МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Известия высших учебных заведений**

# РАДИОФИЗИКА

**ежемесячный научно-технический журнал**

Издаётся с апреля 1958 г.

**Том XLVII № 10–11** **Нижний Новгород** **2004**

## Содержание

УДК 621.373.826

# ПРОБЛЕМЫ ИЗБЫТОЧНОГО ШУМА И АДЕКВАТНЫЕ МОДЕЛИ ЛАЗЕРОВ

$\boxed{\textit{Я. И. Ханин}}$ [1]

Рассматривается проблема избыточного шума в лазерах различных динамических классов и модели, необходимые для адекватного описания такого шума. Показано, что избыточный шум обусловлен связью мод, при этом линейная связь мод приводит к явлению избыточного шума в узком смысле слова (по Питерману), а нелинейная связь мод является универсальным механизмом избыточного шума, имеющим динамическую природу. Теория избыточного шума в лазерах класса $B$ может строиться на базе модели с адиабатически исключённой поляризацией, полученной стандартным образом, и не требует привлечения новых подходов.

## ВВЕДЕНИЕ

Желая обозначить особое место лазеров среди других устройств, о них часто говорят как об источниках когерентного света. В действительности, однако, этот идеал недостижим. Принципиально неустранимый процесс спонтанного испускания в лазерные моды обеспечивает наличие в выходном излучении флуктуационной компоненты. Минимальный уровень (фундаментальный предел) шума достигается, когда нелинейные процессы в лазере не затрагивают шумовую компоненту. Так бывает в одномодовых лазерах бегущей волны.

Естественная ширина линии в таких лазерах даётся формулой Шавлова—Таунса [1]:

$$\Delta\nu = \frac{h\nu}{4\pi}\,\frac{\kappa^2}{P_{\rm out}}\,, \tag{1}$$

которая справедлива для модели лазера с
— однородным уширением,
— однородным распределением поля в резонаторе лазера,
— адиабатически исключённой поляризацией активной среды,
— полной инверсией населённостей,
— отсутствием насыщения инверсии.

Более общим является следующее выражение для ширины линии излучения лазера [2]:

$$\Delta\nu = \frac{h\nu}{4\pi}\,\frac{\kappa^2}{P_{\rm out}}\,N_{\rm sp}^{(0)}\left(\frac{\gamma_\perp}{\gamma_\perp+\kappa/2}\right)^2 K + \Delta\nu_0. \tag{2}$$

Здесь $N_{\rm sp}^{(0)}$ — фактор спонтанного излучения в отсутствие лазерного поля, $P_{\rm out}$ — мощность выходного излучения лазера, $\gamma_\perp$ — скорость распада поляризации, $\kappa$ — частотная полоса моды резонатора, $K$ — фактор Питермана, $\Delta\nu_0$ — не зависящий от мощности лазера вклад в ширину линии (он равен нулю в идеальной четырёхуровневой схеме и в настоящей работе не рассматривается).

Первое отличие (2) от формулы Шавлова—Таунса заключается в наличии фактора $N_{\rm sp}^{(0)} \equiv N_2/(N_2-N_1)$, где $N_2$ и $N_1$ — населённости верхнего и нижнего лазерных уровней соответственно. Этот фактор учитывает неполную инверсию населённостей. Второе отличие в том, что

[1] Статья подготовлена к публикации И. В. Корюкиным и П. А. Хандохиным.

вклад поляризации активной среды учитывается сомножителем в круглых скобках. Формула Шавлова—Таунса, скорректированная этими двумя факторами, определяет фундаментальный предел ширины линии излучения лазера, обусловленный квантовыми флуктуациями. Уровень шума, превышающий квантовый предел, обычно называют избыточным.

Избыточный шум учитывается фактором Питермана. Необходимо отметить, что повышенный уровень флуктуаций излучения на выходе лазера имеет место во всех многомодовых лазерах и обусловлен взаимодействием мод.

## 1. ИЗБЫТОЧНЫЙ ШУМ ПО ПИТЕРМАНУ. ТЕЗИСЫ СИГМЕНА

Если не говорить о небольших отклонениях уровня флуктуаций выходного излучения и ширины линии лазера от фундаментального предела, предсказываемого формулой Шавлова—Таунса [1], то впервые о наличии избыточного шума заговорили в связи с работой Питермана [3]. В этой и последовавших за ней работах других авторов [4–10] было показано, что в лазерах с неортогональными модами минимальный уровень естественного шума может быть превышен в десятки и сотни раз!

Поначалу казалось, что объяснение столь сильного эффекта потребует радикального пересмотра всей квантовой теории излучения. Сигмен в работе [4] высказал по этому поводу ряд очень сильных предположений:

1) эффект избыточного шума имеет квантовую природу;

2) эффект обусловлен неортогональностью мод и наиболее сильно проявляется в лазерах с неустойчивыми резонаторами;

3) для его объяснения, возможно, придётся отказаться от постулата о равенстве коэффициентов Эйнштейна для индуцированного ($A$) и спонтанного ($B$) излучения;

4) наличие избыточного шума в лазерах ставит под сомнение саму концепцию фотона.

Но объяснение этого, на первый взгляд, грандиозного явления оказалось удивительно простым. Неортогональность мод означает наличие сильной линейной связи между ними, благодаря чему вместо парциальных мод возникают новые образования, которые можно называть квазимодами [11]. В область притяжения лазерной квазимоды может попадать значительно больше спонтанных фотонов, чем в одиночную моду резонатора. Фактически, ситуация не отличается от описанной в теории Шавлова и Таунса ничем, кроме частоты актов спонтанного излучения в квазимоду. Это находит подтверждение в последовательной квантовой теории данного эффекта [11], которая свидетельствует о наличии лишь незначительных поправок к результатам феноменологического рассмотрения.

## 2. НЕЛИНЕЙНАЯ СВЯЗЬ МОД И ИЗБЫТОЧНЫЙ ШУМ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОИСХОЖДЕНИЯ

Значительно больший интерес представляет влияние нелинейного взаимодействия мод на флуктуационные характеристики лазера. Одним из первых этот эффект экспериментально и теоретически исследовал Ю. И. Зайцев [12, 13], который рассмотрел двухмодовый режим гелий-неонового газового лазера. Нелинейное взаимодействие, которым в данном случае является эффект насыщения неоднородно уширенной активной среды (выжигание спектральных провалов полями генерируемых мод), приводит к следующим основным последствиям:

1) флуктуации суммарной интенсивности лазерного излучения не претерпевают изменения по сравнению с сопоставимым одномодовым режимом;

2) очень сильно возрастают флуктуации интенсивности отдельных мод (примерно на два порядка), однако эти флуктуации антикоррелированы.

Поскольку речь идёт о флуктуациях интенсивности, явление не связано с уширением соответствующих спектральных компонент. Проведённые Зайцевым экспериментальные исследования очень хорошо согласуются с результатами его же теоретического рассмотрения на базе балансной модели, предложенной в своё время Лэмбом [14].

Однако закономерности, выявленные на примере конкретной модели с конкретным типом нелинейного взаимодействия мод, получили подтверждение и в других случаях, когда на первый план выходят иные нелинейные эффекты. Так обстоит дело в случае твердотельных лазеров. Здесь, в первую очередь, выжигаются пространственные, а не спектральные провалы в активной среде. Взаимодействие мод на этих провалах приводит к известной противофазной динамике релаксационных колебаний [15–17], что является, в сущности, тем же, что и антикоррелированные флуктуации интенсивности мод.

Число таких примеров можно увеличить. И не обязательно ограничиваться нелинейностями типа эффекта насыщения и числом мод, равным двум. Избыточный шум наблюдается и в результате четырёхволнового (комбинационного) взаимодействия мод [18, 19].

Эффекты, подобные тем, что наблюдал Зайцев, имеют место и в лазерах с поляризационными модами [9]. В основе явления лежит неоднородное насыщение углового (ориентационного) распределения атомов.

Таким образом, избыточный шум возникает во всех типах лазеров, поскольку моды непременно связаны через те или иные нелинейные эффекты. Это обстоятельство является реальной причиной ограничения чувствительности в устройствах внутрирезонаторной лазерной спектроскопии (см. [19] и приведённую в этом обзоре литературу). Метод внутрирезонаторной лазерной спектроскопии является, с другой стороны, адекватным способом экспериментального исследования явления избыточного шума.

Характером нелинейного взаимодействия мод предопределяется и выбор моделей, используемых в теории лазера. Скажем, чисто энергетическому взаимодействию отвечают балансные уравнения. Казалось бы, этот вопрос исчерпан, однако исследователи проявляют интерес к лазерам, характеризующимся не совсем типичными соотношениями между релаксационными константами: ширина линии усиления $\gamma_\perp$ меньше полосы моды резонатора $\kappa$. Условие $\kappa \gg \gamma_\perp$ определяет принадлежность таких лазеров к тому из четырёх возможных динамических классов или групп, который иногда называют классом $D$ [18].

## 3. МОДЕЛИ ЛАЗЕРА, ПРИМЕНЯЕМЫЕ В ТЕОРИИ ИЗБЫТОЧНОГО ШУМА

Разделение всех лазеров на четыре группы по их динамическому поведению [18, 20–22] основывается на разном соотношении между значениями релаксационных констант: $\gamma_\parallel$ — скорости релаксации разности населённостей (инверсии), $\gamma_\perp$ — скорости распада поляризации атомной системы (ширины однородной линии усиления) и $\kappa$ — скорости затухания поля в резонаторе.

Напомним существо дела, обратившись к двухуровневой модели однородно уширенного лазера бегущей волны, известной как модель Лоренца—Хакена [23]:

$$\mathrm{d}E/\mathrm{d}t = \kappa\,(P - E), \tag{3а}$$

$$\mathrm{d}P/\mathrm{d}t = \gamma_\perp\,(nE - P), \tag{3б}$$

$$\mathrm{d}n/\mathrm{d}t = \gamma_\parallel\,(W - n - EP). \tag{3в}$$

Здесь использованы нормированные переменные: $E$ — амплитуда электрического поля, $P$ — амплитуда атомной поляризации, $n$ — инверсия населённостей, $W$ — параметр накачки; релаксационные константы $\gamma_\perp$, $\gamma_\parallel$, $\kappa$ и время $t$ оставлены в естественной размерности.

Арекки [20] предложил относить к классу $A$ лазеры (атомарные газовые, лазеры на красителях), удовлетворяющие условиям $\gamma_\perp \gg \kappa$, $\gamma_\parallel \gg \kappa$. Класс $B$ составляют лазеры (твердотельные, полупроводниковые, молекулярные газовые), для которых $\gamma_\perp \gg \kappa \gg \gamma_\parallel$. К классу $C$ отнесены лазеры с $\gamma_\perp \sim \kappa$, которыми являются некоторые молекулярные газовые лазеры далёкого инфракрасного диапазона, например аммиачный лазер с оптической накачкой. Но к этим группам необходимо добавить ещё одну (класс $D$ [18]), характеризующуюся соотношениями между релаксационными константами $\kappa \gg \gamma_\perp$ и $\kappa \gg \gamma_\parallel$. К классу $D$ относятся пучковые молекулярные генераторы, а также некоторые газовые лазеры с очень сильной и узкой линией усиления, которая может быть достигнута в активной среде HeXe-лазера.

Практическая ценность такой классификации заключается в том, что разные классы (кроме класса $C$) допускают снижение порядка системы уравнений за счёт адиабатического исключения тех или иных переменных, что существенно облегчает последующий анализ. В случае класса $A$ к числу «быстрых» можно отнести обе материальные переменные, поляризацию и инверсию; их исключение сводит систему (1)–(3) к уравнению для поля, что является предметом теории газовых лазеров, развитой Лэмбом [14] [2]. Для лазеров класса $B$ «быстрой» переменной является только поляризация. Процедура адиабатического исключения поляризации позволяет считать $\mathrm{d}P/\mathrm{d}t = 0$, что сводит (3б) к простому алгебраическому соотношению

$$P = nE. \tag{4}$$

Это означает, что в принятых обозначениях переменная $n$ играет роль резонансной восприимчивости атомной системы. Подстановка (4) в (3а) и (3в) переводит указанные уравнения в известную систему уравнений баланса Статца—де Марса для числа фотонов в резонаторе и разности населённостей рабочих уровней активной среды [24]:

$$\mathrm{d}I/\mathrm{d}t = 2\kappa\,(n-1), \tag{5}$$

$$\mathrm{d}n/\mathrm{d}t = \gamma_\parallel (W - n - nI), \tag{6}$$

где $I = E^2$ — интенсивность поля излучения.

Несколько по-иному обстоит дело с лазерами класса $D$, для которых соотношение между релаксационными параметрами выражается неравенствами $\kappa \gg \gamma_\perp$ и $\kappa \gg \gamma_\parallel$. Теперь «быстрой» переменной является амплитуда поля, которую и следует адиабатически исключить из уравнений (3). Полагая $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t = 0$, из (3а) находим

$$E = P. \tag{7}$$

Резонансная восприимчивость атомной системы в данном случае равна единице. Подстановка (7) в (3б) и (3в) приводит к балансным уравнениям:

$$\mathrm{d}I/\mathrm{d}t = 2\gamma_\perp I\,(n-1), \tag{8}$$

$$\mathrm{d}n/\mathrm{d}t = \gamma_\parallel\,(W - n - I). \tag{9}$$

[2] Фактически, к числу неравенств, выполнение которых делает возможным адиабатическое исключение тех или иных переменных, следует добавить ещё одно. Его смысл заключается в том, что скорость са́мого быстрого релаксационного процесса должна заметно превышать вероятность индуцированного перехода между квантовыми состояниями. Это условие ограничивает сверху интенсивность поля излучения.

Сопоставление систем уравнений (8), (9) и (5), (6), описывающих лазеры классов $B$ и $D$, показывает, что уравнения (8) и (5) отличаются лишь величиной коэффициента в правой части: в (5) это $2\kappa$, тогда как в (8) фигурирует $2\gamma_\perp$. Физически такое различие (или сходство!) легко объяснимо. Активная среда и резонатор лазера могут рассматриваться как два связанных осциллятора. В пределе $\gamma_\perp \gg \kappa$ доминируют резонансные свойства электродинамической системы, что и объясняет наличие в уравнении баланса (5) скорости потерь $\kappa$ в резонаторе. В обратном предельном случае, $\kappa \gg \gamma_\perp$, определяющую роль играют резонансные свойства атомной системы, и $\kappa$ уступает место $\gamma_\perp$. Уравнение (9) качественно отличается от (6) тем, что оно линейно по интенсивности поля.

## 4. НЕСОСТОЯТЕЛЬНОСТЬ «МОДЕЛИ» ВОРДМАНА (J. P. WOERDMAN)

Собственно, вывод системы (8), (9) является одной из целей данной заметки. Мотивация же её написания связана с работами [25–27], в которых предлагается иная версия скоростных уравнений для лазеров класса $D$, которые именуются в этих работах лазерами с низкодобротным резонатором [3]. Если сопоставить системы уравнений, приведённые выше, с системой (1) из работы [26], то обнаруживается совпадение (1a) с (8) и (1b) с (6). Нам трудно комментировать подход, приведший к уравнениям (1) из работы [26], поскольку ни в одной из цитируемых работ он не изложен полностью. Можно лишь понять, что он не связан с адиабатическим исключением какой-либо из переменных. Применение преобразования Лапласа к уравнению для поляризации из системы Лоренца—Хакена с введением понятия «одетого» резонатора представляется недостаточно обоснованным, а полученный результат вызывает принципиальный вопрос: на основании чего удаётся понизить порядок системы дифференциальных уравнений, если отсутствует малый коэффициент перед соответствующей производной? Вид уравнения для инверсии (1b) в цитируемых работах вообще не комментируется. Тот же факт, что система (1) из [26] качественно отличается от системы уравнений (8), (9), полученной в рамках строго обоснованной процедуры адиабатического исключения соответствующей «быстрой» переменной и не требующей привлечения каких-либо дополнительных искусственных предположений вроде концепции «одетого» резонатора, свидетельствует о её несостоятельности.

## 5. МОДЕЛИ С ФАЗОЧУВСТВИТЕЛЬНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ МОД

Ещё одно замечание касается многомодовых моделей, которые только и могут использоваться в теории избыточного шума, когда принципиальную роль играет неортогональность мод [3]. Специфика лазеров класса $D$, заключающаяся в том, что линия усиления значительно у́же полосы резонатора, с неизбежностью приводит к тому, что частотный интервал между генерируемыми модами может быть только меньше полосы моды. В этих условиях уравнения балансного типа, строго говоря, неприменимы. Здесь следует пользоваться моделями, учитывающими фазочувствительное взаимодействие мод [28–30], которое осуществляется через наведённую их совместным действием осциллирующую решётку инверсии. Наличие фазочувствительного взаимодействия значительно меняет физическую картину происходящих в лазере процессов. В частности, возникают избыточные флуктуации частоты и, как следствие, аномальное уширение соответствующих спектральных компонент лазерного излучения.

[3] Это установившаяся терминология, которая не совсем точно отражает существо дела. Основное отличие таких лазеров от обычных заключается не в бо́льших потерях резонатора, а в очень малой ширине линии усиления, благодаря которой и выполняется условие $\kappa \gg \gamma_\perp$.

В качестве примера приведём спектр флуктуаций двухмодового лазера класса $B$ с резонатором Фабри—Перо, рассчитанный по следующей системе уравнений с учётом фазового взаимодействия мод [30]:

$$\begin{gathered}
\mathrm{d}E_1/\mathrm{d}\tau = \frac{G}{2}\left[-E_1 + E_1\,(n_0+n_1) + E_2\,(n_{12}^- + n_{12}^+)\right],\\
\mathrm{d}E_2/\mathrm{d}\tau = \frac{G}{2}\left[-(1+\beta+i\Delta_\mathrm{c})\,E_2 + E_2\,(n_0+n_2) + E_1\,(n_{12}^- + n_{12}^+)\right],\\
\mathrm{d}n_0/\mathrm{d}\tau = W - n_0 - n_0\,(|E_1|^2+|E_2|^2) + n_1\,|E_1|^2 + n_2\,|E_2|^2 + (E_1^*E_2 + E_1E_2^*)\,(n_{12}^- + n_{12}^+),\\
\mathrm{d}n_1/\mathrm{d}\tau = -n_1 - n_1\,(|E_1|^2+|E_2|^2) + n_0\,|E_1|^2/2 + (E_1^*E_2 + E_1E_2^*)\,(n_{12}^- + n_{12}^+)/2,\\
\mathrm{d}n_2/\mathrm{d}\tau = -n_2 - n_2\,(|E_1|^2+|E_2|^2) + n_0\,|E_2|^2/2 + (E_1^*E_2 + E_1E_2^*)\,(n_{12}^- + n_{12}^+)/2,\\
\mathrm{d}n_{12}^+/\mathrm{d}\tau = -n_{12}^+ - n_{12}^+\,(|E_1|^2+|E_2|^2) + n_{12}^-\,(|E_1|^2+|E_2|^2)/2 + (E_1^*E_2 + E_1E_2^*)\,(n_0+n_1+n_2)/2,\\
\mathrm{d}n_{12}^-/\mathrm{d}\tau = -n_{12}^- - n_{12}^-\,(|E_1|^2+|E_2|^2) + n_{12}^+\,(|E_1|^2+|E_2|^2)/2 + (E_1^*E_2 + E_1E_2^*)\,(n_0+n_1+n_2)/2. \quad (10)
\end{gathered}$$

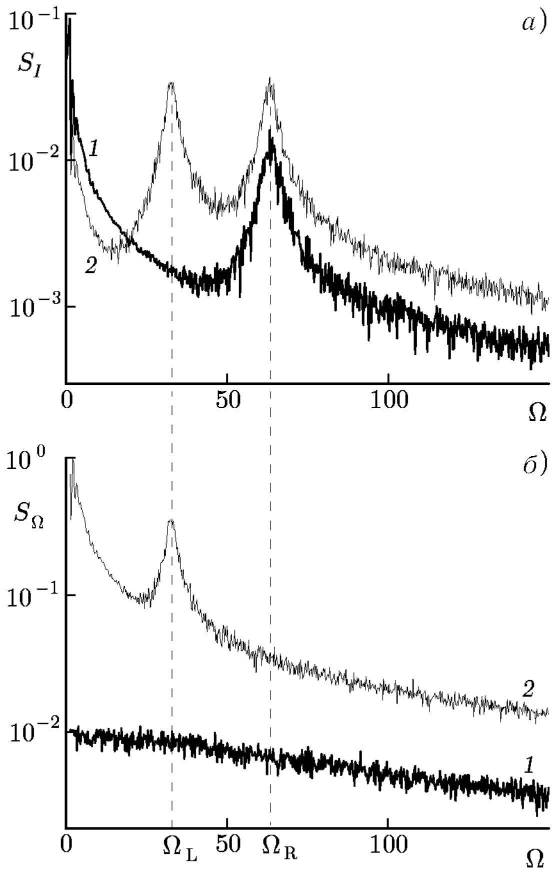



Рис. 1. Спектры флуктуаций интенсивности ($a$) и частоты ($б$) лазера класса $B$ в одномодовом (кривые *1*, $\beta = 0{,}5$) и двухмодовом (кривые *2*, $\beta = 0{,}05$) режимах генерации. Остальные параметры: $W = 3$, $G = 2\,000$, $\Delta_\mathrm{c} = 0$

Здесь $E_1$, $E_2$ — нормированные амплитуды полей мод. Фурье-компоненты инверсии населённостей определены следующими соотношениями:

$$n_0 = \frac{1}{L}\int\limits_0^L N(z,t)\,\mathrm{d}z,$$

$$n_j = -\frac{1}{L}\int\limits_0^L N(z,t)\cos(2k_jz)\,\mathrm{d}z,$$

$$n_{12}^\pm = \mp\frac{1}{L}\int\limits_0^L N(z,t)\cos[(k_1\pm k_2)\,z]\,\mathrm{d}z,$$

где $N(z,t)$ — инверсия населённостей, нормированная на число активных центров в единице объёма, $k_j = \pi m_j/L$ — волновые числа мод, $L$ — длина резонатора, $j = 1; 2$. Кроме того, $\tau = \gamma_\| t$, $G = 2\kappa/\gamma_\|$, $\beta$ — относительная разность потерь мод, $\Delta_\mathrm{c}$ — разность собственных частот мод.

Модель (10) адекватна лазеру с близкими по частоте модами, когда межмодовый интервал меньше полосы отдельной моды. В этом случае требуется скрупулёзный учёт межмодовых биений, и амплитуды пульсирующих решёток инверсии с различными пространственными масштабами оказываются в числе переменных системы [18]. В отличие от балансных моделей принципиальную роль играют не только амплитуды, но и фазы полей мод и переменных среды. За фазовое взаимодействие отвечают последние слагаемые в правых частях (решётки инверсии $n_{12}^+$ и $n_{12}^-$). Следует отметить, что к фазовому взаимодействию непременно приводит линейная связь мод. Следовательно, наличие такой связи означает невозможность использования балансных уравнений даже для лазеров класса $B$.

При используемых в расчёте параметрах система (10) имеет устойчивое состояние равновесия, соответствующее стационарной двухмодовой генерации. Релаксация к этому состоянию происходит путём затухающих колебаний, которые проявляются в спектрах флуктуаций интенсивности в виде пиков на релаксационных частотах. В рассматриваемом случае двухмодовой генерации имеются две такие частоты, $\Omega_{\rm R}$ и $\Omega_{\rm L}$ ($\Omega_{\rm R} > \Omega_{\rm L}$), и, соответственно, два типа релаксационных колебаний. Первый, более высокочастотный тип соответствует синфазным колебаниям интенсивностей мод. Он существует и в одномодовом лазере, поскольку обусловлен взаимодействием генерируемого излучения как целого с медленно релаксирующей ($\kappa \gg \gamma_{\|}$ ) активной средой. Второй тип релаксационых колебаний — это противофазные колебания интенсивностей мод с частотой $\Omega_{\rm L}$, обусловленные межмодовой конкуренцией и отсутствующие в случае одномодовой генерации.

Результат расчёта спектров флуктуаций отдельной моды в двухмодовом режиме приведён на рис. 1. Для сравнения на этом же рисунке представлены спектры флуктуаций одномодового лазера при тех же параметрах. В спектре флуктуаций интенсивности избыточный шум, как это и следовало ожидать для многомодового лазера класса $B$, проявляется в виде резонансного пика на частоте противофазных релаксационных колебаний $\Omega_{\rm L}$ и повышенного уровня на частоте $\Omega_{\rm R}$ (рис. 1*а*). Помимо флуктуаций интенсивности избыточность проявляется и в спектрах флуктуаций частоты (рис. 1*б*). Этим объясняется появление фактора Питермана в обобщённой формуле ширины спектра излучения лазера, речь о чём шла выше.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе показано, что

1) избыточный шум в лазерах обусловлен связью мод;

2) линейная связь мод приводит к явлению избыточного шума в узком смысле слова (по Питерману);

3) нелинейная связь мод является универсальным механизмом избыточного шума, имеющим динамическую природу;

4) эффект имеет чисто классическое происхождение; он находит своё объяснение в рамках существующих представлений и не требует пересмотра базовых положений теории излучения;

5) теория избыточного шума в лазерах класса $B$ может строиться на базе модели с адиабатически исключённой поляризацией, полученной стандартным образом, и не требует привлечения «новых» подходов, не имеющих должного обоснования;

6) строго говоря, балансные модели непригодны для построения теории избыточного шума; адекватными являются модели с фазочувствительным взаимодействием мод.

Автор признателен фондам, при поддержке которых была выполнена настоящая работа: фонду Александра фон Гумбольдта, РФФИ и Президентской программе поддержки ведущих научных школ.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Schawlow A. L., Townes C. H. // Phys. Rev. 1958. V. 112, No. 6. P. 1 940.
2. Kuppens S. J. M., van Exter M. P., van Duin M., Woerdman J. P. // IEEE J. Quant. Electron. 1995. V. 31, No. 7. P. 1 237.
3. Petermann K. // IEEE J. Quant. Electron. 1979. V. 15, No. 7. P. 566.
4. Siegman A. E. // Appl. Phys. B. 1995. V. 60. P. 247.
5. Siegman A. E. // Phys. Rev. A. 1989. V. 39, No. 3. P. 1 253.

6. Siegman A. E. // Phys. Rev. A. 1989. V. 39, No. 3. P. 1 264.
7. Haus H. A., Kawakami S. // IEEE J. Quant. Electron. 1985. V. 21, No. 1. P. 63.
8. Grangier Ph., Poizat J.-Ph. // Eur. Phys. J. D. 1998. V. 1. P. 97.
9. Van der Lee A. M., van Druten N. J., Mieremet A. L., et al. // Phys. Rev. Lett. 1997. V. 79, No. 22. P. 4 357.
10. Lindberg A. M., van Eijkekelenborg M. P., Joosten K., et al. // Phys. Rev. A. 1998. V. 57. P. 3 036.
11. Bandroff P. J., Stenholm S. // Phys. Rev. A. 1999. V. 60, No. 3. P. 2 529.
12. Зайцев Ю. И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1970. Т. 13. С. 898.
13. Зайцев Ю. И. // Квант. электрон. 1973. № 5. С. 77.
14. Lamb W. E. Jr. // J. Phys. Rev. 1964. V. 134. P. 1 429.
15. Nguen B. A., Mandel P. // Phys. Rev. A. 1996. V. 54, No. 2. P. 1 638.
16. Khandokhin P. A., Mandel P., Koryukin I. V., et al. // Phys. Lett. A. 1997. V. 235. P. 248.
17. Kozyreff G., Mandel P. // Phys. Rev. A. 1998. V. 58, No. 6. P. 4 946.
18. Ханин Я. И. Основы динамики лазеров. М.: Наука, 1999.
19. Baev V. M., Latz T., Toschek P. E. // Appl. Phys. B. 1999. V. 69. P. 171.
20. Arecchi T. F. // Instabilities and Chaos in Quantum Optics. New York: Springer Verlag, 1987. P. 9.
21. Abraham N. B., Mandel P., Narducci L. M. // Progress in Optics. 1988. V. 25. P. 1.
22. Khanin Ya. I. // Chaos. 1996. V. 6. P. 373.
23. Haken H. // Phys. Lett. A. 1975. V. 53. P. 77.
24. Statz H., DeMars G. // Quantum Electronics. New York: Columbia Univ. Press, 1960. P. 530.
25. Kuppens S. J. M., van Exter M. P., Woerdman J. P. // Phys. Rev. Lett. 1994. V. 72, No. 24. P. 3 815.
26. Van Eijkelenborg M. A., van Exter M. P., Woerdman J. P. // Phys. Rev. A. 1998. V. 57, No. 1. P. 571.
27. Dutra S. M., Joosten K., Nienhuis G., et al. // Phys. Rev. A. 1999. V. 59, No. 6. P. 4 699.
28. Etrich C., Mandel P., Abraham N. B., Zeglache H. // IEEE J. Quant. Electron. 1992. V. 28, No. 4. P. 811.
29. Mandel P., Etrich C., Otsuka K. // IEEE J. Quant. Electron. 1993. V. 29, No. 3. P. 836.
30. Khandokhin P. A., Koryukin I. V., Khanin Ya. I., Mandel P. // IEEE J. Quant. Electron. 1995. V. 31, No. 4. P. 647.


Институт прикладной физики РАН,
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию
6 февраля 2004 г.

## PROBLEMS OF EXCESS NOISE AND ADEQUATE LASER MODELS

*Ya. I. Khanin*

We discuss the problem of excess noise in lasers of different dynamical classes, as well as adequate models for the description of such noise. It is shown that the excess noise in lasers is caused by mode-mode coupling. The linear coupling leads to the phenomenon of excess noise in the narrow sense (Petermann's excess noise), while the nonlinear mode coupling is the universal mechanism for excess noise of dynamical nature. It is shown that the theory of excess noise in class-B lasers does not require new approaches and can be developed on the basis of models with adiabatically eliminated polarization obtained in a standard way.

УДК 621.373

# POLARIZATION DYNAMICS OF INTRACAVITY FREQUENCY-DOUBLED Nd:YAG LASER

*C. Czeranowsky [1], V. M. Baev [1], G. Huber [1], P. A. Khandokhin [2], Ya. I. Khanin [2], I. V. Koryukin [2], and E. Yu. Shirokov [2]*

Experimental study of low-frequency dynamics of intracavity frequency-doubled Nd:YAG laser demonstrates the influence of the interaction of orthogonally polarized modes, participating in frequency doubling (type II phase matching), on the stability of the laser output. At sufficiently low pump rate and low conversion efficiency the laser shows a stable operation with low noise level at the frequencies of relaxation oscillations. At a high pump power and/or a high conversion efficiency, the laser emission becomes unstable as a result of Hopf bifurcation at frequencies of relaxation oscillations, that are responsible for anti-phase polarization dynamics of the laser.

## INTRODUCTION

Improvement of the output stability of multimode lasers requires the identification and control of nonlinear mode coupling dominating the laser dynamics. One of the very important practical problems is the stability of the output of multimode solid-state lasers with intracavity frequency doubling. It has been shown experimentally by using a multimode Nd:YAG laser with an intracavity KTP crystal [1], that the mode coupling due to intracavity frequency doubling is sufficient to generate instability of laser emission. The analysis of the developed rate equations used to model the laser dynamics confirmed the existence of dynamical instabilities within a certain parameter range of the laser [1–4]. It has been pointed out that the laser instability is caused by the sum frequency generation, that usually accompanies the second harmonic generation in intracavity frequency doubling multimode lasers, and that the stationary solution loses its stability through Hopf bifurcations.

In spite of many theoretical papers considering dynamical instabilities in multimode lasers due to intracavity frequency doubling, experimental investigations in this field are insufficient and mostly concentrated on the development of practical solutions for the stabilization of the laser output. Two types of phase-matching of light waves in nonlinear crystals are used for intracavity frequency doubling: type I includes frequency mixing of laser modes of one polarization, whereas type II mixes the laser modes of the orthogonal polarizations. In intracavity frequency doubling lasers with type II phase matching stabilization is performed, e. g., by adding a quarter-wave plate [5] or two crossed nonlinear crystals [6] to the laser cavity. With type I phase matching the laser usually oscillates in only one polarization mode, and the instability of the output appears due to the coupling of longitudinal modes [7]. In this case it has been suggested to place the doubling crystal in specific locations inside the laser cavity with respect to the gain medium such that the spatial overlap of different oscillating laser modes in the gain medium and in the doubling crystal is minimized [8]. In this way, the efficiency of generation of the sum frequency in contrast to the second harmonic is reduced, and the laser output is stabilized.

In this paper we investigate experimentally the low-frequency dynamics of type II intracavity frequency doubling lasers at the transition from the stable to chaotic emission. These results are important for understanding the physical processes governing the dynamics of multimode intracavity frequency doubling lasers, for the development of the most accurate theoretical model and for the stabilization of the laser emission.

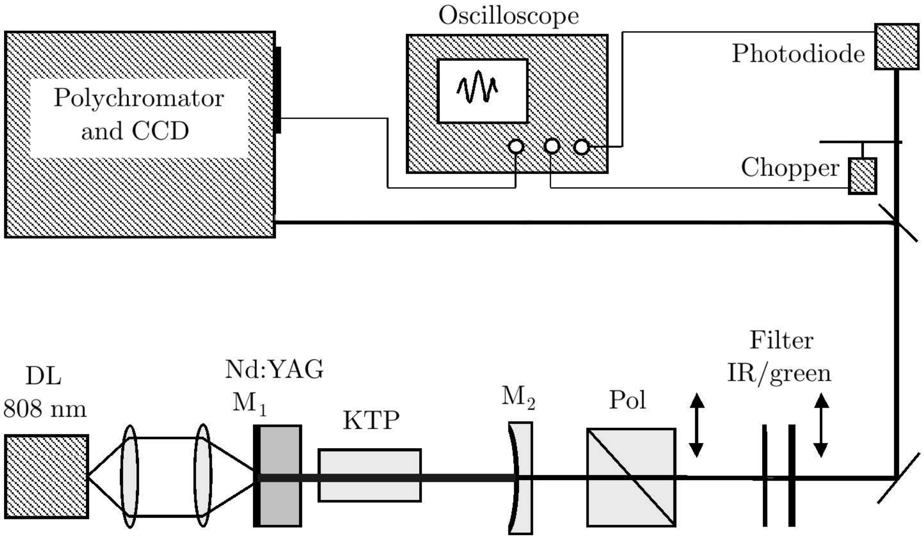



Fig. 1. Experimental setup

## 1. EXPERIMENT

Investigations are performed using a Nd:YAG laser with a weakly anisotropic 50-mm-long cavity ensuring simultaneous excitation of both orthogonal linear polarizations at the fundamental wavelength 1 064 nm [9]. The optical axis of the nonlinear, temperature controlled KTP crystal is oriented precisely along one of these polarizations so that the ordinary and extraordinary waves of the nonlinear crystal coincide with eigenpolarizations of the cavity. In this case the frequency doubling is generated only by the longitudinal modes of different polarizations through sum frequency generation.

The experimental setup is shown in Fig. 1. A Nd:YAG laser crystal is longitudinally pumped through the back mirror $M_1$ by a broad area (100 $\mu$m) diode laser (DL) with up to 1,6 W output at wavelength 808 nm. The atomic concentration of Nd is 1,1 %, and the length of the crystal is 3 mm. The pump beam is collimated and focused into the laser crystal by two achromatic lenses. One side of the laser crystal is coated with the dielectric mirror $M_1$ (reflection coefficient $R \approx 100\,\%$ at wavelength 1 064 nm, $R \approx 0$ at 532 and 808 nm). The output concave mirror $M_2$ with 50-mm radius of curvature has similar reflectivity as $M_1$. The opposite side of the laser crystal and both sides of the KTP crystal are antireflection coated at 532 and at 1 064 nm. The optical length of the cavity $L = 58$ mm provides intermode spacing $\Delta\nu_0 = c/(2L)$ of 2,6 GHz, where $c$ is velocity of light. The threshold pump power is about 250 mW. The laser output is monitored by a high-speed photodiode and registered by a digital oscilloscope «LeCroy» with bandwidth 500 MHz. Additionally, this oscilloscope performs a Fourier transformation of the input signal. The time window of recording is set by a chopper. The optical emission spectrum of the laser is recorded by a grating polychromator equipped with a 1 024-channels CCD and is stored in the same digital oscilloscope. The resolution of spectral recording at $\lambda = 1\,064$ nm is 0.43 GHz. That is sufficient to resolve individual laser modes. The polychromator bandwidth at $\lambda = 1\,064$ nm is 347 GHz. Polarizer (Pol) and color glass filter transmitting in green or in IR are used to select the polarization and wavelength of recording.

A typical optical spectrum of the laser output is shown in Fig. 2. In this example the laser oscillates at 1 064 nm in 3 longitudinal modes ($\nu_1$, $\nu_2$, $\nu_3$) of one polarization (Fig. 2*a*) and in 1 longitudinal mode ($\nu_4$) of the orthogonal polarization (Fig. 2*b*). The wavelengths of all these four oscillating modes are different; their frequency separations are: $\nu_2 - \nu_1 = 22\,\Delta\nu_0$, $\nu_3 - \nu_1 = 36\,\Delta\nu_0$, and $\nu_4 - \nu_1 = 2\,\Delta\nu_0$.

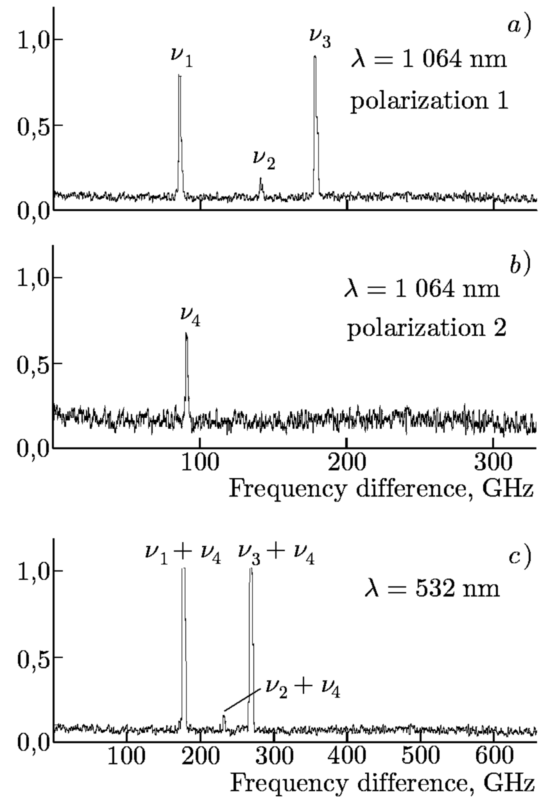



Fig. 2. Optical spectrum (in arbitrary units) of the laser emission in two orthogonal polarizations at $\lambda = 1\,064$ nm ($a$, $b$) and at $\lambda = 532$ nm ($c$). Pump rate $\eta = 1{,}65$, conversion efficiency $\varepsilon = 44$ W$^{-1}$

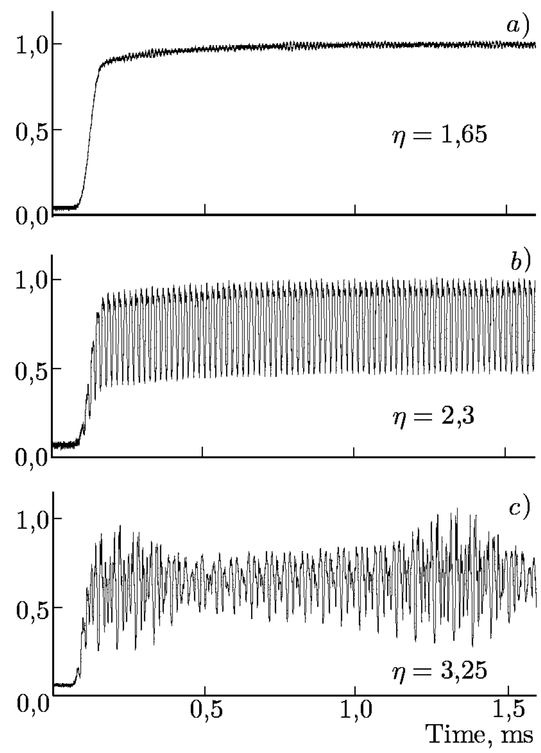



Fig. 3. Temporal behavior of the laser output (in arbitrary units) in one linear polarization at $\lambda = 1\,064$ nm at three different pump rates $\eta = 1{,}65$ ($a$), $\eta = 2{,}3$ ($b$), $\eta = 3{,}25$ ($c$), and at the constant efficiency of the frequency doubling $\varepsilon = 80$ W$^{-1}$. The second polarization shows similar behavior

Other laser modes are suppressed by etalon effects on various optical surfaces in the laser cavity and by the partial filling of the cavity with the active medium [10, 11]. The frequency doubled emission (Fig. 2$c$) shows three contributions $\nu_1 + \nu_4$, $\nu_2 + \nu_4$ and $\nu_3 + \nu_4$ provided only by sum frequency generation. That proves no generation of second harmonic components. Since the laser parameters, such as pump power, doubling efficiency and the cavity adjustment in our experiment were variable, the spectral and polarization compositions of the laser emission were modified slightly depending on the particular cavity configuration. However, no specific modifications of the laser emission spectrum associated with the transition from the stable to chaotic laser dynamics were observed.

At sufficiently low pump rate and low efficiency of frequency doubling the laser shows a stable operation with a low level noise. Figure 3a demonstrates an example of a stable emission in one polarization of the laser at the fundamental wavelength, 1 064 nm. In this figure the pump rate of the laser is 1,65 times above the threshold ($\eta = 1{,}65$), and the efficiency of frequency doubling $\varepsilon = 80$ W$^{-1}$. The efficiency of the frequency doubling is defined here as the ratio of the output power at $\lambda = 532$ nm, $P_{\rm gr}$, to the product of the output powers $P_1$ and $P_2$ at $\lambda = 1\,064$ nm in both polarization modes: $\varepsilon = P_{\rm gr}/(P_1 P_2)$. The efficiency of the frequency doubling is controlled in this experiment by the temperature of the KTP crystal.

Figures 3$b$ and $c$ show the laser output at $\lambda = 1064$ nm in the same polarization mode with the same efficiency of the frequency doubling, but at higher pump rates. At the relative pump rate $\eta = 2{,}3$ the laser shows strong regular oscillations at one particular frequency, whereas at $\eta = 3{,}2$ the oscillations of laser emission become irregular. The laser emission at the second polarization of the fundamental frequency and at the doubled frequency are not presented here since their behavior is similar to records shown in Fig. 3.

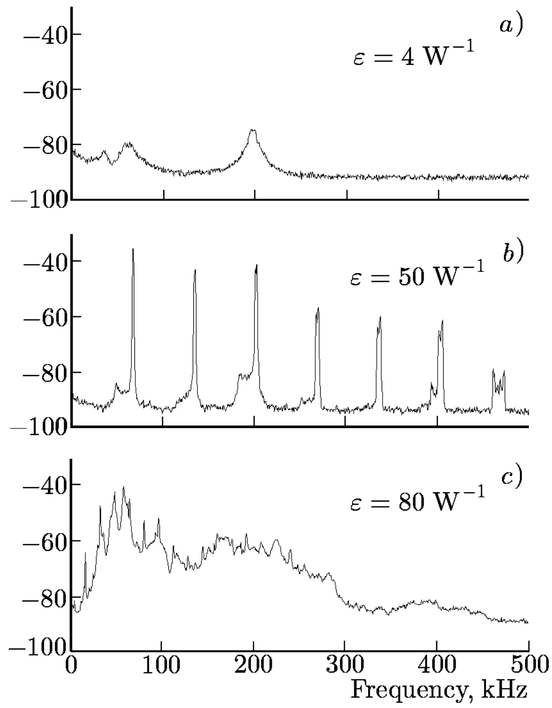



Fig. 4. Fourier transformations of the laser output (in dB) in one linear polarization at $\lambda = 1\,064$ nm at different conversion efficiencies: $\varepsilon = 4$ W$^{-1}$ (*a*), $\varepsilon = 50$ W$^{-1}$ (*b*), and $\varepsilon = 80$ W$^{-1}$ (*c*). The pump rate $\eta = 3{,}25$

Figure 4 displays the low frequency spectrum of the laser output in one linear polarization at $\lambda = 1\,064$ nm. The pump rate is kept constant here, $\eta = 3{,}25$, but the efficiencies of the frequency doubling are different: $\varepsilon = 4$; 50 and 80 W$^{-1}$. With the low conversion efficiency the laser emission is stable and shows only a low-level noise. The frequencies of this noise corresponds to the relaxation oscillations typical for solid state class B lasers [9, 12–15]. The low-frequency spectrum of the laser emission shown in Fig. 4*a* reveals one high-frequency peak at 200 kHz and two peaks at lower frequencies. The high-frequency peak corresponds to fast in-phase oscillations in all laser modes, whereas low-frequency peaks correspond to slow antiphase oscillations in individual polarization [9, 12, 13] and longitudinal [14, 15] modes. The total number of peaks can be as large as the number of oscillating modes. All these oscillations are especially pronounced in the transient regime of the laser [12], however, the quantum noise provides sufficient drive force for permanent excitation of these oscillations even if the pump power is kept constant [14].

At higher conversion efficiencies the laser behavior becomes unstable. Fig. 4*b* shows the low-frequency spectrum of the laser emission at the doubling efficiency of $\varepsilon = 50$ W$^{-1}$ ensuring strong oscillations of the output. The output fluctuations at the frequency of the polarization relaxation oscillations grow due to the increase of sum frequency generation in the laser cavity. As a result the frequency peak corresponding to the polarization oscillations is getting narrower and stronger and it's multiple harmonics appear in the power spectrum. With the doubling efficiency of $\varepsilon = 80$ W$^{-1}$ fluctuations of the laser emission become irregular and the power spectrum is getting broad and unstructured (Fig. 4*c*) indicating the transition to chaotic dynamics.

## 2. DISCUSSION

Solid-state lasers belonging to class B are characterized by smaller decay rates of the upper laser level than the decay rate of the light in the cavity [16]. Therefore, the inversion does not adiabatically follow the light power, and the transient laser dynamics shows relaxation oscillations of the output. The low-frequency dynamics of standing-wave bipolarized multimode solid-state lasers is additionally modified by the spatial inhomogeneity of the saturated laser gain in the longitudinal and azimuthal directions. The interaction of the orthogonally polarized modes with the laser medium leads to polarization (angular) hole burning and, consequently, to the appearance of low-frequency relaxation oscillations of a new type (in addition to the well known relaxation oscillations in longitudinally multimode lasers [16, 17]), which are responsible for antiphase behaviour of orthogonally polarized modes [9, 13]. All these relaxation oscillations are easily excited by any perturbation including quantum noise that is naturally present in all lasers. Therefore the fluctuations of the laser output at the frequencies of the relaxation oscillations are always present even if the laser operates continuously [15].

In our experiment the nonlinear doubling crystal in the cavity mixes only the laser modes with different orthogonal polarizations. This mixing by the sum frequency generation was suggested to be the main reason for the instability of the laser output [1], but the previous experimental and theoretical investigations included frequency doubled lasers with both the second harmonic and the sum frequency contributions. However, the investigation of the specific influence of the sum frequency contribution is indeed important, since it is known, that the second harmonic generation in contrast to the sum frequency generation increases the damping of the relaxation oscillations [18] and, therefore, improves the stability of the laser output.

Indeed, we have observed that the sum frequency generation reduces the damping of the polarization relaxation oscillations. At sufficiently high doubling efficiency and pump rate the fluctuations of the polarization modes are transformed into undamped oscillations and the so- called Hopf bifurcation takes place. The presence of the Hopf bifurcation has already been predicted by model calculations [3, 4], however, it has not yet been observed experimentally. Our results show that the Hopf bifurcation takes place at the frequency of the polarization relaxation oscillations and it is the result of the interaction of the polarization laser modes. The Hopf bifurcation appears in the experiment not as a sharp transition from stable emission to oscillatory regime, but as a continuous increase of the oscillation's amplitude. Further increase of the doubling efficiency and/or of the pump rate generates chaotic dynamics.

The bifurcation takes place only if the doubling efficiency and/or the pump rate are strong enough and the threshold of the instability is reached. Since the instability is caused by the mode interaction, a new comprehensive model of the multimode laser with intracavity frequency doubling should more accurately take into account such important properties of the laser, as the spatial [8, 10, 11] and angular [9, 13, 19] inhomogeneity of the gain.

## CONCLUSIONS

In this paper we present the experimental study of the influence of the interaction of polarization laser modes on the stability of intracavity frequency doubling. Increased efficiency of the frequency doubling and/or increased pump power lead to stronger oscillations of the laser output at the frequency of the polarization relaxation oscillations and eventually to regular undamped oscillations followed by chaotic dynamics. The first experimental observation of Hopf bifurcation at the frequency of the polarization relaxation oscillations is presented.

The results of the experiment can help to develop simple and efficient ways for the stabilization of the output of intracavity frequency doubling lasers. Since the observed instability is the Hopf bifurcation at the frequency of the polarization relaxation oscillations, the following stabilization ways, which modify the relaxation properties of the solid-state lasers, are possible:

1. Selection of an active medium with larger decay rates of the upper laser level, since it increases the damping of the relaxation oscillations [17].

2. Reduction of the cavity loss rate and increase of the relative pump rate, since it can modify the transient relaxation oscillations into the aperiodic regime [20], which is typical for class A lasers.

3. Application of an opto-electronic feedback, since it increases the damping of relaxation oscillations [21, 22].

4. Reduction of the spatial inhomogeneities of the gain, e. g. by using a quarter-wave plate [5], or ring lasers, since it reduces the amplitude of the low-frequency relaxation oscillations.

5. Application of cavity configurations with reduced efficiency of sum frequency generation as compared to second harmonic generation, since it increases the instability threshold [8].

The research was supported by the Russian Foundation for Basic Research (grants No. 02–02–17046 and 03–02–17243), by the Russian President Program for Support of Scientific Schools (grant No. 1622.2003.2), and by the INTAS Association (grant No. 99–00794). P. K. acknowledges financial support from the Graduate College GRK 463 of the University of Hamburg.

## REFERENCES

1. Baer T. // J. Opt. Soc. Am. B. 1986. V. 3. P. 1 175.
2. James G. E., Harrell E. M. II, Roy R. // Phys. Rev. A. 1990. V. 41. P. 2 778.
3. Wang J., Mandel P. // Phys. Rev. A. 1993. V. 48. P. 671.
4. Vladimirov A. G., Viktorov E. A., Mandel P. // Phys. Rev. E. 1999. V. 60. P. 1 616.
5. Oka M., Kubota S. // Opt. Lett. 1988. V. 13. P. 805.
6. Li D., Zhu C., Gaebler V., et al. // Opt. Commun. 2001. V. 189. P. 357.
7. Li P., Li D., Zhang Z., Zhang S. // Opt. Commun. 2003. V. 215. P. 159.
8. Czeranowski C., Baev V., Huber G. // Opt. Lett. 2003. V. 28. P. 2 100.
9. Khandokhin P., Milovsky N., Mamaev Yu., et al. // Proc. SPIE 1998. V. 3 682. P. 53.
10. Khandokhin P. A., Ovchinnikov E. A., Shirokov E. Yu. // Phys. Rev. A. 2000. V. 61. Article no. 053 807.
11. Abraham N. B., Sekaric L., Carson L. L., et al. // Phys. Rev. A. 2000. V. 62. Article no. 013 810.
12. Bielawski S., Derozier D., Glorieux P. // Phys. Rev. A. 1992. V. 46. P. 2 811.
13. Khandokhin P. A., Khanin Ya. I., Mamaev Yu., et al. // Kvant. Electron. 1998. V. 25. P. 517.
14. Mandel P., Nguen B. A., Otsuka K. // Quantum Semiclassic. Opt. 1997. V. 9. P. 365.
15. Peters B., Hünkemeier J., Baev V. M., Khanin Y. I. // Phys. Rev. A. 2001. V. 64. P. 023 816.
16. Khanin Ya. I. Fundamentals of laser dynamics. M.: Nauka, 1999.
17. Khandokhin P. A., Khanin Ya. I., Koryukin I. V., et al. // Izv. vuzov. Radiofizika. 1997. V. 40. P. 161.
18. Böhm R., Baev V. M., Toschek P. E. // Opt. Commun. 1997. V. 134. P. 537.
19. Bouwmans G., Ségard B., Glorieux P., et al. // Izv. vuzov. Radiofizika. 2004. V. 47, No. 10–11. P. 813.
20. Khandokhin P. A., Khanin Ya. I., Koryukin I. V., et al. // Phys. Lett. A. 1997. V. 235. P. 248.
21. Khandokhin P., Khanin Ya., Celet J.-C., et al. // Opt. Commun. 1996. V. 123. P. 372.
22. Pyragas K., Lange F., Letz T., et al. // Phys. Rev. E. 2000. V. 61. P. 3 721.

[1] Universitat Hamburg, Institut für Laser-Physik,
Hamburg, Germany;
[2] Institute of Applied Physics, Russian Academy of Science,
Nizhny Novgorod, Russia

Поступила в редакцию
18 мая 2004 г.

УДК 621.373

# POLARIZATION DYNAMICS OF LONGITUDINALLY MONOMODE BIPOLARIZED MICROCHIP SOLID-STATE LASERS

*G. Bouwmans*[1], *B. Ségard*[1], *P. Glorieux*[1], *P. A. Khandokhin*[1,2], *N. D. Milovsky*[2], *and E. Yu. Shirokov*[2]

This paper is devoted to the polarization dynamics of a longitudinally monomode bipolarized Nd:YAG laser: the low-frequency polarization dynamics of a microchip laser is investigated experimentally and theoretically. The intensities and the relaxation oscillation spectrum of orthogonally polarized modes versus the direction of pump polarization is observed. A phase-sensitive model of a longitudinally monomode bipolarized solid-state laser with linear polarized diode laser pump is developed to account for the experimental observations.

## INTRODUCTION

In most lasers, the polarization of the laser electric field is fixed, due to polarization selective elements inside the laser cavity. This is not the case for the recently developed microchip lasers since these monolithic structures are quasi isotropic. In such devices, the freedom is restored for the polarization variables and these lasers may develop some polarization dynamics, i. e. the laser field may not be described by its intensity or the field amplitude only but the vectorial character of this quantity must be accounted for.

In fact an enormous amount of work already exists on such dynamics in a variety of lasers, including microchips similar to those considered here [1–12]. Since the early days of lasers, it has been recognized that the state of laser emission could depend on the properties of both the active medium and the passive components of the laser cavity. Most of these works dealt with stationary states, in many cases continuous-wave (cw) or periodic states. In the present work we aim at interpreting dynamic characteristics of these lasers such as their polarization resolved relaxation oscillation (RO) spectrum and we introduce a new theoretical description of such dynamics in terms of polarization modes.

The simultaneous interaction of several modes with the active medium may be treated at different orders. To first order, the modes are coupled because they both share the same population inversion, in an energetic coupling. To the next order, population saturates. This gives rise to population gratings of two types because of the standing waves inside the laser cavity. The gratings of the first type are small-scale gratings with period of half wavelength $\lambda/2$ due to the effect of spatial hole burning — also pure energetic coupling. In presence of two and more longitudinal modes, long period modulation gratings of second type appear at a scale fixed by the frequency difference between each pair of the interacting modes. Such «phase-sensitive» gratings were introduced (for example [13]) to obtain a better relation between theory and experiments in dual longitudinal mode lasers. In this paper we show that a similar approach may be developed to account for the experimental observations of the laser polarization dynamics. When two polarization modes coexist in the laser, similar coupling mechanisms rule the dynamics of the system. To lowest order both polarization components share the same population inversion. To next order, they burn holes in the population distribution because of saturation and to the following order, these «polarization holes» alter the laser dynamics.

Microchip YAG lasers are particularly well suited for many reasons: (i) they are so short that single longitudinal mode is the most common regime, (ii) they are efficiently pumped by linear polarized diode lasers, making it possible to change the direction of the pump induced anisotropy. However as these devices are monolithic, it is difficult to control the loss and phase anisotropies inside the cavity.

Generally, the polarization state of laser emission depends on properties of the active medium and of the laser cavity. In the active medium, gain and refractive index anisotropies may be induced by pumping with polarized light or by an external magnetic or electric field. The laser cavity anisotropies depend on the characteristics of the intracavity optical elements. Just like for the active medium they can induce polarization-dependent changes in the loss and/or refractive index. As the optical axes of all these components generally do not coincide, treating the general situation of arbitrary anisotropies strengths and orientations is an enormous and useless task. Practically the polarization of a YAG microchip laser depends on the interplay of residual stress-induced birefringence and the gain anisotropy introduced in the active medium by polarized pumping as provided by a diode laser [2–4]. As all these effects are small, the lasers with Fabry—Perot cavities are quasi-isotropic and orthogonally polarized modes with the same longitudinal index have equal lasing thresholds and similar lasing frequencies, and under these conditions unstable lasing is possible [5, 11].

Similar problems were already considered in a variety of situations, mostly for He-Ne [14–20] and then YAG [21, 22] and diode [23, 24] lasers and more recently Vertical Cavity Surface Emitting Lasers (VCSEL) [12]. As far as microchip lasers are concerned, there have been few systematic studies of their polarization dynamics. The experimental conditions are not always specified or not relevant to the present work because some use non-polarized pumping. However the following conclusions may be deduced [5, 11, 21, 22]:

1) The residual birefringence causes a mode splitting of the order of MHz to hundreds of MHz. The laser remains in single mode operation because this is much smaller than the longitudinal mode spacing.

2) The loss anisotropies are extremely small by construction and neglected.

3) The polarized pump introduces gain anisotropy as seen e. g. on the evolution of the threshold with the pump azimuth.

4) Single or double mode operation depends on the relative values of the gain anisotropy and of the birefringence. Instabilities and self-pulsing may result from double mode operation at low birefringence.

The original point of the present work is to include the RO (or noise) spectrum as a key feature of the laser behavior in addition to the intensity and polarization states. Relaxation oscillations provide an additional diagnostic of the laser dynamics that helps, and should be considered, in the comparison between models and experiments. For instance, in VCSELs, the question of the presence of a second relaxation oscillation is a key check for the existence of spin relaxation processes and is still a subject of controversy [12].

The bipolarized laser theory has been already considered by many authors [2–4, 5, 10], but in a context different from the present work. For instance, a spatial structure of orthogonally polarized modes that is identical along the entire cavity axis (longitudinally single-mode laser) is considered in [5, 10], but the effect of spatial hole burning is neglected there. A bipolarized laser model taking into account longitudinal hole burning of inversion, but in presence of different longitudinal modes of the cavity, is developed in [2–4]. In addition, these papers include a phenomenological description of gain anisotropy due to linearly polarized laser pumping. In the present paper we actually suggest a model that embraces the ideas of all these papers. Also, based on the ideas suggested by Casperson [7], we present in the appendix and use in the calculation a quantum-mechanical derivation of the modification of angular distribution of active centers under linearly polarized pumping.

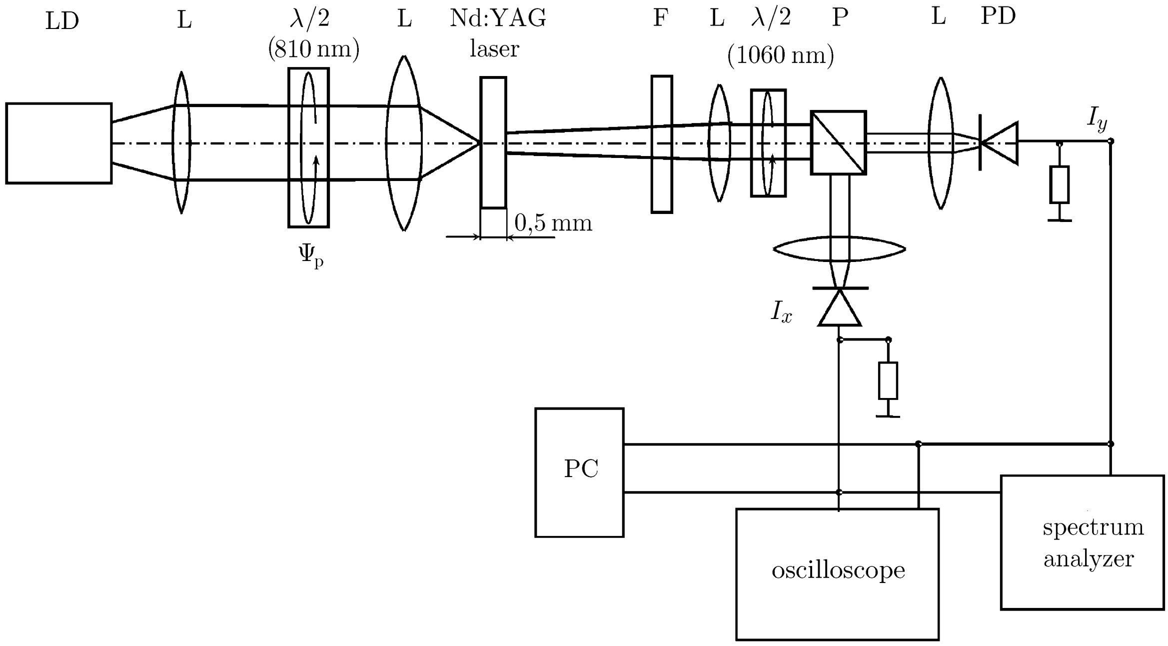



Fig. 1. Schematic of the experimental setup used in this study: LD — pump laser, wavelength 810 nm; L — collimating lenses; $\lambda/2$ (810 nm) — half-wave plate at $\lambda = 810$ nm; Nd:YAG laser — microchip laser with 0,5 mm length; F — cut off filter at $\lambda = 810$ nm; $\lambda/2$ (1 064 nm) — half-wave plate at $\lambda = 1\,064$ nm; P — Glan prism; PD — the photo diodes; PC — personal computer

## 1. EXPERIMENTAL RESULTS

### 1.1. Experimental setup

The laser behavior has been characterized by three kinds of physical variables, namely (i) the output intensity in each polarization component, (ii) the ellipticity of the emitted fields and (iii) the relaxation and beat frequencies as coming from the radiofrequency noise spectrum of the laser emission. All these quantities have been measured versus the azimuth and the intensity of the pump in two limit cases corresponding to a large and a small difference between the resonance frequencies of the cavity polarization eigenmodes. The frequency difference between orthogonally polarized modes is fixed by the residual birefringence of the crystal matrix, and acts as a crucial parameter ruling the interaction between the two polarization modes, with frequency pushing/pulling making the laser oscillate on «modes of hot cavity» with frequencies different from those of the «cold cavity» and possibly locking of two modes resulting in a single mode operation.

The experimental setup is schematically presented in Fig. 1. The emission from a pigtailed laser diode LD passes through a polarizer (extinction ratio $10^4$) associated with a zero-order half-wave plate which controls the azimuth of the pump field. It is focused by a telescope onto the surface of an active element (a plane-parallel plate about 25 mm diameter and 0,5 mm thickness made of $Nd^{3+}$-doped YAG crystal which has been cut perpendicularly to the [111] crystallographic axis, the atomic concentration of Nd is 1,1%), whose dielectrically coated surfaces serve as mirrors at a wavelength of 1 064 nm. The output surface has additionally an antireflection coating at the pump wavelength. A filter F is placed at the output of the Nd:YAG laser to cut off residual pump radiation. Next, the laser light is split with a polarization cube P into two beams. A half-wave plate at a wavelength of 1 064 nm matches the orientations of the eigenpolarizations of the laser with the eigenaxes of the polarization cube in the detection arm.

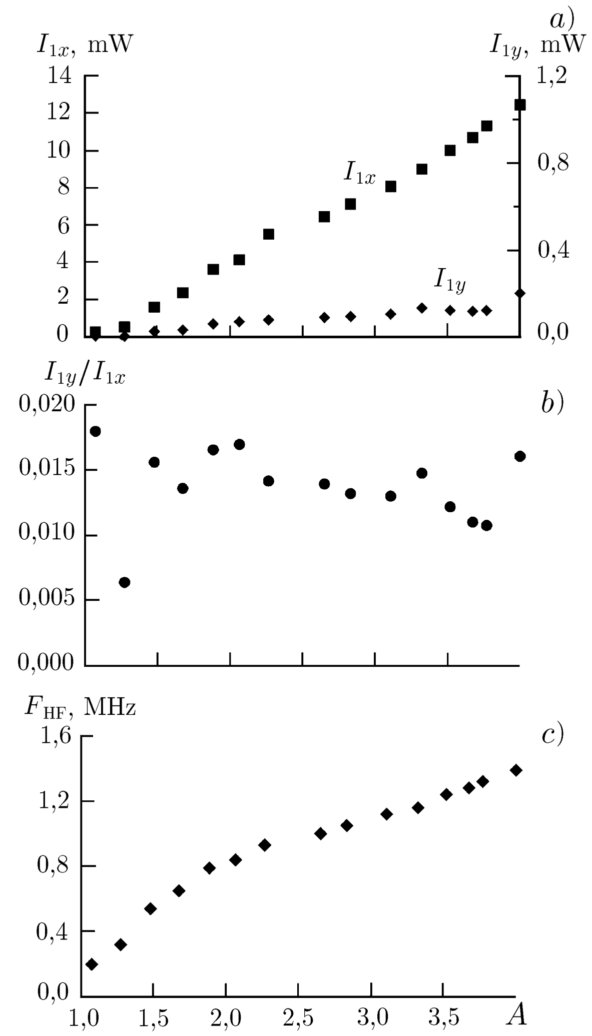



Fig. 2. Dependencies of the output intensity ($a$), ellipticity ($b$) and relaxation frequency ($c$) on the pump parameter for the case of only one elliptic mode (due to choosing the orientation of the pump polarization) for a large value of the beat frequency (about 60 MHz, see Fig. 3)

Such a laser oscillates on orthogonal linearly polarized modes (we have made checks through the spectral and geometrical analysis of the laser output that the laser operates in the single longitudinal and transverse mode regime). In typical conditions, there is only one longitudinal mode in each polarization mode and the same longitudinal index. Therefore the description of the laser emission in the model used for interpretation is limited to these two ($x$- and $y$-) components. The mode composition was checked by monitoring through the power spectra in these orthogonal polarizations. In the following, we compare the cases of single and double orthogonal linear polarizations. They are obtained by adjusting the parameters which are experimentally accessible, i. e. (i) continuous variation of the pump polarization direction and (ii) discrete changes of the cavity (stress-induced) birefringence. More specifically we explore the influence of the pump characteristics under the small and large birefringence. This quantity may be selected because the large transverse dimensions of the crystal plate allowed pumping at different points of the plate and this way to select the value of the birefringence at the active point. We have used exclusively the center of the rod since the periphery is polluted by additional geometrical effect and is a region of stress leading to inhomogeneous birefringence. Only the center is relatively homogeneous and suitable for clean experiments.

### 1.2. Single mode results

First we deal with a single polarization mode and check the laser characteristics for further reference. In this case, the intensities $I_{1x} \equiv I_x$ and $I_{1y} \equiv I_y$ are the intensities of orthogonal components of a single polarization mode, for definiteness we say $I_1$. Figure 2 displays the evolution of the output intensity $I_1$, the ellipticity of the laser output $I_{1y}/I_{1x}$, and relaxation frequency $F_{\rm HF}$ with the pumping rate A, i. e. the pump power in units of its threshold value. Single mode behavior exists up to a pump rate $A = 4$ and the ellipticity of the laser output remains smaller than $2 \cdot 10^{-2}$, i. e. we can consider that the fields are quasi-linearly polarized. Figure 3 displays a typical power spectrum of intensity fluctuations in single mode operation. The radiofrequency spectrum of the laser intensity obtained in these conditions shows only one high-frequency relaxation peak at the frequency $F_{\rm HF}$ in the standard RO of class B lasers and

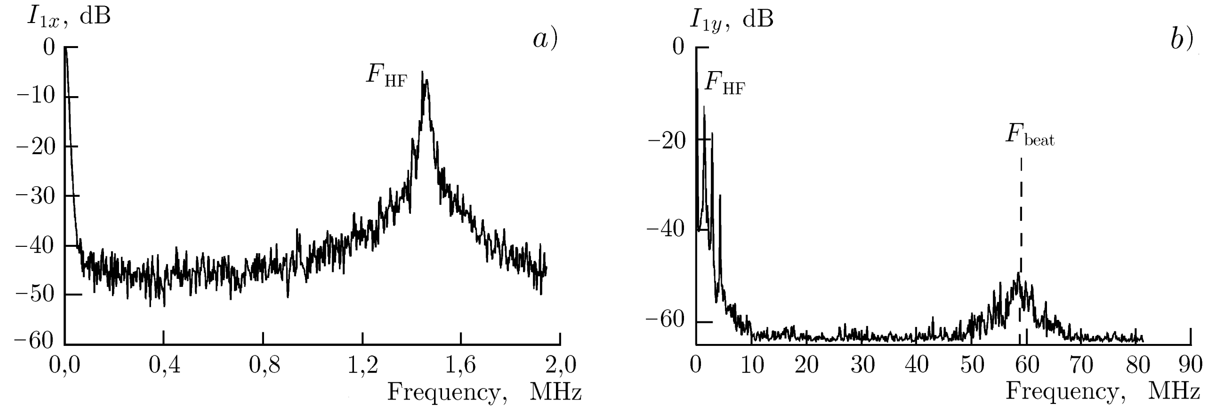
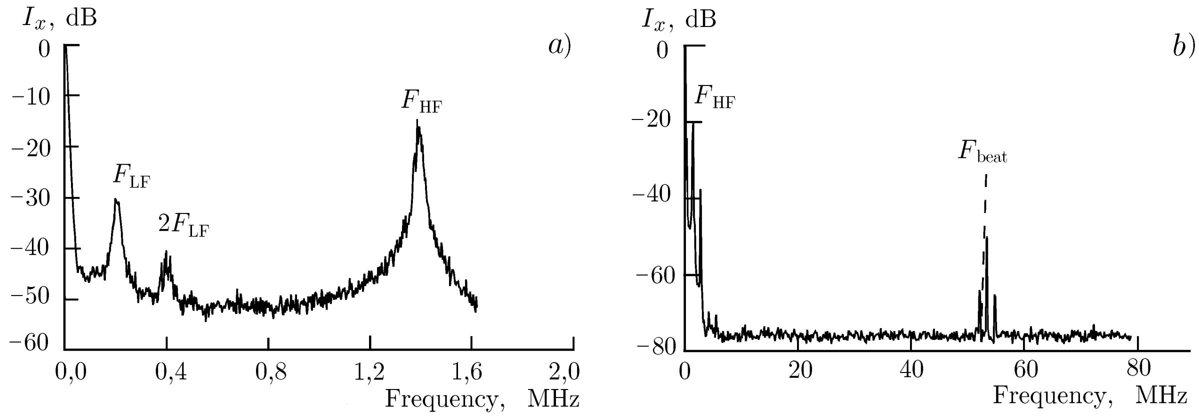



Fig. 3. Power spectra of output intensity when one of the polarization modes is oscillating at pump parameter of about 4: ($a$) in the $x$-direction for $I_{1x}$ component, and ($b$) in the $y$-direction for $I_{1y}$ component of the strong polarization mode $I_1$

no additional peak at larger or lower frequency. This will be considered later as a signature of single mode lasing.

### 1.3. Results for two polarization modes

At larger pump power or for a suitable pump polarization azimuth, a second (orthogonally polarized) mode may contribute to the lasing process. In these conditions, two additional peaks appear in the noise RF spectrum:



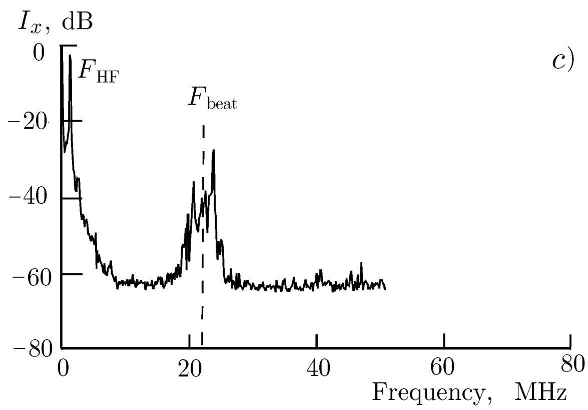




Fig. 4. Power spectra of output intensity $I_x$ for two-mode behavior: ($a$) and ($b$) for a large value of the beat frequency, ($c$) example of a small value of the beat frequency

(i) A low frequency resonance (see Fig. 4*a*) at typically tens to hundreds of kilohertz, i. e. at frequency $F_{\rm LF}$ always lower than the standard RO frequency $F_{\rm HF}$ (typically 1÷2 MHz). Oscillations at $F_{\rm LF}$ are visible only on the polarization resolved components, and they do not appear in the spectrum of the total intensity. They are associated with polarization dynamics and responsible for antiphase motion between the two orthogonal components. Such dynamics is called hereafter «low-frequency relaxation oscillations» or «polarization relaxation oscillations».

(ii) A beat signal at a frequency $F_{\rm beat}$ typically of tens of MHz (see Fig. 4*b, c*). This signal reflects the fact that the two polarization modes have independent frequencies. This signal is accompanied by sidebands shifted by $F_{\rm HF}$. Due to technical frequency instabilities in the laser, it has not been possible to reach an RF spectrum resolution sufficient to observe sidebands at $F_{\rm LF}$. In Fig. 4*b* and *c*, beat frequencies almost correspond to the two limit cases of maximum and minimum difference between the frequencies of the cavity eigenpolarization modes.

### 1.4. Transition between one- and two-mode operation

The evolution of the polarization mode intensities ($I_1$, $I_2$), RO frequencies ($F_{\rm HF}$, $F_{\rm LF}$), beat frequency $F_{\rm beat}$, and ellipticity versus the azimuth $\Psi_{\rm p}$ of the pump polarization has been recorded for maximum (Fig. 5) and minimum (Fig. 6) values of birefringence in the cavity. On the one hand, it should be stressed that the RO frequency $F_{\rm HF}$ and the total intensity are almost constant as $\Psi_{\rm p}$ varies. This is a strong indication of pure polarization dynamics. On the other hand, domains of single and double mode operation may appear depending on the value of $\Psi_{\rm p}$. In the domain of the two-mode

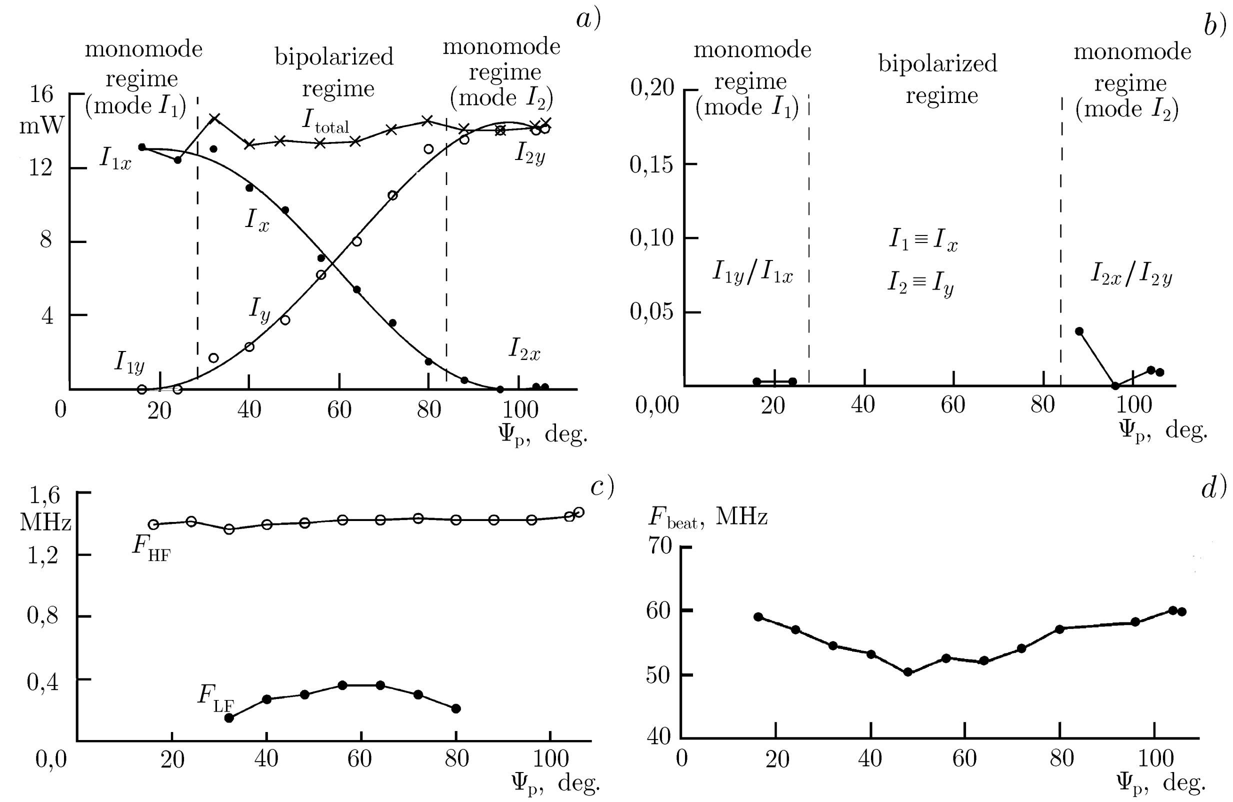



Fig. 5. Dependencies of the polarization mode intensities (*a*), ellipticities (*b*), relaxation frequencies (*c*) and beat frequency (*d*) on orientation of pump polarization, for maximum value of birefringence in the cavity

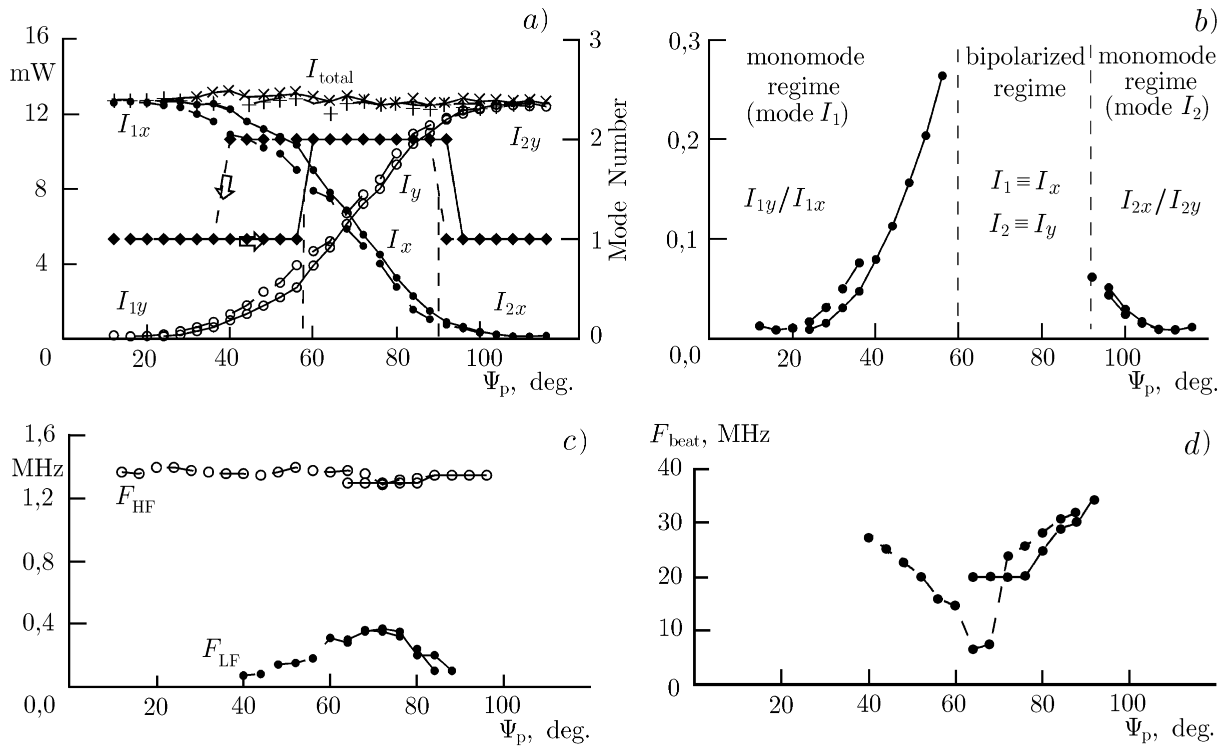



Fig. 6. Dependencies of the polarization mode intensities (*a*), ellipticities (*b*), relaxation frequencies (*c*) and beat frequency (*d*) on orientation of pump polarization, for minimum value of birefringence in the cavity

lasing we refer (for definiteness) the intensity $I_x$ ($I_y$) at $x$- ($y$-) direction of the polarizer to the intensity of the first (second) polarization mode, i. e. $I_1 \equiv I_x$ ($I_2 \equiv I_y$).

Single mode lasing (with orthogonal components, $I_{1x}$, $I_{1y}$ or $I_{2x}$, $I_{2y}$) is observed if the pump polarization orientation is close to one of the cavity eigenaxes. As the pump polarization orientation is rotated from these directions, the ellipticity ($I_{1y}/I_{1x}$ or $I_{2x}/I_{2y}$) increases and another mode orthogonal to the former one starts lasing at a given value depending on birefringence.

Bimodal operation is accompanied by the presence of a beat frequency in the RF spectrum of the intensity. The beat frequency is minimal when pump orientation is such that the intensities in the two-polarization mode are equal. The degree of ellipticity of each polarization modes has not been measured in case of two-mode operation. However we could observe that the polarization of these modes tends to be linear as their frequency difference increases. At small values of the frequency difference of orthogonal modes, bistability has been observed as the pump azimuth $\Psi_p$ is varied (Fig. 6).

## 2. MODEL OF THE LONGITUDINALLY MONOMODE BIPOLARIZED SOLID-STATE LASERS

To adequately describe the key features of bipolarized laser dynamics, we consider the interaction of two elliptically polarized orthogonal modes. The total field inside the laser $\mathbf{E}$ is projected on the two eigenmodes of the cavity in the absence of pumping:

$$\mathbf{E} = (E_1\mathbf{U}_1 + E_2\mathbf{U}_2)\exp(i\omega t) + \text{c. c.} \tag{1}$$

Here $\mathbf{U}_1$, $\mathbf{U}_2$ are the orthogonal eigenmodes of the laser cavity, $E_1$, $E_2$ are the slowly varying amplitudes of fields with orthogonal polarizations, and $\omega$ is the carrier optical frequency. In our microchip laser, single longitudinal mode operation is ensured for pump parameters used in our experiments, i. e. up to 4 times above threshold typically. Therefore we may extract the longitudinal dependence of these eigenmodes $\mathbf{U}_1$, $\mathbf{U}_2$ as

$$\mathbf{U}_m = \sqrt{2}\, \mathbf{e}_m^0 \cos(kz), \tag{2}$$

where $m = 1, 2$, $\mathbf{e}_m^0$ are unit vectors such as

$$\mathbf{e}_1^0 = \mathbf{x}^0 \cos\vartheta + i\mathbf{y}^0 \sin\vartheta, \qquad \mathbf{e}_2^0 = i\mathbf{x}^0 \sin\vartheta + \mathbf{y}^0 \cos\vartheta, \tag{3}$$

$\mathbf{x}_0$ and $\mathbf{y}_0$ are the Cartesian unit vectors aligned with the orientation of principal axes of the ellipses of eigenmode polarizations, $\vartheta$ determines the degree of the ellipticity $\varepsilon_{12}$ of the eigenmodes:

$$\varepsilon_{12} = |\operatorname{tg}\vartheta|^2 . \tag{4}$$

Since active $Nd^{3+}$ ions may take three equally likely positions inside the yttrium aluminum garnet cell, one may expect that dipole moments of the active ions are oriented along three selected directions in the space [25], ensuring quasi-isotropic properties of the crystal in general. Therefore, we can, without distortion of generality, consider a case where all dipole moments are linearly polarized, lie in the plane perpendicular to the cavity axis, and are randomly oriented in this plane:

$$\mathbf{d}_{21}^0 = \mathbf{d}_{21}/|\mathbf{d}_{21}| = \mathbf{x}_0 \cos\Psi + \mathbf{y}_0 \sin\Psi \tag{5}$$

with $0 \le \Psi < \pi$. In presence of a linearly polarized pump light oriented at an angle $\Psi_{\mathrm{p}}$, the angular distribution of active centers $f_{\mathrm{or}}(\Psi)$ is [2–4, 7]

$$f_{\mathrm{or}}(\Psi) = f_{\mathrm{or}}^0(\Psi)\Phi(\Psi - \Psi_{\mathrm{p}}), \tag{6}$$

where $f_{\mathrm{or}}^0(\Psi) = 1/\pi$, and (see appendix)

$$\Phi(\Psi - \Psi_{\mathrm{p}}) = \frac{a + b\cos^2(\Psi - \Psi_{\mathrm{p}})}{1 + b\cos^2(\Psi - \Psi_{\mathrm{p}})}\, \Phi_0^{-1}, \qquad \Phi_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \frac{a + b\cos^2(\Psi - \Psi_{\mathrm{p}})}{1 + b\cos^2(\Psi - \Psi_{\mathrm{p}})}\, \mathrm{d}\Psi = 1 - \frac{1-a}{\sqrt{1+b}} . \tag{7}$$

Here $b = E_{\mathrm{p}}^2 \tau_2 |\mu_{\mathrm{p}}|^2/\hbar^2$ is the pump saturation parameter of the laser medium, $E_{\mathrm{p}}^2$ the pump field intensity, $\mu_{\mathrm{p}}$ is the dipole moment of the absorption line, $\tau_2$ is the nonradiative decay time of the absorption line, and $a$ scales the possible diffusion of excitation to neighboring ions (see appendix).

The interaction of the laser field (1) with the dipoles that have an azimuth distribution $f_{\mathrm{or}}$ (6) is described by a set of equations [2, 3, 8]

$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}\tau} = i\,(-1)^m\,\delta E_m - \frac{G}{2}\, E_m + \frac{G}{2\pi L}\int_z\int_\psi \mathbf{d}_{12}^0\,(\mathbf{d}_{21}^0\mathbf{E})\, N\mathbf{U}_m^*\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}\Psi,$$
$$\frac{\partial N}{\partial\tau} = A_0\Phi(\Psi - \Psi_{\mathrm{p}}) - N\,(1 + |\mathbf{d}_{21}^0\mathbf{E}|^2). \tag{8}$$

Here $m = 1, 2$, $G = 2\kappa/\gamma_\parallel$, $\tau = t\gamma_\parallel$, ($\gamma_\parallel$ and $\kappa$ are the inversion and the field decay rates, respectively), $2\delta = (\omega_{\mathrm{c1}} - \omega_{\mathrm{c2}})/\gamma_\perp$ and $\gamma_\perp$ is the gain line half width, $A_0$ is a pumping rate parameter defined as a ratio of pump power to threshold pump power, $\omega_{\mathrm{c1}}$ and $\omega_{\mathrm{c2}}$ are eigenfrequencies of the polarization modes.

The interaction of elliptically polarized radiation with an ensemble of randomly oriented dipoles results in an azimuth-inhomogeneous distribution of inversion (the effect of angular hole burning):

$$N(z, \Psi, \tau) = N^0(z, \tau) + 2N^{\mathrm{c}}(z, \tau)\cos(2\Psi) + 2N^{\mathrm{s}}(z, \tau)\sin(2\Psi) + \ldots . \tag{9}$$

In presence of laser oscillation, the electric field changes the population due to saturation. In a single mode laser, this generates a longitudinal (i. e. along the $z$-direction) modulation of the population difference $N$. The corresponding population grating has a wavelength equal to half the field wavelength because it is proportional to the square of the electric field. As this wavelength is very small, the effect of this population grating averages out and globally vanishes. This is not the case if the laser operates on two different longitudinal modes of neighboring frequencies. Then saturation produces a population grating whose wavenumber is the difference of the two wavenumbers associated with either angular harmonic of the inversion $N^i$ $(i = 0, \mathrm{c}, \mathrm{s})$ consisting of a spatially uniform component and of spatial harmonics which are scaled by the wave number corresponding to the difference between the frequencies of the two modes. For the microchip laser in a bimodal regime, the situation is different because this laser is almost always operating on a single longitudinal mode (but possibly on two polarization modes), and the resonance condition for the cavity implies that the two modes have the same wavenumber in spite of their wavelength difference. In other words, the birefringence compensates for the frequency difference. Introducing the time dependent space modulated population differences

$$N^i(z,\tau) = N_0^i(\tau) + 2N_k^i(\tau)\cos(2kz) \tag{10}$$

into equations (8), we obtain the following set of 10 equations for real variables describing the interaction of two orthogonally polarized modes of a microchip solid-state laser:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}\tau} &= (-1)^{m+1}\, i\delta E_m + \frac{G}{2}\Big\{E_m\,[N_0^0 + N_k^0 + (-1)^{m+1}\,(N_0^{\mathrm{c}} + N_k^{\mathrm{c}})\,\cos(2\vartheta) - 1] + \\
&\qquad + E_{3-m}\,[N_0^{\mathrm{s}} + N_k^{\mathrm{s}} + (-1)^{m+1}\, i\,(N_0^{\mathrm{c}} + N_k^{\mathrm{c}})\,\sin(2\vartheta)]\Big\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}N_0^0}{\mathrm{d}\tau} &= A_0 - (\Sigma+1)\,N_0^0 - N_k^0\Sigma - (N_0^{\mathrm{c}} + N_k^{\mathrm{c}})\,\Delta\cos(2\vartheta) - 2\Pi_+\,(N_0^{\mathrm{s}} + N_k^{\mathrm{s}}) - 2\Pi_-\,(N_0^{\mathrm{c}} + N_k^{\mathrm{c}})\sin(2\vartheta),\\
\frac{\mathrm{d}N_k^0}{\mathrm{d}\tau} &= -(\Sigma+1)\,N_k^0 - \frac{1}{2}\,N_0^0\Sigma - \left(\frac{1}{2}\,N_0^{\mathrm{c}} + N_k^{\mathrm{c}}\right)\Delta\cos(2\vartheta) - \Pi_+\,(N_0^{\mathrm{s}} + 2N_k^{\mathrm{s}}) - \Pi_-\,(N_0^{\mathrm{c}} + 2N_k^{\mathrm{c}})\sin(2\vartheta),\\
\frac{\mathrm{d}N_0^{\mathrm{c}}}{\mathrm{d}\tau} &= A^{\mathrm{c}} - N_0^{\mathrm{c}}\,(\Sigma+1) - N_k^{\mathrm{c}}\Sigma - \frac{1}{2}\,(N_0^0 + N_k^0)\,\Delta\cos(2\vartheta) - \Pi_-\,(N_0^0 + N_k^0)\sin(2\vartheta),\\
\frac{\mathrm{d}N_k^{\mathrm{c}}}{\mathrm{d}\tau} &= -N_k^{\mathrm{c}}\,(\Sigma+1) - \frac{1}{2}\,N_0^{\mathrm{c}}\Sigma - \left(\frac{1}{2}\,N_0^0 + N_k^0\right)\left(\frac{1}{2}\,\Delta\cos(2\vartheta) + \Pi_-\sin(2\vartheta)\right),\\
\frac{\mathrm{d}N_0^{\mathrm{s}}}{\mathrm{d}\tau} &= A^{\mathrm{s}} - N_0^{\mathrm{s}}\,(\Sigma+1) - N_k^{\mathrm{s}}\Sigma - (N_0^0 + N_k^0)\,\Pi_+,\\
\frac{\mathrm{d}N_k^{\mathrm{s}}}{\mathrm{d}\tau} &= -N_k^{\mathrm{s}}\,(\Sigma+1) - \frac{1}{2}\,N_k^{\mathrm{s}}\Sigma - \left(\frac{1}{2}\,N_0^0 + N_k^0\right)\Pi_+,
\end{aligned} \tag{11}$$

where we have introduced the intermediate variables

$$\Sigma = |E_1|^2 + |E_2|^2, \qquad \Delta = |E_1|^2 - |E_2|^2,$$

$$\Pi_+ = \operatorname{Re}E_1\operatorname{Re}E_2 + \operatorname{Im}E_1\operatorname{Im}E_2, \qquad \Pi_- = \operatorname{Im}E_1\operatorname{Re}E_2 - \operatorname{Re}E_1\operatorname{Im}E_2.$$

Angular harmonics of the pump parameter are given by the following expressions:

$$A^{\mathrm{c}} = \frac{A_0}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\Phi(\Psi - \Psi_{\mathrm{p}})\cos(2\Psi)\,\mathrm{d}\Psi = A_0 f(a,b)\cos(2\Psi_{\mathrm{p}}),$$

$$A^{\mathrm{s}} = \frac{A_0}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \Phi(\Psi - \Psi_{\mathrm{p}}) \sin(2\Psi)\, \mathrm{d}\Psi = A_0 f(a,b) \sin(2\Psi_{\mathrm{p}}),$$

where

$$f(a,b) = (1-a)\ \frac{(\sqrt{1+b}-1)^2}{b\,(\sqrt{1+b}-1+a)}\ .$$

If, as assumed in many of our simulations, $a = 0$, this simplifies as $f(0,b) = (\sqrt{1+b}-1)/b$.

## 3. NUMERICAL SIMULATIONS

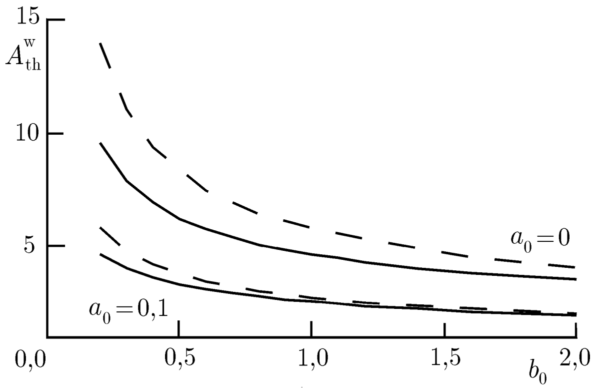



Fig. 7. Theoretical dependencies of the threshold $A^{\mathrm{w}}_{\mathrm{th}}$ of the weak polarization mode on the parameter $b_0$ at different $a_0$ and parameter of ellipticity $\vartheta = 0$ (solid lines), $\vartheta = 15^\circ$ (dashed lines); $G = 5\,000$, $A_0 = 4$, $\delta = 10\,000$, $\Psi_{\mathrm{p}} = 0$

Numerical simulations are required to check the predictions of the equations (11). They have been carried out using a set of parameters corresponding to the experiments reported above except for the parameter $G$ which has been reduced from the expected value of 40 000 to 5 000 for saving computer time. A first series of simulations has been carried out with no excitation diffusion ($a = 0$). The other parameters are: $G = 5\,000$, $A_0 = 4$, $b = 0{,}5A_0$, $\delta = 10\,000$, $\vartheta = 15^\circ$. The parameters $a = a_0 A_0$ and $b = b_0 A_0$ change the threshold $A^{\mathrm{w}}_{\mathrm{th}}$ of the weak polarization mode and can be selected to fit the experimental data. Figure 7 demonstrates the dependencies of the weak mode threshold on the parameter $b_0$ for different values of $a_0$. If according to the experimental observation $A^{\mathrm{w}}_{\mathrm{th}} \sim 4$, then $b_0$ should be chosen in the interval $0{,}2 < b_0 < 1{,}5$. These calculations also reveal that increasing the ellipticity of the eigenstates decreases the threshold value of pumping for the weak polarization mode $A^{\mathrm{w}}_{\mathrm{th}}$. This shows that the ellipticity tends to increase the cooperation between modes rather than the competition as is likely to occur between orthogonal linear modes. As the influence of $a$ does not seem to be crucial and may be mainly accounted for by selecting the adequate value for $b$, all the following simulations have been carried out with $a = 0$.

In a second step, equations (11) with additional Langevin sources in equations for the field have been integrated numerically to study the low frequency dynamics of the laser as visible through the noise spectra for the laser intensity in the main mode. Figure 8 shows the power spectrum of intensity fluctuations for single-mode ($\Psi_{\mathrm{p}} = 0$) and bipolarized ($\Psi_{\mathrm{p}} = 35^\circ$) regimes. In single mode operation, only one resonance peak at high relaxation frequency $F_{\mathrm{HF}}$ is observed, in accordance with the experimental observations while two peaks at frequencies $F_{\mathrm{HF}}$ and $F_{\mathrm{LF}}$ are obtained in the two-mode regime.

The static properties of the bimodal laser are also well described by this model. These simulations have been carried out taking into account the full phase-sensitive mode interaction. It is important to

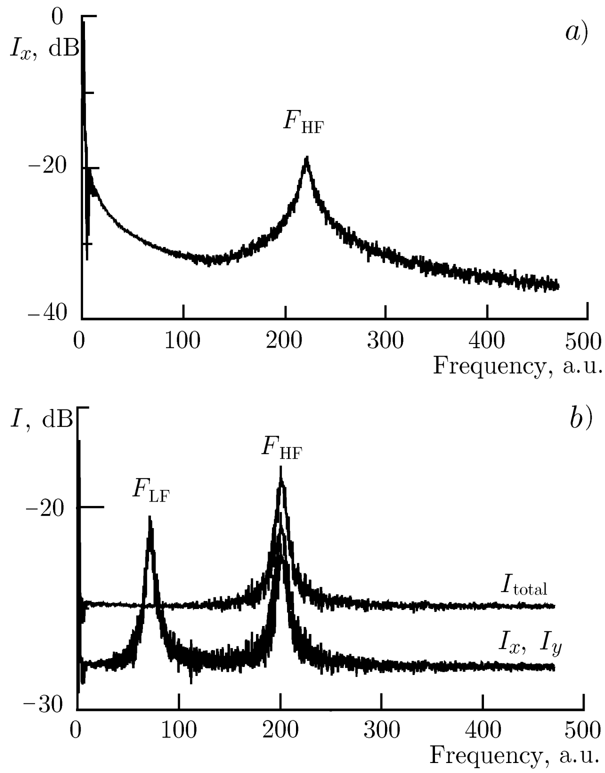



Fig. 8. Calculated power spectra of the polarization mode intensities ($a$) for single-mode ($\Psi_{\rm p} = 0$) and ($b$) for bipolarized ($\Psi_{\rm p} = 35^\circ$) regimes; $G = 5\,000$, $A_0 = 4$, $b = 0{,}5A_0$, $a = 0$, $\delta = 10\,000$, $\vartheta = 15^\circ$

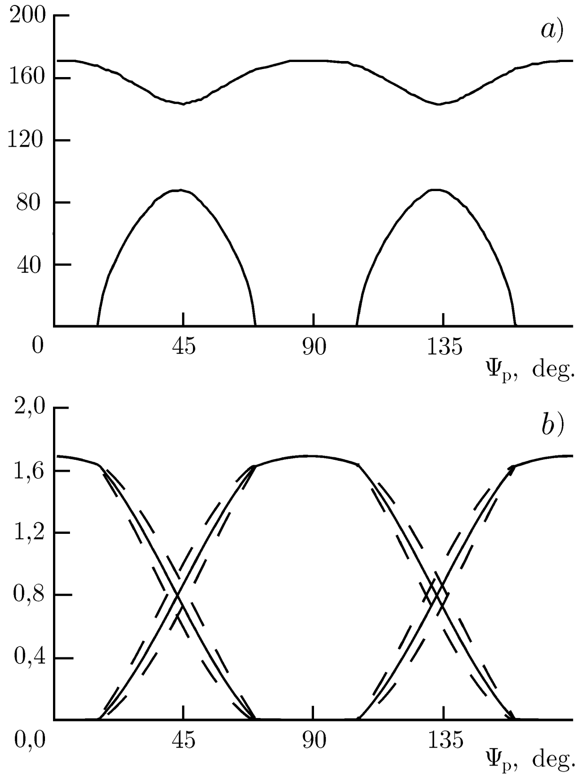



Fig. 9. Theoretical dependencies of the RO frequencies ($a$) and intensities of polarization modes ($b$) in arbitrary units on the direction of pump polarization $\Psi_{\rm p}$. The dashed lines represent the maximum and minimum values of the mode intensities in the bi-mode regime. Solid lines are the time averaged values; $G = 5\,000$, $A_0 = 4$, $b = 0{,}5A_0$, $a = 0$, $\delta = 10\,000$, $\vartheta = 15^\circ$

note that in this case purely single-mode regimes are excluded even when there are no additional noise sources (Langevin sources). When the weak mode intensity is very small but non-zero, there is in fact a quasi-single-mode regime. In experiments the corresponding fields in the weak mode are too weak to be observed. The influence of (i) the orientation of pump polarization and (ii) the frequency difference between eigenfrequencies of the cavity has also been investigated. The laser presents regions of single and bi-mode operation with one and two relaxation frequencies respectively as shown in Fig. 9. The intensities of the modes evolve in the same smooth way as what was observed experimentally (see Fig. 5), and $F_{\rm LF}$ presents the same quadratic dependence with a maximum at the point where the two modes have equal intensities as observed.

Figure 10 summarizes the results of numerical computations of the low-frequency dynamics of the laser investigated here. It displays the evolution of different frequencies appearing in the spectrum of the intensity in the main lasing mode versus the frequency difference $\delta$ between orthogonally polarized modes at $\Psi_{\rm p} = 0$ for single-mode regime (Fig. 10$a$) and at $\Psi_{\rm p} = 35^\circ$ for bipolarized behavior (Fig. 10$b$). The quasi-single-mode regime at degenerated optical spectrum of the orthogonally polarized modes ($\delta = 0$), three resonance peaks at frequencies $F_{\rm HF}$, $F_{\rm LF}$, and $F_{\rm beat}$ are observed in the power spectrum of each polarization mode. At small frequency splitting $\delta < F_{\rm HF}/2$ in the locking region, it becomes meaningless to separate two optical frequencies which differ by less than their spectral width. Then

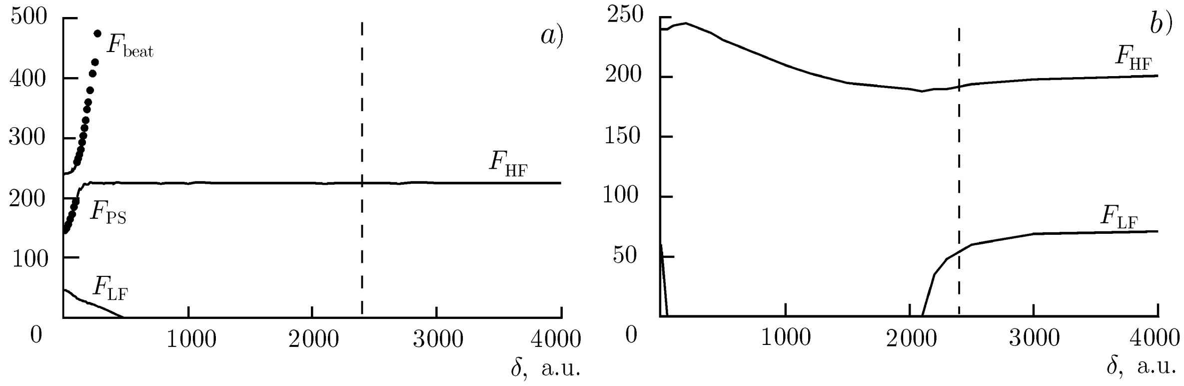



Fig. 10. Theoretical dependencies of the relaxation frequencies versus the frequency difference $\delta$ between orthogonally polarized modes ($a$) at $\Psi_{\rm p} = 0$ for single-mode regime and ($b$) at $\Psi_{\rm p} = 35°$ for bipolarized behavior; $G = 5\,000$, $A_0 = 4$, $b = 0{,}5A_0$, $a = 0$, $\vartheta = 15°$

all the dynamics become coupled as seen for instance on the anticrossings of the resonance which affect $F_{\rm HF}$ and $F_{\rm beat}$ near $\delta = 250$ kHz. This region of very small detunings was not accessible in our experiments because of the residual technical frequency fluctuations of our laser cavity. At large splitting of cavity modes, oscillation frequencies of the polarization modes become different, giving rise to a beat signal $F_{\rm beat}$. In case of single mode operation, only the high frequency RO is obtained (Fig. 10$a$). Figure 10$b$ confirms that in the two-mode regime two relaxation peaks at frequencies $F_{\rm LF}$ and $F_{\rm HF}$ are observed in the power spectrum of each polarization mode, whereas in the total intensity there is no low-frequency relaxation peak.

## 4. CONCLUSION AND RESULT SUMMARY

All our experimental results are well described within the model that includes the phase sensitive nature of the interaction of polarization modes. The experimentally observed influence of orientation of pump polarization on gain anisotropy of the active medium is well described by the developed model. Below we enumerate basic results of the present work.

1) A strong dependence of the intensities of polarization modes of the microchip longitudinally monomode Nd:YAG laser on the direction of pump polarization is observed.

2) Two relaxation peaks are observed in the power spectrum of each polarization mode of the bipolarized laser at frequencies $F_{\rm HF}$, $F_{\rm LF}$, in addition to a beat signal at $F_{\rm beat}$.

3) The relaxation oscillations at $F_{\rm LF}$ and oscillations at $F_{\rm beat}$ appear as antiphase oscillations of intensities of the two orthogonally polarized modes $I_x$ and $I_y$.

4) Experiments show that decreasing the frequency difference between orthogonally polarized modes leads to increasing the ellipticity of the polarization mode.

5) The coefficients characterizing the pump induced anisotropy can be deduced from the fit between theory and experiments.

This research was supported by INTAS (grant 99–00794), by Russian Foundation for Basic Research (grants 02–02–17046 and 03–02–17243), and by the grant 1622.2003.2 of the President of the RF for Support of Scientific Schools. Authors are thankful to Ya. I. Khanin for the permanent attention to this work, helpful discussions and comments.

## APPENDIX

We introduce here the calculation of the influence of pump polarization on the angular distribution of the active dipoles in the standard 4-level model for the Nd:YAG laser (see Fig. 11). In this model ions are pumped from the ground state *1* to excited state *2*, from which they relax to level *3* which is the upper level of the lasing transition. The transfer from level *2* to level *3* is supposed to be very fast with respect to the other times involved in the process and to preserve the dipole orientation. In general, the latter assumption is not valid to the same extent for various active ions. However, this assumption is reasonable because in a real Nd:YAG crystal the matrix elements of the electric dipole transitions, both absorbing and lasing, have certain polarization dependences associated with selection rules. The preferred orientations that are fixed for a given ion are determined by the geometry of the local field in which the ion is placed. Transfer non-preserving the magnetic quantum state (in the transfer from level *2* to level *3*) will be considered later in the text. The azimuthal dependence of the pumped dipoles is obtained using equations (22), (23), (26a) of [7]. These equations describe the interaction of the pump field $E_{\rm p}$ with the energy levels *1⇒2* of the laser medium levels. We calculate the population of level 3, which is set equal to that of level *2* because of the fast transfer *2⇒3*. The pumping parameter is proportional to population of this level. We assume that population of level *4* is zero in the absence of lasing. Using the equations (22), (23), (26a) of [7]:

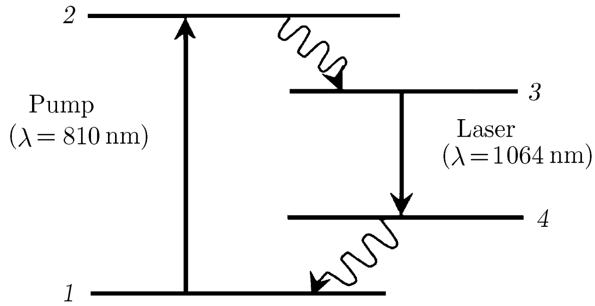



Fig. 11. The scheme of the working levels of the $Nd^{3+}$ ions: absorption transition *1⇒2*, laser transition *3⇒⇒4*

$$\frac{{\rm d}\rho_{11}}{{\rm d}t} = -\frac{1}{\hbar}\,{\rm Im}(\boldsymbol{\eta}_{\rm p}\mathbf{E}_{\rm p}^*), \qquad \frac{{\rm d}\rho_{22}}{{\rm d}t} = \frac{1}{\hbar}\,{\rm Im}(\boldsymbol{\eta}_{\rm p}\mathbf{E}_{\rm p}^*) - \frac{\rho_{22}}{\tau_2}\ ,$$

$$\frac{{\rm d}\eta_{\rm p}}{{\rm d}t} = i\,(\omega_{\rm p} - \omega_{\rm p0})\,\eta_{\rm p} - \frac{\eta_{\rm p}}{T_{\rm p}} + \frac{i}{2\hbar}\,D_{\rm p}\,|\mu_{\rm p}|^2\,(\mathbf{e}_{\rm p}\mathbf{E}_{\rm p}),$$

by adiabatically eliminating the polarization of the pump transition $\eta_{\rm p}$ and introducing the population difference $D_{\rm p} = \rho_{11} - \rho_{22}$ we obtain the equation for the pump population difference:

$$\frac{{\rm d}D_{\rm p}}{{\rm d}t} = -\frac{2}{\hbar}\,{\rm Im}(\boldsymbol{\eta}_{\rm p}\mathbf{E}_{\rm p}^*) - \frac{D_{\rm p}}{\tau_2} + \frac{\rho_{11}}{\tau_2}\ , \tag{A1}$$

$$\boldsymbol{\eta}_{\rm p} = \frac{i}{2\hbar}\,D_{\rm p}\,|\mu_{\rm p}|^2\,(\mathbf{e}_{\rm p}\mathbf{E}_{\rm p})\,L_{\rm p}\mathbf{e}_{\rm p}, \tag{A2}$$

where $L_{\rm p} = [1/T_{\rm p} - i\,(\omega_{\rm p} - \omega_{\rm p0})]^{-1}$. Substituting equation (A2) into (A1) and putting the derivative equal to zero, we find for the population difference

$$D_{\rm p} = \frac{\rho_{11}}{\dfrac{\tau_2\,|\mu_{\rm p}|^2}{\hbar^2}\ {\rm Re}[L_{\rm p}\,|(\mathbf{E}_{\rm p}\mathbf{e}_{\rm p})|^2] + 1}\ , \tag{A3}$$

where $(\mathbf{E}_{\rm p}\mathbf{e}_{\rm p}) = E_{\rm p}\cos(\Psi - \Psi_{\rm p})$, and finally

$$\rho_{22} = \frac{\rho_{11} b\cos^2(\Psi - \Psi_{\rm p})}{1 + b\cos^2(\Psi - \Psi_{\rm p})} \propto A, \tag{A4}$$

where $b = \tau_2\,|\mu_\mathrm{p}|^2\,E_\mathrm{p}^2/\hbar^2$. As the population $\rho_{33}$ of the level *3* is proportional to the population $\rho_{22}$ of the level *2*, the angular distribution of the active dipoles is

$$\Phi \propto \frac{b\cos^2(\Psi-\Psi_\mathrm{p})}{1+b\cos^2(\Psi-\Psi_\mathrm{p})}\;. \tag{A5}$$

The possible migration of excitation to neighbor active centers is phenomenologically introduced via the parameter $a$, which accounts for the small part of active centers with random orientations:

$$\Phi \propto \frac{b\cos^2(\Psi-\Psi_\mathrm{p})}{1+b\cos^2(\Psi-\Psi_\mathrm{p})}+a = \frac{a+b\,(1+a)\cos^2(\Psi-\Psi_\mathrm{p})}{1+b\cos^2(\Psi-\Psi_\mathrm{p})} \approx \frac{a+b\cos^2(\Psi-\Psi_\mathrm{p})}{1+b\cos^2(\Psi-\Psi_\mathrm{p})}\;, \quad a \ll \{1,b\}, \tag{A6}$$

$a$ and $b$ are both proportional to the pump power. Normalizing $\Phi$ to unity, we obtain

$$\Phi = \frac{a+b\cos^2(\Psi-\Psi_\mathrm{p})}{1+b\cos^2(\Psi-\Psi_\mathrm{p})}\;\Phi_0^{-1}, \tag{A7}$$

where $\Phi_0 = 1-(1-a)/\sqrt{1+b}$.

## REFERENCES


1. Bielawski S., Derozier D., Glorieux P. // Phys. Rev. A. 1992. V. 46. P. 2 811.
2. Khandokhin P. A., Khanin Ya. I., Milovsky N. D., et al. // J. Opt. B: Quantum and Semiclassical Optics. 1998. V. 10. P. 97.
3. Khandokhin P. A., Khanin Ya. I., Mamaev Yu. A., et al. // Quantum Electronics. 1998. V. 28. P. 502.
4. Khandokhin P. A., Milovsky N. D., Mamaev Yu. A., et al. // Proc. SPIE. 1998. V. 3 682. P. 53.
5. Brunel M., Emile O., Alouini M., et al. // Phys. Rev. A. 1999. V. 59. P. 831.
6. Bouwmans G., Ségard B., Glorieux P. // Opt. Comm. 2001. V. 196. P. 257.
7. Casperson L. W., Reyzer K. C. // J. Appl. Phys. 1980. V. 51. P. 6 083.
8. Khanin Ya. I. Principles of laser dynamics. Amsterdam, 1995.
9. Khanin Ya. I. Fundamentals of laser dynamics. M.: Nauka, 1999.
10. Zeghlache H., Boulnois A. // Phys. Rev. A. 1995. V. 52. P. 4 229.
11. Dekker P., Dawes J. M. // J. Opt. Soc. Am. B. 1998. V. 15. P. 247.
12. Boiko D. L., LeCren E., Stephan G., Besnard P. // J. Opt. B: Quantum and Semiclassical Optics. 2001. V. 3. P. S166.
13. Khandokhin P. A., Koryukin I. V., Khanin Ya. I., Mandel P. // IEEE J. Quant. Electron. 1995. V. 31. P. 647.
14. Culshaw W., Kannelaud J. // Phys. Rev. 1966. V. 141. P. 228.
15. Van Haeringen W. // Phys. Rev. 1967. V. 158. P. 256.
16. Sargent M. III, Lamb W. E. Jr, Fork R. L. // Phys. Rev. 1967. V. 164. P. 450.
17. Lenstra D. // Phys. Rep. 1980. V. 59. P. 299.
18. LeFloch A., Ropars G., Lenormand J., LeNaour R. // Phys. Rev. Lett. 1984. V. 52. P. 918.
19. May A. D., Stephan G. // J. Opt. Soc. Am. B. 1989. V. 6. P. 2 355.
20. Kozin G. I., Konovalov I. P., Petrov V. V., Protsenko E. D. // Sov. J. Quant. Electron. 1990. V. 20. P. 1 206.
21. Czarske J. W., Mueller H. // Opt. Comm. 1995. V. 114. P. 223.
22. Esherick P., Owyoung A. // Proc. SPIE. 1988. V. 912. P. 2.
23. Vallet M., Brunel M., Bretenaker F., et al. // Appl. Phys. Lett. 1999. V. 74. P. 3 266.

24. Agrawal G. P., Dutta N. K. Long-wavelength semiconductor lasers. New York: Van Nostrand Reinhold Company, 1993.
25. Dagliesh R., May A. D., Stephan G. // IEEE. J. Quant. Electron. 1998. V. 34. P. 1 485.

[1] Laboratoire de Physique des Lasers, Atomes et Molécules, Université de Lille, France;
[2] Institute of Applied Physics RAS, Nizhny Novgorod, Russia

Поступила в редакцию 18 мая 2004 г.

УДК 621.373.826

# ДИНАМИКА НЕПРЕРЫВНОГО ОДНОЧАСТОТНОГО Nd:YAG-ЛАЗЕРА С УЗКОПОЛОСНЫМ НАСЫЩАЮЩИМСЯ ПОГЛОТИТЕЛЕМ НА ОСНОВЕ МОЛЕКУЛЯРНОГО ЦЕЗИЯ

*А. А. Мак, Е. А. Викторов, О. А. Орлов, В. И. Устюгов*

Приведены результаты экспериментов с непрерывным одночастотным Nd:YAG-лазером, перестраиваемым вблизи длины волны 1 064 нм при помещении внутрь резонатора узкополосного насыщающегося поглотителя — паров молекулярного цезия. Показано, что динамика генерации лазера определяется как уровнем накачки, так и расстройкой частоты излучения относительно линии поглощения.

## ВВЕДЕНИЕ

Преимущества внутрирезонаторного расположения поглощающей ячейки для стабилизации частоты лазера хорошо известны [1]. Соответствующая техника, основанная на «привязке» частоты излучения лазера к узкой линии резонансного поглощения в газе была детально разработана для видимого и среднего инфракрасного диапазона и даёт возможность существенного улучшения соотношения сигнал/шум в петле обратной связи сервосистемы автоподстройки. Этот способ является традиционным при создании высокостабилизированных источников света.

Необходимо отметить два важных фактора. Во-первых, почти все исследования проводились для газовых лазеров (мы не затрагиваем здесь работы по широкополосным насыщающимся поглотителям и многочастотным твердотельным лазерам в технике внутрирезонаторной лазерной спектроскопии). Во-вторых, для лазеров класса $B$, к которым относятся как большинство твердотельных лазеров, так и лазеры на $CO_2$, не проводился анализ эффектов, связанных с расстройкой частоты излучения относительно опорной линии поглощения. Лазеры этого класса имеют инерционную активную среду и малое время релаксации поляризации. Такое соотношение релаксационных параметров определяет основные особенности их динамики [2]. Исследования $CO_2$-лазеров с внутрирезонаторным поглотителем [3, 4] показали возможность существования многообразных динамических режимов. Исследования Nd:YAG-лазеров с внутрирезонаторной поглощающей ячейкой на основе молекулярного цезия были опубликованы ранее в связи с проблемой стабилизации частоты и возможностью создания лазерного стандарта длины волны в области 1,06 мкм [5]. Петля обратной связи на основе внерезонаторной цезиевой ячейки позволяет достичь уровня стабильности частоты излучения порядка $10^{-11} \div 10^{-10}$ относительных единиц [6]. Внутрирезонаторная техника представляется перспективной, т. к. даёт возможность улучшить уровень стабильности на два–три порядка величины [5].

Так же, как и в случае уже упоминавшихся $CO_2$-лазеров, лазеры на кристаллах Nd:YAG с внутрирезонаторной цезиевой ячейкой демонстрируют многообразие динамических режимов. В случае настройки лазера на центр линии поглощения наблюдаемая динамика излучения похожа на предсказанную в [7]. В данной работе мы экспериментально исследуем динамику твердотельного лазера с внутрирезонаторным узкополосным насыщающимся поглотителем, принимая во внимание фактор тонкой частотной настройки, являющийся ключевым с точки зрения нелинейной динамики и спектроскопических приложений.

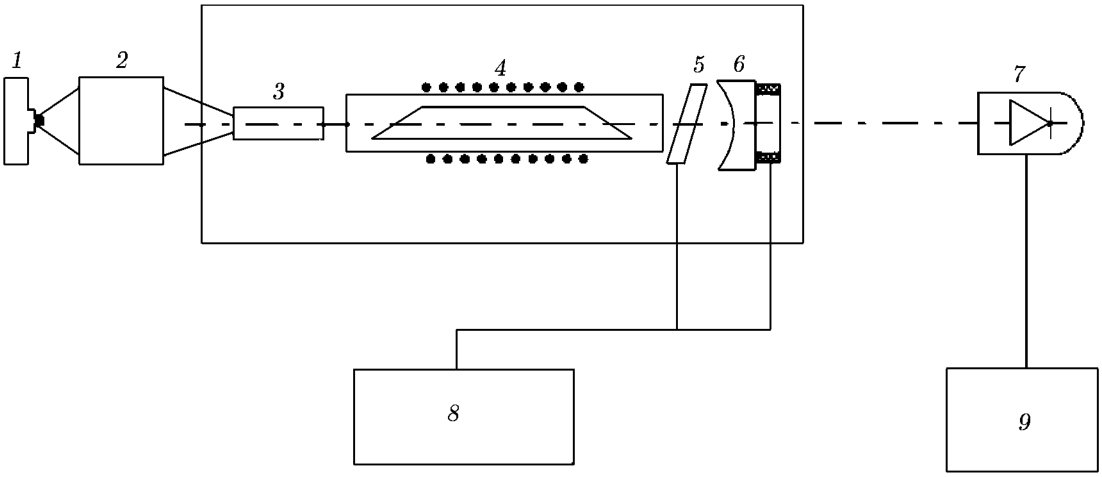



Рис. 1. Схема экспериментальной установки: *1* — лазерный диод, *2* — оптическая система накачки, *3* — активный элемент из кристалла Nd:YAG, *4* — цезиевая ячейка поглощения, *5* — эталон Фабри—Перо, *6* — зеркало резонатора на пьезокерамической подвижке, *7* — фотодиод, *8* — электронная система управления перестройкой частоты, *9* — система обработки данных

## 1. НАСЫЩАЮЩИЙСЯ ПОГЛОТИТЕЛЬ НА ОСНОВЕ МОЛЕКУЛЯРНОГО ЦЕЗИЯ

Субдоплеровский спектр поглощения паров молекулярного цезия $Cs_2^{133}$ в диапазоне перестройки частоты излучения Nd:YAG-лазера на переходе ионов неодима с длиной волны излучения 1,06 мкм представляет собой богатый набор однородно уширенных линий (лэмбовских провалов) [8]. Эти линии соответствуют различным колебательно-вращательным компонентам перехода $X_1\Sigma_g^+ \to A_1\Sigma_u^+$ [9].

Такие параметры, как естественная ширина линии отдельной однородно уширенной компоненты ($\Delta\nu_n$), сечения столкновительного уширения и сдвига, интенсивность насыщения поглощения ($I_{\rm s}$), были измерены для наиболее сильных линий [8]. Естественная ширина линии варьируется от 20 до 50 МГц. Если температура насыщающих паров цезия меньше 150 °C, столкновительным уширением можно пренебречь. К сожалению, из-за недостатка предварительной спектроскопической информации невозможно детализировать схему энергетических переходов. По этой причине в работе [8] была использована простая двухуровневая модель насыщающегося поглотителя для оценки значения $I_{\rm s}$, которое при температуре насыщенных паров цезия от 200 до 260 °C оказалось в диапазоне от долей до нескольких Вт/см$^2$.

Время релаксации верхнего уровня молекул $Cs_2$ может быть оценено через измерение $\Delta\nu_n$. Оценка по формуле $\tau = 2\pi\,\Delta\nu_n$ даёт значение в диапазоне от 3 до 8 нс для различных линий поглощения. Необходимо отметить, что данное значение отличается от ранних теоретических оценок (25 нс), приведённых в [10].

## 2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Схема экспериментальной установки представлена на рис. 1. Непрерывный Nd:YAG-лазер на моде $TEM_{00}$ с полупроводниковой накачкой работал в одночастотном режиме. Плавная перестройка частоты генерации вблизи длины волны 1 064 нм осуществлялась при помощи внутри-

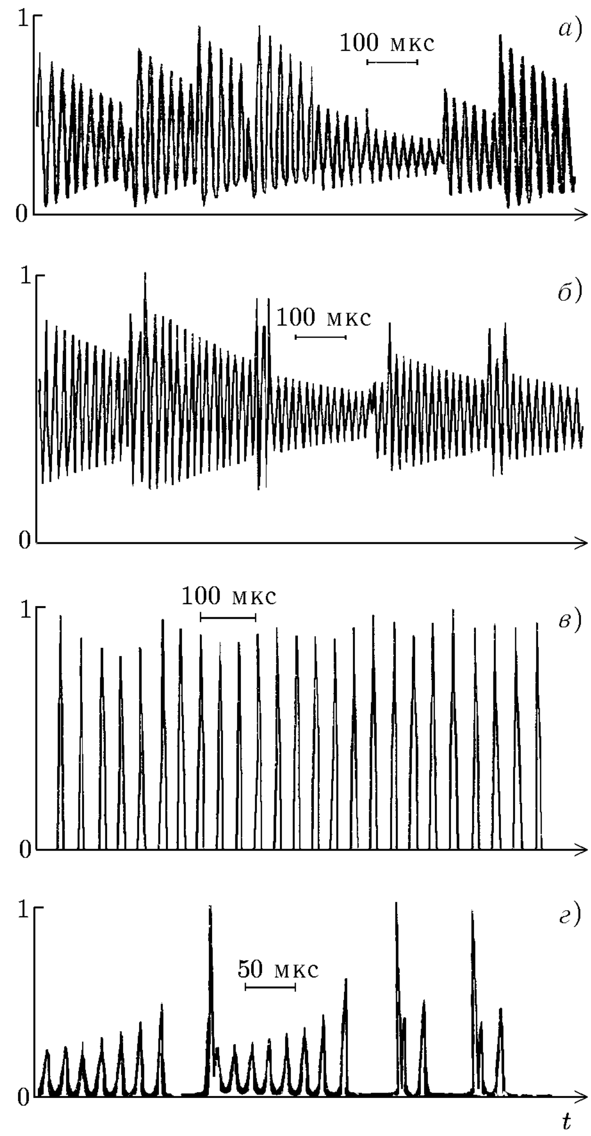



Рис. 2. Динамические режимы работы лазера с внутрирезонаторной узкополосной поглощающей ячейкой на основе паров молекулярного цезия. Временны́е зависимости нормированной интенсивности излучения лазера при точной настройке частоты излучения на одну из линий поглощения и разных превышениях накачки над порогом генерации: (*а*) — 50 %, (*б*) — 70 %, (*в*) — 80 %, (*г*) — результат отстройки частоты излучения лазера от центра линии поглощения цезия на 100 кГц при накачке, соответствующей случаю (*в*)

резонаторного наклонного селектора аксиальных мод — эталона Фабри—Перо — и изменением длины резонатора пьезокерамической подвижкой. Излучение лазерного диода мощностью до 2 Вт на длине волны 808 нм фокусировалось в активном элементе (кристалле Nd:YAG) по продольной схеме накачки. Цезиевая ячейка поглощения длиной около 10 см имела сапфировые окна, расположенные под углом Брюстера, и помещалась в термостат. Динамика генерации регистрировалась фотоприёмником с последующей цифровой обработкой в полосе частот до 10 МГц. Одночастотность генерации и перестройка частоты излучения контролировались при помощи сканирующего интерферометра Фабри—Перо (на схеме не показан).

При отсутствии поглощения парами цезия (при низкой температуре кюветы) лазер работал в стационарном режиме с низким уровнем амплитудных флуктуаций (менее 1 % в полосе частот от 10 Гц до 10 МГц).

При нагреве ячейки выше 100 °C наблюдались характерные динамические эффекты, связанные с насыщающимся поглощением лазерного излучения парами молекулярного цезия (рис. 2). При точной настройке на центр линии поглощения динамика генерации качественно соответствует теоретическому анализу, предложенному в работе [7]. При незначительных превышениях накачки над порогом наблюдались периодические флуктуации интенсивности вблизи стационарного режима с глубиной флуктуаций до 20 %. При превышении накачки над порогом более чем на 50 % динамический режим становится хаотическим с характерным затуханием амплитуды флуктуаций до уровня периодического режима (рис. 2*а*, *б*). Данный эффект известен в литературе как гомоклиническое касание к предельному циклу и был теоретически проанализирован в [7], однако не исследовался экспериментально. С ростом накачки возрастает глубина флуктуаций интенсивности излучения, и динамика излучения переходит в режим типа модулированной добротности (Q-switch, см. рис. 2*в*).

Отстройка частоты излучения лазера от центра линии поглощения приводит к существенному изменению характера пульсаций интенсивности лазерного излучения и возникновению временны́х кластеров в структуре пульсирующих флуктуаций (см. рис. 2*г*). Режим пульсаций становится промодулированным, причём длительность кластеров не является постоянной и варьируется в диапазоне $30 \div 200$ мкс. Структура временны́х кластеров также неоднородна и может включать в себя различный набор пульсаций с характерным изменением амплитуды.

## 3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Экспериментально зарегистрированы специфические динамические режимы непрерывного одночастотного перестраиваемого Nd:YAG-лазера, работающего на длине волны 1,06 мкм, при помещении внутрь его резонатора узкополосного насыщающегося поглотителя — паров молекулярного цезия. Эти исследования являются важными с точки зрения использования техники модуляционной внутрирезонаторной спектроскопии [11] для стабилизации частоты неодимовых лазеров и предполагают в будущем, в частности, детальный статистический анализ данных динамических эффектов. В этой связи нам приятно отметить, что на самом начальном этапе работ по стабилизации параметров излучения твердотельных лазеров (проблема «пичков») мы успешно сотрудничали с Я. И. Ханиным (см., например, [12]).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Багаев С. Н., Чеботаев В. П. // УФН. 1986. Т. 148. С. 143.
2. Ханин Я. И. Основы динамики лазеров. М.: Наука, 1999.
3. Tochikawa M., Tanii K., Shimizu T. // J. Opt. Soc. Am. B. 1987. V. 4, No. 3. P. 387.
4. Dangoisse D., Bekkali A., Papoff F., Glorleux P. // Europhys. Lett. 1988. V. 6. P. 335.
5. Labinskii S. N., Mak A. A., Orlov O. A., Ustyugov V. I. // QELS Technical Digest Series. 1991. V. 11. P. 234.
6. Mak A. A., Ustyugov V. I. // Proc. SPIE. 1988. V. 1 132. P. 58.
7. Zambon B. // Phys. Rev. A. 1991. V. 44. P. 688.
8. Mak A. A., Muravitsky S. G., Orlov O. A., Ustyugov V. I. // Proc. SPIE. 1989. V. 1 121. P. 478.
9. Benedict R. P., Drummond D. L., Schilie L. A. // J. Chem. Phys. 1977. V. 66, No. 10. P. 4 600.
10. Benedict R. P., Drummond D. L., Schilie L. A. // J. Chem. Phys. 1979. V. 70, No. 7. P. 3 155.
11. Мак А. А., Орлов О. А., Устюгов В. И. // Квантовая электроника. 1982. Т. 9, № 12. С. 2 412.
12. Винокуров Г. Н., Галактионова Н. М., Егорова В. Ф., Седов Б. М., Ханин Я. И. // ЖЭТФ. 1971. Т. 60, № 2. С. 489.

Научно-исследовательский институт лазерной физики,
г. Санкт-Петербург, Россия

Поступила в редакцию
28 января 2004 г.

## DYNAMICS OF A CW SINGLE-LONGITUDINAL-MODE Nd:YAG LASER WITH $Cs_2$ NARROW-BAND SATURABLE ABSORBER

*A. A. Mak, E. A. Viktorov, O. A. Orlov, and V. I. Ustyugov*

We present the results of experiments with a CW single-longitudinal-mode Nd:YAG laser, tunable in the vicinity of 1064 nm, with an intracavity narrow-band $Cs_2$ vapor saturable absorber. It is shown that the laser dynamics is determined by both the pump level and detuning of the laser frequency from the absorption-line center.

УДК 517.929+517.812

# ОТОБРАЖЕНИЯ ПУАНКАРЕ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ РЕЛАКСАЦИОННЫХ КОЛЕБАНИЙ В ТВЕРДОТЕЛЬНЫХ ЛАЗЕРАХ С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ НАКАЧКИ

*Е. В. Григорьева*

Представлен асимптотический анализ колебаний релаксационной структуры в одномодовых и многомодовых лазерах класса B с периодической модуляцией накачки. Получены дискретные отображения, на основе которых описана иерархия сосуществующих периодических аттракторов, аналитически изучены их бифуркации, приводящие к режимам удвоения периода, квазипериодическим и хаотическим колебаниям. Для систем связанных продольных мод отображения определяют условия антифазной динамики.

## ВВЕДЕНИЕ

Периодическая модуляция параметров является практически важным способом реализации импульсных режимов генерации излучения в лазерах класса B, к которым относятся $CO_2$-лазеры, некоторые твердотельные и полупроводниковые лазеры. Обзор экспериментальных и теоретических результатов по нелинейной динамике таких систем приводится, например, в [1–4], где обсуждаются возникновение нелинейных резонансов в зависимости от амплитуды и частоты управляющего сигнала, существование областей перекрытия различных осцилляторных режимов (обобщённая мультистабильность) и переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода.

Целью данной работы является получение отображения Пуанкаре для анализа существенно нелинейных режимов релаксационного типа в одномодовом и многомодовом лазерах при периодической модуляции накачки. Такие отображения позволяют определить локализацию циклов в фазовом пространстве соответствующих систем, аналитически описать их бифуркации, а также установить конечное состояние системы после воздействия импульсного возмущения, что может быть использовано при разработке методов быстрого переключения между устойчивыми и неустойчивыми периодическими орбитами [5, 6]. Для систем связанных мод отображения определяют условия регулярной антифазной динамики.

## 1. ОТОБРАЖЕНИЕ В СЛУЧАЕ ОДНОМОДОВОГО РЕЖИМА

Стандартная динамическая модель одномодового лазера класса B с периодической модуляцией накачки формулируется следующим образом [1]:

$$\mathrm{d}u/\mathrm{d}t = vu\,(y-1), \tag{1}$$

$$\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = q + k\cos(\omega t) - y - yu, \tag{2}$$

где $u$ и $y$ пропорциональны соответственно интенсивности излучения и инверсии населённостей активной среды в двухуровневом приближении, время $t$ нормировано на время релаксации инверсии населённостей, $v$ — отношение скоростей затухания поля в резонаторе и релаксации населённостей, внутрирезонаторные потери нормированы к единице, $q$ характеризует скорость накачки, $k$ и $\omega$ — глубина и частота модуляции накачки.

Для лазеров класса B нормированный параметр $v$ является «большим»: $v \sim 10^2 \div 10^4$, а параметры накачки и глубины модуляции порядка единицы: $q \gtrsim 1$, $k < q$. Дополнительно предполагаем, что частота модуляции $\omega$ может быть достаточно большой, но $\omega \ll v$. Отметим, что это условие справедливо, пока частота $\omega$ меньше или сравнима с частотой собственных релаксационных колебаний $\omega_{\rm R} = \sqrt{v\,(q-1)} \ll v$. При таких параметрах и сравнительно глубокой модуляции накачки экспериментально наблюдаются режимы релаксационного типа, которые легко воспроизводятся численно на основе системы (1), (2). Они имеют вид последовательности (регулярной или хаотической) резких импульсов (пичков) большой амплитуды, разделённых временны́ми интервалами, значительно превышающими длительность пичков. Колебания квазигармонической формы со сравнительно малой амплитудой также могут сосуществовать с пичковыми и доминируют при малой амплитуде модуляции, но в данной статье не рассматриваются.

С математической точки зрения существование релаксационных решений обусловлено наличием большого параметра $v$ (или малого параметра $v^{-1}$ при производной). Это можно понять, рассматривая формальное решение уравнения (1): $u(t) = u(0)\exp[va(t)]$, где $a(t) = \int_0^t [y(s) - 1]\,{\rm d}s$. Очевидно, что даже малые колебания $y(t)$ вследствие, например, модуляции накачки могут привести к резким изменениям интенсивности излучения $u(t)$, т. е. $u(t)$ является «быстрой» переменной. Однако стандартные методы исследования сингулярно возмущённых систем непосредственно не применимы, т. к. не удаётся получить нулевое приближение решения при $v^{-1} = 0$. В данной работе строится отображение Пуанкаре на основе метода асимптотического (при $v \to \infty$) интегрирования, причём мы ограничимся первым приближением с точностью до $v^{-1}$.

В качестве секущей поверхности для построения отображения Пуанкаре удобно выбрать поверхность $S$, на которой $u|_S = 1$ и ${\rm d}u/{\rm d}t|_S > 0$. Точки пересечения фазовых траекторий системы (1), (2) с этой поверхностью характеризуются двумя координатами: значениями инверсии населённостей $y(t_i)$ и фазы модулирующего сигнала $\Phi(t_i) = \omega t_i$ в момент начала каждого следующего импульса излучения $t_i$, $i = 0, 2, 4, \ldots$ (моменты с нечётными номерами $t_1, t_3, t_5, \ldots$ соответствуют окончанию импульсов излучения, когда ${\rm d}u/{\rm d}t < 0$).

Выберем начальные условия на поверхности Пуанкаре:

$$u(0) = 1, \qquad y(0) = c, \qquad \Phi(0) = \varphi, \tag{3}$$

где $c > 1 + {\rm O}(v^{-1/2})$, чтобы обеспечить выполнение условия $\dot u(0) > 0$, где точка обозначает производную по времени. При таких условиях наблюдаем резкий импульс излучения с максимальной амплитудой $u_{\max} \sim v \gg 1$, который заканчивается в момент $t_1$, когда $u(t_1) = 1$. Длительность импульса $t_1 \sim v^{-1} \to 0$ при $v \to \infty$. Введём величину $p = \int_0^{t_1} u(t)\,{\rm d}t$, которая имеет смысл энергии импульса и имеет, очевидно, конечное значение.

Разделим уравнение (1) на $v$, сложим с уравнением (2) и сумму проинтегрируем от 0 до $t_1$. В результате получим

$$y(t_1) - c = -p + {\rm O}(v^{-1}), \tag{4}$$

где мы включили в ${\rm O}(v^{-1})$ слагаемое $\int_0^{t_1} [q + k\cos(\omega t) - y]\,{\rm d}t$, т. к. $t_1 \sim v^{-1}$, которое мало́ при $v \to \infty$. Далее, из уравнения (2) имеем

$$y(t_1) = c\exp(-p) + {\rm O}(v^{-1}). \tag{5}$$

Тем самым из (4) и (5) определяем энергию импульса $p(c)$ с точностью до величины порядка ${\rm O}(v^{-1})$ как положительный корень уравнения

$$c - p = c\exp(-p). \tag{6}$$

На следующем участке времени $t \in (t_1, t_2)$ происходит восстановление инверсии под действием накачки в отсутствие генерации. Поэтому, интегрируя систему (1), (2) с учётом $u \ll 1$ всюду, кроме малой окрестности концов интервала, где $u(t_i) = 1$, получаем

$$y(t) = q + (c - p - q)\, \exp(-t) + K\, [\cos(\omega t + \psi) - \exp(-t) \cos\psi], \tag{7}$$

$$\Phi(t) = \omega t + \varphi, \tag{8}$$

$$u(t) = \exp[va(t, c, \varphi)], \qquad a(t, c, \varphi) < 0, \tag{9}$$

где $K = k\,(1 + \omega^2)^{-1/2}$, $\psi = \varphi - \mathrm{arctg}\ \omega$,

$$a(t, c, \varphi) = (q - 1)\, t + (c - p - q - K \cos\psi)\, [1 - \exp(-t)] + K\, [\sin(\omega t + \psi) - \sin\psi]/\omega. \tag{10}$$

С течением времени $t$ функция $a(t, c, \varphi)$, оставаясь отрицательной, возрастает. Следовательно, интенсивность излучения $u(t)$, оставаясь малой, также возрастает до момента $t_2 = T$, когда

$$a(T, c, \varphi) = 0, \tag{11}$$

поэтому $u(T) = 1$, $\dot{u}(T) > 0$. Это означает, что фазовая траектория вновь пересекается с поверхностью Пуанкаре $S$ и начинается следующий импульс излучения. Момент $T$ определяется как первый положительный корень уравнения (11), а новые координаты точки пересечения — отображением

$$\bar{c} = q + (c - p - q + K \cos\psi) \exp(-T) - K \cos(\omega T + \psi), \tag{12}$$

$$\bar{\varphi} = \mathrm{mod}(\varphi + \omega T; 2\pi), \tag{13}$$

где $p = p(c, \varphi)$, $T = T(c, \varphi)$. Система (12), (13) вместе с (6) и (11) является замкнутой и аналитически определяет функцию последования в сечении Пуанкаре с точностью до $\mathrm{O}(v^{-1/2})$, если для каждой итерации выполняется условие $c > 1 + \mathrm{O}(v^{-1/2})$. Это условие обеспечивает выполнение неравенства $\dot{u}(t_i) > 0$, $i = 0, 2, 4, \ldots$, и появление в эти моменты резких пичков излучения. Отметим, что при $c \to 1$ могут наблюдаться регулярные и нерегулярные режимы с гладким временны́м профилем интенсивности излучения, для исследования которых предпочтительнее гармонический анализ.

Каждая итерация отображения (12), (13) даёт точки $(c, \varphi)$, по которым восстанавливаются асимптотические характеристики импульсных режимов генерации: интервал между пичками $T$ по формуле (11), энергия импульса $p$ по формуле (6), максимальная амплитуда по формуле $u_{\max} = v\,(c - 1 - \ln c) + 1$. Зависимость $u_{\max}$ от $\omega$ воспроизводит типичную амплитудно-частотную характеристику нелинейных резонансов. С увеличением частоты внешнего воздействия максимальная амплитуда отклика системы уменьшается. Отметим также, что из последовательности $(u_{\max}, \varphi)$ получаем отображение, которое можно прямо сопоставить с экспериментальными данными.

Неподвижные точки отображения (12), (13) соответствуют периодическим решениям с периодами, кратными периоду возбуждающей силы: $T_n = 2\pi n/\omega$, где индексом $n$ здесь и далее будем обозначать кратность периода, и с энергиями генерируемых импульсов $p_n = (q - 1)\, T_n$. Координаты таких неподвижных точек $(c_n, \varphi_n = \psi_n + \mathrm{arctg}\, \omega)$ получаем по формулам

$$c_n = p_n\, [1 - \exp(-p_n)]^{-1} \tag{14}$$

$$K \cos\psi_n = q - c_n - p_n\, [\exp(T_n) - 1]^{-1}. \tag{15}$$

Поскольку фаза $\varphi_n$ определяется из $\cos\psi_n$, то существуют два цикла равной (большой) амплитуды, устойчивый и седловой, которые появляются в результате бифуркации седло—узел при пороговом уровне модуляции

$$k_n = \sqrt{1+\omega^2}\,\{q - c_n - g_n\,[\exp(T_n) - 1]^{-1}\}.$$

При дальнейшем увеличении амплитуды или частоты модуляции наблюдаются другие бифуркации устойчивых циклов. Вопрос об устойчивости периодических решений может быть исследован стандартными методами локального анализа: построением линеаризованной системы в окрестности неподвижной точки и вычислением её мультипликаторов $\lambda_1$, $\lambda_2$. При глубине модуляции накачки

$$k_{\rm pd} = \frac{\sqrt{1+\omega^2}}{\omega}\,(q-1)\left[1 + 2\pi\left(\frac{qnT_n}{12}\right)^2 + \mathrm{O}(T_n^4)\right] \tag{16}$$

с точностью до $\mathrm{O}(T_n)$ находим

$$\lambda_1 = 1 - \frac{2K\omega}{q-1} + \frac{2K\omega}{q-1}\sqrt{1-\frac{q-1}{K\omega}}\,,\qquad \lambda_2 = 1 - \frac{2K\omega}{q-1} - \frac{2K\omega}{q-1}\sqrt{1-\frac{q-1}{K\omega}}\,, \tag{17}$$

откуда следует, что значение $\lambda_1$ переходит через $-1$, а значит, имеет место бифуркация удвоения периода. В отличие от случая модуляции внутрирезонаторных потерь, амплитуда модуляции накачки в точке бифуркации существенно выше (примерно в $\omega$ раз) и сравнима с постоянной частью накачки. Отметим, что бифуркационные значения глубины модуляции для решений с кратными периодами $T_2, T_3, \ldots$ сдвинуты относительно друг друга на небольшую величину порядка $\mathrm{O}(nT_n^2)$.

Особенности последующих перестроек и нелинейной динамики в области хаотического режима могут быть исследованы численно на основе отображения (12), (13), что существенно проще и обеспечивает более высокую точность по сравнению с длительным интегрированием исходной дифференциальной системы (1), (2).

Аналитическое отображение (12), (13) позволяет определить расположение изолированных решений и рассчитать границы бассейнов притяжения различных аттракторов и устойчивых многообразий седловых циклов. Пример сложной структуры фазового пространства показан на рис. 1, где серым цветом отмечен бассейн цикла $c_1$ с периодом $T_1$, белым — цикла $c_2$ с периодом $T_2$, чёрным — сложного трёхимпульсного цикла $c^{(k)}$, $k = 1, 2, 3$, с периодом $6T$. Видно, что границы бассейнов являются фрактальными. Такое явление типично для нелинейных мультистабильных систем [7, 8] и приводит к неопределённости в предсказании конечного состояния при наличии шумов и внешнего воздействия. В то же время знание нелокальной организации фазового пространства и результата кратковременного возмущения параметров позволяет предложить оптимальную стратегию динамического управления системой.

## 2. ОТОБРАЖЕНИЯ В СЛУЧАЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО КРАТКОВРЕМЕННОГО ИМПУЛЬНОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ

В этом случае уравнение (2) имеет вид

$$\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = q + k\cos(\omega t) + f(t) - y - yu,$$

где $f(t) > 0$ при $t \in (t_k, t_k+\delta)$ и $f(t) \equiv 0$ при $t \notin (t_k, t_k+\delta)$.

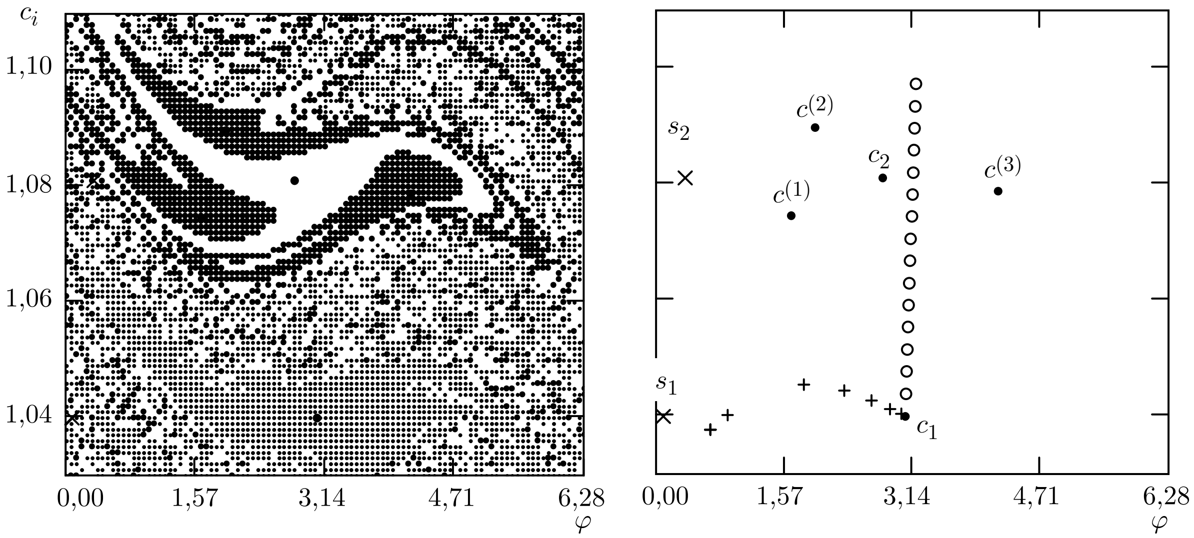



Рис. 1. Бассейны циклов $c_1$ (серый цвет), $c_2$ (белый цвет), $c^{(n)}$, $n = 1, 2, 3$ (чёрный цвет). На правом рисунке дополнительно к устойчивым циклам символами $\times$ обозначены седловые циклы $s_1, s_2$; символами $+$ — сдвиг фазовой траектории из точки $c_1$ после однократного применения управляющего импульса накачки во время импульса генерации и символами $\circ$ — между импульсами генерации. Параметры исходной системы (1), (2): $v = 10^4$, $q = 1{,}9$, $k = 0{,}9$, $\omega = 71{,}6$

Рассмотрим действие короткого дополнительного импульса накачки в момент времени, совпадающий с импульсом излучения. Очевидно, что малые шумы или малая сила на этапе импульса практически не изменяют динамику. Но внешняя сила с амплитудой $f_1$ и длительностью $\delta_1$, меньшей или сравнимой с длительностью импульса, может существенно изменить динамику процесса, если $f_1 \sim u \gg 1$. Тогда, после однократного применения короткого внешнего импульса накачки, координаты фазовой траектории можно найти по отображению (12), (13), в котором функция $p$ есть корень уравнения

$$c - p = \exp(-p)\,[c + P_1\,[\exp(P_1) - 1]/p],$$

где $P_1 = f_1\delta_1$ — энергия дополнительного импульса накачки. При этом точка в фазовом пространстве на рис. 1 сдвигается в основном по горизонтали (отмечено символом $+$), т. е. изменяется фазовый сдвиг между импульсом и модулирующим сигналом.

Если корректирующий импульс накачки с амплитудой $f_2$ и длительностью $\delta_2$ применяется между импульсами, то координаты фазовой траектории находятся по отображению

$$\bar{c} = q + (c - p - q - K\cos\psi)\exp(-T) - K\cos(\omega T + \psi) + P_2, \tag{18}$$

$$\bar{\varphi} = \mathrm{mod}(\varphi + \omega T; 2\pi), \tag{19}$$

где $P_2 = f_2\delta_2$ — энергия дополнительного импульса накачки, $p$ находится по формуле (6), а интервал между импульсами $T = T(c,\varphi)$ находится как корень уравнения $a(T,c,\varphi) = TP_2$. После применения корректирующего импульса точка на рис. 1 сдвигается в основном по вертикали (отмечено символом $\circ$), т. е. изменяется инверсия населённостей к моменту начала нового пичка. Сдвиг точки в фазовом пространстве зависит от энергии контролирующего импульса $f_i\delta_i$.

Таким образом, импульсное внешнее воздействие в разные моменты (фазы) цикла, приводит к различному смещению траектории в фазовом пространстве. Поэтому с помощью комбинации двух импульсов накачки можно направить фазовую траекторию прямо к желаемому аттрактору или на устойчивое многообразие седлового цикла и реализовать быстрое (практически без переходного процесса) переключение между режимами генерации, в том числе и неустойчивыми.

После переключения на седловые циклы в дальнейшем могут быть использованы стандартные методы малых возмущений для отслеживания неустойчивых орбит [8, 9].

## 3. ОТОБРАЖЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ НАСЫЩАЮЩЕГОСЯ ПОГЛОТИТЕЛЯ И ВЫСОКОГО УРОВНЯ СПОНТАННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

В рамках предложенной методики редукции к отображению Пуанкаре можно также учесть дополнительные физические факторы, часто встречающиеся в эксперименте и особенно существенные для полупроводниковых лазеров [10–14]: наличие примесей с насыщающимся поглощением, высокий уровень спонтанного излучения в лазерную моду, многомодовость генерации, инерционность (конечность полосы пропускания) модуляторов, а также различные комбинации перечисленных дополнительных условий. Ниже кратко приведём результаты такого анализа.

Для полупроводниковых лазеров с модуляцией накачки при наличии безынерционно насыщающегося поглотителя (медленный поглотитель может быть рассмотрен отдельно) вместо (1), (2) имеем систему [13]

$$\mathrm{d}u/\mathrm{d}t = vu\left(y - 1 - \frac{b}{1+\alpha u}\right) + \epsilon, \qquad \mathrm{d}y/\mathrm{d}t = q + k\cos(\omega t + \varphi) - y - yu, \tag{20}$$

где $b$ — ненасыщенные потери, $\alpha$ — параметр нелинейности фильтра, $\epsilon$ учитывает уровень спонтанного излучения или малой внешней подсветки того же направления и частоты, что и генерируемое излучение.

В пренебрежении спонтанным излучением ($\epsilon = 0$) релаксационные автоколебания определяются итерациями того же двумерного отображения (12), (13), в котором энергия импульса $p$ определяется из уравнения (6), а интервал $T$ между импульсами из уравнения $a(T, c, \varphi) = bT$.

Если уровень спонтанного излучения или малая внешняя подсветка того же направления и частоты, что и генерируемое излучение, возрастают до уровня $\exp(-v) \ll \epsilon \ll 1$, то необходимо учитывать малый аддитивный член в уравнении для интенсивности излучения, т. е. полагать $\epsilon \neq 0$. В этом случае инверсная населённость на плоскости Пуанкаре (в момент начала импульса излучения) определена: $c \equiv 1 + b$, и вместо двумерного получаем одномерное отображение окружности в себя:

$$\bar{\varphi} = \mathrm{mod}(\varphi + \omega T_\epsilon; 2\pi), \tag{21}$$

где $T_\epsilon(\varphi)$ — первый положительный корень уравнения

$$q - 1 - b - (q - 1 - b + p)\exp(-T_\epsilon) - K\left[\cos(\omega T_\epsilon + \psi) - \exp(-T_\epsilon)\cos\psi\right] = 0,$$

а $p$ определяется из уравнения $p = (1 + b)\,[1 - \exp(-p)]$.

Известно, что в нелинейных отображениях окружности в себя наблюдаются серии бифуркаций, связанных с числом вращений Пуанкаре. Отсюда следует, что в динамике исходной лазерной системы будут наблюдаться квазипериодические режимы генерации с областями синхронизации при рациональном значении числа вращения Пуанкаре $\Omega = \omega T_0$, где $T_0$ — период собственных колебаний лазера с просветляющимся фильтром, определяемый из уравнения

$$q - 1 - b - (q - 1 - b + p)\exp(-T_0) = 0.$$

Эти представления хорошо согласуются с экспериментальными фактами и данными численного моделирования системы (20) [10–14].

## 4. ОТОБРАЖЕНИЕ В СЛУЧАЕ МНОГОМОДОВОГО ЛАЗЕРА

Динамика однородно уширенного многомодового лазера класса B с эффектом пространственного выжигания дырок описывается уравнениями для $N$ глобально связанных продольных мод [1, 15]:

$$\mathrm{d}u_i/\mathrm{d}t = vu_i\,[n_0 - n_i/2 - 1], \qquad \mathrm{d}n_i/\mathrm{d}t = n_0 u_i - n_i \left(1 + \sum_{\substack{r=1,\\ r\neq i}}^{N} u_r\right),$$

$$\mathrm{d}n_0/\mathrm{d}t = q + k\cos(\omega t + \phi) - n_0 - \sum_{\substack{r=1,\\ r\neq i}}^{N} u_r\,(n_0 - n_r/2), \tag{22}$$

где $u_i$ — интенсивность $i$-й моды, $i = 1, 2, \ldots, N$, $n_0$ — постоянный в пространстве член фурье-разложения инверсии населённостей, $n_i$ — компоненты первого порядка пространственного фурье-разложения инверсии населённостей. Физический смысл и величины остальных параметров аналогичны системе (1), (2).

Выберем начальные условия для системы (22) таким образом, чтобы при $t = 0$ начинался импульс моды с номером 1, а интенсивность других мод оставалась экспоненциально малой:

$$\Phi(0) = \varphi, \qquad n_0(0) = c_0, \qquad u_i(0) = \exp(vd_i), \qquad n_i(0) = c_i, \qquad i = 1, \ldots, N, \tag{23}$$

причём

$$c_1 < c_0 - 1 < c_2 < c_3 < \ldots < c_N, \qquad d_N < \ldots < d_2 < d_1 = 0.$$

Интегрируя далее систему (22) по описанному выше методу, получаем, что в момент времени $t = T(c_0, c_2, d_2, \varphi)$ система приходит в аналогичное (23) состояние с заменой индексов мод $(1, 2, \ldots, N-1, N)$ на $(2, 3, \ldots, N, 1)$ и параметров $c$, $c_i$, $d_i$, $\varphi$ на

$$\bar{c}_0 = q + (c - p - q - K\cos\psi)\exp(-T) + K\cos(\omega T + \psi), \qquad \bar{\varphi} = \mathrm{mod}(\varphi + \omega T; 2\pi),$$

$$\bar{c}_i = c_{i+1}\exp(-p - T), \qquad \bar{c}_N = [c_1\,(1 - p) + c_0 p]\exp(-T),$$

$$\bar{d}_i = d_{i+1} - d_i + \frac{c_2 - c_{i+1}}{2}\exp(-p - T), \qquad \bar{d}_N = -d_{N-1} + \frac{c_2 - c_1}{2}\exp(-p - T), \tag{24}$$

где $i = 1, 2, \ldots, N-1$, $p = p(c_0, c_1)$ — энергия пичка, определяемая как положительный корень уравнения

$$2\,(c_0 - p) - \left\{\exp[-p\,(1 + 1/\sqrt{2})]\,(c_0 - c_1/\sqrt{2}) + \exp[-p\,(1 - 1/\sqrt{2})]\,(c_0 + c_1/\sqrt{2})\right\} = 0,$$

$T = T(c_0, c_2, d_2, \varphi)$ — интервал между пичками, который находим как положительный корень уравнения

$$d_2 + (q-1)\,T + [c - p - q - K_1 - c_2\exp(-p/2)]\,[1 - \exp(-T)] + [K_1\sin(\omega T) + K_2 - K_2\cos(\omega T)]/\omega = 0,$$

где

$$K_1 = \frac{k}{1 + \omega^2}\,(\cos\phi + \omega\sin\phi), \qquad K_2 = \frac{k}{1 + \omega^2}\,(\omega\cos\phi - \sin\phi).$$

Аттракторы $2N$-мерного отображения (24) определяют пичковые режимы системы (22). В частности, фиксированная точка отображения существует при $T = 2\pi/\omega$ и выполнении неравенства

$$d_2 < (1 - \exp(-T))\,[(c_2 - c_1)\,(1 - p) - c_0]/2$$

для каждой итерации. Данное условие выделяет в фазовом пространстве область, где могут реализоваться упорядоченные противофазные колебания отдельных мод с периодом $NT$. Они сосуществуют с хаотическими пульсациями. В качестве иллюстрации на рис. 2 показаны примеры хаотической динамики двух мод при произвольных начальных условиях (*а*) и упорядоченных состояний двух и трёх мод при начальных условиях, близких к фиксированным точкам отображения (*б, в*). В последнем случае все моды имеют одинаковую волновую форму, но фаза каждой моды смещена на $N$-ую часть периода от фазы соседнего осциллятора. Вследствие эквивалентности осцилляторов такие режимы появляются с кратностью $(N-1)!$ [16]. При увеличении числа мод $N$ большое число сосуществующих аттракторов предполагает сложную динамику переключения между ними. Переключения могут быть индуцированы шумом, а также реализованы с помощью специальной внешней инжекции сигнала [15, 16].

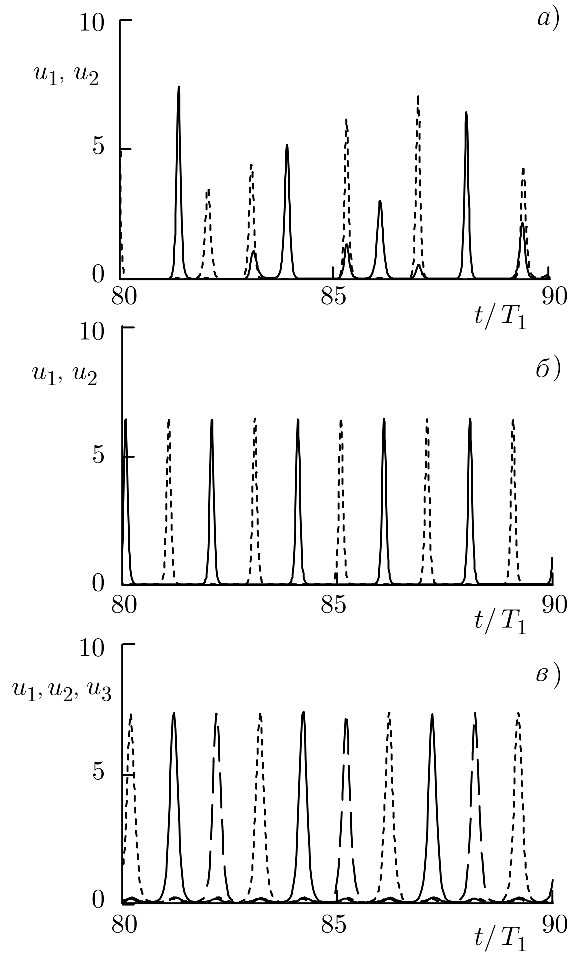



Рис. 2. Противофазные решения уравнений (22) с двумя модами при $N = 2$, $v = 10^4$, $q = 1{,}9$, $k = 0{,}9$, $\omega = 81{,}1$ и (*а*) $\varphi = 2{,}561$, $c_0 = 1{,}147$, $c_1 = 0{,}24$, $c_2 = 0{,}241$, (*б*) $\varphi = 2{,}561$, $c_0 = 1{,}156$, $c_1 = 0{,}226$, $c_2 = 0{,}2587$, а также с тремя модами при $N = 3$, $v = 10^4$, $q = 3$, $k = 2{,}3$, $\omega = 171{,}54$, $\varphi = 1{,}83$, $c_0 = 1{,}1529$, $c_1 = 0{,}2256$, $c_2 = 0{,}2386$, $c_3 = 0{,}2625$ (*в*). Сплошная, пунктирная и штриховая кривые соответствуют интенсивностям мод $u_1$, $u_2$, $u_3$

Таким образом, полученные дискретные отображения адекватно описывают динамику релаксационных пульсаций в лазерах класса B. Неподвижные точки отображений определяют условия существования и устойчивости циклов с периодами, кратными периоду возбуждающей силы, в том числе противофазных колебаний в многомодовых лазерах. Развитая теория является перспективной для обсуждения процедуры управляемого переключения между различными (устойчивыми и неустойчивыми) периодическими состояниями с помощью дополнительного импульса накачки. Кроме того, предложенная методика может быть распространена на более сложные задачи лазерной динамики, рассматривающие как активную, так и пассивную модуляцию параметров с помощью просветляющегося фильтра и запаздывающей обратной связи [17].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ханин Я. И. Основы динамики лазеров. М.: Наука, 1999. 368 с.
2. Ораевский А. Н. // Изв. вузов. Прикладая нелинейная динамика. 1996. Т. 4. С. 3.
3. Маторин И. И., Пиковский А. С., Ханин Я. И. // Квантовая электроника. 1984. Т. 11. С. 2 096.
4. Chizhevsky V. N., Turovets S. I. // Phys. Rev. A. 1994. V. 50. P. 1 840.
5. Chizhevsky V. N., Glorieux P. // Phys. Rev. E. 1995. V. 51. P. R2 701.

6. Chizhevsky N. V., Grigorieva E. V., Kashchenko S. A. // Opt. Commun. 1997. V. 133. P. 189.
7. Grebogi C., McDonald S. W., Ott E., Yorke J. A. // Phys. Lett. A. 1995. V. 99. P. 415.
8. Grebogi C., Ott E., Yorke I. A. // Phys. Rev. Lett. 1986. V. 56. P. 1 011.
9. Caroll T. L., Pecora L. M., Ott E., Yorke J. A. // Phys. Rev. E. 1993. V. 48. P. 2 446.
10. Klische W., Telle H. R., Weiss C. O. // Optics Lett. 1984. V. 9. P. 561.
11. Winful H. G., Chen Y. C., Lin J. M. // Appl. Phys. Lett. 1986. V. 48. P. 616.
12. Lautenborn W., Steinhoff R. // J. Opt. Soc. Am. B. 1988. V. 5. P. 1 097.
13. Lautenborn W., Eick I. // J. Opt. Soc. Am. B. 1988. V. 5. P. 1 089.
14. Sacher J., Baums D., Pankin P., et al. // Phys. Rev. A. 1992. V. 45. P. 1 893.
15. Otsuka K., Sato Y. // Phys. Rev. A. 1996. V. 54. P. 4 464.
16. Wiesenfeld K., Hadley P. // Phys. Rev. Lett. 1989. V. 62. P. 1 335.
17. Grigorieva E. V., Kashchenko S. A. // Bifur. and Chaos. 1993. V. 3. P. 1 515.

Белорусский государственный университет,
г. Минск, Беларусь

Поступила в редакцию
3 марта 2004 г.

## POINCARÉ MAPS FOR STUDYING RELAXATION OSCILLATIONS IN PERIODICALLY PUMPED SOLID-STATE LASERS

*E. V. Grigorieva*

We present an asymptotic analysis of relaxation oscillations in periodically pumped single- and multi-mode class-B lasers. Discrete maps which allow one to describe the hierarchy of coexisting periodic attractors are obtained and their bifurcations leading to period-doubling regimes and quasi-periodic and chaotic oscillations are studied analytically. For systems of coupled longitudinal modes, the maps determine conditions for antiphase dynamics.

УДК 621.373.826

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ФЕМТОСЕКУНДНОГО ЛАЗЕРА С КЕРРОВСКОЙ СИНХРОНИЗАЦИЕЙ МОД ПРИ ПОМОЩИ МОДОВОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ВНУТРИРЕЗОНАТОРНОГО ПУЧКА

*А. И. Конюхов, Л. А. Мельников*

На основе пространственно-временно́й модели проанализированы особенности генерации фемтосекундных импульсов в лазере с керровской синхронизацией мод. Разработанный алгоритм использует разложение поля по функциям Лагерра—Гаусса, которые являются модами пустого пространства. Поляризация среды рассчитывается из уравнений Блоха для двухуровневого перехода. При учёте частотной зависимости дифракции такой подход позволяет описывать генерацию импульсов с длительностью несколько фемтосекунд. Показано, что для импульсов с длительностью меньше 10 фемтосекунд дифракция вызывает сдвиг несущей частоты импульсов в коротковолновую область спектра. Вблизи нуля дисперсии групповой скорости в резонаторе возможна реализация режима генерации, включающего несколько близко расположенных импульсов. Показано, что такой режим может реализовываться в отсутствие дисперсии высших порядков. Для импульсов с длительностью несколько фемтосекунд существует сильная связь между пространственными и временны́ми характеристиками поля. Это приводит к сложной зависимости размера пучка от его мощности и, соответственно, к сложному изменению потерь во время прохождения импульсом апертуры. Из-за этой особенности режимы генерации сверхкоротких импульсов не могут быть корректно описаны при помощи моделей, в которых зависимость потерь от мощности пучка вводится исскуственно.

## ВВЕДЕНИЕ

Со времени первой демонстрации лазера с самосинхронизацией мод [1] керровская синхронизация мод (KLM) стала стандартной методикой для генерации фемтосекундных импульсов. Генерация ультракоротких импульсов возможна вследствие синхронизации большого количества продольных мод. Для этой цели необходимо обеспечить быструю модуляцию амплитуды внутрирезонаторного поля. В специально разработанных резонаторах самофокусировка пучка совместно с апертурой или пространственно-ограниченным усилением («мягкая» апертура) обеспечивает внутрирезонаторные потери, которые почти мгновенно уменьшаются с ростом интенсивности. Для вычисления зависимости потерь от мощности пучка часто используется подход, основанный на ABCD-матричном формализме [2–4]. ABCD-метод с успехом применялся при оптимизации параметров резонатора для обеспечения самостартующей синхронизации мод [5], для оптимизации двунаправленной генерации лазеров с кольцевым резонатором [6, 7], для изучения влияния поперечного распределения усиления [8, 9].

Во временно́м представлении керровская нелинейность в сочетании с отрицательной дисперсией групповой скорости приводит к формированию солитонных импульсов [3]. В приближении плоского волнового фронта динамика импульса описывается нелинейным уравнением Шрёдингера. В этом случае модуляция амплитуды импульса вследствие совместного влияния самофокусировки и апертуры может быть введена искусственно и рассматриваться как действие быстрого насыщаемого поглотителя. Нелинейное уравнение Шрёдингера может быть дополнено членами, описывающими усиление, дисперсию высшего порядка [10–15], когерентный поглотитель [16], вынужденное комбинационное рассеяние [17], а затем решено либо численно [18], либо аналитически [8, 19, 20]. Для достаточно длинных импульсов приближение плоских волн даёт хорошие оценки как для лазеров с керровской синхронизацией мод [21], так и для лазеров с аддитивной синхронизацией мод [3]. Однако для импульсов с высокой интенсивностью и длительностью несколько фемтосекунд ситуация изменяется. Пространственные и временны́е характеристики оптического поля становятся сильно связанными посредством дифракции и нелинейности. Генерация сверхкоротких импульсов, как правило, достигается вблизи нуля дисперсии групповой скорости. В этом случае влияние нелинейной фильтрации апертурой сопоставимо с эффектом солитонного формирования импульсов. Сокращение длительности импульса за счёт совместного действия апертуры и керровской самофокусировки приводит к тому, что лазер с керровской синхронизацией мод (KLM-лазер) может генерировать импульсы даже при положительной дисперсии групповой скорости [22]. Пространственные и временны́е характеристики импульса связаны не только самофокусировкой, но и дифракцией в свободном пространстве. Части импульсного пучка с различными размерами пятна испытывают различный набег фазы при одном и том же расстоянии распространения [23], что приводит к модуляции его частоты. Кроме того, дифракция фемтосекундных импульсов в свободном пространстве является частотно-зависимой [24, 25]. Учёт такого типа пространственно-временно́й связи необходим при выяснении минимальных достижимых длительностей импульсов в KLM-лазере с заданной конфигурацией.

При определённых условиях лазеры с керровской синхронизацией мод демонстрируют неустойчивость выходной последовательности импульсов [26, 27]. Измерение энергии импульса на краю пучка при помощи фотодиода с малой регистрирующей поверхностью показывает наличие существенной модуляции размеров пучка в квазипериодических и хаотических режимах [22, 27]. Одной из причин динамической неустойчивости генерации может быть возбуждение высших поперечных мод [28–30]. Появление нестабильности в выходной последовательности импульсов можно объяснить как на основе модели, которая учитывает только временно́е изменение поля [19, 20, 31, 32], так и на основе модели, учитывающей только изменение формы пучка в нелинейном резонаторе [33, 34]. Полная модель лазера должна принимать во внимание изменение пространственных и временны́х характеристик поля одновременно. В пространственно-временно́й модели лазера разнообразие нелинейных эффектов увеличивается. Эти эффекты интересны как с теоретической, так и с практической точек зрения для управления характеристиками ультракоротких импульсов.

Простая пространственно-временна́я модель лазера с керровской синхронизацией мод основана на аппроксимации как пучка, так и импульса гауссовой функцией с параметрами, которые рассчитываются на основе ABCD-матриц [21, 35–37]. Другой подход [38] также основан на аппроксимации внутрирезонаторного поля функцией Гаусса, однако временно́е изменение поля рассчитывается напрямую из уравнений распространения и уравнений для нелинейной среды, при этом форма импульса может быть произвольной. В работах [39–41] для прямого численного моделирования динамики фемтосекундных лазеров было предложено рассчитывать распространение излучения посредством вычисления трёхмерных интегралов Френеля. Преимущество такого подхода заключается в том, что импульсный пучок не ограничен априорно заданной формой. Однако расчёт трёхмерных интегралов может потребовать достаточно много вычислительного времени при исследовании динамики импульса на протяжении десятков тысяч обходов резонатора.

Данная работа посвящена исследованию пространственно-временно́й динамики импульса в лазере с керровской синхронизацией мод. Представленная модель основана на разложении внутрирезонаторного поля по модам Лагерра—Гаусса. Это позволяет моделировать режимы генерации при различной форме импульса и пучка. Пространственно-временно́е распределение усиления рассчитывалось из уравнений Блоха для двухуровневой среды [42]. Одновременное рассмотрение пространственного и временно́го распределения поля позволяет моделировать переходные процессы во время установления генерации, что является важным в случае импульсной накачки [43]. В работе рассмотрено два типа связи пространственных и временны́х характеристик

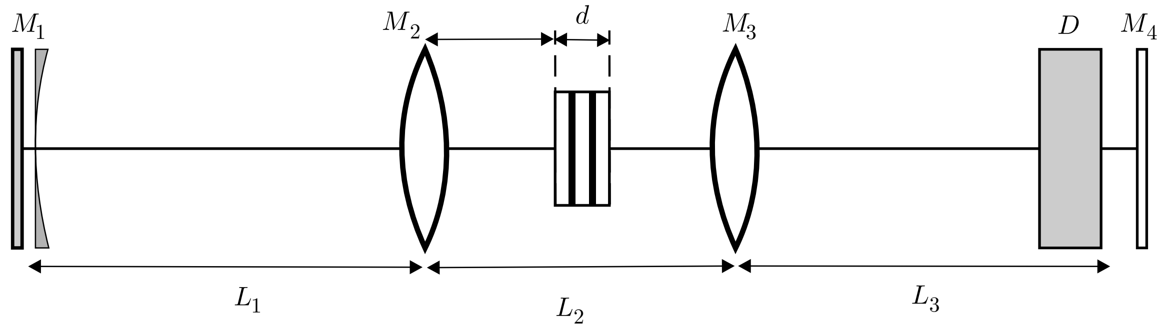



Рис. 1. Конфигурация резонатора: $M_1$ и $M_4$ — плоские зеркала; $M_2$ и $M_3$ — тонкие линзы; гауссова апертура помещена около зеркала $M_1$; $D$ — дисперсионный элемент; длина лазерного кристалла обозначена буквой $d$

импульса: первый ассоциируется с возбуждением высших поперечных мод, второй обусловлен частотно-зависимой дифракцией.

## 1. МОДЕЛЬ

Рассмотрим динамику комплексной огибающей $E(z,r,t)$ электрического поля $E(z,r,t)\times \times\exp(-i\omega_0 t + iknz)$ + к. с., где $z$ — расстояние, пройденное волной, $r$ — поперечный радиус, $\omega_0 = 2{,}36$ фс$^{-1}$ — несущая частота, $k$ — волновое число, $n$ — линейный показатель преломления на несущей частоте. Для простоты мы рассматриваем стигматический аналог Z-образного резонатора (рис. 1). Сферические зеркала в Z-образной схеме резонатора заменены линзами. Изменение огибающей электрического поля за один обход резонатора описывается путём применения операторов отдельных элементов в порядке их расположения в резонаторе. Один обход резонатора соответствует распространению импульса от плоского зеркала $M_1$ к зеркалу $M_4$ и обратно.

### 1.1. Преобразование импульсного пучка на пассивных элементах

В данном разделе описывается преобразование импульса в свободном пространстве, на линзе (сферическом зеркале), на апертуре, а также преобразование импульса вследствие дисперсии резонатора. Распространение импульса с длительностью несколько фемтосекунд в свободном пространстве можно рассматривать в рамках параксиального уравнения, которое описывает зависящую от частоты дифракцию [24, 25]:

$$2ik\,\frac{\partial E(z,r,\tau)}{\partial z} - \frac{2}{u}\,\frac{\partial^2 E}{\partial z\,\partial\tau} + \nabla_\perp^2 E = 0, \tag{1}$$

где $\tau$ — время в бегущей системе координат $(z, \tau - z/u)$, $u$ — групповая скорость. Уравнение (1) решалось с использованием преобразования Фурье $\mathcal{E}(z_0,r,\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(z_0,r,\tau)\exp(i\Omega\tau)\,\mathrm{d}\tau$. В предположении аксиальной симметрии резонатора выражение для огибающей поля в заданной поперечной плоскости $z = z_0$ может быть получено с использованием амплитуд мод Лагерра—Гаусса:

$$\mathcal{E}(z_0,r,\Omega) = \sum_j A_j(z_0,\Omega)\,L_j[\eta(z_0,\Omega)r^2]\exp[-P(z_0,\Omega)r^2/2], \tag{2}$$

где $j$ — индекс моды, $L_j$ — полином Лагерра, $P(z,\Omega) = \eta(z,\Omega) + i\xi(z,\Omega)$ — комплексный параметр пучка пустого резонатора. Амплитуды мод $A_j(z_0,\Omega)$ в плоскости $z = z_0$ определены интегральным преобразованием

$$A_j(z_0,\Omega) = \frac{1}{2\eta} \int\limits_0^\infty r\,\mathrm{d}r\,\mathcal{E}(z_0,r,\Omega)\,L_j(\eta r^2)\exp(-P^* r^2/2). \tag{3}$$

Амплитуды мод и комплексный параметр пучка в произвольной плоскости $z$ при распространении в свободном пространстве находятся из уравнений

$$A_j(z,\Omega) = A_j(z_0,\Omega)\left[1 + i\,\frac{z - z_0}{n k_\Omega}\,P(z_0,\Omega)\right]^{-1}\exp(i\psi_j), \tag{4}$$

$$P(z,\Omega) = P(z_0,\Omega)\left[1 + i\,\frac{z - z_0}{n k_\Omega}\,P(z_0,\Omega)\right]^{-1}, \tag{5}$$

$$\psi_j = -2j\,\arg\bigl[1 + i\,\frac{z - z_0}{n k_\Omega}\,P(z_0,\Omega)\bigr], \tag{6}$$

где $k_\Omega = k\,(1 + \Omega/\omega_0)$. Преобразование комплексного параметра пучка на линзе:

$$P(\mathit{2},\Omega) = P(\mathit{1},\Omega) + iFk_\Omega, \tag{7}$$

где $\mathit{1},\mathit{2}$ обозначают входную и выходную плоскости соответственно, $F$ — оптическая сила линзы. В поперечной плоскости задержка импульса, прошедшего линзу (отражённого от сферического зеркала) зависит от поперечной координаты [24]. Этот эффект описывается частотной зависимостью $k_\Omega$ в (7).

Для упрощения расчётных формул профиль выходной апертуры считается гауссовым: $T_{\mathrm{a}}(r^2) = \sqrt{T}\,\exp(-\eta_{\mathrm{a}} r^2/2)$, где $T$ — коэффициент пропускания выходного зеркала $M_1$ (см. рис. 1), $\eta_{\mathrm{a}} = 2w_{\mathrm{a}}^{-2}$, $w_{\mathrm{a}}$ — радиус апертуры. С использованием амплитуд мод преобразование пучка на апертуре описывается уравнениями

$$P(\mathit{2}) = P(\mathit{1}) + \eta_{\mathrm{a}}, \tag{8}$$

$$A_j(\mathit{2},\Omega) = \sqrt{T}\sum_k A_k(\mathit{1},\Omega)L_{jk}(\Omega), \tag{9}$$

$$L_{jk} = \int\limits_0^\infty L_j(x')L_k(x)\exp(-x')\,\mathrm{d}x' = \begin{cases} \dfrac{(-1)^k\,(j+k)!}{j!\,(-j-k)_k}\,\dfrac{\alpha^{k-j}}{(1+\alpha)^k}\,, & j \le k; \\ 0, & j > k, \end{cases} \tag{10}$$

где $x = \eta r^2$, $x' = (\eta + \eta_{\mathrm{a}})\,r^2$, $\eta$ — вещественная часть комплексного параметра пучка $P(\Omega)$ перед апертурой, $\alpha = \eta_{\mathrm{a}}/\eta$, $(-j-k)_k$ — символ Похгаммера. Все коэффициенты для преобразования амплитуд мод и поля в уравнениях (2)–(6), (9) рассчитываются заранее и сохраняются в массивах.

Дисперсия резонатора учитывалась при помощи элемента $D$, помещённого перед плоским зеркалом $M_4$ (см. рис. 1). Дифракцией пучка на этом элементе мы пренебрегли. В частотном представлении преобразование амплитуд мод на дисперсионном элементе сводится к отображению

$$A_j(\mathit{2},\Omega) = A_j(\mathit{1},\Omega)\exp\!\left(i\,\frac{\kappa_2}{2}\,\Omega^2 + i\,\frac{\kappa_3}{6}\,\Omega^3\right), \tag{11}$$

где $\kappa_2$ и $\kappa_3$ — коэффициенты дисперсии второго и третьего порядка. Здесь использована стандартная методика разложения дисперсии в ряд Тейлора [24].

Для вычислений использовались 15 мод Лагерра—Гаусса. Для того, чтобы убедиться в достаточности числа мод, рассмотренные режимы генерации тестировались при 30 и 60 модах.

### 1.2. Уравнения для активной среды

Распространение импульса в лазерном кристалле рассчитывалось с использованием метода расщепления [44]. Распространение светового импульса от плоскости $z$ до $z+h$ описывалось в два последовательных шага. На первом шаге действует только дифракция. На втором шаге действует только нелинейность. Для того, чтобы учесть влияние нелинейности амплитуда $E(r_i,\tau)$ рассчитывалась в заданных точках поперечной сетки $r_i$ и затем модифицировалась в соответствии с решением уравнения

$$\frac{\partial E(z,r,\tau)}{\partial z} = -\frac{G}{2d}\, i\mathcal{P}(z,r,\tau) + i\beta\,|E|^2\,E, \tag{12}$$

где $G = gd$ — безразмерный коэффициент усиления активного элемента, $g$ — ненасыщенное усиление по мощности, заданное для единицы длины, $0 \le z \le d$, $d$ — длина активной среды, $\beta = knn_2 I_\mathrm{s}$ — постоянная, связанная с керровской нелинейностью, $I_\mathrm{s}$ — интенсивность насыщения (для титан-сапфира $I_\mathrm{s} = 2{,}9\cdot 10^3$ Вт/мм$^2$, $n_2 = 3{,}2\cdot 10^{-14}$ мм$^2\cdot$Вт$^{-1}$); амплитуда поля $E(z,r,\tau)$ нормирована на величину $\sqrt{I_\mathrm{s}}$, $\mathcal{P}(z,r,\tau)$ — поляризация среды, рассчитываемая из уравнений Блоха [42]:

$$\partial\mathcal{P}/\partial\tau = -(\Gamma + i\delta)\,\mathcal{P} + iE\Gamma\,(N_\mathrm{u} - N_\mathrm{l}), \tag{13}$$

$$\partial N_\mathrm{l}(z,r,\tau)/\partial\tau = -\gamma_\mathrm{l} N_\mathrm{l} + \mathrm{Im}(E^*\mathcal{P})\,\gamma_\mathrm{l}\gamma_\mathrm{u}\,(\gamma_\mathrm{l}+\gamma_\mathrm{u})^{-1}, \tag{14}$$

$$\partial N_\mathrm{u}(z,r,\tau)/\partial\tau = -\gamma_\mathrm{u}\,(N_\mathrm{u} - N_\mathrm{u}^0) - \mathrm{Im}(E^*\mathcal{P})\,\gamma_\mathrm{l}\gamma_\mathrm{u}\,(\gamma_\mathrm{l}+\gamma_\mathrm{u})^{-1}, \tag{15}$$

где $\Gamma$, $\gamma_\mathrm{u}$ и $\gamma_\mathrm{l}$ — скорости релаксации поляризации среды, а также заселённостей верхнего (u) и нижнего (l) уровней соответственно, $N_\mathrm{l}(z,r,\tau)$ и $N_\mathrm{u}(z,r,\tau)$ — заселённости уровней, нормированные на ненасыщенное значение $N_\mathrm{u}$, $\delta$ — отстройка несущей частоты импульса от резонансной частоты лазерного перехода. Для моделирования спонтанного шума в каждой из точек сетки к амплитуде поля добавлялись короткие импульсы с малой интенсивностью. В расчётах использовались значения $\gamma_\mathrm{l} = 2\cdot 10^{-4}$ фс$^{-1}$, $\gamma_\mathrm{u} = 2\cdot 10^{-9}$ фс$^{-1}$, $\Gamma = 0{,}31$ фс$^{-1}$. Как правило, для импульсов с длительностью $\tau_0 > \Gamma^{-1}$ можно использовать адиабатическое исключение поляризации среды так, что $\mathcal{P} = iE\Gamma\,(N_\mathrm{u} - N_\mathrm{l})\,(\Gamma + i\delta)^{-1}$. Однако в таком предположении поляризация среды не зависит от мгновенного сдвига частоты $\partial\varphi/\partial\tau$, где $\varphi = \arg E$. При решении полной системы уравнений Блоха этот эффект учитывается автоматически. Кроме того, уравнения Блоха правильно описывают дисперсионные свойства резонансного перехода, что является важным при моделировании режимов генерации в условиях близкой к нулю дисперсии групповой скорости в резонаторе. Поперечное распределение профиля накачки $N_\mathrm{u}^0(r)$ в уравнении (15) играет роль «мягкой» апертуры [8]. В данной работе мы не ставили целью исследовать влияние согласования пучка накачки и внутрирезонаторного пучка на характеристики импульса. Поэтому представлены расчёты только для равномерного распределения накачки: $N_\mathrm{u}^0 = 1$.

### 1.3. Конфигурация резонатора

Расчёты проводились для симметричного резонатора: $L_1 = L_2 = 850$ мм. Длина активной среды $d = 20$ мм, показатель преломления кристалла $n = 1{,}76$, коэффициент пропускания апертуры приблизительно 75 %, коэффициент пропускания выходного зеркала $T = 0{,}95$, оптическая сила линз $F = 0{,}02$ мм$^{-1}$. Стационарный параметр пучка (см. рис. 2) рассчитывался при помощи метода ABCD-матриц. При отсутствии апертуры кривая $\eta = \eta(L_2)$ (рис. 2*а*) симметрична относительно точки $L_2 = 111{,}8$ мм. В этой точке резонатор эквивалентен конфокальному [5]. В конфигурации, близкой к конфокальной, коэффициент амплитудной модуляции $\mathrm{d}L/\mathrm{d}W$, где

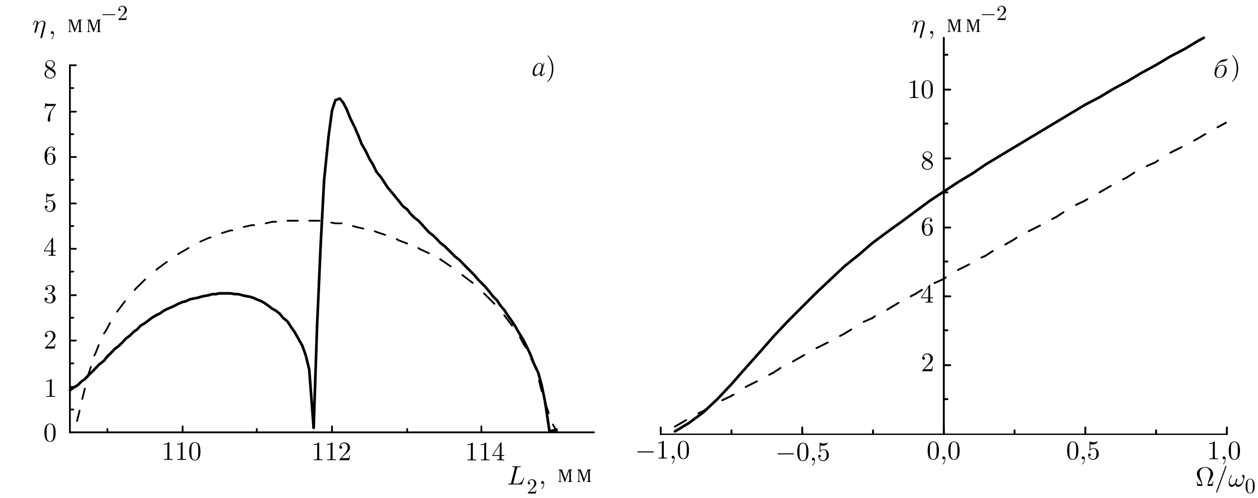



Рис. 2. Параметр пучка в пустом резонаторе перед линзой $M_2$: обратный размер пятна $\eta = \mathrm{Re}(P)_{\Omega=0}$ в зависимости от расстояния $L_2$ (*а*), параметр $\eta = \eta(\Omega)$ для $L_2 = 112{,}2$ мм (*б*). Непрерывная кривая рассчитана для параметра апертуры $\eta_{\mathrm{a}} = 3{,}64\,\text{мм}^{-2}$, штриховая кривая рассчитана для резонатора без апертуры ($\eta_{\mathrm{a}} = 0$)

$L$ — потери, $W$ — мощность пучка, имеет наибольшее значение [5]. Наличие апертуры нарушает симметрию резонатора; при $L_2 = 111{,}8$ мм резонатор становится неустойчивым (рис. 2*а*).

В нашей модели отклонение размеров пучка от соответствующих значений в пустом резонаторе возникает вследствие возбуждения поперечных мод более высокого порядка. В конфигурации, близкой к конфокальной, набег фазы за один проход по резонатору для различных мод близок к $2\pi$. За счёт нелинейности происходит синхронизация поперечных мод. В режиме синхронизации лазер генерирует импульсы, которые воспроизводятся от одного прохода по резонатору к другому. Если фазовый набег для различных мод близок, но не равен $2\pi$, интерференция мод приводит к модуляции выходной последовательности импульсов. Дополнительная неустойчивость может возникнуть вследствие частотной зависимости параметра пучка. Как видно из рис. 2*б*, этот эффект существенен только для импульсов, которые имеют широкий спектр. Фактически, влияние частотной зависимости дифракции становится заметным для импульсов с длительностью меньше 10 фс [45].

## 2. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЁТОВ

Изменение размеров пучка в зависимости от его мощности даёт информацию о нелинейных потерях в резонаторе. В процессе вычислений отклонение площади пучка от её стационарного значения в пустом резонаторе рассчитывалось по формуле

$$\sigma = \eta_0 \int_0^\infty r^3\,|E(r)|^2\,\mathrm{d}r \left(\int_0^\infty r\,|E(r)|^2\,\mathrm{d}r\right)^{-1}, \tag{16}$$

где $\eta_0 = \mathrm{Re}(P)_{\Omega=0}$. Длительность импульса рассчитывалась из временно́й зависимости интенсивности, проинтегрированной по поперечной координате: $W(\tau) = \int |E(r,\tau)|^2\, r\,\mathrm{d}r$. Кроме специально оговоренных случаев, длительность $\tau_0$ определялась на уровне, соответствующем половине максимума функции $W(\tau)$.

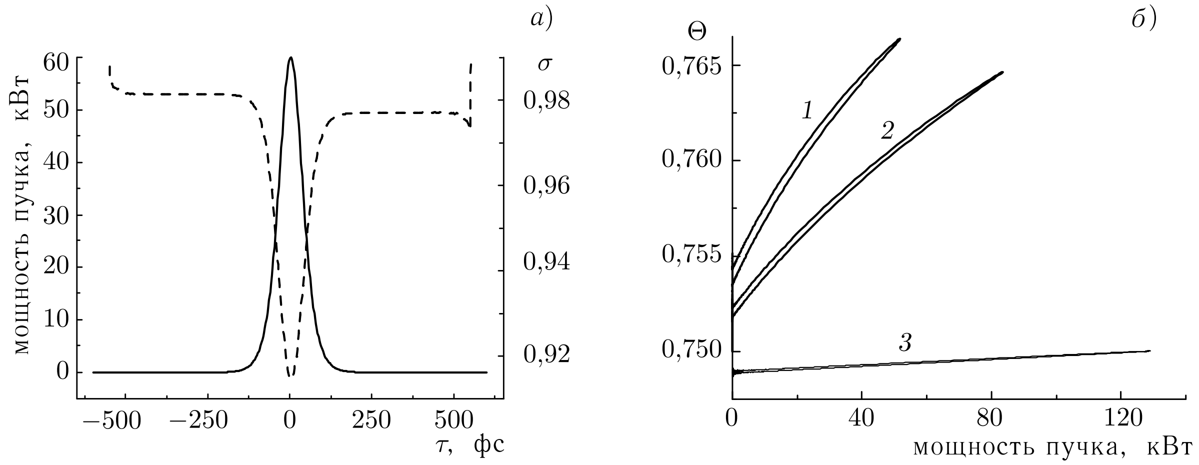



Рис. 3. Временна́я форма импульса (сплошная линия) и площадь пучка $\sigma$ (пунктир) в плоскости зеркала $M_1$ (*а*) и зависимость коэффициента пропускания апертуры $\Theta$ от мгновенной мощности пучка (*б*). Для всех кривых $\kappa_2 = -100$ фс$^2$, $\kappa_3 = 0$, усиление $G = 0{,}38$. Рис. 3*а* соответствует $L_2 = 112$ мм, $x = 47$ мм. Кривая *1* на рис. 3*б* построена для импульса, показанного на рис. 3*а*, $\tau_0 = 85$ фс, кривая *2* — для $L_2 = 112{,}2$ мм, $x = 47{,}2$ мм, $\tau_0 = 77$ фс, кривая *3* — для $L_2 = 112{,}5$ мм, $x = 51{,}5$ мм, $\tau_0 = 188$ фс

Коэффициент пропускания апертуры, равный 0,75, и коэффициент пропускания выходного зеркала $T = 0{,}95$ дают порог генерации $G = 0{,}354$. На рис. 3 показан импульс при усилении, близком к пороговому: $G = 0{,}38$. В этом режиме импульс воспроизводится от одного прохода по резонатору к другому. Временна́я зависимость площади пучка $\sigma(\tau)$ имеет слабую асимметрию относительно пика импульса (см. рис. 3*а*). Этот эффект возникает вследствие насыщения усиления в хвосте импульса. Асимметрия во временно́м распределении размера пучка отражается в гистерезисной зависимости коэффициента пропускания апертуры (рис. 3*б*). Для импульсов с длительностью $\tau_0 \gg 100$ фс этот эффект практически отсутствует, тогда как для импульсов с длительностью несколько фемтосекунд этот эффект может исказить солитонную форму импульса.

На рис. 3*б* кривые *1, 2, 3* соответствуют различным конфигурациям резонатора. Зная зависимость коэффициента пропускания апертуры от мощности $\Theta = \Theta(W)$, можно вычислить коэффициент амплитудной самомодуляции импульса путём дифференцирования: $\mathrm{d}\Theta/\mathrm{d}W|_{W=0}$. Для кривой *1* на рис. 3*б* этот коэффициент имеет максимальное значение, для кривой *3* — минимальное.

### 2.1. Биения высших поперечных мод

Изменение размеров пучка можно рассматривать как возбуждение аксиально-симметричных мод более высокого порядка. Поперечные моды вырождены по частоте только для резонатора, который является эквивалентным конфокальному ($L_2 = 111{,}8$ мм). Такая конфигурация резонатора является неустойчивой. При устойчивой конфигурации резонатора частотное вырождение поперечных мод является неполным. Однако за счёт пассивной синхронизации все поперечные моды могут быть сфазированы, формируя при этом гауссов пучок с зависящим от времени размером пятна. При синхронизации поперечных мод изменение фазы амплитуд $A_j$ за один обход резонатора должно быть кратно $2\pi$.

При достаточно высоком усилении рассогласование между фазами поперечных мод приводит к периодической модуляции выходной последовательности импульсов (рис. 4). В упрощённой

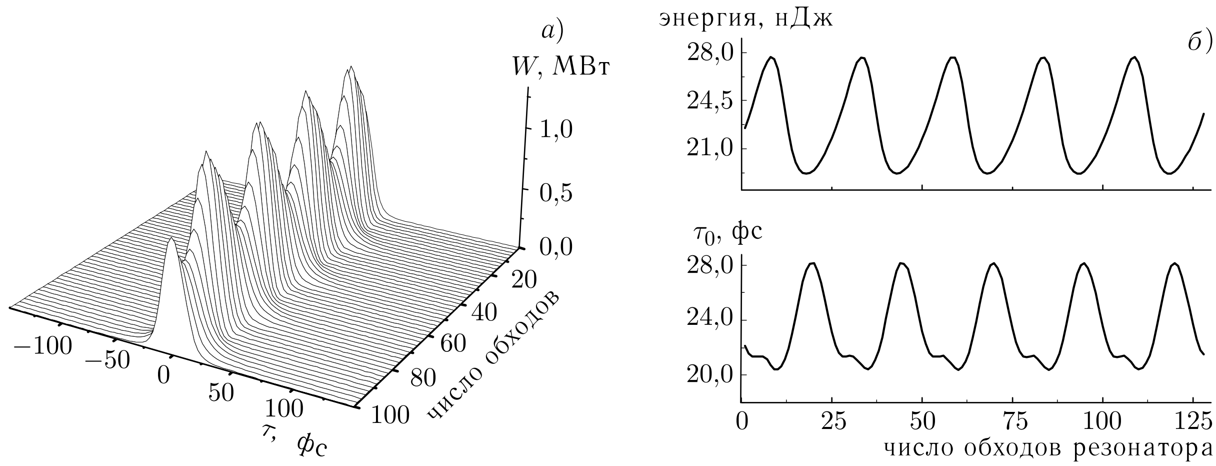



Рис. 4. Модуляция выходной последовательности импульсов вследствие биения поперечных мод. Изменение формы импульса от одного прохода по резонатору к другому (*а*) и периодические колебания энергии импульса и его длительности (*б*); $W$ — мощность пучка, $G = 0{,}43$, $\kappa_2 = -100\,\text{фс}^2$, $\kappa_3 = 0$, $L_2 = 112$ мм, $x = 47$ мм

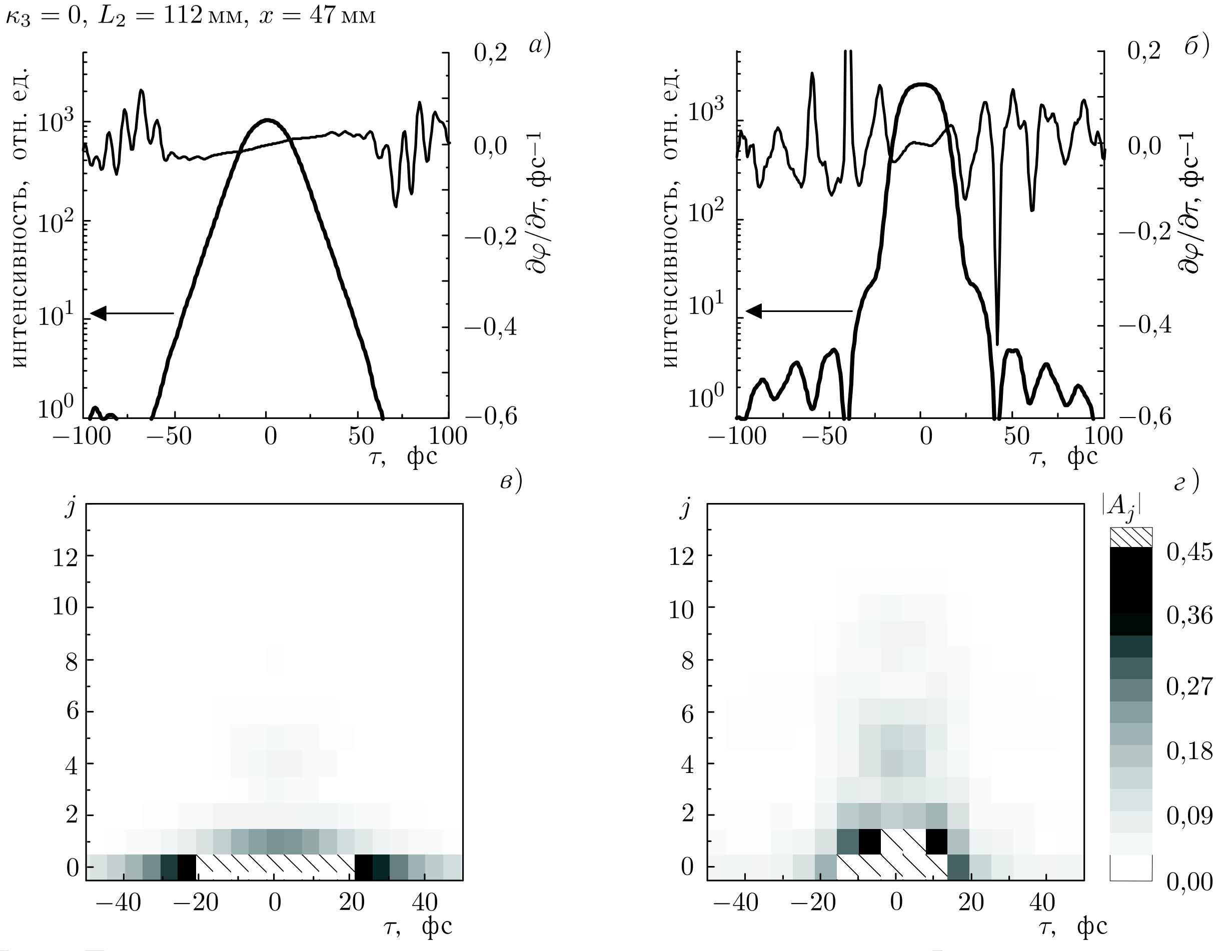



Рис. 5. Параметры импульса для режима генерации, показанного на рис. 4. Рис. 5*а* и *в* соответствуют импульсу с минимальной энергией, рис. 5*б* и *г* — импульсу с максимальной энергией. Показаны интенсивность и мгновенный сдвиг частоты $\partial\varphi/\partial\tau$ на оси пучка (*а*, *б*) и спектр мод $|A_j(\tau)|$ (*в*, *г*). Амплитуды мод нормированы на максимальную величину $|A_0|$. Для того, чтобы показать моды с малыми амплитудами, выбран диапазон $0 < |A_j| < 0{,}45$. Заштрихованная область соответствует $0{,}45 < < |A_j| < 1$

модели лазера [30], которая включает только изменение поперечного поля, модуляция выходной мощности появляется точно на частоте биений поперечных мод пустого резонатора. При $L_2 = 112$ мм, $x = 47$ мм фазовый набег основной гауссовой моды за один обход резонатора равен $1{,}866\pi$, что соответствует периоду биений поперечных мод, равному 15 обходам резонатора. Для полной пространственно-временно́й модели период биений равен 20 обходам резонатора (рис. 4). Как показали вычисления, период модуляции последовательности импульсов зависит от дисперсии и усиления. Этот эффект возникает из-за наличия релаксационных колебаний и осцилляций солитонного решения [24].

На рис. 5 демонстрируются характеристики импульсов в режиме генерации, показанном на рис. 4. Импульс с минимальной энергией (рис. 4*б*) имеет форму, близкую к гиперболическому секансу. Как можно заметить из рис. 5*в*, форма пучка определяется главным образом двумя амплитудами мод, $|A_0|$ и $|A_1|$. Интерференция этих мод приводит к формированию гауссового пучка с зависящим от времени поперечным размером. Импульс с более высокой энергией имеет форму искажённого гиперболического секанса (рис. 5*б*), на краях импульса появляется низкоинтенсивное излучение. Высокая энергия импульса сопровождается возбуждением поперечных мод высшего порядка (рис. 5*г*), при этом формируется пучок с распределением интенсивности, которое плохо аппроксимируется гауссовой функцией. Дальнейшее увеличение усиления $G$ приводит к усилению модуляции последовательности импульсов. В конечном итоге режим синхронизации мод разрушается.

Резонаторы для лазеров с керровской синхронизацией мод, как правило, проектируются с целью обеспечения максимальной самомодуляции амплитуды импульса [5, 46]. Более высокая амплитудная самомодуляция сопровождается более сильным отклонением размера пучка от его стационарной величины. Соответственно, для сильной амплитудной самомодуляции возбуждается большее количество поперечных мод в сравнении со случаем слабой самомодуляции. Для сильной самомодуляции ($L_2 = 112$ мм, $x = 47$ мм) биение мод появляется при усилении $G = 0{,}41$. Для слабой амплитудной самомодуляции ($L_2 = 112{,}5$ мм, $x = 51{,}5$ мм, см. рис. 3*б*) биения мод появляются при усилении, превышающем данную величину $G$ более чем в три раза.

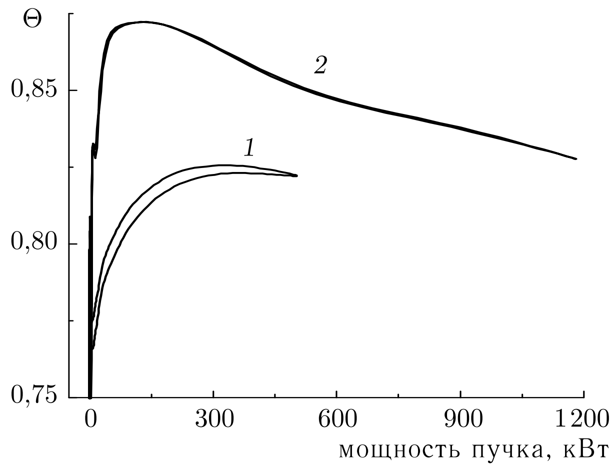



Рис. 6. Коэффициент пропускания апертуры для двух импульсов, показанных на рис. 5. Кривая *1* соответствует импульсу с минимальной энергией, кривая *2* — импульсу с максимальной энергией

В последовательности импульсов, генерируемой лазером, характер коэффициента пропускания апертуры изменяется от одного импульса к другому (рис. 6). Известно, что для конфигурации резонатора, которая соответствует сильной самомодуляции импульса, коэффициент пропускания апертуры насыщается с увеличением мощности пучка [38]. В полной пространственно-временно́й модели в дополнение к насыщению коэффициент пропускания апертуры имеет гистерезисно-подобную зависимость от мгновенной мощности пучка (рис. 6, кривая *1*). Кривая *1* на рис. 6 построена для импульса с минимальной энергией из последовательности, показанной на рис. 4. Импульс с более высокой энергией имеет совершенно другую характеристику пропускания апертурой (рис. 6, кривая *2*). С ростом мощности пучка коэффициент пропускания уменьшается. Этот эффект может быть связан с бифуркацией фундаментальной моды в нелинейном резонаторе [34].

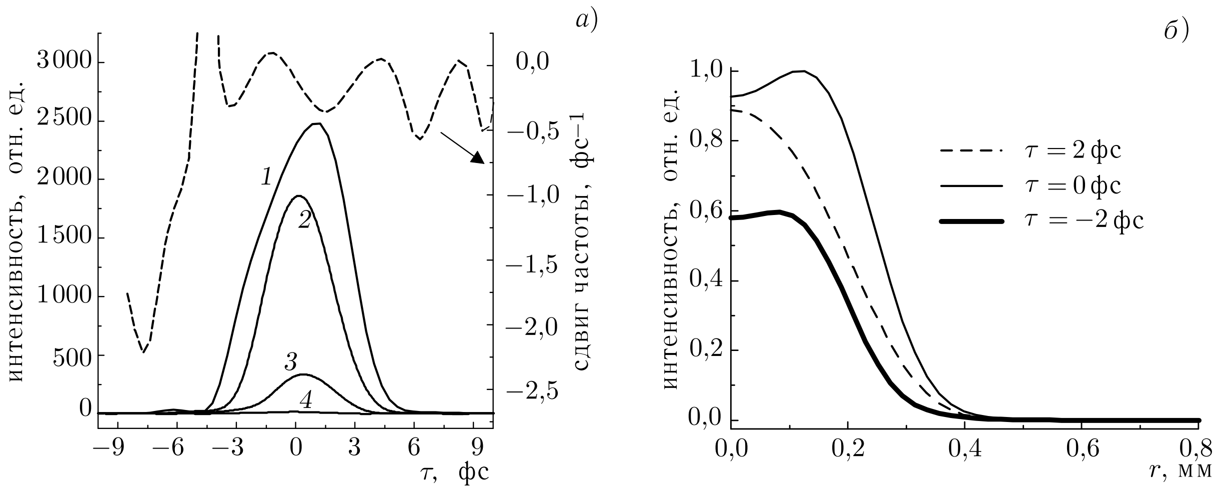



Рис. 7. Искажение формы импульса вследствие интерференции поперечных мод: (*а*) интенсивность импульса в зависимости от времени (кривые *1–4*): кривая *1* соответствует $r = 0$, *2* — $\eta_0 r^2 = 0{,}49$, *3* — $\eta_0 r^2 = 1{,}22$, *4* — $\eta_0 r^2 = 2{,}27$; пунктирная кривая показывает мгновенный сдвиг частоты $\partial\varphi/\partial\tau$ на оси пучка ($r = 0$), $\partial\varphi/\partial\tau > 0$ соответствует сдвигу в длинноволновую область спектра; (*б*) распределение интенсивности по поперечной координате в различные моменты времени. Зависимости соответствуют $G = 0{,}36$, $\kappa_2 = -4\,\text{фс}^2$, $\kappa_3 = 0$, $L_2 = 112{,}2\,\text{мм}$, $x = 47{,}2\,\text{мм}$

В рассмотренном режиме генерации спектральная ширина импульса не достаточна для того, чтобы частотная зависимость дифракции оказала заметное влияние на характеристики импульса. В следующем разделе мы рассмотрим режимы генерации с меньшей дисперсией групповой скорости $\kappa_2$, что позволяет получить более короткие импульсы.

### 2.2. Влияние частотной зависимости дифракции на генерацию импульсов с длительностью несколько фемтосекунд

Полагая в уравнениях (4), (5) и (7) $k_\Omega \approx k$, можно пренебречь частотной зависимостью дифракции и задержкой импульса вследствие кривизны зеркала. При таком подходе параметр пучка $P$ не зависит от частоты $\Omega$ и равен параметру пучка на несущей частоте: $P = P_{\Omega=0}$. Для сравнения мы протестировали режим генерации при $L_2 = 112{,}2\,\text{мм}$, $x = 47{,}2$ мм, $G = 0{,}36$ и $\kappa_2 = -4\,\text{фс}^2$ как с учётом частотной зависимости параметра пучка, так и без неё. Без учёта частотной зависимости параметра пучка длительность выходного импульса равна 2,17 фс. Принимая во внимание эффект частотной зависимости $P = P(\Omega)$ (рис. 2*б*), мы получили увеличение длительности импульса до 4,1 фс. Известно, что дисперсионные слагаемые третьего и более высоких порядков (11) ограничивают минимальную длительность импульсов в лазерах с керровской синхронизацией мод [12, 14]. Очевидно, что зависящая от частоты дифракция вносит дополнительный вклад в дисперсию резонатора, и её действие в некоторой степени эквивалентно влиянию дисперсии более высокого порядка. Однако учёт влияния дифракции на дисперсию импульса в резонаторе при помощи формулы, аналогичной (11), практически невозможен. Этот эффект проявляется только для поперечно-ограниченных импульсов и в приближении плоского волнового фронта отсутствует.

При наличии частотной зависимости параметра пучка $P = P(\Omega)$ импульс приобретает слабую асимметрию относительно своего максимума (рис. 7*а*). Фаза импульса испытывает сильную временну́ю модуляцию. Это отражается в относительно большом сдвиге мгновенной частоты. В основной части импульса ($-0{,}3\,\text{фс} < \tau < 0{,}3$ фс) сдвиг мгновенной частоты (рис. 7*а*, пунктирная линия) достигает величины, сопоставимой с шириной лоренцевской полосы усиления

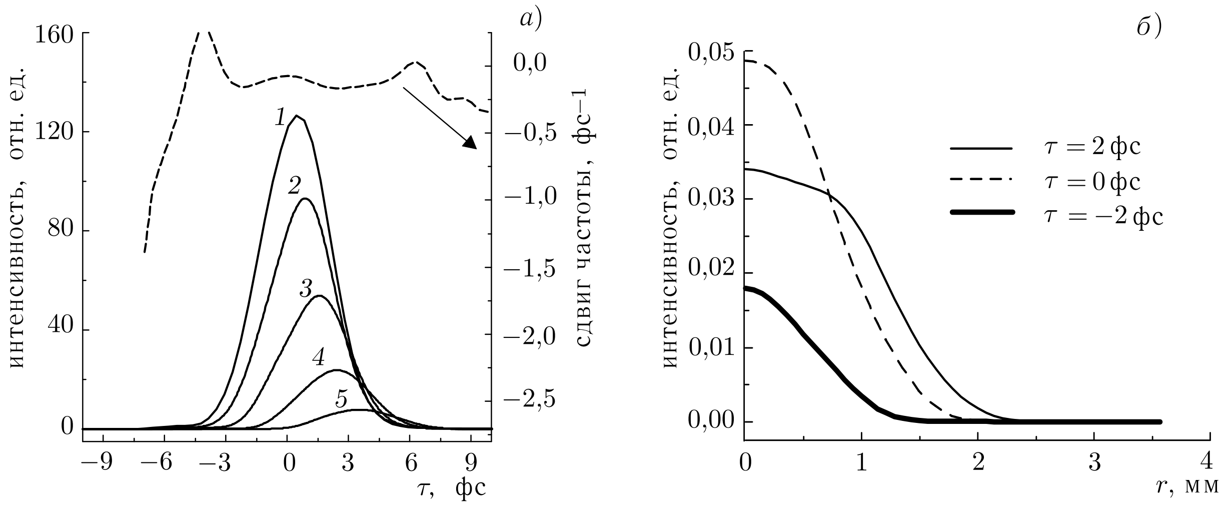



Рис. 8.(*а*) Форма импульса в дальней дифракционной зоне. Выходной импульс (см. рис. 7) прошёл в свободном пространстве расстояние 1 812,2 мм, равное длине резонатора. Кривая *1* соответствует $r = 0$, *2* — $\eta_0 r^2 = 0{,}49$, *3* — $\eta_0 r^2 = 1{,}22$, *4* — $\eta_0 r^2 = 2{,}27$, *5* — $\eta_0 r^2 = 3{,}67$, где $\eta_0 = \mathrm{Re}(P)_{\Omega=0}$; пунктирная линия показывает мгновенный сдвиг частоты на оси пучка ($r = 0$). (*б*) Распределение интенсивности по поперечной координате в различные моменты времени

$\Gamma = 0{,}31\,\text{фс}^{-1}$. Для оценки среднего сдвига несущей частоты импульса использовался момент первого порядка:

$$\Delta\omega = \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \Omega\,|\mathcal{E}(r,\Omega)|^2\,\mathrm{d}\Omega}{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{E}(r,\Omega)|^2\,\mathrm{d}\Omega} = -\frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \dot{\varphi}\,|E(r,\tau)|^2\,\mathrm{d}\tau}{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |E(r,\tau)|^2\,\mathrm{d}\tau}\,. \qquad (17)$$

На оси пучка средняя частота импульса сдвинута от центра линии усиления в коротковолновую область спектра: $\Delta\omega = 0{,}15\,\text{фс}^{-1}$, что составляет 53 нм. Вследствие ухудшения перекрытия контура усиления и спектра импульса этот сдвиг ограничивает спектральную ширину импульса. Сдвиг несущей частоты импульса с длительностью несколько фемтосекунд наблюдался в различных KLM-системах [10, 11, 17, 47]. Для объяснения этого эффекта использовались различные подходы. Сдвиг частоты может возникнуть вследствие влияния дисперсии третьего и более высоких порядков [13, 47], вынужденного комбинационного рассеяния [10, 11, 17], вследствие переизлучения в усиливающей среде [48]. Приведённый выше пример показывает, что частотный сдвиг может быть вызван дифракцией.

Для режима, показанного на рис. 7, импульс стабильно воспроизводится от одного прохода по резонатору к другому. Это означает, что фазы всех поперечных мод согласованы. Однако наличие высших поперечных мод приводит к искажению гауссовой формы пучка (рис. 7*б*). Одновременно длительность импульса, рассчитанная из временнóго профиля интенсивности $|E(r,\tau)|^2$, становится зависимой от поперечной координаты $r$. На оси пучка ($r = 0$) длительность импульса составляет 5,3 фс. Длительность импульса на периферии пучка ($\eta_0 r^2 = 1{,}22$, кривая *3* на рис. 7*а*) равна 3,6 фс. Здесь $\eta_0 = \mathrm{Re}(P)_{\Omega=0}$.

В резонаторе частотная зависимость дифракции (4)–(6) частично компенсируется пропусканием импульсного пучка линзой (отражением от сферического зеркала) (7). При дифракции в свободном пространстве такая компенсация отсутствует, и в дальней зоне дифракции выходной импульс становится сильно асимметричным (рис. 8*а*). Однако длительность импульса практически не зависит от радиальной координаты. Максимальная величина мгновенного сдвига частоты

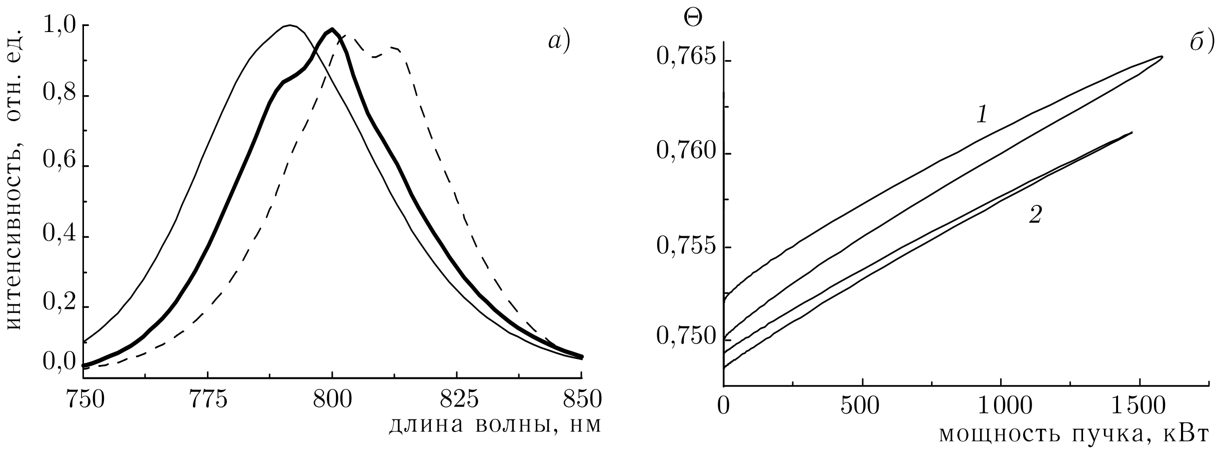



Рис. 9. (*а*) Спектр импульса на оси пучка: жирная кривая соответствует $\kappa_3 = 0$, $P = P_{\Omega=0}$, пунктирная кривая — $\kappa_3 = 12\,\text{фс}^3$, $P = P_{\Omega=0}$, тонкая кривая — $\kappa_3 = 0$, $P = P(\Omega)$. (*б*) Коэффициент пропускания апертуры в зависимости от мгновенной мощности пучка: кривая *1* соответствует $\kappa_3 = 0$, $P = P(\Omega)$; *2* — $\kappa_3 = 0$, $P = P_{\Omega=0}$. Для $\kappa_3 = 12\,\text{фс}^3$, $P = P_{\Omega=0}$ коэффициент пропускания апертуры, фактически, описывается кривой *2*. Зависимости получены для $L_2 = 112{,}5$ мм, $x = 51{,}5$ мм, $G = 0{,}36$, $\kappa_2 = -7\,\text{фс}^2$; длина волны лазерного перехода $\lambda_0 = 2\pi c\omega_0^{-1} = 800$ нм

в пределах основной части импульса уменьшается (рис. 8*а*). Среднее значение частотного сдвига в центре пучка для импульса, показанного на рис. 8*а*, составляет $\Delta\omega = 0{,}13\,\text{фс}^{-1}$. Дифракция приводит к сглаживанию поперечного профиля пучка. В результате интенсивность монотонно уменьшается с ростом координаты $r$ (рис. 8*б*).

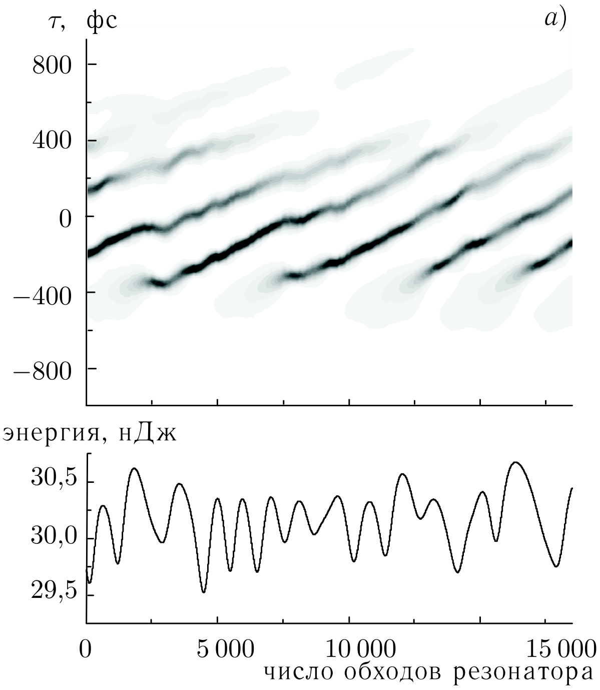
Вблизи нуля дисперсии групповой скорости режим самосинхронизации мод становится неустойчивым [22]. Расчёты показали, что такая неустойчивость может проявляться как разбиение импульса на несколько импульсов с меньшей длительностью. При сильной амплитудной самомодуляции импульса (см. рис. 3*б*, кривые *1, 2*) выходная последовательность импульсов становится неустойчивой при дисперсии групповой скорости $\kappa_2 = -2\,\text{фс}^2$. При слабой самомодуляции (рис. 3*б*, кривая *3*) последовательность импульсов становится неустойчивой уже при $\kappa_2 = -6\,\text{фс}^2$. В обоих случаях усиление $G = 0{,}36$, дисперсия третьего порядка $\kappa_3 = 0$.

Совместное действие дисперсии третьего порядка и частотной зависимости параметра пучка $P = P(\Omega)$ может несколько увеличить порог возникновения неустойчивости. Чтобы уменьшить влияние биений высших поперечных мод, мы рассмотрели режим генерации при относительно низком усилении $G = 0{,}36$ и конфигурации резонатора, соответствующей слабой самомодуляции амплитуды импульса (рис. 3*б*, кривая *3*). При $\kappa_2 = -7\,\text{фс}^2$ импульс воспроизводится от одного прохода по резонатору к другому для всех трёх случаев: а) $\kappa_3 = 0$, $P = P_{\Omega=0}$; б) $\kappa_3 = 12\,\text{фс}^3$, $P = P_{\Omega=0}$; в) $\kappa_3 = 0$, $P = P(\Omega)$. Полагая, что параметр пучка не зависит от частоты $P = P_{\Omega=0}$, мы пренебрегаем частотной зависимостью дифракции и задержкой импульса на линзе. Спектр импульса при отсутствии зависимости параметра пучка от частоты и при нулевой дисперсии третьего порядка показан на рис. 9*а*. Введение частотной зависимости параметра пучка $P = P(\Omega)$ приводит к сдвигу спектра импульса в коротковолновую область (рис. 9*а*, тонкая кривая). При отличной от нуля дисперсии третьего порядка и при отсутствии частотной зависимости параметра пучка спектр импульса сдвинут в противоположную область (рис. 9*а*, пунктирная кривая). Для каждого из трёх спектров, показанных на рис. 9*а*, длительность импульса практически одна и та же (около 9 фс). Частотная зависимость $P = P(\Omega)$ влияет не только на спектр импульса, но и на характер временно́й модуляции размера пучка (рис. 9*б*). При $\kappa_2 = -7\,\text{фс}^2$ совместное действие дисперсии третьего порядка и частотной зависимости параметра пучка $P = P(\Omega)$ приводит к разбиению исходного импульса на несколько отдельных импульсов (рис. 10*а*). Новые импульсы периодически появляются на переднем фронте импульса и исчезают в фоновом излучении в его хвосте.

Энергия полной последовательности импульсов испытывает медленные непериодические изменения в зависимости от числа обходов резонатора (рис. 10*а*). Вследствие низкого усиления и слабой самомодуляции импульса данный режим определяется динамикой только двух амплитуд мод, $A_0$ и $A_1$. В многоимпульсном режиме генерации коэффициент пропускания апертуры имеет довольно сложный характер (рис. 10*б*). Уменьшение дисперсии групповой скорости $|\kappa_2|$ приводит к увеличению числа пиков, при этом отдельные импульсы распространяются с различными групповыми скоростями.

Несмотря на то, что при $P = P(\Omega)$ порог возникновения многоимпульсной генерации повышается, основную роль в возникновении такого режима играет дисперсия активного перехода. При использовании адиабатического исключения поляризации в уравнении (13) так, что $\mathcal{P} = iE\Gamma\,(N_{\mathrm{u}} - N_{\mathrm{l}})\,(\Gamma + i\delta)^{-1}$, режим многоимпульсной генерации возникает только при нулевой дисперсии групповой скорости в резонаторе и является неустойчивым.

Многоимпульсная генерация экспериментально наблюдалась в работах [47, 49]. Основным фактором в возникновении многоимпульсной генерации считается наличие дисперсии четвёртого и более высоких порядков [38]. Однако, как показали вычисления, расщепление импульса при близкой к нулю дисперсии групповой скорости может происходить за счёт совместного действия дифракции и дисперсии активной среды.



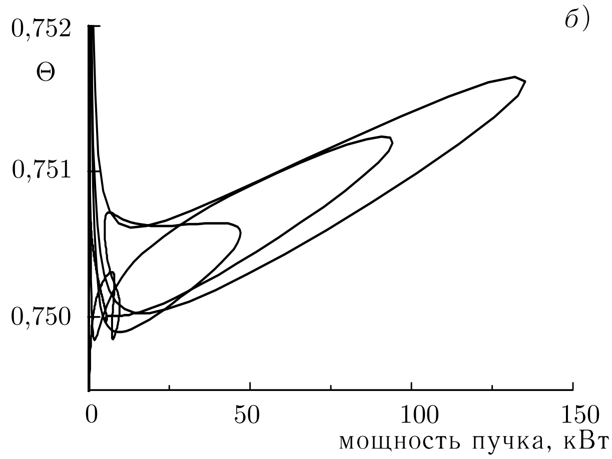




Рис. 10. Многоимпульсный режим генерации: (*а*) эволюция импульса за 19 000 проходов по резонатору и энергия импульса в зависимости от числа проходов по резонатору; чёрный цвет на верхнем рисунке соответствует максимуму интенсивности; (*б*) коэффициент пропускания апертуры для импульса, соответствующего последнему проходу на рис. 10*а*. Параметры резонатора $L_2 = 112{,}5$ мм, $x = 51{,}5$, мм, усиление за проход $G = 0{,}36$, $\kappa_2 = -7$ фс$^2$, $\kappa_3 = 72$ фс$^3$, эффект частотной зависимости параметра пучка учтён: $P = P(\Omega)$

## 3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложен метод моделирования пространственно-временно́й динамики лазера с керровской синхронизацией мод. При построении модели для стигматического резонатора использовались моды Лагерра—Гаусса. Подобный подход может применяться и для астигматического резонатора. В этом случае следует использовать моды Эрмита—Гаусса. В представленной модели поляризация среды рассчитывалась из уравнений Блоха. С учётом дифракции, зависящей от частоты, такой подход даёт правильное описание генерации импульсов, длительность которых сравнима с периодом осцилляций оптического поля. В то же время разложение пучка по модам резонатора позволяет существенно ускорить вычисления в сравнении с методом, использующим пространственное преобразование Фурье [39–41]. Скорость вычислений важна при исследовании динамики импульса на протяжении десятков тысяч проходов по резонатору.

В данной работе рассмотрено влияние связи пространственных и временны́х характеристик внутрирезонаторного поля на динамику последовательности импульсов с длительностью несколько фемтосекунд. В резонаторах с высоким коэффициентом модуляции нелинейных потерь и при достаточно высоком усилении биения поперечных мод приводят к модуляции выходной последовательности импульсов и искажению их солитонной формы.

Для ультракоротких импульсов наличие высших поперечных мод приводит к зависимости формы и длительности импульса от поперечной координаты. Для импульсов с длительностью меньше 10 фемтосекунд становится существенным влияние частотной зависимости дифракции. Этот эффект приводит к сдвигу несущей частоты в коротковолновую область спектра. В дальней зоне дифракции выходной импульс становится сильно асимметричным.

Уменьшение дисперсии групповой скорости приводит, как правило, к разрушению импульсного режима генерации. При этом зависящая от частоты дифракция может несколько увеличить порог возникновения неустойчивости в выходной последовательности импульсов. Данная неустойчивость проявляется в разбиении исходного импульса на несколько импульсов, разделённых коротким временны́м интервалом. Многоимпульсный режим генерации сопровождается низкочастотными колебаниями энергии импульса. Коэффициент пропускания апертуры имеет чётко выраженную гистерезисную зависимость от мощности пучка.

Представленные расчёты показывают, что связь между пространственными и временны́ми характеристиками ультракороткого импульса может оказывать существенное влияние на динамику лазера.

Данная работа частично поддержана грантом для молодых учёных (Y1–P–06–13) по программе BRHE (REC–006). Авторы благодарят Александра Аполонского (Photonics Institute, Vienna University of Technology) за ряд полезных замечаний.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Spence D. E., Kean P. N., Sibbet W. // Opt. Lett. 1991. V. 16. P. 42.
2. Magni V., Cerullo G., De Silvesrtri S. // Opt. Commun. 1993. V. 101. P. 365.
3. Haus H. A., Fujimoto J. G., Ippen E. P. // IEEE J. of Quantum Electron. 1992. V. 28. P. 2 086.
4. Cerullo G., De Silvesrtri S., Magni V., Pallaro L. // Opt. Lett. 1994. V. 19. P. 807.
5. Cerullo G., De Silvesrtri S., Magni V. // Opt. Lett. 1994. V. 19. P. 1 040.
6. Bohn M. J., Jones R. J., Diels J.-C. // Opt. Commun. 1999. V. 170. P. 85.
7. Garduno-Mejia J., Mohebi M., Jamasbi N. // Opt. Commun. 1999. V. 171. P. 263.
8. Herrmann J. // J. Opt. Soc. Am. B. 1994. V. 11. P. 498.
9. Alfrey A. J. // IEEE J. of Quantum Electron. 1989. V. 35. P. 760.
10. Kalashnikov V. L., Sorokin E., Sorokina I. T. Spectral characteristics of ultrashort pulses in Kerr-lens mode-locked lasers: Электронный препринт. http://arxiv.org/abs/physics/0101004.
11. Kalashnikov V., Sorokin E., Sorokina I. T. // J. Opt. Soc. Am. B. 2001. V. 18, No. 11. P. 1 732.
12. Brabec Th., Spielmann Ch., Krausz F. // Opt. Lett. 1992. V. 17. P. 748.
13. Herrmann J., Kalosha V. P., Müller M. // Opt. Lett. 1997. V. 22. P. 236.
14. Santagiustina M. // J. Opt. Soc. Am. B. 1997. V. 14. P. 1 484.

15. Christov I. P., Murnane M. M., Kapteyn H. C., Zhou J., Huang C. P. // Opt. Lett. 1994. V. 19. P. 1 465.
16. Kalashnikov V. L. // Opt. Commun. 2001. V. 192. P. 323.
17. Haus H. A., Sorokina I., Sorokin E. // J. Opt. Soc. Am. B. 1998. V. 15. P. 223.
18. Nakazawa M., Kubota H., Tamura K. // IEEE J. of Quantum Electron. 1998. V. 34. P. 1 075.
19. Brabec T., Spielmann C., Krausz F. // Opt. Lett. 1991. V. 16. P. 1 961.
20. Haus H. A., Fujimoto J. G., Ippen E. P. // J. Opt. Soc. Am. B. 1991. V. 8. P. 2 068.
21. Krausz F., Fermann M. E., Brabec T., et al. // IEEE J. of Quantum Electron. 1992. V. 28. P. 2 097.
22. Bolton S. R., Acton M. R. // Phys. Rev. A. 2000. V. 62. Article no. 063 803.
23. Konukhov A. I., Melnikov L. A., Veshneva I. V. // Laser Physics. 2000. V. 10. P. 614.
24. Ахманов С. А., Вислоух В. А., Чиркин А. С. Оптика фемтосекундных импульсов. М.: Наука, 1988.
25. Brabec T., Krausz F. // Phys. Rev. Lett. 1997. V. 78. P. 3 282.
26. Xing Q., Chai L., Zhang W., Wang C. // Opt. Commun. 1999. V. 162. P. 71.
27. Kovalsky M. G., Hnilo A. A., Gonzlez Inchauspe C. M. F. // Opt. Lett. 1999. V. 24. P. 1 638.
28. Cote D., van Dier H. M // Opt. Lett. 1998. V. 23. P. 715.
29. Bolton S. R., Jenks R. A., Elknton C. N., Sucha G. // J. Opt. Soc. Am. B. 1999. V. 16. P. 339.
30. Melnikov L. A., Veshneva I. V., Konukhov A. I. // Chaos, Solitons and Fractals. 1994. V. 4. P. 1 535.
31. Kutz J. N., Collings B. C., Bergman K., Knox W. H. // IEEE J. of Quantum Electron. 1998. V. 34. P. 1 749.
32. Jasapara J., Rudolph W., Kalashnikov V. L., et al. // J. Opt. Soc. Am. B. 2000. V. 17. P. 319.
33. Kalashnikov V. L., Poloyko I. G., Mikhailov V. P., von der Linde D. // J. Opt. Soc. Am. B. 1997. V. 14. P. 2 691.
34. Wei M. D., Hsieh W.-F. // Opt. Commun. 1999. V. 168. P. 161.
35. Martinez O. E., Chilla J. L. A. // Opt. Lett. 1992. V. 17. P. 1 210.
36. Chilla J. L. A., Martinez O. E. // J. Opt. Soc. Am. B. 1993. V. 10. P. 638.
37. Hnilo A. A. // J. Opt. Soc. Am. B. 1995. V. 12. P. 718.
38. Kalosha V. P., Müller M., Herrmann J., Gatz S. // J. Opt. Soc. Am. B. 1998. V. 15. P. 535.
39. Christov I. P., Stoev V. D., Murnane M. M., Kapteyn H. C. // Opt. Lett. 1995. V. 20. P. 2 111.
40. Christov I. P., Stoev V. D., Murnane M. M., Kapteyn H. C. // Opt. Lett. 1996. V. 21. P. 1 493.
41. Christov I. P., Stoev V. D. // J. Opt. Soc. Am. B. 1998. V. 15. P. 1 960.
42. Allen L., Eberly J. H. Optical resonance and two-level atoms. New York: Wiley, 1975.
43. Борисевич Н. А., Буганов О. В., Тихомиров С. А. и др. // Квантовая электроника. 1999. Т. 28. С. 225.
44. Самарский А. А. Введение в численные методы. М.: Наука, 1982. 272 с.
45. Agraval G. P. // Opt. Commun. 1998. V. 157. P. 52.
46. Bouma B. E., Ramaswamy-Paye M., Fujimoto J. G. // Appl. Phys. B. 1997. V. 65. P. 213.
47. Spielmann Ch., Curley P. F., Brabec T., Krausz F. // IEEE J. of Quantum Electron. 1994. V. 30. P. 1 100.
48. Uemira S., Torizuka K. // Opt. Lett. 1997. V. 24. P. 780.
49. Wang C., Zhang Z., Lee K. F., Yoo K. M. // Opt. Commun. 1997. V. 137. P. 89.

Саратовский государственный университет,
г. Саратов, Россия

Поступила в редакцию
20 января 2004 г.

**MODELING OF DYNAMICS OF A FEMTOSECOND KERR-LENS MODE-LOCKED LASER BY THE MODE DECOMPOSITION OF THE INTRACAVITY BEAM**

*A. I. Konyukhov and L. A. Melnikov*

Based on a full spatio-temporal model, we analyze the features of generation of femtosecond pulses in a Kerr-lens mode-locked laser. The developed algorithm involves the field decomposition in terms of Laguerre–Gaussian functions which are the modes of empty space. Polarization of the medium is calculated from the Bloch equations for the two-level transition. With allowance for the frequency-dependent diffraction, such a method makes it possible to describe generation of pulses with a duration of several femtoseconds. It is shown that diffraction results in a shift of the carrier frequency of sub-10-fs pulses to the short-wavelength region of the spectrum. A multiple-pulse operating regime can be observed near zero group-velocity dispersion in the cavity. It is shown that such a regime can be realized in the absence of higher-order dispersion. There is strong coupling between spatial and temporal characteristics of the field for pulses with a duration of several femtoseconds. This leads to the complicated dependence of the beam size on its power and, therefore, to the complicated variation in power-dependent losses. Due to this feature, regimes of generation of ultrashort pulses cannot be correctly described by models in which power-dependent losses are introduced artificially.

УДК 621.373.8:535.374

# НОВАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ОПИСАНИЯ СИНХРОНИЗАЦИИ МОД В ПОЛУПРОВОДНИКОВОМ ЛАЗЕРЕ

*А. Г. Владимиров* [1,2], *Д. В. Тураев* [3]

Рассмотрена новая модель для описания пассивной синхронизации мод в полупроводниковом лазере — система дифференциальных уравнений с задержкой. Численно исследованы бифуркации, приводящие к рождению и уничтожению режима синхронизации.

Пассивная синхронизация мод является одним из наиболее эффективных методов генерации коротких оптических импульсов. В частности, монолитные полупроводниковые лазеры, работающие в режиме синхронизации мод, являются дешёвыми, компактными и надёжными источниками импульсов с высокой частотой повторения, идеальными для применения в телекоммуникационных технологиях [1]. Благодаря большому коэффициенту усиления полупроводниковой среды длина резонатора этих лазеров может быть сделана достаточно малой, что в сочетании с малым временем отклика усиливающей и поглощающей сред позволяет генерировать импульсы с частотой повторения, равной нескольким десяткам гигагерц. Основной физический механизм, лежащий в основе пассивной синхронизации мод, хорошо известен. Для случая, когда время релаксации поглотителя много больше длительности импульса («медленный» поглотитель), указанный механизм состоит в следующем [2]. Поглощающая среда насыщается с приходом импульса быстрее усиливающей и тем самым открывает короткое окно усиления, необходимое для компенсации потерь и, следовательно, поддержания режима синхронизации. Основы аналитической теории пассивной синхронизации мод в лазере с медленным поглотителем были заложены более четверти века назад в работах Нью и Хауса [2–4]. Оба эти автора использовали приближение малых потерь и усиления за проход резонатора. В работе Нью не учитывалась спектральная фильтрация импульса. Фактически это означает, что в синхронизации участвует бесконечное число продольных мод резонатора и, следовательно, генерируется бесконечно узкий импульс. Энергия импульса при этом остаётся конечной и может быть выражена через параметры лазера. В работе Хауса использовалось параболическое приближение для профиля коэффициента спектральной фильтрации. Хаус показал, что даже в случае, когда ширина этого профиля стремится к бесконечности, границы области синхронизации не совпадают с границами, полученными Нью в приближении отсутствия в модели спектральной фильтрации. В приближении слабого насыщения поглотителя Хаусом было получено аналитическое выражение для формы импульса синхронизации мод в виде гиперболического секанса. Согласно этому выражению амплитуда импульса пассивной синхронизации мод убывает при удалении от центра импульса экспоненциально, а не по гауссову закону, как это имеет место для случая активной синхронизации мод. Этот результат был проверен в экспериментах с лазером на красителе [5]. В последовавшие после работы Хауса десятилетия его модель и различные её модификации были подвергнуты детальному исследованию (см., например, [6–11]).

Несмотря на определённые успехи, связанные с моделью Хауса, возможность её применения для корректного описания синхронизации мод в полупроводниковом лазере вызывает сомнение. В первую очередь, это связано с тем, что приближения, использованные при выводе этой модели, такие, например, как малость потерь и усиления за проход, в полупроводниковом лазере не выполняются. Поэтому наиболее распространённые в настоящее время подходы к анализу синхронизации мод в полупроводниковых лазерах основаны на прямом численном моделировании [7].

Они, хотя и позволяют достаточно точно учитывать различные физические факторы, влияющие на работу конкретного устройства, дают недостаточное понимание физических процессов, лежащих в основе процесса синхронизации.

В настоящей статье мы предлагаем новую модель для описания пассивной синхронизации мод в полупроводниковом лазере. С одной стороны, наша модель является гораздо более общей, чем упомянутые выше модели Нью и Хауса. В отличие от этих моделей, она не использует приближений малых усиления и потерь за проход, слабого насыщения, бесконечной ширины контура спектральной фильтрации. Единственные принятые нами приближения основаны на часто используемых в теории лазерной генерации предположениях о кольцевой геометрии резонатора и лоренцевской форме контура спектральной фильтрации. С другой стороны, предлагаемая нами модель — система дифференциальных уравнений с задержкой — значительно проще используемых в настоящее время для описания пассивной синхронизации мод численных моделей. Она допускает прозрачную физическую интерпретацию полученных с её помощью результатов в рамках переменных, которые использовались в моделях Хауса и Нью. Можно показать, что эти две модели могут быть получены из нашей как её частные случаи [12]. Другим преимуществом нашей модели является возможность применения для её исследования методов, разработанных для анализа бифуркаций дифференциальных уравнений с задержкой.

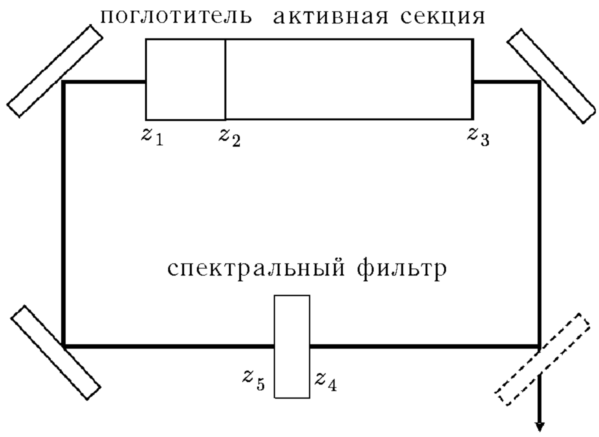



Рис. 1. Схематическое изображение кольцевого лазера. Координата $z$ измеряется вдоль оси резонатора. Интервалы $z_1 < z < z_2$ и $z_2 < z < z_3$ заполнены насыщающимся поглотителем и активной средой соответственно. Спектральный фильтр расположен в интервале $z_4 < z < z_5$. Интервалы $z_3 < z < z_4$ и $z_5 < z < z_1 + L$ заполнены пассивной средой

Рассмотрим кольцевой лазер с насыщающимся поглотителем (см. рис. 1). Будем считать, что одна из встречных волн подавлена, т. е. генерация лазера является однонаправленной. Пусть $z$ — координата вдоль оси лазера. Лазер состоит из пяти секций. Первая ($z_1 < z < z_2$) и вторая ($z_2 < z < z_3$) секции содержат поглощающую и усиливающую среды соответственно. Третья ($z_3 < z < z_4$) и пятая ($z_5 < z < z_1 + L$) секции являются пассивными. Четвёртая секция ($z_4 < z < z_5$) работает как спектральный фильтр. Эволюция амплитуды бегущей электромагнитной волны в усиливающей и поглощающей секциях может быть описана следующей системой уравнений в частных производных:

$$\frac{\partial E(t,z)}{\partial z} + \frac{1}{v}\,\frac{\partial E(t,z)}{\partial t} = \frac{g_\mathrm{r}\Gamma_\mathrm{r}}{2}\,(1 - i\alpha_\mathrm{r})\,\left[N_\mathrm{r}(t,z) - N_\mathrm{r}^\mathrm{tr}\right]\,E(t,z), \tag{1}$$

$$\frac{\partial N_\mathrm{r}(t,z)}{\partial t} = J_\mathrm{r} - \gamma_\mathrm{r}\,N_\mathrm{r}(t,z) - v g_\mathrm{r}\Gamma_\mathrm{r}\left[N_\mathrm{r}(t,z) - N_\mathrm{r}^\mathrm{tr}\right]\,|E(t,z)|^2. \tag{2}$$

Здесь индекс $\mathrm{r} = \mathrm{g}$ ($\mathrm{r} = \mathrm{q}$) относится к усиливающей (поглощающей) секции, $E(z,t)$ — медленно меняющаяся комплексная амплитуда электрического поля, переменные $N_\mathrm{g}(z,t)$ и $N_\mathrm{q}(z,t)$ описывают плотности носителей в усиливающей и поглощающей секциях лазера, $N_\mathrm{g}^\mathrm{tr}$ и $N_\mathrm{q}^\mathrm{tr}$ — плотности носителей на уровне прозрачности, $v$ — групповая скорость света, которая считается одинаковой во всех четырёх секциях, параметры $\alpha_{\rm g}$ и $\alpha_{\rm q}$, $g_{\rm g}$ и $g_{\rm q}$, $\gamma_{\rm g} = 1/T_{\rm g}$ и $\gamma_{\rm q} = 1/T_{\rm q}$ описывают альфа-факторы, дифференциальные усиления/потери и скорости релаксации для усиливающей и поглощающей секций соответственно. Множители $\Gamma_{\rm g}$ и $\Gamma_{\rm q}$ введены для учёта поперечного распределения поля в соответствующей секции. Наконец, параметр $J_{\rm g}$ задаёт ток инжекции в усиливающей секции. Для поглощающей секции $J_{\rm q} = 0$.

Амплитуда электрического поля в пассивных секциях удовлетворяет уравнению (1) с нулевой правой частью:

$$\frac{\partial E(t,z)}{\partial z} + \frac{1}{v}\,\frac{\partial E(t,z)}{\partial t} = 0. \tag{3}$$

Последняя секция, ответственная за спектральную фильтрацию ($z_4 < z < z_5$) считается бесконечно тонкой, т. е. $z_4 = z_5$. Преобразование амплитуды электрического поля в этой секции определяется соотношением

$$\hat{E}(\omega, z_5) = \hat{f}(\omega)\hat{E}(\omega, z_4), \tag{4}$$

где $\hat{E}(\omega, z_4)$ и $\hat{E}(\omega, z_5)$ — фурье-преобразования амплитуд $E(t, z_4)$ и $E(t, z_5)$ соответственно. Функция $\hat{f}(\omega)$ задаёт спектральную форму линии фильтрующего элемента.

В кольцевом лазере амплитуда электрического поля удовлетворяет периодическим граничным условиям

$$E(t, z + L) = E(t, z), \tag{5}$$

где $L$ — длина резонатора.

После замены координат $(t, z) \to (\tau, z)$, где $\tau = t - z/v$, уравнения (1) и (2) для усиливающей и поглощающей секций приобретают вид

$$\frac{\partial A(\tau,z)}{\partial z} = \frac{1}{2}\,(1 - i\alpha_{\rm g})\, n_{\rm g}(\tau,z) A(\tau,z), \tag{6}$$

$$\frac{\partial n_{\rm g}(\tau,z)}{\partial \tau} = j_{\rm g} - \gamma_{\rm g} n_{\rm g}(\tau,z) - n_{\rm g}(\tau,z)\,|A(\tau,z)|^2; \tag{7}$$

$$\frac{\partial A(\tau,z)}{\partial z} = -\,\frac{1}{2}\,(1 - i\alpha_{\rm q})\, n_{\rm q}(\tau,z) A(\tau,z), \tag{8}$$

$$\frac{\partial n_{\rm q}(\tau,z)}{\partial \tau} = -j_{\rm q} - \gamma_{\rm q} n_{\rm q}(\tau,z) - s n_{\rm q}(\tau,z)\,|A(\tau,z)|^2, \tag{9}$$

где $A(\tau,z) = E(t,z)\sqrt{v g_{\rm g}\Gamma_{\rm g}}$, $n_{\rm g}(\tau,z) = g_{\rm g}\Gamma_{\rm g}\,[N_{\rm g}(\tau,z) - N_{\rm g}^{\rm tr}]$, $n_{\rm q}(\tau,z) = g_{\rm q}\Gamma_{\rm q}\,[N_{\rm q}(\tau,z) - N_{\rm q}^{\rm tr}]$, $j_{\rm g} = g_{\rm g}\Gamma_{\rm g}J_{\rm g} - \gamma_{\rm g}N_{\rm g}^{\rm tr}$ и $j_{\rm q} = \gamma_{\rm q}N_{\rm q}^{\rm tr}$. Параметр $s = g_{\rm q}\Gamma_{\rm q}/(g_{\rm g}\Gamma_{\rm g})$ представляет собой отношение интенсивностей насыщения в усиливающей и поглощающей секциях.

Аналогичным образом для пассивных секций получаем

$$\frac{\partial A(\tau,z)}{\partial z} = 0. \tag{10}$$

Теперь, используя уравнения (6)–(10) и (4), опишем преобразование поля в результате прохода через каждую из пяти секций резонатора.

**1. Насыщающийся поглотитель ($z_1 < z < z_2$).** Связь между амплитудой поля на входе и выходе этой секции задаётся соотношением

$$A(\tau, z_2) = \exp\left[-\,\frac{1 - i\alpha_{\rm q}}{2}\,Q(\tau)\right] A(\tau, z_1), \tag{11}$$

где $Q(\tau)$ — безразмерная интегральная плотность носителей в поглощающей секции:

$$Q(\tau) = \int\limits_{z_1}^{z_2} n_{\mathrm{q}}(\tau, z)\, \mathrm{d}z. \tag{12}$$

Интегрируя уравнение (9) по $z$ от $z_1$ до $z_2$ и используя соотношение

$$\int\limits_{z_1}^{z_2} n_{\mathrm{q}}(z,\tau)\, |A(\tau,z)|^2\, \mathrm{d}z = -|A(z_2,\tau)|^2 + |A(z_1,\tau)|^2, \tag{13}$$

которое следует из (6), мы получаем дифференциальное уравнение для интегральной плотности носителей:

$$\mathrm{d}Q(\tau)/\mathrm{d}\tau = -q_0 - \gamma_{\mathrm{q}} Q(\tau) + s\, |A(\tau, z_2)|^2 - s\, |A(\tau, z_1)|^2, \tag{14}$$

где $q_0 = \int_{z_1}^{z_2} j_{\mathrm{q}}\, \mathrm{d}z$.

**2. Усиливающая секция ($z_2 < z < z_3$).** Уравнения для этой секции аналогичны уравнениям, полученным для поглощающей секции, и имеют вид

$$A(\tau, z_3) = \exp\left[\frac{1 - i\alpha_{\mathrm{g}}}{2}\, G(\tau)\right] A(\tau, z_2), \tag{15}$$

и

$$\mathrm{d}G(\tau)/\mathrm{d}\tau = g_0 - \gamma_{\mathrm{g}} G(\tau) - |A(\tau, z_3)|^2 + |A(\tau, z_2)|^2. \tag{16}$$

Здесь

$$G(\tau) = \int\limits_{z_2}^{z_3} n_{\mathrm{g}}(\tau, z)\, \mathrm{d}z, \qquad g_0 = \int\limits_{z_2}^{z_3} j_{\mathrm{g}}\, \mathrm{d}z. \tag{17}$$

**3. Пассивные секции ($z_3 < z < z_4$ и $z_5 < z < z_1 + L$).** Преобразование поля этими секциями задаётся соотношениями

$$A(z_4, \tau) = \sqrt{\kappa}\, A(z_3, \tau), \qquad A(z_1 + L, \tau) = A(z_5, \tau). \tag{18}$$

Здесь множитель $\sqrt{\kappa} < 1$ описывает суммарные линейные нерезонансные потери. Без ограничения общности можно предположить, что все они сосредоточены в первой пассивной секции.

**4. Спектральный фильтр ($z_4 < z < z_5$).** Во временно́м представлении уравнение (4) приобретает вид

$$A(\tau, z_5) = \int\limits_{-\infty}^{\tau} f(\tau - \theta) A(\theta, z_4)\, \mathrm{d}\theta, \tag{19}$$

где $f(\tau)$ стремится к нулю при $\tau \to \infty$ достаточно быстро для того, чтобы интеграл в (19) сходился.

Подставляя (11), (15), (18) в (19) и используя периодические граничные условия (5), которые в переменных $(z,\, \tau)$ приобретают вид

$$A(\tau, z + L) = A(\tau + T, z), \tag{20}$$

мы получаем преобразование амплитуды электрического поля на входе в поглощающую секцию за полный обход резонатора:

$$A(\tau + T) = \sqrt{\kappa} \int\limits_{-\infty}^{\tau} f(\tau - \theta) \exp\left[\frac{1 - i\alpha_{\rm g}}{2}\, G(\theta) - \frac{1 - i\alpha_{\rm q}}{2}\, Q(\theta)\right] A(\theta)\, {\rm d}\theta. \tag{21}$$

Здесь введено обозначение $A(\tau) \equiv A(\tau, z_1)$, $T = L/v$ — время обхода резонатора.

Уравнения, задающие временну́ю эволюцию переменных $G(\tau)$ и $Q(\tau)$, получаются из (16) и (14). Выражая с помощью соотношений (11) и (15) $A(\tau, z_2)$ и $A(\tau, z_3)$ через $A(\tau, z_1) \equiv A(\tau)$, получаем

$$\mathrm{d}G(\tau)/\mathrm{d}\tau = g_0 - \gamma_{\rm g} G(\tau) - \exp[-Q(\tau)]\, (\exp[G(\tau)] - 1)\, |A(\tau)|^2, \tag{22}$$

$$\mathrm{d}Q(\tau)/\mathrm{d}\tau = q_0 - \gamma_{\rm q} Q(\tau) - s\, (1 - \exp[-Q(\tau)])\, |A(\tau)|^2. \tag{23}$$

Система интегро-дифференциальных уравнений (21)–(23) описывает пассивную синхронизацию мод в кольцевом лазере с произвольной формой линии спектрального фильтра, задаваемой функцией $f(\tau)$. Рассмотрим случай лоренцевой формы линии:

$$f(\tau - \theta) = \gamma \exp[-\gamma\, (\tau - \theta)]. \tag{24}$$

В этом случае уравнения (21)–(23) могут быть заменены системой дифференциальных уравнений с задержкой:

$$\mathrm{d}A(\tau)/\mathrm{d}\tau = -\gamma \left[A(\tau) - \sqrt{\kappa} \exp\left[\frac{1 - i\alpha_{\rm g}}{2}\, G(\tau - T) - \frac{1 - i\alpha_{\rm q}}{2}\, Q(\tau - T)\right] A(\tau - T)\right], \tag{25}$$

$$\mathrm{d}G(\tau)/\mathrm{d}\tau = g_0 - \gamma_{\rm g} G(\tau) - \exp[-Q(\tau)]\, (\exp[G(\tau)] - 1)\, |A(\tau)|^2, \tag{26}$$

$$\mathrm{d}Q(\tau)/\mathrm{d}\tau = -q_0 - \gamma_{\rm q} Q(\tau) - s\, (1 - \exp[-Q(\tau)])\, |A(\tau)|^2. \tag{27}$$

В самом деле, решение (25) имеет вид

$$A(\tau) = \exp(-\gamma\tau) A(0) + \\ + \gamma \sqrt{\kappa} \int\limits_{0}^{\tau} \exp\left[\gamma\, (\theta - \tau) + \frac{1 - i\alpha_{\rm g}}{2}\, G(\theta - T) - \frac{1 - i\alpha_{\rm q}}{2}\, Q(\theta - T)\right] A(\theta - T)\, \mathrm{d}\theta \tag{28}$$

и совпадает с (21), (24), если

$$A(0) = \gamma \sqrt{\kappa} \int\limits_{-\infty}^{0} \exp\left[\gamma\theta + \frac{1 - i\alpha_{\rm g}}{2}\, G(\theta - T) - \frac{1 - i\alpha_{\rm q}}{2}\, Q(\theta - T)\right] A(\theta - T)\, \mathrm{d}\theta. \tag{29}$$

Заметим, что даже в случае, когда условие (29) не выполнено, первое слагаемое в (28) стремится к нулю при $\tau \to \infty$. Поэтому решение (25) в этом пределе совпадает с (21), (24).

Уравнения (25)–(27) являются основной моделью, предложенной в данной статье. Они были получены для случая, когда центр линии пропускания спектрального фильтра в точности совпадает с частотой одной из мод резонатора. Если это условие не выполнено, уравнения для описания пассивной синхронизации могут быть получены из (25)–(27) с помощью замены $\sqrt{\kappa} \to \to \sqrt{\kappa} \exp(i\phi)$ в (25), где фаза $\phi$ определяется частотной расстройкой между центром линии спектрального фильтра и ближайшей к ней модой резонатора. Ниже мы рассматриваем только случай, когда $\phi = 0$.

Следует заметить, что подход, аналогичный использованному в нашей статье, применялся ранее Гуревичем и Ханиным [13–16] для описания пассивной синхронизации мод в твердотельном лазере. Система дифференциальных уравнений с задержкой, полученная в работах этих авторов, вместо насыщающегося усиления $G$ и насыщающегося поглощения $Q$ содержит две другие переменные, задающие амплитуду электромагнитного поля в различных сечениях лазера. Преимуществом модели (25)–(27), на наш взгляд, является то, что в отличие от модели Гуревича—Ханина она не содержит сингулярности при обращении амплитуды электромагнитного поля в нуль. Благодаря этому для исследования нашей модели применимы аналитические методы, аналогичные тем, которые были разработаны Нью и Хаусом для описания режима пассивной синхронизации мод в лазерах с медленным поглотителем. К этой категории относятся лазеры, у которых время релаксации насыщающегося поглотителя значительно больше длительности генерируемого импульса, и, в частности, полупроводниковые и твердотельные лазеры, работающие в режиме синхронизации мод. В основе методов Нью и Хауса лежит разбиение решения с периодической по времени интенсивностью лазерного поля на две стадии, одна из которых, так называемое медленное движение, соответствует временно́му интервалу между импульсами, когда амплитуда электромагнитного поля практически обращается в нуль, а усиление и поглощение медленно релаксируют к ненасыщенным значениям. Подробное описание аналитических методов исследования уравнений (25)–(27) в случае медленного поглотителя приведено в работе [12].

Случай лоренцевой формы линии спектрального фильтра не является единственным, для которого уравнение (21) может быть заменено на дифференциальное уравнение с задержкой. Другой такой случай имеет место, когда функция $f(\tau)$ имеет вид

$$f(\tau) = \frac{\gamma}{2}\,[\mathrm{sgn}(\tau) - \mathrm{sgn}(\tau - \gamma^{-1})]. \tag{30}$$

Преобразование Фурье от (30) имеет вид

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\!\left(\frac{i\omega}{2\gamma}\right) \left(\frac{\omega}{2\gamma}\right)^{-1} \sin\!\left(\frac{\omega}{2\gamma}\right), \tag{31}$$

что соответствует отражению от брэгговской решётки малой амплитуды. В этом случае (21) можно заменить на уравнение, содержащее две задержки:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}A(\tau)/\mathrm{d}\tau = \gamma\sqrt{\kappa}\,\Bigg[&\exp\left[\frac{1-i\alpha_{\mathrm g}}{2}\,G(\tau-T) - \frac{1-i\alpha_{\mathrm q}}{2}\,Q(\tau-T)\right] A(\tau-T) - \\ &- \exp\left[\frac{1-i\alpha_{\mathrm g}}{2}\,G(\tau-T_1) - \frac{1-i\alpha_{\mathrm q}}{2}\,Q(\tau-T_1)\right] A(\tau-T_1)\Bigg], \end{aligned} \tag{32}$$

где $T_1 = T + \gamma^{-1}$. Решение (32) имеет вид

$$A(\tau) = c + \gamma\sqrt{\kappa} \int\limits_{\tau-T_1}^{\tau-T} \exp\left[\frac{1-i\alpha_{\mathrm g}}{2}\,G(\theta) - \frac{1-i\alpha_{\mathrm q}}{2}\,Q(\theta)\right] A(\theta)\,\mathrm{d}\theta, \tag{33}$$

где $c$ — произвольная константа. Если $c = 0$, выражение (33) совпадает с (21) с функцией $f(\tau)$, заданной соотношением (30). Подставляя в (33) $\tau = 0$ и $c = 0$, получаем следующее начальное условие для амплитуды поля:

$$A(0) = \gamma \sqrt{\kappa} \int\limits_{-T_1}^{-T} \exp\left[\frac{1 - i\alpha_{\rm g}}{2}\, G(\theta) - \frac{1 - i\alpha_{\rm q}}{2}\, Q(\theta)\right] A(\theta)\, {\rm d}\theta. \tag{34}$$

Заметим, однако, что, как следует из (33), в отличие от уравнений (25)–(27), начальное условие для системы (32), (26) и (27) не затухает экспоненциально со временем. Поэтому при численном решении этой системы для получения корректного результата всегда необходимо выбирать правильное начальное условие, удовлетворяющее соотношению (34). Смысл этого условия заключается в следующем. Замена интегрального уравнения (21) на дифференциальное уравнение с задержкой (32) эквивалентна замене интегрального соотношения (19), определяющего преобразование электромагнитного поля спектральным фильтром, на дифференциальное уравнение, которое определяет поле на выходе спектрального фильтра $A(\tau, z_5)$ через поле на входе $A(\tau, z_4)$ не однозначно, а с точностью до некоторой произвольной константы. Для устранения подобной неоднозначности необходимо использовать начальное условие (34).

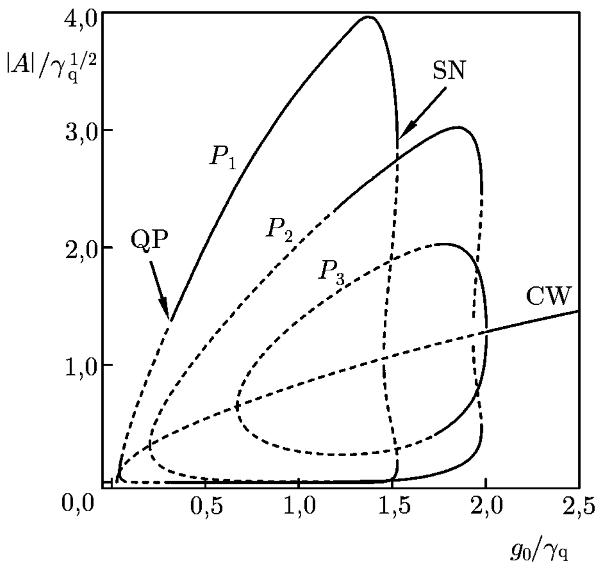



Рис. 2. Решения системы (25)–(27) с постоянной и периодической во времени интенсивностью лазерного поля; $q_0 = 2\gamma_{\rm q}$, $T = 25$ пс, $\gamma^{-1} = 0{,}4$ пс, $\alpha_{\rm g} = \alpha_{\rm q} = 0$, $s = 5$, $\gamma_{\rm g}^{-1} = 1$ нс, $\gamma_{\rm q}^{-1} = 10$ пс, $\kappa = 0{,}5$. Периодические решения $P_1$, $P_2$ и $P_3$ бифурцируют от стационарного решения, обозначенного CW, в точках бифуркаций Хопфа. Устойчивые и неустойчивые решения обозначены сплошными и пунктирными линиями соответственно

В заключение приведём результаты расчёта областей пассивной синхронизации мод для уравнений (25)–(27), полученные с помощью пакета программ DDE-BIFTOOL, предназначенного для численного анализа бифуркаций систем дифференциальных уравнений с задержкой [17]. Эти результаты представлены на рис. 2 для случая, когда альфа-факторы усиливающей и поглощающей сред равны нулю: $\alpha_{\rm g} = \alpha_{\rm q} = 0$. Случай, когда альфа-факторы не равны нулю, является более сложным и будет рассмотрен в отдельной публикации. При ненулевых альфа-факторах после обхода резонатора импульс приобретает фазовый сдвиг, величина которого зависит от интенсивности электромагнитного поля и поэтому меняется вдоль импульса. Предварительные расчёты показывают, что наличие такого фазового сдвига отрицательно сказывается на режиме синхронизации мод и при достаточно больших значениях альфа-факторов может привести к его разрушению. Однако в силу того, что величины $G$ и $Q$ входят в уравнение для электромагнитного поля (25) с противоположными знаками, при одинаковых знаках $\alpha_{\rm g}$ и $\alpha_{\rm q}$ фазовые сдвиги, вносимые усиливающей и поглощающей секциями, имеют противоположные знаки и, следовательно, частично компенсируют друг друга. Как показывают численные расчёты, для каждого значения $\alpha_{\rm g}$ существует определённое значение $\alpha_{\rm q}$, при котором такая компенсация происходит наиболее полно. Подобная ситуация наиболее благоприятна для режима синхронизации мод и качественно напоминает ситуацию, когда альфа-факторы равны нулю.

В качестве бифуркационного параметра на рис. 2 выбран параметр накачки усиливающей среды $g_0$. Устойчивые решения обозначены сплошными, а неустойчивые — пунктирными линиями. Кривая, обозначенная CW, соответствует стационарной генерации лазера, т. е. решению с не зависящей от времени интенсивностью электромагнитного поля. Это решение устойчиво в малой окрестности вблизи линейного порога генерации, $g_0/\gamma_\mathrm{g} = q_0/\gamma_\mathrm{q} - \ln\kappa$, и в области больших $g_0$, где вклад усиливающей среды превалирует над вкладом поглощающей. В промежуточной области значений $g_0$, где стационарная генерация неустойчива, наблюдаются решения с периодической и квазипериодической зависимостью интенсивности поля от времени. Периодические решения на рис. 2 обозначены $P_1$, $P_2$ и $P_3$. Решение $P_1$ имеет период, близкий к времени обхода резонатора $T$. Следовательно, оно соответствует фундаментальному режиму пассивной синхронизации мод. Решения $P_2$ и $P_3$ имеют период повторения импульсов, приблизительно в 2 и 3 раза меньший $T$ соответственно. Эти решения описывают режимы пассивной синхронизации мод с одновременно существующими двумя и тремя импульсами в резонаторе. Область устойчивости фундаментального режима синхронизации мод ограничена двумя бифуркационными точками, обозначенными на рис. 2 SN и QP. Первая из этих точек соответствует седло-узловой бифуркации, где два периодических решения, устойчивое и неустойчивое, сливаются и исчезают. Вторая точка является точкой бифуркации периодического решения в решение с квазипериодической интенсивностью электрического поля. Последнее решение соответствует режиму синхронизации мод, промодулированному частотой релаксационных колебаний, которая для полупроводниковых лазеров обычно в несколько раз меньше частоты повторения импульсов синхронизации мод. Глубина модуляции возрастает при смещении влево от точки QP. Бифуркационная диаграмма, изображённая на рис. 2, находится в качественном соответствии с экспериментальными данными, полученными для монолитного полупроводникового лазера [18].

Итак, в нашей работе предложена новая модель для описания пассивной синхронизации мод в полупроводниковом лазере — система дифференциальных уравнений с задержкой (25)–(27). Эта модель является более удобной для аналитического исследования, чем предложенная ранее аналогичная модель Гуревича—Ханина [13–16]. Обобщение модели на случай активной или гибридной синхронизации мод не представляет труда. Основными приближениями, на которых базируется наша модель, являются предположения о кольцевой геометрии лазера и лоренцевской форме линии спектрального фильтра. При этом не используются приближения малых усиления и потерь за проход, слабого насыщения поглотителя, а также каких-либо предположений относительно соотношения длительности импульса и времён релаксации усиливающей и поглощающей сред. Таким образом, область применимости нашей модели существенно шире, чем у хорошо известных моделей Нью и Хауса. Для случая, когда альфа-факторы равны нулю, нами проведено численное исследование бифуркаций, ответственных за возникновение и исчезновение режима синхронизации мод.

Авторы выражают искреннюю благодарность Г. Козыреффу и Е. А. Викторову за плодотворные дискуссии и полезные рекомендации.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Vasil'ev P. Ultrafast diode lasers: Fundamentals and applications. Artech House Publishers, 1995.
2. New G. H. C. // IEEE J. Quantum Electronics. 1974. V. 10. P. 115.
3. Haus H. // IEEE J. Quantum Electronics. 1975. V. 11. P. 736.
4. Haus H. // Jap. J. Appl. Phys. 1981. V. 20. P. 1 007.
5. Haus H. A., Shank C. V., Ippen E. P. // Opt. Commun. 1975. V. 15. P. 29.
6. Haus H. // IEEE J. Sel. Topics in Quantum Electronics. 2000. V. 6. P. 1 173.

7. Avrutin E. A., Marsh J. H., Portnoi E. L. // IEE Proc. Optoelectron. 2000. V. 147. P. 251.
8. Paschotta R., Keller U. // Appl. Phys. B. 2001. V. 73. P. 653.
9. Leegwater J. A. // IEEE J. Quantum Electronics. 1996. V. 32. P. 1 782.
10. Koumans R. G. M. P., van Roijen R. // IEEE J. Quantum Electronics. 1996. V. 32. P. 478.
11. Kärtner F. X., Jung I. D., Keller U. // IEEE J. Sel. Topics in Quantum Electronics. 1996. V. 2. P. 540.
12. Vladimirov A. G., Turaev G. Passive mode-locking with slow saturable absorber: A delay differential model: Preprint No. 947 of WIAS. 2004. 32 p.
13. Гуревич Г. Л. // Изв. вузов. Радиофизика. 1979. Т. 13. С. 1 019.
14. Гуревич Г.Л., Ханин Я. И. // ЖТФ. 1970. Т. 40. С. 1 566.
15. Gurevich G. L., Khanin Ya. I. // Laser und ihre Anwendungen. Dresden, 1970. P. 365.
16. Ханин Я. И. Основы динамики лазеров. М.: Наука, 1999.
17. Engelborghs K., Luzyanina T., Samaey G. DDE-BIFTOOL v. 2.00: A Matlab package for bifurcation analysis of delay differential equations: Technical report TW-330 of Department of Computer Science, K. U. Leuven, Leuven, Belgium, 2001.
18. Fidorra S., Heidrich H., Hüttl B., et al. Experimental characterization of monolithic 40 GHz mode locked lasers on GaInAsP/InP. (не опубликовано).

[1] Weierstrass Institute for Applied Analysis and Stochastics,
Berlin, Germany;
[2] Санкт-Петербургский госуниверситет,
г. Санкт-Петербург, Россия;
[3] Ben-Gurion University, Beer-Sheva, Israel

Поступила в редакцию
28 июня 2004 г.

## A NEW MODEL FOR A MODE-LOCKED SEMICONDUCTOR LASER

*A. G. Vladimirov and D. Turaev*

A new model describing passive mode locking in a semiconductor laser, namely, a set of delay differential equations, is studied. Bifurcations leading to the appearance and break-up of mode-locking regime is analyzed numerically.

УДК 621.373

# LOCKED LOCALIZED STATES IN A MULTIMODE SEMICONDUCTOR LASER SUBJECT TO OPTICAL INJECTION

*E. A. Viktorov* [1] *and P. Mandel* [2]

We study a multimode semiconductor laser subject to a multimode injection. Multimode output exhibits antiphase dynamics and coexisting attractors. When the output of the laser is only partially locked to the multimode optical injection, the multimode locking can be complete or localized.

A semiconductor laser subject to optical injection has been studied extensively last years in order to improve the performance of the laser output [1]. Most publications are limited to a single-mode rate equation model, which is enough to describe a rich set of phenomena such as steady state locking, intensity oscillations and chaos [2–6]. First specific multimode phenomena featuring mode hopping have been reported experimentally and confirmed by PDE's modeling [7] for a laser with a narrow band injection. In this paper we consider a multimode semiconductor laser subject to a multimode injection, being motivated by potential applications. The need for multiplexed secure information transmission suggests using a multimode laser and the first successful experiment for multimode synchronization has been recently published [8, 9]. In this configuration, the multimode output of the transmitter (which is a semiconductor laser with external feedback) is unidirectionally injected into the receiver semiconductor laser. This provides a robust system stable against external perturbations, when the optical spectra of the transmitter and the receiver are multimode and locked.

We report on the specific locking phenomena of two unidirectionally coupled multimode semiconductor lasers, when the transmitting laser operates in a steady state regime. We show that due to antiphase dynamics the output of the receiving laser can be partially locked to the injected signal and demonstrate a locked localization.

Laser rate equations describing a multimode laser with optical injection can be derived for the modal fields $E_m(t) \propto \int E(x,t)\phi_m(x)\,\mathrm{d}x$ where the $\{\phi_m(x)\}$ are the cavity eigenmodes, coupled to the carrier moments or nonlinear gains $N_m \propto \int N(x,t)\,|\phi_m(x)|^2\,\mathrm{d}x$, proportional to the grating created by the lasing cavity eigenmode $\phi_m(x)$. After a suitable normalization, the equations become [10, 11]:

$$\frac{\mathrm{d}A_m}{\mathrm{d}\tau} = (1+i\alpha)\,F_m A_m - i\Omega A_m + A_{\mathrm{ext}}, \tag{1}$$

$$T\,\frac{\mathrm{d}F_m}{\mathrm{d}\tau} = P - F_m - (1+2F_m)\sum_{n}^{N}\beta_{nm}\,|A_n|^2, \tag{2}$$

where $A_m = \sqrt{\tau_{\mathrm{s}}/2}\;E_m$, $F_m = n_m/(2\gamma_{\mathrm{p}})$, $P = (J-J_{\mathrm{th}})/(2J_{\mathrm{th}})$, with $J_{\mathrm{th}} = \gamma_{\mathrm{p}}/\tau_{\mathrm{s}}$, $T = \tau_{\mathrm{s}}\gamma_{\mathrm{p}}$. The gain at threshold is $N_{\mathrm{th}} = \gamma_{\mathrm{p}}$ and $n_m = N_m - N_{\mathrm{th}}$. The mode index $m$ varies from 1 to $N$, the number of lasing modes. In the field equations, $\gamma_{\mathrm{p}}$ denotes the modal field losses and $\alpha$ is the linewidth enhancement factor. The injection is characterized by the external electrical field amplitude $A_{\mathrm{ext}} = \sqrt{\tau_{\mathrm{s}}/2}\;E_{\mathrm{ext}}$ and the frequency detuning $\Omega$. Both $A_{\mathrm{ext}}$ and $\Omega$ are supposed to be mode independent. In the nonlinear gain equations, $J$ is the pumping current and $\tau_{\mathrm{s}}$ is the carrier lifetime. The cross-saturation parameters $0 < \beta_{nm} < 1$ measure the free carrier grating; $\beta_{nm}$ are assumed to be mode-independent, the same for the two lasers, and $\beta_{nm} = \beta$ with $m \neq n$ and $\beta_{mm} = 1$.

After conventional transformation [4–6] the equations are given by

$$\frac{\mathrm{d}a_m}{\mathrm{d}\tau} = F_m\,(1+a_m) + \eta\cos(\psi_m), \tag{3}$$

$$\frac{\mathrm{d}\psi_m}{\mathrm{d}\tau} = \Omega + \alpha F_m - \frac{\eta \sin(\psi_m)}{1 + a_m}\,, \tag{4}$$

$$T\,\frac{\mathrm{d}F_m}{\mathrm{d}\tau} = $$

$$= P - F_m - P\,(1 + 2F_m) \sum_n^N \beta_{nm}\,(1 + a_m)^2, \tag{5}$$

where we used $A_m = \sqrt{P}\,(1 + a_m) \exp(i\psi_m)$ and $\eta = A_{\rm ext}/\sqrt{P}$.

The parameters and the injection are mode-independent and the system is highly degenerate. We limit the analysis by considering only the mode-independent steady state $F = F_m$, $a = a_m$, $\psi = \mathrm{mod}(\psi_m, 2\pi)$. The linearized equations for the deviations from this steady state yield the solution $a_m(t) = a\exp(\lambda t)$ and $F_m(t) = F\exp(\lambda t)$. The characteristic equation for $\lambda$ is

$$D_{\rm R}\,(D_{\rm L})^{N-1} = 0 \tag{6}$$

where $D_{\rm S} = \lambda^3 + C_1^{\rm S}\lambda^2 + C_2^{\rm S}\lambda + C_3^{\rm S}$, for $\mathrm{S} = \mathrm{R}, \mathrm{L}$ with coefficients defined as

$$C_1^{\rm S} = -2F + \varepsilon\,\frac{1 + 2P}{1 + 2F}\,, \tag{7}$$

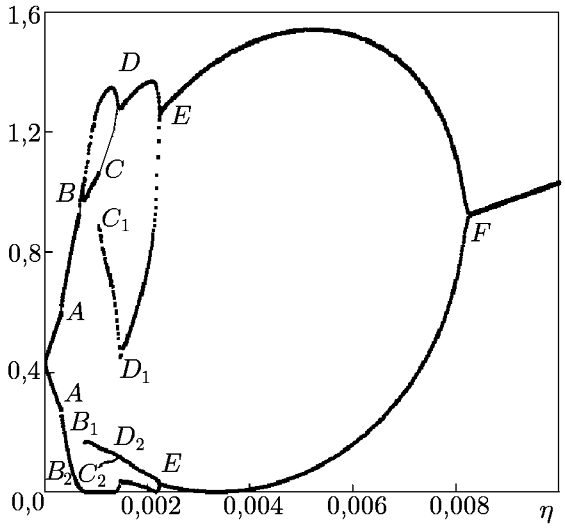



Fig. 1. Bifurcation diagram representing the modal intensities extrema as a function of the injection parameter. The labels $A$–$F$ indicate the bifurcation points. The curves for different modal intensities follow: $I_1 = (1 + a_1)^2$ — $ABCC_1D_1EF$(max) and $AB_2EF$(min); $I_2 = (1 + a_2)^2$ — $ABDEF$(max) and $AB_2B_1D_2EF$(min); $I_3 = (1 + a_3)^2$ — $ABCDEF$(max) and $AB_2C_2D_2EF$(min). The parameters for the numerical simulations are $N = 3$, $P = 10^{-3}$, $T = 10^3$, $\gamma_{\rm p} = 1$ THz, $\alpha = 5$, $\beta = 0{,}666$, $\Omega = -0{,}0028$

$$C_2^{\rm S} = -2\varepsilon F\,\frac{1 + 2P}{1 + 2F} + 2\varepsilon\,(P - F)\,H^{\rm S} + F^2 + (\Omega + \alpha F)^2, \tag{8}$$

$$C_3^{\rm S} = \varepsilon\,\frac{1 + 2P}{1 + 2F}\,[F^2 + (\Omega + \alpha F)^2] - 2\varepsilon\,(P - F)\,H^{\rm S}\,[\Omega + \alpha\,(\Omega + \alpha F)], \tag{9}$$

and $H^{\rm R} = 1, H^{\rm L} = (1 - \beta)\,[1 + \beta\,(N - 1)]$, $\varepsilon = T^{-1}$.

A stable steady state looses stability either through a limit point ($C_3^{\rm S} = 0, C_1^{\rm S} > 0, C_1^{\rm S}C_2^{\rm S} - C_3^{\rm S} > 0$) or through a Hopf bifurcation point ($C_1^{\rm S}C_2^{\rm S} - C_3^{\rm S} = 0, C_1^{\rm S} > 0, C_3^{\rm S} > 0$). The main difference from the single mode consideration (where either $\mathrm{S} = \mathrm{R}$ only) is the degeneracy of the equation for $D_{\rm L}$. We do not provide detailed considerations of the possible bifurcation curves arising from the characteristic equation, referring to [4–6] where a similar analysis has been done. It is worth to mention that the additional set of degenerate bifurcations arising from $(D_{\rm L})^{N-1} = 0$ can lead to very complicated bifurcation phenomena, especially for $P$ sufficiently small where multiple crossings of the bifurcation curves occur and the level of degeneracy can be extremely high. These Hopf-saddle-node codimension two bifurcations lead to a very complicated behavior first reported in [12].

We now describe an essentially multimode effect choosing a small negative detuning $\Omega = -0{,}0028$. The control parameter is the strength of the injection $\eta$. The other parameters for the numerical simulations are $N = 3$, $P = 10^{-3}$, $T = 10^3$, $\gamma_{\rm p} = 1$ THz, $\alpha = 5$, $\beta = 0{,}666$.

The bifurcation diagram is shown in Fig. 1. The lines represent the extrema of the lasing modal intensities as a function of the injection parameter $\eta$. The labels $A$–$F$ indicate bifurcation points.

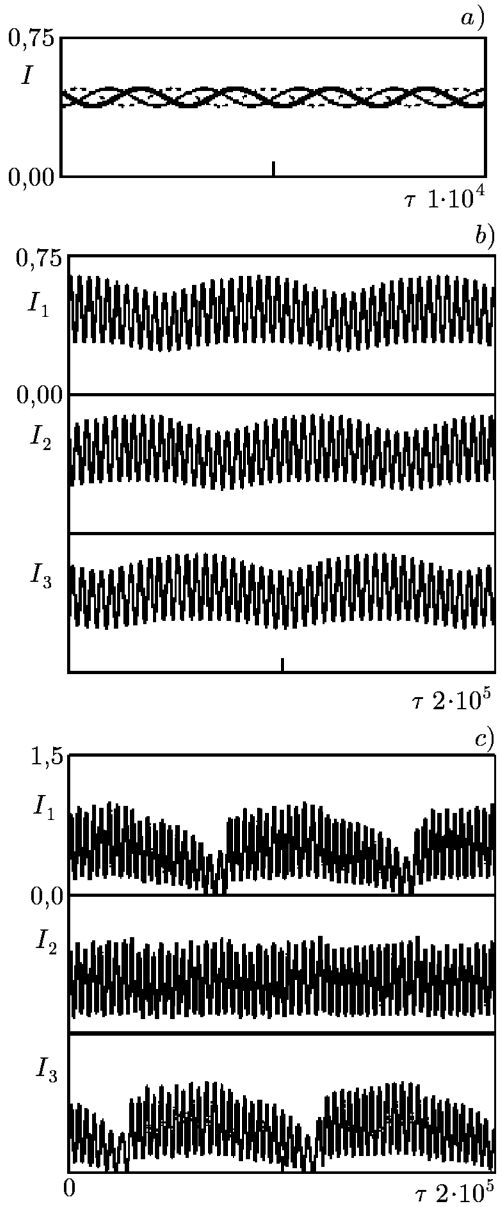



Fig. 2. Typical examples of antiphase dynamics of laser output: periodic ($a$), quasi-periodic ($b$), and asymmetric ($c$). Injections are: $\eta = 10^{-4}$ ($a$), $\eta = 3{,}5 \cdot 10^{-4}$ ($b$), $\eta = 8 \cdot 10^{-4}$ ($c$)

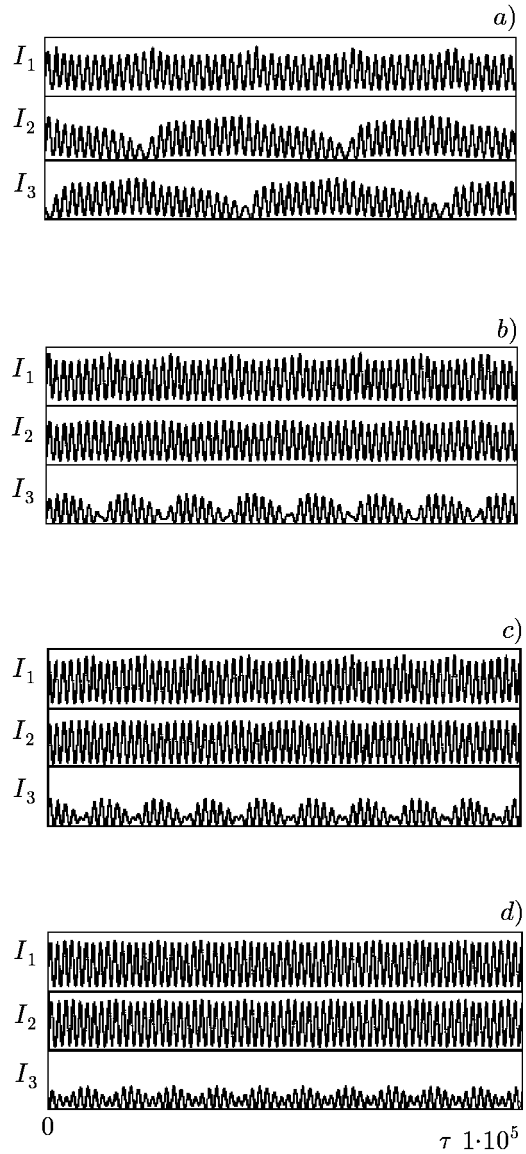



Fig. 3. Evolution of quasi-periodic behavior of laser output. The change of $\eta$ leads to the intermittency between quasi-periodic and chaotic behavior: $\eta = 10^{-3}$ ($a$), $\eta = 1{,}2 \cdot 10^{-3}$ ($b$), $\eta = 1{,}3 \cdot 10^{-3}$ ($c$), $\eta = 1{,}4 \cdot 10^{-3}$ ($d$). The range of the vertical axis for all four figures is the same as in Fig. 2$c$

For small injection, the response of the laser is linear and the multimode output exhibits small amplitude inphase oscillations with a frequency equal to the detuning $\Omega$. On resonance ($\Omega = 0$), the modes are in steady state. The modal phases are equal, nearly linear and unbounded. This limit cycle splits after a saddle-node bifurcation into a pair of cycles with the amplitude oscillations shifted in phase by $2\pi/N$ (Fig. 2$a$) indicating the occurrence of antiphase dynamics [13]. The modal phases remain unbounded.

Antiphase states have been found in various laser systems and studied extensively in recent years due to (i) the so-called "green problem" in a solid-state laser with intracavity second harmonic generation and (ii) potential applications for data transmission and storage. In general, the antiphase states reflect the coherence property of the degenerate system. A $N$-mode laser can bifurcate in two ways: a $(N-1)$-degenerate saddle-node [14, 15] and a $(N-1)$-degenerate Hopf bifurcation [16]. These bifurcations can generate coexisting periodic and quasi-periodic attractors which display antiphase dynamics. The total number of coexisting attractors can be greater than $N!$ and the complexity of the laser dynamics can be very high.

At a finite distance of this first bifurcation, the periodic solution becomes unstable via a Hopf bifurcation ($A$ in Fig. 1) that results in the quasi-periodic state displayed in Fig. 2*b*. In Fig. 2*b* the carrier wave has the temporal pattern $\{1,3,2\}$ and the envelope modulation has the temporal pattern $\{1,2,3\}$, where the numbers $1,2,3$ indicate the relative phase shift between the modal solutions [16]. By symmetry, exchanging $\{1,3,2\}$ and $\{1,2,3\}$ generates a new solution. Such quasi-periodic solutions was proved to result from the interaction between two antiphase periodic states [16]. The frequency of the envelope corresponds to the low relaxation oscillation frequency of the laser. Similar effects have been reported for a single-mode laser subject to injection operating in a multi-wave mixing regime [17].

Further increase of the injection leads to a stronger interaction between antiphase states and the loss of symmetry in the multimode output ($B$ in Fig. 1). The envelope of one mode differs in shape and in amplitude from the other two modes (Fig. 2*c*). The modal phases still remain unbounded.

A change in the phase behavior occurs slightly above $\eta = 0{,}001$ (label $C$ in Fig. 1), when one (or two, by index permutation) phase becomes bounded. The temporal bounding of the phase leads to bursts (which eventually become chaotic) in the phase bounded mode, while the other modes appear unaffected and quasi-periodic (Fig. 3*b*). The system demonstrates spontaneous symmetry breaking and dynamical independence. The duration of the bounded phase increases with increasing injection (Fig. 4*b*, *c*) and the mode finally becomes bounded for $\eta > 0{,}0014$. At that point, the multimode output demonstrates a kind of localized quasi-periodic behavior (Fig. 3*d*). The mode with bounded phase has a smaller amplitude, and the bounded phase is featured by two frequencies — fast frequency which is determined by the detuning and slow frequency determined by the relaxations (Fig. 4*d*). The modes with unbounded phases are still slightly phase shifted.

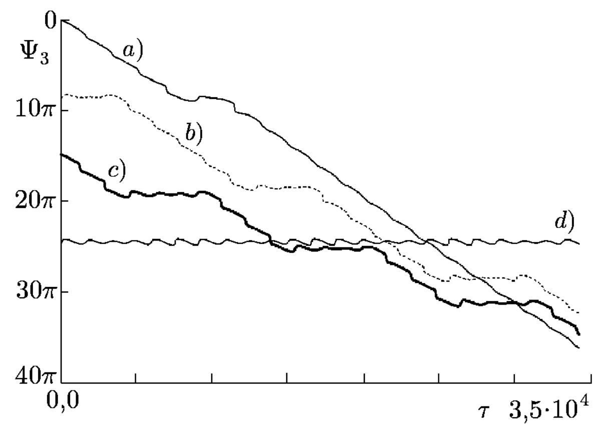



Fig. 4. Evolution of the modal phases. Changing the injection $\eta$ leads to temporally bounded phase behavior. Parameters for the curves *a*)–*d*) are the same as in Fig. 3

The low frequency envelope vanishes above but close to a Hopf bifurcation at $\eta = 0{,}0015$ (label $D$ in Fig. 1). The mode with bounded phase is shifted with respect to the other modes, which are amplitude inphased and phase unbounded (Fig. 5*a*, *b*). The bounded phase indicates that one mode is locked to the injection while the others remain unlocked. This localized locking is similar to the phenomenon of localized synchronization of two coupled lasers [18] and is a kind of parametric resonance in the system. The amplitudes of the phase unbounded modes are large and do not depend significantly on the injection ($D-E$ in Fig. 1), which influences the phase only. The amplitude of the locked mode depends strongly on the injection and grows rapidly with it ($D_1$-$E$ in Fig. 1). The localized locking coexists with an unbounded inphased solution. This specific multimode phenomena can be important for information data transmission. Particularly, the PDE's modelling of the unidirectionally coupled

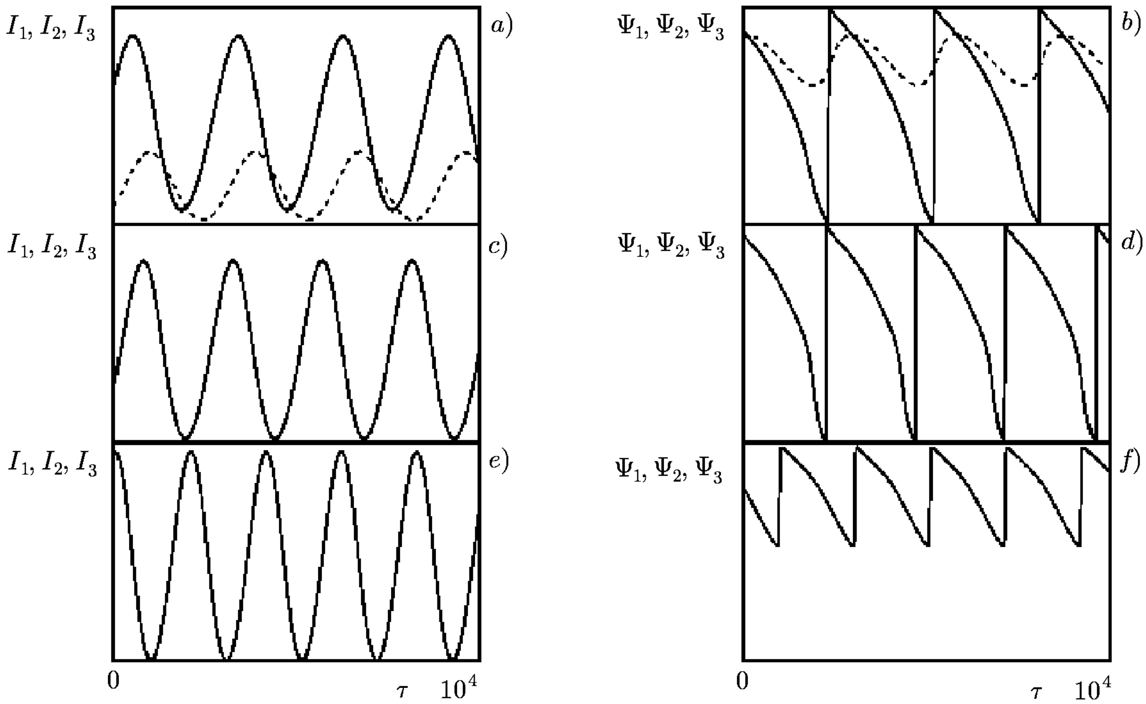



Fig. 5. The multimode output is intensity antiphased and phase locked ($a$, $b$), intensity inphase and phase unbounded ($c$, $d$), intensity inphased and phase bounded ($e$, $f$). Injections are: $\eta = 1{,}6 \cdot 10^{-3}$ ($a$, $b$), $\eta = 2{,}2 \cdot 10^{-3}$ ($c$, $d$), $\eta = 3{,}4 \cdot 10^{-3}$ ($e$, $f$). Other parameters are the same as in Fig. 1. The range of the vertical axis for ($a$), ($c$), ($e$) is the same as in Fig. 2. The range of the vertical axis for ($b$), ($d$), ($f$) is $2\pi$

semiconductor lasers has demonstrated the existence of quasi-synchronous states when the transmitter and the receiver are only partially synchronized [19].

Growing with the injection, the amplitude of the locked mode becomes equal to the amplitude of the unlocked modes and the partially locked antiphase state bifurcates ($E$ in Fig.1) to inphased unbounded periodic modulation (Fig. 5$c$, $d$) via modal phase jumps of $\pi$, similar to that described in [20]. Further increase of the injection leads to the reverse bifurcation (label $F$ in Fig. 1) leading back to steady states.

This research has been supported by the Fonds National de la Recherche Scientifique and the Inter-University Attraction Pole program of the Belgian government.

## REFERENCES

1. van Tartwijk G. H. M., Lenstra D. // Quantum Semiclass. Opt. 1995. V. 7. P. 87.
2. Simpson T. B., Liu J. M., Gavrielidis A., et al. // Appl. Phys. Lett. 1994. V. 64. P. 3 539.
3. Simpson T. B., Liu J. M., Gavrielidis A., et al. // Phys. Rev. A. 1995. V. 51. P. 4 181.
4. Gavrielidis A., Kovanis V., Erneux T. // Opt. Commun. 1997. V. 136. P. 253.
5. Erneux T., Gavrielidis A., Kovanis V. // Quantum Semiclass. Opt. 1997. V. 9. P. 811.
6. Kovanis V., Erneux T., Gavrielidis A. // Opt. Commun. 1999. V. 159. P. 177.
7. White J. K., Moloney J. V., Gavrielidis A., et al. // IEEE J. Quantum Electron. 1998. V. 34. P. 1 469.
8. Fischer I., Liu Y., Davis P. // Phys. Rev. A. 2000. V. 62. Article no. 011 801.
9. Uchida A., Liu Y., Fischer I., et al. // Phys. Rev. A. 2001. V. 64. Article no. 023 801.
10. Viktorov E. A., Mandel P. // Phys. Rev. Lett. 2000. V. 85. P. 3 157.

11. Carr T. W., Pieroux D., Mandel P. // Phys. Rev. A. 2001. V. 63. Article no. 033 817.
12. Solari H. G., Oppo G. L. // Opt. Commun. 1994. V. 111. P. 173.
13. Mandel P. Theoretical problems in cavity nonlinear optics. Cambridge University Press, 1997.
14. Vladimirov A. G., Mandel P. // Phys. Rev. A. 1998. V. 58. P. 3 320.
15. Viktorov E. A., Vladimirov A. G., Mandel P. // Phys. Rev. E. 2000. V. 62. P. 6 312.
16. Vladimirov A. G., Viktorov E. A., Mandel P. // Phys. Rev. E. 1999. V. 60. P. 1 616.
17. Nizette M., Erneux T., Gavrielidis A., Kovanis V. // Proc. SPIE. 1999. V. 3 625. P. 679.
18. Kuske R., Erneux T. // Opt. Commun. 1997. V. 139. P. 125.
19. White J. K., Moloney J. V. // Phys. Rev. A. 1999. V. 59. P. 2 422.
20. Braza P. A. // Opt. Commun. 1993. V. 103. P. 95.

[1] Institute for Laser Physics, St. Petersburg, Russia;
[2] Optique Nonlinéaire Théorique, Université Libre de Bruxelles, Bruxelles, Belgium

Поступила в редакцию
27 мая 2004 г.

УДК 539.184

# NONLINEAR DYNAMICS IN LASING WITHOUT INVERSION

*J. Mompart*[1], *R. Corbalán*[1], *and R. Vilaseca*[2]

We review lasing in homogeneously broadened coherently driven three-level systems in the framework of semiclassical density matrix formalism and using a nonlinear dynamics point of view. We discuss the following features of these systems: (i) self-pulsing lasing without inversion near the first lasing threshold, (ii) giant pulse lasing based on the population inversion without lasing phenomenon, and (iii) the enlargement of the cavity detuning range where lasing without inversion occurs by using broad-area cavities.

This paper is dedicated to the memory of our colleague and friend Y. I. Khanin. Among the various research areas he explored, he was a world-leader in the fields of nonlinear laser dynamics and lasing without inversion. Therefore, we have decided to review here some of our contributions that deal with both of these fields at once, namely, (i) self-pulsing lasing without inversion in three-level systems [1], (ii) giant-pulse lasing [2], and (iii) enlargement of the inversionless lasing domain by using broad-area cavities [3].

## 1. SELF-PULSING LASING WITHOUT INVERSION

In this section, lasing without inversion (LWI) in specific models of homogeneously broadened closed three-level systems is analyzed from a nonlinear dynamics point of view. Through a linear stability analysis of the trivial non-lasing solution with on-resonance driving and generated laser fields, we will show that, near lasing threshold, resonant closed $\Lambda$- and V-schemes yield continuous wave LWI while resonant cascade schemes can give rise to self-pulsing LWI. The origin of this different behavior will be discussed.

For simplicity, we consider a ring laser cavity with the active medium consisting of closed three-level atoms. We investigate the four closed three-level atomic configurations shown in Fig. 1. In all these schemes, an external coherent driving field $\mathbf{E}_\beta$ interacts with transition $|3\rangle - |2\rangle$ and prepares the medium in order to generate a laser field $\mathbf{E}_\alpha$ in the other transition. The strength of the interaction is given by the Rabi frequencies $2\beta$ and $2\alpha$ of driving and generated fields, respectively. In addition, the upper level of the lasing transition is populated by an incoherent pump process interacting with this transition and represented by a rate $\Lambda$. This pumping process is taken bidirectional to assure that there is no population inversion in the transition where the $\mathbf{E}_\alpha$ field will be generated.

From the nonlinear dynamics point of view, a lasing solution corresponds to the destabilization of the trivial solution of the Maxwell—Schrödinger equations with the electric field $\mathbf{E}_\alpha$ (or $\alpha$) equal to zero. Thus, we will calculate this solution and perform a linear stability analysis (LSA).

### 1.1. Cascade schemes

We start by discussing explicitly the cascade configuration of Fig. 1*a* with both the driving field and the laser cavity on-resonance with the corresponding transition. In the framework of the semiclassical laser theory and using the standard density matrix formalism with the rotating wave and slowly varying envelope approximation, the Maxwell—Schrödinger equations of the system under investigation can

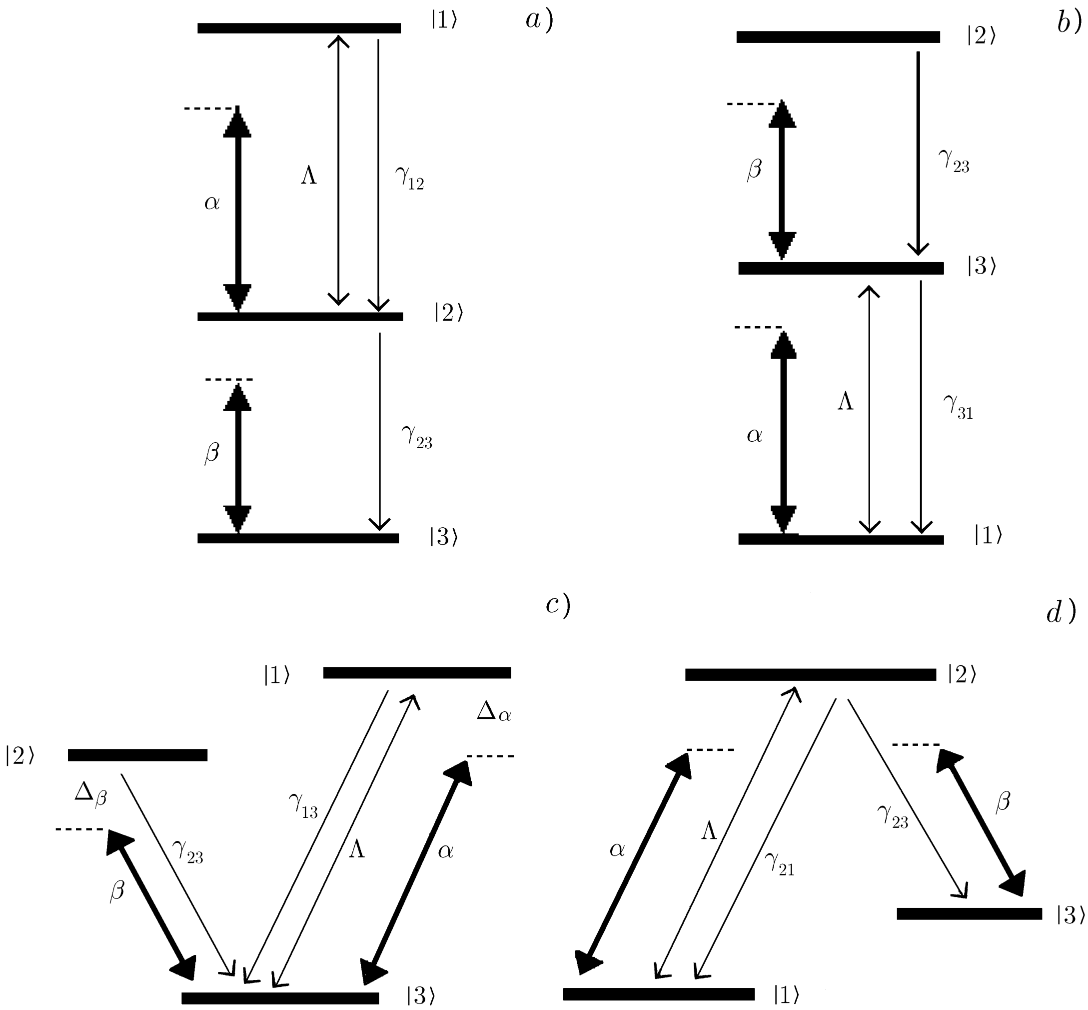



Fig. 1. The considered level schemes: ($a$) cascade scheme with the driving field in the lower transition, ($b$) cascade scheme with the driving field in the upper transition, ($c$) V-scheme, and ($d$) Λ-scheme

be written as

$$\dot\rho_{11}= -\gamma_{12}\rho_{11} + \Lambda\,(\rho_{22} - \rho_{11}) + i\,[\alpha\rho_{12}^* - \text{c. c.}], \tag{1a}$$

$$\dot\rho_{22}= -\gamma_{23}\rho_{22} + \gamma_{12}\rho_{11} + \Lambda\,(\rho_{11} - \rho_{22}) + i\,[\beta\rho_{23}^* + \alpha^*\rho_{12} - \text{c. c.}], \tag{1b}$$

$$\dot\rho_{33}= \gamma_{23}\rho_{22} - i\,[\beta\rho_{23}^* - \text{c. c.}], \tag{1c}$$

$$\dot\rho_{12}= -\Gamma_{12}\rho_{12} + i\,[\alpha\,(\rho_{22} - \rho_{11}) - \beta^*\rho_{13}], \tag{1d}$$

$$\dot\rho_{23}= -\Gamma_{23}\rho_{23} + i\,[\beta\,(\rho_{33} - \rho_{22}) + \alpha^*\rho_{13}], \tag{1e}$$

$$\dot\rho_{13}= -\Gamma_{13}\rho_{13} + i\,[\alpha\rho_{23} - \beta\rho_{12}], \tag{1f}$$

$$\dot\alpha= -\kappa\alpha + ig\rho_{12} \tag{1g}$$

with $\rho_{11} + \rho_{22} + \rho_{33} = 1$. Here points present time derivatives, $\kappa$ designates the damping rate of the lasing field $\mathbf{E}_\alpha$ due to cavity losses and $g = \pi\nu_\alpha N\mu_\alpha^2/\,(\hbar\varepsilon_0)$ the unsaturated gain of the lasing transition, where $\nu_\alpha$ is the corresponding transition frequency, $\mu_\alpha$ is the dipole matrix element, $N$ is the density of atoms, $\hbar$ is Planck's constant, and $\varepsilon_0$ is the dielectric permittivity. The decay rates $\gamma_{12}$ and $\gamma_{23}$

describe phenomenologically the spontaneous relaxation of driving and lasing transitions. Depletion of the driving field is neglected. In the radiative limit, the decay rates of the coherences are given by $\Gamma_{12} = (\gamma_{12} + \gamma_{23} + 2\Lambda)/2$, $\Gamma_{23} = (\gamma_{23} + \Lambda)/2$, and $\Gamma_{13} = (\gamma_{12} + \Lambda)/2$. In resonance, it is possible to take $\alpha = \alpha^*$, $\beta = \beta^*$ and then the coherences can be written as $\rho_{12} \equiv iy_{12}$, $\rho_{23} \equiv iy_{23}$, and $\rho_{13} \equiv x_{13}$ with the real variables $y_{12}$, $y_{23}$ and $x_{13}$. In our notation, $\alpha y_{12} > 0$ ($< 0$) and $\beta y_{23} > 0$ ($< 0$) lead to absorption (amplification) of the corresponding field.

Taking $\alpha = 0$ (and thus $\rho_{12} = \rho_{13} = 0$) and all time derivatives in (1) equal to zero, the non-lasing solution reads

$$\rho_{11} = 4\Lambda\beta^2/A, \tag{2a}$$

$$\rho_{22} = 4\,(\gamma_{12} + \Lambda)\,\beta^2/A, \tag{2b}$$

$$\rho_{33} = (\gamma_{12} + \Lambda)\,[\gamma_{23}\,(\gamma_{23} + \Lambda) + 4\beta^2]/A, \tag{2c}$$

$$y_{23} = 2\gamma_{23}\,(\gamma_{12} + \Lambda)\,\beta/A \tag{2d}$$

with $A = \gamma_{23}\,(\gamma_{12} + \Lambda)\,(\gamma_{23} + \Lambda) + 4\,(2\gamma_{12} + 3\Lambda)\,\beta^2$. Clearly, neither of both transitions is inverted, and, since $\beta y_{23} > 0$, the driving field is absorbed.

The stability of the non-lasing solution is governed by a 7×7-matrix which splits into two independent submatrices. One of them governs the stability of the variables $\alpha$, $y_{12}$ and $x_{13}$ and therefore the generation of the lasing field. The characteristic polynomium of this submatrix is

$$\lambda^3 + c_1\lambda^2 + c_2\lambda + c_3 = 0 \tag{3}$$

with the coefficients

$$c_1 = \Gamma_{12} + \Gamma_{13} + \kappa, \tag{4a}$$

$$c_2 = \kappa\,(\Gamma_{12} + \Gamma_{13}) + \Gamma_{12}\Gamma_{13} + \beta^2 + gn_{21}, \tag{4b}$$

$$c_3 = \kappa\left(\Gamma_{12}\Gamma_{13} + \beta^2\right) + g\,(\Gamma_{13}n_{21} + \beta y_{23})\,, \tag{4c}$$

where $n_{21} \equiv \rho_{22} - \rho_{11}$. We apply the Hurwitz criteria for determining the instabilities associated with the above polynomium: $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, $c_3 > 0$, and $H_2 \equiv c_1c_2 - c_3 > 0$ mean negative real parts of all eigenvalues which corresponds to stability of the non-lasing solution. The destabilization of the trivial solution occurs through a pitchfork bifurcation (static instability) if $c_3 < 0$ or, alternatively, through a Hopf bifurcation (self-pulsing instability) if $H_2 < 0$. In this case, $\sqrt{c_2}$ gives the angular pulsation frequency of $\mathbf{E}_\alpha$ at the destabilization point. For the cascade scheme under investigation, $H_2$ is

$$H_2 = (\Gamma_{12} + \Gamma_{13})\left[\kappa\,(\kappa + \Gamma_{12} + \Gamma_{13}) + \Gamma_{12}\Gamma_{13} + \beta^2\right] + g\,[(\Gamma_{12} + \kappa)\,n_{21} - \beta y_{23}]\,. \tag{5}$$

As $n_{21} > 0$, the only term that can contribute to the destabilization of the non-lasing solution is $\beta y_{23}$. It follows from (3) that the driving field is absorbed ($\beta y_{23} > 0$) and, consequently, the destabilization of the non-lasing solution can occur only via a Hopf bifurcation which gives rise to self-pulsing laser emission. For $\beta = 0$ as well as for very large values of $\beta^2$, $H_2$ is positive and the non-lasing solution is stable. Varying the driving field intensity $\beta^2$, there are consequently two ways to obtain the destabilization of the non-lasing solution: increasing $\beta^2$ starting with a very small value or, alternatively, decreasing $\beta^2$ from a very large value. It should be emphasized that a direct calculation of the probe field amplification without cavity leads to steady state probe field absorption when probe and driving fields are taken on-resonance. This demonstrates the difference between amplification without inversion (AWI) and LWI in the cascade schemes.

Substituting the non-lasing stationary solution (2) into (5), it is easily seen that the inequality

$$\gamma_{23} > 2\gamma_{12} \tag{6}$$

is a necessary condition for LWI. This means that the spontaneous decay rate of the driving field transition has to be at least twice that of the lasing transition. The threshold values of all parameters can be obtained analytically from condition $H_2 < 0$. For example, the threshold value of the incoherent pump rate $\Lambda$ is given by

$$\Lambda > \gamma_{12}\,\frac{\gamma_{12} + 2\kappa}{\gamma_{23} - 2\gamma_{12}} + \mathrm{o}(1/g). \qquad (7)$$

Figure 2 shows the curve $H_2 = 0$ as a function of the parameters $\beta$ and $\Lambda$ for different values of the gain parameter $g$ (all frequencies given here are angular frequencies). For a given gain, LWI is obtained within a closed curve in the $\beta$—$\Lambda$-plane ($H_2 < 0$). Outside these curves the non-lasing solution is stable. The cross marks the values of $\beta$ and $\Lambda$ to be used in Fig. 3. Note that we choose a $\Lambda$ value just above threshold since the realization of an efficient incoherent pump represents one of the main difficulties in LWI experiments.

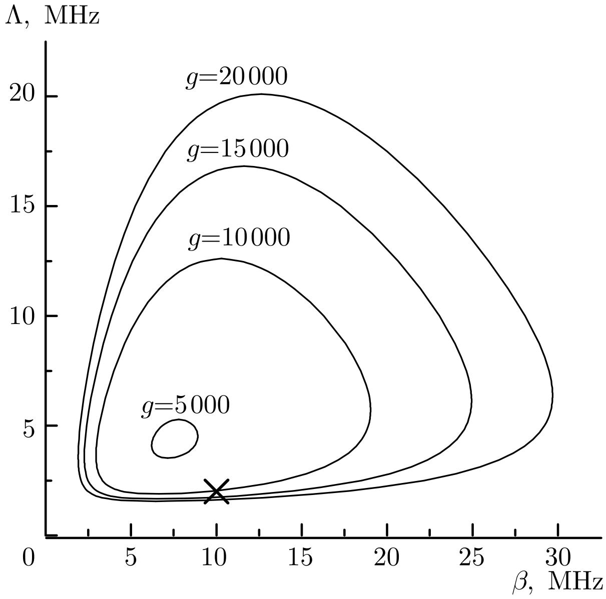



Fig. 2. LWI-regions in the plane of parameters $\beta$ and $\Lambda$ for various values of the gain parameter $g$. The values of $g$ are given in MHz$^2$. The other parameters are $\gamma_{12} = 3{,}5$, $\gamma_{23} = 19$, and $\kappa = 0{,}5$ (all in MHz)

Figures 3*a* and *b* represent the results of a numerical integration of the equations (1) using a seventh- to eighth-order Runge—Kutta—Fehlberg routine. The parameters are $\beta = 10$ MHz, $\Lambda = 2$ MHz, and $g = 15\,000$ MHz$^2$ with $\gamma_{12}$, $\gamma_{23}$, and $\kappa$ as in Fig. 2. After a transient which is shown in the insets, the laser field $\mathbf{E}_\alpha$ amplitude oscillates symmetrically around zero with an angular frequency $2\pi\,8{,}75 \approx 55$ MHz, while the populations oscillate with very small amplitudes, and neither of the

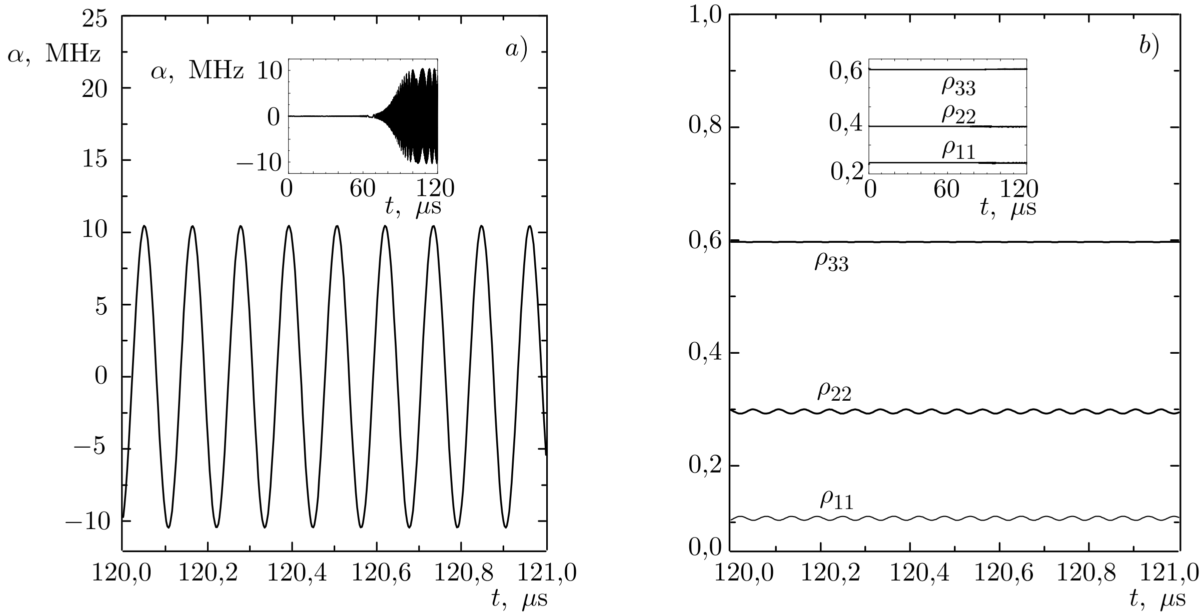



Fig. 3. (*a*) Evolution of the laser field amplitude and (*b*) corresponding evolution of the atomic populations. The rest of parameters are given in the text

transitions is inverted. A numerical study of AWI for the parameters of Fig. 3, shows that the maxima in amplification of the additional sidebands appear for probe field detunings $\Delta_\alpha = \pm 55$ MHz. This shows that the self-pulsing emission at line center is due to the simultaneous amplification of these two additional sidebands. Since we have considered thus far a resonant laser field, the equations (1) do not admit solutions with time-independent intensity, corresponding to the amplification of only one of the (detuned) sidebands. Therefore, these equations do not allow us to investigate whether the self-pulsing state emerging from the Hopf bifurcation is stable or unstable. We have checked numerically that, for the parameters under investigation, this self-pulsing state is stable. For this purpose we considered a full set of equations analogous to (1), but including both cavity and driving field detunings [1].

For the cascade scheme of Fig. 1*b* the results are quite similar. Again, the only way to destabilize the non-lasing solution is through a Hopf bifurcation giving rise to self-pulsing LWI emission with the necessary condition $\gamma_{23} > 2\gamma_{31}$. In the same way as for the other cascade scheme, we have checked numerically that there is also a broad domain of parameters where the self-pulsing solution is stable.

It is well known that a conventional incoherently pumped laser without driving field can show self-pulsing and even chaotic emission if the gain of the lasing transition and the cavity losses are sufficiently large [4, 5]. This dynamical behavior corresponds to a destabilization of a continuous wave lasing solution while the destabilization of the non-lasing solution occurs always through a pitchfork bifurcation leading primarily to continuous wave output. In contrast, the self-pulsing output of the cascade schemes is obtained directly through a destabilization of the non-lasing solution. Furthermore, the self-pulsing appears even without cavity losses.

### 1.2. Folded schemes

For the folded schemes the procedure is analogous, and the destabilization of the trivial solution is again governed by a $3\times 3$-matrix. For the V-type system of Fig. 1*c*, the coefficients of the characteristic polynomium are

$$c_1 = \kappa + \Gamma_{12} + \Gamma_{13}, \tag{8a}$$

$$c_2 = \kappa\,(\Gamma_{12} + \Gamma_{13}) + \Gamma_{12}\Gamma_{13} + \beta^2 + g n_{31}, \tag{8b}$$

$$c_3 = \kappa\left(\Gamma_{12}\Gamma_{13} + \beta^2\right) + g\,(\Gamma_{12} n_{31} - \beta y_{23})\,, \tag{8c}$$

$$H_2 = (\Gamma_{12} + \Gamma_{13})\left[\kappa\,(\kappa + \Gamma_{12} + \Gamma_{13}) + \Gamma_{12}\Gamma_{13} + \beta^2\right] + g\left[(\Gamma_{13} + \kappa)\, n_{31} + \beta y_{23}\right] \tag{8d}$$

with $n_{31} = \rho_{33} - \rho_{11}$, and for the $\Lambda$-type system of Fig. 1*d*

$$c_1 = \kappa + \Gamma_{12} + \Gamma_{13}, \tag{9a}$$

$$c_2 = \kappa\,(\Gamma_{12} + \Gamma_{13}) + \Gamma_{12}\Gamma_{13} + \beta^2 + g n_{12}, \tag{9b}$$

$$c_3 = \kappa\left(\Gamma_{12}\Gamma_{13} + \beta^2\right) + g\,(\Gamma_{13} n_{12} - \beta y_{23})\,, \tag{9c}$$

$$H_2 = (\Gamma_{12} + \Gamma_{13})\left[\kappa\,(\kappa + \Gamma_{12} + \Gamma_{13}) + \Gamma_{12}\Gamma_{13} + \beta^2\right] + g\left[(\Gamma_{12} + \kappa)\, n_{12} + \beta y_{23}\right] \tag{9d}$$

with $n_{12} = \rho_{11} - \rho_{22}$. As expected, in the limit $\beta \to 0$ the stability condition is fulfilled. From the Maxwell—Schrödinger equations it is easy to verify that in both cases the lasing transition is not inverted, i. e. $n_{31} > 0$ for the V-type system and $n_{12} > 0$ for the $\Lambda$-type system. Furthermore, the driving field is again absorbed, i. e. $\beta y_{23} > 0$. Consequently, the only way to destabilize the non-lasing solution is now via a pitchfork bifurcation which gives rise to continuous wave LWI. Necessary conditions for $c_3 < 0$ are now

$$\gamma_{23} > \gamma_{13} \text{ (V-scheme) and } \gamma_{23} > \gamma_{12} \text{ ($\Lambda$-scheme).} \tag{10}$$

In the high gain limit, this bifurcation occurs in the V-type system for

$$\beta y_{23}/\Gamma_{12} > n_{31}. \tag{11}$$

The usual discussion of continuous wave AWI in the V-scheme leads to the amplification condition [6]

$$-y_{13} > 2\,\frac{\alpha n_{13} + \beta x_{12}}{\gamma_{13} + 2\Lambda} \tag{12}$$

which involves directly the real part of the two-photon coherence $x_{12}$, and AWI is explained as due to the contribution of this coherence. In contrast, the lasing condition (11) for LWI does not involve $x_{12}$. At the destabilization point of the non-lasing solution we have $x_{12} \approx 0$. Consequently, following (12) one can think naively that, at least at the destabilization point, population inversion is required to achieve amplification. It is important to remark that at the bifurcation point (12) does not hold and instead the condition (11) should be considered. On the other hand, in the limit $\Gamma_{12} \to \infty$, where the two-photon coherence could not be generated, the condition (11) indicates that LWI is not possible. This shows that this coherence is essential for LWI.

Summarizing this section, we have shown that a convenient way to obtain the LWI conditions is to apply the techniques of nonlinear dynamics. For this purpose, one performs a linear stability analysis of the trivial solution, corresponding to $\alpha = 0$ in our notation, of the Maxwell—Schrödinger equations. For the continuous wave emission regime, this approach is equivalent to the standard search for stationary solutions with the electric field amplitude $\alpha$ different from zero. However, the dynamical point of view allows one to find conditions when LWI takes place in a self-pulsing regime. From the analysis of resonant closed three-level systems, it has been shown that the folded schemes yield continuous wave LWI, while cascade systems can give rise to self-pulsing LWI. These results are easily interpreted in view of the well known inversionless gain spectra for three-level systems [7]. Thus, for the $V$-system with the laser cavity tuned to resonance, i. e., $\Delta_{\mathrm{c}} = 0$, the cavity mode experiences gain at line centre. When this gain overcomes cavity losses one has continuous wave lasing. On the other hand, the cascade system of Fig. 1*a* does not exhibit gain at $\Delta_{\mathrm{c}} = 0$ but at two sidebands symmetrically located about line centre, i. e., at $\Delta_{\mathrm{c}} = \pm(\Delta_\alpha)_{\mathrm{t}}$. Thus, the resonant cavity mode can be amplified in a self-pulsing regime, with its intensity modulated at the angular beating frequency $2\,(\Delta_\alpha)_{\mathrm{t}}$.

LWI in the double-Λ-scheme has been also investigated from a nonlinear dynamics perspective [8, 9]. This system, being more flexible, can exhibit both continuous wave and self-pulsing regimes in different domains of parameter space. Thus, for a bad cavity, the system can reach either continuous wave and self-pulsing regimes by only changing the driving field intensity.

## 2. GIANT PULSE LASING

As we have shown previously, the presence of an external coherent field acting on one transition of a three-level medium modifies substantially the conditions for laser oscillation in the other transition, which can even occur in the absence of population inversion. The reverse phenomenon, known as population inversion without lasing (IWL) can also occur. We show here the application of the IWL phenomenon for generating giant pulses of laser light [2]. The proposed method is an alternative to the standard Q-switching technique for generating pulses of short duration, e. g. $10^{-7}\div 10^{-8}$ s, and relatively high peak power, e. g. $10^{6}\div 10^{7}$ W, the so-called giant pulses.

Consider a cascade-scheme (Fig. 1*a*) within a ring laser cavity prepared to generate a laser field, the giant pulse, in the upper transition $|1\rangle$—$|2\rangle$. At variance with the rest of the paper, in this section we consider an incoherent continuous pump mechanism $\Lambda$ acting only from level $|2\rangle$ to level $|1\rangle$ and,

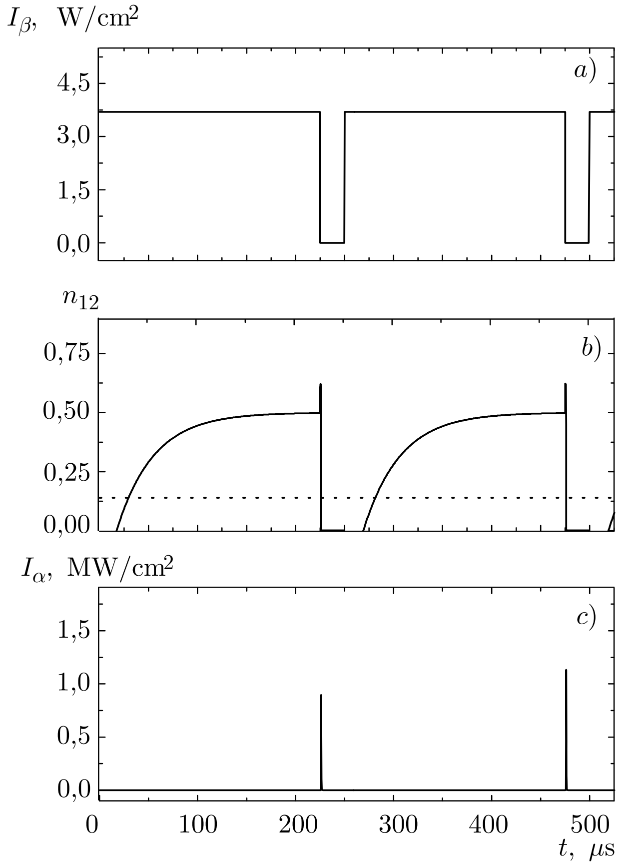



Fig. 4. Time evolution of the ($a$) driving field intensity, ($b$) population difference in the laser transition, and ($c$) intensity of the generated laser pulses. The parameters are as in Fig. 2 with $\kappa = 5$ MHz, $g = 900$ MHz$^2$, $\mu_{12} = 10^{-31}$ C $\cdot$ cm and $\mu_{23} = 10^{-28}$ C $\cdot$ cm. The dotted line in ($b$) represents the threshold population inversion for laser oscillation in the absence of the driving field, i. e. $n_{\rm th}(\beta = 0)$

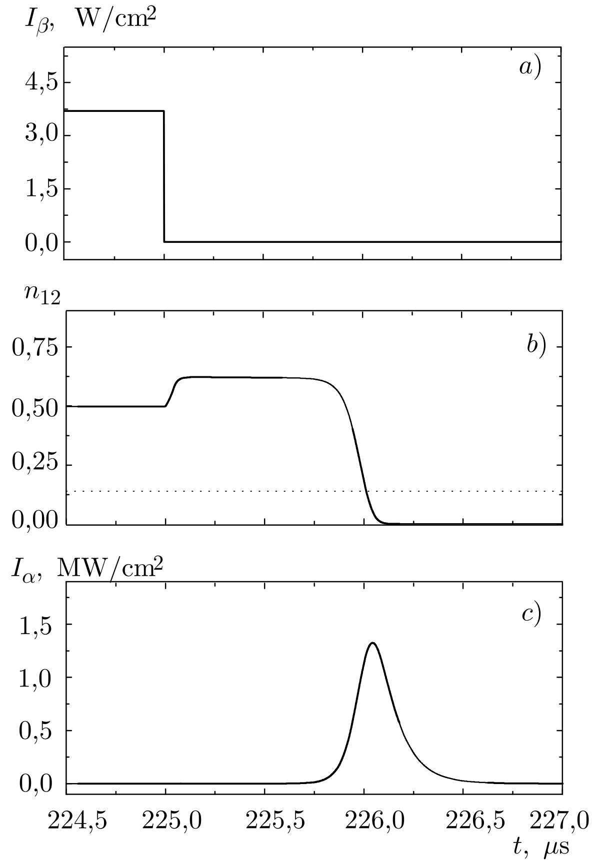



Fig. 5. Enlarged part of the time evolution of Fig. 4

therefore, allowing to invert the population of the upper transition. In what follows, for simplicity, we consider the completely resonant case, i. e. $\Delta_{\rm c} = \Delta_\beta = 0$. For appropriate parameter values ($\gamma_{12} = 10$ kHz, $\gamma_{23} = 50$ MHz, $\Lambda_{2\to 1} = 50$ kHz, $\beta = 25$ MHz, $\kappa = 5$ MHz, $g = 900$ MHz$^2$, $\mu_{12} = 10^{-31}$ C $\cdot$ cm, and $\mu_{23} = 10^{-28}$ C $\cdot$ cm), a linear stability analysis shows that in the presence of the driving field the nonlasing solution is stable, although the steady-state population inversion, $n_{12}^{\rm ss} = 0{,}5$, is well above the threshold inversion for lasing without the driving field, $n_{\rm th}(\beta = 0) = 0{,}14$. For the above parameters, the threshold inversion needed to destabilize the $\alpha = 0$ solution through a pitchfork or a Hopf bifurcation read $n_{\rm th}^{\rm p} = 1\,193$ and $n_{\rm th}^{\rm H} = 0{,}61$, respectively. This clearly shows that, as stated above, in the presence of the driving field the system will not lase. Thus, as shown in figs. 4 and 5, during the first 225 $\mu$s the presence of the driving field (Fig. 4$a$) with an intensity of 3,7 W $\cdot$ cm$^{-2}$ which corresponds to $\beta = 25$ MHz, prevents laser oscillation and a large population inversion accumulates (Fig. 4$b$). The dotted line in this figure represents the threshold population inversion in the absence of the external laser field, i. e. $n_{\rm th}(\beta = 0)$. After the population inversion saturates the driving field is switched off for 25 $\mu$s and a giant laser pulse develops (Fig. 4$c$) since then the population inversion is well above the threshold population inversion (dotted line). For the parameters used, the peak intensity of the laser pulse gives $(I_\alpha)^{\rm peak} = 1{,}33\ {\rm MW \cdot cm^{-2}}$ with a pulse width at half maximum about 210 ns and an integrated pulse energy of $0{,}33\ {\rm mJ \cdot cm^{-2}}$. Note that the pulse duration is similar to that of the longest pulses from traditional Q-switched systems. The time delay between the instantaneous switching off and the pulse generation is 1,1 $\mu$s for an initial laser field $\alpha^{(0)} = 10^{-3}$ MHz (this delay strongly depends on $\alpha^{(0)}$). It should be remarked that a laser field with a power of a few watts is able to control the generation of laser pulses of a few megawatts of peak power (Fig. 4*c*). Different time profiles for the switching off of the external field have been investigated (see [2] for details).

## 3. ENLARGEMENT OF THE INVERSIONLESS LASING DOMAIN BY USING BROAD-AREA CAVITIES

As a last example of the use of nonlinear dynamics in three-level systems, we investigate analytically and numerically the role of diffraction in the operation of a broad-area laser in the cascade three-level configuration of Fig. 1*a*. Through a linear stability analysis of the trivial non-lasing solution and numerical integration of the corresponding Maxwell—Schrödinger equations, we will show that off-axis emission allows stationary inversionless lasing over a cavity detuning range much larger than in small-aspect-ratio cavities and in conventionally inverted three-level lasers. We again consider a laser system operating with the three-level scheme shown in Fig. 1*a*. The inclusion of diffraction leads to the addition of a new term in the right hand side of the equation (1g). This new term is $-ia\,\nabla_\perp^2\alpha$, where $a = c^2/(2\omega)$ is the diffraction coefficient, $c$ is the velocity of light in vacuum, $\omega$ is the angular frequency of the $\alpha$-field, and $\nabla_\perp^2$ is the transverse Laplacian.

In the absence of diffraction, i. e. $a = 0$ in the equation (1g), a LSA of the trivial non-lasing solution of this cascade scheme [1, 10, 11] shows that, depending on the cavity detuning, the non-lasing solution can be destabilized either through a pitchfork or a Hopf bifurcation (see also section 1). A general feature of this Hopf bifurcation is that it occurs for values of the unsaturated gain parameter $g$ above a threshold value and, therefore, this parameter can be used to control the appearance of the Hopf bifurcation. A typical stability domain where both types of bifurcations occur is shown in Fig. 6. Outside the domain given by the solid curve the trivial non-lasing solution is stable. The instability domain corresponds to the superposition of two «boomerang»-like regions each one associated to a pitchfork bifurcation of the non-lasing solution. The crossing points are codimension-two bifurcation points and correspond to the Hopf bifurcation or self-pulsing instability. While the driving field $\beta$ is on resonance, note that we consider here the possibility of a detuned cavity, characterized by a cavity detuning $\Delta_{\rm c} \equiv \omega_{\rm c} - \omega_{12}$, where $\omega_{12}$ is the upper transition frequency and $\omega_{\rm c}$ is the longitudinal cavity mode closer to $\omega_{12}$. Notice that in section 1 we have discussed only the self-pulsing LWI associated with the two codimension-two bifurcation points located at $\Delta_{\rm c} = 0$ in Fig. 6.

In fact, we have checked numerically that inside the superposition domain limited by the dashed lines in Fig. 6 the system reaches a stable self-pulsing lasing emission. This self-pulsing lasing can be easily understood as the simultaneous excitation of the two amplifying sidebands discussed previously, which leads the lasing intensity to be modulated at the sidebands splitting frequency [1]. To illustrate this phenomenon, Fig. 7 shows the steady-state intensity of field $\alpha$ as a function of the cavity detuning resulting from the integration of the equations (1) for three different values of the incoherent pumping rate. As expected from Fig. 6, figure 7*b* exhibits steady-state self-pulsing laser emission around the line center. In what follows, we will investigate whether these results still hold in the presence of diffraction.

The trivial steady-state non-lasing solution of the density-matrix equations (1) can be written as follows:

$$\alpha = 0, \tag{13a}$$

$$\rho_{12} = \rho_{13} = 0, \tag{13b}$$

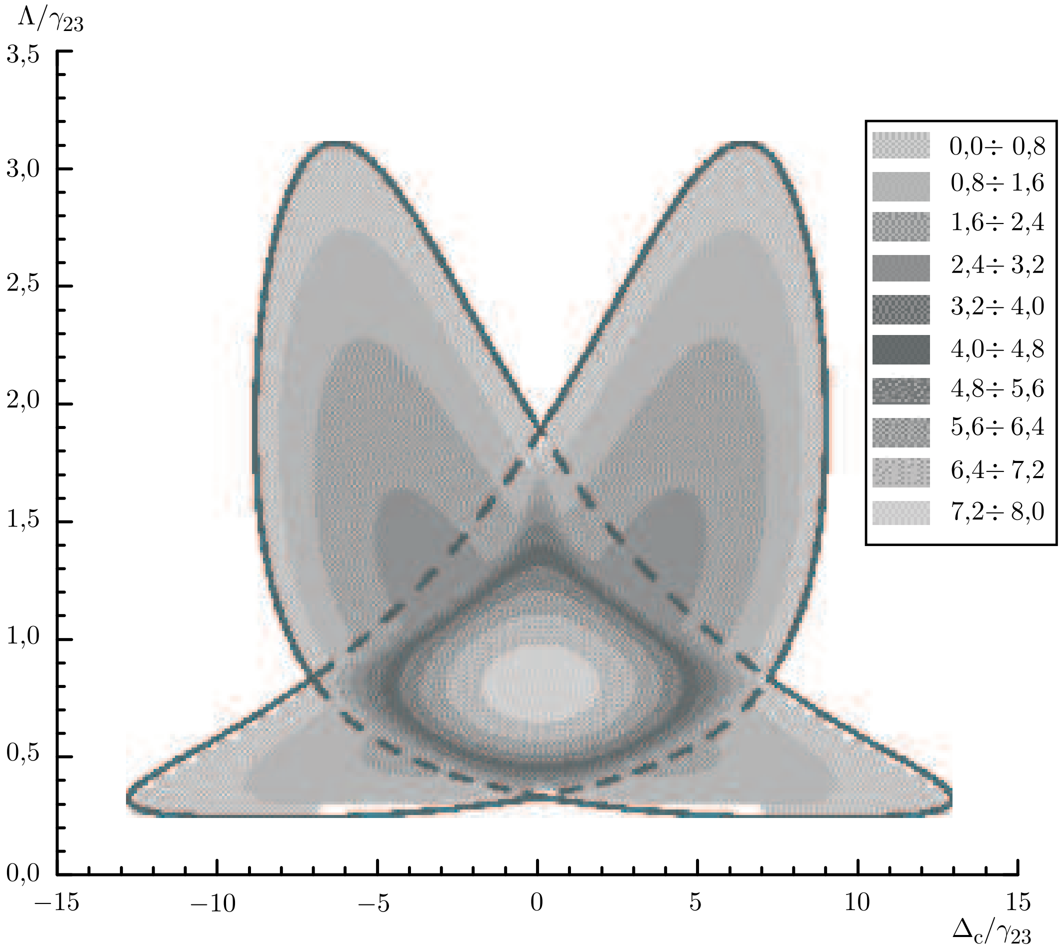



Fig. 6. Stability domain of the trivial non-lasing solution (solid curve) in the parameter plane $\Lambda$—$\Delta_c$ for $a = 0$, $\kappa = \gamma_{23}$, $g = 1\,000\gamma_{23}^2$, $\gamma_{12} = 0{,}1\gamma_{23}$, $\beta = 5\gamma_{23}$, $\Delta_\beta = 0$. Outside the domain given by the solid curve the non-lasing solution is stable. The grey coding indicates the maximum of the intensity of field $\alpha$, i. e., $(\alpha/\gamma_{23})^2_{\max}$, once the transients have died out

$$\rho_{23} = \rho_{23}^0, \tag{13c}$$

$$\rho_{ii} = \rho_{ii}^0, \tag{13d}$$

where $i = 1, 2, 3$; the superscript 0 indicates zero-order in the generated field. In the presence of diffraction, the system can develop a lasing solution with a small wavevector component transverse to the cavity-axis (which is taken in the $z$-direction). Therefore, let us consider now a perturbation of the trivial solution given above in the form of a transverse wave with wavevector $\mathbf{k}_\perp = (k_x, k_y)$, i. e.

$$\alpha(t) = \delta\alpha \exp[i\,(\mathbf{k}_\perp \mathbf{r} - \omega t)]\, \exp(\lambda t), \tag{14a}$$

$$\rho_{12}(t) = \delta\rho_{12} \exp[i\,(\mathbf{k}_\perp \mathbf{r} - \omega t)]\, \exp(\lambda t), \tag{14b}$$

$$\rho_{13}(t) = \delta\rho_{13} \exp[i\,(\mathbf{k}_\perp \mathbf{r} - \omega t)]\, \exp(\lambda t), \tag{14c}$$

$$\rho_{23}(t) = \rho_{23}^0 + \delta\rho_{23}\, \exp[i\,(\mathbf{k}_\perp \mathbf{r} - \omega t)]\, \exp(\lambda t), \tag{14d}$$

$$\rho_{ii}(t) = \rho_{ii}^0 + \delta\rho_{ii}\, \exp[i\,(\mathbf{k}_\perp \mathbf{r} - \omega t)]\, \exp(\lambda t), \tag{14e}$$

where $i = 1, 2, 3$, $\mathbf{r}$ is the position vector. We now perform a LSA of the equations (1) versus perturbations of the form given above. As usual, the non-lasing solution becomes unstable when the real part of $\lambda$ changes from a negative to a positive value. Note that two different frequencies appear in (14): $\omega$ is the frequency associated to the transverse perturbation, and $\mathrm{Im}\,\lambda$ is the one related to the Hopf bifurcation (or self-pulsing instability). Taking into account the dependence of the perturbations (14) on the transverse coordinate, we can make the substitution $\nabla_\perp^2 \leftrightarrow -k_\perp^2$ in the equation (1g), with $k_\perp^2 = k_x^2 + k_y^2$. The stability of the non-lasing solution is then governed by a 8×8-matrix $\widehat{\mathbf{M}}$:

$$\left(\widehat{\mathbf{M}} - \lambda\widehat{\mathbf{I}}\right)\delta\mathbf{v} = 0, \tag{15}$$

where $\delta\mathbf{v} = (\delta\rho_{11}, \delta\rho_{22}, \delta\rho_{33}, \delta\rho_{23}, \delta\rho_{23}^*, \delta\rho_{13}, \delta\rho_{12}, \delta\alpha)$, $\widehat{\mathbf{I}}$ is the unit matrix. From the LSA it is easy to show that this matrix splits into two independent blocks $\widehat{\mathbf{L}}_1 \oplus \widehat{\mathbf{L}}_2$. The second block, which governs the stability of the variables $\rho_{13}$, $\rho_{12}$, and $\alpha$, and, therefore, the generation of the laser field, reads

$$\widehat{\mathbf{L}}_2 = \begin{pmatrix} -\Gamma_{13} + i\Delta_{\mathrm{c}} & -i\beta & 0 \\ -i\beta & -\Gamma_{12} + i\Delta_{\mathrm{c}} & +in_{12}^0 \\ 0 & -ig & -\kappa - iak_\perp^2 \end{pmatrix}, \tag{16}$$

where $n_{12}^0 \equiv \rho_{11}^0 - \rho_{22}^0$. Note that diffraction plays the role of a detuning or energy shift and, in accordance, we can define $\Delta_\perp \equiv ak_\perp^2$ as an effective detuning associated to diffraction effects. This detuning has the particularity that it can only be positive. We now have to solve the secular equation $\det(\widehat{\mathbf{L}}_2 - \lambda\widehat{\mathbf{I}}) = 0$ and then determine for which parameter values $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$ is satisfied. After some algebra, this condition reduces to solving the following two equations:

$$0 = c_2\widetilde{\omega}^2 + c_1\widetilde{\omega} + c_0, \tag{17a}$$

$$0 = \widetilde{\omega}^3 + d_2\widetilde{\omega}^2 + d_1\widetilde{\omega} + d_0, \tag{17b}$$

where $\widetilde{\omega} \equiv \omega + \mathrm{Im}\,\lambda$ and

$$c_2 = \kappa + \Gamma_{12} + \Gamma_{13}, \tag{18a}$$

$$c_1 = -\Delta_{\mathrm{c}}\left(2\kappa + \Gamma_{12} + \Gamma_{13}\right) + \Delta_\perp\left(\Gamma_{12} + \Gamma_{13}\right), \tag{18b}$$

$$c_0 = \kappa\left(\Delta_{\mathrm{c}}^2 - \beta^2 - \Gamma_{12}\Gamma_{13}\right) - \Delta_\perp\Delta_{\mathrm{c}}\left(\Gamma_{12} + \Gamma_{13}\right) + g\left(n_{12}^0\Gamma_{13} + \beta y_{23}\right), \tag{18c}$$

$$d_2 = -2\Delta_{\mathrm{c}} + \Delta_\perp, \tag{18d}$$

$$d_1 = \left(\Delta_{\mathrm{c}}^2 - \beta^2 - \Gamma_{12}\Gamma_{13}\right) - \kappa\left(\Gamma_{12} + \Gamma_{13}\right) - 2\Delta_\perp\Delta_{\mathrm{c}} + gn_{12}^0, \tag{18e}$$

$$d_0 = \kappa\Delta_{\mathrm{c}}\left(\Gamma_{12} + \Gamma_{13}\right) + \Delta_\perp\left(\Delta_{\mathrm{c}}^2 - \beta^2 - \Gamma_{12}\Gamma_{13}\right) - g\Delta_{\mathrm{c}}n_{12}^0. \tag{18f}$$

It is not possible to give a simple analytical solution to the equations (17) in terms of, for instance, the incoherent pumping process $\Lambda$ or the Rabi frequency $\beta$ of the driving field, since $\Gamma_{ij}$, $n_{12}^0$ and $y_{23}$ depend explicitly on these parameters. Therefore, the destabilization of the trivial non-lasing solution must be investigated by numerical solving of the equations (17). We refer the reader to [1] for the results of such a study.

Next we present numerical simulations of the full nonlinear model given by the equations (1) by means of a spectral split-step method. To model the spatiotemporal dynamics, the transverse plane has been discretized in a square two-dimensional grid of $256 \times 256$ cells with periodic boundary conditions. The steady-state spatially averaged intensity and the corresponding transverse wavevector values are shown in Fig. 8 as a function of the cavity detuning for $\Lambda = 3\gamma_{23}$ and the rest of the parameters

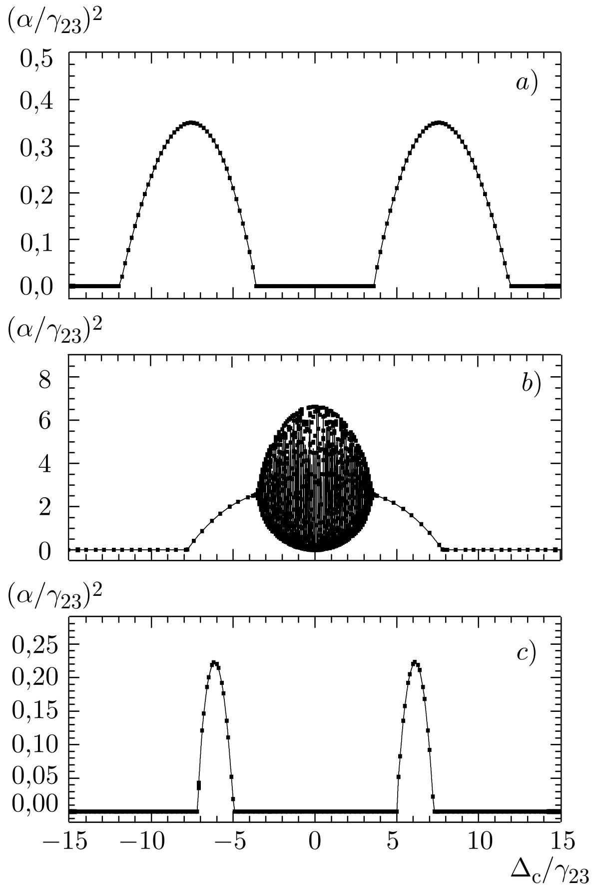



Fig. 7. Intensity of the generated field as a function of the cavity detuning for ($a$) $\Lambda = 0{,}3\gamma_{23}$, ($b$) $\Lambda = 0{,}85\gamma_{23}$, and ($c$) $\Lambda = 1{,}1\gamma_{23}$. The rest of parameter sare the same as in Fig. 6

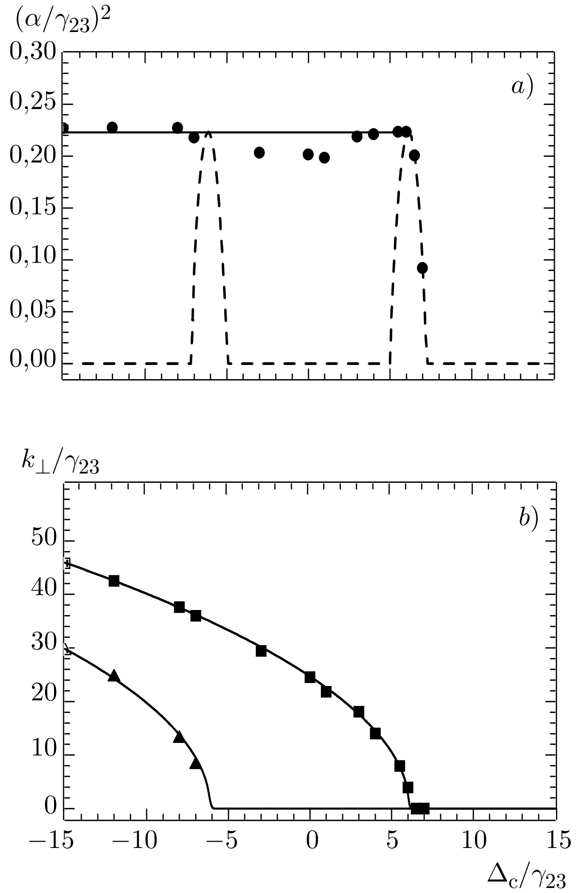



Fig. 8. ($a$) Steady-state spatially averaged intensity for $\Lambda = 3\gamma_{23}$ and the rest of parameters as in Fig. 6. ($b$) Wavenumber values of the corresponding transverse wave solution. The dashed line in ($a$) corresponds to the spatially uniform case ($a = 0$)

as in Fig. 6. The broken curve in Fig. 8$a$ corresponds to the spatially uniform case, i. e., $a = 0$ in the equation (1g). Clearly, diffraction allows the generated field $\alpha$ to develop a transverse wave component which brings it on resonance with the positively-detuned inversionless sideband. This occurs for any $|\Delta_{\rm c}| \le (\Delta_\alpha)^+_{\rm m}$. For $\Delta_{\rm c} \le (\Delta_\alpha)^-_{\rm m}$ the transverse wave component can have two different wavenumbers, which correspond to resonance of the $\alpha$ field with either the positively- or the negatively-detuned inversionless sidebands.

For the parameters chosen, one has $\Delta_\alpha(a = 0) \approx \Delta_{\rm c}$, i. e., frequency pulling or pushing effects are almost negligible, and thus $\Delta_{\rm c} + \Delta_\perp$ is either equal to $(\Delta_\alpha)^+_{\rm m}$ or $(\Delta_\alpha)^-_{\rm m}$. Therefore, for $\Delta_{\rm c} \le (\Delta_\alpha)^+_{\rm m}$ the maximum achievable gain from the active medium is always reached and consequently the intensity of the generated field is constant. Fluctuations on the laser field intensity are a numerical artifact due to the finite size of the transverse lattice in our simulations, which allows only a discrete set of transverse wavenumber values to be generated.

Figure 8$a$ shows that indeed off-axis emission substantially increases the cavity detuning domain for which there is inversionless lasing. This domain is controlled by $(\Delta_\alpha)^+_{\rm m}$, whose value depends, as discussed above, on the population difference in the $|1\rangle$—$|2\rangle$ transition, which in turns depends on the incoherent pumping rate $\Lambda$. In fact, in a largely non-inverted situation the positive detuned amplifying sideband lies far away from the closest Autler—Townes resonance, i. e. $(\Delta_\alpha)^+_{\rm m} \gg \beta$, which means that inversionless laser emission can be extended to a cavity detuning domain much larger than in the inverted case, where $\Delta_c \leq \beta$ holds.

## 3. CONCLUSIONS

We have reviewed lasing in homogeneously broadened coherently driven three-level systems in the framework of the semiclassical density matrix formalism and using a nonlinear dynamics point of view. This analysis underlines the central role played by atomic coherences in these systems, and allows one to find conditions for both continuous wave and self-pulsing laser emission regimes. In particular, we have discussed the following features of these systems: (i) self-pulsing LWI near the first lasing threshold, (ii) giant pulse lasing with inversion, and (iii) the possibility to greatly enlarge the cavity detuning range for LWI by using broad-area cavities.

The authors wish to thank useful discussions with V. Ahufinger, E. Arimondo, K. Eckert, R. García, J. García-Ojalvo, C. Peters, and M. C. Torrent. We acknowledge support from the MCyT (Spanish Government) and by the DGR (Catalan Government) under contracts BFM2002–04369–C04–02 and 2001SGR00187, respectively.

## REFERENCES

1. Mompart J., Peters C., Corbalán R. // Phys. Rev. A. 1998. V. 57. P. 2 163.
2. Mompart J., Corbalán R., Vilaseca R. // Phys. Rev. A. 1999. V. 59. P. 3 038.
3. Mompart J., Torrent M. C., Ahufinger V., et al. // J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. 2003. V. 5. P. 201.
4. Weiss C. O., Vilaseca R. Dynamics of Lasers. Weinheim: VCH, 1991.
5. Khanin Y. I. Principles of Laser Dynamics. Amsterdam: Elsevier, 1995.
6. Zhu Y. // Phys. Rev. A. 1992. V. 45. P. R6 149.
7. Mompart J., Corbalán R. // Opt. Commun. 1998. V. 156. P. 133.
8. Corbalán R., Mompart J., Vilaseca R., Arimondo E. // Quantum Semiclass. Opt. 1998. V. 10. P. 309.
9. Radeonychev Y. V., Koryukin I. V., Kocharovskaya O., et al. // J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. 1999. V. 1. P. 580.
10. Sanchez-Morcillo V., Roldán E., de Valcárcel G. J. // Quantum Semiclass. Opt. 1995. V. 7. P. 889.
11. Vladimirov A. G., Mandel P., Yelin S. F., et al. // Phys. Rev. E. 1998. V. 57. P. 1 499.

[1] Departament de Física, Universitat Autònoma de Barcelona;
[2] Departament de Física i Enginyeria Nuclear, Universitat Politècnica de Catalunya, Spain

Поступила в редакцию 18 мая 2004 г.

УДК 539.184

# ELECTROMAGNETICALLY INDUCED TRANSPARENCY AND LASING WITHOUT INVERSION IN THREE-LEVEL ATOMS IMBEDDED IN A FREQUENCY-DEPENDENT ENVIRONMENT

*Y. V. Radeonychev*[1], *M. A. Erukhimova*[1], *O. A. Kocharovskaya*[1,2], *and R. Vilaseca*[3]

The response of a three-level atomic system driven by a resonant coherent field acting on a transition near the photonic band-edge of a photonic band-gap material as well as the general case of a frequency-dependent reservoir is studied. The strong frequency dependence of the radiation mode spectral density at the scale of the driving field Rabi frequency is shown to lead to essential and controllable changes in the refractive index, as well as to effects of electromagnetically induced transparency and lasing without inversion. Such an effective dynamic control of the atomic response enables for applications in nonlinear optics, optical computing and communications.

## INTRODUCTION

It is well known that the atom—field interaction can strongly depend on the environment, and therefore such environment can have a strong influence on the optical properties of atoms as well as on the propagation of the electromagnetic field. Recently a novel special form of dielectric medium, called photonic crystal, is being intensively investigated. The most important property of a photonic crystal is an essential modification of the density of the electromagnetic-field spectral modes inside the material. Over the past decade, photonic crystal physics has become one of the most significant and exciting concepts in science and technology, resulting in important breakthroughs in many areas of fundamental and applied research.

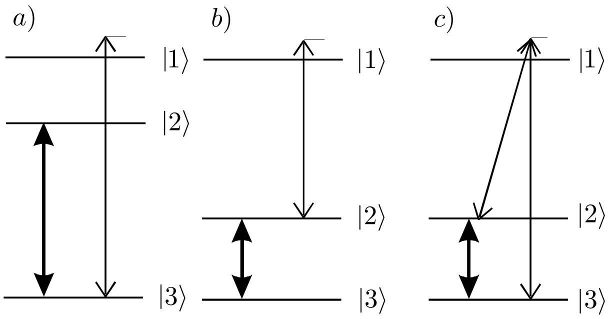



Fig. 1. The model of three-level atomic system in a spectrally heterogeneous surroundings driven by the laser field with the Rabi frequency $\Omega$ that is near the photonic band edge and probed by the laser field $\alpha$ and $\beta$ at the higher optical transitions

One of the directions of study of photonic crystals is connected with the possibilities of modifying, enhancing or generating new quantum-optical phenomena when the atom—light interaction occurs within photonic band-gap (PBG) materials, which could lead to technological applications in optoelectronics, photochemistry, laser engineering, and optical computing and communication. Most of the quantum-optical effects in PBG materials are based on the ability to control or modify spontaneous emission of two-level or three-level atoms embedded in the photonic crystal, although the possibility of producing or modifying light—atom coherent interaction phenomena (including collective switching, inversion without fluctuation and all-optical transistor effects, electromagnetically induced transparency (EIT), enhancement of refraction index and lasing without population inversion (LWI)) was also pointed out (see [1–3] and references therein).

In the present paper we study three different schemes of a three-level atomic system placed within a specific environment. We consider two types of environment, namely a photonic crystal and a concentric or confocal cavity. The atomic system is driven by a resonant coherent field at one of the transitions and probed by one or two weak fields at the adjacent transitions (Fig. 1). The density of the electromagnetic modes of the environment essentially differs from that of free space and has steep frequency dependence at the scale of the Rabi frequency of the driving field. At some frequency range it can exceed the free-space density or be essentially smaller. The frequency of the driven transition is assumed to be near the band-edge frequency of a cavity or of a PBG. We show that the strong frequency dependence of the radiation mode spectral density at the scale of the driving-field Rabi frequency near the spectral band-edge of the environment leads to a strong dependence of the populations of the dressed-atom levels on the intensity and detuning of the driving field. In particular, population trapping at one of the dressed states can occur if one of the dressed frequencies falls into a range with high mode spectral density in the case of a concentric cavity or into a band gap of the PBG structure. This leads to excitation of the maximal atomic coherence between the corresponding atomic levels and significant changes in the refractive index as well as to electromagnetically induced transparency (EIT) and lasing without inversion (LWI) effects. Such a dynamic control of the atomic response enables for applications in nonlinear-optics, optical computing and communications.

## 1. MODEL AND APPROACH

It is well known that interaction of light with atoms embedded in a PBG material or other spectrally heterogeneous surroundings can be essentially modified in comparison with free space. This is due to

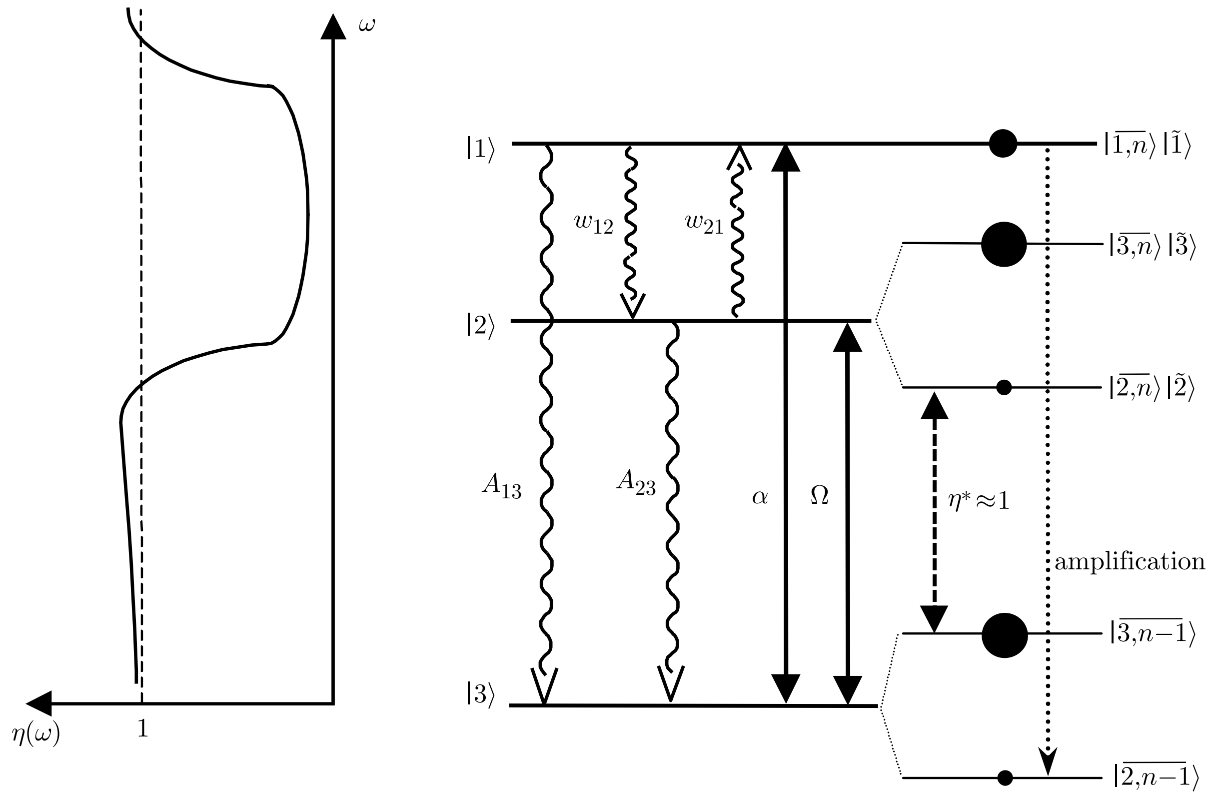



Fig. 2. The model of three-level atomic system in a PBG structure driven by the laser field $\Omega$ at the transition near the photonic band edge and probed by the laser field $\alpha$ at the higher optical transition. Outside the photonic crystal only the spontaneous relaxation with rates $A_{13}$ and $A_{23}$ at the optical transitions is essential whereas both downward (rate $w_{12}$) and upward (rate $w_{21}$) relaxation at the low-frequency transition should be taken into account. The frequency of the dressed transition $|\overline{2,n}\rangle \leftrightarrow$ $\leftrightarrow |\overline{3,n-1}\rangle$ falls into the dielectric photonic band ($\eta \approx 1$) whereas at the other dressed frequencies $\eta \ll 1$ due to PBG. This leads to redistribution of populations of the dressed states and alteration of the atomic response

modification of the atomic relaxation if the frequency of some atomic transition belongs to a PBG or some frequency range of the host material having spectral mode density essentially different from free space. We consider such a situation for the case of a three-level atomic system. For the case of Fig. 1*a* it is assumed that the frequencies of both the driven optical transition $|3\rangle \leftrightarrow |2\rangle$ and probed transition $|3\rangle \leftrightarrow |1\rangle$ belong to the PBG, and the frequency of the low frequency transition $|2\rangle \leftrightarrow$ $\leftrightarrow |1\rangle$ belongs to the allowed «dielectric band» (Fig. 2). It should be noted that the driven transition frequency could also belong to the dielectric band. In such case all the discussed effects are shown to be qualitatively the same. The principal point is that the driven transition $|3\rangle \leftrightarrow |2\rangle$ is near the photonic band edge. In this case one can effectively control the relaxation rate of the driven transition by means of variations in the intensity and detuning of the driving field. The mechanism of such control has the clearest interpretation in the dressed-state approach [4, 5]. The driving field causes a dynamic Stark splitting of the atomic levels (Fig. 3), which is equivalent to appearance of the dressed states (quantum dressed states). Atomic relaxation at the transitions between the corresponding dressed states is the origin of the Mollow and Autler—Townes spectra. In the case of appropriate intensity or detuning of the driving field one of the dressed transitions (the transition $|\overline{2,n}\rangle \leftrightarrow |\overline{3,n-1}\rangle$ in Figs. 2 and 3) falls into the dielectric photonic band, and the relaxation rate at this transition essentially increases compared to the rest of dressed transitions. This results in redistribution of the dressed-level populations and alteration of the atomic response. Such a dynamic control of the atomic spontaneous decay in a frequency dependent (tailored) reservoir was used to modify the fluorescence spectrum of two-level atoms confined within a frequency-selective cavity [6–13]. Also, a slight modification of the fluorescence spectrum was demonstrated experimentally in a gas of Rydberg atoms inside a confocal cavity [9, 10]. PBG materials are thus able to provide conditions for practical control of the atomic optical properties by means of external laser radiation via control of the atomic relaxation.

Similarly, for the case of Fig. 1*b, c* the driven transition $|3\rangle \leftrightarrow |2\rangle$ is supposed to be near the photonic band edge of concentric or confocal cavity such, that the transition $|\overline{3,n}\rangle \leftrightarrow |\overline{2,n-1}\rangle$ (Fig. 4) falls into the photonic band $\eta > 1$. Therefore the relaxation rate at this transition increases compared to the rest transitions where $\eta \approx 1$. This results in redistribution of the dressed-level populations and alteration of the atomic response.

The main obstacle in the analysis of the atomic response in a frequency dependent environment, even in the case of a two-level atom, is the derivation of the relaxation rates in the dressed-state basis, taking into account the dependence on the driving field and surrounding environment. It is necessary to establish a relation between the relaxation rates of the dressed states and energy atomic states (bare states) and to derive the corresponding master equations.

Recently an approach based on the so-called semiclassical dressed states was developed to solve the problem of the field-dependent atomic relaxation. The correspondence between the semiclassical and quantum dressed states as well as their relation to the bare atomic states was established. The generalized master equations taking into account the dependence of the atomic relaxation rates on the driving field and surrounding environment were derived in the dressed-state and bare-state bases [13, 14]. In particular, it was shown that in the case of a monochromatic driving field resonant with an atomic transition the downard ($\overline{W}_{ij}$) and upward ($\overline{Q}_{ij}$) relaxation rates at the dressed transitions $|\overline{i,n}\rangle \leftrightarrow |\overline{j,m}\rangle$ (Fig. 3) have the form

$$\overline{W}_{ij} = \frac{4}{3\hbar c^3}\, |\mu_{j,n-1;i,n}|^2\, \omega^3_{i,n;j,n-1} \eta(\omega_{i,n;j,n-1})\, [N(\omega_{i,n;j,n-1}) + 1],$$
$$\overline{Q}_{ij} = \frac{4}{3\hbar c^3}\, |\mu_{j,n;i,n-1}|^2\, \omega^3_{j,n;i,n-1} \eta(\omega_{j,n;i,n-1}) N(\omega_{j,n;i,n-1}), \tag{1}$$

where $\hbar$ is the Plank constant, $c$ is the light velocity, $\mu_{j,n-1;i,n}$ is the dipole moment of the corresponding dressed transition, $\omega_{i,n;j,n-1}$ is the frequency of the dressed transition, $\eta(\omega_{i,n;j,n-1})$ is a dimensionless

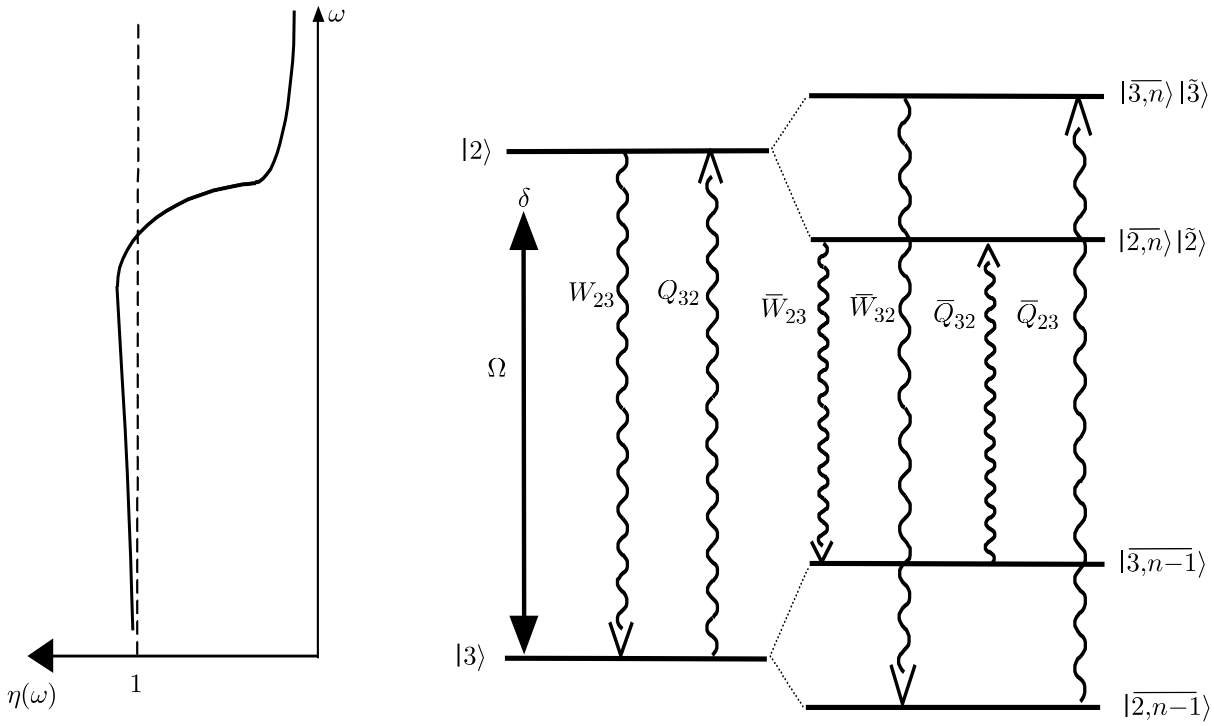



Fig. 3. The driven atomic transition in the quantum dressed-state representation $|\overline{j,n}\rangle$, $j = 2,3$ and relaxation rates at the dressed transitions according to (1). The semiclassical dressed states $|\tilde{j}\rangle$ are also shown

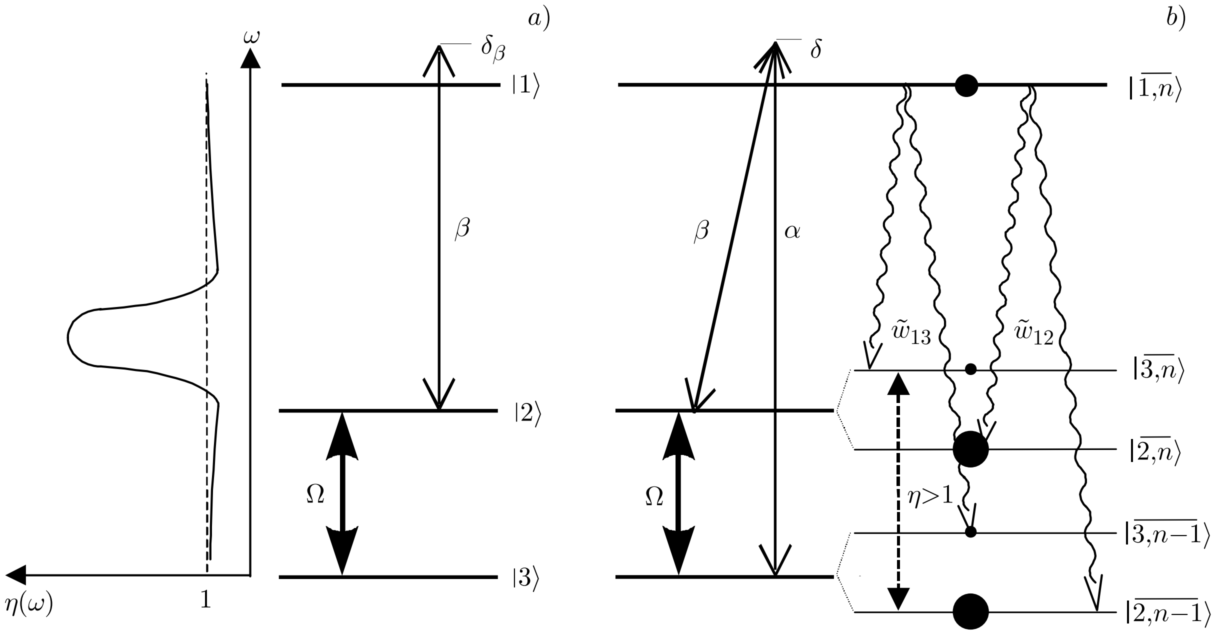



Fig. 4. The model of three-level atomic system driven by the laser field $\Omega$ at the transition near the photonic band edge of a confocal cavity and probed by the laser field $\alpha$ or $\beta$ at the optical transitions. The frequency of the dressed transition $|\overline{3,n}\rangle \leftrightarrow |\overline{2,n-1}\rangle$ falls into the photonic band $\eta > 1$ whereas $\eta \approx 1$ at the other dressed frequencies. This leads to redistribution of populations of the dressed states and alteration of the atomic response

parameter characterizing the ratio between the reservoir spectral mode density at the corresponding frequency and the mode density in vacuum (in vacuum $\eta(\omega) \equiv 1$; note that it will be through this parameter that the photonic-crystal influence will be introduced in the model, below), $N(\omega_{i,n;j,n-1})$ is a mean number of the reservoir photons, indexes $i$, $j$ denote the atomic states and index $n$ denotes the number of coherent photons in the driving field. As follows from (1), the relaxation rates have the well-known form of Einstein relaxation rates. But for the case of the driven atomic system the Einstein constants become functions of the intensity and frequency of the driving field via their dependence on the dressed frequencies. Indeed, as follows from [15, 16], one has

$$\omega_{i,n;j,n-1} = \omega \pm \sqrt{\omega_{23} - \omega + 4\,|\Omega|^2}\ , \tag{2}$$

where $\Omega = \mu_{23}E/(2\hbar)$ is the Rabi frequency of the driving field with amplitude $E$ and frequency $\omega$; $\mu_{23}$ and $\omega_{23}$ are the dipole moment and frequency of the atomic transition respectively. Below we apply the formalism developed in [13–16] to the atomic ensemble in the PBG structure and cavity.

## 2. DRESSED STATE ANALYSIS

As pointed out above, the dressed state basis is the most appropriate for analysis of the laser control of atomic relaxation [13–16]. It provides both clear physical interpretation and quite simple mathematics, which is not more complicated than that in the bare-state basis. The complete physical understanding is achievable in the basis of the quantum dressed states, which includes the driving field in quantized form. But the necessity to take into account the infinite number of driving-field states makes this basis difficult for mathematical analysis. The semiclassical dressed-state basis is not able to provide the straightforward interpretation of the results obtained within this approach. Nevertheless, using of the semiclassical dressed states allows to deal with only an atomic density matrix due to the quasi-classical character of the driving laser field, significantly simplifying calculations. There exists correspondence between the two bases that was established in [15, 16]. It was shown that all the solutions obtained within the semiclassical dressed-state approach have clear physical interpretation in the quantum dressed-state basis.

Our analysis is based on the master equations for the elements of the density matrix of the atomic ensemble $\tilde\rho_{m'm}$ in the semiclassical dressed-state representation. In general form they can be written as [15, 16]

$$\frac{\mathrm{d}\tilde\rho_{m'm}}{\mathrm{d}t} + i\tilde\omega_{m'm}\tilde\rho_{m'm} = \sum_{n',n} \tilde R_{m'mn'n}\tilde\rho_{n'n}, \tag{3}$$

where $\tilde\omega_{ij} = (\tilde E_i - \tilde E_j)/\hbar$ is the transition frequency between the semiclassical dressed states. Relaxation rates $\tilde R_{m'mn'n}$ have the form

$$\tilde R_{m'mn'n} = \tilde\Gamma_{nmm'n'} + \tilde\Gamma^*{}_{n'm'mn} - \sum_k (\delta_{nm}\tilde\Gamma_{m'kkn'} + \delta_{n'm'}\tilde\Gamma^*{}_{mkkn}) \tag{4}$$

and can be expressed via the relaxation rates $\Gamma^{(0)}_{kk'll'}(\omega)$ of the bare atomic system:

$$\tilde\Gamma_{nmm'n'} = \sum_{kk'll'} \zeta_k^n\,(\zeta_{k'}^m)^*\,\zeta_l^{m'}\,(\zeta_{l'}^{n'})^*\,\Gamma^{(0)}_{kk'll'}(\tilde\omega_{m'n'} - s_l\omega_l + s_{l'}\omega_{l'}), \tag{5}$$

where $\zeta_n^m = \langle \tilde m \mid n\rangle$ are the elements of the unitary transformation matrix from the bare-state basis $|n\rangle$ to the dressed-state basis $|\tilde m\rangle$. For the case of the photonic reservoir the relaxation rates $\Gamma^{(0)}_{kk'll'}(\omega)$ can be expressed via the common relaxation rates $w_{ij}$ from the bare state $|j\rangle$ to the state $|i\rangle$ [17, 18]:

$$w_{ji} = A_{ji} \begin{cases} N(\omega_{ij}), & E_j < E_i; \\ N(\omega_{ji}) + 1, & E_j > E_i, \end{cases} \tag{6}$$

where $A_{ji} = 4\,|\mu_{ij}|^2\,|\omega_{ij}|^3/(3\hbar c^3)$ is the Einstein coefficient of the spontaneous relaxation.

We consider the dressed states formed by the resonant laser radiation

$$E = E_\Omega \cos(\omega t - kz). \tag{7}$$

The frequency $\omega$ is assumed to be equal to the frequency of the driven atomic transition $\omega_{23}$ ($\omega = \omega_{23}$), and we also assume that the rotating wave approximation (RWA) is valid:

$$\Omega \ll \omega_{23}. \tag{8}$$

Then the semiclassical dressed states $|\tilde{i}\rangle$ and their energies $\tilde{E}_i$ can be expressed via the bare atomic states $|i\rangle$ (with $i = 1, 2, 3$) in the form

$$\begin{aligned} |\tilde{1}\rangle &= |1\rangle, & \tilde{E}_1 &= E_1, \\ |\tilde{2}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\,[|2\rangle + |3\rangle\,\exp(i\omega t)], & \tilde{E}_2 &= E_2 - \hbar\Omega, \\ |\tilde{3}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\,[|3\rangle\,\exp(i\omega t) - |2\rangle], & \tilde{E}_3 &= E_2 + \hbar\Omega, \end{aligned} \tag{9}$$

where $E_i$ is the energy of the bare atomic state $|i\rangle$ (Figs. 2–4). For the schemes of Fig. 1 the master equations (3) can be converted to the form

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\rho}_{ii}}{\mathrm{d}t} = -\sum_{k\neq i} \tilde{w}_{ik}\tilde{\rho}_{ii} + \sum_{k\neq i} \tilde{w}_{ki}\tilde{\rho}_{kk},$$

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\rho}_{ij}}{\mathrm{d}t} = -i\tilde{\omega}_{ij}\tilde{\rho}_{ij} - \tilde{\gamma}_{ij}\tilde{\rho}_{ij}, \qquad i \neq j. \tag{10}$$

Here $\tilde{w}_{ij}$ and $\tilde{\gamma}_{ij}$ are the relaxation rates of populations and coherences at the corresponding dressed transition $|\overline{i,n}\rangle \to |\overline{j,m}\rangle$ (see Fig. 4). The system (10) is written under the secular approximation. This means that the Rabi frequency $\Omega$ of the driving field is much larger than all the relaxation rates:

$$w_{ij} \ll \Omega. \tag{11}$$

Under conditions (8) and (11) the dressed relaxation rates $\tilde{w}_{ij}$ and $\tilde{\gamma}_{ij}$, modified by the environment, can be expressed via the common relaxation constants (6) in free space and the spectral mode density parameter $\eta_{i,n;j,m}$ at the quantum dressed-state transition $|\overline{i,n}\rangle \to |\overline{j,m}\rangle$. According to the schemes in Fig. 1, we take into account only the spontaneous relaxation with rates $A_{ij}$ for all optical transitions and for a high-frequency transition $|3\rangle \leftrightarrow |2\rangle$ (Fig. 1*b*, *c*). We assume both downward (rate $w_{12}$) and upward (rate $w_{21}$) relaxation for the low-frequency transition in Fig. 1*a*. Tedious but straightforward calculation of (4) and (5) allows one to obtain the following relations:

$$\tilde{w}_{12} = \frac{1}{2}\,(w_{12}\eta_{1,n;2,n} + A_{13}\eta_{1,n;2,n-1}), \qquad \tilde{w}_{13} = \frac{1}{2}\,(w_{12}\eta_{1,n;3,n} + A_{13}\eta_{1,n;3,n-1}),$$

$$\tilde{w}_{21} = \frac{1}{2}\,w_{21}\eta_{1,n;2,n}, \qquad \tilde{w}_{31} = \frac{1}{2}\,w_{21}\eta_{1,n;3,n},$$

$$\tilde w_{32}=\frac14\,A_{23}\eta_{3,n;2,n-1},\qquad \tilde w_{23}=\frac14\,A_{23}\eta_{2,n;3,n-1};$$

$$\tilde\gamma_{12}=\frac12\,\tilde w_{23}+\frac12\,(\tilde w_{21}+\tilde w_{23}+\tilde w_{12}+\tilde w_{13}),\qquad \tilde\gamma_{13}=\frac18\,\tilde w_{23}+\frac12\,(\tilde w_{31}+\tilde w_{32}+\tilde w_{13}+\tilde w_{12}),$$

$$\tilde\gamma_{32}=2\tilde w_{23}+\frac12\,(\tilde w_{21}+\tilde w_{23}+\tilde w_{32}+\tilde w_{31}). \tag{12}$$

For the atomic system in a PBG structure, according to Fig. 2, we assume

$$\eta_{1,n;2,n}\approx\eta_{1,n;3,n}\approx 1,$$

$$\eta_{1,n;2,n-1}\approx\eta_{1,n;3,n-1}\approx\eta_{3,n;2,n-1}=\eta\ll 1,$$

$$\eta_{2,n;3,n-1}=\eta^*\approx 1. \tag{13a}$$

For the case of a confocal or concentric cavity, according to Fig. 4, we have a reverse situation when

$$\eta_{1,n;2,n}\approx\eta_{1,n;3,n}\approx\eta_{1,n;2,n-1}\approx\eta_{1,n;3,n-1}\approx\eta_{2,n;3,n-1}\approx 1,$$

$$\eta_{3,n;2,n-1}=\eta>1. \tag{13b}$$

We simplify expressions (12) to the form that describes both cases:

$$\tilde w_{12}=\tilde w_{13}=\frac12\,(w_{12}+A_{13}\eta_{1,n;2,n-1})=\frac12\,w^+,$$

$$\tilde w_{21}=\tilde w_{31}=\frac12\,w_{21},\qquad \tilde w_{32}=\frac14\,A_{23}\eta,\qquad \tilde w_{23}=\frac14\,A_{23},$$

$$\tilde\gamma_{12}=\frac14\,(A_{23}+w_{21}+2w^+),\qquad \tilde\gamma_{13}=\frac14\left(A_{23}\,\frac{\eta+1}{2}+w_{21}+2w^+\right),$$

$$\tilde\gamma_{32}=\frac14\left[2w_{21}+A_{23}\left(2+\frac{\eta+1}{2}\right)\right]. \tag{14}$$

The steady-state solution of (10), (14) has the form

$$\tilde\rho_{ij}=0,\qquad i\neq j;$$

$$\tilde\rho_{11}=\frac{w_{21}}{w_{21}+2w^+}\,,\qquad \tilde\rho_{22}=\frac{w^+\,(w_{21}+A_{23}\eta)}{(w_{21}+2w^+)\left(w_{21}+A_{23}\,\dfrac{\eta+1}{2}\right)}\,,$$

$$\tilde\rho_{33}=\frac{w^+\,(w_{21}+A_{23})}{(w_{21}+2w^+)\left(w_{21}+A_{23}\,\dfrac{\eta+1}{2}\right)}\,. \tag{15}$$

It is seen from (15) that if $\eta\neq 1$, there is a population redistribution among the dressed states.

Let us consider photonic crystal (see Fig. 1*a* and Fig. 2) in the case of perfect PBG ($\eta=0$) and $A_{23}\gg w_{21}$. Then population trapping at the dressed level $|\tilde 3\rangle$ takes place. In particular, if $w_{21}=w_{12}$ then $\tilde\rho_{11}=1/3$, $\tilde\rho_{22}=2w_{21}/(3A_{23})\ll 1$, and $\tilde\rho_{33}=2/3$. Population inversion at the dressed transition $|\overline{1,n}\rangle\leftrightarrow|\overline{2,n-1}\rangle$ can lead to amplification of the probe field $\alpha$ at the frequency $\omega_{13}+\Omega$. If the frequency of the transition $|2\rangle\leftrightarrow|1\rangle$ is high such that $w_{21}\approx 0$ then we have full population trapping: $\tilde\rho_{11}=\tilde\rho_{22}=0$, and $\tilde\rho_{33}=1$. This leads to transparency of the resonant transitions $|2\rangle\leftrightarrow|1\rangle$ and $|3\rangle\leftrightarrow|1\rangle$ at the frequencies $\omega_{12}+\Omega$ and $\omega_{13}+\Omega$.

In the case of a cavity, according to (13a) and (15), we have $\tilde\rho_{11} = 0$, $\tilde\rho_{22} = \eta/(\eta+1)$, $\tilde\rho_{33} = 1/(\eta+1)$. If $\eta \gg 1$ then we have population trapping at the level $|\tilde 2\rangle$: $\tilde\rho_{22} \approx 1$, $\tilde\rho_{33} \approx 0$, and transparency of the resonant transitions $|2\rangle \leftrightarrow |1\rangle$ and $|3\rangle \leftrightarrow |1\rangle$ at the frequencies $\omega_{12} - \Omega$ and $\omega_{13} - \Omega$.

Redistribution of populations among the dressed states $|\tilde 2\rangle$ and $|\tilde 3\rangle$ ($\tilde n_{23} \neq 0$) corresponds to excitation of the real part of the atomic coherence $\sigma_{32}$ (which characterizes the refractive index) at the driven transition $|2\rangle \leftrightarrow |3\rangle$. It follows from (9) that

$$\sigma_{32} = (\tilde\rho_{22} - \tilde\rho_{33})/2. \tag{16}$$

In the case of population trapping ($\tilde\rho_{22} = 0$ or $\tilde\rho_{33} = 0$) the resonant coherence reaches its maximum absolute value, $|\sigma_{32}| = 1/2$. This is a rather rare example wherein atomic relaxation helps to prepare atoms in an almost pure quantum state with the maximal possible coherence, $\sigma_{32} \approx \sqrt{\rho_{22}\rho_{33}}$.

Interaction of the probe fields $\alpha = \mu_{13} E_\alpha/(2\hbar)$ and $\beta = \mu_{12} E_\beta/(2\hbar)$ with atoms at the transitions $|1\rangle \leftrightarrow |3\rangle$ and $|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle$ can be described by the equations

$$\frac{\mathrm{d}\tilde\sigma_{31}}{\mathrm{d}t} = -i\Omega\tilde\sigma_{31} - \frac{i}{\sqrt2}\,\alpha\tilde n_{31} - \frac{i}{\sqrt2}\,\alpha\tilde\rho_{32} - \tilde\gamma_{31}\tilde\sigma_{31}, \qquad \frac{\mathrm{d}\tilde\sigma_{21}}{\mathrm{d}t} = i\Omega\tilde\sigma_{21} - \frac{i}{\sqrt2}\,\alpha\tilde n_{21} - \frac{i}{\sqrt2}\,\alpha\tilde\rho_{23} - \tilde\gamma_{21}\tilde\sigma_{21},$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial z} + \frac1c\,\frac{\partial\alpha}{\partial t} = -i\,\frac{s_\alpha}{\sqrt2}\,(\tilde\sigma_{21} + \tilde\sigma_{31}), \qquad \frac{\partial\beta}{\partial z} + \frac1c\,\frac{\partial\beta}{\partial t} = -i\,\frac{s_\beta}{\sqrt2}\,(\tilde\sigma_{21} - \tilde\sigma_{31}). \tag{17}$$

Here $\alpha$ and $\beta$ are the Rabi frequencies of the probe fields, which are slowly varying functions of $t$ and $z$, $\tilde\sigma_{31} = \tilde\rho_{31}\exp(-i\omega_{12}t)$ and $\tilde\sigma_{21} = \tilde\rho_{21}\exp(-i\omega_{12}t)$ are the optical coherences, slowly varying in the scale of the bare frequencies. The low-frequency coherence $\tilde\rho_{32}$ and population differences $\tilde n_{31} = \tilde\rho_{33} - \tilde\rho_{11}$ and $\tilde n_{21} = \tilde\rho_{22} - \tilde\rho_{11}$ satisfy the steady-state solution (15). The coupling constant $s_\alpha = 2\pi\omega_{13}\,|\mu_{13}|^2\,N_0/(c\hbar)$, where $N_0$ is the density of active atoms.

## 3. ATOMIC SYSTEM IN A PBG STRUCTURE

We first consider solution of equations (17) for the case of photonic crystal (Fig. 1*a* and Fig. 3). Seeking for a plane-wave solution of (17) in the form

$$\{\tilde\sigma_{31}(t,z), \tilde\sigma_{21}(t,z), \alpha(t,z)\} \sim \exp[-i\,(\omega t - kz)],$$

one can obtain the dispersion relation for the probe field $\alpha$:

$$\kappa_\alpha = \frac{\omega_\alpha}{c} - \frac{i}{2}\,s_\alpha\left(\frac{\tilde n_{13}}{\tilde\gamma_{31} + i\Omega + i\delta_\alpha} + \frac{\tilde n_{12}}{\tilde\gamma_{21} - i\Omega + i\delta_\alpha}\right), \tag{18}$$

where $\delta_\alpha = \omega_\alpha - \omega_{13}$. The real and imaginary parts of (18), responsible for the probe field dispersion and absorption respectively, are plotted in Fig. 5. Figure 5*a* corresponds to the case of insufficient intensity of the driving field, so that the transition $|\overline{2,n}\rangle \leftrightarrow |\overline{3,n-1}\rangle$ (Fig. 2) still belongs to the PBG. As a result, the atomic response is an Autler—Townes spectrum with two peaks of absorption at the frequencies $\omega_{31} \pm \Omega$. When the Rabi splitting is such that the transition $|\overline{2,n}\rangle \leftrightarrow |\overline{3,n-1}\rangle$ falls into the dielectric photonic band (Fig. 5*b*), a qualitative alteration of the atomic response at the probe field transition takes place: 1) within the range of the resonant transparency there is a refractive index enhancement, and 2) the probe field can be amplified at the frequency $\omega_{13} + \Omega$ due to population inversion at the dressed-state transition $|\overline{1,n}\rangle \leftrightarrow |\overline{2,n-1}\rangle$ (but without inversion at the bare-state basis). Slowing of the amplified pulse occurs due to steep normal dispersion. These results imply that a novel method of controllable modification of the absorptive and dispersive optical properties of an atomic system in a PBG structure could be implemented.

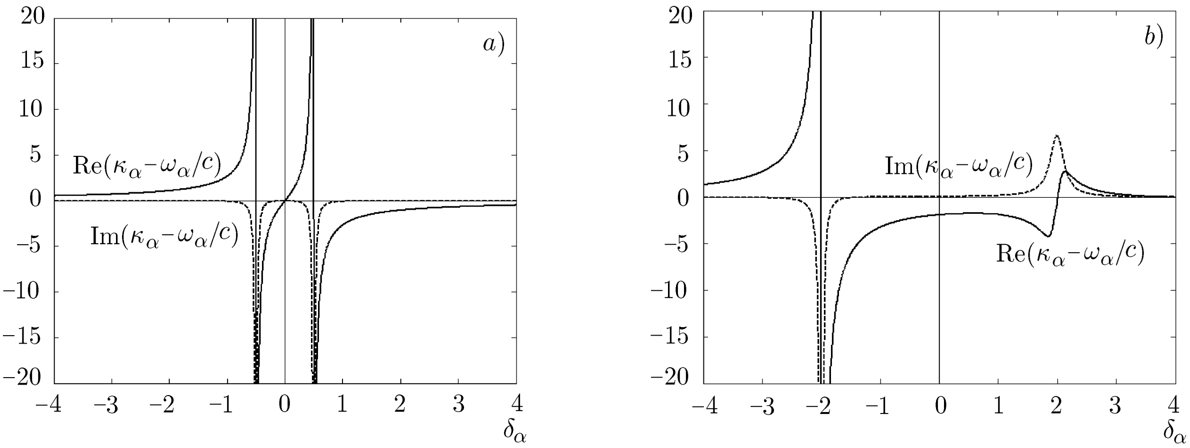



Fig. 5. Dependence of dispersion (solid line) and absorption (dashed line) of the probe field $\alpha$ on detuning $\delta_\alpha = \omega_\alpha - \omega_{13}$ according to (18). All the parameters are normalized to the spontaneous relaxation rate. The common values of the parameters are $w_{12} = w_{21} = 0{,}01$, $A_{13} = A_{23} = 1$, $\eta = 0{,}01$; ($a$): $\Omega = 0{,}5$, all the dressed transitions belong to the PBG; ($b$): $\Omega = 2$, the transition $|\overline{2,n}\rangle \leftrightarrow |\overline{3,n-1}\rangle$ falls into the dielectric photonic band $\eta \approx 1$

## 4. ATOMIC SYSTEM IN A CAVITY

For the case of a confocal or concentric cavity we analyze amplification conditions for the probe field $\beta$ under the conditions of Fig. 1$b$ and Fig. 4$a$. In equations (17) we assume $s_\alpha = 0$ and $\alpha = 0$, and seek for the plane-wave solution for $\tilde\sigma_{31}(t,z)$, $\tilde\sigma_{21}(t,z)$, and $\beta(t,z)$. The gain of the probe field $\beta$ versus detuning $\delta_\beta = \omega_\beta - \omega_{12}$ has the following form:

$$\kappa_\beta = \frac{s_\beta}{2}\left(\frac{\tilde\gamma_{31}\tilde n_{13}}{|\tilde\gamma_{31} + i\Omega + i\delta_\beta|^2} + \frac{\tilde\gamma_{21}\tilde n_{12}}{|\tilde\gamma_{21} - i\Omega + i\delta_\beta|^2}\right). \tag{19}$$

This spectrum is a superposition of two Lorentz contours with extrema at the detuning $\delta_\beta = \pm\Omega$, i. e. at the dressed transition frequencies $\omega_\beta = \tilde\omega_{12} = \omega_{12} + \Omega$ and $\omega_\beta = \tilde\omega_{13} = \omega_{12} - \Omega$ (Fig. 4$b$). The sign of population differences $\tilde n_{13}$ and $\tilde n_{12}$ between the dressed states defines whether amplification or absorption takes place at the corresponding dressed frequencies.

The same procedure can be performed for investigation of amplification of two probe fields $\alpha$ and $\beta$ under the conditions of Fig. 1$c$ and Fig. 4$b$. Probe fields $\alpha$ and $\beta$ have parametrical interaction via the low-frequency coherence $\sigma_{32}$. Since we are interested in the gain condition at the frequencies close to one of two dressed transitions, the equations (17) can be simplified. Let us seek for the normal waves in the vicinity of the frequencies $\omega_{12} - \Omega$ and $\omega_{13} - \Omega$. We can deal with slowly varying (in scale of $\Omega$) quantities $\bar\alpha = \alpha\exp(i\Omega t - i\Omega z/c)$, $\bar\beta = \beta\exp(i\Omega t - i\Omega z/c)$, $\bar\sigma_{31} = \tilde\sigma_{31}\exp(i\Omega t - i\Omega z/c)$, $\bar\sigma_{21} = \tilde\sigma_{21}\exp(-i\Omega t - i\Omega z/c)$. In resonant approximation, assuming $\Omega \gg \tilde\gamma$, the equations (17) take the form

$$\frac{\mathrm{d}\bar\sigma_{21}}{\mathrm{d}t} = -\tilde\gamma_{21}\bar\sigma_{21}, \qquad \frac{\mathrm{d}\bar\sigma_{31}}{\mathrm{d}t} = -\frac{i}{\sqrt2}\,(\bar\alpha - \bar\beta)\,\tilde n_{31} - \tilde\gamma_{31}\bar\sigma_{31},$$

$$\frac{\partial\bar\alpha}{\partial z} + \frac{1}{c}\,\frac{\partial\bar\alpha}{\partial t} = -i\,\frac{s_\alpha}{\sqrt2}\,\bar\sigma_{31}, \qquad \frac{\partial\bar\beta}{\partial z} + \frac{1}{c}\,\frac{\partial\bar\beta}{\partial t} = i\,\frac{s_\beta}{\sqrt2}\,\bar\sigma_{31}. \tag{20}$$

The probe fields $\alpha$ and $\beta$ resonant to the dressed transitions $|\overline{1,n}\rangle \leftrightarrow |\overline{3,n-1}\rangle$ and $|\overline{1,n}\rangle \leftrightarrow |\overline{3,n}\rangle$ (Fig. 4$b$) do not interact with the transitions $|\overline{1,n}\rangle \leftrightarrow |\overline{2,n-1}\rangle$ and $|\overline{1,n}\rangle \leftrightarrow |\overline{2,n}\rangle$. They do not excite the corresponding coherence $\tilde{\sigma}_{21}$. For normal waves

$$\bar{\sigma}_{31}(t,z) = \bar{\sigma}_{31}\exp(i\omega t - ikz), \qquad \bar{\alpha}(t,z) = \bar{\alpha}\exp(i\omega t - ikz), \qquad \bar{\beta}(t,z) = \bar{\beta}\exp(i\omega t - ikz) \tag{21}$$

one can obtain from equations (20) the following gain for two normal bichromatic waves with components resonant to the transitions $|\overline{1,n}\rangle \leftrightarrow |\overline{3,n-1}\rangle$ and $|\overline{1,n}\rangle \leftrightarrow |\overline{3,n}\rangle$:

$$\kappa_1(\delta = -\Omega) = s_\alpha\,\frac{\tilde{n}_{13}}{2\tilde{\gamma}_{31}} + s_\beta\,\frac{\tilde{n}_{13}}{2\tilde{\gamma}_{31}}\,, \tag{22a}$$

$$\kappa_2(\delta = -\Omega) = 0. \tag{22b}$$

The ratios between the components $\alpha$ and $\beta$ in these two normal waves are

$$(\alpha/\beta)_1(\delta = -\Omega) = -s_\alpha/s_\beta, \tag{23a}$$

$$(\alpha/\beta)_2(\delta = -\Omega) = 1. \tag{23b}$$

At the frequencies of the other dressed transitions $|\overline{1,n}\rangle \leftrightarrow |\overline{2,n-1}\rangle$ and $|\overline{1,n}\rangle \leftrightarrow |\overline{2,n}\rangle$ we have respectively

$$\kappa_1(\delta = \Omega) = s_\alpha\,\frac{\tilde{n}_{12}}{2\tilde{\gamma}_{21}} + s_\beta\,\frac{\tilde{n}_{12}}{2\tilde{\gamma}_{21}}\,, \tag{24a}$$

$$\kappa_2(\delta = -\Omega) = 0, \tag{24b}$$

$$(\alpha/\beta)_1(\delta = \Omega) = s_\alpha/s_\beta, \tag{25a}$$

$$(\alpha/\beta)_2(\delta = \Omega) = -1. \tag{25b}$$

It follows from (22)–(25) that parametric interaction between the components $\alpha$ and $\beta$ of the bichromatic probe field can result in enhancement of absorption or amplification (if $\tilde{n}_{13} > 0$ or $\tilde{n}_{12} > 0$) in comparison with partial absorption or amplification of each component if an appropriate ratio (23a) or (25a) between $\alpha$ and $\beta$ is fulfilled. In this case the total gain of the bichromatic normal wave is equal to sum of the partial gains of each component.

It should be noted that the condition $\tilde{n}_{13} > 0$ of amplification of the bichromatic optical field could be met without population inversion at the atomic transitions resonant to the fields $\alpha$ and $\beta$ ($\rho_{11} < \rho_{22}$, $\rho_{11} < \rho_{33}$) if a few atoms are at the upper atomic level due to some incoherent pumping process (Fig. 4*b*).

In the case when the ratio between the components $\alpha$ and $\beta$ corresponds to the second normal wave meeting the conditions (23b) or (25b), the parametric interaction leads to suppression of absorption of the bichromatic probe field that corresponds to a novel type of electromagnetically induced transparency.

The discussed effects of amplification without population inversion and electromagnetically induced transparency occur due to parametric interaction between the components $\alpha$ and $\beta$ via induced coherence at the low-frequency transition $|2\rangle \leftrightarrow |3\rangle$. In the dressed-state basis they have clear interpretation. For instance, let us consider the normal waves defined by the conditions (23). The transitions $|\overline{1,n}\rangle \leftrightarrow |\overline{3,n-1}\rangle$ and $|\overline{1,n}\rangle \leftrightarrow |\overline{3,n}\rangle$ (Fig. 4*b*) induced by the bichromatic normal wave are equivalent to transition $|\tilde{1}\rangle \leftrightarrow |\tilde{3}\rangle$ (see [14–16]). The state $|\tilde{3}\rangle$ is a coherent superposition of bare states $|2\rangle$ and $|3\rangle$ (see equations (9)) and the transition $|\tilde{1}\rangle \leftrightarrow |\tilde{3}\rangle$ causes interference of the corresponding bare transitions $|1\rangle \leftrightarrow |3\rangle$ and $|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle$. The probability of this transition, according to (9), is proportional to

$$|\langle\tilde{1}\,|\hat{V}|\,\tilde{3}\rangle|^2 = \left|\frac{1}{2}\,\langle 1\,|\hat{V}|\,3\rangle\exp(i\omega_{23}t) - \langle 1\,|\hat{V}|\,2\rangle\right|^2 = \frac{1}{2}\,|\alpha - \beta|^2. \tag{26}$$

If $\alpha = \beta$ the result is suppression of the transition $|\tilde{1}\rangle \leftrightarrow |\tilde{3}\rangle$ that means electromagnetically induced transparency. If, according to (23b), $s_\alpha = s_\beta$, and $\alpha = -\beta$, then the result of the interference of the atomic transitions $|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle$ and $|1\rangle \leftrightarrow |3\rangle$ is the enhancement of the probability of the transition $|\tilde{1}\rangle \leftrightarrow |\tilde{3}\rangle$ and the enhancement of the gain of the normal wave.

## 5. CONCLUSION

We have shown the possibility of effective coherent control of the optical properties of atoms embedded in a frequency-dependent environment such as a PBG material or a concentric or confocal cavity. A rather «non-ideal» PBG structure is shown to be able to provide strong dependence of the absorption and dispersion of the probe field on the intensity and frequency of the driving field. This is promising for the development of logic elements for optical computers and optical commutators, etc. The probe-field amplification can be used for compensation of radiation attenuation in PBG-based optical waveguides. We demonstrated a novel method of creation of electromagnetically induced transparency and lasing without inversion in three-level atomic systems due to spectral modification of environment.

This research was supported by RFBR (grant 03–02–17176) and Russian President program for support of the leading scientific schools (grant 1622.2003.2). R. V. acknowledges support from the Spanish government (project BFM2002–04369–C04–03) and from the Generalitat de Catalunya (project 2001SGR00223). O. K. acknowledges a support by the Office of Naval Research, the National Science Foundation and the Texas Advanced Research Program.

## REFERENCES

1. John S. Encyclopedia of Science and Technology. Academic Press, 2001.
2. Woldeyohannes M., John S. // J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. 2003. V. 5. P. R43.
3. Rostovtsev Yu., Matsko A., Scully M. // Phys. Rev. A. 1998. V. 57. P. 4 919.
4. Cohen-Tannoudji C., Reynaud S. J. // Phys. B.: Atom. Molec. Phys. 1977. V. 10. P. 345.
5. Cohen-Tannoudji C., Reynaud S. J. // Phys. B.: Atom. Molec. Phys. 1977. V. 10. P. 365.
6. Lewenstein M., Mossberg T. W., Glauber R. J. // Phys. Rev. Lett. 1987. V. 59. P. 775.
7. Lewenstein M., Mossberg T. W. // Phys. Rev. A. 1988. V. 37. P. 2 048.
8. Zhu Y., Lesama A., Mossberg T. W. // Phys. Rev. Lett. 1988. V. 61. P. 1 946.
9. Lange W., Walter H. // Phys. Rev. A. 1993. V. 48. P. 4 551.
10. Agarwal G. S., Lange W., Walter H. // Phys. Rev. A. 1993. V. 48. P. 4 555.
11. Elk M., Lambropoulos P. // Phys. Rev. A. 1994. V. 50. P. 1 490.
12. Keitel C. H., Knight P. L., Narducchi L. M., Scully M. O. // Opt. Commun. 1995. V. 118. P. 143.
13. Kocharovskaya O., Radeonychev Y. V. // Quan. Semiclass. Opt. 1996. V. 8. P. 7.
14. Kocharovskaya O., Zhu S.-Y., Scully M.O., et al. // Phys. Rev. A. 1994. V. 49. P. 4 928.
15. Kocharovskaya O., Radeonychev Y. V. // Found. of Phys. 1998. V. 28. P. 561.
16. Kocharovskaya O., Radeonychev Y. V., Mandel P., Scully M. O. // Phys. Rev. A. 1999. V. 60. P. 3 091.
17. Haken H. Encyclopedia of Physics. V. 25/2C. Laser Theory. / Ed. by L. Genzel. Heidelberg: Springer, 1970.
18. Blum G. K. Density matrix theory and applications. New York: Plenum Press, 1981.

[1] Institute of Applied Physics RAS, Nizhny Novgorod, Russia;
[2] Texas A&M University, Department of Physics, College Station, USA;
[3] Universitat Politecnica de Catalunya, Departament de Fisica i Enginyeria Nuclear, Colom, Spain

Поступила в редакцию
18 мая 2004 г.

УДК 539.184

# ELECTROMAGNETICALLY INDUCED TRANSPARENCY WITH A TRAIN OF SHORT PULSES IN Rb VAPOR

*V. A. Sautenkov* [1,2], *Yu. V. Rostovtsev* [1], *C. Y. Ye* [1], *M. O. Scully* [1,3], *and O. A. Kocharovskaya* [1,4]

We observe a transmission of radiation of diode laser in the mode-locked regime through the cell containing optically dense Rb vapor under the condition when the hyperfine splitting of Rb is a multiple to the modulation frequency.

## INTRODUCTION

Coherent effects such as electromagnetically induced transparency (EIT) and coherent population trapping (CPT) [1–5] attract a lot of attention because of their ability to suppress a linear absorption of a resonant medium. Quantum coherence and interference phenomena have been shown to play an important role in coherently driven media, yielding new techniques of high precision spectroscopy [6, 7], metrology [8], nonlinear interaction with weak light fields at the single photon level [9–13], greatly reduced phase matching requirements [14], large Kerr nonlinearities [15], etc.

CPT was discovered by Oriols et al. [16] who observed elimination of resonant fluoresence of sodium atoms under the action of multi-mode dye laser when the frequency between modes becomes a multiple of the hyperfine splitting. Later EIT was predicted in [17, 18]. The first theoretical works were dealing with quasistationary regime (pulse train under the condition $\omega_{cb} = m\Omega$) and steady-state regime (CW regime). EIT was first discovered in pulsed regime when difference of optical frequencies was equal to $\omega_{cb}$, $\omega_2 - \omega_1 = \omega_{cb}$. EIT has been successfully demonstrated under different experimental conditions: in continuous wave and pulsed, regimes [17, 18]; with atomic and molecular gases (at room temperature [19, 20] or at low temperature [21], with solids doped by rare-earth ions [22, 23] and semiconductor quantum wells [24, 25]; for different wavelengths ranging from gamma-rays, optics to microwaves [17–19, 26, 27].

Recently the frequency chain based on femtosecond lasers were developed [28–30]. One of new approaches of realization of frequency chain is stabilization of pulse repetition rate by microwave Cs or Rb standards [31]. By using the approach developed by Kocharovskaya and Khanin [1], it is possible to create all optical reference frequency chain.

As was predicted in [1], a train of ultra-short optical pulses interacting with a three-level atom can effectively excite coherence in lower frequency transition $b$—$c$ (see Fig. 1) when the splitting between lower levels $b$ and $c$, is a multiple of the pulse repetition frequency, $1/T$, namely, $T = 2\pi p\omega_{cb}$, where $p$ is number. Now if intensity of laser radiation is sufficiently high, the coherence is excited, and the medium becomes transparent to the laser field.

In this paper, we experimentally show a possibility of EIT by using a mode-locked diode laser generating train of picosecond pulses.

## 1. EXPERIMENTAL SETUP

The experimental setup is shown schematically in fig 1. We use a home-made actively mode locked external cavity diode laser tuned to the vicinity of the $5S_{1/2} \to 5P_{3/2}$ ($D_2$) transition of $^{87}$Rb to produce the train of short optical pulses. Spectral distribution of laser emission coveres hyperfine

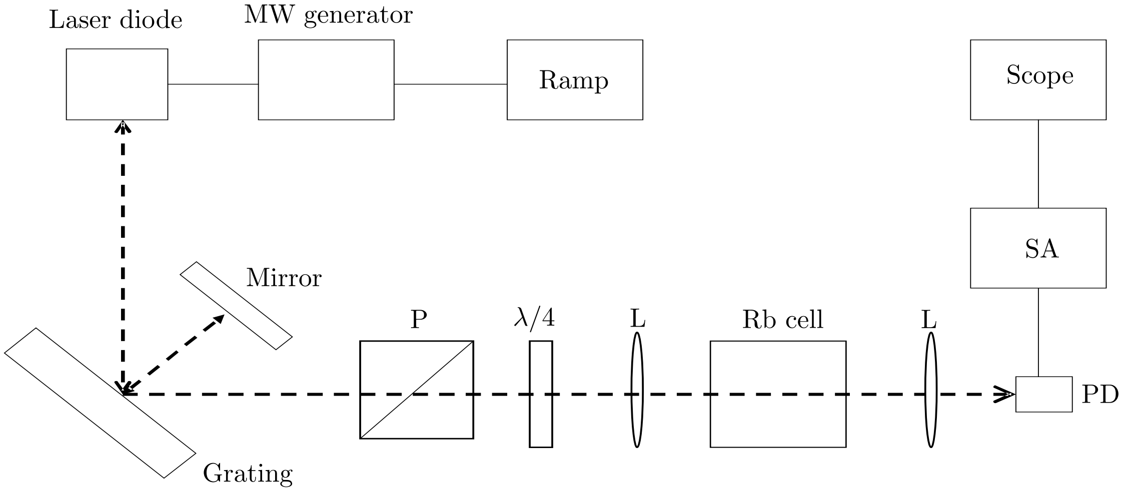



Fig. 1. Schematic of the experimental setup: P is the polarizer, $\lambda/4$ notes a $\lambda/4$-plate, L is the focusing lens, SA is the amplifier, PD is a photo diode

components of Rb ground state, $5S_{1/2}$ (wavelength 780 nm, ground state hyperfine (HF) splitting 3 035,7 MHz).

The assembly is similar to the Littman—Metcalf configuration [32, 33]. It is a three-mirror cavity that consists of the antireflection coated diode laser, a collimation lens, a diffraction grating and external mirror. Spectral width of optical feedback is chosen as broad as 15 GHz which is consistent with the HF splitting of $^{85}$Rb. Mode separation is tuned by variation of the cavity length to 506 MHz which is close to one sixth of the HF splitting (6th sub-harmonic). Mode-locked operation is achieved by modulating the diode laser current near this frequency. When we changed the modulation frequency, the repetition rate also changed. Typical pulses are shown in Fig. 2. The laser pulses are measured by optical sampling oscilloscope. Time resolution of the oscilloscope is about 200 ps. One can see that the duration of the observed pulses is defined by resolution of the oscilloscope. It is clear that the duration of observed pulses is less than 100 ps.

The laser beam is sent into a glass cell ($l = 2{,}5$ cm) with natural abundance of $^{87}$Rb and $^{85}$Rb. To increase the density of rubidium atoms the cell is heated to 60 °C. The cell is installed in a three-layer magnetic shield. The transmission of the cell at frequencies close to ground state HF splitting we recorded a beat-note signal. Signal from fast photodiode is send to spectro-analizer which worked as narrow-band micro-wave amplifier, and signal from spectroanalizer was recorded by digital scope. When modulation frequency is scanned around 506 MHz EIT resonance is observed (Fig. 3). The average power is 200 $\mu$W, the EIT width is 1 MHz.

The amplitude of pulses propagating through the cell depends on the time duration between pulses in the train. In Fig. 3, it is shown the intensity of the radiation passing through the cell vs the time duration between pulses. One can see that when the time between pulses correpsonds to the HF splitting, namely,

$$T = \frac{12\pi}{\omega_{cb}}, \qquad (1)$$

transparency of the cell is maximum, i. e. we observed EIT for the train of pulses.

This result can be easily understood by means of so-called “dark state”, a linear conbination between sublevels of ground states which is decoupled from the external field. Indeed, the Hamiltonian of system in the interaction picture is given by

$$\hat{V} = \Omega_1(t)\,|b\rangle\langle a| + \exp(ip\omega_{cb}t)\Omega_2(t)\,|c\rangle\langle a| + \text{h. c.}, \qquad (2)$$

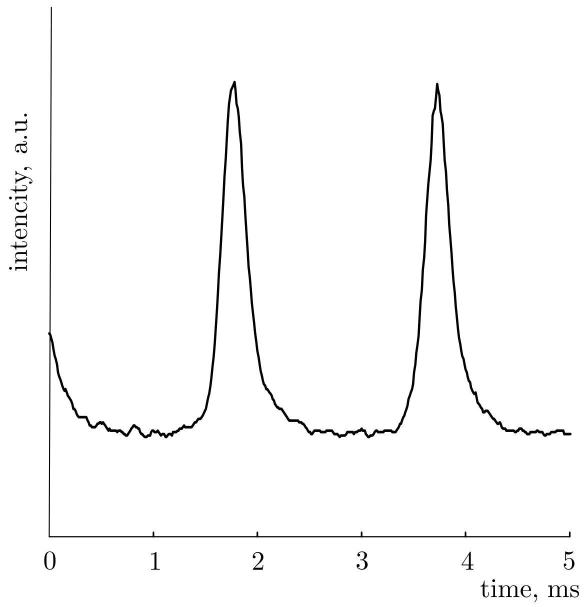



Fig. 2. Train of pulses generated by diode laser is shown. Duration of pulses is 200 ps (determined by resolution of oscilloscope). Period between pulses is about 2 ns which is six times larger than a period of oscillation of the coherence between sublevels of the ground state

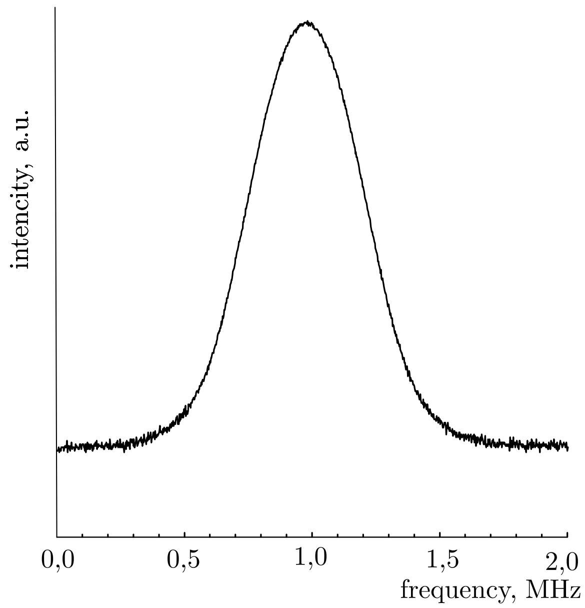



Fig. 3. Transmission (in arbitrary units) of laser radiation vs frequency of repetition rate for short pulses. Repetition rate changes around 506 MHz, which is one sixth of the HF splitting (6th sub-harmonic)

where $\Omega_1(t) = \wp_{ab}E(t)/\hbar$ and $\Omega_2(t) = \wp_{ac}E(t)/\hbar$ are the Rabi frequencies of ; $\wp_{ab}$ and $\wp_{ac}$ are dipole moments of corresponding transitions; $\Delta$ is the HF splitting; $E(t)$ is the laser field. The field is periodic, so Fourier transformation can be made. The Hamiltonian can be rewritten as

$$\hat{V} = \sum_p \exp(ip\Omega t)\Omega_{1p}\,|b\rangle\langle a| + \Omega_{2p}\exp(ip\omega_{cb}t)\,|c\rangle\langle a| + \text{h. c.}, \tag{3}$$

where $\Omega$ is the frequency corresponing to the time between pulses $\Omega = 2\pi/T$; $\Omega_{1p}$ and $\Omega_{2q}$ are the Rabi frequency corresponing to $p$th and $q$th Fourier component of the field.

Let us assume that repetition rate of pulses is a multiple to the HF splitting as

$$\omega_{cb} = Q\Omega, \tag{4}$$

then the Hamiltonian can be rewritten in the form

$$\hat{V} = \sum_p \exp(ip\Omega t)\sqrt{\Omega_{1p}^2 + \Omega_{2(p-Q)}^2}\;|B_p\rangle\langle a| + \text{h. c.}, \tag{5}$$

where we introduce states

$$|B_p\rangle = \frac{\Omega_{1p}\,|b\rangle + \Omega_{2(p+Q)}\,|c\rangle}{\sqrt{\Omega_{1p}^2 + \Omega_{2(p+Q)}^2}}\,. \tag{6}$$

If the pulses are short, then the states are the same,

$$|B_p\rangle \approx |B\rangle, \tag{7}$$

and it is a bright state which is driven by a train of pulses with effective Rabi frequency

$$\Omega_{\text{eff}} = \sqrt{\Omega_{1p}^2 + \Omega_{2(p+Q)}^2}\,, \tag{8}$$

the orthogonal states to the bright one are the excited state $|a\rangle$ and the dark state given by

$$|D\rangle = \frac{\Omega_{2(p+Q)}\,|b\rangle - \Omega_{1p}\,|c\rangle}{\sqrt{\Omega_{1p}^2 + \Omega_{2(p+Q)}^2}}\,, \tag{9}$$

the former is decoupled from the electromagnetic field. And the system interacting with field ends up into this state and does not absorb radiation.

## 2. DISCUSSION

We have shown that a train of short pulses induces atomic coherence in a dense medium, and this coherence leads to electromagnetically induced transparency. The width of EIT resonance is determined by the relaxation rate of coherence between states $|b\rangle$ and $|c\rangle$, and it would be dramatically reduced if an appropriate Rb cell with a buffer gas would be used. In literature the observation EIT width below 40 Hz is reported in [7]. It confirms that mode locked lasers can be used to induce narrow EIT resonances, and on the next step the repetition rate should be locked to the EIT resonance.

Narrow transparency resonances obtained here with a train of short pulses can be used for the most applications where EIT has advantages, for example, magnetometry [34, 35], atomic clock [36], development of a miniature vapor-cell atomic-frequency reference [37], etc.

## 3. SUMMARY

In summary, a new technique based on mode locked laser was applied to observe narrow EIT resonance in Rb vapor. This technique can be used for realization of all optical reference frequency chains by using femtosecond lasers. Another application can be realization of compact atomic clock. In this case a fiber may be used as external cavity.

This paper is dedicated to Yakov I. Khanin, our teacher, colleague and friend. His ideas and insights will remain a source of inspiration for us and for many scientists working in the fields of research he initiated and pioneered.

We thank George R. Welch for useful and stimulating discussions. This work was supported by the Office of Naval Research, the Air Force Research Laboratory (Rome, NY), Defense Advanced Research Projects Agency-QuIST, Texas A&M University Telecommunication and Information Task Force (TITF) Initiative, and the Welch Foundation.

## REFERENCES

1. Kocharovskaya O. A., Khanin Y. I. // Sov. Phys. JETP. 1986. V. 63. P. 945.
2. Arimondo E. // Progress in Optics. Amsterdam: Elsevier, 1996. V. 35. P. 257.
3. Harris S. E. // Physics Today. 1997. V. 50, No. 7. P. 36.
4. Boller K. J., Imamoglu A., Harris S. E. // Phys. Rev. Lett. 1992. V. 66. P. 1360.
5. Kocharovskaya O. A., Khanin Y. I. // Sov. Phys. JETP Lett. 1988. V. 48. P. 630.
6. Lukin M. D., Fleischhauer M., Zibrov A. S., et al. // Phys. Rev. Lett. 1997. V. 79. P. 2959.
7. Brandt S., Nagel A., Wynands R., Meschede D. // Phys. Rev. A. 1997. V. 56. P. R1063.

8. Budker D., Gawlik W., Kimball D. F., et al. // Rev. Mod. Phys. 2002. V. 74. P. 1 153.
9. Harris S. E., Hau L. V. // Phys. Rev. Lett. 1999. V. 82. P. 4 611.
10. Harris S. E., Yamamoto Y. // Phys. Rev. Lett. 1998. V. 81. P. 3 611.
11. Imamoğlu A., Schmidt H., Woods G., Deutsch M. // Phys. Rev. Lett. 1997. V. 79. P. 1 467.
12. Matsukevich D. N., Kuzmich A. // Science. 2004. V. 306. P. 663.
13. Lukin M. D., Matsko A., Fleischhauer M., Scully M. O. // Phys. Rev. Lett. 1999. V. 82. P. 1 847.
14. Jain M., Yin G. Y., Field J. E., Harris S. E. // Optics Lett. 1993. V. 18. P. 998.
15. Schmidt H., Imamoğlu A. // Optics Lett. 1996. V. 21. P. 1 936.
16. Alzetta G., Gozzini A., Moi L., Orriols G. // Nuovo Cimento. B. 1976. V. 36. P. 5.
17. Harris S. E. // Phys. Rev. Lett. 1993. V. 70. P. 552.
18. Harris S. E. // Phys. Rev. Lett. 1994. V. 72. P. 52.
19. Zibrov A. S., Lukin M. D., Hollberg L., et al. // Phys. Rev. Lett. 1996. V. 76. P. 3 925.
20. Harris S., Sokolov A. // Phys. Rev. Lett. 1998. V. 81. P. 2 894.
21. Kitching J., Hollberg L. // Phys. Rev. A. 1999. V. 59. P. 4 685.
22. Ham B. S., Hemmer P. R., Shahriar M. S. // Optics Commun. 1997. V. 144. P. 227.
23. Ham B. S., Shahriar M. S., Hemmer P. R. // Optics Lett. 1997. V. 22. P. 1 138.
24. Imamoglu A. // Optics Commun. 2000. V. 179. P. 179.
25. Nikonov D. E., Imamoglu A., Scully M.O. // Phys. Rev. B. 1999. V. 59. P. 12 212.
26. Wei C. J., Manson N. B. // Phys. Rev. A. 1999. V. 60. P. 2 540.
27. Coussement R., Rostovtsev Yu., Odeurs J., et al. // Phys. Rev. Lett. 2002. V. 89. P. 107 601.
28. Bagaev S. N., Volkov V. G., Ivashko D. Y., et al. // Quantum Electron. 1999. V. 29. P. 109.
29. Diddams S. A., et al. // Phys. Rev. Lett. 2000. V. 84. P. 5 102.
30. Utem T., Holzwarth R., Hansch T. W. // Nature. 2002. V. 416. P. 233.
31. Cundiff S. T., Ye J. // Rev. Mod. Phys. 2003. V. 75. P. 325.
32. Littman M. G., Metcalf H. J. // Appl. Optics. 1978. V. 17. P. 2 224.
33. Harvey K. C., Myatt C. J. // Optics. Lett. 1991. V. 16. P. 910.
34. Scully M. O. // Phys. Rev. Lett. 1991. V. 67. P. 1 855.
35. Scully M. O., Fleischhauer M. // Phys. Rev. Lett. 1992. V. 69. P. 1 360.
36. Arissian L., et al. // J. Mod. Optics. 2002. V. 49. P. 2 517.
37. Kitching J., Knappe S., Hollberg L. // Appl. Phys. Lett. 2002. V. 81. P. 553.

[1] Department of Physics and Institute for Quantum Studies,
Texas A&M University, College Station, USA;
[2] Lebedev Institute of Physics RAS, Moscow, Russia;
[3] Department of Chemistry, Princeton University,
Princeton, USA;
[4] Institute of Applied Physics RAS, Nizhny Novgorod, Russia

Поступила в редакцию
28 января 2004 г.

УДК 535.2

# ЗАПИСЬ И СЧИТЫВАНИЕ ИНТЕНСИВНЫХ ОПТИЧЕСКИХ ИМПУЛЬСОВ НА ОСНОВЕ ИНДУЦИРОВАННОЙ ПРОЗРАЧНОСТИ

*В. Г. Архипкин* [1], *В. П. Тимофеев* [2], *И. В. Тимофеев* [3]

Исследуется эффект пространственной локализации атомной (рамановской) когерентности на запрещённом переходе трёхуровневого атома для двух интенсивных оптических импульсов, когда частоты Раби взаимодействующих импульсов сравнимы по величине. Предлагается использовать эффект для когерентной записи интенсивных световых импульсов. Обсуждаются различные варианты считывания (восстановления) записанного импульса.

## ВВЕДЕНИЕ

Концепция атомной когерентности и квантовой интерференции получила развитие во многих областях квантовой и нелинейной оптики, лазерной физики, квантовой химии и др. Эффекты, обусловленные квантовой интерференцией, проявляются особенно ярко, когда атомы находятся в квантовой суперпозиции двух энергетических состояний. Вещество в таком состоянии называют фазонием [1]. Среда, состоящая из таких атомов, становится когерентной и обладает необычными свойствами, многие из которых противоречат интуитивным представлениям. Вещество в когерентном состоянии можно получить, используя такие явления, как когерентное пленение населённостей или адиабатический перенос населённости, которые имеют место при взаимодействии двух когерентных оптических импульсов с трёхуровневой квантовой системой (рис. 1). Эти эффекты приводят к электромагнитно-индуцированной прозрачности.

Явление электромагнитно-индуцированной прозрачности и его проявления на макроскопическом уровне активно исследуются (см., например, обзоры [1–6]). При электромагнитно-индуцированной прозрачности изначально оптически плотная среда становится прозрачной в области однофотонного резонанса, при этом дисперсия показателя преломления сильно увеличивается. В результате законы распространения световых импульсов кардинально изменяются [7–16] (согласованные импульсы; импульсы, «одетые» полем; адиабатоны). Одним из наиболее ярких примеров является возникновение гигантского уменьшения (до $10^7$ раз и более) групповой скорости пробного импульса [4, 5]. Такое сверхмедленное распространение света («медленный свет») уже наблюдали в атомарном газе [17, 18], твёрдом теле [19] и бозе-конденсате [20]. При групповых скоростях $1\div100$ м/с происходит сильное пространственное сжатие пробного импульса, в результате чего он локализуется в среде [5]. Изменяя интенсивность управляющего импульса, можно управлять групповой скоростью пробного импульса вплоть до его «остановки». На основе этого явления предложен новый механизм квантовой памяти, основанный на когерентной записи и считывании света [5, 21–23]. В наших работах [14, 24] было показано, что в аналогичных условиях имеет место пространственная локализация в среде атомной (рамановской) когерентности, которая несёт информацию о взаимодействующих импульсах. Также продемонстрирована возможность реверсивной записи и считывания пробного (сигнального) импульса.

В цитированных работах предполагалось, что пробный (сигнальный) импульс значительно слабее, чем управляющий. Его интенсивность такова, что населённость уровней, с которыми он взаимодействует, считается практически неизменной, поэтому задача рассматривалась в линейном приближении по пробному полю, а управляющий импульс считался заданным (неизменным)

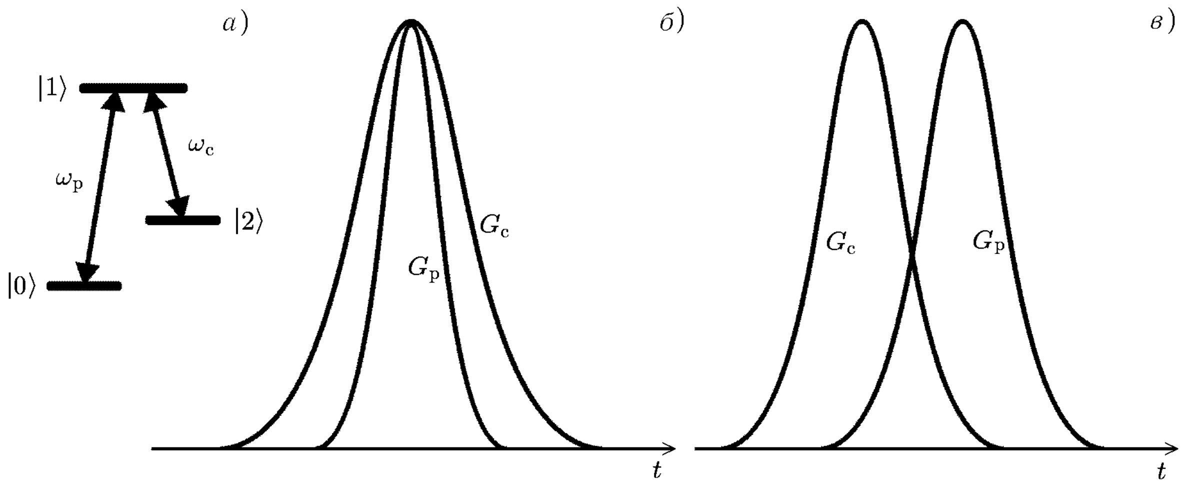



Рис. 1. Трёхуровневые атомы резонансно взаимодействуют с двумя оптическими импульсами; $G_p$ — частота Раби пробного импульса, $G_c$ — управляющего импульса; $|0\rangle$ и $|2\rangle$ — основное и метастабильное состояния соответственно, $|1\rangle$ — промежуточное (возбуждённое) состояние

при распространении в среде. В данной работе обсуждается случай, когда интенсивности взаимодействующих импульсов сравнимы, а их длительности меньше всех времён релаксации среды. Здесь нелинейность среды по отношению к пробному импульсу становится важной, и это может приводить в изменению обоих импульсов в процессе распространения. Рассматриваются две возможности. Первая основана на эффекте когерентного пленения населённости [1, 2], который имеет место для последовательности импульсов, изображённой на рис. 1*б*. Здесь длительность управляющего импульса больше пробного, а их максимальные значения достигаются в один и тот же момент времени. Во втором случае используется явление адиабатического переноса населённости, когда импульсы имеют одинаковую длительность, но частично перекрываются, причём управляющий импульс включается и выключается раньше, чем пробный (рис. 1*в*). Такую последовательность импульсов называют контринтуитивной, а явление — стимулированным рамановским адиабатическим прохождением [6]. С математической точки зрения оба эффекта описываются одинаково, т. к. они имеют одну и ту же природу. Различие между ними состоит в том, что после окончания действия импульсов в первом случае атомная подсистема возвращается в исходное (основное) состояние, тогда как во втором случае бóльшая часть атомов оказывается в состоянии $|2\rangle$, но в обоих случаях возникает электромагнитно-индуцированная прозрачность — импульсы не поглощаются на резонансных переходах, с которыми взаимодействуют.

В адиабатическом приближении пространственно-временнáя эволюция коротких импульсов в условиях когерентного пленения населённости и адиабатического переноса населённости изучалась в работах [14–16]. В данной работе мы обращаем внимание на эффект пространственной локализации атомной (рамановской) когерентности и предлагаем его использовать для когерентной записи интенсивных световых импульсов. Основная идея заключается в следующем. При распространении импульсов в среде, состоящей из трёхуровневых атомов, в условиях электромагнитно-индуцированной прозрачности одновременно с перекачкой энергии пробного импульса в управляющий в среде индуцируется и пространственно локализуется атомная когерентность, наведённая на дипольно запрещённом переходе $|0\rangle$—$|2\rangle$. Её пространственный профиль содержит информацию о взаимодействующих импульсах. Если послать прошедший управляющий импульс обратно в среду, он будет рассеиваться на атомной когерентности, и в результате возникнет импульс, подобный (при определённых условиях — идентичный) пробному импульсу. В отличие от [21, 24] здесь мы считаем, что частоты Раби взаимодействующих импульсов сравнимы по величине.

Также обсуждаются некоторые варианты считывания (восстановления) записанного импульса.

## 1. ЗАПИСЬ И СЧИТЫВАНИЕ ЛАЗЕРНОГО ИМПУЛЬСА НА ОСНОВЕ ДИНАМИЧЕСКОГО КОГЕРЕНТНОГО ПЛЕНЕНИЯ НАСЕЛЁННОСТИ

Сначала рассмотрим случай, изображенный на рис. 1*б*, когда импульсы полностью перекрываются и их максимумы совпадают. Импульсы распространяются в одном направлении вдоль оси $z$. Уровни $|0\rangle, |1\rangle$ и $|1\rangle, |2\rangle$ связываются пробным (сигнальным) импульсом $G_\mathrm{p} = [G_\mathrm{p}(t)/2] \times \exp[-i\,(\omega_\mathrm{p} t - k_\mathrm{p} z)]$ + к.с. и управляющим импульсом $G_\mathrm{c} = [G_\mathrm{c}(t)/2]\exp[-i\,(\omega_\mathrm{c} t - k_\mathrm{c} z)]$ + к.с. соответственно. Предполагается, что длительности импульсов $T_\mathrm{p}$ и $T_\mathrm{c}$ много меньше всех времён релаксации атома и $T_\mathrm{p} < T_\mathrm{c}$. Переход $|0\rangle$—$|1\rangle$ дипольно запрещён (нерадиационный).

Уравнения Максвелла—Шрёдингера в системе координат с локальным временем $\tau = t - z/c$ имеют вид

$$\frac{\partial a_0}{\partial\tau} = iG_\mathrm{p}^* a_1, \qquad \frac{\partial a_2}{\partial\tau} = iG_\mathrm{c}^* a_1, \qquad \frac{\partial a_1}{\partial\tau} = iG_\mathrm{p} a_0 + iG_\mathrm{c} a_2, \tag{1}$$

$$\frac{\partial G_\mathrm{p}}{\partial z} = iK_\mathrm{p} a_1 a_0^*, \qquad \frac{\partial G_\mathrm{c}}{\partial z} = iK_\mathrm{c} a_1 a_2^*. \tag{2}$$

Уравнения записаны в предположении нулевых однофотонных отстроек: $\omega_\mathrm{c} - \omega_{10} = 0, \omega_\mathrm{p} - \omega_{12} = 0$, где $\omega_{10}$ и $\omega_{12}$ — частоты переходов между уровнями $|1\rangle$, $|0\rangle$ и $|1\rangle$, $|2\rangle$ соответственно; $a_0$, $a_1$ и $a_2$ — амплитуды вероятностей соответствующих состояний; $G_\mathrm{p} = d_{10} E_\mathrm{p}(t)/(2\hbar)$ и $G_\mathrm{c} = d_{21} E_\mathrm{c}(t)/(2\hbar)$ — частоты Раби, зависящие от времени, $E_\mathrm{p}$ и $E_\mathrm{c}$ — амплитуды пробного и управляющего импульсов; $K_\mathrm{p} = \pi\omega_\mathrm{p}\,|d_{10}|^2\,N/(\hbar c)$ и $K_\mathrm{c} = \pi\omega_\mathrm{c}\,|d_{12}|^2\,N/(\hbar c)$ — коэффициенты связи (для простоты далее будем рассматривать случай $K_\mathrm{p} = K_\mathrm{c} \equiv K$); $N$ — атомная концентрация, $d_{10}$ и $d_{12}$ — матричные элементы электрического дипольного момента, $\omega_\mathrm{p}$, $\omega_\mathrm{c}$ и $k_\mathrm{p}$, $k_\mathrm{c}$ — несущие частоты и волновые числа (в вакууме), $c$ — скорость света в вакууме. Все атомы изначально находятся в основном состоянии $|0\rangle$: $a_0(-\infty, z) = 1$, $a_1(-\infty, z) = a_2(-\infty, z) = 0$. Для численных демонстраций используется гауссова форма импульсов на входе в среду (при $z = 0$).

В адиабатическом приближении с учётом неадиабатической поправки решение системы (1) имеет вид

$$a_0 \approx G_\mathrm{c}(\tau)/G(\tau), \qquad a_1 \approx G_\mathrm{p}^{-1}\,\partial(G_\mathrm{c}/G)/\partial\tau \approx -G_\mathrm{c}^{-1}\,\partial(G_\mathrm{p}/G)/\partial\tau, \qquad a_2 \approx G_\mathrm{p}(\tau)/G(\tau), \tag{3}$$

где $G = \sqrt{G_\mathrm{p}^2 + G_\mathrm{c}^2}$ — обобщённая частота Раби. В общем случае $G_\mathrm{p}$ и $G_\mathrm{c}$ зависят от координаты $z$. Критерием применимости адиабатического приближения является неравенство [9–11]

$$\left|\frac{G_\mathrm{p}\,\partial G_\mathrm{c}/\partial\tau - G_\mathrm{c}\,\partial G_\mathrm{p}/\partial\tau}{G^3}\right| \ll 1. \tag{4}$$

С учётом распространения импульсов критерий адиабатичности проанализирован в [14], где, в частности, показано, что в случае $K_\mathrm{c} = K_\mathrm{p}$ условие (4) в процессе распространения импульсов сохраняется, если оно выполнено на входе в среду.

Решения для амплитуд вероятности удобно представить в виде

$$a_0 = \cos[\theta(\tau)], \qquad a_2 = -\sin[\theta(\tau)], \qquad a_1 = (G_\mathrm{c}\dot{G}_\mathrm{p} - G_\mathrm{p}\dot{G}_\mathrm{c})/G^3 = \dot{\theta}/G, \tag{5}$$

где угол смешения $\theta(\tau)$ определяется соотношением $\mathrm{tg}[\theta(\tau)] = G_\mathrm{p}(\tau)/G_\mathrm{c}(\tau)$, $\dot{\theta} = \partial\theta/\partial\tau$.

Из (4) и (5) следует, что в адиабатическом пределе $|a_1| = |\dot{\theta}/G| \ll 1$, т. е. населённость промежуточного состояния близка к нулю на протяжении всего взаимодействия. Это означает, что поглощение на переходах $|0\rangle$—$|1\rangle$ и $|1\rangle$—$|2\rangle$ практически отсутствует.

Используя (5), уравнения (2) удобно записать в следующей форме:

$$\partial G_\mathrm{p}/\partial z = -K_\mathrm{p}\cos\theta(G)/\dot\theta, \qquad \partial G_\mathrm{c}/\partial z = K_\mathrm{c}\sin\theta(G)/\dot\theta. \tag{6}$$

При $K_\mathrm{c} = K_\mathrm{p} = K$ обобщённая частота Раби $G(\tau,z)$ не зависит от координаты $z$: $G(\tau,z) = G(\tau,0) \equiv G_0(\tau)$ [14]. Это условие совпадает с определением импульсов, «одетых» полем (dressed field pulses) [8]. В этом случае $\theta(\tau,z)$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$\partial\theta/\partial\tau + (G_0^2(\tau)/K)\,\partial\theta/\partial z = 0. \tag{7}$$

Решение уравнения (7) имеет вид

$$\theta(\tau,z) = \theta_0[Z^{-1}\,(Z(\tau) - z)], \tag{8}$$

где $Z(\tau) = K^{-1}\int_{-\infty}^{\tau} G^2(0,\tau')\,\mathrm{d}\tau'$, $Z^{-1}(\tau)$ — обратная к $Z(\tau)$ функция, $\theta_0 = \theta(\tau, z=0)$.

Зная $\theta$, можно найти $G_\mathrm{p}$, $G_\mathrm{c}$ и атомную когерентность $\rho_{20} = a_2a_0^*$:

$$G_\mathrm{c} = G\cos\theta, \qquad G_\mathrm{p} = G\sin\theta, \tag{9}$$

$$\rho_{20} = -\sin[2\theta(\tau,z)]/2. \tag{10}$$

На рис. 2 показана пространственно-временна́я эволюция нормированной частоты Раби пробного импульса $g_\mathrm{p} = G_\mathrm{p}T_\mathrm{p}$ и атомной когерентности $\rho_{20}$ по мере распространения импульсов в среде. При распространении пробного импульса его амплитуда постепенно уменьшается, а форма огибающей изменяется и становится несимметричной. При этом часть его энергии перекачивается в управляющий импульс, а часть запасается в атомной когерентности $\rho_{20}$, которая имеет характерное пространственное распределение.

Таким образом, по мере распространения временна́я огибающая пробного импульса трансформируется в пространственное распределение когерентности в среде. Поэтому можно говорить о пространственной локализации атомной когерентности в среде, причём её пространственный профиль содержит информацию о взаимодействующих импульсах. Амплитуда и область локализации зависят от соотношения амплитуд $G_\mathrm{p}^0$ и $G_\mathrm{c}^0$ импульсов на входе в среду. Максимальная амплитуда $\rho_{20}$ достигается, когда $G_\mathrm{p}^0 = G_\mathrm{c}^0$. При $G_\mathrm{p}^0 \ll G_\mathrm{c}^0$ область пространственной локализации минимальна и возрастает с увеличением $G_\mathrm{p}^0$, причём заметное увеличение происходит, когда амплитуда $G_\mathrm{p}^0$ становится сравнимой с $G_\mathrm{c}^0$.

Это явление предлагается использовать для записи и хранения пробного импульса в среде с последующим считыванием (восстановлением). Под записью понимают преобразование пробного (сигнального) импульса в атомную когерентность (недиагональный элемент матрицы плотности $\rho_{20}$), время жизни которой определяется временем её релаксации и может составлять на нерадиационных (дипольно запрещённых) переходах от микро- до миллисекунд и более.

Считывание (восстановление) записанного пробного импульса можно осуществить, подавая на вход среды прошедший управляющий импульс, который будем называть считывающим. Он рассеивается на атомной когерентности, формируя на выходе импульс, подобный сигнальному. Таким образом, имеет место обратное преобразование атомной когерентности в свет. На рис. 3 изображены зависимости частот Раби пробного и восстановленного импульсов от нормированных времени и координаты (рис. 3*а*), а также поведение недиагонального элемента матрицы плотности (рис. 3*б*) при записи и считывании. Считанный импульс подобен пробному. Отметим, что время задержки считывающего импульса должно быть меньше времени жизни когерентности.

Процесс считывания описывается уравнениями, аналогичными (1) и (2), но начальные и граничные условия задаются в виде $G_\mathrm{p} = 0$, $G_\mathrm{c} = G_\mathrm{c}(\tau)$ на границе среды $z = 0$, а угол смешения $\theta_0 = \theta_0(z)$ в момент времени, соответствующий началу считывания.

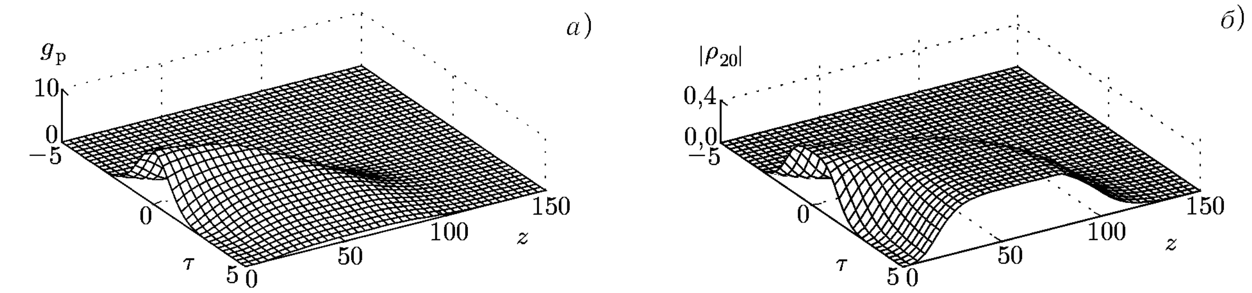



Рис. 2. Пространственно-временна́я зависимость нормированной частоты Раби $g_\text{p} = G_\text{p} T_\text{p}$ пробного импульса (*а*) и атомной когерентности $\rho_{20}$ (*б*) при распространении импульсов в среде. Пространственный профиль $\rho_{20}$ несёт информацию об импульсах. На границе среды $z = 0$ амплитуды импульсов $g_\text{p}^0 = g_\text{c}^0 = 10$, а отношение длительностей импульсов $T_\text{c}/T_\text{p} = 3$. Здесь и далее время измеряется в единицах длительности пробного импульса, а координата — в длинах линейного поглощения

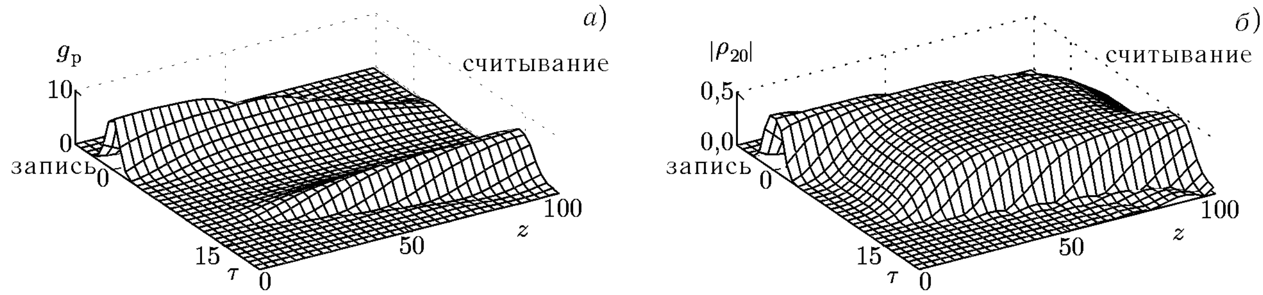



Рис. 3. Пространственно-временна́я эволюция нормированной частоты Раби $g_\text{p} = G_\text{p} T_\text{p}$ пробного импульса (*а*) и атомной когерентности $\rho_{20}$ (*б*) при записи и считывании. Считывающий импульс подаётся в том же направлении, что и управляющий (записывающий)

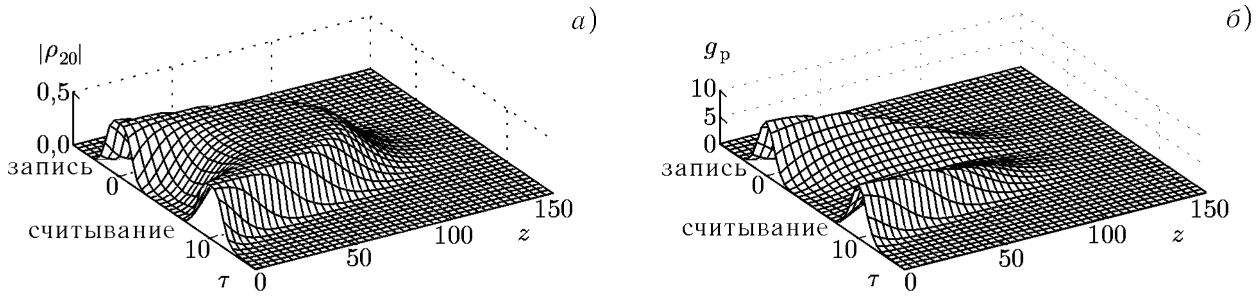



Рис. 4. Пространственно-временна́я зависимость нормированной частоты Раби $g_\text{p} = G_\text{p} T_\text{p}$ пробного импульса (*а*) и атомной когерентности $\rho_{20}$ (*б*) при записи и считывании. Считывающий импульс подаётся в направлении, противоположном направлению при записи

Считывающий импульс можно посылать и в направлении, противоположном тому, которое было при записи. Для этого на выходе среды достаточно поставить зеркало, отражающее прошедший управляющий импульс назад. Отражённый импульс и будет играть роль считывающего импульса. Его рассеяние на атомной когерентности также ведёт к регенерации сигнального импульса. Однако в этом случае эффективное восстановление требует, чтобы несущие частоты импульсов отличались незначительно. В таком варианте процесс считывания также описывается системой уравнений (1) и (2), однако теперь под $G_\text{c}$ и $G_\text{p}$ следует понимать считывающий и восстановленный импульсы, а под $z$ и $\tau$ подразумевают $z' = L - z$, $\tau' = t - z'/c$ соответственно,

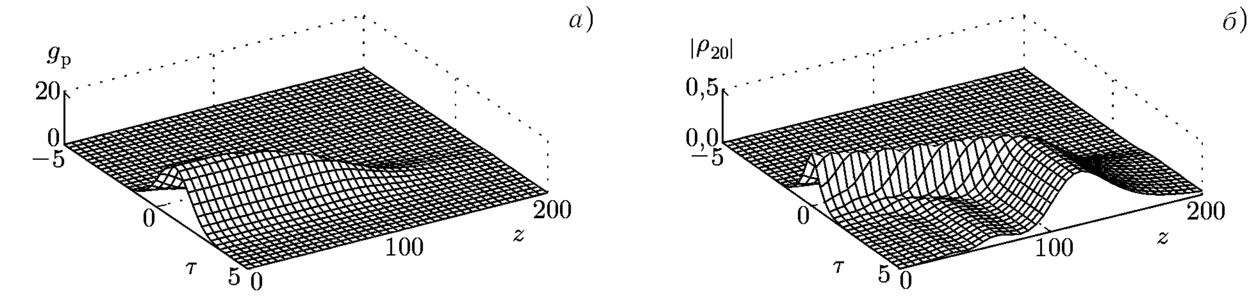



Рис. 5. Пространственно-временна́я зависимость нормированной частоты Раби $g_{\mathrm{p}} = G_{\mathrm{p}}T$ пробного импульса (*а*) и атомной когерентности $\rho_{20}$ (*б*) при распространении импульсов в среде; $T$ — длительность импульса, $g_{\mathrm{p}}^0 = g_{\mathrm{c}}^0 = 20$

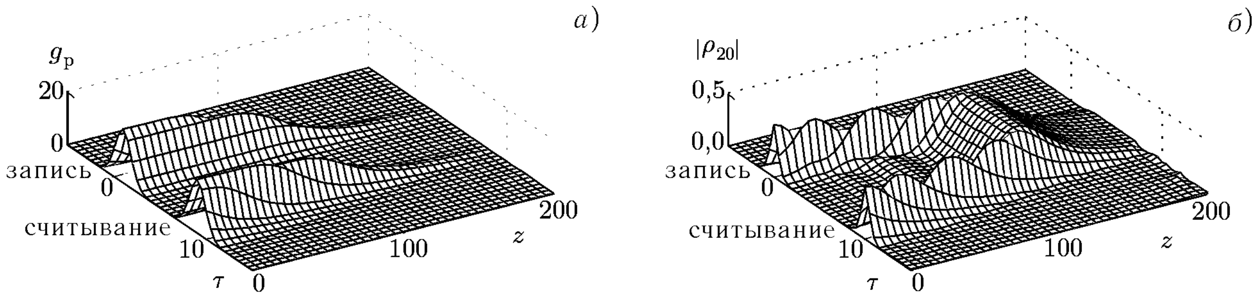



Рис. 6. Пространственно-временна́я зависимость нормированной частоты Раби $g_{\mathrm{p}} = G_{\mathrm{p}}T$ пробного импульса (*а*) и атомной когерентности $\rho_{20}$ (*б*) при записи и считывании. В качестве считывающего импульса используется прошедший через среду управляющий импульс, отражённый обратно с помощью зеркала

где $L$ — длина среды. Граничные условия для полей задаются в выходной плоскости среды $z = L$: считываемое поле равно нулю, а в качестве считывающего поля выступает отражённое в обратном направлении управляющее поле.

Пространственно-временная эволюция атомной когерентности и частоты Раби пробного и считанного импульсов в процесс записи и считывания в данном варианте показана на рис. 4. Отметим, что результаты численных расчётов на основе уравнений (1), (2) и по формулам (7)–(9) хорошо совпадают.

## 2. ЗАПИСЬ И СЧИТЫВАНИЕ ЛАЗЕРНОГО ИМПУЛЬСА НА ОСНОВЕ АДИАБАТИЧЕСКОГО ПЕРЕНОСА НАСЕЛЁННОСТИ

В адиабатическом приближении характер взаимодействия импульсов не зависит (качественно) от формы импульсов, однако зависит от последовательности их включения и выключения. Поэтому рассмотрим теперь ситуацию с конфигурацией импульсов на входе в среду, изображенной на рис. 1*в*. В этом случае имеет место адиабатический перенос населённости, который, в отличие от когерентного пленения населённости, приводит к тому, что практически все атомы переносятся в состояние $|2\rangle$. При этом в некоторый момент времени наводится больша́я когерентность на переходе $|0\rangle$—$|2\rangle$. Особенности распространения импульсов в условиях адиабатического переноса населённости анализировались в работах [15, 16].

Эффект адиабатического переноса населённости также можно использовать для когерентной записи пробного импульса с последующим считыванием через некоторый промежуток времени, который не должен превышать время жизни атомной когерентности, описываемой соответствующим недиагональным элементом матрицы плотности. В данном случае процесс записи пробного импульса на атомной когерентности производится так же, как описано выше. На рис. 5 показана пространственно-временна́я эволюция частоты Раби пробного импульса и атомной когерентности в процессе распространения импульсов в среде. По мере распространения в среде пробный импульс перекачивается в управляющий, который становится «двугорбым» [15] (он здесь не показан, см. [15, 16]), а атомная когерентность пространственно локализуется в части среды.

Наиболее просто восстановить пробный импульс можно, если прошедший управляющий импульс отразить от зеркала и направить обратно в среду. Процесс считывания описывается аналогично случаю когерентного пленения населённости. На рис. 6 показана пространственно-временная зависимость частоты Раби пробного и считанного импульсов, а также атомной когерентности при записи и считывании.

Отметим, что, в принципе, можно считывать, подавая считывающий импульс в том же направлении, что и записывающий, но при этом он должен иметь частоту $\omega_{\mathrm{p}}$ и форму прошедшего управляющего импульса. Считанный импульс будет иметь частоту $\omega_{\mathrm{c}}$.

Работа поддержана РФФИ (грант № 02–02–16325а) и программой «Университеты России» (проект УР.01.01.003).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Harris S. E. // Phys. Today. 1997. V. 50, No. 7. P. 36.
2. Arimondo E. // Progress in Optics / Ed. by E. Wolf. 1996. V. 35. P. 257.
3. Lukin M. D., Hemmer P. R., Scully M. O. // Edv. in At., Mol. and Opt. Phys. 2000. V. 42. P. 347.
4. Matsko A. B., Kocharovskaya O., Rostovtsev Yu., et al. // Edv. in At., Mol. and Opt. Phys. 2001. V. 46. P. 191.
5. Lukin M. D., Imamoglu A. // Nature. 2001. V. 412. P. 273.
6. Vitanov N. V., Fleischhauer M., Shore B. W., Bergmann K. // Edv. in At., Mol. and Opt. Phys. 2001. V. 46. P. 55.
7. Harris S. E. // Phys. Rev. Lett. 1994. V. 72. P. 52.
8. Eberly J. H., Pons M. L., Haq H. R. // Phys. Rev. Lett. 1994. V. 72. P. 56.
9. Grobe R., Hioe F. T., Eberly J. H. // Phys. Rev. Lett. 1994. V. 73. P. 3 181.
10. Eberly J. H. // Quantum Semiclass. Opt. 1995. V. 7. P. 373.
11. Fleischhauer M., Manka A. // Phys. Rev. A. 1996. V. 54. P. 794.
12. Архипкин В. Г., Манушкин Д. В., Тимофеев В. П. // Квантовая электроника. 1998. Т. 25. С. 1 084.
13. Архипкин В. Г., Тимофеев И. В. // Квантовая электроника. 2000. Т. 30. С. 180.
14. Arkhipkin V. G., Timofeev I. V. // Phys. Rev. A. 2001. V. 64. Article no. 053 811.
15. Архипкин В. Г., Тимофеев И. В. // Оптика и спектроскопия. 2001. Т. 91. С. 623.
16. Grigoryan G. G., Pashayan Y. T. // Phys. Rev. A. 2001. V. 64. Article no. 013 816.
17. Kash M. M., Sautenkov V. A., Zibrov A. S., et al. // Phys. Rev. Lett. 1999. V. 82. P. 5 229.
18. Budker D., Kimbal D., Rochester S., et al. // Phys. Rev. Lett. 1999. V. 83. P. 1 767.
19. Turukhin A. V., Sudarshanam M. S., et al. // Phys. Rev. Lett. 2002. V. 88. Article no. 023 602.
20. Haus L. V., Harris S. E., Dutton Z., et al. // Nature. 1999. V. 397. P. 594.
21. Fleischauer M., Lukin M. D. // Phys. Rev. Lett. 2000. V. 84. P. 5 094.
22. Phillips D. F., Fleischauer M., Maier A., et al. // Phys. Rev. Lett. 2001. V. 86. P. 7 834.
23. Liu Ch., Dutton Z., Behroozi C. H., et al. // Nature. 2001. V. 409. P. 490.

24. Архипкин В. Г., Тимофеев И. В. // Письма в ЖЭТФ. 2002. Т. 76, вып. 1. С. 74.

[1] Институт физики им. Л. В. Киренского СО РАН;
[2] Красноярский государственный технический университет;
[3] Красноярский госуниверситет,
г. Красноярск, Россия

Поступила в редакцию
19 января 2004 г.

## RECORDING AND READING OF INTENSIVE OPTICAL PULSES BASED ON THE INDUCED TRANSPARENCY

*V. G. Arhipkin, V. P. Timofeev, and I. V. Timofeev*

The effect of spatial localization of atomic (Raman) coherence at the prohibited transition of a three-level atom is studied for two intense optical pulses with comparable Rabi frequencies. We propose to use this effect for coherent recording of intense optical pulses. Various schemes of reading of a recorded pulse are considered.

УДК 539.19

# О ВОЗМОЖНОСТЯХ УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССОМ ГЕНЕРАЦИИ АТТОСЕКУНДНЫХ РЕНТГЕНОВСКИХ ИМПУЛЬСОВ ПРИ ИОНИЗАЦИИ МОЛЕКУЛ ФЕМТОСЕКУНДНЫМ ЛАЗЕРНЫМ ИЗЛУЧЕНИЕМ

*М. Ю. Емелин*[1,2], *М. Ю. Рябикин*[1], *А. М. Сергеев*[1]

Обсуждается роль различных факторов (размеры и конфигурация молекулы, ориентация молекулярной оси по отношению к вектору электрического поля лазерного импульса, тип молекулярной орбитали и др.), характеризующих молекулы и их состояние, в формировании нелинейного отклика молекулы, ионизуемой мощным фемтосекундным лазерным импульсом. На основе численных экспериментов в рамках двумерной модели молекулярного иона $H_2^+$ исследуются возможности управления процессом нелинейного преобразования частот фемтосекундного оптического излучения в рентгеновское излучение аттосекундного диапазона длительностей за счёт предварительного колебательного или электронного возбуждения молекул. Демонстрируются возможности использования генерации аттосекундных импульсов как диагностического средства для экспериментального исследования колебательно-вращательной динамики молекул.

## ВВЕДЕНИЕ

Одним из основных путей создания источников электромагнитных импульсов субфемтосекундной длительности является использование генерации высоких гармоник лазерного излучения при ионизации газа мощными фемтосекундными оптическими импульсами. В основе эффекта генерации высоких гармоник интенсивного линейно поляризованного оптического излучения лежит синхронизованное лазерным полем тормозное излучение электронов, вырываемых из атомов, ускоряемых оптическим полем и соударяющихся вновь с родительскими ионами [1, 2]. Генерируемое за счёт такого механизма рентгеновское излучение носит характер последовательности аттосекундных всплесков [3, 4]. Одиночный аттосекундный импульс может быть получен за счёт быстрой модуляции поляризации падающего излучения [5–8] или при использовании предельно коротких импульсов накачки [9–12]. В ряде физических лабораторий мира созданы первые прототипы таких источников. Актуальной проблемой в настоящее время является повышение их яркости до уровня, требуемого для практических приложений, и разработка методов управления характеристиками генерируемого излучения.

Поскольку молекулы являются более сложными системами, чем атомы, использование молекулярных газов предоставляет дополнительные возможности для оптимизации и управления процессом преобразования частот по сравнению с атомарными газами. Такими дополнительными степенями свободы, обеспечивающими возможность контроля, являются размеры и конфигурация молекулы, ориентация молекулярной оси по отношению к вектору электрического поля лазерной волны и др. В настоящей работе обсуждается роль различных факторов, характеризующих молекулы и их состояние, в формировании молекулярного нелинейного отклика и исследуются возможности управления процессом генерации аттосекундных рентгеновских импульсов за счёт предварительного колебательного или электронного возбуждения молекул.

# 1. ФАКТОРЫ, ВЛИЯЮЩИЕ НА ЭФФЕКТИВНОСТЬ ГЕНЕРАЦИИ ГАРМОНИК В МОЛЕКУЛЯРНЫХ ГАЗАХ

## 1.1. Выстраивание молекул

В обычных условиях из-за свободного вращения молекул в газе их распределение по направлениям осей изотропно. Однако в сильном световом поле при определённых условиях может происходить перестройка вращательного движения молекул, приводящая к выстраиванию молекулярных осей вдоль направления поляризации поля [13]. К настоящему времени разработано несколько способов выстраивания молекул (см., например, обзор [14]). Выстраивание молекул используется для управления динамикой химических и фотохимических реакций, исследования динамики структурных изменений и безызлучательных переходов в молекулах, генерации ультракоротких оптических импульсов и др. Увеличение эффективности генерации гармоник при выстраивании молекул по сравнению со случаем, когда молекулы ориентированы хаотически, было экспериментально обнаружено в работе [15], где использовалась техника адиабатического выстраивания [16] с помощью длинных ($t_{\rm pulse} \sim 300$ пс $\gg t_{\rm rot}$, где $t_{\rm rot}$ — период вращения молекулы) лазерных импульсов низкой интенсивности ($I \sim 10^{11}\div10^{12}$ Вт/см$^2$).

Результаты недавних теоретических и экспериментальных исследований генерации гармоник в ансамбле выстроенных молекул [17–20] демонстрируют широкие возможности использования ориентации молекул для управления процессом нелинейного преобразования частот, а также для диагностических целей. Так, в работе [17] показано, что эффективность генерации гармоник при взаимодействии оптического излучения с молекулярными ионами $\mathrm{H}_2^+$ и $\mathrm{H}_3^{2+}$, находящимися в равновесном электронно-колебательном состоянии, оси которых ориентированы перпендикулярно линейно поляризованному электрическому полю лазерной волны, существенно выше, чем в случае параллельной ориентации осей. В работе [18], где представлены результаты экспериментов по генерации гармоник при неадиабатическом выстраивании [21] молекул интенсивными ($I \sim$ $\sim 10^{13}$ Вт/см$^2$) короткими ($t_{\rm pulse} \sim 30$ фс $\ll t_{\rm rot}$) лазерными импульсами, продемонстрировано значительное увеличение эффективности преобразования частот при ориентации осей молекул $\mathrm{N}_2$ и $\mathrm{O}_2$ по отношению к направлению электрического поля в лазерном импульсе под углами $\theta = 0$ и $\theta = \pi/4$, $3\pi/4$ соответственно. В работах [19, 20] приведены результаты численных расчётов, демонстрирующих возникновение зависящих от ориентации молекулярной оси интерференционных структур в спектрах гармоник, излучаемых молекулярным ионом $\mathrm{H}_2^+$ и молекулой $\mathrm{H}_2$. Показано, что для каждой заданной гармоники существует ориентация оси, при которой амплитуда гармоники значительно уменьшается, а её фаза испытывает резкий скачок.

Ориентационная зависимость нелинейного отклика молекулы в сильном лазерном поле может быть обусловлена влиянием факторов, действующих на каждой из стадий описанного во введении трёхступенчатого процесса генерации высоких гармоник.

Поскольку первой стадией процесса генерации гармоник является акт ионизации атома или молекулы, скорость ионизации является важной характеристикой, в значительной мере определяющей эффективность рассматриваемого процесса. Результаты экспериментов [18] по генерации гармоник в молекулярном азоте удовлетворительно объясняются обнаруженной в недавнем эксперименте [22] сильной зависимостью скорости ионизации молекулы $\mathrm{N}_2$ от угла между её осью и направлением электрического поля лазерной волны (измеренная в работе [22] вероятность ионизации молекулы азота лазерным импульсом с длительностью 40 фс и пиковой интенсивностью $2\cdot10^{14}$ Вт/см$^2$ оказалась примерно в 4 раза выше для параллельной ориентации оси молекулы и вектора поля, чем для перпендикулярной).

Важным фактором, ограничивающим эффективность возвратно-столкновительного механизма генерации высоких гармоник, является расплывание волнового пакета электронов при движении вне атома (молекулы). Очевидно, что скорость диффузии волнового пакета в значительной мере определяется масштабом его начальной локализации. Больший масштаб локализации электронной волновой функции вдоль определённого направления соответствует более узкому распределению электронов по проекциям импульса на это направление. В терминах классического описания наличие поперечной (по отношению к направлению ионизующего поля) компоненты импульса у электрона, освобождаемого из атома или молекулы, приводит к отклонению траектории его движения в сторону от рассеивающего центра. Очевидно, что расплывание волнового пакета должно быть более медленным для начальных состояний, характеризующихся большей долей электронов с малым поперечным импульсом. Именно такая ситуация характерна, в отличие от атома, для молекулярных систем, само существование которых обусловлено наличием делокализованной компоненты в Ψ-функции электронов, расположенной в межъядерной области и обеспечивающей взаимное притяжение ядер. Благодаря этому обстоятельству увеличивается число частиц, эффективно участвующих в генерации тормозного излучения в процессе возвратных соударений ускоренных лазерным полем электронов с молекулярным остовом. В результате, как показано в работе [23] на примере иона $\mathrm{H}_2^+$ и атома водорода, эффективность генерации аттосекундных импульсов и высоких гармоник излучения при ионизации молекулярных структур фемтосекундным оптическим импульсом может значительно превосходить эффективность аналогичных процессов в атомных системах. Разный поперечный масштаб локализации исходной Ψ-функции при разной ориентации молекулярной оси по отношению к вектору электрического поля является одной из причин возникновения ориентационной зависимости эффективности генерации гармоник в молекулярных газах.

На заключительной стадии процесса генерации высоких гармоник, состоящей в испускании электроном фотона при столкновении с ионом, существенную роль играет конфигурация мишени, на которой рассеивается электрон. Как отмечалось в [17], эффективное сечение рассеяния электронов на молекулярном остове, ориентированном перпендикулярно вектору электрического поля лазерного импульса, выше, чем при какой-либо другой ориентации оси молекулы или по сравнению со случаем рассеяния на атомах за счёт дополнительного вклада, обусловленного рассеянием электронов не на родительском, а на соседних ионах в молекуле. Кроме того, наличие в молекуле нескольких рассеивающих центров может приводить к интерференционным эффектам [19, 20], обусловленным когерентным сложением вкладов в излучение от рассеяния различных участков электронного волнового пакета на различных центрах. В простейшем случае двухатомной молекулы деструктивная интерференция возникает при условии, что фаза волны де Бройля налетающих электронов в точках расположения рассеивающих центров отличается на $\pi$. Для свободного электрона, описываемого плоской волной де Бройля $\psi(\mathbf{r},t) = \exp(i\mathbf{kr} - iE_k t/\hbar)$, где $\mathbf{k}$ — волновой вектор, $E_k = \hbar^2 k^2/2$ — энергия электрона, это условие записывается как

$$D\cos\theta = (2n+1)\,\lambda/2, \tag{1}$$

где $D$ — межъядерное расстояние, $\theta$ — угол между направлением электрического поля лазерной волны и осью молекулы, $\lambda = 2\pi/k$ — длина волны де Бройля, $n = 0, 1, \ldots$ . Для конструктивной интерференции, соответственно, имеем условие

$$D\cos\theta = m\lambda, \tag{2}$$

где $m = 0, 1, \ldots$ . Из соотношений (1) и (2) следует, что из наблюдения интерференционных картин в спектре излучения выстроенных молекул можно получать информацию о структуре молекул. Использование конструктивной интерференции позволяет повысить эффективность возбуждения определённых гармоник оптического излучения в ансамбле выстроенных молекул. Наличие скачка фазы возбуждаемого излучения [19] при критическом угле, определяемом соотношением (1), приводит к интерференционному подавлению излучения гармоник в газе хаотически ориентированных молекул за счёт взаимной компенсации вкладов в излучение от молекул, ориентированных под углами, меньшими и большими критического.

### 1.2. Размеры и конфигурация молекул

Геометрия молекул оказывается другим важным фактором, влияющим на эффективность генерации гармоник и характеристики генерируемого излучения. Как и в предыдущем разделе, рассмотрим влияние этого фактора на каждой стадии процесса генерации высоких гармоник.

Зависимость скорости ионизации нейтральной молекулы в лазерном поле от межъядерного расстояния в основном определяется соответствующей зависимостью энергии исходного стационарного состояния. Однако для молекулярного иона, ориентированного вдоль электрического поля волны, существует критическое межъядерное расстояние, при котором скорость ионизации может значительно превышать её значение как для малых, так и для бо́льших расстояний между ядрами [24, 25]. Увеличение скорости ионизации в этом случае объясняется неадиабатической локализацией электронной волновой функции вблизи ядер, приводящей к возможности ионизации путём туннелирования электрона через внутренний барьер. Межъядерное расстояние, при котором этот канал ионизации оказывается доминирующим, как правило, в несколько раз превышает равновесное значение. Данный эффект может оказывать существенное влияние при генерации гармоник на колебательно возбуждённых или диссоциирующих молекулярных ионах.

Размеры молекулы могут оказывать существенное влияние и на вторую стадию процесса генерации гармоник, связанную с движением электронов после ионизации.

Для молекул, ориентированных вдоль электрического поля, это влияние может быть выражено в существенном увеличении ширины плато в спектре генерируемого излучения [26–29]. Действительно, максимальная энергия фотона, излучаемого в результате рекомбинации ускоренного лазерным полем электрона с ионом, определяется суммой потенциала ионизации $I_{\mathrm{p}}$ и максимальной энергии, которую электрон может иметь в момент столкновения. В случае атома, ионизуемого линейно поляризованным лазерным полем постоянной амплитуды $E(t) = E_0 \sin(\omega_0 t)$, максимальная возможная энергия электрона к моменту соударения с родительским ионом равна $E_{\max} \approx 3{,}17 U_{\mathrm{p}}$ [1, 2], где $U_{\mathrm{p}} = E_0/(4\omega_0^2)$ — средняя осцилляторная энергия электрона в поле $E(t)$. В случае молекулы ускоренный лазерным полем электрон может удариться не о родительский, а о «чужой» ион, при этом, если расстояние между ядрами равно $D = (2n{+}1)\,\pi\alpha_0$, где $n = 0, 1, \ldots$, $\alpha_0 = E_0/\omega_0^2$ — радиус осцилляций электрона, энергия электрона может достигать максимального значения, равного $E_{\max} = 8U_{\mathrm{p}}$ [26, 27]. В линейных молекулярных цепочках, кроме того, электрон может приобретать дополнительную энергию в результате взаимодействия с промежуточными ионами в процессе движения вдоль цепочки, а наличие большого числа рассеивающих центров повышает эффективность генерации тормозного излучения [28]. В многоэлектронных молекулярных системах возможен дополнительный механизм расширения плато в спектре излучения, связанный с влиянием межэлектронных корреляций, приводящих к обмену энергией между электронами. За счёт такого механизма энергия излучаемого фотона может, например, в случае двухэлектронного молекулярного иона $\mathrm{H}_3^+$ достигать величины $\hbar\omega \approx I_{\mathrm{p}} + 12U_{\mathrm{p}}$ [29]. Фотоны с такой энергией могут излучаться электроном, движущимся между крайними ядрами и приобретающим дополнительную энергию при столкновении с другим электроном вблизи центрального ядра; оптимальное расстояние между соседними ядрами в этом случае равно $D = \pi\alpha_0/2$. Отметим, что описанные здесь эффекты могут наблюдаться лишь при межъядерных расстояниях порядка осцилляторного радиуса электрона, т. е. расширение плато в область энергий $\hbar\omega \gg I_{\rm p}$ за счёт этих эффектов может быть получено лишь для систем с размерами, во много раз превышающими атомные масштабы. Примером такой системы может быть диссоциирующая молекула. Оптимизация размеров системы в этом случае может осуществляться за счёт использования двух лазерных импульсов с контролируемой временно́й задержкой между ними [30].

Для молекул, ориентированных перпендикулярно электрическому полю, размерами системы определяется поперечный масштаб локализации исходной электронной волновой функции, от которого, в свою очередь, зависит скорость расплывания электронного волнового пакета при движении вне молекулы. В работе [23] на примере молекулярного иона $H_2^+$, ионизуемого из основного электронного состояния фемтосекундным излучением титан-сапфирового лазера (длина волны излучения $\lambda = 800$ нм), нами было показано наличие оптимального межъядерного расстояния, при котором поперечные размеры электронного волнового пакета к моменту возвратного соударения с молекулярным остовом минимальны. При этих оптимальных условиях эффективность генерации гармоник и аттосекундных рентгеновских всплесков на порядок превышает соответствующее значение для равновесной конфигурации молекулы. Межъядерное расстояние, при котором достигается максимум эффективности генерации коротковолновых квантов с длинами волн $\lambda < 40$ нм, в несколько раз превышает равновесное для основного электронного состояния. Для осуществления в эксперименте оптимального режима взаимодействия лазерного излучения с молекулами может быть использована аналогичная предложенной в работе [30] двухступенчатая схема, состоящая в предварительном возбуждении или ионизации молекул сверхкоротким оптическим импульсом с небольшой интенсивностью и последующем воздействии на газ мощным импульсом излучения с временно́й задержкой, соответствующей оптимальному «разбуханию» молекулы в процессе её колебаний или начавшейся диссоциации. Воздействие на молекулярную систему последовательностью двух импульсов: накачки (для электронно-колебательного возбуждения молекулы) и зондирующего с варьируемой временно́й задержкой (для генерации гармоник), может быть использовано как диагностическое средство для наблюдения динамики нелинейного отклика, связанной с внутримолекулярными структурными изменениями [31].

Как отмечалось выше, действие факторов, снижающих вероятность столкновения ускоренного лазерным полем электрона с родительским ионом из-за наличия у электрона поперечной скорости, может в случае протяжённых систем, которыми являются молекулы, частично компенсироваться за счёт возможности столкновения электрона с «чужими» ионами, смещёнными в поперечном направлении относительно родительского иона. Это является одним из обстоятельств, принципиально отличающих молекулы от атомов при их взаимодействии с сильным лазерным полем и обуславливающих зависимость эффективности генерации высоких гармоник в молекулярных газах от геометрии молекул. Большей протяжённостью молекулярных систем по сравнению с атомами может быть объяснена, в частности, наблюдавшаяся в экспериментах [32, 33] более слабая зависимость эффективности генерации высоких гармоник от эллиптичности падающего излучения в молекулярных газах ($N_2$) по сравнению с атомарными (Ar).

Отметим также, что изменение состава или конфигурации молекул может приводить к качественным изменениям в структуре спектров излучаемых ими гармоник. Так, изотопическое замещение ядер может приводить к появлению, кроме нечётных, также и чётных гармоник в спектре излучения ансамбля выстроенных молекул, как это продемонстрировано в работе [34] на примере молекул $H_2$ и HD. Спектр излучения ансамбля молекул, обладающих дискретной вращательной симметрией $N$-го порядка и ориентированных в плоскости, перпендикулярной направлению распространения циркулярно поляризованного лазерного излучения, содержит только гармоники с номерами $nN \pm 1$, где $n = 1, 2, \ldots$, [35] и чувствителен к изменениям, приводящим к нарушению указанной симметрии.

### 1.3. Тип молекулярной орбитали

Как показывают недавние теоретические и экспериментальные исследования [36–43], структура и симметрия электронной волновой функции оказывают существенное влияние на процессы взаимодействия сильного лазерного поля с молекулами, в том числе и на процесс генерации высоких гармоник.

В ряде экспериментов было обнаружено, что некоторые молекулы ионизуются гораздо медленнее по сравнению с атомами, обладающими близким по величине потенциалом ионизации. Так, измеренная в работах [36, 37] скорость ионизации молекулы кислорода излучением титан-сапфирового лазера оказалась на порядок величины меньше, чем для атома ксенона, несмотря на почти одинаковые потенциалы ионизации для $O_2$ и Xe (12,06 и 12,13 эВ соответственно). В то же время для ряда других молекул такой эффект не наблюдается. Например, у молекулы $N_2$ и атома Ar, также обладающих близкими по величине потенциалами ионизации (15,58 и 15,76 эВ соответственно), скорости ионизации практически совпадают. Для объяснения различий в поведении молекул $O_2$ и $N_2$ предлагались различные модели, в большинстве из которых подчёркивается различие их валентных орбиталей ($\pi_g$ и $\sigma_g$ соответственно) [38–40]. Существенную роль в процессе ионизации при этом могут играть как симметрия молекулярной орбитали [39], так и геометрические факторы [40]. Поскольку для систем, обладающих меньшей скоростью ионизации, процесс генерации гармоник может протекать при бóльших интенсивностях поля, важным следствием эффекта подавления ионизации молекулы $O_2$ является возможность получения более широкого плато в спектре гармоник. Это подтверждается результатами недавних экспериментов [40], в которых при воздействии на молекулы $O_2$ излучением титан-сапфирового лазера наблюдалось излучение гармоник с максимальным номером ($N_{\max} = 53$), почти в два раза бóльшим, чем для атомов Xe ($N_{\max} = 29$).

Симметрия молекулярной орбитали может оказывать существенное влияние и на зависимость скорости ионизации молекулы от ориентации молекулярных осей. Так, для молекулярных орбиталей, антисимметричных по отношению к отражению относительно одной или нескольких (узловых) плоскостей, наблюдается интерференционное подавление ионизации в этих плоскостях [39, 41, 42]. Этим могут быть объяснены наблюдавшиеся в эксперименте [18] различия в ориентационной зависимости эффективности генерации гармоник для молекул $O_2$ и $N_2$, имеющих соответственно антисимметричную и симметричную валентные орбитали. Наличие более сложных (неплоских) узловых поверхностей также, по-видимому, должно оказывать влияние на ориентационные зависимости ионизационных процессов при взаимодействии молекул с лазерным полем [42].

Симметрия исходной волновой функции оказывает влияние и на динамику электронного волнового пакета после ионизации. Простым примером является молекула с антисимметричной валентной орбиталью. Если волновая функция валентного электрона $\psi(\mathbf{r})$ обладает пространственной антисимметрией относительно плоскости, проходящей через центр молекулы перпендикулярно её оси, то в импульсном представлении волновая функция $\tilde{\psi}(\mathbf{p})$ обращается в нуль при $\mathbf{p}\mathbf{e}_D = 0$, где $\mathbf{e}_D$ — единичный вектор вдоль оси молекулы, т. е. параллельная оси молекулы составляющая импульса электрона всегда отлична от нуля. При ионизации молекулы линейно поляризованным лазерным излучением с плоскостью поляризации, перпендикулярной оси молекулы, зеркальная симметрия системы не нарушается. Вследствие этого поперечная по отношению к электрическому полю компонента импульса всех электронов остаётся ненулевой, что делает возвратное столкновение электронов с родительскими ионами маловероятным [43]. Заметим, однако, что влияние этого фактора может быть частично скомпенсировано за счёт столкновений электронов с другими ионами в молекуле. Оптимальные условия для генерации гармоник в такой конфигурации определяются межъядерным расстоянием, при котором вероятность рассеяния на «чужих» ионах максимальна (см. следующий раздел). Отметим также, что вероятность рассеяния на родительском ионе в рассматриваемом здесь случае может быть увеличена за счёт оптимального подбора степени эллиптичности поляризации поля для компенсации поперечного дрейфа электронов [41, 43, 44].

## 2. ГЕНЕРАЦИЯ АТТОСЕКУНДНЫХ ИМПУЛЬСОВ ПРИ ИОНИЗАЦИИ ВОЗБУЖДЁННЫХ МОЛЕКУЛ

### 2.1. Роль электронного возбуждения

Как показывают проведённые нами теоретические исследования [45], эффективность генерации одиночного аттосекундного импульса при ионизации атомов мощным оптическим импульсом с малым числом периодов поля может существенно увеличиться при использовании исходно возбуждённых электронных состояний. В частности, в результате проведённых аналитических и численных расчётов нами установлено, что при ионизации атома водорода из $2s$-состояния излучением титан-сапфирового лазера в несколько десятков раз увеличивается энергия генерируемого аттосекундного импульса и уменьшается его длительность, а спектральная интенсивность излучения в вакуумном ультрафиолетовом и мягком рентгеновском диапазонах увеличивается на несколько порядков по сравнению со случаем ионизации из основного состояния. Полученные результаты объясняются тем, что из-за большей степени делокализации волновой функции возбуждённых атомных состояний по сравнению с основным состоянием ионизация из них приводит к формированию волновых пакетов, в меньшей степени подверженных квантовомеханическому расплыванию при движении вне атома. Ниже мы показываем, что аналогичный эффект должен иметь место при ионизации молекул с возбуждёнными электронными состояниями.

При численных расчётах нами использовалась широко принятая модель (см., например, [17, 19, 26]) простейшей молекулярной системы — двумерный аналог иона $\mathrm{H}_2^+$ со сглаженным кулоновским потенциалом $V(x,y)$, образованным двумя одинаковыми однозарядными центрами, удерживающими единственный электрон:

$$V(x,y) = -[(x-D/2)^2 + y^2 + a^2]^{-1}/2 - [(x+D/2)^2 + y^2 + a^2]^{-1}/2. \tag{3}$$

Здесь $D$ — расстояние между ядрами, $a$ — параметр сглаживания кулоновской сингулярности, выбираемый обычно из условия совпадения энергии ионизации модельного иона из нижнего электронного состояния с её величиной для реального молекулярного иона. Молекулы считаем выстроенными вдоль оси $x$, направленной перпендикулярно линейно поляризованному электрическому полю $E(t)$. Здесь и ниже используем атомные единицы ($e = m = \hbar = 1$). Динамика процесса ионизации молекулы лазерным импульсом в дипольном приближении описывается уравнением Шрёдингера

$$i\,\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi + V(x,y)\psi + yE(t)\psi \tag{4}$$

(ядра считаем неподвижными, что для интересующего нас здесь режима ионизации молекулы оптическим импульсом с малым числом периодов поля вполне оправдано даже для молекул с лёгкими ядрами). Уравнение Шрёдингера (4) интегрировалось численно методом операторного расщепления [46] с использованием быстрого преобразования Фурье. Стационарные состояния электрона в потенциале (3) находились методом численного интегрирования в мнимом времени

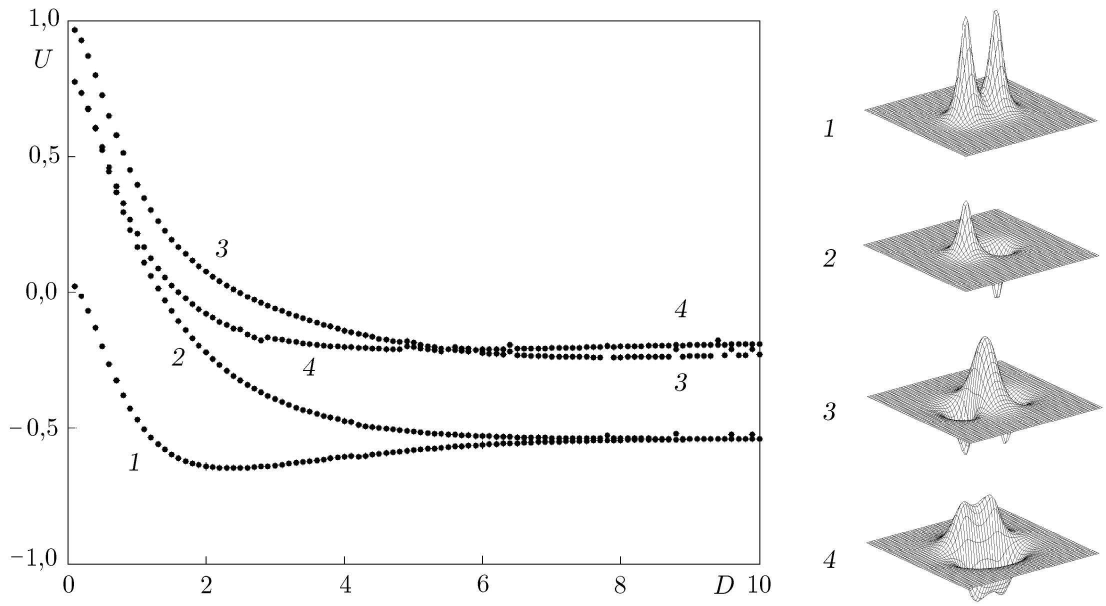



Рис. 1. Зависимости потенциальной энергии от межъядерного расстояния (слева) и волновые функции (справа) четырёх низших электронных состояний двумерного молекулярного иона $H_2^+$. Волновые функции приведены для межъядерного расстояния $D = 7{,}5$

уравнения (4) с нулевым внешним полем. Найденные таким образом кривые потенциальной энергии четырёх низших электронных состояний с учётом отталкивания ядер представлены на рис. 1 для параметра сглаживания $a = 1/\sqrt{2}$. Для основного электронного состояния в используемой нами модели равновесному расстоянию между ядрами $D = 2{,}4$ соответствует потенциал ионизации $I_\mathrm{p} = 28{,}5$ эВ; энергия диссоциации $E_\mathrm{d}$ равна 2,9 эВ. Указанные величины близки к их экспериментальным значениям для реального молекулярного иона $H_2^+$ ($D = 2$, $I_\mathrm{p} = 29{,}9$ эВ и $E_\mathrm{d} = 2{,}8$ эВ).

Ниже приведены результаты численных расчётов генерации аттосекундного импульса в режиме надбарьерной ионизации [47] иона $H_2^+$ в быстро нарастающем лазерном поле. В этом режиме ионизация практически всех частиц и возвратные соударения электронов с ионами происходят в течение одного периода лазерного поля. В поляризационном отклике системы в этом случае возникает компонента, соответствующая возбуждению одиночного электромагнитного импульса аттосекундной длительности с широким сплошным спектром, тянущимся до рентгеновского диапазона частот.

Молекулярный отклик вычислялся как вторая производная по времени от дипольного момента молекулы $\langle \ddot{d}_y \rangle$ в направлении электрического поля. Для вычисления величины $\langle \ddot{\mathbf{d}}(t) \rangle$ удобно использовать теорему Эренфеста [48], согласно которой средние значения физических величин изменяются по законам классической механики:

$$\langle \ddot{\mathbf{d}}(t) \rangle = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} \langle \mathbf{r} \rangle = \left\langle \Psi(\mathbf{r},t) \left| \frac{\partial V(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{E}_0 \sin(\omega_0 t) \right| \Psi(\mathbf{r},t) \right\rangle. \quad (5)$$

Второе слагаемое линейно по полю, поэтому для исследования процесса нелинейного преобразования частот представляет интерес лишь первое слагаемое, содержащее нелинейную часть отклика, связанную с влиянием потенциала иона:

$$R(t) = \iint |\Psi(\mathbf{r},t)|^2 \, \frac{\partial V}{\partial y} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y. \quad (6)$$

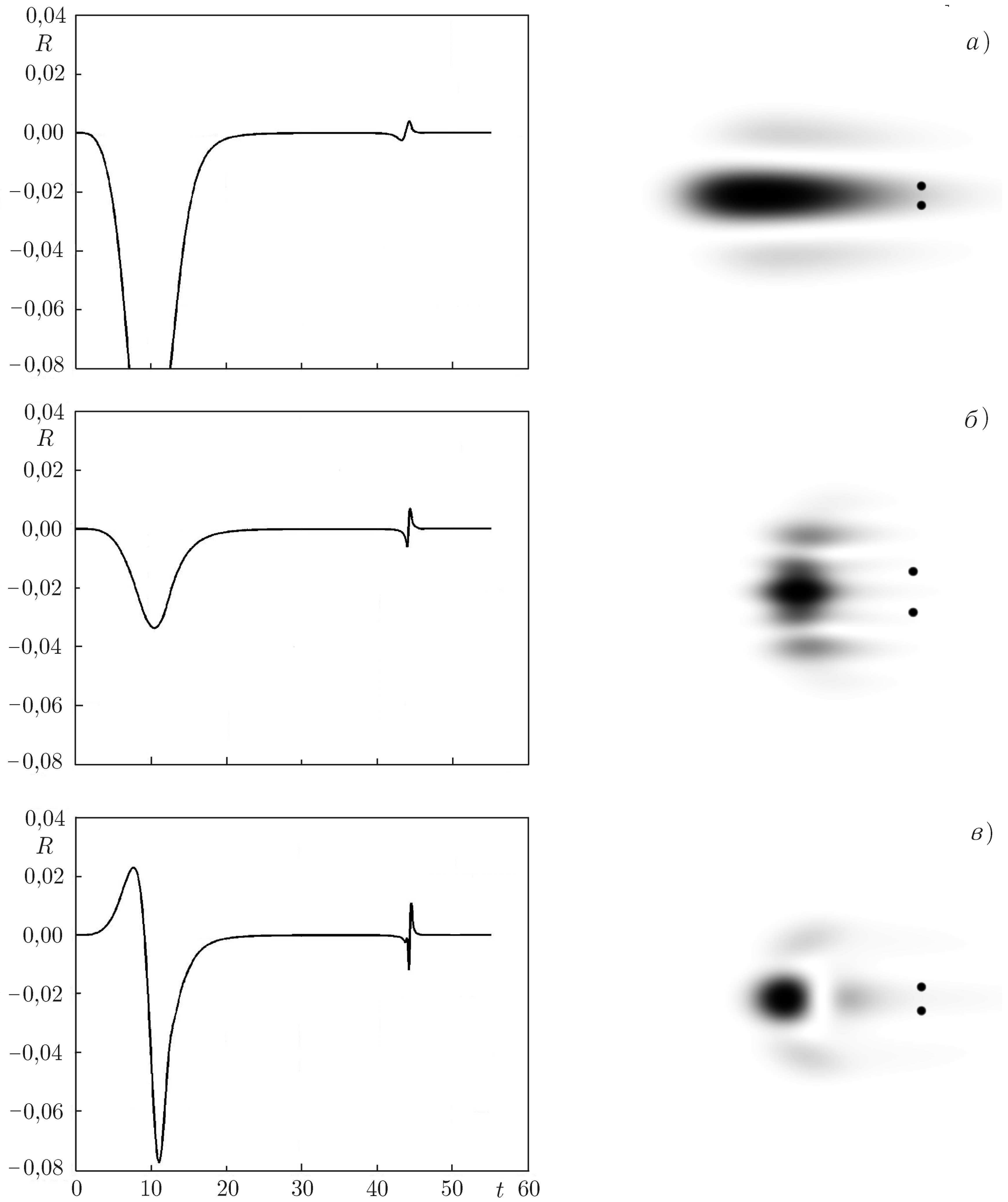



Рис. 2. Поляризационный отклик молекулярного иона $H_2^+$ (слева) и электронный волновой пакет перед возвратным соударением с ионным остовом (справа; ядра изображены чёрными точками; более тёмные области соответствуют большей плотности вероятности). Результаты приведены для начальных электронных состояний *1* (*а*), *3* (*б*) и *4* (*в*) при оптимальных межъядерных расстояниях ($D$ = 7,2; 15 и 9 соответственно). Молекулярная ось ориентирована перпендикулярно электрическому полю лазерного импульса (7)

На рис. 2–5 представлены результаты расчётов для случая ионизации молекулярного иона $H_2^+$ на переднем фронте лазерного импульса

$$E(t) = E_0\,[\exp(2\omega_0 t/\pi) - 1]\,\sin(\omega_0 t), \qquad (7)$$

где $E_0 = 0{,}36$, $\omega_0 = 0{,}114$.

На рис. 2 приведены временны́е зависимости молекулярного нелинейного отклика и «мгновенные снимки» электронного волнового пакета перед столкновением с ионным остовом для случаев ионизации из состояний *1*, *3* и *4* (связывающие орбитали) при оптимальных значениях межъядерного расстояния ($D = 7{,}2$; 15 и 9 соответственно). На всех приведённых зависимостях отчётливо виден аттосекундный всплеск, обусловленный соударением электронного волнового пакета с ионным остовом. При ионизации из основного состояния длительность аттосекундного импульса составляет чуть менее 200 аттосекунд. При ионизации из возбуждённых электронных состояний длительность всплеска существенно сокращается (до 40÷50 ас), а его амплитуда увеличивается, что согласуется с наблюдаемой на рис. 2 (справа) тенденцией к уменьшению масштабов локализации волнового пакета возвращающихся к родительской молекуле электронов с увеличением степени начального электронного возбуждения системы.

Спектры нелинейного молекулярного отклика для различных начальных электронных состояний иона $H_2^+$ при оптимальных межъядерных расстояниях приведены на рис. 3. Из приведённых зависимостей следует, что спектральная интенсивность излучения в области частот $\omega > 30\omega_0$ при ионизации из возбуждённых состояний увеличивается на несколько порядков по сравнению со случаем ионизации из основного электронного состояния *1*. Исключение составляет состояние *2* (распадная орбиталь), обладающее пространственной антисимметрией относительно плоскости, перпендикулярной оси молекулы. Вследствие антисимметрии волновой функции плотность вероятности в центре волнового пакета, эволюционирующего из этого состояния, при рассматриваемой здесь геометрии всегда равна нулю, что приводит к низкой эффективности генерации аттосекундного всплеска. Вместе с тем отметим, что при достаточно больших межъядерных расстояниях возникает поперечная интерференционная модуляция волнового пакета, и при оптимальном расстоянии (в рассмотренном нами случае — при $D \approx 15$) наиболее интенсивные интерференционные максимумы в возвращающемся к ионному остову электронном волновом пакете соответствуют точному «прицеливанию» электронов на ядра, что повышает эффективность возбуждения аттосекундного всплеска (рис. 4).

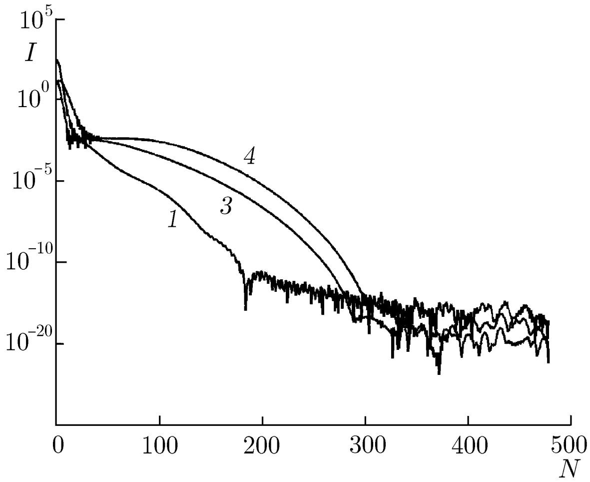



Рис. 3. Спектры поляризационного отклика молекулярного иона $H_2^+$ для начальных электронных состояний *1*, *3* и *4* при оптимальных межъядерных расстояниях (см. рис. 2)

## 2.2. Использование интерференционной модуляции электронного волнового пакета

Характерным свойством молекулярных систем является наличие нескольких атомов, являющихся источниками волн де Бройля, испускаемых при ионизации. Эти волны могут интерферировать, образуя квазипериодические структуры, подобные приведённым на рис. 4. В известном смысле ситуация здесь аналогична интерференции волновых пучков при дифракции света на двух щелях. Ниже приведены примеры, показывающие возможности использования интерференционной модуляции электронных волновых пакетов для управления спектральными свойствами излучения, генерируемого при электрон-ионных столкновениях в процессе ионизации молекул.

На рис. 5 приведены спектры поляризационного отклика молекулярного иона $H_2^+$ для случая

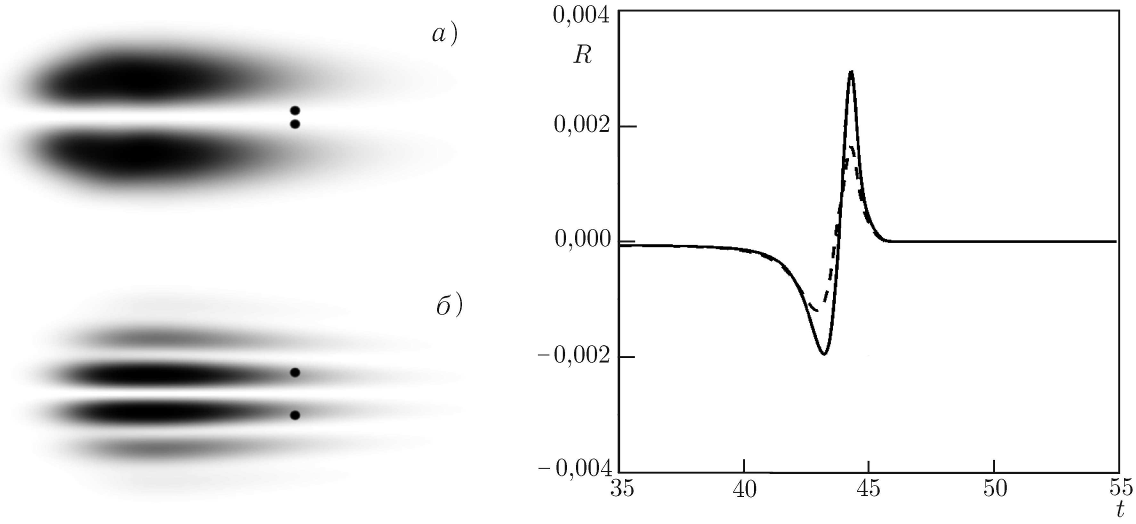



Рис. 4. Слева — электронный волновой пакет перед возвратным соударением с ионным остовом в случае ионизации молекулярного иона $H_2^+$ из антисимметричного состояния *2* при межъядерном расстоянии $D = 5$ (*а*) и $D = 15$ (*б*). Справа — аттосекундный всплеск в поляризационном отклике молекулярного иона $H_2^+$, ионизуемого из состояния *2* при $D = 5$ (пунктирная кривая) и $D = 15$ (сплошная кривая)

ионизации из основного электронного состояния при межъядерном расстоянии $D = 20$ и различных углах $\theta$ ориентации молекулярной оси по отношению к направлению электрического поля лазерного импульса. Как показывают расчёты, при переходе от поперечной ориентации молекулы ($\theta = 90°$) к продольной ($\theta = 0°$) в спектре возникает ярко выраженный максимум, увеличивающийся по амплитуде и смещающийся в более коротковолновую часть спектра с уменьшением угла $\theta$. Наблюдаемые закономерности нетрудно объяснить исходя из факта наличия интерференционной структуры в электронном волновом пакете, «мгновенные снимки» которого в момент начала соударения с молекулярным остовом представлены на рис. 5 (справа).

Характерная частота тормозного излучения электронов при рассеянии на ионах определяется отношением скорости движения электронов относительно ионов к характерному продольному размеру электронных сгустков. При $\theta = 90°$ интерференционные структуры в волновом пакете параллельны направлению электрического поля лазерной волны, поэтому тормозное излучение электронов носит характер одиночного всплеска с длительностью, определяемой протяжённостью волнового пакета в направлении вдоль поля в сечении, соответствующем положению одного из ядер. При определённом значении угла $\theta < 90°$, зависящем от отношения периода интерференционной модуляции электронного пакета к его продольному размеру, излучение приобретает характер квазипериодической последовательности нескольких всплесков, длительность каждого из которых определяется величиной $\Delta/(v\cos\theta)$, где $\Delta$ — период интерференционной решётки, $v$ — скорость движения пакета. С уменьшением угла $\theta$ с ионами взаимодействуют области электронного волнового пакета, всё более близко расположенные в поперечном направлении к центру пакета, соответствующему максимуму его огибающей (см. рис. 5).

Таким образом, при заданной форме лазерного импульса положение максимума в спектре тормозного излучения можно варьировать в широких пределах, меняя с помощью выстраивающего импульса ориентацию молекулярных осей. Уширение генерируемой линии определяется увеличением масштабов интерференционной решётки из-за квантовомеханического расплывания волнового пакета в процессе его движения через область, занятую ионами, и изменением скорости движения пакета из-за его ускорения лазерным полем.

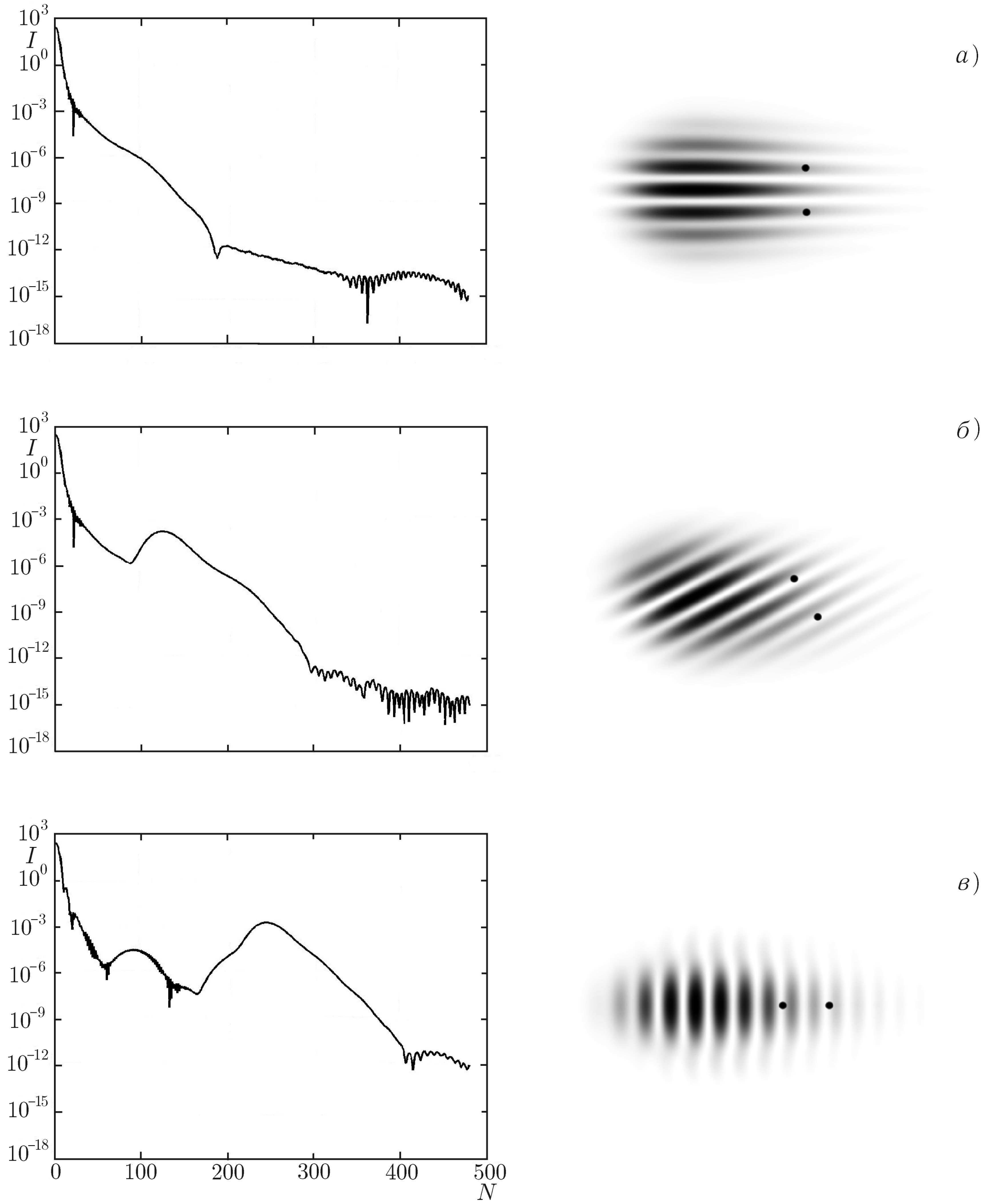



Рис. 5. Спектр поляризационного отклика (слева) и электронный волновой пакет перед возвратным соударением с ионным остовом (справа) в случае ионизации молекулярного иона $H_2^+$ из основного электронного состояния при межъядерном расстоянии $D = 20$ и различных углах ориентации молекулярной оси по отношению к направлению электрического поля лазерного импульса: $\theta = 90°$ (*а*), $\theta = 60°$ (*б*) и $\theta = 0°$ (*в*)

При заданной ориентации молекулярных осей управление спектром генерируемого излучения может осуществляться за счёт варьирования межъядерного расстояния, а также за счёт изменения формы лазерного импульса. На рис. 6 представлены спектры поляризационного отклика

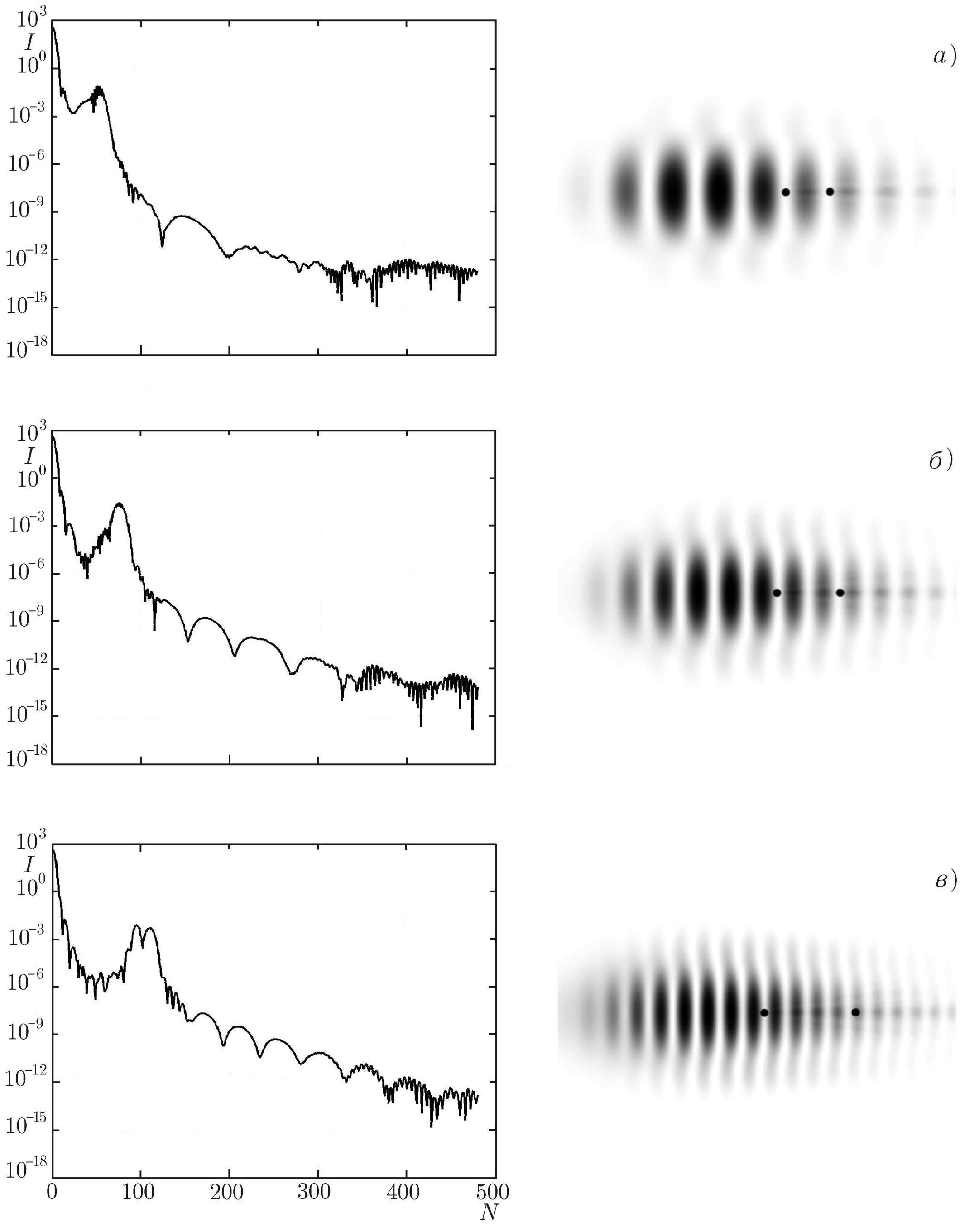



Рис. 6. Спектр поляризационного отклика (слева) и электронный волновой пакет перед возвратным соударением с ионным остовом (справа) в случае ионизации молекулярного иона $H_2^+$ лазерным импульсом (8) из основного электронного состояния при параллельной электрическому полю ориентации молекулярной оси и различных межъядерных расстояниях: $D = 14$ (*а*), $D = 20$ (*б*) и $D = 28$ (*в*)

иона $H_2^+$, ионизуемого из основного электронного состояния лазерным импульсом

$$E(t) = E_0 \exp[-5\,(\omega_0 t/(2\pi) - 1)^4]\,\sin(\omega_0 t), \tag{8}$$

где $E_0 = 1{,}5$, $\omega_0 = 0{,}114$, при параллельной электрическому полю ориентации молекулярной оси и различных значениях межъядерного расстояния.

Наблюдаемое на приведённых графиках (рис. 6, слева) линейное смещение пика в спектре поляризационного отклика в коротковолновую область с увеличением межъядерного расстояния объясняется тем, что масштаб интерференционной модуляции электронного волнового пакета изменяется обратно пропорционально $D$ (рис. 6, справа). Сильная зависимость положения и формы линии в спектре возбуждаемого излучения от амплитуды и профиля возбуждающего поля видна из сравнения графиков на рис. 5*в* и 6*б*, полученных при одинаковых значениях $\theta$ и $D$, но разной форме лазерного импульса. В поле лазерного импульса, задаваемого формулой (8), скорость и ускорение электронного волнового пакета при столкновении с ионным остовом меньше, чем в поле (7), чем объясняется более слабое смещение пика в спектре генерируемого излучения в область коротких волн и меньшая его ширина.

Наличие нескольких рассеивающих центров в молекуле может приводить также к появлению более тонких особенностей в спектре возбуждаемого аттосекундного импульса. Так, если расстояние между ядрами в двухатомной молекуле оказывается равным нечётному числу полупериодов решётки в электронном волновом пакете перед столкновением, то в центре пика в спектре возбуждаемого излучения наблюдается очень узкий и глубокий минимум (см. рис. 6*в*), обусловленный деструктивной интерференцией вкладов в излучение от рассеяния электронов на соседних ионах. Нетрудно видеть, что механизм возникновения этого минимума подобен обсуждавшемуся в работах [19, 20] механизму появления интерференционных структур в спектрах генерации гармоник в молекулярных газах (см. формулы (1) и (2)).

## 3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, нелинейный отклик молекулы, ионизуемой мощным фемтосекундным лазерным импульсом, сильно зависит от её начального состояния. Конструирование электронных волновых пакетов путём оптимальной подготовки молекулярной среды в эксперименте (выстраивание молекул, возбуждение электронных или колебательных степеней свободы) может обеспечить значительное увеличение эффективности генерации аттосекундных импульсов. Наличие ярко выраженного максимума в спектре молекулярного нелинейного отклика в условиях надбарьерной ионизации и сильная зависимость его положения от ориентации оси молекулы и от величины межъядерного расстояния позволяют получить перестраиваемое до рентгеновского диапазона когерентное излучение субфемтосекундной длительности с управляемыми характеристиками. Дополнительные возможности для контроля обеспечиваются соответствующим подбором временнóго профиля ионизирующего лазерного импульса. Чувствительность спектра возбуждаемого излучения к взаимному расположению ядер в молекуле и к ориентации молекулярных осей открывает возможности для использования генерации аттосекундных импульсов как диагностического средства для экспериментального исследования колебательно-вращательной динамики молекул [49].

Данная работа выполнена при частичной поддержке Президиума РАН (программы «Квантовая макрофизика» и «Фемтосекундная оптика и физика сверхсильных лазерных полей»), Отделения физических наук РАН (программа «Нелинейная оптика уникальных лазерных систем») и Президентской программы поддержки ведущих научных школ РФ (школы «Нелинейные преобразования лазерного излучения» и «Нелинейная динамика оптических систем и высокочувствительные оптические измерения»).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Corkum P. B. // Phys. Rev. Lett. 1993. V. 71. P. 1 994.
2. Kulander K. C., Schafer K. J., Krause J. L. // NATO AST Series B: Physics. 1993. V. 316. Super-Intense Laser-Atom Physics. P. 95.
3. Papadogiannis N. A., Witzel B., Kalpouzos C., Charalambidis D. // Phys. Rev. Lett. 1999. V. 83. P. 4 289.
4. Paul P. M., Toma E. S., Breger P., et al. // Science. 2001. V. 292. P. 1 689.
5. Corkum P. B., Burnett N. H., Ivanov M. Y. // Opt. Lett. 1994. V. 19. P. 1 870.
6. Platonenko V. T., Strelkov V. V. // J. Opt. Soc. Am. B. 1999. V. 16. P. 435.
7. Kovačěv M., Mairesse Y., Priori E., et al. // Eur. Phys. J. D. 2003. V. 26. P. 79.
8. Tcherbakoff O., Mével E., Descamps D., et al. // Phys. Rev. A. 2003. V. 68. Art. no. 043 804.
9. Sergeev A. M., Kim A. V., Vanin E. V., et al. // Proc. SPIE. 1996. V. 2 770. P. 36.
10. Christov I. P., Murnane M. M., Kapteyn H. C. // Phys. Rev. Lett. 1997. V. 78. P. 1 251.
11. Spielmann C., Burnett N. H., Sartania S., et al. // Science. 1997. V. 278. P. 661.
12. Hentschel M., Kienberger R., Spielmann C., et al. // Nature. 2001. V. 414. P. 509.
13. Зон Б. А., Кацнельсон Б. Г. // ЖЭТФ. 1975. Т. 69. С. 1 166.
14. Stapelfeldt H., Seideman T. // Rev. Mod. Phys. 2003. V. 75. P. 543.
15. Velotta R., Hay N., Mason M. B., et al. // Phys. Rev. Lett. 2001. V. 87. Art. no. 183 901.
16. Friedrich B., Herschbach D. // Phys. Rev. Lett. 1995. V. 74. P. 4 623.
17. Lappas D. G., Marangos J. P. // J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. 2000. V. 33. P. 4 679.
18. Zeidler D., Levesque J., Itatani J., et al. // Springer Series in Optical Sciences. 2004. V. 95. Ultrafast Optics IV. (in press).
19. Lein M., Hay N., Velotta R., et al. // Phys. Rev. Lett. 2002. V. 88. Art. no. 183 903.
20. Lein M., Hay N., Velotta R., et al. // Phys. Rev. A. 2002. V. 66. Art. no. 023 805.
21. Seideman T. // Phys. Rev. Lett. 1999. V. 83. P. 4 971.
22. Litvinyuk I. V., Lee K. F., Dooley P. W., et al. // Phys. Rev. Lett. 2003. V. 90. Art. no. 233 003.
23. Емелин М. Ю., Рябикин М. Ю., Сергеев А. М. и др. // Письма в ЖЭТФ. 2003. Т. 77. С. 254.
24. Seideman T., Ivanov M. Y., Corkum P. B. // Phys. Rev. Lett. 1995. V. 75. P. 2 819.
25. Zuo T., Bandrauk A. D. // Phys. Rev. A. 1995. V. 52. P. R2 511.
26. Moreno P., Plaja L., Roso L. // Phys. Rev. A. 1997. V. 55. P. R1 593.
27. Kopold R., Becker W., Kleber M. // Phys. Rev. A. 1998. V. 58. P. 4 022.
28. Numico R., Giulietti D., Giulietti A., et al. // J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. 2000. V. 33. P. 2 605.
29. Bandrauk A. D., Yu H. // Phys. Rev. A. 1999. V. 59. P. 539.
30. Numico R., Moreno P., Plaja L., Roso L. // J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. 1998. V. 31. P. 4 163.
31. Pfeifer T., Walter D., Gerber G., et al. // Phys. Rev. A. 2004. V.70. Art. no. 013 805.
32. Flettner A., König J., Mason M. B., et al. // Eur. Phys. J. D. 2002. V. 21. P. 115.
33. Flettner A., König J., Mason M. B., et al. // J. Mod. Opt. 2003. V. 50. P. 529.
34. Kreibich T., Lein M., Engel V., Gross E. K. U. // Phys. Rev. Lett. 2001. V. 87. Art. no. 103 901.
35. Alon O. E., Averbukh V., Moiseyev N. // Phys. Rev. Lett. 1998. V. 80. P. 3 743.
36. Talebpour A., Chien C.-Y., Chin S. L. // J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. 1996. V. 29. P. L667.
37. Guo C., Li M., Nibarger J. P., Gibson G. N. // Phys. Rev. A. 1998. V. 58. P. R4 271.
38. Guo C. // Phys. Rev. Lett. 2000. V. 85. P. 2 276.
39. Muth-Böhm J., Becker A., Faisal F. H. M. // Phys. Rev. Lett. 2000. V. 85. P. 2 280.
40. Shan B., Tong X.-M., Zhao Z., et al. // Phys. Rev. A. 2002. V. 66. Art. no. 061 401 (R).
41. Bhardwaj V. R., Rayner D. M., Villeneuve D. M., Corkum P. B. // Phys. Rev. Lett. 2001. V. 87. Art. no. 253 003.

42. Kjeldsen T. K., Bisgaard C. Z., Madsen L. B., Stapelfeldt H. // Phys. Rev. A. 2003. V. 68. Art. no. 063 407.
43. Lein M. // J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. 2003. V. 36. P. L155.
44. Shan B., Ghimire S., Chang Z. // Phys. Rev. A. 2004. V. 69. Art. no. 021 404 (R).
45. Sergeev A. M., Emelin M. Y., Ryabikin M. Y., et al. // NWP-2 High-field Physics and Ultrafast Nonlinear Phenomena: Proc. of Int. Symposium "Topical Problems of Nonlinear Wave Physics" (NWP-2003), Nizhny Novgorod, September 6–12, 2003. Nizhny Novgorod: Inst. Appl. Phys. RAS, 2003. P. 217.
46. Feit M. D., Fleck J. A., Jr., Steiger A. // J. Comp. Phys. 1982. V. 47. P. 412.
47. Augst S., Meyerhofer D. D., Strickland D., Chin S. L. // J. Opt. Soc. Am. B. 1991. V. 8. P. 858.
48. Burnett K., Reed V. C., Cooper J., Knight P. L. // Phys. Rev. A. 1992. V. 45. P. 3 347.
49. Niikura H., Légaré F., Hasbani R., et al. // Nature. 2002. V. 417. P. 917.

[1] Институт прикладной физики РАН;
[2] Нижегородский госуниверситет им. Н. И. Лобачевского,
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию
11 марта 2004 г.

## POSSIBILITIES FOR CONTROLING ATTOSECOND X-RAY PULSE GENERATION DURING MOLECULAR IONIZATION BY FEMTOSECOND LASER RADIATION

*M. Yu. Emelin, M. Yu. Ryabikin, and A. M. Sergeev*

We discuss the role of different factors (molecular sizes and configuration, orientation of the molecular axis with respect to the electric field of a laser pulse, the type of the molecular orbital, etc.), which characterize molecules and their state, in the formation of the nonlinear response of a molecule ionized by a high-power femtosecond laser pulse. In numerical experiments within the framework of a two-dimensional model for the $H_2^+$ molecular ion, we study possibilities for controlling the process of the nonlinear frequency conversion of femtosecond optical radiation into X-ray radiation of attosecond duration by means of the preliminary vibrational or electronic excitation of molecules. We demonstrate the possibilities of using the attosecond pulse generation as a diagnostic tool for probing vibration-rotational dynamics of molecules.

УДК 621.372.8:535

# О ПРИРОДЕ ЭНЕРГИИ ОСНОВНОГО СОСТОЯНИЯ ЧАСТИЦЫ В ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЯМЕ

*Л. А. Ривлин*

В настоящей работе обращено внимание на, по-видимому, универсальное свойство энергии основного состояния частицы в потенциальной яме. Именно, на примере бесконечно глубокой прямоугольной потенциальной ямы наглядно продемонстрировано, что эта энергия (равно как и энергия локализации частицы, определяемая из соотношения Гейзенберга) аккумулируется внешней силой, совершающей работу против силы давления частицы на стенки ямы при компрессии вещества частицы и, соответственно, её $\psi$-функции из неограниченного свободного пространства в конечный объём ямы. Эта работа в точности равна энергии основного состояния частицы.

Энергия частицы, находящейся в одном из состояний, лежащих выше основного состояния потенциальной ямы, поставляется извне при возбуждении частицы (например, при поглощении фотона). В то же время энергия основного состояния, являясь собственным значением краевой задачи, видимым образом никак не связана с каким-либо стандартным процессом возбуждения, а в полном соответствии с соотношением Гейзенберга есть лишь непременное следствие пространственной локализации $\psi$-функции. Уместен вопрос: что же является источником этой энергии?

Для ответа на него разумно последовать известному совету Л. И. Мандельштама, высказанному при изучении сложных электромагнитных явлений, но имеющему вполне универсальный характер: «Я считаю правильным такой путь: взять какой-нибудь простой случай …, который действительно поддаётся настоящему, хорошему, строгому исследованию, исследовать его и установить, что там делается» [1].

В духе этого совета ответом на поставленный выше вопрос может послужить результат следующего мысленного модельного эксперимента, состоящего в наблюдении за эволюцией основного состояния частицы в потенциальной яме с адиабатически медленно изменяющимися параметрами. Подобный подход, восходящий ещё к классикам, в общем виде принят, например, в [2, 3].

Итак, пусть частица с массой $m$ локализована в одномерной бесконечно глубокой потенциальной яме длиной $L$ с нулевой нормировкой потенциала на дне. В одномерной геометрии её основное состояние описывается $\psi$-функцией

$$\psi = \sqrt{\frac{2}{L}}\cos\Bigl(\frac{p}{\hbar}\,z\Bigr)\exp\Bigl(-i\,\frac{E}{\hbar}\,t\Bigr) = \psi_+ + \psi_- = \frac{1}{\sqrt{2L}}\Bigl[\exp\Bigl(-i\,\frac{p}{\hbar}\,z\Bigr)+\exp\Bigl(i\,\frac{p}{\hbar}\,z\Bigr)\Bigr]\exp\Bigl(-i\,\frac{E}{\hbar}\,t\Bigr) \qquad (1)$$

со следующими энергией и компонентами импульса:

$$E = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}\,, \qquad p_z = p = \sqrt{2mE} = \frac{\pi\hbar}{L}\,, \qquad p_x = p_y = 0, \qquad (2)$$

где $t$ — время, $z$ — продольная координата.

Каждой из встречных бегущих волн $\psi_+$ и $\psi_-$ (1) соответствует ток вероятности

$$J_\pm = \frac{i\hbar}{2m}\left[\psi_\pm^*\,\frac{\mathrm{d}\psi_\pm}{\mathrm{d}z} - \psi_\pm\,\frac{\mathrm{d}\psi_\pm^*}{\mathrm{d}z}\right] = \pm\,\frac{p}{2mL}\,. \qquad (3)$$

Это означает, что каждая из стенок ямы испытывает со стороны локализованной частицы силу давления

$$F_{\pm} = 2pJ_{\pm} = \pm\,\frac{p^2}{mL} = \pm\,\frac{pu}{L} = \pm\,\frac{\pi^2\hbar^2}{mL^3}\ . \tag{4}$$

Пусть далее происходит перемещение стенок ямы (достаточно медленное, чтобы в соответствии с адиабатическим принципом Эренфеста [4, 5] сохранить исходную структуру $\psi$-функции), при котором изменяется её ширина $L$ и производится работа $A$ против силы давления $F$:

$$A = -\int\limits_{L_1}^{L_2} |F_{\pm}|\,\mathrm{d}L = -\,\frac{\pi^2\hbar^2}{m}\int\limits_{L_1}^{L_2}\frac{\mathrm{d}L}{L^3} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{L_2^2} - \frac{1}{L_1^2}\right). \tag{5}$$

Следующий шаг состоит в принятии в качестве исходного состояния эволюции параметров потенциальной ямы пребывание частицы в неограниченном свободном пространстве, т. е. в яме бесконечной ширины $L_1 = \infty$, когда согласно (2)

$$E = 0, \qquad p = 0, \tag{6}$$

а длина волны де Бройля бесконечно велика:

$$\lambda_{\mathrm{dB}} = \infty. \tag{7}$$

На самом деле подобная квантовая «нирвана», выглядящая не слишком реалистичной, означает лишь достаточно большое удаление каких-либо сторонних материальных тел, способных воздействовать на изучаемую частицу.

При таком выборе исходного состояния частицы из (5) следует, что работа $A$ оказывается в точности равной энергии $E$ (2) основного состояния частицы в яме с конечной шириной $L = L_2$:

$$A = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL_2^2} = E. \tag{8}$$

Таким образом, оказывается, что источником энергии частицы, находящейся в основном состоянии потенциальной ямы конечной ширины (или, что одно и то же, пространственно локализованной в соответствии с соотношением Гейзенберга), является действие некой внешней силы, перемещающей стенки ямы и производящей компрессию вещества частицы и, соответственно, её $\psi$-функции из исходно неограниченного свободного пространства в конечный объём ямы с дискретным набором состояний. В известном смысле подобную компрессию $\psi$-функции можно рассматривать как специальный тип возбуждения частицы из континуума в основное состояние потенциальной ямы.

Очевиден и обратный процесс при перемене направления перемещения стенок с передачей энергии частицы, аккумулированной в яме, к источнику внешней силы. Следует заметить, что модельный характер внешней силы в этом мысленном эксперименте оставляет открытым вопрос о её физическом воплощении, которое в разных ситуациях может иметь различное конкретное содержание.

В заключение уместно вспомнить, что применение аналогичного подхода к модели бесконечно глубокой потенциальной ямы для фотонов (идеального металлического волновода) позволило установить, по-существу, такую же природу энергии, аккумулируемой в стоячей составляющей электромагнитного поля. Этой энергии может быть приписана эквивалентная ей так называемая конечная «наблюдаемая масса покоя» фотона, неотличимая в каком-либо эксперименте от массы покоя обычной частицы в стандартном понимании [6, 7].

Настоящая работа выполнена при частичной поддержке CRDF и Министерства образования РФ (грант VZ–010–0).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Мандельштам Л. И. Лекции по колебаниям. Собрание сочинений. Т. 4. М.: Изд-во АН СССР, 1955. 350 с.
2. Паули В. Общие принципы волновой механики. М., Л.: Гостехиздат, 1947. § 11. С. 139.
3. Pauli W. Die allgemeine Prinzipen der Wellenmechanik. Handbuch der Physik, Bd. 5. V. 1. Berlin, 1958.
4. Ehrenfest P. // Ann. Phys. 1916. V. 51. P. 327.
5. Born M. // Z. Phys. 1926. V. 40. P. 167.
6. Ривлин Л. А. // УФН. 1997. Т. 167. С. 309.
7. Ривлин Л. А. // Квантовая электроника. 2003. Т. 33. С. 777.


Московский государственный институт радиотехники, электроники и автоматики (технический университет), г. Москва, Россия

Поступила в редакцию 18 мая 2004 г.

## ORIGIN OF THE GROUND-STATE ENERGY OF A PARTICLE IN A POTENTIAL WELL

*L. A. Rivlin*

In this paper, an apparently universal feature of the ground-state energy of a particle in a potential well is pointed out. Namely, by the example of an infinitely deep rectangular potential well, we clearly demonstrate that this energy, as well as the localization energy of a particle ensuing from the Heisenberg relation, is accumulated by the work of an external force against the particle pressure force on the well walls during compression of the particle substance and, correspondingly, its wave function $\psi$ from unbounded free space to the finite volume of the well. This work is exactly equal to the particle ground-state energy.

УДК 681.787.7

# ДЕСЯТЬ ЛЕТ ОПТИЧЕСКОЙ КОГЕРЕНТНОЙ ТОМОГРАФИИ В РОССИИ. ОТ ЭКСПЕРИМЕНТА К КЛИНИЧЕСКОЙ ПРАКТИКЕ

*В. М. Геликонов* [1], *Н. Д. Гладкова* [2]

Дан ретроспективный обзор работ, проводимых объединённым коллективом исследователей из Института прикладной физики РАН и Нижегородской государственной медицинской академии по практической реализации оптической когерентной томографии и её использованию как нового метода биомедицинской диагностики.

**1**. Наблюдение внутренней структуры живых биотканей всегда было заманчивым для исследователя и врача. С открытием рентгеновских лучей впервые появилась возможность визуализации внутренних органов без нарушения целостности организма. Использование низкоинтенсивного света ближнего инфракрасного диапазона в качестве зондирующего излучения имеет дополнительную привлекательность ввиду его неинвазивности, обусловленной малой энергией светового кванта и сравнительно слабым поглощением света биотканями в диапазоне длин волн 0,7÷1,3 мкм. До последнего времени, однако, способность оптических методов давать информацию о внутренней структуре биологических объектов на практически интересных глубинах не рассматривалась всерьёз. Это связано с сильным рассеянием света ближнего инфракрасного диапазона в биотканях, которое характеризуется длиной свободного пробега фотонов от нескольких десятков до нескольких сотен микрон. На глубинах, сравнимых с длиной свободного пробега или меньших её, оптическому видению внутренних структур препятствует только свет, рассеянный поверхностью. Его маскирующее влияние можно преодолеть за счёт иммерсии либо острой фокусировки в глубину объекта и «геометрической» дискриминации фотонов, отражённых от поверхности [1, 2]. Однако на глубинах, бóльших длины свободного пробега, эффективность прямого наблюдения резко снижается из-за нарастающего вклада многократно рассеянных фотонов, создающих неинформативную засветку изображений.

Ситуация изменилась с появлением в конце 80-х годов широкополосных («фемтокоррелированных») излучателей — фемтосекундных лазеров и суперлюминесцентных полупроводниковых диодов. Длина цуга лазерных и диодных «фемтокоррелированных» источников света в десятки и сотни раз меньше длины свободного пробега фотона в биоткани и составляет порядка 1÷15 мкм. Интерференционный приём такого широкополосного излучения, рассеянного в биоткани, позволяет подавлять засветку, вызванную многократным рассеянием. Это обстоятельство открывало потенциальную возможность построения изображений внутренней структуры рассеивающей среды с пространственным разрешением в несколько микрон на глубинах, много больших длины свободного пробега фотонов. Стало понятно, что в случае инструментальной реализации данного метода видения в мутных средах откроются уникальные возможности для его применений в биологии и медицине. Волна интереса к новым приложениям оказалась настолько сильной, что быстрым и конкретным ответом на неё стало появление оптической когерентной томографии (ОКТ).

Термин оптическая когерентная томография появился в 1991 году в работе коллектива американских учёных под руководством Фуджимото (J. G. Fujimoto) [3], посвящённой расширению возможностей низкокогерентной рефлектометрии для построения изображений микрообъектов, скрытых в рассеивающих излучение (мутных) средах. Этот термин, несмотря на не совсем точное соответствие принятому понятию томографии (послойное восстановление изображений путём решения обратной задачи), признан сейчас во всём мире. Реальным толчком для развития

ОКТ стала опубликованная той же группой в 1993 году работа, в которой впервые приведены прижизненные ОКТ-изображения сетчатки глаза [4]. Несколько исследовательских коллективов, прежде всего из Венского университета [5–7], Массачусетского технологического института в Бостоне [8–14], Калифорнийского университета в Ирвайне [15–18], Института прикладной физики РАН, развернули активные исследования по экспериментальному воплощению метода ОКТ. Всего за десять лет оптическая когерентная томография как метод видения в мутных средах прошла значительный путь развития от первых экспериментов до приложений в клинической практике. Сегодня в мире существуют десятки научных групп, развивающих метод ОКТ и, как правило, сотрудничающих с биологическими и медицинскими центрами с целью его внедрения в ту или иную область медицины. Технология ОКТ реализована в коммерческом приборе фирмы «Carl Zeiss» и внедрена в офтальмологическую практику. К настоящему моменту создано уже третье поколение приборов («Stratus OCT3»), и в офтальмологических клиниках всего мира работает несколько сотен таких устройств.

В данной статье представлен обзор работ, проводимых силами объединённого коллектива исследователей из Института прикладной физики РАН и Нижегородской государственной медицинской академии (НГМА) по развитию физических основ, технической реализации и практическому использованию оптической когерентной томографии как нового метода биомедицинской диагностики. Этот коллектив внёс основной вклад в развитие ОКТ в нашей стране, хотя необходимо отметить и работы в этом направлении других научных коллективов, прежде всего из Саратовского госуниверситета [19, 20].

По ряду причин в начале 90-х годов благоприятные условия для развития исследований по ОКТ в нашей стране сложились именно в Нижнем Новгороде.

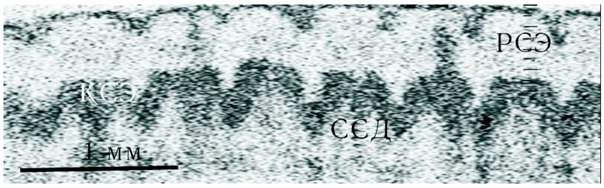



Рис. 1. Прижизненное ОКТ-изображения кожи пальца руки (толстая кожа; ОКТ-изображение здесь и далее представлены в чёрно-белой негативной палитре): РСЭ — роговой слой эпидермиса, КСЭ — клеточные слои эпидермиса, ССД — сосочковый слой дермы

Во-первых, начиная ещё с 60-х годов, в Научно-исследовательском радиофизическом институте, а затем в ИПФ РАН в связи с задачами подводной локации разрабатывалась теория инструментального видения в мутных средах с использованием короткоимпульсного оптического излучения, которая концептуально очень близка к идеям ОКТ. В результате имелась прочная теоретическая база для развития работ. Во-вторых, с середины 80-х годов в ИПФ РАН быстрыми темпами начала развиваться экспериментальная база волоконно-оптической интерферометрии как метода детектирования слабых оптических сигналов в условиях сильной шумовой помехи. Разработанные здесь подходы и созданная уникальная элементная база нашли прямое применение в задачах ОКТ. В-третьих, в начале 90-х годов, в связи с развитием фемтосекундной оптики, в ИПФ РАН появились источники сверхкороткоимпульсного излучения и техника детектирования процессов на сверхкоротких временны́х интервалах, что принципиально важно для когерентной томографии с высоким пространственным разрешением. Наконец, в Нижнем Новгороде имелись традиционно сильные «медико-физические» научные связи, заложенные ещё М. Т. Греховой и основанные прежде всего на сотрудничестве с Нижегородской государственной медицинской академией и Областной клинической больницей им. Н. А. Семашко.

Первые результаты экспериментов на лабораторной ОКТ-установке в ИПФ РАН с демонстрацией слоистых изображений кожных покровов человека получены в 1994 году (рис. 1) [21]. Затем на основе волоконно-оптической интерферометрии были созданы компактные оптические

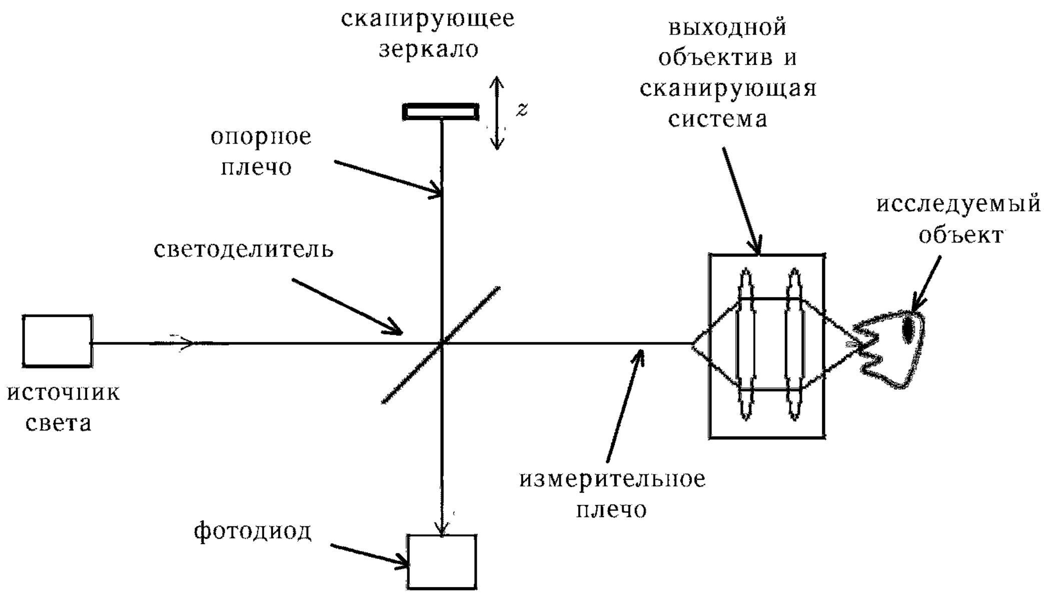



Рис. 2. Схема интерферометра для исследования рассеянного назад света методом ОКТ

томографы [22–26]. Развитие метода также привело к реализации «цветной» — двухволновой — ОКТ [27, 28], поляризационной ОКТ [28, 29] и, наконец, оптической когерентной микроскопии [30–32]. Конкретные схемы устройств приведены в цитируемых здесь и далее работах нашей группы. Созданные установки были внедрены в клиническую практику и позволили продемонстрировать широкий круг приложений ОКТ в различных областях медицины.

**2**. Как уже было сказано выше, метод ОКТ основан на интерференционном приёме и измерении рассеянного назад широкополосного света в зависимости от времени его распространения в среде. В отличие от ультразвукового метода, в котором принимается обусловленный пространственным распределением акустического импеданса отражённый сигнал («эхо»), в методе ОКТ принимается свет, рассеянный назад на неоднородностях эффективного оптического показателя преломления. Продольное (в глубину) разрешение изображений обусловлено шириной спектра источника света и может достигать нескольких микрон, что на один–два порядка величины меньше, чем в обычных ультразвуковых методах. Поперечное разрешение определяется остротой фокусировки широкополосного света оптической системой и также может достигать нескольких микрон. Изображение может быть получено для живого объекта в реальном времени.

Принципиальная оптическая схема интерферометра Майкельсона, которая наиболее часто используется в методе ОКТ при приёме рассеянного назад низкокогерентного (широкополосного) света, представлена в обобщённом виде на рис. 2.

Излучение от источника при помощи светоделителя расщепляется в сигнальное (измерительное) и опорное плечи интерферометра. В измерительном плече свет направляется на объектив оптического сканера, который фокусирует луч на исследуемом объекте, а также осуществляет обратный ввод рассеянного исследуемым объектом излучения. В опорном плече волна пробегает эквивалентный оптический путь по направлению к зеркалу и в обратном направлении к светоделителю. Электромагнитные волны — рассеянная исследуемым объектом и отражённая от референтного зеркала — подаются на фотодиод. Детектируемый сигнал интерференции может отличаться от нуля только в том случае, если оптические пути волн в сигнальном и опорном плечах интерферометра совпадают с точностью до длины когерентности зондирующего излучения. При продольном сканировании зéркала опорного плеча (так называемый А-скан) принимается последовательность значений сигнала рассеяния из различных глубин исследуемого объекта. Коэффициент рассеяния отображается в виде градаций яркости. Двумерное изображение сигнала рассеяния строится в виде серии соседних продольных А-сканов при перемещении области фокуса в поперечных к лучу направлениях (так называемый B-скан). Картина оптических неоднородностей воспроизводится при этом до некоторых глубин ($1\div 2$ мм), начиная с которых отражённый информативный сигнал теряется на фоне шумов ввиду рассеяния света в биоткани. Для детектирования информативного сигнала с разумным динамическим диапазоном потребовались новые идеи, экспериментальные разработки и технические решения.

**3**. К любому методу получения изображений биотканей предъявляется ряд требований по глубине изображения, его резкости, контрастности, скорости записи и т. д., которые базируются на планируемых приложениях в медицине. В частности, для изучения структуры поверхностных слоёв биоткани практически важными являются требования обеспечить пространственное разрешение на уровне $10\div 15$ мкм (наблюдение группы клеток) и глубину зондирования в несколько миллиметров (глубина традиционной биопсии) при мощности источника, не вызывающего повреждений ткани человека, и при времени получения изображения с числом элементов на уровне телевизионного стандарта, не превышающем $1\div 3$ с. Малое время сканирования необходимо для предотвращения артефактов, связанных с подвижностью живых объектов. Важным является также требование удобства использования томографов в условиях практической медицины, что предполагает создание компактных устройств, оснащённых гибкими выносными зондами.

Поскольку измерительной базой для ОКТ является оптическая интерферометрия, для удовлетворения требований к качеству изображения необходимо определить её наиболее адекватную схему и создать элементную базу для воплощения. В нашей группе выбор был сделан в пользу интерферометрии на основе одномодовых анизотропных оптических волокон. Это позволило обеспечить получение устойчивой интерференции без случайных изменений сигнала при изгибах волокна сигнального плеча интерферометра, а также высокий уровень поперечной пространственной селекции при получении изображения. Был разработан метод быстрого сканирования в глубину объекта, позволивший создать компактную оптическую систему, удобную для применений с различными источниками зондирования в томографах разного назначения. Гибкость волоконно-оптического кабеля зонда облегчила доступ к различным внутренним органам [26, 33–35]. Была разработана высокочувствительная приёмная система с бóльши́м динамическим диапазоном.

Параметрами источника излучения, определяющими качество изображения, являются мощность, влияющая на глубину зондирования, ширина спектра, задающая пространственное разрешение по глубине, а также изрезанность спектра, амплитудные флуктуации и избыточные шумы, которые ограничивают динамический диапазон. В различных экспериментах в качестве источников излучения нами использовались полупроводниковые суперлюминесцентные диоды (с центральной длиной волны излучения 830, 980 или 1 280 нм, шириной полосы от 25 до 50 нм, мощностью излучения в одномодовом волоконном выходе от 1 до 10 мВт) или лазеры фемтосекундного диапазона длительностей (титан-сапфирофый лазер с длиной волны генерации около 830 нм, шириной полосы до 70 нм, мощностью до 200 мВт и хром-форстеритовый лазер с длиной волны генерации около 1 300 нм, шириной полосы до 50 нм и мощностью до 100 мВт). Эти широкополосные источники обеспечивают разрешение по глубине на уровне $5\div 25$ мкм. Лазерные источники благодаря высокой мощности излучения обеспечивают бóльшую глубину видения в случае, если ограничения последней не связаны с многократным рассеянием света. Суперлюминесцентные источники, в свою очередь, более удобны для применения в компактных установках [22, 23].

Глубина видения определяется не только свойствами источника излучения, но и предельной чувствительностью самогó интерферометра и, следовательно, зависит от подавления шумов и помех различной природы при детектировании сигнала. Основная причина уменьшения динамического диапазона связана с когерентными артефактами, обусловленными паразитным взаимодействием ортогонально поляризованных мод при распространении в анизотропном волокне с неоднородными по длине параметрами, остаточными паразитными связями между модами в дискретных элементах (ответвителях, поляризаторах и т. д.) или в местах сварки волокон [36]. Для борьбы с возникающими при этом помехами мы разработали различные приёмы компенсации искажений, позволившие существенно (в некоторых случаях до 25 дБ) увеличить динамический диапазон [22, 23].

Важнейшим обстоятельством для реализации предельных возможностей ОКТ является также высокое качество используемых в интерферометрах волоконно-оптических элементов. В процессе исследований нашей группой были разработаны и созданы оптические элементы с уникальными параметрами. Это ответвитель и поляризатор на одномодовом изотропном или анизотропном волокне, ответвитель одновременно для двух существенно разных длин волн. Ответвители характеризуются рекордно высокой развязкой собственных мод волокна (на уровне 40 дБ) и уровнем вносимых потерь менее 0,1 дБ. Поляризаторы на анизотропном волокне имеют рекордный коэффициент экстинкции (порядка 35÷40 дБ) и уровень вносимых потерь менее 0,2 дБ. Использование этих элементов в интерферометре позволило реализовать схему детектирования с общим динамическим диапазоном на уровне 40 дБ по интенсивности принимаемого оптического сигнала. Был разработан скоростной пьезоволоконный модулятор оптической разности хода плеч интерферометра, который осуществлял сканирование по глубине на несколько миллиметров со скоростью до метра в секунду. Это позволило получать изображения с размером $200 \times 200$ элементов за 1 секунду. С использованием такого модулятора легко обеспечивается высокая точность поддержания скорости сканирования по глубине, что является важным условием для узкополосного гетеродинного приёма сигнала на частоте доплеровского сдвига [33–35].

В 1997 году в ИПФ РАН создана первая установка для «цветной» ОКТ с одновременным получением изображений на длинах волн в окрестности 830 и 1 250 нм при точном пространственном совмещении обоих элементов разрешения. Для этого оптическая схема была выполнена с использованием единого оптоволоконного интерферометра с последующим разделением принятого рассеянного сигнала по отдельным приёмным каналам для каждой длины волны. Работы, выполненные с помощью этого прибора, показали возможность спектроскопических исследований биотканей с помощью ОКТ при использовании сверхширокополосного излучения [27, 28].

**4**. Специальной задачей ОКТ является создание оптимальных конструкций оптических зондов, обеспечивающих доступ широкополосного оптического излучения к различным органам и тканям. Волоконно-оптический зонд предназначен для переноса излучения зондирующей волны и фокусировки его на объект, а также для приёма излучения, рассеянного объектом в обратном направлении. Увеличение оптической системы зонда определяется в соответствии с числовой апертурой одномодового волокна и остротой фокусировки, обеспечивающей необходимую длину рэлеевской зоны в глубине объекта. Поперечное смещение пробного луча вдоль поверхности объекта осуществляется в разработанных зондах за счёт перемещения выходного конца волокна в фокальной плоскости объектива при помощи электромагнитной системы.

Первым результатом нашей группы в этом направлении стало создание двухкоординатного макрозонда с длиной механической части 70 мм и диаметром 28 мм. При трёхкратном увеличении оптической системы он позволил получать изображения с поперечным размером до 6 мм и был использован, прежде всего, для исследований кожи в совместных работах с российскими [22, 37, 38] и европейскими [27, 39, 40] медиками. В частности, с помощью такого макрозонда были получены первые ОКТ-изображения пигментных пятен кожи in vivo [41]. В последующем ОКТ-установка с макрозондом, совмещённая с офтальмологическими инструментами — фундус-камерой и конфокальным лазерным микроскопом HRT (Heidelberg Retina Tomograph), применялась в совместных офтальмологических исследованиях с американскими учёными для мониторинга развития глаукомы посредством наблюдения структуры сетчатки вокруг диска глазного нерва [42]. Кроме того, ОКТ-установка с макрозондом была использована в экспериментальных исследованиях по мониторингу лазерной хирургии при катаракте глаза, позволивших выработать оптимальные режимы лазерного воздействия на хрусталик [43–46].

Технические модификации макрозонда сделали возможными исследования in vivo в стоматологии. Благодаря хорошей «прозрачности» зубов в ближнем инфракрасном диапазоне, отчётливо визуализуются граница эмали и дентина, типичные признаки кариозных поражений зубов и дефектов пломбирования (рис. 3) [28, 47]. Макрозонд был использован также в исследованиях поверхностных церебральных структур на открытом мозге экспериментальных животных [40, 48], а также раковых опухолей слизистой оболочки кишки ex vivo, что заложило основу интереса к эндоскопическому использованию ОКТ [49].

В 1997 году нашей группой был разработан эндоскопический волоконный микросканер с поперечным размером 2,7 мм, размещаемый в гибком сигнальном плече интерферометра. Поперечное отклонение луча в сканере также осуществлялось при помощи электромагнитной системы, обеспечивающей перемещение сфокусированного луча в глубине объекта в поперечном к лучу направлении на расстояние до 2 мм. Малые габариты микросканера позволяли использовать инструментальный (биопсийный) канал эндоскопов, что делало возможным непосредственный доступ к слизистым оболочкам полых органов человека [33–35]. Создание совместимого со стандартными эндоскопами микрозонда, ставшее приоритетом нижегородских учёных, позволило впервые в мире использовать ОКТ в эндоскопическом варианте и получить прижизненные изображения слизистых оболочек внутренних органов и серозных покровов полостей тела человека [25, 26].

**5**. Оптические изображения покровных тканей, имеющих различное строение, характеризуются признаками, отражающими различия их оптических свойств [50, 51]. При этом общей чертой здоровых тканей является их организованная слоистая структура — эпителиальная ткань хорошо контрастирует на фоне подлежащей соединительно-тканной стромы. Потеря структурности оптических образов в сочетании с повышением коэффициента рассеяния с поверхностных слоёв является критерием неопластических изменений (рис. 4). Феномен обрыва слоистой структуры на ОКТ-изображениях соответствует переходу здоровой ткани в патологически изменённую, т. е. границе опухолевого роста (рис. 5) [52, 53].

Высокая пространственная разрешающая способность ОКТ является основанием для использования метода в ситуациях, когда знание об изменениях структуры биоткани на уровне слоёв является полезным для постановки диагноза. В опубликованных в 1999–2000 годах работах определены ОКТ-критерии здоровой кожи различной локализации, описаны оптические признаки характерных патологических процессов, сформулированы признаки заболеваний кожи. Полученные результаты позволили не только констатировать возможность наблюдать за структурой кожи и её патологическими изменениями с помощью ОКТ, но и прогнозировать перспективное использование такой информации в целях диагностики, проводить углублённый анализ оптических образов с целью объяснения наблюдаемых феноменов [54, 55].

К этому времени была проведена серия работ в различных клинических областях медицины (гинекологии, ларингологии, хирургии желудочно-кишечного тракта, урологии), которая доказывала возможность использования ОКТ для диагностики неопластических состояний [56, 57], мониторинга развития патологических изменений, их обратного развития в ходе различных видов лечения, а также динамического интраоперационного наблюдения [58]. В стоматологии ОКТ была применена для мониторинга контроля качества пломбирования зубов (рис. 6) [59], в ортопедии — для мониторинга регенерации хрящей крупных суставов и позвоночных дисков в ходе различных видов лечения [60].

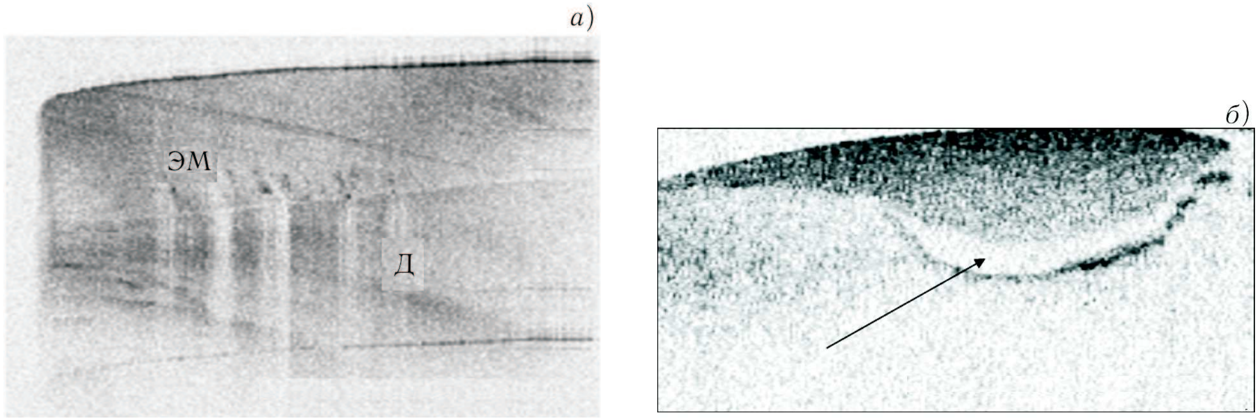



Рис. 3. ОКТ-изображения: (*а*) здоровая ткань зуба: ЭМ — эмаль, Д — дентин; (*б*) дефект нижнего прилегания пломбы (показан стрелкой)

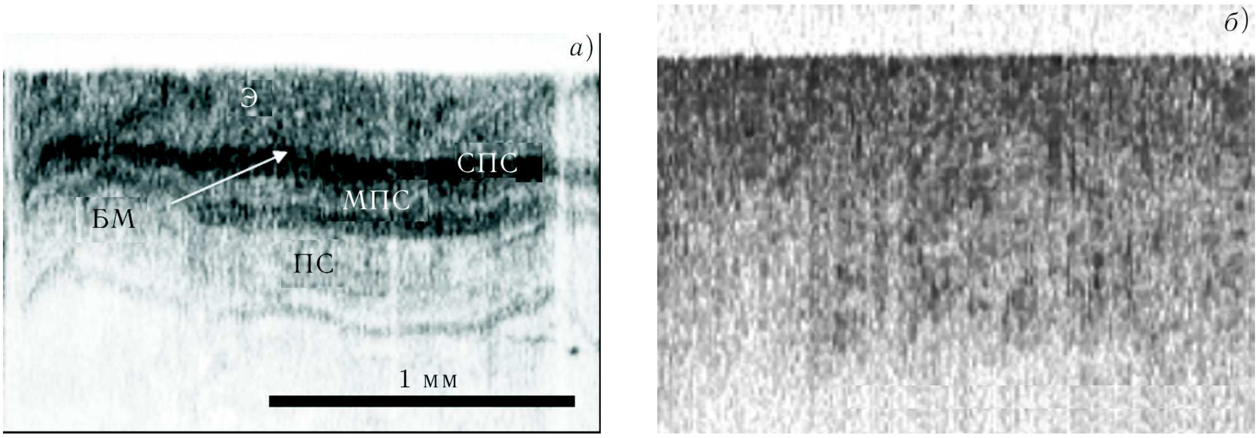



Рис. 4. ОКТ-изображения слизистой оболочки пищевода: здоровой (*а*) и в случае тяжёлой степени дисплазии (предрак) пищевода (*б*): Э — эпителий, БМ — базальная мембрана, СПС — собственная пластина слизистой оболочки, МПС — мышечная пластинка слизистой оболочки, ПС — подслизистый слой

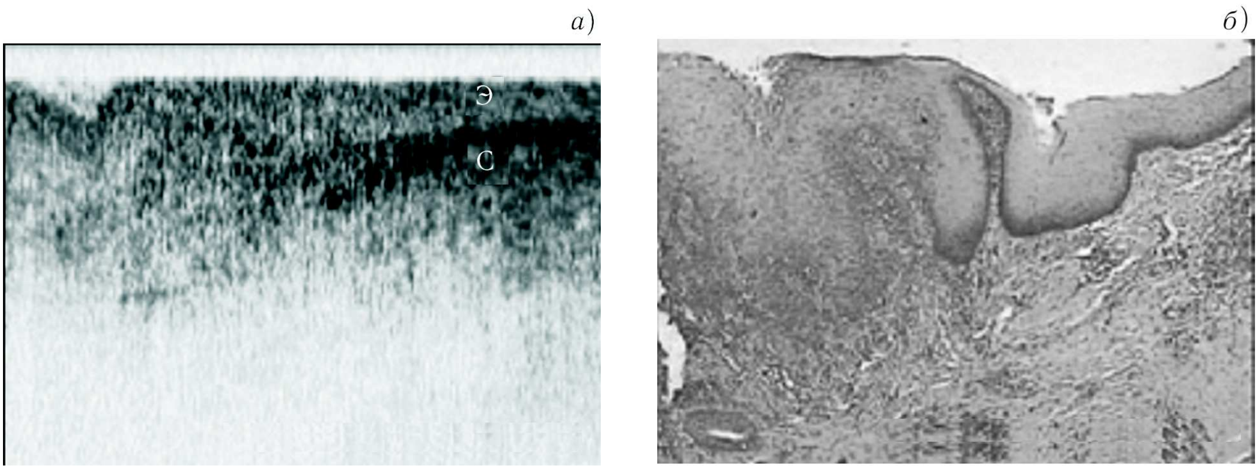



Рис. 5. ОКТ-изображение (*а*) и гистология (*б*) слизистой оболочки гортани: переход здоровой слизистой (справа) в плоскоклеточный рак: Э — эпителий, С — строма; гистологическое изображение представлено в чёрно-белой позитивной палитре

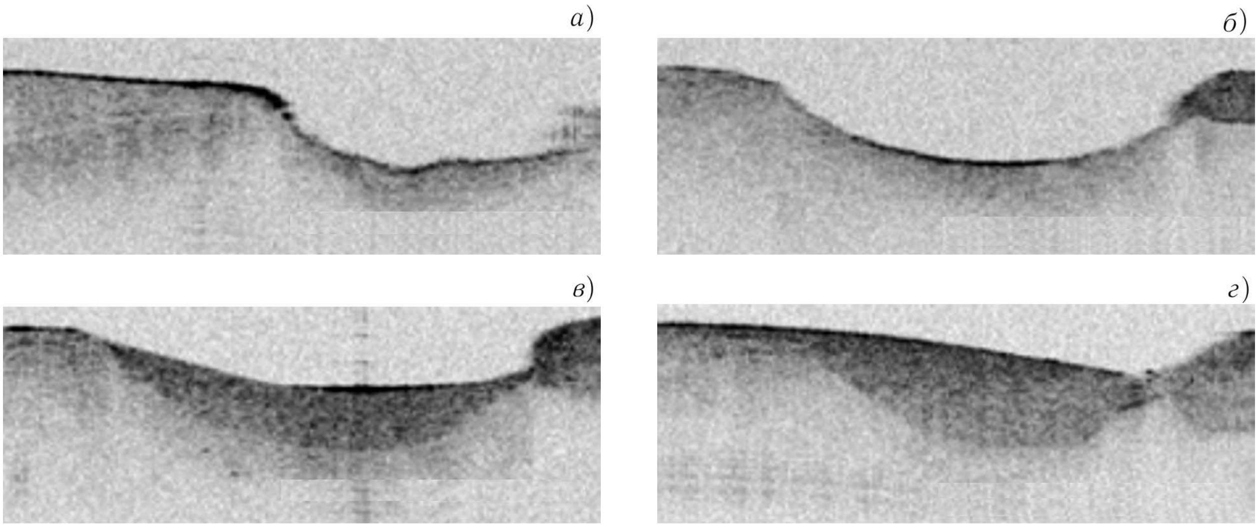



Рис. 6. ОКТ-изображения стадий пломбирования зуба

В 2000 году сотрудниками ИПФ РАН в Институте лазерной физики СО РАН был выполнен цикл экспериментов по in situ мониторингу абляции роговицы под воздействием эксимерного лазера, в ходе которых проводились измерения толщины роговицы с микронной точностью [61–63].

Доказательства диагностической эффективности метода ОКТ были подтверждены нашей группой в совместных исследованиях с учёными ведущих зарубежных медицинских центров, в том числе клиники Гамбургского университета (Германия) [64–66], Кливлендского клинического центра (США) [67–69], клиники Университета Джорджа Вашингтона (США) [70]. В частности, там впервые были проведены сравнительные исследования результатов эндоскопической ОКТ и ультразвукового зондирования в гастроэнтерологии, показавшие безусловное преимущество ОКТ при обнаружении поверхностных раков слизистой оболочки.

Опыт в разработке компактных волоконно-оптических томографов, а также клинические работы в области гинекологии и ларингологии легли в основу трёх глав сборника «Handbook of Optical Coherence Tomography», увидевшего свет в 2002 году в издательстве Marcel Dekker [71–73].

К 2004 году с использованием российских установок ОКТ во всём мире было обследовано более 2 500 пациентов в различных областях медицины: дерматологии, стоматологии, оториноларингологии, хирургии желудочно-кишечного тракта, гинекологии, урологии, офтальмологии.

По результатам работы нижегородским коллективом исследователей могут быть сформулированы показания к применению ОКТ в клинической практике: 1) наведение биопсии с целью раннего обнаружения рака и предраковых состояний [74–81]; 2) предоперационное планирование линии резекции и интраоперационный мониторинг [73, 75, 82, 83]; 3) дифференциальная диагностика заболеваний со сходными клиническими проявлениями [84, 85]; 4) наблюдение процессов обратного развития патологических процессов в ходе лечения и раннее выявление рецидивов при наблюдении за отдалёнными результатами лечения [82, 85].

**6**. Отсутствие субклеточного разрешения не позволяет полноправно называть ОКТ оптической биопсией. Поэтому усилия многих исследователей направлены на повышение разрешающей способности оптической когерентной томографии. Существует несколько способов получения сверхвысокого разрешения в ОКТ. Использование лазеров с длительностью импульсов менее 10 фемтосекунд — наиболее прямой, хотя и наиболее дорогостоящий путь решения подобных

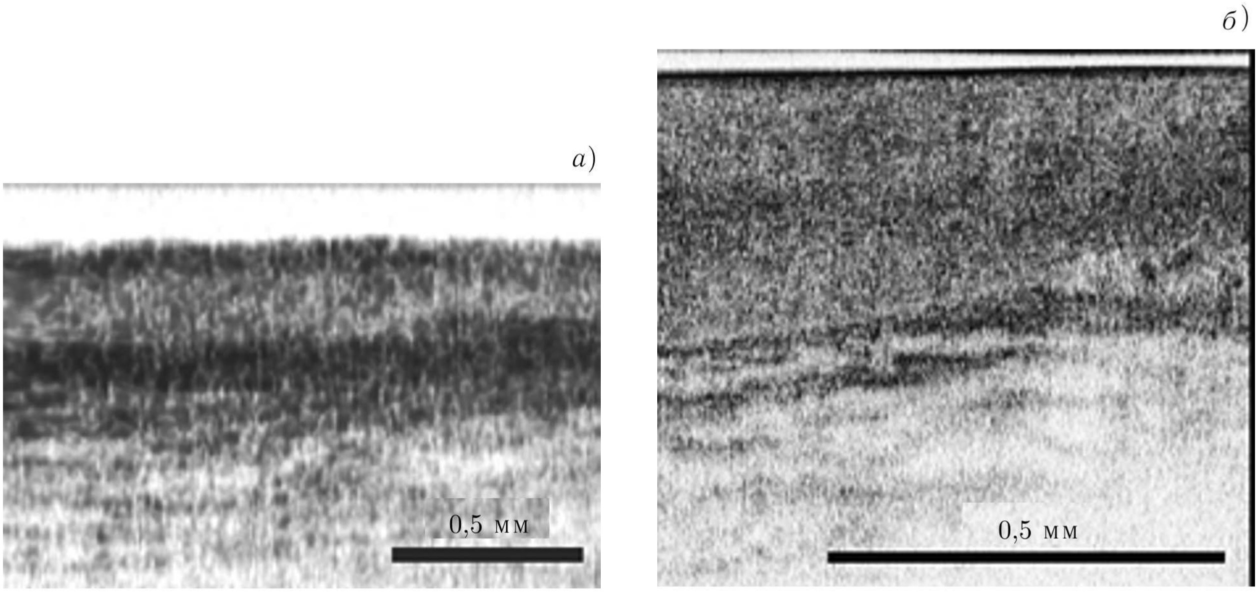



Рис. 7. Изображение здоровой слизистой оболочки нижней губы, полученное методами оптической когерентной томографии (*а*) и оптической когерентной микроскопии (*б*)

задач. Другая возможность связана с преобразованием излучения более простых и доступных источников, генерирующих импульсы длительностью порядка 100 фемтосекунд. Расширение полосы излучения может быть достигнуто путём генерации суперконтинуума в специальных микроструктурированных волокнах, что позволило получить изображения биологических тканей с разрешением по глубине на уровне $2\div3$ мкм. Однако ОКТ-установки на основе фемтосекундных лазеров в силу своей сложности, громоздкости и высокой стоимости не могут быть использованы в клинической практике. Нашей группой реализован иной способ повышения разрешающей способности. В установке для оптической когерентной микроскопии создание широкой полосы зондирующего излучения достигается путём мультиплексирования излучения суперлюминесцентных диодов. Это позволяет добиться разрешения $3\div5$ мкм (рис. 7). Преимущества этого метода состоят в портативности и относительной дешевизне оборудования. По мнению исследователей, использование ОКТ сверхвысокого разрешения позволит значительно повысить диагностическую эффективность метода [32].

Диагностические возможности ОКТ могут быть повышены не только за счёт увеличения разрешающей способности, но и путём модификации традиционной ОКТ. Так, применение света с различной длиной волны в диапазоне от 650 до 1 300 нм открывает возможность получения «многоцветных» изображений с учётом спектроскопических характеристик биологической ткани. Излучение различных длин волн по-разному поглощается и рассеивается в биоткани, что позволяет провести так называемое спектроскопическое окрашивание её ОКТ-изображений, в некоторой степени аналогичное гистологическому окрашиванию в обычной световой микроскопии [27, 28]. В частности, описанная спектральная область захватывает специфические длины волн поглощения окси- и дезоксигемоглобина и позволяет проводить биохимические и функциональные исследования.

Другая возможность повышения специфичности ОКТ основывается на выявлении деполяризующих свойств биотканей путём использования поляризационно-чувствительной оптической когерентной томографии. Одним из вариантов такой разновидности ОКТ является кроссполяризационная ОКТ, реализованная в ИПФ РАН [24, 28, 29]. Ещё в 1998 году нашей группой были

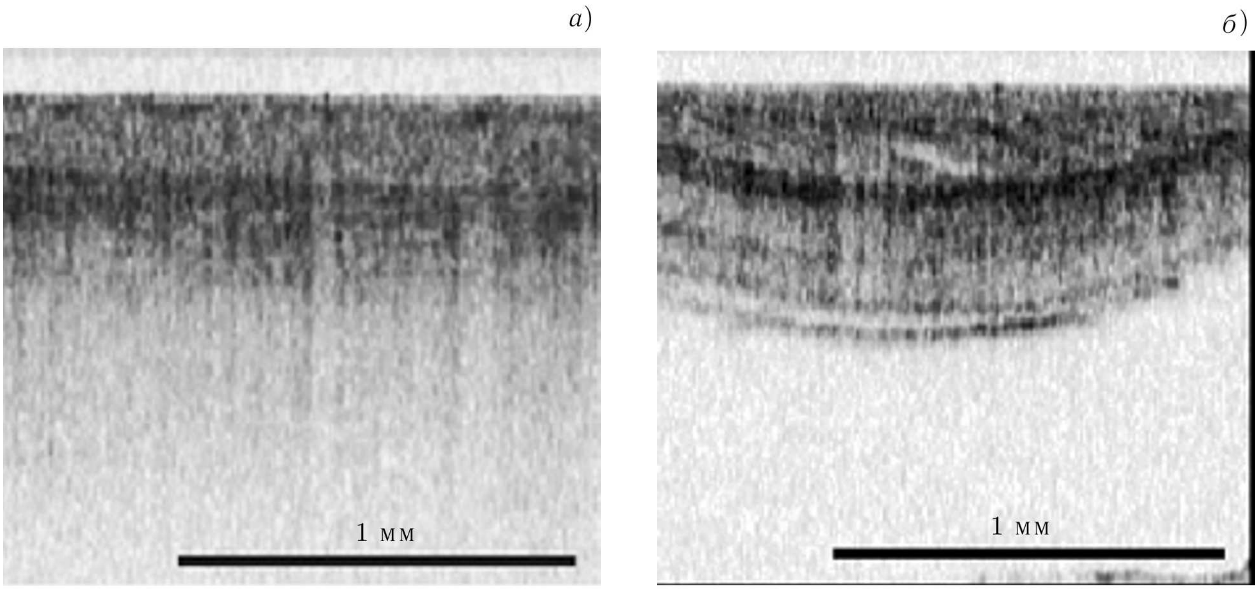



Рис. 8. ОКТ-изображения здоровой слизистой оболочки толстой кишки при различной степени сжатия ткани (контраст изображения увеличивается по мере увеличения давления)

проведены первые эксперименты по оснащению ОКТ-установки устройством для регистрации изображений в поляризации, ортогональной поляризации падающего на объект излучения [28]. Это новый канал томографической информации, поскольку вклад в интерференционный сигнал в данном случае дают участки среды, которые деполяризуют свет, или изменяют состояние его поляризации, при его обратном отражении. Известно, что некоторые биообъекты, например коллагены соединительной ткани, составляющей строму здоровой слизистой оболочки, деполяризуют свет в большей степени, чем ткани, не содержащие волоконных структур (к примеру, эпителий). Суть неопластического процесса, как известно, состоит в снижении пространственно-структурной дифференциации тканей, что отражается не только на эпителиальном, но и на соединительнотканном компоненте опухоли. Следовательно, сравнительное изучение деполяризующих свойств биологических объектов может быть положено в основу дифференциальной диагностики различных по природе патологических процессов.

Обычные ОКТ-установки являются недостаточно чувствительными к изменению состояния поляризации рассеянного назад излучения по отношению к исходному, и это влияние на сигнал трудно выделить. В установках для кроссполяризационной ОКТ проводится детектирование и анализ света, отражённого в обеих поляризациях — совпадающей с поляризацией зондирующего света и ортогональной ей. Разрешение метода кроссполяризационной ОКТ определяется теми же параметрами, что и в случае обычной ОКТ. Применение кроссполяризационной ОКТ позволяет в ряде случаев получить важную информацию о внутренней структуре биологических объектов, которую с помощью обычной ОКТ получить практически невозможно. Кроссполяризационная ОКТ также применена для контрастирования определённых структур, которые в случае стандартной ОКТ едва заметны.

С целью повышения глубины зондирования и контрастности ОКТ-изображения в последнее время использовались приёмы оптического просветления и контрастирования. В некоторых случаях ОКТ-изображение становится более контрастным при сжатии эластичных биологических тканей. При максимальном сжатии можно получить изображение элементов, находящихся в несжатом состоянии изучаемого объекта на глубине более 2 мм, что является пределом информативного зондирования при стандартной ОКТ (рис. 8). Микрозонд с торцевым окном, разработанный в нашей группе, наилучшим образом обеспечивает сжатие и контрастирование биоткани.

Использование для оптического просветления биосовместимых химических агентов основано на способности таких химических соединений, как глицерин, (поли) пропиленгликоль, концентрированные растворы глюкозы, приводить к избирательному согласованию показателей преломления фоновых структур и рассеивающих объектов, снижая тем самым коэффициент интегрального рассеяния компонентов ткани. Применение этих веществ позволяет увеличить глубину ОКТ-зондирования и контраст изображений [86].

Определённым шагом в объективизации метода является создание алгоритмов компьютерной обработки изображения, базирующихся на теоретических моделях распространения света в биотканях, с целью извлечения числовых эмпирических коэффициентов, специфичных для определённых патологических процессов. В качестве числовых критериев состояния ткани могут быть взяты её параметры рассеяния. В большинстве случаев морфологическая структура исследуемой ткани допускает её представление в виде набора однородно рассеивающих локально-плоских слоёв, каждый из которых может быть описан небольшим числом параметров. При этом совокупность параметров рассеяния всех слоёв достаточно объективно характеризует состояние ткани [24, 83, 87].

**7**. В настоящее время в клиниках и лабораториях России, США и Европы работают более 15 экспериментальных приборов, разработанных и произведённых в ИПФ РАН, а один из вариантов прибора сертифицирован и разрешён к производству в России и применению в медицинской практике. Технические решения, положенные в основу ОКТ-приборов, медицинские диагностические методы защищены 5 патентами РФ и 8 зарубежными патентами в 6 странах мира (см., в частности, [33, 35, 53, 63, 88–92]. Результаты 10-летней работы нижегородской школы оптической когерентной томографии были доложены на 40 международных и всероссийских конференциях и представлены в более чем 180 научных публикациях.

Высокие диагностические показатели ОКТ позволяют надеяться на то, что метод в ближайшее время займёт достойное место среди современных диагностических технологий и позволит приблизиться к реализации идеи оптической биопсии.

В заключение авторы статьи выражают глубокую признательность своим многочисленным коллегам в ИПФ РАН, НГМА и других клинических центрах Нижнего Новгорода за сотрудничество в развитии и внедрении в практику оптической когерентной томографии (Г. В. Геликонову, А. Н. Денисенко, Е. Н. Дерпалюк, Л. С. Долину, Е. В. Донченко, В. Е. Загайнову, Е. В. Загайновой, Р. Р. Иксанову, В. А. Каменскому, С. Ю. Ксенофонтову, И. А. Кузнецовой, Р. В. Куранову, М. Н. Кучевой, М. А. Мелехиной, А. Н. Морозову, А. В. Мякову, М. В. Никулиной, Г. А. Петровой, С. А. Петровой, Ю. П. Потапову, В. В. Сапожниковой, А. М. Сергееву, Е. А. Сергеевой, Л. Б. Сноповой, О. С. Стрельцовой, А. Б. Терентьевой, А. А. Туркину, И. В. Турчину, М. Н. Урутиной, Ф. И. Фельдштейну, Ю. В. Фоминой, А. В. Шахову, Н. М. Шаховой).

С особой благодарностью мы вспоминаем участие в этой работе недавно ушедшего от нас Я. И. Ханина. В последний период своей творческой деятельности Яков Израилевич уделял большое внимание развитию биомедицинской оптики и, прежде всего, применению лазеров для создания новых видов диагностики. Он был одним из вдохновителей исследований лазерной томографии биотканей и как руководитель отделения нелинейной динамики и оптики ИПФ РАН проявлял пристальное внимание к её становлению. Став соавтором первой из наших статей по ОКТ, он впоследствии со свойственной ему деликатностью отказался от соавторства, но с большим интересом относился ко всем нашим публикациям. Нам кажется, что и этот короткий отчёт о нашей деятельности он прочитал бы с интересом и удовлетворением.

Работа была частично поддержана РФФИ (грант № 03–02–17253), Президентской программой поддержки ведущих научных школ РФ (грант НШ–1622.2003.2), а также CRDF (гранты № RB2 542 и RB2–2389–NN–02).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pawley J. B. Handbook of biological confocal microscopy. Rev. Ed. New York: Plenum Press, 1990. 232 p.
2. Wilson T. Confocal microscopy. London, San Diego: Academic Press, 1990. 426 p.
3. Huang D., Swanson E. A., Lin C. P., et al. // Science. 1991. V. 254. P. 1 178.
4. Swanson E. A., Izatt J. A., Hee M. R., et al. // Opt. Lett. 1993. V. 18. P. 1 864.
5. Fercher A. F., Mengedoht K., Werner W. // Opt. Lett. 1988. V. 13. P. 186.
6. Hitzenberger C. K., Gotzinger E., Sticker M., et al. // Opt. Express. 2001. V. 9, No. 13. P. 780.
7. Baumgartner A., Dichtl S., Hitzenberger C. K., et al. // Caries Research. 2000. V. 34, No. 1. P. 59.
8. Bouma B. E., Tearney G. J., Boppart S. A., et al. // Opt. Lett. 1995. V. 20. P. 1 486.
9. Boppart S. A., Bouma B. E., Pitris C., et al. // Nature Medicine. 1998. V. 4, No. 7. P. 861.
10. Drexler W., Morgner U., Ghanta R. K., et al. // Nature Medicine. 2001. V. 7, No. 4. P. 502.
11. Drexler W., Stamper D. L., Jesser C. A., et al. // J. Rheum. 2001. V. 28, No. 6. P. 1 311.
12. Li X. D., Ko T. H., Fujimoto J. G. // Opt. Lett. 2001. V. 26, No. 23. P. 1 906.
13. Tearney G. J., Bouma B. E., Fujimoto J. G. // Opt. Lett. 1997. V. 22. P. 1 811.
14. Fujimoto J. G., Pitris C., Boppart S. A., et al. // Neoplasia. 2000. V. 2. P. 9.
15. Chen Z., Milner T. E., Wang X., et al. // Photochemistry and Photobiology. 1998. V. 67, No. 1. P. 56.
16. Milner T. E., Yazdanfar S., Rollins A. M., et al. // Handbook of Optical Coherence Tomography. New York, Basel: Marcel Dekker, Inc., 2002. P. 203.
17. de Boer J. F., Srinivas S. M., Malekafzali A., et al. // Opt. Express. 1998. V. 3, No. 6. P. 212.
18. de Boer J. F., Srinivas S. M., Park B. H., et al. // IEEE J. of Selected Topics in Quantum Electronics. 1999. V. 5, No. 4. P. 1 200.
19. Тучин В. В. // УФН. 1997. Т. 167, № 5. С. 517.
20. Тучин В. В. Лазеры и волоконная оптика в биомедицинских исследованиях. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1998. 384 с.
21. Sergeev A. M., Gelikonov V. M., Gelikonov G. V., et al. // Proc. of SPIE. 1994. V. 2 328. P. 144.
22. Геликонов В. М., Геликонов Г. В., Гладкова Н. Д. и др. // Письма в ЖЭТФ. 1995. Т. 61, № 2. С. 149.
23. Gelikonov V. M., Gelikonov G. V., Dolin L. S., et al. // Laser Physics. 2003. V. 13, No. 5. P. 692.
24. Dolin L. S., Feldchtein F. I., Gelikonov G. V., et al. // Coherent-Domain Optical Methods in Biomedical Diagnostics, Environmental and Material Science. Kluwer Academic Publishers, 2004. P. 211.
25. Sergeev A. M., Gelikonov V. M., Gelikonov G. V., et al. // Opt. Express. 1997. V. 1, No. 13. P. 432.
26. Feldchtein F. I., Gelikonov G. V., Gelikonov V. M., et al. // Opt. Express. 1998. V. 3, No. 6. P. 257.
27. Gelikonov G. V., Gelikonov V. M., Feldchtein F. I., et al. // CLEO'97 Technical Digest Series. 1997. V. 11. P. 210.
28. Feldchtein F. I., Gelikonov G. V., Gelikonov V. M., et al. // Opt. Express. 1998. V. 3, No. 6. P. 239.
29. Kuranov R. V., Sapozhnikova V. V., Turchin I. V., et al. // Opt. Express. 2002. V. 10, No. 15. P. 707.
30. Геликонов Г. В., Долин Л. С., Сергеева Е. А., Турчин И. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 2003. Т. 46, № 7. С. 628.
31. Геликонов В. М., Геликонов Г. В., Ксенофонтов С. Ю. и др. // Изв. вузов. Радиофизика. 2003. Т. 46, № 7. С. 610.

32. Gelikonov G. V., Gelikonov V. M., Ksenofontov S. U., et al. // Coherent-Domain Optical Methods in Biomedical Diagnostics, Environmental and Material Science Kluwer Academic Publishers, 2004. P. 345.
33. Пат. 2148378 РФ / Геликонов В. М., Геликонов Г. В., Гладкова Н. Д. и др. Опубл. 2000. Бюл. № 13.
34. Pat. 99906591 EC / Gelikonov G. V., Gelikonov V. M., Gladkova N. D., et al. Publ. 2001.
35. Pat. 6608684 USA / Gelikonov G. V., Gelikonov V. M., Gladkova N. D., et al. Publ. 2003.
36. Gelikonov V. M., Kuranov R. V., Morozov A. N. // Quantum Electron. 2002. V. 32, No. 1. P. 59.
37. Гладкова Н. Д., Фельдштейн Ф. И., Геликонов В. М. и др. // Клиническая ревматология. 1996. № 1. С. 38.
38. Gelikonov V. M., Sergeev A. M., Gelikonov G. V., et al. // Proc. of SPIE. 1996. V. 2 927. P. 27.
39. Gelikonov V. M., Sergeev A. M., Gelikonov G. V., et al. // CLEO'96 Technical Digest Series. 1996. V. 9. P. 58.
40. Gelikonov G. V., Gelikonov V. M., Feldchtein F. I., et al. // CLEO'97 Technical Digest Series. 1997. V. 11. P. 209.
41. Sergeev A. M., Gladkova N. D., Feldchtein F. I., et al. // Proc. SPIE. 1997. V. 2 981. P. 58.
42. Dawson W. W., Brooks D. E., Gelikonov V. M., et al. // Annual Meeting of the American College of Veterinary Medicine. 1995. P. 43.
43. Kamensky V. A., Bityurin N. M., Gelikonov V. M., et al. // Proc. of SPIE. 1996. V. 2 930. P. 222.
44. Kamensky V. A., Feldchtein F. I., Pravdenko K., et al. // Proc. of SPIE. 1997. V. 2 981. P. 94.
45. Kamensky V. A., Gelikonov V. M., Gelikonov G. V., et al. // Proc. of SPIE. 1997. V. 3 091. P. 129.
46. Kamensky V. A., Feldchtein F. I., Gelikonov V. M., et al. // J. Biomedical Opt. 1999. V. 4, No. 1. P. 137.
47. Ourutina M. N., Gladkova N. D., Feldchtein F. I., et al. // Proc. of SPIE. 1999. V. 3 567. P. 97.
48. Roper S. N., Moores M. D., Gelikonov G. V., et al. // J. Neuroscience Meth. 1998. V. 80, No. 1. P. 91.
49. Sergeev A. M., Gelikonov V. M., Gelikonov G. V., et al. // Proc. of SPIE. 1995. V. 15. P. 349.
50. Гладкова Н. Д., Шахова Н. М., Шахов Б. Е. и др. // Вестник рентгенологии и радиологии. 2002. № 2. С. 39.
51. Снопова Л. Б., Гладкова Н. Д., Шахова Н. М. и др. // Нижегородский медицинский журнал. 2003. № 1. С. 57.
52. Гладкова Н. Д., Шахова Н. М., Шахов Б. Е., Снопова Л. Б. // Вестник рентгенологии и радиологии. 2004. № 2. С. 44.
53. Пат. 2169525 РФ / Гладкова Н. Д., Загайнов В. Е., Загайнова Е. В. и др. Опубл. 2001. Бюл. № 18.
54. Гладкова Н. Д., Петрова Г. А., Никулин Н. К. и др. // Российский журнал кожных и венерических болезней. 1999. № 5. С. 9.
55. Gladkova N. D., Petrova G. A., Nikulin N. K., et al. // Skin Research and Technology. 2000. V. 6, No. 1. P. 6.
56. Shakhova N. M., Kachalina T. S., Kuznetzova I. A., et al. // Proc. of SPIE. 1999. V. 3 568. P. 72.
57. Zagainova E. V., Gladkova N. D., Strelzova O. S., et al. // Proc. of SPIE. 2000. V. 4 160. P. 69.
58. Shakhov A. V., Terentjeva A. B., Kamensky V. A., et al. // J. Surgical Oncology. 2001. V. 77. P. 253.
59. Урутина М. Н., Леонтьев В. К., Лукиных Л. М. и др. // Клиническая стоматология. 2000. № 2. С. 70.
60. Романов С. В., Загайнов В. Е., Куранов Р. В. и др. // Трансплантация и имплантация в хирургии крупных суставов. Н. Новгород, 2000. С. 92.

61. Bagayev S. N., Gelikonov V. M., Kargapoltsev E. S., et al. // Laser Phys. 2001. V. 11, No. 11. P. 1 224.
62. Bagayev S. N., Gelikonov V. M., Gelikonov G. V., et al. // J. Biomedical Opt. 2002. V. 7, No. 4. P. 633.
63. Пат. 2183108 РФ / Багаев С. Н., Геликонов В. М., Геликонов Г. В. и др. Опубл. 2002. Бюл. № 16.
64. Jackle S., Gladkova N. D., Feldchtein F. I., et al. // Endoscopy. 2000. V. 32, No. 10. P. 750.
65. Jackle S., Gladkova N. D., Feldchtein F. I., et al. // Endoscopy. 2000. V. 32, No. 10. P. 743.
66. Seitz U., Freund J., Jaeckle S., et al. // Endoscopy. 2001. V. 33, No. 12. P. 1 018.
67. Zuccaro G., Gladkova N. D., Vargo J., et al. // Am. J. Gastroenterology. 2001. V. 96. P. 2 633.
68. Shen B., Zuccaro G., Gramlich T. L., et al. // Clinical Gastroenterology and Hepatology. 2004. V. 2, No. 9. P. 754.
69. Escobar P. F., Belinson J. L., White A., et al. // Int. J. Gynecological Cancer. 2004. V. 14, No. 3. P. 470.
70. Manyak M. J., Gladkova N. D., Schwartz A., et al. // J. Urology. 2004. V. 171, No. 4. P. 87.
71. Feldchtein F. I., Gelikonov G. V., Gelikonov V. M. // Handbook of Optical Coherence Tomography. New York, Basel: Marcel Dekker, Inc., 2002. P. 125.
72. Gladkova N. D., Shakhov A. V., Feldchtein F. I. // Handbook of Optical Coherence Tomography. New York, Basel: Marcel Dekker, Inc., 2002. P. 705.
73. Shakhova N. M., Feldchtein F. I., Sergeev A. M. // Handbook of Optical Coherence Tomography. New York, Basel: Marcel Dekker, Inc., 2002. P. 649.
74. Zagaynova E. V., Strelzova O. S., Gladkova N. D., et al. // J. Urology. 2002. V. 167. P. 1 492.
75. Шахова Н. М., Сапожникова В. В., Петрова С. А. и др. // Лазерная медицина. 2003. Т. 7, № 3–4. С. 65.
76. Gladkova N. D., Fomina J. V., Shakhov A. V., et al. // Oral Oncology. 2003. V. 9. P. 272.
77. Кузнецова И. А., Гладкова Н. Д., Качалина Т. С. и др. // Акушерство и гинекология. 2003. № 6. С. 33.
78. Кузнецова И. А., Гладкова Н. Д., Качалина Т. С. и др. // Акушерство и гинекология. 2003. № 5. С. 20.
79. Мелёхина М. А.// Рефракционная хирургия и офтальмология. 2004. № 1 (4). С. 39.
80. Фомина Ю. В., Урутина М. Н., Леонтьев В. К. и др. // Стоматология. 2004. № 3. С. 10.
81. Фомина Ю. В., Гладкова Н. Д., Леонтьев В. К. и др. // Стоматология. 2004. № 4. С. 25.
82. Шахова Н. М., Геликонов В. М., Геликонов Г. В. и др. // Медицинская физика. 2001. № 11. С. 44.
83. Shakhova N. M., Gelikonov V. M., Kamensky V. A., et al. // Laser Phys. 2002. V. 12, No. 4. P. 617.
84. Петрова Г. А., Дерпалюк Е. Н., Гладкова Н. Д. и др. // Вестник дерматологии и венерологии. 2002. № 5. С. 4.
85. Petrova G. A., Derpalyuk E. N., Gladkova N. D., et al. // Case Rep. Pract. Rew. 2003. No. 4. P. 2.
86. Petrova G. A., Derpalyuk E. N., Gladkova N. D., et al. // Proc. of SPIE. 2003. V. 5 140. P. 168.
87. Turchin I. V., Sergeeva E. A., Dolin L. S., et al. // Laser Phys. 2003. V. 13, No. 12. P. 1 524.
88. Пат. 2100787 РФ / Геликонов В. М., Геликонов Г. В., Гладкова Н. Д. и др. Опубл. 1997. Бюл. № 36.
89. Pat. 5835642 USA / Gelikonov G. V., Gelikonov V. M., Gladkova N. D., et al. Publ. 1998.
90. Pat. 5867268 USA / Gelikonov G. V., Gelikonov V. M., Gladkova N. D., et al. Publ. 1999.
91. Pat. 0831312 EP / Gelikonov G. V., Gelikonov V. M., Gladkova N. D., et al. Publ. 2001.
92. Пат. 2169347 РФ / Геликонов В. М., Геликонов Г. В., Куранов Р. В. и др. Опубл. 2001. Бюл. № 17.

[1] Институт прикладной физики РАН;
[2] Нижегородская государственная медицинская академия,
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию
26 марта 2004 г.

## A DECADE OF OPTICAL COHERENCE TOMOGRAPHY IN RUSSIA: FROM EXPERIMENTS TO CLINICAL PRACTICE

*V. M. Gelikonov and N. D. Gladkova*

We give a retrospective review of studies performed by the united team of researchers from the Institute of Applied Physics of the Russian Academy of Sciences and the Nizhny Novgorod State Medical Academy and related to practical realization of optical coherence tomography and its use as a novel method for biomedical diagnostics.

УДК 681.787.7

# ДВУХВОЛНОВАЯ ОПТИЧЕСКАЯ КОГЕРЕНТНАЯ ТОМОГРАФИЯ

*В. М. Геликонов, Г. В. Геликонов, Ф. И. Фельдштейн*

В работе представлены результаты исследования принципов и описание низкокогерентного двухволнового интерферометра на сохраняющем поляризацию излучения волокне для оптической когерентной томографии, созданного с целью получения изображений внутренней структуры живой биоткани одновременно на волнах с длиной 830 и 1 284 нм. Приводятся и анализируются изображения некоторых участков живой биоткани.

## ВВЕДЕНИЕ

Оптическая когерентная томография (ОКТ) как новый метод исследования внутренней структуры поверхностных слоёв биоткани развивается с 1991 года [1]. Основными направлениями развития ОКТ с момента её появления являются повышение глубины видения, пространственного разрешения, быстродействия, методы измерения скоростей и направления микрокапиллярных потоков в биоткани за счёт измерения доплеровского сдвига частоты, приём рассеянного объектом света в ортогональных поляризациях для определения патологических состояний биоткани как по нарушениям в картине её двулучепреломления, так и по изменениям деполяризующих свойств [2–7] и т. п.

Рассеивающие и поглощающие свойства зондируемых посредством ОКТ объектов в общем случае зависят от длины волны излучения [8, 9]. Ещё со времени первых экспериментов по методу ОКТ возникла идея создания «цветного» низкокогерентного видения в мутных средах, согласно которой ОКТ-изображения рассеивающих свет оптических неоднородностей одного и того же участка среды можно записать одновременно на двух или нескольких длинах волн. Эти сопряжённые изображения, представленные различными цветами и наложенные друг на друга с определённым соотношением интенсивностей каждого из образов, могут создавать «цветное» изображение. В данном случае информация об интенсивности рассеяния на каждой из длин волн отображается яркостью соответствующего цвета. Существенным требованием здесь является точность взаимного пространственного совмещения зон когерентного приёма на обеих длинах волн при сканировании. При исследовании живой ткани важна также и одновременность получения изображений на разных длинах волн.

В первой работе, посвящённой двухцветной томографии [2], описывалась экспериментальная установка, в которой использован единый интерферометр Майкельсона на дискретных элементах с двумя источниками излучения — суперлюминесцентными диодами с длиной волны излучения 830 и 1 300 нм. Запись томограмм осуществлялась последовательно при переключениях между источниками. Были исследованы сравнительные характеристики коэффициента рассеяния света в стенках артерий на двух длинах волн. Основная проблема при работе на этой экспериментальной установке, на наш взгляд, заключалась в необходимости точного взаимного пространственного совмещения областей приёма на обеих длинах волн. Кроме того, высокие требования предъявляются к стабильности работы систем продольного и поперечного сканирования, чтобы с достаточной точностью совпадали элементы разрешения при совмещении последовательно полученных изображений, соответствующих разным длинам волн.

В нашей группе в ИПФ РАН был создан первый переносной двухцветный оптический томограф, работающий на длинах волн 830 и 1 284 нм [3–5, 7], в котором для одновременного получения изображений используется единый интерферометр. Проведена оптимизация по оптическим параметрам низкокогерентного излучения с указанными существенно разными длинами волн. Интерферометр был выполнен на сохраняющем поляризацию излучения волокне, позволяющем иметь гибкое сигнальное плечо, что играет важную роль при практическом использовании томографа. Зондирующее излучение на обеих длинах волн выводилось из единого волокна сигнального плеча и подавалось на объект через общий фокусирующий объектив. Использовалась общая пьезоволоконная сканирующая система в направлении, нормальном к плоскости образца (ось $z$), и общая электромеханическая система в плоскости образца (оси $x$ и $y$), обеспечивающие трёхмерное сканирование на обеих длинах волн. При этом проводился одновременный параллельный приём сигнала на соответствующих доплеровских частотах из одного и того же элемента образца. Это позволяло с высокой точностью сравнивать изображения рассеивающих свет неоднородностей на обеих длинах волн, что открыло возможность получения дополнительной спектроскопической информации. Основной проблемой в этой работе явилась необходимость одновременного выполнения двух условий — компенсации в едином интерферометре разностей групповых задержек в плечах интерферометра и компенсации дисперсии групповой скорости на обеих длинах волн. Кроме того, дополнительной трудностью оказалась реализация малого уровня потерь в интерферометре на большей длине волны.

Позднее в работе [6] была описана двухволновая установка (на длинах волн 830 и 1 284 нм) для оптической когерентной томографии, в которой были использованы отдельные оптоволоконные интерферометры для каждой из двух длин волн зондирующего излучения. Эта экспериментальная установка, как и в [3–5, 7], позволяла получать томографические изображения на обеих рабочих длинах волн одновременно. Необходимо отметить, что использованная в работе единая механическая система для продольного сканирования в обоих интерферометрах могла быть подвержена влиянию паразитных механических вибраций. Ввиду того, что лучи в опорных плечах интерферометров пространственно не совмещены, это могло вызывать некоррелированные отклонения в скоростях изменения разности длин плеч интерферометров. Кроме того, совмещение зондирующих излучений с разной длиной волны в предметном плече, как и в работе [2], проводилось в открытом пространстве, что вызывало необходимость их точной взаимной пространственной юстировки. На наш взгляд, двухволновый вариант ОКТ, описанный в работах [3–5, 7], более перспективен, несмотря на более сложный в исполнении и настройке волоконно-оптический интерферометр. Отметим, что во всех трёх методах небольшие отклонения в локализации фокального пятна и области когерентного приёма на обеих длинах волн возможны по причине недостаточно высоких изохромных качеств объектива и дисперсии среды.

Основная цель данной работы заключается в исследовании принципов единого интерферометра для оптического когерентного томографа, предназначенного для одновременной двухволновой низкокогерентной локации с продольным разрешением, близким к пределу на каждой рабочей длине волны, при точном пространственном совмещении участков зондирования. Проведена экспериментальная апробация полученных результатов. Приведены «двухцветные» томограммы некоторых биологических объектов.

## 1. ПРИНЦИП ДВУХВОЛНОВОЙ ОКТ С РАБОЧИМИ ДЛИНАМИ ВОЛН 830 И 1 284 НМ НА ОСНОВЕ ЕДИНОГО ОПТИЧЕСКОГОИНТЕРФЕРОМЕТРА НА АНИЗОТРОПНОМ ВОЛОКНЕ

Оптическая схема разработанной установки для оптической когерентной томографии с рабочими длинами волн $\lambda_1 = 830$ нм и $\lambda_2 = 1\,284$ нм функционально состоит из системы мультиплексирования излучения с поляризационной фильтрацией, собственно интерферометра и систе-

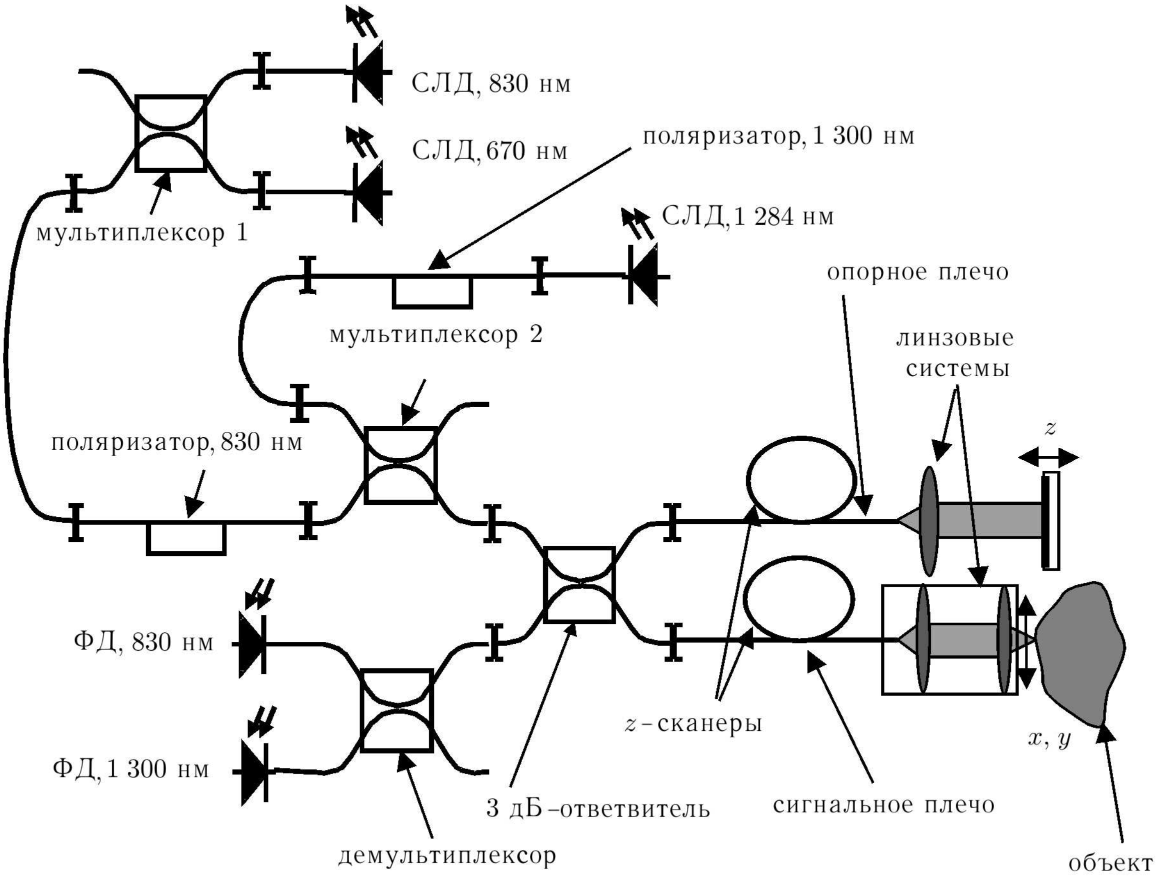



Рис. 1. Оптическая схема интерферометра двухволнового томографа: СЛД — суперлюминесцентный полупроводниковый диод, ФД — фотодиод, $z$ — сканер — пьезоволоконная регулируемая линия задержки

мы демультиплексирования для разделения по длинам волн попарно интерферирующих лучей. Таким образом, можно говорить о «двухканальности» в ОКТ при использовании единого оптического интерферометра на двух значительно отличающихся длинах волн. При этом предельное разрешение каждого канала определяется шириной кросскорреляционных функций на соответствующей рабочей длине волны. Функциональная схема установки представлена на рис. 1.

В качестве источников зондирующего излучения использовались два суперлюминесцентных полупроводниковых диода с центральными длинами волн излучения 830 и 1 284 нм, шириной спектра 23,4 и 42 нм (продольные длины когерентности 13 и 17 мкм) и мощностью 1,5 и 0,5 мВт соответственно. Излучение обоих источников пропускалось через поляризаторы на анизотропном волокне (с коэффициентами экстинкции порядка 20 дБ), при помощи разработанного волоконного мультиплексора объединялось и подавалось на вход интерферометра Майкельсона. Далее излучение на обеих длинах волн расщеплялось поровну между предметным и опорным плечами при помощи ответвителя, имеющего уровень 3 дБ для каждой из длин волн. Возвращённые волны в предметном и опорном плечах складывались в ответвителе, и суммарное поле подводилось к отдельным фотоприёмникам после спектрального разделения за счёт демультиплексирования. При изменении разности длин плеч интерферометра с постоянной скоростью порядка 6,2 см/с на нагрузках фотодиодов принимались переменные напряжения на разностных частотах, равных доплеровским сдвигам частоты: 150 кГц для длины волны 830 нм и 97 кГц — для 1 284 нм.

Отметим, что в интерферометре использовалось анизотропное волокно типа «Панда» (П63 производства компании «Файбертек», г. Арзамас, Россия) с большой числовой апертурой (порядка 0,15) и отсечкой на длине волны 750 нм. Благодаря таким оптическим параметрам волокна рабочее излучение на обеих длинах волн удерживалось в простейшей моде $HE_{11}$ при всех возможных изгибах волокна, возникших при создании интерферометра. Естественно, что мода $HE_{11}$ на длине волны 1 284 нм в этом волокне удерживается слабее, чем мода с длиной волны 830 нм. При достаточно крутых изгибах волокон при укладке его в линиях задержек потери света на длине волны 1 284 нм имели всё же значительный уровень (около нескольких децибел при диаметре изгиба 30 мм). Вследствие этого вопрос оптимизации волоконно-оптических элементов с целью снижения потерь света стоял особенно остро. Так, в результате проведённых разработок были созданы мультиплексор и демультиплексор с эффективностью около 98 % на каждой из длин волн.

С целью дополнительного повышения эффективности использования мощности оптического излучения в интерферометре одновременно в обоих каналах (на обеих рабочих длинах волн) также была исследована возможность спектральной настройки коэффициента ответвления на уровень 3 дБ для волн с длиной 830 и 1 284 нм одновременно. В результате был разработан специальный волоконный ответвитель с кратностью разделения потока оптическго излучения 0,51 : 0,49 для длины волны 830 нм и около 0,6 : 0,4 для длины волны 1 284 нм [10]. Такая близость разделения мощности оптического излучения к половинной в обоих каналах была получена за счёт использования различия зависимостей коэффициента линейной связи волноводных мод от длины области взаимодействия на двух рабочих длинах волн.

Модуляция разности длин плеч интерферометра проводилась при помощи пьезоволоконного преобразователя [11], который позволял сканировать объект на глубину до $3\div5$ мм (при напряжении, приложенном к пластинам пьезоэлемента около 250 В). Излучение на обеих длинах волн направлялось на объект, а рассеянное назад излучение собиралось в волокне при помощи одного и того же объектива. Применялся специальный планахроматический объектив для сведения к минимуму пространственных искажений и максимально близкого продольного совмещения фокальных перетяжек. Для получения двух- и трёхмерных изображений использовалось устройство, сканирующее вдоль осей $x$ и $y$ (в плоскости образца).

Важной проблемой оказалась одновременная компенсация неравенства влияния дисперсии групповой скорости в плечах интерферометра на двух разных длинах волн. Для её решения мы предложили и реализовали методику, в соответствии с которой для указанной компенсации были добавлены дополнительные «степени свободы». С этой целью в одном из плеч интерферометра в небольшой его части (порядка 20 %) использован отрезок волокна с отличающимися от основного волокна дисперсионными свойствами. За счёт подбора длин основного и компенсирующего волокон для обеих длин волн были минимизированы ширины кросскорреляционных функций и их временно́й сдвиг. В следующем разделе эта методика будет описана на примере конкретной реализации двухволнового интерферометра [3–5, 7].

## 2. КОМПЕНСАЦИЯ НЕРАВЕНСТВА ДИСПЕРСИИ В ИНТЕРФЕРОМЕТРЕ ОДНОВРЕМЕННО НА ДВУХ ЗНАЧИТЕЛЬНО ОТЛИЧАЮЩИХСЯ ДЛИНАХ ВОЛН

При использовании света на двух длинах волн неравенство полной дисперсии в плечах интерферометра, включающей волноводную и материальную компоненты, приводит к взаимному пространственному сдвигу центров кросскорреляционных функций на двух рабочих длинах волн и увеличению их минимальной возможной ширины. Изготовление интерферометра на анизотропном волокне с простым выравниванием геометрических длин плеч не позволило получить оптимальное пространственное разрешение одновременно на двух длинах волн, а также равные групповые задержки. Причина этого заключалась в неравенстве полной дисперсии в плечах интерферометра, имевшем место на каждой из длин волн ввиду непостоянства локальных параметров волокон по длине. Неравенство материальной дисперсии в нашем случае, по всей вероятности, нельзя объяснить локально распределёнными вдоль волокна флуктуациями концентрации легирующей добавки или её состава. При относительно небольших длинах волоконных плеч (порядка 10 м) вклад флуктуации волноводной дисперсии, вызванный нестабильностью диаметра волокна по длине, представляется более существенным. Как показали измерения, непостоянством параметров такого масштаба обладают и коммерческие одномодовые и анизотропные оптические волокна других производителей. В данном рассмотрении все локальные отклонения параметров волокон будут сведены к отклонению их средних значений. Отметим, что описанные ниже результаты соответствуют конкретной реализации интерферометра, оптические плечи которого были изготовлены из последовательно выбранных отрезков одного куска экспериментального анизотропного волокна.

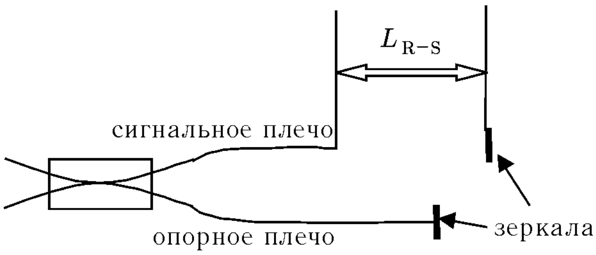



Рис. 2. Оптическая схема для исследования параметров волоконно-оптического интерферометра при широкополосном источнике

Ширина кросскорреляционной функции для длин волн 1 284 и 830 нм ($\delta L_{\lambda_2}$ и $\delta L_{\lambda_1}$) и расстояние между максимумами кросскорреляционных функций для обеих длин волн по групповому оптическому пути ($\Delta L_{\lambda_2-\lambda_1}$) исследовались при изменении соотношения между длинами сигнального и опорного плеч интерферометра. Условная схема волоконно-оптического интерферометра представлена на рис. 2.

Длина воздушного оптического пути в сигнальном плече между волокном и зеркалом, обозначенная на рис. 2 как $L_{\text{R}-\text{S}}$, выбрана так, чтобы выполнялось равенство групповых задержек, т. е. нулевая разность групповых оптических длин (далее — оптических длин) плеч интерферометра, на волне 830 нм. При этом более длинному волокну в опорном плече и воздушному промежутку в сигнальном плече соответствовали положительные значения $L_{\text{R}-\text{S}}$. Величины $\delta L_{\lambda_1}$, $\delta L_{\lambda_2}$ и $\Delta L_{\lambda_2-\lambda_1}$ последовательно измерялись при пошаговом укорочении (путём скалывания) вначале волокна опорного плеча (при этом $L_{\text{R}-\text{S}} > 0$), а затем — сигнального. В последнем случае при более длинном волокне в сигнальном плече воздушная компенсация разности хода осуществлялась в опорном плече. В этой ситуации длины воздушного промежутка в опорном плече $L_{\text{S}-\text{R}}$ обозначались как $L_{\text{R}-\text{S}}$ со знаком минус.

На рис. 3 представлены результаты измерений ширины кросскорреляционных функций $\delta L_{\lambda_1}$, $\delta L_{\lambda_2}$ и их взаимного пространственного сдвига $\Delta L_{\lambda_2-\lambda_1}$ от разности длин плеч интерферометра (значения показаны светлыми квадратами, светлыми кружками и чёрными квадратами соответственно).

Как видно из рис. 3, пространственный сдвиг $\Delta L_{\lambda_2-\lambda_1}$ между центрами кросскорреляционных функций на длинах волн 830 и 1 284 нм равен нулю при длине воздушного промежутка между торцом волокна и отражающим зеркалом в сигнальном плече интерферометра $L^0_{\text{R}-\text{S}} = 214$ мм. При этом дополнительное увеличение ширины кросскорреляционной функции на длине волны $\lambda_1 = 830$ нм равнялось 53 мкм, а на длине волны $\lambda_2 = 1\,284$ нм — 21 мкм. Это дополнительное увеличение ширины, вызванное несимметрией плеч интерферометра, добавлялось к исходной ширине кросскорреляционной функции, определяемой только шириной оптического спектра суперлюминесцентного диода (см. формулу (5)).

При укорочении длины волокна опорного плеча и соответственном уменьшении $L_{\mathrm{R-S}}$ пространственный сдвиг между центрами кросскорреляционной функции быстро нарастал со скоростью 5,9 мкм/мм. При $L_{\mathrm{R-S}} = 0$ нулевые разности хода на длинах волн 830 и 1 284 нм оказались разнесёнными по оптической длине на величину около 1,2 мм, что сравнимо с глубиной продольного сканирования. Это делает практически невозможным двухканальное получение полномасштабных ОКТ-изображений одного и того же исследуемого участка. Кроме того, при $L_{\mathrm{R-S}} = 0$ ширины каждой из кросскорреляционных функций существенно превышали ширину кросскорреляционных функций источников и равнялись 80 мкм при длине волны 1 284 нм и 55 мкм при длине волны 830 нм. Измерения также показали, что геометрические длины волокна опорного плеча, при которых имеют место минимальные значения ширины кросскорреляционной функции на длинах волн 830 и 1 284 нм, различны (более чем на 200 мм) и отличаются также от размера плеча, при котором совпадают центры кросскорреляционных функций.

Рассмотрим причины различия групповых задержек на рабочих длинах волн. Предположим, что причина, как отмечалось выше, заключается в крупномасштабных по сравнению с длиной волокна флуктуациях групповой скорости, имеющих место вследствие небольших флуктуаций диаметра волокна. Предположим также, что флуктуации плотности легирующих добавок являются величиной второго порядка малости, и их влиянием пренебрежём. Для оценки предположим, что плечи интерферометра отличаются по длине, причём опорное плечо длиннее сигнального на величину $x$, а радиус его световедущей жилы в среднем больше на эффективную величину $y$. Для волновода с геометрической длиной $z$ эффективная задержка широкополосного излучения определяется величиной

$$t_j = \frac{z}{v_{\mathrm{g}}} = z\,\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\omega} = -z\,\frac{\lambda^2}{2\pi c}\,\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\lambda}\,. \qquad (1)$$

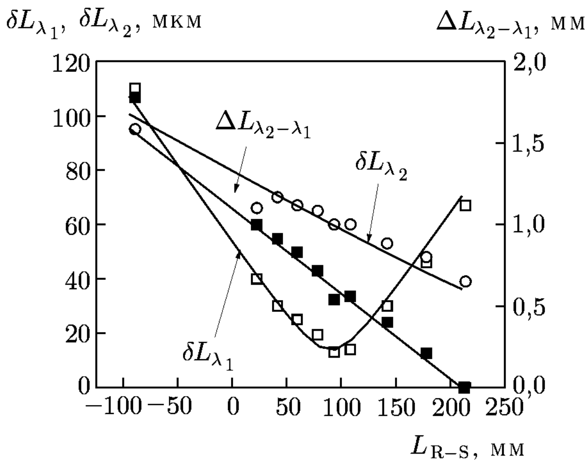



Рис. 3. Ширина кросскорреляционной функции и волновой сдвиг нулевой разности хода $\Delta L_{\lambda_2-\lambda_1}$ в зависимости от разности оптических длин волокон в опорном и сигнальном плечах интерферометра $L_{\mathrm{R-S}}$. Линиями изображены расчётные зависимости

Здесь $\beta$ — волновое число моды, $c$ — скорость света в свободном пространстве. Очевидно, что групповая скорость $v_{\mathrm{g}} = v_{\mathrm{g}}(a, \lambda, n, \Delta n, z)$ является функцией радиуса световедущей жилы $a$, длины волны $\lambda$, показателя преломления $n$, скачка показателя преломления $\Delta n$ и продольной координаты $z$.

В определении (1) эффективная задержка $t_j$ учитывает как материальную, так и внутримодовую дисперсию. Учёт вклада каждого вида дисперсии в эффективную задержку и в увеличение ширины кросскорреляционной функции полезен для оценочных расчётов, однако их точное влияние по-отдельности трудно выделить [12, 13]. Вследствие этого мы будем пользоваться выражением (1) и ограничимся численным расчётом. Кроме того, дисперсионные свойства волновода согласно [14] существенным образом зависят от профиля показателя преломления. По этой причине для их точного расчёта необходимо определять параметр $\beta$ из волнового уравнения с учётом распределения показателя преломления в сечении световедущей жилы. Однако в экспериментальных волокнах, использованных в данной работе, нам были известны только обобщённые параметры, полученные по измерениям геометрических размеров заготовки и длины волны отсечки. Именно поэтому в численной оценке влияния дисперсии мы использовали модельное волокно со ступенчатым профилем показателя преломления в световедущей жиле. Для такого волокна согласно [14]

$$\beta = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{V^2}{2\Delta} - U^2}\,. \tag{2}$$

Здесь $V = (2\pi/\lambda)\,(a + y)\,\sqrt{2n\,\Delta n}$ — волноводный, или волоконный, параметр, $a$ — радиус световедущей жилы, $U$ — поперечный параметр моды в сердцевине, который определяется из характеристического уравнения $UJ_1(U)/J_0(U) = WK_1(W)/K_0(W)$, $W$ — поперечный параметр моды в оболочке, равный $W^2 = V^2 - U^2$, $K_0$ и $K_1$ — модифицированные функции Бесселя второго рода нулевого и первого порядка, $J_0$ и $J_1$ — функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядка, $\Delta \approx \Delta n/n$.

Для расчёта материальной дисперсии необходимо было учесть, что в плечах интерферометра основное и компенсирующие волокна имели профиль показателя преломления типа W (центральная световедущая жила, легированная германием, окружена оболочкой, легированной бором, а в компенсирующем волокне — фтором).

Спектральные зависимости показателей преломления световедущей жилы ($n_{\rm SG}$) и оболочек ($n_{\rm SB}$, $n_{\rm SF}$) определялись при помощи трёхчленной дисперсионной формулы Селмейера при соответствующих относительных концентрациях легирующих добавок $X$ и $Y$:

$$n_{\rm SG} = \sqrt{1 + g_1 + g_2 + g_3}\,, \qquad n_{\rm SB} = \sqrt{1 + b_1 + b_2 + b_3}\,, \tag{3}$$

где

$$g_i = \frac{[{\rm S}A_i + X\,({\rm G}A_i - {\rm S}A_i)]\,\lambda^2}{\lambda^2 - [{\rm S}L_i + X\,({\rm G}L_i - {\rm S}L_i)]^2}\,, \qquad b_i = \frac{[{\rm S}A_i + Y\,({\rm B}A_i - {\rm S}A_i)]\,\lambda^2}{\lambda^2 - [{\rm S}L_i + X\,({\rm B}L_i - {\rm S}L_i)]^2}\,, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Аналогичные вычисления были проведены и для компенсирующего волокна. Для материалов $SiO_2$, $GeO_2$, $B_2O_3$, а также для легированного фтором стекла коэффициенты Селмейера ${\rm S}A_i$, ${\rm S}L_i$; ${\rm G}A_i$, ${\rm G}L_i$; ${\rm B}A_i$, ${\rm B}L_i$ и ${\rm F}A_i$, ${\rm F}L_i$ были вычислены на основе работ [15–17]. Относительные концентрации $GeO_2$, $B_2O_3$ и фтора подбирались такими, чтобы расчётные зависимости от длины волокна для ширины кросскорреляционной функции на обеих длинах волн и взаимного сдвига максимумов кросскорреляционных функций были максимально близки к полученным экспериментально (рис. 3). Для основного волокна оптимум получен при относительных концентрациях $GeO_2$ и $B_2O_3$, равных 0,068 и 0,04, а для компенсирующего волокна — при относительной концентрации $GeO_2$, равной 0,054 и концентрации фтора 0,0043.

При таких параметрах совпадение расчётных значений с экспериментальными имеет место при скачке показателя преломления на длине волны 830 нм в световедущей жиле относительно чистого кварца порядка $10^{-2}$, в окружающей оболочке также относительно кварца — порядка $-8{,}9 \cdot 10^{-4}$. Как показал расчёт, дисперсионные свойства удовлетворительно описываются при скачке показателя преломления порядка $1{,}1 \cdot 10^{-2}$. Эта величина явно завышена, поскольку соответствующая длина волны отсечки близка к 880 нм. Однако примем это значение для приближённого описания дисперсии. Как отмечено выше, для более точного расчёта необходимо решать волновое уравнение с учётом реального распределения показателя преломления в сечении световедущей жилы.

Для определения величин $x$ и $y$ решим систему уравнений при исходной длине волокон $L \approx \approx 13{,}86$ м, диаметре световедущей жилы 3,77 мкм, начальной величине воздушного промежутка сигнального плеча $L^0_{\rm R-S} = 0{,}214$ м при нулевом сдвиге максимумов кросскорреляционных функций:

$$L_{\rm R}[\lambda_1, \rho_1 + y,\, 2\,(L + x)] - L_{\rm S}[\lambda_1, \rho_1,\, 2L] - 2L^0_{\rm R-S} = 0,$$

$$L_{\rm R}[\lambda_2, \rho_1 + y,\, 2\,(L + x)] - L_{\rm S}[\lambda_2, \rho_1,\, 2L] - 2L^0_{\rm R-S} = 0, \tag{4}$$

где $L_{\rm R} = ct_{\rm R}$ и $L_{\rm S} = ct_{\rm S}$ — оптические длины опорного и сигнального плеча соответственно, $\rho_1$ — радиус световедущей жилы основного волокна интерферометра. Уравнения (4) описывают разность оптических путей в опорном и сигнальном плечах интерферометра, причём первое из них для длины волны $\lambda_1$, а второе — для длины волны $\lambda_2$.

Решение (4) было найдено при геометрической разнице длин волокон $x_0 = 144{,}6$ мм и при эффективном увеличении радиуса световедущей жилы волокна опорного плеча на $y_0 = 0{,}016$ мкм. Отклонение $2y_0$ — среднего эффективного диаметра — не превышает 1 % и находится в пределах допустимого разброса для большинства используемых волокон. Несмотря на это, влияние даже такого небольшого отклонения диаметра световедущей жилы оказалось существенным. Решение этой системы уравнений, фактически, позволило определить эффективную геометрическую разность длин волокон в плечах интерферометра при равенстве оптических плеч. Именно за счёт этого отрезка волокна длиной 145 мм и компенсируется дополнительная разность оптического хода для длин волн $\lambda_1$ и $\lambda_2$, набежавшая в плечах интерферометра длиной 13,8 м. Таким образом, вероятнее всего, наблюдавшееся в конкретном интерферометре отличие групповых скоростей обусловлено крупномасштабными флуктуациями радиуса световедущей жилы.

Получим теперь зависимости ширины кросскорреляционной функции для обеих длин волн ($\delta L_{\lambda_1}$ и $\delta L_{\lambda_2}$) и взаимного пространственного сдвига максимумов кросскорреляционных функций $\Delta L_{\lambda_2-\lambda_1}$ от разности длин плеч интерферометра при пошаговом укорочении длины опорного плеча и при условии исходного геометрического неравенства волокон ($x_0 = 0{,}145$ м, $y_0 \sim 0{,}016$ мкм).

Полную ширину кросскорреляционной функции, выраженную через длину оптического пути, на уровне 0,5 в зависимости от $x$ определим для каждой из длин волн как

$$\delta L^{\text{полн}}_{\lambda_1}(x) = \sqrt{\left(\frac{\delta L_1(x)}{1{,}2 n_{\rm S}}\right)^2 + \delta L^2_{\lambda_1}}\,, \qquad \delta L^{\text{полн}}_{\lambda_2}(x) = \sqrt{\left(\frac{\delta L_2(x)}{1{,}2 n_{\rm S}}\right)^2 + \delta L^2_{\lambda_2}}\,. \tag{5}$$

Здесь $n_{\rm S}$ — показатель преломления светонесущей жилы, величины $\delta L_1$ и $\delta L_2$ определяют увеличение ширины кросскорреляционной функции при распространении через оптические волокна плеч интерферометра на каждой из длин волн. Коэффициент $(\sqrt{\ln 2})^{-1} \approx 1{,}2$ в знаменателе подкоренного выражения введён для пересчёта дополнительной ширины кросскорреляционной функции к уровню 0,5. Увеличение ширины кросскорреляционной функции определяется произведением разности добавленных продолжительностей цугов в сигнальном и опорном плечах интерферометра на среднюю групповую скорость: $\delta L_i = (\delta t_{\rm R} - \delta t_{\rm S})\, v_{\rm g}$. Как известно [18], величины $\delta L_1$ и $\delta L_2$ фактически совпадают с удлинением короткого импульса — цуга — при распространении через оптическое волокно. Увеличение длительности импульса $\delta t$ в общем виде с учётом материальной и внутримодовой дисперсии в волокне длиной $z$ определяется соотношением

$$\delta t = \frac{z}{2\pi c}\left(\lambda^2\,\frac{{\rm d}^2\beta}{{\rm d}\lambda^2} + 2\lambda\,\frac{{\rm d}\beta}{{\rm d}\lambda}\right)\delta\lambda, \tag{6}$$

где $\delta\lambda$ — ширина оптического спектра на уровне $1/e$. Положив $v \approx c/n_{\rm S}$, имеем

$$\delta L_{\lambda_i}(x) = \frac{c}{n_{\rm S}}\,\delta t_{\rm R}(\lambda_i, \delta\lambda_i, \rho + y_0, 2\,(L + x_0)) - \frac{c}{n_{\rm S}}\,\delta t_{\rm S}(\lambda_i, \delta\lambda_i, \rho, 2L). \tag{7}$$

Зависимость взаимного пространственного сдвига $\Delta L_{\lambda_2-\lambda_1}$ от укорочения геометрической длины опорного плеча $x$ можно определить выражением

$$\Delta L_{\lambda_2-\lambda_1} = L_{\rm R}(\lambda_2, \rho_1 + y_0, 2\,(L + x_0)) - L_{\rm S}(\lambda_2, \rho_1, 2L) - L_{\rm R}(\lambda_1, \rho_1 + y_0, 2\,(L + x_0)) + L_{\rm S}(\lambda_1, \rho_1, 2L), \tag{8}$$

где $x_0$ и $y_0$ — решения системы уравнений (4).

На рис. 3 сплошными кривыми приведены расчётные зависимости $\delta L_{\lambda_1}$, $\delta L_{\lambda_2}$ и $\Delta L_{\lambda_2-\lambda_1}$ от разности оптических длин волокон $L_{\mathrm{R-S}}$ в опорном и сигнальном плечах интерферометра. Полученные из расчёта суммарные ширины кросскорреляционных функций на длинах волн 830 и 1 284 нм при $\Delta L_{\lambda_2-\lambda_1} = 0$, равные 66 и 38 мкм соответственно, оказались близкими к экспериментальным значениям 67 и 39 мкм. Отметим, что вычисленный отдельно для излучения с длиной волны 830 нм вклад материальной дисперсии в ширину кросскорреляционной функции $\delta L/(1{,}2n_{\mathrm{S}})$, равный $-93$ мкм, вдвое по модулю превышает отдельный вклад волноводной дисперсии (42 мкм) и отличается по знаку. Для длины волны 1 284 нм дополнительное увеличение ширины кросскорреляционной функции практически обусловлено только волноводной дисперсией (19,5 мкм); вклад материальной дисперсии имеет тот же знак, но на порядок меньше (2 мкм).

Рассмотрим теперь результаты компенсации взаимного пространственного сдвига центров кросскорреляционных функций интерферометра на длинах волн 830 и 1 284 нм и приближению предельной ширины функций к уровню, определяемому шириной оптических спектров. Конечным итогом этой компенсации должен быть тот факт, что при изменении разности длин плеч интерферометра при минимальной ширине кросскорреляционных функций должны совпадать положения их максимумов на обеих длинах волн.

Отметим, что одновременную оптимизацию этих трёх параметров при использовании для компенсации только материальной дисперсии провести не удаётся. Это проверялось при помощи плоских стёкол с различными типами дисперсии, помещаемых в воздушный промежуток опорного плеча интерферометра. Необходимо ввести дополнительные параметры, влияющие на дисперсионные характеристики. Была предпринята попытка компенсации при помощи двух отрезков различных волокон, результаты которой приведены на рис. 4. Вначале были уравнены оптические длины сигнального и опорного плеч интерферометра за счёт укорочения опорного плеча на найденную величину 145 мм. Затем в сигнальное плечо было добавлено (методом оптической сварки) волокно типа П63, а в опорное — волокно типа П37 (того же производителя) одинаковой длины $L_0$. Волокно П37 (также W-типа) имело оболочку вокруг световедущего волокна, легированную фтором. Радиус световедущей жилы составлял 1,823 мкм при длине волны отсечки $\lambda_{\mathrm{c}} = 690$ нм. При одновременном и одинаковом укорочении обоих добавленных волокон и соответствующей настройке разности длин плеч за счёт воздушного промежутка для появления максимального интерференционного сигнала было обнаружено изменение всех интересующих нас в данном случае параметров в сторону нужных значений. Наиболее оптимальной оказалась длина $L_{\mathrm{add}} \approx 2{,}25$ м. На рис. 4 показаны зависимости величин $\Delta L_{\lambda_2-\lambda_1}$, $\delta L_{\lambda_1}$ и $\delta L_{\lambda_2}$ при дальнейшем укорачивании волокна только опорного плеча и компенсации возникающей разности хода воздушным промежутком в сигнальном плече.

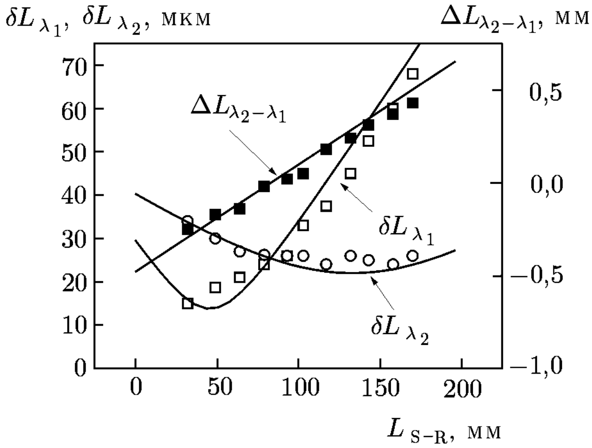



Рис. 4. Ширина кросскорреляционной функции и волновой сдвиг нулевой разности хода $\Delta L_{\lambda_2-\lambda_1}$ в зависимости от разности оптических длин волокон в опорном и сигнальном плечах интерферометра $L_{\mathrm{S-R}}$ при компенсации вспомогательными волокнами

Измерения показали, что настройки разности длин плеч интерферометра, при которых наблюдаются минимальные значения величин $\Delta L_{\lambda_2-\lambda_1}$, $\delta L_{\lambda_1}$ и $\delta L_{\lambda_2}$ существенно сблизились. Рис. 4 демонстрирует, что в пределах 75 мм пошагового укорочения волокна опорного плеча все три величины проходят своё минимальное значение. Напомним, что исходно эта область составляла порядка 325 мм.

Для сравнения с экспериментом определялись также зависимости ширины кросскорреляционной функции для обеих длин волн при том же укорачивании волокна опорного плеча. Так, для волны с длиной 830 нм вычислялась величина

$$\delta L_{\lambda_1} = (\delta L_{\lambda_1})^0 + (\delta L_{\lambda_1})^{\mathrm{add}}, \tag{9}$$

где

$$(\delta L_{\lambda_1})^0 = \frac{c}{n_{\mathrm{S}}}\,\delta t_{\mathrm{R}}(\lambda_1, \delta\lambda_1, \rho_1 + y_0, 2\,(L + x_0)) - \frac{c}{n_{\mathrm{S}}}\,\delta t_{\mathrm{S}}(\lambda_1, \delta\lambda_1, \rho_1, 2L),$$

$$(\delta L_{\lambda_1})^{\mathrm{add}} = \frac{c}{n_{\mathrm{S}}}\,\delta t_{\mathrm{R}}^{\mathrm{add}}(\lambda_1, \delta\lambda_1, \rho_2, 2\,(L^{\mathrm{add}} - x_0)) - \frac{c}{n_{\mathrm{S}}}\,\delta t_{\mathrm{S}}(\lambda_1, \delta\lambda_1, \rho_1, 2L^{\mathrm{add}});$$

здесь индексом «add» отмечены величины, относящиеся к компенсирующему волокну. Аналогичный вид имеют формулы и для $\delta L_{\lambda_2}$ (длина волны 1 284 нм), которые можно получить из (9) заменой $\lambda_1$ на $\lambda_2$. Величина $\Delta L_{\lambda_2-\lambda_1}$ определялась как

$$\Delta L_{\lambda_2-\lambda_1} = (\Delta L_{\lambda_2-\lambda_1})^0 + (\Delta L_{\lambda_2-\lambda_1})^{\mathrm{add}}, \tag{10}$$

где

$$(\Delta L_{\lambda_2-\lambda_1})^0 = L_{\mathrm{R}}(\lambda_2, \rho_1 + y_0, 2L) - L_{\mathrm{S}}(\lambda_2, \rho_1, 2L) - L_{\mathrm{R}}(\lambda_1, \rho_1 + y_0, 2L) + L_{\mathrm{S}}(\lambda_1, \rho_1, 2L),$$

$$(\Delta L_{\lambda_2-\lambda_1})^{\mathrm{add}} = L_{\mathrm{R}}^{\mathrm{add}}(\lambda_2, \rho_2, 2(L_0 - x)) - L_{\mathrm{S}}^{\mathrm{add}}(\lambda_2, \rho_1, 2L_0) - L_{\mathrm{R}}^{\mathrm{add}}(\lambda_1, \rho_2, 2(L_0 - x)) + L_{\mathrm{S}}^{\mathrm{add}}(\lambda_1, \rho_1, 2L_0).$$

На рис. 4 зависимости (9) и (10) приведены сплошными линиями. Как видно из графиков, имеет место хорошее соответствие расчёта экспериментальным значениям. Отметим, что при расчёте параметры дополнительного волокна подбирались по совпадению экспериментальных и теоретических значений. Было получено значение скачка показателя преломления световедущей жилы относительно кварца (порядка $8{,}1 \cdot 10^{-3}$) и оболочки, легированной фтором (порядка $-2 \cdot 10^{-3}$). Оптимальный радиус световедущей жилы для П37 в расчёте был принят равным 1,84 мкм, что отличается от паспортного значения всего на 1 %. Причина, позволившая провести оптимизацию, заключается в отличии зависимостей профиля показателя преломления от длины волны для волокон типов П63 и П37.

## 3. РЕЗУЛЬТАТЫ НАБЛЮДЕНИЙ МЕТОДОМ ДВУХВОЛНОВОЙ ОКТ

Первые изображения, полученные на установке [2] последовательно на длинах волн 830 и 1 300 нм, позволили провести сравнительный анализ параметров рассеяния биоткани. Как правило, при длине волны 1 300 нм рассеяние меньше ослабляет свет, чем при длине волны 830 нм, и ОКТ-изображения имеют бóльшую глубину, что совпало с результатами первых наблюдений. Однако до сих пор ещё не существует результатов детального сравнительного анализа параметров рассеяния для отдельных участков живой кожи (а также слизистой оболочки) человека.

Одновременное получение ОКТ-изображений при точном совмещении элемента разрешения на двух длинах волн, которое впервые появилось в работах [3–5, 7], а позднее и в [6], даёт возможность сравнения параметров, характеризующих процесс рассеяния света в живой биоткани. Например, изображения кожи большого пальца руки на рис. 5*а* и *б*, которые получены на нашей установке, демонстрируют меньшую скорость ослабления с глубиной рассеянного назад излучения с длиной волны 1 284 нм. Это связано с уменьшением рассеяния с ростом длины волны.

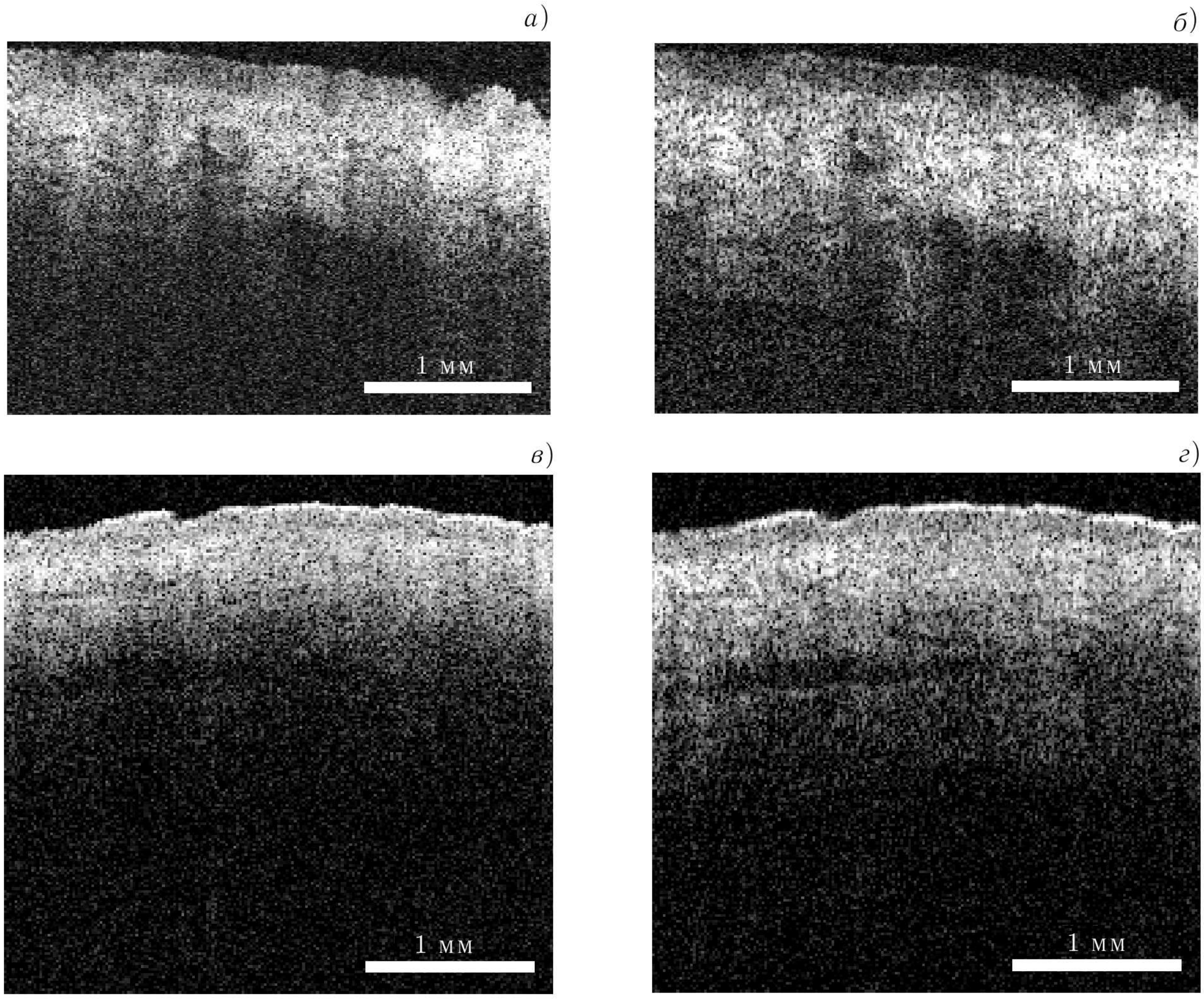



Рис. 5. ОКТ-изображения, полученные на длине волны 830 нм (слева) и на длине волны 1 284 нм (справа): *а*) и *б*) — изображения кожи большого пальца; *в*) и *г*) — кожа предплечья

Вследствие этого предельная глубина видения в нашем приборе также больше при длине волны 1 284 нм, несмотря на то, что мощность излучения суперлюминесцентного диода на этой длине волны была втрое меньше, а оптический тракт интерферометра имел существенно бо́льшие потери света. На рис. 5*в* и *г* приведены ОКТ-изображения кожи предплечья через час после кратковременного (около 5÷10 с) надавливания на неё жёстким предметом. В изображении, полученном на длине волны 1 284 нм, более отчётливо виден внутренний отёк.

Данные изображения представлены отдельно для каждой длины волны в оттенках серого, однако возможно и цветное представление. При использовании дополнительных цветов (которые при сложении с соответствующими яркостями дают белый или нейтральный серый) можно получать двухволновые изображения. Изображения представляются в зелёно-пурпурной палитре, где каждый пиксель содержит информацию об интенсивности рассеяния на длине волны 830 нм (в зелёном цвете) и о рассеянии на длине волны 1 284 нм (в пурпурном цвете). Существует возможность представления двухволновых изображений и в привычной для человеческого глаза красно-сине-зелёной палитре, где один из цветов не содержит информацию о рассеянии, а служит лишь фоном. Как видно из рис. 5, изображения на длине волны 830 нм имеют бо́льшую чёткость, чем на длине волны 1 284 нм, и это обусловлено меньшей длиной когерентности источника. В то же

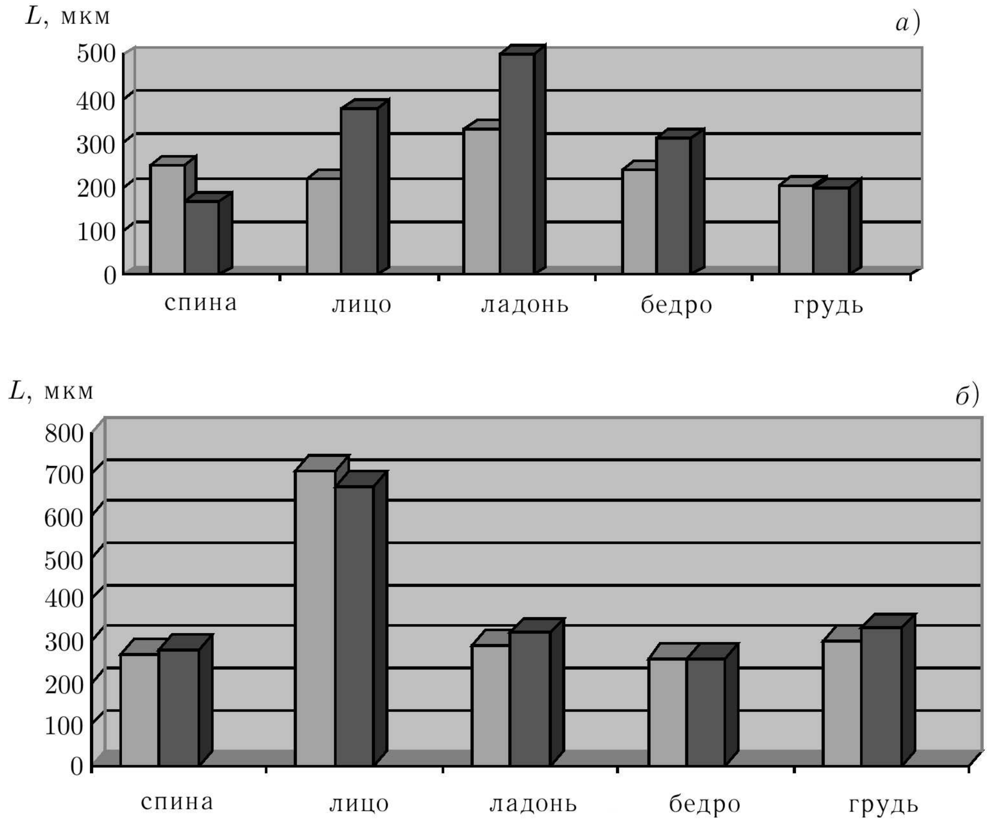



Рис. 6. Дистанция, на которой интенсивность томографического сигнала спадает в $e$ раз на длине волны 830 нм ($a$) и на длине волны 1 284 нм ($б$)

время, несмотря на существенно меньшую мощность источника, ОКТ-изображения на длине волны 1 284 нм, как правило, строятся до большей глубины.

В качестве примера применения двухволновой ОКТ-установки приведём результаты измерения скорости ослабления рассеянного назад зондирующего излучения в мужской коже в слоях под эпидермисом для людей различных возрастов. На рис. 6 представлен оптический путь в продольном направлении, на котором интенсивность томографического сигнала уменьшается в $e$ раз на длинах волн 830 и 1 284 нм для различных участков живой кожи. Измерения, которые были проведены на мужской коже, при возрасте испытуемого 24 года представлены светло-серым цветом, а при возрасте 53 года — тёмно-серым.

Анализируя результаты, представленные рис. 6, можно сделать ряд предварительных выводов. Во-первых, длины ослабления света с длиной волны 1 284 нм практически совпадают для обоих возрастов на всех подвергшихся исследованиям участках кожи. В то же время на длине волны 830 нм наблюдаются существенные отличия. В возрасте 53 года свет с длиной волны 830 нм проникает в некоторых участках кожи глубже, чем на аналогичных участках в возрасте 24 года. Во-вторых, из рис. 6, очевидно, следует, что факторы, определяющие рассеяние на каждой из длин волн, распределены по участкам кожи не одинаково, и это не связано с возрастом.

Представляя результаты этих измерений, авторы не претендуют на открытие каких-либо общих закономерностей. Однако очевидно, что сравнительные ОКТ-изображения одновременно на двух длинах волн могут содержать информацию, характеризующую физиологические особенности объекта, например возрастные изменения. К таким изменениям в сетчатом слое кожи можно отнести увеличение с возрастом плотности «упаковки» рассеивающих центров из-за уменьшения содержания воды, уменьшение количества сильно рассеивающих клеточных элементов, уменьшение диаметра и числа сосудов, что приводит к меньшему кровенаполнению, а также упрощение структуры волокон. Поскольку наибольшие возрастные отличия в скорости затухания сигнала наблюдаются на длине волны 830 нм, близкой к спектральной границе поглощения света в крови, возможно, они связаны с изменением кровенаполнения.

## 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате проведённого исследования метода компенсации были существенно улучшены характеристики интерферометра и созданы условия для работы оптического когерентного томографа одновременно на длинах волн 830 и 1 284 нм. В итоге максимально оптимальной компенсации была реализована ширина кросскорреляционной функции на длинах волн 830 и 1 284 нм, равная соответственно 14 и 29 мкм. Расстояние между максимумами кросскорреляционных функций при этом оказалось равным 230 мкм, что составило менее 10 % от диапазона продольного сканирования. Для окончательного совмещения ОКТ-изображений на длинах волн 830 и 1 284 нм дополнительно программно вводилась компенсирующая задержка.

Таким образом, для создания единого интерферометра, работающего на двух заметно отличающихся длинах волн 830 и 1 284 нм, необходимо использовать волокно с максимально большим скачком коэффициента преломления и с длиной волны отсечки, максимально близкой к наименьшей из рабочих длин волн. Кроме того, как показала практика, неодинаковость дисперсионных параметров волокна может обнаружиться даже для двух отрезков волокна, последовательно взятых из одного куска, при исходно высокой точности изготовления. Для компенсации дисперсии необходимо использовать волокно с другими легирующими добавками.

Получен ряд сопряжённых изображений на существенно различных длинах волн и проведено их качественное сравнение. В частности, простое сравнение скоростей убывания интенсивности принимаемых сигналов при зондировании биологического объекта на двух длинах волн, показывает, что в их несовпадении содержится дополнительная информация, для выявления сущности которой потребуется проведение дополнительных биомедицинских исследований.

Авторы выражают благодарность А. М. Сергееву, Г. А. Петровой и Н. М. Шаховой за полезные обсуждения, А. А. Туркину за изготовление ряда оптических элементов, Р. В. Куранову за помощь в получении изображений и И. В. Турчину за их обработку. Работа была частично поддержана РФФИ (грант № 03–02–17253), Совета при Президенте РФ по поддержке ведущих научных школ (грант НШ-1622.2003.2), а также CRDF (грант No. RB2 542).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Huang D., Swanson E. A., Lin C. P., et al. // Science. 1991. V. 254. P. 1 178.
2. Schmitt J. M., Knuttel A., Yadlowsky M., Eckhaus M. A. // Physics in Medicine and Biology. 1994. V. 39. P. 1 705.
3. Gelikonov G. V., Gelikonov V. M., Feldchtein F. I., et al. // Digest of Conference on Laser and Electro-Optics. 1997. V. 11. P. 210.
4. Roper S. N., Moores M. D., Gelikonov G. V., et al. // J. Neuroscience Methods. 1998. V. 80. P. 91.
5. Feldchtein F. I., Gelikonov G. V., Gelikonov V. M., et al. // Optics Express. 1998. V. 3. P. 239.
6. Pan Y., Farkas D. L. // J. Biomedical Optics. 1998. V. 3. P. 446.
7. Gelikonov V. M., Gelikonov G. V., Dolin L. S., et al. // Laser Phys. 2003. V. 13. P. 692.
8. Тучин В. В. Лазеры и волоконная оптика в биомедицинских исследованиях. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1998. 384 с.

9. Leitgeb R., Wojtkowski M., Kowalczyk A., et al. // Optics Lett. 2000. V. 25. P. 820.
10. Геликонов В. М., Геликонов Г. В. // Квантовая электроника. 2004. Т. 34. С. 969.
11. Пат. 2100787 РФ / Геликонов В. М., Геликонов Г. В., Гладкова Н. Д. и др.; Опубл. 1997. Бюл. № 36.
12. Dyott R. B., Stern J. R. // Electron. Lett. 1971. V. 7. P. 82.
13. Gambling W. A., Matsumura H., Ragdale C. M. // Microwaves, Opt. Acoust. 1979. V. 3. P. 239.
14. Снайдер А., Лав Д. Теория оптических волноводов. М.: Радио и связь, 1987.
15. Белов А. В., Гурьянов А. Н., Дианов Е. М. и др. // Квантовая электроника. 1978. Т. 5. С. 695.
16. Fleming J. W. // Electron. Lett. 1978. V. 14. P. 326.
17. Fleming J. W. // Appl. Opt. 1984. V. 23. P. 4 486.
18. Ахманов С. А., Дьяков Е., Чиркин А. С. Введение в статистическую радиофизику и оптику. М.: Наука, 1981.


Институт прикладной физики РАН,
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию
9 марта 2004 г.

**TWO-WAVELENGTH OPTICAL COHERENCE TOMOGRAPHY**

*V. M. Gelikonov, G. V. Gelikonov, and F. I. Feldchtein*

We report on the results of studies of the basic principles and development of a low-coherence two-wavelength interferometer based on polarization-maintaining fiber for optical coherence tomography (OCT) imaging of the internal structure of living biotissue simultaneously at two wavelengths, 830 and 1300 nm. Images of several sites of living biotissue are presented and analyzed.

УДК 535.36

# ПОЛЯРИЗАЦИОННАЯ ОТРАЖАТЕЛЬНАЯ СПЕКТРОСКОПИЯ БИОТКАНЕЙ: ДИАГНОСТИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

*Д. А. Зимняков, Ю. П. Синичкин, В. В. Тучин*

В работе рассмотрены физические принципы визуализации и диагностики морфологического и функционального состояния биологических тканей на основе спектрального анализа поляризационных характеристик зондирующего излучения, диффузно отражённого исследуемыми объектами. Обсуждаются различные модификации метода поляризационной отражательной спектроскопии биотканей, в том числе и с использованием частично когерентного зондирующего излучения с перестраиваемой длиной когерентности. Представлены результаты применения обсуждаемых методов для морфологической и функциональной диагностики in vivo кожи человека.

## ВВЕДЕНИЕ

Последние два десятилетия характеризуются интенсивным развитием и широким внедрением в лабораторную и клиническую практику различных методов морфофункциональной диагностики биологических тканей, основанных на применении зондирующего электромагнитного излучения видимого и ближнего инфракрасного диапазонов. Значительный интерес к оптическим методам диагностики, в том числе и с использованием лазерного излучения, обусловлен прежде всего совокупностью присущих им особенностей по сравнению с другими методами зондирования, широко применяемыми в клинической практике (рентгеновскими, ультразвуковыми, основанными на методе ядерно-магнитного резонанса, термографическими и др.) [1–3]:

1) безопасностью с точки зрения воздействия зондирующего излучения на биоткань;

2) потенциальными возможностями достижения субмикронного разрешения при анализе структуры биоткани;

3) перспективами создания многофункциональных диагностических систем, позволяющих анализировать как структуру, так и функциональное состояние зондируемой биоткани;

4) относительной дешевизной и доступностью необходимого оборудования (в частности, источников и приёмников излучения, а также волоконно-оптических элементов для доставки зондирующего излучения от источника к объекту и от объекта к приёмнику).

При использовании оптических методов диагностики и визуализации в качестве исходных данных для решения обратной задачи определения морфологических и функциональных параметров объекта рассматриваются различные характеристики рассеянного объектом зондирующего излучения (например, спектральные зависимости интенсивности детектируемых оптических сигналов, их фазочастотные характеристики или значения моментов огибающей детектируемых импульсных сигналов при использовании частотно-модуляционных или импульсно-модуляционных методов зондирования, спектральные и корреляционные характеристики флуктуаций интенсивности при рассеянии зондирующего излучения на движущихся клетках исследуемой среды (в частности, при рассеянии ансамблем эритроцитов, движущихся по микрокапиллярам в зондируемом объёме)). Анализ поляризационных характеристик излучения, прошедшего через зондируемые биоткани, в ряде случаев позволяет получить качественно новые результаты при исследованиях морфологического и функционального состояния биоткани, являющихся одним из важнейших направлений современной медицинской диагностики. Примерами, подтверждающими данный факт, являются результаты работ по исследованию возможностей ранней диагностики катаракты хрусталика [1, 3–5], оценки концентрации глюкозы в тканях больных диабетом [6–10] на основе поляриметрии прозрачных тканей глаза, а также поляризационной визуализации структуры биотканей [11–16]. Поляризационный анализ рассеянного зондируемым объектом излучения также успешно применяется для расширения возможностей других оптических методов зондирования биотканей; в частности, поляризационная дискриминация диффузно отражённого биотканью излучения путём раздельного детектирования двух ортогонально поляризованных составляющих, направление поляризации одной из которых (ко-поляризованной составляющей) соответствует направлению поляризации линейно поляризованного зондирующего излучения, позволяет выделить составляющие рассеянного излучения, обусловленные рассеянием поверхностных либо глубинных слоёв ткани. В последнем случае детектируется кросс-поляризованная составляющая рассеянного света с вектором поляризации, направленным ортогонально по отношению к вектору поляризации зондирующего излучения. Эта составляющая обусловлена в основном диффузным рассеянием света в зондируемом объёме и несёт информацию о глубинных слоях зондируемого объекта. Подобный подход успешно используется, в частности, для визуализации системы кровеносных сосудов, расположенных на глубине 1$\div$2 мм под кожей [11, 17].

В настоящее время одним из перспективных направлений в области ранней диагностики раковых заболеваний с использованием оптических методов является анализ малократно рассеянных составляющих излучения видимого и ближнего инфракрасного диапазонов, рассеянного зондируемыми биотканями. В частности, в работе [18] была продемонстрирована высокая чувствительность спектров упругого рассеяния исследуемых биотканей к морфологическим изменениям, типичным для раковых клеток (увеличение размеров ядер, плеоморфизм и т. д. [19]). В работе [20] впервые продемонстрировано существование тонкой периодической структуры в спектрах обратного рассеяния эпителиальных тканей, обусловленной однократным рассеянием зондирующего излучения на ядрах клеток поверхностных слоёв ткани. Было показано, что данная особенность спектров обратного рассеяния тонких клеточных слоёв допускает интерпретацию в рамках теории Ми, а анализ амплитудно-частотных характерстик осцилляций в спектре, в принципе, позволяет получить статистические характеристики ансамбля клеточных ядер (в частности, их распределение по размеру). Следует отметить, что существенной проблемой при использовании данного подхода является выделение однократно рассеянной составляющей из естественно присутствующего многократно рассеянного фона. Кроме того, поглощение зондирующего излучения нижележащими тканями (в частности, гемоглобином, присутствующим в строме) также приводит к искажению спектров однократного рассеяния поверхностных слоёв эпителиальных тканей. В работах [21, 22] продемонстрирована возможность существенного подавления негативных эффектов многократного рассеяния и поглощения в результате использования поляризационной дискриминации рассеянного света путём зондирования клеточных структур линейно поляризованным излучением и раздельного детектирования кросс-поляризованной и ко-поляризованной составляющих рассеянного излучения (последняя в значительной степени обусловлена процессами однократного и малократного рассеяния). Подобный подход, определяемый как поляризационно-чувствительная спектроскопия упругого рассеяния, или отражательная поляризационная спектроскопия, в принципе, позволяет не только осуществлять количественный анализ распределений клеточных ядер по размерам, но также и определять относительный показатель преломления ядер. В частности, данные возможности были продемонстрированы в серии экспериментов с модельными средами и образцами биотканей [18, 20–22]. Весьма перспективным в части внедрения метода поляризационной отражательной спектроскопии в клиническую практику является развитие инструментальной базы данного метода на основе волоконно-оптических устройств для доставки зондирующего излучения к объекту и сбора рассеянного излучения [23].

Следует отметить, что многократно рассеянная составляющая зондирующего излучения, в рассмотренном выше подходе являющаяся негативным фактором, тем не менее несёт информацию о структуре и свойствах глубинных клеточных слоёв, в связи с чем анализ её поляризационных характеристик также может быть использован для морфофункциональной диагностики и визуализации биотканей. Целью данной работы является рассмотрение физических принципов и особенностей реализации некоторых методов поляризационной диагностики и визуализации случайно-неоднородных сред, в том числе и биотканей, базирующихся на анализе взаимосвязи поляризационных и спектральных характеристик диффузно отражённого зондируемой средой света. Исходя из особенностей используемого подхода, данные методы могут быть условно объединены под общим названием «поляризационная отражательная спектроскопия».

## 1. ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПОЛЯРИЗАЦИОННОЙ ДИАГНОСТИКИ БИОТКАНЕЙ

Анализ оптических характеристик подавляющего большинства биологических тканей в видимой и ближней инфракрасной областях позволяет выделить следующие особенности, оказывающие основное влияние на процесс распространения зондирующего излучения в исследуемом объёме ткани:

1) исходя из степени упорядоченности и плотности упаковки рассеивающих центров, роль которых играют локальные неоднородности тканевой структуры на клеточном и субклеточном уровне, in vivo биологические ткани могут быть рассмотрены как слабоупорядоченные многократно рассеивающие среды;

2) основные структурообразующие элементы биологических тканей, как правило, характеризуются достаточно сильно выраженной анизотропией рассеяния, при этом параметр анизотропии рассеяния $g$ [24, 25] для различных тканей, зондируемых в видимом диапазоне, может принимать значения от 0,35÷0,45 (дентин [26]) до 0,98÷0,99 (клетки крови, в частности эритроциты [3, 27]);

3) некоторые ткани, например кожа, обладают выраженной слоистой структурой, причём оптические характеристики (в частности, коэффициент поглощения) различных слоёв в определённых спектральных интервалах могут существенно отличаться друг от друга, что обусловлено наличием или отсутствием в отдельных слоях составляющих, характеризуемых селективным поглощением (хромофоров); для кожи человека основными хромофорами являются гемоглобин, содержащийся в дерме, и меланин [28].

Многократное рассеяние зондирующего поляризованного излучения, распространяющегося в биоткани как в случайно-неоднородной среде, приводит к существенным изменениям его состояния поляризации, выражающимся, в частности, в уменьшении степени поляризации $P$, определяемой значениями элементов вектора Стокса [29, 30] рассеянного зондируемой средой света:

$$P = \frac{\sqrt{Q^2 + U^2 + V^2}}{I} \,. \tag{1}$$

В ряде случаев, когда многократно рассеивающая случайно-неоднородная зондируемая среда не обладает выраженной макроскопической оптической анизотропией, определение всех элементов вектора Стокса зачастую является избыточным, и поляризационная диагностика подобных объектов может быть осуществлена путём зондирования излучением с исходной линейной поляризацией и измерения степени линейной поляризации $P_{\mathrm{L}} = Q/I = (I_\parallel - I_\perp)/(I_\parallel + I_\perp)$ рассеянного объектом излучения (в приведённом выражении $I_\parallel$ и $I_\perp$ — интенсивности ко-поляризованной и кросс-поляризованной составляющих рассеянного излучения соответственно). Эффективность данного подхода, не требующего для реализации сложного поляриметрического оборудования, существенно упрощающего интерпретацию полученных результатов и потому допускающего применимость не только в лабораторных, но и в клинических условиях, продемонстрирована в ряде работ [11–16].

Получаемые при поляризационных измерениях значения $P_{\mathrm{L}}$ определяются длиной волны зондирующего излучения, условиями его ввода в исследуемую среду и детектирования рассеянного излучения, а также морфологическими характеристиками зондируемой биоткани, поэтому степень линейной поляризации рассеянного излучения может быть рассмотрена в качестве диагностического параметра. В рамках современных представлений о поляризационных эффектах при многократном рассеянии света случайно-неоднородными средами изменение состояния поляризации распространяющегося в среде излучения рассматривается как результат когерентного или некогерентного сложения парциальных волн, испытавших различное число актов рассеяния и формирующих регистрируемое рассеянное световое поле [31–34]. В качестве обобщённой характеристики, описывающей усреднённую по ансамблю парциальных составляющих скорость убывания степени поляризации, вводится длина деполяризации для линейно поляризованного излучения $\xi_{\mathrm{L}}$, соответствующая расстоянию в рассеивающей среде, на котором степень поляризации парциальных составляющих уменьшается в $e$ раз по отношению к исходному значению [34]. Степень поляризации монохроматического излучения, многократно рассеянного случайно-неоднородной средой, может быть представлена в форме интегрального преобразования функции плотности вероятности $\rho(s)$ значений оптических путей парциальных составляющих регистрируемого рассеянного поля:

$$P_{\mathrm{L}} = \int\limits_0^\infty f_{\mathrm{L}}(s,\xi_{\mathrm{L}})\rho(s)\,\mathrm{d}s, \tag{2}$$

где зависимость $\rho(s)$, удовлетворяющая условию нормировки $\int_0^\infty \rho(s)\,\mathrm{d}s = 1$, может быть получена в результате решения нестационарного скалярного уравнения переноса излучения, описывающего распространение в зондируемой среде ультракороткого светового импульса для заданных условий зондирования и детектирования рассеянного излучения [33–35]. Теоретическое рассмотрение распространения поляризованного излучения в случайно-неоднородных средах, проведённое с использованием диаграммной техники и метода Монте-Карло, а также анализ экспериментальных данных для различных модельных рассеивающих сред [31–35] позволяют предложить экспоненциальную форму ядра интегрального преобразования (2): $f_{\mathrm{L}}(s,\xi_{\mathrm{L}}) \propto \exp(-s/\xi_{\mathrm{L}})$.

Для многократно рассеивающих сред без двулучепреломления длина деполяризации зависит от соотношения между средним размером рассеивающих центров и длиной волны зондирующего излучения, дисперсии флуктуаций показателя преломления среды, типа поляризации зондирующего излучения (линейная или циркулярная), а также режима рассеяния (рассеяние вперёд или обратное рассеяние). В качестве фундаментальной характеристики затухания поляризации зондирующего излучения в многократно рассеивающих средах также может использоваться отношение длины деполяризации к транспортной длине рассеивающей среды $m_{\mathrm{L}} = \xi_{\mathrm{L}}/l^*$ (транспортная длина вводится как характерное расстояние в среде, на котором информация о начальном направлении распространения зондирующего пучка (до его введения в среду) полностью теряется [25]).

В частности, при использовании линейно поляризованного света для зондирования многократно рассеивающих сред, состоящих из оптически мягких сферических диэлектрических частиц, в режиме детектирования рассеянного вперёд излучения параметр $m_{\mathrm{L}}$ увеличивается с ростом дифракционного параметра рассеивающих центров $ka$ ($k$ — волновое число зондирующего излучения в рассеивающей среде, $a$ — радиус рассеивающих частиц), достигая максимума для значения $ka$, соответствующего первому резонансу Ми для зависимости сечения рассеяния частиц от дифракционного параметра. Напротив, для подобных рассеивающих систем в случае детектирования рассеянного назад излучения, представляющем наибольший интерес с точки зрения диагностических приложений, параметр $m_{\rm L}$ убывает с ростом $ka$, достигая значения $m_{\rm L} \approx 1$ для рассеивающих сред с выраженной анизотропией рассеяния ($g \geq 0{,}85$, см. рис. 1) [36]. Интерпретация данного явления рассмотрена в работах [33, 36].

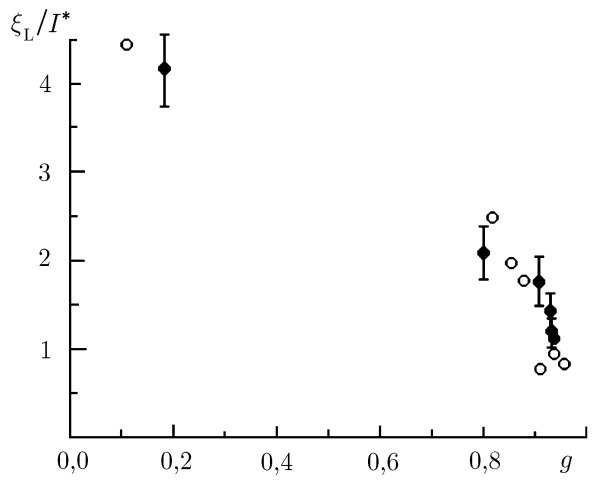



Рис. 1. Зависимость нормированной длины деполяризации в режиме обратного рассеяния линейно поляризованного излучения оптически плотными случайно-неоднородными средами от параметра анизотропии рассеяния зондируемой среды [36]: ○ — результаты экспериментов с модельными рассеивающими средами — суспензиями полистироловых частиц в воде, полимерными и композитными материалами; • — результаты статистического моделирования

Следует отметить, что для макроскопически однородных и изотропных биотканей, характеризуемых выраженными флуктуациями локального двулучепреломления на микроскопическом (клеточном) уровне, данное свойство должно приводить к дополнительному подавлению поляризации распространяющегося излучения по сравнению с «микроскопически изотропными» рассеивающими средами с одинаковыми значениями транспортной длины и анизотропии рассеяния. Видимо, данное обстоятельство и является причиной экспериментально наблюдаемого в отдельных случаях существенного различия деполяризующих свойств in vitro биологических тканей и модельных рассеивающих сред [37–39].

Средняя глубина проникновения света в зондируемые случайно-неоднородные среды в режиме детектирования обратно рассеянного излучения сопоставима с транспортной длиной и для большинства оптически плотных биологических тканей при использовании излучения с длинами волн, соответствующими так называемому терапевтическому окну (от 0,7 до 1,2 мкм [1–3]), не превышает нескольких миллиметров. При этом поляризационные характеристики регистрируемого оптического поля в значительной степени определяются вкладом в его формирование парциальных составляющих, распространяющихся в зондируемой среде на расстояния порядка транспортной длины. Данная особенность проявляется, в частности, в существовании остаточной поляризации обратно рассеянного излучения; при зондировании рассеивающих сред с пренебрежимо малым поглощением широким коллимированным пучком линейно поляризованного излучения степень остаточной поляризации может быть приближённо определена с использованием следующего выражения [36]:

$$P_{\rm L}^{\rm r} \approx 1{,}5 \exp(-\gamma \sqrt{3l^*/\xi_{\rm L}}), \qquad (3)$$

где $\gamma$ — коэффициент, зависящий от отражательной способности границы раздела зондируемой среды и свободного пространства. В частности, для рассеивающей среды с эффективным показателем преломления порядка 1,35 $\gamma \approx 2{,}0$. Для зондируемых сред, состоящих из оптически мягких диэлектрических частиц с $ka \ll 1$ («рэлеевские рассеиватели»), длина деполяризации $\xi_{\rm L}$ велика по сравнению с транспортной длиной (по различным оценкам $\xi_{\rm L}$ составляет от $2{,}7l^*$ до $4{,}0l^*$ [34, 36]), и степень остаточной поляризации обратно рассеянного линейно поляризованного излучения может достигать $0{,}3 \div 0{,}4$, в то время как для сред с выраженной анизотропией рассеяния (режим рассеяния Ми) $\xi_{\rm L} \approx l^*$, и степень остаточной поляризации $P_{\rm L}^{\rm r}$ невелика.

Существенное влияние на степень остаточной поляризации обратно рассеянного излучения оказывает поглощение зондирующего излучения в исследуемой среде. Данное явление обусловлено затуханием парциальных составляющих, распространяющихся в среде на большие расстояния и, соответственно, уменьшением их влияния на формирование регистрируемого рассеянного оптического поля. Теоретический анализ зависимости степени остаточной линейной поляризации обратно рассеянного излучения от оптических параметров рассеивающей среды с конечным поглощением, проведённый на основе концепции подобия статистических моментов многократно рассеянных световых полей [40], позволяет получить следующее приближённое выражение для $P_{\rm L}^{\rm r}$:

$$P_{\rm L}^{\rm r} \approx 1{,}5 \exp\Big[-\gamma \left(\sqrt{3l^* \left(1+\mu_{\rm a}\xi_{\rm L}\right)/\xi_{\rm L}} - \sqrt{3l^*\mu_{\rm a}}\,\right)\Big], \qquad (4)$$

где $\mu_{\rm a}$ — коэффициент поглощения рассеивающей среды на длине волны зондирующего излучения. На рис. 2 приведены теоретические зависимости степени остаточной поляризации обратно рассеянного излучения от безразмерного параметра $l^*\mu_{\rm a}$ для случая зондирования оптически плотной рассеивающей среды широким коллимированным пучком линейно поляризованного света. Кривая *1* соответствует случаю зондирования среды, состоящей из рэлеевских частиц с $ka \ll \ll 1$, кривая *2* — случаю зондирования неупорядоченной системы рассеивающих центров с выраженной анизотропией рассеяния (режим рассеяния Ми).

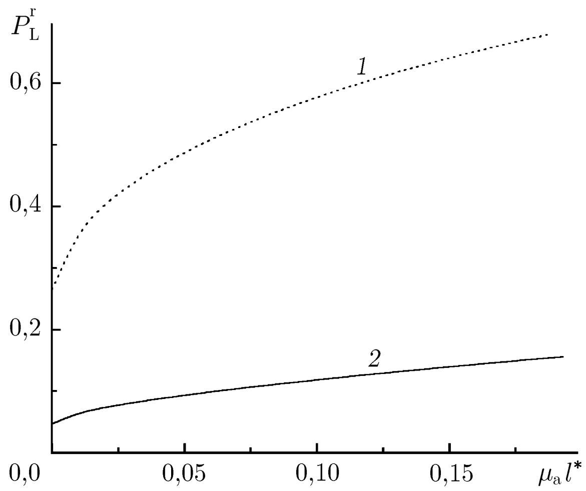



Рис. 2. Зависимости степени остаточной поляризации линейно поляризованного света, диффузно отражённого поглощающими случайно-неоднородными средами, от безразмерного параметра $\mu_{\rm a}l^*$ [40]. Кривая *1* (пунктирная линия) соответствует среде, состоящей из рэлеевских частиц, кривая *2* (сплошная линия) — среде с выраженным анизотропным рассеянием

Таким образом, для зондируемых сред с выраженным селективным поглощением в определённых интервалах длин волн зондирующего излучения спектр степени остаточной поляризации будет характеризоваться наличием максимумов, соответствующих полосам селективного поглощения среды. Как будет показано ниже, в случае поляризационной диагностики и визуализации биологических тканей роль подобных селективных поглотителей — хромофоров — естественным образом выполняют меланин и гемоглобин крови. Кроме того, может быть предложена методика поляризационной диагностики с использованием контролируемого изменения оптических характеристик биоткани в результате введения в зондируемый объём (например, путём диффузии) биологически безопасных селективных поглотителей или иммерсионных агентов.

## 2. СПЕКТРАЛЬНО-ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ДИАГНОСТИКИ И ВИЗУАЛИЗАЦИИ БИОТКАНЕЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ $P_{\rm L}^{\rm r}$ КАК ДИАГНОСТИЧЕСКОГО ПАРАМЕТРА

Установленные в результате теоретических и экспериментальных исследований закономерности, характеризующие влияние оптических параметров зондируемой среды на поляризационные характеристики рассеянного зондируемой средой света (в частности, на степень остаточной поляризации обратно рассеянного излучения), позволили предложить ряд достаточно простых и эффективных методов исследования морфофункционального состояния биологических тканей с использованием немонохроматического или квазимонохроматического линейно поляризованного зондирующего излучения. В части разработанных методик применяется анализ изображений участка поверхности зондируемой биологической ткани, полученных с использованием спектральной и поляризационной фильтрации диффузно отражённого тканью зондирующего излучения, в связи с чем данные методики могут быть условно определены как спектрально-поляризационная видеорефлектометрия диффузно отражённого излучения. Перспективы применения аналогичных подходов в клинической диагностике для визуализации патологических изменений подповерхностных слоёв различных биологических тканей неоднократно обсуждались в ряде работ [11–15], однако нами впервые рассмотрены возможности количественной диагностики морфологического и функционального состояния биологических тканей на основе разработанных феноменологических представлений о деполяризующих свойствах биотканей как многократно рассеивающих случайно-неоднородных сред [16, 41].

### 2.1. Поляризационная отражательная спектроскопия биотканей

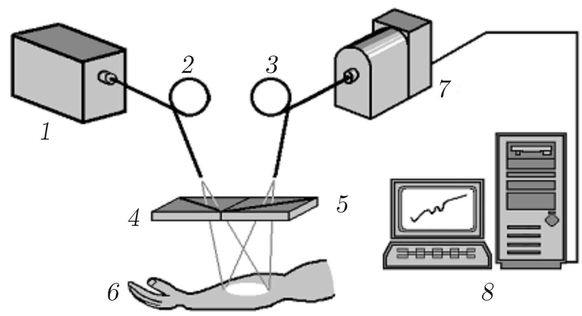


Рис. 3. Схема экспериментальной установки для измерения поляризационных спектров отражения in vivo биотканей: *1* — источник немонохроматического излучения (галогеновая лампа), *2* и *3* — волоконно-оптические жгуты, *4* и *5* — поляризационные фильтры, *6* — исследуемый объект, *7* — оптический многоканальный анализатор, *8* — персональный компьютер

Несмотря на то, что развитие метода отражательной спектроскопии биотканей позволило разработать целый ряд диагностических методов и устройств, нашедших широкое применение в экспериментальной и клинической медицине, возможности этого метода реализованы далеко не полностью. Зондирование биоткани линейно поляризованным излучением с последующим измерением спектрального состава ко- и кросс-поляризованных компонент обратно рассеянного биотканью излучения позволяет не только количественно оценить хромофорный состав среды, но и оценить глубину залегания того или иного хромофора.

В данном разделе представлены результаты, демонстрирующие перспективность использования метода поляризационной отражательной спектроскопии для диагностики состояния кожной ткани, в частности для оценки глубины залегания и кровенаполненности дермальных кровеносных сосудов.

Для кожной ткани в видимом диапазоне спектра средний коэффициент рассеяния $\mu_{\mathrm{s}}$ составляет порядка 60 мм$^{-1}$, параметр анизотропии $g \approx 0{,}85$. Это позволяет оценить транспортную длину $l^*$ как величину порядка 100 мкм. Доминирующими в рассеянии являются структуры, характеризующиеся значениями дифракционного параметра $ka > 1$, в результате длина деполяризации $\xi$ оказывается сравнима с транспортной длиной рассеяния $l^*$, что превышает толщину эпидермиса. С другой стороны, наличие в кожной ткани эффективных хромофоров (меланина в эпидермисе и гемоглобина дермальной крови) должно приводить к возрастанию степени остаточной поляризации обратно рассеянного излучения в спектральных интервалах, соответствующих полосам поглощения хромофоров. Более того, эти хромофоры преимущественно располагаются на различной глубине, которая может быть оценена по наличию в разностных поляризационных спектрах характерных полос поглощения отмеченных хромофоров.

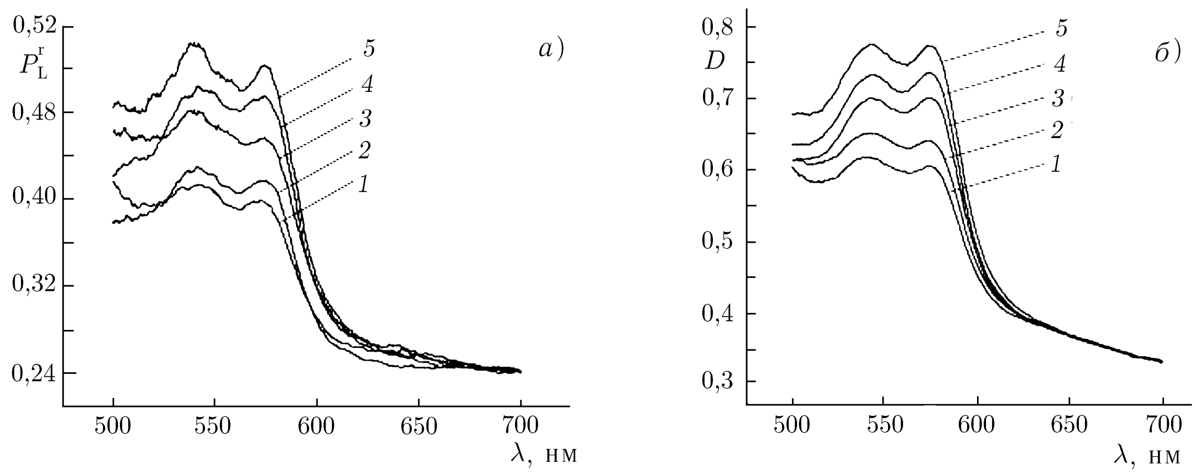



Рис. 4. (*а*) — спектры степени остаточной поляризации зондирующего линейно поляризованного излучения, диффузно отражённого кожей человека (тип II по Фитцпатрику) с эритемой разной степени: кривая *1* соответствует индексу эритемы $EI = 157$; *2* — $EI = 223$; *3* — $EI = 249$; *4* — $EI = 275$; *5* — $EI = 290$. (*б*) — спектры эффективной оптической плотности кожи человека с эритемой разной степени: кривая *1* соответствует индексу эритермы $EI = 137$; *2* — $EI = 157$; *3* — $EI = 213$; *4* — $EI = 249$; *5* — $EI = 288$

На рис. 3 приведена схема установки для реализации данного метода. Излучение широкополосного источника света *1* (галогеновая лампа мощностью 200 Вт) доставляется к исследуемому объекту с помощью волоконно-оптического жгута *2*, на выходном конце которого был закреплён широкополосный поляризационный фильтр *4*, после прохождения которого свет становился линейно поляризованным. Диаметр освещаемого участка поверхности составляет приблизительно 8 мм. Сбор отражённого кожей излучения осуществляется с помощью волоконно-оптического жгута *3*, на входном конце которого располагался поляризационный фильтр *5* с возможностью изменения его ориентации (параллельной или ортогональной) относительно поляризационного фильтра, расположенного на облучающем световоде. Использование волоконно-оптического жгута для сбора отражённого объектом излучения обусловлено наличием остаточной поляризации прошедшего через световод излучения в случае использования моноволокна, что отражается на форме регистрируемого спектра (дифракционные спектрофотометры чувствительны к состоянию поляризации регистрируемого излучения). С целью исключения попадания в приёмную систему зеркально отражённого от объекта *6* света, волоконно-оптический жгут располагался под углом приблизительно 20° по отношению к нормали к поверхности объекта. Дистальный конец жгута располагается перед входной щелью оптического многоканального анализатора (ОМА) спектров *7* ЛЭСА-6.

Установка позволяет осуществлять измерения спектров диффузно отражённого излучения в случае параллельно ($R_\parallel(\lambda)$) и перпендикулярно ($R_\perp(\lambda)$) ориентированных поляризационных фильтров. Из измеренных спектров $R_\parallel(\lambda)$ и $R_\perp(\lambda)$ формируются разностные поляризационные спектры $\Delta R(\lambda)$ и спектры степени остаточной поляризации $P_\mathrm{L}^\mathrm{r}(\lambda)$ отражённого от объекта излучения в соответствии со следующими выражениями:

$$\Delta R(\lambda) = R_\parallel(\lambda) - R_\perp(\lambda), \tag{5}$$

$$P_\mathrm{L}^\mathrm{r}(\lambda) = \frac{R_\parallel(\lambda) - R_\perp(\lambda)}{R_\parallel(\lambda) + R_\perp(\lambda)}\,. \tag{6}$$

В качестве примера использования данного метода могут быть приведены результаты исследования спектров диффузного отражения участков кожной поверхности внутренней стороны предплечья в процессе послойного удаления поверхностных слоёв эпидермиса с использованием технологии кожных отрывов, а также кожи с индуцированной ультрафиолетовым облучением эритемой, количественная оценка степени проявления которой проводилась с помощью эритемамеланинометра ЕММ-01 [42].

На рис. 4*а* приведены спектральные распределения степени остаточной поляризации $P_{\mathrm{L}}^{\mathrm{r}}(\lambda)$ излучения, обратно рассеянного кожей с эритемой разной степени. Необходимо отметить, что спектральные зависимости степени остаточной поляризации аналогичны приведённым на рис. 4*б* спектрам эффективной оптической плотности $D$ кожи и отражают факт наличия в кожной ткани меланина (увеличение степени поляризации в коротковолновой области спектра) и крови (увеличение степени поляризации в спектральных полосах поглощения гемоглобина). Увеличение степени эритемы, отражающее факт увеличения поглощающих свойств кожной ткани, обусловленного возрастанием концентрации крови в папиллярной дерме, приводит к увеличению остаточной степени поляризации в полосах поглощения гемоглобина. Рисунок 5 иллюстрирует эффект влияния содержания крови в кожной ткани на степень остаточной поляризации, измеренной на длинах волн 545 и 575 нм. Таким образом, измерения спектров степени остаточной поляризации отражённого кожей излучения дают возможность селективно отслеживать изменение концентрации хромофоров в кожной ткани (в частности, гемоглобина).

Необходимо отметить, что степень остаточной поляризации чувствительна к изменениям содержания хромофора в зондируемой биоткани независимо от причины, вызвавшей такое изменение. Это иллюстрирует рис. 6*а*, где приведены спектры степени остаточной поляризации излучения, отражённого кожей с эритемой, причём возникновение эритемы являлось следствием либо ультрафиолетового облучения кожной поверхности, либо послойного удаления эпидермиса. Разностные поляризационные спектры для рассматриваемых случаев, приведённые на рис. 6*б*, отчётливо показывают присутствие крови во втором случае (на приведённом спектре проявляются полосы поглощения оксигенированной формы гемоглобина (длины волн 545 и 575 нм)), что является следствием уменьшения толщины эпидермиса. Более того, характер поведения спектров в коротковолновой области указывает на уменьшение содержания меланина в случае послойного удаления эпидермиса.

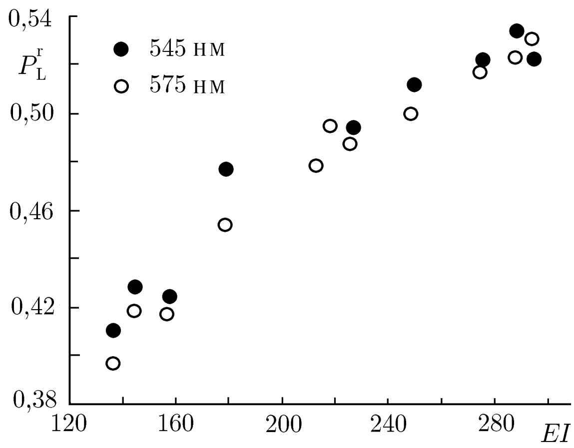


Рис. 5. Зависимость степени остаточной поляризации излучения, диффузно отражённого кожей человека, от индекса эритемы

В разностном поляризационном спектре нормальной кожи кровь папиллярной дермы практически не проявляется. Уменьшение толщины эпидермиса в результате его послойного удаления приводит к тому, что зондирующее излучение в значительной степени сохраняет состояние поляризации в области папиллярной дермы, что проявляется в появлении полос поглощения гемоглобина в разностном поляризационном спектре (рис. 6*б*).

По проявлению в разностном поляризационном спектре полос поглощения гемоглобина можно судить о толщине эпидермального слоя кожи, а точнее, о глубине залегания кровеносных сосудов в кожной ткани. На рис. 6*в* приведены разностные поляризационные спектры отражения кожи с эпидермисом разной толщины (толщина удалённого слоя эпидермиса оценивалась

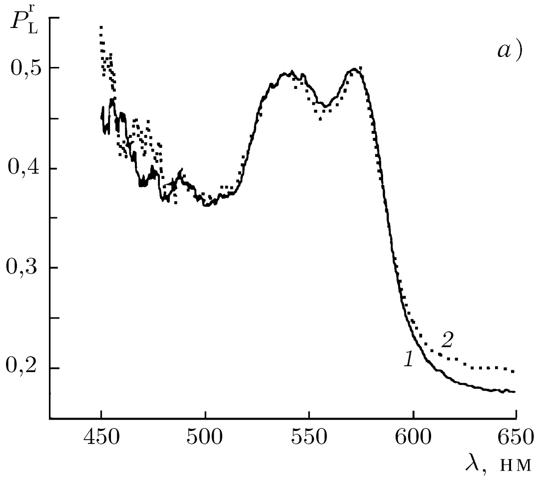



Рис. 6 *а*. Спектры степени остаточной поляризации излучения, диффузно отражённого кожей человека (тип II по Фитцпатрику) с эритемой: кривая *1* соответствует $EI = 294$, эритема возбуждена ультрафиолетовым облучением, кривая *2* — $EI = 299$, эритема возникла в результате частичного удаления эпидермиса

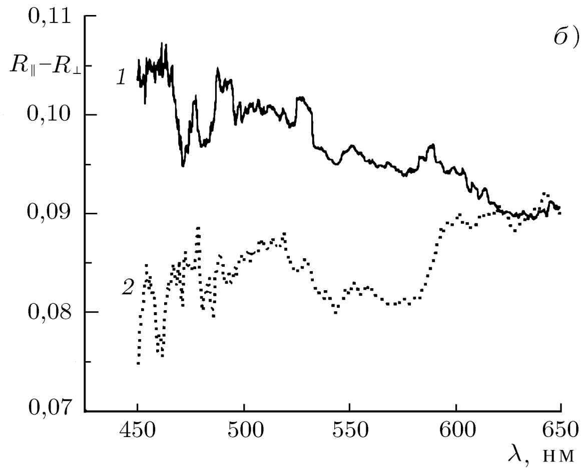



Рис. 6 *б*. Разностные поляризационные спектры излучения, диффузно отражённого эритематозной кожей. Кривая *1* соответствует $EI = 294$, эритема возбуждена ультрафиолетовым облучением, кривая *2* — $EI = 299$, эритема возникла в результате частичного удаления эпидермиса

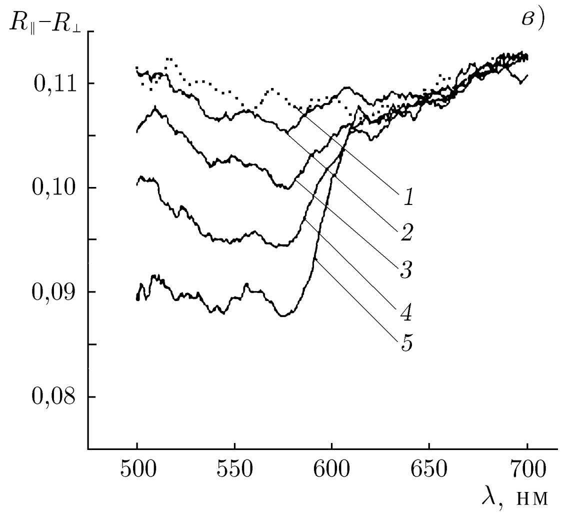



Рис. 6 *в*. Изменение разностных поляризационных спектров кожи по мере послойного удаления поверхностных слоёв эпидермиса: кривая *1* — нормальная кожа, *2* — толщина удалённого слоя 40 мкм; *3* — 50 мкм; *4* — 60 мкм; *5* — 70 мкм

по числу последовательных отрывов с толщиной около 4 мкм).

С целью количественного анализа влияния толщины слоя эпидермиса и изменений объёмного содержания крови в дерме на степень остаточной линейной поляризации диффузно отражённого света была рассмотрена теоретическая модель кожи как деполяризующей случайно-неоднородной среды, состоящей из двух слоёв с существенно различающимися оптическими параметрами. Максимальная толщина первого (верхнего) слоя $L$, моделирующего эпидермис, принята равной 100 мкм, в то время как толщина нижележащего слоя (дермы) предполагалась равной 2 мм. Предполагалось, что зондирование осуществляется широким коллимированным пучком линейно поляризованного монохроматического света с длиной волны, соответствующей одному из максимумов поглощения гемоглобина крови в видимой области (575 нм). В соответствии с данными работ [28, 43, 44], для моделирования использованы следующие значения оптических параметров слоёв (коэффициента поглощения $\mu_\mathrm{a}$, коэффициента рассеяния $\mu_\mathrm{s}$ и параметра анизотропии рассеяния $g$): $\mu_\mathrm{a}^{(1)} = 1{,}0$ мм$^{-1}$, $\mu_\mathrm{s}^{(1)} = 20{,}0$ мм$^{-1}$, $g^{(1)} = 0{,}79$; $\mu_\mathrm{a}^{(2)} = \mu_\mathrm{a}^\mathrm{d}\,(1 - f) + \mu_\mathrm{a}^\mathrm{b} f$, $\mu_\mathrm{s}^{(2)} = \mu_\mathrm{s}^\mathrm{d}\,(1 - f) + \mu_\mathrm{s}^\mathrm{b} f$, где $\mu_\mathrm{a}^\mathrm{d}$ и $\mu_\mathrm{s}^\mathrm{d}$ — оптические параметры обескровленной дермы ($\mu_\mathrm{a}^\mathrm{d} = 0{,}28$ мм$^{-1}$ и $\mu_\mathrm{s}^\mathrm{d} = 21{,}5$ мм$^{-1}$ для длины волны зондирующего излучения 575 нм), $\mu_\mathrm{a}^\mathrm{b}$ и $\mu_\mathrm{s}^\mathrm{b}$ — аналогичные параметры для крови ($\mu_\mathrm{a}^\mathrm{b} = 0{,}28$ мм$^{-1}$ и $\mu_\mathrm{s}^\mathrm{b} = 21{,}5$ мм$^{-1}$). Для первого слоя объёмное содержание крови $f$ полагалось равным нулю, в то время как коэффициенты поглощения и рассеяния второго слоя предполагались линейно зависящими от объёмного содержания крови в дерме. Вычисление степени остаточной линейной поляризации диффузно отражённого зондирующего излучения осуществлялось с использованием выражения (2) с экспоненциальным ядром, при этом длина деполяризации $\xi_{\mathrm{L}}$ полагалась равной транспортной длине для зондируемой рассеивающей среды (как в случае рассеивающих систем, характеризуемых режимом рассеяния Ми [36]). Распределения плотности вероятности $\rho(s)$ оптических путей парциальных составляющих рассеянного поля для заданных условий освещения зондируемой среды и детектирования диффузно отражённого излучения при различных значениях толщины первого слоя и объёмного содержания крови в нижележащем слое генерировались путём статистического моделирования переноса излучения в модельной среде с использованием метода Монте-Карло. В ходе статистического моделирования учтены конкретные особенности ввода зондирующего излучения и детектирования рассеянного излучения, соответствующие условиям проведения описанного выше спектрально-поляризационного эксперимента.

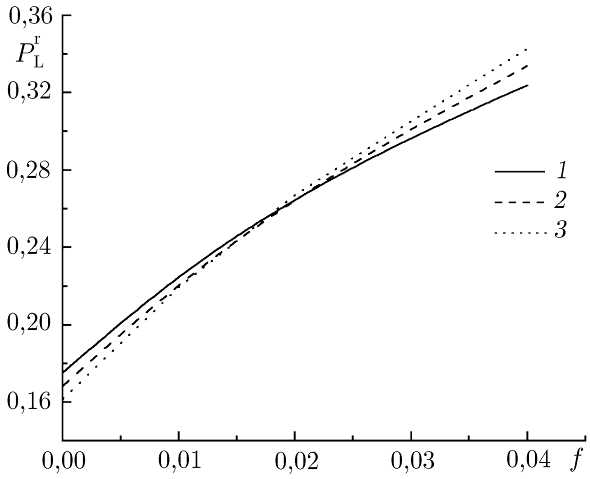



Рис. 7. Теоретические зависимости степени остаточной поляризации диффузно отражённого излучения от объёмного содержания крови в дерме $f$ и толщины слоя эпидермиса $L$: кривая *1* соответствует $L = 100$ мкм, *2* — $L = 60$ мкм, *3* — $L = 20$ мкм

На рис. 7 представлены теоретические зависимости степени остаточной линейной поляризации диффузно отражённого излучения от толщины слоя эпидермиса и объёмного содержания крови в дерме для разработанной модели кожи. Полученные значения степени остаточной поляризации для выбранных в ходе моделирования интервалов изменения параметров модели $L$ и $f$, соответствующих возможным значениям реальных морфологических и функциональных характеристик кожи человека (толщина эпидермиса и среднее объёмное содержание крови в дерме) соответствуют значениям $P_{\mathrm{L}}^{\mathrm{r}}$, полученным в экспериментах с in vivo кожей человека, подвергшейся механическому удалению эпидермиса или его лазерной абляции [45]. Это позволяет сделать вывод о том, что несмотря на простоту, разработанная теоретическая модель достаточно адекватно описывает наблюдаемые в эксперименте изменения морфофункционального состояния in vivo кожи человека и поэтому может быть применена для количественной интерпретации результатов спектрально-поляризационной диагностики. Следует отметить, что $P_{\mathrm{L}}^{\mathrm{r}}$ как диагностический параметр характеризуется существенно более высокой чувствительностью к изменениям объёмного содержания крови в дерме, чем к изменениям толщины эпидермиса. В то же время анализ результатов моделирования и данных, полученных в экспериментах с модельными рассеивающими средами и in vivo кожей человека в процессе послойного механического удаления эпидермиса, показывает, что измеряемые в полосах поглощения гемоглобина значения $\Delta R$ характеризуются достаточно высокой чувствительностью к изменениям толщины верхнего, не содержащего гемоглобина слоя ткани. Таким образом, методика диагностики морфологического и функционального состояния кожи человека в процессе лазерной абляции эпидермиса может быть построена на измерениях $P_{\mathrm{L}}^{\mathrm{r}}$ и $\Delta R$ в полосах поглощения гемоглобина и вне полос селективного поглощения (измерения вне полос поглощения могут быть использованы в качестве калибровочных).

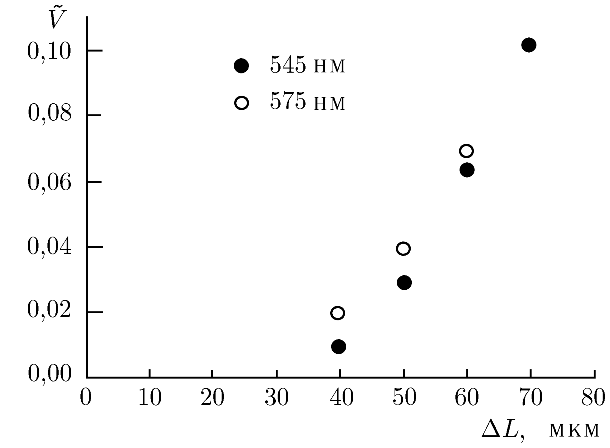



Рис. 8. Изменение контраста полос поглощения гемоглобина $\tilde V$ в разностных поляризационных спектрах кожи человека в зависимости от толщины $\Delta L$ удалённого слоя эпидермиса

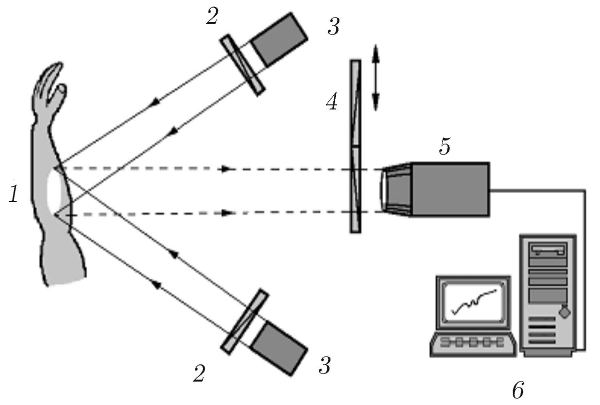



Рис. 9. Схема экспериментальной установки для поляризационной визуализации in vivo биотканей: *1* — объект исследования, *2* и *4* — поляризационные фильтры, *3* — источники света, *5* — видеокамера, *6* — персональный компьютер

В качестве количественной характеристики толщины эпидермиса (глубины залегания кровеносных сосудов) возможно использование параметра $\tilde V$, который показывает контраст проявления полос поглощения гемоглобина в разностном спектре:

$$\tilde V = \frac{\Delta R_{650} - \Delta R_{545}}{\Delta R_{650} + \Delta R_{545}} \tag{7а}$$

или

$$\tilde V = \frac{\Delta R_{650} - \Delta R_{575}}{\Delta R_{650} + \Delta R_{575}}\,. \tag{7б}$$

В соотношениях (7) индексы обозначают длины волн (в нанометрах), соответствующие полосам поглощения оксигемоглобина (545 и 575 нм), и области, где поглощение гемоглобина мало (длина волны 650 нм).

Рисунок 8 иллюстрирует изменение контраста полос поглощения гемоглобина в разностном поляризационном спектре с уменьшением толщины эпидермиса.

### 2.2. Поляризационная визуализация биотканей

Отмеченные особенности формирования поляризационных характеристик обратно рассеянного излучения с исходной линейной поляризацией позволяют осуществить визуализацию рассеивающих сред, в том числе и биотканей, путём анализа пространственных распределений поляризационных характеристик (интенсивностей ко- и кросс-поляризованных составляющих и степени остаточной поляризации) обратно рассеянного излучения. Несомненным является перспективность использования метода поляризационной визуализации, когда для оценки пространственного распределения хромофорного состава биоткани формируется изображение объекта, где в качестве параметров визуализации используются поляризационные характеристики обратно рассеянного излучения.

Одним из преимуществ данного метода является простота его технической реализации, пример которой приведён на рис. 9. Монохромные изображения кожной поверхности регистрируются с помощью видеосистемы VS-CTT-60-075 (производитель — предприятие «Видеоскан», Россия).

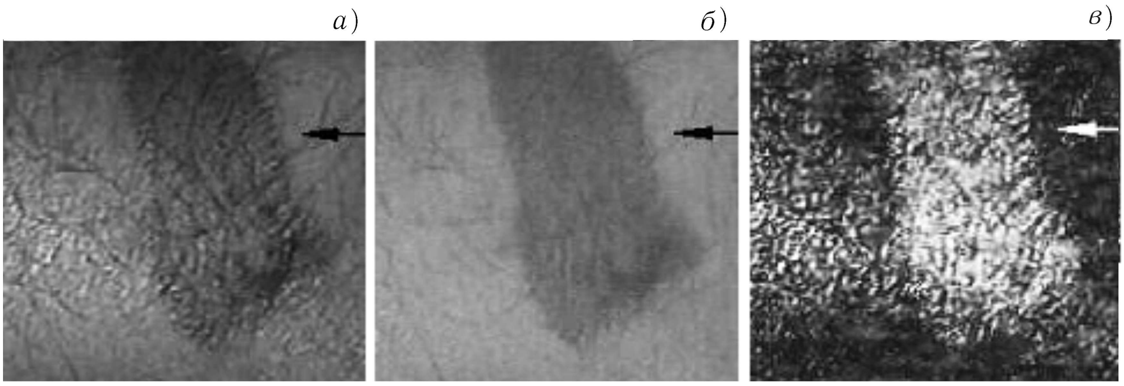



Рис. 10. Поляризационные изображения поражённого ожогом участка поверхности кожи: (*а*) — регистрация ко-поляризованной составляющей диффузно отражённого излучения, (*б*) — регистрация кросс-поляризованной составляющей, (*в*) — изображение, восстановленное с использованием степени остаточной поляризации диффузно отражённого света как параметра визуализации

С целью получения равномерной освещённости изучаемого объекта *1* и исключения влияния зеркального компонента в качестве источника освещения *3* использовались четыре галогеновые лампы мощностью 50 Вт каждая, при этом излучение каждой из них направлялось под углом около 30° относительно нормали к объекту. Перед источниками освещения устанавливались идентично ориентированные поляризационные фильтры *2*, а перед видеокамерой устанавливается поляризационный фильтр-анализатор *4* с возможностью изменения его ориентации относительно поляризации зондирующего света.

Изображение кожной поверхности, где параметром визуализации является степень остаточной поляризации диффузно отражённого кожей линейно поляризованного света, позволяет оценить пространственное распределение в коже различных хромофоров. Изображение объекта в шкале значений степени остаточной поляризации $P_{\mathrm{L}}^{\mathrm{r}}$ в спектральном интервале, соответствующем поглощению определённых хромофоров биоткани, позволяет локализовать области повышенного содержания хромофора, соответствующие фрагментам изображения с повышенной яркостью.

На рис. 10 представлены монохромные изображения кожной поверхности с ожогом, полученные в спектральной области поглощения гемоглобина (в этом случае перед объективом видеокамеры устанавливается интерференционный светофильтр с длиной волны около 550 нм) при параллельно (рис. 10*а*) и ортогонально (рис. 10*б*) ориентированных поляризаторах, а также изображение, где параметром визуализации является степень остаточной поляризации (рис. 10*в*). Следует отметить, что в последнем случае контраст изображения (приблизительно 0,49) значительно превышает контраст монохромных изображений (0,08÷0,13), что позволяет сделать вывод о достаточной эффективности данного метода визуализации.

### 2.3. Поляризационная отражательная спектроскопия с использованием частично когерентного излучения

Один из возможных подходов к спектрально-поляризационной диагностике и визуализации случайно-неоднородных сред основан на применении в качестве зондирующего излучения частично когерентного света с перестраиваемой длиной когерентности и анализе зависимостей поляризационно-чувствительных статистических моментов пространственных флуктуаций интенсивности рассеянного света от длины когерентности. В качестве диагностического параметра в данном случае может быть использовано значение поляризационно-чувствительного контраста спекл-модулированных изображений поверхности зондируемого объекта, формируемых в ре-

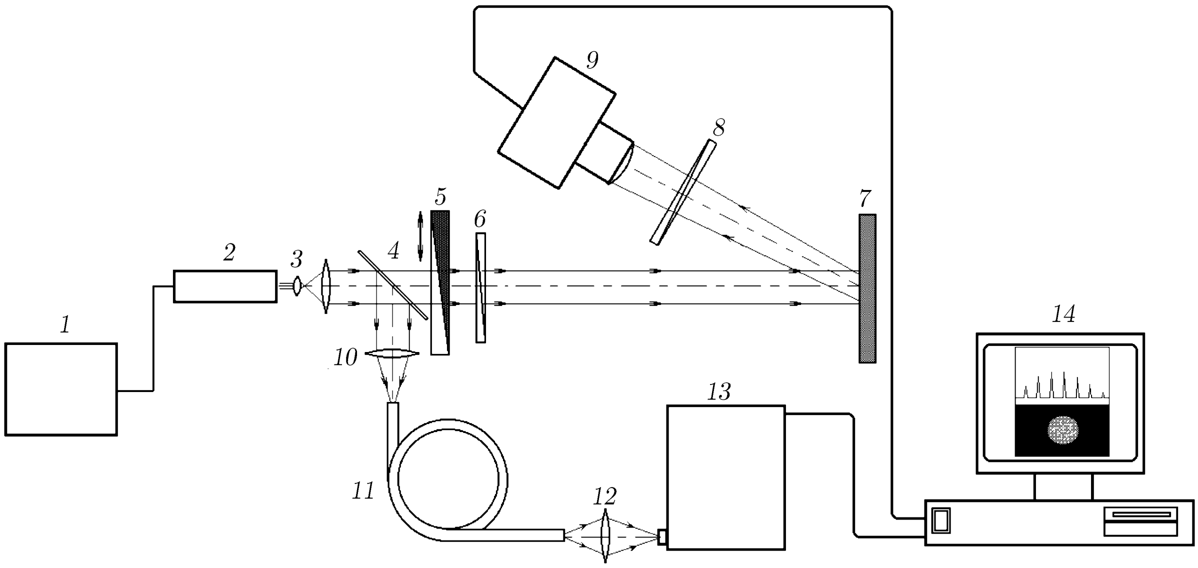



Рис. 11. Схема установки для поляризационной отражательной спектроскопии случайно-неоднородных сред с использованием зондирующего частично когерентного поляризованного излучения с перестраиваемой длиной когерентности: *1* — источник питания полупроводникового лазера с регулируемым током накачки, *2* — полупроводниковый лазер, *3* — коллиматор (расширитель пучка зондирующего излучения), *4* — светоделитель, *5* — оптический клин (регулируемый аттенюатор), *6* и *8* — поляризационные фильтры, *7* — исследуемый образец, *9* — ПЗС-камера, *10* и *12* — линзы, *11* — световодный жгут, *13* — спектрофотометр, *14* — персональный компьютер

зультате его освещения широким коллимированным пучком линейно поляризованного частично когерентного света. Теоретический анализ процесса формирования спекл-модулированных изображений в условиях поляризационной дискриминации детектируемого рассеянного излучения путём выделения ко-поляризованной и кросс-поляризованной составляющих приводит к следующему выражению для контраста ко-поляризованных или кросс-поляризованных спеклов:

$$C_\kappa = \frac{\sqrt{\langle (I_\kappa - \langle I_\kappa \rangle)^2 \rangle}}{\langle I_\kappa \rangle} = \left( \iint\limits_0^\infty |g(\Delta s)|^2 \, \rho_\kappa(s + \Delta s) \, \rho_\kappa(s) \, \mathrm{d}(\Delta s) \, \mathrm{d}s \right)^{1/2}, \tag{8}$$

где индекс $\kappa$ принимает значения $\|$ или $\perp$, $|g(\Delta s)|$ — модуль функции когерентности источника зондирующего излучения, $\rho_{\|}(s)$ и $\rho_\perp(s)$ — функции плотности вероятности значений оптических путей парциальных волн, формирующих ко-поляризованную и кросс-поляризованную составляющие детектируемого рассеянного излучения. Распределения плотности вероятности оптических путей $\rho_{\|}(s)$ и $\rho_\perp(s)$ могут быть получены путём нахождения функции Грина нестационарного скалярного уравнения переноса излучения в зондируемой среде с её последующей нормализацией экспоненциально затухающими весовыми функциями. Также «скалярная» плотность вероятности оптических путей может быть получена путём статистического моделирования переноса излучения в рассеивающей среде на основе метода Монте-Карло.

Одним из наиболее удобных способов получения зондирующего светового пучка с перестраиваемой длиной когерентности является использование полупроводниковых лазеров с током накачки, регулируемым вблизи порога генерации. Схема экспериментальной установки, используемой для спектрально-поляризационной диагностики многократно рассеивающих случайно-неоднородных сред, включая биоткани, приведена на рис. 11. В качестве источника зондирующего

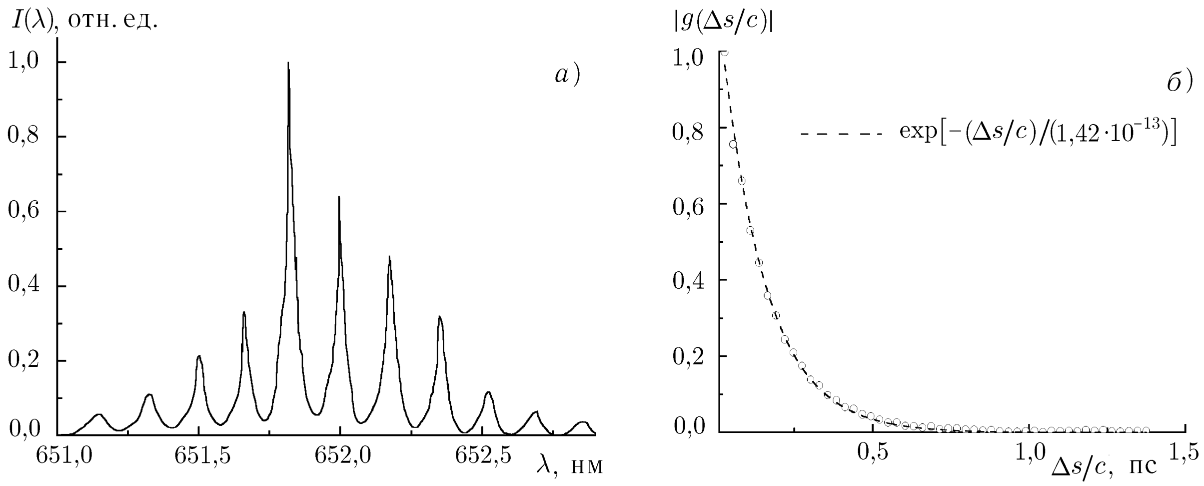



Рис. 12. (*а*) Модовая структура излучения используемого полупроводникового лазера вблизи порога генерации (ток накачки 12,3 мА). (*б*) Пик когерентности зондирующего излучения во временно́й области, полученный в результате фурье-преобразования огибающей спектра излучения (кружки); пунктиром показана аппроксимирующая экспоненциальная зависимость (ток накачки 9,8 мА); $c$ — скорость света в вакууме

излучения использован GaAlAs-лазер с длиной волны генерации вблизи 650 нм, спектр излучения которого ниже порога генерации имеет выраженную модовую структуру, а ширина огибающей спектра существенным образом зависит от тока накачки. В данном случае функция когерентности $I$ зондирующего излучения имеет осциллирующий характер (рис. 12*а*), а ширина каждого пика когерентности во временно́й области обратно пропорциональна ширине огибающей спектра когерентности (рис. 12*б*). Контроль спектральных характеристик зондирующего излучения осуществлялся с использованием компьютеризированного спектрального комплекса на основе модернизированного спектрофотометра типа КСВУ (комплекс спектральный вычислительный универсальный, производство ЛОМО, Россия).

Для используемого полупроводникового лазера возможно осуществлять контролируемое изменение длины когерентности излучения в диапазоне от 25 нм (ток накачки 9,6 мА; спонтанный режим излучения вдали от порога генерации) до 700 нм (ток накачки 13,1 мА; излучение вблизи порога генерации). Дальнейшее увеличение тока накачки приводит к резкому сужению огибающей спектра с последующим переходом лазера в одномодовый режим генерации, при этом измерение ширины спектра и, соответственно, нахождение длины когерентности по используемой методике невозможно вследствие недостаточной разрешающей способности спектрофотометра.

Спекл-модулированные изображения освещаемых участков поверхности зондируемых объектов регистрировались с помощью ПЗС-камеры в диффузно отражённом свете. Поляризационная фильтрация детектируемого излучения (выделение ко-поляризованной или кросс-поляризованной составляющих) осуществлялась с помощью вращаемого вручную поляризатора, установленного непосредственно перед объективом камеры. В установке использована сопряжённая с компьютером монохромная ПЗС-камера типа VS-CTT-075-60 с объективом «Nikon-LMZ13A5M». Детектирование диффузно отражённого излучения осуществлялось под углом приблизительно 20° по отношению к нормали к поверхности исследуемого образца и, соответственно, к оси коллимированного зондирующего пучка. Это делалось с целью исключения влияния зеркального отражения от поверхности и эффекта когерентного обратного рассеяния на результаты измерения контраста. Оптимальные условия регистрации спекл-модулированных изображений определялись следующими критериями:

1) средний размер спеклов в плоскости изображения не менее чем в $3\div4$ раза должен превышать размер фоточувствительных элементов ПЗС-камеры;

2) область изображения поверхности объекта, используемая для анализа, должна содержать не менее $40\div50$ спеклов;

3) средняя интенсивность регистрируемого изображения должна приблизительно соответствовать середине рабочего диапазона ПЗС-камеры ($400\div600$ единиц при использовании 10-битного режима аналого-цифрового преобразователя камеры).

В эксперименте оптимальные условия регистрации достигались путём диафрагмирования объектива камеры до значений порядка $f/12\div f/16$, где $f$ — фокусное расстояние объектива; выбор оптимальных значений яркости регистрируемых изображений при изменении тока накачки осуществлялся путём изменения времени накопления ПЗС-камеры и изменения интенсивности зондирующего пучка с помощью оптического клина с линейно изменяющейся оптической плотностью.

Для используемого лазера межмодовый интервал $\Delta\lambda_{\rm m}$ равен приблизительно 0,18 нм, что даёт при средней длине волны излучения $\bar\lambda \approx 650$ нм период осцилляций в пространственной области $\Delta \approx \bar\lambda^2/\Delta\lambda_{\rm m} \approx 2{,}36$ мм для свободного пространства. Анализ полученных огибающих спектра при различных значениях тока накачки $I_{\rm p}$ показал, что при 9 мА $\le I_{\rm p} \le 15$ мА модули функций когерентности источника, восстанавливаемые с использованием фурье-преобразования огибающих спектра, в интервале $0 \le \Delta s \le \Delta$ с приемлемой точностью допускают экспоненциальную аппроксимацию (рис. 12*б*). Для «односторонней» функции когерентности источника $g(\Delta s)$, определяемой только для неотрицательных разностей оптических путей парциальных составляющих в рассеивающей среде, длина когерентности $l_{\rm c}$, соответствующая уменьшению $|g(\Delta s)|$ от единичного значения до уровня $1/e$, связана с полушириной огибающей спектра излучения $\Delta\lambda_{0,5}$ следующим соотношением: $l_{\rm c} \approx \sqrt{3}\,\bar\lambda^2/(\pi\,\Delta\lambda_{0,5})$.

С учётом осциллирующего характера спектра было предложено следующее аппроксимирующее выражение для модуля функции когерентности:

$$|g(\Delta s)|_{\Delta s\ge 0} = \sum_{i=0}^{\infty} C_i \exp(-|\Delta s - i\Delta|/l_{\rm c}), \tag{9}$$

где набор весовых коэффициентов $\{C_i\}$ определяется спектральной шириной продольной моды лазерного излучения. Поскольку спектральная ширина продольной моды существенно меньше межмодового интервала, а исследуемые в режиме диффузного отражения образцы рассеивающих сред характеризуются интервалами возможных значений $\Delta s$, перекрываемыми всего несколькими периодами осцилляций функции когерентности источника (как правило, не более $3\div5$), для сопоставления экспериментальных данных с результатами теоретического анализа выражение (9) было преобразовано к следующей форме:

$$|g(\Delta s)| = \sum_{i=0}^{M\le \Delta s_{\max}/\Delta} C_i \exp(-|\Delta s - i\Delta|/l_{\rm c}), \tag{9$'$}$$

где $M$ — число пиков когерентности в интервале возможных значений $\Delta s$ для исследуемой рассеивающей системы, а значения весовых коэффициентов $\{C_i\}$ выбираются из условия нормировки, обеспечивающего равенство единице максимальных значений $|g(\Delta s)|$ при $\Delta s = 0, \Delta, 2\Delta, \ldots, M\Delta$. Для используемых в данной работе условий проведения эксперимента длина когерентности источника $l_{\rm c}$, определяемая по огибающей спектра излучения, существенно меньше межмодового интервала $\Delta s$, что позволяет установить значения коэффициентов $C_0 \approx C_1 \approx \ldots \approx C_M \approx 1$.

Ко-поляризованные и кросс-поляризованные спекл-модулированные изображения поверхностей исследуемых объектов регистрировались в 10-битном растровом формате при различных токах накачки одновременно с регистрацией спектра излучения источника. Обработка полученных изображений осуществлялась с использованием специально разработанного программного обеспечения на основе системы программирования «MatLab 6.0». В ходе обработки вычислялись среднеквадратичные значения флуктуаций интенсивности $\delta I/\langle I\rangle$, значения средней интенсивности $\langle I\rangle$ и, соответственно, значения контраста $C_{\parallel} = \delta I_{\parallel}/\langle I_{\parallel}\rangle$ и $C_{\perp} = \delta I_{\perp}/\langle I_{\perp}\rangle$ для фрагментов изображений освещаемой поверхности, характеризуемых однородным распределением интенсивности.

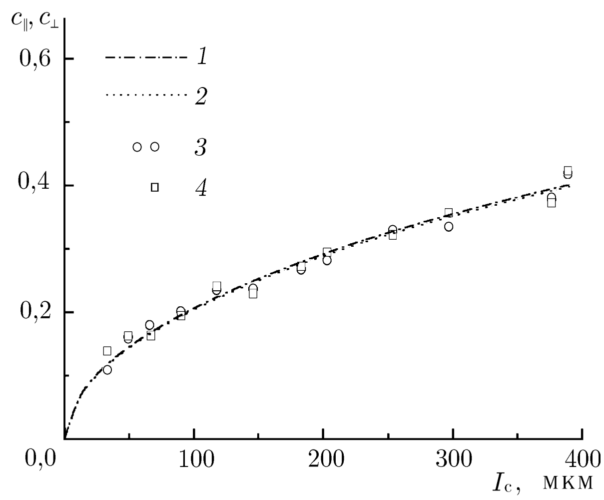



Рис. 13. Зависимости контраста спеклов, модулирующих изображение поверхности зондируемой жировой ткани в диффузно отражённом свете, от длины когерентности зондирующего излучения: *1* и *3* — ко-поляризованные спеклы, *2* и *4* — кросс-поляризованные спеклы, *1* и *2* — экспериментальные результаты, *3* и *4* — аппроксимирующие теоретические зависимости

На рис. 13 представлены зависимости контраста спекл-модулированных изображений поверхности in vitro свиной жировой ткани, формируемых в результате поляризационной фильтрации диффузно отражённого излучения, от длины когерентности зондирующего излучения. Здесь же приведены аппроксимирующие теоретические зависимости, полученные с использованием выражения (8) и метода Монте-Карло для нахождения «скалярной» плотности оптических путей парциальных составляющих. В процессе аппроксимации транспортная длина $l^*$ и длина деполяризации $\xi_{\mathrm{L}}$ для зондируемой среды рассматривались в качестве подгоночных параметров; полученная в ходе аппроксимации экспериментальных данных величина $l^*$ хорошо согласуется с данными, полученными другими авторами путём измерения диффузного отражения и пропускания слоёв жировой ткани. Полученное нами аномально малое значение $\xi_{\mathrm{L}}$ (существенно меньшее, чем транспортная длина) также хорошо согласуется с результатами работ [37–39], где отмечаются весьма высокие деполяризующие свойства свиной жировой ткани.

## 3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, нами продемонстрирована высокая эффективность различных методов морфофункциональной диагностики биологических тканей на основе поляризационной спектроскопии диффузно отражённого излучения, в том числе и с использованием частично когерентного излучения с перестраиваемой длиной когерентности. Одной из перспективных областей применения данных методов является мониторинг состояния поверхностных слоёв биотканей, модифицируемых с помощью инфракрасного лазерного излучения (например, состояния кожи человека, подвергаемой абляции эпидермиса с помощью импульсного излучения эрбиевого лазера, как это было продемонстрировано в работе [45]). Весьма актуальным представляется дальнейшее развитие рассмотренных в данной работе методов поляризационной отражательной спектроскопии в части использования локализованных источников зондирующего поляризованного излучения (сфокусированных лазерных пучков) и анализа пространственных распределений степени остаточной поляризации диффузно отражённого излучения по пятну рассеяния на поверхности объекта для различных длин волн зондирующего излучения. Подобный подход представляется эффективным для анализа распределений естественных хромофоров в различных слоях зондируемой ткани.

Данная работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 04–02–16533) и АФГИР (грант REC–006), а также программы Президента РФ по поддержке ведущих научных школ (грант НШ–25.2003.2).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Приезжев А. В., Тучин В. В., Шубочкин Л. П. Лазерная диагностика в биологии и медицине. М.: Наука, 1989.
2. Medical optical tomography: Functional imaging and monitoring. V. IS11. / Ed. by G. Muller, B. Chance, R. Alfano, et al. Bellingham: SPIE Press, 1993.
3. Handbook of optical biomedical diagnostics V. PM107. / Ed. by V. V. Tuchin. Bellingham: SPIE Press, 2002.
4. Максимова И. Л., Тучин В. В., Шубочкин Л. П. // Оптика и спектроскопия. 1986. Т. 60, № 4. С. 801.
5. Максимова И. Л., Тучин В. В., Шубочкин Л. П. // Оптика и спектроскопия. 1988. Т. 65, № 3. С. 615.
6. March W., Engerman R., Rabinovitch B. // ASAIO Trans. 1979. V. 25. P. 28.
7. Cote G. L., Fox M. D., Northrup R. B. // IEEE Trans. Biomed. Eng. 1992. V. 39. P. 752.
8. Rabinovitch B., March W. F., Adams R. L. // Diabetes Care. 1982. V. 5. P. 254.
9. March W. F., Rabinovitch B., Adams R. L. // Diabetes Care. 1982. V. 5. P. 259.
10. McNichols R. J., Cote G. L. // J. Biomed. Optics. 2000. V. 5. P. 5.
11. Anderson R. R. // Arch. Dermatol. 1991. V. 127. P. 1 000.
12. Jacques S. L., Lee K. // Proc. SPIE. 1998. V. 3 245. P. 356.
13. Jacques S. L., Roman R. J., Lee K. // Lasers Surg. Med. 2000. V. 26. P. 119.
14. Jacques S. L., Ramella-Roman J. C., Lee K. // J. Biomed. Optics. 2002. V. 7. P. 329.
15. Demos S. G., Wang W. B., Ali J., Alfano R. R. // OSA TOPS 21 on Advances in Optical Imaging and Photon Migration / Ed. by J. G. Fujimoto, M. S. Patterson. 1998. P. 405.
16. Zimnyakov D. A., Sinichkin Yu. P. // J. Opt. A: Pure Appl. Opt. 2000. V. 2. P. 200.
17. Demos S. G., Radousky H. B., Alfano R. R. // Optics Express. 2000. V. 7. P. 23.
18. Mourant J. R., Fuselier T., Boyer J., et al. // Appl. Opt. 1997. V. 36. P. 949.
19. Wagnieres G. A., Star W. M., Wilson B. C. // Photochem. Photobiol. 1998. V. 68. P. 603.
20. Perelman L. T., Backman V., Wallace M., et al. // Phys. Rev. Lett. 1998. V. 80. P. 627.
21. Sokolov K., Drezek R., Gossage K., Richards-Kortum R. // Opt. Express. 1999. V. 5. P. 302.
22. Backman V., Gurjar R., Badizadegan K., et al. // IEEE J. Sel. Top. Quantum Electron. 1999. V. 5. P. 1 019.
23. Myakov A., Nieman L., Wicky L., et al. // J. Biomed. Opt. 2002. V. 7. P. 388.
24. Исимару А. Распространение и рассеяние света в случайно-неоднородных средах. М.: Мир, 1981.
25. Ishimaru A. // Appl. Opt. 1989. V. 28. P. 2 210.
26. Zijp J. R., ten Bosch I. J. // Archs Oral Biol. 1991. V. 36. P. 283.
27. Duck F. A. Physical properties of tissue: A comprehensive reference book. London: Academic, 1990.
28. Tuchin V. V., Utz S. R., Yaroslavsky I. V. // Optical Engineering. 1994. V. 33. P. 3 178.
29. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1970.

30. Brosseau C. Fundamentals of polarized light: A statistical optics approach. New York: Wiley, 1998.
31. Akkermans E., Wolf P. E., Maynard R., Maret G. // J. Phys. France. 1988. V. 49. P. 77.
32. MacKintosh F. C., Zhu J. X., Pine D. J., Weitz D. A. // Phys. Rev. B. 1989. V. 40. P. 9 342.
33. MacKintosh F. C., John S. // Phys. Rev. B. 1989. V. 40. P. 2 383.
34. Bicout D., Brosseau C., Martinez A. S., Schmitt J. M. // Phys. Rev. E. 1994. V. 49. P. 1 767.
35. Dogariu A., Kutsche C., Likamwa P., et al. // Opt. Lett. 1997. V. 22. P. 585.
36. Zimnyakov D. A., Sinichkin Yu. P., Zakharov P. V., Agafonov D. N. // Waves in random media. 2001. V. 11. P. 395.
37. Sankaran V., Everett M. J., Maitland D. J., Walsh J. T. // Opt. Lett. 1999. V. 24. P. 1 044.
38. Sankaran V., Walsh J. T., Maitland D. J. // Opt. Lett. 2000. V. 25. P. 239.
39. Sankaran V., Walsh J. T., Maitland D. J. // J. Biomed. Optics. 2002. V. 7. P. 300.
40. Зимняков Д. А., Синичкин Ю. П., Киселёва И. В., Агафонов Д. Н. // Оптика и спектроскопия. 2002. Т. 92. С. 848.
41. Синичкин Ю. П., Зимняков Д. А., Агафонов Д. Н., Кузнецова Л. В. // Оптика и спектроскопия. 2002. Т. 93. С. 99.
42. Синичкин Ю. П., Утц С. Р., Долотов Л. Е. и др. // Радиотехника. 1997. № 4. С. 77.
43. Синичкин Ю. П., Утц С. Р. In vivo отражательная и флуоресцентная спектроскопия кожи человека. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2001.
44. Синичкин Ю. П., Утц С. Р., Пилипенко Е. А. // Оптика и спектроскопия. 1996. Т. 80. С. 260.
45. Свиридов А. П., Зимняков Д. А., Синичкин Ю. П. и др. // ЖПС. 2002. Т. 69. С. 484.

Саратовский госуниверситет, г. Саратов, Россия

Поступила в редакцию
27 мая 2004 г.

**POLARIZATION REFLECTANCE SPECTROSCOPY OF BIOLOGICAL TISSUES: DIAGNOSTIC APPLICATIONS**

*D. A. Zimnyakov, Yu. P. Sinichkin, and V. V. Tuchin*

In this paper, we consider physical principles of visualization and diagnostics of the morphological and functional state of biological tissues on the basis of spectral analysis of polarization properties of a probe light diffuse reflected by probed objects. Various modifications of the polarization reflectance technique (including the use of partially coherent probe light with the changeable coherence length) are discussed. The results of application of the discussed techniques for morphological and functional diagnostics of in vivo human skin are presented.

УДК 517.9+537

# SELF-CONTROL OF CHAOS IN NEURAL CIRCUITS WITH PLASTIC ELECTRICAL SYNAPSES

*V. P. Zhigulin*[1,2] *and M. I. Rabinovich*[1,3]

Two kinds of connections are known to exist in neural circuits: electrical (also called gap junctions) and chemical. Whereas chemical synapses are known to be plastic (i. e. modifiable) but slow, electrical transmission through gap junctions is not modifiable but is very fast. We suggest the new artificial synapse that combines the best properties of both: the fast reaction of a gap junction and plasticity of a chemical synapse. Such plastic electrical synapse can be used in hybrid neural circuits and for the development of neural prosthetics — implanted devices that can interact with real nervous system. Based on the computer modelling we show that such plastic electrical synapse regularizes chaos in the minimal neural circuit consisting of two chaotic bursting neurons.

## INRODUCTION

Traditional for neurophysiology intracellular recordings of membrane potentials have produced long stationary time series which unambiguously demonstrated presence of chaotic dynamics at the level of individual cell. In particular, inferior olivary neurons [1], some pacemaker neurons [2] and neurons from central pattern generators [3] were found to be chaotic. Reconstruction of the phase portrait and analysis of the bifurcations indicate that neuronal chaos can be described by deterministic models with weak noise [3]. Functional role of the neural chaos is not absolutely clear. Reasonable hypothesis is the following: chaotic neural dynamics can be easily transformed into regular oscillations with wide frequency range due to the existence of saddle cycles with different periods in the strange attractor of the dynamics. Thus chaotic neural systems are potentially very flexible [4]. The regularization or control of neural chaos in cells with irregular dynamics can occur as a result of their coupling through chemical or electrical synapses [5–10]. However, such regularization is not robust and adaptive. In this paper we suggest to use electrical plastic synapse in order to improve robustness of regularization and make its range much wider. Such synapse can be important for creation of the electronic neural networks and for the development of neural prosthetics.

The paper is organized in the following way. We start by presenting the dynamical equations that describe chaotic spiking-bursting neurons, then we formulate the dynamical model of the electrical plastic synapse and after that we present the results of computer simulations of chaos regularization in the system. Finally, we compare our approach with the well known methods of chaos control.

## 1. CHAOTIC NEURONS WITH PLASTIC ELECTRICAL COUPLING

Let us consider two diffusively coupled chaotic Hindmarsh—Rose (HR) [11] neurons:

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = y_i - ax_i^3 + bx_i^2 - z_i + I + I_i^{\mathrm{D}} \qquad \frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}t} = c - dx_i^2 - y_i, \qquad \frac{\mathrm{d}z_i}{\mathrm{d}t} = r\,[S\,(x_i - \chi) - z_i], \tag{1}$$

where $i = 1, 2$ and $x_i$, $y_i$, $z_i$ represent scaled membrane potential, recovery variable and slow adaptation current of each neuron respectively. We use standard set of parameters: $a = 1$, $b = 3$, $c = 1$, $d = 5$,

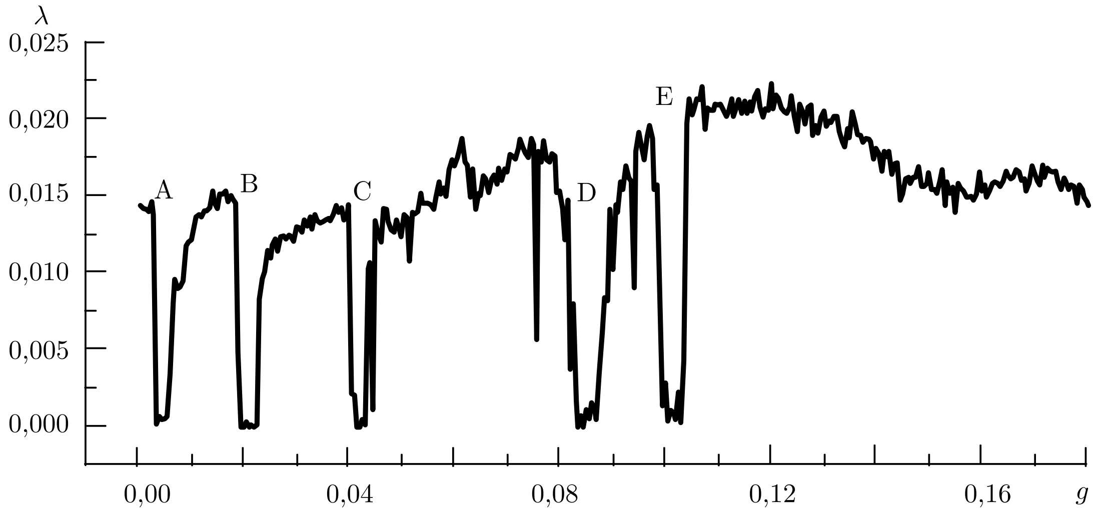



Fig. 1. Largest Lyapunov exponent $\lambda$ for different values of coupling strength $g$. Letters A, B, C, D and E indicate windows with different periodic dynamics

$S = 4$, $r = 0{,}006$, $\chi = -1{,}56$ and constant stimulating current $I = 3{,}07$ that puts each neuron into chaotic spiking-bursting regime. Each neuron also receives diffusive current

$$I_i^{\mathrm{D}} = 2g\,(x_{\mathrm{mod}(i;2)+1} - x_i) \tag{2}$$

with $g$ being its time-dependent conductance. We consider $g$ to be a slow dynamical variable with dependence on activities $P_1$, $P_2$ of both neurons according to the dynamical model of spike-timing dependent plasticity [12]:

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} = \gamma\,(P_1 P_2^N - P_1^N P_2). \tag{3}$$

Here $\gamma = 7 \cdot 10^{-5}$ is the small parameter that provides separation of the time scales between dynamics of the neurons and dynamics of the coupling, exponent $N$ equals 8, activities $P_1$ and $P_2$ satisfy the following dynamical equation:

$$\frac{\mathrm{d}P_i}{\mathrm{d}t} = F(x_i) - \beta_P P_i, \tag{4}$$

where $\beta_P = 0{,}2$, $F(x) = (1 + \exp[-40\,(x - 0{,}5)])^{-1}$ is a sigmoid function. We note here that the exact values of parameters $\gamma$, $N$, $\beta_P$ and the shape of the function $F(x)$ are not crucial to obtain the results presented in our study. Different, but properly chosen values of these parameters would lead to very similar results and identical conclusions, meaning that this type of coupling induces «structurally robust» phenomenon of chaos suppression.

Let us first consider the dynamics of the system (1) under the assumption of constant coupling strength $g$. This system is chaotic for most values of $g$ from the interval $[0, 0.18]$. In fig. 1 we show its largest Lyapunov exponent $\lambda$ for different values of $g$ from the interval. As one can see, there are several narrow windows (A–E) in which largest Lyapunov exponent is zero within the limits of numerical accuracy. These windows correspond to the situations when neurons interact in such a way that unstable periodic orbits that are present in chaotic dynamics become stable due to so-called mutual resonant interactions [13]. In fig. 2 we illustrate corresponding periodic regimes, which are analogous to the generalized splay states [13, 14].

Since the dynamical time scales of the system (1) and coupling (3) are vastly different, let us now consider the evolution of $g$ under the assumption that it does not influence the dynamics of (1) on

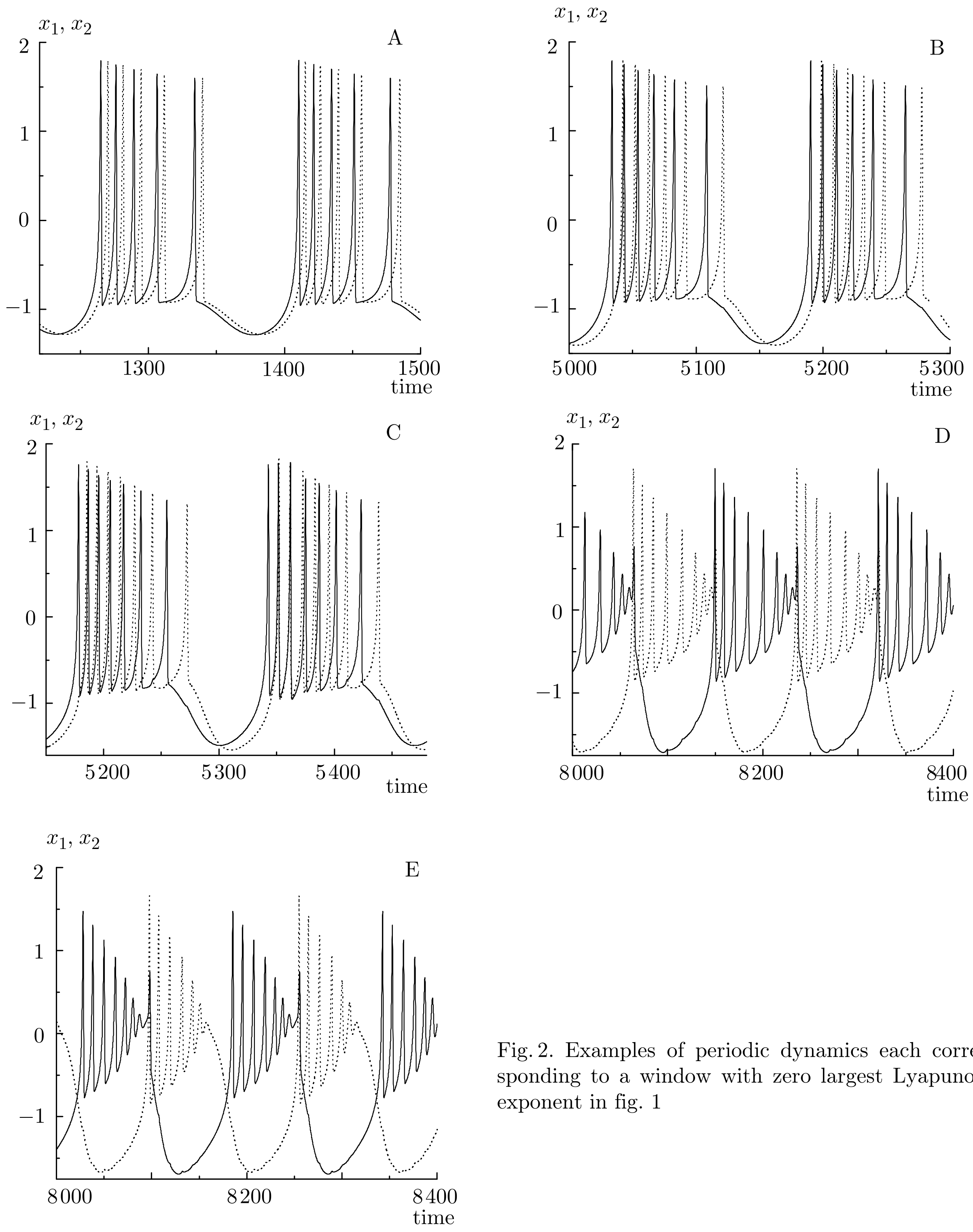



Fig. 2. Examples of periodic dynamics each corresponding to a window with zero largest Lyapunov exponent in fig. 1

short times. These considerations are of qualitative nature and will be put on the rigorous mathematical footing in our future works. There are two possible dynamical regimes of the coupled system: periodic and chaotic (see fig. 3*a, b*). As fig. 3*c* illustrates, in the case of periodic dynamics inside the window A

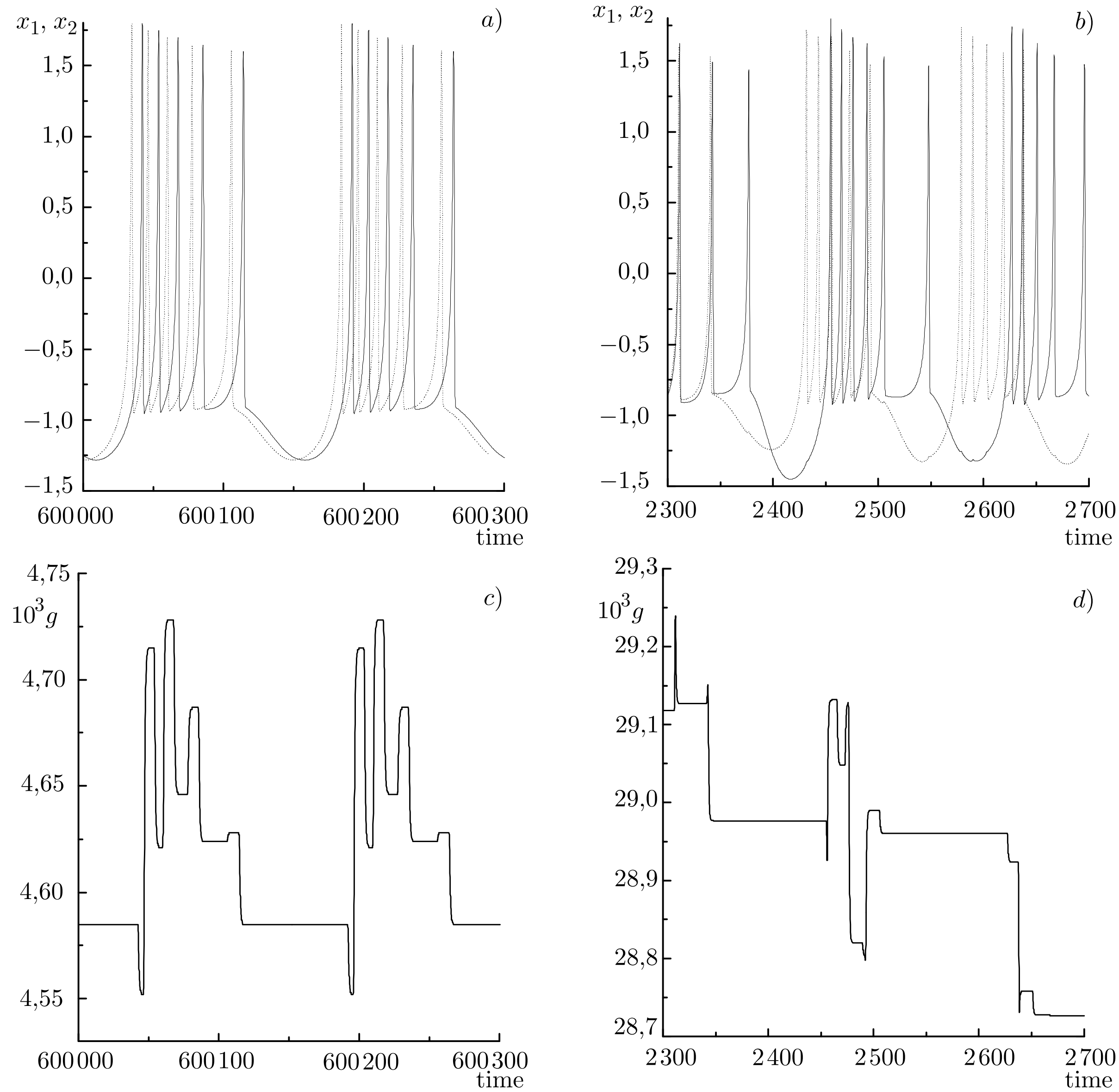



Fig. 3. Dynamics of (top) the variables $x_1$ and $x_2$ and (bottom) coupling $g$ in the cases of periodic (*a, c*) and chaotic (*b, d*) dynamics of the coupled system

the dynamics of $g$ is slaved and is also periodic. To the contrary, $g$ exhibits random walk-like dynamics when the system is in chaotic state (fig. 3*d*). In fig. 4 we show typical evolution of the slow variable $g$ over an extended period of time. During the initial stage coupling strength demonstrates random-like variations until it gets on the limit cycle close to $g = 0{,}022$ which corresponds to the boundary of periodic window B in fig. 1. As soon as this periodic state is reached $g$ stays on the limit cycle indefinitely. In such a way the system with plastic coupling (1)–(3) reaches periodic state by means of its own dynamics. Hence the system exhibits self-control and suppression of chaotic dynamics. One can also interpret this process as a self-adaptation of the system to the edge of chaotic region in its state space.

By performing extensive simulations we tested the described above mechanism of chaos regularization for different initial values of coupling strength $g_0$. After running several rounds of simulations for

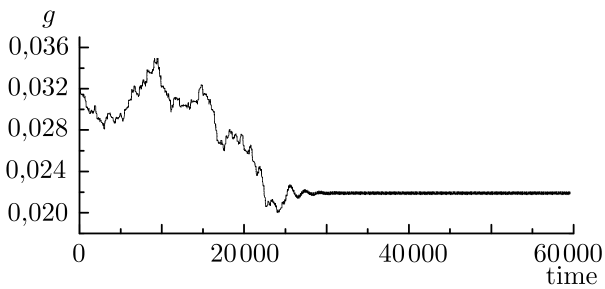



Fig. 4. Example of the typical slow dynamics of the coupling strength. After the initial random-like behaviour $g$ gets on the stable limit cycle

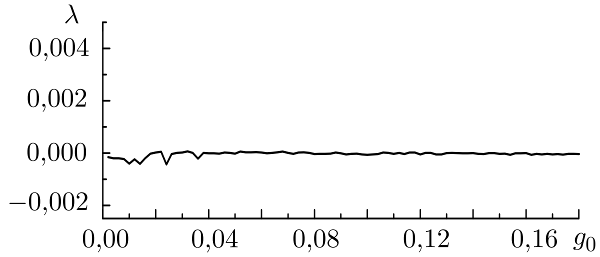



Fig. 5. Largest Lyapunov exponent $\lambda$ for different values of the initial strength of activity-dependent coupling

each $g_0$ we have found that this mechanism is robust and the system consistently and independently of the initial conditions and initial coupling strength $g_0$ reaches one of the stable periodic states. Interestingly, states A, B and D are stable and states C and E are unstable, meaning that we have never observed a limit cycle behaviour of $g$ in windows C and E. The identity of the periodic stable state that is reached by the system depends on $g_0$ and can vary from trial to trial. Periodic state A is usually reached for $g_0 \lesssim 0{,}02$, either A or B can be reached for $0{,}02 \lesssim g_0 \lesssim 0{,}08$ and either B or D can be reached for $0{,}08 \lesssim g_0 \lesssim 0{,}18$. We confirmed the observation of robust adaptation to periodic states by calculating the largest Lyapunov exponent $\lambda$ of the system (1)–(3) as a function of $g_0$ (fig. 5). The calculation was done at uniformly distributed points on $g_0$ axis with a fixed step size of 0,002. Within the numerical accuracy we found $\lambda$ to be zero regardless of the initial conditions and the value of $g_0$ from the interval $(0, 0{,}18]$. Hence, regularization of chaos by plastic electrical coupling is robust in the considered region of parameter space.

## 2. DISCUSSION

As we illustrated above, the system adapts to periodic states on the boundary of chaotic region or so-called edge of chaos. Systems that are able to adapt its state to the edge of chaos have recently attracted a lot of interest because this state is believed to be optimal for the system to exhibit deterministic, but at the same time flexible dynamics. For example, it was found that edge of chaos state is beneficial for information transmission in neural networks [15]. Also, at the point of order—chaos transition «statistical complexity» of chaotic systems reaches its maximum [16].

In the recent work [17] a phenomenon similar to the one that is described here was observed. They have studied the dynamics of the logistic map with its parameter being controlled by feedback mechanism involving low-path filtered dynamics of the map. One can argue that a similar mechanism is at work here since the variables $P_1$ and $P_2$ are close to being low-path filtered membrane potentials of the neurons (4) and coupling strength $g$ is a slow function of $P_1$ and $P_2$. Aside from these intuitive insights, mathematically rigorous explanation and analysis of the observed phenomenon are still pending and are a focus of our future work.

In conclusion, we would like to emphasise the differences between the traditional methods of chaos control and the methods discussed above. The traditional approaches are based on two ideas. The first one is the algorithm of Ott, Grebogi and Yorke [18], i. e. suppression of chaos by occasional application of small, well calculated perturbations to parameters of the system and thus stabilization of one of the embedded unstable periodic orbits. The second one is the method of continuous-time control [19] that uses recovering of the unstable periodic behaviour by delay coordinated method. Our method also achieves control by continuously perturbing an intrinsic parameter of the system, e. g. strength of synaptic coupling, but in a different way. In our case strength of the coupling between chaotic subsystems depends nonlinearly on the distance between their output signals. Periodic activity is then generated by chaotic subsystems themselves due to their control of coupling strength through nonlinear filtering of their signals. We suggest that such mechanism can be used in other coupled chaotic systems as well.

We thank Alfred Hubler for pointing out reference [17]. This work was partially supported by DOE grant DE–FG03–96ER14592 and NSF Grant EIA–0130708.

## REFERENCES

1. Makarenko V., Llinas R. // Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A. 1998. V. 95. P. 15 747.
2. Hayashi H., Ishizuka S. // J. Theor. Biol. 1992. V. 156. P. 269.
3. Abarbanel H. D. I., Huerta R., Rabinovich M. I., et al. // Neural Comput. 1996. V. 8. P. 1 567.
4. Rabinovich M. I., Abarbanel H. D. I. // Neuroscience. 1998. V. 87. P. 5.
5. Rabinovich M. I., Abarbanel H. D. I., Huerta R., et al. // IEEE Trans. Circuits Syst. I. 1997. V. 44. P. 997.
6. Elson R. C., Selverston A. I., Huerta R., et al. // Phys. Rev. Lett. 1998. V. 81. P. 5 692.
7. Rabinovich M. I., Varona P., Torres J. J., et al. // Physica A. 1999. V. 263. P. 405.
8. La Rosa M., Rabinovich M. I., Huerta R., et al. // Phys. Lett. A. 2000. V. 266. P. 88.
9. Rulkov N. F. // Phys. Rev. Lett. 2001. V. 86. P. 183.
10. Cazelles B., Courbage M., Rabinovich M. I. // Europhys. Lett. 2001. V. 56. P. 504.
11. Hindmarsh J. L., Rose R. M. // Proc. R. Soc. Lond. Ser. B. 1984. V. 221. P. 87.
12. Abarbanel H. D. I., Huerta R., Rabinovich M. I. // Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A. 2002. V. 99. P. 10 132.
13. Zhan M., Hu G., Zhang Y., He D. H. // Phys. Rev. Lett. 2001. V. 86. P. 1 510.
14. He D. H., Hu G., Zhan M., Lu H. P. // Physica D. 2001. V. 156. P. 314.
15. Greenfeld E., Lecar H. // Phys. Rev. E. 2001. V. 63. Article no. 041 905.
16. Crutchfield J. P., Young K. // Phys. Rev. Lett. 1989. V. 63. P. 105.
17. Melby P., Kaidel J., Weber N., Hubler A. // Phys. Rev. Lett. 2000. V. 84. P. 5 991.
18. Ott E., Grebogi C., Yorke J. A. // Phys. Rev. Lett. 1990. V. 64. P. 1 196.
19. Pyragas K. // Phys. Lett. A. 1992. V. 170. P. 421.

[1] Institute for Nonlinear Science, University of California, San Diego, USA;
[2] Department of Physics, California Institute of Technology, Pasadena, USA;
[3] Institute of Applied Physics, Russian Academy of Sciences, Nizhny Novgorod, Russia

Поступила в редакцию
18 мая 2004 г.

УДК 535.2

# ВЛИЯНИЕ КОГЕРЕНТНОСТИ ИЗЛУЧЕНИЯ НА ЭФФЕКТЫ ПОЛЯРИЗАЦИОННОЙ НЕВЗАИМНОСТИ ВОЛОКОННЫХ КОЛЬЦЕВЫХ ИНТЕРФЕРОМЕТРОВ

*И. А. Андронова*

В работе рассмотрены эффекты поляризационной невзаимности с учётом когерентности или частичной когерентности излучения на выходе волоконного кольцевого интерферометра. Рассмотрена возможность появления на выходе волоконного кольцевого интерферометра с широкополосным источником излучения дополнительных эффектов поляризационной невзаимности за счёт когерентной составляющей излучения, возникающей из-за связи ортогональных мод на выходных отрезках волокна. Учёт когерентности позволяет оценивать температурную нестабильность сигнала интерферометра, связанную с поляризационной невзаимностью.

Рассмотрены особенности проявления эффектов поляризационной невзаимности для волоконного кольцевого интерферометра с поляризатором или дихроизмом. Показано, что при выполнении для интерферометра условий традиционной теоремы взаимности (отсутствие вращения) эффекты поляризационной невзаимности оказываются скрытыми и не могут быть обнаружены в интерференционном сигнале без априорной информации о характере двулучепреломления и об ориентации анизотропных элементов волоконного контура интерферометра и поляризатора.

Термин поляризационная невзаимность встречных волн в волоконном кольцевом интерферометре (ВКИ) широко используется в волоконной гироскопии, хотя точнее было бы говорить о поляризационной фазовой невзаимности. Эффект поляризационной невзаимности состоит в том, что на выходе покоящегося ВКИ возможно появление дополнительной невзаимной разности фаз, не связанной с эффектом Саньяка, т. е. с разностью фаз $\varphi_{\mathrm{S}}$, возникающей при вращении интерферометра. Этот эффект наблюдался ещё в первых экспериментах с ВКИ и был неожиданным для исследователей, поскольку возникал даже в том случае, когда характеристики ВКИ удовлетворяли традиционной классической теореме взаимности [1, 2]. К настоящему времени вопросам поляризационной невзаимности посвящено большое число работ [3–18], поскольку это явление на определённом этапе развития волоконной гироскопии было существенным препятствием на пути достижения стабильных показаний гироскопических приборов.

Одна из причин поляризационной невзаимности связана с несовпадением (разворотом) осей анизотропии волокна на двух концах (выходах) волоконного контура, при котором возможно различие фазы поля, поступающего на одну и ту же ось анизотропии во встречных направлениях на входе и регистрируемых в сигнале интерференции на выходе. Этот эффект появления дополнительной разности фаз на выходе можно наблюдать в однополяризационном волокне как с когерентным, так и с низкокогерентным источником. Кроме того, при условии когерентности или частичной когерентности волн, прошедших по ортогональным осям анизотропии, несовпадение осей на двух входах (выходах) приводит к появлению в интерференционном сигнале дополнительной разности фаз, связанной с интерференцией волн, прошедших по осям с разным показателем преломления.

Цель данного сообщения — рассмотреть некоторые ранее не затронутые аспекты проблемы поляризационной невзаимности, в том числе влияние когерентности источника излучения. Несмотря на то, что влияние когерентности на эффекты поляризационной невзаимности упоминается в некоторых работах, конкретные расчёты нам известны только для случая идеального поляризатора [16]. Эффекты поляризационной невзаимности, обусловленные когерентностью излучения

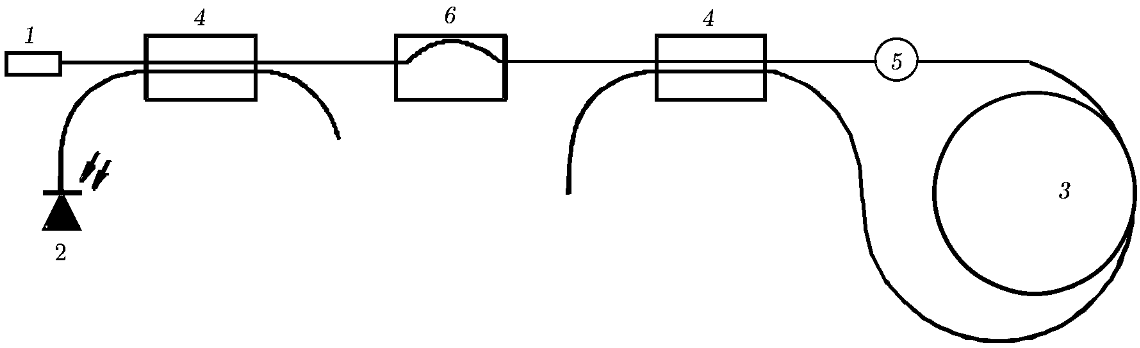



Рис. 1. Схема ВКИ с поляризатором: *1* — источник излучения, *2* — фотоприёмник, *3* — волоконный контур, *4* — светоделители, *5* — пьезомодулятор, *6* — поляризатор

или остаточной когерентностью излучения в ортогональных модах на выходе при широкополосном источнике излучения, представляют интерес для понимания и оценки одной из причин температурного дрейфа волоконных гироскопов на слабоанизотропных волокнах и на сильноанизотропных волокнах при наличии связи ортогональных мод, определяемой параметром $h$. Связь может приводить к появлению дополнительной остаточной когерентности за счёт перекачки излучения между ортогональными модами на выходе интерферометра и вносить дополнительный вклад в поляризационную невзаимность.

Кроме того, в работе будут рассмотрены особенности проявления поляризационной невзаимности для схем с поляризатором, что аналогично наличию дихроизма в волоконном контуре. Проведённое рассмотрение представляет интерес для понимания влияния поляризатора и дихроизма волоконного контура на эффекты поляризационной невзаимности и возможность их обнаружения при отсутствии вращения интерферометра.

Эффекты поляризационной невзаимности для ВКИ в общем случае рассмотрены в работе [12]. В данной работе будут рассмотрены особенности эффектов поляризационной невзаимности для ВКИ с поляризатором. Так же, как и для общего случая, анализ эффектов поляризационной невзаимности в отсутствие вращения будет проведён с использованием матриц Джонса, которые для ВКИ с поляризатором (рис. 1) с коэффициентом экстинкции $\varepsilon$ имеют вид

$$\mathbf{M}^{+} = \begin{pmatrix} M_{11}^{\mathrm{k}} & \varepsilon M_{12}^{\mathrm{k}} \\ \varepsilon M_{21}^{\mathrm{k}} & \varepsilon^2 M_{22}^{\mathrm{k}} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{M}^{-} = \begin{pmatrix} M_{11}^{\mathrm{k}} & \varepsilon M_{21}^{\mathrm{k}} \\ \varepsilon M_{12}^{\mathrm{k}} & \varepsilon^2 M_{22}^{\mathrm{k}} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Как видно из (1), внесение поляризатора в схему ВКИ не нарушает условия общей теоремы взаимности $\mathbf{M}^{+} = (\mathbf{M}^{-})^{\mathrm{T}}$, где индекс T обозначает операцию транспонирования. Как было показано в [4], необходимым и достаточным условием поляризационной взаимности в ВКИ является выполнение более жёсткого условия — равенства недиагональных коэффициентов: $M_{12}^{\mathrm{k}} = M_{21}^{\mathrm{k}}$, откуда следует, что мерой невзаимности является разность $M_{12}^{\mathrm{k}} - M_{21}^{\mathrm{k}} = 2\,\Delta M^{\mathrm{k}}$. Далее также обозначим $M_{12}^{\mathrm{k}} + M_{21}^{\mathrm{k}} = 2M_0^{\mathrm{k}}$. Компоненты полей встречных волн на выходе интерферометра $E_x^{+}$, $E_x^{-}$ и $E_y^{+}$, $E_y^{-}$ в общем виде определяются из матричных уравнений $\mathbf{E}^{+} = \hat{M}^{+}\mathbf{A}$ и $\mathbf{E}^{-} = \hat{M}^{-}\mathbf{A}$, где $\mathbf{A}$ — вектор поля на входе с компонентами $A_x$ и $A_y \exp(i\Psi)$:

$$\begin{aligned} E_x^{+} &= M_{11}^{\mathrm{k}} A_x + \varepsilon M_{12}^{\mathrm{k}} A_y, \qquad & E_x^{-} &= M_{11}^{\mathrm{k}} A_x + \varepsilon M_{21}^{\mathrm{k}} A_y, \\ E_y^{+} &= \varepsilon M_{21}^{\mathrm{k}} A_x + \varepsilon^2 M_{22} A_y, \qquad & E_y^{-} &= \varepsilon M_{12}^{\mathrm{k}} A_x + \varepsilon^2 M_{22}^{\mathrm{k}} A_y. \end{aligned} \tag{2}$$

Интерференционный сигнал на выходе ВКИ без вращения представим в виде $U_0 = E_x^{+} E_x^{-*} + E_y^{+} E_y^{-*} = \operatorname{Re} U_0 + i \operatorname{Im} U_0 = |U_0| \exp(i\varphi_{\mathrm{p}})$, где $\varphi_{\mathrm{p}}$ — невзаимный фазовый сдвиг на выходе ВКИ, определяемый как

$$\varphi_{\mathrm{p}} = \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{Im} U_0}{\operatorname{Re} U_0}\right), \tag{3}$$

индекс звёздочка обозначает комплексное сопряжение. Общие выражения для $\operatorname{Re} U_0$ и $\operatorname{Im} U_0$ получим, подставляя решение системы (2) в выражение для интерференционного сигнала $U_0$, в результате

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} U_0 = {} & A_x^2\,|M_{11}^{\mathrm{k}}|^2 + A_y^2\varepsilon^4\,|M_{22}^{\mathrm{k}}|^2 + (A_x^2 + A_y^2)\,\varepsilon^2\,(|M_0^{\mathrm{k}}|^2 - |\Delta M^{\mathrm{k}}|^2) + \\
& + A_x A_y \Big\{\cos(\psi)\,\Big[(M_{11}'^{\mathrm{k}} + \varepsilon^2 M_{22}'^{\mathrm{k}})\,2\varepsilon M_0'^{\mathrm{k}} + (M_{11}''^{\mathrm{k}} + \varepsilon^2 M_{22}''^{\mathrm{k}})\,2\varepsilon M_0''^{\mathrm{k}}\Big] + \\
& + \sin(\psi)\,\Big[(M_{11}'^{\mathrm{k}} - \varepsilon^2 M_{22}'^{\mathrm{k}})\,2\varepsilon M_0' + (\varepsilon^2 M_{22}''^{\mathrm{k}} - M_{11}''^{\mathrm{k}})\,2\varepsilon M_0'^{\mathrm{k}}\Big]\Big\}, \\
\operatorname{Im} U_0 = {} & (A_x^2 - A_y^2)\,\varepsilon^2\,(M_0''^{\mathrm{k}}\,\Delta M'^{\mathrm{k}} - M_0'^{\mathrm{k}}\,\Delta M''^{\mathrm{k}}) + \\
& + A_x A_y \Big\{\cos(\psi)\,\Big[(M_{11}''^{\mathrm{k}} - \varepsilon^2 M_{22}''^{\mathrm{k}})\,2\varepsilon\,\Delta M'^{\mathrm{k}} + (M_{11}'^{\mathrm{k}} - \varepsilon^2 M_{22}'^{\mathrm{k}})\,2\varepsilon\,\Delta M''^{\mathrm{k}}\Big] - \\
& - \sin(\psi)\,\Big[(M_{11}'^{\mathrm{k}} + \varepsilon^2 M_{22}'^{\mathrm{k}})\,2\varepsilon\,\Delta M'^{\mathrm{k}} + (M_{11}''^{\mathrm{k}} + \varepsilon^2 M_{22}''^{\mathrm{k}})\,2\varepsilon\,\Delta M''^{\mathrm{k}}\Big]\Big\},
\end{aligned} \tag{4}$$

где $M_{nm}'^{\mathrm{k}}$ и $M_{mn}''^{\mathrm{k}}$ ($m$ и $n$ принимают значения $1,2$) — мнимые и действительные части элементов матриц контура $\mathbf{M}^+$, $\mathbf{M}^-$. При отсутствии дихроизма в волоконном контуре ВКИ элементы матриц контура удовлетворяют следующим условиям:

$$M_{11}^{\mathrm{k}} = (-M_{22}^{\mathrm{k}})^*, \qquad M_{12}^{\mathrm{k}} = (M_{21}^{\mathrm{k}})^*, \qquad M_{12}^{\mathrm{k}} + M_{21}^{\mathrm{k}} = 2M_0'^{k}, \qquad M_{12}^{\mathrm{k}} - M_{21}^{\mathrm{k}} = 2\,\Delta M''^{\mathrm{k}}. \tag{5}$$

Тогда выражения для $\operatorname{Re} U_0$ и $\operatorname{Im} U_0$ запишутся в более простом виде:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} U_0 = {} & |M_{11}^{\mathrm{k}}|^2\,(A_x^2 + \varepsilon^4 A_y^2) + \varepsilon^2\,(A_x^2 + A_y^2)\,[|M_0'^{\mathrm{k}}|^2 + |\Delta M''^{\mathrm{k}}|^2] - \\
& - (\varepsilon - \varepsilon^3) M_0'^{\mathrm{k}} (2M_{11}'^{\mathrm{k}}\cos\psi + 2M_{11}''^{\mathrm{k}}\sin\psi) A_x A_y, \\
\operatorname{Im} U_0 = {} & \varepsilon^2\,\Delta M''^{\mathrm{k}}\,M_0'^{\mathrm{k}}\,(A_y^2 - A_x^2) - (\varepsilon + \varepsilon^3)\,\Delta M''^{\mathrm{k}}\,(2M_{11}'^{\mathrm{k}}\cos\psi + M_{11}''^{\mathrm{k}}\sin\psi)\,A_x A_y.
\end{aligned} \tag{6}$$

Анализ выражений (6) показывает, что величина $\operatorname{Im} U_0$, определяющая невзаимный фазовый сдвиг, пропорциональна разности недиагональных элементов матрицы интерферометра: $M_{12}^{\mathrm{k}} - M_{21}^{\mathrm{k}} = \Delta M^{\mathrm{k}}$ и обращается в нуль при $\Delta M''^{\mathrm{k}} = 0$ и при полностью деполяризованном излучении на входе ВКИ ($\langle A_x A_y^* \rangle = 0$ и $A_x^2 = A_y^2$). Сигнал $\operatorname{Re} U_0$, наблюдаемый на выходе ВКИ, содержит член $\varepsilon^2\,|\Delta M''^{\mathrm{k}}|^2\ \ (|A_x|^2 + |A_y|^2)$, который не зависит от знака невзаимной фазы, связанного с изменением знака $\Delta M''^{\mathrm{k}}$. Входящие в $\operatorname{Re} U_0$ члены, зависящие от $\psi$, пропорциональны сумме недиагональных элементов: $M_{12}^{\mathrm{k}} + M_{21}^{\mathrm{k}} \propto \{2M_0'^{\mathrm{k}} A_x A_y \cos\psi; 2M_0'^{\mathrm{k}} A_x A_y \sin\psi\}$. Эти члены могут изменять величину интерференционного сигнала при изменении $\psi$ и $A_x$, $A_y$ и приводят к дрейфу разности фаз, но в общем случае не несут информации о $\Delta M''^{\mathrm{k}}$ и $\operatorname{Im} U_0$. Исключение составляет случай, когда $\Delta M''^{\mathrm{k}}$ пропорционально $M_0'^{\mathrm{k}}$. В этом случае изменение интерференционного сигнала $\operatorname{Re} U_0$ при изменении $\psi$ свидетельствует о наличии поляризационной невзаимности.

В качестве примера рассмотрим ВКИ с контуром из анизотропного волокна с эллиптическим (или линейным при $\chi = 0$) двупреломлением. Элементы матрицы волоконного контура (1) в этом случае без учёта дихроизма имеют вид

$$M_{11}^{\mathrm{k}} = \cos\left(\frac{\Delta k_{\text{э}} L}{2}\right)\cos(\alpha + \beta) + \sin(\chi)\sin\left(\frac{\Delta k_{\text{э}} L}{2}\right)\sin(\alpha + \beta) + i\cos(\chi)\sin\left(\frac{\Delta k_{\text{э}} L}{2}\right)\cos(\alpha - \beta),$$

$$M_{12}^{\mathrm{k}} = \cos\left(\frac{\Delta k_{\text{э}} L}{2}\right)\sin(\alpha + \beta) - \sin(\chi)\sin\left(\frac{\Delta k_{\text{э}} L}{2}\right)\cos(\alpha + \beta) + i\cos(\chi)\sin\left(\frac{\Delta k_{\text{э}} L}{2}\right)\sin(\alpha - \beta),$$

$$M_0^{\mathrm{k}} = \cos\left(\frac{\Delta k_{э} L}{2}\right)\sin(\alpha+\beta) - \sin\chi\sin\left(\frac{\Delta k_{э} L}{2}\right)\cos(\alpha+\beta),$$

$$\Delta M^{\mathrm{k}} = i\cos(\chi)\sin\left(\frac{\Delta k_{э} L}{2}\right)\sin(\alpha-\beta), \tag{7}$$

где $L$ — длина волоконного контура, $\Delta k_{э} = 2\pi\,\Delta n_{э}/\lambda = 2\pi\,\sqrt{\Delta n_{л}^2 + \Delta n_{к}^2}\,/\lambda$, $\lambda$ — длина волны излучения, $\Delta n_{э}$, $\Delta n_{л}$, $\Delta n_{к}$ — параметры эллиптического, линейного и циркулярного двупреломления соответственно, $\sin\chi = 2a/(1+a^2)$, $\cos\chi = (1-a^2)/(1+a^2)$, $a$ — эллиптичность собственных поляризационных мод, которая может быть связана с углом скрутки волокна, $\alpha$ и $\beta$ — углы между осью поляризатора и осями анизотропии волоконного контура на двух входах (выходах) [12]. При $a \ll 1$ имеем $\sin\chi \approx 2a$, $\cos\chi \approx 1$. В случае линейного двупреломления волокна $\Delta n_{к} = 0$ и $\sin\chi = 0$. Из (7) следует, что величина $\Delta M^{\mathrm{k}} \propto \sin(\alpha-\beta)$, определяющая невзаимный набег фазы (3), прямо не связана с $M_0^{\mathrm{k}} \propto \sin(\alpha+\beta)$, определяющей зависимость интерференционного сигнала $\operatorname{Re} U_0$ от разности фаз $\psi$ ортогональных компонент на входе, и при $\Delta M^{\mathrm{k}} = 0$ возможно $M_0^{\mathrm{k}} \neq 0$, и наоборот. Только для волокна с линейным двупреломлением ($\chi = 0$) при условии совпадения одной из осей анизотропии волоконного контура на входе или выходе с осью поляризатора ($\alpha$ или $\beta$ обращается в нуль) обе величины, $\Delta M^{\mathrm{k}}$ и $M_0^{\mathrm{k}}$, пропорциональны $\sin\beta$ или $\sin\alpha$ и зануляются одновременно. Для волокна с эллиптическим двупреломлением при отсутствии рассогласования осей анизотропии волоконного контура на выходе с осью пропускания поляризатора ($\alpha = \beta = 0$) $\Delta M^{\mathrm{k}} \equiv 0$, а $M_0^{\mathrm{k}} \propto \cos(\alpha+\beta) \neq 0$. Поэтому зависимость $\operatorname{Re} U_0$ от разности фаз $\psi$ не является однозначным критерием наличия или отсутствия поляризационной невзаимности. Для получения информации о невзаимном набеге фазы ($\operatorname{Im} U_0$) по зависимости величины интерференционного сигнала ($\operatorname{Re} U_0$) от разности фаз ортогональных компонент входного излучения необходимо иметь дополнительную априорную информацию о характере двупреломления (линейное или эллиптическое) и о юстировке анизотропных элементов ВКИ, соответствующей условию $\Delta M^{\mathrm{k}} \propto M_0^{\mathrm{k}}$. При отсутствии такой информации величина поляризационной невзаимности оказывается неопределённой. Поэтому для получения из интерференционного сигнала ВКИ с поляризатором информации о фазе поляризационной невзаимности без предварительных условий необходимо введение в волоконный контур дополнительной разности фаз за счёт либо традиционной невзаимности (эффектов Саньяка, Фарадея, Френеля—Физо), либо рассогласования фронтов интерферирующих волн, либо несимметричной для встречных волн синусоидальной фазовой модуляции.

Таким образом, при наличии поляризатора, как и при его отсутствии, эффекты поляризационной невзаимности остаются скрытыми в том случае, когда ВКИ является взаимной системой, т. е. матрицы для волн встречных направлений удовлетворяют традиционной теореме взаимности, и нет предварительной информации о соответствующей юстировке анизотропных элементов ВКИ.

При наличии вращения каждая из встречных волн приобретает дополнительный набег фазы $\varphi_{\mathrm{S}}/2$ и $-\varphi_{\mathrm{S}}/2$, и интерференционный сигнал приобретает вид

$$U_{\mathrm{s}} = E_x^+ E_x^{-*} + E_y^+ E_y^{-*} = |U_0| \exp(i\varphi_{\mathrm{p}} + i\varphi_{\mathrm{S}}).$$

Из этой формулы видно, что результирующая фаза сигнала на выходе ВКИ представляет собой сумму фазы $\varphi_{\mathrm{p}}$ поляризационной невзаимности и фазы Саньяка $\varphi_{\mathrm{S}}$, причём $\varphi_{\mathrm{p}}$ не зависит от фазы Саньяка.

Наличие дихроизма в волокне контура, как и установка поляризатора, не приводит к нарушению традиционной теоремы взаимности, и, следовательно, в этом случае эффекты поляризационной невзаимности оказываются скрытыми. Матрицы ВКИ с дихроичным волокном приведены в приложении 1.

Для ВКИ с контуром из волокна с эллиптическим двупреломлением выражения для $\operatorname{Re} U_0$ и $\operatorname{Im} U_0$ с учётом когерентности источника излучения получим, подставляя в (6) выражения для элементов матрицы контура (7). Полученные выражения ввиду громоздкости приведены в приложении 2. Из этих выражений следует, что эффекты поляризационной невзаимности, определяемые $\operatorname{Im} U_0$, с учётом когерентности и эллиптичности собственных ортогональных мод волоконного контура пропорциональны $\sin(\alpha-\beta)$, т. е. зависят от рассогласования осей анизотропии контура и поляризатора на двух входах (выходах) интерферометра.

Для волокна с линейным двупреломлением ($\sin\chi = 0$) выражения для действительной и мнимой частей интерференционного сигнала $U_0 = E_x^+ E_x^{-*} + E_y^+ E_y^{-*} = |U_0| \exp(i\varphi_\mathrm{p})$ с учётом когерентности источника излучения имеют вид

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} U_0 = {} & \left(|A_x|^2 + \varepsilon^4 |A_y|^2\right) \left\{\cos^2(\alpha-\beta)\,[1 - K\cos(\Delta k\, L)] + \cos^2(\alpha+\beta)\,[1 + K\cos(\Delta k\, L)]\right\} + \\
& + 2\varepsilon^2 \left(|A_x|^2 + |A_y|^2\right) \left\{\sin^2(\alpha+\beta)\,[1 + K\cos(\Delta k\, L)] - \sin^2(\alpha-\beta)\,[1 - K\cos(\Delta k\, L)]\right\} - \\
& - \frac{1}{2}\,(\varepsilon - \varepsilon^3) \cos(\psi) \sin[2\,(\alpha+\beta)]\,[1 + K\cos(\Delta k\, L)] A_x A_y - \\
& - (\varepsilon - \varepsilon^3) \sin(\psi) K \sin(\Delta k\, L) \sin(\alpha+\beta) \cos(\alpha-\beta) A_x A_y, \\
\operatorname{Im} U_0 = {} & -(\varepsilon + \varepsilon^3) \sin(\alpha-\beta) A_x A_y \bigl\{\sin(\psi) \cos(\alpha-\beta)\,[1 - K\cos(\Delta k\, L)]/2 + \\
& + K\cos(\psi) \sin(\Delta k\, L) \cos(\alpha+\beta)\bigr\} + \varepsilon^2 \left(|A_y|^2 - |A_x|^2\right) K \sin(\Delta k\, L) \sin(\alpha-\beta) \sin(\alpha+\beta),
\end{aligned} \tag{8}$$

где $L$ — длина контура, $\Delta k = 2\pi\,(n_1 - n_2)/\lambda$, $n_1$ и $n_2$ — показатели преломления ортогональных мод. Строго говоря, выражения (П2) и (8) справедливы для монохроматического излучения, т. е. при $K = 1$. Однако для широкополосного источника, для которого $\Delta\lambda/\lambda \ll 1$, излучение можно рассматривать как квазимонохроматическое с центральной длиной волны спектра с хаотической амплитудной и фазовой модуляцией на частотах в диапазоне полуширины спектра источника [19]. В связи с этим в соотношения (8) введён коэффициент $K$, характеризующий степень когерентности (коэффициент корреляции) излучения в ортогональных поляризационных модах на выходе интерферометра, в предположении, что значения $\Delta k = 2\pi\,\Delta n/\lambda$ относятся к центральной длине волны спектра источника излучения. Для широкополосного источника $K = \exp(-L^2/L_\mathrm{D}^2)$, где $L$ — длина волоконного контура, $L_\mathrm{D} = \lambda^2/(\Delta\lambda\,\Delta n)$ — длина деполяризации, на которой степень когерентности волн, прошедших по осям ортогональных мод, уменьшается в $e$ раз. Из полученных выражений (8) следует, что $\operatorname{Im} U_0$ и $\operatorname{Re} U_0$ содержат члены, не зависящие и зависящие от длины $L$ и коэффициента двупреломления $\Delta n$ волокна контура ВКИ. При отсутствии когерентности излучения в ортогональных модах волоконного контура сигнал интерференции $\operatorname{Re} U_0$ (без вращения) на выходе ВКИ не содержит членов, зависящих от $L$ и $\Delta n$, и представляет сумму независимых однополяризационных сигналов интерференции для каждой из двух ортогональных мод ($p$ и $q$), что нетрудно получить из сравнения с результатом для однополяризационного волокна (см. [12] и приложения 1 и 3). Члены, зависящие от $L$ и $\Delta n$ и пропорциональные $\cos(\Delta k L)$ либо $\sin(\Delta k\, L)$, связаны с когерентностью излучения в ортогональных модах на выходе. Эти члены могут приводить к существенной зависимости поляризационной невзаимности ($\operatorname{Im} U_0$) и сигнала интерференции ($\operatorname{Re} U_0$) от температуры за счёт температурных изменений длины контура $L$ и $\Delta n$. В случае идеального поляризатора (при $\varepsilon = 0$) $\operatorname{Im} U_0 = 0$, в выражении $\operatorname{Re} U_0$ остаётся слагаемое, пропорциональное $\cos(\Delta k\, L)$ и связанное с когерентностью источника, которое зануляется при $\alpha = 0$ или $\beta = 0$, т. е. в случае, когда одна из осей волокна совпадает с осью поляризатора. Следует отметить, что при модуляционном методе регистрации скорости вращения $\Omega_\mathrm{S} \propto \varphi_\mathrm{S}$ величина $\operatorname{Re} U_0$ определяет масштабный коэффициент — амплитуду сигнала на первой гармонике частоты модуляции, несущую информацию о скорости вращения [12]. Таким образом, когерентность источника даже при наличии идеального поляризатора может приводить (при $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$) к зависимости масштабного коэффициента ВКИ от $L$ и $\Delta n$ и, следовательно, от температуры, что приводит к необходимости стабилизации масштабного коэффициента.

Выражения (П2) и (8) для $\operatorname{Im} U_0$ относятся к случаю, когда параметры анизотропии вдоль контура неизменны. В том случае, когда параметры анизотропии изменяются вдоль контура или контур состоит из отрезков волокна с разной анизотропией, эффекты поляризационной невзаимности могут появиться без разворота осей анизотропии волокна на концах контура, за счёт различной ориентации осей отрезков волокон, составляющих контур [12]. Слабая случайная неоднородность параметров анизотропии вдоль контура, возникающая в процессе изготовления волокна, приводит к появлению связи мод, которая характеризуется параметром $h$, определяющим мощность, перекачанную в ортогональную моду на единицу длины волокна. При использовании источника с длиной когерентности, существенно меньшей длины контура, излучение, прошедшее всю длину контура по ортогональным осям, при отсутствии связи можно считать некогерентным ($K \ll 1$). В этом случае когерентные составляющие в ортогональных модах на выходе интерферометра могут появиться только из-за связи на выходных концах волоконного контура на длинах, соизмеримых с длиной деполяризации $L_{\mathrm{D}}$. Излучение, возникающее в ортогональных модах из-за связи не на концах контура, на выходе оказывается некогерентным. В силу теоремы эквивалентности [20] набор отрезков со случайной анизотропией можно заменить одним отрезком волокна эквивалентной длины $L_{\mathrm{E}} < L_{\mathrm{D}}$. Длина деполяризации $L_{\mathrm{D}} = \lambda^2/(\Delta\lambda\,\Delta n)$ в отличие от $L_{\mathrm{E}}$ определена для волокна без случайной анизотропии. Величина $L_{\mathrm{E}}$ должна зависеть как от линейного, так и от циркулярного двупреломления, связанного со случайными кручениями. Для случая, когда в (8) средние значения углов $\alpha$ и $\beta$ равны нулю, учитывая, что амплитуда поля, перекачанного за счёт связи на длине $L_{\mathrm{E}}$, составляет порядка $\sqrt{hL_{\mathrm{E}}}$, можно принять, что для эквивалентных отрезков $L_{\mathrm{E}}$ на концах контура $(\alpha_{\mathrm{E}} - \beta_{\mathrm{E}}) \approx \sqrt{hL_{\mathrm{E}}}$. В этом предположении, используя (8) и полагая $A_x \neq 0$, $A_y = 0$, $\psi = 0$ и $\varepsilon \ll 1$, что позволяет в $\operatorname{Im} U_0$ учитывать только члены порядка $\varepsilon$, а в $\operatorname{Re} U_0$ отбросить члены с $\varepsilon$, получаем $E_y^{\text{вых}} \approx \sqrt{hL_{\mathrm{E}}}\,A_x$, $\sin(\alpha_{\mathrm{E}} - \beta_{\mathrm{E}}) \to (\alpha_{\mathrm{E}} - \beta_{\mathrm{E}}) \approx \sqrt{hL_{\mathrm{E}}}$, что даёт следующие приближённые выражения:

$$\operatorname{Re} U_0 = |A_x|^2, \qquad \operatorname{Im} U_0 = \varepsilon h L_{\mathrm{E}} |A_x|^2 \sin(\Delta k L_{\mathrm{E}}), \qquad \operatorname{tg}\varphi_{\mathrm{ps}} = \varphi_{\mathrm{ps}} = \varepsilon h L_{\mathrm{E}} \sin(\Delta k L_{\mathrm{E}}), \tag{9}$$

где $\varphi_{\mathrm{ps}}$ — невзаимная фаза, определяемая связью мод. Зависимость $\varphi_{\mathrm{ps}}$ от температуры может возникать за счёт температурного изменения фазы $\Delta k L_{\mathrm{E}}$ лишь при условии, что температурные зависимости $\Delta k$ и $L_{\mathrm{E}}$ не компенсируют друг друга. При $L_{\mathrm{E}} = L_{\mathrm{D}}$, как принято в работе [21], аргумент $\sin(\Delta k L_{\mathrm{D}}) = 2\pi\lambda/\Delta\lambda$ не зависит от температуры, и поэтому объяснение, данное в [21] температурной зависимости $\varphi_{\mathrm{ps}}$, полученной в результате математического моделирования, через температурную зависимость $\Delta k L_{\mathrm{D}}$, ошибочно.

Основные выводы работы состоят в следующем.

1) Эффекты поляризационной фазовой невзаимности ВКИ как с поляризатором, так и без поляризатора делятся на две группы. К первой относятся эффекты, не зависящие от двупреломления и длины волоконного контура ВКИ, которые при постоянных параметрах анизотропии контура представляют собой сумму независимых однополяризационных эффектов и определяются поляризацией и степенью когерентности излучения с ортогональной поляризацией на входе ВКИ.

Ко второй группе относятся эффекты поляризационной невзаимности, зависящие от двупреломления и длины контура. Эти эффекты определяются степенью когерентности излучения в ортогональных поляризационных модах на выходе и зависят от температуры за счёт температурных изменений длины контура и двупреломления. Обе группы эффектов поляризационной невзаимности при постоянных параметрах анизотропии контура эависят от угла между осями анизотропии на двух выходах интерферометра.

2) Введение в схему ВКИ поляризатора (или дихроизма) приводит к зависимости сигнала интерференции при отсутствии вращения $\mathrm{Re}\,U_0$ от разности фаз $\psi$ ортогональных компонент поля на входе ВКИ, но эта зависимость не может служить достоверным критерием наличия или отсутствия в ВКИ невзаимной поляризационной фазы, определяемой величиной $\mathrm{Im}\,U_0$, без априорной информации о характере двупреломления волоконного контура и об ориентации осей анизотропии элементов волоконного контура и поляризатора.

3) Невзаимная поляризационная фаза не зависит от эффекта Саньяка. Результирующая фаза на выходе ВКИ представляет собой сумму поляризационной фазы и фазы Саньяка.

4) Связь мод анизотропного волокна, характеризуемая параметром $h$, при широкополосном источнике излучения приводит к появлению на выходных концах контура ВКИ, соизмеримых с длиной деполяризации, когерентных компонент в ортогональных модах и, как следствие, когерентных эффектов поляризационной невзаимности, зависящих от температуры выходных отрезков контура.

Работа выполнена при частичной поддержке Совета при президенте РФ по поддержке ведущих научных школ РФ (грант № НШ-1622.2003.2).

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Матрицы для волн встречных направлений в контуре ВКИ на анизотропном волокне с линейным двупреломлением и дихроизмом в системе координат, связанной с осями анизотропии волокна ($p$ и $q$) диагональны и имеют вид

$$\mathbf{M}^{+}_{pq} = \mathbf{M}^{-}_{pq} = \begin{pmatrix} M_{11} & 0 \\ 0 & M_{22}, \end{pmatrix}, \qquad M_{11} = \exp(ik_pL), \qquad M_{22} = \exp(ik_qL),$$

где $k_p = k'_p + ik''_p$, $k_q = k'_q + ik''_q$, а различия $k'_p$, $k'_q$ и $k''_p$, $k''_q$ определяют двупреломление и дихроизм. В случае, когда потери в одной из мод велики ($k''_pL$ или $k''_qL$ много больше единицы), волокно становится однополяризационным ($M_{11}$ или $M_{22}$ обращается в нуль). При переходе в систему координат, развёрнутую относительно осей анизотропии волокна на двух входах на углы $\alpha$ и $\beta$, для элементов матриц $\mathbf{M}^{+}$ и $\mathbf{M}^{-}$ в новой системе получаем

$$\begin{aligned} M^{+}_{11} &= M^{-}_{11} = \exp(ik_pL)\cos\alpha\cos\beta - \exp(ik_qL)\sin\alpha\sin\beta, \\ M^{+}_{12} &= M^{-}_{21} = \exp(ik_pL)\sin\alpha\cos\beta + \exp(ik_qL)\sin\beta\cos\alpha, \\ M^{+}_{21} &= M^{-}_{12} = \exp(ik_pL)\sin\beta\cos\alpha + \exp(ik_qL)\sin\alpha\cos\beta, \\ M^{+}_{22} &= M^{-}_{22} = \exp(ik_pL)\sin\alpha\sin\beta - \exp(ik_qL)\cos\alpha\cos\beta. \end{aligned} \tag{П1}$$

Матрицы $\mathbf{M}^{+}$ и $\mathbf{M}^{-}$ в отсутствие вращения удовлетворяют условиям традиционной теоремы взаимности и $\mathbf{M}^{+} = (\mathbf{M}^{-})^{\mathrm{T}}$.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Компоненты интерференционного сигнала $U_0 = \mathrm{Re}\,U_0 + i\mathrm{Im}\,U_0$ на выходе ВКИ для случая, когда поляризация собственных мод волокна эллиптическая:

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\,U_0 = {}&-(\varepsilon+\varepsilon^3)\sin(\alpha-\beta)A_xA_y\left\{\sin\psi\cos(\alpha-\beta)\left[1-\cos(\Delta k\,L)\right]\cos^2\chi + {}\right.\\ &\left.+\cos\psi\left[\cos\chi\cos(\alpha+\beta)\sin(\Delta k\,L)+\sin(2\chi)\sin(\alpha+\beta)\sin^2(\Delta k\,L/2)\right]\right\} + \\ &+\varepsilon^2\left(|A_y|^2-|A_x|^2\right)\sin(\alpha-\beta)\left[\cos\chi\sin(\alpha+\beta)\sin(\Delta k\,L)-\sin(2\chi)\cos(\alpha+\beta)\sin^2(\Delta k\,L/2)\right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} U_0 = -(\varepsilon - \varepsilon^3)\, A_x A_y \big\{\cos\psi \big[\sin[2\,(\alpha+\beta)]\cos^2(\Delta k\, L/2) - \sin^2\chi \sin[2(\alpha+\beta)]\sin^2(\Delta k\, L/2) + \\ + \sin\chi\cos[2\,(\alpha+\beta)]\sin(\Delta k\, L)\big] + \sin\psi\,[\cos\chi\cos(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)\sin(\Delta k\, L) - \\ - \sin(2\chi)\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)\sin^2(\Delta k\, L/2)]\big\} + \\ + \varepsilon^2\left(|A_x|^2 + |A_y|^2\right)\big[\cos^2(\Delta k\, L/2)\sin^2(\alpha+\beta) + \sin^2\chi\cos^2(\alpha+\beta)\sin^2(\Delta k\, L/2) - \\ - \cos^2\chi\sin^2(\alpha-\beta)\sin^2(\Delta k\, L/2) - \frac{1}{2}\sin\chi\sin[2\,(\alpha+\beta)]\sin(\Delta k\, L)\bigg] + \\ + \left(|A_x|^2 + \varepsilon^4|A_y|^2\right)\big[\cos^2(\alpha+\beta)\cos^2(\Delta k\, L/2) + \sin^2\chi\sin^2(\alpha+\beta)\sin^2(\Delta k\, L/2) + \\ + \cos^2\chi\cos^2(\alpha-\beta)\sin^2(\Delta k\, L/2) + \frac{1}{2}\sin\chi\sin[2\,(\alpha+\beta)]\sin(\Delta k\, L)\bigg].\end{aligned}$$

## ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Сигнал интерференции без вращения $\operatorname{Re} U_0$ при отсутствии когерентности излучения в ортогональных модах на выходе ВКИ представляет сумму независимых однополяризационных сигналов интерференции для каждой из двух ортогональных мод $p$ и $q$: $U_0 = U_0^p + U_0^q$, где $U_0^p$ и $U_0^q$ — сигналы интерференции в предположении, что излучение распространяется в однополяризационном волокне в одной ($p$ или $q$) моде.

$$U_0^p = E_x^{p+} E_x^{p-*} + E_y^{p+} E_y^{p-*},$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} U_0^p = |A_x|^2\cos^2\alpha\cos^2\beta + \varepsilon^4\,|A_y|^2\sin^2\alpha\sin^2\beta + \varepsilon^2\sin(2\alpha)\sin(2\beta)\left(|A_x|^2 + |A_y|^2\right)] - \\ - \frac{1}{2}\cos\psi\, A_x A_y[\varepsilon(\cos^2\alpha\sin(2\beta) + \cos^2\beta\sin(2\alpha)) + \varepsilon^3(\sin^2\beta\sin(2\alpha) + \sin^2\alpha\sin(2\beta))],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} U_0^p = -\frac{1}{2}\sin\psi A_x A_y[\varepsilon(-\cos^2\alpha\sin(2\beta) + \cos^2\beta\sin(2\alpha)) + \varepsilon^3(-\sin^2\beta\sin(2\alpha) + \\ + \sin^2\alpha\sin(2\beta))]; \qquad (\text{П3а})\end{aligned}$$

$$U_0^q = E_x^{q+} E_x^{q-*} + E_y^{q+} E_y^{q-*},$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} U_0^q = |A_x|^2\sin^2\alpha\sin^2\beta + \varepsilon^4\,|A_y|^2\cos^2\alpha\cos^2\beta + \varepsilon^2\sin(2\alpha)\sin(2\beta)\left(|A_x|^2 + |A_y|^2\right)] + \\ + \frac{1}{2}\cos\psi\, A_x A_y[\varepsilon(\sin^2\alpha\sin(2\beta) + \sin^2\beta\sin(2\alpha)) + \varepsilon^3(\cos^2\beta\sin(2\alpha) + \cos^2\alpha\sin(2\beta))],\end{aligned}$$

$$\operatorname{Im} U_0^q = \frac{1}{2}\sin\psi A_x A_y[\varepsilon(-\sin^2\alpha\sin(2\beta) + \sin^2\beta\sin(2\alpha)) + \varepsilon^3(-\cos^2\beta\sin(2\alpha) + \cos^2\alpha\sin(2\beta))], \quad (\text{П3б})$$

где $A_x$ и $A_y\exp(i\psi)$ — ортогональные компоненты полей на входе ВКИ, $E_x^{p+}$, $E_x^{p-}$, $E_y^{p+}$, $E_y^{p-}$, $E_x^{q+}$, $E_x^{q-}$, $E_y^{q+}$, $E_y^{q-}$ — компоненты полей на выходе ВКИ, прошедшие волоконный контур во встречных направлениях в ортогональных модах $p$ и $q$.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. М.: Физматлит, 1960. 552 с.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 8. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620 с.
3. Ulrich R., Johnson M. // Opt. Lett. 1979. V. 4, No. 5. P. 152.

4. Schiffner G., Leeb W. K., Krammer H., Wittmann J. // Appl. Opt. 1979. V. 18, No. 13. P. 2 096.
5. Kintner E. // Opt. Lett. 1981. V. 6, No. 3. P. 154.
6. Ezekiel S. // Fiber-Optic rotation sensors. Berlin: Springer-Verlag, 1982. P. 2.
7. Bergh R. A., Lefevre H. C., Shaw H. J. // J. Lightwave Techn. 1984. V. 2, No. 2. P. 91.
8. Козел С. М., Колесов Ю. И., Листвин В. Н., Шаталин С. В. // Оптика и спектроскопия. 1985. Т. 59, вып. 1. С. 180.
9. Галкин С. Л., Кожевников Р. М. // Оптика и спектроскопия. 1987. Т. 62, вып. 1. С. 170.
10. Козел С. М., Листвин В. Н., Шаталин С. В., Юшкайтис Р. В. // Оптика и спектроскопия. 1986. Т. 61, вып. 6. С. 1 295.
11. Малыкин Г. Б. // Изв. вузов. Радиофизика. 1991. Т. 34, № 7. С. 817.
12. Андронова И. А., Геликонов Г. В., Малыкин Г. Б. // Квантовая электроника. 1999. Т. 26, № 3. С. 271.
13. Андронова И. А., Геликонов В. М., Геликонов Г. В. // Квантовая электроника. 2000. Т. 30, № 2. С. 115.
14. Листвин В. Н., Логозинский В. Н. // Изв. вузов. Радиофизика. 1991. Т. 34, № 9. С. 1 001.
15. Алексеев Э. И., Базаров Е. Н. // Квантовая электроника. 1992. Т. 19, № 9. С. 897.
16. Андронова И. А., Геликонов В. М., Степанов Д. П. // Квантовая электроника. 1994. Т. 21, № 9. С. 863.
17. Фадеев А. В. // Изв. вузов. Приборостроение. 1990. Т. 34, № 8. С. 69.
18. Андреев А. Ц., Василев В. Д., Козлов В. А. и др. // Квантовая электроника. 1993. Т. 20, № 8. С. 791.
19. Бунимович В. И. Флуктуационные процессы в радиоприёмных устройствах. М.: Сов.радио, 1951. 360 с.
20. Алексеев Э. И., Базаров Е. Н., Израелян В. Г. // Квантовая электроника. 1984. Т. 11, № 2. С. 397.
21. Малыкин Г. Б., Позднякова В. И. // Оптика и спектроскопия. 2004. Т. 96, № 2. С. 274.

Институт прикладной физики РАН,
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию
9 марта 2004 г.

## INFLUENCE OF RADIATION COHERENCE ON THE EFFECTS OF POLARIZATION NONRECIPROCITY OF THE FIBER RING INTERFEROMETERS

*I. A. Andronova*

In this paper, we consider the effects of polarization nonreciprocity taking into account coherence or partial coherence of radiation at the output of a fiber ring interferometer (FRI) and discuss the possibility of occurrence of additional effects of polarization nonreciprocity at the output of an FRI with a broadband radiation source due to coherent component of radiation resulting from the coupling of orthogonal modes at the output segments of the fiber. Allowing for the coherence, we estimate the temperature instability of the interferometer signal related to the polarization nonreciprocity.

The features of the polarization nonreciprocity effects for a fiber ring interferometer with polarizer or dichroism are considered. It is shown that if the conditions of conventional reciprocity theorem (no rotation) are satisfied for the interferometer, then the polarization nonreciprocity effects become hidden and cannot be detected in the interference signal without *a priori* information on the character of birefringence and on the orientation of anisotropic elements of the fiber loop of the interferometer and polarizer.

УДК 535.2-4+535.854

# ВЛИЯНИЕ НЕРЕГУЛЯРНОСТИ КРУЧЕНИЯ ОСЕЙ ДВУЛУЧЕПРЕЛОМЛЕНИЯ ОДНОМОДОВЫХ ВОЛОКОННЫХ СВЕТОВОДОВ НА ПОЛЯРИЗАЦИОННУЮ НЕВЗАИМНОСТЬ ВОЛОКОННЫХ КОЛЬЦЕВЫХ ИНТЕРФЕРОМЕТРОВ

*Г. Б. Малыкин*

На частном примере волоконного кольцевого интерферометра с так называемой минимальной конфигурацией, контур которого состоит из двух участков одномодового волоконного световода различной длины с одинаковым линейным двулучепреломлением, но различным кручением, показано, что даже в том случае, когда на входе контура интерферометра оси двулучепреломления световода совпадают с направлением пропускания поляризатора, может возникнуть явление поляризационной невзаимности волоконного кольцевого интерферометра. Показано, что, в принципе, с помощью соответствующей настройки осей одномодового волнового световода можно исключить поляризационную невзаимность, однако при изменении температуры световода рассматриваемую настройку требуется изменять.

Показано также, что величина поляризационной невзаимности зависит от длины волны света и что при изменении температуры световода со случайными неоднородностями изменение величины поляризационной невзаимности в волоконном кольцевом интерферометре будет иметь квазипериодический характер.

В работе [1] нами была предложена модель случайных неоднородностей в одномодовых волоконных световодах (ОВС), которая предполагает возникновение случайных кручений осей собственного линейного двулучепреломления ОВС в процессе вытяжки световода из заготовки. Типичная длина корреляции неоднородностей $\langle l \rangle$ составляет около 2,5 см, а модуль максимального погонного кручения осей $\Theta_{\max} \sim 2$ рад/м. При этом азимуты осей двулучепреломления ОВС не испытывают разрывов. Модель [1], в частности, позволяет получить достаточно хорошее совпадение с результатами измерений зависимости $h$-параметра, характеризующего связь поляризационных мод [1], от разности $\Delta n$ показателей преломления в медленной и быстрой осях ОВС, а также рассчитывать ряд параметров волоконных кольцевых интерферометров (ВКИ) различных типов методом математического моделирования случайных неоднородностей [2, 3].

Если невозмущённое двулучепреломление в ОВС является линейным, то при наличии даже регулярного (равномерного) кручения собственные поляризационные моды становятся эллиптическими, причём наиболее рациональным является рассмотрение этих мод в сопровождающей кручение, так называемой винтовой, системе координат [4–6]. В этом случае, как было впервые показано В. Л. Гинзбургом [4], эллиптичность мод не зависит от оптической толщины фазовой пластинки, в данном случае — длины световода.

В принципе, в ОВС может иметь место собственное эллиптическое двулучепреломление, которое не связано с кручением, а обусловлено, например, некоторой оптической активностью вещества светонесущей жилы (кора) световода [1]. Для такого ОВС эллиптичность собственных поляризационных мод не зависит от длины световода в лабораторной системе координат. ВКИ с

[1] Как показано в работе [6], при одновременном наличии оптической активности и кручения возникает особый тип поляризационной невзаимности среды, который обусловлен тем, что в рассматриваемом случае собственные поляризационные моды ОВС уже не являются взаимно ортогональными. Отметим, что в оптически активных средах с потерями поляризационные моды также неортогональны [7]. В ОВС без оптической активности неортогональность поляризационных мод может иметь место только при наличии дихроизма, оси которого не совпадают с осями линейного двулучепреломления [8]. Ниже мы будем рассматривать только случай, когда поляризационные моды ОВС взаимно ортогональны.

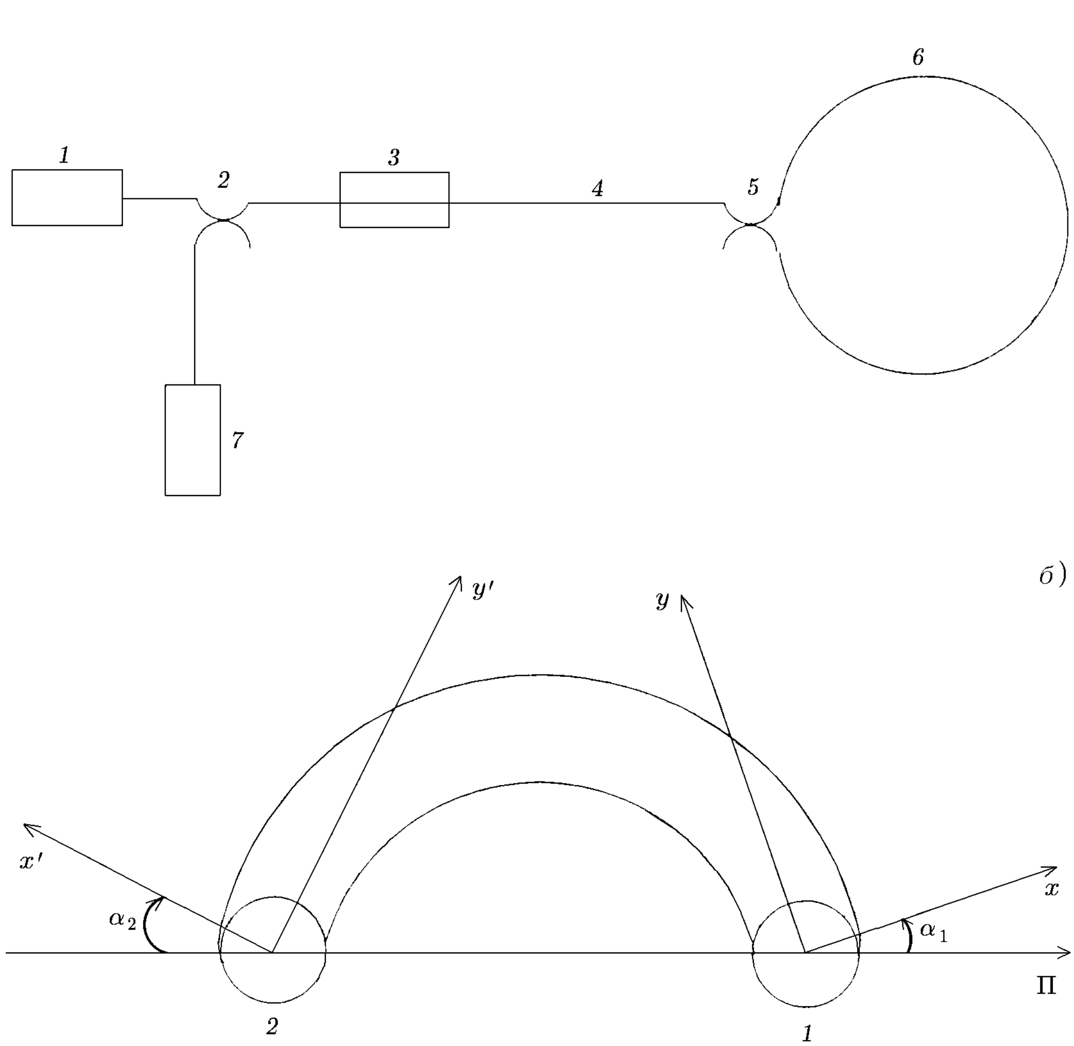



Рис. 1. (*а*) Схема ВКИ с минимальной конфигурацией: *1* — суперлюминисцентный диод, *2*, *5* — светоделители, *3* — поляризатор, *4* — отрезок ОВС между поляризатором и вторым светоделителем, *6* — контур ВКИ, *7* — фотодиод. (*б*) Ориентация осей собственного линейного двулучепреломления на входе контура ВКИ: $x$, $y$ и $x'$, $y'$ — направления «медленной» и «быстрой» осей соответственно на входах контура *1* и *2*, П — направление пропускания поляризатора

контуром из рассматриваемого одномодового волоконного световода рассмотрены в наших работах [9, 10]. В частности, в [9, 10] показано, что, если оси эллиптического двулучепреломления [2] ОВС на обоих концах контура интерферометра параллельны направлению пропускания поляризатора (см. рис. 1), чему соответствует условие $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, то обусловленная поляризационной невзаимностью (ПН) [11, 12] невзаимная разность фаз встречных волн на выходе ВКИ отсутствует.

Отметим, что невзаимная разность фаз встречных волн является проявлением так называемой геометрической, или топологической, фазы [10, 13–15], иногда именуемой фазой Берри, и в большинстве случаев ограничивает точность измерения угловой скорости вращения с помощью

[2] Эти оси совпадают с большой и малой осью любого из двух эллипсов, соответствующих собственным поляризационным модам рассматриваемого ОВС.

ВКИ. Поляризационная невзаимность волоконного кольцевого интерферометра — это возникновение невзаимной разности фаз встречных волн на выходе ВКИ при отсутствии вращения.

В действительности параллельность осей ОВС на обоих входах контура волоконного кольцевого интерферометра направлению пропускания поляризатора является избыточным условием отсутствия поляризационной невзаимности. Как показано в [8, 11, 12], для этого достаточно, чтобы оси на обоих концах контура были параллельны друг другу ($\alpha_1 + \alpha_2 = 0$), однако в этом случае интенсивность полезного сигнала на выходе ВКИ будет меньше, чем при условии $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Поэтому ниже мы будем рассматривать последнее условие отсутствия поляризационной невзаимности.

Следует иметь в виду, что ОВС с обусловленным оптической активностью эллиптическим двулучепреломлением реально не существуют — это лишь простая и удобная для рассмотрения модель. Эллиптичность собственных поляризационных мод в реальных ОВС всегда связана с кручением. В случае, если кручение и, следовательно, эллиптичность поляризационных мод ОВС постоянна по всей длине контура ВКИ, то оси эллиптического двулучепреломления повернутся в сопровождающей кручение системе координат на всей длине волокна на угол $\xi = \Theta L$, где $\Theta$ — погонное кручение осей ОВС, $L$ — длина контура. В итоге на одном из концов контура (см. рис. 1*б*) оси ОВС будут повёрнуты на угол $\alpha_1$, а на другом — на $\alpha_2 + \xi$. Однако, как нетрудно показать, и в этом случае при условии, что оси ОВС не параллельны направлению пропускания поляризатора ($\alpha_1 = \alpha_2 + \xi = 0$), поляризационная невзаимность также отсутствует.

В принципе, без потери общности можно включить угол $\xi$ в угол $\alpha_2$, для которого можно ввести обозначение $\alpha_2^{\text{новое}} = \alpha_2^{\text{старое}} + \xi$, где $\alpha_2^{\text{новое}}$ — это угол между направлением пропускания поляризатора и медленной осью ОВС. Отметим, что, если световод распрямить и освободить, то разность азимутов осей двулучепреломления на его входе и выходе составит $\xi$.

Цель данной работы — показать, что при наличии случайного кручения осей ОВС даже в том случае, когда оси эллиптического двулучепреломления ОВС на входе и выходе ВКИ с минимальной конфигурацией параллельны оси пропускания поляризатора, может иметь место поляризационная невзаимность. Как показано в наших работах [11, 12] [3], поляризационная невзаимность отсутствует в случае равенства недиагональных элементов матрицы Джонса всего ВКИ. При этом невзаимная разность фаз встречных волн тождественно равна нулю [4].

Таким образом, если нам удастся показать, что при условии $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ недиагональные элементы матрицы Джонса ВКИ не равны в случае, когда контур ВКИ состоит хотя бы из двух отрезков ОВС разной длины с одинаковым невозмущённым линейным двулучепреломлением и различным кручением [5], то это будет служить доказательством наличия поляризационной невзаимности [6]. Такой подход избавит нас от необходимости довольно сложного расчёта невзаимной разности фаз встречных волн, однако не позволит получить в явном виде зависимостей невзаимной разности фаз встречных волн и интенсивности интерференционного (полезного) сигнала от состояния поляризации излучения. Данная работа имеет и другие цели: рассмотреть способ компенсации поляризационной невзаимности в ВКИ с контуром из ОВС со случайными неоднородностями, основанный на регулировке ориентации осей двулучепреломления ОВС на входе контура, а также показать, что поляризационная невзаимность зависит от длины волны света и

[3] В работах [11, 12] по предложению И. А. Андроновой было рассмотрено влияние разности действительных и мнимых частей элементов матрицы Джонса ВКИ на невзаимную разность фаз встречных волн.

[4] В то же время, если недиагональные элементы матрицы Джонса ВКИ не равны между собой, то из этого ещё не следует, что невзаимная разность фаз встречных волн не равна нулю. Для её возникновения, как показано в [9], необходимо наличие соответствующего состояния поляризации излучения на входе ВКИ.

[5] Наличие двух таких отрезков эквивалентно наличию одной случайной неоднородности в световоде контура интерферометра, которая находится на стыке рассматриваемых отрезков.

[6] Для упрощённой схемы ВКИ, в которой отсутствует поляризатор, это было показано автором ещё в [11].

температуры ОВС.

Запишем выражение для матрицы Джонса волоконного кольцевого интерферометра при положительном направлении обхода [7] $\mathbf{M}^+$ одномодового волоконного световода с произвольным числом $N$ отрезков со случайным кручением [2]:

$$\mathbf{M}^+ = \mathbf{\Pi}\,(\boldsymbol{\lambda}/2)\,\mathbf{T}(-\alpha_2)\mathbf{K}^+\mathbf{T}(\alpha_1)\mathbf{\Pi}, \tag{1}$$

где

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{T}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\lambda}/2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— матрицы Джонса поляризатора ($\varepsilon \ll 1$ — коэффициент экстинкции поляризатора), поворота одного из концов контура на угол $\alpha$ и полуволновой пластинки соответственно. Последняя матрица описывает переход от правой системы координат $(x,y)$ на конце контура *1* к левой $(x',y')$ на конце контура *2* (см. рис. 1*б*) и, таким образом, позволяет проводить все вычисления в одной системе координат $(x,y)$.

Заметим здесь, что излучение, прошедшее по оси $x$, испытывает дополнительный набег фаз на $\pi$ по сравнению с излучением, прошедшим по оси $y$, что и учитывается введением полуволновой пластинки. Матрица Джонса контура ВКИ при наличии случайных кручений ОВС имеет вид [2]:

$$\mathbf{K}^+ = \mathbf{T}\left(-\sum_{k=1}^{N}\Theta_k l_k\right)\prod_{k=1}^{N}\mathbf{a}_k = \mathbf{T}\left(-\sum_{k=1}^{N}\xi_k\right)\prod_{k=1}^{N}\mathbf{a}_k,$$

где $\xi_k = \Theta_k l_k$ ($\xi_0 = 0$), $\mathbf{a}_k$ — матрица Джонса $k$-го случайного отрезка ОВС контура интерферометра, имеющего случайное кручение, в сопровождающей (винтовой) системе координат [1]:

$$\mathbf{a}_k = \begin{pmatrix} \cos\left(\dfrac{\beta_k l_k}{2}\right) + i\,\dfrac{\beta}{\beta_k}\sin\left(\dfrac{\beta_k l_k}{2}\right) & \dfrac{2\,(1-g)\,\Theta_k}{\beta_k}\sin\left(\dfrac{\beta_k l_k}{2}\right) \\ -\dfrac{2\,(1-g)\,\Theta_k}{\beta_k}\sin\left(\dfrac{\beta_k l_k}{2}\right) & \cos\left(\dfrac{\beta_k l_k}{2}\right) - i\,\dfrac{\beta}{\beta_k}\sin\left(\dfrac{\beta_k l_k}{2}\right) \end{pmatrix},$$

$l_k$ — длина случайного отрезка, $\Theta_k = \mathrm{d}\xi_k/\mathrm{d}l$ — случайная величина кручения азимута на каждом из отрезков, $\beta_k = \sqrt{\beta^2 + [2\,(1-g)\,\Theta_k]^2}$ — эллиптическое двулучепреломление собственных поляризационных (нормальных) мод ОВС в винтовой системе координат, $\beta = 2\pi\,\Delta n/\lambda$ — собственное (невозмущённое) линейное двулучепреломление ОВС, $\Delta n$ — разность показателей преломления в медленной и быстрой осях ОВС при отсутствии кручения, $\lambda$ — длина волны света в вакууме, $g$ — коэффициент фотоупругости материала, из которого изготовлен световод.

На всей длине ОВС вследствие случайных кручений световода набегает угол кручения осей $\sum_{k=1}^{N}\xi_k$. В рассматриваемом случае $N = 2$ и $\sum_{k=1}^{N}\xi_k = \xi_1 + \xi_2$.

Отметим, что, как и для постоянного кручения осей ОВС, без потери общности можно включить угол $\xi_1 + \xi_2$ в угол $\alpha_2$, для чего введём обозначение: $\alpha_2^{\text{новое}} = \alpha_2^{\text{старое}} + \xi_1 + \xi_2$, где $\alpha_2^{\text{новое}}$ — угол между направлением пропускания поляризатора и медленной осью ОВС. Такое переобозначение существенно упростило бы дальнейшие расчёты, однако, поскольку данная работа имеет методический характер, мы сохраним старые обозначения для наглядности и ясности отличия происхождения различных углов поворота осей ОВС на входе контура: углы $\xi_1$ и $\xi_2$ возникли

[7] Матрица Джонса волоконного кольцевого интерферометра при отрицательном направлении обхода имеет вид $\mathbf{M}^- = \mathbf{M}^{+\mathrm{T}}$. Последнее соотношение объясняет требование к равенству недиагональных элементов $\mathbf{M}^+$: в этом случае $\mathbf{M}^+ \equiv \mathbf{M}^-$, вследствие чего условия распространения излучения для встречных волн будут одинаковыми и, следовательно, поляризационная невзаимность не будет иметь места.

в процессе вытяжки ОВС из заготовки и «вморожены» в структуру световода, а $\alpha_1$ и $\alpha_2$ — углы принудительного разворота осей на входе контура. Таким образом, на рис. 1*б* вместо угла $\alpha_2$ между направлением пропускания поляризатора и медленной осью ОВС на втором входе контура ВКИ будет угол $\alpha_2 + \xi_1 + \xi_2$. Отметим, что, если световод распрямить и освободить, то разность азимутов осей двулучепреломления на его входе и выходе составит $\xi_1 + \xi_2$.

В случае, когда контур ВКИ состоит из двух случайных отрезков, вообще говоря, $l_1 \neq l_2$ и $\Theta_1 \neq \Theta_2$. Предположим, что выполняется условие $\Theta_1 l_1 + \Theta_2 l_2 = 0$. Это означает, что $\xi_1 + \xi_2 = 0$, т. е. при отсутствии принудительного разворота осей ОВС ($\alpha_1 = \alpha_2 = 0$) азимуты осей эллиптического двулучепреломления ОВС на обоих концах контура ВКИ совпадают с направлением пропускания поляризатора. Два последних предположения ($\xi_1 + \xi_2 = 0$; $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$) существенно упрощают дальнейшие вычисления, в результате которых получим следующие выражения для реальных и мнимых частей элементов матрицы Джонса ВКИ $\mathbf{M}^+$ (см. выражение (1)):

$$\operatorname{Re} M_{11} = -\cos\left(\frac{\beta_1 l_1}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta_2 l_2}{2}\right) + \frac{\beta^2 + 4\,(1-g)^2\,\Theta_1\Theta_2}{\beta_1\beta_2}\sin\left(\frac{\beta_1 l_1}{2}\right)\sin\left(\frac{\beta_2 l_2}{2}\right),$$

$$\operatorname{Im} M_{11} = -\frac{\beta}{\beta_1}\sin\left(\frac{\beta_1 l_1}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta_2 l_2}{2}\right) - \frac{\beta}{\beta_2}\cos\left(\frac{\beta_1 l_1}{2}\right)\sin\left(\frac{\beta_2 l_2}{2}\right);$$

$$\operatorname{Re} M_{12} = -2\varepsilon\,(1-g)\left[\frac{\Theta_1}{\beta_1}\sin\left(\frac{\beta_1 l_1}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta_2 l_2}{2}\right) + \frac{\Theta_2}{\beta_2}\cos\left(\frac{\beta_1 l_1}{2}\right)\sin\left(\frac{\beta_2 l_2}{2}\right)\right],$$

$$\operatorname{Im} M_{12} = -\varepsilon\,\frac{2\,(1-g)\,\beta\,(\Theta_1 - \Theta_2)}{\beta_1\beta_2}\sin\left(\frac{\beta_1 l_1}{2}\right)\sin\left(\frac{\beta_2 l_2}{2}\right);$$

$$\operatorname{Re} M_{21} = -2\varepsilon\,(1-g)\left[\frac{\Theta_1}{\beta_1}\sin\left(\frac{\beta_1 l_1}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta_2 l_2}{2}\right) + \frac{\Theta_2}{\beta_2}\cos\left(\frac{\beta_1 l_1}{2}\right)\sin\left(\frac{\beta_2 l_2}{2}\right)\right],$$

$$\operatorname{Im} M_{21} = \varepsilon\,\frac{2\,(1-g)\,\beta\,(\Theta_1 - \Theta_2)}{\beta_1\beta_2}\sin\left(\frac{\beta_1 l_1}{2}\right)\sin\left(\frac{\beta_2 l_2}{2}\right);$$

$$\operatorname{Re} M_{22} = \varepsilon^2\cos\left(\frac{\beta_1 l_1}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta_2 l_2}{2}\right) + \frac{\beta^2 + 4\,(1-g)^2\,\Theta_1\Theta_2}{\beta_1\beta_2}\sin\left(\frac{\beta_1 l_1}{2}\right)\sin\left(\frac{\beta_2 l_2}{2}\right),$$

$$\operatorname{Im} M_{22} = -\varepsilon^2\left[\frac{\beta}{\beta_1}\sin\left(\frac{\beta_1 l_1}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta_2 l_2}{2}\right) - \frac{\beta}{\beta_2}\cos\left(\frac{\beta_1 l_1}{2}\right)\sin\left(\frac{\beta_2 l_2}{2}\right)\right]. \qquad (2)$$

Из (2) следует, что $\operatorname{Re} M_{12} = \operatorname{Re} M_{21}$, а $\operatorname{Im} M_{12} = -\operatorname{Im} M_{21}$. Как показано в [11, 12], неравенство $M_{12}$ и $M_{21}$ (или хотя бы их действительных или мнимых частей) означает, что в волоконном кольцевом интерферометре имеет место поляризационная невзаимность и возможно возникновение невзаимной разности фаз встречных волн (при наличии соответствующего состояния поляризации излучения на входе ВКИ). Таким образом, в волоконном кольцевом интерферометре с контуром из двух отрезков ОВС различной длины с различным кручением даже в том случае, когда оси двулучепреломления ОВС на входе ВКИ не развёрнуты относительно направления пропускания поляризатора, может возникнуть невзаимная разность фаз встречных волн — так называемый сдвиг нуля ВКИ.

Пусть контур ВКИ изготовлен из ОВС с сильным линейным двулучепреломлением типа PANDA или BOW-TIE («галстук-бабочка»), в котором имеются расположенные на одинаковом расстоянии от светонесущей жилы — кора и лежащие на одной прямой напрягающие вставки, обеспечивающие сильное линейное двулучепреломление и задающие направление его осей. Угловое положение этих вставок позволяет с высокой точностью ориентировать оси ОВС на входе

ВКИ относительно направления пропускания поляризатора, однако, как было показано выше, при наличии случайных кручений ОВС такая ориентация не гарантирует отсутствие поляризационной невзаимности.

Поскольку сама возможность существования поляризационной невзаимности при совпадении осей ОВС на входе контура ВКИ с направлением пропускания поляризатора ранее не рассматривалась [8], полезно дать физическую интерпретацию этого явления. Причина возникновения поляризационной невзаимности заключается в некоммутативности матриц Джонса двух отрезков ОВС с различной длиной и различным кручением. Таким образом, для встречных волн это приводит к различию условий возбуждения и распространения. Данное явление обусловлено неголономной связью между состоянием поляризации излучения в ОВС и зависимостью кручения ОВС от длины световода [16]. В нашей работе [16] было показано, что в данном случае применительно к ОВС неголономность можно рассматривать как некоммутативность для бесконечно малых отрезков световода. Можно дать и другое, эквивалентное предыдущему, но более простое объяснение возникновения поляризационной невзаимности в рассматриваемом случае, основанное на эффекте линейного взаимодействия винтовых мод и их интерференции [6]. Если записать суммарную матрицу Джонса контура ВКИ, равную произведению матриц Джонса двух отрезков произвольной длины с произвольным кручением, для которых оси эллипсов собственных поляризационных мод на входе первого отрезка и выходе второго отрезка совпадают, можно показать, что это будет матрица Джонса эллиптической фазовой пластинки, оси которой, во всяком случае, хотя бы на одном из входов контура уже не совпадают с направлением пропускания поляризатора, что и приводит к появлению поляризационной невзаимности.

Запишем выражение для разности недиагональных элементов матрицы $\mathbf{M}^+$:

$$M_{12} - M_{21} = -2i\varepsilon\,\frac{2\,(1-g)\,\beta\,(\Theta_1-\Theta_2)}{\beta_1\beta_2}\sin\left(\frac{\beta_1 l_1}{2}\right)\sin\left(\frac{\beta_2 l_2}{2}\right). \tag{3}$$

Из (3) следует, что величина $M_{12} - M_{21}$ обращается в нуль при условии $\Theta_1 = \Theta_2$. Физический смысл этого следующий: при $\Theta_1 = \Theta_2$ кручение на обоих отрезках ОВС совпадает и, следовательно, их можно рассматривать как один отрезок длиной $l_1 + l_2$ с постоянным кручением $\Theta_1$, т. е. неоднородность отсутствует. В этом случае при $\alpha_1 = \alpha_2$ поляризационная невзаимность не имеет места, что было показано ещё в [8–10].

Поскольку величины $\beta_1$ и $\beta_2$ зависят от длины волны света, то величина $M_{12} - M_{21}$ и, следовательно, невзаимная разность фаз встречных волн также будут зависеть от длины волны света. При использовании источника немонохроматического излучения со сложной спектральной формой вычисление невзаимной разности фаз встречных волн в общем случае можно проводить методом математического моделирования случайных неоднородностей для каждой длины волны с последующим интегрированием по спектру.

Выражение (3) позволяет также получить простое и наглядное представление о характере зависимости невзаимной разности фаз встречных волн от температуры световода [9]. Из (3) следует, что величина $M_{12} - M_{21}$ пропорциональна произведению $\sin(\delta_1/2)\sin(\delta_2/2)$, где $\delta_1 = \beta_1 l_1/2$ и $\delta_2 = \beta_2 l_2/2$ — разности фаз излучения, прошедшего по медленной и быстрой осям первого и второго отрезков ОВС. При изменении температуры ОВС по линейному закону по такому же закону будут изменяться аргументы синусов — $\beta_1 l_1/2$ и $\beta_2 l_2/2$, а изменение величины $M_{12} - M_{21}$ и,

[8] Напомним, что в нашей работе [11] рассматривалась возможность появления поляризационной невзаимности при совпадении ориентации осей ОВС на входе ВКИ без поляризатора, но и в этой работе анализ данного явления не проводился.

[9] Здесь мы полагаем, что температура всего ОВС изменяется одинаково, и так называемый эффект Шупе [17], связанный с различием температурных изменений расположенных симметрично относительно середины контура элементов световода контура ВКИ, отсутствует.

следовательно, невзаимной разности фаз встречных волн будет происходить по закону, близкому к периодическому, но с некоторыми биениями, поскольку величины $\beta_1 l_1/2$ и $\beta_2 l_2/2$ не совпадают. Указанный период определяется в основном производной $\mathrm{d}\beta/\mathrm{d}t$, где $t$ — температура ОВС, поскольку производная $\mathrm{d}l/\mathrm{d}t$, как показывает проведённый в [18] анализ различных экспериментов по измерению этих величин, примерно на порядок меньше. Рассматриваемое квазипериодическое изменение невзаимной разности фаз встречных волн именуется температурным дрейфом нуля ВКИ.

Может возникнуть вопрос: возможно ли с помощью подбора азимутов осей двулучепреломления ОВС на входе контура волоконного кольцевого интерферометра исключить поляризационную невзаимность? Предположим, что длина контура $L$ достаточно велика, а подкрутка ОВС на концах контура производится таким образом, чтобы кручение распределилось по всему контуру. Тогда изменения значений $\alpha_1, \alpha_2$ в пределах $2\pi$ не приведёт к сколько-нибудь заметному изменению кручений $\Theta_1$ и $\Theta_2$ (и, соответственно, углов $\xi_1 = \Theta_1 l_1$ и $\xi_2 = \Theta_2 l_2$) на каждом из отрезков [10]. В самом общем случае, при $\Theta_1 l_1 + \Theta_2 l_2 \neq 0$ $(\xi_1 + \xi_2 \neq 0)$, с помощью несложных, но достаточно громоздких вычислений можно показать, что выражение для разности недиагональных элементов матрицы Джонса всего ВКИ $\mathbf{M}^+$ имеет вид

$$M_{12} - M_{21} = -2i \left[ \varepsilon \, \frac{2\,(1-g)\,\beta\,(\Theta_1 - \Theta_2)}{\beta_1 \beta_2} \sin\!\left(\frac{\beta_1 l_1}{2}\right) \sin\!\left(\frac{\beta_2 l_2}{2}\right) \cos(\alpha_1 - \alpha_2 - \xi_1 - \xi_2) + \right.$$
$$\left. + \left[ \frac{\beta}{\beta_1} \sin\!\left(\frac{\beta_1 l_1}{2}\right) \cos\!\left(\frac{\beta_2 l_2}{2}\right) + \frac{\beta}{\beta_2} \cos\!\left(\frac{\beta_1 l_1}{2}\right) \sin\!\left(\frac{\beta_2 l_2}{2}\right) \right] \sin(\alpha_1 - \alpha_2 - \xi_1 - \xi_2) \right]. \quad (4)$$

При $\alpha_1 = \alpha_2 + \xi_1 + \xi_2 = 0$ выражение (4) переходит в (3). Из (4) нетрудно получить условие отсутствия поляризационной невзаимности, которое даёт определённое соотношение между углами $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\xi_1$ и $\xi_2$, при котором поляризационная невзаимность не будет иметь места:

$$\alpha_1 - \alpha_2 - \xi_1 - \xi_2 = -\operatorname{arcctg} \frac{\beta_1 \operatorname{ctg}(\beta_1 l_1/2) + \beta_2 \operatorname{ctg}(\beta_2 l_2/2)}{(1-g)\,(\Theta_1 - \Theta_2)} \,. \quad (5)$$

Таким образом, подбором значений $\alpha_1$, $\alpha_2$ можно исключить явление поляризационной невзаимности в рассматриваемой схеме ВКИ. Однако здесь возникают две проблемы:

1) Ориентация осей линейного двулучепреломления ОВС на входе контура ВКИ не даёт информацию об их ориентации, требуемой для исключения поляризационной невзаимности. Нужную ориентацию осей можно осуществить только путём подстройки, причём отсутствие разности фаз встречных волн при отсутствии вращения ВКИ не может служить критерием отсутствия поляризационной невзаимности при некоторой настройке, т. к. помимо поляризационной невзаимности существует ряд других эффектов, приводящих к несвязанному с вращением сдвигу нуля ВКИ [12].

2) Даже если осуществить требуемую настройку осей линейного двулучепреломления ОВС, то незначительные изменения температуры световода или длины волны источника излучения (а в случае использования немонохроматического источника излучения — средней длины волны) приведут к неконтролируемому изменению величин $\beta_1$, $\beta_2$, $l_1$, $l_2$, условие (5) будет нарушено, и, следовательно, вновь возникнет поляризационная невзаимность.

Подведём основные результаты работы.

[10] В случае, если ОВС контура закреплён на катушке, то при подстройке углов $\alpha_1, \alpha_2$ будут существенно меняться кручения световода только на концах контура. В этом случае следует рассматривать четыре независимых отрезка с различными кручениями, два из которых находятся на концах контура.

1) Показано, что поляризационная невзаимность и невзаимная разность фаз встречных волн могут иметь место в ВКИ с минимальной конфигурацией с контуром из двух отрезков ОВС различной длины с различным кручением даже в том случае, когда оси двулучепреломления ОВС на входе ВКИ не развёрнуты относительно направления пропускания поляризатора.

2) Показано, что поляризационная невзаимность и невзаимная разность фаз встречных волн зависят от длины волны света и температуры ОВС.

3) Показано, что соответствующим подбором ориентации осей линейного двулучепреломления ОВС можно исключить поляризационную невзаимность, но такую ориентацию осей сложно осуществить, и она не будет сохраняться при изменении длины волны света и температуры ОВС.

4) Показано, что при изменении температуры ОВС по линейному закону соответствующее изменение величины невзаимной разности фаз встречных волн в рассматриваемом ВКИ будет иметь квазипериодический характер, поскольку разности фаз излучения, прошедшего медленную и быструю ось ОВС каждого из случайных отрезков, входят в аргументы гармонических функций, которые определяют невзаимную разность фаз встречных волн.

В заключение автор выражает благодарность Вл. В. Кочаровскому за ряд полезных замечаний, В. И. Поздняковой за помощь в работе. Работа частично поддержана РФФИ (грант № 03–02–17253) и Совета по грантам Президента РФ по поддержке ведущих научных школ РФ (грант № НШ-1622.2003.2).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Малыкин Г. Б., Позднякова В. И., Шерешевский И. А. // Оптика и спектроскопия. 1997. Т. 83, № 5. С. 843.
2. Малыкин Г. Б., Позднякова В. И. // Оптика и спектроскопия. 1998. Т. 84, № 1. С. 145.
3. Малыкин Г. Б., Позднякова В. И. // Оптика и спектроскопия. 1999. Т. 86, № 3. С. 513.
4. Гинзбург В. Л. // ЖТФ. 1944. Т. 14, № 3. С. 181.
5. Суворов Е. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1972. Т. 14, № 9. С. 1 320.
6. Железняков В. В., Кочаровский В. В., Кочаровский Вл. В. // УФН. 1983. Т. 141, вып. 2. С. 257.
7. Pancharatnam S. // Proc. Ind. Acad. Sci. 1957. V. 46, No. 1. P. 280.
8. Листвин В. Н. // Оптика и спектроскопия. 1989. Т. 67, вып. 5. С. 1 208.
9. Малыкин Г. Б. // Оптика и спектроскопия. 1997. Т. 83, № 6. С. 1 013.
10. Малыкин Г. Б. // Оптика и спектроскопия. 1998. Т. 84, № 3. С. 515.
11. Андронова И. А., Геликонов Г. В., Малыкин Г. Б. // Квантовая электроника. 1999. Т. 26, № 3. С. 271.
12. Андронова И. А., Малыкин Г. Б. // УФН. 2002. Т. 172, № 8. С. 849.
13. Малыкин Г. Б. // Оптика и спектроскопия. 1996. Т. 81, № 3. С. 474.
14. Малыкин Г. Б. // Изв. вузов. Радиофизика. 1997. Т. 40, № 3. С. 265.
15. Малыкин Г. Б., Позднякова В. И. // УФН. 2004. Т. 174, № 3. С. 303.
16. Малыкин Г. Б., Неймарк Ю. И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1998. Т. 41, № 9. С. 1 125.
17. Shupe D. M. // Appl. Opt. 1980. V. 19, No. 5. P. 654.
18. Малыкин Г. Б., Позднякова В. И. // Оптика и спектроскопия. 2004. Т. 96, № 2. С. 334.

Институт прикладной физики РАН,
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию
3 марта 2004 г.

# INFLUENCE OF IRREGULARITY OF TWISTING OF BIREFRINGENCE AXES OF SINGLE-MODE OPTICAL FIBERS ON THE POLARIZATION NONRECIPROCITY OF FIBER RING INTERFEROMETERS

*G. B. Malykin*

A particular example of the so-called minimum-configuration fiber ring interferometer whose loop comprises two different-length segments of a single-mode optical fiber with the same linear birefringence but different twisting is used to show that even in the case where the birefringence axes at the loop input coincide with the polarizer transmission direction, the phenomenon of polarization nonreciprocity of the fiber ring interferometer can emerge. It is shown that polarization nonreciprocity can be eliminated by the proper adjustment of the axes of single-mode optical fiber, but the above adjustment should be changed if the waveguide temperature is changed.

It is also shown that polarization nonreciprocity is a function of the light wavelength and the polarization nonreciprocity value in a fiber ring interferometer varies quasiperiodically in response to the temperature change in a optical fiber with random irregularities.

УДК 621.373.826.038+539.2

# ВОЗБУЖДЕНИЕ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СТРУКТУР РАЗНОЙ СИММЕТРИИ В СИСТЕМЕ ДВУХ ТОНКИХ ПЛЁНОК

*П. В. Павлов*[1], *И. В. Бабушкин*[1], *Н. А. Лойко*[1], *Н. Н. Розанов*[2], *С. В. Фёдоров*[2]

Рассмотрены пространственные диссипативные солитоны, возникающие в системе двух нелинейных тонких плёнок, резонансно взаимодействующих со световым полем. Изучены как симметричные, так и несимметричные солитоны, а также методы их возбуждения и переключения.

## ВВЕДЕНИЕ

Изучение поперечных диссипативных солитонов является весьма актуальным вследствие возможности использования их для систем оптической передачи и обработки информации. Этому способствует несколько особенностей таких структур. В частности, диссипативные солитоны обладают, в отличие от локализованных структур в консервативных системах, дискретным спектром состояний, что позволяет подавлять влияние флуктуаций [1]. Кроме того, они чувствительны к неоднородностям интенсивности и фазы падающего излучения и могут двигаться в направлении их градиентов [2, 3]. Такие локализованные в пространстве структуры возбуждаются жёстко, т. е. с помощью инжекции в систему пробного импульса достаточно большой амплитуды. Всё это позволяет использовать диссипативные солитоноподобные структуры для параллельной обработки информации, в том числе для создания оптического регистра сдвига [4] и полного сумматора [5]. Недавние эксперименты с полупроводниковыми микрорезонаторами [6, 7] подтверждают перспективность информационных приложений диссипативных солитонов.

Как известно, использование многокомпонентных систем позволяет улучшить характеристики триггеров и логических оптических устройств [8]. В данной работе рассматривается двухкомпонентная система, состоящая из двух нелинейных (с резонансной нелинейностью) тонких плёнок, облучаемых с обеих сторон монохроматическим световым полем. Ранее нами было показано, что при одинаковых амплитудах падающих на систему волн в ней может существовать бифуркация нарушения симметрии [9], приводящая к неодинаковым полям, выходящим из системы в обе стороны. Как было показано в [10, 11], в окрестности такой бифуркации могут формироваться как симметричные (одинаковые в обеих плёнках), так и несимметричные диссипативные солитоны. В настоящей работе исследуется возникновение таких структур в зависимости от формы возбуждающего импульса и возможность их переключения.

Работа построена следующим образом. В разделе 1 вводятся уравнения, описывающие систему. В следующем разделе анализируются однородные состояния равновесия и их устойчивость. В разделе 3 исследуются возможные типы локализованных структур, возникающие из симметричного и несимметричного состояний равновесия, и их форма в зависимости от вида возбуждающего импульса.

## 1. УРАВНЕНИЯ МОДЕЛИ

Рассмотрим систему, состоящую из двух нелинейных тонких плёнок, расположенных на расстоянии $d$ друг от друга и разделённых линейной поглощающей средой с комплексным показателем преломления $n - in'$ (рис. 1). С левой и правой сторон на систему падают монохроматические пространственно однородные световые поля с амплитудами $E_0^{(+)}$ и $E_0^{(-)}$ соответственно, $E_1^{(+)}$ и $E_1^{(-)}$ — амплитуды полей, прошедших через первую и вторую плёнки, $E_2^{(+)}$ и $E_2^{(-)}$ — амплитуды полей, достигших противоположных плёнок. Направление распространения излучения показано на рис. 1 стрелками. Ниже будет рассматриваться возбуждение неоднородного профиля излучения в плоскости, перпендикулярной плоскости рисунка.

Решение уравнения распространения излучения в тонкой плёнке имеет простой вид [12]:

$$E_1^{(+)} = E_0^{(+)} - i\alpha P_1, \qquad E_1^{(-)} = E_0^{(-)} - i\alpha P_2, \quad (1)$$

где $P_j$ — поляризация атомов в $j$-й плёнке, $\alpha$ — параметр нелинейности плёнки.

Распространение излучения в линейной среде между плёнками описывается дифракционными уравнениями:

$$\begin{aligned} E_2^{(+)} &= \hat{\mathrm{T}} E_1^{(+)}(t - \tau), \\ E_2^{(-)} &= \hat{\mathrm{T}} E_1^{(-)}(t - \tau), \end{aligned} \qquad (2)$$

где оператор $\hat{\mathrm{T}} = \rho \exp(is - id\,\Delta_\perp/k)$, величины $\rho$ и $s$ описывают поглощение и набег фазы при прохождении излучения между плёнками, $\Delta_\perp = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ — оператор Лапласа по координатам $x$ и $y$ в плоскости, перпендикулярной плоскости рис. 1, $k$ — волновое число распространяющегося излучения, $\tau$ — время распространения излучения между плёнками.

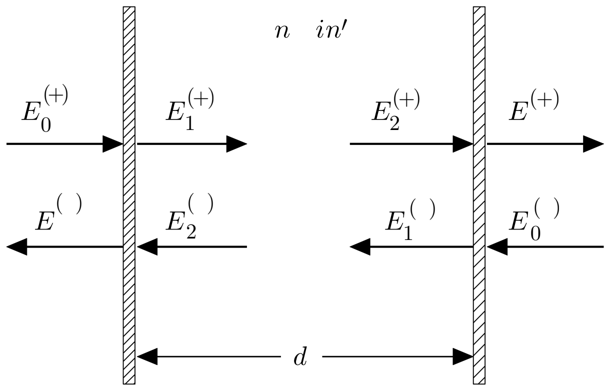



Рис. 1. Система, состоящая из двух плёнок, расстояние между которыми равно $d$; $E_0^{(+)}$ и $E_0^{(-)}$ — амплитуды полей, падающих на первую и вторую плёнку соответственно, $E_1^{(+)}$ и $E_1^{(-)}$ — амплитуды полей, прошедших через первую и вторую плёнки, $E_2^{(-)}$ и $E_2^{(+)}$ — амплитуды полей, достигших противоположной плёнки

Взаимодействие монохроматического света с резонансной нелинейной средой в двухуровневом приближении может быть описано уравнениями Блоха:

$$\dot{P}_j = -\left[i\,(\omega - \omega_0) + \frac{1}{T_2}\right] P_j + \frac{i\mu}{\hbar}\, E_j w_j, \qquad \dot{w}_j = -\frac{w_j + 1}{T_1} + \frac{i\mu}{2\hbar}\,(E_j^* P_j - P_j^* E_j), \qquad (3)$$

где $T_1$ — время релаксации населённостей, $T_2$ — время релаксации поляризации атомов, $\omega - \omega_0$ — отстройка частоты падающего поля от резонансной частоты нелинейной среды, $w_j$ — разность населённостей в $j$-й плёнке, $\mu$ — дипольный момент перехода двухуровневой среды, $E_1$ и $E_2$ — амплитуды электрических полей в плёнках, точка над величиной означает производную по времени, $j = 1; 2$. Для более удобного рассмотрения введём нормированные величины

$$e_j = \frac{\mu\sqrt{T_1 T_2}}{\hbar}\, E_j\,, \qquad r_j = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}\; P_j\,, \qquad \gamma = \frac{T_2}{T_1}\,,$$

тогда уравнения (3) примут следующий вид:

$$\dot{r}_j = \gamma^{-1}\,(-1 + i\Delta)\, r_j + i\gamma^{-1} e_j w_j, \qquad \dot{w}_j = -(w_j + 1) + \frac{i}{2}\,(e_j^* r_j - r_j^* e_j), \qquad (4)$$

где $r_j$ — нормированная поляризация в $j$-й плёнке, $e_j$ — медленно меняющиеся нормированные амплитуды полей в плёнках ($j = 1; 2$), $\gamma$ — отношение времён релаксации поляризации и населённостей, $\Delta$ —нормированная отстройка частоты падающего поля от резонансной частоты нелинейной среды.

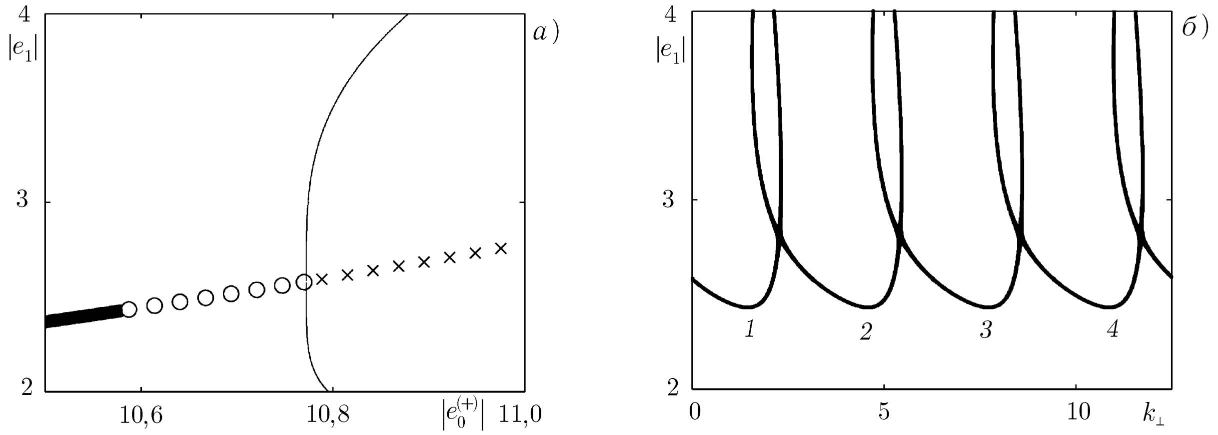



Рис. 2. Зависимость амплитуды однородных стационарных состояний от амплитуды внешних волн (*а*) и границы статической устойчивости симметричных солитонов (*б*). Толстой сплошной линией обозначены устойчивые симметричные состояния, кружками — симметричные состояния, неустойчивые по отношению к поперечным возмущениям, крестиками — симметричные состояния, неустойчивые по отношению к возмущениям с $k_\perp = 0$. Зависимости получены при $\Delta = 2{,}0$; $\rho = 0{,}5$; $\alpha = 15$; $s = \pi$

С учётом уравнений (1), (2) и введённой нормировки связь поляризации, полей в плёнках и падающих полей описывается уравнениями [9]

$$e_1(t) = e_0^{(+)}(t) - i\alpha r_1(t) + \hat{\mathrm{T}} e_0^{(-)}(t) - \hat{\mathrm{T}} i\alpha r_2(t-\tau),$$
$$e_2(t) = e_0^{(-)}(t) - i\alpha r_2(t) + \hat{\mathrm{T}} e_0^{(+)}(t) - \hat{\mathrm{T}} i\alpha r_1(t-\tau). \quad (5)$$

## 2. СТАЦИОНАРНЫЕ СОСТОЯНИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ

Для исследования пространственных локализованных структур важно определение состояний равновесия и их устойчивости.

Стационарные однородные в поперечной плоскости $xy$ состояния системы (4), (5) описываются алгебраическими уравнениями ($T_0 = \rho \exp(is)$):

$$e_1 = e_0^{(+)} + T_0 e_0^{(-)} - \frac{\alpha\Theta e_1}{1+\beta\,|e_1|^2} - T_0\,\frac{\alpha\Theta e_2}{1+\beta\,|e_2|^2}\ ,$$
$$e_2 = e_0^{(-)} + T_0 e_0^{(+)} - \frac{\alpha\Theta e_2}{1+\beta\,|e_2|^2} - T_0\,\frac{\alpha\Theta e_1}{1+\beta\,|e_1|^2}\ , \quad (6)$$

где $\Theta = (1+i\Delta)/(1+\Delta^2)$, $\beta = 1/(1+\Delta^2)$ — вспомогательные переменные. Поля, падающие на систему с противоположных сторон, также предполагаются стационарными, однородными и равными по амплитуде ($e_0^{(+)} = e_0^{(-)}$).

Пример решения системы (6) в окрестности бифуркации нарушения симметрии [9] представлен на рис. 2*а*. Сплошной тонкой кривой показана несимметричная ветвь решения, на которой $e_1 \neq e_2$, в то время как остальная часть кривой представляет собой симметричную ветвь ($e_1 = e_2$). Точка пересечения симметричной ветви решения с несимметричной является точкой бифуркации, в которой симметричное состояние равновесия становится неустойчивым. Результаты линейного анализа устойчивости симметричных состояний равновесия по отношению к возмущениям вида $\exp(i\mathbf{k}_\perp \mathbf{r}_\perp)$, представляющим собой поперечные плоские волны с периодом $\lambda_\perp = 2\pi/k_\perp$, приведены на рис. 2. На рис. 2*б* представлены границы устойчивости в зависимости от $|\mathbf{k}_\perp|$. В областях с чётными номерами стационарные состояния неустойчивы лишь по отношению к симметричным возмущениям (с $\delta e_1 = \delta e_2$), развивающимся с соответствующим волновым вектором, в то время как в областях с нечётными номерами они неустойчивы по отношению к несимметричным возмущениям (с $\delta e_1 \neq \delta e_2$) и устойчивы по отношению к симметричным. Области с различным типом неустойчивости могут частично перекрываться.

Как видно из рис. 2*б*, симметричная ветвь стационарных состояний разбивается на несколько участков с разными типами неустойчивостей. На рис. 2*а* толстой сплошной линией отмечены устойчивые стационарные состояния, кружками — состояния, неустойчивые только по отношению к возмущениям с ненулевым поперечным волновым числом $k_\perp \neq 0$, крестиками — состояния, неустойчивые также по отношению к возмущениям с $k_\perp = 0$.

При параметрах, отвечающих неустойчивости по отношению к возмущениям с $k_\perp \neq 0$, могут формироваться распределённые пространственные структуры [9]. Эта область параметров является частью более широкой области значений поля, в которой реализуется обобщённая бистабильность и могут существовать несколько стационарных решений: несимметричное однородное стационарное решение, распределённые и локализованные структуры различных типов [9–11]. Условия возбуждения и переключения различных видов локализованных структур будут рассмотрены в следующем разделе.

## 3. РАЗЛИЧНЫЕ ВИДЫ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СТРУКТУР, ИХ ВОЗБУЖДЕНИЕ И ПЕРЕКЛЮЧЕНИЕ

Как было показано в [9], поперечные неустойчивости могут приводить к спонтанному формированию как симметричных, так и несимметричных распределённых пространственных структур, например гексагоны или ромбы. Симметрия пространственных структур тесно связана с характерным масштабом $\lambda_\perp$ неустойчивых пространственных гармоник, играющих основную роль при формировании структуры. Если пространственная структура развивается из мод, принадлежащих области неустойчивости с нечётным номером (см. рис. 2*б*), формируется несимметричная ($e_1 \neq e_2$) распределённая структура. В случае же, когда развиваются возмущения с поперечным волновым числом $k_\perp$, лежащим в области с чётным номером, формируется симметричная распределённая структура.

Помимо распределённых пространственных структур существуют также и локализованные солитоноподобные структуры, как симметричные, так и несимметричные. В отличие от распределённых структур, они не могут возникать спонтанно и должны быть жёстко возбуждены импульсом определённой амплитуды и ширины. На рис. 3, 5 и 7 приведены поперечные распределения амплитуды двумерных солитонов в сечении плоскости плёнок прямой, проходящей через точку, соответствующую центру солитона. Так, на рис. 3 изображена несимметричная локализованная структура на симметричном однородном фоне ($e_1 = e_2$). В первой плёнке это «светлый» солитон, амплитуда которого превышает фон более чем в два раза. Во второй плёнке наблюдается «тёмный» солитон меньшей амплитуды. Несимметричными являются также осцилляции в хвосте солитона. Их пространственная частота $k_\perp$ соответствует неустойчивым частотам в области *1* на рис. 2*б*.

В противоположность несимметричному, симметричный солитон имеет одинаковые поля в обеих плёнках (см. рис. 5), и частота пространственных осцилляций поля $k_\perp$ в хвосте такого солитона соответствует области неустойчивости, обозначенной цифрой *2* на рис. 2*б*. Отметим, что неустойчивости из областей *3, 4*, … практически не влияют на форму и устойчивость локализованных структур. Размер самих локализованных структур, как и пространственная частота осцилляций в их хвосте, непосредственно связан с минимальным значением $k_\perp$ неустойчивых фурье-гармоник

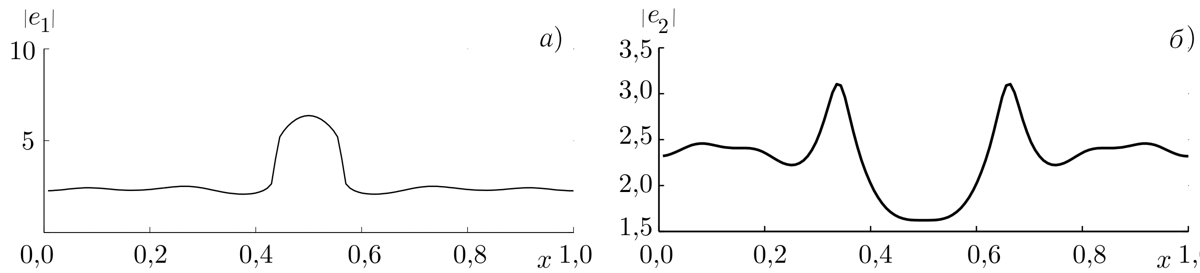



Рис. 3. Поперечное распределение амплитуды несимметричного солитона, возбуждённого внешним импульсом, представленном на рис. 4: распределение поля в поперечном сечении левой плёнки (*а*) и правой плёнки (*б*). Параметры те же, что для рис. 2, величина фонового поля взята вблизи области, где наблюдается неустойчивость однородного состояния равновесия по отношению к поперечным возмущениям: $e_0^{(+)} = 10{,}54$; $e_1 = e_2 = 2{,}4$

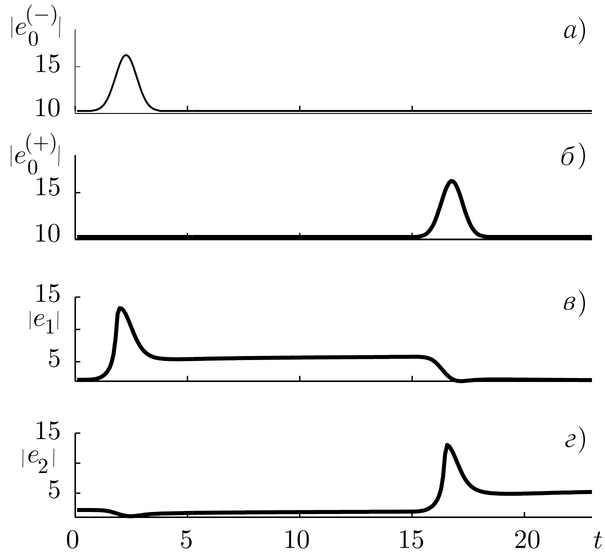



Рис. 4. Изменение амплитуды поля, падающего слева на левую плёнку, с течением времени (*а*); изменение амплитуды поля, падающего справа на правую плёнку, с течением времени (*б*); изменение амплитуды поля в центре левой плёнки с течением времени (*в*); изменение амплитуды поля в центре правой плёнки с течением времени (*г*). Параметры системы те же, что и для рис. 3

поля излучения. Для параметров рис. 2 несимметричный солитон определяется возмущениями с $k_\perp$, меньшими соответствующих $k_\perp$ для симметричного солитона, вследствие этого несимметричный солитон шире при прочих одинаковых условиях. Однако области неустойчивости могут быть сдвинуты по оси $k_\perp$ с помощью изменения набега фазы поля $s$ при прохождении между плёнками. В результате соотношение ширин симметричного и несимметричного солитонов может быть изменено.

Основную роль в формировании конкретного типа солитона в системе играет форма возбуждающего импульса. Несимметричный солитон можно возбудить импульсом, поданным лишь с одной стороны, как показано на рис. 4*а, б* при $t < 10$. Возбуждающий импульс имеет гауссову форму как во времени, так и в пространстве и обладает шириной, близкой к размерам самого солитона, в то время как поле, инжектируемое в систему с другой стороны, остаётся однородным. Соответствующая динамика изменения поля в каждой из плёнок в центре солитона показана на рис. 4*в, г*.

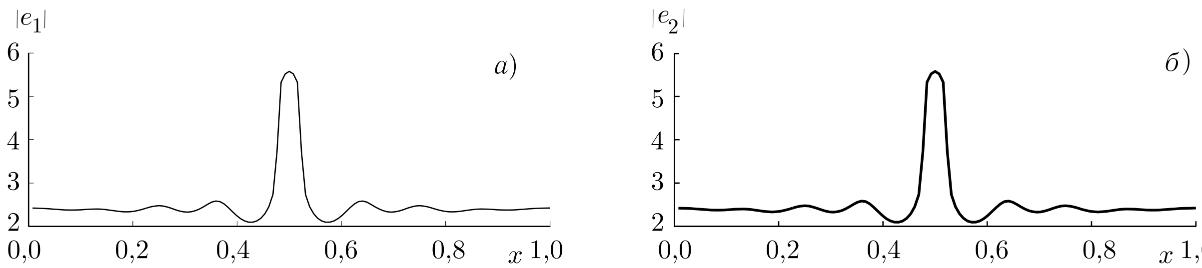



Рис. 5. Поперечное распределение амплитуды симметричного солитона, возбуждённого внешним импульсом, представленным на рис. 6: распределение поля в поперечном сечении левой плёнки (*а*) и правой плёнки (*б*). Параметры те же, что для рис. 3

Заметим, что описанный здесь путь возбуждения несимметричной локализованной структуры не единственный, параметры возбуждающего импульса могут меняться в достаточно широких пределах. Кроме того, возбуждение такого солитона возможно с помощью импульсов, одинаковых с обеих сторон системы по амплитуде и отличающихся лишь фазой. При этом чем слабее отличие фаз падающих импульсов, тем большая длительность импульса необходима для возбуждения. Амплитуда импульса в этом случае, как правило, мала по сравнению с амплитудой импульса, возбуждающего симметричный солитон, т. к. значение поля в максимуме импульса должно соответствовать области существования устойчивого однородного несимметричного решения.

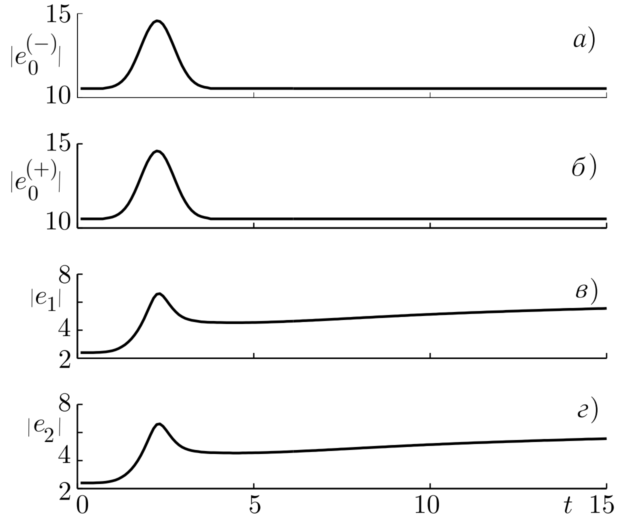



Рис. 6. Изменение амплитуды поля, падающего слева на левую плёнку, с течением времени (*а*); изменение амплитуды поля, падающего справа на правую плёнку, с течением времени (*б*); изменение амплитуды поля в центре левой плёнки с течением времени (*в*); изменение амплитуды поля в центре правой плёнки с течением времени (*г*). Остальные условия те же, что и в случае возбуждения несимметричного солитона (рис. 4)

Симметричный солитон можно получить подачей одинаковых импульсов с обеих сторон системы. Для данных параметров поперечный размер этих импульсов по сравнению с предыдущим случаем должен быть существенно меньше, тогда как длительность импульсов может быть такой же, как и при возбуждении несимметричного солитона (см. рис. 6). Такое решение может быть получено и при некотором различии в амплитуде или фазе затравочных импульсов, если их максимальные поля выше критического значения, при котором наблюдается нарушение симметрии однородного состояния равновесия.

Кроме локализованных структур, отвечающих симметричной ветви решения, в системе также могут существовать локализованные структуры, связанные с несимметричной ветвью решения (рис. 7). Такие структуры обусловлены статическими поперечными неустойчивостями несимметричной ветви решения. Поскольку несимметричная ветвь может быть неустойчива и по отношению к динамическим возмущениям вида $\exp(i\mathbf{k}_\perp \mathbf{r}_\perp + i\omega t)$, то возможны также динамические (пульсирующие) локализованные структуры.

В некоторых случаях солитоны могут быть возбуждены пробным импульсом не из однородного состояния равновесия, а из уже существующего солитонного состояния. Так, очевидно, что

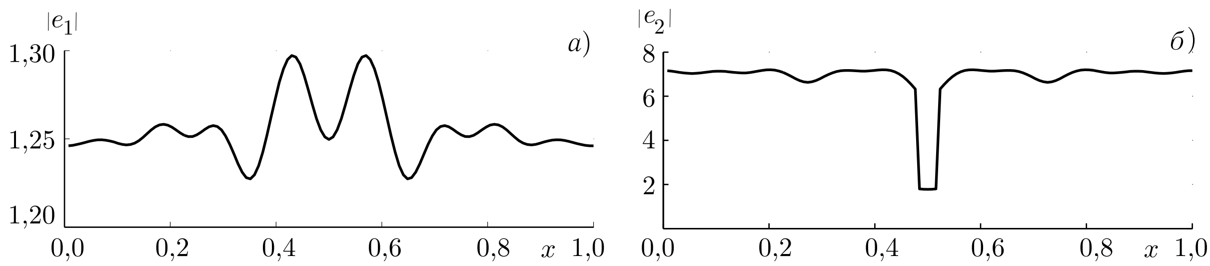



Рис. 7. Поперечное распределение амплитуды солитона, возбуждённого на однородном фоне, соответствующем несимметричной ветви решения: распределение амплитуды поля в поперечном сечении левой плёнки (*а*) и правой плёнки (*б*). Зависимости получены при $\Delta = 2{,}0$; $\rho = 0{,}5$; $\alpha = 20{,}0$; $s = \pi$; $e_0^{(+)} = 13{,}59$; $e_1 = 1{,}25$; $e_2 = 7{,}0$

для каждого несимметричного солитона существует точно такой же солитон с инвертированными соотношениями полей в плёнках. На рис. 4 показан пример переключения между двумя такими солитонами. Такое переключение осуществляется подачей соответствующего импульса на тонкоплёночную систему со стороны, противоположной по отношению к плёнке, в которой солитон был возбуждён первоначально. Как следует из рис. 4 и дополнительных расчётов, время переключения ограничено длительностью возбуждающего импульса. Однако надо учитывать, что включение солитона определяется энергией возбуждающего импульса. Чем меньше его длительность и, следовательно, время переключения, тем больше должна быть амплитуда. Переключить систему из состояния с несимметричными солитонами в состояние с симметричными солитонами существенно сложней, т. к. асимметрия, уже присутствующая в этом случае в начальных условиях, приводит систему опять в несимметричное состояние. Однако такое переключение можно провести в два этапа, подавив сначала уже существующий несимметричный солитон. В принципе, оба этапа можно совместить во времени подбором соответствующей формы падающих полей.

## 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в работе рассмотрена динамика возбуждения пространственных локализованных структур в системе, состоящей из двух нелинейных тонких плёнок, облучаемой с обеих сторон монохроматическим однородным полем. Для возбуждения солитоноподобной структуры необходим затравочный импульс (рис. 4, 6). При этом получающаяся структура обладает заранее заданной и не зависящей от размеров и длительности возбуждающего импульса формой. Тем не менее при подаче импульса слишком большой (или слишком малой) амплитуды солитон разрушается. Возбуждение симметричных (одинаковых в обеих плёнках) или несимметричных солитонов обусловлено степенью симметрии падающих с обеих сторон затравочных импульсов. Требования к симметрии последних зависят от их амплитуды. Показана возможность переключения из одного несимметричного солитона в другой, полученный из первого зеркальным отражением двух плёнок. Такое переключение соответствует смене направления излучения солитона рассматриваемой системой.

Работа выполнена при поддержке БРФФИ (грант № Ф–02Р–011) и РФФИ (грант № 02–02–81045).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rosanov N. N. Spatial Hysteresis and Optical Patterns. Berlin: Springer, 2002.
2. Розанов Н. Н. // Оптика и спектроскопия. 1992. Т. 73. С. 324.
3. Firth W. J. // Proc. SPIE. 1999. V. 4016. P. 388.
4. Розанов Н. Н., Фёдоров А. В. // Оптика и спектроскопия. 1990. Т. 68. С. 969.
5. Розанов Н. Н. // Оптика и спектроскопия. 1992. Т. 72. С. 447.
6. Taranenko V. B., Ganne I., Kuszelewich R. J., Weiss C. O. // Phys. Rev. A. 2000. V. 61. P. 063818.
7. Barland S., Tredicce J. P., Brambilla M., et al. // Nature. 2002. V. 419. P. 699.
8. Гиббс Х. Оптическая бистабильность. Управление светом с помощью света. М.: Мир, 1988.
9. Бабушкин И. В., Логвин Ю. А., Лойко Н. А. // ЖЭТФ. 2000. Т. 117. С. 149.
10. Babushkin I. V., Logvin Yu. A., Loiko N. A. // JEOS B: Quantum and Semiclassical Optics. 2000. V. 2. P. L15.
11. Бабушкин И. В., Павлов П. В., Лойко Н. А. и др. // Материалы международной конференции «Лазерная физика и применения лазеров». Минск, 2003. С. 159.
12. Benedict M., Malyshev V. A., Trifonov E. D. // Phys. Rev. A. 1991. V. 43. P. 3845.

[1] Институт физики им. Б. И. Степанова НАНБ,
г. Минск, Беларусь;
[2] НИИ лазерной физики, г. Санкт-Петербург, Россия

Поступила в редакцию
19 января 2004 г.

## EXCITATION OF LOCALIZED SPATIAL STRUCTURES OF DIFFERENT SYMMETRY IN A SYSTEM OF TWO THIN FILMS

*P. V. Pavlov, I. V. Babushkin, N. A. Loiko, N. N. Rozanov, and S. V. Fedorov*

We consider spatial dissipative solitons arising in a system of two thin films resonantly interacting with light. Symmetric and nonsymmetric localized structures and the methods for their excitation and switching are studied.

УДК 530.182

# О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ ОДНОСОЛИТОННЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА—ДЕ ФРИЗА

*С. Н. Власов, Е. В. Копосова*

Методом обратной задачи теории рассеяния [1, 2] проводится исследование решений уравнения Кортевега—де Фриза при начальных условиях в виде двух отдельных импульсов не слишком большой амплитуды, не являющихся солитонами. Показано, что эти импульсы при небольшом расстоянии между ними при $t \to \infty$ трансформируются в единственный солитон и осциллирующий фон. При увеличении расстояния между импульсами или их амплитуды образуются два солитона и осциллирующий фон. Аналогичное поведение имеют решения нелинейного уравнения Шрёдингера с тем отличием, что при увеличении расстояния между двумя синфазными импульсами формируются не два, а три солитона. Результаты аналитического исследования иллюстрируются численным решением уравнения Кортевега—де Фриза.

Нелинейные волны в слабо диспергирующих средах часто описываются уравнением Кортевега—де Фриза [1], которое может быть решено методом обратной задачи рассеяния [2]. Этим методом показано, что любое его решение с локализованными начальными условиями асимптотически при $t \to \infty$ может быть представлено в виде поля солитонов с амплитудой, не убывающей при $t \to \infty$, и поля излучения, убывающего при $t \to \infty$. В этом сообщении приводятся результаты исследования решений этого уравнения при начальных условиях в виде двух отдельных импульсов не слишком большой амплитуды, не являющихся солитонами. Мы покажем, что эти импульсы при небольшом расстоянии между ними при $t \to \infty$ трансформируются в единственный солитон и слабонелинейный пакет. При увеличении расстояния между импульсами или их амплитуды образуются два солитона и слабонелинейный пакет.

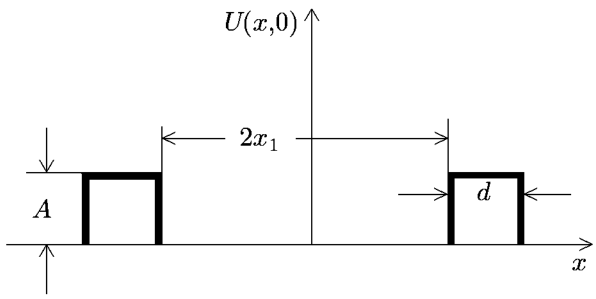



Рис. 1. Структура начального распределения

Запишем уравнение Кортевега—де Фриза для функции $U$ и среды с отрицательной дисперсией в виде [2]

$$U_t + 6UU_x + U_{xxx} = 0, \tag{1}$$

где нижний индекс обозначает частную производную по соответствующей переменной. Согласно методу обратной задачи рассеяния число солитонов, формирующихся при $t \to \infty$ из первоначального распределения $U(x,0)$, равно числу локализованных решений линейного стационарного уравнения Шрёдингера для функции $\psi$:

$$\psi_{xx} + [-k^2 + U(x,0)]\,\psi = 0, \tag{2}$$

где $k^2 > 0$ — собственное значение.

Возьмём начальное распределение в виде двух синфазных прямоугольных пучков с амплитудой $A$ и шириной $d$, расположенных на расстоянии $2x_1$ друг от друга (рис. 1):

$$U(x,0) = \begin{cases} A, & x_1 < |x| < x_1 + d; \\ 0, & |x| < x_1, |x| > x_1 + d. \end{cases} \tag{3}$$

Определим условия существования локализованных мод в потенциале (3). Заметим, что последние могут быть симметричными и несимметричными.

Симметричные моды будем искать в виде

$$\psi = \begin{cases} A\,\mathrm{ch}(kx), & 0 < |x| < x_1; \\ B\sin(\sqrt{A-k^2}\,x) + C\cos(\sqrt{A-k^2}\,x), & x_1 < |x| < x_1 + d; \\ D\exp(-k|x|), & x_1 + d < |x| < \infty. \end{cases} \tag{4}$$

Характеристическое уравнение находится при подстановке (4) в (2) из условий непрерывности функции $\psi$ и её производной и имеет вид

$$\mathrm{tg}(\sqrt{A-k^2}\,d) = \frac{k\,\sqrt{A-k^2}\,(\mathrm{cth}(kx_1)+1)}{(A-k^2)\,\mathrm{cth}(kx_1) - k^2}\ . \tag{5}$$

Введём новые переменные

$$\bar{k} = \frac{k}{\sqrt{A}}\,, \qquad \Delta = \sqrt{A}\,d, \qquad \bar{x}_1 = \sqrt{A}\,x_1, \tag{6}$$

исключив с их помощью параметр $A$ из уравнения (5):

$$\mathrm{tg}(\sqrt{1-\bar{k}^2}\,\Delta) = \frac{\bar{k}\,\sqrt{1-\bar{k}^2}\,(\mathrm{cth}(\bar{k}\bar{x}_1)+1)}{(1-\bar{k}^2)\,\mathrm{cth}(\bar{k}\bar{x}_1) - \bar{k}^2}\ . \tag{7}$$

Мода с наинизшим уровнем энергии является симметричной. Она существует при сколь угодно малой величине $\Delta = d\,\sqrt{A}$. Для несимметричных мод вида

$$\psi = \begin{cases} A\,\mathrm{sh}(kx), & 0 < |x| < x_1; \\ B\sin(\sqrt{A-k^2}\,x) + C\cos(\sqrt{A-k^2}\,x), & x_1 < |x| < x_1 + d; \\ D\exp(-k|x|), & x_1 + d < |x| < \infty \end{cases}$$

характеристическое уравнение в переменных (6) имеет вид

$$\mathrm{tg}(\sqrt{1-\bar{k}^2}\,\Delta) = \frac{\bar{k}\,\sqrt{1-\bar{k}^2}\,(\mathrm{th}(\bar{k}\bar{x}_1)+1)}{(1-\bar{k}^2)\,\mathrm{th}(\bar{k}\bar{x}_1) - \bar{k}^2}\ . \tag{8}$$

Нетрудно видеть, что корень уравнения (8) появляется при выполнении условия

$$\mathrm{tg}\ \Delta > 1/\bar{x}_1,$$

причём при слившихся в первоначальном распределении импульсах ($\bar{x}_1 = 0$) несимметричная локализованная мода отсутствует, если

$$\Delta < \pi/2.$$

На рис. 2 изображены кривые зависимости корня уравнения (7) от половины расстояния между импульсами $\bar{x}_1$ при различных значениях параметра $\Delta$. Эти значения $\bar{k}$ необходимы для построения единственного солитона — решения (1), имеющего вид

$$U = \frac{2\bar{k}^2}{\mathrm{ch}^2[\bar{k}\,(x - 4\bar{k}^2 t)]}\ .$$

На правых концах кривых выполняется условие $\mathrm{tg}\ \Delta = 1/\bar{x}_1$, так что на продолжении кривых при больших $\bar{x}_1$ появляется решение у уравнения (8). Это соответствует появлению в решении уравнения Кортевега—де Фриза при начальных условиях (4) второго солитона. Кривая, соединяющая правые концы кривых, показана пунктиром. При достаточной малой величине $\Delta$ существует значительная область расстояний $x_1$, для которых при $t \to \infty$ имеет место один солитон. Эту область можно считать областью сильного взаимодействия. При превышении критического расстояния при $t \to \infty$ формируются два солитона, распространяющиеся с немного различными скоростями. Эту область можно считать областью слабого взаимодействия.

Для иллюстрации данного явления приведём результаты численного решения уравнения (1) при следующем начальном условии:

$$U(x,0) = A_0 \left\{ \exp\left[ -\frac{(x-x_1)^2}{2d^2} \right] + \exp\left[ -\frac{(x+x_1)^2}{2d^2} \right] \right\},$$

представляющем собой два гауссова пучка с амплитудой $A_0$ и полушириной $d$, расположенные на расстоянии $2x_1$ друг от друга. Результаты приведены для $d = 2$, $x_1 = 8$ и амплитуд $A_0 = 0{,}005$ и $A_0 = 0{,}06$. При выбранном виде потенциала один солитон существует при сколь угодно малой амплитуде $A_0$. Второй солитон появляется при $A_0 \geq 0{,}029$. На рис. 3 показана структура поля для первого случая ($A_0 = 0{,}005$, существует один солитон) и при $t \approx 0{,}72$ и $t \approx 359$, $\bar{x}_1 \approx 5{,}2$. На рис. 3*а* использован сжатый масштаб по пространственной координате, на рис. 3*б* более подробно показана структура солитона за счёт увеличения масштаба по координате $x$. При малых временах существуют два импульса, из которых при больших временах образуется один солитон и довольно длинный слабонелинейный пакет. На рис. 4 показаны аналогичные кривые для $A_0 = 0{,}06$ (существуют два солитона) при $t \approx 1{,}44$ и $t \approx 718$, $\bar{x}_1 \approx 11{,}2$. При малых временах существуют два импульса, из которых при больших временах образуются два солитона и довольно длинный слабонелинейный пакет. Отметим, что в обоих случаях время трансформации первоначальной структуры поля в слабонелинейный пакет и солитоны достаточно велико.

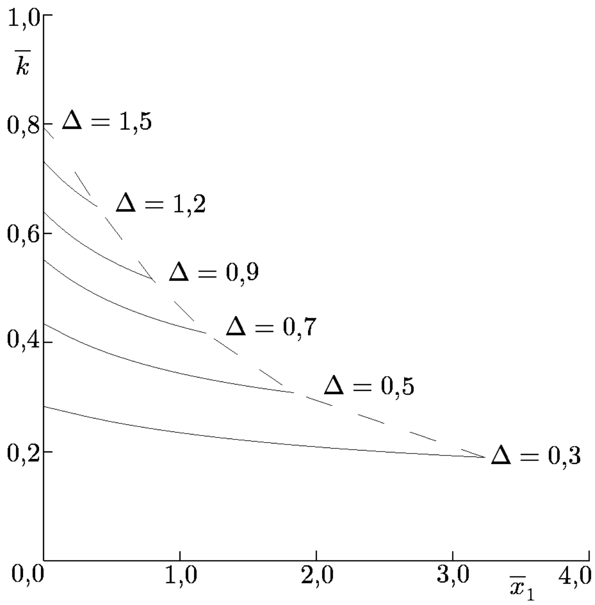



Рис. 2. Зависимость корней уравнения (7) от расстояния между импульсами. Пунктиром обозначена граница появления корней уравнения (8)

Свойства решений нелинейного уравнения Шрёдингера размерности 1+1, как известно, отличаются от свойств решений уравнения Кортевега—де Фриза, но в некотором смысле, пояснённом ниже, эти решения близки. В случае нелинейного уравнения Шрёдингера необходимо вместо линейного уравнения Шрёдингера на первом этапе исследований методом обратной задачи решать задачу рассеяния Захарова—Шабата. Трансцедентное уравнение для определения собственных значений локализованных решений приведено в [3] и имеет вид

$$\mathrm{tg}(d\sqrt{A^2+\zeta^2}) = \frac{\sqrt{A^2+\zeta^2}}{i\zeta \pm A\exp(2i\zeta x_1)}\ , \tag{9}$$

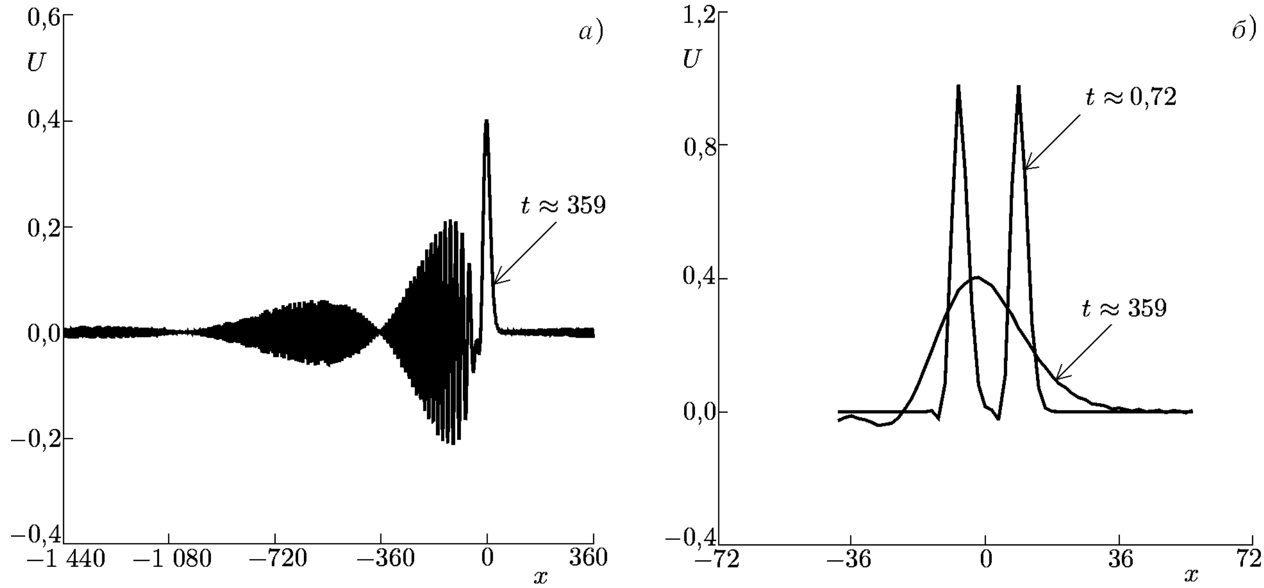



Рис. 3. Формирование одного солитона из двух импульсов при $A_0 = 0{,}005$

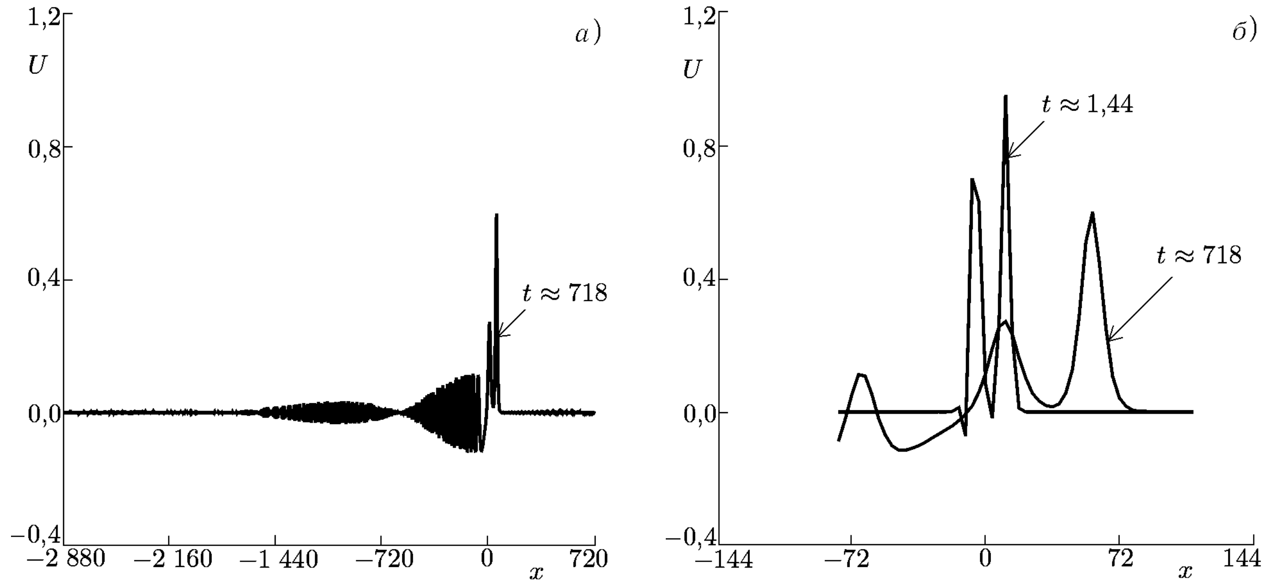



Рис. 4. Формирование двух солитонов из двух импульсов при $A_0 = 0{,}06$

где $\zeta = \xi + i\eta$ — собственное значение. В отличие от (7), (8) уравнение (9) комплексно, причём отличие вещественной части $\xi$ от нуля означает, что солитон имеет скорость (по терминологии [3]), мнимая часть $\eta$ характеризует амплитуду солитона.

Для появления первого локализованного решения в этом случае необходима конечная глубина потенциала. Этим нелинейное уравнение Шрёдингера отличается от уравнения Кортевега—де Фриза. В нашем случае первое собственное значение появляется, как следует из уравнения (9) при выборе знака плюс в знаменателе, при выполнении условия

$$\mathrm{tg}(Ad) \geq \pi/4, \tag{10}$$

которое не зависит от расстояния между начальными импульсами $x_1$. Для определения условий появления следующего собственного значения, которое, согласно [3], на пороге своего появления является чисто действительным ($\zeta = \xi$), перепишем (9) в виде

$$\sin\left(Ad\,\sqrt{1+\xi^2/A^2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\xi^2/A^2}{2}}\,, \qquad \sin\left(2x_1 A\,\frac{\xi}{A}\right) = \pm\,\frac{\xi}{A}\,. \tag{11}$$

Из второго уравнения (11) следует, что для появления второго и третьего собственных значений (9), отличающихся знаком $\xi = \mathrm{Re}\,\zeta$, необходимо выполнение условия $2Ax_1 > 1$. Таким образом, из двух импульсов с небольшой амплитудой возникает несколько солитонов, если импульсы расположены достаточно далеко друг от друга (слабое взаимодействие). Так же, как и в уравнении Кортевега—де Фриза, взаимодействие между импульсами при малом расстоянии между ними приводит к тому, что из двух импульсов возникает только один солитон (сильное взаимодействие).

Отметим, что в рассматриваемом примере число образующихся солитонов зависит от деталей первоначальной структуры поля, например от расстояния между импульсами, что затрудняет построение критериев существования определённого числа солитонов. Очевидно, что полученный результат может быть обобщён на несколько импульсов разной амплитуды в первоначальной структуре поля.

Работа выполнена при поддержке Совета по поддержке ведущих научных школ РФ (грант НШ-1637.2003.2) и программы Президиума РАН «Математические методы в нелинейной динамике».

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кадомцев Б. Б. Коллективные явления в плазме. М.: Наука, 1988. 304 с.
2. Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. Теория солитонов (метод обратной задачи). М.: Наука, 1980.
3. Desaix M., Anderson D., Helczynski L., Lisak M. // Phys. Rev. Lett. 2003. V. 90, No. 1. Article no. 013901-1.

Институт прикладной физики РАН,
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию
26 апреля 2004 г.

## SOME FEATURES OF ONE-SOLITON SOLUTIONS OF THE KORTEWEG – DE VRIES EQUATION

*S. N. Vlasov and E. V. Koposova*

Using the method of inverse scattering problem [1, 2], we study solutions of the Korteweg – de Vries equation under initial conditions in the form of two nonsoliton pulses with not very large amplitudes. It is shown that if the distance between these pulses is not large, then they evolve to one soliton and an oscillating nonlinear tail for $t \to \infty$. As the distance between the pulses or the pulse amplitudes increase, two solitons and an oscillating nonlinear tail are formed. Similar behavior is observed for solutions of the nonlinear Schrödinger equation. The only difference is that three, but not two, solitons are formed if the distance between two initial inphase pulses increases. The results of analytical consideration are illustrated by the numerical solution of the Korteweg – de Vries equation.

УДК 537.86:519.2

# О СИНХРОНИЗАЦИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ АВТОКОЛЕБАНИЙ ОБЩИМ ШУМОМ

*Д. С. Голдобин* [1,2], *А. С. Пиковский* [2]

Исследуется изменение устойчивости автоколебаний под действием внешнего шума. В приближении малого (в нужном смысле) шума выводится стохастическое уравнение для фазы автоколебаний. Стационарное распределение для плотности вероятности используется для аналитического вычисления максимального показателя Ляпунова. Показано, что при малом шуме показатель всегда отрицателен, что соответствует синхронизации автоколебаний.

## ВВЕДЕНИЕ

Основным эффектом при воздействии шума на периодические автоколебания является появление диффузии фазы: автоколебания становятся неидеальными [1]. Однако шум может играть и упорядочивающую роль, в частности синхронизовывать автоколебания. Если на две одинаковые (или слабо отличающиеся) автоколебательные системы действует общий шум, то их состояния могут под действием этого шума синхронизоваться. Этот эффект определяется знаком максимального показателя Ляпунова, при периодических автоколебаниях он отвечает направлению вдоль предельного цикла. Для автономных систем он нулевой, и синхронизации в описанном выше смысле нет. Под действием шума показатель Ляпунова может стать отрицательным, что означает синхронизацию. Впервые подобная задача была изложена в работе [2], где рассматривался слабонелинейный квазигармонический автогенератор с шумом в виде случайной последовательности импульсов. В настоящей статье мы обращаемся к динамическим системам более общего вида с белым гауссовским шумом.

Наш подход основан на сведéнии динамики автоколебательной системы к уравнению для фазы. Это оправдано при малом (в нужном смысле) внешнем воздействии. Мы выводим стохастическое уравнение для фазы автоколебаний и находим стационарное распределение фазы. Показатель Ляпунова выражается в виде интеграла по этому распределению. В частности, мы показываем, что при малой интенсивности шума показатель всегда отрицателен, что отвечает синхронизации.

## 1. ОСНОВНАЯ МОДЕЛЬ

Мы будем исходить из общих стохастических уравнений, описывающих динамику $N$-мерной колебательной системы $x_j$, где $j = 1, \ldots, N$, при наличии некоррелированных между собой векторных шумовых воздействий $\xi_k(t)$ с амплитудами $Q_{jk}$, где $k = 1, \ldots, M \leq N$:

$$\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t} = f_j(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^{M} Q_{jk}(\mathbf{x})\xi_k(t). \tag{1}$$

Если в динамической системе без шума существует цикл $\mathbf{x}^0 = \mathbf{x}^0(t + 2\pi/\omega_0)$, состояния на нём могут быть параметризованы посредством фазы $\varphi(\mathbf{x}^0)$ [3], линейно растущей со временем: $\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t = \omega_0$. Для предельного цикла фаза $\varphi$ может быть введена без неоднородной перенормировки времени (которая нежелательна в случае, если не ограничиваться $\delta$-коррелированными шумами) и в конечной его окрестности, где также будет справедливо соотношение $\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t = \omega_0$. С учётом шума уравнение эволюции фазы в малой окрестности цикла примет вид

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \omega_0 + \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{M} \frac{\partial\varphi(\mathbf{x})}{\partial x_j}\, Q_{jk}(\mathbf{x})\bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^0(\varphi)} \xi_k(t). \tag{2}$$

Эволюция системы будет происходить в малой окрестности цикла в двух случаях: либо при малой интенсивности шума, либо при большом по модулю отрицательном ведущем ляпуновском показателе цикла и конечных интенсивностях шума. Не изменяя характера шума (а лишь перенормируя его количественные характеристики), однородная нормировка времени $[t] = \omega_0^{-1}$ позволяет сделать частоту цикла равной единице. Вид стохастического уравнения для фазы существенно зависит от того, как действует шум в исходной системе (1). Если в системе имеется единственный независимый шумовой сигнал, т. е. только для одного $k$ шумовое воздействие $\xi_k \neq 0$, получаем

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = 1 + \varepsilon f(\varphi)\xi(t), \tag{3}$$

где $\xi(t)$ будет полагаться $\delta$-коррелированным гауссовским шумом со средним значением $\langle\xi(t)\rangle = 0$, нормированным так, что $\langle\xi(t)\xi(t'+t)\rangle = 2\delta(t')$, параметр $\varepsilon$ описывает интенсивность шума, причём в результате нормировки времени $\varepsilon \sim \omega_0^{-1/2}$, а $f(\varphi)$ — нормированная периодическая функция фазы: $f(\varphi) = f(\varphi + 2\pi)$, $\int_0^{2\pi} f^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi$. Более сложное уравнение получается, если шумовой сигнал в исходной системе содержит несколько независимых компонент (мы будем называть это случаем многокомпонентного шума):

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = 1 + \sum_{k=1}^{M} \varepsilon_k f_k(\varphi)\xi_k(t), \qquad \langle\xi_i(t)\,\xi_k(t'+t)\rangle = 2\delta(t')\delta_{ik}, \tag{4}$$

где $\delta_{ik}$ — символ Кронекера.

Целью нашего исследования является аналитический анализ устойчивости решений стохастических уравнений (3), (4). Для этой цели рассмотрим линеаризованное уравнение (3) для малого отклонения фазы $\alpha$:

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \varepsilon\alpha f'(\varphi)\xi(t), \tag{5}$$

где штрих обозначает производную по аргументу. Ляпуновский показатель, задающий среднюю скорость экспоненциального роста отклонения $\alpha$, определяется усреднением соответствующей мгновенной скорости:

$$\lambda = \left\langle \frac{\mathrm{d}\ln\alpha}{\mathrm{d}t} \right\rangle = \langle\varepsilon f'(\varphi)\xi(t)\rangle. \tag{6}$$

Для многокомпонентного шума выражение для показателя Ляпунова имеет вид

$$\lambda = \sum_{k=1}^{M} \langle\varepsilon_k f_k'(\varphi)\xi_k(t)\rangle. \tag{7}$$

Отметим, что показатель Ляпунова определяет асимптотическое поведение малых возмущений решения и в нашей задаче будет описывать, сближаются или расходятся близкие состояния системы со временем в ходе её эволюции. При этом, конечно же, в отдельные моменты времени близкие состояния могут друг от друга удаляться при отрицательном показателе Ляпунова, что не препятствует их итоговому сближению, а при положительном показателе Ляпунова, наоборот, часть времени состояния могут расходиться.

## 2. УРАВНЕНИЕ ФОККЕРА—ПЛАНКА И ЕГО СТАЦИОНАРНОЕ РЕШЕНИЕ

Уравнение Фоккера—Планка для стохастического уравнения (3), понимаемого в смысле Стратоновича, записывается стандартным образом [4, 5]:

$$\frac{\partial W(\varphi,t)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[W(\varphi,t)-\varepsilon^2 f(\varphi)\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[f(\varphi)\,W(\varphi,t)\right]\right]=0. \tag{8}$$

В стационарном режиме поток вероятности $S$ постоянен:

$$W(\varphi)-\varepsilon^2 f(\varphi)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\left[f(\varphi)W(\varphi)\right]=S. \tag{9}$$

Это позволяет найти решение в квадратурах, которое при периодических граничных условиях для $W(\varphi)$ имеет вид

$$W(\varphi)=C\int\limits_{\varphi}^{\varphi+2\pi}\frac{\mathrm{d}\psi}{f(\varphi)f(\psi)}\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_{\varphi}^{\psi}\frac{\mathrm{d}\theta}{f^2(\theta)}\right), \tag{10}$$

где $C$ определяется из условия нормировки распределения:

$$C^{-1}=\int\limits_{0}^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int\limits_{\varphi}^{\varphi+2\pi}\frac{\mathrm{d}\psi}{f(\varphi)f(\psi)}\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_{\varphi}^{\psi}\frac{\mathrm{d}\theta}{f^2(\theta)}\right), \tag{11}$$

а поток вероятности задаётся выражением

$$S=\left[1-\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{f^2(\theta)}\right)\right]C. \tag{12}$$

Для многокомпонентного шума аналогично имеем

$$\frac{\partial W(\varphi,t)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(W(\varphi,t)-\sum_{k=1}^{M}\varepsilon_k^2 f_k(\varphi)\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[f_k(\varphi)\,W(\varphi,\,t)\right]\right)=0. \tag{13}$$

Интересно, что это уравнение эквивалентно его однокомпонентному варианту (8), если положить

$$f^2(\varphi)=\sum_{k=1}^{M}\varepsilon_k^2 f_k^2(\varphi)\Big/\sum_{k=1}^{M}\varepsilon_k^2 \qquad \text{и} \qquad \varepsilon^2=\sum_{k=1}^{M}\varepsilon_k^2. \tag{14}$$

Таким образом, приведённое выше стационарное решение справедливо и в этом случае.

## 3. ПОКАЗАТЕЛЬ ЛЯПУНОВА

Для вычисления показателя Ляпунова (6), (7) требуется найти средние вида $\langle F(\varphi)\xi(t)\rangle$. Такие средние для стохастических уравнений (3), (4) с $\delta$-коррелированным шумом вычисляются стандартным способом [5]:

$$\langle F(\varphi)\xi(t)\rangle=\varepsilon\,\langle F'(\varphi)f(\varphi)\rangle. \tag{15}$$

Записывая усреднение как интеграл по равновесной плотности распределения фазы, для показателя Ляпунова получаем

$$\lambda = \varepsilon^2 \left\langle f''(\varphi) f(\varphi) \right\rangle = \varepsilon^2\, C \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_{\varphi}^{\varphi+2\pi} \mathrm{d}\psi\; \frac{f''(\varphi)}{f(\psi)}\, \exp\!\left( -\frac{1}{\varepsilon^2} \int\limits_{\varphi}^{\psi} \frac{\mathrm{d}\theta}{f^2(\theta)} \right). \tag{16}$$

Для многокомпонентного шума аналогично получаем

$$\lambda = \sum_{k=1}^{M} \varepsilon_k^2 \int\limits_0^{2\pi} f_k''(\varphi) f_k(\varphi)\, W(\varphi)\, \mathrm{d}\varphi. \tag{17}$$

Прежде чем перейти к анализу полученных формул в конкретных ситуациях, отметим, что в пределе слабого шума показатель Ляпунова всегда отрицателен: в ведущем порядке по $\varepsilon$

$$\lambda_0 \sim -\sum_{k=1}^{M} \frac{\varepsilon_k^2}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left( f_k'(\varphi) \right)^2\, \mathrm{d}\varphi, \tag{18}$$

где $M$ может принимать и значение 1, что соответствует однокомпонентному шуму.

### 4.1. Пример: линейно-поляризованный однородный шум

Если в исходной системе шум аддитивный и действует только на одну компоненту, а предельный цикл близок к окружности, то получается однокомпонентное стохастическое уравнение с $f(\varphi) = \sqrt{2}\, \sin\varphi$. Здесь мы также предположили, что скорость фазового потока на предельном цикле примерно постоянна. В этом случае

$$\int\limits_{\varphi}^{\varphi+2\pi} \frac{\mathrm{d}\psi}{f(\psi)} \exp\!\left( -\frac{1}{\varepsilon^2} \int\limits_{\varphi}^{\psi} \frac{\mathrm{d}\theta}{f^2(\theta)} \right) = \int\limits_{\varphi}^{\pi+\pi[\varphi/\pi]} \frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{2}\sin\psi} \exp\!\left( \frac{\operatorname{ctg}\psi - \operatorname{ctg}\varphi}{2\varepsilon^2} \right),$$

где квадратные скобки обозначают целую часть заключённого в них выражения. Для выбранного вида функции $f(\varphi)$ распределение будет иметь период $\pi$ и при $\varphi \in [0,\, \pi)$

$$W(\varphi) = \frac{C}{2} \int\limits_{\varphi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}\psi}{\sin\psi \sin\varphi} \exp\!\left( \frac{\operatorname{ctg}\psi - \operatorname{ctg}\varphi}{2\varepsilon^2} \right),$$

$$S = C = \left( \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}y \int\limits_{-\infty}^{y} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}\,\sqrt{1+y^2}} \exp\!\left( \frac{x-y}{2\varepsilon^2} \right) \right)^{-1},$$

$$\lambda = -\frac{\varepsilon^2 C}{2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}y \int\limits_{-\infty}^{y} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{1/2}\,(1+y^2)^{3/2}} \times \\ \times \exp\left(\frac{x-y}{2\varepsilon^2}\right). \qquad (19)$$

Для перехода к последним формулам введены переменные $x = \operatorname{ctg}\psi$ и $y = \operatorname{ctg}\varphi$ (переход нужен для того, чтобы сделать очевидной сходимость интегралов). Дальнейшее упрощение формул не представляется возможным, однако они уже достаточно удобны для построения численного решения. График зависимости искомого показателя Ляпунова от интенсивности шума представлен на рис. 1.

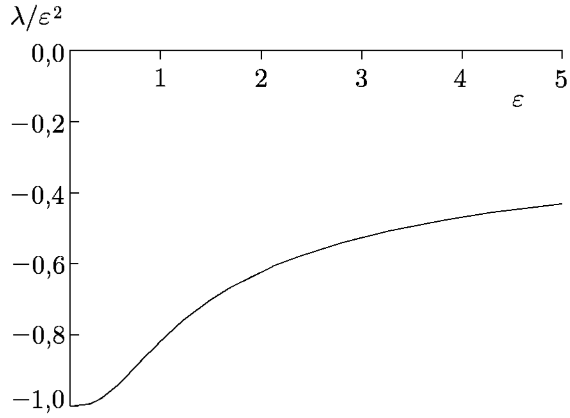



Рис. 1. Линейно поляризованный однородный шум. Зависимость нормированного на $\varepsilon^2$ показателя Ляпунова от амплитуды шума $\varepsilon$. При слабых и сильных шумах для зависимости показателя $\lambda_0$ от амплитуды шума имеют место квадратичные асимптотики с разными коэффициентами

### 4.2. Пример: суперпозиция двух независимых линейно поляризованных однородных шумов

В тех же предположениях, что и выше (предельный цикл в динамической системе близок к окружности и движение на нём равномерно), эффект действия шума на две компоненты, сдвинутые по фазе на $\pi/2$, естественно моделировать многокомпонентным шумом с $f_1(\varphi) = \sqrt{2}\,\sin\varphi$ и $f_2(\varphi) = \sqrt{2}\,\cos\varphi$. Для усреднённой плотности вероятности имеют место эффективные функция $f(\varphi) = \sqrt{1 + \Delta\cos(2\varphi)}$ и интенсивность шума $\varepsilon^2 = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2$, где $\Delta \equiv (\varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^2)/(\varepsilon_2^2 + \varepsilon_1^2)$; очевидно, $\Delta \in [-1, 1]$. Из вида функции $f(\varphi)$ можно сделать вывод о существовании в системе симметрии относительно замены $(\Delta, \varphi) \leftrightarrow (-\Delta, \varphi + \pi/2)$. В этом случае

$$\int \frac{\mathrm{d}\theta}{f^2(\theta)} = \frac{1}{\sqrt{1-\Delta^2}} \left(\pi\left[\frac{\theta}{\pi}\right] - \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1+\Delta}{1-\Delta}}\operatorname{ctg}\theta\right)\right),$$

и для усреднённого распределения $W(\varphi)$ и потока $S$ вероятности можно получить

$$W(\varphi) = C \int\limits_{\varphi}^{\varphi+\pi} \mathrm{d}\psi\, \frac{\exp\left(-\dfrac{1}{\varepsilon^2\sqrt{1-\Delta^2}}\left(\pi\left[\dfrac{\theta}{\pi}\right] - \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\dfrac{1+\Delta}{1-\Delta}}\operatorname{ctg}\theta\right)\right)\Bigg|_{\varphi}^{\psi}\right)}{\sqrt{1+\Delta\cos(2\varphi)}\,\sqrt{1+\Delta\cos(2\psi)}},$$

$$C = \left(2\int\limits_0^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_{\varphi}^{\varphi+\pi} \mathrm{d}\psi\, \frac{\exp\left(-\dfrac{1}{\varepsilon^2\sqrt{1-\Delta^2}}\left(\pi\left[\dfrac{\theta}{\pi}\right] - \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\dfrac{1+\Delta}{1-\Delta}}\operatorname{ctg}\theta\right)\right)\Bigg|_{\varphi}^{\psi}\right)}{\sqrt{1+\Delta\cos(2\varphi)}\,\sqrt{1+\Delta\cos(2\psi)}}\right)^{-1},$$

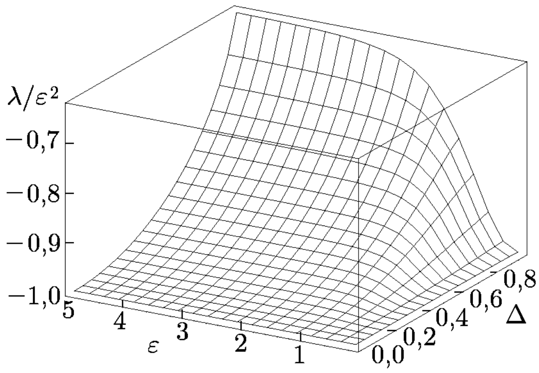



Рис. 2. Суперпозиция двух независимых линейно поляризованных однородных шумов. Зависимость нормированного на $\varepsilon^2$ показателя Ляпунова от $\varepsilon$ и $\Delta$

$$S = \left[1 - \exp\left(-\frac{\pi}{\varepsilon^2\sqrt{1-\Delta^2}}\right)\right] C.$$

Окончательное выражение для показателя Ляпунова имеет вид

$$\lambda = -2\varepsilon^2 C \int\limits_0^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_{\varphi}^{\varphi+\pi} \mathrm{d}\psi \, \frac{\sqrt{1+\Delta\cos(2\varphi)}}{\sqrt{1+\Delta\cos(2\psi)}} \times \\ \times \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon^2\sqrt{1-\Delta^2}}\left(\pi\left[\frac{\theta}{\pi}\right] - \right.\right. \\ \left.\left. - \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1+\Delta}{1-\Delta}}\operatorname{ctg}\theta\right)\right)\Bigg|_{\varphi}^{\psi}\right). \quad (20)$$

Зависимость искомого показателя Ляпунова от интенсивности шума $\varepsilon$ и существенного параметра $\Delta$ представлена на рис. 2.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе исследована возможность синхронизации одинаковых динамических систем, допускающих фазовое описание, посредством воздействия общим внешним белым гауссовским шумом. Количественной характеристикой способности систем синхронизоваться является показатель Ляпунова, соответствующий возмущениям вдоль фазовой траектории динамической системы. Задача его отыскания решена аналитически в квадратурах для случаев одного (10), (11), (16) и нескольких (17) независимых шумовых сигналов. В качестве примеров систем, соответствующих первому и второму случаям, рассмотрены задачи о влиянии одного и двух независимых линейно поляризованных однородных шумов на синхронизацию систем с предельным циклом, имеющим близкую к окружности форму, и примерно постоянный на этом цикле модуль скорости фазового потока (см. рис. 1, 2).

Для обоих рассмотренных примеров шум может приводить только к синхронизации, поскольку показатель Ляпунова отрицателен. Аналогичный вывод следует и из общего асимптотического выражения, справедливого для любых систем в пределе малого шума. Отметим, что в этом пределе предположение о гауссовости шума является излишним, поскольку вклад старших кумулянтов шумового сигнала (гауссовость используется для их устранения) в значения интересующих нас величин пропорционален старшим степеням интенсивности шума. Сами же асимптотические значения показателя Ляпунова в этом пределе линейно пропорциональны интенсивности шума и обратно пропорциональны частоте автоколебаний. Несомненный интерес представляет вопрос о знаке показателя Ляпунова при сильном шуме; здесь необходимо численное исследование полной системы.

Д. С. Голдобин благодарит трёхсторонний проект Германия—Франция—Россия, фонд «Династия» и Международный центр фундаментальной физики в Москве за поддержку.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Малахов А. Н. Флуктуации в автоколебательных системах. М.: Наука, 1968.
2. Пиковский А. С. // Изв. вузов. Радиофизика. 1984. Т. 27. С. 390.
3. Kuramoto Y. Chemical Oscillations, Waves and Turbulence. Springer, 1984.
4. Рытов С. М. Введение в статистическую радиофизику. М.: Наука, 1966.
5. Кляцкин В. И. Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами. М.: Наука, 1975.

[1] Пермский государственный университет,
г. Пермь, Россия;
[2] Университет Потсдама, Германия

Поступила в редакцию
18 мая 2004 г.

## SYNCHRONIZATION OF SELF-OSCILLATIONS BY COMMON NOISE

*D. S. Goldobin and A. S. Pikovsky*

We consider the effect of external noise on the stability properties of self-oscillations. A stochastic equation for the phase is derived at the limit of small noise. Its stationary solution is used for an analytic calculation of the Lyapunov exponent. We show that the exponent is always negative for small noise level, which corresponds to synchronization of self-oscillations.

УДК 53.083.2

# MEASUREMENT OF THE POWER DENSITY OF ELECTROMAGNETIC RADIATION BY THE METHOD OF MICROWAVE NONSTATIONARY SPECTROSCOPY

*A. B. Brailovsky, V. V. Khodos, and V. L. Vaks*

We present a new method for measurement of the microwave power based on the analysis of transient signals of gas molecules. These signals arise due to the phase switch of microwave radiation, which interacts with molecular rotational transition with frequency equal to that of the radiation. The method allows one to measure the amplitude of radiation via determination of the Rabi frequency. This approach is especially preferable in the submillimeter wavelength range.

## INTRODUCTION

The conventional methods of power measurement based on quantitative determination of the detector (bolometer, thermocouple, Schottky-diode, etc.) response to the microwave radiation appear to be of little use in the short-wavelength part of the millimeter and in the submillimeter ranges. If the radiation wavelength becomes comparable with the geometrical sizes of detector, then the sensitivity decreases, the uniformity of frequency characteristics worsens, and the calculation of transformation characteristics becomes difficult. Besides, the problems of absolute calibration of measurers appear.

Due to these circumstances, an opportunity to apply the methods of microwave nonstationary spectroscopy for measurement of electromagnetic fields is of great interest. A distinctive feature of the given methods is essentially in that information on the radiation level is contained not in the quantitative, but in the qualitative parameters of a signal, i. e., in its form, because the value of the Rabi frequency $\Omega_{\rm R} = 2dE/h$, where $E$ is the amplitude of the electromagnetic wave, is determined by the value of microwave radiation intensity. The transition matrix elements $d$ of the dipole moment are calculated with high accuracy for a great variety of gases. Therefore, we can use the noncalibrated parts of the microwave channel (antenna, detector, splitter, etc.) for the measurements, as well as place the receiver in an arbitrary manner at a long distance from the absorption cell. Another important feature of the method is that the gas molecules are carriers of the primary standard which is not sensitive to changes of the environment.

It is also important that the method is intended for measurements of the passed, rather than absorbed, power, which is important for a variety of practical applications. Besides, only a small part of microwave power is lost when passing the absorption cell, which allows one to practically eliminate the measurer influence on the field distribution (i. e., the measurement is noninvasive).

The studies of nonlinear phenomena of microwave radiation absorption, including the observations of Rabi oscillations, were reported in [1, 2]. The calculations performed in those papers on the basis of the Bloch equations yielded the value and the form of transient signals for various amplitudes of an electromagnetic field. The experimental studies illustrating these processes were performed by using a Stark spectrometer. However, we have not seen papers where the inverse problem, i. e., determination of spectroscopic parameters such as absorption coefficient, relaxation times, and Rabi frequency from the form of the transient signal, is solved. Besides, the great number of disadvantages of the Stark spectroscopy [3] considerably restricts the field of its application. Another method for forming the transient signals which contain information on the Rabi frequency is based on switching of the radiation frequency. However, this method involves strong influence of interference [3] in the phase of transient absorption and is not applicable for high-sensitivity and high-accuracy measurements.

The method of microwave spectroscopy based on phase switching (PS) of microwave radiation was proposed in [3]. The calculations show that the spectrometer realizing this method provides the best approach to the theoretical sensitivity limit. Besides, as is shown below, the transient signal, i.e., a response of the gas under study to switching of the radiation phase (for phase shift equal to $\pi$), contains information on the Rabi frequency when measured under saturation conditions. This fact makes the PS spectrometer quite applicable for nonlinear measurements. In this paper, we perform a detailed analysis of nonlinear interaction of a two-level system with PS radiation within the framework of Bloch equations. We also describe the measurement techniques and the algorithms for signal processing that allow one to obtain comprehensive spectroscopic information.

In the experimental part of the paper, we also describe the design of a microwave PS spectrometer and some results of its application.

## 1. THEORY

To determine spectroscopic parameters from the form of a transient signal, it is necessary to obtain an analytical expression for the time dependence of the absorption coefficient for the case where the phase-switched radiation of arbitrary amplitude interacts with a gas under study. The frequency $\omega$ of microwave radiation is not necessarily equal to the frequency $\omega_0$ of molecular resonance. To solve this problem, we write the Bloch equations describing the interaction of an electromagnetic wave with a two-level system in the electric-dipole approximation [2]:

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} + \Delta\omega\, U + \frac{V}{T_2} = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} - \Delta\omega V + k^2 E \left(\frac{h\,\Delta N}{4}\right) + \frac{U}{T_2} = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{h\,\Delta N}{4}\right) - EU + \frac{h\,(\Delta N - \Delta N_0)}{4T_1} = 0. \tag{1}$$

Here, $\Delta\omega = \omega - \omega_0$, $V$ and $U$ are, respectively, the real and imaginary parts of induced macroscopic polarization, $E$ is the amplitude of the electromagnetic wave in the plane-wave approximation, $k = 2\,|d|/h$, where $d$ is the matrix element of the transition dipole moment, $\Delta N$ is the level population difference, and $\Delta N_0$ is its equilibrium value. The quantities $T_2$ and $T_1$ are the relaxation times for the polarization and population difference, respectively. They are determined by collision dynamics. We assume that $T_1 = T_2 = \Gamma^{-1}$, which considerably simplifies the calculations. Moreover, we have not seen papers in which a noticeable difference between these times is reported (see, e.g., [2]). We now rewrite equations (1) in terms of the new variables:

$$\mathrm{d}V/\mathrm{d}t + \Delta\omega\, U + \Gamma V = 0, \qquad \mathrm{d}U/\mathrm{d}t - \Delta\omega\, V + k^2 En + \Gamma U = 0,$$

$$\mathrm{d}n/\mathrm{d}t - EU + \Gamma\,(n - n_0) = 0, \tag{2}$$

where $n = h\,\Delta N/4$ and $n_0 = h\,\Delta N_0/4$. Let the radiation be switched on at $t = 0$ and phase switching (PS) occur at $t = \tau$. For solving the problem we assume that the period of PS is much greater than $\Gamma^{-1}$. This is the case for the model of a spectrometer whose design is described below. Then the function $U(t)$ for $\tau < t < 2\tau$ is the desired solution due to $\Gamma\tau \gg 1$. We solve equations (2) using the operator method. Let $V_1$, $U_1$, and $n_1$ be the initial values of the corresponding variables. Their Laplace images are denoted by overbars. Introducing the Rabi frequency $\Omega_{\mathrm{R}} = kE$, we obtain, after simple algebra, the equations

$$\bar{V} = \frac{V_1 - \Delta\omega\,\bar{U}}{s + \Gamma}\ , \tag{3}$$

$$\bar{n} = \frac{s\,(E\bar{U} + n_1) + \Gamma n_0}{s\,(s+\Gamma)}\ , \tag{4}$$

$$\bar{U} = \frac{(s+\Gamma)\,U_1 + \Delta\omega\,V_1 - k^2 E n_1}{(s+\Gamma)^2 + \Omega^2} - \frac{k^2 E \Gamma n_0}{s\,[(s+\Gamma)^2 + \Omega^2]}\ , \tag{5}$$

where $\Omega^2 = \Omega_{\rm R}^2 + (\Delta\omega)^2$ and $s$ is the variable of the Laplace transform. To solve the problem, it is necessary to substitute the values $V_1$, $U_1$ and $n_1$ for $t = \tau$ into Eq. (5). In principle, they are determined by $U(t)$, $V(t)$, and $n(t)$. However, if the condition $\Gamma\tau \gg 1$ is met, then the situation is considerably simplified since $V_1$, $U_1$, and $n_1$ are the stationary solution of equations (2). Hence,

$$U_1 = -\frac{k^2 E \Gamma n_0}{\Gamma^2 + \Omega^2}\ , \qquad V_1 = \frac{k^2 E\,\Delta\omega\, n_0}{\Gamma^2 + \Omega^2}\ , \qquad n_1 = \frac{n_0\,[\Gamma^2 + (\Delta\omega)^2]}{\Gamma^2 + \Omega^2}\ . \tag{6}$$

The phase switching at $t = \tau$ corresponds to replacement $E \to -E$ in Eq. (5). Then we substitute Eq. (6) into Eq. (5) to obtain, upon the inverse Laplace transform,

$$U(t) = -\frac{\Delta N_0\, dh^2}{2}\,\frac{\Omega_{\rm R}\Gamma}{\Gamma^2 + \Omega^2}\left[1 - 2\exp(-\Gamma t)\left[\cos(\Omega t) - \frac{(\Delta\omega)^2}{\Omega\Gamma}\sin(\Omega t)\right]\right]. \tag{7}$$

The power absorption coefficient $\gamma$ is determined from the following expression [2]:

$$\gamma = -\frac{4\pi\omega}{c}\,\frac{U}{E}\ , \tag{8}$$

where $c$ is the speed of light. Now we introduce the absorption line intensity $\gamma$ which is equal to the absorption coefficient $\gamma$ defined by Eq. (8) in the linear regime, i. e., when $\Omega_{\rm R} \ll \Gamma$. Then, taking into account that only the alternate part of $U(t)$ can be regarded as a useful signal [3], we write down the expression for the absorption coefficient as follows:

$$\gamma(t) = \frac{2\gamma_0\Gamma^2}{\Gamma^2 + \Omega^2}\exp(-\Gamma t)\left[\cos(\Omega t) - \frac{(\Delta\omega)^2}{\Omega\Gamma}\sin(\Omega t)\right], \tag{9}$$

where $\gamma_0 = 8\pi N_0 d^2 \omega h/(\Gamma c)$.

To account for the Doppler broadening of the absorption line, it is necessary to convolve the Eq. (9) with the Gaussian function of frequency deviation. Then,

$$\gamma_1(t) = \frac{2\gamma_0\Gamma^2}{\sqrt{\pi}\,\delta}\exp(-\Gamma t)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{[\cos(\Omega_{\rm D} t) - (\Gamma\Omega_{\rm D})^{-1}\,(\Delta\omega - x)^2\,\sin(\Omega_{\rm D} t)]}{\Gamma^2 + \Omega_{\rm D}^2}\exp\!\left(-\frac{x^2}{\delta^2}\right){\rm d}x, \tag{10}$$

where $\Omega_{\rm D}^2 = \Omega_{\rm R}^2 + (\Delta\omega - x)^2$, $\delta = \omega_0\,(2\Theta/M)^{1/2}/c$, $\Theta$ is the energy temperature of gas, and $M$ is the molecular mass. It is evident that Eq. (10) can be applied to determine the parameters of both the absorption line and the radiation when analyzing the transient signal obtained in the experiment.

## 2. EXPERIMENT

The block diagram of the spectrometer with phase switching of microwave radiation is presented in Fig. 1.

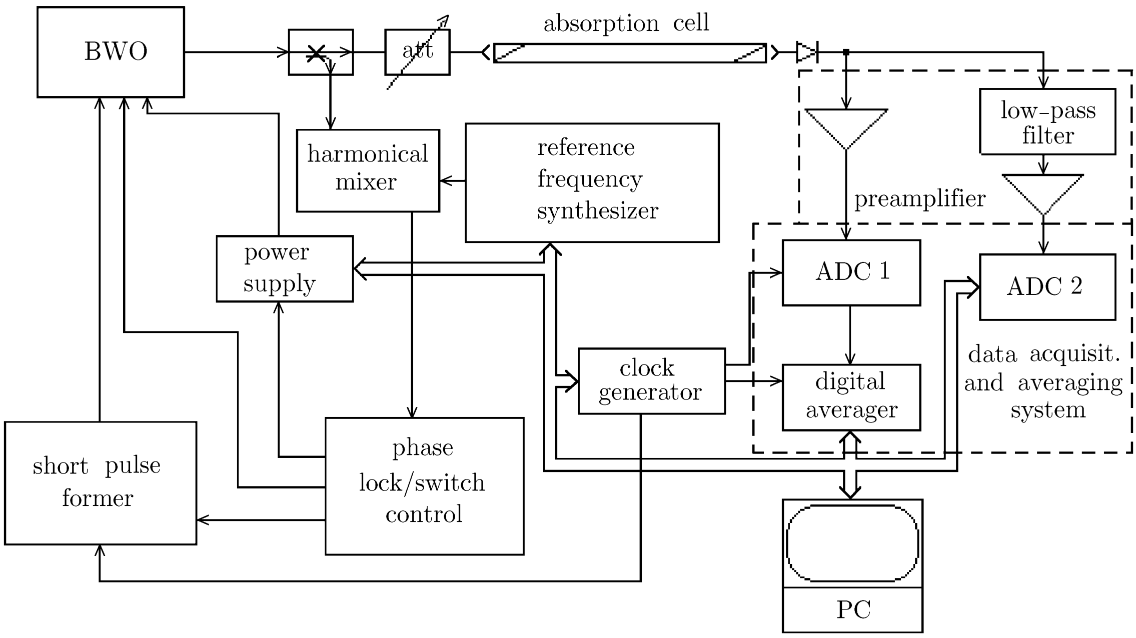



Fig. 1. Block diagram of the switching spectrometer

The backward wave oscillator («OW-79», Russia) served as a microwave source with a total operating frequency range of $115-185$ GHz. The radiation frequency is stabilized with the use of a frequency lock-in circuit which involves a harmonic mixer, a frequency detector, and a reference synthesizer of centimeter wavelength range. Switching of the radiation phase is realized by applying short-term (about 10 ns) voltage pulses to the slow-wave structure of the backward wave oscillator (BWO). Here we use the BWO ability to almost instantly change the radiation frequency when the supply voltage changes. The delay is determined by the time of electron transit through the slow-wave structure, which is approximately equal to 1 ns. To obtain the phase shift equal to $\pi$, the BWO frequency $\omega(t)$ as a function of time should obey the condition

$$\int\limits_{t}^{t+\Delta t} [\omega(t') - \omega_0]\,\mathrm{d}t' = \pm\pi, \tag{11}$$

where $\omega_0$ is the BWO radiation frequency in the absence of the pulse impact and $\Delta t$ is the pulse duration. The phase shift is adjusted by varying the pulse magnitude. We use a specially designed phase shift control unit to automatically adjust the phase shift.

The phase switched microwave radiation is input to the detector based on the Schottky diode via the calibrated attenuator and the absorption cell. The detector output signal is amplified and digitized by the 8-bit analog-to-digital converter (ADC). To extract weak spectroscopic signals from the noise background, we use a digital averager which makes on-line summation of the signals. The ADC sampling rate is 16 MHz. The phase-switching repetition frequency of 250 kHz is produced by division of the sampling rate. Thus, every transient signal is characterized by 64 samples. As an example of transient signal, we present in Fig. 2 the experimentally obtained signal $F(t)$ of the OCS molecule for resonance frequency 133785.9 MHz and pressure 60 mTorr. After summation of 256 signals, information from the digital averager is input to the computer via the IEEE-488 bus. Then the averaging process can be continued in the computer.

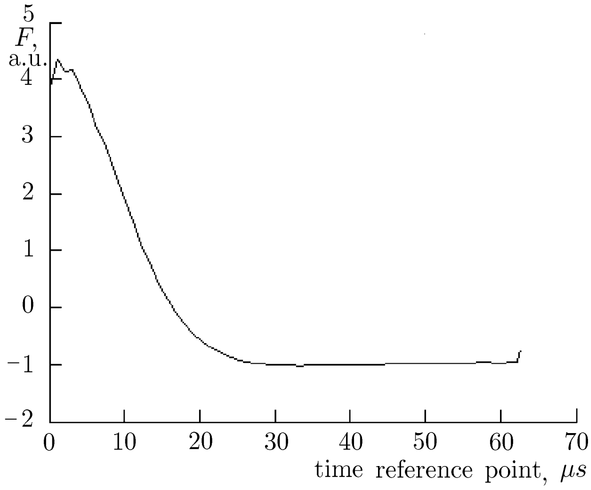



Fig. 2. The experimental transient signal $F$ of the OCS molecule. The resonance frequency is 133785.9 MHz and the pressure is 60 mTorr

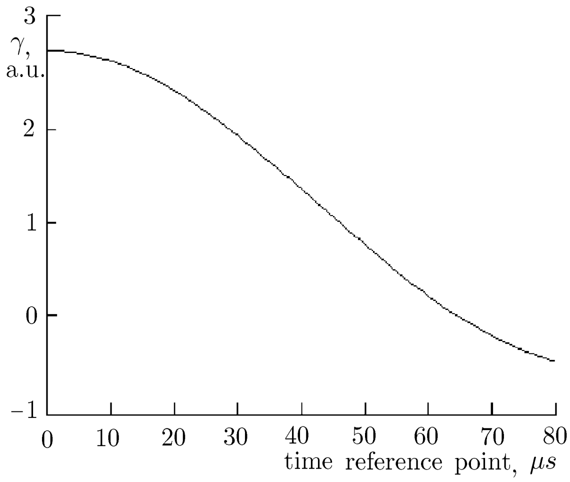



Fig. 3. The calculated transient signal $\gamma$ of the OCS molecule. The resonance frequency is 133785.9 MHz and the pressure is 0.1 Torr

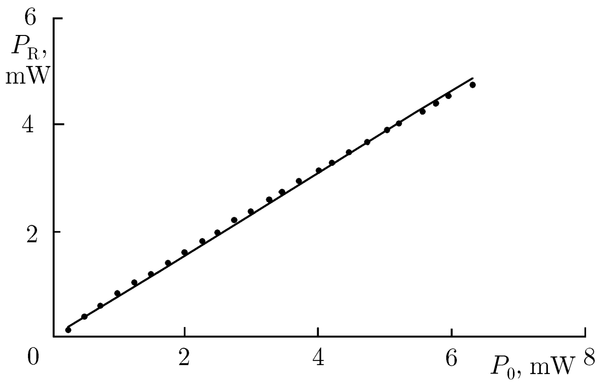



Fig. 4. The power calculated using the measured values of Rabi frequency via the output microwave power

To determine the detector DC voltage, we use an additional registration channel involving a low-pass filter and ADC. All the basic blocks of the spectrometer are controlled by the computer via the IEEE-488 bus.

As an object under study, we use an approximately 10% mixture of OCS with air for pressure 0.1 Torr. The absorption cell is a quartz tube with a length of 10 cm and internal diameter of 2.7 cm. The measurements were carried out for OCS absorption line with frequency 133785.9 MHz, intensity $8.97 \cdot 10^{-3}$ cm$^{-1}$, and matrix element 0.51 D of the dipole moment. The relaxation parameter $\Gamma$ is about 0.5 MHz. Since $\delta \approx 0.1$ MHz, the Doppler broadening is negligible in this case. Therefore, for the approximation we apply Eq. (9). In Fig. 3, we present the shape of the function $\gamma(t)$ for the OCS molecule with parameters $\gamma_0$ and $\Gamma$ given above, $\Delta\omega = 0$, and $\Omega_{\mathrm{R}} = 0.73$ MHz.

The values of $\Omega_{\mathrm{R}}$, measured for different values of the output power, can be used to determine the microwave power $P_{\mathrm{R}}$ passed through the absorption cell (for microwave power in the range $2-8$ mW, the Rabi frequency lies in the range $0.3-1$ MHz). To calculate the output power, one should use the following expression:

$$P_{\mathrm{R}} = \frac{cE^2 S}{2\pi} = \frac{\mathrm{c}h^2 S}{8\pi d^2}\,\Omega_{\mathrm{R}}^2, \tag{12}$$

where $S$ is the cross section of an absorption cell. The dependence of the microwave power, determined in such a way, on the power $P_0$ measured by the conventional method using the power measurer M3-75 (Russia) is presented in Fig. 4 (circles). The closeness of the obtained dependence to the linear one (solid line) indicates that the given method is good for measuring the microwave power in a wide dynamic range. The approximately 30% difference of the absolute values (the line slope is equal to 0.76) might be a consequence of both the intrinsic error of M3-75, and the losses, as well as reflections in the horns and in the absorption cell. Presumably, a more thorough match of the microwave channel elements would provide more accurate results. Taking into account the additional difficulties when measuring the microwave power in the submillimeter wavelength range we can consider the given method as an alternative to the conventional metrological ones.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project No. 03–02–16338) and the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (project «Physics of Microwaves»).

## REFERENCES

1. Mache B., Glorieux P. // Chem. Phys. Lett. 1972. V. 14. P. 85.
2. Флайгер У. Строение и динамика молекул. Т. 2. М., 1982.
3. Brailovsky A. B., Khodos V. V., Vaks V. L. // Intern. J. of Infrared and Millimeter Waves. 1999. V. 20, No. 5. P. 883.

Институт физики микроструктур РАН,
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию
6 февраля 2004 г.

УДК 535.37

# КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ СМЕСИ ГАЛОГЕНОВ С ПОМОЩЬЮ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ С СИНТЕЗИРУЕМЫМ СПЕКТРОМ

*В. И. Кравченко, В. А. Соколов*

Лазер с синтезируемым спектром излучения используется для создания спектральных масок, которые применяются для корреляционного анализа смеси, содержащей молекулярные йод и бром. Обосновывается выбор длин волн спектральных масок, исследуется точность и чувствительность к наличию мешающего вещества, рассматривается влияние нестабильности маски.

Спектроскопические методы исследования на основе перестраиваемых лазеров широко используются практически во всех областях науки и техники. Одним из существенных толчков к их развитию явилось создание нового типа перестраиваемых лазеров — свип-лазеров [1, 2], в исследовании динамики которых ключевую роль сыграл Я. И. Ханин [3–5]. Прогресс этих источников и связанного с ними метода бесщелевой лазерной спектрометрии [6] во многом обязан решению проблемы перестройки дисперсионных резонаторов чисто электронными средствами, что обеспечило программируемость закона перестройки, повысило её скорость, точность и воспроизводимость настройки на заданную длину волны [7, 8].

Принципиально новый подход связан с осуществлением электронной перестройки спектра многочастотной генерации, что открыло путь к искусственному синтезу спектров излучения заданной структуры. Это, в свою очередь, обеспечило возможность дальнейшего развития метода корреляционной частотной спектроскопии, в основе которого лежит определение корреляции между структурой спектра зондирующего излучения и структурой спектра поглощения (отражения, усиления) исследуемого вещества [8, 9].

Полезность измерения поглощения сразу на нескольких длинах волн была убедительно продемонстрирована в методе корреляционной маск-спектрометрии [10]. Одна маска пропускает свет в максимумах спектра поглощения, а другая — в его минимумах. Разница показаний прибора в этих случаях является мерой количества исследуемого вещества, которая служит для определения его концентрации. По сравнению с другими методами газового анализа данный метод позволяет существенно улучшить отношение сигнал/шум для смесей с перекрывающимися спектрами поглощения.

В развиваемом нами подходе спектральные маски и их смена реализуются с помощью лазера с электронным синтезом и перестройкой многочастотного спектра [11–13]. Исследования, выполненные для лазеров на красителях, показали возможность устойчивой генерации нескольких спектральных компонент с независимой перестройкой длины волны на $8 \div 10$ нм. Маски с произвольно большим числом компонент могут быть реализованы в режиме программной перестройки, когда компоненты начинают генерироваться последовательно. Такие маски позволяют контролировать несколько веществ практически одновременно, что является особенно привлекательным для анализа смесей с изменяющимся во времени составом.

В настоящей работе исследуется возможность использования корреляционной методики для анализа газообразных смесей, содержащих молекулярные йод и бром. Практическая потребность в таком подходе связана с тем, что спектры поглощения этих веществ, часто сопутствующих друг другу в различных природных и технологических средах, взаимно перекрываются [14]. Это осложняет использование традиционной методики двухдлинноволнового дифференциального поглощения. Попутно выясняется влияние на точность измерений специфических флуктуаций лазерной маски, которые проявляются в случайных изменениях соотношений между интенсивностями отдельных компонент и обусловлены главным образом флуктуациями накачки и конкуренцией спектральных компонент лазерной генерации.

## 1. УСТАНОВКА И МЕТОДИКА

В спектре поглощения молекулярного брома отчётливая колебательная структура охватывает диапазон длин волн примерно $520\div600$ нм [14]. У молекулы $I_2$ этот диапазон ещё шире. Таким образом, для генерации спектральных масок в данном случае подходят лазеры на красителях родаминового ряда.

В установке (рис. 1) использовался лазер на родамине :6Ж, собранный по традиционной схеме (*1* — ячейка с раствором красителя, *2* — призменный расширитель пучка, *3* — акусто-оптический дефлектор, *4* — дифракционная решётка, *5* — полупрозрачное зеркало). Накачка осуществлялась второй гармоникой излучения лазера 6 на АИГ:$Nd^{3+}$ с модуляцией добротности, который был настроен на генерацию как отдельных импульсов, так и цугов импульсов. В пределах цуга интервал между импульсами составлял около 1 мс.

Спектральные маски создавались с помощью акусто-оптического дефлектора *3* на парателлурите [7]. Звуковая волна в акусто-оптическом дефлекторе возбуждалась сигналом синтезатора высокой частоты *7*. Конструкция акусто-оптического дефлектора и синтезатора позволяла возбуждать одновременно две волны на разных частотах, обеспечивая таким образом генерацию двухкомпонентных спектров. Согласованный запуск синтезатора и лазера накачки осуществлялся сигналами персонального компьютера *8*. Ширина спектральной компоненты составляла 0,04 нм, диапазон перестройки длины волны — $572\div594$ нм. Полная энергия спектральной маски достигала 5 мДж.

Выходной пучок лазера на красителе расщеплялся на пробный и опорный. Энергия пучков преобразовывалась фотоэлектронными умножителями *9*, сигналы которых поступали на вход аналого-цифрового преобразователя *10*, а затем обрабатывались персональным компьютером *8*. Регистрация спектральных масок осуществлялась ПЗС-фотоприёмником, расположенным в фокальной плоскости дифракционного спектрографа *11*. Сигнал ПЗС-фотоприёмника также поступал в компьютер, который рассчитывал отношения между интенсивностями компонент спектральной маски и среднеквадратическое отклонение этих величин.

Насыщенные пары йода и брома заполняли спектроскопические ячейки *12* различной длины. Концентрация пара регулировалась путем изменения температуры и рассчитывалась по формуле

$$\log_{10} P = A - \frac{B}{T + C}\ ,$$

где $P$ — давление в барах, $T$ — температура в кельвинах, а параметры $A$, $B$ и $C$ имеют соответственно значения 2,94529; 638,258 и 115,114 для $Br_2$ и 3,36429; 1039,159 и 146,589 для $I_2$.

Отклик $R$, характеризующий содержание контролируемого вещества, рассчитывался как

$$R = \ln\left(\frac{E_{\rm s}}{E_{\rm r}}\right)_{\rm min} - \ln\left(\frac{E_{\rm s}}{E_{\rm r}}\right)_{\rm max},$$

где $E_{\rm s}$ и $E_{\rm r}$ — выходные сигналы фотоэлектронных умножителей пробного и опорного каналов соответственно. Индексы min и max указывают на вид спектральной маски (минимального или

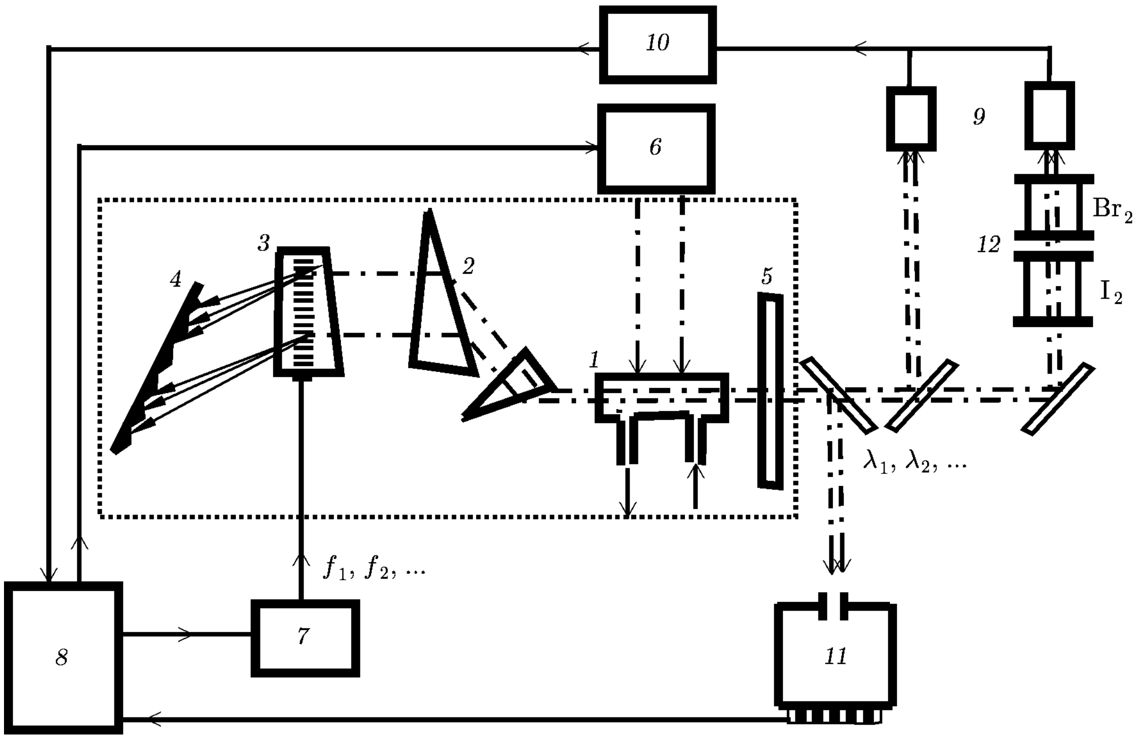



Рис. 1

максимального поглощения), при которой были получены сигналы $E_\mathrm{s}$ и $E_\mathrm{r}$. По величинам отклика, определённым при различных значениях произведения $cL$, где $c$ — концентрация пара, $L$ — длина ячейки, строились калибровочные зависимости $R(cL)$. Эти зависимости, а также среднеквадратические отклонения величины $R$ использовались для оценки вклада флуктуаций спектральных масок в погрешность определения концентрации.

Достижение высокой точности предполагает оптимизацию отношения сигнал/шум путём регулирования соотношения между энергиями опорного и пробного пучков для спектральной маски минимального поглощения при каждом значении $cL$ [10]. Поскольку в реальных условиях такая процедура не всегда возможна, калибровочные зависимости были построены также для случая, когда энергии пучков были отрегулированы лишь для одного значения $cL$. Как показали специальные измерения, максимальное отношение уровней сигнала и шума составляло 250. Основным источником шума была паразитная засветка фотокатода фотоэлектронного умножителя.

Длины волн спектральных масок подбирались исходя из условия достижения максимальной чувствительности к содержанию контролируемого пара и одновременно минимальной чувствительности к содержанию мешающего пара. Для этого длины волн выбирались попарно таким образом, чтобы для каждой пары дифференциальное поглощение было максимальным для контролируемого пара и нулевым для мешающего пара. Примеры такого выбора приведены на рис. 2, где сплошными линиями *1* (для пара йода) и *2* (для пара брома) показаны зависимости сечения поглощения от длины волны, а вертикальными пунктирными линиями отмечены три пары длин волн. Для пар 574,82 и 577,28 нм, а также 585,04 и 587,22 нм дифференциальное поглощение максимально для $I_2$ и равно нулю для $Br_2$, что отмечено двумя горизонтальными пунктирными линиями. Аналогичным образом для пары длин волн 579,50 и 585,94 нм дифференциальное поглощение максимально для $Br_2$ и равно нулю для $I_2$.

Анализ спектров поглощения выявил в пределах диапазона перестройки спектра генерации пять пар длин волн для контроля паров йода и две пары длин волн для контроля паров брома.

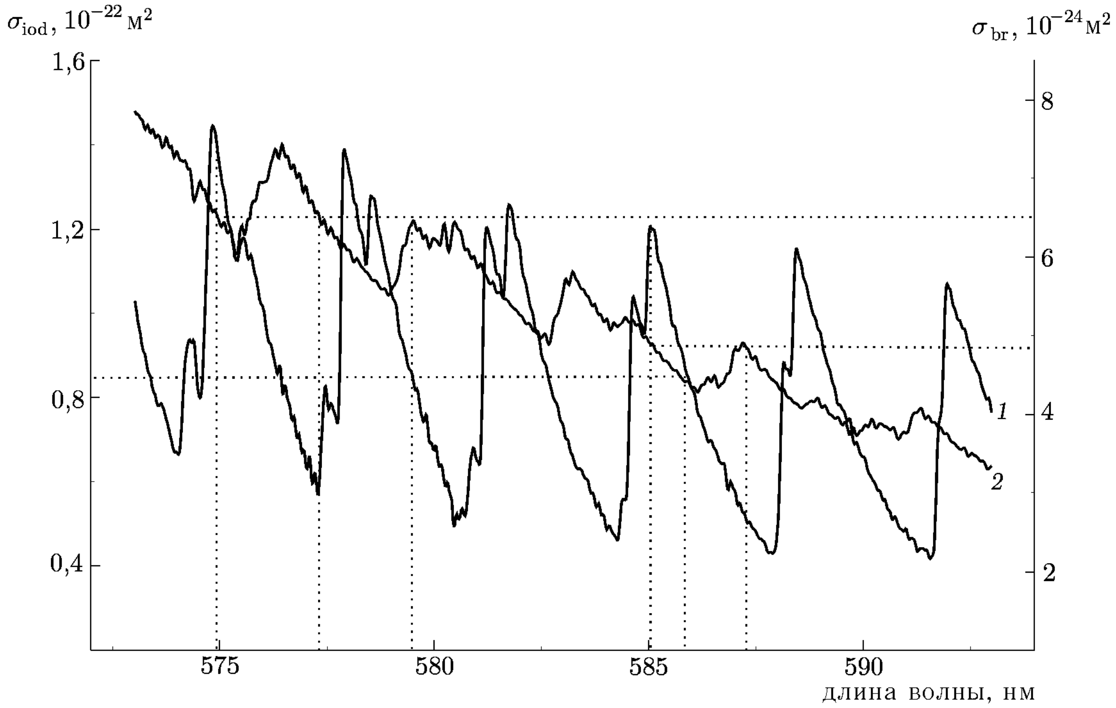



Рис. 2

Указанные па́ры длин волн и соответствующие разности сечений поглощения ($\Delta\sigma$) приведены в табл. 1. Длины волн максимального поглощения ($\lambda_{\rm max}$), как правило, совпадают с положениями локальных максимумов кривых *1* и *2* на рис. 2. Длины волн минимумов поглощения ($\lambda_{\rm min}$) в общем случае отличаются от положений локальных минимумов. При определении содержания $I_2$ применялись спектры из четырёх компонент (па́ры *1*–*4*). В случае $Br_2$ спектры имели по две компоненты (па́ры *6* и *7*).

Таблица 1

| Вещество | № пары | $\lambda_{\rm max}$, нм | $\lambda_{\rm min}$, нм | $\Delta\sigma$, м$^2$ |
|---|---|---|---|---|
| пар $I_2$ | 1 | 574,82 | 577,28 | $8{,}8\cdot10^{-23}$ |
| | 2 | 577,90 | 580,68 | $8{,}7\cdot10^{-23}$ |
| | 3 | 581,74 | 583,64 | $6{,}9\cdot10^{-23}$ |
| | 4 | 585,04 | 587,22 | $6{,}8\cdot10^{-23}$ |
| | 5 | 588,44 | 591,34 | $7{,}1\cdot10^{-23}$ |
| пар $Br_2$ | 6 | 576,43 | 582,66 | $2{,}5\cdot10^{-24}$ |
| | 7 | 579,50 | 585,94 | $2{,}1\cdot10^{-24}$ |

## 2. РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

Как показали измерения, отклонение отношений интенсивностей компонент спектральной маски составляло $18\div20\,\%$ от среднего значения. Калибровочные зависимости $R(cL)$ приведены на рис. 3. Сплошными линиями (кривая *1* — для паров йода, *2* — для паров брома) показаны зависимости, полученные при оптимизации отношения сигнал/шум для каждого значения $cL$. Зависимости практически линейны, и наличие мешающего пара на их поведении заметным образом не сказывается. Среднеквадратические отклонения величины $R$ (показаны вертикальными штрихами) составляют $2\div3\,\%$ относительно среднего значения.

Пунктирными линиями (и соответствующими точками) показаны калибровочные зависимости, полученные при оптимизации отношения сигнал/шум лишь для значения $cL \approx 0$. Зависимость для паров йода (кривая *1*) получена при содержании мешающих паров брома $c_{\rm br}L = 1{,}0 \cdot 10^{23}$ м$^2$, а зависимость для паров брома (кривая *2*) — при $c_{\rm iod}L = 0{,}84 \cdot 10^{22}$ м$^2$. При таких значениях мешающий пар обеспечивал примерно двукратное уменьшение энергии пробного пучка. Обе зависимости обладают слабой, но заметной нелинейностью, а среднеквадратические отклонения величины $R$ (вертикальные штрихи) с ростом $cL$ увеличиваются до 5 % относительно среднего значения.

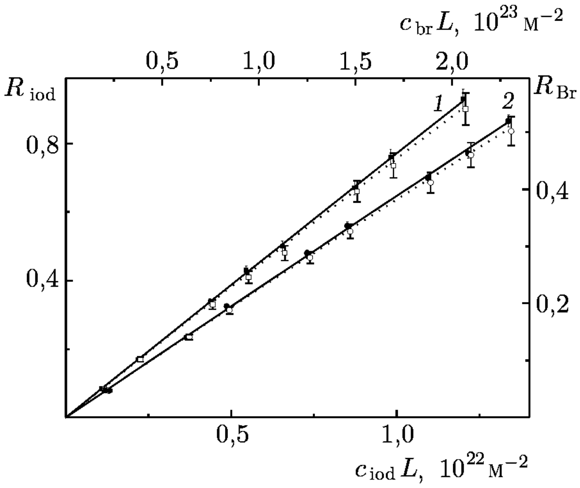



Рис. 3

Полученные данные показывают, что при полной оптимизации отношения сигнал/шум корреляционная методика позволяет практически устранить влияние мешающего пара на точность определения концентрации. Относительная погрешность измерений 2÷3 % обусловлена в основном флуктуациями лазерных масок. Как показывают оценки, для снижения погрешности до минимального значения 0,4 %, нестабильность отношения интенсивностей спектральных компонент необходимо уменьшить до 3÷4 %.

При неполной оптимизации отношения сигнал/шум влияние мешающего пара проявляется в нелинейности калибровочной зависимости и возрастании относительной погрешности измерений с ростом $cL$. Для уменьшения этого влияния необходимо повышать максимальное отношение сигнал/шум. Например, как показывают оценки, в исследовавшихся диапазонах $0 < c_{\rm iod}L < 1{,}2 \cdot 10^{22}$ м$^2$ и $0 < c_{\rm br}L < 2{,}3 \cdot 10^{23}$ м$^2$ взаимное влияние паров йода и брома может быть сделано пренебрежимо малым при отношении сигнал/шум порядка 1 000. Для достижения такого отношения уровней сигнала и шума необходимо не только уменьшить флуктуации спектральной маски, но и обеспечить фильтрацию паразитного излучения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Анохов С. П., Кравченко В. И. // Квантовая электроника. Киев: Наукова думка, 1975. № 9. С. 126.
2. Кравченко В. И., Опанасюк Ю. Д., Смирнов А. А. // Квантовая электроника. Киев: Наукова думка, 1980. № 18. С. 3.
3. Анохов С. П., Кравченко В. И., Ханин Я. И., Хижняк А. И. // Квантовая электроника. 1976. Т. 3, № 1. С. 20.
4. Кравченко В. И., Ханин Я. И. // Спектроскопия молекул и кристаллов. Киев: Наукова думка, 1978. С. 182.
5. Anokhov S. P., Galich G. A., Kravchenko V. I., Khanin Ya. I. // Opt. Commun. 1978. V. 25, No. 3. P. 384.
6. Анохов С. П., Кравченко В. И., Соскин М. С. // Оптика и спектроскопия. 1974. Т. 36, № 1. С. 183.
7. Кравченко В. И., Москалев В. М., Обозненко Ю. Л. и др. // Письма в ЖТФ. 1982. Т. 8, вып.3. С. 174.

8. Голдовский В. Л., Крайслер О. Д., Кравченко В. И. и др. Корреляционная спектрометрия на основе перестраиваемых многочастотных фильтров и лазеров: Препринт № 28 Института физики АН УССР. Киев, 1985. 45 с.
9. Кравченко В. И., Таранов В. В., Теренецкая И. П. // Украинский физический журнал. 1985. Т. 30, № 3. С. 332.
10. Milan M. M., Hoff R. M. // Atmospheric Environment. 1978. V. 12, No. 4. P. 853.
11. Кравченко В. И., Пархоменко Ю. Н. // Изв. АН СССР. Сер. физическая. 1990. Т. 54, № 8. С. 1 543.
12. Galkin O. N., Kravchenko V. I., Parkhomenko Yu. N. // Int. J. Nonlinear Opt. Phys. 1994. V. 3, No. 1. P. 56.
13. Kravchenko V. I., Sokolov V. A. // Proc. 1st Int. Conf. Advanced Optoelectronics and Lasers, Alushta, Crimea, Ukraine, 16–20 Sept. 2003. V. 1. P. 183.
14. Герцберг Г. Спектры двухатомных молекул. М.: Наука, 1966. Гл. 3.


Институт прикладных проблем в физике и биофизике
НАН Украины, г. Киев, Украина

Поступила в редакцию
11 июня 2004 г.

## CORRELATION SPECTRAL ANALYSIS OF HALOGEN MIXTURE BY LASER RADIATION WITH SYNTHESIZED SPECTRUM

*V. I. Kravchenko and V. A. Sokolov*

A laser with synthesized radiation spectrum is used to form spectral masks for correlation analysis of a mixture containing molecular iodine and bromine. The choice of the wavelengths of spectral masks is substantiated, the accuracy and sensitivity to the presence of interfering substance are studied, and the effect of the mask instability is discussed.

УДК 535.2:621

# ШИРОКОУГЛОВАЯ ДИФРАКЦИЯ ЛАЗЕРНОГО ПУЧКА НА ОСТРОМ КРАЕ

*С. П. Анохов* [1], *Р. А. Лимаренко* [1], *А. И. Хижняк* [2]

С использованием строгой теории дифракции объяснено происхождение и проанализирована структура широкоуглового свечения, наблюдаемого при дифракции ограниченного пучка на остром крае непрозрачного экрана. Показано, что образующийся шлейф имеет структуру цилиндрической волны, исходящей из кромки экрана, а его амплитуда пропорциональна амплитуде пучка на этой кромке. Наблюдаемый шлейф представляет собой граничную волну Юнга, порождаемую дифракцией ограниченного пучка.

## ВВЕДЕНИЕ

Данная работа стимулирована неординарным экспериментальным наблюдением: поле, возникающее при дифракции интенсивного лазерного пучка на краю тонкого экрана, помимо яркой центральной компоненты, сравнимой по масштабу с исходным пучком, содержит обширный, но менее заметный шлейф, простирающийся с убывающей интенсивностью в обе стороны от оси дифрагированного пучка вдоль плоскости дифракции (рис. 1). Угловой размер этого шлейфа во много раз превышает расходимость и начального пучка, и упомянутой центральной компоненты поля. Геометрический центр наблюдаемого свечения совпадает с краем экрана, что наталкивает на мысль о его родстве с так называемой «граничной волной» Юнга [1, 2], реальное существование которой до сих пор остаётся предметом дискуссий. Целью настоящей работы явилось установление истинного происхождения указанного шлейфа и возможности строгого описания его пространственной структуры.

Рассматриваемая задача естественным образом сводится к краевой дифракции гауссова пучка, излучаемого большинством серийно выпускаемых одномодовых лазеров. Вообще говоря, интерес к данной теме не нов: исследованию краевой дифракции гауссовых пучков посвящены работы [3–6], однако какая-либо информация об описанной выше широкоугловой компоненте в них отсутствует. Общая структура поля, формируемого при дифракции трёхмерного гауссова пучка, исследовалась приближёнными методами в работах [7, 8], а с привлечением строгой теории дифракции — в работах [9, 10]. Однако интересующие нас здесь аспекты явления, в частности фазовая структура поля и, ещё более, его детальная структура в дальней зоне, остались в этих работах за рамками рассмотрения.

## 1. ДИФРАКЦИЯ ГАУССОВОГО ПУЧКА НА ПОЛУПЛОСКОСТИ

Прежде, чем сформулировать саму задачу, приведём краткую сводку необходимых для этого сведений из строгой теории дифракции. В её основе лежит точное решение задачи о дифракции плоской волны на идеально проводящей (и, следовательно, идеально отражающей) полуплоскости (рис. 2), полученное Зоммерфельдом в 1896 г. и ставшее основным ориентиром при рассмотрении любых вариантов дифракции на двумерных апертурах [1, 2]. В соответствии с этим решением поле за полуплоскостью, образуемое при дифракции произвольно ориентированной $E$- или $H$-поляризованной плоской волны $E^{(\mathrm{pl})} = A_0 \exp[-ikr\cos(\theta - \alpha)]$, почти везде за экраном

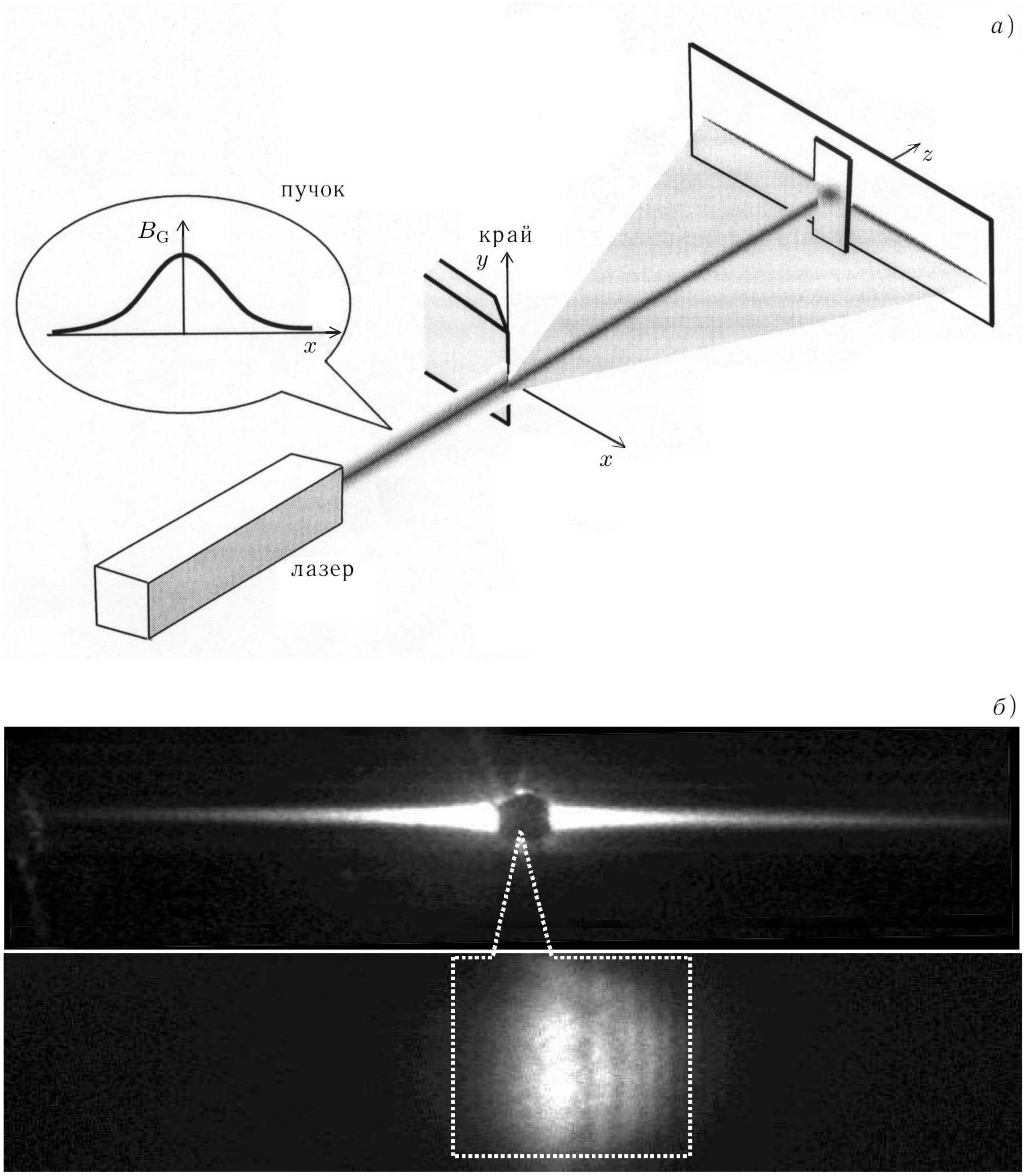



Рис. 1. Дифракция лазерного пучка на остром крае экрана: оптическая схема эксперимента (*а*) и наблюдаемое распределение поля (*б*). В связи со значительным перепадом мощности излучения центральная часть распределения приведена отдельно, ослаблена по интенсивности и увеличена по масштабу

(см. ниже) может быть представлено совокупностью двух устойчивых [1] волн [11]:

$$E(P) = E^{(\mathrm{pl})}/2 + E^{(\mathrm{d})}, \tag{1}$$

[1] Не следует путать эти волны с граничной и геометро-оптической компонентами Юнга. В задаче Зоммерфельда указанные компоненты обладают неустранимым разрывом амплитуды на границе геометрической тени, в силу чего неспособны к самостоятельному существованию в свободном пространстве.

где $E^{(\mathrm{d})} = A_0\,[(1-i)/\sqrt{2\pi}]\exp[-ikr\cos(\theta-\alpha)]F(U)$, $A_0$ — амплитуда падающей волны, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, смысл величин $r$, $\theta$ и $\alpha$ легко уяснить из рис. 2, а функция

$$F(U) = \int\limits_0^U \exp(i\mu^2)\,\mathrm{d}\mu \tag{2}$$

является интегралом Френеля с верхним пределом

$$U = \sqrt{2kr}\,\sin\frac{\alpha-\theta}{2}\,. \tag{3}$$

Отметим, что в графической форме функция (2) представляет собой ни что иное, как хорошо известную спираль Корню [1, 2].

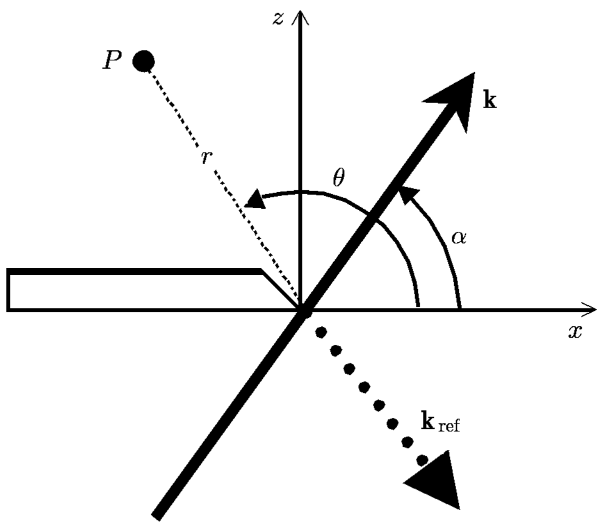



Рис. 2. Схема дифракции плоской волны либо гауссова пучка на краю полуплоскости

Решение (1) справедливо во всём верхнем полупространстве над полуплоскостью (рис. 2), за исключением малой области с радиусом в несколько десятков длин волн около самого края и углов дифракции, превышающих несколько десятков градусов, где необходимо учитывать присутствие поля, связанного с отражённой от экрана компонентой [11]. Первое слагаемое в (1) представляет плоскую волну, подобную падающей, но вдвое меньшей амплитуды. Второе слагаемое $E^{(\mathrm{d})}$ описывает близкую ей по амплитуде волну, неограниченный волновой фронт которой содержит краевую дислокацию, приходящуюся на границу геометрической тени (рис. 3) [12]. Именно с этой сингулярной волной и связаны все характерные особенности краевой дифракции [11]. Будем называть её дальше d-волной (от английского diffraction и dislocation).

Как известно, произвольный волновой пучок можно представить совокупностью плоских волн с различной угловой ориентацией волнового вектора. Дифракционное поле, порождаемое каждой из них, описывается решением (1). В итоге общее дифракционное поле пучка может быть выражено совокупностью исходного пучка половинной амплитуды и поля, образованного суперпозицией d-волн, которое для краткости будем называть D-волной.

В дальнейшем перейдём к более наглядным декартовым координатам, используя соотношения $r = \sqrt{x^2+z^2}$, $\alpha = \arccos[k_x/k]$, где $k_x$ — проекция волнового вектора $k$ на ось $x$, $\theta = \arccos[x/r] = \arccos[x/\sqrt{x^2+z^2}]$. В этих обозначениях безразмерный пространственный параметр $U$ приобретает вид

$$U = \sigma\,[kr - k_x x - \sqrt{k^2-k_x^2}\;z]^{1/2}, \tag{4}$$

$$\sigma = \operatorname{sign}\bigl[\arccos(k_x/k) - \arccos(x/\sqrt{x^2+z^2})\bigr]. \tag{5}$$

Общее решение для поля пучка за экраном представляет собой свёртку фурье-спектра падающего пучка $f_{\mathrm{G}}(k_x)$ с решением для одиночной плоской волны (1):

$$E^{(\Sigma)} = A_0 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\mathrm{G}}(k_x)\left[\frac{1}{2} + \frac{1-i}{\sqrt{2\pi}}\,F(U)\right]\exp\bigl[i\bigl(k_x x + z\,\sqrt{k^2-k_x^2}\bigr)\bigr]\,\mathrm{d}k_x = \frac{E^{(\mathrm{G})}}{2} + E^{(\mathrm{D})}. \tag{6}$$

Пусть на край экрана падает двумерный (в соответствии с геометрией задачи) гауссов пучок. Для простоты рассмотрим нормальное падение пучка на экран и перетяжку пучка совместим с самим экраном. Комплексная амплитуда такого пучка описывается выражением

$$B_{\mathrm{G}}(x,z) = \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{w^2}\right)\exp(ikz) = \\ = b(x)\exp(ikz), \quad (7)$$

где $x_0$ описывает смещение оси пучка относительно кромки экрана, расположенной при $x = 0$, а $b(x)$ — распределение поля пучка в плоскости экрана. Угловой спектр такого пучка в координатах проекции волнового вектора на ось $x(k_x)$ запишется в виде

$$f_{\mathrm{G}}(k_x) = \frac{w}{\sqrt{2}}\exp\left(-\frac{k_x^2 w^2}{4} - ik_x x_0\right). \quad (8)$$

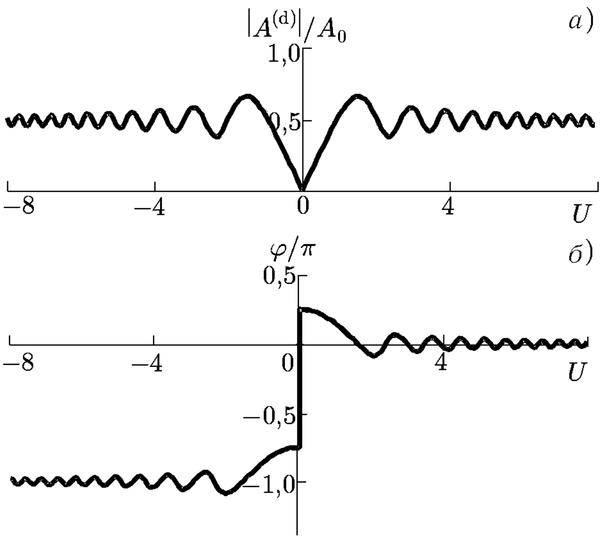



Рис. 3. Распределение модуля комплексной амплитуды (*a*) и фазы (*б*) d-волны около границы геометрической тени

Численный расчёт решения (6) затруднён присутствием в его ядре комплексного интеграла Френеля $F(U)$, являющегося быстро осциллирующей функцией координаты интегрирования. Для устранения этого осложнения комплексная амплитуда d-волны была аппроксимирована нами зависимостью

$$A_+^{(\mathrm{d})} = \frac{1-i}{\sqrt{2\pi}}\,F(U) \approx \frac{\sigma}{2}\left\{1 - \frac{(1+i)\exp(iU^2)}{|U|\,\sqrt{2\pi} + \exp(-|U|^{1{,}04}) + i\,[1+0{,}4U^2]^{-0{,}6}}\right\} \quad (9)$$

с явно выраженным осциллирующим сомножителем. Отличие аппроксимирующей функции (9) от самого интеграла Френеля во всей области его определения ($-\infty < U < +\infty$), не превышает по модулю 0,1 %, а по фазе 0,6 %. В итоге для пространственного распределения D-волны было получено выражение

$$E^{(\mathrm{D})} = \frac{w}{\sqrt{2}}\exp(ikr)\int\limits_{-k}^{+k}\frac{\sigma}{2}\left\{1 - \frac{1+i}{|U|\,\sqrt{2\pi} + \exp(-|U|^{1{,}04}) + i\,[1+0{,}4U^2]^{-0{,}6}}\right\}\times \\ \times\exp\left(-\frac{k_x^2 w^2}{4} - ik_x x_0\right)\mathrm{d}k_x \quad (10)$$

без быстро осциллирующего сомножителя, что существенно упростило выполнение расчётов с сохранением их точности. Рассмотрим результаты численного исследования решений (6) и (10).

## 2. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО РАСЧЁТА

Пространственная структура дифрагированного поля и двух составляющих его волновых компонент, фигурирующих в выражении (10), для различных расстояний от экрана представлена на рис. 4 и 5. Распределение амплитуд полей показано на рис. 4, а распределение их фаз — на рис. 5.

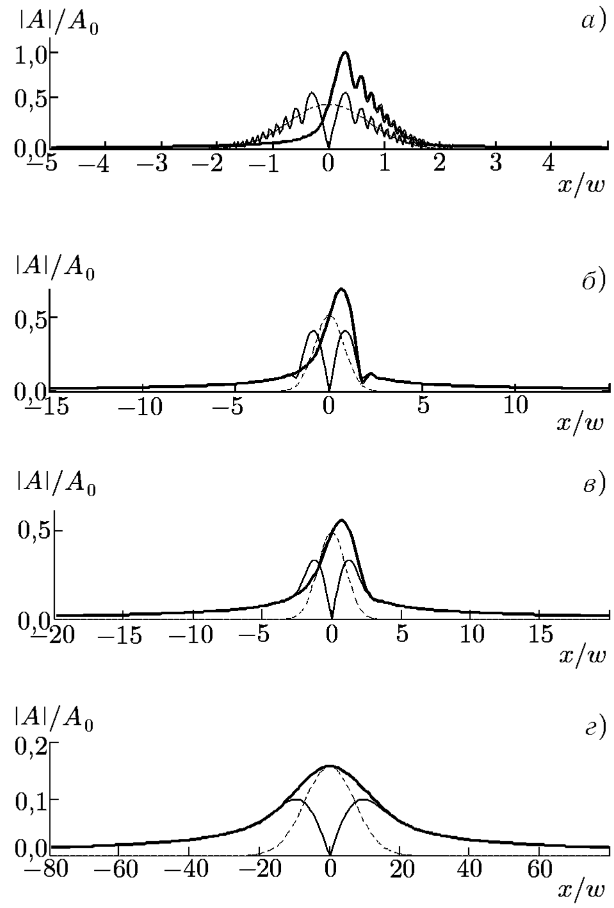



Рис. 4. Распределение модуля комплексной амплитуды интегрального поля и его основных компонент на различном удалении от экрана: $z = L_{\mathrm{R}}/25$ (*а*), $z = L_{\mathrm{R}}/2$ (*б*), $z = L_{\mathrm{R}}$ (*в*), $z = 10L_{\mathrm{R}}$ (*г*)

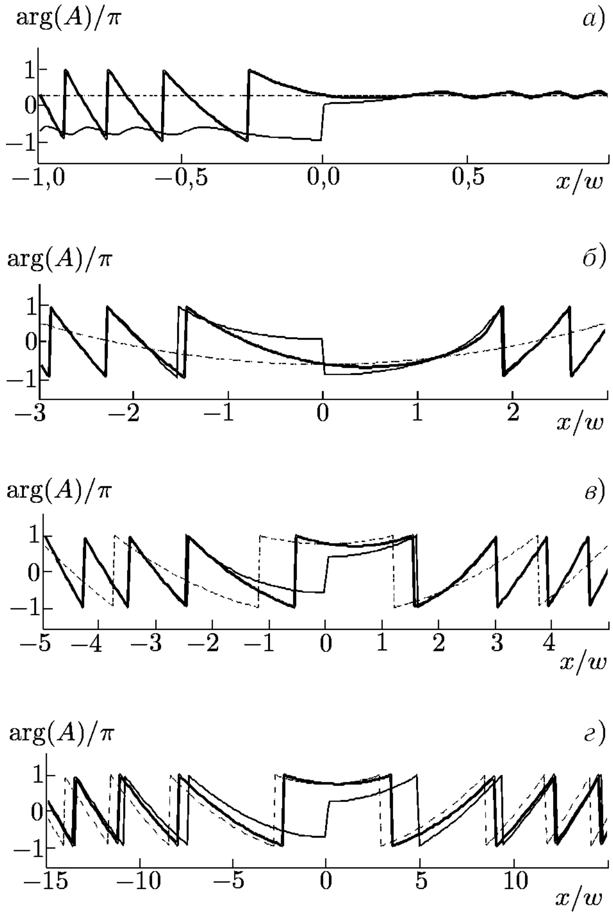



Рис. 5. Распределение фазы интегрального поля и его основных компонент на различном удалении от экрана: $z = L_{\mathrm{R}}/25$ (*а*), $z = L_{\mathrm{R}}/2$ (*б*), $z = L_{\mathrm{R}}$ (*в*), $z = 10L_{\mathrm{R}}$ (*г*). Скачкообразный характер представленных монотонных зависимостей обусловлен ограничением вертикального масштаба изображения диапазоном $2\pi$

В каждом случае жирной линией изображена интегральная картина поля, тонкой сплошной линией — поле D-волны, пунктиром — поле ослабленного вдвое гауссова пучка. В качестве масштаба продольной координаты $z$ используется длина Рэлея $L_{\mathrm{R}} = \pi w^2/\lambda$, традиционно разделяющая области дифракции Френеля и Фраунгофера.

Как видим, в области дифракции Френеля ($z < L_{\mathrm{R}}$) интегральное поле сохраняет узнаваемые детали классического распределения, создаваемого дифрагирующей плоской волной, но средний уровень амплитудных осцилляций теперь совпадает с профилем пучка (рис. 4*а*, *б*). По мере удаления от экрана частота и количество этих осцилляций уменьшаются, в силу чего с переходом в область дифракции Фраунгофера результирующее поле от них полностью освобождается. Поскольку обсуждаемая эволюция центральной части распределения подробно описана и изучена в других работах [3–8], опустим её более детальное рассмотрение и перейдём к основной теме — широкоугловой компоненте дифрагированного излучения.

О её присутствии свидетельствует наличие у наблюдаемого поля протяжённых бесструктурных флангов, хорошо различимых на всех представленных амплитудных распределениях. Как легко проследить по ходу самих зависимостей, оба фланга принадлежат D-волне, единолично представляющей реально наблюдаемое поле за пределами центральной области дифрагировавшего пучка. Фронт D-волны приобретает отчётливо выраженный цилиндрический характер раньше ($z_{\rm start} \approx L_{\rm R}/2$), чем её поле освобождается от начальных колебаний амплитуды. Во всех ситуациях инвариантным остаётся лишь полуволновый скачок фазы D-волны на границе геометрической тени.

Для объяснения механизма образования широкоугловой компоненты поля воспользуемся асимптотическим представлением интеграла Френеля, описывающего комплексную амплитуду d-волны:

$$A^{(\rm d)}(U) = \frac{1-i}{\sqrt{2\pi}}\,F(U) \to \pm\left(\frac{1}{2} - \frac{1+i}{2U\,\sqrt{2\pi}}\exp(iU^2)\right), \tag{11}$$

где знак минус соответствует её крылу в области геометрической тени, а знак плюс — открытой области. Отметим, что уже при $|U| \approx 3$ погрешность данного представления не превышает 1 %, быстро убывая с дальнейшим отступлением от границы тени. В соответствии с (11) в указанной области пространства d-волна распадается на две более простые волны — плоскую (с амплитудой 1/2) и цилиндрическую (с амплитудой $(1+i)\exp(iU^2)/(2U\,\sqrt{2\pi})$). Последнее обстоятельство позволяет по-новому взглянуть на структуру интегрального поля (6), выражение для которого в этом случае приобретает вид

$$E^{(\Sigma)}(x,z) \approx \frac{E_{\rm G}}{2} + \begin{cases} -\dfrac{E_{\rm G}}{2} + \dfrac{A_0\,(1+i)}{2\,\sqrt{2\pi}}\exp(ikr)\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{f_{\rm G}(k_x)}{U}\exp(-ik_xx_0)\,{\rm d}k_x, & U<-3; \\ \dfrac{E_{\rm G}}{2} - \dfrac{A_0\,(1+i)}{2\,\sqrt{2\pi}}\exp(ikr)\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{f_{\rm G}(k_x)}{U}\exp(-ik_xx_0)\,{\rm d}k_x, & U>3. \end{cases} \tag{12}$$

Обратим внимание на то, что в области тени первые два слагаемых компенсируют друг друга, т. е. здесь играют роль лишь цилиндрические составляющие d-волны. В открытой же области эти два слагаемых складываются, образуя исходный пучок, распространяющийся в свободном пространстве в отсутствие экрана. Поскольку этот пучок имеет конечный поперечный размер, то по мере отхода от его оси поле пучка спадает, и с некоторого расстояния им можно пренебречь. В результате в этой области пространства за пределами пучка шлейф описывается тем же выражением, что и в области тени, но с противоположным знаком, что свидетельствует о его сдвиге по фазе на $\pi$.

Поскольку мы рассматриваем шлейф вне области свободно распространяющегося гауссова пучка, выполнение интегрирования в выражении (12) не представляет затруднений и приводит к весьма простому представлению поля шлейфа в этой части пространства:

$$E^{(\Sigma)}(x,z) \sim \begin{cases} \dfrac{\exp(ikr)}{\sqrt{kr}}\,\dfrac{b(0)}{\cos[\theta/2]}\,, & U<-3; \\ -\dfrac{\exp(ikr)}{\sqrt{kr}}\,\dfrac{b(0)}{\cos[\theta/2]}\,, & U>3, \end{cases} \tag{13}$$

где $b(0)$ — амплитуда исходного пучка на кромке экрана, $\theta$ — угол наблюдения (рис. 2).

Как видим, D-волна за пределами недифрагировавшей составляющей по каждую сторону от границы тени представляется цилиндрической волной, исходящей из кромки экрана. Весьма существенным является тот факт, что амплитуда наблюдаемого шлейфа определяется амплитудой пучка на кромке экрана. Это означает, что в случае дифракции пучка, имеющего на кромке нулевую амплитуду, широкоугловой шлейф, связанный с дифрагированным пучком, будет отсутствовать. [2]

Таким образом, по всей совокупности признаков наблюдаемое широкоугловое свечение можно классифицировать как граничную волну Юнга, порождаемую дифракцией ограниченного пучка. Однако, в отличие от одноимённой компоненты из задачи Зоммерфельда, эта волна не имеет амплитудного разрыва, вместо которого её волновой фронт теперь содержит краевую дислокацию. Интенсивность обсуждаемой волны прямо пропорциональна квадрату амплитуды исходного пучка на кромке экрана.

## 3. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ДАННЫЕ

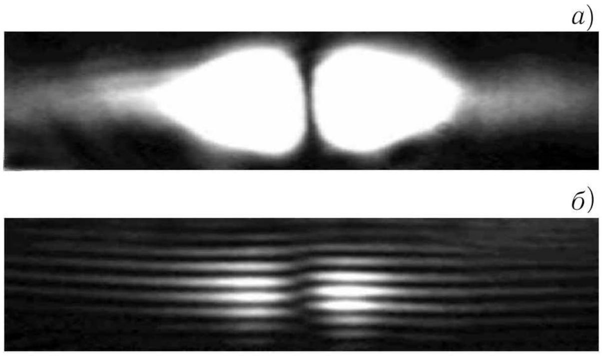



Рис. 6. Пространственное распределение интенсивности D-волны (*а*) и картина её интерференции с наклонённой плоской волной (*б*)

Как нетрудно заключить из выражения (6), для наблюдения D-волны в чистом виде достаточно удалить из интегрального поля вторую компоненту — ослабленный вдвое гауссов пучок. Такой эксперимент был нами выполнен. Устранение поля указанного пучка достигалось его интерференционным гашением с помощью аналогичного пучка, сдвинутого по фазе на $\pi$. Пространственную структуру освобождённой таким образом D-волны демонстрирует рис. 6*а*. Для визуализации полуволнового фазового сдвига одной половины этой волны относительно другой использовалась дополнительная плоская волна, распространяющаяся под небольшим углом к исходному пучку. Как видим (рис. 6*б*), образующиеся интерференционные полосы при пересечении области краевой дислокации смещаются на половину своего периода, что однозначно указывает на полуволновый скачок фазы исследуемого поля.

## 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенное в работе количественное описание широкоуглового свечения, наблюдаемого при краевой дифракции лазерного пучка, является строгим. В соответствии с ним поле, расходящееся от края экрана, представляет собой суперпозицию цилиндрических составляющих d-волн, объединённых в D-волну с цилиндрической формой общего фронта. Яркий центральный керн излучения, приходящийся на границу геометрической тени, создаётся наложением D-волны и исходного гауссового пучка, ослабленного вдвое, а шлейф образуется широкими бесструктурными флангами D-волны, заполняющими практически всё пространство за экраном и монотонно спадающими по интенсивности с удалением от границы геометрической тени, т. е. с увеличением угла наблюдения. Интенсивность наблюдаемого свечения пропорциональна квадрату амплитуды дифрагирующей волны на острой кромке экрана.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1970.

[2] В этом случае, однако, остаётся слабая составляющая, связанная с полем, отражённым от экрана, которая поддаётся строгому учёту [11].

2. Зоммерфельд А. Оптика. М.: Изд-во иностр. лит-ры. 1953.
3. Pearson J. E., McGill T. C., Kurtin S., Yariv A. // J. Opt. Soc. Am. 1969. V. 59. P. 1 440.
4. Green A. C., Bertoni H. L., Felsen L. B. // J. Opt. Soc. Am. 1979. V. 69. P. 1 503.
5. Suedan G. A., Jull E. V. // J. Electromagn. Waves Appl. 1989. V. 3. P. 17.
6. Suedan G. A., Jull E. V. // Comput. Phys. Commun. 1991. V. 68. P. 346.
7. Takenaka T., Fukumitsu O. // J. Opt. Soc. Am. 1982. V. 72. P. 331.
8. Suedan G. A., Jull E. V. // J. Electromagn. Waves Appl. 1992. V. 6. P. 287.
9. Anokhov S., Khizhnyak A., Lymarenko R. // Sem. Phys. Quant. Elect. and Opt. 2000. V. 3. P. 94.
10. Petersson L. E. R., Smith G. S. // J. Opt. Soc. Am. A. 2002. V. 19. P. 2 265.
11. Khizhnyak A. I., Anokhov S. P., Lymarenko R. A., et al. // J. Opt. Soc. Am. A. 2000. V. 17. P. 2 199.
12. Nye J. F., Berry M. V. // Proc. R. Soc. Lond. A. 1974. V. 336. P. 165.

[1] Международный центр «Институт прикладной оптики» НАН Украины, г. Киев, Украина;
[2] Metrolaser Inc., Irvine, USA

Поступила в редакцию 27 мая 2004 г.

## WIDE-ANGLE DIFFRACTION OF THE LASER BEAM BY A SHARP EDGE

*S. P. Anokhov, R. A. Lymarenko, and A. I. Khizhnyak*

Using a rigorous theory of diffraction, we explain the origin and analyze the structure of a wide-angle illuminated area observed when a limited beam is diffracted by the sharp edge of an opaque screen. It is shown that the formed plume has the structure of a cylindrical wave traveling from the screen edge and its amplitude is proportional to the beam amplitude at this edge. The observed structure is Young's boundary wave produced by diffraction of the limited beam.