

УДК 534.232+550.834

ВОЗБУЖДЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН РЭЛЕЯ И СТОНЕЛИ РАСПРЕДЕЛЁННЫМИ СЕЙСМИЧЕСКИМИ ИСТОЧНИКАМИ

А. В. Разин

Научно-исследовательский радиофизический институт, г. Нижний Новгород, Россия

Методом преобразований Фурье в интегральном виде получено решение задачи о возбуждении упругих волн в однородном изотропном твёрдом полупространстве и в граничащем с ним однородном газе зависящими от времени силами, произвольно распределёнными в твёрдом теле по плоскости, параллельной границе раздела сред. Выполнен анализ различных конфигураций силовых источников с точки зрения возбуждения тех или иных типов сейсмоакустических волн. Для гармонической зависимости сил от времени получены выражения для средних за период мощностей излучения волны Стонели на границе газ—твёрдое тело и волны Рэлея на границе твёрдое тело—вакуум, а также аналитические выражения для смещений в рэлеевской волне, справедливые на больших расстояниях от источника. Подробно рассмотрено возбуждение рэлеевской волны точечными источниками, ориентированными вертикально, т. е. по нормали к поверхности упругого полупространства, и горизонтально, т. е. параллельно этой поверхности. Получены аналитические выражения для мощностей излучения волны Рэлея. Исследованы зависимости этих мощностей от ориентации и глубины расположения источника. Показано, что в случае горизонтально ориентированного подповерхностного источника для среды с равными параметрами Ламэ λ и μ мощность излучения рэлеевской волны убывает при удалении точки приложения силы от границы и обращается в нуль при глубине источника, составляющей около 17,5 % длины поперечной волны. При дальнейшем увеличении глубины расположения источника указанная мощность нарастает и достигает относительного максимума при заглублении источника приблизительно на 42,4 % длины поперечной волны и затем экспоненциально спадает. Величина этого максимума составляет около 5,5 % мощности излучения поверхностного источника.

ВВЕДЕНИЕ

Изучение литосферно-атмосферно-ионосферных связей является в настоящее время одним из важнейших направлений в геофизике. Значительный интерес представляет совместное рассмотрение волновых процессов, происходящих в различных слоях Земли (твёрдых, жидких) и её атмосфере. Это обусловлено тем, что именно волны играют существенную роль в переносе энергии между геосферами. Сейсмоакустические волны в системах Земля—атмосфера и Земля—океан—атмосфера могут возбуждаться при различных процессах естественного или антропогенного характера, сопровождающихся интенсивным энерговыделением. В настоящее время существуют экспериментальные доказательства возможности выхода акустических волн, возбуждаемых находящимися вблизи земной поверхности источниками, в ионосферу [1–6].

Целый ряд вопросов, касающихся взаимодействия геосфер Земли посредством волновых процессов, изучен недостаточно полно. В частности, не решены задачи, связанные с расчётами полей и энергетических характеристик сейсмоакустических волн, создаваемых поверхностными и подповерхностными источниками различной физической природы. Не исследованы с достаточной степенью полноты возбуждение акустических волн инфразвуковых частот при сейсмических колебаниях Земли или морского дна и их выход в верхние слои атмосферы (до ионосферных высот). Изучение воздействия акустических волн на ионосферу необходимо, в частности, для обеспечения более эффективной и устойчивой работы каналов радиосвязи. Исследования возбуждения и распространения сейсмоакустических волн в Земле, океане и атмосфере актуальны также в связи с разработками методов дистанционного зондирования природных сред, в том числе методов

глобального крупномасштабного мониторинга состояния литосферы и атмосферы, в особенности, её верхних слоёв.

Общее решение задачи о возбуждении сейсмоакустических волн в однородном изотропном твёрдом полупространстве и в граничащем с ним однородном газе зависящими от времени силами, произвольно распределёнными по плоскости контакта этих сред, в интегральном виде получено в работе [7]. В ней для случая гармонических сил найдено выражение для средней за период мощности излучения волны Стонели, а также формула, описывающая энергию волны Стонели, излучённую за всё время действия силовых источников для случая их произвольной зависимости от времени.

Очевидно, что находящиеся на поверхности твёрдого тела и расположенные на некоторой глубине под ней сейсмические источники будут значительно отличаться по характеристикам сейсмоизлучения. Главным образом это касается возбуждения поверхностных волн: волн Рэлея в случае границы упругой среды с вакуумом и волн Стонели в случае, когда твёрдое тело граничит с газом или жидкостью.

Возбуждение акустической, вытекающей и поверхностной волн гармоническим силовым источником, находящимся внутри однородного изотропного упругого полупространства, граничащего с однородным газом, исследовано в работе [8]. В этой статье предполагается, что сила действует в направлении нормали к поверхности раздела двух сред, а скорость звука в газе меньше скорости рэлеевской волны на поверхности твёрдого тела. В [8] исследованы особенности изменения мощностей излучения поверхностной и вытекающей волн в зависимости от глубины расположения источника. Настоящая работа обобщает результаты статьи [7] на случай подповерхностных источников и статьи [8] на случай распределённых силовых источников. Здесь в интегральном виде получено решение задачи о возбуждении упругих волн в однородном изотропном твёрдом полупространстве и в граничащем с ним однородном газе зависящими от времени силами, произвольно распределёнными по некоторой площадке ограниченных размеров, которая параллельна границе раздела этих двух сред.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛОВ СМЕЩЕНИЙ

Пусть плоскость $z = 0$ декартовой системы координат совпадает с границей раздела однородного газа, имеющего плотность ρ_1 и скорость звука c_1 и заполняющего полупространство $z < 0$, и однородного изотропного твёрдого тела, занимающего полупространство $z > 0$ и характеризующегося плотностью ρ_2 , модулем всестороннего сжатия κ и модулем чистого сдвига μ . Скорости продольной c_l и поперечной c_t волн выражаются через параметры упругости и плотность твёрдого тела формулами [9]:

$$c_l = \left[\left(\kappa + \frac{4}{3} \mu \right) / \rho_2 \right]^{1/2}, \quad c_t = (\mu / \rho_2)^{1/2}.$$

Иногда вместо модуля сжатия вводится параметр Ламэ $\lambda = \kappa - 2\mu/3$. Отметим, что модуль чистого сдвига μ также называется параметром Ламэ.

При действии на единицу объёма твёрдого тела силы $\mathbf{f}_V(x, y, z, t)$, где t — время, малые смещения \mathbf{u} в нём описываются уравнением Ламэ [10–14]:

$$\rho_2 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \left(\kappa + \frac{1}{3} \mu \right) \text{grad div } \mathbf{u} - \mu \Delta \mathbf{u} = \mathbf{f}_V, \quad (1)$$

а возмущения плотности ρ'_1 , давления p' и скорости \mathbf{v}_1 в газе можно описывать системой уравнений гидродинамики, которые после линеаризации принимают вид [15]:

$$\frac{\partial \rho'_1}{\partial t} + \rho_1 \operatorname{div} \mathbf{v}_1 = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + \frac{\nabla p'}{\rho_1} = 0, \quad (3)$$

$$p'_1 = c_1^2 \rho'_1. \quad (4)$$

Необходимо отметить, что для естественных подповерхностных источников с плотностью силы $\mathbf{f}_V(\mathbf{R}, t)$ (очагов землетрясений) должны выполняться условия равенства нулю полной действующей силы и полного вращательного момента [16, 17]:

$$\mathbf{F} = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{f}_V(\mathbf{R}, t) d^3 \mathbf{R} = 0, \quad (5)$$

$$\mathbf{M} = \iiint_{-\infty}^{+\infty} [\mathbf{R}, \mathbf{f}_V] d^3 \mathbf{R} = 0, \quad (6)$$

где $\mathbf{R} = (x, y, z)$ — радиус-вектор.

На границе раздела твёрдое тело—газ выполняются условия непрерывности перпендикулярных к границе компонент смещений и тензора напряжений, а также равенства нулю тангенциальных компонент тензора напряжений в твёрдом теле [18, 19]:

$$u_{1z} = u_{2z}, \quad z = 0, \quad (7)$$

$$\sigma_{zz}^{(2)} = -p', \quad \sigma_{xz}^{(2)} = \sigma_{yz}^{(2)} = 0, \quad z = 0 \quad (8)$$

($\sigma_{zz}^{(2)}$ — тензор напряжений, индекс «2» относится к твёрдому телу). Пусть в твёрдом теле на единицу площади плоскости $z = h$ действует сила $\mathbf{f}(x, y, t)$. Таким образом, в (1)

$$\mathbf{f}_V(x, y, z, t) = \mathbf{f}(x, y, t) \delta(z - h), \quad (9)$$

где δ — дельта-функция Дирака.

На горизонте $z = h$ введём фиктивную границу и будем рассматривать волновые процессы в трёх областях: $z \leq 0$ (I), $0 \leq z \leq h$ (II), $z \geq h$ (III). На границе раздела двух твёрдых тел выполняются условия равенства трёх компонент вектора смещений и трёх пар компонент тензора напряжений [9, 18, 19]:

$$u_{2x} = u_{3x}, \quad u_{2y} = u_{3y}, \quad u_{2z} = u_{3z}, \quad z = h, \quad (10)$$

$$\sigma_{zx}^{(2)} = \sigma_{zx}^{(3)}, \quad \sigma_{zy}^{(2)} = \sigma_{zy}^{(3)}, \quad \sigma_{zz}^{(2)} = \sigma_{zz}^{(3)}, \quad z = h \quad (11)$$

(индексы «2» и «3» относятся соответственно к областям II и III).

Нетрудно показать (см., например, [15, с. 391; 20, с. 275]), что интегрируя уравнение (1) с правой частью вида (9) по z в пределах от $h - \xi$ до $h + \xi$ и переходя к пределу $\xi \rightarrow 0$, можно получить граничные условия для компонент тензора напряжений на горизонте приложения силы $z = h$:

$$\sigma_{xz}^{(2)} - \sigma_{xz}^{(3)} = f_x(x, y, t), \quad \sigma_{yz}^{(2)} - \sigma_{yz}^{(3)} = f_y(x, y, t), \quad \sigma_{zz}^{(2)} - \sigma_{zz}^{(3)} = f_z(x, y, t). \quad (12)$$

При этом смещения в твёрдом теле будут описываться однородным уравнением Ламэ

$$\rho_2 \frac{\partial^2 \mathbf{u}_{2,3}}{\partial t^2} - \left(\kappa + \frac{1}{3} \mu \right) \text{grad div } \mathbf{u}_{2,3} - \mu \Delta \mathbf{u}_{2,3} = 0. \quad (13)$$

При решении системы (2)–(4), (13), (7), (8), (10), (12) необходимо также учесть условия излучения при $|z| \rightarrow \infty$ [21].

Возмущения в газе будем описывать с помощью потенциала смещений ψ_1 , а в твёрдом теле — с помощью скалярных ψ_2, ψ_3 и векторных $\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3$ потенциалов таких, что смещения \mathbf{u}_1 и давление p' в газе и смещения $\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ в твёрдом теле определяются выражениями

$$\mathbf{u}_1 = \text{grad } \psi_1, \quad p' = -\rho_1 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2}, \quad (14)$$

$$\mathbf{u}_{2,3} = \text{grad } \psi_{2,3} + \text{rot } \mathbf{A}_{2,3}, \quad \text{div } \mathbf{A}_{2,3} = 0. \quad (15)$$

Для потенциалов можно получить волновые уравнения

$$\Delta \psi_1 - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} = 0, \quad \Delta \psi_{2,3} - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \psi_{2,3}}{\partial t^2} = 0, \quad \Delta \mathbf{A}_{2,3} - \frac{1}{c_t^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}_{2,3}}{\partial t^2} = 0, \quad (16)$$

которые необходимо решать совместно с граничными условиями (7), (8), (10), (12) и условиями излучения. Поскольку в области II есть волны, распространяющиеся как в положительном, так и в отрицательном направлении оси z , потенциалы при $0 \leq z \leq h$ представим в виде

$$\psi_2 = \psi_2^{(+)} + \psi_2^{(-)}, \quad \mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_2^{(+)} + \mathbf{A}_2^{(-)}, \quad (17)$$

где верхний индекс «(+)» означает, что волна распространяется в сторону возрастающих значений z , а индекс «(–)» означает, что волна распространяется в сторону убывающих значений z .

Для решения уравнений (16) воспользуемся методом преобразований Фурье. Введём интегральное представление источников \mathbf{f} :

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}, t) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{F}(\mathbf{k}, \omega) \exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}) d\omega d\mathbf{k} \quad (18)$$

с формулой обращения

$$\mathbf{F}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{f}(\mathbf{r}, t) \exp(i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r}) dt d\mathbf{r}. \quad (19)$$

В (18), (19) $\mathbf{F}(\mathbf{k}, \omega)$ — пространственно-частотный спектр функции $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{r} = (x, y)$ — двумерный радиус-вектор, а $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ — двумерный волновой вектор в плоскости xy , $\mathbf{k}\mathbf{r} = k_x x + k_y y$, $d\mathbf{k} = dk_x dk_y$, $d\mathbf{r} = dx dy$. Решения уравнений (16) будем искать в следующем виде:

— область I ($z \leq 0$):

$$\psi_1(\mathbf{r}, z, t) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\psi}_1(\mathbf{k}, \omega) \exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\kappa_1 z) d\omega d\mathbf{k}; \quad (20)$$

— область II ($0 \leq z \leq h$):

$$\psi_2^{(+)}(\mathbf{r}, z, t) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\psi}_2^{(+)}(\mathbf{k}, \omega) \exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r} + i\kappa_1 z) d\omega d\mathbf{k}, \quad (21)$$

$$\mathbf{A}_2^{(+)}(\mathbf{r}, z, t) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\mathbf{A}}_2^{(+)}(\mathbf{k}, \omega) \exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r} + i\kappa_t z) d\omega d\mathbf{k}, \quad (22)$$

$$\psi_2^{(-)}(\mathbf{r}, z, t) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\psi}_2^{(-)}(\mathbf{k}, \omega) \exp[-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\kappa_1(z-h)] d\omega d\mathbf{k}, \quad (23)$$

$$\mathbf{A}_2^{(-)}(\mathbf{r}, z, t) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\mathbf{A}}_2^{(-)}(\mathbf{k}, \omega) \exp[-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\kappa_t(z-h)] d\omega d\mathbf{k}; \quad (24)$$

— область III ($z \geq h$):

$$\psi_3(\mathbf{r}, z, t) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\psi}_3(\mathbf{k}, \omega) \exp[-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r} + i\kappa_1(z-h)] d\omega d\mathbf{k}, \quad (25)$$

$$\mathbf{A}_3(\mathbf{r}, z, t) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\mathbf{A}}_3(\mathbf{k}, \omega) \exp[-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r} + i\kappa_t(z-h)] d\omega d\mathbf{k}. \quad (26)$$

В (20)–(26) $\kappa_1 = (k_1^2 - k^2)^{1/2}$, $\kappa_{1,t} = (k_{1,t}^2 - k^2)^{1/2}$, $k_1 = \omega/c_1$, $k_{1,t} = \omega/c_{1,t}$ — волновые числа звуковой, продольной и поперечной волн на частоте ω , $k = |\mathbf{k}|$. Для сходимости интегралов (20), (25), (26) при $|z| \rightarrow \infty$ необходимо определить аналитические функции κ_1 , κ_t и κ_t на комплексной плоскости k следующим образом:

$$(k_\alpha^2 - k^2)^{1/2} = i \left| (k^2 - k_\alpha^2)^{1/2} \right| \quad \text{при } k > \omega/c_\alpha,$$

где индекс « α » принимает значения 1, l и t. Вводя в среды малое затухание волн можно показать, что контур интегрирования по ω должен проходить выше особых точек подынтегральных выражений (например, точек ветвления $k = \pm k_\alpha$ аналитических функций κ_α), т. е. в области $\text{Im } \omega > 0$.

Поля в областях I–III описываются тринадцатью неизвестными величинами: ψ_1 , $\psi_2^{(+)}$, $\mathbf{A}_2^{(+)}$, $\psi_2^{(-)}$, $\mathbf{A}_2^{(-)}$, ψ_3 и \mathbf{A}_3 . Для фурье-образов этих величин из граничных условий (7), (8), (10), (12), которые также необходимо переписать через фурье-образы, получим десять линейных алгебраических уравнений. Ещё три уравнения получим из условий $\text{div } \mathbf{A}_2^{(+),(-)} = 0$, $\text{div } \mathbf{A}_3 = 0$, которые позволяют исключить z -компоненты фурье-образов векторных потенциалов. В результате для фурье-образов скалярных потенциалов и горизонтальных компонент векторных потенциалов получаем систему десяти линейных алгебраических уравнений.

Решая эту систему уравнений, получим выражения для фурье-образов волновых полей:

$$\tilde{\psi}_1(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{\rho_2 c_t^2 \kappa_1 S_0(k)} \left\{ [(k_t^2 - 2k^2) \exp(i\kappa_1 h) - 2\kappa_1 \kappa_t \exp(i\kappa_t h)] (\mathbf{k}\mathbf{F}) - \right. \\ \left. - \kappa_1 [(k_t^2 - 2k^2) \exp(i\kappa_1 h) + 2k^2 \exp(i\kappa_t h)] F_z \right\}, \quad (27)$$

$$\tilde{\psi}_2^{(+)}(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{1}{2\rho_2 c_t^2 k_t^2 \kappa_1 S_0(k)} \{ [S_{mm}(k) \exp(i\kappa_1 h) - 4\kappa_1 \kappa_t (k_t^2 - 2k^2) \exp(i\kappa_t h)] (\mathbf{kF}) - \kappa_1 [S_{mm}(k) \exp(i\kappa_1 h) + 4k^2 (k_t^2 - 2k^2) \exp(i\kappa_t h)] F_z \}, \quad (28)$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_2^{(+)} = \tilde{\mathbf{A}}_{2SV}^{(+)} + \tilde{\mathbf{A}}_{2SH}^{(+)}, \quad (29)$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_{2SV}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{[\mathbf{k}, \mathbf{e}_z]}{2\rho_2 c_t^2 k^2 k_t^2 \kappa_t S_0(k)} \{ \kappa_t [4k^2 (k_t^2 - 2k^2) \exp(i\kappa_1 h) + S_{mp}(k) \exp(i\kappa_t h)] (\mathbf{kF}) - k^2 [4\kappa_1 \kappa_t (k_t^2 - 2k^2) \exp(i\kappa_1 h) - S_{mp}(k) \exp(i\kappa_t h)] F_z \}, \quad (30)$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_{2SH}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{\kappa_t \mathbf{k} - k^2 \mathbf{e}_z}{2\rho_2 c_t^2 k^2 k_t^2 \kappa_t} (k_x F_y - k_y F_x) \exp(i\kappa_t h), \quad (31)$$

$$\tilde{\psi}_2^{(-)}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{(\mathbf{kF}) - \kappa_1 F_z}{2\rho_2 c_t^2 k_t^2 \kappa_1}, \quad (32)$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_2^{(-)} = \tilde{\mathbf{A}}_{2SV}^{(-)} + \tilde{\mathbf{A}}_{2SH}^{(-)}, \quad (33)$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_{2SV}^{(-)}(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{\kappa_t (\mathbf{kF}) + k^2 F_z}{2\rho_2 c_t^2 k^2 k_t^2 \kappa_t} [\mathbf{k}, \mathbf{e}_z], \quad (34)$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_{2SH}^{(-)}(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{\kappa_t \mathbf{k} + k^2 \mathbf{e}_z}{2\rho_2 c_t^2 k^2 k_t^2 \kappa_t} (k_x F_y - k_y F_x), \quad (35)$$

$$\tilde{\psi}_3(\mathbf{k}, \omega) = \frac{(\mathbf{kF}) + \kappa_1 F_z}{2\rho_2 c_t^2 k_t^2 \kappa_1} + \tilde{\psi}_2^{(+)}(\mathbf{k}, \omega) \exp(i\kappa_1 h), \quad (36)$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_3 = \tilde{\mathbf{A}}_{3SV} + \tilde{\mathbf{A}}_{3SH}, \quad (37)$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_{3SV}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{\kappa_t (\mathbf{kF}) - k^2 F_z}{2\rho_2 c_t^2 k^2 k_t^2 \kappa_t} [\mathbf{k}, \mathbf{e}_z] + \tilde{\mathbf{A}}_{2SV}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega) \exp(i\kappa_t h), \quad (38)$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_{3SH}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{\kappa_t \mathbf{k} - k^2 \mathbf{e}_z}{2\rho_2 c_t^2 k^2 k_t^2 \kappa_t} (k_x F_y - k_y F_x) + \tilde{\mathbf{A}}_{2SH}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega) \exp(i\kappa_t h). \quad (39)$$

В (29), (33), (37) учтено, что при наличии в среде плоских границ поперечную волну с произвольным направлением вектора смещений удобно представить в виде суммы волны, в которой вектор смещений параллелен границе (SH-волна), и волны, в которой вектор смещений имеет перпендикулярную к границе составляющую (SV-волна) [18].

В (27), (28), (30) введены обозначения:

$$S_0(k) = R_0(k) + \varepsilon k_t^4 \frac{\kappa_1}{\kappa_1}, \quad R_0(k) = (k_t^2 - 2k^2)^2 + 4k^2 \kappa_1 \kappa_t, \quad \varepsilon = \frac{\rho_1}{\rho_2},$$

$$S_{mm} = (k_t^2 - 2k^2)^2 - 4k^2 \kappa_1 \kappa_t - \varepsilon k_t^4 \frac{\kappa_1}{\kappa_1}, \quad S_{mp} = (k_t^2 - 2k^2)^2 - 4k^2 \kappa_1 \kappa_t + \varepsilon k_t^4 \frac{\kappa_1}{\kappa_1},$$

$[\mathbf{k}, \mathbf{e}_z] = k_y \mathbf{e}_x - k_x \mathbf{e}_y$, \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y , \mathbf{e}_z — орты координатных осей.

Подстановка выражений (27)–(39) в соответствующие интегралы Фурье (20)–(26) позволяет записать решение рассматриваемой задачи в интегральном виде. Некоторые из этих интегралов имеют полюс, определяемый из решения уравнения $S_0(k) = 0$ и связанный с излучением поверхностных волн на границе раздела твёрдое тело–газ. При условии $c_1 < c_R$, где c_R — скорость рэлеевской волны на границе твёрдое тело–вакуум, а соответствующее ей волновое число k_R

определяется из уравнения Рэлея $R_0(k) = 0$, уравнение $S_0(k) = 0$ имеет один действительный корень $k = k_S$, соответствующий поверхностной волне Стонели [18, 19].

Полученное интегральное решение задачи позволяет сделать ряд общих выводов о возбуждении тех или иных типов волн источниками различных конфигураций. Если вертикальная составляющая силы отсутствует, т. е. $f_z = 0$, а распределение горизонтальных сил $f_{x,y}(\mathbf{r}, t)$ представляет собой соленоидальное поле, так что $\operatorname{div} \mathbf{f} = 0$, то отличны от нуля только потенциалы $\mathbf{A}_{2\text{SH}}^{(+),(-)}$, $\mathbf{A}_{3\text{SH}}$. Такой источник возбуждает только поперечные волны, вектор смещений в которых лежит в горизонтальной плоскости (SH-волны). Акустические волны в газе, продольные волны в твёрдом теле, а также поверхностная волна Стонели в этом случае не возбуждаются.

Если приложенные к плоскости $z = h$ силы имеют вертикальную составляющую, или, в её отсутствие, и ротор, и дивергенция поля горизонтальных сил отличны от нуля, т. е. $\operatorname{rot} \mathbf{f} \neq 0$, $\operatorname{div} \mathbf{f} \neq 0$, то возбуждаются акустические волны в газе, продольные и поперечные (SV- и SH-поляризации) волны в твёрдом теле, а также поверхностная волна Стонели. Потенциальное поле горизонтальных сил ($\operatorname{rot} \mathbf{f} = 0$) волны SH-поляризации не возбуждает.

2. МОЩНОСТЬ ИЗЛУЧЕНИЯ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ СТОНЕЛИ

Для гармонических силовых воздействий, когда

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{f}_\omega(\mathbf{r}) \exp(-i\omega_0 t),$$

где ω_0 — циклическая частота и $\mathbf{f}_\omega(\mathbf{r})$ — распределение сил по плоскости $z = h$, из соотношения (19) следует, что

$$\mathbf{F}(\mathbf{k}, \omega) = \delta(\omega - \omega_0) \mathbf{F}_\omega(\mathbf{k}), \quad (40)$$

где

$$\mathbf{F}_\omega(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{f}_\omega(\mathbf{r}) \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (41)$$

— пространственный спектр гармонического источника. Поля акустических и упругих волн, генерируемых таким источником, выражаются в виде двойных интегралов Фурье по x - и y -компонентам волнового вектора.

Отметим, что выражения (32)–(35) и первые слагаемые в формулах (36), (38), (39) описывают поля упругих волн, возбуждаемых силовыми источниками, распределёнными по плоскости в безграничной твёрдой среде.

Из полученного решения следует ряд известных частных случаев. Если силовые источники находятся на границе раздела сред, $h = 0$, то выражения (27), (36)–(39) для $\tilde{\psi}_1(\mathbf{k}, \omega)$, $\tilde{\psi}_3(\mathbf{k}, \omega)$ и $\tilde{\mathbf{A}}_3(\mathbf{k}, \omega)$ соответствуют результатам, полученным в работе [7]. Если при этом газ над упругой средой отсутствует, т. е. $\rho_1 = 0$, то из (36)–(39) следуют формулы, полученные в работе [22].

Из выражений (27), (28), (30), (32), (34), (36) и (38) следует решение задачи о возбуждении сейсмоакустических волн точечным гармоническим силовым источником, находящимся в упругом полупространстве, граничащем с газом [8].

Дальнейшее рассмотрение ограничим случаем гармонических силовых источников. Обсуждение различных подходов к вычислению энергии излучения волн содержится, например, в работе [17]. В ней отмечено, что в теории волновых процессов существуют два способа расчёта волновой энергии, которые приводят к одинаковым результатам. При использовании первого способа следует методом стационарной фазы вычислить соответствующие интегралы Фурье по горизонтальным компонентам волнового вектора, что даст асимптотики волновых полей на больших по

сравнению с длинами излучаемых волн расстояниях от источника, затем вычислить плотность потока энергии, и, наконец, поток энергии через поверхность сферы в случае безграничной среды или полусферы в случае полупространства большого радиуса. Второй способ вычисления энергии излучения волн связан с расчётом работы сил реакции излучения над источниками волн. В рассматриваемом случае это работа, совершаемая силовым источником над упругой средой.

При действии на плоскость $z = h$ силовых источников мгновенная мощность излучения вычисляется по формуле [14, 17]

$$W(t) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{f}(\mathbf{r}, t) \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, z, t)|_{z=h} d\mathbf{r}, \quad (42)$$

где точка над символом \mathbf{u} означает дифференцирование по времени. Формула (42) описывает суммарную мгновенную мощность излучения всех типов волн, существующих в данной среде. Пользуясь результатами [14, с. 38, 39; 23, с. 119] можно показать, что в случае гармонических волн циклической частоты ω_0 , когда $u(\mathbf{r}, z, t) = u_\omega(\mathbf{r}, z) \exp(-i\omega_0 t)$, средняя за период волны $T = 2\pi/\omega_0$ мощность излучения даётся выражением

$$W_{\text{tot}} = \frac{1}{T} \int_0^T W(t) dt = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[i\omega_0 \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{f}_\omega^*(\mathbf{r}) \mathbf{u}_\omega(\mathbf{r}, z)|_{z=h} d\mathbf{r} \right], \quad (43)$$

где звёздочка обозначает комплексное сопряжение. В формуле (43) удобно перейти к спектрам, переписав её в виде

$$W_{\text{tot}} = -2\pi^2 \omega_0 \operatorname{Re} \left[i \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{U}_\omega(\mathbf{k}) \mathbf{F}_\omega^*(\mathbf{k}) d\mathbf{k} \right]. \quad (44)$$

В (44) введено обозначение $\mathbf{U}_\omega(\mathbf{k})$ для пространственного спектра смещений плоскости $z = h$ в гармонической волне:

$$\mathbf{U}_\omega(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{u}_\omega(\mathbf{r}, z)|_{z=h} \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (45)$$

Выделить из общего выражения (44) мощности излучения всех типов волн не представляется возможным. Однако сравнительно легко можно получить формулу, описывающую мощность излучения поверхностной волны, поскольку эта мощность определяется вкладом полюса подынтегрального выражения, который соответствует данной поверхностной волне.

Мощность излучения объёмных волн, т. е. сферических продольной и поперечной волн в твёрдом теле и акустической волны в газе следует вычислять путём подсчёта потока энергии через поверхность полусферы большого радиуса.

Отметим, что мощность излучения поверхностной волны можно получить путём вычисления потока энергии через поверхность бесконечного цилиндра, ось которого перпендикулярна границе раздела сред.

Выделим из формулы (44) для полной мощности излучения слагаемые, в которых имеются полюсы подынтегральных выражений. Обозначая эти слагаемые W , запишем их в виде

$$W = \frac{\pi^2}{\rho_2 \omega_0} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k^2 \kappa_1 \kappa_t S_0(k)} \left\{ \kappa_t \alpha(k) (\mathbf{kF}_\omega) (\mathbf{kF}_\omega^*) + \right. \\ \left. + k^2 \kappa_1 \kappa_t \beta(k) [(\mathbf{kF}_\omega^*) F_{\omega z} - (\mathbf{kF}_\omega) F_{\omega z}^*] - k^2 \kappa_1 \gamma(k) |F_{\omega z}|^2 \right\} d\mathbf{k}. \quad (46)$$

В (46) введены обозначения

$$\alpha(k) = -k^2 S_{mm}(k) \exp(2i\kappa_1 h) + \kappa_1 \kappa_t S_{mp}(k) \exp(2i\kappa_t h) + 8k^2 \kappa_1 \kappa_t (k_t^2 - 2k^2) \exp[i(\kappa_1 + \kappa_t) h], \quad (47)$$

$$\beta(k) = S_{mm}(k) \exp(2i\kappa_1 h) + S_{mp}(k) \exp(2i\kappa_t h) + 4(k^2 - \kappa_1 \kappa_t) (k_t^2 - 2k^2) \exp[i(\kappa_1 + \kappa_t) h], \quad (48)$$

$$\gamma(k) = -\kappa_1 \kappa_t S_{mm}(k) \exp(2i\kappa_1 h) + k^2 S_{mp}(k) \exp(2i\kappa_t h) - 8k^2 \kappa_1 \kappa_t (k_t^2 - 2k^2) \exp[i(\kappa_1 + \kappa_t) h]. \quad (49)$$

Перейдём под интегралом в (46) к полярным координатам на плоскости $k_x k_y$ в соответствии с формулами

$$k_x = k \cos \varphi, \quad k_y = k \sin \varphi.$$

Это позволяет представить величину W в виде:

$$W = \frac{\pi^2}{\rho_2 \omega_0} \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty \frac{1}{\kappa_1 \kappa_t S_0(k)} \times \\ \times \left[\kappa_t \alpha(k) |F_{\omega r}|^2 + k \kappa_1 \kappa_t \beta(k) (F_{\omega r}^* F_{\omega z} - F_{\omega r} F_{\omega z}^*) - \kappa_1 \gamma(k) |F_{\omega z}|^2 \right] k dk, \quad (50)$$

где

$$F_{\omega r} = F_{\omega x} \cos \varphi + F_{\omega y} \sin \varphi. \quad (51)$$

Отметим, что каждая из компонент вектора спектра силы может сложным образом зависеть от переменных интегрирования k и φ в (50).

Вклад в реальную часть интеграла (50) дают те области интегрирования, где подынтегральная функция действительна, а также полувычеты в лежащих на действительной оси полюсах подынтегрального выражения. Как отмечено выше, при условии $c_1 < c_R$ уравнение $S_0(k) = 0$ имеет действительный корень $k = k_S$, соответствующий поверхностной волне Стонели.

Мощность излучения волны Стонели пропорциональна полувычету в полюсе $k = k_S$ в интеграле по k в (50):

$$W_S = -\frac{2\pi^3 k_S}{\rho_2 \omega_0 \sqrt{k_S^2 - k_1^2} S_0'(k_S)} \left\{ a^2(k_S) \int_0^{2\pi} |F_{\omega r}(k_S, \varphi)|^2 d\varphi + b^2(k_S) \int_0^{2\pi} |F_{\omega z}(k_S, \varphi)|^2 d\varphi + \right. \\ \left. + 2a(k_S)b(k_S) \int_0^{2\pi} \operatorname{Im} [F_{\omega r}^*(k_S, \varphi) F_{\omega z}(k_S, \varphi)] d\varphi \right\}. \quad (52)$$

В (52)

$$S_0'(k_S) = \left. \frac{dS_0}{dk} \right|_{k=k_S} = 8k_S \left[2k_S^2 - k_t^2 - \sqrt{k_S^2 - k_1^2} \sqrt{k_S^2 - k_t^2} \right] + \\ + \frac{4k_S^3 (k_1^2 + k_t^2 - 2k_S^2)}{\sqrt{k_S^2 - k_1^2} \sqrt{k_S^2 - k_t^2}} - \varepsilon \frac{k_t^4 k_S (k_1^2 - k_t^2)}{\sqrt{k_S^2 - k_1^2} (k_S^2 - k_1^2)^{3/2}},$$

$$a(k_S) = k_S \left[(k_t^2 - 2k_S^2) \exp\left(-\sqrt{k_S^2 - k_1^2} h\right) + 2\sqrt{k_S^2 - k_1^2} \sqrt{k_S^2 - k_t^2} \exp\left(-\sqrt{k_S^2 - k_t^2} h\right) \right], \quad (53)$$

$$b(k_S) = \sqrt{k_S^2 - k_1^2} \left[(k_t^2 - 2k_S^2) \exp\left(-\sqrt{k_S^2 - k_1^2} h\right) + 2k_S^2 \exp\left(-\sqrt{k_S^2 - k_t^2} h\right) \right]. \quad (54)$$

Рассмотрим частные случаи формулы (52). Если источник находится на поверхности упругого полупространства, $h = 0$, то из (53), (54) следует, что

$$a(k_S) = k_S \left(k_t^2 - 2k_S^2 + 2\sqrt{k_S^2 - k_1^2} \sqrt{k_S^2 - k_t^2} \right), \quad (55)$$

$$b(k_S) = k_t^2 \sqrt{k_S^2 - k_1^2}. \quad (56)$$

При этом выражение для мощности излучения волны Стонели принимает вид

$$W_S|_{h=0} = -\frac{2\pi^3 k_S}{\rho_2 \omega_0 \sqrt{k_S^2 - k_1^2} S'_0(k_S)} \left\{ k_S^2 \left(k_t^2 - 2k_S^2 + 2\sqrt{k_S^2 - k_1^2} \sqrt{k_S^2 - k_t^2} \right)^2 \times \right. \\ \times \int_0^{2\pi} |F_{\omega r}(k_S, \varphi)|^2 d\varphi + k_t^4 (k_S^2 - k_1^2) \int_0^{2\pi} |F_{\omega z}(k_S, \varphi)|^2 d\varphi + \\ \left. + 2k_t^2 k_S \left(k_t^2 - 2k_S^2 + 2\sqrt{k_S^2 - k_1^2} \sqrt{k_S^2 - k_t^2} \right) \sqrt{k_S^2 - k_1^2} \int_0^{2\pi} \text{Im} \left[F_{\omega r}^*(k_S, \varphi) F_{\omega z}(k_S, \varphi) \right] d\varphi \right\}. \quad (57)$$

Аналогичное выражение для W_S было ранее получено в [7]. Необходимо отметить, что в этой работе в случае, когда к поверхности твёрдого тела приложена касательная сила, т. е. $f_{\omega z} = 0$, для мощности излучения волны Стонели было получено выражение (см. формулу (50) в [7])

$$W_S^{(r)}|_{h=0} = -\frac{2\pi^3 \omega_0^3 k_S}{\rho_2 c_t^4 \sqrt{k_S^2 - k_1^2} S'_0(k_S)} \times \\ \times \left[\sqrt{k_S^2 - k_1^2} \sqrt{k_S^2 - k_t^2} - \varepsilon \left(k_S^2 - \sqrt{k_S^2 - k_1^2} \sqrt{k_S^2 - k_t^2} \right) \right] \int_0^{2\pi} |F_{\omega r}(k_S, \varphi)|^2 d\varphi. \quad (58)$$

Из общей формулы (57) следует, что

$$W_S^{(r)}|_{h=0} = -\frac{2\pi^3 k_S^3}{\rho_2 \omega_0 \sqrt{k_S^2 - k_1^2} S'_0(k_S)} \left(k_t^2 - 2k_S^2 + 2\sqrt{k_S^2 - k_1^2} \sqrt{k_S^2 - k_t^2} \right)^2 \int_0^{2\pi} |F_{\omega r}(k_S, \varphi)|^2 d\varphi. \quad (59)$$

Эквивалентность формул (58) и (59) следует из соотношения $S_0(k_S) = 0$.

Если на глубине $z = h$ действует источник вертикальной силы, $f_{\omega z} \neq 0$, $f_{\omega x} = f_{\omega y} = 0$, то мощность излучения даётся выражением

$$W_S^{(z)} = W_S^{(z)}(0) \zeta_S^{(z)}(h), \quad (60)$$

где

$$W_S^{(z)}(0) = -\frac{2\pi^3\omega_0^3 k_S \sqrt{k_S^2 - k_1^2}}{\rho_2 c_t^4 S'_0(k_S)} \int_0^{2\pi} |F_{\omega z}(k_S, \varphi)|^2 d\varphi \quad (61)$$

— мощность волны Стонели, возбуждаемой поверхностным источником, и функция

$$\zeta_S^{(z)}(h) = \left[\left(2 \frac{k_S^2}{k_t^2} - 1 \right) \exp\left(-\sqrt{k_S^2 - k_1^2} h\right) - 2 \frac{k_S^2}{k_t^2} \exp\left(-\sqrt{k_S^2 - k_t^2} h\right) \right]^2 \quad (62)$$

характеризует зависимость мощности излучения от глубины расположения источника.

В случае точечного источника, когда

$$f_{\omega z} = f_0 \delta(x) \delta(y),$$

и

$$F_{\omega z}(k_S) = \frac{f_0}{4\pi^2},$$

где f_0 характеризует амплитуду вертикальной силы, выражение для величины $W_S^{(z)}$ принимает вид

$$W_S^{(z)}(0) = -\frac{f_0^2 \omega_0^3 k_S \sqrt{k_S^2 - k_1^2}}{4\rho_2 c_t^4 S'_0(k_S)}. \quad (63)$$

Формула (61) была получена в [7], а выражения (60), (62) — в работе [8]. Мощность волны Стонели, излучаемой точечным поверхностным источником вертикальной силы, даваемая формулой (63), вычислена в [24].

Если на плоскости $z = h$ действует источник горизонтальной силы, т.е. $f_{\omega z} = 0$, $f_{\omega r} \neq 0$, то выражение для мощности излучения волны Стонели имеет вид

$$W_S^{(r)} = -\frac{2\pi^3\omega_0^3 k_S^3}{\rho_2 c_t^4 \sqrt{k_S^2 - k_1^2} S'_0(k_S)} \left[\left(1 - 2 \frac{k_S^2}{k_t^2} \right) \exp\left(-\sqrt{k_S^2 - k_1^2} h\right) + \right. \\ \left. + 2 \sqrt{\frac{k_S^2}{k_t^2} - n^2} \sqrt{\frac{k_S^2}{k_t^2} - 1} \exp\left(-\sqrt{k_S^2 - k_t^2} h\right) \right]^2 \int_0^{2\pi} |F_{\omega r}(k_S, \varphi)|^2 d\varphi, \quad (64)$$

где $n = k_1/k_t = c_t/c_l$.

В случае точечного источника горизонтальной силы, действующей, например, вдоль оси x , когда

$$f_{\omega x} = f_0 \delta(x) \delta(y),$$

и

$$F_{\omega x}(k_S) = \frac{f_0}{4\pi^2}, \quad F_{\omega r}(k_S, \varphi) = \frac{f_0}{4\pi^2} \cos \varphi,$$

из (64) получаем

$$W_S^{(x)} = -\frac{f_0^2 \omega_0^3 k_S^3}{8\rho_2 c_t^4 \sqrt{k_S^2 - k_1^2} S'_0(k_S)} \times$$

$$\times \left[\left(1 - 2 \frac{k_S^2}{k_t^2} \right) \exp \left(-\sqrt{k_S^2 - k_1^2} h \right) + 2 \sqrt{\frac{k_S^2}{k_t^2} - n^2} \sqrt{\frac{k_S^2}{k_t^2} - 1} \exp \left(-\sqrt{k_S^2 - k_t^2} h \right) \right]^2 \quad (65)$$

Формулу (65) можно записать также в виде

$$W_S^{(x)} = W_S^{(x)}(0) \zeta_S^{(x)}(h), \quad (66)$$

где

$$W_S^{(x)}(0) = -\frac{f_0^2 \omega_0^3 k_S^3}{8 \rho_2 c_t^4 \sqrt{k_S^2 - k_1^2} S_0'(k_S)} \left(1 - 2 \frac{k_S^2}{k_t^2} + 2 \sqrt{\frac{k_S^2}{k_t^2} - n^2} \sqrt{\frac{k_S^2}{k_t^2} - 1} \right)^2 \quad (67)$$

представляет собой мощность излучения волны Стонели, возбуждаемой точечным источником поверхностной горизонтальной силы, и

$$\zeta_S^{(x)}(h) = \left[\left(1 - 2 \frac{k_S^2}{k_t^2} \right) \exp \left(-\sqrt{k_S^2 - k_1^2} h \right) + 2 \sqrt{\frac{k_S^2}{k_t^2} - n^2} \sqrt{\frac{k_S^2}{k_t^2} - 1} \exp \left(-\sqrt{k_S^2 - k_t^2} h \right) \right]^2 \times \\ \times \left(1 - 2 \frac{k_S^2}{k_t^2} + 2 \sqrt{\frac{k_S^2}{k_t^2} - n^2} \sqrt{\frac{k_S^2}{k_t^2} - 1} \right)^{-2} \quad (68)$$

— функция, характеризующая зависимость мощности излучения волны Стонели от глубины расположения источника.

3. ИЗЛУЧЕНИЕ ВОЛНЫ РЭЛЕЯ ГАРМОНИЧЕСКИМИ ПОДПОВЕРХНОСТНЫМИ ИСТОЧНИКАМИ

В ряде практически важных случаев упругая среда находится в контакте с разреженным газом, плотность которого на три–четыре порядка меньше плотности твёрдого тела. При этом можно пренебречь волновыми процессами в газе и приближённо считать, что твёрдая среда граничит с вакуумом.

В случае границы твёрдого тела с вакуумом в знаменателе подынтегрального выражения в формуле (50) следует заменить $S_0(k)$ на $R_0(k)$. При любых соотношениях между параметрами Ламэ упругой среды λ и μ уравнение $R_0(k) = 0$ имеет действительный корень, соответствующий поверхностной волне Рэлея.

Мощность излучения волны Рэлея пропорциональна полувычету в полюсе $k = k_R$ в интеграле, аналогичном (50):

$$W_R = -\frac{2\pi^3 k_R}{\rho_2 \omega_0 R_0'(k_R)} \left\{ \alpha_0^2(k_R) \int_0^{2\pi} |F_{\omega r}(k_R, \varphi)|^2 d\varphi + \beta_0^2(k_R) \int_0^{2\pi} |F_{\omega z}(k_R, \varphi)|^2 d\varphi + \right. \\ \left. + 2\alpha_0(k_R)\beta_0(k_R) \int_0^{2\pi} \text{Im}[F_{\omega r}^*(k_R, \varphi)F_{\omega z}(k_R, \varphi)] d\varphi \right\}. \quad (69)$$

В (69) введены обозначения

$$\alpha_0(k_R) = \sqrt{q_t} [2k_R^2 \exp(-q_1 h) - (2k_R^2 - k_t^2) \exp(-q_t h)],$$

$$\beta_0(k_R) = \sqrt{q_1} [(2k_R^2 - k_t^2) \exp(-q_1 h) - 2k_R^2 \exp(-q_t h)],$$

$$q_1 = \sqrt{k_R^2 - k_1^2}, \quad q_t = \sqrt{k_R^2 - k_t^2},$$

$$R'_0(k_R) = \left. \frac{dR_0}{dk} \right|_{k=k_R} = \frac{2}{k_R (2k_R^2 - k_t^2)^2} [k_t^6 (4k_R^2 - k_t^2) - 8k_R^6 (k_t^2 - k_1^2)].$$

Рассмотрим частные случаи формулы (69). Если силовой источник расположен на поверхности упругого полупространства, т. е. $h = 0$, из (69) получаем:

$$W_R = -\frac{2\pi^3 \omega_0^3 k_R \sqrt{k_R^2 - k_t^2}}{\rho_2 c_t^4 R'_0(k_R)} \int_0^{2\pi} |F_{\omega r}(k_R, \varphi)|^2 d\varphi - \frac{2\pi^3 \omega_0^3 k_R \sqrt{k_R^2 - k_1^2}}{\rho_2 c_t^4 R'_0(k_R)} \int_0^{2\pi} |F_{\omega z}(k_R, \varphi)|^2 d\varphi + \\ + \frac{4\pi^3 \omega_0^3 k_R (k_R^2 - k_1^2)^{1/4} (k_R^2 - k_t^2)^{1/4}}{\rho_2 c_t^4 R'_0(k_R)} \int_0^{2\pi} \text{Im}[F_{\omega r}^*(k_R, \varphi) F_{\omega z}(k_R, \varphi)] d\varphi. \quad (70)$$

Ранее в работе [25] для мощности излучения волны Рэлея, возбуждаемой поверхностными силовыми источниками, было получено гораздо более громоздкое выражение, путь дальнейшего преобразования которого не очевиден (см. формулу (18) в [25]). Указанная формула была получена путём вычисления смещений в волне Рэлея, плотности потока энергии и затем её интегрирования по поверхности полубесконечного цилиндра, который включает в себе источник и образующая которого параллельна оси z . В виде, аналогичном формуле (18) из [25], в широко цитируемых работах [26, 27] были получены выражения для мощности излучения волны Рэлея для более простых конфигураций поверхностных сил. Численное сравнение коэффициентов при интегралах в (70) с соответствующими коэффициентами в формуле (18) из работы [25] при различных возможных значениях отношения $n = c_t/c_1$ показало, что эти две формулы эквивалентны.

Для точечного подповерхностного силового источника, ориентированного вдоль оси x , мощность излучения волны Рэлея даётся выражением

$$W_R^{(x)} = W_R^{(x)}(0) \zeta_R^{(x)}(h), \quad (71)$$

где

$$W_R^{(x)}(0) = -\frac{f_0^2 \omega_0^3 k_R \sqrt{k_R^2 - k_t^2}}{8\rho_2 c_t^4 R'_0(k_R)} \quad (72)$$

— мощность излучения рэлеевской волны в случае поверхностного источника, и

$$\zeta_R^{(x)}(h) = \nu_x^2(h), \quad (73)$$

$$\nu_x(h) = 2\xi^2 \exp(-k_t h \sqrt{\xi^2 - n^2}) + (1 - 2\xi^2) \exp(-k_t h \sqrt{\xi^2 - 1}), \quad (74)$$

где

$$\xi = \frac{k_R}{k_t} = \frac{c_t}{c_R}$$

— отношение скоростей поперечной и рэлеевской волн.

Функция $\zeta_R^{(x)}(h)$, определяемая формулой (73), описывает зависимость мощности излучения рэлеевской волны от глубины, на которой находится источник.

Если точечный подповерхностный силовой источник ориентирован вертикально, то для мощности излучения волны Рэлея имеем

$$W_R^{(z)} = W_R^{(z)}(0) \zeta_R^{(z)}(h), \quad (75)$$

где

$$W_R^{(z)}(0) = -\frac{f_0^2 \omega_0^3 k_R \sqrt{k_R^2 - k_1^2}}{4 \rho_2 c_t^4 R_0'(k_R)} \quad (76)$$

соответствует случаю поверхностного источника, и

$$\zeta_R^{(z)}(h) = \nu_z^2(h), \quad (77)$$

$$\nu_z(h) = (1 - 2\xi^2) \exp(-k_t h \sqrt{\xi^2 - n^2}) + 2\xi^2 \exp(-k_t h \sqrt{\xi^2 - 1}). \quad (78)$$

Отметим, что формула (76) была получена в работе [24], а зависимость мощности излучения $\zeta_R^{(z)}(h)$ (77) от глубины расположения источника — в статье [8].

Подробный численный анализ распределения мощности излучения по типам упругих волн, возбуждаемых в твёрдом полупространстве точечным гармоническим подповерхностным вертикально ориентированным силовым источником, выполнен в [28] (см. также [29]).

Рассмотрим подробнее зависимости мощности излучения волны Рэлея от глубины расположения источника. Вид функций $\zeta_R^{(x)}(h)$ и $\zeta_R^{(z)}(h)$ соответствует выражениям для горизонтальной и вертикальной компонент смещений в поверхностной волне. Эти выражения можно представить в виде (см. [14, с. 56; 18, с. 31])

$$u_x(x, z) = D_0 \frac{k_t^2 - 2k_R^2}{2k_R} \nu_x(z) \exp(ik_R x), \quad (79)$$

$$u_z(x, z) = D_0 \sqrt{k_R^2 - k_1^2} \nu_z(z) \exp[i(k_R x + \pi/2)], \quad (80)$$

где безразмерные функции $\nu_x(z)$ (74) и $\nu_z(z)$ (78) описывают зависимости соответствующих компонент смещений от вертикальной координаты и коэффициент D_0 определяется конфигурацией волны. Для точечного поверхностного источника вертикальной силы

$$D_0 = \frac{f_0}{\rho_2 c_t^2} \sqrt{\frac{k_R}{2\pi r}} \frac{k_t^2}{R_0'(k_R)} \exp(3\pi i/4), \quad (81)$$

где r — горизонтальное расстояние, причём символ « x » в (74) и (79) следует заменить на r .

Таким образом, мощность излучения источника горизонтальной силы $W_R^{(x)}$ пропорциональна квадрату зависимости горизонтальных смещений в волне Рэлея от глубины, $W_R^{(x)}(h) \propto \nu_x^2(h)$. Мощность излучения источника вертикальной силы $W_R^{(z)}$ пропорциональна, соответственно, квадрату функции, описывающей зависимость вертикальных смещений в рэлеевской волне от глубины, $W_R^{(z)} \propto \nu_z^2(h)$.

Зависимости $\nu_x(z)$, $\nu_z(z)$ хорошо известны. Здесь лишь отметим, что эти функции нетрудно исследовать аналитически. Например, $\nu_x = 0$ при

$$k_t h_0^{(x)} = \frac{1}{\sqrt{\xi^2 - n^2} - \sqrt{\xi^2 - 1}} \ln \frac{2\xi^2}{2\xi^2 - 1}. \quad (82)$$

Это значит, что гармонический источник горизонтальной силы, расположенный на глубине $h_0^{(x)}$ под поверхностью упругого полупространства, не возбуждает волну Рэлея.

Функции $\nu_x(z)$ и $\nu_z(z)$ достигают своих максимумов соответственно при

$$k_t h_{\max}^{(x)} = \tilde{H} + k_t h_0^{(x)} \quad (83)$$

и

$$k_t h_{\max}^{(z)} = \tilde{H} - k_t h_0^{(x)}, \quad (84)$$

где

$$\tilde{H} = \frac{1}{\sqrt{\xi^2 - n^2} - \sqrt{\xi^2 - 1}} \ln \frac{\sqrt{\xi^2 - n^2}}{\sqrt{\xi^2 - 1}}. \quad (85)$$

Зависимости безразмерных величин $\tilde{h}_0^{(x)} = h_0^{(x)}/\lambda_t$, $\tilde{h}_{\max}^{(x)}/\lambda_t$ и $\tilde{h}_{\max}^{(z)} = h_{\max}^{(z)}/\lambda_t$, где λ_t — длина поперечной волны, от параметра $n = c_t/c_l$ представлены на рис. 1. В частности, для $n = 1/\sqrt{3} \approx 0,577$, когда в твёрдой среде параметры Ламэ $\lambda = \mu$, $h_0^{(x)} \approx 0,1747 \lambda_t \approx 0,19 \lambda_R$, $h_{\max}^{(x)} \approx 0,4243 \lambda_t \approx 0,4615 \lambda_R$, $h_{\max}^{(z)} \approx 0,0736 \lambda_t \approx 0,08 \lambda_R$ [18].

Графики функций $\zeta_R^{(x)}$ и $\zeta_R^{(z)}$, характеризующих зависимости мощностей излучения рэлеевской волны, возбуждаемой горизонтальным и вертикальным силовыми воздействиями, от глубины расположения источника, представлены на рис. 2. Из него следует, что мощность излучения волны Рэлея, возбуждаемой горизонтальной гармонической силой, максимальна в случае расположения источника на поверхности упругого полупространства. При увеличении глубины расположения источника мощность излучения рэлеевской волны резко падает и обращается в нуль при $h = h_0^{(x)}$. При дальнейшем удалении источника от поверхности упругой среды указанная мощность нарастает и достигает относительного максимума при $h = h_{\max}^{(x)}$. При $n = 1/\sqrt{3}$ имеем

$$\zeta_R^{(x)}(\tilde{h}_{\max}^{(x)}) \approx 0,055.$$

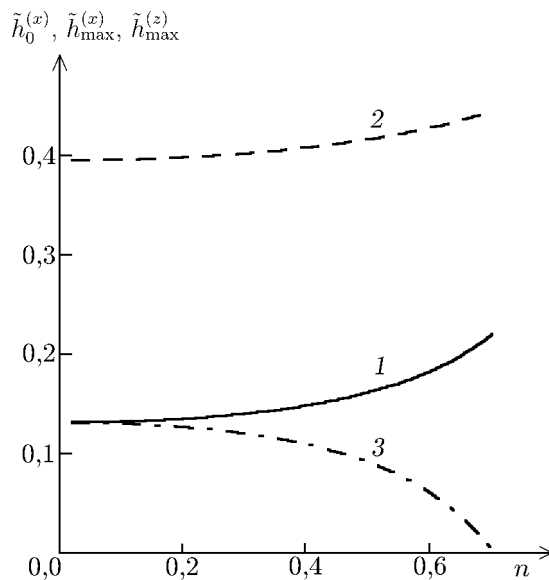


Рис. 1. Зависимости величин $\tilde{h}_0^{(x)}$ (1), $\tilde{h}_{\max}^{(x)}$ (2) и $\tilde{h}_{\max}^{(z)}$ (3) от параметра n

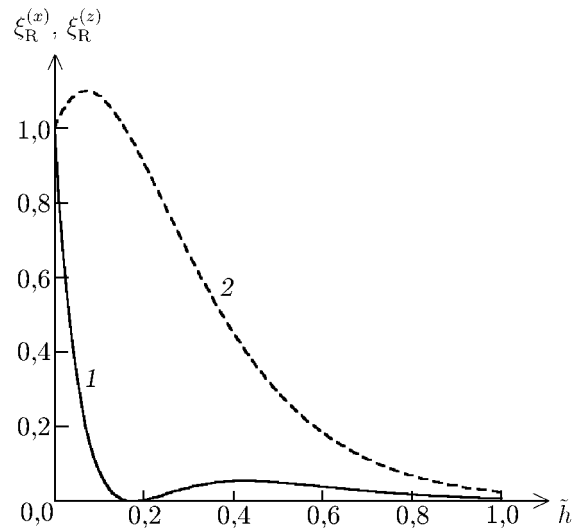


Рис. 2. Зависимости величин $\zeta_R^{(x)}$ (1) и $\zeta_R^{(z)}$ (2) от приведённой глубины источника $\tilde{h} = h/\lambda_t$ при $n = 1/\sqrt{3}$

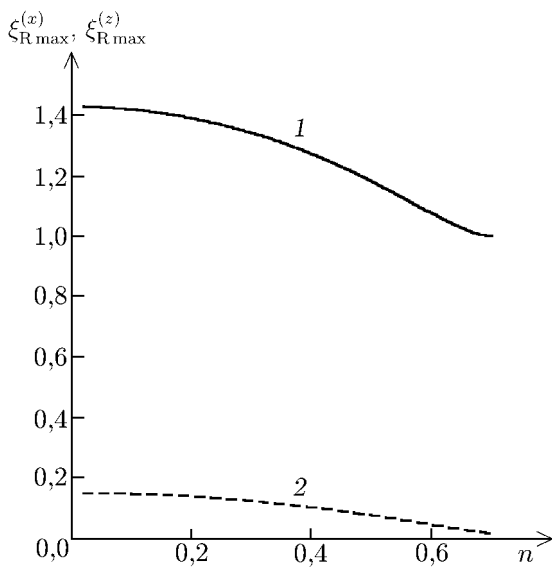


Рис. 3. Зависимости величин максимумов функции $\zeta_R^{(z)}$ (1) и $\zeta_R^{(x)}$ (2) от параметра n

При $h > h_{\max}^{(x)}$ мощность излучения волны Рэлея экспоненциально спадает.

Для вертикального силового воздействия мощность излучения волны Рэлея при удалении источника от поверхности полупространства нарастает, достигает максимума, а затем экспоненциально убывает. При $n = 1/\sqrt{3}$ имеем

$$\zeta_R^{(z)}(\tilde{h}_{\max}^{(z)}) \approx 1,101.$$

Величины абсолютных максимумов функции $\zeta_R^{(z)}$ и относительных максимумов функции $\zeta_R^{(x)}$ в зависимости от параметра n представлены на рис. 3.

Выполним количественные оценки мощности излучения волны Рэлея, возбуждаемой точечным гармоническим источником горизонтальной силы. Для численных расчётов представим мощность излучения (72) в виде [26]

$$W_R^{(x)}(0) = \frac{f_0^2 \omega_0^2}{4\pi \rho_2 c_1^3} \tilde{W}_R^{(x)}(0), \tag{86}$$

где

$$\tilde{W}_R^{(x)}(0) = -\frac{\pi \xi \sqrt{\xi^2 - 1}}{2n^3 q(\xi)} \tag{87}$$

— безразмерный численный коэффициент. В (87) использовано обозначение

$$q(\xi) = \frac{R'_0(k_R)}{k_t^3} = \frac{2}{\xi (2\xi^2 - 1)^2} [4\xi^2 - 1 - 8\xi^6 (1 - n^2)].$$

Для $n = 1/\sqrt{3}$ имеем

$$\tilde{W}_R^{(x)}(0) = 0,7560.$$

При $n = 0,4$ и $n = 0,65$ получаем соответственно

$$\tilde{W}_R^{(x)}(0) = 1,2562$$

и

$$\tilde{W}_R^{(x)}(0) = 0,7789.$$

При данной амплитуде силы мощность рэлеевской волны, возбуждаемой вертикальным точечным поверхностным источником, всегда больше соответствующей мощности для горизонтального источника:

$$\delta = \frac{W_R^{(x)}(0)}{W_R^{(z)}(0)} = \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{2\sqrt{\xi^2 - n^2}} < 1. \tag{88}$$

Из расчётов по формуле (88) следует, что даже для веществ, у которых значение параметра n близко к 0,7, $W_R^{(z)}(0)$ превышает $W_R^{(x)}(0)$ приблизительно в три раза. Это отличие ещё более существенно при меньших значениях n . Например, при $n = 1/\sqrt{3}$ имеем $\delta \approx 0,232$.

Для ряда приложений представляет интерес вычисление смещений в поверхностной рэлеевской волне. Соответствующие приближённые выражения, справедливые на значительных удалениях от области действия источников, получаются следующим образом. В интегралах, описывающих скалярные потенциалы $\psi_2^{(+)}$, ψ_3 и векторные потенциалы в SV-волне $\mathbf{A}_{2SV}^{(+)}$ и \mathbf{A}_{3SV} , перейдём к цилиндрическим координатам. Интегралы по полярному углу φ вычислим приближённо методом стационарной фазы. В оставшихся интегралах по модулю волнового вектора k следует взять вычет в рэлеевском полюсе $k = k_R$. Это приводит к аналитическим выражениям для скалярного и векторного потенциалов, соответствующих волне Рэля, причём выражения для потенциалов в областях II и III совпадают. С учётом соотношений (15) для смещений в поверхностной рэлеевской волне получаем следующие приближённые выражения, справедливые на больших по сравнению с длинами волн расстояниях от области действия источников:

$$u_{Rr}(r, \varphi, z) = \frac{1}{q_l} D [i(k_t^2 - 2k_R^2) \nu_x(h) F_{\omega r}(k_R \cos \varphi, k_R \sin \varphi) + 2k_R q_l \nu_z(h) F_{\omega z}(k_R \cos \varphi, k_R \sin \varphi)] \nu_x(z) \exp(ik_R r), \quad (89)$$

$$u_{Rz}(r, \varphi, z) = -\frac{1}{q_t} D [2k_R q_t \nu_x(h) F_{\omega r}(k_R \cos \varphi, k_R \sin \varphi) - i(k_t^2 - 2k_R^2) \nu_z(h) F_{\omega z}(k_R \cos \varphi, k_R \sin \varphi)] \nu_z(z) \exp(ik_R r). \quad (90)$$

В (89), (90) использовано обозначение

$$D = \frac{\pi k_t^2 (2k_R^2 - k_t^2)}{2\rho_2 c_t^2 k_R R'_0(k_R)} \sqrt{\frac{2\pi}{k_R r}} \exp(-i\pi/4). \quad (91)$$

Полученные результаты позволяют сделать ряд качественных выводов о характере рассеяния волны Рэля на локализованной неоднородности, находящейся вблизи поверхности упругого полупространства, т. е. на подповерхностном включении. Если размеры неоднородности много меньше длин упругих волн, то её приближённо можно считать точечной. При распространении по поверхности упругого полупространства рэлеевской волны неоднородность будет совершать горизонтальные и вертикальные колебания, порождая, тем самым, рассеянное волновое поле. Мощность излучения рассеянных волн будет определяться свойствами неоднородности и амплитудой падающей волны. В соответствии с выражениями (74), (78)–(80) амплитуда такого эффективного вертикального силового источника всегда больше, чем горизонтального. Мощности излучения рассеянной рэлеевской волны, связанные с горизонтальными $W_{RR}^{(x)}$ и вертикальными $W_{RR}^{(z)}$ колебаниями неоднородности пропорциональны квадратам соответствующих амплитуд; указанные мощности также связаны соотношениями (71)–(78) с глубиной расположения неоднородности. Таким образом, мощности излучения при рассеянии рэлеевской волны в рэлеевскую волну пропорциональны четвёртой степени функций, описывающих зависимости горизонтальных и вертикальных компонент вектора смещений в этой волне от глубины:

$$W_{RR}^{(x)} \propto \nu_x^4(z), \quad W_{RR}^{(z)} \propto \nu_z^4(z). \quad (92)$$

Следовательно, определяющий вклад в мощность излучения рассеянной волны Рэля дают вертикальные колебания малой неоднородности в поле зондирующего сигнала. Связанная с горизонтальными колебаниями неоднородности мощность излучения рэлеевской волны резко падает при увеличении глубины расположения рассеивателя. По-видимому, рассеяние рэлеевской волны в рэлеевскую волну оказывается эффективным лишь в тех случаях, когда неоднородность находится на глубине, не превышающей приблизительно одной третьей части длины поперечной волны.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в работе получены выражения для мощностей излучения гармонических поверхностных акустических волн: волны Стонели на плоской границе твёрдое тело—газ и волны Рэлея на поверхности упругого полупространства, граничащего с вакуумом. Волны возбуждаются силовыми источниками достаточно общего вида, распределёнными по некоторой площадке, расположенной в твёрдом теле и ориентированной параллельно его поверхности. Получены приближённые аналитические выражения для вертикальной и горизонтальной компонент вектора смещений в рэлеевской волне, справедливые на больших расстояниях от источника. Данные результаты значительно расширяют вычислительные возможности при исследованиях сейсмоакустических волновых процессов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Альперович Л. С., Пономарёв Е. А., Федорович Г. В. // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1985. № 11. С. 9.
2. Дробжев В. И., Железняков Е. В., Идрисов И. К. и др. // Изв. вузов. Радиофизика. 1987. Т. 30, № 12. С. 1436.
3. Гошджанов М., Болтаев Д., Каррыев А. и др. // Физика Земли. 1996. № 2. С. 90.
4. Афраймович Э. Л., Косогоров Е. А., Плотников А. В., Уралов А. М. // Физика Земли. 2001. № 6. С. 16.
5. Афраймович Э. Л., Астафьева Э. И., Кирышкин В. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 2005. Т. 48, № 4. С. 299.
6. Кузнецов В. В., Плоткин В. В., Хомутов С. Ю. // Докл. РАН. 2000. Т. 370, № 2. С. 243.
7. Разин А. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 2007. Т. 50, № 7. С. 624.
8. Разин А. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 2006. Т. 49, № 7. С. 577.
9. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. М.: Наука, 1987. 248 с.
10. Петрашень Г. И. // Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Вып. 18. Л.: Наука, 1978. С. 1.
11. Партон В. З., Перлин П. И. Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 688 с.
12. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1973. 536 с.
13. Демидов С. П. Теория упругости. М.: Высшая школа, 1979. 432 с.
14. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наукова думка, 1981. 284 с.
15. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
16. Аки К., Ричардс П. Количественная сейсмология. Т. 1. М.: Мир, 1983. 520 с.
17. Докучаев В. П. // Физика Земли. 1996. № 1. С. 75.
18. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 343 с.
19. Бреховских Л. М., Годин О. А. Акустика слоистых сред. М.: Наука, 1989. 416 с.
20. Топтыгин И. Н. Космические лучи в межпланетных магнитных полях. М.: Наука, 1983. 304 с.
21. Фелсен С., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. Т. 1. М.: Мир, 1978. 551 с.
22. Орлов А. Л., Разин А. В. // Изв. РАН. Физика Земли. 1993. № 2. С. 78.
23. Исакович М. А. Общая акустика. М.: Наука, 1973. 496 с.
24. Разин А. В. // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1991. № 12. С. 100.
25. Докучаев В. П., Разин А. В. // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1990. № 10. С. 81.
26. Miller G. F., Pursey H. // Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1955. V. 233, No. 1192. P. 55.

27. Гуцин В.В., Докучаев В.П., Заславский Ю.М., Конюхова И.Д. Исследование Земли невзрывными сейсмическими источниками. М.: Наука, 1981. С.113.
28. Разин А.В. // Акуст. журн. 2009. Т. 55, №2. С.226.
29. Разин А.В. Распределение мощности излучения по типам упругих волн, возбуждаемых в твёрдом полупространстве подповерхностным гармоническим силовым источником: Препринт № 497 НИРФИ. Нижний Новгород, 2005. 19 с.

Поступила в редакцию 27 ноября 2009 г.; принята в печать 27 февраля 2010 г.

EXCITATION OF SURFACE ACOUSTIC RAYLEIGH AND STONELEY WAVES BY DISTRIBUTED SEISMIC SOURCES

A. V. Razin

The integral Fourier-transform method is used to solve the problem of excitation of elastic waves in a homogeneous isotropic solid half-space and the bordering homogeneous gas by the time-dependent forces which are arbitrarily distributed in a solid over the plane parallel to the media interface. Different configurations of the force sources are analyzed from the viewpoint of excitation of different types of seismic-acoustic waves. Expressions for the period-averaged radiation powers of the Stoneley wave at the gas–solid interface and the Rayleigh wave at the solid–vacuum interface as well as analytical expressions for the Rayleigh-wave displacements, which are valid for large distances from the source, are obtained for the harmonic dependence of forces on time. Excitation of a Rayleigh wave by the point sources oriented vertically, i.e., along the normal to the solid half-space surface and horizontally, i.e., in parallel to this surface, is analyzed in detail. Analytical expressions for the Rayleigh-wave radiation power are obtained. The dependences of these powers on the source orientation and depth are derived. It is shown that the Rayleigh-wave radiation power decreases as the force point travels away from the boundary and turns to zero for a source depth of about 17.5% of the transverse wavelength for the case of a horizontally oriented subsurface source for a medium with similar Lamé parameters λ and μ . The above power increases and reaches a relative maximum when the source depth becomes equal to about 42.4% of the transverse wavelength and then exponentially falls off as the source depth increases. This maximum is about 5.5% of the surface-source radiation power.