МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Известия высших учебных заведений

РАДИОФИЗИКА

ежемесячный научно-технический журнал

Издаётся с апреля 1958 г.

Том XLVIII № 6 **Нижний Новгород** **2005**

Содержание

УДК 550.388.2

НАКЛОННОЕ ЗОНДИРОВАНИЕ И МОДЕЛИРОВАНИЕ ИОНОСФЕРНОГО КОРОТКОВОЛНОВОГО КАНАЛА

Г. Г. Вертоградов [1], *В. П. Урядов* [2], *В. Г. Вертоградов* [1]

[1] Ростовский госуниверситет, г. Ростов-на-Дону;
[2] Научно-исследовательский радиофизический институт, г. Нижний Новгород, Россия

Представлены результаты экспериментальных исследований дистанционно-частотных и амплитудно-частотных характеристик ионосферного коротковолнового канала на среднеширотных трассах наклонного зондирования сигналом с линейной частотной модуляцией (ЛЧМ). Показано, что максимальные наблюдаемые частоты (МНЧ) подвержены короткопериодическим вариациям с квазипериодами от 30 минут до 2 часов. Амплитуда вариаций МНЧ достигает 2 МГц, а на односкачковой трассе Кипр—Ростов-на-Дону в восходно-заходные часы амплитуда вариаций может увеличиваться до $5\div 8$ МГц. Установлено, что флуктуации МНЧ сопровождаются появлением на верхних лучах характерных особенностей в виде «серпов», перемещающихся со временем в область меньших задержек, т. е. с низких на высокие частоты. Амплитудно-частотные характеристики отдельных мод распространения испытывают глубокие флуктуации (до $20\div 30$ дБ), квазипериод и глубина которых зависят от частоты. Показано, что возникновение флуктуаций обусловлено интерференцией неразделённых лучей в пределах одной моды распространения. На основе моделирования показано, что «серпы» на ионограммах наклонного зондирования обусловлены влиянием перемещающихся ионосферных возмущений (ПИВ). Сделаны оценки параметров ПИВ. Показано, что условия образования «серпов» на дистанционно-частотных характеристиках зависят от амплитуды ПИВ, длины волны возмущения и направления его фазового фронта относительно трассы распространения. Обнаружен эффект квазирегулярной частотной модуляции моды Педерсена с периодом $250\div 300$ кГц на трассе ЛЧМ-зондирования Кипр—Ростов-на-Дону. Сделана оценка высотного расслоения ионосферы вблизи максимума F-слоя, ответственного за фокусировку и дефокусировку моды Педерсена. Установлено, что масштаб стратификации составляет приблизительно $200\div 250$ м.

ВВЕДЕНИЕ

Развитие узкополосных и широкополосных систем связи, пеленгации в диапазоне коротких волн, а также систем спутниковой навигации предполагает совершенствование не только технических, аппаратных и алгоритмических решений, но и развитие средств диагностики, прогнозирования и моделирования каналообразующей среды—ионосферы. В то же время информация о качестве той или иной ионосферной модели может быть получена только на основе сопоставления результатов моделирования с экспериментальными характеристиками коротковолнового радиоканала, полученными при вертикальном и наклонном зондировании ионосферы. Для диагностики состояния ионосферы на больших площадях метод вертикального зондирования обладает ограниченными возможностями. В этом отношении метод наклонного зондирования имеет существенное преимущество, поскольку даже при приёме в одной пространственной точке этот способ диагностики даёт информацию о состоянии среды распространения коротких волн на большой территории. При этом такая информация может быть получена в пассивном режиме на основе приёма сигналов международной и российской сети станций наклонного ЛЧМ-зондирования ионосферы [1].

Отметим, что оба подхода не исключают, а дополняют друг друга, т. к. для расчёта и прогнозирования радиолиний, решения задач однопозиционного местоопределения недостаточно знать только вертикальное распределение электронной концентрации в ионосфере в точке приёма или передачи. Многие характеристики распространения (углы прихода и излучения в вертикальной и горизонтальной плоскостях, пространственное ослабление, фазовая и групповая задержка сигнала и т. д.) существенно зависят от горизонтальной глобальной неоднородности ионосферы, обусловленной движением солнечного терминатора, а также от стохастических среднемасштабных неоднородностей волновой природы, например перемещающихся ионосферных возмущений (ПИВ).

Для детектирования ПИВ применяются различные методы, в том числе вертикальное зондирование, измерения с помощью искусственных спутников Земли, доплеровские измерения и др. (см. [2] и цитируемую там литературу). В последние годы для исследования ПИВ используется метод наклонного зондирования сигналом с линейной частотной модуляцией (ЛЧМ-зондирование) [3]. При оценке параметров ПИВ и прогнозе их влияния на характеристики коротковолновых сигналов важную роль играет моделирование ионосферного канала в спокойной и возмущённой ионосфере [4]. При этом сопоставление экспериментальных и расчётных данных позволяет получать информацию о ключевых параметрах ПИВ, необходимых как для выяснения физической природы тех или иных возмущений, так и при создании адекватной модели ионосферного канала, используемой при разработке перспективных систем коротковолновой радиосвязи.

В работе представлены результаты моделирования ионосферного коротковолнового канала на основе экспериментальных данных по приёму сигналов ЛЧМ-зондирования, полученных на трёх среднеширотных радиотрассах различной протяжённости и ориентации: Кипр—Ростов-на-Дону (протяжённость 1 400 км, географический азимут 203,2°), Инскип (Великобритания)—Ростов-на-Дону (3 000 км, 300°), Хабаровск—Ростов-на-Дону (6 600 км, 49,8°). Серия экспериментов, анализируемая в данной работе, охватывает период с 2002 по 2004 год, причём на первых двух трассах измерения проводились круглосуточно с интервалом съёма ионограмм 5 минут. На последней трассе измерения велись в течение 5–7 дней каждого сезона круглосуточно с интервалом 15 минут. Приёмный пункт располагался в г. Ростов-на-Дону.

1. ПРИЁМ И ОБРАБОТКА СИГНАЛА С ЛИНЕЙНОЙ ЧАСТОТНОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ

Использовался ЛЧМ-зонд, построенный на основе радиоприёмного устройства «Катран» Р-399А. Скорость перестройки частоты составляла 100 кГц/с. Временна́я синхронизация старта приёма ЛЧМ-сигнала осуществлялась с помощью навигационной системы GPS с точностью не хуже 10 мкс. Разностный сигнал оцифровывался с выхода промежуточной частоты (215 кГц) 14-разрядным аналого-цифровым преобразователем с частотой дискретизации 50 кГц, что значительно превышало используемую полосу пропускания приёмника (3 000 Гц). Дальнейшие преобразования сигнала и его обработка осуществлялись в цифровой форме. Обработка включала следующие шаги. Сигнал подвергался процедурам переноса на нулевую частоту с получением квадратурных компонент (комплексная низкочастотная огибающая), низкочастотной фильтрации цифровым фильтром с полосой пропускания 500 Гц, децимации с понижением частоты дискретизации до 3 000 Гц. Как следствие, описанная процедура увеличивала динамический диапазон анализа не менее чем на 10 дБ. Далее обработка осуществлялась на основе применения алгоритмов быстрого преобразования Фурье и предполагала получение дистанционно-частотных и амплитудно-частотных характеристик исследуемых радиотрасс. Полоса анализа разностного сигнала составляла при этом 65 кГц, что обеспечивало временно́е разделение мод и лучей распространения с разрешением не хуже 15 мкс. Примеры полученных дистанционно-частотных и амплитудно-частотных характеристик разделённых мод и лучей распространения для трассы Кипр—Ростов-на-Дону показаны на рис. 1 и 2 (время на ионограммах московское). Отметим,

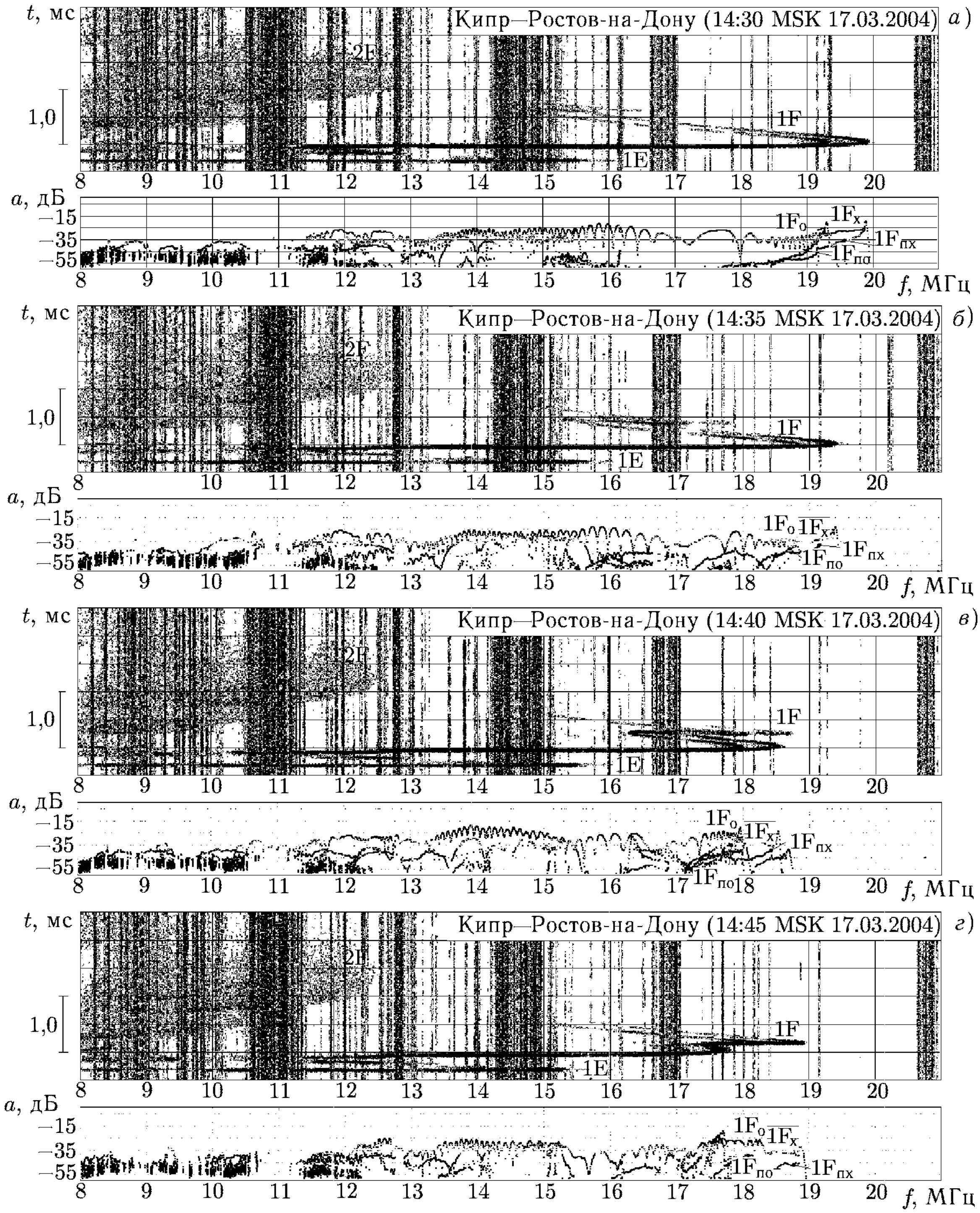


Рис. 1. Примеры дистанционно-частотных характеристик (верхняя часть каждой пары рисунков) и амплитудно-частотных характеристик (нижняя часть каждой пары рисунков) при наличии ПИВ на трассе зондирования

что дистанционно-частотные характеристики на этих рисунках растянуты по оси задержек до 3 мс, чтобы показать детали возникновения и развития характерных особенностей в виде «серпов», обусловленных ПИВ. Амплитудно-частотные характеристики в процессе обработки приво-

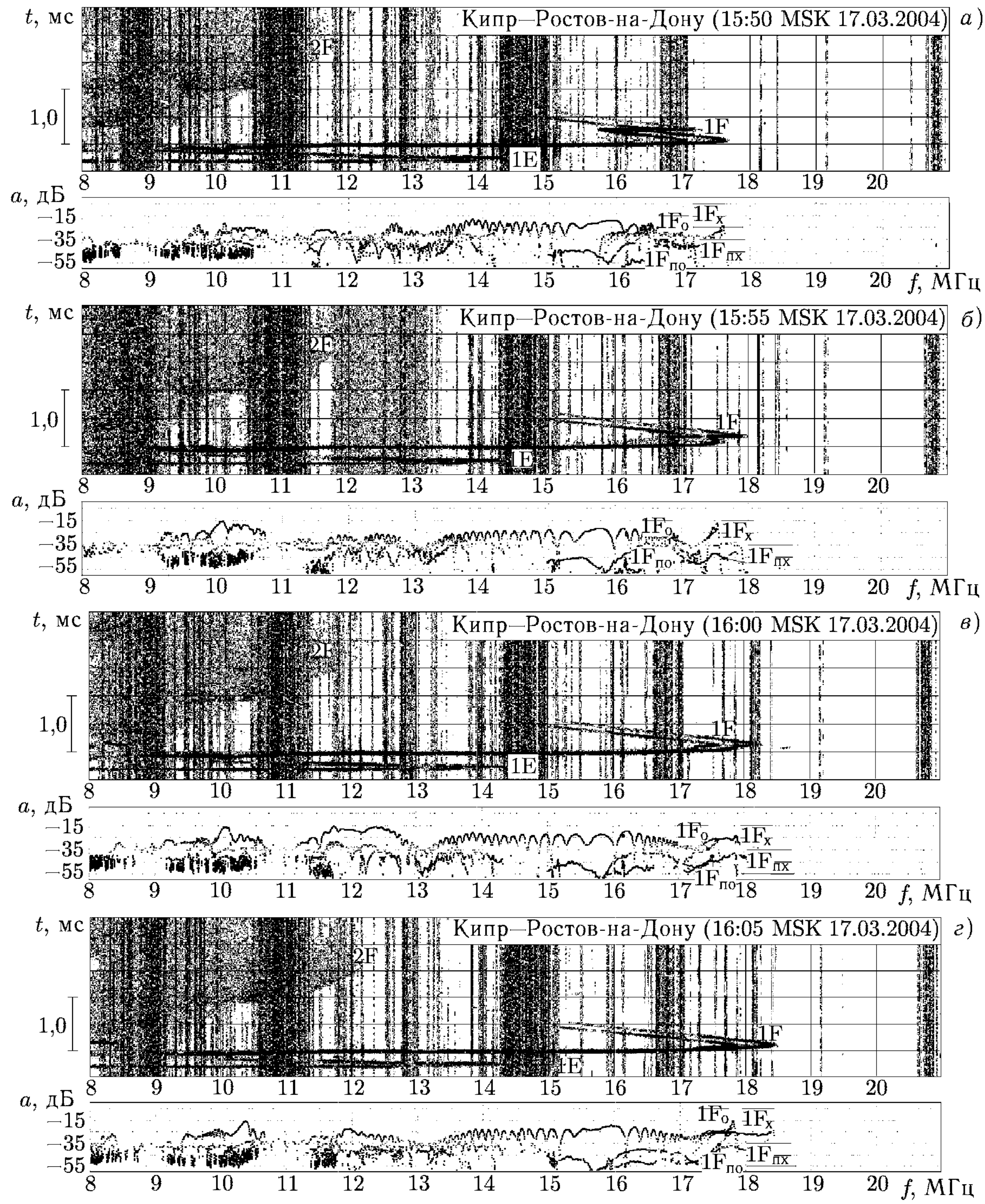


Рис. 2. Примеры дистанционно-частотных характеристик (верхняя часть каждой пары рисунков) и амплитудно-частотных характеристик (нижняя часть каждой пары рисунков) при наличии ПИВ на трассе зондирования

дились к максимальной разрядности аналого-цифрового преобразователя, т. е. 0 дБ соответствует оцифровке синусоидального сигнала с амплитудой, равной максимальной разрядности преобразователя. Отметим также, что амплитуда разделённых лучей определялась интегрированием спектральной плотности мощности разностного сигнала по окрестности максимумов в спектре, ограниченной ближайшими минимумами слева и справа. Эта операция позволяла достичь существенно большей точности измерения амплитуд парциальных лучей, чем использование значения амплитуды в максимуме спектральной плотности.

Дальнейшая обработка дистанционно-частотных и амплитудно-частотных характеристик исследуемых радиотрасс преследовала следующие цели:

1) Получение суточных вариаций максимальной наблюдаемой частоты (МНЧ) отдельных мод распространения.

2) Получение усреднённых среднемесячных суточных изменений МНЧ отдельных мод распространения.

3) Сопоставление усреднённых среднемесячных значений МНЧ с прогнозируемыми величинами на основе Международной справочной модели ионосферы IRI-2001 [5].

4) Анализ мелкомасштабных временны́х вариаций МНЧ.

5) Анализ формы дистанционно-частотных характеристик и их вариаций под влиянием ПИВ.

6) Анализ формы амплитудно-частотных характеристик отдельных мод распространения и сопоставление экспериментальных зависимостей с результатами моделирования.

2. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ НАБЛЮДЕНИЙ

Примеры полученных вариаций суточных изменений МНЧ по всем наблюдаемым модам распространения показаны на рис. 3 для трассы Кипр—Ростов-на-Дону, на рис. 4 и 5 для трассы Инскип—Ростов-на-Дону и на рис. 6 для трассы Хабаровск—Ростов-на-Дону. Условия измерений приведённых характеристик распространения показаны на рисунках. При этом сплошной линией с квадратами изображены суточные изменения МНЧ, полученные усреднением за несколько дней наблюдения. Моды, которым соответствуют приведённые кривые, обозначены на рисунках 1F, 2F, 3F и т. д. На рис. 3 и 4 тонкими линиями показаны вариации мгновенных значений МНЧ в различные дни наблюдений для иллюстрации быстрых флуктуаций МНЧ под влиянием ПИВ. На рис. 5 и 6 вертикальными линиями показаны среднеквадратические отклонения МНЧ за период усреднения. По оси абсцисс отложено время суток.

Полученные кривые сравнивались с результатами расчётов с использованием модели IRI-2001. Модельные расчёты выполнены в двух вариантах:

1) Прогноз суточных изменений максимальной применимой частоты (МПЧ) для всех мод распространения. Соответствующие значения показаны на рисунках треугольниками.

2) Прогноз суточных изменений МПЧ на основе скорректированной модели IRI-2001. Для коррекции использовались эффективные значения W_{eff} числа солнечных пятен (T-index) [6]. Значения W_{eff} для каждого сеанса измерений приведены в подписи к рисункам. Полученные таким образом прогнозируемые МПЧ изображены на рисунках крестиками.

На основе проведённых двухлетних измерений по результатам обработки можно сделать следующие выводы.

1) Значения МНЧ отдельных мод распространения испытывают короткопериодические вариации с квазипериодами от 30 минут до 2 часов. Отметим здесь, что вариации МНЧ с такими периодами наблюдались на среднеширотных трассах наклонного зондирования Инскип—Москва и Кипр—Москва [7]. Амплитуда флуктуаций может достигать в спокойных ионосферных условиях в полуденные часы 2 МГц, в восходно-заходные часы при прохождении терминатора флуктуации на трассе Кипр—Ростов-на-Дону могут увеличиваться до 5÷8 МГц.

2) Флуктуации МНЧ сопровождаются появлением на дистанционно-частотных характеристиках характерных особенностей в виде «серпов», которые появляются на верхних лучах мод

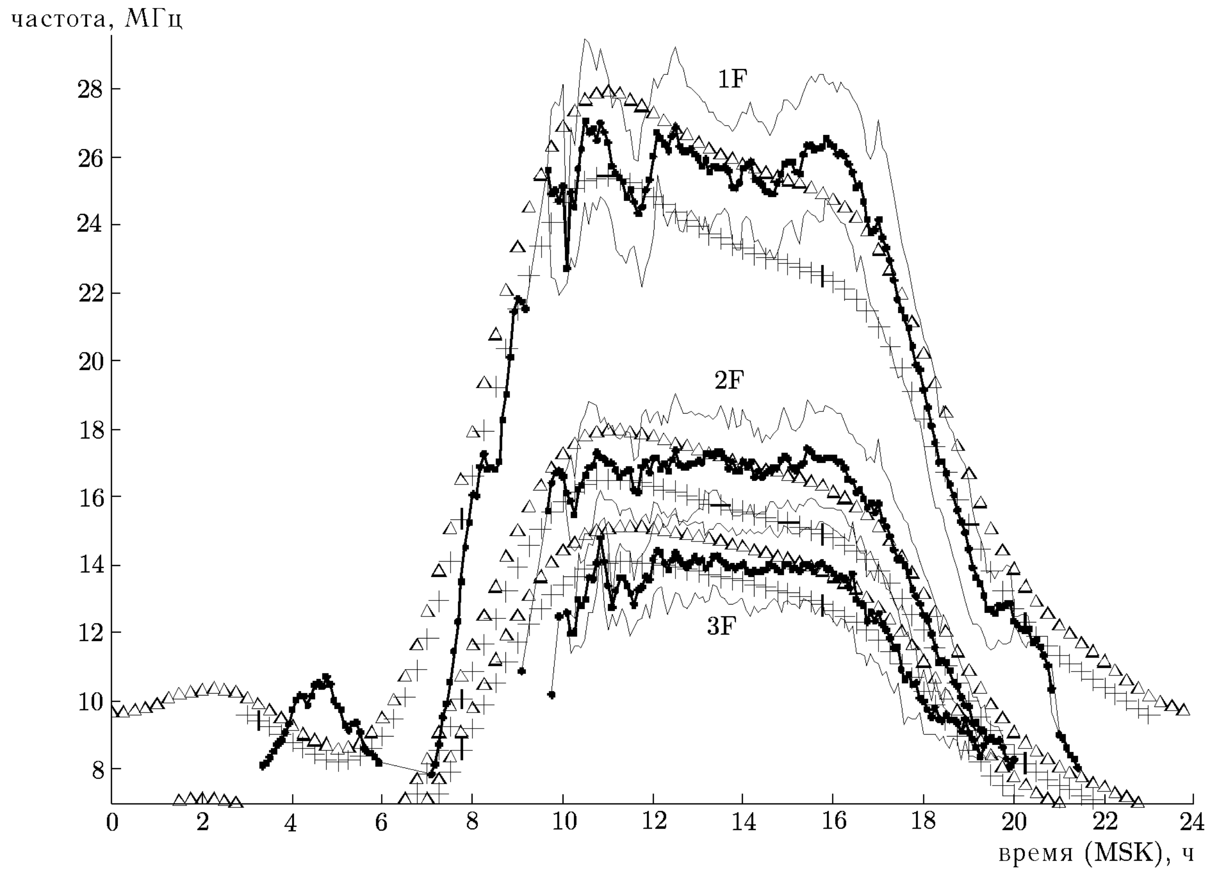


Рис. 3. Суточный ход МНЧ на трассе Кипр—Ростов-на-Дону в период с 1 по 28 ноября 2002 года для различных мод распространения: ■ — эксперимент (среднее по всем дням), тонкие линии — вариации МНЧ за отдельные дни наблюдений, △ — прогноз МПЧ по модели IRI-2001, + — прогноз МПЧ с коррекцией числа солнечных пятен $W_{\text{eff}} = 118$

распространения и медленно спускаются в область меньших задержек. Флуктуации частоты на дистанционно-частотных характеристиках в области образования «серпов» могут достигать 3 МГц (см. рис. 1 и 2). Эти особенности наблюдались в любые часы суток на всех трассах, на которых проводились измерения, но наиболее часто и с максимальными амплитудами «серпы» возникали на односкачковых трассах Кипр—Ростов-на-Дону и Инскип—Ростов-на-Дону в восходно-заходные часы при прохождении терминатора. Например, рис. 1 и 2 соответствуют полуденным часам ($14:00 \div 16:05$ LT). Далее на основе моделирования будет показано, что «серпы» на ионограммах наклонного зондирования обусловлены движением ПИВ. При меньших амплитудах ПИВ на дистанционно-частотных характеристиках наблюдаются изломы и ступеньки различной амплитуды.

3) На ионограммах следы односкачковых мод распространения (трассы Кипр—Ростов-на-Дону и Инскип—Ростов-на-Дону), как правило, не имеют признаков диффузных отражений и выглядят как тонкие линии, толщина которых сопоставима с релеевским пределом спектрального анализа. Следы кратных мод имеют признаки диффузных отражений, что, видимо, обусловлено рассеянием при отражении от неровной поверхности Земли. Последнее утверждение подтверждается наблюдениями на трассе Кипр—Ростов-на-Дону. Здесь область прихода первого скачка для двухскачковой моды попадает на границу суша—море (черноморское побережье Турции). Как правило, мода 2F на этой трассе имеет ярко выраженные признаки диффузности (см. рис. 1 и 2), что, видимо, связано с рассеянным отражением от гористой земной поверхности. В то же время

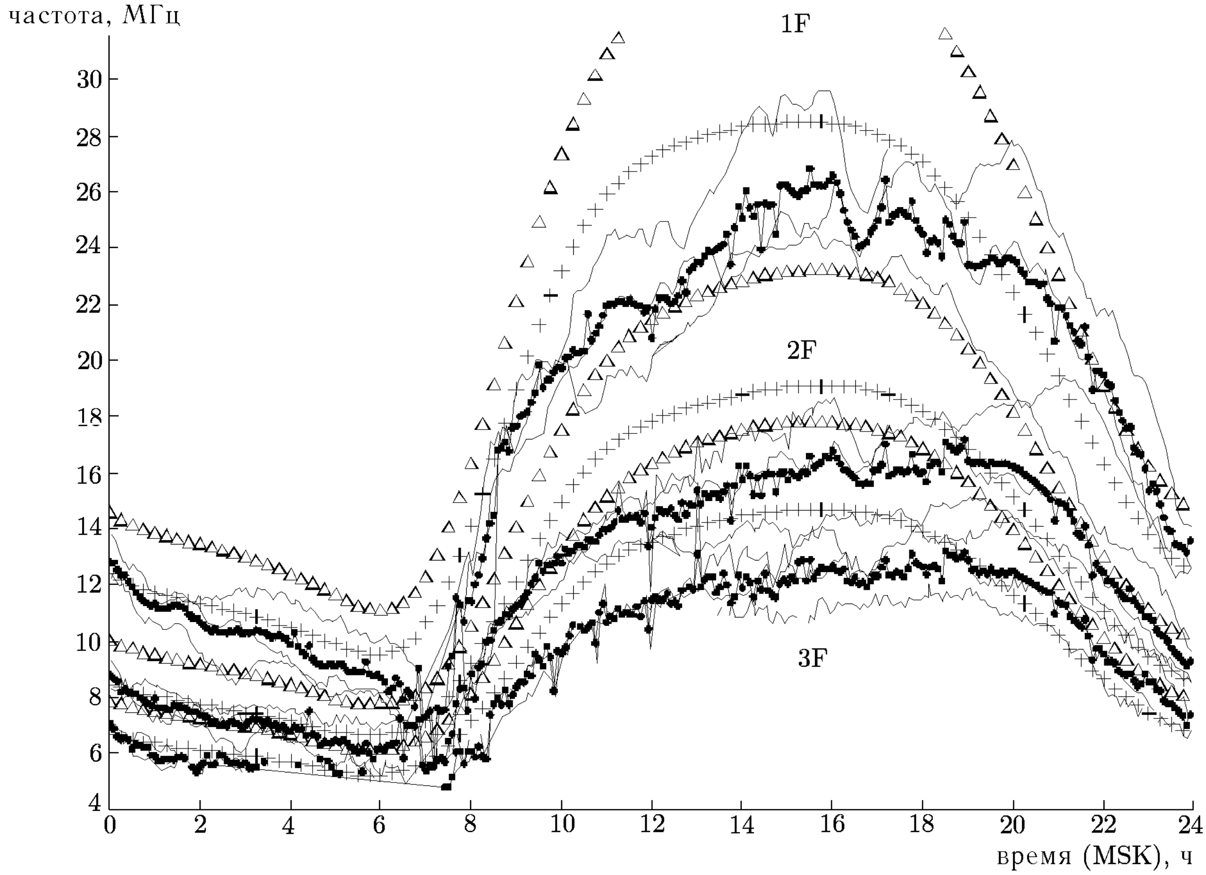


Рис. 4. Суточный ход МНЧ на трассе Инскип—Ростов-на-Дону в период с 11 по 14 марта 2003 года для различных мод распространения: ■ — эксперимент (среднее по всем дням), тонкие линии — вариации МНЧ за отдельные дни наблюдений, △ — прогноз МПЧ по модели IRI-2001, + — прогноз МПЧ с коррекцией числа солнечных пятен $W_{\mathrm{eff}} = 80$

иногда на непродолжительное время появляется четкий след моды 2F, который выглядит так же, как для моды 1F. Последнее, видимо, является следствием отражения от морской поверхности. Такое явление не наблюдалось на трассах Хабаровск—Ростов-на-Дону и Инскип—Ростов-на-Дону, где кратные моды всегда имеют признаки диффузных отражений, причём степень диффузности возрастает с ростом порядка моды.

4) Амплитудно-частотные характеристики отдельных мод распространения испытывают глубокие флуктуации (до 20÷30 дБ). Квазипериод и глубина флуктуаций зависят от частоты. Возникновение флуктуаций может быть объяснено интерференцией неразделённых лучей в пределах одной моды распространения. В этом случае глубина флуктуаций будет определяться соотношением амплитуд лучей, а квазипериод — разностью групповых задержек. Как известно, с точностью до линейных членов зависимость фазы распространяющейся моды от времени t и частоты ω может быть представлена в виде

$$\varphi(t,\omega) = \varphi_0 + \frac{\partial\varphi}{\partial t}\,\Delta t + \frac{\partial\varphi}{\partial\omega}\,\Delta\omega = \varphi_0 - 2\pi\,\delta f\,\Delta t + \tau\,\Delta\omega, \tag{1}$$

где φ_0 — начальная фаза, δf — доплеровское смещение частоты, τ — групповая задержка. Из (1) видно, что квазипериод амплитудных флуктуаций определяется разностью групповых задержек неразделённых парциальных лучей. Очевидно, что там, где групповые задержки лучей

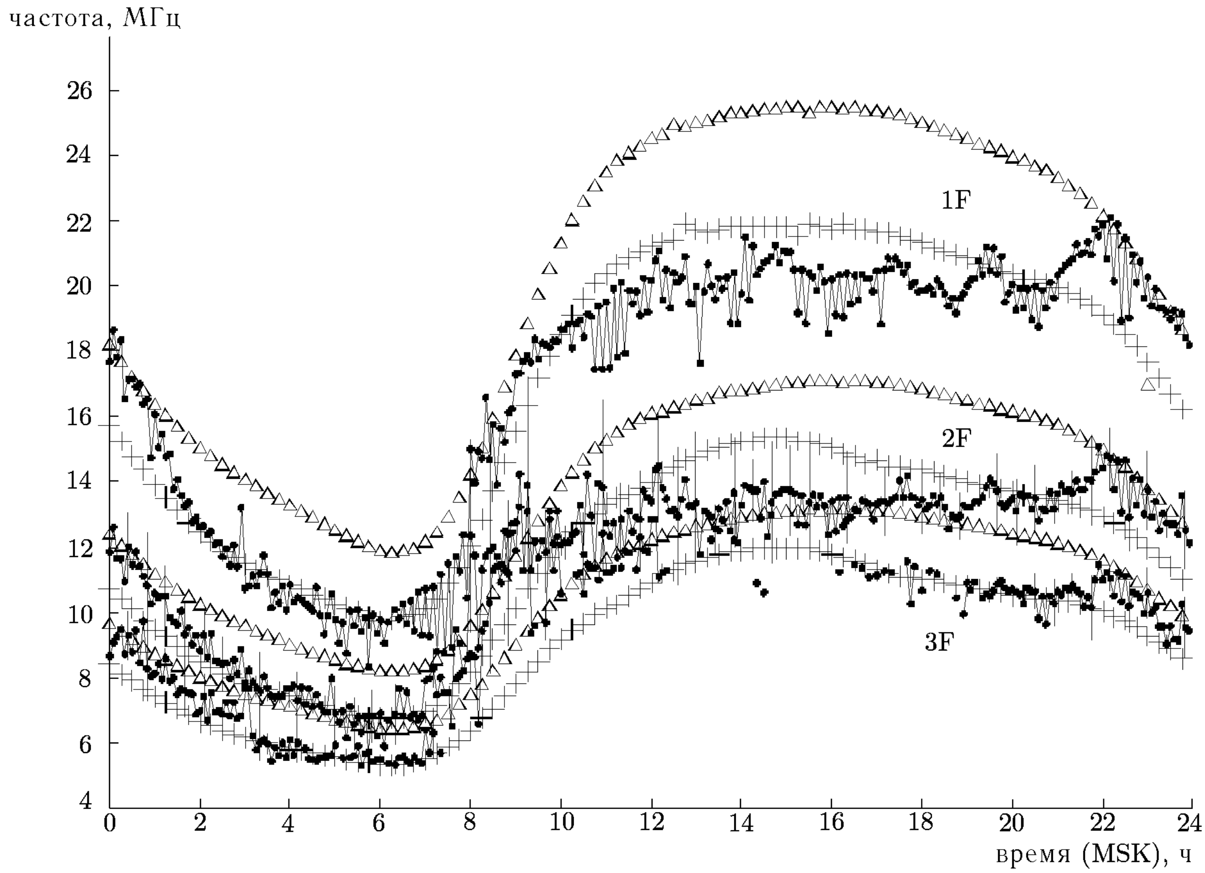


Рис. 5. Суточный ход МНЧ на трассе Инскип—Ростов-на-Дону в период с 2 по 12 сентября 2003 года для различных мод распространения: ■ — эксперимент (среднее по всем дням), вертикальные линии — среднеквадратическое отклонение МНЧ, △ — прогноз МПЧ по модели IRI-2001, + — прогноз МПЧ с коррекцией числа солнечных пятен $W_{\rm eff} = 61$

совпадают, будут иметь место нулевые биения, т. е. период флуктуаций резко увеличится, что и наблюдается в области пересечения дистанционно-частотных характеристик магнитоионных компонент на рис. 1 и 2. В области, где магнитоионные компоненты разделяются и остаётся только след необыкновенной волны, интерференционные флуктуации амплитудно-частотных характеристик практически исчезают (однолучевое распространение). В окрестности мертвой зоны на амплитудно-частотных характеристиках парциальных лучей наблюдается эффект фокусировки. Величина фокусировки может достигать 10 дБ. Аналогичный эффект имеет место в окрестности «носиков» серпообразных особенностей на дистанционно-частотных характеристиках.

Подобное регулярное поведение амплитудно-частотных характеристик отдельных мод и лучей распространения может служить доказательством доминирующего механизма распространения в виде дискретных лучей (зеркальных компонент). Причём случайный вклад в начальную фазу в (1) за счёт мелкомасштабной структуры ионосферы оказывается мал и не существенен. В противном случае на амплитудно-частотных характеристиках должны наблюдаться высокочастотные случайные флуктуации. Именно так выглядит амплитудно-частотная характеристика кратных мод распространения. На рис. 1 и 2 моде 2F соответствует полоса частот $8\div 12{,}5$ МГц с амплитудами $-(50\div 45)$ дБ, где отчётливо видны случайные изменения амплитуды принимаемого сигнала. В то же время над амплитудно-частотной характеристикой моды 2F виден узкий медленно и регулярно меняющийся след, образованный отражением от слоя E ионосферы, что

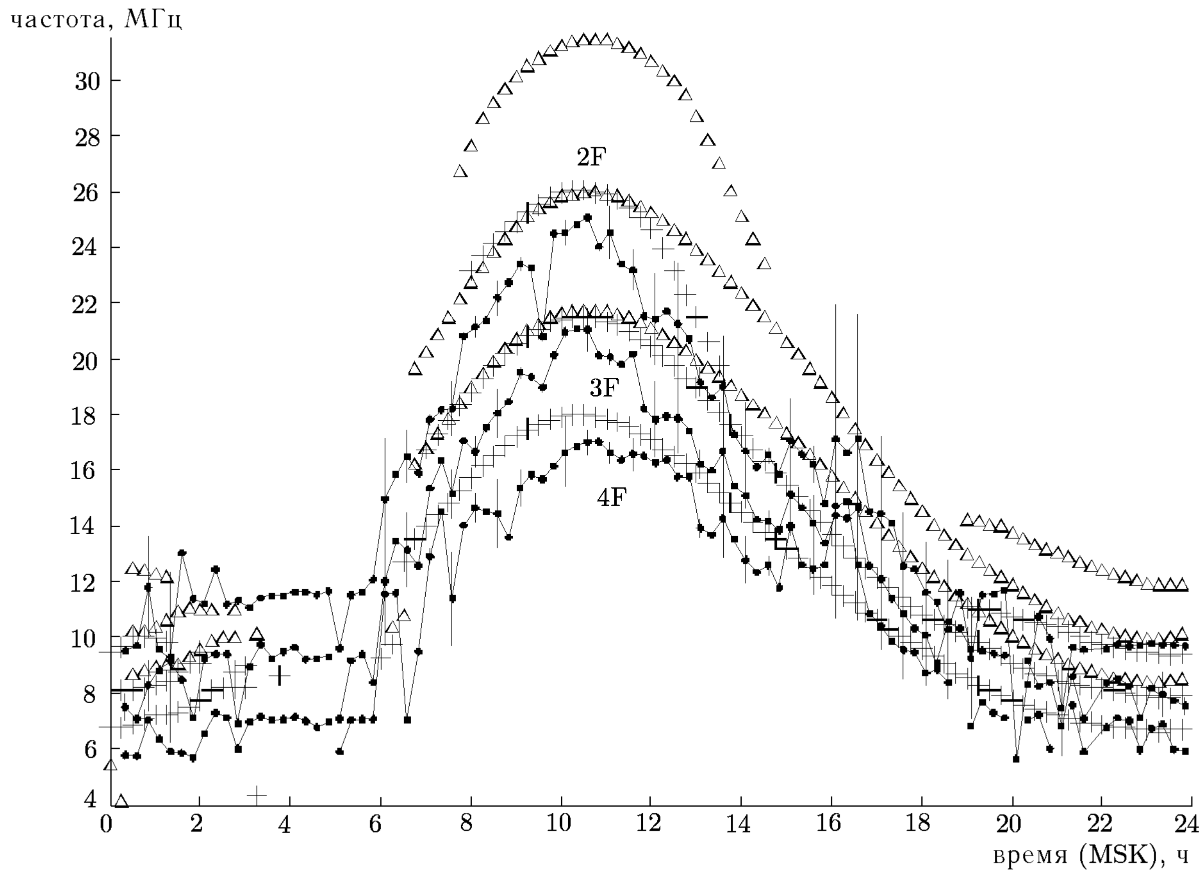


Рис. 6. Суточный ход МНЧ на трассе Хабаровск—Ростов-на-Дону в период с 10 по 13 марта 2004 года для различных мод распространения: ■ — эксперимент (среднее по всем дням), вертикальные линии — среднеквадратическое отклонение МНЧ, △ — прогноз МПЧ по модели IRI-2001 (сверху вниз: для мод 2F, 3F, 4F), + — прогноз МПЧ с коррекцией числа солнечных пятен $W_{\rm eff} = 45$

соответствует интерференции неразделённых магнитоионных компонент (зеркальное отражение) с близкими групповыми задержками.

3. МОДЕЛИРОВАНИЕ

Для интерпретации полученных экспериментальных результатов и подтверждения высказанных предположений выполнено имитационное моделирование рассмотренных трасс наклонного зондирования на основе траекторных расчётов с использованием имитационной модели широкополосного ионосферного радиоканала [8, 9]. В основе моделирования лежит решение расширенной системы характеристических уравнений в ионосфере, заданной Международной справочной моделью IRI-2001 [5]. При этом ионосферные столкновительные потери рассчитывались на основе приближения Эпплтона с эффективной частотой соударений, найденной по прогнозируемым IRI-2001 концентрациям ионов и электронов [10] с привлечением модели нейтральной атмосферы MSIS-90.

Расчёты МПЧ отдельных мод распространения показали (см. рис. 3–6), что модель IRI-2001, как правило, даёт завышенные результаты. Причём это обстоятельство проявляется тем значительнее, чем протяжённее трасса. Таким образом, модель IRI-2001 требует адаптации к текущей геофизической обстановке. В качестве обобщённой геофизической информации были привлечены

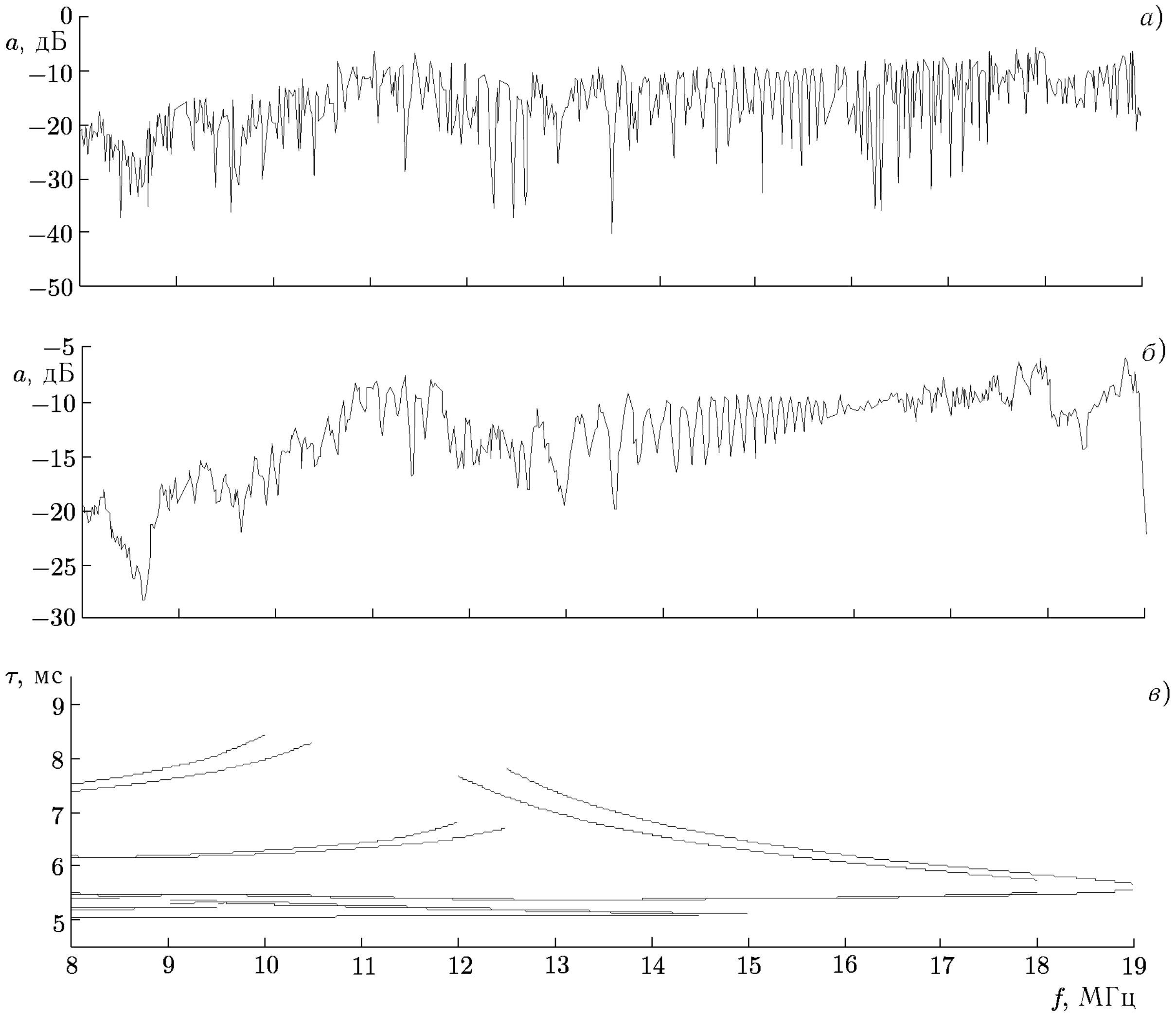


Рис. 7. Модельные амплитудно-частотные характеристики при когерентном сложении всех лучей (*а*), при сглаживании по ширине окна спектрального анализа 65 кГц (*б*) и дистанционно-частотные характеристики (*в*) трассы Кипр—Ростов-на-Дону для условий, соответствующих 17 марта 2004 года ($W_{\text{eff}} = 58$)

данные об эффективном числе солнечных пятен W_{eff} [6]. Результаты моделирования показали, что при этом удаётся значительно приблизить прогнозируемые значения к измеренным на трассах всех протяжённостей и ориентаций для всех рассмотренных сезонов и уровней солнечной активности (рис. 3–6, крестики). Это позволяет рекомендовать использовать прогнозируемое или текущее значение W_{eff} в качестве уровня солнечной активности при долгосрочном или краткосрочном прогнозировании характеристик распространения на основе модели IRI-2001.

Для интерпретации наблюдаемых амплитудно-частотных характеристик выполнен их расчёт для условий измерений, соответствующих рис. 1 и 2. Полученные зависимости приведены на рис. 7, при этом рассчитывались все моды и лучи распространения.

На рис. 7*а* показана расчётная суммарная амплитудно-частотная характеристика трассы Кипр—Ростов-на-Дону при когерентном сложении всех лучей, формирующих суммарное поле в точке приёма. Как видно, эта зависимость качественно вполне отражает поведение измеренных характеристик, показанных на рис. 1 и 2. Так же, как в эксперименте, на модельной амплитудно-частотной характеристике наблюдаются глубокие быстрые флуктуации амплитуды суммарного поля сигнала. У границ мёртвой зоны виден эффект фокусировки. Основное отличие модельной амплитудно-частотной характеристики от экспериментальных состоит в том, что при её получении когерентно сложены все интерферирующие лучи (экспериментальные характеристики получены при частичном разделении мод и лучей распространения), как следствие, модельные флуктуации амплитуд более глубокие. Отметим также, что экспериментальные амплитудно-частотные характеристики получены сглаживанием по полосе 65 кГц — ширине окна спектрального анализа. В связи с этим была найдена ещё одна модельная зависимость — амплитудно-частотная характеристика, сглаженная по полосе 65 кГц. График этой характеристики показан на рис. 7*б*. Как видно, после частотного сглаживания качественно модельная амплитудно-частотная характеристика канала ещё в большей степени приближена к экспериментальным зависимостям. Вместе с тем по сравнению с экспериментальными данными модельные амплитудно-частотные характеристики в области низких частот (до 10 МГц) имеют большие (по отношению к высокочастотной части) амплитуды, что, по-видимому, связано с пониженным теоретическим значением поглощения моды 1E. Это обстоятельство косвенно свидетельствует о том, что модель IRI-2001 занижает электронную концентрацию в нижней ионосфере (в D-области). Следовательно, при прогнозировании ионосферного радиоканала, модель IRI-2001 желательно корректировать в области D ионосферы по значениям эмпирического поглощения, полученным, например, при вертикальном зондировании на частоте 2,2 МГц [11, 12].

На рис. 8 показаны модельные дистанционно-частотные характеристики, рассчитанные с учётом ПИВ [8, 9]. При этом перемещающиеся ионосферные возмущения моделировались модуляцией средней электронной концентрации $N_0(\varphi,\theta,r,t)$ гармонической волной. Мгновенная электронная концентрация в возмущённой ионосфере в точке со сферическими координатами φ, θ, r (r — расстояние от центра Земли, θ отсчитывается от оси, проходящей через северный полюс, φ — долгота места) в момент времени t имела вид

$$N(\varphi,\theta,r,t) = N_0(\varphi,\theta,r,t)\left(1+\delta\cos\left(k_r\,\Delta r + k_\theta r_0\,\Delta\theta + k_\varphi r_0 \sin\theta\,\Delta\varphi - \frac{2\pi}{T}\,t + \Phi_0\right)\right), \qquad (2)$$

где r_0 — радиус Земли, δ — относительная амплитуда возмущения, T — период ПИВ, Φ_0 — начальная фаза, $\{k_\varphi = (2\pi/\Lambda)\cos\beta\sin\alpha, k_\theta = (2\pi/\Lambda)\cos\beta\cos\alpha, k_r = (2\pi/\Lambda)\sin\beta\}$ — волновой вектор ПИВ с длиной волны Λ, углы α и β задают направление фазовой скорости волнового возмущения, $\Delta\varphi$ и $\Delta\theta$ — изменения сферических координат относительно точки излучения. При моделировании в (2) выбраны следующие параметры: относительная амплитуда $\delta = 20\,\%$, период $T = 15$ минут, длина волны $\Lambda = 150$ км, волновое возмущение распространяется вдоль трассы сверху вниз под углом $\beta = -60^\circ$ к горизонту с юга на север. На модельных дистанционно-частотных характеристиках, показанных на рис. 8, отчётливо видны «серпы», спускающиеся сверху в область меньших задержек, как и на измеренных характеристиках (см. рис. 1 и 2). Это подтверждает сделанное предположение о природе наблюдаемых особенностей в виде «серпов» на дистанционно-частотных характеристиках. В то же время моделирование показало, что условия образования «серпов» на дистанционно-частотных характеристиках достаточно жёсткие и зависят от относительной амплитуды ПИВ, длины волны возмущения и направления его распространения относительно ориентации радиотрассы. Это согласуется с данными [3], где также отмечено существенное влияние наклона фазового фронта ПИВ на условия формирования дистанционно-частотных характеристик в окрестности МНЧ. Например, на рис. 7*в* параметры ПИВ в (2) были следующие: амплитуда $\delta = 7\,\%$, длина волны $\Lambda = 200$ км, период $T = 25$ мин, угол к горизонту $\beta = -25^\circ$. Тем не менее за весь период моделирования длительностью 25 минут при наблюдении изменения МПЧ и формы дистанционно-частотных характеристик не было отмечено

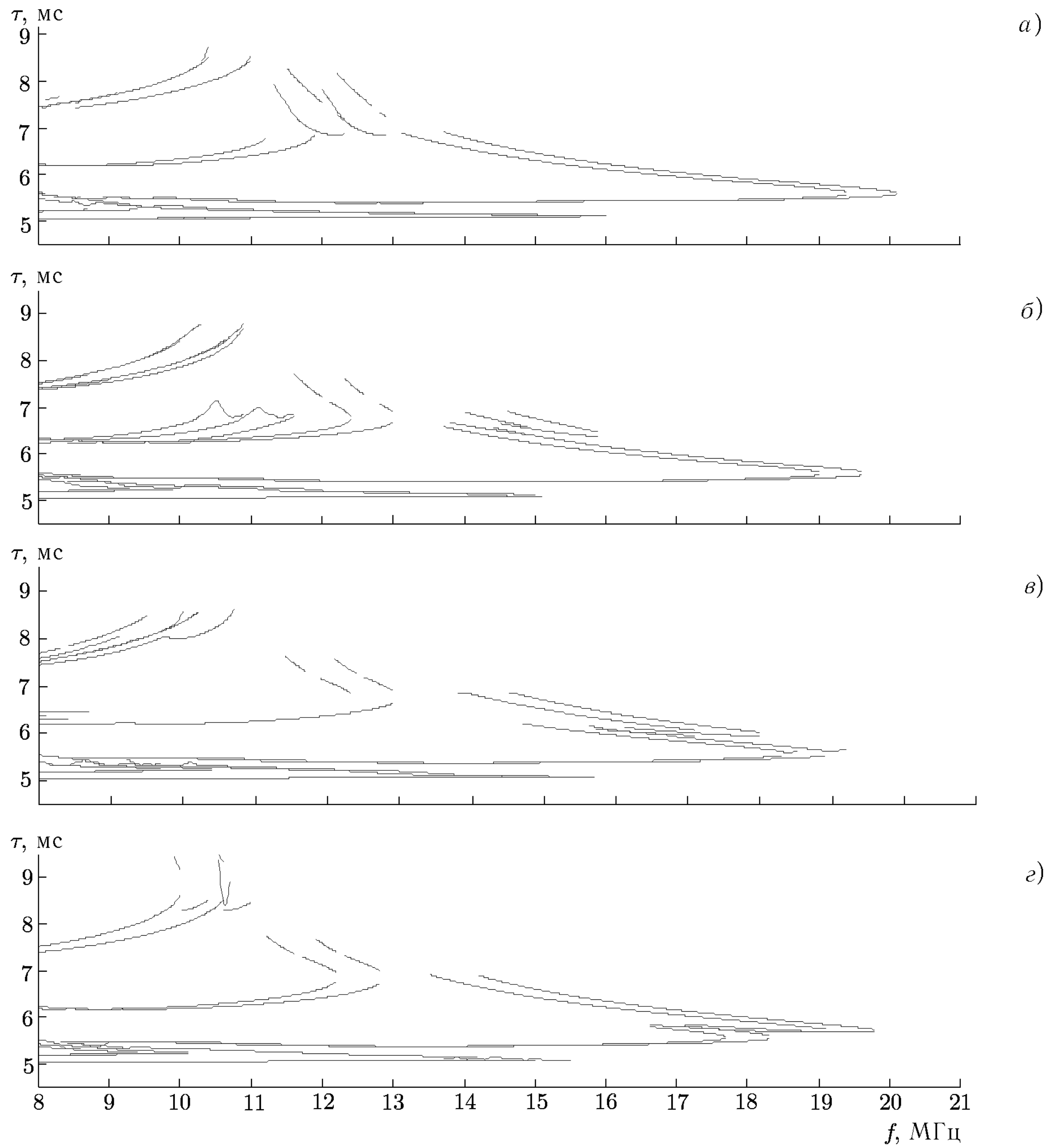


Рис. 8. Модельные дистанционно-частотные характеристики трассы Кипр—Ростов-на-Дону, рассчитанные с учётом динамики ПИВ, для условий, соответствующих 17 марта 2004 года ($W_{\text{eff}} = 58$): (*а*) в начальный момент времени, (*б*) при $t = 200$ с, (*в*) при $t = 400$ с и (*г*) при $t = 600$ с

появление «серпов». Увеличение амплитуды до 25 % не привело к появлению признаков ПИВ на дистанционно-частотных характеристиках. Однако уменьшение пространственного периода возмущения и увеличение угла распространения в вертикальной плоскости немедленно привели к появлению «серпов» на модельных дистанционно-частотных характеристиках (см. рис. 8). Таким образом, подобные следы на дистанционно-частотных характеристиках появляются только при определённых соотношениях между амплитудой и длиной волны ПИВ и при не слишком малых углах распространения ПИВ к горизонту. Как следствие, привлечение модельных расчётов

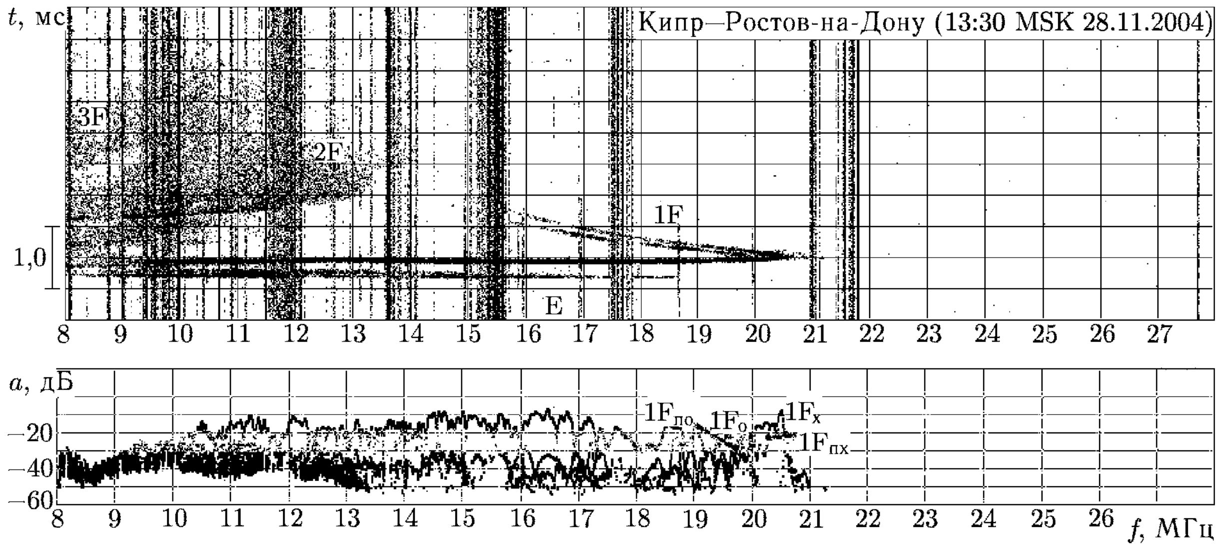


Рис. 9. Пример ионограммы с частотной модуляцией луча Педерсена в окрестности МНЧ моды 1F на трассе ЛЧМ-зондирования Кипр—Ростов-на-Дону: дистанционно-частотная (*а*) и амплитудно-частотная (*б*) характеристики; 1F, 2F, E — различные моды распространения. На амплитудно-частотной характеристике индексами о, х и п отмечены зависимости, соответствующие обыкновенной, необыкновенной волнам и моде Педерсена. Аналогичные обозначения используются на рис. 1 и 2

позволяет оценивать параметры ПИВ по результатам наклонного ЛЧМ-зондирования ионосферы.

Интересно отметить, что часто для верхнего луча (моды Педерсена) на односкачковой трассе Кипр—Ростов-на-Дону наблюдалась квазирегулярная частотная модуляция дистанционно-частотной и амплитудно-частотной характеристик. Типичный пример такой записи показан на рис. 9. Из рисунка видно, что для моды Педерсена как обыкновенной, так и необыкновенной волн наблюдается квазипериодическая частотная модуляция с периодом 250÷300 кГц, особенно хорошо заметная на амплитудно-частотных характеристиках в окрестности МНЧ обеих волн. На наш взгляд, модуляция верхнего луча может быть обусловлена расслоением плазмы в окрестности максимума F-слоя (где распространяется мода Педерсена) и образованием стратифицированных структур, вытянутых вдоль трассы распространения.

Очевидно, что малые изменения свойств ионосферы существенно влияют на распространение моды Педерсена лишь в окрестности максимума электронной концентрации, где она почти постоянна, а не во всей толще ионосферы. Поэтому объяснение наблюдаемой модуляции дистанционно-частотной и амплитудно-частотной характеристик моды Педерсена, скользящей вдоль слоя с малыми углами $\phi \leq 1\div 3^\circ$, следует искать в наличии в окрестности максимума слоя резонансных неоднородных структур, сравнимых с масштабом высотного распределения педерсеновской моды, зависящим от частоты излучения. Если на ионосферу наклонно падает пучок лучей, то характерный вертикальный масштаб, на котором следует учитывать градиентные свойства ионосферы, может быть определён из брэгговского условия отражения: $l = \lambda/(2\sin\phi)$, где λ — длина волны падающего излучения. Если при этом неоднородная структура достаточно протяжённая в направлении распространения, то при определённых параметрах она становится каналирующей системой [13]. Горизонтальный размер Λ таких структур может быть определён из условия сохранения пучковости переотражённых волн, когда размер первой зоны Френеля $(\lambda\Lambda)^{1/2}$ равен характерному вертикальному масштабу l неоднородностей, т. е. $(\lambda\Lambda)^{1/2}/l \approx 1$, откуда

$$\Lambda \approx \lambda/(4\sin^2\phi). \tag{3}$$

Параметры высотного расслоения ионосферы можно оценить из следующих соображений. Известно [14], что моды распространения коротких волн в волноводе Земля—ионосфера описываются потенциальной функцией

$$U(z) = -\varepsilon_{\text{мод}}(z) = \frac{f_0^2(z)}{f^2} - 1 - \frac{2z}{r_0}\ , \tag{4}$$

где $\varepsilon_{\text{мод}}$ — модифицированная диэлектрическая проницаемость, f_0 — плазменная частота, f — частота зондирования, r_0 — радиус Земли, z — высота над Землёй.

Поскольку верхний луч распространяется вблизи максимума слоя, с приемлемой точностью распределение электронной концентрации в этой области можно представить в виде параболической аппроксимации:

$$N_0(z) = N_{\text{m}}\left[1 - \left(\frac{z - z_{\text{m}}}{\Delta z}\right)^2\right], \tag{5}$$

где N_{m} — электронная концентрация в максимуме слое, z_{m} — высота максимума слоя, Δz — полутолщина слоя.

Из условия $(\mathrm{d}U/\mathrm{d}z)|_{z=z_{\text{п}}} = 0$ находим частотную зависимость высоты распространения моды Педерсена (верхнего луча) $z_{\text{п}}$:

$$z_{\text{п}}(f) = z_{\text{m}} - \frac{(\Delta z)^2}{r_0}\ \frac{f^2}{f_{\text{кр}}^2}\ , \tag{6}$$

где $f_{\text{кр}}$ — критическая частота ионосферы (N_{m} [см$^{-3}$] $= 1{,}24 \cdot 10^4 f_{\text{кр}}^2$[МГц]).

Обратимся теперь к экспериментальным данным. Как видно из амплитудно-частотных характеристик на рис. 9*б*, в интервале частот $18\div20$ МГц квазипериод частотной модуляции моды Педерсена составляет $\Delta f_{\text{m}} \sim 250\div300$ кГц.

Используя (6), оценим дискрет изменения высоты $z_{\text{п}}$ в данном интервале частот с шагом по частоте, равным Δf_{m}. Для условий проведения эксперимента ($f_{\text{кр}} \approx 7{,}6$ МГц) и типичных параметров ионосферного слоя ($z_{\text{m}} = 250$ км, $\Delta z = 80$ км) получаем $\Delta z_{\text{п}}(\Delta f_{\text{m}}) = z_{\text{п}}(f_1) - z_{\text{п}}(f_2) \sim$ $\sim 200\div220$ м. Полагая, что вертикальная стратификация ионосферы имеет такой же масштаб $l_z = \Delta z_{\text{п}}$, распределение электронной концентрации в окрестности максимума слоя можно представить в виде

$$N = N_0(z)\left[1 + \delta\cos\left(\frac{2\pi\,(z - z_{\text{m}})}{l_z}\right)\right], \tag{7}$$

где δ — относительная амплитуда волнового возмущения.

Горизонтальный масштаб стратифицированных структур Λ может быть определён из (3). Для $\phi \sim 1\div3^\circ$ и $\lambda \sim 15$ м величина Λ составляет от единиц до десятков километров.

Поскольку луч Педерсена скользит вдоль слоя, то при наличии стратифицированных неоднородностей в этой области он будет испытывать фокусировку на частотах $f \pm k\,\Delta f_{\text{m}}$ где $k =$ $= 0, 1, 2, \ldots$, если высота распространения луча приходится на область стратификации (которую можно представить в виде синусоидального фазового экрана) с показателем преломления, соответствующим электронной концентрации вблизи уровня $N = N_0\,(1 - \delta)$ (каналирование в рефракционном волноводе в окрестности локального минимума потенциальной функции $U(z)$ [14, 15]), или дефокусировку на частотах $f \pm (k + 1/2)\,\Delta f_{\text{m}}$, если высота распространения педерсеновской моды приходится на область с электронной концентрацией вблизи уровня $N = N_0\,(1 + \delta)$ (вытекание волн — антиволноводное распространение в окрестности локального максимума потенциальной функции $U(z)$ [15]). Здесь f — некоторая средняя частота из интервала частот, где наблюдается эффект частотной модуляции верхнего луча. Другими словами, наличие волноообразной структуры в окрестности максимума слоя, наложенной на регулярный профиль электронной концентрации, изменяет вторую производную функции $r_0^2 U(z)$, которая определяет затухание моды Педерсена [16]:

$$\gamma = \left[-\frac{r_0^2}{2\left(1 - f_0^2(z)/f^2\right)} \, \frac{\mathrm{d}^2 U(z)}{\mathrm{d}z^2} \right]_{z=z_{\text{п}}}.$$

Заметим, что приведённые выше рассуждения об эффекте частотной модуляции луча Педерсена в условиях мелкомасштабной стратификации ионосферного слоя носят качественный и оценочный характер. В области распространения скользящего вдоль слоя луча Педерсена геометрооптическое приближение нарушается. Поэтому детальное рассмотрение поведения луча Педерсена и связанных с ним направляемых волн в стратифицированной среде требует волнового подхода. Такой анализ предполагается сделать в дальнейших работах.

Природа расслоения, скорее всего, связана с волновыми процессами типа акустико-гравитационных волн. Заметим, что высокую чувствительность луча Педерсена к ионосферным возмущениям можно использовать для исследования тонких эффектов, связанных с расслоением ионосферы в различных геофизических и сейсмических условиях.

ВЫВОДЫ

1) На основе анализа экспериментальных и расчётных данных наклонного зондирования на среднеширотных трассах различной протяжённости и ориентации показано, что наилучшие результаты по прогнозированию МПЧ отдельных мод распространения удаётся получить при коррекции модели IRI-2001 по прогнозируемому или текущему эффективному числу солнечных пятен (T-index).

2) Значения МНЧ отдельных мод распространения испытывают короткопериодические вариации с квазипериодами от 30 минут до 2 часов. Амплитуда флуктуаций достигает в спокойных ионосферных условиях в полуденные часы 2 МГц; в восходно-заходные часы при прохождении терминатора флуктуации на трассе Кипр—Ростов-на-Дону могут увеличиваться до $5 \div 8$ МГц.

3) Имитационным моделированием подтверждено, что «серпы» на дистанционно-частотных характеристиках связаны с перемещающимися возмущениями в ионосфере. Моделирование показало, что условия образования «серпов» на дистанционно-частотных характеристиках достаточно жёсткие и зависят от относительной амплитуды ПИВ, длины волны возмущения и направления его распространения относительно ориентации радиотрассы. На основе сопоставления экспериментальных и расчётных данных наклонного зондирования сделаны оценки параметров ПИВ. Показано, что ПИВ с относительной амплитудой возмущения 20 %, длиной волны 150 км и периодом 15 минут, распространяющиеся сверху вниз под углом 60° к горизонту, могут быть ответственны за наблюдаемые квазипериодические вариации дистанционно-частотных характеристик.

4) Показано, что измеренные амплитудно-частотные характеристики ионосферного радиоканала качественно согласуются с аналогичными характеристиками, найденными в процессе имитационного моделирования. Поведение измеренных амплитудно-частотных характеристик может быть объяснено интерференцией неразделённых дискретных лучей, фаза которых не является случайной величиной.

5) Обнаружен эффект квазирегулярной частотной модуляции луча Педерсена с периодом $250 \div 300$ кГц на трассе ЛЧМ-зондирования Кипр—Ростов-на-Дону. Сделана оценка высотного расслоения ионосферы вблизи максимума слоя, ответственного за фокусировку и дефокусировку луча Педерсена. Установлено, что масштаб стратификации составляет $200 \div 250$ м.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 02–05–64383).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Филипп Н. Д., Блаунштейн Н. Ш., Ерухимов Л. М. и др. Современные методы исследования динамических процессов в ионосфере. Кишинёв: Штиинца, 1991. 288 с.
2. Афраймович Э. Л. Интерференционные методы радиозондирования ионосферы. М.: Наука, 1982. 198 с.
3. Ерухимов Л. М., Понятов А. А., Урядов В. П. и др. // Изв. вузов. Радиофизика. 1998. Т. 41, № 1. С. 3.
4. Stocker A. J., Arnold N. F., Jones T. B. // Ann. Geophysicae. 2000. V. 18. P. 54.
5. Bilitza D. // The Review of Radio Science 1999–2002 / Ed. by W. R. Stone. IEEE Press, 2002. P. 625.
6. Secan J. A., Wilkinson P. J. // Radio Sci. 1997. V. 32. P. 1 717.
7. Черкашин Ю. Н., Егоров И. Б., Урядов В. П., Понятов А. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 2003. Т. 46, № 12. С. 1 011.
8. Вертоградов Г. Г. // Радиотехника и электроника. 2003. Т. 48, № 11. С. 1 322.
9. Барабашов Б. Г., Вертоградов Г. Г. // Математическое моделирование. 1996. № 2. С. 3.
10. Гершман Б. Н., Ерухимов Л. М., Яшин Ю. Я. Волновые явления в ионосфере и космической плазме. М.: Наука, 1984. 392 с.
11. CCIR. Supplement to report 252-2. Geneva, 1982. 38 p.
12. Барабашов Б. Г., Вертоградов Г. Г., Кулешов Г. И., Рыбаков В. А. // Тр. НИИР. 1983. № 4.
13. Erukhimov L. M., Uryadov V. P., Cherkashin Yu. N., et al. // Waves in Random Media. 1997. V. 7, No. 4. P. 531.
14. Гуревич А. В., Цедилина Е. Е. Сверхдальнее распространение коротких радиоволн. М.: Наука, 1979. 246 с.
15. Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И. Геометрическая оптика неоднородных сред. М.: Наука, 1980. 304 с.
16. Поляков В. М., Семеней Ю. А., Тинин М. В. // Исследования по геомагнетизму, аэрономии и физике Солнца. 1973. Вып. 29. С. 145.

Поступила в редакцию 6 июня 2004 г.; принята в печать 14 апреля 2005 г.

OBLIQUE SOUNDING AND MODELING OF THE IONOSPHERIC HF CHANNEL

G. G. Vertogradov, V. P. Uryadov, and V. G. Vertogradov

We present the results of experimental studies of the distance-frequency and amplitude-frequency characteristics of the ionospheric HF channel on mid-latitude paths of oblique chirp sounding. It is shown that the maximum observed frequencies (MOFs) are subject to short-period variations with the quasi-periods from 30 min to 2 hours. The amplitude of the MOF variations reaches 2 MHz and it can increase up to 5–8 MHz on the Cyprus—Rostov–on-Don one-hop path during the sunrise and sunset hours. It is established that the MOF fluctuations are accompanied by pronounced “cusp” features occurring in the upper rays and moving with time to the region of smaller delays, i. e., from lower to higher frequencies. The amplitude-frequency characteristics of separate propagation modes undergo deep fluctuations (up to 20–30 dB) whose quasi-periods and depths depend on the frequency. It is shown that the appearance of fluctuations is caused by interference of the unresolved rays within the limits of one propagation mode. Based on the modeling, it is shown that "cusps" in oblique-sounding ionograms are due to the influence of traveling ionospheric disturbances (TIDs). The TID parameters are estimated. It is shown that conditions of the formation of "cusps" in the distance-frequency characteristics depend on the TID amplitude, the wavelength of a disturbance wave, and the direction of its phase front with respect to the propagation path. The effect of quasi-regular frequency modulation of the Pedersen mode with a period of 250–300 kHz on the Cyprus–Rostov-on-Don chirp-sounding path is found. Altitude stratification of the ionosphere near the F-layer maximum, which is responsible for the focusing and defocusing of the Pedersen mode, is estimated. It is established that the stratification scale amounts to approximately 200–250 m.

УДК 621.371.165:528.044.4

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СКОРОСТИ ПРИПОВЕРХНОСТНОГО ВЕТРА ПО СПЕКТРУ РСА-ИЗОБРАЖЕНИЯ ОКЕАНА

М. Б. Каневский, В. Ю. Караев, Г. Н. Баландина

Институт прикладной физики РАН, г. Нижний Новгород, Россия

Выполнено численное моделирование РСА-изображения ветровых волн, распространяющихся в азимутальном направлении, при различной скорости ветра. Показано, что в области относительно слабых (до 10 м/с) ветров положение максимума в спектре изображения является весьма чувствительным параметром, так что в этой области точность соответствующего метода измерения скорости ветра должна быть не хуже 1 м/с при высоком пространственном разрешении. С усилением ветра чувствительность падает, однако сколько-нибудь определённые выводы для области более сильных ветров можно будет сделать лишь на основании экспериментальных данных.

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, скорость приповерхностного ветра над океаном дистанционно определяется с помощью скаттерометров и радиоальтиметров, причём современные алгоритмы [1] позволяют осуществить измерения из космоса с точностью примерно 1,5 м/с. Однако космические скаттерометры и радиоальтиметры обладают пространственным разрешением в десятки километров, что совершенно неприемлемо в тех случаях, когда речь идёт о прибрежных районах, характеризующихся высокой степенью изменчивости волнения. Поэтому в последнее время предпринимаются попытки восстановления поля приповерхностного ветра с помощью космических радиолокаторов с синтезированной апертурой (РСА), применяемых в качестве скаттерометров с высоким разрешением [2–5]. Восстановление поля приповерхностного ветра осуществляется на основе эмпирической модели [6], связывающей сечение рассеяния с параметрами вектора скорости ветра. Однако точность восстановления, составляющая примерно 2 м/с [7], уступает достигнутой в настоящее время точности радиолокационных средств с низким разрешением; одно из возможных объяснений этому — погрешности, связанные со сложностью абсолютной калибровки РСА.

Можно указать ещё один способ извлечения информации о скорости приповерхностного ветра из данных РСА. Результаты как теории, так и многочисленных экспериментов свидетельствуют о том, что спектр РСА-изображения океана и, в частности, положение спектрального максимума зависят от состояния поверхности. Вполне естественно попытаться использовать это обстоятельство для решения данной задачи, тем более, что форма спектра изображения и положение его максимума никак не зависят от абсолютной калибровки РСА.

В настоящей работе на основании результатов численного моделирования даётся оценка точности соответствующего метода измерения скорости ветра.

1. СПЕКТР РСА-ИЗОБРАЖЕНИЯ ВЕТРОВЫХ ВОЛН

Радиолокатор с синтезированной апертурой формирует изображение морского волнения посредством сложных нелинейных механизмов, поэтому линейная характеристика — номинальное азимутальное разрешение $\rho_0 = \lambda R/(2V\Delta t)$, как правило, не даёт полного представления о свойствах РСА-изображения волнения; здесь λ — длина электромагнитной волны, R — наклонная дальность, V — скорость носителя РСА, Δt — время синтезирования. В действительности характер изображения определяется такими параметрами, как

$$\beta_v = \frac{R}{V}\,\frac{\sigma_{\rm r}}{\Lambda_v}\,|\cos\Phi_0| \quad \text{или} \quad \beta_h = \frac{R}{V}\,\frac{\sigma_{\rm r}}{\Lambda_h}\,|\cos\Phi_0|\,,$$

где $\sigma_{\rm r}$ — среднеквадратическая радиальная составляющая орбитальной скорости в поле волнения, Λ_v и Λ_h — характерные длины волн в спектрах орбитальных скоростей и возвышений поверхности соответственно, Φ_0 — угол между генеральным направлением волнения и направлением движения носителя РСА. Величины $\sigma_{\rm r}$, Λ_v и Λ_h определяются той частью спектра волнения, где длины волн, по крайней мере, вдвое превышают номинальный размер ρ_0 элемента разрешения РСА по азимуту [8]. Поскольку величина $(R/V)\,\sigma_{\rm r}$ есть не что иное, как среднее смещение РСА-изображения движущегося элемента поверхности, параметры β_v и β_h представляют собой отношения этого смещения к соответствующим длинам волн (в проекции на направление движения РСА).

Очевидно, указанные параметры тесно связаны между собой. Вместе с тем, если β_v целесообразно использовать при анализе механизмов формирования изображения волнения, то несколько более наглядный параметр β_h используется при анализе свойств собственно изображения и его спектров [8–10].

Для того, чтобы понять, в какой степени спектр изображения может быть индикатором состояния поверхности, следует от β_h перейти к собственно параметрам состояния поверхности, важнейшим из которых является скорость приповерхностного ветра.

Ниже с помощью численного моделирования получен набор спектров изображения волнения при различных значениях скорости ветра.

В работе [11] теоретически обоснован и экспериментально подтверждён метод, позволяющий найти спектр РСА-изображения поверхности океана, со статистической точки зрения полностью свободный от спекл-шумового пьедестала. Это означает, что «чистый» спектр изображения, являющийся предметом последующего анализа, есть отнюдь не идеальная, а вполне реальная физическая величина, которая может быть получена с помощью соответствующей обработки сигнала.

Интенсивность свободного от спекл-шума сигнала РСА определяется следующим выражением [11]:

$$I(x,y) \propto \int \mathrm{d}x'\,\sigma_0(x',y)\left[\frac{\sin w(x,x',y)}{w(x,x',y)}\right]^2, \tag{1}$$

где

$$w = \frac{\pi}{\rho}\left[(x-x') - \frac{R}{V}\,\hat{v}_{\text{рад}}(x',y)\right].$$

Здесь σ_0 — удельное сечение рассеяния поверхности, ρ — азимутальный (вдоль оси x, совпадающий с направлением движения РСА) размер элемента разрешения, расширенного из-за орбитальных скоростей с масштабами изменения, меньшими номинального размера ρ_0, $\hat{v}_{\text{рад}}$ — радиальная составляющая орбитальной скорости, сглаженная по масштабам, меньшим $2\rho_0$. Предполагается, что размер элемента разрешения по дальности (т. е. вдоль оси y) мал по сравнению с характерной длиной волны поверхностного волнения.

Вследствие нелинейности связи между интенсивностью сигнала РСА и возвышениями поверхности спектры изображения и возвышений соотносятся между собой достаточно сложно, причём в зависимости от параметра β_h знак разности между $\kappa_h^{\rm m}$ и $\kappa_{\rm PCA}^{\rm m}$ может меняться (здесь $\kappa_h^{\rm m}$ и $\kappa_{\rm PCA}^{\rm m}$ — пространственные частоты, отвечающие максимумам спектров возвышений и изображения). В частности, при $\beta_h \geq 0{,}2$, как показал выполненный в [9] анализ, спектр изображения ветровых волн, бегущих в азимутальном направлении (т. е. параллельно направлению движения РСА), оказывается сдвинутым в сторону низких пространственных частот по сравнению с исходным спектром волнения.

Найти связь между β_h и скоростью приповерхностного ветра можно, обратившись к спектру Пирсона—Московитца и вычислив дисперсию сглаженной (см. выше) орбитальной скорости [10]:

$$\sigma^2_{\text{орб}} = 4{,}77 \cdot 10^{-3} U^2 \exp\!\left(-0{,}48\,\frac{g\rho_0}{U^2}\right), \tag{2}$$

где U — скорость ветра на высоте 10 м над поверхностью, $g = 9{,}8$ м/с^2. Отсюда для β_h следует

$$\beta_h = 0{,}74 \cdot 10^{-2}\,\frac{R}{V}\,\frac{g}{U} \exp\!\left(-0{,}24\,\frac{g\rho_0}{U^2}\right) \left(\cos^2\theta_0 + \sin^2\Phi_0 \sin^2\theta_0\right)^{1/2} |\cos\Phi_0|\,, \tag{3}$$

где θ_0 — угол падения электромагнитного излучения.

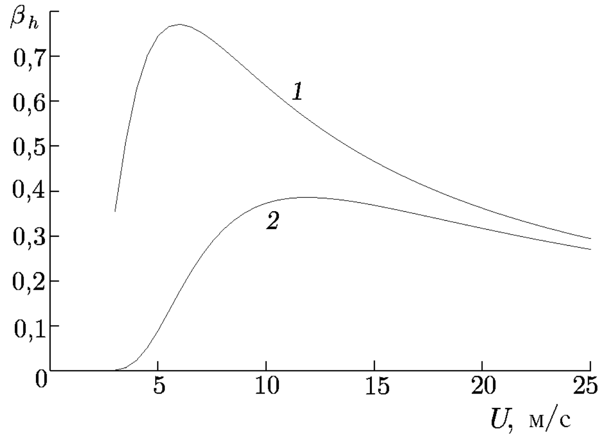


Рис. 1. Зависимость параметра β_h от скорости ветра для двух значений номинального разрешения РСА: $\rho_0 = 7{,}5$ м (кривая *1*) и $\rho_0 = 30$ м (кривая *2*)

На рис. 1 представлена зависимость $\beta_h(U)$ для случая ветрового волнения, распространяющегося в азимутальном направлении ($\Phi_0 = 0$), при характерных для космических РСА параметрах: $R/V = 120$ с, $\theta_0 = 30°$. Значения $\rho_0 = 7{,}5$ и 30 м соответствуют полной и парциальной (ограниченной некоторым сектором в пределах полной угловой ширины) диаграммам направленности антенны РСА. Как видно, соотношение $\beta_h \geq 0{,}2$ выполняется в широкой области значений скорости ветра, охватывающей большинство реальных ситуаций. Это вполне согласуется с тем, что в натурных экспериментах характерная волна в РСА-изображении океана, как правило, оказывается длиннее, чем в изображаемом поверхностном волнении.

Более детально зависимость спектра изображения от скорости ветра над океаном может быть изучена с помощью численного моделирования. Наиболее простой для моделирования случай — азимутальное распространение поверхностных волн. Здесь, во-первых, вместо двумерной панорамы можно обойтись одной строкой изображения, что весьма существенно с точки зрения экономии вычислительных ресурсов. Во-вторых, удельное сечение рассеяния можно считать постоянным, вследствие чего исчезает необходимость обращаться к недостаточно изученной модуляционной передаточной функции (как известно, модуляционная передаточная функция связывает спектры волнения и сечения рассеяния). Наконец, при азимутальном распространении нелинейность формирования изображения проявляется наиболее заметно, так что полученные ниже оценки чувствительности спектров изображения к изменениям скорости ветра являются, по сути, минимальными.

При моделировании поверхностного волнения за основу был выбран спектр ветрового волнения Пирсона—Московитца, модифицированный в его высокочастотной части в соответствии с [9]. Модификация состояла в том, что в спектр было введено высокочастотное ограничение, зависящее не только от длины электромагнитной волны (в данном случае $\lambda = 6$ см), как это обычно принимается в теории СВЧ рассеяния на взволнованной водной поверхности, но и от скорости ветра (подробно см. в [12]).

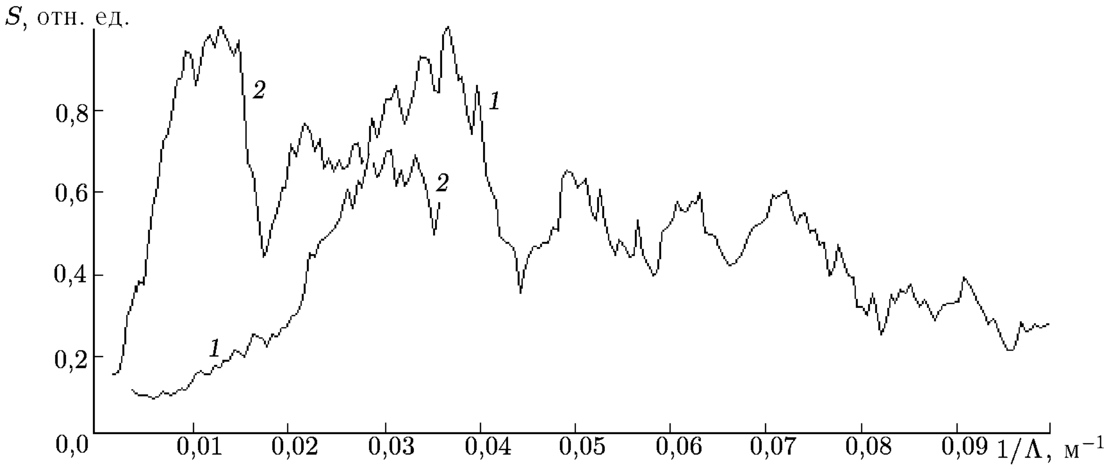


Рис. 2. Спектры волнения (кривая *1*) и его РСА-изображения (кривая *2*); скорость ветра 5 м/с

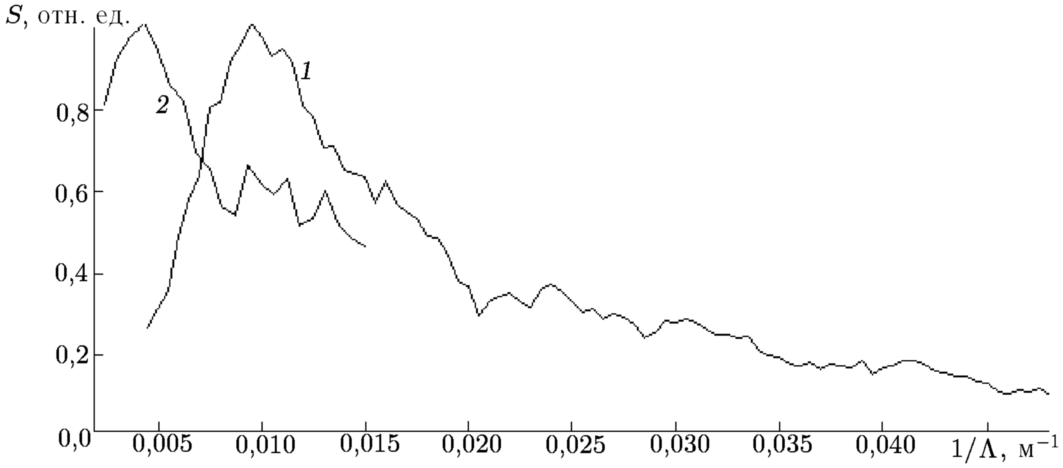


Рис. 3. Спектры волнения (кривая *1*) и его РСА-изображения (кривая *2*); скорость ветра 10 м/с

Для моделирования сигнала РСА использовалась формула (1) в несколько видоизменённой форме. Изменение состояло в том, что вместо размера ρ расширенного элемента разрешения и сглаженной величины $\hat{v}_{\text{рад}}$ в (1) фигурировали номинальное разрешение ρ_0 и несглаженная величина $v_{\text{рад}}$. Как показано в [11], с физической точки зрения оба описания эквивалентны, однако при численном моделировании представляется целесообразным вводить в модель сигнала не опосредованные, а «изначальные» величины ρ_0 и $v_{\text{рад}}$.

На основе принятой модели спектра волнения были сформированы случайные реализации поверхности, орбитальной скорости, а затем и сигнала РСА. Длина каждой реализации 2 км, параметры РСА, выбранные для расчётов: $R/V = 120$ с, $\theta_0 = 30°$, $\rho_0 = 7{,}5$ м.

При выборе ρ_0 учитывалось то обстоятельство, что предложенный в [11] метод получения свободного от спекл-шума спектра изображения поверхности не влечёт за собой ухудшения номинального разрешения РСА. Напомним, что традиционный метод борьбы со спекл-шумом предусматривает сложение изображений одного и того же участка поверхности, полученных от нескольких парциальных диаграмм направленности антенны. При этом снижение уровня спекл-шума сопровождается ухудшением номинального разрешения в N раз, где N — число парциальных диаграмм.

На рис. 2–4 показаны спектры волнения и его изображения при трёх значениях скорости ветра U. Видно, что спектр изображения сдвинут в область низких частот, причём относительный

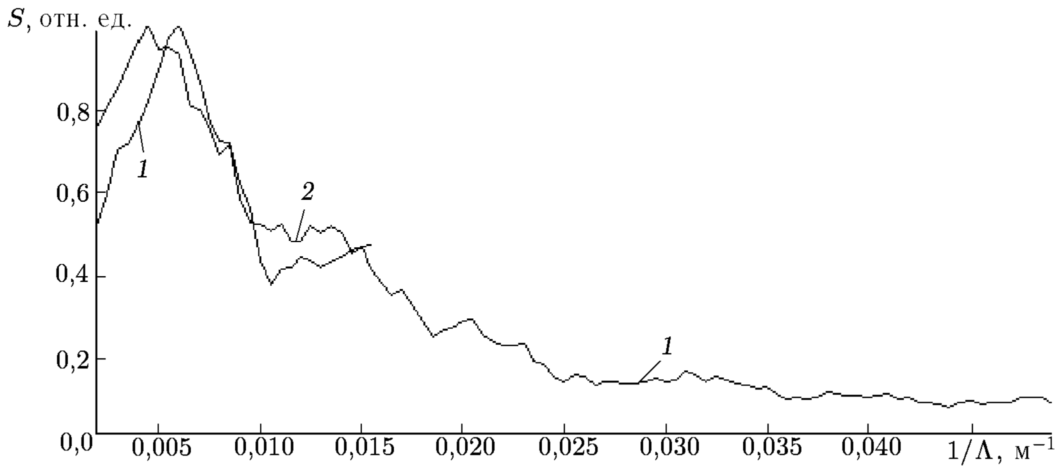


Рис. 4. Спектры волнения (кривая *1*) и его РСА-изображения (кривая *2*); скорость ветра 15 м/с

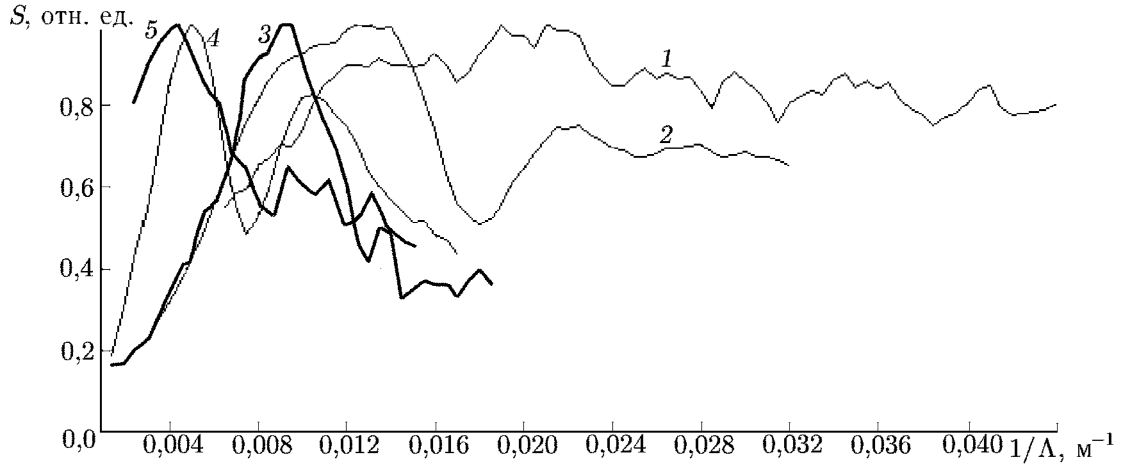


Рис. 5. Спектры РСА-изображения ветровых волн при различной скорости ветра: кривая *1* соответствует $U = 4$ м/с, *2* — $U = 5$ м/с, *3* — $U = 6$ м/с, *4* — $U = 7$ м/с, *5* — $U = 10$ м/с

сдвиг $(\kappa_h^{\mathrm{m}} - \kappa_{\mathrm{PCA}}^{\mathrm{m}})/\kappa_h^{\mathrm{m}}$ с ростом скорости ветра уменьшается. Этот эффект вполне предсказуем на основании теории [9], поскольку при номинальном разрешении $\rho_0 = 7{,}5$ м значения функции $\beta_h(U)$ на интервале $U = 5\div15$ м/с превышают уровень 0,2 (см. рис. 1). Обращает на себя внимание тот факт, что при скоростях ветра 10 и 15 м/с максимумы спектров изображения практически совпадают, но при более слабых ветрах, как видно из рис. 5, спектры, рассчитанные в интервале 4 м/с $\le U \le$ 7 м/с с шагом $\Delta U = 1$ м/с, заметным образом различаются.

Учитывая, что случай распространяющихся в азимутальном направлении волн — наиболее неблагоприятный с точки зрения различения спектров РСА-изображения, можно ожидать, что при надлежащей предварительной обработке сигнала с целью удаления спекл-шума скорость приповерхностного ветра может быть измерена таким способом довольно точно, по крайней мере, при $U \le 10$ м/с.

2. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выполненный в настоящей работе расчёт показал, что при сравнительно слабых (до 10 м/с) ветрах положение максимума спектра РСА-изображения поверхности океана весьма чувствительно к изменениям скорости приповерхностного ветра. Соответствующий метод измерения скорости ветра над океаном, включающий в себя предварительное удаление спекл-шумового пьедестала из спектра изображения, способен обеспечить чувствительность не ниже 1 м/с, т. е. значительно более высокую по сравнению с достигнутой в настоящее время с помощью как стандартных инструментов (скаттерометров и радиоальтиметров), так и радиолокатора с синтезированной апертурой, работающего в режиме скаттерометра. При этом пространственное разрешение данного метода (в наших расчётах 2 км) является вполне приемлемым для прибрежных районов.

Что касается области более сильных ветров, то здесь расчёты показывают снижение чувствительности. Учитывая минимальный характер полученных выше оценок, сколько-нибудь определённые выводы для области сильных ветров можно будет сделать лишь на основании результатов эксперимента.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 03–05–64260).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Karaev V. Yu., Kanevsky M. B., Balandina G. N., et al. // Int. J. Remote. Sens. 2002. V. 23, No. 16. P. 3 263.
2. Monaldo F. M., Thompson D. R., Beal R. C., et al. // IEEE Trans. Geosci. and Remote Sens. 2001. V. 39, No. 12. P. 2 587.
3. Horstmann J., Koch W., Lehner S., Tonboe R. // IEEE Trans. Geosci. and Remote Sens. 2000. V. 38, No. 5. P. 2 122.
4. Kim D. J., Moon W. M. // Remote Sensing and Environment. 2002. V. 80. P. 55.
5. Furevik B. R., Korsbakken E. // IEEE Trans. Geosci. and Remote Sens. 2000. V. 38, No. 2. P. 1 113.
6. Stoffelen A., Anderson D. // J. Geophys. Res. C. 1997. V. 102, No. 4. P. 5 767.
7. Vachon P., Chunchuzov I., Dobson F. // Earth Observ. Quart. 1998. V. 59. P. 12.
8. Bruening C., Alpers W., Hasselmann K. // Int. J. Remote Sens. 1990. V. 11, No. 10. P. 1 695.
9. Kanevsky M. B. // IEEE Trans. Geosci. and Remote Sens. 1993. V. 31, No. 5. P. 1 031.
10. Каневский М. Б. // Изв. вузов. Радиофизика. 2003. Т. 46, № 1. С. 13.
11. Каневский М. Б. // Изв. вузов. Радиофизика. 2002. Т. 45, № 11. С. 950.
12. Караев В. Ю., Баландина Г. Н. // Исслед. Земли из космоса. 2000. № 5. С. 45.

Поступила в редакцию 4 августа 2004 г.; принята в печать 1 марта 2005 г.

ACCURACY ESTIMATE FOR DETERMINATION OF THE NEAR-SURFACE WIND VELOCITY USING THE SAR OCEAN IMAGE SPECTRUM

M. B. Kanevsky, V. Yu. Karaev, and G. N. Balandina

Numerical modeling of the SAR image of wind waves propagating azimuthally is performed for various wind velocities. It is shown that in the area of relatively weak winds (up to 10 m/s), the position of the maximum of the image spectrum is a fairly sensitive parameter, such that the accuracy of the respective wind-velocity measurement technique in this area should be 1 m/s or less for a high spatial resolution. Under conditions of stronger wind, the sensitivity decreases; however, more definite results for the stronger-wind area can solely be obtained experimentally.

УДК 621.396.96+537.874.4

НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ РАССЕЯНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА СТАТИСТИЧЕСКИ НЕРОВНЫХ ЗЕМНЫХ ПОКРОВАХ В МИЛЛИМЕТРОВОМ ДИАПАЗОНЕ ДЛИН ВОЛН

Е. А. Шорохова, А. В. Кашин

ФГУП НИИ измерительных систем им Ю. Е. Седакова, г. Нижний Новгород, Россия

Приведены результаты численного моделирования рассеяния миллиметровых электромагнитных волн на статистически неровной земной поверхности методом малых возмущений и методом касательных плоскостей. Разработаны алгоритмы и программы расчёта: 1) удельной эффективной площади рассеяния для мелкой, крупной и смешанной (двухмасштабной) структуры неоднородностей земной поверхности; 2) поля, рассеянного на неровной поверхности, с учётом диаграммы направленности антенны. В качестве примера представлены результаты численных расчётов удельной эффективной площади рассеяния и рассеянного поля в случае однолепестковой диаграммы направленности гауссовского типа и модели земной поверхности (асфальта, бетона, песка и снега) в виде периодической структуры. Полученные теоретические данные по удельной эффективной площади рассеяния хорошо согласуются с экспериментом.

ВВЕДЕНИЕ

Попытки моделирования радиолокационных сигналов, рассеянных земной поверхностью, предпринимались с момента зарождения радиолокации [1, 2]. Данная проблема не потеряла своей актуальности и в настоящее время [3, 4]. Многие фирмы и исследовательские лаборатории занимаются вопросами разработки теоретических и прикладных аспектов дистанционного зондирования Земли в миллиметровом диапазоне длин волн с целью получения радиоизображений местности с высоким разрешением.

Поскольку земные покровы чрезвычайно разнообразны и характер рассеянного поля определяется многими факторами, теория рассеяния не может быть универсальной. По этой причине не представляется возможным и получение точного решения задачи дифракции волн на хаотически неровной поверхности в общем случае. Использование приближённых методов оказывается единственным теоретическим способом исследования рассеивающих свойств земных покровов [4–7].

Наиболее распространённым является статистическое моделирование [5, 6], где высота неровностей рассматривается как случайная переменная $\xi(x,y)$, зависящая от декартовых координат x и y на средней плоскости раздела двух сред. Любую статистически шероховатую поверхность можно описать следующими величинами: среднеквадратической высотой неровностей σ_ξ, радиусом пространственной корреляции поверхности l_ξ, среднеквадратическим тангенсом угла наклона неровностей $\sqrt{\langle\gamma^2\rangle}$ и пространственным коэффициентом корреляции $R(\rho)$ (последний обычно выбирают либо гауссовским: $R(\rho)=\exp(-\rho^2/l_\xi^2)$, либо экспоненциальным: $R(\rho)=\exp(-|\rho|/l_\xi)$ [6]).

При анализе рассеяния электромагнитных волн на шероховатых поверхностях различают два типа пологих неровностей: мелкие, высота которых значительно меньше длины облучающей волны, а пространственные размеры вдоль поверхности могут быть одного порядка с длиной облучающей волны, и крупные, радиусы кривизны которых значительно больше длины облучающей волны, а максимальная высота, в принципе, произвольна. В первом случае применяют метод малых возмущений [7], когда поле у поверхности представляют в виде суммы полей: основного, полученного при отражении от гладкой поверхности (средней плоскости раздела двух сред), и возмущённого, вызванного неровностями. Во втором случае для определения характеристик электромагнитного поля на поверхности используют метод касательных плоскостей, основанный на приближении Кирхгофа [7]. Данное приближение состоит в том, что поле на поверхности вычисляется как сумма падающей волны и волны, отражённой от плоскости, касательной к поверхности в данной точке.

В данной работе представлены результаты численного моделирования рассеяния миллиметровых радиоволн на земной поверхности. Первый раздел статьи посвящён численному анализу удельной эффективной площади рассеяния (ЭПР) земных покровов, выполненному в рамках метода возмущений, метода касательных плоскостей и двухмасштабной модели рассеяния. Все расчёты выполнены для двух длин волн миллиметрового диапазона ($\lambda = 2{,}2$ и $8{,}6$ мм), соответствующих окнам прозрачности при распространении радиоволн в атмосфере [8]. Во втором разделе работы приводятся результаты численного моделирования рассеяния миллиметровых радиоволн на неровной земной поверхности методом касательных плоскостей с учётом диаграммы направленности антенны. В заключение сформулированы основные полученные результаты и выводы.

1. РАСЧЁТ УДЕЛЬНОЙ ЭПР ЗЕМНЫХ ПОКРОВОВ В МИЛЛИМЕТРОВОМ ДИАПАЗОНЕ ДЛИН ВОЛН. ДВУХМАСШТАБНАЯ МОДЕЛЬ РАССЕЯНИЯ

Основной характеристикой поля, рассеянного на земной поверхности, является удельная эффективная площадь рассеяния σ_*. В данном разделе приводятся результаты численных расчётов σ_*, выполненных с помощью метода возмущений и метода касательных плоскостей. Представленные результаты иллюстрируют зависимость удельной ЭПР от типа поверхности (её статистических и электродинамических параметров), длины волны, поляризации и угла падения волны на поверхность.

Рассмотрение начнём с метода возмущений. Для его использования при анализе полей, рассеянных на статистически неровных поверхностях, необходимо выполнение следующих условий [4]:

1) малость характерной высоты неровностей по сравнению с длиной волны: $\sigma_\xi/\lambda \ll 1$;

2) пологость неровностей: $\sqrt{\langle\gamma^2\rangle} \ll 1$;

3) мелкомасштабность неровностей: $l_\xi/\lambda \le 1$.

Рассеивающая поверхность $z = \xi(x,y)$ считается в среднем плоской, т. е. $\langle\xi(x,y)\rangle = 0$.

Результаты расчётов удельной ЭПР в первом приближении метода возмущений для статистически изотропной поверхности представлены в виде угловых зависимостей на рис. 1 (для $\lambda = 2{,}2$ мм) и рис. 2 (для $\lambda = 8{,}6$ мм). Кривые для вертикальной поляризации (вектор электрического поля лежит в плоскости падения) обозначены сплошной линией, а для горизонтальной (вектор электрического поля ортогонален плоскости падения) — пунктирной линией. В качестве примера рассматривались поверхности асфальта, бетона, песка и снега, электродинамические (относительная диэлектрическая проницаемость ε) и статистические параметры которых приведены ниже в табл. 1 (здесь и далее следует считать, что дисперсии и радиусы корреляции с индексом 1 соответствуют крупномасштабным неоднородностям, с индексом 2 — мелкомасштабным, а жирным шрифтом выделены параметры, используемые непосредственно в расчётах). Отметим, что параметры в табл. 1 взяты из [4], где систематизированы разбросанные по многим библиографическим источникам необходимые данные.

Анализ рис. 1 и 2 показывает, что удельная ЭПР для вертикальной поляризации всегда выше, чем для горизонтальной поляризации; кроме того, на длине волны 2,2 мм наблюдается более быстрое спадание σ_* с ростом угла β, чем при $\lambda = 8{,}6$ мм.

Для сравнения на рис. 2 приведены экспериментальные данные удельной ЭПР на длине волны

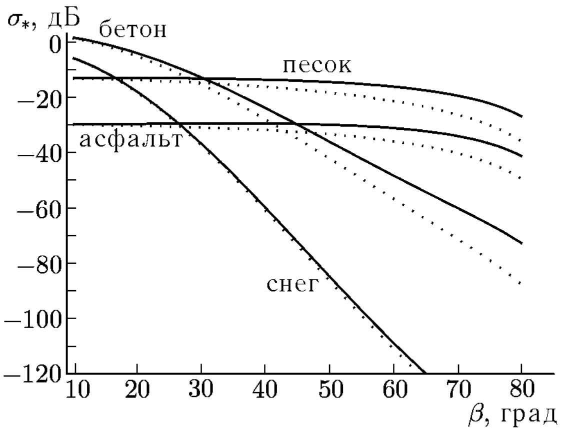


Рис. 1. Зависимости удельной ЭПР, рассчитанные методом возмущений на длине волны 2,2 мм, от угла падения волны

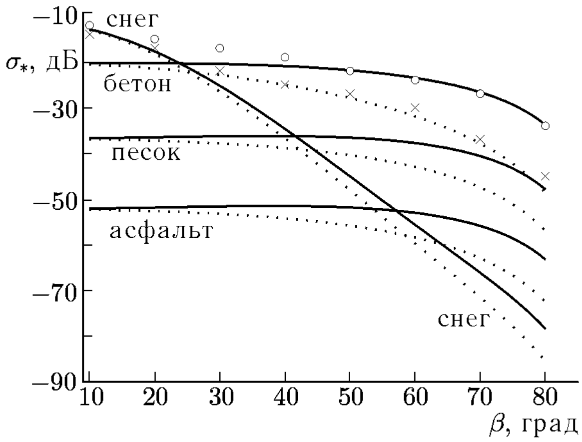


Рис. 2. Зависимости удельной ЭПР, рассчитанные методом возмущений на длине волны 8,6 мм, от угла падения волны

Таблица 1. Электродинамические и статистические характеристики земных покровов на длинах волн 2,2 и 8,6 мм

Тип покрова	$\varepsilon = \varepsilon' - i\varepsilon''$, $t = 18\,^\circ$C		$\sigma_{\xi 1}$, мм	$\sigma_{\xi 2}$, мм	$l_{\xi 1}$, мм	$l_{\xi 2}$, мм	$\sqrt{\langle\gamma^2\rangle}$, рад
	$\lambda = 2{,}2$ мм	$\lambda = 8{,}6$ мм					
асфальт	$2{,}25 - i0{,}18$	$2{,}5 - i0{,}6$	**0,36**	**0,08**	**2,2**	**0,12**	**0,30**
бетон	$5{,}55 - i0{,}36$	$5{,}5 - i0{,}5$	**0,30**	**0,16**	**90**	**1,20**	**0,04**
песок	$2{,}5\ \ - i0{,}06$	$2{,}5 - i0{,}03$	2÷**6**	**0,20**	6÷**25**	**0,3**÷1,0	0,1÷**0,4**
снег	$1{,}40 - i0{,}008$ $t = -39\,^\circ$C	$2{,}0 - i0{,}004$ $t = -3{,}8\,^\circ$C	1÷**3**	**0,3**÷2,0	$\le$ **2000**	**2**÷25	$\le$ **0,2**

8,6 мм [4], отмеченные кружками для вертикальной поляризации и крестиками для горизонтальной поляризации. Анализ представленных на рис. 2 данных показывает достаточно хорошее согласие между теорией и экспериментом. Незначительные отклонения теоретических значений от экспериментальных может быть связано с погрешностями самого метода возмущений, который является приближённым. Кроме того, ясно, что удельная ЭПР очень сильно зависит как от статистических параметров поверхности (σ_ξ и l_ξ), так и от электродинамических, включая зависимость диэлектрической проницаемости от температуры и влажности среды. Принимая во внимание эти факторы, процесс моделирования реальной ситуации с высокой степенью точности представляется довольно сложным без знания параметров, при которых выполнялся эксперимент. Поэтому теоретические расчёты следует расценивать лишь как качественные.

В миллиметровом диапазоне длин волн метод возмущений обычно используют при исследовании рассеяния на мелкомасштабных неоднородностях поверхности. В случае крупных (по сравнению с длиной волны) неровностей метод возмущений неприменим, и следует использовать другие методы [1, 2], например метод касательных плоскостей, условия применимости которого можно представить в следующем виде [4]:

1) крупномасштабность неровностей: $l_\xi/\lambda \gg 1$;

2) плавность ($a/\lambda \gg 1$, где $a = [1 + (\xi')^2]^{3/2}/\xi''$ — локальный радиус кривизны поверхности $\xi(x,y)$) и пологость ($\sqrt{\langle\gamma^2\rangle} \ll 1$) в среднем плоской рассеивающей поверхности ξ;

3) $ka\cos\beta \gg 1$, где $k = 2\pi/\lambda$.

Численные расчёты удельной ЭПР, выполненные методом касательных плоскостей для коэффициента корреляции гауссовского типа, представлены на рис. 3 в виде зависимостей σ_* от угла падения волны на поверхность асфальта, бетона, песка или снега. Представленный рисунок показывает, что бóльшая часть энергии рассеивается вблизи малых углов падения. Здесь следует также отметить, что при малых углах β большое влияние на зависимость удельной ЭПР оказывает вид коэффициента корреляции: гауссовская модель даёт параболическую зависимость (рис. 3), в то время как экспоненциальная — линейную [4]. По мере увеличения β всё меньшая и меньшая часть энергии рассеиваемой вблизи направления нормального падения. Одновременно при этом увеличивается доля энергии, рассеиваемая вблизи углов скользящего падения.

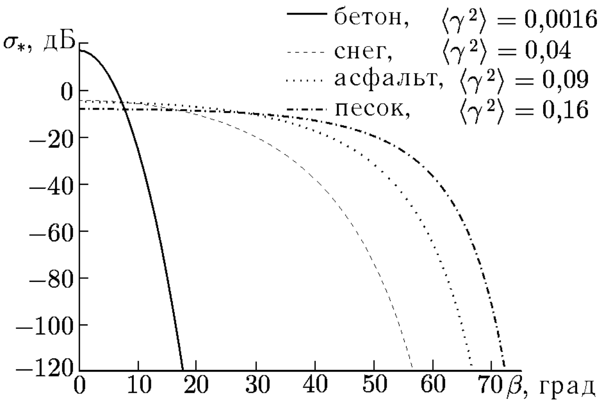


Рис. 3. Угловые зависимости удельной ЭПР, рассчитанные методом касательной плоскости на длине волны 8,6 мм

Анализируя рассеяние электромагнитных волн на реальных поверхностях методами возмущений или касательных плоскостей, следует помнить, что значительная часть земных покровов не является однородной ни с физической, ни с геометрической точек зрения. Как правило, пространственный спектр неровностей указанных поверхностей достаточно широк. В этом случае требуется обобщённый подход, учитывающий подобные особенности реальный земных поверхностей. Более широкие области применения имеет модель избирательного рассеяния, которую иногда называют двухмасштабной. Она была предложена при исследованиях рассеяния звука на шероховатой поверхности и применена для анализа рассеяния радиоволн морской поверхностью в [9]. В работе [10] эта методика была распространена на случай рассеяния радиоволн поверхностью Земли.

В основе двухмасштабной модели лежит предположение о возможности разделения неровностей реальной поверхности на две компоненты: мелко- и крупномасштабную [4, 5, 7]. Такое разделение достигается посредством замены реальной поверхности суперпозицией сглаженной средней поверхности $\xi_1(x,y)$ и малых нормальных отклонений от неё $\xi_2(x,y)$. Крупные шероховатости характеризуются параметрами σ_{ξ_1} и l_{ξ_1}, а мелкие — параметрами σ_{ξ_2} и l_{ξ_2}.

После разделения неровностей для рассеянного поля в качестве нулевого приближения используется решение, полученное методом касательных плоскостей и отвечающее крупномасштабным неровностям, а влияние мелкомасштабных неровностей учитывается в первом приближении метода возмущений. При этом оба типа неровностей считаются статистически независимыми, а рассеянное поле — некогерентным.

Параметры такой двухмасштабной статистически неровной поверхности должны удовлетворять следующим условиям [4]:

1) $2k\sigma_{\xi_2}\cos\beta' \ll 1$, где β' — локальный угол падения, отсчитываемый относительно касательной плоскости;

2) $\langle[\nabla\xi_2(x,y)]^2\rangle \ll 1$, где ∇ — градиент в касательной плоскости;

3) $ka_1\cos\beta' \gg 1$, где a_1 — средний радиус кривизны крупномасштабной неоднородности.

При выполнении вышеуказанных условий выражение для удельной ЭПР поверхности с двухмасштабными неровностями без учёта затенений является суперпозицией двух слагаемых [4]:

$$\sigma_* = \sigma_{*1} + \sigma_{*2}, \tag{1}$$

где σ_{*1} — удельная ЭПР в приближении метода касательных плоскостей, а σ_{*2} — удельная ЭПР для мелкомасштабной составляющей ξ_2, наложенной на крупномасштабную поверхность ξ_1. Влияние крупномасштабной составляющей проявляется в локальных изменениях углов, под которыми облучаются малые неровности. Для нахождения σ_{*2} необходимо локальные удельные ЭПР $\sigma_{*\text{л}}$ усреднить по всем возможным наклонам крупномасштабной поверхности, т. е.

$$\sigma_{*2} = \int \sigma_{*\text{л}} W(\gamma)\,\mathrm{d}\gamma, \tag{2}$$

где $W(\gamma)$ — двумерное распределение наклонов крупномасштабной составляющей.

Таким образом, в рамках двухмасштабной модели рассеяния с коэффициентом корреляции гауссовского типа можно записать следующие выражения удельной ЭПР для вертикальной (ВВ), горизонтальной (ГГ) и перекрёстной (ВГ, ГВ) поляризаций [7]:

1) вертикальная поляризация:

$$\sigma_*^{\text{ВВ}} = \sigma_{*1} + \sigma_{*2}^{\text{ВВ}}, \tag{3}$$

$$\sigma_{*1} = \frac{|V|^2}{a_{\text{ш}1}^2 \cos^4\beta} \exp(-\operatorname{tg}^2\beta/a_{\text{ш}1}^2 - (2k\sigma_{\xi2})^2), \qquad V = \frac{\sqrt{\varepsilon}-1}{\sqrt{\varepsilon}+1} \tag{4}$$

$$\sigma_{*2}^{\text{ВВ}} = \sigma_2^0\, |R_{\text{ВВ}}|^2, \qquad \sigma_2^0 = 4k^4 \sigma_{\xi2}^2 l_{\xi2}^2 \cos^4\beta \exp(-k^2 l_{\xi2}^2 \sin^2\beta), \tag{5}$$

$$a_{\text{ш}1}^2 = \frac{2\sigma_{\xi1}}{l_{\xi1}}\ , \qquad R_{\text{ВВ}} = \frac{(\varepsilon-1)\,[(\varepsilon-1)\sin^2\beta + \varepsilon]}{\left(\varepsilon\cos\beta + \sqrt{\varepsilon - \sin^2\beta}\right)^2}\ ;$$

2) горизонтальная поляризация:

$$\sigma_*^{\text{ГГ}} = \sigma_{*1} + \sigma_{*2}^{\text{ГГ}}, \tag{6}$$

$$\sigma_{*2}^{\text{ГГ}} = \sigma_2^0\, |R_{\text{ГГ}}|^2, \tag{7}$$

$$R_{\text{ГГ}} = \frac{\varepsilon - 1}{\left(\cos\beta + \sqrt{\varepsilon - \sin^2\beta}\right)^2}\ ;$$

3) перекрёстная поляризациия:

$$\sigma_*^{\text{ВГ}} = \sigma_*^{\text{ГВ}} = \frac{a_{\text{ш}1}^2 \sigma_2^0}{2} \left(|R_{\text{ВВ}}|^2 + |R_{\text{ГГ}}|^2 - 2\,|R_{\text{ВВ}}|\,|R_{\text{ГГ}}| \cos\Delta\varphi\right), \tag{8}$$

$$\Delta\varphi = \arg(R_{\text{ВВ}}) - \arg(R_{\text{ГГ}}).$$

Здесь ε — комплексная относительная диэлектрическая проницаемость земной поверхности (её значения на соответствующих длинах волн приведены в табл. 1), $a_{\text{ш}1}$ — параметр крупных шероховатостей поверхности [6].

Используя выражения (3)–(8), были выполнены численные расчёты удельной ЭПР в зависимости от угла падения волны β для трёх видов поляризации (ВВ, ГГ и ВГ) и нескольких типов подстилающих поверхностей при $\lambda = 2{,}2$ и $8{,}6$ мм (рис. 4–7 соответствуют поверхностям асфальта, бетона, песка и снега). Для сравнения на рис. 5 приведены экспериментальные данные удельной ЭПР бетона при $\lambda = 8{,}6$ мм для двух поляризаций, взятые из [11].

Рисунок 4 представляет собой типичные угловые зависимости удельной ЭПР σ_* в рамках двухмасштабной модели рассеяния [6]. При малых углах падения рассеянное поле определяется крупномасштабными неоднородностями; с ростом β квазизеркальная составляющая уменьшается и при $\beta \approx 30^\circ$ становится сравнимой с удельной ЭПР, обусловленной мелкомасштабными шероховатостями. Начиная с углов порядка $40^\circ \div 50^\circ$, доминирует рассеяние на малых неровностях, при этом спадание σ_* становится более плавным, что характерно для метода возмущений.

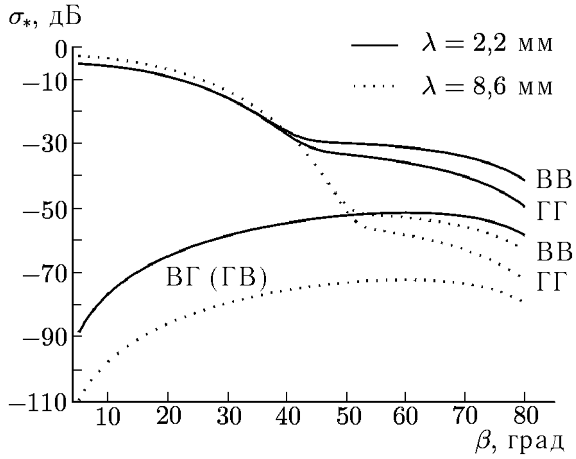


Рис. 4. Зависимость удельной ЭПР от угла падения волны на поверхность асфальта

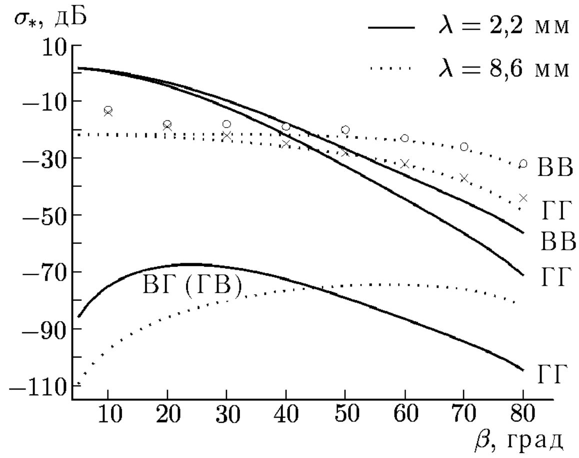


Рис. 5. Зависимость удельной ЭПР от угла падения волны на поверхность бетона

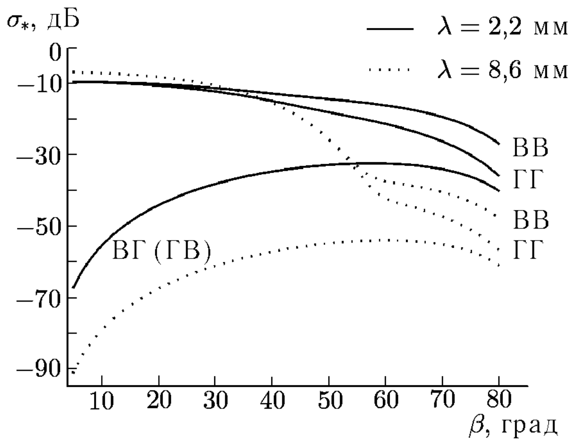


Рис. 6. Зависимость удельной ЭПР от угла падения волны на поверхность песка

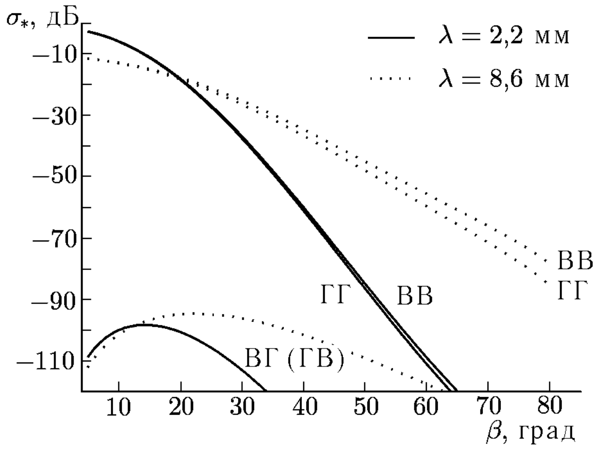


Рис. 7. Зависимость удельной ЭПР от угла падения волны на поверхность снега

Из рис. 4 также видны неодинаковые частотные и поляризационные свойства ЭПР при различных углах визирования поверхности. При малых углах падения ($\beta \approx 10^\circ \div 30^\circ$) ЭПР для вертикальной и горизонтальной поляризаций почти не отличается и слабо меняется с частотой (различие составляет не более $3 \div 4$ дБ). При средних и больших β угловые зависимости σ_* аналогичны закономерностям, полученным в рамках метода возмущений.

Анализ рис. 4–7 показывает подобие угловых зависимостей удельной ЭПР асфальта и песка (рис. 4 и 6), а также бетона и снега (рис. 5 и 7). Дело в том, что вклад в рассеяние от асфальта и песка (рис. 4 и 6), больший или меньший в зависимости от β, вносят как крупные, так и мелкие шероховатости. При рассеянии же от бетона и снега (рис. 5 и 7) определяющим является вклад только мелкомасштабных неровностей во всём диапазоне углов. Сравнивая статистические параметры земных покровов по табл. 1, можно также заметить, что радиус корреляции крупных неоднородностей l_{ξ_1} бетона и снега значительно больше, чем асфальта и песка. Экспоненциальный множитель в формуле (4), в который входит l_{ξ_1}, сводит на нет вклад в рассеяние от крупномасштабных неровностей. Что касается перекрёстной поляризации (рис. 4–7), то отметим следующее: во-первых, σ_* практически не зависит от β в широком диапазоне углов и заметно уменьшается лишь при углах $\beta > 70^\circ$; во-вторых, угловые зависимости σ_* для двух рассмотренных частот

(35 ГГц — $\lambda = 8{,}6$ мм и 135 ГГц — $\lambda = 2{,}2$ мм) подобны, и чем выше частота (меньше длина волны), тем больше удельная ЭПР; в-третьих, по сравнению с σ_* для горизонтальной и вертикальной поляризаций удельная ЭПР для перекрёстной поляризации имеет меньшие значения, что особенно заметно на малых углах β; наконец, в-четвёртых, угловая зависимость σ_* при перекрестной поляризации определяется влиянием мелкомасштабных неоднородностей (это видно как из приведённых рисунков, так и из формулы (8)), поэтому для всех видов поверхностей (см. рис. 4–7) качественный вид этих кривых одинаков.

2. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАССЕЯНИЯ РАДИОВОЛН НА НЕРОВНОЙ ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ МЕТОДОМ КАСАТЕЛЬНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ С УЧЁТОМ ДИАГРАММЫ НАПРАВЛЕННОСТИ АНТЕННЫ

В данном разделе представлены результаты численного моделирования рассеяния монохроматических электромагнитных волн миллиметрового диапазона на статистически шероховатой земной поверхности с учётом диаграммы направленности антенны.

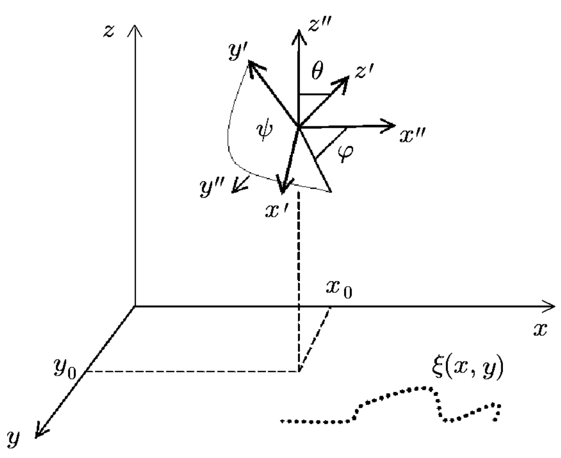


Рис. 8. Геометрия задачи

На основе спектрального подхода рассмотрим рассеяние монохроматической электромагнитной волны с учётом диаграммы направленности антенны. Если поверхность крупномасштабная, плавная и пологая, то целесообразно использовать метод касательных плоскостей [4]. Как уже отмечалось выше, метод касательных плоскостей заключается в том, что в каждой точке отражения волны необходимо построить касательную плоскость к поверхности и рассматривать отражение локально в этой точке как от плоскости. Тогда влияние поверхности можно учитывать френелевским коэффициентом отражения и фазовым набегом — задержкой сигнала при прохождении расстояния от земной поверхности до приёмной антенны.

Рассмотрим следующую геометрию задачи. Неподвижная система координат (x, y, z) (см. рис. 8) связана со средним уровнем рассеивающей поверхности $\xi(x, y)$. Опорная система координат (x'', y'', z'') связана с летательным аппаратом. Положение антенны относительно опорной системы координат определяется системой координат (x', y', z'), характеризуемой углом нутации θ, углом прецессии φ и углом чистого вращения ψ. Антенна летательного аппарата находится в зоне Фраунгофера относительно поверхности. Пусть рассеивающая поверхность $z = \xi(x, y)$ является однородной, изотропной и имеет следующие заданные статистические характеристики: $\langle \xi(x, y)\rangle = 0$, $\langle \xi^2(x, y)\rangle = \sigma_\xi^2$.

Вывод выражения для напряжённости электрического поля при вышеуказанных условиях приведён в монографии [4], поэтому ограничимся лишь конечным результатом. Таким образом, для поля обратного рассеяния с учётом диаграммы направленности антенны имеем следующее выражение:

$$E_{\mathrm{A}}(k, z_0) = -\frac{E_0 V \cos\beta}{4\pi^2 z_0^2} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} K(k, x, y, x_0, y_0, z_0) F(a_1, b_1) F(a_2, b_2)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y. \qquad (9)$$

Здесь $E_0 = U_0 k$, U_0 — напряжение, приложенное к антенне, V — френелевский коэффициент отражения, ε — комплексная относительная диэлектрическая проницаемость подстилающей поверхности, (x_0, y_0, z_0) — координаты антенны летательного аппарата,

$$K(k,x,y,x_0,y_0,z_0) = \exp(2ikz_0)\exp(-2ik\xi(x,y)\cos\beta)\exp\bigl(ik\,[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]/z_0\bigr)\,, \qquad (10)$$

$F(a_1, b_1)$ и $F(a_2, b_2)$ — диаграммы направленности передающей и приёмной антенн с коэффициентами

$$a_1 = \frac{k\,(x-x_0)}{z_0} + \frac{k\,(y-y_0)\,(\varphi + \psi\cos\beta)}{z_0} + k\psi\sin\beta,$$

$$a_2 = -\,\frac{k\,(x-x_0)}{z_0} - \frac{k\,(y-y_0)\,(\varphi + \psi\cos\beta)}{z_0} + k\psi\sin\beta, \qquad (11)$$

$$b_1 = -\,\frac{k\,(x-x_0)\,(\varphi\cos\beta + \psi)}{z_0} + \frac{k\,(y-y_0)}{z_0} + k\sin\beta,$$

$$b_2 = \frac{k\,(x-x_0)\,(\varphi\cos\beta + \psi)}{z_0} - \frac{k\,(y-y_0)}{z_0} + k\sin\beta. \qquad (12)$$

Для численного эксперимента выберем однолепестковую диаграмму направленности антенны гауссовского типа с $\varphi = \psi = 0$ (одинаковую для передающей и приёмной антенны), которая хоть и не реализуется на практике, но позволяет моделировать процесс получения радиолокационных изображений с достаточной степенью точности:

$$F(x,y) = \exp\left[-\left(\frac{x-x_0}{z_0}\right)^2 - \left(\frac{y-y_0}{z_0}\cos\beta + \sin\beta\right)^2\right]. \qquad (13)$$

Земную поверхность представим в виде

$$\xi(x,y) = \sigma_\xi \cos\left[\frac{2\pi}{l_\xi}\,(x+y)\right], \qquad (14)$$

где σ_ξ — стандарт, а l_ξ — радиус пространственной корреляции неоднородностей статистически шероховатой подстилающей поверхности. В расчётах будем полагать, что $x_0 = y_0 = 0$, высота антенны летательного аппарата z_0 изменяется от 2 010 до 10 м, $\beta = 30^\circ$, длина волны составляет 2,2 и 8,6 мм. В качестве подстилающей поверхности будем, как и раньше, рассматривать асфальт, бетон, песок и снег, значения $\sigma_{1\xi}$, $l_{1\xi}$ и ε которых представлены в табл. 1.

Результаты численных расчётов поля (9), отражённого от статистически шероховатой поверхности, в зависимости от высоты z_0 представлены на рис. 9 для $\lambda = 8{,}6$ мм (сплошные линии) и $\lambda = 2{,}2$ мм (пунктирные линии). На рис. 9*а* показаны зависимости амплитуды поля, отражённого от поверхности асфальта, на рис. 9*б* — от песка, на рис. 9*в* — от бетона, на рис. 9*г* — от снега. Анализ рис. 9*а* и *б* показывает, что амплитуда поля при $\lambda = 8{,}6$ мм больше, чем при $\lambda = 2{,}2$ мм для асфальта примерно на 4 дБ, а для песка на 7 дБ. Зависимость амплитуды электрического поля, отражённого от поверхности бетона (рис. 9*в*) и снега (рис. 9*г*) имеет спадающий характер с небольшими осцилляциями (около 2 дБ для бетона и 5 дБ для снега), причём амплитуда осцилляций больше при меньшей длине волны. Наличие таких осцилляций связано с неоднородностью структуры поверхности (шероховатостью). Если проанализировать табл. 1 со статистическими параметрами исследуемых поверхностей (раздел 1), можно заметить, что именно у бетона и снега размер неоднородностей намного больше, чем у асфальта и песка.

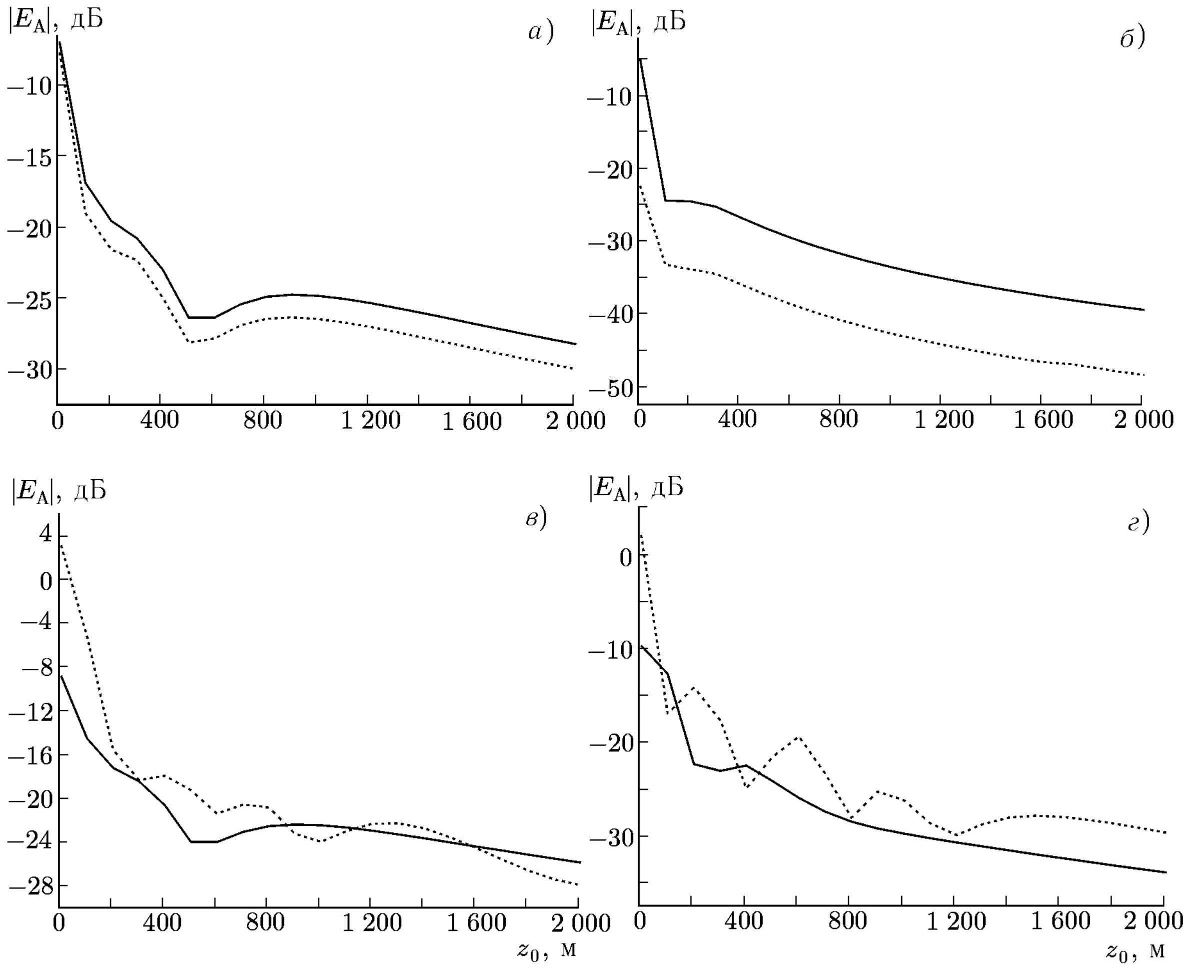


Рис. 9. Амплитуда напряжённости электрического поля, отражённого от неровной поверхности асфальта (*а*), песка (*б*), бетона (*в*) и снега (*г*) для двух длин волн: сплошные линии соответствуют $\lambda = 8{,}6$ мм, пунктирные — $\lambda = 2{,}2$ мм

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведены исследования рассеяния радиосигналов миллиметрового диапазона длин волн на статистически шероховатых поверхностях методами малых возмущений и касательных плоскостей. Выполненные в рамках двухмасштабной модели расчёты показали, что при малых углах падения волны на поверхность рассеянное поле определяется вкладом крупномасштабных неоднородностей; в переходной области углов (порядка 30°) вклад крупных и мелких неоднородностей становится сравнимым, а при бóльших углах рассеяние обусловлено только мелкими шероховатостями. Неоднородности земной поверхности оказывают заметное влияние на характер рассеянного поля, что может быть полезным при решении обратной задачи восстановления параметров рассеивающей поверхности. Результаты работы могут быть использованы в радиолокации при моделировании электромагнитных процессов в радиоканале миллиметрового диапазона длин волн, а также при решении задач идентификации и распознавания радиолокационных объектов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шмелёв А. Б. // УФН. 1972. Т. 106, № 3. С. 459.
2. Исакович М. А. // ЖЭТФ. 1952. Т. 23, вып. 3. С. 305.
3. Daviditch I., Troll T., Detlefsen J. // Proc. Int. Radar Symposium. Germany, 1998. P. 437.
4. Подосенов С. А., Потапов А. А., Соколов А. А. Импульсная электродинамика широкополосных радиосистем и поля связанных структур. М.: Радиотехника, 2003. 720 с.
5. Басс Ф. Г., Фукс И. М. Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. М.: Наука, 1972. 428 с.
6. Зубкович С. Г. Статистические характеристики сигналов, отражённых от земной поверхности. М.: Советское радио, 1968. 224 с.
7. Мельник Ю. А., Зубкович С. Г., Степаненко В. Д. и др. Радиолокационные методы исследования Земли. М.: Советское радио, 1980. 264 с.
8. Борзов А. Б., Быстров Р. П., Дмитриев В. Г. и др. // Зарубежная электроника. Успехи современной радиоэлектроники. 2001. № 4. С. 18.
9. Bass F. G., Fuks I. M., Kalmykov A. I., et al. // IEEE Trans. Antennas and Propagat. 1968. V. 16, No. 5. P. 554.
10. Bass F. G., Fuks I. M., Kalmykov A. I., et al. // IEEE Trans. Antennas and Propagat. 1968. V. 16, No. 5. P. 560.
11. Андреев Г. А., Чёрная Л. Ф. // Радиоэлектроника. 1981. № 6. С. 1 198.

Поступила в редакцию 14 октября 2004 г.; принята в печать 14 марта 2005 г.

SOME FEATURES OF ELECTROMAGNETIC RADIOWAVE SCATTERING FROM STATISTICALLY ROUGH EARTH SURFACES IN THE MILLIMETER RANGE OF WAVELENGTHS

E. A. Shorokhova and A. V. Kashin

We show the results of numerical simulation of scattering of millimeter electromagnetic waves from statistically rough earth surface by the methods of small perturbations and tangent surfaces. The following calculation algorithms and codes are developed: 1) calculation of specific scattering cross section for small-scale, large-scale, and combined (two-scale) structures of the earth surface inhomogeneities; 2) calculation of the field scattered from a rough surface with allowance for the antenna directional pattern. As an example, we present the results of numerical calculation of specific scattering cross section and the scattered field for the case of Gaussian single-lobe directional pattern and the earth surface model (asphalt, concrete, sand, and snow) in the form of a periodic structure. The obtained theoretical results on the specific scattering cross-section are in good agreement with the experimental data.

УДК 533.9

КИНЕТИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПОТОКА ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ГРОЗОВОМ ОБЛАКЕ

В. С. Грач, А. Г. Демехов, В. Ю. Трахтенгерц

Институт прикладной физики РАН, г. Нижний Новгород, Россия

Рассмотрена линейная стадия неустойчивости потока заряженных частиц в грозовом облаке. С учётом разброса крупных частиц по размерам получено дисперсионное уравнение, характеризующее временну́ю эволюцию спектральной составляющей квазистатического электрического поля. Исследовано дисперсионное уравнение для случая монодисперсного ансамбля частиц и для случая модельной функции распределения. Получены зависимости характеристик неустойчивости от дисперсии размеров крупных частиц и проводимости воздушного потока.

ВВЕДЕНИЕ

Проблема грозового электричества чрезвычайно многообразна и включает целый комплекс принципиальных вопросов, начиная от механизмов микрозарядки различных компонент облачной среды и кончая финальной стадией формирования грозового разряда [1–12].

В настоящее время по-прежнему сложными для понимания являются процессы, определяющие тонкую структуру грозового облака и подготовительную стадию грозового разряда, которая включает комплекс внутриоблачных разрядов с разными пространственными и временны́ми масштабами.

Практически во всех натурных экспериментах проявляется многослойная ячеистая структура в распределении электрических зарядов и электрического поля в грозовом облаке [5, 9–12]. Несмотря на то, что надёжные и достаточно точные измерения тонкой структуры облака с необходимым пространственным разрешением, по-видимому, ещё впереди, в свете имеющихся данных вполне можно допустить существование такой электрической мелкомасштабной структуры, в которой значения локальных электрических полей могут существенно превышать величину макроскопического электрического поля.

Для существования таких ячеек есть веские физические основания. Дело в том, что грозовое облако на зрелой стадии представляет собой плазмоподобную многопотоковую систему. Взаимопроникающие потоки заряженных тяжёлой (крупные капли и град) и лёгкой (кристаллы льда и мелкие капли) компонент возникают в облаке благодаря совместному действию силы тяжести и восходящего конвективного потока воздуха. Крупные частицы оказываются взвешенными в потоке, заполняя в основном нижнюю половину облака, в то время как лёгкая фракция уносится вместе с потоком в верхнюю часть облака. При достаточно большом заряде на крупных частицах эта система становится неустойчивой по отношению к возбуждению электрических волн пространственного заряда. Такая неустойчивость во многом напоминает пучково-плазменный разряд.

Теоретическая модель возникновения электрических ячеек в грозовом облаке, основанная на аналогии с многопотоковыми движениями в плазме, предложена в работе [1] и получила развитие в [2] с учётом эффектов коллективной зарядки частиц. Неустойчивость, рассмотренная в [1, 2], носит диссипативный характер. Она порождается движением («падением») тяжёлых заряженных частиц относительно среды с достаточно большим столкновительным затуханием обычных плазменных волн. Другие неустойчивости в аэрозольной плазме, связанные с самогравитацией, дрейфом частиц в электрическом и магнитном полях и т. д. обсуждаются, например, в [13, 14].

В [1, 2] не учитывалась дисперсия размеров крупных частиц и не было проведено детальное исследование зависимости характеристик неустойчивости от некоторых параметров задачи, в частности от проводимости воздушного потока. Актуальность такого анализа обусловлена тем, что во время микроразрядов проводимость в облаке может возрастать на несколько порядков [5]. Разброс крупных частиц по размерам порождает их разброс по скоростям относительно средней скорости воздушного потока [15], поэтому неустойчивость может иметь кинетический характер, т. е. её инкремент может существенно отличаться от полученного в гидродинамическом приближении [1, 2]. Исследование указанных вопросов и составляет предмет данной работы.

В разделе 1 выведено дисперсионное уравнение, характеризующее временну́ю эволюцию спектральной составляющей квазистатического электрического поля. Исследование дисперсионного уравнения в гидродинамическом приближении (в пренебрежении разбросом частиц облака по размерам) составляет содержание раздела 2. В разделе 3 исследовано дисперсионное уравнение с учётом разброса частиц по размерам. Раздел 4 содержит размерные оценки и обсуждение результатов. В разделе 5 кратко сформулированы основные результаты работы.

1. ВЫВОД ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ

Будем рассматривать ансамбль взвешенных тяжёлых частиц в потоке ионизированного воздуха. Электрические свойства воздушного потока достаточно полно характеризуются проводимостью σ:

$$\mathbf{j}^{\text{возд}} = \sigma \mathbf{E}, \tag{1}$$

где $\mathbf{j}^{\text{возд}}$ — плотность электрического тока в воздушном потоке, $\mathbf{E}$ — напряжённость электрического поля. Другая компонента — частицы аэрозолей и осадков, обладающие разбросом по размерам. Тепловой разброс скоростей частиц мы полагаем несущественным и считаем, что все параметры частицы (установившаяся скорость, масса и заряд) однозначно определяются её размером. В этом случае равновесная функция распределения частиц имеет вид

$$F_0 = N_0 f_R\, \delta[\mathbf{v} - \mathbf{V}_0(R)], \tag{2}$$

где N_0 — равновесная концентрация частиц, R — параметр, характеризующий размер частицы, $\mathbf{v}$ — скорость частицы, $\mathbf{V}_0(R)$ — установившаяся скорость относительно потока, соответствующая размеру R, f_R — невозмущённая функция распределения частиц по размерам, $\int f_R\,\mathrm{d}R = 1$.

Возмущённую функцию распределения $\tilde f_R$ также будем искать в пренебрежении разбросом скоростей частиц одного размера:

$$F = N_0\, \tilde f_R\, \delta\{\mathbf{v} - [\mathbf{V}_0(R) + \mathbf{V}'(R)]\}, \tag{3}$$

где $\tilde f_R = f_R + f'$, f' — возмущение функции распределения частиц по размерам, $\mathbf{V}'(R)$ — возмущение скорости частиц размера R.

Движение частиц размера R подчиняется уравнению

$$M_R \left[\frac{\partial \mathbf{V}(R)}{\partial t} + (\mathbf{V}(R)\nabla)\, \mathbf{V}(R)\right] = q_R \mathbf{E} + M_R \mathbf{g} - \mathbf{F}_{\mathrm{s}}, \tag{4}$$

где q_R и M_R — заряд и масса частицы соответственно, $\mathbf{V}(R)$ — её скорость, $\mathbf{g}$ — ускорение силы тяжести, $\mathbf{F}_{\mathrm{s}}$ — сила трения.

Сила трения $\mathbf{F}_\mathrm{s}$ в случае малых чисел Рейнольдса выражается формулой Стокса, а в случае больших чисел Рейнольдса определяется более сложным образом. Силу торможения можно записать как $\mathbf{F}_\mathrm{s} = M_R \nu_R V(R)$. Коэффициент ν_R по аналогии с двухкомпонентной плазмой является эффективной частотой соударений.

В системе отсчёта, связанной с воздухом, с учётом уравнения непрерывности для облачных частиц и уравнений Максвелла в отсутствие магнитного поля имеем следующую систему уравнений:

$$M_R \left[\frac{\partial \mathbf{V}(R)}{\partial t} + (\mathbf{V}(R)\nabla)\,\mathbf{V}(R)\right] = q_R \mathbf{E} + M_R \mathbf{g} - M_R \nu_R \mathbf{V}(R),$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(N_0 \int \tilde{f}_R \,\mathrm{d}R\Big) + \mathrm{div}\Big(N_0 \int V_R \tilde{f}_R \,\mathrm{d}R\Big) = 0, \qquad \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + 4\pi\sigma\mathbf{E} + 4\pi N_0 \int q_R \tilde{f}_R \mathbf{V}(R)\,\mathrm{d}R = 0. \tag{5}$$

Линеаризуя систему (5), получим дисперсионное уравнение, характеризующее временну́ю эволюцию спектральной составляющей квазистатического электрического поля с волновым вектором $\mathbf{k}$ на частоте ω (для процесса вида $\exp(-i\omega t + i\mathbf{kr})$):

$$1 + \frac{4\pi\sigma i}{\omega} - 4\pi N_0 \int\limits_0^\infty \frac{q_R^2 f_R \,\mathrm{d}R}{M_R\,(\omega - \mathbf{k}\mathbf{V}_R)\,(\omega - \mathbf{k}\mathbf{V}_R + i\nu_R^0)} = 0, \tag{6}$$

где σ — проводимость воздуха, $\mathbf{V}_R$ — установившаяся скорость, ν_R^0 — эффективная частота соударений, связь которой с ν_R определяется зависимостью силы трения от скорости.

Рассмотрим, как зависят входящие в (6) параметры частицы $\mathbf{V}_R$, M_R, q_R, ν_R^0 от её размера R.

Частицы мы полагаем однородными шарами радиуса R с плотностью ρ. Тогда $M_R = 4\pi\rho R^3/3 = M_0 R^3/R_0^3$, где R_0 — средний радиус частиц, M_0 — масса, соответствующая этому радиусу.

Связь между эффективной частотой соударений ν_R, скоростью частицы V_R и её радиусом R находится из условия равновесия частицы в воздухе в поле силы тяжести:

$$M_R g = F_\mathrm{s} = M_R \nu_R V_R, \tag{7}$$

откуда

$$\nu_R = g/V_R. \tag{8}$$

Сила трения может определяться по-разному в зависимости от числа Рейнольдса Re в облаке. В случае малых Re она выражается формулой Стокса: $F_\mathrm{s} = 6\pi\eta_0 V_R R$, где η_0 — вязкость воздуха. Тогда из (7) следует

$$V_R = \frac{2\rho}{9\eta_0}\, g R^2 = u\,\frac{R^2}{R_0^2}\ . \tag{9}$$

Здесь u — скорость частицы со средним радиусом R_0.

В случае достаточно больших чисел Рейнольдса $\mathrm{Re} > 10^2$ сила трения определяется выражением [6] $F_\mathrm{s} = 0{,}2\pi\rho_0 R^2 V_R^2$, где ρ_0 — плотность воздуха. Тогда из (7) имеем

$$V_R = \sqrt{\frac{20\rho}{3\rho_0}\, g}\,\sqrt{R} = u\,\frac{\sqrt{R}}{\sqrt{R_0}}\ . \tag{10}$$

Зависимость заряда частицы q от радиуса R также может иметь разный характер, определяемый моделью процесса электризации частиц. Однако в большинстве моделей [2, 5] $q_R \propto R^2$. Таким образом, можно записать

$$q_R = q_0 R^2/R_0^2, \tag{11}$$

где q_0 — заряд частицы радиуса R_0.

С учётом вышеприведённых зависимостей от радиуса частицы уравнение (6) примет вид

$$1 + \frac{4\pi\sigma i}{\omega} - \Omega^2 \int\limits_0^\infty \frac{R f_R \, \mathrm{d}R}{R_0 \, (\omega - \mathbf{k}\mathbf{V}_R) \, (\omega - \mathbf{k}\mathbf{V}_R + i\nu_R^0)} = 0. \tag{12}$$

Здесь $\Omega^2 = 4\pi N_0 q_0^2 / M_0$ — квадрат плазменной частоты частиц среднего радиуса R_0.

2. АНАЛИЗ ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ В ГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

В пренебрежении разбросом частиц по размерам ($f_{\mathrm{R}} = \delta(R - R_0)$) уравнение (6) примет вид [1]

$$1 + \frac{4\pi\sigma i}{\omega} - \frac{\Omega^2}{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{u}) \, (\omega - \mathbf{k}\mathbf{u} + i\nu)} = 0. \tag{13}$$

Здесь $\nu \equiv \nu_{\mathrm{eff}} = g/u$ — эффективная частота соударений, соответствующая скорости u. Вводя безразмерные величины

$$\widetilde{\Omega} \equiv \Omega/\nu, \qquad \widetilde{\sigma} \equiv 4\pi\sigma/\nu, \qquad \widetilde{\omega} \equiv \omega/\nu, \qquad \kappa \equiv (\mathbf{k}\mathbf{u})/\nu, \tag{14}$$

приведём (13) к виду

$$1 - \frac{\widetilde{\Omega}^2}{\widetilde{\omega} \, (\widetilde{\omega} + i)} + \frac{\widetilde{\sigma} i}{\widetilde{\omega} - \kappa} = 0. \tag{15}$$

2.1. Приближённые решения при малой проводимости

В [1] были получены приближённые решения уравнения (15) для случая малой проводимости: $\widetilde{\sigma} \ll 1$. Для полноты изложения и последующего сравнения с более общими результатами приведём их в этом подразделе.

Условие достижения порога неустойчивости в данной системе имеет вид

$$A \equiv \frac{\widetilde{\Omega}^2}{\widetilde{\omega}^2 + 1} - 1 = 0, \qquad \widetilde{\omega} = \frac{1}{1 + \widetilde{\sigma}} \, \kappa. \tag{16}$$

Таким образом, минимальное значение $\widetilde{\Omega}^2$, при котором возможна неустойчивость, достигается при $\widetilde{\omega} = 0$ и равно $\widetilde{\Omega}_{\mathrm{thr}}^2 = 1$. При $A > 0$ ($\widetilde{\Omega} > 1$) в (15) появляются неустойчивые решения с $\operatorname{Im} \widetilde{\omega} \equiv \widetilde{\gamma} > 0$ ($\widetilde{\gamma} \equiv \gamma/\nu \equiv \operatorname{Im} \omega/\nu$).

Величина A остаётся положительной при $0 < \kappa < \kappa_{\max}$. Исходя из (16), максимальные значения частоты и волнового числа неустойчивых волн составляют

$$\widetilde{\omega}_{\max} = \sqrt{\widetilde{\Omega}^2 - 1}\,, \qquad \kappa_{\max} = \sqrt{\widetilde{\Omega}^2 - 1}\, (1 + \widetilde{\sigma})\,. \tag{17}$$

В случае малой проводимости ($\widetilde{\sigma} \ll 1$, что выполняется в типичных условиях грозового облака на подготовительной стадии грозового разряда) в области неустойчивости $\widetilde{\gamma} \ll \widetilde{\omega}$, и из (15) можно найти приближённое выражение для $\tilde{\gamma}$ [1]:

$$\widetilde{\gamma} = \frac{A\kappa^2 \widetilde{\sigma}}{1 + A^2 \kappa^2}\,. \tag{18}$$

Максимальный инкремент и соответствующее ему волновое число даются следующими выражениями:

$$\widetilde{\gamma}_{\max} = (\widetilde{\Omega} - 1)^2\, \widetilde{\sigma}, \qquad \kappa_{\rm opt} = \sqrt{\widetilde{\Omega} - 1} \tag{19а}$$

при $\widetilde{\Omega}$ близких к 1 ($A \ll 1$),

$$\widetilde{\gamma}_{\max} = \widetilde{\Omega}\widetilde{\sigma}/2, \qquad \kappa_{\rm opt} = \widetilde{\Omega} - 1/2 \tag{19б}$$

при больших $\widetilde{\Omega}$.

2.2. Расчёт инкремента при произвольном значении проводимости

В случае произвольного значения проводимости уравнение (15) можно решить численно путём поиска корней полинома, полученного из (15):

$$\widetilde{\omega}^3 + \widetilde{\omega}^2\,[-\kappa + i\,(1 + \widetilde{\sigma})] + \widetilde{\omega}\,(-i\kappa - \widetilde{\Omega}^2 - \widetilde{\sigma}) + \widetilde{\Omega}^2\kappa = 0, \tag{20}$$

где $\widetilde{\omega} = \widetilde{\omega}^{\rm r} + i\widetilde{\gamma}$.

На участке дисперсионной характеристики $0 < \kappa < \kappa_{\max}$ нас интересует такое решение уравнения (20), для которого

$$\widetilde{\omega}^{\rm r} \equiv {\rm Re}\,\widetilde{\omega} > 0, \qquad \widetilde{\gamma} \equiv {\rm Im}\,\widetilde{\omega} > 0. \tag{21}$$

Полученные из (20) зависимости частоты и инкремента от волнового числа при различной проводимости $\widetilde{\sigma}$, а также аналитические оценки, полученные по приближённым формулам (16), (18), представлены на рис. 1.

Как можно видеть из графиков, при $\widetilde{\sigma} \leq 0{,}1$ зависимость $\widetilde{\omega}^{\rm r}(\kappa)$ близка к линейной и с хорошей точностью описывается формулами (16). Групповую скорость можно считать постоянной и равной $V_{\rm gr}^0 = (1+\widetilde{\sigma})^{-1}$. При увеличении $\widetilde{\sigma}$ зависимость $\widetilde{\omega}^{\rm r}(\kappa)$ перестаёт быть линейной. Зависимости $V_{\rm gr}(\kappa)$ имеют сходную форму, но с ростом $\widetilde{\sigma}$ сильнее проявляется нелинейность дисперсионной характеристики и тем больше диапазон изменения групповой скорости. В случае малой проводимости формы приближённой и точной зависимостей $\widetilde{\gamma}(\kappa)$ качественно совпадают, но в численных значениях есть заметные различия, т. е. аналитическое приближение даёт завышенный результат. Столь заметное расхождение связано с тем, что точность аналитических приближений быстро убывает с ростом проводимости $\widetilde{\sigma}$. При $\widetilde{\sigma} \sim 0{,}001$ аналитические результаты совпадают с численными. При увеличении $\widetilde{\sigma}$ величина $\widetilde{\gamma}_{\max}$ возрастает и кривая зависимости $\widetilde{\gamma}(\kappa)$ становится более симметричной.

Зависимости максимального инкремента и оптимальных волнового числа и частоты, при которых этот максимум достигается, от проводимости $\widetilde{\sigma}$ приведены ниже в сопоставлении с результатами кинетических расчётов (см. рис. 6). При $\widetilde{\sigma} < 0{,}1$ зависимости, полученные численно, качественно согласуются с аналитическими приближениями, при большей проводимости наблюдается сильное расхождение. Максимальный инкремент $\widetilde{\gamma}_{\max}$ линейно возрастает при малых $\widetilde{\sigma}$,

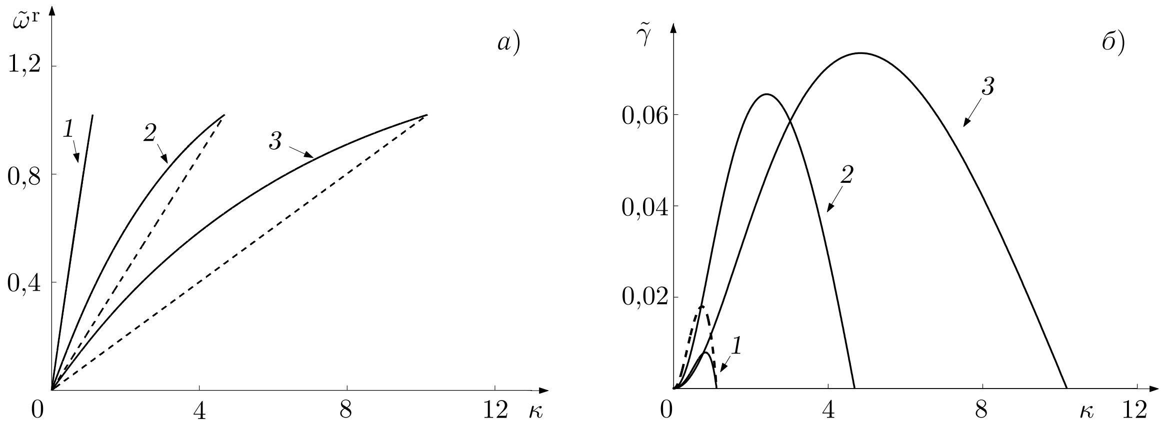


Рис. 1. Дисперсионные свойства электростатических волн в зависимости от проводимости: зависимости частоты (*а*) и инкремента (*б*) от волнового числа. Кривые *1* соответствуют $\widetilde{\sigma} \approx 0{,}09$, кривые *2* — $\widetilde{\sigma} \approx 3{,}6$, кривые *3* — $\widetilde{\sigma} \approx 9$. Пунктирные кривые соответствуют аналитическим формулам (16), (18). Параметр $\widetilde{\Omega}^2 = 2$

затем выходит на насыщение и достигает стационарного значения. Соответствующее максимальному инкременту волновое число κ_{opt} при увеличении $\widetilde{\sigma}$ возрастает практически линейно. Соответствующая максимальному инкременту частота $\widetilde{\omega}_{\mathrm{opt}}$ при малых $\widetilde{\sigma}$ убывает, затем выходит на стационарное значение.

3. АНАЛИЗ ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ С УЧЁТОМ РАЗБРОСА ЧАСТИЦ ПО РАЗМЕРАМ

3.1. Упрощение дисперсионного уравнения

Как видно из (9) и (10), разброс частиц по размерам приводит и к разбросу по скоростям V_R. Перейдём в уравнении (12) к функции распределения по скоростям V_R, используя соотношения (8)–(11):

$$\int\limits_0^\infty \frac{R f_R \,\mathrm{d}R}{R_0\,(\omega - \mathbf{k}\mathbf{V}_R)\,(\omega - \mathbf{k}\mathbf{V}_R + i\nu_R^0)} = \int\limits_0^\infty \frac{R(V_R) f_{R=R(V_R)}\,\partial R/\partial V_R \,\mathrm{d}V_R}{R_0\,(\omega - \mathbf{k}\mathbf{V}_R)\,(\omega - \mathbf{k}\mathbf{V}_R + i\nu_R^0)}\ . \tag{22}$$

Функцию распределения по скоростям выберем в форме закона Гаусса:

$$f_{R=R(V_R)} = C_{\mathrm{N}} \exp\left[-\,\frac{(V_R - u)^2}{\Delta^2}\right]. \tag{23}$$

Нормировочная константа C_{N} находится из условия $\int_0^\infty f_R \,\mathrm{d}R = 1$.

Введём безразмерный параметр разброса α, характеризующий отношение средней скорости u к дисперсии Δ:

$$\alpha = u/\Delta. \tag{24}$$

В дальнейшем будем считать разброс по скоростям достаточно малым:

$$\alpha \gg 1. \tag{25}$$

Кроме того, рассмотрим случай малых чисел Рейнольдса, когда связь между скоростью частицы и её радиусом описывается соотношением (9), а сила трения выражается формулой Стокса. При этом $C_{\mathrm{N}} \approx 2\alpha/(R_0\sqrt{\pi})$, а $\nu_R^0 \equiv \nu_R$.

В силу условия (25) при интегрировании по V_R можно пренебречь зависимостью частоты соударений от скорости и считать $\nu_R \approx \nu_{\rm eff} = g/u$. При этом дисперсионное уравнение (12) может быть приведено к виду

$$1 + \frac{4\pi\sigma}{\omega}\, i + \frac{\Omega^2 i}{\nu_{\rm eff}\,\Delta\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\infty \left(\frac{1}{\omega - kV_R} - \frac{1}{\omega - kV_R + i\nu_{\rm eff}} \right) \exp\left[-\frac{(V_R - u)^2}{\Delta^2} \right] {\rm d}V_R = 0. \qquad (26)$$

Переходя в систему отсчёта, движущуюся относительно воздушного потока со скоростью u, и используя безразмерные величины (14), запишем дисперсионное уравнение (26) в виде

$$1 + \frac{\widetilde{\sigma} i}{\widetilde{\omega} - \kappa} + \frac{\widetilde{\Omega}^2 i}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\alpha}^{\infty} \frac{\exp(-x^2)}{\widetilde{\omega} - \kappa x/\alpha}\, {\rm d}x - \frac{\widetilde{\Omega}^2 i}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\alpha}^{\infty} \frac{\exp(-x^2)}{\widetilde{\omega} - \kappa x/\alpha + i}\, {\rm d}x = 0. \qquad (27)$$

В силу условия (25) нижний предел интегрирования в (27) можно заменить на $-\infty$, тогда это уравнение принимает вид

$$1 + \frac{\widetilde{\sigma} i}{\widetilde{\omega} - \kappa} + \frac{\widetilde{\Omega}^2 \alpha i}{\kappa}\, [\zeta(z_1) - \zeta(z_2)] = 0\,, \qquad (28)$$

где $\zeta(z)$ — функция Крампа:

$$\zeta(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-x^2)}{z - x}\, {\rm d}x \; = -i\sqrt{\pi}\exp(-z^2) \left(1 + \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^z \exp(t^2)\, {\rm d}t \right),$$

$z_1 = \alpha\widetilde{\omega}/\kappa$, $z_2 = \alpha\,(\widetilde{\omega} + i)/\kappa$. При $\alpha \to \infty$ уравнение (28) переходит в уравнение (15), полученное в гидродинамическом приближении.

При условиях $|\alpha\widetilde{\omega}/\kappa| \ll 1$ и ${\rm Re}\,\widetilde{\omega} < 1$ (${\rm Re}\, z_2^2 < 0$) для функций Крампа, входящих в (28), справедливы следующие асимптотические разложения:

$$\zeta(z_1) = -i\sqrt{\pi}\exp(-z_1^2) + \frac{1}{z_1}\left(1 + \frac{1}{2z_1^2} + \frac{3}{4z_1^4} + \ldots \right),$$

$$\zeta(z_2) = \frac{1}{z_2}\left(1 + \frac{1}{2z_2^2} + \frac{3}{4z_2^4} + \ldots \right).$$

В представлениях функций Крампа ограничимся первыми двумя слагаемыми степенного ряда. Оценим порядок отброшенных членов. Отношение третьего слагаемого ко второму для функции $\zeta(z_1)$ равно $3\kappa^2/(2\alpha^2\widetilde{\omega}^2)$, для функции $\zeta(z_2)$ — $3\kappa^2/[2\alpha^2\,(\widetilde{\omega} + i)^2]$. На основе результатов, полученных в гидродинамическом приближении, и с учётом сделанных выше предположений можно считать, что $\kappa \sim \widetilde{\omega} \leq 1$ (это оправдывается результатами нижеследующих расчётов). Таким образом, уже при $\alpha \sim 3$ отброшенные слагаемые меньше оставленных на порядок.

С учётом данных представлений функций Крампа уравнение (28) примет вид

$$1 + \frac{\widetilde{\sigma}}{\widetilde{\omega} - \kappa}\, i + \frac{\widetilde{\Omega}^2}{\widetilde{\omega}}\, i + \frac{\widetilde{\Omega}^2\kappa^2}{2\alpha^2\widetilde{\omega}^3}\, i + \frac{\widetilde{\Omega}^2\alpha}{\kappa}\, \sqrt{\pi}\exp\left(-\frac{\alpha^2}{\kappa^2}\,\widetilde{\omega}^2 \right) - \frac{\widetilde{\Omega}^2}{\widetilde{\omega} + i}\, i - \frac{\widetilde{\Omega}^2\kappa^2}{2\alpha^2\,(\widetilde{\omega} + i)^3}\, i = 0. \qquad (29)$$

3.2. Порог неустойчивости

Найдём условие достижения порога неустойчивости при кинетическом описании. Для этого в уравнении (29): 1) положим $\operatorname{Im}\widetilde{\omega} = 0$; 2) полагаем, что $\widetilde{\omega}$ можно пренебречь по сравнению с i ($z_2 \approx i\alpha/\kappa$). Тогда (29) примет вид

$$1 + \frac{\widetilde{\sigma}}{\widetilde{\omega} - \kappa}\, i + \frac{\widetilde{\Omega}^2}{\widetilde{\omega}}\, i + \frac{\widetilde{\Omega}^2\kappa^2}{2\alpha^2\widetilde{\omega}^3}\, i + \frac{\widetilde{\Omega}^2\alpha}{\kappa}\sqrt{\pi}\exp\left(-\frac{\alpha^2}{\kappa^2}\,\widetilde{\omega}^2\right) + \frac{\widetilde{\Omega}^2\kappa^2}{2\alpha^2} - \widetilde{\Omega}^2 = 0. \tag{30}$$

Разделим в уравнении (30) действительную и мнимую части:

$$1 - \widetilde{\Omega}^2\left[1 - \frac{\alpha}{\kappa}\sqrt{\pi}\exp\left(-\frac{\alpha^2}{\kappa^2}\,\widetilde{\omega}^2\right) - \frac{\kappa^2}{2\alpha^2}\right] = 0, \qquad \widetilde{\omega} = \frac{\widetilde{\Omega}^2\left(1 + \dfrac{\kappa^2}{2\alpha^2\widetilde{\omega}^2}\right)\kappa}{\widetilde{\Omega}^2\left(1 + \dfrac{\kappa^2}{2\alpha^2\widetilde{\omega}^2}\right) + \widetilde{\sigma}}. \tag{31}$$

Из первого уравнения системы (31) следует, что $\widetilde{\Omega}^2 \geq 1$; тогда из второго уравнения в случае малой проводимости ($\widetilde{\sigma} \ll 1$) получаем $\widetilde{\omega} \approx \kappa$. Таким образом, условие достижения порога неустойчивости при $\widetilde{\sigma} \ll 1$ имеет вид

$$\widetilde{\Omega}^2_{\mathrm{thr}} = \frac{1}{1 - \dfrac{\alpha}{\widetilde{\omega}}\sqrt{\pi}\exp(-\alpha^2) - \dfrac{\omega^2}{2\alpha^2}}\ . \tag{32}$$

Проанализируем соотношение (32).

1) При $\alpha \to \infty$ (переход к гидродинамическому приближению) величина $\widetilde{\Omega}^2_{\mathrm{thr}}$ становится равной 1, как и следовало ожидать.

2) При конечных α порог неустойчивости повышается, а для частот, меньших некоторой $\widetilde{\omega}_{\min} \approx \sqrt{\pi}\,\alpha\exp(-\alpha^2)$ или превышающих $\widetilde{\omega}_{\max} \approx \alpha\sqrt{2}$, становится в принципе недостижимым. Заметим, однако, что уравнение (30) было получено в предположении $\widetilde{\omega} \ll 1$, поэтому использовать соотношение (32) для высоких частот неправомерно.

3) В отличие от гидродинамического предела, для которого порог неустойчивости достигается вначале при $\widetilde{\omega} = 0$, при учёте разброса по скоростям (размерам) порог неустойчивости минимален для конечной частоты $\widetilde{\omega}_{\mathrm{thr}}$.

Возвращаясь к размерным величинам, получим

$$\Omega^2_{\mathrm{thr}} = \frac{\nu^2_{\mathrm{eff}}}{1 - \dfrac{\alpha\nu_{\mathrm{eff}}}{\omega}\sqrt{\pi}\exp(-\alpha^2) - \dfrac{\omega^2}{2\nu^2_{\mathrm{eff}}\alpha^2}} \tag{33}$$

при $\omega > \omega_{\min}$, где $\omega_{\min} \approx \nu_{\mathrm{eff}}\sqrt{\pi}\,\alpha\exp(-\alpha^2)$.

В случае большой проводимости ($\tilde{\sigma} \sim 1$) систему (31) удаётся решить только численными методами.

Зависимости $\widetilde{\Omega}^2_{\mathrm{thr}}(\widetilde{\omega})$ при различных значениях α и σ представлены на рис. 2. Зависимости минимального порога неустойчивости $\widetilde{\Omega}^2_{\min}$, а также частоты $\widetilde{\omega}^{\mathrm{r}}_{\mathrm{thr}}$ и волнового числа κ_{thr}, при которых он достигается, от параметра разброса α представлены на рис. 3.

При увеличении параметра разброса α (т. е. при уменьшении дисперсии) минимальный порог неустойчивости $\widetilde{\Omega}^2_{\min}$ монотонно и достаточно быстро убывает к единице. Соответствующая минимальному порогу частота $\widetilde{\omega}^{\mathrm{r}}_{\mathrm{thr}}$ монотонно убывает до нуля с увеличением α, но выходит на постоянное значение при бо́льших значениях α, чем $\widetilde{\Omega}^2_{\rm min}$. Зависимость $\kappa_{\rm thr}(\alpha)$ при малой проводимости, как и следовало ожидать, совпадает с зависимостью $\widetilde{\omega}^{\rm r}_{\rm thr}(\alpha)$. При большой проводимости зависимость $\kappa_{\rm thr}(\alpha)$ имеет максимум, т. е. существует некоторый диапазон значений дисперсии, которому отвечает максимальное значение волнового числа, соответствующего минимальному порогу неустойчивости. Спадающий участок этих зависимостей при больши́х α совпадает с соответствующим участком зависимостей $\widetilde{\omega}^{\rm r}_{\rm thr}(\alpha)$.

Зависимости минимального порога неустойчивости $\widetilde{\Omega}^2_{\rm min}$, а также частоты $\widetilde{\omega}^{\rm r}_{\rm thr}$ и волнового числа $\kappa_{\rm thr}$, при которых он достигается, от проводимости $\widetilde{\sigma}$ представлены на рис. 4.

Минимальное значение порога $\widetilde{\Omega}^2_{\rm min}$, как можно видеть из графиков, при малой проводимости постоянно и равно 1, затем линейно возрастает с ростом проводимости. Соответствующее ему значение частоты $\widetilde{\omega}^{\rm r}_{\rm thr}$ с ростом проводимости сначала растёт, а затем выходит на постоянное значение $\widetilde{\omega}^{\rm max}_{\rm thr} \approx 0{,}9$. Волновое число $\kappa_{\rm thr}$ также сначала возрастает, а потом выходит на постоянное значение, которое зависит от параметра разброса α.

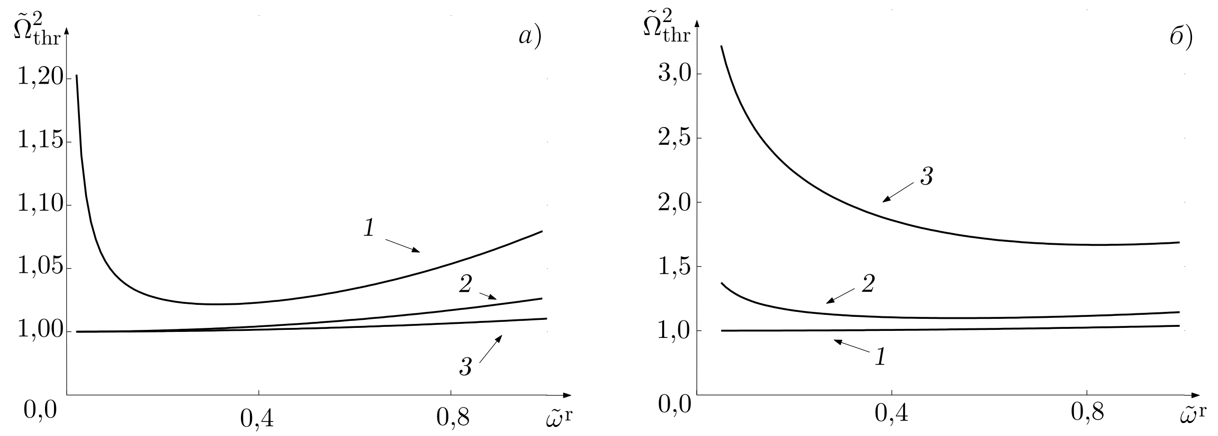
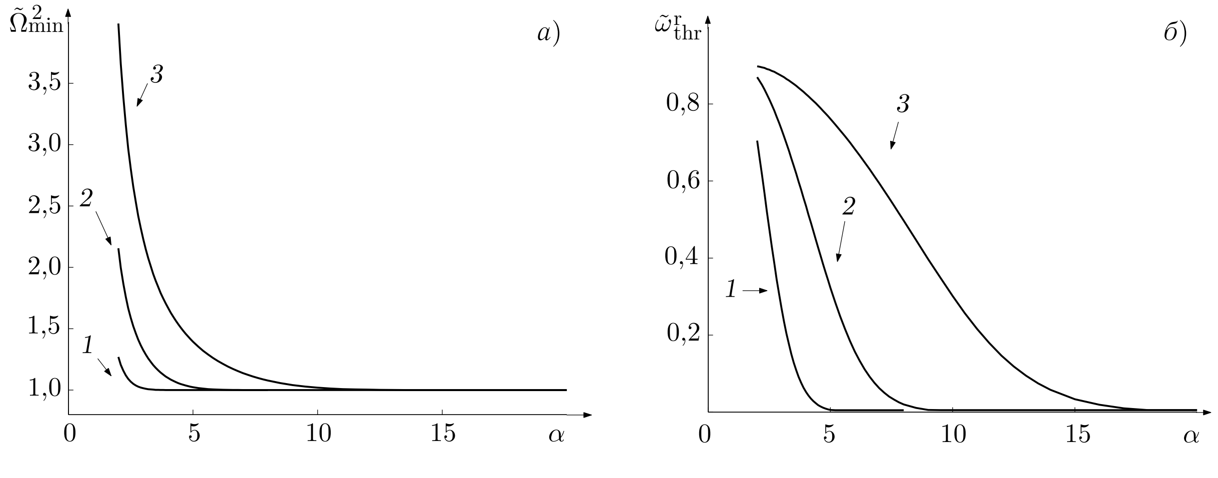


Рис. 2. Зависимость порогового значения $\widetilde{\Omega}^2_{\rm thr}$ от частоты $\widetilde{\omega}^{\rm r}$ при различных значениях проводимости и параметрах разброса. (*а*) Фиксировано значение проводимости $\widetilde{\sigma} = 0{,}15$: кривая *1* соответствует $\alpha = 3$, кривая *2* — $\alpha = 5$, кривая*3* — $\alpha = 8$. (*б*) Фиксирован параметр разброса $\alpha = 4$: кривая *1* соответствует $\widetilde{\sigma} = 0{,}1$, кривая *2* — $\widetilde{\sigma} = 1$, кривая *3* — $\widetilde{\sigma} = 3$



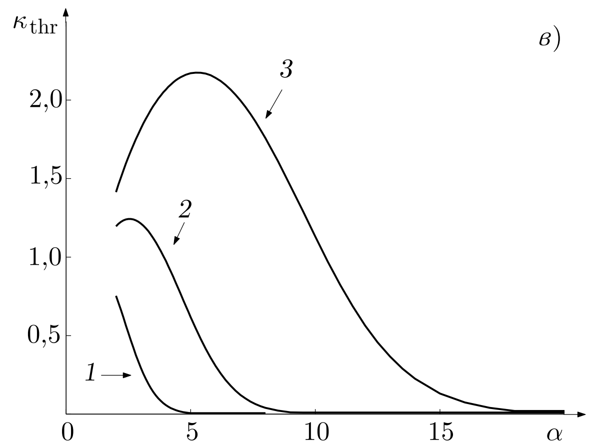
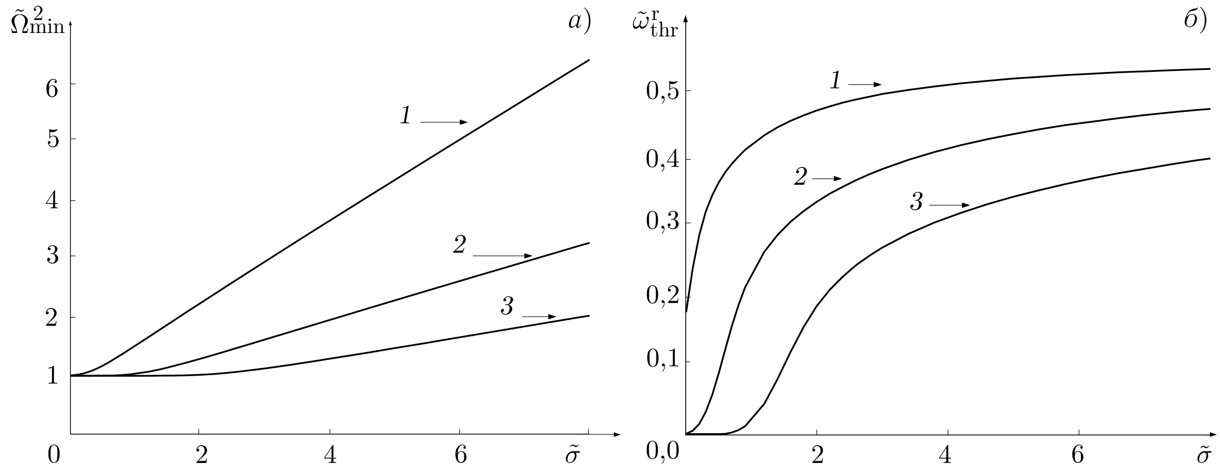


Рис. 3. Минимальный порог неустойчивости и характеристики соответствующей ему волны в зависимости от параметра разброса: зависимости минимального порога неустойчивости (*а*), частоты (*б*) и волнового числа (*в*), при которых он достигается, от параметра разброса. Кривые *1* соответствуют $\widetilde{\sigma} = 0{,}1$, кривые *2* — $\widetilde{\sigma} = 1$, кривые *3* — $\widetilde{\sigma} = 3$



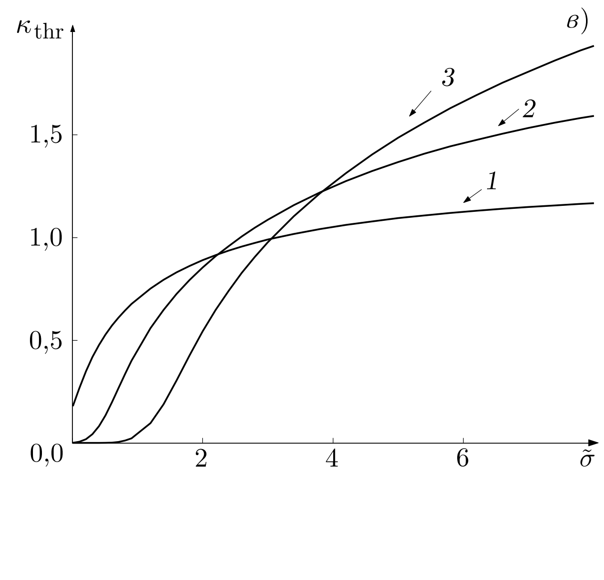


Рис. 4. Минимальный порог неустойчивости и характеристики соответствующей ему волны в зависимости от проводимости: зависимости минимального порога неустойчивости (*а*), частоты (*б*) и волнового числа (*в*), при которых он достигается, от проводимости. Кривые *1* соответствуют $\alpha = 3$, кривые *2* — $\alpha = 5$, кривые *3* — $\alpha = 8$

3.3. Расчёт инкремента кинетической неустойчивости

При $\widetilde{\Omega}^2 > \Omega^2_{\min}$ в (28) возможны неустойчивые решения с $\operatorname{Im}\widetilde{\omega} \equiv \widetilde{\gamma} > 0$. Исследуем свойства этих решений в зависимости от параметров задачи.

Полагая $\widetilde{\omega} \equiv \widetilde{\omega}^{\mathrm{r}} + i\widetilde{\gamma}$, $|\widetilde{\gamma}| \ll \widetilde{\omega} < 1$, запишем (29) в виде

$$1 + \frac{\widetilde{\sigma} i}{\widetilde{\omega}^{\mathrm{r}} - \kappa + i\widetilde{\gamma}} + \frac{\widetilde{\Omega}^2 i}{\widetilde{\omega}^{\mathrm{r}} + i\widetilde{\gamma}} + \frac{\widetilde{\Omega}^2 \kappa^2 i}{2\alpha^2 \left(\widetilde{\omega}^{\mathrm{r}} + i\widetilde{\gamma}\right)^3} + \\ + \frac{\widetilde{\Omega}^2 \alpha}{\kappa} \sqrt{\pi} \exp\left[-\frac{\alpha^2}{\kappa^2} \left(\widetilde{\omega}^{\mathrm{r}}\right)^2\right] - \frac{\widetilde{\Omega}^2 i}{\widetilde{\omega}^{\mathrm{r}} + i} - \frac{\widetilde{\Omega}^2 \kappa^2 i}{2\alpha^2 \left(\widetilde{\omega}^{\mathrm{r}} + i\right)^3} = 0. \quad (34)$$

Здесь мы пренебрегли $|\widetilde{\gamma}|$ по сравнению с 1, а также отбросили мнимую часть экпоненциального слагаемого (последующий анализ полученных результатов показывает, что мнимая часть экпоненциального слагаемого действительно мала по сравнению с другими членами уравнения).

Уравнение (34) решалось численно с учётом слагаемых первого порядка малости по $\widetilde{\gamma}$ при различных значениях проводимости $\widetilde{\sigma}$ и параметрах разброса α. Результаты расчётов представлены на рис. 5 и 6.

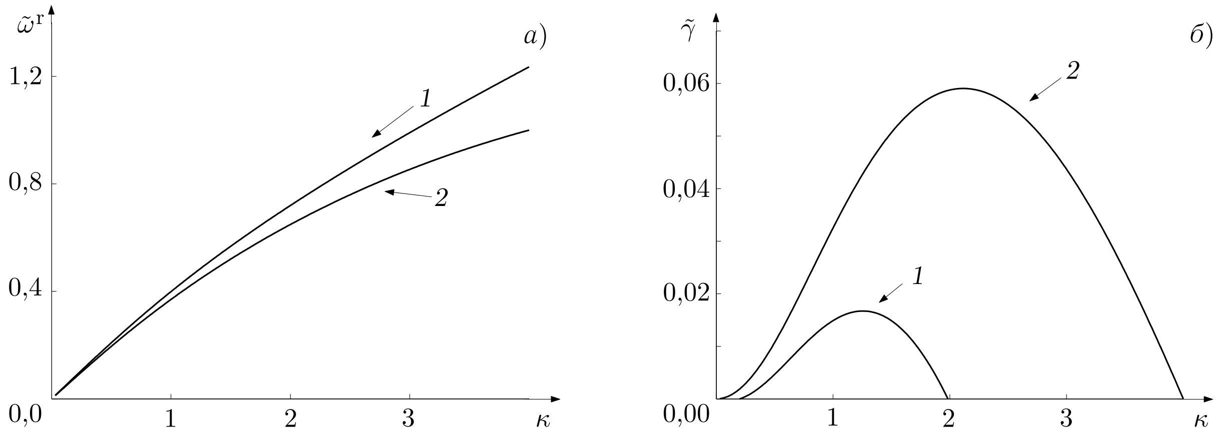
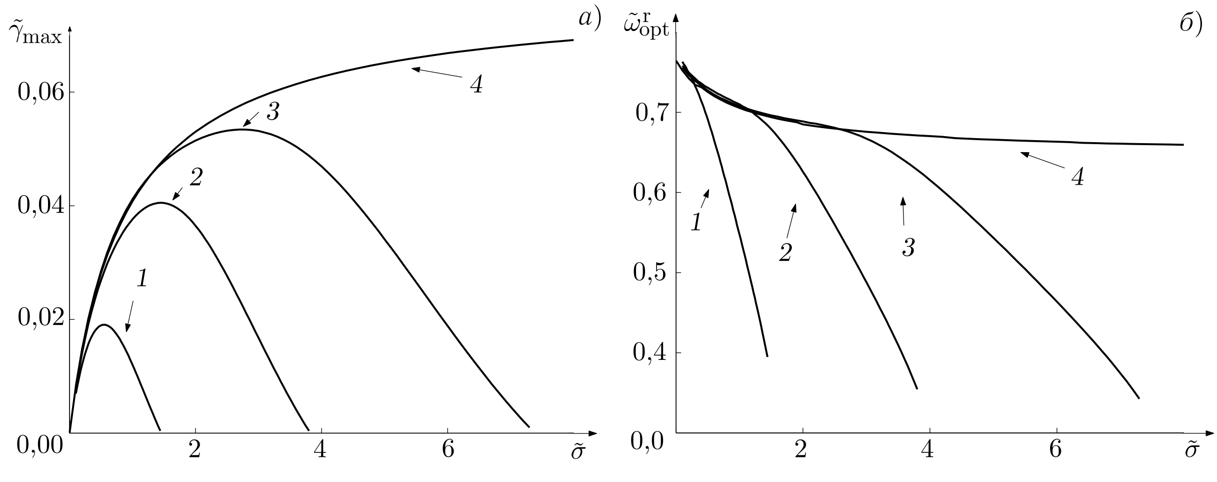


Рис. 5. Влияние разброса частиц на дисперсионные свойства электростатических волн: зависимости частоты (*а*) и инкремента (*б*) от волнового числа. Кривые *1* соответствуют параметру разброса $\alpha = 5$, кривые *2* — гидродинамическому приближению ($\alpha = \infty$). Проводимость $\widetilde{\sigma} = 3$, параметр $\widetilde{\Omega}^2 = 2$



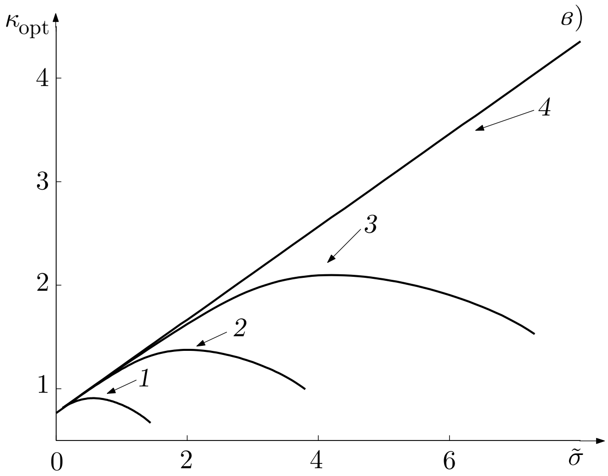


Рис. 6. Характеристики неустойчивости, соответствующие максимальному инкременту, в зависимости от проводимости при различных параметрах разброса: зависимости максимального инкремента $\widetilde{\gamma}_{\rm max}$ (*а*), оптимальной частоты $\widetilde{\omega}_{\rm opt}$ (*б*) и оптимального волнового числа $\kappa_{\rm opt}$ (*в*) от проводимости $\widetilde{\sigma}$ при различных параметрах разброса α. Кривые *1* соответствуют $\alpha = 3$, кривые *2* — $\alpha = 5$, кривые *3* — $\alpha = 8$, кривые *4* — гидродинамическому приближению ($\alpha = \infty$). Параметр $\widetilde{\Omega}^2 = 2$

На рис. 5 представлены зависимости частоты и инкремента от волнового числа. Для сравнения приведены зависимости, полученные в гидродинамическом приближении. Как видно, при наличии разброса по размерам неустойчивость существует в меньшем диапазоне волновых чисел, чем в отсутствие разброса, и значение инкремента меньше. Зависимость $\widetilde{\omega}^{\rm r}(\kappa)$ при малых частотах близка к гидродинамической, при увеличении волнового числа идёт выше, а форма зависимости ближе к линейной.

На рис. 6 представлены зависимости максимального инкремента и соответствующих ему оптимальных частоты и волнового числа от проводимости при различных параметрах разброса. Для сравнения приведены зависимости, полученные в гидродинамическом приближении.

При малой проводимости результаты близки к гидродинамическим, но при увеличении проводимости начинают сильно различаться. Так, $\widetilde{\gamma}_{\rm max}$, в отличие от гидродинамического приближения, больше нуля только в некотором интервале значений $\widetilde{\sigma}$; зависимость $\widetilde{\gamma}_{\rm max}(\widetilde{\sigma})$ имеет максимум, значение которого (вместе с соответствующим ему оптимальным значением проводимости) растёт с увеличением α. Такое поведение максимального инкремента при кинетическом описании связано, прежде всего, с линейным ростом порога неустойчивости при увеличении проводимости. Оптимальное значение частоты, соответствующей максимуму инкремента, в отличие от гидродинамики не стремится к постоянному значению, а продолжает убывать. Оптимальное волновое число при малой проводимости растёт линейно, затем достигает некоторого максимума и убывает.

4. ОБСУЖДЕНИЕ

Для сравнения результатов с экспериментальными данными проведём некоторые размерные оценки.

При типичном значении скорости восходящего потока $u \approx 7$ м/с средний радиус взвешенных водяных капель $R_0 = 500$ мкм, а эффективная частота соударений $\nu = 1{,}4$ с$^{-1}$. При концентрации таких частиц $N_0 = 10^3$ м$^{-3}$ [6] порог неустойчивости достигается (в гидродинамическом приближении, условие (16)) при заряде на частицах $q_{\rm thr} = 10^{-10}$ Кл. Заряд частиц в грозовом облаке лежит в интервале $3 \cdot 10^{-11}$ Кл $\le q \le 3 \cdot 10^{-10}$ Кл [3–5], т. е. порог неустойчивости в реальном грозовом облаке вполне достижим.

Учёт кинетических эффектов повышает порог неустойчивости при наличии заметного разброса частиц по размерам, а также увеличивает пороговое значение $\widetilde{\Omega}^2$ при росте проводимости $\widetilde{\sigma}$. Так, при проводимости $\widetilde{\sigma} = 4\pi\sigma/\nu = 1$, тех же среднем радиусе частиц, частоте соударений, концентрации частиц ($R_0 = 500$ мкм, $\nu = 1{,}4$ с$^{-1}$, $N_0 = 10^3$ м$^{-3}$) и дисперсии разброса по скоростям частиц $\Delta \sim 2$ м/с условие возникновения неустойчивости (32) достигается при заряде на частицах $q_{\rm thr} = 1{,}1 \cdot 10^{-10}$ Кл, а численное значение порога, учитывающее конечную проводимость (см. рис. 3*а*), даёт $q_{\rm thr} \approx 1{,}4 \cdot 10^{-10}$ Кл. При увеличении проводимости ещё на порядок пороговое значение заряда на частицах может в зависимости от дисперсии скоростей вырасти в два и даже в три раза. Таким образом, при постоянном значении $\widetilde{\Omega}^2$ инкремент неустойчивости имеет абсолютный максимум γ_* по частоте и проводимости. При дальнейшем увеличении σ инкремент убывает до нуля.

В табл. 1 для различной дисперсии скоростей Δ приведены численные значения абсолютного максимума инкремента γ_*, проводимости σ_*, при которой он достигается, характерного масштаба зарядовой ячейки $\lambda = 2\pi/k_{\rm opt}$ и соответствующие им значения частоты $\omega_{\rm opt}/(2\pi)$. Эти результаты получены при $\Omega^2/\nu^2 = 2$.

Таблица 1

Δ, м/с	$\widehat{\sigma}_* = 4\pi\sigma_*/\nu$	γ_*, с$^{-1}$	$\lambda = 2\pi/k_{\rm opt}$, м	$\omega_{\rm opt}/(2\pi)$, с$^{-1}$
2,3	0,54	0,0267	34,6	0,9528
1,4	1,45	0,0567	23,8	0,9562
0,9	2,70	0,0748	16,8	0,9467

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Целью данной работы являлось исследование линейной стадии развития пучково-плазменного разряда в грозовом облаке. Сформулируем кратко основные результаты работы.

При заряде на крупных частицах в облаке, превышающем определённое пороговое значение $q_{\rm thr}$, в облаке возникает неустойчивость, характеристики которой зависят от параметров облака. Эти зависимости, установленные в данной работе, можно суммировать следующим образом.

1) Порог неустойчивости повышается при увеличении разброса частиц в облаке по размерам.

2) Учёт разброса частиц по размерам принципиален для выяснения зависимости характеристик неустойчивости от проводимости. В частности, при таком учёте проявляется увеличение порога неустойчивости с ростом проводимости. Кроме того, при учёте разброса частиц по размерам максимальный (по всем частотам) инкремент неустойчивости $\gamma_{\max}$ линейно растёт с увеличением проводимости σ при $\sigma \ll \nu$, достигает максимума при некоторой проводимости, а затем убывает до нуля, тогда как при нулевом разбросе (в гидродинамическом пределе) $\gamma_{\max}$ с увеличением σ достигает насыщения.

3) Оптимальное волновое число, соответствующее максимальному инкременту, растёт линейно с увеличением проводимости σ при $\sigma \ll \nu$, достигает некоторого максимума, а затем убывает.

Результаты данной работы важны для количественного обоснования предложенной в [7] модели, согласно которой электрические разряды внутри зарядовых ячеек, возникающих при развитии рассмотренной здесь неустойчивости, создают своеобразную дренажную динамическую систему, обеспечивающую сбор заряда со всего объёма облака и предопределяющую появление лидерного канала молнии, по которому заряд стекает под действием крупномасштабного поля в основание облака.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 02–02–17405 и 02–02–17109).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Трахтенгерц В. Ю. // Докл. АН. 1989 Т. 308, № 3. С. 584.
2. Мареев Е. А., Сорокин А. Е., Трахтенгерц В. Ю. // Физика плазмы. 1999. Т. 25, № 3. С. 289.
3. Шишкин Н. С. Облака, осадки и грозовое электричество. Л.: Гидрометеоиздат, 1964.
4. Чалмерс Дж. Атмосферное электричество. Л.: Гидрометеоиздат, 1974.
5. Имянитов И. М., Чубарина Е. В., Шварц Я. М. Электричество облаков. Л.: Гидрометеоиздат, 1971.
6. Роджерс Р. Р. Краткий курс физики облаков. Л.: Гидрометеоиздат, 1979.
7. Иудин Д. И., Трахтенгерц В. Ю. // Изв. вузов. Радиофизика. 2001. Т. 44, № 5–6. С. 419.
8. Иудин Д. И., Трахтенгерц В. Ю. // Изв. АН. Физика атмосферы и океана. 2000. Т. 36, № 5. С. 650.
9. Uman M. A. The lightning discharge. San-Diego: Academic, 1987. 377 p.
10. Macgorman D. R., Rust W. D. The electrical nature of storms. Oxford Univ. Press, 1998. P. 304.
11. Marshall T. C., Rust W. D. // J. Geophys. Res. 1991. V. 96, No. 12. P. 22 297.
12. Labaune G., Richard P., Bondiou A. // Lightning Electromagnetics / Ed. by R. L. Gardner. Hemisphere Publishing Corporation, 1990. P. 285.
13. Цытович В. Н. // УФН. 1997. Т. 167, № 1. С. 57.
14. Rosenberg M., Shukla P. K. // J. Geophys. Res. A. 2002. V. 107, No. 12. CiteID 1492, DOI:10.1029/2002JA009539.
15. Trakhtengerts V. Yu., Demekhov A. G. // J. Atmos. Terr. Phys. 1995. V. 57, No. 10. P. 1 153.

Поступила в редакцию 17 сентября 2004 г.; принята в печать 18 февраля 2005 г.

KINETIC INSTABILITY OF CHARGED-PARTICLE FLOW IN A THUNDERSTORM CLOUD

V. S. Grach, A. G. Demekhov, and V. Yu. Trakhtengerts

We consider the linear stage of an instability of charged-particle flow in a thunderstorm cloud. A dispersion relation characterizing the temporal evolution of a spectral component of the quasistatic electric field is obtained with account of the size spread of large particles. This dispersion relation is studied for the cases of a monodispersed particle ensemble and a model distribution function. Dependences of the instability parameters on the large-particle size spread and the air-flow conductivity are obtained.

УДК 533.931

О ЧАСТОТЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ПЛАЗМЕННЫХ ВОЛН

Г. Н. Кичигин

Институт солнечно-земной физики СО РАН, г. Иркутск, Россия

В работе исследуются установившиеся плоские нелинейные плазменные волны в холодной бесстолкновительной плазме в отсутствие магнитного поля. Основной вывод, который следует из проведённого анализа, заключается в том, что при исследовании нелинейных плазменных волн учёт движения ионной компоненты плазмы принципиален. Показано, что частота волн в общем случае существенным образом определяется массой ионной компоненты, а также зависит в равной степени от скорости и амплитуды волн.

ВВЕДЕНИЕ

Свойства плазменных волн бесконечно малой амплитуды — линейных волн — достаточно хорошо изучены [1, 2]. В последнее время особенно интенсивно исследуются плазменные волны большой амплитуды, которые формируются в плотной плазме либо за счёт воздействия на неё ультрарелятивистских пучков частиц или мощного лазерного излучения, либо в процессе трансформации в плазменную волну сильных электромагнитных волн, падающих на неоднородную плазму.

Впервые основополагающие результаты при исследовании нелинейных волн в плазме были получены в работах [3–5], где рассматривались плоские волны в безграничной плазме, состоящей из электронов, которые считались холодными, и ионов, которые предполагались бесконечно тяжёлыми и неподвижными. Позднее аналогичные результаты для ленгмюровских волн были независимо получены в работе [6]. В работах [4–6] для нелинейных ленгмюровских волн получены формулы, из которых следует, что частота волн является функцией предельной скорости электронов в волне, причём эта скорость не определена и является неизвестной постоянной. Зависимость частоты волн от их амплитуды в явном виде в [4–6] вообще никак не отражена. В настоящей работе мы, решая задачу в той же постановке, что и в работах [4–6], получили точную и весьма простую формулу для частоты (формула (13)), в которой достаточно прозрачно отражена зависимость частоты нелинейных ленгмюровских волн от их амплитуды и скорости.

Далее, развивая теорию А. И. Ахиезера и др. [4, 5], мы учли движение ионов в волне и получили принципиально новые результаты, которые приведены в работах [7, 8]. Эти результаты имеют большое значение в связи с тем, что в последнее время стало ясно, что при достаточно больших амплитудах электрического поля в релятивистских волнах необходимо учитывать движение ионной компоненты плазмы. Такой вывод следует из работ, посвящённых релятивистским волнам в плазме [7–12], а также из исследований, связанных с взаимодействием лазерного излучения с плазмой [13, 14].

В данной работе детально исследована зависимость частоты установившихся нелинейных ленгмюровских волн от параметров волн и плазмы с учётом движения как электронной, так и ионной компонент. Как отмечено в работе [3], создание теории нелинейных волн в плазме связано со значительными математическими трудностями. Преодолевая эти трудности путём использования вполне приемлемых упрощающих предположений, в настоящей работе нам удалось получить для частоты нелинейных ленгмюровских волн аналитические соотношения, которые имеют достаточно простой вид и описывают поведение частоты волн во всём диапазоне изменения параметров задачи. Эти соотношения получены как для типичного случая плазмы, в которой масса ионов значительно превышает массу электронов (формулы (19) и (21), (22)), так и для электрон-позитронной плазмы, в которой массы отрицательно и положительно заряженных частиц равны (формулы (26), (27)). Все отмеченные выше формулы получены впервые.

Статья организована следующим образом. В разделе 1 излагается постановка задачи и выводятся основные уравнения, необходимые для решения поставленной задачи, в разделе 2 найдены формулы для частоты волн в разных предельных случаях. Основные выводы представлены в разделе 3.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим качественно процесс формирования нелинейной плазменной волны, следуя рассуждениям, приведённым в [1]. Для простоты рассмотрим плазму с холодными ионами одного сорта и с отличной от нуля температурой электронов T_e в отсутствие внешнего магнитного поля. Пусть в такой плазме начинает распространяться высокочастотная плазменная волна бесконечно малой амплитуды. Как известно [1, 2], для каждой гармоники плазменной волны с частотой ω и волновым числом k дисперсионное соотношение имеет вид

$$\omega(k) = \omega_\mathrm{p0}\,(1 + 3k^2 d_\mathrm{e}^2)^{1/2}, \tag{1}$$

где $\omega_\mathrm{p0} = (4\pi e^2 n_0/m)^{1/2}$ — электронная плазменная частота, $d_\mathrm{e} = [T_e/(4\pi e^2 n_0)]^{1/2}$ — электронный дебаевский радиус, n_0 — невозмущённая концентрация плазмы, e и m — элементарный заряд и масса электрона соответственно. Обычно предполагается, что $k^2 d_\mathrm{e}^2 \ll 1$, т. е. $\omega \approx \omega_\mathrm{p0}$. При этом фазовая скорость волны $v_\mathrm{ph} \approx \omega_\mathrm{p0}/k$ много больше тепловой скорости электронов $v_{T\mathrm{e}} = (T_\mathrm{e}/m)^{1/2}$. Выполнение этого условия обязательно, иначе амплитуда гармоники быстро стремится к нулю вследствие бесстолкновительного затухания Ландау [1, 2].

При увеличении амплитуды волны необходимо учитывать возникающее за счёт нелинейности укручение переднего фронта бегущей волны, т. е. появление высших гармоник. Однако для плазменных волн, которые характеризуются дисперсионным соотношением (1), дисперсия может остановить нелинейное укручение фронта, и через некоторое время, когда воздействие на волну процессов нелинейного укручения и дисперсии уравняется, волна большой амплитуды в плазме может трансформироваться в установившуюся нелинейную волну [1].

В данной работе мы рассмотрим установившиеся периодические волны, которые будем характеризовать следующими параметрами: длина волны $\lambda = 2\pi/k$, период колебаний волны $T = 2\pi/\omega$, фазовая скорость волны $u = \lambda/T = \omega/k$, где ω — частота волны. Наша задача заключается в нахождении зависимости частоты волн ω от параметров плазмы и волн. Заметим, что все вышеприведённые характеристики волн соответствуют системе отсчёта, в которой невозмущённая плазма покоится. Назовём её лабораторной системой отсчёта (ЛСО). Мы же в дальнейшем всё наше рассмотрение будем вести в системе отсчёта, связанной с волной, где более понятны физические процессы, происходящие в установившейся волне. В системе отсчёта волны плазма имеет концентрацию $n = n_0\gamma$ и как целое движется относительно неподвижного профиля волны со скоростью u, при этом пространственный период волны $\lambda_\mathrm{w} = \gamma\lambda$. Здесь $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$, $\beta = u/c$, c — скорость света в вакууме.

При выполнении условия $v_\mathrm{ph} \gg v_{T_\mathrm{e}}$ можно считать плазму холодной, что мы и будем предполагать в дальнейшем. Рассматривая одномерный случай, предположим, что волна распространяется в направлении, противоположном оси x. В системе отсчёта волны, в которой решаемая нами задача является стационарной, все искомые переменные, описывающие профиль волны, в рассматриваемом случае являются функцией только координаты x. Будем искать решение в виде периодической знакопеременной волны потенциала. В этом случае на масштабе, равном длине волны λ_{w}, в точках, лежащих между максимумом и минимумом потенциала, электрическое поле будет иметь экстремальные значения. Тогда из уравнения Максвелла для электрического поля $E(x)$

$$\frac{\mathrm{d}E(x)}{\mathrm{d}x} = 4\pi e\,[Zn_{\mathrm{i}}(x) - n_{\mathrm{e}}(x)] \tag{2}$$

следует, что в этих точках правая часть уравнения (2) будет равна нулю. Здесь $n_{\mathrm{i}}(x)$ и $n_{\mathrm{e}}(x)$ — концентрации ионов и электронов соответственно, Z — зарядовое число ионов. Пусть координата одной из экстремальных точек $x = 0$, и в этой точке $Zn_{\mathrm{i}}(0) = n_{\mathrm{e}}(0) = n$, а экстремальное значение электрического поля $E(0) = E_0$. Из уравнения (2), релятивистских уравнений движения и уравнений непрерывности для электронов и ионов следует закон сохранения полного импульса [8]:

$$E^2(x)/(8\pi) - nu\,[p_{\mathrm{e}}(x) + p_{\mathrm{i}}(x)/Z] = E_0^2/(8\pi) - n\gamma\,(AM/Z + m)u^2. \tag{3}$$

Здесь M — масса покоя протона, A — атомное число иона, $p_{\mathrm{e}}(x) = mv_{\mathrm{e}}(x)\gamma_{\mathrm{e}}(x)$ и $p_{\mathrm{i}}(x) = AMv_{\mathrm{i}}(x)\gamma_{\mathrm{i}}(x)$ — импульсы электронов и ионов соответственно, v_{i} и v_{e} — скорости ионов и электронов соответственно, $\gamma_{\mathrm{i}} = (1-(v_{\mathrm{i}}/c)^2)^{-1/2}$, $\gamma_{\mathrm{e}} = (1-(v_{\mathrm{e}}/c)^2)^{-1/2}$; константу мы определили при $x = 0$. Соотношение (3) получено при условии отсутствия возмущённого магнитного поля [8]: $n_{\mathrm{i}}(x)v_{\mathrm{i}}(x) = n_e(x)v_{\mathrm{e}}(x) = nu$. Отметим, что с полученным параметром γ рассматриваемая нами задача имеет физический смысл только при скорости u, не превышающей скорость света.

С помощью (3) найдём выражение для частоты колебаний волны. Обозначив электронную плазменную частоту в системе отсчёта волны как $\omega_{\mathrm{pw}} = (4\pi e^2 n/m)^{1/2}$, введём безразмерные переменные для координаты $\xi = x\omega_{\mathrm{pw}}\sqrt{\beta}/c$ и потенциала $\psi(\xi) = e\varphi(x)/(mc^2)$, тогда в безразмерных переменных равенство (3) можно представить формулой

$$V(\psi,\gamma,\mu) = \varepsilon - (\mathrm{d}\psi(\xi)/\mathrm{d}\xi)^2/2 = \beta\mu\gamma - \sqrt{(\mu\gamma-\psi)^2-\mu^2} + \beta\gamma - \sqrt{(\gamma+\psi)^2-1}\,. \tag{4}$$

В дальнейшем нам понадобится представление величины $V(\psi,\gamma,\mu)$ в другом виде:

$$V(\psi,\gamma,\mu) = \beta\mu\gamma\left(1 - \sqrt{1 - \frac{2\psi}{\beta^2\gamma\mu} + \frac{\psi^2}{\beta^2\gamma^2\mu^2}}\right) + \beta\gamma\left(1 - \sqrt{1 + \frac{2\psi}{\beta^2\gamma} + \frac{\psi^2}{\beta^2\gamma^2}}\right). \tag{5}$$

В формулах (4) и (5) переменная ψ является функцией ξ: $\psi = \psi(\xi)$, а остальные величины безразмерные: $\beta = u/c$ — фазовая скорость волны, нормированная на скорость света, $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$, $\mu = AM/(Zm)$, $\varepsilon = (\mathrm{d}\psi/\mathrm{d}\xi)_0^2/2 = E_0^2/(8\pi nmcu)$ — безразмерная плотность энергии электрического поля в точке $\xi = 0$, в которой $\psi = 0$ и электрическое поле максимально. Для удобства здесь заодно приведём формулы для других параметров, которые будут далее использоваться. Как мы увидим ниже, характерной для рассматриваемой нами задачи является комбинация $\gamma\varepsilon$, поэтому для неё введено специальное обозначение $\rho = \gamma\varepsilon$. Ещё один параметр, который будет использован нами, $\delta = \varepsilon/\varepsilon_{\mathrm{m}} = (E_0/E_{0\mathrm{m}})^2$ — это отношение квадрата амплитуды электрического поля E_0^2 к квадрату предельно возможной амплитуды в волне $E_{0\mathrm{m}}^2$ (о величине $E_{0\mathrm{m}}$ см. ниже).

Обсудим вопрос о тех значениях, которые может принимать параметр $\mu = (A/Z)\,(M/m)$. Нетрудно видеть, что параметр μ зависит в основном от сорта ионов плазмы и в наиболее типичных случаях $\mu \gg 1$. Так, например, в электрон-протонной плазме, где $A/Z = 1$, параметр $\mu = M/m = 1\,838$. Для плазмы, состоящей из ионов, более тяжёлых, чем протоны, отношение $A/Z \geq 2$, и величина μ ещё больше. Исключением служит электрон-позитронная плазма, в которой $\mu = 1$. Учитывая всё это, мы везде ниже будем считать, что параметр $\mu \gg 1$, и введём малую величину $\theta = 1/\mu$ ($\theta \ll 1$). Особый случай $\mu = 1$ мы рассмотрим отдельно.

Для нахождения частоты волны в ЛСО воспользуемся формулой $\omega = 2\pi u\gamma/\lambda_{\rm w}$. Здесь $\lambda_{\rm w}$ — пространственный период колебаний потенциала в системе волны, который определяется из (4):

$$\lambda_{\rm w} = \frac{c}{\omega_{\rm pw}} \sqrt{\frac{2}{\beta}} \int\limits_{\psi_-}^{\psi_+} \frac{{\rm d}\psi}{\sqrt{\varepsilon - V(\psi,\gamma,\mu)}} ,$$

где ψ_- и ψ_+ — корни уравнения $\varepsilon - V(\psi,\gamma,\mu) = 0$, а $V(\psi,\gamma,\mu)$ определяется формулами (4) либо (5). Отсюда для величины ω получим соотношение

$$\omega = \omega(\varepsilon,\gamma,\mu) = \omega_{\rm p0}\pi \sqrt{2}\, (\beta\gamma)^{3/2}/J(\varepsilon,\gamma,\mu), \tag{6}$$

где $\omega_{\rm p0} = (4\pi e^2 n_0/m)^{1/2}$, n_0 — концентрация плазмы в ЛСО,

$$J(\varepsilon,\gamma,\mu) = \int\limits_{\psi_-}^{\psi_+} \frac{{\rm d}\psi}{\sqrt{\varepsilon - V(\psi,\gamma,\mu)}} . \tag{7}$$

Формулы (6) и (7) в самом общем виде определяют искомую частоту колебаний продольной плазменной волны. Видно, что ω зависит, во-первых, от характеристик волны: фазовой скорости u (параметр γ) и амплитуды электрического поля E_0 (параметр ε), во-вторых, от параметров плазмы: массы и заряда частиц плазмы (параметр μ) и концентрации n_0. Зависимость частоты от концентрации тривиальна, поэтому мы ей интересоваться не будем, а рассмотрим, как это отображено в формуле (6), зависимость $\omega = \omega(\varepsilon,\gamma,\mu)$.

Прежде всего мы определимся с терминологией, которая будет использована в статье и которая связана с параметрами β и γ. Под нерелятивистским приближением мы будем подразумевать случай, когда $\beta = 0$, $\gamma = 1$. Когда скорость волны такова, что $\beta \ll 1$, $\gamma < 2$ мы будем говорить о слабом релятивизме, а случай $\beta \approx 1$, $\gamma \gg 1$ мы будем называть релятивистским.

Для того, чтобы найти ω, необходимо вычислить интеграл (7), для чего, в свою очередь, требуется определить пределы интегрирования ψ_-, ψ_+, а также досконально знать свойства подынтегрального выражения, которое в основном определяется функцией $V(\psi,\gamma,\mu)$. Анализируя свойства функции $V(\psi,\gamma,\mu)$, можно показать [8], что параметр ε имеет предельное значение, выше которого при заданных значениях n_0, γ и μ существование нелинейных волн невозможно:

$$\varepsilon_{\rm m} = E_{0\rm m}^2/(8\pi nmcu) = \beta\gamma + \mu\beta\gamma - \sqrt{\mu^2\beta^2\gamma^2 + (\gamma-1)\,(2\mu\gamma + \gamma - 1)} .$$

Отсюда при $\mu \gg 1$ получим

$$\varepsilon_{\rm m} \approx \left(1 + \frac{1}{2\mu\,(\gamma+1)}\right) \frac{\beta\gamma}{\gamma+1} .$$

Из полученных формул для $\varepsilon_{\rm m}$ видно, что предельная амплитуда волн определяется в основном параметром γ, а зависимостью $\varepsilon_{\rm m}$ от параметра μ в первом приближении можно пренебречь и положить

$$\varepsilon_{\rm m} \approx \beta\gamma/(\gamma+1) = (\gamma-1)/\beta\gamma = [(\gamma-1)/(\gamma+1)]^{1/2}. \tag{8}$$

Из (8) следует, что для слабо релятивистских волн ($\beta \ll 1$) параметр $\varepsilon_{\rm m} \approx \beta/2$ и, следовательно, $E_{0\rm m}^2 = 4\pi nmu^2$. Для релятивистских волн ($\gamma \gg 1$) $\varepsilon_{\rm m} \approx 1$, а $E_{0\rm m}^2 \approx 8\pi nmcu \approx 8\pi nmc^2 = 8\pi\gamma n_0 mc^2$. Наличие предельной амплитуды нелинейных ленгмюровских волн, как нам представляется, связано с тем, что для волн, амплитуда которых превышает предельную, дисперсия не может остановить нелинейное укручение, и волна «опрокидывается».

При заданных параметрах μ, γ, ε размах колебаний потенциала получим из уравнения

$$\beta\mu\gamma - \sqrt{(\mu\gamma - \psi)^2 - \mu^2} + \beta\gamma - \sqrt{(\gamma + \psi)^2 - 1} = \varepsilon.$$

Отсюда можно получить искомые величины в общем виде, однако выражения для них получаются весьма громоздкими. Полагая $\mu \gg 1$ и отбрасывая малые величины, получим приближённые формулы для «отрицательного» и «положительного» размаха колебаний потенциала в волне:

$$\psi_- \approx -\beta\mu\gamma^2\varepsilon/(\mu + 2\beta\gamma\varepsilon) \left(\sqrt{1 + 2\beta^2 \left[1/(\beta\gamma\varepsilon) + 2/\mu\right]} - 1\right),$$

$$\psi_+ \approx \beta\mu\gamma^2\varepsilon/(\mu + 2\beta\gamma\varepsilon) \left(\sqrt{1 + 2\beta^2 \left[1/(\beta\gamma\varepsilon) + 2/\mu\right]} + 1\right).$$

Учитывая (8), произведение параметров $\beta\gamma\varepsilon$, входящее в формулы для ψ_- и ψ_+, можно представить в виде $\beta\gamma\varepsilon \approx \delta\,(\gamma - 1)$. Поскольку $\beta \le 1$ и $\varepsilon \le 1$, произведение $\beta\gamma\varepsilon = \beta\rho$ может быть много больше единицы только при $\gamma \gg 1$; в частности, неравенство $\beta\rho \gg \mu$ возможно только при $\gamma \gg \mu$. Для слабо релятивистских волн ($\beta \ll 1$) всегда выполняется условие $\beta\rho \approx \delta\,(\gamma - 1) \ll 1$.

Определим амплитуды ψ_- и ψ_+ при разных соотношениях между параметрами μ, ε и γ. Начнём с особого случая:

1) $\rho \approx \beta$. Для слабо релятивистских волн ($\beta \ll 1$) параметр $\varepsilon \approx \beta \ll 1$, следовательно, $\rho \ll 1$, а амплитуды потенциала

$$\psi_+ \approx (\beta^2/2)\,(2\sqrt{\delta} + \delta), \qquad \psi_- \approx -(\beta^2/2)\,(2\sqrt{\delta} - \delta). \tag{9}$$

Для релятивистских волн ($\gamma \gg 1$, $\beta \approx 1$) в рассматриваемом нами случае $\rho \approx 1$, и при любых значениях γ получим

$$\psi_+ \sim -\psi_- \approx \gamma. \tag{10}$$

2) $\beta\rho \gg \mu$ ($\rho \gg \mu$). При выполнении этого неравенства получим $\psi_- \approx -\gamma$, $\psi_+ \approx \mu\gamma$. Как и следует ожидать, в данном приближении значения ψ_- и ψ_+ близки к предельным значениям $\psi_-^* = -(\gamma - 1)$ и $\psi_+^* = \mu\,(\gamma - 1)$ [8]. Легко видеть, что и при $\beta\rho \approx \mu \gg 1$ амплитуды ψ_- и ψ_+ по порядку величины остаются сравнимыми с ψ_-^* и ψ_+^* соответственно.

3) $\beta\rho \ll \mu$. Здесь возможны два варианта:

а) $\rho \gg 1$, что означает $\gamma \gg 1$ ($\beta \approx 1$), при этом амплитуды

$$\psi_+ \approx 2\beta\gamma\rho + \beta\gamma \approx 2\gamma\rho + \gamma, \qquad \psi_- \approx -\beta\gamma \approx -\gamma.$$

б) $\rho \ll \beta \le 1$. В этом случае рассмотрим две возможности:

I) $\gamma \gg 1$, $\beta \approx 1$. При этом $\varepsilon \ll 1/\gamma \ll 1$,

$$\psi_+ \approx \gamma\sqrt{2\rho} + \gamma\rho \approx \gamma\sqrt{2\rho}, \qquad \psi_- \approx -\gamma\sqrt{2\rho} + \gamma\rho \approx -\gamma\sqrt{2\rho}. \tag{11}$$

II) $\gamma \approx 1$, $\beta \ll 1$. При этом $\varepsilon \le \varepsilon_{\mathrm{m}} \approx \beta/2 \ll 1$. Это слабо релятивистский случай, в котором справедливы формулы (9). Обратим внимание, что в случае $\rho \ll 1$ при любом γ параметр $\varepsilon \ll 1$.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАВИСИМОСТИ $\omega = \omega(\varepsilon, \gamma, \mu)$

Перейдём теперь к отысканию аналитических выражений для частоты волны в различных предельных случаях. Как уже отмечалось, в отличие от работ [3–6], где ионы считались неподвижными, мы учитываем динамику ионов в волне. Согласно формулам (6) и (7) тот факт, что мы принимаем во внимание движение ионов в волне, отражается в зависимости частоты волны от параметра μ, и именно эта зависимость будет у нас на первом плане. Сначала рассмотрим предельный случай $\mu \to \infty$. Затем рассмотрим волны в плазме, в которой параметр μ конечен, но велик: $\mu \gg 1$. Это наиболее типичный случай, если иметь в виду космическую плазму или плазму, созданную в лабораторных условиях. И, наконец, мы отдельно рассмотрим электрон-позитронную плазму, в которой $\mu = 1$.

2.1. Приближение неподвижных ионов ($\theta = 1/\mu = 0$)

В этом приближении из (5) в пределе $\mu \to \infty$ получим

$$V_\infty(\psi, \gamma) = \beta\gamma - \sqrt{(\gamma + \psi)^2 - 1} + \psi/\beta, \tag{12}$$

где $V_\infty(\psi, \gamma) \equiv V(\psi, \gamma, \mu = \infty)$. Интеграл (7) с функцией $V_\infty(\psi, \gamma)$ с помощью эйлеровой подстановки $\sqrt{(\gamma + \psi)^2 - 1} = x^2 - (\gamma + \psi)$ примет вид

$$J_\infty = \int\limits_{\psi_-}^{\psi_+} \frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{\varepsilon - V_\infty(\psi, \gamma)}} = \sqrt{\frac{2\beta}{1 - \beta}} \int\limits_b^a \frac{(x^2 - x^{-2})\,\mathrm{d}x}{\sqrt{(a^2 - x^2)\,(x^2 - b^2)}}\ ,$$

где $a^2 = \gamma\,(1 + \beta)\,(1 + \beta\rho + \sqrt{\beta^2\rho^2 + 2\beta\rho})$, $b^2 = \gamma\,(1 + \beta)\,(1 + \beta\rho - \sqrt{\beta^2\rho^2 + 2\beta\rho})$. Величина J_∞ выражается через полный эллиптический интеграл второго рода $\mathrm{E}(k)$:

$$J_\infty = (2\beta\gamma)^{3/2} \sqrt{\gamma(1 - \beta)}\ a\mathrm{E}(k),$$

где $k = [1 - (1 + \beta\rho - \sqrt{\beta^2\rho^2 + 2\beta\rho})^2]^{1/2}$. Таким образом, частота в приближении неподвижных ионов представляется формулой

$$\omega(\varepsilon, \gamma) = \frac{\pi}{2}\,\omega_{\mathrm{p}0}\,\frac{\left(1 + \beta\rho - \sqrt{\beta^2\rho^2 + 2\beta\rho}\right)^{1/2}}{\mathrm{E}(k)}\ , \tag{13}$$

где произведение $\beta\rho$ принимает значения от 0 до ∞.

Перейдём к подробному анализу формулы (13). На первый взгляд, структура формулы (13) осложнена наличием в ней эллиптического интеграла $\mathrm{E}(k)$, однако при более детальном рассмотрении видно, что его влияние не так уж и существенно. Действительно, при изменении величины $\beta\rho$ от 0 до ∞, т. е. при вариации модуля k от 0 до 1, величина эллиптического интеграла $\mathrm{E}(k)$ находится в пределах от $\pi/2$ до 1, поэтому в первом приближении можно считать, что $\mathrm{E}(k) \sim 1$, а формулу (13) записать в виде

$$\omega(\varepsilon, \gamma) \approx \frac{\pi}{2}\,\omega_{\mathrm{p}0} \left(1 + \beta\rho - \sqrt{\beta^2\rho^2 + 2\beta\rho}\right)^{1/2}. \tag{14}$$

Частота, вычисленная по достаточно простой формуле (14), в самом худшем случае лишь коэффициентом $\pi/2 \approx 1{,}6$ (т. е. приблизительно на 60 %) отличается от точного значения (13).

Из формул (13) и (14) следует, что частота уменьшается как с ростом скорости, так и с ростом амплитуды волн. Для волн, распространяющихся со скоростями $\beta \ll 1$, величина $\beta\rho \ll 1$; полагая $\gamma \approx 1$, из (13) получим

$$\omega(\varepsilon, \beta) \approx \omega_{\mathrm{p}0} \left(1 - \frac{3}{8}\,\beta\varepsilon\right) \approx \omega_{\mathrm{p}0} \left(1 - \frac{3}{16}\,\beta^2\delta\right). \tag{15}$$

Как видим, частота в этом случае мало отличается от $\omega_{\text{p}0}$. При нарастании величины $\beta\rho$ от 0 до 1, т. е. при $\beta\rho \leq 1$, частота ω остаётся близкой к $\omega_{\text{p}0}$ (например, при $\beta\rho = 1$ частота волны $\omega \approx \approx 0{,}7\omega_{\text{p}0}$). Поскольку $\beta\rho \approx \delta\,(\gamma - 1)$, условие $\beta\rho \leq 1$ можно записать как $\gamma - 1 \leq 1/\delta$. Из последнего соотношения следует, что для волн с предельно возможной амплитудой, т. е. при $\delta = 1$, параметр $\gamma \leq 2$, если же $\delta \ll 1$, то возможен случай, когда $\gamma \gg 1$. Отсюда следует интересный вывод: частота плазменных волн близка к частоте линейных колебаний в плазме $\omega_{\text{p}0}$ не только для волн, имеющих малую скорость ($\beta \ll 1$), но и для волн, движущихся с околосветовыми скоростями, но имеющих малую (по сравнению с предельной) амплитуду электрического поля. На самом деле этот вывод есть следствие того, что частота согласно (13) зависит от комбинации $\beta\rho \approx \delta\,(\gamma - 1)$, т. е. от произведения параметра, пропорционального амплитуде волны, и параметра, зависящего от её скорости.

При дальнейшем увеличении параметра $\beta\rho$, когда он становится больше единицы, эллиптический интеграл $\mathrm{E}(k)$ отличается от единицы уже меньше, чем на 10 % (так, при $\beta\rho = 1$ величина $\mathrm{E}(k) \approx 1{,}08$), поэтому при $\beta\rho > 1$ частоту волн с хорошей точностью можно вычислять по формуле (14). Для релятивистских волн ($\gamma \gg 1$) при $\beta\rho \approx \gamma\varepsilon \gg 1$ частота определяется выражением

$$\omega(\varepsilon, \gamma) \approx \omega_{\text{p}0}\pi/(2\,\sqrt{2\gamma\varepsilon}), \tag{16}$$

при этом, если амплитуда волн отлична от нуля, а их скорость приближается к скорости света ($\beta \to 1$, $\gamma \to \infty$), частота волн стремится к нулю.

В заключение данного раздела отметим, что из формулы (13), как и следует ожидать, имеем результаты, впервые полученные А. И. Ахиезером и др. в приближении бесконечно тяжелых ионов, для двух предельных случаев: 1) нерелятивистское приближение, в рамках которого частота $\omega = \omega_{\text{p}0}$ [3]; 2) релятивистские волны ($\gamma \gg 1$) с предельными амплитудами ($\varepsilon \approx 1$), для которых частота $\omega(\gamma) \approx \omega_{\text{p}0}\pi/(2\,\sqrt{2\gamma})$ [4, 5]. Как видим, в первом случае частота не зависит ни от скорости, ни от амплитуды волны и определяется частотой линейных колебаний в плазме. Во втором случае частота монотонно уменьшается с ростом скорости волн.

2.2. Наиболее распространённый случай: $\mu \gg 1$

Основная цель, стоящая перед нами в этом разделе, — выяснить зависимость частоты от параметра μ, предполагая, что значение μ конечно, но велико: $\mu \gg 1$. Именно по той причине, что значение μ велико, интуитивно ясно, что в этом случае при некоторых значениях ε и γ должно «работать» рассмотренное выше приближение, не учитывающее динамику ионов. В самом деле, нетрудно показать, что это приближение годится при изучении волн, распространяющихся с такими скоростями, для которых при любых ε выполняется условие $\gamma \ll \mu$ или даже более мягкое условие $\gamma < \mu$. Действительно, при выполнении этих неравенств пределы интегрирования в (7) в зависимости от величины γ определяются формулами (9)–(11). При этом для функции $V(\psi, \gamma, \mu)$, определяемой выражением (5), слагаемые под корнем, содержащие параметр μ, много меньше единицы. Представляя этот корень в виде ряда и отбрасывая малые члены, содержащие квадратичные и более высокие степени ψ, получим, что $V(\psi, \gamma, \mu) \approx V_\infty(\psi, \gamma)$, где $V_\infty(\psi, \gamma)$ определяется соотношением (12), т. е. для частоты мы приходим к формуле (13), справедливой в приближении бесконечно тяжёлых ионов.

Принимая во внимание эти соображения, вначале мы проанализируем поведение волн, движущихся с малыми скоростями, а затем рассмотрим свойства волн, распространяющихся с релятивистскими скоростями. При этом выясним, какой вклад в частоту волн даёт учёт конечных значений μ.

2.2.1. Слабо релятивистские волны ($\beta \ll 1$)

В грубом приближении для волн с малыми скоростями, т. е. при $\gamma \approx 1 \ll \mu$, заведомо можно применять результаты раздела 2.1. Однако мы попытаемся выяснить, как меняется частота при учёте конечного значения μ и какова тенденция этого изменения. Учитывая, что в этом случае пределы интегрирования в (7) определяются формулами (9) и, следовательно, значения переменной ψ в подынтегральном выражении в (7) много меньше единицы, функцию $V(\psi,\gamma,\mu)$ представим в виде

$$V(\psi,\gamma,\theta) = \beta\gamma - \sqrt{(\gamma+\psi)^2 - 1} + \psi/\beta + \theta\psi^2/(2\beta^3\gamma^3), \tag{17}$$

где $\theta = 1/\mu \ll 1$. Далее, рассматривая в (17) слагаемое с параметром θ как малую добавку, разложим интеграл (7) с функцией (17), который мы обозначим как $J(\varepsilon,\gamma,\theta)$, в ряд Тейлора в окрестности точки $\theta = 0$, ограничивая сумму ряда членом, пропорциональным θ:

$$J(\varepsilon,\gamma,\theta) = J(\varepsilon,\gamma,0) + \theta \left[\frac{\partial J(\varepsilon,\gamma,\theta)}{\partial\theta}\right]_{\theta=0}. \tag{18}$$

Первое слагаемое ряда (18) $J(\varepsilon,\gamma,0) = J_\infty$ найдено в разделе 2.1. Производную

$$\frac{\partial J(\varepsilon,\gamma,\theta)}{\partial\theta} = \frac{\partial}{\partial\theta}\int\limits_{\psi_-}^{\psi_+} \frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{\varepsilon - V(\psi,\gamma,\theta)}}$$

представим таким образом:

$$\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\int\limits_{\psi_-}^{\psi_+} \frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{\varepsilon - V(\psi,\gamma,\theta)}}\right]_{\theta=0} = \left[2\,\frac{\partial}{\partial\theta}\,\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\int\limits_{\psi_-}^{\psi_+} \sqrt{\varepsilon - V(\psi,\gamma,\theta)}\,\mathrm{d}\psi\right]_{\theta=0} =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left[\int\limits_{\psi_-}^{\psi_+} \frac{[\partial V(\psi,\gamma,\theta)/\partial\theta]\,\mathrm{d}\psi}{\sqrt{\varepsilon - V(\psi,\gamma,\theta)}}\right]_{\theta=0} = -\frac{1}{2\beta^3\gamma^3}\,\frac{\partial I}{\partial\varepsilon},$$

где

$$I = \int\limits_{\psi_-}^{\psi_+} \frac{\psi^2\,\mathrm{d}\psi}{\sqrt{\varepsilon - V_\infty(\psi,\gamma)}}.$$

Такое представление возможно благодаря двум обстоятельствам: во-первых, переменные θ и ε независимы, во-вторых, дифференцирование интеграла

$$\int\limits_{\psi_-}^{\psi_+} \sqrt{\varepsilon - V(\psi,\gamma,\theta)}\,\mathrm{d}\psi$$

по переменным θ и ε сводится к дифференцированию подынтегральной функции, т. к. эта функция на пределах интегрирования равна нулю.

Интеграл I, в котором функция $V_\infty(\psi,\gamma)$ определяется формулой (12), можно вычислить аналогично J_∞. В результате получим

$$I = \sqrt{2\beta\,(1+\beta)}\,[(Y_3 - Y_{-3})/4 - \gamma\,(Y_2 - Y_{-2}) + (\gamma^2 + 1/4)\,(Y_1 - Y_{-1})],$$

где

$$Y_n = \int\limits_b^a \frac{x^{2n}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{(a^2-x^2)\,(x^2-b^2)}}\ .$$

Здесь использованы величины a и b, определённые в разделе 2.1. Интегралы Y_n выражаются через полные эллиптические интегралы первого и второго рода $\mathrm{K}(k)$ и $\mathrm{E}(k)$ соответственно, где параметр k тот же, что и в разделе 2.1. Отбрасывая малые члены, содержащие параметр β в степени больше трёх, а параметр ε — в степени больше единицы, получим для производной

$$\left[\frac{\partial J(\varepsilon,\gamma,\theta)}{\partial\theta}\right]_{\theta=0} \approx \frac{\gamma^{3/2}\sqrt{2\beta}\,[\mathrm{E}-\mathrm{K}+\mathrm{E}\,\sqrt{2\beta\varepsilon}+(9\mathrm{E}-\mathrm{K})\,\beta\varepsilon+2\,(4\mathrm{E}-\mathrm{K})\,\beta^2/3+8\beta^2\sqrt{2\beta\varepsilon}\ \mathrm{E}/3]}{2\beta\,(1+\beta\varepsilon/2)\,\sqrt{1+\beta\varepsilon+\sqrt{2\beta\varepsilon}}}\ .$$

Здесь мы опустили аргумент k у эллиптических интегралов $\mathrm{K}(k)$ и $\mathrm{E}(k)$. Далее, учитывая, что при $\beta \ll 1$ имеет место соотношение $\varepsilon = \beta\delta/2$, а модуль $k \ll 1$, воспользуемся асимптотическим разложением эллиптических интегралов, входящих в выражение для производной, при малых k. После этого, подставляя производную в формулу (18) и учитывая (15), для частоты окончательно получим

$$\omega(\beta,\delta,\theta) \approx \omega_{\mathrm{p}}\left(1-\frac{3}{16}\,\beta^2\delta+\frac{15}{16}\,\theta\delta\right), \tag{19}$$

где $\omega_{\mathrm{p}} = \omega_{\mathrm{p}0}\,(1+\theta)^{1/2}$ — частота линейных колебаний плазмы с учётом массы ионов [2].

Таким образом, учёт движения ионов дал прирост частоты за счёт положительной малой добавки (третий член в скобках формулы (19)), пропорциональной амплитуде волн. Хотя частота слабо релятивистских волн практически не отличается от $\omega_{\mathrm{p}0}$, зависимость (19) интересна тем, что позволяет понять влияние нелинейности и динамики ионов на частоту волн. В самом деле, как мы видим, учёт нелинейности (второй член в скобках формулы (19)) приводит к уменьшению частоты, а учёт динамики ионов (третий член), наоборот, приводит к увеличению частоты слабо релятивистских волн. Интересно отметить, что при скорости волн $\beta = \sqrt{5\theta}$, влияние нелинейности на частоту уравновешивается влиянием динамики ионов, и частота нелинейных волн равна частоте линейных колебаний плазмы ω_{p}.

Если положить $\beta = \mathrm{const}$, из формулы (19) следует, что при скоростях $\beta < \sqrt{5\theta}$ частота больше, чем ω_{p}, и нарастает с увеличением амплитуды волн, а при $\beta > \sqrt{5\theta}$ частота меньше, чем ω_{p}, и убывает с ростом амплитуды δ. Для фиксированной амплитуды волны ($\delta = \mathrm{const}$) рассмотрим самую интересную, на наш взгляд, ситуацию, когда амплитуда волн равна предельно возможной: $\delta = 1$. В этом случае из (19) получим, что при $\beta = 0$ частота больше, чем ω_p, и равна своему максимальному значению $\omega \approx \omega_{\mathrm{p}}\,(1+\theta) = \omega_{\mathrm{p}0}\,(1+\theta)^{3/2}$, затем при увеличении скорости волн частота падает, при скорости $\beta = \sqrt{5\theta}$ она становится равной $\omega_{\mathrm{p}} = \omega_{\mathrm{p}0}\,(1+\theta)^{1/2}$ и в дальнейшем уменьшается. В заключение отметим, что из (19) при $\beta = 0$ следует результат, приведённый в работе [15].

2.2.2. Релятивистские волны при $\rho \gg 1$

Прежде, чем перейти к релятивистскому случаю, убедимся в том, что волны, для которых выполняется условие $\beta\rho \le 1$, имеют частоты, близкие к $\omega_{\mathrm{p}0}$, как это было в приближении бесконечно тяжёлых ионов (раздел 2.1). Действительно, в этом случае в интеграле (7) пределы интегрирования определяются формулами (10). Нетрудно видеть, что на отрезке интегрирования слагаемые в подкоренном выражении в соотношении (5), содержащие параметр μ, много меньше единицы, поэтому функцию $V(\psi,\gamma,\mu)$ можно заменить на $V_\infty(\psi,\gamma)$. Таким образом, здесь применимо приближение неподвижных ионов, и все выводы, приведённые в разделе 2.1 для случая $\beta\rho \le 1$, остаются в силе.

Итак, для релятивистских волн будем считать, что $\beta\rho = \beta\gamma\varepsilon \gg 1$, что равносильно неравенствам $\rho \gg 1$, $\gamma \gg 1$, т. к. $\beta \approx 1$, $\varepsilon \le 1$. В этом случае в интеграле (7) на отрезке интегрирования $0 \le \psi \le \psi_+$, полагая $\sqrt{(\gamma+\psi)^2-1} \approx \gamma+\psi$, функцию $V(\psi,\gamma,\mu)$ представим в виде

$$V(\psi,\gamma,\mu) \approx \beta\mu\gamma - \gamma\,(1-\beta) - \psi - \sqrt{(\mu\gamma-\psi)^2-\mu^2}\,. \tag{20}$$

На отрезке $0 \ge \psi \ge \psi_-$, учитывая, что $|\psi_-| \le \gamma - 1$, функцию $V(\psi,\gamma,\mu)$ во всех случаях с достаточной точностью можно заменить функцией $V_\infty(\psi,\gamma)$, которая определяется формулой (12). Таким образом, интеграл (7) в этом случае можно представить в виде суммы двух интегралов: $J(\varepsilon,\gamma,\mu) = J_1 + J_2$, где

$$J_1 = \int\limits_{\psi_-}^{0} \frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{\varepsilon - V_\infty(\psi,\gamma)}}\,, \qquad J_2 = \int\limits_{0}^{\psi_+} \frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{\varepsilon - V(\psi,\gamma,\mu)}}\,.$$

В интеграле J_2 функция $V(\psi,\gamma,\mu)$ определяется формулой (20).

Вычисление интеграла J_1 проводится аналогично вычислению J_∞. В итоге J_1 выражается через эллиптические интегралы второго рода:

$$J_1 = \sqrt{\frac{2\beta}{1-\beta}}\,\bigl\{a\,[\mathrm{E}(k) - \mathrm{E}(q,k)] - \mathrm{E}(p,k)/(ab^2)\bigr\}\,.$$

Здесь

$$q = \arcsin\sqrt{\frac{a^2-s^2}{a^2-b^2}}\,, \qquad p = \arcsin\left(\frac{a}{s}\sqrt{\frac{s^2-b^2}{a^2-b^2}}\right), \qquad s^2 = \gamma\,(1+\beta),$$

а параметры a, b и k определены в разделе 2.1. Окончательная оценка интеграла J_1 даёт $J_1 \approx \approx \gamma/\sqrt{\varepsilon}$ (напомним, что в рассматриваемом случае $\gamma \gg 1$, $\rho = \gamma\varepsilon \gg 1$, т. е. ε не может принимать нулевое значение: $\varepsilon \gg 1/\gamma$).

Теперь вычислим интеграл J_2. Функцию $V(\psi,\gamma,\mu)$, определённую соотношением (20), представим таким образом:

$$V(\psi,\gamma,\mu) \approx \mu\,[\beta\gamma - \psi/\mu - \sqrt{(\gamma-\psi/\mu)^2-1}].$$

Введём обозначение $y = \psi/\mu$. После замены переменных

$$\gamma - t = y + \sqrt{(\gamma-y)^2-1}$$

интеграл J_2 выразится через табличные интегралы:

$$J_2 = \frac{\sqrt{\mu}}{2}\left(\int\limits_g^h \frac{t^{-2}\,\mathrm{d}t}{\sqrt{h-t}} - \int\limits_g^h \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{h-t}}\right) = \frac{\sqrt{\mu}}{2}\left(\frac{\sqrt{h-g}}{(gh)} - 2\sqrt{h-g} - \frac{1}{2h^{3/2}}\ln\frac{\sqrt{h}-\sqrt{h-g}}{\sqrt{h}+\sqrt{h-g}}\right),$$

где

$$g = \gamma\,(1-\beta) = \frac{1}{\gamma\,(1+\beta)} \approx \frac{1}{2\gamma}\,, \qquad h = g + \varepsilon/\mu.$$

Таким образом, вычисление интеграла J даёт

$$J(\varepsilon,\gamma,\mu) = \frac{2\mu\gamma^{3/2}\sqrt{\rho}}{\mu+2\rho}\left(1+\frac{\mu+2\rho}{2\mu\rho}-\frac{\mu+2\rho}{2\mu\gamma^2}+\frac{\mu}{2\sqrt{2\rho\,(\mu+2\rho)}}\ln\frac{\sqrt{1+\mu/(2\rho)}+1}{\sqrt{1+\mu/(2\rho)}-1}\right).$$

Легко видеть, что в рассматриваемом нами приближении ($\rho \gg 1$, $\mu \gg 1$) второе и третье слагаемые в скобках в правой части полученного выражения много меньше единицы. Опуская эти слагаемые и подставляя полученное значение интеграла $J(\varepsilon,\gamma,\mu)$ в (6), получим формулу для частоты:

$$\omega(\varepsilon,\gamma,\mu) \approx \omega_{\mathrm{p}0}\pi\,(\mu+2\rho) \Bigg/ \left[\mu\sqrt{2\rho}\left(1+\frac{\mu}{2\sqrt{2\rho\,(\mu+2\rho)}}\ln\frac{\sqrt{1+\mu/(2\rho)}+1}{\sqrt{1+\mu/(2\rho)}-1}\right)\right]. \tag{21}$$

Рассмотрим зависимость частоты от соотношения между параметрами ρ и μ. При $1 \ll \rho \ll \ll \mu$ второе слагаемое в скобках в знаменателе выражения (21) равно единице, и, как и следует ожидать, (21) трансформируется в формулу (16). В случае $\rho \geq \mu \gg 1$ второе слагаемое можно опустить, т. к. оно мало по сравнению с единицей, и для частоты получим формулу

$$\omega(\varepsilon,\gamma,\mu) \approx \omega_{\mathrm{p}0}\pi\,\frac{\mu+2\rho}{\mu\sqrt{2\rho}} = \omega_{\mathrm{p}0}\pi\,\frac{\mu+2\gamma\varepsilon}{\mu\sqrt{2\gamma\varepsilon}}\ . \tag{22}$$

Из (22) следует важный результат, выражающийся в том, что в данном случае частота зависит от всех трёх параметров задачи: ε, γ, μ, причём существенна зависимость от всех параметров, в том числе и от μ. Итак, мы получили, что при $1 \ll \rho \ll \mu$ частота волн выражается формулой (16):

$$\omega(\varepsilon,\gamma) \approx \omega_{\mathrm{p}0}\pi/(2\sqrt{2\rho}) = \omega_{\mathrm{p}0}\pi/(2\sqrt{2\gamma\varepsilon}),$$

полученной в приближении бесконечно тяжёлых ионов, при этом частота волн меньше $\omega_{\mathrm{p}0}$, не зависит от μ и уменьшается с ростом ρ. При $\rho \gg \mu$ из (22) получим

$$\omega(\varepsilon,\gamma) \approx \omega_{\mathrm{p}0}\pi\,\sqrt{2\rho}\,/\mu = \omega_{\mathrm{p}0}\pi\,\sqrt{2\gamma\varepsilon}\,/\mu,$$

т. е. частота существенным образом зависит от μ и, наоборот, растёт с увеличением ρ. При стремлении скорости волн конечной амплитуды к скорости света, что равносильно пределу $\rho \to \infty$, частота стремится к бесконечности, что полностью противоположно поведению частоты, полученному в приближении неподвижных ионов, в рамках которого частота при $\beta \to 1$ уменьшается до нуля.

В итоге мы получили, что для слабо релятивистских, а также для релятивистских волн при $\rho = \gamma\varepsilon \leq \beta \leq 1$ частота волн близка к $\omega_{\mathrm{p}0}$. При $\rho \gg 1$ и любых соотношениях между μ и ρ с точностью 50 % для частоты волн можно использовать очень простую формулу (22), которая правильно отражает функциональную зависимость частоты от параметров ε, γ, μ, т. е. даёт уменьшение частоты с ростом ρ при $\rho \ll \mu$ и описывает нарастание частоты с увеличением ρ при $\rho \gg \mu$.

Для фиксированного значения μ зависимость ω от параметра ρ, выражаемая соотношением (22), означает, что при некотором значении ρ частота имеет минимальное значение $\omega_{\min}$. Из условия $\partial\omega/\partial\rho = 0$ из (22) следует, что $\omega_{\min} \approx 2\pi\omega_{\mathrm{p}0}/\sqrt{\mu}$ при $\rho_{\min} \approx \mu/2$. Обратим внимание на то, что отношение $\omega_{\min}/\omega_{\mathrm{p}0}$ зависит только от μ. Очевидно, что при некотором $\rho = \rho_0 \gg \mu$ частота ω снова, как и для линейных волн, равна плазменной частоте ω_{p}. Значение ρ_0, при котором $\omega = \omega_{\mathrm{p}}$, найдём с помощью (22): $\rho_0 \approx \mu^2/(2\pi^2)$. Таким образом, при фиксированной амплитуде электрического поля волны и изменении скорости волны от нуля до скорости света частота вначале уменьшается до некоторого минимального значения, затем монотонно и неограниченно растёт. При этом на отрезке $0 \leq u \leq c$ частота дважды принимает значение $\omega = \omega_{\rm p}$: первый раз на фазе спада, второй раз — при нарастании от минимального значения до бесконечности. На фазе спада, при значениях $\rho < \rho_{\min} \approx \mu/2$, можно пользоваться формулами для частоты, полученными для случая бесконечно тяжёлых и неподвижных ионов (формулы (13)–(16)). При $\rho > \rho_{\min} \approx \mu/2$ частоту необходимо определять из соотношений, полученных с учётом движения ионов (формулы (21), (22)).

Оценим амплитуду электрического поля нелинейной волны, при которой частота волны начинает «реагировать» на динамику ионов. Возьмём $\rho = \rho_{\min} \approx \mu/2$ и предположим, что волна распространяется в электрон-протонной плазме, а её амплитуда близка к предельной ($\varepsilon \approx \varepsilon_{\rm m}$). Далее, учитывая, что $\rho_{\min} \gg 1$, из (8) имеем $\varepsilon_{\rm m} \approx 1$, откуда для амплитуды электрического поля следует оценка $E_{0\rm m} \approx \sqrt{4\pi n_0 M c^2}$. Из этой формулы для плазмы с плотностью $n_0 \sim 10^{18}$ см$^{-3}$ получим $E_{0\rm m} \approx 10^{12}$ В/м. Такая амплитуда электрического поля соответствует значению, которое наблюдается в лазерном луче с длиной волны 1 мкм и интенсивностью 10^{18} Вт/см^2.

2.3. Электрон-позитронная плазма ($\mu = 1$)

В этом случае формула (6) для частоты представляется в виде

$$\omega = \omega(\varepsilon,\gamma) = \frac{\pi}{2}\,\omega_{\rm pe}\,(\beta\gamma)^{3/2}/J(\varepsilon,\gamma), \tag{23}$$

где $\omega_{\rm pe} = (8\pi e^2 n_0/m)^{1/2}$ — частота линейных колебаний плазмы,

$$J(\varepsilon,\gamma) = \int\limits_0^{\psi_+} \frac{{\rm d}\psi}{\sqrt{\varepsilon - V(\psi,\gamma)}}\ . \tag{24}$$

В интеграле $J(\varepsilon,\gamma)$ верхний предел определяется формулой

$$\psi_+ = (\beta\gamma - \varepsilon/2)\bigl\{\varepsilon(\beta\gamma - \varepsilon/4)/[1 + \varepsilon\,(\beta\gamma - \varepsilon/4)]\bigr\}^{1/2},$$

а функция $V(\psi,\gamma)$ даётся выражением

$$V(\psi,\gamma) = 2\beta\gamma - \sqrt{(\gamma-\psi)^2 - 1} - \sqrt{(\gamma+\psi)^2 - 1}\ .$$

Эффективная потенциальная яма, описываемая функцией $V(\psi,\gamma)$, имеет форму, симметричную относительно точки $\psi = 0$, предельная глубина ямы $\varepsilon_{\rm m} = 2\beta\gamma\,(1 - \sqrt{\gamma/(\gamma+1)})$, предельные амплитуды потенциала $\psi_-^* = -(\gamma - 1)$, $\psi_+^* = \gamma - 1$ [7].

2.3.1. Слабо релятивистские волны ($\beta \ll 1$)

Для слабо релятивистских волн глубина потенциальной ямы $\varepsilon_{\rm m} \approx \beta\,(2 - \sqrt{2}) \ll 1$, т. е. параметр $\varepsilon \leq \varepsilon_{\rm m} \ll 1$. Для того, чтобы найти выражение для частоты волн при $\beta \ll 1$, сделаем в интеграле (24) замену переменных:

$$t = \left[\sqrt{(\gamma-\psi)^2 - 1} + \sqrt{(\gamma+\psi)^2 - 1}\right]/2,$$

после чего интеграл (24) примет вид

$$J(\varepsilon,\gamma)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\beta^2\gamma\int\limits_b^{\beta\gamma}\frac{(1-t^2/\gamma^2)^{-1/2}\,\mathrm{d}t}{\sqrt{(\beta^2\gamma^2-t^2)\,(b-t)}}-\gamma\int\limits_b^{\beta\gamma}\frac{(1-t^2/\gamma^2)^{-3/2}\sqrt{\beta^2\gamma^2-t^2}\,\mathrm{d}t}{\sqrt{b-t}}\right),$$

где $b=\beta\gamma-\varepsilon/2$. Представим выражения $(1-t^2/\gamma^2)^{-1/2}$ и $(1-t^2/\gamma^2)^{-3/2}$, входящие в подынтегральные функции, в виде степенных рядов. Поскольку на отрезке интегрирования отношение $t^2/\gamma^2\ll 1$, можно ограничиться конечным числом членов полученного ряда. В результате получим

$$J(\varepsilon,\gamma)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\int\limits_b^{\beta\gamma}\frac{\beta^2\gamma^2\,\mathrm{d}t}{\sqrt{(\beta^2\gamma^2-t^2)\,(b-t)}}-\sum_n a_n(\varepsilon,\gamma)\int\limits_b^{\beta\gamma}\frac{(\beta^2\gamma^2-t^2)^{n+1/2}\,\mathrm{d}t}{\sqrt{b-t}}\right),\qquad(25)$$

где $n=0,1,2,\ \dots$, а $a_n(\varepsilon,\gamma)$ — коэффициенты ряда, зависящие от ε и γ. Ограничимся приближением, в рамках которого опустим в выражении для интеграла $J(\varepsilon,\gamma)$ члены, содержащие малый параметр β в степени больше четырёх. Анализ показывает, что в этом приближении достаточно сохранить в сумме, фигурирующей в (25), первый член. В указанном приближении получим

$$J(\varepsilon,\gamma)\approx(\beta\gamma)^{3/2}\left\{\mathrm{K}(k)-\left(1+\frac{3}{4}\,\beta^2\right)\frac{8}{3}\left[\left(1-\frac{\nu}{4}\right)\mathrm{K}(k)-\left(1-\frac{\nu}{2}\right)\mathrm{E}(k)\right]\right\},$$

где $\mathrm{K}(k)$ и $\mathrm{E}(k)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно, $k=\sqrt{\nu}/2$, $\nu=\varepsilon/\beta=\delta\,(2-\sqrt{2})\approx 3\delta/5$. Воспользовавшись асимптотическим разложением интегралов $\mathrm{K}(k)$ и $\mathrm{E}(k)$ при малых k, окончательно получим

$$J(\varepsilon,\gamma)\approx\frac{\pi}{2}\,(\beta\gamma)^{3/2}\left(1-\frac{15}{16}\,\nu-\frac{3}{4}\,\beta^2\nu\right).$$

Подставляя полученное соотношение для $J(\varepsilon,\gamma)$ в (23), получим

$$\omega(\delta)\approx\omega_{\mathrm{pe}}\left(1+\nu+\frac{3}{4}\,\beta^2\nu\right)\approx\omega_{\mathrm{pe}}\left(1+\frac{3}{5}\,\delta+\frac{1}{2}\,\delta\beta^2\right).\qquad(26)$$

Как видим, формула (26) для частоты по своей структуре подобна формуле (19), полученной для слабо релятивистских волн в плазме, содержащей тяжёлые ионы, но имеет два существенных отличия. Первое отличие состоит в том, что слагаемое в (26), содержащее параметр β, которое появилось в формуле для частоты за счёт учёта нелинейности, имеет положительный знак. Второе отличие — добавка к частоте, связанная только с амплитудой волн (второй член в скобках в (26)), существенна для волн, имеющих амплитуду, близкую к предельной, за счёт чего, например, при $\delta=1$ частота более чем в полтора раза, превосходит значение ω_{pe}. Основной вывод, следующий из (26), состоит в том, что частота слабо релятивистских волн в электрон-позитронной плазме больше частоты линейных колебаний ω_{pe}.

2.3.2. Релятивистские волны ($\gamma\gg 1$)

Легко видеть, что так же, как и в рассмотренном выше случае волн в плазме с тяжёлыми ионами, для релятивистских волн в электрон-позитронной плазме, имеющих амплитуду значительно меньше предельной (точнее, при $\beta\rho\le 1$), частота не сильно отличается от её значения для слабо релятивистских волн. Для того, чтобы найти частоту волн при $\rho \gg 1$, т. е. при $\gamma \gg 1$, в интеграле (24) функцию $V(\psi,\gamma)$ приближённо представим в виде

$$V(\psi,\gamma) \approx 2\beta\gamma - \sqrt{(\gamma-\psi)^2-1} - (\gamma+\psi).$$

Введём новую переменную $t = (\gamma-\psi) - \sqrt{(\gamma-\psi)^2-1}$, после чего интеграл (24) примет вид

$$J(\varepsilon,\gamma) = \int\limits_q^p \frac{(1/t^2-1)\,\mathrm{d}t}{2\sqrt{p-t}}\ ,$$

где $q = \gamma\,(1-\beta)$, $p = \varepsilon + 2q$. Этот интеграл вычисляется по аналогии с J_2 (см. раздел 2.2.2), и для частоты, полагая $\rho \gg 1$, получим

$$\omega(\varepsilon,\gamma) \approx \omega_{\mathrm{pe}}\pi\,\sqrt{\gamma\varepsilon}\,/2. \tag{27}$$

Зависимость частоты нелинейных ленгмюровских волн в электрон-позитронной плазме от параметров ε и γ получилась такой же, как для ультрарелятивистских волн ($\rho \gg \mu$) в плазме с тяжёлыми ионами.

Обобщая результаты, полученные как для слабо релятивистских, так и для релятивистских волн, приходим к заключению о том, что в электрон-позитронной плазме частота нелинейных ленгмюровских волн всегда больше частоты линейных колебаний.

3. ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ

В настоящей работе мы получили аналитические выражения для частоты нелинейных ленгмюровских волн во всём диапазоне изменения параметров μ, γ и ε. Основной вывод, который следует из полученных формул и который необходимо отметить прежде всего, — это то, что при исследовании нелинейных ленгмюровских волн учёт движения ионов принципиален. Как видно, зависимость частоты от амплитуды (ε) и фазовой скорости (γ) волн, а также от параметра μ, характеризующего ионную компоненту плазмы, существенно отличается для двух предельных случаев: 1) для плазмы, в которой предполагается, что ионы бесконечно тяжёлые и неподвижные ($\mu \to \infty$), частота всегда ниже частоты линейных волн ω_{p0} и с увеличением параметра $\rho = \gamma\varepsilon$ монотонно уменьшается; 2) для электрон-позитронной плазмы, в которой массы ионов и электронов равны ($\mu = 1$) и, следовательно, движение ионов (в данном случае — позитронов) происходит наравне с электронами, частота всегда выше частоты линейных колебаний и с увеличением ρ монотонно растёт. Для промежуточного случая, когда параметры плазмы таковы, что $\mu \gg 1$, зависимость частоты от характеристик волн достаточно сложна и выражается формулами (19), (21), (22).

Другой очень важный вывод — это то, что частота в общем случае существенным образом зависит от всех трёх параметров задачи: γ, ε и μ, причём при заданном значении μ частота определяется произведением $\rho = \gamma\varepsilon$, т. е. в одинаковой степени зависит как от скорости, так и от амплитуды волн.

Отметим также интересные факты. Во-первых, нелинейные слабо релятивистские плазменные волны ($\beta \ll 1$), а также релятивистские волны с малой амплитудой, для которых выполняется условие $\rho = \gamma\varepsilon \le \beta \le 1$, имеют частоту колебаний, близкую к частоте линейных колебаний в плазме. Во-вторых, для самой распространённой в природе электрон-протонной плазмы частота нелинейных волн ω, как это следует из формул (21) и (22), отличается от плазменной электронной ω_{p0} менее чем на порядок величины (максимум в 7 раз) при изменении параметра ρ в достаточно большом интервале: $0 \le \rho \le 10^5$, и только за пределами указанного интервала, при $\rho > 10^5$, частота волн становится больше ω_{p0} и с увеличением ρ монотонно растёт как $\rho^{1/2}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арцимович Л. А., Сагдеев Р. З. Физика плазмы для физиков. М.: Атомиздат, 1979. 320 с.
2. Ахиезер А. И. Электродинамика плазмы. М.: Наука, 1974. 720 с.
3. Ахиезер А. И., Любарский Г. Я. // Докл. АН. 1951. Т. 80, № 2. С. 193.
4. Ахиезер А. И., Половин Р. В. // Докл. АН. 1955. Т. 102, № 5. С. 919.
5. Ахиезер А. И., Половин Р. В. // ЖЭТФ. 1956. Т. 30. С. 915.
6. Cavalier A. // Nuovo Cimento. 1962. V. 23. P. 440.
7. Кичигин Г. Н. // Докл. АН. 2002. Т. 385, № 4. С. 474.
8. Кичигин Г. Н. // Физика плазмы. 2003. Т. 29, № 2. С. 172.
9. Lünow W. // Plasma Phys. 1968. V. 10. P. 879.
10. Max C. // Phys. Fluids. 1973. V. 16. P. 1 277.
11. Козлов В. А., Литвак А. Г., Суворов Е. В. // ЖЭТФ. 1979. Т. 76. С. 148.
12. Khachatryan A. G. // Phys. Rev. 1998. V. 58. P. 7 799.
13. Gorbunov L. M., Mora P., Ramazashvili R. R., et al. // Phys. Plasmas. 2000. V. 7. P. 375.
14. Gorbunov L. M., Mora P., Solodov A. A. // Phys. Rev. Lett. 2001. V. 86. P. 3 332.
15. Wilhelmsson H. // Phys. Fluids. 1961. V. 4, No. 1. P. 335.

Поступила в редакцию 18 мая 2004 г.; принята в печать 28 марта 2005 г.

THE FREQUENCY OF NONLINEAR PLASMA WAVES

G. N. Kichigin

We study steady plane nonlinear plasma waves in a cold collisionless plasma in the absence of a magnetic field. The main conclusion following from the performed analysis consists in that allowance for the motion of the ion component of the plasma is of fundamental importance when studying nonlinear plasma waves. It is shown that, in general, the frequency of waves is essentially determined by the ion-component mass and depends equally on the speed and amplitude of waves.

УДК 621.385.69

ЭЛЕКТРОННО-ОПТИЧЕСКАЯ СИСТЕМА МОЩНОГО ГИРОТРОНА С НЕАДИАБАТИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОННОЙ ПУШКОЙ

А. Л. Гольденберг [1], *В. Н. Мануилов* [2], *М. Ю. Глявин* [1]

[1] Институт прикладной физики РАН, ЗАО НПП «ГИКОМ»,
[2] Нижегородский госуниверситет им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия

Описана неадиабатическая электронная пушка, работающая в режиме ограничения тока пространственным зарядом, предназначенная для формирования винтовых пучков в гирорезонансных приборах. Приведены результаты численного моделирования электронных траекторий и параметров электронного пучка. Результаты расчётов указывают, что питч-фактор и разброс скоростей электронов при большом токе пучка могут быть значительно улучшены по сравнению с традиционными адиабатическими системами.

ВВЕДЕНИЕ

Гиротроны диапазона частот от 30 до 170 ГГц используются в настоящее время в качестве источников мощного электромагнитного излучения в установках управляемого термоядерного синтеза для электронно-циклотронного резонансного нагрева плазмы и поддержания токов увлечения в токамаках и стеллараторах (см., например, [1]). По мощности излучения и эффективности в непрерывном (или квазинепрерывном) режиме работы гиротроны, а также гироклистроны, гиро-ЛБВ, гиро-ЛОВ значительно превосходят приборы других типов. В гироприборах используются мощные трубчатые пучки электронов, которые формируются, как правило, магнетронно-инжекторными пушками (МИП) [2]. КПД гироприборов в значительной мере определяется средним питч-фактором $g = v_\perp/v_\|$, т. е. долей энергии электронов, преобразованной в энергию вращения, а также разбросом поступательных ($v_\|$) и вращательных ($v_\perp$) компонент скорости электронов. Из условия устойчивости электронного пучка в магнитном поле пробочной конфигурации следует, что максимальный питч-фактор тем больше, чем меньше разброс компонент скорости. Поэтому повышение качества электронного пучка — снижение разброса скоростей — является наиболее важным резервом повышения КПД гиротронов, в особенности потому, что разброс имеет тенденцию увеличиваться с ростом мощности и частоты прибора.

В МИП, формирующих электронные пучки с большим током, имеются два важных фактора, приводящих к значительному разбросу компонент скорости электронов. Во-первых, катод работает в режиме температурного ограничения тока эмиссии; при этом из-за того, что локальные эмиссионные свойства катода неоднородны вследствие зависимости от вариаций работы выхода, неравномерностей нагрева и шероховатости поверхности, возникают неоднородности электрического поля на катоде, порождающие разброс компонент скорости [3, 4]. Во-вторых, в области формирования пучка из-за его собственного электрического поля имеются значительные различия электрических полей на внешней и внутренней границах трубчатого пучка, что приводит к нарастанию разброса, особенно на начальном участке электронных траекторий [2].

Первые попытки улучшить качество электронного пучка за счёт перехода от режима температурного ограничения тока эмиссии к режиму ограничения тока пространственным зарядом (ρ-режиму) в традиционных МИП не позволили снизить разброс компонент скорости электронов, поскольку при этом в большей степени проявлялась роль второго фактора. В пушке со скачком магнитного поля [5] и в пушке с электродами, рассчитанными методом синтеза [6], которые предлагались ранее для работы в ρ-режиме, при большой мощности пучка либо оставались нескомпенсированными неоднородности электрического поля на границах пучка, либо требовались чрезмерно большие размеры катода и других электродов.

Ниже описана новая электронная пушка для формирования мощного трубчатого винтового пучка, близкая по принципу работы инжектора к пушке Пирса.

1. КОНФИГУРАЦИЯ ЭЛЕКТРОДОВ И РЕЖИМ РАБОТЫ ПУШКИ

Электронная пушка, расчёт которой приведён далее, схематично изображена на рис. 1. Её инжектор состоит из вогнутого кольцевого катода, часть которого покрыта эмитирующим слоем, и двух анодов — внутреннего и внешнего. Особенностью пушки является то, что оба анода создают примерно одинаковое электрическое поле на поверхности эмиттера, т. е. расстояния от середины эмиттера до обоих анодов примерно одинаковые. Дополнительный анод ускоряет электроны до полного напряжения пучка U_0. Магнитное поле в области пушки является полем рассеяния основного соленоида, формирующего магнитное поле в области резонатора. При необходимости коррекции магнитного поля в области пушки используется относительно маломощный дополнительный (катодный) соленоид.

В рассматриваемой пушке влияние неоднородностей электрического поля на эмиттере и поля пространственного заряда исключено или значительно уменьшено. Во-первых, она работает в режиме полного пространственного заряда, и, следовательно, в ней на поверхности виртуального катода электрическое поле равно нулю, а мелкомасштабные неоднородности поверхности и эмиссионных свойств катода не играют роли при формировании пучка. Во-вторых, в инжекторе электроды (аноды) пушки с одинаковым потенциалом располагаются как снаружи, так и внутри области движения электронов, что позволяет исключить или значительно уменьшить различие электрического поля на внутренней и внешней границах пучка.

В данной пушке в отличие от электронных пушек с сильно неоднородным магнитным полем, обсуждавшихся, например, в [5], электроны инжектируются не вдоль, а под некоторым углом γ к магнитной силовой линии, что позволяет создать пучок с перпендикулярной магнитному полю (осцилляторной) компонентой скорости $v_\perp$. Угол γ подбирается из условия обеспечения заданной энергии осцилляторного движения электронов в рабочем пространстве. Имеются две возможности выбора этого угла: когда нормаль к поверхности эмиттера направлена внутрь (I) или вне (II) магнитной силовой трубки. При этом в начале своего движения электрон сближается с внешним или внутренним анодом соответственно. В рассматриваемом случае был выбран вариант II. Величины магнитного и электрического полей и размеры электродов подбираются таким образом, чтобы в зазоре между катодом и анодом инжектора электроны совершали только небольшую часть своего первого витка в магнитном поле, меньшую или примерно равную 1/4 длины первого шага электронной траектории. Если же это условие не выполнено, $v_\perp$ является осциллирующей и спадающей функцией угла пролёта θ, т. е. скорость вращения электронов, прошедших промежуток катод—анод, описывается формулой

$$v_\perp(a) = k(\theta)\,\sqrt{2\,\frac{e}{m}\,U_{\text{a1}}\,\frac{B(a)}{B_{\text{k}}}}\,\sin\gamma,$$

где B_{k} — магнитное поле на катоде, U_{a1} — разность потенциалов между катодом и первым анодом, $\theta = eBt(a)/m$, $t(a)$ — время пролёта электронов от эмиттера до сечения $z = a$ (рис. 1), зависимость $k(\theta)$ близка к 1 при $\theta < \pi/2$, спадает до нуля при $\theta \approx \pi$ и далее осциллирует. После прохождения через щель между анодами электроны ускоряются до полного напряжения пучка, и их

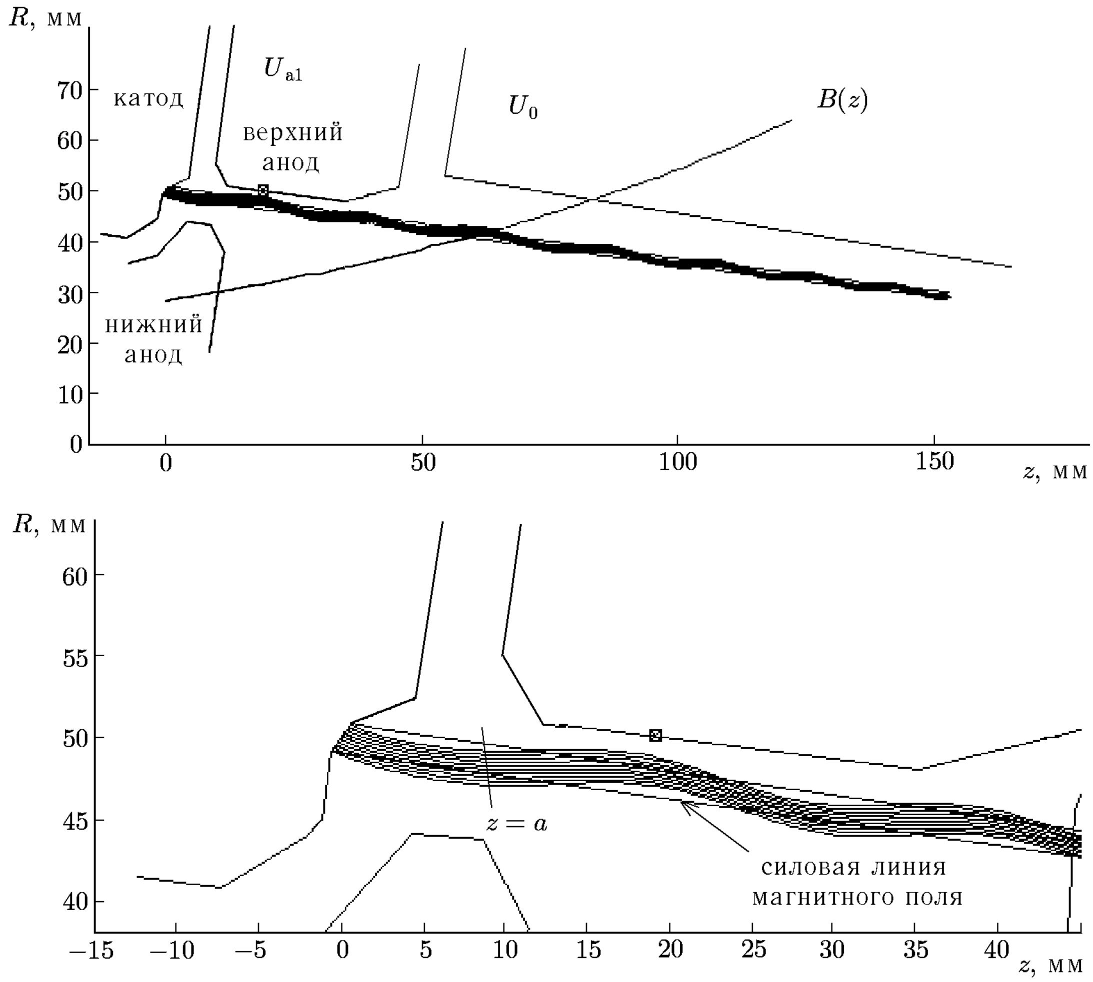


Рис. 1. Общий вид электродов, пучка и электронные траектории в области эмиттера в плоскости, проходящей через продольную ось системы z; $B(z)$ — распределение магнитного поля

дальнейшее движение происходит в нарастающем магнитном поле, где вращательные скорости электронов $v_\perp$ возрастают в соответствии с адиабатическим инвариантом $v_\perp^2/B(z) = \mathrm{const}$. Скорость $v_\perp$ с достаточной точностью можно определить только численными методами, что и являлось одной из основных целей данной работы.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ТРАЕКТОРНОГО АНАЛИЗА ЭЛЕКТРОННОЙ ПУШКИ

Для численного моделирования электронных траекторий в области формирования использовалась программа EPOSR, основанная на статической аксиально-симметричной модели пучка. Учитывалось как поле электродов, так и собственные кулоновское и магнитное поля пучка. В отсутствие электрического поля электроны на поверхности эмиттера обладают нулевыми начальными скоростями. Методика численного моделирования позволяла проводить расчёты пушек, работающих как в режиме температурного ограничения эмиссии, так и в ρ-режиме. В последнем случае плотность тока катода рассчитывалась непосредственно из условия равенства нулю электрического поля на поверхности эмиттера. Расчёты проводились в рамках простейшей модели с частичной ионной компенсацией заряда пучка между плоскостями z_1 и z_2, в которой предполагалось, что плотность пространственного заряда определяется по формуле

$$\rho = \begin{cases} \rho_{\rm e}, & z < z_1; \\ \rho_{\rm e}[1 - (z - z_1)/(z_2 - z_1)], & z_1 < z < z_2; \\ 0, & z > z_2, \end{cases}$$

где $\rho_{\rm e}$ — плотность пространственного заряда электронов. Такой подход, с одной стороны, моделирует реальную ситуацию в пушке при большой длительности импульса (в области эквипотенциального пространства правее анодов электроны ионизируют остаточный газ, а поле, уводящее ионы из этой области, близко к нулю), а с другой — упрощает процедуру определения осцилляторной скорости и разброса компонент скоростей, поскольку правее z_2 электрическое поле мало и, соответственно, при определении осцилляторной скорости можно пренебречь дрейфовой скоростью электронов, возникающей из-за радиального собственного кулоновского поля пучка и продольного внешнего магнитного поля. В результате становится возможным вычислять $v_\perp$ просто как проекцию скорости на плоскость, перпендикулярную магнитному полю $\mathbf{B}$. Выбор z_1 и z_2, очевидно, является достаточно условным, но, как следует из расчётов, параметры пучка практически не зависят от положения границ, если область компенсации расположена правее анодного отверстия пушки. Во всех расчётах длина области компенсации $z_2 - z_1$ полагалась примерно равной диаметру канала транспортировки, а положение плоскости z_1 выбиралось примерно равной координате z выступающей части внутреннего анода инжектора.

Ниже в качестве примера выполнена оптимизация электронной пушки для гиротрона на частоте 170 ГГц со следующими основными параметрами: напряжение пучка $U_0 = 80$ кВ, ток пучка $I_0 = 35$ А, средний питч-фактор $g = 1{,}8$, средний радиус трубчатого электронного пучка $R_0 = 7{,}4$ мм.

Плотность тока катода бралась равной $j_{\rm k} = 6$ А/см^2 — достаточно умеренная величина для катода с большим сроком службы. Поскольку согласно сделанным оценкам осцилляторная скорость быстро уменьшается при углах пролёта больше $\pi/2$, то в расчётах полагалось, что зазор катод—первый анод $d = h/4$, где h — шаг электронной траектории в области пушки, соответствующий потенциалу первого анода. Поскольку вначале потенциал первого анода не известен, параметры пушки определялись итерационным образом.

Расчёт проводился в следующей последовательности. Сначала выбирался радиус катода $R_{\rm k}$ и, исходя из заданных I_0, $R_{\rm k}$, $j_{\rm k}$, находилась ширина эмиттера l. По радиусу катода $R_{\rm k}$ и радиусу R_0 электронного пучка в области взаимодействия находилась величина компрессии магнитного поля $\alpha = B_0/B_{\rm k}$, а по ней — магнитное поле на катоде $B_{\rm k}$. Далее в нулевом приближении определялся шаг h электронной траектории в предположении, что потенциал первого анода $U_{\rm a1} = U_0$. После этого определялась величина $d = h/4$. Далее по заданным $j_{\rm k}$ и d по теории плоского диода находилось значение $U_{\rm a1}$, обеспечивающее заданное значение $j_{\rm k}$. Это значение $U_{\rm a1}$ использовалось далее на первой итерации для определения новых значений h и d и т. д., пока оценка не сходилась с точностью порядка $10\div20\,\%$. После этого определялся угол γ. В дальнейших расчётах положение и форма электродов оптимизировались с целью получения наименьшего разброса компонент скорости электронного пучка.

Как отмечено выше, в режиме полного пространственного заряда отсутствует начальный разброс скоростей, связанный с локальными неоднородностями эмитирующих свойств катода, а расположение анодов по обе стороны пучка, вблизи его внешней и внутренней границ в прикатодной области, позволяет уменьшить разброс скоростей электронов, обусловленный влиянием их собственного пространственного заряда. Результатом оптимизации явилась конструкция электродов, схематично изображённая на рис. 1. В этой пушке удалось получить электронный пучок

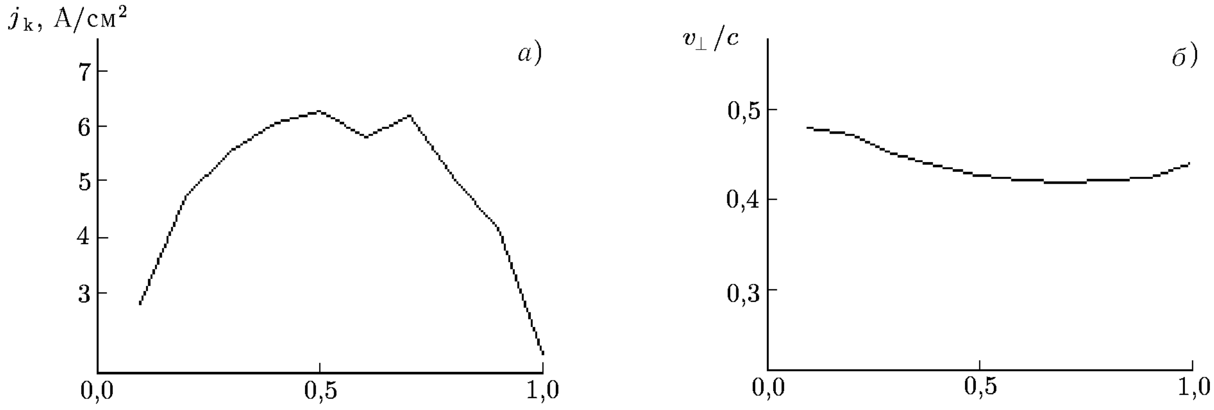


Рис. 2. Распределения плотности тока (*а*) и скоростей электронов (*б*) в зависимости от нормированной координаты, отсчитываемой сверху вниз вдоль образующей эмиттера

со следующими параметрами: ток $I_0 = 34$ А (распределение плотности эмиссионного тока показано на рис. 2*а*), питч-фактор $g = 1{,}8$, разброс скоростей $\delta v_\perp = 13{,}7\,\%$. При определении разброса осцилляторных скоростей $\delta v_\perp = 2\,(v_{\perp\max} - v_{\perp\min})/(v_{\perp\max} + v_{\perp\min})$ считалось, что осцилляторные скорости электронов занимают интервал от $v_{\perp\max}$ до $v_{\perp\min}$. Для сравнения, типичные значения питч-фактора и разброса скоростей в МИП при тех же токах и напряжениях составляют $g \approx 1{,}3$ и $\delta v_\perp \approx 30\,\%$.

Достигнутая величина разброса, по-видимому, в данной пушке является минимальной, поскольку распределение скоростей в зависимости от нормированной координаты, отсчитываемой вдоль образующей эмиттера, близко к симметричному относительно середины эмиттера, а сам разброс уже достаточно мал (см. рис. 2*б*). Из расчётов следует, что зависимость средней вращательной скорости электронов $v_\perp$ и разброса скоростей $\delta v_\perp$ от малых перемещений электродов пушки значительно сильнее, чем в адиабатической МИП. Тем не менее требуемая точность установки (порядка 0,1 мм) является вполне реализуемой. При этом имеется возможность управления параметрами пучка, поскольку изменение потенциалов анодов инжектора в пределах ± 2 кВ (номинальное значение $U_{\rm a1} = 30$ кВ) позволяет менять питч-фактор от 1,7 до 2,2 при малом изменении разброса скоростей.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Численные расчёты предложенной неадиабатической электронной пушки показывают возможность повышения качества винтовых электронных пучков с большой плотностью тока, что позволяет повысить эффективность мощных гироприборов. Определены требования к точности установки электродов пушки и возможности коррекции параметров электронного пучка. Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 04–02–17114 и 02–02–17105).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Денисов Г. Г., Запевалов В. Е., Литвак А. Г., Мясников В. Е. // Изв. вузов. Радиофизика. 2003. Т. 46, № 10. С. 845.
2. Гольденберг А. Л., Петелин М. И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1973. Т. 16, № 1. С. 141.
3. Krivosheev P. V., Lygin V. K., Manuilov V. N., Tsimring Sh. E. // Int. J. Infrared Millimeter waves. 2001. V. 22, No. 8. P. 1 119.

4. Цимринг Ш. Е. // Изв. вузов. Радиофизика. 1972. Т. 15, № 8. С. 1 247.
5. Мануилов В. Н., Райский Б. В., Солуянова Е. А., Цимринг Ш. Е. // Радиотехника и электроника. 1995. Т. 40, № 4. С. 648.
6. Куфтин А. Н., Белов С. П. // Прикладная физика. 2000. № 3. С. 76.

Поступила в редакцию 29 декабря 2004 г.; принята в печать 16 марта 2005 г.

ELECTRON-OPTICAL SYSTEM OF A POWERFUL GYROTRON WITH NONADIABATIC ELECTRON GUN

A. L. Goldenberg, V. N. Manuilov, and M. Yu. Glyavin

A nonadiabatic electron gun, operated in the mode of a current confined by spatial charge and intended for producing helical electron beams for powerful gyroresonant devices is described. Results of numerical simulation of electron trajectories and electron-beam parameters are presented. It is shown that for a high operating current, the pitch-factor and the electron velocity spread can be significantly better than in the conventional adiabatic systems.

УДК 621.396.67.01

ВОЗБУЖДЕНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ МИКРОПОЛОСКОВОЙ АНТЕННЫ ИЗ ДВУХ СИММЕТРИЧНО РАСПОЛОЖЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

А. Е. Свеженцев

Институт радиофизики и электроники им. А. Я. Усикова НАНУ, г. Харьков, Украина

Рассмотрена задача о симметричном возбуждении двумя плоскими волнами цилиндрической микрополосковой антенны, состоящей из двух азимутально-симметрично расположенных излучающих элементов. Каждый элемент может быть как одиночным излучателем, так и решёткой излучателей прямоугольно-цилиндрической формы. Задача сводится к решению интегрального уравнения методом моментов. Использовано новое представление для функции Грина. В этом представлении особенность поля на источнике, а также вклад поверхностных волн даны в аналитической форме. Рассчитаны поле рассеяния при изменении частоты, резонансное распределение тока на излучателях и диаграммы направленности.

ВВЕДЕНИЕ

Цилиндрические микрополосковые антенны привлекают повышенный интерес в связи с их использованием в мобильной и спутниковой связи, локации и других приложениях. В настоящее время проводится интенсивное изучение таких антенн различными методами, к которым относятся метод конечных элементов, метод вспомогательных источников, метод моментов и другие [1, 2]. Метод моментов чаще применяется в спектральной области [3], чем в пространственной [4]. Это связано со сложностью расчёта функции Грина в пространственной области, где её компоненты вычисляются как результат обратного преобразования Фурье компонент спектральных функций Грина в цилиндрических координатах.

Данная работа является продолжением цикла исследований, в которых развивается новый подход к анализу цилиндрических микрополосковых антенн. В этом подходе метод моментов применяется для решения интегрального уравнения в пространственной области, используя новые представления для функции Грина. По сравнению с [5], где рассмотрен случай одиночного излучателя для антенны малого электрического размера ($r/\lambda < 1$, где r — радиус цилиндрической поверхности, λ — длина волны), в данной статье, во-первых, рассмотрены решётки излучателей, расположенные симметрично по азимуту φ в плоскости $z = \mathrm{const}$ (см. рис. 1), во-вторых, решение применимо для антенн существенно бóльших электрических размеров.

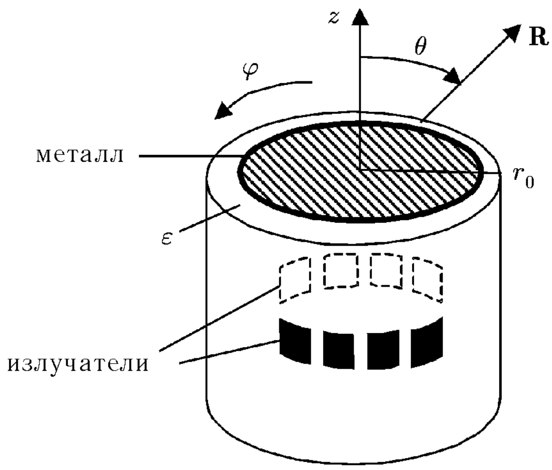


Рис. 1

В [6, 7] была рассмотрена задача о вычислении функции Грина для одиночного листка поверхностного электрического тока, расположенного на круговой диэлектрической подложке, окружающей круговой металлический цилиндр, и был предложен эффективный подход к вычислению функции Грина. Идея этого подхода заключается в явном выделении особенности функции Грина на источнике путём выделения слабо сходящейся асимптотической части спектральной функции Грина и её явного обращения. Кроме того, вклад поверхностных волн также был выделен в виде отдельного члена функции Грина.

Целью данной статьи является, во-первых, обобщение функции Грина [6, 7] на случай двух симметрично расположенных в азимутальной плоскости излучающих элементов и, во-вторых, исследование характеристик рассеяния такой антенны при возбуждении её двумя плоскими волнами, что обеспечивает синфазное возбуждение элементов. Этот факт позволяет вдвое сократить порядок системы уравнений, полученной в результате применения метода моментов к решению интегрального уравнения, сводя решение задачи к рассмотрению одного элемента. Также отметим, что каждый элемент может быть как одиночным излучателем, так и решёткой излучателей прямоугольно-цилиндрической формы (рис. 1). Рассмотренные конкретные примеры демонстрируют способность антенны излучать как во всех направлениях, так и формировать направленное излучение.

1. ОБОБЩЕНИЕ ФУНКЦИИ ГРИНА НА СЛУЧАЙ ДВУХ ИДЕНТИЧНЫХ СИММЕТРИЧНО РАСПОЛОЖЕННЫХ ЛИСТКОВ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА

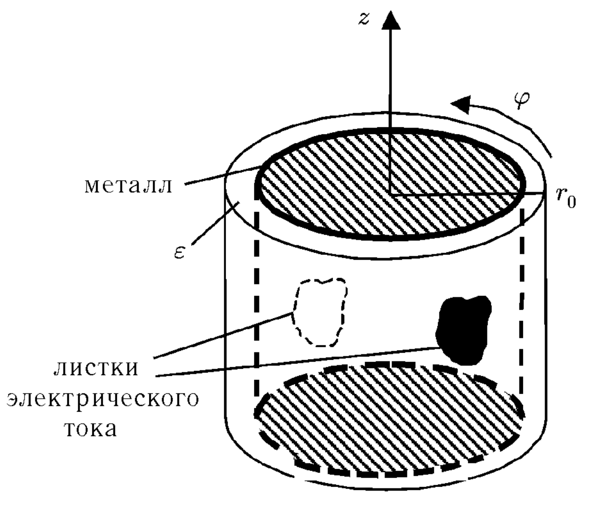


Рис. 2

Рассмотрим два идентичных листка электрического тока $\mathbf{J}^{1\mathrm{e}}(\varphi_1', z') = \mathbf{J}^{2\mathrm{e}}(\varphi_2', z')$, которые азимутально-симметрично (имеется в виду вращательная симметрия) расположены на диэлектрической подложке так называемой линии Губо [8] (см. рис. 2). Линия Губо представляет собой бесконечный вдоль оси z круговой металлический цилиндр радиуса r_1, покрытый круговой диэлектрической подложкой, имеющей внешний радиус r_0 и относительную диэлектрическую проницаемость ε. Введём локальные системы координат $(r,\ \varphi_1,\ z)$ и $(r,\ \varphi_2,\ z)$, связанные с каждым из листков тока (см. также рис. 3). Отметим, что $\varphi_2 = \varphi_1 - \pi$. Зависимость от времени t выберем в виде $\exp(i\omega t)$, где i — мнимая единица, ω — круговая частота.

В [6, 7] получены интегральные представления для компонент электромагнитного поля E_z^J и E_φ^J, порождаемых одиночным листком электрического поверхностного тока $\mathbf{J}^{\mathrm{e}}(\varphi', z')$, с использованием соответствующих функций Грина:

$$E^J(r,\varphi,z) = \begin{pmatrix} E_z^J \\ E_\varphi^J \end{pmatrix} =$$

$$= \int\limits_{z'} \int\limits_{\varphi'} \begin{pmatrix} J_z^{\mathrm{e}}(\varphi', z') \\ J_\varphi^{\mathrm{e}}(\varphi', z') \end{pmatrix} \hat{\mathbf{G}}^J(r,z,z',\varphi,\varphi')\,\mathrm{d}S' + \nabla \int\limits_{z'} \int\limits_{\varphi'} \boldsymbol{\nabla}'\mathbf{J}^{\mathrm{e}}(\varphi', z') G^\sigma(r,z,z',\varphi,\varphi')\,\mathrm{d}S', \quad (1)$$

где

$$\hat{\mathbf{G}}^J(r,z,z',\varphi,\varphi') = \begin{pmatrix} G_z^J & 0 \\ 0 & G_\varphi^J \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\nabla} = \mathbf{i}_\varphi \nabla_\varphi + \mathbf{i}_z \nabla_z = \mathbf{i}_\varphi \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial\varphi} + \mathbf{i}_z\,\frac{\partial}{\partial z}\ ,$$

S' — поверхность излучателя, $\mathbf{i}_z$ и $\mathbf{i}_\varphi$ — орты соответствующих осей. Отметим, что индексы J и σ соответствуют токовым и зарядовым источникам, отражая представление функции Грина в виде так называемых смешанных потенциалов [6, 7]. Любая из компонент функции Грина в пространственной области (G_s^J или G^σ, где индекс s принимает значения r или φ) представляется как обратное преобразование Фурье от соответствующей компоненты спектральной функции Грина (g_{sn}^J или g_n^σ) в виде [6, 7]

$$G_s^J(r,\varphi-\varphi',z-z') = \frac{1}{4\pi^2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp[-in\,(\varphi-\varphi')]\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g_{sn}^J(r,h)\exp[-ih\,(z-z')]\,\mathrm{d}h,$$

$$G^\sigma(r,\varphi-\varphi',z-z') = \frac{1}{4\pi^2}\sum_{-\infty}^{+\infty}\exp[-in\,(\varphi-\varphi')]\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g_n^\sigma(r,h)\exp[-ih\,(z-z')]\,\mathrm{d}h, \tag{2}$$

Выражения для компонент спектральной функции Грина g_{sn}^J и g_n^σ приведены в [6].

Обобщим полученную в [6, 7] функцию Грина на случай двух симметрично расположенных идентичных листков электрического тока. Очевидно, что поле, создаваемое двумя симметрично расположенными листками электрического тока, равно сумме полей каждого из листков, а именно

$$E_s^{J(\mathrm{I+II})}(r,\varphi_1,\varphi_2,z) = E_s^{J\mathrm{I}}(r,\varphi_1,z) + E_s^{J\mathrm{II}}(r,\varphi_2,z). \tag{3}$$

Используя тот факт, что листки тока идентичны, поле, создаваемое вторым листком тока, в результате несложных преобразований может быть представлено в виде

$$\mathbf{E}^{J\mathrm{II}}(r,\varphi_2,z) = \\ = \int\limits_{z'}\int\limits_{\varphi'} \mathbf{J}^{1\mathrm{e}}(\varphi_1',z')\hat{G}^J(r,z,z',\varphi_1,\varphi_1'-\pi)\,\mathrm{d}S' + \boldsymbol{\nabla}\int\limits_{z'}\int\limits_{\varphi'} \boldsymbol{\nabla}'\mathbf{J}^{1\mathrm{e}}(\varphi_1',z')G^\sigma(r,z,z',\varphi_1,\varphi_1'-\pi)\,\mathrm{d}S'. \tag{4}$$

Тогда выражение (3) может быть записано в виде

$$\mathbf{E}^{J(\mathrm{I+II})}(r,\varphi_1,z) = \\ = \int\limits_{z'}\int\limits_{\varphi'} \mathbf{J}^{1\mathrm{e}}(\varphi_1',z')\hat{G}^{J(\mathrm{I+II})}(r,z,z',\varphi_1,\varphi_1')\,\mathrm{d}S' + \boldsymbol{\nabla}\int\limits_{z'}\int\limits_{\varphi'} \boldsymbol{\nabla}'\mathbf{J}^{1\mathrm{e}}(\varphi_1',z')G^{\sigma(\mathrm{I+II})}(r,z,z',\varphi_1,\varphi_1')\,\mathrm{d}S', \tag{5}$$

где

$$G_s^{J(\mathrm{I+II})}(r,z,z',\varphi,\varphi') = \\ = \frac{1}{4\pi^2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp[-in\,(\varphi-\varphi')]\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g_{sn}^J(r,h)\exp[-ih\,(z-z')]\,\mathrm{d}h\,[1+\exp(in\pi)],$$

$$G^{\sigma(\mathrm{I+II})}(r,z,z',\varphi,\varphi') = \\ = \frac{1}{4\pi^2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp[-in\,(\varphi-\varphi')]\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g_n^\sigma(r,h)\exp[-ih\,(z-z')]\,\mathrm{d}h\,[1+\exp(in\pi)]. \tag{6}$$

Отметим, что (6) упрощается, а именно

$$G_s^{J(\mathrm{I+II})}(r,z,z',\varphi,\varphi') = \frac{1}{4\pi^2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp[-in\,(\varphi-\varphi')]\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g_{sn}^J(r,h)\exp[-ih\,(z-z')]\,\mathrm{d}h\,[1+(-1)^n] =$$

$$= \frac{1}{2\pi^2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp[-i2n\,(\varphi-\varphi')]\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g_{s\,2n}^J(r,h)\exp[-ih\,(z-z')]\,\mathrm{d}h,$$

$$G_s^{\sigma(\mathrm{I+II})}(r,z,z',\varphi,\varphi') = \frac{1}{2\pi^2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp[-i2n\,(\varphi-\varphi')]\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g_{2n}^\sigma(r,h)\exp[-ih\,(z-z')]\,\mathrm{d}h. \qquad (7)$$

Далее в статье индекс I+II будет опущен. Формула (7) означает, что в отличие от случая одиночного листка электрического тока суммирование здесь производится только по удвоенному, т. е. по чётному, индексу. Этот факт позволяет использовать результаты, полученные в [6, 7] для функции Грина одиночного листка тока, подразумевая трансформацию индекса $n \to 2n$. В связи с тем, что в дальнейшем при удовлетворении граничных условий нам понадобится поле, создаваемое листками тока при $r = r_0$, рассмотрим функцию Грина именно в этом случае. Важно отметить, что прямое вычисление функции Грина в случае $r = r_0$, используя представления (2), а следовательно, и (7), не представляется возможным ввиду чрезвычайно слабой сходимости как интеграла Фурье, так и ряда по азимутальным функциям. А в случае, когда точка источника совпадает с точкой наблюдения, т. е. $z = z'$, $\varphi = \varphi'$, интеграл и ряд в (2), (7) расходятся. Этот факт объясняется наличием особенности функции Грина на источнике. Проблема выделения особенности в случае одиночного листка электрического тока была решена в [6, 7]. В случае двух симметрично расположенных листков тока аналогично [6, 7] любая из компонент функции Грина представляется в виде

$$G(r_0, z-z', \varphi-\varphi') = G^{\mathrm{A}} + G^{\mathrm{P}} + G^{\mathrm{N}}. \qquad (8)$$

Такое представление возникает из (7) в результате применения специальной компенсационной процедуры. Суть этой процедуры состоит в вычитании из спектральной функции Грина её асимптотической части $g_{s\,2n}^{J\mathrm{A}}$, $g_{2n}^{\sigma\mathrm{A}}$ [6,7] и функции $f_{2n}^{\mathrm{P}}(h)$ [6], компенсирующей сингулярность в полюсах. В свою очередь, в пространственной области мы добавляем обратное преобразование Фурье функций $g_{s\,2n}^{J\mathrm{A}}$, $g_{2n}^{\sigma\mathrm{A}}$ и $f_{2n}^{\mathrm{P}}(h)$, вычисляемое в явном виде, и приходим к функциям G^{A} [6, 7] и G^{P} [7] соответственно. Таким образом, в (8) G^{A} соответствует вкладу асимптот (полное выражение для G^{A} дано в [6, 7]) и включает сингулярную часть

$$G^{\mathrm{S}}(r_0, z-z', \varphi-\varphi') = \frac{1}{\sqrt{(\varphi-\varphi')^2+\beta^2}} - \frac{1}{\sqrt{(\varphi-\varphi')^2+\bar\beta^2}}\ , \qquad (9)$$

где $\beta = (z-z')/r_0$, $\bar\beta = \sqrt{[(z-z')/r_0]^2 + 4\,[(r_1-r_0)/r_0]^2}$; G^{P} описывает вклад поверхностных волн:

$$G^{\mathrm{P}} = \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=1}^{M_n} A_{2n\,m}\exp[-iP_{2n}^m(z-z')]\cos[2n\,(\varphi-\varphi')], \qquad (10)$$

где N — максимальный азимутальный индекс n, для которого существуют поверхностная волна, M_n — число поверхностных волн, которое соответствует индексу n, P_{2n}^m — полюсы, соответствующие поверхностным волнам, коэффициенты $A_{2n\,m}$ пропорциональны вычетам функции $f_{2n}^{\mathrm{P}}(h)$ в полюсах $h = P_{2n}^m$ [6]; G^N — численная часть функции Грина, которая вычисляется согласно (7) как обратное преобразование Фурье спектральной функции Грина $g_{s\,2n}^J$, g_{2n}^σ после вычитания из неё функций $g_{s\,2n}^{J\mathrm{A}}$, $g_{2n}^{\sigma\mathrm{A}}$ и $f_{2n}^{\mathrm{P}}(h)$.

2. РАСЧЁТ ПОЛЯ ВОЗБУЖДЕНИЯ. ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ПЛОТНОСТИ ТОКА НА ИЗЛУЧАТЕЛЕ

Модель исследуемой цилиндрической микрополосковой антенны показана на рис. 1, где на диэлектрической подложке линии Губо азимутально-симметрично расположены две идентичные решётки излучателей. Каждый излучатель имеет прямоугольно-цилиндрическую форму. Вид сверху исследуемой структуры, имеющей два излучающих элемента, отдельно показан на рис. 3. Пока что для удобства изложения будем считать, что каждый элемент состоит из одного излучателя. Пусть из бесконечности нормально к линии Губо с противоположных направлений приходят две плоские волны (рис. 3), магнитное поле которых можно представить в виде

$$\mathbf{H}^{\mathrm{inI}} = \mathbf{H}_0 \exp(ik_0 x), \qquad \mathbf{H}^{\mathrm{inII}} = \mathbf{H}_0 \exp(-ik_0 x), \tag{11}$$

тогда компонента E_z электрического поля каждой из плоских волн (единичной амплитуды) может быть записана в цилиндрических координатах в виде разложения по цилиндрическим волнам:

$$E_z^{\mathrm{inI}}(r,\varphi,z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(r,z)\exp(-in\varphi + in\beta_{\mathrm{I}}),$$

$$E_z^{\mathrm{inII}}(r,\varphi,z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(r,z)\exp(-in\varphi + in\beta_{\mathrm{II}}), \tag{12}$$

где $a_n(r,z) = w_0\cos(\gamma) i^n J_n(k_0 r)$, w_0 — волновое сопротивление свободного пространства, γ — угол между направлением вектора электрического поля и осью z, $\beta_{\mathrm{I}} = 0$, $\beta_{\mathrm{II}} = \pi$, J_n — функция Бесселя I-го рода. Отметим, что компонента H_z поля падающей плоской волны известным образом выражается через компоненту E_z. Очевидно, что компонента E_z суммарного падающего поля имеет вид

$$E_z^{\mathrm{in}}(r,\varphi,z) = E_z^{\mathrm{in\,I}}(r,\varphi,z) + E_z^{\mathrm{in\,II}}(r,\varphi,z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(r,z)\,[\exp(-in\varphi) + \exp[-in(\varphi+\pi)]] =$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(r,z)\,[1+(-1)^n]\exp(-in\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_{2n}(r,z)\exp(-i2n\varphi). \tag{13}$$

Тогда компонента H_z падающего поля может быть записана в виде

$$H_z^{\mathrm{in}}(r,\varphi,z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{a}_{2n}(r,z)\exp(-i2n\varphi), \tag{14}$$

где $\bar{a}_n(r,z) = \sin(\gamma) i^n J_n(k_0 r)$.

Введём две области: внешнюю ($r > r_0$) и внутреннюю ($r_1 < r < r_0$), обозначая принадлежность к ним индексами $q = 0$ и $q = 1$ соответственно. Отметим, что любая компонента электромагнитного поля известным образом выражается через компоненты E_z и H_z. Представим компоненту E_z полного поля во внешней области в виде суммы падающего поля $E_z^{\mathrm{in}0}(r,\varphi,z)$, поля $E_z^{J0}(r,\varphi,z)$, создаваемого листком тока, и поля $E_z^{\mathrm{R}0}(r,\varphi,z)$, возникшего в результате рассеяния падающего поля на линии Губо:

$$E_z^0(r,\varphi,z) = E_z^{\mathrm{in}0}(r,\varphi,z) + E_z^{J0}(r,\varphi,z) + E_z^{\mathrm{R}0}(r,\varphi,z). \tag{15}$$

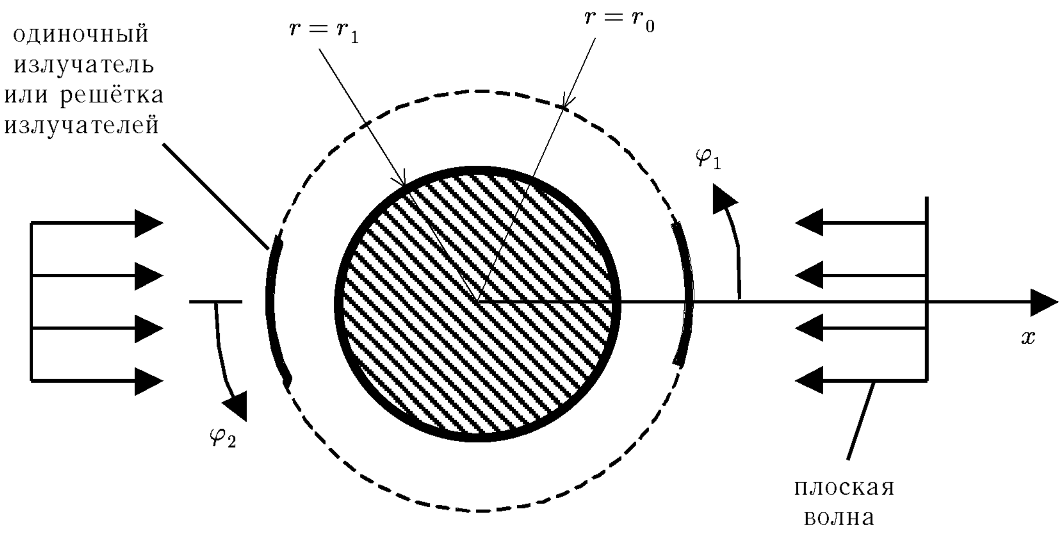


Рис. 3

Аналогичным образом записывается выражение для компоненты $H_z^0(r,\varphi,z)$ во внешней области. Поле во внутренней области имеет вид

$$E_z^1(r,\varphi,z) = E_z^{J1}(r,\varphi,z) + E_z^{\mathrm{R}1}(r,\varphi,z). \tag{16}$$

Отметим, что согласно [6, 7] выражения для поля листка тока $E_s^{J0}(r_0,\varphi,z)$ (см. (1)) выведены в предположении следующих условий на границе $r = r_0$:

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}^{J0} - \mathbf{H}^{J1}) = \mathbf{J}^{\mathrm{e}}, \qquad (\varphi,z) \in S'; \tag{17}$$

$$E_s^{J0} - E_s^{J1} = 0, \qquad (\varphi,z) \in \{r = r_0\}; \tag{18}$$

$$H_z^{J0} - H_s^{J1} = 0, \qquad (\varphi,z) \notin S', \tag{19}$$

а также граничных условий на металлическом цилиндре при $r = r_1$:

$$E_s^{J1} = 0. \tag{20}$$

Для записи интегрального уравнения относительно неизвестной плотности поверхностного электрического тока нам необходимо найти полное поле во внешней области и положить его равным нулю на поверхности металла (при $r = r_0$):

$$E_s^0(r_0,\varphi,z) = E_s^{J0}(r_0,\varphi,z) + E_s^{\mathrm{ex}0}(r_0,\varphi,z) = 0, \qquad (\varphi,z) \in S', \tag{21}$$

где поле возбуждения

$$E_s^{\mathrm{ex}0}(r,\varphi,z) = E_s^{\mathrm{in}0}(r,\varphi,z) + E_s^{\mathrm{R}0}(r,\varphi,z), \tag{22}$$

$$E_s^{\mathrm{ex}1}(r,\varphi,z) = E_s^{\mathrm{R}1}(r,\varphi,z). \tag{23}$$

Таким образом, для записи интегрального уравнения с использованием (21) необходимо найти поле возбуждения. Это поле находится в результате решения задачи рассеяния падающего поля (13) круговым металлическим цилиндром с диэлектрическим покрытием (линией Губо).

Отметим, что полное поле должно удовлетворять условиям (17)–(20), если вместо полей E_s^{J0}, E_s^{J1}, H_s^{J0}, H_s^{J1} в формулах (17)–(20) положить E_s^0, E_s^1, H_s^0, H_s^1 соответственно. Отсюда вытекает, что искомое поле возбуждения должно удовлетворять условиям непрерывности при $r = r_0$:

$$E_s^{\mathrm{ex}0} - E_s^{\mathrm{ex}1} = 0, \tag{24}$$

$$H_s^{\mathrm{ex}0} - H_s^{\mathrm{ex}1} = 0, \tag{25}$$

и условиям на металлическом цилиндре $r = r_1$:

$$E_s^{\mathrm{ex}1} = 0. \tag{26}$$

Представим продольные (вдоль оси z) компоненты поля, рассеянного линией Губо, в виде разложения в ряды Фурье в форме, аналогичной (13) и (14):

$$E_z^{\mathrm{R}0}(r,\varphi,z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e_{z\,2n}^{\mathrm{R}0}(r,z)\exp(-i2n\varphi), \qquad E_z^{\mathrm{R}1}(r,\varphi,z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e_{z\,2n}^{\mathrm{R}1}(r,z)\exp(-i2n\varphi),$$

$$H_z^{\mathrm{R}0}(r,\varphi,z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_{z\,2n}^{\mathrm{R}0}(r,z)\exp(-i2n\varphi), \qquad H_z^{\mathrm{R}1}(r,\varphi,z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_{z\,2n}^{\mathrm{R}1}(r,z)\exp(-i2n\varphi). \tag{27}$$

Спектральные компоненты поля в (27), являясь решениями уравнения Гельмгольца в цилиндрических координатах, могут быть выражены в виде известных комбинаций цилиндрических функций с неизвестными коэффициентами во внутренней и внешней области (с учётом удовлетворения условия на бесконечности и условия (26)) в виде

$$e_{zn}^{\mathrm{R}0}(r,z) = B_{n0}\gamma_{n0}(r,z), \qquad h_{zn}^{\mathrm{R}0}(r,z) = \bar{B}_{n0}\gamma_{n0}(r,z), \tag{28}$$

$$e_{zn}^{\mathrm{R}1}(r,z) = B_{n1}\gamma_{n1}(r,z), \qquad h_{zn}^{\mathrm{R}1}(r,z) = \bar{B}_{n1}\bar{\gamma}_{n1}(r,z), \tag{29}$$

где функции $\gamma_{n0}(r,z)$, $\gamma_{n1}(r,z)$ и $\bar{\gamma}_{n1}(r,z)$ определены в приложении 1.

Неизвестные коэффициенты B_{n0}, B_{n1} и $\bar{B}_{n0}$, $\bar{B}_{n1}$ находятся в результате решения системы из двух линейных алгебраических уравнений, которая получается после удовлетворения полей (28), (29) условиям (24), (25) при $r = r_0$. После указанных действий поле возбуждения при $r = r_0$ может быть записано как

$$E_s^{\mathrm{ex}0}(r_0,\varphi,z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [e_{s\,2n}^{\mathrm{in}0}(r_0,z) + e_{s\,2n}^{\mathrm{R}0}(r_0,z)]\exp(-i2n\varphi). \tag{30}$$

Выражения для спектральных амплитуд полей в (30) даны в приложении 1. В итоге из (21) с учётом (5) и (30) приходим к интегральному уравнению относительно неизвестных компонент плотности поверхностного электрического тока:

$$-\mathbf{E}^{\mathrm{ex}}(r_0,z,\varphi) = \int\limits_{z'}\int\limits_{\varphi'} \mathbf{J}^{\mathrm{e}}(\varphi',z')\hat{G}^J(z,z',\varphi,\varphi')\,\mathrm{d}S' + \boldsymbol{\nabla}\int\limits_{z'}\int\limits_{\varphi'} \boldsymbol{\nabla}'\mathbf{J}^{\mathrm{e}}(\varphi',z')G^{\sigma}(z,z',\varphi,\varphi')\,\mathrm{d}S'. \tag{31}$$

3. РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ МЕТОДОМ МОМЕНТОВ

Для применения метода моментов разобьём область излучателя на цилиндрически-прямоугольные сегменты, а ток на излучателе представим в виде разложения по базисным функциям в виде линейных остроугольных функций (см. рис. 4):

$$\mathbf{J}^{\mathrm{e}}(z,\varphi)=\sum_{n=1}^{\mathcal{N}_z} A_{nz} f_{nz}(z,\varphi)\mathbf{i}_z+\sum_{n=1}^{\mathcal{N}_\varphi} A_{n\varphi} f_{n\varphi}(z,\varphi)\mathbf{i}_\varphi, \tag{32}$$

$$f_{nz}(z,\varphi)=\begin{cases} C_n(\varphi)\,(z-z_{n1})/(z_n^*-z_{n1}), & z_{n1}<z<z_n^*;\\ C_n(\varphi)\,(z-z_{n2})/(z_n^*-z_{n2}), & z_n^*<z<z_{n2}, \end{cases} \tag{33}$$

$$f_{n\varphi}(z,\varphi)=\begin{cases} C_n(z)\,(\varphi-\varphi_{n1})/(\varphi_n^*-\varphi_{n1}), & \varphi_{n1}<\varphi<\varphi_n^*;\\ C_n(z)\,(\varphi-\varphi_{n2})/(\varphi_n^*-\varphi_{n2}), & \varphi_n^*<\varphi<\varphi_{n2}, \end{cases} \tag{34}$$

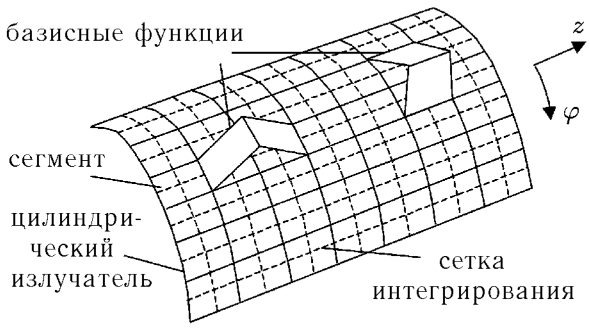


Рис. 4

где $\mathcal{N}_z=(N_z-1)\,N_\varphi$, $\mathcal{N}_\varphi=(N_z-1)\,N_\varphi$, $C_n(\varphi)=C_n(z)=1$, $f_{nz}(z,\varphi)$ и $f_{n\varphi}(z,\varphi)$ — базисные функции (рис. 4), $\mathcal{N}_z$ и $\mathcal{N}_\varphi$ — число базисных функций для продольной и азимутальной компонент тока соответственно, N_z и N_φ — число сегментов на излучателе в продольном и азимутальном направлениях соответственно, A_{nz} и $A_{n\varphi}$ — неизвестные коэффициенты, (z_n^*,φ_n^*) — координаты условного центра базисной функции, лежащего в середине линии, общей для двух соседних сегментов, $z_{n1}(z_{n2})$ и $\varphi_{n1}(\varphi_{n2})$ — координаты начала (конца) для n-й продольной и азимутальной базисной функции соответственно. В виду того, что функция Грина состоит из аналитической и численной части, поле, создаваемое базисной функцией, также представимо в аналогичной форме, т. к. все интегралы, в которые входит аналитическая часть функции Грина, вычисляются в явном виде. В качестве другой системы линейно независимых функций (системы тестовых функций) выберем

$$\phi_{nz}(z,\varphi)=C_n(z)\delta(\varphi-\varphi_n^*),\qquad \bar z_{n1}<z<\bar z_{n2}; \tag{35}$$

$$\phi_{n\varphi}(z,\varphi)=C_n(\varphi)\delta(z-z_n^*),\qquad \bar\varphi_{n1}<\varphi<\bar\varphi_{n2}, \tag{36}$$

где $(\bar z_{n1},\bar\varphi_{n1})$ и $(\bar z_{n2},\bar\varphi_{n2})$ — координаты центров соседних сегментов. При таком выборе тестовых функций интегрирование в схеме метода моментов

$$\int\limits_L \mathbf{E}^{J0}(f_n)\phi_m(z,\varphi)\,\mathrm{d}\mathbf{l}=-\int\limits_L \mathbf{E}^{\mathrm{ex}0}\phi_m(z,\varphi)\,\mathrm{d}\mathbf{l} \tag{37}$$

проводится по линиям сетки, соединяющей центры сегментов (см. пунктир на рис. 4). В результате мы приходим к системе линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{ZI}=\mathbf{V}, \tag{38}$$

где $\mathbf{Z}$ — матрица взаимных импедансов порядка $M \times M$: $Z_{mn} = \int_L \mathbf{E}^{J0}(f_n)\phi_m(z,\varphi)\,\mathrm{d}\mathbf{l}$, M — число базисных функций, равное $\mathcal{N}_z + \mathcal{N}_\varphi$, $\mathbf{I}$ — столбец неизвестных коэффициентов $\{A_1, \ldots, A_M\}$ в разложении плотности тока на излучателе, $\mathbf{V}$ — столбец правых частей $\{V_1, \ldots, V_M\}$, порождаемый полем возбуждения (22):

$$V_m = \int\limits_L \mathbf{E}^{\mathrm{ex}0}\phi_m(z,\varphi)\,\mathrm{d}\mathbf{l}.$$

Важно отметить, что полученное решение, основанное на выбранной системе базисных функций, позволяет рассматривать различные излучающие элементы в рамках прямоугольно-цилиндрической геометрии: базисные функции задаются там, где есть ток. Таким образом, полученное решение включает в себя случаи, когда излучающий элемент состоит как из одиночного излучателя, так и решётки излучателей (см. рис. 1).

4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОЛЯ В ДАЛЬНЕЙ ЗОНЕ

В результате решения системы (38) мы находим неизвестные коэффициенты, а затем рассчитываем распределение тока на излучателе. Зная ток, можно найти продольную компоненту электрического поля, порождаемую током на излучателе во внешней области, в виде

$$E_z^{J0}(r,z,\varphi) = \int\limits_{z'}\int\limits_{\varphi'} J_z^{\mathrm{e}}(\varphi',z')\left[\frac{1}{4\pi^2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp[-i2n\,(\varphi-\varphi')]\Psi_{2nz}(z,\varphi)\right]\mathrm{d}z'\,\mathrm{d}\varphi' +$$
$$+ \int\limits_{z'}\int\limits_{\varphi'} J_\varphi^{\mathrm{e}}(\varphi',z')\left[\frac{1}{4\pi^2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp[-i2n\,(\varphi-\varphi')]\Phi_{2n\,\varphi}(z,\varphi)\right]\mathrm{d}z'\,\mathrm{d}\varphi', \quad (39)$$

где

$$\Psi_{2n\,z}(z,\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\chi_{2n\,z}(h)\,[H_{2n}^{(2)}(r\tilde{k}_0)/H_{2n}^{(2)}(x_0)]\exp[-ih\,(z-z')]\,\mathrm{d}h,$$
$$\Psi_{2n\,\varphi}(z,\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\chi_{2n\,\varphi}(h)\,[H_{2n}^{(2)}(r\tilde{k}_0)/H_{2n}^{(2)}(x_0)]\exp[-ih\,(z-z')]\,\mathrm{d}h,$$
$$\tilde{k}_0^2 = k_0^2 - h^2, \qquad h = k_0\cos\theta.$$

Используя специальное асимптотическое представление для интеграла Фурье в цилиндрической системе координат [9]:

$$\Psi_{nz}(z,\varphi) \to -2\,\frac{\exp(-ik_0R)}{R}\,i^{n+1}\exp(iz'k_0\cos\theta)\chi_{nz}(k_0\cos\theta),$$
$$\Psi_{n\varphi}(z,\varphi) \to -2\,\frac{\exp(-ik_0R)}{R}\,i^{n+1}\exp(iz'k_0\cos\theta)\chi_{n\varphi}(k_0\cos\theta), \quad (40)$$

продольная компонента электрического поля в дальней зоне может быть получена в виде

$$E_z^{J0}(R,\varphi,\theta) = -2\,\frac{\exp(-ik_0R)}{R}\,\frac{1}{4\pi^2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp(-i2n\varphi)i^{2n+1}\Psi_{2n\,z}(k_0\cos\theta)j_{2n\,z}^{\mathrm{e}}(\theta) -$$
$$-\,2\,\frac{\exp(-ik_0R)}{R}\,\frac{1}{4\pi^2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp(-i2n\varphi)i^{2n+1}\Psi_{2n\,\varphi}(k_0\cos\theta)j_{2n\,\varphi}^{\mathrm{e}}(\theta), \quad (41)$$

$$j_{nz}^{\mathrm{e}}(\theta) = \int\limits_{z'} \int\limits_{\varphi'} J_z^{\mathrm{e}}(\varphi', z') \exp(in\varphi') \exp(ik_0 z' \cos\theta)\, \mathrm{d}\varphi'\, \mathrm{d}z',$$

$$j_{n\varphi}^{\mathrm{e}}(\theta) = \int\limits_{z'} \int\limits_{\varphi'} J_\varphi^{\mathrm{e}}(\varphi', z') \exp(in\varphi') \exp(ik_0 z' \cos\theta)\, \mathrm{d}\varphi'\, \mathrm{d}z',$$

где спектральные функции $\chi_{nz}(k_0 \cos\theta)$ и $\chi_{n\varphi}(k_0 \cos\theta)$ даны в приложении 2. Продольная компонента магнитного поля H_z в дальней зоне вычисляется аналогичным образом. Как известно, в дальней зоне поле имеет вид сферической волны, компоненты поля которой известным образом вычисляются через продольные компоненты электрического и магнитного полей [9].

5. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Решая систему (39), можно рассчитать распределение тока на излучателе и исследовать поле излучения такой цилиндрической микрополосковой антенны в частотном диапазоне. Рассмотрим случай, когда каждый из двух излучающих элементов (см. рис. 3) состоит из одного прямоугольно-цилиндрического излучателя. Пусть вектор **E** в падающих плоских волнах ориентирован таким образом, что $\gamma = 45°$. Это позволит возбудить резонансные режимы как для продольной, так и для азимутальной компонент тока на излучателе. На рис. 5 изображены зависимости нормированных модулей компонент поля E_θ (сплошная линия) и E_φ (штриховая линия), рассчитанных в фиксированном направлении ($\theta = 85°$, $\varphi = 5°$) при изменении частоты f в диапазоне $1 \div 3$ ГГц для излучателя, имеющего размеры $\Delta_z = \Delta_\varphi = 0{,}05$ м (для Δ_φ указан линейный размер вдоль дуги окружности). В данном случае геометрические и материальные параметры антенны заданы следующим образом: $r_0 = 0{,}05$ м, $r_0/r_1 = 1{,}0152$, $\varepsilon = 2{,}2$. Видно, что кривые носят ярко выраженный резонансный характер. В связи с тем, что линейные размеры излучателя в продольном направлении (Δ_z) и по азимуту (Δ_φ) одинаковы, резонансы для соответствующих компонент тока наблюдаются на одинаковой частоте. Будем классифицировать резонансы, указывая число вариаций тока $(m,\ n)$ в продольном и азимутальном направлениях соответственно. В рассмотренном на рис. 5 случае параметры антенны выбраны такими же, как и в работе [10], где рассмотрена антенна, имеющая одиночный прямоугольно-цилиндрический излучатель, возбуждаемый полосковой линией. Отметим, что наблюдается хорошее совпадение локализации резонанса с результатами [10]. На рис. 6*а* и *б* приведены зависимости распределения действительных частей продольной и азимутальной компонент плотности тока соответственно на резонансной частоте. Эти распределения соответствуют резонансам (1,0) и (0,1).

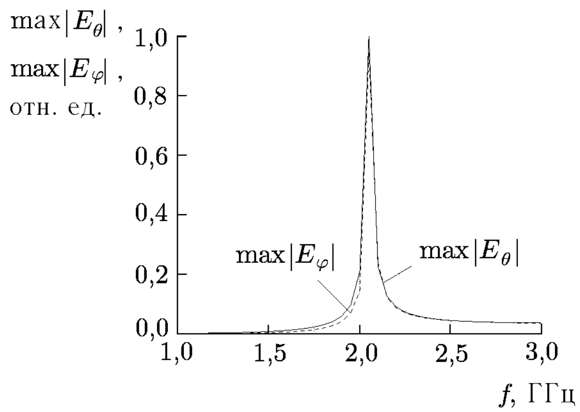


Рис. 5

Далее рассмотрим диаграммы направленности для компоненты поля E_θ в случае резонанса (1,0) при различном радиусе цилиндра. При этом остальные параметры антенны выберем такими же, как и в предыдущем случае. Исследования показали, что при изменении радиуса цилиндра резонансная частота меняется незначительно. На рис. 7*а*, *б* показаны диаграммы направленности,

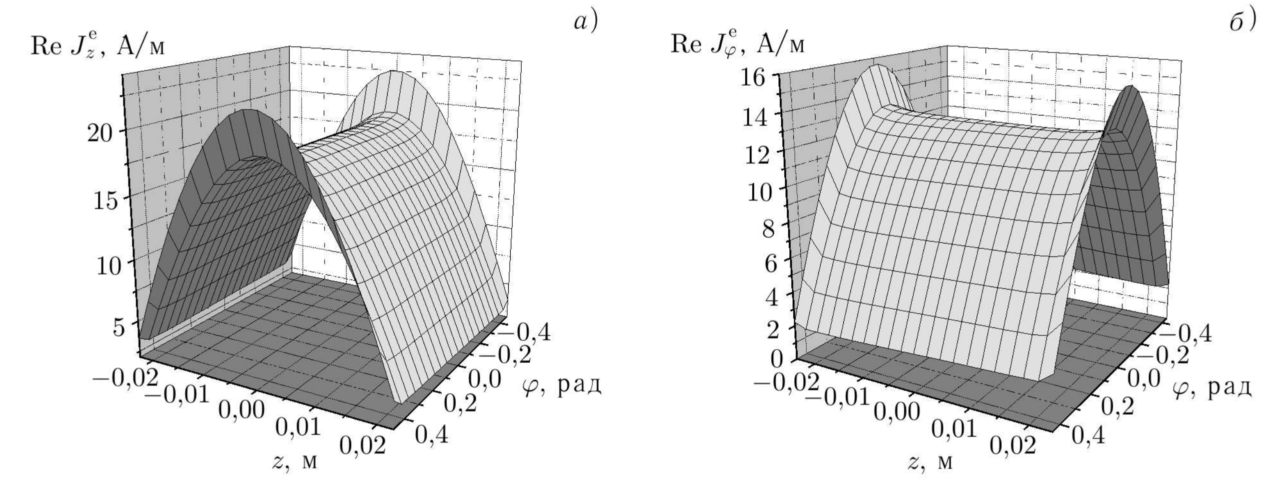


Рис. 6

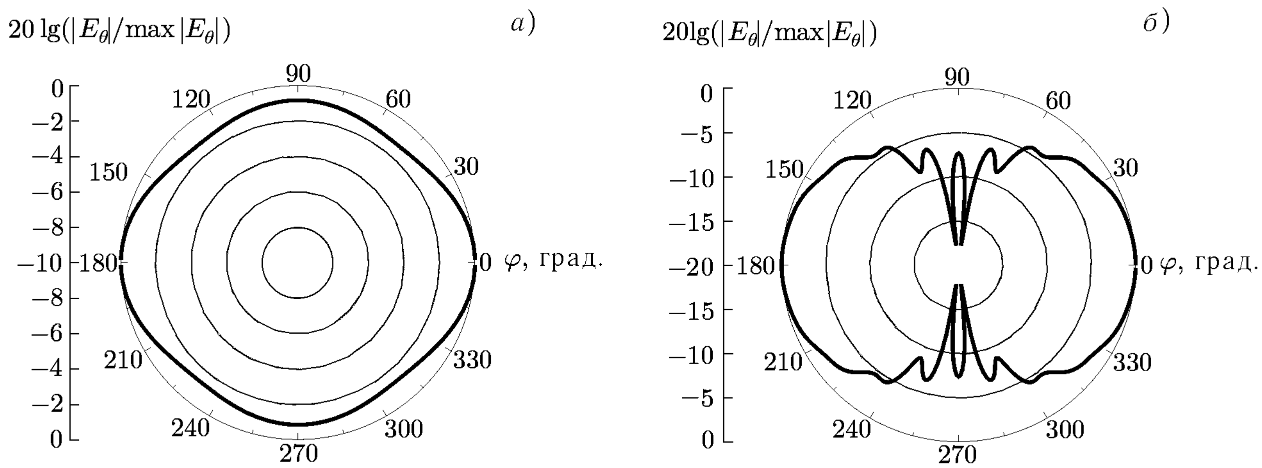


Рис. 7

а именно относительная величина компоненты поля E_θ, построенная в плоскости $\theta = 90°$ в зависимости от угла φ для двух значений радиуса цилиндра, соответствующих случаям электрически малого и большого цилиндров: $r_0/\lambda_{\text{рез}} = 0{,}17$ (рис. 7*а*) и $r_0/\lambda_{\text{рез}} = 3{,}33$ (рис. 7*б*). Видно, что для электрически малого цилиндра диаграмма направленности близка к равнонаправленной, в то время как для электрически большого цилиндра в диаграмме направленности возникают дополнительные интерференционные максимумы и минимумы. В рассмотренных примерах главный лепесток диаграммы направленности является широким.

Очевидно, что сужение главного лепестка диаграммы направленности может быть достигнуто путём увеличения количества излучателей в каждом из двух излучающих элементов. Рассмотрим случай, когда каждый из двух элементов состоит, в свою очередь, из четырёх излучателей, расположенных в азимутальной плоскости. При этом размеры излучателей, отношение радиусов r_0/r_1 и диэлектрическая проницаемость такие же, как и в предыдущем случае, а линейное расстояние (длина вдоль цилиндрической поверхности) между центрами излучателей $\Delta_{\text{c}} = 0{,}1$ м. На рис. 8*а*, *б* приведены диаграммы направленности в виде зависимости относительной величины компоненты поля E_θ от угла φ для двух различных значений радиуса: $r_0 = 0{,}4$ м (рис. 8*а*)

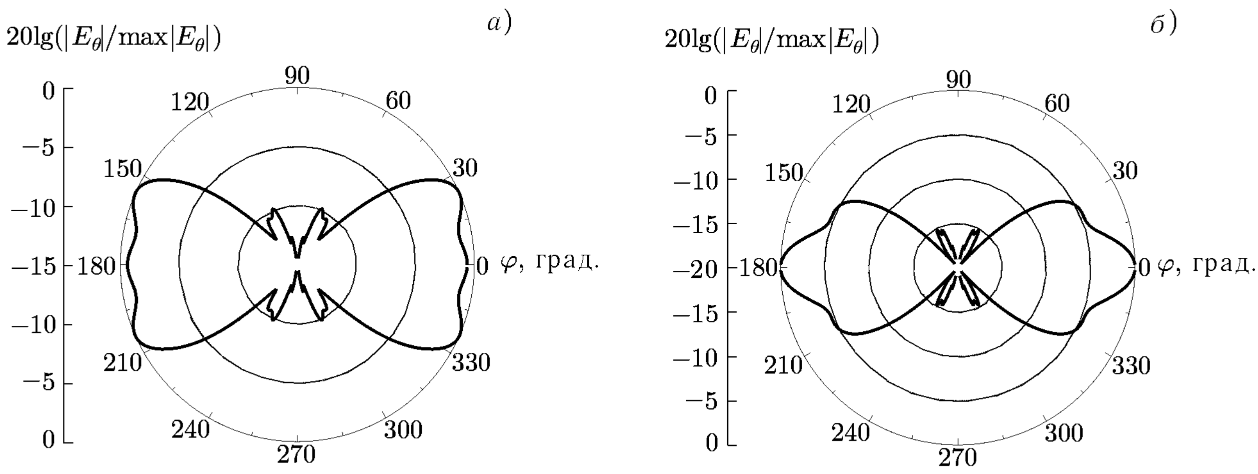


Рис. 8

и $r_0 = 0{,}6$ м (рис. 8*б*). При этом падающее поле такое же, как и в ранее рассмотренных случаях. Представленные результаты свидетельствуют, что с увеличением количества излучателей появляются широкие возможности управлять диаграммой направленности. Отметим, что при расположении излучателей на цилиндрической поверхности излучатели решётки не могут быть возбуждены синфазно плоскими волнами ввиду того, что поверхность имеет кривизну. Однако с увеличением радиуса наблюдается тенденция к сужению диаграммы направленности, которая объясняется выравниваем распределений фазы и амплитуды на излучателях. Заметим, что для получения приведённых выше результатов каждый излучатель разбивался на $15 \times 15 = 225$ сегментов. Время счёта всех приведённых характеристик для одной частоты в случае двух симметрично расположенных излучателей составляет 3 минуты на компьютере с процессором Пентиум-4 с тактовой частотой 1,7 ГГц.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье предложен эффективный подход к решению задачи о возбуждении цилиндрической микрополосковой антенны, состоящей из двух симметрично расположенных излучающих элементов. Поле возбуждения имеет вид двух плоских волн, обеспечивающих синфазное возбуждение элементов. В качестве излучающего элемента выступает как одиночный излучатель, так и решётка цилиндрически-прямоугольных излучателей. Задача сведена к интегральному уравнению, которое было решено методом моментов. Использовано новое представление для функции Грина. Показано, что поле излучения ведёт себя резонансным образом в зависимости от частоты. Идентифицированы основные резонансы и рассчитаны резонансные распределения тока на излучателе. Рассчитаны диаграммы направленности для двух симметрично расположенных в азимутальной плоскости излучающих элементов, состоящих из одного и четырёх излучателей.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

В этом приложении приведены выражения для неизвестных коэффициентов B_{n0}, $\bar{B}_{n0}$ и спектральных компонент $e_{\varphi n}^{\mathrm{in}0}(r_0, z)$ и $e_{\varphi n}^{\mathrm{R}0}(r_0, z)$:

$$B_{n0} = c_z^{\rm e}\,\frac{\Delta_n^H}{k_0r_0\Delta_n} + c_\varphi^{\rm e}\left(i\bar F_n\,\frac{\hat\Delta_n}{\Delta_n}\right) + c_z^{\rm m}\left(-\,\frac{\hat\Delta_n}{k_0r_0\Delta_n}\right) + c_\varphi^{\rm m}\left(-iF_n\,\frac{\Delta_n^H}{\Delta_n}\right),$$

$$\bar B_{n0} = c_z^{\rm e}\,\frac{\hat\Delta_n}{k_0r_0\Delta_n} + c_\varphi^{\rm e}\left(-i\bar F_n\,\frac{\Delta_n^E}{\Delta_n} - \frac{1}{x_1^2}\,\frac{\hat\Delta_n^2}{\Delta_n}\right) + c_z^{\rm m}\left(\frac{\Delta_n^E}{k_0r_0\Delta_n}\right) + c_\varphi^{\rm m}\left(i\varepsilon F_n\,\frac{\hat\Delta_n}{\Delta_n}\right);$$

$$c_z^{\rm e} = \frac{i\,(k_0r_0)^2}{x_0^2}\,a_n'(r_0), \qquad c_\varphi^{\rm e} = \bar a_n(r_0), \qquad c_z^{\rm m} = \frac{i\,(k_0r_0)^2}{x_0^2}\,\bar a_n'(r_0), \qquad c_\varphi^{\rm m} = -a_n(r_0);$$

$$e_{\varphi n}^{\rm in0}(r_0,z) = c_z^{\rm m}, \qquad e_{\varphi n}^{\rm R0}(r_0,z) = \frac{i\,(k_0r_0)}{x_0}\,\frac{\gamma_0'(r_0)}{\gamma_0(r_0)}\,\bar B_{n0};$$

$$\hat\Delta_n = Nn\bar h\,(x_1^{-2} - x_0^{-2}), \qquad \Delta_n^E = -i\,(\Phi_n - \varepsilon F_n),$$

$$\Delta_n^H = i\,(\Phi_n - \bar F_n), \qquad \Delta_n(h) = \hat\Delta_n(h) - \Delta_n^E(h)\Delta_n^H(h),$$

$$F_n = \frac{\gamma_1'(r_0)}{x_1\gamma_1(r_0)}\,, \qquad \bar F_n = \frac{\bar\gamma_1'(r_0)}{x_1\bar\gamma_1(r_0)}\,, \qquad \Phi_n = \frac{\gamma_0'(r_0)}{x_0\gamma_0(r_0)}\,; \qquad \gamma_{n0}(r,h) = \frac{H_n^{(2)}(\tilde k_0 r)}{H_n^{(2)}(\tilde k_0 r_0)}\,,$$

$$\gamma_{n1}(r,h) = \frac{H_n^{(2)}(\tilde k_1 r)}{H_n^{(2)}(\tilde k_1 r_1)} + \Gamma_1\,\frac{J_n(\tilde k_1 r)}{J_n(\tilde k_1 r_1)}\,, \qquad \bar\gamma_{n1}(r,h) = \frac{H_n^{(2)}(\tilde k_1 r)}{H_n^{(2)}(\tilde k_1 r_1)} + \bar\Gamma_1\,\frac{J_n(\tilde k_1 r)}{J_n(\tilde k_1 r_1)}\,;$$

$$\Gamma_1 = -\,\frac{J_n(\bar x_1)}{J_n(x_1)}\,\frac{H_n^{(2)}(x_1)}{H_n^{(2)}(\bar x_1)}\,, \qquad \bar\Gamma_1 = -\,\frac{J_n'(\bar x_1)}{J_n(x_1)}\,\frac{H_n^{(2)}(x_1)}{H_n'^{(2)}(\bar x_1)}\,, \qquad \hat k_q^2 = k_0^2\,(\varepsilon_q - \bar h^2),$$

$$x_q^2 = (k_0r_0)^2\,(\varepsilon_q - \bar h^2); \qquad \bar x_1^2 = (k_0r_1)^2\,(\varepsilon - \bar h^2); \qquad \varepsilon_q = \begin{cases} \varepsilon, & r_1 < r < r_0; \\ 1, & r > r_0; \end{cases} \qquad \bar h = 0,$$

где $H_n^{(2)}(x)$ — функция Ханкеля II-го рода, ε_q — относительная диэлектрическая проницаемость. В формулах этого приложения положено $\bar h = 0$, что обусловлено рассмотрением случая нормального падения плоской волны на поверхность структуры.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

В этом приложении даны спектральные функции, необходимые для вычисления компонент E_z и H_z поля в дальней зоне [6]:

$$\chi_{nzz}(h) = -\,\frac{\Delta_n^H}{\Delta_n}\,\frac{w_0}{k_0r_0}\,, \qquad \chi_{nz\varphi}(h) = \chi_{n\varphi z}(h) = iw_0\bar F_n\,\frac{\hat\Delta_n}{\Delta_n} + \frac{n\bar h w_0}{x_1^2}\,\frac{\Delta_n^H}{\Delta_n}\,,$$

$$\chi_{n\varphi\varphi}(h) = -\,\frac{iw_0 n\bar h k_0 r_0}{x_0x_1}\,\frac{\hat\Delta_n}{\Delta_n}\left[\frac{x_1}{x_0}\,\bar F_n + \frac{x_0}{x_1}\,\Phi_n\right] - \frac{(nh)^2\,w_0k_0r_0}{(x_0x_1)^2}\,\frac{\Delta_0^H}{\Delta_n} + k_0r_0w_0\Phi_n\bar F_n\,\frac{\Delta_n^E}{\Delta_n}\,.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Proc. 2nd European Workshop on Conformal Antennas, the Hague, the Netherlands, April 24–25, 2001.
2. // Proc. 3rd European Workshop on Conformal Antennas, Bonn, Germany, October 22–23, 2003.
3. Habashy T. M., Ali S. M., Kong J. A. // IEEE Trans. Antennas and Propagaton. 1990. V. 38, No. 5. P. 722.
4. Silva F. C., Fonseca S. B. A., Soares A. J. M., Giarola A. J. // IEEE Trans. Antennas and Propagaton. 1991. V. 39, No. 9. P. 1 398.
5. Svezhentsev A. Ye., Vandenbosch G. // Proc. 27th General Assemble of the URSI, 17–24 August 2002, Maastricht.
6. Svezhentsev A. Ye., Vandenbosch G. // J. Electromagnetic Waves and Application. 2002. V. 16, No. 6. P. 813.
7. Svezhentsev A. Ye., Vandenbosch G. // IEEE Trans. Antennas and Propagaton. 2004. V. 52, No. 2. P. 608.
8. Goubau G. // J. Appl. Phys. 1950. V. 21, No. 11. P. 1 119.
9. Harrington R. F. Time-Harmonic Electromagnetic Fields. McGraw-Hill Book Company, 1961. 477 p.
10. Vecchi G., Bertuch T., Orefice M. // Proc. Int. Conf. Electromagnetics in Advanced Appl. (ICEAA96), Torino, Italy, 1996. P. 301.

Поступила в редакцию 11 июня 2004 г.; принята в печать 18 марта 2005 г.

EXCITATION OF A CYLINDRICAL MICROSTRIP ANTENNA WITH TWO SYMMETRICALLY PLACED RADIATING ELEMENTS

A. Ye. Svezhentsev

We consider a problem of symmetric excitation of a cylindrical microstrip antenna by two plane waves. The antenna consists of two radiating elements placed symmetrically with respect to the azimuth. Each element can be either a single patch or an array of patches of rectangular-cylindrical shape. The problem is reduced to solving an integral equation by the method of moments. A new representation of a Green's function is used. In this representation, the singularity at the source and the contribution of surface waves are given in analytical form. The scattered field as a function of frequency, the resonant current distribution on the patches, and the far-field pattern are calculated.

УДК 537.874.33:535.56

ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ ПЛОСКИХ ВОЛН НА ГРАНИЦЕ ЗЕРКАЛЬНО СОПРЯЖЁННЫХ КИРАЛЬНЫХ СРЕД

В. В. Фисанов

Сибирский физико-технический институт Томского госуниверситета, г. Томск, Россия

Рассматривается отражение и преломление плоских электромагнитных волн плоской поверхностью раздела зеркально сопряжённых изотропных киральных сред при различном задании падающего поля. Приводятся и обсуждаются соотношения, связывающие коэффициенты отражения или преломления с общим углом падения и материальными параметрами контактирующих сред.

ВВЕДЕНИЕ

Киральные электромагнитные материалы являются перспективными для применения в различных радиотехнических устройствах СВЧ, в качестве слабо- или сильноотражающих покрытий, преобразователей поляризации и др. [1]. Входящие в их состав малые включения не имеют центра симметрии, обычно они равномерно распределены и хаотически ориентированы в изотропной вмещающей среде. Феноменологически такие среды рассматриваются как изотропные и однородные, они обладают свойством двойного лучепреломления, потому что электромагнитное поле в них состоит из двух компонент — собственных волн круговой поляризации с различными направлениями вращения вектора электрического поля и волновыми числами. На поверхности раздела двух киральных сред происходит конверсия мод, а для полного описания взаимодействия плоских волн с плоской границей требуется введение матричных коэффициентов отражения и преломления [2–4]. При наклонном падении эти матрицы являются невырожденными как в общем случае, так и при контакте двух изорефракционных киральных сред [5]. Однако в случае кроссрефракционных киральных сред в матрице преломления отсутствуют элементы, ответственные за перекрёстную связь ортогонально поляризованных собственных волн, а для изоимпедансных сред перекрёстная связь отсутствует и в отражённом поле [6].

Особый случай контакта, при котором среды являются энантиоморфной парой (её образуют зеркально сопряжённые киральные среды), заслуживает отдельного рассмотрения: он соответствует пересечению классов кроссрефракционных и изоимпедансных сред, описывается уникально малым набором материальных параметров и тесно связан с методом изображений в киральной среде [7]. Цель данной работы — рассмотреть отражение и преломление волн поверхностью раздела зеркально сопряжённых киральных сред и сопоставить их при различном задании падающего поля.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. КОЭФФИЦИЕНТЫ ОТРАЖЕНИЯ И ПРЕЛОМЛЕНИЯ

Пусть плоскость $z = 0$ является поверхностью раздела двух зеркально сопряжённых киральных сред, а именно при описании связи между индукциями ($\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$) и напряжённостями ($\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$) электрического и магнитного полей посредством материальных уравнений Друде—Борна—Фёдорова

$$\mathbf{D} = \varepsilon\,(\mathbf{E} + \beta\,\nabla \times \mathbf{E}), \qquad \mathbf{B} = \mu\,(\mathbf{H} + \beta\,\nabla \times \mathbf{H}) \tag{1}$$

полупространства $z > 0$ и $z < 0$ характеризуются общими значениями диэлектрической проницаемости ε и магнитной проницаемости μ, тогда как значения параметра киральности β равны по абсолютной величине, но различаются знаками. Для определённости примем, что в верхнем полупространстве $z > 0$ параметр β является положительным.

Электромагнитное поле в киральной среде

$$\mathbf{E} = \mathbf{Q}_1 - i\eta\mathbf{Q}_2, \qquad \mathbf{H} = \mathbf{Q}_2 - i\eta^{-1}\mathbf{Q}_1 \tag{2}$$

является суперпозицией полей левосторонней ($\mathbf{Q}_1$) и правосторонней ($\mathbf{Q}_2$) круговых поляризаций, где $\eta = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ — волновой импеданс; здесь принята гармоническая временна́я зависимость с фактором $\exp(-i\omega t)$. Волновые поля $\mathbf{Q}_1$ и $\mathbf{Q}_2$, называемые также полями Бельтрами [5], удовлетворяют дифференциальным уравнениям первого порядка

$$\nabla \times \mathbf{Q}_1 = \gamma_1\mathbf{Q}_1, \qquad \nabla\mathbf{Q}_1 = 0; \tag{3}$$

$$\nabla \times \mathbf{Q}_2 = -\gamma_2\mathbf{Q}_2, \qquad \nabla\mathbf{Q}_2 = 0 \tag{4}$$

и уравнениям Гельмгольца $(\nabla^2 + \gamma_1^2)\,\mathbf{Q}_1 = 0$, $(\nabla^2 + \gamma_2^2)\,\mathbf{Q}_2 = 0$. В уравнениях (3) и (4) символами γ_1 и γ_2 обозначены волновые числа полей Бельтрами:

$$\gamma_1 = k/(1 - k\beta), \qquad \gamma_2 = k/(1 + k\beta), \tag{5}$$

где $k = \omega\,\sqrt{\varepsilon\mu}$, так что $\gamma_1 > \gamma_2$ в верхнем полупространстве.

Примем, что падение, отражение и преломление плоских волн происходят в плоскости xz. Тогда первичное поле представляется полями Бельтрами $\mathbf{Q}_1^{\mathrm{i}}(x,z)$, $\mathbf{Q}_2^{\mathrm{i}}(x,z)$ в форме плоских волн, волновые векторы которых образуют с осью z углы φ и ψ соответственно:

$$\mathbf{Q}_1^{\mathrm{i}}(x,z) = A_1\,(\cos\varphi\,\mathbf{x}_0 - i\mathbf{y}_0 + \sin\varphi\,\mathbf{z}_0)\exp[i\gamma_1\,(x\sin\varphi - z\cos\varphi)], \tag{6}$$

$$\mathbf{Q}_2^{\mathrm{i}}(x,z) = A_2\,(\cos\psi\,\mathbf{x}_0 + i\mathbf{y}_0 + \sin\psi\,\mathbf{z}_0)\exp[i\gamma_2\,(x\sin\psi - z\cos\psi)], \tag{7}$$

где A_1 и A_2 — амплитуды падающих плоских волн, $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{y}_0$ и $\mathbf{z}_0$ — орты декартовой прямоугольной системы координат. Отражённое поле описывается формулами

$$\mathbf{Q}_1^{\mathrm{r}}(x,z) = B_1\,(-\cos\varphi\,\mathbf{x}_0 - i\mathbf{y}_0 + \sin\varphi\,\mathbf{z}_0)\exp[i\gamma_1\,(x\sin\varphi + z\cos\varphi)], \tag{8}$$

$$\mathbf{Q}_2^{\mathrm{r}}(x,z) = B_2\,(-\cos\psi\,\mathbf{x}_0 + i\mathbf{y}_0 + \sin\psi\,\mathbf{z}_0)\exp[i\gamma_2\,(x\sin\psi + z\cos\psi)], \tag{9}$$

где B_1 и B_2 — амплитуды волн, уходящих от границы в верхнее полупространство ($z > 0$). Поле, преломленное в нижнее полупространство зеркально сопряжённой среды, описывается выражениями

$$\mathbf{Q}_1^{\mathrm{t}}(x,z) = C_1\,(\cos\psi\,\mathbf{x}_0 - i\mathbf{y}_0 + \sin\psi\,\mathbf{z}_0)\exp[i\gamma_2\,(x\sin\psi - z\cos\psi)], \tag{10}$$

$$\mathbf{Q}_2^{\mathrm{t}}(x,z) = C_2\,(\cos\varphi\,\mathbf{x}_0 + i\mathbf{y}_0 + \sin\varphi\,\mathbf{z}_0)\exp[i\gamma_1\,(x\sin\varphi - z\cos\varphi)], \tag{11}$$

где C_1 и C_2 — амплитуды преломленных волн. Амплитуды первичных и вторичных волн связаны линейными соотношениями

$$\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}, \tag{12}$$

которые формируют матрицы отражения $\|R_{ij}\|$ и преломления $\|T_{ij}\|$. Как следует из формулы (2), граничные условия непрерывности касательных составляющих напряжённостей электрического и магнитного полей на поверхности раздела $z = 0$ приводят к выражениям

$$\left\{\mathbf{Q}_1^{\mathrm{i}}(x,0) + \mathbf{Q}_1^{\mathrm{r}}(x,0) - i\eta\left[\mathbf{Q}_2^{\mathrm{i}}(x,0) + \mathbf{Q}_2^{\mathrm{r}}(x,0)\right]\right\} \times \mathbf{z}_0 = \left[\mathbf{Q}_1^{\mathrm{t}}(x,0) - i\eta\mathbf{Q}_2^{\mathrm{t}}(x,0)\right] \times \mathbf{z}_0, \tag{13}$$

$$\left\{\mathbf{Q}_2^{\mathrm{i}}(x,0) + \mathbf{Q}_2^{\mathrm{r}}(x,0) - i\eta^{-1}\left[\mathbf{Q}_1^{\mathrm{i}}(x,0) + \mathbf{Q}_1^{\mathrm{r}}(x,0)\right]\right\} \times \mathbf{z}_0 = \left[\mathbf{Q}_2^{\mathrm{t}}(x,0) - i\eta^{-1}\mathbf{Q}_1^{\mathrm{t}}(x,0)\right] \times \mathbf{z}_0, \tag{14}$$

комбинируя которые, приходим к требованию непрерывности касательных составляющих полей Бельтрами, взятых по-отдельности:

$$\left[\mathbf{Q}_1^{\mathrm{i}}(x,0) + \mathbf{Q}_1^{\mathrm{r}}(x,0)\right] \times \mathbf{z}_0 = \mathbf{Q}_1^{\mathrm{t}}(x,0) \times \mathbf{z}_0, \qquad \left[\mathbf{Q}_2^{\mathrm{i}}(x,0) + \mathbf{Q}_2^{\mathrm{r}}(x,0)\right] \times \mathbf{z}_0 = \mathbf{Q}_2^{\mathrm{t}}(x,0) \times \mathbf{z}_0. \tag{15}$$

Этот важный результат означает, что на поверхности раздела зеркально сопряжённых киральных сред состояние поляризации поля при отражении и преломлении не изменяется, он справедлив для любых изоимпедансных киральных сред и поверхностей раздела произвольной формы [8, 9]. Следовательно, матрицы отражения и преломления в (12) являются диагональными ($R_{12} = R_{21} = T_{12} = T_{21} = 0$). Подставляя представления (6)–(11) в (15) и принимая во внимание обобщённый закон Снеллиуса

$$\gamma_1 \sin\varphi = \gamma_2 \sin\psi, \tag{16}$$

получим следующие выражения для коэффициентов отражения $R_{11} = B_1/A_1, R_{22} = B_2/A_2$:

$$R_{11} = \frac{\cos\varphi - \cos\psi}{\cos\varphi + \cos\psi}\,, \qquad R_{22} = \frac{\cos\psi - \cos\varphi}{\cos\psi + \cos\varphi}\,, \tag{17}$$

и преломления $T_{11} = C_1/A_1$, $T_{22} = C_2/A_2$:

$$T_{11} = \frac{2\cos\varphi}{\cos\varphi + \cos\psi}\,, \qquad T_{22} = \frac{2\cos\psi}{\cos\psi + \cos\varphi}\,. \tag{18}$$

Вводя обозначения для проекций на ось z волновых векторов полей Бельтрами $\alpha_1 = \gamma_1\cos\varphi, \alpha_2 = \gamma_2\cos\psi$, получим из (17) и (18) представления для коэффициентов

$$R_{11} = -R_{22} = \frac{\alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1}{\alpha_1\gamma_2 + \alpha_2\gamma_1}\,, \qquad T_{11} = \frac{2\alpha_1\gamma_2}{\alpha_1\gamma_2 + \alpha_2\gamma_1}\,, \qquad T_{22} = \frac{2\alpha_2\gamma_1}{\alpha_1\gamma_2 + \alpha_2\gamma_1}\,, \tag{19}$$

которые приведены в [8]. Выражения (19) не содержат в явном виде углы падения. При отсутствии полного отражения все коэффициенты (19) являются вещественными. Вычисляя проекции на ось z векторов Пойнтинга для полей (6)–(11), находим, что энергетические коэффициенты отражения одинаковы ($\rho = R_{11}^2 = R_{22}^2$), а коэффициенты пропускания

$$\tau_{11} = \frac{\alpha_2\gamma_1}{\alpha_1\gamma_2}\,T_{11}^2, \qquad \tau_{22} = \frac{\alpha_1\gamma_2}{\alpha_2\gamma_1}\,T_{22}^2$$

таковы, что выполняется закон сохранения энергии: $\rho + \tau_{11} = \rho + \tau_{22} = 1$.

Критический угол полного отражения $\varphi = \Phi$ соответствует значению $\psi = \pi/2$ и, как следует из (16), равен

$$\Phi = \arcsin\left(\Gamma^{-1}\right), \tag{20}$$

где $\Gamma = \gamma_1/\gamma_2$.

2. ДВУХКОМПОНЕНТНЫЕ ПЕРВИЧНЫЕ ПОЛЯ

Пусть падающее поле образовано обоими полями Бельтрами $\mathbf{Q}_1^{\mathrm{i}}(x,z)$ (6) и $\mathbf{Q}_2^{\mathrm{i}}(x,z)$ (7), имеющими различные, но согласованные углы падения. При такой постановке задача является составной частью проблемы определения поля внутри многослойной киральной среды, помещённой в некиральное окружение [4]. Волновой отклик на двухкомпонентное наклонно падающее поле можно охарактеризовать всего одним коэффициентом, например T_{11}, т. к. остальные связаны с ним формулами $R_{11} = T_{11} - 1$, $R_{22} = 1 - T_{11}$, $T_{22} = 2 - T_{11}$. Углы падения ортогонально поляризованных плоских волн связаны законом Снеллиуса (16), поэтому появляется возможность сопоставить два взаимосвязанных варианта задания первичного поля. Пусть сначала заданы углы падения $\varphi^{(1)} = \theta$, $\psi^{(1)} = \arcsin(\Gamma\sin\theta)$. Поскольку $\Gamma > 1$, угол θ здесь является наименьшим из двух углов падения. Обозначая $T_{11}^{(1)} = t_1$, имеем

$$t_1 = \frac{2\cos\theta}{\cos\theta + \sqrt{1 - \Gamma^2\sin^2\theta}} \,. \tag{21}$$

В другом варианте, напротив, угол θ является наибольшим: $\psi^{(2)} = \theta$, $\varphi^{(2)} = \arcsin(\Gamma^{-1}\sin\theta)$. Введём обозначение $T_{11}^{(2)} = t_2$, где

$$t_2 = \frac{2\sqrt{1 - \Gamma^{-2}\sin^2\theta}}{\cos\theta + \sqrt{1 - \Gamma^{-2}\sin^2\theta}} \,. \tag{22}$$

Рассматривая формулы (21) и (22) совместно и устраняя радикалы, получим выражения, в которых коэффициенты t_1 и t_2 связаны только через материальный параметр Γ:

$$\Gamma^2 = \frac{(t_1 - 1)(2 - t_2)^2}{(t_2 - 1)t_1^2} \,, \tag{23}$$

или только через синус общего угла падения:

$$\sin^2\theta = \frac{4(t_1 - 1)(1 - t_2)}{(t_2 - t_1)(t_1 + t_2 - t_1 t_2)} \,. \tag{24}$$

Формулы (23) и (24) можно привести к более симметричному виду, вводя коэффициенты отражения $r_1 = t_1 - 1$ и $r_2 = t_2 - 1$, которые при обычном отражении являются положительными величинами:

$$\Gamma = \frac{\sqrt{r_2^{-1}} - \sqrt{r_2}}{\sqrt{r_1^{-1}} + \sqrt{r_1}} \,, \qquad \sin^2\theta = \frac{4}{\left(\sqrt{r_2^{-1}} + \sqrt{r_2}\right)^2 - \left(\sqrt{r_1^{-1}} + \sqrt{r_1}\right)^2} \,. \tag{25}$$

Используя формулы (5) и (25), нетрудно получить в явном виде функциональную связь коэффициентов отражения с параметром киральности:

$$k\beta = \frac{\sqrt{r_2^{-1}} - \sqrt{r_2} - \sqrt{r_1^{-1}} - \sqrt{r_1}}{\sqrt{r_2^{-1}} - \sqrt{r_2} + \sqrt{r_1^{-1}} + \sqrt{r_1}} \,. \tag{26}$$

3. ОДНОКОМПОНЕНТНЫЕ ПЕРВИЧНЫЕ ПОЛЯ

В однородной киральной среде поля Бельтрами распространяются независимо, а их раздельное возбуждение обеспечивается специальным подбором сторонних источников [10]. Поэтому однокомпонентное задание падающего поля является методически оправданным. Известное математическое неудобство, которое возникает при этом, заключается в невозможности вычисления всех элементов матриц $\|R_{ij}\|$ и $\|T_{ij}\|$ [4], т. к. системы алгебраических уравнений для определения амплитудных коэффициентов оказываются несовместными. Трудность можно преодолеть, рассматривая однокомпонентное падающее поле как результат подходящей двухкомпонентной суперпозиции пары полей. Например, сумма полей типа (6), (7), взятых с амплитудами $A_1/2$, $A_2/2$ и с амплитудами $A_1/2$, $-A_2/2$, обеспечивает математически корректное описание взаимодействия однокомпонентного поля (6) с поверхностью раздела сред. Коэффициенты R_{22} и T_{22} на промежуточных этапах вычисляются, но при окончательном рассмотрении отклика на однокомпонентное поле они не используются.

Пусть на плоскость $z = 0$ падает плоская волна (6) под углом $\varphi = \theta$, в результате чего образуются отражённая и преломлённая волны с коэффициентами

$$R_{11} = \frac{\cos\theta - \sqrt{1-\Gamma^2\sin^2\theta}}{\cos\theta + \sqrt{1-\Gamma^2\sin^2\theta}}\,, \qquad T_{11} = R_{11} + 1 = \frac{2\cos\theta}{\cos\theta + \sqrt{1-\Gamma^2\sin^2\theta}}\,. \tag{27}$$

При тех же материальных параметрах киральных сред независимо от волны (6) на плоскость $z = 0$ падает волна (7) под углом $\psi = \theta$, что порождает отражённую и преломлённую волны с коэффициентами

$$R_{22} = \frac{\cos\theta - \sqrt{1-\Gamma^{-2}\sin^2\theta}}{\cos\theta + \sqrt{1-\Gamma^{-2}\sin^2\theta}}\,, \qquad T_{22} = R_{22} + 1 = \frac{2\cos\theta}{\cos\theta + \sqrt{1-\Gamma^{-2}\sin^2\theta}}\,. \tag{28}$$

Найдём соотношения между коэффициентами для взаимно ортогональных круговых поляризаций электромагнитного поля при общем угле падения. Подобная постановка задачи относительно коэффициентов Френеля поверхности раздела двух некиральных и немагнитных диэлектриков для перпендикулярной и параллельной поляризаций приводит к формулам, инвариантным относительно либо угла падения, либо показателя преломления [11]. Для магнитодиэлектриков получено соотношение связи между коэффициентами отражения, не зависящее от угла падения [12]. Более того, комбинируя формулы Френеля для этого случая (см., например, § 5.2 в [13]), можно получить полный инвариант

$$\frac{t_\parallel^2}{1-r_\parallel^2} = \frac{t_\perp}{1-r_\perp}\,,$$

содержащий только коэффициенты отражения $r_\perp$, $r_\parallel$ и прохождения $t_\perp$, $t_\parallel$ волн, вектор напряжённости электрического поля которых расположен соответственно перпендикулярно или параллельно плоскости падения. В рассматриваемом случае контакта зеркально сопряжённых киральных сред коэффициенты отражения и преломления для полей обеих поляризаций попарно связаны простыми соотношениями. Это позволяет соотнести либо коэффициенты отражения, либо коэффициенты преломления, но получение полного инварианта здесь не актуально. Исключая Γ^2 из (27) и (28), получим соотношение, инвариантное относительно материальных параметров:

$$R_{11} + R_{11}^{-1} + R_{22} + R_{22}^{-1} = -4\sin^{-2}\theta. \tag{29}$$

Как следует из (27) и (28), в отсутствие полного отражения справедливы неравенства $0 < R_{11} < 1$, $-1 < R_{22} < 0$. Исключая угол падения, получим соотношения, справедливые при любом угле падения, не большем критического угла полного отражения $\theta_{\text{кр}} = \Phi$:

$$\Gamma = \frac{\sqrt{-R_{22}^{-1}} - \sqrt{-R_{22}}}{\sqrt{R_{11}} + \sqrt{R_{11}^{-1}}}\,, \tag{30}$$

откуда следует формула

$$k\beta = \frac{\sqrt{-R_{22}^{-1}} - \sqrt{-R_{22}} - \sqrt{R_{11}} - \sqrt{R_{11}^{-1}}}{\sqrt{-R_{22}^{-1}} - \sqrt{-R_{22}} + \sqrt{R_{11}} + \sqrt{R_{11}^{-1}}}\,. \tag{31}$$

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе получены соотношения, которые связывают между собой коэффициенты трансформации плоских волн двух круговых поляризаций плоской поверхностью раздела двух зеркально сопряжённых киральных сред. Как при совместном падении волн лево- и правосторонней круговой поляризации под согласованными углами падения, так и при раздельном их падении под общим углом существует связь коэффициентов отражения или преломления только с геометрическими или только с материальными параметрами задачи.

Формулы (25) дают альтернативный способ вычисления коэффициентов отражения. Таким же свойством обладает пара формул (29), (30). Формулы (26) и (31) дают возможность определять параметр киральности непосредственно по коэффициентам отражения для волн двух ортогональных поляризаций. Все эти формулы остаются справедливыми в области углов полного отражения, если учесть, что $R_{11} + R_{11}^{-1} = 2\,\mathrm{Re}(R_{11})$ — вещественная величина. Полное отражение ассоциируется с более медленной падающей волной $\mathbf{Q}_1^{\mathrm{i}}$, для которой коэффициенты отражения принимают форму $R_{11} = \exp(i\chi)$, где χ — вещественная фаза, так что $|R_{11}| = 1$ для всех углов, бóльших критического угла полного отражения $\theta_{\text{кр}}$. При полном отражении в обеих средах формируются неоднородные плоские волны поверхностного типа. По этой причине геометрооптическое описание отражения и преломления сложных полей, возбуждаемых сосредоточенными источниками, является недостаточным и должно быть дополнено дифракционными поправками, относящимися к боковой волне [14].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Cory H. // J. Electromagn. Waves Appl. 1995. V. 9, No. 5–6. P. 805.
2. Viitanen A. J., Lindell I. V., Sihvola A. H., Tretyakov S. A. // J. Opt. Soc. Am. A. 1990. V. 7, No. 4. P. 683.
3. Lakhtakia A. // Z. Naturforsch. A. 1992. V. 47, No. 7–8. P. 921.
4. Jaggard D. L., Sun X. // J. Opt. Soc. Am. A. 1992. V. 9, No. 5. P. 804.
5. Lakhtakia A. // Microwave Opt. Technol. Lett. 1998. V. 19, No. 5. P. 350.
6. Lakhtakia A. // Microwave Opt. Technol. Lett. 1999. V. 20, No. 5. P. 337.
7. Lakhtakia A., Varadan V. V., Varadan V. K. // J. Opt. Soc. Am. A. 1989. V. 6, No. 1. P. 23.
8. Lakhtakia A., Varadan V. K., Varadan V. V. Time-Harmonic Electromagnetic Fields in Chiral Media. Berlin: Springer-Verlag, 1989.
9. Lakhtakia A., Varadan V. K., Varadan V. V. // J. Mod. Opt. 1989. V. 36, No. 10. P. 1 385.

10. Lindell I. V. // Arch. Elektr. Übertrag. 1990. V. 44, No. 5. P. 427.
11. Azzam R. M. A. // J. Opt. Soc. Am. A. 1986. V. 3, No. 7. P. 928.
12. Lakhtakia A., Varadan V. V., Varadan V. K. // Int. J. Infrared Millim. Waves. 1988. V. 9, No. 7. P. 631.
13. Никольский В. В., Никольская Т. И. Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Наука, 1989. 544 с.
14. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 344 с.

Поступила в редакцию 9 июля 2004 г.; принята в печать 4 марта 2005 г.

REFLECTION AND TRANSMISSION OF PLANE WAVES AT AN INTERFACE OF MIRROR-CONJUGATE CHIRAL MEDIA

V. V. Fisanov

We consider reflection and transmission of plane electromagnetic waves by a plane interface of mirror-conjugate isotropic chiral media for differently assigned incident fields. Relations between reflection or transmission coefficients, the common angle of incidence, and the material parameters of the media are adduced and discussed.

УДК 621.382.323.418

МИКРОВОЛНОВЫЕ ДЕТЕКТОРЫ НА ОСНОВЕ НИЗКОБАРЬЕРНЫХ ПЛАНАРНЫХ ДИОДОВ ШОТТКИ И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

В. И. Шашкин, В. Л. Вакс, В. М. Данильцев, А. В. Масловский, А. В. Мурель, С. Д. Никифоров, О. И. Хрыкин, Ю. И. Чеченин

Институт физики микроструктур РАН, г. Нижний Новгород, Россия

Разработаны принципы построения и технология изготовления чувствительных микроволновых детекторов на основе диодов Шоттки с уменьшенной эффективной высотой барьера (до 0,2÷0,3 эВ). Изготовлено семейство диодов и широкополосных детекторов на их основе с чувствительностью 1 000÷÷5 000 В/Вт и пороговой мощностью 10^{-11} Вт $\cdot$ Гц$^{-1/2}$ в коротковолновой части миллиметрового диапазона длин волн, работающих без постоянного смещения. Расчёт в простой модели детектирования, учитывающей ёмкость и последовательное сопротивление растекания диода, даёт достаточно точное описание характеристик детектирования. Данный подход позволил получить достоверную зависимость ёмкости (реактивного импеданса) от напряжения для диодов, работающих в режиме детектирования в коротковолновой части миллиметрового диапазона длин волн.

ВВЕДЕНИЕ

Диод с барьером Шоттки является одним из основных чувствительных нелинейных элементов, используемых при приёме микроволнового излучения. В диапазоне миллиметровых и субмиллиметровых длин волн в неохлаждаемых приёмниках у него практически нет конкурентов [1]. Однако в ряде случаев было бы желательно уменьшить эффективную высоту барьера диода Шоттки и тем самым получить детектор сигналов или умножитель частоты, работающие без постоянного смещения, или реализовать смеситель с малым необходимым уровнем мощности гетеродина. Следует ожидать, что в отсутствие тока смещения будет снижен уровень шумов. Очевидно также, что отсутствие цепей смещения и/или малая мощность гетеродина приобретают принципиальное значение при создании многоэлементных квазиоптических приёмных систем, вызывающих к себе давний и оправданный интерес [2].

Очевидным способом снижения эффективной высоты барьера диодов Шоттки является обеспечение высокой туннельной прозрачности вблизи вершины потенциального барьера при сильном неоднородном легировании полупроводника вблизи контакта с металлом [3–5]. В работах [6, 7] теоретически, путём численных и аналитических расчётов, и экспериментально показана перспективность использования технологии δ-легирования [4] для изготовления низкобарьерных диодов. В настоящей работе обсуждаются характеристики планарных диодов с анодными контактами микронных размеров и изготовленных на их основе детекторов миллиметрового диапазона длин волн. Частично результаты были представлены на конференциях [8–10].

1. ИЗГОТОВЛЕНИЕ ПЛАНАРНЫХ ДИОДОВ

Рост эпитаксиальных слоёв GaAs и осаждение металлических плёнок Al для формирования барьерного контакта осуществлялись в установке металлоорганической газофазной эпитаксии (МОГФЭ) при пониженном давлении в реакторе (0,1 бар). Подробное описание технологии и результаты исследования структур приведены в работах [4, 11]. В качестве подложек использовались сильнолегированные пластины n^{+}—GaAs, разориентированные на 2° от направления [100].

Температура роста слоёв GaAs составляла 650 °C. В качестве источников использовались триметилгаллий, триметилиндий, арсин и силан, разбавленный в водороде до концентрации 0,01 %. Последовательность наращивания слоёв была следующая. Сначала на подложку осаждался сильнолегированный буферный слой $\mathrm{n^+}$—GaAs с толщиной $0{,}1\div0{,}3$ мкм и концентрацией носителей $(4\div6)\cdot10^{18}$ см$^{-3}$, затем — около 0,1 мкм нелегированного (концентрация не более 10^{16} см$^{-3}$) GaAs. В режиме прерывания роста проводилось δ-легирование кремнием с поверхностной концентрацией $(5\div20)\cdot10^{12}$ см$^{-2}$, затем — осаждался покрывающий слой нелегированного GaAs с толщиной $4\div5$ нм. В ряде случаев поверх δ-слоя осаждалась комбинация нелегированных слоёв GaAs (2 нм) и $\mathrm{In}_x\mathrm{Ga}_{1-x}\mathrm{As}$ ($2\div3$ нм, $x=0{,}2\div0{,}4$), имеющих ту же суммарную толщину. После завершения процесса роста полупроводниковых слоёв структуру охлаждали до температуры примерно 175 °C и без разгерметизации реактора МОГФЭ проводили осаждение плёнки алюминия с толщиной $0{,}1\div0{,}15$ мкм, используя в качестве источника диметилэтиламиналан [11]. В процессе осаждения алюминиевой плёнки на структуру с верхним слоем InGaAs заметных отличий обнаружено не было.

При выбранных параметрах структуры на границе с металлом формируется тонкая туннельно-прозрачная вершина потенциального барьера, обеспечивающая эффективную термополевую эмиссию [4]. Зонная диаграмма контакта показана на рис. 1. Вольт-амперная характеристика (ВАХ) контакта $I(V)$ приближённо описывается выражением

$$I(V)\approx A^{**}T^2S\exp\left(-\frac{\Delta(V)}{kT}\right)\left[\exp\left(\frac{eV}{kT}\right)-1\right], \tag{1}$$

где A^{**} — модифицированная постоянная Ричардсона, T — температура, S — площадь контакта, k — постоянная Больцмана, $\Delta\approx0{,}2\div$ $\div\,0{,}3$ эВ — эффективная высота барьера, имеющая слабую зависимость от приложенной к барьру разности потенциалов V [6, 7], e — элементарный заряд. Введение узкозонного InGaAs на границе с металлом дополнительно уменьшает высоту барьера, как это показано пунктиром на рис. 1, и увеличивает его туннельную прозрачность. Это позволяет при сохранении величины Δ использовать δ-легирование с поверхностной концентрацией вблизи нижней границы диапазона $(5\div10)\cdot$ $\cdot\,10^{12}$ см$^{-2}$. В этом случае уменьшаются побочные эффекты, связанные с формированием «хвостов» плотности состояний δ-слоя в запрещённой зоне [4]. В свою очередь, это приводит к более идеальным ВАХ контактов в эксперименте и лучшему их совпадению с выражением (1), поскольку реализуются меньшие значения факторов неидеальности из-за отсутствия эффектов перезарядки глубоких уровней δ-слоя и меньшие обратные токи из-за отсутствия дополнительных каналов туннельного токопереноса через эти уровни.

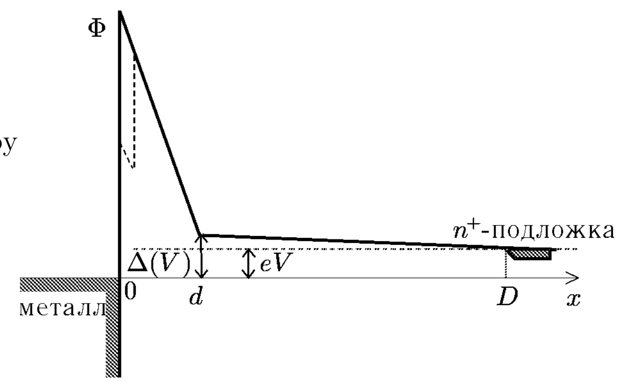


Рис. 1. Профиль дна зоны проводимости для контакта металл—полупроводник с полностью обеднённым дельта-слоем. Пунктиром показано изменение туннельного барьера при введении дополнительного слоя InGaAs

На базе этих структур изготовлены планарные диоды с площадью анода $8\div12$ мкм^2. На рис. 2 схематично показано поперечное сечение планарного диода. Отличительной особенностью

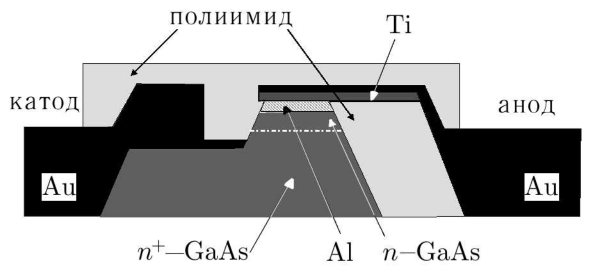


Рис. 2. Схематичное изображение поперечного сечения планарного низкобарьерного диода

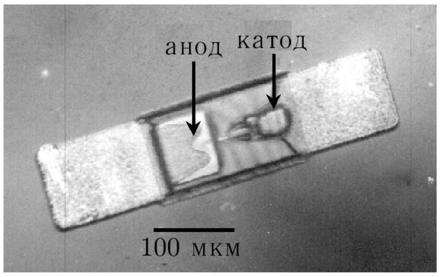


Рис. 3. Микрофотография низкобарьерного планарного диода

технологии является использование несущей плёнки полиимида, обеспечивающего механическую прочность и низкую паразитную ёмкость конструкции. Это достигается за счёт того, что полупроводниковый материал полностью удаляется из-под вывода барьерного контакта и остаётся только в активной области диода. Травление полупроводника осуществляется с лицевой стороны пластины на глубину 6÷8 мкм. При этом происходит окончательное формирование площади активной области, определяющей ёмкость будущего диода. Для дополнительной металлизации на барьерный контакт методом высокотемпературного термического испарения в вакууме осаждаются слои Ti и Au. Окончательный рисунок формируется с помощью ионно-химического травления под защитой маски фоторезиста. В качестве омического контакта используется эвтектика AuGe—Au, формируемая с помощью вакуумного напыления и метода обратной фотолитографии. Вплавление контакта осуществляется при температуре 400 °C в атмосфере гелия. Балочные выводы диода формируются с помощью гальванического осаждения слоя золота с толщиной 6÷8 мкм в окнах полиимида. Для этого на поверхность пластины наносится раствор полиамидокислоты с толщиной 6 ÷ 8 мкм и производится имидизация при температуре 300 ÷ 350 °C в течение 1 часа. Далее проводится плазмо-химическое травление слоя полиимида под защитой металлической алюминиевой маски. Для обеспечения механической прочности конструкции диода формируется второй слой полиимида с толщиной 6÷8 мкм. В конце технологического цикла изготовления диодов пластины наклеиваются лицевой стороной на носитель и производится полное стравливание полупроводника с обратной стороны. Микрофотография планарного диода, дающая представление о его размерах и геометрии выводов, приведена на рис. 3.

2. ИССЛЕДОВАНИЕ ДЕТЕКТИРОВАНИЯ В МИЛЛИМЕТРОВОМ ДИАПАЗОНЕ ДЛИН ВОЛН

Для детектирования использовались несколько вариантов камер на основе зауженных закороченных волноводов коротковолновой части миллиметрового диапазона длин волн. Диод монтировался в основном сечении волновода с использованием проводящего клея или пайки. Вывод продетектированного сигнала осуществлялся через низкочастотный фильтр по коаксиальной линии.

Измерения характеристик детекторов проводились на специализированном стенде, описанном в работе [12]. Основным узлом стенда является малошумящий синтезатор частоты миллиметрового диапазона длин волн с калиброванной мощностью излучения, системой программного автоматического задания и измерения тока и напряжения на диоде, который подключён к приёмной

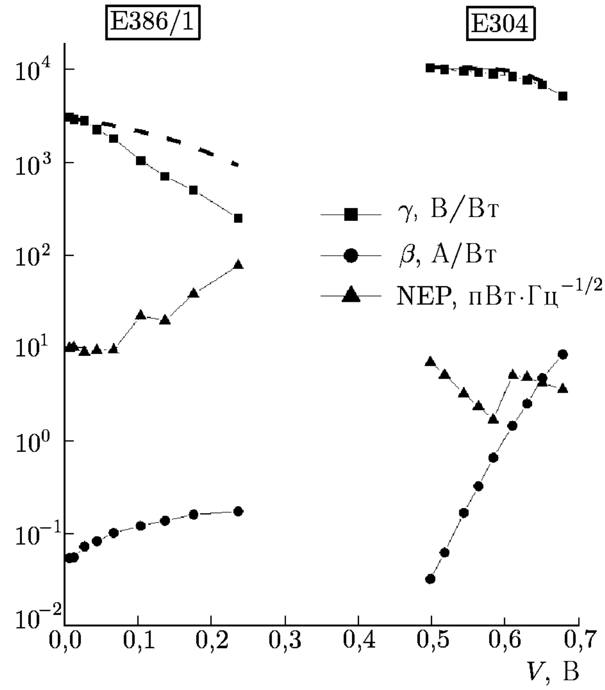


Рис. 4. Характеристики детекторов на основе низкобарьерного (E386/1) и обычного (E304) диодов в зависимости от напряжения смещения на частоте 138 ГГц. Пунктиром показаны результаты расчёта величины γ

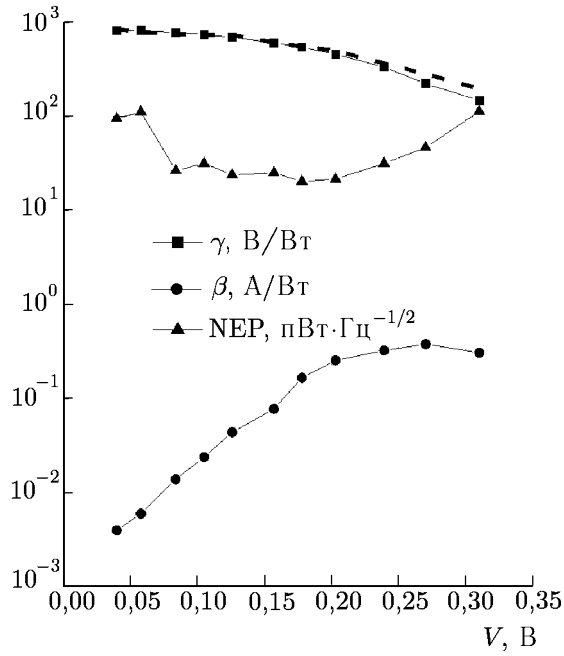


Рис. 5. Характеристики детектора с низкобарьерным диодом E617/2 в зависимости от напряжения смещения на частоте 239 ГГц. Пунктиром показаны результаты расчёта величины γ

системе, модифицированной для измерения его выходной шумовой температуры. Необходимыми метрологическими модулями стенда являются стандартные источник шума и измеритель мощности миллиметрового диапазона длин волн. Предусмотрена реконфигурация стенда для автокалибровки флуктуаций мощности источника излучения.

Непосредственно измеряемыми характеристиками являются: ВАХ, дифференциальное сопротивление $R_{\mathrm{d}} = \mathrm{d}V/\mathrm{d}I$, вольт-ваттная чувствительность γ и относительная выходная шумовая температура T_{ref} (при выключенном источнике излучения). Другие параметры — ампер-ваттная чувствительность β и эквивалентная шумовая мощность NEP — определяются из первичных данных путём расчётов [13].

Для оценки параметров низкобарьерных планарных диодов были проведены их испытания в сопоставлении с обычными диодами в режиме детектирования в диапазоне 80÷140 ГГц и на частоте 239 ГГц. На рис. 4 приведены зависимости вольт-ваттной γ, ампер-ваттной β и пороговой NEP чувствительностей детекторов в зависимости от напряжения смещения V на частоте 138 ГГц. При малых смещениях показаны данные для детектора с низкобарьерным диодом E386/1, при бо́льших — для детектора той же топологии, но с диодом E304 с обычной высотой барьера Шоттки (толщина активного слоя 0,1 мкм, однородное легирование кремнием на уровне 10^{17} см$^{-3}$). Из рис. 4 видно, что значения γ, β и NEP у диодов обоих типов оказываются сравнимыми. Однако для низкобарьерных диодов E386/1 характеристики $\gamma > 3\,000$ В/Вт и NEP $< 10^{-11}$ Вт $\cdot$ Гц$^{-1/2}$ достигаются при нулевом смещении. При измерении характеристик широкополосного детектирования сигналов в диапазоне $80 \div 140$ ГГц обеспечиваются значения $\gamma > 1\,000$ В/Вт и NEP $<$ $< 10^{-11}$ Вт $\cdot$ Гц$^{-1/2}$. Лучшие характеристики на выделенных частотах диапазона $\gamma = 5\,000$ В/Вт и NEP $\approx (3 \div 6) \cdot 10^{-12}$ Вт $\cdot$ Гц$^{-1/2}$.

Переход в более высокочастотные диапазоны приводит к ухудшению параметров детекторов. На рис. 5 приведены данные для диодов серии E617/2 на частоте 239 ГГц: $\gamma \approx 900$ В/Вт и NEP $<$ $< 10^{-10}$ Вт $\cdot$ Гц$^{-1/2}$.

3. МОДЕЛЬ ДЕТЕКТОРА И ДИАГНОСТИКА ПАРАМЕТРОВ ДИОДОВ

В основных чертах характеристики детекторов можно объяснить на основе элементарного анализа детектора при учёте ёмкости перехода C и последовательного сопротивления r диодов. Учитывая эти элементы схемы, можно убедиться, что вольт-ваттная чувствительность определяется следующим соотношением:

$$\gamma = \frac{\alpha}{2} \, \frac{R_\mathrm{d} - r}{R_\mathrm{d}/(R_\mathrm{d} - r) + (2\pi f)^2 \, C^2 r \, (R_\mathrm{d} - r)} \;, \tag{2}$$

где $\alpha = R_\mathrm{d} \, \mathrm{d}^2 I/\mathrm{d}V^2$ — параметр нелинейности ВАХ, f — частота детектируемого сигнала. За исключением ёмкости перехода C, все параметры, входящие в выражение (2), можно определить из статических ВАХ диодов. Величину C можно использовать в качестве подгоночного параметра, обеспечивающего совпадение с измеренными экспериментальными зависимостями $\gamma(V)$. В табл. 1 приведены основные параметры диодов, используемые при расчётах.

В табл. 1 указаны наибольшие значения α, измеренные при рабочих смещениях детекторов. Эти значения близки к максимальным возможным значениям $\alpha = e/(kT)$ для ВАХ вида (1). Для всех диодов α уменьшается с ростом смещения. Для фиксированных значений C, указанных в табл. 1, проведён расчёт зависимостей $\gamma(V)$. Полученные результаты показаны пунктиром на рис. 4 и 5. Для диода E304 с обычной высотой барьера кривые сближаются при ёмкости перехода, существенно большей её значения при нулевом смещении ($C(0) = 11$ фФ). Можно предположить, что несовпадение рассчитанных и измеренных значений $\gamma(V)$ определяется зависимостью $C(V)$ во всём диапазоне рабочих смещений. Тогда $C(V)$ можно определить из формулы (2):

$$C(V) = \frac{1}{2\pi f r} \sqrt{\frac{\alpha r}{2\gamma} - \frac{r^2 + r \, (R_\mathrm{d} - r)}{(R_\mathrm{d} - r)^2}} \;. \tag{3}$$

На рис. 6 для диода E304 построена зависимость $C^{-2}(V)$, которая стремится к линейной при малых напряжениях. Используя известные методики диагностики ёмкости [14], можно получить хорошее совпадение для высоты барьера Шоттки: 0,95 эВ и уровня легирования: 10^{17} см$^{-3}$. Экстраполированное значение ёмкости при нулевом смещении, равное 11 фФ, близко к расчётному для контакта с площадью 10 мкм^2. Такие совпадения делают предположение об определяющей роли ёмкости в зависимостях $\gamma(V)$ оправданной. Загиб кривой $C^{-2}(V)$ вверх при больших смещениях на рис. 6 обусловлен индуктивным вкладом плазменных эффектов в необеднённой части активного слоя и пролётных эффектов из-за возрастающего числа носителей тока, пролетающих барьерную область [14, 15]. В принципе, эти эффекты можно разделить, если изготовить серию

Таблица 1. Параметры диодов

Обозначение диода	Высота барьера Δ, эВ	$\max\alpha$, В$^{-1}$	r, Ом	C, фФ
E304	0,9	36 ($V = 0{,}5$ В)	9	16 ($V = 0{,}5$ В)
E386/1	0,2	32 ($V = 0{,}0$ В)	33	14 ($V = 0{,}0$ В)
E617/2	0,3	33 ($V = 0{,}0$ В)	53	13 ($V = 0{,}0$ В)

диодов на структурах с разным легированием. Увеличение ёмкости с ростом напряжения обнаруживается и для низкобарьерных диодов (см. рис. 6). Видно, что зависимости имеют области насыщения ёмкости, отвечающие полному обеднению активного слоя при нулевых смещениях, как это и должно быть для диода Мотта [14]. В диоде E617/2 с несколько бо́льшим барьером эта область шире, а возрастание ёмкости при увеличении смещения в сравнении с диодом E304 более резкое из-за малого объёмного легирования активных слоёв. По этой же причине последовательные сопротивления низкобарьерных диодов больше.

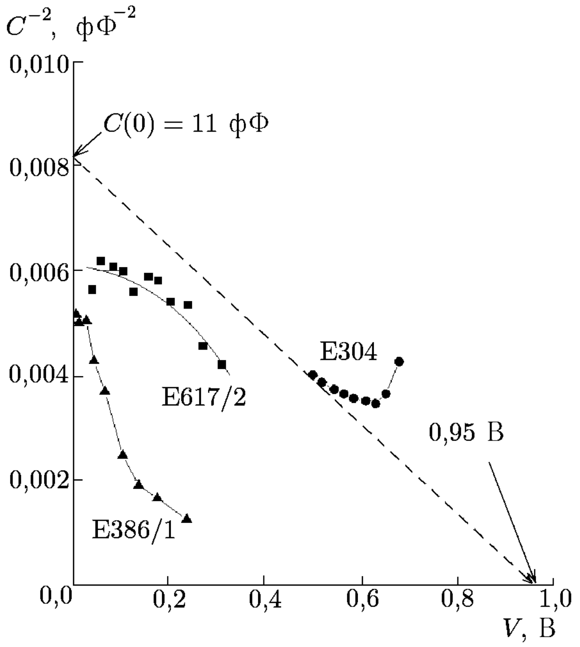


Рис. 6. Расчётные зависимости обратного квадрата ёмкости перехода от напряжения смещения для различных диодов. Пунктирная прямая — экстраполяция зависимости $C^{-2}(V)$ при малых смещениях для диода E304

Нужно заметить, что детекторы с низкобарьерными диодами E386/1 и E617/2 имеют сопоставимые параметры детектирования на одинаковых частотах. Их чувствительность спадает примерно пропорционально квадрату частоты, как это следует из формулы (2). Попытки применить для детектирования диоды с ещё меньшими барьерами не были успешными из-за резкого уменьшения величины α. На основании изложенного мы полагаем, что простая модель, использующая измеренные параметры ВАХ и паразитные параметры диодов (2), является достоверной в миллиметровом диапазоне длин волн. При этом расчёт по формуле (3) позволяет оценить ёмкость или, точнее, реактивный импеданс диодов в режиме детектирования на рабочих частотах. В пределах технологического разброса параметров ёмкость диодов играет более существенную роль по сравнению с последовательным сопротивлением. При сохранении принципов формирования планарного диода некоторое улучшение характеристик можно ожидать лишь из-за уменьшения последовательного сопротивления при сохранении малой удельной ёмкости контакта. Это путь оптимизации параметров легирования и толщины активного слоя. Сложность состоит в достижении высокой однородности структуры вдоль поверхности и воспроизводимости эпитаксиального процесса и является характерной для приборов, основанных на туннелировании [16].

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе обсуждается технология изготовления планарных диодов с пониженной эффективной высотой барьера Шоттки. Показано, что применение таких диодов в детекторах миллиметрового диапазона длин волн обеспечивает высокочувствительный приём излучения без использования постоянного смещения. При измерении характеристик широкополосного детектирования сигналов в диапазоне 80÷140 ГГц обеспечиваются значения вольт-ваттной чувствительности $\gamma > 1\,000$ В/Вт и пороговой мощности NEP $< 10^{-11}$ Вт $\cdot$ Гц$^{-1/2}$. Лучшие характеристики на выделенных частотах диапазона $\gamma = 5\,000$ В/Вт и NEP $\approx (3\div6)\cdot 10^{-12}$ Вт $\cdot$ Гц$^{-1/2}$. В коротковолновой части миллиметрового диапазона длин волн чувствительность уменьшается пропорционально квадрату частоты. Измеренные характеристики в диапазоне до 300 ГГц соответствуют лучшим результатам для детекторов, работающих без смещения [17].

На основе простой модели детектирования, учитывающей ёмкость и последовательное сопротивление растекания диода, получено достаточно точное описание характеристик детектирования для частот до 300 ГГц. Такой подход позволил получить достоверную зависимость ёмкости (реактивного импеданса) от напряжения для диодов, работающих в режиме детектирования на частотах коротковолновой части миллиметрового диапазона длин волн.

Авторы благодарны Ю. А. Дрягину и Л. И. Федосееву за многочисленные обсуждения и поддержку. Работа выполнена при поддержке Программы «Физика микроволн» Минпромнауки и Программы «Проблемы радиофизики» Президиума РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Crowe T. W., Mattauch R. J., Roser H. P., et al. // Proc. IEEE. 1992. V. 80. P. 1 827.
2. Волков Л. В., Любченко В. Е., Тихомиров О. А. // Радиотехника и электроника. 1995. Т. 40, вып. 3. С. 322.
3. Брянцева Т. А., Любченко В. Е., Юневич Е. О. // Радиотехника и электроника. 1995. Т. 40, вып. 8. С. 1 306.
4. Шашкин В. И., Мурель А. В., Дроздов Ю. Н. и др. // Микроэлектроника. 1997. Т. 26, вып. 1. С. 57.
5. Sassen S., Witzigmann B., Wolk C., Brugger H. // IEEE Trans. Electron. Devices. 2000. V. 47. P. 24.
6. Шашкин В. И., Мурель А. В., Данильцев В. М., Хрыкин О. И. // Физика и техника полупроводников. 2002. Т. 36, вып. 5. С. 537.
7. Шашкин В. И., Мурель А. В. // Физика и техника полупроводников. 2004. Т. 38, вып. 5. С. 574.
8. Shashkin V. I., Daniltsev V. M., Khrykin O. I., et al. // Proc. Int. Semicon. Dev. Res. Symp. (ISDRS), Charlottseville, USA, 1997. P. 147.
9. Шашкин В. И., Вакс В. Л., Вопилкин Е. А. и др. // Материалы Седьмой российской конф. «Арсенид галлия», Томск, 21–23 октября 1999 г. С. 175.
10. Shashkin V., Chechenin Yu., Danil'tsev V., et al. // Proc. 23rd Int. Conf. On Microelectronics (MIEL 2002), Nis, Yugoslavia, 2002. P. 335.
11. Shashkin V., Rushworth S., Daniltsev V., et al. // J. Electronic Materials. 2001. V. 30, No. 8. P. 980.
12. Вакс В. Л., Данильцев В. М., Масловский А. В. и др. // Материалы 11-ой международной микроволновой конф. «СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии», Севастополь, Крым, Украина, 10–14 сентября 2001 г. С. 592.
13. Божков В. Г., Ганин Е. В., Дрягин Ю. А. и др. // Электронная техника. Сер. Электроника СВЧ. 1984. Вып. 3 (363), С. 24.
14. Зи С. Физика полупроводниковых приборов. М.: Мир, 1984.
15. Crowe T. W. // Int. J. of Infrared and Millimeter Waves. 1989. V. 10, No. 7. P. 765.
16. Wilkinsonyz V. A., Kellyy M. J., Carrx M. // Semicond. Sci. Technol. 1997. V. 12, No. 1. P. 91.
17. Meyers R. G., Fay P., Schulman J. N., et al. // IEEE Electron. Devices Lett. 2004. V. 25, No. 1. P. 4.

Поступила в редакцию 4 августа 2004 г.; принята в печать 4 марта 2005 г.

MICROWAVE DETECTORS ON THE BASIS OF LOW-BARRIER PLANAR SCHOTTKY DIODES AND THEIR CHARACTERISTICS

V. I. Shashkin, V. L. Vaks, V. M. Danil'tsev, A. V. Maslovsky, A. V. Murel, S. D. Nikiforov, O. I. Khrykin, and Yu. I. Chechenin

We develop the construction and technology principles for manufacturing sensitive microwave detectors on the basis of Schottky diodes with reduced effective barrier height (up to 0.2–0.3 eV). The family of diodes and broadband detectors on their basis with sensitivity from 1000 to 5000 V/W and the threshold power 10^{-11} $\mathrm{W \cdot Hz^{-1/2}}$ in a short-wave part of millimeter wavelengths working without constant bias is produced. Rather exact description of detector characteristics is obtained from calculations by a simple detecting model allowing for the capacitance and series resistance spread of the diode. This method allows us to obtain a reliable dependence of the capacitance (reactive impedance) on the voltage for the diodes working in the detection mode in a short-wave part millimeter wavelengths.