МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Известия высших учебных заведений

РАДИОФИЗИКА

ежемесячный научно-технический журнал

Издаётся с апреля 1958 г.

Том XLVII № 1 **Нижний Новгород** **2004**

Содержание

УДК 551.51;523.4

ВЕКТОРНЫЕ ДИФРАКЦИОННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ РАДИОГОЛОГРАФИЧЕСКОГО ЗОНДИРОВАНИЯ ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ И АТМОСФЕРЫ

А. Г. Павельев

На основе метода Стреттона—Чу, разработанного ранее для случая однородных сред, получены векторные соотношения, связывающие поля на некоторой поверхности, ограничивающей неоднородный объём в трёхмерном пространстве, с полями внутри объёма. Векторные соотношения позволяют решать прямую и обратную задачи определения полей внутри неоднородной среды, если известно поле на её границе. Векторные уравнения учитывают изменения поляризации прямой и обращённой волны при распространении в неоднородной среде. В случае двумерной однородной среды векторные уравнения согласуются с ранее полученными скалярными уравнениями, применявшимися в приближении сферической симметрии для описания процесса распространения обращённой волны при радиозатменном мониторинге атмосферы и ионосферы Земли. Показано, что при решении обратной задачи радиозатменного мониторинга в качестве опорного сигнала необходимо применять функцию Грина решения скалярного волнового уравнения в неоднородной среде. Это обосновывает метод сфокусированного апертурного синтеза, который был применён ранее для высокоточного восстановления вертикальных профилей показателя преломления в ионосфере и атмосфере Земли. В этом методе фаза опорного сигнала определялась на основе модели, достаточно точно описывающей радиофизические характеристики преломляющей среды в районе радиопросвечивания. Полученные уравнения могут быть применены в дальнейшем для высокоточного решения обратных задач радиоголографического зондирования атмосферы и земной поверхности с помощью прецизионных сигналов радионавигационных спутников.

ВВЕДЕНИЕ

Метод обращения волнового фронта состоит в определении полей внутри среды (в общем случае неоднородной) по радиоголограмме, зарегистрированной на некоторой поверхности или кривой в пространстве. Название метода было введено в книге [1], где было описано его применение для экспериментальных исследований различных эффектов при когерентном зондировании неоднородных сред в оптическом диапазоне. В отличие от оптического диапазона, в радиодиапазоне применяются цифровые методы обработки сигналов, использующие дифракционные интегралы, связывающие электромагнитные поля на некоторой поверхности (или кривой, являющейся, например, орбитой космического аппарата, регистрирующего радиоголограмму) с полями в пространстве между передатчиком и приёмником. Ранее в работе [2] была показана обратимость интегрального уравнения распространения радиоволн в свободном пространстве, а также получено скалярное уравнение, связывающее угловой спектр поля на плоскости с угловым спектром обращённой волны. В работе [3] был описан метод обращения радиоголограммы, полученной в радиозатменном эксперименте на космическом аппарате «Voyager» по изучению пространственной структуры колец Сатурна. В [4, 5] было описано применение метода обратного распространения в двумерной однородной среде, основанного на использовании скалярного дифракционного интеграла [6], с целью повысить вертикальное разрешение при радиозатменном мониторинге атмосферы Земли. В [7–9] был предложен радиоголографический метод, основанный на принципе сфокусированной апертуры, для получения по радиозатменным данным вертикальных профилей физических параметров, а также одномерных радиоизображений мезосферы, атмосферы и земной поверхности. В [10, 11] томографические методы были применены для дистанционного зондирования ионосферы Земли с помощью радиоизлучения спутников. Перспективность развития радиоголографических исследований, основанных на различных модификациях метода обращения радиоволнового фронта, связана, в частности, с существованием спутниковых систем GPS/«Глонасс», излучающих высокостабильные, имеющие высокую степень когерентности радионавигационные сигналы. Одной из целей развития радиоголографических методов является использование высокой когерентности и стабильности прецизионных радиосигналов навигационных спутников для достижения предельного пространственного разрешения и точности при дистанционном зондировании атмосферы и поверхности Земли из космоса.

Цель данной статьи состоит в получении векторных дифракционных уравнений, а также в определении формы опорного сигнала, применяемого при решении обратных задач дистанционного зондирования земной поверхности и атмосферы с помощью радиоголограмм, зарегистрированных спутником на околоземной орбите.

1. РАДИОГОЛОГРАФИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

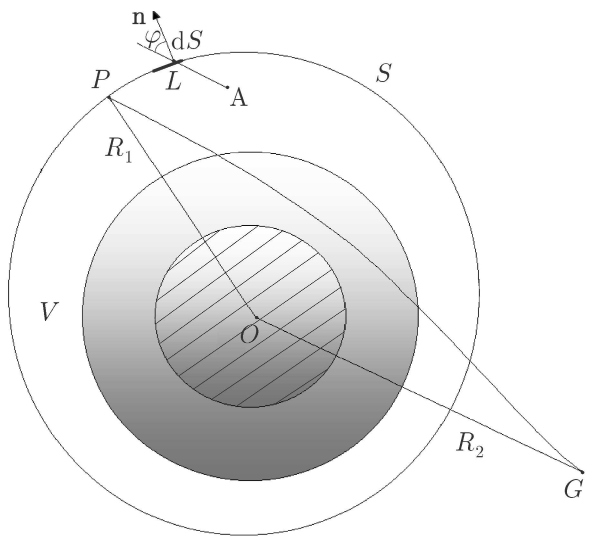

Рис. 1. Геометрические соотношения при обращении волнового фронта

Схема радиоголографических измерений показана на рис. 1. Передатчик радионавигационной системы расположен в точке G, а приёмник — на малом спутнике в точке P на расстояниях R_2 и R_1 от центра Земли (точки O) соответственно. Приёмник на малом спутнике регистрирует фазу и амплитуду радиоволн вдоль траектории малого спутника LP. Обращение фазы и амплитуды зарегистрированных радиоволн для получения распределения поля внутри неоднородного объёма V, ограниченного поверхностью S (см. рис. 1), может быть осуществлено с помощью векторных дифракционных соотношений.

Радиоголографические уравнения можно получить с помощью метода Стреттона—Чу, основанного на применении векторного аналога формулы Грина для уравнений поля [12]. В работе [12] было показано, что, если $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$ являются двумя непрерывными дважды дифференцируемыми векторными функциями координат, то выполняется соотношение

$$\int\limits_V (\mathbf{Q}\,\nabla\times\nabla\times\mathbf{P} - \mathbf{P}\,\nabla\times\nabla\times\mathbf{Q})\,\mathrm{d}V = \int\limits_S (\mathbf{P}\times\nabla\times\mathbf{Q} - \mathbf{Q}\times\nabla\times\mathbf{P})\,\mathbf{n}\,\mathrm{d}a, \qquad (1)$$

где S — регулярная поверхность, ограничивающая объём V, $\mathbf{n}$ – нормаль к поверхности S, ориентированная наружу относительно объёма V (рис. 1). Уравнения Максвелла для поля можно записать в системе единиц Гаусса [13] для зависимости поля от времени, описываемой фактором $\exp(-i\omega t)$:

$$\nabla\times\mathbf{E} - i\omega\mu\mathbf{H}/c = -4\pi\mathbf{J}^*/c, \qquad \nabla\mathbf{H} = 4\pi\rho^*/\mu - \mathbf{H}\,\nabla(\ln\mu), \qquad (2)$$

$$\nabla\times\mathbf{H} + i\omega\varepsilon\mathbf{E}/c = 4\pi\mathbf{J}/c, \qquad \nabla\mathbf{E} = 4\pi\rho/\varepsilon - \mathbf{E}\,\nabla(\ln\varepsilon), \qquad (3)$$

где ε и μ — диэлектрическая и магнитная проницаемости среды, c — скорость света в вакууме, $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ — напряжённости электрического и магнитного полей, $\mathbf{J}$ и $\mathbf{J}^*$ — электрический и магнитный токи, ρ и ρ^* — плотности электрического и магнитного зарядов. Введение магнитного тока и магнитного заряда удобно в некоторых случаях [12]. Токи и заряды связаны уравнениями непрерывности [12]:

$$\nabla\mathbf{J} - i\omega\rho = 0, \qquad \nabla\mathbf{J}^* - i\omega\rho^* = 0, \tag{4}$$

векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{gathered}\nabla\times\nabla\times\mathbf{E} - k^2\mathbf{E} = \frac{i\omega\mu}{c}\left(\frac{4\pi}{c}\,\mathbf{J} + [\nabla(\ln\mu)\times\mathbf{H}]\right) - \frac{4\pi}{c}\,\nabla\times\mathbf{J}^*,\\ \nabla\times\nabla\times\mathbf{H} - k^2\mathbf{H} = \frac{i\omega\varepsilon}{c}\left(\frac{4\pi}{c}\,\mathbf{J}^* - [\nabla(\ln\varepsilon)\times\mathbf{E}]\right) + \frac{4\pi}{c}\,\nabla\times\mathbf{J},\end{gathered} \tag{5}$$

где $k^2 = \omega^2\varepsilon\mu/c^2$. Положим в (1) аналогично [12] $\mathbf{P} = \mathbf{E}$, $\mathbf{Q} = \phi\mathbf{a}$, где $\mathbf{a}$ — единичный вектор произвольного направления. Функция Грина ϕ является решением волнового уравнения

$$\Delta\phi + k^2\phi = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \tag{6}$$

где $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ — дельта-функция, $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$ — векторы, описывающие положение элемента интегрирования $\mathrm{d}s(x,y,z)$ и точки наблюдения $A(x',y',z')$ в объёме V. Расстояние $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = r$ измеряется от элемента с координатами (x,y,z) до точки наблюдения A:

$$r = \left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right]^{1/2}. \tag{7}$$

Поскольку ϕ является решением скалярного волнового уравнения (6), то выполняются следующие соотношения:

$$\begin{gathered}\nabla\times\mathbf{Q} = \nabla\phi\times\mathbf{a}, \qquad \nabla\times\nabla\times\mathbf{Q} = \mathbf{a}k^2\phi + \nabla(\mathbf{a}\,\nabla\phi),\\ \nabla\times\nabla\times\mathbf{P} = k^2\mathbf{E} + \frac{i\omega\mu}{c}\left(\frac{4\pi}{c}\,\mathbf{J} + [\nabla(\ln\mu)\times\mathbf{H}]\right) - \frac{4\pi}{c}\,\nabla\times\mathbf{J}^*,\\ \mathbf{E}\,\nabla(\mathbf{a}\,\nabla\phi) = \nabla(\mathbf{E}\,(\mathbf{a}\,\nabla\phi)) - (\mathbf{a}\,\nabla\phi)\,\nabla\mathbf{E}.\end{gathered} \tag{8}$$

Из (1)–(8) находим

$$\int\limits_V \left\{\phi\mathbf{a}\left(k^2\mathbf{E} + \frac{i\omega\mu}{c}\left(\frac{4\pi}{c}\,\mathbf{J} + [\nabla(\ln\mu)\times\mathbf{H}]\right) - \frac{4\pi}{c}\,\nabla\times\mathbf{J}^*\right) - \mathbf{E}\,[\mathbf{a}k^2\phi + \nabla(\mathbf{a}\nabla\phi)\,]\right\}\mathrm{d}V = \\ = \int\limits_S \left\{\mathbf{E}\times\nabla\phi\times\mathbf{a} - \phi\mathbf{a}\times\left(\frac{i\omega\mu}{c}\,\mathbf{H} - \frac{4\pi}{c}\,\mathbf{J}^*\right)\right\}\mathbf{n}\,\mathrm{d}S. \tag{9}$$

Учитывая (8), из (9) находим

$$\int\limits_V \left\{\frac{i\omega\mu}{c}\,\phi\mathbf{a}\left(\frac{4\pi}{c}\,\mathbf{J} + [\nabla(\ln\mu)\times\mathbf{H}]\right) - \frac{4\pi}{c}\,\phi\mathbf{a}\,\nabla\times\mathbf{J}^* - \nabla(\mathbf{E}\,(\mathbf{a}\,\nabla\phi)\,) + (\mathbf{a}\,\nabla\phi)\,\nabla\mathbf{E}\right\}\mathrm{d}V = \\ = \int\limits_S \left\{[\mathbf{E}\times[\nabla\phi\times\mathbf{a}]\,] - \phi\mathbf{a}\times\left(\frac{i\omega\mu}{c}\,\mathbf{H} - \frac{4\pi}{c}\,\mathbf{J}^*\right)\right\}\mathbf{n}\,\mathrm{d}S. \tag{10}$$

Используя теорему Гаусса [12], из (10) находим

$$\int\limits_V \left\{ \frac{i\omega\mu}{c}\,\phi\mathbf{a} \left(\frac{4\pi}{c}\,\mathbf{J} + [\nabla(\ln\mu)\times\mathbf{H}] \right) - \frac{4\pi}{c}\,\phi\mathbf{a}\nabla\times\mathbf{J}^* + (\mathbf{a}\,\nabla\phi)\,\nabla\mathbf{E} \right\} \mathrm{d}V =$$
$$= \int\limits_S \left\{ [\mathbf{E}\times[\nabla\phi\times\mathbf{a}]\,] + \mathbf{E}\,(\mathbf{a}\,\nabla\phi) - \phi\mathbf{a}\times \left(\frac{i\omega\mu}{c}\,\mathbf{H} - \frac{4\pi}{c}\,\mathbf{J}^* \right) \right\} \mathbf{n}\,\mathrm{d}S. \quad (11)$$

Поскольку выполняются равенства

$$\mathbf{n}\,[\mathbf{E}\times[\nabla\phi\times\mathbf{a}]\,] = \mathbf{a}\,[\nabla\phi\times[\mathbf{E}\times\mathbf{n}]\,], \qquad [\mathbf{a}\times\mathbf{H}]\,\mathbf{n} = -\mathbf{a}\,[\mathbf{n}\times\mathbf{H}], \quad (12)$$

из (11), (12) можно получить

$$\int\limits_V \left\{ \frac{i\omega\mu}{c}\,\phi\mathbf{a} \left(\frac{4\pi}{c}\,\mathbf{J} + [\nabla(\ln\mu)\times\mathbf{H}] \right) - \frac{4\pi}{c}\,\phi\mathbf{a}\,\nabla\times\mathbf{J}^* + (\mathbf{a}\,\nabla\phi)\,\nabla\mathbf{E} \right\} \mathrm{d}V =$$
$$= \int\limits_S \left\{ \mathbf{a}\,[\nabla\phi\times[\mathbf{E}\times\mathbf{n}]\,] + \mathbf{n}\mathbf{E}\,(\mathbf{a}\,\nabla\phi) + \frac{i\omega\mu}{c}\,\phi\mathbf{a}\,[\mathbf{n}\times\mathbf{H}] + \frac{4\pi}{c}\,\phi\mathbf{a}\,[\mathbf{J}^*\times\mathbf{n}] \right\} \mathrm{d}S. \quad (13)$$

Вектор $\mathbf{a}$ является общим множителем в левой и правой частях уравнения (13). Поскольку вектор $\mathbf{a}$ произволен, то из (13) следует

$$\int\limits_V \left\{ \frac{i\omega\mu}{c} \left(\frac{4\pi}{c}\,\mathbf{J} + [\nabla(\ln\mu)\times\mathbf{H}] \right) \phi - \frac{4\pi}{c}\,\phi\,\nabla\times\mathbf{J}^* + (\nabla\mathbf{E})\,\nabla\phi \right\} \mathrm{d}V =$$
$$= \int\limits_S \left\{ \frac{i\omega\mu}{c}\,[\mathbf{n}\times\mathbf{H}]\,\phi + [\mathbf{n}\times\mathbf{E}]\times\nabla\phi + (\mathbf{n}\mathbf{E})\,\nabla\phi + \frac{4\pi}{c}\,[\mathbf{J}^*\times\mathbf{n}]\,\phi \right\} \mathrm{d}S. \quad (14)$$

Тождество [12]

$$\int\limits_V [\nabla\times\mathbf{J}^*]\,\phi\,\mathrm{d}V = \int\limits_S [\mathbf{n}\times\mathbf{J}^*]\,\phi\,\mathrm{d}a + \int\limits_V [\mathbf{J}^*\times\nabla\phi]\,\mathrm{d}V \quad (15)$$

позволяет получить из (14) соотношение

$$\int\limits_V \left\{ \frac{i\omega\mu}{c} \left(\frac{4\pi}{c}\,\mathbf{J} + [\nabla(\ln\mu)\times\mathbf{H}] \right) \phi - \frac{4\pi}{c}\,[\mathbf{J}^*\times\nabla\phi] + (\nabla\mathbf{E})\,\nabla\phi \right\} \mathrm{d}V =$$
$$= \int\limits_S \left\{ \frac{i\omega\mu}{c}\,[\mathbf{n}\times\mathbf{H}]\,\phi + [\mathbf{n}\times\mathbf{E}]\times\nabla\phi + (\mathbf{n}\mathbf{E})\,\nabla\phi \right\} \mathrm{d}S. \quad (16)$$

Исключить расходимость функции ϕ при $r = 0$ можно, используя метод [12]. Для этого из объёма V выделяется окрестность точки $r = 0$, ограниченная сферой малого радиуса b с центром в точке $A(x', y', z')$. Граница S в правой части (16) включает поверхность указанной сферы. Предполагая, что функция ϕ имеет вид $\phi = \exp[ik\Phi(r)]/r$ внутри малой сферы, $\nabla\phi$ можно представить в виде:

$$\nabla\phi = \mathbf{n}_0\,[1/r - ik\,\mathrm{d}\Phi(r)/\mathrm{d}r]\,\exp[ik\Phi(r)]/r, \quad (17)$$

где $\mathbf{n}_0$ — внутренняя нормаль к поверхности сферы [12]. Функция $\Phi(r)$ при $r \to 0$ должна удовлетворять требованию $\Phi(r) \to 0$, а её производная $\mathrm{d}\Phi(r)/\mathrm{d}r$ должна быть ограниченной. Площадь сферы убывает при уменьшении её радиуса как $4\pi b^2$, и, поскольку

$$[\mathbf{n}_0\times\mathbf{E}]\times\mathbf{n}_0 + (\mathbf{n}_0\mathbf{E})\,\mathbf{n}_0 = \mathbf{E}, \quad (18)$$

вклад сферической поверхности в правую часть (16) сводится к $4\pi\mathbf{E}(x',y',z')$. Значение поля $\mathbf{E}$ в любой внутренней точке A объёма V равно (с учётом (3))

$$\mathbf{E}(A) = -(4\pi)^{-1}\int\limits_S \left\{\frac{i\omega\mu}{c}\,[\mathbf{n}\times\mathbf{H}]\,\phi + [\mathbf{n}\times\mathbf{E}]\times\nabla\phi + (\mathbf{nE})\,\nabla\phi\right\}\mathrm{d}S + \mathbf{E}_V(A),$$

$$\mathbf{E}_V(A) = (4\pi)^{-1}\int\limits_V \left\{\frac{4\pi}{c}\left(\frac{i\omega\mu}{c}\,\mathbf{J} - \mathbf{J}^*\times\nabla\phi\right) + \frac{4\pi\rho}{\varepsilon}\,\nabla\phi + \frac{i\omega\mu}{c}\,[\nabla(\ln\mu)\times\mathbf{H}]\,\phi - (\mathbf{E}\,\nabla(\ln\varepsilon)\,)\,\nabla\phi\right\}\mathrm{d}V. \tag{19}$$

Подстановка $\mathbf{P} = \mathbf{H}$, $\mathbf{Q} = \phi\mathbf{a}$ приводит к соответствующему выражению для магнитного поля $\mathbf{H}(A)$:

$$\mathbf{H}(A) = (4\pi)^{-1}\int\limits_S \left\{\frac{i\omega\varepsilon}{c}\,[\mathbf{n}\times\mathbf{E}]\,\phi - [\mathbf{n}\times\mathbf{H}]\times\nabla\phi - (\mathbf{nH})\,\nabla\phi\right\}\mathrm{d}S + \mathbf{H}_V(A),$$

$$\mathbf{H}_V(A) = (4\pi)^{-1}\int\limits_V \left\{\frac{4\pi}{c}\left(\frac{i\omega\varepsilon}{c}\,\mathbf{J}^*\phi + \mathbf{J}\times\nabla\phi\right) + \frac{4\pi\rho^*}{\mu}\,\nabla\phi + \frac{i\omega\varepsilon}{c}\,[\mathbf{E}\times\nabla(\ln\varepsilon)]\,\phi - (\mathbf{H}\,\nabla(\ln\mu))\,\nabla\phi\right\}\mathrm{d}V. \tag{20}$$

Предположим, что неоднородности занимают только некоторую часть объёма V, остальная часть объёма V и поверхность S находятся в однородном пространстве. Тогда интегралы по поверхности в правых частях (19), (20) представляют собой вклад источников, расположенных вне объёма V и ограничивающей его поверхности S [12]. Если S удалить на бесконечность, предполагая при этом, что S находится в однородном пространстве, можно считать вклад внешних источников исчезающе малым [12]. Тогда, исключая из уравнений магнитные заряды и токи, из (19) и (20) можно получить

$$\mathbf{E}(A) = (4\pi)^{-1}\int\limits_V \left\{\frac{4\pi i\omega\mu}{c^2}\,\mathbf{J}\phi + \frac{4\pi\rho}{\varepsilon}\,\nabla\phi + \frac{i\omega\mu}{c}\,[\nabla(\ln\mu)\times\mathbf{H}])\,\phi - (\mathbf{E}\,\nabla(\ln\varepsilon))\,\nabla\phi\right\}\mathrm{d}V, \tag{21}$$

$$\mathbf{H}(A) = (4\pi)^{-1}\int\limits_V \left\{\frac{4\pi}{c}\,\mathbf{J}\times\nabla\phi + \frac{i\omega\varepsilon}{c}\,[\mathbf{E}\times\nabla(\ln\varepsilon)]\,\phi - (\mathbf{H}\,\nabla(\ln\mu))\,\nabla\phi\right\}\mathrm{d}V. \tag{22}$$

В случае однородной среды интегралы по объёму переходят в известные выражения, опубликованные ранее в [12]:

$$\mathbf{E}(A) = \int\limits_V \left[\frac{i\omega\mu}{c^2}\,\frac{\exp(ikr)}{r}\,\mathbf{J} + \frac{\rho}{\varepsilon}\,\nabla\frac{\exp(ikr)}{r}\right]\mathrm{d}V, \tag{23}$$

$$\mathbf{H}(A) = \int\limits_V \left[\frac{\mathbf{J}}{c}\,\times\nabla\,\frac{\exp(ikr)}{r}\right]\mathrm{d}V. \tag{24}$$

Поскольку распределение токов $\mathbf{J}$ предполагается известным, распределение плотности зарядов ρ можно найти из уравнения непрерывности [12]. Из сопоставления уравнений (21), (22) и (23), (24) следует, что для определения поля в неоднородной среде необходимо найти функцию Грина скалярного волнового уравнения (6), учитывая влияние слоистых структур на пути между передатчиком и приёмником, и затем вычислить объёмные интегралы (21) и (22). Объёмные интегралы в правых частях (21), (22) зависят от поляризации радиоволн и направления градиента магнитной и диэлектрической проницаемости. В случае радиопросвечивания атмосферы Земли они описывают главным образом вариации направления векторов электрического и магнитного полей в поперечной электромагнитной волне вследствие изменения направления распространения, вызванного рефракцией в слоисто-неоднородной среде, а также из-за эффектов рассеяния на случайных неоднородностях и гидрометеорах.

Если поверхность S и объём V находятся в однородной части пространства, то поля $\mathbf{E}_V(A)$, $\mathbf{H}_V(A)$ равны нулю. В этом случае из (19), (20) можно получить векторные формулы Стреттона—Чу [12]:

$$\mathbf{E}(A) = -(4\pi)^{-1} \int\limits_S \left\{ \frac{i\omega\mu}{c} \left[\mathbf{n} \times \mathbf{H}\right] \phi + \left[\mathbf{n} \times \mathbf{E}\right] \times \nabla\phi + (\mathbf{nE})\, \nabla\phi \right\} \mathrm{d}S, \tag{25}$$

$$\mathbf{H}(A) = (4\pi)^{-1} \int\limits_S \left\{ \frac{i\omega\varepsilon}{c} \left[\mathbf{n} \times \mathbf{E}\right] \phi - \left[\mathbf{n} \times \mathbf{H}\right] \times \nabla\phi - (\mathbf{nH})\, \nabla\phi \right\} \mathrm{d}S, \tag{26}$$

где $\phi = \exp(ikr)/r$. Формулы Стреттона—Чу (25), (26) дают решение прямой задачи, т. е. позволяют определить поле внутри однородного объёма V по известному распределению радиоволновых полей, распространяющихся в направлении от источников, на поверхности S. Необходимо отметить, что при практическом применении уравнений (19), (20) к решению прямой задачи определения полей внутри неоднородной среды распределение полей $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ по поверхности S предполагается известным, а вклад объёмных интегралов в это распределение пренебрежимо малым. Это соответствует предположению об отсутствии обратного отражения и рассеяния от объёма V.

Выберем поверхность S в виде совокупности двух параллельных плоскостей S_1, S_2 в противоположных частях атмосферы и ионосферы (см. рис. 2). Эти плоскости перпендикулярны плоскости POG (рис. 2) и находятся в однородной среде. Передатчик GPS расположен в плоскости POG (рис. 2) вне объёма V между плоскостями S_1, S_2. Рассмотрим случаи однородной (*а*) и неоднородной (*б*) среды, расположенной между поверхностями S_1, S_2. В случае (*а*) волновое уравнение (6) имеет два решения: $\phi^+ = \exp(ikr)/r$ (для прямой волны) и $\phi^- = \exp(-ikr)/r$ (для обращённой волны). Как показано в [12], для функции Грина ϕ^+, соответствующей прямой волне, вклад интегралов по поверхности S_2 в поля $\mathbf{E}(A)$, $\mathbf{H}(A)$ в объёме V (формулы (25), (26)) равен нулю. Таким образом, поле, распространяющееся в прямом направлении, зависит только от распределения поля по поверхности S_1 и не зависит от распределения поля по поверхности S_2. Это вызвано тем, что поверхность S_2 находится в однородной среде, где не содержатся какие-либо градиенты физических параметров, которые могли бы обеспечить отражение или рассеяние волн в обратном направлении. Для функции Грина ϕ^-, которая соответствует полю обращённой волны, с помощью анализа, аналогичного проведённому в [12] для случая прямой волны, можно показать, что только интеграл по поверхности S_2 даёт вклад в поля $\mathbf{E}(A)$, $\mathbf{H}(A)$ внутри объёма V. Таким образом, в случае однородной среды существуют два различных представления для полей прямой (формулы (25), (26), где S совпадает с поверхностью S_1) и обращённой волн:

$$\mathbf{E}_\mathrm{b}(A) = -(4\pi)^{-1} \int\limits_{S_2} \left\{ \frac{i\omega\mu}{c} \left[\mathbf{n} \times \mathbf{H}\right] \phi^- + \left[\mathbf{n} \times \mathbf{E}\right] \times \nabla\phi^- + (\mathbf{nE})\, \nabla\phi^- \right\} \mathrm{d}S, \tag{27}$$

$$\mathbf{H}_\mathrm{b}(A) = (4\pi)^{-1} \int\limits_{S_2} \left\{ \frac{i\omega\varepsilon}{c} \left[\mathbf{n} \times \mathbf{E}\right] \phi^- - \left[\mathbf{n} \times \mathbf{H}\right] \times \nabla\phi^- - (\mathbf{nH})\, \nabla\phi^- \right\} \mathrm{d}S, \tag{28}$$

где $\phi^- = \exp(-ikr)/r$. Уравнения (27), (28) с функцией Грина ϕ^- описывают электрическое и магнитное поля $\mathbf{E}_\mathrm{b}(A)$, $\mathbf{H}_\mathrm{b}(A)$ обращённой волны в случае, если известно распределение электромагнитного поля на поверхности S_2. Соотношения (27), (28) с функцией Грина $\phi^- = \exp(-ikr)/r$

являются радиоголографическими уравнениями для случая трёхмерного однородного пространства.

В случае (*б*) предположим, что поверхности S_1 и S_2 расположены в однородной среде, а неоднородности находятся в некоторой внутренней части объёма V. Этот случай соответствует практике радиозатменного мониторинга атмосферы и ионосферы Земли из космоса и описывается при $\mu = \mathrm{const}$ уравнениями (19), (20) для поля прямой волны, распространяющейся от источников излучения, и уравнениями (29), (30) для поля обращённой волны:

$$\mathbf{E}_\mathrm{b}(A) = -(4\pi)^{-1} \int\limits_{S_2} \left\{ \frac{i\omega\mu}{c} \left[\mathbf{n} \times \mathbf{H}\right] \phi^- + \left[\mathbf{n} \times \mathbf{E}\right] \times \nabla\phi^- + (\mathbf{nE})\,\nabla\phi^- \right\} \mathrm{d}S + \mathbf{E}_{V\mathrm{b}}(A),$$

$$\mathbf{E}_{V\mathrm{b}}(A) = -(4\pi)^{-1} \int\limits_{V} \left(\mathbf{E}\,\nabla(\ln\varepsilon)\right) \nabla\phi^- \,\mathrm{d}V, \tag{29}$$

$$\mathbf{H}_\mathrm{b}(A) = (4\pi)^{-1} \int\limits_{S_2} \left\{ \frac{i\omega\varepsilon}{c} \left[\mathbf{n} \times \mathbf{E}\right] \phi^- - \left[\mathbf{n} \times \mathbf{H}\right] \times \nabla\phi^- - (\mathbf{nH})\,\nabla\phi^- \right\} \mathrm{d}S + \mathbf{H}_{V\mathrm{b}}(A),$$

$$\mathbf{H}_{V\mathrm{b}}(A) = (4\pi)^{-1} \int\limits_{V} \frac{i\omega\varepsilon}{c} \left[\mathbf{E} \times \nabla(\ln\varepsilon)\right] \phi^- \,\mathrm{d}V, \tag{30}$$

где ϕ^- является функцией Грина обращённой волны в неоднородной среде. Уравнения (29), (30) позволяют, в принципе, определить поле внутри неоднородной среды по измеренному на поверхности S_2 распределению полей, если эффекты обратного рассеяния и отражения от объёма V пренебрежимо малы. Это предположение обычно выполняется в атмосфере и ионосфере Земли.

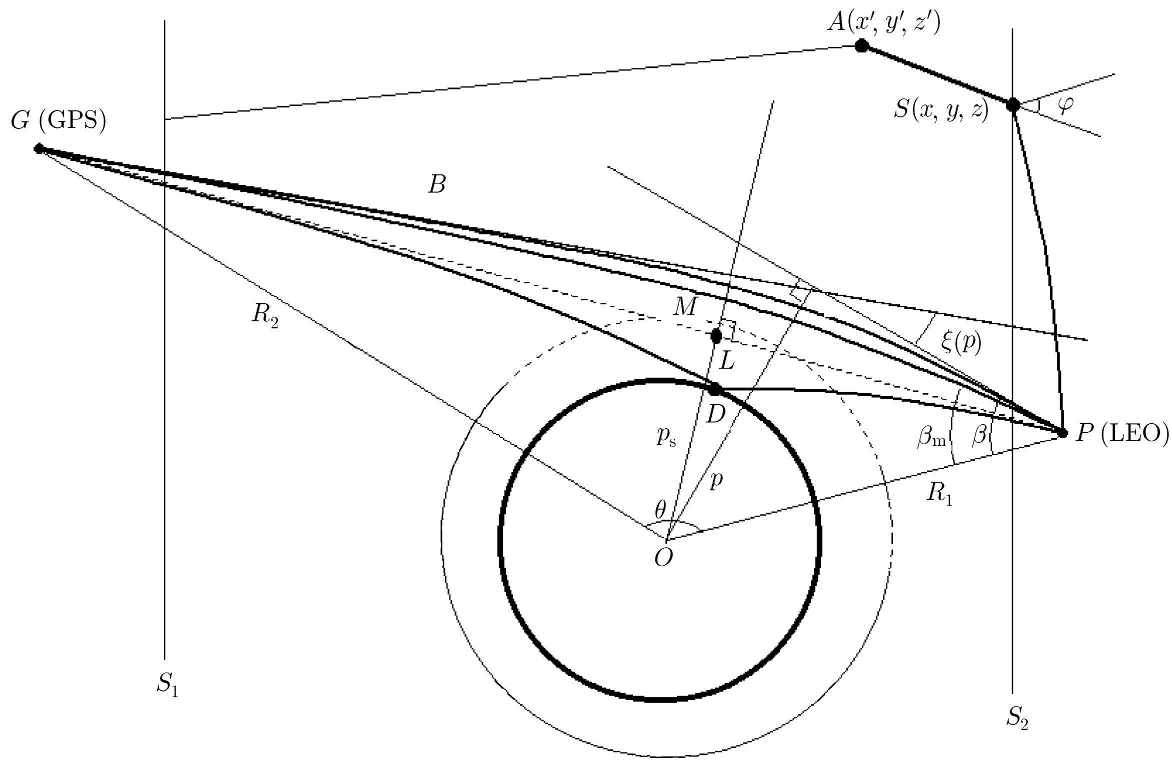

Рис. 2. Схема радиоголографического зондирования

Главный вклад в поле прямой волны (19), (20) вносят поля, распределённые по поверхности S_1. Интеграл по поверхности S_2 не даёт вклада в поле прямой волны, поскольку в однородной среде отражения и рассеяния в обратном направлении не происходит. Дополнительный вклад в поле прямой волны вносит интеграл по объёму, описывающий главным образом изменение направления векторов электрического и магнитного полей из-за рефракции в неоднородной части объёма V. Вклад интеграла по неоднородной части объёма V равен нулю для электрического поля, если градиент диэлектрической проницаемости перпендикулярен вектору $\mathbf{E}$. В случае магнитного поля вклад интеграла по неоднородной части объёма V равен нулю, если электрический вектор параллелен направлению градиента диэлектрической проницаемости. Аналогичные соотношения выполняются и для поля обратной волны. Различие состоит в том, что в поле обратной волны главный вклад вносит интеграл по поверхности S_2. Формулы (29), (30) являются радиоголографическими уравнениями, позволяющими, в принципе, восстановить электромагнитное поле между поверхностями S_1, S_2. Функция Грина ϕ^- в (29), (30) является ядром радиоголографического преобразования и может рассматриваться в качестве опорного сигнала, необходимого для определения электромагнитного поля внутри объёма V по экспериментальным данным. Функция Грина ϕ^- должна определяться путём решения скалярного волнового уравнения (6). В случае зондирования атмосферы и ионосферы сигналами навигационных спутников GPS/«Глонасс» вклад объёмного интеграла мал, и радиоголографические уравнения для неоднородной среды можно записать в виде

$$\mathbf{E}_{\mathrm{b}}(A) = -(4\pi)^{-1} \int\limits_{S_2} \left\{ \frac{i\omega\mu}{c} \, [\mathbf{n}\times\mathbf{H}]\, \phi^- + [\mathbf{n}\times\mathbf{E}] \times \nabla\phi^- + (\mathbf{n}\mathbf{E})\, \nabla\phi^- \right\} \mathrm{d}S, \tag{31}$$

$$\mathbf{H}_{\mathrm{b}}(A) = (4\pi)^{-1} \int\limits_{S_2} \left\{ \frac{i\omega\varepsilon}{c} \, [\mathbf{n}\times\mathbf{E}]\, \phi^- - [\mathbf{n}\times\mathbf{H}] \times \nabla\phi^- - (\mathbf{n}\mathbf{H})\, \nabla\phi^- \right\} \mathrm{d}S, \tag{32}$$

$$\Delta\phi^- + k^2\phi^- = -4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'), \tag{33}$$

причём $\phi^- \to \exp(-ikr)/r$ при $r\to\infty$. Функция Грина ϕ^- в (33) учитывает эффекты рефракции, многолучевого распространения, дифракции, рассеяния и может иметь сложную форму. Функция ϕ^- может быть определена приближёнными методами (например, методами геометрической теории дифракции [14], канонического оператора Маслова [15] и другими [16]) для регулярных слоистых структур в атмосфере и ионосфере.

Соотношения (31)–(33) являются точными радиоголографическими уравнениями для восстановления поля внутри однородной части пространства между приёмником и атмосферой и приближёнными при восстановлении поля в неоднородной атмосфере и ионосфере.

Ниже будет установлено соответствие между ранее полученными в работах [4, 5] соотношениями для случая двумерной однородной среды и радиоголографическими уравнениями (31), (32). В случае двумерной однородной среды функции Грина волнового уравнения (6) имеют вид [6]

$$\phi^+ = i\pi H_0^{(1)}(kr), \qquad \phi^- = -i\pi H_0^{(2)}(kr), \tag{34}$$

где $H_0^{(1)}(kr)$, $H_0^{(2)}(kr)$ — функции Ханкеля первого и второго рода нулевого порядка, имеющие при $kr \gg 1$ асимптотические представления

$$H_0^{(1)}(kr) = [2/(\pi kr)]^{1/2} \exp(ikr - i\pi/4), \qquad H_0^{(2)}(kr) = [2/(\pi kr)]^{1/2} \exp(-ikr + i\pi/4). \tag{35}$$

Для перехода от случая трёхмерной среды к двумерной необходимо учесть, что в (31), (32) поля $\mathbf{H}$, $\mathbf{E}$ не зависят от координаты y, и провести по ней интегрирование. Подставляя (34), (35) в (31), (32) и пренебрегая слагаемыми порядка $(kr)^{-1/2}$, находим

$$\mathbf{E}_{\mathrm{b}}(A) = [k_0/(8\pi)]^{1/2} \int\limits_{LP} \left\{-\mu\,[\mathbf{n}{\times}\mathbf{H}] + [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] \times \boldsymbol{\tau} + (\mathbf{nE})\,\boldsymbol{\tau}\right\} \exp(i\pi/4 - ikr)/r^{1/2}\,\mathrm{d}l, \tag{36}$$

$$\mathbf{H}_{\mathrm{b}}(A) = [k_0/(8\pi)]^{1/2} \int\limits_{LP} \left\{\varepsilon\,[\mathbf{n}{\times}\mathbf{E}] + [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \times \boldsymbol{\tau} + (\mathbf{nH})\,\boldsymbol{\tau}\right\} \exp(i\pi/4 - ikr)/r^{1/2}\,\mathrm{d}l, \tag{37}$$

$$r = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = [(x - x')^2 + (z - z')^2]^{1/2}, \tag{38}$$

где k_0 — волновое число в свободном пространстве, $\boldsymbol{\tau}$ — единичный вектор в направлении на текущий элемент интегрирования из точки наблюдения.

Согласно [4] скалярное поле обращённой волны $u(x, y, z)$ в двумерной среде рассчитывается при помощи дифракционного интеграла:

$$u(x, y, z) = [k_0/(2\pi)]^{1/2} \int\limits_{LP} r^{-1/2} \cos(\varphi) \exp(i\pi/4 - ik_0 r)\, u_0(\mathbf{y})\,\mathrm{d}l, \tag{39}$$

где φ — угол между вектором $\mathbf{r}$, соединяющим точку наблюдения и элемент интегрирования $\mathrm{d}l$ на кривой LP (рис. 1), и нормалью $\mathbf{n}$ к кривой LP в текущей точке интегрирования, $u_0(\mathbf{y})$ — скалярное поле, измеренное вдоль кривой LP. Уравнение (39) получено в предположении, что источник радиоволн (передатчик GPS) и приёмник расположены в плоскости орбиты малого спутника [4], а кривая LP является прямой линией. Сравнение (36)–(38) с уравнением (39) показывает совпадение фазовых и амплитудных множителей в интегралах (36), (37) и (39). Отличие состоит в поляризационных множителях, входящих в (36), (37) и зависящих от направления электрического и магнитного полей, измеряемых вдоль кривой LP. Таким образом, известные скалярные уравнения, применявшиеся ранее для решения обратной задачи радиопросвечивания, являются частным случаем векторных радиоголографических уравнений, записанных для двумерно-неоднородной сферически-симметричной среды.

2. ФУНКЦИЯ ГРИНА И ОПОРНЫЙ СИГНАЛ В МЕТОДЕ СФОКУСИРОВАННОГО АПЕРТУРНОГО СИНТЕЗА

Рассмотрим связь между функцией Грина неоднородной среды и формой опорного сигнала в радиоголографическом методе сфокусированной синтезированной апертуры (РФСА), введённом ранее в [7, 9, 17, 18] с целью получения высокого вертикального разрешения при решении обратной задачи радиопросвечивания. Для выявления этой связи можно применить уравнения (21), (22) в предположении, что вкладом объёмных интегралов можно пренебречь. В частности, объёмный интеграл равен нулю, если вектор электрического поля перпендикулярен градиенту диэлектрической проницаемости. Это требование выполняется, например, при горизонтальной поляризации радиоволн, когда вектор электрического поля перпедикулярен лучевой траектории, расположенной в плоскости POG (рис. 2):

$$\mathbf{E}(A) = \int\limits_{V} \left(\frac{i\omega\mu}{c^2}\,\mathbf{J}\phi + \frac{\rho}{\varepsilon}\,\nabla\phi\right) \mathrm{d}V, \tag{40}$$

$$\mathbf{H}(A) = c^{-1} \int\limits_V \mathbf{J} \times \nabla\phi \, \mathrm{d}V, \tag{41}$$

где ϕ — функция Грина, соответствующая прямой волне. Предположим, что поле излучается точечным источником (передатчиком спутника навигационной системы GPS) и применим для описания поля ВКБ-приближение [17], считая, что вектор электрического поля перпендикулярен градиенту показателя преломления. Представим функцию Грина в виде суперпозиции полей M физических лучей:

$$\mathbf{E}(A) = \mathbf{A}_0 \phi(\mathbf{r}, t), \quad \phi(\mathbf{r}, t) = \sum_{j=1}^{M} A_j(p_j) \exp[i\,(\omega_0 t - k\Phi(p_j, \mathbf{r}, R_2))], \quad \Phi(p_j, \mathbf{r}, R_2) = \int\limits_{R_1}^{R_2} n_j(l)\, \mathrm{d}l, \tag{42}$$

где $k = 2\pi/\lambda$, $\omega_0 = 2\pi f_0$, f_0 — несущая частота, n_j — показатель преломления вдоль лучевой траектории, $\Phi(p_j, \mathbf{r}, R_2)$ — эйконал соответствующего луча, p_j — прицельный параметр, соответствующий j-му лучу, $\mathbf{A}_0$ — комплексная амплитуда поля, зависящая от интенсивности и фазы источника, $A_j(p_j)$ — комплексная амплитуда, соответствующая j-му лучу, нормированная на амплитуду волны в свободном пространстве. Модуль $A_j(p_j)$ зависит от рефракционного ослабления мощности $X_j(p_j)$ j-го луча: $A_j(p_j) = [X_j(p_j)]^{1/2}$. В приближении сферической симметрии эйконал $\Phi(p)$, рефракционное ослабление $X(p)$, угол рефракции $\xi(p)$ и центральный угол θ связаны соотношениями [19]

$$\xi(p) = \arcsin[p/(n(R_1)R_1)] + \arcsin[p/(n(R_2)R_2)] - \arcsin(p_\mathrm{s}/R_1) - \arcsin(p_\mathrm{s}/R_2), \tag{43}$$

$$\begin{aligned}\Phi(p) = {} & [n^2(R_2)R_2^2 - p^2]^{1/2} + [n^2(R_1)R_1^2 - p^2]^{1/2} - [(R_2^2 - p_\mathrm{s}^2)^{1/2} + (R_1^2 - p_\mathrm{s}^2)^{1/2}] + \\ & + p\,[\arcsin(p/R_1) + \arcsin(p/R_2) - \arcsin(p_\mathrm{s}/R_1) - \arcsin(p_\mathrm{s}/R_2)] + \kappa(p),\end{aligned} \tag{44}$$

$$\theta = \pi + \xi(p) - \arcsin[p/(n(R_1)R_1)] - \arcsin[p/(n(R_2)R_2)], \tag{45}$$

$$X(p) = pR_0^2/(R_1R_2)\,[(n^2(R_2)R_2^2 - p^2)^{1/2}\,(n^2(R_1)R_1^2 - p^2)^{1/2} \sin\theta]^{-1}\, |\partial\theta/\partial p|^{-1}, \tag{46}$$

$$\partial\theta/\partial p = \mathrm{d}\xi/\mathrm{d}p - 1/[n^2(R_2)R_2^2 - p^2]^{1/2} - 1/[n^2(R_1)R_1^2 - p^2]^{1/2},$$

где $\kappa(p)$ — главная рефракционная часть эйконала $\Phi(p)$, связанная с углом рефракции $\xi(p)$ соотношением [19] $\xi(p) = -\mathrm{d}\kappa(p)/\mathrm{d}p$, p_s — прицельный параметр, соответствующий распространению в свободном пространстве вдоль луча GLP (рис. 2), $n(R_2)$ и $n(R_1)$ — показатели преломления в точках G и P соответственно, R_0 — расстояние между точкой наблюдения и передатчиком. Запись аналитического сигнала, зарегистрированного на некотором участке траектории малого спутника, может рассматриваться в качестве огибающей радиоголограммы, содержащей амплитуду и фазу поля в виде функции времени:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = A(t) \exp[-i\psi(t)]. \tag{47}$$

В методе сфокусированного апертурного синтеза для расшифровки радиоголограммы используется опорный сигнал $E_\mathrm{m}(t) = A_\mathrm{m}^{-1}(t) \exp[i\psi_\mathrm{m}(t)]$, который должен быть когерентен с главной (когерентной) частью радиозатменного сигнала. Фаза $\psi_\mathrm{m}(t)$ и амплитуда $A_\mathrm{m}(t)$ опорного сигнала должны быть связаны с соответствующими параметрами радиозатменного сигнала. Эту связь практически возможно реализовать вследствие высокой стабильности сигналов, излучаемых навигационными спутниками системы GPS. Для расчёта фазы и амплитуды опорного сигнала применяется модель, достаточно точно описывающая зависимость показателя преломления от высоты в районе радиопросвечивания [7–9]. Использование модели позволяет существенно увеличить вертикальное разрешение, которое в обычных условиях (при отсутствии модели) соответствует обычной доплеровской селекции по частоте, дающей вертикальное разрешение порядка одного километра. Для получения фазы и амплитуды физических лучей осуществляется спектральный анализ произведения опорного сигнала и зарегистрированного радиоголографического сигнала:

$$W[p(\omega)] = \int\limits_{-T/2}^{T/2} \phi(\mathbf{r},t) A_{\mathrm{m}}^{-1}(t) \exp[i\psi_{\mathrm{m}}(t)] \exp(-i\omega t)\,\mathrm{d}t, \tag{48}$$

где T — время когерентной обработки (время синтеза сфокусированной апертуры). Уравнение (48) описывает угловой спектр поля $W[p(\omega)]$ в зависимости от лучевых координат: угла прихода β и прицельного параметра p (угол прихода β в сферически-симметричной среде связан с прицельным параметром). Интегрирование по времени в (48) можно заменить интегрированием по центральному углу θ:

$$\begin{gathered} \mathrm{d}t = \mathrm{d}\theta\,\Omega^{-1}(p_{\mathrm{s}}), \qquad \Omega(p_{\mathrm{s}}) = [1/(R_1^2 - p_{\mathrm{s}}^2)^{1/2} + 1/(R_2^2 - p_{\mathrm{s}}^2)^{1/2}]\,v_\perp, \\ v_\perp = -\mathrm{d}p_{\mathrm{s}}/\mathrm{d}t, \qquad t = (\theta - \theta_0)\,\Omega^{-1}(p_{\mathrm{s}}), \end{gathered} \tag{49}$$

где $\Omega(p_{\mathrm{s}})$ — угловая скорость относительного движения передатчика и приёмника, $v_\perp$ — вертикальная скорость точки L относительно центра сферической симметрии (точки O, см. рис. 2), θ_0 — центральный угол, соответствующий моменту времени $t = 0$. В случае круговой орбиты $\Omega(p_{\mathrm{s}}) = \mathrm{const}$, и эйконал для каждого из физических лучей и опорного сигнала может быть записан в виде

$$\Phi[p(\theta)] - \Phi[p(\theta_0)] = p(\theta_0)\,(\theta - \theta_0) + (\theta - \theta_0)^2/[2\,\partial\theta/\partial p(\theta_0)], \tag{50}$$

$$\psi[p_{\mathrm{m}}(\theta)] - \psi[p_{\mathrm{m}}(\theta_0)] = p_{\mathrm{m}}(\theta_0)\,(\theta - \theta_0) + (\theta - \theta_0)^2/[2\,\partial\theta/\partial p_{\mathrm{m}}(\theta_0)], \tag{51}$$

$$W(\omega) = \int\limits_{-T/2}^{T/2} \phi(\mathbf{r},t) A_{\mathrm{m}}^{-1}(t) \exp[i\psi_{\mathrm{m}}(t)] \exp(-i\omega t)\,\mathrm{d}t = \sum_{j=1}^{M} f(\omega, p_j), \tag{52}$$

где зависимость $\theta(p)$ даётся уравнением (45). После подстановки (51) в уравнение (52) получим

$$f(\omega, p_j) = \int\limits_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \Omega^{-1}(p_{\mathrm{s}})\,[X_j(p_j)/X_{\mathrm{m}}(p_{\mathrm{m}})]^{1/2} \times \\ \times\, \exp\bigl\{i\,[q\,(\theta - \theta_0) - k\,[\Phi(p_{j0}) - \psi_{\mathrm{m}}(p_{\mathrm{m}0})] + ks\,(\theta - \theta_0)^2]\bigr\}\,\mathrm{d}\theta, \tag{53}$$

$$q = (\omega_0 - \omega)\,\Omega^{-1}(p_{\mathrm{s}}) + k\,(p_{\mathrm{m}} - p_j), \qquad s = [1/(\partial\theta/\partial p_{\mathrm{m}}) - 1/(\partial\theta/\partial p_j)]/2, \qquad \Delta = T\Omega(p_{\mathrm{s}}), \tag{54}$$

где $f(\omega, p_j)$ описывает отклик сфокусированной апертуры на сигнал j-го физического луча. Для получения максимального отклика необходимо выбрать параметры опорного сигнала в соответствии с условиями

$$X_{\mathrm{m}}(p_{\mathrm{m}}) \approx X(p), \qquad (\partial\theta/\partial p_{\mathrm{m}}) \approx \partial\theta/\partial p. \tag{55}$$

Два условия (55) могут быть выполнены совместно, поскольку рефракционное ослабление (46) существенно зависит от производной $\partial\theta/\partial p$. Из условий (55) и формул (48), (50)–(52) следует, что вариации фазы и амплитуды опорного сигнала и функции Грина должны соответствовать друг другу. Это означает, что фокус синтезированной апертуры должен находиться в месте выхода лучей из передатчика, т. е. совпадать с точкой G (рис. 2). В оптимальном случае для отклика сфокусированной апертуры можно получить следующее выражение:

$$f(\omega,p) = i\,\Delta\,[\sin(q\Delta/2)]/(q\Delta/2), \qquad q = (\omega_0-\omega)\,\Omega^{-1}(p_{\rm s}) + k\,[p_{\rm m}(\theta_0) - p(\theta_0)]. \tag{56}$$

Функция $f(\omega,p)$ имеет узкий максимум на угловой частоте, зависящей от прицельных параметров $p(\theta_0)$, $p_{\rm m}(\theta_0)$:

$$\omega_0-\omega = k\Omega(p_{\rm s})\,[p(\theta_0) - p_{\rm m}(\theta_0)]. \tag{57}$$

Из соотношения (57) можно найти прицельный параметр $p(\theta_0)$ по известным значениям $p_{\rm m}(\theta_0)$ и $\Omega(p_{\rm s})$:

$$p(\theta_0) = (\omega_0-\omega)/[k\Omega(p_{\rm s})] + p_{\rm m}(\theta_0). \tag{58}$$

Точность определения прицельного параметра $\delta p(\theta_0)$ зависит от ширины максимума δ_0, определяемой параметрами Δ и $\Omega(p_{\rm s})$. Используя соотношения (54), (56)–(58), получим

$$\begin{gathered}\delta_0 = \pi\Omega(p_{\rm s})/\Delta,\\ \delta p(\theta_0) = \delta_0/[k\,\Delta\Omega(p_{\rm s})] = \lambda/\bigl\{Tv_\perp\,[1/(R_1^2-p_{\rm s}^2)^{1/2} + 1/(R_2^2-p_{\rm s}^2)^{1/2}]\,\bigr\} = \lambda R_1/L_{\rm c},\end{gathered} \tag{59}$$

$$L_{\rm c} = Tv, \tag{60}$$

где $L_{\rm c}$ — размер сфокусированной апертуры, v — скорость относительного орбитального движения передающего и приёмного спутников. С достаточной точностью можно считать v равной скорости движения низкоорбитального спутника. Для оценок можно положить $L_{\rm c} = 20$ км; $v = 8$ км/с; $T = 2{,}5$ с; $\lambda = 20$ см; $R_1 = 7\,000$ км, в результате получим вертикальное разрешение для прицельного параметра $\delta p(\theta_0) = 70$ м.

Аналогично можно получить оценку для угла рефракции $\xi(\theta_0)$, используя соотношение (43). Заметим, что рассмотренный метод позволяет получить амплитуды и фазы для каждого из физических лучей в угловом спектре функции Грина (42), используя соотношения (52)–(54) и выбирая подходящую форму опорного сигнала. Таким образом, метод сфокусированного синтеза, применённый ранее в работах [8, 9, 17, 18], получил обоснование в качестве радиоголографического метода, использующего модель атмосферы для построения опорного сигнала с амплитудой и фазой, близкой к функции Грина для среды в районе радиопросвечивания. Уравнение (48) может быть использовано для получения радиоизображений атмосферы и земной поверхности, поскольку угловая частота и прицельный параметр связаны соотношением (57), выполняющимся вследствие когерентности сигналов, излучаемых навигационным спутником. Лишь вблизи каустических поверхностей, где частная производная $\partial\theta/\partial p$ пренебрежимо мала, радиоизображение может быть размыто вследствие расширения углового спектра функции Грина. Примеры радиоизображений атмосферы и поверхности Земли показаны на рис. 3. Данные относятся к сеансу радиопросвечивания, проведённому с помощью спутника «Microlab-1». Радиоизображения стратосферы на высоте 16÷22 км (левая часть рис. 3) содержат узкий максимум с шириной по уровню половины мощности порядка 70 м. Это соответствует угловому разрешению порядка 17÷23 микрорадиан. Радиоизображение пограничного слоя атмосферы и земной поверхности (отрицательные высоты в правой части рис. 3) показывает сложную картину многолучевого распространения. Слабый отражённый сигнал, увеличиваясь по амплитуде, постепенно приближается к главному тропосферному сигналу и затем становится частью его углового спектра. Из рис. 3 следует, что метод сфокусированного синтеза даёт ожидаемое вертикальное разрешение порядка 70÷100 м в полученных радиоизображениях и позволяет наблюдать эффекты, важные для развития теории распространения радиоволн в атмосфере и в её пограничном слое.

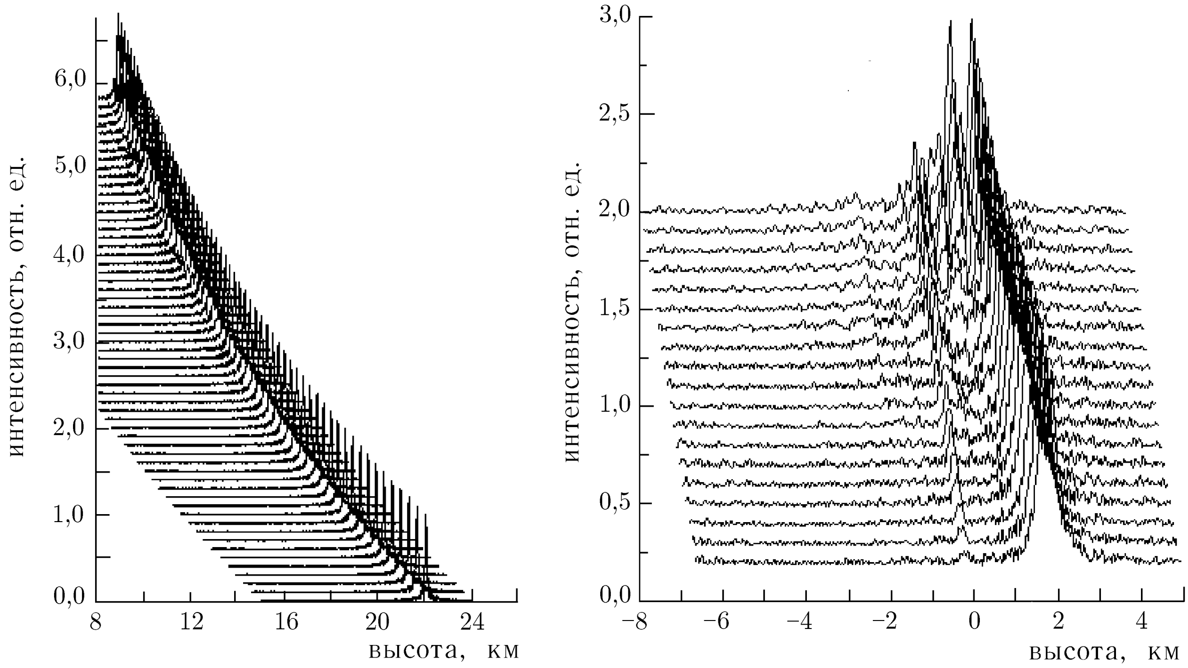

Рис. 3. Радиоизображение атмосферы, полученное методом сфокусированного апертурного синтеза 5 февраля 1997 года в 13:54:42 UT для 55,6° с. ш., 139,2° в. д. Радиоизображения даны последовательно с временны́м интервалом 0,32 с. Размер сфокусированной апертуры равен 20 км, что соответствует вертикальному разрешению 70 м на расстоянии 3 000 км

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведённый анализ показал, что полученные векторные радиоголографические уравнения описывают процесс обращения фронтов радиоволновых полей для общего случая трёхмерной неоднородной среды. В случае двумерной неоднородной среды имеется соответствие между найденным ранее скалярным уравнением, описывающим процесс обращения волнового фронта по полю, измеренному на некоторой кривой в плоскости, содержащей передатчик, приёмник и центр сферической симметрии, и векторными радиоголографическими уравнениями. Полученные уравнения учитывают поляризационные эффекты и позволяют, в принципе, восстанавливать поле в атмосфере и ионосфере Земли по результатам измерений электромагнитного поля на околоземной орбите. При этом опорный сигнал пропорционален функции Грина, соответствующей решению скалярного волнового уравнения, зависящего от трёхмерного распределения показателя преломления внутри ионосферы и атмосферы. На практике опорный сигнал должен определяться с помощью модели, близкой по своим параметрам к характеристикам неоднородной среды в районе зондирования. Это обосновывает применение метода сфокусированного синтеза в общем случае трёхмерно-неоднородной среды для высокоточного решения различных обратных задач дистанционного зондирования земной поверхности и атмосферы с помощью прецизионных сигналов радионавигационных спутников.

Работа поддержана РФФИ (грант № 01–02–17414).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зельдович Я. Б., Пилипецкий Н. Ф., Шкунов В. В. Обращение волнового фронта. М.: Наука, 1985.

2. Зверев В. А. Радиооптика. М.: Сов. радио, 1975.
3. Marouf E. A., Tyler G. L. // Science. 1982. V. 217. P. 243.
4. Gorbunov M. E., Gurvich A. S. // Int. J. Remote Sensing. 1998. V. 19, No. 12. P. 2283.
5. Gorbunov M. E. // Radio Science. 2002. V. 37, No. 5. P. 10-1–10-11.
6. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988.
7. Павельев А. Г., Игараши К., Павельев Д. А., Хокке К. // Радиотехника и электроника. 2002. Т. 47, № 6. С. 681.
8. Павельев А. Г. // Радиотехника и электроника. 1998. Т. 43, № 8. С. 939.
9. Pavelyev A. G., Igarashi K., Reigber C., et al. // Radio Science. 2002. V. 37, No. 3. P. 15-1–15-11.
10. Куницын В. Е., Терещенко Е. Д. Томография ионосферы. М.: Наука, 1991.
11. Kunitsyn V. E., Andreeva E. S., Tereshchenko E. D., et al. // Int. J. of Imaging Systems and Technology. 1994. V. 5. P. 112.
12. Стреттон Дж. Теория электромагнетизма. М.: Гостехтеоретиздат, 1948.
13. Миллер М. А., Суворов Е. В. // Физическая энциклопедия. Т. 3. М.: Большая Российская энциклопедия, 1992. С. 33.
14. Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И. Геометрическая оптика неоднородных сред. М.: Наука, 1980.
15. Лукин Д. С., Палкин Е. А. Численный канонический метод в задачах дифракции и распространения электромагнитных волн в неоднородных средах. М.: МФТИ, 1982.
16. Карепов С. Л., Крюковский А. С. // Радиотехника и электроника. 2001. Т. 46, № 1. С. 40.
17. Hocke K., Pavelyev A., Yakovlev O., et al. // J. Atmos. Sol.-Terr. Phys. 1999. V. 61 P. 1169.
18. Igarashi K., Pavelyev A. G., Hocke K., et al. // Earth, Planets and Space. 2000. V. 52, No. 11. P. 868.
19. Павельев А. Г., Елисеев С. Д. // Радиотехника и электроника. 1989. Т. 34, № 9. С. 928.

Институт радиотехники и электроники РАН,
г. Фрязино, Россия

Поступила в редакцию
4 марта 2003 г.

VECTORIAL DIFFRACTION INTEGRALS FOR SOLVING INVERSE PROBLEMS OF RADIOHOLOGRAPHIC SOUNDING OF EARTH'S ATMOSPHERE AND SURFACE

A. G. Pavelyev

Based on the Stratton–Chu method for homogeneous bodies, we obtain vectorial relationships between the fields on a certain surface in three-dimensional space and the fields in the inhomogeneous volume bounded by this surface. These vectorial formulas permit solving the direct and inverse problems of determination of the fields in an inhomogeneous medium given a field on its boundary. The vectorial equations take into account variations in the polarizations of the direct and inverse waves propagated in an inhomogeneous medium. In the case of a two-dimensional homogeneous medium, the vectorial equations reduce to the scalar equations derived earlier in the spherical-symmetry approximation to describe the inverse-wave propagation in the case of ionospheric and atmospheric radio-occultation monitoring. It is shown that the Green's function of the scalar wave equation in an inhomogeneous medium should be used as the reference signal when solving the inverse problem of radio-occultation monitoring. This justifies the focused aperture synthesis method used earlier for high-accuracy retrieval of vertical refractive-index profiles in the ionosphere and atmosphere. In this method, the reference-signal phase was determined from a model which describes fairly well the radiophysical parameters of a refracting medium in a radio-rayed region. The obtained equations can be used to solve with high accuracy the inverse problem of radioholographic sounding of Earth's atmosphere and surface using precision signals of radio-navigation satellites.

УДК 550.388.2

КОМПЛЕКСНОЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК РАСПРОСТРАНЕНИЯ КВ СИГНАЛОВ НА СРЕДНЕШИРОТНЫХ ТРАССАХ РАЗЛИЧНОЙ ПРОТЯЖЁННОСТИ И ОРИЕНТАЦИИ

Г. Г. Вертоградов [1], *Ю. П. Мятежников* [1], *В. П. Урядов* [2], *С. В. Розанов* [3]

Изложен комплексный подход к измерению дистанционно-частотных, угловых, спектральных и статистических характеристик коротковолновых сигналов. Представлены результаты экспериментальных исследований коэффициента мутности, диапазона частотного рассеяния, вариаций доплеровского смещения частоты, пеленга и угла места в широком диапазоне частот зондирования на трассах Хабаровск—Ростов-на-Дону, Москва—Ростов-на-Дону и Кипр—Ростов-на-Дону в различных геофизических условиях. Показано, что на односкачковых трассах в дневное время коэффициент мутности с наибольшей вероятностью лежит в диапазоне $2\div 4$. В сумеречные часы коэффициент мутности уменьшается вплоть до 0,6. С ростом протяжённости трассы наблюдается тенденция уменьшения коэффициента мутности. Установлено, что средний диапазон частотного рассеяния по уровню 95 % принимаемой мощности сигнала минимален для освещённой трассы и не превышает $0{,}1\div 0{,}3$ Гц. В закатные часы или при неравномерном освещении трассы диапазон частотного рассеяния возрастает, но не превышает 4 Гц. Оценён диапазон вариаций доплеровского смещения частоты, которые в значительной мере были обусловлены влиянием среднемасштабных перемещающихся ионосферных возмущений и в экспериментах не превышали 2 Гц. По результатам угловых измерений на основе ионосферной модели IRI-2001 проведено тестирование метода однопозиционного местоопределения источника излучения.

ВВЕДЕНИЕ

Успешное решение задач радиосвязи, навигации и пеленгации в диапазоне декаметровых волн (ДКМВ) неизбежно наталкивается на трудности расчёта и прогнозирования характеристик распространения КВ сигналов через ионосферу, которая выступает в этом диапазоне как основная каналообразующая среда. В то же время развитие широкополосных адаптивных связных и пеленгационных радиосистем декаметрового диапазона выводит на первый план проблемы изучения динамических, спектральных и статистических характеристик нестационарного ионосферного радиоканала. Аналогичные задачи возникают и при разработке моделей ДКМВ-канала адекватно отражающих реальные особенности распространения КВ сигналов и их влияние на механизмы искажений сигналов. Построение подобных моделей ионосферного радиоканала связано также с решением задач выделения факторов, определяющих структуру поля ДКМВ, характеристики распространения парциальных лучей, природу и статистические свойства шумов в точке приёма. Например, один из центральных моментов моделирования ионосферного канала состоит в выборе доминирующего механизма распространения и формирования поля ДКМВ — зеркального отражения от ионосферы или (и) рассеяния вперёд. В свою очередь, этот выбор определяется так называемым коэффициентом мутности β ионосферы [1], квадрат которого имеет смысл отношения энергий «зеркальной» и «рассеянной» компонент поля в точке приёма.

Решение поставленных задач может быть достигнуто только на пути комплексных экспериментальных исследований особенностей распространения КВ сигналов и сопоставления разрабатываемых методов расчёта и моделирования с реально наблюдаемыми характеристиками ДКМВ.

В то же время имеющиеся в литературе данные измерений коэффициента мутности [1–3] часто противоречивы и не могут быть признаны окончательно устоявшимися. Известно также [4], что многолучёвость и нестационарность ионосферных волновых процессов усложняют задачу пеленгации коротковолновых сигналов. Поэтому при проведении измерений и анализе результатов важное значение имеет оценка реального состояния ионосферного канала на трассе распространения.

В работе представлены результаты комплексных исследований статистических, спектральных и угловых характеристик коротковолновых сигналов на среднеширотных трассах протяжённостью от 1 000 до 6 500 км, полученные в условиях оперативного контроля ионосферного коротковолнового канала с помощью наклонного ЛЧМ-зондирования.

1. ИЗМЕРЯЕМЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ДКМВ И СПОСОБЫ ИХ ОЦЕНКИ

Для экспериментального исследования характеристик распространения ДКМВ на среднеширотных радиотрассах применялись три автоматических стенда.

1. Стенд наклонного ЛЧМ-зондирования, позволяющий на выбранной трассе получать ионограммы наклонного зондирования и амплитудно-частотные характеристики как для отдельных мод распространения, так и для канала в целом, а также максимальную наблюдаемую частоту для отдельных мод распространения. В ходе описываемых комплексных экспериментов стенд использовался в основном для мониторинга исследуемых радиотрасс и идентификации мод распространения.

2. Стенд одночастотных измерений спектральных и статистических характеристик, позволяющий проводить непрерывные длительные измерения квадратурных составляющих КВ сигналов. Основу измерительной аппаратуры составляли: трёхканальное радиоприёмное устройство (РПУ) «Тапир», оснащённое средствами автоматической настройки и контроля; 12-разрядный аналого-цифровой преобразователь (АЦП) типа ADC 12/400; высокостабильный опорный генератор для выдачи опорной частоты РПУ и частоты дискретизации АЦП; ЭВМ для автоматического управления и контроля работы стенда, обработки и записи квадратурных компонент принимаемых сигналов. В качестве приёмной антенны использовался 9-метровый вертикальный штырь, установленный на поверхности Земли. Обработка записей сигнала осуществлялась в постреальном времени на основе методов спектрального оценивания. Оценивались следующие характеристики распространения:

— динамические спектры мощности комплексного низкочастотного сигнала, изучалась их динамика во времени (доплеровские спектры);

— лучевая структура поля в точке приёма;

— параметры отдельных лучей распространения (доплеровское смещение частоты, амплитуды и фазы), формирующих поле в точке приёма;

— ширина частотного рассеяния сигнала по уровню 95 % принимаемой мощности (полоса низкочастотного комплексного сигнала);

— энергия принимаемого сигнала относительно разрядности АЦП в (децибелах);

— плотность спектра мощности шумов в полосе анализа относительно разрядности АЦП в (децибелах);

— отношение сигнал/шум в полосе принимаемого низкочастотного комплексного сигнала;

— коэффициент мутности ионосферы β как интегральная мера тонкой мелкомасштабной структуры ионосферы;

— статистические свойства указанных характеристик (функций распределения, математических ожиданий и дисперсий).

Для получения всех указанных характеристик распространения КВ сигналов используется модифицированный адаптивный многооконный метод спектрального оценивания [5], известный в литературе также как МТМ-метод. Преимущества предлагаемого способа оценивания плотности спектра мощности состоят в детерминированном выборе спектральных окон, способности работать с короткими временны́ми выборками, дисперсионный анализ дискретных компонент, высокое спектральное разрешение.

Используемый многооконный метод спектрального оценивания применительно к анализу нестационарных сигналов с высокостабильной несущей частотой, отражённых ионосферой, позволяет [5]:

— достичь высокого спектрального разрешения;

— на основе формального статистического критерия обнаружить дискретные составляющие сигнала (зеркальные компоненты);

— получить оценку комплексных амплитуд зеркальных компонент;

— оценить плотность спектра мощности рассеянной компоненты сигнала;

— оценить коэффициент мутности ионосферы;

— оценить доплеровское смещение частоты парциальных зеркальных компонент сигнала.

Отметим, что используемый спектральный метод анализа даёт возможность оценить суммарную мощность сигнала, найти уровень шумов и отношение сигнал/шум. Последние две величины находятся в предположении, что полоса анализа существенно превышает полосу сигнала. В последнем случае можно применить гистограммный метод нахождения вероятного уровня шумов. Для этого численно строится гистограмма уровней плотности спектра мощности, максимум которой соответствует уровню шумов. Полоса сигнала находится по уровню 95 % мощности. После этого произведение вероятного уровня плотности спектра мощности шумов на полосу сигнала даст мощность шумов в полосе, согласованной с сигналом. Отношение сигнал/шум находится очевидным образом.

3. Стенд измерения угловых характеристик КВ сигналов с пространственным разделением направлений прихода отдельных мод распространения предназначен для измерения углов прихода в горизонтальной (пеленг) и вертикальной (угол места) плоскостях. Стенд работает с антенной решёткой произвольной пространственной конфигурации [6], расположенной на земной поверхности на плоской площадке 80×80 м и состоящей из 8 ненаправленных штыревых вертикальных антенных элементов с длиной 9 м. В настоящее время основу стенда составляет 8-канальный приёмник с мгновенной полосой обзора до 1 МГц, причём каждый канал сформирован на базе РПУ ICom-100. Калибровка тракта многоканального РПУ осуществляется с помощью шумового генератора, который включён в состав стенда и автоматически по команде от ЭВМ подключается ко всем входам многоканального РПУ при перестройке на новую частоту, но не реже, чем раз в 5 минут. Сигнал промежуточной частоты (10,7 МГц) каждого канала РПУ оцифровывается многоканальным 12-разрядным АЦП с частотой дискретизации 2,5 МГц и подвергается процедуре многомерного обнаружения и цифрового фурье-синтеза. Обнаружение и цифровой синтез осуществляются на основе алгоритмов, изложенных в работах [6–9]. Пространственное разделение мод распространения осуществляется на основе параметрического метода высокого разрешения [10], основные положения которого состоят в следующем.

Пусть на плоскую антенную решётку, содержащую N антенных элементов с полярными координатами r_n, φ_n, где $n = 1, \ldots, N$, падает L плоских монохроматических волн с длиной волны λ. Никаких предположений о степени когерентности парциальных лучей не делается. Комплексную амплитуду напряжения, наводимого на n-м антенном элементе, обозначим U_n. Комплексные амплитуды парциальных лучей, формирующих интерференционное поле в точке приёма, обозначим a_l, а их углы прихода (пеленг и угол места) — α_l и Δ_l соответственно, где $l = 1, \ldots, L$. Тогда в рамках принятой «плосковолновой» модели для напряжения, индуцированного на n-м антенном элементе суммарным интерференционным полем, можно записать следующее выражение:

$$K_n(a_1, \ldots, a_L, \alpha_1, \ldots, \alpha_L, \Delta_1, \ldots, \Delta_L) = \sum_{l=1}^{L} a_l H_n(\alpha_l, \Delta_l),$$

где пространственный фазовый множитель, имеющий вид

$$H_n(\alpha_l, \Delta_l) = \exp\left[\frac{2\pi i}{\lambda}\, r_n \cos(\Delta_l) \cos(\varphi_n - \alpha_l)\right],$$

зависит от геометрии решётки и направлений прихода парциальных лучей. Поскольку содержащаяся в U_n полная информация о фазе и амплитуде принимаемого сигнала в точках размещения антенн предполагается известной (она получена на этапе обнаружения и выделения сигнала в спектральной области), можно записать основную систему нелинейных уравнений для определения параметров парциальных лучей в следующем виде:

$$U_n = K_n(a_1, \ldots, a_L, \alpha_1, \ldots, \alpha_l, \Delta_1, \ldots, \Delta_L).$$

Составляя квадратичное уклонение в форме $\sigma^2 = \|\mathbf{U} - \mathbf{K}\|^2$, дифференцируя его по a_l^* и приравнивая результат к нулю, получим линейную систему уравнений относительно амплитуд лучей:

$$\sum_{l'=1}^{L} G_{ll'} a_{l'} = s_l, \qquad G_{ll'} = (\mathbf{H}(\alpha_l, \Delta_l), \mathbf{H}(\alpha_{l'}, \Delta_{l'})), \qquad s_l = (\mathbf{H}(\alpha_l, \Delta_l), \mathbf{U}), \tag{1}$$

где использовано традиционное определение скалярного произведения и нормы N-мерных векторов: $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \sum\limits_n A_n^* B_n$, $\|\mathbf{A}\|^2 = (\mathbf{A}, \mathbf{A})$; здесь звёздочка обозначает комплексное сопряжение.

Решение системы уравнений (1) при заданных углах прихода парциальных лучей α_l, Δ_l может быть получено любым стандартным методом (например, методом Гаусса) при не слишком больших числах обусловленности матрицы $\mathbf{G}$ или методом регуляризации в противном случае. С учётом (1) квадратичное уклонение записывается в следующем простом виде:

$$\sigma^2(\alpha_1, \ldots, \alpha_L, \Delta_1, \ldots, \Delta_L) = 1 - (\mathbf{K}, \mathbf{U})/\|\mathbf{U}\|^2. \tag{2}$$

Таким образом, задача сводится к отысканию глобального минимума функции $2L$ переменных вида (2), либо, что эквивалентно, к отысканию глобального максимума диаграммы направленности

$$D(a_1, \ldots, a_L, \alpha_1, \ldots, \Delta_1, \ldots, \Delta_L) = \sum_{l=1}^{L} a_l^* \sum_{n=1}^{N} H_n^*(\alpha_l, \Delta_l) U_n,$$

которая автоматически оказывается вещественной.

Поиск глобального экстремума функции многих переменных представляет собой трудоёмкую в вычислительном отношении задачу, которая решается в рассматриваемом случае путём рекурсивного (по всем переменным) применения метода поиска глобального экстремума функции одной переменной, удовлетворяющей условию Липшица [6, 7].

Отметим, что квадратичное уклонение $\sigma^2(\alpha_1, \ldots, \alpha_L, \Delta_1, \ldots, \Delta_L)$ характеризует степень близости амплитудно-фазовых распределений поля, полученных в процессе измерений на апертуре антенной решётки и вычисленных в рамках принятой «плосковолновой» модели. Как следствие, значение σ^2 используется для оценки порядка модели L (числа парциальных лучей). При этом используется пороговый критерий, а именно L увеличивается до тех пор, пока квадратичное уклонение не станет меньше эмпирически установленной величины, согласованной с амплитудно-фазовой неидентичностью каналов антенно-фидерных трактов радиосистемы.

Численное моделирование показало [6], что описанная процедура обеспечивает уверенное пространственное разделение парциальных лучей сравнимых амплитуд при отношении сигнал/шум в полосе сигнала не менее 8 дБ, что в большинстве случаев в КВ диапазоне легко достигается на этапе многомерного обнаружения и выделения сигналов в спектральной области [8].

Как следствие, реализованный алгоритм обработки угломерной информации приводит к выделению за время приёма сигнала нескольких доминирующих по амплитуде мод распространения и вычислению их углов прихода в горизонтальной и вертикальной плоскостях. Измеренные углы прихода используются в дальнейшем для решения обратной задачи однопозиционного местоопределения источника радиоизлучения. При этом по измеренным углам прихода в неоднородной ионосферной плазме, пространственное распределение электронной концентрации в которой задаётся моделью IRI-2001 [11, 12], строится многоскачковая лучевая траектория [13]. Пространственная локализации источника радиоизлучения однозначно определяется только в случае, когда измерены углы прихода не менее чем двух мод распространения. В противном случае неоднозначность устраняется на основе априорной информации о локализации источника сигнала.

2. УСЛОВИЯ КОМПЛЕКСНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Комплексные экспериментальные исследования характеристик распространения КВ сигналов включали: наклонное ЛЧМ-зондирование на трассах Кипр—Ростов-на-Дону (К—Р, длина трассы 1 495 км, азимут 203,1°) и Хабаровск—Ростов-на-Дону (Х—Р, длина трассы 6 596 км, азимут 50,1°), одночастотные измерения на трассах Кипр—Ростов-на-Дону, Хабаровск—Ростов-на-Дону и Москва—Ростов-на-Дону (М—Р, длина трассы 944 км, азимут 354,3°) с синхронным определением углов прихода отдельных мод распространения. Азимуты трасс приведены относительно приёмного пункта в Ростове-на-Дону. На трассе ЛЧМ-зондирования Х—Р сеансы излучения проводились каждые 15 минут (диапазон частот 4÷30 МГц, скорость изменения частоты 100 кГц/с). На трассе ЛЧМ-зондирования К—Р сеансы излучения проводились каждые 5 минут (диапазон частот 8 ÷ 30 МГц, скорость изменения частоты 100 кГц/с). В режиме фиксированных частот наблюдения на трассе К—Р велись на частотах 11 820 и 17 870 кГц вещательной станции BBC, обладающей высокой стабильностью несущей частоты. На трассе М—Р измерения выполнялись по станции точного времени РВМ на частотах 4 996; 9 996 и 14 996 кГц. На трассе Х—Р принимался сигнал передатчика мощностью 500 Вт на частотах 11 546; 13 585; 15 626; 17 456; 19 127; 20 977; 22 904 и 24 173 кГц. Результаты наклонного зондирования в рамках данной статьи использовались только для выбора контролируемых частот и уточнения модовой структуры поля в точке приёма. Экспериментальные исследования охватывали период с июня 2002 по февраль 2003 года. В ходе эксперимента измерялись: доплеровские смещения частоты принимаемых сигналов, ширина частотного рассеяния, средний уровень сигнала, отношение сигнал/шум, коэффициент мутности ионосферы β, углы прихода отдельных мод распространения, по которым оценивалось расстояние до источника сигнала на основе решения обратной задачи однопозиционного местоопределения.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Результаты экспериментальных исследований по приёму непрерывного излучения на трассах Х—Р, М—Р и К—Р иллюстрируются табл. 1–6 [1] и рис. 1–11. В табл. 1–3 наряду с условиями измерений (дата сеанса измерений; частота излучения f_0; моды распространения, определяемые по результатам наклонного ЛЧМ-зондирования в соседние интервалы времени; время начала t_1 и окончания t_2 сеанса в часах) приведены интегральные статистические характеристики, найденные на основе многооконного метода спектрального оценивания: $\langle E\rangle$ — средняя амплитуда принимаемого сигнала на выходе РПУ в децибелах относительно разрядности АЦП; $\langle \mathrm{S/N}\rangle$ — отношение сигнал/шум в полосе сигнала; $\langle \Delta f\rangle$ — средняя полоса частотного рассеяния за сеанс, найденная по уровню 95 % мощности сигнала; $\langle \beta\rangle$ — средний за сеанс коэффициент мутности ионосферы; σ_E, $\sigma_{\mathrm{S/N}}$, $\sigma_{\Delta f}$ и σ_β — среднеквадратичные отклонения соответствующих величин за сеанс измерений. На рис. 1–6 показаны временны́е вариации лучевой структуры поля и доплеровских смещений частоты δf отдельных лучей и трансформация вида доплеровских спектров сигналов в различное время суток (все данные относятся к 27.02.03). Рис. 1–3, 5 характеризуют доплеровский спектр КВ сигналов в спокойной ионосфере (видно, что зависимости имеют устойчивое поведение). Рис. 4, 6 получены для возмущённых условий, типичных для отражений от «шероховатой» ионосферы, имеющей интенсивную мелкомасштабную структуру, поэтому доплеровский спектр имеет диффузный характер, что характеризует физическую природу отражённого сигнала. Данные табл. 1–3 дополняются рис. 7–9 (в более полном объёме), на которых изображены гистограммы распределений величин β и Δf в различное время суток.

В процессе обработки сеансов одночастотных измерений установлено, что оптимальная длина выборки для оценивания дискретных (зеркальных) компонент сигнала равна 20 с. При увеличении длины выборки существенно уменьшается вероятность обнаружения зеркальных компонент. Последнее связано с временны́м изменением частот зеркальных составляющих сигнала. Таким образом, можно считать, что найдено время стационарности ионосферного радиоканала, которое не превышает $20\div30$ с. В дальнейшем вся обработка данных проводилась при скользящем окне мгновенного спектрального анализа длиной 20 с, а смещение каждого следующего окна относительно предыдущего составляло 1 с. При этом в многооконном методе спектрального оценивания [5] использовались 6 оконных функций Слепяна, порядок функций Слепяна был равен 3, а порог вероятности для дисперсионного анализа дискретных (зеркальных) компонент в сигнале выбран равным 0,95.

Обработка полученных данных показала, что в условиях, когда трасса распространения радиоволн освещена, динамические спектры имеют отчётливую линейную структуру. Доплеровские смещения дискретных составляющих отражённого ионосферой сигнала испытывают квазипериодические флуктуации (см. рис. 1–3, 5), что отмечалось и в [14]. При этом максимальные доплеровские смещения частоты могут достигать 2 Гц. В то же время средняя ширина частотного рассеяния сигнала в условиях освещённой трассы не превышает $0{,}1\div0{,}3$ Гц, т. е. вся энергия отражённого сигнала локализована в одной–двух дискретных компонентах. Уровень рассеянной компоненты оказывается мал. Как легко видеть, для односкачковых трасс наиболее вероятные значения коэффициента мутности ионосферы β лежат в интервале $2\div4$. В то же время этот коэффициент может превышать $10\div20$, что говорит о доминирующей роли зеркальных компонент в формировании ионосферного радиоканала, по крайней мере, при освещённой радиотрассе.

С переходом к геофизическим условиям, при которых радиотрасса освещена лишь частично

[1] В таблицах приведены фрагменты обширного массива результатов измерений, при последующем анализе используется полная база данных.

Т а б л и ц а 1. Приём непрерывного излучения на трассе Хабаровск—Ростов-на-Дону

Дата	f_0, кГц	Моды	t_1 (MSK), ч	t_2 (MSK), ч	$\langle E\rangle$, дБ	σ_E, дБ	$\langle$S/N$\rangle$, дБ	$\sigma_{\mathrm{S/N}}$, дБ	$\langle\Delta f\rangle$, Гц	$\sigma_{\Delta f}$, Гц	$\langle\beta\rangle$	σ_β
30.08.02	13 585	$(3\div5)F$	21,498	21,751	21,3	2,1	44,8	4,2	0,806	0,159	0,77	0,48
27.02.03	17 456	$(2\div4)F$	11,710	11,935	20,1	3,1	58,6	4,6	0,629	0,145	0,93	0,55
28.08.02	19 127	$(2\div3)F$	19,059	19,390	27,1	1,9	62,2	3,8	0,648	0,124	0,82	0,49
27.02.03	20 977	$(2\div4)F$	11,494	11,686	23,8	4,8	62,7	5,8	0,455	0,137	1,11	0,58
10.06.02	22 904	—	12,641	12,665	10,6	1,5	20,6	2,2	2,061	1,308	1,21	0,32
28.08.02	22 904	$2F$	17,088	17,362	16,2	1,8	55,0	3,7	0,867	0,143	0,71	0,42

Т а б л и ц а 2. Приём непрерывного излучения от станции РВМ на трассе Москва—Ростов-на-Дону

Дата	f_0, кГц	t_1 (MSK), ч	t_2 (MSK), ч	$\langle E\rangle$, дБ	σ_E, дБ	$\langle$S/N$\rangle$, дБ	$\sigma_{\mathrm{S/N}}$, дБ	$\langle\Delta f\rangle$, Гц	$\sigma_{\Delta f}$, Гц	$\langle\beta\rangle$	σ_β
25.02.03	9 996	11,498	11,634	58,5	2,5	67,5	4,2	0,397	0,130	1,86	0,83
25.02.03	9 996	13,498	13,635	55,5	2,1	67,5	5,2	0,279	0,150	3,27	3,08
25.02.03	9 996	15,498	15,635	52,9	4,1	68,0	7,8	0,214	0,232	5,42	5,65
25.02.03	9 996	19,498	19,635	19,8	1,2	23,1	2,0	2,357	0,742	0,73	0,24
25.02.03	9 996	21,498	21,635	9,7	2,2	16,3	2,4	1,970	0,784	1,15	0,13
26.02.03	9 996	7,498	7,635	61,8	2,4	70,2	5,0	0,471	0,288	4,78	4,06
26.02.03	9 996	10,498	10,635	65,4	4,7	68,8	7,5	0,310	0,247	3,92	3,97
26.02.03	9 996	15,498	15,635	57,1	4,0	70,7	6,4	0,188	0,108	5,29	6,72
26.02.03	9 996	18,498	18,635	60,2	1,8	66,1	4,2	0,655	0,146	3,32	2,67
26.02.03	9 996	21,498	21,635	17,5	1,9	20,8	2,5	2,395	1,408	0,94	0,27
27.02.03	9 996	7,498	7,635	18,4	3,3	19,5	2,7	3,143	1,678	0,57	0,15
27.02.03	9 996	10,528	10,637	56,6	2,6	67,6	5,9	0,571	0,500	2,32	1,64
27.02.03	9 996	12,511	12,646	55,9	4,0	66,9	6,7	0,449	0,254	1,35	0,71
27.02.03	9 996	14,521	14,643	57,1	2,8	70,3	3,7	0,244	0,084	1,91	1,14
27.02.03	9 996	17,010	17,190	55,4	7,5	59,9	26,5	1,851	3,961	6,99	7,05

Т а б л и ц а 3. Приём непрерывного излучения от вещательной радиостанции BBC на трассе Кипр—Ростов-на-Дону

Дата	f_0, кГц	Моды	t_1 (MSK), ч	t_2 (MSK), ч	$\langle E\rangle$, дБ	σ_E, дБ	$\langle$S/N$\rangle$, дБ	$\sigma_{\mathrm{S/N}}$, дБ	$\langle\Delta f\rangle$, Гц	$\sigma_{\Delta f}$, Гц	$\langle\beta\rangle$	σ_β
02.02.03	17 870	$1F$	17,673	18,004	59,0	2,5	37,7	5,1	0,417	0,441	2,70	3,03
08.02.03	17 870	$1F$	15,141	15,480	55,1	5,0	37,7	5,6	0,435	0,366	5,76	8,90
08.02.03	17 870	$1F$	15,660	15,993	55,2	4,3	35,3	4,3	0,594	0,384	3,23	5,42
27.02.03	17 870	$1E_{\mathrm{s}}+1F$	10,205	10,519	47,7	4,0	37,2	5,9	0,567	0,397	2,98	3,63
27.02.03	17 870	$1E_{\mathrm{s}}+1F$	10,652	10,996	50,9	3,5	40,4	5,4	0,298	0,249	3,09	3,01
27.02.03	17 870	$1E_{\mathrm{s}}+1F$	12,158	12,501	48,3	4,9	37,9	6,7	0,583	0,535	4,44	6,26
27.02.03	17 870	$1E_{\mathrm{s}}+1F$	12,667	13,004	45,1	3,8	40,6	6,7	0,568	0,360	4,18	6,36
27.02.03	17 870	$1E_{\mathrm{s}}+1F$	14,201	14,515	48,5	4,2	36,1	4,5	0,491	0,292	2,84	5,99
27.02.03	17 870	$1F$	16,288	16,515	40,4	1,8	52,2	3,2	0,888	0,246	1,03	0,54
27.02.03	17 870	$1F$	16,656	17,011	40,8	2,0	53,8	3,5	1,266	0,293	1,08	0,57

Таблица 4. Результаты измерения углов прихода на трассе Хабаровск—Ростов-на-Дону

Дата	Время (MSK), ч	Частота, МГц	Мода	$\langle\alpha\rangle$, град	σ_α, град	$\langle\Delta\rangle$, град	σ_Δ, град	$\langle S\rangle$, км	σ_S, км
27.02.03	11,237	24,173	$2F$	50,4	0,31	5,58	0,38	5 300,7	135,8
27.02.03	9,769	20,977	$3F$	50,4	0,74	8,99	0,79	6 259,5	275,9
27.02.03	9,769	20,977	$4F$	50,9	0,70	12,50	1,04	6 954,0	276,0
27.02.03	11,746	17,456	$2F$	50,8	0,62	5,38	0,23	5 245,7	123,6
27.02.03	11,746	17,456	$3F$	50,4	0,61	8,75	0,53	6 238,6	225,9
27.02.03	11,746	17,456	$4F$	50,8	0,67	12,47	1,21	6 629,2	385,6
27.02.03	13,484	17,456	$3F$	50,5	0,76	9,71	0,64	6 104,5	337,5
27.02.03	13,848	13,585	$3F$	49,2	0,80	11,69	0,57	5 336,4	279,4
27.02.03	13,848	13,585	$4F$	50,1	0,97	17,11	0,96	5 087,8	210,4
27.02.03	13,848	13,585	$5F$	50,2	0,91	20,55	0,72	5 574,0	135,0
27.02.03	13,848	13,585	$6F$	50,4	1,04	24,66	1,91	5 904,6	309,9
27.02.03	15,190	13,585	$5F$	50,4	0,91	24,18	2,43	5 022,0	331,5
27.02.03	15,481	11,546	$4F$	49,8	1,00	17,56	0,82	4 779,0	160,0
27.02.03	15,481	11,546	$5F$	49,8	0,95	20,81	0,91	5 292,0	187,2
27.02.03	15,481	11,546	$6F$	50,0	1,10	26,79	1,23	5 199,0	185,1

Таблица 5. Результаты измерения углов прихода на трассе Москва—Ростов-на-Дону

Дата	Время (MSK), ч	Частота, МГц	Мода (расчёт)	$\langle\alpha\rangle$, град	σ_α, град	$\langle\Delta\rangle$, град	σ_Δ, град	$\langle S\rangle$, км	σ_S, км
25.02.03	11,967	9,996	$1F$	351,44	0,8	23,6	2,7	908,8	83,5
25.02.03	17,541	9,996	$1F$	351,14	0,3	23,1	0,7	921,2	18,6
25.02.03	11,967	9,996	$2F$	354,09	2,3	52,8	3,5	807,1	85,5
25.02.03	14,867	9,996	$2F$	351,01	1,8	48,5	4,7	930,2	118,6
25.02.03	15,834	9,996	$2F$	350,43	1,8	54,6	0,7	787,1	17,2
26.02.03	11,967	9,996	$1F$	352,14	0,8	24,9	2,8	889,0	86,0
26.02.03	15,037	9,996	$1F$	351,56	0,9	22,9	2,3	979,1	84,4
26.02.03	13,969	9,996	$2F$	352,30	2,2	50,8	4,0	878,8	101,3
26.02.03	15,037	9,996	$2F$	351,16	2,7	50,5	3,8	886,7	97,4
27.02.03	12,006	14,996	$1F$	352,54	0,4	26,2	1,7	985,0	43,2
27.02.03	13,970	14,996	$1F$	353,06	0,6	27,9	2,2	968,7	49,9
27.02.03	15,037	14,996	$1F$	353,73	0,7	27,6	1,2	970,3	29,7
27.02.03	13,970	4,996	$2F$	352,45	1,8	40,5	2,0	970,6	94,9
27.02.03	15,037	4,996	$2F$	350,81	3,5	40,5	2,7	922,4	97,8

Таблица 6. Результаты измерения углов прихода на трассе Кипр—Ростов-на-Дону

Дата	Время (MSK), ч	Частота, МГц	Мода	$\langle\alpha\rangle$, град	σ_α, град	$\langle\Delta\rangle$, град	σ_Δ, град	$\langle S\rangle$, км	σ_S, км
14.02.03	17,33	17,870	$1F$	201,3	0,4	14,0	1,4	1 551,3	89,7
14.02.03	17,53	11,820	$1F$	201,7	0,4	12,0	2,1	1 520,1	167,1
25.02.03	17,82	11,820	$1F$	201,9	0,2	10,8	1,6	1 426,0	102,0
25.02.03	17,69	17,870	$1F$	201,0	0,5	14,3	1,7	1 498,4	83,3
26.02.03	17,33	17,870	$1F$	202,4	0,6	14,4	1,9	1 495,6	115,6
26.02.03	17,33	11,820	$1F$	202,7	0,4	11,0	2,0	1 410,5	158,3
27.02.03	10,33	17,870	$1F$	202,2	0,7	14,7	1,7	1 367,4	88,7
27.02.03	13,00	17,870	$1F$	199,5	0,7	16,4	2,0	1 517,4	134,9
27.02.03	15,00	17,870	$1F$	199,7	0,4	14,9	1,2	1 623,2	90,3

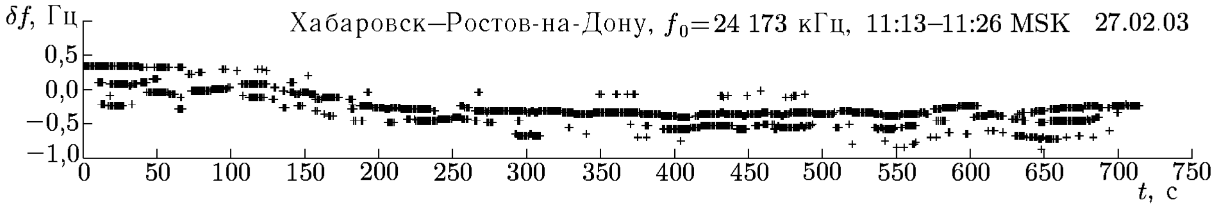

Рис. 1

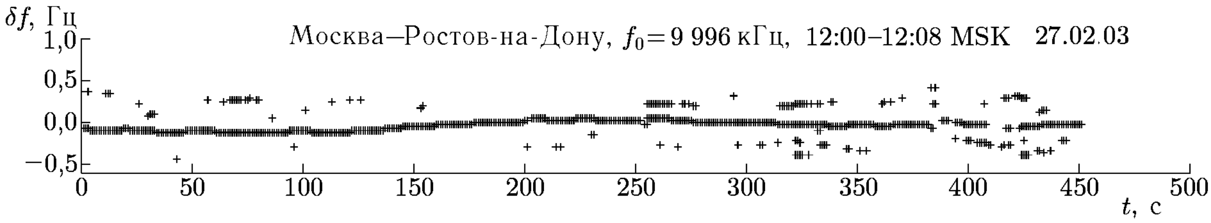

Рис. 2

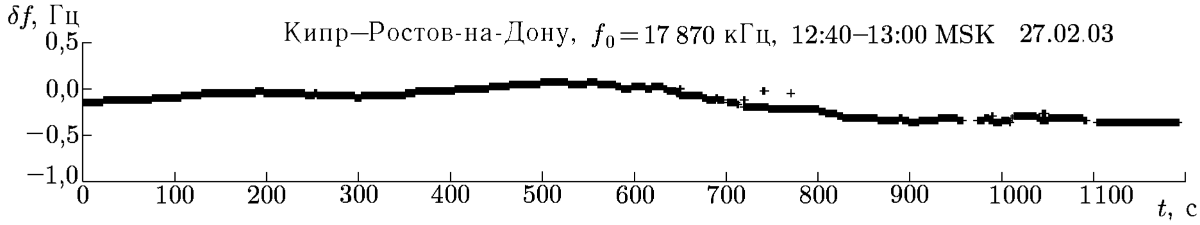

Рис. 3

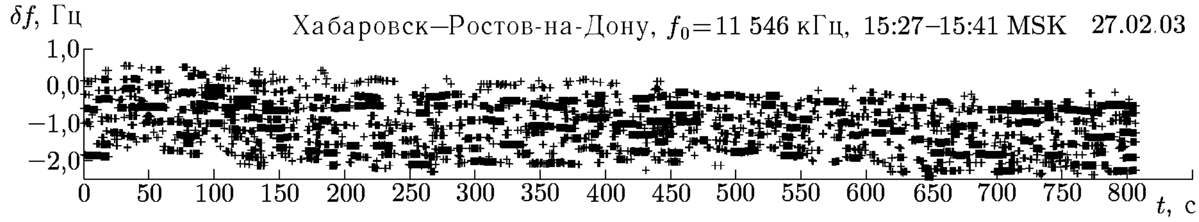

Рис. 4

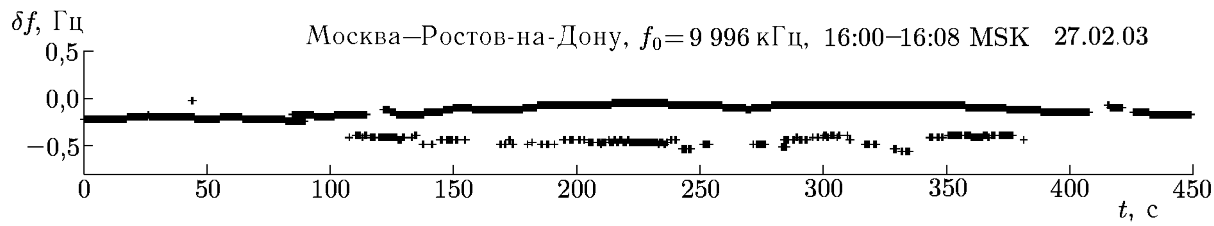

Рис. 5

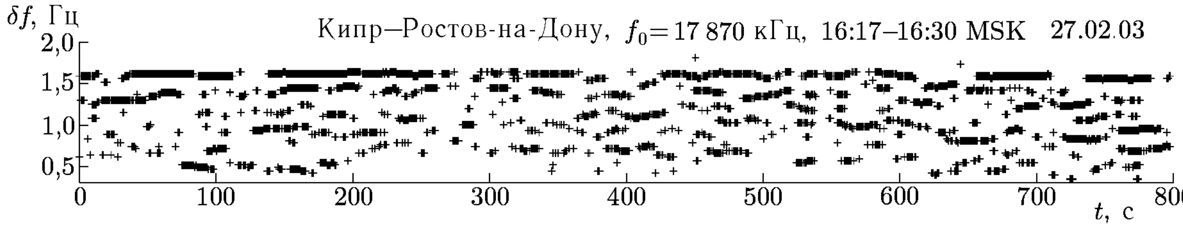

Рис. 6

(закат) или находится в неосвещённой области, доплеровские спектры трансформируются, приближаясь к форме, характерной для отражений от среды с мелкомасштабными нестационарными структурами (рис. 4, 6). При этом временны́е вариации доплеровских смещений частоты сохраняют в среднем детерминированный тренд, обусловленный движением терминатора. Одновременно происходит синхронное уширение диапазона частотного рассеяния Δf и, как следствие, уменьшение коэффициента мутности ионосферы β.

Гистограммы, иллюстрирующие поведение Δf и β для дневных и сумеречных условий показаны на рис. 7–9 для всех трёх исследуемых трасс (левые части рисунков относятся к β, правые — к Δf). Максимальный наблюдаемый диапазон частотного рассеяния Δf в этих условиях достигает $1\div 4$ Гц. Тем не менее, найденные значения Δf остаются существенно меньше приведённых в [2]. Соответственно, $\langle\beta\rangle$ уменьшается, становясь меньше единицы, однако среднее значение коэффициента мутности ионосферы не падает ниже 0,6, что по-прежнему свидетельствует о существенном вкладе зеркальных компонент сигнала в формирование канала декаметровых радиоволн. В подтверждение сказанного можно привести значения $\langle\beta\rangle$ для частоты 19 127 кГц на трассе Х—Р: в условиях освещённой радиотрассы $\langle\beta\rangle = 1{,}53$ летом и $\langle\beta\rangle = 0{,}97$ зимой, однако в сумеречные часы средний коэффициент мутности уменьшался до $0{,}68\div 0{,}82$. Аналогичная закономерность прослеживается и на частоте 17 456 кГц, когда значение $\langle\beta\rangle$ уменьшается с 0,95 днём до $0{,}71\div 0{,}78$ в вечерние часы.

В ещё большей степени указанные закономерности проявляются на более короткой (односкачковой) трассе М—Р. Здесь, как видно из табл. 2 и рис. 7, значения β при переходе от дневных условий к вечерним могут изменяться почти на порядок. В вечерние часы суток на трассе М—Р наблюдается прохождение терминатора, и, как следствие, должен увеличиваться вклад рассеянной компоненты в суммарную энергию сигнала. Тем не менее при сохранении указанной тенденции (см. табл. 2 и рис. 7*г*) $\langle\beta\rangle$ составляет не менее 0,6, что неоспоримо свидетельствует о существенной доли дискретных (зеркальных) компонент в формировании ионосферного канала даже в условиях, когда рассеянная компонента может оказаться преобладающей.

Отметим, что с ростом магнитной возмущённости наблюдается тенденция уменьшения β. Такой эффект достаточно чётко проявился в дневные часы (12–15 MSK) на трассе Москва—Ростов-на-Дону в период увеличения магнитной активности 25–27 февраля 2003 г., когда средние значения коэффициента мутности β и суммарного (суточного) индекса ΣK_{p} составляли $\langle\beta\rangle = 2{,}77$; 2,44; 1,63 и $\Sigma K_{\mathrm{p}} = 13$, 24, 29 для 25, 26 и 27 февраля соответственно.

Что касается сезонных вариаций $\langle\beta\rangle$, то наблюдения сигналов станции РВМ на всех излучаемых частотах не выявили каких-либо регулярных закономерностей.

Отметим, что приведённые выше значения β следует рассматривать только как оценку снизу, т. к. при малых относительных доплеровских сдвигах частоты дискретные компоненты могут не разделяться, и вследствие поляризационного замирания объединённая спектральная линия может иметь существенно меньшую амплитуду, чем суммарная энергия разделённых компонент. В сумеречных и неосвещённых условиях распространения дискретная лучевая структура поля в точке приёма значительно усложняется. При этом из-за малого столкновительного поглощения в пределах полосы частотного рассеяния присутствует множество дискретных компонент с близкими амплитудами. Не удивительно, что в таких условиях оценки β могут оказаться заниженными.

Обращает на себя внимание и изменение коэффициента мутности в зависимости от протяжённости радиотрассы (скорее, от порядка основной моды распространения). Чтобы убедиться в этом, достаточно сравнить данные табл. 1–3, а также гистограммы на рис. 7–9. На многоскачковой радиотрассе Х—Р $\langle\beta\rangle$ не превышает 1,56, а наиболее вероятные значения локализованы в интервале $0{,}9\div 1{,}2$. Таким образом, на многоскачковых радиотрассах вклад рассеянной компоненты в формирование ионосферного радиоканала возрастает. Указанная особенность хорошо

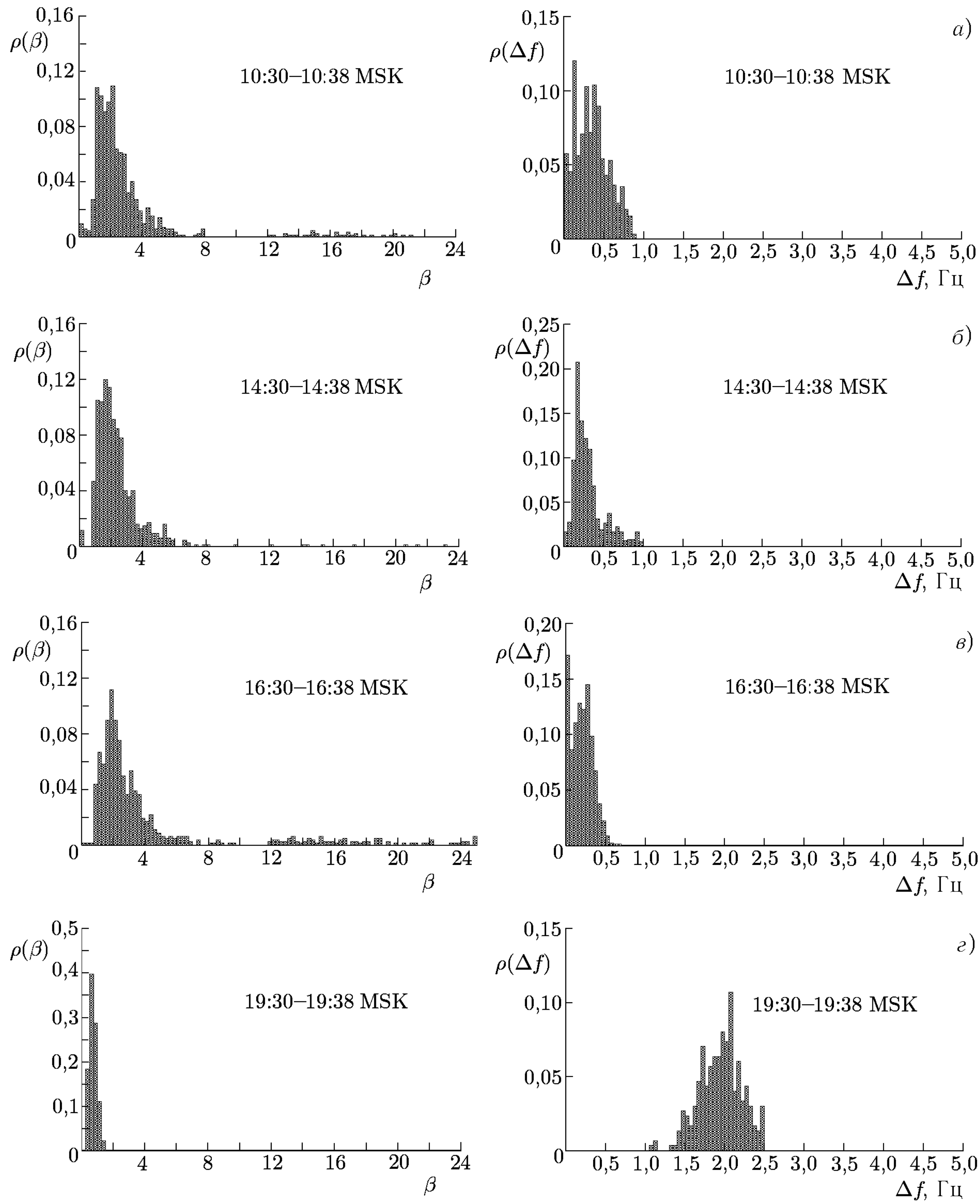

Рис. 7. Распределения коэффициента мутности ионосферы β и частотного рассеяния Δf, полученные 25 и 26 февраля 2003 года в различное время суток на трассе Москва—Ростов-на-Дону при $f_0 = 9\,996$ кГц

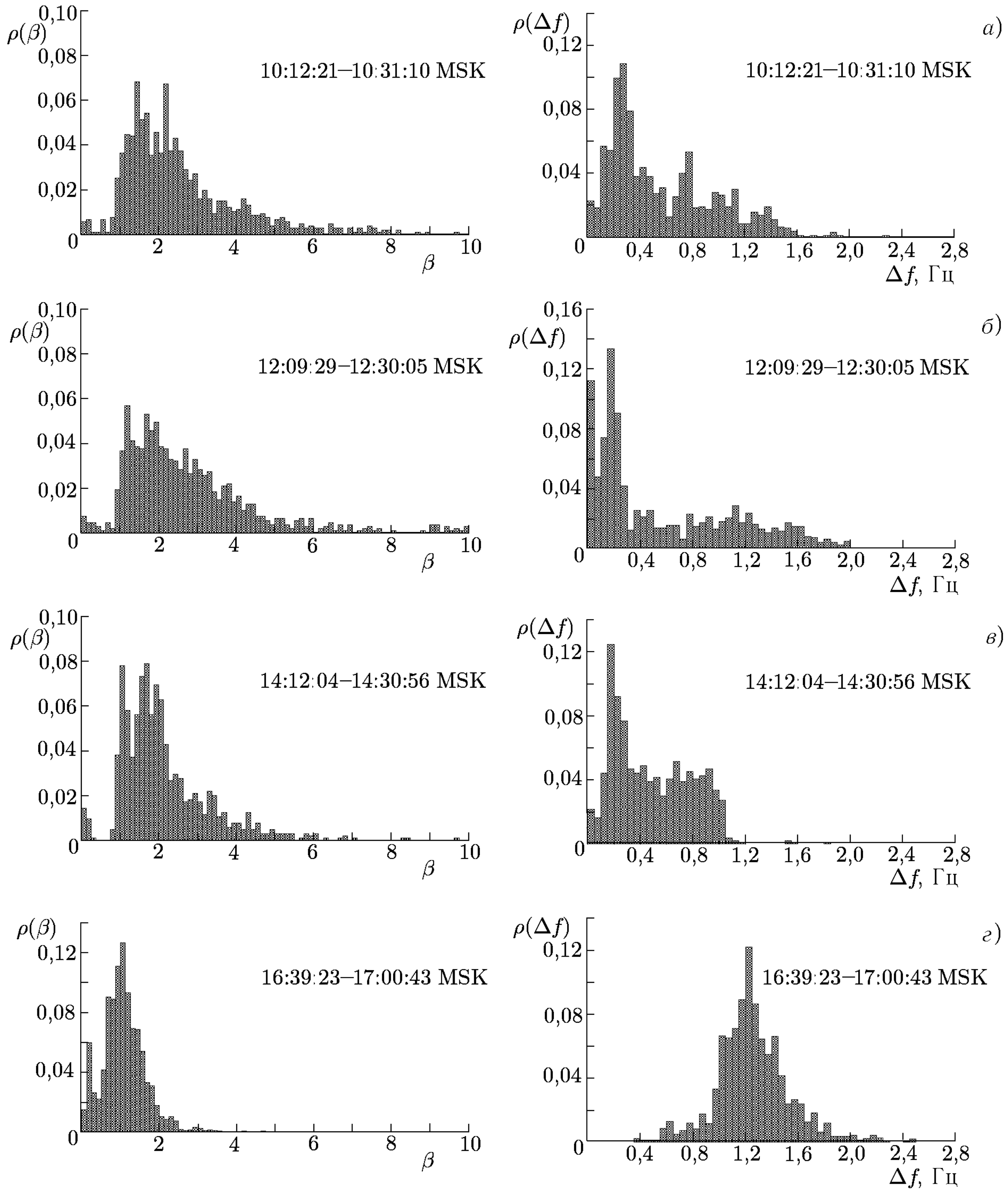

Рис. 8. Распределения коэффициента мутности ионосферы β и частотного рассеяния Δf, полученные 27 февраля 2003 года в различное время суток на трассе Кипр—Ростов-на-Дону при $f_0 = 17\,870$ кГц

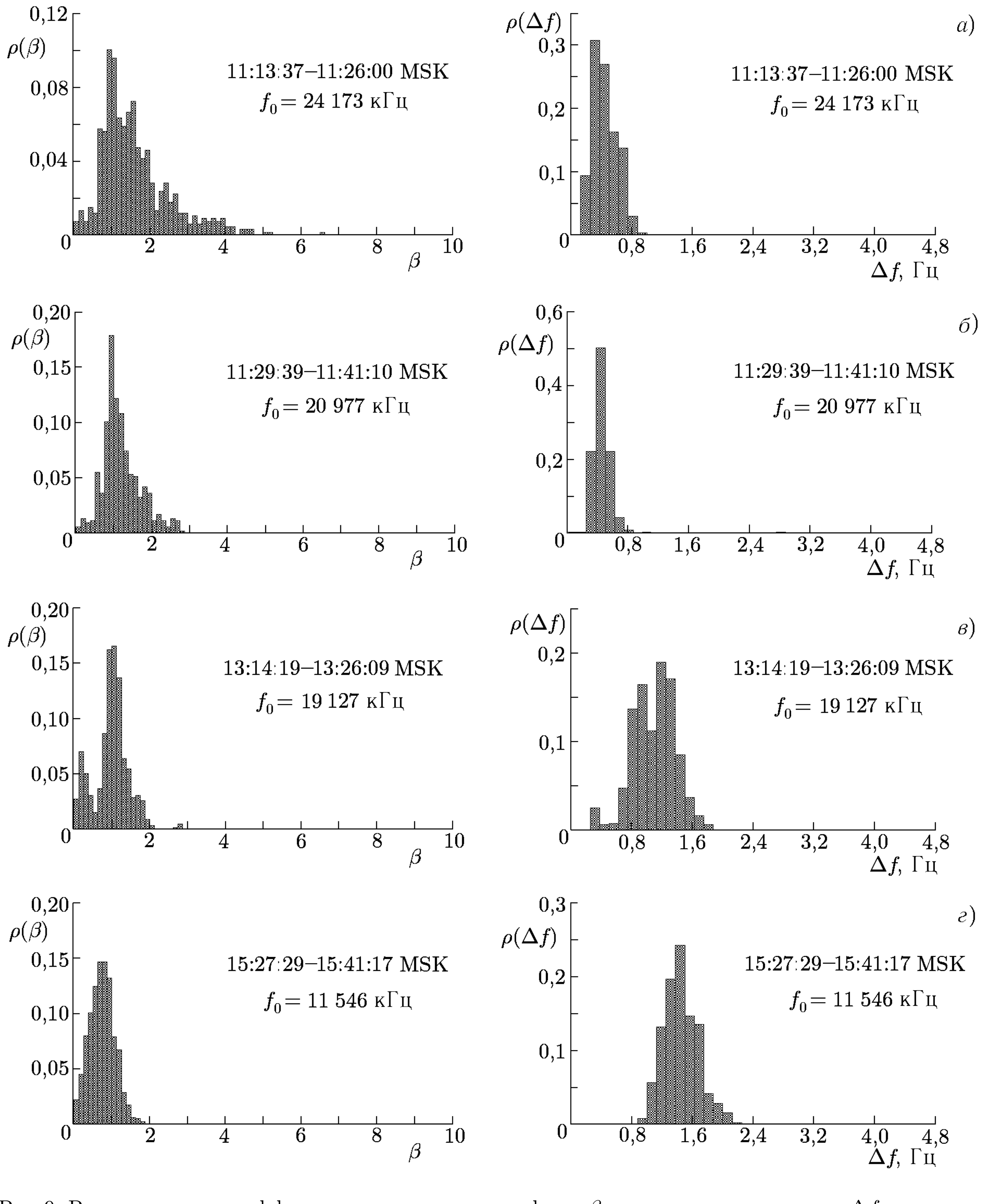

Рис. 9. Распределения коэффициента мутности ионосферы β и частотного рассеяния Δf, полученные 27 февраля 2003 года в различное время суток на трассе Хабаровск—Ростов-на-Дону

коррелирует с видом наклонных ЛЧМ-ионограмм, полученных в процессе эксперимента на трассах Х—Р и К—Р. Односкачковые моды распространения, наблюдаемые на трассе К—Р, не имеют диффузности, и на них чётко прослеживаются следы нижних и верних лучей для обеих магнитоионных компонент. При переходе к двухскачковой моде следы приобретают форму с характерными признаками диффузности, уширяясь вдоль оси групповых задержек. Аналогичная картина видна на следах дистанционно-частотных характеристик (ДЧХ) мод $2F$, $3F$, $4F$ на трассе Х—Р. Уже на следах моды $2F$ трудно обнаружить магнитоионное расщепление, а ДЧХ с увеличением порядка моды всё в большей степени проявляют признаки диффузности. Последнее свойство может быть объяснено влиянием нескольких факторов, среди которых нужно отметить следующие:

— многократные отражения от неплоской земной поверхности приводят к тому, что после каждого отражения увеличивается поперечный размер лучевой трубки. При этом следует учитывать, что при малых углах падения (что характерно для длинных трасс) размер зоны Френеля, формирующей отражённый луч, сильно вытянут вдоль трассы, и отражение происходит как бы от шероховатой поверхности. Необходимо также учесть, что сильные неровности земной поверхности могут приводить к множественным лучевым траекториям при одном порядке моды распространения;

— влияние среднемасштабных перемещающихся ионосферных возмущений. На односкачковых модах по наблюдениям на трассе К—Р видны серпообразные структуры, перемещающиеся с течением времени сверху вниз. Как следствие, возникает внутримодовая многолучёвость (по каждой магнитоионной компоненте), которая по частоте, особенно в восходно-закатные часы, может занимать интервал до $1\div 2$ МГц. Для мод второго и более высоких порядков интервалы внутримодовой многолучёвости, возникающие на различных частотных участках, могут приводить к эффекту кажущейся диффузности ДЧХ;

— влияние мелкомасштабной неоднородности ионосферы, за счёт которой при увеличении оптической длины пути луча в среде возрастает вклад рассеянной компоненты.

Таким образом, обнаруженное уменьшение $\langle\beta\rangle$ с увеличением порядка моды распространения вовсе не обязательно обусловлено только рассеянием на мелкомасштабных структурах ионосферы, а может быть следствием первых двух факторов. Кроме того, уменьшение $\langle\beta\rangle$ на многоскачковых трассах может быть обусловлено интерференцией нескольких зеркальных компонент, соответствующих различным модам распространения.

Тем не менее коэффициент мутности ионосферы никогда не становится существенно меньше единицы, как это утверждается в [2]. Установленные в процессе эксперимента значения β значительно ближе к величинам, которые вычисляются на основе анализа функций распределения флуктуаций поля в точке приёма [1]. В этом смысле применённый спектральный способ оценки коэффициента мутности ионосферы не противоречит уже известным статистическим методам.

Приведённые в табл. 1–3 амплитуды суммарного сигнала и отношения сигнал/шум могут быть использованы для тестирования разрабатываемых методов прогнозирования и расчёта КВ радиотрасс.

В табл. 4–6 показаны фрагменты результатов измерений углов прихода отдельных мод распространения на перечисленных ранее трассах и результаты решения обратной задачи одноточечного местоопределения с использованием прогнозируемого пространственного распределения электронной концентрации в ионосфере на основе модели IRI-2001. Здесь, помимо условий измерений (дата сеанса, время начала сеанса, принимаемая частота), приведены следующие характеристики: мода распространения, найденная на основе результатов наклонного ЛЧМ-зондирования и результатов однопозиционного местоопределения; $\langle\alpha\rangle$ — средний за сеанс измерений пеленг принимаемого сигнала; $\langle\Delta\rangle$ — средний за сеанс измерений угол места; $\langle S\rangle$ — средняя дальность до источника радиоизлучения, вычисленная на основе решения обратной задачи однопозиционного местоопределения по углам прихода соответствующей моды распространения; σ_α, σ_Δ, σ_S — среднеквадратичные отклонения соответствующих величин. На рис. 10, 11 показаны временны́е изменения углов места принимаемых мод распространения для нескольких сеансов измерений, а вертикальными линиями отмечены среднеквадратичные погрешности. Отметим, что один сеанс

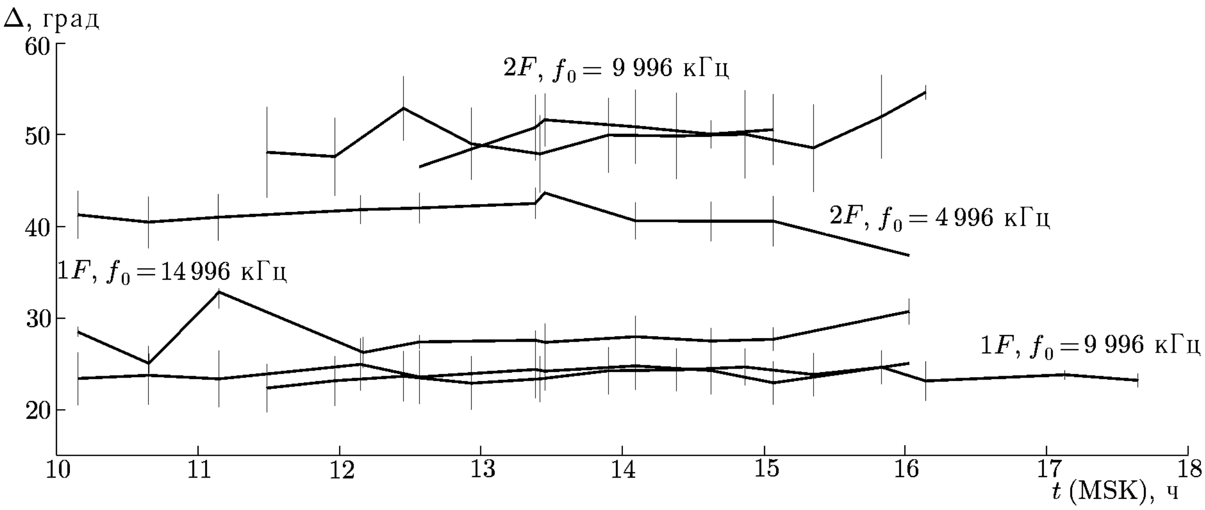

Рис. 10. Измерения углов места принимаемых мод распространения на трассе Москва—Ростов-на-Дону для нескольких сеансов измерений 25–27 февраля 2003 года

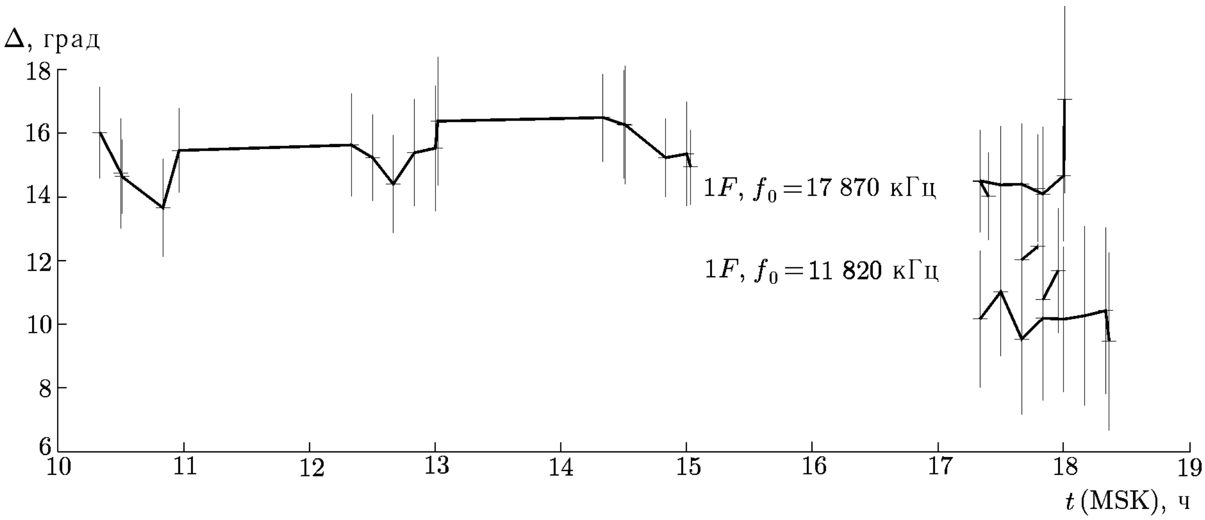

Рис. 11. Измерения углов места принимаемых мод распространения на трассе Кипр—Ростов-на-Дону для нескольких сеансов измерений 14, 25–27 февраля 2003 года

измерений, по которому определялись средние угловые характеристики, составлял около 600 с; за указанное время удавалось получить $1\,500\div2\,000$ значений углов прихода.

На рисунках прослеживаются квазипериодические флуктуации углов места, сглаженные усреднением и обусловленные, видимо, влиянием перемещающихся ионосферных возмущений. Значительные дисперсии углов места обуславливают два фактора:

— угловое разнесение различных мод распространения (и тем более магнитоионных компонент) не превышает ширины диаграммы направленности пеленгатора в вертикальной плоскости. Разрешение отдельных мод распространения достигается только за счёт применения пространственного параметрического метода сверхразрешения [10];

— сама задача сверхразрешения является в строгом смысле математически некорректной. Как следствие, изменения входных данных (измеренных комплексных амплитуд сигналов с антенных элементов решётки), обусловленные влиянием помех и поляризационным замиранием приводят к существенным случайным погрешностям в определении углов прихода отдельных мод распространения. При этом следует учитывать, что магнитоионные компоненты разделить не удаётся.

Полученные экспериментальные результаты могут быть использованы, прежде всего, для тестирования методов расчёта и прогнозирования радиотрасс. В связи с тем, что углы прихода в вертикальной плоскости весьма чувствительны к пространственному распределению электронной концентрации, полученные данные могут использоваться также для оценки качества ионосферных прогнозов. Подобная попытка оценки возможности ионосферного прогноза пространственного распределения электронной концентрации на основе модели ионосферы IRI-2001 сделана и в данной статье. Для этого по измеренным углам прихода решалась обратная задача местоопределения источника радиоизлучения. При измерении углов прихода нескольких мод распространения дальность до источника радиоизлучения оценивалась по моде с наибольшей мощностью, а остальные использовались только для устранения неоднозначности локализации источника. Полученные результаты приведены в табл. 4–6, где $\langle S \rangle$ даны для всех измеренных мод распространения, хотя при определении координат источника радиоизлучения обычно используется, как уже отмечалось, доминирующая по мощности мода. Анализ полученных результатов позволяет утверждать, что использование долгосрочного ионосферного прогноза на основе модели IRI-2001 при решении обратной задачи однопозиционного местоопределения для односкачковых трасс даёт оценку дальности до источника радиоизлучения с погрешностью не более 10 %. Следует отметить, что на многоскачковых трассах важную роль играет рельеф отражающей поверхности. Этот фактор может вносить дополнительную погрешность при определении местоположения источника радиоизлучения по измерению углов прихода и решению обратной задачи ионосферного распространения КВ сигналов. Заметим, что использование наряду с измерениями углов прихода результатов измерений абсолютного времени распространения сигналов станций наклонного ЛЧМ-зондирования, синхронизуемых с помощью навигационных систем GPS—ГЛОНАСС, позволит повысить точность однопозиционного местоопределения. Такое исследование планируется сделать в следующей работе.

ВЫВОДЫ

За период с июня 2002 года по февраль 2003 года проведены комплексные измерения основных характеристик распространения (ДЧХ, угловых, энергетических, спектральных и статистических) КВ сигналов на среднеширотных радиотрассах протяжённостью $1\,000 \div 6\,500$ км.

1. Показано, что все характеристики распространения (ДЧХ, спектральные и угловые) несут информацию о среднемасштабных перемещающихся ионосферных возмущениях.

2. Оценены диапазоны вариаций доплеровского смещения частоты, которые в экспериментах не превышали 2 Гц.

3. Показано, что диапазон частотного рассеяния по уровню 95 % мощности сигнала минимален для освещённой трассы и не превышает $0{,}1 \div 0{,}3$ Гц. В закатные часы или при неравномерном освещении трассы диапазон частотного рассеяния возрастает, но никогда не превышает 4 Гц, что значительно меньше приводимых в литературе значений.

4. Изучено поведение коэффициента мутности ионосферы, характеризующего вклад рассеянной компоненты поля в формирование ионосферного радиоканала. Показано, что на односкачковых трассах наиболее вероятные значения коэффициента мутности в дневное время лежат в диапазоне $2 \div 4$, но могут достигать и на порядок бо́льших величин. В сумеречные часы коэффициент мутности уменьшается, но не становится меньше 0,6. Аналогичную тенденцию к уменьшению коэффициент мутности сохраняет при увеличении протяжённости трассы или уменьшении частоты.

5. Показано, что в формировании декаметрового радиоканала доминирующее влияние оказывают дискретные (зеркальные) компоненты сигнала, отражённого ионосферой.

6. Установлено, что использование пространственного распределения ионизации, прогнозируемого моделью IRI-2001, на односкачковых трассах позволяет определять координаты источника излучения с погрешностью, не превышающей 10 %.

В заключение заметим, что реализованный в работе комплексный подход с использованием различных методов оценивания характеристик коротковолновых сигналов позволяет получать набор данных, необходимых для разработки детальной модели ионосферного коротковолнового радиоканала. Результаты исследований могут быть использованы для калибровки и коррекции современных моделей ионосферы, а также для повышения качества прогнозирования ионосферного канала и обеспечения эффективной работы радиоэлектронных систем различного назначения.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 02–05–64383).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Альперт Я. Л. Распространение электромагнитных волн и ионосфера. М.: Наука, 1972. 563 с.
2. Денисенко П. Ф., Кулешов Г. И., Сказик А. И. // Геомагнетизм и аэрономия. 2000. Т. 40, № 5. С. 132.
3. Cannon P. S., Angling M. J., Lundborg B. // The Review of Radio Science 1999–2002 / Ed. by W. Ross Stone. IEEE Press, 2002. P. 597.
4. Пахотин В. А., Иванова С. В., Марченко И. В., Бессонов В. А. // Труды V Международной научно-технической конф. «Радиолокация, навигация, связь», Воронеж, 20–23 апреля 1999 г. С. 1 206.
5. Томсон Д. Дж. // ТИИЭР. 1982. Т. 70, № 9. С. 171.
6. Вертоградов Г. Г., Шевченко В. Н., Иванов Н. М. // Тезисы док. XIX Всероссийской конф. «Распространение радиоволн», Казань, 22–25 июня 1999 г. С. 122.
7. Пат. № 2150122. Способ определения двумерного пеленга и частоты источников радиоизлучения / Шевченко В. Н., Вертоградов Г. Г., Иванов Н. М. Москва, 27 мая 2000 г.
8. Пат. № 2190236. Способ обнаружения и определения двухмерного пеленга и частоты источников радиоизлучения / Шевченко В. Н., Емельянов Г. С., Вертоградов Г. Г. Москва, 27 сентября 2002 г.
9. Вертоградов Г. Г., Шевченко В. Н., Иванов Н. М. // Тезисы док. V Международной научно-технической конф. «Радиолокация, навигация, связь», Воронеж, 20–23 апреля 1999 г. Т. 2. С. 1 188.
10. Ivanov N. M., Shevchenko V. N., Vertogradov G. G. // Millennium Conference on Antennas and Propagation. Davos, 2000. V. 2. P. 21.
11. Bilitza D. // The Review of Radio Science 1999–2002 / Ed. by W. Ross Stone. IEEE Press, 2002. P. 625.
12. Bilitza D. // Radio Sci. 2001. V. 36, No. 2. P. 261.
13. Барабашов Б. Г., Вертоградов Г. Г. // Математическое моделирование. 1996. С. 3.
14. Насыров А. М., Насыров И. А., Агафонников Ю. М., Черкашин Ю. Н. // Тезисы док. XIX Всероссийской конф. «Распространение радиоволн», Казань, 22–25 июня 1999 г. С. 125.

[1] Ростовский государственный университет,
г. Ростов-на-Дону;
[2] Научно-исследовательский радиофизический институт,
г. Нижний Новгород;
[3] Институт космофизических исследований
и распространения радиоволн ДВО РАН, п. Паратунка,
Камчатская область, Россия

Поступила в редакцию
1 июля 2003 г.

COMPLEX EXPERIMENTAL EVALUATING OF HF-SIGNAL CHARACTERISTICS ON MID-LATITUDE PATHS WITH DIFFERENT LENGTHS AND ORIENTATIONS

G. G. Vertogradov, Yu. P. Myatezhnikov, V. P. Uryadov, and $\boxed{\textit{S. V. Rozanov}}$

We outline a complex approach to measuring distance–frequency, angular, spectral, and statistical characteristics of HF signals and present the results of experimental studies of the turbidity coefficient, the range of spread frequency, the Doppler-shift variations, the azimuth, and the elevation angle in a wide frequency range for Khabarovsk – Rostov-on-Don, Moscow – Rostov-on-Don, and Cyprus – Rostov-on-Don sounding paths under various geophysical conditions. It is shown that the most probable values of the turbidity coefficient for one-hop paths in the afternoon lay in a range $2 \div 4$. The turbidity coefficient decreases to about 0.6 in the twilight hours. It is found that the turbidity coefficient tends to decrease with increasing path length. It is established that the average spread-frequency range at the 95 % level of the signal energy is minimum for an illuminated path and does not exceed $0.1 \div 0.3$ Hz. The range of spread frequency increases in the sunset hours or under nonuniform-illumination consitions, but does not exceed 4 Hz. The estimated range of Doppler-shift variations, caused mainly by the effect of mesoscale travelling ionospheric disturbances, does not exceed 2 Hz. The method of one-position location of a radiation source is tested using the results of angular measurements and the IRI-2001 ionospheric model.

УДК 537.874+534.87

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ДИСТАНЦИОННОЕ ЗОНДИРОВАНИЕ АТМОСФЕРНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

В. О. Рапопорт, Н. С. Беллюстин, В. А. Зиничев, Н. А. Митяков, Н. А. Рыжов, Ю. А. Сазонов

В работе обсуждаются проблемы исследования атмосферной турбулентности методом акустической локации. Приведены результаты экспериментов по зондированию области атмосферы в пос. Зимёнки Нижегородской области. Высота зондирования составила около 500 м. Полученное в эксперименте распределение скоростей в объёме рассеяния удовлетворительно описывается однопараметрическим пуассоновским распределением. Результаты численного моделирования хорошо соответствуют результатам натурного эксперимента.

ВВЕДЕНИЕ

Методы акустического зондирования начали развиваться с теоретических работ Обухова [1] и экспериментов Каллистратовой [2], а в последние десятилетия заняли ключевое место в атмосферных исследованиях; базовые результаты содержатся в монографиях [3–5]. Во всех работах, связанных с исследованием динамики атмосферы, важное место занимает изучение турбулентных процессов. В настоящее время существуют модели турбулентности, полученные в предположении стационарности и эргодичности процесса (например, Колмогоровская модель [3]).

Одной из целей нашей работы являлась проверка гипотезы Тейлора о вмороженности турбулентных неоднородностей [6] в применении к атмосфере. Проведённый с этой целью анализ спектров рассеянного акустического сигнала выявил особенности статистики динамических спектров. Оказалось, что ансамбль спектров рассеянного сигнала имеет пуассоновское распределение по ширине спектра.

Эксперимент по зондированию атмосферы с помощью бистатического акустического локатора проводился летом 2001 года на полигоне НИРФИ «Зимёнки», расположенном в 25 км восточнее Нижнего Новгорода.

МЕТОДИКА И РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТА

Наиболее простой схемой для экспериментов по дистанционному зондированию атмосферы является моностатическая схема зондирования, когда излучатель и приёмник звукового сигнала расположены в одной точке. Известно, что индикатриса рассеяния звука на вихревых неоднородностях такова, что интенсивность сигнала, рассеянного в обратном направлении, равна нулю. В этом случае речь может идти о диагностике только температурных флуктуаций. Более полную информацию об атмосферных неоднородностях можно получить с использованием бистатической схемы зондирования с разнесёнными в пространстве излучателем и приёмником. При этом область пересечения их диаграмм направленности принято называть объёмом рассеяния, информацию о котором несёт принимаемый рассеянный сигнал. Именно такая схема использовалась нами в серии экспериментов, проведённых летом 2001 года на многолучевом содаре. Геометрия эксперимента показана на рис. 1. Луч передающей антенны был направлен вертикально, приёмная антенна имела 4 независимых луча, высота рассеивающей области составляла 500 м. Параметры акустического локатора приведены в табл. 1 (см. также [7]).

Таблица 1

Ширина луча передающей антенны	8°
Ширина луча приёмной антенны	2,5°÷3°
Количество лучей приёмной антенны	4
Углы между лучами приёмной антенны	2,5°÷3°
Рабочая частота содара f_0	576 Гц
Длительность зондирующего импульса	2 с
Период повторения импульсов	8 с
Расстояние между приёмной и передающей антеннами	425 м

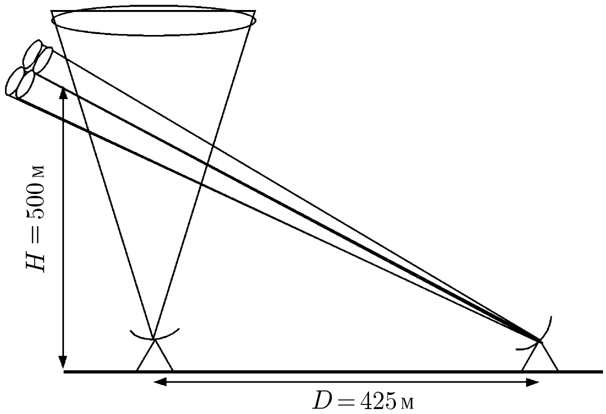

Рис. 1

Наблюдения проводились сеансами с длительностью 1 час и охватывали практически весь световой день, т. е. всё то время, когда наблюдался рассеянный сигнал. В дальнейшем в качестве примера для обработки использовались данные сеанса, проведённого 10 июля.

Перейдём к описанию методики обработки экспериментальных данных. При скорости звука 340 м/с длина зондирующего импульса продолжительностью 2 с составляет 680 м. Этот размер существенно больше размера объёма рассеяния (около 60 м). В этом случае продолжительность приёма рассеянного сигнала должна быть порядка длительности зондирующего импульса. Запаздывание принимаемого сигнала по отношению к зондирующему определяется геометрией эксперимента и составляет около 2,5 с. Для обработки рассеянного сигнала для каждого восьмисекундного периода (временной интервал между зондирующими импульсами) использовались выборки (массивы данных) длительностью 2 с с оптимальной задержкой 2,5 с. Часть данных не использовалась вследствие высокого уровня помех. Практически для сеанса с длительностью 1 час можно было получить последовательность из 400 выборок. Принимаемый сигнал регистрируется со скоростью 2 048 отсчётов в секунду. Результатом первичной обработки сигнала является динамический спектр в диапазоне от 0 до 1 024 Гц с частотным разрешением 0,5 Гц. Спектр рассеянного сигнала характеризует распределение скоростей в объёме рассеяния. Частотный сдвиг рассеянного сигнала связан со скоростью рассеивающего центра $\mathbf{v}$ соотношением $f - f_0 = \mathbf{kv}$ (доплеровское смещение частоты), где $\mathbf{k}$ — волновой вектор падающей волны. На рис. 2 приведена последовательность спектров рассеянного сигнала для серии из 30 последовательных реализаций. Форма спектра для каждой реализации соответствует одной линии на рис. 2, а последовательность спектров (линий) характеризует динамику движений в объёме рассеяния.

Обычно предполагается, что турбулентные неоднородности различных масштабов перемещаются с одной скоростью — скоростью ветра (гипотеза Тейлора [6]). В рамках этого предположения для каждой реализации мы должны наблюдать квазимонохроматическую линию. Однако в эксперименте мы наблюдаем расширение спектра сигнала до 8÷10 Гц, что соответствует разбросу скоростей порядка 5 м/с. Такой разброс нельзя объяснить конечными размерами объёма рассеяния. Расширение спектра, на наш взгляд, связано с разбросом скоростей рассеивающих центров. Для дальнейшей статистической обработки экспериментальных данных мы использовали моменты спектрального распределения $I(f)$: интенсивность $J = \int I(f)\,\mathrm{d}f$, среднюю частоту

$\bar{F} = J^{-1} \int f I(f)\, \mathrm{d}f$ и дисперсию частоты $\sigma^2 = J^{-1} \int (f - \bar{F})^2 I(f)\, \mathrm{d}f$.

Наибольший интерес представляет дисперсия частоты σ^2, которая характеризует разброс скоростей в объёме рассеяния. Гистограмма этой величины для сеанса с длительностью 1 час приведена на рис. 3. По оси абсцисс отложено стандартное отклонение σ в герцах, по оси ординат отложено число N событий, соответствующих данному интервалу σ. Распределение «ширины полосы» σ существенно отличается от нормального закона и достаточно хорошо аппроксимируется распределением Пуассона. Сплошной кривой на рис. 3 показано пуассоновское распределение $P = \alpha^\sigma \exp(-\alpha)/(\sigma!)$ с параметром $\alpha = 2{,}3$. Полученный результат был для нас неожиданным.

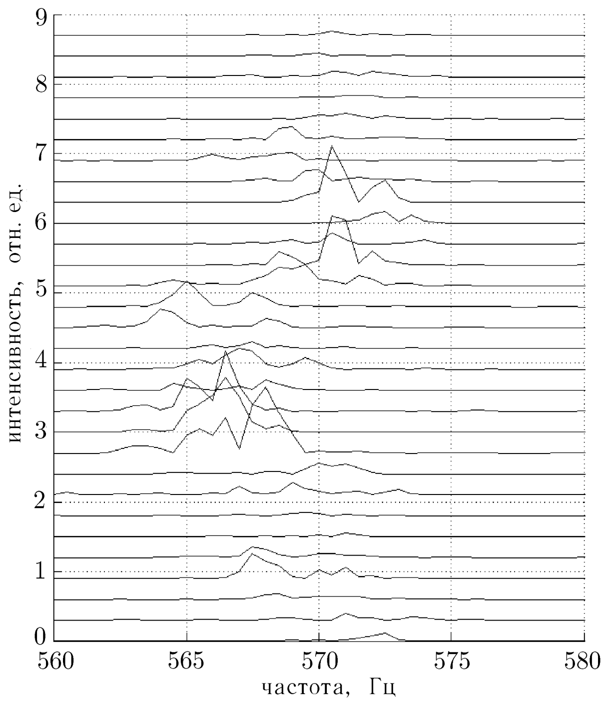

Рис. 2

Ситуацию, имитирующую натурный эксперимент, мы воспроизвели при численном моделировании. Для упрощения расчётов была использована одномерная модель. В объёме L, значительно превышающем объём рассеяния l, находятся n случайно расположенных рассеивающих центров, движущихся с хаотическими скоростями v. Скорости v распределены по нормальному закону со стандартным отклонением Δv. В борновском приближении рассчитывается обратное рассеяние звукового импульса длительностью τ и строится спектр рассеянного сигнала. Такая процедура повторяется N раз для различных случайных реализаций. Наконец, по данным N независимых испытаний строится гистограмма стандартных отклонений частоты σ.

В качестве примера была использована модель с параметрами, соответствующими реальным условиям эксперимента: $L = 100$ м; $l = 30$ м; $n = 3$; $\tau = 1$ с (длина массива данных, используемых в модели спектрального анализа составляет 2 304 точки). На рис. 4 приведена гистограмма значений σ для числа реализаций $N = 2\,000$, а также аппроксимация гистограммы с помощью

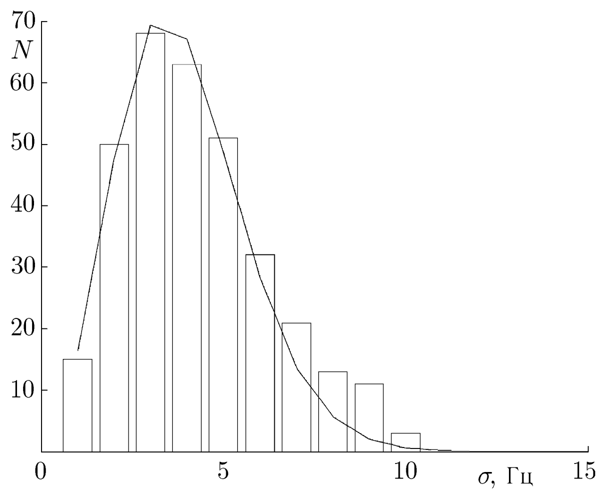

Рис. 3

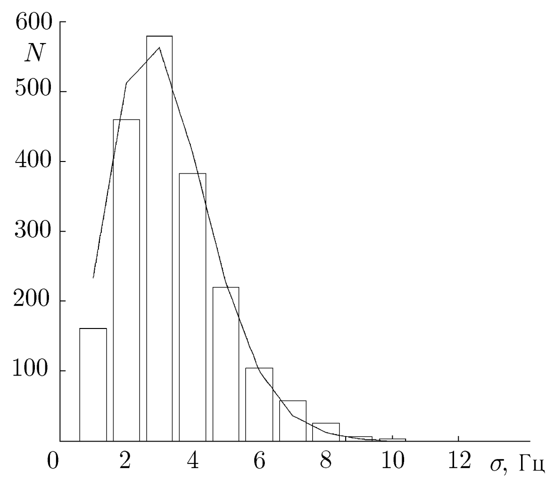

Рис. 4

пуассоновского распределения с $\alpha = 2{,}3$. Из рис. 3 и 4 видно, что как в натурном, так и в численном экспериментах пуассоновское распределение с $\alpha = 2{,}3$ достаточно хорошо аппроксимирует гистограммы σ.

Таким образом, в экспериментах по исследованию атмосферной турбулентности с использованием акустического локатора получена информация о функции распределения хаотических скоростей турбулентных неоднородностей в объёме рассеяния. Показано, что функция распределения стандартного отклонения скорости удовлетворительно описывается пуассоновским распределением.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 00–02–17372, 02–02–31019к).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Обухов А. М. // Доклады АН СССР. 1941. Т. 30. С. 611.
2. Каллистратова М. А. // Доклады АН СССР. 1959. Т. 125, № 1. С. 69.
3. Татарский В. И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. М.: Наука, 1967.
4. Красненко Н. П. Акустическое зондирование атмосферного пограничного слоя. Томск: ИОМ СО РАН, 2001.
5. McComb W. D. The Physics of Fluid Turbulence. Oxford University Press, 1991.
6. Taylor G. I. // Proc. R. Soc. London. 1938. V. 164. P. 476.
7. Рапопорт В. О., Зиничев В. А., Митяков Н. А. и др. // Изв. вузов. Радиофизика. 2003. Т. 46, № 3. С. 192.

Научно-исследовательский радиофизический институт,
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию
20 января 2003 г.

EXPERIMENTAL REMOTE SOUNDING OF THE ATMOSPHERIC TURBULENCE

V. O. Rapoport, N. S. Bellyustin, V. A. Zinichev, N. A. Mityakov, N. A. Ryzhov, and Yu. A. Sazonov

In this paper, we discuss the problems of studying the atmospheric turbulence by the method of acoustic sounding. The results of experiments on acoustic sounding of the atmosphere at the altitude 500 m, which were carried out in Zimenki (Nizhniy Novgorod Region) are presented. It is shown that the experimentally determined velocity distribution function in the scattering volume is satisfactorily described by a one-parameter Poisson distribution. The results of numerical simulations are in good agreement with the results of the field experiment.

УДК 537.8.029.6

ОПЕРАТОР ЭФФЕКТИВНОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ СТАТИСТИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ С СИЛЬНЫМИ ФЛУКТУАЦИЯМИ

С. Н. Шульга, О. В. Багацкая

Большинство известных работ по теории многократного рассеяния электромагнитных волн в средах с сильными флуктуациями ограничивалось предположением о статистической однородности среды. В данной работе рассматривается изотропная случайная среда с потерями, для которой как главное значение диэлектрической проницаемости, так и её мультипольные моменты инвариантны относительно произвольных поворотов вокруг и перемещений вдоль фиксированной оси симметрии и неоднородны в радиальном направлении. Целью настоящей работы является определение оператора эффективной диэлектрической проницаемости (ОЭДП) для такой среды в случае сильных флуктуаций диэлектрической проницаемости.

1. Понятие эффективной диэлектрической проницаемости играет фундаментальную роль в электромагнитной теории случайных сред [1]. Знание эффективной диэлектрической проницаемости даёт возможность учёта накапливающихся эффектов, которые возникают при многократном рассеянии электромагнитных волн в случайных средах и приводят к сильным искажениям электромагнитного поля. В предшествующих теоретических работах большинство результатов было получено с помощью метода [2], который приводит к решению в виде объёмного интегрального уравнения рассеяния и билокальному приближению, применимость которого ограничена слабо флуктуирующими средами. Новый подход был инициирован в работах [3, 4], в которых был предложен метод перенормировки, применимый для случайных сред с сильными флуктуациями диэлектрической проницаемости. Формально он основывается на соответствующем учёте δ-образной составляющей пространственной функции Грина. Этот метод был развит в работах [5–9], что привело к созданию современной теории сильных флуктуаций. Обобщение данной методики на случайные среды с (би)анизотропными электрическими и магнитными свойствами выполнено в [10, 11]. Метод перенормировки, который был использован во всех упомянутых выше работах, применим только для исследования статистически однородных сред с мелкомасштабными неоднородностями.

Чтобы определить оператор эффективной диэлектрической проницаемости (ОЭДП) для статистически неоднородной случайной среды, необходимо учесть следующее [12]. Во-первых, отход от статистической однородности приводит к совершенно иному базису волн для среднего электромагнитного поля по сравнению с базисом плоских волн [2, 10]. Во-вторых, для определения параметров среднего поля в случайной среде нужно определить не сам ОЭДП, а его спектральное представление в подходящем базисе. В-третьих, именно ОЭДП в спектральной области не должен содержать секулярные [5] члены, что позволит включить в рассмотрение случай сильных флуктуаций диэлектрической проницаемости. Все эти предположения должны стать отправной точкой для модификации метода перенормировки, предложенной в работе [12] и продолженной в работах [13, 14]. Обратим внимание также на модель статистически слоистой среды с одноосной [1, 13] или произвольной [14] анизотропией электромагнитных свойств.

В данной работе, которую можно рассматривать как дальнейшее обобщение работ [12–14], в рамках теории многократного рассеяния волн развивается систематический подход для более сложной модели статистически неоднородной среды. А именно, нами исследуется сильно флуктуирующая среда, которая является цилиндрически неоднородной в статистическом смысле. Случайные среды такого рода определяются тем, что их электромагнитные свойства в среднем инвариантны при вращении вокруг оси симметрии, а также при параллельном переносе вдоль этой оси и могут изменяться с увеличением расстояния от неё. Такая модель нужна, например, при разработке искусственных диэлектриков для оптических и волноведущих структур, диагностике плазмы, волоконной оптике и т. п.

Для источников и полей в данной статье принята гармоническая зависимость от времени $\exp(-i\omega t)$. В дальнейшем этот временной множитель опущен. Всё трёхмерное пространство отнесём к цилиндрической системе координат ρ, φ, z, $(0 \le \rho < \infty;\ 0 \le \varphi < 2\pi;\ -\infty < z < +\infty)$. Векторы $\mathbf{x} = (\rho, \varphi, z)$ и $\mathbf{x}' = (\rho', \varphi', z')$ характеризуют точки пространства с соответствующими значениями цилиндрических координат. Векторную функцию $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ в точке $\mathbf{x}$ в этой системе координат будем обозначать как $A_p(\mathbf{x})$, где нижний индекс p принимает значения 1, 2, 3 соответственно координатам ρ, φ, z. Используемые ниже матрицы $\hat{\mathbf{B}}$ с элементами B_{pq} имеют размер 3×3, векторы-столбцы $\mathbf{C} = \mathrm{col}\,(C_1, C_2, C_3)$.

2. Пусть всё пространство заполнено неоднородной диэлектрической средой с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon^{(\mathrm{r})}(\mathbf{x})$, которая является случайной функцией пространственной переменной $\mathbf{x}$. Случайное электромагнитное поле $\mathbf{E}^{(\mathrm{r})}(\mathbf{x})$, $\mathbf{H}^{(\mathrm{r})}(\mathbf{x})$, возбуждаемое в данной среде детерминированными сторонними источниками электрического типа $\mathbf{J}(\mathbf{x})$, удовлетворяет уравнениям Максвелла

$$\nabla \times \mathbf{H}^{(\mathrm{r})}(\mathbf{x}) + ik_0\varepsilon^{(\mathrm{r})}(\mathbf{x})\mathbf{E}^{(\mathrm{r})}(\mathbf{x}) = \frac{4\pi}{c}\,\mathbf{J}(\mathbf{x}), \tag{1}$$

$$\nabla \times \mathbf{E}^{(\mathrm{r})}(\mathbf{x}) - ik_0\mathbf{H}^{(\mathrm{r})}(\mathbf{x}) = 0, \tag{2}$$

условиям непрерывности тангенциальных компонент поля на структурных границах раздела и условию излучения на бесконечности. Здесь $k_0 = \omega/c$, c — скорость света в вакууме, верхний индекс r характеризует случайные величины, описывающие статистическую среду. Заметим, что оператор ∇ здесь представляет собой матричный дифференциальный оператор.

ОЭДП $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(\mathrm{e})}$, который действует по переменной $\mathbf{x}$, определим так же, как в работах [1–14]:

$$\langle\varepsilon^{(\mathrm{r})}(\mathbf{x})\mathbf{E}^{(\mathrm{r})}(\mathbf{x})\rangle \equiv \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(\mathrm{e})}\,\langle\mathbf{E}^{(\mathrm{r})}(\mathbf{x})\rangle. \tag{3}$$

Из уравнения (3), а также (1), (2) следует, что выражения для среднего поля

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) \equiv \langle\mathbf{E}^{(\mathrm{r})}(\mathbf{x})\rangle, \qquad \mathbf{H}(\mathbf{x}) \equiv \langle\mathbf{H}^{(\mathrm{r})}(\mathbf{x})\rangle \tag{4}$$

имеют вид, характерный для «эффективной» детерминированной среды с нелокальной матрицей проницаемости $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(\mathrm{e})}$, т. е.

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{x}) + ik_0\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(\mathrm{e})}\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{4\pi}{c}\,\mathbf{J}(\mathbf{x}), \tag{5}$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}) - ik_0\mathbf{H}(\mathbf{x}) = 0. \tag{6}$$

В рамках данной работы предполагается, что случайная функция $\varepsilon^{(\mathrm{r})}$ удовлетворяет следующим основным условиям: (а) её первый статистический момент, а именно среднее значение $\langle\varepsilon^{(\mathrm{r})}(\mathbf{x})\rangle$, не зависит от φ, z и является функцией только переменной ρ; (б) статистические моменты высших порядков, т. е. величины $\langle\varepsilon^{(\mathrm{r})}(\mathbf{x}_1)\varepsilon^{(\mathrm{r})}(\mathbf{x}_2)\,\ldots\,\varepsilon^{(\mathrm{r})}(\mathbf{x}_n)\rangle$, где $n = 2, 3, \ldots$, зависят только от $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ и от разностей $\varphi_1 - \varphi_2$, $\varphi_2 - \varphi_3$, $\ldots$, $\varphi_{n-1} - \varphi_n$ и $z_1 - z_2$, $z_2 - z_3$, $\ldots$, $z_{n-1} - z_n$. Другими словами, мы рассматриваем случайную среду с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon^{(\mathrm{r})}(\mathbf{x})$, для которой распределения вероятностей для моментов всех порядков инвариантны относительно произвольных вращений вокруг оси z и параллельных переносов вдоль этой оси. Естественно назвать такую среду цилиндрически-неоднородной или цилиндрически-слоистой в статистическом смысле. При этих условиях очевидно, что ОЭДП можно представить в виде интегрального оператора:

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(\mathrm{e})} = \int\limits_0^{+\infty} \rho'\,\mathrm{d}\rho' \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi' \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}z'\,\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(\mathrm{e})}(\rho,\rho',\varphi-\varphi',z-z') \equiv \int \mathrm{d}V'\,\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(\mathrm{e})}(\rho,\rho',\varphi-\varphi',z-z'), \tag{7}$$

ядро которого $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(\mathrm{e})}(\rho,\rho',\varphi-\varphi',z-z')$ зависит от ρ, ρ' и разностных переменных $\varphi-\varphi'$ и $z-z'$ (это свойство строго следует из последующих уравнений (24) и (26)). Пусть сторонние источники $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ имеют вид пространственной гармоники:

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \mathbf{J}(\rho)\exp[i\,(n\varphi + hz)], \tag{8}$$

где n — произвольное целое число, h — произвольное комплексное число, а $\mathbf{J}(\rho)$ — заданная спектральная амплитуда источника. Тогда среднее электромагнитное поле в уравнениях (4)–(6) будет иметь вид пространственных гармоник:

$$\mathbf{E}(x) = \mathbf{E}(\rho)\exp[i\,(n\varphi + hz)], \qquad \mathbf{H}(x) = \mathbf{H}(\rho)\exp[i\,(n\varphi + hz)], \tag{9}$$

где $\mathbf{E}(\rho)$, $\mathbf{H}(\rho)$ — спектральные амплитуды поля. Чтобы проверить это утверждение, воспользуемся тем фактом, что

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(\mathrm{e})}\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \exp[i\,(n\varphi + hz)] \int\limits_0^{+\infty} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(\mathrm{e})}(\rho,\rho',n,h)\mathbf{E}(\rho')\rho'\,\mathrm{d}\rho' \equiv \exp[i\,(n\varphi + hz)]\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(\mathrm{e})}(n,h)\mathbf{E}(\rho). \tag{10}$$

Здесь $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(\mathrm{e})}(n,h)$ — спектральный аналог ОЭДП,

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(\mathrm{e})}(\rho,\rho',n,h) = \mathcal{F}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(\mathrm{e})}(\rho,\rho',\varphi-\varphi',z-z') \equiv$$
$$\equiv \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}z\exp\{-i\,[n(\varphi-\varphi') + h\,(z-z')]\}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(\mathrm{e})}(\rho,\rho',\varphi-\varphi',z-z'). \tag{11}$$

Пространственные гармоники (9) образуют естественный базис волн изучаемой среды, т. к. полное среднее поле можно представить в виде соответствующей суперпозиции волн вида (9). Спектральное представление ОЭДП $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(\mathrm{e})}(n,h)$ даёт исчерпывающую характеристику свойств случайной среды по отношению к среднему полю (9). Определение упомянутого оператора и составляет главную цель настоящей работы. В следующем разделе будет приведён математический аппарат, необходимый для исследования электромагнитного поля в цилиндрически-слоистой (в статистическом смысле) среде.

3. В этом разделе вначале сконцентрируем внимание на распределённом характере спектральной матрицы функции Грина для волнового уравнения в неоднородной анизотропной среде, а затем заменим общепринятое интегральное уравнение рассеяния перенормированным уравнением относительно новой полевой переменной. Отличием нашего метода перенормировки от предыдущих методов, используемых в [3–9], является то обстоятельство, что сингулярность в виде δ-функции, обуславливающая необходимость перенормировки, присутствует не в пространственном представлении функции Грина, а, что более предпочтительно, в её спектральном представлении. Отметим, что для выполнения требования (37) из следующего раздела мы должны считать эталонную среду анизотропной, несмотря на изотропию исходной случайной среды. Это обстоятельство является прямым следствием предположения о статистической неоднородности исследуемой среды, в отличие от [12–14], где электрическая анизотропия эталонной среды возникает из-за статистической и/или электрической анизотропии исходной случайной среды.

Рассмотрим неоднородную анизотропную эталонную среду, магнитная проницаемость которой равна единице, а тензор диэлектрической проницаемости в цилиндрической системе координат имеет диагональный вид:

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\rho) = \operatorname{diag}\left(\varepsilon_{\|}(\rho), \varepsilon_{\perp}(\rho), \varepsilon_{\perp}(\rho)\right), \tag{12}$$

где $\varepsilon_{\|}(\rho)$, $\varepsilon_{\perp}(\rho)$ — кусочно-гладкие функции переменной ρ. Физически такая модель описывает локально одноосную среду, в которой главные значения диэлектрических констант изменяются с расстоянием от оси симметрии $\rho = 0$. Матрица функции Грина $\hat{\mathbf{G}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ такой среды является решением уравнения

$$\nabla \times \nabla \times \hat{\mathbf{G}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') - k_0^2 \hat{\varepsilon}(\rho) \hat{\mathbf{G}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \hat{\mathbf{I}} \delta(\rho - \rho') \delta(\varphi - \varphi') \delta(z - z')/\rho, \tag{13}$$

которое описывает уходящие волны при $\rho \to +\infty$. Здесь $\hat{\mathbf{I}}$ — единичная матрица, δ — одномерная дельта-функция Дирака. Матрицу функции Грина можно представить в виде двойного обратного преобразования Фурье спектральной матрицы Грина $\hat{\mathbf{G}}(\rho, \rho', n, h)$:

$$\hat{\mathbf{G}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \mathcal{F}^{-1} \hat{\mathbf{G}}(\rho, \rho', n, h) \equiv (2\pi)^{-2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\{i\,[n\,(\varphi - \varphi') + h\,(z - z')]\} \hat{\mathbf{G}}(\rho, \rho', n, h)\, \mathrm{d}h. \tag{14}$$

Здесь предполагается, что полюса и точки ветвления $\hat{\mathbf{G}}(\rho, \rho', n, h)$ как функции переменной h лежат вне действительной оси комплексной плоскости h (более детально это описано в Приложении 1). Спектральная функция Грина является обобщённой функцией переменных ρ, ρ' и включает регулярную часть $\hat{\mathbf{G}}'(\rho, \rho', n, h)$ и сингулярную, пропорциональную $\delta(\rho - \rho')$:

$$\hat{\mathbf{G}}(\rho, \rho', n, h) = \hat{\mathbf{G}}'(\rho, \rho', n, h) - \hat{\mathbf{I}}_{\|} \, \frac{\delta(\rho - \rho')}{k_0^2 \rho' \varepsilon_{\|}(\rho')} \, . \tag{15}$$

В этой формуле $\hat{\mathbf{I}}_{\|} = \operatorname{diag}(1, 0, 0)$, а $\hat{\mathbf{G}}'(\rho, \rho', n, h)$ представляет собой интегрируемую функцию по каждой из переменных ρ, ρ', которая терпит ступенчатый разрыв при $\rho = \rho'$ и полагается ограниченной при $\rho \to \rho' \pm 0$. Явное выражение для $\hat{\mathbf{G}}(\rho, \rho', n, h)$ приведено в Приложении 2. Принимая во внимание уравнение (14), обратное преобразование представления (15) в пространственной области приобретает вид:

$$\hat{\mathbf{G}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \hat{\mathbf{G}}'(\mathbf{x}, \mathbf{x}') - \hat{\mathbf{I}}_{\|} \, \frac{\delta(\rho - \rho') \delta(\varphi - \varphi') \delta(z - z')}{k_0^2 \rho' \varepsilon_{\|}(\rho')} \, , \tag{16}$$

где $\hat{\mathbf{G}}'(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \mathcal{F}^{-1} \hat{\mathbf{G}}'(\rho, \rho', n, h)$ является обобщённой функцией. Заметим, что в отличие от предыдущих работ [3–9] мы не связываем $\hat{\mathbf{G}}'(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ с главным значением пространственной функции Грина. Фактически, её точная математическая природа для дальнейших рассуждений не важна.

Выражение для вектора случайного электрического поля может быть записано с помощью матрицы функции Грина, если рассматривать случайную среду как возмущение эталонной среды [2–9]:

$$\mathbf{E}^{(\mathrm{r})}(\mathbf{x}) = \mathbf{E}^{(\mathrm{b})}(\mathbf{x}) + k_0^2 \int \hat{\mathbf{G}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \, [\varepsilon^{(\mathrm{r})}(\mathbf{x}') \hat{\mathbf{I}} - \hat{\varepsilon}(\rho')] \, \mathbf{E}^{(\mathrm{r})}(\mathbf{x}') \, \mathrm{d}V'. \tag{17}$$

Здесь $\mathbf{E}^{(\mathrm{b})}(\mathbf{x})$ — электрическое поле, создаваемое в эталонной среде сторонними источниками $\mathbf{J}(\mathbf{x})$. Используя представление (16), а также вводя новую полевую переменную $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ и случайное возмущение $\hat{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x})$:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathrm{diag}(\varepsilon^{(\mathrm{r})}(\mathbf{x})/\varepsilon_{\|}(\rho), 1, 1)\mathbf{E}^{(\mathrm{r})}(\mathbf{x}), \tag{18}$$

$$\hat{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) = \mathrm{diag}[\xi_{\|}(\mathbf{x}), \xi_{\perp}(\mathbf{x}), \xi_{\perp}(\mathbf{x})], \tag{19}$$

$$\xi_{\|}(\mathbf{x}) = \varepsilon_{\|}(\rho)\,[1 - \varepsilon_{\|}(\rho)/\varepsilon^{(\mathrm{r})}(\mathbf{x})], \qquad \xi_{\perp}(\mathbf{x}) = \varepsilon^{(\mathrm{r})}(\mathbf{x}) - \varepsilon_{\perp}(\rho), \tag{20}$$

из уравнения (17) после перенормировки получим

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{E}^{(\mathrm{b})}(\mathbf{x}) + k_0^2 \int \hat{\mathbf{G}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')\hat{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}')\mathbf{F}(\mathbf{x}')\,\mathrm{d}V', \tag{21}$$

или

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{E}^{(\mathrm{b})}(\mathbf{x}) + k_0^2 \hat{\mathbf{G}}'\hat{\boldsymbol{\xi}}\mathbf{F}(\mathbf{x}). \tag{22}$$

Ниже, как и в случае статистически однородных сред с сильными флуктуациями [3–10], это новое уравнение применяется для расчёта эффективной диэлектрической проницаемости статистически неоднородной среды.

4. Чтобы получить спектральное представление ОЭДП, применим процедуру [3–10], которая состоит, во-первых, в определении эффективного оператора возмущений $\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(\mathrm{e})}$, задаваемого тождеством

$$\langle \hat{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x})\mathbf{F}(\mathbf{x})\rangle \equiv \hat{\boldsymbol{\xi}}^{(\mathrm{e})}\langle \mathbf{F}(\mathbf{x})\rangle, \tag{23}$$

и, во-вторых, в использовании соотношения

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(\mathrm{e})} - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \hat{\boldsymbol{\xi}}^{(\mathrm{e})} \left(\frac{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(\mathrm{e})}}{\varepsilon_{\|}}\,\hat{\mathbf{I}}_{\|} + \hat{\mathbf{I}}_{\perp} \right), \tag{24}$$

где $\hat{\mathbf{I}}_{\perp} = \hat{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{I}}_{\|}$, которое связывает $\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(\mathrm{e})}$ с $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(\mathrm{e})}$. Уравнение (24) может быть легко получено с помощью подстановки в (23) выражений

$$\langle \hat{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x})\mathbf{F}(\mathbf{x})\rangle = (\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(\mathrm{e})} - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}})\,\langle \mathbf{E}^{(\mathrm{r})}(\mathbf{x})\rangle,$$

$$\langle \mathbf{F}(\mathbf{x})\rangle = \left(\frac{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(\mathrm{e})}}{\varepsilon_{\|}}\,\hat{\mathbf{I}}_{\|} + \hat{\mathbf{I}}_{\perp} \right) \langle \mathbf{E}^{(\mathrm{r})}(\mathbf{x})\rangle, \tag{25}$$

являющихся следствием уравнений (18)–(20).

Учитывая формальное решение уравнения (22) в виде $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (\hat{\mathbf{I}} - k_0^2\hat{\mathbf{G}}'\hat{\boldsymbol{\xi}})^{-1}\,\mathbf{E}^{(\mathrm{b})}(\mathbf{x})$ в тождестве (23), определяем $\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(\mathrm{e})}$. Исключая $\mathbf{E}^{(\mathrm{b})}(\mathbf{x})$, получим

$$\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(\mathrm{e})} = \langle \hat{\boldsymbol{\xi}}\,(\hat{\mathbf{I}} - k_0^2\hat{\mathbf{G}}'\hat{\boldsymbol{\xi}})^{-1}\rangle\,\langle (\hat{\mathbf{I}} - k_0^2\hat{\mathbf{G}}'\hat{\boldsymbol{\xi}})^{-1}\rangle^{-1}. \tag{26}$$

Анализ уравнения (26) показывает, что оператор эффективных возмущений можно представить как $\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(\mathrm{e})} = \int \mathrm{d}V'\,\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(\mathrm{e})}(\rho, \rho', \varphi - \varphi', z - z')$. Подстановка в (24) интегральных представлений для операторов $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(\mathrm{e})}$, $\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(\mathrm{e})}$, следующих из преобразований Фурье относительно угловых и продольных координат, приводит к интегральному уравнению

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(\mathrm{e})}(\rho, \rho', n, h) - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\rho)\,\frac{\delta(\rho - \rho')}{\rho'} =$$

$$= \hat{\boldsymbol{\xi}}^{(\mathrm{e})}(\rho, \rho', n, h)\hat{\mathbf{I}}_{\perp} + \int\limits_0^{+\infty} \hat{\boldsymbol{\xi}}^{(\mathrm{e})}(\rho, \rho'', n, h)\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(\mathrm{e})}(\rho'', \rho', n, h)\hat{\mathbf{I}}_{\|}\varepsilon_{\|}^{-1}(\rho'')\rho''\,\mathrm{d}\rho'', \tag{27}$$

где $\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(\mathrm{e})}(\rho,\rho',n,h)=\mathcal{F}\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(\mathrm{e})}(\rho,\rho',\varphi-\varphi',z-z')$. Заметим, что в случае статистически однородной среды уравнение, аналогичное (24), с помощью трёхмерного преобразования Фурье сводится к алгебраическому (см. [3–10]). В отличие от упомянутых работ мы будем иметь дело с интегральным уравнением, описывающим более сложную модель случайной среды.

Решение (26) для $\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(\mathrm{e})}$ не является окончательным, т. к. оно содержит обратные операторы, которые определяются достаточно сложно. Поэтому мы используем теорию возмущений, раскладывая правую часть (26) по степеням $\hat{\boldsymbol{\xi}}$. Этот подход в соответствии с общепринятым предположением [3–10] о малости в среднем возмущений ($\langle\hat{\boldsymbol{\xi}}\rangle=0$) обеспечивает быструю сходимость результирующего разложения и приводит к следующему представлению для $\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(\mathrm{e})}$:

$$\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(\mathrm{e})}=\sum_{m=2}^{+\infty}\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(m)}, \tag{28}$$

где $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(m)}\sim\hat{\boldsymbol{\xi}}^{m}$ определяется реккурентными соотношениями [14]

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(2)}=\langle\hat{\mathbf{v}}\hat{\boldsymbol{\xi}}\rangle,\qquad \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(3)}=\langle\hat{\mathbf{v}}^{2}\hat{\boldsymbol{\xi}}\rangle, \tag{29}$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(m)}=\langle\hat{\mathbf{v}}^{m-1}\hat{\boldsymbol{\xi}}\rangle-\sum_{k=2}^{m-2}\langle\hat{\mathbf{v}}^{k}\rangle\,\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(m-k)}(m=4,5,\,\ldots)\,, \tag{30}$$

$$\hat{\mathbf{v}}=k_0^2\hat{\boldsymbol{\xi}}\hat{\mathbf{G}}' \tag{31}$$

(величину $\hat{\mathbf{v}}$ не путать с оператором (74) в Приложении 2). С учётом выражения (28) решение уравнения (24) для ОЭДП можем записать в явном виде:

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(\mathrm{e})}-\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}=\sum_{m=2}^{+\infty}\hat{\boldsymbol{\nu}}^{(m)}, \tag{32}$$

где

$$\hat{\boldsymbol{\nu}}^{(m)}=\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(m)}\left(\frac{\hat{\varepsilon}}{\varepsilon_{\|}}\hat{\mathbf{I}}_{\|}+\hat{\mathbf{I}}_{\perp}\right) \tag{33}$$

для $m=2,3$,

$$\hat{\boldsymbol{\nu}}^{(m)}=\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(m)}\left(\frac{\hat{\varepsilon}}{\varepsilon_{\|}}\,\hat{\mathbf{I}}_{\|}+\hat{\mathbf{I}}_{\perp}\right)+\sum_{k=2}^{m-2}\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}\frac{\boldsymbol{\nu}^{(m-k)}}{\varepsilon_{\|}}\,\hat{\mathbf{I}}_{\|} \tag{34}$$

для $m=4,5,\,\ldots$. В итоге можно записать разложения (28), (32) в спектральной области:

$$\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(\mathrm{e})}(\rho,\rho',n,h)=\sum_{m=2}^{+\infty}\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(m)}(\rho,\rho',n,h), \tag{35}$$

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(\mathrm{e})}(\rho,\rho',n,h)-\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\rho)\,\frac{\delta(\rho-\rho')}{\rho'}\equiv\hat{\boldsymbol{\nu}}(\rho,\rho',n,h)=\sum_{m=2}^{+\infty}\hat{\boldsymbol{\nu}}^{(m)}(\rho,\rho',n,h). \tag{36}$$

Таким образом, приведённые выше соотношения окончательно определяют спектральное представление ОЭДП в рамках теории возмущений.

Возвращаясь к определению $\hat{\boldsymbol{\xi}}$, данному соотношениями (19), (20), мы видим, что требование $\langle\hat{\boldsymbol{\xi}}\rangle=0$ позволяет получить выражение для проницаемости эталонной среды в явном виде:

$$\frac{1}{\varepsilon_{\|}(\rho)}=\left\langle\frac{1}{\varepsilon^{(\mathrm{r})}(\mathbf{x})}\right\rangle,\qquad \varepsilon_{\perp}(\rho)=\langle\varepsilon^{(\mathrm{r})}(\mathbf{x})\rangle. \tag{37}$$

Здесь проявляется отличие рассматриваемого подхода от теории сильных флуктуаций [3–10], которая не позволяет определить проницаемость эталонной среды в замкнутом виде. Уравнения (37) служат доказательством того, что эталонная среда может быть анизотропной (а именно локально-одноосной с радиально ориентированной оптической осью), поскольку в общем случае $\varepsilon_{\parallel} \neq \varepsilon_{\perp}$. Полезно отметить, что правые части формул (37) не зависят от φ, z из-за (статистически) цилиндрически-слоистой структуры случайной среды. Физический смысл $\hat{\varepsilon}$ становится понятным из (32), (36): суммы справа определяют нелокальный вклад в ОЭДП, таким образом, $\hat{\varepsilon}$ имеет смысл величины локальной составляющей компоненты ОЭДП.

Обрывая бесконечные ряды (28), (32) или (35), (36) получаем нужную аппроксимацию для $\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(\mathrm{e})}$, $\hat{\varepsilon}^{(\mathrm{e})}$. В частности, ограничиваясь первым ненулевым слагаемым, имеем билокальное приближение [2]: $\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(\mathrm{e})} \approx \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(2)}$, $\hat{\varepsilon}^{(\mathrm{e})} \approx \hat{\varepsilon} + \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(2)}$, со спектральными характеристиками

$$\begin{multlined}\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(\mathrm{e})}(\rho,\rho',n,h) \approx \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(2)}(\rho,\rho',n,h) = \\ = \left(\frac{k_0}{2\pi}\right)^2 \sum_{n'=-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}h' \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}z \int\limits_{0}^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \exp\{-i\,[(n-n')\,\varphi + (h-h')\,z]\} \times \\ \times \langle \hat{\boldsymbol{\xi}}(\rho,\varphi,z)\hat{\mathbf{G}}'(\rho,\rho',n',h')\hat{\boldsymbol{\xi}}(\rho',0,0)\rangle, \end{multlined} \tag{38}$$

$$\hat{\boldsymbol{\nu}}(\rho,\rho',n,h) \approx \hat{\boldsymbol{\xi}}^{(\mathrm{e})}(\rho,\rho',n,h), \tag{39}$$

где $\hat{\boldsymbol{\xi}}(\rho,\varphi,z) \equiv \hat{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x})$. Представление (38) справедливо в предположении, что сингулярности $\hat{\mathbf{G}}'(\rho,\rho',n',h')$ как функции комплексного переменного h' (которые совпадают с сингулярностями $\hat{\mathbf{G}}(\rho,\rho',n',h')$) смещены с пути интегрирования по вещественной оси в комплексную плоскость h', например, путём введения исчезающе малых потерь в исходную эталонную среду без потерь. Явные выражения для компонент матрицы $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(2)}(\rho,\rho',n,h)$ приведены в Приложении 3. Попутно заметим, что статистическая топология случайных возмущений включает билокальное приближение посредством спектральных плотностей $B_{uv}(\rho,\rho',n,h)$, которые определяются преобразованием Фурье

$$B_{uv}(\rho,\rho',n,h) = (2\pi)^{-2}\,\mathcal{F}B_{uv}(\rho,\rho',\varphi-\varphi',z-z') \tag{40}$$

корреляционных функций

$$\langle \xi_u(\mathbf{x})\xi_v(\mathbf{x}')\rangle = B_{uv}(\rho,\rho',\varphi-\varphi',z-z'), \tag{41}$$

где индексы u, v соответствуют $\perp$ или $\parallel$.

Учёт конечного числа членов разложения в рядах (28), (32), (35) или (36) предполагает, что вклад отбрасываемых членов незначителен. Обсудим правомочность этой процедуры более детально. Для упрощения расчётов рассмотрим ситуацию, когда случайная функция $\hat{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x})$ является гауссовой. Благодаря хорошо известным свойствам гауссовых случайных полей [1] члены упомянутых разложений с нечётными индексами m равны нулю, а в оставшихся слагаемых статистические моменты случайных возмущений выражаются через корреляционные функции (41). На этом этапе удобно ввести положительную константу σ, которая служит мерой интенсивности случайных возмущений, и для дальнейших упрощений сделать предположение о том, что корреляционные функции не зависят от угловых и продольных координат и стремятся к нулю достаточно быстро, когда расстояние между ρ и ρ' превышает l — характерный масштаб случайных возмущений в радиальном направлении. Это равносильно требованию

$$B_{uv}(\rho,\rho',\varphi-\varphi',z-z') = \sigma^2\Phi_{uv}[\rho+\rho',(\rho-\rho')/l], \tag{42}$$

где $\Phi_{uv}[\lambda,\mu]$ являются функциями порядка единицы и принимают нулевое значение при $|\mu| > > 1$. Используя уравнения (29)–(31), получим следующую приближённую оценку для ненулевых членов рядов (35), (36):

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(m)}(\rho,\rho',n,h) \sim \sigma^m\,(k_0 l)^{m-2}, \qquad \hat{\boldsymbol{\nu}}^{(m)}(\rho,\rho',n,h) \sim \sigma^m\,(k_0 l)^{m-2}, \tag{43}$$

где $m = 2,4,6,\ \ldots$. Как следствие, ряды в правой части выражений (35), (36) представляют собой асимптотические разложения по степеням $\sigma^2\,(k_0 l)^2$ и, таким образом, могут быть обоснованно оборваны при достаточно малых значениях указанного выше параметра, т. е. при

$$\sigma^2\,(k_0 l)^2 \ll 1. \tag{44}$$

Необходимо отметить, что требование (44) имеет место для случая сильных флуктуаций ($\sigma \gg 1$), предполагающего достаточную малость характерного масштаба случайных возмущений в радиальном направлении ($k_0 l \ll \sigma^{-2}$).

5. Для более глубокого понимания явлений многократного рассеяния в рассматриваемой статистически неоднородной среде проанализируем в билокальном приближении макроскопические свойства $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(\mathrm{e})}$.

Используя уравнения (38), (39) и сотношение [15] $\hat{\mathbf{G}}(\mathbf{x},\mathbf{x}') = \hat{\mathbf{G}}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}',\mathbf{x})$, можно получить следующие уравнения:

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(\mathrm{e})}(\rho,\rho',\varphi-\varphi',z-z') = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(\mathrm{e})\mathrm{T}}(\rho',\rho,\varphi'-\varphi,z'-z), \tag{45}$$

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(\mathrm{e})}(\rho,\rho',n,h) = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(\mathrm{e})\mathrm{T}}(\rho',\rho,-n,-h), \tag{46}$$

которые основаны на аналогичных соотношениях для эффективного оператора возмущений и свидетельствуют о взаимном характере среды с пространственной дисперсией [15]. Здесь индекс T обозначает операцию транспонирования матрицы. Принимая во внимание уравнения(81)–(85) из Приложений 2 и 3 можно показать, что если волна (9) с $\mathbf{E}(\rho) = \mathrm{col}\,(E_1,E_2,E_3)$, $\mathbf{H}(\rho) = = \mathrm{col}\,(H_1,H_2,H_3)$ и заданными n,h удовлетворяет однородным уравнениям Максвелла (5), (6) ($\mathbf{J}=0$), то эти уравнения также имеют решения в виде

$$\mathbf{E}^-(\mathbf{x}) = \mathbf{E}^-(\rho)\exp[i\,(n\varphi - hz)], \qquad \mathbf{H}^-(\mathbf{x}) = \mathbf{H}^-(\rho)\exp[i\,(n\varphi - hz)], \tag{47}$$

откуда

$$\mathbf{E}^-(\rho) = \mathrm{col}\,(E_1,E_2,-E_3), \qquad \mathbf{H}^-(\rho) = \mathrm{col}\,(-H_1,-H_2,H_3), \tag{48}$$

или

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{E}}(\rho)\exp[i\,(-n\varphi + hz)], \qquad \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{H}}(\rho)\exp[i\,(-n\varphi + hz)], \tag{49}$$

где

$$\tilde{\mathbf{E}}(\rho) = \mathrm{col}\,(E_1,-E_2,E_3), \qquad \tilde{\mathbf{H}}(\rho) = \mathrm{col}\,(-H_1,H_2,-H_3), \tag{50}$$

при условии, что все корреляционные функции в (41) — чётные функции переменных $z-z'$ или $\varphi-\varphi'$ соответственно. Выражения (47), (49) представляют собой гармоники среднего поля, которые распространяются в противоположном направлении или имеют комплексно-сопряжённую азимутальную зависимость в сравнении с первоначальной волной (9).

В следующем примере мы исследуем диссипативные свойства эффективной среды, которая описывается эрмитовским оператором

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(\mathrm{e})''} = (\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(\mathrm{e})}) - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(\mathrm{e})\dagger})/(2i). \tag{51}$$

Здесь символ † обозначает эрмитово сопряжение оператора, действующего по $\mathbf{x}$. Смысл $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(\mathrm{e})\prime\prime}$ раскрывается, например, с помощью выражения для усреднённой по времени мощности Q, рассеиваемой пассивной средой ($Q < 0$) или генерируемой активной средой ($Q > 0$) с нелокальной диэлектрической проницаемостью $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(\mathrm{e})}$: $Q = \omega/(8\pi) \int \mathbf{E}^{*\mathrm{T}}(\mathbf{x}) \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(\mathrm{e})\prime\prime} \mathbf{E}(\mathbf{x}) \, \mathrm{d}V$, где звёздочка обозначает комплексно-сопряжённую функцию. Если оператор проницаемости имеет вид (7), а электромагнитное поле даётся формулой (9), то расходимость интеграла по z в соответствующем выражении для $Q = \omega/(8\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \, q$ приводит к тому, что основными энергетическими характеристиками становятся плотность

$$q = \int\limits_0^{+\infty} \rho \, \mathrm{d}\rho \int\limits_0^{+\infty} \rho' \, \mathrm{d}\rho' \, \mathbf{E}^{*\mathrm{T}}(\rho) \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(\mathrm{e})\prime\prime}(\rho, \rho', n, h) \mathbf{E}(\rho') \tag{52}$$

и ядро $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(\mathrm{e})\prime\prime}(\rho, \rho', n, h)$ спектрального аналога $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(\mathrm{e})\prime\prime}$:

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(\mathrm{e})\prime\prime}(\rho, \rho', n, h) = [\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(\mathrm{e})}(\rho, \rho', n, h) - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(\mathrm{e})*\mathrm{T}}(\rho, \rho', n, h)]/(2i). \tag{53}$$

Если не оговорено иное, параметр h принимает здесь действительные значения. Обратим внимание на ситуацию, когда в случайной среде нет диссипативных потерь, и она характеризуется положительной функцией проницаемости $\varepsilon^{(\mathrm{r})}$. Кроме того, для упрощения вычислений без значительных потерь общности в дальнейшем будем считать, что флуктуации случайной среды ограничены областью $0 < \rho < \rho_0$, $\rho_0 = \mathrm{const}$, а область $\rho_0 < \rho < +\infty$ однородна и имеет диэлектрическую проницаемость ε. В этом случае из (37) следует, что эталонная среда характеризуется действительными положительными функциями $\varepsilon_{\parallel}(\rho)$, $\varepsilon_{\perp}(\rho)$, которые принимают положительное постоянное значение ε для $\rho > \rho_0$. Исходя из Приложения 1, можно сделать вывод, что непрерывный спектр Γ_{c} в уравнениях (57)–(60) проходит по мнимой полуоси от $\kappa = +i\infty$ до $\kappa = 0$, а по действительной оси занимает интервал от $\kappa = 0$ до $\kappa = k$, где $k = k_0 \sqrt{\varepsilon}$. Последний интервал совместно с точками дискретного спектра, которые расположены на действительной оси (они могут располагаться справа от точки $\kappa = k$), составляют спектр действительных значений $\Gamma_{\mathrm{p}}(n)$, отвечающий за распространяющиеся собственные моды (заданных n) в эталонной среде.

Из уравнений (38), (39) становится понятным, что при данных условиях $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(\mathrm{e})\prime\prime}$ совпадает с $\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(\mathrm{e})\prime\prime}$, и последний оператор находится совершенно аналогично (51). Этого достаточно для вычисления $\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(\mathrm{e})}(\rho, \rho', n, h)$ и последующего нахождения искомой величины $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(\mathrm{e})\prime\prime}(\rho, \rho', n, h)$ по формуле, сходной с (53). Чтобы осуществить переход к эталонной среде без потерь, в интеграле по действительной оси комплексной плоскости h', который фигурирует в правой части (38), необходимо соответствующим образом выразить $\hat{\mathbf{G}}'(\rho, \rho', n', h')$ через $\hat{\mathbf{G}}(\rho, \rho', n', h')$ с помощью уравнений (15), (66) и сместить контур интегрирования на бесконечно малое расстояние от действительной оси во второй и четвёртый квадранты комплексной плоскости h', чтобы избежать интегрирования по сингулярностям $\hat{\mathbf{G}}(\rho, \rho', n', h')$, имеющимся в $\Gamma_{\mathrm{p}}(n')$. Если теперь считать потери исчезающе малыми, то новый путь интегрирования должен обходить полюсы $\hat{\mathbf{G}}(\rho, \rho', n', h')$, лежащие на действительной оси, во втором и четвёртом квадрантах и проходить по правой стороне участков $-k < h' < 0$, $0 < h' < k$ соответствующих разрезов Γ_{sc}, Γ_{c}. Что касается вычисления интеграла по новому контуру, то вклад в интеграл по дугам бесконечно малого радиуса вокруг каждого полюса на действительной оси определяется с помощью теории вычетов по формуле (67), а предельное значение $\hat{\mathbf{G}}(\rho, \rho', n', h')$ по правой стороне разрезов — по формуле (68). Используя результирующее представление $\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(\mathrm{e})}(\rho, \rho', n, h)$ для вычисления $\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(\mathrm{e})\prime\prime}(\rho, \rho', n, h)$, получим

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(\mathrm{e})\prime\prime}(\rho, \rho', n, h) = \hat{\boldsymbol{\xi}}^{(\mathrm{e})\prime\prime}(\rho, \rho', n, h) = \sum_{n'=-\infty}^{+\infty} \sum_{\kappa'}^{p} [\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{+}(\rho, \rho', n, h \mid n', \kappa') + \hat{\boldsymbol{\sigma}}^{-}(\rho, \rho', n, h \mid n', \kappa')], \tag{54}$$

где

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{\pm}(\rho,\rho',n,h\mid n',\kappa')=\frac{k_0}{8\pi P(n',\kappa')}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}z\int\limits_{0}^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\exp\{-i\left[(n-n')\,\varphi+(h\mp\kappa')\,z\right]\}\times$$
$$\times\left\langle\hat{\boldsymbol{\xi}}(\rho,\varphi,z)\left[\mathbf{E}_{\mathrm{t}}(\rho,n',\kappa')\pm\mathbf{E}_{\mathrm{l}}(\rho,n',\kappa')\right]\left[\mathbf{E}_{\mathrm{t}}(\rho',n',\kappa')\pm\mathbf{E}_{\mathrm{l}}(\rho',n',\kappa')\right]^{*\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\xi}}(\rho',0,0)\right\rangle. \quad (55)$$

Здесь κ' — собственное значение задачи, определяемое уравнениями (57)–(60) после замены n на n', $\Sigma^{p}_{\kappa'}$ обозначает «суммирование» по спектральным точкам в $\Gamma_{\mathrm{p}}(n')$, а именно обычное суммирование по точкам дискретного спектра $\Gamma_{\mathrm{d}}(n')$, имеющим действительное значение, и операцию $\sum_{j=\mathrm{a,b}}\int_0^k \mathrm{d}\kappa'\ \ldots$, имеющую место для (вырожденной) части непрерывного спектра $0<\kappa'<k$; $\mathbf{E}_{\mathrm{t}}$ и $\mathbf{E}_{\mathrm{l}}$ определяют поперечную и продольную составляющие собственной моды в эталонной среде, P — постоянная нормировки (более детально см. в Приложении 1). При получении выражений (54), (55) мы воспользовались тем фактом, что в рассматриваемом случае собственные решения уравнений (57)–(60), являющиеся действительными (и, следовательно, положительными) собственными значениями, всегда могут быть выбраны таким образом, чтобы компоненты E_1, H_2, H_3 были действительными, E_2, E_3, H_1 — чисто мнимыми, а величина P — действительной и положительной. Учитывая соотношения (54), (55) в выражении (52), видно, что $q\geq 0$, как и должно быть для пассивной среды.

Уравнения (54), (55) позволяют прояснить физическое происхождение «диссипативных» потерь в эффективной среде. Согласно этим уравнениям величина $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(\mathrm{e})\prime\prime}(\rho,\rho',n,h)$, отвечающая за упомянутые потери, формируется как «сумма» вкладов $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{\pm}(\rho,\rho',n,h\mid n',\kappa')$, обусловленных рассеянием в собственные моды эталонной среды с различными n',κ', которые распространяются в положительном $(+)$ и отрицательном $(-)$ направлении оси z. Отсутствие вкладов затухающих мод в (54) соответствует действительности: эти волны не переносят энергию в продольном направлении и, следовательно, нет причин для затухания среднего поля в процессе рассеяния.

6. В данной работе развита теория сильных флуктуаций для среднего электромагнитного поля применительно к изотропной случайной среде с потерями, физические и вероятностные свойства которой обладают симметрией относительно вращения и параллельного переноса вдоль фиксированной оси и изменяются произвольным образом с расстоянием от этой оси. Главная особенность предложенного подхода заключается в исключении секулярных членов в спектральном представлении ОЭДП в базисе волн, связанных с упомянутым типом случайных сред, который существенно отличается от базиса плоских волн, уместного для статистически однородных сред. Указанная задача решена с помощью перенормировки интегрального уравнения рассеяния, ядро которого получено исключением сингулярности в виде δ-функции из спектральной функции Грина в эталонной среде. Вследствие такой перенормировки возникающее решение в виде ряда теории возмущений для ОЭДП в спектральной области приобретает вид асимптотического разложения по степеням классического малого параметра теории сильных флуктуаций, которое не предполагает слабости флуктуаций проницаемости.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

В данном Приложении представлено разложение спектральной матрицы функции Грина $\hat{\mathbf{G}}(\rho,\rho',n,h)$ по собственным функциям, соответствующим эталонной среде.

Прежде всего, следуя известной методике решения спектральных задач для открытых областей [15–17], введём соответствующие поперечные собственные функции

$$\mathbf{E}_{\mathrm{t}}(\rho,n,\kappa)=\mathrm{col}(E_1(\rho,n,\kappa),E_2(\rho,n,\kappa),0),\qquad \mathbf{H}_{\mathrm{t}}(\rho,n,\kappa)=\mathrm{col}(H_1(\rho,n,\kappa),H_2(\rho,n,\kappa),0) \quad (56)$$

для системы уравнений

$$-\frac{\partial}{\partial\rho}\,\frac{n}{k_0\rho}\,E_1+\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\,\frac{1}{ik_0\rho}\,\frac{\partial}{\partial\rho}\,\rho-ik_0\varepsilon_\perp(\rho)\right]E_2=i\kappa H_1, \tag{57}$$

$$i\left[k_0\varepsilon_\parallel(\rho)-\frac{n^2}{k_0\rho^2}\right]E_1+\frac{n}{k_0\rho^2}\,\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho E_2)=i\kappa H_2, \tag{58}$$

$$-\frac{\partial}{\partial\rho}\,\frac{n}{k_0\rho\varepsilon_\perp(\rho)}\,H_1+\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\,\frac{1}{ik_0\rho\varepsilon_\perp(\rho)}\,\frac{\partial}{\partial\rho}\,\rho-ik_0\right]H_2=-i\kappa E_1, \tag{59}$$

$$i\left[k_0-\frac{n^2}{k_0\rho^2\varepsilon_\perp(\rho)}\right]E_1+\frac{n}{k_0\rho^2\varepsilon_\perp(\rho)}\,\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho H_2)=-i\kappa E_2, \tag{60}$$

которые удовлетворяют условиям непрерывности компонент E_2, H_2, а величины

$$E_3(\rho,n,\kappa)\equiv\frac{1}{ik_0\rho\varepsilon_\perp(\rho)}\left[inH_1(\rho,n,\kappa)-\frac{\partial}{\partial\rho}\,\rho H_2(\rho,n,\kappa)\right], \tag{61}$$

$$H_3(\rho,n,\kappa)\equiv\frac{1}{ik_0\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\,\rho E_2(\rho,n,\kappa)-inE_1(\rho,n,\kappa)\right] \tag{62}$$

ограничены при $\rho=0$ и после домножения на $\rho^{1/2}$ остаются конечными при $\rho\to+\infty$. Здесь κ — собственное значение, n — произвольное целое число, которое в Приложении считается постоянным. При последующем рассмотрении собственные значения уравнений (57)–(60) будут отождествлены с соответствующими точками на комплексной плоскости h. Легко заметить, что если $\mathbf{E}_\mathrm{t}$, $\mathbf{H}_\mathrm{t}$ являются решением упомянутой выше задачи для собственного значения κ, то $\mathbf{E}_\mathrm{t}$, $-\mathbf{H}_\mathrm{t}$ будут решением для собственного значения $-\kappa$. Таким образом, для наших целей достаточно ограничиться таким набором собственных значений, который удовлетворяет условию принадлежности κ комплексному ряду $D=\{h:\,0\le\arg h<\pi\}$. Физическое значение собственных функций (56) становится ясным, если заметить, что

$$\mathbf{E}^\pm(\mathbf{x}\mid n,\kappa)=[\mathbf{E}_\mathrm{t}(\rho,n,\kappa)\pm\mathbf{E}_\mathrm{l}(\rho,n,\kappa)]\exp[i\,(n\varphi+\kappa z)],$$

$$\mathbf{H}^\pm(\mathbf{x}\mid n,\kappa)=[\pm\mathbf{H}_\mathrm{t}(\rho,n,\kappa)+\mathbf{H}_\mathrm{l}(\rho,n,\kappa)]\exp[i\,(n\varphi+\kappa z)] \tag{63}$$

удовлетворяют уравнениям Максвелла в отсутствие источников для эталонной среды и, таким образом, представляют собой поля собственных мод, распространяющихся (или быстро исчезающих) в направлениях $+z$ и $-z$ с постоянной распространения κ. Здесь $\mathbf{E}_\mathrm{l}=E_3\mathbf{e}_\mathrm{l}$, $\mathbf{B}_\mathrm{l}=B_3\mathbf{e}_\mathrm{l}$, а $\mathbf{e}_\mathrm{l}$ обозначает вектор-столбец $\mathrm{col}(0,0,1)$.

Искомый спектр Γ имеет дискретную часть $\Gamma_\mathrm{d}(n)$, которая состоит из конечного числа точек $\kappa=\kappa_q(n)$, где $q=1,2,\,\ldots\,,Q(n)$, и отвечает за появление волноводных мод, а также непрерывную часть Γ_c, соответствующую излучаемым модам [15–17]. Положим для простоты, что $\varepsilon_\parallel(\rho)$, $\varepsilon_\perp(\rho)$ принимают постоянные значения ε при достаточно больших ρ, а именно $\rho>\rho_0$. Это требование посредством уравнения (37) предполагает, что флуктуации случайной среды заключены в области $0\le\rho<\rho_0$, в то время как внешнее пространство $\rho>\rho_0$ является детерминированным и однородным. В такой ситуации Γ_c включает в себя корни уравнения $\mathrm{Im}(k_0^2\varepsilon-h^2)^{1/2}=0$ в D. Исходя из дальнейших потребностей, удобно представить Γ_c как ориентированный контур, проведённый из бесконечности к началу координат. Из этого следует, что точки дискретного спектра κ_q (для фиксированного n) рассматриваются как невырожденные, т. к. вырождения можно избежать введением соответствующих бесконечно малых возмущений в эталонную среду. В отличие от этого каждое κ из спектра $\Gamma_{\rm c}$ ассоциируется с двумя линейно независимыми собственными решениями, которые мы обозначим $\mathbf{E}_{\rm t}^{(\rm a)}$, $\mathbf{H}_{\rm t}^{(\rm a)}$ и $\mathbf{E}_{\rm t}^{(\rm b)}$, $\mathbf{H}_{\rm t}^{(\rm b)}$. Используя процедуру ортогонализации, всегда можно сделать эти решения взаимноортогональными, а именно обеспечить выполнение условия

$$\langle\langle \mathbf{E}_{\rm t}^{(\rm a)}(\rho,n,\kappa),\mathbf{H}_{\rm t}^{(\rm b)}(\rho,n,\kappa')\rangle\rangle \equiv \\ \equiv \int\limits_0^{+\infty} [E_1^{(\rm a)}(\rho,n,\kappa)H_2^{(\rm b)}(\rho,n,\kappa') + E_2^{(\rm a)}(\rho,n,\kappa)H_1^{(\rm b)}(\rho,n,\kappa')]\,\rho\,{\rm d}\rho = 0 \quad (64)$$

для всех $\{\kappa,\kappa'\}\in\Gamma_{\rm c}$. С помощью стандартной процедуры [15–17] легко проверить, что собственные функции (56) удовлетворяют условиям ортогональности

$$\langle\langle \mathbf{E}_{\rm t}(\rho,n,\kappa),\mathbf{H}_{\rm t}(\rho,n,\kappa')\rangle\rangle = P(n,\kappa)\delta_{\kappa\kappa'} \quad (\{\kappa,\kappa'\}\in\Gamma_{\rm d}), \quad (65)$$
$$\langle\langle \mathbf{E}_{\rm t}(\rho,n,\kappa),\mathbf{H}_{\rm t}(\rho,n,\kappa')\rangle\rangle = 0 \quad (\kappa\in\Gamma_{\rm d},\kappa'\in\Gamma_{\rm c}),$$
$$\langle\langle \mathbf{E}_{\rm t}^{(\rm j)}(\rho,n,\kappa),\mathbf{H}_{\rm t}^{(\rm j)}(\rho,n,\kappa')\rangle\rangle = P^{(\rm j)}(n,\kappa)\,\delta(\kappa-\kappa')\,|_{\Gamma_{\rm c}} \quad ({\rm j}={\rm a},{\rm b};\ \{\kappa,\kappa'\}\in\Gamma_{\rm c}).$$

Здесь $\delta_{\kappa\kappa'}$ — символ Кронекера, $\delta\,|_{\Gamma_{\rm c}}$ — комплексная дельта-функция Дирака [18], связанная с контуром $\Gamma_{\rm c}$, P и $P^{(\rm j)}$ — константы нормировки.

Выполнив преобразование Фурье в (13) и заменив $\mathbf{e}_{\rm l}\hat{\mathbf{G}}(\rho,\rho',n,h)$ выражением $(\hat{\mathbf{I}} - \mathbf{e}_{\rm l}\mathbf{e}_{\rm l}^{\rm T}) \times \hat{\mathbf{G}}(\rho,\rho',n,h)$, в результате получаем достаточно простое уравнение, которое можно решить аналитически с помощью разложения по собственным функциям (56). Последующее воссоздание спектральной функции Грина приводит к искомому соотношению:

$$\hat{\mathbf{G}}(\rho,\rho',n,h) = -\mathbf{e}_{\rm l}\mathbf{e}_{\rm l}^{\rm T}\frac{\delta(\rho-\rho')}{k_0^2\rho'\varepsilon_\perp(\rho')} + \\ + \sum_k \frac{1}{k_0P(\kappa,n)\,(h^2-\kappa^2)}\big\{\mathbf{E}_{\rm t}(\rho,n,\kappa)\,[\kappa\tilde{\mathbf{E}}_{\rm t}(\rho',n,\kappa) - h\mathbf{E}_{\rm l}(\rho',n,\kappa)]^{\rm T} + \\ + \mathbf{E}_{\rm l}(\rho,n,\kappa)\,[h\tilde{\mathbf{E}}_{\rm t}(\rho',n,\kappa) - \kappa\mathbf{E}_{\rm l}(\rho',n,\kappa)]\big\}. \quad (66)$$

Здесь $\tilde{\mathbf{E}}_{\rm t}(\rho,n,\kappa)$ можно получить из $\mathbf{E}_{\rm t}(\rho,n,\kappa)$ путём замены в (56) E_2 на $-E_2$, символ T определяет операцию транспонирования матрицы, $\sum_k$ означает обычное суммирование по точкам дискретного спектра κ_q и интегрирование по контуру Γ (учитывая вклад обеих линейно независимых собственных функций), соответствующие верхние индексы ${\rm j}={\rm a},{\rm b}$ опущены для сохранения обозначений. Необходимо отметить, что разложение (66) основывается на предпосылке, что ни h, ни $-h$ не принадлежат спектру Γ. Из уравнения (15) и результатов Приложения 2 следует, что стоящая в правой части (66) «сумма» является обобщённой функцией переменных ρ, ρ', которая состоит из интегрируемой функции $\hat{\mathbf{G}}'(\rho,\rho',n,h)$ и сингулярной части $\delta(\rho-\rho')[\mathbf{e}_{\rm l}\mathbf{e}_{\rm l}^{\rm T}\varepsilon_\perp^{-1}(\rho') - \hat{\mathbf{I}}_\parallel\varepsilon_\parallel^{-1}(\rho')]/(k_0^2\rho')$.

Из выражения (66) становится очевидно, что дискретный спектр собственных значений κ_q уравнений (57)–(60) отвечает за появление простых полюсов $h=\pm\kappa_q$ спектральной функции Грина в комплексной плоскости h с соответствующими вычетами:

$$\operatorname{res}\hat{\mathbf{G}}(\rho,\rho',n,h) = \pm\frac{1}{2k_0P(n,\kappa_q)}\,[\mathbf{E}_{\rm t}(\rho,n,\kappa_q)\pm\mathbf{E}_{\rm l}(\rho,n,\kappa_q)]\,[\tilde{\mathbf{E}}_{\rm t}(\rho',n,\kappa_q)\mp\mathbf{E}_{\rm l}(\rho',n,\kappa_q)]^{\rm T}. \quad (67)$$

Кроме того, из теории интегралов типа Коши можно заключить, что вклад непрерывного спектра обуславливает наличие у $\hat{\mathbf{G}}(\rho,\rho',n,h)$ двух точек ветвления $h=\pm k_0\sqrt{\varepsilon}$ и разрезов вдоль линии $\mathrm{Im}(k_0^2\varepsilon - h^2)^{1/2} = 0$. Последняя состоит из контура $\Gamma_{\rm c}$ и контура $\Gamma_{\rm sc}$, симметричного $\Gamma_{\rm c}$ относительно точки $h = 0$. Применяя теорему Племеля—Сохоцкого для вычисления предельного значения спектральной функции Грина при стремлении h к произвольной точке h' на $\Gamma_{\rm c}$ ($\Gamma_{\rm sc}$), получаем, что

$$\hat{\mathbf{G}}(\rho,\rho',n,h') = \hat{\mathbf{G}}^{(\rm pv)}(\rho,\rho',n,h') + \sum_{\rm j=a,b} \frac{\pi i}{2k_0 P^{(\rm j)}(n,\pm h')} \times \\ \times [\mathbf{E}_{\rm t}^{(\rm j)}(\rho,n,\pm h') + \mathbf{E}_{\rm l}^{(\rm j)}(\rho,n,\pm h')]\,[\tilde{\mathbf{E}}_{\rm t}^{(\rm j)}(\rho',n,\pm h') \mp \mathbf{E}_{\rm l}^{(\rm j)}(\rho',n,\pm h')]^{\rm T} \quad (68)$$

при условии, что переход $h \to h'$ совершается по пути, лежащему справа от ориентированного контура $\Gamma_{\rm c}$ ($\Gamma_{\rm sc}$). Запись $\hat{\mathbf{G}}^{(\rm pv)}(\rho,\rho',n,h')$ обозначает величину, следующую из (66), если мы выберем главное значение интеграла Коши по контуру $\Gamma_{\rm c}$, на котором подынтегральное выражение имеет полюс, определяемый знаменателем $h'^2 - \kappa^2$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Здесь будет получено регуляризованное представление для спектральной матрицы Грина $\hat{\mathbf{G}}(\rho,\rho',n,h)$ как обобщённой функции ρ, ρ'.

Можно непосредственно проверить, что выражение, которое получается с помощью метода скаляризации [15],

$$\hat{\mathbf{G}}(\rho,\rho',n,h) = -\hat{\mathbf{A}}(\rho')\,\frac{\delta(\rho-\rho')}{\rho'} + k_0^{-1}\,[\mathbf{v}(\tilde{\mathbf{v}}^{\rm T} G_{ee} - \tilde{\mathbf{w}}^{\rm T} G_{mm}) + \mathbf{w}\,(\tilde{\mathbf{w}}^{\rm T} G_{mm} - \tilde{\mathbf{v}}^{\rm T} G_{me}], \quad (69)$$

удовлетворяет всем условиям, налагаемым на функцию Грина в спектральной области, включая фурье-преобразование уравнения (13), если скалярная $G_{\alpha\beta} \equiv G_{\alpha\beta}(\rho,\rho',n,h)$ (индексы α, β соответствуют e или m) удовлетворяет связанной системе уравнений

$$\begin{pmatrix} D_{11} & -D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{ee} & G_{me} \\ G_{em} & G_{mm} \end{pmatrix} = \frac{\delta(\rho-\rho')}{\rho} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (70)$$

остаётся ограниченной при $\rho \to +\infty$ и непрерывной наравне с величинами

$$\frac{1}{\chi_1(\rho,h)} \left[\frac{nh}{\rho}\, G_{m\beta} - ik_0\varepsilon_\parallel(\rho)\,\frac{\partial G_{e\beta}}{\partial\rho}\right], \qquad \frac{1}{\chi_2(\rho,h)} \left(\frac{nh}{\rho}\, G_{e\beta} + ik_0\,\frac{\partial G_{m\beta}}{\partial\rho}\right), \quad (71)$$

где $\beta = e, m$, на границах раздела эталонной среды и ведёт себя как уходящая волна при $\rho \to +\infty$. В этих соотношениях

$$\hat{\mathbf{A}}(\rho') = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{\chi_2(\rho',h)}, \frac{1}{\chi_1(\rho',h)},\ 0\right), \quad (72)$$

$$\chi_1(\rho,h) = k_0^2\varepsilon_\parallel(\rho) - h^2, \qquad \chi_2(\rho,h) = k_0^2\varepsilon_\perp(\rho) - h^2, \quad (73)$$

$\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ и $\tilde{\mathbf{v}}$, $\tilde{\mathbf{w}}$ являются матричными дифференциальными операторами, действующими по переменным ρ и ρ' соответственно:

$$\mathbf{v} = \mathrm{col}\left(\frac{ih}{\chi_1(\rho,h)}\,\frac{\partial}{\partial\rho},\ -\frac{nh}{\rho\chi_2(\rho,h)},\ 1\right), \quad (74)$$

$$\mathbf{w} = \mathrm{col}\left(\frac{nk_0}{\rho\chi_1(\rho,h)}, \frac{ik_0}{\chi_2(\rho,h)}\,\frac{\partial}{\partial\rho},\ 0\right), \quad (75)$$

$$\tilde{\mathbf{v}} = \operatorname{col}\left(\frac{ih}{\chi_1(\rho',h)}\,\frac{\partial}{\partial\rho'}\,,\ \frac{nh}{\rho'\chi_2(\rho',h)}\,,\ -1\right), \tag{76}$$

$$\tilde{\mathbf{w}} = \operatorname{col}\left(-\frac{nk_0}{\rho'\chi_1(\rho',h)}\,,\ \frac{ik_0}{\chi_2(\rho',h)}\,\frac{\partial}{\partial\rho'}\,,\ 0\right), \tag{77}$$

а D_{jk} (индексы j, k принимают значения 1 или 2) — скалярные дифференциальные операторы, действующие по переменной ρ:

$$k_0^{-1} D_{11} = \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial\rho}\,\frac{\rho\varepsilon_\parallel(\rho)}{\chi_1(\rho,h)}\,\frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{n^2\varepsilon_\perp(\rho)}{\rho^2\chi_2(\rho,h)} + \varepsilon_\perp(\rho), \tag{78}$$

$$D_{12} = \frac{inh}{\rho}\left[\frac{1}{\chi_2(\rho,h)}\,\frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{\partial}{\partial\rho}\,\frac{1}{\chi_1(\rho,h)}\right]; \tag{79}$$

$$D_{11}\to D_{22},\qquad D_{12}\to D_{21}\quad \text{при замене}\quad \varepsilon_{\parallel,\perp}\to 1,\qquad \chi_1\to\chi_2,\qquad \chi_2\to\chi_1. \tag{80}$$

Физически $-iG_{e\beta}$ и $-iG_{m\beta}$ представляют собой вертикальные компоненты спектральных амплитуд электрического и магнитного полей соответственно, возбуждаемых в эталонной среде пространственно гармоническими внешними источниками электрического ($\beta = e$) или магнитного ($\beta = m$) типов с нулевыми поперечными компонентами и вертикальной компонентой, равной $\exp[i\,(n\varphi + hz)]\delta(\rho-\rho')/\rho$.

Из-за наличия дельта-функции Дирака в правой части (70) величины $G_{\alpha\beta}$, $\hat{\mathbf{G}}$, как и дифференциальные операторы, фигурирующие в правой части уравнения (69), строго говоря, должны соответствующим образом интерпретироваться [19] с точки зрения теории обобщённых функций [18]. Последнее утверждение существенно для вторых смешанных производных $\partial^2 G_{ee}/(\partial\rho\partial\rho')$ и $\partial^2 G_{mm}/(\partial\rho\partial\rho')$. Каждая из них содержит обычную производную, обозначенную соответствующим индексом, и дельта-функцию Дирака:

$$\left.\frac{\partial^2 G_{ee}(\rho,\rho',n,h)}{\partial\rho\,\partial\rho'}\right|_{\text{gen}} = \left.\frac{\partial^2 G_{ee}(\rho,\rho',n,h)}{\partial\rho\,\partial\rho'}\right|_{\text{usu}} - \delta(\rho-\rho')\,\frac{\chi_1(\rho',h)}{k_0\rho'\varepsilon_\parallel(\rho')} \tag{81}$$

(аналогичная формула для G_{mm}, которая следует из (81) после замены $\varepsilon_\parallel\to 1$, $\chi_1\to\chi_2$, здесь опущена). Это утверждение проверяется применением хорошо известного метода дифференцирования функции со ступенчатым разрывом [18] к производным $\partial G_{ee}/\partial\rho$, $\partial G_{mm}/\partial\rho$, которые обладают разрывом такого вида при $\rho' = \rho$. Указанная неопределённость может быть устранена с помощью интегрирования уравнения (70) по бесконечно малому интервалу поперечных расстояний ρ, содержащему ρ'. Группируя дельта-функции в (69), получим регуляризованное представление (15). Регулярная составляющая $\hat{\mathbf{G}}'(\rho,\rho',n,h)$ формально может быть получена из выражения (69), если опустить первый член с дельта-функцией Дирака и заменить в оставшихся членах обобщённые производные на обычные. Очевидно, в результате получится конечнозначная интегрируемая функция переменных ρ, ρ', которая терпит разрыв при $\rho = \rho'$. В этом отличие от случая пространственной функции Грина, где регулярная составляющая или составляющая в виде главного значения является неинтегрируемой функцией с нерегулярностью в виде полюса и определяется неоднозначно (см. [3–9]).

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Элементы $\theta^{(2)}_{pq}(\rho,\rho',n,h)\equiv k_0^{-1}\zeta_{pq}$ матрицы $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(2)}(\rho,\rho',n,h)$ определяются выражениями

$$\zeta_{11} = -\sum_{n'}\int \frac{B_{\parallel\parallel}}{\chi_1'\chi_1''}\left[h'^2\,\frac{\partial^2 G_{ee}}{\partial\rho\,\partial\rho'} + \frac{n'^2k_0^2}{\rho\rho'}\,G_{mm} + in'h'k_0\left(\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial G_{me}}{\partial\rho'} - \frac{1}{\rho'}\,\frac{\partial G_{em}}{\partial\rho}\right)\right]\mathrm{d}h',$$

$$\zeta_{22} = -\sum_{n'} \int \frac{B_{\perp\perp}}{\chi_2' \chi_2''} \left[k_0^2 \frac{\partial^2 G_{mm}}{\partial\rho \partial\rho'} + \frac{n'^2 h'^2}{\rho\rho'} G_{ee} + i n' h' k_0 \left(\frac{1}{\rho'} \frac{\partial G_{me}}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial G_{em}}{\partial\rho'} \right) \right] \mathrm{d}h', \tag{82}$$

$$\zeta_{12} = \sum_{n'} \int \frac{B_{\parallel\perp}}{\chi_1' \chi_2''} \left[k_0 h' \frac{\partial^2 G_{em}}{\partial\rho \partial\rho'} - \frac{n'^2 k_0 h'}{} \rho\rho' G_{me} + i n' \left(\frac{h'^2}{\rho'} \frac{\partial G_{ee}}{\partial\rho} + \frac{k_0^2}{\rho} \frac{\partial G_{mm}}{\partial\rho} \right) \right] \mathrm{d}h',$$

$$\zeta_{21} = \sum_{n'} \int \frac{B_{\perp\parallel}}{\chi_2' \chi_1''} \left[k_0 h' \frac{\partial^2 G_{me}}{\partial\rho \partial\rho'} - \frac{n'^2 k_0 h'}{\rho\rho'} G_{em} - i n' \left(\frac{h'^2}{\rho} \frac{\partial G_{ee}}{\partial\rho'} + \frac{k_0^2}{\rho'} \frac{\partial G_{mm}}{\partial\rho} \right) \right] \mathrm{d}h', \tag{83}$$

$$\zeta_{13} = \sum_{n'} \int \frac{B_{\parallel\perp}}{\chi_1'} \left(i h' \frac{\partial G_{ee}}{\partial\rho'} - \frac{n' k_0}{\rho} G_{me} \right) \mathrm{d}h',$$

$$\zeta_{31} = -\sum_{n'} \int \frac{B_{\perp\parallel}}{\chi_1''} \left(i h' \frac{\partial G_{ee}}{\partial\rho'} + \frac{n' k_0}{\rho} G_{em} \right) \mathrm{d}h', \tag{84}$$

$$\zeta_{23} = -\sum_{n'} \int \frac{B_{\perp\perp}}{\chi_2'} \left(i k_0 \frac{\partial G_{me}}{\partial\rho} + \frac{n' h'}{\rho} G_{ee} \right) \mathrm{d}h',$$

$$\zeta_{32} = \sum_{n'} \int \frac{B_{\perp\perp}}{\chi_2''} \left(i k_0 \frac{\partial G_{em}}{\partial\rho'} - \frac{n' h'}{\rho'} G_{ee} \right) \mathrm{d}h', \tag{85}$$

$$\zeta_{33} = -\sum_{n'} \int B_{\perp\perp} G_{ee} \, \mathrm{d}h'. \tag{86}$$

В этих уравнениях суммирование выполняется по всем n', т. е. $n' = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, интегрирование по h' проводится в пределах $-\infty < h' < +\infty$, величины $G_{\alpha\beta} \equiv G_{\alpha\beta}(\rho, \rho', n', h')$ определены в Приложении 2, $\chi_j' \equiv \chi_j(\rho, h')$, $\chi_j'' \equiv \chi_j(\rho', h')$, где $j = 1, 2$, $\chi_j(\rho, h)$ задаются формулами (73), дифференцирование по ρ, ρ' понимается в классическом (а не в обобщённом) смысле,

$$B_{uv} \equiv B_{uv}(\rho, \rho', n - n', h - h'), \tag{87}$$

где спектральные плотности $B_{uv}(\rho, \rho', n, h)$ определены в (40). Кроме того, в уравнениях (81)–(85) по умолчанию предполагается, что полюса и линии разрезов $G_{\alpha\beta}(\rho, \rho', n', h')$ как функции комплексной переменной h' не лежат на пути интегрирования по действительной оси благодаря наличию малых диссипативных потерь в эталонной среде.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. Ч. 2. Случайные поля. М.: Наука, 1978. 464 с.
2. Лифшиц И. М., Каганов М. И., Цукерник В. И. // Учёные записки ХГУ. Труды физич. отд. физ.-мат. фак-та. 1950. Т. 2. С. 41.
3. Рыжов Ю. А., Тамойкин В. В., Татарский В. И. // ЖЭТФ. 1965. Т. 48, № 2. С. 656.
4. Рыжов Ю. А., Тамойкин Е. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1970. Т. 13, № 3. С. 356.
5. Tsang L., Kong J. A. // Radio Sci. 1981. V. 16, No. 3. P. 303.
6. Багацкая О. В., Жук Н. П., Шульга С. Н. // ЖЭТФ. 1998. Т. 114, № 4. С. 1 188.
7. Stogryn A. // IEEE Trans. Antennas Propag. 1990. V. 38, No. 7. P. 1 099.
8. Stogryn A. // Radio Sci. 1983. V. 18, No. 6. P. 1 283.
9. Klusch D., Pflug Th., Thielheim K. O. // Phys. Rev. B. 1993. V. 47, No. 14. P. 8 539.

10. Zhuck N. P. // Phys. Rev. B. 1994. V. 50, No. 21. P. 15 636.
11. Zhuck N. P., Omar A. S. // IEEE Trans. Antennas Propag. 1996. V. 44, No. 8. P. 1 142.
12. Жук Н. П. Распространение волн в статистически нерегулярных слоистых волноводах: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Харьков, 1982. 162 с.
13. Данилевич С. В., Жук Н. П., Третьяков О. А. // Радиотехника. Харьков, 1985. № 75. С. 17.
14. Zhuck N. P. // J. Electromagn. Waves Appl. 1993. V. 7. P. 1 653.
15. Фельсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. М.: Мир, 1978. 547 с.
16. Friedman B. Principles and Techniques of Applied Mathematics. New York: Wiley, 1956. 324 p.
17. Шевченко В. В. Плавные переходы в открытых волноводах. М.: Наука, 1969. 191 с.
18. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщённые функции и действия над ними. М.: Наука, 1959. 470 с.
19. Yaghjian A. G. // Proc. IEEE. 1980. V. 68, No. 2. P. 248.

Харьковский национальный университет
им. В. Н. Каразина, г. Харьков, Украина

Поступила в редакцию
14 февраля 2003 г.

EFFECTIVE PERMITTIVITY OPERATOR OF A STATISTICALLY INHOMOGENEOUS MEDIUM WITH STRONG PERMITTIVITY FLUCTUATIONS

S. N. Shulga and O. V. Bagatskaya

The majority of known theories describing the multiple scattering of electromagnetic waves in strongly fluctuating media are limited by the assumption of statistical homogeneity of a medium. In this paper, we consider an electrically isotropic lossy random medium whose mean permittivity distribution and the multipoint permittivity moments are invariant with respect to rotations about a fixed symmetry axis and with respect to translations along this axis and are inhomogeneous in the radial direction. The goal of this paper is to calculate the effective permittivity operator (EPO) for such a medium in the case of strong permittivity fluctuations.

УДК 621.372

ДИФРАКЦИЯ НАПРАВЛЯЕМОЙ МОДЫ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ВОЛНОВОДА

А. В. Бровко [1], *А. Б. Маненков* [2], *С. А. Маненков* [3]

Динамическим методом конечных разностей решена задача дифракции направляемой моды планарного диэлектрического волновода на теле произвольной формы. Конкретные результаты получены для рассеивателей в виде одиночного круглого и эллиптического цилиндров и металлических полосок. Рассчитаны коэффициенты отражения и прохождения моды, а также структура полей в ближней зоне. Для тестовой задачи дифракции моды на круглом металлическом цилиндре проведено сравнение с результатами, полученными методом разложения по плоским волнам.

ВВЕДЕНИЕ

Эффекты рассеяния и трансформации мод в открытых диэлектрических волноводах (ДВ) часто встречаются при анализе схем СВЧ и интегральной оптики [1]. В таких схемах процессы рассеяния происходят обычно на теле или группе тел, расположенных вне или внутри волновода, либо на его границе (на границе раздела сред). Дифракционные эффекты могут использоваться в различных оптических и микроволновых датчиках, а также при измерении распределения полей в ДВ. В некоторых случаях рассеивателями являются дефекты конечного размера (различные включения в материал волновода или в окружающую его среду). В модуляторах, применяемых в схемах интегральной оптики, рассеивателями волн могут быть электроды, управляющие параметрами диэлектриков (в частности, при использовании электрооптических эффектов). Заметим, что в таких системах рассеяние является нежелательным эффектом и его необходимо минимизировать.

К настоящему времени опубликовано несколько работ [2–6], в которых анализируются структуры подобного вида. Следует, однако, заметить, что используемые в этих работах методы имеют ряд ограничений на геометрию задачи. Например, некоторые методики применимы только в случаях, когда рассеиватели (тела) находятся целиком либо вне, либо внутри волновода; промежуточное положение обычно вызывает определённые трудности при анализе. В настоящей работе задача о рассеянии направляемой моды (НМ) планарного диэлектрического волновода решена для достаточно произвольной геометрии. Применяемые методы позволяют как рассчитать интегральные характеристики задачи (коэффициенты отражения и прохождения моды), так и проанализировать структуру рассеянных полей.

Рассмотрим дифракцию монохроматической волны с частотой ω_0 на участке планарного ДВ, который содержит рассеивающее тело. Типичные примеры трёхслойных волноводов с одиночными рассеивателями изображены на рис. 1. Предполагаем, что показатели преломления подложки n_1, волноведущего слоя n_2 и покрытия n_3 постоянны в достаточно широком диапазоне частот, в котором можно также пренебречь диэлектрическими потерями (т. е. считаем все показатели преломления действительными величинами) [7–9]. Кроме того, полагаем, что выполнены неравенства $n_3 \leq n_1 < n_2$ и магнитные проницаемости всех сред совпадают с проницаемостью вакуума μ_{v}. Толщина волновода равна $2d$. Рассеивающее тело имеет вид цилиндра с конечными размерами поперечного сечения, а ось цилиндра параллельна оси y (рис. 1). Ниже будем анализировать так

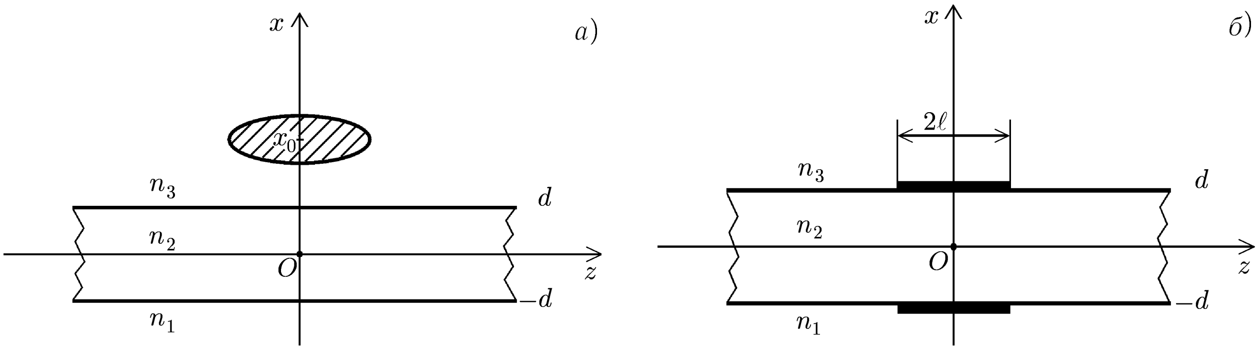

Рис. 1. Геометрия задачи для рассеивателей в виде эллиптического цилиндра (*а*) и двух металлических полосок (*б*)

называемый TE-случай, когда электрическое поле $\mathbf{E}$ имеет только одну компоненту E_y, причём предполагаем, что все характеристики сред и поля не зависят от координаты y. Слева на участок ДВ, содержащий тело, набегает основная НМ типа TE_0.

1. МЕТОДЫ АНАЛИЗА

Для решения рассматриваемых задач применялись два метода: динамический метод конечных разностей (ДМКР) и метод разложения по плоским волнам (МРПВ). Опишем основные элементы этих подходов.

1.1. Динамический метод конечных разностей

При использовании ДМКР [7, 8, 10, 11] решение исходной задачи о дифракции монохроматической электромагнитной волны искалось в два этапа. На первом этапе решалась вспомогательная нестационарная задача о рассеянии конечного пакета (цуга) волн на участке ДВ с рассеивающим телом (таким же, как и для исходной задачи). При этом зависящие от времени уравнения Максвелла заменялись дискретными (алгебраическими) уравнениями в соответствии с выбранной конечно-разностной схемой. После решения уравнений находились временны́е зависимости полей, которые описывали дифракцию пакета волн на рассеивающем теле. На втором этапе исходя из этого решения с помощью фурье-анализа вычислялись выходные характеристики задачи для монохроматического процесса. Иными словами, сначала рассматривался нестационарный процесс, а затем в полученном решении выделялась одна гармоника на заданной частоте ω_0, чтобы получить решение исходной задачи. Преимущества такого двухэтапного подхода описаны в [7, 10, 11], поэтому здесь их рассматривать не будем; ниже опишем только те детали методики, которые будут нужны в дальнейшем.

На первом этапе анализа в области пространства, расположенной левее рассеивателя (рис. 1), задавалось начальное распределение полей (при $t = 0$) в виде волнового пакета:

$$E_y = E_{0y}(x,\omega_0)\sin^2\left(\pi\,\frac{z-z_1}{z_2-z_1}\right)\sin[\beta_0\,(z-z_1)],$$

$$H_x = H_{0x}(x,\omega_0)\sin^2\left(\pi\,\frac{z-z_1}{z_2-z_1}\right)\sin[\beta_0\,(z-z_1)], \qquad (1)$$

где $E_{0y}(x,\omega_0)$, $H_{0x}(x,\omega_0)$ — амплитуды поперечных компонент электрического и магнитного полей НМ на частоте ω_0, $\beta_0 = \beta_0(\omega_0)$ — постоянная распространения НМ в волноводе на этой частоте, z_1 и z_2 — координаты границ волнового пакета по оси z. Параметры цуга волн выбирались так, чтобы в начальные моменты он двигался по направлению оси z [12]. На интервале $\Delta z_{\rm p} = |z_2 - z_1|$ укладывалось целое число полуволн НМ (обычно от трёх до шести). Забегая вперёд, отметим, что результаты решения исходной задачи не очень критичны к начальной структуре пакета. В частности, он может быть другой формы и даже содержать волны, бегущие вдоль ДВ налево; заметим, что эти волны поглотятся стенками вспомогательного ящика (см. ниже). Необходимо лишь, чтобы в пакете доминировала гармоника с частотой ω_0.

Для моды TE_0 плоского диэлектрического волновода отличны от нуля только три компоненты полей: E_y, H_x и H_z, которые удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu_{\rm v} \frac{\partial H_z}{\partial t}\,, \qquad \frac{\partial E_y}{\partial z} = \mu_{\rm v} \frac{\partial H_x}{\partial t}\,, \tag{2}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{\partial D_y}{\partial t}\,. \tag{3}$$

Как обычно, эти уравнения должны быть дополнены материальными уравнениями. Ниже рассматривается случай, когда все среды изотропные и линейные, так что $D_y = \varepsilon E_y$, где диэлектрическая проницаемость $\varepsilon = n^2(x,\, z)\varepsilon_{\rm v}$, $\varepsilon_{\rm v}$ — диэлектрическая проницаемость вакуума, n — показатель преломления, который зависит от координат x и z. Для простоты предполагаем, что рассеивателем является идеально проводящий цилиндр достаточно произвольного сечения, на поверхности которого выполнены граничные условия Дирихле.

Для алгебраизации задачи будем использовать разностную схему [7, 10, 11] для двумерных систем. В плоскости xz введём прямоугольную сетку с шагом Δz и Δx по осям z и x соответственно, узлы которой имеют координаты $(i\,\Delta z,\, j\,\Delta x)$, где i и j — целые числа. Электрическое поле будем искать в узлах указанной сетки в дискретные моменты времени $t_m = m\,\Delta t$, где Δt — шаг по времени, m — целое число, а магнитное поле — в узлах координатной сетки, смещённой на половину шагов $\Delta z/2$ и $\Delta x/2$ и в моменты времени $t_{m-1/2} = (m - 1/2)\,\Delta t$. Используя конечно-разностную аппроксимацию производных, получим систему линейных алгебраических уравнений для значений полей в узлах координатной сетки, которую можно записать в следующей символической форме:

$$\mathbf{M}\,(E_y^{(m_1)}(i_1, j_1), H_x^{(m_2)}(i_2, j_2), H_z^{(m_3)}(i_3, j_3))^{\rm T} = 0, \tag{4}$$

где $\mathbf{M}$ — некоторая прямоугольная матрица, m_k, i_k, j_k $(k = 1,\, 2,\, 3)$ — целые или полуцелые числа, нумерующие узлы, индекс T обозначает операцию транспонирования. В этих формулах использованы стандартные обозначения для значений полей в узловых точках: $E_y^{(m)}(i,j) = E_y(i\,\Delta z, j\,\Delta x, m\,\Delta t)$ [11]. Матрица $\mathbf{M}$ зависит от типа (порядка) конечно-разностной аппроксимации, а также от геометрии задачи и характеристик всех сред. Система (4) является неоднородной, поскольку значения полей в начальный момент времени заданы согласно формуле (1). Если для конечно-разностной аппроксимации использовать центральные разности, то уравнения (2) и (3) записываются в виде двух матричных равенств:

$$\begin{pmatrix} H_z^{(m+1/2)}(i, j+1/2) \\ H_x^{(m+1/2)}(i+1/2, j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \Delta t/(\mu_{\rm v}\,\Delta x) & -\Delta t/(\mu_{\rm v}\,\Delta z) \\ -\Delta t/(\mu_{\rm v}\,\Delta x) & 0 \\ 0 & \Delta t/(\mu_{\rm v}\,\Delta z) \end{pmatrix}^{\rm T} \begin{pmatrix} H_z^{(m-1/2)}(i, j+1/2) \\ H_x^{(m-1/2)}(i+1/2, j) \\ E_y^{(m)}(i,j) \\ E_y^{(m)}(i, j+1) \\ E_y^{(m)}(i+1, j) \end{pmatrix}, \tag{5}$$

$$E_y^{(m+1)}(i,j) = \frac{1}{\varepsilon(i,j)} \begin{pmatrix} 1 \\ \Delta t/\Delta z \\ -\Delta t/\Delta z \\ -\Delta t/\Delta x \\ \Delta t/\Delta x \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} \varepsilon(i,j)E_y^{(m)}(i,j) \\ H_x^{(m+1/2)}(i+1/2,j) \\ H_x^{(m+1/2)}(i-1/2,j) \\ H_z^{(m+1/2)}(i,j+1/2) \\ H_z^{(m+1/2)}(i,j-1/2) \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Из этих соотношений видно, что при расчёте эволюции волнового пакета поля́ в каждом из узлов конечно-разностной сетки можно вычислить, используя последовательные полушаги. На первом полушаге вычисляются компоненты магнитного поля, т. е. для каждых (i,j) используется соотношение (5). На втором полушаге для всех узлов используется формула (6), т. е. определяются «новые» значения электрического поля. Таким образом, формулы (5) и (6) дают явное решение задачи эволюции пакета: поля во всех точках в последующие моменты времени можно вычислить через поля в предшествующие моменты. Указанное выше смещение координатных сеток для магнитного и электрического полей повышает порядок аппроксимации производных конечными разностями до $\mathrm{O}(\Delta z^2)$, $\mathrm{O}(\Delta x^2)$ и $\mathrm{O}(\Delta t^2)$. Заметим также, что в формуле (1) начальные значения электрического и магнитного полей, в принципе, должны быть заданы с учётом сдвига по времени Δt в соответствии с описанной выше схемой расчёта. Однако ввиду малости величины Δt и некритичности решения к структуре начального распределения полей этот сдвиг можно не учитывать.

Исходная волноводная структура является открытой, и для её моделирования методом конечных разностей необходимо описать поле в дальней зоне или ограничить рассматриваемую область, при этом минимизировать влияние введённых границ [7, 11]. Один из способов моделирования открытых структур состоит в том, что исследуемую систему помещают в ящик со слабо отражающими стенками. В настоящее время используют два варианта для конструирования таких стенок: введение на границе ящика согласованного импеданса [13–16] или введение стенок с идеально согласованными поглощающими слоями [17–20]. Заметим, что при использовании второго варианта поля́ внутри «толстых» стенок рассчитываются с помощью конечно-разностной схемы, сходной с описанной выше, но построенной для модифицированных уравнений Максвелла, которые учитывают особые свойства поглощающих границ. Обычно стенки представляют собой искусственный слоистый диэлектрик. Характеристики слоёв выбирают в соответствии с характеристиками сред, которые к ним примыкают, и в соответствии с размерами ячеек Δz и Δx координатной сетки. Для расчётов, описанных ниже, использовались слоистые стенки, построенные согласно рекомендациям работ [19, 20].

Принципы выбора всех вспомогательных параметров при реализации динамического метода конечных разностей обсуждались ранее [11, 19, 20], поэтому не будем на них останавливаться подробно. Отметим только, что в рассматриваемых ниже задачах размеры ячеек координатной сетки выбирались с учётом неравенств $\Delta z \ll l_{\mathrm{m}}$ и $\Delta x \ll l_{\mathrm{m}}$, где l_{m} — характерный пространственный масштаб задачи. Обычно l_{m} по порядку величины соответствует минимальной или средней длине волны в среде, толщине ДВ или характерным размерам рассеивателя (например, радиусу цилиндра). Конкретные размеры ячеек координатной сетки выбирались с помощью численных экспериментов по исследованию внутренней сходимости получаемых результатов. При расчётах задавались равные шаги по продольной и поперечной пространственным координатам: $\Delta x = \Delta z$. Шаг по времени задавался в соответствии с условием Куранта: $c\,\Delta t < \min[n(x,z)]/\sqrt{(1/\Delta z)^2 + (1/\Delta x)^2}$, где c — скорость света в вакууме. В приведённых ниже примерах типичный шаг по времени $\Delta t \sim (0{,}6 \div 1{,}0)\,\Delta z/c$. Размеры волнового пакета начального возмущения по оси z (см. формулу (1)) задавались исходя из соотношения $\Delta z_{\mathrm{p}} \approx (1{,}5 \div 3)\,\lambda_{\mathrm{g}}$, где λ_{g} — длина волны НМ. Размер ящика L_x по оси x должен быть таким, чтобы поле направляемой моды ДВ на верхней и нижней стенках было пренебрежимо малым. Размер ящика L_z по оси z составлял порядка $10\,\Delta z_{\rm p}$. В этом случае можно было достаточно просто разделить прямой и встречный пакеты НМ, кроме того, волна, отражённая от правой стенки, проходила через линии наблюдения [11] значительно позже волн, отражённых и прошедших через неоднородный участок, и не оказывала влияния на результаты.

На втором этапе по результатам конечно-разностного моделирования рассчитывались выходные характеристики задачи. При анализе рассеяния НМ на теле основной интерес представляют следующие данные: зависимость коэффициентов отражения и прохождения НМ от геометрических параметров системы, а также конфигурация дифракционных полей.

Для расчёта коэффициента отражения R направляемой моды на частоте ω_0 прежде всего необходимо разделить поля́ этой моды и радиационных волн. Представим электрическое поле $E = E_y(x,z,t)$ в области левее рассеивателя (включая плоскость наблюдения отражённой моды) в виде интеграла Фурье от разложения электрического поля по собственным модам волновода [21–24]:

$$E_y(x,z,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{\alpha=+,-} C_0^{(\alpha)}(\omega) E_0^{(\alpha)}(x,\omega) \exp[i\,(\alpha\beta_0(\omega)z - \omega t)] + E_{\rm R}(x,z,\omega)\exp(-i\omega t) \right] {\rm d}\omega. \quad (7)$$

В (7) $E_0^{(+)}(x,\omega)$ и $E_0^{(-)}(x,\omega)$ — комплексные амплитуды полей прямых и встречных НМ, $\beta_0(\omega)$ — коэффициенты распространения прямых НМ, $C_0^{(+)}$ и $C_0^{(-)}$ — коэффициенты разложения, $E_{\rm R}(x,z,\omega)$ — комплексные амплитуды радиационного поля. Для диэлектрического волновода с постоянным профилем показателя преломления НМ рассчитывались по аналитическим соотношениям [23, 25]. Комплексные амплитуды $E_{\rm R}$ (как слева, так и справа от рассеивателя) могут быть записаны в виде интегралов по полям мод непрерывного спектра [21–24]. Нетрудно показать, что в поперечных сечениях, расположенных левее (или правее) рассеивающих тел, коэффициенты $C_0^{(+)}$ и $C_0^{(-)}$ не зависят от координаты z [21, 24]. Используя свойство ортогональности полей собственных мод волновода и вычисляя преобразование Фурье, из (7) находим следующее выражение для амплитуд НМ:

$$C_0^{(\alpha)}(\omega)\exp[i\alpha\beta_0(\omega)z] =$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} [\beta_0(\omega)E_y(x,z,t)/(k\zeta_{\rm v}) - \alpha H_x(x,z,t)]\exp(i\omega t)\,{\rm d}t\,E_{0y}(x,\omega)\,{\rm d}x/N_0, \quad (8)$$

где N_0 — норма НМ [22], $\zeta_{\rm v} = \sqrt{\mu_{\rm v}/\varepsilon_{\rm v}}$ — импеданс свободного пространства, $k = \omega/c$ — волновое число в вакууме, а индекс $\alpha = +,-$ отмечает величины, относящиеся к прямым и встречным модам. Окончательное выражение для коэффициента отражения НМ в центральной плоскости $z = 0$ на частоте ω_0 имеет вид

$$R(\omega_0) = C_0^{(-)}(\omega_0)/C_0^{(+)}(\omega_0). \quad (9)$$

При практических расчётах выражений (8), (9) использовалось быстрое преобразование Фурье. Сходным образом, рассматривая поля́ в области, расположенной справа от рассеивающего тела (рис. 1), вычислялся коэффициент прохождения $T(\omega_0)$ направляемой моды.

Отметим, что формально с помощью описанной выше методики можно рассчитать коэффициенты R и T не только на частоте ω_0, но и на любой другой частоте ω, если она присутствует в спектре волнового пакета. Однако на практике достаточно точные результаты для этих коэффициентов получаются только для частот ω, лежащих в сравнительно небольшой окрестности ω_0.

Причина этого заключается в том, что при численном моделировании прохождения волнового пакета вдоль рассматриваемой структуры возникает «численный шум», который при больших $|\omega - \omega_0|$ может сильно исказить гармонические составляющие получаемого решения, поскольку вне окрестности частоты ω_0 амплитуды гармоник невелики. При этом следует также учесть, что параметры, используемые при реализации метода конечных разностей (например, шаг по времени), специально подбирались в соответствии с величиной частоты ω_0 и для других частот (особенно для высоких) они не будут оптимальными. Иными словами, с ростом $|\omega-\omega_0|$ уменьшается величина, которая имеет смысл отношения сигнал/шум (под сигналом понимается амплитуда гармоники на частоте ω); поэтому подобные расчёты для широкой полосы частот целесообразно проводить, последовательно выбирая в нужном интервале некоторый набор «центральных» частот ω_0.

Эволюция пакета волн внутри ящика наблюдалась при последовательном выводе «мгновенных снимков» электрического поля $|E_y(x,z,t)|$ в различные моменты времени t_m; эти снимки получали, используя стандартные средства графического вывода данных. В принципе, применяя преобразования Фурье к временны́м реализациям $E_y(x,z,t)$, можно вычислить распределение комплексных амплитуд $E_y(x,z,\omega_0)$ в произвольных точках расчётной области и, таким образом, рассчитать структуру поля для задачи о дифракции монохроматической волны на рассматриваемом теле (для заданной частоты ω_0). Однако такой подход весьма громоздок и требует очень большого времени для расчётов [1]. Для рассматриваемых ниже систем выполнено условие слабой волноводности [25], так что дисперсия в них невелика, поэтому в ближней зоне в центре пакета распределение $|E_y(x,z,t)|$ близко к распределению монохроматической волны $|\operatorname{Re}[E_y(x,z,\omega_0)\exp(-i\omega_0 t)]|$ в той области ящика, где в данный момент времени находится цуг волн. Это свойство рассматриваемых волноводных структур позволяет получить приближённое, но достаточно информативное представление о решении исходной задачи, последовательно анализируя указанные выше мгновенные снимки электрического поля. Заметим, что при дифракции пакета возбуждается цилиндрическая (пространственная) волна, которая проходит через все точки ящика. Момент времени для получения снимка в нужной области ящика легко выбирается путём визуального наблюдения рассматриваемого процесса; примеры подобного анализа будут приведены в следующем разделе.

1.2. Метод разложения по плоским волнам

Вторая методика является менее универсальной, чем первая, но позволяет получить весьма точные результаты для рассеивателей с простой геометрией, граница которых не пересекает плоскость раздела сред. Рассмотрим с её помощью дифракцию НМ симметричного волновода ($n_1 = n_3$) на неоднородности в виде идеально проводящего цилиндра с круговым сечением, который расположен над волноводом. Радиус цилиндра обозначим через r_0, а координату его оси — через x_0 (при этом везде считаем, что вторая координата оси $z_0 = 0$). Решим задачу о дифракции монохроматической волны. Зависимость от времени предполагаем в виде $\exp(-i\omega_0 t)$; для упрощения записи в дальнейшем вместо ω_0 будем писать ω, опуская нижний индекс. Как обычно, временно́й множитель опущен в большинстве формул.

Сместим начало декартовой системы координат в центр сечения цилиндра $(x_0, 0)$ и введём новые координаты $x' = x - x_0$, $z' = z$. Из физических соображений ясно, что рассеянное волновое поле E_s в полосе верхнего полупространства, точки которой удовлетворяют неравенствам $d - x_0 <$

[1] Заметим, что для двумерных задач при распространении волнового пакета его задний фронт не имеет чёткой границы (он неограничен во времени) [26], и этот эффект усложняет вычисление преобразования Фурье.

$< x' < -r_0$, может быть представлено в виде следующего разложения по плоским волнам:

$$E_\mathrm{s}(x',z') = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(\eta)\exp(i\eta z' - i\xi_1 x')\,\mathrm{d}\eta/\xi_1 + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(\eta)R(\eta)\exp(i\eta z' + i\xi_1 x')\,\mathrm{d}\eta/\xi_1, \tag{10}$$

$$g(\eta) = \frac{i}{4}\int\limits_{\Lambda_\mathrm{c}} \frac{\partial E}{\partial n'}\exp(-i\eta z' + i\xi_1 x')r'\,\mathrm{d}\varphi'. \tag{11}$$

Здесь $E(x',z')$ — полное волновое поле на контуре тела Λ_c, $\partial E/\partial n'$ — его производная по внешней нормали к цилиндру, $(r',\,\varphi')$ — цилиндрические координаты $(r' = \sqrt{x'^2 + z'^2}\,,\ \varphi' = \arcsin(x'/r'))$ с центром в точке $(x_0,\,0)$, $\xi_1 = \sqrt{k^2 n_1^2 - \eta^2}\,,\ k = \omega/c$. При выводе формул предполагалось, что на границе рассеивателя Λ_c выполнено условие Дирихле. Подобные разложения часто применяются при анализе возбуждения слоистых структур [27]. В соотношении (10) первое слагаемое представляет собой часть рассеянного поля, падающего на верхнюю границу диэлектрического слоя, а второе слагаемое — часть поля, отражённого от этой границы. Соотношения (10) и (11) нетрудно получить с помощью формулы Грина [5]. Функция $R(\eta)$ в формуле (10) является коэффициентом отражения парциальных плоских волн при их падении из верхнего полупространства на диэлектрический слой (волновод). Для симметричной структуры эта функция равна [27]

$$R(\eta) = \frac{(\xi_1^2 - \xi_2^2)\,\mathrm{tg}(2\xi_2 d)\exp(2i\xi_1\Delta)}{2i\xi_1\xi_2 + (\xi_1^2 + \xi_2^2)\,\mathrm{tg}(2\xi_2 d)}\,, \tag{12}$$

где $\xi_2 = \sqrt{k^2 n_2^2 - \eta^2}$ и $\Delta = x_0 - d$. Знаки квадратных корней выбраны так, что $\mathrm{Re}\,\xi_2 > 0$ при $|\eta| < kn_1$ и $\mathrm{Im}\,\xi_2 > 0$ при $|\eta| > kn_2$.

Перейдём в формуле (10) к цилиндрическим координатам и сделаем замену переменной интегрирования, полагая $\eta = kn_1\cos\psi$. В результате получим

$$E_\mathrm{s}(r',\varphi') = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi+i\infty}^{-i\infty} p(\psi)\exp[ikn_1 r\cos(\psi - \varphi')]\,\mathrm{d}\psi\; + \;\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi+i\infty}^{-i\infty} p(\psi)R(\psi)\exp[ikn_1 r\cos(\psi + \varphi')]\,\mathrm{d}\psi, \tag{13}$$

где введена функция $p(\psi) = g(kn_1\cos\psi)$. Для краткости в формуле (13) введено также новое обозначение для коэффициента отражения: $R(\psi) = R(kn_1\cos\psi)$. Цель этих преобразований состоит в том, чтобы аналитически продолжить представление (10) на всю верхнюю полуплоскость $x' > 0$ (естественно, за исключением точек внутри цилиндра, где поле отсутствует). Далее представим функцию $p(\psi)$ в виде ряда Фурье с неизвестными коэффициентами a_m:

$$p(\psi) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m\exp(im\psi). \tag{14}$$

Подставим (14) в формулу (13) и воспользуемся тождеством

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi+i\infty}^{-i\infty} \exp(ikn_1 r'\cos(\psi - \varphi') + im\psi)\,\mathrm{d}\psi = i^m H_m^{(1)}(kn_1 r')\exp(im\varphi'), \tag{15}$$

где $H_m^{(1)}$ — функция Ханкеля первого рода порядка m. Последнее соотношение справедливо при $\varphi' \in (-\pi,0)$. В результате получим новое представление для рассеянного поля:

$$E_\mathrm{s}(r',\varphi') = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} i^m a_m H_m^{(1)}(kn_1 r')\exp(im\varphi') + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m\,u_m(r',\varphi'), \tag{16}$$

где

$$u_m(r',\varphi') = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi+i\infty}^{-i\infty} R(\psi)\exp[ikn_1r'\cos(\psi-\varphi') + im\psi]\,\mathrm{d}\psi. \tag{17}$$

Ряд (16) представляет собой обобщение ряда Рэлея на случай, когда около тела находится слоистая среда. Таким образом, с помощью описанных выше преобразований получено представление (16) для рассеянного поля, которое является аналитическим продолжением разложения (10). В отличие от (10) выражение (16) позволяет находить дифракционное поле во всех точках верхней полуплоскости ($x > d$), которые находятся вне цилиндрического рассеивателя. Отметим, что первый член разложения (16) аналитичен во всех точках за исключением оси цилиндра, тогда как второй член, как правило, имеет особенности при $x < d$ [5, 28].

Из формул (16) и (17) нетрудно получить систему линейных алгебраических уравнений для неизвестных коэффициентов Фурье a_m. С этой целью подставим выражение для полного поля E в граничное условие на цилиндрическом теле и воспользуемся разложением поля основной моды диэлектрического волновода по цилиндрическим гармоникам:

$$E_0(r',\varphi') = A_0\sum_{m=-\infty}^{+\infty} i^m J_m(k_1r')\exp(m\psi_0)\exp(im\varphi'), \tag{18}$$

где

$$A_0 = \cos\left(d\sqrt{k^2n_2^2-\beta_0^2}\right)\exp(-kn_1\Delta\,\mathrm{sh}\,\psi_0). \tag{19}$$

Здесь ψ_0 — угол, связанный с продольным волновым числом β_0 соотношением $\beta_0 = kn_1\,\mathrm{ch}\,\psi_0$, $J_m(k_1r')$ — функция Бесселя первого рода порядка m. В результате получаем систему линейных уравнений

$$a_m = a_m^{(0)} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G_{mn}a_n, \tag{20}$$

где $m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$. Матричные элементы в приведённой выше системе уравнений равны

$$G_{mn} = f_m W_{mn}, \tag{21}$$

где

$$f_m = -J_m(kn_1r_0)/H_m^{(1)}(kn_1r_0),$$
$$W_{mn} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi+i\infty}^{-i\infty} R(\psi)\exp[i\,(m+n)\,\psi)]\,\mathrm{d}\psi. \tag{22}$$

Правая часть системы (20) имеет вид

$$a_m^{(0)} = A_0 f_m\exp(m\psi_0). \tag{23}$$

Отметим, что аналогичная система уравнений была ранее получена в работе [5] с помощью более общего подхода — метода диаграммных уравнений [28], который позволяет рассчитывать (при некоторых ограничениях на форму границы рассеивателя) дифракцию волн на телах, расположенных в слоистой среде и не пересекающих границу раздела сред.

Решая систему (20), находим коэффициенты a_m, которые согласно (16) определяют рассеянное поле в верхнем полупространстве $x > d$ и ток на теле. Аналогичным образом можно получить представление для поля в нижнем полупространстве и внутри волновода. Рассеянное поле в дальней зоне рассчитывалось из интегральных представлений с помощью метода перевала по стандартной методике. В верхнем полупространстве вдали от тела при условиях

$$kn_1 r \sin^2\varphi \gg 1, \qquad r \gg x_0, \qquad r \gg 2d, \qquad r \gg r_0 \tag{24}$$

электрическое поле имеет асимптотическое представление

$$E_{\mathrm{s}} \approx \left(\frac{2}{\pi i k_1 r}\right)^{1/2} [p(\varphi) + R(-\varphi)p(-\varphi)] \exp(ikn_1 r), \tag{25}$$

где функция $p(\varphi)$ определена согласно (14). Здесь $(r,\,\varphi)$ — цилиндрические координаты в исходной системе отсчёта с центром в точке O (рис. 1). Сходная асимптотика получается для поля в нижнем полупространстве:

$$E_{\mathrm{s}} \approx \left(\frac{2}{\pi i k n_1 r}\right)^{1/2} T(\varphi)p(\varphi) \exp(ikn_1 r), \tag{26}$$

где $T(\varphi)$ — коэффициент прохождения парциальных плоских волн (падающих сверху) через диэлектрический слой. Выражение для $T(\varphi)$ имеет вид

$$T(\varphi) = \frac{4\xi_1\xi_2 \exp(2i\xi_2 d)}{(\xi_1+\xi_2)^2 \exp(2i\xi_2 d) + (\xi_1-\xi_2)^2 \exp(-2i\xi_2 d)}\,, \tag{27}$$

где $\xi_1 = kn_1 \sin\varphi$ и $\xi_2 = k\,\sqrt{n_2^2 - n_1^2\cos^2\varphi}$. Диаграмма направленности по мощности пропорциональна $r\,|E_{\mathrm{s}}|^2$ при $r \to \infty$.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЁТОВ

В этом разделе приведены результаты расчётов различных структур, которые проводились при помощи описанных выше методик. Типичные геометрии задач приведены на рис. 1. Во всех примерах считалось, что длина волны в свободном пространстве равна $\lambda = 0{,}86$ мкм. Анализировался случай дифракции основной TE_0 моды.

Вначале рассмотрим несколько задач дифракции НМ на идеально проводящих металлических телах. В качестве первого примера исследуем дифракцию моды на цилиндре круглого сечения. Предполагаем, что волновод — симметричный, с постоянным показателем преломления $n = n_2$ волноведущего слоя. На рис. 2 приведены зависимости коэффициента отражения по мощности $|R|^2$ (кривая *1*) и коэффициента прохождения $|T|^2$ (кривая *2*) от координаты оси цилиндра x_0. Здесь и ниже все размеры даны в микронах. Предполагалось, что показатели преломления равны [2] $n_2 = 3{,}6$; $n_1 = n_3 = 3{,}24$, толщина волновода $2d = 0{,}25$ мкм, радиус цилиндра $r_0 = 0{,}1$ мкм. Сплошные кривые построены с помощью ДМКР, а тёмными кружками показаны значения тех же величин при использовании МРПВ. При вычислениях динамическим методом конечных разностей использовался ящик с внутренними размерами 2,5 мкм (вдоль оси z) и 2 мкм (вдоль оси x), число ячеек координатной сетки по горизонтали составляло 250, а по вертикали — 200. Заметим, что в случаях, когда тело касается границы раздела сред или пересекает её, поля могут быть сингулярны [29], однако при тех значениях показателей преломления слоёв, которые были использованы при расчётах, эти сингулярности чрезвычайно слабые и их можно не учитывать.

Как видно из рис. 2, обе методики дают близкие результаты, при этом погрешность расчёта коэффициентов ДМКР обычно имеет порядок 10^{-2}. Эта погрешность увеличивается только в

[2] Подобные значения являются типичными для интегрально-оптических волноводов, изготовленных на основе GaAs [1].

случаях, когда значения $|R|^2$ или $|T|^2$ близки к нулю. Следует отметить, что использованный в работе вариант МРПВ работает только в случае, когда рассеиватель не пересекает границу раздела сред, поэтому на рис. 2 данные, полученные этим методом, приведены лишь для $x_0 > d + r_0$. Отметим также, что рассматриваемая задача является одномодовой, поскольку высшая мода TE_1 может распространяться вдоль рассматриваемого волновода при большей его толщине, а именно при $2d > 2d_{01} = 0{,}476$ мкм.

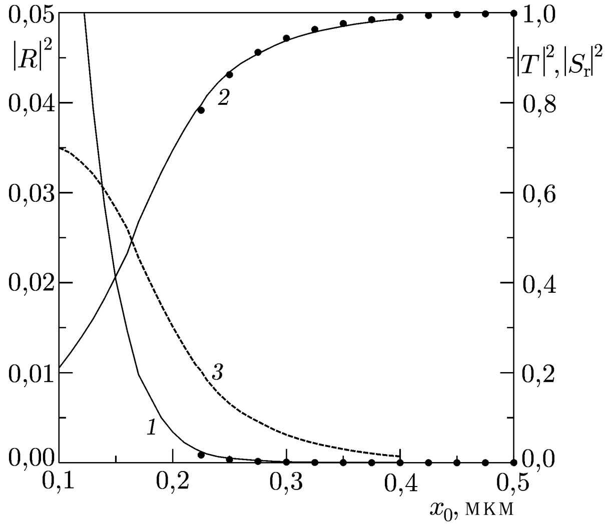

Рис. 2. Зависимости коэффициентов отражения $|R|^2$ (кривая *1*), прохождения $|T|^2$ (кривая *2*) и рассеяния $|S_{\mathrm{r}}|^2$ (кривая *3*) от координаты оси цилиндра x_0 для симметричного волновода толщины $2d = 0{,}25$ мкм

На рис. 2 пунктирной кривой *3* представлены результаты расчёта коэффициента рассеяния $|S_{\mathrm{r}}|^2$, который равен отношению мощности цилиндрической волны к мощности падающей на рассеивающее тело НМ. Этот коэффициент рассчитывается по формуле $|S_{\mathrm{r}}|^2 = 1 - |R|^2 - |T|^2$, которая следует из закона сохранения энергии. В большинстве случаев коэффициент отражения мал, так что обычно потери мощности обусловлены возбуждением радиационных волн, т. е. $|T|^2 \approx 1 - |S_{\mathrm{r}}|^2$.

Рассмотрим теперь эволюцию пакета волн, которая рассчитывалась на первом этапе решения рассматриваемой задачи методом конечных разностей (см. выше). На рис. 3 показаны распределения модуля электрического поля $|E_y(x,z,t)|$ в разные моменты времени $t = t_m$ для точек внутри ящика. При расчётах огибающая цуга волн при $t = 0$ задавалась в виде (1). Верхний рисунок построен после 15 полных шагов по времени (в приведённых выше формулах $m = 15$ и $\Delta t = 0{,}2 \cdot 10^{-16}$ с), средний рисунок — при $m = 800$, нижний — при $m = 1\,000$. Степень зачернения на рисунке пропорциональна интенсивности поля в волне. Для этого рисунка координата оси цилиндра равна $x_0 = 0{,}22$ мкм, так что он немного заходит в средний слой. Рис. 3*б* достаточно ясно показывает структуру дифракционных полей вблизи неоднородности, в частности возбуждение боковых волн.

На рис. 4 изображена диаграмма направленности (ДН) излучения по мощности в дальней зоне для рассматриваемой геометрии задачи (сплошная кривая). Все параметры выбирались такими же, как и для рис. 2. Расчёт проводился с использованием МРПВ на основе формул (25), (26) для случая, когда координата оси цилиндра равна $x_0 = 0{,}275$ мкм, так что цилиндр находился над волноводом. Поскольку рассеиватель расположен несимметрично по отношению к оси волновода, ДН имеет несимметричную форму. Для сравнения на рис. 4 пунктирной кривой представлена ДН рассеяния плоской волны на таком же теле в однородном пространстве (без волновода) с показателем преломления n_1. Эти результаты можно с некоторыми оговорками рассматривать как данные для предельного случая, когда замедление НМ стремится к нулю.

ДМКР позволяет достаточно просто рассчитать структуру поля для нестационарной задачи о дифракции пакета в области, которая соответствует ближней и, частично, промежуточной зонам для монохроматического процесса (на частоте ω_0). Расчёт распределения амплитуды $|E_y(x,z,\omega_0)|$ в указанных зонах, а также пересчёт поля в дальнюю зону довольно громоздок. В некоторых случаях, например в задаче об обрыве ДВ [11], цилиндрическая волна в свободном полупространстве формируется уже в промежуточной зоне, когда расстояние до точек наблюдения сравнительно невелико ($r \sim 5\lambda$). Поэтому для подобных случаев можно приближённо определить распределение амплитуды цилиндрической волны на окружности небольшого радиуса, используя способ, описанный в [11], и, таким образом, вычислить ДН излучения вперёд (за обрывом) по результатам решения нестационарной задачи методом конечных разностей. Для рассматриваемой системы граница дальней зоны, которая определяется согласно (24), расположена значительно дальше от рассеивателя. В частности, при малых углах φ главную роль в определении формы этой границы играет первое из неравенств (24), которое показывает, что при $\varphi \ll 1$ формирование цилиндрической волны происходит на очень больших расстояниях от тела порядка λ/φ^2, которые при $\varphi \to 0$ всегда превышают размеры реального ящика. Для рассматриваемого класса структур ДН является менее значимой характеристикой решения задачи, чем данные о коэффициентах отражения и прохождения, а также о структуре ближнего поля, и из-за трудностей расчётов в данной работе анализ ДН излучения первым из описанных выше методов не проводился.

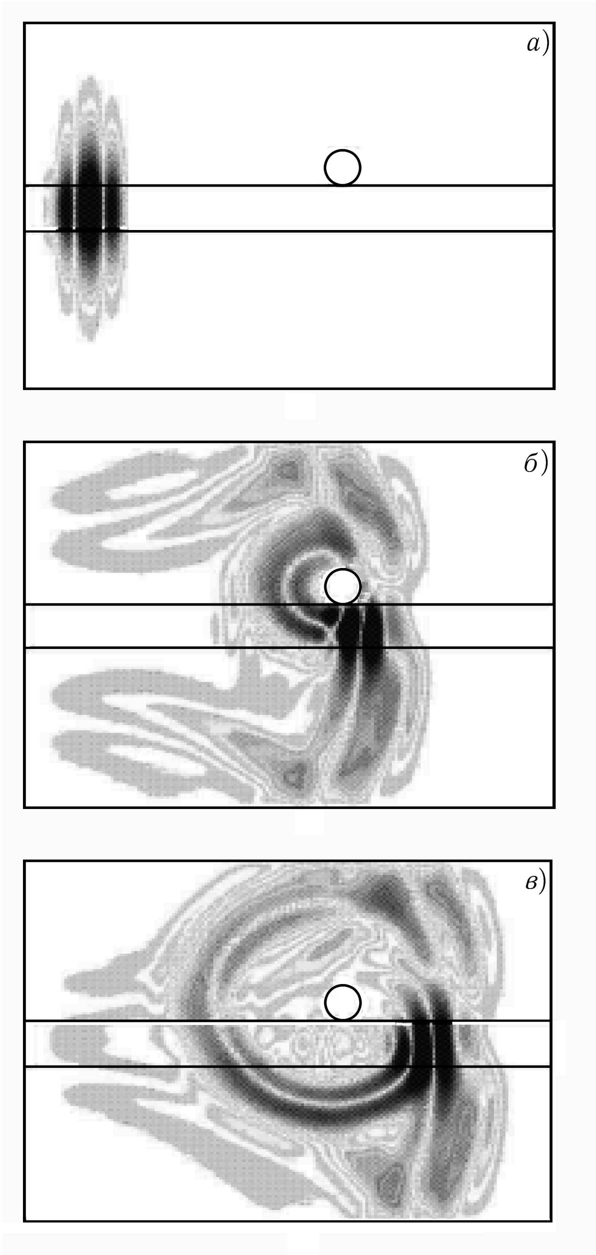

Рис. 3. Распределение интенсивности электрического поля $|E_y|$ в системе с цилиндрическим рассеивателем в разные моменты времени: $m = 15$ (*а*), $m = 800$ (*б*) и $m = 1\,000$ (*в*)

Рассмотрим теперь рассеяние на таком же цилиндре, но для случая несимметричного волновода, у которого $n_1 \neq n_3$. На рис. 5 представлены зависимости коэффициентов $|R|^2$ (кривая *1*) и $|T|^2$ (кривая *2*) от координаты оси цилиндра x_0. Предполагалось, что $n_2 = 3{,}6$; $n_1 = 3{,}24$; $n_3 = 1$; $2d = 0{,}25$ мкм и $r_0 = 0{,}1$ мкм. Кривые рассчитаны ДМКР при тех же параметрах сетки, что и выше. Для волновода рассматриваемого типа поле НМ очень быстро убывает за верхней границей ($x > d$), поэтому рассеяние НМ невелико, если цилиндр находится в третьем слое (т. е. при $x_0 > d+r_0$). В подложке поле убывает медленнее, поэтому радиационные потери для тела, находящегося в области $x < -d$ обычно больше.

Как и следовало ожидать, в рассматриваемых задачах характеристики рассеяния в значительной степени определяются величиной поля НМ в окрестности тела, а также геометрическими и электрическими параметрами рассеивателя. Качественно характер полученных зависимостей легко объяснить, если воспользоваться приближённым подходом, задав из физических соображений на поверхности рассеивателя приближённое распределение электрического тока, который возбуждает вторичные поля [21]. Например, для малых тел этот ток легко определить в квазистатическом приближении, а для больших тел — в приближении геометрической оптики. Так как величина тока должна быть пропорциональна

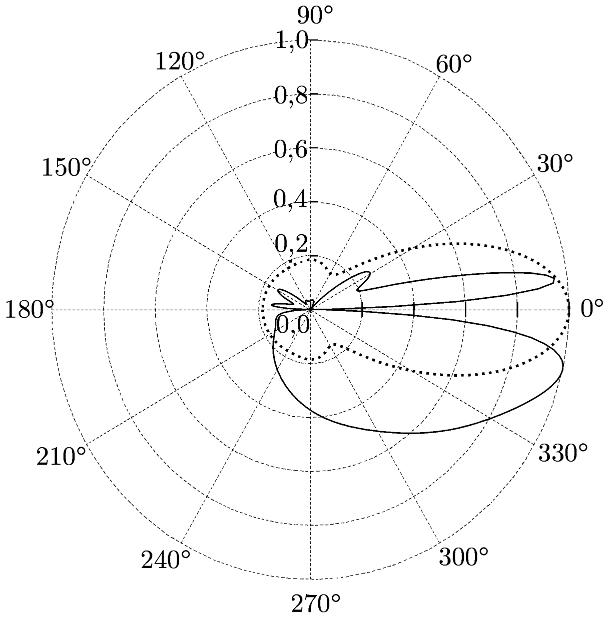

Рис. 4. Диаграмма направленности излучения при рассеянии НМ на металлическом цилиндре при $x_0 = 0{,}275$ мкм (сплошная кривая) и для задачи о дифракции плоской волны на таком же цилиндре в однородном пространстве (пунктир)

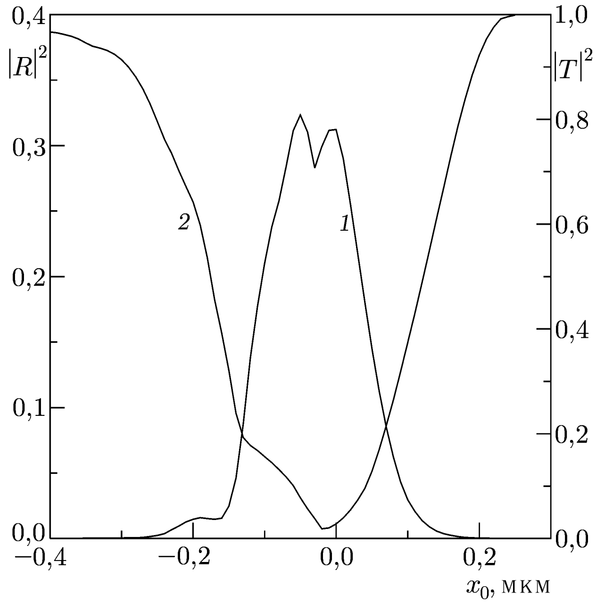

Рис. 5. Зависимости коэффициентов $|R|^2$ (кривая *1*) и $|T|^2$ (кривая *2*) от координаты оси цилиндра x_0 для несимметричного волновода

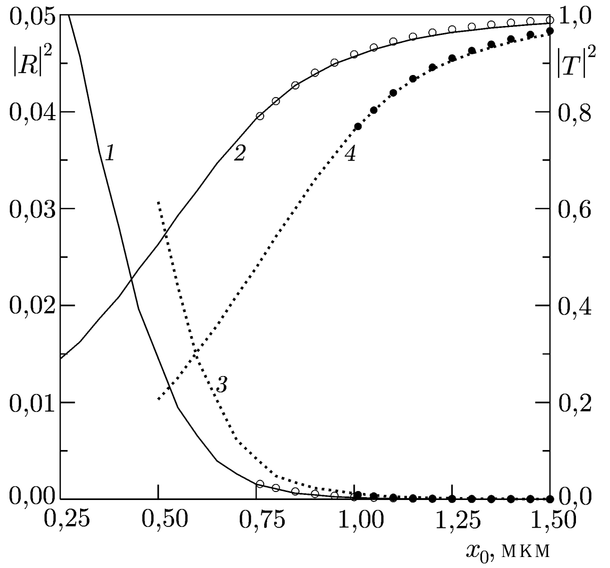

Рис. 6. Зависимости коэффициентов $|R|^2$ (кривые *1* и *3*) и $|T|^2$ (кривые *2* и *4*) от координаты оси круглых цилиндров с диаметром 0,5 и 1 мкм

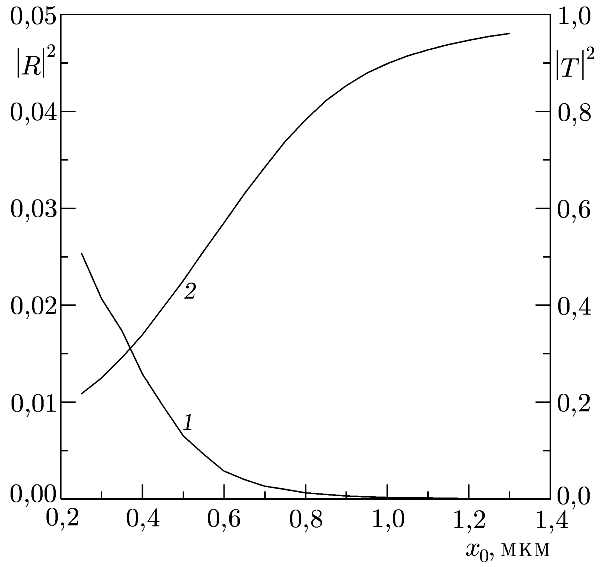

Рис. 7. Зависимости коэффициентов $|R|^2$ (кривая *1*) и $|T|^2$ (кривая *2*) от координаты оси эллиптического цилиндра x_0

величине поля НМ в месте нахождения цилиндра, то с ростом $|x_0|$ поля́ НМ, а вместе с ними и радиационные потери, будут убывать.

Исследуем, как влияют параметры волновода (показатели преломления сред) на характеристики рассеяния. В качестве рассеивателя опять рассмотрим металлический цилиндр радиуса r_0.

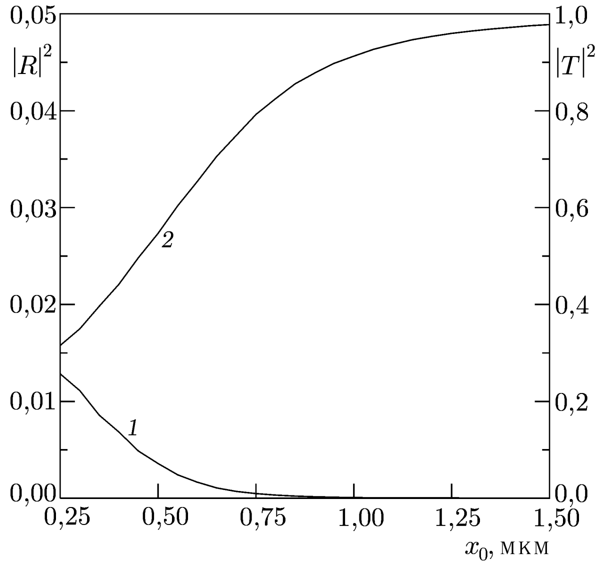

Рис. 8. Зависимости коэффициентов $|R|^2$ (кривая *1*) и $|T|^2$ (кривая *2*) от координаты оси цилиндра с конечным показателем преломления $n_{\rm m}$

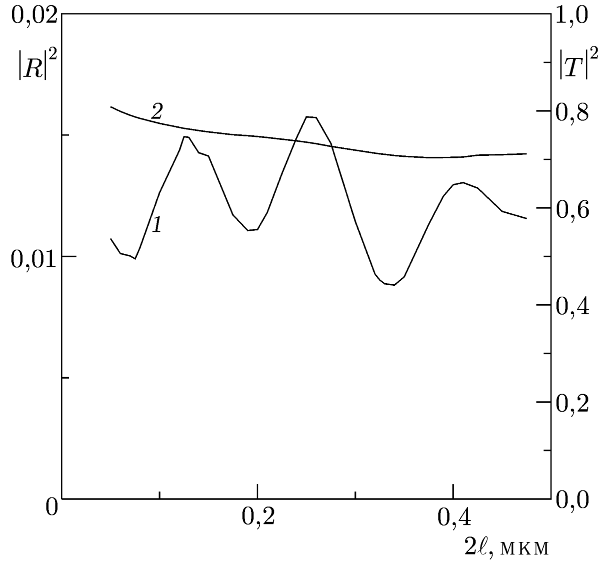

Рис. 9. Зависимости коэффициентов $|R|^2$ (кривая *1*) и $|T|^2$ (кривая *2*) от длины металлических полосок 2ℓ

При расчётах предполагалось, что волновод симметричный, показатели преломления слоёв равны $n_2 = 1{,}5$; $n_1 = n_3 = 1{,}455$ и $2d = 1{,}0$ мкм. На рис. 6 приведены зависимости коэффициентов $|R|^2$ и $|T|^2$ от координаты оси цилиндра x_0 для двух значений его радиуса. Кривые *1* и *2* построены при $r_0 = 0{,}25$ мкм, а кривые *3* и *4* — при $r_0 = 0{,}5$ мкм. Сплошные и пунктирные линии рассчитаны с помощью ДМКР, а светлые и тёмные кружки соответствуют результатам МРПВ.

При расчёте характеристик рассеяния ДМКР в данном случае использовался ящик с внутренними размерами 8 мкм (вдоль оси z) и 7 мкм (вдоль оси x); число ячеек координатной сетки по горизонтали было равно 400, а по вертикали — 350; шаг по времени задавался равным $\Delta t = 0{,}666 \cdot 10^{-16}$ с. Для рассматриваемой системы безразмерный частотный параметр $V = kd\sqrt{n_2^2 - n_1^2} \approx 1{,}3$ приблизительно такой же, как и в первом из рассмотренных примеров (рис. 2). Однако длины волн в диэлектрике из-за разницы показателей преломления отличаются, поэтому поля́ НМ для последних примеров спадают медленнее, что и объясняет различие между рис. 2 и 6.

Рассмотрим теперь рассеяние НМ на цилиндре с другой формой поперечного сечения, а именно эллиптической. На рис. 7 представлены зависимости коэффициентов отражения (кривая *1*) и прохождения (кривая *2*) НМ от координаты оси цилиндра x_0. Полуоси цилиндра были равны 0,75 и 0,25 мкм, а эллипс был ориентирован так, как показано на рис. 1*а*. Параметры волновода были следующими: $n_2 = 1{,}5$; $n_1 = n_3 = 1{,}455$; $2d = 1{,}0$ мкм.

При анализе предыдущих примеров предполагалось, что тела идеально проводящие и на их поверхности выполнены условия Дирихле. В оптическом диапазоне модули показателей преломления металлов обычно не превышают 10 [25, 30], так что эти граничные условия являются достаточно приближёнными. Для того, чтобы оценить влияние конечной величины показателя преломления рассеивателя $n_{\rm m}$ на коэффициенты отражения и прохождения, была решена задача дифракции НМ на металлическом цилиндре, изготовленном из вольфрама. Параметры волновода были те же, что и для рис. 6 ($n_2 = 1{,}5$; $n_1 = n_3 = 1{,}455$; $2d = 1{,}0$ мкм), а радиус цилиндра $r_0 = 0{,}25$ мкм; комплексный показатель преломления вольфрама принят равным $n_m = 3{,}3 + 2{,}9i$ [30]. На рис. 8 приведены зависимости коэффициентов $|R|^2$ (кривая *1*) и $|T|^2$ (кривая *2*) от

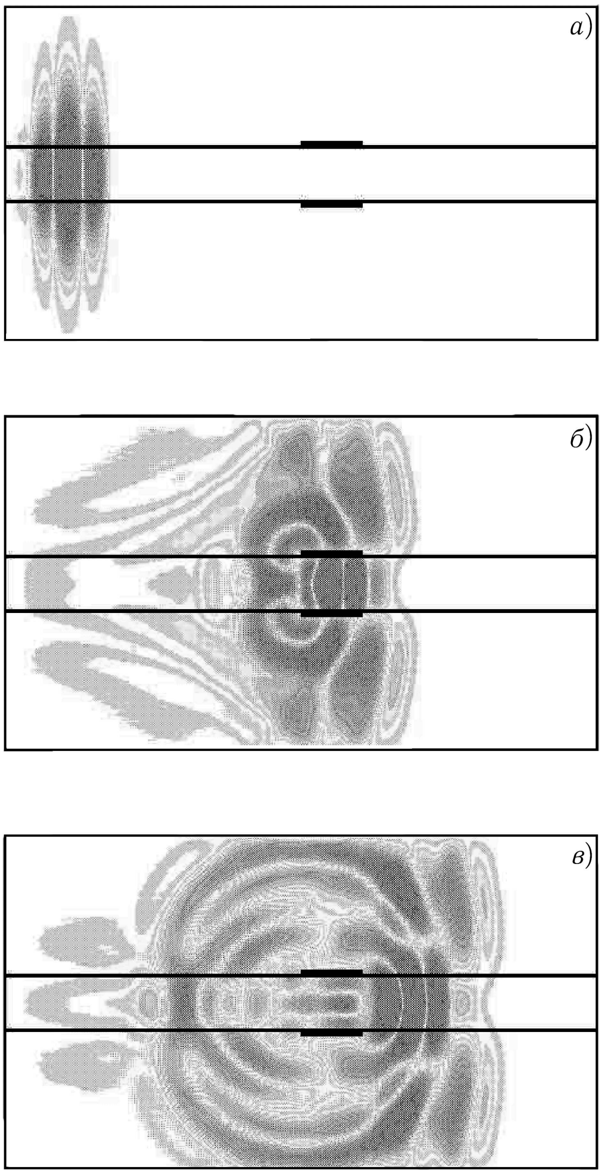

Рис. 10. Распределение интенсивности электрического поля для задачи о рассеянии НМ на полосках длины $2\ell = 0{,}25$ мкм при $m = 10$ (*а*), $m = 430$ (*б*) и $m = 550$ (*в*)

координаты оси цилиндра x_0. Видно, что коэффициент прохождения и радиационные потери для такой системы близки к полученным выше для идеально проводящего тела. В то же время коэффициенты отражения в этих задачах отличаются.

Исследуем теперь случай двух симметрично расположенных рассеивателей. На рис. 9 приведены значения коэффициентов $|R|^2$ (кривая *1*) и $|T|^2$ (кривая *2*) для задачи о рассеянии НМ на двух идеально проводящих металлических полосках конечной длины 2ℓ, расположенных в плоскостях раздела сред. Геометрия задачи изображена на рис. 1*б*. Параметры волновода были следующими: $n_2 = 3{,}6$; $n_1 = n_3 = 3{,}24$; $2d = 0{,}25$ мкм. Толщину металлических полосок выбирали малой, но конечной, равной $1{,}5\,\Delta x$, где $\Delta x = 0{,}01$ мкм — размер конечно-разностных ячеек по вертикали. Полоски меньшей толщины не являются точной моделью идеально проводящего металла, т. к. электромагнитное поле проникает сквозь них за счёт дискретной связи между узлами конечно-разностной сетки. Заметим, что рассматриваемая геометрия задачи может служить моделью волновода с короткими металлическим электродами, которые предназначены для изменения показателя преломления диэлектрика (в волноводном слое) при подаче на них постоянного напряжения; похожие системы применяются в различных оптических устройствах [1]. Для простоты при расчётах предполагалось, что распределение показателя преломления волновода регулярно вдоль оси z. Следует заметить, что ДМКР позволяет легко рассмотреть более общий случай, когда в конечной области в окрестности полосок изменяется также и диэлектрическая проницаемость волновода.

На рис. 10 показаны распределения модуля электрического поля $|E_y|$ в разные моменты времени t_m для задачи с металлическими полосками. Верхний рисунок построен после 10 полных шагов по времени ($m = 10$; $\Delta t = 0{,}333 \times 10^{-16}$ с), средний рисунок — при $m = 430$, нижний — при $m = 550$. Расчёты проводились для случая, когда длина полосок равна $2\ell = 0{,}25$ мкм, а размер ящика равен 2,5 мкм вдоль горизонтальной оси и 1,5 мкм вдоль вертикальной оси. Из последнего рисунка видно, что в промежуточной зоне рассеянное поле представляет собой суперпозицию цилиндрических волн, распространяющихся от кромок верхней и нижней металлических полосок.

Рассмотрим теперь рассеяние НМ на дефекте волновода, который представляет собой цилиндрическую полость кругового сечения, ось которой имеет координату x_0. Предполагалось, что показатель преломления среды внутри полости равен $n_0 = 1$. Исследуемую структуру можно рассматривать, например, как двумерную модель дефекта в виде воздушного пузырька вытянутой формы. При расчётах предполагалось, что волновод симметричный ($n_2 = 3{,}6$; $n_1 = n_3 = 3{,}24$; $2d = 0{,}25$ мкм). На рис. 11 представлены зависимости коэффициентов $|R|^2$ (кривая *1*) и $|T|^2$ (кривая *2*) от координаты x_0 для случая, когда радиус цилиндра равен $r_0 = 0{,}1$ мкм. Отметим, что уровень радиационных потерь в такой системе близок к тому, который был в случае металлического рассеивателя (рис. 2).

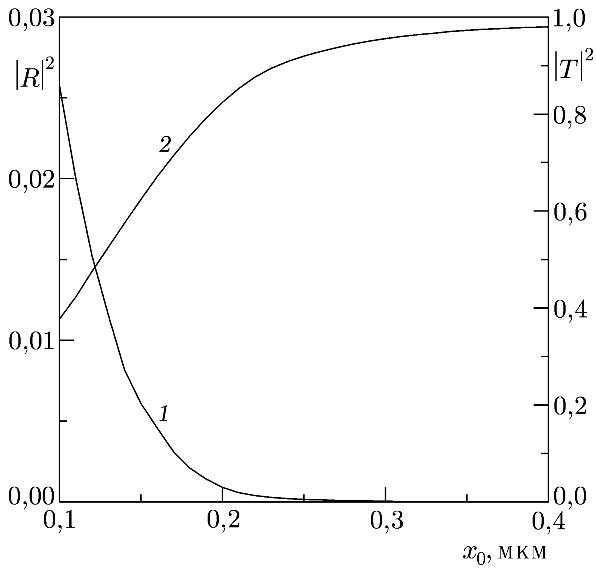

Рис. 11. Зависимость коэффициентов $|R|^2$ (кривая *1*) и $|T|^2$ (кривая *2*) от координаты оси цилиндрической полости радиуса $r_0 = 0{,}1$ мкм

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе двумя методами исследована задача дифракции основной направляемой моды плоского диэлектрического волновода на различных рассеивателях (идеально проводящих и диэлектрических). Рассчитаны зависимости коэффициентов отражения и прохождения волн от электрических и геометрических параметров задачи, а также структура дифракционных полей.

Результаты этой и ранее опубликованной работы [11] показывают, что первая из описанных выше методик, динамический метод конечных разностей, является весьма мощным численным подходом, пригодным для анализа широкого класса задач теории ДВ. Он предъявляет минимальные требования к геометрии рассеивателя, а его реализация возможна на ЭВМ с достаточно скромными ресурсами. Тем не менее следует отметить, что используемые варианты этого метода пока не позволяют применить его для тех задач, для которых в процессе распространения и рассеяния пакета волн происходит сильное увеличение его длины (или его разбиение на большое число пакетов). Такие эффекты обычно наблюдаются в резонансных системах, например в задаче о рассеянии направляемой моды на диэлектрическом резонаторе, расположенном вблизи или внутри ДВ. Возможность модификации ДМКР для исследования подобных систем требует дальнейшего анализа.

Авторы признательны А. Г. Рожневу за ценные советы, касающиеся методов расчёта, а также Н. Ф. Ковалёву за обсуждение текста статьи. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 02–02–17317, 03–02–06265 и 03–02–16161).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хансперджер Р. Интегральная оптика (теория и технология). М.: Мир, 1985.
2. Калиничев В. И. // Радиотехника и электроника. 1991. Т. 36, № 2. С. 259.
3. Жук Н. П., Яровой А. Г. // ЖТФ. 1992. Т. 62, № 7. С. 1.
4. Chou C.-T., Jeng S. K. // J. Lightwave Technol. 1998. V. 16, No. 6. P. 1107.
5. Кюркчан А. Г., Маненков С. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1998. Т. 41, № 7. С. 874.
6. Калиниченко Г. А., Кюркчан А. Г., Лерер А. М. и др. // Радиотехника и электроника. 2001. Т. 46, № 9. С. 1087.
7. Yee K. S., Chen J. S. // IEEE Trans. Antennas Propag. 1997. V. 45, No. 3. P. 354.
8. Joseph R. M., Taflove A. // IEEE Trans. Antennas Propag. 1997. V. 45, No. 3. P. 364.

9. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. Гл. 13.
10. Chu S.-T., Chaudhuri S. K. // J. Lightwave Technol. 1989. V. 7, No. 12. P. 2 033.
11. Бровко А. В., Маненков А. Б., Митюрин В. Е., Рожнев А. Г. // Радиотехника и электроника. 2002. Т. 47, № 11. С. 1 304.
12. Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны. М.: Радио и связь, 1988.
13. Mur G. // IEEE Trans. Electromagn. Compat. 1981. V. 23, No. 4. P. 377.
14. Stupfel B. // IEEE Trans. Antennas Propag. 1994. V. 42, No. 6. P. 773.
15. Рожнев А. Г., Маненков А. Б. // Радиотехника и электроника. 1997. Т. 42, № 7. С. 785.
16. Chatterjee A., Volakis J. L. // IEEE Trans. Antennas Propag. 1995. V. 43, No. 8. P. 860.
17. Yamauchi J., Mita M., Aoki S., Nakano H. // J. Lightwave Technol. 1996. V. 8, No. 2. P. 239.
18. Wait J. R. // IEEE Antennas Propag. Magazine. 1996. V. 38, No. 2. P. 48.
19. Mittra R., Pekel U. // IEEE Microwave and Guided Wave Lett. 1995. V. 5, No. 3. P. 84.
20. Berenger J.-P. // IEEE Trans. Antennas Propag. 1996. V. 44, No. 1. P. 110.
21. Маненков А. Б. // Изв. вузов. Радиофизика. 1970. Т. 13, № 5. С. 739.
22. Вайнштейн Л. А., Маненков А. Б. // Лекции по электронике СВЧ и радиофизике. Саратов: СГУ, 1986. Кн. 1. С. 141.
23. Marcuse D. Theory of Dielectric Optical Waveguides. New York: Academic Press, 1974.
24. Manenkov A. B. // IEE Proc. Pt. J. 1993. V. 140, No. 3. P. 206.
25. Адамс М. Введение в теорию оптических волноводов. М.: Мир, 1984.
26. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: МГУ, 1999.
27. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973.
28. Кюркчан А. Г. // Докл. АН. 1992. Т. 325, № 2. С. 273.
29. Васильев А. Д., Маненков А. Б. // Изв. вузов. Радиофизика. 1987. Т. 30, № 3. С. 405.
30. CRC Handbook of Chemistry and Physics: 74-th Edition / Ed. by D. R. Lide. Boca Raton: CRC Press, 1993–1994. P. 12-129.

[1] Саратовский госуниверситет;
[2] Институт физических проблем им. П. Л. Капицы РАН, г. Москва;
[3] Московский технический университет связи и информатики, Россия

Поступила в редакцию 4 марта 2003 г.

DIFFRACTION OF A MODE GUIDED BY A DIELECTRIC WAVEGUIDE

A. V. Brovko, A. B. Manenkov, and S. A. Manenkov

Using the the finite difference time domain method, we solve the problem of diffraction of a mode guided by a planar dielectric waveguide from an arbitrary-shape body. The specific results are obtained for scatterers in the form of a circular or elliptical cylinder and metal strips. The reflection and transmission coefficients of the mode and the near-zone field structure are calculated. The test problem of diffraction of the mode from a circular metal cylinder is compared with the results obtained by the method of expansion over plane waves.

УДК 537.52

РАСЧЁТ ДИСПЕРСИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК КРУГЛОГО ВОЛНОВОДА С ГЛУБОКОЙ ВИНТОВОЙ ГОФРИРОВКОЙ МЕТОДОМ FDTD

М. Л. Кулыгин

Исследованы дисперсионные характеристики круглых волноводов с винтовой гофрировкой, применяемых в микроволновых усилителях и генераторах. Результаты численных расчётов методом FDTD сравниваются с результатами, полученными на основе теории возмущений, и экспериментом. Рассматриваются проблемы повышения точности расчётов.

ВВЕДЕНИЕ

Круглые волноводы с винтовой гофрировкой используются в качестве пространства взаимодействия электромагнитных волн с электронным пучком в мощных микроволновых генераторах, усилителях и компонентах СВЧ трактов [1–4].

Поверхность круглого волновода с винтовой гофрировкой имеет два существенных отличия от поверхности гладкого круглого волновода: синусоидальную модуляцию поперечного сечения и наличие продольного периода геометрии. Пример круглого волновода с винтовой гофрировкой приведён на рис. 1. Уравнение поверхности такого волновода в общем случае выглядит следующим образом:

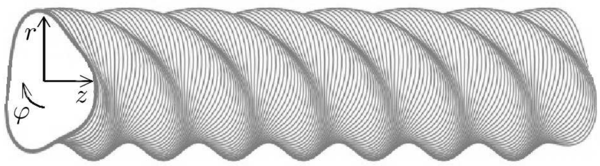

Рис. 1. Пример поверхности круглого волновода с винтовой гофрировкой

$$r(\varphi, z) = R_0 + R_1 \cos(m\varphi + 2\pi z/d), \tag{1}$$

где R_0 — радиус исходного круглого волновода, R_1 — глубина гофрировки, m — число заходов, d — продольный период. Поверхность рассматриваемого волновода имеет три вариации по азимутальному углу; соответственно, такая гофрировка называется трёхзаходной. Одним из характерных применений круглого волновода с винтовой гофрировкой является гироЛБВ [1–4]. Благодаря специфическим дисперсионным свойствам рабочей волны, гироЛБВ с гофрированным волноводом имеет несколько серьёзных преимуществ перед ЛБВ с гладким круглым волноводом: повышенный КПД, более широкую полосу усиления, меньшую зависимость характеристик от начального разброса скоростей электронов в пучке и т. п.

Целью настоящей работы является вычисление и исследование дисперсионных характеристик круглого волновода с глубокой винтовой гофрировкой. Помимо численных расчётов работа включает независимую разработку программного обеспечения и сравнение полученных с помощью него результатов с аналитической теорией возмущений [5, 6] и экспериментом. Расчёты подобных систем стационарными численными методами проводились и ранее [7], однако в данной работе применяется нестационарный численный метод, который впоследствии предполагается применить для исследования соответствующих режимов работы гироЛБВ.

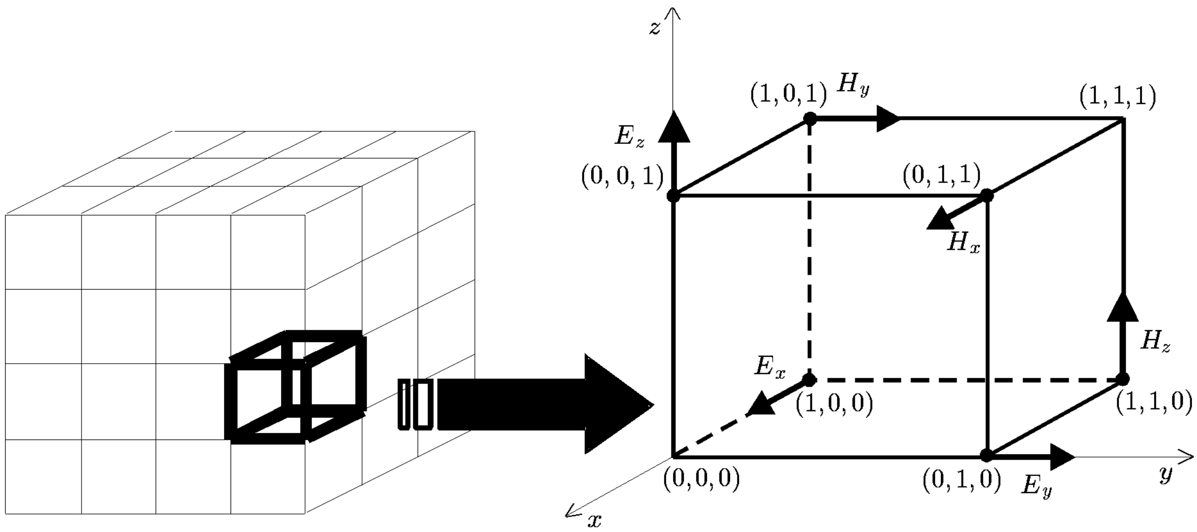

Рис. 2. Декартова координатная сетка интегрирования в методе FDTD

1. FDTD-МЕТОД ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

Для численного моделирования в работе используется метод FDTD (от английского finite difference time domain) прямого численного интегрирования уравнений Максвелла с граничными условиями на идеальном проводнике. Впервые данный метод был предложен в [8]. В настоящее время метод FDTD известен как перспективный метод численного моделирования нестационарных электродинамических задач [9, 10]. В русскоязычной литературе он также известен как динамический метод конечных разностей (ДМКР) [11] и метод конечных разностей во временно́й области (КРВО) [12]. Суть метода состоит в специфическом выборе координатной сетки интегрирования (обычно прямоугольной декартовой), в каждом из узлов которой вычисляется не более одной из 6-ти компонент электромагнитного поля (см. рис. 2). Метод обеспечивает математическую точность 2-го порядка по шагу сетки. Подобную точность обеспечивает хорошо известный метод Эйлера, однако по сравнению с ним метод FDTD в 8 раз более экономичен по числу операций пересчёта на каждую из элементарных ячеек сетки. Устойчивость метода FDTD определяется условием Куранта

$$\frac{1}{c\,\delta t} > \sqrt{\frac{1}{\delta x^2} + \frac{1}{\delta y^2} + \frac{1}{\delta z^2}}\,, \tag{2}$$

где δt — шаг по времени, δx, δy и δz — размеры ячейки по декартовым осям x, y и z, c — скорость света в свободном пространстве. Наряду с условием Куранта учитывается условие физичности аппроксимации:

$$\sqrt{\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2} \ll \lambda, \tag{3}$$

где λ — наименьший характерный пространственный масштаб в задаче (длина волны, масштаб гофрировки и т. п.). Совместно условия (2) и (3) определяют область практической применимости метода FDTD — между квазистатикой и квазиоптикой.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЁТОВ

Рис. 3. Электродинамическая система для расчёта дисперсионной кривой гофрированного волновода (продольное сечение)

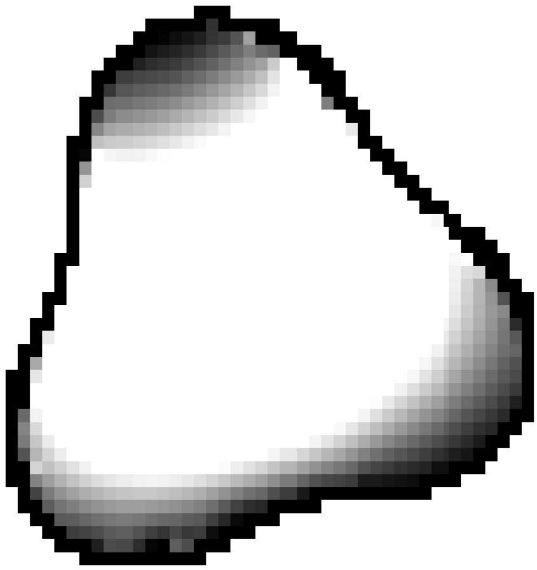

Рис. 4. Типичное распределение поперечной компоненты электрического поля моды гофрированного волновода

В настоящей работе приводятся результаты численных расчётов дисперсионной кривой относительно продольных волновых чисел для системы, включающей круглый волновод с винтовой гофрировкой (см. рис. 3). Участок гофрированного волновода начинается и заканчивается согласующими участками, представляющими собой отрезки круглого волновода с линейно изменяющейся от нуля до максимума глубиной гофрировки. Согласующие участки, в свою очередь, окружены участками гладкого волновода. На входе системы (левый торец на рис. 3) расположен источник излучения циркулярно поляризованной собственной волны гладкого круглого волновода TE_{11}, на выходе (правый торец) — идеально согласованный поглотитель PML [13] с коэффициентом отражения по мощности порядка 0,01 %. Направление циркулярной поляризации противоположно направлению вращения гофрировки для обеспечения резонансного характера связи собственных волн исходного круглого волновода TE_{11} и TE_{21} на гофрированном участке. Источник является квазимонохроматическим: при нулевых начальных условиях происходит его мгновенное (для упрощения задачи) включение, после чего процесс расчёта продолжается до достижения системой состояния, близкого к стационарному. Поглотитель удаляет из системы любое падающее на него излучение, препятствуя его отражению в сторону источника. При достижении состояния, близкого к стационарному, процесс расчёта останавливается, и измеряется продольное волновое число на гофрированном участке. По полученному волновому числу для каждого значения частоты источника в заданном интервале получается набор точек дисперсионной кривой круглого волновода с винтовой гофрировкой.

Для расчёта был выбран гофрированный волновод со следующими параметрами: радиус исходного волновода $R_0 = 3{,}5$ мм, глубина гофрировки $R_1 = 0{,}7$ мм (относительное значение глубины 20 %), период гофрировки $d = 11{,}5$ мм. Расчёты проводились в интервале частот от 28 до 36 ГГц с шагом в 1 ГГц. Использовалась эквидистантная координатная сетка с шагом $\delta x = \delta y = \delta z = 0{,}1$ мм и параметром Куранта $s = \delta x/(\sqrt{3}\, c\, \delta t) = 1{,}4$. Размеры системы составляют $87 \times 87 \times 1\,137$ ячеек по осям x, y и z декартовой системы координат. Расчёт одной точки дисперсионной кривой на компьютере с процессором AMD Athlon-1000 занимает менее 2 часов.

На рис. 4 представлена диаграмма типичного распределения поперечной компоненты электрического поля в поперечном сечении гофрированного волновода, полученная в результате расчётов. Более светлые участки соответствуют более высоким абсолютным значениям поля.

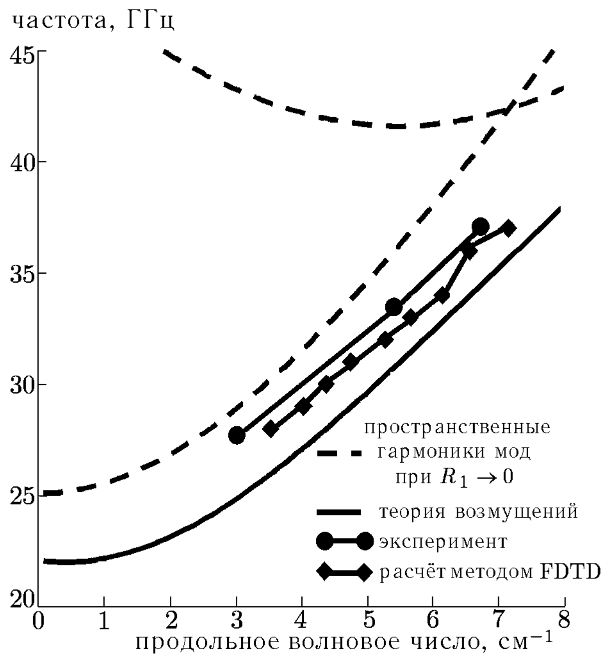

Рис. 5. Дисперсионная кривая круглого волновода с глубокой винтовой гофрировкой — сравнение результатов расчётов с экспериментом и теорией возмущений

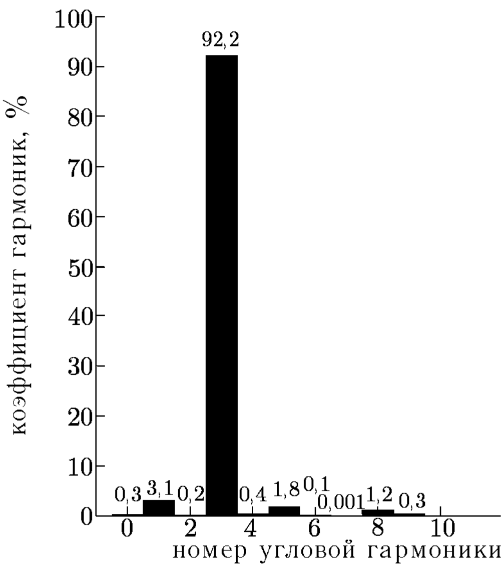

Рис. 6. Коэффициент угловых гармоник при аппроксимации поверхности гофрированного волновода в декартовой сетке координат

На рис. 5 представлена рассчитанная дисперсионная кривая относительно продольных волновых чисел в сравнении с зависимостью, полученной на основе теории возмущений, и экспериментальными данными, представленными С. В. Самсоновым. Пунктиром указана пара связанных пространственных гармоник мод гофрированного волновода при глубине гофрировки, стремящейся к нулю ($R_1 \to 0$). О точности расчётов можно судить по наибольшему относительному различию между рассчитанными волновыми числами и экспериментальными результатами. Волновые числа при заданной частоте на дисперсионной кривой, рассчитанной по теории возмущений, отстоят от экспериментальных значений более чем на 30 %. Рассчитанная методом FDTD кривая согласуется с экспериментальными данными значительно лучше — наибольшее различие составляет менее 10 %.

Дисперсионная кривая на рис. 5, рассчитанная методом FDTD, имеет хорошо заметные точки перегиба, отсутствующие на кривой, полученной на основе теории возмущений. Данное обстоятельство может быть вызвано неточностью аппроксимации поверхности гофрированного волновода в прямоугольной декартовой сетке координат. Неточность аппроксимации и, соответственно, искажение поперечного сечения, могут приводить к появлению паразитных мод в системе, приводящих, в свою очередь, к аномальному изменению продольного волнового числа, что и наблюдается при численном расчёте. Для демонстрации вышеуказанного эффекта проведён расчёт угловых фурье-гармоник поперечного сечения гофрированного волновода, аппроксимированного в декартовой системе координат. Коэффициенты гармоник нормируются на единицу. Очевидно, что при отсутствии ошибки аппроксимации коэффициенты всех гармоник, кроме гармоники, соответствующей числу заходов гофрировки, обращаются в нуль, а коэффициент основной гармоники равен единице (или 100 %). В случае любой неточности задания поверхности коэффициент основной гармоники снижается, и появляются паразитные гармоники.

Распределение угловых гармоник в случае наших расчётов приводится на рис. 6. Коэффициент основной гармоники составил 92,2 %, что отражает адекватность аппроксимации в целом, однако паразитные гармоники также присутствуют. Наиболее существенными среди них оказываются 1-я, 5-я и 8-я. Первая паразитная гармоника указывает на «перекос» в поперечном сечении, т. е. смещение сечения как целого относительно начала координат. Результатом этого является слабое рассеяние волн TE-типа в волны TM-типа, т. е. появление продольной компоненты электрического поля в системе, что действительно наблюдается при численном расчёте. Низшая из волн TM-типа исходного круглого волновода, TM_{01}, имеет критическую частоту около 34 ГГц — вблизи точки перегиба на рис. 5, что подтверждает причину её появления.

Влияние высших паразитных гармоник в системе практически несущественно. Удачным выбором аппроксимации удалось до 0,4 % снизить коэффициент 2-й гармоники, ответственной за эллиптические искажения, приводящие к образованию высших паразитных волн TM-типа. Существенные значения коэффициента 5-й (1,8 %) и 8-й (1,2 %) гармоник, являющиеся спецификой выбранной аппроксимации, в рассмотренном случае не приводят к заметным эффектам.

ВЫВОДЫ

Приведённые результаты расчётов методом FDTD дисперсионных характеристик круглого волновода с глубокой винтовой гофрировкой согласуются с экспериментальными данными с точностью порядка 10 %, что значительно лучше результатов теории возмущений, где расхождение превышает 30 %. Дальнейшее повышение точности расчётов возможно при измельчении координатной сетки. Например, при двукратном уменьшении линейного размера сетки (т. е. восьмикратном увеличении числа вычислительных операций и необходимого объёма памяти), согласно сделанным оценкам, коэффициент основной гармоники гофрировки составляет 99,1 %, что на порядок уменьшит проявление паразитных мод. На сегодняшний день проведение подобных расчётов возможно при применении параллельных вычислений.

В дальнейшем также планируется дополнить расчёты программы уравнениями движения электронов в поле волны, что позволит более точно рассчитывать характеристики микроволновых генераторов и усилителей.

Автор выражает благодарность Г. Г. Денисову и С. В. Самсонову за полезные замечания и дискуссии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Denisov G. G., Bratman V. L., Phelps A. D. R., et al. // IEEE Trans. Plasma Sci. 1998. V. 26, No. 3. P. 508.
2. Petelin M. I., Caryotakis G., Tolkachev A. A., et al. // AIP Conf. Proc. 1999. V. 474. High Energy Density Microwaves. P. 304.
3. Thumm M. // Fusion Engineering and Design. 1995. V. 30. P. 139.
4. Denisov G. G., Bratman V. L., Manuilov V. N., et al. // Conference Digest "Twenty Seventh International Conference on Infrared and Millimeter Waves", San Diego, CA USA, 2002. P. 197.
5. Каценеленбаум Б. З. Теория нерегулярных волноводов с медленно меняющимися параметрами. М.: АН СССР, 1961.
6. Cooke S. J., Denisov G. G. // IEEE Trans. Plasma Sci. 1998. V. 26, No. 3. P. 519.
7. Silaev S. A. // Proc. Int. Conf. "Electronics and Radiophysics of Ultra-High Frequencies", St. Petersburg, 1999. P. 407.

8. Yee K. S. // IEEE Trans. Antennas Propag. 1966. V. 14, No. 8. P. 302.
9. Дьяченко В. Ф. Основные понятия вычислительной математики. М.: Наука, 1972.
10. Taflove A., Hagness S. C. Advances in computational electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain method. Artech House, 2001.
11. Бровко А. В., Маненков А. Б., Митюрин В. Е. и др. // Радиотехника и электроника. 2002. Т. 47, № 11. С. 1304.
12. Электродинамическое моделирование методом конечных разностей во временной области (FDTD). СПб.: Изд-во СПбГЭТУ, 2000.
13. Berenger J. P. // J. Computational Phys. 1996. V. 127. P. 363.

Институт прикладной физики РАН,
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию
3 марта 2003 г.

CALCULATION OF THE DISPERSION CHARACTERISTICS OF A CIRCULAR WAVEGUIDE WITH DEEP SPIRAL CORRUGATION BY THE FDTD METHOD

M. L. Kulygin

We study the dispersion characteristics of circular waveguide with spiral corrugation, which are used in microwave amplifiers and generators. The results of calculations by the FDTD method are compared with the results obtained using the perturbation theory and with an experiment. The problems of improving the calculation accuracy are considered.

УДК 530.16+538.56+621.391.83

ОБ ОТРИЦАТЕЛЬНОМ ВРЕМЕНИ ЗАДЕРЖКИ УЗКОПОЛОСНОГО СИГНАЛА ПРИ ПРОХОЖДЕНИИ ЧЕРЕЗ РЕЗОНАНСНЫЙ ФИЛЬТР ПОГЛОЩЕНИЯ

Н. С. Бухман [1], *С. В. Бухман* [2]

Показано, что при фильтрации узкополосного сигнала с плавно меняющейся огибающей некоторыми типами физически реализуемых фильтров возможна ситуация, когда время задержки сигнала оказывается отрицательным, т. е. при фильтрации огибающая гладкого сигнала сдвигается не в прошлое, а в будущее. Показано, что эта ситуация не противоречит принципу причинности, поскольку опережающее появление сигнала имеет характер предсказания будущего уровня сигнала по временно́й зависимости его уровня в прошлом. Показано, что в случае отрицательного времени задержки возможно восстановление временно́й зависимости сигнала в случае его отключения, т. е. приём непереданной части сигнала. Предложено использовать указанные эффекты для прогнозирования сигналов естественного и искусственного происхождения.

1. Рассмотрим прохождение узкополосного сигнала с достаточно плавно изменяющейся комплексной огибающей (т. е. с достаточно узким спектром) через линейный фильтр, ширина полосы которого достаточно велика в сравнении с шириной спектра сигнала, но мала в сравнении с частотой несущей. Пренебрегая изменением амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) фильтра в пределах спектральной полосы сигнала и аппроксимируя фазово-частотную характеристику (ФЧХ) фильтра линейной функцией в пределах спектральной полосы сигнала, можно показать (см. [1, гл. 6]), что в этом случае искажение сигнала в первом приближении сводится к увеличению (или уменьшению) его амплитуды и временно́му сдвигу комплексной огибающей сигнала (запаздывание сигнала). Изменение амплитуды сигнала определяется величиной передаточной характеристики фильтра на частоте несущей сигнала, а его запаздывание — крутизной ФЧХ фильтра на частоте несущей.

В теории волн применение описанного приближения к комплексной передаточной функции слоя вещества, через который распространяется волна, приводит к понятию групповой скорости распространения волны и известно как первое приближение классической теории дисперсии (см. [2, гл. 2]).

Основной целью данной работы (как и работ [3, 4], в которых рассматривается частный случай распространения электромагнитной волны через слой резонансно поглощающего или усиливающего вещества) является обсуждение вопроса о том, как получаемые при применении этого приближения результаты соотносятся с принципом причинности, согласно которому сигнал на выходе физически реализуемого фильтра не может появиться раньше, чем на его входе. Действительно, даже для физически реализуемого фильтра (отклик которого на произвольный сигнал не может опережать этот сигнал) возможна как ситуация, когда ФЧХ фильтра (в том или ином интервале частот) уменьшается с ростом частоты (что соответствует задержке сигнала при фильтрации), так и ситуация, когда ФЧХ фильтра растёт с увеличением частоты (что соответствует отрицательному времени задержки).

В первом из упомянутых случаев имеет место задержка сигнала при фильтрации. Эта задержка естественным образом интерпретируется как следствие инерционности фильтра [1].

Во втором из упомянутых случаев временна́я зависимость сигнала на выходе линейного фильтра должна быть сдвинута в будущее по сравнению с временно́й зависимостью на его входе, что внешне выглядит как нарушение принципа причинности и порождает определённые сомнения в реальности этого эффекта. Тем не менее для утверждения о невозможности сдвига временно́й зависимости непрерывного сигнала в будущее нет никаких оснований [1], поскольку это утверждение относится лишь к сигналам, переносящим информацию (т. е. не являющимся детерминированными).

Обычно (см. [1, п. 1.3]) детерминированным считается любой сигнал (в том числе и разрывный), мгновенное значение которого в любой момент времени можно (из тех или иных, в том числе и посторонних, соображений) предсказать с вероятностью, равной единице. Ясно, что к любым детерминированным (т. е. известным заранее) сигналам причинное ограничение не имеет отношения (разумеется, только в том случае, если сигнал действительно является детерминированным [2]). Существенно, однако, что в некотором смысле детерминированными являются не только «явно» известные нам заранее сигналы, но также и неизвестные заранее сигналы, огибающая которых является аналитической функцией. Эти сигналы (в отличие от заранее известных нам) можно назвать «внутренне детерминированными», поскольку в этом (и только в этом) случае, в соответствии с теоремой об единственности аналитического продолжения [8], по любому конечному фрагменту $[t_1, t_2]$ сигнала, в принципе, может быть восстановлен весь ход сигнала в прошлом и будущем (разумеется, только в том случае, когда огибающая сигнала действительно оказалась аналитической функцией [3]).

Действительно, аналитическая функция, не равная тождественно нулю, не может, как известно, тождественно обратиться в нуль ни на каком конечном отрезке вещественной оси (см. [8]). Поэтому не равный тождественно нулю сигнал, огибающая которого является аналитической функцией времени, не может быть ограничен во времени и обязан существовать всегда [4]. Располагая же информацией о поведении такого внутренне детерминированного сигнала на каком-нибудь конечном интервале времени, в принципе, всегда можно восстановить (т. е. предсказать) его значение в любой момент времени [5]. Отсюда можно заключить, что причинное ограничение не имеет отношения к сигналам с аналитической огибающей (внутренне детерминированным), и опережающее появление таких сигналов на выходе линейного фильтра не приводит ни к каким противоречиям с принципом причинности.

Напротив, в случае отрицательного времени задержки именно принцип причинности приводит к интересной особенности прошедшего через фильтр сигнала — возможности «регенерации» непереданной части сигнала за фильтром в случае внезапного отключения входного сигнала.

2. Для иллюстрации высказанных соображений рассмотрим прохождение сигнала $U(t)$ с частотой несущей ω_0 и комплексной огибающей [1, 2] $A(t)$ через узкополосный резонансный фильтр с передаточной функцией [1]

$$K_1(\omega) = |K_1(\omega)| \exp[i\varphi(\omega)]. \tag{1}$$

[1] Взаимоотношение принципа предельности скорости света в вакууме и сверхсветовой (а также отрицательной) групповой скорости волны в диспергирующей среде обсуждается в обзоре [5], в котором приведены ссылки на ещё более ранние работы. История вопроса (и обширный список иностранных публикаций) отражена также в [6]. Аналогичные эффекты в электрических цепях обсуждаются в [7].

[2] Утверждение о том, что завтра взойдёт Солнце — не нарушение принципа причинности, а всего лишь прогноз этого детерминированного события, который вполне может быть сделан до события. Если Солнце не взошло и прогноз оказался ошибочным, значит, восход Солнца не детерминированное событие.

[3] Если сигнал внезапно выключить, то его огибающая окажется не аналитической функцией, сигнал — не внутренне детерминированным, а прогноз — ошибочным.

[4] Обратное справедливо не всегда — отнюдь не любой неограниченный во времени сигнал, непрерывно дифференцируемый по времени на вещественной оси, имеет аналитическую огибающую и является внутренне детерминированным.

[5] Это как раз тот случай, когда можно резюмировать, что «всё, что было, есть и будет — уже есть»

Предполагая, что сигнал является узкополосным (ширина спектра сигнала мала в сравнении с частотой несущей ω_0), имеем следующие очевидные соотношения:

$$U(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(\omega)\exp(-i\omega t)\,\mathrm{d}\omega, \qquad U(\omega) = (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty} U(t)\exp(i\omega t)\,\mathrm{d}t,$$

$$U(t) = A(t)\exp(-i\omega_0 t) + A^*(t)\exp(i\omega_0 t),$$

$$A(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\Omega)\exp(-i\Omega t)\,\mathrm{d}\Omega, \qquad A(\Omega) = (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty} A(t)\exp(i\Omega t)\,\mathrm{d}t,$$

$$A(\Omega) = U(\omega), \qquad \omega = \omega_0 + \Omega. \tag{2}$$

В (2) $U(t)$ и $U(\omega)$ — высокочастотный сигнал и его спектр, $A(t)$ и $A(\Omega)$ — низкочастотная комплексная огибающая сигнала и её спектр.

Пусть комплексная огибающая сигнала на входе фильтра определяется функцией $A^{(0)}(t)$. Тогда для огибающей $A^{(1)}(t)$ сигнала после однократного прохождения через фильтр (1) имеем

$$A^{(1)}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A^{(0)}(\Omega)K_1(\omega_0+\Omega)\exp(-i\Omega t)\,\mathrm{d}\Omega. \tag{3}$$

Предполагая, что спектр сигнала сосредоточен вблизи частоты несущей ω_0 и ограничиваясь линейной аппроксимацией ФЧХ фильтра на частоте несущей (т. е. первым порядком классической теории дисперсии [2]), вместо (3) нетрудно получить

$$A^{(1)}(t) = K_1(\omega_0)A^{(0)}(t-\tau), \tag{4}$$

где $K_1(\omega_0)$ — ослабление сигнала на частоте несущей, а время задержки τ определяется соотношением

$$\tau = \frac{\partial\varphi(\omega_0)}{\partial\omega_0}\,. \tag{5}$$

3. В данной работе мы ограничимся простейшим конкретным случаем передаточной функции фильтра

$$K_1(\omega) = 1 + \frac{p-1}{1-i\Omega\tau_0}\,, \tag{6}$$

где $\Omega \equiv \omega-\omega_0$ — отстройка от центральной частоты фильтра [6], τ_0 — постоянная времени фильтра. Передаточная функция такого типа возникает при смешивании сигнала и результата его фильтрации обычным резонансным фильтром. Выбор именно этой передаточной функции продиктован желанием наиболее простым (для теоретического анализа) способом получить «падающий» участок на ФЧХ фильтра. На практике возникновение падающего участка на ФЧХ фильтра можно ожидать при смешивании сигнала с результатом пропускания этого сигнала через любой резонансный фильтр задержки.

Такую передаточную функцию реализует, например, изображённая на рис. 1*а* схема. Если в качестве входного сигнала рассматривать напряжение на $U^{(0)}(t)$, а в качестве выходного — напряжение $U^{(1)}(t)$, то $K_1(\omega) = [R - i\,(\omega L - 1/(\omega C))]/[R + r - i\,(\omega L - 1/(\omega C))]$), и при выполнении условия $|\omega-\omega_0| \ll \omega_0$ имеем передаточную функцию (6) с $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, $\tau_0 = 2L/(R+r)$ и $p = R/(R+r)$.

[6] Центральная частота фильтра и частота несущей совпадают, т. е. в данной работе мы ограничиваемся случаем, когда расстройка между центральной частотой фильтра и несущей сигнала отсутствует.

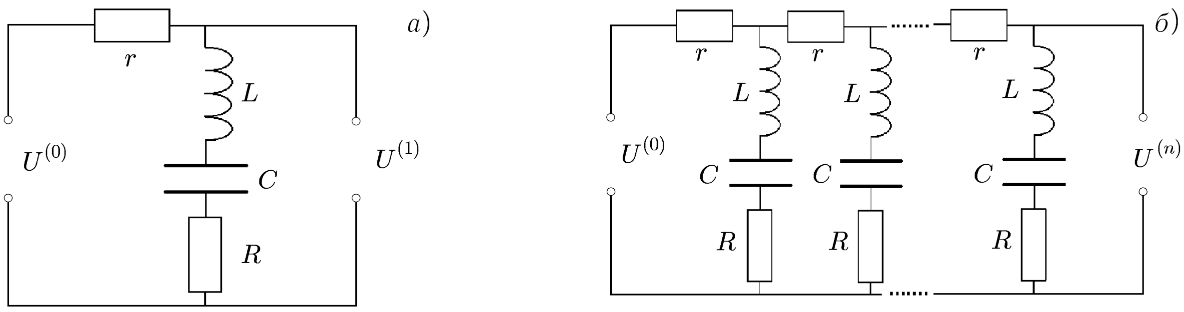

Рис. 1

Для времени задержки сигнала при однократном прохождении его через фильтр с передаточной функцией (6) имеем

$$\tau_1 \equiv \tau_0\,(p-1)/p, \qquad K_1(\omega_0) = p. \tag{7}$$

Видно, что время задержки отрицательно при $0 < p < 1$. По величине оно может быть сравнимо с постоянной времени фильтра τ_0. Отметим, что отрицательное время задержки (т. е. опережающее появление сигнала на выходе фильтра) имеет место в случае, когда при фильтрации происходит ослабление сигнала и фильтр $K_1(\omega)$ является резонансным фильтром поглощения. Таким образом, платой за опережающее появление сигнала на выходе фильтра является его ослабление. Следует подчеркнуть, что формула (7) получена в первом порядке классической теории дисперсии, т. е. в предположении, что длительность сигнала велика в сравнении с постоянной времени фильтра (или, что то же самое, в предположении узости спектра сигнала в сравнении с шириной полосы фильтра). Поэтому при однократной фильтрации опережение сигнала мало в сравнении с его собственной длительностью, а ослабление — невелико.

Повысить время опережения можно, применив каскадное соединение большого количества однотипных фильтров (одна из возможных схем такого соединения изображена на рис. 1*б*). В этом случае время опережения, в принципе, может быть сделано сколь угодно большим, но при соответствующем ослаблении сигнала. При этом время опережения растёт по закону арифметической прогрессии, а ослабление сигнала — по закону геометрической прогрессии. Поэтому платой за значительное опережение сигнала является его экспоненциальное ослабление. Возможно, что этот результат имеет достаточно общий характер, поскольку в противном случае наши обыденные представления о причинности, вероятно, существенно отличались бы от нынешних [7]. В случае соединения n однотипных резонансных фильтров с передаточной функцией $K_1(\omega)$ для времени опережения τ_n при прохождении сигнала через каскад из n фильтров с передаточной функцией

$$K_n(\omega) = K_1^n(\omega) \tag{8}$$

имеем [8]

$$\tau_n \equiv n\tau_0\,(p-1)/p, \quad K_n(\omega_0) = p^n. \tag{9}$$

Соединение большого количества однотипных фильтров позволяет увеличить время опережения сигнала, что, в свою очередь, позволяет увеличить его длительность (при том же отношении времени опережения сигнала при фильтрации к его длительности), что приводит к сужению

[7] Можно шутливо констатировать, что хотя «картинка из будущего» и не абсолютно недоступна, но всё же экспоненциально слаба.

[8] Разумеется, для выполнения соотношения (8) каскад n фильтров должен быть подключён к согласованной нагрузке, что приводит к соответствующему изменению параметров τ_0 и p.

спектра сигнала и уменьшению искажения его формы при фильтрации. К сожалению, всё это происходит за счёт экспоненциального снижения мощности сигнала при фильтрации [9].

4. В качестве примера рассмотрим фильтрацию сигнала с длительностью T и гауссовой огибающей:

$$A^{(0)}(t) = \exp(-t^2/T^2). \tag{10}$$

В этом случае вместо (4) в первом порядке классической теории дисперсии имеем для временнóй зависимости интенсивности сигнала после n-кратной фильтрации $I^{(n)}(t) \equiv |A^{(n)}(t)|^2$ следующее выражение:

$$I^{(n)}(t) = I_0 \exp(-2\,(t-\tau_n)^2/T^2), \qquad I_0 = p^{2n}. \tag{11}$$

Для оценки точности формул (9), (11) были проведены численные расчёты распространения сигнала (10) с длительностью $T = 8\tau_0$ через один фильтр с передаточной функцией (6) ($n = 1$) при $p = 0{,}25$. Результаты этих расчётов приведены на рис. 2, где по горизонтальной оси отложено время, нормированное на длительность исходного сигнала, по вертикальной оси — мгновенная мощность сигнала $I(t)/I_0$, нормированная на мощность несущей после фильтрации. Использованная нормировка позволяет исключить из рассмотрения «закономерное» ослабление сигнала в результате прохождения через фильтр. Результаты численного расчёта изображены сплошной линией, а кривая, соответствующая формуле (11), — пунктиром. Кружком выделена кривая, соответствующая исходному сигналу (до фильтрации). Нетрудно заметить, что вывод об опережающем появлении сигнала на выходе фильтра подтверждается, причём величина опережения согласуется с формулой (7). Заметное отклонение временнóй зависимости профильтрованного сигнала от результатов применения первого приближения классической теории дисперсии связано с тем, что длительность сигнала недостаточно мала в сравнении с постоянной времени фильтра. Согласие аналитических результатов с данными численного расчёта существенно улучшается при увеличении длительности сигнала, но при этом опережение (которое в соответствии с формулой (7) не зависит от длительности сигнала) становится мало в сравнении с длительностью сигнала.

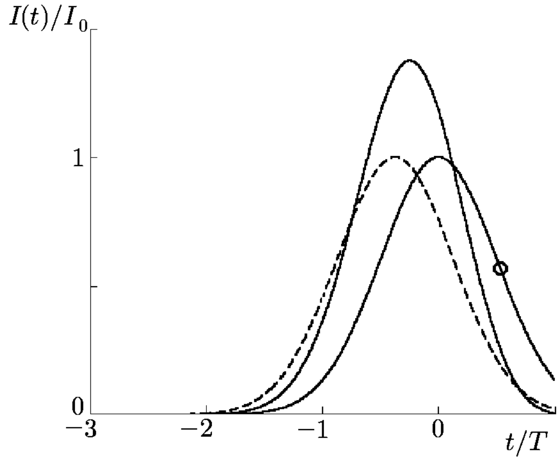

Рис. 2

Необходимо выяснить, насколько применимы полученные результаты к реальным (ограниченным во времени) сигналам. Для этого при тех же значениях параметров p и T были проведены численные расчёты фильтрации сигнала с гауссовой огибающей и «обрезанным» передним фронтом:

$$A^{(0)}(t) = \exp(-t^2/T^2)\theta(t-T_1), \tag{12}$$

где T_1 — время появления сигнала, $\theta(t)$ — функция Хевисайда.

[9] Собственно, главная неприятность состоит не в снижении мощности сигнала, а в соответствующем снижении отношения сигнал/шум, поскольку в случае опережения сигнал на частоте несущей ослабляется сильнее шума, частота которого не обязана совпадать с резонансной частотой поглощения.

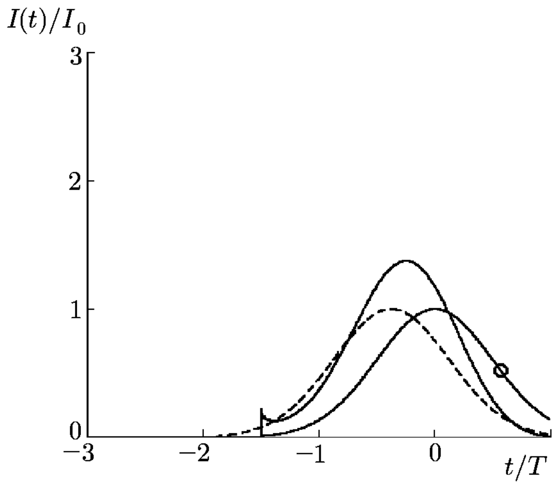

Рис. 3

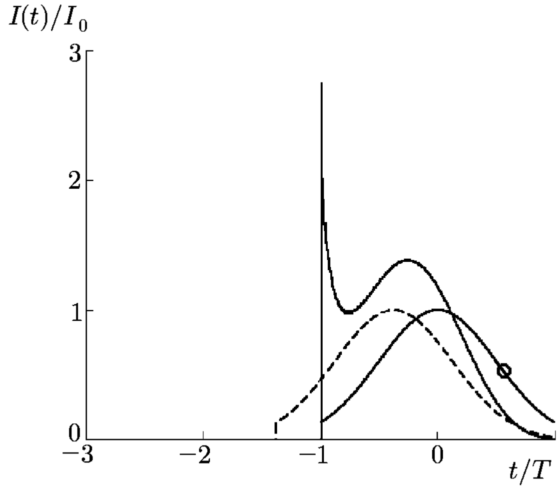

Рис. 4

Оказалось, что обрезание передней части сигнала при $T_1 = -3T$ или $T_1 = -2T$ не приводит к изменению (с графической точностью) данных, приведённых на рис. 2. Обрезание же переднего фронта сигнала при меньших (по модулю) значениях параметра T_1 приводит к искажению сигнала. На рис. 3 для примера приведены результаты расчёта временно́й зависимости сигнала при $T_1 = -1{,}5T$, а на рис. 4 — при $T_1 = -T$. Видно, что форма сигнала претерпела существенные изменения по сравнению со случаями $T_1 = -2T$ или $T_1 = -\infty$ (необрезанный сигнал). Обсудим эти изменения.

Из рис. 3 и 4 видно, что отрицательное время задержки сигнала может реализоваться только для сигналов с достаточно «затянутым» передним фронтом — главный максимум сигнала действительно может появляться за фильтром раньше, чем перед ним, но в любом случае он не может «обогнать» истинное начало сигнала, т. е. начальный скачок, который передаётся через фильтр мгновенно (независимо от положительности или отрицательности времени групповой задержки сигнала).

Мгновенная передача скачка огибающей через фильтр не связана с конкретным выбором формы передаточной функции фильтра и является непосредственным следствием принципа причинности (и того обстоятельства, что выбранный для исследования фильтр является физически реализуемым, т. е. не нарушающим этот принцип). С выбранной асимптотикой передаточной характеристики фильтра при удалении от резонансной частоты (при $\Omega \to \infty$ из (6) имеем $K_1(\omega_0 + \Omega) \to 1$) связано только сохранение амплитуды скачка при фильтрации [10].

Действительно, мгновенные скачки огибающей сигнала до и после фильтрации определяются теми членами асимптотики спектра сигнала, которые убывают по закону $C \exp(i\Omega t_0)/\Omega$ (константа C определяет амплитуду скачка, константа t_0 — момент скачка), а эти члены в исходном и профильтрованном сигнале при выбранной асимптотике передаточной характеристики фильтра совпадают. Поэтому скачки амплитуды в исходном и отфильтрованном сигнале совпадают (как по времени, так и по величине). Отсюда, кстати, следует, что пользоваться понятием группового времени задержки (или опережения) сигнала можно только для сигналов с гладкой огибающей — любые разрывы огибающей или её производных, строго говоря, передаются через фильтр мгновенно [11] независимо от группового времени задержки. Сравнив рис. 2 и 3, нетрудно также заме-

[10] И, разумеется, «ранга» скачка. Например, при $K_1(\omega_0 + \Omega) \to 1/\Omega^n$ скачок огибающей исходного сигнала вызывал бы одновременный скачок не огибающей, а n-й производной огибающей отфильтрованного сигнала.

[11] Разумеется, только в том случае, когда геометрическими размерами фильтра можно пренебречь. В противном

тить, что влияние начального скачка затухает примерно через время, равное постоянной времени фильтра.

Сделанное замечание снимает вопрос о нарушении принципа причинности при отрицательном времени задержки фильтруемого сигнала. Действительно, ни при каком опережении передний фронт сигнала не может появиться за фильтром раньше, чем на входе фильтра. Раньше может появиться только тот или иной фрагмент сигнала (например, максимум огибающей), достаточно удалённый от истинного начала сигнала. При этом опережающее появление тех или иных фрагментов сигнала за фильтром имеет характер «предсказания» (прогноза), «сделанного» фильтром на основании «предположения» об аналитичности комплексной огибающей сигнала.

Отмеченная аналогия между сдвигом временно́й зависимости сигнала в будущее при линейной фильтрации некоторыми типами фильтров и компьютерным прогнозом сигнала имеет более буквальный смысл, чем кажется на первый взгляд. Разумеется, фильтр не занимается какими-либо «осознанными» предсказаниями, он просто выполняет операцию свёртки своей импульсной характеристики с фрагментом сигнала, пришедшим к данному моменту времени (строго говоря, со всем сигналом — просто импульсная характеристика любого физически реализуемого фильтра тождественно обращается в нуль при $t < 0$ и потому «нечувствительна» к ещё не принятой части сигнала). Но ведь и компьютер, осуществляющий прогноз сигнала (например, его сплайн-экстраполяцию в будущее) тоже не занимается «осознанными» предсказаниями, а просто осуществляет суммирование нескольких сдвинутых во времени копий сигнала с определёнными весовыми коэффициентами, т. е. ту же самую свёртку со своей «импульсной характеристикой», которая представляет из себя сумму нескольких сдвинутых во времени дельта-функций с соответствующими коэффициентами. Поэтому отличие между компьютерным прогнозом и линейной фильтрацией фильтром с непрерывной (при $t > 0$) импульсной характеристикой не имеет качественного характера и может быть сведено практически к нулю, если на компьютере использовать экстраполяционные формулы «интегрального» типа (с бесконечным количеством узловых точек и заменой конечной суммы на соответствующий интеграл типа свёртки) или, напротив, рассматривать аналоговый линейный фильтр, состоящий из нескольких идеальных линий задержки (с соответствующими коэффициентами ослабления) и сумматора.

С этой точки зрения становится вполне очевидна и выделенная роль сигналов с бесконечно дифференцируемой (аналитической) огибающей: ведь экстраполяционная формула порядка n справедлива только для функций, имеющих производную порядка n. Поэтому упомянутая выше «гипотеза» фильтра с непрерывной импульсной характеристикой об аналитичности огибающей сводится к тому простому обстоятельству, что экстраполяционная формула бесконечного порядка автоматически осуществляет корректный прогноз именно аналитической функции (или некорректный прогноз неаналитической функции в «предположении» об её аналитичности). Очевидно, что этой же «гипотезой» будет «руководствоваться» и компьютер, осуществляющий прогноз сигнала на основе сплайн-экстраполяции бесконечного порядка. С другой стороны, даже аналоговый фильтр, составленный из n линий задержки и сумматора, будет (как и компьютер, реализующий экстраполяционную формулу порядка n) «руководствоваться» более скромной «гипотезой» об n-кратной дифференцируемости огибающей сигнала и давать точные результаты для любых полиномов порядка n.

5. Это обстоятельство хорошо иллюстрируется ситуацией, которая возникает при обрезании задней части сигнала. В этом случае именно принцип причинности приводит к интересному эффекту «восстановления» сигнала. Действительно, в случае отрицательного времени задержки сигнала при фильтрации информация о его внезапном выключении появляется уже после то-

случае необходимо учитывать «световое» время задержки сигнала, что несколько запутывает ситуацию (см. [3–5]).

го, как некоторая часть сигнала с опережением появилась за фильтром. Например, за фильтром можно принять заднюю часть сигнала, даже если она не появится на входе фильтра. На рис. 5 приведены результаты соответствующих расчётов распространения сигнала с длительностью $T = 8\tau_0$, передача которого внезапно прекращалась в момент времени $t = 0$. Сопоставив рис. 5 и 2 (на котором изображены результаты расчётов для «необрезанного» сигнала с такими же параметрами), нетрудно заметить, что часть задней половины гауссовой кривой успешно принимается на выходе фильтра даже в случае её отсутствия в точке передачи [12]. Ясно, что в данном случае мы имеем дело с ошибочным прогнозом временно́й зависимости сигнала: импульс на входе имеет ступенчатый задний фронт, а фильтр прогнозирует импульс с пологим задним фронтом. Этот пример показывает, что сдвиг временно́й зависимости сигнала в будущее при фильтрации — это только прогноз его временно́й зависимости в будущем по уже имеющейся информации о временно́й зависимости сигнала в прошлом, причём этот прогноз вполне может оказаться ошибочным. Вполне естественно, что при отсутствии в уже принятой части сигнала каких-либо указаний на грядущий обрыв передачи этот обрыв и не будет спрогнозирован, а будет спрогнозировано закономерное (обусловленное уже принятой частью сигнала) изменение аналитической функции. «Приём несуществующего сигнала» продолжается до тех пор, пока не прекратится передача сигнала на фильтр. Затем наблюдается резкий рост амплитуды сигнала, поскольку в результате обрезания его задней части спектр сигнала существенно расширяется (по сравнению с «ожидаемым»), и заметная часть спектра сигнала оказывается вне полосы поглощения фильтра.

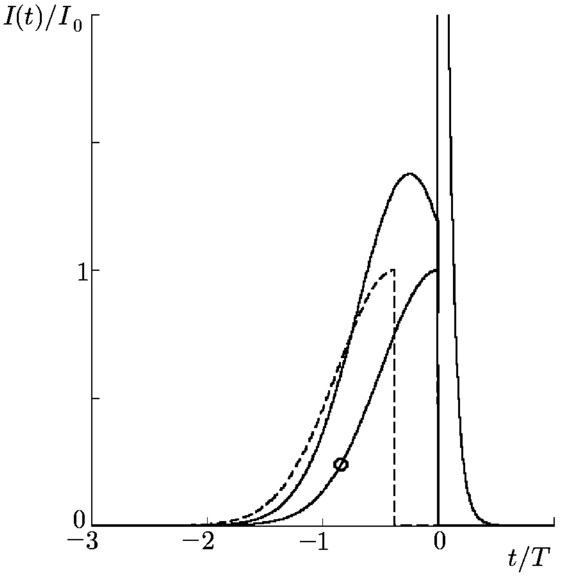

Рис. 5

Для оценки точности формул (9), (11) в случае каскадного соединения большого количества однотипных фильтров были проведены численные расчёты распространения сигнала (10) с длительностью $T = 16\tau_0$ через 32 фильтра с передаточной функцией (6) ($n = 32$) при $p = 0{,}75$. На рис. 6 изображены результаты для сигнала с обрезанным передним фронтом ($T_1 = -3T$), а на рис. 7 — для сигнала, передача которого прекращается в момент $t = 0$. Видно, что каскадное соединение фильтров позволяет достичь значительного опережения фильтруемого сигнала и восстановления большой его части по фрагменту. Разумеется, это происходит за счёт существенного ослабления сигнала при фильтрации. Действительно, из формул (9) видно, что время опережения сигнала может быть велико в сравнении с постоянной времени фильтра только при соединении большого количества фильтров, что неизбежно приводит к экспоненциальному ослаблению опережающего сигнала (и, соответственно, к экспоненциальному уменьшению отношения сигнал/шум) с ростом времени опережения.

Впрочем, ситуация не столь безнадёжна, как кажется на первый взгляд. Действительно, слабость полезного сигнала в сравнении с шумом ещё не означает невозможности его выделения

[12] Отметим, что прогнозируется не огибающая сигнала, подаваемого на фильтр, а огибающая сигнала, появляющегося после фильтра. Впрочем, в случае количественной применимости первого порядка классической теории дисперсии временна́я зависимость этих сигналов совпадает.

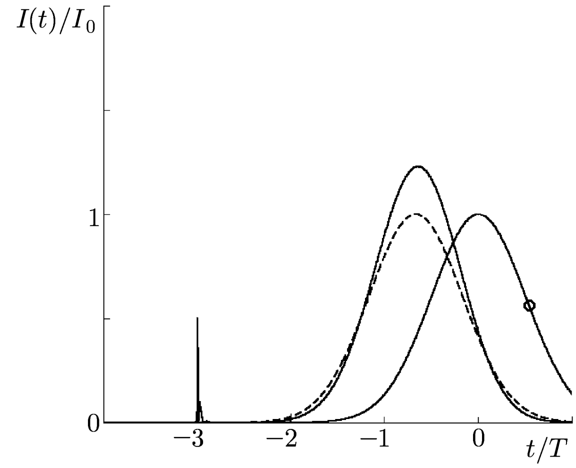

Рис. 6

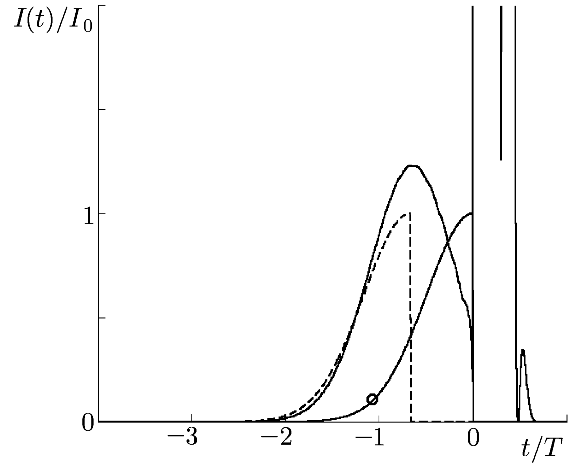

Рис. 7

из шума [13]. При значительном времени опережения сигнал (с частотой несущей вблизи центральной частоты фильтра) и шум (частота которого сдвинута относительно центральной частоты) разделены во времени (сигнал опережает шум), поэтому слабость сигнала не мешает наблюдать его (возникает ситуация типа изображённой на рис. 7, когда слабость сигнала при $t < 0$ по сравнению с сигналом при $t > 0$ не мешает его наблюдать).

6. Таким образом, можно заключить, что при прохождении сигнала с гладкой огибающей через линейный фильтр в зависимости от типа фильтра может наблюдаться как сдвиг временно́й зависимости сигнала в прошлое (запаздывание сигнала), так и сдвиг временно́й зависимости сигнала в будущее (опережение сигнала). В последнем случае фильтрация может использоваться как для прогнозирования сигнала в режиме реального времени, так и для восстановления сигнала по его фрагменту, поскольку резкий обрыв сигнала, подаваемого на фильтр, не может «отменить» уже появившийся за фильтром непереданный фрагмент сигнала.

Существенно, что эта достаточно «интеллектуальная» обработка сигнала не обязательно имеет «антропогенный» характер [14] и может произойти непреднамеренно, например, при распространении электромагнитной или акустической волны через диспергирующую среду или при отражении волны от селективно (по частоте) отражающей поверхности. В частности, при приёме узкополосного сигнала, испытавшего сильное селективное поглощение, в принципе, не исключена ситуация, когда наблюдается не прошлое исследуемого процесса (как это обычно случается в астрофизике), а его будущее.

Отмеченная возможность «неантропогенного» прогнозирования при линейной фильтрации может также представлять интерес при изучении механизмов опережающего отражения в живой природе [15].

[13] Мы предполагаем, что шум связан с сигналом (возникает на входе фильтра одновременно с сигналом), и что спектр шума широк в сравнении с шириной «полосы поглощения» фильтра. В этом случае шум (в отличие от сигнала) не ослабляется фильтром, но зато появляется за фильтром без опережения, т. е. «отстаёт» от сигнала. Разумеется, «убежать» от стационарного шума (подаваемого на вход фильтра до, одновременно и после сигнала) сигнал не может.

[14] Собственно, проделать что-нибудь подобное с принимаемым сигналом при наличии аналого-цифрового преобразователя, компьютера и какой-либо «предсказательной» программы несложно; при этом очевидно, что ни о каком нарушении принципа причинности нет и речи. Интересно то, что всё это может происходить и «само собой».

[15] Гипотетически не исключено, что этот механизм реализован не «схемно» или «алгоритмически», а «волоконно», т. е. бессознательное краткосрочное прогнозирование ситуации живыми организмами происходит просто при распространении нервных импульсов через волокна с соответствующими дисперсионными характеристика-

Вместе с тем можно рассматривать также аппаратные методы реализации процедуры прогнозирования или восстановления (когда аналоговый сигнал пропускается через «настоящий» фильтр), а также компьютерный прогноз, когда обработка принимаемого сигнала заключается в расчёте результата фильтрации его уже принятой части через «фильтр опережения» типа (1) (или более удачный).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Радио и связь, 1986.
2. Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П. Теория волн. М.: Наука, 1979.
3. Бухман Н. С. // Квантовая электроника. 2001. Т. 31, № 9. С. 774.
4. Бухман Н. С. // Журн. техн. физики. 2002. Т. 72, вып. 1. С. 136.
5. Вайнштейн Л. А. // УФН. 1976. Т. 118, вып. 2. С. 339.
6. Macke B., Segard B. // Eur. Phys. J. D. 2003. V. 23, No. 1. P. 125.
7. Nakanishi T., Sugiyama K., Kitano M. // Am. J. Phys. 2002. V. 70, No. 11. P. 1117.
8. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 3, ч. 2. М.: Наука, 1974.

[1] Самарская государственная архитектурно-строительная академия, г. Самара;
[2] Воронежский государственный архитектурно-строительный университет, г. Воронеж, Россия

Поступила в редакцию 17 октября 2002 г.

NEGATIVE TIME OF DELAY OF A NARROW-BAND SIGNAL PASSING THROUGH A RESONANT ABSORPTION FILTER

N. S. Bukhman and S. V. Bukhman

It is shown that a narrow-band signal with smoothly varying envelope can have a negative delay time upon filtering by certain physically realizable filters, i.e., the smooth-signal envelope shifts forward and not backward with respect to the signal. It is shown that this does not contradict the causality principle since the advancing appearance of the signal has the nature of prediction of the future signal level given its level in the past. It is shown that retrieval of the temporal dependence of a switched-off signal, i.e., reception of its nontransmitted part, is possible in the case of a negative delay time. We propose to use the pointed-out effects for the forecasting of signals of natural and artificial origin.

ми. Другими словами, кошка прыгает туда, где через долю секунды должна оказаться мышь, не потому, что она «вычислила», куда следует прыгнуть, а потому, что она в некотором смысле уже «видит» мышь там, где её ещё нет.