

УДК 519.6

РАСЧЁТ СТАТИЧЕСКОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ СИСТЕМЫ СОЛЕНОИДОВ

Е. С. Семенов, А. Д. Юнаковский

Институт прикладной физики РАН, г. Нижний Новгород, Россия

Предложен вариант описанного в [1] алгоритма, позволяющего произвести расчёт магнитного поля соленоида прямоугольного сечения с помощью одной численной квадратуры.

Традиционный метод расчёта магнитного поля осесимметричного соленоида произвольного сечения основан на его представлении в виде совокупности витков тока с нулевыми площадями поперечных сечений. Магнитное поле в любой точке пространства находится суммированием магнитных полей, создаваемых всеми такими витками. Расчёт поля одного витка проводится с помощью эллиптических интегралов первого и второго рода [2], для вычисления которых обычно применяется итерационный процесс, приводящий к большим затратам машинного времени. Некоторые инженерные методы расчёта параметров магнитных полей соленоидов, позволяющие делать приближённые вычисления, приведены в справочнике [3].

В [1] предложен метод расчёта магнитного поля соленоида прямоугольного сечения путём аналитического интегрирования по продольной и радиальной координатам и численного интегрирования по угловой координате. Однако такой подход не позволяет непосредственно находить векторный потенциал на плоскостях, являющихся продолжением торцов соленоида. Алгоритм, предложенный в данной работе, даёт возможность экономично рассчитывать магнитное поле во всей области пространства вне соленоида.

Пусть азимутально-симметричный соленоид (рис. 1) имеет намотку, однородную в области $r \in [a_1, a_2]$, $z \in [g_1, g_2]$. Тогда согласно [3], векторный потенциал магнитного поля имеет единствен-

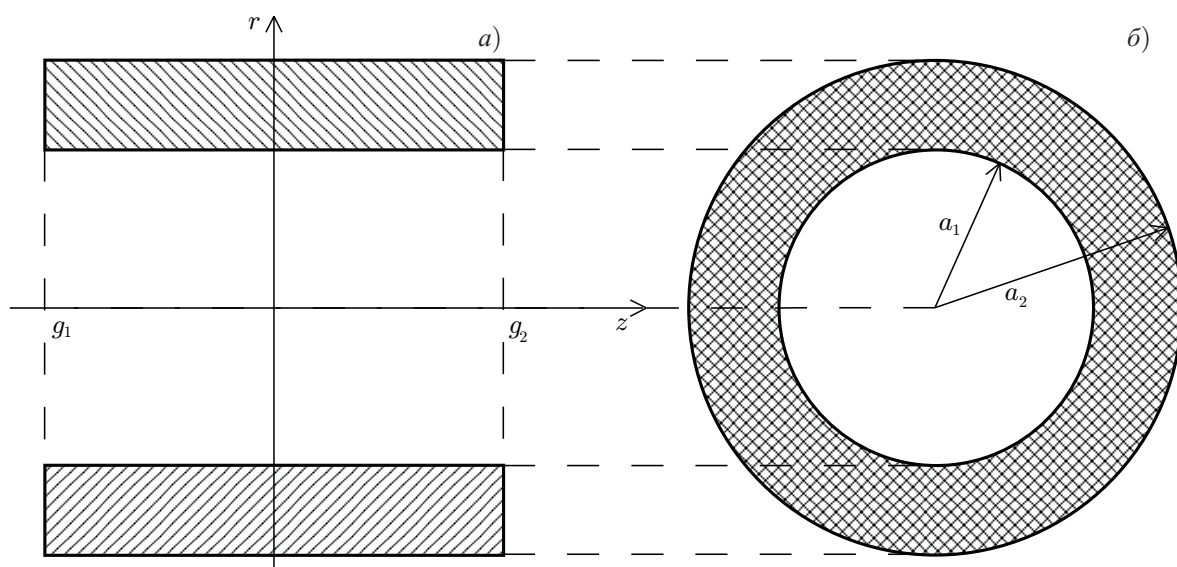


Рис. 1. Геометрия отдельного соленоида: продольное (а) и поперечное (б) сечения

ную азимутальную компоненту, которая с точностью до постоянного множителя равна

$$A_\varphi(r, z) = \int_0^\pi d\varphi \int_{a_1}^{a_2} d\tilde{r} \int_{g_1}^{g_2} d\tilde{z} \frac{\tilde{r} \cos \varphi}{\sqrt{(\tilde{z} - z)^2 + \tilde{r}^2 + r^2 - 2r\tilde{r} \cos \varphi}}. \quad (1)$$

Компоненты магнитного поля $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ записываются в виде

$$B_r = -\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}, \quad B_z = \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} + \frac{A_\varphi}{r}. \quad (2)$$

Внесём знаки дифференцирования в (2) под интеграл (1):

$$B_r = \int_0^\pi d\varphi \int_{a_1}^{a_2} d\tilde{r} \int_{g_1}^{g_2} d\tilde{z} U, \quad B_z = \int_0^\pi d\varphi \int_{a_1}^{a_2} d\tilde{r} \int_{g_1}^{g_2} d\tilde{z} V,$$

где

$$\begin{aligned} U &\equiv -\frac{\partial W}{\partial z}, & V &\equiv \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{W}{r}, \\ W(r, z, \tilde{r}, \tilde{z}, \varphi) &= \frac{\tilde{r} \cos \varphi}{\sqrt{R}}, & R &= (\tilde{z} - z)^2 + \tilde{r}^2 + r^2 - 2r\tilde{r} \cos \varphi, \\ U &= \tilde{r} \cos \varphi \frac{\tilde{z} - z}{\sqrt{R^3}}, & V &= \tilde{r} \cos \varphi \frac{(\tilde{z} - z)^2 + \tilde{r}^2 - r\tilde{r} \cos \varphi}{r \sqrt{R^3}}. \end{aligned}$$

Для корректности такой процедуры достаточно непрерывности функций U и V , что выполняется для всех точек $(r, z) \neq (\tilde{r}, \tilde{z})$, $r > 0$.

Проинтегрируем функции U и V по \tilde{z} . Тогда получим

$$B_r = \int_0^\pi d\varphi \int_{a_1}^{a_2} d\tilde{r} \tilde{U}, \quad B_z = \int_0^\pi d\varphi \int_{a_1}^{a_2} d\tilde{r} \tilde{V},$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{U} &\equiv -\frac{\partial \tilde{W}}{\partial z}, & \tilde{V} &\equiv \frac{\partial \tilde{W}}{\partial r} + \frac{\tilde{W}}{r}, \\ \tilde{W}(r, z, \tilde{r}, \varphi) &\equiv \int_{g_1}^{g_2} d\tilde{z} W = \tilde{r} \cos \varphi \ln \left(\frac{g_2 - z + R_2^{1/2}}{g_1 - z + R_1^{1/2}} \right), & R_i &= (g_i - z)^2 + \tilde{r}^2 + r^2 - 2r\tilde{r} \cos \varphi, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Дифференцируя функцию \tilde{W} , получим

$$\begin{aligned} \tilde{U} &= \tilde{r} \cos \varphi \left(\frac{1}{\sqrt{R_1}} - \frac{1}{\sqrt{R_2}} \right) = \tilde{r} \cos \varphi \left(\frac{\sqrt{R_2} - \sqrt{R_1}}{\sqrt{R_2} R_1} \right), \\ \tilde{V} &= \tilde{r} \cos \varphi \left[\frac{r - \tilde{r} \cos \varphi}{\sqrt{R_2} (g_2 - z + \sqrt{R_2})} - \frac{r - \tilde{r} \cos \varphi}{\sqrt{R_1} (g_1 - z + \sqrt{R_1})} + \frac{1}{r} \ln \left(\frac{g_2 - z + \sqrt{R_2}}{g_1 - z + \sqrt{R_1}} \right) \right]. \end{aligned}$$

Теперь интегрируем функции \tilde{U} и \tilde{V} по \tilde{r} :

$$B_r = \int_0^\pi d\varphi \tilde{\tilde{U}}, \quad B_z = \int_0^\pi d\varphi \tilde{\tilde{V}}, \quad \tilde{\tilde{U}} \equiv -\frac{\partial \tilde{\tilde{W}}}{\partial z}, \quad \tilde{\tilde{V}} \equiv \frac{\partial \tilde{\tilde{W}}}{\partial r} + \frac{\tilde{\tilde{W}}}{r}, \quad \tilde{\tilde{W}}(r, z, \varphi) \equiv \int_{a_1}^{a_2} d\tilde{r} \tilde{W}.$$

Введём обозначения:

$$R_{ij} = (g_i - z)^2 + a_j^2 + r^2 - 2ra_j \cos \varphi, \quad S_{ij} = \sqrt{R_{ij}} = \sqrt{(g_i - z)^2 + a_j^2 + r^2 - 2ra_j \cos \varphi},$$

$$x_j = a_j - r \cos \varphi, \quad y_j = r - a_j \cos \varphi.$$

Величины \tilde{U} и \tilde{V} можно записать в виде разностей:

$$\tilde{U} = U_{12} - U_{11} - U_{22} + U_{21}, \quad \tilde{V} = V_{22} - V_{21} - V_{12} + V_{11}, \quad (3)$$

$$U_{ij} = \cos \varphi [S_{ij} + r \cos \varphi \ln(a_j - r \cos \varphi + S_{ij})],$$

$$V_{ij} = \cos \varphi \left(\frac{1}{4r} [3z_i^2 + 2z_i S_{ij} - R_{ij} + 2(a_j - 3r^2 \cos 2\varphi) \ln(S_{ij} + z_i)] + \right.$$

$$+ \cos \varphi \left\{ 2a_j - 3r \cos \varphi + 4 \frac{r^2 \sin^2 \varphi}{z_i} \ln(z_i^2 + r^2 \sin^2 \varphi) + 2z_i \ln(S_{ij} + x_j) - \right.$$

$$- 6r \sin \varphi \operatorname{arctg} \left(\frac{S_{ij} + z_i - x_j}{r \sin \varphi} \right) + r \left[\frac{2r^3 \sin^4 \varphi}{z_i (z_i^2 + r^2 \sin^2 \varphi)} + \frac{x_j y_j}{S_{ij} (S_{ij} + z_i)} + \right.$$

$$\left. \left. + \frac{S_{ij} (S_{ij} + z_i - a_j) - r y_j}{S_{ij} (S_{ij} + z_i) (S_{ij} - x_j)} + \frac{z_i (y_j - S_{ij} \cos \varphi)}{S_{ij} (S_{ij} + x_j)} \right] \right\} \Bigg).$$

Слагаемые в (3), содержащие лишь индекс i или j , взаимно уничтожаются. Таким образом, получаем окончательно:

$$\tilde{U} = \cos \varphi \left[S_{12} - S_{11} - S_{22} + S_{21} + r \cos \varphi \ln \frac{(S_{12} + x_2)(S_{21} + x_1)}{(S_{11} + x_1)(S_{22} + x_2)} \right],$$

$$\tilde{V} = \frac{\cos \varphi}{2r} \left\{ z_1 (S_{11} - S_{12}) + z_2 (S_{22} - S_{21}) + a_1^2 \ln \left(\frac{S_{11} + z_1}{S_{21} + z_2} \right) + a_2^2 \ln \left(\frac{S_{22} + z_2}{S_{12} + z_1} \right) + \right.$$

$$+ 3r^2 (1 - 2 \cos^2 \varphi) \ln \left[\frac{(S_{11} + z_1)(S_{22} + z_2)}{(S_{12} + z_1)(S_{21} + z_2)} \right] \Bigg\} +$$

$$+ 2 \cos^2 \varphi \left\{ z_1 \ln \left(\frac{S_{11} + x_1}{S_{12} + x_2} \right) + z_2 \ln \left(\frac{S_{22} + x_2}{S_{21} + x_1} \right) - 3r \sin \varphi \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{S_{22} + z_2 - x_2}{r \sin \varphi} \right) - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \operatorname{arctg} \left(\frac{S_{21} + z_2 - x_1}{r \sin \varphi} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{S_{12} + z_1 - x_2}{r \sin \varphi} \right) + \operatorname{arctg} \left(\frac{S_{11} + z_1 - x_1}{r \sin \varphi} \right) \right] \right\}.$$

В результате вычисления компонент вектора магнитной индукции B_r и B_z свелось к интегрированию \tilde{U} и \tilde{V} по азимутальной координате φ . Отметим, что для периодических функций, какими являются функции $\tilde{U}(\varphi)$ и $\tilde{V}(\varphi)$, методы прямоугольников, трапеций и Симпсона обеспечивают одинаковую точность вычисления интеграла.

Для демонстрации точности предлагаемого метода мы взяли систему (см. рис. 2), состоящую из трёх соосных азимутально-симметричных соленоидов, каждый из которых имеет прямоугольное продольное и кольцевое поперечное сечения. Магнитную индукцию такой системы ищем в виде линейной комбинации полей отдельных соленоидов

$$\mathbf{B} = w \sum_{k=1}^n \mu_k \mathbf{B}_k,$$

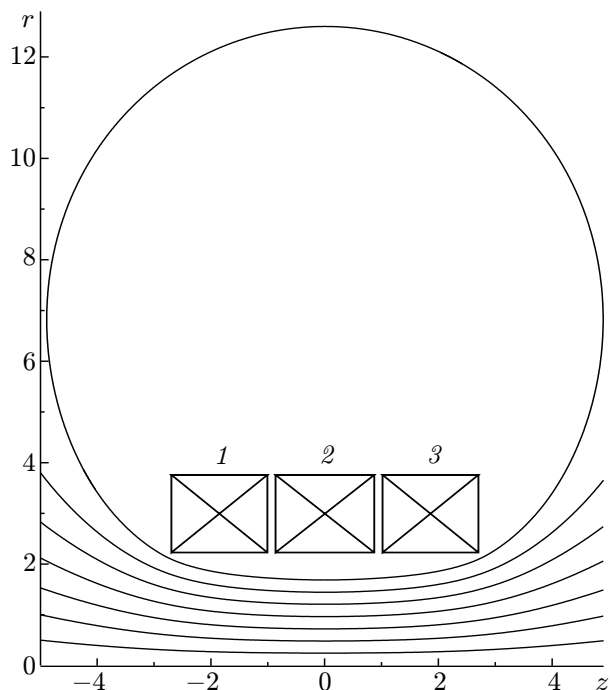


Рис. 2. Продольное сечение составного соленоида гиротрона, состоящего из трёх соленоидов 1, 2 и 3 и силовые линии магнитного поля (вследствие симметрии относительно оси соленоидов показана лишь половина сечения)

где $n = 3$, μ_k — константы, определяющие относительный вклад каждого соленоида в итоговое поле, w — нормировочная константа. Для получения w пользуемся соотношением $|\mathbf{B}(r_0, z_0)| = |\mathbf{B}_0|$, где вектор \mathbf{B}_0 задаётся в фиксированной точке с координатам (r_0, z_0) , за которую обычно выбирают центр магнитной системы, где величина $|\mathbf{B}|$ максимальна.

Параметры соленоидов приведены в табл. 1. Силовые линии магнитного поля определяются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dr}{ds} = B_r, \quad \frac{dz}{ds} = B_z,$$

где s — параметр траектории $r(s), z(s)$. Уравнения решались численно с использованием метода Рунге—Кутты 4-го порядка.

Анализ полученных результатов показывает, что достаточно взять всего 13 точек интегрирования по координате φ , чтобы невязка, т. е. отклонение силовой линии от точки старта за полный оборот, составляла менее 10^{-7} . На графике такая линия выглядит как замкнутая (см. рис. 2).

Таблица 1. Параметры системы трёх соленоидов

k	a_1	a_2	$(g_2 + g_1)/2$	$(g_2 - g_1)/2$	μ
1	2,2289	3,7590	1,8554	0,8434	29,8109
2	2,2289	3,7590	0	0,8675	30,5911
3	2,2289	3,7590	-1,8554	0,8434	29,8109

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зарницина И. Г., Федосеева Т. Н. // Изв. вузов. Электромеханика. 1970. № 8. С. 921.
2. Монтгомери Д. Получение сильных магнитных полей с помощью соленоидов. М.: Мир, 1971. 354 с.
3. Алиевский Б. Л., Орлов В. Л. Расчёт параметров магнитных полей осесимметричных катушек: Справочник. М.: Энергоатомиздат, 1983. 112 с.

Поступила в редакцию 3 июня 2010 г.; принята в печать 19 декабря 2010 г.

CALCULATION OF THE STATIC MAGNETIC FIELD OF A SYSTEM OF SOLENOIDS

E. S. Semenov and A. D. Yunakovskiy

We propose a variant of the algorithm described in [1], which allows one to calculate the magnetic field of a solenoid with a rectangular cross section by using one numerical quadrature.