МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Известия высших учебных заведений

РАДИОФИЗИКА

ежемесячный научно-технический журнал

Издаётся с апреля 1958 г.

Том XLVIII № 3 **Нижний Новгород** **2005**

Содержание

УДК 550.388.2

К ВОПРОСУ ОБ АНОМАЛЬНОМ ПОГЛОЩЕНИИ РАДИОВОЛН НА ВЫТЯНУТЫХ ВДОЛЬ МАГНИТНОГО ПОЛЯ МЕЛКОМАСШТАБНЫХ НЕОДНОРОДНОСТЯХ

В. В. Васьков, Н. А. Рябова

Институт земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн РАН,
г. Троицк Московской обл., Россия

Исследуется интенсивность аномального поглощения радиоволн на вытянутых вдоль магнитного поля искусственных неоднородностях с учётом влияния неоднородностей на распространение возбуждаемой Z-моды. Показано, что эффекты, связанные с распространением Z-моды, становятся существенными при поперечных размерах вытянутых неоднородностей порядка $0{,}1c/\omega$ и более, где ω — частота радиоволны, c — скорость света в вакууме.

ВВЕДЕНИЕ

Аномальное ослабление (поглощение) обыкновенных радиоволн, отражающихся в возмущённой области плазмы, является одним из основных эффектов, возникающих при воздействии мощного радиоизлучения на F-слой ионосферы. Это поглощение связано с возбуждением необыкновенной Z-моды и коротковолновых плазменных колебаний в результате поляризации вытянутых вдоль геомагнитного поля $\mathbf{B}$ мелкомасштабных неоднородностей электронной концентрации δN, создаваемых мощным радиоизлучением. Расчёт аномального ослабления в рамках теории возмущений проводился различными методами в ряде работ [1–5]. Влияние неоднородностей с $\delta N < 0$ на распространение возбуждаемых волн учитывалось в наиболее простом случае плоских (одномерных) неоднородностей в [6, 7]. В [6] в электростатическом приближении рассматривался случай очень мелкомасштабных неоднородностей с поперечными размерами $a \ll (\pi k)^{-1}$, где $k \sim \omega/c$ — волновое число Z-моды в невозмущённой плазме, ω — частота радиоволны, c — скорость света в вакууме. В этих условиях амплитуда вынужденных колебаний Z-моды пропорциональна поляризационному току в той же точке пространства (локальное возбуждение), поэтому эти колебания не выходят за пределы неоднородности. Возбуждение волн в этом предельном случае происходит в результате трансформации «холодной» Z-моды в коротковолновые верхнегибридные плазменные колебания в окрестности точек верхнегибридного резонанса. Плазменные волны распространяются во внутренней части неоднородности, частично поглощаются в ней, а частично трансформируются в уходящую Z-моду. Определение потока энергии возбуждаемых волн на совокупности неоднородностей позволяет найти коэффициент аномального поглощения радиоволны κ_{a}. [1]

С увеличением поперечного размера a возбуждаемая Z-мода приобретает возможность распространяться внутри неоднородности и уходить за её пределы. Этот эффект рассматривался в [7] в случае неоднородностей почти прямоугольной формы с резкими краями. В настоящей работе анализируется более реалистичный случай неоднородностей гауссовской формы. Показано, что уравнение для Z-моды, полученное ранее в потенциальном приближении вблизи уровня

[1] Здесь не обсуждается процесс отражения верхнегибридных волн от достаточно больших отрицательных возмущений электронной концентрации δN, который происходит в узких интервалах частот, расположенных несколько ниже кратных электронных гирогармоник [8]. Такой процесс препятствует высвечиванию плазменных волн в Z-моду, но не меняет аномальное поглощение радиоволны на заданных неоднородностях.

верхнегибридного резонанса, остаётся справедливым и в более широкой области вплоть до уровня отражения радиоволны. Это позволяет рассчитать коэффициент $\kappa_{\rm a}$ во всей указанной области, в частности, в случае, когда профиль электронной концентрации в неоднородностях не пересекает уровень верхнегибридного резонанса.

В разделе 1 формулируется общее выражение для полного потока энергии возбуждаемых плазменных волн и уходящих волн Z-моды. В разделе 2 излагается методика численного решения волнового уравнения для «холодной» Z-моды, позволяющая обойти особые точки (точки верхнегибридного резонанса), в которых происходит трансформация «холодных» волн в плазменные [9]. В разделе 3 приводятся результаты расчёта коэффициента аномального поглощения радиоволны $\kappa_{\rm a}$ на совокупности неоднородностей гауссовской формы. В разделе 4 обсуждаются особенности поведения коэффициента поглощения при увеличении поперечного размера неоднородностей. В приложении 1 приводится выражение для потока энергии излучаемой Z-моды и поглощаемых плазменных волн, а в приложении 2 — коэффициенты разложения общего решения волнового уравнения для индукции Z-моды в окрестности особых точек.

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Пусть плоская радиоволна обыкновенной поляризации

$$\mathbf{E}_{\rm t}(t,z)=\frac{1}{2}\,\mathbf{E}_{\rm t}(z)\exp(-i\omega t)+\text{к.\,с.}$$

с показателем преломления $n_{\rm t}$ и потоком энергии $S_{\rm t}=c/(8\pi)\,n_{\rm t}|E_{\rm t}(z)|^2$ нормально падает на слабонеоднородную по вертикали z ионосферу с невозмущённой концентрацией электронов $N_0(z)$ и магнитным полем $\mathbf{B}$, образующим малый угол с вертикалью ($\mathbf{B}\,||\,\mathbf{z}_0$, где $\mathbf{z}_0$ — орт оси z). Будем считать, что в ионосфере в области между уровнем верхнегибридного резонанса $\omega_{\rm p0}^2=\omega^2-\omega_{B\rm e}^2$ и уровнем отражения радиоволн $\omega_{\rm p0}^2=\omega^2$ существуют сильно вытянутые вдоль магнитного поля неоднородности с отрицательным возмущением концентрации $\delta N<0$. Здесь $\omega_{B\rm e}=eB/(mc)$ — гирочастота электронов в геомагнитном поле $\mathbf{B}$, $\omega_{\rm p0}=\sqrt{4\pi e^2N_0/m}$ — плазменная частота, соответствующая невозмущённой концентрации электронов $N_0(z)$, e и m — элементарный заряд и масса электрона соответственно. Поляризация неоднородностей в поле радиоволны приводит к возбуждению колебаний и волн «холодной» Z-моды и, как следствие, к аномальному поглощению самой радиоволны.

Процесс возбуждения Z-моды в потенциальном приближении описывается уравнением Пуассона:

$$\operatorname{div}(\hat{\varepsilon}\,\mathbf{E}_Z)=-\operatorname{div}(\delta\hat{\varepsilon}\,\mathbf{E}_{\rm t}(z)),\qquad \delta\hat{\varepsilon}=\frac{\partial\hat{\varepsilon}}{\partial N}\,\delta N,\tag{1}$$

где $\hat{\varepsilon}$ — тензор диэлектрической проницаемости холодной плазмы, компоненты которого в системе координат, связанной с магнитным полем, имеют вид [10]

$$\varepsilon_{xx}=\varepsilon_{yy}=\varepsilon_1+i\nu,\qquad \varepsilon_1=1-\frac{v}{1-u}\,;$$

$$\varepsilon_{xy}=-\varepsilon_{yx}=i\varepsilon_2,\qquad \varepsilon_2=\frac{\sqrt{u}\,v}{1-u}\,;\qquad \varepsilon_{zz}=\varepsilon_3,\qquad \varepsilon_3=1-v.\tag{2}$$

Здесь использованы обычные обозначения: $u=\omega_{B\rm e}^2/\omega^2$, $v=\omega_{\rm p}^2/\omega^2$, $\omega_{\rm p}^2=4\pi e^2N/m$, где $N=N_0+\delta N$ — полная концентрация электронов, включая возмущение δN. Оси x и y лежат в плоскости, ортогональной магнитному полю $\mathbf{B}$. В правую часть компонент $\varepsilon_{xx}=\varepsilon_{yy}$ включена малая мнимая добавка, которая при положительных значениях $\nu\to+0$ позволяет учесть энергетические потери

Z-моды в результате возбуждения коротковолновых плазменных колебаний в точках верхнегибридного резонанса $\varepsilon_1 = 0$, где $N = N_{\rm R} \equiv m\,(\omega^2 - \omega_{B{\rm e}}^2)/(4\pi e^2)$ [9] (см. ниже (9), (15)).

Будем рассматривать наиболее простую модель плоских неоднородностей $\delta N = \delta N(x)$ и перейдём в области верхнегибридного резонанса к потенциальному приближению:

$$\mathbf{E}_Z = -\nabla\varphi + \mathbf{E}_\perp\,, \tag{3}$$

полагая, что вихревая составляющая электрического поля Z-моды $\mathbf{E}_\perp$ значительно меньше потенциальной. Пренебрегая слабой неоднородностью невозмущённой ионосферы и учитывая, что в этом случае электрическое поле радиоволны меняется по закону

$$\mathbf{E}_{\rm t}(z) = \mathbf{E}_{\rm t}\,\exp(ik_{\rm t}z), \qquad E_{{\rm t}x} = E_{\rm t}/\sqrt{2}\,, \qquad E_{{\rm t}y} = -iE_{{\rm t}x}, \tag{4}$$

где $k_{\rm t} = k_0 n_{\rm t}$, $k_0 = \omega/c$, будем искать решение (1) в виде

$$\mathbf{E}_Z = \mathbf{E}_Z(x)\exp(ik_{\rm t}z). \tag{5}$$

Исключив поперечные составляющие Z-моды с помощью соотношений $E'_{\perp y}(x) = k_0^2\varepsilon_{yx}\varphi(x)$, $E_{\perp x} \ll E_{\perp y}$, $E_{\perp z} \ll E_{\perp y}$, которые следуют из уравнений Максвелла [2], приводим уравнение (1) к виду [7]

$$-[(\varepsilon_1 + i\nu)\,\varphi'(x)]' + k_0^2 G\varphi(x) = q_0\varepsilon'_1(x), \tag{6}$$

где $q_0 = -\,(1-\sqrt{u})\,E_{\rm t}/\sqrt{2}$. Здесь штрихом обозначены производные по координате x, а коэффициент $G = n_{\rm t}^2\varepsilon_3 + \varepsilon_2^2$ с точностью до малых членов порядка $\sqrt{u} = \omega_{B{\rm e}}/\omega \ll 1$ равен

$$G = u. \tag{7}$$

Согласно (6) электрическое поле Z-моды имеет в точке верхнегибридного резонанса $\varepsilon_1 = 0$ особенность типа «полюс», что обеспечивает конечность поглощений волн в пределе $\nu \to +0$. Переходя в (6) к плавно меняющейся индукции Z-моды

$$D = \varepsilon_1 E_{Zx}\,, \tag{8}$$

получаем окончательно

$$D_0^{(+)\prime\prime} - \frac{k_0^2\,G}{\varepsilon_1 + i\nu}\;D_0^{(+)} = q_0\,\varepsilon''_1, \tag{9}$$

где $\nu \to +0$, $\varepsilon_1 = -[\Delta N + \delta N(x)]/N_{\rm R}$, $\Delta N = N_0 - N_{\rm R}$. Верхний индекс $(+)$ в обозначении $D_0^{(+)}$ совпадает со знаком величины $\nu > 0$ и соответствует возбуждению коротковолновых плазменных колебаний. Нижний индекс (0) соответствует индукции Z-моды, вычисленной без учёта обратного высвечивания плазменных волн, распространяющихся внутри неоднородности в области $N < N_{\rm R}$.

Отметим, что в случае $\omega_{B{\rm e}}/\omega \approx n_\parallel^2 \ll 1$ электрическое поле Z-моды можно считать потенциальным не только в окрестности особой точки $\varepsilon_1 = 0$, но и при удалении от неё в области применимости приближения геометрической оптики вплоть до $n_\perp^2 \sim 1$. В этом приближении из (9) и определения (5) следуют выражения для волнового вектора $\mathbf{k}_Z$ и потока энергии S_{Zx}

[2] Здесь принято, что характерный масштаб неоднородностей достаточно мал: $a^2 \ll c^2/(\omega\omega_{Be})$.

Z-моды, справедливые с точностью до малых слагаемых порядка $\sqrt{u} \ll 1$: [3]

$$n_{\perp}^2 \equiv k_{Zx}^2/k_0^2 = -u/\varepsilon_1, \qquad n_{\parallel}^2 \equiv n_{\rm t}^2 = \sqrt{u}\,; \tag{10}$$

$$S_{Zx} = \frac{c}{8\pi}\,\frac{k_{Zx}}{k_0\,u}\,|\varepsilon_1\,E_{Zx}|^2\,. \tag{11}$$

Поэтому мы будем пользоваться уравнением (9) при $G = u$ во всём интервале изменения невозмущённого параметра $v_0 = \omega_{\rm p0}^2/\omega^2$: $1 - u < v_0 < 1$.

Будем считать далее, что неоднородности расположены на достаточно большом расстоянии друг от друга. Поглощение радиоволны на системе неоднородностей сводится в этом случае к усреднённому по ансамблю поглощению на одной из них. Граничные условия к уравнению (9) для отдельной неоднородности совпадают с условием излучения Z-моды на её границах $x = \pm x_0$:

$$D_0^{(+)}(x) = D_0^{(+)}(x_0)\exp[ik\,(|x| - x_0)], \qquad |x| \geq x_0, \tag{12}$$

где k — волновое число Z-моды за пределами неоднородности:

$$k = k_0\sqrt{GN_{\rm R}/\Delta N}\ . \tag{13}$$

Здесь и далее для простоты принято, что неоднородности симметричны относительно своей центральной плоскости $x = 0$: $\delta N(-x) = \delta N\,(x)$. Согласно [7] и (11) поток энергии Z-моды с индукцией $D_0^{(+)}(x)$, возбуждаемой в неоднородности и уходящей из неё, равен

$$S_{0Z}^{(+)} = \frac{c}{4\pi}\,\frac{k}{k_0G}\left|D_0^{(+)}(x_0)\right|^2 \equiv \frac{\omega}{4\pi k}\,\frac{N_{\rm R}}{\Delta N}\left|D_0^{(+)}(x_0)\right|^2\ . \tag{14}$$

Другой канал энергетических потерь Z-моды связан, как уже отмечалось, с возбуждением плазменных колебаний в точках верхнегибридного резонанса $x = \pm x_{\rm R}$, определяемых из условия $\delta N(\pm x_{\rm R}) = -\Delta N$. Поток энергии возбуждаемых плазменных волн $S_{0\Pi}^{(+)}$ совпадает с поглощением Z-моды в точках резонанса в пределе $\nu \to +0$ [7, 8]:

$$S_{0\Pi}^{(+)} = \frac{\omega}{4\mu}\left|D_0^{(+)}(\pm x_{\rm R})\right|^2, \qquad \mu = |\varepsilon_1'|_{x=\pm x_{\rm R}} = |\delta N'|_{x=\pm x_{\rm R}}/N_{\rm R}, \tag{15}$$

где μ — относительный градиент концентрации в точках резонанса. Потоки энергии плазменных волн, диссипирующих в объёме неоднородности и уходящих из неё в результате обратной трансформации в «холодную» Z-моду, приведены в приложении 1.

Используя выражения (14) и (15), нетрудно найти коэффициент аномального поглощения радиоволны, входящий в уравнение переноса энергии:

$$\frac{{\rm d}S_{\rm t}}{{\rm d}z} = -2k_0\kappa_{\rm a}S_{\rm t}. \tag{16}$$

---

[3] Выражение (11) непосредственно следует из общего определения потока энергии волны в холодной плазме

$$\mathbf{S} = c/(16\pi)\,[2\mathbf{n}\,|\mathbf{E}|^2 - \mathbf{E}^*(\mathbf{nE}) - \mathbf{E}\,(\mathbf{nE}^*)],$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{k}c/\omega$, при подстановке в него поляризационных коэффициентов, соответствующих распространению Z-моды в случае $\sqrt{u} \ll 1$, $k_{Zy} = 0$:

$$E_{Zy}/E_{Zx} = -i\,n_{\parallel}^2/n_{\perp}^2, \qquad E_{Zz}/E_{Zx} = n_{\parallel}/n_{\perp}.$$

Полагая, что возмущение δN состоит из одинаковых неоднородностей, находящихся на среднем расстоянии l друг от друга, получаем

$$\kappa_{\rm a}(\Delta N) = \left(S_{0Z}^{(+)} + S_{0\Pi}^{(+)}\right)/(2k_0 S_{\rm t} l). \tag{17}$$

Переходя далее к безразмерной переменной

$$y_0^{(+)}(x) = D_0^{(+)}(x)/q_0, \tag{18}$$

где функция $y_0^{(+)}(x)$ удовлетворяет аналогичному (9) уравнению

$$y_0^{(+)\prime\prime} - \frac{k_0^2\, G}{\varepsilon_1 + i\nu}\; y_0^{(+)}(x) = \varepsilon_1'', \tag{19}$$

приводим выражение для $\kappa_{\rm a}$ к виду

$$\kappa_{\rm a}(\Delta N) = \frac{(1-\sqrt{u})^2}{2\,u^{1/4}}\;\frac{1}{lk}\;\frac{N_{\rm R}}{\Delta N}\left[\left|y_0^{(+)}(x_0)\right|^2 + \delta_0\,\left|y_0^{(+)}(x_{\rm R})\right|^2\right], \tag{20}$$

где $\delta_0 = \pi k l_0$, $l_0 = \Delta N/|\delta N'|_{x=\pm x_{\rm R}}$. В (20) учтено, что поток энергии радиоволны $S_{\rm t} = c/(8\pi)\, n_{\rm t} \times \times |E_{\rm t}|^2$, и принято, что показатель преломления радиоволны равен своему значению на уровне верхнегибридного резонанса: $n_{\rm t} = u^{1/4}$. Нетрудно видеть, что это выражение остаётся справедливым и в слабонеоднородной ионосфере, в которой отстройка от резонанса $\Delta N = N_0(z) - N_{\rm R}$ является плавной функцией координаты z.

Отметим, что использованная методика расчёта интенсивности возбуждения коротковолновых плазменных колебаний справедлива в случае достаточно малых поперечных размеров неоднородностей, когда характерный масштаб изменения электрического поля плазменных волн в области верхнегибридного резонанса оказывается значительно меньше, чем масштаб изменения индукции «холодной» Z-моды. Согласно [7] соответствующее условие имеет вид

$$\frac{1}{\mu} \ll \left(\frac{1-4u}{3u}\;\frac{mc^2}{T_{\rm e}}\right)^{1/4}\frac{c}{\omega_{B\rm e}}\;, \tag{21}$$

где $T_{\rm e}$ — температура электронов. В условиях ионосферных экспериментов при $\Delta N/N_{\rm R} \sim 10^{-1}$ это неравенство оказывается значительно слабее, чем наложенное ранее условие $a^2 \ll c^2/(\omega\omega_{B\rm e})$. В противоположном (21) случае переход от «холодных» волн к плазменным происходит непрерывно без нарушения приближения геометрической оптики.

Отметим также, что в случае $\Delta N > \delta N_{\rm m}$, где $\delta N_{\rm m} = |\delta N(x=0)|$ — максимальное возмущение концентрации в центре неоднородности, плазменные волны не возбуждаются (профиль концентрации в неоднородности не пересекает уровня верхнегибридного резонанса) и второе слагаемое в правой части (20) отсутствует.

Решение $y_0^{(+)}(x)$ неоднородного уравнения (19) с граничными условиями излучения можно выразить через волновые функции $y_1^{(+)}(x)$ и $y_2^{(+)}(x)$ соответствующего однородного уравнения. При этом в рассматриваемом случае симметричных возмущений $\delta N(x) = \delta N(-x)$ можно считать, что $y_2(x) = y_1(-x)$. Выбирая в качестве $y_1(x)$ нормированную волновую функцию с приходящей из области $x < -x_0$ волной единичной амплитуды:

$$y_1(x) = \begin{cases} \exp[ik\,(x+x_0)] + [y_1(-x_0) - 1]\exp[-ik\,(x+x_0)], & x \le -x_0; \\ y_1(x_0)\exp[ik\,(x-x_0)], & x_0 \le x, \end{cases} \tag{22}$$

с учётом условия излучения (12) и (18) находим (см. [7])

$$y_0^{(+)}(\pm x_0) = \frac{\Delta N}{N_\mathrm{R}} \left\{ -1 + \frac{1}{2} \left[y_\mathrm{c}^{(+)}(x_0) - ik \int\limits_0^{x_0} y_\mathrm{c}^{(+)}(x)\,\mathrm{d}x \right] \right\}, \tag{23}$$

$$y_0^{(+)}(\pm x_\mathrm{R}) = \frac{1}{2}\,\frac{\Delta N}{N_\mathrm{R}} \left\{ y_\mathrm{c}^{(+)}(x_\mathrm{R}) - \frac{ik}{y_1^{(+)}(x_0)} \left[y_1^{(+)}(x_\mathrm{R}) \int\limits_0^{x_\mathrm{R}} y_\mathrm{c}^{(+)}(x)\,\mathrm{d}x + y_\mathrm{c}^{(+)}(x_\mathrm{R}) \int\limits_{x_\mathrm{R}}^{x_0} y_1^{(+)}(x)\,\mathrm{d}x \right] \right\}.$$

Здесь использовано определение (18) и введена симметричная функция

$$y_\mathrm{c}(x) = y_1(x) + y_1(-x). \tag{24}$$

Верхний индекс $(+)$ у функций $y_1(x)$ и $y_\mathrm{c}(x)$ в выражениях (22), (24) опущен, т. к. они справедливы и для функций $y_1^{(-)}(x)$ и $y_\mathrm{c}^{(-)}(x)$, использованных ниже. Методика расчёта волновых функций $y_1^{(\pm)}(x)$, $y_\mathrm{c}^{(\pm)}(x)$ изложена в следующем разделе.

В заключение этого раздела рассмотрим важный вопрос об удержании возбуждаемых плазменных волн внутри мелкомасштабных неоднородностей. Для этого воспользуемся волновой функцией [4]

$$\tilde{y}(x) = \left[y_\mathrm{c}^{(-)}(x) - y_\mathrm{c}^{(+)}(x) \right] \Big/ y_\mathrm{c}^{(-)}(x_\mathrm{R}) \;, \tag{25}$$

в которой исключена падающая на неоднородность «холодная» Z-мода. Верхние индексы у функций $y_1^{(\pm)}(x)$, $y_\mathrm{c}^{(\pm)}(x)$ совпадают со знаком величины ν в однородном уравнении (19). Предполагается, что соотношения (22), (24) выполняются как для функций $y_\mathrm{c}^{(+)}(x)$ и $y_1^{(+)}(x)$, так и для функций $y_\mathrm{c}^{(-)}(x)$ и $y_1^{(-)}(x)$.

Согласно [7, 9] (см. также [11]) величина $y_\mathrm{c}^{(-)}(x_\mathrm{R})\exp(-i\pi/4)$ пропорциональна амплитуде падающих на области резонанса $x = \pm x_\mathrm{R}$ плазменных волн. Эти волны частично трансформируются в Z-моду, уходящую за пределы неоднородности, а частично отражаются назад с амплитудой, пропорциональной $-y_\mathrm{c}^{(+)}(x_\mathrm{R})\exp(i\pi/4)$ в каждой из резонансных точек $x = \pm x_\mathrm{R}$. Отсюда следует, что коэффициент отражения плазменной волны R_p определяется выражением

$$R_\mathrm{p} = \exp(-i\pi/2) R_\Pi, \qquad R_\Pi = y_\mathrm{c}^{(+)}(x_\mathrm{R}) \Big/ y_\mathrm{c}^{(-)}(x_\mathrm{R}) \;. \tag{26}$$

При этом должно выполняться тождество

$$|\tilde{y}(\pm x_0)|^2 = \delta_0\,(1 - |R_\mathrm{p}|^2), \tag{27}$$

обеспечивающее сохранение энергии в процессе трансформации плазменных волн в «холодные». Параметр δ_0 определён в (20). Тождество (27) будет доказано в следующем разделе.

2. МЕТОДИКА РАСЧЁТА

Входящие в определение κ_a интегралы из (23) зависят от функций $y_\mathrm{c}^{(+)}(x)$ и $y_1^{(+)}(x)$. Последнюю можно представить в виде

$$y_1^{(+)}(x) = \left[y_\mathrm{c}^{(+)}(x) + y_\mathrm{a}^{(+)}(x) \right]/2, \tag{28}$$

[4] Функция $\tilde{y}(x)$ использовалась в [7] при построении согласованной структуры «холодных» и плазменных волн, возбуждаемых в неоднородности.

где $y_{\rm a}^{(+)}(x)$ — антисимметричная волновая функция:

$$y_{\rm a}^{(+)}(x)=y_1^{(+)}(x)-y_1^{(+)}(-x), \tag{29}$$

а $y_{\rm c}^{(+)}(x)$ — симметричная функция (24). Волновые функции $y_{\rm c}^{(\pm)}(x)$ и $y_{\rm a}^{(\pm)}(x)$, в свою очередь, можно записать в виде

$$y_{\rm c}^{(\pm)}(x)=R_{\rm c}^{(\pm)}\,y_{\rm nc}^{(\pm)}(x),\qquad y_{\rm a}^{(\pm)}(x)=R_{\rm a}^{(\pm)}\,y_{\rm na}^{(\pm)}(x), \tag{30}$$

где $y_{\rm nc}^{(\pm)}(x)$ и $y_{\rm na}^{(\pm)}(x)$ — ненормированные волновые функции однородного уравнения (19) с нулевыми граничными условиями в центре неоднородности:

$$y_{\rm nc}^{(\pm)\prime}\big|_{x=0}=0,\qquad y_{\rm na}^{(\pm)}\big|_{x=0}=0, \tag{31}$$

а нормировочные коэффициенты определяются выражениями

$$R_{\rm c}^{(\pm)}=2\left[y_{\rm nc}^{(\pm)}(x_0)+iy_{\rm nc}^{(\pm)\prime}(x_0)\,/k\right]^{-1};\qquad R_{\rm a}^{(\pm)}=-2\left[y_{\rm na}^{(\pm)}(x_0)+iy_{\rm na}^{(\pm)\prime}(x_0)\,/k\right]^{-1}. \tag{32}$$

При выводе (32) следует использовать асимптотику функций $y_{\rm c}^{(\pm)}(x)$ и $y_{\rm a}^{(\pm)}(x)$ на границе и за пределами неоднородности, согласно (22) имеющую вид

$$y_{\rm c}^{(\pm)}(x\ge x_0)=\exp[-ik\,(x-x_0)]+[y_{\rm c}^{(\pm)}(x_0)-1]\exp[ik\,(x-x_0)],$$

$$y_{\rm a}^{(\pm)}(x\ge x_0)=-\exp[-ik\,(x-x_0)]+[y_{\rm a}^{(\pm)}(x_0)+1]\exp[ik\,(x-x_0)].$$

Однородное уравнение (19) допускает численное интегрирование всюду, за исключением особых точек $x=\pm x_{\rm R}$, в которых его волновые функции, вообще говоря, имеют логарифмическую особенность. Важно, однако, что в окрестности особых точек аналогично [12] можно построить аналитическое решение этого уравнения путём выделения логарифмической особенности в явном виде и разложения всех остальных коэффициентов и функций в ряд по степеням малого приращения $\Delta x=x\mp x_{\rm R}$. При выполнении этой процедуры для конкретной формы возмущения $\delta N(x)$ перейдём к безразмерной переменной

$$\tilde x=x/a, \tag{33}$$

где a — характерный масштаб изменения концентрации в неоднородности. Однородное уравнение (19) принимает в этом случае вид

$$\frac{{\rm d}^2}{{\rm d}\tilde x^2}\,y^{(\pm)}(\tilde x)=\frac{k^2a^2}{-[1+\delta N(\tilde x)/\Delta N]+i\nu}\,y^{(\pm)}(\tilde x),\qquad \nu\to\pm0. \tag{34}$$

Рассматривая для определённости особую точку $\tilde x=\tilde x_{\rm R}$, где $\tilde x_{\rm R}=x_{\rm R}/a$, и разлагая коэффициент при $y^{(\pm)}(\tilde x)$ в правой части (34) в ряд Лорана по приращению $\Delta\tilde x=\tilde x-\tilde x_{\rm R}$, получаем

$$\frac{k^2a^2}{-[1+\delta N/\Delta N]+i\nu}=\frac{A}{\Delta\tilde x-i\nu}+A_0+A_1\,\Delta\tilde x+A_2\,(\Delta\tilde x)^2+\ldots, \tag{35}$$

где

$$A=-ka\,\delta_0/\pi, \tag{36}$$

а остальные коэффициенты явным образом зависят от величины и формы неоднородности $\delta N(\tilde x)$. В случае неоднородности гауссовской формы (см. ниже (50)) они приведены в приложении 2.

Используя (35), нетрудно убедиться, что общее решение уравнения (34) можно представить в виде суммы двух слагаемых:

$$y_{\rm nc}^{(\pm)}(\tilde{x}) = C_{\rm c}^{(1)}\, y^{(1,\pm)}(\tilde{x}) + C_{\rm c}^{(2)}\, y^{(2)}(\tilde{x}), \qquad y_{\rm na}^{(\pm)}(\tilde{x}) = C_{\rm a}^{(1)}\, y^{(1,\pm)}(\tilde{x}) + C_{\rm a}^{(2)}\, y^{(2)}(\tilde{x}), \tag{37}$$

где $C_{\rm c}^{(1)}$, $C_{\rm c}^{(2)}$, $C_{\rm a}^{(1)}$ и $C_{\rm a}^{(2)}$ — произвольные постоянные, которые, не нарушая общности, можно считать действительными. Функция $y^{(1,\pm)}(\tilde{x})$ имеет логарифмическую особенность при $\tilde{x} = \tilde{x}_{\rm R}$:

$$y^{(1,\pm)}(\tilde{x}) = y^{(3)}(\tilde{x}) + Ay^{(2)}(\tilde{x}) \ln(-\Delta\tilde{x} + i\nu), \tag{38}$$

где $\arg(-\Delta\tilde{x}) = 0$ при $\Delta\tilde{x} < 0$, а функции $y^{(2)}(\tilde{x})$ и $y^{(3)}(\tilde{x})$ являются аналитическими и могут быть разложены в ряд по степеням приращения $\Delta\tilde{x} = \tilde{x} - \tilde{x}_{\rm R}$:

$$y^{(2)}(\tilde{x}) = \Delta\tilde{x} + b_2\,(\Delta\tilde{x})^2 + b_3\,(\Delta\tilde{x})^3 + b_4\,(\Delta\tilde{x})^4 + \ldots,$$

$$y^{(3)}(\tilde{x}) = 1 + a_2\,(\Delta\tilde{x})^2 + a_3\,(\Delta\tilde{x})^3 + a_4\,(\Delta\tilde{x})^4 + \ldots. \tag{39}$$

Коэффициенты a_i, b_i в рядах (39) выражаются через коэффициенты в разложении (35). Соответствующие выражения приведены в приложении 2. Индексы $(\pm)$ в (37), (38) совпадают, как обычно, со знаком величины $\nu \to \pm 0$ в знаменателе (34). Согласно (38) аналитическое продолжение волновой функции $y^{(1,\pm)}(\tilde{x})$ из области $\Delta\tilde{x} < 0$ в область $\Delta\tilde{x} > 0$ имеет вид

$$y^{(1,\pm)}(\tilde{x}) = \begin{cases} y^{(1)}(\tilde{x}) = y^{(3)}(\tilde{x}) + Ay^{(2)}(\tilde{x}) \ln(|\Delta\tilde{x}|), & \Delta\tilde{x} < 0; \\ y^{(1)}(\tilde{x}) \pm i\pi A y^{(2)}(\tilde{x}), & \Delta\tilde{x} > 0. \end{cases} \tag{40}$$

Выражения (37)–(40) позволяют продолжить волновые функции $y_{\rm nc}^{(\pm)}(x)$ и $y_{\rm na}^{(\pm)}(x)$ из области $x < x_{\rm R}$, где они определены граничными условиями (31), в область $x > x_{\rm R}$, в которой определены нормированные коэффициенты (32), и тем самым рассчитать искомые волновые функции $y_{\rm c}^{(\pm)}(x)$ и $y_{1}^{(\pm)}(x)$ во всём интервале $x \in [0,\, x_0]$.

Используя описанный метод, можно получить выражение

$$|R_{\rm p}|^2 = |R_{\text{п}}|^2 = 1 - \delta_0\, |y_{\rm c}^{(+)}(x_{\rm R})|^2 \tag{41}$$

и доказать тождество (27). Действительно, согласно (37), (40) можно считать, что симметричные волновые функции $y_{\rm nc}^{(+)}(x)$ и $y_{\rm nc}^{(-)}(x)$ в области $x \in [0,\, x_{\rm R}]$ действительны и равны друг другу, а в области $x \in [x_{\rm R},\, x_0]$ становятся комплексно-сопряжёнными [5]:

$$y_{\rm nc}^{(-)}(x) = \begin{cases} y_{\rm nc}^{(+)}(x), \quad \operatorname{Im} y_{\rm nc}^{(\pm)} = 0, & x \in [0,\, x_{\rm R}]; \\ y_{\rm nc}^{(+)^*}(x), & x \in [x_{\rm R},\, x_0], \end{cases} \tag{42}$$

где индекс звёздочка обозначает комплексное сопряжение. Используя эти свойства, из (26) получаем

$$1 - |R_{\rm p}|^2 = 1 - \left|\frac{R_{\rm c}^{(+)}}{R_{\rm c}^{(-)}}\right|^2 \equiv \left|R_{\rm c}^{(+)}\right|^2 \frac{\Delta(x_0)}{k}\,, \tag{43}$$

[5] Для этого достаточно выбрать действительные граничные условия для функций $y_{\rm nc}^{(+)}(x)$ и $y_{\rm nc}^{(-)}(x)$ в начале координат при $y_{\rm nc}^{(+)}(0) = y_{\rm nc}^{(-)}(0)$. Аналогичными свойствами обладают также антисимметричные волновые функции $y_{\rm na}^{(+)}(x)$ и $y_{\rm na}^{(-)}(x)$ при $y_{\rm a}^{(-)\prime}(0) = y_{\rm a}^{(+)\prime}(0)$.

где

$$\Delta = \mathrm{Im}\big(y_{\mathrm{nc}}^{(+)}\big)\,\mathrm{Re}\big(y_{\mathrm{nc}}^{(+)\prime}\big) - \mathrm{Im}\big(y_{\mathrm{nc}}^{(+)\prime}\big)\,\mathrm{Re}\big(y_{\mathrm{nc}}^{(+)}\big). \tag{44}$$

Нетрудно видеть, что вронскиан $\Delta(x) = \mathrm{const}$ во всей области $x > x_{\mathrm{R}}$, в которой мнимой добавкой $i\nu$ в (34) и в однородном уравнении (19) можно пренебречь. Вычисляя $\Delta(x)$ при $x \to x_{\mathrm{R}} + 0$ с помощью выражений $y_{\mathrm{nc}}^{(+)}(x_{\mathrm{R}}) = C_{\mathrm{c}}^{(1)}$, $\mathrm{Im}\, y_{\mathrm{nc}}^{(+)\prime}(x \to x_{\mathrm{R}}) = C_{\mathrm{c}}^{(1)} \pi A/a$, следующих из (37) и (40), получаем

$$\Delta = -y_{\mathrm{nc}}^{(+)2}(x_{\mathrm{R}})\pi A/a. \tag{45}$$

Подставляя сюда коэффициент $A = -ka\,\delta_0/\pi$ (см. (36)), приводим формулу (43) к виду (41).

Аналогично выражение для $\tilde{y}(x_0)$ (25) с помощью (42), (45) приводится к виду

$$\tilde{y}(x_0) = \frac{R_{\mathrm{c}}^{(+)}}{y_{\mathrm{nc}}(x_{\mathrm{R}})}\,\frac{\Delta}{k} \equiv \delta_0\, y_{\mathrm{c}}^{(+)}(x_{\mathrm{R}}), \tag{46}$$

из которого с учётом (41) непосредственно следует тождество (27).

3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЁТА

Примем во внимание, что коэффициент аномального поглощения (20) легко определяется в пределе мелкомасштабных неоднородностей с достаточно малыми поперечными размерами a в сравнении с длиной волны «холодной» Z-моды или, точнее, при

$$\delta_0 = \pi k l_0 \ll 1, \tag{47}$$

где $k = (\omega_{B\mathrm{e}}/c)\sqrt{N_{\mathrm{R}}/\Delta N}$ — волновое число Z-моды при отстройке ΔN от уровня верхнегибридного резонанса, а параметр $l_0 \approx a$ определён в (20). Согласно [6, 7] в этом случае справедливо локальное приближение, когда индукция Z-моды определяется величиной стороннего тока в той же точке x: $D_0^{(+)}(x) = -(4\pi i/\omega)\, j_x^{\mathrm{st}}(x) = -q_0\,\delta N(x)/N_{\mathrm{R}}$. В результате с учётом определения (18) получаем $y_0^{(+)}(\pm x_0) = 0$, $y_0^{(+)}(\pm x_{\mathrm{R}}) = \Delta N/N_{\mathrm{R}}$,

$$\kappa_{\mathrm{a}}^{(0)} = \frac{(1-\sqrt{u})^2}{2u^{1/4}}\;\frac{\pi l_0}{l}\;\frac{\Delta N}{N_{\mathrm{R}}}\;. \tag{48}$$

Коэффициент отражения плазменной волны (26), (41) при $\delta_0 \ll 1$ близок к единице и равен [7]

$$|R_{\mathrm{p}}|^2 = 1 - 4\delta_0. \tag{49}$$

Рассмотрим теперь, как меняется аномальное поглощение с увеличением поперечного размера неоднородности.

Все расчёты проводились для неоднородностей гауссовской формы:

$$\delta N(x) = -\delta N_{\mathrm{m}} \exp(-x^2/a^2), \tag{50}$$

при $\omega_{B\mathrm{e}} = 8{,}35\cdot 10^6$ рад/с, частоте радиоволны $\omega = 4{,}5\omega_{B\mathrm{e}}$ и расстоянии между неоднородностями $l = 6a$ (граница неоднородности располагалась на расстоянии $x_0 = 3a$ от её центра).

Отметим, что в случае (50) выражение (48) и параметр δ_0 (20) принимают вид ($l_0 = a\,(2\tilde{x}_{\mathrm{R}})^{-1}$):

$$\kappa_{\mathrm{a}}^{(0)} = \frac{(1-\sqrt{u})^2}{2u^{1/4}}\;\frac{\pi a}{2l\,\tilde{x}_{\mathrm{R}}}\;\frac{\Delta N}{N_{\mathrm{R}}}\;, \tag{51}$$

$$\delta_0 = \pi k a/(2\tilde{x}_{\mathrm{R}}), \tag{52}$$

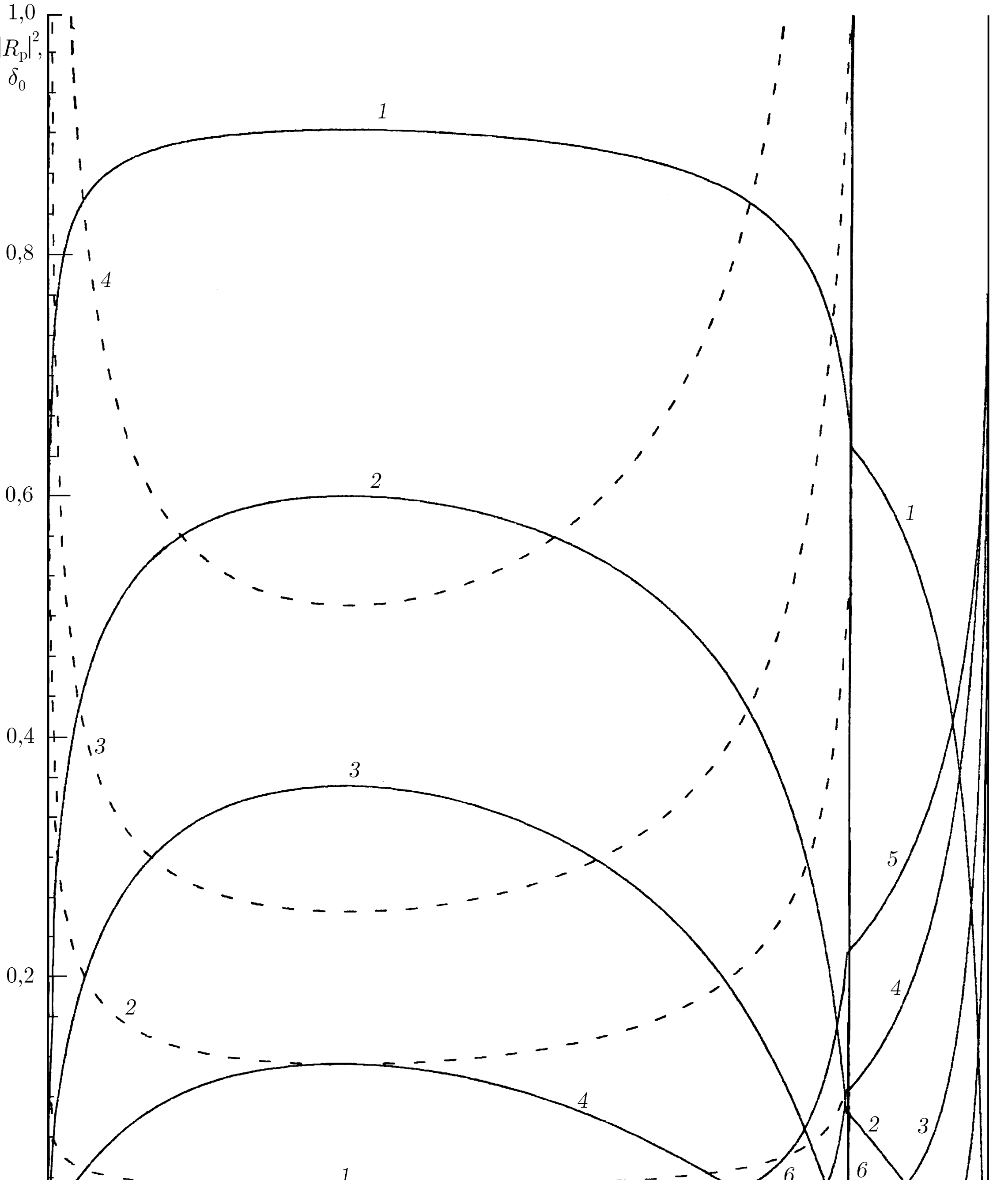

Рис. 1. Поведение коэффициента отражения плазменных волн $|R_\mathrm{p}|^2$ и параметра δ_0 (штриховые кривые) для различных поперечных размеров неоднородностей a. Кривая *1* соответствует $a = 5$ см, *2* — $a = 25$ см, *3* — $a = 50$ см, *4* — $a = 100$ см, *5* — $a = 200$ см, *6* — $a = 500$ см; $\delta N_\mathrm{m}/N_\mathrm{R} = 0{,}02$

где $\tilde{x}_\mathrm{R} = x_\mathrm{R}/a$ — обезразмеренная координата точки верхнегибридного резонанса:

$$\tilde{x}_\mathrm{R} = \sqrt{\ln(\delta N_\mathrm{m}/\Delta N)}\,. \tag{53}$$

На рис. 1–4 представлены результаты расчёта соответствующих коэффициентов и параметров

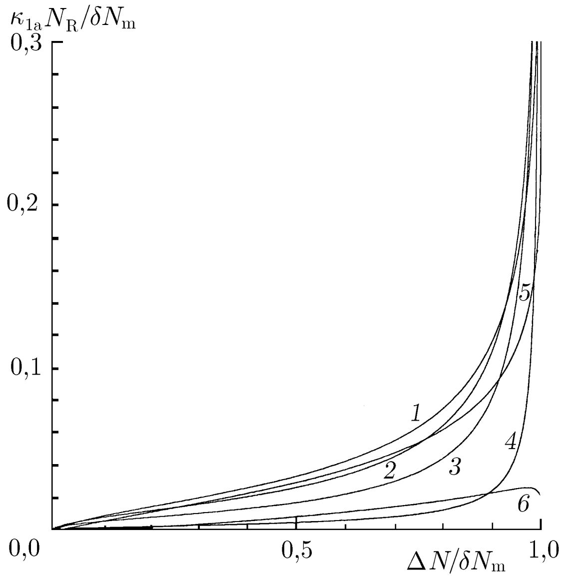

Рис. 2. Поведение коэффициента $\kappa_{1\mathrm{a}}(\Delta N)$ в области I. Параметры неоднородностей и номера кривых те же, что на рис. 1

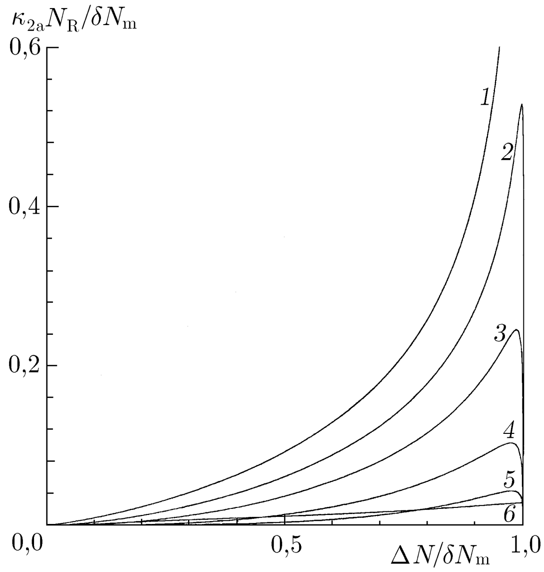

Рис. 3. Поведение коэффициента $\kappa_{2\mathrm{a}}(\Delta N)$ в области I. Параметры неоднородностей и номера кривых те же, что на рис. 1, 2

при увеличении поперечного размера неоднородностей от 5 до 500 см ($a = 5$, 25, 50, 100, 200 и 500 см) в случае возмущения концентрации $\delta N_{\mathrm{m}} = 0{,}02 N_{\mathrm{R}}$, малого в сравнении с максимальной отстройкой $\Delta N_{\mathrm{m}} = N_{\mathrm{R}}\, u/(1-u) \equiv m\omega_{Be}^2/(4\pi e^2)$, равной отстройке от уровня верхнегибридного резонанса до уровня отражения радиоволны в невозмущённой ионосфере. Рисунок 1 носит вспомогательный характер и иллюстрирует ход параметра δ_0 (52) и коэффициента отражения $|R_{\mathrm{p}}|^2$ (41) в зависимости от величины $\Delta N = N_0 - N_{\mathrm{R}}$. Видно, что параметр δ_0 нарастает на границах области I, где

$$\Delta N \in [0, \delta N_{\mathrm{m}}], \tag{54}$$

в которой происходит возбуждение плазменных волн внутри неоднородностей (в пределе $\Delta N \to \delta N_{\mathrm{m}}$ параметр δ_0 имеет корневую особенность: $\delta_0 \propto [\delta N_{\mathrm{m}}/(\delta N_{\mathrm{m}} - \Delta N)]^{1/2}$, а в случае $\Delta N \to 0$ нарастает пропорционально $[(N_{\mathrm{R}}/\Delta N)/\ln(\delta N_{\mathrm{m}}/\Delta N)]^{1/2}$). Видно также, что соотношение (49) выполняется лишь при $a \le 25$ см, $\delta_0 \le 0{,}1$. При увеличении a до 50 см и более величина $|R_{\mathrm{p}}|^2$ становится меньше 0,5, т. е. плазменные волны практически не удерживаются неоднородностями. Осцилляции $|R_{\mathrm{p}}|^2$ в узком слое вблизи верхней границы области I связаны с уменьшением расстояния между точками резонанса $x = \pm x_{\mathrm{R}}$ при $\Delta N \to \delta N_{\mathrm{m}}$.

Коэффициент аномального поглощения (20) в области I естественно разбивается на два слагаемых:

$$\kappa_{\mathrm{a}}(\Delta N) = \kappa_{1\mathrm{a}}(\Delta N) + \kappa_{2\mathrm{a}}(\Delta N), \tag{55}$$

первое из которых связано с излучением возбуждаемой Z-моды, а второе — с трансформацией Z-моды в плазменные волны. Вторая область аномального поглощения расположена выше первой и ограничивается уровнем отражения радиоволны $\Delta N = \Delta N_{\mathrm{m}} = N_{\mathrm{R}} u/(1-u)$:

$$\Delta N \in [\delta N_{\mathrm{m}}, \Delta N_{\mathrm{m}}]. \tag{56}$$

В области II профиль концентрации в неоднородностях не пересекает уровень верхнегибридного резонанса, и поглощение радиоволны связано только с излучением возбуждаемой Z-моды:

$$\kappa_{\mathrm{a}}(\Delta N) = \kappa_{1\mathrm{a}}(\Delta N), \qquad \kappa_{2\mathrm{a}}(\Delta N) = 0. \tag{57}$$

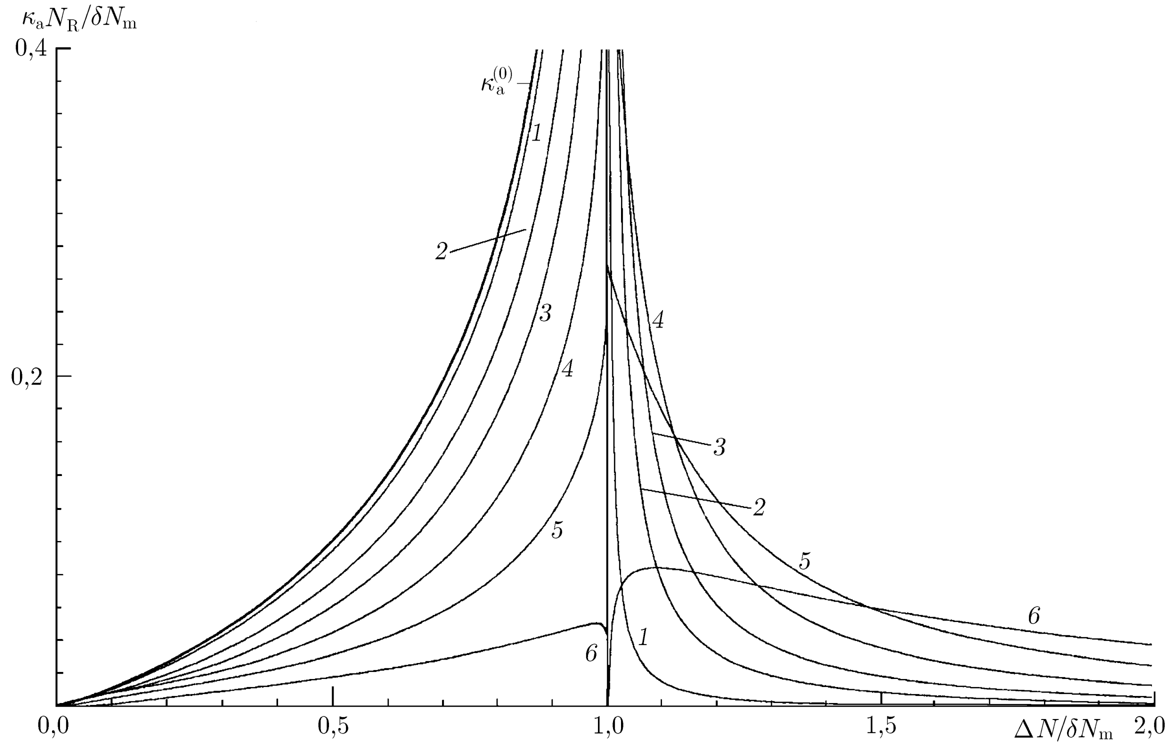

Рис. 4. Поведение коэффициента аномального поглощения $\kappa_{\rm a}(\Delta N)$ в областях I и II. Условия и номера кривых те же, что на рис. 1–3. Кривая $\kappa_{\rm a}^{(0)}(\Delta N)$ соответствует пределу $a \ll c/\omega$

Поведение коэффициентов $\kappa_{1\rm a}(\Delta N)$ и $\kappa_{2\rm a}(\Delta N)$ в области I при различных значениях a представлено на рис. 2 и 3 соответственно. На рис. 4 показан полный коэффициент поглощения $\kappa_{\rm a}(\Delta N)$ в обоих областях (протяжённость кривых в области II ограничена на этом рисунке величиной $\Delta N/\delta N_{\rm m} = 2$; в дальнейшем кривые $\kappa_{\rm a}(\Delta N)$ продолжают плавно спадать вплоть до границы второй области $\Delta N/\delta N_{\rm m} = 2{,}6$). На рис. 4 приведена также кривая $\kappa_{\rm a}^{(0)}(\Delta N) = \kappa_{2\rm a}^{(0)}(\Delta N)$ (51), соответствующая пределу малых поперечных размеров неоднородностей. Естественно, что эта кривая оказывается близкой к расчётной зависимости $\kappa_{\rm a}(\Delta N)$ при $a = 5$ см. Однако с увеличением a до 50 см и более зависимость $\kappa_{\rm a}(\Delta N)$ начинает существенно отличаться от асимптотической.

Коэффициент $\kappa_{\rm a}(\Delta N)$ имеет характерный максимум в районе $\Delta N = \delta N_{\rm m}$. С увеличением поперечного размера неоднородностей величина $\kappa_{1\rm a}(\Delta N)$ в основном растёт как в области I, так и в области II, тогда как коэффициент $\kappa_{2\rm a}(\Delta N)$ в основном уменьшается.

Аналогичным образом ведут себя интегралы

$$\Gamma_1^{\rm I,II} = 2k_0 \int \kappa_{1\rm a}(\Delta N)\,{\rm d}z, \qquad \Gamma_2^{\rm I,II} = 2k_0 \int \kappa_{2\rm a}(\Delta N)\,{\rm d}z, \tag{58}$$

вычисленные от $\kappa_{1\rm a}$ и $\kappa_{2\rm a}$ по областям I и II соответственно. Они представлены в табл. 1 для $\delta N_{\rm m} = 0{,}02 N_{\rm R}$ в случае линейного изменения концентрации в поглощающем слое: $\Delta N/N_{\rm R} = z/L$ при $L = 5 \cdot 10^6$ см.

Вспомогательные интегралы (58) позволяют оценить вклад различных процессов в величину полного интегрального поглощения радиоволны

$$\Gamma = \Gamma^{\rm I} + \Gamma^{\rm II} \equiv 2k_0 \int \kappa_{\rm a}(\Delta N)\,{\rm d}z, \tag{59}$$

Таблица 1. Интегральные характеристики аномального поглощения радиоволны в зависимости от поперечного размера неоднородностей a при $\delta N_{\rm m}/N_{\rm R} = 0{,}02$

a, см	$\Gamma_1^{\rm I}$	$\Gamma_2^{\rm I}$	$\Gamma^{\rm I}$	$\Gamma^{\rm II}$	Γ
5	0,059	0,834	0,893	0,051	0,944
25	0,180	0,509	0,689	0,207	0,896
50	0,234	0,304	0,538	0,309	0,847
100	0,247	0,131	0,378	0,408	0,786
200	0,189	0,048	0,237	0,469	0,706
500	0,046	0,057	0,103	0,401	0,504

Таблица 2. Зависимость интегрального поглощения радиоволны от максимального возмущения концентрации в неоднородностях $\delta N_{\rm m}$

$\delta N_{\rm m}/N_{\rm R}$	$a = 100$ см					$a = 500$ см					$\Gamma^{(0)}$
	$\Gamma_1^{\rm I}$	$\Gamma_2^{\rm II}$	$\Gamma^{\rm I}$	$\Gamma^{\rm II}$	Γ	$\Gamma_1^{\rm I}$	$\Gamma_2^{\rm I}$	$\Gamma^{\rm I}$	$\Gamma^{\rm II}$	Γ	
0,02	0,247	0,131	0,378	0,408	0,786	0,046	0,057	0,103	0,401	0,504	0,968
0,03	0,566	0,393	0,959	0,760	1,719	0,167	0,113	0,280	0,656	0,936	2,214
0,04	1,006	0,839	1,845	1,054	2,899	0,393	0,117	0,570	0,688	1,258	3,973
0,05	1,559	1,495	3,054	0,638	3,692	0,734	0,256	0,990	0,188	1,178	6,249

где $\Gamma^{\rm I} = \Gamma_1^{\rm I} + \Gamma_2^{\rm I}$, $\Gamma^{\rm II} \equiv \Gamma_1^{\rm II}$. Значения Γ и $\Gamma^{\rm I}$ при однократном прохождении волной поглощающего слоя также представлены в табл. 1. Видно, что несмотря на рост интеграла $\Gamma_1^{\rm I} + \Gamma^{\rm II}$, связанного с непосредственным излучением возбуждаемой Z-моды, полное поглощение радиоволны Γ уменьшается с ростом a за счёт уменьшения $\Gamma_2^{\rm I}$.

Отметим, что интеграл (58) по области I для коэффициента $\kappa_{\rm a}^{(0)}$ (51) в рассматриваемом случае (50) совпадает с интегральным поглощением радиоволны, вычисленным в рамках теории возмущений [4, 13]:

$$\Gamma^{(0)} = k_0 L\,\frac{(1-\sqrt{u})^2}{2u^{1/4}}\,\pi \left\langle \left|\frac{\delta N}{N_{\rm R}}\right|^2 \right\rangle, \qquad \langle |\delta N|^2\rangle = (\delta N_{\rm m})^2 \left[\frac{a}{l}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right], \tag{60}$$

где $\langle |\delta N|^2\rangle = l^{-1}\int (\delta N)^2\,{\rm d}x$ — среднеквадратичное возмущение концентрации в неоднородностях. В рассматриваемом случае $\delta N_{\rm m}/N_{\rm R} = 0{,}02$, $l = 6a$, и величина $\Gamma^{(0)} = 0{,}968$ примерно вдвое превышает величину $\Gamma = 0{,}503$ при $a = 500$ см.

Существенное увеличение аномального поглощения радиоволн происходит с ростом возмущения концентрации в неоднородностях с $\delta N_{\rm m} < \Delta N_{\rm m} \approx 0{,}052 N_{\rm R}$. Так, в мелкомасштабном пределе (60) поглощение $\Gamma^{(0)} \propto (\delta N_{\rm m})^2$. Рост $\kappa_{\rm a}(\Delta N)$ с увеличением $\delta N_{\rm m}$ от $0{,}02 N_{\rm R}$ до $0{,}05 N_{\rm R}$ для неоднородностей с поперечными размерами $a = 100$ см и $a = 500$ см иллюстрируется на рис. 5 и 6 соответственно. Для сравнения на этих рисунках приведена кривая $\kappa_{\rm a}^{(0)}(\Delta N)$ (51), которая в случае принятой на рисунках нормировки (вертикальная ось — $\kappa_{\rm a} N_{\rm R}/\delta N_{\rm m}$, горизонтальная ось — $\Delta N/\delta N_{\rm m}$) от параметров неоднородностей (50) вообще не зависит. Интегральное поглощение радиоволны вследствие различных процессов в областях I и II, а также полное поглощение $\Gamma = \Gamma^{\rm I} + \Gamma^{\rm II}$ при однократном прохождении поглощающего слоя приведены в табл. 2 для тех

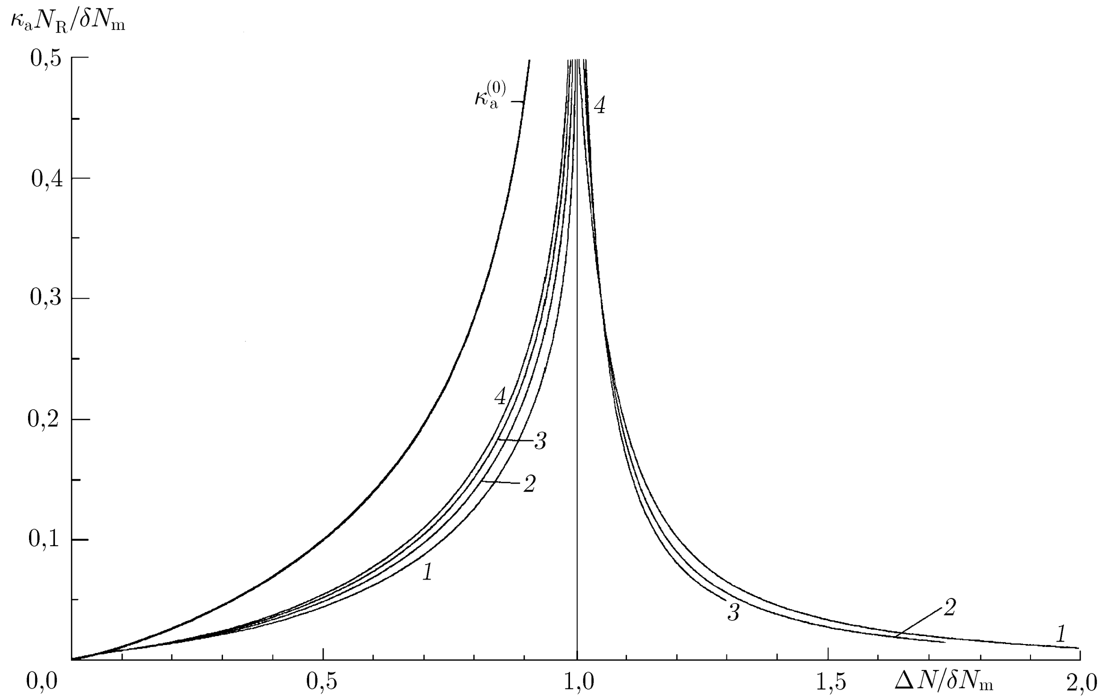

Рис. 5. Поведение коэффициента $\kappa_a(\Delta N)$ для различных значений δN_m при $a = 100$ см. Кривая *1* соответствует $\delta N_m = 0{,}02 N_R$, *2* — $\delta N_m = 0{,}03 N_R$, *3* — $\delta N_m = 0{,}04 N_R$, *4* — $\delta N_m = 0{,}05 N_R$. Кривая $\kappa_a^{(0)}(\Delta N)$ та же, что на рис. 4

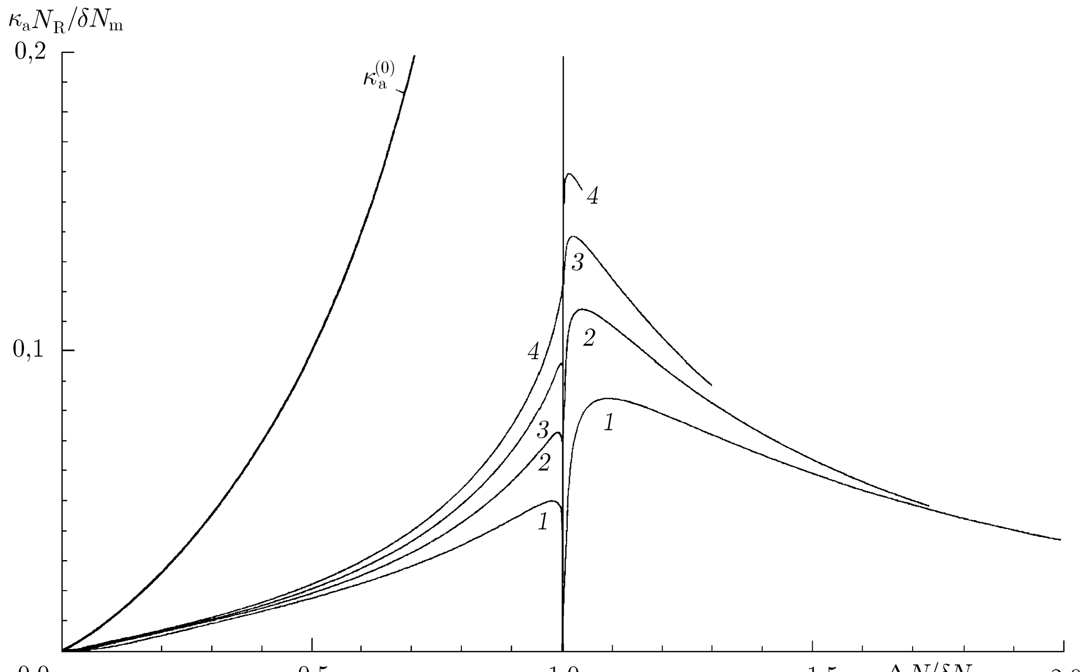

Рис. 6. Поведение коэффициента $\kappa_a(\Delta N)$ при $a = 500$ см. Значения δN_m и номера кривых те же, что на рис. 5

Таблица 3. Интегральное поглощение радиоволны в случае больших возмущений концентрации ($\delta N_{\rm m} > \Delta N_{\rm m}$)

$\delta N_{\rm m}/N_{\rm R}$	$a = 100$ см			$a = 500$ см			$\Gamma^{(0)}$
	Γ_1	Γ_2	Γ	Γ_1	Γ_2	Γ	
0,06	1,125	1,357	2,482	0,767	0,196	0,963	4,251
0,07	0,974	1,157	2,131	0,769	0,133	0,902	3,550
0,08	0,910	1,039	1,949	0,786	0,094	0,880	3,186
0,09	0,876	0,959	1,835	0,808	0,068	0,876	2,951

же неоднородностей, что и на рис. 5 и 6. Значения $\Gamma^{(0)}(\delta N_{\rm m})$ (60) также представлены в табл. 2. Видно, что максимальная величина поглощения может достигать $\Gamma = 1{,}258$ при $a = 500$ см и $\Gamma = 3{,}692$ при $a = 100$ см, что соответствует сильному ослаблению радиоволны в поглощающем слое.

В заключение кратко обсудим поведение аномального поглощения в случае больши́х возмущений концентрации, когда $\delta N_{\rm m} > \Delta N_{\rm m}$. В этом случае область I распространяется на весь интервал допустимых значений $\Delta N \in [0, \Delta N_{\rm m}]$, а область II отсутствует. Интегральные характеристики Γ_1, Γ_2 и полное поглощение радиоволны $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ для неоднородностей с радиусом $a = 100$ см и 500 см приведены в табл. 3 при $\delta N_{\rm m}/N_{\rm R} = 0{,}06$; $0{,}07$; $0{,}08$ и $0{,}09$. Там же представлена величина $\Gamma^{(0)}$, вычисленная в интервале $\Delta N \in [0, \Delta N_{\rm m}]$. Видно, что с увеличением $\delta N_{\rm m} > \Delta N_{\rm m}$ полное поглощение радиоволны Γ и отношение Γ_2/Γ_1 плавно убывают. Максимум коэффициента аномального поглощения $\kappa_{\rm a}(\Delta N)$ находится вблизи уровня отражения радиоволны, где $\Delta N = \Delta N_{\rm m}$.

Полученные результаты существенно отличаются от поведения коэффициента $\kappa_{\rm a}(\Delta N)$ (17) в методическом случае неоднородностей почти прямоугольной формы [7]:

$$\delta N(x) = \begin{cases} -\delta N_{\rm m}, & |x| < a; \\ 0, & |x| > a. \end{cases} \tag{61}$$

Действительно, в пределе резкого изменения возмущения концентрации на границах неоднородности трансформация «холодных» волн в плазменные не происходит ($\kappa_{2{\rm a}} \to 0$). В то же время коэффициент $\kappa_{1{\rm a}}$ в случае (61) существенно возрастает и оказывается примерно в $3 \div 10$ раз больше, чем в рассмотренном нами случае неоднородностей гауссовской формы (50) с теми же параметрами. Отметим также, что использованная в [7] методика не позволяет вычислить коэффициент аномального поглощения в области II при $\Delta N > \delta N_{\rm m}$.

4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Проведённые расчёты показывают, что в случае (50) при $\omega = 4{,}5\,\omega_{B{\rm e}}$ ограничение на поперечные размеры мелкомасштабных неоднородностей с локальным возбуждением Z-моды оказывается достаточно сильным: $a < 50$ см $\approx 0{,}1c/\omega$, $c/\omega \approx 8$ м. Именно в этом случае оказываются справедливыми асимптотические выражения (51), (52), (60) для коэффициентов $\kappa_{\rm a}(\Delta N)$, параметра δ_0 и полного интегрального поглощения радиоволны $\Gamma^{(0)}$. При увеличении поперечного размера неоднородностей становятся существенными процессы переноса энергии Z-моды, возбуждаемой внутри каждой из неоднородностей. Это усиливает эффект непосредственного высвечивания возбуждаемой Z-моды за пределы неоднородностей (без предварительной трансформации в плазменные волны). Возбуждение уходящей Z-моды происходит также в случае достаточно больших значений $\Delta N = N_0 - N_{\rm R} > \delta N_{\rm m}$, когда профиль концентрации в неоднородностях не пересекает уровня верхнегибридного резонанса (см. табл. 1 и 2). Однако с увеличением поперечного размера неоднородностей аномальное поглощение радиоволны уменьшается вследствие ослабления трансформации Z-моды в плазменные волны. Так, в случае $a = 5$ м интегральное поглощение ослабевает примерно в 2 раза при $\delta N_{\rm m}/N_{\rm R} = 0{,}02$ ($\Gamma \approx 0{,}5$) и в 3 раза при $\delta N_{\rm m}/N_{\rm R} = 0{,}04$ ($\Gamma \approx \approx 1{,}3$) в сравнении со случаем $a < 0{,}5$ м. Максимальное поглощение происходит при возмущении концентрации $\delta N_{\rm m}$ порядка максимальной отстройки $\Delta N_{\rm m}$ на верхней границе поглощающего слоя $0 < \Delta N < \Delta N_{\rm m}$, соответствующей уровню отражения радиоволны (см. табл. 2 и 3).

Отметим, что частотная зависимость коэффициента $\kappa_{\rm a}(\Delta N, \delta N_{\rm m})$ определяется множителем $(1-\sqrt{u})^2 u^{-1/4} u\,(1-u)^{-1}$ при изменении поперечных масштабов a и l пропорционально $\sqrt{u/(1-u)}$ (т. е. при $ka = \mathrm{const}$). Параметр δ_0 (52) и коэффициент отражения плазменной волны $R_{\rm p}$ при $a\sqrt{(1-u)/u} = \mathrm{const}$ от частоты ω не зависят.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Согласно [7] поток энергии плазменных волн, диссипирующий в объёме неоднородности, определяется выражением

$$\overline{Q} = S_{0\Pi}^{(+)}\,\frac{1-\exp(-2K)}{1-|R_{\rm p}|^2\exp(-2K)}\ , \tag{П1.1}$$

где K — уменьшение амплитуды плазменной волны в результате поглощения при распространении между точками резонанса $x = -x_{\rm R}$ и $x = x_{\rm R}$. Поток энергии возбуждаемых плазменных волн $S_{0\Pi}^{(+)}$ приведён в (15). Черта над Q означает усреднение по быстрым осцилляциям, связанным с изменением фазы волны на пути между резонансными точками.

Поток энергии излучаемой Z-моды после соответствующего усреднения принимает вид

$$S_Z = S_{0Z}^{(+)} + (S_{0\Pi}^{(+)} - \overline{Q}), \tag{П1.2}$$

где первое слагаемое в правой части $S_{0Z}^{(+)}$ (см. (14)) связано с излучением непосредственно возбуждаемых волн Z-моды, а второе $(S_{0\Pi}^{(+)} - \overline{Q})$ — с высвечиванием плазменных волн в результате обратной трансформации в Z-моду. Интерференция этих волн исчезает при усреднении по быстрым фазовым осцилляциям. Полный поток энергии $S_Z + \overline{Q}$, теряемый радиоволной в результате взаимодействия с неоднородностью на уровне с концентрацией $N_0 = N_{\rm R} + \Delta N$, совпадает с величиной $S_{0Z}^{(+)} + S_{0\Pi}^{(+)}$, входящей в определение коэффициента аномального поглощения (17).

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

В случае неоднородности гауссовской формы (50) коэффициенты разложения (35) принимают вид

$$A_0 = A\left(\tilde{x}_{\rm R} - \frac{1}{2}\,\tilde{x}_{\rm R}^{-1}\right), \qquad A_1 = A\left(\frac{1}{3}\,\tilde{x}_{\rm R}^{2} + \frac{1}{4}\,\tilde{x}_{\rm R}^{-2}\right), \qquad A_2 = A\left(\frac{1}{6}\,\tilde{x}_{\rm R} - \frac{1}{8}\,\tilde{x}_{\rm R}^{-3}\right)\ , \tag{П2.1}$$

где коэффициент A и параметр $\tilde{x}_{\rm R}$ определены выражениями (36) и (53) соответственно.

Коэффициенты a_i, b_i в разложении функций $y^{(2)}(\tilde{x})$ и $y^{(3)}(\tilde{x})$ (39) в окрестности резонанса $\tilde{x}_{\mathrm{R}}$ выражаются через коэффициенты A_i (П2.1) с помощью соотношений

$$a_2 = -\frac{3}{4}A^2 + \frac{1}{2}A_0, \qquad a_3 = \frac{1}{6}\left(-\frac{7}{6}A^3 - \frac{1}{3}AA_0 + A_1\right),$$

$$a_4 = \frac{1}{12}\left(-\frac{35}{144}A^4 - \frac{43}{36}A^2A_0 - \frac{5}{12}AA_1 + A_2\right); \tag{П2.2}$$

$$b_2 = \frac{1}{2}A, \qquad b_3 = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}A^2 + A_0\right), \qquad b_4 = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{12}A^3 + \frac{2}{3}AA_0 + A_1\right),$$

$$b_5 = \frac{1}{20}\left(\frac{1}{144}A^4 + \frac{5}{36}A^2A_0 + \frac{7}{2}AA_1 + \frac{1}{6}A_0^2 + A_2\right). \tag{П2.3}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Митяков Н. А., Рапопорт В. О., Трахтенгерц В. Ю. // Изв. вузов. Радиофизика. 1975. Т. 18, № 9. С. 1273.
2. Васьков В. В., Гуревич А. В. // Физика плазмы. 1976. Т. 2, вып. 1. С. 113.
3. Mjolhus E. // J. Geophys. Res. A. 1985. V. 90, No. 5. P. 4269.
4. Васьков В. В. // Физика плазмы. 1988. Т. 14, вып. 10. С. 1172.
5. Грач С. М. // Изв. вузов. Радиофизика. 1999. Т. 42, № 8. С. 826.
6. Dysthe K. B., Mjolhus E., Pecseli H., Rypdal K. // Phisica Scripta T. 1982. V. 2, No. 2. P. 548.
7. Васьков В. В., Гуревич А. В. // Геомагнетизм и аэрономия. 1983. Т. 23, № 4. С. 544.
8. Mjolhus E. // J. Atmos. Terr. Phys. 1993. V. 55, No. 6. P. 907.
9. Голанд В. Е., Пилия А. Д. // УФН. 1971. Т. 104, вып. 3. С. 413.
10. Электродинамика плазмы / Под ред. А. И. Ахиезера. М.: Наука, 1977.
11. Васьков В. В., Рябова Н. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1998. Т. 41, № 3. С. 270.
12. Васьков В. В., Рябова Н. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 2001. Т. 44, № 3. С. 231.
13. Васьков В. В., Пулинец С. А., Рябова Н. А. // Геомагнетизм и аэрономия. 1999. Т. 39, № 4. С. 44.

Поступила в редакцию 4 февраля 2004 г.; принята в печать 7 октября 2004 г.

ANOMALOUS ABSORPTION OF RADIO WAVES BY SMALL-SCALE MAGNETIC FIELD ALIGNED IRREGULARITIES

V. V. Vas'kov and N. A. Ryabova

We study the anomalous absorption of radio waves by small-scale magnetic-field-aligned irregularities taking into account the effect of the irregularities on the of the exited Z mode. It is shown that this process becomes significant if transverse size of field-aligned irregularities is of the order of $0.1\,c/\omega$ or greater, where ω is the radio-wave frequency and c is the speed of light in empty space.

УДК 537.862+537.876.45+621.371

МЕТОД СВЯЗАННЫХ ВОЛН В ТЕОРИИ ВОЗБУЖДЕНИЯ ВОЛНОВОДОВ ВЫСОКОЧАСТОТНЫМИ ТОКАМИ С МЕДЛЕННО ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ АМПЛИТУДАМИ

Н. Ф. Ковалёв, А. В. Палицин

Институт прикладной физики РАН, г. Нижний Новгород, Россия

В работе предложен вариант нестационарных уравнений возбуждения волноводов, основанный на методе связанных волн, взаимное переизлучение которых изменяет распределение энергии в волновых пакетах. Получено универсальное соотношение, связывающее дисперсию волноводной волны с зависимостью её поля от частоты, т. е. с изменением структуры поля волны в течение импульса. Предложенная схема построения нестационарных уравнений применяется для иллюстрации к известному случаю возбуждения пакетов плоских волн электрическими токами в однородной изотропной среде с временно́й дисперсией.

ВВЕДЕНИЕ

С увеличением интереса к переходным и нестационарным процессам в СВЧ генераторах и усилителях, особенно в мощной релятивистской электронике [1], возникла потребность в разработке более полных и более детальных методов их описания. В частности, в системах с большими (в масштабе длины волны λ) размерами стали значимыми эффекты второго и более высокого порядка малости по относительной ширине спектра [2]. Как обычно, полезными дополнениями и ориентирами при разработке усовершенствованных методов описания могли бы стать какие-либо альтернативные или иные точки зрения на известные и уже исследованные закономерности и явления. В настоящей статье рассматривается только часть общей проблемы, связанной с формулировкой нестационарных уравнений возбуждения однородных волноводов. Предлагается вариант, несколько отличный от хорошо известных и широко применяемых в СВЧ электронике уравнений, приведённых в [1] и строго обоснованных в [3]. Идея теории из [1, 3] весьма проста и основана на обратном фурье-преобразовании формул возбуждения волноводов гармоническими токами [4]. Однако получающиеся на этом пути расчётные соотношения оказались не столь просты и удобны, как исходные [4]. Например, структура поля волнового пакета находится свёрткой комплексных амплитуд с «временны́ми» собственными вектор-функциями [3]. То же нужно сделать и с возбуждающими токами. В ряде случаев, особенно при вычислении вторых и более высоких приближений или при обобщении метода на нерегулярные волноводы, свёртки менее удобны, чем представления полей в виде сумм не изменяющихся во времени вектор-функций с амплитудами, зависящими только от продольной координаты и от времени. Полезно было бы отказаться и от обратного фурье-преобразования. Один из возможных вариантов схемы с подобными свойствами, близкий по форме к методу связанных парциальных волн, обсуждается ниже, причём главное внимание уделено выводу уравнений, что, на наш взгляд, позволяет наиболее полно оценить полезность и возможности предлагаемого метода.

1. ОДНОРОДНЫЕ ПОЛЫЕ ВОЛНОВОДЫ, ВОЗБУЖДАЕМЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ ТОКАМИ

Возбуждающие токи $\mathbf{j}_{\rm R}(\mathbf{r},t)$ и искомые поля $\mathbf{E}_{\rm R}(\mathbf{r},t)$, $\mathbf{H}_{\rm R}(\mathbf{r},t)$ в исследуемом волноводе (рис. 1) без заполняющей среды и без потерь в стенках представляются в виде

$$\mathbf{j}_{\rm R}=\mathbf{j}(\mathbf{r},t)\exp(-i\omega t),\qquad \mathbf{E}_{\rm R}=\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\exp(-i\omega t),\qquad \mathbf{H}_{\rm R}=\mathbf{H}(\mathbf{r},t)\exp(-i\omega t),\tag{1}$$

при этом их комплексные амплитуды, удовлетворяют уравнениям

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=ik\mathbf{H}-\frac{1}{c}\,\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}\,,$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=-ik\mathbf{E}+\frac{1}{c}\,\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\,\mathbf{j},\tag{2}$$

где $k=\omega/c$ — волновое число, соответствующее выбранной частоте ω, c — скорость света в свободном пространстве. Для перехода к физическим величинам необходимо взять действительную часть выражений (1). Используем одноиндексную систему нумерации собственных волн, поля которых удовлетворяют однородным уравнениям Максвелла

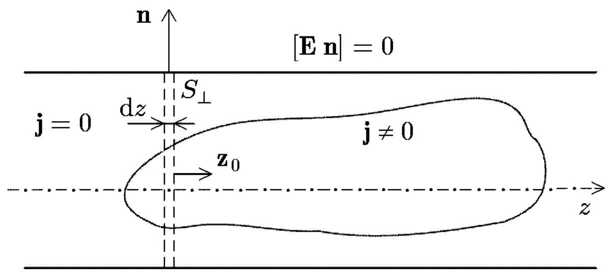

Рис. 1. Регулярный волновод с возбуждающим электрическим током

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}_\nu=ik\mathbf{H}_\nu,\qquad \operatorname{rot}\mathbf{H}_\nu=-ik\mathbf{E}_\nu,\qquad \nu\in(-\infty,+\infty),\tag{3}$$

причём индексами $\nu>0$ отмечаются волны, бегущие и затухающие в направлении оси z, а индексами $\nu<0$ — волны, распространяющиеся в другом направлении. Собственные волны запишем в виде

$$\mathbf{E}_\nu(\mathbf{r})=\mathbf{E}^0_\nu(\mathbf{r}_\perp)\exp(ih_\nu z),\qquad \mathbf{H}_\nu(\mathbf{r})=\mathbf{H}^0_\nu(\mathbf{r}_\perp)\exp(ih_\nu z)\tag{4}$$

и воспользуемся условием чётности

$$h_{-\nu}=-h_\nu\tag{5}$$

для собственных волновых чисел.

Системам уравнений (2) и (3) с $\nu=-s$ можно сопоставить квадратичное соотношение, или лемму Лоренца, [4]

$$\operatorname{div}\{[\mathbf{H}\mathbf{E}_{-s}]-[\mathbf{H}_{-s}\mathbf{E}]\}=\frac{1}{c}\left\{\mathbf{E}_{-s}\,\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}-\mathbf{H}_{-s}\,\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}\right\}+\frac{4\pi}{c}\,\mathbf{j}\mathbf{E}_{-s},\tag{6}$$

в результате интегрирования которого по тонкому поперечному слою в волноводе (рис. 1) выводится дифференциальное равенство

$$\frac{\rm d}{{\rm d}z}\int\limits_{S_\perp}([\mathbf{H}\mathbf{E}_{-s}]-[\mathbf{H}_{-s}\mathbf{E}])\,\mathbf{z}_0\,{\rm d}S=\frac{1}{c}\int\limits_{S_\perp}\left\{\mathbf{E}_{-s}\,\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}-\mathbf{H}_{-s}\,\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}\right\}{\rm d}S+\frac{4\pi}{c}\int\limits_{S_\perp}\mathbf{j}\mathbf{E}_{-s}\,{\rm d}S,\tag{7}$$

применимое к любой из собственных волн (4). В (7) $\mathbf{z}_0$ — орт оси z.

Вид уравнений (2) и (3) согласно [4] определяет возможную форму представления полей из (1) в виде ряда по собственным вектор-функциям (4) с неразлагаемыми остатками:

$$\mathbf{E} = \sum_{\nu} C_\nu \mathbf{E}_\nu + \frac{4\pi}{i\omega}\, j_z \mathbf{z}_0 + \frac{\mathbf{z}_0}{i\omega}\,\frac{\partial E_z}{\partial t}\,, \qquad \mathbf{H} = \sum_{\nu} C_\nu \mathbf{H}_\nu + \frac{\mathbf{z}_0}{i\omega}\,\frac{\partial H_z}{\partial t}\,, \tag{8}$$

или, после последовательных подстановок, в более удобном виде:

$$\mathbf{E} = \sum_{\nu} \{C_\nu \mathbf{E}_\nu + \mathbf{z}_0 E_{z\,\nu} D[C_\nu]\} + \mathbf{z}_0\,\frac{4\pi}{i\omega}\,\{j_z + D[j_z]\}\,, \qquad \mathbf{H} = \sum_{\nu} \{C_\nu \mathbf{H}_\nu + \mathbf{z}_0 H_{z\,\nu} D[C_\nu]\}\,, \tag{9}$$

где

$$D[x] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(i\omega)^n}\,\frac{\partial^n x}{\partial t^n} \tag{10}$$

— дифференциальный оператор. Предполагается, что все ряды, порождённые оператором (10), сходятся, для этого достаточно ограничиться рассмотрением медленных процессов:

$$\left|\frac{1}{\omega}\,\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}\right| \ll |\mathbf{j}|, \tag{11}$$

спектр которых узкий, т. е. ширина спектра $\Delta\omega$ удовлетворяет соотношению

$$|\Delta\omega/\omega| \ll 1. \tag{12}$$

После подстановки (9) в (7), применения условий ортогональности

$$\int\limits_{S_\perp} \{[\mathbf{H}_\nu \mathbf{E}_{-s}] - [\mathbf{H}_{-s} \mathbf{E}_\nu]\}\,\mathbf{z}_0\,\mathrm{d}S = N_s \delta_{s\nu}, \tag{13}$$

где

$$N_s = \int\limits_{S_\perp} \{[\mathbf{H}_s \mathbf{E}_{-s}] - [\mathbf{H}_{-s} \mathbf{E}_s]\}\,\mathbf{z}_0\,\mathrm{d}S, \tag{14}$$

и тождества (27), полученного в следующем разделе, дифференциальное равенство (7) преобразуется в систему взаимно связанных дифференциальных уравнений с частными производными:

$$\begin{aligned} N_s \left(\frac{\partial C_s}{\partial z} + \frac{\mathrm{d}h_s}{\mathrm{d}\omega}\,\frac{\partial C_s}{\partial t}\right) - \frac{1}{c}\int\limits_{S_\perp} (E_{z\,s} E_{z\,-s} - H_{z\,s} H_{z\,-s})\,\mathrm{d}S\, D\!\left[\frac{\partial C_s}{\partial t}\right] = \\ = \frac{1}{c}\sum_{\nu\neq s} \frac{\partial C_\nu}{\partial t} \int\limits_{S_\perp} (\mathbf{E}_\nu \mathbf{E}_{-s} - \mathbf{H}_\nu \mathbf{H}_{-s})\,\mathrm{d}S + \frac{1}{c}\sum_{\nu\neq s}\int\limits_{S_\perp} (E_{z\,\nu} E_{z\,-s} - H_{z\,\nu} H_{z\,-s})\,\mathrm{d}S\, D\!\left[\frac{\partial C_\nu}{\partial t}\right] + \\ + \frac{4\pi}{c}\int\limits_{S_\perp} (\mathbf{j} + \mathbf{z}_0 D[j_z])\,\mathbf{E}_{-s}\,\mathrm{d}S. \end{aligned} \tag{15}$$

Вывод (15) нужно дополнить двумя пояснениями. Во-первых, при подстановке в (7) ряды из (9) не дифференцировались по z, так что условия их сходимости после подстановки в левую часть (7) не изменяются. Во-вторых, физический смысл имеют только решения, для которых ряды, порождаемые оператором (10), будут сходиться.

Полученная система (15) вместе с представлением (9) эквивалентна исходным уравнениям (2), если входящие в (9) ряды сходятся. Для гармонических процессов, когда все $\partial C_\nu/\partial t = 0$, система (15), как нетрудно видеть, сводится к известной системе независимых уравнений (см., например, [4]). Если же процесс не установившийся, т. е. некоторые из $\partial C_\nu/\partial t \neq 0$, то не все волны остаются независимыми, т. е. не все коэффициенты взаимной связи из (15) равны нулю. Действительно, согласно условиям ортогональности (13) и тождеству (28), также полученному в следующем разделе, коэффициенты связи волн

$$T_{\nu\,-s} = \frac{1}{cN_s} \int\limits_{S_\perp} (\mathbf{E}_\nu \mathbf{E}_{-s} - \mathbf{H}_\nu \mathbf{H}_{-s})\,\mathrm{d}S, \qquad L_{\nu\,-s} = \frac{1}{cN_s} \int\limits_{S_\perp} (E_{z\,\nu} E_{z\,-s} - H_{z\,\nu} H_{z\,-s})\,\mathrm{d}S \tag{16}$$

равны нулю, когда $|\nu| \neq |s|$, и не равны нулю, если $\nu = \pm s$. Соответственно, полная система (15) распадается не на отдельные независимые уравнения, а на отдельные подсистемы по два связанных уравнения, соответствующих взаимно встречным волнам (с h_s и h_{-s}), которые уже имеют смысл парциальных составляющих:

$$\frac{\partial C_s}{\partial z} + \frac{\mathrm{d}h_s}{\mathrm{d}\omega}\,\frac{\partial C_s}{\partial t} - L_{s\,-s} D\left[\frac{\partial C_s}{\partial t}\right] = \\ = T_{-s\,-s}\,\frac{\partial C_{-s}}{\partial t} + L_{-s\,-s} D\left[\frac{\partial C_{-s}}{\partial t}\right] + \frac{4\pi}{cN_s} \int\limits_{S_\perp} (\mathbf{j} + \mathbf{z}_0 D[j_z])\,\mathbf{E}_{-s}\,\mathrm{d}S, \tag{17а}$$

$$\frac{\partial C_{-s}}{\partial z} - \frac{\mathrm{d}h_s}{\mathrm{d}\omega}\,\frac{\partial C_{-s}}{\partial t} - L_{-s\,s} D\left[\frac{\partial C_{-s}}{\partial t}\right] = T_{s\,s}\,\frac{\partial C_s}{\partial t} + L_{s\,s} D\left[\frac{\partial C_s}{\partial t}\right] - \frac{4\pi}{cN_s} \int\limits_{S_\perp} (\mathbf{j} + \mathbf{z}_0 D[j_z])\,\mathbf{E}_s\,\mathrm{d}S. \tag{17б}$$

Усложнение уравнений из-за появления связи между волнами является следствием сделанного выше выбора (8) более простого представления полного поля суммой парциальных вектор-функций, зависящих только от пространственных переменных ($\mathbf{r}$) и не зависящих ни от времени, ни от частотных расстроек.

Особенностью принятой схемы описания (9), (17) является пропорциональность коэффициентов связи (16) экспоненте $\exp(i\,(h_\nu - h_s)\,z)$. Вследствие этого в распространяющемся волновом пакете появляется «добавка» в виде встречной парциальной волны с небольшой, но быстро осциллирующей в пространстве амплитудой. Полная зависимость «добавки» от z, т. е. с учётом амплитудного коэффициента, оказывается в результате близкой к зависимости от z попутной парциальной составляющей и, соответственно, пакету волн в целом. Изменения же во времени амплитуд как попутной, так и встречной волн тем не менее являются относительно медленными и, очевидно, разными. Как видно из системы (17), возникающая на фронте встречная волна после прохождения импульса полностью исчезает и, следовательно, в регулярных волноводах каких-либо дополнительных отражений волн не появляется. С возбуждением встречной волны связаны только изменения в поперечной структуре полей и перераспределение энергии в изменяющихся по форме распространяющихся волновых пакетах. Если же дисперсия отсутствует ($\mathrm{d}^n h_s/\mathrm{d}\omega^n = 0$, $n \geq 2$), то никаких искажений формы импульсов не будет, не возникает и дополнительной встречной волны, поскольку коэффициенты связи становятся равными нулю:

$$T_{-s\,-s} = L_{-s\,-s} = T_{s\,s} = L_{s\,s} = 0, \tag{18}$$

и система (17) распадается на независимые уравнения.

Следует ещё отметить, что в СВЧ генераторах электронные пучки будут синхронно взаимодействовать одновременно и с попутной, и со встречной волнами, хотя коэффициенты излучения для них в общем случае разные. С последним может быть связан своеобразный механизм интерференционного усиления коротких искажающихся радиоимпульсов электронными пучками, т. е. принципиально нестационарное усиление.

В уравнениях (17) и представлениях (9) часто удобно перейти к другим амплитудам:

$$P_\nu = C_\nu \exp(ih_\nu z), \tag{19}$$

для которых коэффициенты взаимной связи будут постоянными величинами:

$$\begin{aligned}\frac{\partial P_s}{\partial z} - ih_s P_s + \frac{\mathrm{d}h_s}{\mathrm{d}\omega}\,\frac{\partial P_s}{\partial t} - L^0_{s\,-s} D\left[\frac{\partial P_s}{\partial t}\right] &= \\ = T^0_{-s\,-s}\,\frac{\partial P_{-s}}{\partial t} + L^0_{-s\,-s} D\left[\frac{\partial P_{-s}}{\partial t}\right] &+ \frac{4\pi}{cN_s}\int\limits_{S_\perp} (\mathbf{j} + \mathbf{z}_0 D[j_z])\,\mathbf{E}^0_{-s}\,\mathrm{d}S,\end{aligned} \tag{20}$$

где

$$T^0_{\nu\,-s} = \frac{1}{cN_s}\int\limits_{S_\perp} (\mathbf{E}^0_\nu \mathbf{E}^0_{-s} - \mathbf{H}^0_\nu \mathbf{H}^0_{-s})\,\mathrm{d}S, \qquad L^0_{\nu\,-s} = \frac{1}{cN_s}\int\limits_{S_\perp} (E^0_{z\,\nu} E^0_{z\,-s} - H^0_{z\,\nu} H^0_{z\,-s})\,\mathrm{d}S. \tag{21}$$

Связанное с (20) уравнение получается заменой знаков у индексов s в (20).

Если условие медленности (11) или (12) выполнено с достаточным запасом, то вместо точной системы (20) можно использовать упрощённые, или укороченные, уравнения:

$$\begin{gathered}\frac{\partial P_s}{\partial z} - ih_s P_s + \frac{\mathrm{d}h_s}{\mathrm{d}\omega}\,\frac{\partial P_s}{\partial t} - L^0_{s\,-s}\,\frac{1}{i\omega}\,\frac{\partial^2 P_s}{\partial t^2} = T^0_{-s\,-s}\,\frac{\partial P_{-s}}{\partial t} + \frac{4\pi}{cN_s}\int\limits_{S_\perp}\left(\mathbf{j} + \mathbf{z}_0\,\frac{1}{i\omega}\,\frac{\partial j_z}{\partial t}\right)\mathbf{E}^0_{-s}\,\mathrm{d}S,\\ \frac{\partial P_{-s}}{\partial z} + ih_s P_{-s} - \frac{\mathrm{d}h_s}{\mathrm{d}\omega}\,\frac{\partial P_{-s}}{\partial t} - L^0_{-s\,s}\,\frac{1}{i\omega}\,\frac{\partial^2 P_{-s}}{\partial t^2} = T^0_{s\,s}\,\frac{\partial P_s}{\partial t} - \frac{4\pi}{cN_s}\int\limits_{S_\perp}\left(\mathbf{j} + \mathbf{z}_0\,\frac{1}{i\omega}\,\frac{\partial j_z}{\partial t}\right)\mathbf{E}^0_s\,\mathrm{d}S,\end{gathered} \tag{22}$$

в которых учтены лишь первые члены, ответственные за дисперсию.

Уравнение (22) вместе с упрощённым представлением полей

$$\mathbf{E} = \sum_\nu \left(P_\nu \mathbf{E}^0_\nu + \frac{\mathbf{z}_0}{i\omega}\,E^0_{z\,\nu}\,\frac{\partial P_\nu}{\partial t}\right) + \mathbf{z}_0\,\frac{4\pi}{i\omega}\left(j_z + \frac{1}{i\omega}\,\frac{\partial j_z}{\partial t}\right), \qquad \mathbf{H} = \sum_\nu \left(P_\nu \mathbf{H}^0_\nu + \frac{\mathbf{z}_0}{i\omega}\,H^0_{z\,\nu}\,\frac{\partial P_\nu}{\partial t}\right) \tag{23}$$

применимы к решениям граничных задач, удобны для обобщений на нерегулярные волноводные системы и позволяют корректно проанализировать распространение волновых пакетов на частотах, близких к критическим.

2. О СВЯЗИ ДИСПЕРСИИ ВОЛНОВОДНЫХ ВОЛН С ЧАСТОТНОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ ИХ ПОЛЕЙ

В этом вспомогательном разделе устанавливаются несколько универсальных соотношений и свойств собственных волн (4) в однородных волноводах без заполняющей среды и без потерь в стенках.

Волновое число k (или частота $\omega = kc$) входит в уравнения (3) в качестве параметра, поэтому от него зависят как структура полей ($\mathbf{E}^0_\nu$, $\mathbf{H}^0_\nu$) собственных волн, так и собственные волновые числа h_ν. Обычным путём (см., например, [4]) уравнениям (3) вместе с дважды продифференцированными по k теми же уравнениями (3), но с заменой ν на $-s$, можно сопоставить квадратичное соотношение, подобное (6):

$$\operatorname{div}([\mathbf{H}_\nu \mathbf{E}''_{-s}] - [\mathbf{H}''_{-s} \mathbf{E}_\nu]) = 2i\,(\mathbf{E}_\nu \mathbf{E}'_{-s} - \mathbf{H}_\nu \mathbf{H}'_{-s}). \tag{24}$$

Верхним штрихом в (24) обозначена операция дифференцирования по k, и, если учесть представление (4), то

$$\mathbf{E}'_{-s} = \left(\mathbf{E}^{0\prime}_{-s} - iz\,\frac{\mathrm{d}h_s}{\mathrm{d}k}\,\mathbf{E}^0_{-s}\right)\exp(-ih_s z),$$

$$\mathbf{E}''_{-s} = \left(\mathbf{E}^{0\prime\prime}_{-s} - 2iz\,\frac{\mathrm{d}h_s}{\mathrm{d}k}\,\mathbf{E}^{0\prime}_{-s} - iz\,\frac{\mathrm{d}^2 h_s}{\mathrm{d}k^2}\,\mathbf{E}^0_{-s} - z^2\left(\frac{\mathrm{d}h_s}{\mathrm{d}k}\right)^2 \mathbf{E}^0_{-s}\right)\exp(-ih_s z). \tag{25}$$

Производные от магнитных полей собственных волн записываются аналогично.

Путём интегрирования (24) по тонкому поперечному слою в регулярном волноводе с учётом граничных условий на стенках и с применением векторной теоремы Гаусса выводится дифференциальное равенство

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\int\limits_{S_\perp}\big([\mathbf{H}_\nu \mathbf{E}''_{-s}] - [\mathbf{H}''_{-s} \mathbf{E}_\nu]\big)\,\mathbf{z}_0\,\mathrm{d}S = 2i\int\limits_{S_\perp}(\mathbf{E}_\nu \mathbf{E}'_{-s} - \mathbf{H}_\nu \mathbf{H}'_{-s})\,\mathrm{d}S, \tag{26}$$

из которого вместе с условиями ортогональности (13) и равенствами (25) следуют тождества

$$N_s\,\frac{\mathrm{d}h_s}{\mathrm{d}k} = -\int\limits_{S_\perp}(\mathbf{E}^0_s \mathbf{E}^0_{-s} - \mathbf{H}^0_s \mathbf{H}^0_{-s})\,\mathrm{d}S, \tag{27}$$

$$(h_\nu - h_s)\int\limits_{S_\perp}\big\{[\mathbf{H}^0_\nu \mathbf{E}^{0\prime}_{-s}] - [\mathbf{H}^{0\prime}_{-s} \mathbf{E}^0_\nu]\big\}\,\mathbf{z}_0\,\mathrm{d}S = \int\limits_{S_\perp}(\mathbf{E}^0_\nu \mathbf{E}^0_{-s} - \mathbf{H}^0_\nu \mathbf{H}^0_{-s})\,\mathrm{d}S, \tag{28}$$

где $\nu \neq s$,

$$\frac{N_s}{2}\,\frac{\mathrm{d}^2 h_s}{\mathrm{d}k^2} = -\int\limits_{S_\perp}(\mathbf{E}^0_s \mathbf{E}^{0\prime}_{-s} - \mathbf{H}^0_s \mathbf{H}^{0\prime}_{-s})\,\mathrm{d}S - \frac{\mathrm{d}h_s}{\mathrm{d}k}\int\limits_{S_\perp}\big([\mathbf{H}^0_s \mathbf{E}^{0\prime}_{-s}] - [\mathbf{H}^{0\prime}_{-s} \mathbf{E}^0_s]\big)\,\mathbf{z}_0\,\mathrm{d}S. \tag{29}$$

Тождества (27)–(29) применимы как для распространяющихся (с $\operatorname{Im} h_\nu = 0$), так и для нераспространяющихся (с $\operatorname{Im} h_\nu \neq 0$) собственных волн. Для распространяющихся волн первое из тождеств (27) связано с законом сохранения энергии [5], и его можно было бы преобразовать к известному из теории электромагнитных волн виду [4, 6]. Из него также следует, что норма N_s и «групповая скорость» $\mathrm{d}k/\mathrm{d}h_s$ на частотах, близких к критическим, являются величинами одного порядка малости, так что неопределённости в уравнениях (20) или (22) при $|\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}h_s| \to 0$ легко устраняются. С использованием соотношений (27) и (28) коэффициентам взаимной связи можно придать форму, явно зависящую от производных полей по частоте.

Тождество (29) устанавливает универсальную связь между зависимостью структуры поля собственной волны от частоты ($k = \omega/c$) и её дисперсией ($\mathrm{d}^2 h_s/\mathrm{d}k^2$). Так, если $\mathbf{E}^{0\prime}_{-s} \equiv 0$ и $\mathbf{H}^{0\prime}_{-s} \equiv$ $\equiv 0$, то волна распространяется без дисперсии, т. е. $\mathrm{d}^2 h_s/\mathrm{d}k^2 \equiv 0$; соответственно, равны нулю и коэффициенты связи (21) между взаимно встречными волнами. В качестве примера можно упомянуть кабельную волну в коаксиальном волноводе. С другой стороны, если $\mathrm{d}^2 h_s/\mathrm{d}k^2 \neq 0$, то не равны одновременно нулю $\mathbf{E}^{0\prime}_{-s}$ и $\mathbf{H}^{0\prime}_{-s}$, значит, структура поля волны будет разная на разных частотах. Тождество (29) позволяет также выделить в уравнениях (20) и (22) слагаемые, пропорциональные $(\mathrm{d}^2 h_s/\mathrm{d}k^2)\,(\partial^2 P_s/\partial t^2)$, если возникает необходимость перехода к уравнениям из [3].

3. ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ В ОДНОРОДНОЙ ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ С ДИСПЕРСИЕЙ

Представляется интересным применить с целью иллюстрации рассмотренную выше схему к хорошо известному случаю возбуждения плоских волн электрическими токами в модели, заданной уравнениями

$$\frac{\partial E_{\rm R}}{\partial z} = -\frac{1}{c}\,\frac{\partial B_{\rm R}}{\partial t}\,, \qquad \frac{\partial H_{\rm R}}{\partial z} = -\frac{1}{c}\,\frac{\partial D_{\rm R}}{\partial t} - \frac{4\pi}{c}\,j_{\rm R}, \tag{30}$$

где

$$D_{\rm R}(z,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon(\hat\omega) E_{\rm R}(z,\hat\omega) \exp(-i\hat\omega t)\,{\rm d}\hat\omega, \qquad B_{\rm R}(z,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mu(\hat\omega) H_{\rm R}(z,\hat\omega) \exp(-i\hat\omega t)\,{\rm d}\hat\omega. \tag{31}$$

Предположив разложимость проницаемостей ε и μ в ряды:

$$\varepsilon(\hat\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\,\frac{{\rm d}^n\varepsilon}{{\rm d}\omega^n}\,(\hat\omega-\omega)^n, \qquad \mu(\hat\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\,\frac{{\rm d}^n\mu}{{\rm d}\omega^n}\,(\hat\omega-\omega)^n, \tag{32}$$

исходную систему (30) нетрудно преобразовать к уравнениям относительно комплексных амплитуд, определённых выражениями (1) с выбранной частотой ω:

$$\frac{\partial E}{\partial z} = ik\mu H + \frac{i}{c}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n!}\left\{\omega\,\frac{{\rm d}^n\mu}{{\rm d}\omega^n} + n\,\frac{{\rm d}^{n-1}\mu}{{\rm d}\omega^{n-1}}\right\}\frac{\partial^n H}{\partial t^n}\,,$$

$$\frac{\partial H}{\partial z} = ik\varepsilon E + \frac{i}{c}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n!}\left\{\omega\,\frac{{\rm d}^n\varepsilon}{{\rm d}\omega^n} + n\,\frac{{\rm d}^{n-1}\varepsilon}{{\rm d}\omega^{n-1}}\right\}\frac{\partial^n E}{\partial t^n} - \frac{4\pi}{c}\,j. \tag{33}$$

В (32), (33) проницаемости ε, μ и их производные берутся на частоте ω.

Согласно принятой выше схеме решение системы (33) нужно искать в виде суммы двух парциальных волн ($E_{\pm1}$, $H_{\pm1}$):

$$E = C_1E_1 + C_{-1}E_{-1}, \qquad H = C_1H_1 + C_{-1}H_{-1}, \tag{34}$$

являющихся решением более простых уравнений, в качестве которых удобно взять

$${\rm d}E_{\pm1}/{\rm d}z = ik\mu H_{\pm1}\,, \qquad {\rm d}H_{\pm1}/{\rm d}z = ik\varepsilon E_{\pm1} \tag{35}$$

и, соответственно,

$$E_{\pm1} = \sqrt{\mu}\,\exp(\pm ihz), \qquad H_{\pm1} = \pm\sqrt{\varepsilon}\exp(\pm ihz), \qquad h = k\,\sqrt{\varepsilon\mu}\,. \tag{36}$$

Если, как и в (22), ограничиться учётом дисперсии только в первом приближении, то после подстановки (34) в (33) для амплитуд $C_{\pm1}(z,t)$ можно получить укороченные уравнения, аналогичные (22) с точностью до замены (19):

$$\frac{\partial C_1}{\partial z} + \frac{{\rm d}h}{{\rm d}\omega}\,\frac{\partial C_1}{\partial t} + \frac{i}{2}\,\frac{{\rm d}^2h}{{\rm d}\omega^2}\,\frac{\partial^2 C_1}{\partial t^2} + i\,\frac{F^2}{2h}\,\frac{\partial^2 C_1}{\partial t^2} = F\,\frac{\partial C_{-1}}{\partial t}\exp(-2ihz) - \frac{4\pi}{c\sqrt{\varepsilon}}\,j\exp(-ihz), \tag{37а}$$

$$\frac{\partial C_{-1}}{\partial z} - \frac{{\rm d}h}{{\rm d}\omega}\,\frac{\partial C_{-1}}{\partial t} - \frac{i}{2}\,\frac{{\rm d}^2h}{{\rm d}\omega^2}\,\frac{\partial^2 C_{-1}}{\partial t^2} - i\,\frac{F^2}{2h}\,\frac{\partial^2 C_{-1}}{\partial t^2} = -F\,\frac{\partial C_1}{\partial t}\exp(2ihz) + \frac{4\pi}{c\sqrt{\varepsilon}}\,j\exp(ihz), \tag{37б}$$

где

$$F = \frac{k}{2\sqrt{\varepsilon\mu}} \left(\varepsilon \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\omega} - \mu \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}\omega} \right) \tag{38}$$

— коэффициент связи, пропорциональный производной по частоте ω от импеданса парциальных волн $\rho = \sqrt{\mu/\varepsilon}$, т. е.

$$F = k\varepsilon\, \mathrm{d}\rho/\mathrm{d}\omega. \tag{39}$$

Как и в предыдущем разделе, уравнения в системе (37) оказались связанными. Соответственно, взаимно встречные парциальные волны (36) «переизлучаются» друг в друга. В (37) явно выделены два процесса, связанные с искажениями в огибающих волновых пакетов как из-за переизлучений взаимно встречных волн, так и описываемые старшими производными от амплитуд по времени $\partial^2 C_{\pm1}/\partial t^2 \neq 0$. Поскольку дисперсия в (37), в отличие от (22), произвольна, можно оценить на качественном уровне взаимосвязь этих процессов в различных ситуациях.

Если импеданс парциальных волн ρ не зависит от частоты, то $F = 0$, и система (37) распадается на независимые уравнения:

$$\frac{\partial C_{\pm1}}{\partial z} \pm \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\omega} \frac{\partial C_{\pm1}}{\partial t} \pm \frac{i}{2} \frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}\omega^2} \frac{\partial^2 C_{\pm1}}{\partial t^2} = \mp \frac{4\pi}{c\sqrt{\varepsilon}}\, j \exp(\mp ihz), \tag{40}$$

хорошо известные в теории волн [6]. Поскольку переизлучений нет, то парциальные волны (36) имеют смысл собственных волн, в которых возможные деформации огибающих объясняются только зависимостью групповой скорости от частоты ($\mathrm{d}^2 h/\mathrm{d}\omega^2 \neq 0$).

В случае $\mathrm{d}^2 h/\mathrm{d}\omega^2 \equiv 0$, т. е. $\mathrm{d}(\varepsilon\mu)/\mathrm{d}\omega = 0$, уравнения (37) остаются связанными, поскольку предполагается $F \neq 0$, однако деформаций огибающих импульсов нет из-за компенсации обоих процессов. В волновых пакетах в этом случае присутствуют как попутная (например, C_1), так и встречная (C_{-1}) составляющие, отношение величин которых

$$\left| \frac{C_{-1}}{C_1} \right| \approx \frac{\Delta\omega}{2h} |F| \tag{41}$$

определяется шириной спектра $\Delta\omega$ и характером зависимости импеданса волн ρ от частоты. Оценка (41), очевидно, применима и в общем случае $\mathrm{d}^2 h/\mathrm{d}\omega^2 \neq 0$.

Для иллюстрации степени точности, достигаемой при использовании приближённой системы (37), удобно рассмотреть простейший пример распространения прямой ($h > 0$) гармонической волны с частотой $\hat{\omega}$, немного отличающейся от ω: $\hat{\omega} = \omega + \Delta\omega$. Решением системы (37) в этом случае будет волна с волновым числом

$$\hat{h} = h + \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\omega} \Delta\omega + \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}\omega^2} (\Delta\omega)^2 + \frac{F^2}{2h^2} \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\omega} (\Delta\omega)^3 + \ldots \tag{42}$$

и с отношением амплитуд парциальных составляющих

$$\frac{C_{-1}}{C_1} = \frac{\Delta\omega}{2h} F \left(1 - \frac{1}{h} \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\omega} \Delta\omega \right) \exp(2ihz) + \ldots . \tag{43}$$

Как видно, выражения (42) и (43) с точностью до $|\Delta\omega/\omega|^3$ дают правильные значения как для волнового числа, так и для соотношения между магнитным и электрическим полями.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Идея предложенной здесь схемы описания нестационарных процессов в волноводах очень проста и основана на применении метода связанных волн к неизменяющимся во времени парциальным подсистемам, или волнам, которые начинают взаимодействовать друг с другом только в случае изменения амплитуд во времени. Соответственно, чем медленнее процесс, тем меньше связаны парциальные волны. Коэффициенты связи между выбранными подсистемами зависят ещё и от дисперсии волн, поэтому при её отсутствии полученные уравнения переходят в уже известные. Различие в описании начинается лишь при необходимости учёта расплываний или деформаций огибающих импульсов. Но очевидно, что вопрос об использовании той или иной схемы описания этих стадий процессов в значительной степени зависит от формулировки конкретной задачи, от возможности сведения её к известным и исследованным случаям и, что важно, от наглядности и удобства применения получаемых результатов. В простых случаях предложенная здесь схема, по-видимому, не будет иметь преимуществ. Её достоинства будут проявляться, на наш взгляд, там, где важна более подробная информация о структуре поля, при обобщениях на нерегулярные волноводы, на краевые задачи, на задачи о рассеянии волн на препятствиях и особенно при формулировке и решении задач о взаимодействии нестационарных волн с электронными пучками в СВЧ электронике.

В работе не приведены примеры решений конкретных задач, которые могли бы проиллюстрировать возможности предложенного способа описания. Объясняется это тем, что простые примеры мало иллюстративны, а более сложным и практически значимым задачам лучше посвятить отдельные исследования.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 03–02–17297).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Трубецков Д. И., Храмов А. Е. Лекции по СВЧ электронике для физиков. Т. 1. М.: Физматлит, 2003. 496 с.
2. Коровин С. Д., Месяц Г. А., Ростов В. В. и др. // Письма в ЖТФ. 2002. Т. 28, вып. 2. С. 81.
3. Вайнштейн Л. А. // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1998. Т. 6, № 1. С. 21.
4. Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны. 2-е изд. М.: Радио и связь, 1988. 440 с.
5. Солнцев В. А. // ЖТФ. 1968. Т. 38, вып. 1. С. 100.
6. Виноградова М. В., Руденко М. В., Сухоруков А. П. Теория волн. М.: Наука, 1979. 384 с.

Поступила в редакцию 27 января 2004 г.; принята в печать 4 марта 2005 г.

COUPLED-WAVE METHOD IN THE THEORY OF WAVEGUIDE EXCITATION BY HIGH-FREQUENCY CURRENTS WITH SLOWLY VARYING AMPLITUDES

N. F. Kovalev and A. V. Palitsin

Based of the method of coupled waves, we propose nonstationary equations describing excitation of waveguides in which the energy distribution in wave packets varies due to mutual transformation of the coupled waves. We obtain a universal expression relating the dispersion of a waveguide mode to the frequency dependence of its field, i.e., to a change in the field structure of the mode during a pulse. To illustrate the proposed procedure of constructing nonstationary equations, we apply it to the well-known case of excitation of plane-wave packets by electric currents in a homogeneous isotropic medium with time dispersion.

УДК 537.52

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛНОВОДНОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ МОД TM_{01}—TE_{11} МЕТОДОМ FDTD

Г. Г. Денисов, М. Л. Кулыгин

Институт прикладной физики РАН, г. Нижний Новгород, Россия

Рассмотрена задача о прохождении импульса электромагнитного излучения с заданной поперечной структурой через волноводный преобразователь мод круглого волновода из TM_{01} в TE_{11}. Методом FDTD численно исследован модовый состав импульса на выходе преобразователя в зависимости от его длительности. Получена частотная характеристика преобразователя по фурье-отклику на импульс с широким спектром.

ВВЕДЕНИЕ

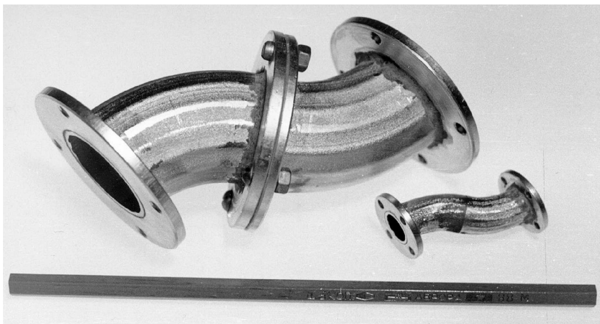

Рис. 1. Внешний вид волноводного преобразователя мод TM_{01}—TE_{11}

Волноводные преобразователи мод [1] применяются в СВЧ трактах мощных электронных установок [2] для получения мод, удобных для транспортировки и использования. В настоящей работе рассматривается преобразователь мод круглого волновода из TM_{01} в TE_{11}, описанный в [1, 3] и предназначенный для будущего эксперимента в ИЭФ УрО РАН (г. Екатеринбург). Преобразователь мод TM_{01}—TE_{11} (рис. 1) представляет собой два центрально-симметричных состыкованных отрезка изогнутого полого волновода (т. е. два сектора тора с одинаковым углом разворота) круглого постоянного сечения, перпендикулярного оси изгиба. Преобразователь обеспечивает высокий (близкий к 100 %) коэффициент преобразования указанных мод в широкой полосе частот [1, 3].

Целью настоящей работы является численное решение следующих задач:

1) Расчёт структуры электромагнитного поля в преобразователе методом FDTD для квазистационарного режима преобразователя на центральной частоте. На вход преобразователя подаётся квазимонохроматический импульс на центральной частоте преобразователя, имеющий поперечную структуру волны TM_{01} круглого волновода. На выходе преобразователя находится идеальный поглотитель. Требуется сравнить полученные значения энергетических коэффициентов собственных мод круглого волновода на выходе преобразователя с результатами из [1].

2) Расчёт, аналогичный предыдущему пункту, для нестационарного режима преобразователя в окрестности центральной частоты. На вход преобразователя подаётся импульс заданной длительности (от долей периода центральной частоты до нескольких десятков периодов) с гауссовой огибающей. Требуется найти характерную длительность импульса с гауссовой огибающей на входе преобразователя, при которой происходит существенное искажение его формы на выходе преобразователя.

3) Расчёт частотной характеристики преобразователя по фурье-отклику на импульс с широким спектром (с длительностью порядка периода центральной частоты) и её сравнение с результатами, полученными стационарным численным методом (методом связанных волн).

1. FDTD-МЕТОД ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

Для проведения численного эксперимента используется метод FDTD прямого численного интегрирования уравнений Максвелла [4, 5] в трёхмерном пространстве с эквидистантной кубической сеткой координат (рис. 2). Используемая разновидность метода FDTD позволяет численно решать уравнения Максвелла в вакууме с граничными условиями идеального проводника, заданными в виде лестничной модели [5]. Основная особенность метода FDTD состоит в естественности трактовки нестационарных эффектов электродинамики. Будучи методом во временно́й области, FDTD позволяет проводить расчёт отклика системы на импульс в явном виде. Таким образом, единый расчёт позволяет получить как решение задачи с широким спектром частот колебаний, так и стационарное решение на любой частоте, присутствующей в спектре источника. Также метод FDTD позволяет эффективно решать многомодовые задачи при соблюдении условия малости шага сетки в масштабе пространственного периода низших мод [4–6].

В работе используется программное обеспечение собственной разработки с рабочим названием Tube3D, реализующее метод FDTD в прямоугольной декартовой сетке координат. Помимо расчётной процедуры Tube3D также обеспечивает все необходимые вспомогательные функции: генерацию сетки, внедрение объектов источника и поглотителя, обработку выходной информации и т. п. Впервые результаты, полученные с помощью данного программного обеспечения, были опуликованы в [6].

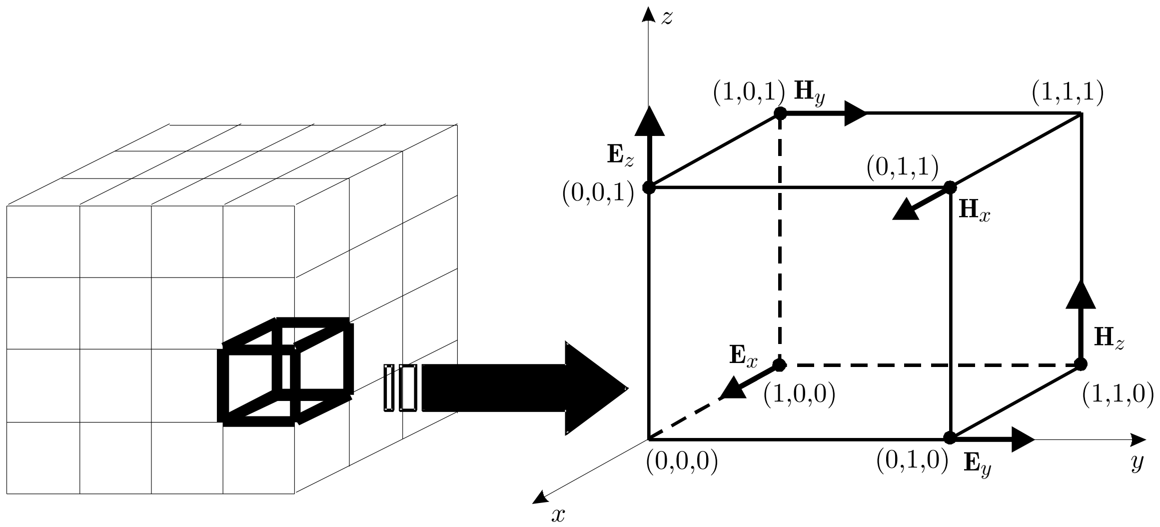

Рис. 2. Размещение компонент электромагнитного поля в прямоугольной сетке координат метода FDTD

2. ПАРАМЕТРЫ ЧИСЛЕННОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Структурная схема численного эксперимента в продольном сечении преобразователя представлена на рис. 3. На левом по схеме конце преобразователя находится источник собственной волны TM_{01}. Источник излучает волновой пакет в направлении преобразователя. На правом конце находится поглотитель PML (идеально согласованный слой) [7] с коэффициентом отражения не более 10^{-4} по мощности в широком спектре частот колебаний и углов падения. В численном эксперименте используется источник жёсткого типа [5], не зависящий от отклика сетки. Данный тип источника привлекателен простотой программной реализации, хотя и имеет недостаток —

полное отражение любого падающего на него излучения. Использование жёсткого источника в данной задаче является оправданным, несмотря на то, что преобразователь не является абсолютно прозрачным в широком спектре частот падающего излучения. Теоретически, отражённая от преобразователя часть входного сигнала, отразившись, в свою очередь, от источника, может попадать обратно на вход преобразователя, внося изменения во входной импульс и добавляя к системе паразитные резонансы. Отражение весьма существенно вблизи критической частоты исходного круглого волновода. Однако в квазистационарном случае на центральной частоте отражённый сигнал отсутствует из-за значительного удаления центральной частоты от критической и узости спектра сигнала. С другой стороны, в нестационарном случае групповая скорость отражённых волн ничтожно мала по сравнению с групповой скоростью импульса. Характерные времена пробега отражённого сигнала через преобразователь много больше заданной длительности импульса (0,5 нс и менее) и времени его пробега через преобразователь (около 0,2 нс, см. далее рис. 6). Поэтому искажения выходного сигнала, вызванные отражением, на практике не наблюдаются, и использование жёсткого источника допустимо. Эффект можно оценить количественно, удлинив левый (см. рис. 3) отрезок неизогнутого круглого волновода между источником и входом преобразователя и сравнив результат с исходным. В данной задаче отличие результатов несущественно в пределах точности расчётов.

Рис. 3. Структурная схема численного эксперимента

Источник задаётся двумя поперечными компонентами магнитного поля и нулевой продольной компонентой электрического поля исходной ТМ-волны на круге — плоском сечении исходного волновода (см., например, плоскость $y = 1$ на рис. 2). Остальные три компоненты электромагнитного поля задавать не нужно, они вычисляются автоматически расчётной процедурой метода FDTD, удовлетворяя уравнениям Максвелла. Компоненты полей источника изменяются во времени по синусоидальному закону на центральной частоте. Огибающая амплитуды источника может произвольно изменяться во времени, в основном используется гауссова форма вида

$$A(t) = \exp[-(t - t_0)^2/\tau^2], \qquad (1)$$

где t — текущее время, τ – полуширина импульса по уровню $\exp(-1)$, t_0 — момент времени максимума амплитуды. Время в эксперименте отсчитывается от момента включения источника. Конечность времени расчёта требует ограничения значения огибающей снизу до уровня $\chi \ll 1$, обычно используются значения $\chi = \exp(-6)$, $\exp(-5)$, $\exp(-4)$, $\exp(-3)$, практически не влияющие на точность расчёта. В этом случае величина t_0 определяется через ограничение огибающей χ следующим образом:

$$t_0 = \tau \sqrt{-\ln \chi}\ . \qquad (2)$$

За счёт изменения полуширины импульса τ можно получить источник с широким диапазоном спектров частот — от квазимонохроматического до почти шумового, ширина спектра ограничивается лишь шагом по времени. Волна источника на центральной частоте задаётся как заведомо распространяющаяся в круглом волноводе исходного сечения. Несмотря на это, за счёт огибающей могут возбуждаться нераспространяющиеся колебания на закритических частотах. Однако из-за специфики задания компонент полей источника соотношение между электрическим и магнитным полями остаётся таким же, как в бегущей волне. Это оправдывает рассмотрение коротких импульсов.

В работе рассматривается преобразователь со следующими параметрами. Центральная частота преобразования составляет 38 ГГц (один период поля на центральной частоте равен 26 пс). Радиус круглого исходного волновода равен 4,5 мм, радиус кривизны изгиба 28,5 мм, угол изгиба половинок преобразователя 46°. Шаг кубической сетки составляет 0,075 мм (около 100 шагов на длину волны колебания на центральной частоте в вакууме), временно́й шаг составляет 1/256 периода (порядка 100 фс), что соответствует числу Куранта [5] около 1,4. Рассматриваемый диапазон длительностей импульса составил от 8 нс (300 периодов колебаний на центральной частоте — квазимонохроматический источник) до 1 пс (0,04 периода). Размеры массива данных поля составили $120 \times 350 \times 600$ точек по осям x, y и z соответственно (ось z перпендикулярна плоскости источника), для его хранения потребовалось около 100 Мб оперативной памяти. Скорость расчёта на персональной ЭВМ с процессором AMD Athlon 2200+ составила около 2,3 нс за час реального времени.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЁТА. КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЙ РЕЖИМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НА ЦЕНТРАЛЬНОЙ ЧАСТОТЕ

На рис. 4 представлены диаграммы распределения продольных компонент электромагнитного поля, перпендикулярных плоскостям входного и выходного отверстий, в поперечных (сверху) и продольных (снизу) сечениях преобразователя. Светлые области соответствуют пучностям поля, чёрные — узлам, оттенками серого показаны градации значений: чем светлее цвет, тем выше абсолютное значение поля. На рис. 4*а* приведено распределение продольной компоненты электрического поля, пропорциональной потенциалу Герца для TM-волн, на рис. 4*б* — распределение продольной компоненты магнитного поля, пропорциональной потенциалу Герца для TE-волн. Верхняя диаграмма на рис. 4*а*, показывающая распределение поля в поперечном сечении на входе преобразователя, демонстрирует типичную для волны TM_{01} структуру функции Бесселя нулевого порядка с единственной вариацией по радиальной координате и без вариаций по азимуту. Верхняя диаграмма на рис. 4*б*, соответствующая выходу преобразователя, демонстрирует

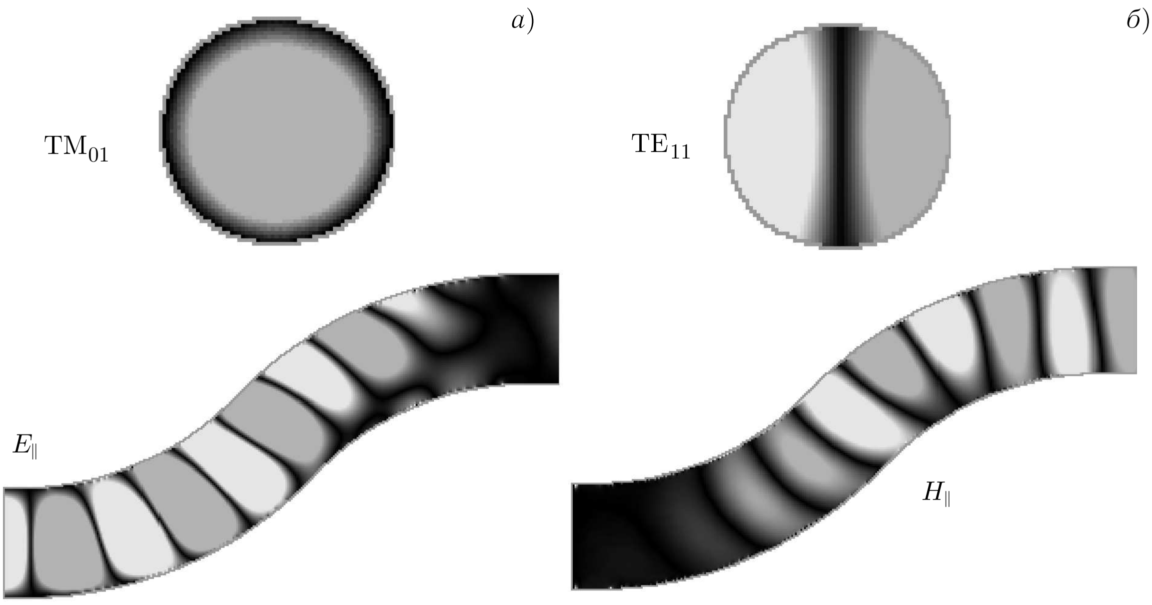

Рис. 4. Диаграммы распределения компонент полей в продольных и поперечных сечениях преобразователя в режиме, близком к стационарному

структуру поля волны TE_{11} с единичной вариацией по азимутальной и радиальной координатам. Нижняя диаграмма на рис. 4*а* отображает центральное сечение преобразователя плоскостью, в котором продольная компонента электрического поля, соответствующая волне TM_{01}, максимальна. Нижняя диаграмма на рис. 4*б* отображает плоское сечение, смещённое на 1/3 радиуса волновода по отношению к центральному. Значение 1/3 взято для удобства по двум причинам. Во-первых, в центральном сечении продольная компонента магнитного поля, соответствующая волне TE_{11}, отсутствует. Во-вторых, сечение с бо́льшим смещением в плоскости, перпендикулярной рисунку, имеет меньшую площадь и, следовательно, меньшую информативность. Все диаграммы приведены в состоянии, близком к стационарному, в максимуме импульса источника с полушириной 8 нс (более 300 периодов поля с момента включения), которая существенно больше характерного времени пробега импульса через преобразователь с групповой скоростью (порядка 0,2 нс). Спектр источника близок к δ-функции на центральной частоте. При этом реализуется практически полная [1] трансформация моды TM_{01} в TE_{11}, что визуально заметно на обеих нижних диаграммах на рис. 4. На входе преобразователя преобладает структура моды TM_{01}, на выходе — TE_{11}. Для сравнения с количественными результатами, приведёнными в [1], рассчитаем осциллограммы энергетических коэффициентов нескольких мод круглого волновода, участвующих в процессе переноса энергии, на выходе преобразователя. Наиболее значимыми среди них являются моды TM_{01}, TE_{11} и TE_{21}. Нестационарный энергетический коэффициент собственной моды круглого волновода в поперечном сечении волновода, переходящий в предельном случае в свой монохроматический аналог [8], задаётся следующим образом:

$$\eta_i(t) = \frac{\iint\limits_{S_\perp} [\mathbf{E}_\perp(t), \mathbf{H}_{i\perp}]\, \mathrm{d}\mathbf{S}_\perp \iint\limits_{S_\perp} [\mathbf{E}_{i\perp}, \mathbf{H}_\perp(t)]\, \mathrm{d}\mathbf{S}_\perp}{\iint\limits_{S_\perp} [\mathbf{E}_{0\perp}, \mathbf{H}_{0\perp}]\, \mathrm{d}\mathbf{S}_\perp \iint\limits_{S_\perp} [\mathbf{E}_{i\perp}, \mathbf{H}_{i\perp}]\, \mathrm{d}\mathbf{S}_\perp}\,. \tag{3}$$

Здесь $\mathbf{E}_{i\perp}$ и $\mathbf{H}_{i\perp}$ — поперечные компоненты полей собственной волны круглого волновода (без учёта зависимости от продольной координаты z и времени) с индексом i на центральной частоте преобразователя, $\mathbf{E}_\perp$ и $\mathbf{H}_\perp$ — зависящие от времени поперечные компоненты полей в фиксированном сечении неизогнутого волновода на выходе преобразователя, получаемые в численном эксперименте (они могут содержать несколько мод), $\mathbf{E}_{0\perp}$ и $\mathbf{H}_{0\perp}$ — компоненты одномодового сигнала источника (без учёта зависимости от продольной координаты z и времени), в которые входят только производные векторов Герца по поперечным координатам, а также продольные и полные волновые числа мод на центральной частоте источника — постоянные для каждой из мод величины. Также в (3) $S_\perp$ — площадь поперечного сечения волновода на выходе преобразователя, $\mathrm{d}\mathbf{S}_\perp = \mathbf{e}_z\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ — бесконечно малый элемент площади, $\mathbf{e}_z$ — единичный вектор вдоль оси z. В численном эксперименте, в условиях дискретной координатной сетки, интегрирование заменяется суммированием по граням элементарных ячеек, перпендикулярным оси z. При замене интеграла конечной суммой множители $\mathrm{d}\mathbf{S}_\perp$ взаимно сокращаются. Интеграл вычисляется методом трапеций. Таким образом, в стационарном состоянии при условии единичной нормировки мощности в любой момент времени

$$\sum_{i=0}^{\infty} \eta_i(t) = 1, \tag{4}$$

где суммирование ведётся по всевозможным модам круглого волновода. Из [1] известны следующие результаты для стационарного состояния преобразователя с монохроматическим источником на центральной частоте на выходе преобразователя:

$$\tilde{\eta}_{\mathrm{TE}_{11}} = 99{,}11\ \%, \qquad \tilde{\eta}_{\mathrm{TE}_{21}} = 0{,}76\ \%, \qquad \tilde{\eta}_{\mathrm{TM}_{01}} = 0{,}12\ \%. \tag{5}$$

Огибающие соответствующих осциллограмм мод импульса с полушириной $\tau = 8$ нс, полученные в настоящей работе, приведены на рис. 5. Соответствующие энергетические коэффициенты мод для квазистационарного состояния, полученные методом FDTD, равны

$$\eta_{\mathrm{TE}_{11}} = 98{,}88\ \%, \qquad \eta_{\mathrm{TE}_{21}} = 0{,}67\ \%, \qquad \eta_{\mathrm{TM}_{01}} = 0{,}09\ \%. \tag{6}$$

Незначительные отличия от результатов, полученных в [1], очевидно характеризуют точность расчётов методом FDTD:

$$\eta_{\mathrm{TE}_{11}} + \eta_{\mathrm{TE}_{21}} + \eta_{\mathrm{TM}_{01}} = 99{,}64\ \% < 1, \tag{7}$$

тогда как в [1] применяется метод связанных волн, учитывающий три низшие моды, способные в данном случае переносить энергию:

$$\tilde{\eta}_{\mathrm{TE}_{11}} + \tilde{\eta}_{\mathrm{TE}_{21}} + \tilde{\eta}_{\mathrm{TM}_{01}} \approx 1. \tag{8}$$

Точность метода FDTD при вычислении интегральных коэффициентов составляет не менее трёх значащих цифр, что подтверждается расчётами с более мелкой сеткой (рассмотрены случаи уменьшения ребра куба сетки вплоть до 1,5 раз, с объёмами массива поля до 340 Мбайт).

4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЁТА. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ИМПУЛЬСОВ

Аналогичные расчёты проделаны и для более коротких импульсов. На рис. 6 представлены

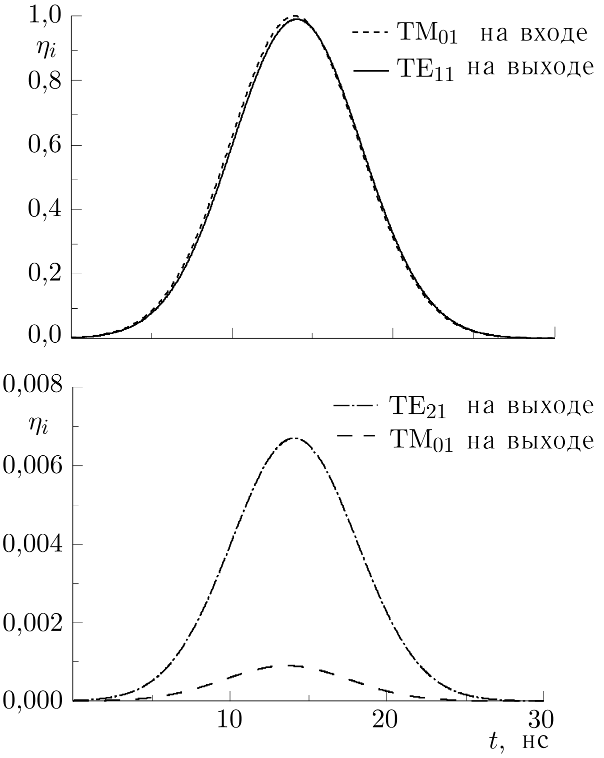

Рис. 5. Огибающие осциллограмм коэффициентов мод импульса с $\tau = 8$ нс

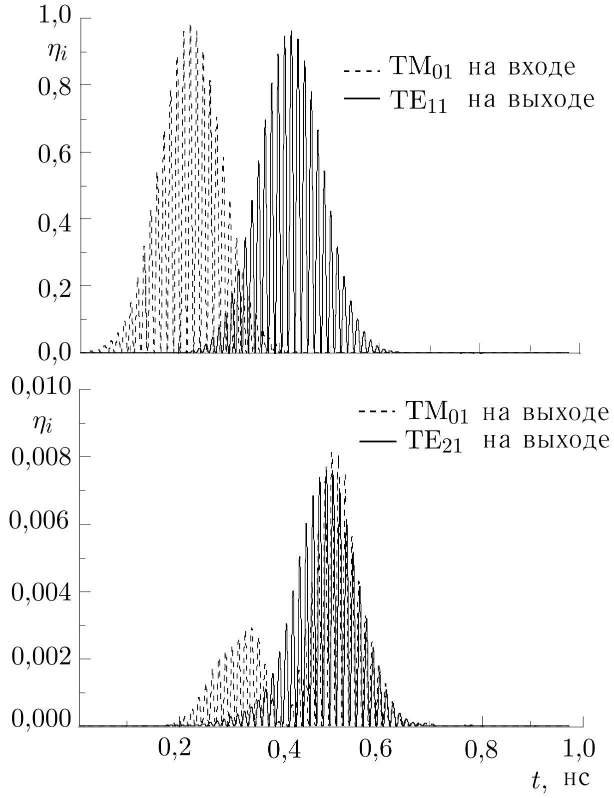

Рис. 6. Осциллограммы коэффициентов мод импульса с $\tau = 0{,}125$ нс

осциллограммы энергетических коэффициентов мод для случая $\tau = 0{,}125$ нс. При сравнении верхнего и нижнего рисунков хорошо заметна задержка выходного импульса моды TE_{21} по сравнению с TE_{11} из-за разницы групповых скоростей. Выходной импульс моды TM_{01} имеет нетривиальную форму огибающей: два максимума и один минимум между ними, совпадающий с максимумом преобразованной выходной волны TE_{11}. Для выяснения причины этого рассчитаны частотные спектры амплитуды продольной и одной из поперечных компонент электрического поля, приведённые соответственно на верхней и нижней панелях на рис. 7. Спектр продольной компоненты имеет три характерных экстремума: минимум, соответствующий сигналу на центральной частоте источника, получившийся в результате интерференции с модой TM_{11}, и два крайних максимума, соответствующих частотам, близким к критическим для мод TM_{01} и TM_{11}. Это означает, что относительно короткий импульс на одной собственной моде, имеющий широкий частотный спектр, возбуждает собственные моды, распространение которых проявляется на частотах, близких к критическим, т. е. преобразователь работает подобно низкодобротному резонатору (с добротностью порядка нескольких десятков). Критические частоты для пяти низших собственных мод приведены в табл. 1. Отметим, что спектр амплитуды поперечной компоненты электрического поля имеет только один ярко выраженный максимум, соответствующий центральной частоте.

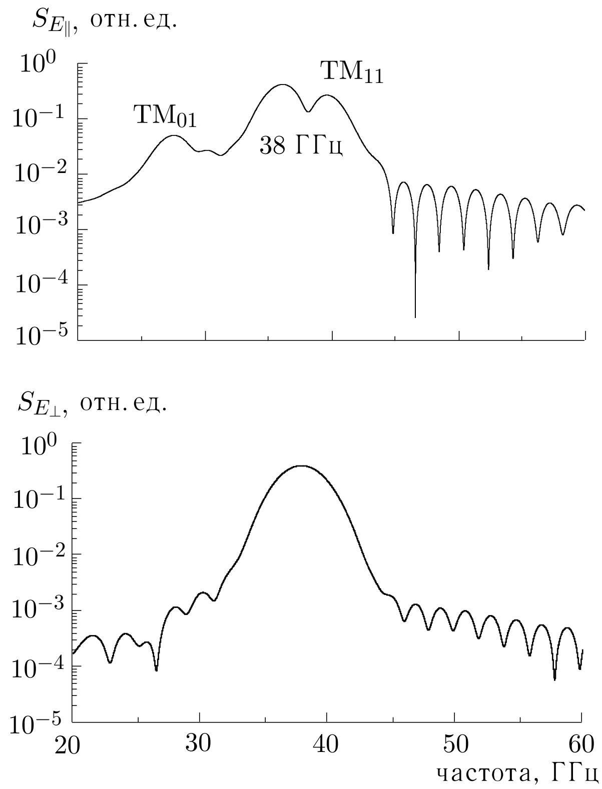

Рис. 7. Частотные спектры компонент полей импульса с $\tau = 0{,}125$ нс

Таблица 1. Критические частоты низших мод круглого подводящего волновода

Собственная мода	Критическая частота, ГГц
TM_{01}	25,5
TM_{11}	40,6
TE_{11}	19.5
TE_{21}	32,3
TE_{01}	40,6

Очевидным проявлением эффекта возбуждения критических мод являются биения колебаний на двух близких частотах. Такие биения хорошо видны в случае $\tau = 0{,}5$ нс (см. рис. 8). В данном случае оба колебания принадлежат моде TM_{01}, одно из них — на основной частоте, другое — на частоте, близкой к критической. В предстоящем эксперименте в ИЭФ УрО РАН данный эффект, по-видимому, не будет наблюдаться в указанной форме из-за наличия нижней границы спектра, лежащей около 28 ГГц. Это ограничение обусловлено критической частотой входного волновода меньшего радиуса, находящегося перед преобразователем.

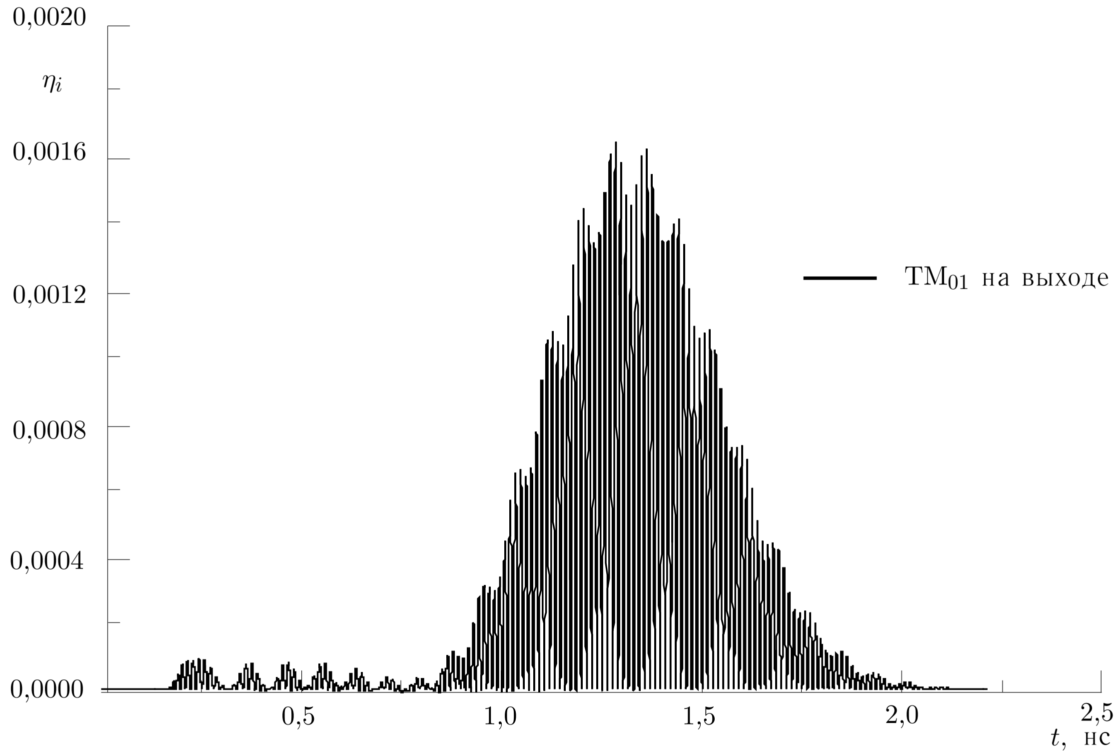

Рис. 8. Биения моды TM_{01} на выходе преобразователя в случае $\tau = 0{,}5$ нс

Существенные искажения формы импульса при прохождении через преобразователь наблюдаются при характерной длительности импульса порядка периода колебаний, при $\tau = 25$ пс (см. рис. 9). Данный результат, полученный благодаря применению нестационарного численного метода, не был известен ранее. Различие между значениями энергии, переносимой «полезной» преобразованной модой TE_{11} и «паразитными» модами, составляет менее одного порядка. Эффект преобразования сохраняется, хотя и в меньшей степени, при снижении длительности импульса до 1 пс (0,04 периода), когда импульс близок к δ-функции. Соответствующие осциллограммы представлены на рис. 10. Несмотря на искажения и существенную трансформацию энергии в «паразитные» моды, бóльшая часть энергии всё равно остаётся в моде TE_{11}, что подтверждает широкополосность преобразователя [1, 3].

5. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЁТА. ЧАСТОТНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ

Амплитудно-частотная характеристика преобразователя получается следующим образом. Определим амплитудный коэффициент собственной моды круглого волновода в поперечном сечении волновода следующим образом:

$$\zeta_i(t) = \frac{\iint\limits_{S_\perp} (\mathbf{E}_\perp(t), \mathbf{E}_{i\perp})\, \mathrm{d}S_\perp}{\sqrt{\iint\limits_{S_\perp} (\mathbf{E}_{0\perp}, \mathbf{E}_{0\perp})\, \mathrm{d}S_\perp \iint\limits_{S_\perp} (\mathbf{E}_{i\perp}, \mathbf{E}_{i\perp})\, \mathrm{d}S_\perp}}\,. \tag{9}$$

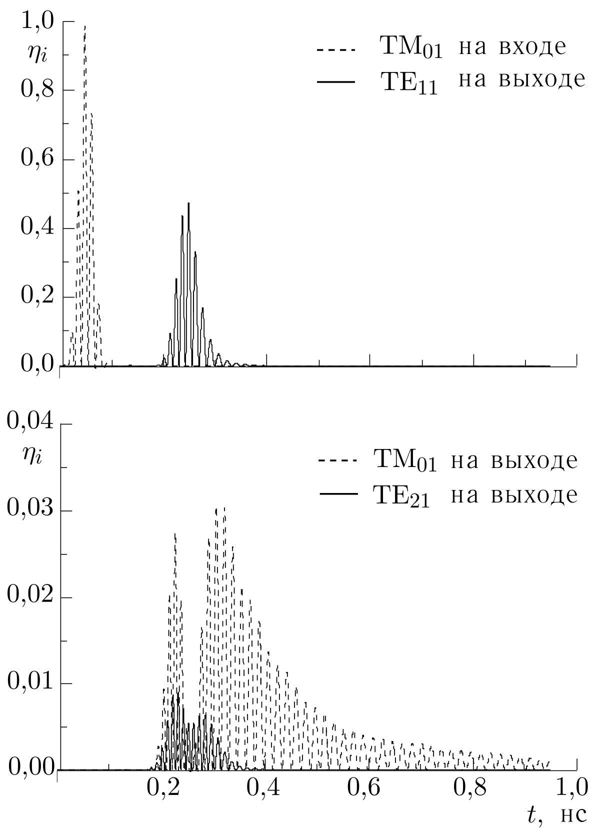

Рис. 9. Осциллограммы коэффициентов мод импульса с $\tau = 0{,}025$ нс

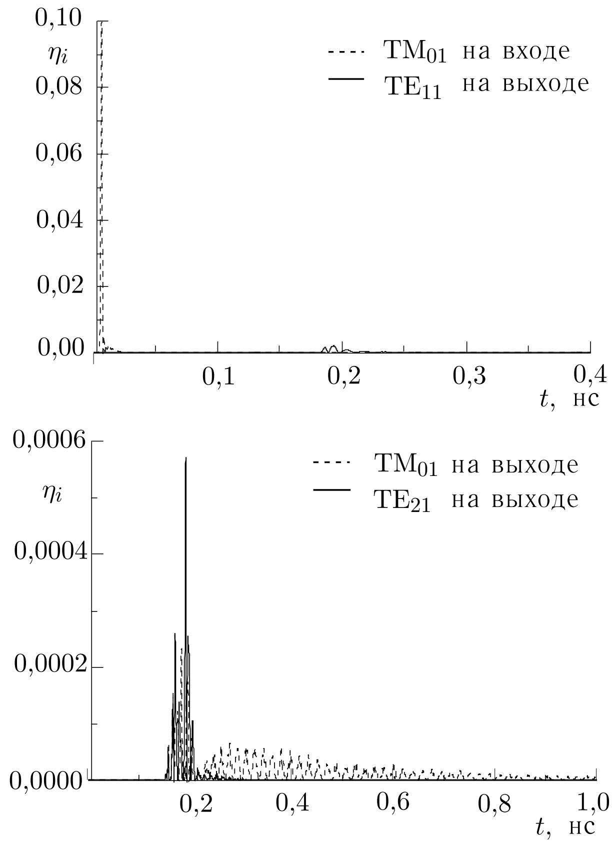

Рис. 10. Осциллограммы коэффициентов мод импульса с $\tau = 1$ пс

Здесь приняты те же обозначения, что и в (3) для $\eta_i(t)$. За счёт сделанного выше определения компонент $\mathbf{E}_{i\perp}$ коэффициент $\zeta_i(t)$ совпадает со своим аналогом, использующим векторное произведение электрических и магнитных полей и переходящим в предельном случае в традиционное выражение для монохроматического амплитудного коэффициента моды [8]. Определим фурье-образ амплитудного коэффициента моды следующим образом:

$$\zeta_i^{\omega}(f) = \left| \int \zeta_i(t) \exp(2\pi f i)\,\mathrm{d}t \right| . \tag{10}$$

Тогда амплитудно-частотная характеристика преобразователя может быть получена согласно следующему выражению:

$$C(f) = \frac{\zeta^{\omega}_{\mathrm{TE}_{11}\text{вых}}(f)}{\zeta^{\omega}_{\mathrm{TM}_{01}\text{вх}}(f)}\ , \tag{11}$$

где $\zeta^{\omega}_{\mathrm{TE}_{11}\text{вых}}(f)$ — фурье-образ амплитудного коэффициента моды TE_{11} на выходе преобразователя, $\zeta^{\omega}_{\mathrm{TM}_{01}\text{вх}}(f)$ — фурье-образ амплитудного коэффициента моды TM_{01} на входе преобразователя. Очевидно, что при таком способе получения амплитудно-частотной характеристики числитель и знаменатель дроби не должны быть близки к нулю для получения достоверных результатов. Поскольку максимальная точность расчётных данных в эксперименте составляет около 10^{-4} (данное ограничение связано с особенностями представления чисел с плавающей точкой в 32-битной архитектуре современных процессоров для ЭВМ), то условие достоверности амплитудно-частотной характеристики запишется в виде

$$\zeta^{\omega}(f) \gg 10^{-4}. \tag{12}$$

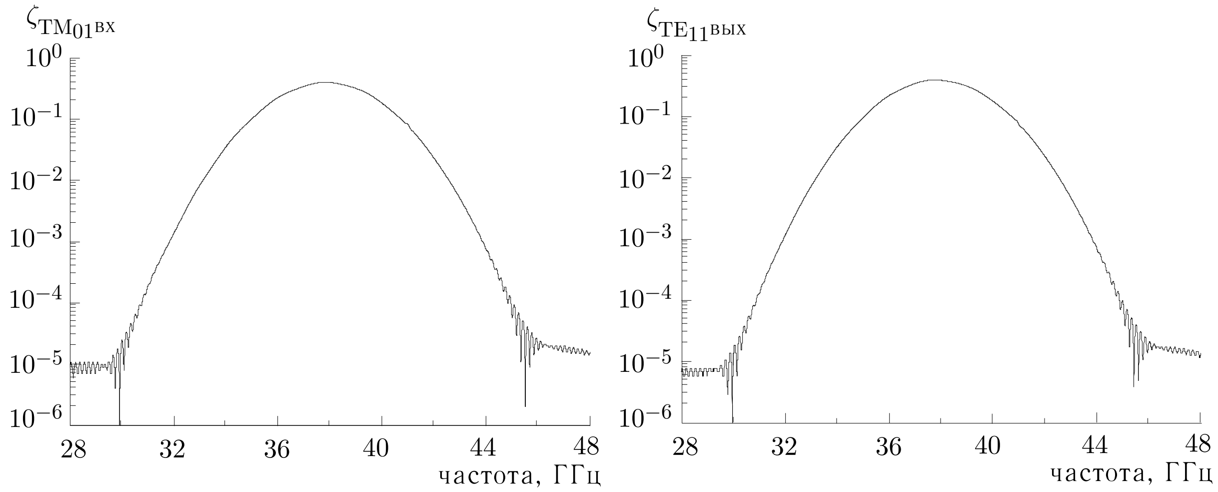

Рис. 11. Спектры амплитудных коэффициентов мод круглого волновода

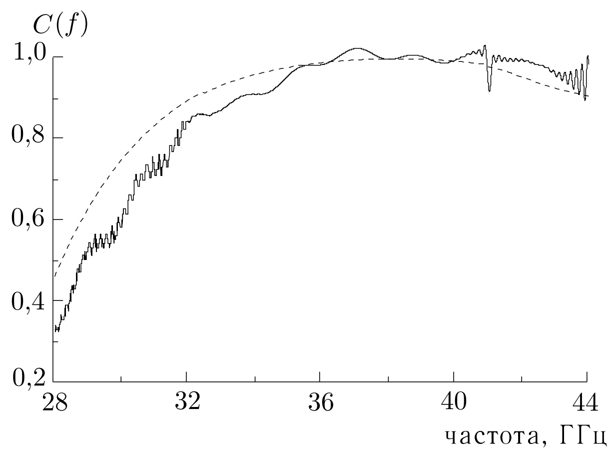

Рис. 12. Амплитудно-частотная характеристика преобразователя

Для получения амплитудно-частотной характеристики использовался импульс с полушириной 0,25 нс и спектром, отличным от нуля в интервале частот от 28 до 48 ГГц. Ограничение проводилось домножением спектра исходного импульса с гауссовой огибающей на плавную функцию $[1+\cos(\pi\,(f-f_0)/\Delta f)]/2$, обращающуюся в нуль на концах интервала и за его пределами: $f_0 = 38$ ГГц, $\Delta f = 10$ ГГц. По полученному в результате домножения спектру восстанавливался модифицированный исходный сигнал, отличающийся от гауссовой функции законом спадания во времени.

Графики спектров амплитудных коэффициентов мод приведены на рис. 11. На обоих графиках вне условия достоверности заметны характерные шумы.

Полученная из зависимостей, приведённых на рис. 11, амплитудно-частотная характеристика приведена на рис. 12 сплошной линией. Пунктиром обозначена амплитудно-частотная характеристика преобразователя, полученная методом связанных волн (с учётом только трёх низших собственных волн с одинаковым направлением распространения), предоставленная Г. Калыновой. При сравнении характеристик между собой можно выделить доверительный интервал частот от 35 до 41 ГГц, в котором относительное различие двух зависимостей не превышает 3 %, что сравнимо с ошибкой типичных реальных экспериментов. Вне доверительного интервала из-за невысокой точности расчётов методом FDTD наблюдаются быстрые осцилляции амплитудно-частотной характеристики, хотя даже при этом относительное различие не превышает 10 %. Нетривиальное поведение полученной методом FDTD амплитудно-частотной характеристики наблюдается вблизи 41 ГГц и соответствует критическим модам TM_{11} и TE_{01}. Зависимость, полученная методом FDTD, демонстрирует быстрые осцилляции, тогда как использованный метод связанных волн не описывает эту область частот. Аналогичные эффекты, хотя и более слабо выраженные, можно наблюдать вблизи 32 ГГц (TE_{21}) и 27 ГГц (TM_{01}). Также кривая метода FDTD имеет несколько локальных максимумов, в том числе со значениями, превышающими единицу на 1÷2 %. Эта величина характеризует точность проведённых расчётов.

ВЫВОДЫ

Полученные методом FDTD результаты хорошо согласуются с ранее известными теоретическими результатами для квазистационарного режима преобразования на центральной частоте. Точность расчёта основных коэффициентов матрицы рассеяния составляет около 1 %. Также подтверждён факт грубости преобразователя, т. е. сохранение эффекта преобразования в широком диапазоне частот источника. Несмотря на применение «жёсткого» источника [5], для которого падающее на него излучение отражается с коэффициентом, близким к единице, и теоретически может интерферировать с излучением на выходе, в численном эксперименте наблюдались весьма низкие значения коэффициента отражения — порядка 10^{-4} по мощности в широком диапазоне частот. Для оценки коэффициента отражения рассматривался преобразователь с более длинным участком неизогнутого волновода на левом торце (рис. 3) в сравнении с исходным. Кроме того, на квазикритических частотах, где рассматриваемый коэффициент отражения может достигать заметного уровня, невысокая длительность импульса исключает влияние этого эффекта на выходной сигнал.

При исследовании преобразователя с заданными параметрами с помощью коротких импульсов найдена характерная длительность импульса, при которой исходный пакет с гауссовой огибающей существенно изменяет форму при прохождении через преобразователь.

Получена частотная характеристика преобразователя с помощью единого расчёта отклика электродинамической системы на импульс с относительно широким спектром. Результаты хорошо согласуются с амплитудно-частотной характеристикой, полученной методом связанных волн: относительное различие составляет менее 3 % в доверительном интервале частот и менее 10 % — во всём рассмотренном интервале.

Расчёт методом FDTD позволяет легко оценивать важные и трудно рассчитываемые другими методами эффекты рассеяния волн, связанные с возбуждением критических мод в преобразователе. При этом достигается разумная точность как в нестационарных, так и в стационарных задачах (точность метода FDTD при вычислении интегральных характеристик в настоящей работе составляет не менее трёх значащих цифр).

Авторы выражают благодарность М. Ю. Глявину и С. В. Кузикову за конструктивные замечания и стимулирующие дискуссии, позволившие повысить качество статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виноградов Д. В., Денисов Г. Г. // Изв. вузов. Радиофизика. 1990. Т. 33, № 6. С. 726.
2. Thumm M. // Generation and Application of High Power Microwaves: Proc. of the 48th Scottish Universities Summer School in Physics, St. Andrews, August 1996. P. 121.
3. Виноградов Д. В., Денисов Г. Г. Преобразователь типов волн: Описание изобретения к авторскому свидетельству СССР SU 1566424 A1.
4. Yee K. S. // IEEE Trans. Antennas Propag. 1966. V. 14, No. 8. P. 302.
5. Taflove A., Hagness S. C. Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method. Boston and London: Artech House, 2000. 854 p.
6. Кулыгин М. Л. // Изв. вузов. Радиофизика. 2004. Т. 47, № 1. С. 69.
7. Berenger J. P. // J. Comp. Phys. 1996. V. 127. P. 363.
8. Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны. М.: Радио и связь, 1988. 440 с.

Поступила в редакцию 11 мая 2004 г.; принята в печать 29 октября 2004 г.

NUMERICAL SIMULATION OF TM_{01}–TE_{11} WAVEGUIDE MODE CONVERTER BY THE FDTD METHOD

G. G. Denisov and M. L. Kulygin

We consider the problem of propagation of a microwave pulse with given transverse structure through a waveguide converter of the circular-waveguide modes from TM_{01} to TE_{11}. The FDTD method is used for numerical study of the mode composition of the pulse at the converter output depending on its duration. The frequency characteristic of the converter is obtained from the Fourier response to the wide-spectrum pulse.

УДК 533.922

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПОТОКА ЭЛЕКТРОНОВ С ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМИ ВОЛНАМИ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ПЛАЗМЕННОМ ВОЛНОВОДЕ

А. Ф. Русанов, В. М. Яковенко

Институт радиофизики и электроники им. А. Я. Усикова НАНУ, г. Харьков, Украина

Исследуется взаимодействие прямолинейного нерелятивистского электронного потока с плазмой твёрдого тела в прямоугольном металлическом волноводе, а также волновые процессы в плазменном волноводе прямоугольного поперечного сечения в отсутствие потока электронов. Показано, что в такой системе в широком диапазоне частот возникает неустойчивость волн пространственного заряда электронного потока, распространяющихся вдоль границы с полупроводником.

Эффекты, возникающие при взаимодействии электронных потоков с плазмой, в настоящее время широко используются для построения плазменных генераторов и усилителей СВЧ диапазона. Плазменно-пучковые структуры, лежащие в основе подобных устройств, могут иметь как цилиндрическую [1–3], так и прямоугольную (плоскую) геометрию [4–6].

К настоящему времени в научной литературе существует большое количество работ, посвящённых взаимодействию электронных потоков с газоразрядной или твердотельной плазмой, помещённой в круглый металлический волновод. Взаимодействие электронных потоков с плазмой в прямоугольных металлических волноводах, на наш взгляд, изучено значительно меньше, хотя плазменно-пучковые структуры прямоугольной формы также могут широко использоваться на практике.

В предлагаемой работе исследуется взаимодействие прямолинейного нерелятивистского электронного потока (заряд электронного потока нейтрализован неподвижным ионным фоном) с плазмой твёрдого тела в прямоугольном металлическом волноводе. Также исследуются волновые процессы в плазменном волноводе прямоугольного поперечного сечения в отсутствие потока электронов.

Поперечное сечение исследуемого плазменного волновода представлено на рис. 1. Вдоль широких стенок волновода расположены полупроводниковые пластинки с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_{\rm s}(\omega)$, между пластинами располагается вакуум (в общем случае — диэлектрик с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_{\rm d}$).

Исследуем, прежде всего, собственные электромагнитные волны в рассматриваемом плазменном волноводе в отсутствие потока электронов.

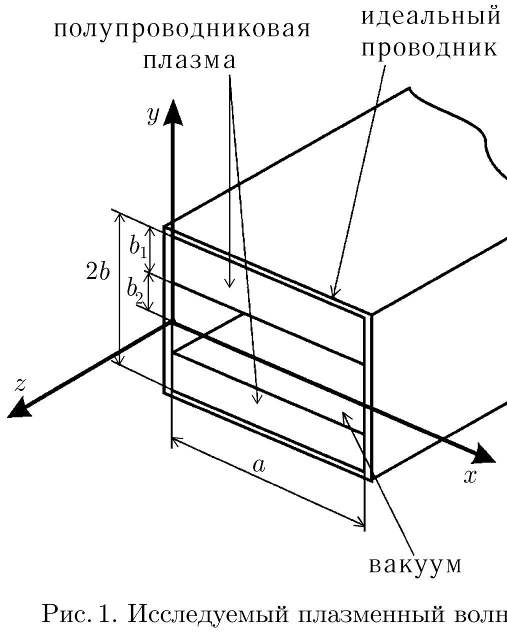

Рис. 1. Исследуемый плазменный волновод

Векторы напряжённости электрического $\mathbf{E}$ и магнитного $\mathbf{H}$ полей самосогласованного электромагнитного поля удовлетворяют уравнениям Максвелла:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\,\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\,,\qquad \operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\,\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\,,\qquad \operatorname{div}\mathbf{D} = 0,\qquad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0. \tag{1}$$

Вектор электрической индукции определяются выражением

$$\mathbf{D}(\mathbf{r},t) = \int\limits_{-\infty}^{t} \hat{\varepsilon}(t-t')\mathbf{E}(\mathbf{r},t')\,\mathrm{d}t'. \tag{2}$$

Положим, что зависимость компонент поля от координаты z и времени имеет вид

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \mathbf{A}(x,y)\exp[i\,(q_z z - \omega t)], \tag{3}$$

где q_z — компонента волнового вектора вдоль оси z, ω — частота сигнала. В этом случае

$$D(\omega) = \varepsilon(\omega)E(\omega), \tag{4}$$

где $\varepsilon(\omega)$ — тензор диэлектрической проницаемости среды, определяемый выражением

$$\varepsilon(\omega) = \int\limits_{0}^{\infty} \hat{\varepsilon}(\tau)\exp(i\omega\tau)\,\mathrm{d}\tau,\qquad \tau = t - t'. \tag{5}$$

Будем моделировать плазму полупроводника уравнениями «холодной» гидродинамики (мы полагаем, что частота собственных электромагнитных волн в таком волноводе много больше частоты ленгмюровских колебаний ионов, фазовая скорость этих волн намного превышает тепловую скорость электронов). Тензор диэлектрической проницаемости плазмы в этом случае скалярная величина, т. е.

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_{\mathrm{s}}(\omega) = \varepsilon_0\left[1 - \frac{\omega_{\mathrm{p}}^2}{\omega\,(\omega + i\nu)}\right], \tag{6}$$

где $\omega_{\mathrm{p}}^2 = 4\pi e^2 N_0/(\varepsilon_0 m^*)$ — плазменная частота, ε_0 — диэлектрическая проницаемость кристаллической решётки полупроводника, e и N_0 — заряд и равновесная концентрация электронов в полупроводнике, m^* и ν — эффективные масса и частота соударений электронов.

Электромагнитное поле в исследуемом плазменном волноводе удобно представить в виде линейной комбинации волн LE ($E_y = 0$) и LM ($H_y = 0$) [7]. Воспользовавшись в качестве граничных условий непрерывностью тангенциальных составляющих электрического и магнитного полей на границах раздела сред и учитывая, что тангенциальные компоненты вектора напряжённости электрического поля и нормальные компоненты вектора напряжённости магнитного поля обращаются в нуль на поверхности идеально проводящего металла, находим дисперсионные уравнения LE- и LM-волн.

Дисперсионное уравнение LE-волн имеет следующий вид:

$$F_1^{\mathrm{LE}}F_2^{\mathrm{LE}} = 0, \tag{7}$$

аналогично запишем дисперсионное уравнение LM-волн:

$$F_1^{\mathrm{LM}}F_2^{\mathrm{LM}} = 0. \tag{8}$$

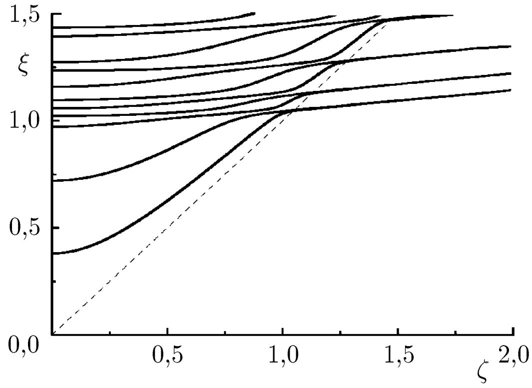

Рис. 2. Спектр LE-волн в рассматриваемом плазменном волноводе при $\nu = 0$

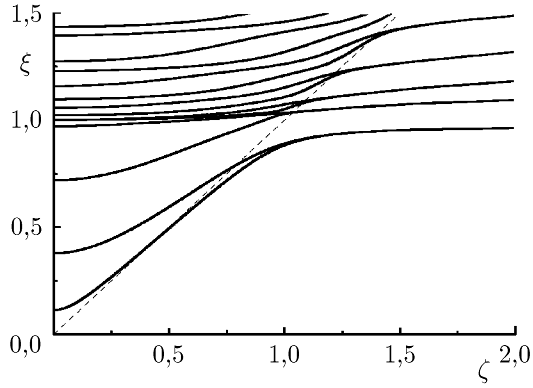

Рис. 3. Спектр LM-волн в рассматриваемом плазменном волноводе при $\nu = 0$

Здесь

$$F_1^{\rm LE} = \frac{q_{y\rm d}}{q_{y\rm s}}\,\mathrm{tg}(q_{y\rm s}b_1) + \mathrm{tg}(q_{y\rm d}b_2), \qquad F_2^{\rm LE} = \frac{q_{y\rm s}}{q_{y\rm d}}\,\mathrm{ctg}(q_{y\rm s}b_1) - \mathrm{tg}(q_{y\rm d}b_2),$$

$$F_1^{\rm LM} = \frac{q_{y\rm s}}{\varepsilon_{\rm s}}\,\mathrm{tg}(q_{y\rm s}b_1) + \frac{q_{y\rm d}}{\varepsilon_{\rm d}}\,\mathrm{tg}(q_{y\rm d}b_2), \qquad F_2^{\rm LM} = \frac{q_{y\rm s}}{\varepsilon_{\rm s}}\,\mathrm{tg}(q_{y\rm s}b_1) - \frac{q_{y\rm d}}{\varepsilon_{\rm d}}\,\mathrm{ctg}(q_{y\rm d}b_2),$$

$q_{y\rm s} = \sqrt{-q_x^2 - q_z^2 + \omega^2\varepsilon_{\rm s}/c^2}$ и $q_{y\rm d} = \sqrt{-q_x^2 - q_z^2 + \omega^2\varepsilon_{\rm d}/c^2}$ — компоненты волнового вектора вдоль оси y в полупроводнике и в диэлектрике, $q_x = m\pi/a$ — компонента волнового вектора вдоль оси x, $m = 1, 2, \ldots$. Каждое из уравнений (7) и (8) распадается на два независимых уравнения. Уравнения $F_1^{\rm LE} = 0$ и $F_1^{\rm LM} = 0$ определяют типы колебаний, у которых компоненты H_x и H_z вектора $\mathbf{H}$ являются чётными функциями координаты y, в то время как уравнения $F_2^{\rm LE} = 0$ и $F_2^{\rm LM} = 0$ определяют типы колебаний, у которых компоненты H_x и H_z — нечётные функции координаты y.

Выражения (7), (8) аналогичны соответственно уравнениям (II.46), (II.47) и (II.59), (II.60) работы [7].

Для всех численных расчётов в работе мы использовали следующие геометрические размеры плазменного волновода (см. рис. 1): $a = 1$ см, $b_1 = 0{,}1$ см, $b_2 = 0{,}15$ см, $b = b_1 + b_2 = 0{,}25$ см. Параметры полупроводникового материала в расчётах соответствуют антимониду индия n-типа: $\varepsilon_0 = 16$, $N_0 = 5 \cdot 10^{13}$ см$^{-3}$, $m^* = 0{,}015 m_{\rm e}$, $m_{\rm e}$ — масса электрона.

На рис. 2 и 3 представлен спектр LM- и LE-волн в рассматриваемом плазменном волноводе (пунктиром изображена световая линия $\xi = \zeta/\sqrt{\varepsilon_{\rm d}}$, где $\xi = \omega/\omega_{\rm p}$, $\zeta = cq_z/\omega_{\rm p}$). Различные ветви спектра соответствуют разному числу вариаций поля вдоль оси y при одном и том же значении $q_x = \pi/a$.

Пространственные распределения амплитуды компоненты H_z вектора $\mathbf{H}$ LM-волн в плоскости поперечного сечения плазменного волновода представлены на рис. 4 и 5.

Учёт соударений электронов в полупроводниковых пластинах приводит к изменению спектра дисперсионных кривых LE- и LM-волн. При этом особенно сильно изменяется спектр поверхностных электромагнитных волн, а волноводные моды распространяются практически без изменения спектра. На рис. 6 представлен спектр поверхностных LM-волн в исследуемом плазменном волноводе, построенный с учётом соударений электронов в полупроводнике. Штриховая прямая на рис. 6 соответствует световой линии, штрих-пунктиром изображена кривая, определяемая уравнением $q_{y\rm s}^2 < 0$. Область поверхностных электромагнитных волн лежит ниже штрих-пунктирной кривой. Из рис. 6 видно, что на дисперсионных зависимостях появляются точки поворота. Это значит, что фазовая скорость поверхностных волн $V_{\rm ф} = c\xi/\mathrm{Re}\,(\zeta)$ не может быть слишком малой.

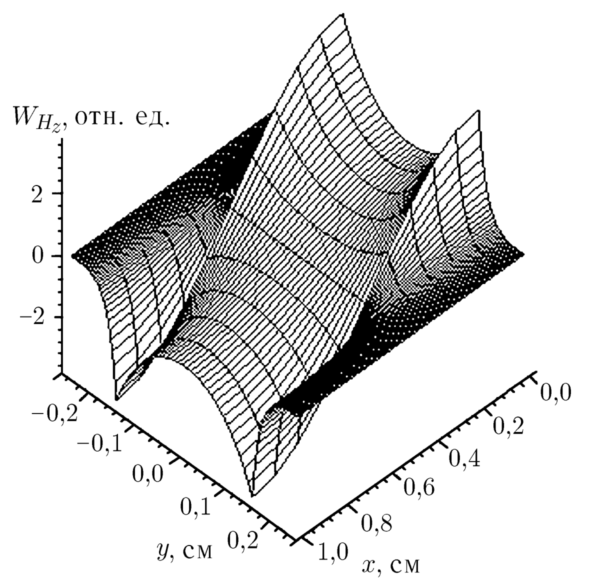

Рис. 4. Распределение амплитуды компоненты H_z вектора **H** LM-волны. H_z — чётная функция y. Распределение построено для точки дисперсионной кривой $\zeta = 1$, $\xi = 0{,}8818306$ ($m = 1$)

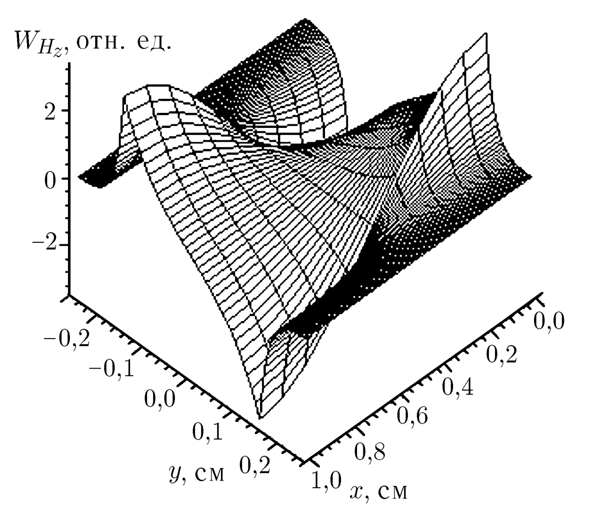

Рис. 5. Распределение амплитуды компоненты H_z вектора **H** LM-волны. H_z — нечётная функция y. Распределение построено для точки дисперсионной кривой $\zeta = 1$, $\xi = 0{,}8891095$ ($m = 1$)

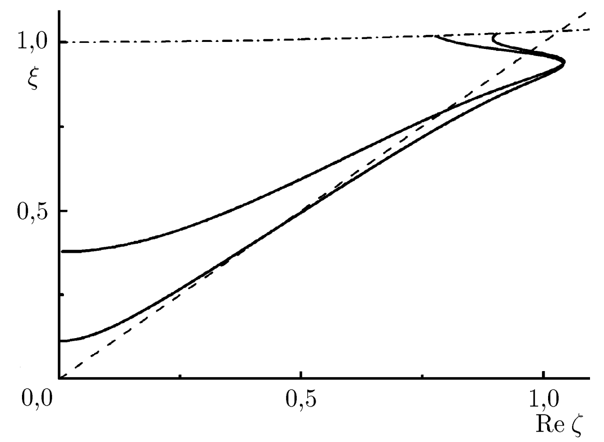

Рис. 6. Спектр поверхностных LM-волн в рассматриваемом плазменном волноводе при $\nu = 0{,}1\omega_{\rm p}$

Рассмотрим теперь взаимодействие электронного потока, движущегося в области $|y| < b_2$, с собственными электростатическими колебаниями плазменного волновода.

Вследствие того, что в реальных полупроводниках соударения электронов всегда присутствуют, нерелятивистский электронный поток, который мы рассматриваем в данной работе, не может эффективно взаимодействовать ни с поверхностными, ни с объёмными электромагнитными волнами плазменного волновода (из-за высокой фазовой скорости этих волн) таким образом, чтобы вызвать их неустойчивость.

В исследуемой пучково-плазменной системе неустойчивыми могут быть волны пространственного заряда электронного потока даже с учётом соударений электронов в полупроводниковых пластинах.

Далее мы будем исследовать взаимодействие электронного потока с собственными волнами плазмы твёрдого тела в нерелятивистском приближении. Такой подход значительно упрощает решение поставленной задачи и позволяет получить дисперсионные уравнения, описывающие взаимодействие электростатических волн с потоком электронов, в аналитическом виде.

В нерелятивистском приближении (скорость света $c \to \infty$) взаимодействие потока электронов с электрическим полем описывается уравнениями

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \qquad \operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \tag{9}$$

где вектор электрической индукции в полупроводнике определяется выражением (2), а в области потока электронов вектор электрической индукции запишем в виде

$$\mathbf{D}(\mathbf{r},t) = \varepsilon_{\mathrm{d}}\mathbf{E}(\mathbf{r},t) + 4\pi \int\limits_{-\infty}^{t} \mathbf{j}_{\mathrm{b}}(\mathbf{r},t')\,\mathrm{d}t'. \tag{10}$$

Здесь $\mathbf{j}_{\mathrm{b}}$ — плотность тока электронного пучка, которая определяется выражением

$$\mathbf{j}_{\mathrm{b}} = en_0\mathbf{V} + en\mathbf{V}_0, \tag{11}$$

где e — заряд электронов пучка, n — отклонение их концентрации от равновесного значения n_0, V_0 и V — соответственно равновесная и неравновесная скорости электронов. Поведение электронов пучка в поле $\mathbf{E}$ описывается следующими линеаризованными уравнениями гидродинамики:

$$m_{\mathrm{e}}\left(\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t} + V_0\,\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial z}\right) = e\mathbf{E}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{j}_{\mathrm{b}} = -e\,\frac{\partial n}{\partial t}\ . \tag{12}$$

Из уравнений (3), (9)–(12) следует, что отличные от нуля компоненты тензора диэлектрической проницаемости пучка определяются выражениями

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{\mathrm{d}} - \frac{\omega_{\mathrm{b}}^2}{\omega\,(\omega - q_zV_0)}\ , \qquad \varepsilon_{zx}E_x = i\,\frac{\omega_{\mathrm{b}}^2V_0}{\omega\,(\omega - q_zV_0)^2}\,\frac{\partial E_x}{\partial x}\ ,$$

$$\varepsilon_{zy}E_y = i\,\frac{\omega_{\mathrm{b}}^2V_0}{\omega\,(\omega - q_zV_0)^2}\,\frac{1}{n}\,\frac{\partial}{\partial y}\,(n_0E_y), \qquad \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{\mathrm{d}} - \frac{\omega_{\mathrm{b}}^2}{(\omega - q_zV_0)^2}\ , \tag{13}$$

где $\omega_{\mathrm{b}}^2 = 4\pi e^2n_0/m_{\mathrm{e}}$ — ленгмюровская частота электронов пучка.

Зависимость $E_z(x,y)$ в каждой из сред плазменного волновода определяется уравнением

$$\frac{\partial^2E_{z\alpha}(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2E_{z\alpha}(x,y)}{\partial y^2} - q_z^2E_{z\alpha}(x,y) = 0, \tag{14}$$

где индекс α принимает значения b и s соответственно для среды с пучком и для полупроводника. С учётом граничных условий на металлических поверхностях плазменного волновода из уравнения (14) находим зависимость $E_z(x,y)$ в каждой из сред

$$E_{z\mathrm{s}}(x,y) = C_1\,[\mathrm{tg}(q_yb)\cos(q_yy) + \sin(q_yy)]\,\sin(q_xx), \qquad -b < y < -b_2;$$

$$E_{z\mathrm{b}}(x,y) = [A\cos(q_yy) + B\sin(q_yy)]\,\sin(q_xx), \qquad -b_2 < y < b_2;$$

$$E_{z\mathrm{s}}(x,y) = -C_2\,[\mathrm{tg}(q_yb)\cos(q_yy) - \sin(q_yy)]\,\sin(q_xx), \qquad b_2 < y < b, \tag{15}$$

где

$$q_y = (-q_x^2 - q_z^2)^{1/2}, \tag{16}$$

$$q_x^2 = (m\pi/a)^2, \qquad m = 0,1,2,\ldots\ . \tag{17}$$

Связь между компонентами вектора $\mathbf{E}$ находим из (9):

$$E_{x\alpha}(x,y) = -\,\frac{i}{q_z}\,\frac{\partial E_{z\alpha}(x,y)}{\partial x}\ , \qquad E_{y\alpha}(x,y) = -\,\frac{i}{q_z}\,\frac{\partial E_{z\alpha}(x,y)}{\partial y}\ . \tag{18}$$

Граничные условия для компоненты E_z вектора напряжённости электрического поля имеют вид

$$E_{z\mathrm{b}}(\pm b_2) - E_{z\mathrm{s}}(\pm b_2) = 0. \tag{19}$$

При выводе граничного условия для нормальной компоненты вектора электрической индукции, на границах полупроводник—пучок ($y = \pm b_2$) введём в рассмотрение бесконечно тонкий переходной слой толщины δ [8]. Искомое граничное условие находим путём интегрирования второго из уравнений (9) по переходному слою:

$$\int\limits_{\pm b_2-\delta/2}^{\pm b_2+\delta/2} \operatorname{div}\mathbf{D}(y)\,\mathrm{d}y = 0. \tag{20}$$

Перепишем уравнение (20) для $y = b_2$ в виде

$$D_{y\mathrm{b}}(b_2) - D_{y\mathrm{s}}(b_2) = iq_x \int\limits_{b_2-\delta/2}^{b_2+\delta/2} D_x(y)\,\mathrm{d}y + iq_z \int\limits_{b_2-\delta/2}^{b_2+\delta/2} D_z(y)\,\mathrm{d}y. \tag{21}$$

Первый член справа от знака равенства в (21) можно представить в виде $iq_x\delta\overline{D}_x$, где $\overline{D}_x$ — среднее значение индукции на границе. При $\delta \to 0$ этот член исчезает. Второй член справа в уравнении (21), как видно из (13), содержит производную по координате y и даёт отличный от нуля вклад в граничные условия для D_y. После несложных преобразований окончательно получаем граничные условия для нормальной компоненты вектора электрической индукции на границах полупроводник—пучок:

$$D_{y\mathrm{b}}(\pm b_2) - D_{y\mathrm{s}}(\pm b_2) = \frac{\omega_\mathrm{b}^2 q_z V_0}{\omega\,(\omega - q_z V_0)^2}\; E_{y\mathrm{b}}(\pm b_2). \tag{22}$$

Граничное условие (22) можно получить также из уравнения Пуассона $\operatorname{div}(\varepsilon\mathbf{E}) = 4\pi e n$ (здесь ε принимает значения ε_s и ε_d соответственно в полупроводнике и в диэлектрике) в виде

$$\varepsilon_\mathrm{s} E_{y\mathrm{s}} - \varepsilon_{zz} E_{y\mathrm{b}} = 0. \tag{23}$$

Воспользовавшись граничными условиями (19) и (22), находим дисперсионное уравнение, описывающее взаимодействие электростатических волн в плазменном волноводе с потоком электронов:

$$[\varepsilon_\mathrm{s}\operatorname{tg}(q_y b_2) + \varepsilon_{xx}\operatorname{tg}(q_y b_1)]\,[\varepsilon_\mathrm{s}\operatorname{ctg}(q_y b_2) - \varepsilon_{xx}\operatorname{tg}(q_y b_1)] = 0. \tag{24}$$

Полагая в уравнении (24) $q_y = i\,|q_y|$, перепишем его в виде

$$[\varepsilon_\mathrm{s}\operatorname{th}(q_y b_2) + \varepsilon_{xx}\operatorname{th}(q_y b_1)]\,[\varepsilon_\mathrm{s}\operatorname{cth}(q_y b_2) + \varepsilon_{xx}\operatorname{th}(q_y b_1)] = 0, \tag{25}$$

где q_y — действительная величина.

Корни уравнения (25) можно найти в приближении малой концентрации электронов пучка по отношению к электронной концентрации в полупроводнике. Полагая в (25) $\omega_\mathrm{b} \to 0$, получаем три закона дисперсии электростатических колебаний:

$$\omega_1 = -\frac{i\nu}{2} \pm \sqrt{\frac{\omega_\mathrm{p}^2}{1 + \varepsilon_\mathrm{d}\,\operatorname{th}(q_y b_1)\,\operatorname{cth}(q_y b_2)/\varepsilon_0} - \frac{\nu^2}{4}}\,, \tag{26}$$

$$\omega_2 = -\frac{i\nu}{2} \pm \sqrt{\frac{\omega_\mathrm{p}^2}{1 + \varepsilon_\mathrm{d}\,\operatorname{th}(q_y b_1)\,\operatorname{th}(q_y b_2)/\varepsilon_0} - \frac{\nu^2}{4}}\,, \tag{27}$$

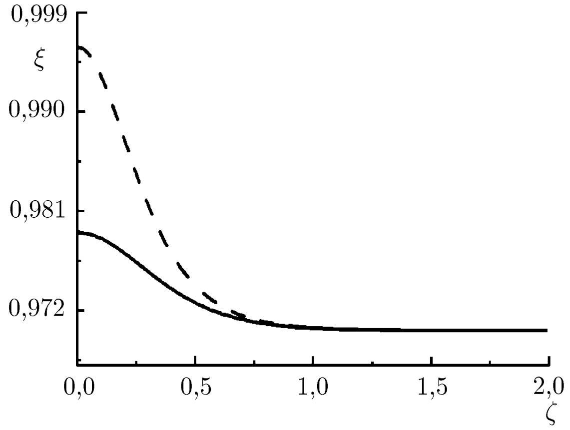

Рис. 7. Спектр собственных электростатических колебаний в рассматриваемом плазменном волноводе при $\nu = 0$

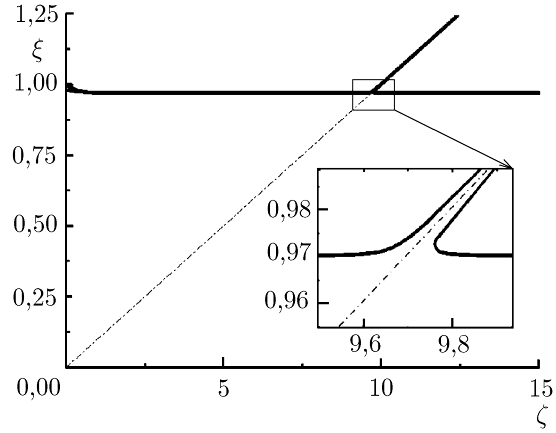

Рис. 8. Спектр электростатических колебаний в исследуемом плазменном волноводе с потоком электронов $V_0 = 3 \cdot 10^9$ см/с, $\omega_{\rm b} = 10^9$ с$^{-1}$, $\nu = 0$

$$\omega_3 = q_z V_0. \tag{28}$$

Колебания (26) и (27) при наличии столкновений являются затухающими, и поток электронов в рассматриваемом волноводе не приведёт к существенному изменению их частоты и декремента.

Численное решение уравнения (25) в отсутствие потока электронов представлено на рис. 7, где сплошная линия соответствует частоте ω_1, а штриховая — частоте ω_2. Численное решение уравнения (25) с потоком заряженных частиц представлено на рис. 8 (штрих-пунктирная линия соответствует частоте ω_3).

Закон дисперсии (28) описывает волны пространственного заряда в электронном потоке. Их взаимодействие с плазмой твёрдого тела приводит к нарастанию или затуханию амплитуды этих волн. Полагая в уравнениях (26) и (27) $\omega_{1,2} = q_z V_0 + \Delta\omega_{1,2}$ ($|\Delta\omega_{1,2}| \ll q_z V_0$), можно найти инкременты неустойчивости волн пространственного заряда:

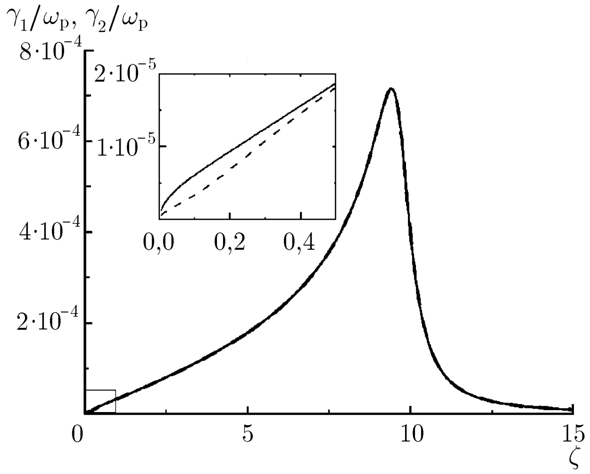

Рис. 9. Инкременты неустойчивости волн пространственного заряда: $V_0 = 3 \cdot 10^9$ см/с, $\omega_{\rm b} = 10^9$ с$^{-1}$, $\nu = 0{,}1\omega_{\rm p}$

$$\gamma_1 = \operatorname{Im}\Delta\omega_1 = \operatorname{Im}\left\{\left[\frac{\omega_{\rm b}^2 q_z V_0\,(q_z V_0 + i\nu)}{[\varepsilon_{\rm d} + \varepsilon_0 \operatorname{cth}(q_y b_1)\operatorname{th}(q_y b_2)]\, q_z V_0\,(q_z V_0 + i\nu) - \omega_0^2 \operatorname{cth}(q_y b_1)\operatorname{th}(q_y b_2)}\right]^{1/2}\right\}, \tag{29}$$

$$\gamma_2 = \operatorname{Im}\Delta\omega_2 = \operatorname{Im}\left\{\left[\frac{\omega_{\rm b}^2 q_z V_0\,(q_z V_0 + i\nu)}{[\varepsilon_{\rm d} + \varepsilon_0 \operatorname{cth}(q_y b_1)\operatorname{cth}(q_y b_2)]\, q_z V_0\,(q_z V_0 + i\nu) - \omega_0^2 \operatorname{cth}(q_y b_1)\operatorname{cth}(q_y b_2)}\right]^{1/2}\right\}. \tag{30}$$

Инкремент неустойчивости γ_1 соответствует взаимодействию потока электронов с собственной волной плазменного волновода (26), а инкремент γ_2 — с собственной волной (27). На рис. 9 представлены инкременты неустойчивости волн пространственного заряда γ_1 (сплошная линия) и γ_2 (пунктирная линия) при отличной от нуля эффективной частоте соударений электронов в полупроводнике. Как видно из рис. 9, волны пространственного заряда неустойчивы в широком диапазоне частот, и их инкремент имеет резонансный характер с максимумом на частоте $\omega = q_z V_0 = \omega_{1,2}$.

Из полученных численных значений инкрементов неустойчивости следует, что при длине плазменного волновода 4 см усиление мощности сигнала волны пространственного заряда составляет 7,5 дБ.

Если частота соударений частиц равна нулю, в условиях резонансов $q_z V_0 = \omega_1$ и $q_z V_0 = \omega_2$ существуют связанные пучково-плазменные колебания, инкременты неустойчивости которых определяется соответственно выражениями

$$\gamma_{01} = \sqrt{3} \left[\frac{\omega_{\rm b}^2 \omega_1}{2 \left[\varepsilon_{\rm d} + \varepsilon_0 \operatorname{cth}(q_y b_1) \operatorname{th}(q_y b_2) \right]} \right]^{1/3}, \qquad (31)$$

$$\gamma_{02} = \sqrt{3} \left[\frac{\omega_{\rm b}^2 \omega_2}{2 \left[\varepsilon_{\rm d} + \varepsilon_0 \operatorname{cth}(q_y b_1) \operatorname{cth}(q_y b_2) \right]} \right]^{1/3}. \qquad (32)$$

Именно значениями γ_{01} и γ_{02} будут ограничены инкременты γ_1 и γ_2 в условиях резонанса в отсутствие соударений электронов.

Таким образом, при взаимодействии потока заряженных частиц с столкновительной плазмой твёрдого тела в плазменном волноводе исследуемой конфигурации в широком диапазоне частот возникает неустойчивость волн пространственного заряда, распространяющихся вдоль границы раздела. При этом инкремент неустойчивости достигает максимальной величины в условиях резонанса, когда частота волн пространственного заряда совпадает с частотой собственных колебаний плазмы твёрдого тела.

Сравнение численных значений инкрементов неустойчивости волн пространственного заряда, полученных в этой работе, с инкрементами для цилиндрического волновода [9] (с геометрическими размерами того же порядка) показывает, что максимальные значения инкрементов в области резонанса примерно одинаковы. В то же время спектры собственных колебаний в этих структурах существенно различаются. Так, в цилиндрическом волноводе существует лишь одна поверхностная волна, а в прямоугольном — две волны, локализованные на границах полупроводник—диэлектрик. Поэтому в прямоугольном плазменном волноводе электронный поток взаимодействует одновременно с двумя поверхностными волнами. Эффективность взаимодействия за счёт этого может быть значительно повышена. Следует также отметить, что технологически значительно легче сформировать ленточный электронный поток, чем круглый. В связи с вышесказанным использование пучково-плазменных структур прямоугольного поперечного сечения, подобных исследуемой в данной работе, представляется нам наиболее целесообразным.

Для экспериментального наблюдения эффекта усиления амплитуды волн пространственного заряда (дрейфовых волн) необходима предварительная модуляция концентрации потока заряженных частиц.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кондратенко А. Н., Куклин В. М. Основы плазменной электроники. М.: Энергоатомиздат, 1988. 320 с.
2. Kartashov I. N., Kuzelev M. V. // Plasma Physics Reports. 2001. V. 27, No. 5. P. 381.
3. Ponomarev A. V., Strelkov P. S., Shkvarunets A. G. // Plasma Physics Reports. 1998. V. 24, No. 1. P. 48.

4. Корнилов Е. А., Некрашевич С. А., Файнберг Я. Б., Шеховцов Н. А. // Письма в ЖЭТФ. 1970. Т. 11, № 6. С. 284.
5. Бородкин А. И., Яковенко В. М., Левин Г. Я., Майстренко Ю. В. // Физика твёрдого тела. 1970. Т. 12, № 5. С. 1 515.
6. Hirata A., Yuse Y., Shiozawa T. // J. Appl. Phys. 2002. V. 91, No. 12. P. 9 471.
7. Егоров Ю. В. Частично заполненные прямоугольные волноводы. М.: Сов. радио, 1967. 218 с.
8. Михайловский А. Б., Пашицкий Э. А. // ЖЭТФ. 1965. Т. 48, № 6. С. 1 787.
9. Русанов А. Ф., Яковенко В. М. // Радиофизика и электроника. Харьков, 2000. Т. 5, № 3. С. 91.

Поступила в редакцию 6 февраля 2004 г.; принята в печать 16 сентября 2004 г.

INTERACTION OF AN ELECTRON BEAM WITH ELECTROMAGNETIC WAVES IN A RECTANGULAR PLASMA WAVEGUIDE

A. F. Rusanov and V. M. Yakovenko

We study the interaction of a rectilinear nonrelativistic electron beam with a solid-state plasma in a rectangular metal waveguide, as well as wave processes in a plasma waveguide of rectangular cross section in the absence of an electron beam. It is shown that in such a system, space-charge waves of an electron beam, which propagate along a semiconductor boundary, become unstable in a wide frequency band.

УДК 621.373.1

МОДЕЛЬ НЕЙРОНА С ПОСЛЕДЕПОЛЯРИЗАЦИЕЙ И КРАТКОСРОЧНАЯ ПАМЯТЬ

В. В. Клиньшов, В. И. Некоркин

Институт прикладной физики РАН, г. Нижний Новгород, Россия

В работе предложена модель, описывающая динамику нейрона, способного к хранению так называемой краткосрочной памяти. С динамической точки зрения эффект краткосрочной памяти состоит в «запоминании» нейроном факта своего возбуждения и периодической генерации потенциала действия на протяжении длительного времени после возбуждения коротким импульсом. Этот механизм формирования памяти реализуется в модели благодаря введённому в неё свойству последеполяризации, которым обладают реальные (живые) нейроны коры головного мозга и мозжечка.

ВВЕДЕНИЕ

Одной из важных и актуальных проблем современной нейродинамики является изучение динамических механизмов хранения человеческим мозгом так называемой краткосрочной памяти (КСП) [1–5]. Краткосрочной памятью называют возможность хранения мозгом поступающей от органов чувств информации в течение небольшого интервала времени ($1\div10^2$ с) [1]. В литературе описано несколько возможных динамических механизмов реализации КСП, основные из них — циркуляция нервных импульсов в замкнутых цепях нейронов [1, 3, 5] и возбуждение кластеров нейронной активности [1, 2]. В работе [2] был предложен динамический механизм формирования КСП, реализующейся в виде кластеров нейронной активности, существование которых обусловлено особым свойством некоторых нейронов головного мозга оставаться активными достаточно длительное время после их возбуждения внешним стимулом (коротким импульсом). При этом электрические колебания в коре головного мозга (альфа-тета ритмы, частота $5\div12$ Гц) периодически возбуждают нейрон и поддерживают его активное состояние. Таким образом, наблюдается эффект запоминания нейроном факта его однократного возбуждения, на основе которого возможно построение запоминающих областей КСП в коре головного мозга.

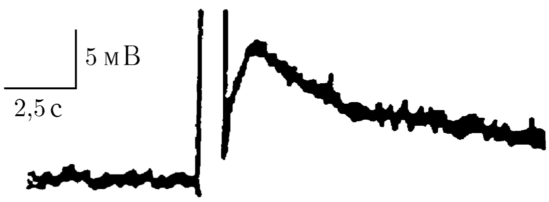

Рис. 1. Свойство последеполяризации нейрона: зависимость мембранного потенциала нейрона от времени после однократного возбуждения, полученная с помощью внутриклеточного микроэлектрода (иллюстрация взята из работы [2])

Описанный механизм формирования краткосрочной памяти в значительной степени базируется на особом свойстве нейронов коры головного мозга — последеполяризации, которое заключается в увеличении возбудимости мембраны нейрона после генерации потенциала действия. Это свойство иллюстрирует рис. 1, на котором приведена снятая с помощью внутриклеточного микроэлектрода временна́я зависимость мембранного потенциала пирамидального нейрона коры головного мозга после его однократного возбуждения.

В работе [2] предложена основанная на описанных выше представлениях о КСП функциональная схема элемента (нейрона) для реализации краткосрочной памяти. Элемент имеет два входа — информационный и осцилляторный. При отсутствии информационного (возбуждающего) импульса в элементе происходят подпороговые колебания, вызванные сигналом, приходящим через осцилляторный вход. Информационный импульс активизирует элемент, и он начинает генерировать потенциал действия на каждом периоде подпороговых колебаний.

В настоящей работе предложена и изучена динамическая модель (функциональная схема) КСП. В разделе 1 представлена динамическая модель КСП и дано описание основных свойств модели. В разделе 2 исследуется структура разбиения фазового пространства системы на траектории и проводится построение отображения Пуанкаре. Исследованию этого отображения посвящён раздел 3. В разделе 4 описывается динамическая модель формирования КСП, а в разделе 5 рассматриваются особенности её функционирования в зависимости от параметров стимуляции. В заключение представлено краткое обсуждение полученных результатов.

1. ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КРАТКОСРОЧНОЙ ПАМЯТИ: ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

Базовым элементом нашей модели является широко известная в теории возбудимости модель ФитцХью—Нагумо [6, 7]. Эта модель правильно отражает основные динамические свойства нейронов, однако не обладает необходимыми для элементов КСП свойствами и требует развития. Введём в рассмотрение систему следующего вида:

$$\varepsilon\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = v - f(u), \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = w - v + x(t), \qquad \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = -\beta w + \gamma\,[g(u) - p(w)], \tag{1}$$

где $x(t)$ моделирует входные сигналы, поступающие на нейрон, $f(u) = 4u\,(u-1)\,(u-a)$, $a = 1/2$, $g(u)$ и $p(w)$ — пороговые функции вида

$$g(u) = \left\{1 + \exp[-\kappa\,(u - 1/2)]\right\}^{-1}, \qquad p(w) = \left\{1 + \exp[-\kappa\,(w - w_{\max})]\right\}^{-1},$$

ε, β, γ, $w_{\max}$, κ — положительные параметры, $\varepsilon = 0{,}005$, $\kappa = 500$, $\gamma \gg \beta w_{\max}$. Аналогично системе ФитцХью—Нагумо [6, 7] переменная u описывает динамику мембранного потенциала, v — так называемая восстанавливающая переменная, связанная с ионными токами. Заметим, что в отличие от классической модели [6, 7] система (1) содержит динамическое уравнение для переменной w, за счёт которой, как будет показано ниже, в модели возможна последеполяризация. На рис. 2*а* представлена зависимость мембранного потенциала u от времени в системе (1), возникающая при стимуляции нейтрона коротким информационным импульсом (ср. рис. 1 и 2*а*).

При $\gamma = 0$ система (1) имеет в фазовом пространстве устойчивую интегральную плоскость $w = 0$, на которой определена система ФитцХью—Нагумо. Рассмотрим теперь отклик системы (1) на действие совокупности осцилляторного и информационного входных сигналов. В этом случае $x(t)$ представляет собой суперпозицию подпорогового гармонического сигнала и одиночного возбуждающего дельта-импульса (см. рис. 2*б*). До прихода возбуждающего импульса мембранный потенциал $u(t)$ совершал ограниченные периодические колебания, вызванные действием внешнего осцилляторного сигнала. Приход возбуждающего импульса вызывает генерацию одиночного потенциала действия (рис. 2*в*). Пройдя короткий период возбуждения, переменная $u(t)$ возвращается в режим подпороговых колебаний, и информация о состоявшемся возбуждении теряется.

При $\gamma \neq 0$ динамика системы (1) принципиально меняется. Введение в систему (1) пороговых функций $g(u)$ и $p(w)$ позволяет учесть в модели последеполяризационные свойства нейрона (см. рис. 1). Сначала динамика системы (1) развивается так же, как и в случае $\gamma = 0$. До прихода

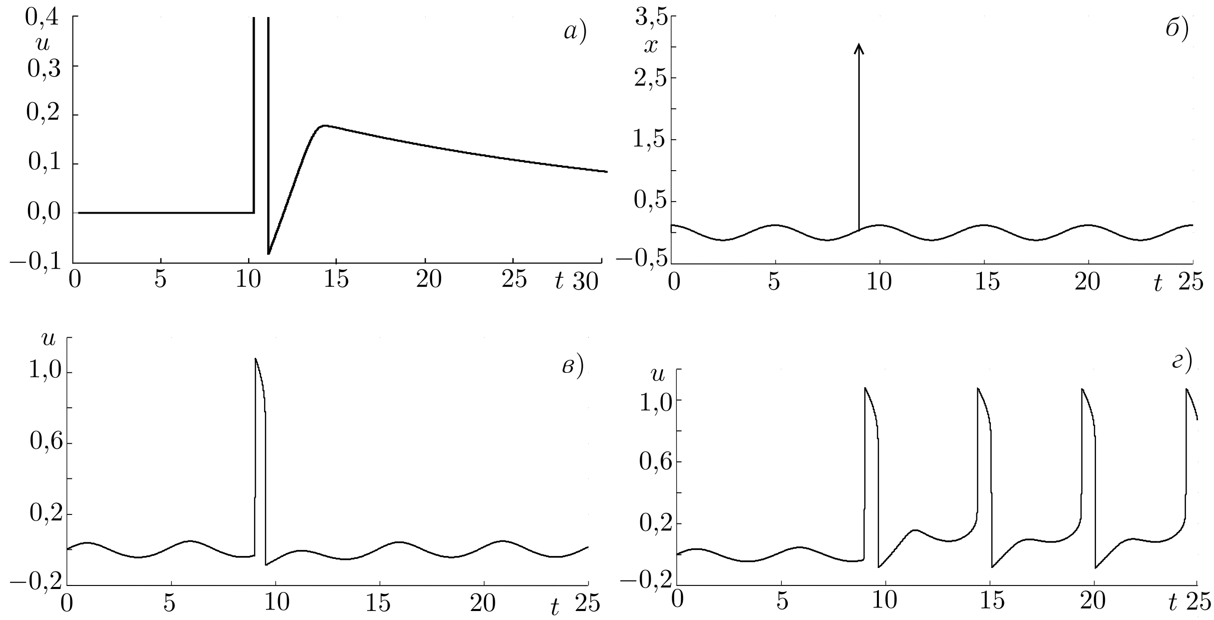

Рис. 2. Зависимость мембранного потенциала u от времени при воздействии коротким импульсом при $\beta = 0{,}05$; $w_{\max} = 0{,}22$; $\gamma = 3$ (*а*). Случай одновременного воздействия на систему осцилляторным и информационным сигналами при $\beta = 0{,}05$, $w_{\max} = 0{,}22$: зависимость входного сигнала от времени (*б*); временна́я зависимость мембранного потенциала при отсутствии в модели свойства последеполяризации: $\gamma = 0$, (*в*) и при наличии последеполяризации: $\gamma = 3$, (*г*)

возбуждающего импульса переменная $u(t)$ совершает подпороговые колебания, а внешний стимул вызывает генерацию потенциала действия. Появление потенциала действия приводит к тому, что переменная $w(t)$, характеризующая возбудимость мембраны, начинает расти вплоть до окончания действия внешнего импульса. Во время периода рефрактерности, наступившего после генерации потенциала действия, переменная $w(t)$ начинает медленно релаксировать (параметр β достаточно мал) к значению $w = 0$, а мембранный потенциал $u(t) \approx w(t)$. Благодаря этому входной осцилляторный сигнал «успевает» при достижении максимума возбудить систему повторно. Таким образом, в системе (1) будут возникать импульсы возбуждения на каждом максимуме осцилляторного входного сигнала (см. рис. 2*г*). Другими словами, нейрон сохранит информацию о первоначальном поступлении внешнего информационного сигнала в виде незатухающих импульсов активности.

2. ДИНАМИКА МОДЕЛИ

Будем рассматривать систему (1) в четырёхмерном фазовом пространстве $G = R^3 \times S^1$, где циклическая компонента $S^1 = R \,(\mathrm{mod}\, T)$ отражает периодичность переменной x: $x(t) = x(t + T)$. Система (1) имеет глобальную секущую $t = \mathrm{const}$, на которой через период внешнего воздействия порождает точечное отображение Пуанкаре S. Исследуем отображение S при некоторых упрощающих предположениях. Эти условия, с одной стороны, позволяют устранить непринципиальные технические трудности исследования, а с другой — не искажают базовые динамические механизмы модели. Предположим следующее.

а) Осцилляторный входной сигнал представляет собой последовательность дельта-импульсов амплитуды V с периодом T:

$$x(t) = V \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT). \tag{2}$$

Такой вид зависимости $x(t)$ сохраняет основное свойство входного сигнала, необходимое для активизации системы, — наличие периодической пиковой активности.

б) Вместо нелинейной функции $f(u)$ введём её кусочно-линейную аппроксимацию следующего вида:

$$f(u) = \begin{cases} u, & u \le \sigma; \\ \sigma - \dfrac{u-\sigma}{1-2\sigma}, & \sigma < u < 1-\sigma; \\ u-1, & u \ge 1-\sigma, \end{cases} \tag{3}$$

где $\sigma = 0{,}2$.

2.1. Основные свойства отображения S

В силу (2) между любыми двумя соседними моментами времени $t_n = nT$ и $t_{n+1} = (n+1)\,T$, где n — целое число, система (1) является автономной, а в моменты времени t_n действие внешнего сигнала сводится к мгновенному увеличению переменной v на величину V. Рассмотрим сначала основные динамические свойства системы в отсутствие внешнего сигнала. Прежде всего, заметим, что область

$$G^+ = \bigl\{u, v, w \,|\, (u, v) \in R^2, -\gamma p(0)/\beta < w < \gamma/\beta\bigr\}$$

является поглощающей, притягивающей все траектории системы с начальными условиями вне этой области. Далее будем рассматривать систему (1) в области G^+.

Поскольку система (1) содержит малый параметр ε, в фазовом пространстве G^+ существуют так называемые быстрые и медленные движения [8–10], имеющие разные временны́е масштабы. Медленные движения происходят на многообразии медленных движений и в его малой окрестности. Движение по быстрым траекториям происходит за очень короткое время и носит характер «скачка» [8–10] по быстрым переменным. В системе (1) переменная u является быстрой, а переменные v и w — медленными.

Быстрые движения системы. Из (1) следует, что уравнение быстрых движений имеет вид

$$\varepsilon\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = v - f(u), \qquad v = v^0, \qquad w = w^0, \tag{4}$$

где v^0 и w^0 — некоторые постоянные. Уравнение (4) определено на фазовой прямой, и в зависимости от параметра v^0 имеет одно или три состояния равновесия, из которых устойчивыми являются $\mathrm{O}_1(u = v_0)$ и $\mathrm{O}_2(u = 1 + v^0)$.

Медленные движения системы. Устойчивым состояниям равновесия уравнения (4) отвечают устойчивые компоненты многообразия медленных движений в фазовом пространстве G^+ [8–10]. Из системы (1) следует, что эти компоненты соответственно близки к плоскостям

$$W_1^{\mathrm{S}} = \bigl\{u, v, w \,|\, u \le \sigma, v = u, -\gamma p(0)/\beta < w < \gamma/\beta\bigr\},$$

$$W_2^{\mathrm{S}} = \bigl\{u, v, w \,|\, u \ge 1-\sigma, v = u-1, -\gamma p(0)/\beta < w < \gamma/\beta\bigr\}.$$

Движения на многообразии W_1^{S} приближённо определяются системой

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = w - v, \qquad \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = -\beta w + \gamma\,[g(v) - p(w)]. \tag{5}$$

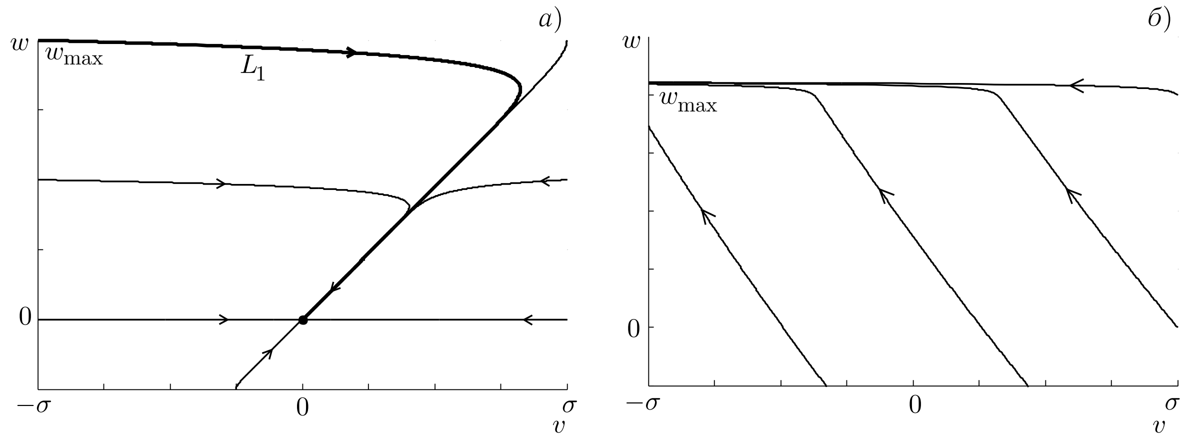

Рис. 3. Качественное представление поведения траекторий системы (1) на устойчивых многообразиях медленных движений при $\beta = 0{,}05$, $w_{\max} = 0{,}2$, $\gamma = 3$: многообразие W_1^{S} (*а*) и многообразие W_2^{S} (*б*)

Нетрудно показать, что система (5) имеет единственное состояние равновесия $\mathrm{O}(v = 0, w = 0)$, которое является устойчивым узлом. Применяя к системе (5) критерий Бендиксона—Дюлака [8], можно установить, что она не имеет предельных циклов, целиком расположенных на многообразии W_1^{S}. Качественный вид фазового портрета системы (5) представлен на рис. 3*а*.

Движения на многообразии W_2^{S} приближённо определяются системой

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = w - v - 1, \qquad \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = -\beta w + \gamma\,[g(v+1) - p(w)]. \tag{6}$$

Повторяя рассуждения, аналогичные приведённым для системы (5), можно установить отсутствие целиком лежащих на W_2^{S} особых траекторий. Следовательно, все траектории системы (1) с течением времени покидают многообразие W_2^{S}. Фазовый портрет системы (6) представлен на рис. 3*б*.

2.2. Построение отображения S

Предположим, что амплитуда внешнего воздействия удовлетворяет условию $V < \sigma$, и введём на W_1^{S} области

$$D_1 = \bigl\{v, w \,|\, v \le \sigma - V, -\gamma p(0)/\beta < w < \gamma/\beta\bigr\},$$
$$D_2 = \bigl\{v, w \,|\, \sigma - V \le v \le \sigma, -\gamma p(0)/\beta < w < \gamma/\beta\bigr\}.$$

Без ограничения общности будем считать, что внешний импульс начинает действовать на систему в момент времени $t = 0$.

Пусть до прихода импульса начальные условия принадлежали области D_1, т. е. начальная изображающая точка A_0 имела координаты $u = v_0$, $v = v_0$, $w = w_0$, $(v_0, w_0) \in D_1$. Внешний импульс переводит точку A_0 в точку A_1 с координатами $u = v_0$, $v = v_0 + V$, $w = w_0$. Дальнейшее движение определяется траекториями автономной системы (уравнения (1) при $x(t) \equiv 0$). Обозначим через L траекторию автономной системы, проходящую через точку A_1. Поскольку точка A_1 лежит вне слоя медленных движений, траектория L сначала задаётся системой (4). Из (4) получаем, что траектория L асимптотически приближается к W_1^{S}. Следовательно, дальнейшее поведение траектории L определяется системой медленных движений (5). Можно считать, что время этого движения равно периоду T, т. к. время действия внешнего импульса и время движения по быстрым траекториям пренебрежимо малы. Поэтому через период внешнего воздействия изображающая точка будет находиться в окрестности устойчивого многообразия W_1^{S}. Следуя методу релаксационных колебаний [8–10] для нахождения координат этой точки, будем аппроксимировать движение в окрестности W_1^{S} соответствующими траекториями многообразия W_1^{S}, т. е. траекториями системы (5). Поскольку $\kappa \gg 1$, в системе (5) пороговые функции $g(v) \approx 0$, $p(w) \approx$ ≈ 0 на многообразии W_1^{S}, и система (5) аппроксимируется получающейся линейной системой. Интегрируя эту систему уравнений, можно найти координаты изображающей точки в момент времени $t = T$: $u = v(T)$, $v = v(T)$, $w = w(T)$. Поскольку при этом $(u(T), w(T)) \in D_1 \cup D_2$, то существует точечное отображение S_1: $D_1 \to D_1 \cup D_2$, порождаемое траекториями системы (1). Вводя для удобства обозначения $v_n = v_0$, $w_n = w_0$ и $v_{n+1} = v(T)$, $w_{n+1} = w(T)$, отображение S_1 можно записать в следующем виде:

$$\mathrm{S}_1 = \begin{cases} v_{n+1} = v_n \exp(-T) + \dfrac{1}{1-\beta}\, [\exp(-\beta T) - \exp(-T)]\, w_n + V \exp(-T), \\ w_{n+1} = \exp(-\beta T) w_n, \end{cases} \tag{7}$$

где $(v_n, w_n) \in D_1$.

Рассмотрим теперь случай, когда в момент прихода внешнего импульса начальная точка A_0 принадлежит области D_2. Как и в предыдущем случае, этот импульс переводит точку A_0 в точку A_1, принадлежащую области быстрых движений автономной системы. Однако здесь быстрые движения переводят изображающую точку в окрестность многообразия W_2^{S}, а не W_1^{S}. Далее движение рассматриваемой траектории задаётся системой (6). Поскольку все траектории системы (6) покидают многообразие W_2^{S} (см. рис. 3*б*), то изображающая точка через некоторое конечное время $t = \tau$ покинет W_2^{S} и по «быстрой» траектории системы (4) попадёт в окрестность W_1^{S}. Рассмотрим движение изображающей точки в окрестности W_2^{S}, аппроксимируя его движением по самомý многообразию, т. е. соответствующей траекторией системы (6), в которой положим $g(v) \approx$ ≈ 1. Переменная w будет возрастать, и при достаточно быстром росте ($\gamma > w_0/(2\sigma)$) успеет на этом многообразии достичь малой окрестности значения $w \approx w_{\max}$, при котором функция $p(w)$ ограничит её увеличение. Наложим на период внешнего сигнала условие $T > \sup_{A_0 \in D_2} \tau(A_0)$. Тогда для любой точки A_0 траектория в момент времени $t = \tau$ покинет многообразие W_2^{S} вблизи точки с координатами $u = 1 - \sigma$, $v = -\sigma$, $w = w_{\max}$. Далее изображающая точка по «быстрым» траекториям системы (4) придёт в окрестность многообразия W_1^{S} вблизи точки $u = -\sigma$, $v = -\sigma$, $w = w_{\max}$.

Для любой точки A_0 дальнейшее движение будет происходить вблизи траектории $L_1 \in W_1^{\mathrm{S}}$, выходящей из указанной выше точки (см. рис. 3*а*). Будем аппроксимировать это движение движением по самой траектории L_1. При условии $w_{\max} < \sigma$ траектория не покидает многообразия W_1^{S}, и в момент времени $t = T$ изображающая точка будет иметь координаты $u = v(T)$, $v = v(T)$, $w = w(T)$. Следовательно, определено точечное отображение S_2: $D_2 \to D_1 \cup D_2$, порождаемое траекториями системы (1), которое можно записать в следующем виде:

$$\mathrm{S}_2 = \begin{cases} v_{n+1} = \dfrac{w_{\max}}{1-\beta} \exp[-\beta\,(T - \tau(v_n, w_n)] - \left(\sigma + \dfrac{w_{\max}}{1-\beta}\right) \exp[-(T - \tau(v_n, w_n))], \\ w_{n+1} = w_{\max} \exp[-\beta\,(T - \tau(v_n, w_n)], \end{cases} \tag{8}$$

где $(v_n, w_n) \in D_2$, $\tau = \tau(v_n, w_n)$ — время движения по многообразию W_2^{S}. В приближении $\sigma \ll 1$, $w_{\max} \ll 1$ время $\tau \approx \sigma + v_n + V$.

Таким образом, траектории системы (1), (2) порождают отображение Пуанкаре вида

$$\mathrm{S} = \begin{cases} \mathrm{S}_1, & (v_n, w_n) \in D_1; \\ \mathrm{S}_2, & (v_n, w_n) \in D_2. \end{cases} \tag{9}$$

3. ДИНАМИКА ОТОБРАЖЕНИЯ S

Из (7) легко показать, что при условии $V > \sigma\,[1-\exp(-T)]$ в области D_1 отображение S имеет неподвижную точку O_1 с координатами $v^* = V/[\exp(T)-1]$, $w^* = 0$ и мультипликаторами $\mu_1 = \exp(-T)$, $\mu_2 = \exp(-\beta T)$, и, следовательно, O_1 — устойчивый узел.

Покажем существование у отображения S для некоторых значений параметров ещё одной устойчивой неподвижной точки $O_2 \in D_2$. Действительно, как показано выше (см. раздел 2), отображение S переводит область D_2 в область $\mathrm{S}D_2 \subset D_1 \cup D_2$, локализованную вблизи траектории L_1 в силу того, что $\kappa \gg 1$. Если амплитуда V достаточно велика, то траектория L_1 проходит через область D_2. Анализируя (8), можно показать существование интервала значений периода T, для которого выполняется условие $\mathrm{S}D_2 \subset D_2$. В этом случае отображение S является сжимающим в области D_2, и, следовательно, в этой области отображение S имеет устойчивую неподвижную точку $O_2 \in D_2$.

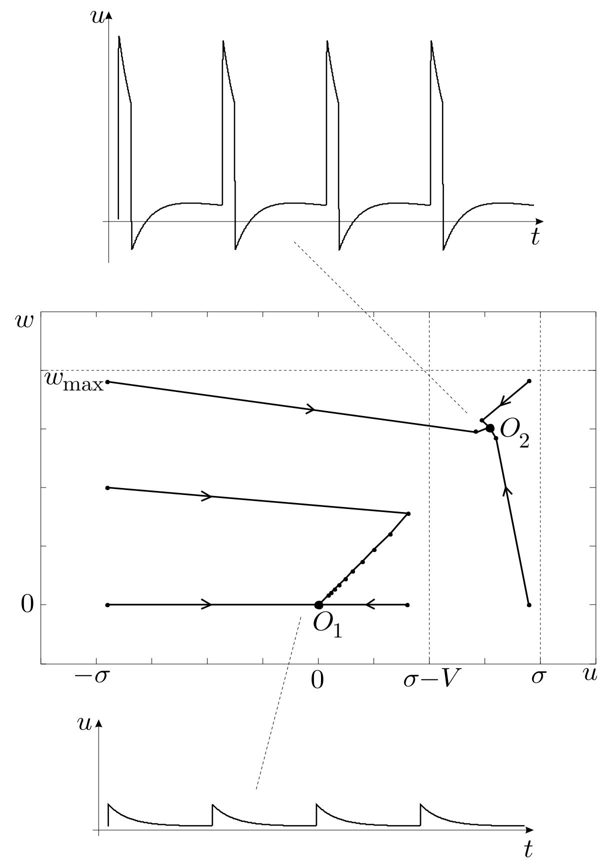

Рис. 4. Фазовый портрет отображения S и режимы системы (1), соответствующие его неподвижным точкам, при $\beta = 0{,}05$; $w_{\max} = 0{,}2$; $\gamma = 3$; $T = 5$; $V = 0{,}1$

Таким образом, при некоторых параметрах сигнала (2) отображение S имеет одновременно две устойчивые неподвижные точки [1]. В системе (1) неподвижной точке O_1 соответствует периодическая траектория, определяющая подпороговые колебания нейрона, а точке O_2 — траектория, задающая режим периодической спайковой активности нейрона. На рис. 4 представлен вид отображения S и траекторий, отвечающих его неподвижным точкам.

4. ДИНАМИЧЕСКОЕ ФОРМИРОВАНИЕ КРАТКОСРОЧНОЙ ПАМЯТИ

Рассмотрим реакцию системы (1) на действие осцилляторного и информационного сигналов, имеющих следующий вид:

$$x(t) = A_i\delta(t-t_i) + V\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT).$$

Как установлено в разделе 4, в случае отсутствия информационного сигнала в четырёхмерном фазовом пространстве системы (1) существуют две устойчивые периодические траектории. Одна из них отвечает подпороговым колебаниям нейрона, а вторая — периодическому возбуждению. Если до действия информационного импульса система двигалась по одной из этих траекторий, то при достаточно большой амплитуде A_i импульс может перевести её в бассейн притяжения другой траектории. При $A_i > 0$ возможен переход нейрона от режима подпороговых колебаний в

[1] Заметим, что отображение S является разрывным. Множество разрыва и примыкающие к нему траектории разделяют бассейны притяжения неподвижных точек отображения (см. далее рис. 5).

режим спайковой активности, что соответствует «запоминанию» им факта прихода информационного импульса, а при $A_i < 0$ — прекращение его периодической активности, что соответствует «стиранию» записанной информации.

Таким образом, наличие спайковой активности нейрона, изначально находившегося ниже порога возбуждения, свидетельствует о факте поступления на него в какой-то момент времени информационного импульса, а отсутствие — о том, что информационного импульса не было. Имея ансамбль подобных нейронов и подействовав на некоторые из них коротким информационным сигналом, можно получить кластер периодической активности, хранящий заданный образ, т. е. осуществить формирование краткосрочной памяти. Отметим, что потенциалы действия генерируются каждым элементом строго в моменты времени $t_n = nT$, и это позволяет синхронизировать весь ансамбль с нейродинамическими элементами считывания информации. Для запоминания другого образа все элементы должны быть предварительно «погашены», что можно сделать импульсами отрицательной полярности (стирание КСП).

Заметим, что длительность КСП в нашей модели определяется наличием периодического стимулирующего сигнала на входе системы, что соответствует нейродинамическим представлениям об этом явлении [2]. Это означает, что краткосрочное хранение информации происходит до тех пор, пока на ней «сосредоточено внимание».

5. ФОРМИРОВАНИЕ КРАТКОСРОЧНОЙ ПАМЯТИ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКОЙ СТИМУЛЯЦИИ

Рассмотрим процесс формирования КСП в случае, когда осцилляторный входной сигнал является гармоническим:

$$x(t) = V\cos(2\pi t/T). \tag{10}$$

На рис. 5 представлена построенная численно карта динамических режимов системы (1) на плоскости амплитуда—период внешнего сигнала и показаны типичные отклики системы на внешнее воздействие. При бо́льших амплитудах (в области P_0) отсутствует режим подпороговых колебаний, а при малых амплитудах (в области P_1) отсутствует режим периодической генерации потенциала действия. В остальных областях существуют оба этих режима, причём подпороговые колебания происходят всегда с периодом T, а режим периодического возбуждения может быть различно синхронизован с осцилляторным сигналом. За n периодов сигнала (10) в зависимости от его параметров может происходить m генераций спайка. Возможны три случая.

а) Генерация одного спайка на каждом периоде внешнего сигнала ($m = n$, см. рис. 5*а*). Этот случай подробно рассмотрен в разделе 3.

б) Генерация спайка происходит не на каждом периоде осцилляторного сигнала, а один раз за несколько периодов ($m < n$, см. рис. 5*б*). Этот режим может быть использован при хранении нескольких образов и их поочерёдном «высвечивании» ансамблем нейронов.

в) Генерация за период стимула некоторого количества коротких импульсов (спайков) — так называемого бёрста [11] ($m > n$, см. рис. 5*в*).

В областях P_0 и P_1 в системе (1) отсутствует мультистабильность, что делает невозможным функционирование краткосрочной памяти. Таким образом, для осуществления краткосрочной памяти параметры входного осцилляторного сигнала должны находиться вне этих областей.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложена динамическая модель нейрона, реализующего функцию краткосрочной памяти, и изучены её основные характеристики. Основной чертой модели является учёт свойства

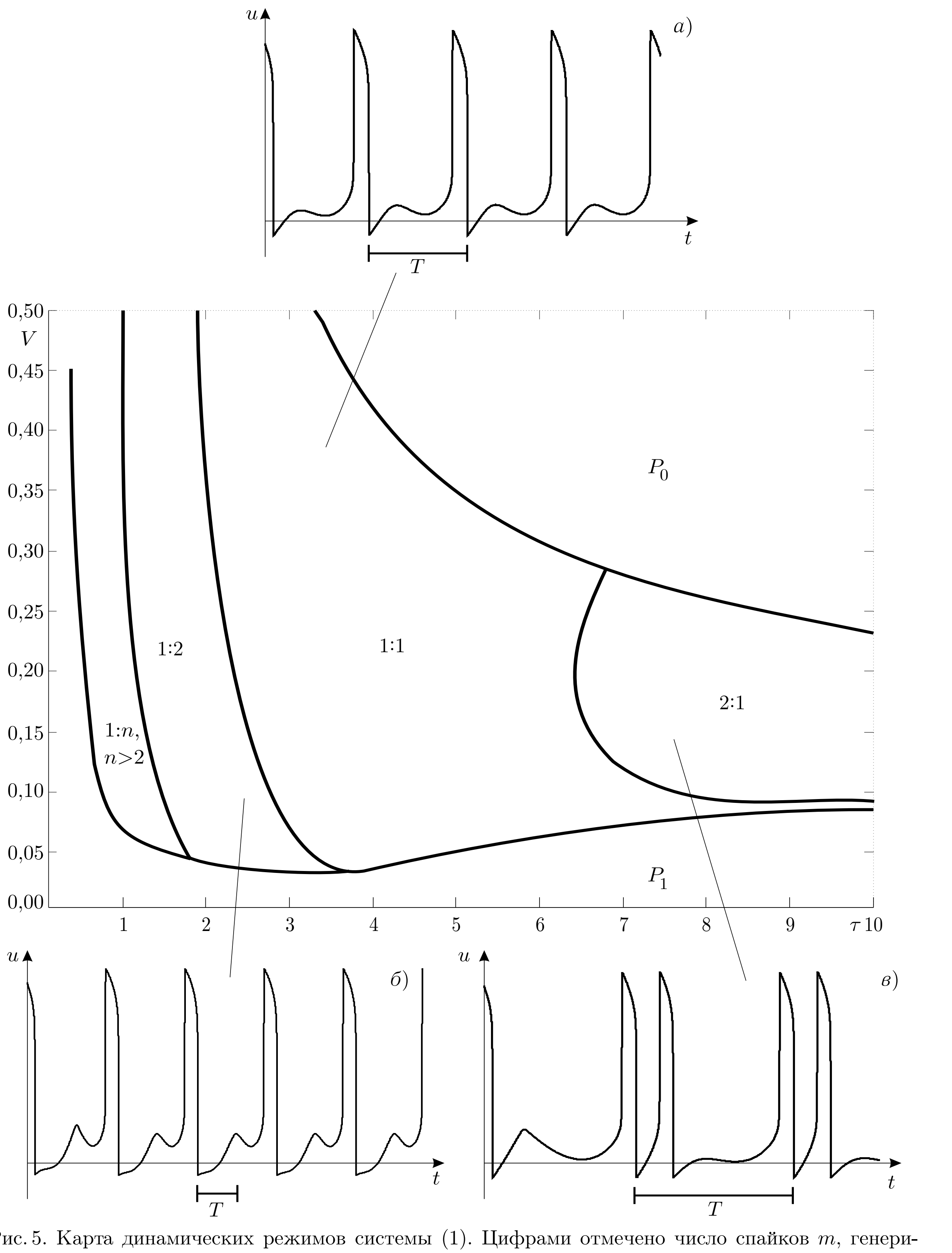

Рис. 5. Карта динамических режимов системы (1). Цифрами отмечено число спайков m, генерируемых за n периодов сигнала (10), при $\beta = 0{,}05$; $w_{\max} = 0{,}22$; $\gamma = 3$. Реализации $u(t)$ в режиме периодической генерации спайков соответствуют $m = n = 1$ (*а*); $m = 1$, $n = 2$ (*б*) и $m = 2$, $n = 1$ (*в*)

последеполяризации, которое заключается в увеличении возбудимости мембраны нейрона после генерации импульса действия. Это свойство играет ключевую роль в рассматриваемой схеме реализации КСП. Предложенная модель хорошо согласуется с экспериментальными данными (ср. рис. 1 и 2*a*) и объясняет динамическую сущность механизма краткосрочной памяти.

Показано, что динамические свойства модели существенно зависят от параметров осцилляторного сигнала. Установлены условия, которым должен удовлетворять этот сигнал для реализации КСП. Изучены основные режимы модели.

В заключение отметим, что большой интерес представляет изучение коллективной динамики ансамбля взаимосвязанных систем типа (1). С помощью таких ансамблей можно моделировать одно из интереснейших свойств систем связанных нейронов с последеполяризацией — способность к хранению одновременно нескольких образов краткосрочной памяти.

Работа поддержана РФФИ (грант № 03–02–17135).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хакен Г., Хакен-Крелль М. Тайны восприятия. М., 2002.
2. Lisman J. E., Idiart M. A. P. // Science. 1995. V. 267. P. 1 512.
3. Hebb D. O. The organization of Behavior. New York: Wiley, 1949.
4. White O. L., Lee D. D., Sompolinsky H. // Phys. Rev. Lett. 2004. V. 92, No. 14. P. 148 102.
5. Wang X.-J. // TRENDS in Neuroscience. 2001. V. 24, No. 8. P. 455.
6. FitzHugh R. // Biophys. J. 1961. V. 1. P. 445.
7. Nagumo J. S., Arimoto S., Yoshizawa S. // Proc. IRF. 1962. V. 50. P. 2 061.
8. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959.
9. Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. М.: Наука, 1975.
10. Арнольд В. И., Афраймович В. С., Ильященко Ю. С., Шильников Л. П. // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ АН СССР, 1986. № 5. С. 165.
11. Николлс Дж. Г., Мартин А. Р., Валлас Б. Дж., Фукс П. А. От нейрона к мозгу. М., 2003.

Поступила в редакцию 16 мая 2004 г.; принята в печать 30 марта 2005 г.

MODEL OF A NEURON WITH AFTERDEPOLARIZATION AND SHORT-TERM MEMORY

V. V. Klin'shov and V. I. Nekorkin

In this paper, we propose a model describing the dynamics of a neuron capable of storing the so-called short-term memory. From the dynamical viewpoint, the effect of short-term memory means that the neuron “remembers” the fact of its short-pulse excitation and the action potential is periodically generated for a long time after it. This mechanism of memory storage is realized due to the property of afterdepolarization included in the model. This property is well known in real (live) neurons of cortex and hippocampus.

УДК 534.051.79

ОБРАЗОВАНИЕ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ В ЦЕПОЧКЕ ОДИНАКОВЫХ РЕЛАКСАЦИОННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ, ОБМЕНИВАЮЩИХСЯ ИНГИБИТОРОМ, ВБЛИЗИ ПОРОГА ГЕНЕРАЦИИ АВТОКОЛЕБАНИЙ

Е. И. Волков

Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, г. Москва, Россия

Рассмотрены динамические режимы, возникающие в незамкнутой цепочке из четырёх одинаковых сильно релаксационных осцилляторов ФитцХью—Нагумо, параметры которых выбраны вблизи бифуркации рождения цикла. Показано, что в широком интервале сил связи обмен медленной переменной порождает множество предельных циклов, различающихся периодами и фазовыми соотношениями. Помимо ожидаемых антифазных решений, обнаружены три семейства устойчивых предельных циклов, представители которых различаются числом вспышек быстрой переменной как у соседних элементов, так и в течение одного периода. Вычислены границы устойчивости аттракторов и обнаружены области их сосуществования.

ВВЕДЕНИЕ

Принципиальная возможность появления новых ритмов при взаимодействии одинаковых автоколебательных систем известна давно. Например, в работе [1] рассматривается популяция из большого числа почти идентичных электронных осцилляторов, слабо связанных по типу «все со всеми», как модель источника циркадианных ритмов (см. также [2, 3]). Небольшие ансамбли из четырёх, шести и восьми клеток стали популярны для объяснения ритмов походок разных живых существ [4, 5]. Динамика сцепленных модельных нейронов [6–9], электронных [10], химических [11–13], хаотических осцилляторов [14, 15], трёхмерных бэрстеров [16] также активно изучается в последнее время с целью выяснения многообразия возможных коллективных мод в системах, состоящих из одинаковых или почти одинаковых элементов.

Ранее при изучении систем из двух и трёх одинаковых осцилляторов было показано теоретически [17–21] и экспериментально [10, 12, 22, 23], что локальный диффузионный обмен может порождать несколько предельных циклов с разными периодами. Детальное изучение динамики ансамблей релаксационных двумерных осцилляторов с N-образной изоклиной показало, что бо́льша́я жёсткость изолированного осциллятора и преобладание обмена медленной переменной обеспечивают устойчивость несинфазных режимов в широкой области параметров [24–26]. В этих исследованиях основными бифуркационными параметрами являлись параметр A, определяющий близость системы к бифуркации Андронова—Хопфа рождения предельного цикла, и параметр C, задающий интенсивность обмена медленной переменной. Линейный обмен медленной переменной является одним из вариантов ингибиторной связи, т. к. он способен существенно замедлять движение изображающих точек на значительных промежутках предельного цикла. Однако такой обмен не разрушает устойчивость однородного состояния (синфазные колебания) в ансамблях двумерных осцилляторов с N-образной изоклиной для быстрой переменной.

В системах из трёх одинаковых осцилляторов с циклическими граничными условиями наибольший объём параметрического пространства занимают различные типы «вращающихся волн» — периодические решения, в которых развёртки одинаковы у всех осцилляторов и разность фаз между элементами цепочки равна трети периода. Второй тип решения — противофазный аттрактор — характеризуется отсутствием разности фаз у двух осцилляторов, которые движутся со сдвигом в половину периода относительно третьего осциллятора. Существование обоих типов аттракторов не зависит от выбора математической модели нелинейного осциллятора [21] и было продемонстрировано в экспериментах с химическими [13] и электронными [10] системами. Эти решения слабо чувствительны к таким неизбежным факторам, как небольшая неодинаковость периодов осцилляторов и внешние шумы.

Противофазный аттрактор устойчив и в цепочке из трёх осцилляторов с неймановскими граничными условиями. В этой конфигурации вместо вращающихся волн основными устойчивыми аттракторами являются периодические режимы типа $R(n,2,n)$, где $n = 3, 5, 7, \ldots$ — количество «вспышек» быстрой переменной в первом и третьем осцилляторах в течение одного периода, в то время как средний осциллятор генерирует две вспышки в любом из этих режимов [27]. С ростом числа n длительность интервалов между вспышками среднего осциллятора растёт по мере приближения параметра A к порогу генерации колебаний. Вблизи порога генерация вспышек в среднем осцилляторе прекращается вовсе и образуется аттрактор, который был назван в [28] динамической ловушкой, т. к. крайние осцилляторы колеблются антифазно и не позволяют фазовой точке среднего осциллятора достичь точки срыва на релаксационном предельном цикле.

Интерес к динамике автоколебательных и возбудимых систем вблизи порога генерации всегда был большим, т. к. именно в этой области наблюдается максимальная регулируемость систем. В последнее время внимание к этой области обусловлено, в частности, большим количеством исследований «стохастического резонанса» в массивах нелинейных возбудимых элементов (см., например, обзор [29]), изучением динамики нейронов [30] и их ансамблей [31]. Траектория фазовой точки, возбуждённой шумом из стационарного состояния, расположенного близко к порогу, мало отличается от траектории релаксационного предельного цикла. Это обстоятельство позволило говорить о «стохастических предельных циклах» [32]. Если взаимодействие между элементами способствует их синфазным колебаниям, то наличие соседей приводит к дополнительному усилению подпорогового сигнала при оптимальной интенсивности некоррелированного шума, поданного на все элементы. Дефазирующее взаимодействие приводит к образованию и сосуществованию нескольких предельных циклов в детерминированной системе и к нескольким стохастическим циклам в ансамблях возбудимых элементов. В последнем случае когерентность поведения системы зависит не только от бифуркационных параметров, но и от интенсивности шума [33, 34], а стохастический резонанс становится сильно зависимым от частоты сигнала [35]. В системах из двух и трёх релаксационных осцилляторов, обменивающихся ингибитором, вблизи порога генерации могут образовываться только простые аттракторы, в которых колеблющиеся элементы имеют одинаковые межвспышечные интервалы, а полный период содержит одну вспышку.

В настоящей работе мы проведём численное исследование цепочки из четырёх одинаковых сильно релаксационных детерминированных осцилляторов ФитцХью—Нагумо, обменивающихся медленной переменной. Будут найдены основные предельные циклы системы вблизи порога генерации и в том диапазоне сил связи, где области устойчивости аттракторов не очень малы. Будет показано, что естественная неодинаковость взаимодействий из-за разного количества соседей у осцилляторов приводит к образованию дополнительного сложного аттрактора даже при слабых связях и к образованию двух новых семейств сложных аттракторов при сильных связях.

1. МОДЕЛЬ

Цепочка из четырёх осцилляторов, обменивающихся медленной переменной, описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = A - y_1 + C\,(x_2 - x_1), \qquad \varepsilon\,\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t} = x_1 - y_1^3/3 + y_1; \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = A - y_2 + C\,(x_1 + x_3 - 2x_2), \qquad \varepsilon\,\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t} = x_2 - y_2^3/3 + y_2; \tag{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}t} = A - y_3 + C\,(x_2 + x_4 - 2x_3), \qquad \varepsilon\,\frac{\mathrm{d}y_3}{\mathrm{d}t} = x_3 - y_3^3/3 + y_3; \tag{3}$$

$$\frac{\mathrm{d}x_4}{\mathrm{d}t} = A - y_4 + C\,(x_3 - x_4), \qquad \varepsilon\,\frac{\mathrm{d}y_4}{\mathrm{d}t} = x_4 - y_4^3/3 + y_4. \tag{4}$$

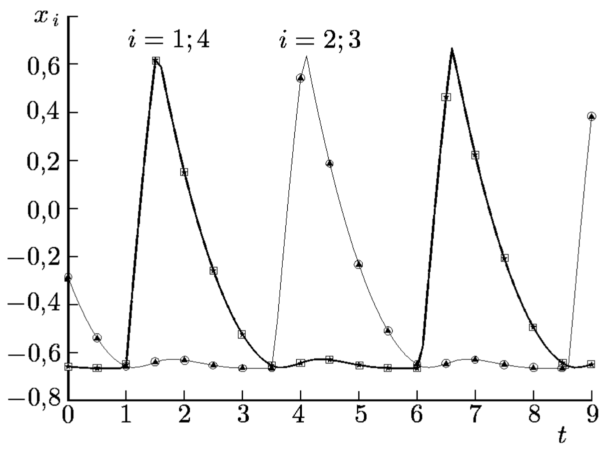

Рис. 1. Развёртки медленных переменных для антифазного аттрактора A_1 при $A = 0{,}99$ и $C = 0{,}2$. Медленный участок траектории вблизи $x_i = -0{,}66$ соответствует приближению фазовой точки к моменту генерации вспышки быстрой переменной, после которой происходит резкое возрастание медленной переменной

Хорошо известно, что изолированные элементы данной системы при $|A| > 1$ находятся в устойчивом стационарном состоянии, из которого при $|A| = 1$ рождается предельный цикл в результате бифуркации Андронова—Хопфа, обусловленной в данном случае наличием N-образной изоклины. При значении $\varepsilon = 0{,}0001$, которое мы будем использовать в большинстве вычислений, предельный цикл очень релаксационный и его период слабо зависит от отклонения A от единицы.

Уравнения системы решались, как правило, традиционным численным методом Рунге—Кутты 4-го порядка (с двойной точностью). Сравнение разных методов и изменение точности вычислений позволяют утверждать, что представленные результаты не являются артефактами численных методов или долгоживущими переходными процессами. Алгоритмы поиска и идентификации аттракторов основаны на переборе начальных точек и наблюдениями за динамикой межвспышечных интервалов каждого осциллятора по мере выхода систем на аттрактор. Поиск границ устойчивости найденного аттрактора удобно проводить, медленно меняя один или два параметра, не покидая при этом найденный аттрактор и уточняя шаг по параметрам в случае потери устойчивости.

2. НАБОР АТТРАКТОРОВ В СЛУЧАЕ СЛАБОЙ СВЯЗИ: 0,05 $< C <$ 0,3

При обсуждении набора динамических режимов прежде всего следует рассмотреть синфазный аттрактор, который формально устойчив при данном типе связи, но имеет малый бассейн притяжения. Оценки показывают, что система покидает этот аттрактор, если разность значений медленных переменных между одним из осцилляторов и остальными превышает $2\div3\,\%$. При приближении всех фазовых точек к минимуму изоклины этого различия оказывается достаточно для дефазирования всей системы после резкого скачка хотя бы одной фазовой точки на вторую ветвь изоклины.

В случае цепочки из четырёх элементов антифазное движение может существовать в двух видах: первый режим (обозначим его A_1) имеет строго антифазные развёртки — второй и третий

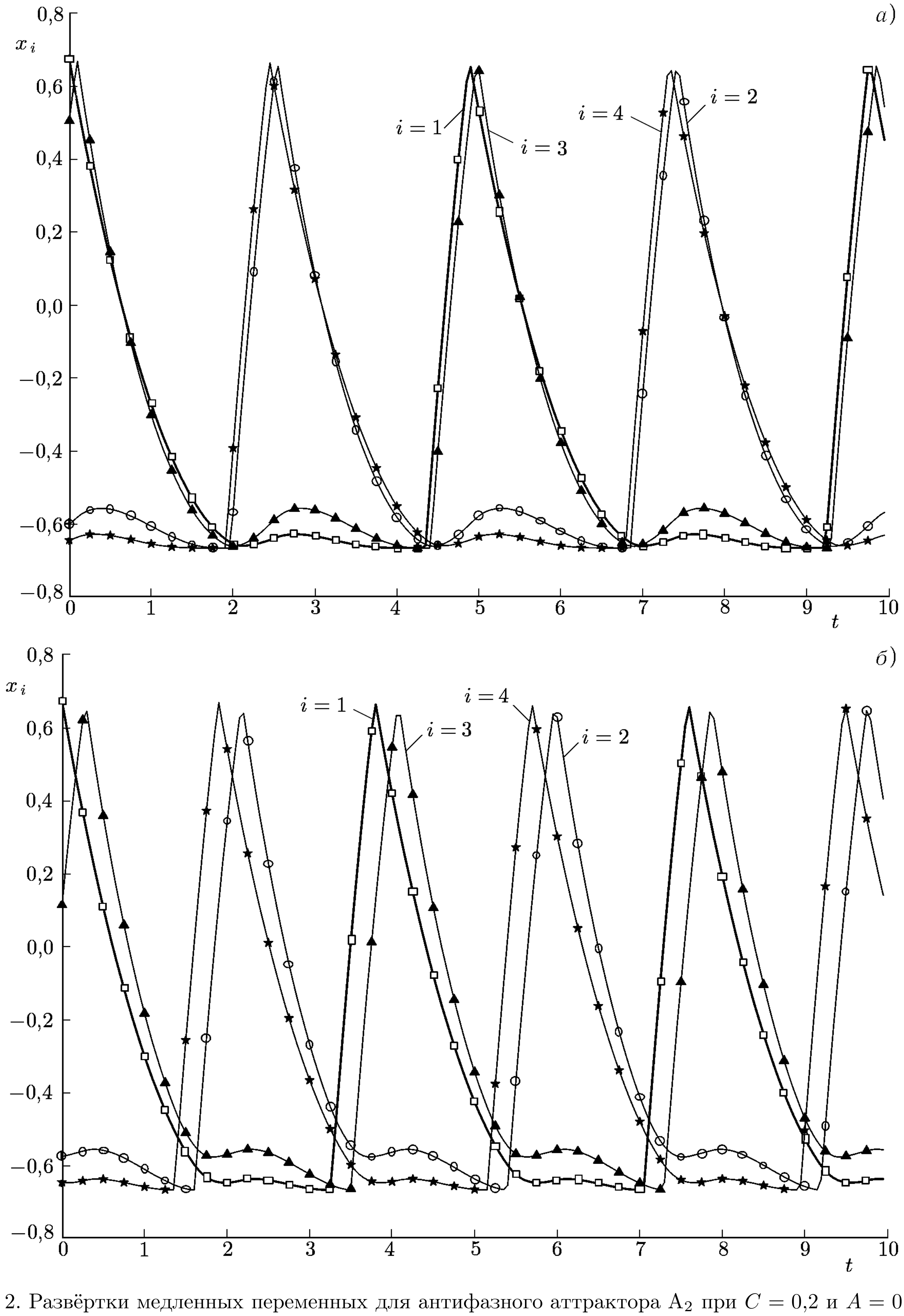

Рис. 2. Развёртки медленных переменных для антифазного аттрактора A_2 при $C = 0{,}2$ и $A = 0{,}99$ (a), $A = 0{,}95$ ($б$)

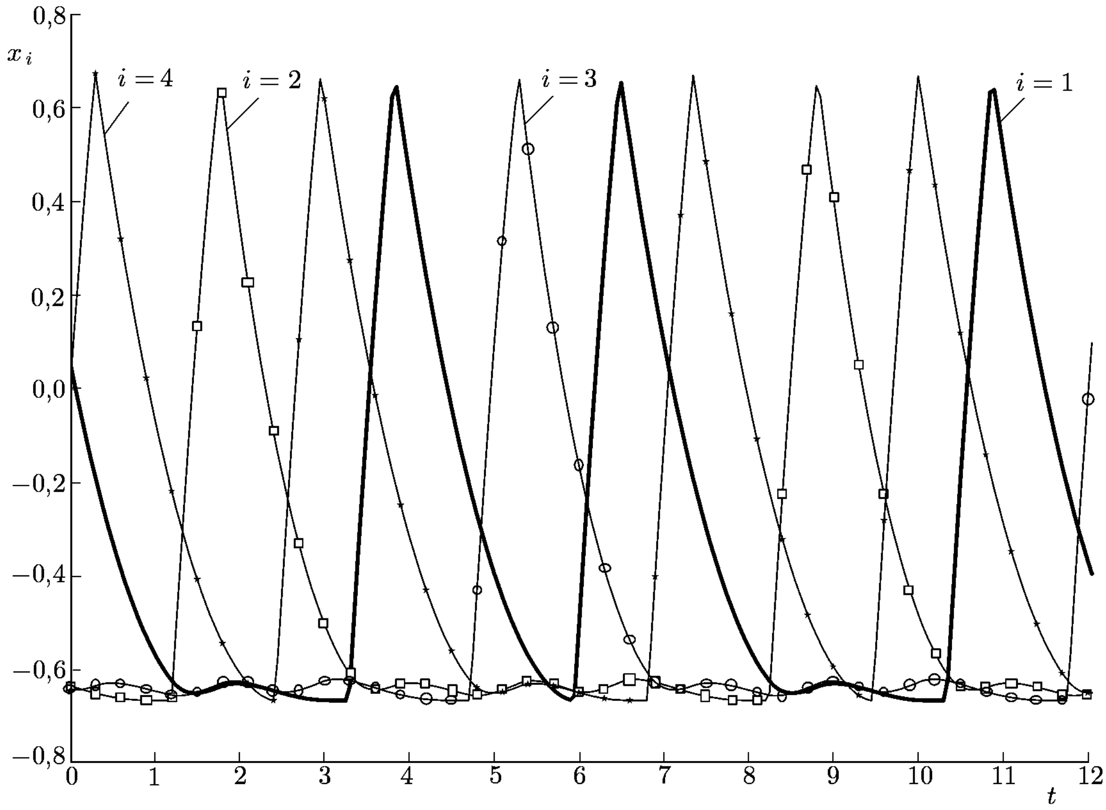

Рис. 3. Развёртки медленных переменных для сложного аттрактора $R(2,1,1,2)$ при $A = 0{,}98$ и $C = 0{,}2$

осцилляторы движутся синфазно между собой и антифазно по отношению к первому и четвёртому осцилляторам соответственно (см. рис. 1), и режим A_2, в котором временны́е развёртки первого и третьего осцилляторов близки и почти противофазны развёрткам второго и четвёртого осцилляторов (см. рис. 2). Очевидно, что режим A_1 совпадает с антифазным режимом в системе из двух осцилляторов, т. к. нет обмена между вторым и третьим осцилляторами. Бассейн притяжения этого режима невелик, поскольку (по аналогии с полным синфазным режимом) малые различия фазовых точек второго и третьего осцилляторов выводят системы из режима A_1.

Режим A_2 является одним из основных аттракторов рассматриваемой конфигурации, и неодинаковое количество соседей обусловливает приблизительность антифазного поведения. Исследование эволюции развёрток в зависимости от близости системы к бифуркации (рис. 2*а*, *б*) показывает, что, чем ближе A к точке бифуркации, тем точнее реализуется противофазный тип колебаний. Кроме того, разное число соседей приводит к существенно различному поведению траекторий первого и четвёртого осциллятора по сравнению со вторым и третьим вблизи точки генерации вспышки быстрой переменной.

Это различие будет существенно в дальнейшем при изучении влияния внешних сигналов и шумов на такую цепочку элементов, т. к. именно эта часть траектории наиболее чувствительна к внешним воздействиям. В настоящей работе мы ограничимся областью значений $0{,}9 < A < 1{,}0$, исследование которой наиболее важно для понимания динамики подобных систем с ингибиторным взаимодействием. Режим A_2 можно обнаружить при малых силах связи, например при $C = 0{,}02$, но отличия периодов синфазного и противофазных режимов в этой области малы.

В линейной конфигурации при не очень малых силах связи возможно образование сложного предельного цикла, который будем обозначать $R(2,1,1,2)$. Это сокращение означает, что период цикла содержит две вспышки быстрых переменных первого и четвёртого осцилляторов (см. рис. 3).

Основой образования такого режима является «кратная» синхронизация отдельных осцилляторов, период которых удлиняется из-за ингибиторной связи. Наличие такой связи вызывает задержки генерации вспышки, количество которых зависит от соотношения фаз. У средних осцилляторов три задержки, которые ясно видны на рис. 3 на развёртке второго осциллятора: первый раз вспышка второго осциллятора откладывается из-за взаимодействия с первым осциллятором, которое отодвигает фазовую точку от точки срыва, второй раз — из-за обмена с третьим осциллятором, третий раз — опять с первым. У крайних осцилляторов возможна только одна задержка, а основное время цикла определяется параметром A, т. е. периодом изолированного осциллятора. На фазовой плоскости этот режим выглядит как предельный цикл, по которому фазовые точки крайних осцилляторов делают два оборота, а средних — один оборот за один период. По мере удаления параметра A от точки бифуркации, основной цикл и задержки станут короче, открывая возможности для других фазовых соотношений, и образуется режим $R(4,3,3,4)$, а затем и многие другие кратные режимы, которые не изучаются в данной работе, т. к. нас интересуют режимы вблизи порога генерации колебаний изолированных осцилляторов.

3. НАБОР АТТРАКТОРОВ В СЛУЧАЕ СИЛЬНОЙ СВЯЗИ

Если фиксировать параметр A вблизи единицы и увеличивать силу связи, то найденные выше режимы могут потерять устойчивость. Например, при $A = 0{,}99$ режим A_2 устойчив до $C = 0{,}528$, а режим $R(2,1,1,2)$ — до $C = 0{,}8$. Будем рассматривать эти переходы как критерий того, что связь достаточно сильная, и рассмотрим аттракторы, существующие в этой области.

На рис. 4 представлен режим $R(3,2,2,3)$, который устойчив при $A = 0{,}99$ начиная с $C = 0{,}578$.

При такой интенсивности обмена генерация вспышки в одном из осцилляторов вызывает значительную задержку движения фазовых точек соседних осцилляторов, но все траектории регулярно собираются вблизи точки срыва. В этой области решается вопрос об очерёдности вспышек, и, хотя разность значений медленных переменных невелика (порядка $0{,}1\div0{,}5$), большая связь обеспечивает нужный порядок вспышек, если параметр A близок к единице, т. к. вклад диффузии может обеспечивать эффективное значение i-го осциллятора $A + C\,(x_{i+1} + x_{i-1} - 2x_i)$ больше единицы и тем препятствует генерации вспышки этим осциллятором. Наличие такой тонкой регулировки разностей фаз, необходимой для этого аттрактора, говорит о том, что вероятность случайного образования нужных начальных условий в восьмимерном фазовом пространстве невелика. Это обстоятельство будет важным при изучении чувствительности аттракторов к шуму и механизмов переключения аттракторов внешними воздействиями.

В этой же области значений параметров возможно другое соотношение фаз между осцилляторами, приводящее к образованию аттрактора $R(7,1,1,7)$ с большим периодом (см. рис. 5), т. к. чередование крайних осцилляторов удерживает средние осцилляторы от движения по большому циклу, но вызывает их вынужденные колебания вблизи точки срыва с довольно значительной амплитудой.

Структура траекторий ясна из рис. 5, и ниже даны только краткие пояснения. Как и в предыдущем случае, амплитуда вынужденных колебаний вблизи минимума медленной переменной определяется параметром связи C. Важно, что связь достаточна для того, чтобы разность фаз между вторым и третьим осцилляторами, умноженная на коэффициент связи, приводила к смещению эффективного значения A из области автоколебаний, когда крайние осцилляторы проходят свой минимум и не действуют на средние элементы. Эта разность фаз медленно убывает, что приводит к редким вспышкам быстрых переменных второго или третьего осцилляторов. Коли-

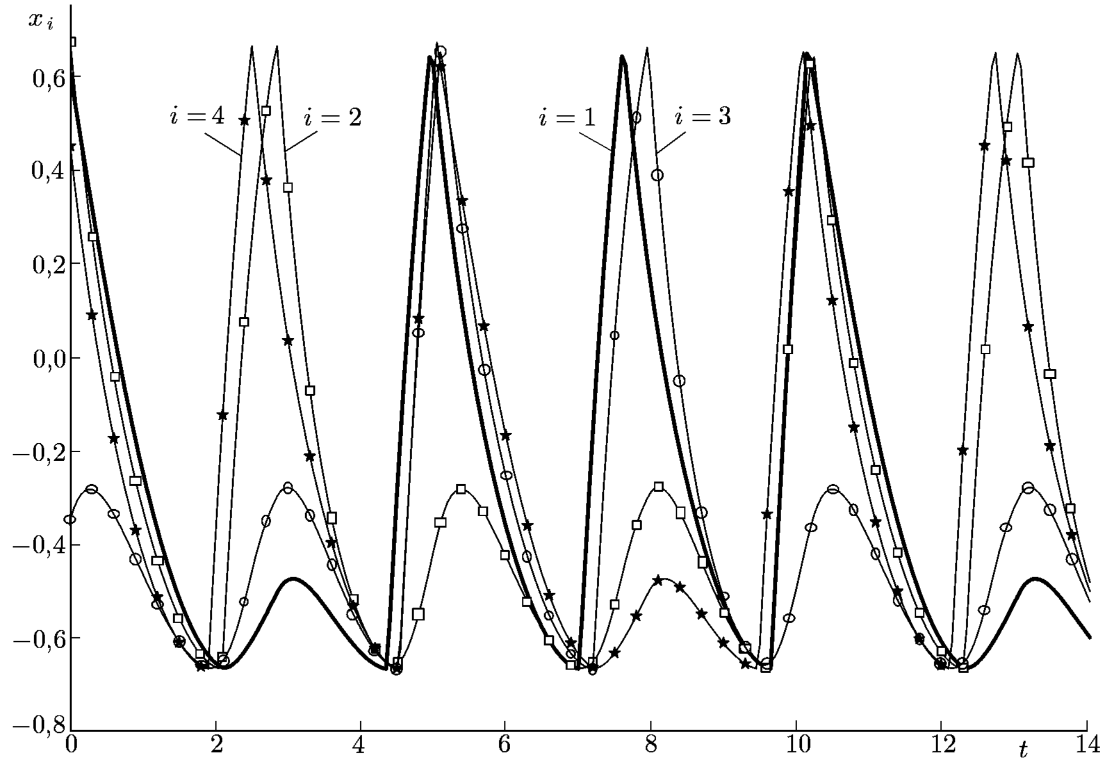

Рис. 4. Развёртки медленных переменных для сложного аттрактора $R(3, 2, 2, 3)$ при $A = 0{,}98$ и $C = 0{,}6$

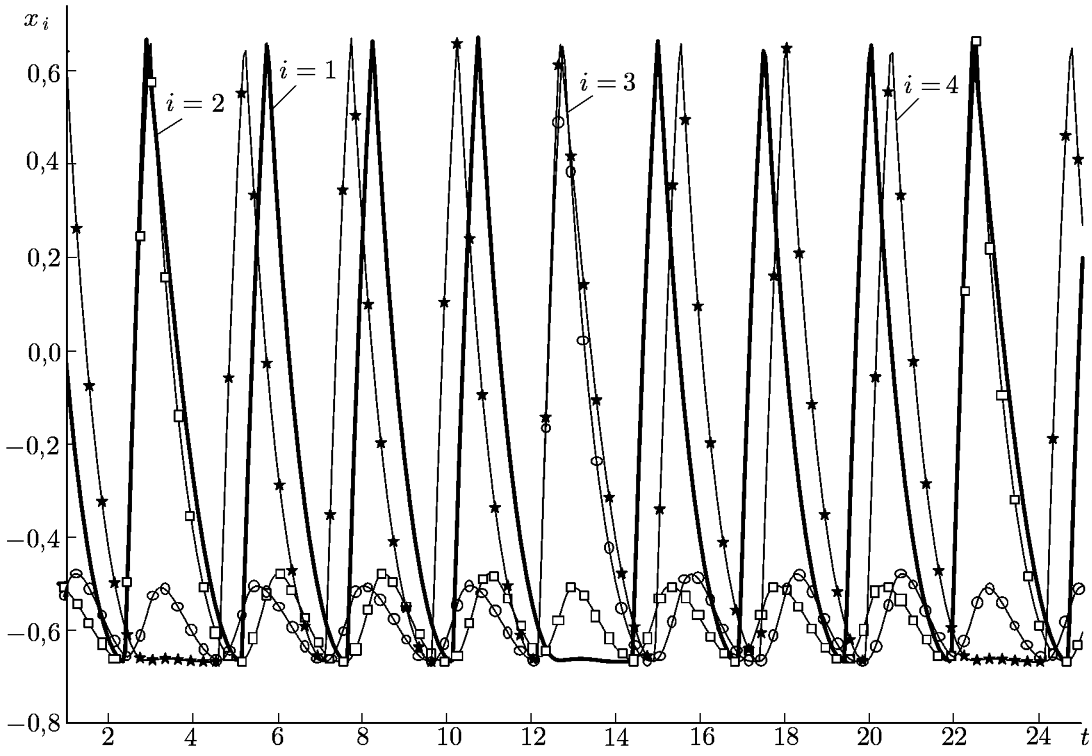

Рис. 5. Развёртки медленных переменных для сложного аттрактора $R(7, 1, 1, 7)$ при $A = 0{,}99$ и $C = 0{,}6$

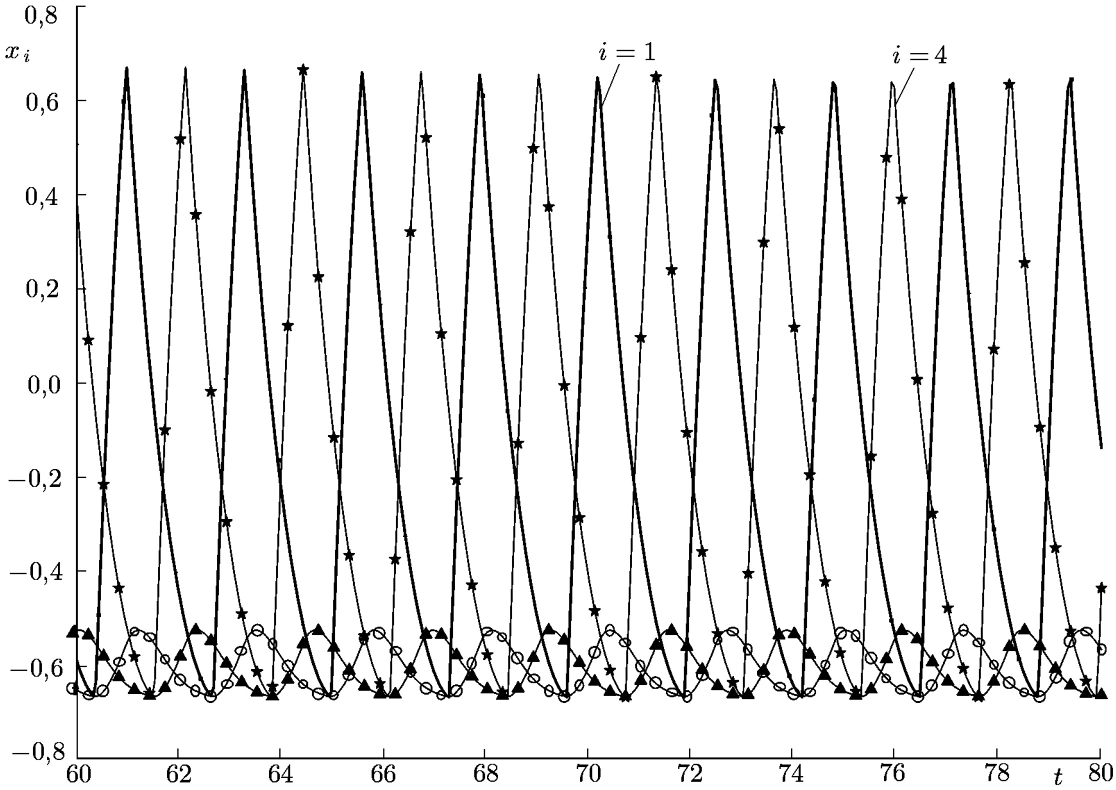

Рис. 6. Развёртки медленных переменных для сложного аттрактора $R(1, 0, 0, 1)$ при $A = 0{,}95$ и $C = 0{,}57$

чество циклов крайних осцилляторов, в течение которых средние осцилляторы не генерируют вспышки, сильно зависит от C и близости A к единице. Приведённый выше режим является представителем целого семейства аттракторов типа $R(N, 1, 1, N)$, где N — нечётное число, а полный период растёт с N порциями, равными по длительности двум коротким межвспышечным интервалам ($\Delta T \sim 5$). Нечётность N определяется симметрией цепочки, т. к. в течение одного цикла до вспышки второго или третьего осциллятора происходит целое число $(N - 1)/2$ вынужденных колебаний, столько же после вспышки, и ещё одно колебание в середине цикла при смене порядка вспышек в первом и четвёртом осцилляторах. Интервалы сил связи, в которых устойчив тот или иной аттрактор этого типа, и максимальное значение N сильно зависят от A. Так, при $A = 0{,}99$ и $C > 0{,}5$ величина $N_{\max} = 11$, а максимальный период равен 29,6, в то время как при $A = 0{,}95$ можно найти аттракторы с $N \sim 31 \div 87$, но их области устойчивости по C имеют ширину порядка 0,01.

В некоторых интервалах сил связи становится устойчивым предельный случай $N \to \infty$, когда полноамплитудные колебания крайних осцилляторов противофазны и перемещения фазовых точек средних осцилляторов, вызванные связью, также противофазны, причём движения в парах (первый, второй и третий, четвёртый осцилляторы) синфазны (см. рис. 6).

В этом режиме крайние элементы осциллируют с минимальным периодом, вызывая перемещения фазовых точек средних элементов от точки срыва. Противофазный характер этих перемещений не позволяет средним элементам генерировать вспышки, т. е. ингибирование имеет каскадный характер: крайние элементы вызывают столь значительные перемещения фазовых точек средних, что те, в свою очередь, не дают друг другу дойти до точки срыва. По аналогии с цепочкой из трёх осцилляторов данный режим можно отнести к «динамическим ловушкам», т. к. отсутствие вспышек обусловлено не переходом в устойчивое стационарное состояние, а динамикой соседних элементов.

Детальное исследование всего семейства аттракторов выходит за пределы этой работы. Сейчас нам важно только отметить, что есть механизм генерации бо́льших межвспышечных интервалов у части элементов цепочки, и этот механизм слабо зависит от силы связи и величины A, но межвспышечные интервалы очень чувствительны к этим параметрам.

4. ОБСУЖДЕНИЕ

Таким образом, показано, что линейная локальная диффузионная связь по медленной переменной может приводить к нетривиальным динамическим режимам в линейной цепочке из четырёх одинаковых сильно релаксационных осцилляторов. Общее представление о динамике цепочки даёт табл. 1, в которой указаны границы устойчивости основных аттракторов в зависимости от силы связи при заданном отклонении параметра A от границы бифуркации Андронова—Хопфа.

Таблица 1. Границы устойчивости по C для основных аттракторов при разной степени близости осцилляторов к бифуркации Андронова—Хопфа*

$A = 0{,}95$	A_1	$0 \lesssim C \leq 1$
	A_2	$0 \lesssim C \leq 0{,}516$
	$R(2,1,1,2)$	$0{,}116 \leq C \leq 0{,}66$
	$R(3,2,2,3)$	$0{,}53 \leq C \leq 0{,}878$
	$R(N,1,1,N)$	$0{,}575 \leq C \leq 0{,}79$
$A = 0{,}97$	A_1	$0 \lesssim C \leq 1$
	A_2	$0 \lesssim C \leq 0{,}54$
	$R(2,1,1,2)$	$0{,}06 \leq C \leq 0{,}68$
	$R(3,2,2,3)$	$0{,}5 \leq C \leq 0{,}92$
	$R(N,1,1,N)$	$0{,}47 \leq C \leq 0{,}824$
$A = 0{,}99$	A_1	$0 \lesssim C \leq 1$
	A_2	$0 \lesssim C \leq 0{,}53$
	$R(2,1,1,2)$	$0{,}114 \leq C \leq 0{,}16$; $0{,}26 \leq C \leq 0{,}8$
	$R(3,2,2,3)$	$0{,}58 \leq C \leq 1$
	$R(N,1,1,N)$	$0{,}45 \leq C \leq 0{,}9$

* Синфазные колебания всюду устойчивы и в таблице не представлены

Табл. 1 показывает наличие нескольких областей перекрытия аттракторов, причём максимальное число сосуществующих циклов наблюдается при сильных связях, т. е. в области, редко изучаемой в литературе по мультиритмичности. Диаграмма содержит только основные аттракторы или типы аттракторов, т. к. в рассматриваемой области параметров отдельные представители какого-либо класса аттракторов (например, $R(61,1,1,61)$) устойчивы в очень узких интервалах сил связи. Подчеркнём, что сам метод исследования, использованный в работе, основан на переборе начальных точек и на поисках точек потери устойчивости аттракторов и приводит к обнаружению именно основных аттракторов. Обнаружение большого количества предельных циклов не означает, что все они проявят себя в условиях реального эксперимента или природных наблюдений. Устойчивость аттрактора не подразумевает автоматически его слабую чувствительность к внешним и внутренним шумам, которая определяется структурой бассейна притяжения. Чувствительность к шумам определяет и выбор разумной степени близости параметра A к границе бифуркации Андронова—Хопфа. В табл. 1 мы ограничились значением $A = 0{,}99$, хотя дальнейшее приближение изолированных осцилляторов к бифуркации Андронова—Хопфа приведёт к появлению других аттракторов, устойчивых в очень узких интервалах по A и C и чрезвычайно чувствительных к шумам. Исследование таких режимов выходит за пределы данной работы.

Обмен медленной переменной в реакционно-диффузионных уравнениях обычно рассматривается в связи с изучением диссипативных структур и автосолитонов в средах, где диффузия ингибитора быстрее, чем диффузия активатора [36, 37]. В автоколебательных системах подобные взаимодействия естественно обнаруживаются при исследовании малых ансамблей из нейронов [38]. Общее представление о том, что ингибиторные связи приводят к антикорреляциям во временны́х рядах нейронных потенциалов, давно имеется, но детальное понимание динамики, которое можно использовать для анализа конкретных явлений (например, для рассмотрения взаимодействий таких систем с периодическими сигналами), ещё предстоит добыть из реальных или численных экспериментов.

Мы использовали простую «базовую» модель автоколебательной системы, в которой в явном виде присутствуют параметры, управляющие степенью нелинейности и близостью к бифуркации. Показано, что в цепочке из четырёх ингибиторно связанных элементов может быть множество устойчивых циклов, но вблизи бифуркации можно надеяться на упрощение набора аттракторов. В отличие от цепочки и кольца из трёх осцилляторов [26, 27], в которых также возможно существование большого числа циклов в разных областях пространства параметров, в рассматриваемой конфигурации вблизи бифуркации Андронова—Хопфа возможны сложные циклы $R(2,1,1,2)$, $R(3,2,2,3)$, $R(n,1,1,n)$, описание которых не сводится только к указанию разности фаз между элементами, как в случае антифазных решений или простых вращающихся волн в кольце осцилляторов. Наличие сложных решений у массива из автоколебательных элементов может привести к нетривиальным стохастическим режимам при наличии шума, если сместить параметр A за границу бифуркации, т. е. перевести элементы массива в возбудимое состояние. В этих условиях можно ожидать необычной частотной и фазовой зависимости восприятия такими массивами внешних подпороговых мультипериодических сигналов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Программы «Проблемы радиофизики» ОФН РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Winfree A. T. // J. Theor. Biol. 1967. V. 16. P. 15.
2. Pavlidis T. // J. Theor. Biol. 1971. V. 33. P. 319.
3. Kawato M., Suzuki R. // J. Theor. Biol. 1980. V. 86. P. 547.
4. Yuasa H., Ito M. // Biol. Cybern. 1990. V. 63. P. 177.
5. Collins J. J., Stewart I. // Biol. Cybern. 1993. V. 68. P. 287.
6. Cymbalyuk G. S., Nikolaev E. V., Borisyuk R. M. // Biol. Cybern. 1994. V. 71. P. 153.
7. Абарбанель Г. Д., Рабинович М. И., Селверстон А. и др. // УФН. 1996. Т. 166, № 4. С. 363.
8. Rabinovich M., Huerta R., Bazhenov M., et al. // Phys. Rev. E. 1998. V. 58. P. 6 418.
9. Courbage M., Kazantsev V. B., Nekorkin V. I., Senneret M. // Chaos. 2004. V. 14. P. 1 148.
10. Ruwisch D., Bode M., Schutz P., Markus M. // Phys. Lett. A. 1994. V. 186. P. 137.
11. Bar-Eli K. // J. Phys. Chem. 1990. V. 94. P. 2 368.
12. Laplante J. P. // Physica D. 1993. V. 65. P. 199.
13. Yoshimoto M., Yoshikawa K., Mori Y. // Phys. Rev. E. 1993. V. 47. P. 864.
14. Rosenblum M. G., Pikovsky A. S., Kurths J. // Phys. Rev. Lett. 1997. V. 78. P. 4 193.
15. Anischenko V. S., Vadivasova T. E., Postnov D. E., Safonova M. A. // Int. J. Bifurcation and Chaos. 1992. V. 2. P. 633.
16. Sosnovtseva O. V., Postnov D. E., Nekrasov A. M., et al. // Phys. Rev. E. 2002. V. 66. Article no. 036 224.
17. Ланда П. С. Автоколебательные системы с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980.
18. Rand R. H., Holmes P. J. // Int. J. Non-Linear Mech. 1980. V. 15. P. 387.
19. Schreiber I., Holodniok M., Kubiček M., Marek M. // J. Stat. Phys. 1986. V. 43. P. 314.
20. Aronson D. G., Doedel E. J., Othmer H. G. // Physica D. 1987. V. 25. P. 20.
21. Ashwin P., King G. P., Swift J. W. // Nonlinearity. 1990. V. 3. P. 585.

22. Crowley M. F., Epstein I. R. // J. Phys. Chem. 1989. V. 93. P. 2 496.
23. Ruwisch D., Bode M., Volkov D. V., Volkov E. I. // Int. J. Bifurcation and Chaos. 1999. V. 9. P. 1 969.
24. Volkov E. I., Stolyarov M. N. // Phys. Lett. A. 1991. V. 159. P. 61.
25. Volkov E. I., Stolyarov M. N. // Biol. Cybern. 1994. V. 71. P. 451.
26. Волков Д. В., Столяров М. Н., Волков Е. И. // Изв. вузов. Проблемы нелинейной динамики. 1996. Т. 4. С. 3.
27. Volkov E. I., Stolyarov M. N. // J. Biol. Systems. 1995. V. 3. P. 63.
28. Волков Е. И. // Краткие сообщения по физике. 1995. Т. 7. С. 25.
29. Анищенко В. С., Нейман А. Б., Мосс Ф., Шиманский-Гайер Л. // УФН. 1999. Т. 169. С. 7.
30. Izhikevich E. M. // BioSystems. 2002. V. 67. P. 95.
31. Medvedev G. S., Wilson C. J., Callaway J. C., Kopell N. // J. Comp. Neurosci. 2003. V. 15, No. 1. P. 53.
32. Treutlein H., Schulten K. // Eur. Biophys. J. 1986. V. 13. P. 355.
33. Volkov E. I., Stolyarov M. N., Zaikin A., Kurths J. // Phys. Rev. E. 2003. V. 67. Article no. 066 202.
34. Postnov D. E., Sosnovtseva O. V., Han S. K., Kim W. S. // Phys. Rev. E. 2002. V. 66. Article no. 016 203.
35. Volkov E. I., Ullner E., Zaikin A. A., Kurths J. // Phys. Rev. E. 2003. V. 68. Article no. 061 112.
36. Кернер Б., Осипов В. // УФН. 1990. Т. 160, вып. 9. С. 1.
37. Castets V., Dulos E., Boissonade J., De Kepper P. // Phys. Rev. Lett. 1990. V. 64. P. 2 953.
38. Wang X.-J., Rinzel J. // Neural Comp. 1992. V. 4. P. 84.

Поступила в редакцию 26 апреля 2004 г.; принята в печать 2 августа 2004 г.

LIMIT CYCLES ARISING IN A CHAIN OF INHIBITORILY COUPLED, IDENTICAL RELAXATION OSCILLATORS NEAR THE SELF-OSCILLATION THRESHOLD

E. I. Volkov

We examine dynamic modes of a linear chain of four identical stiff FitzHugh–Nagumo oscillators, which exist in the vicinity of the bifurcation of limit cycle emergence. It is shown that in a broad range of coupling strengths, slow-variable exchange between the oscillators gives rise to multiple limit cycles with different periods and different phase relations. In addition to the expected antiphase solutions, three families of stable limit cycles are found, which differ by the number of spikes of the fast variable in individual oscillators and by the number of spikes per period. The boundaries of attractor stability are calculated and the parameter regions of their coexistence are found.

УДК 536

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ФОНОННОЙ СИЛЫ ТРЕНИЯ, ДЕЙСТВУЮЩЕЙ НА ЭЛЕКТРОН ПРОВОДИМОСТИ

Г. Ф. Ефремов, О. В. Мареева, Д. А. Воробьёв

Нижегородский государственный педагогический университет, г. Нижний Новгород, Россия

В рамках микроскопической флуктуационно-диссипационной теории получено стохастическое уравнение, описывающее броуновское движение электрона в фононном поле кристаллической решётки. Получено выражение для функции Грина фононного поля в общем виде и для случая линейного по фононным переменным взаимодействия электрона с фононным полем с учётом экранирования потенциала ядер кристаллической решётки. Найдено и проанализировано выражение для фононной силы трения, действующей на электрон проводимости в поле кристаллической решётки, с учётом запаздывания взаимодействия. Исследована частотная зависимость коэффициента фононной силы трения, действующей на электрон проводимости, и определён вклад электрон-фононного взаимодействия в эффективную массу носителя заряда.

ВВЕДЕНИЕ

Задача о взаимодействии электронов с фононным полем решётки является одной из основополагающих в физике конденсированного состояния. В последние годы она остаётся объектом интенсивного теоретического и экспериментального исследования [1]. Интерес к данной проблеме связан с ролью электрон-фононного взаимодействия в описании таких фундаментальных физических явлений, как процессы переноса и сверхпроводимость. Будучи основным механизмом диссипативных и флуктуационных процессов в твёрдом теле, электрон-фононное взаимодействие приводит к специфическому взаимодействию между электронами, определяет важные особенности электронов-квазичастиц (например, обусловленные поляронным эффектом).

В настоящей работе выделена важная часть этой задачи, связанная с реакцией фононного поля на движение электрона при одновременном учёте воздействия на электрон флуктуаций фононного поля решётки. Принципиально статистический характер этой задачи диктует методы её решения. В основу решения положена последовательная статистическая теория нелинейных открытых квантовых систем [2–5], которая является обобщением линейной теории броуновского движения квантовых систем, развитой Ю. Швингером [6, 7] и Р. Сеницким [8, 9], и дополняет известные методы квантовой кинетики [10, 11] и квантовой теории поля [12–15] возможностями одновременного совместного исследования кинетики и флуктуаций, не прибегая к предположениям марковости и слабости взаимодействия, как в квазиравновесных, так и сильнонеравновесных состояниях динамической подсистемы. Приложения развиваемой теории касаются проблем квантовой электродинамики [16, 17], а также исследования особенностей кинетических и флуктуационных процессов в конденсированных средах [18–22].

Анализ проблемы взаимодействия электронов с фононным полем решётки требует в общем случае полевого подхода [5, 12]. В рассматриваемой нами задаче о реакции фононного поля на электрон, находящийся в произвольном состоянии, целесообразно ограничиться более простым одноэлектронным подходом. В этом приближении определяются такие характеристики квазичастицы-электрона, обусловленные его взаимодействием с фононным полем решётки, как время жизни (затухание) и закон дисперсии (в частности, эффективная масса). При этом характеристики электрона при отсутствии взаимодействия с фононами (например, закон дисперсии) считаются известными.

Поскольку статистическая теория нелинейных открытых систем может оказаться полезной для решения целого ряда задач статистической радиофизики, в работе предложена краткая формулировка исходных положений теории. Дан классический вывод стохастических уравнений для нелинейных систем, взаимодействующих с гауссовым термостатом. Последовательная квантовая теория получена из классической на основе принципа соответствия.

С точки зрения общей теории рассмотрена задача о реакции фононного поля на электрон проводимости при одновременном учёте воздействия на электрон флуктуаций фононного поля. В полученном стохастическом уравнении найдена фононная сила трения и строго определён флуктуационный источник. Для микроскопической модели электрон-фононного взаимодействия учтено дебаевское экранирование потенциала ядер решётки и найдено выражение для фононной функции Грина в случае как линейного, так и нелинейного взаимодействия по фононным переменным. В случае слабого периодического внешнего электрического поля определён комплексный коэффициент фононного трения. Найдена частотная зависимость комплексного коэффициента трения.

Комплексный коэффициент трения определяет два принципиально важных эффекта — собственно фононное трение и так называемый поляронный эффект, учитывающий, в частности, изменение эффективной массы электрона за счёт взаимодействия с фононным полем решётки.

1. МИКРОСКОПИЧЕСКАЯ ФЛУКТУАЦИОННО-ДИССИПАЦИОННАЯ ТЕОРИЯ

Основная задача микроскопической флуктуационно-диссипационной теории заключается в том, чтобы получить уравнения движения для некоторой выделенной части полной системы — динамической подсистемы, взаимодействующей с диссипативной системой, называемой термостатом. При единственном предположении о гауссовости невозмущённых переменных термостата удаётся исключить переменные термостата, строго определить флуктуационные источники и указать рецепт вычисления их функций корреляции. Таким образом, теория строится на основе статистических предположений и не опирается на малость константы взаимодействия и предположения о марковости, которые обычно используются в методе кинетических уравнений.

Пусть динамическая подсистема, определяемая гамильтонианом H_0, взаимодействует с термостатом, имеющим гамильтониан F, и находится под воздействием внешней силы $f(t)$, так что гамильтониан всей системы имеет вид

$$H = H_0 + F - \lambda XQ - Xf(t), \tag{1}$$

где слагаемое λXQ описывает взаимодействие между динамической подсистемой и термостатом, Q и X-переменные термостата и динамической подсистемы соответственно. Будем считать, что взаимодействие λXQ включается адиабатически в момент времени $t = -\infty$, причём невозмущённые переменные термостата $Q^0(t)$ в начальном состоянии являются гауссовыми. Учтём сначала изменение переменных термостата $Q(t)$, считая $\lambda X(t)$ произвольной силой, воздействующей на термостат, а затем полученные значения $Q(t)$ подставим в уравнения Гамильтона для переменных динамической подсистемы. Согласно нестационарной теории возмущений [2, 3], для $Q(t)$ справедливо представление

$$Q(t) = Q^0(t) + \lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t_1\, \tilde{G}(t,t_1) X(t_1) + \lambda^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t_2\, \tilde{G}(t,t_1,t_2) X(t_1) X(t_2) + \ldots \,. \tag{2}$$

Здесь $\tilde{G}(t,t_1)$, $\tilde{G}(t,t_1,t_2)$, … — случайные отклики термостата на заданные внешние силы, определяемые скобками Пуассона от невозмущённых переменных термостата $Q^0(t), Q^0(t_1), Q^0(t_2), \ldots$:

$$\tilde{G}(t,t_1) = -\{Q^0(t), Q^0(t_1)\}\,\eta(t-t_1),$$

$$\tilde{G}(t,t_1,t_2) = \frac{(-1)^2}{2!}\,P_{12}\,\{\{Q^0(t), Q^0(t_1)\}\,Q^0(t_2)\}\,\eta(t-t_1)\eta(t_1-t_2), \qquad \ldots . \tag{3}$$

Функция Хевисайда в (3)

$$\eta(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau > 0; \\ 0, & \tau < 0 \end{cases}$$

автоматически учитывает принцип причинности. В соответствии с исходным гамильтонианом (1) переменная $Q(t)$, определяемая разложением (2), будет входить в уравнение Гамильтона для переменных $X_j(t)$ динамической подсистемы:

$$\dot{X}_j(t) = \{X_j(t), H_0(t)\} - \{X_j(t), X(t)\}\,(\lambda Q(t) + f(t)), \tag{4}$$

и, следовательно, строгое решение уравнений (4) будет представлять собой некоторый функционал от невозмущённых переменных $Q^0(t)$ и случайных откликов (3):

$$X_j(t) = F_j(Q^0, \tilde{G}, \ldots). \tag{5}$$

В (4) и далее точка обозначает производную по времени. Чтобы исключить переменные термостата из (4) и дать определение флуктуационных источников, воспользуемся предположением о гауссовой статистике $Q^0(t)$ по начальному состоянию термостата. Основное свойство гауссовых переменных $Q^0(t)$ при среднем значении $\langle Q^0(t)\rangle = 0$ состоит в том, что среднее от любого произведения гауссовых переменных разбивается на сумму произведений всевозможных попарных средних. Например,

$$\langle Q^0(t)Q^0(t_1)Q^0(t_2)Q^0(t_3)\rangle = P_{123}\,\langle Q^0(t)Q^0(t_1)\rangle\,\langle Q^0(t_2)Q^0(t_3)\rangle, \tag{6}$$

где P_{123} — оператор суммы циклических перестановок индексов.

Из указанного выше свойства следует очень важная формула Фуруцу—Новикова, определяющая среднее от произведения гауссовой переменной $Q^0(t)$ и произвольного функционала $F(Q^0)$:

$$\langle Q^0(t), F(Q^0)\rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t_1\,\langle Q^0(t)Q^0(t_1)\rangle \left\langle \frac{\delta F(Q^0)}{\delta Q^0(t_1)} \right\rangle, \tag{7}$$

где

$$\langle Q^0(t)Q^0(t_1)\rangle = M(t,t_1) \tag{8}$$

— временна́я функция корреляции гауссового процесса. Функциональная производная в (7) определяет приращение функционала δF при бесконечно малой вариации $\delta Q^0(t_1)$:

$$\delta F = \int \mathrm{d}t_1\,\frac{\delta F(Q^0)}{\delta Q^0(t_1)}\,\delta Q^0(t_1).$$

Высшие кумулянты для гауссового процесса, как известно, строго равны нулю.

В [4] доказаны важные статистические свойства случайных откликов (3) для гауссовых переменных:

$$\langle Q^0(t)F(Q^0)\tilde{G}(t,t_1)\rangle = \langle \tilde{G}(t,t_1)\rangle\,\langle Q^0(t)F(Q^0)\rangle,$$

$$\langle Q^0(t)F(Q^0)\tilde{G}(t,t_1,t_2)\rangle = \langle\tilde{G}(t,t_1,t_2)\rangle\,\langle Q^0(t)F(Q^0)\rangle = 0, \qquad \ldots, \tag{9}$$

т. е. все моменты более высокого порядка равны нулю. Все статистические свойства динамической подсистемы при учёте её взаимодействия с термостатом будут определяться средними значениями от произведений функционалов (5) по начальному состоянию термостата:

$$\langle F_i(Q^0,\tilde{G})F_j(Q^0,\tilde{G})\rangle. \tag{10}$$

В силу свойств (9) нелинейные отклики в (10) исчезнут, а линейные отклики $\tilde{G}(t,t_1)$ будут равны их средним значениям:

$$G(t,t_1) = \langle\tilde{G}(t,t_1)\rangle. \tag{11}$$

Возвращаясь вновь к разложению (2), мы должны, таким образом, отбросить нелинейные члены, заменив при этом $\tilde{G}(t,t_1)$ средним значением (11):

$$Q(t) = Q^0(t) + \lambda\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}t_1\,G(t,t_1)X(t_1), \tag{12}$$

где $Q^0(t)$ определяется невозмущённой временно́й эволюцией термостата, второе слагаемое строго учитывает реакцию термостата на воздействие динамической подсистемы. С учётом (12) уравнения движения (4) для переменных динамической подсистемы запишутся в виде

$$\dot{X}_j(t) = \{X_j(t),H_0(t)\} - Y_j(t)\,(f(t)+\lambda Q^0(t)) - \lambda^2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}t_1\,G(t,t_1)Y_j(t)X(t_1), \tag{13}$$

где

$$Y_j(t) = \{X_j(t),X(t)\} \tag{14}$$

— некоторая функция нелинейной системы.

Важная особенность полученных уравнений (13) состоит в наличии произведений $Q^0(t)Y_j(t)$, среднее значение для которых по начальному состоянию термостата отлично от нуля. Используя формулу Фуруцу—Новикова (7) и аддитивность $\lambda Q(t)$ и $f(t)$ в гамильтониане (1), получим

$$\langle Q^0(t)Y_j(t)\rangle = \lambda\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}t_1\,M(t,t_1)\left\langle\frac{\delta Y_j(t)}{\delta f(t_1)}\right\rangle, \tag{15}$$

где для функциональной производной по внешней силе имеем выражение [2]

$$\frac{\delta Y_j(t)}{\delta f(t_1)} = -\{Y_j(t),X(t_1)\}\,\eta(t-t_1). \tag{16}$$

Учитывая (15), определим случайную величину $\xi_j(t)$ с равным нулю средним значением:

$$\lambda Q^0(t)Y_j(t) = \lambda^2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}t_1\,M(t,t_1)\,\frac{\delta Y_j(t)}{\delta f(t_1)} + \xi_j(t), \tag{17}$$

которую будем называть флуктуационным источником. Парные функции корреляции $\xi_j(t)$, например, равны

$$\langle\xi_j(t)\xi_j(t_1)\rangle = \lambda^2 M(t,t_1)\,\langle Y_j(t)Y_j(t_1)\rangle + \lambda^4\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\tau\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\tau_1\,M(t,\tau)M(t_1,\tau_1)\left\langle\frac{\delta Y_j(t)}{\delta f(\tau_1)}\;\frac{\delta Y_j(t_1)}{\delta f(\tau)}\right\rangle. \tag{18}$$

Подставляя выражение (17) в (13), получим стохастическое уравнение для нелинейной динамической подсистемы, взаимодействующей с гауссовым термостатом:

$$\dot{X}_j(t) = \{X_j(t), H_0(t)\} - Y_j(t)f(t) - \lambda^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t_1 \left(G(t,t_1)Y_j(t)X(t_1) + M(t,t_1)\,\frac{\delta Y_j(t)}{\delta f(t_1)} \right) - \xi_j(t). \quad (19)$$

Таким образом, поведение динамической подсистемы, взаимодействующей с гауссовым термостатом, исчерпывающим образом определяется функцией корреляции (8) и линейным откликом термостата на заданное внешнее воздействие (3), (9). Заметим, что квантовая теория, которая развивается в работе [4], может быть получена из изложенного выше классического подхода с помощью правил квантования Дирака, а именно классические переменные заменяются соответствующими операторами, причём произведению физических величин будет соответствовать симметризованное произведение операторов: например, $Y_j(t)X(t_1)$ заменяется на $[Y_j(t), X(t_1)]_+/2$, классические скобки Пуассона $\{Y_j(t), X(t_1)\}$ переходят в квантовые $[Y_j(t), X(t_1)]_-/(i\hbar)$.

В соответствии с указанными выше правилами из (19) получим квантовое стохастическое уравнение, совпадающее с аналогичным уравнением, приведённым в [4]:

$$\begin{aligned} \dot{X}_j(t) = {}& \frac{1}{i\hbar}\,[X_j(t), H_0(t)]_- - Y_j(t)f(t) - \\ & - \lambda^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t_1 \left(G(t,t_1)\,\frac{1}{2}\,[Y_j(t), X(t_1)]_+ + M(t,t_1)\,\frac{i}{\hbar}\,[Y_j(t), X(t_1)]_-\,\eta(t-t_1) \right) - \xi_j(t), \end{aligned} \quad (20)$$

где $Y_j(t) = [X_j(t), X(t)]_-/(i\hbar)$.

В квантовой теории функция корреляции $M(t,t_1)$ и линейный отклик $G(t,t_1)$ переменных термостата принимают вид [2, 4]

$$M(t,t_1) = \left\langle \frac{1}{2}\,[Q^0(t), Q^0(t_1)]_+ \right\rangle, \qquad G(t,t_1) = \left\langle \frac{i}{\hbar}\,[Q^0(t), Q^0(t_1)]_- \right\rangle \eta(t-t_1). \quad (21)$$

Полученные таким образом стохастические уравнения для переменных динамической подсистемы играют роль, подобную кинетическим уравнениям. Вместе с тем эти уравнения имеют значительно более широкую область применимости. Во-первых, стохастические уравнения позволяют, в принципе, вычислять любые статистические характеристики системы. Во-вторых, динамическая подсистема может находиться в сильно неравновесном состоянии, и поэтому стохастические уравнения одинаково применимы как в квазиравновесном, так и в сильно неравновесных состояниях.

2. БРОУНОВСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОНА В ФОНОННОМ ТЕРМОСТАТЕ

Изложенный выше последовательный статистический подход, составляющий сущность метода стохастических уравнений, позволяет определить специфические флуктуационные эффекты в традиционных задачах кинетики в конденсированных средах. Рассмотрим задачу о движении электрона проводимости в поле кристаллической решётки, находящейся во внешнем однородном электрическом поле $\mathbf{E}(t)$. Будем считать, что свойства квазичастиц-электронов в зоне проводимости при фиксированном положении ядер известны. Для простоты запишем закон дисперсии в приближении эффективной массы:

$$\mathcal{E}(p) = p^2/(2m).$$

Здесь p, m и $\mathcal{E}$ — импульс, эффективная масса и энергия электрона соответственно. Также будем считать, что электрон может находиться в любом неравновесном состоянии. В этом случае наиболее важный механизм диссипации и флуктуаций при электронном переносе обусловлен взаимодействием электронов с колебаниями решётки — фононным термостатом.

В одноэлектронном приближении гамильтониан рассматриваемой системы запишется в виде

$$H = \frac{p^2(t)}{2m} - e\mathbf{E}(t)\mathbf{r}(t) + F - Q(\mathbf{r}(t), t), \tag{22}$$

где e — заряд электрона, F — гамильтониан колебаний кристаллической решётки в гармоническом приближении. Функция $Q(\mathbf{r}(t), t)$ описывает энергию взаимодействия электрона с фононным полем, которую удобно записать в каноническом виде с помощью разложения в ряд Фурье:

$$Q(\mathbf{r}(t), t) = \sum_{\mathbf{k}} Q_{\mathbf{k}}(t) \exp(i\mathbf{kr}(t)) = \sum_{\mathbf{k}} Q_{\mathbf{k}}(t) X_{\mathbf{k}}(t), \tag{23}$$

где $Q_{\mathbf{k}}(t)$ — оператор фононной системы, сопряжённый оператору $X_{\mathbf{k}} = \exp(i\mathbf{kr}(t))$ электронной подсистемы.

Будем считать, что невозмущённые фононные переменные $Q^0_{\mathbf{k}}(t)$ описываются гауссовой статистикой с корреляционной функцией

$$M(\mathbf{k}, t - t_1) = \left\langle \frac{1}{2} \, [Q^0_{\mathbf{k}}, Q^0_{-\mathbf{k}}(t_1)]_+ \right\rangle. \tag{24}$$

В этом случае аналогично (12) полная эволюция во времени переменных термостата $Q_{\mathbf{k}}(t)$ запишется в виде

$$Q_{\mathbf{k}}(t) = Q^0_{\mathbf{k}}(t) + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t_1 \, G(\mathbf{k}, t - t_1) \exp(-i\mathbf{kr}(t_1)), \tag{25}$$

где

$$G(\mathbf{k}, t - t_1) = \left\langle \frac{i}{\hbar} \, [Q^0_{\mathbf{k}}(t), Q^0_{-\mathbf{k}}(t_1)]_- \right\rangle \eta(t - t_1) \tag{26}$$

— так называемая фононная функция Грина, которая определяет изменение фононного поля $Q_{\mathbf{k}}(t)$, обусловленное воздействием электрона с плотностью распределения $X_{\mathbf{k}} = \exp(i\mathbf{kr}(t))$. При подстановке (25) в следующие из гамильтониана (22) уравнения Гейзенберга для координаты электрона:

$$m\ddot{r}_j(t) = \sum_{\mathbf{k}} ik_j \exp(i\mathbf{kr}(t)) Q_{\mathbf{k}}(t) + eE_j(t), \tag{27}$$

получим

$$m\ddot{r}_j(t) = \sum_{\mathbf{k}} \frac{ik_j}{2} \left[\exp(i\mathbf{kr}(t)), Q^0_{\mathbf{k}}(t)\right]_+ + \\ + \sum_{\mathbf{k}} ik_j \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t_1 G(\mathbf{k}, t - t_1) \, \frac{1}{2} \left[\exp(i\mathbf{kr}(t)), \exp(-i\mathbf{kr}(t_1))\right]_+ + eE_j(t). \tag{28}$$

Заданное параметрическое воздействие фононной системы на электрон, определяемое первым слагаемым в правой части (28), даёт принципиальный вклад в квантовую динамику и одновременно определяет флуктуационный источник. Согласно общей теории [2] имеем

$$\sum_{\mathbf{k}} \frac{ik_j}{2} \left[\exp(i\mathbf{kr}(t)), Q^0_{\mathbf{k}}(t)\right]_+ = \\ = \sum_{\mathbf{k}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t_1 \, (ik_j) \, M(\mathbf{k}, t-t_1) \, \frac{i}{\hbar} \left[\exp(i\mathbf{kr}(t)), \exp(-i\mathbf{kr}(t_1))\right]_- \eta(t-t_1) + \xi_j(t). \quad (29)$$

В результате после подстановки (29) в (28) получим стохастическое уравнение, описывающее броуновское движение электрона в фононном поле решётки при произвольном состоянии электрона в начальный момент времени:

$$m\ddot{r}_j(t) = \sum_{\mathbf{k}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t_1 \, ik_j \biggl(G(\mathbf{k}, t-t_1) \, \frac{1}{2} \left[\exp(i\mathbf{kr}(t)), \exp(-i\mathbf{kr}(t_1))\right]_+ + \\ + M(\mathbf{k}, t-t_1) \, \frac{i}{\hbar} \left[\exp(i\mathbf{kr}(t)), \exp(-i\mathbf{kr}(t_1))\right]_- \eta(t-t_1) \biggr) + eE_j(t) + \xi_j(t). \quad (30)$$

3. ФУНКЦИЯ ГРИНА ФОНОННОГО ПОЛЯ

По аналогии с радиационной силой трения [23] введём в стохастическом уравнении (30) фононную силу трения $F_j(t)$, действующую на электрон со стороны поля кристаллической решётки, и определим её следующим образом:

$$F_j(t) = \sum_{\mathbf{k}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t_1 \, ik_j \biggl(G(\mathbf{k}, t-t_1) \, \frac{1}{2} \left[\exp(i\mathbf{kr}(t)), \exp(-i\mathbf{kr}(t_1))\right]_+ + \\ + M(\mathbf{k}, t-t_1) \, \frac{i}{\hbar} \left[\exp(i\mathbf{kr}(t)), \exp(-i\mathbf{kr}(t_1))\right]_- \eta(t-t_1) \biggr). \quad (31)$$

Как следует из определения (31), фононная сила трения принципиально нелинейным образом зависит от координаты электрона в моменты времени t и t_1 и определяется такими фундаментальными характеристиками фононного поля, как функция Грина $G(\mathbf{k}, \tau)$ (26) и функция корреляции $M(\mathbf{k}, \tau)$ (24) фононных переменных $Q^0(\mathbf{k}, \tau)$. Функция Грина фононного поля, как известно, определяет реакцию поля кристаллической решётки на внешнее воздействие со стороны электрона. Второе слагаемое в скобках в правой части (31) обусловлено параметрическим воздействием на электрон флуктуаций поля кристаллической решётки. В состоянии термодинамического равновесия спектральная плотность флуктуаций определяется в соответствии с флуктуационно-диссипационной теоремой Каллена—Велтона мнимой частью функции Грина фононного поля. Таким образом, воздействие на электрон фононного поля, т. е. колебаний кристаллической решётки, полностью определяется функцией Грина. Поэтому одной из важнейших задач является получение строгого микроскопического выражения для $G(\mathbf{k}, \tau)$.

Особенности вычисления функции Грина зависят от модели электрон-фононного взаимодействия. В данной работе будем исходить из того, что электрон взаимодействует с каждым из ядер кристаллической решётки. Запишем энергию взаимодействия электрона с n-м ядром кристаллической решётки с учётом дебаевского экранирования кулоновского потенциала и диэлектрической проницаемости среды ε (таким образом, эффективно учитывается коллективное влияние электронов на их взаимодействие с фононным полем решётки):

$$U(\mathbf{r}(t)-\mathbf{r}_n(t)) \equiv U(\mathbf{R}) = \frac{Ze^2}{R\varepsilon}\exp(-\varkappa R). \tag{32}$$

Здесь $Z\,|e|$ — заряд ядра решётки, $\varkappa$ — обратный радиус дебаевского экранирования, $\mathbf{r}_n(t)$ — координата ядра в элементарной ячейке, определяемой вектором кристаллической решётки

$$\mathbf{R}_n = n_1\mathbf{a}_1 + n_2\mathbf{a}_2 + n_3\mathbf{a}_3,$$

$\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ и $\mathbf{a}_3$ — постоянные решётки, n_1, n_2 и n_3 — целые числа. Потенциальная энергия взаимодействия электрона со всеми ядрами кристаллической решётки определяется следующим образом:

$$Q(\mathbf{r}(t),t) = \sum_n U(\mathbf{r}(t)-\mathbf{r}_n(t)), \tag{33}$$

и, соответственно, переменные фононного поля, определяемые выражением (23), имеют вид

$$Q_{\mathbf{k}}(t) = \frac{1}{V}\int \mathrm{d}\mathbf{r}\,Q(\mathbf{r}(t),t)\exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}(t)) = U(k)\sum_n \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}_n(t)), \tag{34}$$

где

$$U(k) = \frac{1}{V}\int \mathrm{d}\mathbf{R}\,U(\mathbf{R})\exp(i\mathbf{k}\mathbf{R}) = \frac{Ze^2}{V\varepsilon}\,\frac{4\pi}{k^2+\varkappa^2}\ , \tag{35}$$

V — объём образца. Выразим координату ядра через положение равновесия и вектор смещения ядер решётки относительно их положения равновесия $\mathbf{u}_n(t)$:

$$\mathbf{r}_n(t) = \mathbf{R}_n + \mathbf{u}_n(t). \tag{36}$$

Тогда после подстановки (36) в (34) получим выражение для переменных фононного поля:

$$Q_{\mathbf{k}}(t) = U(k)\sum_n \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{u}_n(t))\exp(-i\mathbf{k}\mathbf{R}_n). \tag{37}$$

В данной работе ограничимся простейшим случаем и будем учитывать в (37) только линейные по фононным переменным члены. В этом приближении переменные фононного поля имеют вид

$$Q_{\mathbf{k}}(t) = U(k)\sum_n (-i\mathbf{k}\mathbf{u}_n(t))\exp(-i\mathbf{k}\mathbf{R}_n). \tag{38}$$

Перейдём далее от векторов смещения атомов в кристаллической решётке $\mathbf{u}_n(t)$ к нормальным фононным переменным $u_s(\mathbf{q},t)$. Для вычисления функции Грина в соответствии с определением (26) воспользуемся формулой (38), в которой будем считать $\mathbf{u}_n(t)$ невозмущёнными переменными фононного поля, т. е. $\mathbf{u}_n^0(t)$. Поскольку смещения ядер относительно положения равновесия малы по сравнению с периодом решётки ($|\Delta u_0| \ll a$), ангармонизмом колебаний можно пренебречь и, следовательно, считать, что в состоянии равновесия величины $\mathbf{u}_n^0(t)$ являются гауссовыми:

$$\mathbf{u}_n^0(t) = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{\mathbf{q},s}\mathbf{e}_s u_s^0(\mathbf{q},t)\exp(i\mathbf{q}\mathbf{R}_n), \tag{39}$$

где $Na^3 = V$. Запишем $u_s^0(\mathbf{q}, t)$ через операторы рождения и уничтожения акустических фононов в соответствии с формулой

$$u_s^0(\mathbf{q}, t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega_s(q)}} \left(b_s(\mathbf{q}, t) + b_{-s}^+(-\mathbf{q}, t)\right). \tag{40}$$

Определяя эволюцию во времени операторов $b_s(\mathbf{q}, t)$, воспользуемся перестановочными соотношениями

$$\left[b_s(\mathbf{q}, t), b_{s_1}^+(\mathbf{q}_1, t)\right]_- = \delta_{\mathbf{q}\mathbf{q}_1}\delta_{ss_1},$$

$\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера, и гамильтонианом фононного термостата. В результате получим

$$b_s(\mathbf{q}, t) = b_s(\mathbf{q}, 0)\exp(-i\omega_s(q)t).$$

Тогда формула (38) для невозмущённых фононных переменных с учётом (39) и (40) примет вид

$$Q^0(\mathbf{k}, t) = U(k)ik\sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega_s(k)}} \left(b_s(\mathbf{k}, t) + b_s^+(-\mathbf{k}, t)\right). \tag{41}$$

Используя (35) и (41), получим выражение для функции Грина фононов:

$$G(\mathbf{k}, t - t_1) = \left\langle \frac{i}{\hbar}\,[Q_{\mathbf{k}}^0(t), Q_{-\mathbf{k}}^0(t_1)]_- \right\rangle \eta(t - t_1) = \lambda^2\,\frac{k^2}{(k^2 + \varkappa^2)^2\,\omega_s(k)}\sin[\omega_s(k)\,(t - t_1)]\,\eta(t - t_1),$$

которая в соответствии с (25) определяет эволюцию во времени переменных фононного поля $Q_{\mathbf{k}}(t)$. Здесь

$$\lambda^2 = \left(\frac{Ze^2}{a\pi\varepsilon}\right)^2 \frac{k_{\mathrm{d}}^4}{M}\,\frac{1}{N}$$

— эффективный коэффициент электрон-фононного взаимодействия, M — масса ядра решётки, $k_{\mathrm{d}} = 2\pi/a$.

Частотная зависимость функции Грина в безразмерных переменных выглядит следующим образом:

$$G(x, \omega) = \int \mathrm{d}\tau\,\exp(i\omega\tau)G(x, \tau) = \lambda^2\,\frac{x^2}{(x^2 + x_0^2)^2}\,\frac{1}{x^2 - (\omega/\omega_{\mathrm{d}} + i\delta)^2}\,, \tag{42}$$

где $x = k/k_{\mathrm{d}}$, $x_0 = \varkappa/k_{\mathrm{d}}$, δ — бесконечно малая положительная величина, учитывающая полюс запаздывающей функции Грина фонона, $\omega_{\mathrm{d}} = ck_{\mathrm{d}}$ — дебаевская частота, c — скорость звука.

В заключение заметим, что фононные переменные $Q_{\mathbf{k}}(t)$ являются принципиально нелинейными функциями гауссовых переменных (39) и, следовательно, не являются, строго говоря, гауссовыми переменными. В соответствии с исходными положениями микроскопической теории в случае негауссовых переменных термостата в разложении (25) необходимо учесть нелинейные члены. Физически это означает наличие особых нелинейных эффектов, обусловленных взаимодействием электрона с фононным полем. Однако, если константа электрон-фононного взаимодействия мала, можно ограничиться только линейным членом по аналогии с (25) и считать в этом приближении фононные переменные гауссовыми величинами. При вычислении функции Грина по формуле (26) получим скобки Пуассона вида

$$\left\langle \frac{i}{\hbar}\,[\exp(i\mathbf{k}\mathbf{u}_n(t)), \exp(i\mathbf{k}\mathbf{u}_n(t_1))]_- \right\rangle,$$

которые могут быть вычислены с учётом гауссовости переменных $u_n^0(t)$. Данный метод позволяет учесть вклад многофононных процессов при изучении различных физических эффектов.

4. КОЭФФИЦИЕНТ ФОНОННОЙ СИЛЫ ТРЕНИЯ

Сопоставим обобщённую силу трения, определённую в соответствии с (30) и (31), с феноменологической силой трения в марковском приближении, которая находится из следующего уравнения:

$$\langle \ddot{r}_j(t)\rangle + \gamma_0 \langle \dot{r}_j(t)\rangle = f_j(t)/m. \tag{43}$$

Рассмотрим движение электрона в однородном электрическом поле с напряжённостью $\mathbf{E}(t)$, энергия взаимодействия с которым определяется в соответствии с формулой

$$V(t) = -r_j e E_j(t) = -r_j f_j(t). \tag{44}$$

Определённая таким образом внешняя сила $f_j(t)$ является канонически сопряжённой координате электрона. В соответствии с нестационарной теорией возмущений эволюция координаты электрона $r_j(t)$ при заданном стороннем возмущении запишется в следующем виде:

$$r_j(t) = \tilde{r}_j(t) + \int \mathrm{d}t_1\, \varphi_{ji}(t,t_1) f_i(t_1) + \ \ldots\ , \tag{45}$$

где $\tilde{r}(t)$ определяется свободной эволюцией электрона в отсутствии внешнего поля, т. е. при $f_i(t) = 0$. Соответственно, линейный случайный отклик электрона на внешнее возмущение запишется следующим образом:

$$\varphi_{ji}(t,t_1) = \frac{i}{\hbar}\left[r_j^0(t), r_i^0(t_1)\right]_- \eta(t-t_1). \tag{46}$$

Рассмотрим случай слабого электрического поля. Тогда можно пренебречь нелинейными членами в разложении (45) и не учитывать флуктуации линейного отклика (46). Будем считать также кристалл изотропным и учтём, что линейный отклик электрона $\varphi_{ji}(t,t_1)$ зависит от разности моментов времени, т. е.

$$\langle \varphi_{ji}(t,t_1)\rangle = \left\langle \frac{\delta r_j(t)}{\delta f_i(t_1)} \right\rangle = \varphi(t-t_1)\delta_{ji}. \tag{47}$$

Таким образом, при нахождении фононной силы трения в линейном приближении координату электрона в произвольный момент времени t можно представить в следующем виде:

$$r_j(t) = \tilde{r}_j(t) + \langle r_j(t)\rangle = \tilde{r}_j(t) + \int \mathrm{d}t_1\, \varphi(t-t_1) f_j(t_1). \tag{48}$$

Подставим (48) в (30) и представим $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}(t))$ в виде разложения в ряд, оставляя только линейные по $\langle r_j(t)\rangle$ члены, после чего усредним полученное выражение по начальному состоянию фононного поля. В результате получим

$$\begin{aligned}\langle \ddot{r}_j(t)\rangle = \frac{1}{m}\sum_{\mathbf{k}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t_1\, (ik_j)\,(ik_\alpha)\Bigg(G(\mathbf{k},t-t_1)\,\frac{1}{2}\left\langle [\exp(i\mathbf{k}\tilde{\mathbf{r}}(t)), \exp(-i\mathbf{k}\tilde{\mathbf{r}}(t_1))]_+\right\rangle + \\ + M(\mathbf{k},t-t_1)\,\frac{i}{\hbar}\left\langle [\exp(i\mathbf{k}\tilde{\mathbf{r}}(t)), \exp(-i\mathbf{k}\tilde{\mathbf{r}}(t_1))]_-\right\rangle \eta(t-t_1)\Bigg)\big(\langle r_\alpha(t)\rangle - \langle r_\alpha(t_1)\rangle\big) + \frac{e}{m}\langle E_j(t)\rangle.\end{aligned} \tag{49}$$

С учётом изотропности кристалла уравнение (49) запишется в виде

$$\langle \ddot{r}_j(t)\rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t_1\, L(t-t_1)\big(\langle r_j(t)\rangle - \langle r_j(t_1)\rangle\big) + f_j(t)/m = \langle F_j(t)\rangle/m + f_j(t)/m. \tag{50}$$

Здесь функция $L(t-t_1)$, определяющая среднее значение фононной силы трения, имеет вид

$$L(t-t_1)=\frac{1}{3m}\sum_{\mathbf{k}}k^2\biggl(G(\mathbf{k},t-t_1)\,\frac{1}{2}\left\langle[\exp(i\mathbf{kr}(t)),\exp(-i\mathbf{kr}(t_1))]_+\right\rangle+ \\ +M(\mathbf{k},t-t_1)\,\frac{i}{\hbar}\left\langle[\exp(i\mathbf{kr}(t)),\exp(-i\mathbf{kr}(t_1))]_-\right\rangle\eta(t-t_1)\biggr). \quad (51)$$

Сравним обобщённую силу трения, определяемую формулами (50) и (51), с феноменологической силой трения в марковском приближении, которая находится из уравнения (43). С этой целью запишем уравнения (50) и (43) в спектральной форме:

$$-[\omega^2+i\omega\gamma_0]\left\langle r_j(\omega)\right\rangle=f_j(\omega)/m, \quad (52)$$

$$-\omega^2\left\langle r_j(\omega)\right\rangle=[L(\omega)-L(0)]\left\langle r_j(\omega)\right\rangle+f_j(\omega)/m=\langle F_j(\omega)\rangle/m+f_j(\omega)/m, \quad (53)$$

где

$$L(\omega)=\int\mathrm{d}\tau\exp(i\omega\tau)L(\tau),\qquad L(0)=\int\mathrm{d}\tau\,L(\tau). \quad (54)$$

Таким образом, сила трения в выражении (52), как и в (53), на нулевой частоте обращается в нуль. Определим коэффициент фононной силы трения следующим образом:

$$L(\omega)-L(0)=i\omega\gamma(\omega). \quad (55)$$

Принципиальное отличие обобщённого коэффициента фононной силы трения $\gamma(\omega)$ от феноменологического γ_0 заключается в частотной зависимости $\gamma(\omega)$, имеющей простой физический смысл. Перепишем уравнение (53) с учётом определения (55):

$$-[\omega^2+i\omega\gamma(\omega)]\left\langle r_j(\omega)\right\rangle=f_j(\omega)/m, \quad (56)$$

и запишем соответствующее выражение для восприимчивости:

$$\chi(\omega)=-\frac{1}{m}\;\frac{1}{\omega^2+i\omega\gamma(\omega)}\;. \quad (57)$$

После обратного преобразования Фурье из (56) получим

$$\langle\ddot{r}_j(t)\rangle+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}t_1\,\gamma(t-t_1)\,\langle\dot{r}_j(t_1)\rangle=f_j(t)/m. \quad (58)$$

Данное уравнение указывает на то, что коэффициент фононной силы трения

$$\gamma(t-t_1)=\int\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\exp(-i\omega\,(t-t_1))\gamma(\omega) \quad (59)$$

определённым образом учитывает запаздывание взаимодействия между электроном и фононным полем решётки. Коэффициент трения $\gamma(t-t_1)$ удовлетворяет принципу причинности, т. е. $\gamma(t-t_1)=0$ при $t<t_1$. Вследствие этого величина $\gamma(\omega)$ является комплексной функцией частоты:

$$\gamma(\omega)=\gamma'(\omega)+i\gamma''(\omega). \quad (60)$$

Действительная часть $\gamma'(\omega)$ и, соответственно, $L''(\omega)$ определяют диссипацию энергии электрона. Мнимая часть $\gamma''(\omega)$ определяет дисперсию, в частности вклад электрон-фононного взаимодействия в эффективную массу электрона.

Для получения физических результатов с помощью изложенной выше теории чрезвычайно важна разработка методов решения уравнений с привлечением дополнительных физических соображений. Остановимся на возможности сочетания классического описания электрона и одновременного учёта квантового характера флуктуаций фононного поля [24]. Это позволит существенно упростить исходные уравнения (30) и расширить возможности получения физических результатов. Квазиклассический способ описания кинетических явлений в твёрдых телах часто используется в методе кинетических уравнений. Движение электронного волнового пакета описывается классически, а интеграл столкновений рассчитывается согласно квантовой теории [10].

Применим эту идею к анализу броуновского движения электрона в фононном термостате. В системе уравнений (30) квантовые свойства фононной системы определяются функцией корреляции (24), спектральная плотность которой определяется согласно флуктуационно-диссипационной теореме Каллена—Велтона [2]:

$$S(\mathbf{k},\omega) = \int \mathrm{d}\tau \exp(i\omega\tau) M(\mathbf{k},\tau) = \hbar G''(\mathbf{k},\omega) \operatorname{cth}\left(\frac{\hbar\omega}{2T}\right), \tag{61}$$

где $G''(\mathbf{k},\omega)$ — мнимая часть линейной восприимчивости, определяемой согласно

$$G(\mathbf{k},\omega) = \int \mathrm{d}\tau \exp(i\omega\tau) G(\mathbf{k},\tau).$$

Переход к классическому описанию электрона, не затрагивающий квантовых свойств фононной системы, осуществляется в (30) с помощью принципа соответствия путём замены квантовых скобок Пуассона классическими, т. е. $[\exp(i\mathbf{kr}),\exp(-i\mathbf{kr})]_-/(2\hbar)$ заменяется на $\{\exp(i\mathbf{kr}), \exp(-i\mathbf{kr})\}$. Классические скобки Пуассона от экспоненциальных переменных вычисляются в соответствии с их определением и выражаются через скобки Пуассона $\{r_\alpha(t), r_\beta(t_1)\}$. В результате получим стохастическое уравнение, описывающее броуновское движение классического электрона в поле кристаллической решётки:

$$m\ddot{r}_j(t) = \sum_{\mathbf{k}} ik_j \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t_1 \left(k_\alpha k_\beta \frac{\delta r_\alpha(t)}{\delta f_\beta(t_1)} M(\mathbf{k}, t-t_1) + \right.$$
$$\left. + \; G(\mathbf{k}, t-t_1) \exp(i\mathbf{k}\,(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_1)))\right) + \xi_j(t) + eE_j(t), \tag{62}$$

где $f_\beta(t) = eE_\beta(t)$, $\delta r_\alpha(t)/\delta f_\beta(t_1) = -\{r_\alpha(t), r_\beta(t_1)\}\,\eta(t-t_1) = \varphi_{\alpha\beta}(t,t_1)$ — линейный отклик электрона. Это уравнение значительно проще исходного (30) и формально выглядит как уравнение для классических систем. В то же время в (62) входит постоянная Планка, учитывающая согласно (61) квантовые свойства фононного поля.

Для анализа основных особенностей фононного трения воспользуемся описанным выше квазиклассическим приближением. Квантовый характер кинетических процессов в этом случае определяется спектральной функцией корреляции фононного поля (61). В то же время движение электрона с большой степенью точности можно считать классическим. В квазиклассическом приближении в соответствии с (62) фононная сила трения (51) запишется в виде

$$L(t-t_1) = \frac{1}{3m} \sum_{\mathbf{k}} k^2 \left(G(\mathbf{k}, t-t_1) + k^2 \varphi(t-t_1) M(\mathbf{k}, t-t_1)\right) \left\langle \exp(i\mathbf{k}\,(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_1)))\right\rangle. \tag{63a}$$

Здесь мы также воспользовались свойством изотропности кристалла. Линейный отклик $\varphi(t-t_1)$ в этом случае определяется согласно формуле (47).

В последующих вычислениях будем пренебрегать вкладом флуктуаций координаты электрона в запаздывание взаимодействия. Полагая в уравнении (63а) множитель $\langle \exp(i\mathbf{k}\,(\mathbf{r}(t)-\mathbf{r}(t_1))\rangle$ равным единице, приближённо получим

$$L(t-t_1)=\frac{1}{3m}\sum_{\mathbf{k}}k^2\left(G(\mathbf{k},t-t_1)+k^2\varphi(t-t_1)M(\mathbf{k},t-t_1)\right). \tag{63б}$$

Применим к (63б) преобразование Фурье и воспользуемся свойством чётности спектральной функции корреляции по частоте. Тогда

$$L(\omega)=\frac{1}{3m}\sum_{\mathbf{k}}k^2\left(G(\mathbf{k},\omega)+k^2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\Omega}{4\pi}\left[\chi(\omega+\Omega)+\chi(\omega-\Omega)\right]M(\mathbf{k},\Omega)\right). \tag{64}$$

Таким образом, в квазиклассическом приближении и при $\langle\exp(i\mathbf{k}\,\Delta\mathbf{r})\rangle\sim 1$ коэффициент фононной силы трения, определяемый согласно (55), имеет вид

$$i\omega\gamma(\omega)=L(\omega)-L(0)=\frac{1}{3m}\sum_{\mathbf{k}}k^2\left(G(\mathbf{k},\omega)-G(\mathbf{k},0)\right)+$$

$$+\frac{1}{3m}\sum_{\mathbf{k}}k^4\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\Omega}{4\pi}M(\mathbf{k},\Omega)\left[\chi(\omega+\Omega)+\chi(\omega-\Omega)-2\chi'(\Omega)\right], \tag{65}$$

где $\chi'=\mathrm{Re}\,\chi$. При вычислении коэффициента трения $\gamma(\omega)$ целесообразно ввести безразмерную переменную

$$\tilde{\chi}(\omega/\omega_{\mathrm{d}})=m\omega_{\mathrm{d}}^2\chi(\omega)$$

и перейти от суммирования к интегрированию по волновому вектору $\mathbf{k}$:

$$\sum_{\mathbf{k}}\to\frac{V}{(2\pi)^3}\int\limits_{|k|\le k_{\mathrm{d}}}\mathrm{d}^3\mathbf{k}\to\frac{N}{k_{\mathrm{d}}^3}\,4\pi\int\limits_0^{k_{\mathrm{d}}}\mathrm{d}k\,k^2.$$

Представляя функцию Грина (42) и спектральную плотность флуктуаций (61) в безразмерных переменных, перепишем уравнение (65) в виде

$$i\omega\gamma(\omega)\,\frac{1}{\omega_{\mathrm{d}}^2}=\tilde{\lambda}^2\int\limits_0^1\mathrm{d}x\left(\frac{x^2}{x^2+x_0^2}\right)^2\left(\frac{x^2}{x^2-(\omega/\omega_{\mathrm{d}}+i\delta)^2}-1\right)+$$

$$+\tilde{\lambda}^2\,\frac{\hbar\omega_{\mathrm{d}}}{mc^2}\int\limits_0^1\mathrm{d}x\left(\frac{x^2}{x^2+x_0^2}\right)^2\frac{x^3}{2}\,\mathrm{cth}\!\left(\frac{\hbar\omega_{\mathrm{d}}}{2T}\,x\right)\frac{1}{2}\left[\tilde{\chi}\!\left(\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{d}}}+x\right)+\tilde{\chi}\!\left(\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{d}}}-x\right)-2\tilde{\chi}'(x)\right], \tag{66}$$

где

$$\tilde{\lambda}^2=\frac{4}{3\pi\varepsilon^2}\left(\frac{e^2}{a}\right)^2\frac{1}{Mc^2}\,\frac{1}{mc^2} \tag{67}$$

— безразмерный коэффициент электрон-фононного взаимодействия, который следует брать из сопоставления теории и эксперимента.

Отметим ещё раз, что принципиальное отличие полученного обобщённого коэффициента фононной силы трения $\gamma(\omega)$ от феноменологического γ_0 заключается в частотной зависимости $\gamma(\omega)$, связанной с учётом запаздывания взаимодействия между электроном и фононным полем.

5. ЧАСТОТНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ КОЭФФИЦИЕНТА ФОНОННОЙ СИЛЫ ТРЕНИЯ

Основной характеристикой электрона как квазичастицы при учёте его взаимодействия с фононным полем в марковском приближении является характерное время релаксации, связанное с γ_0 в уравнении (43). При учёте запаздывания взаимодействия затухание определяется частотной зависимостью эффективного коэффициента трения. Основополагающая формула (66) для коэффициента фононной силы трения позволяет исследовать особенности его зависимости от частоты и температуры. Собственно фононное трение (затухание) определяется действительной частью $\gamma'(\omega)$ коэффициента $\gamma(\omega)$. Имеются два механизма фононной силы трения. Первый обусловлен реакцией фононного поля на движение электрона и непосредственно определяется фононной функцией Грина, а в уравнении (66) — первым слагаемым в правой части.

Рассмотрим вклад $\gamma_0'(\omega)$ первого механизма в $\gamma'(\omega)$. Сила трения, связанная с реакцией фононного поля на электрон, слабо зависит от температуры решётки через дебаевский радиус экранирования. Выделяя мнимую часть уравнения (66), получим

$$\frac{\omega\gamma_0'(\omega)}{\omega_{\rm d}^2} = \tilde{\lambda}^2 \int\limits_0^1 \mathrm{d}x \, \frac{x^6}{(x^2+x_0^2)^2} \, \mathrm{Im} \, \frac{1}{x^2-(\omega/\omega_{\rm d}+i\delta)^2} \; . \qquad (68)$$

Принимая во внимание, что $\mathrm{Im}[1/(x^2-(\omega/\omega_{\rm d}+i\delta)^2)] = \pi\delta(x-\omega/\omega_{\rm d})\,\mathrm{sign}(\omega)/(2x)$, имеем

$$\omega\gamma_0'(\omega)\,\frac{1}{\omega_{\rm d}^2} = \frac{\pi}{2}\,\frac{\omega}{\omega_{\rm d}}\left(\frac{\omega^2}{\omega^2+\omega_0^2}\right)^2 \tilde{\lambda}^2, \qquad (69)$$

где $\omega_0 = x_0\omega_{\rm d}$ — характерная частота. Коэффициент затухания

$$\frac{\gamma_0'(\omega)}{\omega_{\rm d}} = \frac{\pi}{2}\,\tilde{\lambda}^2\left(\frac{\omega^2}{\omega^2+\omega_0^2}\right)^2 \qquad (70)$$

имеет сильно выраженную зависимость от частоты ω и в явном виде не зависит от температуры. На низких частотах ($\omega \ll \omega_0$, где ω_0 определяет характерное время прохождения $r_{\rm d}$) сила трения чрезвычайно мала и пропорциональна ω^5:

$$\frac{\omega\gamma_0'(\omega)}{\omega_{\rm d}} = \frac{\pi}{2}\,\tilde{\lambda}^2\omega\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4. \qquad (71)$$

На частотах, превосходящих ω_0 ($\omega \gg \omega_0$), коэффициент трения стремится к максимальному значению

$$\frac{\gamma_0'}{\omega_{\rm d}} = \frac{\pi}{2}\,\tilde{\lambda}^2, \qquad (72)$$

а сила трения пропорциональна частоте: $i\omega\gamma(\omega) = i\omega\gamma_0$. В силу полученной частотной зависимости $\gamma_0'(\omega)$ (69) дрейфовая скорость в постоянном электрическом поле оказывается равной нулю, т. е. данная составляющая фононной силы трения не определяет дрейфовую скорость электрона (пробной частицы) в однородном постоянном электрическом поле. Поэтому чрезвычайно важно учесть вклад в фононное трение параметрического воздействия на электрон флуктуаций фононного поля, определяемого вторым слагаемым в правой части (66).

Рассмотрим теперь вклад $\gamma_1'(\omega)$ второго механизма в $\gamma'(\omega)$. Согласно (66) наибольший вклад в силу трения дают фононы с большим импульсом ($x \gg x_0$), поэтому выражение для восприимчивости электрона следует взять в следующем виде:

$$\tilde{\chi}(\omega/\omega_{\rm d} + x) = -\,\frac{1}{(\omega/\omega_{\rm d} + x)^2 + i\,(\omega/\omega_{\rm d} + x)\,\gamma_0'/\omega_{\rm d}}\ , \tag{73}$$

или

$$\tilde{\chi}''(\omega/\omega_{\rm d} + x) \approx \frac{\pi}{2}\ \frac{\tilde{\lambda}^2}{x^4}\,(\omega/\omega_{\rm d} + x). \tag{74}$$

При подстановке (74) в (66) получим следующее выражение, учитывающее вклад флуктуаций фононного поля в трение:

$$\frac{\omega\gamma_1'(\omega)}{\omega_{\rm d}^2} = \tilde{\lambda}^2\,\frac{\hbar\omega_{\rm d}}{2mc^2}\ \frac{\omega}{\omega_{\rm d}^2}\,\gamma_0'\int\limits_0^1 {\rm d}x\,\frac{x^3}{(x^2 + x_0^2)^2}\,{\rm cth}\!\left(\frac{\hbar\omega_{\rm d}}{2T}\,x\right). \tag{75}$$

Особый интерес представляет температурная зависимость затухания (или коэффициента фононной силы трения) $\gamma_1(\omega)$, связанная с флуктуациями фононного поля. Мы ограничимся предельными случаями очень низких температур $T \approx 0$ и высоких температур $T \gg \hbar\omega_{\rm d}$.

Рассмотрим сначала случай высоких температур $T \gg \hbar\omega_{\rm d}$, когда возбуждены фононы во всём интервале волновых векторов от 0 до $k_{\rm d}$. Найдём выражение для коэффициента фононной силы трения с учётом флуктуаций фононного поля, воспользовавшись полученной формулой (75) и принимая во внимание, что в данном приближении ${\rm cth}[\hbar\omega_{\rm d}x/(2T)] = 2T/(\hbar\omega_{\rm d}x)$:

$$\gamma_1' = \frac{\tilde{\lambda}^2\pi\gamma_0'}{4mc^2}\ \frac{T}{x_0}\,. \tag{76}$$

Известно, что подвижность электрона определяет его среднюю скорость $\langle \mathbf{V}(\omega)\rangle$. Если кристаллический образец поместить в высокочастотное электрическое поле, то в результате учёта запаздывания взаимодействия между электроном и фононным полем подвижность электрона μ оказывается зависящей от частоты внешнего поля, т. е.

$$\langle \mathbf{V}(\omega)\rangle = \mu(\omega)\mathbf{E}(\omega). \tag{77}$$

В то же время подвижность выражается через восприимчивость электрона следующим образом:

$$\mu = -i\,\omega\chi(\omega). \tag{78}$$

Для случая квазистационарного электрического поля $\langle \mathbf{V}\rangle = \mu\mathbf{E}$. При $\omega \to 0$ в соответствии с (57) получим

$$\mu = 1/(m\gamma_1'), \tag{79}$$

или с учётом (76)

$$\mu = \frac{4c^2\,x_0}{\tilde{\lambda}^2\pi\gamma_0'}\ \frac{1}{T}\,. \tag{80}$$

Анализируя полученный результат, можно видеть, что в случае высоких температур подвижность электрона, взаимодействующего с полем кристаллической решётки, находящейся в квазистационарном электрическом поле, обратно пропорциональна температуре при условии, что радиус дебаевского экранирования не зависит от температуры. Такая температурная зависимость наблюдается в металлах ($x_0 = 1$). Если радиус дебаевского экранирования зависит от температуры как $T^{1/2}$, то подвижность электрона $\mu \sim T^{-3/2}$. Аналогичная зависимость наблюдается в полупроводниках. Температура при этом определяет эффективное число возбуждённых фононов, взаимодействие с которыми приводит к затуханию.

Рассмотрим предел очень низких температур. В этом случае определяющую роль играют нулевые колебания фононного поля, T определяет температуру кристаллической решётки, а «пробный» электрон в зоне проводимости может обладать любой энергией (например, фотоэлектрон). Аналогично предыдущему случаю получим выражение для коэффициента фононной силы трения при $T \to 0$:

$$\gamma_1' = \frac{\tilde{\lambda}^2 \gamma_0'}{2mc^2}\, \hbar\omega_{\mathrm{d}} \ln(x_0^{-1}). \tag{81}$$

Подвижность электрона определяется следующим образом:

$$\mu = \frac{2c^2}{\tilde{\lambda}^2\, \gamma_0' \hbar\omega_{\mathrm{d}}}\, \frac{1}{\ln(x_0^{-1})}\ . \tag{82}$$

Полученный результат наглядно показывает, что электрон-фононное взаимодействие в случае предельно низких температур носит исключительно квантовый характер. Отметим также, что для металлов ($x_0 = 1$) фононная сила трения становится равной нулю.

6. ОСОБЕННОСТИ ПОЛЯРОННОГО ЭФФЕКТА

Взаимодействие электрона проводимости с колебаниями решётки в кристаллах приводит к перенормировке его энергетического спектра — так называемому поляронному эффекту. В теории, развитой С. И. Пекаром [25], поляронный эффект связывается с деформацией структуры решётки. Деформация возникает вследствие взаимодействия электрона с ядрами решётки. Поскольку смещения ядер малы и их испытывает большое число ядер, что характерно для деформации, вызываемой электроном в зоне проводимости, то полная энергия электрона (включая энергию смещений) не зависит от его координаты. Таким образом, электрон в зоне проводимости может двигаться под действием приложенных внешних электромагнитных полей, а поле деформации будет перемещаться вместе с ним. Следовательно, можно рассматривать электрон проводимости вместе с индуцированным им полем деформации как квазичастицу с соответствующими динамическими характеристиками. С. И. Пекар показал, что создание такой квазичастицы не требует преодоления потенциального барьера и поляронное состояние энергетически более выгодно, чем зонное состояние электрона. Таким образом, можно утверждать, что реальными носителями заряда в зоне проводимости являются поляроны.

Из исследований поляронного эффекта методами теории возмущений следует, что при электрон-фононном взаимодействии уровень дна зоны проводимости понижается, и эффективная масса носителя заряда увеличивается. Например, для ионных кристаллов выражение для эффективной массы носителя заряда, полученное методами теории возмущений [26], имеет вид

$$m^* = m\,(1 + \alpha/6),$$

где α — введённый Фрёлихом безразмерный параметр, определяющий силу электрон-фононного взаимодействия. Для большинства ионных кристаллов $\alpha \sim 3{\div}4$.

На настоящий момент отсутствует общая теория поляронного эффекта, построенная без использования теории возмущений. Указанная теория строится на малости константы взаимодействия или малости отклонений ионов из положений равновесия (адиабатическая теория возмущений). Однако взаимодействие электронов с фононами в ионных кристаллах часто не является слабым. В связи с этим представляет интерес развитие методов изучения этого взаимодействия, не опирающихся на теорию возмущений. Построение теории поляронного эффекта предполагает исследование физических процессов, происходящих на малых расстояниях за очень короткие промежутки времени. Следовательно, учёт запаздывания взаимодействия между электроном и полем кристаллической решётки становится существенным фактором. В спектральном представлении эффекты запаздывания взаимодействия находят отражение в частотной зависимости кинетических и динамических коэффициентов (проводимости, удельного сопротивления, эффективной массы). В настоящей работе для исследования поляронного эффекта предлагается использовать методы статистической теории открытых квантовых систем. Применение данных методов позволяет учесть запаздывание взаимодействия между электроном и фононным полем и тем самым определить зависимость эффективной массы полярона от частоты внешнего воздействия. Кроме этого, в работе наряду с деформационным механизмом учтён вклад в поляронный эффект флуктуаций фононного поля, что позволяет исследовать температурную зависимость поляронного эффекта.

Для исследования динамических свойств полярона воспользуемся уравнением движения электрона в поле решётки в общем виде (58). В спектральном представлении это выражение примет вид

$$-\omega^2 r(\omega) - i\omega\gamma(\omega) r(\omega) = f(\omega)/m. \tag{83}$$

Используя определение коэффициента фононной силы трения (55), перепишем (83) в виде

$$-\left(m\omega^2 + mL'(\omega)\right) r(\omega) + imL''(\omega) r(\omega) = f(\omega). \tag{84}$$

Коэффициент фононного трения играет определяющую роль при исследовании динамических и диссипативных характеристик предложенной модели. Мнимая часть $L(\omega)$ согласно общей теории определяет рассеяние энергии электрона на колебаниях решётки, а действительная составляющая определяет дисперсию энергетических уровней и, как следствие, перенормировку массы электрона при электрон-фононном взаимодействии.

Обобщённая масса носителя заряда в соответствии с формулой (84) выражается через действительную часть коэффициента обобщённой силы трения $L(\omega)$ следующим образом:

$$m^*(\omega) = m\,(1 + \tilde{L}'(\omega)/\omega^2), \tag{85}$$

где $\tilde{L}'(\omega) = L'(\omega) - L'(0)$. Таким образом, для определения перенормировки массы электрона необходимо получить явное выражение для действительной части функции $\tilde{L}(\omega)$.

Согласно (66) наибольший вклад в перенормировку массы носителя заряда при его движении в поле кристаллической решётки дают высокочастотные фононы, для которых $x_0 \ll x \ll 1$. При этом условии выражение для обобщённой восприимчивости (57) выглядит следующим образом:

$$\tilde{\chi}(x + \omega/\omega_{\rm d}) \approx -\frac{1}{(x + \omega/\omega_{\rm d})^2}\ . \tag{86}$$

После подстановки (86) в выражение (66) и удержания в $\tilde{L}'(\omega)$ слагаемых, пропорциональных $(\omega/\omega_{\rm d})^2$, получим

$$\frac{\tilde{L}'(\omega)}{\omega_{\rm d}^2} = \tilde{\lambda}^2\,\frac{\omega^2}{\omega_{\rm d}^2}\left(\int\limits_0^1 {\rm d}x\,\frac{x^2}{(x^2+x_0^2)^2} + \frac{\hbar\omega_{\rm d}}{2mc^2}\int\limits_0^1 {\rm d}x\,\frac{x^3}{(x^2+x_0^2)^2}\,{\rm cth}\!\left(\frac{\hbar\omega_{\rm d}}{2T}\,x\right)\right). \tag{87}$$

Температурная зависимость эффективной массы полярона согласно (85) и (87) определяется множителем $\mathrm{cth}[\hbar\omega_{\mathrm{d}}x/(2T)]$, а также возможной зависимостью дебаевского радиуса экранирования от температуры $x_0(T)$. Вычислим (87) при температуре решётки $T=0$:

$$\frac{\tilde{L}'(\omega)}{\omega_{\mathrm{d}}^2}=\tilde{\lambda}^2\,\frac{\omega^2}{\omega_{\mathrm{d}}^2}\left[\frac{\pi}{4x_0}+\frac{\hbar\omega_{\mathrm{d}}}{4mc^2}\left(\ln(1+x_0^{-2})-\frac{1}{1+x_0^2}\right)\right]. \tag{88}$$

Тогда эффективная масса полярона (85) при температурах, близких к нулю, равна

$$m^*=m+m\tilde{\lambda}^2\left[\frac{\pi}{4x_0}+\frac{\hbar\omega_{\mathrm{d}}}{4mc^2}\left(\ln(1+x_0^{-2})-\frac{1}{1+x_0^2}\right)\right]. \tag{89}$$

При высоких температурах $T\gg\hbar\omega_{\mathrm{d}}$ соответственно получим

$$\frac{\tilde{L}'(\omega)}{\omega_{\mathrm{d}}^2}=\tilde{\lambda}^2\,\frac{\omega^2}{\omega_{\mathrm{d}}^2}\,\frac{\pi}{4x_0}\left(1+\frac{T}{mc^2}\right), \tag{90}$$

$$m^*=m+m\tilde{\lambda}^2\,\frac{\pi}{4x_0}\left(1+\frac{T}{mc^2}\right). \tag{91}$$

Следуя общей модели Фрёлиха, можно сказать, что полученное выражение определяет эффективную массу полярона в зоне проводимости в низкочастотном приближении. Температурная зависимость эффективных масс (89) и (91) хорошо согласуется с результатами, полученными для подвижности электрона проводимости (80) и (82). Это ещё раз свидетельствует о том, что процесс диссипации энергии электрона проводимости, определяющий его подвижность, и поляронный эффект имеют единую физическую природу.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Статистическая теория, предложенная в работе для описания электрон-фононного взаимодействия, применима не только в выбранной нами одноэлектронной модели, но и в общем случае, основанном на полевом подходе [5] с учётом ферми-жидкостных эффектов.

Две принципиально важных особенности теории заключаются в одновременном учёте вклада в электронные процессы флуктуаций фононного поля и запаздывания электрон-фононного взаимодействия. Это особенно важно, в частности, в прикладных задачах, связанных с наноэлектроникой.

Использование статистического малого параметра, физически обусловленного слабым ангармонизмом колебаний ядер решётки, при выводе управляющих уравнений позволяет избежать явного учёта малости константы электрон-фононного взаимодействия. Это актуально при изучении такого физического явления, как сверхпроводимость.

В рамках последовательного микроскопического подхода строго определена и исследована важная характеристика электрон-фононного взаимодействия — так называемая функция Грина фононного поля. При этом использована гауссова статистика фононных переменных, что физически оправдано в силу слабого ангармонизма колебаний решётки. В исходном определении функции Грина учтён нелинейный характер взаимодействия электронов по фононным переменным. Это может оказаться важным в последующих исследованиях. Отметим также, что влияние остальных электронов на характеристики квазичастицы-электрона косвенно учтено в функции Грина через дебаевский радиус экранирования.

В предложенной в работе постановке задачи считаются известными характеристики электронов в энергетической зоне при фиксированном положении ядер. Полученная фононная сила трения определяет индивидуальные характеристики квазичастиц-электронов, обусловленные их взаимодействием с фононным полем решётки. Комплексный коэффициент фононного трения, определённый из фононной силы трения в слабом электрическом поле, оказывается зависящим от частоты колебаний и температуры кристаллической решётки. Установлены и определены механизмы частотной и температурной зависимостей эффективного коэффициента фононного трения, связанные как с реакцией фононного поля на движение электрона, так и параметрическим воздействием флуктуаций. Коэффициент фононного трения физически определяет два тесно взаимосвязанных эффекта: действительная часть характеризует собственно затухание квазичастицы, а мнимая — изменение эффективной массы электрона (так называемый поляронный эффект).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Максимов Е. Г., Саврасов Д. Ю., Саврасов С. Ю. // УФН. 1997. Т. 167, № 4. С. 353.
2. Бочков Г. Н., Ефремов Г. Ф. Нелинейные стохастические модели процессов и систем. Горький: Изд-во ГГУ, 1978.
3. Ефремов Г. Ф., Казаков В. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1979. Т. 22. С. 1 236.
4. Ефремов Г. Ф., Смирнов А. Ю. // ЖЭТФ. 1981. Т. 80. С. 1 071.
5. Ефремов Г. Ф. Стохастические уравнения для открытых квантовых систем. Горький: Изд-во ГГУ, 1982.
6. Schwinger J. // J. Math. Phys. 1961. V. 2. P. 407.
7. Швингер Ю. Броуновское движение квантового осциллятора: Сб. статей. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
8. Senitzky R. // Phys. Rev. 1960. V. 119. P. 670.
9. Senitzky R. // Phys. Rev. 1961. V. 124. P. 642.
10. Гантмахер В. Ф., Левинсон И. Б. Рассеяние носителей тока в металлах и полупроводниках. М.: Наука, 1984.
11. Абрикосов А. А. Физика металлов. М.: Наука, 1987.
12. Абрикосов А. А., Горьков Л. П., Дзялошинский И. Е. Методы квантовой теории поля в статистической физике. М.: Физматлит, 1962.
13. Мартин П., Швингер Ю. Теория систем многих частиц: Сб. статей. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
14. Каданов Р., Бейм Г. Квантовая статистическая механика. М.: Мир, 1964.
15. Келдыш Л. В. // ЖЭТФ. 1964. Т. 47. С. 1 315.
16. Ефремов Г. Ф. // ЖЭТФ. 1996. Т. 110. С. 1 629.
17. Ефремов Г. Ф., Шарков В. В. // ЖЭТФ. 2004. Т. 125. С. 195.
18. Efremov G. F., Mourokh L. D., Smirnov A. Yu. // Phys. Lett. A. 1993. V. 175. P. 89.
19. Smirnov A. Yu. // Ann. Phys. 1998. V. 264. P. 1.
20. Smirnov A. Yu. // Phys. Rev. E. 1997. V. 56. P. 1 484.
21. Smirnov A. Yu., Mourokh L. G. // Phys. Lett. A. 1997. V. 231. P. 429.
22. Пуллер В. И., Мурох Л. Г., Хоринг Н. Дж. М., Смирнов А. Ю. // Актуальные проблемы статистической радиофизики (Малаховский сборник). 2002. Т. 1, № 1. С. 63.
23. Ефремов Г. Ф., Мареева О. В., Воробьёв Д. А., Шарков В. В. // Актуальные проблемы статистической радиофизики (Малаховский сборник). 2003. Т. 2. С. 5.
24. Ефремов Г. Ф., Мареева О. В. // Вестник ННГУ. 1999. Т. 1 (20). С. 114.
25. Пекар С. И. Исследования по электронной теории кристаллов. Гостехиздат, 1951.

26. Давыдов А. С. Теория твёрдого тела. М.: Наука, 1976.
27. Абрикосов А. А. Введение в теорию нормальных металлов. М.: Наука, 1972. 288 с.

Поступила в редакцию 10 августа 2003 г.; принята в печать 25 марта 2005 г.

STATISTICAL THEORY OF THE PHONON DRAG FORCE ACTING ON A CONDUCTIVITY ELECTRON

G. F. Efremov, O. V. Mareeva, and D. A. Vorobiev

Within the framework of microscopic fluctuation–dissipation theory, we obtain the stochastic equation describing the Brownian motion of an electron in the phonon field of a crystal lattice. An expression for the Green's function of the phonon field is found in general form and for the case of linear phonon-variable interaction of an electron with a phonon field with allowance for the potential screening of crystal-lattice nuclei. An expression for the phonon drag force acting on a conductivity electron in the lattice field is found and analyzed with allowance for the interaction retardation. Frequency dependence of the coefficient of the phonon drag force acting on a conductivity electron is studied and the contribution of the electron–phonon interaction to the effective mass of a charge carrier is determined.

УДК 621.391.822

ТЕСТИРОВАНИЕ КВАЗИБАЛЛИСТИЧЕСКИХ ПОЛЕВЫХ ТРАНЗИСТОРОВ С ЗАТВОРОМ ШОТТКИ ПО $1/F$-ШУМУ

А. В. Беляков [1], *А. В. Моряшин* [1], *М. Ю. Перов* [1], *А. В. Якимов* [1], *Л. К. Дж. Фандамме* [2]

[1] Нижегородский госуниверситет им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия;
[2] Эйндховенский технологический университет, г. Эйндховен, Нидерланды

Впервые измерены $1/f$-флуктуации напряжения на канале квазибаллистических полевых транзисторов с затвором Шоттки V-образной формы. Наряду с зависимостями, свойственными данному классу приборов, выявлены две новые характеристики, а именно: 1) специфическая токовая зависимость спектра шума, обусловленная появлением тока утечки через буферный слой, и 2) нехарактерная зависимость формы спектра от напряжения на затворе, связанная, как оказалось, с некачественной (либо недостаточной) тренировкой образцов. Полученные результаты показали высокую чувствительность метода шумового анализа к появлению токов утечки и могут быть использованы для неразрушающего контроля качества приборов, направленного на выявление нестабильных образцов.

ВВЕДЕНИЕ

Фликкерные шумы полевых транзисторов изучаются более трёх десятилетий (см., например, [1–4]). В последние годы продолжают активно развиваться исследования, направленные на использование шумового анализа в качестве неразрушающего инструмента по выявлению внутренних дефектов полупроводниковых приборов, которые могут появляться как вследствие возможных недостатков процесса изготовления, так и в результате перестройки внутренней структуры (см., например, [5]).

В настоящей статье представлены результаты применения $1/f$-шумового анализа к только что изготовленным квазибаллистическим полевым транзисторам малой мощности с целью выявления их слабых сторон, недоступных для исследования другими известными методами, и возможных недостатков технологии изготовления.

В работе измерялась зависимость спектра флуктуаций напряжения между стоком и истоком транзистора (напряжения сток—исток) от тока в канале, который варьировался двумя способами. Во-первых, при фиксированном напряжении на затворе изменялось напряжение, прикладываемое к каналу, и, во-вторых, при фиксированном напряжении на канале изменялось напряжение на затворе. Измерения проводились в омической области проводимости канала.

Из полученных данных выводятся и обсуждаются зависимости, по которым удалось выявить образцы с нестабильным барьером Шоттки и обнаружить наличие токов утечки через буферный слой.

1. ИССЛЕДУЕМЫЕ ПРИБОРЫ

Исследовались маломощные транзисторы с V-образным затвором Шоттки [6], основной особенностью которых является существенное уменьшение длины n-канала до размеров удвоенной обеднённой области, создаваемой барьером Шоттки, что, в свою очередь, даёт увеличение максимальной частоты усиления по мощности до 150 ГГц. Эффективная длина затвора равна 25 нм, уровень легирования канала составляет $6 \cdot 10^{17}$ см$^{-3}$, что обеспечивает минимальную длину канала около 100 нм. Толщина канала равна 0,2 мкм. Каждый транзистор представляет собой

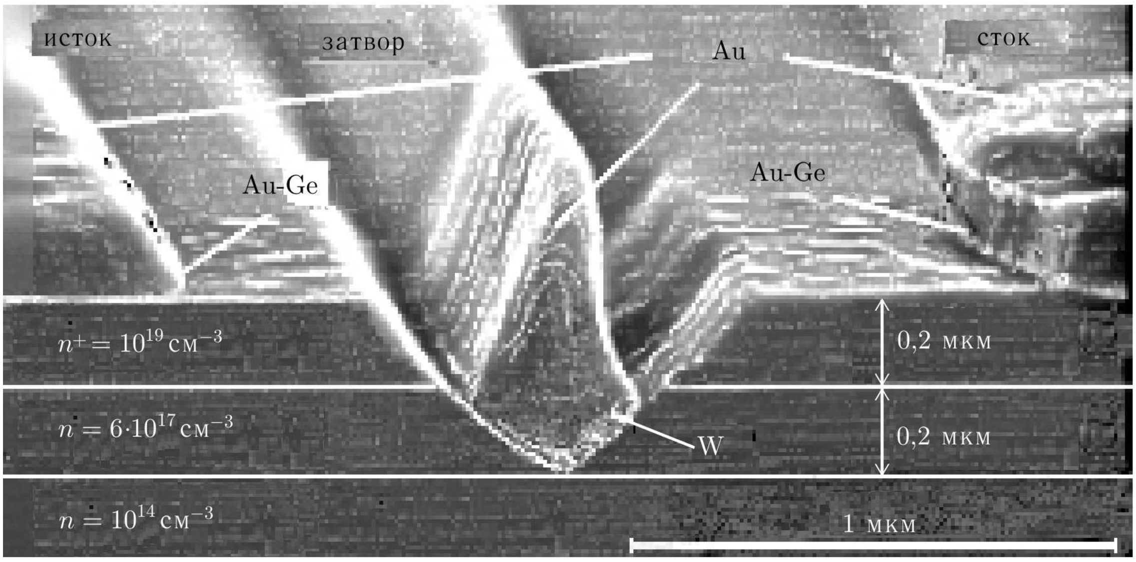

Рис. 1

объединение нескольких эквивалентных секций шириной 25 мкм, соединённых параллельно, так что общая ширина прибора составляет 50 мкм. На рис. 1 в качестве иллюстрации представлен микроснимок поперечного сечения аналогичного транзистора, имеющего в два раза бóльшую длину затвора, сделанный при помощи растрового электронного микроскопа JEOL [7].

2. МЕТОДИКА ОБРАБОТКИ ПОЛУЧЕННЫХ ДАННЫХ

В работе исследовались вольт-амперные характеристики и токовые зависимости спектра флуктуаций напряжения сток—исток. Основные измерения проведены в Эйндховенском технологическом университете (Нидерланды). Шум оцифровывался 24-разрядным аналого-цифровым преобразователем и записывался на жёсткий диск компьютера реализациями по $2 \cdot 10^6$ отсчётов. Анализ записей выполнялся при помощи специально разработанного многофункционального анализатора [8], выполненного в программной среде LabVIEW фирмы «National Instruments», который, в частности, позволяет детально исследовать низкочастотную часть спектра, имеющую фликкерный характер, т. е. вид $S_{\mathrm{v}}(f) = A/f^{\gamma}$.

Дальнейший анализ проводится для спектра S_{v}, измеренного на фиксированной частоте f, и для параметра формы спектра γ.

Типичные вольт-амперные характеристики, измеренные для всего диапазона напряжений сток—исток U_{sd} при нескольких значениях напряжения на затворе [7], представлены на рис. 2. Линия *1* соответствует напряжению на затворе $U_{\mathrm{g}} = -0{,}4$ В, линии *2* и *3* соответствуют $U_{\mathrm{g}} = -0{,}8$ В и $U_{\mathrm{g}} = -1{,}8$ В. Серым цветом выделена омическая область, внутри которой выполнялись измерения шумов. Точки соответствуют результатам измерений.

Вольт-амперные характеристики для этой области, соответствующие напряжению на затворе, изменяющемуся с шагом 0,1 В от нуля до $U_{\mathrm{g}} = -1{,}3$ В, для одного из образцов представлены на рис. 3. По ним определялся диапазон напряжения на затворе и напряжения сток—исток, при которых зависимость тока от напряжения имеет омический характер.

В указанной области параметров канал транзистора моделируется линейным резистором. При этом для качественных образцов параметр формы спектра обычно принимает значения, близкие к единице, а токовая зависимость спектра $1/f$-шума напряжения описывается эмпирической формулой Хоухе [9], т. е. амплитуда спектра пропорциональна квадрату тока.

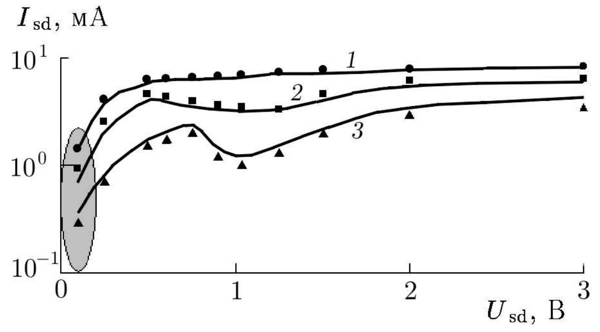

Рис. 2

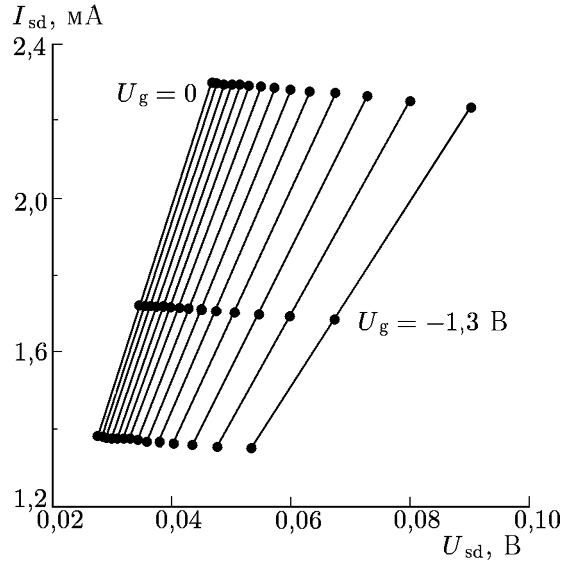

Рис. 3

3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ДАННЫЕ

3.1. Выявление токов утечки через буферный слой

В этой части эксперимента измерялось семейство токовых зависимостей спектра шумового напряжения сток—исток, получаемых при различных значениях напряжения на затворе. Ток задавался напряжением, прикладываемым к каналу. В процессе обработки результатов выяснилось, что квадратичная зависимость спектра шумового напряжения от тока в канале [9] наблюдается не для всех значений U_g. Однако из линейных зависимостей вольт-амперных характеристик должно следовать, что канал транзистора во всех случаях эквивалентен резистору.

На рис. 4 представлены две типичные вольт-амперные характеристики, полученные для диапазона токов $I_{sd} \sim 0{,}4 \div 2$ мА при напряжении на затворе $U_g = -0{,}4$ В (рис. 4*а*) и $U_g = -1{,}8$ В (рис. 4*б*). Сопротивление канала при $U_g = -0{,}4$ В составляет 22 Ом; при $U_g = -1{,}8$ В на первом участке ($I_{sd} \sim 0{,}4 \div 1$ мА) сопротивление канала составляет 300 Ом, а на втором участке ($I_{sd} \sim 1 \div 2$ мА) равно 750 Ом.

Наблюдаемый на рис. 4*б* перегиб объясняется тем [10], что при малых напряжениях сток—исток усреднённая траектория движения носителей заряда проходит в области с малым уровнем легирования (траектория *1* на рис. 5), а при увеличении напряжения U_{sd} получаем траекторию, обозначенную цифрой *2*. Существенное отличие (несколько порядков) концентрации примеси приводит к уменьшению в 1,2÷1,4 раза средней скорости движения носителей заряда в канале, что, в свою очередь, ведёт к росту сопротивления. Вольт-амперная характеристика до и после перегиба имеет линейный вид.

Измеренные токовые зависимости спектра шумового напряжения на частотах 1,5 Гц (вверху) и 150 Гц (внизу) отображены на рис. 6 при $U_g = -0{,}4$ В (рис. 6*а*) и при $U_g = -1{,}8$ В (рис. 6*б*). При $U_g = -0{,}4$ В зависимости описываются степенным законом $S_v(I) \propto I^\chi$ с показателем χ, близким к двум (на частоте 1,5 Гц имеем $\chi = 1{,}6$, на 150 Гц $\chi = 1{,}9$), а поведение спектра в целом может быть описано формулой Хоухе, согласно которой $S_v(I) \propto I^2$.

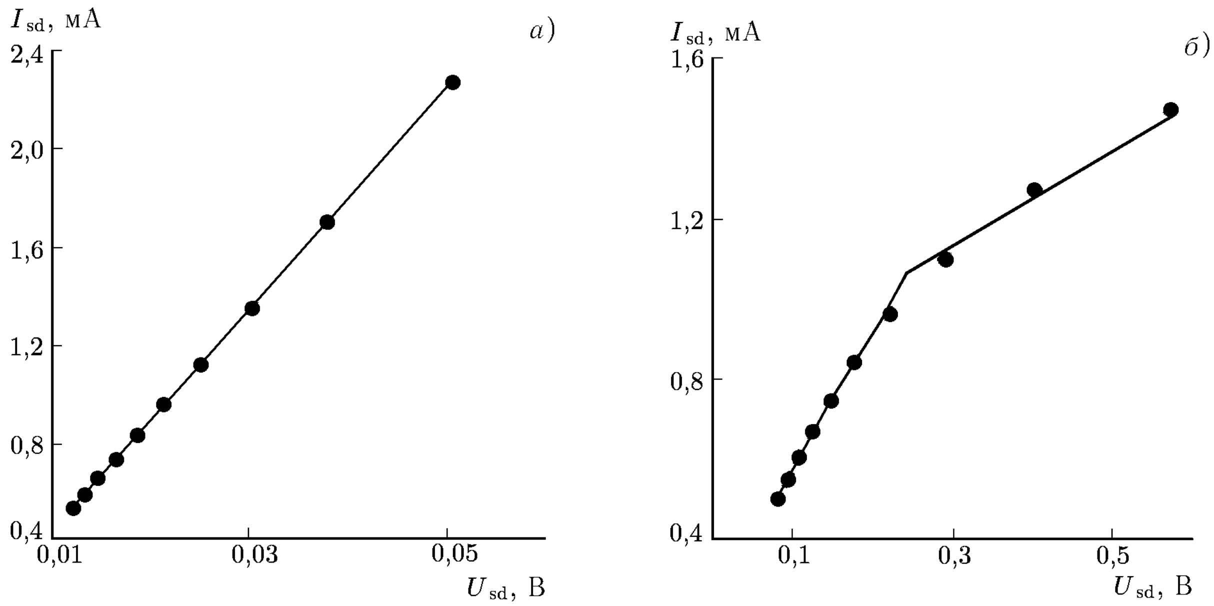

Рис. 4

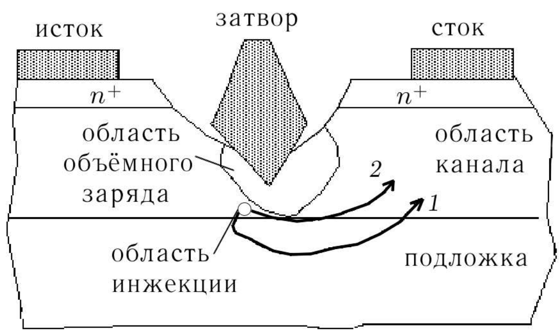

Рис. 5

Специфическая токовая зависимость спектра с показателем степени, близким к пяти, $S_{\rm v}(I) \propto \propto I^5$, была получена при $U_{\rm g} = -1{,}8$ В, когда транзистор практически закрыт (напряжение запирания канала $-1{,}85$ В). Исследование процессов, имеющих место в этом случае, показало [10], что ток прибора определяется утечкой через буферный слой, которая обуславливается вбрасыванием электронов в канал под большими углами к границе раздела канал—буферный слой (рис. 5, линия *1*). Это приводит к увеличению разброса времён пролёта электронов вдоль канала, т. е. увеличивает флуктуации тока стока и, возможно, формирует дополнительный источник шума. Наблюдаемый на вольт-амперной характеристике переход к удвоенному сопротивлению оказал несущественное влияние на токовую зависимость спектра, у которой значение χ уменьшилось с 5÷5,2 до 4,8÷4,9, но по-прежнему осталось близким к пяти.

Таким образом, токовая зависимость спектра шумового напряжения реагирует на появление токов утечки изменением степенного закона с квадратичного на зависимость пятой степени.

3.2. Выявление нестабильных образцов

Под нестабильными образцами подразумеваются транзисторы, для которых процедура стабилизации барьера Шоттки Ti—GaAs либо выполнена некачественно, либо не применялась совсем. Согласно технологии изготовления тренировка проводится после изготовления прибора и направлена на упорядочивание структуры — уменьшение концентрации дефектов в канале, вызванных нанесением металлического слоя на затвор.

Перейдём к рассмотрению данных, на основании которых был выявлен нестабильный прибор.

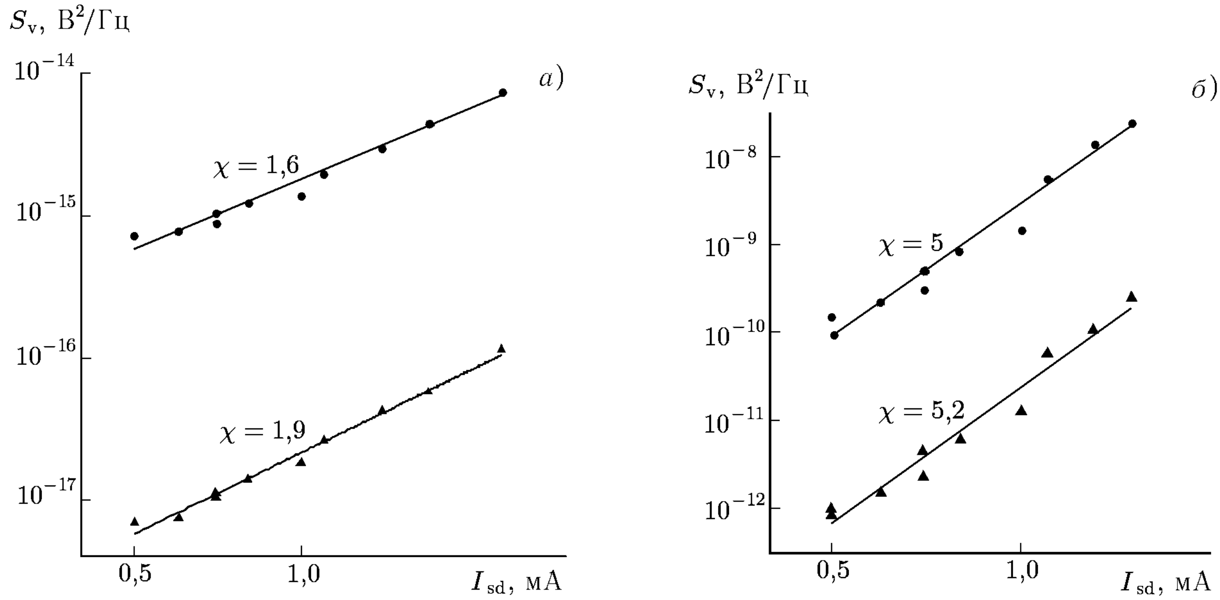

Рис. 6

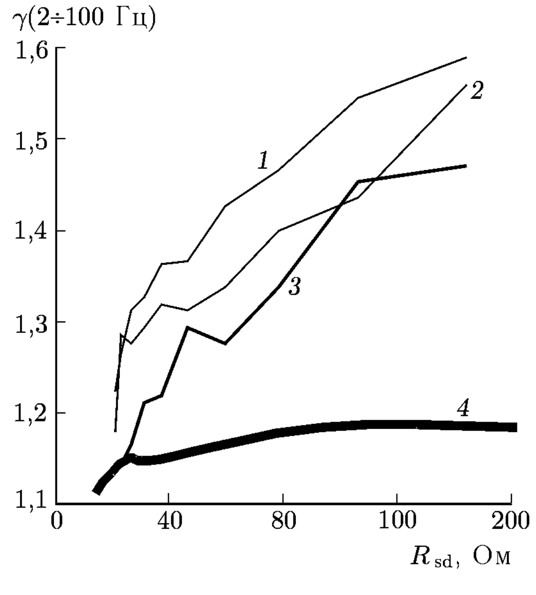

Рис. 7

При анализе зависимости параметра формы спектра, определяемого в диапазоне частот $2\div\div100$ Гц, от напряжения на затворе (или, что то же самое, от сопротивления канала R_{sd}) для одного транзистора получен рост значений γ от 1 до 1,6 (см. рис. 7, линия *1*). Диапазон изменения напряжения на затворе (от 0 до $-1{,}8$ В) эквивалентен изменению сопротивления канала R_{sd} от 16 Ом до 4 кОм. Напомним, что для $1/f$-шума типичной является величина γ, близкая к единице. Подобные зависимости могут быть следствием некачественно проведённого последнего этапа обработки — отжига или, как в данном случае, тренировки.

Для подтверждения предположения о недостаточной тренированности выделенного образца была предпринята попытка его искусственной тренировки, которая заключалась в работе транзистора при повышенном токе через канал в течение нескольких дней. Результаты представлены на рис. 7: линия *2* получена после двух дней работы, а линия *3* ещё через четыре дня. Наблюдаемое уменьшение параметра γ показало тенденцию к стабилизации прибора, что подтвердило наше предположение о его нестабильности. Для сравнения жирной линией *4* изображена усреднённая зависимость, наблюдаемая для нормальных образцов.

Возможность распознавания подобного рода некачественных транзисторов при помощи шумового анализа позволяет применять описанную методику в качестве неразрушающего инструмента для выявления нестабильных приборов.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Впервые исследован спектр $1/f$-шума квазибаллистических транзисторов малой мощности с V-образным затвором Шоттки. Определены зависимости параметра формы спектра и амплитуды спектра на фиксированных частотах от напряжения на затворе и от тока, протекающего в канале, для различных значений напряжения на затворе. Показано, что подобные измерения можно эффективно применять для неразрушающего контроля качества приборов с целью выявления нестабильных образцов и токов утечки через буферный слой при рабочем значении напряжения на затворе.

Авторы благодарны М. А. Китаеву и С. В. Оболенскому за плодотворные дискуссии по теме работы.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 01–02–16666) и Совета при Президенте РФ по поддержке ведущих научных школ (грант № НШ-1729.2003.2), а также программы НАТО «Наука для мира» (проект SfP-973799 Semiconductors).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Карпов Ю. С. // Радиотехника и электроника. 1969. Т. 14, № 4. С. 742.
2. Folkes P. A. // Appl. Phys. Lett. 1986. V. 48. P. 344.
3. Kirton M. J., Uren M. J. // Physics. 1988. V. 38, No. 4. P. 367.
4. Vandamme L. K. J., Xiaosong Li, Rigaud D. // Conference Proceedings 285: Noise in Physical Systems and $1/f$ Fluctuations. St. Louis, 1993. P. 345.
5. Vandamme L. K. J. // IEEE Trans. Electron. Devices. 1994. V. 41, No. 11. P. 2 176.
6. Оболенский С. В., Китаев М. А. // Письма в ЖТФ. 2000. Т. 26, № 10. С. 13.
7. Оболенский С. В., Китаев М. А. // Микроэлектроника. 2001. Т. 30, № 1. С. 10.
8. Андронов А. А., Беляков А. В., Гурьев В. А., Якимов А. В. // Труды 2-го рабочего совещания по проекту НАТО SfP-973799 Semiconductors. Н. Новгород: ТАЛАМ, 2002. С. 38. http://www.rf.unn.ru/NATO/rus/SfP2WS.html.
9. Hooge F. N., Kleinpenning T. G. M., Vandamme L. K. J. // Reports on Progress in Physics. 1981. V. 4, No. 5. P. 479.
10. Оболенский С. В., Китаев М. А. // Микроэлектроника. 2001. Т. 30, № 6. С. 459.

Поступила в редакцию 5 апреля 2004 г.; принята в печать 16 августа 2004 г.

TESTING QUASI-BALLISTIC FIELD-EFFECT TRANSISTORS WITH SCHOTTKY GATE BY $1/f$-NOISE MEASUREMENTS

A. V. Belyakov, A. V. Moryashin, M. Yu. Perov, A. V. Yakimov, and L. K. J. Vandamme

The $1/f$ voltage fluctuations in the channel of quasi-ballistic field-effect transistors (FETs) with V-shaped Schottky gate are measured for the first time. Along with the dependences typical of this class of devices, two new characteristics are revealed, such as (i) specific current dependence of the noise spectrum due to leakage current through the buffer layer and (ii) peculiar dependence of the spectrum shape on the gate voltage. The latter was found to be related to the low-quality (or insufficient) training of samples. The obtained results show that the technique based on the noise analysis is highly sensitive to the occurrence of leakage currents and can be used for nondestructive control of the device quality aimed at revealing unstable samples.