

УДК 519.216

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ КОЛЕБАНИЙ С МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩЕЙСЯ ЧАСТОТОЙ

В. К. Игнатъев, А. В. Никитин, С. В. Юшанов

Волгоградский госуниверситет, г. Волгоград, Россия

Предложен алгоритм оценивания параметров сигнала с квазигармоническим представлением и метод оценивания медленно меняющихся коэффициентов дифференциального уравнения второго порядка. В рассмотренном подходе используется регуляризация Тихонова для класса медленно меняющихся функций. Приведены результаты статистического моделирования для уравнения Матье. Рассмотрено решение задачи сличения частот на примере оценивания неустойчивости частоты кварцевого резонатора, задающего шаг дискретизации сигнала. Получены соотношения для определения шага дискретизации и приведены результаты численного моделирования.

ВВЕДЕНИЕ

Во многих радиофизических и радиотехнических задачах оценивание параметров динамических систем начинается с приёма и измерения сигнала, который несёт информацию об исследуемом объекте. Для его параметрического представления широко используется формула для квазигармонических колебаний вида

$$x(t) = A(t) \cos[\theta(t)], \quad (1)$$

причём производная полной фазы $\theta(t)$ называется мгновенной частотой $\omega(t) = \dot{\theta}(t)$ [1]. Задача оценивания сводится к определению амплитудного и фазового сомножителей сигнала и их связи с параметрами исследуемой системы. Для однозначного описания сигнала $x(t)$ с помощью двух функций — амплитуды (огibaющей) $A(t)$ и полной фазы $\theta(t)$ необходимо то или иное дополнительное условие. Например, если полная фаза определяется как аргумент аналитического сигнала $z(t) = A(t) \exp[i\theta(t)] = x(t) + iy(t)$, построенного на основе исследуемого колебания $x(t)$ с помощью преобразования Гильберта [2]

$$y(t) = \hat{H}[x(t)] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(t - \tau) - x(t + \tau)}{\tau} d\tau = A(t) \sin[\theta(t)], \quad (2)$$

то мгновенная частота $\omega(t)$ сигнала (1) равна

$$\omega(t) = \dot{\theta}(t) = \frac{x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t)}{x^2(t) + y^2(t)}.$$

Можно показать [3, 4], что преобразование Гильберта (2) является единственным непрерывным линейным преобразованием, связывающим функции $x(t)$ и $y(t)$. Применяются и другие определения полной фазы [5], которые, как и определение Габора [2], являются формально-математическими и могут приводить к физическим противоречиям [6].

Отметим, что вопрос о единственности представления колебания в форме (1) существен, если амплитуде и/или мгновенной частоте сопоставляются измеряемые физические величины, например, амплитуда определяет энергию процесса, а мгновенная частота в задаче доплеровской локализации связана со скоростью объекта. В этом случае необходимо использовать физические условия,

позволяющие однозначно определить амплитуду и фазу. При естественных предположениях, что амплитуда $A(t)$ и мгновенная частота $\omega(t)$ — положительные и непрерывные функции, а $\omega(t)$ ограничена как сверху, так и снизу, т. е.

$$0 < \omega_m \leq \omega(t) \leq \omega_M, \quad (3)$$

одним из таких условий может быть ограниченность носителя спектра мгновенной частоты $\omega(t)$.

Доказательство единственности представления (1) можно получить из распределения нулей функции $x(t)$. Поскольку функция $A(t)$ непрерывна и положительна, то для этого достаточно найти нули фазового множителя $\cos[\theta(t)]$. Пусть функция $x(t)$ имеет нули в неэквидистантные моменты времени t_k , которые образуют монотонную последовательность без конечных предельных точек, тогда нулям функции $x(t)$ будут соответствовать значения полной фазы

$$\theta(t_k) = \theta_k = \pi k - \pi/2. \quad (4)$$

Здесь принято, что в момент времени $t = t_0 = 0$ функция $x(t)$ проходит через ноль с положительной производной. Таким образом, доказательство единственности представления $x(t)$ в виде (1) сводится к доказательству единственности решения интерполяционной задачи для полной фазы $\theta(t)$. Задача интерполяции (4) всегда имеет решение в классе целых аналитических функций, какими бы ни были действительные числа t_k и θ_k [7]. Это решение не является единственным, поэтому необходимо определить условия для однозначного решения интерполяционной задачи.

Если существует конечный предел

$$\omega_C = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \omega(t) dt \right] = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\frac{2\pi k}{t_k - t_{-k}} \right], \quad \omega_m \leq \omega_C \leq \omega_M,$$

а носителем спектра функции $\theta(t)$ является отрезок $[-\omega_B, \omega_B]$, причём $\omega_B < \omega_C$, различные решения интерполяционной задачи (4) возможны лишь при $\theta(t) = \omega_C t - \pi/2$, что доказывает единственность решения интерполяционной задачи (4) в классе целых функций с финитным спектром.

Предположим, что носителем спектра функции $\theta(t)$ является отрезок $[-\omega_B, \omega_B]$, а класс единственности определяется условием $\omega_B < \omega_m$. При этом мгновенная частота в силу теоремы Винера—Пэли—Шварца [8, 9] может быть представлена интегралом Фурье

$$\omega(t) = \int_{-\omega_B}^{\omega_B} \tilde{\omega}(p) \exp(ipt) dp,$$

а для её производных будет справедлива следующая оценка

$$|\omega^{(n)}(t)| \leq P \omega_B^n, \quad P = \int_{-\omega_B}^{\omega_B} |\tilde{\omega}(p)| dp. \quad (5)$$

Сигнал, для которого существуют константы P и ω_B , такие, что условия (3) и (5) выполняются в любой момент времени, естественно назвать сигналом медленно меняющейся частоты.

С другой стороны, при выполнении условия (5) коэффициенты разложения c_n аналитической функции $\omega(t)/\omega_C$ в ряд Тейлора в произвольной точке удовлетворяют условию

$$|c_n| \leq \frac{\omega_B^n P}{n! \omega_C}.$$

Тогда по теореме Винера—Пэли—Шварца [8, 9] мгновенная частота $\omega(t)$ имеет финитный спектр, ограниченный частотой $\omega_B < \omega_C$. Таким образом, если для сигнала существует представление (1) с медленно меняющейся частотой, удовлетворяющей условиям (3) и (5), то оно единственно.

На практике существование решения в классе единственности можно обосновать, например, связью параметров сигнала с медленно меняющимися параметрами породившей его физической системы. Большое значение в радиофизике имеют динамические системы, описываемые линейным дифференциальным уравнением второго порядка с переменными коэффициентами

$$-\frac{d}{dt} \left[k(t) \frac{dx}{dt} \right] + r(t)x = f(t), \quad 0 < t < t_0. \quad (6)$$

К таким уравнениям приводит задача о динамо-машине, распространении гармонической волны в неоднородной среде, собственных колебаниях кварцевого резонатора при изменении температуры кристалла, и другие [10]. К примеру, в теории ядерного магнитного резонанса известны уравнения Блоха для поперечных проекций магнитного момента M_x , M_y [11]

$$\dot{M}_x = \gamma M_y B - M_x/T_2, \quad \dot{M}_y = -\gamma M_x B - M_y/T_2, \quad B_x = 0, \quad B_y = 0, \quad B_z = B(t),$$

где γ — гиромагнитное отношение для протона, T_2 — время поперечной релаксации, из которых легко получается уравнение для свободной прецессии поперечной намагниченности в медленно меняющемся продольном магнитном поле $B(t)$:

$$\ddot{x}(t) + p(t)\dot{x}(t) + q(t)x(t) = 0, \quad (7)$$

где $x(t) = M_x$ или M_y , $p(t) = 2/T_2 - \dot{B}/B$, $q(t) = \gamma^2 B^2 - \dot{B}/(BT_2) + 1/T_2^2$. Уравнение (7) является частным случаем уравнения (6) и описывает свободные колебания без вынуждающей силы $f(t)$. Если по измеренному, например, спиновым детектором [11], сигналу $x(t)$ возможно восстановить коэффициенты $p(t)$ и $q(t)$ уравнения (7), то можно проследить за динамикой изменения продольного магнитного поля $B(t)$ и времени поперечной релаксации $T_2(t)$, что важно в задачах спектроскопии, томографии, исследовании геомагнитного поля и др. Для этого необходима аналитическая связь параметров квазигармонического представления (1) с коэффициентами уравнения (7). Такую связь можно получить, решив уравнение (7) и связав параметры решения с параметрами квазигармонического представления измеряемого сигнала (1).

1. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

В общем случае будем рассматривать колебательную систему с одной степенью свободы, у которой некоторые параметры изменяются медленно по отношению к периоду собственных колебаний. Тогда мы приходим к рассмотрению дифференциального уравнения второго порядка с медленно меняющимися коэффициентами (7), которое подстановкой

$$x(t) = y(t) \exp \left[-\frac{1}{2} \int_0^t p(t') dt' \right] \quad (8)$$

приводится к виду

$$\ddot{y}(t) + \Omega^2(t)y(t) = 0, \quad (9)$$

где

$$\Omega^2(t) = q(t) - \frac{1}{2} \frac{dp(t)}{dt} - \frac{1}{4} p^2(t). \quad (10)$$

В случае медленного изменения параметров осциллятора функцию $\Omega^2(t)$ удобно представить в виде

$$\Omega^2(t) = \Omega_0^2 f(t/\tau),$$

где Ω_0 — параметр с размерностью частоты, f — безразмерная функция порядка единицы, τ — характерное время её изменения. Условие медленности изменения параметров осциллятора можно выразить соотношением $1/(\Omega_0\tau) = \mu$, $\mu \ll 1$, или записать следующим образом:

$$\dot{\Omega}(t) \sim \mu\Omega^2(t), \quad \mu \ll 1. \quad (11)$$

Если уравнение (7) описывает линейный осциллятор с малыми потерями, то с учётом физических допущений $p^2(t) \sim \mu q(t)$. При таких условиях с математической точки зрения уравнение (9) с медленно меняющимися коэффициентами эквивалентно уравнению с малым параметром μ при старшей производной. Такие уравнения решаются с помощью асимптотических методов разложения по малому параметру [1, 12, 13]. Для построения приближённого решения удобно перейти к безразмерной переменной $\xi = t/\tau$ [1].

Асимптотическое решение уравнения (9) на некотором интервале $I = [\xi_1, \xi_2]$ при выполнении условия (11), а также $f(\xi) \in C^\infty(I)$ можно представить рядом [13]:

$$y(\xi) = \exp\left(\frac{1}{\mu} \int^\xi \sqrt{f(\xi')} d\xi'\right) \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\xi) \mu^k.$$

Здесь $C^\infty(I)$ обозначает класс бесконечно дифференцируемых функций, которые на бесконечности стремятся к нулю вместе со всеми своими производными. Удобно представить этот ряд в виде

$$y(\xi) = \exp\left[\int^\xi \sum_{k=-1}^{\infty} \mu^k a_k(\xi') d\xi'\right].$$

Первые члены этой асимптотики имеют вид:

$$\alpha_{-1}(\xi) = \pm i \sqrt{f(\xi)}, \quad \alpha_0(\xi) = -\frac{f'(\xi)}{4f(\xi)}, \quad \alpha_1(\xi) = \frac{i}{\sqrt{f(\xi)}} \left\{ -\frac{1}{8} \frac{f''(\xi)}{f(\xi)} + \frac{5}{32} \frac{[f'(\xi)]^2}{f^2(\xi)} \right\}, \quad (12)$$

а для последующих членов верны рекуррентные соотношения:

$$\alpha_{k+1}(\xi) = \frac{i}{2\sqrt{f(\xi)}} \left[\alpha_k'(\xi) + \sum_{j=0}^k \alpha_j(\xi) \alpha_{k-j}(\xi) \right].$$

Будем считать, что $f(\xi) > 0$, что соответствует колебаниям осциллятора, а не апериодическому затуханию [1]. Таким образом, имеем два формально асимптотических решения

$$y_{1,2}(\xi, \mu) = \frac{1}{f^{1/4}(\xi)} \exp\left(\pm \frac{i}{\mu} \int^\xi \sqrt{f(\xi')} d\xi' + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \int^\xi a_k(\xi') d\xi'\right). \quad (13)$$

Шлезингер и Биркгоф [14] показали, что решение не содержит иных сингулярностей при $\mu = 0$, кроме сингулярностей вида $\mu^{-1} \int^\xi \sqrt{f(\xi')} d\xi'$.

Использованная процедура приводит к асимптотическому ряду, который расходится при увеличении количества его членов: при фиксированном μ , начиная с некоторого номера n , следующие слагаемые оказываются больше предыдущих [1, 15]. Поэтому ограничиваются конечным отрезком ряда, например, при использовании приближения Венцеля—Крамерса—Бриллюэна [13] двумя его членами:

$$y_{1,2}(\xi, \mu) = \frac{1}{f^{1/4}(\xi)} \exp\left(\pm \frac{i}{\mu} \int^{\xi} \sqrt{f(\xi')} d\xi'\right) + O(\mu). \quad (14)$$

Оценка остаточного члена $O(\mu)$ равномерна по ξ на I , т. е. $|O(\mu)| \leq C\mu$, где C не зависит от ξ [13].

При заданных начальных условиях можно представить решение в тригонометрической форме:

$$y(t) = \frac{A_0}{\sqrt{\Omega(t)}} \cos\left[\int^t \Omega(t') dt' + \varphi_0\right] = \frac{A_0}{\sqrt{\Omega(t)}} \cos[\theta(t)], \quad \theta(t) = \int^t \Omega(t') dt' + \varphi_0.$$

Здесь A_0 и φ_0 — константы, определяемые из начальных условий. Возвращаясь к $x(t)$, получим

$$x(t) = \frac{A_0}{\sqrt{\Omega(t)}} \exp\left[-\frac{1}{2} \int^t p(t') dt'\right] \cos\left[\int^t \Omega(t') dt' + \varphi_0\right] = A(t) \cos[\theta(t)], \quad (15)$$

где

$$A(t) = \frac{A_0}{\sqrt{\Omega(t)}} \exp\left[-\frac{1}{2} \int^t p(t') dt'\right], \quad \theta(t) = \int^t \Omega(t') dt' + \varphi_0. \quad (16)$$

Видно, что введённая ранее как производная полной фазы $\theta(t)$ частота $\omega(t)$ [1] совпадает с $\Omega(t)$. Кроме того, как следует из условия (11), рассмотренное приближение неприменимо вблизи точек поворота $\Omega(t) = 0$ [15] — это согласуется с условием, что $\omega(t)$ положительная и ограниченная снизу функция.

Для применимости приближённого решения (14) необходимо выполнение условия (11) [1], однако само по себе оно может оказаться недостаточным, поскольку оно получено путём оценки по порядку величины различных членов в уравнении (9). В действительности надо требовать малости последовательных членов разложения в решении этого уравнения, а она может не обеспечиваться малостью отбрасываемого члена в уравнении (13). Так, если в показателе экспоненты решения содержится член, возрастающий со временем по закону, близкому к линейному, то малость первой производной в уравнении (11) не мешает тому, что на достаточно больших временах этот член может «набрать» большую величину; приближение Венцеля—Крамерса—Бриллюэна оказывается тогда неприменимым для анализа сигнала на больших временных интервалах [15].

Рассмотрим для примера ещё один член асимптотического разложения $\mu\alpha_1(\xi)$. Подставим выражение для этого члена из (12) в (13). Интегрируя, получим решения в виде

$$y_{1,2}(\xi, \mu) = \frac{1}{f^{1/4}(\xi)} \exp\left\{\pm \frac{i}{\mu} \int^{\xi} \sqrt{f(\xi')} d\xi' + i\mu \left[-\frac{1}{8} \frac{f'(\xi)}{f^{3/2}(\xi)} - \frac{1}{32} \int^{\xi} \frac{[f'(\varepsilon)]^2}{f^{5/2}(\varepsilon)} d\varepsilon\right]\right\}. \quad (17)$$

Поправка, вносимая третьим членом разложения, является мнимой величиной и входит в показатель экспоненты решения, что эквивалентно появлению вещественной поправки в фазе выражения (15). Члены в квадратной скобке в (17) должны быть малы по сравнению с 1 [15].

При рассмотрении члена асимптотического ряда с номером k возникает слагаемое вида $f^{(k)}/f^{3/2}$, которое также должно быть порядка единицы. Для него условие (11) будет иметь вид

$$|\Omega^{(k)}(t)| \sim \mu |\Omega_0 \Omega^{(k-1)}(t)|, \quad \mu \ll 1. \quad (18)$$

В уравнение (16) для амплитуды входит множитель $1/\sqrt{\Omega(t)}$, а из условия медленности изменения $\Omega(t)$ вдали от точек поворота можно говорить, что амплитуда тоже является медленно меняющейся функцией времени. Следует также заметить, что условия (5) и (18) идентичны.

2. МЕТОД РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Мы показали, что при условии медленности изменения параметров системы, описываемой дифференциальным уравнением второго порядка с переменными коэффициентами, можно говорить, что его решение существует в виде квазигармонического представления (1) с медленно меняющейся амплитудой и частотой. Мы будем решать обратную задачу — вычисление коэффициентов в уравнении вида (7) при известном $x(t)$. Такая задача относится к типу обратных коэффициентных задач и в общем случае является некорректной [16]. Однако, возможно построение её корректного решения на некоторых компактных множествах [17, 18]. Медленно меняющиеся функции входят в класс функций с ограниченной вариацией, на множестве которых можно построить корректное решение. По определению, вариация непрерывно дифференцируемой функции на интервале равна интегралу нормы её производной на этом интервале [19]. Для медленно меняющегося коэффициента $\Omega(t)$ вариация за время его характерного изменения $\tau \sim 1/\omega(t)$ при выполнении условия (18) равна

$$V_\tau(\Omega) = \int_\tau \|\dot{\Omega}(t)\| dt \sim \mu \int_\tau \|\Omega^2(t)\| dt,$$

т. е. вариация медленно меняющегося коэффициента на интервале τ имеет порядок $O(\mu)$. Нетрудно показать, что таким же соотношениям удовлетворяют и исходные коэффициенты $p(t)$ и $q(t)$, т. е. они являются функциями с ограниченной вариацией. Но для применения регуляризирующих алгоритмов необходимо получить соотношения для самих коэффициентов.

Воспользуемся представлением сигнала в виде (15)

$$x(t) = a(t) \sin[\theta(t)] = b(t) \exp[s(t)] \sin[\theta(t)],$$

и обозначим $\dot{\theta}(t) = \omega(t)$, $\dot{s}(t) = \gamma(t)$. Условия медленности изменения параметров имеют вид

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}(t) = \dot{\omega}(t) &\sim \mu \omega^2(t), & \dot{s}(t) = \gamma(t) &\sim \mu \omega(t), & \ddot{s}(t) = \dot{\gamma}(t) &\sim \mu^2 \omega^2(t), \\ \dot{b}(t) &\sim \mu \omega(t), & 0 < \mu &\ll 1. \end{aligned} \quad (19)$$

Из соотношений (10) и (16) следует связь между $p(t)$, $q(t)$ и параметрами сигнала $\omega(t)$, $\gamma(t)$:

$$q(t) = \frac{1}{4} p^2(t) + \frac{1}{2} \dot{p}(t) + \omega^2(t), \quad p(t) = -2\gamma(t). \quad (20)$$

Таким образом, для нахождения $p(t)$ и $q(t)$ достаточно получить выражения для $\omega(t)$ и $\gamma(t)$.

Построим функции следующего вида

$$e(t) = \frac{x^2(t-2\Delta) - x(t-4\Delta)x(t)}{x^2(t-2\Delta) - x(t-3\Delta)x(t-\Delta)}, \quad d(t) = \frac{x^2(t-\Delta) - x(t-2\Delta)x(t)}{x^2(t-2\Delta) - x(t-3\Delta)x(t-\Delta)}, \quad (21)$$

$$x^2(t-2\Delta) - x(t-3\Delta)x(t-\Delta) \neq 0,$$

где Δ — временной интервал, такой, что $\Delta \ll \tau$ или $\omega(t)\Delta \ll 1$. Сначала рассмотрим знаменатель этих соотношений. Представим параметры сигнала в виде ряда Тейлора около центральной точки $t - 2\Delta$

$$\begin{aligned}x(t - \Delta) &= [a(t - 2\Delta) + \dot{a}(t - 2\Delta) \Delta] \sin[\theta(t - 2\Delta) + \omega(t - 2\Delta) \Delta + \dot{\omega}(t - 2\Delta) \Delta^2/2] + \delta_x, \\x(t - 2\Delta) &= a(t - 2\Delta) \sin[\theta(t - 2\Delta)], \\x(t - 3\Delta) &= [a(t - 2\Delta) - \dot{a}(t - 2\Delta) \Delta] \sin[\theta(t - 2\Delta) - \omega(t - 2\Delta) \Delta + \dot{\omega}(t - 2\Delta) \Delta^2/2] + \delta_x.\end{aligned}$$

Здесь $\delta_x = O(\mu)$ отвечает за величину отброшенных членов разложения. Числители также разложим вокруг центральной точки — для $e(t)$ это $t - 2\Delta$:

$$\begin{aligned}x(t) &= [a(t - 2\Delta) + 2\dot{a}(t - 2\Delta) \Delta] \sin[\theta(t - 2\Delta) + 2\omega(t - 2\Delta) \Delta + 2\dot{\omega}(t - 2\Delta) \Delta^2] + \delta_x, \\x(t - 2\Delta) &= a(t - 2\Delta) \sin[\theta(t - 2\Delta)], \\x(t - 3\Delta) &= [a(t - 2\Delta) - 2\dot{a}(t - 2\Delta) \Delta] \sin[\theta(t - 2\Delta) - 2\omega(t - 2\Delta) \Delta + 2\dot{\omega}(t - 2\Delta) \Delta^2] + \delta_x.\end{aligned}$$

Для $d(t)$ центральной точкой будет $t - \Delta$:

$$\begin{aligned}x(t) &= [a(t - \Delta) + \dot{a}(t - \Delta) \Delta] \sin[\theta(t - \Delta) + \omega(t - \Delta) \Delta + \dot{\omega}(t - \Delta) \Delta^2/2] + \delta_x, \\x(t - \Delta) &= a(t - \Delta) \sin[\theta(t - \Delta)], \\x(t - 2\Delta) &= [a(t - \Delta) - \dot{a}(t - \Delta) \Delta] \sin[\theta(t - \Delta) - \omega(t - \Delta) \Delta + \dot{\omega}(t - \Delta) \Delta^2/2] + \delta_x.\end{aligned}$$

Подставим эти разложения в (21) и, применяя известные тригонометрические формулы и ограничиваясь порядком малости $O(\mu)$, получим

$$\begin{aligned}e(t) &\approx 4 \cos^2[\omega(t - 2\Delta) \Delta] + \delta_e, & \delta_d &= O(\mu), \\d(t) &\approx \exp[2\gamma(t - 3\Delta/2) \Delta] + \delta_d, & \delta_e &= O(\mu).\end{aligned}\quad (22)$$

Из выражений (22) легко получить соотношения для параметров сигнала, считая остаточные члены δ_d и δ_e малыми величинами:

$$\omega(t) = \frac{1}{\Delta} \arccos \left[\frac{\sqrt{e(t + 2\Delta)}}{2} \right], \quad \gamma(t) = \frac{1}{2\Delta} \ln[d(t + 2\Delta)].\quad (23)$$

Из уравнений (20) получаем выражения для коэффициентов уравнения (7):

$$q(t) = \frac{1}{4} p^2(t) + \frac{1}{2} \dot{p}(t) + \left\{ \frac{1}{\Delta} \arccos \left[\frac{\sqrt{e(t + 2\Delta)}}{2} \right] \right\}^2, \quad p(t) = -\frac{1}{\Delta} \ln[d(t + 2\Delta)],\quad (24)$$

которые, как показывают численные эксперименты, неустойчивы к шумам. Для удовлетворения условиям корректности [16–18] мы должны рассматривать соотношения на некотором интервале $L\Delta$, $L > 4$, на котором выполняются условия (19). Из соотношений (24) и определения вариации функции как интеграла нормы её производной можно утверждать, что в случае ограниченности вариации коэффициентов $p(t)$ и $q(t)$ на интервале $L\Delta$, промежуточные функции $e(t)$ и $d(t)$ также являются функциями с ограниченной вариацией на интервале $L\Delta$. Запишем выра-

жения (21) на интервале $L\Delta$ в виде

$$\begin{aligned}
 e(t - L\Delta + \Delta) &= \frac{x^2(t - L\Delta - \Delta) - x(t - L\Delta - 3\Delta)x(t - L\Delta + \Delta)}{x^2(t - L\Delta - \Delta) - x(t - L\Delta - 2\Delta)x(t - L\Delta)}, \quad \dots, \\
 e(t) &= \frac{x^2(t - 2\Delta) - x(t - 4\Delta)x(t)}{x^2(t - 2\Delta) - x(t - 3\Delta)x(t - \Delta)}, \\
 d(t - L\Delta + \Delta) &= \frac{x^2(t - L\Delta) - x(t - L\Delta - \Delta)x(t - L\Delta + \Delta)}{x^2(t - L\Delta - \Delta) - x(t - L\Delta - 2\Delta)x(t - L\Delta)}, \quad \dots, \\
 d(t) &= \frac{x^2(t - \Delta) - x(t - 2\Delta)x(t)}{x^2(t - 2\Delta) - x(t - 3\Delta)x(t - \Delta)},
 \end{aligned} \tag{25}$$

и будем регуляризовать эти выражения на множестве функций с ограниченной вариацией, а затем по соотношениям (24) переходить к коэффициентам уравнения (7).

Решение систем (25) является обратной задачей, устойчивости которой можно добиться, ограничивая область решений некоторым классом функций. Для этого можно использовать регуляризацию А. Н. Тихонова [16–18] как одну из наиболее общих теорий решения обратных задач. Как уже упоминалось, для рассматриваемой задачи корректное решение следует искать на множестве медленно меняющихся функций, которые входят в класс функций с ограниченной вариацией. Каждую из систем (25) можно рассматривать как операторное уравнение 1-го рода вида $A\nu = u$, причём вместо точных значений $A\nu_T = u_T$ и A нам известны такие их приближения u_δ и непрерывный оператор A_r , что $\|u_\delta - u_T\| \leq \delta$ и $\|A_r\nu - A\nu\| \leq \psi(h, \|\nu\|)$, где $\psi(h, \|\nu\|)$ — величина невязки. Можно ограничиться более широким классом изменения для первого приближения, а затем решать задачу минимизируя функционал невязки $\Phi(\nu) = \|A_r\nu - u_\delta\|^2$, например, методом условного градиента на множестве функций ν , вариации которых не превосходят некоторого наперёд заданного приращения на рассматриваемом интервале $L\Delta$ [17]. В качестве ограничения вариации выступают естественные условия на функции $e(t)$ и $d(t)$, которые следуют из соотношений (21) и (22):

$$0 \leq e(t) \leq 4, \quad 0 \leq d(t) \leq 4 \approx e(t).$$

Недостатком решения поставленной задачи на множестве функций ограниченной вариации, связанным с тем, что ограниченность вариации не предполагает медленного изменения функции, является ступенчатое изменение значений, что даёт погрешности в определении производной в выражении (24). Априорная информация о медленном изменении функций $e(t)$ и $d(t)$ позволяет провести дополнительную регуляризацию путём их сглаживания окном длиной $M\Delta$ по аналогии с методом усреднения для медленно меняющихся функций [20] и после этого вычислять коэффициенты $p(t)$ и $q(t)$. Задавшись условием минимума невязки, получаемого после сглаживания решения, можно построить адаптивный алгоритм подбора оптимального значения M .

Функции $e(t)$ и $d(t)$ имеют разный характерный интервал изменения, поэтому в общем случае стоит рассматривать их на интервалах разной длины. Обозначим интервалы для $e(t)$ и $d(t)$ как $L_e\Delta$ и $L_d\Delta$. Тогда выражения (25) следует записать в виде

$$\begin{aligned}
 e(t - L_e\Delta + \Delta) &= \frac{x^2(t - L_e\Delta - \Delta) - x(t - L_e\Delta - 3\Delta)x(t - L_e\Delta + \Delta)}{x^2(t - L_e\Delta - \Delta) - x(t - L_e\Delta - 2\Delta)x(t - L_e\Delta)}, \quad \dots, \\
 e(t) &= \frac{x^2(t - 2\Delta) - x(t - 4\Delta)x(t)}{x^2(t - 2\Delta) - x(t - 3\Delta)x(t - \Delta)},
 \end{aligned}$$

$$d(t - L_d\Delta + \Delta) = \frac{x^2(t - L_d\Delta) - x(t - L_d\Delta - \Delta)x(t - L_d\Delta + \Delta)}{x^2(t - L_d\Delta - \Delta) - x(t - L_d\Delta - 2\Delta)x(t - L_d\Delta)}, \quad \dots, \quad (26)$$

$$d(t) = \frac{x^2(t - \Delta) - x(t - 2\Delta)x(t)}{x^2(t - 2\Delta) - x(t - 3\Delta)x(t - \Delta)}.$$

Соответственно, и сглаживать полученные решения также следует окнами различной длины.

Таким образом, коэффициенты уравнения (7) $p(t)$ и $q(t)$ можно оценить по соотношениям (24), решая системы (26) методом регуляризации на множестве функций с ограниченной вариацией, и сглаживанием полученных зависимостей некоторым окном. Покажем это с помощью численного моделирования на примере уравнения Матье.

3. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Уравнение Матье является частным случаем уравнения (12), в котором коэффициент $\Omega^2(t)$ изменяется по периодическому закону. В размерных переменных оно имеет вид

$$\ddot{y}(t) + \Omega_0^2 [z - 2h \cos(2\Omega_0 t)] y = 0, \quad (27)$$

т. е. в уравнении (9)

$$\Omega_0^2(t) = \Omega_0^2 [z - 2h \cos(2\Omega_0 t)].$$

Для уравнения Матье (27) известны периодические решения, которые носят название функций Матье. Они представляются асимптотическими рядами, которые сходятся тем быстрее, чем меньше коэффициент h в (27). Коэффициент z зависит от h и тоже рассчитывается с помощью асимптотических формул [21]. Асимптотическое решение уравнения (27) может быть найдено также с помощью приближения Венцеля—Крамерса—Бриллюэна в квазигармонической форме (15).

Численное моделирование проводилось с помощью программы, написанной на языке FORTRAN, подпрограмм решения некорректных задач, описанных в работе [17] (PTIGR1, PTIGR2), а также библиотеки IMSL, которая содержит функции для вычисления асимптотических решений уравнения Матье и коэффициентов h и z . По заданному h находилось соответствующее собственное значение z , после чего для заданного Ω_0 вычислялось асимптотическое решение $y(t)$ необходимого порядка. Для перехода от $\Omega^2(t)$ к соотношениям для $p(t)$ и $q(t)$ предполагалось, что $p(t)$ меняется следующим образом:

$$p(t) = p_0 + p_1 \cos(\Omega_1 t),$$

а $q(t)$, как следует из (10),

$$q(t) = \Omega_0^2 z - 2\Omega_0^2 h \cos(2\Omega_0 t) + \frac{1}{4} [p_0 + p_1 \cos(\Omega_1 t)]^2 - \frac{1}{2} p_1 \Omega_1 \sin(\Omega_1 t).$$

В этом выражении второе слагаемое не является медленно меняющимся в смысле условия (18), а его введение обусловлено структурой уравнения Матье (27) и вызвано необходимостью получить аналитическое решение уравнения (7) с переменным коэффициентом $p(t)$. На динамику реальной инерционной системы это быстро осциллирующее слагаемое не влияет. Выделим из $q(t)$ медленно меняющуюся часть $\tilde{q}(t)$:

$$\tilde{q}(t) = \Omega_0^2 z + \frac{1}{4} [p_0 + p_1 \cos(\Omega_1 t)]^2 - \frac{1}{2} p_1 \Omega_1 \sin(\Omega_1 t) = q(t) + 2\Omega_0^2 h \cos(2\Omega_0 t).$$

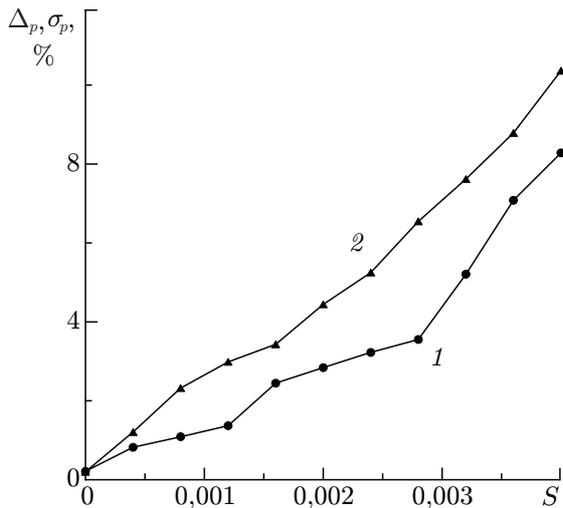


Рис. 1. Систематическая Δ_p (1) и случайная σ_p (2) погрешности оценивания коэффициента $p(t)$ в зависимости от уровня шума S

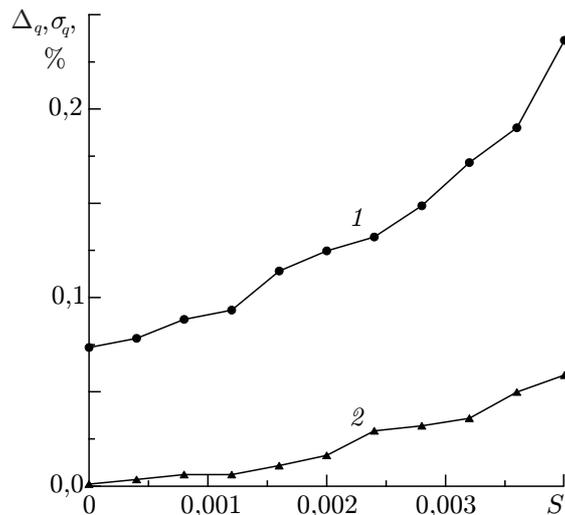


Рис. 2. Систематическая Δ_q (1) и случайная σ_q (2) погрешности оценивания коэффициента $\tilde{q}(t)$ в зависимости от уровня шума S

При этом должны выполняться условия на медленность изменения параметров

$$\dot{\tilde{q}}(t) \sim \mu \tilde{q}^2(t), \quad \dot{p}(t) \sim \mu p^2(t), \quad 0 < \mu \ll 1,$$

а исследуемый сигнал согласно соотношению (8) должен иметь вид

$$x(t) = y(t) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[p_0 t + \frac{p_1}{\Omega_1} \sin(\Omega_1 t) \right] \right\}.$$

К исследуемому сигналу добавлялся аддитивный белый шум $\xi(t)$ с нулевым средним значением и среднеквадратичным отклонением σ_ξ и решались системы уравнений (25) методом условного градиента. Численное моделирование проводилось с дискретными аналогами всех полученных выражений с шагом дискретизации Δ , а производная в выражении (24) вычислялась по разностной схеме. В качестве сглаживающего применялось окно Хэмминга [22]. Систематическая погрешность определялась как среднее значение относительного отклонения требуемой величины по 100 реализациям, а затем полученные значения усреднялись по интервалу наблюдения. Также рассчитывалась случайная погрешность, которая определялась среднеквадратичным отклонением относительного отклонения полученных оценок, после чего значения среднеквадратичного отклонения усреднялись по интервалу наблюдения.

На рис. 1 и 2 приведены зависимости систематических погрешностей Δ_p и Δ_q и случайных погрешностей σ_p и σ_q оценок $p(t)$ и $q(t)$ соответственно от уровня шума S , который определяется как отношения σ_ξ к средней амплитуде сигнала $x(t)$ при $\Delta = 0,21$. Принималось, что параметры $L = 653$, $h = 0,1$, $\Omega_0 = 1,3$, $\Omega_1 = 0,027$, $p_0 = 0,035$, $p_1 = 0,01$. Значения функций получены сглаживанием регуляризованного решения окном длиной $M = 137$.

Видно, что как систематическая, так и случайная погрешности оценки коэффициента $p(t)$ увеличиваются с ростом σ_ξ значительно быстрее, чем для $\tilde{q}(t)$. Это связано с тем, что порядок величин этих коэффициентов разный: $p^2(t) \sim \mu q(t)$. Уменьшить погрешности возможно подбором интервала $L\Delta$, а также, при наличии какой-либо дополнительной априорной информации, например, об уровне шума, величине или виде самих коэффициентов, выбором алгоритма регуляризации [17]. Из-за малости коэффициента $p(t)$ в погрешность его оценивания значительный

вклад вносят погрешности вычисления. В целом можно сказать, что рассмотренный метод даёт состоятельную оценку коэффициентов, но оценка $\tilde{q}(t)$ смещена, хотя и очень незначительно. Видимо, это смещение также обусловлено погрешностью вычислений и отброшенным остаточным членом в формуле (14). Смещение и случайная погрешность оценки медленно меняющейся частоты $\omega(t)$ из выражения (23) практически совпадает с графиком на рис. 2.

Следует отметить, что условие медленности изменения частоты не предполагает ограниченности спектра сигнала (15), поэтому при моделировании использовали аддитивный белый шум, который имеет неограниченный спектр. Если же известна априорная информация о полосе частот исходного сигнала, на практике будет использован фильтр, ограничивающий спектр шума. В этом случае при моделировании следует использовать шум с ограниченным спектром, что уменьшит погрешности.

Поскольку в основе предлагаемого подхода лежит условие медленности изменения параметров, необходим способ проверки выполнения этих требований по имеющимся отсчётам сигнала. Один из способов такой проверки — использование при оценивании параметров сигнала только каждого второго его отсчёта. По этим отсчётам определяются параметры сигнала, которые как медленно меняющиеся на интервале наблюдения функции аппроксимируются кубическими сплайнами в промежуточных точках [23] и по соотношению (15) восстанавливаются значения сигнала. Если отклонения этих значений от имеющихся отсчётов в промежуточных и в использованных при оценке параметров точках близки, то, в силу единственности квазигармонического представления сигнала медленно меняющейся частоты, можно утверждать, что к исследуемому сигналу предложенный метод применим, и для окончательной оценки параметров можно использовать все имеющиеся отсчёты сигнала.

4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СЛИЧЕНИЯ ЧАСТОТ

Помимо задачи определения коэффициентов $p(t)$ и $q(t)$ рассмотренный подход можно применять для оценки и других параметров. Например, в метрологии важное место занимает задача поверки различной аппаратуры для измерения частоты и времени — частотомеров, измерителей интервалов времени, анализаторов спектра, стандартов частоты и времени, а также задача сличения и синхронизации частот задающих генераторов.

Рассмотрим кварцевый резонатор, который задаёт гармоническое колебание с частотой f . При изменении внешних условий, например, температуры, частота f также изменяется. Поэтому в общем случае колебания резонатора не чисто гармонические, а частота будет медленно меняющейся функцией времени:

$$|\dot{f}(t)| \sim \mu f^2(t), \quad 0 < \mu \ll 1. \quad (28)$$

Пусть генератор работает в некоторой цифровой системе и задаёт шаг дискретизации аналого-цифрового преобразователя Δt , который тоже будет медленно меняться, так что будет выполняться следующее условие:

$$\left| \frac{d\Delta t(t)}{dt} \right| \sim \mu.$$

Таким образом, для задачи сличения оценивание нестабильности частоты f можно заменить оцениванием нестабильности шага дискретизации Δt .

Моменты времени t_n , в которые фиксируются значения поступающего сигнала $x(t)$, определяются прохождением фазы колебаний кварцевого резонатора через точки, кратные π , и равны

$$t_n = \sum_{i=1}^n \Delta t_i = t_{n-1} + \Delta t_n,$$

где t_n — значение шага дискретизации для n -го отсчёта сигнала. При этом условие медленности изменения частоты дискретизации (28) будет иметь вид:

$$\Delta t_n - \Delta t_{n-1} \sim \mu \Delta t_n.$$

Сличение частоты f необходимо проводить с заведомо более устойчивой частотой, например, частотой квантового эталона. Для этого на вход аналого-цифрового преобразователя подадим сигнал квантового эталона с известной фиксированной частотой ω :

$$x(t) = a(t) \sin(\omega t + \varphi),$$

отсчёты которого будут иметь вид

$$x[n] = a[n] \sin(\omega t_n + \varphi). \quad (29)$$

Заметим, что амплитуда $a(t)$ такого сигнала будет медленно меняющейся функцией, но не постоянной величиной [24]:

$$\frac{|\dot{a}(t)|}{a(t)} \sim f(t)\mu.$$

Составим соотношение из отсчётов сигнала для момента времени t_n

$$c_n = \frac{x[n-1] + x[n+1]}{x[n]}, \quad x[n] \neq 0 \quad (30)$$

и, повторяя процедуру по разложению отсчётов сигнала в ряд Тейлора вокруг центральной точки — в данном случае $x[n]$ — и пренебрегая слагаемыми всех порядков малости по μ начиная со второго, получим выражение для оценивания шага дискретизации

$$\tilde{\Delta} t_n \approx \frac{1}{\omega} \arccos(c_n/2). \quad (31)$$

Поскольку определение шага дискретизации необходимо проводить на интервале, содержащем L отсчётов сигнала, можно составить систему из L уравнений для коэффициентов c_n вида (30):

$$c_{n-k} x[n-k] = x[n-k-1] + x[n-k+1], \quad k = 0, \dots, L-1. \quad (32)$$

Решая эту систему методом регуляризации на множестве функций с ограниченной вариацией и подставляя полученные значения c_n в выражение (31), можно оценить динамику шага дискретизации на интервале, содержащем L отсчётов. Ограничения вариации на коэффициент c_n следуют из (31):

$$0 \leq c_n \leq 2.$$

Для проверки применимости рассмотренного алгоритма и его устойчивости было проведено численное моделирование. К исследуемому сигналу добавлялся аддитивный белый шум $\xi(t)$ с нулевым средним значением и среднеквадратичным отклонением σ_ξ , решалась система уравнений (32) методом условного градиента и определялись систематическая и случайная погрешности. На рис. 3 приведены зависимости систематической $\Delta_{\Delta t}$ и случайной погрешности $\sigma_{\Delta t}$ оценки шага дискретизации, задаваемого формулой

$$\Delta t_n = \Delta t_0 [1 + K_\Delta \cos(\omega_\Delta n \Delta t_0)],$$

от уровня шума S как отношения σ_ξ к средней амплитуде сигнала $x(t)$. При этом амплитуда сигнала (29) задавалась выражением

$$a[n] = a_0 [1 + K_a \cos(\omega_a t_n)].$$

Для зависимостей, представленных на рис. 3, параметры имели следующие значения: $a_0 = 1,00$, $\Delta t_0 = 0,47$, $\omega = 1,05$, $K_a = 0,2$, $\omega_a = 0,04$, $K_\Delta = 0,13$, $\omega_\Delta = 0,06$, $L = 19$.

Как видно, рассмотренный метод даёт состоятельную, хотя и немного смещённую, оценку шага дискретизации, что позволяет использовать его для определения нестабильности частоты кварцевых генераторов или сличения вторичных или рабочих эталонов частоты с первичным. При этом систематическая погрешность для разных значений среднеквадратичного отклонения шума σ_ξ мало изменялась, что говорит, скорее, о погрешности, привносимой численными методами, используемыми при расчёте, чем о погрешности самого метода. Таким образом, оптимизируя алгоритм расчёта, можно добиться улучшения оценивания.

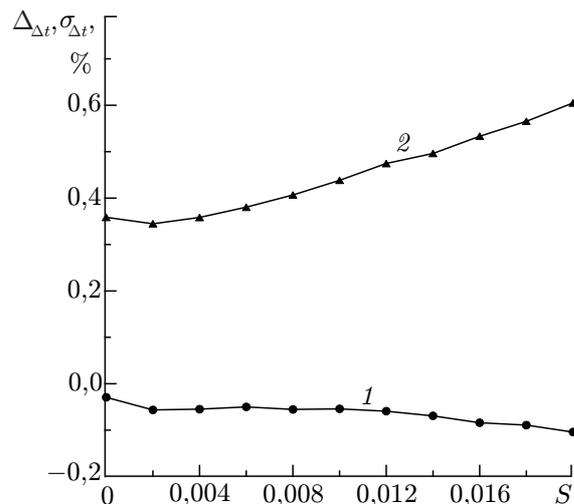


Рис. 3. Систематическая $\Delta_{\Delta t}$ (1) и случайная $\sigma_{\Delta t}$ (2) погрешности оценивания шага дискретизации в зависимости от уровня шума S

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложен новый метод оценивания по данным наблюдений параметров динамических систем, описываемых уравнением второго порядка. Эта, в общем случае некорректная, задача решается методом регуляризации Тихонова для случая медленно меняющихся коэффициентов, связывающих близлежащие отсчёты сигнала. Показано, что найденные последовательности переменных коэффициентов взаимно однозначно связаны с отсчётами огибающей и полной фазы. По этим последовательностям методом адаптивного сглаживания на основе априорной информации о медленности изменения параметров системы однозначно находятся непрерывные функции огибающей и мгновенной частоты, определяемой как производная полной фазы. Рассмотренный метод допускает обобщения как на случай вынужденных колебаний, так и на случай систем более высокого порядка, которые могут быть слабонелинейными и активными.

Разработан численный алгоритм метода анализа динамических систем, допускающий реализацию на базе сигнальных процессоров и работу в режиме реального времени. Проведено численное моделирование для проверки и оптимизации работы алгоритма и исследования влияния длительности интервала наблюдения и шага дискретизации сигнала на его точность. Полученные результаты исследований позволяют говорить, что предложенные подходы обеспечивают необходимые для измерительных систем высшего класса точности метрологические характеристики.

Областью практического применения полученных результатов может стать актуальная для современной метрологии задача сличения частоты сигнала поверяемого генератора с сигналом Государственного эталона. Результаты позволяют утверждать, что предложенный метод нечувствителен к мультипликативным помехам, обладает высоким разрешением, не требует значительных вычислительных мощностей и допускает реализацию на базе современных сигнальных процессоров. Это означает, что на его основе возможно построение информационно-измерительного комплекса для анализа динамических систем как самостоятельного прибора. Он может исполь-

зоваться, например, для компарирования частот при нестабильной амплитуде колебаний, что является актуальной задачей для обеспечения работы навигационных систем типа ГЛОНАСС.

Примеров применения можно привести много, но несомненно, что априорная информация о медленности изменения параметров системы позволяет получать достаточно простые алгоритмы и решения задачи их оценивания.

Работа проведена в рамках реализации Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (проект НК–423П/14) и частично поддержана РФФИ (грант 10–07–9713р_а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Трубецков Д. И., Рожнев А. Г. Линейные колебания и волны: Учеб. пособие. М.: Физматлит, 2001. 416 с.
2. Gabor D. // JIEE. 1946. V. 93. P. 429.
3. Вакман Д. Е. // Радиотехника и электроника. 1972. Т. 17, № 5. С. 972.
4. Титчмарш Э. Ч. Введение в теорию интегралов Фурье. М.: Гос. изд-во оборон. пром-ти, 1948. С. 159.
5. Cohen L. // Proc. IEEE. 1989. V. 46, No. 7. P. 941.
6. Вайнштейн Л. А., Вакман Д. Е. Разделение частот в теории колебаний и волн. М.: Наука, 1983. 288 с.
7. Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1959. 212 с.
8. Хургин Я. И, Яковлев В. П. Фinitные функции в физике и технике. М.: Наука, 1971. 408 с.
9. Гельфонд И. М., Шилов Г. Е. Обобщённые функции и действия над ними. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1958. 276 с.
10. Митропольский Ю. А. Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний. М.: Наука, 1964. 432 с.
11. Квантовая радиофизика / Под ред. В. И. Чижики. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2004. 689 с.
12. Островский Л. А., Потапов А. И. Введение в теорию модулированных волн. М.: Физматгиз, 2003. 400 с.
13. Федорюк М. В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983. 352 с.
14. Ломов С. А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981. 400 с.
15. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Физматлит, 2004. 800 с.
16. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 286 с.
17. Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г. Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990. 232 с.
18. Денисов А. М. Введение в теорию обратных задач. М.: Изд-во МГУ, 1994. 208 с.
19. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974. 480 с.
20. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 408 с.
21. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Наука, 1979. 832 с.
22. Марпл.-мл. С. Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1990. 584 с.
23. Альберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и её приложения. М.: Мир, 1972. 320 с.

24. Григорьянц В. В., Жаботинский М. Е., Золин В. Ф. Квантовые стандарты частоты. М.: Наука, 1967. 288 с.

Поступила в редакцию 13 июля 2009 г.; принята в печать 25 февраля 2010 г.

PARAMETRIC ANALYSIS OF OSCILLATIONS WITH SLOWLY VARYING FREQUENCY

V. K. Ignatjev, A. V. Nikitin, and S. V. Yushanov

We propose an algorithm for estimating the parameters of a signal from a quasiharmonic representation and a method for estimation of slowly varying coefficients of the second-order differential equation. The considered approach uses Tikhonov's regularization for the class of slowly varying functions. The results of statistical modeling for the Mathieu equation are presented. Solution of the frequency comparison problem in terms of estimation of the frequency instability of a quartz resonator setting a signal sample interval is considered. Relations for determining the sample interval are obtained and the results of numerical simulation are reported.