

УДК 621.372

РАССЕЯНИЕ НА ОБРЫВЕ ПЛОСКОГО ВОЛНОВОДА ИЗ МЕТАМАТЕРИАЛА

А. Б. Маненков¹, П. Г. Геролиматос², И. Г. Тигелис²

¹ Институт физических проблем РАН, г. Москва, Россия;

² University of Athens, Faculty of Physics, Athens, Greece

Вариационным методом исследована задача об отражении направляемой моды от обрыва плоского диэлектрического волновода, изготовленного из метаматериала. Теория проиллюстрирована на примере задач об обрыве трёхслойных волноводов с кусочно-постоянным и переменным профилями проницаемостей. Обсуждаются различия характеристик рассеяния для случаев систем с метаматериалами и с обычными средами.

ВВЕДЕНИЕ

Задачи рассеяния направляемых мод на скачкообразных нерегулярностях диэлектрических волноводов имеют многочисленные приложения. В литературе в основном исследовались системы, у которых проницаемости всех сред ϵ и μ положительны [1–5], т. е. рассматривались волноводы, для изготовления которых использовались обычные диэлектрики или магнитодиэлектрики. Более сложными свойствами обладают плазменные структуры, у которых диэлектрические проницаемости ϵ могут быть отрицательными, но при этом $\mu > 0$.

В последние годы в электродинамике сверхвысоких частот (СВЧ) и оптике интенсивно изучают и широко применяют так называемые метаматериалы; в литературе их называют также «левыми» материалами (от англ. left handed materials) или средами с отрицательными показателями преломления. Параметры таких сред можно описать диэлектрической и магнитной проницаемостями, одновременно принимающими отрицательные значения [6–8]. Как правило, такие материалы являются искусственными магнитодиэлектриками (композитами). Эти композиты получили название метаматериалов, в частности, из-за необыкновенно широких возможностей управления их электрофизическими

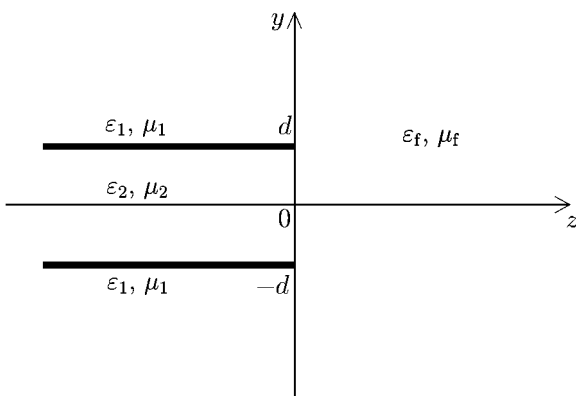


Рис. 1. Геометрия задачи

параметрами, а также из-за присущих им уникальных электродинамических свойств.

К настоящему времени достаточно подробно изучены регулярные волноводы с метаматериалами [9, 10]. В данной работе вариационным методом [3, 4] анализируется задача отражения направляемой моды низшего типа от обрыва планарного диэлектрического волновода, центральный слой которого изготовлен из среды с отрицательными значениями проницаемостей ϵ и μ (рис. 1). Результаты анализа подобных структур могут быть использованы при изучении различных устройств интегральной оптики, а также оптических и СВЧ датчиков.

Заметим, что часто к классу метаматериалов относят также фотонные кристаллы [11] и различные слоистые структуры, например диэлектрические сверхрешётки [12]. Хотя указанные

структуры отличаются от большинства композитов, тем не менее многие явления протекают в них похожим образом. Эти более сложные системы в работе рассматриваться не будут. Ниже будем исследовать только тот узкий класс структур (композитов), у которых обе проницаемости сред могут быть отрицательными и могут считаться однородными, т. е. состоящими из сред с размерами включений, существенно меньшими длины волны.

1. СОБСТВЕННЫЕ МОДЫ

Ниже исследуем ТЕ-моды, когда все волны имеют только одну отличную от нуля компоненту E_x электрического поля. Геометрия задачи и система координат изображены на рис. 1; толщина центрального слоя волновода обозначена через $2d$. Предполагаем, что структура симметрична, т. е. функции $\varepsilon(y)$ и $\mu(y)$ являются чётными функциями поперечной координаты y . Для простоты считаем, что проницаемости кусочно-постоянны: в подложке и в покрытии, т. е. при $|y| > d$, они равны ε_1 и μ_1 , а внутри центрального слоя, т. е. при $|y| < d$, — ε_2 и μ_2 соответственно, причём первая пара проницаемостей положительна, а вторая — отрицательна. Заметим, что основная часть приведённых ниже уравнений применима и для волноводов с непрерывными профилями проницаемостей. Как обычно, временной множитель $\exp(-i\omega t)$, где $\omega = kc$, k — волновое число, c — скорость света в вакууме, будет часто опускаться, чтобы не усложнять соответствующие формулы. Далее считаем, что диэлектрическими потерями можно пренебречь. Для анализа задачи используем вариационный метод [3, 13, 14], который основан на интегральном уравнении для компоненты E_x электрического поля в плоскости обрыва $z = 0$.

Прежде чем решать задачу рассеяния, опишем коротко характеристики собственных мод рассматриваемой структуры. Множество собственных мод планарного диэлектрического волновода включает в себя моды дискретного спектра, т. е. направляемые моды, и моды непрерывного спектра, т. е. радиационные моды. Достаточно подробный анализ свойств направляемых мод можно найти в работах [9, 10]; здесь приведём только минимум результатов, которые будут необходимы при решении задачи дифракции, а также для интерпретации полученных результатов. В дальнейшем предполагаем, что выполнено дополнительное условие

$$|\varepsilon_2\mu_2| - \varepsilon_1\mu_1 > 0. \quad (1)$$

В такой структуре электрическое поле направляемой моды имеет вид

$$E_x = \Phi(y) \exp[i(\beta z - \omega t)]. \quad (2)$$

Функция $\Phi(y)$ описывает распределение поля направляемой моды в поперечной плоскости $z = \text{const}$; она является решением уравнения

$$\mu(y) \frac{d}{dy} \left[\frac{1}{\mu(y)} \frac{d\Phi}{dy} \right] + [k^2\varepsilon(y)\mu(y) - \beta^2] \Phi = 0 \quad (3)$$

при условии $\Phi(\pm\infty) = 0$. Это уравнение выводится из уравнений Максвелла, если в них подставить функцию (2).

Далее будем рассматривать симметричную моду низшего типа, которую обозначим через ТЕ₂. Принцип нумерации мод поясним ниже. Из приведённых соотношений следует, что для симметричных мод

$$\Phi(y) = \begin{cases} A \cos(gy), & |y| < d; \\ B \exp[-p(|y| - d)], & |y| > d, \end{cases} \quad (4)$$

где A и B — амплитудные множители. Волновые числа g и p направляемой моды связаны соотношением

$$\beta^2 = k^2 \varepsilon_2 \mu_2 - g^2 = k^2 \varepsilon_1 \mu_1 + p^2, \tag{5}$$

где p — внешнее поперечное волновое число, а g — внутреннее поперечное волновое число. При выводе всех формул учтена симметрия моды.

Вывод дисперсионного уравнения для рассматриваемой направляемой моды, распространяющейся в такой структуре, проводится по стандартной схеме с учётом граничных условий на плоскостях $y = \pm d$. В частности, условия при $y = d$ имеют вид

$$E_x \Big|_{d+0} = E_x \Big|_{d-0}, \quad \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial E_x}{\partial y} \Big|_{d+0} = \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial E_x}{\partial y} \Big|_{d-0}. \tag{6}$$

Опуская промежуточные выкладки, приведём окончательное уравнение:

$$pd = \frac{\mu_1}{\mu_2} gd \operatorname{tg}(gd). \tag{7}$$

При решении (7) следует учитывать соотношение между волновыми числами (5). Отметим, что из первого условия (6) легко получить связь амплитудных коэффициентов: $B = A \cos(gd)$.

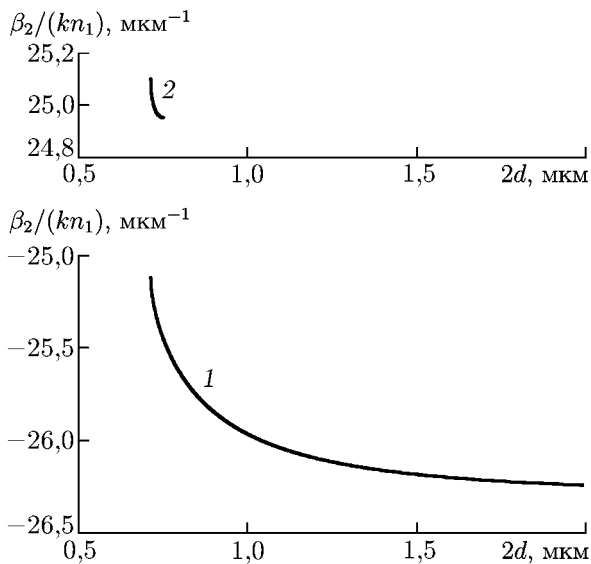


Рис. 2. Зависимость коэффициентов распространения мод TE_2 и TE'_2 от толщины волноведущего слоя

На рис. 2 приведены дисперсионные кривые, т. е. зависимости $\beta_2 / (kn_1)$, где $n_1 = \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}$ — показатель преломления подложки и покрытия, от толщины $2d$ центрального (волноведущего) слоя. На нижней части рисунка (кривая 1) представлены данные для моды TE_2 . На этом и всех других рисунках все размеры даны в микронах. Кривые построены для волновода со следующими параметрами: длина волны $\lambda = 0,86$ мкм, что соответствует $k = 7,306$ мкм⁻¹, $\varepsilon_1 = 11,664$, $\varepsilon_2 = -12,96$ и $\mu_1 = -\mu_2 = 1$. Для справки укажем, что при $2d = 1$ мкм безразмерная частота V равна $kd(|\varepsilon_2 \mu_2| - \varepsilon_1 \mu_1)^{1/2} = 4,15866$. Для данной системы мода TE_2 , которая при указанных выше условиях является модой низшего типа, имеет отсечку; это свойство существенно отличает рассматриваемую структуру от обычного планарного диэлектрического волновода [15], т. е. от волновода с положительными проницаемостями. Кроме того, как видно из рис. 2, на небольшом участке

вблизи отсечки дисперсионная функция двузначна, т. е. существуют две моды с весьма близкой структурой. Дисперсионная кривая для другой моды, которую будем обозначать TE'_2 , приведена на верхней части рисунка, кривая 2. Отметим ещё одно свойство направляемой моды волновода с метаматериалами. Поскольку функция $\mu(y)$ знакопеременна, то в зависимости от параметров (например, толщины $2d$) изменяется распределение поля моды и переносимая ею мощность может менять знак [9, 10]. Отрицательный поток энергии при положительной амплитуде поля на оси ($A > 0$) соответствует случаю, когда $\operatorname{Re} \beta_2 < 0$; при этих условиях вектор фазовой скорости и вектор Пойнтинга направлены в разные стороны, так что мода (волна) является обратной. В подобных случаях структура потоков энергии направляемой моды в рассматриваемой системе

существенно отличается от потоков энергии в обычных планарных диэлектрических волноводах. Как видно из рис. 2, в большом диапазоне изменения толщин $2d$ одна из исследуемых мод, а именно мода TE_2 , является обратной. Мода типа TE'_2 является прямой; она существует в небольшой области параметров вблизи отсечки, т. е. мода TE'_2 имеет две точки отсечки. Отметим, что поведение кривых на рис. 2 легко понять, если анализировать решения дисперсионного уравнения стандартным графическим методом, как это делается для обычного планарного диэлектрического волновода [10, 15].

На рис. 3 изображена зависимость нормированного внутреннего поперечного волнового числа gd от $2d$ для той же моды. При расчётах использовались те же параметры, что и выше. Тёмным кружком обозначена точка, в которой два корня дисперсионного уравнения сливаются. Вблизи этой точки функция $g(d)$ двузначна. Эта точка является общей точкой отсечки для мод TE_2 и TE'_2 . Соответствующие части кривой отмечены цифрами 1 и 2. Заметим, что для рассматриваемой структуры величина gd меняется на интервале $(\pi/2, \pi)$, причём при $d \rightarrow \infty$ для моды TE_2 имеем $gd \rightarrow \pi/2$. Горизонтальные штриховые линии на рис. 3 показывают указанные границы изменения величины gd .

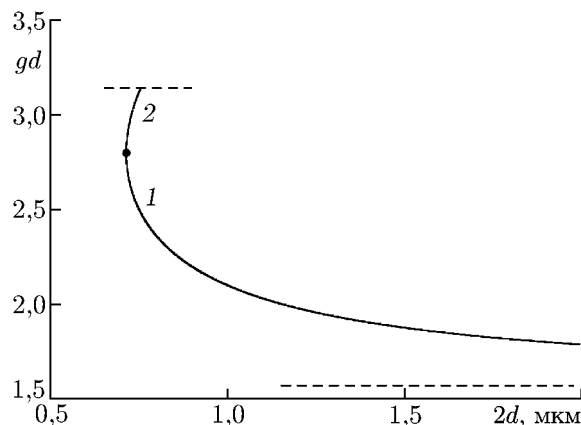


Рис. 3. Зависимость параметра gd мод TE_2 и TE'_2 от толщины волноведущего слоя

Приведём теперь типичные распределения полей моды TE_2 . На рис. 4 изображено распределение электрического поля $E_x(y/d)$ этой моды для трёх значений толщины волновода: $2d = 0,74; 1,0$ и $2,0$ мкм (кривые 1, 2 и 3 соответственно). Параметры волновода те же, что и для рис. 2 и 3. Вертикальная штриховая линия показывает границу раздела сред. Приведённые кривые демонстрируют изменение распределения поля при увеличении толщины волновода. Заметим, что при $kd \rightarrow \infty$ внутри центрального слоя $E_x \propto \cos[\pi y/(2d)]$, а снаружи поле стремится к нулю. Из данного рисунка также видно, что поле моды TE_2 имеет два нуля. Количество нулей положено нами в основу нумерации мод. Отметим, что вдали от отсечки, т. е. при $kd \gg 1$, приведённое распределение поля напоминает распределение поля основной направляемой моды диэлектрического слоя [15]; существенное различие наблюдается лишь вблизи границ раздела сред. Это различие связано с тем, что для волновода из метаматериала в силу (6) при $y = \pm d$ производная поля E_x должна менять знак, тогда как для обычного волновода знаки производных одинаковы. В силу этого поля в обычных планарных диэлектрических волноводах меняются не так резко, как в данном случае.

Сравним теперь структуру поля мод TE_2 и TE'_2 . На рис. 5 приведено распределение $E_x(y/d)$ для $2d = 0,74$ мкм. При таком значении $2d$ дисперсионная кривая двузначна, т. е. одновременно могут распространяться две указанные выше моды. На этом рисунке сплошной кривой 1 показано распределение электрического поля моды TE_2 , а пунктирной кривой 2 — моды TE'_2 . Отметим, что поле моды TE'_2 снаружи волновода достаточно велико и медленно спадает при $|y| \rightarrow \infty$. За счёт такой структуры поля эта мода является прямой: поток энергии в ней положителен, т. к. основная часть энергии волны распространяется в области $|y| > d$, где проницаемости ϵ и μ положительны. Для моды TE_2 электрическое поле снаружи волновода мало, поэтому эта мода является обратной.

Рассматриваемые моды TE_2 и TE'_2 относятся к классу так называемых осциллирующих мод [9, 10]. Поля таких мод внутри слоя описываются тригонометрическими функциями. В волноводе

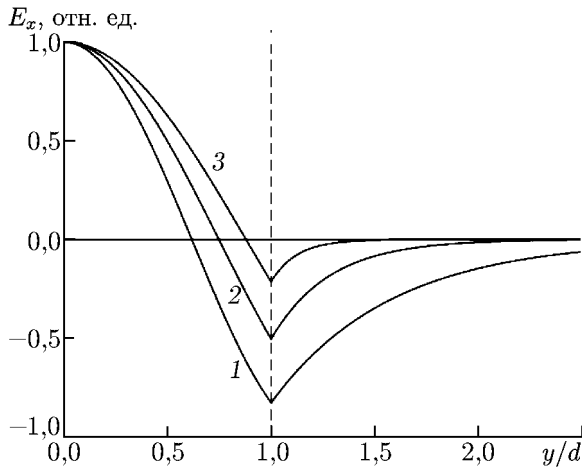


Рис. 4. Распределение электрического поля моды TE_2 при разных толщинах волноведущего слоя

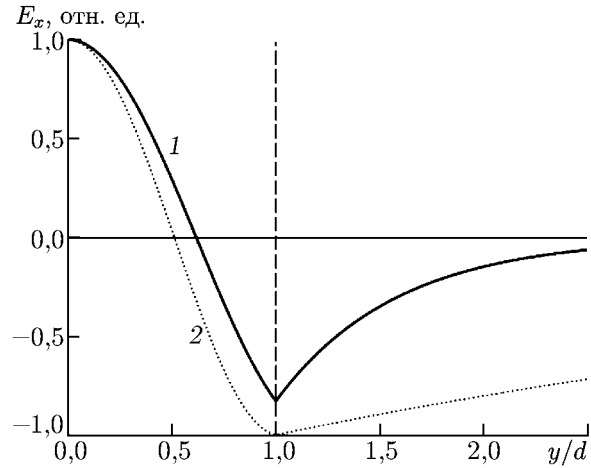


Рис. 5. Распределения полей мод TE_2 и TE'_2

с метаматериалом могут также существовать поверхностные направляемые моды, поля которых экспоненциально убывают при удалении от границ $y = \pm d$. Как правило, эти моды могут распространяться, если параметры сред таковы, что в соотношении (1) знак неравенства заменён на обратный. Анализ таких мод проводится по описанной выше схеме с небольшими изменениями и поэтому здесь они рассматриваться не будут.

Для анализа задачи отражения будут использоваться также радиационные моды волновода и правого полупространства ($z > 0$). Общий подход, который можно применить для построения этих мод, описан в работах [16, 17]. Отметим, что для волновода с кусочно-постоянными параметрами поля радиационных мод можно представить в виде сумм экспоненциальных функций. Коэффициенты при этих функциях определяются из условий на границах $y = \pm d$ и из условия на бесконечности, которое, в свою очередь, выводится с помощью метода S-оператора [16, 17]. Введение этого оператора позволяет идентифицировать радиационные моды, которые для планарной геометрии попарно вырождены. Поля радиационных мод волновода можно представить в виде

$$E_x = U_{m\kappa}(y) \exp [i(\beta_\kappa z - \omega t)], \tag{8}$$

где κ и $\beta_\kappa = (k^2 \varepsilon_1 \mu_1 - \kappa^2)^{1/2}$ — поперечное и продольное волновые числа радиационной моды, являющиеся непрерывными параметрами, m — дискретный индекс; для симметричного слоя индекс m отмечает чётность моды ($m = 1$ для нечётных мод и $m = 2$ для чётных). В выражении для β_κ выбирается та ветвь корня, у которой $\text{Im } \beta_\kappa > 0$ при $\text{Im } k > 0$.

Система функций $\{\Phi_2, U_{m\kappa}\}$ ортогональна с весом $[\mu(y)]^{-1}$. Условия ортогональности имеют вид

$$\langle \Phi_2; \Phi_2/\mu(y) \rangle = N_2, \quad \langle U_{m\kappa}; U_{m'\kappa'}/\mu(y) \rangle = D_{m\kappa} \delta_{mm'} \delta(\kappa - \kappa'), \tag{9}$$

где N_2 — норма направляемой моды, $D_{m\kappa}$ — нормирующий множитель радиационной моды волновода, $\delta_{mm'}$ — единичный тензор, $\delta(\kappa - \kappa')$ — дельта-функция. Здесь и ниже используется следующее обозначение для интеграла по плоскости $z = 0$ от произведения произвольных функций $f_1(y)$ и $f_2(y)$:

$$\langle f_1; f_2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(y) f_2(y) dy. \tag{10}$$

Весовые функции будем включать во второй множитель (см. выше формулы (9)). Отметим, что весовая функция $1/\mu(y)$ знакопеременна, поэтому введённые выше выражения не являются обычными скалярными произведениями.

Радиационные моды правого полупространства легко построить в явном виде. Поля чётных радиационных мод, соответствующих $m = 2$, имеют вид

$$E_x = V_{2\kappa}(y) \exp[i(\gamma_\kappa z - \omega t)], \quad V_{2\kappa}(y) = F_{2\kappa} \cos(\kappa y). \quad (11)$$

Здесь κ — поперечное волновое число, которое пробегает все значения $\kappa > 0$, а $F_{2\kappa}$ — амплитудный коэффициент. Для этих мод продольное волновое число $\gamma_\kappa = (k^2 \varepsilon_f \mu_f - \kappa^2)^{1/2}$. Система функций $\{V_{m\kappa}\}$ ортогональна с весом $1/\mu_f$. Нормирующий множитель для мод правого полупространства равен $D_{m\kappa}^{(f)} = \pi F_{m\kappa}^2 / \mu_f$.

2. ВАРИАЦИОННЫЕ ФОРМУЛЫ

Перейдём теперь к решению задачи отражения направляемой моды от обрыва планарного диэлектрического волновода. Предположим, что по волноводу распространяется направляемая мода типа TE_2 . Напомним, что, поскольку эта мода обратная, для неё $\text{Re } \beta_2 < 0$. Как отмечалось выше (см. рис. 2), при некоторых значениях параметров волновод с метаматериалом является двухмодовым, направляя вблизи отсечки две осциллирующие моды TE_2 и TE'_2 . Поэтому для общности будем предполагать, что на обрыве могут возбуждаться несколько направляемых мод других типов, которые условно обозначим через TE_j , где j — номер моды.

Для вывода интегрального уравнения для неизвестной функции $\mathcal{E} = E_x$ в плоскости обрыва $z = 0$ разложим её по собственным модам волновода и свободного полупространства [3, 5]. Слева от обрыва, т. е. при $z < 0$, имеем:

$$E_x = \Phi_2(y) \exp(i\beta_2 z) + R\Phi_2(y) \exp(-i\beta_2 z) + \sum_j R_j \Phi_j(y) \exp(-i\beta_j z) + \int_0^\infty \rho_{m\kappa} U_{m\kappa}(y) \exp(-i\beta_\kappa z) d\kappa, \quad (12)$$

где R_2 — коэффициент отражения основной направляемой моды типа TE_2 , а $\rho_{m\kappa}$ — неизвестные амплитуды полей радиационных мод. В разложение (12) включена также сумма полей направляемых мод других типов TE_j (см. выше); через $\Phi_j(y)$ обозначены поля этих мод, а через R_j и β_j — их амплитуды и постоянные распространения. Разложение для поля в правом полупространстве, т. е. при $z > 0$, имеет вид

$$E_x = \int_0^\infty \tau_{m\kappa}(2) V_{m\kappa}(y) \exp(i\gamma_\kappa z) d\kappa, \quad (13)$$

где $\tau_{m\kappa}$ — неизвестные коэффициенты. Поскольку в данной работе рассматривается случай, когда падающая мода TE_2 — чётная, то ниже во всех формулах $m = 2$.

Приравняем касательные компоненты полей E_x и H_y в плоскости $z = 0$. В результате приходим к интегральному уравнению первого рода [3, 13, 14], которое имеет вид

$$\hat{\Xi}[\mathcal{E}] = \frac{2\beta_2}{\mu(y)} \Phi_2(y), \quad (14)$$

где \mathcal{E} — неизвестная функция (см. выше), а $\hat{\Xi}$ — интегральный оператор, определённый соотношением

$$\hat{\Xi}[\mathcal{E}] = \frac{\beta_2 \Phi_2}{N_2 \mu(y)} \langle \mathcal{E}; \Phi_2 / \mu(y) \rangle + \int_0^\infty \frac{\beta_\kappa U_{2\kappa}}{D_{2\kappa} \mu(y)} \langle \mathcal{E}; U_{2\kappa} / \mu(y) \rangle d\kappa + \\ + \sum_j \frac{\beta_j \Phi_j}{N_j \mu(y)} \langle \mathcal{E}; \Phi_j / \mu(y) \rangle + \int_0^\infty \frac{\gamma_\kappa V_{2\kappa}}{D_{2\kappa}^{(f)} \mu_f} \langle \mathcal{E}; V_{2\kappa} / \mu_f \rangle d\kappa. \quad (15)$$

В формуле (15) через N_j обозначены нормы направляемых мод высшего типа TE_j . Из уравнения (14) стандартными способами [4, 13, 14] можно получить стационарные функционалы для основных характеристик задачи. В частности, для коэффициента отражения $R = R_2$ моды TE_2 стационарный функционал имеет вид

$$\frac{1 - R}{1 + R} = \frac{N_2 \langle \mathcal{E}; \hat{\Xi}_r[\mathcal{E}] \rangle}{\beta_2 \langle \mathcal{E}; \Phi_2 / \mu(y) \rangle^2}, \quad (16)$$

где новый оператор

$$\hat{\Xi}_r[\mathcal{E}] = \hat{\Xi}[\mathcal{E}] - \frac{\beta_2 \Phi_2}{N_2 \mu(y)} \langle \mathcal{E}; \Phi_2 / \mu(y) \rangle. \quad (17)$$

Для упрощения записи у величины R_2 будем опускать нижний индекс. При выводе (16) учитывалось следующее выражение для коэффициента отражения направляемой моды через поле в плоскости обрыва:

$$N_2 (1 + R) = \langle \mathcal{E}; \Phi_2 / \mu(y) \rangle. \quad (18)$$

Благодаря свойству стационарности формула (16) даёт результаты с погрешностью следующего порядка малости по отношению к погрешности «пробного», т. е. приближённого поля, которое в неё подставляется. В качестве такого распределения \mathcal{E} будем использовать функцию, пропорциональную полю падающей волны: $\mathcal{E} = C_e \Phi_2(y)$, где C_e — некоторая постоянная. Отметим одно важное свойство функционала (16). В его правой части эта константа сокращается, поэтому формально можно считать, что $C_e = 1 + R$, где R — точное значение коэффициента отражения. Таким образом, при вычислении коэффициента отражения мы считаем, что на обрыве поле приближённо равно сумме падающей и отраженной¹ мод TE_2 ; при этом мы пренебрегаем полями радиационных мод волновода и полями направляемых мод других типов, предполагая, что их амплитуды малы. С учётом ортогональности полей всех направляемых и радиационных мод волновода, получим окончательное выражение:

$$\frac{1 - R}{1 + R} = \frac{1}{\beta_2 N_2} \int_0^\infty \frac{\gamma_\kappa}{D_{2\kappa}^{(f)} \mu_f^2} \langle \Phi_2; V_{2\kappa} \rangle^2 d\kappa. \quad (19)$$

В силу симметрии задачи в этом выражении учтены только чётные моды (с индексом $m = 2$). Отметим ещё раз, что в последнее соотношение не вошли радиационные моды волновода и направляемые моды других типов.

Аналогичное выражение можно получить для задачи о рассеянии на обрыве моды TE_2' , которая является прямой. В этом случае в формуле (19) надо заменить $\Phi_2(y)$ на функцию, описывающую поле этой моды.

С помощью вариационного соотношения в предельных случаях можно получить ряд аналитических оценок. В частности, вдали от частоты отсечки направляемой моды типа TE_2 , когда $V \rightarrow \infty$, предельное значение коэффициента отражения по амплитуде равно

$$R_\infty = (n_2 - n_f) / (n_2 + n_f), \quad (20)$$

¹ Термины «падающая» и «отражённая моды» в данном случае, когда мода TE_2 является обратной, условны.

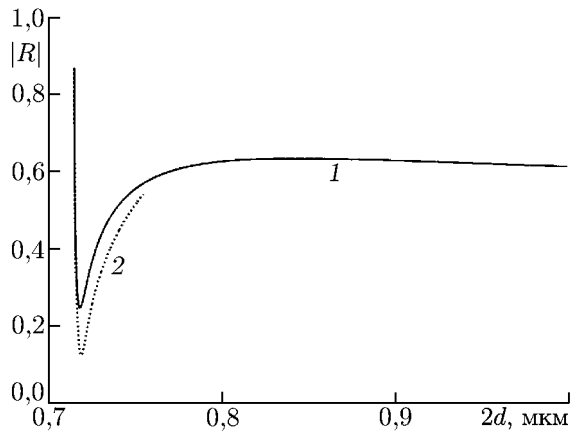


Рис. 6. Зависимость коэффициентов отражения мод TE_2 и TE'_2 от толщины волноведущего слоя в области параметров вблизи отсечки

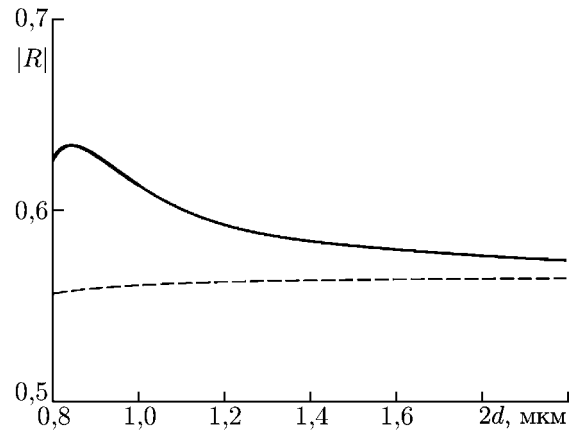


Рис. 7. Зависимость коэффициента отражения моды TE_2 от толщины волноведущего слоя в области параметров вдали от отсечки

где $n_2 = \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}$ и $n_f = \sqrt{\varepsilon_f \mu_f}$. Отметим, что эту формулу можно также получить в рамках приближения геометрической оптики.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЁТОВ

Во всех рассмотренных ниже примерах мы считали, что длина волны в свободном пространстве фиксирована и равна $\lambda = 0,86$ мкм, а параметры правого полупространства соответствуют параметрам вакуума: $\varepsilon_f = \mu_f = 1$, т. е. $n_f = 1$.

Поскольку все зависимости вблизи отсечки и вдали от неё имеют разные масштабы, рассмотрим эти области отдельно. На рис. 6 приведены значения модуля коэффициента отражения $|R|$ как функции толщины центрального слоя волновода $2d$ вблизи отсечки. Предположим, что проницаемости среднего слоя равны $\varepsilon_2 = -12,96$ и $\mu_2 = -1,0$; снаружи слоя $\varepsilon_1 = 11,664$ и $\mu_1 = 1$. В области параметров вблизи отсечки дисперсионная функция двузначна. Сплошная кривая построена для моды TE_2 , а пунктирная — для моды TE'_2 . Заметим, что в этой области представленные на рис. 6 зависимости коэффициента отражения от $2d$ существенно отличаются от зависимостей $|R(2d)|$ для обрыва волновода, изготовленного из обычных диэлектриков [2, 5]. В частности, в последнем случае диапазон изменения величин $|R|$ невелик и зависимости достаточно плавные, т. е. нет резкого возрастания $|R|$ вблизи отсечки. Отметим, что для волновода из метаматериала вблизи отсечки норма мод TE_2 и TE'_2 становится близкой к нулю и в окрестности точки отсечки, указанной на рис. 3 тёмным кружком, нормы для мод TE_2 и TE'_2 имеют разные знаки. Можно сказать, что в этой точке происходит своеобразный «поперечный резонанс» волн, который, в свою очередь, приводит к сильному отражению направляемых мод. Этот вывод следует из формулы (19), в правой части которой норма N_2 входит в знаменатель.

На рис. 7 приведена зависимость $|R|$ от $2d$ (сплошная кривая) для моды TE_2 в области параметров вдали от отсечки, где дисперсионная функция однозначна и существует только мода TE_2 . Для сравнения штриховая кривая представляет значения $|R_{\text{ef}}|$, рассчитанные методом эффективного показателя преломления. В соответствии с этой методикой волновод заменяется некоторой эффективной средой с показателем преломления $n_{\text{ef}} = \beta_2/k$, в которой вдоль оси z распространяется плоская волна, так что R_{ef} вычисляется по формуле Френеля (для нормального падения волны на обрыв):

$$R_{\text{ef}} = (\beta_2 - kn_f)/(\beta_2 + kn_f). \quad (21)$$

Из рис. 7 видно, что эта формула приводит к весьма грубым результатам. В частности, зависимость $|R(2d)|$ (сплошная кривая), рассчитанная вариационным методом, при $kd \gg 1$ монотонно убывает, тогда как рассчитанная методом эффективного показателя преломления зависимость (штриховая линия) возрастает; лишь предельное значение R_{ef} при $kd = \infty$ совпадает со значением R_{∞} .

Заметим, что вариационный метод можно использовать также для расчёта диаграммы направленности излучения в дальней зоне. Диаграмма направленности хорошо описывается также в приближении физической оптики, если поле в плоскости обрыва представить в виде суммы полей падающей и отражённой направляемых мод. При таком расчёте мы пренебрегаем полем краевой волны, которая возбуждается на рёбрах, т. е. в точках с координатами $z = 0$, $y = \pm d$. Более точные оценки [5] показывают, что обычно основная часть энергии, уносимая цилиндрической волной, уходит вперёд, т. е. в правое полупространство. Радиационное поле в левой части структуры, т. е. в волноводе, малó, поскольку радиационные моды волновода, возбуждаемые на обрыве, имеют малые амплитуды.

4. ВОЛНОВОД С ПЕРЕМЕННЫМ ПРОФИЛЕМ

Выше отмечалось, что в выражение (19) не вошли радиационные моды волновода и направляемые моды других типов. Поскольку радиационные моды свободного пространства строятся в явном виде, то это выражение может быть достаточно просто использовано при расчёте R для весьма сложных систем, т. к. вычисление функции $\Phi_2(y)$ может быть проведено при весьма общих предположениях о виде функций $\varepsilon(y)$ и $\mu(y)$ [5]. В частности, вариационный метод легко обобщается на случай задачи об обрыве волновода с переменным профилем показателей преломления. Заметим, что такое обобщение является весьма важным, поскольку, как правило, в реальных системах функции $\varepsilon(y)$ и $\mu(y)$ не являются кусочно-постоянными. Переменный профиль чаще всего возникает из-за технологических особенностей при изготовлении волноводов (в результате диффузионных процессов при высоких температурах и т. п.).

Опишем коротко результаты решения задачи о рассеянии направляемой моды на обрыве планарного диэлектрического волновода, центральный слой $|y| < d$ которого изготовлен из метаматериала и имеет переменный профиль диэлектрической проницаемости. Предполагаем, что

$$\varepsilon_2(y) = \varepsilon_{20} + \Delta_\varepsilon (y/d)^s, \quad \varepsilon_{20} < 0, \quad (22)$$

где ε_{20} — диэлектрическая проницаемость на оси волновода, а s — показатель степени, являющийся целым чётным числом. Магнитные проницаемости μ_1 , μ_2 и диэлектрическая проницаемость окружающей среды ε_1 — постоянные величины (см. выше). Обобщение на случай, когда магнитная проницаемость μ также зависит от поперечной координаты y , проводится по той же схеме.

Электрическое поле направляемой моды находится численно из дифференциального уравнения (3), в которое надо подставить выражение для профиля диэлектрической проницаемости (22). Дисперсионное уравнение получается стандартным образом при численном «сшивании» полей при $y = \pm d$, т. е. при учёте граничных условий вида (6). Отличие от ранее рассмотренного случая заключается в том, что дисперсионное уравнение определяется не из аналитической формулы, а с помощью алгоритма решения уравнений (3) и (6). Полученное дисперсионное уравнение решалось численно методом «стрельбы» («пристрелки») [18]. После расчёта волновых чисел и полей моды TE_2 все дальнейшие выкладки проводятся по той же схеме, что и выше.

Для простоты ниже ограничимся анализом отражения моды TE_2 . На рис. 8 приведены зависимости $|R|$ от толщины волноведущего слоя $2d$. Кривая 1 построена для случая $s = 2$, а кривая 2 — для $s = 4$. Параметры сред выбирались следующими: $\varepsilon_{20} = -12,96$, $\Delta_\varepsilon = 1,296$, $\mu_2 = -1,0$,

$\varepsilon_1 = 11,664$ и $\mu_1 = 1$. Для сравнения кривая 3 представляет ту же зависимость для постоянного профиля диэлектрической проницаемости, который был исследован выше (см. рис. 7). Заметим, что у системы с $s = 4$ распределение $\varepsilon_2(y)$ ближе к прямоугольному, чем у системы с $s = 2$, и поэтому кривая 2 на рис. 8 ближе к кривой 3, особенно в области $2d > 1,0$ мкм.

В конце этого раздела сделаем несколько общих замечаний. Характеристики метаматериалов весьма сильно зависят от длины волны электромагнитного поля [7]. Поэтому при перестройке частоты зависимости коэффициента отражения могут изменяться в значительных пределах; этот факт следует учитывать при расчёте конкретных систем.

Выше мы не касались вопроса о точности вариационного метода. Заметим прежде всего, что приведённое соотношение (19) является формулировкой вариационного принципа для электрического поля. Сходным образом можно вывести стационарное соотношение, в которое входит магнитное поле H_y в плоскости стыка [4, 13]. Разные формулировки могут давать слегка различающиеся результаты. Тесты, описанные в работе [5], показали, что для обычного слабонаправляющего волновода более точные результаты дают формулы, основанные на электрическом функционале. Поэтому выше была использована формулировка вариационного принципа для электрического поля. Можно качественно объяснить этот результат, если учесть, что для данной поляризации направляемой моды электрическое поле E_x имеет большую степень гладкости вблизи угловых («рёберных») точек $y = \pm d$ и $z = 0$, чем магнитное поле H_y . Как правило, функция H_y в плоскости обрыва сильнее отличается от магнитного поля направляемой моды, т. е. подставляемое в соответствующий функционал магнитное поле направляемой моды является менее точной функцией, чем электрическое поле. Для обычных волноводов погрешность расчётов, основанных на вариационном методе для электрического поля, обычно оказывается порядка процента. Заметим, что анализ задач дифракции волн на различных нерегулярностях металлических волноводов — рассеяние на диафрагмах, на обрыве волновода с фланцем и др. [13, 14, 19] — также продемонстрировал достаточно высокую точность вариационного метода, особенно при расчёте интегральных характеристик.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе вариационным методом рассчитаны коэффициенты отражения направляемой моды ТЕ-типа от обрыва плоского диэлектрического волновода, изготовленного из метаматериала. Расчёты показали, что дифракционные характеристики рассматриваемой системы существенно отличаются от характеристик подобной структуры, в которой использованы обычные среды (с положительными показателями преломления).

Использованный в работе вариационный подход является приближённым, тем не менее, он обычно обеспечивает хорошую точность расчёта коэффициента отражения. Важно отметить, что во многих случаях данный метод намного универсальнее других методов решения подобных задач; в частности, он легко обобщается на планарные диэлектрические волноводы с переменным

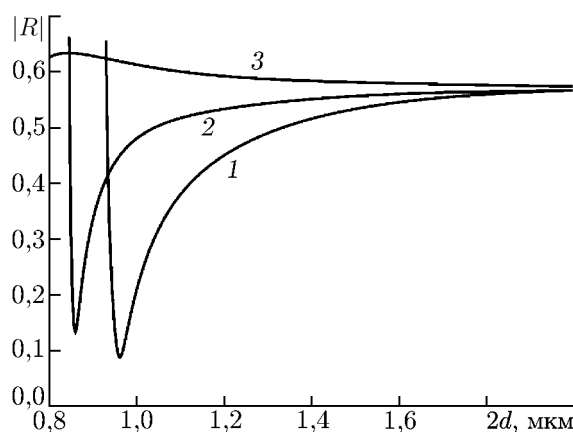


Рис. 8. Зависимости коэффициента отражения моды ТЕ₂ от толщины волноведущего слоя для различных профилей диэлектрической проницаемости

профилем показателя преломления и на анизотропные структуры. Описанную методику можно применить для решения задач об обрыве многослойных систем (например, для обрыва двух связанных волноводов), а также на случай другой поляризации (ТМ) направляемых мод.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 08-02-00621, 10-02-01403).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Vassallo Ch. // J. Opt. Soc. Am. A. 1988. V. 5, No. 6. P. 1918.
2. Kendall P. C., Roberts D. A., Robson P. N., et al. // IEE Proc. Part J. 1993. V. 140, No. 1. P. 49.
3. Маненков А. Б. // Изв. вузов. Радиофизика. 1982. Т. 25, № 12. С. 1484.
4. Manenkov A. B. // IEE Proc. Part J. 1992. V. 139, No. 3, P. 194.
5. Tigelis I. G., Manenkov A. B. // J. Opt. Soc. Am. A. 2000. V. 17, No. 12. P. 2249.
6. Smith D. R., Padilla W. J., Vier D. C., et al. // Phys. Rev. Lett. 2000. V. 84, No. 18. P. 4184.
7. Ruppin R. // Phys. Lett. A. 2000. V. 277. P. 61.
8. Вендик И. Б., Вендик О. Г., Одит М. А. // Физика твёрдого тела. 2009. Т. 51, № 8. С. 1499.
9. Shadrivov I. V., Sukhorukov A. A., Kivshar Yu. S. // Phys. Rev. E. 2003. V. 67. Art. no. 057602.
10. He Y., Cao Z., Shen Q. // Opt. Comm. 2005. V. 245. P. 125.
11. Joannopoulos J. D., Johnson S. G., Winn J. N., Meade R. D. Photonic crystals: Molding the flow of light: 2nd edition. Princeton: Princeton University Press, 2008.
12. Булгаков А. А., Мериуц А. В., Ольховский Е. А. // ЖТФ. 2004. Т. 74, № 10. С. 103.
13. Lewin L. Theory of waveguides. London: Newness-Butterworths, 1975.
14. Harrington R. F. Time-harmonic electromagnetic fields. New York: McGraw-Hill Book Co., 1961.
15. Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны. М.: Радио и связь, 1982.
16. Маненков А. Б. // Изв. вузов. Радиофизика. 1970. Т. 13, № 5. С. 739.
17. Dasygus N. F., Tigelis I. G., Tsigopoulos A. D., Manenkov A. B. // J. Opt. Soc. Am. A. 2004. V. 21, No. 9. P. 1740.
18. Рябенский В. С. Введение в вычислительную математику. М.: Наука, 1984.
19. Дмитриева И. В. // Математические модели прикладной электродинамики. М.: МГУ, 1984. С. 182.

Поступила в редакцию 17 марта 2010 г.; принята в печать 9 апреля 2010 г.

SCATTERING FROM AN ABRUPTLY TERMINATED PLANAR METAMATERIAL WAVEGUIDE

A. B. Manenkov, P. G. Gerolymatos, and I. G. Tigelis

We use the variation method to study the problem of reflection of a guided mode from an abruptly terminated planar dielectric waveguide made of a metamaterial. The theory is illustrated by sample problems of abruptly terminated three-layer waveguides with piecewise-constant and variable permeability profiles. Differences in the scattering characteristics for systems with metamaterials and with conventional media are discussed.