МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Известия высших учебных заведений

РАДИОФИЗИКА

ежемесячный научно-технический журнал

Издаётся с апреля 1958 г.

Том XLVII № 8 **Нижний Новгород** **2004**

Содержание

УДК 621.371

ОБ ОДНОЙ МОДИФИКАЦИИ МЕТОДА МЕРЦАНИЙ

В. А. Алимов, А. В. Рахлин, Ф. И. Выборнов

Решена задача дифракции флуктуирующего излучения на оптически тонком неоднородном слое (фазовом экране) с развитой турбулентной структурой. Показано, что при дифракции излучения с насыщенными флуктуациями и с узкополосным частотным спектром на движущемся слабом турбулентном фазовом экране измеряемый частотный спектр флуктуаций интенсивности в плоскости наблюдения позволяет получить информацию о форме спектра неоднородностей оптически тонкого неоднородного слоя в широком диапазоне размеров, существенно превышающем размер первой зоны Френеля. Модифицированный таким образом традиционный метод мерцаний даёт неискажённую информацию о форме спектра неоднородностей подобно известному фазовому методу диагностики случайно-неоднородных сред. Но в отличие от фазового метода он позволяет получить также данные и о скорости дрейфа неоднородностей в исследуемом неоднородном слое.

1. МЕТОД МЕРЦАНИЙ

Метод амплитудных флуктуаций радиоизлучения при распространении его в случайно-неоднородной среде (метод мерцаний) как метод диагностики неоднородных сред успешно применяется в радиофизических исследованиях в течение многих лет. С его помощью получен целый ряд важных результатов, касающихся неоднородной структуры околоземной и космической плазмы [1, 2]. Фактически метод мерцаний заключается в измерении частотного спектра флуктуаций интенсивности принимаемого радиоизлучения с последующей интерпретацией результатов этих измерений на базе теории распространения радиоволн в случайно-неоднородных средах (см., например, [1–5] и цитированную там литературу). В основе метода лежит расчёт спектра флуктуаций интенсивности радиоволн после дифракции их либо на фазовом экране (в оптически тонком неоднородном слое), либо в оптически однородной среде. Наибольший практический интерес представляет так называемый режим слабых мерцаний излучения в турбулентной среде, когда структурная функция фазовых флуктуаций радиоволн мала на размере первой зоны Френеля, а распространение радиоволн хорошо описывается методом Рытова [1–5].

Основное соотношение для измеряемого частотного спектра флуктуаций интенсивности принимаемого излучения в режиме слабых мерцаний может быть представлено в виде [1–5]

$$S_I(\Omega) \approx \frac{4A}{V} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\kappa_y \, \Phi_N(\boldsymbol{\kappa}_\perp, 0) \sin^2\left(\frac{\kappa_\perp^2 z}{2k}\right)\Bigg|_{\kappa_x=\Omega/V}. \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{V}$ — перпендикулярная лучу зрения компонента скорости дрейфа неоднородностей в слое или поперечная компонента скорости излучателя (приёмника), $\sqrt{z/k}$ — размер первой зоны Френеля, z — расстояние от экрана до плоскости наблюдения, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, λ — длина волны излучения, $\Phi_N(\boldsymbol{\kappa}_\perp, 0)$ — трёхмерный пространственный спектр исследуемой турбулентной среды, $\boldsymbol{\kappa}_\perp = (\kappa_x, \kappa_y)$; в инерционном интервале масштабов неоднородностей $l_\mathrm{m} \le l \le l_0$, где l_0 и l_m — внешний и внутренний масштабы турбулентности соответственно, $\Phi_N(\boldsymbol{\kappa}_\perp, 0)$ описывается, как правило, степенной функцией [1–5]: $\Phi_N(\boldsymbol{\kappa}_\perp, 0) \sim |\boldsymbol{\kappa}_\perp|^{-p}$, где p — показатель трёхмерного пространственного спектра неоднородностей; A — постоянная, которая для плазмоподобных сред определяется плазменной частотой среды ω_0, рабочей частотой зондирующей радиоволны ω, толщиной неоднородного слоя L и скоростью света в вакууме c: $A = \pi\omega_0^4 L/(2\omega^2 c^2)$ (см. [1]).

Из соотношения (1) следует, что измеряемый спектр флуктуаций интенсивности имеет характерный излом на частоте $\Omega_0 \approx V/\sqrt{z/k}$, а наклон высокочастотной части спектра равен $p_1 = p-1$ и, таким образом, характеризует турбулентную структуру среды распространения. Причём на измеряемый спектр, как правило, накладываются так называемые френелевские осцилляции — глубокие квазисинусоидальные флуктуации с периодом по частоте $\Delta\Omega \sim \Omega_0$ (см. (1)).

Итак, измеряемый в рамках метода мерцаний одномерный (частотный) спектр флуктуаций интенсивности принимаемого излучения позволяет, вообще говоря, судить о скорости дрейфа неоднородностей и форме их пространственного спектра лишь на масштабах, не превышающих размер первой зоны Френеля. Это является существенным ограничением метода. Фазовый метод диагностики случайно-неоднородных сред свободен от этого недостатка [1, 2]. Для него измеряемый спектр фазовых флуктуаций принимаемого излучения равен [1, 2]

$$S_\varphi(\Omega) \approx \frac{A}{V} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\kappa_y \, \Phi_N(\kappa_x, \kappa_y, 0)\big|_{\kappa_x = \Omega/V}. \tag{2}$$

Но фазовый метод не всегда может быть применён, в том числе и потому, что требует более сложной когерентной техники измерений и обработки данных [2]. Ниже мы рассмотрим модифицированный метод мерцаний, который позволяет, в известной степени, преодолеть указанные выше трудности традиционного метода мерцаний и расширить его возможности. Но вначале укажем на некоторые ограничения методического характера для метода мерцаний.

2. НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ МЕТОДА МЕРЦАНИЙ

Традиционный метод мерцаний не всегда может быть обоснованно применён для интерпретации результатов измерений амплитудных флуктуаций принимаемого излучения. Как следует из изложенного выше, метод мерцаний предполагает наличие выделенного турбулентного слоя в среде распространения, который просвечивается регулярным излучением от некоторого внешнего источника естественного или искусственного происхождения. Но в ряде случаев задача диагностики среды распространения усложняется, и излучение от источника проходит несколько неоднородных слоёв с выделенными статистическими характеристиками (например, при дифракции излучения от внеземных дискретных источников в межзвёздной и межпланетной плазме, при распространении радиоволн в полярной ионосфере с резко выделенной слоистой неоднородной структурой и т. п.). В этих случаях возникает вопрос: как связан анализируемый частотный спектр амплитудных флуктуаций принимаемого излучения с интересующей нас турбулентной структурой какой-то одной, выделенной области среды распространения? В простейшем случае речь идёт о диагностике турбулентной области при облучении её флуктуирующим излучением, которое возникает после прохождения излучения источника в другой случайно-неоднородной среде, находящейся на луче зрения перед объектом наших исследований.

Такая задача сводится к исследованию дифракции флуктуирующего излучения с заданными статистическими свойствами на неоднородном слое с другими статистическими пространственно-временны́ми характеристиками. Фактически, речь идёт о некотором обобщении традиционного метода мерцаний, которое может быть сделано для различных моделей как падающего флуктуирующего излучения, так и само́й исследуемой неоднородной области. В простейшем случае это дифракция излучения на двух случайно-неоднородных слоях со слабыми фазовыми возмущениями радиоволн в них. Тогда измеряемый спектр флуктуаций интенсивности принимаемого излучения равен сумме парциальных частотных спектров после дифракции регулярного излучения в отдельных слоях [6].

Нами была рассмотрена также задача о дифракции флуктуирующего излучения с заданным частотным спектром на турбулентном фазовом экране в режиме слабых мерцаний. В результате было показано, что в зависимости от пространственно-временны́х свойств падающего флуктуирующего излучения и само́го турбулентного оптически тонкого слоя характеристики исследуемого спектра флуктуаций интенсивности принимаемого излучения, как и ожидалось, могут меняться в широких пределах. При определённых условиях могут воспроизводиться частотно-временны́е характеристики падающего флуктуирующего излучения, а при других — характеристики экрана. Однако, учитывая громоздкость соответствующих расчётов и, вообще говоря, очевидность некоторых результатов, мы не будем приводить их полностью. Остановимся лишь на одном частном случае, представляющем наибольший интерес, — задаче дифракции флуктуирующего излучения с узкополосным частотным спектром на движущемся оптически тонком неоднородном слое (фазовом экране) с развитой турбулентной структурой.

Итак, в отличие от традиционного метода мерцаний, который базируется на решении задачи дифракции регулярного излучения в случайно-неоднородной среде, мы проанализируем амплитудные флуктуации при дифракции флуктуирующего излучения на движущемся слабом турбулентном фазовом экране. Причём конкретные расчёты спектра флуктуаций интенсивности принимаемого излучения будут ограничены случаем, когда флуктуации в падающем излучении насыщенные, а ширина их частотного спектра много меньше соответствующей величины для спектра флуктуаций интенсивности при дифракции регулярного излучения на исследуемом оптически тонком неоднородном слое (фазовом экране). Решение задачи дифракции излучения на фазовом экране, как обычно, будет вестись в малоугловом приближении [1–5].

3. МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД МЕРЦАНИЙ

Рассмотрим следующую модельную задачу. Пусть флуктуирующее излучение, описываемое комплексным полем $E_0(\boldsymbol{\rho}', t)$, где $\boldsymbol{\rho}'$ — пространственная координата, перпендикулярная лучу зрения на источник, падает нормально на оптически тонкий неоднородный слой, вызывающий фазовые флуктуации проходящего излучения $S(\boldsymbol{\rho}', t)$. Тогда для комплексного поля $E(z, \boldsymbol{\rho}, t)$ принимаемого излучения в плоскости, удалённой на расстояние z от экрана, можно записать следующее выражение (ср. [7]) [1]:

$$E(z, \boldsymbol{\rho}, t) = -\frac{ik}{2\pi z} \exp(ikz) \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}'\, E_0(\boldsymbol{\rho}', t) \exp[iS(\boldsymbol{\rho}', t)] \exp\left[\frac{ik\,(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')^2}{2z}\right]. \tag{3}$$

Используя (3), можно получить следующие соотношения для статистических характеристик интенсивности принимаемого излучения (при $\rho \equiv 0$):

$$\overline{I}(t) = \left(\frac{k}{2\pi z}\right)^2 \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_1\, \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_2\, \Gamma_{E_0 E_0^*}(\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2) \exp\left[-\frac{D_S(\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2)}{2}\right] \exp\left[\frac{ik}{2z}\, (\rho_1^2 - \rho_2^2)\right] \equiv 1, \tag{4}$$

[1] Для традиционного метода мерцаний $E_0(\boldsymbol{\rho}', t) \equiv 1$.

$$\overline{I(t)I(t+\tau)} = \left(\frac{\kappa}{2\pi z}\right)^4 \iiiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_1\,\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_2\,\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_3\,\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_4\,\overline{E_0(\boldsymbol{\rho}_1,t)E_0^*(\boldsymbol{\rho}_2,t)E_0(\boldsymbol{\rho}_3,t+\tau)E_0^*(\boldsymbol{\rho}_4,t+\tau)}\times$$
$$\times\exp\biggl[-\frac{1}{2}\,[D_S(\boldsymbol{\rho}_1-\boldsymbol{\rho}_2)+D_S(\boldsymbol{\rho}_3-\boldsymbol{\rho}_4)+D_S(\boldsymbol{\rho}_2-\boldsymbol{\rho}_3-\mathbf{V}\tau)-D_S(\boldsymbol{\rho}_1-\boldsymbol{\rho}_3-\mathbf{V}\tau)+$$
$$+D_S(\boldsymbol{\rho}_1-\boldsymbol{\rho}_4-\mathbf{V}\tau)-D_S(\boldsymbol{\rho}_2-\boldsymbol{\rho}_4-\mathbf{V}\tau)]\biggr]\exp\left[\frac{ik}{2z}\,(\rho_1^2-\rho_2^2+\rho_3^2-\rho_4^2)\right]. \quad (5)$$

В соотношениях (4), (5) учтена статистическая однородность случайных процессов по пространству и времени (стационарность), а также предполагается выполненной гипотеза «вмороженности» для движущихся со скоростью $\mathbf{V}$ неоднородностей фазового экрана [1, 2]. В (4), (5) $\Gamma_{E_0E_0^*}(\boldsymbol{\rho})$ — корреляционная функция флуктуаций комплексного поля падающего излучения, $D_S(\boldsymbol{\rho})$ — структурная функция фазовых флуктуаций на экране [1], звёздочка означает комплексное сопряжение.

Далее мы будем интересоваться частотным спектром принимаемого излучения [1]:

$$S_I(\Omega)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F_I(\tau)\exp(i\Omega\tau)\,\mathrm{d}\tau\equiv\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\overline{I(t)I(t+\tau)}-\bar{I}^2\right]\exp(i\Omega\tau)\,\mathrm{d}\tau. \quad (6)$$

При этом конкретные расчёты спектра $S_I(\Omega)$ будут выполняться для случая, когда ширина частотного спектра падающего излучения $S_{I_0}(\Omega)$ много меньше соответствующей величины $S_{I_\mathrm{s}}(\Omega)$ для спектра флуктуаций интенсивности при дифракции регулярного излучения на фазовом экране. Тогда искомый спектр флуктуаций интенсивности принимаемого излучения будет суммой двух спектров (см. (4)–(6)):

$$S_I(\Omega)\approx S'_{I_0}(\Omega)+S_I^{\text{расс}}(\Omega), \quad (7)$$

где модифицированный спектр падающего флуктуирующего излучения $S'_{I_0}(\Omega)$ имеет вид (ср. [1])

$$S'_{I_0}(\Omega)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F'_I(\tau)\exp(i\Omega\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

где

$$F'_I(\tau)\approx\left(\frac{k}{2\pi z}\right)^4\iiiint\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_1\,\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_2\,\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_3\,\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_4\,\overline{E_0(\boldsymbol{\rho}_1,t)E_0^*(\boldsymbol{\rho}_2,t)E_0(\boldsymbol{\rho}_3,t+\tau)E_0^*(\boldsymbol{\rho}_4,t+\tau)}\times$$
$$\times\left[1-\frac{1}{2}\,[D_S(\boldsymbol{\rho}_1-\boldsymbol{\rho}_2)+D_S(\boldsymbol{\rho}_3-\boldsymbol{\rho}_4)]\right]\exp\left[\frac{ik}{2z}\,(\rho_1^2-\rho_2^2+\rho_3^2-\rho_4^2)\right]-1, \quad (8)$$

а исследуемый спектр рассеянного на фазовом экране флуктуирующего излучения записывается как

$$S_I^{\text{расс}}(\Omega)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\tau\,\exp(i\Omega\tau)\biggl\{\left(\frac{k}{2\pi z}\right)^4A\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\cdots\!\int\mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}_\perp\,\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_1\,\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_2\,\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_3\,\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_4\,\Phi_N(\boldsymbol{\kappa}_\perp,0)\exp(-\boldsymbol{\kappa}_\perp\mathbf{V}\tau)\times$$
$$\times\left\{\exp[i\boldsymbol{\kappa}_\perp(\boldsymbol{\rho}_2-\boldsymbol{\rho}_3)]-\exp[i\boldsymbol{\kappa}_\perp(\boldsymbol{\rho}_1-\boldsymbol{\rho}_3)]+\exp[i\boldsymbol{\kappa}_\perp(\boldsymbol{\rho}_1-\boldsymbol{\rho}_4)]-\exp[i\boldsymbol{\kappa}_\perp(\boldsymbol{\rho}_2-\boldsymbol{\rho}_4)]\right\}\times$$
$$\times\,\overline{E_0(\boldsymbol{\rho}_1)E_0^*(\boldsymbol{\rho}_2)E_0(\boldsymbol{\rho}_3)E_0^*(\boldsymbol{\rho}_4)}\,\exp\left[\frac{ik}{2z}\,(\rho_1^2-\rho_2^2+\rho_3^2-\rho_4^2)\right]\biggr\}. \quad (9)$$

При выводе соотношений (8), (9) предполагалось, что экран вызывает слабые фазовые флуктуации ($D_S(\rho) \ll 1$). Кроме того, было учтено, что для структурной функции фазовых флуктуаций на экране выполнено равенство [1]

$$D_S(\boldsymbol{\rho}) = 2A \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}_\perp \, [1 - \exp(i\boldsymbol{\kappa}_\perp \boldsymbol{\rho})] \, \Phi_N(\boldsymbol{\kappa}_\perp, 0). \tag{10}$$

Дальнейшие вычисления искомого частотного спектра флуктуаций интенсивности для рассеянного на экране излучения проводились в предположении, что в падающем флуктуирующем излучении отсутствует регулярная компонента ($\overline{E}_0 = 0$), а само неоднородное поле $E_0(\boldsymbol{\rho})$ имеет нормальное распределение (так называемый режим насыщенных флуктуаций для падающего излучения), так что для момента четвёртого порядка по полю справедливо известное соотношение [5]

$$\overline{E_0(\boldsymbol{\rho}_1)E_0^*(\boldsymbol{\rho}_2)E_0(\boldsymbol{\rho}_3)E_0^*(\boldsymbol{\rho}_4)} = \Gamma_{E_0E_0^*}(\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2)\Gamma_{E_0E_0^*}(\boldsymbol{\rho}_3 - \boldsymbol{\rho}_4) + \\ + \Gamma_{E_0E_0^*}(\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_4)\Gamma_{E_0E_0^*}(\boldsymbol{\rho}_3 - \boldsymbol{\rho}_2). \tag{11}$$

Подставляя (11) в (9) и проводя необходимые интегральные преобразования, в результате получаем

$$S_I^{\text{расс}}(\Omega) \approx \frac{A}{V} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\kappa_y \, \Phi_N(\kappa_x, \kappa_y, 0) \left\{ 1 + \Gamma^2_{E_0E_0^*}\left(\frac{\kappa_\perp z}{k}\right) \left[1 - 2\cos\left(\frac{\kappa_\perp^2 z}{k}\right)\right]\right\}\Bigg|_{\kappa_x = \Omega/V}. \tag{12}$$

В частном случае, когда функция $\Gamma_{E_0E_0^*}(\boldsymbol{\rho}) = \exp[-\rho^2/(2l_{E_0}^2)]$, где l_{E_0} — характерный пространственный масштаб падающего излучения, соотношение (12) принимает вид

$$S_I^{\text{расс}}(\Omega) \approx \frac{A}{V} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\kappa_y \, \Phi_N(\kappa_x, \kappa_y, 0) \left\{ 1 + \exp\left(-\frac{2\kappa_\perp^2 z^2}{k^2 l_{E_0}^2}\right) \left[1 - 2\cos\left(\frac{\kappa_\perp^2 z}{k}\right)\right]\right\}\Bigg|_{\kappa_x = \Omega/V}. \tag{13}$$

Из соотношений (12), (13) следует, что в предельном случае (при $l_{E_0} \to \infty$) спектр $S_I^{\text{расс}}(\Omega)$ совпадает со спектром флуктуаций интенсивности регулярного излучения (см. (1)). В общем случае соотношение (12) удобно представить в следующем виде:

$$S_I^{\text{расс}}(\Omega) \approx \begin{cases} \dfrac{A}{V} \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\kappa_y \, \Phi_N(\kappa_x, \kappa_y, 0)\Big|_{\kappa_x = \Omega/V}, & \Omega > \Omega_0'; \\ \text{const}, & \Omega \le \Omega_0', \end{cases} \tag{14}$$

где

$$\Omega_0' \equiv V k l_{E_0}/z \tag{15}$$

— характерная частота точки перегиба в спектре флуктуаций интенсивности принимаемого излучения.

Из соотношений (14), (15) следует, что в отличие от частотного спектра флуктуаций интенсивности регулярного излучения на турбулентном фазовом экране (1) (традиционный метод мерцаний), в исследуемом спектре, полученном с помощью модифицированного метода мерцаний, отсутствуют френелевские осцилляции и характерная частота в области перегиба спектра Ω_0'

смещена в область низких спектральных частот относительно частоты Ω_0 (ср. (1) и (15)), если характерный пространственный масштаб падающего излучения l_{E_0} меньше первой зоны Френеля $\sqrt{z/k}$.

Полученный результат станет более понятным, если учесть, что характерная частота флуктуаций интенсивности в исследуемом спектре может быть приближённо определена как отношение скорости V дрейфа дифракционной картины в плоскости наблюдения к радиусу пространственной корреляции $\rho^I_{\text{кор}}$ флуктуаций интенсивности принимаемого излучения.

Функция пространственной корреляции $\Gamma_I^{\text{расс}}(\mathbf{r})$ флуктуаций интенсивности рассеянного на фазовом экране флуктуирующего излучения в нашем случае может быть записана в следующем виде (см. (9), (11)):

$$\Gamma_I^{\text{расс}}(\mathbf{r}) \approx \frac{1}{2}\left(\frac{k}{2\pi z}\right)^4 \iiiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_1\,\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_2\,\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_3\,\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_4 \left[D_S(\boldsymbol{\rho}_1-\boldsymbol{\rho}_3) - D_S(\boldsymbol{\rho}_2-\boldsymbol{\rho}_3) + D_S(\boldsymbol{\rho}_2-\boldsymbol{\rho}_4) - \right.$$
$$\left. -\ D_S(\boldsymbol{\rho}_1-\boldsymbol{\rho}_4)\right] \left[\Gamma_{E_0E_0^*}(\boldsymbol{\rho}_1-\boldsymbol{\rho}_2)\Gamma_{E_0E_0^*}(\boldsymbol{\rho}_3-\boldsymbol{\rho}_4) + \Gamma_{E_0E_0^*}(\boldsymbol{\rho}_1-\boldsymbol{\rho}_4)\Gamma_{E_0E_0^*}(\boldsymbol{\rho}_3-\boldsymbol{\rho}_2)\right] \times$$
$$\times \exp\left[\frac{ik}{2z}\,(\rho_1^2-\rho_2^2+\rho_3^2-\rho_4^2) - \frac{ik}{z}\,(\boldsymbol{\rho}_3-\boldsymbol{\rho}_4)\,\mathbf{r}\right]. \qquad (16)$$

Используя соотношение (10) и проводя необходимые преобразования в (16), находим (при разнесении точек наблюдения $|\mathbf{r}| \gg l_{E_0}$)

$$\Gamma_I^{\text{расс}}(\mathbf{r}) \approx 2A \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\kappa_x\,\mathrm{d}\kappa_y\,\exp(-i\boldsymbol{\kappa}_\perp\mathbf{r})\Phi_N(\kappa_x,\kappa_y,0)\Gamma^2_{E_0E_0^*}\left(\frac{\kappa_\perp z}{k}\right)\sin^2\left(\frac{\kappa_\perp^2 z}{2k}\right). \qquad (17)$$

В частном случае, когда функция $\Gamma_{E_0E_0^*}(\boldsymbol{\rho}) = \exp[-\rho^2/(2l^2_{E_0})]$,

$$\Gamma_I^{\text{расс}}(\mathbf{r}) \approx 2A \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\kappa_x\,\mathrm{d}\kappa_y\,\exp(-i\boldsymbol{\kappa}_\perp\mathbf{r})\Phi_N(\kappa_x,\kappa_y,0)\exp\left(-\frac{\kappa_\perp^2 z^2}{k^2 l^2_{E_0}}\right)\sin^2\left(\frac{\kappa_\perp^2 z}{2k}\right). \qquad (18)$$

Для пространственной корреляции флуктуаций интенсивности за фазовым экраном при дифракции на нём регулярного излучения характерный масштаб $\rho^I_{\text{кор1}}$ равен размеру первой зоны Френеля: $\rho^I_{\text{кор1}} \approx \sqrt{z/k}$ [8]. В интересующем нас случае, когда размер первой зоны Френеля $\sqrt{z/k}$ больше пространственного масштаба l_{E_0} падающего флуктуирующего излучения, интеграл в (18) может быть вычислен приближённо. В частности, для случая степенного спектра $\Phi_N(\boldsymbol{\kappa}_\perp,0) \propto$ $\propto |\boldsymbol{\kappa}_\perp|^{-p}$ с показателем $p = 4$ из соотношения (18) находим, что функция $\Gamma_I^{\text{расс}}(\mathbf{r})$ описывается гауссоидой с характерным масштабом $\rho^I_{\text{кор2}} \approx z/(kl_{E_0})$.

Итак, характерный радиус пространственной корреляции флуктуаций интенсивности в плоскости наблюдения при дифракции флуктуирующего излучения на слабом фазовом экране (при $\sqrt{z/k} \gg l_{E_0}$)

$$\rho^I_{\text{кор2}} \approx z/(kl_{E_0}). \qquad (19)$$

Соответственно, характерная частота осцилляций интенсивности в плоскости наблюдения равна (ср. (15))

$$\Omega_0' \approx V/\rho^I_{\text{кор2}} \approx V\ \frac{kl_{E_0}}{z}\ . \qquad (20)$$

При отсутствии в падающем излучении флуктуаций с учётом [8] имеем

$$\Omega_0 \approx V/\rho^I_{\text{кор1}} \approx V/\sqrt{z/k}. \qquad (21)$$

Таким образом, частота Ω_0' точки перегиба в частотном спектре флуктуаций интенсивности принимаемого излучения будет смещена в область низких частот, поскольку $\Omega_0' = \Omega_0 l_{E_0}/\sqrt{z/k} \ll \ll \Omega_0$ (см. (20), (21) и (15)).

Соотношения (12)–(15) связывают измеряемый в плоскости наблюдения спектр флуктуаций интенсивности $S_I^{\text{расс}}(\Omega)$ с трёхмерным пространственным спектром неоднородностей $\Phi_N(\boldsymbol{\kappa}_\perp, 0)$ на экране. Из них следует, что в нашем случае при облучении фазового экрана флуктуирующим излучением за наблюдаемые слабые амплитудные флуктуации излучения ответственны неоднородности диэлектрической проницаемости в оптически тонком неоднородном слое с размерами вплоть до величины

$$l_{\text{м}} \approx \rho^I_{\text{кор}2} \approx \sqrt{\frac{z}{k}}\ \frac{\sqrt{z/k}}{l_{E_0}} \gg \rho^I_{\text{кор}1} \approx \sqrt{\frac{z}{k}}\ ,$$

которая значительно превосходит френелевский масштаб $\sqrt{z/k}$, определяющий флуктуации интенсивности регулярного излучения за слабым фазовым экраном [1, 2]. Кроме того, поскольку мы здесь рассматриваем режим насыщенных флуктуаций в падающем излучении ($\overline{E}_0 \approx 0$, $l_{E_0} \ll \ll \sqrt{z/k}$), то, естественно, френелевские осцилляции в измеряемом спектре полностью исчезают. Это явление подобно явлению «замывания» регулярной дифракционной картины излучения в пространстве при наличии на антенне интенсивных мелких неоднородностей [5].

Итак, при дифракции на слабом турбулентном фазовом экране насыщенного флуктуирующего излучения измеряемый частотный спектр флуктуаций интенсивности в плоскости наблюдения позволяет получать информацию о форме спектра неоднородностей оптически тонкого неоднородного слоя в широком диапазоне размеров, существенно превышающем размер первой зоны Френеля. Фактически, модифицированный таким образом традиционный метод мерцаний позволяет получать неискажённую информацию о форме спектра неоднородностей исследуемого слоя подобно фазовому методу диагностики случайно-неоднородных сред (ср. (2) и (14), (15)).

В заключение заметим, что если при интерпретации результатов измерений спектра флуктуаций интенсивности принимаемого излучения исходить из традиционного метода мерцаний (см. (1)), а в действительности падающее излучение является флуктуирующим, то возможна ошибка в оценке скорости дрейфа неоднородностей в слое. Поскольку для случая флуктуирующего излучения тогда будет оцениваться эффективное значение скорости $V_{\text{эфф}} = V l_{E_0}/\sqrt{z/k}$, которое может быть заметно меньше истинной скорости V (см. (20), (21)). Соответственно, и оценка индекса мерцаний при этом, как легко показать, равная $S_4^2 = \Gamma_I^{\text{расс}}(0) \approx 0{,}5 D_S(z/(k l_{E_0}))$ при $\sqrt{z/k} \gg l_{E_0}$, может существенно отличаться от оценки индекса мерцаний принимаемого излучения в традиционном методе мерцаний $S_4^2 \approx D_S(\sqrt{z/k})$ (ср. [8]).

Наконец, полученный результат для фазового экрана может быть обобщён на случай толстого плавно-неоднородного слоя подобно тому, как при дифракции регулярного излучения в режиме слабых мерцаний обобщается выражение для частотного спектра в модели фазового экрана (1) на случай протяжённого слоя (см. выражение (14) в [4]). При дифракции насыщенного флуктуирующего излучения соответствующее выражение для частотного спектра флуктуаций интенсивности принимаемого излучения будет иметь следующий вид (ср. (12)):

$$S_I^{\text{расс}}(\Omega) \approx \frac{1}{V} \int\limits_0^L \mathrm{d}z\, A'(z) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\kappa_y\, \Phi_N(\kappa_x, \kappa_y, 0) \left\{ 1 + \Gamma^2_{E_0 E_0^*}\left(\frac{\kappa_\perp z}{k}\right) \left[1 - 2\cos\left(\frac{\kappa_\perp^2 z}{k}\right)\right]\right\}\Bigg|_{\kappa_x = \Omega/V}, \quad (22)$$

где $A'(z) = A(z) L^{-1}$, L — толщина неоднородного слоя. Для статистически однородного толстого слоя соотношение (22) переходит в выражение (14) с заменой в формуле (15) расстояния z от фазового экрана до плоскости наблюдения на толщину L неоднородного слоя.

Работа выполнена в рамках проекта РФФИ № 03–02–17303.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гершман Б. Н., Ерухимов Л. М., Яшин Ю. Я. Волновые явления в ионосфере и космической плазме. М.: Наука, 1984.
2. Яковлев О. И. Космическая радиофизика. М.: Научная книга, 1998.
3. Прохоров А. М., Бункин Ф. В., Гочелашвили К. С., Шишов В. И. // УФН. 1974. Т. 114, № 3. С. 415.
4. Власов В. И., Чашей И. В., Шишов В. И., Шишова Т. В. // Геомагнетизм и аэрономия. 1979. Т. 19, № 3. С. 401.
5. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. Т. 2. М.: Наука, 1978.
6. Алимов В. А., Токарев Ю. В., Бужере Ж.-Л. и др. // Изв. вузов. Радиофизика. 2000. Т. 43, № 9. С. 755.
7. Ерухимов Л. М., Урядов В. П. // Изв. вузов. Радиофизика. 1968. Т. 11, № 12. С. 1852.
8. Gochelashvily K. S., Shishov V. I. // Optica Acta. 1971. V. 18, No. 4. P. 313.

Научно-исследовательский радиофизический институт,
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию
23 сентября 2003 г.

A MODIFICATION OF THE SCINTILLATION METHOD

V. A. Alimov, A. V. Rakhlin, and F. I. Vybornov

We solve the problem of diffraction of fluctuating radiation by an optically thin irregular layer (phase screen) with developed turbulent structure. It is shown that in the case of diffraction of radiation with saturated fluctuations and a narrow-band frequency spectrum by a weakly turbulent moving phase screen, the measured frequency spectrum of intensity fluctuations in the observation plane allows one to obtain information on the form of the spectrum of irregularities of an optically thin irregular layer in a wide size range significantly exceeding the size of the first Fresnel zone. Similarly to the well-known phase method of diagnostics of randomly irregular media, the conventional scintillation method modified in such a way yields undistorted information on the form of the irregularity spectrum. However, in contrast to the phase method, it also allows one to obtain data on the drift velocity of irregularities in the studied irregular layer.

УДК 621.391.81+550.388.8

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОСТИ СИГНАЛА НАКЛОННОГО ЗОНДИРОВАНИЯ ИОНОСФЕРЫ НА СРЕДНЕШИРОТНОЙ КОРОТКОВОЛНОВОЙ РАДИОТРАССЕ

В. В. Бочкарёв, И. Р. Петрова, В. Ю. Теплов

В статье рассматриваются вопросы, связанные с нестационарностью сигнала наклонного зондирования ионосферы. Используются экспериментальные данные, полученные на доплеровском фазоугломерном комплексе Казанского государственного университета. Описывается аппаратура и методы измерений, алгоритмы, с помощью которых проводился анализ экспериментальных данных. Приводятся характерные интервалы когерентности ионосферного сигнала на трассе Москва—Казань в дневное время для различных частот. Анализируются изменения интервала когерентности в течение дня и усреднённые за дневные часы распределения доплеровского сдвига и скорости его дрейфа. С помощью вейвлет-преобразования проанализирован относительный вклад короткопериодических и долгопериодических вариаций в искажения сигнала.

ВВЕДЕНИЕ

Анализ стабильности фазовых характеристик ионосферного сигнала является актуальным для целого ряда практических задач.

Флуктуации фазы являются следствием динамических процессов, поэтому их исследование позволяет сделать выводы о характере и интенсивности движений в ионосфере. Степенью стабильности фазы определяется выбор метода анализа ионосферного сигнала. Например, при использовании оконного преобразования Фурье степень стабильности фазы необходимо учитывать при выборе параметров окна.

Точность и достоверность определения углов в системе разнесённого приёма с малой базой также связана со степенью стабильности фазовых характеристик. В работе [1] представлена зависимость достижимой точности угловых измерений в системе с малой базой от среднеквадратической скорости дрейфа доплеровского сдвига частоты и даны оценки точности для конкретных условий среднеширотной трассы Москва—Казань.

Нестабильность фазовых характеристик является ограничивающим фактором для пропускной способности радиоканала при использовании частотной и фазовой модуляции. Исследования ионосферных каналов радиосвязи в коротковолновом диапазоне обязательны для обеспечения оптимального проектирования цифровых систем передачи данных. Это определяет важность оценок степени стабильности фазовых характеристик при проектировании коротковолновых линий связи.

Несмотря на важность перечисленных проблем, работы, направленные на изучение затронутых вопросов, встречаются редко. Вопросы нестационарности ионосферного сигнала рассматриваются в монографии [2], где перечисляются факторы, ограничивающие применение интерференционных методов радиозондирования ионосферы и разрешающую способность доплеровской фильтрации. По оценкам [2] предельная разрешающая способность ограничена $0{,}01\div0{,}1$ Гц в зависимости от степени возмущения ионосферы и может быть достигнута только в результате итерационного процесса путём поиска оптимального для данной реализации интервала спектрального анализа (т. е. ширины временнóго окна) при времени накопления $30\div100$ с. В работе [3] вводится физически обоснованное определение времени стационарности и приведены оценки интервала стационарности ионосферного сигнала, полученные методами численного моделирования.

Целью настоящей работы является оценка скорости изменения основных статистических характеристик сигнала наклонного зондирования на среднеширотной трассе Москва—Казань. В работе анализируется ряд параметров, характеризующих степень нестационарности ионосферного сигнала. Основу работы составляют экспериментальные данные, полученные на доплеровском фазо-угломерном комплексе Казанского университета.

1. АППАРАТУРА И МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЯ

Измерительный комплекс представляет собой систему пространственно-разнесённого приёма с малой базой [4].

В состав антенно-фидерной системы комплекса входит антенная система из 4-х антенн с вертикальной поляризацией и круговой диаграммой направленности в горизонтальной плоскости типа «вертикальный вибратор», а также антенные усилители, обеспечивающие согласование выходного сопротивления антенн со стандартным кабелем с волновым сопротивлением 75 Ом и коэффициентом бегущей волны порядка 0,97 в диапазоне $1\div30$ МГц. Фидерная система представляет собой отрезки кабеля длиной около 25 м. Длина кабеля в каждом канале подбирается из условия идентичности характеристик фазового пути в каналах с точностью 0,02 %. Выходной конец кабеля подключается к антенному коммутатору, обеспечивающему переключение режимов измерение/калибровка. Для определения углов прихода используются измерения с квадратурным разложением сигнала на низкой частоте, позволяющие определять фазовые и амплитудные характеристики при дальнейшей цифровой спектральной обработке. Антенны расположены на окружности с диаметром 15,6 м. Используемая конфигурация антенной системы обеспечивает однозначное определение разности фаз для сигналов с частотой $1\div25$ МГц и произвольных углов прихода.

Источником калибровочного сигнала является синтезатор частот прямого цифрового синтеза AD9 850, подключённый к измерительному тракту через электронный управляемый аттенюатор. Коэффициент ослабления опорного сигнала устанавливается управляющим контроллером после проведения цикла предварительных измерений уровня входного сигнала перед сеансом калибровки фазовых погрешностей в измерительном тракте.

В качестве приёмников в комплексе используются радиоприёмные устройства Р339 «Катран». Для обеспечения фазовой когерентности каналов приёма один из приёмников выделен в качестве базового, и сигналы его гетеродинов используются в остальных приёмниках. Источником измеряемого сигнала является выход второй промежуточной частоты радиоприёмного устройства (частота 215 кГц, полоса 1 кГц). Далее, перед проведением аналого-цифровой обработки, спектр сигнала подвергается переносу на низкую частоту внешними смесителями. В качестве третьего опорного гетеродина используется генератор AD9 854 с квадратурным выходом и перестраиваемым частотным диапазоном. Сигнал, разложенный в квадратурном базисе, на низкой частоте подвергается аналоговой фильтрации и аналого-цифровой обработке. Низкочастотная фильтрация осуществляется фильтрами Чебышева 6-го порядка.

Управление комплексом осуществляет контроллер внешнего оборудования по командам, получаемым от ПЭВМ. Контроллер выполняет циклы подстройки усиления приёмного тракта, калибровки фазовых характеристик каналов, аналого-цифровое преобразование и осуществляет передачу потока данных управляющему компьютеру комплекса.

Поскольку ионосферный сигнал имеет сложную многолучевую структуру с глубокими интерференционными замираниями, требуется регулярная подстройка усиления приёмного тракта. В связи с этим перед проведением рабочего цикла измерений регулярно проводится предварительный цикл автоматического подбора коэффициента усиления приёмного тракта. В промежутках между циклами измерений проводятся циклы выравнивания усиления приёмных трактов с подключением в систему калибровочного генератора и циклы калибровки межканальных сдвигов фаз, учитываемые при дальнейшей обработке в системе определения углов прихода.

Основу использованных данных составляют измерения сигнала станции точного времени (РВМ), частота излучения которой имеет высокую стабильность. Измерения проводились на частотах 4 996 кГц и 9 996 кГц, для которых на трассе Москва—Казань в дневное время преобладает отражённый сигнал. Также в эксперименте используются сигналы вещательных коротковолновых станций (передатчики в Москве, Санкт-Петербурге, Германии на частотах 6÷10 МГц), что позволяет использовать различные по пространственной ориентации и длине тестовые радиотрассы и расширяет сетку принимаемых частот без затрат на организацию специальных пунктов радиоизлучения. Кроме того, при использовании сигналов вещательных коротковолновых радиостанций удалось реализовать режим непрерывных многочасовых измерений, что позволяет исследовать долгопериодные вариации и суточный ход ионосферных параметров на трассах различного направления. Приводимые далее количественные оценки получены для сигналов станций РВМ (частоты 4 996 и 9 996 кГц) и «Радио России» с частотой 7 440 кГц, расположенных неподалёку от Москвы. Также приводятся оценки параметров сигнала для станции «Радио России» на частоте 9 720 кГц, расположенной севернее Москвы ($60^\circ 33'$ с. ш., $40^\circ 22'$ в. д.). Протяжённость данной трассы составляет 735 км и практически совпадает с протяжённостью трассы Москва—Казань (739 км для станции РВМ).

2. МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ

Полученные данные обрабатывались с помощью оконного преобразования Фурье. Вычислялись спектры перекрывающихся сегментов сигнала, причём временной сдвиг между сегментами выбирался достаточно малым, чтобы изменение доплеровского сдвига заведомо не превышало величины частотного разрешения. Вычисления проводились с помощью алгоритма Кули—Тьюки быстрого преобразования Фурье по основанию 4 с прореживанием по времени. Были использованы различные окна; приводимые ниже результаты получены преимущественно с использованием усечённого окна Гаусса (т. к. данное окно даёт малые фазовые искажения), а также с окном Наттолла.

Для каждого временно́го положения окна определялись максимумы в спектре, превосходящие некоторое пороговое значение. Уровень порога брался в зависимости от отношения сигнал/шум для наибольшего максимума ($-(5\div15)$ дБ). Отслеживая изменение частоты каждого максимума при изменении временно́го положения окна, можно определить количество мод в исследуемом сигнале и временной ход доплеровского сдвига частоты для различных мод. Затем проводился статистический анализ полученных рядов. Поскольку сигнал нестационарен, корреляционные свойства ряда $f(t)$ лучше характеризовать с помощью структурных, а не корреляционных функций. Для характеристики скорости изменения статистик фазы сигнала могут быть использованы такие обобщающие параметры, как интервал стационарности и интервал когерентности.

В [3] было использовано определение интервала стационарности для ионосферного радиоканала как длины выборки, при которой ширина спектра передаточной характеристики канала минимальна. Получаемая таким образом величина, однако, не полностью характеризует устойчивость фазы ионосферного сигнала, т. к. условия распространения могут изменяться с различной скоростью для различных мод. Для характеристики интенсивности фазовых искажений может быть использован также другой параметр — интервал когерентности $\tau_{\text{ког}}$, который можно определить как время, за которое сдвиг фазы отдельной моды сигнала, обусловленный нестационарностью канала, превысит π.

В случае, когда в ионосферном сигнале присутствует одна мода — отражённая составляющая — и доплеровский сдвиг изменяется относительно медленно, полученное таким образом значение будет пропорционально интервалу стационарности сигнала в смысле определения [3]. Действительно, если набег фазы изменяется со временем t по закону

$$\varphi \approx \varphi_0 + \omega t + \beta t^2/2, \tag{1}$$

то среднеквадратичная ширина спектральной линии при использовании гауссова окна равна

$$\sigma_\omega = \sigma_t^{-1} \sqrt{1 + \beta^2 \sigma_t^4}\,, \tag{2}$$

где σ_t — среднеквадратичная ширина временнóго окна, а дополнительный набег фаз на π достигается через интервал времени $\sqrt{\pi/\beta}$. В этом случае оптимальным с точки зрения достижения наибольшего спектрального разрешения (наименьшей средней ширины линии) является окно с полушириной

$$\sigma_t^{\text{опт}} = 1/\sqrt{\beta}\,. \tag{3}$$

При использовании стандартного гауссова окна для оптимальной длины реализации получим

$$\tau_{\text{стац}} = \frac{5}{2\sqrt{\beta}}\,. \tag{4}$$

Таким образом,

$$\tau_{\text{ког}} = \sqrt{\pi}\ \sigma_t^{\text{опт}} = \frac{2\sqrt{\pi}}{5}\ \tau_{\text{стац}}. \tag{5}$$

При использовании рабочей частоты, меньшей максимальной применимой частоты для данной трассы, когда в сигнале преобладает отражённая компонента, изменение набега фазы спектральной составляющей происходит за счёт нестационарности среды распространения, поэтому $\tau_{\text{ког}}$ является хорошей мерой стационарности ионосферного сигнала.

Расчёт интервала когерентности может быть выполнен для отдельной моды по зависимости её доплеровского сдвига от времени. Набег фаз на участке от t_1 до t_2 составляет

$$\Delta\varphi = 2\pi \int\limits_{t_1}^{t_2} [\Delta f(t) - \Delta f(t_1)]\,\mathrm{d}t. \tag{6}$$

Для каждого момента времени t_k можно найти интервал $\tau_{\text{ког}}(t_k)$ как решение уравнения

$$\frac{1}{2} = \int\limits_{t_k}^{t_k+\tau_{\text{ког}}} [\Delta f(t_k + t) - \Delta f(t_k)]\,\mathrm{d}t. \tag{7}$$

Затем усредним найденные значения по времени:

$$\tau_{\text{ког}} = \langle \tau_{\text{ког}}(t) \rangle = \frac{1}{T} \int\limits_0^T \tau_{\text{ког}}(t)\,\mathrm{d}t. \tag{8}$$

Для сигнала в целом (а также для отдельной моды — с целью упрощения вычислений) интервал когерентности может быть оценён по известной структурной функции доплеровского сдвига частоты $D_{\Delta f}$ в предположении, что на малых временах зависимость сдвига частоты от времени представляет собой процесс со стационарными приращениями. По определению структурная функция доплеровского сдвига частоты равна

$$D_{\Delta f}(t, t+\tau) = \langle[\Delta f(t+\tau) - \Delta f(t)]^2\rangle. \tag{9}$$

Для процесса, близкого к процессу со стационарными приращениями, зависимость от t на малых временах несущественна, поэтому можно принять, что $D_{\Delta f}(t, t+\tau) = D_{\Delta f}(\tau)$. Тогда можно получить следующее выражение для среднеквадратичного значения фазовых флуктуаций:

$$\sigma^2_{\Delta\varphi}(t) = 4\pi^2 \int\limits_0^t \tau D_{\Delta f}(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{10}$$

Задавая пороговое значение набега фазы равным π, получаем интервал когерентности как решение уравнения, куда искомый параметр входит как верхний предел интегрирования:

$$\frac{1}{4} = \int\limits_0^{\tau_{\text{ког}}} \tau D_{\Delta f}(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{11}$$

Поскольку в (8) и (11) предполагается различный порядок усреднения, найденные таким образом значения могут различаться, но это различие, как правило, несущественно.

3. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Данные, полученные в результате проведённого анализа представлены в табл. 1.

Таблица 1

Рабочая частота, кГц	Возможный интервал когерентности, с	Средний интервал когерентности, с	Среднеквадратичные отклонения среднесуточных значений, с
4 996	30÷200	56	7
7 440	20÷150	48	4
9 996	15÷90	28	3

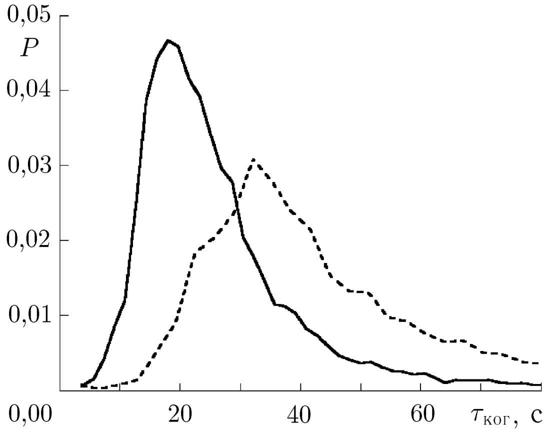

Рис. 1. Плотность распределения вероятности интервала когерентности с усреднением за сутки. Сплошная кривая — данные для частоты 9 720 кГц (данные за 23 декабря 2002 г.), штриховая линия — для частоты 7 440 кГц (26 декабря 2002 г.)

О разбросе и относительной вероятности мгновенных значений интервала когерентности в течение суток можно судить по приведённым на рис. 1 оценкам плотности вероятности P параметра $\tau_{\text{ког}}$ для частот 9 720 и 7 440 кГц. Таким образом, для этого диапа-

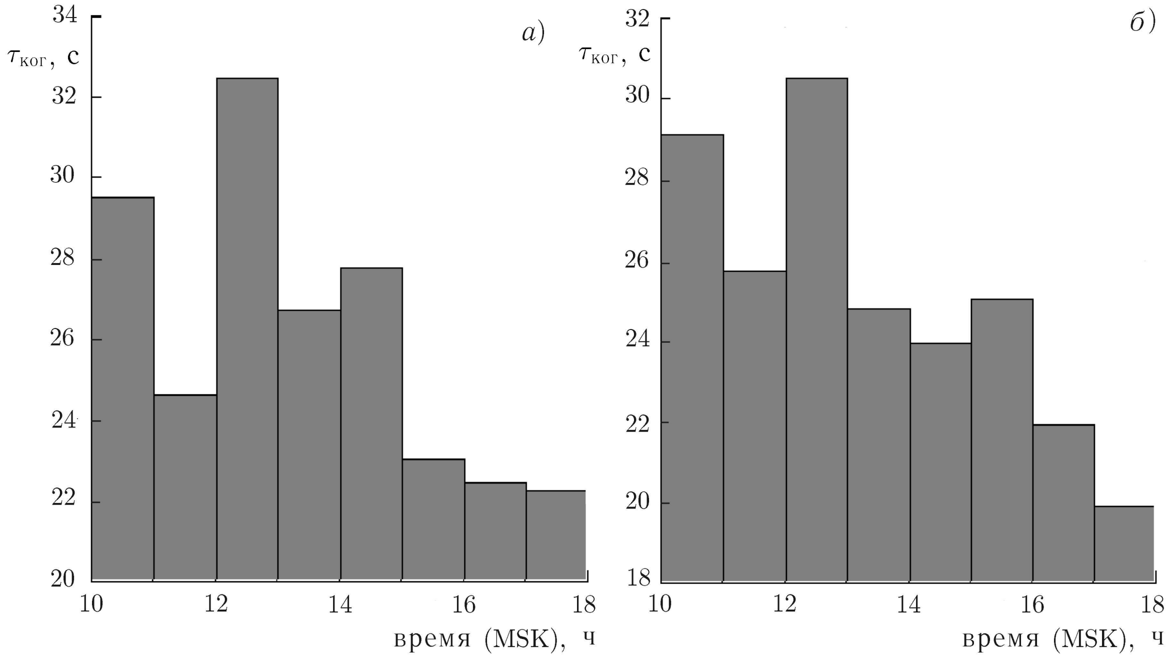

Рис. 2. Изменения интервала когерентности ионосферного сигнала в течение суток 23 декабря (*а*) и 24 декабря (*б*) 2002 г. для моды $1F2$ на частоте 9 720 кГц

зона частот интервал когерентности приблизительно обратно пропорционален частоте (т. к. бо́льшей рабочей частоте соответствуют бо́льшие вариации доплеровского сдвига). Для частоты 9 720 кГц были также выполнены оценки интервала стационарности в соответствии с определением [3]. Среднесуточное значение оптимальной по спектральному разрешению полуширины окна составило $\sigma_t^{\text{опт}} = 18{,}3$ с, соответственно, оптимальное время наблюдения (интервал стационарности) $t_{\text{стац}} = 45{,}8$ с. Сопоставляя эти величины со среднесуточным значением интервала когерентности для тех же условий $\tau_{\text{ког}} = 26{,}8$ с, находим, что их отношение близко к значению, вытекающему из выражения (5).

На рис. 2 приведены примеры изменения интервала когерентности для моды $1F2$ в течение дня. Отдельные «провалы» в дневное время обусловлены, по-видимому, волновыми процессами. Их положение изменяется для различных суток. Уменьшение же значений интервала когерентности к 17 часам, которое можно объяснить переходными процессами, наблюдается регулярно.

В качестве примера на рис. 3 и 4 приводятся распределения доплеровского сдвига и скорости его дрейфа для частоты 9 720 кГц с усреднением за дневные часы. Для сравнения на обоих графиках приведены кривые нормального распределения, соответствующие тем же среднему значению и дисперсии. Как видно, оба распределения существенно отличаются от нормального. Выбросы на первом распределении обуславливаются наличием периодических вариаций доплеровского сдвига и изменяются от суток к суткам. В противоположность рис. 3 распределение на рис. 4 имеет симметричный вид, причём его форма устанавливается при усреднении по интервалу уже порядка 2÷3 часов. Спад распределения на рис. 4 для бо́льших скоростей дрейфа носит экспоненциальный характер.

Однако распределение вероятности доплеровского сдвига само по себе не позволяет характеризовать степень нестационарности ионосферного сигнала, т. к. в нём отсутствует информация о временно́й последовательности значений. Необходимо также иметь информацию об относительном вкладе быстрых (короткопериодических) и медленных (долгопериодических) вариаций в искажения сигнала. Ввиду нестационарности рассматриваемого временно́го ряда наиболее

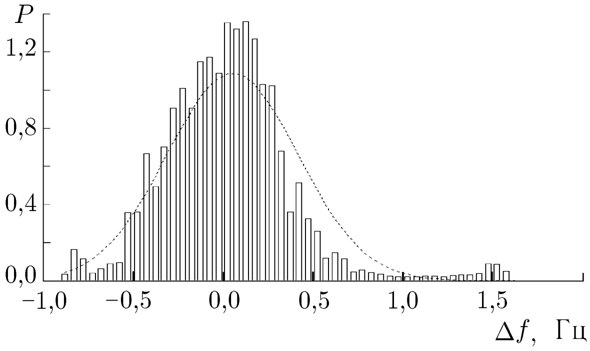

Рис. 3. Плотность распределения вероятности доплеровского сдвига частоты. Частота 9 720 кГц, суточное усреднение

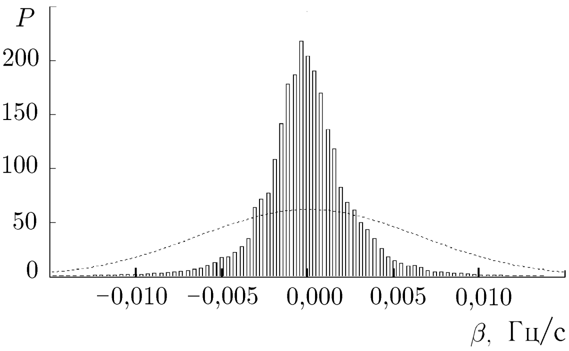

Рис. 4. Плотность распределения вероятности скорости дрейфа доплеровского сдвига частоты. Частота 9 720 кГц, суточное усреднение

корректно анализ вклада и статистических характеристик вариаций различных временны́х масштабов может быть выполнен с помощью вейвлет-преобразования [5]. Коэффициенты вейвлет-преобразования дают информацию о распределении энергии сигнала по времени и частоте, т. е. позволяют определить наличие и оценить интенсивность колебаний с данным периодом в данный момент времени.

Полученные ряды доплеровского сдвига частоты были обработаны методами вейвлет-анализа с использованием дискретных ортогональных вейвлетов, затем анализировались статистические свойства полученных рядов вейвлет-коэффициентов. Были проанализированы выборочные распределения вейвлет-коэффициентов, соответствующих различным временны́м масштабам.

Можно отметить изменение характера распределений для больши́х периодов, начиная от октавы, соответствующей вариациям с характерными временами 5÷10 минут. Распределения короткопериодических вариаций, как правило, симметричны и имеют один максимум, для больши́х периодов распределения асимметричны и имеют сложную структуру с несколькими модами. Другим отличием является степень изменчивости выборочных распределений. Для периодов менее двух минут устойчивая оценка распределения получается уже при усреднении на интервале 1÷1,5 ч; гистограммы для периодов более 5 минут имеют большой разброс от дня ко дню.

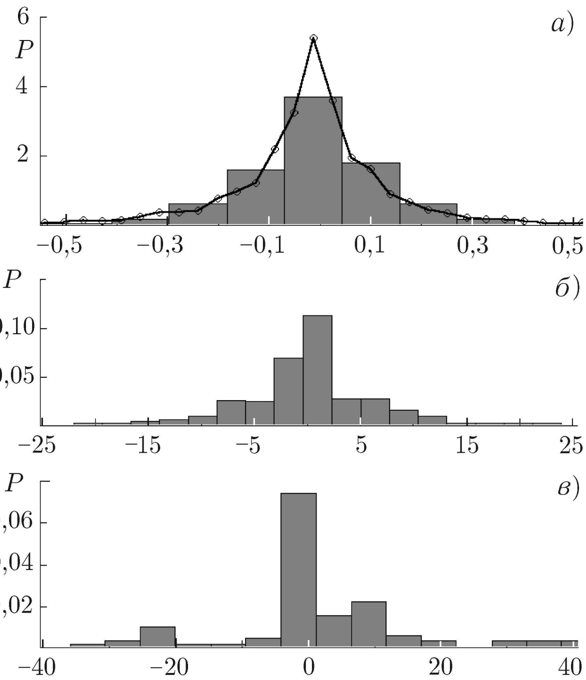

Рис. 5. Изменение характера плотности распределения вероятности вейвлет-коэффициентов ряда $f(t)$ вариаций частоты, соответствующих различным временны́м масштабам: 10÷20 с (*а*), 5,5÷11 мин (*б*) и 11÷22 мин (*в*)

В качестве иллюстрации на рис. 5 приводятся характерные распределения вейвлет-коэффициентов доплеровского сдвига частоты для моды $1F2$ в дневное время, соответствующие вариациям с периодами 10÷20 с (рис. 5*а*), 5,5÷11 мин (рис. 5*б*) и 11÷22 мин (рис. 5*в*). Число вейвлет-коэффициентов, соответствующих некоторому временно́му масштабу, обратно пропорционально этому масштабу. Поэтому для возможности корректного сравнения на рис. 5*а* приводится также кривая, построенная по малому (с длительностью 30 мин) фрагменту анализируемого ряда. При этом объём выборки равен объёму выборки, использованной для построения гистограммы на рис. 5*в*. Отсюда следует, что изменение характера выборочного распределения при увеличении временно́го масштаба нельзя объяснить недостаточностью статистики. Сравнивая кривую и гистограмму, приведённые на рис. 5*а*, можно видеть быструю сходимость выборочного распределения для малых периодов. Для построения данных распределений использовался дискретный вейвлет Мейера, однако качественно результат не изменяется и при использовании других анализирующих функций (вейвлеты Добеши порядка выше 5 и др.).

По-видимому, указанные отличия являются следствием различия физических механизмов, приводящих к формированию короткопериодических и долгопериодических искажений сигнала. Вариации с малыми периодами формируются за счёт движущихся в ионосфере, главным образом в слое E, мелкомасштабных неоднородностей преимущественно турбулентного происхождения. Вариации с большими периодами в значительной степени обусловлены волновыми процессами в ионосфере, в первую очередь прохождением внутренних гравитационных волн. Отдельные вариации, вызванные мелкомасштабными неоднородностями, не поддаются прогнозу, но их средние статистические характеристики достаточно постоянны, хотя и несколько изменяются в течение суток.

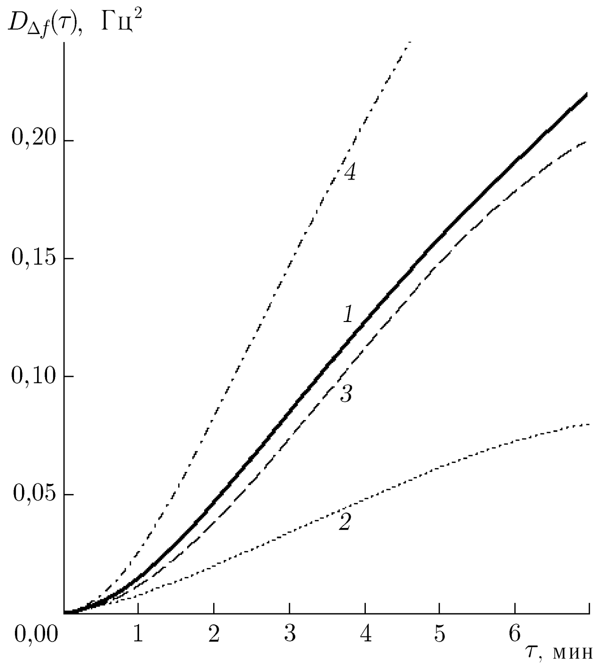

Рис. 6. Характерный вид структурной функции доплеровского сдвига частоты по измерениям для частоты 7 220 кГц (23 декабря 2002 г.): кривая *1* соответствует среднесуточной зависимости, *2* — усреднению за дневные часы, *3* — усреднению за утренние часы, *4* — усреднению за вечерние часы

Распределения для малых периодов в области бо́льших амплитуд вариаций спадают по экспоненциальному закону, как и распределение скоростей дрейфа доплеровского сдвига на рис. 4. По-видимому, распределение скоростей дрейфа доплеровского сдвига в области бо́льших амплитуд формируется в значительной степени за счёт интенсивных вариаций с малыми (до 100 с) периодами.

Поскольку сигнал нестационарен, статистические взаимосвязи изменений частоты в различные моменты времени лучше характеризовать с помощью не корреляционных, а структурных функций. На рис. 6 приводится структурная функция доплеровского сдвига частоты, полученная для доминирующей моды $1F2$ по измерениям на трассе Москва—Казань 23 декабря 2002 г. на частоте 9 720 кГц. Наряду с зависимостью, полученной усреднением за сутки (кривая *1*), приведены зависимости, полученные усреднением за дневные, утренние и вечерние часы (кривые *2*, *3* и *4* соответственно). Более быстрое нарастание структурной функции для утренних и особенно вечерних часов вызвано более интенсивными изменениями параметров ионосферы, что обусловлено переходными процессами. В области бо́льших интервалов времени τ наблюдаются интенсивные, но достаточно регулярные вариации значений $D_{\Delta f}$; по-видимому, они в значительной степени обусловлены крупномасштабными волновыми процессами и регулярными суточными изменениями в ионосфере. Для малых (менее 100 с) интервалов τ вариации не столь значительны и носят хаотический характер.

В соответствии с приведёнными данными для трассы Москва—Казань были определены оптимальные время наблюдения и среднее за сутки спектральное разрешение (полуширина спектральной линии по уровню половинной мощности) при спектральной обработке сигнала наклонного зондирования с окном фиксированной длины. Для определения средней полуширины спектральной линии проводилось усреднение получаемой из соотношения (2) оценки в соответствии с найденным экспериментально распределением скорости дрейфа доплеровского сдвига. Эти данные представлены в табл. 2. При использовании адаптивного окна, когда ширина окна устанавливается в соответствии с результатами обработки предыдущего блока данных, достижимо существенно лучшее спектральное разрешение (см. табл. 2).

Таблица 2

Рабочая частота, кГц	Оптимальное время наблюдения, с	Полуширина спектральной линии при обработке с фиксированным окном, Гц	Полуширина спектральной линии при обработке с адаптивным окном, Гц
4 996	80	0,0066	0,0053
7 440	63	0,0080	0,0064
9 996	48	0,0118	0,0097

Приведённые в табл. 2 результаты указывают предел достижимого (при использовании классических методов спектрального анализа) частотного разрешения, обусловленный нестационарностью параметров ионосферного радиосигнала. Можно видеть, что применение адаптивных методов позволяет улучшить спектральное разрешение на $20\div25$ %.

ВЫВОДЫ

На основе анализа экспериментальных данных получены значения интервала когерентности, структурные функции и распределения вероятности скорости дрейфа доплеровского сдвига частоты.

Из проведённого анализа видно, что достижимые относительные точности оценивания частоты близки во всём проанализированном диапазоне ($5\div10$ МГц) для выбранных условий распространения на односкачковой среднеширотной трассе и составляют порядка 10^{-3} Гц/МГц при использовании фиксированного окна. Оценён оптимальный размер окна для спектрального оценивания сигнала. Определён выигрыш в точности ($20\div25$ %), который можно получить при использовании адаптивных методов на основе классического спектрального анализа.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 01–05–65251 и 03–07–90288).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бочкарёв В. В., Петрова И. Р., Теплов В. Ю. и др. // Труды XX конференции по распространению радиоволн, Нижний Новгород, 2–4 июля 2002. С. 296.
2. Афраймович Э. Л. Интерференционные методы радиозондирования ионосферы. М.: Наука, 1982. 198 с.
3. Барабашов Б. Г., Вертоградов Г. Г. // Регион. 23 конференция по распространению радиоволн, Санкт-Петербург, 28–29 октября, 1997: Тез. докл. С. 30.
4. Бочкарёв В. В., Петрова И. Р., Теплов В. Ю. и др. // Труды XX конференции по распространению радиоволн, Нижний Новгород, 2–4 июля 2002. С. 298.

5. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. Москва, Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2001. 464 с.

Казанский госуниверситет, г. Казань, Россия

Поступила в редакцию
17 июля 2003 г.

EXPERIMENTAL STUDY OF THE NONSTATIONARITY OF AN OBLIQUE IONOSPHERIC SOUNDING SIGNAL ON A MID-LATITUDE HF RADIO PATH

V. V. Bochkarev, I. R. Petrova, and V. Yu. Teplov

We consider issues relating to the nonstationarity of an oblique ionospheric sounding signal. Experimental data obtained with the Doppler goniometric facility of the Kazan State University are used. The equipment, methods of measurement, and the algorithms used for analysis of the experimental data are described. Typical coherence ranges of an ionospheric signal measured in the daytime at different frequencies on the Moscow – Kazan path are presented. Diurnal variations in the coherence range and the daily average distributions of the Doppler shift and its drift velocity are analyzed. The relative contribution of short- and long-period variations to the signal distortions is examined using wavelet transform.

УДК 538.566+621.371

РАССЕЯНИЕ УЗКОГО ИМПУЛЬСНОГО ВОЛНОВОГО ПУЧКА НА СЛУЧАЙНО-НЕРОВНОЙ ЛОКАЛЬНО-ЛАМБЕРТОВСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ В УСЛОВИЯХ СИЛЬНЫХ ЗАТЕНЕНИЙ

М. Л. Белов

В статье рассматривается задача о рассеянии узкого волнового пучка при импульсном облучении в атмосфере случайно-неровной поверхности в случае, когда существенны затенения одних элементов поверхности другими. Получены выражения для средней мощности, регистрируемой приёмником при облучении дельта-импульсом локально-ламбертовской поверхности с гауссовым распределением высот и наклонов. Показано, что затенения и турбулентность атмосферы приводят к существенному искажению принимаемого оптического сигнала. Полученные аналитические выражения для принимаемой мощности хорошо согласуются с результатами численных расчётов.

Задача о рассеянии узкого импульсного волнового пучка на случайно-неровной поверхности в условиях сильных затенений рассматривалась в работе [1] для локально-зеркальной поверхности. Ниже для бистатической схемы (когда источник и приёмник в общем случае разнесены в пространстве) в случае, когда существенны затенения одних элементов поверхности другими, исследуется средняя мощность, регистрируемая приёмником при импульсном облучении случайно-неровной локально-ламбертовской поверхности, и проводится сравнение полученных результатов с численными расчётами.

Пусть случайно-неровная (в среднем плоская) поверхность S облучается в атмосфере узким волновым пучком. Схема зондирования и описывающие её геометрические параметры показаны на рис. 1. Здесь И — источник, П — приёмник, $\theta_{\text{и}}$ и $\theta_{\text{п}}$ — углы между оптическими осями источника и приёмника и нормалью к плоскости $z = 0$, $L_{\text{и}}$ и $L_{\text{п}}$ — расстояния от источника и приёмника соответственно до центров освещённого пятна источника и поля зрения приёмника на поверхности S_0 (проекции S на плоскость $z = 0$); $\mathbf{r}_{\text{и}}$, $\mathbf{r}_{\text{п}}$ — векторы, определяющие положение источника и приёмника в пространстве (считаем, что размеры источника и приёмника малы по сравнению с размерами освещённого пятна), $\alpha_{\text{и}}$ и $\alpha_{\text{п}}$ — углы расходимости излучения источника и поля зрения приёмника, $\mathbf{n}$ и ζ — единичный вектор нормали и высота (относительно поверхности S_0) некоторой точки поверхности S.

Будем считать, что крупномасштабная поверхность S имеет микроструктуру (микрошероховатости, неоднородности и т. п.), так что достаточно малые (но много бóльшие длины волны λ) локально плоские участки поверхности S характеризуются известной индикатрисой отражения. Считаем также, что среда плавно неоднородная (её свойства мало меняются на длине волны λ). В такой постановке задача о рассеянии узкого волнового пучка на случайно-неровной поверхности рассматривалась в [1] в приближении Кирхгофа (при учёте только однократно рассеянного на поверхности S поля). Выражение для мощности $P(t)$ принимаемого излучения при импульсном облучении случайно-неровной поверхности узким волновым пучком, полученное в [1] на основе работ [2, 3] с использованием теоремы взаимности и понятия «фиктивного» источника с параметрами приёмника, имеет вид (при усреднении по ансамблю флуктуаций среды считалось, что падающее на поверхность и отражённое в сторону приёмника излучение проходит по разным неоднородностям среды и пренебрегалось временнóй деформацией импульса при распространении в среде):

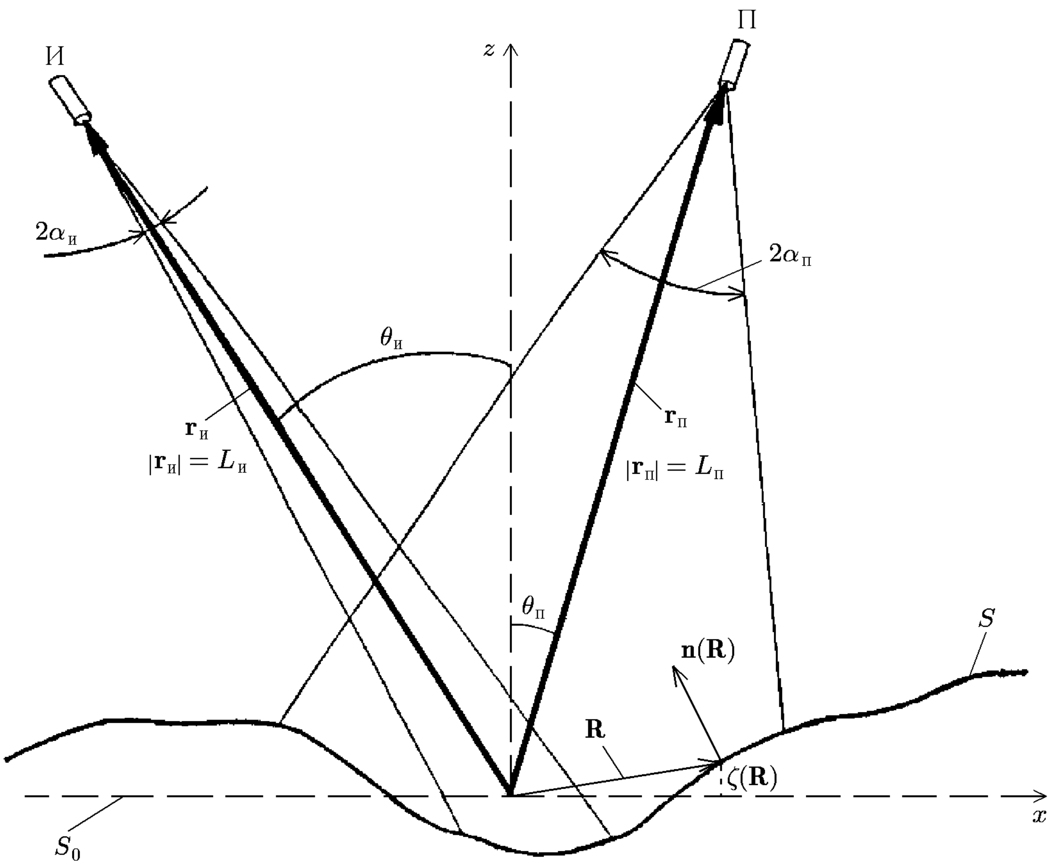

Рис. 1. Схема зондирования

$$P(t) \approx \frac{1}{(4\pi)^2} \iint\limits_S \langle u_{\text{отр}}(\mathbf{R}+\boldsymbol{\rho}/2) u^*_{\text{отр}}(\mathbf{R}-\boldsymbol{\rho}/2)\rangle \, \langle u_{\text{п}}(\mathbf{R}+\boldsymbol{\rho}/2) u^*_{\text{п}}(\mathbf{R}-\boldsymbol{\rho}/2)\rangle \times$$
$$\times\, \eta(\theta_{\text{и}}, \mathbf{R}+\boldsymbol{\rho}/2)\eta(\theta_{\text{и}}, \mathbf{R}-\boldsymbol{\rho}/2)\eta(\theta_{\text{п}}, \mathbf{R}+\boldsymbol{\rho}/2)\eta(\theta_{\text{п}}, \mathbf{R}-\boldsymbol{\rho}/2)\,(\mathbf{n}(\mathbf{R}+\boldsymbol{\rho}/2)\tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{R}+\boldsymbol{\rho}/2))\times$$
$$\times\,(\mathbf{n}(\mathbf{R}-\boldsymbol{\rho}/2)\tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{R}-\boldsymbol{\rho}/2)) f\left(t - \frac{|\mathbf{r}_{\text{и}} - (\mathbf{R}+\boldsymbol{\rho}/2)| + |\mathbf{r}_{\text{п}} - (\mathbf{R}+\boldsymbol{\rho}/2)|}{c}\right) \times$$
$$\times\, f\left(t - \frac{|\mathbf{r}_{\text{и}} - (\mathbf{R}-\boldsymbol{\rho}/2)| + |\mathbf{r}_{\text{п}} - (\mathbf{R}-\boldsymbol{\rho}/2)|}{c}\right) \mathrm{d}\mathbf{R}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}, \quad (1)$$

где $\tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{r}) = -k\,\nabla(|\mathbf{r}_{\text{и}} - \mathbf{r}| + |\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\text{п}}|)$, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, c — скорость света, $\mathbf{n}(\mathbf{r}) = (n_x, n_y, n_z)$ — единичный вектор нормали к поверхности S в точке $\mathbf{r}$, $\mathbf{R}$, $\boldsymbol{\rho}$ и $\mathbf{r}$ — векторы, определяющие положение точек на поверхности S, $f(t)$ — форма импульса источника, $\langle u_{\text{отр}}(\mathbf{r}) u^*_{\text{отр}}(\mathbf{r}')\rangle$ — функция когерентности отражённого излучения на поверхности S (излучения, прошедшего в среде трассу источник—поверхность и отражённого от поверхности). Угловые скобки означают усреднение по ансамблю флуктуаций среды, $u_{\text{отр}}(\mathbf{r})$ — отражённое (от поверхности S) поле, $\langle u_{\text{п}}(\mathbf{r}) u^*_{\text{п}}(\mathbf{r}')\rangle$ — функция когерентности излучения «фиктивного» источника (с параметрами приёмника) [3], $\eta(\theta_{\text{и}}, \mathbf{r})$ и $\eta(\theta_{\text{п}}, \mathbf{r})$ — ступенчатые функции, определяемые следующим образом [2]: $\eta(\theta_{\text{и}}, \mathbf{r}) = 1$, если точка $\mathbf{r}$ поверхности S освещена падающим под углом $\theta_{\text{и}}$ (от источника) излучением, $\eta(\theta_{\text{п}}, \mathbf{r}) = 1$, если точка $\mathbf{r}$ наблюдается под углом $\theta_{\text{п}}$ (со стороны приёмника). В противном случае $\eta(\theta_{\text{и}}, \mathbf{r}) = \eta(\theta_{\text{п}}, \mathbf{r}) = 0$.

В формулу (1) входит $\langle u_{\text{отр}}(\mathbf{r})u^*_{\text{отр}}(\mathbf{r}')\rangle$ — функция когерентности отражённого излучения на поверхности S. Основной используемой на практике характеристикой отражающих свойств поверхности является индикатриса отражения, которая определяется как отношение яркости исследуемой поверхности в данном направлении к яркости идеального рассеивателя.

Фундаментальная связь между фотометрическими характеристиками поля излучения и его статистической структурой подробно исследована (см., например, [4, 5]). Показано, что пространственная функция когерентности $\Gamma(\mathbf{R},\boldsymbol{\rho})$ связана с яркостью излучения $L(\mathbf{R},\mathbf{n})$ следующим соотношением:

$$\Gamma(\mathbf{R},\boldsymbol{\rho}) = \oint L(\mathbf{R},\mathbf{n})\exp(ik\mathbf{n}\boldsymbol{\rho})\,\mathrm{d}\Omega(\mathbf{n}). \tag{2}$$

Здесь интегрирование ведётся по сфере единичного радиуса, $\mathbf{R} = (\mathbf{r}+\mathbf{r}')/2$, $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}-\mathbf{r}'$; $\mathbf{n}$ — единичный вектор, показывающий направление наблюдения, $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$ — координаты точек, для которых измеряется пространственная функция когерентности.

Соотношение (2) позволяет связать вид функции когерентности отражённого излучения с яркостью отражённого излучения на поверхности S. Яркость $L_{\text{отр}}(\mathbf{R},\mathbf{m})$ отражённого излучения для ламбертовской поверхности не зависит от направления наблюдения [3, 6]:

$$L_{\text{отр}}(\mathbf{R},\mathbf{m}) = AE_{\text{и}}(\mathbf{R})/\pi, \tag{3}$$

где A — коэффициент отражения, $E_{\text{и}}(\mathbf{R})$ — освещённость элементарной рассеивающей площадки, создаваемая излучением, падающим на поверхность от источника.

Подставляя (3) в формулу (2), получим следующее выражение для функции когерентности $\Gamma_{\text{отр}}(\mathbf{R},\boldsymbol{\rho})$ отражённого локальным участком крупномасштабной локально-ламбертовской поверхности S излучения:

$$\Gamma_{\text{отр}}(\mathbf{R},\boldsymbol{\rho}) = AE_{\text{и}}(\mathbf{R})\,\frac{2\sin(k\rho)}{k\rho}\ . \tag{4}$$

Полученное выражение для $\Gamma_{\text{отр}}(\mathbf{R},\boldsymbol{\rho})$ согласуется с формулами, приведёнными в работах [6, 7].

Подставим (4) в (1) и выполним интегрирование по $\boldsymbol{\rho}$, переходя аналогично [2] от интегрирования по неровной поверхности S к интегрированию по поверхности S_0 (проекции S на плоскость $z=0$), с учётом того, что $\eta^2(\theta,\mathbf{r}) = \eta(\theta,\mathbf{r})$. После ряда преобразований, считая, что угол расходимости излучения источника и угловое поле зрения приёмника малы: $\alpha_{\text{и}} \ll 1$ и $\alpha_{\text{п}} \ll 1$, а оптические оси источника и приёмника лежат в плоскости xz (см. рис. 1), из (1) получаем

$$P(t) = \frac{A}{\pi}\int\limits_{S_0}\frac{\mathrm{d}\mathbf{R}_0}{n_z}\,E_{\text{и}}(\mathbf{R}'_{0\zeta})E_{\text{п}}(\mathbf{R}''_{0\zeta})\eta(\theta_{\text{и}},\mathbf{R})\eta(\theta_{\text{п}},\mathbf{R})f^2\left(t-\frac{|\mathbf{r}_{\text{и}}-\mathbf{R}|+|\mathbf{r}_{\text{п}}-\mathbf{R}|}{c}\right), \tag{5}$$

где $\mathbf{R}'_{0\zeta} = (R_{0x}\cos\theta_{\text{и}} - \zeta(\mathbf{R})\sin\theta_{\text{и}}, R_{0y})$, $\mathbf{R}''_{0\zeta} = (R_{0x}\cos\theta_{\text{п}} - \zeta(\mathbf{R})\sin\theta_{\text{п}}, R_{0y})$, $\mathbf{R}_0 = (R_{0x},R_{0y})$ — вектор в плоскости $z=0$; $E_{\text{и}}(\mathbf{R})$ и $E_{\text{п}}(\mathbf{R})$ — освещённости, создаваемые на элементе поверхности S излучением, падающим от действительного и «фиктивного» источников, $\theta_{\text{и}}$ и $\theta_{\text{п}}$ — углы между нормалью к плоскости $z=0$ и оптическими осями источника и приёмника соответственно, $\zeta(\mathbf{R})$ — высота неровной поверхности S в точке $\mathbf{R}$.

Когда расстояния от источника ($L_{\text{и}}$) и приёмника ($L_{\text{п}}$) до центра освещённого источником пятна на поверхности S_0 много больше размеров этого пятна, для функции $f^2[t-(|\mathbf{r}_{\text{и}}-\mathbf{R}|+|\mathbf{r}_{\text{п}}-\mathbf{R}|)/c]$ при наклонном облучении поверхности можно использовать следующее приближённое выражение:

$$f^2\left(t-\frac{|\mathbf{r}_{\text{и}}-\mathbf{R}|+|\mathbf{r}_{\text{п}}-\mathbf{R}|}{c}\right) \approx f^2\left(t-\frac{L_{\text{и}}+L_{\text{п}}}{c}+\frac{R_{0x}\,(\sin\theta_{\text{и}}+\sin\theta_{\text{п}})}{c}+\frac{\zeta\,(\cos\theta_{\text{и}}+\cos\theta_{\text{п}})}{c}\right). \tag{6}$$

Считая распределение высот и наклонов поверхности S гауссовым и проводя в (5) усреднение по ансамблю неровных поверхностей по методике [2], можно найти выражение для средней мощности $\bar{P}(t)$, регистрируемой приёмником при сильных затенениях одних элементов поверхности другими:

$$\bar{P}(t) \approx \frac{A}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} W(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} W(\zeta,\boldsymbol{\gamma};\theta_{\text{и}},\theta_{\text{п}})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\gamma} \int\limits_{S_0} \frac{\mathrm{d}\mathbf{R}_0}{n_z}\, E_{\text{и}}(\mathbf{R}'_{0\zeta}) \times$$
$$\times\, E_{\text{п}}(\mathbf{R}''_{0\zeta}) f^2\!\left(t' + \frac{R_{0x}\,(\sin\theta_{\text{и}} + \sin\theta_{\text{п}})}{c} + \frac{\zeta\,(\cos\theta_{\text{и}} + \cos\theta_{\text{п}})}{c}\right), \quad (7)$$

где $t' = t - (L_{\text{и}} + L_{\text{п}})/c$; если источник и приёмник находятся по одну сторону от нормали к поверхности S_0, то

$$W(\zeta,\boldsymbol{\gamma};\theta_{\text{и}},\theta_{\text{п}}) = \Theta(\operatorname{ctg}\theta - \gamma_x) W(\boldsymbol{\gamma}) \exp\!\left(-\Lambda \int_{\zeta}^{\infty} W(\zeta')\,\mathrm{d}\zeta'\right), \qquad \Lambda = \operatorname{tg}\theta \int\limits_{\operatorname{ctg}\theta}^{\infty} (\gamma'_x - \operatorname{ctg}\theta)\, W(\gamma'_x)\,\mathrm{d}\gamma'_x,$$

$\theta = \max(\theta_{\text{и}},\theta_{\text{п}})$, $W(\zeta)$, $W(\boldsymbol{\gamma}) = W(\gamma_x,\gamma_y)$ — плотности вероятности распределения высот и наклонов случайно-неровной поверхности S,

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

Λ — параметр, характеризующий степень затенений. Для сильных затенений ($\Lambda \gg 1$)

$$\Lambda \approx \frac{(\overline{\gamma_x^2})^{1/2}}{\sqrt{2\pi}\,\operatorname{ctg}\theta}\ ,$$

$\overline{\gamma_x^2}$ — дисперсия наклонов случайно-неровной поверхности S вдоль оси x.

Аналитические выражения для $\bar{P}(t)$ при рассеянии узкого волнового пучка на случайно-неровной локально-ламбертовской поверхности в условиях сильных затенений удаётся получить при облучении поверхности дельта-импульсом в следующих двух предельных случаях (когда источник и приёмник находятся по одну сторону от нормали).

1. Размеры освещённого источником пятна и сектора наблюдения приёмника на поверхности S_0 много больше высоты неровностей ($\sigma^{-2} \gg C_{\text{и,п}}\,(K\cos\theta_{\text{и,п}} + \sin\theta_{\text{и,п}})^2$):

$$\bar{P}(t) \approx \frac{A\omega\,\sqrt{\pi}\;a_{\text{и}}a_{\text{п}}}{\pi(\bar{C}_{\text{и}} + \bar{C}_{\text{п}})^{1/2}\,\bar{L}_{\text{и}}^2\bar{L}_{\text{п}}^2}\;\frac{c}{q_x}\;\frac{1-\exp(-\Lambda)}{\Lambda}\,G(t'), \quad (8)$$

где

$$G(t') =$$
$$= \exp\!\Big\{-\bar{C}_{\text{и}}\,[\zeta_m\,(K\cos\theta_{\text{и}} + \sin\theta_{\text{и}}) + (ct'\cos\theta_{\text{и}})/q_x]^2 - \bar{C}_{\text{п}}\,[\zeta_m\,(K\cos\theta_{\text{п}} + \sin\theta_{\text{п}}) + (ct'\cos\theta_{\text{п}})/q_x]^2\Big\},$$

$$\bar{L}_{\text{и}} \approx L_{\text{и}} - x\sin\theta_{\text{и}}, \qquad \bar{L}_{\text{п}} \approx L_{\text{п}} - x\sin\theta_{\text{п}}, \qquad \zeta_m = \frac{\Lambda\sigma}{\sqrt{2\pi}}\,F(\alpha), \qquad \alpha = \frac{\Lambda^2}{4\pi}\ ,$$

$$x = -\,\frac{ct'_m + \zeta_m\,(\cos\theta_{\text{и}} + \cos\theta_{\text{п}})}{q_x}\ , \qquad q_x = \sin\theta_{\text{и}} + \sin\theta_{\text{п}},$$

$$K = \frac{\cos\theta_и + \cos\theta_п}{q_x}\,, \qquad t'_m = -\frac{\zeta_m}{c}\,(K\cos\theta_и + \sin\theta_и)\,\frac{q_x}{\cos\theta_и}\,,$$

$$F(\alpha) \approx \left\{\frac{1}{2\alpha}\left[\ln\alpha - \ln\ln(2\alpha) - \ln\left(1 - \frac{\ln\ln\alpha}{\ln\alpha}\right)\right]\right\}^{1/2}.$$

Величины $a_и$, $a_п$, $\bar{C}_и$, $\bar{C}_п$ зависят от параметров источника и приёмника, расстояний от источника и приёмника до поверхности и характеристик атмосферы. В общем случае эти зависимости носят весьма сложный характер. Однако в некоторых частных случаях для $a_и$, $a_п$, $\bar{C}_и$, $\bar{C}_п$ могут быть получены простые соотношения (см., например, [3, 6]). Так, в случае прозрачной атмосферы

$$\bar{C}_и = (\alpha_и \bar{L}_и)^{-2}, \qquad \bar{C}_п = (\alpha_п \bar{L}_п)^{-2}, \qquad a_и = \frac{P_0}{\pi\alpha_и^2}\,, \qquad a_п = \pi r_п^2,$$

а для однородной турбулентной атмосферы

$$\bar{C}_и \approx (\alpha_{ит} \bar{L}_и)^{-2}, \qquad \bar{C}_п \approx (\alpha_{пт} \bar{L}_п)^{-2}, \qquad a_и \approx \frac{P_0}{\pi\alpha_{ит}^2}\,, \qquad a_п \approx \pi r_п^2\,\frac{\alpha_п^2}{\alpha_{пт}^2}\,,$$

$$\alpha_{ит}^2 = \alpha_и^2 + (2/5)\,C_\varepsilon^{12/5} k^{2/5} \bar{L}_и^{6/5}; \qquad \alpha_{пт}^2 = \alpha_п^2 + (2/5)\,C_\varepsilon^{12/5} k^{2/5} \bar{L}_п^{6/5}.$$

Здесь P_0 — мощность излучения источника, $r_п$ — эффективный размер приёмной апертуры, C_ε^2 — структурная характеристика диэлектрической проницаемости атмосферы.

Для изотропной гауссовой поверхности приближённая формула для величины ω в условиях сильных затенений ($\operatorname{ctg}\theta \ll (\overline{\gamma_x^2})^{1/2}$) имеет вид

$$\omega \approx \exp[1/(4\overline{\gamma^2})]\left\{\frac{\cos(\theta_и)\cos(\theta_п)}{2\,(2\overline{\gamma^2})^{1/4}}\,W_{-1/4,-1/4}[1/(2\overline{\gamma^2})]) + \right.$$
$$+ \frac{\sin(\theta_и)\cos(\theta_и) + \sin(\theta_п)\cos(\theta_п)}{2\sqrt{\pi}}\,W_{-1/2,-1/2}[1/(2\overline{\gamma^2})] +$$
$$\left. + \frac{(\overline{\gamma^2})^{1/2}\,\sin(\theta_и)\sin(\theta_п)}{2^{7/4}}\,W_{-3/4,-3/4}[1/(2\overline{\gamma^2})]\right\}, \quad (9)$$

где σ^2 и $\overline{\gamma^2}$ — дисперсии высот и наклонов случайно-неровной поверхности S, $W_{n,m}(x)$ — функция Уиттекера.

В общем случае анизотропной гауссовой поверхности для вычисления ω подынтегральную функцию приходится раскладывать в ряд по степеням параметра, характеризующего анизотропность распределения, и решение получается более громоздким:

$$\omega \approx \frac{1}{4\sqrt{\pi}\;\overline{\gamma_x^2}\,\overline{\gamma_y^2})^{1/2}}\exp\left(\frac{1}{2\overline{\gamma_y^2}}\right)\left\{\cos(\theta_и)\cos(\theta_п)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\,\frac{\delta^k}{k!}\,\times\right.$$
$$\times\left(\frac{1}{4\overline{\gamma_y^2}}\right)^k \Gamma(k+1/2)G_{12}^{20}\left(\frac{1}{2\overline{\gamma_y^2}}\,\middle|^{1/2}_{-k-1/2;0}\right) +$$
$$+ [\cos(\theta_и)\sin(\theta_и) + \cos(\theta_п)\sin(\theta_п)]\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\,\frac{\delta^k}{k!}\left(\frac{1}{4\overline{\gamma_y^2}}\right)^k \Gamma(k+1)G_{23}^{30}\left(\frac{1}{2\overline{\gamma_y^2}}\,\middle|^{0;1/2}_{-k-1;0;0}\right) +$$
$$\left. + \sin(\theta_и)\sin(\theta_п)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\,\frac{\delta^k}{k!}\left(\frac{1}{4\overline{\gamma_y^2}}\right)^k \Gamma(k+3/2)G_{12}^{20}\left(\frac{1}{2\overline{\gamma_y^2}}\,\middle|^{1/2}_{-k-3/2;0}\right)\right\}, \quad (10)$$

где $\delta = 2(\overline{\gamma_y^2}/\overline{\gamma_x^2} - 1)$, $\overline{\gamma_x^2}$, $\overline{\gamma_y^2}$ — дисперсии наклонов анизотропной случайно-неровной поверхности S, $\Gamma(k)$ — гамма-функция $G_{pq}^{mn}(z|_{b_1,\dots,b_q}^{a_1,\dots,a_p})$ — функция Мейера.

Отметим, что формула (8) (как и полученная ниже формула (12)) справедлива при облучении поверхности не только дельта-импульсом, но и достаточно коротким импульсом произвольной формы, длительность $\tau_и$ которого много меньше длительности импульса принимаемого эхо-сигнала. В этом случае (при достаточно коротком зондирующем импульсе и выполнении условия нормировки $\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t = \tau_и$) в аналитическую формулу для мощности принимаемого излучения (в формулу (8) или (12)) должен быть добавлен множитель $\tau_и$. Справедливость этого достаточно очевидного замечания подтверждают приведённые ниже рисунки — для них использовались данные численных расчётов и вычислений по аналитическим формулам, полученные для короткого зондирующего импульса гауссовой формы при $\tau_и = 10^{-10}$ с.

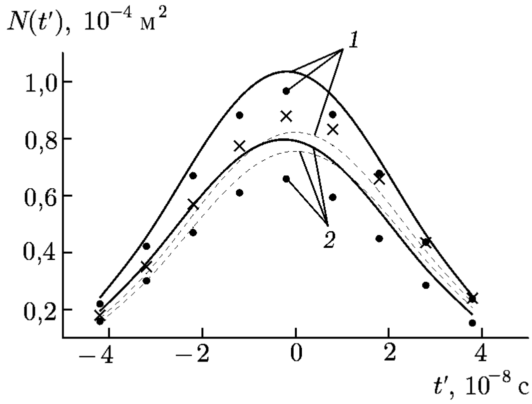

Рис. 2. Зависимость мощности эхо-сигнала от времени в случае, когда размеры освещённого источником пятна и сектора наблюдения приёмника много больше σ

На рис. 2 показано, как изменяется функция $P(t)$, описывающая зависимость от времени средней (по ансамблю неровных поверхностей) мощности эхо-сигнала, регистрируемого приёмником при облучении поверхности дельта-импульсом, с увеличением затенений. Расчёты величины $N(t) = \bar{P}(t) L_и^2 L_п^2/(A a_и a_п)$ проводились по формуле (8) для изотропной поверхности при $\theta_п = 0°$, $\theta_и = 89{,}7°$, $\alpha_и = 10^{-3}$, $\alpha_п = 10^{-2}$, $L_и = L_п = 10^3$ м, $\sigma = 0{,}25$ м; кривые *1* на рис. 2 соответствуют $(\overline{\gamma^2})^{1/2} = 0{,}1$ (что при $\theta_и = 89{,}7°$ соответствует параметру затенений $\Lambda \approx 7$), кривые *2* — $(\overline{\gamma^2})^{1/2} = 0{,}3$ ($\Lambda \approx 21$).

При расчёте по аналитической формуле (8) учитывали, что неровности поверхности S достаточно плавные ($(\overline{\gamma^2})^{1/2} \ll 1$), и аппроксимировали величину ω следующим выражением (на основе асимптотического ряда для функций Уиттекера $W_{n,m}(x)$):

$$\omega \approx 1/2\cos(\theta_и)\cos(\theta_п) + [\sin(\theta_и)\cos(\theta_п) + \sin(\theta_п)\cos(\theta_и)]\,\sqrt{\overline{\gamma^2}/(2\pi)} + 1/2\sin(\theta_п)\sin(\theta_и)\overline{\gamma^2}. \qquad (11)$$

Результаты расчётов по формуле (8) показаны на рис. 2 сплошными линиями, кружки — результаты численных расчётов по интегральной формуле (7), пунктирные линии — результаты расчётов по формуле для случайно-неровной локально-ламбертовской поверхности без учёта затенений [8], крестики — результаты расчёта по формуле для плоской ламбертовской поверхности [3, 6].

Из рис. 2 видно, что для локально-ламбертовской поверхности в случае, когда размеры освещённого источником пятна и сектора наблюдения приёмника на поверхности S_0 много больше σ (т. е. когда в поле зрения приёмника находится много неровностей поверхности, освещённых пучком подсвета), при выбранных для расчёта параметрах затенения (и вообще случайно-неровный характер поверхности) не очень сильно влияют на принимаемую мощность. Увеличение параметра затенений Λ приводит лишь к некоторому уменьшению мощности эхо-импульса, регистрируемого приёмником. При этом форма эхо-импульса практически не меняется (графики зависимости $N(t)$, нормированной на значение в максимуме, практически совпадают при всех Λ как для численных расчётов, так и для расчётов по аналитическим формулам).

Формула (8) при использовании аппроксимации (11) достаточно хорошо описывает зависимость средней мощности эхо-сигнала от времени при малых среднеквадратичных наклонах поверхности $(\overline{\gamma^2})^{1/2}$. С увеличением $(\overline{\gamma^2})^{1/2}$ различие между результатами численных расчётов и расчётов по аналитической формуле возрастает (что связано с нарушением условия плавной неровности поверхности $(\overline{\gamma^2})^{1/2} \ll 1$).

2. Размер освещённого источником пятна много меньше сектора наблюдения приёмника на поверхности S_0 и высоты неровностей поверхности $(C_{\text{и}}\,(K\cos\theta_{\text{и}} + \sin\theta_{\text{и}})^2 \gg \{\sigma^{-2}, C_{\text{п}}\,(K\cos\theta_{\text{п}} + \sin\theta_{\text{п}})^2\})$:

$$\bar{P}(t) \approx \frac{A\omega a_{\text{и}} a_{\text{п}}}{\sqrt{\pi}\,(\tilde{C}_{\text{и}} + \tilde{C}_{\text{п}})^{1/2}\,\tilde{L}_{\text{и}}^2 \tilde{L}_{\text{п}}^2}\;\frac{c}{q_x}\;\frac{(\sqrt{2}\,\sigma)^{-1} F(t')}{\tilde{C}_{\text{и}}^{1/2}\,(K\cos\theta_{\text{и}} + \sin\theta_{\text{и}})}\,, \tag{12}$$

где

$$F(t') = \exp\left\{-\frac{\zeta_{\text{п}}^2}{2\sigma^2} - \frac{\Lambda}{2}\left[1 - \Phi\left(\frac{\zeta_{\text{п}}}{\sqrt{2}\,\sigma}\right)\right] - \tilde{C}_{\text{п}}\left[\zeta_{\text{п}}\,(K\cos\theta_{\text{п}} + \sin\theta_{\text{п}}) + \frac{ct'\cos\theta_{\text{п}}}{q_x}\right]^2\right\},$$

$$\zeta_{\text{п}} = -\frac{ct'\cos\theta_{\text{и}}}{q_x\,(K\cos\theta_{\text{и}} + \sin\theta_{\text{и}})}\,, \qquad \tilde{L}_{\text{и}} \approx L_{\text{и}} - z\sin\theta_{\text{и}}, \qquad \tilde{L}_{\text{п}} \approx L_{\text{п}} - z\sin\theta_{\text{п}}$$

$$z = -\frac{ct' + \zeta_{\text{п}}\,(\cos\theta_{\text{и}} + \cos\theta_{\text{п}})}{q_x}\,, \qquad \tilde{C}_{\text{и}} = (\alpha_{\text{и}}\tilde{L}_{\text{и}})^{-2}, \tilde{C}_{\text{п}} = (\alpha_{\text{п}}\tilde{L}_{\text{п}})^{-2},$$

$\Phi(x)$ — интеграл Френеля.

На рис. 3 и 4 показано, как изменяется функция $\bar{P}(t)$ с увеличением затенений. Расчёты величины $N(t) = \bar{P}(t) L_{\text{и}}^2 L_{\text{п}}^2 / (A a_{\text{и}} a_{\text{п}})$ проводились по формуле (12) для изотропной поверхности (для ω использовалась аппроксимация (11)) при следующих значениях параметров: $\theta_{\text{п}} = 0°$, $\theta_{\text{и}} = 89{,}7°$, $\alpha_{\text{и}} = 10^{-4}$, $L_{\text{и}} = L_{\text{п}} = 10^3$ м, $\sigma = 1$ м; кривые *1* на рис. 3 и 4 соответствуют $(\overline{\gamma^2})^{1/2} = 0{,}1$ (что соответствует $\Lambda \approx 7$), кривые *2* — $(\overline{\gamma^2})^{1/2} = 0{,}3$ $(\Lambda \approx 21)$; рис. 3 соответствует $\alpha_{\text{п}} = 10^{-2}$, на рис. 4 — $\alpha_{\text{п}} = 10^{-1}$.

Результаты расчётов по формуле (12) показаны на рис. 3 и 4 сплошными линиями, кружки — результаты численных расчётов по интегральной формуле (7), пунктирные линии — результаты расчётов по формуле для случайно-неровной локально-ламбертовской поверхности без учёта затенений [8], крестики — результаты расчёта по формуле для плоской ламбертовской поверхности [3, 6].

Из рис. 3 видно, что при выбранных для расчёта параметрах в случае, когда размер освещённого пятна много меньше σ и сектора наблюдения приёмника на поверхности S_0 (т. е. когда пучок подсвета попадает в большинстве случаев только на одну из неровностей поверхности), увеличение параметра затенений Λ приводит к сильному уменьшению мощности эхо-импульса, регистрируемого приёмником от случайно-неровной локально-ламбертовской поверхности. Физически это объясняется тем, что из-за затенений пучок подсвета рассеивается на неровностях поверхности в области, расположенной всё ближе и ближе к источнику (при увеличении затенений) и находящейся вне пересечения диаграмм источника и приёмника. Это хорошо видно из рис. 4 (выбранные для расчёта параметры здесь такие же как и для рис. 3, но поле зрения приёмника на порядок больше): принимаемая мощность резко возрастает по сравнению с рис. 3 (но она всё ещё много меньше мощности, рассчитанной без учёта затенений, и тем более много меньше мощности эхо-сигнала от плоской ламбертовской поверхности) и с увеличением затенений максимум эхо-сигнала сдвигается в сторону отрицательных значений t' (физически это означает, что максимум эхо-сигнала приходит на приёмник всё раньше и раньше). Для рис. 3 эффект временно́го сдвига максимума эхо-сигнала тоже есть, но он незаметен из-за его небольшой величины.

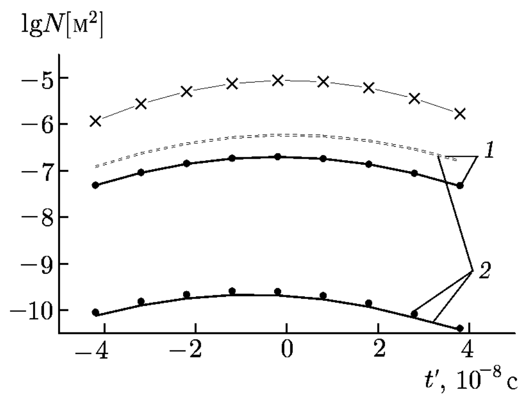

Рис. 3. Зависимость мощности эхо-сигнала от времени в случае, когда размер освещённого источником пятна много меньше σ и сектора наблюдения приёмника на поверхности S_0. Поле зрения приёмника мало

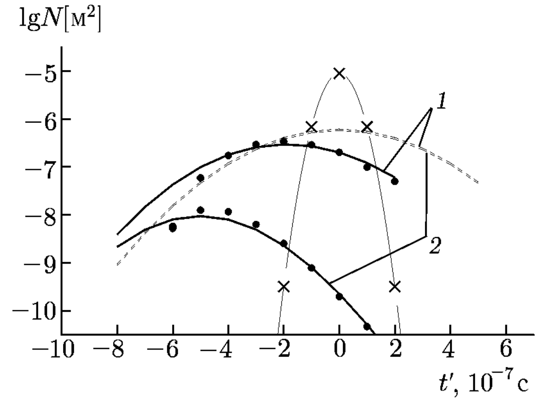

Рис. 4. Зависимость мощности эхо-сигнала от времени в случае, когда размер освещённого источником пятна много меньше σ и сектора наблюдения приёмника на поверхности S_0. Поле зрения приёмника велико

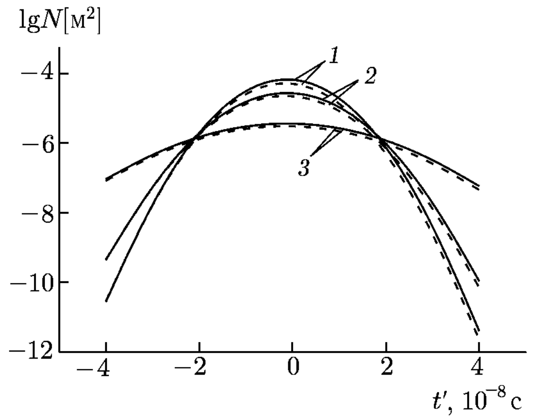

Рис. 5. Форма принимаемого эхо-сигнала при различной степени турбулентности атмосферы

Формула (12) достаточно хорошо описывает зависимость средней мощности эхо-сигнала от времени: заметные отличия расчётов по формуле (12) от численных расчётов появляются лишь при достаточно бóльших среднеквадратичных наклонах поверхности и бóльших углах поля зрения приёмника.

Влияние турбулентности атмосферы на мощность эхо-сигнала, регистрируемого приёмником, иллюстрирует рис. 5. Здесь приведены расчёты величины $N(t) = \bar{P}(t) L_{\text{и}}^2 L_{\text{п}}^2 / (A a_{\text{и}} a_{\text{п}})$ (в нормировочном коэффициенте $a_{\text{и}}$ и $a_{\text{п}}$ берутся для атмосферы без турбулентности) при различной степени турбулентности земной атмосферы (от слабой турбулентности до сильной). Расчёты проводились по формуле (8) для изотропной поверхности при следующих значениях параметров: $\theta_{\text{п}} = 0°$, $\theta_{\text{и}} = 89{,}7°$, $\alpha_{\text{и}} = 10^{-4}$, $\alpha_{\text{п}} = 3 \cdot 10^{-4}$, $L_{\text{и}} = L_{\text{п}} = 10^4$ м, $\sigma = 0{,}25$ м, $\lambda = 0{,}53$ мкм; кривые *1* на рис. 5 соответствуют $C_\varepsilon = 2 \cdot 10^{-8}$ м$^{-1/3}$, кривые *2* — $C_\varepsilon = 8 \cdot 10^{-7}$ м$^{-1/3}$, кривые *3* — $C_\varepsilon = 2 \cdot 10^{-6}$ м$^{-1/3}$.

На рис. 5 сплошными линиями показаны результаты расчётов при $(\overline{\gamma^2})^{1/2} = 0{,}3$, пунктирными линиями — при $(\overline{\gamma^2})^{1/2} = 0{,}1$.

Из рис. 5 видно, что в случае узких пучков и длинных трасс зондирования турбулентность атмосферы приводит к «расплыванию» (уменьшению амплитуды и увеличению длительности) импульса эхо-сигнала. Физически это связано с увеличением размеров освещённого пятна и поля зрения приёмника на отражающей поверхности из-за расширения диаграмм источника и приёмника в турбулентной атмосфере. Разница между результатами расчётов при разной дисперсии наклонов поверхности в логарифмическом масштабе мало заметна, хотя она достаточно существенная (такого же порядка, как и на рис. 2).

Таким образом, получены аналитические формулы для средней мощности эхо-сигнала, регистрируемого приёмником, при облучении дельта-импульсом локально-ламбертовской поверхности с гауссовым распределением высот и наклонов. Показано, что затенения приводят к существенному искажению принимаемого оптического сигнала. Наиболее сильные искажения происходят в случае, когда размер освещённого пятна много меньше сектора наблюдения приёмника и высоты неровностей поверхности. В этом случае принимаемая мощность много меньше мощности, рассчитанной без учёта затенений, и мощности отражённого сигнала от плоской ламбертовской поверхности. С усилением затенений мощность сигнала падает, и максимум эхо-сигнала сдвигается в сторону отрицательных значений t'. Турбулентность атмосферы в случае узких пучков и длинных трасс зондирования приводит к «расплыванию» импульса эхо-сигнала, что физически связано с расширением диаграмм источника и приёмника в турбулентной атмосфере. Полученные аналитические формулы для принимаемой мощности хорошо согласуются с результатами численных расчётов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белов М. Л. // Изв. вузов. Радиофизика. 1997. Т. 40, № 6. С. 713.
2. Басс Ф. Г., Фукс И. М. Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. М.: Наука, 1972. 424 с.
3. Орлов В. М., Самохвалов И. В., Матвиенко Г. Г. и др. Элементы теории светорассеяния и оптическая локация. Новосибирск: Наука, 1982. 225 с.
4. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. Ч. 2. М.: Наука, 1978. 463 с.
5. Татарский В. И., Кравцов Ю. А. Статистические явления при дифракции волн. Рязань: Рязанский радиотехнический институт, 1975. 101 с.
6. Орлов В. М., Самохвалов И. В., Креков Г. М. и др. Сигналы и помехи в лазерной локации. М.: Радио и связь, 1985. 264 с.
7. Обратные задачи в оптике / Под. ред. Болтса. М.: Машиностроение, 1984. 199 с.
8. Белов М. Л., Городничев В. А., Козинцев В. И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1999. Т. 42, № 4. С. 333.

НИИ радиоэлектроники и лазерной техники Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана, г. Москва, Россия

Поступила в редакцию 17 июля 2003 г.

SCATTERING OF A NARROW PULSED WAVE BEAM BY A RANDOMLY ROUGH, LOCALLY LAMBERTIAN SURFACE UNDER CONDITIONS OF STRONG SHADOWING

M. L. Belov

We consider the problem of scattering of a narrow wave beam during pulsed irradiation of a randomly rough surface under conditions of strong shadowing of one surface element by another. Expressions for the average power recorded by a receiver are obtained for the case where a locally Lambertian surface with Gaussian distributions of heights and slopes is irradiated by a delta impulse. It is shown that the shadowing and the atmospheric turbulence result in a considerable distortion of the received optical signal. The obtained analytical expressions for the received power are in good agreement with the results of numerical calculations.

УДК 537.874.4

ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ РЕШЁТКЕ С МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМОЙ

А. В. Бровенко, П. Н. Мележик, А. Е. Поединчук

В строгой постановке решена задача дифракции плоской H-поляризованной электромагнитной волны на идеально проводящей ленточной периодической решётке, расположенной на границе полупространства, заполненного однородной магнитоактивной холодной электронной плазмой. Представлены результаты численных экспериментов.

ВВЕДЕНИЕ

Задача о дифракции плоских электромагнитных волн на периодических ленточных металлических решётках является одной из ключевых для целого класса граничных задач электродинамики. Эффективный в вычислительном отношении метод задачи Римана—Гильберта, применение которого не налагает каких-либо существенных ограничений на размеры лент решётки и её период, а также на отношение периода решётки к длине волны, предложен в [1]. В основе этого метода лежит идея использования явного решения краевых задач сопряжения аналитических функций с коэффициентом сопряжения -1 (задача Римана—Гильберта). В итоге исходная задача эквивалентным образом сводилась к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений второго рода, которая решалась с помощью ЭВМ методом редукции. В [2] для решения задачи дифракции плоских электромагнитных волн на бесконечно тонких идеально проводящих периодических решётках предложен другой подход. Он состоит в том, что исходная задача дифракции эквивалентным образом сводится к интегральному уравнению первого рода для тока в случае E-поляризации волны и производной от него в случае H-поляризации. Сингулярная часть соответствующего интегрального оператора была обращена с помощью формулы Крейна [3]. В результате получена бесконечная система линейных алгебраических уравнений второго рода относительно коэффициентов Фурье тока.

Исследованию задач дифракции плоских электромагнитных волн на ленточных металлических решётках с неоднородностями посвящены работы [4–8]. В работе [4] рассмотрена задача дифракции при нормальном падении плоской произвольно поляризованной электромагнитной волны на бесконечно тонкой идеально проводящей ленточной решётке, расположенной на слое изотропного диэлектрика. Дифракционное поле в случае произвольного соотношения между длиной волны, шириной ленты, толщиной слоя и периодом решётки находилось с помощью метода задачи Римана—Гильберта. В итоге получены приближённые формулы для расчёта коэффициентов отражения и прохождения и приведены результаты расчётов по этим формулам. В [5] получено решение задачи дифракции электромагнитной волны на плоской металлической решётке с экраном и изотропным магнитодиэлектриком. Здесь исходная краевая задача дифракции сведена к двум неоднородным задачам сопряжения. Определены коэффициент отражения и амплитуды дифракционных спектров без наложения каких-либо ограничений на период решётки, коэффициент заполнения, расстояние от решётки до экрана, диэлектрическую проницаемость магнитодиэлектрика и длину волны падающего поля.

Строгому решению задачи дифракции электромагнитных волн на металлической решётке, расположенной на полубесконечной диэлектрической анизотропной среде, посвящена работа [6]. В связи с тем, что тензор, описывающий анизотропный диэлектрик, диагональный, исходная задача дифракции сводилась к системе парных сумматорных уравнений, аналогичной полученной в [1], что дало возможность применить стандартную процедуру метода задачи Римана—Гильберта. Работа [7] посвящена решению задачи дифракции плоской электромагнитной E-поляризованной волны на металлической решётке с гиромагнитной средой, а [8] — решению задачи дифракции плоской электромагнитной E-поляризованной волны на экранированной решётке с поперечно намагниченным ферритом. В [7, 8] прослойка между плоскостью решётки и анизотропной средой отсутствовала. Кроме того, тензоры, характеризующие гиромагнитные среды, в отличие от [6] были недиагональными. Указанные особенности приводят к тому, что при использовании уравнений Гельмгольца исходные краевые задачи сводятся к системам парных сумматорных уравнений специального вида, отличных от приведённых, например, в [1]. Иными словами, процедура аналитической регуляризации, приведённая в [1], к системам такого вида неприменима. При осуществлении процедуры регуляризации в [7, 8] были допущены ошибки, которые привели к тому, что полученные в итоге системы линейных алгебраических уравнений не являются эквивалентными соответствующим исходным краевым задачам.

Цель настоящей работы — получение строгого в математическом отношении решения задачи дифракции плоской электромагнитной H-поляризованной волны на ленточной бесконечно тонкой идеально проводящей решётке с магнитоактивной плазмой. Важно, что прослойка между плоскостью решётки и анизотропной плазменной средой отсутствует.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ

Поперечное сечение рассматриваемой структуры приведено на рис. 1. Периодическая решётка, образованная бесконечно тонкими идеально проводящими лентами, параллельными оси z, с периодом l и шириной щели d, расположена в плоскости $x = 0$. Полупространство $x < 0$ заполнено однородной холодной магнитоактивной электронной плазмой (постоянное магнитное поле $\mathbf{H}_0$ параллельно оси z), тензор диэлектрической проницаемости плазмы имеет следующий вид:

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & i\varepsilon_2 & 0 \\ -i\varepsilon_2 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix},$$

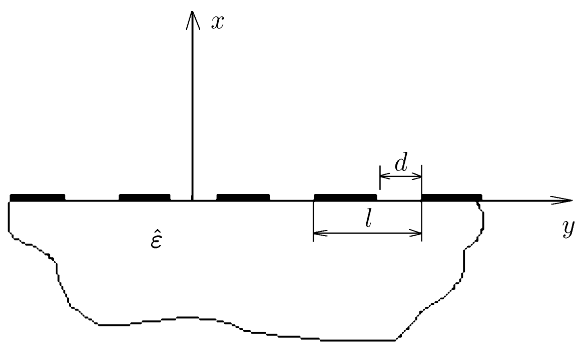

Рис. 1

где

$$\varepsilon_1 = 1 - \frac{\chi_{\rm p}^2}{\chi^2 - \chi_{\rm c}^2}\,, \quad \varepsilon_2 = -\frac{\chi_{\rm p}^2 \chi_{\rm c}}{\chi\,(\chi^2 - \chi_{\rm c}^2)}\,, \quad \varepsilon_3 = 1 - \frac{\chi_{\rm p}^2}{\chi^2}\,, \quad \chi = \frac{\omega l}{2\pi c}\,, \quad \chi_{\rm p} = \frac{\omega_{\rm p} l}{2\pi c}\,, \quad \chi_{\rm c} = \frac{\omega_{\rm c} l}{2\pi c}\,.$$

Здесь ω — частота падающего поля, $\omega_{\rm p}$ и $\omega_{\rm c}$ — плазменная и электронная циклотронная частоты соответственно, c — скорость света в вакууме.

Сверху (при $x > 0$) вдоль оси x (нормальное падение) распространяется плоская H-поляризованная электромагнитная волна вида $\exp(-ikx)$ ($k = \omega/c$, временнáя зависимость характеризуется множителем $\exp(-i\omega t)$, который в дальнейшем опускается).

Требуется определить функции $V_1(x, y)$ и $V_2(x, y)$, являющиеся решением следующей краевой задачи:

а) функции $V_1(x,y)$, $V_2(x,y)$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{cases} \varepsilon_1\,\Delta V_2(x,y) + k^2\,(\varepsilon_1^2-\varepsilon_2^2)\,V_2(x,y)=0, & x<0; \\ \Delta V_1(x,y)+k^2 V_1(x,y)=0, & x>0, \end{cases} \tag{1}$$

б) условию периодичности

$$V_1(x,y\pm l)=V_1(x,y), \qquad V_2(x,y\pm l)=V_2(x,y), \tag{2}$$

в) граничным условиям

$$\frac{\partial V_2(0,y)}{\partial x} - i\tau\,\frac{\partial V_2(0,y)}{\partial y}=0, \tag{3а}$$

$$\frac{\partial V_1(0,y)}{\partial x}=ik \tag{3б}$$

на металле,

$$\lambda\,\frac{\partial V_1(0,y)}{\partial x}-\frac{\partial V_2(0,y)}{\partial x}+i\tau\,\frac{\partial V_2(0,y)}{\partial y}+i\lambda k=0 \tag{4}$$

на всём периоде решётки,

$$V_2(0,y)-V_1(0,y)=1 \tag{5}$$

на щели,

г) условию Мейкснера [9] на любом компактном множестве в плоскости xy,

д) условиям излучения:

$$\operatorname{Im}\zeta_n\ge 0, \qquad \operatorname{Re}\zeta_n\ge 0; \qquad \operatorname{Im}\zeta_n'\ge 0, \qquad \operatorname{Re}\zeta_n'\ge 0. \tag{6}$$

Здесь $\lambda=(\varepsilon_1^2-\varepsilon_2^2)/\varepsilon_1$, $\tau=\varepsilon_2/\varepsilon_1$, $\zeta_n=\sqrt{k^2-(2\pi n/l)^2}$, $\zeta_n'=\sqrt{k^2\lambda-(2\pi n/l)^2}$. Функции $V_1(x,y)$ и $V_2(x,y)$ связаны с компонентой $H_z(x,y)$ рассеянного поля следующим образом:

$$H_z(x,y)=\begin{cases} V_1(x,y), & x>0; \\ (\varepsilon_1^2-\varepsilon_2^2)\,V_2(x,y), & x<0. \end{cases}$$

Используя условия периодичности (2), излучения (6) и представляя искомые функции $V_1(x,y)$ и $V_2(x,y)$ в виде рядов Фурье, из (1) нетрудно получить представления для компонент полного электромагнитного поля в виде

$$H_z(x,y)=\begin{cases} \exp(-ikx)+\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n\exp(i\zeta_n x)\exp(2\pi i n y/l), & x>0; \\ \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} b_n\exp(-i\zeta_n' x)\exp(2\pi i n y/l), & x<0, \end{cases}$$

$$E_y(x,y)=\begin{cases} -\exp(-ikx)+\dfrac{1}{k}\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n\zeta_n\exp(i\zeta_n x)\exp(2\pi i n y/l), & x>0; \\ -\dfrac{1}{k\lambda}\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} b_n\left(\zeta_n'+2\pi i n\tau/l\right)\exp(-i\zeta_n' x)\exp(2\pi i n y/l), & x<0. \end{cases} \tag{7}$$

Здесь a_n и b_n — подлежащие определению неизвестные амплитуды дифракционных гармоник.

2. СВЕДЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ К СИСТЕМЕ ПАРНЫХ СУММАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Удовлетворяя граничным условиям (3)–(5) с учётом (7) получаем систему парных сумматорных уравнений вида

$$\begin{cases} \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} b_n \left(\zeta_n' + \dfrac{2\pi i\tau}{l}\, n\right) \exp\left(2\pi i n y/l\right) = 0, & \text{(M)};\\ \sum\limits_{\substack{n=-\infty,\\ n\neq 0}}^{+\infty} b_n \left(1 + \dfrac{\zeta_n' + 2\pi i n\tau/l}{\lambda\zeta_n'}\right) \exp\left(2\pi i n y/l\right) = 2 - b_0 \left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}\right), & \text{(S)}. \end{cases} \tag{8}$$

Здесь (M) и (S) обозначают, что равенство выполняется соответственно на металле или на щели, $b_0 = \sqrt{\lambda}\,(1 - a_0)$, $b_n = -\lambda\zeta_n a_n/(\zeta_n' + 2\pi i n\tau/l)$ при $n \neq 0$.

Введём новые неизвестные z_n по формулам

$$z_0 = b_0\left(1 + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) - 2, \qquad z_n = (-1)^n \left(1 + \frac{\xi_n' + i\tau_n}{\lambda\xi_n}\right) b_n \qquad \text{при} \quad n \neq 0, \tag{9а}$$

где

$$\xi_n = \sqrt{\chi^2/n^2 - 1}\,, \qquad \xi_n' = \sqrt{\lambda\chi^2/n^2 - 1}\,, \qquad \tau_n = \tau\,\mathrm{sign}(n).$$

Подставляя (9а) в (8) после ряда преобразований получаем

$$\begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n z_n \exp(in\varphi) - \dfrac{1+\varepsilon_1-\varepsilon_2}{1+\varepsilon_1+\varepsilon_2} \sum\limits_{n=-1}^{-\infty} n z_n \exp(in\varphi) = g[\exp(i\varphi)], & |\varphi| < \theta;\\ \sum\limits_{\substack{n=-\infty,\\ n\neq 0}}^{+\infty} n z_n \exp(in\varphi) = 0, & |\varphi| < \pi. \end{cases} \tag{9б}$$

Кроме уравнений (9б), аналогично [1, 10] требуем выполнения соотношения

$$\sum_{\substack{n=-\infty,\\ n\neq 0}}^{+\infty} (-1)^n z_n = -z_0, \qquad \varphi = \pi. \tag{9в}$$

Здесь $\varphi = 2\pi y/l - \pi$, $\theta = \pi - \pi d/l$, а функция $g[\exp(i\varphi)]$ может быть представлена в виде ряда:

$$g[\exp(i\varphi)] = \frac{i\chi\,(1+\varepsilon_1-\varepsilon_2)}{1+\sqrt{\lambda}}\,(z_0+2) + \sum_{\substack{n=-\infty,\\ n\neq 0}}^{+\infty} \Lambda_n\,|n|\,z_n\delta_n \exp(in\varphi),$$

где

$$\Lambda_n = \begin{cases} 1, & n > 0;\\ \dfrac{1+\varepsilon_1-\varepsilon_2}{1+\varepsilon_1+\varepsilon_2}, & n < 0, \end{cases} \qquad \delta_n = 1 + i\,\Delta_n\,\frac{1+\tau_n+\lambda}{1+\tau_n}\,, \qquad \Delta_n = \xi_n\,\frac{\xi_n' + i\tau_n}{\xi_n' + \lambda\xi_n + i\tau_n}\,.$$

Как видно из (9б) и (9в), в случае H-поляризации падающей волны решение исходной задачи зависит только от параметров ε_1 и ε_2 тензора $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$. Легко показать, что в случае E-поляризации решение зависит только от ε_3.

3. СВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ ПАРНЫХ СУММАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ К СИСТЕМЕ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО РОДА: МЕТОД АНАЛИТИЧЕСКОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

Полученная функциональная система уравнений (9б), (9в) мало пригодна для численного решения, поэтому сведём её к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений второго рода. Для этой цели аналогично [1, 10] введём две функции комплексной переменной w: $X^+(w) = \sum_{n=1}^{+\infty} nz_n w^n$ и $X^-(w) = -\sum_{n=-1}^{-\infty} nz_n w^n$, аналитические соответственно внутри и вне круга $|w|<1$.

Пусть γ_1 — дуга окружности $|w|=1$, соединяющая точки $\exp(-i\theta)$ и $\exp(i\theta)$ и проходящая через точку $w=-1$, а γ_2 — дуга, которая дополняет γ_1 до окружности. С помощью функций $X^+(w)$, $X^-(w)$ система (9б) для $w=\zeta=\exp(i\varphi)$ представляется в следующей форме, стандартной для краевых задач в теории аналитических функций комплексного переменного [11]:

$$\begin{cases} X^+(\zeta) - X^-(\zeta) = 0, & \zeta \in \gamma_1, \qquad (10)\\ X^+(\zeta) + \dfrac{1+\varepsilon_1-\varepsilon_2}{1+\varepsilon_1+\varepsilon_2}\, X^-(\zeta) = g(\zeta), & \zeta \in \gamma_2. \qquad (11)\end{cases}$$

Выражение $-(1+\varepsilon_1-\varepsilon_2)/(1+\varepsilon_1+\varepsilon_2)$ здесь согласно [11] называется коэффициентом сопряжения краевой задачи Римана—Гильберта (11).

Из (10) следует, что функция

$$X(w) = \begin{cases} X^+(w), & |w|<1;\\ X^-(w), & |w|>1\end{cases}$$

продолжается до функции, аналитической в комплексной плоскости с разрезом вдоль дуги γ_2. Причём $X(w) = -z_{-1}/w + \mathrm{O}(1/w^2)$, когда $w\to\infty$.

Таким образом, система уравнений (9б), (9в) сведена к задаче о восстановлении функции $X(w)$, аналитической вне дуги γ_2, по её предельным значениям на этой дуге, удовлетворяющим условию (11).

Пусть $\alpha^+ = (\sqrt{\chi_\mathrm{c}^2 + 2\chi_\mathrm{p}^2} + \chi_\mathrm{c})/2$, $\alpha^- = (\sqrt{\chi_\mathrm{c}^2 + 2\chi_\mathrm{p}^2} - \chi_\mathrm{c})/2$. Видно, что $\alpha^- \le \alpha^+$ (равенство достигается, когда $\chi_\mathrm{c}=0$). В этой работе, предполагая, что $\chi\ne\alpha^+$ и $\chi\ne\alpha^-$ ограничимся рассмотрением только случая $(1+\varepsilon_1-\varepsilon_2)/(1+\varepsilon_1+\varepsilon_2)>0$. Случай $(1+\varepsilon_1-\varepsilon_2)/(1+\varepsilon_1+\varepsilon_2)<0$ нами будет рассмотрен в последующих работах.

Неравенство $(1+\varepsilon_1-\varepsilon_2)/(1+\varepsilon_1+\varepsilon_2)>0$ выполняется при следующих условиях на частотный параметр χ:

а) если $\chi_\mathrm{p} > 2\chi_\mathrm{c}$, то $\chi_\mathrm{c} < \chi < \alpha^-$ либо $\chi > \alpha^+$;

б) если $\chi_\mathrm{p} < 2\chi_\mathrm{c}$, то $\alpha^- < \chi < \chi_\mathrm{c}$ либо $\chi > \alpha^+$;

в) если $\chi_\mathrm{p} = 2\chi_\mathrm{c}$, то $\chi > \alpha^+$.

В соответствии с [11] решение задачи Римана—Гильберта (11) может быть получено в замкнутой форме:

$$X(z) = G(z)\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_2} \frac{g(t)\,\mathrm{d}t}{G^+(t)\,(t-z)} + C\right), \qquad (12)$$

где

$$G(z) = [z-\exp(i\theta)]^{-1}\exp\left(\left(\frac{1}{2}-i\beta\right)\int\limits_{\gamma_2}\frac{\mathrm{d}t}{t-z}\right)$$

— каноническое решение в самом широком классе h_0 (см. [11]) однородной задачи сопряжения, которая соответствует (11), $\beta = (2\pi)^{-1}\,\ln[(1+\varepsilon_1-\varepsilon_2)/(1+\varepsilon_1+\varepsilon_2)]$, C — подлежащая определению постоянная, $G^+(t)$ — предельное значение функции $G(z)$ изнутри круга $|z|<1$.

Для функции $G(z)$ справедливо следующее представление:

$$G(z) = \begin{cases} -\exp(2\beta\theta)\sum\limits_{n=0}^{\infty} P_n(\beta,\theta)\,z^n, & |z|<1; \\ z^{-1}\sum\limits_{n=0}^{\infty} P_n(-\beta,\theta)\,z^{-n}, & |z|>1, \end{cases} \tag{13}$$

где $P_n(\beta,\theta)$ — полиномы Поллачека [12], удовлетворяющие рекуррентным соотношениям

$$P_0(\beta,\theta)=1, \qquad P_1(\beta,\theta)=\cos\theta+2\beta\sin\theta,$$

$$P_n(\beta,\theta)\big|_{n\geq 2} = \left[\left(2-\frac{1}{n}\right)\cos\theta+\frac{2}{n}\,\beta\sin\theta\right]P_{n-1}(\beta,\theta)-\left(1-\frac{1}{n}\right)P_{n-2}(\beta,\theta),$$

$$P_{-n}(\beta,\theta)\big|_{n\geq 1} = \exp(-2\beta\theta)P_{n-1}(-\beta,\theta). \tag{14}$$

Нетрудно показать, что при $\beta\to 0$ ($\varepsilon_2\to 0$) полиномы Поллачека переходят в полиномы Лежандра.

Отметим также, что представление, аналогичное (13), по-видимому, впервые было получено в [7].

Используя формулы Сохоцкого—Племеля [11] применительно к (12), в результате некоторых преобразований получаем соотношение

$$X^+[\exp(i\varphi)] - X^-[\exp(i\varphi)] = \\ = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_2-\varepsilon_1-1}\,g'[\exp(i\varphi)] + \frac{F[\exp(i\varphi)]}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_2}\frac{g(t)\,\mathrm{d}t}{G^+(t)\,[t-\exp(i\varphi)]} + CF[\exp(i\varphi)], \tag{15}$$

которое справедливо для всех $\varphi\in[0,2\pi]$. Здесь

$$g'[\exp(i\varphi)] = \begin{cases} 0, & \theta<|\varphi|\leq\pi; \\ g[\exp(i\varphi)], & |\varphi|<\theta, \end{cases} \qquad F[\exp(i\varphi)] = \begin{cases} 0, & \theta<|\varphi|\leq\pi; \\ G^+[\exp(i\varphi)]-G^-[\exp(i\varphi)], & |\varphi|<\theta. \end{cases}$$

Переходя в (15) к коэффициентам Фурье и используя формулу (13), в результате громоздких преобразований сводим функциональную систему уравнений (9б), (9в) к системе линейных алгебраических уравнений вида

$$x_n = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} B_{nm}x_m + w_n, \tag{16}$$

где неизвестные x_n связаны с z_n следующим образом: $x_n = (-1)^n\,z_n$. Матричные элементы в (16) имеют следующий вид:

$$B_{nm} = \begin{cases} iA_{00}\,\dfrac{\chi\,(1+\varepsilon_1-\varepsilon_2)}{1+\sqrt{\lambda}}\,, & n=0, m=0; \\ (-1)^n\,iA_{n0}\,\dfrac{\chi\,(1+\varepsilon_1-\varepsilon_2)}{1+\sqrt{\lambda}}\,, & n\neq 0, m=0; \\ (-1)^{n+m}\,|m|\,\delta_m\,\Lambda_m A_{nm}, & m\neq 0, \end{cases}$$

а правая часть

$$w_n = 2i\ \frac{(-1)^n\, A_{n0}\chi\,(1+\varepsilon_1-\varepsilon_2)}{1+\sqrt{\lambda}}\ .$$

Выражения для A_{nm} в связи с их громоздкостью вынесены в приложение.

Используя метод Дарбу [12], получаем для полиномов $P_m(\beta,\theta)$ асимптотическую оценку при $m\to+\infty$, когда θ — вещественная величина:

$$P_m(\beta,\theta) = \frac{2\exp[-(3\pi/2+\theta)\,\beta]}{\sqrt{2m\sin\theta}\ |\Gamma(1/2+i\beta)|^2}\left\{\cos\bigl[\beta\ln(2m\sin\theta)-(m+1/2)\,\theta-3\pi/4\bigr]\operatorname{Re}\Gamma(1/2+i\beta)+\right.$$
$$\left.+\ \sin\bigl[\beta\ln(2m\sin\theta)-(m+1/2)\,\theta-3\pi/4\bigr]\operatorname{Im}\Gamma(1/2+i\beta)\right\}\bigl\{1+\mathrm{O}(1/m)\bigr\}, \quad (17)$$

где $\Gamma(z)$ — гамма функция. Асимптотическая оценка для полиномов Поллачека при $m\to-\infty$ получается из (17) с использованием соотношений (14). Для параметра δ_m при больших m справедливо следующее асимптотическое соотношение:

$$\delta_m \approx \left(\frac{\chi}{2m}\right)^2\times\begin{cases}1+\varepsilon_1-\varepsilon_2, & m>0;\\ 1+\varepsilon_1+\varepsilon_2, & m<0.\end{cases} \quad (18)$$

Различное поведение δ_m при $m\to+\infty$ и при $m\to-\infty$ объясняется невзаимностью плазменной среды.

Из асимптотических оценок (17), (18) следует, что ряд $\sum_{m,n}|B_{nm}|^2$ сходится. Иными словами, матрица $\|B_{nm}\|$, где $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$, $m=0,\pm1,\pm2,\ldots$, задаёт в пространстве последовательностей l_2 оператор Гильберта—Шмидта. Тогда согласно альтернативе Фредгольма [13] и теореме о единственности решения задачи дифракции [9] получаем, что решение системы (16) существует, единственно и может быть получено методом редукции с любой наперёд заданной точностью.

Таким образом, исходная краевая задача (1)–(6) эквивалентным образом сведена к решению системы линейных алгебраических уравнений (16), откуда, учитывая предыдущие преобразования, получаем представления для искомых гармоник спектров дифракционного излучения:

$$a_0 = 1-\frac{x_0+2}{1+\sqrt{\lambda}}\ ,\qquad b_0=\frac{\sqrt{\lambda}\ (x_0+2)}{1+\sqrt{\lambda}}\ ,\qquad n=0;$$

$$a_n = -\frac{\xi_n'+i\tau_n}{\xi_n'+\lambda\xi_n+i\tau_n}\ x_n,\qquad b_n=\frac{\lambda\xi_n}{\xi_n'+\lambda\xi_n+i\tau_n}\ x_n,\qquad n\neq0. \quad (19)$$

Система уравнений (16) в длинноволновой области допускает приближённое аналитическое решение методом последовательных приближений, что позволяет получить приближённые представления для основных гармоник при $\chi<1$:

$$a_0\approx\frac{iA_{00}\chi\,(1+\varepsilon_1-\varepsilon_2)-\sqrt{\lambda}+1}{iA_{00}\chi\,(1+\varepsilon_1-\varepsilon_2)-\sqrt{\lambda}-1}\ ,\qquad b_0\approx\frac{2\sqrt{\lambda}}{1+\sqrt{\lambda}-iA_{00}\chi\,(1+\varepsilon_1-\varepsilon_2)}\ . \quad (20)$$

Отметим, что если плазменную ($\chi_{\rm p}$) и циклотронную ($\chi_{\rm c}$) частоты приравнять одновременно нулю, то выражения (20) перейдут в известные формулы Ламба [14] для решётки в свободном пространстве.

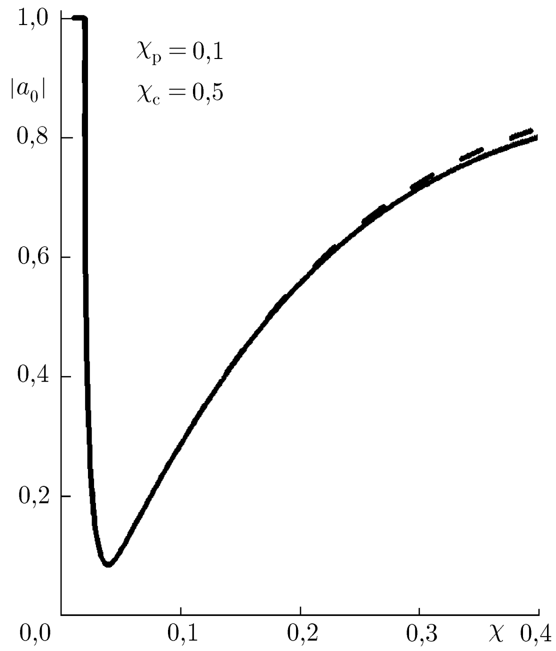

Рис. 2

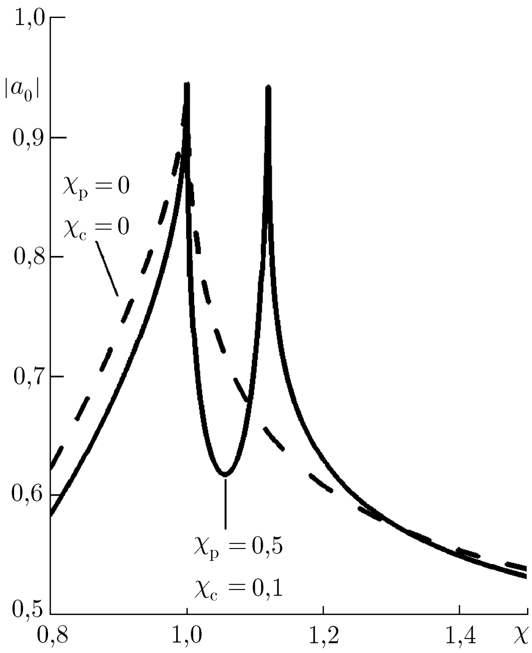

Рис. 3

5. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЁТОВ

Для расчёта дифракционных характеристик решётки, находящейся на плазменном полупространстве, был разработан пакет прикладных программ. Расчёты с помощью ПЭВМ проводились как по точным формулам (16), так, для сравнения, и по приближённым формулам (20). При решении системы (16) порядок редукции N выбирался исходя из соотношения $N = [\sqrt{\lambda}\ \chi] + 10$, что позволило получать 4 значащие цифры искомых величин (здесь квадратные скобки обозначают целую часть числа). Достоверность полученных результатов обеспечивается, во-первых, использованием строгого метода решения задачи и наличием численной сходимости, а во-вторых — предельными переходами как к решётке в свободном пространстве при $\chi_{\text{p}} = 0$, $\chi_{\text{c}} = 0$, так и к плазменному полупространству при $d/l = 1$. Кроме того, отметим, что предложенный алгоритм позволяет проводить физический анализ в следующих частотных диапазонах: если $\chi_{\text{p}} > 2\chi_{\text{c}}$, то $\chi_{\text{c}} < \chi < \alpha^-$ либо $\chi > \beta^+$, а когда $\chi_{\text{p}} < 2\chi_{\text{c}}$, то $\alpha^- < \chi < \chi_{\text{c}}$ либо $\chi > \beta^+$. Здесь и далее, следуя [15], величины $\beta^- = (\sqrt{\chi_{\text{c}}^2 + 4\chi_{\text{p}}^2} - \chi_{\text{c}})/2$ и $\beta^+ = (\sqrt{\chi_{\text{c}}^2 + 4\chi_{\text{p}}^2} + \chi_{\text{c}})/2$ будем называть соответственно левой и правой частотами отсечки. На рис. 2 приведены результаты расчётов зависимости модуля коэффициента отражения $|a_0|$ от частотного параметра $\chi = l/\lambda$, где λ — длина волны падающего поля, при плазменных параметрах $\chi_{\text{p}} = 0{,}1$, $\chi_{\text{c}} = 0{,}5$ и параметре решётки $d/l = 0{,}1$, когда выполняется соотношение $\beta^- \in (\alpha^-, \chi_{\text{c}})$. При частотном параметре $\chi < \beta^- = 0{,}0193$ плазма является идеальным проводником, поэтому для коэффициента отражения $|a_0| = 1$, т. е. имеет место полное отражение падающей плоской H-поляризованной электромагнитной волны. В самой же точке $\chi = \beta^-$ наблюдается излом зависимости $|a_0|$ от χ, и при дальнейшем увеличении χ электромагнитное поле начинает проникать в плазму. Сплошная линия на рис. 2 соответствует расчётам, проведённым по формулам (20), а штриховая — по формулам (16). Видно, что в частотном диапазоне $0 < \chi < 0{,}25$ наблюдается достаточно хорошее графическое совпадение значений модуля коэффициента отражения $|a_0|$, полученных при решении системы (16) и при расчёте по приближённым формулам (20). В табл. 1 приведены числовые значения $|a_0|$, полученные этими способами.

Результаты расчётов зависимости $|a_0|$ от χ при рассеянии на решётке в свободном пространстве (штриховая линия) и на решётке с плазменной средой с параметрами $\chi_{\text{p}} = 0{,}5$, $\chi_{\text{c}} = 0{,}1$ (сплошная линия) приведены на рис. 3. В обоих случаях полагалось $d/l = 0{,}5$. Как следует из приведённых результатов численных экспериментов, наличие плазменной среды приводит к появлению в диапазоне $1 < \chi < 1{,}5$ второго максимума $|a_0|$. Если первый максимум — аномалия Вуда — обусловлен наличием периодической решётки и наблюдается при $\chi = |n|$, то второй, при $\chi = |n|/\sqrt{\lambda}$, обусловлен наличием плазменной среды. При $\chi_{\text{p}} = 0$, $\chi_{\text{c}} = 0$ максимумы $|a_0|$ совпадают. Было установлено, что с увеличением плазменной частоты χ_{p} происходит смещение максимумов $|a_0|$ (см. рис. 4), соответствующих плазменной среде, в коротковолновую область (максимум достигается при бо́льших χ). Кривые на рис. 4 соответствуют $\chi_{\text{p}} = 0{,}3$; $0{,}5$; $0{,}7$ при $\chi_{\text{c}} = 0{,}1$ и $d/l = 0{,}5$. Такое поведение коэффициента отражения может быть использовано для определения плазменных параметров, например χ_{p}. Действительно, зная геометрические параметры ленточной решётки, циклотронную частоту χ_{c} и частоту χ, при которой достигается максимум модуля коэффициента отражения, можно определить плазменную частоту по формуле

$$\chi_{\text{p}} = \sqrt{\frac{2\chi^2 - 1 + \sqrt{1 + 4\chi_{\text{c}}^2\,(\chi^2 - 1)}}{2}}\ ,$$

а следовательно, и плотность плазмы. Эта формула легко получается из соотношения $\chi\,\sqrt{\lambda} = 1$.

Таблица 1

χ	$\lvert a_0\rvert$ (из (20))	$\lvert a_0\rvert$ (из (16))
0,010	1,0000	1,0000
0,035	0,0901	0,0901
0,060	0,1460	0,1461
0,085	0,2362	0,2367
0,110	0,3196	0,3206
0,135	0,3952	0,3970
0,160	0,4631	0,4658
0,185	0,5233	0,5271
0,210	0,5761	0,5811
0,235	0,6222	0,6285
0,260	0,6623	0,6698
0,285	0,6969	0,7057
0,310	0,7267	0,7367
0,335	0,7522	0,7635
0,360	0,7738	0,7863
0,385	0,7916	0,8054

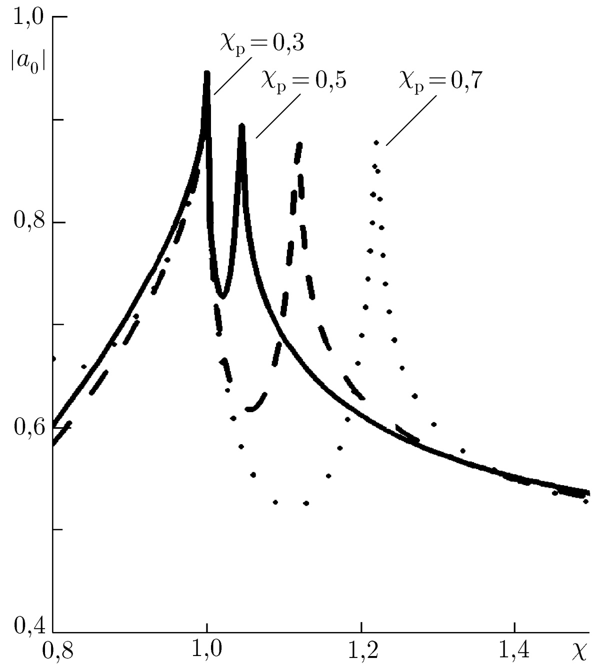

Рис. 4

Были обнаружены диапазоны изменения частотного параметра χ ($\alpha^- < \chi < \chi_{\text{c}}$), в которых даже при очень узких щелях решётки электромагнитное поле плоской волны проникает в плазменную среду (модуль коэффициента отражения $|a_0| \le 0{,}18$). Этот эффект наблюдается, например, когда $0{,}02 < \chi < 0{,}06$, для следующих параметров структуры: $\chi_{\text{p}} = 0{,}1$, $\chi_{\text{c}} = 0{,}3$; $0{,}4$; $0{,}5$, $d/l = 0{,}0001$ (см. рис. 5). При указанных значениях χ_{c} в диапазоне $0{,}02 < \chi < 0{,}06$ имеют место ярко выраженный минимум коэффициента отражения. Проведённые исследования характера зависимости $|a_0|$ от χ при $\chi_{\text{p}} = 0{,}1$, $\chi_{\text{c}} = 0{,}5$ и различных размерах щели решётки $d/l = 0{,}0001$; $0{,}001$; $0{,}01$; $0{,}1$ показали, что в указанном выше частотном диапазоне, несмотря на очень узкие щели ре-

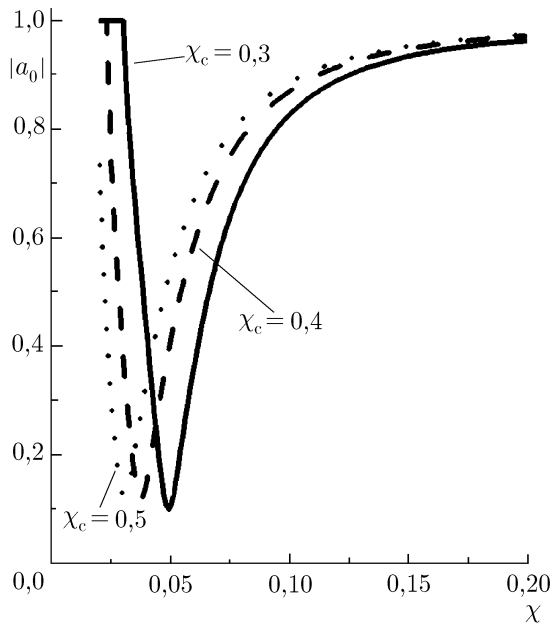

Рис. 5

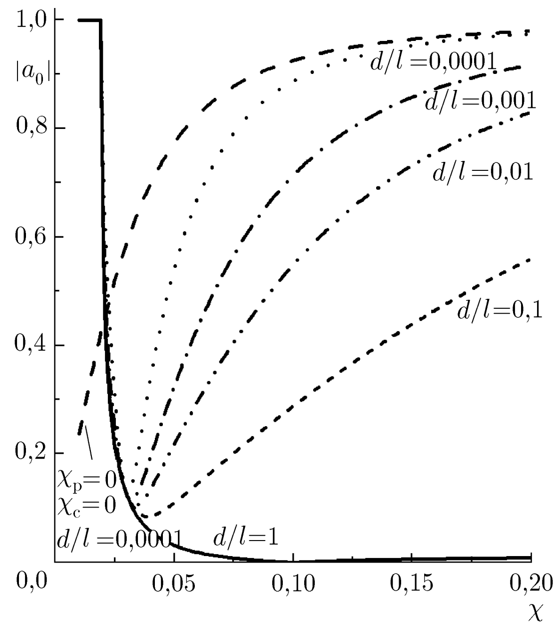

Рис. 6

шётки, наблюдается существенное различие модуля коэффициента отражения решётки в свободном пространстве от соответствующих значений $|a_0|$ решётки с плазменной средой (см. рис. 6). Как известно [14], в длинноволновой области решётка является практически прозрачной для плоской H-поляризованной волны, иными словами, в данном диапазоне частот модуль коэффициента отражения близок к нулю. С увеличение частотного параметра модуль коэффициента отражения $|a_0|$ быстро увеличивается, и при $\chi \to 1$ значение $|a_0|$ близко к единице. В случае же наличия плазменного полупространства существуют диапазоны изменения χ, когда даже при очень узких щелях модуль коэффициента отражения $|a_0|$ может быть существенно меньше, чем модуль коэффициента отражения решётки в свободном пространстве. Отметим также, что при отсутствии дифракционной решётки минимумы $|a_0|$ не наблюдаются (см. сплошную кривую на рис. 6, соответствующую $d/l = 1$). Кривая, характеризующая зависимость модуля коэффициента отражения самого́ плазменного полупространства $|a_0| = |\sqrt{\lambda} - 1|/|\sqrt{\lambda} + 1|$ от χ при $\chi > \beta^-$ с увеличением частоты монотонно убывает. Следует отметить, что при этом она является, в некотором смысле, огибающей минимальных значений коэффициента отражения решётки с плазменной средой при различных параметрах d/l и фиксированных плазменных параметрах χ_p и χ_c.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, задача дифракции плоской электромагнитной волны на ленточной металлической решётке с магнитоактивной плазмой сведена к системе парных сумматорных уравнений специального вида, либо, иными словами, к задаче сопряжения аналитических функций на дуге единичной окружности (задаче Римана—Гильберта) с коэффициентом сопряжения, отличным от -1. Методом аналитической регуляризации, т. е. построением в замкнутой форме регуляризатора для такого класса систем на основе решения краевой задачи Римана—Гильберта, получена бесконечная система линейных алгебраических уравнений второго рода с матричным оператором Гильберта—Шмидта в пространстве l_2, эквивалентная исходной краевой задаче. В длинноволновой области для коэффициента отражения (прохождения) получена приближённая формула.

Проведён численный анализ поведения коэффициента отражения для исследуемой электродинамической структуры при изменении её геометрических и плазменных параметров.

ПРИЛОЖЕНИЕ

$$A_m = \begin{cases} \dfrac{P_{nm}(\theta) - P_n(\beta,\theta)P_{0m}(\theta)}{n} + \dfrac{W_m^n(\beta,\theta) - P_n(\beta,\theta)W_m^0(\beta,\theta)}{n}\,, & n \neq 0; \\ -[P_{\sigma m}(\theta) + \exp(-2\beta\theta)R_\sigma(\beta,\theta)P_{0m}(\theta)] - \\ \qquad - [W_m^\sigma(\beta,\theta) + \exp(-2\beta\theta)R_\sigma(\beta,\theta)W_m^0(\beta,\theta)], & n = 0, m \neq 0; \\ 2\,(1 - d/l)\,\exp(-2\beta\theta)R_\sigma(\beta,\theta)\,\dfrac{\varepsilon_2}{1+\varepsilon_1-\varepsilon_2} - \\ \quad - \dfrac{\exp(-\pi\beta)}{2\,\mathrm{ch}(\pi\beta)}\,[\exp(-2\beta\theta)R_\sigma(\beta,\theta) + \exp(2\beta\theta)R_\sigma(-\beta,\theta)], & n = 0, m = 0. \end{cases}$$

Здесь

$$P_{nm}(\theta) = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 - 1} \times \begin{cases} 1 - d/l, & m = n; \\ \dfrac{\sin[(n-m)\,\theta]}{(n-m)\,\pi}\,, & m \neq n, \end{cases}$$

$$W_m^n(\beta,\theta) = \frac{\exp(-\pi\beta)}{2\,\mathrm{ch}(\pi\beta)} \begin{cases} 0, & m = n = -1; \\ \exp(2\beta\theta)\,\dfrac{n+1}{n-m}\,[P_n(\beta,\theta)P_{m+1}(\beta,\theta) - P_{n+1}(\beta,\theta)P_m(\beta,\theta)], & n \neq m; \\ \displaystyle\sum_{s=0}^{m+1} \nu_{m+1-s}(\beta,\theta)P_{s-m-1}(-\beta,\theta), & n = m \geq 0; \\ -\displaystyle\sum_{s=0}^{-m-1} \nu_{-m-s-1}(-\beta,\theta)P_{s+m+1}(\beta,\theta), & n = m \leq -1, \end{cases}$$

$$P_{\sigma m}(\theta) = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 - 1} \times \begin{cases} \left(1 - \dfrac{d}{l}\right)\dfrac{\cos\theta}{m} - \dfrac{1}{\pi}\,\dfrac{\sin(m\theta)}{m^2}\,, & m \neq 0; \\ 0, & m = 0, \end{cases}$$

$$R_\sigma(\beta,\theta) = \sum_{\substack{n=-\infty,\\ n\neq 0}}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}\,P_{n-1}(-\beta,\theta),$$

$$W_m^\sigma(\beta,\theta) = \frac{\exp(-\pi\beta)}{2\,\mathrm{ch}(\pi\beta)} \begin{cases} -\nu_1(\beta,\theta)R_\sigma(\beta,\theta) + \exp(2\beta\theta)R_\sigma(-\beta,\theta), & m = 0; \\ -\nu_{m+1}(\beta,\theta)R_\sigma(\beta,\theta) + \dfrac{1}{m}\,[P_m(\beta,\theta) - \exp(2\beta\theta)P_{m-1}(\beta,\theta)], & m > 0; \\ [\cos\theta - 2\beta\sin\theta - \exp(-2\beta\theta)] + \\ \qquad + R_\sigma(\beta,\theta)\,[\exp(-2\beta\theta)\cos\theta + 2\beta\exp(-2\beta\theta)\sin\theta - 1], & m = -1; \\ -\exp(-2\beta\theta)\nu_{-m}(-\beta,\theta)R_\sigma(\beta,\theta) - \\ \qquad - [P_{-m}(-\beta,\theta) - \exp(-2\beta\theta)P_{-m-1}(-\beta,\theta)]/m, & m < -1. \end{cases}$$

Коэффициенты $\nu_m(\beta,\theta)$ выражаются через полиномы Поллачека по следующим рекуррентным формулам:

$$\nu_0 = 1, \qquad \nu_1(\beta,\theta) = -\cos\theta + 2\beta\sin\theta, \qquad \nu_m(\beta,\theta)\big|_{m\geq 2} = P_m(\beta,\theta) - 2P_{m-1}(\beta,\theta)\cos\theta + P_{m-2}(\beta,\theta).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шестопалов В. П. Метод задачи Римана—Гильберта в теории дифракции и распространения электромагнитных волн. Харьков: Изд-во Харьковского ун-та, 1971. 400 с.
2. Гестрина Г. Н., Кобелев В. Н., Шестопалов В. П. Об одном методе решения некоторых краевых задач электродинамики: Препринт № 25 ИРЭ АН УССР. Харьков, 1973. 30 с.
3. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и её приложения. М.: Наука, 1967. 508 с.
4. Третьяков О. А., Шестопалов В. П. // Изв. вузов. Радиофизика. 1963. Т. 6, № 2. С. 353.
5. Адонина А. И., Щербак В. В. // ЖТФ. 1964. Т. 34. С. 168.
6. Барегамян В. А. // Радиотехника. Изд-во Харьковского ун-та, 1965. вып. 1. С. 108.
7. Хорошун В. В. // Радиотехника. Изд-во Харьковского ун-та, 1967. вып. 4. С. 20.
8. Хорошун В. В. // Радиотехника. Изд-во Харьковского ун-та, 1968. вып. 7. С. 32.
9. Хёнл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. М.: Мир, 1964. 428 с.
10. Шестопалов В. П., Тучкин Ю. А., Поединчук А. Е., Сиренко Ю. К. Новые методы решения прямых и обратных задач теории дифракции. Аналитическая регуляризация краевых задач электродинамики. Харьков: Основа, 1997. 285 с.
11. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962. 599 с.
12. Сегё Г. Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962. 500 с.
13. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1984. 750 с.
14. Шестопалов В. П., Кириленко А. А., Масалов С. А., Сиренко Ю. К. Резонансное рассеяние волн. Т. 1. Дифракционные решётки. Киев: Наукова думка, 1986. 232 с.
15. Кондратенко А. Н. Проникновение поля в плазму. М.: Атомиздат, 1979. 231 с.

Харьковский институт радиофизики и электроники
им. А. Я. Усикова НАН Украины, г. Харьков, Украина

Поступила в редакцию
22 августа 2003 г.

DIFFRACTION OF A PLANE ELECTROMAGNETIC WAVE BY A METAL GRATING WITH A MAGNETOPLASMA

A. V. Brovenko, P. N. Melezhik, and A. E. Poyedinchuk

Within the framework of a rigorous formulation, we solve the problem of diffraction of a plane H-polarized electromagnetic wave by a perfectly conducting, periodic strip grating located on the boundary of half-space filled with a homogeneous cold electron magnetoplasma. The numerical results are presented.

УДК 537.521.7+621.385.6

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ДВУХСТОРОННЕГО МУЛЬТИПАКТОРНОГО РАЗРЯДА

Н. К. Вдовичева, А. Г. Сазонтов, В. Е. Семёнов

Развита статистическая теория вторично-эмиссионного разряда (ВЭР), учитывающая энергетическое распределение вторичных электронов и позволяющая количественно описать начальную стадию развития двухстороннего мультипактора. Для произвольной плотности вероятности нормальных составляющих скорости вылета и расстояния между стенками, ограничивающих плазму СВЧ разряда, построено аналитическое решение для функции распределения электронов по временам пролёта. Проводимое рассмотрение опирается на результаты детального исследования условий достижения электроном противоположной поверхности. С учётом эффектов разброса тепловых скоростей выведено рекуррентное соотношение между функциями распределения электронов по фазам эмиссии и сформулировано общее интегральное уравнение, с помощью которого определены установившееся стационарное распределение и порог возникновения ВЭР.

ВВЕДЕНИЕ

Явление резонансной вторичной эмиссии (получившее в англоязычной литературе название мультипактора) было впервые обнаружено и описано Фарнсвортом [1] в 1934 г. Оно проявляется в лавинообразном увеличении числа свободных электронов между двумя эмитирующими металлическими пластинами, находящихся под воздействием внешнего переменного электрического поля (при этом в разряде эффективно участвуют лишь электроны, времена пролёта которых через зазор равны нечётному числу полупериодов высокочастотного поля). Поскольку такого рода разряд, как правило, является мешающим фактором при работе многих электронных приборов и систем (таких, как мощные микроволновые генераторы, ускорители и системы космической связи), то за последние 50 лет он стал предметом интенсивного исследования (о чём свидетельствуют обзоры [2, 3]).

Изучению резонансного вторично-эмиссионного разряда (ВЭР) посвящено значительное число публикаций (см., например, [4–7]). Анализ, проводимый в этих работах, опирается на ключевое предположение, согласно которому начальная скорость вылета вторичных электронов либо неизменна, либо составляет фиксированную долю $1/k$ от скорости прилёта первичных электронов. Однако в рамках детерминированных моделей расчёта мультипакторного разряда не удаётся описать наблюдаемое на опыте перекрытие резонансных зон [5].[1] Для правильного объяснения и интерпретации экспериментальных результатов необходимо учесть эффекты теплового разброса начальных скоростей вылета электронов.

Из качественных соображений ясно, что наличие случайной составляющей стартовой скорости вызывает появление флуктуаций времен пролёта, что может привести к срыву резонансного режима. Особенно сильно эффекты теплового разброса проявляются при больших временах пролёта электронов, относительно небольшие флуктуации которых могут быть сравнимы с периодом

[1] Отметим, что помимо чисто теоретического интереса, вопрос о структуре резонансных зон имеет и принципиальное важное практическое значение, например, для систем космической связи. Так, если зоны обычного мультипакторного разряда являются изолированными, то использование модулированного излучения при определённых условиях позволяет подавить нежелательный разряд (см., например, [8]); в противном случае этого сделать не удаётся.

высокочастотного поля. В этой связи укажем на работы [9–11], в которых для указанного предельного случая была построена модель полифазной стадии мультипакторного разряда. В частности, в рамках такой теории было установлено, что для поддержания ВЭР с бо́льшими временами пролёта требуется весьма значительный коэффициент вторичной электронной эмиссии, превышающий 1,96.

Проблема теплового разброса для меньших времён пролёта также неоднократно обсуждалась в литературе [12–17], но в виду её сложности конкретные результаты были получены в основном методами численного моделирования, выполненного для весьма ограниченного набора параметров задачи.

Таким образом, к настоящему времени не существует последовательной статистической теории мультипакторного разряда, учитывающей энергетическое распределение вторичных электронов и позволяющей описать начальную стадию развития ВЭР при произвольном расстоянии между ограничивающими его стенками. Развитию такой теории и посвящена данная работа. Следует также отметить, что построенная ниже аналитическая модель представляет значительный интерес и для численного моделирования ВЭР, т. к. позволяет существенно сократить трудоёмкость детального расчёта условий возникновения мультипактора.

1. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим движение электрона под действием высокочастотного электрического поля $E = E_0 \sin(\omega t)$ между двумя плоскопараллельными электродами, разделёнными расстоянием L. На начальной стадии (когда действием пространственного заряда можно пренебречь) движение электронов в зазоре может быть описано уравнением

$$m\ddot{x} = eE_0 \sin(\omega t), \tag{1}$$

в котором m и e — масса и заряд электрона соответственно (ось x перпендикулярна эмитирующей поверхности и направлена вдоль вектора напряжённости электрического поля).

Предположим, что в начальный момент времени $t = t_\mathrm{s}$

$$x|_{t=t_\mathrm{s}} = 0, \qquad \dot{x}|_{t=t_\mathrm{s}} = v_\perp, \tag{2}$$

где $v_\perp$ — нормальная составляющая начальной скорости. Интегрируя (1) с учётом (2), нетрудно найти

$$\begin{gathered}\dot{x}(t) = v_\perp + v_\omega\,[\cos(\omega t_\mathrm{s}) - \cos(\omega t)],\\ x(t) = [v_\perp + v_\omega \cos(\omega t_\mathrm{s})]\,(t - t_\mathrm{s}) + \frac{v_\omega}{\omega}\,[\sin(\omega t_\mathrm{s}) - \sin(\omega t)],\end{gathered} \tag{3}$$

где $v_\omega = eE_0/(m\omega)$.

Траектория $x(t)$ пересекает границу $x = L$ в момент времени t_i, определяемый как наименьший корень трансцендентного уравнения

$$L = [v_\perp + v_\omega \cos(\omega t_\mathrm{s})]\,(t_\mathrm{i} - t_\mathrm{s}) + \frac{v_\omega}{\omega}\,[\sin(\omega t_s) - \sin(\omega t_\mathrm{i})]. \tag{4}$$

Введём следующие безразмерные переменные:

$$\xi = \omega x/v_\omega, \qquad \varphi = \omega t, \qquad \varphi_\mathrm{s} = \omega t_\mathrm{s}, \qquad \varphi_\mathrm{i} = \omega t_\mathrm{i}.$$

В этих переменных траектория движения электрона запишется следующим образом:

$$\xi(\varphi, \varphi_\mathrm{s}, u) = (u + \cos\varphi_\mathrm{s})\,(\varphi - \varphi_\mathrm{s}) + \sin\varphi_\mathrm{s} - \sin\varphi, \tag{5}$$

а уравнение (4) примет вид

$$\lambda = (u + \cos\varphi_{\rm s})\,(\varphi_{\rm i} - \varphi_{\rm s}) + \sin\varphi_{\rm s} - \sin\varphi_{\rm i}, \tag{6}$$

где $\lambda = \omega L/v_\omega$, а $u = v_\perp/v_\omega$. Если ввести переменную $\tau = \varphi_{\rm i} - \varphi_{\rm s}$, имеющую смысл безразмерного времени пролёта, то вместо (6) получим

$$\lambda = (u + \cos\varphi_{\rm s})\,\tau + \sin\varphi_{\rm s} - \sin(\varphi_{\rm s} + \tau). \tag{7}$$

Уравнения (5)–(7) являются исходными для последующего анализа.

2. ТРАЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ

Прежде всего выясним условия, при выполнении которых электроны, родившиеся на первой стенке, могут её покинуть и достичь противоположной поверхности. Соответствующие ограничения на параметры задачи могут быть найдены с помощью траекторного анализа.

Очевидно, что участвовать в разряде будут лишь электроны, вылетевшие (со скоростью u) в определённом («благоприятном») диапазоне стартовых фаз $\varphi_{\rm s}$. Так, если при выбранном $\varphi_{\rm s}$ полная постоянная составляющая скорости электрона $u + \cos\varphi_{\rm s}$ направлена от эмитирующей поверхности, а траектория движения (5) всюду неотрицательна, то такое значение $\varphi_{\rm s}$ будет заведомо принадлежать искомому диапазону. Формально этот критерий может быть сформулирован в виде системы неравенств:

$$\xi(\varphi, \varphi_{\rm s}, u) = (u + \cos\varphi_{\rm s})\,(\varphi - \varphi_{\rm s}) + \sin\varphi_{\rm s} - \sin\varphi \geq 0, \tag{8а}$$

$$u + \cos\varphi_{\rm s} > 0. \tag{8б}$$

Требуется найти такие $\varphi_{\rm s}$ (зависящие от u как от параметра), при которых неравенства (8) справедливы при любых $\varphi > \varphi_{\rm s}$.

Введём новую переменную ϕ, связанную с φ соотношением: $\phi = \varphi - \varphi_{\rm s}$. Тогда, учитывая, что $\sin\varphi = \sin(\varphi_{\rm s} + \phi) = \sin\varphi_{\rm s}\cos\phi + \cos\varphi_{\rm s}\cos\phi$, а $\phi > 0$, неравенство (8а) может быть переписано в эквивалентном виде:

$$u + a(\phi)\cos\varphi_{\rm s} + b(\phi)\sin\varphi_{\rm s} \geq 0, \tag{9}$$

где

$$a(\phi) = 1 - \frac{\sin\phi}{\phi}\,, \qquad b(\varphi) = \frac{1 - \cos\phi}{\phi}\ .$$

Подчеркнём, что при $\phi > 0$ справедливы неравенства $a(\phi) > 0$ и $b(\phi) \geq 0$.

Прежде всего обратим внимание, что $\varphi_{\rm s}$ входит в (8б) и (9) лишь в качестве аргумента тригонометрических функций, поэтому без ограничения общности основной областью изменения $\varphi_{\rm s}$ может быть выбран отрезок $[0, 2\pi]$. Попутно отметим, что при одновременном выполнении условий $\cos\varphi_{\rm s} > 0$ и $\sin\varphi_{\rm s} \geq 0$ неравенство (9) (совместно с (8б)) будет справедливо при всех $u \geq 0$. Следовательно, для любого неотрицательного u интервал стартовых фаз $[0, \pi/2)$ всегда является «благоприятным».

При $\varphi_{\rm s} = \pi/2$ и $u = 0$, когда постоянная составляющая скорости равна нулю, траектория движения является периодической функцией ϕ, причём $\max\xi = 2$. В этом случае электрон сможет достичь верхней границы, если $\lambda < 2$. При $\lambda > 2$ (и $\varphi_{\rm s} = \pi/2$) к противоположной поверхности долетят электроны с $u > 0$.

Проанализируем теперь неравенство (9), считая, что $\varphi_{\rm s}$ принадлежит интервалу $(\pi/2, 2\pi)$. Вначале найдём максимальную скорость $u_{\max}$, выше которой указанное неравенство выполняется при любых $\varphi_{\rm s}$. Для этого воспользуемся следующим соотношением:

$$a(\phi)\cos\varphi_{\rm s} + b(\phi)\sin\varphi_{\rm s} = A(\phi)\cos[\varphi_{\rm s} - \theta(\phi)],$$

где

$$A(\phi) = \sqrt{a^2(\phi) + b^2(\phi)}\,, \qquad \operatorname{tg}\theta(\phi) = b(\phi)/a(\phi).$$

Тогда (9) примет вид

$$u + A(\phi)\cos[\varphi_{\rm s} - \theta(\phi)] \geq 0.$$

Приведённое неравенство будет заведомо справедливо, если $u > u_{\max} = \max A(\phi)$. Прямым вычислением нетрудно убедиться, что максимум $A(\phi)$ достигается [2] при $\phi = 4{,}0856$, при этом $A(\phi = 4{,}0856) = 1{,}2596$. В точке максимума величина $\varphi_{\rm s}$, находящаяся в интервале $(\pi/2, 2\pi)$, равна

$$\varphi_{\rm s} = \theta(\phi)\big|_{\phi=4{,}0856} = \operatorname{arctg}\left[\frac{a(\phi)}{b(\phi)}\right]\Bigg|_{\phi=4{,}0856} + \pi = 3{,}455 \text{ рад} \approx 197{,}957^\circ.$$

Таким образом, если $u > u_{\max} = 1{,}2596$, то благоприятными являются все стартовые фазы $\varphi_{\rm s}$, принадлежащие интервалу $[0, 2\pi]$.

Рассмотрим теперь случай, когда $0 < u < u_{\max}$. Очевидно, что траектория

$$\xi(\phi, \varphi_{\rm s}, u) = (u + \cos\varphi_{\rm s})\,\phi + \sin\varphi_{\rm s} - \sin(\varphi_{\rm s} + \phi),$$

выйдя из точки $\xi = 0$, снова не пересечёт уровень $\xi = 0$, если первый минимум функции ξ по ϕ будет не отрицательным (см. рис. 1). В точке минимума $\phi = \phi_{\min}$ скорость движения электрона обращается в нуль:

$$u + \cos\varphi_{\rm s} - \cos(\varphi_{\rm s} + \phi_{\min}) = 0.$$

Отсюда

$$\phi_{\min} = -\varphi_{\rm s} + 2\pi + \arccos(u + \cos\varphi_{\rm s}).$$

Следовательно, интервал благоприятных стартовых фаз будет определяться из совместного решения неравенства $\xi(\phi_{\min}, \varphi_{\rm s}, u) \geq 0$ и (8б):

$$(u + \cos\varphi_{\rm s})\,[2\pi + \arccos(u + \cos\varphi_{\rm s}) - \varphi_{\rm s}] + \sin\varphi_{\rm s} - \sin[\arccos(u + \cos\varphi_{\rm s})] \geq 0,$$

$$u + \cos\varphi_{\rm s} > 0. \tag{10}$$

Простой анализ показывает, что решением данной системы является диапазон

$$\varphi_{\rm s} \in (\pi/2, \varphi_{\rm s}^{+}(u)] \cup [\varphi_{\rm s}^{-}(u), 2\pi], \tag{11}$$

где $\varphi_{\rm s}^{+}(u)$ и $\varphi_{\rm s}^{-}(u)$ соответствуют таким $\varphi_{\rm s}$, при которых левая часть верхнего соотношения в (10) обращается в нуль. Результаты численных расчётов $\varphi_{\rm s}^{+}(u)$ и $\varphi_{\rm s}^{-}(u)$ показаны на рис. 2. Они допускают следующую интерпретацию: для каждого $\varphi_{\rm s} \in (\pi/2, 2\pi)$ существует минимальная скорость вылета $u = u_{\min}(\varphi_{\rm s})$, начиная с которой электрон может достигнуть противоположного электрода. Отметим, что если $u < 0{,}6$, то с достаточно большой точностью зависимость $u_{\min}$ от $\varphi_{\rm s}$ можно аппроксимировать в виде

$$u_{\min}(\varphi_{\rm s}) = \begin{cases} -\cos\varphi_{\rm s}, & \varphi_{\rm s} \in [90^\circ, 125^\circ]; \\ -\cos\varphi_{\rm s} - \cos(\varphi_{\rm s}/2), & \varphi_{\rm s} \in [280^\circ, 360^\circ]. \end{cases}$$

[2] Это значение соответствует корню уравнения $A'_\phi(\phi) = 0$, или $2\,(\phi\sin\phi + \cos\phi - 1) - \phi^2\cos\phi = 0$.

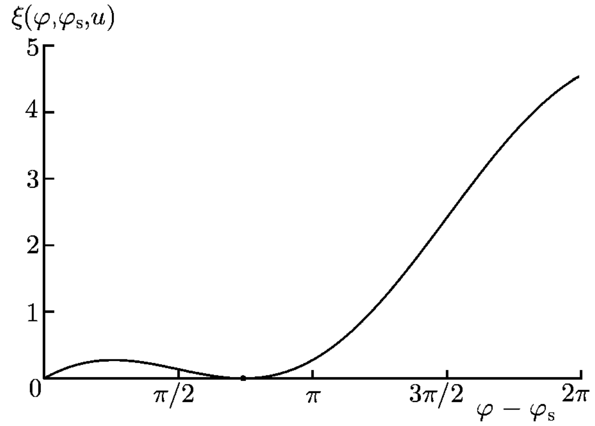

Рис. 1. Траектория движения электрона с касанием нижней границы при $\varphi_s = 3\pi/2$, $u = 0{,}7246$

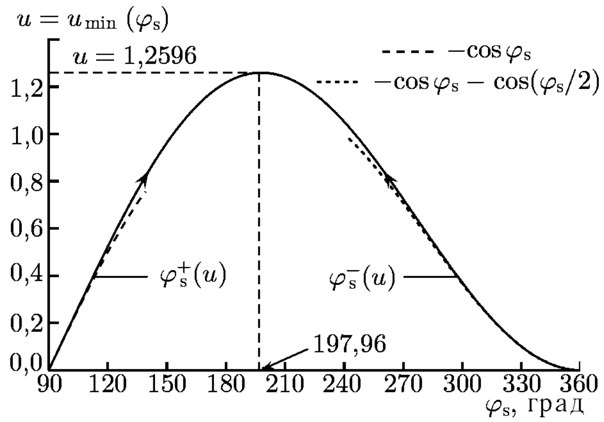

Рис. 2. Зависимости φ_s^+ и φ_s^- от безразмерной скорости вылета электрона u и их аппроксимации

Обратное представление φ_s через u выглядит следующим образом:

$$\varphi_s^+(u) = \pi - \arccos(u), \qquad \varphi_s^-(u) = 2\pi - \arccos[(1+\sqrt{9-8u})/4 - u]. \tag{12}$$

Если же $u < 0{,}2$, то возможно дальнейшее упрощение формул (12) путём разложения обратных тригонометрических функций в ряд по малому параметру u, при этом для $\varphi_s^+(u)$ и $\varphi_s^-(u)$ нетрудно получить $\varphi_s^+(u) = \pi/2+u$, $\varphi_s^-(u) = 2\pi-\sqrt{8u/3}$. Последние зависимости согласуются с найденными ранее в работе [8].

При определённых параметрах задачи условие (8а) может оказаться излишне жёстким. Так, для относительно небольших значений λ (при $\lambda < 2$) возможна ситуация, когда траектория движения электрона (с $\varphi_s \in (\pi/2, 2\pi)$), выйдя из точки $\xi = 0$, пересекает уровень $\xi = \lambda$ в области своего первого максимума, хотя аналитическое продолжение этой траектории формально попадает в область, где $\xi < 0$ (см. рис. 3). В рассматриваемом случае минимальная скорость вылета может быть найдена из решения трансцендентного уравнения $\xi(\phi_{\max}, \varphi_s, u_{\min}) = \lambda$, в котором $\phi_{\max}$ — положение первого максимума траектории, равное

$$\phi_{\max} = -\varphi_s + 2\pi - \arccos(u + \cos\varphi_s).$$

Таким образом, если для заданного $\varphi_s \in (\pi/2, 2\pi)$ уравнение

$$(u+\cos\varphi_s)\,[2\pi - \arccos(u+\cos\varphi_s) - \varphi_s] + \sin\varphi_s + \sin[\arccos(u+\cos\varphi_s)] = \lambda \tag{13}$$

имеет положительное решение $0 < u = u_{\min} < 1{,}2596$ (и при этом $\min\xi \le 0$), то при всех $u > u_{\min}$ электроны смогут долететь до верхней границы и также участвовать в разряде.

В качестве примера на рис. 4 представлены результаты вычислений зависимости $u_{\min}$ от φ_s при $\lambda = 1$. При данном λ решение уравнения (13), удовлетворяющее условию $\min\xi \le 0$, существует в интервале φ_s от $111{,}1^\circ$ до $207{,}34^\circ$.[3] В диапазоне $\varphi_s \in (207{,}34^\circ, 360^\circ)$ минимальная скорость вылета определяется с помощью (10).

[3] Значение $\varphi_s = 111{,}1^\circ$ является корнем уравнения (13) при $u = 0$ и $\lambda = 1$. При $\varphi_s = 207{,}34^\circ$, $u_{\min} = 1{,}2483$ первый максимум траектории движения достигает уровня $\xi = 1$, а её первый минимум касается границы $\xi = 0$. Указанные параметры находятся из решения следующей системы уравнений:

$$(u+\cos\varphi_s)\,[2\pi - \arccos(u+\cos\varphi_s) - \varphi_s] + \sin\varphi_s + \sin[\arccos(u+\cos\varphi_s)] = 1,$$

$$(u+\cos\varphi_s)\,[2\pi + \arccos(u+\cos\varphi_s) - \varphi_s] + \sin\varphi_s - \sin[\arccos(u+\cos\varphi_s)] = 0.$$

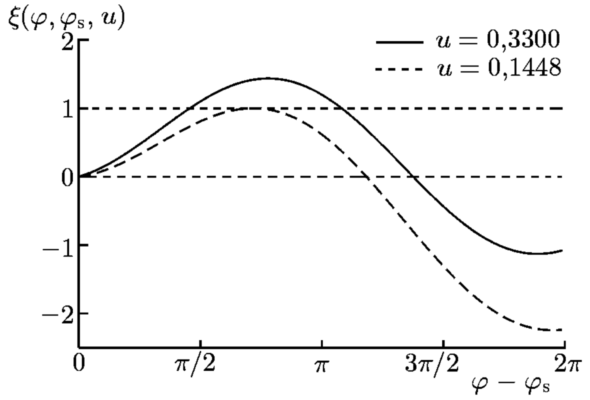

Рис. 3. Траектория движения, пересекающая заданный уровень $\lambda = 1$ в области своего первого максимума (сплошная линия) с последующим попаданием в область $\xi < 0$. Штриховая линия соответствует траектории, касающейся указанного уровня

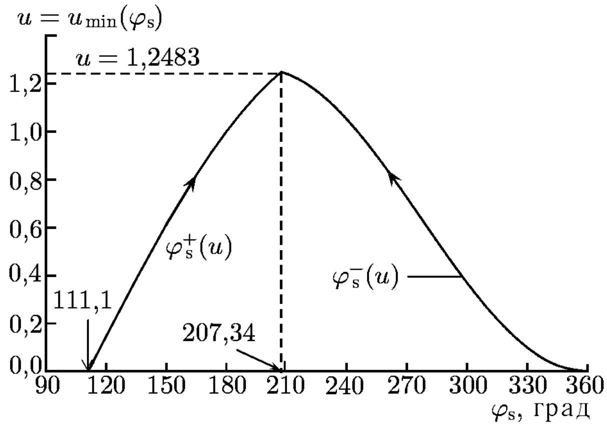

Рис. 4. Зависимость $u_{\min}$ от $\varphi_{\rm s}$ при $\lambda = 1$

Проведённое выше рассмотрение может быть обобщено для определения благоприятного интервала времён прилёта $\varphi_{\rm i}$. Пренебрегая временно́й дисперсией рождения вторичных электронов, т. е. считая что $t_{\rm i}$ совпадает со временем рождения вторичных электронов (вылетающих с некоторой скоростью u_1, в общем случае отличной от u), для соответствующей траектории движения (выходящей при $\varphi = \varphi_{\rm i}$ из точки $\xi = \lambda$) нетрудно найти

$$\xi(\varphi,\varphi_{\rm i},u_1) = \lambda - [(u_1 - \cos\varphi_{\rm i})\,(\varphi - \varphi_{\rm i}) + \sin\varphi - \sin\varphi_{\rm i}].$$

В данной ситуации необходимым условием, при котором образующиеся при ударе вторичные электроны могут покинуть вторую стенку, служит система неравенств $\xi(\varphi,\varphi_{\rm i},u_1) \le \lambda$, $\cos\varphi_{\rm i} - u_1 < 0$. Полагая $\phi = \varphi - \varphi_{\rm i}$ и $\psi_{\rm s} = \varphi_{\rm i} - \pi N$, где $N = 2n-1$, n — натуральное число, соответствующее условие перепишется в виде

$$(u_1 + \cos\psi_{\rm s})\,\phi + \sin\psi_{\rm s} - \sin(\psi_{\rm s} + \phi) \ge 0, \qquad \phi > 0;$$

$$u_1 + \cos\psi_{\rm s} > 0.$$

Последняя система неравенств идентична исследованной выше (отличие состоит в замене $\varphi_{\rm s} \to \psi_{\rm s}$ и $u \to u_1$). Следовательно, при определении благоприятного (с точки зрения вторичной эмиссии) интервала возможных значений параметра $\psi_{\rm s}$, имеющего смысл стартовой фазы вылета электрона с противоположной поверхности, можно воспользоваться готовыми результатами для $\varphi_{\rm s}$. Что касается благоприятного времени прилёта $\varphi_{\rm i}$, то оно связано с $\psi_{\rm s}$ соотношением $\varphi_{\rm i} = \psi_{\rm s} + \pi N$.

3. РЕЗОНАНСНОЕ ПРОХОЖДЕНИЕ ЭЛЕКТРОНОВ ЧЕРЕЗ ЗАЗОР

Прежде чем приступить к исследованию флуктуационных эффектов, связанных с разбросом начальных скоростей, опишем вкратце основные выводы классической теории вторично-эмиссионного разряда, согласно которой скорость вылета электронов считается постоянной детерминированной величиной: $u_1 = u = \text{const}$.

Обозначим через $\varphi_\mathrm{s}^{(l)}$ и $\varphi_\mathrm{i}^{(l)}$ соответственно фазу эмиссии и фазу прилёта электрона при его l-м прохождении через зазор. Тогда на основании (6) имеем

$$\lambda = (u + \cos\varphi_\mathrm{s}^{(l)})\,(\varphi_\mathrm{i}^{(l)} - \varphi_\mathrm{s}^{(l)}) + \sin\varphi_\mathrm{s}^{(l)} - \sin\varphi_\mathrm{i}^{(l)}. \tag{14а}$$

В свою очередь, как следует из траекторного анализа, для того, чтобы вновь родившиеся вторичные электроны (с фазой $\varphi_\mathrm{s}^{(l+1)}$) оказались в тех же условиях, что и их предшественники, необходимо равенство времени пролёта нечётному числу полупериодов поля:

$$\varphi_\mathrm{i}^{(l)} = \varphi_\mathrm{s}^{(l+1)} + \pi N, \qquad N = 1, 3, 5, \ldots\,. \tag{14б}$$

Таким образом, комбинируя (14а) и (14б), получим

$$\lambda = (u + \cos\varphi_\mathrm{s}^{(l)})\,(\varphi_\mathrm{s}^{(l+1)} - \varphi_\mathrm{s}^{(l)} + \pi N) + \sin\varphi_\mathrm{s}^{(l)} + \sin\varphi_\mathrm{s}^{(l+1)}. \tag{15}$$

Уравнение (15) можно рассматривать как отображение, связывающее $\varphi_\mathrm{s}^{(l+1)}$ с $\varphi_\mathrm{s}^{(l)}$. Неподвижная точка этого отображения $\varphi_\mathrm{s}^{(l+1)} = \varphi_\mathrm{s}^{(l)} = \varphi^\mathrm{st}$ соответствует установившемуся монофазному распределению и находится из соотношения

$$\lambda = (u + \cos\varphi^\mathrm{st})\,\pi N + 2\sin\varphi^\mathrm{st}, \tag{16}$$

вытекающему из (15). Существование такого монофазного режима возможно лишь при условии его устойчивости (разумеется, значение φ^st должно принадлежать также благоприятному диапазону стартовых фаз).

Полагая $\varphi_\mathrm{s}^{(l+1)} = \varphi^\mathrm{st} + \delta\varphi_\mathrm{s}^{(l+1)}$, $\varphi_\mathrm{s}^{(l)} = \varphi^\mathrm{st} + \delta\varphi_\mathrm{s}^{(l)}$, из (15) нетрудно получить (см., например, [15, 18]), что φ^st устойчиво к малым возмущениям, если

$$K = \left|\frac{\delta\varphi_\mathrm{s}^{(l+1)}}{\delta\varphi_\mathrm{s}^{(l)}}\right| = \left|\frac{\pi N\sin\varphi^\mathrm{st} + u}{2\cos\varphi^\mathrm{st} + u}\right| < 1. \tag{17}$$

Условия $K = 1$ и $K = -1$ определяют предельные значения стартовых фаз φ_+^st и φ_-^st, при которых система может находиться в стационарном состоянии. Так, при $K = 1$ из (17) имеем

$$\varphi_+^\mathrm{st} = \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\pi N}\right). \tag{18}$$

Подстановка (18) в (16) даёт $\lambda = \lambda_\mathrm{max} = \sqrt{(\pi N)^2 + 4} + \pi N u$. Последняя формула описывает положение верхней границы зоны разряда.

Далее, при $K = -1$ из (17) для φ_-^st несложно найти

$$\varphi_-^\mathrm{st} = 2\pi - \arcsin\left(\frac{2u}{\sqrt{(\pi N)^2 + 4}}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\pi N}\right). \tag{19}$$

Параметр λ, соответствующий предельному значению (19), равен [17]

$$\lambda = \lambda\big(\varphi_-^\mathrm{st}\big) = \frac{(\pi N)^2 - 4}{(\pi N)^2 + 4}\left[\sqrt{(\pi N)^2 + 4\,(1 - u^2)} + \pi N u\right].$$

Однако приведённое выше выражение для λ служит оценкой положения нижней границы разряда лишь в определённом диапазоне u. Это связано с тем, что фаза φ_-^st (в отличии от φ_+^st) явным образом зависит от u, так что при некоторых скоростях вылета она может оказаться вне благоприятного диапазона стартовых фаз. (Напомним, что электрон, вылетевший с фазой $\varphi_{\rm s}$, близкой к 2π, достигнет противоположного электрода, если $\varphi_{\rm s}$ превосходит $\varphi_{\rm s}^{-}(u)$.) Следовательно, при заданном u стационарная фаза $\varphi^{\rm st}$, определяющая положение нижней границы зоны разряда, должна определяться из условия $\varphi^{\rm st} = \max\bigl(\varphi_{\rm s}^{-}(u), \varphi_{-}^{\rm st}\bigr)$, при этом $\lambda_{\min} = \max\bigl(\lambda(\varphi_{\rm s}^{-}(u)), \lambda(\varphi_{-}^{\rm st})\bigr)$. В частности, если для $\varphi_{\rm s}^{-}(u)$ воспользоваться приближённой формулой (12), то для $\lambda(\varphi_{\rm s}^{-}(u))$ нетрудно получить

$$\lambda(\varphi_{\rm s}^{-}(u)) = \frac{1}{4}\,(1+\sqrt{9-8u})\left[\pi N - \sqrt{6+8u-2\sqrt{9-8u}}\,\right].$$

Таким образом, в отсутствие флуктуационной составляющей скорости вылета разряд возможен в определённых дискретных зонах по λ, границы которых заключены в интервалах

$$\max\left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{4}\,(1+\sqrt{9-8u})\left[\pi N - \sqrt{6+8u-2\sqrt{9-8u}}\,\right], \\ \dfrac{(\pi N)^2-4}{(\pi N)^2+4}\left[\sqrt{(\pi N)^2+4\,(1-u^2)}+\pi N u\right] \end{array}\right\} < \lambda < \sqrt{(\pi N)^2+4}+\pi N u, \tag{20}$$

где $N = 1, 3, 5, \ldots$.

В реальных условиях, как подчёркивалось во введении, начальная скорость вылета электрона является случайной величиной. Поэтому описанный выше резонансный подход будет справедлив, если время пролёта между стенками настолько мало, что тепловой разброс стартовых скоростей не приведёт к большому разбросу по фазам прилёта. В общем же случае необходимо учитывать наличие флуктуационной составляющей скорости вылета электронов, которая может существенно повлиять на развитие ВЭР.

4. СТАТИСТИКА ВРЕМЁН ПРОЛЁТА

Предположим, что безразмерная скорость вылета u характеризуется заданной функцией распределения $F(u)$. Поскольку u случайна, то траектория движения электрона будет пересекать заданный уровень $\xi = \lambda$ в случайный момент времени τ. Задача состоит в том, чтобы выразить плотность вероятности наименьшего корня уравнения (7) (обозначим её $G(\tau \mid \varphi_{\rm s}; \lambda)$) через известное распределение $F(u)$.

Мы решим поставленную задачу, если найдём функцию $g(\tau \mid \varphi_{\rm s}; \lambda)$, связывающую случайную величину u с безразмерным временем пролёта τ:

$$u = g(\tau \mid \varphi_{\rm s}; \lambda), \qquad u \geq 0. \tag{21}$$

Если она известна, то искомая плотность вероятности равна

$$G(\tau \mid \varphi_{\rm s}; \lambda) = \left|\frac{{\rm d}g(\tau \mid \varphi_{\rm s}; \lambda)}{{\rm d}\tau}\right| F[g(\tau \mid \varphi_{\rm s}; \lambda)]. \tag{22}$$

Для построения $g(\tau \mid \varphi_{\rm s}; \lambda)$ возьмём вспомогательную функцию $g_0(\tau \mid \varphi_{\rm s}; \lambda)$, представляющую собой формальное решение уравнения (7) относительно u:

$$u = g_0(\tau \mid \varphi_{\rm s}; \lambda) = \frac{\lambda - \sin\varphi_{\rm s} + \sin(\varphi_{\rm s}+\tau)}{\tau} - \cos\varphi_{\rm s}. \tag{23}$$

В общем случае функция $g(\tau \mid \varphi_{\rm s};\lambda)$ получается из (23) устранением участков немонотонности и исключением интервала, где $g_0(\tau \mid \varphi_{\rm s};\lambda) < u_{\min}$ при заданных $\varphi_{\rm s}$ и λ. (Напомним, что если $\varphi_{\rm s} \in [0,\pi/2)$, то $u_{\min}=0$; для $\varphi_{\rm s} \in [\pi/2, 2\pi)$ в зависимости от λ $u_{\min}$ находится либо из (10), либо из (13).)

Обозначим через $\tau_{\max}$ значение τ, при котором $g_0(\tau \mid \varphi_{\rm s};\lambda)$ впервые достигает $u_{\min}(\varphi_{\rm s},\lambda)$. Величина $\tau_{\max}$, имеющая смысл максимального возможного времени пролёта электрона, является наименьшим корнем уравнения

$$g_0(\tau_{\max} \mid \varphi_{\rm s};\lambda) = u_{\min}(\varphi_{\rm s},\lambda).$$

Далее, внутри интервала $[0,\tau_{\max}]$ необходимо найти точки минимумов функции $g_0(\tau \mid \varphi_{\rm s};\lambda)$ (если таковые имеются). Обозначим их через $\tau_1,\tau_2,\ \dots\ ,\tau_m$ ($\tau_m \le \tau_{\max}$). Затем нужно провести от них горизонтальные отрезки вправо до первого пересечения с кривой $g_0(\tau \mid \varphi_{\rm s};\lambda)$. Обозначим соответствующие точки пересечения $\tau^{(1)},\tau^{(2)},\ \dots\ ,\tau^{(m)}$ ($\tau^m \leqslant \tau_{\max}$). Задав внутри интервалов $\tau \in \Delta_k = (\tau_k,\tau^{(k)})$, где $k=1,2,\ \dots\ ,m$, и при $\tau \geqslant \tau_{\max}$ функцию $g(\tau \mid \varphi_{\rm s};\lambda)$ постоянной и соответственно равной

$$g(\tau \mid \varphi_{\rm s};\lambda) = \begin{cases} \dfrac{\lambda-\sin\varphi_{\rm s}+\sin(\varphi_{\rm s}+\tau_k)}{\tau_k}-\cos\varphi_{\rm s}, & \tau_k \in \Delta_k; \\ \dfrac{\lambda-\sin\varphi_{\rm s}+\sin(\varphi_{\rm s}+\tau_{\max})}{\tau_{\max}}-\cos\varphi_{\rm s}, & \tau > \tau_{\max}, \end{cases} \tag{24а}$$

а вне интервалов Δ_k ($\tau \notin \bigcup\limits_k \Delta_k, \tau \le \tau_{\max}$) полагая

$$g(\tau \mid \varphi_{\rm s};\lambda) = \frac{\lambda-\sin\varphi_{\rm s}+\sin(\varphi_{\rm s}+\tau)}{\tau}-\cos\varphi_{\rm s}, \tag{24б}$$

мы завершим конструирование функции $g(\tau \mid \varphi_{\rm s};\lambda)$.

В результате исходя из (22) для искомой плотности вероятности получим

$$G(\tau \mid \varphi_{\rm s};\lambda) = \left|\frac{\lambda-\sin\varphi_{\rm s}+\sin(\varphi_{\rm s}+\tau)-\tau\cos(\varphi_{\rm s}+\tau)}{\tau^2}\right| \times \\ \times F\left[\frac{\lambda-\sin\varphi_{\rm s}+\sin(\varphi_{\rm s}+\tau)}{\tau}-\cos\varphi_{\rm s}\right]\chi\left(\tau;\bigcup_k \Delta_k\right)\,\theta(\tau;\tau_{\max}(\varphi_{\rm s}))\,, \tag{25}$$

где

$$\chi\left(\tau;\bigcup_k \Delta_k\right) = \begin{cases} 0, & \tau \in \bigcup\limits_k \Delta_k; \\ 1, & \tau \notin \bigcup\limits_k \Delta_k, \end{cases} \qquad \theta(\tau;\tau_{\max}) = \begin{cases} 0, & \tau > \tau_{\max}; \\ 1, & \tau \le \tau_{\max}. \end{cases}$$

Проиллюстрируем формулу (25) на конкретном примере. Для определённости в качестве $F(u)$ выберем максвелловское распределение:

$$F(u) = \frac{2v_\omega}{\sqrt{2\pi}\ v_T}\,\exp\!\left(-\frac{v_\omega^2u^2}{2v_T^2}\right), \qquad u \ge 0, \qquad \int\limits_0^\infty F(u)\,{\rm d}u = 1, \tag{26}$$

в котором v_T — тепловая скорость электронов.

Рассмотрим случай, когда $\lambda=\pi$, а $\varphi_{\rm s} = 75^\circ = 5\pi/12$ рад. При данном $\varphi_{\rm s}$ минимальная скорость вылета, при которой электрон сможет достигнуть противоположного электрода, равна нулю. Для указанных параметров задачи максимальное время пролёта $\tau_{\max}$, определяемое из решения уравнения

$$\frac{\lambda - \sin(5\pi/12) + \sin(5\pi/12 + \tau_{\max})}{\tau_{\max}} - \cos(5\pi/12) = 0,$$

равно 8,1755. На интервале $\tau \in [0, 8{,}1755]$ функция $g_0(\tau \mid 5\pi/12; \pi)$ содержит один участок немонотонности: $\Delta_1 = (3{,}739; 7{,}745)$ (см. рис. 5, пунктир). Следовательно, для построения функции $g(\tau \mid 5\pi/12; \pi)$ необходимо на интервале Δ_1 и при $\tau > 8{,}1755$ заменить $g_0(\tau \mid 5\pi/12; \pi)$ соответственно на $g_0(3{,}739 \mid 5\pi/12; \pi)$ и 0. Реконструированная таким образом функция изображена на рис. 5 сплошной линией.

Чтобы получить график искомой плотности вероятности, надо построить график вспомогательной функции

$$G_0(\tau \mid 5\pi/12; \pi) = \frac{\pi - \sin(5\pi/12) + \sin(5\pi/12 + \tau) - \tau\cos(5\pi/12 + \tau)}{\tau^2} \times \\ \times F\left[\frac{\pi - \sin(5\pi/12) + \sin(5\pi/12 + \tau)}{\tau} - \cos(5\pi/12)\right],$$

а затем положить её равной нулю при $\tau \in \Delta_1$ и $\tau > \tau_{\max}$, оставив без изменения вне этих интервалов. Для максвелловской функции распределения результаты такой процедуры (при различных значениях v_T/v_ω) представлены на рис. 6.

В заключение этого раздела сделаем следующие замечания.

1. Прежде всего отметим, что величина

$$p(\varphi_{\rm s}, \lambda) = \int\limits_0^{\tau_{\max}(\varphi_{\rm s}, \lambda)} G(\tau \mid \varphi_{\rm s}; \lambda)\, {\rm d}\tau \equiv \int\limits_{u_{\min}(\varphi_{\rm s}, \lambda)}^{\infty} F(u)\, {\rm d}u \tag{27}$$

имеет смысл вероятности попадания электрона на верхнюю границу (при данных $\varphi_{\rm s}$, λ и v_T/v_ω). В частности, для функции распределения вида (26) последний интеграл в правой части (27) сводится к дополнительному интегралу вероятности:

$$p(\varphi_{\rm s}, \lambda) = {\rm erfc}\left(\frac{v_\omega}{\sqrt{2}\, v_T}\, u_{\min}(\varphi_{\rm s}, \lambda)\right),$$

где

$${\rm erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_z^{\infty} \exp(-x^2)\, {\rm d}x.$$

Поведение функции $p(\varphi_{\rm s}, \lambda)$ определяется видом зависимости $u_{\min}(\varphi_{\rm s}, \lambda)$. Согласно изложенному выше, если $\lambda > 2$, то $u_{\min}$, а следовательно, и p не зависят от геометрии задачи (соответствующая вероятность будет явной функцией λ лишь при $\lambda < 2$).

В качестве примера на рис. 7 приведены графики зависимости p от $\varphi_{\rm s}$ при $\lambda = 1$ и $\lambda > 2$ и различных значениях v_T/v_ω. Из рис. 7 видно, что с уменьшением разброса начальных скоростей вылета соответствующие кривые асимптотически приближаются к прямоугольному распределению (с $p = 1$), которое локализовано в диапазоне стартовых фаз, где $u_{\min}(\varphi_{\rm s}, \lambda) = 0$.

2. Если начальная фаза $\varphi_{\rm s}$ также является случайной величиной, характеризуемой некоторой функцией распределения $f(\varphi_{\rm s})$, то найденную выше плотность вероятности (25) можно рассматривать как условную вероятность. Совместная функция распределения по фазам вылета и

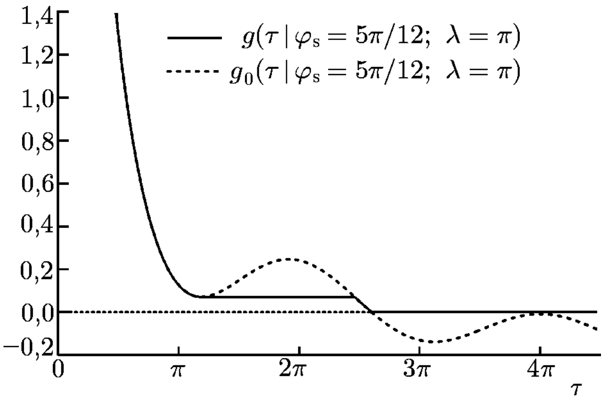

Рис. 5. График функции $g_0(\tau \mid \varphi_{\rm s}; \lambda)$ (пунктирная линия) и реконструированной функции $g(\tau \mid \varphi_{\rm s}; \lambda)$ при $\varphi_{\rm s} = 5\pi/12$ и $\lambda = \pi$

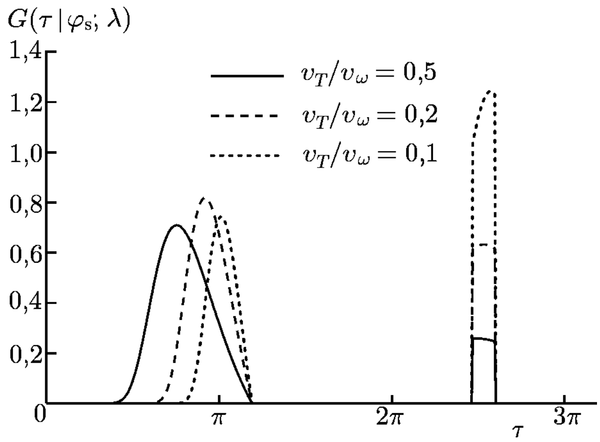

Рис. 6. График функции $G(\tau \mid \varphi_{\rm s}; \lambda)$ при $\varphi_{\rm s} = 5\pi/12$, $\lambda = \pi$ и различных значениях v_T/v_ω

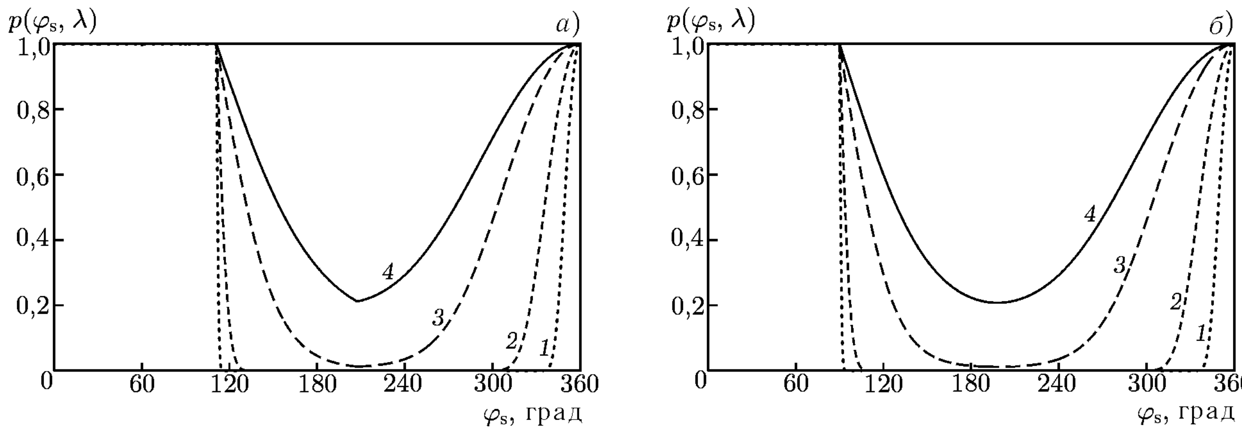

Рис. 7. Вероятность достижения электроном противоположного электрода в зависимости от фазы вылета при $\lambda = 1$ (*а*), $\lambda > 2$ (*б*) и различных значениях v_T/v_ω: кривые *1* соответствуют $v_T/v_\omega = 0{,}02$, *2* — $v_T/v_\omega = 0{,}1$, *3* — $v_T/v_\omega = 0{,}5$, *4* — $v_T/v_\omega = 1$

временам пролёта в этом случае будет равна $G(\tau \mid \varphi_{\rm s}; \lambda) f(\varphi_{\rm s})$. Знание этой функции позволяет определить долю первичных электронов, достигших противоположного электрода:

$$\eta(\lambda) = \int\limits_0^{2\pi} {\rm d}\varphi_{\rm s}\, f(\varphi_{\rm s}) \int\limits_0^{\infty} G(\tau \mid \varphi_{\rm s}; \lambda)\, {\rm d}\tau. \qquad (28)$$

5. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВЭР

Рассчитаем функцию распределения $f_{\rm i}(v_{\rm i}; \lambda)$ первичных электронов по скоростям прилёта $v_{\rm i}$. В соответствии с (3) в момент удара о стенку (когда $t = t_{\rm i}$)

$$v_{\rm i} = \dot{x}(t)|_{t=t_{\rm i}} = v_\omega\, [u + \cos\varphi_{\rm s} - \cos(\varphi_{\rm s} + \tau)],$$

при этом искомая функция распределения может быть представлена в виде

$$f_{\mathrm{i}}(v_{\mathrm{i}};\lambda)=\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_{\mathrm{s}}\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty}w(\tau,\varphi_{\mathrm{s}},u;\lambda)\,\delta[v_{\mathrm{i}}-v_\omega\,(u+\cos\varphi_{\mathrm{s}}-\cos(\varphi_{\mathrm{s}}+\tau))]\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}u, \tag{29}$$

где $\delta(v)$ — дельта-функция Дирака, $w(\tau,\varphi_{\mathrm{s}},u;\lambda)$ — совместная функция распределения электронов по временам пролёта, скоростям и фазам вылета, равная

$$w(\tau,\varphi_{\mathrm{s}},u;\lambda)=G(\tau\mid\varphi_{\mathrm{s}};\lambda)\,\delta[u-g(\tau\mid\varphi_{\mathrm{s}};\lambda)]f(\varphi_{\mathrm{s}}).$$

Отметим, что функция $f_{\mathrm{i}}(v_{\mathrm{i}};\lambda)$ нормирована условием $\int_0^\infty f_{\mathrm{i}}(v_{\mathrm{i}};\lambda)\,\mathrm{d}v_{\mathrm{i}}=\eta(\lambda)$, где $\eta(\lambda)$ определяется из (28), отражающим тот факт, что только часть вылетевших электронов достигает противоположной стенки.

Располагая полученными данными, можно рассчитать эффективный коэффициент вторичной электронной эмиссии, определяемый как отношение числа «родившихся» на поверхности и числа достигших её электронов:

$$\sigma_{\mathrm{eff}}(\lambda)=\frac{\int_0^\infty\sigma(v_{\mathrm{i}})f(v_{\mathrm{i}};\lambda)\,\mathrm{d}v_{\mathrm{i}}}{\int_0^\infty f(v_{\mathrm{i}};\lambda)\,\mathrm{d}v_{\mathrm{i}}}\equiv\frac{1}{\eta(\lambda)}\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_{\mathrm{s}}\,f(\varphi_{\mathrm{s}})\int\limits_0^{\infty}\mathrm{d}\tau\,G(\tau\mid\varphi_{\mathrm{s}};\lambda)\sigma(\tau\mid\varphi_{\mathrm{s}};\lambda), \tag{30}$$

где функция $\sigma(v_{\mathrm{i}})$ описывает зависимость коэффициента вторичной эмиссии от скорости электронного удара и определяется свойствами вещества пластины, а

$$\sigma(\tau\mid\varphi_{\mathrm{s}};\lambda)=\sigma(v_{\mathrm{i}})\big|_{v_{\mathrm{i}}=v_{\mathrm{i}}(\tau\mid\varphi_{\mathrm{s}};\lambda)},\qquad v_{\mathrm{i}}(\tau\mid\varphi_{\mathrm{s}};\lambda)=v_\omega\,\frac{\lambda-\sin\varphi_{\mathrm{s}}+\sin(\varphi_{\mathrm{s}}+\tau)-\tau\cos(\varphi_{\mathrm{s}}+\tau)}{\tau}\,.$$

Для произвольной заданной функции распределения по стартовым скоростям и фазам эмиссии формула (30) позволяет найти условие возникновения разряда, сводящееся к требованию $\eta\sigma_{\mathrm{eff}}>1$. В этом случае со второй поверхности уходит больше электронов, чем стартовало с первой.

Подчеркнём, что при учёте разброса начальных скоростей (в отличие от резонансного подхода, предполагающего монофазность и моноэнергетичность электронов) в разряде будут активно участвовать электроны с широким диапазоном энергий. В результате большого числа взаимодействий со стенками в системе может установиться некая стационарная функция распределения по фазам эмиссии, обладающая конечной шириной. Нахождение этой функции является необходимым этапом в изучении ВЭР.

Пусть в начальный момент времени с нижней пластины стартует N_0 электронов, фазы вылета которых описываются заданной функцией распределения $f_0(\varphi_{\mathrm{s}})$, нормированной на единицу. В соответствии с проведённым выше анализом число электронов, долетевших до верхнего электрода, будет равно $N_0\eta_1$, а число N_1 родившихся на нём вторичных электронов составит $N_0\eta_1\sigma_{\mathrm{eff}}^{(1)}$ (значения η_1 и $\sigma_{\mathrm{eff}}^{(1)}$ определены соответственно соотношениями (28) и (30) при $f(\varphi_{\mathrm{s}})\equiv f_0(\varphi_{\mathrm{s}})$). Нетрудно показать, что число электронов N_l, эмитированных при l-м взаимодействии, выражается через N_{l-1}:

$$N_l=N_{l-1}\,\eta_l(\lambda)\,\sigma_{\mathrm{eff}}^{(l)}(\lambda)\equiv N_{l-1}\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_{\mathrm{s}}\,f_{l-1}(\varphi_{\mathrm{s}})\int\limits_0^{\infty}\mathrm{d}\tau\,G_l(\tau\mid\varphi_{\mathrm{s}};\lambda)\sigma_l(\tau\mid\varphi_{\mathrm{s}};\lambda). \tag{31}$$

Здесь $l=1,2,\ \dots,\ f_{l-1}(\varphi_{\mathrm{s}})$ — ортонормированная функция распределения по фазам на $(l-1)$-м пролёте, $G_l(\tau\mid\varphi_{\mathrm{s}};\lambda)=G(\tau\mid\mathrm{mod}(\varphi_{\mathrm{s}}+\pi\,(l-1);2\pi);\lambda)$, а $\eta_l(\lambda)$ и $\sigma_{\mathrm{eff}}^{(l)}(\lambda)$ вычисляются с помощью формул (28) и (30), в которых необходимо сделать замены $f(\varphi_{\rm s}) \to f_{l-1}(\varphi_{\rm s})$, $\sigma(\tau \mid \varphi_{\rm s}; \lambda) \to \sigma_l(\tau \mid \mid \varphi_{\rm s}; \lambda) \equiv \sigma(\tau \mid \mathrm{mod}(\varphi_{\rm s} + \pi\,(l-1); 2\pi), \lambda)$.

На l-м пролёте распределение электронов $f_l(\varphi_{\rm s})$ по фазе эмиссии связано с $f_{l-1}(\varphi_{\rm s})$ с помощью рекуррентного соотношения

$$N_l f_l(\varphi_{\rm s}) = N_{l-1}\left[\int\limits_0^{\varphi_{\rm s}} W_l(\varphi_{\rm s} \mid \varphi_{\rm s}'; \lambda) f_{l-1}(\varphi_{\rm s}')\,{\rm d}\varphi_{\rm s}' + \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^{2\pi} W_l(\varphi_{\rm s} + 2\pi n \mid \varphi_{\rm s}'; \lambda) f_{l-1}(\varphi_{\rm s}')\,{\rm d}\varphi_{\rm s}'\right],$$

$$W_l(\varphi_{\rm s} \mid \varphi_{\rm s}'; \lambda) = G_l(\varphi_{\rm s} - \varphi_{\rm s}' \mid \varphi_{\rm s}'; \lambda)\sigma_l(\varphi_{\rm s} - \varphi_{\rm s}' \mid \varphi_{\rm s}'; \lambda). \qquad (32)$$

Детали вывода формулы (32) приведены в приложении. По заданному начальному распределению $f_0(\varphi_{\rm s})$ (например, равномерному в интервале $[0, 2\pi]$) эта формула позволяет в квадратурах рассчитать все последующие значения $f_l(\varphi_{\rm s})$, где $l = 1, 2, \ldots$.

Из (32) можно найти стационарное распределение электронов по фазам вылета. В установившемся состоянии $f_{l-1}(\varphi_{\rm s}) = f_l(\mathrm{mod}(\varphi_{\rm s} + \pi; 2\pi)) \equiv f_{\rm st}(\varphi_{\rm s})$, при этом η_l и $\sigma_{\rm eff}^{(l)}$ не зависят от номера пролёта l, а число электронов N_l растёт по закону геометрической прогрессии: $N_l = N_0\,(\eta\sigma_{\rm eff})^l$. Пороговое значение $\sigma_{\rm eff}$, при котором наступает разряд, находится из условия $\sigma_{\rm eff} = \eta^{-1}$, при этом стационарные функции $f_{\rm st}(\varphi_{\rm s})$ являются решениями однородного интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода:

$$f_{\rm st}(\varphi_{\rm s}) = \int\limits_0^{2\pi} K(\varphi_{\rm s}|\varphi_{\rm s}'; \lambda) f_{\rm st}(\mathrm{mod}(\varphi_{\rm s}' + \pi; 2\pi))\,{\rm d}\varphi_{\rm s}', \qquad (33)$$

где

$$K(\varphi_{\rm s} \mid \varphi_{\rm s}'; \lambda) = W_1(\varphi_{\rm s} \mid \varphi'; \lambda)\theta(\varphi; \varphi_{\rm s}') + \sum_{n=1}^{\infty} W_1(\varphi_{\rm s} + 2\pi n \mid \varphi_{\rm s}'; \lambda).$$

6. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Приведённые выше соотношения (31)–(33) были положены в основу численного алгоритма. Основной целью моделирования являлся анализ влияния эффектов теплового разброса на формирование функции распределения по фазам вылета электронов и пороговые значения коэффициента вторичной эмиссии (в зависимости от параметра λ). Представленные ниже результаты относятся к случаю, когда в качестве $F(u)$ выбрано максвелловское распределение (26), а для $\sigma(v_{\rm i})$ использовалась простейшая аппроксимация: $\sigma(v_{\rm i}) = \sigma = \mathrm{const}$ (при этом $\sigma_{\rm eff} = \sigma$).

В рассматриваемой ситуации уравнение (33) принимает вид

$$f_{\rm st}(\varphi_{\rm s}) = \sigma\int\limits_0^{2\pi} Q(\varphi_{\rm s} \mid \varphi_{\rm s}'; \lambda) f_{\rm st}(\mathrm{mod}(\varphi_{\rm s}' + \pi; 2\pi)\,{\rm d}\varphi_{\rm s}',$$

$$Q(\varphi_{\rm s} \mid \varphi_{\rm s}'; \lambda) = G(\varphi_{\rm s} - \varphi_{\rm s}' \mid \varphi_{\rm s}'; \lambda) + \sum_{n=1}^{\infty} G(\varphi_{\rm s} - \varphi_{\rm s}' + 2\pi n \mid \varphi_{\rm s}'; \lambda). \qquad (34)$$

Очевидно, что лавинообразное размножение электронов возможно лишь в том случае, если коэффициент вторичной эмиссии σ превышает пороговую величину $\sigma_{\text{пор}} = \min\sigma$, где $\min\sigma$ — наименьшее характеристическое значение уравнения (34).

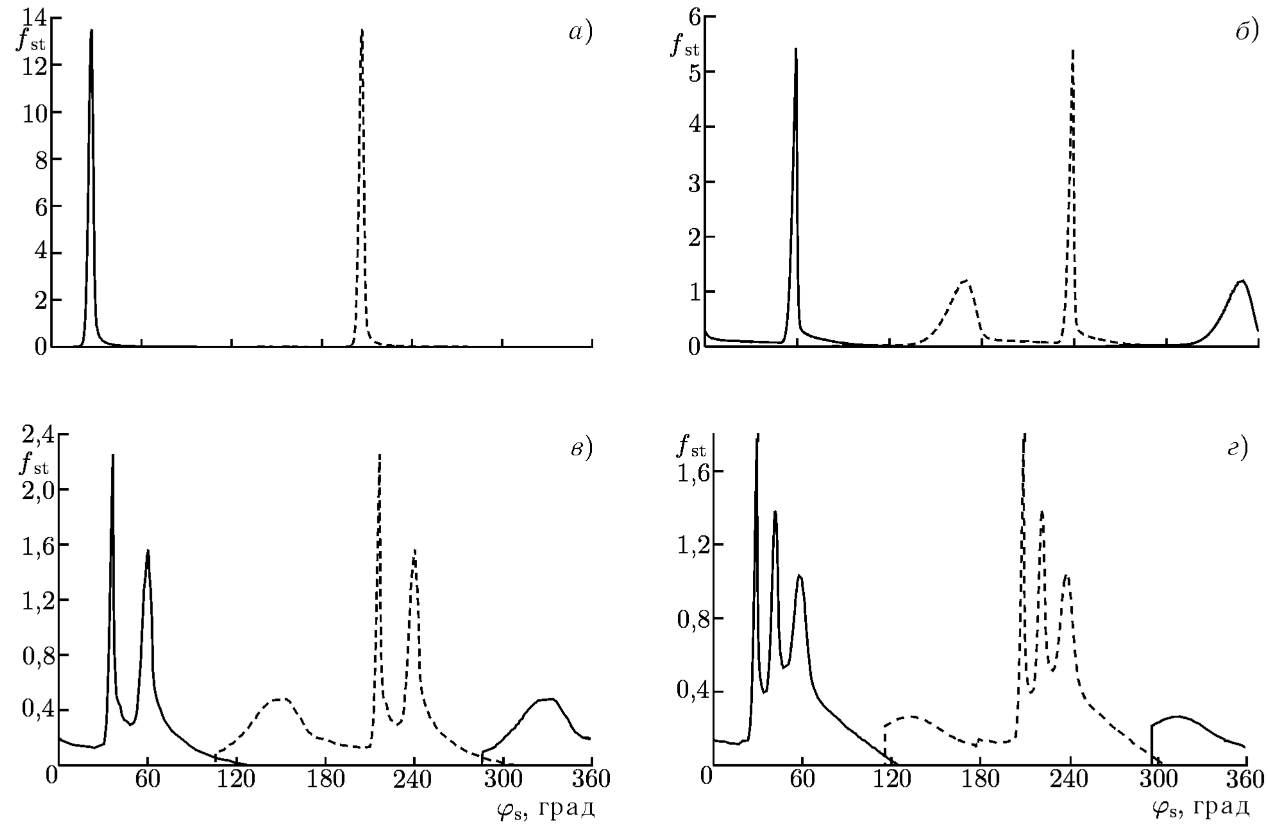

Рис. 8. Стационарные функции распределения по фазам эмиссии для чётных (штриховые линии) и нечётных (сплошные линии) пролётов при $v_T/v_\omega = 0{,}02$ и $\lambda = 3{,}72$ (*а*), $\lambda = 5{,}05$ (*б*), $\lambda = 4{,}4$ (*в*), $\lambda = 4{,}15$ (*г*)

В качестве примера на рис. 8 приведены стационарные функции распределения электронов по фазам эмиссии на нечётных (сплошные линии) и чётных (штриховые линии) пролётах. Соответствующие функции являются решениями уравнения (34) и отличаются друг от друга сдвигом на 180°. Вычисления выполнены при $v_T/v_\omega = 0{,}02$ и четырёх значениях λ (значения λ подобраны таким образом, что число максимумов указанных функций меняется от одного до четырёх). Один максимум (при $\lambda = 3{,}72$) соответствует реализации классического резонансного режима ВЭР, обсуждавшегося в разделе 3. В этом случае малый тепловой разброс по скоростям приводит лишь к незначительному уширению основного пика (см. рис. 8*а*). Наличие нескольких максимумов у стационарных функций распределения, изображённых на рис. 8*б*–*г*, отвечает реализации гибридных резонансов, предсказанных в работе [17]. Обратим внимание, что в этой области параметров даже относительно небольшой тепловой разброс может приводить к формированию функции распределения по фазам вылета, характеризующейся весьма значительной шириной. Отметим также, что функция $f_l(\varphi_{\rm s})$, рассчитанная с помощью (32), с увеличением номера пролёта l по своей форме асимптотически приближается к $f_{\rm st}(\varphi_{\rm s})$ — решению уравнения (34).

На рис. 9 сплошными линиями показаны зависимости порогового коэффициента вторичной эмиссии $\sigma_{\text{пор}} = \min\sigma$ от λ при различных значениях v_T/v_ω. Заштрихованная область отвечает значениям σ, при которых развивается ВЭР. Для сравнения на этом же рисунке точками нанесены результаты расчёта $\sigma_{\text{пор}}$ с помощью метода Монте-Карло, основанному на прямом статистическом моделировании ВЭР с использованием $5\cdot 10^7$ выпущенных электронных траекторий (шаг по λ в обоих случаях составлял 0,01). Из сопоставления соответствующих расчётов видно, что в рассматриваемой ситуации оба алгоритма приводят к практически идентичным результатам,

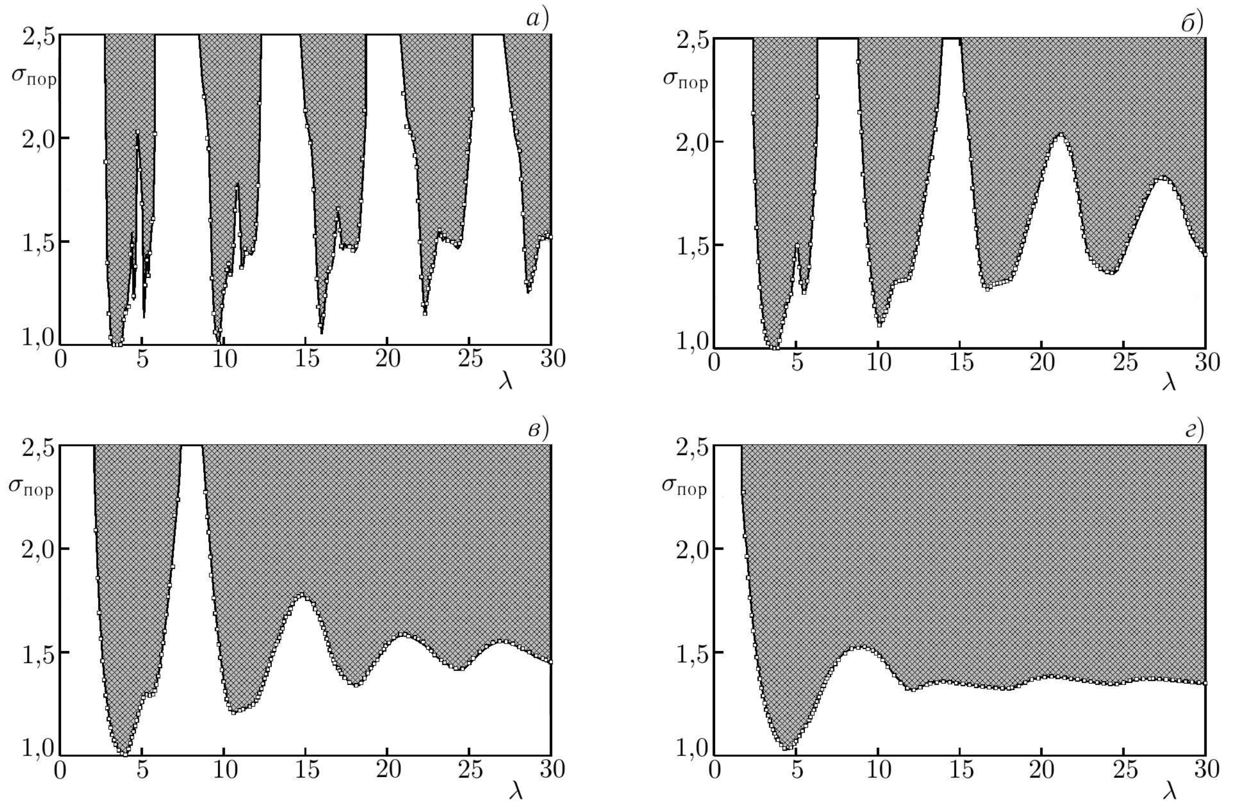

Рис. 9. Зависимость порогового коэффициента вторичной эмиссии $\sigma_{\text{пор}}$ от λ при $v_T/v_\omega = 0{,}02$ (*а*), $v_T/v_\omega = 0{,}1$ (*б*), $v_T/v_\omega = 0{,}2$ (*в*), и $v_T/v_\omega = 0{,}5$ (*г*). Точками нанесены результаты расчёта по методу Монте-Карло

однако применение метода Монте-Карло требует несравненно бóльших вычислительных затрат по сравнению с развитым выше аналитическим подходом.

При интерпретации полученных зависимостей напомним, что в рамках классической теории резонансного ВЭР, пренебрегающей флуктуациями времён пролёта (см. раздел 3), пороговый коэффициент вторичной эмиссии равен 1, если параметр λ принадлежит узкому диапазону, определяемому неравенствами (20), и стремится к бесконечности вне этого диапазона. Результаты приведённых расчётов свидетельствуют, что даже небольшой тепловой разброс ($v_T/v_\omega \sim 0{,}02$) заметно повышает $\sigma_{\text{пор}}$ в области высших резонансных зон (хотя и не приводит к их перекрытию). В то же время величина $\sigma_{\text{пор}}$ оказывается конечной и в относительно широких областях гибридных резонансов (справа от каждой из зон классического резонанса). Увеличение же теплового разброса ведёт к последовательному уширению и перекрытию соответствующих областей. Следует отметить, что в отличие от приближённой теории полифазного режима ВЭР, построенной в [11] для случая достаточно больших λ, приведённые расчёты показывают, что полифазный ВЭР возможен при меньших пороговых коэффициентах вторичной эмиссии (который для рассматриваемой модели $\sigma(v_{\rm i}) = \text{const}$ составляет 1,6).

Настоящая работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 03–02–16357а).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Для нахождения рекуррентного соотношения, связывающего $f_l(\varphi_\mathrm{s})$ с $f_{l-1}(\varphi_\mathrm{s})$, удобно ввести в рассмотрение функцию $\Phi_l(\varphi_\mathrm{i} \mid \varphi_\mathrm{s};\lambda) \equiv G_l(\varphi_\mathrm{i}-\varphi_\mathrm{s} \mid \varphi_\mathrm{s};\lambda)$, описывающую распределение электронов, вылетевших с фазами φ_s, по временам прилёта φ_i, и обозначить через $W_l(\varphi_\mathrm{i} \mid \varphi_\mathrm{s};\lambda)$ комбинацию $W_l(\varphi_\mathrm{i} \mid \varphi_\mathrm{s};\lambda) = \Phi_l(\varphi_\mathrm{i} \mid \varphi_\mathrm{s};\lambda)\sigma_l(\varphi_\mathrm{i}-\varphi_\mathrm{s} \mid \varphi_\mathrm{s};\lambda)$. Отметим, что функция $W_l(\varphi_\mathrm{i} \mid \varphi_\mathrm{s};\lambda)$ обладает следующим свойством:

$$W_l(\varphi_\mathrm{i}+2\pi n \mid \varphi_\mathrm{s}+2\pi m;\lambda) = W_l(\varphi_\mathrm{i}+2\pi\,(n-m) \mid \varphi_\mathrm{s};\lambda), \tag{П.1}$$

которым мы воспользуемся в дальнейшем.

Пусть $l=2$. В этом случае число вторичных электронов N_2, рождённых при втором взаимодействии со стенкой, равно

$$N_2(\lambda) = \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi_\mathrm{s}\, f_0(\varphi_\mathrm{s}) \int\limits_{\varphi_\mathrm{s}}^{\infty} \mathrm{d}\varphi_\mathrm{i}\, \Phi_1(\varphi_\mathrm{i} \mid \varphi_\mathrm{s};\lambda)\sigma_1(\varphi_\mathrm{i}-\varphi_\mathrm{s} \mid \varphi_\mathrm{s};\lambda) \int\limits_0^{\infty} \mathrm{d}\tau\, G_2(\tau \mid \varphi_\mathrm{i};\lambda)\sigma_2(\tau \mid \varphi_\mathrm{i};\lambda). \tag{П.2}$$

Меняя в (П.2) порядок интегрирования по φ_s и φ_i местами:

$$\int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi_\mathrm{s} \int\limits_{\varphi_\mathrm{s}}^{\infty} \mathrm{d}\varphi_\mathrm{i}\, \{\ldots\} = \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi_\mathrm{i} \int\limits_0^{\varphi_\mathrm{s}} \mathrm{d}\varphi_\mathrm{s}\, \{\ldots\} + \int\limits_{2\pi}^{\infty} \mathrm{d}\varphi_\mathrm{i} \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi_\mathrm{s}\, \{\ldots\},$$

и принимая во внимание, что

$$\int\limits_{2\pi}^{\infty} \mathrm{d}\varphi_\mathrm{i}\, W(\varphi_\mathrm{i}) = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{2\pi n}^{2\pi(n+1)} \mathrm{d}\varphi_\mathrm{i}\, W(\varphi_\mathrm{i}) = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi'\, W(\varphi'+2\pi n), \tag{П.3}$$

перепишем (П.2) в окончательном виде:

$$N_2(\lambda) = N_1 \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi_\mathrm{s}\, f_1(\varphi_\mathrm{s}) \int\limits_0^{\infty} \mathrm{d}\tau\, G_2(\tau \mid \varphi_\mathrm{s};\lambda)\sigma_2(\tau \mid \varphi_\mathrm{s};\lambda),$$

где

$$f_1(\varphi_\mathrm{s}) = \frac{1}{N_1} \left[\int\limits_0^{\varphi_\mathrm{s}} W_1(\varphi_\mathrm{s} \mid \varphi';\lambda) f_0(\varphi')\,\mathrm{d}\varphi' + \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_0^{2\pi} W_1(\varphi_\mathrm{s}+2\pi n \mid \varphi';\lambda) f_0(\varphi')\,\mathrm{d}\varphi' \right] \tag{П.4}$$

имеет смысл функции распределения по фазам эмиссии после первого взаимодействия с противоположным электродом. Множитель $1/N_1$ в правой части (П.4) введён для того, чтобы $f_1(\varphi_\mathrm{s})$ была нормирована на единицу.

Пусть теперь $l=3$. Прямое вычисление N_3 даёт

$$N_3(\lambda) = \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi_\mathrm{s}\, f_0(\varphi_\mathrm{s}) \int\limits_{\varphi_\mathrm{s}}^{\infty} \mathrm{d}\varphi_\mathrm{i}\, \Phi_1(\varphi_\mathrm{i} \mid \varphi_\mathrm{s};\lambda)\sigma_1(\varphi_\mathrm{i}-\varphi_\mathrm{s} \mid \varphi_\mathrm{s};\lambda)\, \times$$
$$\times \int\limits_{\varphi_\mathrm{i}}^{\infty} \mathrm{d}\varphi'_\mathrm{i}\, \Phi_2(\varphi'_\mathrm{i} \mid \varphi_\mathrm{i};\lambda)\sigma_2(\varphi'_\mathrm{i}-\varphi_\mathrm{i} \mid \varphi_\mathrm{i};\lambda) \int\limits_0^{\infty} \mathrm{d}\tau\, G_3(\tau \mid \varphi'_\mathrm{i};\lambda)\sigma_3(\tau \mid \varphi'_\mathrm{i};\lambda). \tag{П.5}$$

Преобразуем входящий в (П.5) тройной интеграл по φ_s, φ_i и φ_i', изменив в нём порядок интегрирования:

$$\int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi_\mathrm{s} \int\limits_{\varphi_\mathrm{s}}^{\infty} \mathrm{d}\varphi_\mathrm{i} \int\limits_{\varphi_\mathrm{i}}^{\infty} \mathrm{d}\varphi_\mathrm{i}' \{\ldots\} = \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi_\mathrm{i}' \int\limits_0^{\varphi_\mathrm{i}'} \mathrm{d}\varphi_\mathrm{i} \int\limits_0^{\varphi_\mathrm{i}} \mathrm{d}\varphi_\mathrm{s} \{\ldots\} + \\ + \int\limits_{2\pi}^{\infty} \mathrm{d}\varphi_\mathrm{i}' \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi_\mathrm{i} \int\limits_0^{\varphi_\mathrm{i}} \mathrm{d}\varphi_\mathrm{s} \{\ldots\} + \int\limits_{2\pi}^{\infty} \mathrm{d}\varphi_\mathrm{i}' \int\limits_{2\pi}^{\varphi_\mathrm{i}'} \mathrm{d}\varphi_\mathrm{i} \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi_\mathrm{s} \{\ldots\}. \qquad (\text{П.6})$$

Далее отметим, что пределы интегрирования по φ_i' во втором слагаемом в правой части (П.6) могут быть приведены к интервалу $[0, 2\pi]$ с помощью (П.3).

Преобразуем теперь последнее слагаемое в правой части (П.6):

$$\int\limits_{2\pi}^{\infty} \mathrm{d}\varphi_\mathrm{i}' \int\limits_{2\pi}^{\infty} W(\varphi_\mathrm{i}', \varphi_\mathrm{i})\, \mathrm{d}\varphi_\mathrm{i} = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\psi \int\limits_{2\pi}^{2\pi n+\psi} W(\psi + 2\pi n, \varphi_\mathrm{i})\, \mathrm{d}\varphi_\mathrm{i}. \qquad (\text{П.7})$$

В свою очередь, для внутреннего интеграла в (П.7) имеем

$$\int\limits_{2\pi}^{2\pi n+\psi} W(\psi + 2\pi n, \varphi_\mathrm{i})\, \mathrm{d}\varphi_\mathrm{i} = \int\limits_{2\pi}^{2\pi n} W(\psi + 2\pi n, \varphi_\mathrm{i})\, \mathrm{d}\varphi_\mathrm{i} + \int\limits_{2\pi n}^{2\pi n+\psi} W(\psi + 2\pi n, \varphi_\mathrm{i})\, \mathrm{d}\varphi_\mathrm{i} = \\ = \int\limits_{2\pi}^{2\pi n} W(\psi + 2\pi n, \varphi_\mathrm{i})\, \mathrm{d}\varphi_\mathrm{i} + \int\limits_0^{\psi} W(\psi + 2\pi n, \varphi' + 2\pi n)\, \mathrm{d}\varphi'.$$

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{2\pi}^{2\pi n} W(\psi + 2\pi n, \varphi_\mathrm{i})\, \mathrm{d}\varphi_\mathrm{i} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k+1}^{\infty} \int\limits_0^{2\pi} W(\psi + 2\pi n, \varphi' + 2\pi k)\, \mathrm{d}\varphi' = \\ = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \int\limits_0^{2\pi} W(\psi + 2\pi\,(m + k), \varphi' + 2\pi k)\, \mathrm{d}\varphi'.$$

Собирая вместе полученные результаты и учитывая свойство (П.1), для N_3 получим формулу вида (31) (с $l = 3$), в которой

$$f_2(\varphi_\mathrm{s}) = \frac{N_1}{N_2} \left[\int\limits_0^{\varphi_\mathrm{s}} W_2(\varphi_\mathrm{s} \mid \varphi_\mathrm{s}'; \lambda) f_1(\varphi_\mathrm{s}')\, \mathrm{d}\varphi_\mathrm{s}' + \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_0^{2\pi} W_2(\varphi_\mathrm{s} + 2\pi n \mid \varphi_\mathrm{s}'; \lambda) f_1(\varphi_\mathrm{s}')\, \mathrm{d}\varphi_\mathrm{s}' \right],$$

а функция $f_1(\varphi_\mathrm{s})$ определена согласно (П.4). Методом индукции можно доказать, что

$$f_l(\varphi) = \frac{N_{l-1}}{N_l} \left[\int\limits_0^{\varphi} W_l(\varphi \mid \varphi_\mathrm{s}'; \lambda) f_{l-1}(\varphi_\mathrm{s}')\, \mathrm{d}\varphi_\mathrm{s}' + \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_0^{2\pi} W_l(\varphi + 2\pi n \mid \varphi_\mathrm{s}'; \lambda) f_{l-1}(\varphi_\mathrm{s}')\, \mathrm{d}\varphi_\mathrm{s}' \right], \qquad (\text{П.8})$$

откуда следует формула (32).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Farnsworth P. T. // J. Franklin Inst. 1934. V. 218. P. 411.
2. Vaughan J. R. M. // IEEE Trans. Electr. Dev. 1988. V. 35, No. 7. P. 1 172.
3. Kishek R. A., Lau Y. Y., Lang L. K., et al. // Phys. Plasmas. 1998. V. 5, No. 5. P. 2 120.
4. Hatch A. J., Williams H. B. // J. Appl. Phys. 1954. V. 25, No. 4. P. 417.
5. Hatch A. J., Williams H. B. // Phys. Rev. 1958. V. 112, No. 3. P. 681.
6. Загер Б. А., Тишков В. Г. // ЖТФ. 1964. Т. 34, № 2. С. 297.
7. Gilardini A. L. // J. Appl. Phys. 1995. V. 78, No. 2. P. 783.
8. Semenov V., Kryazhev A., Andersen D., Lisak M. // Phys. Plasmas. 2001. V. 8, No. 11. P. 5 034.
9. Степанский В. А., Ганичев Д. А., Фридрихов С. А. // ЖТФ. 1973. Т. 43, № 9. С. 1 750.
10. Лукьянчиков Г. С. // ЖТФ. 1974. Т. 44, № 9. С. 1 923.
11. Grishin L. V., Dorofeuyk A. A., Kossyi I. A., et al. // Lebedev Physics Institute Series. 1977. V. 92. P. 63.
12. Francis G., von Engel A. // Proc. Roy. Soc. A. 1953. V. 246. P. 143.
13. Miller A., Williams H. B. // J. Appl. Phys. 1963. V. 34, No. 6. P. 1 673.
14. Sakamoto K., Ikeda Y., Imal T. // J. Phys. D. 1989. V. 22. P. 1 840.
15. Riyopolos S., Chernin D., Dialetis D. // Phys. Plasmas. 1995. V. 2, No. 8. P. 3 194.
16. Riyopolos S., Chernin D., Dialetis D. // IEEE Trans. Electr. Dev. 1997. V. 44, No. 3. P. 489.
17. Kryazhev A., Buyanova M., Semenov V., et al. // Phys. Plasmas. 2002. V. 9, No. 11. P. 4 736.
18. Шемелин В. Д. // ЖТФ. 1986. Т. 56, № 9. С. 1 730.

Институт прикладной физики РАН,
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию
25 июля 2003 г.

STATISTICAL THEORY OF TWO-SIDED MULTIPACTOR

N. K. Vdovicheva, A. G. Sazontov, and V. E. Semenov

We develop a statistical theory of a secondary-emission discharge (SED). The proposed theory allows for the energy distribution of secondary electrons and makes it possible to describe quantitatively the initial stage of development of a two-sided multipactor. An analytical solution for the distribution of electrons over transit times is constructed for an arbitrary probability density of the normal component of the escape velocity and an arbitrary distance between the walls enclosing the microwave-discharge plasma. The analysis is based on the results of a detailed study of conditions under which an electron reaches the opposite surface. Taking effects of the thermal velocity spread into account, we derive a recurrence relation for the electron distributions over emission phases and formulate a general integral equation from which the resulting stationary distribution and the threshold of SED onset are determined.

УДК 53.082.6+536.5

ИНФРАКРАСНАЯ РАДИОМЕТРИЯ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИ ТОЧЕЧНОМ НАГРЕВЕ МАТЕРИАЛОВ

А. В. Афанасьев, И. Я. Орлов, А. Е. Хрулёв

Предложен метод «смещённого» измерителя для контроля температурных режимов при точечном нагреве материалов. Приводятся результаты экспериментальных исследований предложенного метода при электронно-лучевой сварке циркониевых труб в вакууме.

ВВЕДЕНИЕ

При исследовании высокотемпературных процессов, таких, как электронно-лучевая и лазерная обработка материалов, плазменное воздействие на объекты и т. д., требуется контроль температуры материала в точке его нагрева. С этой целью применяются различные бесконтактные и контактные способы измерения температуры [1]. Контактный способ имеет ряд трудноустранимых недостатков: необходимость закрепления датчика в точке нагрева, искажение температурного поля, расплавление датчика при высокой температуре, сложность контроля температуры движущихся объектов и т. п. [2]. Измерение температуры бесконтактными пирометрами более технологично, однако при этом имеет место ряд эффектов, увеличивающих погрешность измерения в случае высокой температуры объекта. Эти негативные эффекты обусловлены тем, что радиометром (пирометром полного излучения) измеряется не физическая температура, а энергетическая яркость [1, 3] объекта.

Рассмотрим основные источники погрешностей бесконтактной инфракрасной (ИК) радиометрии высокотемпературных процессов и требования к позиционированию ИК радиометра при таких измерениях.

1. ОСНОВНЫЕ ИСТОЧНИКИ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Отметим возможные источники погрешностей при переходе от измеренной энергетической яркости M к физической температуре T. Исходя из закона Стефана—Больцмана, энергетическая яркость любого излучателя пропорциональна четвёртой степени его физической температуры T и коэффициенту теплового излучения ε:

$$M = \varepsilon\sigma T^4, \tag{1}$$

где M — энергетическая яркость источника, T — физическая температура источника, ε — коэффициент теплового излучения источника [3], σ — постоянная Стефана—Больцмана.

Отметим, что, поскольку выражение (1) получено для излучения в диапазоне длин волн $\lambda \in (0,\infty)$, реальная зависимость $M(T)$ изменяется с изменением полосы принимаемого излучения. На рис. 1 приведена зависимость нормированной мощности теплового излучения абсолютно чёрного тела (АЧТ) $B(T,\lambda_1,\lambda_2)$ в различных диапазонах длин волн $\lambda = \lambda_1 \div \lambda_2$. Более того, коэффициент теплового излучения материалов ε в ИК области уменьшается с увеличением длины волны, за исключением многих оксидов, у которых он возрастает [4]. Этот параметр может зависеть также и от температуры объекта [5] (для силиката циркония с увеличением температуры коэффициент теплового излучения уменьшается). Важно иметь в виду, что коэффициент

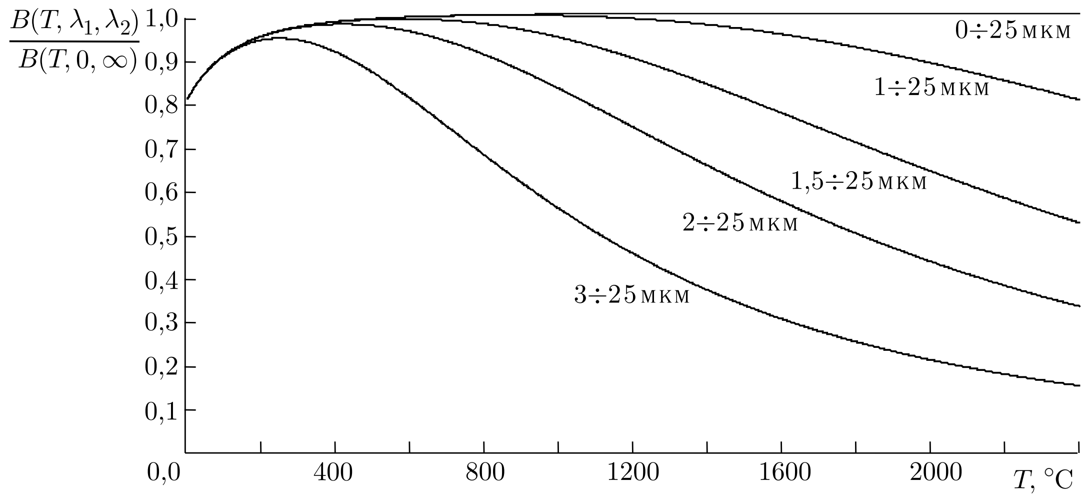

Рис. 1

теплового излучения некоторых материалов испытывает скачок при переходе между жидкой и твёрдой фазами, что может в ряде случаев привести к невозможности пересчёта энергетической яркости в физическую температуру. К мешающим факторам можно отнести особенности теплового излучения испаряющегося металла, а также большой градиент температуры в области нагрева, что приводит к необходимости узкого «поля зрения» ИК радиометра в плоскости объекта.

Необходимо также отметить, что напряжение с выхода пироэлектрического модуля преобразуется радиоэлектронным блоком, который для компрессии сигнала может иметь нелинейную амплитудную характеристику.

Таким образом, амплитуда выходного отклика пироэлектрического ИК радиометра $U_{\text{пир}}$ является сложной нелинейной функцией, зависящей не только от физической температуры источника, но и от спектральной полосы принимаемого излучения, коэффициента теплового излучения поверхности объекта, направленных свойств оптической системы. В целом следует ожидать изменения характера нелинейной зависимости $U_{\text{пир}}(T)$ за счёт компрессии этого напряжения амплитудной характеристикой радиоэлектронного блока, характеристики ИК фильтра и нелинейной зависимости $\varepsilon(T)$. Это проявляется особенно ярко при измерении температуры сильно нагретых объектов.

2. ИНФРАКРАСНАЯ РАДИОМЕТРИЯ ВНЕ ТОЧКИ НАГРЕВА

Рассмотрим возможность уменьшения влияния отмеченных выше факторов путём бесконтактного измерения температуры не в точке нагрева, а на некотором расстоянии от неё (с последующим пересчётом результата измерения в истинную температуру T в точке нагрева). При измерении температуры вне точки нагрева погрешности, обусловленные описанными выше факторами, уменьшаются в различной степени. Так, при этом можно избежать проблем, связанных с неоднозначной зависимостью температуры от энергетической яркости, т. к. в точке измерения коэффициент теплового излучения достаточно стабилен вследствие относительно невысокой температуры. Однако в этом случае возможно появление дополнительных погрешностей, обусловленных косвенным характером измерения.

Указанный способ измерения схематично показан на рис. 2. Цифрами на рисунке обозначены: *1* — индикатор пироэлектрического ИК радиометра; *2* — пироэлектрический ИК радиометр; *3* —

электронный пучок; *4* — необходимый для предварительной калибровки контактный (термопарный) термометр; *5* — термопара, зачеканенная в поверхность объекта.

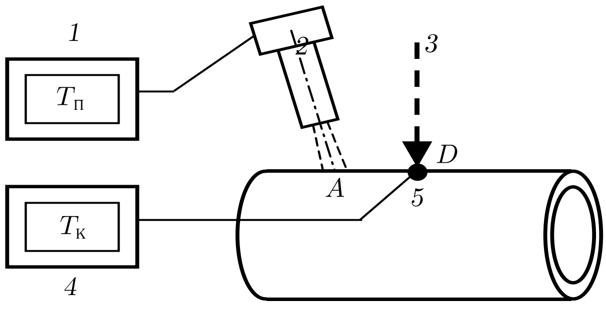

Рис. 2

Приведём экспериментальную оценку возможности применения радиометрических измерений физической температуры вне точки нагрева на примере температурного контроля точечного электронно-лучевого воздействия на циркониевую заготовку. С этой целью нами использован ИК радиометр на базе пироэлектрического модуля ПМ-4 (диапазон длин волн принимаемого излучения от 2 до 25 мкм) с диафрагмированной оптической системой [6]. При этом необходимо выяснить, как зависят показания пироэлектрического ИК радиометра от расстояния l между точкой измерения A и точкой нагрева D, какова корреляция контактной температуры $T_к$ и энергетической яркости M, насколько велика методическая погрешность пирометрии в данных условиях и как эта погрешность зависит от температуры объекта и условий измерения.

В итоге экспериментальных исследований целесообразно определить калибровочную характеристику пироэлектрического ИК радиометра, а также соответствие откалиброванных значений температуры в точке измерения и физической температуры T объекта в точке нагрева.

На рис. 3 приведена зависимость напряжения $U_{пир}$ на выходе пироэлектрического ИК радиометра от физической температуры $T_к$, измеренной контактным способом с помощью вольфрамредиевой термопары. Термопара зачеканена на уровне поверхности образца, что эквивалентно контактному измерению поверхностной температуры. Как видно из рис. 3, эта зависимость имеет явно выраженный нелинейный характер.

В результате анализа экспериментальных данных, полученных ранее на ряде пироэлектрических ИК радиометров [7], определено, что для используемого модуляционного ИК радиометра, построенного на основе пироприёмника ПМ-4, зависимость отклика от температуры объекта в диапазоне от 20 до 500 °C хорошо аппроксимируется выражением вида

$$U_{пир} = a + bT^c, \tag{2}$$

где постоянные a и b зависят от напряжения смещения и коэффициента усиления приёмного тракта, а $c = 3{,}306 \pm 0{,}025$. Ошибка аппроксимации вида (2) для каждого конкретного набора экспериментальных данных и соответствующих констант a, b и c несколько увеличивается при высоких температурах, но не превышает 20 °C.

Как видно из рис. 3 при относительно низких температурах $T_к$ происходит увеличение напряжения $U_{пир}(l)$ с уменьшением расстояния между точкой нагрева и точкой измерения l. Однако это вполне закономерное поведение нарушается начиная с температур $T_к > 1\,400$ °C, когда монотонность зависимости $U_{пир}(l)$ может нарушаться. По-видимому, это связано с сильными изменениями коэффициента теплового излучения материала при высоких температурах.

Отметим, что при сравнительно низких температурах ($T_к < 600$ °C) показания пироэлектрического ИК радиометра $U_{пир}$ при 3 мм $< l <$ 30 мм слабо зависят от расстояния l до места нагрева. Учитывая хорошее подавление пироприёмником ПМ-4 видимого излучения, можно предположить, что зависимость характеристик $U_{пир}(T)$ при высоких температурах от расстояния до места нагрева ($l < 12$ мм) обусловлена в основном двумя факторами: большим градиентом

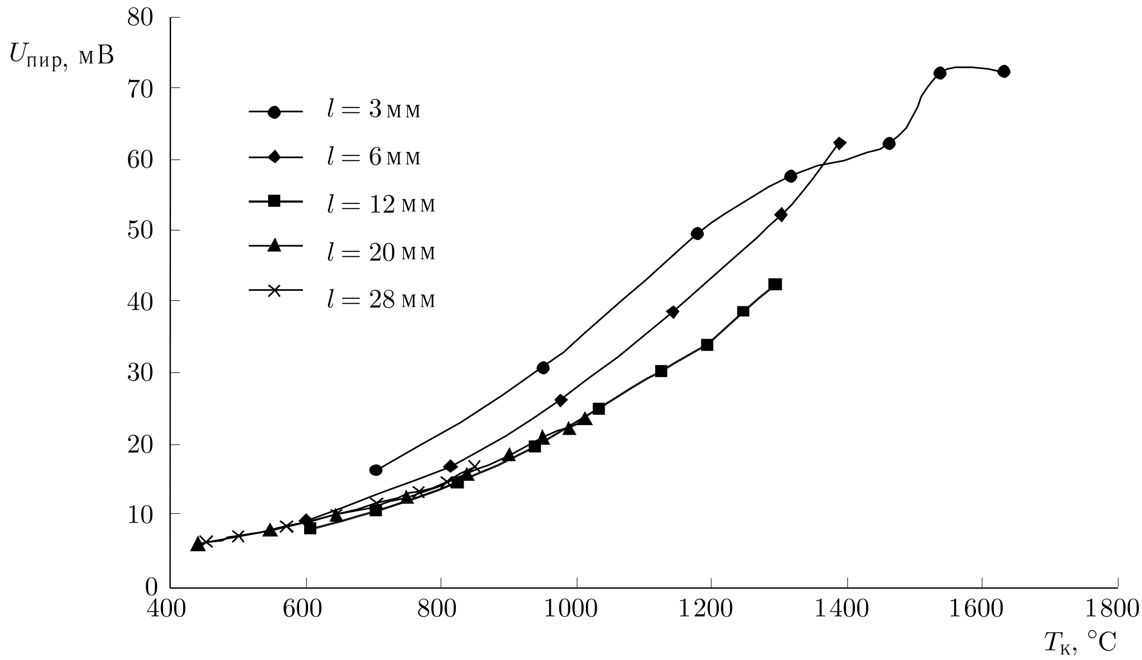

Рис. 3

температуры вблизи точки нагрева и дифракционным вкладом диафрагмированной оптики, проявляющимся вне основной зоны диаграммы направленности.

В результате дифракции на передней диафрагме оптической системы в приёмник попадает также излучение точек объекта, расположенных за пределами геометрооптического поля зрения. Это дополнительное воздействие изменяет отклик приёмника, причём вносимая погрешность определяется распределением температуры объекта по всей его поверхности [8].

При малых расстояниях l между точкой нагрева и точкой измерения температуры относительная погрешность δT имеет отрицательный знак и возрастает по абсолютной величине до 1,5÷2 %, т. к. с уменьшением расстояния l через дифракционные боковые лепестки принимается излучение от областей объекта, гораздо более холодных, чем объект в геометрооптическом поле зрения.

При больши́х расстояниях l между точкой нагрева и точкой измерения температуры погрешность δT стремится к нулю, т. к. с удалением от точки нагрева разница энергетической яркости поля зрения и фона уменьшается (вследствие уменьшения модуля градиента температуры).

Таким образом, учитывая эти особенности точечного нагрева, сложную зависимость коэффициента теплового излучения ε от температуры, а также неидеальность направленных свойств оптики, целесообразно смещать точку измерения температуры пирометром на расстояние $l \geq R$, где R — радиус поля зрения пирометра в плоскости объекта с учётом дифракционного вклада.

Учитывая, что с увеличением расстояния между точкой нагрева и точкой измерения при $l \geq 12$ мм зависимости $U_{пир}(T)$ практически сливаются (см. рис. 3), целесообразно оценить погрешность радиометрического измерения температуры в зависимости от расстояния l в диапазоне $l = 6\div12$ мм. С этой целью сняты калибровочные характеристики $U_{пир}(T)$ на расстояниях $l_1 = 6$ мм и $l_2 = 12$ мм от места нагрева при контроле измеряемой радиометром температуры вольфрам-редиевой термопарой (рис. 4). Оценку погрешности проведём путём использования этих калибровочных характеристик для определения физической температуры T по результатам ИК радиометрии на расстояниях $l = 6$ и 12 мм.

На рис. 5 показана зависимость поверхностной температуры $T_п$, измеренная пироэлектриче-

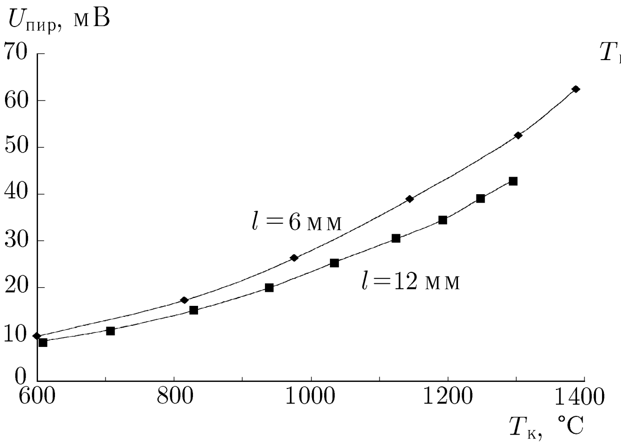

Рис. 4

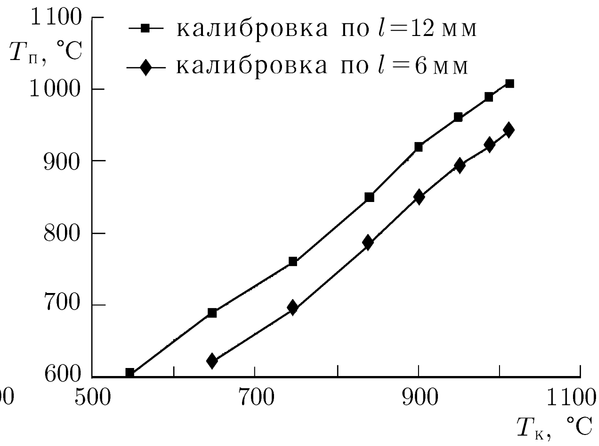

Рис. 5

ским ИК радиометром, от температуры нагрева, измеренной контактным термометром на расстоянии $l = 20$ мм от точки нагрева. Как видно из рис. 5, откалиброванные показания $T_п$ пироэлектрического ИК радиометра хорошо соответствуют линейной зависимости $T_п(T_к)$ до контактных температур $T_к \approx 1\,300\,°C$ в точке измерения. В наших экспериментах погрешность при ошибке позиционирования в 8 мм относительно точки калибровки и измерении относительно высоких температур ($T_к \geq 1\,800\,°C$) не превышает 100 °C (на рис. 5 этот участок не приведён).

Учитывая, что, как указывалось выше, бесконтактное измерение высоких поверхностных температур T целесообразно проводить в стороне от места нагрева, необходимо определить характер изменения температуры в зависимости от расстояния l до точки измерения. Теоретические оценки, полученные в работе [9], показывают существенное отличие градиента температуры вблизи точки нагрева и в стороне от неё.

На рис. 6 показаны экспериментально полученные при помощи вольфрам-редиевой термопары зависимости контактной температуры $T_к$ от расстояния между местоположением термопары и точкой нагрева l при разных токах пучка I. Как видно из рис. 6, при увеличении расстояния от места нагрева скорость увеличения температуры с ростом тока пучка уменьшается. Так, при изменении тока электронного пучка от 10 до 35 мА контактная температура $T_к$ на расстоянии 6 мм меняется от 600 до 1 100 °C, на расстоянии 28 мм — от 430 до 750 °C.

Из результатов измерений можно сделать вывод, что при условии воспроизводимости распределения температуры по поверхности объекта можно находить температуру в точке нагрева по данным о температуре вне точки нагрева. Так, видно, что для используемого материала температура 1 200 °C на расстоянии 12 мм соответствует температуре 1 650 °C на расстоянии в 3 мм. Строго говоря, для такого пересчёта температур необходимо также знать закон распределения температуры по поверхности в окрестности точки нагрева, однако этот закон автоматически учитывается при предварительной калибровке.

Необходимо отметить, что значения контактной температуры $T_к$, как и было показано выше, лежат между двумя зависимостями поверхностной температуры $T_п$, определёнными путём радиометрических измерений по разным калибровочным характеристикам (см. рис. 5). Максимальная погрешность калиброванного радиометрического измерения вне калибровочных точек (в нашем случае l изменялось от 5 до 15 мм) не превышает 50 °C. При приближении точки визирования радиометра к калибровочной точке погрешность измерения стремится к нулю.

Из результатов работы следует возможность определения температуры объекта T в точке нагрева по результатам бесконтактного измерения энергетической яркости объекта в стороне от

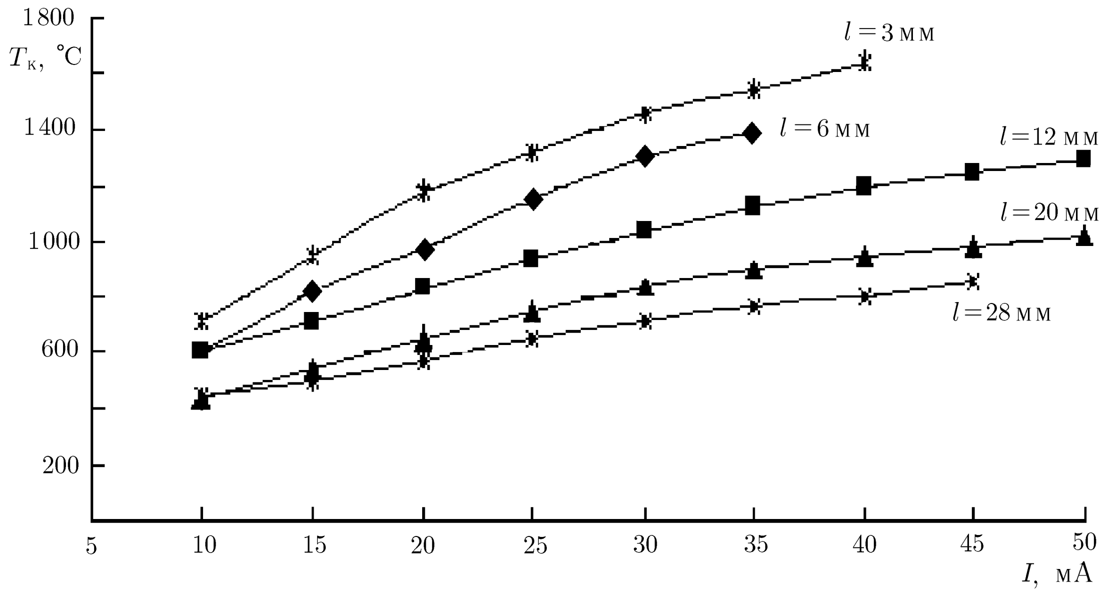

Рис. 6

точки нагрева. Нами приведены результаты такого измерения на примере точечного электронно-лучевого воздействия на циркониевую цилиндрическую заготовку. Теоретическая оценка возможности «смещённого» измерения путём численного моделирования процесса теплопроводности в тонкостенном цилиндрическом образце проводилась в работе [7]. Анализ показал, что для определения температуры T в точке нагрева необходимо знать тепловое сопротивление между точкой измерения и точкой нагрева, тогда при известной мощности нагрева можно найти искомую температуру T.

Поскольку на тепловое сопротивление влияют физические параметры материала (коэффициент теплопроводности, объёмная теплоёмкость, коэффициент полной поверхностной теплоотдачи) и толщина стенки в окрестности точки нагрева [10], то теоретически можно выработать методику для «смещённого» измерения температуры при точечном нагреве для образца произвольной формы без калибровки. Для этого нужно знать физические параметры образца с высокой точностью, а также определить правило пересчёта измеренной энергетической яркости в температуру точки нагрева путём численного моделирования процесса теплопроводности. Однако наиболее просто все физические и геометрические особенности данного образца учитываются при калибровке, причём калибровка действительна только для образцов одинаковой формы.

ВЫВОДЫ

1) Для калибровки пироэлектрического ИК радиометра и проведения высокотемпературных измерений целесообразно смещение точки визирования радиометра относительно точки нагрева на ширину геометрооптической диаграммы направленности. Такой подход позволяет получить методическую погрешность не более $50\div100$ °C (в зависимости от позиционирования пирометра), устранить возможность приёма видимого излучения, уменьшить влияние изменения коэффициента теплового излучения материала и появления его паров при температурах плавления, а также сделать менее строгими требования к динамическому диапазону пирометра.

2) Минимизация погрешности соответствия температуры $T_п$, полученной по результатам калиброванной ИК радиометрии, и физической температуры T достигается при точке визирования пироэлектрического ИК радиометра, совпадающей с точкой калибровки.

3) С увеличением расстояния между точкой нагрева и точкой измерения требования к точности позиционирования пироэлектрического ИК радиометра существенно ослабляются, т. к. зависимость $T_{\text{п}}(l)$ имеет максимальную производную вблизи точки нагрева.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Линевег Ф. Измерение температуры в технике. М.: Металлургия, 1980. 543 с.
2. Штанин Г. Г., Панков Э. Д., Андреев А. Л., Польщиков Г. В. Источники и приёмники излучения. СПб.: Политехника, 1991. 240 с.
3. ГОСТ 7601-78 Физическая оптика. Термины, определения и буквенные обозначения.
4. Температурные измерения: Справочник. Киев: Наукова думка, 1989. 703 с.
5. Table of emissivity of various surfaces for infrared thermometry. Mikron Instrument Company, Inc. USA. P. 10.
6. Афанасьев А. В., Лебедев В. С., Орлов И. Я., Хрулёв А. Е. // Приборы и техника эксперимента. 2001. № 2. С. 155.
7. Хрулёв А. Е. Пироэлектрическая ИК радиометрия высокотемпературных процессов в ближней зоне: Дис. … канд. физ.-мат. наук. Нижний Новгород, 2002. 125 с.
8. Орлов И. Я., Хрулёв А. Е. // Датчики и системы. 2002. № 3. С. 8.
9. Орлов И. Я., Хрулёв А. Е. // Вестник МВВО АТР. Сер. высокие технологии в радиоэлектронике, информатике и связи. 2002. № 1. С. 77.
10. Основы лазерной обработки металлов / Под ред. П. Ю. Кикина, В. Н. Перевезенцева, А. И. Пчелинцева, Е. Е. Русина. Нижний Новгород: Изд-во ННГУ им. Н. И. Лобачевского, 2003. 67 с.

Нижегородский госуниверситет им. Н. И. Лобачевского,
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию
28 ноября 2003 г.

INFRARED RADIOMETRY OF HIGH-TEMPERATURE PROCESSES DURING THE SPOT HEATING OF MATERIALS

A. V. Afanas'yev, I. Ya. Orlov, and A. E. Khrulev

We propose a method of “shifted” meter for monitoring the temperature regimes during the spot heating of materials and present the results of an experimental study of the proposed method in the case of the electron-beam welding of zirconium pipes in vacuum.

УДК 621.385.69.01

ВОЗМОЖНОСТИ ОПТИМИЗАЦИИ РЕЗОНАТОРА МОЩНОГО НЕПРЕРЫВНОГО ГИРОТРОНА

Н. А. Завольский, В. Е. Запевалов, М. А. Моисеев, Л. Л. Немировская

Рассчитаны оптимальные параметры низкодобротного резонатора мощного непрерывного гиротрона миллиметрового диапазона длин волн, обеспечивающие достижение максимального КПД при ограничении тепловой нагрузки на стенки резонатора. Рассмотрено влияние оптимизации резонатора на эффективность рекуперации остаточной энергии отработанного электронного пучка. Исследована устойчивость рабочей моды к самовозбуждению других мод. Исследование проведено на примере гиротронов с мощностью излучения 1 МВт, диапазоном частот 140÷170 ГГц и рабочими модами $\mathrm{TE}_{22.6}$ и $\mathrm{TE}_{25.10}$. Полученные результаты обобщены на гиротроны с другими рабочими модами и частотами.

1. ВВЕДЕНИЕ. ВЛИЯНИЕ ОМИЧЕСКИХ ПОТЕРЬ НА ОГРАНИЧЕНИЕ КПД И ЭНЕРГИИ ИМПУЛЬСА

Одним из факторов, ограничивающих КПД и энергию импульса излучения гиротронов коротковолновой части миллиметрового диапазона с выходной мощностью $P \geq 1$ МВт является нагрев резонатора вследствие омических потерь [1–3]. В длинноимпульсных ($T_{\text{и}} \geq 1$ с) и непрерывных гиротронах допустимая удельная мощность омических потерь в резонаторе, как правило, не превышает $2\div 2{,}5$ кВт/см^2. Снижение омической нагрузки путём увеличения радиуса резонатора и перехода к более высоким рабочим модам ограничивается самовозбуждением паразитных мод с другими поперечными индексами. Это происходит вследствие увеличения числа собственных частот мод, попадающих в полосу циклотронного резонанса. Омическая нагрузка уменьшается при сглаживании профиля резонатора, когда достигается минимальная дифракционная добротность [2–4]. Однако при этом, как правило, уменьшается КПД гиротрона и ухудшается селекция мод по продольному индексу. В результате возрастает опасность самовозбуждения мод с продольными индексами $q \geq 2$ [4, 5].

Ниже приведены результаты оптимизации профиля резонатора с целью достижения лучшего соотношения КПД и омической нагрузки. Исследование проводится на примере гиротрона с мощностью 1 МВт, частотой излучения 140 ГГц (140 ГГц/1 МВт гиротрона) и рабочей модой $\mathrm{TE}_{22.6}$. Учитывается влияние разброса скоростей электронов. Определяется КПД гиротрона с рекуперацией остаточной энергии электронного пучка. Исследуется устойчивость рабочей моды к самовозбуждению паразитных мод. Полученные результаты распространяются на гиротроны с другими параметрами, рабочими модами и частотами. Рассмотрен оптимизированный вариант гиротрона с частотой излучения 170 ГГц и рабочей модой $\mathrm{TE}_{25.10}$.

2. ВЫБОР ВОЗМОЖНОГО ПРОФИЛЯ РЕЗОНАТОРА ДЛЯ ОПТИМИЗАЦИИ

Наименьшая дифракционная добротность достигается в моделях гиротронов с электродинамической системой в виде полубесконечного регулярного или конического [4, 6, 7] волноводов. Пространство взаимодействия ограничивается с катодной стороны закритическим сужением, с коллекторной стороны — резким уменьшением статического магнитного поля. Эти модели имеют достаточно высокий поперечный электронный КПД: $\eta_\perp = 0{,}75$ у гиротронов с регулярным волноводом и $\eta_\perp = 0{,}5\div 0{,}7$ — с конусным волноводом, в зависимости от угла раскрыва конуса.

Однако в реальных гиротронах со сверхпроводящими соленоидами такие системы неприменимы, поскольку вследствие слабой неоднородности магнитного поля соленоида длина участка взаимодействия оказывается много больше оптимального значения. Это приводит к снижению КПД на рабочей моде и возрастанию опасности самовозбуждения паразитных мод.

В гиротронах обычно используются резонаторы в виде регулярного цилиндрического участка волновода и присоединённых к нему (без изломов профиля) входного закритического сужения и выходного волноводного перехода с образующими в виде дуг окружностей [2, 3]. Это ограничивает длину участка взаимодействия с катодной стороны спадом ВЧ поля в закритическом сужении. С коллекторной стороны взаимодействие прекращается в выходном переходе вследствие изменения фазовой и групповой скоростей электромагнитной волны и выхода электронов из синхронизма с ВЧ полем. Отсутствие изломов профиля уменьшает отражение, снижает добротность и практически исключает переизлучение рабочей моды в волны с другими радиальными индексами.

Таким профилем при минимальном числе оптимизируемых параметров (длина регулярного участка $L_{\text{р}}$ и радиусы образующих входного R_{01} и выходного R_{02} скруглений профиля) описываются основные особенности широкого класса низкодобротных резонаторов с монотонно возрастающей (неубывающей) зависимостью радиуса R от продольной координаты z. В частности, при малых R_{01} и больших $L_{\text{р}}$ и R_{02} он качественно соответствует полубесконечному регулярному волноводу, а при малых $L_{\text{р}}$ — конусному. Это позволяет включить в процесс оптимизации рассмотренные ранее модели с предельно низкодобротными электродинамическими системами при реальном продольном распределении магнитного поля соленоида.

3. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ГИРОТРОНА

Укороченные уравнения слаборелятивистского гиротрона с близкой к регулярному волноводу электродинамической системой и почти однородным статическим магнитным полем [6, 7] могут быть записаны в виде

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\xi} + ip\left[\Phi + I_0^{-1/3}\left(|p|^2 - 1\right)\right] = if, \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}\xi^2} + \delta f = \bar{\bar{p}}. \tag{2}$$

Здесь $f(z)$ — продольное распределение амплитуды ВЧ поля, $p = v_\perp(z)/v_{\perp 0}\exp(i\theta)$, $v_\perp(z)$ и θ — поперечная скорость и фаза вращательного движения электронов, $\xi = I_0^{1/3}\zeta$, $\zeta = \pi g\beta_\perp z/\lambda$ — независимая переменная, пропорциональная продольной координате z, $g = \beta_\perp/\beta_z$ — питч-фактор, $\beta_\perp = v_{\perp 0}/c$ и $\beta_z = v_{z0}/c$ — отношения начальных скоростей вращательного и поступательного движения электронов к скорости света, λ — длина волны в свободном пространстве,

$$I_0 = 9{,}387\cdot 10^{-4}\gamma_0^{-1} I[\text{А}]\beta_z\beta_\perp^{-6} G_{mn}, \qquad G_{mn} = \frac{J_{m-1}^2(\nu_{mn}R_0/R_{\text{р}})}{J_m^2(\nu_{mn})\left(\nu_{mn}^2 - m^2\right)}\ , \tag{3}$$

I — ток электронного пучка, $\gamma_0 = 1 + U_0[\text{кВ}]/511$ — релятивистский масс-фактор, U_0 — ускоряющее напряжение, ν_{mn} — корень уравнения $J_m'(\nu) = 0$, соответствующий рассматриваемой моде TE_{mn} с азимутальным и радиальным индексами m и n соответственно, R_0 — радиус электронного пучка, $R_{\text{р}}$ — радиус резонатора, $\Phi = \Delta\, I_0^{-1/3}$, $\Delta = 2\,(\omega - \omega_H)/(\beta_\perp^2\omega)$ — параметр расстройки рабочей ω и циклотронной ω_H частот,

$$\delta = \left[h\lambda/(\pi g\beta_\perp I_0^{1/3})\right]^2, \qquad h^2 = k^2 - (\nu_{mn}/R)^2\left(1 + i/Q_{\text{ohm}}\right),$$

h — продольное волновое число, $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$, $Q_{\rm ohm}$ — омическая добротность резонатора. В резонаторах гиротронов миллиметрового диапазона длин волн измеренные значения $Q_{\rm ohm}$, как правило, в 1,5÷2 раза меньше расчётных для чистой меди. С учётом эмпирического коэффициента 0,5 омическая добротность определяется выражением

$$Q_{\rm ohm} = 680\nu_{mn}\,(1 - m^2/\nu_{mn}^2)\,(\lambda[\text{мм}])^{1/2},$$

Двойная черта в (2) означает усреднение по начальным фазам вращательного движения электронов θ_0.

Уравнения (1) и (2) интегрируются с граничными условиями, соответствующими немодулированному электронному пучку и экспоненциальному спаду ВЧ поля во входном закритическом сужении резонатора ($\xi = \xi_{\text{н}}$):

$$p = \exp(i\theta_0), \qquad \mathrm{d}f/\mathrm{d}\xi = |\delta|^{1/2}\,f, \tag{4}$$

где $0 \le \theta_0 < 2\pi$, $\delta < 0$. В выходном сечении ($\xi = \xi_{\text{к}}$) должны выполняться условия излучения:

$$\mathrm{d}f/\mathrm{d}\xi = -i\delta^{1/2} f, \qquad \delta > 0. \tag{5}$$

КПД гиротрона и мощность выходного излучения определяются выражениями

$$\eta = 2t_\perp \operatorname{Im}(f\,\mathrm{d}f^*/\mathrm{d}\xi), \qquad P = \eta I U_0, \tag{6}$$

где η — выходной (волновой) КПД, $t_\perp = g^2/(1+g^2)$ — относительная доля энергии вращательного движения в электронном пучке.

Выходной КПД несколько меньше электронного $\eta_{\text{эл}} = t_\perp \eta_\perp$ вследствие омических потерь:

$$\eta \approx (1 - Q/Q_{\rm ohm})\,\eta_{\text{эл}}. \tag{7}$$

Здесь $\eta_\perp = 1 - \overline{\overline{|p|^2}}$ — поперечный электронный КПД, Q — добротность резонатора. Выражение (7) становится точным в гиротронах с высокодобротными резонаторами ($Q \gg Q_{\rm dif}^{\rm min}$) и фиксированной структурой ВЧ поля $f(z)$,

$$Q_{\rm dif}^{\rm min} = 4\pi\,(L/\lambda)^2 \tag{8}$$

— минимальная дифракционная добротность, L — эффективная длина резонатора [4, 6]. Удельная мощность омических потерь в стенке резонатора определяется выражением

$$P_{\rm ohm}[\text{кВт/см}^2] = \frac{511 \cdot 200\beta_z I}{Q_{\rm ohm} R_{\text{р}}[\text{мм}]\lambda[\text{мм}] I_0^{1/3}}\,|f|^2. \tag{9}$$

Уравнения (1), (2) в первоначальном варианте были выведены для слаборелятивистского гиротрона ($\gamma_0 \approx 1$) [6], однако они также пригодны для предварительных расчётов релятивистских ($\gamma_0 \ge 1{,}5$) и ультрарелятивистских ($\gamma_0 \gg 1$) гиротронов. Уравнения (1) и (2) представляют собой длинноприборную асимптотику релятивистских уравнений [8, 9]. В релятивистском случае в выражения для КПД (6), (7) вместо $t_\perp$ следует подставлять его уточнённое релятивистское значение $t_{\perp\rm rel} = [1 - (1-\beta_\perp^2)^{1/2}]/(1-\gamma_0^{-1})$. При $\gamma_0 \to 1$ выражение $t_{\perp\rm rel}$ переходит в $t_\perp$.

В уравнения (1), (2) и граничные условия (4), (5) входят только безразмерные переменные и параметры. Выходная мощность (6) и омическая нагрузка (9) определяются безразмерными величинами f и $\mathrm{d}f/\mathrm{d}\xi$ с постоянными размерными множителями. В принципе, оптимизацию профиля резонатора можно проводить в безразмерном виде, общем для всех гиротронов. Для большей наглядности полученных результатов целесообразно оптимизировать конкретный вариант гиротрона с заданными размерными параметрами и лишь затем обобщить результаты на другие варианты гиротронов.

4. ОПТИМИЗАЦИЯ ГИРОТРОНА С РАБОЧЕЙ МОДОЙ $\mathbf{TE_{22.6}}$

Для расчётов был выбран непрерывный гиротрон с рабочей модой $TE_{22.6}$, частотой 140 ГГц ($\lambda = 2{,}14$ мм), мощностью излучения из резонатора $P = 1$ МВт, ускоряющим напряжением $U_0 = 70$ кВ и питч-фактором $g = 1{,}4$. Ток электронного пучка связан с КПД выражением $I[\text{А}] = 1\,000/(\eta U_0[\text{кВ}])$. Омическая нагрузка определялась для середины резонатора, где она максимальна.

Для повышения точности расчётов использовались уравнения [9], более точно, чем (1) и (2), учитывающие релятивистские эффекты движения электронов, неоднородность магнитного поля реального соленоида, зависимости R_0 и $R_\text{р}$ от z. Это не мешает обобщению полученных результатов на другие гиротроны, поскольку учёт дополнительных факторов даёт незначительные поправки к КПД и P_ohm (порядка 1 %).

КПД и омическая нагрузка слабо зависят от радиусов образующих входного и выходного скруглений R_{01} и R_{02}. Поэтому оптимизация проводилась путём подбора длины регулярного участка резонатора $L_\text{р}$ при различных фиксированных значениях R_{01} и R_{02}. Рис. 1 и 2 демонстрируют возможности оптимизации. На рис. 1 показана зависимость η и P_ohm от R_{01} при $R_{02} = 800$ мм, на рис. 2 — зависимость от R_{02} при $R_{01} = 60$ мм. С увеличением $L_\text{р}$ КПД и омическая нагрузка возрастают вплоть до максимального рассматриваемого значения $L_\text{р} = 14$ мм. Точки на рис. 1 и 2 соответствуют дискретным значениям $L_\text{р} = 2$; 4; 6; 8; 10; 12 и 14 мм. Дальнейшее увеличение $L_\text{р}$ приводит только к увеличению P_ohm при незначительном росте КПД. Наибольший достигнутый КПД $\eta \approx 0{,}53$ соответствует поперечному КПД $\eta_\perp \approx 0{,}8$, близкому к максимальному расчётному значению $\eta_\perp$ гиротронов с оптимизированной продольной структурой ВЧ поля [7]. Резкий спад КПД в области малых $L_\text{р}$ происходит вследствие неоптимальности взаимодействия. Здесь резонатор приближается к конусному, а длина участка взаимодействия не ограничивается резким спадом статического магнитного поля, как это предполагалось в упрощённых моделях гиротронов с предельно низкодобротными системами [4, 6]. В рассматриваемом случае магнитное поле B_0 соответствует реальному сверхпроводящему соленоиду с длиной участка неоднородности, много большей длины резонатора ($B_0 \approx B_0^{\max}\,[1 - 0{,}1\,(z[\text{мм}]/40)^2]$, где $z = 0$ соответствует середине резонатора). Длина участка интегрирования уравнений гиротрона ограничивается только прекращением взаимодействия электронов с ВЧ полем, при этом КПД перестаёт зависеть от z (обычно это происходит, когда фаза поля изменяется на $2\pi\div4\pi$, см. рис. 3). Оптимальные значения $L_\text{р}$, R_{01} и R_{02} соответствуют огибающей семейства кривых на рис. 1 и 2.

На рис. 3 приведён вид оптимального профиля резонатора $R(z)$ с параметрами $L_\text{р} = 6$ мм, $R_{01} = 60$ мм, $R_{02} = 1\,600$ мм, обеспечивающий КПД 43 % при минимальной омической нагрузке $P_\text{ohm} = 1{,}8$ кВт/см^2. Этот резонатор имеет очень низкую ($Q = 460$) добротность по сравнению с обычными гиротронами ($Q \approx 1\,000$) и вследствие этого сильно нефиксированную структуру поля. Самосогласованная структура поля (амплитуда f_1 и фаза φ_1) качественно отличается от структуры поля собственного колебания «холодного» резонатора, без электронного пучка (кривые f_0, φ_0). В связи со столь низкой добротностью оптимального резонатора и сильной нефиксированностью структуры поля возникает вопрос об устойчивости генерации рабочей моды к самовозбуждению других мод.

На рис. 4 представлены зоны генерации при различных радиусах скруглений ($R_{01} = 60$ мм, $R_{02} = 100$; 200; 400; 800 и 1 600 мм) и длинах регулярного участка резонатора ($L_\text{р} = 6\div12$ мм), соответствующих КПД 43 % на рис. 2. Здесь N — порядковый номер расчёта, добавленный, чтобы разнести кривые по оси абсцисс. Из рис. 4 видно, что режим с $R_{02} = 1\,600$ мм близок к срыву колебаний, зона генерации становится вдвое уже и, значит, требования к точности установления магнитного поля ужесточаются, а достижение максимального КПД затрудняется. Наилучшие

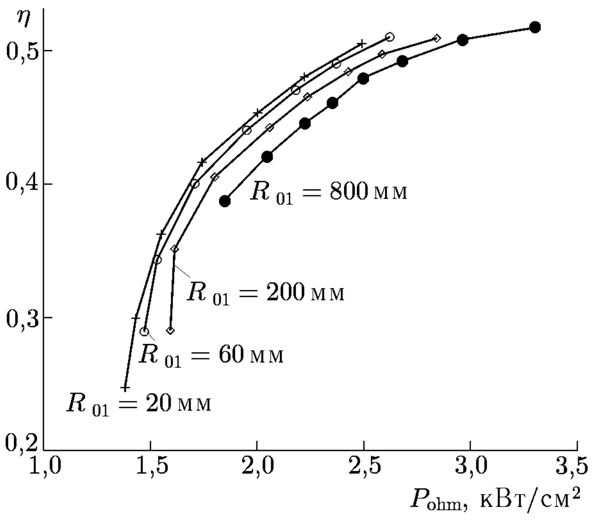

Рис. 1

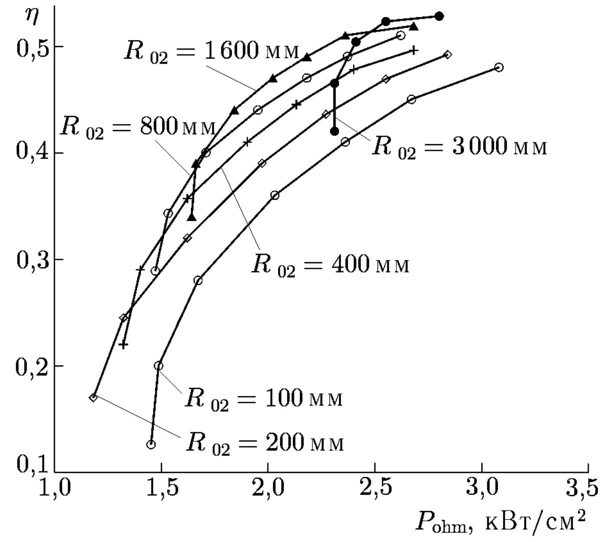

Рис. 2

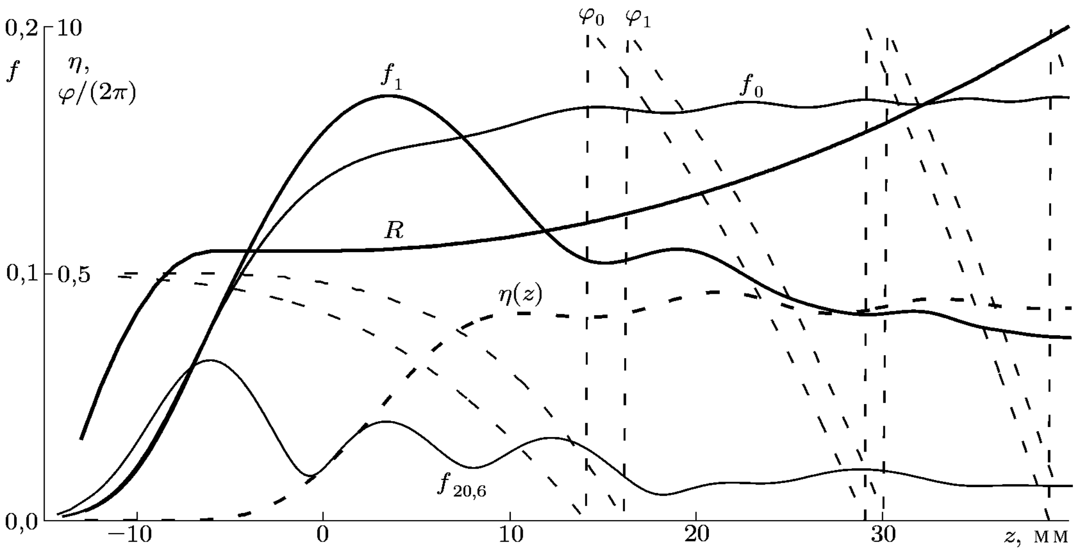

Рис. 3

условия для достижения $\eta_{\max}$ существуют при радиусе $R_{02} = 100$ мм, когда ширина зоны максимальная. Однако омическая нагрузка в этом случае наибольшая и составляет 2,55 кВт/см^2. Следовательно, выбор параметров ограничен значениями $R_{02} = 200 \div 800$ мм.

5. САМОВОЗБУЖДЕНИЕ ПАРАЗИТНЫХ МОД

В результате оптимизации профиль резонатора становится более сглаженным, близким к регулярному волноводу. В таком резонаторе паразитные моды с поперечной структурой, отличающейся от рабочей, и с большим числом продольных вариаций поля, возбуждающиеся на встречной волне, вследствие большой отстройки частоты колебаний от критической частоты резонатора ($\omega_{\text{кр}} = c\nu_{mn}/R_{\text{р}}$) взаимодействуют с электронным пучком на большей длине, чем рабочая мода,

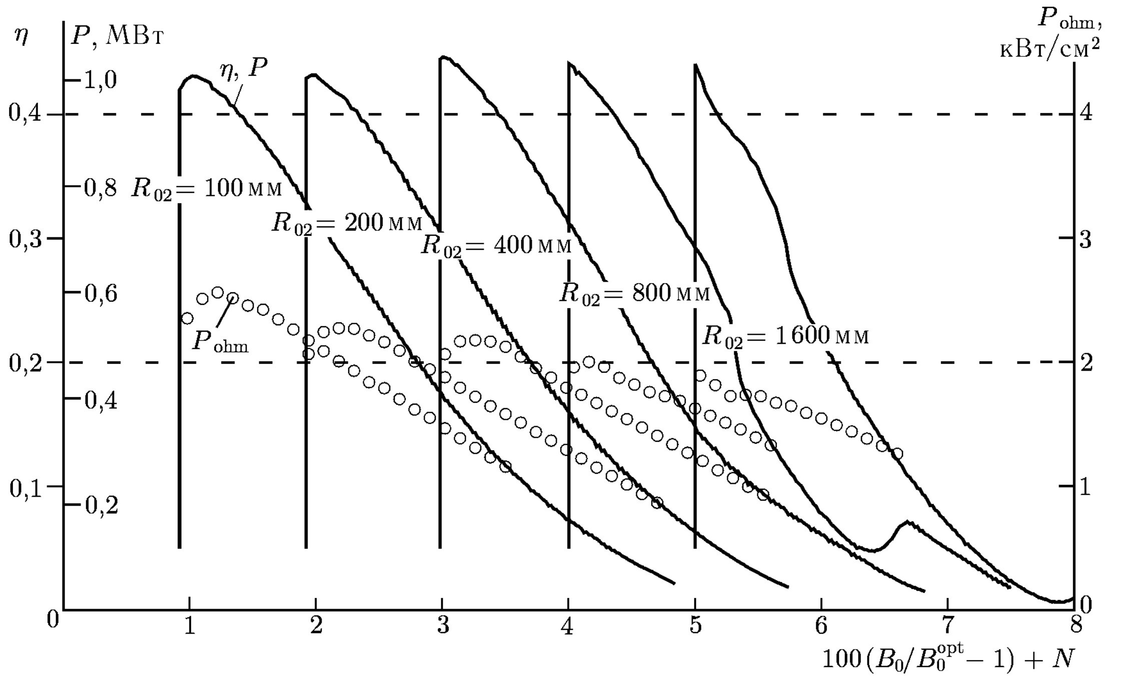

Рис. 4

возбуждающаяся на квазикритической частоте. Эффективная длина резонатора L для паразитных мод возрастает, что приводит к значительному уменьшению их стартового тока ($I_{\rm st} \propto \propto (\lambda/L)^4$). В этих условиях необходимо исследовать устойчивость генерации рабочей моды.

Из всех паразитных мод, находящихся в полосе циклотронного резонанса, наименьший стартовый ток имеют моды $\mathrm{TE}_{21.6}$ и $\mathrm{TE}_{20.6}$ с собственными частотами на 2,7 % и 5,4 % ниже рабочей. Стартовые токи этих мод ($I_{\rm st} \approx 12$ и 8 А соответственно) много меньше рабочего тока ($I = 33$ А), и возбуждение их представляется наиболее вероятным. Для исследования возбуждения мод были использованы уравнения многомодового гиротрона с нефиксированной нестационарной структурой ВЧ поля [10]. В качестве начальных условий использовалось распределение поля собственных колебаний холодного резонатора.

На рис. 5 приведена фазовая плоскость рабочей моды $\mathrm{TE}_{22.6}$ и ближайшей паразитной моды $\mathrm{TE}_{21.6}$ при оптимальных параметрах электронного пучка и магнитного поля. Здесь $f^{\rm m}$ — максимальное значение функции распределения ВЧ поля вдоль оси z. Пересечения траекторий на рис. 5 связаны с нефиксированностью структуры поля, следовательно, пересекаются не сами траектории в фазовом пространстве (в данном случае бесконечномерном), а их проекции на плоскость амплитуд. Сами амплитуды не характеризуют однозначно состояние системы с нефиксированной структурой поля. Фазовая плоскость для рассматриваемого низкодобротного резонатора ($Q = 460$) аналогична фазовым плоскостям гиротронов с высокодобротными резонаторами ($Q \approx 1\,000$) [10]. Стационарные колебания рабочей моды устойчивы (состояние равновесия на оси $f^{\rm m}_{22.6}$ типа устойчивого узла), рабочая мода возбуждается в жёстком режиме. Стационарные колебания паразитной моды тоже устойчивы и самовозбуждаются в мягком режиме.

Паразитная мода $\mathrm{TE}_{20.6}$ находится в зоне генерации на встречной волне ($\omega < \omega_H$). Продольная структура поля этой моды в стационарном режиме приведена на рис. 3 (кривая $f_{20.6}$). Взаимодействие её с электронным пучком неэффективно ($\eta \sim 1\,\%$), поэтому, несмотря на минимальный стартовый ток и мягкое самовозбуждение, стационарные колебания этой моды неустойчивы. Они срываются под действием рабочей моды. Фазовая плоскость в этом случае качественно соответ-

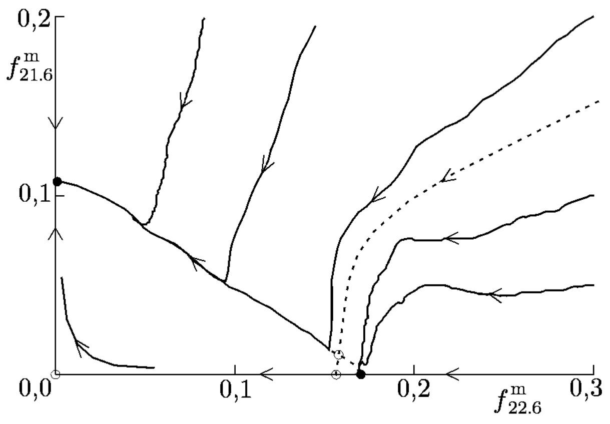

Рис. 5

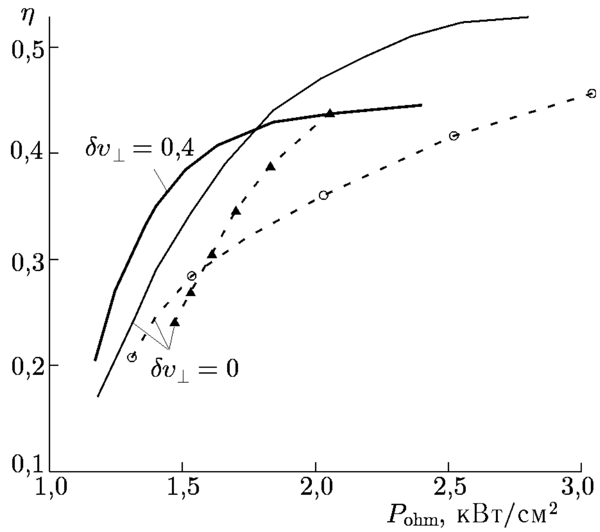

Рис. 6

ствует рис. 7 статьи [10].

Заметим, что столь сильное сглаживание профиля резонатора и существенное удлинение участка взаимодействия для паразитных мод (см. рис. 3) не нарушает устойчивости стационарной генерации рабочей моды. Это происходит потому, что входное сужение резонатора с малым радиусом скругления профиля R_{01} не позволяет полю паразитной моды далеко проникать в сторону катода и модулировать электронный пучок раньше рабочей моды. При большом значении R_{01} ситуация стала бы противоположной, аналогичной рассмотренной в работах [4, 5].

Рабочая мода остаётся устойчивой и при учёте других паразитных мод. Одной из таких мод с максимальным фактором G_{mn} (3), близким к $G_{22.6}$, является $\mathrm{TE}_{-19.7}$ с другим направлением вращения ($m < 0$), отстроенная по критической частоте от рабочей моды на $-0{,}4\,\%$. Она имеет большой стартовый ток ($I_{\rm st} > I$) и жёсткое возбуждение колебаний, как и рабочая мода. Структура фазовой плоскости близка к симметричной и соответствует рис. 6 статьи [10]. Остальные низкочастотные ($\omega_{\text{кр}} < \omega_{\text{кр}22.6}$) моды можно не рассматривать, поскольку для них $G_{mn} \le 0{,}5G_{22.6}$. Нерабочая мода $\mathrm{TE}_{-22.6}$ (с другим направлением вращения) и все высокочастотные паразитные моды ($\mathrm{TE}_{-20.7}$, $\mathrm{TE}_{23.6}$ и др.) не могут возбуждаться, т. к. оптимальная величина статического магнитного поля $B_0^{\rm opt}$ находится вне зон генерации этих мод.

Рабочая и паразитные моды конкурируют, так что установление колебаний той или другой моды зависит от начальных условий. Для установления рабочей моды, как и в гиротронах с высокодобротными резонаторами, необходим определённый сценарий включения гиротрона [10, 11].

6. ВЛИЯНИЕ РАЗБРОСА СКОРОСТЕЙ ЭЛЕКТРОНОВ

На рис. 6 жирной сплошной линией изображена огибающая зависимостей $\eta(P_{\rm ohm})$ при $R_{01} = 60$ мм, различных R_{02} и достаточно большом разбросе скоростей электронов $\delta v_\perp = 0{,}4$. В реальных гиротронах разброс скоростей обычно составляет $0{,}2\div0{,}35$ [1, 12]. Тонкой сплошной линией приведена огибающая зависимостей $\eta(P_{\rm ohm})$ при нулевом разбросе скоростей, взятая из рис. 2. Разброс скоростей сдвигает кривые в сторону уменьшения η и $P_{\rm ohm}$. В области $\eta \ge 0{,}5$ КПД уменьшается без снижения омической нагрузки. В области средних значений $\eta = 0{,}3\div0{,}4$ разброс скоростей уменьшает омическую нагрузку с сохранением КПД, т. е. является положительным фактором. Это объясняется нефиксированностью структуры поля и влиянием «медленных» (с малыми продольными скоростями) электронов, оптимальный энергообмен с которыми происходит при меньших амплитудах ВЧ поля и, соответственно, меньших омических нагрузках. В целом в области $\eta \le 0{,}4$ разброс скоростей позволяет уменьшить омическую нагрузку ещё на 10 % без снижения КПД.

Для сравнения на рис. 6 штриховыми кривыми приведены результаты расчётов простейших моделей гиротронов с предельно низкодобротными электродинамическими системами в виде полубесконечного регулярного и конусного волноводов, участок взаимодействия в которых ограничен резким спадом статического магнитного поля. Кружками отмечены длины участка взаимодействия в регулярном волноводе $L = 12 \div 20$ мм с шагом 2 мм. Треугольниками обозначены углы раскрыва конусного волновода от $0{,}1^\circ$ до $0{,}6^\circ$ с шагом $0{,}1^\circ$. Из рис. 6 видно, что простейшие модели неоптимальны по омической нагрузке. Это объясняется слишком малой групповой скоростью излучаемой волны на выходе из пространства взаимодействия, а также отражением волны от неоднородности электронного пучка, вызванной резким спадом магнитного поля. Необходимо, чтобы после отдачи основной части энергии электронов ($z \approx 10$ мм, кривая $\eta(z)$ на рис. 3) угол раскрыва волновода непрерывно возрастал вдоль z до полного прекращения взаимодействия электронного пучка с ВЧ полем.

7. РЕКУПЕРАЦИЯ ОСТАТОЧНОЙ ЭНЕРГИИ ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА

В последнее время для повышения КПД мощных непрерывных гиротронов и снижения тепловой нагрузки коллектора всё чаще начинают применять рекуперацию остаточной энергии отработанного электронного пучка в изолированном коллекторе с тормозящим потенциалом [12, 13]. КПД гиротрона с одноступенчатой рекуперацией определяется выражением

$$\eta_1 = \eta_0 \, \frac{U_0}{U_0 - U_{\text{Т}}} \, ,$$

где η_0 — КПД гиротрона без рекуперации, $U_{\text{Т}}$ — тормозящее напряжение на коллекторе. Значение $U_{\text{Т}}$ ограничено минимальной энергией электронов отработанного пучка на выходе из резонатора $eW_{\min}$, где e — элементарный заряд: $U_{\text{Т}} \le W_{\min}$, чтобы исключить отражение электронов от коллектора. Многократный пролёт отражённых электронов в пространстве между электронной пушкой и коллектором может привести к снижению КПД и нарушению устойчивости электронного пучка.

В короткоимпульсных прототипах гиротронов с рекуперацией с обычными высокодобротными резонаторами КПД достигает 70 % [12, 13]. В длинноимпульсных и непрерывных гиротронах η_1 снижается до 50 % [1]. Представляет интерес рассмотреть влияние оптимизации профиля резонатора на эффективность рекуперации.

В табл. 1 (строки 2–6) показана зависимость КПД и омической нагрузки от радиуса выходного скругления при $\delta v_\perp = 0{,}4$. Длина резонатора соответствует фиксированному КПД 43 % на рис. 2 и зонам, приведённым на рис. 4. Здесь η_1 — КПД гиротрона с рекуперацией без отражения электронов от коллектора ($U_{\text{Т}} = W_{\min}$), $\eta_{1\,\%}$ — КПД гиротрона с отражением 1 % тока пучка от коллектора с увеличенным тормозящим напряжением ($U_T > W_{\min}$). Расчёт $\eta_{1\,\%}$ проводился по упрощённой методике, когда многократный пролёт отражённых электронов через резонатор и взаимодействие их с ВЧ полем не учитывались. Из-за малого количества электронов в «хвосте» функции распределения $F(W)$ ошибка в расчётах невелика.

Разброс скоростей снижает КПД гиротрона без рекуперации η_0 с 43 % до $39 \div 41$ %. КПД почти не зависит от R_{02}, наибольший КПД достигается при $R_{02} = 400$ мм.

Таблица 1

R_{02}, мм	$L_{\rm p}$, мм	η_0, %	η_1, %	$\eta_{1\,\%}$, %	$P_{\rm ohm}$, кВт/см^2
100	11	40,0	56,5	58,5	2,18
200	10	41,0	59,3	61,0	1,94
400	10	41,5	61,0	62,5	1,82
800	8	39,5	59,5	62,0	1,61
1 600	6	39,0	57,0	61,0	1,46
1 600	12	45,0	62,0	67,0	2,02

В строке 7 табл. 1 приведены результаты расчётов с параметрами, соответствующими максимуму КПД при нагрузке 2,4 кВт/см^2 на рис. 2. Из-за разброса скоростей η_0 снижается с 51 % до 45 %, а нагрузка уменьшается до 2 кВт/см^2. КПД гиротрона с рекуперацией достигает 67 %.

В целом оптимизация профиля резонатора слабо влияет на эффективность рекуперации.

8. ОБОБЩЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ НА ДРУГИЕ МОДЫ ГИРОТРОНОВ

Как отмечалось выше, в уравнения (1) и (2) входят только безразмерные переменные и параметры (расстройка рабочей и циклотронной частот Φ, параметр δ, зависящий от профиля резонатора, неизохронность осцилляторного движения электронов $I_0^{-1/3}$ [4, 6]). Мощность, КПД (6) и омическая нагрузка (9) определяются безразмерными переменными с точностью до постоянных размерных множителей.

При переходе к другим размерным переменным несколько изменяется параметр неизохронности $I_0^{-1/3}$ в уравнении (1). Это изменение слабо влияет на КПД, и в первом приближении его можно не учитывать. Так, например, в модели с предельно низкодобротным полубесконечным регулярным волноводом изменение I_0 на порядок в ту или другую сторону относительно оптимального значения $I_0^{\rm opt} = 0{,}015$ [6] изменяет КПД не более чем на 20 % ($\eta_\perp$ уменьшается с 0,75 до 0,6). Аналогичные результаты получаются для модели с высокодобротным резонатором и гауссовой продольной структурой ВЧ поля [14]. Это делает правомерным учёт изменений I_0 только в коэффициентах, связывающих размерные и безразмерные величины, и позволяет полученные для моды $\mathrm{TE}_{22.6}$ результаты распространить на другие моды, частоты и параметры электронного пучка.

В мощных гиротронах используются пространственно-развитые моды ($m \gg 1$, $m^2 \ll \nu_{mn}^2$) [1, 3, 12]. При оптимальном радиусе электронного пучка отношение

$$J_{m-1}(\nu_{mn}R_0/R_{\rm p})/J_m(\nu_{mn}) \approx (\nu_{mn}/m)^{1/2}.$$

Подставляя в (9) выражения для $Q_{\rm ohm}$, I_0 (3), тока пучка $I = P/(\eta U_0)$, относительных скоростей β_z и $\beta_\perp$, радиуса резонатора $R_{\rm p} = \nu_{mn}\lambda/(2\pi)$ и учитывая конкретные параметры рассмотренного гиротрона с рабочей модой $\mathrm{TE}_{22.6}$, нетрудно получить формулу пересчёта омической нагрузки для других гиротронов:

$$P_{\rm ohm} = P_{\rm ohm}^{22.6}\left(\frac{2{,}11 g U_0[\text{кВ}] P[\text{МВт}]}{70\,(1+g^2)}\right)^{2/3}\left(\frac{m}{22}\right)^{1/3}\left(\frac{45{,}6}{\nu_{mn}}\right)^{5/3}\left(\frac{2{,}14}{\lambda[\text{мм}]}\right)^{5/2}. \qquad (10)$$

КПД пересчитывается в соответствии с выражением (6):

$$\eta = \eta^{22.6}\,\frac{t_\perp}{0{,}662}\,. \qquad (11)$$

Влияние изменения омических потерь при пересчёте КПД не учитывается, поскольку, как правило, мощность омических потерь много меньше выходной мощности и составляет по порядку величины одну и ту же её часть ($Q/Q_{\rm ohm} \le 0{,}03$).

Значения $P_{\rm ohm}^{22.6}$ и $\eta^{22.6}$ определяются графиками, приведёнными на рис. 1, 2 и 6. Из (10) и (11) видно, что, кроме оптимизации безразмерных параметров, для уменьшения омической нагрузки необходимо увеличивать питч-фактор, уменьшать U_0 и P и переходить к более высоким модам с бóльшими значениями ν_{mn}.

Зависимость омической нагрузки от m незначительна ($P_{\rm ohm} \propto m^{1/3}$), и азимутальный индекс определяется главным образом радиусом электронного пучка, необходимым для достижения заданной мощности ($kR_0^{\rm opt} = m - 1 + [(m-1)/2]^{1/3}$). С уменьшением длины волны омическая нагрузка быстро возрастает пропорционально $\lambda^{-5/2}$. При $g < 1$ омическая нагрузка уменьшается с уменьшением g, однако это приводит к резкому падению КПД гиротрона (11). КПД зависит только от $t_\perp$ и возрастает с увеличением g.

При переходе к другим гиротронам необходимо пересчитывать размерный профиль резонатора. Радиус резонатора определяется выражением $R_{\rm p} = \nu_{mn}\lambda/(2\pi)$ с точностью до незначительного отклонения частоты колебаний от критической (порядка 0,1 %). Длина регулярного участка пересчитывается в соответствии с выражениями

$$L_{\rm p} = L_{\rm p}^{22.6} \left(k_{mn0}\, \frac{\nu_{mn}}{45{,}6} \right)^{1/3} \frac{\lambda[\text{мм}]}{2{,}14}\ , \tag{12}$$

где

$$k_{mn0} = \left(\frac{2{,}11 g U_0[\text{кВ}]}{70\,(1+g^2)} \right)^2 \frac{m}{22P[\text{МВт}]}\ .$$

Профили входного и выходного волноводных переходов при малом отклонении радиуса перехода от радиуса резонатора определяются приближёнными формулами: $R = R_{\rm p} - (z-z_1)^2/(2R_{01})$, $R = R_{\rm p} + (z-z_2)^2/(2R_{02})$, где z_1, z_2 — координаты начала и конца регулярного участка резонатора. В этом приближении радиусы скруглений описываются следующими выражениями:

$$R_{01} = R_{01}^{22.6} k_{mn0}^{4/3} \left(\frac{\nu_{mn}}{45{,}6} \right)^{1/3} \frac{\lambda[\text{мм}]}{2{,}14}\ , \qquad R_{02} = R_{02}^{22.6} k_{mn0}^{4/3} \left(\frac{\nu_{mn}}{45{,}6} \right)^{1/3} \frac{\lambda[\text{мм}]}{2{,}14}\ , \tag{13}$$

Зависимость длины $L_{\rm p}$ и радиусов скруглений от g, U_0 и P определяется коэффициентом k_{mn0}: $L_{\rm p} \propto k_{mn0}^{1/3}$, $R_{01} \propto k_{mn0}^{4/3}$, $R_{02} \propto k_{mn0}^{4/3}$. При переходе к более высокой рабочей моде и большей длине волны значения $L_{\rm p}$ и R_{01}, R_{02} возрастают пропорционально $\nu_{mn}^{1/3}$ и λ.

Переход к другим рабочим модам изменяет густоту спектра критических частот паразитных мод. Обобщая результаты исследования фазовых плоскостей нескольких конкретных мод TE_{mn} с различными отстройками критических частот $\omega_{\text{кр}.mn}$ от $\omega_{\text{кр}.0}$ рабочей моды, нетрудно заметить следующее. При большой отрицательной отстройке ($\delta\omega_{\text{кр}} = (\omega_{\text{кр}.mn} - \omega_{\text{кр}.0})/\omega \le -5{,}4\,\%$) стационарные колебания паразитной моды неустойчивы, несмотря на то, что она находится в области минимального стартового тока. С уменьшением $|\delta\omega_{\text{кр}}|$ стартовый ток возрастает, но колебания паразитной моды становятся устойчивыми, с мягким самовозбуждением ($\delta\omega_{\text{кр}} \approx -2{,}7\,\%$). При дальнейшем уменьшении $|\delta\omega_{\text{кр}}|$ режим возбуждения паразитной моды становится жёстким ($\delta\omega_{\text{кр}} \approx -0{,}4\,\%$). Вырожденная рабочая мода, с другим направлением вращения ($\delta\omega_{\text{кр}} = 0$, $m < 0$), и паразитные моды с $\delta\omega_{\text{кр}} > 0$ не возбуждаются вообще. Стационарные колебания рабочей моды во всех случаях остаются устойчивыми, с жёстким возбуждением.

Рассмотренные гиротроны с ускоряющим напряжением $70 \div 80$ кВ относятся к слаборелятивистским. При переходе к релятивистским гиротронам пересчётные формулы отличаются от (10)–(13) только заменой в КПД (11) $t_\perp$ на релятивистское значение $t_{\perp\rm rel}$.

9. ОПТИМИЗИРОВАННЫЙ ВАРИАНТ РЕЗОНАТОРА 170 ГГц/1 МВт ГИРОТРОНА

Применим полученные ранее результаты к расчёту оптимизированного варианта непрерывного 170 ГГц/1 МВт гиротрона. В качестве рабочей моды возьмём $\mathrm{TE}_{25.10}$.

Рассмотрим сначала вариант с ускоряющим напряжением 80 кВ. Питч-фактор примем равным 1,2, основываясь на результатах электронно-оптических расчётов и измерений. При $P = 1$ МВт, $m = 25$, $\nu_{mn} = 63{,}3197$, $\lambda = 1{,}763$ мм получим коэффициенты пересчёта:

$$P_{\mathrm{ohm}} = 1{,}1P_{\mathrm{ohm}}^{22.6}; \qquad \eta = 0{,}8914\eta^{22.6}; \qquad L_{\mathrm{p}} = 1{,}0743L_{\mathrm{p}}^{22.6}; \qquad R_{01,02} = 1{,}717R_{01,02}^{22.6}.$$

Радиус резонатора равен $1{,}001R_{\text{кр}} = 17{,}79$ мм, радиус электронного пучка 7,4 мм.

С такими коэффициентами перемасштабируются оси координат и параметры на рис. 1, 2 и 6. Допустимую омическую нагрузку на частоте 170 ГГц определим как 1,9 кВт/см^2. Этому значению на рис. 2 соответствует $P_{\mathrm{ohm}} = 1{,}727$ кВт/см^2, оптимальное значение $R_{02}^{22.6} = 800$ мм, $\eta^{22.6} = 0{,}405$. Значение $R_{02}^{22.6} = 1\,600$ мм выбирать не следует, поскольку это режим вблизи срыва генерации. После пересчёта получаем реальные значения $L_{\mathrm{p}} = 6{,}45$ мм ($L_{\mathrm{p}}^{22.6} = 6$ мм), $R_{01} = 103$ мм ($R_{01}^{22.6} = 60$ мм), $R_{02} = 1\,370$ мм, $\eta = 36$ %.

Проверочные расчёты с использованием более точных, релятивистских уравнений показывают, что при $P = 1$ МВт оптимизированный резонатор имеет КПД 35 %, т. е. на 1 % ниже, чем по пересчётным формулам, и омическую нагрузку $P_{\mathrm{ohm}} = 1{,}7$ кВт/см^2, что на 11 % ниже, чем по пересчётным формулам. Значения $\eta = 36$ % и $P_{\mathrm{ohm}} = 1{,}9$ кВт/см^2, почти точно соответствующие пересчётным формулам, получаются при более высоком уровне мощности $P = 1{,}15$ МВт. Это связано с нефиксированностью структуры ВЧ поля, релятивистскими эффектами и приближённостью пересчётных формул.

Заметим, что используемый в промышленных и экспериментальных гиротронах с частотой 170 ГГц резонатор (обычный, неоптимизированный по данной методике), обеспечивает расчётные значения $\eta = 36{,}5$ %, $P = 1$ МВт с омической нагрузкой $P_{\mathrm{ohm}} = 2{,}2$ кВт/см^2, что на 30 % больше, чем в оптимизированном резонаторе. Выгода от оптимизации R_{01}, R_{02} представляется несомненной.

При повышенном ускоряющем напряжении $U_0 = 90$ кВ омическая нагрузка резонатора согласно формуле (10) возрастает пропорционально $U_0^{2/3}$ примерно на 8 %. КПД гиротрона уменьшается. Повышение напряжения обосновывается обычно улучшением условий формирования электронного пучка и возможностью увеличения питч-фактора.

Будем считать, что при $U_0 = 90$ кВ питч-фактор возрастает до 1,3. Тогда при заданных значениях $P = 1$ МВт и $P_{\mathrm{ohm}} = 1{,}9$ кВт/см^2 получаются следующие результаты пересчёта: $P_{\mathrm{ohm}}^{22.6} = 1{,}9$ кВт/см^2/1,176 = 1,616 кВт/см^2, тогда при $R_{02}^{22.6} = 800$ мм из рис. 2 следует $\eta^{22.6} = 0{,}375$ и реальный КПД $\eta = 35{,}6$ %. Длина резонатора $L_{\mathrm{p}}^{22.6} = 5$ мм пересчитывается в $L_{\mathrm{p}} = 5{,}75$ мм, скругления профиля $R_{01}^{22.6} = 60$ мм и $R_{02}^{22.6} = 800$ мм пересчитываются в $R_{01} = 130$ мм и $R_{02} = 1\,800$ мм.

Проверочные расчёты этого варианта с использованием точных уравнений дают КПД 36 % и омическую нагрузку 1,92 кВт/см^2, почти точно совпадающие с найденными по аналитическим формулам.

Обычный неоптимизированный резонатор при $U_0 = 90$ кВ согласно точным расчётам даёт КПД 37 %, т. е. на 1 % больше, чем оптимизированный резонатор, и омическую нагрузку 2,25 кВт/см^2, что на 18 % больше, чем оптимизированный резонатор. Выгода от оптимизации составляет в этом случае около 20 %. Сравнение результатов точных и приближённых расчётов показывает, что аналитические формулы обеспечивают достаточную для оценок и предварительных расчётов точность определения КПД и омической нагрузки, равную 10 %.

Оптимизация резонатора гиротрона с частотой 170 ГГц позволяет уменьшить омическую нагрузку на 20÷30 % до уровня 1,7÷1,9 кВт/см^2 при сохранении КПД на уровне 35 %. С увеличением ускоряющего напряжения омическая нагрузка возрастает, несмотря на оптимизацию и увеличение питч-фактора.

ВЫВОДЫ

Оптимизация профиля резонатора позволяет уменьшить омическую нагрузку при сохранении высокого КПД. Разброс скоростей электронов снижает максимальный КПД и несколько уменьшает омическую нагрузку резонатора.

Оптимизация резонатора практически не влияет на эффективность рекуперации.

Снижение добротности резонатора вследствие оптимизации его профиля не влияет на устойчивость стационарных колебаний рабочей моды. Конкуренция мод в процессе установления колебаний происходит почти так же, как в гиротронах с высокодобротными резонаторами.

Результаты расчётов могут быть обобщены на другие гиротроны мегаваттного уровня мощности и релятивистские гиротроны с помощью простых аналитических формул.

Исследование проведено при поддержке РФФИ (гранты № 02–02–17105 и 00–02–16412а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zapevalov V. E., Denisov G. G., Flyagin V. A., et al. // Plasma Devices and Operations. 1998. V. 6. P. 111.
2. Заруднева Г. И., Калынов Ю. К., Малыгин С. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1988. Т. 31, № 3. С. 343.
3. Запевалов В. Е., Калынов Ю. К., Куфтин А. Н. и др. // Изв. вузов. Радиофизика. 1994. Т. 37, № 3. С. 381.
4. Братман В. Л., Новожилов С. Л., Петелин М. И. // Электронная техника. Сер 1. Электроника СВЧ. 1976. № 11. С. 46.
5. Cai S. Y., Antonsen T. M., Jr, Saraph G., Levush B. // Int. J. Electron. 1992. V. 72, No. 5–6. P. 759.
6. Братман В. Л., Моисеев М. А., Петелин М. И., Эрм Р. Э. // Изв. вузов. Радиофизика. 1973. Т. 16, № 4. С. 622.
7. Кураев А. А., Ковалёв И. С., Колосов С. В. Численные методы оптимизации в задачах электроники СВЧ. Минск: Наука и техника, 1975.
8. Bratman V. L., Ginzburg N. S., Nusinovich G. S., et al. // Int. J. Electron. 1981. V. 51, No. 4. P. 541.
9. Завольский Н. А., Запевалов В. Е., Моисеев М. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 2001. Т. 44, № 4. С. 345.
10. Moiseev M. A., Nemirovskaya L. L., Zapevalov V. E., Zavolsky N. A. // Int. J. Infrared Millimeter Waves. 1997. V. 18, No. 11. P. 2 117.
11. Нусинович Г. С. // Электронная техника. Сер 1. Электроника СВЧ. 1974. № 3. С. 44.
12. Glyavin M. Yu., Kuftin A. N., Venediktov N. P., Zapevalov V. E. // Int. J. Infrared Millimeter Waves. 1997. V. 18, No. 11. P. 2 129.
13. Sakamoto K., Tsuneoka M., Kasugai A., et al. // Phys. Rev. Lett. 1994. V. 73, No. 26. P. 3 532.

14. Нусинович Г. С., Эрм Р. Э. // Электронная техника. Сер 1. Электроника СВЧ. 1972. № 8. С. 55.

Институт прикладной физики РАН,
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию
23 сентября 2003 г.

POSSIBILITIES FOR OPTIMIZING THE CAVITY OF A HIGH-POWER CONTINUOUS-WAVE GYROTRON

N. A. Zavol'sky, V. E. Zapevalov, M. A. Moiseev, and L. L. Nemirovskaya

We calculate the optimal parameters of a low-Q cavity of a millimeter-wavelength continuous-wave gyrotron, which ensure that the maximum efficiency is reached with a limited heat load on the cavity wall. The influence of the cavity optimization on the efficiency of energy recovery of a collector electron beam is considered. Stability of the operating mode to self-excitation of other modes is studied. Gyrotrons with radiation power 1 MW, frequency range 140 − 170 GHz, and operating modes $TE_{22.6}$ and $TE_{25.10}$ are considered as the example. The obtained results are generalized to gyrotrons with other operating modes and frequencies.

УДК 621.372.8

МЕТОД СИНТЕЗА ВОЛНОВОДНЫХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ

Г. Г. Денисов, Г. И. Калынова, Д. И. Соболев

В данной работе предложен итерационный метод синтеза преобразователей волноводных мод и рассмотрена одна из его реализаций для изогнутых волноводов круглого сечения. Приведены примеры преобразователей, рассчитанных при помощи данного метода. Метод позволяет найти принципиально новые решения для задач разработки преобразователей мод.

ВВЕДЕНИЕ

При построении волноводных линий передачи возникает необходимость в компонентах, обеспечивающих либо сохранение волноводных мод при повороте линии или изменении её параметров (например, радиуса), либо преобразование одних мод в другие. Развитые до настоящего времени методы синтеза (см., например, [1]) имели во многом неудовлетворительные показатели как по параметрам полученных преобразователей — длине и коэффициенту передачи, так и по затрачиваемым вычислительным ресурсам. Целью настоящей работы является формулировка нового эффективного итерационного алгоритма синтеза преобразователей волноводных мод.

1. ОПИСАНИЕ МЕТОДА

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений, имеющую следующий вид:

$$\frac{\mathrm{d}a_j}{\mathrm{d}z} = ih_j(z)a_j + i\sum_{k\neq j}\kappa_{jk}(z)a_k. \tag{1}$$

Такая система отвечает, например, задаче об одномерном распространении волн в нерегулярном волноводе (зависимость от времени $\exp(-i\omega t)$). При этом a_j и h_j — амплитуда и волновое число j-й моды, $\kappa_{jk}(z)$ — коэффициенты связи k-й и j-й мод. В простейшем случае, когда все волны распространяются без потерь в положительном направлении оси z, волновые числа положительны. Для мод полого металлического волновода собственные числа и коэффициенты связи получены в [2, 3], причём волновые числа могут считаться как постоянными (при рассмотрении методом возмущений волновода с малыми деформациями), так и зависящими от координаты z (при рассмотрении нерегулярных волноводов методом поперечных сечений). Перенормировкой амплитуд всегда можно добиться выполнения соотношения $\kappa_{jk}(z) = \kappa^*_{kj}(z)$, где звёздочка обозначает комплексное сопряжение, при этом закон сохранения энергии приобретает вид $\sum_j |a_j|^2 = 1$.

Рассмотрим случай распространения всех волн в положительном направлении оси z. Будем считать полную длину преобразователя постоянной и зададим на его концах два возможных граничных условия: в начале волновода — вектор амплитуд волн $a_j(0)$, соответствующий заданному полю, в конце волновода — желаемый вектор амплитуд $a_j(L)$. Следует отметить, что если первое граничное условие всегда является достаточным для расчёта амплитуд волн внутри волновода, то второе — нет, т. к. во многих случаях не важна разность фаз волн на входе и выходе. Обозначим распределение амплитуд волн, полученное с использованием первого граничного условия, как $a_j^{(1)}(z)$. В случае, если второе граничное условие является недостаточным, то недостающую фазу можно ввести, исходя из значений $a_j^{(1)}$ на выходе. После этого можно получить распределение амплитуд волн с использованием второго граничного условия. Обозначим это распределение как $a_j^{(2)}(z)$. В случае, когда профиль волновода обеспечивает полное преобразование начального вектора амплитуд в желаемый, равенство $a_j^{(1)}(z) = a_j^{(2)}(z)$ будет выполнено для всех j и z. Если преобразование неполное, то, соответственно, $a_j^{(1)}(z) \neq a_j^{(2)}(z)$.

Для организации итерационной процедуры синтеза коэффициентов связи на каждом шаге будем находить поправку к коэффициентам связи, определяемую разностью двух полученных распределений. Также потребуем, чтобы поправка давала асимптотическое (при $(h_2 - h_1)\, L \gg \gg \pi$) решение двухволновой задачи (преобразование одной волны в другую в случае, когда рассматриваются только две невырожденные волны) за одну итерацию. В случае действительного коэффициента связи таким решением является

$$\kappa_{12}(z) = \frac{\pi}{L}\, \sin[(h_2 - h_1)\, z], \tag{2}$$

где L — полная длина преобразователя. Нетрудно проверить, что двум поставленным выше условиям отвечает следующее выражение:

$$\Delta\kappa_{12} = \frac{\pi}{2L}\, \mathrm{Im}\left[a_1^{(1)*} a_2^{(2)} - a_1^{(2)*} a_2^{(1)} + a_2^{(1)*} a_1^{(2)} - a_2^{(2)*} a_1^{(1)}\right]. \tag{3}$$

Для определения необходимой деформации поверхности волновода рассмотрим наиболее простой случай, когда коэффициенты связи представляют собой произведение констант, зависящих от типов и индексов волн, на единственную функцию, характеризующую деформацию (например, кривизну в случае изгиба регулярного волновода или тангенс угла наклона образующей волновода в случае осесимметричной деформации):

$$\kappa_{ij}(z) = \gamma_{jk} f(z). \tag{4}$$

При этом поправка к f будет выглядеть следующим образом:

$$\Delta f_{jk}(z) = \frac{\pi}{2L}\, \mathrm{Im}\left[\frac{a_j^{(1)*} a_k^{(2)} - a_j^{(2)*} a_k^{(1)}}{\gamma_{jk}} + \frac{a_k^{(1)*} a_j^{(2)} - a_k^{(2)*} a_j^{(1)}}{\gamma_{kj}}\right]. \tag{5}$$

В расчётах волноводов с количеством волн, большим двух, поправки от каждой пары взаимодействующих волн складываются: $\Delta f(z) = \sum_{j,k} \Delta f_{jk}(z)$. Каждая итерация метода представляет собой вычисление распределений $a_j^{(1)}(z)$ и $a_j^{(2)}(z)$ при текущем $f(z)$, затем вычисление поправки $\Delta f(z)$ и соответствующего изменения профиля волновода. Также в численных реализациях метода могут быть полезны некоторые ограничения. Во-первых, волны с очень слабым взаимодействием между собой $\left(\int_0^L |\kappa_{ij}(z)|\, \mathrm{d}z \ll \pi/2\right)$ могут быть исключены при расчёте поправки, т. к. существенного вклада в преобразование взаимодействие с ними дать не может. Во-вторых, необходимо ограничить максимальную величину деформации, чтобы не выйти за границы применимости исходной системы, а также для того, чтобы коэффициенты связи были меньше собственных чисел волновода.

2. РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА ДЛЯ ИЗОГНУТОГО ВОЛНОВОДА КРУГЛОГО СЕЧЕНИЯ

При изгибе волновода круглого сечения коэффициенты связи отличны от нуля только для пар волн, азимутальные индексы которых отличаются на единицу. Выражения для коэффициентов связи приведены в [3]. Коэффициенты связи обратно пропорциональны радиусу изгиба, т. е. прямо пропорциональны его кривизне, так что разумно выбрать последнюю в качестве функции $f(z)$. Поскольку одним из наиболее часто встречающихся требований является полный угол поворота изогнутого волновода, необходимо обеспечить возможность его задания. Угол поворота представляет собой интеграл от кривизны по продольной координате, так что сохранения полного угла поворота можно добиться, прибавляя к кривизне после каждой итерации постоянную добавку следующего вида:

$$\Delta f_0 = \frac{1}{L}\left[\varphi_\Sigma - \int\limits_0^L f(z)\,\mathrm{d}z\right], \tag{6}$$

где φ_Σ — заданный угол поворота, L — полная длина преобразователя. Кроме того, ограничение модуля кривизны сверху является необходимым даже из геометрических соображений: радиус кривизны не может быть меньше радиуса волновода.

3. ПРИМЕРЫ ВОЛНОВОДНЫХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ, РАССЧИТАННЫХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДАННОГО МЕТОДА

На основе предложенного метода рассчитаны разнообразные преобразователи волноводных мод. Во многих случаях результаты проверены расчётами синтезированных волноводов другими методами. В данной статье приведём лишь два примера такого синтеза.

3.1. Преобразователь волны TM_{01} в гауссов пучок

Целью синтеза волновода в этом случае является получение на выходе преобразователя смеси волн TE_{11} (85 % мощности) и TM_{11} (15 % мощности) с разностью фаз, равной π. Пространственная структура этой смеси очень близка к структуре линейно поляризованного гауссова волнового пучка. Длина волны $\lambda = 30$ мм, длина волновода 50 см, диаметр волновода $1{,}8\,\lambda$ (рис. 1). В расчётах учитывались 9 мод, т. е. все распространяющиеся моды данной частоты, возбуждающиеся модой TM_{01} при изгибе волновода. Максимальное содержание искомой смеси волн составило 99,98 %. Полное время расчётов (несколько десятков итераций) меньше одной минуты при частоте процессора 2 ГГц.

3.2. Волноводный поворот на угол 90° с сохранением моды TE_{01}

Длина волны $\lambda = 30$ мм, длина волновода 50 см, диаметр волновода $1{,}8\lambda$. Мода TE_{01} вырождена с модой TM_{11}; при данных параметрах волновода полный угол поворота близок к углу Жуге, за счёт чего при постоянной кривизне волновода достигается почти полная нежелательная трансформация TE_{01} в TM_{11} (это видно на рис. 2 при нулевой итерации ($n = 0$)). Однако за счёт связи с волнами, с которыми вырождение отсутствует (в данном случае это в основном TE_{11} и TE_{12}) в результате итерационного синтеза удалось на выходе получить до 99,98 % мощности в моде TE_{01}. В расчётах учитывались все распространяющиеся моды на заданной частоте (9 мод). Полное время расчётов меньше одной минуты (при частоте процессора 2 ГГц).

Несмотря на сильную зависимость кривизны от продольной координаты, профиль волновода отличается от равномерного поворота несущественно (см. рис. 3), т. к. при двойном интегрировании, которое необходимо для получения координат точек оси, все осциллирующие члены делятся на квадрат своей частоты, что приводит к их существенному уменьшению относительно постоянной составляющей кривизны.

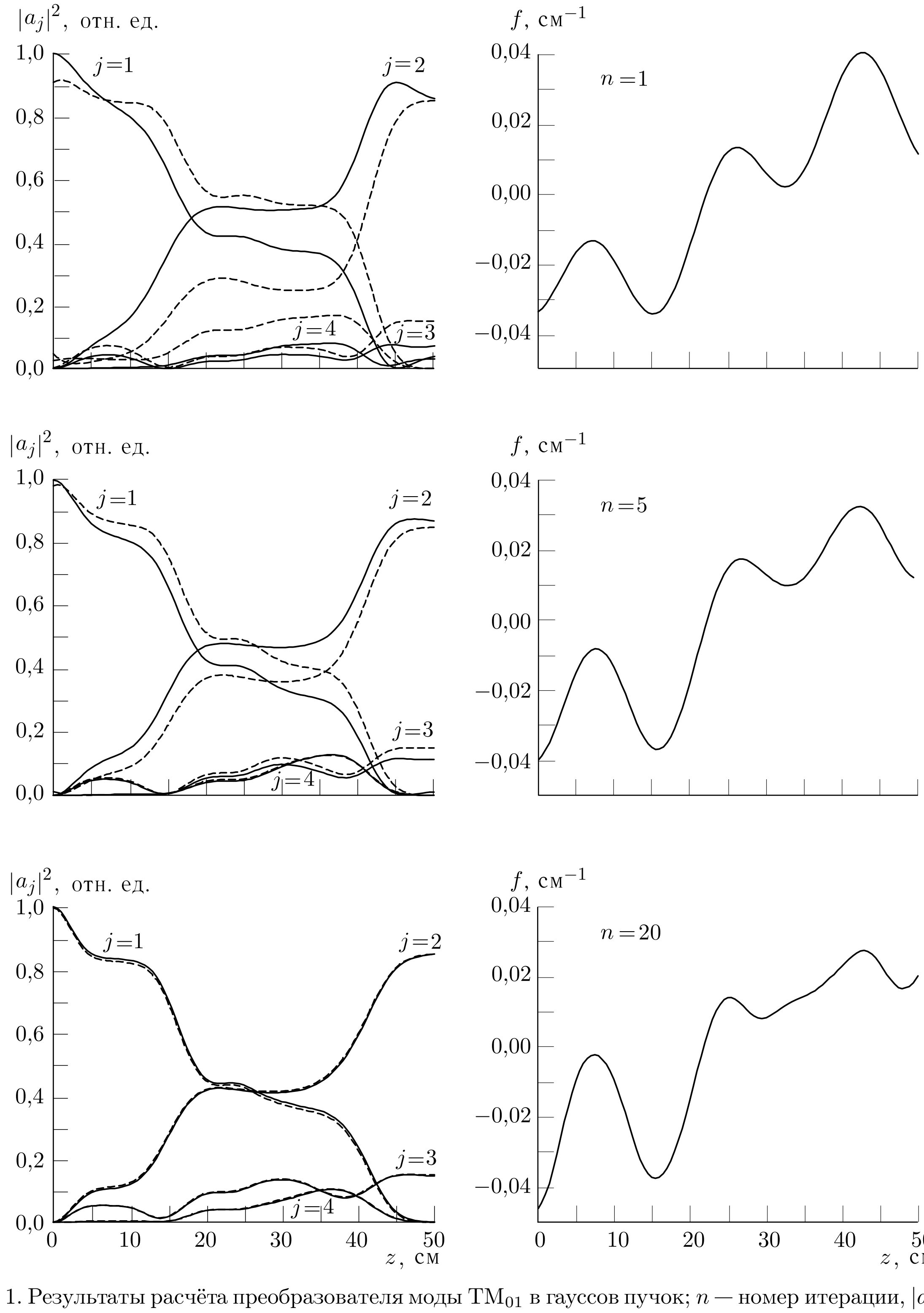

Рис. 1. Результаты расчёта преобразователя моды TM_{01} в гауссов пучок; n — номер итерации, $|a_j|^2$ — мощность j-й волны (суммарная мощность всех волн равна 1), f — кривизна волновода. Волны, полученные с использованием граничного условия на правом конце, показаны пунктиром. Первая волна — TM_{01}, вторая — TE_{11}, третья — TM_{11}, четвёртая — TE_{21}

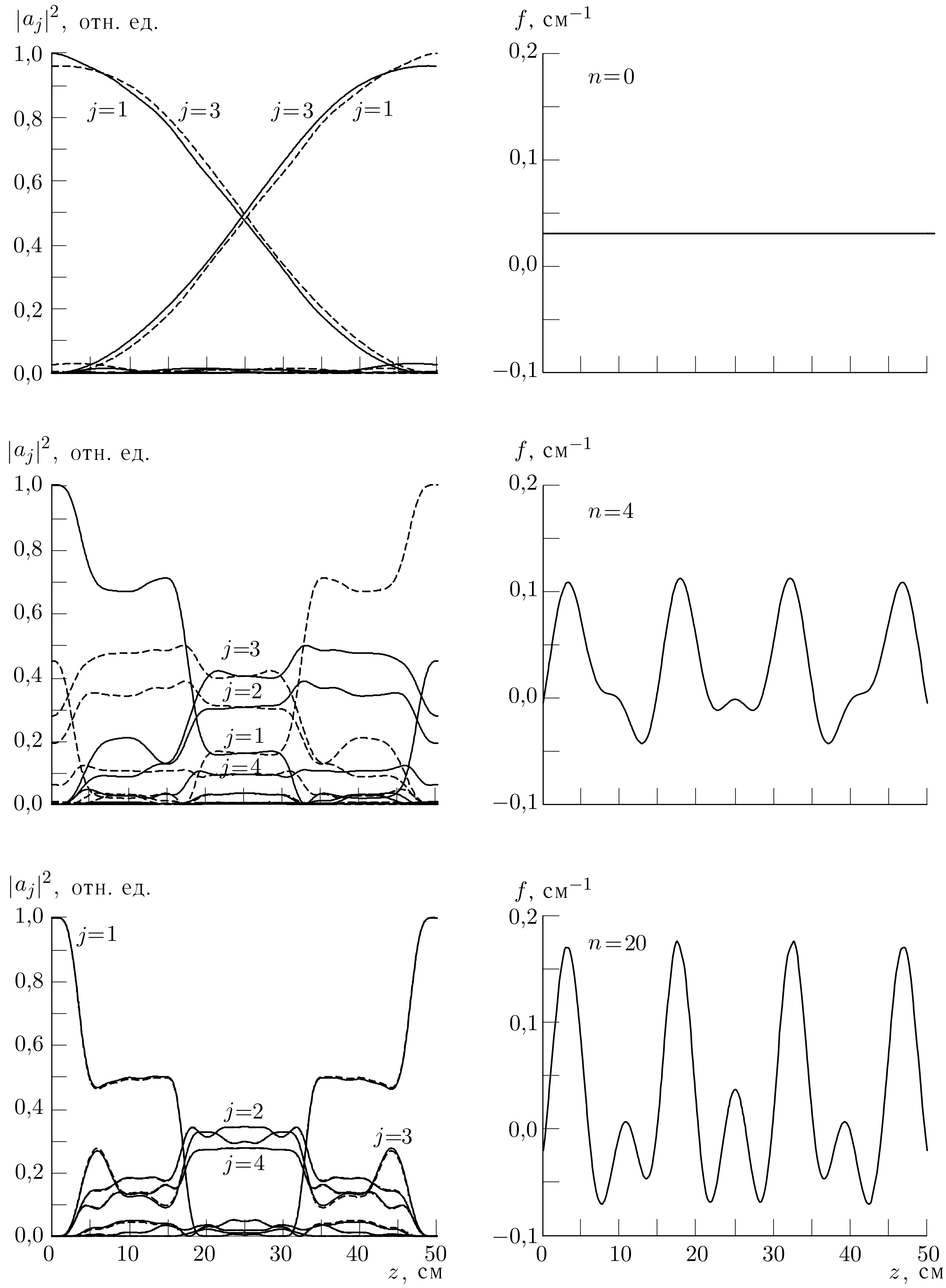

Рис. 2. Результаты расчёта волноводного поворота с сохранением моды TE_{01}; n — номер итерации (нулевая итерация — поворот с постоянной кривизной), $|a_j|^2$ — мощность j-й волны (суммарная мощность всех волн равна 1), f — кривизна волновода. Волны, полученные с использованием граничного условия на правом конце, показаны пунктиром. Первая волна — TE_{01}, вторая — TE_{11}, третья — TM_{11}, четвёртая — TE_{12}

Анализируя найденный в результате синтеза профиль волновода, можно заметить, что в кривизне волновода есть осциллирующие компоненты, которые обеспечивают связь волн TE_{01} и TM_{11} с некоторыми вспомогательными волнами. В результате этой связи снимается вырождение волн и реализуется необходимая волна на выходе. Этот пример иллюстрирует, что даже при очень сильно различающихся начальном и желаемом профилях волновода метод позволяет найти решение задачи.

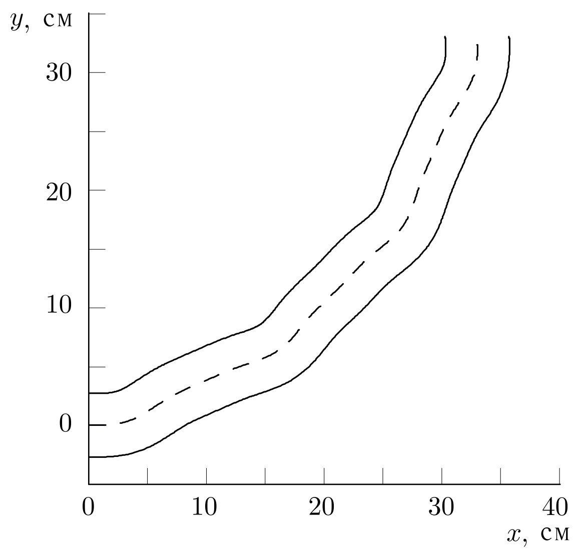

Рис. 3. Осевое сечение волноводного поворота с сохранением моды TE_{01} (соответствует 20-й итерации). Пунктиром показана ось волновода

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулирован новый итерационный метод синтеза волноводных преобразователей мод, описываемых системами линейных дифференциальных уравнений. Метод позволяет получать преобразователи с уникальными параметрами.

Авторы благодарны А. В. Чиркову и С. В. Кузикову за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Plaum B., Wagner D., Kasparek W., Thumm M. // Proc. of 25th International Conference on Infrared and Millimeter Waves, 2000, Beijing, China. P. 219.
2. Каценеленбаум Б. З. Теория нерегулярных волноводов с медленно меняющимися параметрами. М.: Изд-во АН СССР, 1961.
3. Керженцева Н. П. // Радиотехника и электроника. 1958. Т. 3, № 5. С. 649.

Институт прикладной физики РАН, г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию 16 мая 2004 г.

METHOD FOR SYNTHESIS OF WAVEGUIDE MODE CONVERTERS

G. G. Denisov, G. I. Kalynova, and D. I. Sobolev

We propose an iterative method for synthesis of waveguide mode converters. An application of this method for bent circular waveguides is considered. Examples of synthesized converters calculated using this method are presented. The method offers fundamentally new solutions to the problems of mode converter development.

УДК 621.396.67.01

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РАЗЛИЧНЫХ СТАТИСТИК ОБНАРУЖЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СИГНАЛОВ В СЛУЧАЕ КОРОТКИХ ВЫБОРОК

О. В. Болховская, А. А. Мальцев, К. В. Родюшкин

В настоящей работе проводится сравнительный анализ нескольких алгоритмов обработки сигналов в антенной решётке, используемой для обнаружения многомерных гауссовских комплексных сигналов с априорно неизвестной пространственной ковариационной матрицей на фоне гауссовского шума. Все исследуемые решающие статистики получены на основе обобщённого отношения правдоподобия для выборок произвольного объёма. В зависимости от имеющейся в распоряжении априорной информации о принимаемом сигнале и шумах рассматриваются три случая шумового фона: неоднородный по элементам антенны шум с неизвестными мощностями, однородный шум с неизвестной мощностью и однородный шум с известной (единичной) мощностью. Для определения пороговых значений решающих статистик их плотности вероятностей раскладываются в ряд по ортогональным многочленам Якоби. На основе найденных порогов построены кривые обнаружения для всех рассматриваемых случаев. Полученные результаты справедливы для коротких выборок, объём которых сравним с количеством элементов приёмной антенны.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим узкополосную приёмную антенную решётку, состоящую из p элементов, с произвольным расположением датчиков. Будем считать, что сигналы с элементов антенны образуют p-мерный вектор $\mathbf{z}$, являющийся комплексным случайным гауссовским вектором. Предполагается, что осуществляется N выборок выходного сигнала $\mathbf{z}^{(1)}, \mathbf{z}^{(2)}, \ldots, \mathbf{z}^{(N)}$, которые являются статистически независимыми, одинаково распределёнными случайными векторами с нулевым средним значением и пространственной ковариационной матрицей $\mathbf{\Sigma}$. В дальнейшем будем рассматривать только невырожденный случай, предполагая, что объём выборки N больше, чем число антенных элементов ($N \geq p$).

Задача обнаружения узкополосного пространственно-коррелированного полезного сигнала антенной решёткой формулируется как классическая двухальтернативная задача различения двух гипотез [1–3]:

$$\begin{gathered} \text{нулевой гипотезы (только шум) } \mathrm{H}_0\colon \mathbf{\Sigma} = \mathbf{\Sigma}_0, \\ \text{альтернативной гипотезы (сигнал и шум) } \mathrm{H}_1\colon \mathbf{\Sigma} \neq \mathbf{\Sigma}_0. \end{gathered} \tag{1}$$

При этом введение характеристик шума происходит с помощью задания ковариационной матрицы $\mathbf{\Sigma}_0$. В зависимости от имеющейся априорной информации о шумовом фоне будем рассматривать три различных варианта нулевой гипотезы в порядке возрастания имеющейся априорной информации.

Пусть в первом случае мы не имеем никакой априорной информации о шуме, кроме условия независимости его отсчётов в различных элементах антенны. Ковариационная матрица $\mathbf{\Sigma}_0$ такого шума будет иметь вид

$$\mathbf{\Sigma}_{01} = \begin{pmatrix} \sigma_{11}^2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \sigma_{22}^2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \sigma_{pp}^2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

и будет соответствовать нулевой гипотезе H_{01}. Если дополнительно к независимости шума в элементах антенны имеется априорная информация о его однородности (одинаковой мощности в разных элементах антенны: $\sigma_{ii}^2 = \sigma^2 = \mathrm{const}$), то ковариационная матрица $\mathbf{\Sigma}_0$ будет равна

$$\mathbf{\Sigma}_{02} = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma^2 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Соответствующую нулевую гипотезу будем обозначать H_{02}. В случае, если дополнительно к этой информации известна ещё и мощность шума σ^2 (например, она измеряется во время отсутствия сигнала или осуществляется предварительная калибровка датчиков: $\sigma_{ii}^2 = \sigma^2 = 1$), ковариационная матрица шума $\mathbf{\Sigma}_0$ будет единичной:

$$\mathbf{\Sigma}_{03} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Соответствующую нулевую гипотезу будем обозначать H_{03}.

Обобщённое отношение правдоподобия для сформулированной выше задачи (1) можно записать в виде

$$\Lambda = \max_{\mathbf{\Sigma}\in\omega} L(\mathbf{0},\mathbf{\Sigma}) / \max_{\mathbf{\Sigma}\in\Omega} L(\mathbf{0},\mathbf{\Sigma}), \tag{5}$$

где

$$L(\mathbf{0},\mathbf{\Sigma}) = \frac{1}{|\mathbf{\Sigma}|^N \pi^{pN}} \exp\left[-\sum_{\alpha=1}^{N} \mathbf{z}^{(\alpha)\dagger}\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{z}^{(\alpha)}\right] \tag{6}$$

— функция правдоподобия для комплексного гауссовского распределения [4], ω — подобласть, соответствующая нулевой гипотезе H_0 в полном пространстве параметров Ω, $|\mathbf{\Sigma}|$ — детерминант матрицы, индекс $\dagger$ означает эрмитовское сопряжение.

Подробный вывод отношения правдоподобия для гипотезы H_{01} (см. (2)) приводится в работе [5], где получено следующее выражение:

$$\Lambda_1 = \frac{|\mathbf{A}|^N}{\prod\limits_{i=1}^{p} (a_{ii})^N}\ , \tag{7}$$

где $\mathbf{A} = N\hat{\mathbf{\Sigma}}_\Omega = \sum_{\alpha=1}^{N} \mathbf{z}^{(\alpha)}\mathbf{z}^{(\alpha)\dagger}$.

Рассмотрим теперь тест-статистику для гипотезы H_{02} (3). Можно показать [1], что своего максимального значения функция правдоподобия в знаменателе решающей статистики (5) для гипотезы H_{02} достигает при использовании максимально правдоподобной оценки $\hat{\mathbf{\Sigma}}_\Omega$ ковариационной матрицы $\mathbf{\Sigma}_{02}$:

$$\hat{\mathbf{\Sigma}}_\Omega = \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N} \mathbf{z}^{(\alpha)}\mathbf{z}^{(\alpha)^\dagger}, \tag{8}$$

и это значение равно

$$\max_{\mathbf{\Sigma}\in\Omega} L(\mathbf{0},\mathbf{\Sigma}) = \frac{\exp(-pN)}{|\hat{\mathbf{\Sigma}}_\Omega|^N \pi^{pN}}\ . \tag{9}$$

Максимум функции правдоподобия в числителе выражения (5) должен быть получен в подобласти параметров ω ($\mathbf{\Sigma} \in \omega$), соответствующих нулевой гипотезе с ковариационной матрицей (3). Если гипотеза H_{02} верна, функция правдоподобия примет вид

$$L(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma}_0) = \prod_{i=1}^{p} L_i(0, \sigma^2) = \frac{1}{(\pi\sigma^2)^{pN}} \exp\left(-\frac{1}{\sigma^2} \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{i=1}^{p} |z_i^{(\alpha)}|^2 \right), \tag{10}$$

где $L_i(0, \sigma^2) = \Pi_{\alpha=1}^{N} (\pi\sigma^2)^{-1} \exp(-z_i^{(\alpha)\dagger} \sigma^{-2} z_i^{(\alpha)})$ — функция правдоподобия для сигнала, поступающего с i-го датчика.

Используя представление (10) для функции правдоподобия, легко найти числитель (5):

$$\max_{\mathbf{\Sigma} \in \omega} L(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma}) = \max_{\sigma} \prod_{i=1}^{p} L_i(0, \sigma^2) = \frac{\exp(-pN)}{\pi^{pN} \hat{\sigma}^{pN}} . \tag{11}$$

Можно показать, что этот максимум достигается при использовании в качестве оценки неизвестной дисперсии аддитивного шума приёмника σ^2 оценки наибольшего правдоподобия для дисперсии сигнала отдельного элемента решётки:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{pN} \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{i=1}^{p} |z_i^{(\alpha)}|^2 = \frac{\mathrm{Sp}\,\mathbf{A}}{pN} . \tag{12}$$

Таким образом, принимая во внимание формулы (9) и (11), получим окончательное выражение для GLR (Generalized Likelihood Ratio) тест-статистики (5) в задаче обнаружения (1), соответствующей нулевой гипотезе (3):

$$\Lambda_2 = \frac{|\hat{\mathbf{\Sigma}}_\Omega|^N}{(p^{-1}\,\mathrm{Sp}\,\mathbf{A})^{pN} N^{-pN}} = \frac{|\mathbf{A}|^N}{(p^{-1}\,\mathrm{Sp}\,\mathbf{A})^{pN}} . \tag{13}$$

Перейдём теперь к выводу выражения для тест-статистики при нулевой гипотезе H_{03}, когда априори известно, что ковариационная матрица шума равна единичной (4). Отметим, что в этом случае мы обладаем существенно большей априорной информацией по сравнению с предыдущими двумя нулевыми гипотезами. Для гипотезы H_{03} знаменатель обобщённого отношения правдоподобия (5) такой же, как и в случае гипотезы H_{01} и, соответственно, равен (9) для максимально правдоподобной оценки ковариационной матрицы (8) (см. [5]). Числитель будет представлять собой максимум функции правдоподобия (6) с ковариационной матрицей, равной единичной:

$$L(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma}) = \pi^{-pN} \exp\left(-\sum_{\alpha=1}^{N} \mathbf{z}^{(\alpha)} \mathbf{z}^{(\alpha)\dagger} \right). \tag{14}$$

Все параметры функции правдоподобия, входящие в числитель (5), в этом случае априори известны, и нет необходимости их оценивать. Таким образом, для задачи обнаружения неизвестного пространственного сигнала на фоне аддитивного независимого шума с единичной дисперсией решающая GLR-статистика (5) имеет вид

$$\Lambda_3 = \frac{\pi^{-pN} \exp\left(-\sum_{\alpha=1}^{N} \mathbf{z}^{(\alpha)} \mathbf{z}^{(\alpha)\dagger} \right)}{\pi^{-pN} |\mathbf{A}/N|^{-N} \exp(-pN)} = (e/N)^{pN}\, |\mathbf{A}|^N \exp(-\mathrm{Sp}\,\mathbf{A}). \tag{15}$$

Для полноты сравнения рассмотрим также решающую статистику, полученную на основе обобщённого отношения правдоподобия (5) в случае нулевой гипотезы (4), но при дополнительной априорной информации о полной пространственной когерентности принимаемого (ожидаемого) полезного сигнала [6]. Компоненты узкополосного пространственно-когерентного сигнала, принимаемые элементами антенной решётки, полностью коррелированы и различаются только амплитудой и фазой. Поэтому вектор полезного сигнала $\mathbf{S}(t)$ в этом случае может быть записан в виде

$$\mathbf{S}(t) = a(t)\mathbf{S}. \tag{16}$$

Здесь $a(t)$ — комплексная амплитуда (гауссовский комплексный сигнал с нулевым средним и мощностью ν), а вектор-фазор $\mathbf{S}$ определяет сдвиг фаз и распределение амплитуд между сигналами, принимаемыми элементами антенной решётки. Без ограничения общности будем считать, что вектор $\mathbf{S}$ подчиняется следующей нормировке:

$$\mathbf{S}^\dagger\mathbf{S} = p, \tag{17}$$

где p — число элементов антенной решётки. При такой нормировке ν имеет смысл усреднённой мощности внешнего сигнала (каждый элемент в среднем принимает сигнал с мощностью ν). В этом случае корреляционная матрица вектора $\mathbf{z}$, состоящего из аддитивной смеси сигнала $\mathbf{S}(t)$ и гауссовского шума единичной мощности, записывается в следующем виде:

$$\mathbf{\Sigma}_\omega = \mathbf{E} + \nu\mathbf{S}\mathbf{S}^\dagger, \tag{18}$$

где $\mathbf{E}$ — единичная матрица.

Для такой модели полезного сигнала и шума можно показать, что числитель обобщённого отношения правдоподобия (5), будет определяться выражением (14), а знаменатель (5) примет вид

$$\max_{\mathbf{\Sigma}\in\Omega} L(\mathbf{0},\mathbf{\Sigma}) = \pi^{-pN} \exp\Big(-N\,(\mathrm{Sp}\,\hat{\mathbf{\Sigma}}_\Omega - \hat{\lambda}_1)\Big)\,\hat{\lambda}_1^{-N}\exp(-N), \tag{19}$$

где $\hat{\lambda}_1$ — максимальное собственное число матрицы $\hat{\mathbf{\Sigma}}_\Omega$.

Таким образом, отношение правдоподобия для этой гипотезы будет выглядеть следующим образом:

$$\Lambda_4 = \exp(N)\,(\hat{\lambda}_1^{-1}\exp(\hat{\lambda}_1))^{-N}. \tag{20}$$

Поскольку функция $x^{-1}\exp(x)$ является монотонно возрастающей для $x > 1$, то сравнение с неким порогом h отношения правдоподобия эквивалентно сравнению с некоторым другим порогом h_1 максимального собственного числа $\hat{\lambda}_1$. Таким образом, для обнаружения когерентного сигнала с неизвестным волновым фронтом оптимальным решением является сравнение с некоторым порогом максимального собственного числа выборочной ковариационной матрицы $\hat{\mathbf{\Sigma}}$. Этот метод обнаружения для краткости будем называть, следуя работе [6], max-λ тест. Задача нахождения пороговых значений для этого теста была решена в [6].

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОРОГОВЫХ ЗНАЧЕНИЙ РЕШАЮЩИХ СТАТИСТИК

Для нахождения порогового значения $\Lambda_{i\mathrm{th}}$ каждой из решающих статистик Λ_i, рассмотренных в предыдущем разделе, для заданной вероятности ложной тревоги P_{FA} необходимо знать плотность вероятности (или интегральную функцию распределения) статистик Λ_i при выполнении нулевой гипотезы [7, 9]. Для первых трёх статистик аналитический вид плотности вероятности значений обобщённого отношения правдоподобия (5) неизвестен, однако можно найти точные аналитические выражения статистических моментов любого порядка для монотонной функции $V_i = \Lambda_i^{1/N}$.

Моменты статистики V_1 были найдены в работе [5]. При этом мы воспользовались тем, что при выполнении нулевой гипотезы H_{01} случайная матрица $\mathbf{A}$ (8), полученная на основании обработки N независимых выборок многомерного комплексного гауссовского процесса с ковариационной матрицей $\mathbf{\Sigma}$ и нулевым средним значением, имеет известное распределение Уишарта [2, 4, 9]

$$W(\mathbf{A},\mathbf{\Sigma},N) = \frac{|\mathbf{A}|^{N-p}}{I(\mathbf{\Sigma})}\exp\bigl[-\mathrm{Sp}(\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{A})\bigr]\,, \tag{21}$$

где $I(\mathbf{\Sigma}) = [K(\mathbf{\Sigma},N)]^{-1} = \pi^{p(p-1)/2}\Gamma(n)\,\ldots\,\Gamma(N-p+1)\,|\mathbf{\Sigma}|^N$, $\Gamma(n)$ — гамма-функция, а каждый элемент этой матрицы равен

$$a_{ii} = \sum_{\alpha=1}^{N} z_i^{(\alpha)} z_i^{(\alpha)\dagger}. \tag{22}$$

Моменты h-го порядка статистик V_2 и V_3 могут быть найдены на основе распределения (21) аналогичным образом путём прямого интегрирования:

$$M[V_2^h] = \int\ldots\int \frac{K(\mathbf{\Sigma}_0,N)}{\left(p^{-1}\sum\limits_{i=1}^{p} a_{ii}\right)^{ph}}\,|\mathbf{A}|^{N-p+h}\exp[-\mathrm{Sp}(\mathbf{\Sigma}_0^{-1}\mathbf{A})\,\mathrm{d}\mathbf{A}] = p^{ph}\,\frac{\prod\limits_{i=1}^{p}\prod\limits_{j=1}^{h}(j+N-i)}{\prod\limits_{i=1}^{ph}(i+pN-1)}\,, \tag{23}$$

$$M[V_3^h] = \int\ldots\int\left(\exp(-\mathrm{Sp}\mathbf{A})\,|\mathbf{A}|^N\,\frac{\exp(pN)}{N^{pN}}\right)^h\frac{|\mathbf{A}|^{N-p}}{I(\mathbf{\Sigma})}\exp\bigl(-\mathrm{Sp}(\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{A})\bigr)\,\mathrm{d}\mathbf{A} =$$
$$= \left(\frac{e}{N}\right)^{ph}\frac{\prod\limits_{i=1}^{p}\Gamma(N+h+1-i)}{(1+h/N)^{p(N+h)}\prod\limits_{i=1}^{p}\Gamma(N+1-i)}\,. \tag{24}$$

Полученные результаты обобщены в табл. 1.

Поскольку получены точные аналитические выражения для решающих статистик V_1, V_2 и V_3, можно для каждой из них аналитически построить функцию распределения путём представления её в виде ряда по ортогональным полиномам Якоби. Таким образом можно найти и пороговые значения для всех решающих статистик. Это открывает возможность исследования и сравнительного анализа характеристик обнаружения многомерных сигналов антенными решётками для всех трёх нулевых гипотез H_{01}, H_{02}, H_{03}.

Проверка гипотезы H_{03} в случае обнаружения пространственно-когерентного сигнала с неизвестным волновым фронтом осуществляется путём сравнения с некоторым порогом максимального собственного числа $\hat\lambda$ выборочной ковариационной матрицы $\hat{\mathbf{\Sigma}}$. Функция распределения максимального шумового собственного числа, соответствующая нулевой гипотезе H_{03}, была получена в работе [6] и выглядит следующим образом:

$$F_{\hat\lambda_1}(\hat\lambda_1) = \left|\frac{\gamma(N-p+i-j-1,\hat\lambda_1 N)}{\Gamma(N-p+i)\Gamma(j)}\right|, \tag{25}$$

Таблица 1

Нулевая гипотеза	GLR тест-статистика	Физический смысл гипотезы	Моменты h-го порядка $M[V^h]$
H_{01}	$\lvert\mathbf{A}\rvert^N / \prod\limits_{i=1}^{p} a_{ii}^N$	независимость шумов	$\prod\limits_{i=1}^{p}\prod\limits_{j=1}^{h}\frac{N+j-i}{N+j-1}$
H_{02}	$\lvert\mathbf{A}\rvert^N/(p^{-1}\,\mathrm{Sp}\,\mathbf{A})^{pN}$	независимость и однородность шумов	$p^{ph}\,\frac{\prod\limits_{i=1}^{p}\prod\limits_{j=1}^{h}(j+N-i)}{\prod\limits_{i=1}^{ph}(i+pN-1)}$
H_{03}	$(\frac{e}{N})^{pN}\,\lvert\mathbf{A}\rvert^N\exp(-\mathrm{Sp}\,\mathbf{A})$	независимость, однородность шумов и нормировка их мощности на единицу	$\frac{(e/N)^{ph}\prod\limits_{i=1}^{p}\Gamma(N+h+1-i)}{(1+h/N)^{p(N+h)}\prod\limits_{i=1}^{p}\Gamma(N+1-i)}$

где $\gamma(x,y)$ — неполная гамма-функция [10]. При этом пороговое значение для оценки максимального собственного числа находится путём решения уравнения

$$P_{\mathrm{FA}} = 1 - F_{\hat{\lambda}_1,\mathrm{H}_{03}}(h_1), \tag{26}$$

где P_{FA} — заданная вероятность ложной тревоги.

3. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Было проведено численное моделирование рассмотренных выше методов обнаружения пространственных сигналов. Во-первых, полученные аналитические выражения для моментов $M[V^h]$ решающих статистик (см. табл.1) были сопоставлены с оценками $\hat{M}[V^h]$ этих же моментов. Оценки моментов $\hat{M}[V^h]$ находились путём обработки m серий экспериментальных данных различного объёма N для заданного числа элементов антенной решётки p. Значения решающей статистики V для каждой серии объёма m находились согласно полученным выше формулам (7), (13), (15) для заданных параметров p и N. Проведённое моделирование показало полное соответствие (в пределах статистической погрешности) экспериментальных и теоретических результатов. Например, для первого и второго моментов статистики V_2 на рис. 1*а*, *б* показано убывание среднеквадратичной ошибки оценки выборочных моментов $m^{-1}\Sigma_{i=1}^{m}(\hat{M}_i[V_2^h] - M[V_2^h])^2$ в зависимости от числа серий проведённых экспериментов m. Каждое значение решающей статистики находилось путём обработки серии из пятнадцати выборок ($N = 15$) выходных сигналов пятиэлементной антенной решётки ($p = 5$) в соответствии с выражениями (8), (13). По оси абсцисс показано количество серий проведённых экспериментов. Анализ показывает, что скорость убывания дисперсий ошибок оценок моментов соответствует теоретической. Аналогичные проверки были проведены и для моментов первого и второго порядка решающих статистик V_1 и V_3.

Помехоустойчивость систем обнаружения, работающих на основе полученных статистик V_1, V_2, V_3 и V_4 также была исследована путём численного моделирования. В соответствии с рассматриваемыми нулевыми гипотезами H_{01} и H_{02} собственный шум моделировался в первом случае как неоднородный, с разной мощностью в антенных элементах и ковариационной матрицей (2), во втором случае — как однородный, с одинаковой мощностью в антенных элементах и ковариационной матрицей (3). Средняя по всем элементам антенны мощность неоднородного шума совпадала с мощностью однородного шума в одном элементе.

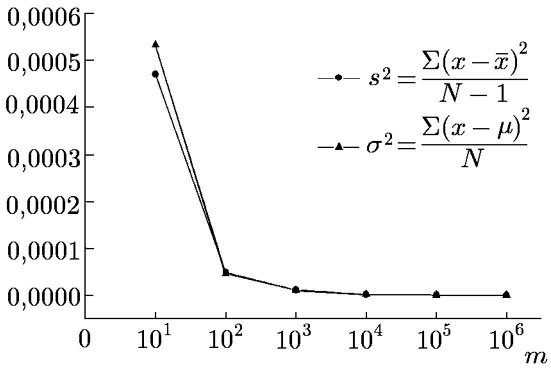

Рис. 1*а*. Дисперсия 1-го момента статистики V_2 для $p = 5$, $N = 15$ при увеличении объёма выборки; здесь x — оценка среднего значения, μ — истинное среднее значение случайной величины

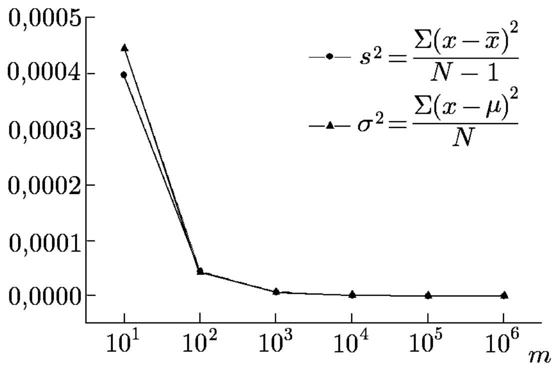

Рис. 1*б*. Дисперсия 2-го момента статистики V_2 для $p = 5$, $N = 15$ при увеличении объёма выборки

Рассматривались две модели полезного сигнала. В первой модели полезный сигнал был пространственно-когерентным. В качестве такого сигнала бралась плоская волна. Во второй модели полезный сигнал задавался частично-когерентным. В качестве такого частично-когерентного сигнала бралась плоская волна с флуктуирующим волновым фронтом (флуктуирующим углом прихода). Очевидно, что для обеих моделей полезный сигнал можно записать в виде

$$\mathbf{S}(t) = a(t)\mathbf{S}. \tag{27}$$

Здесь $a(t)$ — случайная амплитуда сигнала, представляющая собой комплексный гауссовский процесс, $\mathbf{S}$ — вектор-фазор волнового фронта полезного сигнала, который записывался в следующем виде:

$$\mathbf{S} = (\exp(i\theta_0), \exp(2\pi i\delta \sin[\theta(t) + \theta_0]), \ldots, \exp(2\pi i\delta\, (p-1) \sin[\theta(t) + \theta_0]), \tag{28}$$

где θ_0 — начальная фаза сигнала в первом антенном элементе, δ — отношение расстояния между элементами антенной решётки к длине волны источника сигнала, $\theta(t)$ — переменный угол падения волны на решётку относительно нормали к последней, p — число элементов антенной решётки. Предполагалось, что закон изменения угла падения волны представляет собой нормальный случайный процесс с независимыми приращениями:

$$\theta[n+1] = \theta[n]\,(1-b) + q\xi[n], \tag{29}$$

где $\xi[n]$ — белый гауссовский шум с нулевым средним и единичной дисперсией, q — коэффициент, определяющий полную мощность порождающего шума, b — коэффициент, определяющий скорость спадания корреляции. Точное выражение для временно́й функции корреляции угла падения плоской волны $\theta(t)$ записывается в виде

$$K_\theta[\tau] = (1-b)^{|\tau|}\,\sigma_\theta^2. \tag{30}$$

Можно показать, что стандартное отклонение σ_θ угла прихода плоской волны определяется коэффициентами q, b и находится из выражения

$$\sigma_\theta = \frac{q\sigma_\xi^2}{1-(1-b)^2}\ , \tag{31}$$

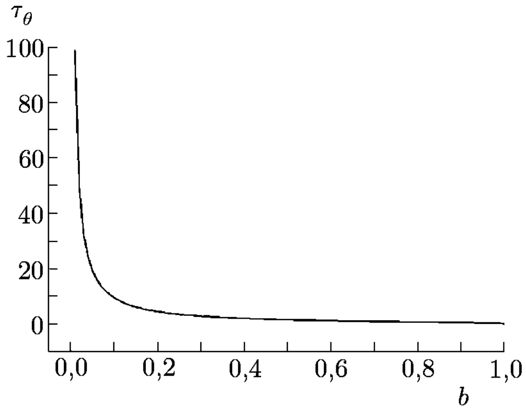

Рис. 2. Зависимость времени корреляции τ_θ от коэффициента b

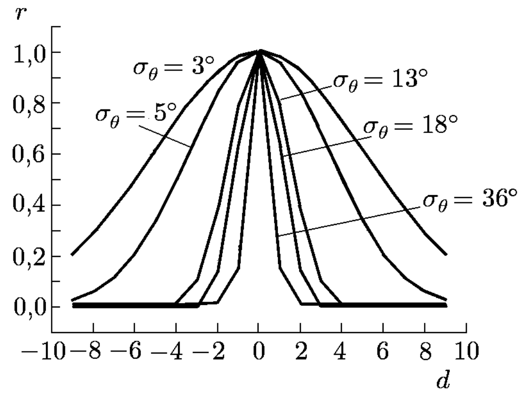

Рис. 3. Зависимость коэффициента корреляции полезного сигнала от расстояния между элементами антенной решётки (в длинах волн)

где σ_ξ^2 — дисперсия шума $\xi[n]$.

Время корреляции τ_θ случайного угла прихода $\theta[n]$ определялось как время, за которое корреляционная функция (30) спадает в e раз. Из анализа уравнения (29) нетрудно получить следующую формулу для времени корреляции τ_θ:

$$\tau_\theta = \ln\left(\frac{1}{1-b}\right). \tag{32}$$

Зависимость времени корреляции от параметра b показана на рис. 2. Очевидно, что путём варьирования коэффициентов b и q можно получить различные модели флуктуаций волнового фронта полезного сигнала.

Моделировалась 5-элементная линейная эквидистантная антенная решётка с расстоянием между соседними элементами, равным половине длины волны ($\delta = 0{,}5$). На рис. 3 показана экспериментально полученная зависимость коэффициента корреляции между полезными сигналами в элементах антенной решётки в зависимости от расстояния между ними для различных среднеквадратичных отклонений угла прихода полезного сигнала (29). Из приведённых графиков видно, что коэффициент корреляции полезных сигналов в крайних элементах антенной решётки становится равным 0,5 уже при среднеквадратичных отклонениях угла прихода $\sigma_\theta = 4°$.

В проведённом моделировании коэффициенты b и q были подобраны таким образом, чтобы стандартное отклонение угла прихода полезного сигнала составляло $\sigma_\theta \approx 13°$. Время корреляции угла прихода бралось равным $\tau_\theta \approx 0{,}1T$, где T — временно́й интервал, соответствующий выборке объёма $N = 15$. Такой подбор параметров для частично-когерентного полезного сигнала обеспечивал его существенную пространственную некогерентность на апертуре приёмной антенной решётки (коэффициент корреляции полезного сигнала в крайних элементах антенны был близок к нулю, см. рис. 3).

Было проведено сравнение эффективности использования всех четырёх рассмотренных выше статистик V_1, V_2, V_3 и V_4 для обнаружения полезного сигнала. На основании изложенной выше методики по заданной вероятности ложной тревоги рассчитывались пороговые значения для используемых статистик и строились кривые обнаружения (вероятности правильного обнаружения $P_{\rm RD}$) в зависимости от отношения мощности полезного сигнала к мощности шума (в одном антенном элементе).

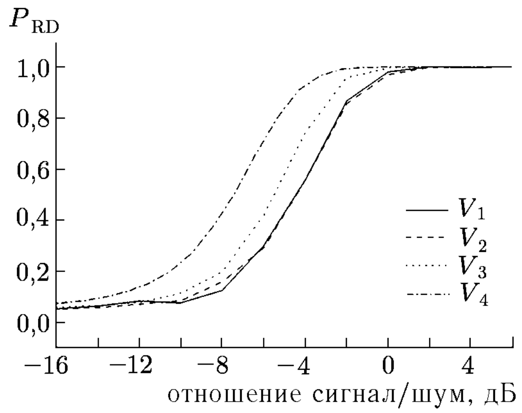

Рис. 4*а*. Кривые обнаружения для статистик V_1, V_2, V_3, V_4 для полностью когерентного сигнала на фоне однородного шума

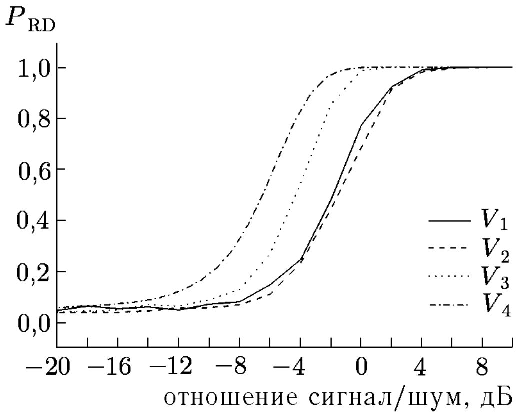

Рис. 4*б*. Кривые обнаружения для статистик V_1, V_2, V_3, V_4 для частично-когерентного сигнала на фоне однородного шума

На рис. 4*а* представлены кривые обнаружения полностью когерентного полезного сигнала на фоне однородного собственного шума для всех четырёх статистик V_1, V_2, V_3, V_4. В рассматриваемом случае мощность собственных шумов в элементах антенной решётки бралась одинаковой и равной единице. Вероятность ложной тревоги в этом и всех последующих экспериментах задавалась равной $P_{\mathrm{FA}} = 0{,}05$. На рис. 4*б* показаны аналогичные кривые для обнаружения частично-когерентного полезного сигнала.

Из представленных результатов видно, что наиболее эффективным в случае обнаружения полностью когерентного полезного сигнала (см. рис. 4*а*) является использование статистики V_4, поскольку условия её применения в данном случае полностью соответствуют рассматриваемой модели полезного сигнала и шума. Статистика V_3 проигрывает статистике V_4 около 2 дБ . Статистики V_2 и V_1 имеют примерно одинаковую эффективность и проигрывают статистике V_3 ещё 1 дБ. Интересно отметить, что в случае частично-когерентного сигнала (см. рис. 4*б*) кривые обнаружения для всех четырёх статистик смещаются вправо приблизительно на $1 \div 3$ дБ, причём выигрыш статистики V_4 по отношению к статистике V_3 сохраняется на уровне 2 дБ. Таким образом, можно сделать заключение о слабом влиянии на характеристики max-λ теста флуктуаций угла прихода (линейных флуктуаций волнового фронта) полезного сигнала.

На рис. 5*а*–*в* представлены кривые обнаружения, полученные в результате решения задачи обнаружения полезного сигнала на фоне неоднородного шума с разной степенью неоднородности.

Заметим, что для статистик V_2, V_3 и V_4 пороговые значения, обеспечивающие заданные вероятности ложной тревоги $P_{\mathrm{FA}} = 0{,}05$, в этом случае определялись путём статистического моделирования (поскольку теоретические значения порогов для этих статистик были определены выше только для однородного шума). В случае слабонеоднородного шума мощности собственных шумов в элементах антенной решётки полагались равными $(0{,}75; 0{,}75; 1; 1{,}25; 1{,}25)$ в каждом элементе соответственно, в случае средненеоднородного шума — $(1/3; 1/3; 1; 5/3; 5/3)$, в случае сильнонеоднородного шума — $(0{,}1; 0{,}1; 1; 1{,}9; 1{,}9)$.

Во всех рассматриваемых случаях след ковариационной матрицы шума оставался равным числу элементов антенной решётки $p = 5$. Из сравнения кривых обнаружения представленных на рис. 5 видно, что с увеличением степени неоднородности шума наиболее эффективной становится статистика V_1 (ср. рис. 5*а* и 5*в*), т. к. из всех четырёх исследуемых статистик (V_1, V_2, V_3 и V_4) только для неё нулевая гипотеза полностью соответствовала условиям проводимого моделирования. В случае слабонеоднородного шума по-прежнему лучшей остаётся статистика V_4 с вы-

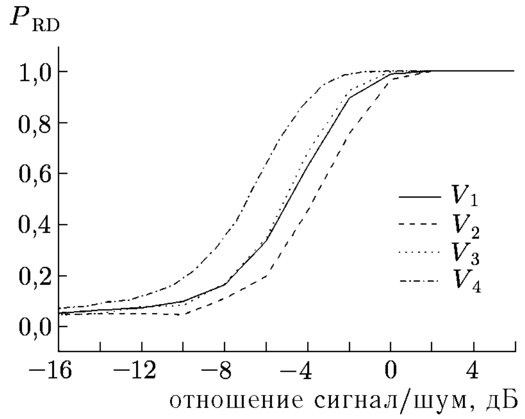

Рис. 5*а*. Кривые обнаружения для статистик V_1, V_2, V_3 и V_4 для полностью когерентного сигнала на фоне слабонеоднородного шума

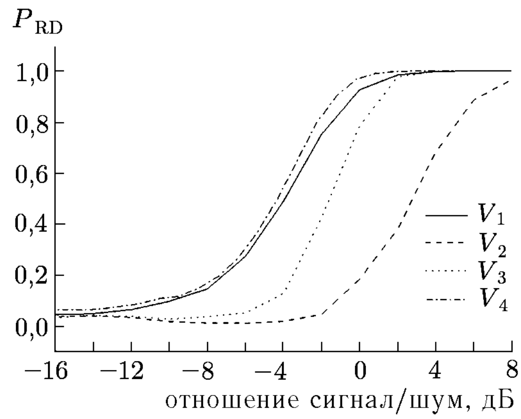

Рис. 5*б*. Кривые обнаружения для статистик V_1, V_2, V_3 и V_4 для полностью когерентного сигнала на фоне средненеоднородного шума

игрышем по отношению к ближайшей статистике V_1 около 2 дБ, в случае средненеоднородного шума эффективности статистик V_1 и V_4 практически сравниваются, и при дальнейшем усилении неоднородности статистика V_4 начинает проигрывать статистике V_1 около 4 дБ.

Следует отметить, что уже в случае средненеоднородного шума применение статистик V_2 и V_3 становится малоэффективным (см. рис. 5*б*), а для сильнонеоднородного шума практически неприемлемым.

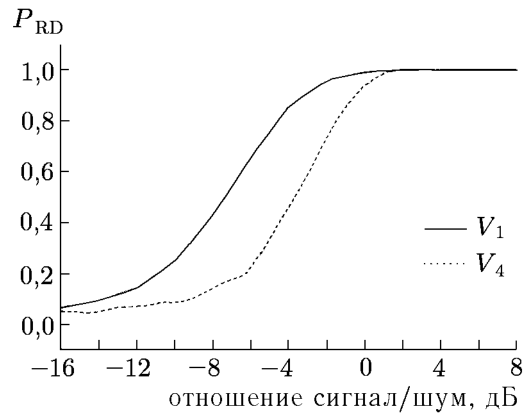

Рис. 5*в*. Кривые обнаружения для статистик V_1 и V_4 для полностью когерентного сигнала на фоне сильнонеоднородного шума

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе проведено сравнение эффективности использования различных решающих статистик (алгоритмов обработки), полученных на основе обобщённого отношения правдоподобия, для обнаружения пространственных сигналов в случае коротких выборок. На основании проведённых исследований можно сделать следующие рекомендации по применению рассмотренных выше решающих статистик:

1) Можно рекомендовать использовать статистику V_4 (max-λ тест) для обнаружения полностью пространственно-когерентных и частично-когерентных сигналов с флуктуирующим волновым фронтом на фоне пространственно-однородного аддитивного шума.

2) Для обнаружения пространственно-когерентных и частично-когерентных сигналов на фоне средне- и сильнонеоднородных шумов следует использовать статистику V_1. Расчёт пороговых значений для этой статистики может быть проведён аналитически на основе предложенного выше метода.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 03–02–17141), Совета по государственной поддержке ведущих научных школ РФ (грант № НШ-1729.2003.2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Anderson T. W. An introduction to multivariate statistical analysis. New York: John Wiley and Sons, 1960.
2. Пугачёв В. С. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Наука, 1979.
3. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. М.: Советское радио, 1974.
4. Goodman N. R. // Ann. Math. Stat. 1963. V. 34. P. 152.
5. Болховская О. В., Мальцев А. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 2002. Т. 45, № 12. С. 1 077.
6. Родюшкин К. В. Статистическое исследование методов обнаружения, разрешения и оценки числа источников сигналов, принимаемых антенной решёткой в случае короткой выборки и неизвестного волнового фронта: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Нижний Новгород, 2001.
7. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника. М.: Советское радио, 1966.
8. Шестов Н. С. Выделение оптических сигналов на фоне случайных помех. М.: Советское радио, 1967.
9. Гирко В. Л. Спектральная теория случайных матриц. М.: Наука, 1988.
10. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Наука, 1979.

Нижегородский госуниверситет им. Н. И. Лобачевского,
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию
10 августа 2003 г.

COMPARATIVE ANALYSIS OF DIFFERENT STATISTICS FOR DETECTING SPATIAL SIGNALS IN THE CASE OF SHORT SAMPLES

O. V. Bolkhovskaya, A. A. Mal'tsev, and K. V. Rodyushkin

In this paper, we perform comparative analysis of several algorithms for signal processing in an antenna array used for determining multidimensional Gaussian complex signals with an *a priori* unknown spatial covariance matrix against the background of Gaussian noise. All the studied decision statistics are obtained on the basis of generalized likelihood ratio for arbitrary-volume samples. Depending on the available *a priori* information on the received signal and noise, we consider three cases of noise background: nonuniform noise over the antenna elements with unknown power, uniform noise with unknown power, and uniform noise with known (unit) power. To determine the threshold values of the decision statistics, their densities are expanded in a series over orthogonal Jacobi polynomials. Detection curves are constructed for all considered cases on the basis of obtained thresholds. The obtained results hold true for short samples whose volume is comparable with the number of elements in the receiving antenna.