

УДК 537.874.6

МЕТОД СТРОГОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ МОНОХРОМАТИЧЕСКИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ПЕРИОДИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ

Д. Е. Силлин

Институт прикладной физики РАН, г. Нижний Новгород, Россия

В статье представлен метод строгого решения задач дифракции монохроматических электромагнитных волн на многих типах периодических структур. Он основан на преобразовании уравнения Гельмгольца и граничных условий к определённой системе интегральных уравнений и последующем строгом решении этой системы.

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая статья посвящена проблеме строгого решения задач дифракции электромагнитных волн. Математически такие задачи в общем случае могут быть сформулированы как краевые задачи для системы уравнений Максвелла с некоторыми граничными условиями. В важном на практике частном случае, когда поле является монохроматическим, задачи дифракции электромагнитных волн могут быть поставлены как краевые задачи для уравнения Гельмгольца. Однако общего метода их решения для тел с произвольной формой и параметрами в настоящее время не существует.

Широко известны строгие решения отдельных дифракционных задач, например задач Зоммерфельда и Ми [1–3]. Задача Зоммерфельда — это задача дифракции плоской волны на бесконечно тонкой идеально проводящей полуплоскости. Ми исследовал задачу дифракции плоской волны на диэлектрическом шаре. К настоящему времени найдены точные решения и некоторых других задач дифракции электромагнитных волн. Они получены либо методом разделения переменных [3, 4], либо с помощью метода Винера–Хопфа и его модификаций [5]. Однако таких задач совсем немного, поэтому при рассмотрении конкретных примеров или полагаются на приближённые методы, имеющие ограниченную область применимости, или используют численные методы решения [6–11]. Среди последних выделим алгоритм FDTD (finite difference time domain) [6], метод связанных волн RCWA (rigorous coupled wave analysis method) [7] и метод дискретных источников [8]. Существуют также методы, позволяющие свести дифференциальные уравнения к интегральным уравнениям, которые затем решаются численно. К ним относится метод граничных интегральных уравнений [9].

В настоящей статье представлен новый метод строгого решения достаточно широкого класса задач дифракции монохроматических электромагнитных волн на периодических структурах.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть имеется структура, у которой комплексные значения диэлектрической и магнитной проницаемостей являются периодическими функциями декартовых переменных x и y с периодами L_x и L_y , соответственно. Вдоль оси z структура ограничена и окружена однородными изотропными полупространствами. Пусть данная структура удовлетворяет также трём следующим требованиям: она кусочно-однородна, изотропна и имеет кусочно-гладкие границы между

однородными областями. В каждой однородной области заданы произвольные (в общем случае комплексные) значения диэлектрической и магнитной проницаемостей ϵ и μ .

На данную структуру из однородного полупространства падает монохроматическая электромагнитная волна. Примем, что зависимость электромагнитного поля от времени описывается множителем $\exp(-i\omega t)$. Будем рассматривать только электрическую составляющую электромагнитного поля, подразумевая, что она однозначно определяет магнитную составляющую. Потребуем, чтобы комплексная амплитуда электрического поля \mathbf{E}_0 падающей волны являлась периодической функцией переменных x и y , причём если периоды структуры и поля не совпадают, то найдём такие значения величин L_x и L_y , которые являлись бы общими периодами для структуры и для поля, т. е. будем рассматривать такие задачи, для которых указанный общий период существует. Таким образом, $\mathbf{E}_0(x + L_x, y, z) = \mathbf{E}_0(x, y, z)$ и $\mathbf{E}_0(x, y + L_y, z) = \mathbf{E}_0(x, y, z)$. Требуется найти рассеянные поля \mathbf{E}_r (поле, рассеянное назад) и \mathbf{E}_t (поле, рассеянное вперёд), которые возникают в результате дифракции поля \mathbf{E}_0 на заданной структуре. Поскольку и структура, и электромагнитное поле обладают периодичностью вдоль осей x и y с периодами L_x и L_y , то и решение дифракционной задачи будет также периодическим с такими же периодами.

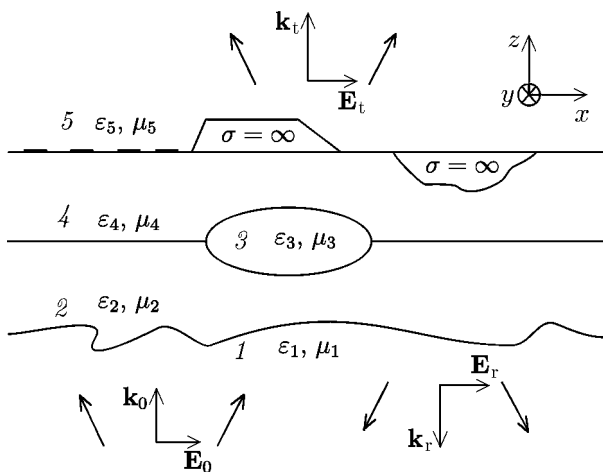


Рис. 1. Пример структуры (в пределах одного периода вдоль осей x и y), задача дифракции электромагнитных волн на которой может быть строго решена предложенным методом

Именно такие области и будут рассматриваться нами в дальнейшем.

Предложенный метод основан на решении уравнения Гельмгольца (трёхмерного или двумерного, в зависимости от геометрии задачи) во всех однородных областях, обладающих конечной проводимостью. Для этого указанное уравнение в каждой такой области, граничные условия на каждой из границ, а также одно из уравнений Максвелла, связывающее декартовы компоненты вектора электрического поля, преобразуются к системе интегральных уравнений специального вида. Данная система затем строго решается относительно неизвестных распределений поля и производной поля по нормали на всех границах.

Отметим, что обычно в задачах дифракции на периодических структурах рассматривается другой класс падающих полей, соответствующих одной плоской волне, падающей на структуру под произвольным углом. В одномерном случае поле в такой задаче удовлетворяет условию квазипериодичности, т. е. условию Флоке $\mathbf{E}(x + L_x, z) = \mathbf{E}(x, z) \exp(i\alpha)$, где α — некоторая фаза. Мы же будем рассматривать класс падающих полей, содержащих произвольное число плоских волн, однако угол падения этих плоских волн на структуру не может быть задан произвольным образом, что вызвано требованием периодичности поля.

На рис. 1 приведён пример одного периода структуры, дифракция на которой может быть рассчитана предложенным методом. Можно показать, что любую периодическую кусочно-однородную структуру можно представить в таком виде, что все её однородные области с конечной проводимостью σ будут неограниченными вдоль осей x и y и не будут иметь внутренних границ.

2. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА ВО ВНУТРЕННИХ ОБЛАСТЯХ

Из условий задачи следует, что могут существовать два типа однородных областей, обладающих конечной проводимостью: внутренние и внешние. Внутренние области (2, 3 и 4 на рис. 1) ограничены вдоль оси z с обеих сторон другими областями, в то время как внешние области (1 и 5 на рис. 1) ограничены вдоль оси z только с одной стороны. Поскольку решение уравнения Гельмгольца предложенным методом имеет свои особенности в каждом из двух типов областей, рассмотрим их по-отдельности.

Данный раздел посвящён построению системы интегральных уравнений из уравнения Гельмгольца во внутренних областях. На рис. 2 показана внутренняя область V , ограниченная сверху и снизу бесконечными периодическими поверхностями S_1 и S_2 . Диэлектрическая и магнитная проницаемости среды в этой области равны, соответственно, ϵ и μ . Через \mathbf{n}_1 и \mathbf{n}_2 обозначены векторы единичных нормалей к поверхностям S_1 и S_2 , соответственно.

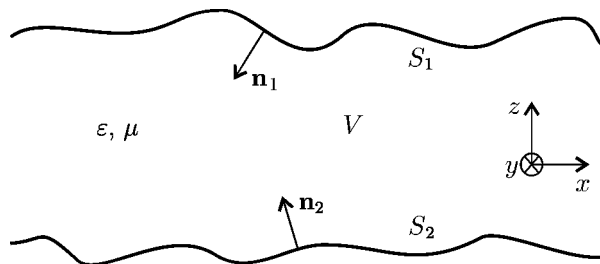


Рис. 2. Пример внутренней области

Вектор комплексной амплитуды электрического поля \mathbf{E} в области V удовлетворяет трёхмерному уравнению Гельмгольца

$$\Delta \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0, \tag{1}$$

где

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \mu, \tag{2}$$

ω — круговая частота монохроматического поля, c — скорость света в вакууме.

Выделим любую декартовую компоненту E_a этого поля ($a = x, y, z$). Функция $E_a = E_a(x, y, z)$, как следует из условий задачи, является периодической функцией по переменным x и y с периодами L_x и L_y соответственно. Также введём в рассмотрение функцию $u = u(x, y, z)$, периодическую по переменным x и y с такими же периодами L_x, L_y , и удовлетворяющую трёхмерному уравнению Гельмгольца в объёме V . Согласно теореме Грина [12]

$$\oint_S \left(E_a \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial E_a}{\partial n} \right) dS = \iiint_V (u \Delta E_a - E_a \Delta u) dV, \tag{3}$$

где замкнутая граница S составлена из одного периода поверхности S_1 , одного периода поверхности S_2 , а также боковых стенок между ними, $\partial/\partial n$ означает дифференцирование вдоль внутренней нормали к границе S . Здесь и далее под интегралом по области V будем понимать интеграл по z и по одному периоду этой области как по переменной x , так и y .

Вследствие того, что функции E_a и u удовлетворяют уравнению Гельмгольца в области V , правая часть выражения (3) обращается в нуль. Кроме того, из периодичности указанных функций и границ S_1 и S_2 следует, что интеграл по боковым стенкам в левой части (3) также равен нулю. В итоге получим:

$$\iint_{S_1+S_2} \left(E_a \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial E_a}{\partial n} \right) dS = 0. \tag{4}$$

Здесь и далее под интегралом по поверхностям S_1 и S_2 будем понимать интеграл по одному периоду этих поверхностей.

Пусть функция $u = u_{lmp}(x, y, z)$ соответствует всевозможным плоским волнам:

$$u_{lmp}(x, y, z) = \exp\left(i s_p z \sqrt{k^2 - k_{xl}^2 - k_{ym}^2} + i k_{xl} x + i k_{ym} y \right), \tag{5}$$

где множитель s_p введён для того, чтобы в явном виде учесть двузначность квадратного корня, и может принимать одно из двух значений $s_1 = 1$ и $s_2 = -1$; k_{xl} и k_{ym} — проекции волнового вектора на оси x и y соответственно. Пусть в зависимости от значений индексов l ($l = 1, 2, \dots$) и m ($m = 1, 2, \dots$) эти проекции принимают следующие значения:

$$k_{xl} = 0; \pm 2\pi/L_x; \pm 4\pi/L_x; \dots, \tag{6a}$$

$$k_{ym} = 0; \pm 2\pi/L_y; \pm 4\pi/L_y; \dots. \tag{6b}$$

При таком выборе величин k_{xl} и k_{ym} функции $u_{lmp}(x, y, z)$ будут обладать периодичностью, соответствующей периодичности геометрии задачи.

Квадратный корень в выражении (5) имеет смысл проекции волнового вектора плоской волны на ось z . Введём для него следующее обозначение:

$$k_{zlm} \equiv \sqrt{k^2 - k_{xl}^2 - k_{ym}^2}. \tag{7}$$

Зададим поверхности S_j ($j = 1, 2$) в параметрическом виде при помощи функций от переменных ξ и η :

$$x = X_j(\xi, \eta), \quad y = Y_j(\xi, \eta), \quad z = Z_j(\xi, \eta). \tag{8}$$

Вследствие периодичности поверхностей S_1 и S_2 данные функции являются периодическими по переменным ξ и η с периодами L_ξ и L_η соответственно. Кроме того, эти функции являются кусочно-дифференцируемыми вследствие того, что границы являются кусочно-гладкими.

Таким образом, из (4) можно получить следующую систему интегральных уравнений:

$$\int_0^{L_\xi} \int_0^{L_\eta} [E_{1a}(\xi, \eta) i (s_p k_{zlm} n_{1z} + k_{xl} n_{1x} + k_{ym} n_{1y}) \exp(s_p i k_{zlm} Z_1 + i k_{xl} X_1 + i k_{ym} Y_1) A_1 - \\ - E_{1an}(\xi, \eta) \exp(s_p i k_{zlm} Z_1 + i k_{xl} X_1 + i k_{ym} Y_1) A_1 + \\ + E_{2a}(\xi, \eta) i (s_p k_{zlm} n_{2z} + k_{xl} n_{2x} + k_{ym} n_{2y}) \exp(s_p i k_{zlm} Z_2 + i k_{xl} X_2 + i k_{ym} Y_2) A_2 - \\ - E_{2an}(\xi, \eta) \exp(s_p i k_{zlm} Z_2 + i k_{xl} X_2 + i k_{ym} Y_2) A_2] d\xi d\eta = 0, \tag{9}$$

где $a = x, y, z$; $l = 1, 2, \dots$; $m = 1, 2, \dots$; $p = 1, 2$. Здесь $E_{1a}(\xi, \eta)$ и $E_{2a}(\xi, \eta)$ — комплексные амплитуды поля на поверхностях S_1 и S_2 , соответственно; $E_{1an}(\xi, \eta) \equiv \partial E_{1a}(\xi, \eta) / \partial n$ и $E_{2an}(\xi, \eta) \equiv \partial E_{2a}(\xi, \eta) / \partial n$ — комплексные амплитуды производной поля по нормали на тех же поверхностях. При помощи функций $A_1(\xi, \eta)$ и $A_2(\xi, \eta)$ обозначены следующие выражения:

$$A_{1,2}(\xi, \eta) = \left\| \left[\frac{\partial \mathbf{r}_{1,2}}{\partial \xi}, \frac{\partial \mathbf{r}_{1,2}}{\partial \eta} \right] \right\| = \left\| \begin{matrix} \mathbf{x}_0 & \mathbf{y}_0 & \mathbf{z}_0 \\ \partial X_{1,2} / \partial \xi & \partial Y_{1,2} / \partial \xi & \partial Z_{1,2} / \partial \xi \\ \partial X_{1,2} / \partial \eta & \partial Y_{1,2} / \partial \eta & \partial Z_{1,2} / \partial \eta \end{matrix} \right\|, \tag{10}$$

где \mathbf{x}_0 , \mathbf{y}_0 и \mathbf{z}_0 — единичные векторы, соответствующие осям x , y и z , \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 — радиус-векторы текущих точек поверхностей S_1 и S_2 . Двойные вертикальные линии означают взятие модуля от определителя матрицы.

Векторы единичных нормалей \mathbf{n}_1 с компонентами (n_{1x}, n_{1y}, n_{1z}) и \mathbf{n}_2 с компонентами (n_{2x}, n_{2y}, n_{2z}) к поверхностям S_1 и S_2 определяются выражениями [13]:

$$\mathbf{n}_{1,2} = \pm \frac{1}{A_{1,2}(\xi, \eta)} \left[\frac{\partial \mathbf{r}_{1,2}}{\partial \xi}, \frac{\partial \mathbf{r}_{1,2}}{\partial \eta} \right], \quad (11)$$

где выбор знака обусловлен требованием, чтобы нормаль была внутренней.

Для получения однозначного решения относительно функций $E_{1a}(\xi, \eta)$, $E_{1an}(\xi, \eta)$, $E_{2a}(\xi, \eta)$ и $E_{2an}(\xi, \eta)$ в разделе 4 система (9) будет дополнена интегральными уравнениями, полученными из граничных условий на поверхностях S_1 и S_2 , а также из уравнения связи трёх компонент вектора электрического поля.

Необходимо рассмотреть отдельно следующий частный случай. Пусть квадрат волнового числа k^2 является действительной величиной, т. е. в среде нет поглощения. Тогда для некоторых значений периодов L_x и L_y существуют такие значения индексов $l = l_0$ и $m = m_0$, при которых $k_{zl_0m_0} \equiv \sqrt{k^2 - k_{xl_0}^2 - k_{ym_0}^2} = 0$. В этом случае $u_{l_0m_01}(x, y, z) = u_{l_0m_02}(x, y, z)$, что приводит к эквивалентности двух интегральных уравнений системы (9). Можно показать, что в этом случае вместо выражения (4), соответствующего функции $u_{l_0m_01} = u_{l_0m_02}$, должны быть использованы два следующих выражения:

$$\iint_{S_1} \left(E_a \frac{\partial u_{l_0m_0}}{\partial n} - u_{l_0m_0} \frac{\partial E_a}{\partial n} \right) dS = 0, \quad (12a)$$

$$\iint_{S_2} \left(E_a \frac{\partial u_{l_0m_0}}{\partial n} - u_{l_0m_0} \frac{\partial E_a}{\partial n} \right) dS = 0, \quad (12б)$$

где $u_{l_0m_0} \equiv u_{l_0m_01} = u_{l_0m_02}$. Это приводит к тому, что каждое интегральное уравнение (9), соответствующее индексам $l = l_0$ и $m = m_0$, распадается на два интегральных уравнения, в которых интегралы от первых двух и от последних двух слагаемых равны нулю. Соотношения (12a) и (12б) справедливы в такой области V , в которой может быть проведена плоскость $z = \text{const}$, целиком лежащая в этой области. Если же этого сделать нельзя, то область V может быть разбита плоскостью $z = \text{const}$ на две области, обладающие нужным нам свойством.

Решение системы интегральных уравнений позволяет найти поля и их производные на границе $S_1 + S_2$. Для определения поля внутри области V (в точке, определяемой радиус-вектором \mathbf{R}), можно воспользоваться интегральной теоремой Кирхгофа–Гельмгольца [12]:

$$E_a(\mathbf{R}) = \sum_{j=1}^2 \iint_{S_j} \left[E_{jan}(\mathbf{r}_j) G(\mathbf{R} - \mathbf{r}_j) - E_{ja}(\mathbf{r}_j) \frac{\partial G(\mathbf{R} - \mathbf{r}_j)}{\partial n} \right] dS. \quad (13)$$

Здесь $G(x, y, z)$ — функция Грина, соответствующая периодической геометрии задачи [14]:

$$G(x, y, z) = \frac{1}{2iL_xL_y} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{k_{zlm}} \exp(ik_{zlm}|z| + ik_{xl}x + ik_{ym}y), \quad (14)$$

где k_{xl} , k_{ym} и k_{zlm} определены в (6a), (6б) и (7). Теорема Кирхгофа–Гельмгольца обычно формулируется для замкнутых поверхностей, но здесь, так же, как и в формуле (3), интегрирование по боковым стенкам даёт нулевой результат, вследствие чего интеграл в выражении (13) берётся по одному периоду поверхностей S_1 и S_2 .

3. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА ВО ВНЕШНИХ ОБЛАСТЯХ

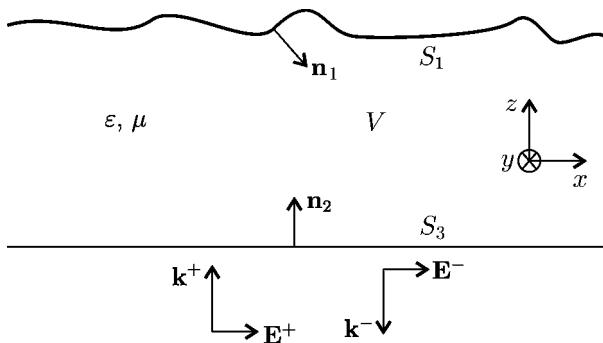


Рис. 3. Пример внешней области

В данном разделе из уравнения Гельмгольца нами будет получена система интегральных уравнений во внешних областях. На рис. 3 показана внешняя область V , ограниченная сверху бесконечной периодической поверхностью S_1 . Снизу область V ничем не ограничена и простирается до бесконечности. Диэлектрическая и магнитная проницаемости среды в этой области равны, соответственно, ϵ и μ . Снизу на поверхность S_1 падает некоторая монохроматическая волна, поле которой обозначим через \mathbf{E}^+ . Поле рассеянной волны обозначим через \mathbf{E}^- .

Ограничим область V виртуальной плоскостью $z = z_0 = \text{const}$, расположенной ниже поверхности S_1 (см. рис. 3). Обозначим эту плоскость через S_3 . Запишем для границы $S_1 + S_3$ формулу (4), заменив в ней S_2 на S_3 . Для S_1 интеграл в выражении (4) записывается аналогично случаю внутренней области. Для получения интеграла по S_3 представим поля $\mathbf{E}^+(x, y, z)$ и $\mathbf{E}^-(x, y, z)$ в этой плоскости в виде разложений по плоским волнам:

$$E_a^\pm(x, y, z_0) = \frac{1}{L_x L_y} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} \tilde{E}_a^\pm(k_{xj}, k_{yh}) \exp(\pm i k_{zjh} z_0 + i k_{xj} x + i k_{yh} y), \tag{15a}$$

$$\frac{\partial E_a^\pm}{\partial n}(x, y, z_0) = \pm \frac{1}{L_x L_y} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} \tilde{E}_a^\pm(k_{xj}, k_{yh}) i k_{zjh} \exp(\pm i k_{zjh} z_0 + i k_{xj} x + i k_{yh} y), \tag{15б}$$

где $a = x, y, z$; k_{zjh} определено в (7). Зависимости величин k_{xj} и k_{yh} от индексов j и h заданы в (6а) и (6б).

Подставив (15а), (15б) и (5) в (4), можно получить следующие интегральные соотношения:

$$\int_0^{L_\xi} \int_0^{L_\eta} [E_{1a}(\xi, \eta) i (k_{zlm} n_{1z} + k_{xl} n_{1x} + k_{ym} n_{1y}) \exp(-i k_{zlm} Z_1 - i k_{xl} X_1 - i k_{ym} Y_1) A_1 + E_{1an}(\xi, \eta) \exp(-i k_{zlm} Z_1 - i k_{xl} X_1 - i k_{ym} Y_1) A_1] d\xi d\eta = -2i k_{zlm} \tilde{E}_a^+(k_{xl}, k_{ym}), \tag{16a}$$

$$\int_0^{L_\xi} \int_0^{L_\eta} [E_{1a}(\xi, \eta) i (-k_{zlm} n_{1z} + k_{xl} n_{1x} + k_{ym} n_{1y}) \exp(i k_{zlm} Z_1 - i k_{xl} X_1 - i k_{ym} Y_1) A_1 + E_{1an}(\xi, \eta) \exp(i k_{zlm} Z_1 - i k_{xl} X_1 - i k_{ym} Y_1) A_1] d\xi d\eta = 2i k_{zlm} \tilde{E}_a^-(k_{xl}, k_{ym}); \tag{16б}$$

где $a = x, y, z$; $l = 1, 2, \dots$; $m = 1, 2, \dots$. Здесь использованы те же обозначения, что и в системе (9). Выражения (16а) выступают в роли уравнений относительно неизвестных функций $E_{1a}(\xi, \eta)$ и $E_{1an}(\xi, \eta)$, а из (16б) можно найти поле рассеянной волны \mathbf{E}^- . Отметим, что если ось z на рис. 3 направить вниз, то роли соотношений (16а) и (16б) поменяются местами: выражения (16б) будут выступать в роли уравнений (в этом случае уже \mathbf{E}^- будет соответствовать полю падающей волны), а из (16а) можно будет найти поле рассеянной волны \mathbf{E}^+ . Для своего решения система интегральных уравнений (16а) или (16б), как и в случае внутренних областей, должна быть

дополнена граничными условиями и уравнением связи трёх компонент вектора электрического поля.

Отдельного рассмотрения требует ситуация, когда $k_{zlm} = 0$, что обращает правые части выражений (16а) и (16б) в нуль. В этом случае пространственные гармоники $\tilde{E}_a^+(k_{xl}, k_{ym})$ и $\tilde{E}_a^-(k_{xl}, k_{ym})$, соответствующие одной и той же плоской волне, могут быть найдены путём вычисления следующего предела:

$$\tilde{E}_a^\pm(k_{xl}, k_{ym}) = \lim_{k_z \rightarrow 0} \frac{1}{ik_z} \int_0^{L_\xi} \int_0^{L_\eta} [E_{1a}(\xi, \eta) i(-k_z n_{1z} + k_{xl} n_{1x} + k_{ym} n_{1y}) \exp(ik_z Z_1 - ik_{xl} X_1 - ik_{ym} Y_1) A_1 + E_{1an}(\xi, \eta) \exp(ik_z Z_1 - ik_{xl} X_1 - ik_{ym} Y_1) A_1] d\xi d\eta. \quad (17)$$

4. УЧЁТ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ И СВЯЗИ МЕЖДУ ДЕКАРТОВЫМИ КОМПОНЕНТАМИ ВЕКТОРА ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Для нахождения однозначного решения полученная в предыдущих разделах система интегральных уравнений должна быть дополнена соотношениями, связывающими поля по разные стороны от границ, а также выражениями, устанавливающими соотношения между различными декартовыми компонентами поля.

На рис. 4 изображена граница S между однородными областями 1 и 2. Зададим эту границу при помощи периодических функций $x = X(\xi, \eta)$, $y = Y(\xi, \eta)$ и $z = Z(\xi, \eta)$, имеющих периоды L_ξ и L_η по переменным ξ и η соответственно. Пусть диэлектрическая и магнитная проницаемости среды в области 1 равны ϵ_1 и μ_1 , а в области 2 — ϵ_2 и μ_2 . Независимыми являются два векторных граничных условия:

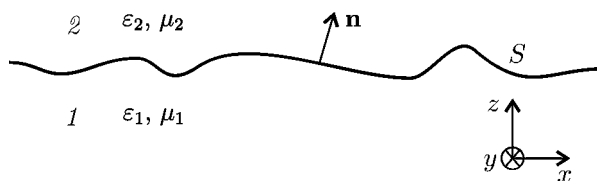


Рис. 4. К выводу граничных условий

$$[\mathbf{n}, \mathbf{E}_1] = [\mathbf{n}, \mathbf{E}_2], \quad (18)$$

$$[\mathbf{n}, \mathbf{H}_1] = [\mathbf{n}, \mathbf{H}_2], \quad (19)$$

где $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$ — векторы напряжённости электрического поля на границе S в областях 1 и 2 соответственно; $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2$ — векторы напряжённости магнитного поля на границе S в областях 1 и 2, \mathbf{n} — вектор нормали к границе S .

Уравнением, связывающим различные декартовы компоненты векторного поля, является уравнение Максвелла

$$\text{div } \mathbf{D}_j = 0, \quad j = 1, 2, \quad (20)$$

где $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2$ — векторы индукции электрического поля на границе S в областях 1 и 2 соответственно.

Преобразуем соотношения (18)–(20) к системе интегральных уравнений. Нетрудно показать, что они могут быть преобразованы к следующему виду:

$$\sum_{j=1}^2 \sum_a (g_{ja} E_{ja} + g_{jan} E_{jan} + g_{ja\xi} E_{ja\xi} + g_{ja\eta} E_{ja\eta}) = 0, \quad (21)$$

где $E_{ja} \equiv E_{ja}(\xi, \eta)$, $E_{jan} \equiv \partial E_{ja}(\xi, \eta)/\partial n$, $E_{ja\xi} \equiv \partial E_{ja}(\xi, \eta)/\partial \xi$, $E_{jan\eta} \equiv \partial E_{ja}(\xi, \eta)/\partial \eta$. Функции $g_{ja} = g_{ja}(\xi, \eta)$, $g_{jan} = g_{jan}(\xi, \eta)$, $g_{ja\xi} = g_{ja\xi}(\xi, \eta)$ и $g_{jan\eta} = g_{jan\eta}(\xi, \eta)$ определяются видом данного граничного условия и периодичны по переменным ξ и η с периодами L_ξ и L_η .

Выражение (21) может быть сведено к системе интегральных уравнений при помощи разложения его в ряд Фурье:

$$\int_0^{L_\xi} \int_0^{L_\eta} \sum_{j=1}^2 \sum_a (g_{ja} E_{ja} + g_{jan} E_{jan} + g_{ja\xi} E_{ja\xi} + g_{jan\eta} E_{jan\eta}) \exp(-ik_{\xi l} \xi - ik_{\eta m} \eta) d\xi d\eta = 0, \tag{22}$$

$$k_{\xi l} = 0; \pm 2\pi/L_\xi; \pm 4\pi/L_\xi; \dots, \tag{23a}$$

$$k_{\eta m} = 0; \pm 2\pi/L_\eta; \pm 4\pi/L_\eta; \dots. \tag{23б}$$

Систему интегральных уравнений (22) преобразуем к виду, не содержащему функции $E_{ja\xi}(\xi, \eta)$ и $E_{jan\eta}(\xi, \eta)$:

$$\int_0^{L_\xi} \int_0^{L_\eta} \sum_{j=1}^2 \sum_a [E_{ja}(\xi, \eta) f_{jal m}(\xi, \eta) + E_{jan}(\xi, \eta) g_{jan}(\xi, \eta) \exp(-ik_{\xi l} \xi - ik_{\eta m} \eta)] d\xi d\eta = 0, \tag{24}$$

где $a = x, y, z$; $l = 1, 2, \dots$; $m = 1, 2, \dots$. В системе (24) введено следующее обозначение:

$$f_{jal m}(\xi, \eta) = g_{ja} \exp(-ik_{\xi l} \xi - ik_{\eta m} \eta) - \frac{1}{L_\xi L_\eta} \sum_{h=1}^\infty \sum_{q=1}^\infty ik_{\xi h} \tilde{g}_{ja\xi}(k_{\xi h} + k_{\xi l}, k_{\eta q} + k_{\eta m}) \exp(ik_{\xi h} \xi + ik_{\eta q} \eta) - \frac{1}{L_\xi L_\eta} \sum_{h=1}^\infty \sum_{q=1}^\infty ik_{\eta q} \tilde{g}_{jan}(k_{\xi h} + k_{\xi l}, k_{\eta q} + k_{\eta m}) \exp(ik_{\xi h} \xi + ik_{\eta q} \eta), \tag{25}$$

где

$$\tilde{g}_{ja\xi, \eta}(k_\xi, k_\eta) = \int_0^{L_\xi} \int_0^{L_\eta} g_{ja\xi, \eta}(\xi, \eta) \exp(-ik_\xi \xi - ik_\eta \eta) d\xi d\eta. \tag{26}$$

В дальнейшем нам понадобятся граничные условия именно в виде (24), т. е. в виде интегральных уравнений относительно неизвестных функций $E_{ja}(\xi, \eta)$ и $E_{jan}(\xi, \eta)$.

5. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Итак, уравнение Гельмгольца, граничные условия и уравнение связи компонент вектора электрического поля преобразованы к системе интегральных уравнений. В общем виде эту систему можно записать так:

$$\int_0^{L_\xi} \int_0^{L_\eta} \left[\sum_{j,a} E_{ja}(\xi, \eta) v_{jal}(\xi, \eta) + \sum_{j,a} E_{jan}(\xi, \eta) w_{jal}(\xi, \eta) \right] d\xi d\eta = b_l, \tag{27}$$

где $a = x, y, z$; j — номер текущей пары (E_{ja} ; E_{jan}), соответствующий одной из сторон одной из границ однородных областей объекта. Конкретный вид функций $v_{jal}(\xi, \eta)$ и $w_{jal}(\xi, \eta)$ определяется выражениями (9), (16а), (16б) или (24). Можно показать, что решение такой системы

интегральных уравнений эквивалентно решению уравнения Гельмгольца с граничными условиями. В свою очередь, если не рассматривать замкнутые металлические полости, решение уравнения Гельмгольца единственно. Следовательно, в этом случае и решение системы (27) также единственно.

Введём в рассмотрение совокупности функций:

$$\mathbf{E}(\xi, \eta) = \{E_{1x}(\xi, \eta); E_{1xn}(\xi, \eta); E_{2x}(\xi, \eta); E_{2xn}(\xi, \eta); \dots; E_{Nz}(\xi, \eta); E_{Nzn}(\xi, \eta)\}, \quad (28a)$$

$$\mathbf{W}_l(\xi, \eta) = \{v_{1xl}^*(\xi, \eta); w_{1xl}^*(\xi, \eta); v_{2xl}^*(\xi, \eta); w_{2xl}^*(\xi, \eta); \dots; v_{Nzl}^*(\xi, \eta); w_{Nzl}^*(\xi, \eta)\}, \quad (28б)$$

где N — число искомым пар распределений $(E_{ja}; E_{jan})$ для каждой декартовой компоненты a , звёздочка означает комплексное сопряжение.

Введём для совокупностей функций (28a) и (28б) операцию скалярного произведения по аналогии с тем, как вводится обычно эта операция для функций:

$$\mathbf{E}(\xi, \eta) \mathbf{W}_l(\xi, \eta) \equiv \int_0^{L_\xi} \int_0^{L_\eta} \left[\sum_{j,a} E_{ja}(\xi, \eta) v_{jal}(\xi, \eta) + \sum_{j,a} E_{jan}(\xi, \eta) w_{jal}(\xi, \eta) \right] d\xi d\eta. \quad (29)$$

Операция для совокупностей функций, введённая по такому правилу, удовлетворяет всем свойствам скалярного произведения.

Таким образом, систему интегральных уравнений (27) можно записать в следующем виде:

$$\mathbf{E}(\xi, \eta) \mathbf{W}_l(\xi, \eta) = b_l, \quad (30)$$

где $l = 1, 2, \dots$. Как было указано выше, решение (30) единственно. Можно также показать, что различные совокупности функций $\mathbf{W}_l(\xi, \eta)$ линейно независимы между собой. Следовательно, $\mathbf{W}_l(\xi, \eta)$ представляет собой базис, но этот базис является неортогональным. Для того, чтобы найти совокупность функций $\mathbf{E}(\xi, \eta)$, ортогонализуем и нормируем базис $\mathbf{W}_l(\xi, \eta)$, а затем разложим по нему $\mathbf{E}(\xi, \eta)$. Для этого воспользуемся процессом ортогонализации Грама—Шмидта [13].

Решение запишем в виде бесконечного ряда:

$$\mathbf{E}(\xi, \eta) = \sum_m c_m \mathbf{H}_m(\xi, \eta), \quad (31)$$

где $\mathbf{H}_m(\xi, \eta)$ — ортонормированный базис, построенный из базиса $\mathbf{W}_l(\xi, \eta)$, c_m — коэффициенты разложения по базису $\mathbf{H}_m(\xi, \eta)$. Для нахождения c_m и \mathbf{H}_m выполним следующую последовательность операций:

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{W}_1 / \sqrt{\mathbf{W}_1 \mathbf{W}_1}, \quad (32a)$$

$$c_1 = b_1 / \sqrt{\mathbf{W}_1 \mathbf{W}_1}, \quad (32б)$$

$$\mathbf{G}_m = \mathbf{W}_m - \sum_{l=1}^{m-1} (\mathbf{W}_m \mathbf{H}_l) \mathbf{H}_l, \quad (33a)$$

$$\mathbf{H}_m = \mathbf{G}_m / \sqrt{\mathbf{G}_m \mathbf{G}_m}, \quad (33б)$$

$$c_m = \left(b_m - \sum_{l=1}^{m-1} (\mathbf{W}_m \mathbf{H}_l)^* c_l \right) / \sqrt{\mathbf{G}_m \mathbf{G}_m}, \quad (33в)$$

где $m = 2, 3, \dots$

Таким образом, получены строгие выражения для распределений поля и его производной по нормали на всех границах объекта, на котором дифрагирует электромагнитная волна. Для нахождения пространственных спектров дифрагированных полей служат выражения (16б) или (16a). Поле в любой точке пространства может быть определено из (13).

6. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ДИФРАКЦИОННЫХ ЗАДАЧ

В данном разделе в качестве примера рассмотрим решение предложенным методом двух задач дифракции. Сформулируем постановку первой задачи. На периодическую структуру из идеального проводника с одномерным пилообразным профилем поверхности, имеющим период, равный длине волны λ (см. рис. 5), перпендикулярно этой структуре, т. е. в направлении оси z , падает плоская монохроматическая электромагнитная TE-волна с электрическим полем, направленным вдоль оси y . Требуется найти пространственный спектр рассеянного поля.

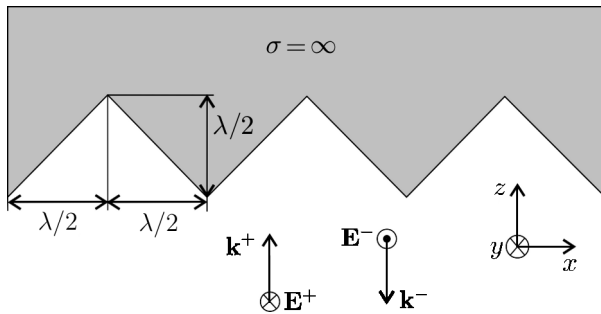


Рис. 5. Пример дифракционной задачи

В данной задаче присутствует только одна внешняя область, расположенная ниже металлической структуры. Граничное условие на данной структуре имеет вид $E_y = 0$. Такое простое граничное условие позволяет не записывать для него отдельные интегральные уравнения, рассмотренные в разделе 4, а включить это условие в выражения (16а) и (16б), что упростит итоговую систему интегральных уравнений. Учитывая также, что и в падающей, и в отражённой волне электромагнитное поле имеет только y -компоненту электрического поля, получим, что

остаётся одна неизвестная функция $E_n(\xi \equiv x)$, соответствующая значениям производной электрического поля по нормали в различных точках металлической поверхности.

Поскольку структура одномерная, то её поверхность может быть задана при помощи функции только одной переменной. В качестве такой переменной возьмём координату x . Зададим профиль металлической поверхности при помощи функции:

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < \lambda/2; \\ \lambda - x, & \lambda/2 \leq x < \lambda. \end{cases} \tag{34}$$

Таким образом, система интегральных уравнений (16а) будет выглядеть следующим образом:

$$\int_0^\lambda E_n(x) \exp\left(-i \sqrt{k^2 - k_{xl}^2} f(x) - ik_{xl}x\right) \sqrt{2} dx = -2ik\tilde{E}^+(0)\delta_{l1}, \tag{35}$$

где $l = 1, 2, \dots, \delta_{lm}$ — символ Кронекера.

Решение системы (35) запишем в виде ряда

$$E_n(x) = \sum_m c_m H_m(x). \tag{36}$$

Используя алгоритм, рассмотренный в предыдущем разделе, можно получить следующие выражения для функций $H_m(x)$ и коэффициентов ряда c_m :

$$c_1 = -\sqrt{2/\lambda} ik\tilde{E}^+(0); \quad H_1(x) = \sqrt{1/\lambda} \exp[ikf(x)], \tag{37a}$$

$$c_2 = \sqrt{\frac{2}{3\lambda}} ik\tilde{E}^+(0); \quad H_2(x) = \frac{2}{\sqrt{3\lambda}} \exp\left(i \frac{2\pi}{\lambda} x\right) - \frac{1}{\sqrt{3\lambda}} \exp[ikf(x)], \tag{37б}$$

$$c_3 = \frac{2}{\sqrt{3\lambda}} ik\tilde{E}^+(0); \quad H_3(x) = \sqrt{\frac{3}{2\lambda}} \exp\left(-i \frac{2\pi}{\lambda} x\right) + \frac{1}{\sqrt{6\lambda}} \exp\left(i \frac{2\pi}{\lambda} x\right) - \sqrt{\frac{2}{3\lambda}} \exp[ikf(x)]. \tag{37в}$$

Кроме того, можно показать, что $c_m = 0$ при $m \geq 4$. Следовательно, функция $E_n(x)$ выглядит следующим образом:

$$E_n(x) = \sum_{m=1}^3 c_m H_m(x) = \frac{4\sqrt{2}\pi}{\lambda^2} \tilde{E}^+(0) |\sin(2\pi x/\lambda)|. \quad (38)$$

Подчеркнём, что это точное решение.

Пространственный спектр рассеянного поля в полупространстве $z \leq 0$ найдём, подставив выражение (38) в формулы (16б) и (17). В итоге получим

$$\begin{aligned} \tilde{E}^-(0) &= \tilde{E}^+(0); & \tilde{E}^-(k_x = \pm 2\pi/\lambda) &= -\tilde{E}^+(0); & \tilde{E}^-(k_x > 2\pi/\lambda) &= 0; \\ \tilde{E}^-(k_x < -2\pi/\lambda) &= 0. \end{aligned} \quad (39)$$

Таким образом, в рассеянном поле будут присутствовать только три плоские волны. Одна из них распространяется перпендикулярно поверхности и имеет такую же амплитуду, как и падающее поле. Две другие волны распространяются параллельно поверхности навстречу друг другу; их амплитуды также совпадают с амплитудой падающего поля. Сумма этих двух плоских волн представляет собой стоячую волну.

Данный результат может быть проверен следующим образом. Если сложить полученные четыре плоские волны (одну падающую и три рассеянных), то суммарное электрическое поле будет равно нулю на металлической границе. Таким образом, полученное решение удовлетворяет и уравнению Гельмгольца, и граничным условиям, что говорит о его верности.

В качестве второго примера рассмотрим следующую задачу. Плоская ТЕ-волна падает нормально на одномерную периодическую структуру, состоящую из бесконечно тонких идеально проводящих полос, расположенных в плоскости $z = 0$ и чередующихся со свободным пространством (см. рис. 6). Решение данной задачи рассмотрено, например, в работах [5, 15], причём в работе [5] дано её строгое решение для случая, когда ширина металлических полос равна половине периода (что соответствует рис. 6).

В данной задаче присутствуют две внешние области: $z < 0$ и $z > 0$. Электрическое поле во всём пространстве имеет только y -компоненту. Поэтому получаем четыре неизвестные функции: $E_1(x) \equiv E_1(\xi \equiv x)$, $E_{1n}(x)$, $E_2(x)$ и $E_{2n}(x)$, соответствующие распределению y -компоненты электрического поля и его производной по нормали в плоскости $z = 0$ с двух сторон от металлических полос. Совместим начало координат с левым краем одной из металлических полос и запишем интегральные уравнения для данной задачи. Интегральные уравнения (16а) для области $z < 0$ и интегральные уравнения (16б) для области $z > 0$ будут выглядеть следующим образом:

$$\int_{-L_x/2}^{L_x/2} \left[-E_1(x) i \sqrt{k^2 - k_{xl}^2} + E_{1n}(x) \right] \exp(-ik_{xl}x) dx = -2ikL_x E_0 \delta_{l1}, \quad (40a)$$

$$\int_{-L_x/2}^{L_x/2} \left[-E_2(x) i \sqrt{k^2 - k_{xl}^2} + E_{2n}(x) \right] \exp(-ik_{xl}x) dx = 0, \quad (40б)$$

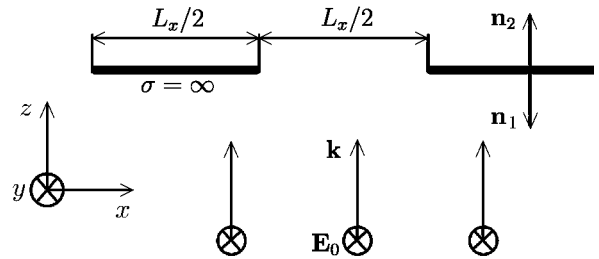


Рис. 6. Пример дифракционной задачи

где $l = 1, 2, \dots$. Граничные условия в данной задаче такие: $E_1(x) = 0, E_2(x) = 0$ при $0 < x \leq L_x/2$ и $E_1(x) = E_2(x), E_{1n}(x) = -E_{2n}(x)$ при $-L_x/2 < x \leq 0$. Они могут быть записаны при помощи следующих двух систем интегральных уравнений:

$$\int_{-L_x/2}^{L_x/2} [E_1(x) - g(x)E_2(x)] \exp(-ik_{xl}x) dx = 0, \quad (41a)$$

$$\int_{-L_x/2}^{L_x/2} \{[1 - g(x)] E_2(x) + g(x)E_{1n}(x) + g(x)E_{2n}(x)\} \exp(-ik_{xl}x) dx = 0, \quad (41b)$$

где $l = 1, 2, \dots$,

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0; \\ 0, & x > 0. \end{cases}$$

Таким образом, если, в соответствии с (28a), ввести совокупность функций

$$\mathbf{E}(x) = \{E_1(x); E_{1n}(x); E_2(x); E_{2n}(x)\}, \quad (42)$$

то базис $\mathbf{W}(x)$ для неё будет выглядеть так, см. (28б) и (27):

$$\mathbf{W}_{4l-3}(x) = \left\{ i \left(\sqrt{k^2 - k_{xl}^2} \right)^* \exp(ik_{xl}x); \exp(ik_{xl}x); 0; 0 \right\}, \quad (43a)$$

$$\mathbf{W}_{4l-2}(x) = \left\{ 0; 0; i \left(\sqrt{k^2 - k_{xl}^2} \right)^* \exp(ik_{xl}x); \exp(ik_{xl}x) \right\}, \quad (43б)$$

$$\mathbf{W}_{4l-1}(x) = \{ \exp(ik_{xl}x); 0; -g(x) \exp(ik_{xl}x); 0 \}, \quad (43в)$$

$$\mathbf{W}_{4l}(x) = \{ 0; g(x) \exp(ik_{xl}x); [1 - g(x)] \exp(ik_{xl}x); g(x) \exp(ik_{xl}x) \}, \quad (43г)$$

где $l = 1, 2, \dots$. В итоге получаем систему (30) с базисом (43a)–(43г). В её правой части содержится только один ненулевой элемент $b_1 = -2ikL_x E_0$. Используя выражения (32a)–(33в), можно получить разложение совокупности функций $\mathbf{E}(x)$ вида (31).

В данной задаче, в отличие от предыдущего примера, ряд (31) не обрывается, поэтому он суммировался численно. Используя выражение (16б) в полупространстве $z < 0$, можно по найденным распределениям поля и его производной по нормали в плоскости $z = 0$ получить амплитуды рассеянных назад плоских волн. На рис. 7 приведена вычисленная зависимость амплитуды рассеянной назад плоской волны, соответствующей нулевому порядку дифракции, от периода структуры для единичной амплитуды падающей волны. Показаны четыре графика, соответствующие разному числу просуммированных членов ряда (31): 20, 52, 100 и 800. При увеличении числа слагаемых вычисляемые зависимости приближаются к точному решению задачи. При суммировании 800 первых членов ряда получается зависимость, которая с точностью лучше 1% согласуется с решением из [5]. Такое количество слагаемых может быть получено, если в формулах (43a)–(43г) использовать совокупности функций для $l = 1, \dots, 200$.

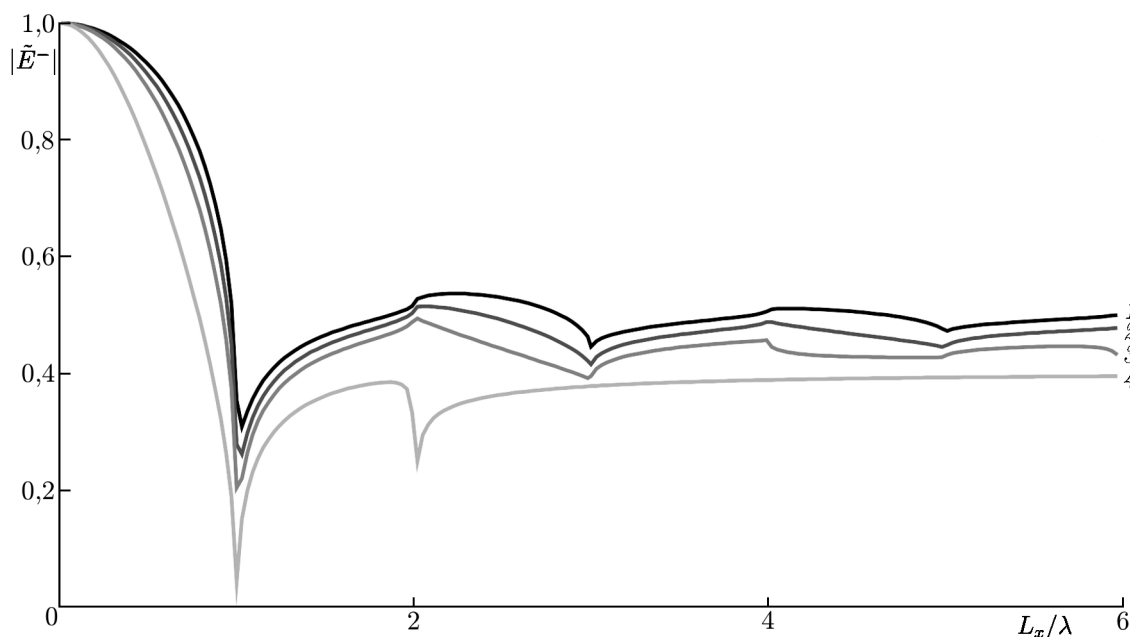


Рис. 7. Вычисленная амплитуда рассеянной назад плоской волны, соответствующей нулевому порядку дифракции, в зависимости от периода структуры и числа просуммированных членов ряда: 1 — 800 членов ряда, 2 — 100 членов ряда, 3 — 52 члена ряда и 4 — 20 членов ряда

Благодаря тому, что решение дифракционной задачи записывается явно в виде ряда (31), для увеличения точности её решения или определения, достигнута ли заданная точность, можно вычислить дополнительно некоторое количество членов этого ряда. Обычно же при использовании численных методов для этой цели необходимо или увеличивать частоту сетки, на которой определяется искомая функция, или число функций, по которым она раскладывается, и проводить все вычисления заново.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье представлен новый метод строгого решения электромагнитных задач дифракции на периодических структурах. Он позволяет получать решения достаточно широкого класса дифракционных задач, в которых монохроматическая электромагнитная волна дифрагирует на периодической структуре, состоящей из однородных и изотропных областей с произвольными кусочно-гладкими границами. Метод основан на применении в каждой однородной области теоремы Грина, в которой в качестве одной из функций последовательно используются все декартовы компоненты искомого вектора электрического поля, а в качестве другой — вспомогательные функции, соответствующие всевозможным плоским волнам. В итоге, из теоремы Грина и уравнения Гельмгольца получается система интегральных уравнений. Граничные условия на каждой из границ и уравнения связи декартовых компонент вектора электрического поля также преобразуются к интегральным уравнениям. Рассмотрение всех декартовых компонент вектора электрического поля во всех однородных областях даёт итоговую систему интегральных уравнений, которая строго решается относительно неизвестных распределений поля и производной поля по нормали на границах однородных областей. В общем случае решение получается в виде бесконечного ряда. Затем эти распределения используются для определения поля во всём пространстве. В статье приведены также примеры использования предложенного метода.

Автор выражает благодарность Г. М. Жислину, Е. А. Руденчику и И. Е. Кожеватову за ценные замечания и советы, способствовавшие улучшению статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sommerfeld A. // Math. Ann. 1896. V. 47. P. 317.
2. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1973. С. 521, 585.
3. Потехин А. И. Некоторые задачи дифракции электромагнитных волн. М.: Сов. радио, 1948. С. 105, 69.
4. Ваганов Р. Б., Каценеленбаум Б. З. Основы теории дифракции. М.: Наука, 1982. С. 43.
5. Вайнштейн Л. А. Теория дифракции и метод факторизации. М.: Сов. радио, 1966. 431 с.
6. Taflov A., Brodwin M. E. // IEEE Trans. Microwave Theory Techn. 1975. V. 23. P. 623.
7. Peng S., Morris G. M. // J. Opt. Soc. Am. A. 1995. V. 12. P. 1087.
8. Ерёмин Ю. А., Свешников А. Г. Метод дискретных источников в задачах электромагнитной дифракции. М.: Изд-во МГУ, 1992. 182 с.
9. Зимовец С. В., Гешев П. И. // ЖТФ. 2006. Т. 76, № 3. С. 1.
10. Вайнштейн Л. А., Суков А. И. // Радиотехника и электроника. 1984. Т. 29. С. 1472.
11. Копосова Е. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 2010. Т. 53, № 4. С. 269.
12. Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П. Теория волн. М.: Наука, 1979. С. 246.
13. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1974. С. 525, 460.
14. Electromagnetic theory of gratings / Ed. by R. Petit. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1980. P. 23.
15. Шестопалов В. П., Кириленко А. А., Масалов С. А., Сиренко Ю. К. Резонансное рассеяние волн. Дифракционные решетки. Т. 1. Киев: Наукова думка, 1986. С. 37.

Поступила в редакцию 2 июля 2010 г.; принята в печать 14 ноября 2011 г.

A RIGOROUS METHOD FOR SOLVING PROBLEMS OF DIFFRACTION OF MONOCHROMATIC ELECTROMAGNETIC WAVES ON PERIODIC STRUCTURES

D. E. Silin

We present a rigorous method for solving problems of diffraction of monochromatic electromagnetic waves on many types of periodic structures. The method is based on transforming the Helmholtz equation and the boundary conditions to a certain system of integral equations and then solving this system rigorously.