УДК 621.372.8.001.24

ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПОЛЯ В ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ РЕЗОНАТОРАХ

М. В. Давидович, Ю. В. Стефюк

Саратовский государственный университет, г. Саратов, Россия

Методом итерационного решения объёмных интегральных и интегродифференциальных уравнений совместно с соответствующими функционалами определены квазисобственные моды открытых цилиндрических и прямоугольных диэлектрических резонаторов. Предложены новые формы уравнений и итерационных алгоритмов при нелинейном вхождении искомого комплексного параметра. Численно получены частоты и добротности $H_{01\delta}$ и H_{011}-колебаний цилиндрического резонатора и H-мод прямоугольного резонатора для однородного и неоднородного случаев. Исследовано влияние на часто́ты и добротности мод диэлектрического резонатора расположенного на его торцах и облучаемого мощными лазерными импульсами тонкого полупроводникового слоя. Показана возможность перестройки резонансных частот в пределах десяти и более процентов при переходе высокоомного слоя в хорошо проводящее состояние.

ВВЕДЕНИЕ

Диэлектрические резонаторы нашли широкое применение для частот, лежащих от сверхвысоких частот (СВЧ) до оптического диапазона, а методы их анализа весьма разнообразны (см., например, монографию [1] и приведённый там список литературы). Методы анализа диэлектрического резонатора, как аналитические, так и численные, также рассмотрены в ряде монографий, например [1–8], и в ряде статей, в частности [10–20]. Там же указаны и некоторые применения диэлектрического резонатора для различных целей. Обзор приближённых и строгих численных методов и алгоритмов анализа диэлектрического резонатора дан в ряде работ, в частности в работах [19, 20]. Наиболее часто используются и исследуются цилиндрические диэлектрические резонаторы и прямоугольные диэлектрические резонаторы [1]. Аналитическое исследование цилиндрического диэлектрического резонатора возможно в двумерном случае ([4], стр. 97). Поэтому для их строгого анализа необходимо привлекать численные методы, среди которых здесь будет рассмотрен метод объёмных интегральных уравнений [2, 4–9, 13, 19–22] и метод объёмных интегродифференциальных уравнений [19–21]. Такой подход удобен и универсален, поскольку достаточно найти поля или одно из полей внутри ограниченного поверхностью S конечного объёма V диэлектрика при общих предположениях о его неоднородности и анизотропии. Альтернативный подход, основанный на сшивании полей или интегральных преобразованиях, приводящий к поверхностным интегральным уравнениям, в общем случае встречает трудности, в частности для цилиндрического диэлектрического резонатора [1], и реализуется для частных случаев однородных тел вращения [6].

В работе [12] с помощью объёмных интегральных уравнений анализируется мода $H_{01\delta}$ однородного цилиндрического диэлектрического резонатора, причём в конечном итоге используется теория возмущений в первом порядке. В публикации [19] рассчитаны моды цилиндрического диэлектрического резонатора путём строгого решения объёмных интегральных уравнений методом двумерных конечных элементов при дискретизации с применением совместных итерационных процедур для описывающего поле объёмных интегральных уравнений и функционала, определяющего частоту. Для моды $H_{01\delta}$ приведены резонансные частоты, добротности и распределения полей. В работе [20] интегродифференциальные уравнения для диэлектрического резонатора сформулированы относительно вектор-потенциалов, что приводит к слабо сингулярным ядрам в виде только функции Грина без их производных [3]. Моды открытых диэлектрических резонаторов являются квазисобственными, и для моды номером n, частотой ω_n и добротностью Q_n поле на большом расстоянии R не только не затухает, а наоборот возрастает пропорционально $\exp\{\omega_n R\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\,[(2Q_n)^{-1} - j]\}/R$ [3], хотя на малом расстоянии затухание, возрастающее с ростом Q_n, имеет место [3, 4]. Этим для высокодобротных колебаний оправдывается приближение типа магнитной стенки. Сеточные методы для открытых диэлектрических резонаторов неэффективны.

Анализ прямоугольного диэлектрического резонатора существенно сложнее [1, 13–18]. Все применявшиеся ранее алгоритмы имеют приближённый характер. Под «точным» будем понимать алгоритм, позволяющий определять собственные резонансные частоты и добротности с заданной гарантированной точностью. Часто используются эвристические алгоритмы, основанные на наличии идеальных экранов или на предположении об определённом характере, например экспоненциальном, затухания поля вдали от резонатора, что неправомочно для открытых диэлектрических резонаторов. Не даёт точных результатов и метод Маркатилли в сочетании с методом прямоугольного диэлектрического волновода [1, 14]. Экспериментальное определение резонансов связано с заменой собственных колебаний на вынужденные с действительной частотой ω. Для них возрастающее в дальней зоне поле меняется на затухающее по закону пропорционально $\exp(-j\omega R\sqrt{\varepsilon_0\mu_0})/R$.

Цель данной работы — численный анализ и исследование квазисобственных мод открытых цилиндрических диэлектрических резонаторов и прямоугольных диэлектрических резонаторов из однородного и неоднородного диэлектрика методом объёмных интегральных уравнений и объёмно-поверхностных интегродифференциальных уравнений. Под последними понимаем уравнения, в которые под знаком интеграла или/и в виде внеинтегральных членов входят производные искомых функций, т. е. полей или потенциалов. Разработаны новые итерационные алгоритмы для полученных уравнений и соответствующих им функционалов, использующие для дискретизации конечные элементы и тригонометрические функции. Исследовано влияние симметрично расположенных на торцах цилиндрических диэлектрических резонаторов и прямоугольных диэлектрических резонаторов двух тонких высокоомных полупроводниковых плёнок на частоты и добротности резонаторов, обусловленное лазерным облучением этих плёнок и переводом их в хорошо проводящие, близкие по свойствам к металлам, состояния.

1. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Диэлектрическое тело объёма V с тензорной проницаемостью $\hat{\varepsilon}(\mathbf{r})$, ограниченное поверхностью S произвольной формы, т. е. открытый диэлектрический резонатор, описывается объёмным интегральным уравнением [2–9, 17–23]

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = (\nabla\nabla\cdot +k^2)\int\limits_V G(k, \mathbf{r}-\mathbf{r}')\,[\hat{\varepsilon}(\mathbf{r}') - \hat{\mathrm{I}}]\,\mathbf{E}(\mathbf{r}')\;\mathrm{d}V', \tag{1}$$

а также эквивалентными объёмными интегральными уравнениями и интегродифференциальными уравнениями, нагруженными и ненагруженными поверхностными интегралами с различными степенями сингулярности ядер [4, 5, 17–23]. В (1) $k = \omega/c$ — волновое число, $G(k, \mathbf{r}) = (4\pi r)^{-1}\exp(-jkr)$ — функция Грина свободного пространства [4, 24], диэлектрическая проницаемость $\hat{\varepsilon}$ может зависеть от частоты и быть тензором, $\hat{\mathrm{I}}$ означает единичный тензор. Всё многообразие форм уравнений диэлектрических резонаторов есть следствие (1) [2–7, 16–23]. Далее считаем диэлектрическую проницаемость ε и соответственно восприимчивость $\kappa = \varepsilon - 1$

скалярами. Явные зависимости от частоты или k у них, функции Грина и $\mathbf{E}$ опускаем. Различные объёмные интегральные уравнения и объёмные интегродифференциальные уравнения для диэлектрического резонатора формулируются относительно электрического поля (см. уравнения (2), (3) из [19]), относительно магнитного поля $\mathbf{H}$, относительно обоих полей, а также и относительно электродинамических потенциалов [20]. Формы таких потенциалов и определяющих их уравнений в электродинамике сплошных сред могут быть разнообразными [21, 25–30], что связано не только с калибровочной неоднозначностью.

В конкретном случае цилиндрического диэлектрического резонатора использовано интегральное уравнение, приведённое в работе [12] для азимутально-симметричных колебаний (см. также уравнение (6) из [19]). Заметим, что для таких колебаний полученные в [20] общие интегродифференциальные уравнения для вектор-потенциалов преобразуются к аналогичному интегральному уравнению для компоненты A_φ^e электрического вектор-потенциала.

2. ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ РЕЗОНАТОР

Открытый прямоугольный диэлектрический резонатор представляет собой диэлектрический параллелепипед с ребрами $2a$, $2b$, $2c$ и объёмом $V = 8abc$. Имеется несколько вариантов описания прямоугольного диэлектрического резонатора на основе интегрального уравнения и интегродифференциального уравнения, отличающихся методами дискретизации. Дискретизация на основе конечных элементов приводит к алгоритмам большой размерности, необходимым для определения комплексных корней уравнения $\det(k) = 0$, где $\det(k)$ — комплексный определитель. Их численное исследование при числе конечных элементов, даваемых формулой из [31] с $N_1 = N_2 = N_3 \leq 5$, показало невысокую точность и наличие трудностей в классификации мод. Моды прямоугольного диэлектрического резонатора удобно классифицировать по чётности или нечётности электрического или магнитного полей относительно начала координат и числу вариаций компонент вдоль характерных размеров. Будем рассматривать в одном октанте чётные по всем координатам моды. К ним принадлежит и основная высокодобротная H-мода. В этом случае ядро содержит сумму восьми функций Грина $G(x \mp x', y \mp y', z \mp z')$ в форме (2.8) из работы [24] со всевозможными комбинациями знаков. Здесь мы применим алгоритм, сформулированный в трёхмерном комплексном пространстве волновых чисел (α, β, γ). Поля H- или TE-мод относительно оси z внутри прямоугольного диэлектрического резонатора задаём явно с тремя указанными неизвестными комплексными постоянными согласно формулам (4.33) из [1]. Приведём для краткости и наглядности одну из пяти таких компонент:

$$E_x(x, y, z) = -\frac{j\omega\mu_0\beta}{\tau^2} \begin{Bmatrix} \cos(\alpha x) \\ \sin(\alpha x) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -\sin(\beta y) \\ \cos(\beta y) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos(\gamma z) \\ \sin(\gamma z) \end{Bmatrix}, \qquad (2)$$

где $\tau^2 = \alpha^2 + \beta^2$. Эти поля, определённые с точностью до произвольного множителя, внутри прямоугольного диэлектрического резонатора являются соленоидальными и удовлетворяют волновому уравнению с параметром $k^2\varepsilon = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$. Соответствующие представлению типа (2) соотношения для интегрального уравнения и функционалов для диэлектрического волновода приведены в [32]. Для классификации мод введём обозначение $H_{z\mu\nu\delta}^{pqr}$. Здесь индексы p, q, r принимают значения e и o, а μ, ν, δ являются числами. Соответственно индекс e в позиции 1 означает чётность z-компоненты магнитного поля относительно координаты x, чему соответствуют верхние значения в фигурных скобках, а в позиции o — нечётность H_z, чему соответствуют нижние значения в скобках. Чётность также обозначаем численной величиной 0 этих индексов, а нечётность — значением 1. Величины μ, ν, δ, вообще говоря, комплексные, связаны с компонентами волнового вектора соотношениями $\alpha = \mu\pi/(2a)$, $\beta = \nu\pi/(2b)$, $\gamma = \delta\pi/(2c)$. В случае высокой добротности мнимые части μ, ν, δ малы, а их действительные части приближённо характеризуют число полуволн, т. е. вариаций, укладывающихся вдоль соответствующей оси. Реальные части этих индексов, вообще говоря, не целые, что означает «просачивание» поля сквозь границу, т. е. отсутствие на ней условий типа электрической или магнитной стенок. Задача для магнитного поля формулируется в виде функционала [19]

$$k^2 = \frac{\int\limits_V |\mathbf{H}(\mathbf{r})|^2 \ \mathrm{d}^3 r + \dfrac{\kappa}{\varepsilon} \int\limits_V \oint\limits_S G(k, \mathbf{r} - \mathbf{r}')\mathbf{H}^*(\mathbf{r}) \, [\boldsymbol{\nu}(\mathbf{r}'), [\nabla', \mathbf{H}(\mathbf{r}')]] \ \mathrm{d}^2 r' \ \mathrm{d}^3 r}{\kappa \int\limits_V \int\limits_V \mathbf{H}^*(\mathbf{r}) G(k, \mathbf{r} - \mathbf{r}')\mathbf{H}(\mathbf{r}') \ \mathrm{d}^3 r' \ \mathrm{d}^3 r} \,. \tag{3}$$

Он зависит от двух произвольных параметров. Если эти два параметра, например α и β, известны достаточно точно, то по начальному приближению волнового числа $k^{(0)}$ определяем $\gamma^{(0)} = \sqrt{(k^{(0)})^2 \varepsilon - \alpha^2 - \beta^2}$ и вычисляем последующие приближения, используя (3) и корневой закон дисперсии. Сформулируем ещё два соотношения для трёх параметров. Записав интегродифференциальное уравнение для компонент H_x и H_y, образуем функционалы для α^2 и β^2. Первый имеет вид

$$\alpha^2 = \frac{(k^2 \varepsilon - \gamma^2)^2}{\gamma^2} \left[\int\limits_V \begin{Bmatrix} \sin^2(\alpha x) \\ \cos^2(\alpha x) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos^2(\beta y) \\ \sin^2(\beta y) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sin^2(\gamma z) \\ \cos^2(\gamma z) \end{Bmatrix} \mathrm{d}^3 r \right]^{-1} \times$$
$$\times \left\{ \mp \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} \int\limits_V \oint\limits_{S^\pm} G(k, \mathbf{r} - \mathbf{r}')\mathbf{H}_x(\mathbf{r}) \left(\frac{\partial H_x(\mathbf{r}')}{\partial z'} - \frac{\partial H_z(\mathbf{r}')}{\partial x'} \right) \ \mathrm{d}^2 r' \ \mathrm{d}^3 r + \right.$$
$$\left. + \ (\varepsilon - 1) \, k^2 \int\limits_V \int\limits_V H_x(\mathbf{r}) G(k, \mathbf{r} - \mathbf{r}') H_x(\mathbf{r}') \ \mathrm{d}^3 r' \ \mathrm{d}^3 r \right\}. \tag{4}$$

Для получения β^2 следует заменить H_x на H_y, в первых двух фигурных скобках синусы на косинусы, а также знак у круглой скобки. Здесь поверхность $S^\pm$ представляет собой два торца прямоугольного диэлектрического резонатора при $z = \pm c$. Приведём результаты для формулировки интегрального уравнения относительно электрического поля. Имеем два скалярных уравнения для компонент E_x, E_y. Перейдём к новым функциям:

$$\tilde{E}_1(x, y, z) = \begin{Bmatrix} \cos(\alpha x) \\ \sin(\alpha x) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -\sin(\beta y) \\ \cos(\beta y) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos(\gamma z) \\ \sin(\gamma z) \end{Bmatrix},$$
$$\tilde{E}_2(x, y, z) = \begin{Bmatrix} -\sin(\alpha x) \\ \cos(\alpha x) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos(\beta y) \\ \sin(\beta y) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos(\gamma z) \\ \sin(\gamma z) \end{Bmatrix}. \tag{5}$$

В (5) следует брать либо верхние, либо нижние значения. Тогда одно из уравнений примет вид

$$\tilde{E}_1(x, y, z) = k^2 \kappa \int\limits_{-a}^{a} \int\limits_{-b}^{b} \int\limits_{-c}^{c} G(x - x', y - y', z - z') \tilde{E}_1(x', y', z') \ \mathrm{d}x' \ \mathrm{d}y' \ \mathrm{d}z' -$$
$$- \kappa \frac{\partial}{\partial x} \int\limits_{-b}^{b} \int\limits_{-c}^{c} [G(x - a, y - y', z - z') \mp G(x + a, y - y', z - z')] \tilde{E}_1(a, y', z') \ \mathrm{d}y' \ \mathrm{d}z' +$$

$$+\kappa\,\frac{\alpha}{\beta}\,\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{-a}^{a}\int\limits_{-c}^{c}[G(x-x',y-b,z-z')\mp G(x-x',y+b,z-z')]\tilde{E}_2(x',b,z')\;\mathrm{d}x'\;\mathrm{d}z'. \qquad (6)$$

Выбор знака в (6) соответствует верхнему или нижнему значениям в фигурных скобках в (5). Второе уравнение получается заменой индексов $1 \leftrightarrow 2$ у полей и заменой $\alpha \leftrightarrow \beta$. Первое уравнение проинтегрируем по x, а второе — по y. В первом случае имеем

$$F_1(x,y,z) = -\frac{1}{\alpha}\begin{Bmatrix}-\sin(\alpha x)\\ \cos(\alpha x)-1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}-\sin(\beta y)\\ \cos(\beta y)\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\cos(\gamma z)\\ \sin(\gamma z)\end{Bmatrix} =$$

$$= k^2\kappa\int\limits_{-a}^{a}\int\limits_{-b}^{b}\int\limits_{-c}^{c}K^x(x,x',y-y',z-z')\tilde{E}_1(x',y',z')\;\mathrm{d}x'\;\mathrm{d}y'\;\mathrm{d}z' - \kappa\int\limits_{-b}^{b}\int\limits_{-c}^{c}G^{11}(x,y-y',z-z')\times$$

$$\times\,\tilde{E}_1(a,y',z')\,\mathrm{d}y'\;\mathrm{d}z' + \kappa\,\frac{\alpha}{\beta}\int\limits_{-a}^{a}\int\limits_{-c}^{c}G^{12}(x,y,x',z-z')\tilde{E}_2(x',b,z')\;\mathrm{d}x'\;\mathrm{d}z'. \qquad (7)$$

Ядра, входящие в (7) и в соответствующее второе уравнение, получаются просто и поэтому не приводятся. Умножив уравнение (7) на функции, стоящие в фигурных скобках его правой части, и проинтегрировав по объёму, получим функционал для определения величины $1/\alpha$. Точно также получаем функционал для определения $1/\beta$. Умножим уравнение (6) на $\tilde{E}_1^*(x,y,z)$, а второе уравнение с F_2 — на $\tilde{E}_2^*(x,y,z)$, сложим и проинтегрируем по объёму прямоугольного диэлектрического резонатора. Образованное скалярное произведение $\langle\mathbf{E},\mathbf{F}\rangle$ в функциональном пространстве двумерных векторных функций даёт функционал для определения k^2. Приведём такие билинейные функционалы для диэлектрического резонатора с постоянной ε в случае, если пробная и весовая функции удовлетворяют определённым условиям:

$$k^2 = \frac{\int\limits_V \mathbf{F}^*(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r})\;\mathrm{d}^3r + \kappa\int\limits_V\oint\limits_S[\boldsymbol{\nu}(\mathbf{r}')\mathbf{E}(\mathbf{r}')]\,[\mathbf{F}^*(\mathbf{r})\,\nabla G(\mathbf{r}-\mathbf{r}')]\;\mathrm{d}^2r'\;\mathrm{d}^3r}{\kappa\int\limits_V\int\limits_V\mathbf{F}^*(\mathbf{r})G(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\mathbf{E}(\mathbf{r}')\;\mathrm{d}^3r'\;\mathrm{d}^3r}, \qquad (8)$$

$$k^2 = \frac{\int\limits_V \mathbf{F}^*(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r})\;\mathrm{d}^3r - \kappa\oint\limits_S\boldsymbol{\nu}(\mathbf{r})\mathbf{F}^*(\mathbf{r})\int\limits_V\mathbf{E}(\mathbf{r}')\,\nabla G(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\;\mathrm{d}^2r\;\mathrm{d}^3r'}{\kappa\int\limits_V\int\limits_V\mathbf{F}^*(\mathbf{r})G(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\mathbf{E}(\mathbf{r}')\;\mathrm{d}^3r'\;\mathrm{d}^3r}, \qquad (9)$$

$$k^2 = \frac{\int\limits_V \mathbf{F}^*(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r})\;\mathrm{d}^3r - \kappa\int\limits_V\nabla\,\mathbf{F}^*(\mathbf{r})\int\limits_V\mathbf{E}(\mathbf{r}')\nabla G(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\;\mathrm{d}^2r'\;\mathrm{d}^3r}{\kappa\int\limits_V\int\limits_V\mathbf{F}^*(\mathbf{r})G(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\mathbf{E}(\mathbf{r}')\;\mathrm{d}^3r'\;\mathrm{d}^3r}. \qquad (10)$$

Функционал (8) справедлив для соленоидальной пробной функции $\mathbf{E}$, а функционал (9) — для соленоидальной весовой функции $\mathbf{F}^*$. Если весовая функция не соленоидальна, но имеет исчезающую на границе нормальную компоненту, то можно использовать функционал (10). Если $\nabla\mathbf{E} = 0$, то второй из объёмных интегралов в (9) и в (10) преобразуется к поверхностному. Если $\nabla\mathbf{F}^* = 0$ и $\boldsymbol{\nu}\mathbf{F}^* = 0$ на S, функционалы (9) и (10) принимают одинаковый и наиболее простой вид без вторых членов в числителе. Однако, такой функционал может быть только билинейным, тогда как (8) и (9) при $\mathbf{E}=\mathbf{F}$ соответствует один и тот же квадратичный функционал. Гибридные моды с шестью компонентами следует анализировать на основе разложений с несколькими фиксированными значениями α и β, варьируя коэффициенты разложений.

3. ИТЕРАЦИОННЫЕ АЛГОРИТМЫ

Диэлектрический резонатор описывается объёмным интегральным уравнением или интегродифференциальным уравнением типа (1), нагруженными или нет поверхностными интегралами. В последнем случае алгоритмы наиболее простые. В уравнении однородного и изотропного диэлектрического резонатора перед первым объёмным интегралом появляется спектральный параметр $k^2\,(\varepsilon-1)$. Использование итерационных методов целесообразно во избежание численного определения корней определителя большого порядка. Применим их к интегральным уравнениям или интегродифференциальным уравнениям и к соответствующим им функционалам. Возможно и итерационное решение уравнений, полученных разложением интегрального оператора по малому параметру [12, 19]. Общий матричный вид разложений, получающийся после дискретизации, запишем так:

$$\check{B}E=\sum_{n=0}^{N}k^n\check{A}_nE. \tag{11}$$

Для цилиндрического диэлектрического резонатора с высотой h, меньшей, чем радиус a, при больших ε, поскольку $\lambda\varepsilon^{-1/2}\sim a$, малым безразмерным спектральным параметром будет $\chi = ka=2\pi a/\lambda$. Исходным для (11) служит разложение функции Грина в ряд по параметру $-jkR$, где $R=|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$. Для квадратичного функционала в низшем приближении $N=0$ имеем

$$k^2=(\mathbf{E},\hat{K}_0\mathbf{E})^{-1}\,[(\mathbf{E},\mathbf{E})+(\mathbf{E},\hat{L}_0\mathbf{E})-(\mathbf{E},\hat{S}_0\mathbf{E})], \tag{12}$$

где $\hat{L}_0$ и $\hat{K}_0$ — объёмные, а $\hat{S}_0$ — поверхностный операторы. Соотношение (12) есть нулевое приближение [12, 19] для определения резонансных частот, которые в этом приближении действительные. В работе [12] функционал (12) при $\hat{S}_0=0$ использован для получения базисных функций, а в [19] рассмотрены следующие приближения для (12), включая полиномиальные аппроксимации и приближения на основе спектрального разложения функции Грина в цилиндрических координатах. Аналогично представляется и ядро в виде интеграла от функции Грина в декартовых координатах. Для (11) имеет место функционал с независящими от k операторами $\hat{A}_n$ и матрицами $\check{A}_n$:

$$\Lambda(k)=\langle\mathbf{E},\hat{B}\mathbf{E}\rangle-\sum_{n=0}^{N}k^n\,\langle\mathbf{E},\hat{A}_n\mathbf{E}\rangle=(E,\check{B}E)-\sum_{n=0}^{N}k^n\,(E,\check{A}_nE). \tag{13}$$

Здесь E — столбец, получающийся в результате дискретизации $\mathbf{E}$. Для численных расчётов используем функционалы

$$k^2=(2\pi/\lambda)^2=\langle E,\check{B}E\rangle\Big/\langle E,\check{A}(k)E\rangle. \tag{14}$$

В частности, к такому виду при единичной матрице $\check{B}=\check{I}$ сводится задача об азимутально-симметричных модах цилиндрического диэлектрического резонатора [19] для компоненты E_φ или A^e_φ, поскольку $\mathbf{A}^m=0$, $\mathbf{E}=-j\omega\mu_0\boldsymbol{\varphi}_0A^e_\varphi$, а также и для прямоугольного диэлектрического резонатора с функционалом (10). Собственные значения и векторы найдены итерационными алгоритмами типа метода прямой итерации и метода минимальных невязок [22], имеющими при формулировке относительно поля **E** вид

$$k^{(m+1)} = k^{(m)} - \tau_m \, \Delta k^{(m)}, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots, \qquad E^{(l+1)} = E^{(l)} - \varsigma_l \, \Delta E^{(l)}, \qquad l = 0, 1, 2, \ldots . \quad (15)$$

Здесь $\Delta k^{(m)}$ и $\Delta E^{(l)}$ означают невязки волнового числа и решения однородного интегрального уравнения или интегродифференциального уравнения при заданном значении $k^{(m)}$. Например, невязки для функционала (14) и соответствующего ему уравнения имеют вид

$$\Delta k^{(m)} = \Big[(k^{(m)})^2 - \langle E, \check{B} E \rangle \Big/ \langle E, \check{A}(k^{(m)}) E \rangle \Big]^{1/2}, \qquad \Delta E^{(l)} = E^{(l)} - (k^{(m)})^2 B^{-1} A(k^{(m)}) E^{(l)}.$$

Для каждого m делались итерации по l до получения сходимости при заданном «замороженном» значении волнового числа. При $\tau_m = 1$, $\varsigma_l = 1$ имеем метод прямой итерации. Комплексные параметры итераций τ_m, ς_l в методе минимальных невязок находим из условия минимума невязок на следующем шаге. При этом нелинейные задачи поиска минимума заменяем линейными путём замораживания, т. е. линеаризации, зависимости оператора от волнового числа на текущем шаге. Итерационные процедуры сходятся к наименьшему по модулю значению k. Для получения высших мод пробные функции следует подчинять условию ортогональности предыдущим решениям.

4. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Ниже приведены результаты численного исследования цилиндрического диэлектрического резонатора и прямоугольного диэлектрического резонатора как с однородным, так и с неоднородным ε. Для азимутально-симметричных мод цилиндрического диэлектрического резонатора использовано объёмное интегральное уравнение из [12]. Применены итерационные методы одновременного решения объёмного интегрального уравнения или интегродифференциального уравнения совместно с характеристическим уравнением, изложенные в [19]. Ниже приведены также результаты анализа $H_{01\delta}$ и H_{011} мод однородного и неоднородного цилиндрического диэлектрического резонатора. Для их получения использованы метод прямой итерации в форме метода последовательных приближений и метод минимальных невязок с замораживанием значений функции Грина от спектрального параметра на предыдущем шаге. В работе [22] доказана сходимость метода минимальных невязок для неоднородного операторного уравнения $\hat{A}u = f$ при любом начальном приближении для непрерывного линейного оператора $\hat{A}$, если он ограничен снизу. Там же доказана сходимость метода прямой итерации в случае, если $\hat{A} = \mu \hat{I} - \hat{R}$ и комплексный параметр μ находится вне выпуклой оболочки спектра ограниченного оператора $\hat{R}$. В нашем случае условия указанных теорем выполнены, но ищется решение однородного уравнения при нелинейном условии минимизации невязки для функционала. В алгоритмах использованы одномерные кусочно-постоянные, а также дифференцируемые (заданные по трём узлам в виде полиномов второго порядка) конечные элементы [35]. Оба алгоритма сходятся к одним и тем же результатам за несколько итераций по параметру k. Объёмные двумерные конечные элементы строились в виде прямого произведения одномерных конечных элементов. На каждой итерации по k вычислялась зависящая от него матрица с последующим выполнением нескольких итераций для получения решения интегрального уравнения в виде собственной функции, которая затем нормировалась на единицу. Результаты исследования сходимости приведены в [19]. При использовании гладких дифференцируемых конечных элементов размерность задачи при той же точности снижается примерно в 4 раза. Результаты для частот колебаний цилиндрического диэлектрического резонатора примерно на 1÷1,5 % ниже, чем данные из [12], которые дают завышенные значения этих величин и, по-видимому, найдены в нулевом порядке теории возмущений. В частности, результату $f = 5{,}289$ ГГц из [12] соответствует значение $f = 5{,}237524$ ГГц в [19], причём уточнение по методу Эйткена приводит к понижению частоты. С другой стороны, решение самосопряженной задачи с линейным вхождением собственного значения k^{-2}, т. е. задача для функции Грина при $k = 0$, рассмотренными методами даёт значения, почти совпадающие с [12]. Частоты из [12] были сопоставлены с экспериментом из [11] и оказываются несколько ниже экспериментальных значений. Так, в [11] соответствующее значение частоты равно 5,372 ГГц. Оно определялось как частота вынужденного резонанса, которая, как известно, выше частоты собственного резонанса. Для колебаний H_{011} цилиндрического диэлектрического резонатора полученные нами частоты примерно в полтора раза, а добротности более чем на порядок выше, чем для мод низшего типа $H_{01\delta}$, поскольку в первом случае Q связана с магнитно-дипольным излучением, а во втором — с магнитно-квадрупольным. Для мод цилиндрического диэлектрического резонатора по обеим координатам образуются неполные стоячие полуволны. Действительные составляющие поля существенно больше мнимых составляющих, при этом их отношение примерно равно Q. Численно рассчитанные поля хорошо аппроксимируются соответствующими функциями Бесселя, например, $E_\varphi \propto J_1(n\nu\rho/r_0)\cos(\delta\pi z/h)$, где $\nu_1 = 3{,}8317$ — её первый нуль, т. е. $J_1(\nu_1) = 0$. Однако, для моды $H_{01\delta}$ второй индекс $n \neq 1$, как и $\delta \neq 1$. Более того, в силу комплексности k эти индексы тоже комплексные. В [19] также приведены и результаты для цилиндрического диэлектрического резонатора с неоднородном вдоль оси z диэлектриком с зависимостями $\varepsilon(z) = 25\,[1 + \cos(\pi z/h)]$ и $\varepsilon(z) = 1 + 49\cos(\pi z/h)$. Тогда при $z = \pm h/2$, т. е. на торцах цилиндрического диэлектрического резонатора, имеется скачок ε.

С использованием тригонометрического представления полей (2), (5) нами численно исследованы моды кубического диэлектрического резонатора для алгоритмов на основе функционалов (7), (10), (14) и уравнений типа (15). Все результаты совпали с точностью до погрешности вычисления интегралов, которые определялись численно методом средних с разбиением на кубические объёмные конечные элементы. Кубик конечного элемента, для которого имеется особенность, выделялся, а соответствующий ему член заменялся аналитическим значением интеграла по сфере эквивалентного объёма. Численные результаты получены применением метода последовательных приближений и метода минимальных невязок с замораживанием значений k при вычислении параметра итерации для последующего шага. Для разных алгоритмов итерации сошлись к одним и тем же значениям с точностью до погрешности вычисления интегралов. Увеличение числа разбиений повышает точность результатов итераций. Функция $\mathbf{F}$ разлагалась по тригонометрическим функциям, удовлетворяющим условию $\boldsymbol{\nu}\mathbf{F}^* = 0$ на границе.

В табл. 1 с погрешностью не более, чем 0,3 %, приведены данные для чётной по всем коорди-

Таблица 1. Параметры моды $H^{eee}_{\mu\mu\mu}$ кубического диэлектрического резонатора с размерами $2a = 2b = 2c$

ε	f, ГГц	Q	$2ka\sqrt{\varepsilon}$	μ
5	4,9274	3,9800	$4{,}6144 + j\,0{,}57909$	$0{,}84673 + j\,0{,}10515$
10	3,5944	8,0708	$4{,}7508 + j\,0{,}29060$	$0{,}87500 + j\,0{,}05421$
20	2,6057	17,628	$4{,}8813 + j\,0{,}13844$	$0{,}89707 + j\,0{,}02544$
40	1,8768	41,553	$4{,}9721 + j\,0{,}05987$	$0{,}91374 + j\,0{,}01099$
60	1,5435	71,073	$5{,}0079 + j\,0{,}03523$	$0{,}92033 + j\,0{,}00647$
80	1,3421	105,21	$5{,}0285 + j\,0{,}02328$	$0{,}92401 + j\,0{,}00439$
100	1,2024	144,16	$5{,}0366 + j\,0{,}01740$	$0{,}92561 + j\,0{,}00321$
500	0,5408	1508,7	$5{,}0649 + j\,0{,}00160$	$0{,}9308 + j\,0{,}003083$
1 000	0,3841	4140,3	$5{,}0870 + j\,0{,}00061$	$0{,}9348 + j\,0{,}000112$

натам высокодобротной моды кубического диэлектрического резонатора, т. е. в обычных обозначениях, для моды H_{111}. Для неё индекс μ не равен единице и не целый. Более того, он является комплексным, что обусловлено тем, что моды квадратного диэлектрического волновода, на основе которых приближённо описывают моды кубического диэлектрического резонатора, определяются при действительных частотах, тогда как резонансные частоты диэлектрического резонатора комплексные. Тем не менее, значение индекса μ при больших ε по модулю близко к единице, а результаты табл. 1 достаточно хорошо соответствуют данным из [1]. В частности, для прямоугольного диэлектрического резонатора с $2a = 2b = 1{,}088$ см, $2c = 0{,}784$ см и $\varepsilon = 80$ имеем $f = 2\,624$ МГц, $f = 2\,637$ МГц и $f = 2\,644$ МГц для числа разбиений N по областям a_i соответственно 4, 6 и 9. Оценка по методу Эйткена даёт $f = 2\,652$ МГц. Результат из [1] таков: $f = 2\,732$ МГц. Для получения этих результатов использовано представление полей [1], функционал (10) и соответствующее объёмное интегральное уравнение. Заметим, что для основной моды кубического диэлектрического резонатора $\alpha = \beta = \gamma$ и достаточно использовать только один функционал.

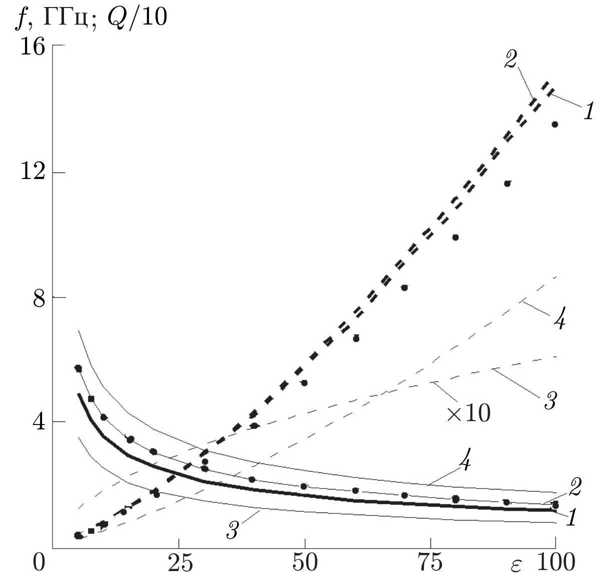

Рис. 1. Резонансные частоты f (сплошные кривые) и добротности Q (штриховые кривые) мод прямоугольного диэлектрического резонатора в зависимости от диэлектрической проницаемости: кривые *1, 2, 3* соответствуют модам $H^{eee}_{\mu\mu\mu}$, $H^{eoo}_{\mu\mu\delta}$, $H^{ooo}_{\mu\mu\delta}$ кубического диэлектрического резонатора для $a = 1$ см; точки и кривая *4* — мода $H^{eee}_{\mu\mu\delta}$ прямоугольного диэлектрического резонатора для $a = b = 1$ см, $c = 0{,}5$ см и $c = 0{,}25$ см соответственно

На рис. 1 представлены данные расчёта для некоторых мод прямоугольного диэлектрического резонатора при $N = 4$ с 64 конечными элементами, что соответствует занижению резонансных частот и завышению добротностей примерно на 1 %. Для однородного прямоугольного диэлектрического резонатора алгоритм с использованием представлений [1] в нашем случае на 2÷3 порядка эффективнее, чем использование объёмных конечных элементов. Видно, что имеются как высокодобротные, так и низкодобротные моды (кривая *3*). В частности, для моды $H^{ooo}_{\mu\mu\delta}$ при $\varepsilon = 100$ с индексами $\mu = 1{,}733 - j\,0{,}0297$, $\delta = 0{,}0762 + j\,1{,}7947$, добротность оказывается низкой. Прямоугольный диэлектрический резонатор с модой $H^{eee}_{z\,\mu\mu\delta}$ приближённо представляет собой два электрических диполя, ориентированных вдоль осей x, y и образованных поверхностными электрическими зарядами на боковых поверхностях, а также перпендикулярный им магнитный диполь. Плотность зарядов связана со скачками компонент E_x и E_y при $x = \pm a$ и $y = \pm b$, которые имеют место, т. к. $\mu \neq 1$. Токи поляризации диполей сдвинуты по фазе на π. Излучение в основном дипольное, магнитно-дипольное и квадрупольное. Если $a \neq b$ при сохранении объёма, то в излучении моды $H^{eee}_{z\,\mu\nu\delta}$ дипольная компонента увеличивается по сравнению с квадрупольной, а добротность падает. Следует заметить, что аналогичные результаты демонстрируют и расчёты цилиндрического диэлектрического резонатора [19].

Рассмотрим цилиндрический диэлектрический резонатор и прямоугольный диэлектрический резонатор с полупроводниковыми слоями на торцах, имеющими диэлектрическую проницаемость, определяемую в модели однокомпонентной полупроводниковой плазмы:

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_{\mathrm{r}} - \omega_{\mathrm{p}}^2/[\omega\,(\omega - j\omega_{\mathrm{c}})]. \qquad (16)$$

Здесь $\varepsilon_{\mathrm{r}} \sim 10$ — диэлектрическая проницаемость кристаллической решётки, ω_{p}, ω_{c} — плазменная частота и частота столкновений электронов, зависящие от их концентрации и эффективной массы. Дырками в силу их малой подвижности пренебрегаем. Для высокоомного полупроводника ширина запрещённой зоны W большая. В отсутствие освещения при комнатной температуре концентрация электронов невелика, и второй член в (16) по модулю мал по сравнению с ε_{r}. Для полупроводника GaAs $W = 1{,}428$ эВ. При освещении лазером с частотой $\omega_0 \sim W/\hbar \sim 3{,}5 \cdot 10^{14}$ Гц при большой интенсивности концентрация носителей и ω_{p} возрастают на несколько порядков. При комнатной температуре $\omega_{\mathrm{c}} \sim 5 \cdot 10^{12}$ Гц, тогда как характерные частоты в (16) имеют порядок $\omega \sim 3 \cdot 10^{10}$ Гц. При облучении растёт концентрация и ω_{c}. Обычно $\omega \ll \omega_{\mathrm{c}}$, и $\varepsilon(\omega) = \varepsilon_{\mathrm{r}} - j\omega_{\mathrm{p}}^2/(\omega\omega_{\mathrm{c}}) = \varepsilon_{\mathrm{r}} - j\sigma/(\omega\varepsilon_0)$. Для GaAs при комнатной температуре $\varepsilon \sim 13{,}3 - j \cdot 10^{-4}$, т. е. $\omega_{\mathrm{p}} = 4 \cdot 10^9$ Гц, $\sigma \sim 2{,}75 \cdot 10^{-5}$ См/м, и мы имеем почти диэлектрик. Для получения металлических свойств необходимо на несколько порядков увеличить ω_{p}. Так, её увеличение в 10^9 раз даёт $\sigma \sim 2{,}75 \cdot 10^4$ См/м, при этом толщина скин-слоя $\delta \sim 10^{-1}$ мм. Таким образом, толщина полупроводникового слоя 0,3 мм обеспечивает эффективную экранировку почти как металлический экран. В случае идеально проводящих экранов при $z = \pm h/2$ имеем дисперсионное уравнение для моды H_{0n1} экранированного цилиндрического диэлектрического резонатора [33]:

$$\frac{J_1[r_0\sqrt{k^2\varepsilon - (\pi/h)^2}]}{J_0[r_0\sqrt{k^2\varepsilon - (\pi/h)^2}]} = \frac{\sqrt{k^2 - (\pi/h)^2}\, H_1^{(2)}[r_0\sqrt{k^2 - (\pi/h)^2}]}{\sqrt{k^2\varepsilon - (\pi/h)^2}\, H_0^{(2)}[r_0\sqrt{k^2 - (\pi/h)^2}]}\,. \tag{17}$$

При импедансных экранах следует использовать более общее уравнение из [33]. Уравнение (17) соответствует H_{0n}-модам диэлектрического волновода того же сечения при замене $\pi/h \to \gamma(k)$. Если при данном действительном k выполняется соотношение $\gamma(k) = \pi/h$, колебания не имеют радиационных потерь. При этом $\pi/(h\sqrt{\varepsilon}) < k < \pi/h$, и правая часть (17) действительная. Это условие выполняется, если частота больше критической частоты H_{0n}-моды, т. е. при не слишком больших h. Для данной моды $n = r_0\sqrt{k^2 - (\pi/h)^2}\,/\nu_1$. Величина n, вообще говоря, не равна единице. Более того, она может быть комплексной. В случае $\gamma(k) = k = \pi/h$ имеет место отсечка, при этом правая часть (17) обращается в нуль, поле вне цилиндрического диэлектрического резонатора не зависит от ρ, $n = 1$ и $k = \pi/h = \nu_1/(r_0\sqrt{\varepsilon - 1})$. Колебания здесь аналогичны моде резонатора Фабри—Перо, возмущённой в центре цилиндрическим диэлектрическим резонатором. При $h > \pi r_0\sqrt{\varepsilon - 1}\,/\nu_1$ резонансная частота становится комплексной. Поскольку указанная мода характеризуется в основном магнитно-дипольным излучением, формула (17) хорошо описывает моду $H_{0n\delta}$ открытого цилиндрического диэлектрического резонатора с экранированными торцами, поскольку для обеих мод излучение идёт в сторону возрастания координаты ρ. Однако, их резонансные частоты и добротности отличаются. Для получения более точного уравнения воспользуемся объёмно-поверхностным интегральным уравнением. Ток поляризации $j\omega\varepsilon\,(\varepsilon - 1)\,E_\varphi(\rho, z)$ создаёт на металлических торцах поверхностные токи

$$J_\varphi(\rho) = AJ_1(\alpha\rho)/\sqrt{1 - (\rho/r_0)^2}\,. \tag{18}$$

Соотношение (18) соответствует идеально проводящему торцу. Если торец имеет конечный поверхностный импеданс Z_s, ток на кромке не обращается в бесконечность, но при малом Z_s и $\rho \to r_0$ может сильно возрастать. Это можно учесть, сделав в (18) замену $r_0 \to r_0' = r_0 + \Delta r_0$. Поле внутри цилиндрического диэлектрического резонатора хорошо аппроксимируется функцией

$$E_\varphi(\rho, z) = BJ_1[\rho\sqrt{k^2\varepsilon - (\pi/h)^2}]\cos(\pi z/h). \tag{19}$$

Тогда с высокой степенью точности имеем интегральное представление

$$E_\varphi(\rho,z)=\frac{Ak^2}{j\omega\varepsilon_0}\int\limits_0^{r_0}\left[\bar G(\rho,z/2\mid\rho',h/2)+\bar G(\rho,z/2\mid\rho',-h/2)\right]J_1(\alpha\rho')\rho'\,\mathrm{d}\rho'+$$
$$+Bk^2\int\limits_0^{r_0}\int\limits_{-h/2}^{h/2}\bar G(\rho,z\mid\rho',z')J_1[\rho'\sqrt{k^2\varepsilon-(\pi/h)^2}]\cos(\pi z'/h)\rho'\,\mathrm{d}\rho'\,\mathrm{d}z'. \quad (20)$$

Здесь ядро $\bar G$ определено в [12, 19]. Внутри цилиндрического диэлектрического резонатора оно должно совпадать с (19), а на торцах обращаться в нуль. Умножая (20) на (18) и интегрируя по поверхности торца, имеем

$$Z_sA\int\limits_0^{r_0}\frac{J_1^2(\alpha\rho)}{1-(\rho/r_0')^2}\,\mathrm{d}\rho=$$
$$=\frac{Ak^2}{j\omega\varepsilon_0}\int\limits_0^{r_0}\int\limits_0^{r_0}\frac{J_1(\alpha\rho)}{\sqrt{1-(\rho/r_0')^2}}\left[\bar G(\rho,h/2\mid\rho',h/2)+\bar G(\rho,h/2\mid\rho',-h/2)\right]J_1(\alpha\rho')\rho'\rho\,\mathrm{d}\rho'\,\mathrm{d}\rho+$$
$$+Bk^2\int\limits_0^{r_0}\int\limits_{-h/2}^{h/2}\frac{J_1(\alpha\rho)}{\sqrt{1-(\rho/r_0')^2}}\bar G(\rho,h/2\mid\rho',z')J_1[\rho'\sqrt{k^2\varepsilon-(\pi/h)^2}]\cos(\pi z'/h)\rho'\,\mathrm{d}\rho'\,\mathrm{d}z'\,\rho\,\mathrm{d}\rho.$$

Перенося все члены влево, получаем уравнение $AD_{11}(k,\alpha,\Delta r_0)+BD_{12}(k,\alpha,\Delta r_0)=0$. Аналогично, умножая (20) на (19) и интегрируя по объёму цилиндрического диэлектрического резонатора, получим

$$B\int\limits_0^{r_0}\int\limits_{-h/2}^{h/2}J_1^2[\rho\sqrt{k^2\varepsilon-\pi^2/h^2}]\cos^2(\pi z/h)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z=$$
$$=\int\limits_0^{r_0}\int\limits_0^{r_0}\int\limits_{-h/2}^{h/2}J_1(\rho\sqrt{k^2\varepsilon-\pi^2/h^2})\cos(\pi z/h)\left\{\frac{Ak^2J_1(\alpha\rho')}{j\omega\varepsilon_0}[\bar G(\rho,z\mid\rho',h/2)+\bar G(\rho,z\mid\rho',-h/2)]+\right.$$
$$\left.+\,Bk^2\int\limits_{-h/2}^{h/2}\bar G(\rho,z\mid\rho',z')J_1(\rho'\sqrt{k^2\varepsilon-\pi^2/h^2})\cos(\pi z'/h)\,\mathrm{d}z'\right\}\rho\,\mathrm{d}\rho\,\rho'\,\mathrm{d}\rho'\,\mathrm{d}z.$$

Перенося члены влево, запишем полученное уравнение так: $AD_{21}(k,\alpha,\Delta r_0)+BD_{22}(k,\alpha,\Delta r_0)=0$. Поэтому характеристическое уравнение принимает вид

$$\Delta(k,\alpha,\Delta r_0)=D_{11}(k,\alpha,\Delta r_0)D_{22}(k,\alpha,\Delta r_0)-D_{12}(k,\alpha,\Delta r_0)D_{22}(k,\alpha,\Delta r_0). \quad (21)$$

В табл. 2 приведены результаты влияния металлизации на резонансные частоты и добротности рассмотренных мод для $\varepsilon=38$ и $r_0=0{,}5$ см. В случае идеальной металлизации высота h соответствует диэлектрику, а при наличии покрытия включает в себя два его слоя. Для рассмотренных проводимостей слой ведёт себя либо как диэлектрик с малыми потерями, либо как

Таблица 2. Резонансные частоты и добротности цилиндрического диэлектрического резонатора при $\varepsilon = 38$, $r_0 = 0{,}5$ см и толщине слоя полупроводникового покрытия на обоих торцах 0,05 см с различной проводимостью σ, См/м

Модель расчёта цилиндрического диэлектрического резонатора	$h = 0{,}7$ см		$h = 2{,}4936$ см		$h = 3{,}0$ см	
	f, ГГц	Q	f, ГГц	Q	f, ГГц	Q
Модель (6) без слоёв полупроводника	4,7803	66,8145	3,8341	16,1571	3,7779	14,2663
Модель (6) с проводимостью слоёв $\sigma = 2{,}75 \cdot 10^{-5}$	4,8036	26,9317	4,0233	33,7147	3,8834	24,2014
Модель (6) с проводимостью слоёв $\sigma = 2{,}75 \cdot 10^{-3}$	4,7998	26,2673	3,6525	10,4787	3,7640	13,5087
Модель (6) с проводимостью слоёв $\sigma = 2{,}75 \cdot 10^{1}$	0,8519	0,5101	0,7533	0,5157	0,9707	0,5308
Модель (6) с одним идеальным экраном, $\sigma = \infty$	5,6904	118,0427	4,0368	39,5508	3,8824	24,2014
Модель (21) с двумя идеальными экранами, $\sigma = \infty$	7,3188	∞	6,0113	∞	5,9943	19,068
Модель (27) с идеальной металлизацией торцов	6,1949	169,9881	4,7868	48,4610	3,9179	26,6215

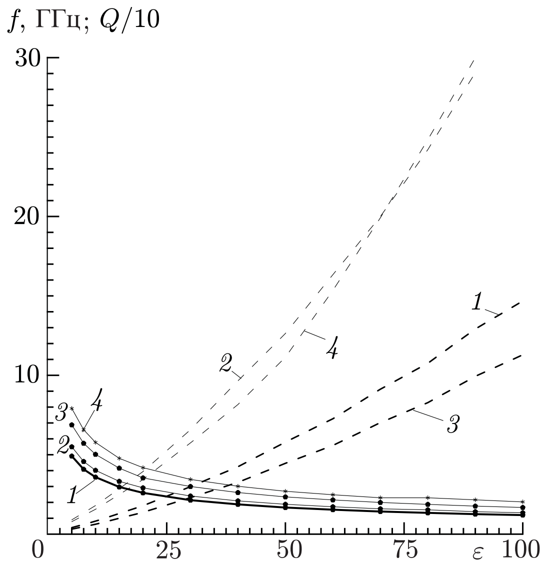

Рис. 2. Резонансные частоты f (сплошные кривые) и добротности Q (штриховые кривые) основной H-моды прямоугольного диэлектрического резонатора в зависимости от диэлектрической проницаемости: кривые *1*, *3* — $a = b = c = 1$ см и $a = b = 2c = 1$ см соответственно; кривые *2*, *4* — $a = b = c = 1$ см и $a = b = 2c = 1$ см при металлизации торцов

материал с большой мнимой частью диэлектрической проницаемости, т. е. как резистивный слой, причём глубина проникновения поля существенно больше его толщины. Численный предельный переход на основе интегрального уравнения к металлическим свойствам, т. е. $\sigma \to \infty$, весьма затруднителен, поскольку шаг дискретизации по z должен быть меньше толщины скин-слоя, и порядок задачи становится весьма большим. Проще воспользоваться объёмно-поверхностным уравнением. На рис. 2 представлены результаты для прямоугольного диэлектрического резонатора с металлизацией на торцах $z = \pm c/2$. Использован функционал (10) с $\alpha = \beta$ и $\gamma = \pi/(2a)$.

ВЫВОДЫ

Рассмотрены интегральные уравнения и интегродифференциальные уравнения, описывающие квазисобственные колебания диэлектрического резонатора, конкретизированные для цилиндрического диэлектрического резонатора и прямоугольного диэлектрического резонатора. Предложены и реализованы эффективные связанные итерационные алгоритмы решения задач на собственные значения. Исследовано влияние расположенных на торцах металлизированных плёнок на резонансные частоты и добротности симметричных H-мод цилиндрического диэлектрического резонатора и прямоугольного диэлектрического резонатора. Показана эффективность оптического управления частотами и добротностями путём засветки мощным лазером нанесённых на торцы тонких высокоомных полупроводниковых плёнок. Это позволяет перестраивать резонансные частоты на десять и и более процентов, а также изменять добротности в широких пределах. В реальных конструкциях диэлектрические резонаторы расположены на элементах крепления, при этом в качестве бесконечного экрана достаточно брать пластину, площадь которой на порядок превышает площадь торца. Обобщение приведённых уравнений при наличии бесконечного идеально проводящего экрана получается методом изображений для скалярной функции Грина, что, в частности, использовано для моды H_{011}. Для двух параллельных экранов необходимо учитывать бесконечное число изображений. Диэлектрический резонатор в прямоугольном волноводе и в прямоугольном экране анализируется методом быстро сходящихся двумерных и трёхмерных изображений [34]. Применяемая обычно классификация мод, связанная с экранированными резонаторами [1], не является удачной: используемые для этого индексы не только не целые, но даже комплексные в силу комплексности частот.

Часть результатов работы была доложена на четырнадцатой зимней школе по СВЧ электронике и радиофизике (Саратов, 2009).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильченко М. Е., Взятышев В. Ф., Гассанов Л. Г. и др. Диэлектрические резонаторы. М.: Радио и связь, 1989. 328 с.
2. Müller C. Foundation of the mathematical theory of electromagnetic waves. Berlin: Springer-Verlag, 1969.
3. Вайнштейн Л. А. Открытые резонаторы и открытые волноводы. М.: Сов. радио, 1966. 476 с.
4. Ваганов Р. Б., Каценеленбаум Б. З. Основы теории дифракции. М.: Наука, 1982. 272 с.
5. Вычислительные методы в электродинамике. М.: Мир, 1977. 486 с.
6. Васильев Е. Н. Возбуждение тел вращения. М.: Радио и связь, 1987. 272 с.
7. Хижняк Н. А. Интегральные уравнения макроскопической электродинамики. Киев: Наукова думка, 1986. 280 с.
8. Дмитриев В. И., Захаров Е. В. Интегральные уравнения в краевых задачах электродинамики. М.: Изд-во МГУ, 1987. 167 с.
9. Хижняк Н. А. // ЖТФ. 1958. Т. 28, № 7. С. 1 592.
10. Van Bladel J. // IEEE Trans. MTT. 1975. V. 23, No. 2. P. 199.
11. Guillon P., Garault Y. // IEEE Trans. MTT. 1977. V. 25, No. 11. P. 916.
12. Гольдберг Л. Б., Пензяков В. В. // Радиотехника и электроника. 1982. Т. 27, № 9. С. 1 735.
13. Glisson A. W., Kajfez D., James S. J. // IEEE Trans. MTT. 1983. V. 31, No. 12. P. 1 023.
14. Mongia R. K. // IEE Proc.-H. 1992. V. 139, No. 1. P. 98.

15. Mongia R. K., Ittipiboon A., Cuhaci M., Roscoe D. // IEEE Conf. Publ. V. 2. 1994. Antennas and Propagation Society Intern. Symp. 1994. P. 764.
16. Ke S. Y., Cheng Y. T. // IEEE Trans. MTT. 2001. V. 49, No. 3. P. 571.
17. Neshati M. H., Wu Z. // IEE Conf. Publ. 2001. V. 480. 11th Intern. Conf. Antennas and Propagation, 17–20 April 2001. P. 53.
18. Liu Y., Safavi-Naeini S., Chaudhuri S. K., Sabry R. // IEEE Trans. AP. 2004. V. 52, No. 1. P. 327.
19. Давидович М. В. // Изв. Саратовского университета. Новая серия. 2008. Сер. Физика. Т. 8, № 1. С. 3.
20. Davidovich M. V. // Modeling in applied electromagnetics and electronics. Saratov University Press, 2009. Iss. 9. P. 37.
21. Давидович М. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 2006. Т. 49, № 2. С. 150.
22. Самохин А. Б. Интегральные уравнения и итерационные методы в электромагнитном рассеянии. М.: Радио и связь, 1998. 160 с.
23. Davidovich M. V. // Modeling in applied electromagnetics and electronics. Saratov University Press, 2006. Iss. 7. P. 30.
24. Марков Г. Т., Чаплин А. Ф. Возбуждение электромагнитных волн. М.: Радио и связь, 1983. 296 с.
25. Mayergoyz I. D. // IEEE Trans. Magn. 1993. V. 29, No. 2. P. 1301.
26. Савин М. Г. Проблема калибровки Лоренца в анизотропных средах. М.: Наука, 1979. 123 с.
27. Пискунов К. П. // Электромагнитные волны и электронные системы. 2004. Т. 9, № 12. С. 26.
28. Doncker P. D. // IEEE Trans. Antennas Propagat. 2001. V. 49, No. 7. P. 1 037.
29. Nisbet A. // Proc. Roy. Soc. Lond. A. Math. Phys. Sci. 1957. V. 240. P. 375.
30. Sarma M. S. // IEEE Trans. Magnet. 1970. V. 6, No. 3. P. 513.
31. Давидович М. В. // ЖТФ. 2006. Т. 76, № 1. С. 13.
32. Альтшулер Е. Ю., Давидович М. В., Стефюк Ю. В. // Радиотехника и электроника. 2010. Т. 55, № 1. С. 155.
33. Давидович М. В., Сучков С. Г., Хитрин В. С. // Проектирование радиоэлектронных устройств на диэлектрических волноводах и резонаторах: Тез. докл. Всесоюзн. научно-техн. конф., Тбилиси, 1988. С. 260.
34. Давидович М. В. // Радиотехника и электроника. 2001. Т. 46, № 10. С. 1 198.

Поступила в редакцию 6 мая 2009 г.; принята в печать 23 апреля 2010 г.

ITERATION METHODS AND ALGORITHMS FOR DIELECTRIC-RESONATOR INTEGRAL EQUATIONS

M. V. Davidovich and J. V. Stephyuk

Quasi-eigenmodes of open cylindrical and rectangular dielectric resonators (DRs) are determined by the method of iteration solution of the volume integral and integro-differential equations with corresponding functionals. New forms of equations and iteration algorithms for the nonlinear input of the desired complex parameter are proposed. Frequencies and Q-factors of the $H_{01\delta}$ and H_{011} modes of a cylindrical DR and the H mode of a rectangular DR for the uniform and nonuniform cases are obtained numerically. The influence of a thin semiconductor layer located at the ends of the DR and irradiated by high-power laser pulses on the frequencies and Q-factors of the DR modes is examined. It is shown that an up to ten or more percent retuning can be reached by transformation of a low conducting state to a high conducting state.