

УДК 537.86:519.2

ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ ОБНАРУЖЕНИЕ ЧАСТИЧНО ПОЛЯРИЗОВАННЫХ РАДИОСИГНАЛОВ НА ФОНЕ ГАУССОВСКОГО ШУМА

В. И. Костылев, М. П. Сличенко

Воронежский госуниверситет, г. Воронеж, Россия

Предложена структурная блок-схема энергетического приёмника частично поляризованных радиосигналов. Получены аналитические выражения для характеристик энергетического обнаружения частично поляризованных радиосигналов на фоне гауссовского шума. Проанализировано поведение данных характеристик в различных случаях.

ВВЕДЕНИЕ

Задача повышения потенциальных и информационных возможностей радиофизических систем является одной из важнейших задач, рассматриваемых в рамках статистической радиофизики. Векторный характер электромагнитной волны обуславливает необходимость учёта её поляризационной структуры. Благодаря влиянию различных физических факторов [1–3], в реальных условиях наблюдения принимаемые квазимонохроматические электромагнитные волны в общем случае являются частично поляризованными. Поэтому при разработке радиофизических систем достаточно широко используются методы, основанные на поляризационных свойствах принимаемых электромагнитных волн [2, 3].

Вместе с тем, на этапе первичной обработки радиофизических наблюдений форма принимаемого радиосигнала довольно часто является неизвестной и, следовательно, оптимальный приёмник не реализуем. В качестве обнаружителя радиосигналов неизвестной формы в [4] было предложено использовать энергетический приёмник, представляющий собой каскадно соединённые полосовой фильтр, квадратор, интегратор на интервале времени наблюдения и пороговое устройство.

В работе [4] получены характеристики обнаружения детерминированных радиосигналов на фоне гауссовского шума и показано, что решающая статистика — выходной сигнал энергетического приёмника — подчиняется χ^2 -распределению. Причём в случае наличия обнаруживаемого сигнала данное распределение является нецентральным.

В настоящее время имеется множество работ, посвящённых различным вопросам энергетического обнаружения радиосигналов (см., например, [4–8]). Однако задача энергетического обнаружения радиосигналов с учётом поляризационной структуры принимаемой электромагнитной волны является недостаточно исследованной.

Целью настоящей работы является определение структурной блок-схемы энергетического приёмника частично поляризованных радиосигналов, а также получение аналитического вида его характеристик обнаружения.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В радиофизике в подавляющем большинстве используются сигналы с поляризацией простого вида. Шумы, независимо от природы их происхождения, обычно имеют случайную поляризацию,

т. е. конец вектора напряжённости электрического поля описывает в пространстве фигуру случайной формы [1, 2]. Будем считать, что шумовое воздействие $\mathbf{n}(t)$ естественного или искусственного происхождения имеет векторный характер и описывается моделью гауссовского частично поляризованного векторного случайного процесса.

В данной работе будем рассматривать электромагнитное излучение точечного источника. При этом под сигналами будем понимать векторную напряжённость электрического поля:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{k}_1 x_1(t) + \mathbf{k}_2 x_2(t), \tag{1}$$

где $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$ — единичные орты координатных осей; $x_r(t) = \xi s_r(t) + n_r(t)$, $s_r(t)$ и $n_r(t)$ — ортогональные составляющие принимаемых напряжённости электрического поля, полезного сигнала и шума, соответственно, $r = 1, 2$. Бинарный параметр ξ может принимать целочисленные значения 0 или 1. Обозначим гипотезы о наличии (H_1) либо отсутствии (H_0) полезного сигнала на интервале наблюдения $[0, T]$ через H_ξ .

Компоненты обнаруживаемого векторного сигнала

$$\mathbf{s}(t) = [s_1(t), s_2(t)]^T$$

будем считать узкополосными детерминированными радиосигналами, а именно $s_r(t) = a_r U(t) \times \cos[2\pi f_0 t + \varphi(t) - \varphi_r]$, $r = 1, 2$. Здесь f_0 — несущая частота, $U(t)$ и $\varphi(t)$ — законы амплитудной и фазовой модуляции, a_r и φ_r — амплитуды и начальные фазы, индекс T обозначает транспонирование.

Первым каскадом энергетического обнаружителя является полосовой фильтр, предназначенный для ограничения энергии шума [4]. Величину спектральной плотности мощности шума будем считать постоянной в пределах полос пропускания Δf фильтров. Полоса пропускания фильтра совпадает с шириной Δf спектра каждой из ортогональных компонент обнаруживаемого сигнала $\mathbf{s}(t)$. Искажением формы сигнала в фильтре будем пренебрегать.

Сущность основных функциональных операций, выполняемых при традиционном энергетическом обнаружении неполяризованных сигналов [4], позволяет предложить следующую структурную блок-схему энергетического приёмника частично поляризованных радиосигналов, представленную на рис.1. Здесь 1 — аттенуатор с коэффициентом усиления $\alpha = (N_{02})^{-1}$, N_{02} — двусторонняя спектральная плотность мощности входного шума, $1''$ — поляризационный расщепитель на две ортогональные компоненты, 2 и $2''$ — входные полосовые фильтры, 3 и $3''$ — квадраторы напряжений, 4 и $4''$ — интеграторы, функционирующие на интервале времени наблюдения $[0, T]$, 5 — сумматор, 6 — пороговое устройство.

Рис. 1. Блок-схема энергетического приёмника частично поляризованных радиосигналов

Таким образом, при энергетическом обнаружении частично поляризованных сигналов мы предлагаем несколько усложнить аппаратную реализацию традиционного энергетического приёмника [4].

В каждом канале энергетического приёмника частично поляризованных радиосигналов осуществляется энергетическое обнаружение одной из ортогональных компонент принимаемого сигнала и используется одноканальная схема построения энергетического обнаружителя, т. е. без разделения сигнала с выхода полосового фильтра на два канала, фазный и квадратурный. На вы-

ходах интеграторов формируются случайные величины

$$\Xi_r = \frac{1}{N_{02}} \int_0^T x_r^2(t) dt = \frac{1}{2N_{02}} \int_0^T [x_{cr}(t) \cos(2\pi f_0 t) - x_{sr}(t) \sin(2\pi f_0 t)]^2 dt, \quad r = 1, 2, \quad (2)$$

где $x_{sr}(t)$ и $x_{cr}(t)$ — низкочастотные амплитуды синфазных и квадратурных составляющих процессов $x_r(t)$, $r = 1, 2$; T — длительность интегрирования. В соответствии с выражением (2), обработка синфазной и квадратурной компонент сигнала в каждом канале энергетического приёмника частично поляризованных радиосигналов осуществляется непосредственно.

С достаточной степенью точности, увеличивающейся с ростом T , выполняется равенство

$$\frac{1}{N_{02}} \int_0^T [x_{cr}(t) \cos(2\pi f_0 t) - x_{sr}(t) \sin(2\pi f_0 t)]^2 dt = \frac{1}{2N_{02}} \int_0^T [x_{cr}^2(t) + x_{sr}^2(t)] dt,$$

правую часть которого на основании теоремы отсчётов можно представить в виде конечной суммы

$$\frac{1}{2N_{02}} \int_0^T [x_{cr}^2(t) + x_{sr}^2(t)] dt = \frac{1}{2N_{02} \Delta f} \sum_{w=1}^{T \Delta f} [x_{cr}^2(w/\Delta f) + x_{sr}^2(w/\Delta f)].$$

Отсчёты $x_{cr}(w/\Delta f)$ и $x_{sr}(w/\Delta f)$ каждой из ортогональных компонент сигнала $\mathbf{x}(t)$ взяты по теореме отсчётов с частотой дискретизации $f_d = \Delta f$ в моменты времени $t_w = w/\Delta f$, $w = 1, \dots, T \Delta f$. Из-за постоянства спектральных плотностей мощности ортогональных компонент шума отсчёты $x_{cr}(w/\Delta f)$ и $x_{sr}(w/\Delta f)$ при одинаковом значении индекса $r = 1, 2$ являются статистически независимыми гауссовскими случайными величинами. Таким образом, сигналы (2) на входе сумматора можно представить как

$$\Xi_r = \frac{N_r}{N_{02}} \sum_{w=1}^{T \Delta f} (\mathfrak{S}_{rw}^2 + \mathfrak{N}_{rw}^2) = \frac{N_r}{N_{02}} \chi^2(n, \mu_r), \quad r = 1, 2,$$

где N_r — двусторонние спектральные плотности мощности шума в каждом из каналов обработки, $n = 2T \Delta f$ — база обработки каждой из ортогональных компонент напряжённости электрического поля (1); $\mathfrak{S}_{rw} = x_{cr}(w/\Delta f)/(2N_r \Delta f)$ и $\mathfrak{N}_{rw} = x_{sr}(w/\Delta f)/(2N_r \Delta f)$ — гауссовские случайные величины с единичной дисперсией, $\chi^2(n, \mu_r)$ — случайные величины, имеющие нецентральное χ^2 -распределение с числами степеней свободы n и параметрами нецентральности μ_r . Последние равны отношению сигнал/шум на входе каждого из энергетических обнаружителей:

$$\mu_r = \frac{1}{N_r} \int_0^T s_r^2(t) dt = \frac{a_r^2}{2N_r} \int_0^T U^2(t) dt.$$

Сигнал на выходе сумматора, т. е. решающую статистику энергетического приёмника частично поляризованных сигналов,

$$\Xi = \Xi_1 + \Xi_2 = (N_1/N_{02}) \chi^2(n, \mu_1) + (N_2/N_{02}) \chi^2(n, \mu_2),$$

в соответствии с (1) можно представить в виде

$$\Xi = (N_{02})^{-1} \int_0^T x_1(t)x_1(t) dt + (N_{02})^{-1} \int_0^T x_2(t)x_2(t) dt = (N_{02})^{-1} \int_0^T \mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t) dt. \quad (3)$$

Сигнал сумматора подаётся на пороговое устройство θ , осуществляющее сравнение выходного сигнала сумматора с пороговым уровнем обнаружения h_0 . Соответственно, при $\Xi > h_0$ принимается решение о наличии обнаруживаемого сигнала, а при $\Xi < h_0$ — о его отсутствии. Согласно критерию Неймана—Пирсона значение порога h_0 обеспечивается заданной вероятностью ложной тревоги.

Введём в рассмотрение коэффициент эллиптичности K и угол ориентации ψ эллипса поляризации для сигнала $\mathbf{s}(t)$:

$$K = \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2}, \quad \psi = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}. \quad (4)$$

По аналогии с выражением (4) для шума также можно ввести (см. [1, 2]) коэффициент эллиптичности $K_N = (\sqrt{N_1} - \sqrt{N_2})/(\sqrt{N_1} + \sqrt{N_2})$ и угол ориентации ψ_N эллипса поляризации.

С учётом (4), обнаруживаемый векторный сигнал $\mathbf{s}(t)$ запишем в виде

$$\mathbf{s}(t) = a_1 [\mathbf{s}_c(t) \cos \varphi_1 + \mathbf{s}_s(t) \sin \varphi_2],$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_c(t) &= U(t) \left(\cos[2\pi f_0 t + \varphi(t)], \frac{1-K}{1+K} \cos[2\pi f_0 t + \varphi(t) + 2\psi] \right)^T, \\ \mathbf{s}_s(t) &= U(t) \left(\sin[2\pi f_0 t + \varphi(t)], \frac{1-K}{1+K} \sin[2\pi f_0 t + \varphi(t) + 2\psi] \right)^T. \end{aligned}$$

Будем рассматривать модель частично поляризованного шума $\mathbf{n}(t) = [n_1(t), n_2(t)]^T$ с компонентами, имеющими следующие статистические характеристики [1]:

$$\overline{n_r(t)} = 0, \quad \overline{n_r(t)n_v(t+\tau)} = V_{rv}(\tau); \quad r, v = 1, 2,$$

где $\overline{n_r(t)}$ — среднее значение $n_r(t)$, $V_{rv}(\tau)$ — элементы матрицы корреляции $\mathbf{V} = \{V_{rv}(\tau)\}$ ортогональных компонент шума,

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} D_1 & \vartheta \sqrt{D_1 D_2} \\ \vartheta \sqrt{D_1 D_2} & D_2 \end{pmatrix}; \quad (5)$$

где $D_r = 2N_r \Delta f$ — дисперсии двух ортогонально поляризованных компонент шума, ϑ — модуль коэффициента взаимной корреляции между этими компонентами.

2. ВЕРОЯТНОСТЬ ОШИБКИ ПЕРВОГО РОДА

Благодаря наличию статистической связи между ортогональными компонентами шума $n_r(t)$, характеризуемой матрицей (5), величины Ξ_1 и Ξ_2 являются статистически зависимыми. Используя результаты работ [5, 6], решающую статистику (3) можно записать следующим образом:

$$\Xi = \sum_{k=1}^{2n} \alpha_k x_k^2, \quad (6)$$

где

$$\alpha_k = \begin{cases} N_1/N_{02}, & k = 1, \dots, n; \\ N_2/N_{02}, & k = n+1, \dots, 2n, \end{cases}$$

x_k — статистически зависимые гауссовские случайные величины:

$$x_k = \begin{cases} x_{c1}(k/\Delta f), & k = 1, \dots, n/2; \\ x_{s1}[(k - n/2)/\Delta f], & k = (n/2) + 1, \dots, n; \\ x_{c2}[(k - n)/\Delta f], & k = n + 1, \dots, 3n/2; \\ x_{s2}[(k - 3n/2)/\Delta f], & k = (3n/2) + 1, \dots, 2n, \end{cases}$$

с единичными дисперсиями и средними значениями

$$m_k = \begin{cases} a_1 U(k/\Delta f) \cos[\varphi(k/\Delta f) + \varphi_1]/\sqrt{N_1}, & k = 1, \dots, n/2; \\ a_1 U[(k - n/2)/\Delta f] \sin\{\varphi[(k - n/2)/\Delta f] + \varphi_1\}/\sqrt{N_1}, & k = (n/2) + 1, \dots, n; \\ a_2 U[(k - n)/\Delta f] \cos\{\varphi[(k - n)/\Delta f] + \varphi_1\}/\sqrt{N_2}, & k = n + 1, \dots, 3n/2; \\ a_2 U[(k - 3n/2)/\Delta f] \sin\{\varphi[(k - 3n/2)/\Delta f] + \varphi_1\}/\sqrt{N_2}, & k = (3n/2) + 1, \dots, 2n. \end{cases}$$

В соответствии с выражением (П9) одномерную плотность вероятности $W_{\Xi|H_0}(y)$ решающей статистики $\Xi | H_0$ и вероятность ошибки первого рода $F(h_0) = \int_{h_0}^{\infty} W_{\Xi|H_0}(y) dy$ представим в следующем аналитическом виде:

$$W_{\Xi|H_0}(y) = \sum_{r=1}^2 \sum_{b=1}^{n/2} \beta_r^b \frac{\exp[-y/(2d_r)] y^{b-1}}{(2d_r)^b \Gamma(b)}, \quad F(h_0) = \sum_{r=1}^2 \sum_{b=1}^{n/2} \beta_r^b \{1 - \gamma[b, h_0/(2d_r)]\}, \quad (7)$$

где $d_1 = (1 + \vartheta)(1 + K_N)^2/[2(1 + K_N^2)]$, $d_2 = (1 - \vartheta)(1 - K_N)^2/[2(1 + K_N^2)]$, $\Gamma(b)$ — гамма-функция, $\gamma(b, y)$ — нормированная неполная гамма-функция [9]; h_0 — фиксированный пороговый уровень, являющийся решением уравнения $F(h_0) = F_0$, F_0 — заданная вероятность ошибки первого рода. Выражения для коэффициентов β_r^b приведены в приложении к настоящей работе.

В соответствии с выражением (7), статистика $\Xi | H_0$ имеет центральное поли- χ^2 -распределение. Коэффициент взаимной корреляции ϑ играет роль балансирующего ¹ масштабного параметра между статистическими характеристиками ортогональных компонент шума $\mathbf{n}(t) = [n_1(t), n_2(t)]^T$ и не влияет на закон распределения решающей статистики.

Выполнив определённые математические преобразования в (П8) можно показать, что плотность вероятности

$$W_{\Xi|H_0}(y) = W_{\chi^2}(y | 2n, d_2) (d_2/d_1)^{n/2} {}_1F_1[n/2, n, y(d_2^{-1} - d_1^{-1})/2],$$

где $W_{\chi^2}(z | 2n, d_2)$ — одномерная плотность вероятности обобщённого [5] центрального χ^2 -распределения с числом степеней свободы $2n$ и дисперсиями гауссовских компонент, равными d_2 ; ${}_1F_1[a, b, c]$ — конфлюэнтная гипергеометрическая функция Куммера [9].

¹ Параметр ϑ является балансирующим в том смысле, что с ростом его величины преобладает вклад статистических характеристик одной из ортогональных компонент шума в распределение решающей статистики $\Xi | H_0$.

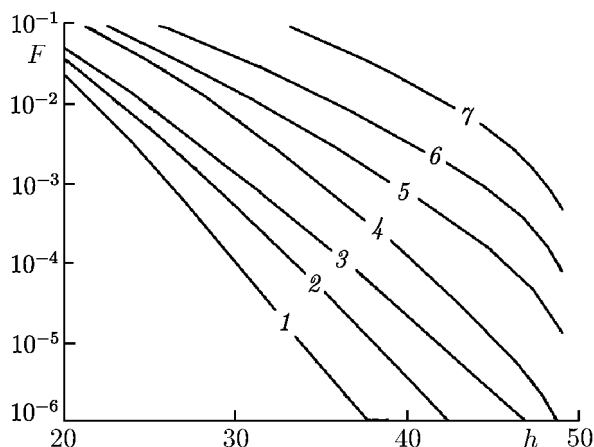


Рис. 2. Вероятность ошибки первого рода $F(h)$ при различных фиксированных значениях коэффициентов K_N и ϑ . Кривая 1 соответствует $K_N = 0,1, \vartheta = 0$; 2 — $K_N = 0,3, \vartheta = 0$; 3 — $K_N = 0,5, \vartheta = 0$; 4 — $K_N = 0,8, \vartheta = 0$; 5 — $K_N = 0,5, \vartheta = 0,3$; 6 — $K_N = 0,5, \vartheta = 0,5$; 7 — $K_N = 1, \vartheta = 0$

На рис. 2 представлены зависимости вероятности ошибки первого рода F от порогового уровня h при различных фиксированных значениях коэффициентов K_N и ϑ .

В соответствии с рис. 2 увеличение абсолютной величины коэффициента эллиптичности K_N шума при фиксированном пороге h_0 , а также рост по модулю коэффициента взаимной корреляции ϑ ортогональных компонент шума приводят к увеличению вероятности ошибки первого рода.

3. ВЕРОЯТНОСТЬ ПРАВИЛЬНОГО ОБНАРУЖЕНИЯ

Введём следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 1 - \vartheta, & \omega_2 &= 1 + \vartheta, & \theta_1 &= 2\omega_1 d_1, & \theta_2 &= 2\omega_2 d_2, & \theta_3 &= 2d_1, & \theta_4 &= 2d_2, \\ q_1 &= \mu_0 (1 + K)^2 / [2(1 + K^2)], & q_2 &= \mu_0 (1 - K)^2 / [2(1 + K^2)], \\ \wp_{mf} &= (m! f!)^{-1} \exp[-q_1 / (2d_1)] [q_1 / (2d_1)]^m \exp[-q_2 / (2d_2)] [q_2 / (2d_2)]^f. \end{aligned}$$

При этом можно показать, что выполняется условие нормировки $\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{f=0}^{\infty} \wp_{mf} = 1$. Учтём, что

$$\exp\left(\frac{j\eta q_r}{1 - 2j\eta d_r}\right) = \exp\left(-\frac{q_r}{2d_r}\right) \exp\left[\frac{q_r / (2d_r)}{1 - 2j\eta d_r}\right].$$

Тогда, с учётом выражения (П7), характеристическую функцию $\Theta_{\Xi}(j\eta | H_1)$ при реализации гипотезы H_1 можно записать в виде

$$\Theta_{\Xi}(j\eta | H_1) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{f=0}^{\infty} \wp_{mf} (1 - j\eta\theta_1)^{-m} (1 - j\eta\theta_2)^{-f} (1 - j\eta\theta_3)^{-n/2} (1 - j\eta\theta_4)^{-n/2}.$$

Раскладывая правую часть последнего выражения на простые дроби [7] можно получить:

$$\begin{aligned} \Theta_{\Xi}(j\eta | H_1) &= \left[\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{f=1}^{\infty} \wp_{mf} \sum_{\varepsilon=1}^4 \sum_{\tau=1}^{M_{\varepsilon}} \Omega_{\varepsilon}^{\tau}(m, f) (1 - j\eta\theta_{\varepsilon})^{-\tau} + \wp_{00} \sum_{\varepsilon=3}^4 \sum_{\tau=1}^{G_{\varepsilon}} \beta_{\varepsilon}^{\tau} (1 - j\eta\theta_{\varepsilon})^{-\tau} + \right. \\ &\quad \left. + \wp_{01} \sum_{\varepsilon=2}^4 \sum_{\tau=1}^{G_{\varepsilon}} \Psi_{\varepsilon}^{\tau} (1 - j\eta\theta_{\varepsilon})^{-\tau} + \wp_{10} \sum_{\substack{\varepsilon=1 \\ \varepsilon \neq 2}}^4 \sum_{\tau=1}^{G_{\varepsilon}} \Delta_{\varepsilon}^{\tau} (1 - j\eta\theta_{\varepsilon})^{-\tau} \right], \quad (8) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} (1 - j\eta\theta_1)^{-M_1} (1 - j\eta\theta_2)^{-M_2} (1 - j\eta\theta_3)^{-M_3} (1 - j\eta\theta_4)^{-M_4} &= \sum_{\varepsilon=1}^4 \sum_{\tau=1}^{M_{\varepsilon}} \Omega_{\varepsilon}^{\tau}(m, f) (1 - j\eta\theta_{\varepsilon})^{-\tau}, \\ M_1 &= m, & M_2 &= f, & M_3 &= M_4 = n/2; \\ (1 - j\eta\theta_2)^{-G_2} (1 - j\eta\theta_3)^{-G_3} (1 - j\eta\theta_4)^{-G_4} &= \sum_{\varepsilon=2}^4 \sum_{\tau=1}^{G_{\varepsilon}} \Psi_{\varepsilon}^{\tau} (1 - j\eta\theta_{\varepsilon})^{\tau}, \\ (1 - j\eta\theta_1)^{-G_1} (1 - j\eta\theta_3)^{-G_3} (1 - j\eta\theta_4)^{-G_4} &= \sum_{\substack{\varepsilon=1 \\ \varepsilon \neq 2}}^4 \sum_{\tau=1}^{G_{\varepsilon}} \Delta_{\varepsilon}^{\tau} (1 - j\eta\theta_{\varepsilon})^{-\tau}, \\ G_1 &= G_2 = 1, & G_3 &= G_4 = n/2, \end{aligned}$$

коэффициенты $\Omega_\varepsilon^\tau(m, f)$, Ψ_ε^τ , Δ_ε^τ найдены в [10] и имеют следующий вид:

$$\Omega_\varepsilon^{M_\varepsilon - A_\varepsilon}(m, f) = \left[(-\theta_\varepsilon)^{M_\varepsilon - A_\varepsilon} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq \varepsilon}}^4 \theta_p^{-M_p} \right] \Pi_\varepsilon^{M_\varepsilon - A_\varepsilon}(m, f),$$

$$\Pi_\varepsilon^{M_\varepsilon - A_\varepsilon}(m, f) = \frac{-1}{A_\varepsilon! \varphi_\varepsilon(\theta_\varepsilon^{-1}, m, f)} \left\{ \left[\sum_{r=0}^{A_\varepsilon - 1} (A_\varepsilon - r - 1)_r \Pi_\varepsilon^{M_\varepsilon - r}(m, f) \varphi_\varepsilon^{(A_\varepsilon - r)}(\theta_\varepsilon^{-1}, m, f) \right] - \delta_{0A_\varepsilon} \right\},$$

$$\Psi_\varepsilon^{G_\varepsilon - Q_\varepsilon} = \left[(-\theta_\varepsilon)^{G_\varepsilon - Q_\varepsilon} \prod_{\substack{p=2 \\ p \neq \varepsilon}}^4 \theta_p^{-G_p} \right] \Upsilon_\varepsilon^{G_\varepsilon - Q_\varepsilon},$$

$$\Upsilon_\varepsilon^{G_\varepsilon - Q_\varepsilon} = \frac{-1}{Q_\varepsilon! g_\varepsilon(\theta_\varepsilon^{-1})} \left\{ \left[\sum_{r=0}^{Q_\varepsilon - 1} (Q_\varepsilon - r - 1)_r \Upsilon_\varepsilon^{G_\varepsilon - r} g_\varepsilon^{(Q_\varepsilon - r)}(\theta_\varepsilon^{-1}) \right] - \delta_{0Q_\varepsilon} \right\},$$

$$\Delta_\varepsilon^{G_\varepsilon - Q_\varepsilon} = \left[(-\theta_\varepsilon)^{G_\varepsilon - Q_\varepsilon} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq 2, \varepsilon}}^4 \theta_p^{-G_p} \right] Z_\varepsilon^{G_\varepsilon - Q_\varepsilon},$$

$$Z_\varepsilon^{G_\varepsilon - Q_\varepsilon} = \frac{-1}{Q_\varepsilon! c_\varepsilon(\theta_\varepsilon^{-1})} \left\{ \left[\sum_{r=0}^{Q_\varepsilon - 1} (Q_\varepsilon - r - 1)_r Z_\varepsilon^{G_\varepsilon - r} c_\varepsilon^{(Q_\varepsilon - r)}(\theta_\varepsilon^{-1}) \right] - \delta_{0Q_\varepsilon} \right\},$$

где

$$\varphi_\varepsilon(x, m, f) = \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq \varepsilon}}^4 (x - \theta_p^{-1})^{M_p}, \quad g_\varepsilon(x) = \prod_{\substack{p=2 \\ p \neq \varepsilon}}^4 (x - \theta_p^{-1})^{D_p}, \quad c_\varepsilon(x) = \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq 2, \varepsilon}}^4 (x - \theta_p^{-1})^{D_p},$$

$A_\varepsilon = 0, \dots, M_\varepsilon - 1$, $Q_\varepsilon = 0, \dots, D_\varepsilon - 1$, $\varphi_\varepsilon^{(g)}(x, m, f) \equiv \partial^g \varphi_\varepsilon(x, m, f) / \partial x^g$, $u_\varepsilon^{(g)}(x) \equiv d^g u_\varepsilon(x) / dx^g$, $\varepsilon = 1, 2, 3, 4$, $g \in \mathbb{Z}$; $(a)_h = \Gamma(a + h) / \Gamma(a)$ — символ Похгаммера, $(a)_0 \equiv 1$ [9].

В случае отсутствия обнаруживаемого сигнала среди коэффициентов \wp_{mf} отличным от нуля является лишь $\wp_{00} = 1$. Тогда характеристическая функция

$$\Theta_\Xi(j\eta | H_0) = \wp_{00} \sum_{\varepsilon=3}^4 \sum_{\tau=1}^{M_\varepsilon} \beta_\varepsilon^\tau (1 - j\eta\theta_\varepsilon)^{-\tau} = \sum_{r=1}^2 \sum_{b=1}^{n/2} \beta_r^b (1 - 2j\eta d_r)^{-b},$$

что в точности совпадает с выражением (П9).

Одномерная плотность вероятности $W_{\Xi|H_1}(z)$

$$W_{\Xi|H_1}(z) = \left[\sum_{m=1}^\infty \sum_{f=1}^\infty \sum_{\varepsilon=1}^4 \sum_{\tau=1}^{M_\varepsilon} \Omega_\varepsilon^\tau \wp_{mf} W_{\chi^2}(z | 2\tau, \theta_\varepsilon/2) + \wp_{00} \sum_{\varepsilon=3}^4 \sum_{\tau=1}^{M_\varepsilon} \beta_\varepsilon^\tau W_{\chi^2}(z | 2\tau, \theta_\varepsilon/2) + \right. \\ \left. + \wp_{01} \sum_{\varepsilon=2}^4 \sum_{\tau=1}^{M_\varepsilon} \Psi_\varepsilon^\tau W_{\chi^2}(z | 2\tau, \theta_\varepsilon/2) + \wp_{10} \sum_{\substack{\varepsilon=1 \\ \varepsilon \neq 2}}^4 \sum_{\tau=1}^{M_\varepsilon} \Delta_\varepsilon^\tau W_{\chi^2}(z | 2\tau, \theta_\varepsilon/2) \right]. \quad (9)$$

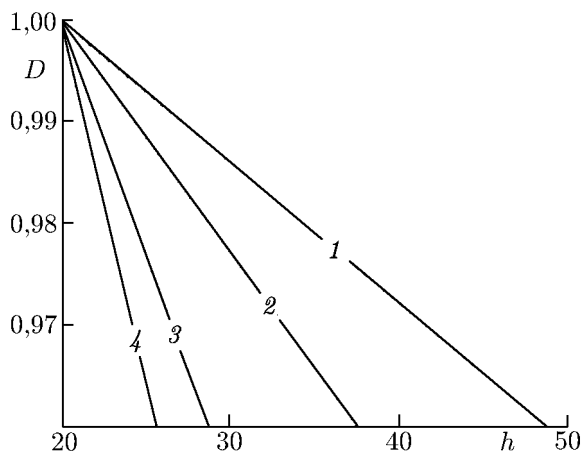


Рис. 3. Вероятность правильного обнаружения $D(h)$ при различных значениях коэффициента K . Кривая 1 соответствует $K = 0,8$; 2 — $K = 0,5$; 3 — $K = 0,3$; 4 — $K = 0,1$

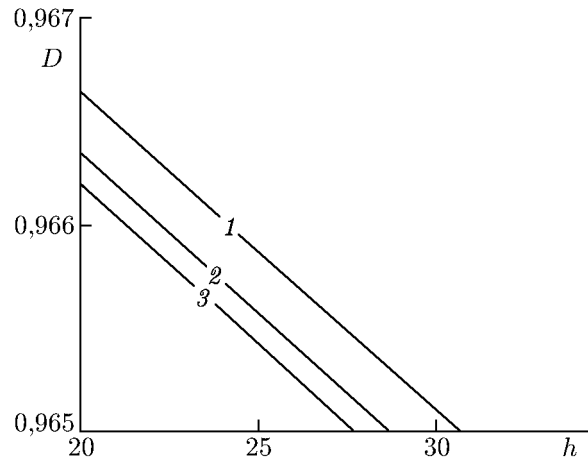


Рис. 4. Вероятность правильного обнаружения $D(h)$ при различных значениях коэффициента K_N . Кривая 1 соответствует $K_N = 0,3$; 2 — $K_N = 0,5$; 3 — $K_N = 0,7$

Вероятность правильного обнаружения $D(h_0) = \int_{h_0}^{\infty} W_{\Xi|H_1}(z) dz$

$$D(h_0) = \left[\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{f=1}^{\infty} \sum_{\varepsilon=1}^4 \sum_{\tau=1}^{M_{\varepsilon}} \Omega_{\varepsilon}^{\tau} \wp_{mf} [1 - \gamma(\tau, h_0/\theta_{\varepsilon})] + \wp_{00} \sum_{\varepsilon=3}^4 \sum_{\tau=1}^{M_{\varepsilon}} \beta_{\varepsilon}^{\tau} [1 - \gamma(\tau, h_0/\theta_{\varepsilon})] + \wp_{01} \sum_{\varepsilon=2}^4 \sum_{\tau=1}^{M_{\varepsilon}} \Psi_{\varepsilon}^{\tau} [1 - \gamma(\tau, h_0/\theta_{\varepsilon})] + \wp_{10} \sum_{\substack{\varepsilon=1 \\ \varepsilon \neq 2}}^4 \sum_{\tau=1}^{M_{\varepsilon}} \Delta_{\varepsilon}^{\tau} [1 - \gamma(\tau, h_0/\theta_{\varepsilon})] \right]. \quad (10)$$

На рис. 3 представлена зависимость вероятности правильного обнаружения D от порогового уровня h при различных значениях K и фиксированных $K_N = 0,5$ и $\vartheta = 0,5$. На рис. 4 представлена зависимость вероятности правильного обнаружения D от порогового уровня h при различных значениях K_N и фиксированных $K = 0,5$ и $\vartheta = 0,5$.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решающая статистика предложенного в настоящей работе энергетического приёмника частично поляризованных радиосигналов подчиняется бесконечномерному обобщённому центральному поли- χ^2 -распределению. Характеристики энергетического обнаружения могут быть выражены через нормированную неполную гамма-функцию.

Согласно (7) и (9), величины углов ориентации эллипсов поляризации принимаемого сигнала ψ и шума ψ_N не влияют на распределение решающей статистики энергетического приёмника и, как следствие, на характеристики обнаружения². Следовательно, все полученные аналитические выражения остаются справедливыми независимо от закона распределения величин ψ и ψ_N .

С ростом по абсолютной величине коэффициента эллиптичности K_N шума при фиксированном пороге h_0 растёт вероятность ложной тревоги, а при заданной величине интенсивности шума

² Данный эффект аналогичен по своей природе тому, как распределение случайной начальной фазы обнаруживаемого скалярного сигнала не влияет на статистические характеристики решающей статистики энергетического обнаружителя [4–8].

N_{02} увеличивается различие между распределением мощности шума по каналам энергетического приёмника. Таким образом, в одном из них шум становится более интенсивным. Однако, в соответствии с выражением (П6), данное перераспределение нелинейно относительно K_N . Уменьшение интенсивности шума в одном из каналов и, вместе с тем, увеличение в другом приводят к росту ошибки первого рода.

Согласно зависимостям, представленным на рис. 2, с ростом по абсолютной величине коэффициента взаимной корреляции ϑ ортогональных компонент шума увеличивается вероятность ошибки первого рода.

С ростом по абсолютной величине коэффициента эллиптичности K сигнала при фиксированных K_N и h_0 уменьшается вероятность правильного обнаружения (рис. 3). При заданных величинах K и h_0 , рост по модулю как коэффициента эллиптичности K_N , так и параметра ϑ , аналогичным образом влияет на вероятность правильного обнаружения (рис. 4).

С увеличением числа степеней свободы снижается влияние параметров, характеризующих поляризационную структуру принимаемой электромагнитной волны, на характеристики обнаружения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Рассмотрим чётное количество N статистически зависимых случайных величин x_i , совместная плотность распределения вероятностей которых имеет вид N -мерной гауссовской плотности вероятности:

$$W(x_1, x_2, \dots, x_N) = (2\pi)^{-N/2} (\det \mathbf{K})^{-1/2} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N C_{ij} (x_i - m_i) (x_j - m_j) \right], \quad (\text{П1})$$

где $\mathbf{K} = \{K_{ij}\}$ — несингулярная матрица корреляции случайных величин x_i, x_j ($i, j = 1, \dots, N$); $\det \mathbf{K}$ — определитель матрицы \mathbf{K} ; $\mathbf{C} = \{C_{ij}\}$ — обратная матрица, удовлетворяющая уравнению $\mathbf{K} \times \mathbf{C} = \mathbf{I}$, \mathbf{I} — единичная матрица размера $N \times N$; $m_i = \bar{x}_i$. Найдём одномерную характеристическую функцию $\Theta_{\Xi}(j\eta)$ статистики $\Xi = \sum_{k=1}^N \alpha_k x_k^2$.

С учётом свойства инвариантности дифференциала вероятности применительно к гауссовским случайным величинам можно показать [5], что характеристическая функция статистики Ξ представима в следующем виде:

$$\Theta_{\Xi}(j\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(x_1, \dots, x_N) \exp(j\eta\Xi) \prod_{k=1}^N dx_k$$

или

$$\Theta_{\Xi}(j\eta) = (2\pi)^{-N/2} (\det \mathbf{K})^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N C_{ij} (x_i - m_i) (x_j - m_j) \right] \times \\ \times \exp \left(j\eta \sum_{k=1}^N \alpha_k x_k^2 \right) \prod_{k=1}^N dx_k. \quad (\text{П2})$$

Сделав довольно громоздкие математические выкладки в (П2), мы можем записать выражение для характеристической функции $\Theta_{\Xi}(j\eta)$ выходной статистики энергетического приёмника

следующим образом:

$$\Theta_{\Xi}(j\eta) = \exp\left(j\eta \sum_{k=1}^N \frac{\alpha_k C_{kk} m_k^2}{C_{kk} - 2j\eta\alpha_k}\right) \exp\left[-2 \sum_{s=1}^N \int_0^{j\eta} K'_{ss}(x) dx\right], \tag{П3}$$

где K'_{ss} — диагональные элементы невырожденной квадратной функциональной матрицы $\mathbf{K}'(x)$ размера $N \times N$, которая является решением матричного уравнения

$$\mathbf{K}'(x) - 2x\mathbf{K}'(x)\mathbf{K} = \mathbf{K},$$

из которого, при $x \neq (2 \det \mathbf{K})^{-1}$ следует, что

$$\mathbf{K}'(x) = \mathbf{K} (\mathbf{I} - 2x\mathbf{K})^{-1}.$$

Таким образом, для получения аналитического вида характеристической функции $\Theta_{\Xi}(j\eta)$ необходимо вычислить интеграл от всех диагональных элементов функциональной матрицы $\mathbf{K}'(x)$. Используя выражение для дифференциала определителя функциональной матрицы [11] и аппарат модальных матриц [12] можно получить

$$\Theta_{\Xi}(j\eta) = \prod_{k=1}^N \exp\left(j\eta \frac{\alpha_k C_{kk} m_k^2}{C_{kk} - 2j\eta\alpha_k}\right) \frac{1}{\sqrt{1 - 2j\eta\lambda_k\alpha_k}}, \tag{П4}$$

где λ_k — дискретный спектр собственных значений матрицы корреляции \mathbf{K} .

При рассмотрении набора статистически зависимых случайных величин $x_k, k = 1, \dots, N \equiv \equiv 1, \dots, 2n$, представим корреляционную матрицу \mathbf{K} этих случайных величин в виде блочной матрицы

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{pmatrix},$$

где \mathbf{K}_{rv} — матрицы размера $n \times n$.

В случае рассмотрения частично поляризованного шума с корреляционной матрицей ортогональных компонент (5) элементы блочной матрицы

$$\mathbf{K}_{rr} = \mathbf{E}, \quad \mathbf{K}_{rv} = \mathbf{K}_{vr} = \vartheta\mathbf{E},$$

где \mathbf{E} — единичная матрица размера $n \times n$. С учётом формулы Фробениуса [12] блочная матрица \mathbf{C} , входящая в выражение (П1), может быть записана в виде

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \frac{1}{1 - \vartheta^2} \begin{pmatrix} \mathbf{E} & -\vartheta\mathbf{E} \\ -\vartheta\mathbf{E} & \mathbf{E} \end{pmatrix}, \quad C_{kk} = (1 - \vartheta^2)^{-1}.$$

Спектр собственных значений $\boldsymbol{\lambda}$ матрицы \mathbf{K}

$$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_k)^T, \quad \lambda_k = 1 + \vartheta, \quad k = 1, \dots, n, \quad \lambda_k = 1 - \vartheta, \quad k = n + 1, \dots, 2n.$$

Тогда, одномерная характеристическая функция $\Theta_{\Xi}(j\eta)$ может быть записана в виде

$$\Theta_{\Xi}(j\eta) = \prod_{k=1}^n \exp\left[j\eta \frac{N_1 m_k^2 / N_{02}}{1 - 2j\eta(1 - \vartheta^2) N_1 / N_{02}}\right] \frac{1}{\sqrt{1 - 2j\eta(1 + \vartheta) N_1 / N_{02}}} \times$$

$$\times \prod_{k=n+1}^{2n} \exp \left[j\eta \frac{N_2 m_k^2 / N_{02}}{1 - 2j\eta (1 - \vartheta^2) N_2 / N_{02}} \right] \frac{1}{\sqrt{1 - 2j\eta (1 - \vartheta) N_2 / N_{02}}}$$

или

$$\Theta_{\Xi}(j\eta) = \exp \left[j\eta \frac{N_1 / N_{02}}{1 - 2j\eta (1 - \vartheta^2) N_1 / N_{02}} \sum_{k=1}^n m_k^2 \right] \frac{1}{[1 - 2j\eta (1 + \vartheta) N_1 / N_{02}]^{n/2}} \times \\ \times \exp \left[j\eta \frac{N_2 / N_{02}}{1 - 2j\eta (1 - \vartheta^2) N_2 / N_{02}} \sum_{k=n+1}^{2n} m_k^2 \right] \frac{1}{[1 - 2j\eta (1 - \vartheta) N_2 / N_{02}]^{n/2}}.$$

Введём $\mu_1 = \sum_{k=1}^n m_k^2 = \int_0^T s_1^2(t) dt / N_1$, $\mu_2 = \sum_{k=n+1}^{2n} m_k^2 = \int_0^T s_2^2(t) dt / N_2$. Нетрудно получить следующие зависимости введённых параметров μ_1 , μ_2 , N_1 и N_2 от коэффициентов эллиптичности шума и принимаемого сигнала

$$N_1 = \frac{(1 + K_N)^2}{2(1 + K_N^2)} N_{02}, \quad N_2 = \frac{(1 - K_N)^2}{2(1 + K_N^2)} N_{02}, \\ \mu_1 = \left(\frac{1 + K}{1 + K_N} \right)^2 \frac{1 + K_N^2}{1 + K^2} \mu_0, \quad \mu_2 = \left(\frac{1 - K}{1 - K_N} \right)^2 \frac{1 + K_N^2}{1 + K^2} \mu_0, \quad \mu_0 = \int_0^T \mathbf{s}^T(t) \mathbf{s}(t) dt / N_{02}. \quad (\text{П5})$$

В соответствии с (П5), наличие априорной неопределённости относительно коэффициентов эллиптичности сигнала K и шума K_N приводит к соответствующей неопределённости относительно перераспределения суммарных мощностей сигнала и шума по двум каналам обработки (рис. 1) энергетического приёмника.

С учётом (П5), при энергетическом обнаружении частично поляризованных сигналов одномерная характеристическая функция решающей статистики в случае реализации гипотезы H_1 примет вид

$$\Theta_{\Xi}(j\eta | H_1) = \exp \left\{ j\eta \mu_0 \frac{(1 + K)^2 / [2(1 + K^2)]}{1 - 2j\eta (1 - \vartheta^2) (1 + K_N)^2 / [2(1 + K_N^2)]} \right\} \times \\ \times \frac{1}{\{1 - 2j\eta (1 + \vartheta) (1 + K_N)^2 / [2(1 + K_N^2)]\}^{n/2}} \times \\ \times \exp \left\{ j\eta \mu_0 \frac{(1 - K)^2 / [2(1 + K^2)]}{1 - 2j\eta (1 - \vartheta^2) (1 - K_N)^2 / [2(1 + K_N^2)]} \right\} \times \\ \times \frac{1}{\{1 - 2j\eta (1 - \vartheta) (1 - K_N)^2 / [2(1 + K_N^2)]\}^{n/2}}. \quad (\text{П6})$$

В отсутствие полезного сигнала параметр $\mu_0 = 1$ и характеристическая функция

$$\Theta_{\Xi}(j\eta | H_0) = \left[1 - 2j\eta (1 + \vartheta) \frac{(1 + K_N)^2}{2(1 + K_N^2)} \right]^{-n/2} \left[1 - 2j\eta (1 - \vartheta) \frac{(1 - K_N)^2}{2(1 + K_N^2)} \right]^{-n/2}. \quad (\text{П7})$$

Используя аппарат представления правой части выражения (П7) в виде суммы простых дробей, рассмотренный в [7], можно получить

$$\Theta_{\Xi}(j\eta | H_0) = \sum_{r=1}^2 \sum_{b=1}^{n/2} \beta_r^b \Theta_{\chi^2}(j\eta | 2b, 2d_r),$$

$$d_1 = (1 + \vartheta)(1 + K_N)^2/[2(1 + K_N^2)], \quad d_2 = (1 - \vartheta)(1 - K_N)^2/[2(1 + K_N^2)], \quad (\text{П8})$$

где $\Theta_{\chi^2}(j\eta | 2b, 2d_r)$ — характеристическая функция обобщённого центрального χ^2 -распределения с числом степеней свободы $2b$ и дисперсиями гауссовских компонент, равными d_r [5]; коэффициенты β_r^b найдены в [10] и имеют следующий вид:

$$\beta_r^{n/2-J} = \left[(-d_r)^{n/2-J} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq r}}^2 d_p^{-n/2} \right] \alpha_r^{n/2-J},$$

$$\alpha_r^{n/2-J} = \frac{-1}{J! \Lambda_r(d_r^{-1})} \left\{ \left[\sum_{w=0}^{J-1} (J-w-1)_w \alpha_r^{n/2-w} \Lambda_r^{(J-w)}(d_r^{-1}) \right] - \delta_{0J} \right\}, \quad (\text{П9})$$

$\Lambda_r(x) = \prod_{p=1, p \neq r}^2 (x - d_p^{-1})^{n/2}$, $J = 0, \dots, (n/2) - 1$, $\Lambda_r^{(g)}(x) \equiv d^g \Lambda_r(x) / dx^g$, $g \in \mathbb{Z}$, $(a)_h = \Gamma(a + h) / \Gamma(a)$ — символ Похгаммера, $(a)_0 \equiv 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Поздняк С. И., Мелитицкий В. А. Введение в статистическую теорию поляризации радиоволн. М.: Сов. радио, 1974. 480 с.
2. Канарейкин Д. Б. Поляризация радиолокационных сигналов. М.: Сов. радио, 1966. 440 с.
3. Богородский Д. Б. Поляризация рассеянного и собственного радиоизлучения земных покровов. М.: Гидрометеиздат, 1981. 279 с.
4. Urkowitz H. // Proc. IEEE. 1967. V. 55. P. 523.
5. Костылев В. И., Сличенко М. П. // Изв. вузов. Радиофизика. 2008. Т. 51, № 10. С. 889.
6. Костылев В. И., Сличенко М. П. // Изв. вузов. Радиофизика. 2009. Т. 52, № 11. С. 910.
7. Kostylev V. I. // Proc. IEEE Int. Conf. Communication: ICC'02, May 2002, New York. No. 5. P. 1606.
8. Костылев В. И., Сличенко М. П. // Труды 15 Международ. науч.-техн. конф. «Радиолокация, навигация, связь», 14–16 апреля 2009 г., г. Воронеж. С. 260.
9. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица, И. М. Стиган. М.: Наука, 1979. 832 с.
10. Костылев В. И., Сличенко М. П. // Труды 13 Международ. науч.-техн. конф. «Радиолокация, навигация, связь», 17–19 апреля 2007 г., г. Воронеж. С. 1475.
11. Бакут П. А. Вопросы статистической теории радиолокации. М.: Сов. радио, 1963. 424 с.
12. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1966. 576 с.

Поступила в редакцию 26 октября 2010 г.; принята в печать 20 декабря 2010 г.

ENERGY DETECTION OF PARTIALLY POLARIZED RADIO SIGNALS AGAINST THE BACKGROUND OF GAUSSIAN NOISE

V. I. Kostylev and M. P. Slichenko

We propose a structure flowchart of the energy receiver of partially polarized radio signals. Analytical expressions for characteristics of the energy detection of partially polarized radio signals against the background of Gaussian noise are obtained. The behavior of these characteristics in various cases is analyzed.