

УДК 621.372.82.3

## РАССЕЯНИЕ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ БЕСКОНЕЧНЫМ КЛИНОМ С УСЕЧЁННЫМ КРУГОВЫМ ЦИЛИНДРОМ, КОАКСИАЛЬНО ПОКРЫТЫМ СЛОЕМ МАГНИТОДИЭЛЕКТРИКА

*Е. В. Шепило*

Харьковская национальная академия городского хозяйства, г. Харьков, Украина

Сформулирована и решена задача рассеяния плоской электромагнитной волны бесконечным идеально проводящим клином с усечённым идеально проводящим круговым цилиндром, который коаксиально покрыт слоем магнитодиэлектрика и расположен вдоль ребра клина. Решение получено в строгой форме и сведено к системе линейных алгебраических уравнений второго рода относительно неизвестных коэффициентов фурье-разложений рассеянного поля. Результаты вычислений последнего в дальней зоне с заданной точностью представлены для случая  $H$ -поляризованной волны. Показано, что при определённых значениях электрического радиуса цилиндра, сечение обратного рассеяния такой структуры имеет резко выраженные максимумы.

### ВВЕДЕНИЕ

Задача рассеяния плоской электромагнитной волны диэлектрическим цилиндром, который коаксиально покрыт слоем другого диэлектрика и помещён в полукруговой жёлоб в проводящем полупространстве, исследовалась в работе [1]. В [1] также рассмотрен случай, когда диэлектрический цилиндр заменён идеально проводящим. Строгое решение задачи получено методом переразложения и сведено к системе алгебраических уравнений первого рода, для решения которой применялся метод редукции.

Однако известно [2, 3], что численное решение систем алгебраических уравнений первого рода методом редукции не всегда является устойчивым, т. е. решение редуцированной системы может сходиться, но не к решению исходной бесконечной системы. Поэтому применение редукции требует дополнительного исследования и обоснования.

В работах [4, 5] проведено исследование задачи рассеяния поля электромагнитной волны подобной структурой, в которой диэлектрический цилиндр частично покрыт бесконечно тонким слоем идеального проводника. Решение получено методом переразложения и сведено к решению системы алгебраических уравнений второго рода, устойчивому к применению метода редукции.

В настоящей работе в строгой постановке получено решение задачи рассеяния плоской электромагнитной волны бесконечным идеально проводящим клином с усечённым круговым цилиндром, который коаксиально покрыт слоем магнитодиэлектрика и расположен вдоль ребра клина.

Такая открытая структура в соответствии с практическими задачами возбуждения, рассеяния и распространения электромагнитных волн позволяет моделировать широкий класс реальных объектов. Такими объектами могут быть не только полуплоскость с жёлобом, в котором помещён диэлектрический цилиндр, но и гористые рельефы, и специальный (с учётом влияния монтажного оборудования) открытый резонатор.

На основе полученного решения проведены расчёты и анализ поперечного сечения обратного рассеяния структуры и диаграммы направленности рассеянного поля в дальней зоне в широких пределах изменения характерных параметров.

*Е. В. Шепило*

221

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Плоская электромагнитная волна падает перпендикулярно образующей цилиндрической поверхности под произвольным углом  $\beta$  между линией начала отсчёта угла  $\varphi$  в цилиндрической системе координат  $(\rho, \varphi, z)$  и волновым вектором  $\mathbf{k}_1$ ,  $k_1 = 2\pi \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} / \lambda$ , где  $\varepsilon_1, \mu_1$  — соответственно диэлектрическая и магнитная проницаемости окружающей среды,  $\lambda$  — длина волны в вакууме. Ось  $z$  совпадает с продольной осью кругового идеально проводящего цилиндра с радиусом  $a$ , коаксиально покрытого слоем магнитодиэлектрика с диэлектрической и магнитной проницаемостями  $\varepsilon_2, \mu_2$  соответственно. Внешний радиус слоя коаксиального покрытия равен  $b$ . Угол полураскрыва клина произвольный и определяется величиной  $\pi\delta$ , где  $0 < \delta \leq 1$ . Поперечное сечение структуры показано на рис. 1. Зависимость компонент электромагнитного поля от времени даётся фактором  $\exp(-i\omega t)$ , который в дальнейшем опускается.

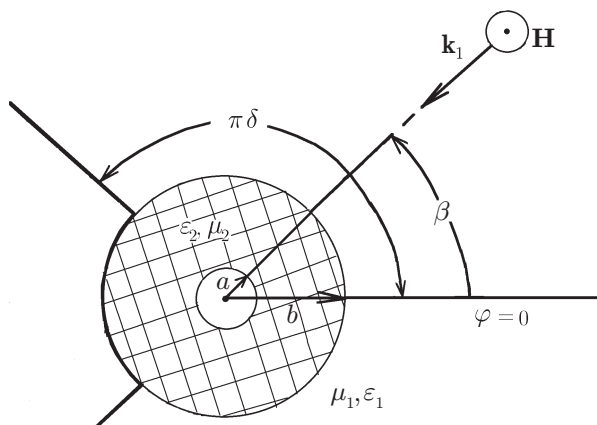


Рис. 1. Поперечное сечение структуры

Рассмотрим случай  $H$ -поляризации, когда вектор магнитного поля падающей плоской волны  $\mathbf{H}^{(0)}$  параллелен оси  $z$ , а его величина равна  $H_z^{(0)} = \exp[-ik_1\rho \cos(\varphi - \beta)]$ . Представим  $H_z^{(0)}$  в виде разложения по цилиндрическим функциям Бесселя [6]:

$$H_z^{(0)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-i)^n J_n(k_1\rho) \exp[in(\varphi - \beta)]. \quad (1)$$

Представим полное поле  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  в пространстве как суперпозицию падающего (индекс 0) и рассеянного (индекс 1) полей:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(0)} - \mathbf{E}^{(1)}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}^{(0)} - \mathbf{H}^{(1)}. \quad (2)$$

Поле вне проводящих поверхностей представим рядом Фурье по цилиндрическим функциям Бесселя, Неймана и Ханкеля первого рода с коэффициентами разложения, которые необходимо определить:

$$H_z^{(1)} = \sum_{s=0}^{\infty} \alpha_s H_{sv}^{(1)}(k_1\rho) \cos[s\nu(\varphi + \pi\delta)], \quad \rho \geq b, \quad |\varphi| \leq \pi\delta; \quad (3)$$

$$H_z^{(1)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \left[ J_n(k_2\rho) - \frac{J'_n(k_2a)}{N'_n(k_2a)} N_n(k_2\rho) \right] \exp(in\varphi), \quad b \geq \rho \geq a, \quad |\varphi| \leq \pi. \quad (4)$$

Здесь  $H_{sv}^{(1)}(x), J_n(x)$  и  $N_n(x)$  — функции Ханкеля первого рода, Бесселя и Неймана соответственно,  $k_2 = 2\pi \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} / \lambda, \nu = 1/(2\delta), \alpha_s$  и  $A_n$  — коэффициенты Фурье, штрих обозначает дифференцирование по аргументу.

Налагая граничные условия на падающее и рассеянное поле, т.е. предполагая  $E_\varphi = 0$  на поверхности металла и непрерывность поля вне металлических частей, и учитывая полноту функций  $\cos[s\nu(\varphi + \pi\delta)]$  на интервале  $[-\pi\delta, \pi\delta]$ , а также применяя методику, использованную в работе [7], сведём решение поставленной задачи рассеяния к решению следующей системы линейных

алгебраических уравнений второго рода относительно неизвестных коэффициентов разложения:

$$X_s \frac{H_{s\nu}^{(1)}(k_1 b)}{H_{s\nu}^{(1)'}(k_1 b)} = \sum_{q=0}^{\infty} X_q \Phi_{sq} + F_s, \quad (5)$$

$$Y_n = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} Y_m G_{nm} - D_n. \quad (6)$$

Здесь  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $s \in \mathbb{N}$ ,

$$X_s = a_s H_{s\nu}^{(1)'}(k_1 b), \quad Y_n = A_n [J'_n(k_2 b) - J'_n(k_2 a) N'_n(k_2 b) / N'_n(k_2 a)],$$

$$F_s = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[ (-i)^m J_m(k_1 b) \exp(-im\beta) - p_{21} M_m(a, b; k_2) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-i)^n J'_n(k_1 b) V_n^m \exp(-in\beta) \right] Q_{s\nu}^m, \quad (7)$$

$$\Phi_{sq} = p_{21} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} M_m(a, b; k_2) V_m^{q\nu} Q_{s\nu}^m, \quad G_{nm} = p_{21} M_m(a, b; k_2) \sum_{s=0}^{\infty} \frac{H_{s\nu}^{(1)'}(k_1 b)}{H_{s\nu}^{(1)}(k_1 b)} V_n^{s\nu} Q_{s\nu}^m,$$

$$M_m(a, b; k_2) = \frac{J_m(k_2 b) N'_m(k_2 a) - J'_m(k_2 a) N_m(k_2 b)}{J'_m(k_2 b) N'_m(k_2 a) - J'_m(k_2 a) N'_m(k_2 b)},$$

$$D_n = p_{21} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-i)^m \exp(-im\beta) \left[ J'_m(k_1 b) V_n^m - J_m(k_1 b) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{H_{s\nu}^{(1)'}(k_1 b)}{H_{s\nu}^{(1)}(k_1 b)} Q_{s\nu}^m V_n^{s\nu} \right],$$

$$p_{21} = \sqrt{\varepsilon_2 \mu_1 / (\varepsilon_1 \mu_2)}.$$

Коэффициенты  $Q_{s\nu}^m$ ,  $V_n^{s\nu}$ ,  $V_n^m$  выражаются через тригонометрические функции согласно [7].

Система уравнений (5) позволяет исследовать внешнюю задачу — рассеяние волны на структуре, а система уравнений (6) — внутреннюю, т. е. найти распределение поля в магнитодиэлектрическом слое.

## 2. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Из оценок матричных коэффициентов следует, что матрица системы уравнений (5) обладает вполне непрерывной формой всюду за исключением значений  $k_2 a$ , равных одному из собственных значений матрицы, поэтому для её решения можно применить метод редукции [8].

Анализ рассеивающих свойств рассматриваемой структуры в дальней зоне при произвольных значениях параметров проведён путём вычисления с относительной ошибкой, не превышающей 5 %, поперечного сечения обратного рассеяния

$$\frac{\sigma_0}{\lambda_1} = \frac{2}{\pi} \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n (-i)^n \exp(in\beta) \right|^2 \delta \quad (8)$$

и диаграммы направленности рассеянного поля, которая определялась выражением

$$D(\varphi) = \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n (-i)^n \exp(in\varphi) \right|. \quad (9)$$

В вычислениях значения  $\varepsilon_1$ ,  $\mu_1$  и  $\mu_2$  приняты равными единице.

Из зависимости, показанной на рис. 2а, видно, что вблизи определённых значений  $k_1 a$ , поперечное сечение обратного рассеяния резко возрастает. Эти значения являются корнями уравнения

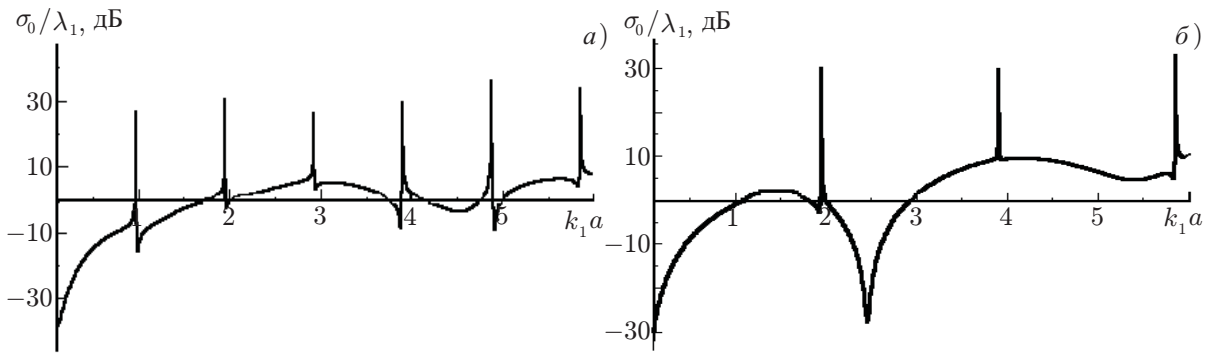


Рис. 2. Поперечное сечение обратного рассеяния структуры в зависимости от электрического радиуса цилиндра  $k_1a$  при  $b/a = 1,05$ ,  $\pi\delta = 179^\circ$ ,  $\epsilon_2 = 1,0$ : (а)  $\beta = 0^\circ$ , (б)  $\beta = 90^\circ$ . Положения пиков на панели (а) соответствуют  $m = 1, 2, \dots, 6$ , на панели (б) —  $m = 2, 4, 6$  (слева направо)

$$J'_m(k_2b)N'_m(k_2a) - J'_m(k_2a)N'_m(k_2b) = 0. \tag{10}$$

Для вычисления с заданной точностью корней  $\chi_{mn} = k_2a$  уравнения (10) можно применить выражения (9.5.28) и (9.5.31), приведённые в [9]. Однако следует отметить, что указанные выражения не являются универсальными. Они пригодны для вычисления только больших по величине корней и не могут быть использованы для нахождения первых корней, которые являются сравнительно малыми по величине.

Нахождение первого корня  $\chi_{11}$  численным решением уравнения с точностью до пятого знака выполнено в данной работе. Соответствующие результаты в зависимости от отношения  $b/a$  приведены в табл. 1.

$b/a$	$\chi_{11}$
1,01	0,99503
1,02	0,99011
1,03	0,98526
1,05	0,97570
1,06	0,97101
1,07	0,96637
1,10	0,95274

$b/a$	$m$	$\chi_{m1}$
1,05	1	0,9757
—”—	2	1,9514
—”—	3	2,9271
—”—	4	3,9028
—”—	5	4,8785
—”—	6	5,8542

Значения первых шести корней при  $b/a = 1,05$ , вычисленных с точностью до четвёртого знака, приведены в табл. 2.

Расчёт приближённых значений всех корней независимо от их величины, но с точностью только до третьего знака, можно проводить по известным выражениям для критических собственных значений  $H_{m1}$  волн коаксиального волновода, например [10]

$$\chi_{m1} \approx 2m/(b/a + 1).$$

При угле падения волны  $\beta = 90^\circ$  (рис. 2б), резкое возрастание поперечного сечения обратного рассеяния имеет место, когда значения  $k_1a$  приближаются только к чётным корням уравнения (10), а в области  $k_1a = 2,54$  наблюдается глубокий минимум.

Если структура имеет вид проводящего полупространства с наполовину погруженным в него проводящим цилиндром, который покрыт слоем диэлектрика, то резкое возрастание поперечного

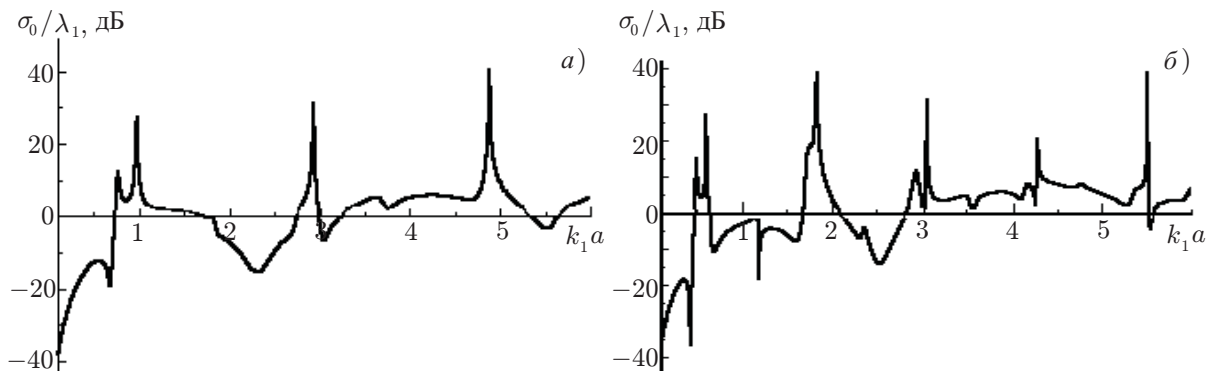


Рис. 3. Поперечное сечение обратного рассеяния структуры в зависимости от электрического радиуса цилиндра  $k_1a$  при  $b/a = 1,05$ ,  $\beta = 89^\circ$ ,  $\pi\delta = 90^\circ$ : (а)  $\epsilon_2 = 1,0$ , (б)  $\epsilon_2 = 2,54$ . Положения максимумов на панелях (а) и (б) соответствуют  $m = 1, 3, 5, \dots$

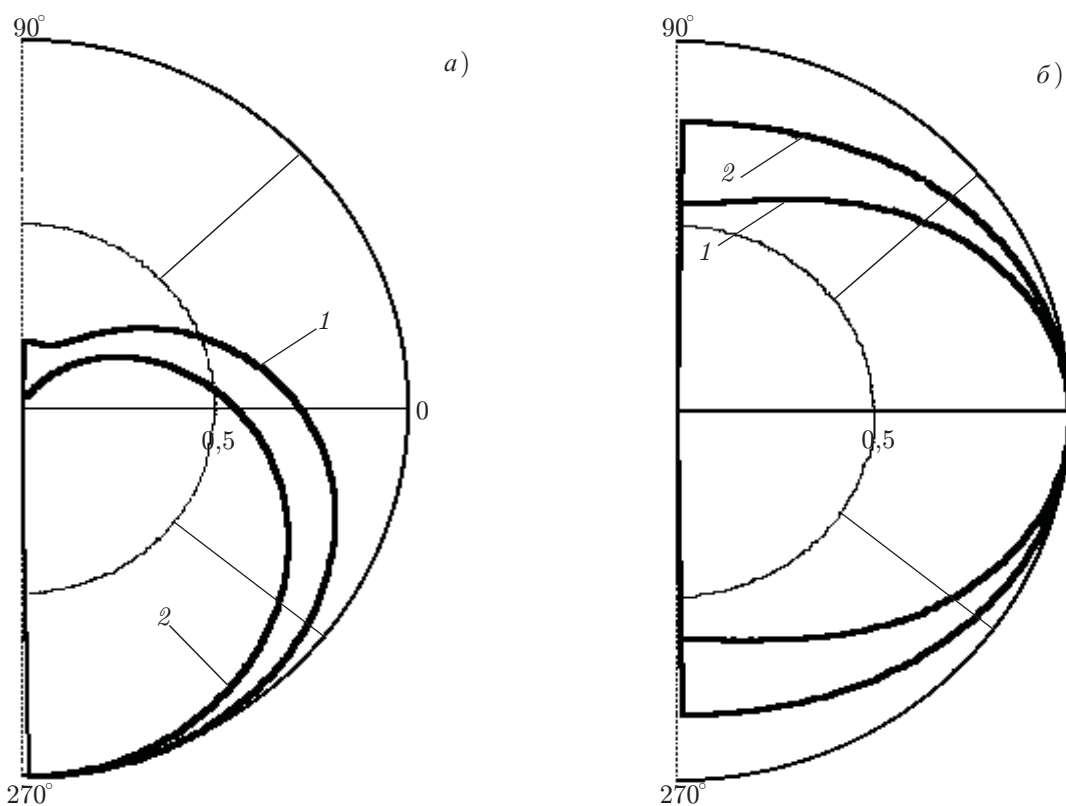


Рис. 4. Диаграммы направленности рассеянного поля при  $b/a = 1,05$ ,  $\beta = 89^\circ$ ,  $\pi\delta = 90^\circ$ : (а) зависимость 1 соответствует  $k_1a = 0,68$ ,  $\epsilon_2 = 1,0$ ; 2 —  $k_1a = 0,43$ ,  $\epsilon_2 = 2,54$ ; (б) зависимость 1 соответствует  $k_1a = 0,76$ ,  $\epsilon_2 = 1,0$ ; 2 —  $k_1a = 0,49$ ,  $\epsilon_2 = 2,54$

сечения обратного рассеяния (см. рис. 3а) при скользящем падении волны, т. е. при  $\beta = 89^\circ$ , возникает, когда значения  $k_1a$  приближаются только к нечётным корням уравнения (10), а наличие диэлектрического слоя приводит к сужению спектра максимумов (см. рис. 3б).

В длинноволновой области, когда  $k_1a < 1$ , незначительное изменение  $k_1a$  (от 0,68 до 0,76, см. рис. 3а) резко изменяет поперечное сечение обратного рассеяния. На рис. 4а и б можно видеть, что в этом случае направление максимума диаграммы направленности изменяется на  $90^\circ$ . При

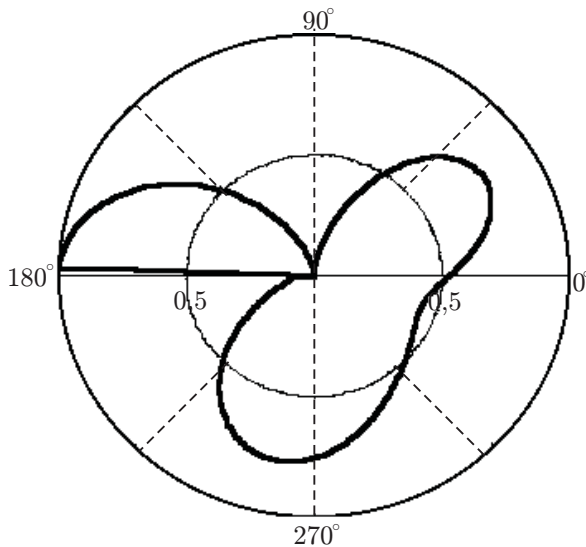


Рис. 5. Диаграмма направленности рассеянного поля при  $b/a = 1,05$ ,  $k_1 a = 2,54$ ,  $\beta = 90^\circ$ ,  $\pi\delta = 179^\circ$  и  $\varepsilon_2 = 1,0$

этом наличие диэлектрического слоя сужает диаграмму (кривая 2) в первом случае и приводит к её расширению во втором.

Диаграмма направленности, которая приведена на рис. 5, показывает, что максимум рассеянного поля направлен вдоль поверхности клина, а минимум — в направлении  $\varphi = 90^\circ$  и тем самым обуславливает в этом случае минимум поперечного сечения обратного рассеяния. Кроме этого можно отметить, что лепесток диаграммы направленности «прошедшего» поля не совпадает с направлением падающей волны, а отклонён в сторону поверхности клина. Приведённые диаграммы направленности являются нормированными.

### 3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе решения задачи рассеяния, полученного в строгой постановке, показано, что при  $\beta = 0$  и  $\pi\delta = 179^\circ$  поперечное сечение обратного рассеяния структуры резко возрастает, когда значения  $k_1 a$  приближаются к критическим собственным значениям  $H_{m1}$  волн коаксиального волновода.

В зависимости от угла падения волны и угла раскрыва клина возрастание поперечного сечения обратного рассеяния структуры происходит, только когда значения  $k_1 a$  приближаются к критическим собственным значениям  $H_{m1}$  чётных или нечётных волн коаксиального волновода.

Глубокие минимумы диаграмм направленности рассеянного поля в направлении, обратном падению волны, обуславливают глубокие минимумы в зависимостях поперечных сечений обратного рассеяния от значений  $k_1 a$ .

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ragheb Hassan A. // IEEE Trans. MTT. 1995. V. 43. P. 1303.
2. Комиссаров Я. С., Масалов С. А., Павлюк В. А., Шестопалов В. П. // Радиотехника и электроника. 1969. Т. 14, № 1. С. 7.
3. Кириленко А. А., Масалов С. А. // Журн. вычисл. мат. и матем. физ. 1969. Т. 9, № 4. С. 934.
4. Shepilko A. Y., Shepilko Y. V. // Proc. VIII Int. Seminar/Workshop on DIPED, September 23–25, 2003, Lviv, Ukraine. P. 74.
5. Shepilko Y. V. // Proc. IASTED Int. Conf. Antennas, Radar, and Wave Propagat., July 8–10, 2004, Banff, Canada. P. 208.
6. Иванов Е. И. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техника, 1968. 584 с.
7. Шепилко Е. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 2002. Т. 45, № 1. С. 26.
8. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 744 с.
9. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 832 с.

10. Справочник по волноводам / Под ред. Я. Н. Фельда. М.: Сов. радио, 1952. 431 с.

Поступила в редакцию 6 октября 2009 г.; принята в печать 19 марта 2010 г.

**SCATTERING OF A PLANE ELECTROMAGNETIC WAVE BY AN INFINITE  
WEDGE WITH A TRUNCATED CIRCULAR CYLINDER COATED COAXIALLY  
WITH A MAGNETO-DIELECTRIC LAYER**

*E. V. Shepilko*

We define and solve the problem of scattering of a plane electromagnetic wave by an infinite, perfectly conducting wedge with a truncated, perfectly conducting circular cylinder, which is coated coaxially with a magneto-dielectric layer and situated along the wedge edge. The rigorous solution is obtained and reduced to a system of linear algebraic equations of the second kind relative to unknown coefficients of Fourier expansions of the scattered field. The results of calculating the scattered field in the far zone with a specified accuracy are presented for the case of the  $H$ -polarized wave. It is shown that for certain values of the electric radius of the cylinder, the backscattering cross section of such a structure has pronounced maxima.