

УДК 537.86:530.182

МЕТОД РАСЧЁТА ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ ДИСКРЕТНОГО ВРЕМЕНИ ПРИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВНЕШНИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Ю. А. Брюханов

Ярославский госуниверситет им. П. Г. Демидова, г. Ярославль, Россия

Рассмотрен метод расчёта вынужденных колебаний в нелинейных системах дискретного времени при периодических внешних воздействиях. Метод основан на представлении стационарных колебаний в виде инвариантного множества нелинейных дискретных точечных отображений и позволяет рассчитывать реакцию нелинейной системы в установившемся режиме. Приведены примеры использования метода для расчёта вынужденных колебаний в нелинейных рекурсивных системах первого и второго порядков при воздействии на такие системы гармонического сигнала.

ВВЕДЕНИЕ

Динамические системы дискретного времени широко используются в современных цифровых технологиях передачи сигналов. Классическим примером таких систем являются цифровые фильтры [1]. Важной характеристикой динамических систем является их поведение под действием внешней силы, т. е. вынужденные колебания [2]. В частности, зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты гармонической внешней силы даёт важную информацию о частотных свойствах динамической системы.

Вынужденные колебания в линейных системах дискретного времени и частотные свойства таких систем исследованы в работах [3–7]. Вместе с тем реальные системы дискретного времени нелинейны. Нелинейность обусловлена необходимостью аппроксимации (квантования) результатов арифметических операций (сложения и умножения), выполняемых в процессе работы таких систем. Круг задач, решённых для неавтономных нелинейных систем дискретного времени, значительно уже. В работах [8, 9] исследована динамика нелинейных цифровых рекурсивных цепей первого и второго порядков при постоянном внешнем воздействии, а в работе [10] рассмотрены процессы в цифровой рекурсивной системе второго порядка с бинарным квантованием при постоянном и периодическом внешних воздействиях. В каждой из них используется оригинальный подход, своя методика, применимая для данной задачи.

Целью настоящей работы является разработка метода расчёта вынужденных колебаний в нелинейных системах дискретного времени при периодических внешних воздействиях.

Системы дискретного времени реализуются в прямой, каскадной и параллельной формах [1, 3]. Структурная схема нелинейной рекурсивно-нерекурсивной системы, реализуемой в прямой форме, изображена на рис. 1. Здесь z^{-1} — элементы задержки, a_i и b_i — множители в нерекурсивной и рекурсивной частях системы соответственно, блоки $f_1(\varphi)$ и $f_2(\varphi)$ определяют вид характеристик нелинейных элементов — квантователей сумматора и множителей соответственно. Колебания в такой системе порядка G с учётом квантования результатов сложения и умножения описываются разностным уравнением

$$y(n + G) = f_1 \left[\sum_{i=1}^G \{ f_2 [b_{G+i-1} y(n + 1 - i)] + f_2 [a_{G+1-i} x(n + i - 1)] \} + x(n + G) \right], \quad (1)$$

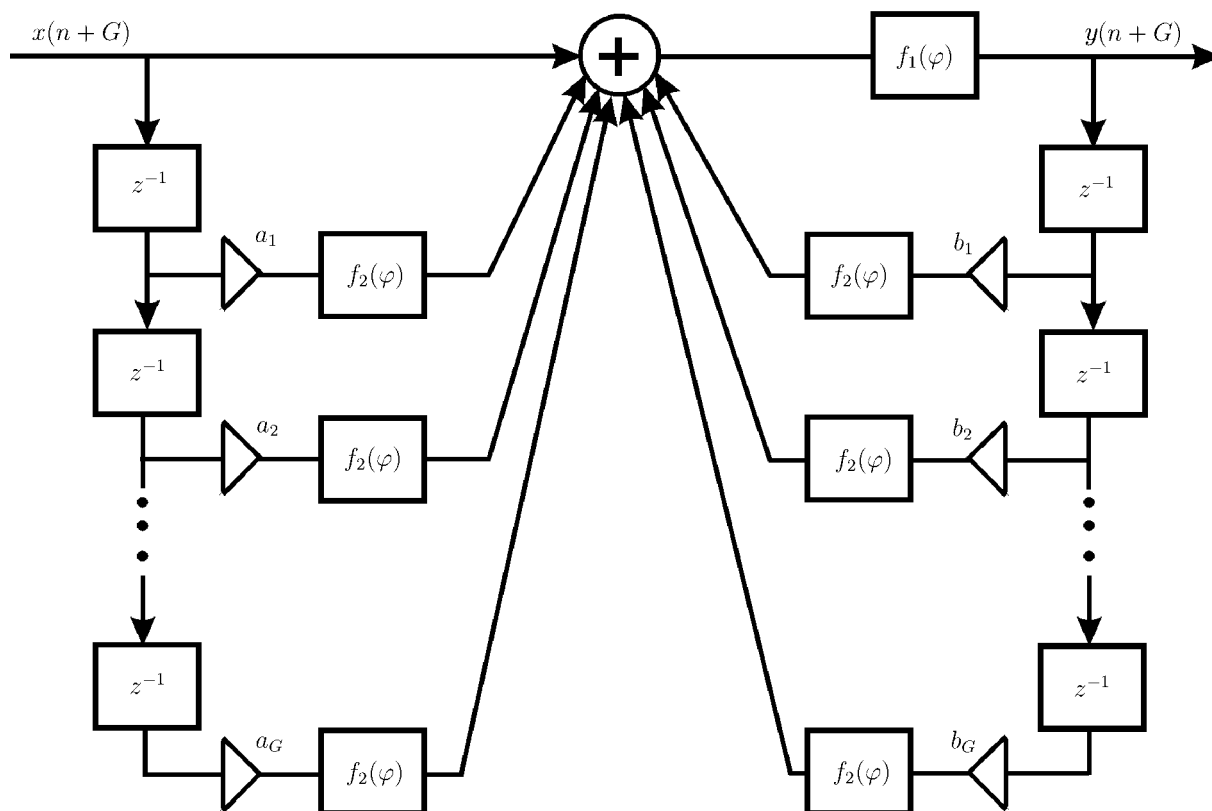


Рис. 1. Структурная схема нелинейной рекурсивно-нерекурсивной системы, реализуемой в прямой форме

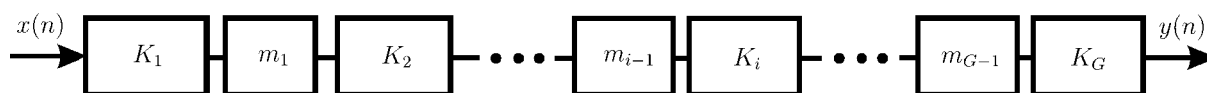


Рис. 2. Блок-схема каскадной реализации системы дискретного времени

где $y(n)$ — реакция системы, $x(n)$ — входное воздействие.

На рис. 2 приведена блок-схема каскадной реализации системы дискретного времени. Здесь K_i — i -й каскад, m_i — весовые коэффициенты между каскадами, обеспечивающие требуемый динамический диапазон системы. При последовательном соединении нелинейных рекурсивно-нерекурсивных цепей первого порядка колебания на выходе i -го каскада описываются уравнением

$$y_i(n+1) = f_1[f_2[b_{1i}y_i(n)] + f_2[a_{1i}m_{i-1}y_{i-1}(n)] + m_{i-1}y_{i-1}(n+1)]. \quad (2)$$

Здесь b_{1i} и a_{1i} — умножители в рекурсивной и нерекурсивной частях цепи первого порядка соответственно, $i \geq 2$. Если $i = 1$, то имеем

$$y_1(n+1) = f_1[f_2[b_{11}y_1(n)] + f_2[a_{11}x(n)] + x(n+1)]. \quad (3)$$

Колебания на выходе i -го каскада последовательно соединённых нелинейных рекурсивно-нерекурсивных цепей второго порядка характеризуются уравнением

$$y_i(n+2) = f_1\{f_2[b_{1i}y_i(n+1)] + f_2[b_{2i}y_i(n)] + m_{i-1}y_{i-1}(n+2) +$$

$$+ f_2[a_{1i}m_{i-1}y_{i-1}(n+1)] + f_2[a_{2i}m_{i-1}y_{i-1}(n)]\}. \quad (4)$$

Здесь b_{1i} , b_{2i} и a_{1i} , a_{2i} — множители в рекурсивной и нерекурсивной частях цепи второго порядка соответственно, $i \geq 2$, а при $i = 1$ имеем

$$y_1(n+2) = f_1\{f_2[b_{11}y_1(n+1)] + f_2[b_{21}y_1(n)] + x(n+2) + f_2[a_{11}x(n+1)] + f_2[a_{21}x(n)]\}. \quad (5)$$

Уравнения (1)–(5) позволяют рассчитывать процессы на выходе нелинейных систем дискретного времени, однако для расчёта k -й итерации необходимо вычисление всех предыдущих итераций. А при исследовании периодических режимов как реакции на периодическое воздействие необходима информация об установившихся колебаниях, которые имеют место после окончания переходных процессов, длительность которых в системах с высокой избирательностью достаточно велика и для нелинейных систем заранее неизвестна. Последнее обстоятельство и обуславливает необходимость разработки метода расчёта вынужденных колебаний в нелинейных системах дискретного времени при периодических внешних воздействиях.

1. РАЗРАБОТКА МЕТОДА

Преобразуем уравнения колебаний (1)–(5) в уравнения состояний. Тогда для прямой формы вместо (1) получим

$$\sum_{i=1}^G y_i(n+1) = y_{i+1}(n),$$

$$y_G(n+1) = f_1 \left[\sum_{i=1}^G f_2[b_i y_{G+1-i}(n)] + f_2[a_{G+1-i}x(n-1+i)] + x(n+G) \right], \quad (6)$$

а для последовательного соединения $\mathbf{G}$ каскадов первого порядка вместо (2), (3) получим

$$y_{11}(n+1) = f_1[f_2[b_{11}y_{11}(n)] + f_2[a_{11}x(n)] + x(n+1)],$$

$$\sum_{i=2}^G y_{1i}(n+1) = f_1[f_2[b_{1i}y_{1i}(n)] + f_2[a_{1i}m_{i-1}y_{1i-1}(n)] + m_{i-1}y_{1i-1}(n+1)], \quad (7)$$

где y_{1i} — значение переменной y_1 в i -ом каскаде первого порядка.

Для последовательного соединения $\mathbf{G}$ каскадов второго порядка уравнение состояний согласно (4) и (5) примет вид

$$\sum_{i=1}^G y_{1i}(n+1) = y_{2i}(n),$$

$$y_{21}(n+1) = f_1[f_2[b_{11}y_{21}(n)] + f_2[b_{21}y_{11}(n)] + f_2[a_{21}x(n)] + f_2[a_{11}x(n+1)] + x(n+2)],$$

$$\sum_{i=2}^G y_{2i}(n+1) = f_1[f_2[b_{1i}y_{2i}(n)] + f_2[b_{2i}y_{1i}(n)] + f_2[a_{2i}m_{i-1}y_{1i-1}(n)] +$$

$$+ f_2[a_{1i}m_{i-1}y_{2i-1}(n)] + m_{i-1}y_{2i-1}(n+1)], \quad (8)$$

где y_{1i} и y_{2i} — значения переменных y_1 и y_2 в i -ом каскаде второго порядка соответственно.

С позиции многомерных точечных отображений [11] уравнения (6)–(8) описывают нелинейные дискретные отображения некоторой точки $Y(n)$ G -мерного пространства в точку $Y(n+1)$, т. е.

$$Y(n+1) = F[Y(n)], \quad (9)$$

где F — функция последования. При периодическом воздействии стационарный режим характеризуется последовательностью инвариантных (неподвижных) точек дискретного отображения

$$Y^*(0), F^1[Y^*(0)], \dots, F^i[Y^*(0)], \dots, F^{T-1}[Y^*(0)], \quad (10)$$

где $F^i[Y^*(0)]$ означает i -кратное применение отображения (9), $T = T_c/T_d$, T_c — период входного воздействия (сигнала), T_d — период дискретизации, $T \geq 2$ — целое число.

Ключевым для расчёта стационарного режима является соотношение

$$F[Y^*(T-1)] = Y^*(0). \quad (11)$$

Применительно к нелинейной рекурсивно-нерекурсивной системе порядка G , реализуемой в прямой форме, согласно (6) это означает выполнение системы равенств

$$\sum_{i=1}^{G-1} y_i(0) = y_{i+1}(T-1),$$

$$y_G(0) = f_1 \left\{ \sum_{i=1}^G f_2 [b_i y_{G+1-i}(T-1)] + f_2 [a_{G+1-i} x(T-2+i) + x(T-1+G)] \right\}. \quad (12)$$

Эти соотношения вместе с уравнениями состояний (6) позволяют определить значение $y_i(0)$. Далее, опять используя (6), находим все необходимые инвариантные точки от $y_i(1)$ до $y_i(T-1)$.

Соответствующие выражения получаются согласно (7) для последовательно соединённых G нелинейных цепей первого порядка

$$y_{11}(0) = f_1 [f_2 [b_{11} y_{11}(T-1)] + f_2 [a_{11} x(T-1)] + x(0)]$$

$$\sum_{i=2}^G y_{1i}(0) = f_1 [f_2 [b_{1i} y_{1i}(T-1)] + f_2 [a_{1i} m_{i-1} y_{1i-1}(T-1)] + m_{i-1} y_{1i-1}(0)] \quad (13)$$

и согласно (8) для последовательно соединённых G нелинейных цепей второго порядка

$$\sum_{i=1}^G y_{1i}(0) = y_{2i}(T-1)$$

$$y_{21}(0) = f_1 [f_2 [b_{11} y_{21}(T-1)] + f_2 [b_{21} y_{11}(T-1)] + f_2 [a_{21} x(T-1)] + f_2 [a_{11} x(0)] + x(1)]$$

$$\sum_{i=2}^G y_{2i}(0) = f_1 [f_2 [b_{1i} y_{2i}(T-1)] + f_2 [b_{2i} y_{1i}(T-1)] + f_2 [a_{2i} m_{i-1} y_{1i-1}(T-1)] +$$

$$+ f_2 [a_{1i} m_{i-1} y_{2i-1}(T-1)] + m_{i-1} y_{2i-1}(0)]. \quad (14)$$

Таким образом, согласно предлагаемому методу, для расчёта вынужденных колебаний в нелинейных системах дискретного времени при периодических внешних воздействиях необходимо выполнить следующие операции. Сначала находим инвариантную точку $\mathbf{Y}^*(0)$. Для этого совместно решаем уравнение состояния системы и соответствующие ему уравнение из (12)–(14). Далее, используя уравнение состояний, рассчитываем все инвариантные точки от $\mathbf{Y}^*(1)$ до $\mathbf{Y}^*(T-1)$, которые и составляют искомую реакцию системы.

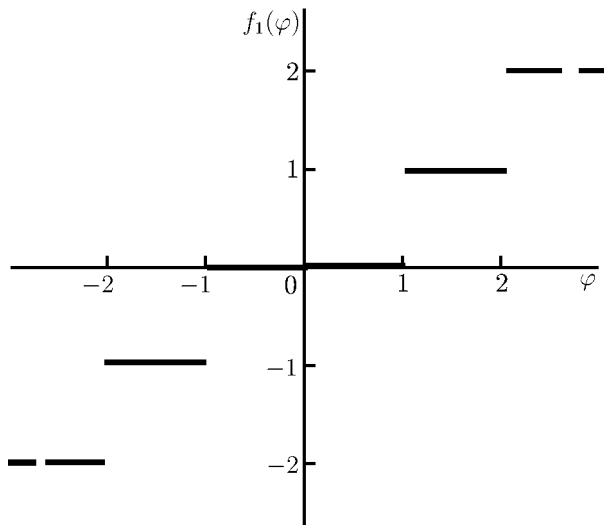


Рис. 3. Характеристика нелинейного элемента (квантователя)

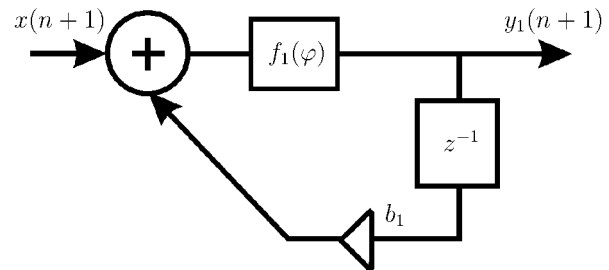


Рис. 4. Структурная схема рекурсивной системы первого порядка

2. ПРИМЕРЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МЕТОДА

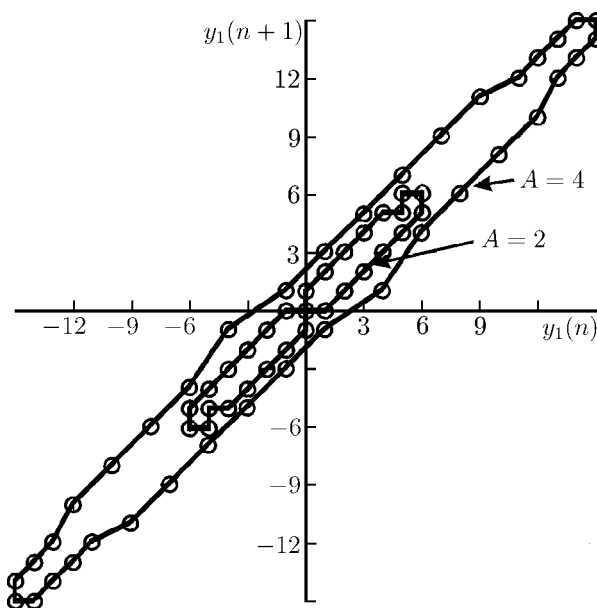


Рис. 5. Траектории движений (вынужденных колебаний) в нелинейной рекурсивной системе первого порядка при гармоническом входном воздействии

Используем предложенный метод для расчёта вынужденных колебаний в нелинейных рекурсивных системах первого и второго порядков при периодических воздействиях вида $x(n) = A \cos(\omega n)$, где $\omega = 2\pi/T$. Полагаем, что характеристика квантователя сумматора выражается функцией $f_1(\varphi) = [\varphi]$. Здесь квадратные скобки обозначают целую часть числа (см. рис. 3), т. е. используется ступенчатая нелинейность, характерная для нелинейности квантователя, когда для представления чисел в системе применяется прямой код с усечением. Полагаем, что характеристика умножителя линейна, т. е. $f_2(\varphi) = \varphi$.

Структурная схема рекурсивной системы первого порядка изображена на рис. 4. Уравнение состояний системы согласно (6) имеет вид

$$y_1(n+1) = f_1[b_1 y_1(n) + x(n+1)],$$

а вынужденным колебаниям согласно соотношению (12) соответствует равенство

$$y_1(0) = f_1[b_1 y_1(T-1) + x(0)].$$

На рис. 5 изображены траектории движений (вынужденных колебаний) $y_1(n+1) = F[y_1(n)]$, рассчитанные при $T = 40$, коэффициенте $b_1 = 0,8$ для $A \in \{2; 4\}$, что соответствует двум значениям числа уровней квантования $L \in \{13; 31\}$. Заметим, что при выбранном значении b_1 данная рекурсивная система является фильтром нижних частот.

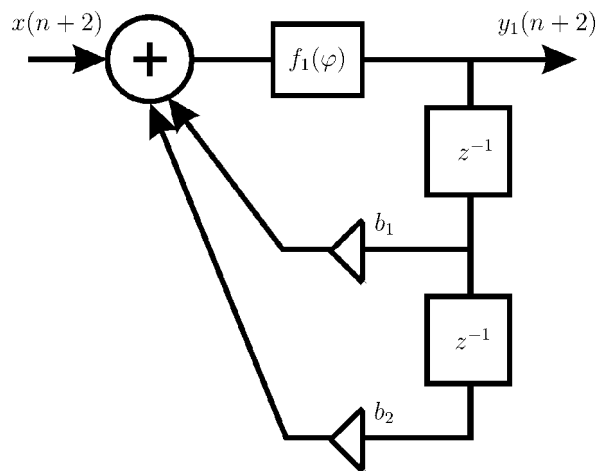


Рис. 6. Структурная схема рекурсивной системы второго порядка

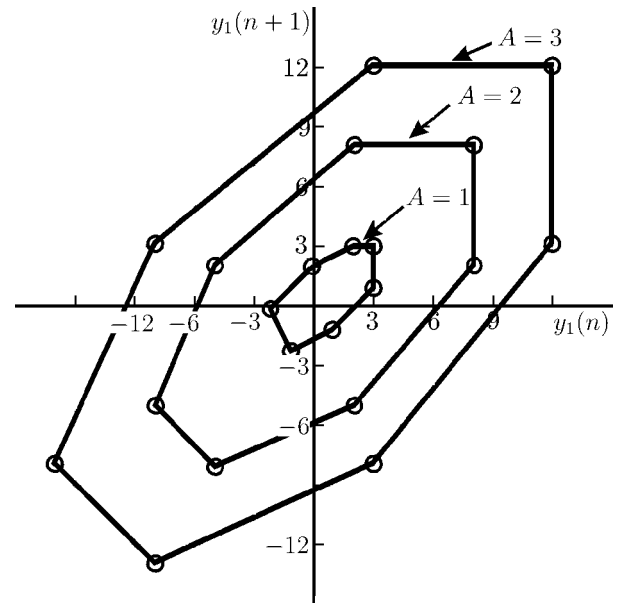


Рис. 7. Траектории движений (вынужденных колебаний) в нелинейной рекурсивной системе второго порядка при гармоническом входном воздействии

Структурная схема рекурсивной системы второго порядка изображена на рис. 6. Уравнение состояний системы согласно (6) имеет вид

$$\begin{aligned} y_1(n+1) &= y_2(n) \\ y_2(n+1) &= f_1[b_1 y_2(n) + b_2 y_1(n) + x(n+2)], \end{aligned}$$

а в установившемся режиме система (12) преобразуется в равенства

$$\begin{aligned} y_1(0) &= y_2(T-1) \\ y_2(0) &= f_1[b_1 y_2(T-1) + b_2 y_1(T-1) + x(1)]. \end{aligned}$$

На рис. 7 приведены траектории движений (вынужденных колебаний) $y_1(n+1) = F[y_1(n)]$, рассчитанные при $T = 7$, коэффициентах $b_1 = 1, b_2 = -0,8$ для $A \in \{1; 2; 3\}$, что соответствует трём значениям числа уровней квантования $L \in \{6; 17; 26\}$. Заметим, что при выбранных значениях коэффициентов b_1 и b_2 данная рекурсивная система является полосовым фильтром, а при $T = 7$ частота входного гармонического воздействия совпадает с резонансной частотой фильтра.

Результаты расчётов подтверждены моделированием.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработан метод расчёта вынужденных колебаний в нелинейных системах дискретного времени при периодических внешних воздействиях. Метод основан на представлении стационарных колебаний в виде инвариантного множества нелинейных дискретных точечных отображений и позволяет рассчитывать реакцию нелинейной системы в установившемся режиме.

Приведены примеры использования метода для расчёта вынужденных колебаний в рекурсивных системах первого и второго порядков с учётом нелинейностей характеристик квантователей

сумматоров при воздействии на такие системы гармонического сигнала. Результаты расчётов подтверждены компьютерным моделированием.

Предполагаемый метод может использоваться для расчётов нелинейных искажений сигналов в цифровых системах, а также частотных характеристик таких динамических систем. Он также может быть использован при создании систем передачи информации с цифровой обработкой сигналов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 06-02-17195).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Каппелини В., Константи́нидис А. Дж., Эмилиани П. Цифровые фильтры и их применение. М.: Энергоатомиздат, 1983.
2. Стрелков С. П. Введение в теорию колебаний. М.: Наука, 1964.
3. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1978.
4. Брюханов Ю. А. // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1994. № 9. С. 46.
5. Брюханов Ю. А. // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1996. № 11. С. 37.
6. Брюханов Ю. А. // Радиотехника. 1997. № 12. С. 75.
7. Брюханов Ю. А. // Радиотехника и электроника. 1997. Т. 42, № 7. С. 836.
8. Брюханов Ю. А. // Изв. вузов. Прикл. нелин. дин. 1999. Т. 7, № 4. С. 29.
9. Брюханов Ю. А. // Изв. вузов. Прикл. нелин. дин. 2000. Т. 8, № 6. С. 88.
10. Брюханов Ю. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 2001. Т. 44, № 11. С. 976.
11. Неймарк Ю. И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1972.

Поступила в редакцию 10 марта 2009 г.; принята в печать 27 марта 2010 г.

THE METHOD FOR CALCULATING FORCED OSCILLATIONS IN NONLINEAR DISCRETE-TIME SYSTEMS UNDER PERIODIC EXTERNAL INFLUENCES

Yu. A. Bryuhanov

We consider the method for calculating forced oscillations in nonlinear discrete-time systems under periodic external influences. The method is based on presenting the stationary oscillations in the form of an invariant set of nonlinear discrete point maps and allows one to calculate the nonlinear-system response in the steady-state mode. The examples of using this method for calculating forced oscillations in the nonlinear recursive first- and second-order systems under the harmonic-signal action on such systems are presented.