УДК 519.6:537.86

РЕЗОНАНСНОЕ ПОВЫШЕНИЕ ДОБРОТНОСТИ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТИПА В ОТКРЫТОМ РЕЗОНАТОРЕ С МЕТАЛЛИЧЕСКИМ ШАРОВЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

Ю. В. Свищёв

Институт радиофизики и электроники им. А. Я. Усикова НАНУ, г. Харьков, Украина

Представлены результаты численного эксперимента по исследованию свойств собственных колебаний электрического типа в открытом резонаторе со сферическими зеркалами, содержащем идеально проводящее шаровое включение. Обнаружен и исследован эффект резонансного повышения добротности собственных колебаний на несколько порядков за счёт размещения в открытом резонаторе идеально проводящего шара определённого радиуса. Установлена природа эффекта резонансного повышения добротности собственных колебаний.

ВВЕДЕНИЕ

В работах [1, 2] проведено теоретическое и экспериментальное исследование эффекта резонансного повышения дифракционной добротности колебаний TEM_{00q} в двухмерном открытом резонаторе с цилиндрической проводящей вставкой. Выдвинута гипотеза, что эффект повышения добротности колебания TEM_{005} связан как с противофазным сложением полей за пределами резонатора, так и с перестройкой структуры поля в самом резонаторе. При этом цилиндрическую вставку следует помещать в пучность электрического поля.

В данной работе приведены результаты аналогичных теоретических исследований применительно к открытому резонатору со сферическими зеркалами (OP), содержащему включение в виде идеально проводящего шара. Исследования проводились на основе развитой ранее [3] спектральной теории собственных колебаний в открытом резонаторе. Первые расчёты показали, что так же, как и в работах [1, 2], имеет место резонансное повышение добротности основных типов колебаний при помещении в открытый резонатор шара определённого радиуса. Однако объяснить природу этого эффекта на основе выдвинутой в работах [1, 2] гипотезы оказалось проблематично. Во-первых, в отличие от работ [1, 2] повышение добротности собственных колебаний наблюдалось при трёх (в работах [1, 2] — при двух) и более значениях радиуса шара. Во-вторых, значения радиусов, при которых наблюдается эффект, могут быть очень близки, что вызывает сомнение в справедливости выдвинутой гипотезы. В-третьих, найдены такие значения радиуса шара, когда эффект наблюдается, но шар заполняет большую часть объёма резонатора. В-четвёртых, эффект наблюдается и для неосновных типов колебаний. Таким образом, приведённые в гипотезе предположения (если применять их к ОР со сферическими зеркалами) являются скорее следствием, чем причиной возникновения эффекта. Приведённые выше факторы послужили стимулом для более детальных исследований с целью установить природу обнаруженного эффекта. Показано, что эффект резонансного повышения добротности собственных колебаний является следствием междутиповой связи колебаний в ОР.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОД РЕШЕНИЯ

На рис. 1 изображён открытый резонатор, образованный двумя одинаковыми соосными идеально проводящими сферическими зеркалами. Он характеризуется радиусами кривизны зеркал *a*, угловыми размерами зеркал φ и расстоянием *L* между зеркалами. Между зеркалами резонатора помещён идеально проводящий шар с радиусом *b*. Расстояние между центром резонатора и центром шара равно ΔZ .



Рис. 1. Открытый резонатор с металлическим шаровым включением

Аксиально-симметричные поля электрического типа описываются электрическим потенциалом Дебая *u*, магнитный потенциал Дебая *v* при этом равен нулю (электромагнитное поле в сферической системе координат r, θ, ϕ имеет три отличные от нуля компоненты $-E_r, E_{\theta}, H_{\phi}$). Учитывая это, математическая формулировка задачи о спектре собственных электромагнитных колебаний в ОР с шаровым включением состоит в следующем. Требуется определить значения спектрального параметра $k = 2\pi/\lambda$, где λ — длина волны, при которых существуют нетривиальные решения уравнения Гельмгольца $\Delta u + k^2 u =$ = 0, обеспечивающие выполнение граничных условий на зеркалах (равенство нулю тангенциальной составляющей электрического поля), условия ограниченности энергии электромагнитного поля в любой ограниченной области пространства, а также удовлетворяющие условию излуче-

ния на бесконечности (аналог условия Рейхардта в двумерном случае).

В работе [3] показано, что данная спектральная задача эквивалентна задаче на характеристические числа матричной оператор-функции вида $\mathbf{H}(k) = \mathbf{I} - \mathbf{A}(k)$, доказана дискретность и конечная кратность спектра собственных частот, построен математически обоснованный алгоритм вычисления спектра. Типу колебаний в пустом ОР приписывается (см. [3]) символ TM_{0nq} , который означает, что единственная отличная от нуля компонента магнитного поля H_{ϕ} обращается в нуль q раз по оси резонатора и n раз в перпендикулярном направлении (по радиусу в цилиндрической системе координат). Если при $\Delta Z \to 0$ и (или) $b \to 0$ найденные собственные колебания в ОР с шаровым включением непрерывно переходят в собственные колебания в пустом OP, то будем классифицировать эти колебания и при $\Delta Z > 0, b > 0$ как колебания TM_{0nq} . Для относительно больших значений радиуса шара и в условиях обсуждаемой ниже междутиповой связи колебаний полезность такой классификации весьма относительна.

2. ЭФФЕКТ РЕЗОНАНСНОГО ПАДЕНИЯ ДОБРОТНОСТИ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ В ПУСТОМ ОТКРЫТОМ РЕЗОНАТОРЕ

Естественно предположить, что собственные частоты и добротность колебаний в ОР при помещении в него неоднородности в виде идеально проводящего шара будут зависеть от геометрических параметров резонатора, т.е. от параметров L и φ . Поэтому кратко опишем результат, полученный в работе [4]. Имея самостоятельный интерес, он приблизит нас к пониманию природы повышения добротности собственных колебаний в ОР при размещении в нём металлического шара.

На рис. 2 показаны зависимости реальных частей собственных частот $\operatorname{Re}(ka)$ логарифмов добротностей $\lg Q$, где $Q = -\operatorname{Re}(ka)/[2\operatorname{Im}(ka)]$, собственных колебаний TM_{003} и TM_{021} от относительного расстояния между зеркалами L/a и углового размера зеркал φ . Установлено (см. [4]),



Рис. 2. Зависимости реальных частей собственных частот (*a*) и логарифмов добротностей (δ) собственных колебаний TM_{003} (поверхности 1) и TM_{021} (поверхности 2) пустого OP от углового размера зеркал φ и относительного расстояния между зеркалами L/a в окрестности их точки вырождения

что в OP с размерами $L = L_0 \approx 0.936a$, $\varphi = \varphi_0 \approx 48.25^\circ$ имеет место вырождение (в комплексной плоскости) собственных колебаний TM_{003} и TM_{021} . В точке вырождения наблюдается резонансное падение добротности собственного колебания TM_{003} (точнее, соответствующего гибридного типа колебаний). Малая окрестность точки (L_0, φ_0) названа запрещённой зоной для колебаний TM_{003} и TM_{021} . Это означает, что, если взять OP с размерами из этой окрестности, то в таком резонаторе можно наблюдать только гибридные типы колебаний, имеющие черты колебаний TM_{003} и TM_{021} . Вне указанной окрестности можно однозначно идентифицировать типы колебаний. При этом для $L > L_0$ при переходе через указанную окрестность наблюдается обмен типами колебаний, зависимости реальных частей двух собственных частот не пересекаются и имеют вид графика Вина. Для $L < L_0$ обмен типами колебаний не наблюдается (происходит только гибридизация колебаний), зависимости реальных частей двух собственных частот пересекаются. Другими словами, имеются все факторы, свойственные явлению междутиповой связи колебаний в OP [5].

Следует подчеркнуть, что данный результат, как и результат настоящей работы, мог быть получен только на основе строгой математической модели ОР. Асимптотическая теория [6] описывает только часть спектра ОР, формула для собственных частот не учитывает зависимости собственных частот от размера зеркал.

Для колебания TM₀₀₃ явление междутиповой связи колебаний, как видно, приводит к резонансному падению добротности. В общем случае явление междутиповой связи колебаний может приводить к разнообразным эффектам [5], в частности к росту добротности собственных колебаний.

3. ЭФФЕКТ РЕЗОНАНСНОГО ПОВЫШЕНИЯ (ПАДЕНИЯ) ДОБРОТНОСТИ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ В ОТКРЫТОМ РЕЗОНАТОРЕ С ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩИМ ШАРОМ

Рассмотрим конфокальный резонатор (L/a = 1). На рис. 3 показаны зависимости реальных частей собственных частот $\operatorname{Re}(ka)$ и логарифмов добротностей $\lg Q$ собственных колебаний

Ю. В. Свищёв

 TM_{002} , TM_{003} , TM_{004} от относительного радиуса b/L шара, размещённого в центре OP ($\Delta Z = 0$). Размещение в OP шара малого радиуса практически не приводит к изменению частоты и добротности колебаний. При дальнейшем увеличении радиуса шара происходит изменение как добротности, так и частоты собственных колебаний. Для некоторых значений радиуса шара наблюдается резонансное повышение добротности колебаний на несколько порядков по сравнению с добротностью колебаний в пустом резонаторе. Такие значения радиуса далее будем называть



Рис. 3. Зависимости реальных частей собственных частот (сплошные линии) и логарифмов добротностей (пунктирные линии) собственных колебаний TM_{002} и TM_{003} при $\varphi = 50^{\circ}$ (обозначены цифрами 1 и 2 соответственно на рис. 3*a*) и TM_{004} при $\varphi = 45^{\circ}$; 50°; 55° (обозначены цифрами 1, 2 и 3 соответственно на рис. 3*b*) конфокального ОР от относительного радиуса b/L шара, размещённого в центре ОР ($\Delta Z/L = 0$)



Рис. 4. Схематическое изображение пространственной структуры $|H_{\phi}|^2$ колебаний TM_{0nq} и $\mathrm{TM}_{0nq,ij}$ в конфокальном OP с металлическим шаровым включением $(L/a = 1, \Delta Z/L = 0)$

резонансными. Для колебаний TM_{002} и TM_{003} имеются два резонансных значения радиуса шара, при которых достигается максимум добротности колебаний; для колебания TM_{004} при $\varphi = 55,0^{\circ}$ — четыре резонансных значения радиуса, при $\varphi = 50,0^{\circ}$ — три, при $\varphi = 45,0^{\circ}$ — два. Таким образом, эффект зависит как от относительного радиуса шара b/L, так и от углового размера зеркал φ и типа колебаний.

Численный эксперимент показал, что качественно картина сохраняется, если рассмотреть не конфокальный OP, а резонатор с другим расстоянием между зеркалами. Изменяются только резонансные значения радиусов шара.

Интересно выяснить, что происходит, если взять OP с размерами L_0 , φ_0 , которым соответствует вырождение собственных колебаний TM_{003} и TM_{021} (см. рис. 2). Оказывается, что с увеличением радиуса шара вырождение снимается, гибридные типы колебаний переходят в исходные типы колебаний TM_{003} и TM_{021} . Более того, происходит не только снятие вырождения, но и повышение на несколько порядков добротности основного типа колебания TM_{003} (см. раздел 4).

Анализ структуры полей показал, что размещение в открытом резонаторе шара определённого радиуса может заметно изменить структуру поля по сравнению со случаем пустого резонатора. Внимания заслуживают колебания, для которых принятая выше классификация может быть уточнена следующим образом. В объёме резонатора условно выделим две области: между зеркалами резонатора и между одним из зеркал и поверхностью шара. К каждому объёму применяем классификацию, принятую для пустого открытого резонатора. На рис. 4 приведены распределения в открытом резонаторе магнитного поля колебаний TM_{0nq} и $TM_{0nq,ij}$ при нескольких (в том числе резонансных) значениях радиуса шара.

4. ПРИРОДА ЭФФЕКТА ПОВЫШЕНИЯ ДОБРОТНОСТИ

Для определённости рассмотрим колебание TM_{003} . Анализ структуры поля при изменении радиуса шара (кривые 2 на рис. 3a), расположенного в центре резонатора ($\Delta Z = 0$), показал следующее. В окрестности первого резонансного значения радиуса шара происходит «стягивание» поля в объёме резонатора к его оси симметрии; в окрестности второго резонансного значения радиуса шара наблюдается преобразование структуры поля от колебания TM_{003} к колебанию TM_{021} через некоторый гибридный тип колебаний. Именно последнее обстоятельство послужило толчком к применению для анализа обнаруженного эффекта того же подхода, что и в работе [4]: изучение зависимости собственных частот от радиуса шара как для основных, так и неосновных типов колебаний. Кроме того, изучим зависимости спектральных характеристик от радиуса шара при нарушении симметрии, т.е. от параметра $\Delta Z/L$.

На рис. 5 приведены зависимости реальных частей собственных частот и логарифмов добротностей собственных колебаний TM_{003} и TM_{021} в открытом резонаторе от относительного радиуса b/L шара, размещённого в центре OP ($\Delta Z/L = 0$), для различных значений углового размера зеркал φ (L/a = 0.936). Точка (L_0, φ_0) \approx ($0.936a; 48.25^{\circ}$), как показано в работе [4] (см. раздел 2), является точкой вырождения рассматриваемых колебаний в пустом OP. Соответственно, поля при L/a = 0.936 в малой окрестности величины φ_0 в отсутствие шара являются гибридными (на рисунке они обозначены как ~03 и ~21). Это, видимо, более сложный и интересный случай с точки зрения изучения обнаруженного эффекта. Как видно на рис. 5, при $\varphi = 48.24^{\circ}$ с увеличением радиуса шара реальные части собственных частот расходятся (вырождение снимается), а зависимость добротности одного из колебаний, обозначенная как ~ 03, имеет два ярко выраженных максимума. При переходе значения углового размера зеркала φ через величину φ_0 в пустом OP происходит обмен типами колебаний (рис. 2) и, соответственно, на рис. 5 меняются ролями сплошная и пунктирная линии. Поэтому при $\varphi = 50^{\circ}$ видно, что с увеличением зна-

407



Рис. 5. Зависимость реальных частей собственных частот (a) и логарифмов добротностей (b) собственных колебаний ${\rm TM}_{003},~{\rm TM}_{021}$ в OP от относительного радиуса b/L шара, размещённого в центре OP ($\Delta Z/L=0$), для различных значений углового размера зеркал $\varphi~(L/a=0.936).$ Индексами 03 и 21 обозначены кривые, соответствующие колебаниям ${\rm TM}_{003}$ и ${\rm TM}_{021}$, индексами 03,00 и 11,00 — колебаниям ${\rm TM}_{003,00}$ и ${\rm TM}_{011,00},$ индексами ~ 03 и ~ 21 — гибридным типам колебаний

Ю. В. Свищёв

408

чения b/L зависимости реальных частей собственных частот пересекаются, а зависимость добротности колебания, обозначенная как ~03, имеет два резонансных максимума. При $\varphi = 55^{\circ}$ ситуация следующая. Поведение реальных частей собственных частот с увеличением значения b/Lимеет вид графика Вина, а зависимости добротности колебаний, обозначенные как ~03 и ~21, имеют только один максимум при изменении значения b/L. В точке $\varphi = \varphi_1 \approx 52,5^{\circ}, b = b_1 \approx 1,12L$ имеет место вырождение (в комплексной плоскости) колебаний TM_{003} и TM_{021} . В окрестности второго максимума поведение реальных частей собственных частот имеет вид графика Вина при всех значениях $\varphi = 48,24^{\circ}$; 50°; 55°, а точка вырождения отсутствует.

Рассмотрим теперь, что происходит со структурой поля колебаний TM_{003} и TM_{021} при изменении параметров φ и b/L. При $\varphi = 48,24^{\circ}$ гибридное колебание, обозначенное как ~03, с увеличением b/L сначала переходит в колебание TM_{003} (окрестность первого максимума lg Q); затем структура поля колебания TM_{003} становится более сложной (падение добротности) и вновь восстанавливается в окрестности второго максимума lg Q. При дальнейшем увеличении b/L происходит преобразование колебания TM_{003} в колебание $TM_{011,00}$. Одновременно колебание в пустом OP, обозначенное как ~21, в окрестности второго максимума добротности колебания TM_{003} трансформируется в колебание $TM_{003,00}$. Для $\varphi = 50^{\circ}$ наблюдаются аналогичные закономерности в распределении полей. Следует отметить, что структура поля колебаний $TM_{003,00}$ и $TM_{011,00}$ близка к структуре поля колебаний TM_{021} и TM_{003} соответственно, т. е. в окрестности второго максимума зависимости lg Q от b/L происходит обмен типами колебаний. Для $\varphi = 55^{\circ}$ обмен типами колебаний при изменении параметра b/L происходит в окрестности как второго, так и первого максимумов.

На рис. 6 для OP с размерами L/a = 1, $\varphi = 50^{\circ}$ показаны зависимости реальных частей собственных частот $\operatorname{Re}(ka)$ и логарифмов добротностей lg Q собственных колебаний TM_{003} , TM_{021} и TM_{012} от параметров b/L и $\Delta Z/L$. Добротность собственных колебаний имеет явно выраженную зависимость от параметра $\Delta Z/L$. При $\Delta Z/L > 0$ для некоторых значений радиуса шара наблюдается как повышение, так и резонансное падение добротности колебаний в сравнении с добротностью колебаний в пустом OP. На рис. 6 локальный минимум по двум параметрам b/Lи $\Delta Z/L$ добротности колебания TM_{003} (точнее, гибридного типа колебания) достигается в двух случаях: 1) при размещении в OP шара с радиусом b/L = 0,065 на расстоянии $\Delta Z/L = 0,02$ от центра резонатора; 2) при размещении в OP шара с радиусом b/L = 0,133 на расстоянии $\Delta Z/L = 0,005$ от центра резонатора. При этом собственная частота колебания TM_{003} в обоих случаях совпадает с собственной частотой колебания TM_{012} (точнее, гибридного типа колебания TM_{003} в обоих случаях совпадает с собственной частотой колебания TM_{012} (точнее, гибридного типа колебания), т.е. имеет место вырождение (в комплексной плоскости) собственных колебаний TM_{003} и TM_{012} . Этот же результат справедлив и для низкодобротных неосновных типов колебаний TM_{021} и TM_{012} при следующих значениях параметров: 1) b/L = 0,039, $\Delta Z/L = 0,02$; 2) b/L = 0,198, $\Delta Z/L = 0,02$.

Таким образом, анализ структуры полей показал, что в малой окрестности точек вырождения наблюдаются гибридные типы колебаний (примером является колебание, обозначенное на рис. 4 символом $TM_{021} \Rightarrow TM_{003,00}$), зависимости реальных частей собственных частот либо пересекаются, либо имеют вид графика Вина. Вне этих окрестностей можно однозначно идентифицировать типы колебаний, т. е. поведение спектральных характеристик ОР с шаровым включением в окрестности точек вырождения такое же, как и описанное в разделе 2. Можно утверждать, что эффект повышения (падения) добротности колебаний обусловлен междутиповой связью колебаний.

Математическую основу явления междутиповой связи колебаний составляет понятие морсовской критической точки соответствующего характеристического определителя [5]. В работе [4] (см. раздел 2 данной работы) показано, что точка вырождения собственных колебаний (рис. 2)

Ю. В. Свищёв



Рис. 6. Зависимости реальных частей собственных частот (a) и логарифмов добротностей (b) собственных колебаний TM_{003} (поверхности 1), TM_{021} (поверхности 2) и TM_{012} (поверхности 3) в OP ($\varphi = 50^{\circ}, L/a = 1$) от относительного радиуса шара b/L и положения шара на оси резонатора $\Delta Z/L$

является морсовской критической точкой. В связи с этим в монографии [5] было введено понятие вырожденной морсовской критической точки. В общем случае не каждая морсовская критическая точка является точкой вырождения. Далее можно провести следующую аналогию. В контексте данной работы будем называть особой точкой некоторую воображаемую точку в пространстве параметров $L, \varphi, b, \Delta Z$, в окрестности которой поведению спектральных характеристик присуще явление междутиповой связи колебаний. В частном случае (рис. 2, 5, 6) эта точка совпадает с найденными точками вырождения. В общем случае, например в окрестности второго максимума пунктирной кривой 2 на рис. За или на рис. 5, наблюдается обмен типами колебаний, но точка вырождения отсутствует (она может возникнуть при вариации параметров $L, \varphi, \Delta Z$). Понятие особой точки позволяет объяснить факты, приведённые во введении. Число экстремальных значений добротности собственных колебаний в ОР с шаровым включением заранее предсказать нельзя, оно определяется типом колебаний, параметрами $L, \varphi, b, \Delta Z$ и может быть найдено в результате численного эксперимента. Наличие двух близких резонансных значений радиуса шара объясняется наличием двух близко расположенных особых точек (рис. 6). Численный эксперимент показал, что характер зависимостей спектральных характеристик от геометрических параметров ОР с идеально проводящим шаром может быть весьма разнообразным. Возможные графики поведения собственных частот в окрестности морсовской критической точки приведены в работах [5, 7].

выводы

Обнаружен и детально исследован эффект резонансного повышения (падения) добротности собственных колебаний в открытом резонаторе со сферическими зеркалами при размещении в нём металлического шара определённого радиуса. Показано, что число экстремальных значений добротности собственных колебаний в ОР с шаровым включением заранее предсказать не представляется возможным, оно определяется типом колебаний, параметрами L, φ , b, ΔZ и может быть найдено в результате численного эксперимента.

Ю. В. Свищёв

410

Установлено, что эффект резонансного повышения (падения) добротности собственных колебаний в ОР является следствием междутиповой связи колебаний в резонаторе. Как правило, обнаруженный эффект наблюдается в окрестности точек вырождения (в комплексной плоскости) собственных колебаний. Наличие двух близких резонансных значений радиуса шара объясняется наличием двух близко расположенных точек вырождения.

Описанный эффект следует учитывать как при размещении в открытом резонаторе различного рода неоднородностей, так и при восстановлении распределения амплитуды поля методом пробного тела.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Мележик П. Н., Мирошниченко В. С., Сенкевич Е. Б. // Изв. вузов. Радиофизика. 2005. Т. 48, № 7. С. 596.
- Мележик П. Н., Мирошниченко В. С., Сенкевич Е. Б. // Изв. вузов. Радиофизика. 2005. Т. 48, № 8. С. 684.
- 3. Свищёв Ю. В. // Радиофизика и электроника. Харьков: ИРЭ НАНУ, 2005. Т. 10, № 1. С. 51.
- 4. Свищёв Ю. В. // Радиофизика и электроника. Харьков: ИРЭ НАНУ, 2009. Т. 14, № 2. С. 128.
- 5. Шестопалов В. П. Морсовские критические точки дисперсионных уравнений. Киев: Наукова думка, 1992. 240 с.
- 6. Вайнштейн Л. А. Открытые резонаторы и открытые волноводы. М.: Сов. радио, 1966. 476 с.
- Мележик П. Н., Поединчук А. Е., Тучкин Ю. А., Шестопалов В. П. // Докл. АН СССР. 1988. Т. 300, № 6. С. 1356.

Поступила в редакцию 12 мая 2010 г.; принята в печать 27 июня 2010 г.

RESONANCE INCREASE IN THE Q-FACTORS OF ELECTRIC-TYPE EIGENMODES IN AN OPEN RESONATOR WITH A SPHERICAL METAL INSERT

Yu. V. Svishchov

We present results of the numerical simulation performed to study the properties of electric-type eigenmodes in an open resonator with spherical mirrors and a perfectly conducting spherical inclusion. The effect of a resonance increase in the Q-factors of the eigenmodes by several orders of magnitude, which is due to placing a perfectly conducting sphere of certain radius in the open resonator, is found and studied. The nature of the effect of a resonance increase in the Q-factors of eigenmodes is established.