

УДК 533.9+524.31.084

## ПОЛНОСТЬЮ СВЯЗАННОЕ ДВИЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОНА С ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ЭНЕРГИЕЙ В КУЛОНОВСКОМ ПОЛЕ НЕПОДВИЖНОГО ЯДРА И ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

С. А. Арсеньев, С. А. Корягин

Институт прикладной физики РАН, г. Нижний Новгород, Россия

Показано, что в кулоновском поле неподвижного ядра и однородном магнитном поле реализуется полностью связанное классическое движение электрона с положительной энергией. Существование такого движения обусловлено сохранением так называемых инвариантных торов в фазовом пространстве системы не только при отрицательной, но и при положительной энергии электрона. Полностью связанные траектории занимают существенно больший сектор направлений скоростей по сравнению со свободными траекториями с той же энергией в такой области расстояний до ядра, где характерное время пролёта электрона около ядра больше периода циклотронного вращения, а отрицательная энергия кулоновского взаимодействия больше (по абсолютной величине) полной энергии электрона. Указанная область расстояний реализуется в случае низкой энергии электрона или сильного магнитного поля, когда ларморовский радиус электрона меньше характерного прицельного параметра ближних кулоновских столкновений в отсутствие магнитного поля. Необходимые условия реализуются в фотосферах одиночных магнитных белых карликов и в экспериментах по созданию антиводорода.

### ВВЕДЕНИЕ

В условиях фотосфер белых карликов с температурой  $T \approx 10^4$  К и сильным магнитным полем  $B \geq 10^7$  Гс существенно изменяются как связанные состояния электрона в атоме водорода [1–3], так и кулоновские столкновения свободных частиц [4–12]. Так, движение электрона в столкновениях с положительно заряженными ядрами становится нерегулярным (стохастическим) как в классическом [7–10], так и квантовом пределах [11, 12]. Стохастическое движение свободной частицы возникает в условиях, когда ларморовский радиус электрона  $r_B = v_T/\omega_B$  становится меньше характерного прицельного параметра ближних столкновений в отсутствие магнитного поля  $r_s = Ze^2/(mv_T^2)$ :

$$\frac{r_B}{r_s} = 1,3Z^{-1} \left( \frac{T[\text{K}]}{10^4} \right)^{3/2} \left( \frac{B[\text{Гс}]}{10^7} \right)^{-1} \ll 1. \quad (1)$$

Здесь  $v_T = (k_B T/m)^{1/2}$  — тепловая скорость электрона,  $\omega_B = eB/(mc)$  — циклотронная частота,  $e > 0$  — элементарный заряд,  $Z > 0$  — зарядовое число ядра,  $m$  — масса электрона,  $c$  — скорость света,  $k_B$  — постоянная Больцмана. В лабораторных условиях магнитное поле  $B \sim 10^4$  Гс качественно сказывается на столкновениях лишь при низких температурах  $T < 100$  К [13], в частности, в экспериментах по созданию антиводорода [14, 15].

Связанное движение электрона в кулоновском поле и однородном магнитном поле при отрицательной энергии (в атоме водорода) подробно исследовалось как в классическом, так и квантовом приближениях (см. обзор [16]). В данной работе мы покажем, что в рассматриваемой системе существуют полностью связанные классические траектории с положительной энергией  $E$ . Наличие таких траекторий отмечено в работе [17]. Однако в дальнейшем их подробное исследование не проводилось. В частности, не было замечено, что вблизи ядра связанные траектории с  $E > 0$  могут занимать существенный сектор направлений скоростей по сравнению со свободными траекториями с той же энергией, когда выполнено условие (1). В результате электромагнитное

излучение электронов, находящихся в связанных состояниях с  $E > 0$ , может превышать тормозное излучение свободных частиц.

План статьи следующий. В разделе 1 приведена нормировка координат и времени [17], позволяющая положить постоянные коэффициенты в уравнениях Ньютона для рассматриваемой системы равными единице. В разделе 2 предложено приближённое описание движения электрона, которое сведено к стандартному точечному отображению Чирикова [18, § 3.1]. Для данного отображения известно точное условие существования так называемых инвариантных торов [18, § 4.4], [19], которые обуславливают полностью связанное движение при положительной энергии. В разделе 3 описан численный метод Грина [18, § 4.4], [19] поиска инвариантных торов применительно к рассматриваемой системе. В разделе 4 с помощью метода Грина определены начальные условия для полностью связанных траекторий. Результаты численного расчёта пояснены с помощью аналитических оценок, которые основаны на стандартном отображении. В итоге показано, что около ядра связанные траектории занимают существенный сектор направлений скоростей в условиях (1). В разделе 5 обсуждается влияние связанных траекторий на тормозное излучение плазмы. Основные результаты сформулированы в разделе 6.

## 1. УРАВНЕНИЯ НЬЮТОНА И ГАМИЛЬТониАН В БЕЗРАЗМЕРНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Для описания движения электрона в кулоновском поле неподвижного ядра и однородном магнитном поле удобно использовать безразмерные радиус-вектор  $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/L_u$  и время  $\tilde{t} = \omega_B t$ , где  $L_u = (Zmc^2/B^2)^{1/3}$  — радиус круговой орбиты, по которой в отсутствие магнитного поля электрон совершает оборот вокруг ядра за время, равное заданному циклотронному периоду. В безразмерных переменных уравнение Ньютона приобретает вид

$$\frac{d^2\tilde{\mathbf{r}}}{d\tilde{t}^2} = [\mathbf{z}^\circ, \tilde{\mathbf{r}}] - \frac{\tilde{\mathbf{r}}}{\tilde{r}^3},$$

где все постоянные коэффициенты равны единице. Начало системы координат совпадает с ядром,  $\mathbf{z}^\circ$  — единичный вектор в направлении магнитного поля.

Гамильтониан системы имеет вид [16, 17]

$$\tilde{\mathcal{H}} = \frac{\tilde{p}_z^2}{2} + \frac{\tilde{p}_\rho^2}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\tilde{\rho}}{2} + \frac{\tilde{p}_\varphi}{\tilde{\rho}} \right)^2 - \frac{1}{\sqrt{\tilde{\rho}^2 + \tilde{z}^2}} = \tilde{\mathcal{H}}_{\text{eff}} + \frac{\tilde{p}_\varphi + |\tilde{p}_\varphi|}{2}, \quad (2)$$

где вектор-потенциал магнитного поля выбран аксиально-симметричным:  $\mathbf{A} = [\mathbf{B}, \mathbf{r}]/2$ ,  $\tilde{z}$ ,  $\tilde{\rho}$  и  $\varphi$  — цилиндрические координаты,  $\tilde{p}_z = d\tilde{z}/d\tilde{t}$  и  $\tilde{p}_\rho = d\tilde{\rho}/d\tilde{t}$  — проекции импульса электрона на направление магнитного поля и радиальное направление соответственно,  $\tilde{p}_\varphi = \tilde{\rho}^2 (d\varphi/d\tilde{t} - 1/2)$  — обобщённый момент импульса. В (2) эффективный потенциал  $(\tilde{\rho}/2 + \tilde{p}_\varphi/\tilde{\rho})^2/2 - 1/\sqrt{\tilde{\rho}^2 + \tilde{z}^2}$  достигает минимума на линии  $\tilde{\rho} = \sqrt{2|\tilde{p}_\varphi|}$  при достаточно большой удалённости от ядра  $\tilde{r} = \sqrt{\tilde{\rho}^2 + \tilde{z}^2} \gg 1$ . Таким образом, абсолютное значение  $|\tilde{p}_\varphi|$  задаёт характерную удалённость электрона от оси  $\tilde{z}$ . Рассматриваемому условию (1) сильного магнитного поля соответствуют малые энергии  $\tilde{E} = \tilde{\mathcal{H}} \ll 1$ .

В гамильтониане (2) специально выделена часть

$$\tilde{\mathcal{H}}_{\text{eff}} = \frac{\tilde{p}_z^2}{2} + \frac{\tilde{p}_\rho^2}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\tilde{\rho}}{2} - \frac{|\tilde{p}_\varphi|}{\tilde{\rho}} \right)^2 - \frac{1}{\sqrt{\tilde{\rho}^2 + \tilde{z}^2}}, \quad (3)$$

которая не зависит от знака  $\tilde{p}_\varphi$  и определяет динамику системы по переменным  $\tilde{p}_\rho$ ,  $\tilde{\rho}$  и  $\tilde{p}_z$ ,  $\tilde{z}$ . Такое представление отражает симметрию траекторий с противоположными моментами импульса  $\tilde{p}_\varphi$ . Так, если  $\tilde{p}_\rho(\tilde{t})$ ,  $\tilde{\rho}(\tilde{t})$ ,  $\tilde{p}_z(\tilde{t})$ ,  $\tilde{z}(\tilde{t})$ ,  $\varphi(\tilde{t})$  — некоторая траектория с заданным значением  $\tilde{p}_\varphi$ , то  $\tilde{p}'_\rho = \tilde{p}_\rho$ ,  $\tilde{\rho}' = \tilde{\rho}$ ,  $\tilde{p}'_z = \tilde{p}_z$ ,  $\tilde{z}' = \tilde{z}$ ,  $\varphi' = \tilde{t} - \varphi$  — траектория с  $\tilde{p}'_\varphi = -\tilde{p}_\varphi$ . Указанные траектории имеют разные полные энергии  $\tilde{E} = \tilde{\mathcal{H}}$ , но одинаковые «эффективные» энергии

$$\tilde{E}_{\text{eff}} = \tilde{\mathcal{H}}_{\text{eff}} = \tilde{E} - (\tilde{p}_\varphi + |\tilde{p}_\varphi|)/2 = \begin{cases} \tilde{E}, & \tilde{p}_\varphi \leq 0; \\ \tilde{E} - \tilde{p}_\varphi, & \tilde{p}_\varphi > 0. \end{cases} \quad (4)$$

В силу азимутальной симметрии задачи момент импульса  $\tilde{p}_\varphi$  сохраняется и входит как постоянный параметр (в виде  $|\tilde{p}_\varphi|$ ) в динамические уравнения для остальных переменных  $\tilde{p}_\rho$ ,  $\tilde{\rho}$  и  $\tilde{p}_z$ ,  $\tilde{z}$ . Вместе с тем исследуемая связанность движения электрона определяется ограниченностью значений  $\tilde{\rho}$  и  $\tilde{z}$ . Поэтому нам достаточно рассматривать движение системы в пространстве  $(\tilde{p}_\rho, \tilde{\rho}, \tilde{p}_z, \tilde{z})$ .

В свою очередь, сохранение энергии  $\tilde{E}$  позволяет выразить продольный импульс через переменные  $\tilde{p}_\rho$ ,  $\tilde{\rho}$ ,  $\tilde{z}$  и параметры  $|\tilde{p}_\varphi|$  и  $\tilde{E}_{\text{eff}}$ :

$$\tilde{p}_z = \pm \sqrt{2\tilde{E}_{\text{eff}} - \tilde{p}_\rho^2 - (\tilde{\rho}/2 - |\tilde{p}_\varphi|/\tilde{\rho})^2 + 2/\sqrt{\tilde{\rho}^2 + \tilde{z}^2}}. \quad (5)$$

В результате при фиксированных  $\tilde{E}$  и  $\tilde{p}_\varphi$  достаточно исследовать движение частицы в трёхмерном пространстве  $(\tilde{p}_\rho, \tilde{\rho}, \tilde{z})$ , через каждую точку которого проходит только одна траектория с заданным направлением  $\tilde{p}_z$ .

В пространстве  $(\tilde{p}_\rho, \tilde{\rho}, \tilde{z})$  частица может находиться лишь в области

$$|\tilde{z}| \leq \begin{cases} \tilde{z}_t(\tilde{p}_\rho, \tilde{\rho}; \tilde{E}_{\text{eff}}, |\tilde{p}_\varphi|), & \tilde{p}_\rho^2 + (\tilde{\rho}/2 - |\tilde{p}_\varphi|/\tilde{\rho})^2 > 2\tilde{E}_{\text{eff}}; \\ \infty, & \tilde{p}_\rho^2 + (\tilde{\rho}/2 - |\tilde{p}_\varphi|/\tilde{\rho})^2 \leq 2\tilde{E}_{\text{eff}}, \end{cases} \quad (6)$$

ограниченной поверхностью точек поворота

$$|z| = \tilde{z}_t(\tilde{p}_\rho, \tilde{\rho}; \tilde{E}_{\text{eff}}, |\tilde{p}_\varphi|) = \sqrt{4[\tilde{p}_\rho^2 + (\tilde{\rho}/2 - |\tilde{p}_\varphi|/\tilde{\rho})^2 - 2\tilde{E}_{\text{eff}}]^{-2} - \tilde{\rho}^2}, \quad (7)$$

в которых импульс  $\tilde{p}_z = 0$ . В точках поворота кинетическая энергия поперечного движения

$$\tilde{K}_\perp(\tilde{p}_\rho, \tilde{\rho}; \tilde{p}_\varphi) = \tilde{p}_\rho^2/2 + (\tilde{\rho}/2 + \tilde{p}_\varphi/\tilde{\rho})^2/2 \quad (8)$$

должна быть больше полной энергии  $\tilde{E}$  (в силу отрицательности кулоновской потенциальной энергии). Это эквивалентно неравенству  $\tilde{p}_\rho^2 + (\tilde{\rho}/2 - |\tilde{p}_\varphi|/\tilde{\rho})^2 > 2\tilde{E}_{\text{eff}}$  в (6) и соответствует положительному значению величины в квадратных скобках в (7).

При отрицательном значении  $\tilde{E}_{\text{eff}}$  поверхность точек поворота замкнута и движение электрона ограничено как по  $\tilde{\rho}$ , так и по  $\tilde{z}$ . Согласно определению (4)  $\tilde{E}_{\text{eff}} \leq \tilde{E}$ , поэтому при  $\tilde{E} < 0$  электрон связан при любом моменте импульса  $\tilde{p}_\varphi$  (что очевидно). При  $\tilde{E} > 0$  существует конечный интервал моментов импульса  $\tilde{p}_\varphi > \tilde{E}$ , где  $\tilde{E}_{\text{eff}} < 0$  и движение электрона финитное (что также известно).

Мы рассматриваем не столь очевидный результат — электрон может оставаться связанным и при положительном  $\tilde{E}_{\text{eff}}$ . В этом случае движение электрона по-прежнему ограничено поперёк магнитного поля. Однако поверхность точек поворота уже незамкнута, и электрон может уходить от ядра на бесконечное расстояние вдоль магнитного поля. Бесконечное значение  $|\tilde{z}|$  достигается в области значений  $\tilde{p}_\rho$ ,  $\tilde{\rho}$ , где кинетическая энергия поперечного движения меньше полной энергии:

$$\tilde{K}_\perp(\tilde{p}_\rho, \tilde{\rho}; \tilde{p}_\varphi) < \tilde{E}, \quad (9)$$

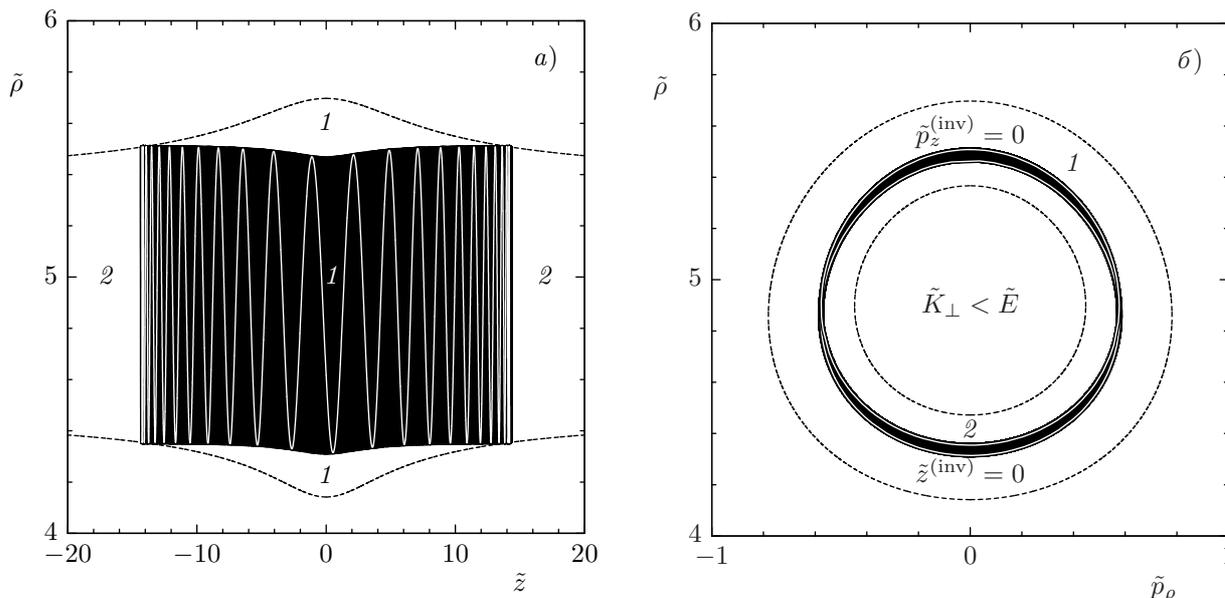


Рис. 1. Наиболее вытянутый вдоль магнитного поля инвариантный тор (для  $\tilde{E}_{\text{eff}} = 10^{-1}$  и  $|\tilde{p}_\varphi| = 12$  с числом вращения  $q^+(N = 22) = 1/(43 + \sqrt{5})$ ) в проекциях на плоскости  $(\tilde{z}, \tilde{\rho})$  и  $(\tilde{p}_\rho, \tilde{\rho})$  (панели а и б соответственно). Пунктирные линии ограничивают проекции поверхности точек поворота (7). Инвариантный тор закрашен чёрным. На его фоне белой кривой прочерчен участок траектории между двумя точками поворота (на панели а). Все точки поворота и точки пересечения с плоскостью  $\tilde{z} = 0$  инвариантного тора прочерчены белыми линиями на панели б и обозначены надписями  $\tilde{p}_z^{(\text{inv})} = 0$  и  $\tilde{z}^{(\text{inv})} = 0$  соответственно. Две линии точек поворота инвариантного тора ограничивают на поверхности (7) область точек поворота связанных траекторий (обозначена цифрой 1) и отсекают две области точек поворота «не обязательно связанных» траекторий (обозначены цифрой 2, см. подраздел 4.1). На панели б надписью  $\tilde{K}_\perp < \tilde{E}$  обозначены значения  $\tilde{p}_\rho$  и  $\tilde{\rho}$  (9), которыми могут обладать свободные частицы на бесконечном расстоянии от ядра

что соответствует неравенству  $\tilde{p}_\rho^2 + (\tilde{\rho}/2 - |\tilde{p}_\varphi|/\tilde{\rho})^2 \leq 2\tilde{E}_{\text{eff}}$  в (6).

Наличие полностью связанного движения при  $\tilde{E}_{\text{eff}} > 0$  обусловлено существованием траекторий, на которых координаты и импульсы являются периодическими функциями некоторых двух переменных  $\Psi_1 = \tilde{\omega}_1 \tilde{t}$  и  $\Psi_2 = \tilde{\omega}_2 \tilde{t}$  с несоизмеримыми частотами:  $\tilde{\omega}_1/\tilde{\omega}_2 \neq n_1/n_2$  при любых целых числах  $n_1$  и  $n_2$ . Такая траектория всюду плотно заполняет двумерную поверхность — инвариантный тор — в фазовом пространстве системы [18, § 3.1].

Для существования связанного движения важно, что траектории, начинающиеся вне инвариантного тора, не могут пересекать тор в силу единственности траектории, проходящей через каждую точку фазового пространства [18, § 3.1, 3.2]. Чтобы выделить наиболее крупную область связанного движения, мы будем искать наиболее вытянутый вдоль магнитного поля инвариантный тор, проекция которого в пространство  $(\tilde{p}_\rho, \tilde{\rho}, \tilde{z})$  при фиксированном направлении  $\tilde{p}_z$  представляет собой одну трубку переменного сечения (см. рис. 1). Основания трубки-тора упираются в поверхность точек поворота по двум замкнутым линиям (по одной в полупространствах  $\tilde{z} < 0$  и  $\tilde{z} > 0$ ). Проекция на плоскость  $(\tilde{p}_\rho, \tilde{\rho})$  линий точек поворота тора должна охватывать область (9), где могут достигаться бесконечные значения  $|\tilde{z}|$ . Указанный инвариантный тор и поверхность точек поворота ограничивают замкнутую область в пространстве  $(\tilde{p}_\rho, \tilde{\rho}, \tilde{z})$ , из которой траектории не могут уйти от ядра на бесконечное расстояние.

## 2. ТОЧЕЧНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ

Определим, где в пространстве  $(\tilde{p}_\rho, \tilde{\rho}, \tilde{z})$  существуют инвариантные торы. Для этого построим приближённое точечное отображение состояния электрона из одной точки поворота в следующую. Будем считать, что электрон сильно локализован поперёк магнитного поля. При этом характерное изменение  $\tilde{\rho}$  около ядра

$$\tilde{r}_{B\text{eff}} = \sqrt{2(\tilde{E}_{\text{eff}} + 1/\sqrt{2|\tilde{p}_\varphi|})}$$

(ларморовский радиус при  $\tilde{p}_\varphi < 0$ ) существенно меньше характерной удалённости электрона  $\sqrt{2|\tilde{p}_\varphi|}$  от оси  $\tilde{z}$ . Предположение сильной локализации выполняется для

$$|\tilde{p}_\varphi| \gg \max(1, \tilde{E}_{\text{eff}}). \quad (10)$$

Разложим эффективный потенциал в гамильтониане (3) в ряд Тейлора по координате  $\tilde{\rho}$  до квадратичного слагаемого в окрестности  $\tilde{\rho} = \sqrt{2|\tilde{p}_\varphi|}$ :

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{\text{eff}} \approx & \frac{\tilde{p}_z^2}{2} + \frac{\tilde{p}_\rho^2}{2} - \frac{1}{\sqrt{2|\tilde{p}_\varphi| + \tilde{z}^2}} + \frac{\sqrt{2|\tilde{p}_\varphi|}}{(2|\tilde{p}_\varphi| + \tilde{z}^2)^{3/2}} (\tilde{\rho} - \sqrt{2|\tilde{p}_\varphi|}) + \\ & + \frac{(\tilde{\rho} - \sqrt{2|\tilde{p}_\varphi|})^2}{2} \left[ 1 + \frac{1}{(2|\tilde{p}_\varphi| + \tilde{z}^2)^{3/2}} - \frac{6|\tilde{p}_\varphi|}{(2|\tilde{p}_\varphi| + \tilde{z}^2)^{5/2}} \right]. \end{aligned}$$

В последнем выражении множитель в квадратных скобках заменим единицей, поскольку  $|\tilde{p}_\varphi| \gg \gg 1$  в условиях (10) и кулоновское поле слабо влияет на частоту колебаний электрона поперёк магнитного поля. Получим приближённый гамильтониан

$$\tilde{H}_{\text{eff}} \approx \left[ \frac{\tilde{p}_z^2}{2} - \frac{1}{\sqrt{2|\tilde{p}_\varphi| + \tilde{z}^2}} \right] + \left[ \frac{\tilde{p}_\rho^2}{2} + \frac{(\tilde{\rho} - \sqrt{2|\tilde{p}_\varphi|})^2}{2} + \frac{\sqrt{2|\tilde{p}_\varphi|}}{(2|\tilde{p}_\varphi| + \tilde{z}^2)^{3/2}} (\tilde{\rho} - \sqrt{2|\tilde{p}_\varphi|}) \right], \quad (11)$$

определяющий движение в переменных  $\tilde{p}_\rho$ ,  $\tilde{\rho}$  и  $\tilde{p}_z$ ,  $\tilde{z}$ . Приближённые динамические уравнения для  $\tilde{p}_\rho$ ,  $\tilde{\rho}$  описывают одномерный гармонический осциллятор в поле поперечной компоненты кулоновской силы  $-\sqrt{2|\tilde{p}_\varphi|}/(2|\tilde{p}_\varphi| + \tilde{z}^2)^{3/2}$ .

Отображение состояния электрона из одной точки поворота в следующую удобно записать с помощью комплексной переменной  $\xi = (\tilde{\rho} - \sqrt{2|\tilde{p}_\varphi|}) + i\tilde{p}_\rho$ . Динамическое уравнение для  $\xi$  имеет вид

$$\frac{d\xi}{d\tilde{t}} = -i\xi - i \frac{\sqrt{2|\tilde{p}_\varphi|}}{(2|\tilde{p}_\varphi| + \tilde{z}^2)^{3/2}}.$$

Интегрирование этого уравнения связывает состояния электрона в последовательных  $k$ -й и  $(k+1)$ -й точках поворота:

$$\xi_{k+1} = \xi_k \exp[-i(\tilde{t}_{k+1}^{(\text{turn})} - \tilde{t}_k^{(\text{turn})})] - i \exp(-i\tilde{t}_{k+1}^{(\text{turn})}) \int_{\tilde{t}_k^{(\text{turn})}}^{\tilde{t}_{k+1}^{(\text{turn})}} \frac{\sqrt{2|\tilde{p}_\varphi|} \exp(i\tilde{t})}{(2|\tilde{p}_\varphi| + \tilde{z}^2)^{3/2}} d\tilde{t}, \quad (12)$$

где  $\tilde{t}_k^{(\text{turn})}$  и  $\tilde{t}_{k+1}^{(\text{turn})}$  — моменты прохождения соответствующих точек поворота.

Для перехода к стандартному отображению необходимо подправить вспомогательную переменную до  $\zeta_k = \xi_k \exp[i(\tilde{t}_k^{(\text{turn})} - \tilde{t}_k^{(\text{cross})})]$ , где  $\tilde{t}_k^{(\text{cross})}$  — момент пересечения плоскости  $\tilde{z} = 0$

перед прохождением  $k$ -й точки поворота. Для переменной  $\zeta$  преобразование (12) запишется в эквивалентном виде

$$\zeta_{k+1} = \zeta_k \exp[-i(\tilde{t}_{k+1}^{(\text{cross})} - \tilde{t}_k^{(\text{cross})})] - i \int_{\tilde{t}_k^{(\text{turn})} - \tilde{t}_{k+1}^{(\text{cross})}}^{\tilde{t}_{k+1}^{(\text{turn})} - \tilde{t}_{k+1}^{(\text{cross})}} \frac{\sqrt{2|\tilde{p}_\varphi|} \exp(i\tau) d\tau}{[2|\tilde{p}_\varphi| + \tilde{z}^2(\tilde{t}_{k+1}^{(\text{cross})} + \tau)]^{3/2}}. \quad (13)$$

Вычислим интеграл в (13). Для этого используем решение приближённого динамического уравнения для координаты  $\tilde{z}$ :

$$\frac{d^2 \tilde{z}}{d\tilde{t}^2} = -\frac{\tilde{z}}{(2|\tilde{p}_\varphi| + \tilde{z}^2)^{3/2}}, \quad (14)$$

в котором используем предположение (10) о сильной локализации и пренебрегаем смещением электрона поперёк магнитного поля относительно  $\tilde{\rho} = \sqrt{2|\tilde{p}_\varphi|}$ . Такому подходу соответствует переменная интегрирования в (13)

$$\tau(\tilde{z}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\tilde{z}} \frac{d\tilde{z}}{[(2|\tilde{p}_\varphi| + \tilde{z}^2)^{-1/2} - (2|\tilde{p}_\varphi| + \tilde{z}_{tk}^2)^{-1/2}]^{1/2}}, \quad (15)$$

где  $\tilde{z}_{tk}$  — ордината  $k$ -й точки поворота. В приближении большой удалённости точек поворота

$$\tilde{z}_{tk}^2 \gg 2|\tilde{p}_\varphi| \quad (16)$$

устремляем в бесконечность  $\tilde{z}_{tk}^2$  в определении (15) и пределы интегрирования в (13). Получаем искомое значение интеграла в (13):

$$J(|\tilde{p}_\varphi|) = \sqrt{|\tilde{p}_\varphi|} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp[(i/\sqrt{2}) \int_0^{\tilde{z}} (2|\tilde{p}_\varphi| + \tilde{z}'^2)^{1/4} d\tilde{z}']}{(2|\tilde{p}_\varphi| + \tilde{z}^2)^{5/4}} d\tilde{z} \approx \frac{2^{3/2} \pi}{5^{1/5} \Gamma(1/5) |\tilde{p}_\varphi|^{1/10}} \exp\left(-\frac{\Gamma^2(1/4) |\tilde{p}_\varphi|^{3/4}}{2^{5/4} 3 \sqrt{\pi}}\right), \quad (17)$$

где  $\Gamma(x)$  — гамма-функция (подробное вычисление интеграла в (17) см. в [6]).

Разность  $\tilde{t}_{k+1}^{(\text{cross})} - \tilde{t}_k^{(\text{cross})}$  в показателе экспоненты в (13) вычислим в тех же приближениях (10) и (16):

$$\tilde{t}_{k+1}^{(\text{cross})} - \tilde{t}_k^{(\text{cross})} = \int_0^{|\tilde{z}_{tk}|} \frac{\sqrt{2} d\tilde{z}}{\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2|\tilde{p}_\varphi| + \tilde{z}^2}} - \frac{1}{\sqrt{2|\tilde{p}_\varphi| + \tilde{z}_{tk}^2}}}} \approx \int_0^{|\tilde{z}_{tk}|} \frac{\sqrt{2} d\tilde{z}}{\sqrt{\frac{1}{|\tilde{z}|} - \frac{1}{|\tilde{z}_{tk}|}}} = \frac{\pi |\tilde{z}_{tk}|^{3/2}}{\sqrt{2}}. \quad (18)$$

В последнем соотношении расстояние  $|\tilde{z}_{tk}|$  необходимо выразить через переменную  $\zeta_k$  отображения:

$$|\tilde{z}_{tk}| = (|\zeta_k|^2/2 - \tilde{E}_{\text{eff}})^{-1}, \quad (19)$$

используя формулу (11) для «эффективной» энергии в точке поворота в приближении (16):  $\tilde{E}_{\text{eff}} \approx \approx |\zeta_k|^2/2 - 1/|\tilde{z}_{tk}|$ .

Подставляем (17)–(19) в (13) и получаем искомое отображение состояния электрона между точками поворота:

$$\zeta_{k+1} = \zeta_k \exp[-i\pi (|\zeta_k|^2/2 - \tilde{E}_{\text{eff}})^{-3/2}/\sqrt{2}] - iJ(|\tilde{p}_\varphi|). \quad (20)$$

Данное преобразование эквивалентно дифференциальному вращению точек  $\zeta$  комплексной плоскости на углы  $-\pi (|\zeta|^2/2 - \tilde{E}_{\text{eff}})^{-3/2}/\sqrt{2}$  и последующему сдвигу на  $-J(|\tilde{p}_\varphi|)$  вдоль мнимой оси. Подобное преобразование встречается в задаче электронного циклотронного нагрева в прямой магнитной ловушке [20, 21], где наличие инвариантных торов обеспечивает так называемый суперадиабатический режим взаимодействия частиц с излучением.

В окрестности некоторого значения  $|\zeta| = \sqrt{2I}$  преобразование (20) приближённо переходит в стандартное отображение [18, § 3.1]. Действительно, согласно (17) величина  $J$  экспоненциально уменьшается с увеличением  $|\tilde{p}_\varphi|$ . Тогда полагаем  $J \ll \sqrt{2I}$  и приближённо получаем

$$\Theta_{k+1} \approx \Theta_k + \frac{\pi}{\sqrt{2}(I - \tilde{E}_{\text{eff}})^{3/2}} - \frac{3\pi(I_k - I)}{2\sqrt{2}(I - \tilde{E}_{\text{eff}})^{5/2}}, \quad I_{k+1} \approx I_k + \sqrt{2I} J \sin \Theta_{k+1}, \quad (21)$$

где  $\Theta_k = -\arg \zeta_k$ ,  $I_k = |\zeta_k|^2/2$ . Стандартное отображение (21) допускает существование инвариантных торов в области, где параметр

$$\frac{3\pi\sqrt{I}J(|\tilde{p}_\varphi|)}{2(I - \tilde{E}_{\text{eff}})^{5/2}} \leq K_0 = 0,97 \quad (22)$$

(см. [18, § 4.4] и [19]).

Неравенство (22) ограничивает удалённость  $|\tilde{z}_t|$  точек поворота инвариантных торов:

$$\frac{3\pi}{2} \sqrt{\tilde{E}_{\text{eff}} + \frac{1}{|\tilde{z}_t|}} |\tilde{z}_t|^{5/2} J(|\tilde{p}_\varphi|) \leq K_0. \quad (23)$$

Для этого в (22) следует подставить связь (19) действия  $I = |\zeta|^2/2$  и  $|\tilde{z}_t|$ . Расстояние  $|\tilde{z}_{t \max}|$  до точек поворота наиболее вытянутого вдоль магнитного поля инвариантного тора соответствует равенству в (23) и может быть выражено в виде зависимости  $|\tilde{p}_\varphi|$  от  $|\tilde{z}_{t \max}|$  и параметра  $\tilde{E}_{\text{eff}}$ :

$$|\tilde{p}_\varphi| = \left[ \frac{2^{9/4}\sqrt{\pi}}{5\Gamma^2(1/4)} W_1 \left( \frac{3^{15/2}2^{3/2}\pi^{29/2}\Gamma^2(1/4)}{5^{1/2}\Gamma^{15/2}(1/5)K_0^{15/2}} (1 + \tilde{E}_{\text{eff}} |\tilde{z}_{t \max}|)^{15/4} |\tilde{z}_{t \max}|^{15} \right) \right]^{4/3}, \quad (24)$$

где  $W_1(x)$  — 1-я ветвь функции Ламберта, которая является решением уравнения  $W_1 \exp(W_1) = x$  при  $x > -\exp(-1)$ . Далее формула (24) будет использована для отрицательных  $\tilde{p}_\varphi$ , для которых параметр  $\tilde{E}_{\text{eff}}$  не зависит от  $\tilde{p}_\varphi$  и равен  $\tilde{E}$  (см. (4)).

### 3. МЕТОД ГРИНА

Метод Грина поиска инвариантных торов предполагает рассмотрение последовательности периодических траекторий с числами вращения, сходящимися к заданному пределу, и исследование устойчивости этих траекторий [18, § 4.4], [19]. Мы рассматриваем траектории в пространстве  $(\tilde{p}_\rho, \tilde{\rho}, \tilde{p}_z, \tilde{z})$  при фиксированных  $|\tilde{p}_\varphi|$  и  $\tilde{E}_{\text{eff}}$  и не налагаем требования периодичности на временную зависимость азимутального угла  $\varphi(\hat{t})$ .

### 3.1. Числа вращения

Мы определили число вращения  $q = N_{\parallel}/N_{\perp}$  как отношение числа оборотов (колебаний)  $N_{\parallel}$  в плоскости  $(\tilde{p}_z, \tilde{z})$  и  $N_{\perp}$  в плоскости  $(\tilde{p}_\rho, \tilde{\rho})$ , которые совершает периодическая траектория за свой период. Число оборотов  $N_{\parallel}$  равно половине числа точек поворота (нулей  $\tilde{p}_z$ ) на траектории. Для траектории, достаточно прижатой к плоскости  $\tilde{z} = 0$ , число  $N_{\perp}$  равно числу максимумов (или минимумов) координаты  $\tilde{\rho}$  на траектории, что совпадает с половиной числа нулей импульса  $\tilde{p}_\rho$ . Для сильно вытянутой вдоль магнитного поля траектории такое наглядное физическое определение  $N_{\perp}$  может быть нарушено высокой радиальной дрейфовой скоростью ведущего центра циклотронного вращения, которая может превысить характерную скорость колебаний по  $\tilde{\rho}$ , и одно колебание уже не сопровождается обращением  $\tilde{p}_\rho$  в нуль. Поэтому в приведённом ниже обобщающем определении число  $N_{\perp}$ , по сути, последовательно нумерует периодические траектории с заданным значением  $N_{\parallel}$  (при фиксированных  $|\tilde{p}_\varphi|$  и  $\tilde{E}_{\text{эф}}$ ) в порядке увеличения вытянутости траекторий вдоль магнитного поля.

Мы рассматриваем периодические траектории, которые проходят одну из точек поворота или одно из пересечений плоскости  $\tilde{z} = 0$  с нулевым радиальным импульсом  $\tilde{p}_\rho$  — в локальном максимуме или минимуме  $\tilde{\rho}(\tilde{t})$ . Данный выбор начальных условий продиктован чётностью гамильтониана по переменным  $\tilde{p}_\rho, \tilde{p}_z, \tilde{z}$  и его независимостью от времени, что обеспечивает определённую симметрию траектории относительно начальной точки. Рассмотрим, например, траектории (не обязательно периодические), проходящие точку поворота в полупространстве  $\tilde{z} < 0$  в локальном максимуме  $\tilde{\rho}$ . Каждая из таких траекторий однозначно определена удалённостью  $\tilde{\rho}^{(\text{turn})}$  точки поворота от оси  $\tilde{z}$ . Монотонно уменьшаем  $\tilde{\rho}^{(\text{turn})}$  от максимального возможного значения  $\tilde{\rho}$ , которое достигается на траектории, лежащей в плоскости  $\tilde{z} = 0$ . В процессе уменьшения  $\tilde{\rho}^{(\text{turn})}$  последовательно выделяем траектории, которые пересекают  $N_{\parallel}$ -ую точку поворота с нулевым значением  $\tilde{p}_\rho$  (считаем, что начальная точка поворота имеет нулевой номер). Выделенные траектории являются периодическими с заданным числом оборотов  $N_{\parallel}$ . Действительно, на данных траекториях  $\tilde{\rho}(\tilde{t}) = \tilde{\rho}(-\tilde{t})$ ,  $\tilde{p}_\rho(\tilde{t}) = -\tilde{p}_\rho(-\tilde{t})$ ,  $\tilde{z}(\tilde{t}) = \tilde{z}(-\tilde{t})$ ,  $\tilde{p}_z(\tilde{t}) = -\tilde{p}_z(-\tilde{t})$  и, следовательно,  $N_{\parallel}$ -ая и  $(-N_{\parallel})$ -ая точки поворота совпадают (далее для конкретных чисел вращения (26) поиск периодических траекторий может быть сделан более эффективным). Выделенные периодические траектории последовательно нумеруем числом  $N_{\perp}$  начиная с минимального значения, равного половине числа нулей импульса  $\tilde{p}_\rho$  на первой траектории. Аналогично присваиваем номера  $N_{\perp}$  периодическим траекториям с другими начальными условиями, указанными в начале абзаца.

Мы рассматриваем инвариантные торы с иррациональными числами вращения

$$q^{(-)}(N) = [2(N + 1 - C)]^{-1}, \quad q^{(+)}(N) = [2(N + C)]^{-1}, \quad (25)$$

где  $C = (\sqrt{5} - 1)/2 \approx 0,618$  — золотое сечение, параметр  $N = 1, 2, 3, \dots$  нумерует торы в порядке увеличения их вытянутости вдоль магнитного поля. Именно такие торы наиболее устойчивы в приближении стандартного отображения [19] (с учётом зеркальной симметрии задачи относительно плоскости  $\tilde{z} = 0$ , что отражает коэффициент двойка в (25)).

Так называемые подходящие дроби золотого сечения имеют вид  $C_k = F_k/F_{k+1}$ , где  $F_k$  — числа Фибоначчи ( $F_0 = 0, F_1 = 1, F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$ ). Тогда согласно методу Грина, чтобы определить, существует ли инвариантный тор с числом вращения  $q^{(\pm)}$ , рассматриваем последовательность периодических траекторий с числами вращения

$$q_k^{(-)}(N) = \frac{1}{2(N + 1 - F_k/F_{k+1})} = \frac{F_{k+1}}{2(NF_{k+1} + F_{k-1})} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} q^{(-)},$$

$$q_k^{(+)}(N) = \frac{1}{2(N + F_k/F_{k+1})} = \frac{F_{k+1}}{2(NF_{k+1} + F_k)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} q^{(+)}, \quad (26)$$

где  $k = 1, 2, 3, \dots$  — порядковый номер траектории в последовательности.

Числители  $F_{k+1}$  в (26) имеют такой смысл, что в произвольных  $n$ -й и  $(n + F_{k+1})$ -й точках поворота (в  $n$ -м и  $(n + F_{k+1})$ -м пересечениях плоскости  $\tilde{z} = 0$ ) сопряжённые переменные  $\tilde{p}_\rho$ ,  $\tilde{\rho}$  совпадают. Одновременно в этих точках вторая пара переменных  $\tilde{p}_z$ ,  $\tilde{z}$  совпадает, если  $F_{k+1}$  чётное число, и имеет противоположные значения  $\tilde{p}'_z = -\tilde{p}_z$  и  $\tilde{z}' = -\tilde{z}$ , если  $F_{k+1}$  нечётное число. Соответственно, если число  $F_{k+1}$  чётное, то числа оборотов  $N_{\parallel}^{(\pm)}$  и  $N_{\perp}^{(\pm)}$  равны половинам числителей и знаменателей в (26):  $N_{\parallel}^{(\pm)} = F_{k+1}/2$ ,  $N_{\perp}^{(-)} = NF_{k+1} + F_{k-1}$  и  $N_{\perp}^{(+)} = NF_{k+1} + F_k$ . Если число  $F_{k+1}$  нечётное, то числа  $N_{\parallel}^{(\pm)}$  и  $N_{\perp}^{(\pm)}$  совпадают с числителями и знаменателями в (26):  $N_{\parallel}^{(\pm)} = F_{k+1}$ ,  $N_{\perp}^{(-)} = 2(NF_{k+1} + F_{k-1})$  и  $N_{\perp}^{(+)} = 2(NF_{k+1} + F_k)$ .

Вместе с тем, если число  $F_{k+1}$  чётное, то числу вращения  $q_k^{(\pm)}$  соответствуют четыре траектории, а если  $F_{k+1}$  нечётное — две траектории. В случае четырёх траекторий каждой траектории из четвёрки соответствует парная траектория из той же четвёрки, зеркально симметричная ей относительно плоскости  $\tilde{z} = 0$ . В случае двух траекторий каждая траектория зеркально симметрична самой себе. Среди траекторий с заданным числом вращения  $q_k^{(\pm)}$  половина неустойчива, а вторая половина может быть устойчивой или неустойчивой. Инвариантный тор существует, если в последовательности периодических траекторий для каждого номера  $k$  существует устойчивая траектория.

Начальной точкой одной из траекторий с заданным числом вращения  $q_k^{(\pm)}$  выбирается точка поворота в полупространстве  $\tilde{z} < 0$ , через которую электрон проходит в локальном максимуме зависимости  $\tilde{\rho}(\tilde{t})$ . Начальной точкой второй траектории выбирается точка пересечения плоскости  $\tilde{z} = 0$ , которую частица проходит в направлении магнитного поля ( $\tilde{p}_z > 0$ ) в максимуме или минимуме зависимости  $\tilde{\rho}(\tilde{t})$ . Выбор между максимумом и минимумом  $\tilde{\rho}$  делается так, чтобы вторая траектория не совпала с первой и не была зеркально симметричной первой.

Среди всех точек поворота двух указанных траекторий существует как точка поворота, через которую электрон проходит в максимуме зависимости  $\tilde{\rho}(\tilde{t})$ , так и точка поворота, через которую электрон проходит в минимуме  $\tilde{\rho}(\tilde{t})$ . Аналогично среди всех точек пересечения плоскости  $\tilde{z} = 0$  существует как точка пересечения в максимуме зависимости  $\tilde{\rho}(\tilde{t})$ , так и точка пересечения в минимуме  $\tilde{\rho}(\tilde{t})$ . Далее обозначим максимальное и минимальное расстояния  $\tilde{\rho}$  в точках поворота всех траекторий с заданным  $q_k^{(\pm)}$  как  $\tilde{\rho}_{k \max}^{(\text{turn})}$  и  $\tilde{\rho}_{k \min}^{(\text{turn})}$  соответственно. Аналогично введём обозначения  $\tilde{\rho}_{k \max}^{(\text{cross})}$  и  $\tilde{\rho}_{k \min}^{(\text{cross})}$  для соответствующих величин в точках пересечения плоскости  $\tilde{z} = 0$ .

Численный код последовательно анализирует существование инвариантных торов в порядке уменьшения чисел вращения  $q^{(\pm)}$ , что соответствует увеличению вытянутости торов вдоль магнитного поля. Для чисел вращения (26) выполнены равенства  $q_1^{(-)}(N) = q_1^{(+)}(N - 1)$  и  $q_2^{(+)}(N) = q_2^{(-)}(N)$ . Поэтому периодические траектории с числами вращения  $q_1^{(-)}(N)$  и  $q_2^{(+)}(N)$  известны из анализа предыдущих торов с числами вращения  $q^{(+)}(N - 1)$  и  $q^{(-)}(N)$  соответственно. Траектории с числами вращения  $q_2^{(-)}(N)$  и  $q_1^{(+)}(N)$  находим путём изменения начального  $\tilde{\rho}$  с малым шагом, начиная с соответствующих уже известных значений для траекторий с числами вращения  $q_1^{(-)}(N)$  и  $q_2^{(+)}(N)$ . Начальные значения  $\tilde{\rho}$  последующих траекторий с индексами  $k \geq 3$  ищутся в соответствующих интервалах, ограниченных двумя предшествующими траекториями с индексами  $k - 1$  и  $k - 2$ :

$$\min(\tilde{\rho}_{k-2 \max}^{(\text{turn})}, \tilde{\rho}_{k-1 \max}^{(\text{turn})}) < \tilde{\rho} < \max(\tilde{\rho}_{k-2 \max}^{(\text{turn})}, \tilde{\rho}_{k-1 \max}^{(\text{turn})})$$

в случае начала траектории в точке поворота в локальном максимуме зависимости  $\tilde{\rho}(\tilde{t})$ ,

$$\min(\tilde{\rho}_{k-2 \max}^{(\text{cross})}, \tilde{\rho}_{k-1 \max}^{(\text{cross})}) < \tilde{\rho} < \max(\tilde{\rho}_{k-2 \max}^{(\text{cross})}, \tilde{\rho}_{k-1 \max}^{(\text{cross})})$$

в случае начала траектории в плоскости  $\tilde{z} = 0$  в локальном максимуме зависимости  $\tilde{\rho}(\tilde{t})$  и

$$\min(\tilde{\rho}_{k-2 \min}^{(\text{cross})}, \tilde{\rho}_{k-1 \min}^{(\text{cross})}) < \tilde{\rho} < \max(\tilde{\rho}_{k-2 \min}^{(\text{cross})}, \tilde{\rho}_{k-1 \min}^{(\text{cross})})$$

в случае начала траектории в плоскости  $\tilde{z} = 0$  в локальном минимуме зависимости  $\tilde{\rho}(\tilde{t})$ .

Чётность гамильтониана по переменным  $\tilde{p}_\rho, \tilde{p}_z, \tilde{z}$  приводит к тому, что на периодической траектории импульс  $\tilde{p}_\rho$  обращается в нуль посередине между начальной (нулевой) и  $F_{k+1}$ -й точками поворота (начальным и  $F_{k+1}$ -м пересечениями плоскости  $\tilde{z} = 0$ ). Поэтому признаком искомой периодической траектории является нулевой импульс  $\tilde{p}_\rho$  в  $F_{k+1}$ -м прохождении точки поворота и плоскости  $\tilde{z} = 0$  после начальной точки (здесь количества прохождений  $n^{(\text{turn})}$  и  $n^{(\text{cross})}$  точек поворота и плоскости  $\tilde{z} = 0$  суммируются:  $n^{(\text{turn})} + n^{(\text{cross})} = F_{k+1}$ ). Однозначность искомой траектории (поиска нуля  $\tilde{p}_\rho$ ) в указанных выше интервалах начальных значений  $\tilde{\rho}$  обеспечивается быстрой сходимостью чисел вращения  $q_k^{(\pm)}$  к числу вращения  $q^{(\pm)}$  инвариантного тора.

Поиск периодических траекторий в последовательности продолжается до такого номера  $k$ , при котором абсолютное значение так называемого остатка станет меньше характерной ошибки численного расчёта (см. далее (28)) или все траектории с числом вращения  $q_k^{(\pm)}$  окажутся неустойчивыми. В первом случае рассматриваемый инвариантный тор существует, а во втором случае — отсутствует.

### 3.2. Устойчивость периодических траекторий

Для определения устойчивости выбранной (базовой) периодической траектории необходимо рассмотреть, как в её окрестности эволюционируют траектории с теми же  $|\tilde{p}_\varphi|$  и  $\tilde{E}_{\text{eff}}$ . Траектории описываем отклонениями  $\delta\tilde{p}_\rho, \delta\tilde{\rho}$  и  $\delta\tilde{p}_z, \delta\tilde{z}$  канонических переменных от соответствующих значений на базовой траектории. Переменные  $\delta\tilde{p}_\rho, \delta\tilde{\rho}$  и  $\delta\tilde{p}_z, \delta\tilde{z}$  подчиняются линейным уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{d(\delta\tilde{\rho})}{d\tilde{t}} &= \delta\tilde{p}_\rho, & \frac{d(\delta\tilde{z})}{d\tilde{t}} &= \delta\tilde{p}_z, \\ \frac{d(\delta\tilde{p}_\rho)}{d\tilde{t}} &= -\frac{\partial^2 \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \tilde{\rho}^2} \delta\tilde{\rho} - \frac{\partial^2 \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \tilde{z} \partial \tilde{\rho}} \delta\tilde{z} = -\left(\frac{1}{4} + \frac{3\tilde{p}_\varphi^2}{\tilde{\rho}^4} + \frac{\tilde{z}^2 - 2\tilde{\rho}^2}{(\tilde{\rho}^2 + \tilde{z}^2)^{5/2}}\right) \delta\tilde{\rho} + \frac{3\tilde{\rho}\tilde{z}}{(\tilde{\rho}^2 + \tilde{z}^2)^{5/2}} \delta\tilde{z}, \\ \frac{d(\delta\tilde{p}_z)}{d\tilde{t}} &= -\frac{\partial^2 \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \tilde{z}^2} \delta\tilde{z} - \frac{\partial^2 \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \tilde{\rho} \partial \tilde{z}} \delta\tilde{\rho} = -\frac{\tilde{\rho}^2 - 2\tilde{z}^2}{(\tilde{\rho}^2 + \tilde{z}^2)^{5/2}} \delta\tilde{z} + \frac{3\tilde{\rho}\tilde{z}}{(\tilde{\rho}^2 + \tilde{z}^2)^{5/2}} \delta\tilde{\rho}, \end{aligned} \quad (27)$$

где частные производные гамильтониана  $\tilde{\mathcal{H}}$  (2) берутся на базовой траектории. Уравнения (27) являются гамильтоновскими с нестационарным гамильтонианом

$$\begin{aligned} \delta^2 \tilde{\mathcal{H}} &= \frac{(\delta\tilde{p}_z)^2}{2} + \frac{(\delta\tilde{p}_\rho)^2}{2} + \\ &+ \left(\frac{1}{4} + \frac{3\tilde{p}_\varphi^2}{\tilde{\rho}^4} + \frac{\tilde{z}^2 - 2\tilde{\rho}^2}{(\tilde{\rho}^2 + \tilde{z}^2)^{5/2}}\right) \frac{(\delta\tilde{\rho})^2}{2} + \frac{\tilde{\rho}^2 - 2\tilde{z}^2}{(\tilde{\rho}^2 + \tilde{z}^2)^{5/2}} \frac{(\delta\tilde{z})^2}{2} - \frac{3\tilde{\rho}\tilde{z}}{(\tilde{\rho}^2 + \tilde{z}^2)^{5/2}} \delta\tilde{\rho} \delta\tilde{z}. \end{aligned}$$

Для переменных  $\delta\tilde{p}_\rho, \delta\tilde{\rho}$  и  $\delta\tilde{p}_z, \delta\tilde{z}$  сохраняется отклонение энергии

$$\delta\tilde{E} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \tilde{p}_z} \delta\tilde{p}_z + \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \tilde{p}_\rho} \delta\tilde{p}_\rho + \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \tilde{\rho}} \delta\tilde{\rho} + \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \tilde{z}} \delta\tilde{z} = \frac{d\tilde{z}}{d\tilde{t}} \delta\tilde{p}_z + \frac{d\tilde{\rho}}{d\tilde{t}} \delta\tilde{p}_\rho - \frac{d\tilde{p}_\rho}{d\tilde{t}} \delta\tilde{\rho} - \frac{d\tilde{p}_z}{d\tilde{t}} \delta\tilde{z}.$$

С помощью уравнений (27) рассчитываем линейное преобразование  $(\Delta\tilde{\rho}_i, \Delta\tilde{p}_{\rho i}) \rightarrow (\Delta\tilde{\rho}_f, \Delta\tilde{p}_{\rho f})$  отклонений  $\Delta\tilde{\rho}_i, \Delta\tilde{p}_{\rho i}$  переменных  $\tilde{\rho}$  и  $\tilde{p}_\rho$  в начальной точке поворота (или в плоскости  $\tilde{z} = 0$ ) в отклонения  $\Delta\tilde{\rho}_f, \Delta\tilde{p}_{\rho f}$  тех же переменных в конечной точке поворота (или в плоскости

$\tilde{z} = 0$ ), когда базовая периодическая траектория возвращается в исходную точку. Для этого рассматриваем две вспомогательные траектории с начальными условиями

$$\begin{aligned} \delta\tilde{\rho}_i^{(1)} = 1, \quad \delta\tilde{p}_{\rho i}^{(1)} = 0, \quad \delta\tilde{z}_i^{(1)} = -\frac{d\tilde{p}_\rho}{d\tilde{t}} \Big/ \frac{d\tilde{p}_z}{d\tilde{t}}, \quad \delta\tilde{p}_{z i}^{(1)} = 0; \\ \delta\tilde{\rho}_i^{(2)} = 0, \quad \delta\tilde{p}_{\rho i}^{(2)} = 1, \quad \delta\tilde{z}_i^{(2)} = \frac{d\tilde{p}_\rho}{d\tilde{t}} \Big/ \frac{d\tilde{p}_z}{d\tilde{t}} = 0, \quad \delta\tilde{p}_{z i}^{(2)} = 0 \end{aligned}$$

в случае базовой траектории, стартующей из точки поворота, и

$$\begin{aligned} \delta\tilde{\rho}_i^{(1)} = 1, \quad \delta\tilde{p}_{\rho i}^{(1)} = 0, \quad \delta\tilde{z}_i^{(1)} = 0, \quad \delta\tilde{p}_{z i}^{(1)} = \frac{d\tilde{p}_\rho}{d\tilde{t}} \Big/ \frac{d\tilde{z}}{d\tilde{t}}; \\ \delta\tilde{\rho}_i^{(2)} = 0, \quad \delta\tilde{p}_{\rho i}^{(2)} = 1, \quad \delta\tilde{z}_i^{(2)} = 0, \quad \delta\tilde{p}_{z i}^{(2)} = -\frac{d\tilde{p}_\rho}{d\tilde{t}} \Big/ \frac{d\tilde{z}}{d\tilde{t}} = 0 \end{aligned}$$

в случае старта из плоскости  $\tilde{z} = 0$ . Здесь значения  $\delta\tilde{z}_i$  и  $\delta\tilde{p}_{z i}$  выбраны так, чтобы вспомогательная траектория начинались в точке поворота или в плоскости  $\tilde{z} = 0$ , как и базовая траектория, и отклонение энергии  $\delta\tilde{E} = 0$ . Здесь также учтено, что базовая траектория проходит начальную точку в экстремуме  $\tilde{\rho}$ , где  $d\tilde{\rho}/d\tilde{t} = 0$ .

Получаемые отклонения  $\delta\tilde{\rho}(\tilde{T})$ ,  $\delta\tilde{p}_\rho(\tilde{T})$  и  $\delta\tilde{z}(\tilde{T})$ ,  $\delta\tilde{p}_z(\tilde{T})$  через период  $\tilde{T}$  базовой траектории ещё не соответствуют точке поворота или пересечению плоскости  $\tilde{z} = 0$  для вспомогательной траектории. Вспомогательная траектория попадёт в конечную точку поворота через дополнительное время  $\delta\tilde{t} = -\delta\tilde{p}_z(\tilde{T})/(d\tilde{p}_z/d\tilde{t})$ , а в плоскость  $\tilde{z} = 0$  — через время  $\delta\tilde{t} = -\delta\tilde{z}(\tilde{T})/(d\tilde{z}/d\tilde{t})$ . Поэтому искомые отклонения  $\Delta\tilde{\rho}_f$  и  $\Delta\tilde{p}_{\rho f}$  в конечной точке поворота или в плоскости  $\tilde{z} = 0$  имеют вид

$$\Delta\tilde{\rho}_f = \delta\tilde{\rho}(\tilde{T}) + \frac{d\tilde{\rho}}{d\tilde{t}} \delta\tilde{t} = \delta\tilde{\rho}(\tilde{T}), \quad \Delta\tilde{p}_{\rho f} = \delta\tilde{p}_\rho(\tilde{T}) + \frac{d\tilde{p}_\rho}{d\tilde{t}} \delta\tilde{t}.$$

В выражении для  $\Delta\tilde{\rho}_f$  учтено, что через период  $\tilde{T}$  базовая траектория возвращается в начальную точку, где  $d\tilde{\rho}/d\tilde{t} = 0$ .

В итоге получаем матрицу  $\mathbf{M}$  преобразования  $(\Delta\tilde{\rho}_i, \Delta\tilde{p}_{\rho i}) \rightarrow (\Delta\tilde{\rho}_f, \Delta\tilde{p}_{\rho f})$ :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \delta\tilde{\rho}^{(1)} & \delta\tilde{\rho}^{(2)} \\ \delta\tilde{p}_\rho^{(1)} - \frac{d\tilde{p}_\rho/d\tilde{t}}{d\tilde{p}_z/d\tilde{t}} \delta\tilde{p}_z^{(1)} & \delta\tilde{p}_\rho^{(2)} - \frac{d\tilde{p}_\rho/d\tilde{t}}{d\tilde{p}_z/d\tilde{t}} \delta\tilde{p}_z^{(2)} \end{pmatrix}$$

в случае начала базовой траектории в точке поворота и

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \delta\tilde{\rho}^{(1)} & \delta\tilde{\rho}^{(2)} \\ \delta\tilde{p}_\rho^{(1)} - \frac{d\tilde{p}_\rho/d\tilde{t}}{d\tilde{z}/d\tilde{t}} \delta\tilde{z}^{(1)} & \delta\tilde{p}_\rho^{(2)} - \frac{d\tilde{p}_\rho/d\tilde{t}}{d\tilde{z}/d\tilde{t}} \delta\tilde{z}^{(2)} \end{pmatrix}$$

в случае старта из плоскости  $\tilde{z} = 0$ . Здесь все значения берутся в момент  $\tilde{t} = \tilde{T}$ .

С помощью интегрального инварианта Пуанкаре можно доказать, что  $\det \mathbf{M} = 1$ . Тогда устойчивость базовой периодической траектории определяется остатком [19]

$$R = (2 - \text{Sp } \mathbf{M})/4. \tag{28}$$

При  $0 \leq R \leq 1$  собственные значения матрицы  $\mathbf{M}$  лежат на единичной окружности в комплексной плоскости, и базовая периодическая траектория устойчива. В противном случае ( $R < 0$  или  $R > 1$ ) собственные значения действительны и одно из них по модулю превышает единицу, так что базовая траектория неустойчива.

Согласно [19] остаток  $R$  экспоненциально стремится к нулю по мере увеличения числа оборотов  $N_{\parallel}$  на периодических траекториях, приближающихся к инвариантному тору:  $R \propto f^{N_{\parallel}}$ , где  $0 \leq f < 1$ . Поэтому решение о существовании инвариантного тора принималось в случае, когда в последовательности периодических траекторий достигался достаточно малый остаток  $R$ :  $|R| < |1 - \det \mathbf{M}_{\text{num}}|^{1/2} \ll 1$ . Здесь  $\mathbf{M}_{\text{num}}$  — полученная численно матрица  $\mathbf{M}$ , так что величина  $|1 - \det \mathbf{M}_{\text{num}}|$  характеризует ошибку вычисления  $R$ .

### 3.3. Численное интегрирование уравнений движения

Динамические уравнения решались с помощью симплектического интегратора четвёртого порядка [22, § 4.1]. Шаг интегрирования по времени был одинаковым для всех траекторий с заданными  $\tilde{E}_{\text{eff}}$  и  $|\tilde{p}_{\varphi}|$  и равен  $0,01 \min(1, \tilde{t}_{\text{min}})$ . Здесь  $\tilde{t}_{\text{min}} = \tilde{\rho}_{\text{min}}/\tilde{v}_{\text{max}}$  — характерное время пролёта электрона около ядра,  $\tilde{\rho}_{\text{min}}$  — минимальное возможное расстояние до ядра для электрона с заданными  $\tilde{E}_{\text{eff}}$  и  $|\tilde{p}_{\varphi}|$ ,  $\tilde{v}_{\text{max}} = [2(\tilde{E}_{\text{eff}} + 1/\tilde{\rho}_{\text{min}})]^{1/2}$  — характерная скорость электрона около ядра. Последний шаг на траектории мог варьироваться, чтобы попасть в точку поворота или в плоскость  $\tilde{z} = 0$ .

## 4. НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ПОЛНОСТЬЮ СВЯЗАННЫХ ТРАЕКТОРИЙ

### 4.1. Старт из точек поворота

Продемонстрируем, что вблизи ядра полностью связанные траектории могут занимать существенно больший фазовый объём, чем свободные траектории. С этой целью сначала укажем область пространственных координат  $\tilde{z}, \tilde{\rho}$ , стартуя из которой строго перпендикулярно магнитному полю, частица с заданной энергией  $\tilde{E} > 0$  окажется связанной при любом направлении поперечной скорости  $\mathbf{v}_{\perp}$ .

Спроецируем точки поворота  $\tilde{p}_z = 0$  (7) всех траекторий с заданными  $\tilde{E}$  и  $\tilde{p}_{\varphi}$  на плоскость  $(\tilde{z}, \tilde{\rho})$ . Проекция образует «полосу» переменной ширины, которая тянется параллельно оси  $\tilde{z}$  от  $-\infty$  до  $+\infty$  и ограничена по координате  $\tilde{\rho}$  (см. рис. 1a). Точки поворота наиболее вытянутого вдоль магнитного поля инвариантного тора проецируются в две линии, зеркально симметричные друг другу относительно прямой  $\tilde{z} = 0$ . Они разделяют проекции точек поворота связанных и «не обязательно связанных» траекторий (т. е. траекторий, часть из которых являются свободными).

Последовательно проецируем на плоскость  $(\tilde{z}, \tilde{\rho})$  точки поворота «не обязательно связанных» траекторий при всех возможных для них значениях  $\tilde{p}_{\varphi}$ :

$$-\infty < \tilde{p}_{\varphi} < \tilde{E}, \quad (29)$$

которые заданы требованием  $\tilde{E}_{\text{eff}} > 0$  (см. (4)). Естественно, часть проекций точек поворота связанных траекторий с некоторым значением  $\tilde{p}_{\varphi}$  будет перекрыта проекциями точек поворота «не обязательно связанных» траекторий с другими  $\tilde{p}_{\varphi}$ . Тем не менее, останется искомая часть плоскости  $(\tilde{z}, \tilde{\rho})$ , в которую не попадает ни одна точка поворота «не обязательно связанных» траекторий. Эта оставшаяся свободной область принадлежит исключительно связанным траекториям (см. рис. 2).

Граница полученной области  $\tilde{z}, \tilde{\rho}$  является угловатой, что отчасти связано с ограниченным набором (25) рассматриваемых чисел вращения инвариантных торов. Однако, даже если расширить набор чисел (25), всё равно следует ожидать сохранения угловатости границы, поскольку число вращения наиболее вытянутого вдоль магнитного поля инвариантного тора, по-видимому,

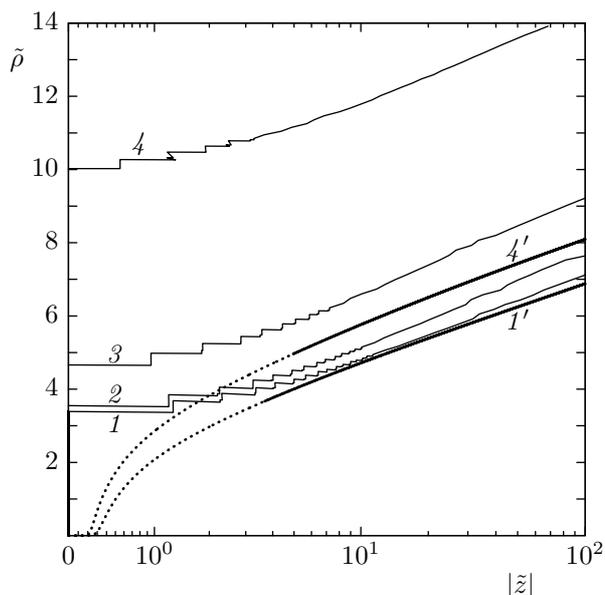


Рис. 2. Координаты  $\tilde{z}$  и  $\tilde{\rho}$  точек, при старте из которых строго перпендикулярно магнитному полю частица оказывается связанной при любом направлении поперечной скорости  $\mathbf{v}_\perp$ . Для энергий  $\tilde{E} = 10^{-2}; 10^{-1}; 10^0$  и  $10^1$  указанные координаты находятся выше и левее линий 1–4 соответственно. Последние получены в результате численного поиска методом Грина наиболее вытянутых вдоль магнитного поля инвариантных торов. Аналитическая аппроксимация границы рассматриваемых точек, полученная на основе формулы (24), прочерчена жирными линиями 1' и 4' для  $\tilde{E} = 10^{-2}$  и  $10^1$  соответственно. Сплошная часть линий 1' и 4' проходит в области  $|\tilde{z}| > \tilde{\rho} > \min[1, \sqrt{2\tilde{E}}]$ , соответствующей ограничению (30) на применимость формулы (24)

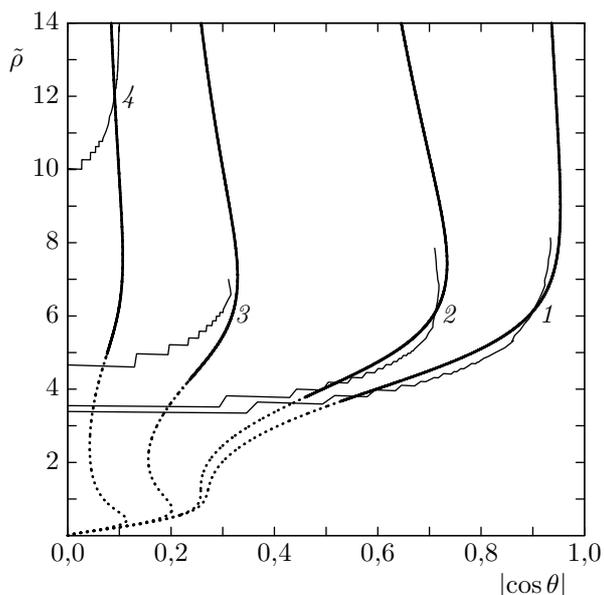


Рис. 3. Питч-углы  $\theta$  и расстояния  $\tilde{\rho}$ , при которых в случае старта из плоскости  $\tilde{z} = 0$  частица оказывается связанной при любом азимутальном направлении поперечной компоненты скорости  $\mathbf{v}_\perp$ . Для энергий  $\tilde{E} = 10^{-2}; 10^{-1}; 10^0$  и  $10^1$  рассматриваемые величины  $|\cos \theta|$  и  $\tilde{\rho}$  связанных частиц находятся выше и левее угловатых линий 1–4 соответственно. Последние получены в результате численного поиска методом Грина наиболее вытянутых вдоль магнитного поля инвариантных торов. Аналитическая аппроксимация (36) границы рассматриваемой области прочерчена соответствующими жирными линиями 1–4. Сплошная часть жирных линий проходит в области, где  $|\tilde{z}_{t \max}| > \tilde{\rho} = \sqrt{2|\tilde{p}_\varphi|} > \min[1, \sqrt{2\tilde{E}}]$ , что соответствует ограничениям (10) и (16) на применимость формул (24) и (36)

меняется скачками при изменении  $\tilde{p}_\varphi$  в окрестности некоторых значений. Внутри и снаружи инвариантного тора формируются области нерегулярного (стохастического) движения, которые поглощают его. Сохранившиеся инвариантные торы находятся вне этих областей на конечном расстоянии от поглощённого тора.

Граница точек поворота связанных траекторий приближённо описывается зависимостью (24), для чего в качестве  $\tilde{\rho}$  следует взять значение  $\sqrt{2|\tilde{p}_\varphi|}$  — характерное расстояние от электрона до оси  $\tilde{z}$ . Наилучшее согласие аналитической оценки и численных расчётов достигается в области (10), (16), где применима формула (24):

$$|\tilde{z}| \gg \tilde{\rho} \gg \max[1, \sqrt{2\tilde{E}}] \tag{30}$$

(см. рис. 2). При сопоставлении аналитических и численных расчётов необходимо учитывать, что точность аналитической оценки составляет величину порядка амплитуды колебаний частицы по  $\tilde{\rho}$

в точке поворота. Данная амплитуда не меньше ларморовского радиуса  $\sqrt{2\tilde{E}}$  и сильно отличается для наименьшей и наибольшей энергий  $\tilde{E} = 10^{-2}$  и  $10^1$  на рис. 2.

Зависимость (24) указывает на логарифмически медленное увеличение  $\tilde{\rho}$  при увеличении расстояния  $|\tilde{z}|$  вдоль границы раздела связанных и «не обязательно связанных» траекторий. Вместе с тем положение границы (24) логарифмически слабо зависит и от энергии  $\tilde{E}$  на расстояниях (30). Таким образом, точки поворота связанных траекторий занимают обширную область на координатной плоскости  $(\tilde{z}, \tilde{\rho})$  при всех энергиях  $\tilde{E} > 0$ .

#### 4.2. Старт из плоскости $\tilde{z} = 0$

Очевидно, что частица станет свободной, если её начальную скорость достаточно сильно отклонить от направления, строго перпендикулярного магнитному полю. Поэтому определим область начальных питч-углов  $\theta$  и удалённостей  $\tilde{\rho}$ , при которых частица с заданной энергией  $\tilde{E}$ , стартуя из плоскости  $\tilde{z} = 0$ , оказывается связанной при любом азимутальном направлении поперечной компоненты скорости  $\mathbf{v}_\perp$  (здесь питч-угол — угол между направлением скорости частицы и магнитным полем).

Наиболее вытянутый вдоль магнитного поля инвариантный тор отсекает в плоскости  $\tilde{z} = 0$  замкнутую область значений  $\tilde{\rho}_\rho, \tilde{\rho}$ , которые принадлежат «не обязательно связанным» траекториям (на рис. 1б эту область ограничивает линия  $\tilde{z}^{(\text{inv})} = 0$ ). Последовательно проецируем указанные области  $\tilde{\rho}_\rho, \tilde{\rho}$  «не обязательно связанных» траекторий в плоскость переменных  $|\cos \theta|, \tilde{\rho}$  для всех возможных моментов импульса (29). Здесь

$$|\cos \theta| = |\tilde{p}_z| / (\tilde{p}_z^2 + \tilde{v}_\perp^2)^{1/2}, \quad (31)$$

импульс  $\tilde{p}_z$  задан формулой (5) при  $\tilde{z} = 0$ , поперечная скорость  $\tilde{v}_\perp = [2\tilde{K}_\perp(\tilde{p}_\rho, \tilde{\rho}; \tilde{p}_\varphi)]^{1/2}$ , энергия поперечного движения  $\tilde{K}_\perp(\tilde{p}_\rho, \tilde{\rho}; \tilde{p}_\varphi)$  определена выражением (8). Оставшаяся свободной от данных проекций область  $|\cos \theta|, \tilde{\rho}$  является искомой и принадлежит исключительно связанным траекториям (см. рис. 3).

Рассматриваемая область параметров  $|\cos \theta|, \tilde{\rho}$  связанных траекторий расширяется с уменьшением энергии электрона  $\tilde{E}$  как по  $|\cos \theta|$ , так и  $\tilde{\rho}$  (см. рис. 3). В результате при малых энергиях  $\tilde{E} \ll 1$  практически все значения  $|\cos \theta|$  соответствуют связанным траекториям в определённом интервале расстояний  $\tilde{\rho}$  (см. далее вывод (37)).

Чтобы пояснить этот эффект, получим приближённую границу рассматриваемой области параметров  $|\cos \theta|, \tilde{\rho}$ , используя неявную зависимость (24) для удалённости  $\tilde{z}_{t \max}(|\tilde{p}_\varphi|)$  точек поворота инвариантного тора. В условиях (10) сильной локализации электрона, когда применима формула (24), электрон движется вдоль магнитного поля согласно уравнению (14). В плоскости  $\tilde{z} = 0$  продольный импульс принимает значение

$$|\tilde{p}_z| = \left( \frac{2}{\sqrt{2|\tilde{p}_\varphi|}} - \frac{2}{\sqrt{2|\tilde{p}_\varphi| + \tilde{z}_{t \max}^2}} \right)^{1/2}. \quad (32)$$

В свою очередь, в точке поворота поперечная скорость равна полной скорости:

$$\tilde{v}_{\perp t} = \tilde{v} = \sqrt{2} \left( \tilde{E} + \frac{1}{\sqrt{2|\tilde{p}_\varphi| + \tilde{z}_{t \max}^2}} \right)^{1/2}, \quad (33)$$

и совпадает со скоростью циклотронного вращения, поскольку скорость электрического дрейфа  $\sqrt{2|\tilde{p}_\varphi|} / (2|\tilde{p}_\varphi| + \tilde{z}_{t \max}^2)^{3/2}$  существенно меньше (33) в условиях (10) и (16) применимости (24).

Вместе с тем, в условиях (10) кулоновская сила слабо меняется в течение циклотронного периода, так что выполняется адиабатическое (дрейфовое) приближение. Следовательно, скорость циклотронного вращения приближённо сохраняется при движении от точки поворота до плоскости  $\tilde{z} = 0$ . Около ядра поперечная скорость электрона складывается из скорости циклотронного вращения (33) и скорости электрического дрейфа

$$\tilde{v}_{\text{dr}} = \frac{1}{\tilde{\rho}^2} = \frac{1}{2|\tilde{\rho}_{\varphi}|}, \quad (34)$$

которая уже может превысить (33). Оценим квадрат поперечной скорости в плоскости  $\tilde{z} = 0$  как сумму квадратов значений из (33) и (34):

$$\tilde{v}_{\perp}^2 = 2 \left( \tilde{E} + \frac{1}{\sqrt{2|\tilde{\rho}_{\varphi}| + \tilde{z}_{\text{t max}}^2}} \right) + \frac{1}{(2|\tilde{\rho}_{\varphi}|)^2}. \quad (35)$$

Подставляем (32) и (35) в определение (31):

$$|\cos \theta| = \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \tilde{z}_{\text{t max}}^2/(2|\tilde{\rho}_{\varphi}|)}} \right)^{1/2} / \left( 1 + \tilde{E} \sqrt{2|\tilde{\rho}_{\varphi}|} + \frac{1/2}{(2|\tilde{\rho}_{\varphi}|)^{3/2}} \right)^{1/2}, \quad (36)$$

где удалённость точки поворота  $\tilde{z}_{\text{t max}}$  является функцией  $|\tilde{\rho}_{\varphi}|$  согласно (24). Выражение (36) описывает искомую границу области параметров  $|\cos \theta|$ ,  $\tilde{\rho}$  связанных траекторий в плоскости  $\tilde{z} = 0$ . Для этого расстояние  $\tilde{\rho}$  приравняем величине  $\sqrt{2|\tilde{\rho}_{\varphi}|}$ . Выражение (36) согласуется с точной границей области параметров связанных траекторий при выполнении условий (10) и (16) своей применимости (см. рис. 3).

### 4.3. Пространственная область, где доминируют связанные траектории

При малой энергии  $\tilde{E} \ll 1$  числитель и знаменатель в (36), а в итоге и  $|\cos \theta|$ , близки к единице в области расстояний

$$1 \ll \tilde{\rho} = \sqrt{2|\tilde{\rho}_{\varphi}|} \ll 1/\tilde{E}. \quad (37)$$

В результате именно в интервале (37) при

$$|\tilde{z}| \ll \min[1/\tilde{E}, \tilde{z}_{\text{t max}}(|\tilde{\rho}_{\varphi}| = \tilde{\rho}^2/2)] \quad (38)$$

связанные траектории занимают существенно больший сектор направлений скоростей, чем свободные траектории. Действительно, кулоновское поле сильно ускоряет вдоль магнитного поля частицы, находящиеся на инвариантном торе, при их движении от точки поворота до области расстояний (37), (38), где продольная скорость становится существенно больше поперечной компоненты (33), а питч-угол  $\theta \ll 1$ . Свободные частицы ускоряются до ещё больших продольных скоростей при движении из бесконечности и в результате занимают узкий интервал питч-углов  $\theta \ll 1$ .

При большой энергии  $\tilde{E} \gg 1$  свободный электрон ускоряется исключительно вдоль магнитного поля, только если движется на расстояниях  $\tilde{\rho}$ , превышающих характерный ларморовский радиус  $\tilde{r}_B = \sqrt{2\tilde{E}}$ . Однако на этих расстояниях кулоновская энергия  $1/\tilde{r}_B \ll 1$  существенно меньше начальной кинетической энергии  $\tilde{E} \gg 1$ , поэтому существенное ускорение не происходит. В результате свободные траектории с  $\tilde{E} \gg 1$  занимают практически все питч-углы на любых расстояниях от ядра.

## 5. ТОРМОЗНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ СВЯЗАННЫХ ЭЛЕКТРОНОВ С ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ЭНЕРГИЕЙ

Пусть двухчастичная функция распределения электронов и ионов в плазме с магнитным полем зависит только от суммарной энергии частиц, включающей энергию их кулоновского взаимодействия. Такая функция распределения реализуется, например, при тепловом равновесии. В такой плазме, удовлетворяющей условию (1), связанные электроны с положительной полной энергией порядка характерной тепловой энергии занимают существенно больший сектор направлений скоростей, чем тепловые свободные частицы, на расстояниях  $\rho = L_u \tilde{\rho}$  и  $z = L_u \tilde{z}$  от ионов, где  $\tilde{\rho}$  и  $\tilde{z}$  определены выражениями (37) и (38):

$$L_u \ll \rho \ll r_s, \quad |z| \ll \min[r_s, z_{t \max}(\rho)]. \quad (39)$$

Здесь  $L_u = (Zmc^2/B^2)^{1/3}$ ,  $r_s = Ze^2/(mv_T^2)$ ,  $z_{t \max} = L_u \tilde{z}_{t \max} \gg \rho$ .

Свободные и связанные тепловые электроны, находящиеся в области расстояний (39), дают тормозное излучение с частотами  $\omega$  порядка обратного времени пролёта около ядра:  $\omega \sim v/\rho \sim \sqrt{Ze^2/m\rho^{-3/2}} = \omega_B (L_u/\rho)^{3/2}$ . Здесь учтено, что на расстояниях (39) скорость электрона  $v \sim \sqrt{Ze^2/(m\rho)}$  определяется ускорением в кулоновском поле и существенно превышает тепловую скорость  $v_T$ . Соответствующие длины волн излучения  $\lambda = 2\pi c/\omega$  попадают в инфракрасный диапазон в случае одиночных магнитных белых карликов:

$$1,1 \left( \frac{B[\text{Гс}]}{10^8} \right)^{-1} < \lambda[\text{мкм}] < 8,1Z \left( \frac{T[\text{К}]}{10^4} \right)^{-3/2}, \quad (40)$$

где нижняя граница для  $\lambda$  соответствует циклотронной частоте  $\omega_B$ , а верхняя — равна  $2\pi r_s c/v_T$ .

В диапазоне (40) излучение связанных электронов с положительной энергией должно превысить тормозное излучение свободных частиц. В свою очередь, расчёты [23] предсказывают, что мощность тормозного излучения свободных частиц уменьшается в диапазоне длин волн (40).

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе показано, что в кулоновском поле неподвижного ядра и однородном магнитном поле реализуются полностью связанные классические траектории электрона с положительной энергией. Такие связанные траектории занимают существенно больший сектор направлений скоростей, чем свободные траектории с той же энергией, в условиях (1) сильного магнитного поля, когда ларморовский радиус электрона меньше характерного прицельного параметра  $r_s$  ближних кулоновских столкновений в отсутствие магнитного поля. Связанные траектории доминируют на расстояниях до ядра меньше  $r_s$ , где характерное время пролёта электрона около ядра ещё остаётся больше периода циклотронного вращения.

Связанные траектории должны определять тормозное излучение плазмы, удовлетворяющей условию (1), на частотах выше характерной обратной длительности  $v_T/r_s$  ближнего кулоновского столкновения в отсутствие магнитного поля, но ниже электронной циклотронной частоты. Необходимые условия реализуются в фотосферах одиночных магнитных белых карликов, при этом указанные частоты излучения приходятся на инфракрасный диапазон длин волн (40).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 11-02-00364) и программы «Происхождение, строение и эволюция объектов Вселенной» Президиума РАН.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rosner W., Wunner G., Herold H., Ruder H. // J. Phys. B. 1984. V. 17. P. 29.
2. Jordan S. // Astron. Astrophys. 1992. V. 265. P. 570.
3. Wickramasinghe D. T., Ferrario L. // Publ. Astron. Soc. Pacific. 2000. V. 112. P. 873.
4. Железняков В. В. Излучение в астрофизической плазме. М.: Янус-К, 1997. § 13.1.
5. Железняков В. В., Корягин С. А., Сербер А. В. // Письма в Астрон. журн. 1999. Т. 25. С. 513.
6. Корягин С. А. // ЖЭТФ. 2000. Т. 117. С. 853.
7. Schmidt G., Kunhardt E. E., Godino J. L. // Phys. Rev. E. 2000. V. 62. P. 7512.
8. Hu B., Horton W., Chiu C., Petrosky T. // Phys. Plasmas. 2002. V. 9. P. 1116.
9. Hu B., Horton W., Petrosky T. // Phys. Rev. E. 2002. V. 65. Art. no. 056212.
10. Correa C. E., Correa J. R., Ordonez C. A. // Phys. Rev. E. 2005. V. 72. Art. no. 046406.
11. Корягин С. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 2008. Т. 51. С. 512.
12. Корягин С. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 2008. Т. 51. С. 682.
13. Beck V. R., Fajans J., Malmberg J. H. // Phys. Rev. Lett. 1992. V. 68. P. 317.
14. Amoretti M., Amsler C., Bonomi G., et al. // Nature. 2002. V. 419. P. 456.
15. Gabrielse G., Bowden N. S., Oxley P., et al. // Phys. Rev. Lett. 2002. V. 89. Art. no. 213401.
16. Friedrich H., Wintgen D. // Phys. Rep. 1989. V. 183. P. 37.
17. Delos J. B., Knudson S. K., Noid D. W. // Phys. Rev. A. 1984. V. 30. P. 1208.
18. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984.
19. Greene J. M. // J. Math. Phys. 1979. V. 20. P. 1183.
20. Lieberman M. A., Lichtenberg A. J. // Plasma Phys. 1973. V. 15. P. 125.
21. Суворов Е. В., Токман М. Д. // Физика плазмы. 1989. Т. 15. С. 934.
22. Forest É. // J. Phys. A. 2006. V. 39. P. 5321.
23. Бубукина И. И., Корягин С. А. // ЖЭТФ. 2009. Т. 135. С. 1056.

Поступила в редакцию 10 ноября 2010 г.; принята в печать 25 февраля 2011 г.

**COMPLETELY BOUNDED MOTION OF A POSITIVE-ENERGY ELECTRON  
IN THE COULOMB FIELD OF A MOTIONLESS NUCLEUS  
AND HOMOGENEOUS MAGNETIC FIELD**

*S. A. Arsenyev and S. A. Koryagin*

It is shown that the completely bounded classical motion of a positive-energy electron is realized in the Coulomb field of a motionless nucleus and homogeneous magnetic field. Such a motion exists due to conservation of the so-called invariant tori in the phase space of the system not only for the negative but also for the positive energy of an electron. The completely bounded trajectories occupy a significantly larger segment of the velocity directions compared with free trajectories of the same energy in such a range of distances from the nucleus in which the characteristic time of the electron transit near the nucleus is larger than the cyclotron-gyration period, while the negative energy of Coulomb interaction is larger (by the absolute value) than the total electron energy. The indicated range of distances is realized in the case of low electron energy or strong magnetic field when the Larmor radius of the electron is smaller than the characteristic impact parameter of the close Coulomb collisions in the absence of magnetic field. The required conditions are realized in the photospheres of isolated magnetic white dwarfs and the experiments on antihydrogen creation.