающей с координатной осью z , для поверхностной волны Рэлея. Однако для рэлеевской волны мощность излучения можно получить более удобным способом, так называемым методом реакции излучения [17]. Для случая произвольного распределения гармонических сил по плоскости $z = h$ мощность излучения волны Рэлея даётся выражением [22, 23]

$$W_R = -\frac{2\pi^3 k_R}{\rho_0 \omega R'_0(k_R)} \left\{ \alpha_0^2 \int_0^{2\pi} |F_r(k_R \cos \varphi, k_R \sin \varphi)|^2 d\varphi + \beta_0^2 \int_0^{2\pi} |F_z(k_R \cos \varphi, k_R \sin \varphi)|^2 d\varphi + 2\alpha_0 \beta_0 \int_0^{2\pi} \text{Im}[F_r^*(k_R \cos \varphi, k_R \sin \varphi) F_z(k_R \cos \varphi, k_R \sin \varphi)] d\varphi \right\}, \quad (57)$$

где

$$\alpha_0 = k_t^2 \sqrt{q_t} \nu_x(h), \quad (58)$$

$$\beta_0 = -k_t^2 \sqrt{q_1} \nu_z(h), \quad (59)$$

индекс * обозначает комплексное сопряжение. Подставляя в (57) пространственные спектры эффективных силовых источников (44), (45), (47), получаем выражение для мощности излучения рассеянной поверхностной волны Рэлея:

$$W_R^{\text{scat}} = -\frac{(\Delta m)^2 \omega^3 f_0^2 k_t^8 k_R^2 q_1}{16\pi \rho_0^3 c_t^4 [R'_0(k_R)]^3 x_0} [q_t^2 \nu_x^4(h) + 2q_1^2 \nu_z^4(h)]. \quad (60)$$

Для дальнейшего рассмотрения удобно ввести отношение γ_R мощности излучения рассеянной волны W_R^{scat} к мощности излучения зондирующей рэлеевской волны $W_R^{(z)}(0)$, которая даётся выражением [13, 28]

$$W_R^{(z)}(0) = -\frac{f_0^2 \omega^3 k_R \sqrt{k_R^2 - k_1^2}}{4\rho_0 c_t^4 R'_0(k_R)}. \tag{61}$$

Для γ_R из (60), (61) получаем формулу

$$\gamma_R = \frac{(\Delta m)^2 \omega^5}{\rho_0^2 c_t^5 x_0} \frac{\xi (\xi^2 - n^2)}{2\pi q^2(\xi)} \left[\frac{\xi^2 - 1}{2(\xi^2 - n^2)} \nu_x^4(h) + \nu_z^4(h) \right]. \tag{62}$$

Отметим, что величина γ_R , которая характеризует эффективность рассеяния рэлеевской волны в рэлеевскую волну на точечном подповерхностном включении, пропорциональна пятой степени частоты: $\gamma_R \propto \omega^5$. Такая частотная зависимость характерна для коэффициента затухания поверхностной волны Рэлея вследствие рассеяния на мелкомасштабных трёхмерных шероховатостях поверхности упругого полупространства [29, 30] (см. также [5, § 13.4]).

В выражение (62) для γ_R входит горизонтальное расстояние x_0 между источником зондирующей волны и неоднородностью. Если в качестве падающего поля рассмотреть плоскую волну (такая идеализация широко используется в задачах, связанных с рассеянием волн различной физической природы), то величина γ_R не будет зависеть от взаимного расположения источника волн и рассеивателя.

Выражения (51), (52), (60) для полей смещений и мощности излучения, соответствующих рассеянной поверхностной волне Рэлея, можно обобщить на случаи неоднородностей в виде лежащих в горизонтальной плоскости отрезка нити, прямоугольника или круга. Для этого необходимо вычислить пространственный спектр эффективного силового источника с помощью формулы (42). Полученные результаты применимы также для случая, когда неоднородность находится на поверхности упругого полупространства. Частный случай рассеяния рэлеевской волны на тонком диске, который находится на поверхности твёрдой среды, рассмотрен в работе [30].

Если выразить расстояние x_0 в единицах длины поперечной волны λ_t и считать, что подповерхностное включение представляет собой однородный шар весьма малого радиуса $L \ll \lambda_t$, то величину γ_R можно также записать в виде

$$\gamma_R = \gamma_1 \gamma_2, \tag{63}$$

где

$$\gamma_1 = (2\pi)^4 \left(\frac{4}{3}\pi\right)^2 \left(\frac{\rho'}{\rho_0}\right)^2 \left(\frac{L}{\lambda_t}\right)^6 \frac{\lambda_t}{x_0}, \tag{64}$$

$$\gamma_2 = \frac{\xi (\xi^2 - n^2)}{q^2(\xi)} \gamma_3, \tag{65}$$

$$\gamma_3 = \tilde{\sigma}_x(h) + \sigma_z(h), \tag{66}$$

$$\tilde{\sigma}_x(h) = \frac{\xi^2 - 1}{2(\xi^2 - n^2)} \sigma_x(h), \tag{67}$$

$$\sigma_x(h) = \zeta_x^2(h) = \nu_x^4(h), \quad \sigma_z(h) = \zeta_z^2(h) = \nu_z^4(h). \tag{68}$$

Перейдём к количественным оценкам. Пусть радиус включения L в десять раз меньше длины поперечной волны λ_t , ρ' составляет двадцать процентов от величины ρ_0 , а включение находится

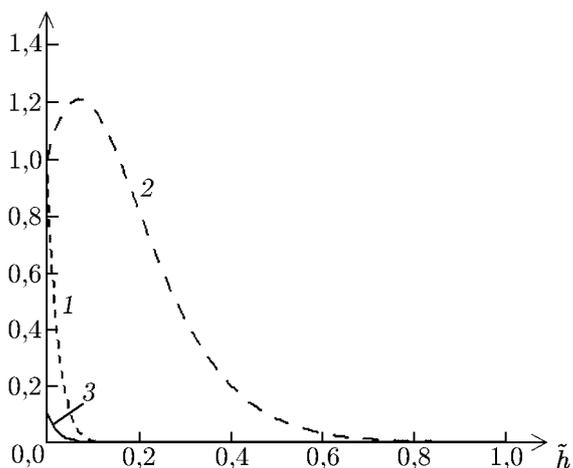


Рис. 1. Зависимости величин σ_x (кривая 1), σ_z (кривая 2) и $\tilde{\sigma}_x$ (кривая 3) от приведённой глубины расположения рассеивателя $\tilde{h} = h/\lambda_t$ при $n = c_t/c_1 = 1/\sqrt{3}$

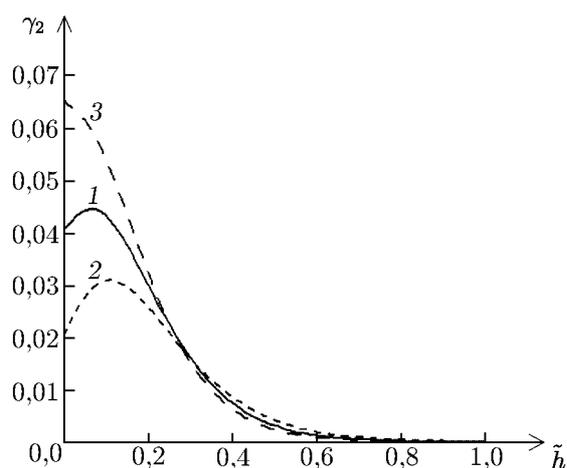


Рис. 2. Зависимости $\gamma_2(\tilde{h})$ при $n = 1/\sqrt{3}$ (кривая 1), $n = 0,4$ (кривая 2) и $n = 0,65$ (кривая 3)

на расстоянии $x_0 = 10\lambda_t$ от сейсмодатчика. Тогда по порядку величины $\gamma_1 \approx 10^{-4}$. Данная оценка является «оптимистической», поскольку коэффициент γ_1 существенным образом зависит от избыточной плотности включения и весьма существенным — от его характерного размера (напомним, что полученный результат справедлив при $|\rho'| \ll \rho_0$ и $L \ll \lambda_t$). При уменьшении значений ρ' и L величина γ_1 может уменьшиться на несколько порядков. Действительно, если $\rho'/\rho = 0,1$ и $L/\lambda_t = 0,05$, то $\gamma_1 \approx 4 \cdot 10^{-7}$.

В выражении (66) для γ_3 первое и второе слагаемые связаны соответственно с горизонтальными и вертикальными движениями неоднородности в поле падающей волны. Каждое из этих слагаемых пропорционально четвёртой степени функций, описывающих зависимости соответствующих компонент вектора смещений в рэлеевской волне от глубины (см. (68), (34), (35)). Зависимости величин σ_x , σ_z и $\tilde{\sigma}_x$ от приведённой глубины расположения рассеивателя представлены на рис. 1. Из рис. 1 следует, что определяющий вклад в мощность излучения рассеянной волны Рэля дают вертикальные колебания малой неоднородности в поле зондирующего сигнала. Связанная с горизонтальными колебаниями неоднородности мощность излучения рэлеевской волны резко падает при увеличении глубины расположения рассеивателя.

Зависимости величины γ_2 (65) от приведённой глубины расположения рассеивателя при различных значениях параметра n представлены на рис. 2. Из рис. 2 следует, что при относительно малых значениях n функция $\gamma_2(\tilde{h})$ имеет максимум при $\tilde{h} \gtrsim 0,1$ (кривая 2). С ростом n этот максимум становится всё менее выраженным, а затем функция $\gamma_2(\tilde{h})$ становится монотонно убывающей (см. кривую 3). Численное значение γ_2 всегда существенно меньше единицы. Таким образом, отношение мощностей рассеянной и падающей волн Рэля для случаев неоднородности малого размера, плотность которой незначительно отличается от плотности фоновой среды, имеет порядок величины 10^{-6} и менее. Рассеяние рэлеевской волны в рэлеевскую волну оказывается относительно эффективным лишь в тех случаях, когда рассеиватель находится на глубине, не превышающей приблизительно одну треть длины поперечной волны.

Данные рис. 2 для γ_2 и выражение (64) для γ_1 позволяют выполнить практические оценки мощности излучения рэлеевской волны, рассеянной подповерхностным включением малого размера.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследовано рассеяние гармонической поверхностной акустической волны Рэлея, возбуждаемой силовым источником, действующим на границе упругого полупространства по нормали к ней, на слабоконтрастной подповерхностной неоднородности малых по сравнению с длиной волны размеров. Рассмотрение выполнено в рамках борновского приближения метода возмущений. Качественно проанализировано влияние отклонений значений плотности и модулей упругости материала неоднородности от соответствующих параметров фоновой среды на формирование рассеянных волновых полей.

Основное внимание уделено случаю, когда вещество неоднородности отличается от вещества полупространства только плотностью, а их модули упругости совпадают. Такая неоднородность представляет собой эффективный источник рассеянных волн в виде сосредоточенной силы, который возбуждает сферические продольную и поперечные (SV- и SH-поляризаций) волны и рэлеевскую волну. Получены приближённые выражения для полей смещений в волнах указанных типов, а также выражение для мощности излучения рассеянной волны Рэлея.

Установлены следующие особенности рассеяния рэлеевской волны в рэлеевскую волну.

1) Рассеянная поверхностная волна Рэлея возбуждается главным образом вертикальными колебаниями неоднородности в поле падающей волны.

2) Зависимость мощности излучения рассеянной рэлеевской волны, создаваемой вертикальными движениями неоднородности в поле падающей волны, от глубины расположения неоднородности пропорциональна четвёртой степени функции, описывающей известную зависимость вертикальных смещений в поверхностной волне Рэлея от глубины. Соответственно, зависимость мощности излучения рассеянной рэлеевской волны, возникающей из-за горизонтальных колебаний неоднородности, от глубины расположения этой неоднородности пропорциональна четвёртой степени зависимости горизонтальных смещений в поверхностной волне Рэлея от глубины.

3) На основании результатов расчётов отношения мощности излучения рассеянной волны Рэлея и мощности излучения падающей волны Рэлея при различных соотношениях между скоростями продольной и поперечной волн в твёрдом теле показано, что мощность излучения рассеянной поверхностной волны резко падает с увеличением глубины расположения подповерхностной неоднородности. Таким образом, рассеяние рэлеевской волны в рэлеевскую волну оказывается относительно эффективным лишь в тех случаях, когда неоднородность находится на глубине, не превышающей приблизительно одну треть длины поперечной волны в упругой среде.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аки К., Ричардс П. Количественная сейсмология. Т. 1. М.: Мир, 1983. 520 с.
2. Аки К., Ричардс П. Количественная сейсмология. Т. 2. М.: Мир, 1983. 360 с.
3. Шерифф Р. Е., Гелдарт Л. П. Сейсморазведка. Т. 1, 2. М.: Мир, 1987. 448 с. (Т. 1), 400 с. (Т. 2).
4. Викторов И. А. Звуковые поверхностные волны в твёрдых телах. М.: Наука, 1981. 288 с.
5. Бирюков С. В., Гуляев Ю. В., Крылов В. В., Плесский В. П. Поверхностные акустические волны в неоднородных средах. М.: Наука, 1991. 416 с.
6. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 343 с.
7. Чернов Л. А. Волны в случайно-неоднородных средах. М.: Наука, 1975. 171 с.
8. Miller G. F., Pursey H. // Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1955. V. 233. P. 55.
9. Гущин В. В., Докучаев В. П., Заславский Ю. М., Конюхова И. Д. // Исследование Земли невзрывными сейсмическими источниками / Под ред. А. В. Николаева. М.: Наука, 1981. С. 113.

10. Петрашень Г.И. // Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Вып. 18. Л.: Наука, 1978. С. 1.
11. Шендеров Е.Л. Излучение и рассеяние звука. Л.: Судостроение, 1989. 304 с.
12. Johnson L.R. // Geophys. J. Roy. Astr. Soc. 1974. V. 37. P. 99.
13. Разин А.В. // Акуст. журн. 2009. Т. 55. С. 226.
14. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. М.: Наука, 1987. 248 с.
15. Фелсен С., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. Т. 1. М.: Мир, 1978. 551 с.
16. Докучаев В.П. // Физика Земли. 1996. № 1. С. 75.
17. Докучаев В.П. // Физика Земли. 1999. № 4. С. 94.
18. Максимов Г.А. // Физика Земли. 1996. № 11. С. 31.
19. Авербах В.С., Заславский Ю.М. // Физика Земли. 1998. № 1. С. 49.
20. Максимов Г.А., Меркулов М.Е., Кудр вцев В.Ю. // Акуст. журн. 2003. Т. 49, № 3. С. 389.
21. Заславский Ю.М. // Акуст. журн. 2004. Т. 50, № 1. С. 55.
22. Разин А.В. Излучение волн Рэлея и Стонели распределёнными подповерхностными силовыми источниками: Препринт № 530 НИРФИ. Нижний Новгород, 2009. 51 с.
23. Разин А.В. // Изв. вузов. Радиофизика. 2010. Т. 53, № 2. С. 91.
24. Федорюк М.В. Метод перевала. М.: Наука, 1977. 368 с.
25. Докучаев В.П., Разин А.В. // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1990. № 10. С. 81.
26. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наукова думка, 1981. 284 с.
27. Разин А.В. // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1991. № 12. С. 100.
28. Уразаков Е.И., Фальковский Л.А. // ЖЭТФ. 1972. Т. 63. С. 2297.
29. Maradudin A.A., Mills D.L. // Appl. Phys. Lett. 1976. V. 28. P. 573.
30. Заславский Ю.М. Энергетика рассеянных упругих полей, возникающих при дифракции волны Рэлея на поверхностном возмущении полуграниченной среды: Препринт № 267 НИРФИ. Горький, 1989. 15 с.

Поступила в редакцию 11 июня 2010 г.; принята в печать 29 июля 2010 г.

SCATTERING OF A RAYLEIGH SURFACE ACOUSTIC WAVE BY A SMALL-SIZE INHOMOGENEITY IN A SOLID HALF-SPACE

A. V. Razin

We use the Born approximation of the perturbation method to solve the problem of scattering of a harmonic Rayleigh surface acoustic wave by a weak-contrast inhomogeneity that is small compared with the wavelength and is located in a solid half-space near its boundary. The material of the inhomogeneity differs from the material of the half-space only in its density. The Rayleigh wave incident on the inhomogeneity is excited by a monochromatic surface force source acting normally to the half-space boundary. We derive expressions for the displacement fields in the scattered spherical compressional and shear (SV- and SH-polarized) waves. Scattering of the Rayleigh wave into a Rayleigh wave is studied in detail. We find expressions for the vertical and horizontal components of the displacement vector in the scattered Rayleigh wave as well as its radiated power. It is shown that the field of the scattered surface wave is mainly formed by vertical oscillations of the inhomogeneity in the field of the incident wave. In this case, the radiated power for the scattered Rayleigh wave formed by vertical motion of the inhomogeneity in the incident-wave field depends on the depth of the inhomogeneity as the fourth power of the function describing the well-known depth dependence of the vertical displacements in

the Rayleigh surface wave. Correspondingly, the dependence of the radiated power for the scattered Rayleigh wave formed by horizontal motion of the inhomogeneity depends on its location depth as the fourth power of the depth dependence of the horizontal displacements in the Rayleigh surface wave. We perform calculations of the ratio between the powers of the scattered and incident Rayleigh waves for different ratios between the velocities of the compressional and shear waves in a solid. It is shown that the radiated power for the scattered surface wave decreases sharply with increasing depth of the subsurface-inhomogeneity location. Thus, the scattering of a Rayleigh wave into a Rayleigh wave is fairly efficient only when the location depth of the inhomogeneity does not exceed about one-third of the wavelength of the shear wave in an elastic medium.