МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Известия высших учебных заведений

РАДИОФИЗИКА

ежемесячный научно-технический журнал

Издаётся с апреля 1958 г.

Том XLVI № 7 Нижний Новгород 2003

Содержание

Пелиновский Е. Н., Слюняев А. В., Талипова Т. Г., Хариф К. Нелинейное параболическое уравнение и экстремальные волны на морской поверхности 499

Горшков К. А., Долина И. С., Соустова И. А., Троицкая Ю. И. Трансформация коротких волн в поле неоднородных течений на поверхности океана. Влияние модуляции ветрового инкремента 513

Баханов В. В., Власов С. Н., Казаков В. И., Кемарская О. Н., Копосова Е. В., Шишкина О. Д. Моделирование внутренних и поверхностных волн реального океана в Большом термостратифицированном опытовом бассейне ИПФ РАН 537

Вировлянский А. Л. Лучевой хаос при дальнем распространении звука в океане 555

Зверев В. А. О пространственной фокусировке импульса, обращённого во времени 572

Лебедев А. В., Малеханов А. И. Когерентная сейсмоакустика 579

Турчин В. И., Фикс И. Ш., Шаронов Г. А. Многоракурсный апертурный синтез 598

Геликонов В. М., Геликонов Г. В., Ксенофонтов С. Ю., Куранов Р. В., Морозов А. Н., Мяков А. В., Туркин А. А., Турчин И. В., Шабанов Д. В. Новые подходы к широкополосной волоконно-оптической интерферометрии для оптической когерентной томографии 610

Геликонов Г. В., Долин Л. С., Сергеева Е. А., Турчин И. В. О проявлении эффектов многократного обратного рассеяния в оптических томограммах слоистых мутных сред 628

УДК 551.46

НЕЛИНЕЙНОЕ ПАРАБОЛИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ И ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ НА МОРСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Е. Н. Пелиновский[1], *А. В. Слюняев*[1], *Т. Г. Талипова*[1], *К. Хариф*[2]

Прошло уже почти 40 лет с момента открытия В. И. Талановым нелинейного параболического уравнения, сыгравшего важнейшую роль в нелинейной оптике. Очень быстро было понято, что это уравнение может быть переписано для нестационарных волновых пакетов различной физической природы в пространстве любой размерности. Названное впоследствии нелинейным (кубическим) уравнением Шрёдингера, оно стало играть фундаментальную роль в теории слабонелинейных волновых пакетов в средах с сильной дисперсией. Настоящая статья посвящена только одному приложению нелинейного уравнения Шрёдингера, а именно теории так называемых волн-убийц на поверхности океана. За последние пять лет произошел бум в исследовании экстремальных волн на воде, и нелинейное параболическое уравнение сыграло важнейшую роль в понимании физических механизмов образования волн-убийц. Сейчас пик исследований смещается в направлении моделей волн на воде с более полным учётом нелинейности и дисперсии и серьёзным привлечением компьютерного моделирования, и многие результаты слабонелинейных моделей уже корректируются количественно. Тем не менее в рамках более полных моделей не выявлено новых физических идей, и их изложение на основе нелинейного параболического уравнения (нелинейного уравнения Шрёдингера) в данной статье нам представляется весьма заманчивым, имея в виду возможные приложения этих идей в физике волновых процессов.

ВВЕДЕНИЕ

Волновое уравнение для квантовой частицы во внешнем поле, предложенное Шрёдингером в 1926 г., сейчас является основным уравнением в квантовой теории рассеяния [1]. Если потенциал в нём пропорционален числу частиц, то соответствующее волновое уравнение имеет вид (в безразмерной форме для одной пространственной координаты)

$$i\,\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + 2q\,|q|^2 = 0. \tag{1}$$

В такой форме оно получено в теории конденсата Бозе—Эйнштейна для волновой функции конденсата (параметра порядка) [1]. Нелинейное параболическое уравнение (1) было выведено для задач нелинейной оптики в пионерской работе В. И. Таланова [2]. Оно очень быстро было «перевыведено» для описания волновых полей различной физической природы (как для комплексной амплитуды, так и для действительной амплитуды и фазы) [3–5] и часто стало называться нелинейным уравнением Шрёдингера (НУШ). В настоящее время НУШ является классическим уравнением нелинейной теории волн, имеющим применение во многих областях физики (см., например, [6, 7]), а эффекту нелинейной самофокусировки посвящена книга [8].

В приложении к волнам на поверхности воды НУШ было выведено в [9], а затем в [10, 11]. Нелинейная неустойчивость групп волн на поверхности глубокой воды показана в работе [12] и подтверждена экспериментально. Возможность проявления эффектов нелинейной фокусировки (в пространстве и во времени) волн на морской поверхности в последнее время стала объектом

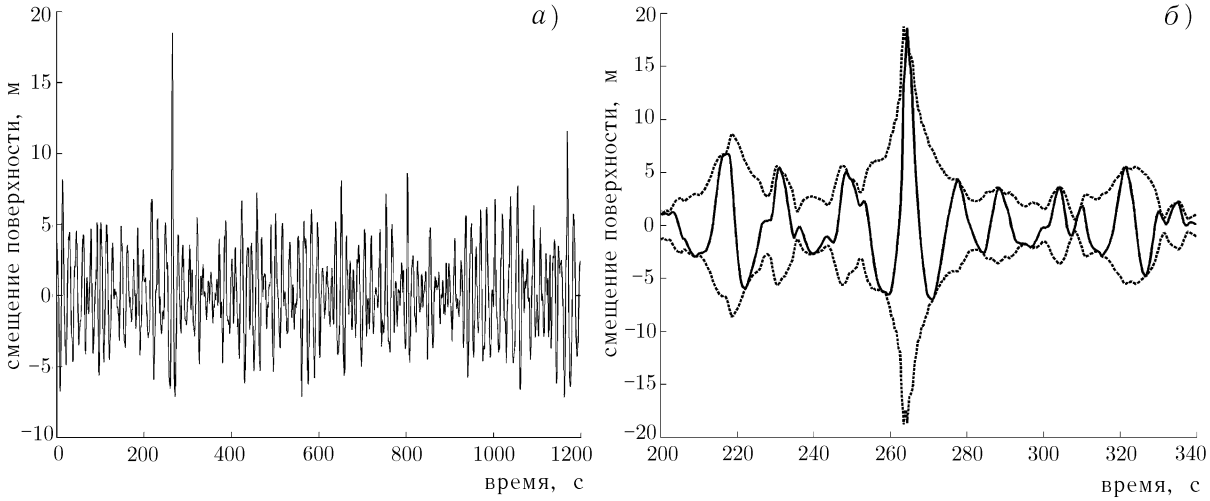

Рис. 1. Временна́я запись вертикальных смещений морской поверхности в течение 20-минутного интервала (*а*) и Новогодняя волна крупным планом (*б*); пунктирной линией построена огибающая, полученная после преобразования Гильберта

интенсивного изучения в связи с проблемой аномально больших волн на поверхности океана. Рассказы моряков о внезапно возникающих «стенах воды», обрушивающихся на корабль, находят всё большее число подтверждений прямыми инструментальными измерениями. В качестве примера на рис. 1 построена запись вертикальных смещений морской поверхности, полученная 1 января 1995 г. в Северном море (так называемая Новогодняя волна). На ней 18-метровая волна (её высота равна 26 м) возникает на фоне волн с 4-метровой амплитудой. Имеется значительное число документированных случаев повреждения и даже гибели судов от появляющихся на короткое время одной или нескольких волн, значительно превышающих фоновое волнение (см., например, [13–16]). Такие волны могут возникать в условиях относительно спокойного моря и получили от моряков различные названия, но их природа остаётся неясной. Хотя появление волн-убийц является очень редким событием, тем не менее уже накоплен большой материал, позволяющий делать выводы о статистике и свойствах таких волн. В то же время нужно отметить трудности в изучении волн-убийц по данным измерений: большинство регистрирующих датчиков обеспечивают временну́ю запись волнения в одной точке, тем самым теряется информация об окружающих волнах; имеются также инструментальные сложности корректной регистрации экстремальных волн буями [17].

Связь аномально больших волн и модуляционной неустойчивости отмечалась в [18–20]. Между тем не исключается возможность образования экстремальных волн в результате дисперсионной группировки волн, классической в линейном пределе [17, 21–23], вследствие пространственной фокусировки за счёт неоднородностей глубины и течений, а также при прохождении атмосферных фронтов. В статье будут рассмотрены нелинейные сценарии формирования аномально больших волн на поверхности океана в рамках НУШ (и его двумерного аналога), связанные с модуляционной неустойчивостью и дисперсионным сжатием.

1. МОДУЛЯЦИОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ

В случае волн на воде НУШ (1) описывает их комплексную амплитуду $q(x,t)$, связанную со смещением морской поверхности $\eta(X,T)$ посредством следующих соотношений:

$$\eta(X,T) = \frac{\sqrt{2}}{k_0}\,\mathrm{Re}\{q(x,t)\exp[i\,(\omega_0 T - k_0 X)]\}, \tag{2}$$

$$x = 2k_0\,(X - c_{\rm g}T), \qquad t = \omega_0 T/2, \qquad \omega_0 = \sqrt{kg}\,, \qquad c_{\rm g} = \partial\omega/\partial k\Big|_{k=k_0}.$$

Здесь k_0 и ω_0 — соответственно волновое число и циклическая частота несущей волны, $c_{\rm g}$ — групповая скорость, g — ускорение свободного падения. Кроме требования слабой нелинейности (крутизна $k_0 a \ll 1$, где a — типичная амплитуда волн), вывод уравнения (1) предполагает слабую модуляцию волновых пакетов ($\Delta k/k_0 \ll 1$), так что функция $q(x,t)$ медленно зависит от своих аргументов.

Уравнение (1) с фокусирующей нелинейностью (знак плюс перед нелинейным слагаемым) получается для достаточно глубокого моря ($k_0 h > 1{,}36$, где h — глубина бассейна). Нами для простоты выбран случай бесконечно глубокой воды. Наличие самофокусировки (самомодуляции) обеспечивает возможность существования солитонов огибающей и ведёт к модуляционной неустойчивости волн. Плоская волна $q_{\rm PW}(x,t) = a_{\rm PW}\exp(2it)$ с амплитудой $a_{\rm PW}$, являющаяся точным решением уравнения (1), неустойчива по отношению к амплитудно-фазовой модуляции с безразмерными волновыми числами $K = \Delta k/k_0$ при

$$|K| < K_{\rm BF}, \qquad K_{\rm BF} = 2a_{\rm PW}. \tag{3}$$

Развитие модуляционной неустойчивости сопровождается сначала экспоненциальным ростом амплитуды возмущения, а затем насыщением и восстановлением исходного профиля огибающей.

Мощный толчок к дальнейшему развитию теории дало открытие точного решения НУШ с помощью метода обратной задачи рассеяния (МОЗР) [24, 25]. Была доказана исключительная роль нелинейных волновых пакетов (солитонов), формирование которых наблюдалось в эксперименте. И хотя к моменту открытия МОЗР теория нелинейной самофокусировки успешно развивалась уже более пяти лет, этот аппарат является мощным орудием исследования решений уравнения (1). Кратко метод обратной задачи рассеяния изложен в книге [8], там же приведены одно- и двухсолитонные решения НУШ. Более подробно теорию МОЗР можно найти, например, в книгах [7, 26]. Мы не будем останавливаться на постановке данной задачи, отметим лишь, что спектр ассоциированной задачи рассеяния сохраняется во времени. Его дискретная часть отвечает за солитоны, сохраняющие свою форму и энергию при столкновении с другими волнами; сплошной спектр соответствует разбегающимся дисперсионным хвостам, которые при решении задачи на бесконечном интервале убывают во времени.

Существует класс точных решений НУШ, описывающих модуляционную неустойчивость плоских волн [18, 27]:

$$q(x,t) = \exp(2it)\,\frac{\cos(\eta)\cos[2\gamma\,(x - vt) + 2i\psi] - \mathrm{ch}(\psi)\,\mathrm{ch}[2\Gamma\,(x - Vt) + 2i\eta]}{\cos(\eta)\cos[2\gamma\,(x - vt)] - \mathrm{ch}(\psi)\,\mathrm{ch}[2\Gamma\,(x - Vt)]}\,, \tag{4}$$

где

$$\Gamma = -\,\mathrm{sh}(\psi)\cos(\eta), \qquad \gamma = \mathrm{ch}(\psi)\sin(\eta),$$
$$V = -\frac{\mathrm{ch}(2\psi)\sin(2\eta)}{\mathrm{sh}(\psi)\cos(\eta)}\,, \qquad v = \frac{\mathrm{sh}(2\psi)\cos(2\eta)}{\mathrm{ch}(\psi)\sin(\eta)}\,.$$

В (4) η и ψ — произвольные действительные числа (параметры решения), $\lambda = \cos(\eta + i\psi)$ задаёт собственное значение задачи рассеяния. Можно получить, что значение поля $q_{\rm central}$ в центральной точке решения (4), соответствующей максимуму возмущения огибающей, колеблется в диапазоне

$$|A - 1| \le |q_{\rm central}(t)| \le |A + 1|, \tag{5}$$

где $A = 2\cos(\eta)\,\mathrm{ch}(\psi)$, с периодом

$$T_{\rm Br} = \frac{\pi}{\cos(2\eta)\,\mathrm{sh}(2\psi)}\,. \tag{6}$$

Такие решения, которые являются, по сути, суперпозицией солитона огибающей и плоской волны (величина A соответствует амплитуде солитона огибающей, а плоская волна в (4) имеет единичную амплитуду), часто называют бризерами НУШ за изменчивость, «дышащую» форму. Отмечая такое свойство, модуляционная неустойчивость предложена в [18–20] в качестве механизма формирования аномально высоких волн, а «бризерные» решения — в качестве модели такой волны. Как следует из анализа решения (4), максимальное усиление волны (в 3 раза) описывается так называемым решением Перегрина [28]

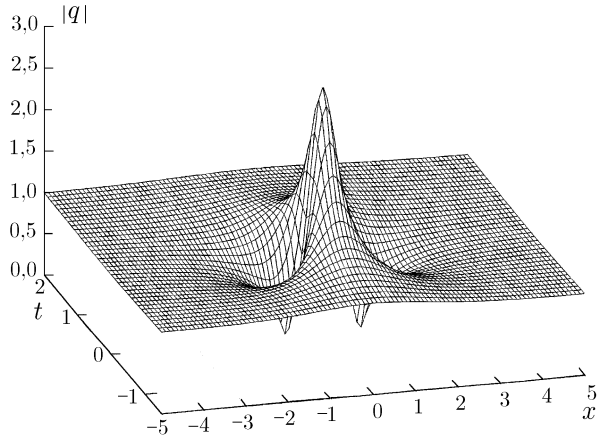

Рис. 2. Бризер Перегрина

$$q(x,t) = \exp(2it)\left(1 - \frac{4\,(1+4it)}{1+4x^2+16t^2}\right), \qquad (7)$$

которое получается из выражения (4) после предельного перехода $\eta = \psi = \delta$, $\delta \to 0$ (решение (7) построено на рис. 2). В такой волне огибающая совершает одну осцилляцию ($T_{\mathrm{Br}} = \infty$), вырастая словно ниоткуда. Более сложные решения были рассмотрены недавно в [29]. Использование аналитических результатов здесь, однако, имеет ряд трудностей. Запись точных решений становится сложной, когда возбуждено несколько «неустойчивых мод» (а решение периодической в пространстве задачи выражается через специальные функции). При учёте малых поправок к НУШ развитие модуляционной неустойчивости плоской волны приводит к беспорядочному волновому движению, причём это движение становится действительно хаотичным, так что нарушается возвращаемость, известная для НУШ; хаотизация волнового движения согласуется и с данными эксперимента [30]. Нелинейность играет определяющую роль в динамике модуляционно-неустойчивого поля, поэтому малые изменения его конфигурации могут приводить к значительному изменению поведения волн. Условия и инкремент модуляционной неустойчивости сильно зависят от наличия шумовой компоненты волн, которая может подавлять нелинейную неустойчивость [31]. Перечисленные трудности привели к главным образом статистическому изучению динамики модуляционной неустойчивости волн на воде с помощью численного эксперимента (см., например, [32, 33]), а заманчивая идея поиска волн-убийц в волновой записи с помощью задачи рассеяния реально так и не применена.

2. СЖАТИЕ ВОЛНОВЫХ ГРУПП

В то время как крутизна определяет степень нелинейности индивидуальных волн, НУШ содержит другой параметр, который для ограниченного волнового пакета может быть оценён как

$$M = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |q|\,\mathrm{d}x. \qquad (8)$$

Параметр M характеризует отношение нелинейной части уравнения (1) к дисперсионный (в интегральном смысле). В дальнейшем под степенью нелинейности будет подразумеваться именно нелинейность волновой группы M, а не крутизна индивидуальных волн. Сильно нелинейный волновой пакет может состоять из волн Стокса с малой крутизной. В физических переменных нелинейность волнового пакета выражается формулой

$$M = 2\pi\sqrt{2}\,k_0 a n, \qquad (9)$$

где k_0a — крутизна, n — число волн в группе. Для выполнения условия слабой модуляции волновых цугов требуется $n \gg 1$. Таким образом, НУШ, полученное в пределе малой нелинейности поверхностных волн, может быть справедливо для сильно нелинейных волновых групп.

Для возбуждения нелинейной неустойчивости достаточно иметь продолжительный и интенсивный квазимонохроматический пакет, тогда его эволюция будет во многом схожа с динамикой модуляционной неустойчивости плоской волны. Интенсивный импульс с течением времени разбивается на солитоны огибающей и дисперсионные хвосты. Амплитуда и скорость солитона огибающей являются независимыми параметрами, поэтому солитоны могут быть связанными, когда их скорости равны (такой случай типичен для действительных начальных возмущений НУШ). Наличие нелинейной фазовой модуляции и сложный профиль начального возмущения ведут к формированию солитонов с разными скоростями [34, 35]. Для довольно широкого класса симметричных действительных возмущений число возникающих солитонов определяется формулой

$$N = [M/\pi + 1/2] \tag{10}$$

(см. обсуждение в [35]). В формуле (10) квадратные скобки означают целую часть. Солитон огибающей, как известно, представляет собой устойчивый баланс между нелинейностью, сжимающей импульс, и дисперсионным расплыванием импульса. Как следует из (10), для возникновения солитона требуется $M > M_{\rm sol}$, где $M_{\rm sol} = \pi/2$. Если же оценить параметр M для модуляционно-неустойчивого участка плоской волны (интеграл по минимальной длине неустойчивого возмущения, см. (3)), то получим критерий модуляционной неустойчивости $M > M_{\rm inst}$, где $M_{\rm inst} = \pi$. Сжатие многосолитонных ($N \gg 1$) импульсов является актуальной проблемой в оптике (см., например, [36, 37]). Их эволюция сопровождается самосжатием и образованием узкого интенсивного пика на фоне широкого пьедестала и аналогична решению, построенному на рис. 2. Некоторый качественный анализ этого процесса можно провести качественно, основываясь на знании динамики модуляционной неустойчивости плоской волны. Условие неустойчивости (3) определяет не только порог развития нелинейной неустойчивости, но и ограничивает взрывной рост поля. Оценим параметр нелинейности для сфокусированного пика $M_{\rm p} \propto A_{\rm p}L_{\rm p}$ и для максимальной волны положим $M_{\rm p} \approx M_{\rm inst}$, использовав соотношение $A_{\rm p} = 3A_0$ (как для решения Перегрина (7)). Здесь A_0 и $A_{\rm p}$ — амплитуды начального импульса и сфокусированного пика соответственно, $L_{\rm p}$ — характерная ширина пика. Тогда получаем, что коэффициент сжатия $L_0/L_{\rm p}$, где L_0 — характерная ширина начального импульса, и отношение энергии сфокусированного пика к полной энергии импульса $E_0/E_{\rm p}$ могут быть записаны в виде $L_0/L_{\rm p} \propto 3M/M_{\rm inst}$ и $E_0/E_{\rm p} \propto M/(3M_{\rm inst})$. Используя $M_{\rm inst} = \pi$ и $M = \pi N$, приходим к $L_0/L_{\rm p} \propto 3N$ и $E_0/E_{\rm p} \propto N/3$. Линейная зависимость рассмотренных характеристик от числа солитонов N известна [36, 37], а коэффициенты пропорциональности, полученные в [37], равны соответственно 4,37 и 0,23 (для гауссова профиля).

Как следует из рассмотренного, экстремальные группы волн, созданные нелинейной неустойчивостью, должны обладать параметром нелинейности порядка $M_{\rm inst}$. Степень нелинейности аномальной волны являлась предметом исследования в работе [38]. Для этого использовалась идея обращения времени в эволюционном уравнении с помощью соответствующего преобразования волнового поля. Действительно, задача нахождения условий формирования локализованной группы интенсивных волн в рамках НУШ (1) может быть обращена с помощью замены $q \to q^*$. Тогда требуется исследовать начальную проблему для возмущения в виде ожидаемой волны-убийцы (амплитуды $A_{\rm fr}$), для чего можно использовать аппарат МОЗР. На больши́х временах максимальная амплитуда волн равна амплитуде большего сформировавшегося солитона A_1. Для выполнения формального принятого условия $A_{\rm fr}/A_1 \geq 2$ необходимо

$$M < 2\pi/3 \tag{11}$$

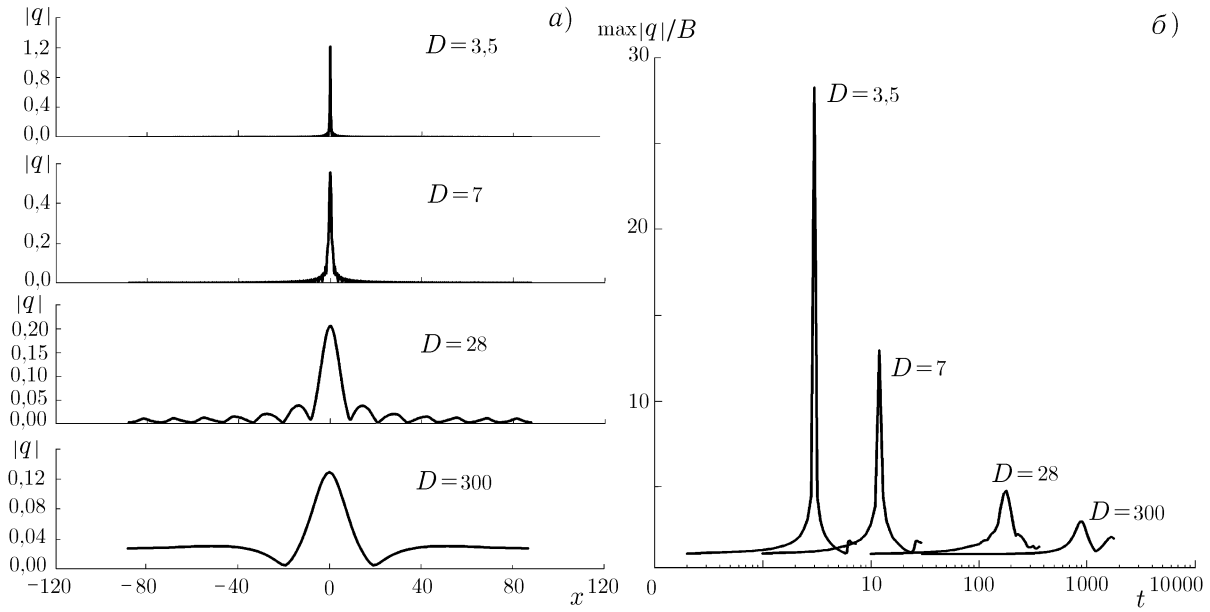

Рис. 3. Фокусировка волн в рамках НУШ в результате модуляционной неустойчивости и дисперсионного сжатия в зависимости от индекса фазовой модуляции: *а* — профили сфокусированных волн, *б* — временна́я эволюция максимума поля

(в [38] использовался sech-профиль ожидаемой волны-убийцы). Из (10) следует, что условие (11) допускает существование не более одного солитона. Таким образом, нелинейность аномальной волны оказывается слабой.

Рассмотренная проблема является более общей, чем сжатие многосолитонных цугов, т. к. включает в себя и возможность дисперсионного усиления. Действительно, если $M < \pi/2$, то формирование аномальной волны происходит вообще без участия солитонов огибающей. Такой процесс обеспечивается дисперсионной группировкой волн, являющейся классическим способом усиления в линейных задачах. В линейном приближении НУШ оптимальная для компрессии фазовая модуляция, как известно, подчиняется квадратичному закону. С учётом нелинейности, задолго до фокусировки (или много после неё) волновой цуг описывается следующим автомодельным выражением:

$$q(x,t) = \frac{Q}{\sqrt{t}}\,\exp\left[i\left(\frac{x^2}{4t} + 2Q^2\ln t + \Theta\right)\right], \tag{12}$$

где Q и Θ — функции переменной x/t [39]. Обратим внимание, что это решение имеет квадратичный закон фазовой модуляции, как и в линейном случае, когда Q и Θ выбираются постоянными. Эти функции корректируют оптимальную фазовую модуляцию, но такая коррекция становится всё менее существенной по мере роста t. Оказывается, что для эффективного сжатия группы волн достаточно использовать квадратичную модуляцию, как и в линейной задаче. На рис. 3 приведён результат численного расчёта эволюции начального возмущения

$$q(x, t=0) = B\,[1 + \varepsilon\cos(x/d)]\exp(ix^2/D^2), \tag{13}$$

где B — амплитуда плоской волны, ε — малый параметр, определяющий коэффициент амплитудной модуляции (использовались значения $\varepsilon = 0{,}1$; $B = 0{,}043$ и $d = 28$), а D определяет фазовую модуляцию (обратный индекс модуляции). Здесь и далее для численного моделирования использовался псевдоспектральный код и периодические граничные условия. В случае $D = 300$

частотная модуляция практически отсутствует, и имеет место модуляционный рост. С увеличением индекса модуляции сфокусированная волна имеет бóльшую высоту и сильнее локализована (рис. 3*а*). Как видно из рис. 3*б*, в сравнении с нелинейной неустойчивостью дисперсионное сжатие приводит к более резкому росту волны без участка насыщения.

Частотная модуляция поверхностных волн может быть создана вдалеке от места фокусировки под действием переменного ветра или течения. Для исследования её возникновения требуется учитывать эти факторы в уравнениях.

3. НЕЛИНЕЙНО-ДИСПЕРСИОННАЯ ФОКУСИРОВКА ТРЁХМЕРНЫХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН

С учётом поперечной (по отношению к направлению распространения несущей волны) координаты нелинейное уравнение Шрёдингера для поверхностных волн записывается в следующем виде:

$$i\,\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} + 2q\,|q|^2 = 0 \tag{14}$$

(здесь поперечная координата нормирована отлично от продольной: $y = \sqrt{2}\,k_0 Y$). Хотя это уравнение двумерное, оно описывает трёхмерные волновые пакеты, затухающие с глубиной по экспоненциальному закону. Уравнение (14) неинтегрируемо, а решения его одномерного варианта (1) — солитоны огибающей — неустойчивы по отношению к длинным поперечным возмущениям. По этой причине использование результатов одномерной теории для нахождения экстремальных волн ограничено. Направления неустойчивых возмущений плоской волны лежат в конусе, вытянутом вдоль направления несущей. Квазиодномерная эволюция модуляционной неустойчивости быстро приобретает двумерный характер за счёт малых неустойчивых возмущений. Уравнение (14) оказывается непригодным для длительного моделирования, т. к. в его рамках происходит перенос энергии в область большúх волновых чисел, однако оно представляется достаточным для понимания основных эффектов нелинейной и дисперсионной фокусировки.

Появление дополнительной размерности и отсутствие регулярных методов решения усложняют поиск сценариев образования аномально больших волн. Существуют конфигурации возмущений, обеспечивающие максимальное развитие фокусирующей неустойчивости для НУШ (14): такие возмущения вытянуты вдоль гиперболоидов [40]. Усиление волн может быть результатом геометрического схождения цугов, распространяющихся под различными углами. Схождение подковообразных волновых групп, профиль которых задавался в форме одномерных солитонов огибающей, рассматривалось в [41]. Значительное усиление амплитуды плоской волны может быть получено и в результате удачного выбора геометрии её возмущения [20]. Рассмотрим результат численного моделирования для следующего начального условия в рамках (14):

$$q(x, y, t = 0) = 1 + \varepsilon_1 \cos(K_x x) + \varepsilon_2 \cos(K_y y), \tag{15}$$

где малые параметры ε_1 и ε_2 отвечают за слабое возмущение плоской волны соответственно в продольном и поперечном направлениях (использовались значения $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0{,}1$ и $K_x = K_y \approx \approx 0{,}31$). На рис. 4 приведены мгновенные снимки огибающей волнового поля в различные моменты времени. Сначала динамика поля имеет квазиодномерный характер в результате развития модуляционной неустойчивости в продольном направлении. Далее нарастает поперечная модуляция профиля, что ведёт к образованию нескольких локализованных групп волн, которые в момент времени $t \approx 4{,}1$ сходятся в одну большую волновую группу. Временнáя зависимость максимума волнового поля представлена на рис. 5. Развитие неустойчивости в поперечном направлении ведёт к дополнительному увеличению амплитуды модуляционно-неустойчивой волны по сравнению с

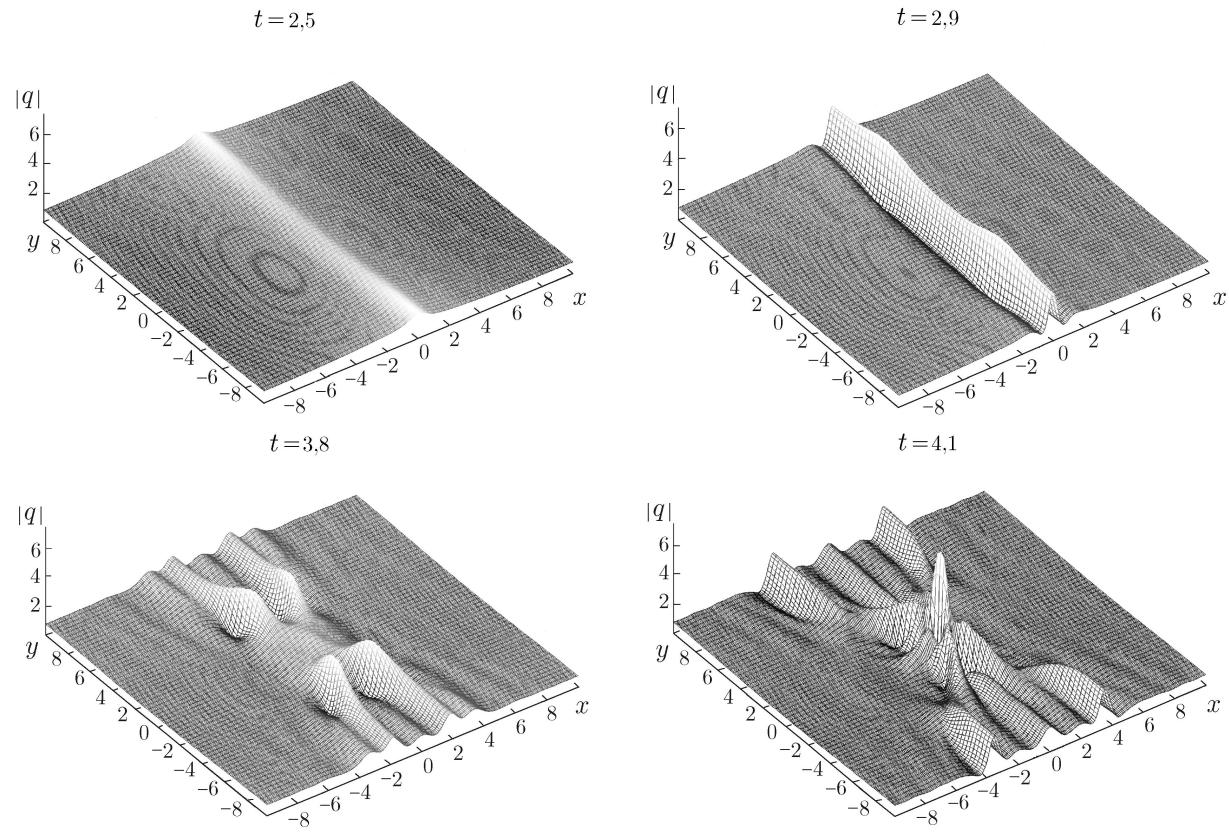

Рис. 4. Эволюция плоской волны в рамках двумерного НУШ, возмущённой в продольном и поперечном направлениях; огибающая волнового поля для моментов времени $t = 2{,}5$; 2,9; 3,8 и 4,1

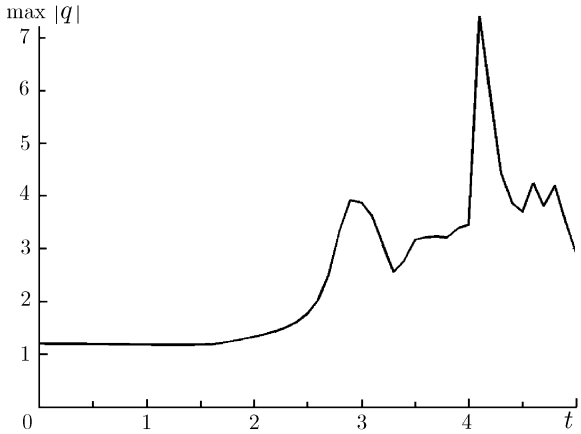

Рис. 5. Временна́я зависимость максимума волнового поля, эволюция которого представлена на рис. 4

одномерным сценарием развития модуляционной неустойчивости: теперь амплитуда волны вырастает в 4 раза (рис. 5). Но основной рост амплитуды достигается в результате схождения нескольких локализованных групп волн, образовавшихся в результате дробления начального возмущения. Этот процесс имеет значительно более короткий временной масштаб в сравнении с модуляционной неустойчивостью (см. рис. 5). Принципиальным для формирования аномальной волны является «когерентное» расположение локализованных волновых групп. Это нелинейный процесс весьма чувствителен к малым изменениям начальных условий и легко разрушается при введении слабых случайных возмущений [42].

Эволюция волнового пакета, представленная на рис. 4, демонстрирует усиление поля более чем в 7 раз по сравнению с начальной амплитудой. Очевидно, что идея с обращением времени способна и в двумерной задаче помочь отыскать распределение волн, ведущих к формированию волны-убийцы. Для этого снова нужно решать начальную задачу для возмущения в форме аномальной волны. На рис. 6 приведена эволюция локализованного начального возмущения, имеющего гауссов профиль. Нелинейная стадия эво-

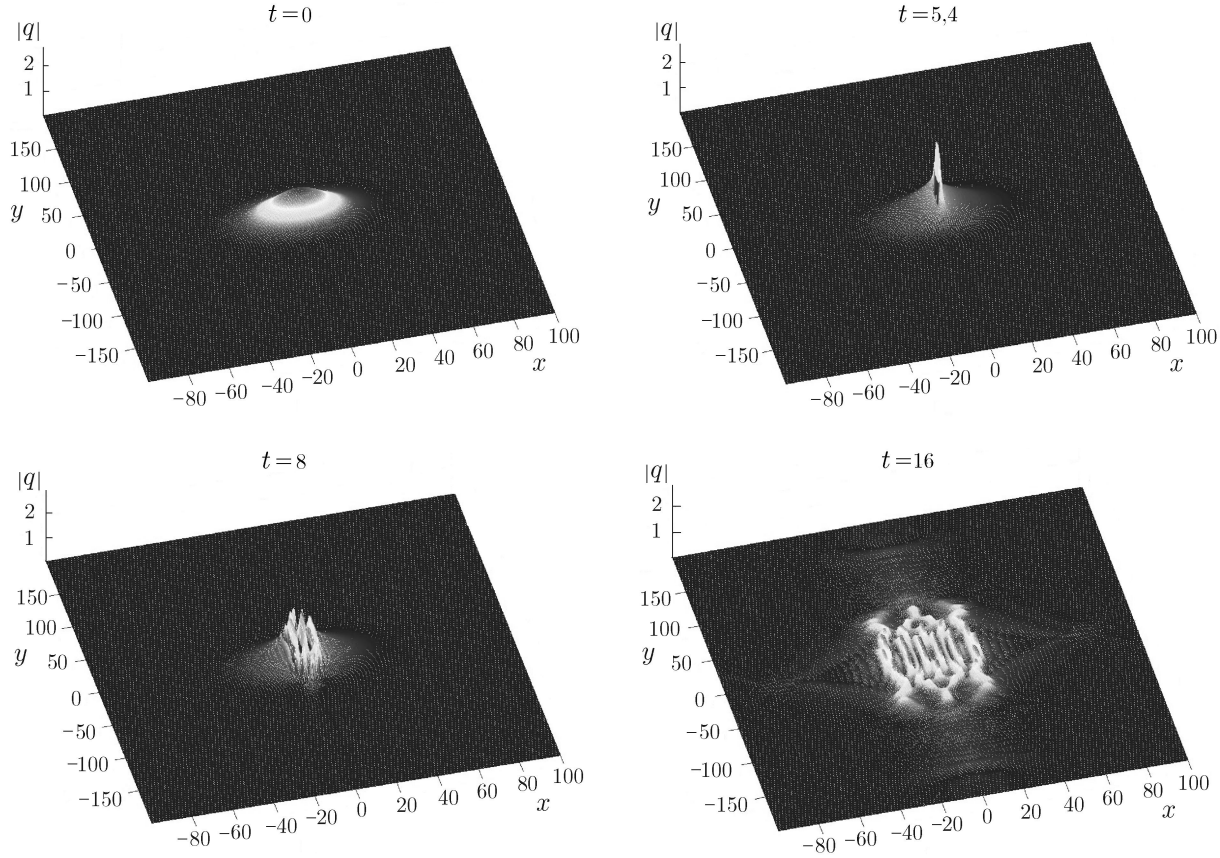

Рис. 6. Эволюция локализованного волнового пакета в рамках двумерного НУШ; огибающая волнового поля для моментов времени $t = 0$; 5,4; 8 и 16

люции сопровождается множественным дроблением структуры волнового поля. Поскольку уравнение (14) не имеет решений в виде долгоживущих нелинейных волновых структур, на больши́х временах дисперсионное расплывание волн сделает их почти линейными. Решение двумерного НУШ в линейном пределе для гауссового профиля легко находится [21]:

$$q_{2\mathrm{G}}(x,y,t) = \frac{A_0}{\sqrt[4]{G_x G_y}} \exp\left(-\frac{K_x^2 x^2}{G_x} - \frac{K_y^2 y^2}{G_y}\right) \times \\ \times \exp\left[i\left(\frac{4tx^2K_x^4}{G_x} - \frac{4ty^2K_y^4}{G_y} - \frac{\operatorname{arctg}(4tK_x^2)}{2} + \frac{\operatorname{arctg}(4tK_y^2)}{2}\right)\right], \quad (16)$$

где $G_x = 1 + 16t^2K_x^4$, $G_y = 1 + 16t^2K_y^4$. Пакет, описываемый (16), достигает максимальной амплитуды при $t = 0$ и не имеет в этот момент фазовой модуляции. Он становится фазово-модулированным по квадратичному закону, когда $t \to \pm\infty$. В случае двумерных волн для формирования сильно нелинейных импульсов в дополнение к дисперсионному схождению волн требуется участие солитонов огибающей. При формировании трёхмерной аномально высокой волны группа волн может увеличивать свою нелинейность, что приведёт к развитию модуляционной неустойчивости, если время жизни сфокусированной волны окажется достаточно большим. Дисперсионное сжатие частотно-модулированных волн является достаточным для формирования аномально высокой волны, но возможен и комбинированный механизм усиления: сначала за счёт дисперсионного сжатия, а затем вследствие модуляционной неустойчивости. Известно, что нали-

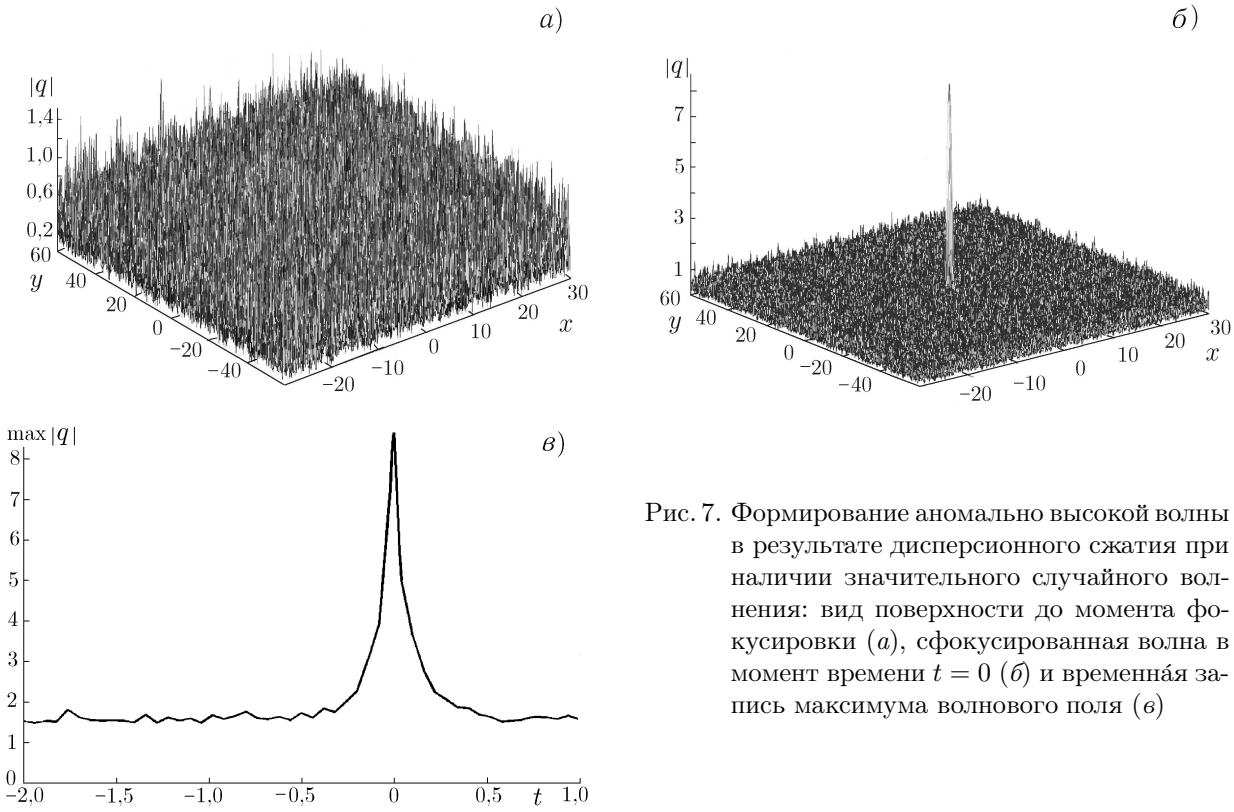

Рис. 7. Формирование аномально высокой волны в результате дисперсионного сжатия при наличии значительного случайного волнения: вид поверхности до момента фокусировки (*а*), сфокусированная волна в момент времени $t = 0$ (*б*) и временна́я запись максимума волнового поля (*в*)

чие случайных волн значительно ослабляет модуляционную неустойчивость [31], тогда роль дисперсионной фокусировки может заключаться в локальном усилении волн и достижении порога неустойчивости. Поскольку нелинейность волновой группы становится существенной только на завершающей стадии, а бо́льшую часть времени дисперсионная фокусировка происходит практически линейно, этот процесс может быть эффективным при наличии относительно сильного случайного волнения. Оно может полностью скрывать сходящийся цуг волн, тогда фокусирующаяся волна видна только на завершающей стадии роста, как показано на рис. 7.

4. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ НОВОГОДНЕЙ ВОЛНЫ

Число наблюдений волн-убийц достаточно велико, и очень часто они наблюдаются группами из нескольких волн [43]. Однако в нашем распоряжении пока нет инструментальной записи, на которой была бы представлена группа аномальных волн. В наиболее известной записи Новогодней волны присутствует только одна аномальная волна (рис. 1). Условия её регистрации соответствуют приближению бесконечно глубокой воды. Длительность записи составляет 20 мин, дискретность — около 0,47 с; средняя амплитуда волн равна 3,7 м, частота несущей $\omega_0 = 0{,}53$ рад/с (период 12 с), длина волны 221 м, характерная крутизна волн 0,1. Нами был проведён спектральный анализ волнового поля с временны́м окном в несколько периодов волн. В качестве первого приближения для оценок параметров модуляционной неустойчивости используем НУШ. Полагая в (9) $M = M_{\text{inst}}$, получаем, что для развития модуляционной неустойчивости в группе волн на временно́й записи должно быть около семи волн ($2n$ волн); спектр выборки, состоящей менее чем из 7 волн, не позволяет разрешить внутреннюю структуру спектра в районе неустойчивых гармоник Фурье. На рис. 8 оттенками серого в качестве примера построены текущие частотные спектры для выборок в 5 (60 с) и 7 (83 с) волн. Момент появления волны-убийцы

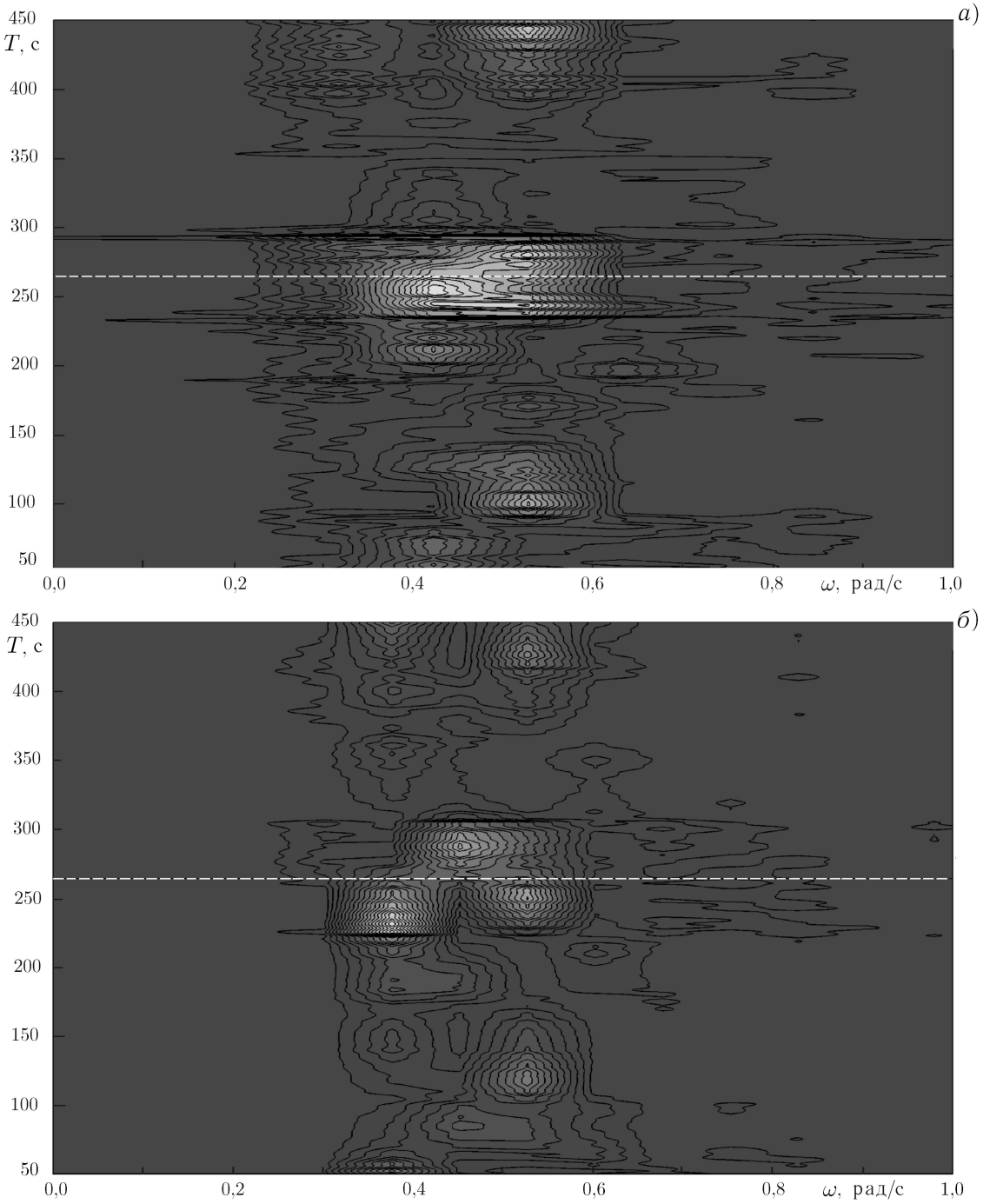

Рис. 8. Частотный спектр записи, приведённой на рис. 1*а*, для выборок в 5 (*а*) и 7 (*б*) волн. Более светлые области соответствуют большей интенсивности спектра

отмечен горизонтальной пунктирной линией. Для выборок в 7 волн отчётливо видно раздвоение максимума спектра непосредственно перед появлением волны-убийцы, которое не видно для выборок с малым числом волн. Сильное изменение спектра в его энергонесущей части является «кинематическим» проявлением четырёхволнового взаимодействия. Оценивая по формуле (3) максимальное неустойчивое волновое число возмущения, получаем $k_{\mathrm{BF}} = 0{,}008$ м$^{-1}$, тогда область неустойчивости на частотном спектре лежит в диапазоне $\omega_0 - \omega_{\mathrm{BF}} < \omega < \omega_0 + \omega_{\mathrm{BF}}$, где

$\omega_{\rm BF} = c_{\rm g} k_{\rm BF} = 0{,}074$ рад/с. На рис. 8*б* видно, что пара пиков в спектре расположены в границах области неустойчивости. Таким образом, аномально высокую волну, представленную на рис. 1, можно считать результатом проявления нелинейной неустойчивости поверхностных волн.

Использование НУШ подразумевает слабую модуляцию волн, когда в волновом пакете заключено много индивидуальных волн. Как свидетельствует рис. 1*б*, Новогодняя волна не удовлетворяет этому условию. В работе [44] для пространственно-временнóго численного моделирования записи Новогодней волны было использовано обобщённое уравнение Диста, отличающееся от НУШ включением дополнительных членов нелинейной дисперсии и учётом точной дисперсионной зависимости для волн на поверхности бесконечно глубокого моря. Такое уравнение записывается для комплексной амплитуды $q(x,t)$:

$$i\,\frac{\partial q}{\partial t} - L(\partial_x)\,q + 2q\,|q|^2 + 2i\left(6\,|q|^2\,\frac{\partial q}{\partial x} + q^2\,\frac{\partial q^*}{\partial x}\right) + 4q\,\frac{\partial\varphi(z=0)}{\partial x} = 0. \tag{17}$$

Здесь $\varphi(x,z,t)$ — безразмерный наведённый поток, удовлетворяющий уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0 \tag{18}$$

при $z<0$, где z — безразмерная вертикальная координата; уровень $z=0$ соответствует невозмущённой поверхности. На границах выполняются условия

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\partial(|q|^2)}{\partial x} \text{ при } z=0; \qquad \varphi\to 0 \text{ при } z\to-\infty. \tag{19}$$

В уравнении (17) псевдодифференциальный оператор $L(\partial_x)$ отвечает за дисперсионную зависимость:

$$L(\partial_x) = 2\left(\sqrt{1-2i\,\frac{\partial}{\partial x}} - 1\right). \tag{20}$$

В уравнении (17) использована та же система обезразмеривания (2), что и для уравнения НУШ (1), только в (17) координата x отсчитывается не в бегущей, а в лабораторной системе координат. Главная часть смещения волновой поверхности определяется через комплексную амплитуду $q(x,t)$ согласно формуле (2). Отметим, что появившиеся в (17) слагаемые, описывающие нелинейную дисперсию, впервые были получены в работе [45].

Выполненное в [44] моделирование в рамках уравнения (17) позволило проследить движение волн в пространстве. Было показано, что появлению аномально высокой волны предшествовало взаимодействие интенсивного локализованного волнового цуга с другой группой волн меньшей амплитуды. Суперпозиция двух волновых групп привела к превышению порога модуляционной неустойчивости и возникновению интенсивного пика. Таким образом, выполненный нами на основе НУШ анализ волновой записи привёл к результату, качественно схожему с численным моделированием обобщённого уравнения Диста [44].

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Нелинейное уравнение Шрёдингера, впервые применённое В. И. Талановым в радиофизике, широко используется в различных областях физики. В настоящей статье сделан краткий обзор использования НУШ для описания интереснейшей проблемы — объяснения появления волн-убийц на поверхности океана. Благодаря накопленному опыту исследования динамики нелинейных волновых пакетов в диспергирующих средах, в том числе и в оптике, оказался возможным быстрый

прогресс в изучении аномально больших волн в океане. Нелинейного уравнения Шрёдингера зачастую оказывается достаточно для качественного понимания динамики поверхностных волн. Сейчас расчёты волн-убийц начаты в рамках более сложных моделей поверхностных волн: уравнения Диста и его модификаций [44], уравнения Захарова [9] и др., а также в рамках полнонелинейных численных экспериментов на мощных компьютерах [19, 46]. На основе описанных теоретических представлений сейчас начато решение практических задач по определению параметров «расчётной» волны-убийцы, необходимых инженерам при проектировании платформ, сооружаемых на океанических шельфах.

Авторы благодарны Сверру Хаверу (Sverre Haver) за предоставленную запись Новогодней волны. Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 02–05–65107, 03–05–06074 и 03–05–64978), ИНТАС (проекты № 01–2156 и 01–0330) и Совета по грантам Президента РФ для поддержки ведущих научных школ (грант № НШ–1637.2003.2, научная школа В. И. Таланова).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Питаевский Л. П. // ЖЭТФ. 1961. Т. 40, № 2. С. 646.
2. Таланов В. И. // Письма в ЖЭТФ. 1965. Т. 2, № 5. С. 218.
3. Kelley P. L. // Phys. Rev. Lett. 1965. V. 15, No. 26. P. 1 005.
4. Островский Л. А. // ЖЭТФ. 1966. Т. 51, № 4 (10). С. 1 189.
5. Benney D. J., Newell A. C. // J. Math. Phys. (Stud. Appl. Math.). 1967. V. 46. P. 133.
6. Рабинович М. И., Трубецков Д. И. Введение в теорию колебаний и волн: Учебное пособие. М.: Наука, 1984. 432 с.
7. Ablowitz M. J., Clarkson P. A. Solitons, nonlinear evolution equations and inverse scattering. Cambridge Univ. Press, 1991. 516 p.
8. Власов С. Н., Таланов В. И. Самофокусировка волн. Н. Новгород: ИПФ РАН, 1997. 220 с.
9. Захаров В. Е. // ПМТФ. 1968. № 2. С. 86.
10. Hasimoto H., Ono J. // J. Phys. Soc. Japan. 1972. V. 33. P. 805.
11. Davey A. // J. Fluid Mech. 1972. V. 53. P. 769.
12. Benjamin T. B., Feir J. E. // J. Fluid Mech. 1967. V. 27, No. 3. P. 417.
13. Sand S. E., Ottesen Hansen N. E., Klinting P., Gudmestad O. T., Sterndorff M. J. // Water Wave Kinematics / Ed. by O. Torum, O. T. Gudmestad. Kluwer Academic Publ., 1990. P. 535.
14. Лавренов И. В. Математическое моделирование ветрового волнения в пространственно-неоднородном океане. Гидрометеоиздат, 1998.
15. Haver S., Andersen O. J. // Proc. 10th Conference of the ISOPE. 2000. P. 123.
16. Mori N., Liu P. C., Yasuda N. // Ocean Engineering. 2002. V. 29. P. 1 399.
17. Magnusson A. K., Donelan M. A., Drennan W. M. // Coastal Eng. 1999. V. 36. P. 147.
18. Dysthe K. B., Trulsen K. // Physica Scripta T. 1999. V. 82. P. 48.
19. Henderson K. L., Peregrine D. H., Dold J. W. // Wave Motion. 1999. V. 29. P. 341.
20. Osborne A. R., Onorato M., Serio M. // Phys. Lett. A. 2000. V. 275. P. 386.
21. Пелиновский Е. Н., Хариф К. // Изв. Академии инженерных наук РФ. 2000. Т. 1. С. 50.
22. Brown M. G., Jensen A. // J. Geophys. Research. 2001. V. 106. P. 16 917.
23. Clauss G. // Applied Ocean Research. 2002. V. 24. P. 147.
24. Захаров В. Е., Шабат А. Б. // ЖЭТФ. 1971. Т. 61. С. 118.
25. Ablowitz M. J., Kaup D. J., Newell A. C., Segur H. // Stud. Appl. Math. 1974. V. 53. P. 249.
26. Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. Теория солитонов. Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980. 319 с.

27. Слюняев А. В. Динамика внутренних и поверхностных волн большой амплитуды в океане: Дисс. ... к. ф.-м. н. Н. Новгород, 2002.
28. Peregrine D. H. // J. Austral. Math. Soc. Ser. B. 1983. V. 25. P. 16.
29. Calini A., Schober C. M. // Phys. Lett. A. 2002. V. 298. P. 335.
30. Ablowitz M. J., Hammark J., Henderson D., Schober C. M. // Physica D. 2001. V. 152–153. P. 416.
31. Alber I. E. // Proc. R. Soc. Lond. A. 1978. V. 363. P. 525.
32. Onorato M., Osborne A. R., Serio M. // Phys. Fluids. 2002. V. 14, No. 4. P. L25.
33. Onorato M., Osborne A., Serio M., Bertone S. // Phys. Rev. Lett. 2001. V. 86, No. 25. P. 5 831.
34. Bronski J. C., Kutz J. N. // Phys. Lett. A. 1999. V. 254. P. 325.
35. Desaix M. // Phys. Rev. Lett. 2003. V. 90, No. 1. Article no. 013901.
36. Дианов Е. М., Никонова З. С., Прохоров А. М., Серкин В. Н. // Письма в ЖТФ. 1986. Т. 12, № 12. С. 756.
37. Chen C.-M., Kelley P. L. // J. Opt. Soc. Am. B. 2002. V. 19, No. 9. P. 1 961.
38. Kharif C., Pelinovsky E., Talipova T., Slunyaev A. // Письма в ЖЭТФ. 2001. Т. 73. С. 170.
39. Ablowitz M. J., Segur H. // J. Fluid Mech. 1979. V. 92. P. 691.
40. Литвак А. Г., Миронов В. А., Шер Э. М. // ЖЭТФ. 2000. Т. 118. С. 1 463.
41. Bateman W. J. D., Swan C., Taylor P. H. // J. Comp. Physics. 2001. V. 174. P. 277.
42. Slunyaev A., Kharif C., Pelinovsky E., Talipova T. // Physica D. 2002. V. 173. P. 77.
43. Lawton G. // New Scientist. 2001. V. 170. P. 28.
44. Trulsen K. // Proc. of the Workshop "Rogue Waves 2000". 2000. P.265.
45. Литвак А. Г., Таланов В. И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1967. Т. 10. С. 569.
46. Clammond D., Grue J. // C. R. Mecanique. 2002. V. 330. P. 575.

[1] Институт прикладной физики РАН,
г. Нижний Новгород, Россия;
[2] Institut de Recherche sur les Phénoménes Hors Equilibre,
Marseille, France

Поступила в редакцию
28 мая 2003 г.

NONLINEAR PARABOLIC EQUATION AND EXTREME WAVES ON THE SEA SURFACE

E. N. Pelinovsky, A. V. Slunyaev, T. G. Talipova, and C. Kharif

Nearly 40 years have passed since V. I. Talanov discovered the nonlinear parabolic equation played an important role in the nonlinear optics. It was very quickly understood that this equation could also be adapted for nonstationary wave packets of different physical nature in any dimension. Under the later name of the nonlinear (cubic) Schrödinger equation, it became a fundamental equation in the theory of weakly nonlinear wave packets in strongly dispersive media. The article is devoted to only one application of the nonlinear Schrödinger equation in the theory of the so-called freak waves on the sea surface. During the last five years a great boom has occurred in the research of extreme waves on the water, for which the nonlinear parabolic equation played an important role in the understanding of physical mechanisms of the freak-wave phenomenon. More accurate, preferably numerical, models become popular today and many results of weakly nonlinear models are corrected quantitatively. Nevertheless, sophisticated models do not demonstrate new physical mechanisms and their description on the basis of the nonlinear parabolic equation (nonlinear Schrödinger equation), performed in this paper, seems very attractive in view of their possible applications in the wave-motion physics.

УДК 551.466.8

ТРАНСФОРМАЦИЯ КОРОТКИХ ВОЛН В ПОЛЕ НЕОДНОРОДНЫХ ТЕЧЕНИЙ НА ПОВЕРХНОСТИ ОКЕАНА. ВЛИЯНИЕ МОДУЛЯЦИИ ВЕТРОВОГО ИНКРЕМЕНТА

К. А. Горшков, И. С. Долина, И. А. Соустова, Ю. И. Троицкая

Построена модель трансформации спектра коротких поверхностных волн при наличии неоднородного течения на поверхности воды, учитывающая модуляцию инкремента ветровых волн. Для расчёта модулированного инкремента использована модель турбулентного приводного слоя атмосферы, в которой для описания турбулентных напряжений в ветре использована градиентная аппроксимация с модельным коэффициентом вихревой вязкости, задаваемым на основании имеющихся лабораторных экспериментов. Рассмотрены примеры модуляции коротких волн при наличии неоднородных течений на поверхности, создаваемых волнами зыби и интенсивными внутренними волнами. Показано, что существенное влияние на инкремент коротких волн и его модуляцию оказывает деформация профиля скорости ветра и его длинноволнового возмущения за счёт нелинейного взаимодействия ветровых поверхностных волн с ветром. Для случая волн зыби эта деформация сводится к возрастанию параметра шероховатости профиля скорости ветра и модуляции параметра шероховатости с периодом волны зыби. Расчёт модулированного инкремента проведён в рамках квазилинейной модели генерации поверхностных волн турбулентным ветром, использующей гипотезу о случайных фазах поля ветровых волн. Амплитуда и фаза гидродинамической модуляционной передаточной функции рассчитаны в рамках релаксационной модели. Результаты расчёта удовлетворительно согласуются с имеющимися экспериментальными данными. Для описания поля течений, создаваемых интенсивными внутренними волнами на поверхности, использована модель, описываемая комбинированным уравнением Кортевега—де Вриза. Параметры внутренних волн взяты из эксперимента «COPE». Рассчитаны зависимости ветрового инкремента от фазы волнового цуга для различных значений скорости трения ветра и длины поверхностной волны при попутном и встречном направлении распространения внутренней волны относительно ветра. Результаты расчёта качественно согласуются с экспериментальными данными.

ВВЕДЕНИЕ

Один из наиболее перспективных дистанционных методов исследования океана основан на измерении вариаций сигнала радиолокатора, рассеянного взволнованной водной поверхностью. Вариации принимаемого сигнала связаны с изменчивостью параметров ветрового волнения, которая, в свою очередь, обусловлена их трансформацией в поле неоднородных крупномасштабных течений на поверхности. Такие течения обусловлены различными процессами в верхнем слое океана: внутренними волнами, обтеканием островов и подводных возвышенностей и т. п. Характерные масштабы подобных течений составляют сотни метров. Такие же масштабы могут иметь длинные поверхностные волны, включая волны зыби. Изменчивость, вызванная такими крупномасштабными течениями, регистрируется в широком спектре ветрового волнения: для волн с длинами от нескольких метров до сантиметров. Модуляция амплитуды волн дециметрового диапазона в поле внутренних волн и неоднородных течений хорошо объясняется в рамках кинематического механизма [1]. В то же время механизм модуляции сантиметровых волн до конца не выяснен, несмотря на пристальный интерес к этому диапазону поверхностных волн, определяющих радиоизображение морской поверхности при брэгговском механизме его формирования. В середине 80-х годов была выдвинута гипотеза о «каскадном механизме» модуляции сантиметровых волн [2]. В последнее время было предложено физическое объяснение каскадного механизма

как модуляции вынужденных высших гармоник волн дециметрового диапазона [3]. Следует, однако, заметить, что, как показывает эксперимент, вынужденные гармоники дециметровых волн вносят существенный вклад в спектр ветрового волнения сантиметрового диапазона при сильных ветрах [3]. Кроме того, следует заметить, что при наличии на поверхности воды волн с острыми гребнями рассеяние радиоволн может определяться рассеянием на остриях таких гребней, при этом длина поверхностной и радиоволн не связаны резонансным брэгговским соотношением [4], и дециметровые поверхностные волны могут эффективно рассеивать сантиметровые радиоволны. Однако этот механизм становится эффективным лишь при достаточно сильных ветрах, когда существенная часть ветровых волн имеет острые вершины.

При слабых ветрах профили волн пологие, и основную часть поверхностного волнения составляют свободные волны, которые возбуждаются ветром. При этом вариации профиля скорости ветра, вызванные неоднородным течением на поверхности воды, приводят к возникновению модуляции инкремента коротких волн, которая может вносить существенный вклад в изменчивость спектра поверхностных волн сантиметрового диапазона. Эффект модуляции ветрового инкремента активно обсуждается в настоящее время в связи с проблемой определения гидродинамической модуляционной передаточной функции (МПФ) длинных поверхностных волн и зыби [5–9]. Кроме того, в последнее время обсуждается влияние этого эффекта на модуляцию волн сантиметрового диапазона в поле интенсивных внутренних волн [10].

В настоящей работе представлена теоретическая модель механизма модуляции инкремента коротких поверхностных волн при наличии неоднородных течений и обсуждается её применение к наблюдениям модуляции поверхностных волн при наличии волн зыби и интенсивных внутренних волн. В разделе 1 приведены основные уравнения, описывающие трансформацию спектра коротких поверхностных волн при наличии неоднородных течений на поверхности воды. В разделе 2 приведены основные уравнения, описывающие ветровой турбулентный пограничный слой над взволнованной водной поверхностью. В разделе 3 в рамках модели найдена гидродинамическая МПФ волн зыби и приведено сопоставление результатов модели и имеющихся экспериментальных данных. В разделе 4 описана модель модуляции волн сантиметрового диапазона в поле интенсивных внутренних волн и проведено сопоставление расчётов с данными эксперимента «COPE» [11].

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ОПИСЫВАЮЩИЕ МОДУЛЯЦИЮ СПЕКТРА КОРОТКИХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН ПРИ НАЛИЧИИ НЕОДНОРОДНЫХ ТЕЧЕНИЙ НА ПОВЕРХНОСТИ ВОДЫ

Модуляция коротких волн в поле неоднородных течений описывается кинетическим уравнением для спектра возвышений коротких волн $F(K,x,t)$. В простейшем случае, когда направления ветра, волн и течения совпадают и модуляция максимальна, уравнение имеет вид

$$\frac{\partial F}{\partial t} + [U_0(x,t) + C_{\rm gr}]\,\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial \Omega}{\partial x}\,\frac{\partial F}{\partial K} = 2B[F,K,U,x,t] + \tilde{\eta}\,\frac{\partial U_0}{\partial x}\,F + \mathrm{Int}[F,K]. \qquad (1)$$

Здесь $U_0(x,t)$ — неоднородное поле течений, K и Ω — волновое число и частота короткой волны в лабораторной системе отсчёта, $\Omega = KU_0(x,t) + \Omega_0$, Ω_0 — собственная частота короткой волны, $B[F,K,U,x,t]$ — модулированный инкремент короткой волны, равный алгебраической сумме ветрового инкремента, определяемого скоростью ветра U, и декремента вязкой диссипации (это слагаемое зависит от поля длинной волны), $\mathrm{Int}[F,K]$ — «интеграл столкновений», определяющий нелинейное взаимодействие волн. Второе слагаемое в правой части — радиационное напряжение, а $\tilde{\eta}$ — фактор растяжения, введённый в [12–14]. Заметим, что в уравнение для спектра волнового действия $\tilde{N}$ радиационное напряжение не входит. При этом выражение для $\tilde{\eta}$ может быть легко

получено из соотношения спектров волнового действия $\tilde{N}$ и возвышений F, т. е. $\tilde{\eta}$ определяется дисперсионными свойствами волн.

Для потенциальных волн при отсутствии дрейфового течения

$$\tilde{\eta} = C_{\rm gr}/C_{\rm f} - 1,$$

где $C_{\rm gr} = \partial\Omega_0/\partial K$ — групповая, а $C_{\rm f} = \Omega_0/K$ — фазовая скорости короткой волны.

Если неоднородное течение на поверхности воды достаточно слабое и вызываемые им вариации спектра коротких волн невелики, то для аппроксимации интеграла столкновений $\mathrm{Int}[F, K]$ в (1) можно воспользоваться релаксационной моделью, предложенной в [15].

Пусть равновесный спектр возвышений взволнованной водной поверхности F_0 при скорости ветра U удовлетворяет уравнению, следующему из (1):

$$2B[F_0, K, U]F_0 + \mathrm{Int}[F_0, K] = 0.$$

Рассмотрим аналогично [15] пространственно-однородное малое возмущение спектра возвышений F_1:

$$F = F_0[K] + F_1[F_0, \mathbf{k}, t].$$

Такой возмущённый спектр будет релаксировать к равновесному спектру. Скорость релаксации обозначим $\beta_{\rm r}$, тогда

$$F_1[F_0, \mathbf{k}, t] = F_1 \exp(-\beta_{\rm r} t),$$

а из (1) в линейном приближении по F_1 следует

$$-\beta_{\rm r} F_1 = \frac{\partial F_1}{\partial t} = \left(\frac{\delta}{\delta F} \mathrm{Int}[F]\bigg|_{F=F_0} + 2B[F_0, K, U] + 2\,\frac{\delta B_0}{\delta F}\bigg|_{F=F_0} F_0 \right) F_1,$$

где $\delta/\delta F$ обозначает вариационную производную. Тогда вариационная производная интеграла столкновений

$$\frac{\delta}{\delta F} \mathrm{Int}[F, K]\bigg|_{F=F_0[K]} = -\left(2B_0[F_0, K, U] + 2\,\frac{\delta B_0}{\delta F}\bigg|_{F=F_0[K]} F_0 + \beta_{\rm r} \right). \tag{2}$$

Аналогично [15] воспользуемся аппроксимацией интеграла столкновений и в том случае, когда возмущение спектра зависит от пространственной координаты. Предположим, что возмущение коротковолнового спектра вызывается неоднородным течением на поверхности воды, тогда механизмами, поддерживающими это возмущение, являются трансформация коротких волн в поле этого неоднородного течения и модуляция ветрового инкремента. При этом модуляция амплитудно-зависимого ветрового инкремента коротких волн определяется двумя причинами: возмущениями скорости ветра, индуцированными неоднородным течением, и модуляцией амплитуды ветровых волн, т. е.

$$B[F, K, U, x, t] = B_0[F_0, K, U] + \frac{\delta B_0}{\delta U}\, U_1(x, t) + \frac{\delta B_0}{\delta F}\, F_1(x, t),$$

где $U_1(x, t)$ — возмущение скорости ветра, вызванное неоднородным течением. Если неоднородное течение достаточно медленное, так что длинноволновые вариации скорости ветра определяются вариациями тангенциального напряжения T, невозмущённое значение которого равно u_*^2, то

$$B_1 = \frac{\delta B_0}{\delta u_*^2}\, T_1 + \frac{\delta B_0}{\delta F}\, F_1, \tag{3}$$

где T_1 — длинноволновое возмущение тангенциального напряжения.

Подставляя в (1) выражение для B с учётом формулы (3) для B_1, а также выражения (2) для вариации интеграла столкновений, получим в линейном приближении уравнение для F_1 в виде

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} - K\,\frac{\partial F_0}{\partial K}\,\frac{\partial U_0}{\partial x} = -\beta_{\rm r} F_1 + \tilde{\eta}\,\frac{\partial U_0}{\partial x} F_0 + 2\,\frac{\delta B_0}{\delta T}\bigg|_{T=u_*^2} T_1 F_0.$$

Если неоднородное течение представляет собой гармоническую волну малой амплитуды, возвышение в которой

$$\eta = a\cos(\omega t - kx), \tag{4}$$

то

$$U_0 = cka\exp[i(kx-\omega t)], \qquad F_1 = F_{10}\exp[i(kx-\omega t)],$$

и

$$F_1 = \frac{i\omega ka}{\beta_{\rm r} - i\omega}\left(K\,\frac{\partial F_0}{\partial k} + \tilde{\eta} F_0\right) + 2\,\frac{\delta B_0}{\delta u_*^2} T_1\,\frac{F_0}{\beta_{\rm r} - i\omega}\,, \tag{5}$$

где c — фазовая скорость волны. Скорость релаксации в дальнейшем будет полагаться равной $2B_0[F]$ аналогично [15].

Первое слагаемое в (5) описывает консервативную трансформацию коротких волн на неоднородном поле течений. Как показывают оценки, этот механизм является определяющим для модуляции дециметровых волн при наличии внутренних волн [1, 2] и очень важен при формировании гидродинамической МПФ длинных поверхностных волн [16]. В то же время для объяснения модуляции волн сантиметрового диапазона при наличии как внутренних, так и длинных поверхностных волн важен учёт дополнительных факторов. Второе слагаемое в (5) описывает влияние модуляции ветрового инкремента поверхностных волн, который обсуждается в настоящей работе. Для его вычисления требуется модель ветрового пограничного слоя над взволнованной водной поверхностью.

2. ВЕТРОВОЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ НАД ВОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ С НЕОДНОРОДНЫМ ПОЛЕМ ТЕЧЕНИЙ

Рассмотрим ветровой пограничный слой над водной поверхностью. Для описания средних полей воспользуемся системой уравнений Рейнольдса [17], в которых используется простейшая гипотеза замыкания — градиентная аппроксимация турбулентных напряжений:

$$\sigma_{ij} = -\frac{2}{3}\,\langle u_i'^2\rangle\,\delta_{ij} + \nu\left(\frac{\partial\langle u_i\rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial\langle u_j\rangle}{\partial x_i}\right), \tag{6}$$

где $\langle u_i\rangle$ — i-тая компонента средней скорости, $\langle u_i'^2\rangle$ — средняя кинетическая энергия турбулентных пульсаций, ν — коэффициент турбулентной вязкости, δ_{ij} — символ Кронекера. Будем считать ν заданной функцией вертикальной координаты z. Хорошим представлением функции $\nu(z)$ является аппроксимация, полученная в [18]:

$$\nu(z) = \nu_{\rm a}\left[N_0 + 0{,}4z^+\left(1 - \exp[-(z^+/L)^2]\right)\right]. \tag{7}$$

Здесь $z^+ = zu_*/\nu_{\rm a}$ — вертикальная координата, выраженная в вязких длинах, u_* — скорость трения ветра, $\nu_{\rm a}$ — кинематическая вязкость воздуха. Входящие в (7) параметры L и N_0 определяются режимом обтекания поверхности. Для гидродинамически гладкого режима обтекания

поверхности воды $L = 22{,}4$, $N_0 = 1$. Влияние шероховатости поверхности воды, вызванное наличием волн на поверхности, может быть учтено путём решения задачи о передаче импульса от ветра к волнам, как это делается в разделе 3. Другой упрощённый способ был предложен в работе [19], при этом в случае шероховатой поверхности $N_0 > 1$. Этот метод используется в разделе 4. Заметим, что формула (7) описывает эффективную вязкость как в вязком подслое, так и в логарифмическом пограничном слое.

Будем рассматривать двумерные движения, тогда система уравнений Рейнольдса может быть записана для завихренности χ и функции тока ψ:

$$\frac{\partial\chi}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\chi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\chi}{\partial z} - \Delta(\nu\chi) + 2\frac{\partial^2\nu}{\partial z^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = 0, \qquad \Delta\psi = \chi. \tag{8}$$

На поверхности воды $z = \zeta(x,t)$ выполняются граничные условия непротекания и прилипания:

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\bigg|_{z=\zeta(x,t)} = 0; \qquad \frac{\partial\psi}{\partial z}\bigg|_{z=\zeta(x,t)} = \frac{\partial\psi_{\mathrm{w}}}{\partial z}\bigg|_{z=\zeta(x,t)}, \tag{9}$$

где ψ_{w} — функция тока течения в воде.

Рассматриваемая здесь модель приводного погранслоя атмосферы учитывает вязкий подслой, имеющий чрезвычайно малую толщину (меньше 1 мм), которая существенно меньше типичной высоты поверхностных волн. В связи с этим для того, чтобы исключить сильную геометрическую нелинейность, необходимо перейти к криволинейным координатам, в которых одна из координатных линий совпадает с взволнованной поверхностью воды [20]. Для случая ортогональных координат (s,γ), задаваемых преобразованием

$$x = x(s,\gamma,t), \qquad z = z(s,\gamma,t),$$

где $z = z(s,\gamma=0,t)$ — уравнение поверхности воды, система (8) примет вид [21]

$$\chi_t + \frac{\chi_s}{I}\left[\psi_\gamma - (x_s x_t + z_s z_t)\right] - \frac{\chi_\gamma}{I}\left[\psi_s + (x_\gamma x_t + z_\gamma z_t)\right] =$$

$$= \frac{\Delta(\nu\chi)}{I} - \frac{2}{I^2}\nu_{\gamma\gamma}\psi_{ss} - \frac{I_\gamma}{I^3}\left[(\psi_\gamma\nu_\gamma)_\gamma - \nu_\gamma\psi_{ss}\right] - \frac{I_s}{I^3}\left(2\nu_\gamma\psi_{s\gamma} - \psi_s\nu_{\gamma\gamma}\right) + \psi_\gamma\nu_\gamma\frac{I_s^2 + I_\gamma^2}{I^4}, \tag{10а}$$

$$\Delta\psi = \chi = \frac{\psi_{ss} + \psi_{\gamma\gamma}}{I}, \tag{10б}$$

а граничные условия (9) преобразуются к виду

$$\psi|_{\gamma=0} = 0, \tag{10в}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\gamma}\frac{1}{\sqrt{I_{\mathrm{a}}}} = \frac{\partial\psi_{\mathrm{w}}}{\partial\gamma}\frac{1}{\sqrt{I_{\mathrm{w}}}}. \tag{10г}$$

Здесь и далее нижний индекс означает частную производную по соответствующей координате; $I = \partial(x,z)/\partial(s,\gamma)$ — якобиан ортогонального преобразования координат, а индексы a и w относятся к величинам в воздухе и воде соответственно.

В рамках предлагаемой модели модулированный инкремент ветровых волн может быть найден достаточно просто, если характерные временны́е τ и пространственные λ масштабы поверхностных волн малы по сравнению с соответствующими масштабами течения T_0 и L_0, т. е. в задаче есть малый параметр $\mu = 0(\tau/T_0, \lambda/L_0)$. При этом процедура решения задачи состоит в следующем. Вначале в рамках модели (10а), (10б) и (11) находится переменное поле ветра, индуцированное

в воздухе течением на поверхности воды, а затем находится ветровой инкремент достаточно коротких поверхностных волн в низшем порядке по μ, которому соответствует параметрическое приближение. Примеры расчёта модулированного инкремента коротких поверхностных волн и модуляции их спектральной плотности приведены ниже для двух случаев неоднородных течений: волн зыби и интенсивных внутренних волн.

3. МОДУЛЯЦИЯ ВЕТРОВЫХ ВОЛН ВОЛНАМИ ЗЫБИ

Как показано выше, модуляция спектра коротких волн при наличии волны зыби описывается формулой (5), в которую входит комплексная амплитуда длинноволнового возмущения инкремента коротких волн $T_1\,(\delta B_0/\delta T)\big|_{T=u_*^2}$, где T_1 — комплексная амплитуда длинноволнового возмущения тангенциального турбулентного напряжения ветра. Вычислим эту величину в рамках настоящей модели. Задача распадается на две: определение длинноволнового возмущения скорости ветра, индуцированного волной зыби, и определение коротковолнового возмущения.

3.1. Среднее течение и длинноволновое возмущение

В океанских условиях возвышение поверхности воды в волне зыби даже малой амплитуды существенно превышает толщину вязкого подслоя атмосферного пограничного слоя. В связи с этим перейдём вначале к системе криволинейных координат (s,γ), в которых одна из координатных линий совпадает с водной поверхностью, возмущённой длинной волной. Для гармонической волны с полем возвышений (4) в системе отсчёта, движущейся с фазовой скоростью длинной волны, криволинейные координаты не зависят от времени:

$$x = s - a\exp(-k\gamma)\sin(ks), \qquad y = \gamma + a\exp(-k\gamma)\cos(ks).$$

Тогда система уравнений гидродинамики в переменных завихренность—функция тока совпадает с (10а), (10б) при $x_t = y_t = 0$.

Решение уравнений (10а), (10б) может быть представлено в виде суммы усреднённых по волновым возмущениям функции тока и завихренности ψ_0 и χ_0, их длинноволновых возмущений $\psi^{(\mathrm{l})}$ и $\chi^{(\mathrm{l})}$, индуцированных волной зыби с возвышением (4), и коротковолновых возмущений $\psi^{(\mathrm{s})}$ и $\chi^{(\mathrm{s})}$, вызванных ветровыми волнами. Таким образом, в системе отсчёта, бегущей с фазовой скоростью волны,

$$\psi = \psi_0(\gamma) + \psi^{(\mathrm{l})}(\gamma,s) + \psi^{(\mathrm{s})}(\gamma,s,t), \qquad \chi = \chi_0(\gamma) + \chi^{(\mathrm{l})}(\gamma,s) + \chi^{(\mathrm{s})}(\gamma,s,t).$$

Хорошо известно, что волновые возмущения убывают при удалении от поверхности на расстояние порядка их длины волны. Будем рассматривать такие расстояния, при которых коротковолновые возмущения малы по сравнению с длинноволновыми.

Усредняя систему (10а), (10б) по коротковолновым возмущениям и линеаризуя полученные уравнения относительно длинноволновых возмущений, получим для среднего течения

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\gamma^2}(\nu\chi_0) + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\gamma^2}\Sigma_0(\gamma) = 0, \tag{11а}$$

$$\psi_{0\gamma\gamma} = \chi_0, \tag{11б}$$

а для длинноволнового возмущения —

$$\frac{\partial\chi^{(\mathrm{l})}}{\partial s}\frac{\partial\psi_0}{\partial\gamma} - \frac{\partial\chi_0}{\partial\gamma}\frac{\partial\psi^{(\mathrm{l})}}{\partial s} - \left[\frac{\partial^2}{\partial\gamma^2} + \frac{\partial^2}{\partial s^2}\right]\nu\chi^{(\mathrm{l})} = \frac{\partial^2[\Sigma_1(\gamma,s) - 2y_{1\gamma}\Sigma_0(\gamma)]}{\partial\gamma^2} - 2\nu_{\gamma\gamma}\psi^{(\mathrm{l})}_{ss} - I_\gamma\left(\nu_\gamma\psi_{0\gamma}\right), \tag{12а}$$

$$\frac{\partial^2\psi^{(\mathrm{l})}}{\partial\gamma^2}+\frac{\partial^2\psi^{(\mathrm{l})}}{\partial s^2}=\chi^{(\mathrm{l})}+2y_{1\gamma}\chi_0. \tag{12б}$$

Здесь $\Sigma_0(\gamma)$ и $\Sigma_1(\gamma,s)$ — среднее значение и длинноволновое возмущение потока импульса ветровых волн:

$$\Sigma_0(\gamma)+\Sigma_1(\gamma,s)\approx-\frac{\partial^2}{\partial\gamma^2}\,\overline{\psi_\gamma^{(\mathrm{s})}\psi_s^{(s)}}, \tag{13}$$

где черта сверху означает усреднение по коротковолновым возмущениям. Поскольку $\psi^{(\mathrm{s})}$ убывает при удалении от поверхности раздела вода—воздух, то из (13) очевидно следует, что волновой поток импульса Σ также убывает. При этом, как показано в [22] для ветровых волн, которые по определению имеют фазовые скорости меньше $20u_*$, перепад волнового потока импульса сосредоточен вблизи поверхности в области перехода от вязкого подслоя к логарифмическому пограничному слою, т. е. масштаб δ изменения величин Σ_0, Σ_1 составляет $20\div30$ вязких длин ν_{a}/u_*.

При удалении от поверхности среднее поле завихренности удовлетворяет граничному условию

$$\nu\chi_0\big|_{\gamma\to\infty}=u_*^2, \tag{14}$$

а длинноволновые возмущения убывают:

$$\{\psi^{(\mathrm{l})},\chi^{(\mathrm{l})}\}\big|_{\gamma\to\infty}\to0. \tag{15}$$

Если масштаб волнового пограничного слоя длинной волны мал по сравнению с её длиной и фазовая скорость велика по сравнению со скоростью потока внутри пограничного слоя, то (12а), (12б) сводятся к одному уравнению для длинноволнового возмущения турбулентного напряжения, которое с использованием градиентной аппроксимации турбулентных напряжений может быть представлено в виде

$$T^{(\mathrm{l})}=\nu\chi^{(\mathrm{l})}, \tag{16}$$

$$\frac{\partial^2T^{(\mathrm{l})}}{\partial\gamma^2}+ikc\chi^{(\mathrm{l})}=-\frac{\partial^2}{\partial\gamma^2}\,[\Sigma_1(\gamma)-2y_{1\gamma}\Sigma_0(\gamma)], \tag{17}$$

$$\frac{\partial^2\psi^{(\mathrm{l})}}{\partial\gamma^2}=\chi^{(\mathrm{l})}.$$

Характерный вертикальный масштаб длинноволнового возмущения турбулентного напряжения $T^{(\mathrm{l})}$ равен $L_T\approx\kappa u_*/(ck)\ll1/k$, поскольку $u_*/c\ll1$, где $\kappa=0{,}4$ — постоянная Кармана.

Уравнение (17) может быть решено методом сращиваемых асимптотических разложений, если масштаб L_T много больше, чем масштаб $\delta=(20\div30)\,\nu_{\mathrm{a}}/u_*$ источников в правой части (12а), (12б). Это условие можно переписать в виде $ck\ll u_*^2/(30\nu_{\mathrm{a}})$. Пороговая скорость трения ветра, при которой наблюдается генерация волн, равна $u_*\approx5$ см/с [21], вязкость воздуха $\nu_{\mathrm{a}}=0{,}15$ см^2/с, тогда частота волн зыби должна быть много меньше 6 с$^{-1}$, что практически всегда выполняется.

При выполнении условий $\delta\ll\gamma\ll k^{-1}$ слагаемые в правой части (12а), (12б) пренебрежимо малы, а коэффициент вихревой вязкости в этой области $\nu=\kappa u_*\gamma$. Тогда из (17) можно получить уравнение для длинноволнового возмущения скорости ветра $U^{(\mathrm{l})}$, которое связано с $T^{(\mathrm{l})}$ соотношением $T^{(\mathrm{l})}=\kappa u_*\gamma\partial U^{(\mathrm{l})}/\partial\gamma$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\gamma}\,\gamma\,\frac{\mathrm{d}U^{(\mathrm{l})}}{\mathrm{d}\gamma}+\frac{ikc}{\kappa u_*}\,U^{(\mathrm{l})}=0, \tag{18}$$

$$U^{(\mathrm{l})}\big|_{\gamma\to\infty}=0. \tag{19}$$

Решение уравнения (18), убывающее с расстоянием от поверхности, можно выразить с использованием модифицированных функций Бесселя:

$$U^{(\mathrm{l})} = BK_0\Big(2\exp(i\pi/4)\,\sqrt{\gamma^+\,ck\nu_{\mathrm{a}}/u_*^2}\Big)\,, \tag{20}$$

где $\gamma^+ = \gamma u_*/\nu_{\mathrm{a}}$.

Модифицированная функция Бесселя при $\gamma^+\,ck\nu_{\mathrm{a}}/u_*^2 \ll 1$ имеет логарифмическую асимптотику:

$$U^{(\mathrm{l})} = \frac{T_1}{\kappa u_*}\left[\ln\left(\frac{3{,}15kc\nu_{\mathrm{a}}}{u_*^2}\,\gamma^+\right) + \frac{\pi i}{2}\right]. \tag{21}$$

Из (21) следует, что длинноволновые возмущения тангенциального напряжения при этом стремятся к постоянному значению $T^{(\mathrm{l})} = T_1$. Неизвестная константа T_1 может быть найдена из условий сращивания полученного «внешнего» решения, справедливого на большом расстоянии от поверхности, с «внутренним» решением, справедливым вблизи поверхности.

3.2. Коротковолновое возмущение

Для простоты здесь будут рассмотрены только волны с волновыми векторами, направленными вдоль скорости ветра. В действительности ветровые волны могут иметь произвольные направления волновых векторов, поэтому представленная здесь модель может рассматриваться только как оценочная, имеющая целью продемонстрировать влияние нелинейных эффектов при взаимодействии волн с ветром на трансформацию спектра коротких волн.

3.2.1. Коротковолновое возмущение в «длинноволновых» координатах (s_1, γ)

Уравнения для коротких волн на фоне поля длинных волн в нулевом порядке по малому параметру задачи μ можно представить в виде [9]

$$\frac{\partial(XI)}{\partial t} + \frac{\partial X}{\partial s_1}\,\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma} - \frac{\partial X}{\partial\gamma}\,\frac{\partial\Phi}{\partial s_1} = I\,\Delta(\nu X) - 2I\nu_{\gamma\gamma}\frac{\partial^2\Phi}{\partial s_1^2}\,,$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\gamma^2} + \frac{\partial^2}{\partial s_1^2}\right)\Phi = IX. \tag{22}$$

Система (22) записана в координатах (s_1, γ), где $s_1 = s + ct$,

$$\Phi = \psi + cI\gamma = \int\limits_0^{\gamma} U_0(\gamma_1)\,\mathrm{d}\gamma_1 + \mathrm{Re}\Big[(\psi^{(\mathrm{l})}(\gamma) - 2kac\gamma)\exp[ik\,(s_1 - ct)]\Big] + \psi^{(\mathrm{s})}(s_1, \gamma, t) =$$

$$= \Phi_0(\gamma, \Sigma) + \psi^{(\mathrm{s})}(s_1, \gamma, t). \tag{23}$$

Функции Φ и X представляют собой приближённые выражения для функции тока и завихренности в координатах (s_1, γ), $\Sigma = ik\,(s_1 - ct)$ — «медленная» по отношению к коротковолновым возмущениям координата вдоль поверхности, возмущённой длинной волной.

Представим случайное поле возвышений поверхности в виде интеграла Фурье—Стильтьеса

$$\xi(s_1, \gamma, t) = \int \mathrm{d}A(K)\exp[i\,(Ks - \Omega(K)t)].$$

Предположим для простоты, что поле коротких волн имеет случайные фазы, тогда имеет место равенство

$$\mathrm{d}A(K)\,\mathrm{d}A(K_1) = F_0(K)\delta(K-K_1)\,\mathrm{d}K\,\mathrm{d}K_1, \tag{24}$$

где $F_0(K)$ — равновесный спектр возвышений поверхности воды.

Если ширина спектра волн достаточно велика, то задачу можно решать в квазилинейном приближении, аналогичном используемому в теории взаимодействия волн и частиц в плазме [23]. В рамках квазилинейного приближения уравнения для отдельных гармоник линейны, и нелинейность влияет только на средние поля скорости, завихренности и т. д.

3.2.2. Коротковолновое возмущение в «коротковолновых» координатах (ξ, η), «приспособленных» к случайному полю коротких волн

В квазилинейном приближении волновое поле следует искать в виде суммы независимых гармоник. Смещение поверхности воды, вызванное полем ветровых волн, может быть велико по сравнению с толщиной вязкого подслоя в воздухе. Чтобы избежать этой геометрической нелинейности, перейдём к криволинейным координатам, в которых координатная линия совпадает с водной поверхностью в первом порядке по амплитуде возвышения поверхности (аналогично [24]). Будем использовать следующее преобразование координат:

$$s_1 = \xi + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} i\exp[iK\,(\xi - \Omega(K)t/K) - K\eta + i\varphi_K]\,\mathrm{d}A,$$

$$\gamma = \eta + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp[iK\,(\xi - \Omega(K)t/K) - K\eta + i\varphi_K]\,\mathrm{d}A, \tag{25}$$

где $\Omega(K)/K$ — фазовая скорость K-й гармоники, φ_K — её фаза, которая предполагается случайной.

Аналогично [24] будем представлять выражение для функции тока в виде

$$\Phi = \Phi_0(\eta, \Sigma) + \varphi^{(\mathrm{s})}(\xi, \eta, t). \tag{26}$$

В (23) и (26) входит одна и та же функция Φ_0, описывающая среднее течение и его длинноволновое возмущение. Однако в (26) это функция η, а не γ. При этом коротковолновое возмущение функции тока $\varphi^{(\mathrm{s})}(\xi, \gamma, t)$, входящее в (26), отличается от слагаемого $\psi^{(\mathrm{s})}(s_1, \gamma, t)$, входящего в (23), поскольку оно описывает отклонение линий тока от координатных линий (25).

Функция тока Φ и завихренность X удовлетворяют системе уравнений, которая может быть получена из системы (22) путём преобразования координат (25):

$$J^3 I\left[\frac{\partial\chi}{\partial t} - \frac{\partial\chi}{\partial\xi}\,\frac{s_{1t}s_{1\xi} + \gamma_{1t}\gamma_{1\xi}}{J} - \frac{\partial\chi}{\partial\eta}\,\frac{s_{1t}s_{1\eta} + \gamma_{1t}\gamma_{1\eta}}{J}\right] +$$

$$+ J^2\left(\frac{\partial X}{\partial\xi}\,\frac{\partial\Phi}{\partial\eta} - \frac{\partial X}{\partial\eta}\,\frac{\partial\Phi}{\partial\xi} - \left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right)(\nu X)\right) =$$

$$= -2\nu_{\eta\eta}\Phi_{\xi\xi}J - J_\eta\left[(\nu_\eta\Phi_\eta)_\eta + \nu_\eta\Phi_{\xi\xi}\right] - J_\xi\left(2\nu_\eta\Phi_{\xi\eta} - \Phi_\xi\nu_{\eta\eta}\right) + \nu_\eta\Phi_\eta\,\frac{J_\xi^2 + J_\eta^2}{J}, \tag{27а}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right)\Phi = IJX, \tag{27б}$$

где $J = (s_{1\xi})^2 + (s_{1\eta})^2$. Граничные условия для системы (27) имеют вид [9]

$$\Phi\big|_{\eta=0} = 0 \tag{27в}$$

— условие непротекания на поверхности воды,

$$\Phi_\eta|_{\eta=0} = (1+2y_\gamma)\int 2\Omega\,\mathrm{d}A \tag{27г}$$

— условие прилипания на поверхности воды,

$$\nu X\big|_{\eta\to\infty} = u_*^2 + \mathrm{Re}[T_1\exp(i\Sigma)] \tag{27д}$$

— условие сращивания поля завихренности с внешним решением и убывания коротковолновых возмущений.

В квазилинейном приближении волновые возмущения

$$\begin{Bmatrix}\varphi^{(\mathrm{s})}\\ \chi^{(\mathrm{s})}\end{Bmatrix} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp[iK\,(\xi-\Omega(K)t/K)]\begin{Bmatrix}\Phi_2(\eta)\\ X_2(\eta)\end{Bmatrix}\mathrm{d}A(K)$$

удовлетворяют системе линейных уравнений, следующих из (27а), (27б):

$$\begin{gathered}(1+2y_{1\gamma})\,[(\Phi_{0\eta}-\Omega/K)\,X_2-\Phi_2X_{0\eta}]\,iK = \\ = (1+2y_{1\gamma})\,(\mathrm{d}^2/\mathrm{d}\eta^2-K^2)\,(\nu X_2)+2K^2\Phi_2\nu_{\eta\eta}-2K\exp(-K\eta)\,[\nu_\eta\,(\Phi_{0\eta}-\Omega/K)]_\eta,\\ \Phi_{2\eta\eta}-K^2\Phi_2 = [X_2-2K\exp(-K\eta)X_0]\,(1+2y_{1\gamma}),\end{gathered} \tag{28}$$

с граничными условиями на поверхности, следующими из (27в), (27г):

$$\Phi_2\big|_{\eta=0} = 0, \qquad \Phi_{2\eta}\big|_{\eta=0} = (1+2y_\gamma)\,2\Omega(K),$$

и условием убывания возмущений на бесконечности.

Средние величины $\Phi_{0\eta}$ и X_0, в свою очередь, удовлетворяют системе, которую можно получить усреднением (27а), (27б) по координате ξ:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\eta^2}(\nu X_0) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\eta^2}[\tau_{\mathrm{wave}}(\eta)], \tag{29а}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2\Phi_0}{\mathrm{d}\eta^2} = \Bigg[X_0\left(1+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F_0(K)K^2\exp(-2K\eta)\,\mathrm{d}K\right)+\\ +2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{Re}(X_2F_0(K)K^2\exp(-K\eta))\,\mathrm{d}K\Bigg](1+2y_{1\gamma}),\end{aligned} \tag{29б}$$

где $F_0(K)$ — спектр возвышений поверхности воды в (24), а

$$\begin{aligned}\tau_{\mathrm{wave}} = \int\limits_0^\eta K\,\mathrm{d}\tilde\eta\Bigg[-\frac{1}{2}\,\mathrm{Im}[\Phi_2^*X_2F_0(K)]\,\mathrm{d}K+\\ +\int\limits_{-\infty}^{+\infty}[\exp(-K\tilde\eta)\nu_{\tilde\eta}\,\mathrm{Re}(\Phi_{2\tilde\eta}-K\Phi_2)+2\exp(-2K\tilde\eta)\nu_{\tilde\eta}\Phi_{0\tilde\eta}]F_0(K)K^2\,\mathrm{d}K\Bigg]\end{aligned}$$

имеет смысл усреднённого по горизонтальной координате ξ потока импульса от волн к ветру.

Граничные условия для системы (29а), (29б) являются следствием (27г), (27д):

$$\Phi_{0\eta}\big|_{\eta=0} = 0, \tag{29в}$$

$$\nu X_{0\eta}\big|_{\eta\to\infty} = u_*^2 + \mathrm{Re}[T_1 \exp(i\Sigma)]. \tag{29г}$$

Интегрируя систему (29а), (29б) с граничными условиями (29г), (29д), получаем

$$\frac{\mathrm{d}\Phi_0}{\mathrm{d}\eta} = \int\limits_0^{\eta} \frac{u_*^2 + T_1}{\nu}\,\mathrm{d}\eta_1 + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Delta U(K,\eta)\,\mathrm{d}K, \tag{30}$$

где

$$\Delta U(K,\eta) = \left[\int\limits_0^{\eta} \frac{\tau_{\mathrm{wave}}(\eta_1)}{\nu}\,\mathrm{d}\eta_1 + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_0(K)K^2\left(\exp(-2K\eta)X_0 - \exp(-K\eta)\,\mathrm{Re}\,X_2\right)\mathrm{d}K\right](1+2y_{1\gamma})$$

— добавка к профилю средней скорости и её длинноволнового возмущения, обусловленная передачей импульса от ветровой волны с волновым числом K к ветровому потоку.

Принимая во внимание определение функции Φ (23), легко получить связь между $U^{(1)} = \mathrm{d}\varphi^{(1)}/\mathrm{d}\eta$ (см. формулу (21)) и $\mathrm{d}\Phi_0/\mathrm{d}\eta$:

$$\frac{\mathrm{d}\Phi_0}{\mathrm{d}\eta} = U^{(1)} - 2\,\mathrm{Re}[kac\exp(i\Sigma)] + U_0(\eta).$$

Известно, что при удалении от поверхности коэффициент вихревой вязкости ν имеет линейную асимптотику: $\nu = 0{,}4u_*\eta$ [17] (в частности, это очевидно следует из формулы (7)), а при $\eta \to 0$ имеем $\nu \to \nu_{\mathrm{a}} = \mathrm{const}$. С учётом этого легко видеть, что первое слагаемое в (30) имеет логарифмическую асимптотику, при этом второе слагаемое стремится к некоторой постоянной:

$$U_0(\eta) + U^{(1)} = \frac{u_*}{\kappa}\left[1 + \mathrm{Re}\left(\frac{T_1}{u_*^2}\exp(i\Sigma)\right)\right]\ln\frac{\eta}{\eta_0} + 2ck\,\mathrm{Re}[a\exp(i\Sigma)] + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Delta U(K,\eta)\big|_{\eta\to\infty}\,\mathrm{d}K,$$

где η_0 — параметр шероховатости. Для гидродинамически гладкого обтекания $\eta_0 = 0{,}118\,\nu_{\mathrm{a}}/u_*$. Если коэффициент модуляции турбулентного напряжения велик: $m_T = \left|T_1/(u_*^2 ka)\right| \gg 1$, то трансформация коротких волн определяется главным образом модуляцией этой величины, и можно пренебречь слагаемыми порядка $y_{1\gamma}$ в системе (28), (29). Тогда, если ввести обозначение $\varepsilon = \mathrm{Re}[T_1\exp(i\Sigma)]/u_*^2$, то

$$\nu X_0\big|_{\eta\to\infty} = u_*^2\,(1+\varepsilon)\big|_{\varepsilon=\mathrm{Re}[kam_T\exp(i\Sigma)]},$$

и выражения для U_0 и $U^{(1)}$ можно записать следующим образом:

$$U_0(\eta) = \frac{u_*}{\kappa}\ln\frac{\eta}{\eta_0} + \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Delta U(K,\eta)\big|_{\eta\to\infty}\,\mathrm{d}K\right)\Bigg|_{\varepsilon=0},$$

$$U^{(1)} = \left[\frac{u_*}{\kappa}\ln\frac{\eta}{\eta_0} + \left(\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Delta U(K,\eta)\big|_{\eta\to\infty}\,\mathrm{d}K\right)\Bigg|_{\varepsilon=0}\right]\mathrm{Re}[kam_T\exp(i\Sigma)]. \tag{31}$$

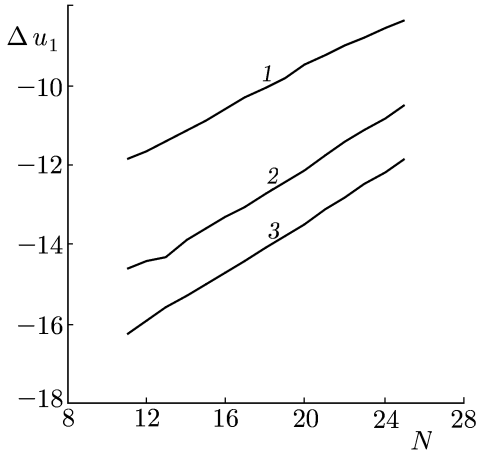

Рис. 1. Зависимость параметра Δu_1 от «возраста» ветрового волнения при скорости трения ветра $u_* = 10$, 20 и 30 см/с (кривые *1–3* соответственно)

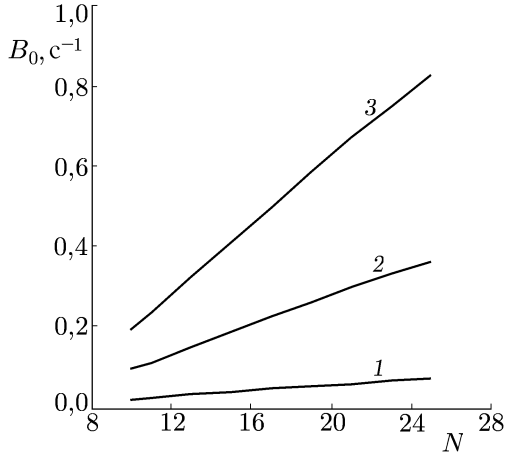

Рис. 2. Зависимость инкремента ветровых волн с длиной 2,3 см от «возраста» ветрового волнения при скорости трения ветра $u_* = 10$, 20 и 30 см/с (кривые *1–3* соответственно)

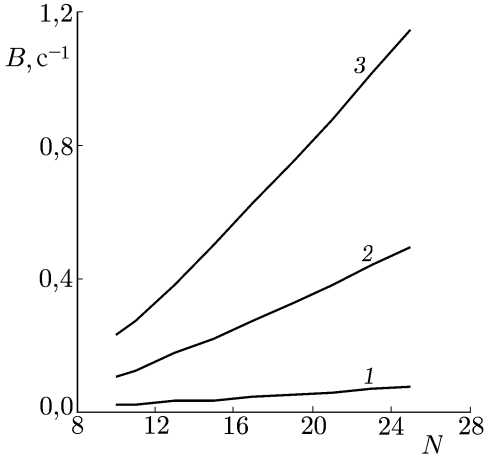

Рис. 3. Зависимость параметра $B = (\partial B_0/\partial u_*)u_*$ для волны с длиной 2,3 см от «возраста» ветрового волнения при скорости трения ветра $u_* = 10$, 20 и 30 см/с (кривые *1–3* соответственно)

Сравнивая (31) и (21), легко получить

$$T_1 = \frac{2\kappa c u_* k a}{\ln\Bigl(\dfrac{3{,}15 k c \nu_{\rm a}}{\kappa u_*^2}\,\eta_0^+\Bigr) - \kappa\,\Delta u_1 + \pi i/2}\,, \qquad (32)$$

где

$$\Delta u_1 = \frac{1}{u_*}\,\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Delta U(K,\eta)\big|_{\eta\to\infty}\,{\rm d}K, \qquad \eta_{\rm a}^+ = \eta_0 u_*/\nu_{\rm a}.$$

Первое слагаемое в знаменателе (32) отрицательно, вследствие чего в линейном приближении (при $\Delta u_1 < 0$) по амплитуде ветровых волн фаза коэффициента модуляции турбулентного напряжения близка к $-\pi$. Второе слагаемое положительно, поскольку добавка к среднему профилю скорости, возникающая за счёт нелинейного взаимодействия с полем ветровых волн, отрицательна: $\Delta u_1 < 0$ (см. [21]). Это означает, что фаза T_1 может измениться, если добавка $\Delta u_1 < 0$ достаточно велика по модулю.

Чтобы найти Δu_1, численно решалась самосогласованная квазилинейная система уравнений, в которую входят уравнения для гармоник и уравнения для среднего течения. Уравнения для каждой гармоники решались численно сеточным методом, основанным на методе исключения Гаусса, модифицированном для ленточной матрицы.

При вычислении модулированного спектра коротких волн в рамках релаксационной модели по формуле (5) требуется знать величины $\beta_{\rm r}$ и $B = (\delta B_0/\delta u_*)\,u_*$, входящие в (5), и Δu_1, которые в рамках квазилинейной модели определяются скоростью ветра и спектром ветровых волн. При расчётах использовался спектр «JONSWAP» [25]:

$$F_0(K) = \frac{1}{2}\,\alpha_{\rm p} K^{-3} \exp\left[-\frac{5}{4}\left(\frac{K_{\rm p}}{K}\right)^2\right]\gamma^r, \qquad r = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\sqrt{K} - \sqrt{K_{\rm p}}\right)^2 \Big/ \left(\sigma\sqrt{K_{\rm p}}\right)^2\right], \qquad (33)$$

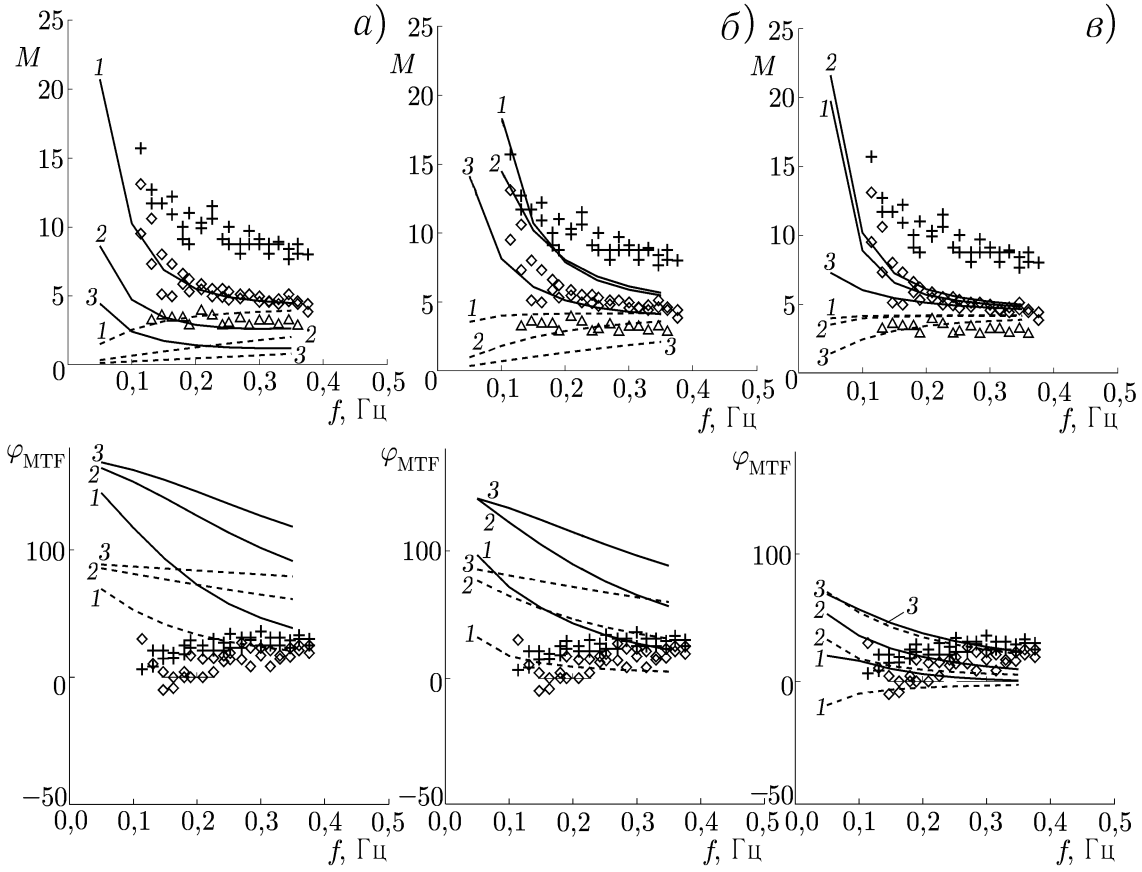

Рис. 4. Зависимости величины M и фазы φ_{MTF} гидродинамической МПФ от частоты длинной волны, рассчитанные в рамках линейной (*а*) и квазилинейной (*б*, *в*) теории. Длина короткой волны 2,3 см. Сплошные линии соответствуют расчётам с учётом модуляции инкремента, пунктирные линии — расчётам без учёта модуляции инкремента. Кривые *1* соответствуют скорости трения ветра 16 см/с, кривые *2* — 30 см/с, кривые *3* — 50 см/с. Экспериментальные точки взяты из [26]. Параметр разгона $N = 25$ (*б*), $N = 10$ (*в*)

где $\alpha_{\mathrm{p}} = 0{,}57\,(C_{\mathrm{p}}/u_*)^{-3/2}$, $\gamma = 3{,}3$, $\sigma = 0{,}1$, $K_{\mathrm{p}} = g/C_p^2$, $C_{\mathrm{p}} = Nu_*$ — фазовая скорость энергонесущей компоненты, N — так называемый параметр «возраста» волнения, g — ускорение свободного падения; известно, что N растёт с увеличением разгона. Хорошо известно [25], что с ростом N средний уклон в спектре ветрового волнения падает, таким образом, волны становятся «более линейными». Зависимости параметров задачи Δu_1, $B_0 = \beta_{\mathrm{r}}/2$ и $B = (\delta B_0/\delta u_*)\,u_*$ от параметра N при нескольких значениях скорости трения ветра представлены на рис. 1–3. Из рис. 1 видно, что при малых N («молодое» волнение) получаются большие по абсолютной величине значения отрицательной добавки к среднему профилю скорости, вызванной нелинейным взаимодействием между ветровыми волнами и ветровым течением. Это, очевидно, обусловлено большими средними амплитудами поля ветровых волн при меньших N. Уменьшение ветрового инкремента короткой поверхностной волны B_0 при уменьшении N (см. рис. 2) обусловлено уменьшением средней скорости ветра, описываемой величиной Δu_1.

Результаты расчёта гидродинамической МПФ представлены на рис. 4 для условий, соответствующих измерениям [26]. Длина брэгговской волны составляла 2,3 см, что соответствует X-полосе радиоизлучения. Теоретические кривые отличаются параметром «возраста» ветрового волнения в спектре «JONSWAP», характеризующего степень нелинейности поля ветровых волн.

На рис. 4*а* представлены результаты расчёта гидродинамической МПФ для ветровых волн бесконечно малой амплитуды. Сравнение рис. 4*б*, *в* и рис. 4*а* показывает, что как линейная, так и квазилинейная теории дают значения модуля МПФ, удовлетворительно соответствующие экспериментальным данным, приведённым в [26]. Однако значения фазы, рассчитанные в рамках линейного приближения, противоречат экспериментальным данным (см. рис. 4*а*). При этом квазилинейное приближение даёт значения фазы гидродинамической МПФ, которые значительно лучше согласуются с экспериментальными данными (рис. 4*б*, *в*).

На тех же рисунках приведены значения гидродинамической МПФ, рассчитанные без учёта эффекта модуляции инкремента брэгговской волны (пунктирные линии). Видно, что такие расчёты очень плохо согласуются с измеренными значениями амплитуды и фазы МПФ.

4. МОДУЛЯЦИЯ КОРОТКИХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН ПРИ НАЛИЧИИ ИНТЕНСИВНЫХ ВНУТРЕННИХ ВОЛН

В настоящем разделе представлена модель модуляции волн сантиметрового диапазона в поле интенсивных внутренних волн. Параметры внутренних волн были взяты из эксперимента «COPE» [11], в ходе которого наблюдались сверхинтенсивные внутренние волны, соответствующие большим контрастам рассеянного сигнала радиолокатора. Последнее было обусловлено, по-видимому, большим гидродинамическим контрастом в поле резонансных поверхностных волн сантиметрового диапазона. Более подробно результаты этого раздела представлены в [10].

Для описания поля течений, создаваемых внутренними волнами на поверхности, была использована модель Гарднера, предложенная в [27, 28].

4.1. Модель интенсивных внутренних волн

В ходе эксперимента «COPE» изучались течения, создаваемые мощными внутренними приливами [11]. Наблюдаемая картина представляла собой распад приливной волны в шельфовой зоне на последовательность импульсов, распространяющихся в направлении берега и взаимодействующих между собой. По многим признакам наблюдаемый процесс являлся сильно нелинейным: амплитуды импульсов в несколько раз превышали толщину верхнего слоя жидкости, а их скорости значительно (в несколько раз) превышали скорость линейных длинных внутренних волн. Как показывает проведённое недавно сравнение [27, 28], эволюцию больших групп указанных импульсов можно в целом адекватно моделировать ансамблями взаимодействующих солитонов в рамках комбинированного уравнения Кортевега—де Вриза с квадратичной и кубичной нелинейностью (модели Гарднера):

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} + c\,\frac{\partial\eta}{\partial x} + \alpha\eta\,\frac{\partial\eta}{\partial x} + \alpha_1\eta^2\,\frac{\partial\eta}{\partial x} + \beta\,\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3} = 0. \tag{34}$$

При использовании простейшей двухслойной модели стратификации коэффициенты уравнения (34) принимают следующие значения: $c^2 = gh_1\,\Delta\rho/\rho$, $\alpha = 3c/(2h_1)$, $\beta = ch_1h_2/6$, $\alpha_1 = -3c/(8h_1^2)$ (средние значения величин h_1, h_2, $\Delta\rho/\rho$ в областях проведения эксперимента составляли $h_1 = 7$ м, $h_2 = 143$ м, $\Delta\rho/\rho = 3\cdot10^{-3}$). Уравнение (34), обычно используемое для описания эволюции слабонелинейных длинных внутренних волн, получается из полной системы уравнений гидродинамики в предположении относительно малого отклонения границы раздела жидкостей $\eta(x,t)$ по сравнению с толщинами отдельных слоёв (h_1 и h_2), а также при условии, что характерные масштабы внутренних волн значительно превышают общую глубину жидкости. Кроме того, обычно квадратичный и кубичный члены в уравнении (34) удерживаются одновременно при аномально малых

значениях квадратичного слагаемого, т. е. при $h_2 \approx h_1$. В связи с этим важно подчеркнуть, что именно учёт обоих нелинейных членов и при условии $h_2 \gg h_1$ (т. е. при условии, неправомерном с точки зрения приближения слабой нелинейности) позволяет получить весьма хорошее соответствие между амплитудами и скоростями наиболее интенсивных наблюдавшихся импульсов и солитонами уравнения (34). Более того, как показано в [27], и динамика взаимодействия солитонов оказывается близкой к процессам столкновения импульсов, наблюдавшимся в эксперименте.

Описание поведения ансамблей из N взаимодействующих уединённых волн содержится в так называемых N-солитонных решениях вполне интегрируемых эволюционных уравнений, к которым относится и уравнение (34). Однако извлечение детальной информации о процессе взаимодействия, включающей возможность определения параметров солитонов (координат, скоростей, амплитуд) в произвольный момент времени непосредственно из известных формул для N-солитонных решений затруднено ввиду их громоздкости и сложности. Существенно более простое и наглядное описание взаимодействия солитонов может быть получено с помощью приближённого подхода, известного своей аналогией с описанием столкновения классических (точечных) частиц [28, 29]. Как показано в [28] именно на примере уравнения (34), уже в первом порядке приближённый подход может быть усовершенствован настолько, что даёт правильную общую структуру точного N-солитонного решения в виде строгой суперпозиции квазисолитонов с относительно медленно меняющимися параметрами. При этом решения для параметров квазисолитонов оказываются определяющими и последующими приближениями лишь уточняются, оставаясь качественно справедливыми при любых условиях задачи.

Односолитонное решение уравнения (34) имеет вид

$$\eta_{\mathrm{s}} = \frac{\alpha}{2\alpha_1}\sqrt{\frac{V}{V_{\text{кр}}}}\left[\operatorname{th}\frac{x-(c+V)\,t+\Delta}{2\sqrt{6\alpha_1\beta/\alpha^2}} - \operatorname{th}\frac{x-(c+V)\,t-\Delta}{2\sqrt{6\alpha_1\beta/\alpha^2}}\right], \tag{35}$$

где $V_{\text{кр}} = \alpha^2/(6\alpha_1)$, $\Delta\sqrt{V/\beta} = \operatorname{Arch}(1/\sqrt{1-V/V_{\text{кр}}})$. Амплитуда солитона (35)

$$(\eta_{\mathrm{s}})_{\max} = \frac{\alpha}{\alpha_1}\sqrt{\frac{V}{V_{\text{кр}}}}\operatorname{th}\Big(\Delta/\sqrt{6\alpha_1\beta/\alpha^2}\Big)$$

меняется от нуля (при этом его скорость равна c) до максимального значения, равного α/α_1, когда его скорость достигает величины $c+V_{\text{кр}}$. Отметим, что именно солитонам, близким к предельным, и отвечают наиболее интенсивные наблюдавшиеся в эксперименте «COPE» импульсы внутренних волн.

Принципиальной для задачи о взаимодействии импульсов является возможность представления солитона (2) как составной структуры, сформированной из более элементарных образований — кинков. Такие решения существуют в рамках (34) при $V = V_{\text{кр}}$ и имеют вид

$$\eta_{\mathrm{K}}^{+} = \frac{\alpha}{2\alpha_1}\left(1+\operatorname{th}\left[\frac{x-(c+V_{\text{кр}})\,t}{2\sqrt{6\alpha_1\beta/\alpha^2}}\right]\right), \qquad \eta_{\mathrm{K}}^{-} = \frac{\alpha}{2\alpha_1}\left(1-\operatorname{th}\left[\frac{x-(c+V_{\text{кр}})t}{2\sqrt{6\alpha_1\beta/\alpha^2}}\right]\right). \tag{36}$$

Сравнение выражений (36) и (35) при $V \approx V_{\text{кр}}$, когда солитон имеет вид плато большой протяжённости ($\Delta \gg 1$), ограниченного резкими перепадами поля, позволяет записать решение (35) следующим образом:

$$\eta_{\mathrm{s}} = \eta_{\mathrm{K}}^{+} + \eta_{\mathrm{K}}^{-} - \frac{\alpha}{2\alpha_1} \approx \frac{\alpha}{2\alpha_1}\left[\operatorname{th}\frac{x-(c+V_{\text{кр}})\,t+\Delta}{2\sqrt{6\alpha_1\beta/\alpha^2}} - \operatorname{th}\frac{x-(c+V_{\text{кр}})\,t-\Delta}{2\sqrt{6\alpha_1\beta/\alpha^2}}\right]. \tag{37}$$

Представление (37) соответствует составному решению, получаемому методом сращиваемых асимптотических разложений [28]: общее решение состоит из суммы решений, соответствующих областям с быстрым изменением поля, за вычетом их общей асимптотики, являющейся решением во внешней области (в данном случае это константа $\alpha/(2\alpha_1)$). Следующее из процедуры сращивания представление (37) не определяет всех параметров солитона (в частности, величину Δ), но правильно передаёт общую структуру поля (суперпозиция кинков). Это позволяет искать решение более общей задачи о взаимодействии N солитонов в нулевом приближении как суперпозицию $2N$ кинков (36) чередующейся полярности:

$$\eta_N^0(x,t) = \frac{\alpha}{2\alpha_1}\sum_{i=1}^{2N}(-1)^{i+1}\,\mathrm{th}\,\frac{x-(c+V_{\text{кр}})\,t-S_i(t)}{2\sqrt{6\alpha_1\beta/\alpha^2}}\,, \tag{38}$$

здесь $S_i(t)$ — медленно меняющаяся компонента координаты i-го кинка, такая, что $\mathrm{d}S_i/\mathrm{d}t \ll V_{\text{кр}}$ (малыми параметрами ε_i задачи являются отношения $(V_{\text{кр}}-V_i)/V_{\text{кр}}$, где V_i — скорости невозмущённых стационарных солитонов; определённые таким образом величины ε_i, очевидно, меньше единицы для всех допустимых значений V_i).

Алгоритм построения решений в следующих приближениях состоит в нахождении локальных поправок, отыскиваемых независимо вблизи каждого из кинков, и их последующем сращивании. Кроме того, в каждом n-м приближении процедура сращивания локальных поправок $\eta_i^{(n)}$, определяемых вблизи данного i-го кинка, должна учитывать экспоненциально убывающие от центров соседних кинков асимптотики соответствующего порядка.

Следуя этому алгоритму, получаем, что общее N-солитонное решение с учётом поправок первого приближения приобретает вид

$$\eta_N^{(0)}+\eta_N^{(1)} = \frac{\alpha}{2\alpha_1}\sum_{i=1}^{2N}(-1)^{i+1}\left(1-\frac{\mathrm{d}S_i}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{th}\,\frac{x-(c+V_{\text{кр}})\,t-S_i(t)}{2\sqrt{6\alpha_1\beta/\alpha^2}}\,,$$

где координаты кинков S_i находятся из решения системы уравнений

$$\frac{\mathrm{d}S_i}{\mathrm{d}t} = -8\,\mathrm{ch}(S_{i+1}-S_i).$$

Удовлетворительное соответствие теоретических расчётов экспериментальным данным позволяет использовать теоретическую модель для определения поля скорости на поверхности жидкости.

Приведём приближённую расчётную формулу для группы из 9-ти импульсов — солитонов внутренних волн, соответствующих наблюдениям «COPE», для указанных выше параметров в фиксированный момент времени t_0:

$$\begin{aligned}\eta_9^0(x,t_0) = 14{,}03\,\big\{&\mathrm{th}\big[(25{,}7)^{-1}(x+38{,}5)\big]-\mathrm{th}\big[(25{,}7)^{-1}(x-38{,}5)\big]+\\
&+\mathrm{th}\big[(25{,}7)^{-1}(x-395{,}6)\big]-\mathrm{th}\big[(25{,}7)^{-1}(x-432{,}9)\big]+\\
&+\mathrm{th}\big[(25{,}7)^{-1}(x-946{,}7)\big]-\mathrm{th}\big[(25{,}7)^{-1}(x-1\,023{,}8)\big]+\\
&+\mathrm{th}\big[(25{,}7)^{-1}(x-1\,286{,}1)\big]-\mathrm{th}\big[(25{,}7)^{-1}(x-1\,339{,}5)\big]+\\
&+\mathrm{th}\big[(25{,}7)^{-1}(x-1\,871{,}28)\big]-\mathrm{th}\big[(25{,}7)^{-1}(x-1\,914{,}5)\big]+\\
&+\mathrm{th}\big[(25{,}7)^{-1}(x-2\,442{,}4)\big]-\mathrm{th}\big[(25{,}7)^{-1}(x-2\,499{,}6)\big]+\\
&+\mathrm{th}\big[(25{,}7)^{-1}(x-2\,977)\big]-\mathrm{th}\big[(25{,}7)^{-1}(x-3\,070{,}8)\big]+\\
&+\mathrm{th}\big[(25{,}7)^{-1}(x-3\,669{,}9)\big]-\mathrm{th}\big[(25{,}7)^{-1}(x-3\,763{,}1)\big]+\\
&+\mathrm{th}\big[(25{,}7)^{-1}(x-4\,246{,}9)\big]-\mathrm{th}\big[(25{,}7)^{-1}(x-4\,288{,}3)\big]\big\}\,,\end{aligned} \tag{39}$$

где смещение поверхности и координаты выражены в метрах. В дальнейшем мы будем использовать эту формулу для расчётов поля скорости на поверхности двухслойной жидкости.

Зависимость смещения изопикны во внутренней волне от горизонтальной координаты $\xi = x/L_x$, где $L_x = 25{,}7$ м, рассчитанная по формуле (39), изображена на рис. 5.

Имея в виду двухслойную аппроксимацию стратификации, условия «твёрдой крышки» на поверхности и приближение мелкой воды, из закона сохранения массы в каждом слое

$$\partial_t(h_1 + \eta) + \partial_x[(h_1 + \eta)\, U] = 0$$

получаем связь найденных выше решений η_N с полем скорости на поверхности $U(x,t)$ для указанных выше параметров модели:

$$U[\text{м/с}] = 0{,}45\, \frac{\eta_9(\text{м})/7}{1 + \eta_9(\text{м})/7}\,. \tag{40}$$

На основе полученных приближённых расчётов для группы из 9-ти импульсов — солитонов внутренних волн, соответствующих наблюдениям «COPE», восстанавливалось поле скорости на поверхности, которое затем использовалось для расчётов модуляции спектральной плотности поля возвышения коротких волн.

4.2. Ветровой пограничный слой над водной поверхностью с неоднородным полем течений

Описание ветрового пограничного слоя над взволнованной водной поверхностью, как и в случае взаимодействия с волнами зыби, проведём в рамках системы (19а), (19б) и (11). Однако в отличие от длинных поверхностных волн смещение поверхности во внутренних волнах практически отсутствует. В связи с этим, «длинноволновое» преобразование координат, введённое в разделе 3, не проводилось.

Вид уравнений для крупномасштабного течения будет совпадать с (8) с точностью до замены $(s,\gamma) \to (x,z)$, только в правой части аналогично (12а), (12б) будет стоять слагаемое $\partial^2\tau/\partial\gamma^2$, где τ — волновой поток импульса. При слабых ветрах, когда вклад волнового потока импульса в перенос в ветровом турбулентном погранслое мал [30], этим слагаемым можно пренебречь. При сильных ветрах влияние волнового потока импульса можно учесть, если использовать модифицированное выражение для эффективной вихревой вязкости [19] (см. формулу (7)).

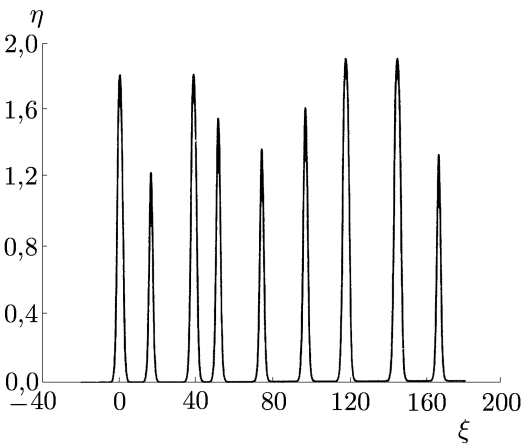

Рис. 5. Зависимость смещения изопикны во внутренней волне от горизонтальной координаты $\xi = x/L_x$

При этих предположениях система уравнений для крупномасштабных возмущений совпадает с (8) с точностью до замены $z \to \gamma$, $x \to s$. Принимая во внимание, что поле скорости $U(s,t)$ представляет собой стационарную волну, т. е. $U = U(s - ct)$, и переходя в систему координат, бегущую со скоростью c, получим систему стационарных уравнений:

$$\frac{\partial\psi}{\partial\gamma}\frac{\partial\chi}{\partial s} - \frac{\partial\psi}{\partial s}\frac{\partial\chi}{\partial\gamma} = \Delta(\nu\chi) - 2\,\frac{\partial^2\nu}{\partial\gamma^2}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial s^2}\,, \qquad \Delta\psi = \chi. \tag{41}$$

При этом граничные условия (9) аналогично (10в), (10г) преобразуются к виду

$$\psi\big|_{\gamma=0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial\psi}{\partial\gamma}\right|_{\gamma=0} = U(s) - c. \tag{42}$$

При удалении от поверхности поле скорости стремится к невозмущённому логарифмическому профилю, т. е.

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial\gamma}\right|_{\gamma\to\infty} = \frac{u_*}{0{,}4}\ln\frac{\gamma}{\gamma_0} - c.$$

Оценки, приведённые в [10], показывают, что длинноволновые возмущения, индуцированные внутренними волнами в воздухе, можно рассматривать в линейном приближении. Тогда система уравнений для возмущений имеет вид

$$(U_0(\gamma) - c)\,\frac{\partial\chi_1}{\partial s} - \frac{\mathrm{d}^2U_0}{\mathrm{d}\gamma^2}\,\frac{\partial\psi_1}{\partial s} = \Delta(\nu(\gamma)\chi_1) - 2\,\frac{\mathrm{d}^2\nu}{\mathrm{d}\gamma^2}\,\frac{\partial^2\psi_1}{\partial s^2}\,, \qquad \Delta\psi_1 = \chi_1, \tag{43}$$

$$\psi_1\big|_{\gamma=0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial\psi_1}{\partial\gamma}\right|_{\gamma=0} = U(s), \qquad \left.\frac{\partial\psi_1}{\partial\gamma}\right|_{\gamma\to\infty} = 0,$$

где $U_0(\gamma) = -c + \int_0^\gamma [u_*^2/\nu(z)]\,\mathrm{d}z$. Если $\nu(z)$ определяется формулой (7), то при $\gamma \to 0$ имеем асимптотику $U_0(\gamma) = -c + (u_*/\kappa)\ln(\gamma/\gamma_0)$.

Для решения таких уравнений можно использовать численную схему, описанную в [21] и модифицированную на случай негармонического возмущения.

Будем искать решение системы (43) в виде интеграла Фурье:

$$\begin{Bmatrix}\chi_1\\ \psi_1\end{Bmatrix} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\begin{Bmatrix}\chi_{1k}(\gamma)\\ \psi_{1k}(\gamma)\end{Bmatrix}\exp(iks)\,\mathrm{d}k.$$

Тогда χ_{1k}, ψ_{1k} удовлетворяют следующей системе уравнений и граничных условий:

$$(U_0(\gamma) - c)\,\chi_{1k} - \frac{\mathrm{d}^2U_0}{\mathrm{d}\gamma^2}\,\psi_{1k} = \frac{1}{ik}\left[\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\gamma^2} - k^2\right)(\nu(\gamma)\chi_{1k}) + 2\,\frac{\mathrm{d}^2\nu}{\mathrm{d}\gamma^2}\,k^2\psi_{1k}\right],$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi_{1k}}{\mathrm{d}\gamma^2} - k^2\psi_{1k} = \chi_{1k},$$

$$\psi_{1k}\big|_{\gamma=0} = 0, \qquad \left.\frac{\mathrm{d}\psi_{1k}}{\mathrm{d}\gamma}\right|_{\gamma=0} = \hat{U}(k), \qquad \psi_{1k}\big|_{\gamma\to\infty} = 0; \tag{44}$$

здесь $\hat{U}(k)$ — фурье-образ $U(s)$.

Система уравнений (44) для k-й гармоники решалась численно. При этом оказалось, что форма решения на масштабах порядка толщины вязкого подслоя мало зависит от k. В этом случае, вычисляя обратное преобразование Фурье от полученного решения, можно представить поле скорости возмущения, индуцированного в воздухе полем внутренней волны, в виде

$$U(s,\gamma) = \frac{\partial\psi}{\partial\gamma} = U(s)\,\mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{d}\psi_{1k}}{\mathrm{d}\gamma}\right) + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{U(s')}{s-s'}\,\mathrm{d}s'\,\mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{d}\psi_{1k}}{\mathrm{d}\gamma}\right), \tag{45}$$

где ψ_{1k} — решение уравнения (44) с граничным условием $\mathrm{d}\psi_{1k}/\mathrm{d}\gamma = 1$ при любом достаточно малом k.

Входящие в (44) индуцированное волной поле завихренности $\chi = \partial U/\partial\gamma$, а также $\chi_\gamma = \partial^2 U/\partial\gamma^2$ легко вычисляются с использованием (45).

4.3. Модуляция коротких ветровых волн в поле ветра над морской поверхностью при наличии внутренней волны

Изменение спектральной плотности энергии коротких поверхностных волн $F(K, x, t)$ описывается кинетическим уравнением (1). Прежде чем переходить к расчётам функции F, сделаем оценки слагаемых в уравнении (1) для параметров внутренних и поверхностных волн настоящей задачи. Слагаемое в левой части, описывающее кинематические эффекты, имеет порядок Fc/L_x, где c — фазовая скорость внутренней волны ($c = 50$ см/с), а L_x — её характерный масштаб ($L_x \approx 25$ м); тогда $Fc/L_x \sim 2 \cdot 10^{-2} F$. Правая часть уравнения (1) описывает эффекты, обусловленные генерацией волн ветром и нелинейным взаимодействием волн. В сантиметровом диапазоне длин поверхностных волн имеет место баланс этих эффектов [26], поэтому правую часть уравнения (1) можно оценить с использованием инкремента поверхностных волн [31] $\beta = (0{,}02 \div 0{,}04)\,(u_*^2/C_\mathrm{f}^2)\,\Omega - 2\nu_\mathrm{w} K^2$, где $\nu_\mathrm{w} = 0{,}01$ см^2/с — кинематическая вязкость воды. Если волновое число короткой волны $K = 3$ см$^{-1}$, то $\Omega \sim 70$ с$^{-1}$, $C_\mathrm{f} \sim 23$ см/с, и при $u_* = 20$ см/с имеем $\beta \sim 1$ с$^{-1}$, а при $u_* = 10$ см/с — $\beta \sim 0{,}1$ с$^{-1}$, поскольку такая скорость трения ветра близка к порогу генерации. Отсюда следует, что левая часть, описывающая кинематические эффекты в поле коротких волн, мала, и основную роль в модуляции коротких волн играет модуляция их инкремента.

Для расчёта модуляции инкремента коротких волн при наличии внутренней волны воспользуемся системой уравнений для коротких волн при наличии длинных волн, аналогичной той, которая применялась в разделе 3. В линейном приближении комплексные амплитуды гармоник возмущений функции тока ψ_2 и завихренности χ_2 с волновым числом K удовлетворяют системе уравнений, совпадающей с (28) при $y_{1\gamma} = 0$ с точностью до замены $\eta \to \gamma$:

$$\left[\left[\left(\Phi_{0\gamma} - \frac{\Omega}{K}\right)\chi_2 - \psi_2\chi_{0\gamma}\right] iK - \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\gamma^2} - K^2\right)(\chi_2\nu)\right] =$$
$$= -2\nu_{\gamma\gamma}\psi_2 K^2 - 2KA\exp(-K\gamma)\left[\left(\Phi_{0\gamma} - \frac{\Omega}{K}\right)\nu_\gamma\right]_\gamma,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi_2}{\mathrm{d}\gamma^2} - K^2\psi_2 = \chi_2 - 2KA\exp(-K\gamma)\chi_0. \tag{46}$$

Граничные условия имеют вид

$$\psi_2\big|_{\gamma=0} = 0, \qquad \psi_{2\gamma}\big|_{\gamma=0} = 2\Omega A. \tag{47}$$

В отличие от (28), здесь $\Phi_{0\gamma}$ и X_0 выражаются явно: $\Phi_{0\gamma} = U_0(\gamma) + U(s,\gamma) - \Omega/K$, где $U(s,\gamma)$ определяется формулой (45), $\chi_0 = \Phi_{0\gamma\gamma}$, A — амплитуда короткой поверхностной волны.

В системе (46) и граничных условиях (47) можно пренебречь зависимостью волнового числа K и фазовой скорости C_f короткой поверхностной волны от фазы внутренней волны, поскольку в рассматриваемом диапазоне параметров кинематические эффекты малы по сравнению с влиянием взаимодействия с ветром.

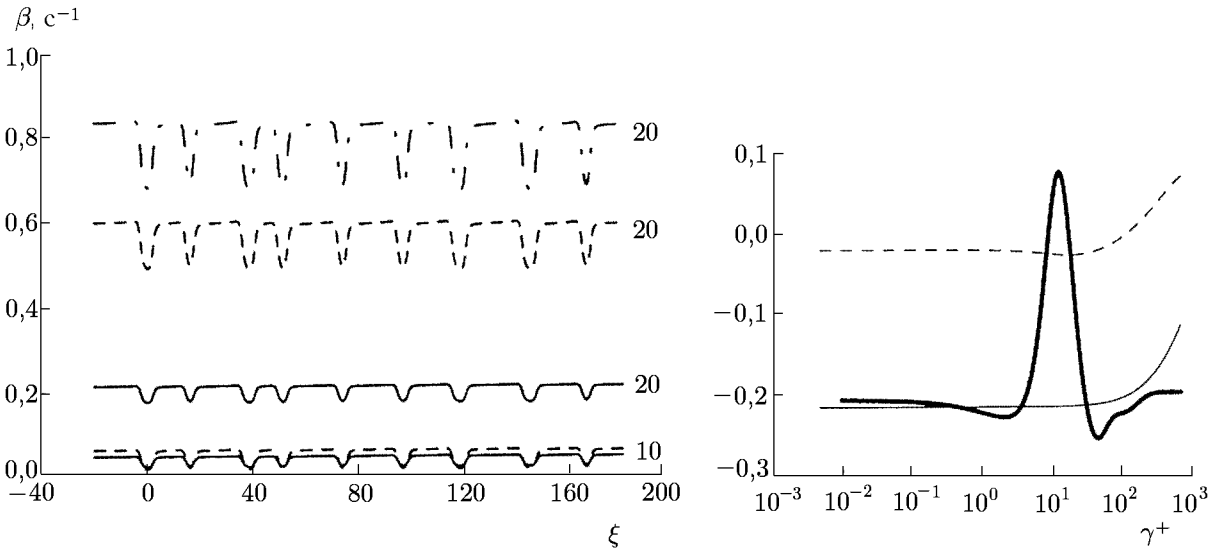

Рис. 6*а*. Зависимости инкремента β от горизонтальной координаты $\xi = x/L_x$ ($L_x = 25{,}7$ м). Направление фазовой скорости внутренней волны совпадает с направлением ветра. Сплошные кривые соответствуют $K = 1$ см$^{-1}$, штриховые — $K = 2$ см$^{-1}$; штрих-пунктирная — $K = 3$ см$^{-1}$. Цифры у графиков соответствуют скорости трения ветра (в см/с). На правом графике показаны профили реальной (сплошная линия) и мнимой (штриховая линия) частей возмущения тангенциального напряжения ветра, индуцированного длинной гармонической волной. Жирная кривая — плотность мощности энергообмена короткой волны с ветром (в относительных единицах)

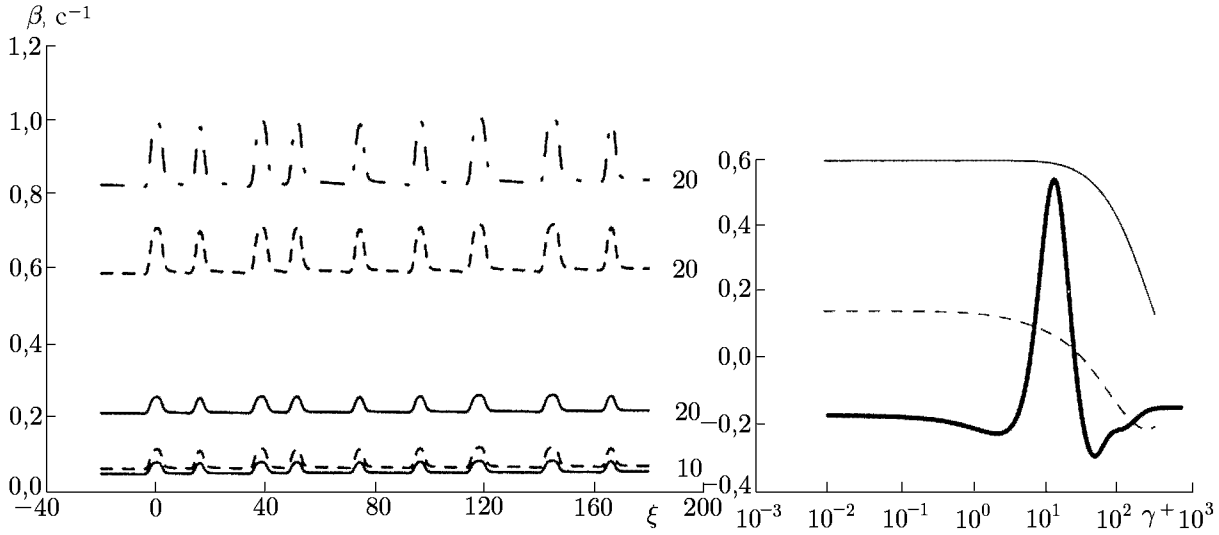

Рис. 6*б*. То же, что на рис. 6*а*, для случая, когда фазовая скорость внутренней волны направлена против ветра

Находя решение системы (46), можно вычислить ветровой инкремент коротких волн по формуле

$$\beta_{\mathrm{w}} = \frac{\rho_{\mathrm{a}}}{2\rho_{\mathrm{w}}}\,\nu_{\mathrm{a}}\left[-\frac{\mathrm{Re}(\chi_{2\gamma} - K\chi_2)}{C_{\mathrm{f}}KA} + 4K^2\right]. \tag{48}$$

При этом полный инкремент короткой волны, модулированной внутренней волной, имеет вид

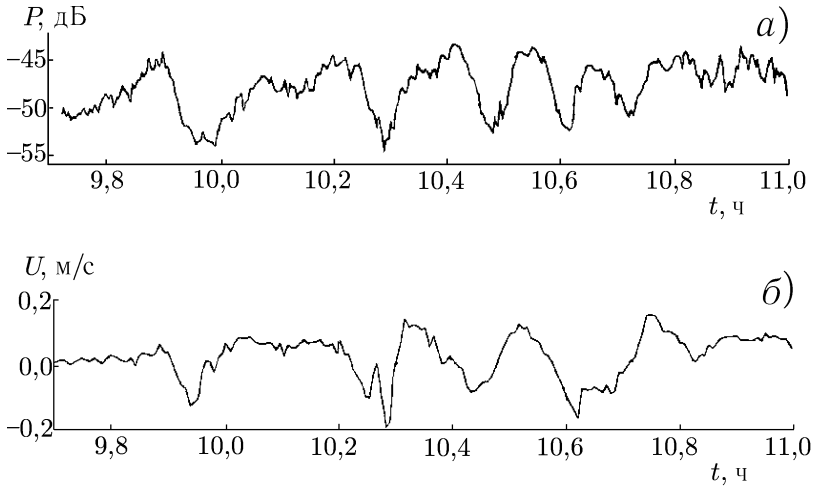

Рис. 7. Зависимости мощности рассеянного радиосигнала (*а*) и горизонтального потока на глубине 30 м (*б*) от времени (по данным [32])

$$\beta = -2\nu_{\mathrm{w}} K^2 + \beta_{\mathrm{w}}.$$

Зависимости β от фазы волны представлены на рис. 6*а*, *б* для случаев, когда внутренняя волна распространяется по ветру (рис. 6*а*) и против ветра (рис. 6*б*). Сравнение с рис. 5, на котором изображена зависимость смещения изопикн во внутренней волне от ξ, показывает, что максимум смещения (и горизонтальной скорости) совпадает с минимумом инкремента ветровых волн при попутном ветре (рис. 6*а*) и с максимумом их инкремента при встречном ветре (рис. 6*б*). Для пояснения этого эффекта на рис. 6 представлены также профили реальной ($\mathrm{Re}\, T_1$) и мнимой ($\mathrm{Im}\, T_1$) частей возмущения тангенциального напряжения в ветре, индуцированного гармонической внутренней волной с волновым числом $k = 0{,}25$ м$^{-1}$. На том же рисунке показан профиль средней по периоду волны плотности мощности сил (радиационной и вязкой), определяющих поток энергии от ветра к волнам [22]. Видно, что в области максимального энергообмена возмущения потока импульса практически постоянны и имеют фазу, близкую к $-\pi$ при попутном ветре и близкую к нулю при встречном ветре. Поскольку в области существенного энергообмена T_1 не зависит от вертикальной координаты, профиль скорости ветра в этой области с хорошей степенью точности можно представить в виде

$$U_0(z) = \left(\frac{u_*}{0{,}4} + \mathrm{Re}\, \frac{T_1 ka \exp(ikx)}{0{,}4 u_*^2} \right) \ln \frac{z}{z_0}\,.$$

Таким образом, колебания эффективной скорости ветра находятся в противофазе со скоростью на поверхности в случае попутного ветра и синфазны при встречном ветре. Этот эффект допускает и простое физическое объяснение: перепад скорости между поверхностью воды и вышележащими слоями ветрового пограничного слоя меньше в случае, если на поверхности воды есть течение, сонаправленное с ветром, а меньший перепад скорости приводит к меньшему напряжению трения. При противоположном направлении скоростей ветра и поверхности воды напряжение трения оказывается существенно больше.

В случае, когда в области энергообмена ветровой волны с воздушным потоком возмущение тангенциального напряжения в ветре T_1 практически постоянно, модуляция ветрового инкремента полностью определяется модуляцией T_1. Это и объясняет зависимости $\beta(\xi)$.

Применим результаты развитой модели для оценки данных эксперимента «COPE», в ходе которого проводились одновременные измерения интенсивности радиоизлучения, рассеянного морской поверхностью, и колебаний термоклина на шельфе вблизи побережья штата Орегон [32]. Было обнаружено, что минимумы рассеянной мощности радиосигнала находятся приблизительно в фазе со смещениями термоклина. Такое же фазовое соотношение между модулированным ветровым инкрементом коротких поверхностных волн и смещением изопикны во внутренней волне получается при распространении внутренней волны по ветру (рис. 6*а*).

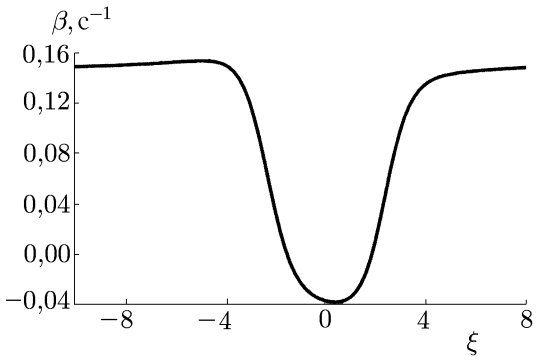

Рис. 8. Зависимость модулированного инкремента поверхностной волны от горизонтальной координаты ξ. Параметры ветра и волн соответствуют условиям 23 сентября 1995 г. (по данным [32]). Волновое число поверхностной волны $K = 4$ см$^{-1}$

Для сопоставления с результатами настоящей модели используем параметры ветра и волн, измеренные в ходе эксперимента «COPE» 23 сентября 1995 г. На рис. 7 представлены данные о горизонтальной скорости течения, обусловленной внутренними волнами, под термоклином и о мощности рассеянного сигнала для этого случая. Заметим, что смещение изопикны находится в противофазе со скоростью течения под термоклином, т. е. и в этом случае минимум рассеянного сигнала совпадает с максимумом смещения изопикны. При этом скорость ветра составляла 9,5 м/с ($u_* \approx 28{,}5$ см/с), а угол между направлениями скорости ветра и распространения волны составлял $\theta \approx 60°$. Скорость распространения внутренних волн составляла $c_{\text{ВВ}} = 1{,}03$ м/с. Измерения проводились с помощью радиолокатора с длиной волны излучения $\lambda = 3$ см под скользящими углами, т. е. брэгговская длина волны составляла 1,5 см.

Были проведены расчёты модулированного инкремента брэгговских волн в рамках настоящей модели для указанных параметров. Заметим, что в модели скорости ветра и волн считаются сонаправленными. Поскольку направление визирования радиолокатора совпадало с направлением распространения внутренней волны, то для оценок в качестве значения скорости на поверхности во внутренней волне бралось $c_{\text{ВВ}} = 1{,}03$ м/с, а для скорости трения ветра выбиралось значение $u_{*1} = u_* \cos\theta \approx 14{,}3$ см/с. Рассчитанный модулированный инкремент представлен на рис. 8. Видно, что фаза модуляции инкремента противоположна фазе смещения изопикны, при этом в максимуме смещения изопикны даже наблюдается смена знака инкремента.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящая работа посвящена описанию одного из механизмов модуляции коротких поверхностных волн при наличии неоднородных течений. Хорошо известно, что неоднородные течения на поверхности воды индуцируют неоднородности в поле ветра, что, в свою очередь, приводит к неоднородности генерации ветровой ряби, т. е. к модуляции ветрового инкремента поверхностных волн. Впервые этот механизм был рассмотрен в случае, когда неоднородное течение вызывалось длинной волной на поверхности воды [5]. Однако построение последовательной теории этого механизма модуляции коротких волн встречало значительные трудности, связанные, прежде всего, с определением фазы коэффициента модуляции поверхностных волн, которая в эксперименте была близка к нулю, а в теории оказывалась близкой к $-\pi$. Учёт в теории нелинейного эффекта деформации профиля ветра при наличии поверхностных волн позволяет объяснить значения как

амплитуды, так и фазы коэффициента модуляции спектра поверхностных волн.

Механизм модуляции инкремента поверхностных волн оказывается эффективным и в случае, когда неоднородное поле течений на поверхности создаётся интенсивными внутренними волнами. Следует заметить, что в настоящей работе влияние модуляции инкремента рассматривалось без учёта консервативной кинематической трансформации поверхностных волн. В то же время ранее в работе [33] была изучена модуляция коротких поверхностных волн в поле интенсивных внутренних волн без учёта модуляции инкремента и показано, что в случае очень интенсивных внутренних волн значительный гидродинамический контраст существует даже для волн сантиметрового диапазона. Дальнейшим шагом будет исследование совместного действия двух указанных эффектов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 02–05–65099) и школы академика В. И. Таланова (НШ–1637.2003.2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Басович А. Я., Баханов В. В., Таланов В. И. // Воздействие крупномасштабных внутренних волн на морскую поверхность. Горький: ИПФ АН СССР, 1982. С. 8.
2. Басович А. Я., Баханов В. В., Браво-Животовский Д. М., Гордеев Л. Б., Жидко Ю. М., Муякшин С. И. // Доклады АН СССР. 1988. Т. 298, № 4. С. 967.
3. Ермаков С. А., Салашин С. Г. // Доклады АН СССР. 1994. Т. 337, № 1. С. 108.
4. Булатов М. Г. и др. // Успехи физических наук. 2003. Т. 173. С. 69.
5. Landahl M. T., Widnall S. E., Hultgen L. // Proc. 12th Symp. on Naval Hydrodynamics. National Academy of Sciences. 1978. 541 p.
6. Hasselman K. et al. // J. Geophys. Res. 1985. V. 90. P. 4 659.
7. Гродский С. А., Кудрявцев Е. Н., Макин Е. К. // Морской гидрофиз. журн. 1991. № 1. С. 15.
8. Троицкая Ю. И. Модуляция скорости роста короткой поверхностной волны, возбуждаемой турбулентным ветром в присутствии длинной: Препринт ИПФ РАН № 391. Н. Новгород, 1996. 38 с.
9. Троицкая Ю. И. Квазилинейная модель модуляции коротких поверхностных волн, возбуждаемых турбулентным ветром в присутствии волны зыби: Препринт ИПФ РАН № 544. Н. Новгород, 2000. 30 с.
10. Горшков К. А., Долина И. С., Соустова И. А., Троицкая Ю. И. Модуляция коротких ветровых волн в присутствии интенсивных внутренних волн. Эффект модуляции инкремента: Препринт ИПФ РАН № 607. Н. Новгород, 2002. 27 с.
11. Stanton T. P., Ostrovsky L. A. // Geophys. Rev. Lett. 1998. V. 25. P. 2 695.
12. Longuett-Higgins M. S., Stewart R. W. // J. Fluid Mech. 1960. V. 8, No. 4. P. 565.
13. Longuett-Higgins M. S., Stewart R. W. // J. Fluid Mech. 1961. V. 10, No. 4. P. 529.
14. Longuett-Higgins M. S. // J. Fluid Mech. 1987. V. 177. P. 293.
15. Keller W. C., Wright J. W. // Radio Sci. 1975. V. 10. P. 139.
16. Smith J. A. // Surface Waves and Fluxes. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1990. V. 1. P. 247.
17. Монин А. С., Яглом Ф. М. Статистическая гидромеханика. Ч. 1. С.-Пб.: Гидрометеоиздат, 1992. 696 с.
18. Смольяков А. В. // Акуст. журн. 1973. Т. 19, вып. 3. С. 420.
19. Riley D. S., Donelan M. A., Hui W. H. // Boundary Layer Meteor. 1982. V. 22. P. 209.
20. Jenkins A. D. // J. Phys. Oceanogr. 1992. V. 22, No. 8. P. 843.
21. Реутов В. П., Троицкая Ю. И. // Изв. РАН. ФАО. 1995. Т. 31, № 6. С. 623.

22. Троицкая Ю. И. // Изв. РАН. ФАО. 1997. Т. 33, № 4. С. 525.
23. Вопросы теории плазмы. Вып. 7. М.: Энергоатомиздат, 1973.
24. Benjamin Brooke T. // J. Fluid Mech. 1959. V. 6. P. 161.
25. Hasselman K. et al. // Dtsch. Hydrogr. Z. Reihe A. 1973. V. 8. P. 12.
26. Plant W. J., Keller W. C., Cross A. // J. Geophys. Res. 1983. V. 88. P. 9 747.
27. Gorshkov K. A., Irisov V. G., Ostrovsky L. A., Soustova I. A. Multisoliton solutions of Gardner equation and their applications (in press).
28. Горшков К. А., Соустова И. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 2001. Т. 44, № 5–6. С. 502.
29. Grue J., Ostrovsky L. A. Strongly nonlinear internal solitons — analytical models and fully nonlinear computations (in press).
30. Kudryavtsev V. N., Mastenbroek C., Makin V. K. // Boundary Layer Meteor. 1997. V. 83. P. 99.
31. Plant W. // J. Geophys. Res. 1982. V. 87. P. 1 961.
32. Kropfli R. A. et al. // J. Geophys. Res. 1999. V. 104. P. 3 133.
33. Bakhanov V. V., Ostrovsky L. A. The action of strong solitary internal waves on surface waves: Preprint IAP RAS No. 573. Nizhni Novgorod, 2001. 26 p.

Институт прикладной физики РАН,
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию
6 июня 2003 г.

TRANSFORMATION OF SHORT WAVES IN A NONUNIFORM FLOW FIELD ON THE OCEAN SURFACE. THE EFFECT OF WIND GROWTH RATE MODULATION

K. A. Gorshkov, I. S. Dolina, I. A. Soustova, and Yu. I. Troitskaya

We develop a model of transformation of the short surface wave spectrum in the presence of a nonuniform flow on a water surface, in which the modulation of wind-wave growth rate is taken into account. The model of a turbulent near-water atmospheric layer is used to calculate the modulate growth rate. In this model, turbulent stresses in a wind are described using a gradient approximation with a model eddy viscosity specified with allowance for the known laboratory experiments. The examples of short-wave modulation in the presence of nonuniform flows on a water surface, originating from ripples and intense internal waves, are considered. It is shown that deformations of the wind-velocity profile and its long-wavelength perturbation due to the nonlinear interaction between the wind surface waves and wind has a significant effects on the short-wave growth rate and its modulation. In the case of ripples, this deformation reduces to an increase in the roughness parameter of the wind-velocity profile and to a velocity-profile modulation with the ripple period. The modulated growth rate is calculated within the framework of a quasi-linear model of surface-wave generation by a turbulent wind, in which the hypothesis of random phases of the wind-wave field is used. The amplitude and phase of the hydrodynamical transfer function are calculated within the framework of the relaxation model. The calculation results are in reasonable agreement with the available experimental data. A model described by the combined Korteweg – de Vries equation is used to study a surface flow field generated by intense internal waves. The internal-wave parameters are takes from the results of the COPE experiment. We calculate the wind growth rate dependences on the wave-train phase for co- and counterpropagation of an internal wave with respect to the wind. The calculation results agree qualitatively with experimental data.

УДК 551.466

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВНУТРЕННИХ И ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН РЕАЛЬНОГО ОКЕАНА В БОЛЬШОМ ТЕРМОСТРАТИФИЦИРОВАННОМ ОПЫТОВОМ БАССЕЙНЕ ИПФ РАН

В. В. Баханов, С. Н. Власов, В. И. Казаков,
О. Н. Кемарская, Е. В. Копосова, О. Д. Шишкина

В работе излагаются результаты проведённых в бассейне ИПФ РАН исследований трансформации поверхностных волн на неоднородных течениях, а также результаты моделирования влияния движения айсбергов на регулярные фоновые внутренние волны в приповерхностном пикноклине.

Экспериментально и теоретически исследована трансформация поверхностных волн в поле обтекания погружённой сферы. Показано, что даже весьма слабые неоднородные течения могут вызывать заметные изменения в поле поверхностных волн. Размеры пространственной области, в которой изменяются характеристики поверхностных волн, значительно превосходят размеры области неоднородного течения. Получено, что нелинейность поверхностных волн приводит к росту изменчивости амплитуды поверхностных волн в широком частотном диапазоне. Предложенная теоретическая модель удовлетворительно описывает полученные в эксперименте основные особенности трансформации нелинейных поверхностных волн в поле неоднородных течений.

Экспериментально доказано, что фоновые внутренние волны с частотами, близкими к частотам внутренних волн в следе айсберга, приводят к значительной трансформации поля присоединённых волн. Параметры возникающей волновой системы не зависят от соотношения характерных горизонтальных размеров модели айсберга и длины внутренней волны. Суммарная волновая система является стационарной во всём диапазоне скоростей движения модели при встречном направлении фоновых волн. При попутном направлении фоновых волн характер волновой системы зависит от соотношения скорости буксировки и фазовой скорости фоновых волн: система волн в следе может иметь и выраженный нестационарный характер, и типичную стационарную фазовую картину.

ВВЕДЕНИЕ

Важным методом изучения волновых и турбулентных процессов в океане является их моделирование в бассейнах достаточно больших размеров с контролируемыми и воспроизводимыми гидрологическими условиями. Большой термостратифицированный бассейн ИПФ РАН [1] благодаря сочетанию параметров создаваемой в нём стратификации, большим размерам и наличию развитого информационно-измерительного комплекса предоставляет уникальные возможности для изучения в лабораторных условиях поверхностных и внутренних волн, а также различных вариантов взаимодействия волновых возмущений.

Бассейн имеет зеркало 20×4 м и глубину 2 м. Его отличительной особенностью является создание температурной стратификации путём нагрева и охлаждения жидкости с помощью системы теплообменников, установленных вдоль боковых стенок бассейна. Применение холодильных машин, работающих в режиме теплового насоса, обеспечивает высокую эффективность такого способа создания температурной стратификации. Схематически бассейн и его оборудование показаны на рис. 1

Бассейн оборудован:

— буксировочной тележкой, обеспечивающей перемещение моделей вдоль бассейна со скоростью $0{,}01 \div 1$ м/с при суммарной погрешности последней не более 2 %;

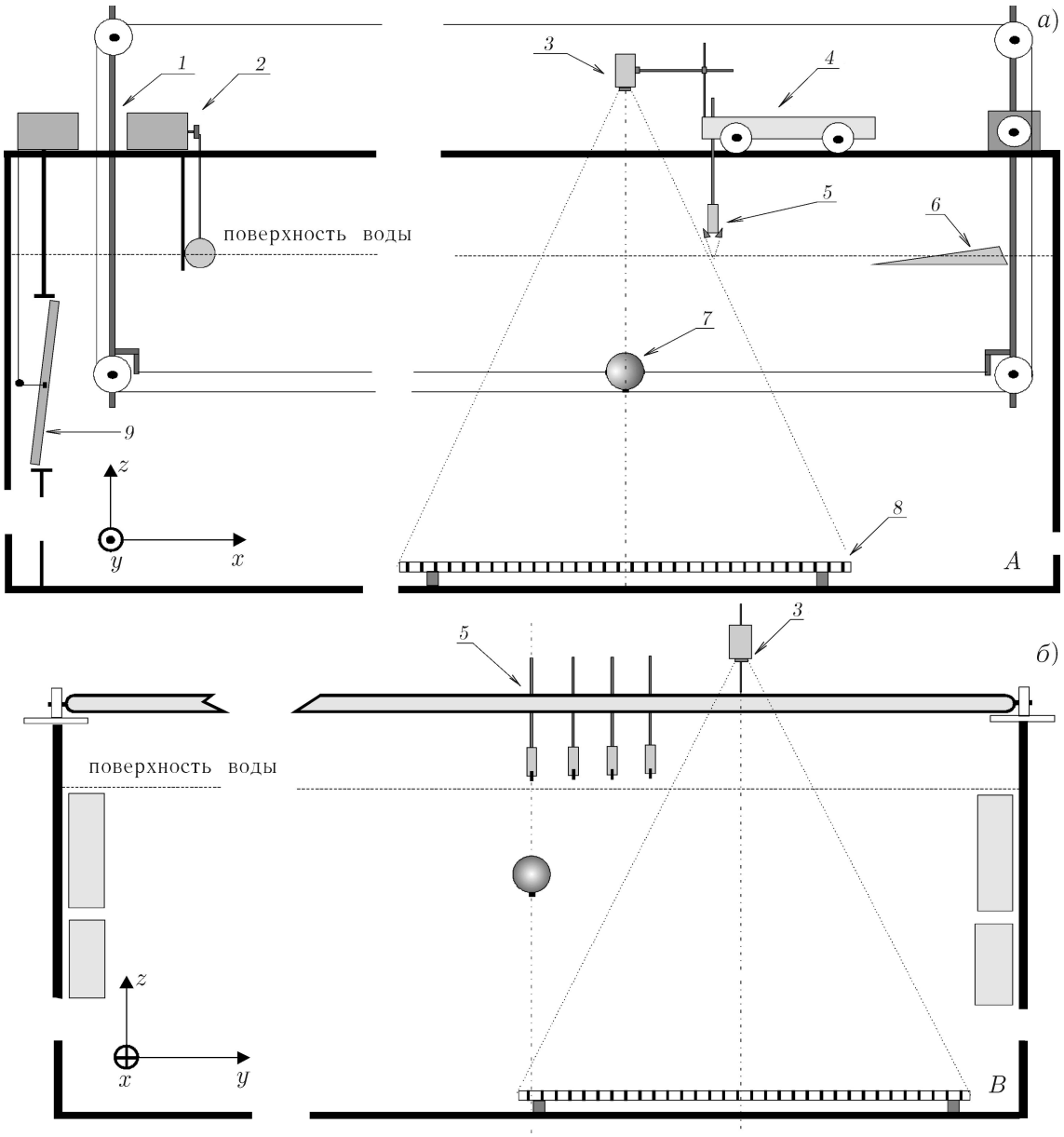

Рис. 1. Схема бассейна и его оборудование: *1* — система тросовой буксировки сферы, *2* — волнопродуктор поверхностных волн, *3* — видеокамера, *4* — самоходная координатная тележка, *5* — ультразвуковые датчики, *6* — волногаситель поверхностных волн, *7* — буксируемая сфера (радиус $r = 4{,}25$ см, глубина погружения $4r$), *8* — экран-решётка, *9* — волнопродуктор внутренних волн; *а* — вид с фронтальной стороны бассейна, *б* — с торцевой стороны

— волнопродуктором, генерирующим поверхностные волны с длиной $\lambda = 0{,}1 \div 1$ м и максимальной высотой $5 \div 60$ мм, который представляет собой горизонтальный цилиндр с длиной 3,4 м и диаметром 0,1 м, установленный у одной из коротких стенок бассейна и совершающий вертикальные колебания;

— волнопродуктором, обеспечивающим возбуждение внутренних волн с периодом $30 \div 120$ с, который представляет собой вертикальную пластину, совершающую колебания вокруг горизонтальной оси.

На противоположной от волнопродуктора стенке бассейна имеется волногаситель поверхност-

ных волн, коэффициент отражения от которого составляет около 10 дБ в рабочем диапазоне длин волн.

Бассейн оснащён также информационно-измерительным комплексом, состоящим из первичных преобразователей (датчиков) и систем сбора, хранения и обработки поступающей информации, включающих в себя аналого-цифровые преобразователи и персональные компьютеры.

В частности, в систему сбора информации входят 16 точечных термометров с диапазоном измерений 0÷30 °C и точностью до 0,05 °C, а также 4 датчика термоанемометрического типа, используемых для измерения средней скорости потока. Размещение термометров зависит от особенностей проводимых экспериментов.

Измерение поверхностного волнения производится с помощью ультразвуковой и оптической систем. Для бесконтактного измерения параметров поверхностного волнения используется четырёхканальный ультразвуковой измеритель. В измерителе реализован локационный фазовый способ измерения при непрерывном режиме излучения. Текущая амплитуда напряжения на выходе измерителя пропорциональна текущему изменению расстояния между датчиком и отражающей поверхностью. Измеритель имеет следующие технические характеристики:

— частота излучаемой ультразвуковой волны 30 кГц;

— амплитуда измеряемых перемещений ±35 мм;

— частоты измеряемых перемещений 0÷30 Гц;

— расстояние от датчика до поверхности воды 70 мм.

С его помощью можно проводить измерения перемещений, имеющих амплитуду 0,1 мм, при этом обеспечивается отношение сигнал/шум не менее 40 дБ. Размещение датчиков зависит от вида выполняемых исследований (датчики могут быть установлены на аппаратно-буксировочной тележке, выносном кронштейне и т. д. с возможностью изменения горизонтальных координат x, y).

Сигнал с описанных выше устройств (изменение выходного напряжения) поступает на платы ввода-вывода (ADC-DAC) серии «L-Card» (L-153, 154, 164) установленных в персональном компьютере. Для используемых в бассейне измерительных систем применяется специально разработанное программное обеспечение.

Оптическая система измерений параметров поверхностного волнения на базе видеокомплекса позволяет осуществить дистанционную диагностику достаточно большой пространственной области с размерами порядка 1,5 × 3 м. Оптическая система состоит из расположенной над поверхностью воды видеокамеры, лежащей на дне бассейна координатной сетки с шагом 50 мм по осям x и y, системы равномерного освещения сетки (подводные прожекторы), специальной платы ввода видеосигнала и компьютера для регистрации видеоизображений.

При прохождении поверхностных волн возникает возмущение изображения линий сетки. Сопоставление координат изображения узлов сетки с их значениями при отсутствии поверхностных волн позволяет определить обе проекции наклона поверхности воды. На рис. 2 показано изображение сетки, помещённой на дно бассейна, при отсутствии волнения и при его наличии. В ходе экспериментов было определено, что видеосистема позволяет измерять параметры волнения с амплитудой в диапазоне 0,3÷1,5 мм. Нижний предел измерений определяется величиной замеряемого с помощью камеры сдвига, верхний — условием пересечения линий в изображении. Специально созданный пакет программ позволяет автоматически определять координаты изображений узлов сетки и интерполировать значения уклонов поверхности жидкости. Дальнейшая обработка, включающая, в частности, высокочастотную фильтрацию, позволяет восстановить распределение поля амплитуд поверхностных волн в бассейне.

Использование видеокомплекса позволяет существенно более оперативно проводить экспериментальные исследования трансформации поверхностных волн.

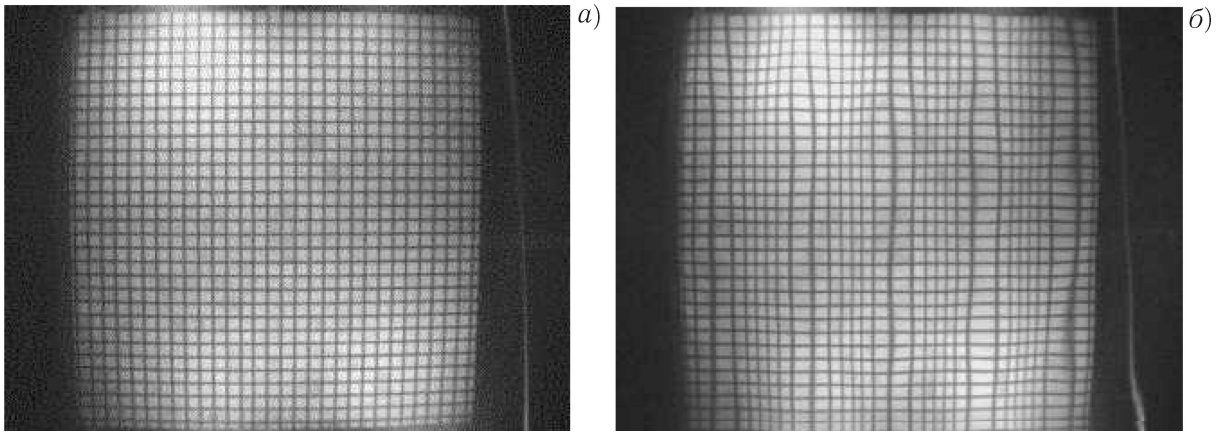

Рис. 2. Изображение расположенной на дне бассейна сетки при отсутствии поверхностного волнения (*а*) и при наличии поверхностной волны с частотой 3 Гц (*б*)

Ниже излагаются результаты исследований трансформации поверхностных волн на неоднородных течениях, выполненных в бассейне ИПФ РАН, а также результаты моделирования влияния движения айсбергов на регулярные фоновые внутренние волны в приповерхностном пикноклине.

1. ИССЛЕДОВАНИЕ ТРАНСФОРМАЦИИ ПОВЕРХНОСТНОГО ВОЛНЕНИЯ НЕОДНОРОДНЫМИ ТЕЧЕНИЯМИ

1.1. Теоретические и экспериментальные исследования трансформации поверхностных волн на неоднородных течениях проводятся в ИПФ РАН с 1977 года [2]. В данной работе изложены результаты исследований трансформации поверхностных волн в поле обтекания движущейся сферы. Ранее [3–6] было показано, что даже весьма слабые неоднородные течения могут эффективно воздействовать на характеристики поверхностных волн. Работы [2, 3, 5] посвящены в основном теоретическим аспектам данной проблемы, а [4, 6] — экспериментальным.

В частности, было показано [5], что можно выделить следующие основные стадии трансформации поверхностных волн в поле неоднородного течения:

— на начальной стадии определяющую роль играет условие группового синхронизма поверхностных волн и скорости движения сферы, поверхностные волны демонстрируют «линейный» характер трансформации;

— на следующей стадии приобретённая модуляция амплитуды поверхностных волн может служить «затравкой» для неустойчивости Бенджамена—Фейра, и нелинейность поверхностных волн приводит к резкому возрастанию изменчивости их амплитуды.

Время перехода от одной стадии развития аномалий поверхностного волнения к другой определяется в основном амплитудой поверхностных волн и интенсивностью неоднородного течения. При увеличении амплитуды поверхностных волн переход от одной стадии к другой ускоряется.

При теоретическом описании в [5] использовалось уравнение, в решении которого имела место мелкомасштабная неустойчивость, обусловленная пренебрежением нелинейной дисперсией поверхностных волн. В [6] было предложено уравнение, которое учитывает слабую дисперсию нелинейности. Проведённый анализ устойчивости решения этого уравнения показал, что мелкомасштабная неустойчивость огибающей поверхностных волн значительно уменьшается. Это позволяет исследовать изменчивость поверхностных волн на больши́х временах.

Ниже приведены подробные результаты исследования поверхностных волн, как теоретические, так и экспериментальные. Измерения трансформации характеристик поверхностных волн выполнены акустическими датчиками отклонения поверхности воды в определённых точках и оптической видеосистемой регистрации наклонов поверхности воды в некоторой пространственной области. В отличие от предыдущих работ, измерения проводились для более высокочастотных поверхностных волн и при меньших скоростях движения сферы. Это позволило при той же длине бассейна исследовать трансформацию поверхностных волн на более поздних по сравнению с предыдущими исследованиями стадиях развития.

1.2. Расчёты трансформации поверхностного волнения амплитуды a_0 с волновым числом $\mathbf{k}_0$ двумерно-неоднородными течениями проводились на основе уравнения для комплексной амплитуды A нелинейных гравитационно-капиллярных поверхностных волн в поле локализованного возмущения $\mathbf{u}(x,y)$ основного потока $-U_0\mathbf{x}_0$ [6]:

$$\frac{\partial A}{\partial \tilde{t}} = 2iL[A] + (1-\beta_x)\frac{\partial A}{\partial \tilde{x}} - \beta_y\frac{\partial A}{\partial \tilde{y}} + i\left[(\beta_x-1)\tilde{k}_{0x} + \beta_y\tilde{k}_{0y} - \tilde{\omega}_0\right]A +$$
$$+\frac{ic}{2}\tilde{k}_0^2\sqrt{\tilde{k}_0+\tilde{T}\tilde{k}_0^3}\,|A|^2A - \frac{\eta}{4}\tilde{k}_0\sqrt{\tilde{k}_0+\tilde{T}\tilde{k}_0^3}\,A^2\frac{\partial A^*}{\partial \tilde{x}} + \frac{\nu}{4}\tilde{k}_0\sqrt{\tilde{k}_0+\tilde{T}\tilde{k}_0^3}\,|A|^2\frac{\partial A}{\partial \tilde{x}} + i\tilde{k}_0A\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial \mathbf{r}_{k0}}, \quad (1)$$

где $|A| = 2ak_*$ — безразмерная амплитуда поверхностных волн, $\tilde{t} = tk_*U_0$, $\tilde{x} = xk_*$, $\tilde{y} = yk_*$ — безразмерные время и координаты, $k_* = g/(4U_0^2)$, $\boldsymbol{\beta}= \mathbf{u}/U_0$, $\tilde{T} = Tg/(16U_0^4)$, T — нормированный на плотность воды коэффициент поверхностного натяжения на границе вода—воздух, $\tilde{\mathbf{k}}_0 = \mathbf{k}_0/k_*$, $\tilde{\omega}_0 = 2\sqrt{\tilde{k}_0\,(1+\tilde{T}\tilde{k}_0^2)} - \tilde{k}_{0x}$ — параметры невозмущённой поверхностной волны, попадающей в область неоднородного течения, g — ускорение свободного падения,

$$L[J] = \frac{1}{2\pi}\int \exp[i\,(k'_x\tilde{x}+k'_y\tilde{y})]\times$$
$$\times\left\{\left[(\tilde{k}_{0x}+k'_x)^2+(\tilde{k}_{0y}+k'_y)^2\right]^{1/2} + \tilde{T}\left[(\tilde{k}_{0x}+k'_x)^2+(\tilde{k}_{0y}+k'_y)^2\right]^{3/2}\right\}^{1/2}\tilde{J}(k'_x,k'_y)\,\mathrm{d}k'_x\,\mathrm{d}k'_y,$$

$$\tilde{J}(k'_x,k'_y) = \frac{1}{2\pi}\int \exp[-i\,(k'_x\tilde{x}+k'_y\tilde{y})]\,J(\tilde{x},\tilde{y})\,\mathrm{d}\tilde{x}\,\mathrm{d}\tilde{y}$$

— преобразование Фурье функции J,

$$c = \frac{8+R^2+2R^4}{16\,(1+R^2)\,(1-2R^2)}, \qquad \eta = \frac{(1-R^2)\,(8+R^2+2R^4)}{16\,(1-2R^2)\,(1+R^2)^2} = \frac{1-R^2}{1+R^2}\,c,$$

$$\nu = \frac{3\,(4R^8+4R^6-9R^4+R^2-8)}{8\,(1-2R^2)^2\,(1+R^2)^2}, \qquad R = \sqrt{\tilde{T}}\,\tilde{k}_0,$$

$\mathbf{r}_{k0}$ — единичный вектор в направлении $\mathbf{k}_0$, производная потенциала $\partial\bar{\Phi}/\partial\mathbf{r}_{k0}$ определяется из системы уравнений

$$\Delta\bar{\Phi} = 0, \qquad \frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial z} = \frac{\sqrt{\tilde{k}_0+\tilde{T}\tilde{k}_0^3}}{4}\,\frac{\partial}{\partial x}(|A|^2).$$

В уравнении (1) первый член в правой части соответствует дисперсионному соотношению для линейных гравитационно-капиллярных поверхностных волн, следующие три члена учитывают воздействие неоднородного течения на поверхностные волны, пятый член учитывает нелинейность поверхностных волн, а оставшиеся три члена — их нелинейную дисперсию.

На основе уравнения (1) рассчитывалась временна́я эволюция первоначально однородного поля поверхностных волн с волновым вектором $\mathbf{k}_0$ при возникновении возмущения основного потока $\boldsymbol{\beta}$ в момент времени $t = 0$. Значения параметров U_0, k_{0x} были взяты непосредственно из эксперимента, $k_{0y} = 0$ во всех экспериментах. Расчёты проводились до момента времени $t = L/U_0$, где L — расстояние от волнопродуктора поверхностных волн до плоскости акустических датчиков или видеосистемы. Гораздо более сложен был выбор значения a_0, т. к. поверхностные волны по мере распространения довольно сильно затухают. Поэтому по амплитуде поверхностных волн в области измерений рассчитывалась их амплитуда на расстоянии $L/2$ от волнопродуктора с учётом полученных коэффициентов затухания (см. ниже). Эта величина и принималась за a_0. Такой способ задания амплитуды является оценочным. Для случаев, когда поверхностные волны демонстрируют «линейный» характер трансформации, выбор значения a_0 не играет роли. Для поверхностных волн большей амплитуды в расчётах задавалось несколько достаточно близких значений a_0 для оценки влияния этого параметра на полученные результаты.

Расчёты проводились в области размером 4×4 м для величины $\delta a = |A|/(2a_0 k_*)$.

Уравнение (1) может быть использовано, если длина поверхностных волн много меньше характерных пространственных масштабов неоднородного течения. Для малых амплитуд поверхностных волн был проведён расчёт с использованием полученного в [5] уравнения для комплексной амплитуды линейных поверхностных волн, которое было выведено без предположения о малости их длины:

$$D_0^{-1/2}\left[\left(i\sqrt{gk_*}+B_0\right)^2 A\right] + B_1 D_0^{-1/2}\left[\left(i\sqrt{gk_*}+B_0\right)A\right] + \\ + \left(i\sqrt{gk_*}+B_0\right) D_0^{-1/2}[B_1 A] + B_1 D_0^{-1/2}[B_1 A] + gA = 0, \quad (2)$$

где

$$B_0 = \frac{\partial}{\partial t} - U_0\frac{\partial}{\partial x}, \qquad B_1 = -ik_* u_x + u_x\frac{\partial}{\partial x} + u_y\frac{\partial}{\partial y},$$

$$D_0^{-1/2}[f(x,y)] = \frac{1}{(2\pi)^2}\int \exp[i\,(k_x x + k_y y)]\,\frac{\hat{f}(k_x,k_y)}{\sqrt{(k_x-k_*)^2+k_y^2}}\,\mathrm{d}k_x\,\mathrm{d}k_y,$$

$\hat{f}(k_x,k_y)$ — фурье-образ функции $f(x,y)$. Уравнение (2) в отличие от (1) записано в размерном виде.

1.3. Ниже приведены результаты экспериментов в сопоставлении с теорией. На первом этапе проводились исследования поверхностных волн без неоднородных течений с целью определения параметров волн, в частности затухания. На втором этапе определялось влияние неоднородных течений на параметры поверхностных волн.

1.3.1. Экспериментально была проведена оценка затухания поверхностных волн. Получены следующие коэффициенты затухания: $\gamma = 0{,}027$ с$^{-1}$ при частоте поверхностных волн $f = 2{,}5$ Гц, $\gamma = 0{,}092$ с$^{-1}$ при $f = 3{,}0$ Гц. Теоретические оценки показывают, что затухание вследствие влияния стенок бассейна и дна $\gamma_{\mathrm{b}} = 0{,}002$ с$^{-1}$, затухание волн на глубокой воде при чистой поверхности $\gamma_\nu = 0{,}002$ с$^{-1}$ при $f = 2{,}5$ Гц, $\gamma_\nu = 0{,}003$ с$^{-1}$ при $f = 3{,}0$ Гц [7]. Для поверхности, покрытой неупругими поверхностно-активными плёнками, коэффициент затухания $\gamma_{\mathrm{f}} = 0{,}04$ с$^{-1}$ при $f = 2{,}5$ Гц, $\gamma_{\mathrm{f}} = 0{,}063$ с$^{-1}$ при $f = 3{,}0$ Гц [8]. В случае упругих поверхностных плёнок коэффициент затухания увеличивается в два раза по сравнению со случаем неупругих плёнок [9]. Полученные в эксперименте коэффициенты затухания, вероятно, определяются влиянием поверхностно-

активных плёнок. Следует отметить зависимость параметров волн от состояния водной поверхности. Невозможно полностью удалить плёнку с поверхности, причём эта плёнка меняется с каждым днём. Поэтому эксперименты, результаты которых необходимо сравнить между собой, следует проводить в течение одного дня.

1.3.2. Была выбрана следующая схема проведения эксперимента (см. рис. 1). Сфера с радиусом $r = 4{,}25$ см протягивалась вдоль натянутой струны на глубине h (расстояние от невозмущённой поверхности воды до центра сферы), равной двум диаметрам сферы. Скорость перемещения сферы U_0 была равна 0,26 м/с. Обтекание сферы создаёт на поверхности воды неоднородное течение. Волнопродуктором, установленным на стенке бассейна, от которой начиналось движение сферы, генерировались поверхностные волны с частотой f, лежащей в интервале от 2,5 до 3,5 Гц (групповая скорость поверхностных волн с частотой 3 Гц близка к скорости движения сферы). На другом конце бассейна волны поглощались волногасителем; тем самым реализовывался режим бегущих поверхностных волн.

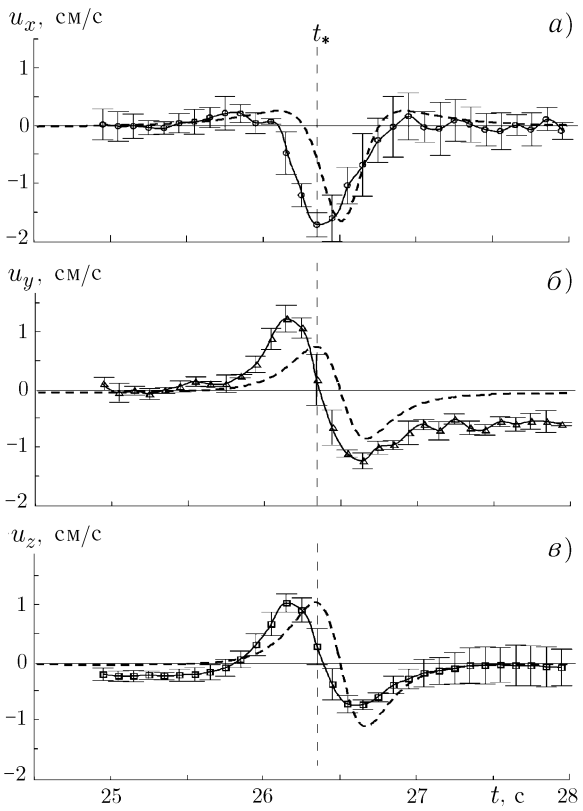

Рис. 3. Три компоненты скорости обтекания сферы: u_x (*а*), u_y (*б*) и u_z (*в*). Сплошная линия соответствует эксперименту, штриховая — теоретическому расчёту; t_* — время пересечения сферой плоскости, в которой расположены датчики скорости течения

1.3.3. На небольшом расстоянии от поверхности движущейся сферы были измерены три компоненты скорости её обтекания. Результаты измерения показаны на рис. 3 сплошными кривыми. Для соответствующих теоретических расчётов сфера заменялась находящимся на глубине h и ориентированным вдоль оси x диполем и его отображением относительно поверхности воды. В результате имеем хорошо известные выражения для компонент поля скоростей:

$$u_x = \frac{U_0 r^3}{2}\left(\frac{2x^2 - y^2 - (z-h)^2}{[x^2+y^2+(z-h)^2]^{5/2}} + \frac{2x^2 - y^2 - (z+h)^2}{[x^2+y^2+(z+h)^2]^{5/2}}\right),$$
$$u_y = \frac{U_0 r^3}{2}\left(\frac{3xy}{[x^2+y^2+(z-h)^2]^{5/2}} + \frac{3xy}{[x^2+y^2+(z+h)^2]^{5/2}}\right),$$
$$u_z = -\frac{U_0 r^3}{2}\left(\frac{3x\,(z-h)}{[x^2+y^2+(z-h)^2]^{5/2}} + \frac{3x\,(z+h)}{[x^2+y^2+(z+h)^2]^{5/2}}\right). \qquad (3)$$

Пунктирными кривыми на рис. 3 показаны результаты расчётов по формулам (3) для условий экспериментов. Из рисунка видно, что расчёты удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными.

Выражения для β_x, β_y легко получить из (3), подставляя $z = 0$:

$$\beta_x = (rk_*)^3\,\frac{2\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 - \tilde{h}^2}{(\tilde{x}^2+\tilde{y}^2+\tilde{h}^2)^{5/2}}\,, \qquad \beta_y = (rk_*)^3\,\frac{3\tilde{x}\tilde{y}}{(\tilde{x}^2+\tilde{y}^2+\tilde{h}^2)^{5/2}}\,,$$

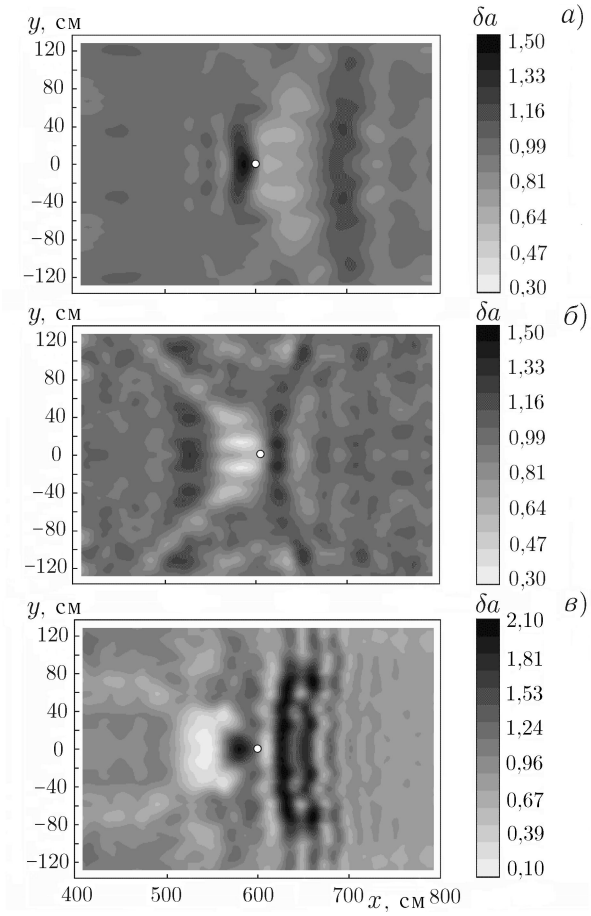

Рис. 4. Полученные с помощью акустических измерителей двумерные распределения амплитуды поверхностных волн при различных значенях их частоты: $f = 2{,}5$ Гц (*а*), $f = 2{,}9$ Гц (*б*), $f = 3{,}5$ Гц (*в*); $L = 6$ м

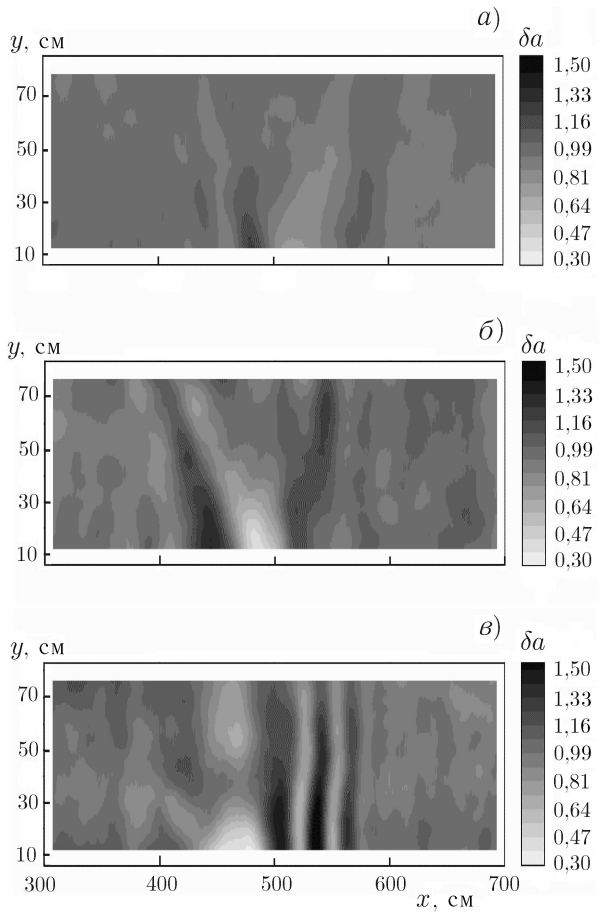

Рис. 5. Полученные с помощью видеосистемы двумерные распределения амплитуды поверхностных волн при различных значениях их частоты: $f = 2{,}5$ Гц (*а*), $f = 2{,}9$ Гц (*б*), $f = 3{,}5$ Гц (*в*); $L = 5$ м

где $\tilde{h} = hk_*$ — безразмерная глубина погружения сферы, rk_* — её безразмерный радиус.

1.3.4. Измерения двумерных распределений амплитуды поверхностных волн при различных значениях их частоты в поле обтекания движущейся сферы проводились на расстоянии $L = 6$ м от волнопродуктора акустическими измерителями и на расстоянии $L = 5$ м видеосистемой. На рис. 4*а–в* показаны результаты измерений пространственного распределения амплитуды поверхностных волн, выполненных с использованием ультразвуковых датчиков, на частотах $f = 2{,}5$, 2,9 и 3,5 Гц ($a_0 = 1{,}3$, 0,4 и 0,2 мм соответственно). На рис. 5*а–в* приведены аналогичные результаты измерений, полученные с помощью видеосистемы. Кружок на рис. 4 показывает сферу. Центр сферы находится в точке $x = 600$ см, $y = 0$ на рис. 4 и $x = 500$ см, $y = 0$ на рис. 5. Регистрация параметров поверхностных волн акустическими датчиками проводилась только с одной стороны от оси бассейна; вторая половина рис. 4 построена для наглядности путём симметричного отображения измеренных амплитуд относительно оси x. Для результатов измерений с помощью видеосистемы это не делалось, поскольку отсутствовали данные об изменчивости амплитуды поверхностных волн в области, непосредственно примыкающей к оси бассейна. В каждой экспериментальной реализации амплитуда поверхностных волн нормировалась на её среднее значение в области, представленной на рисунках.

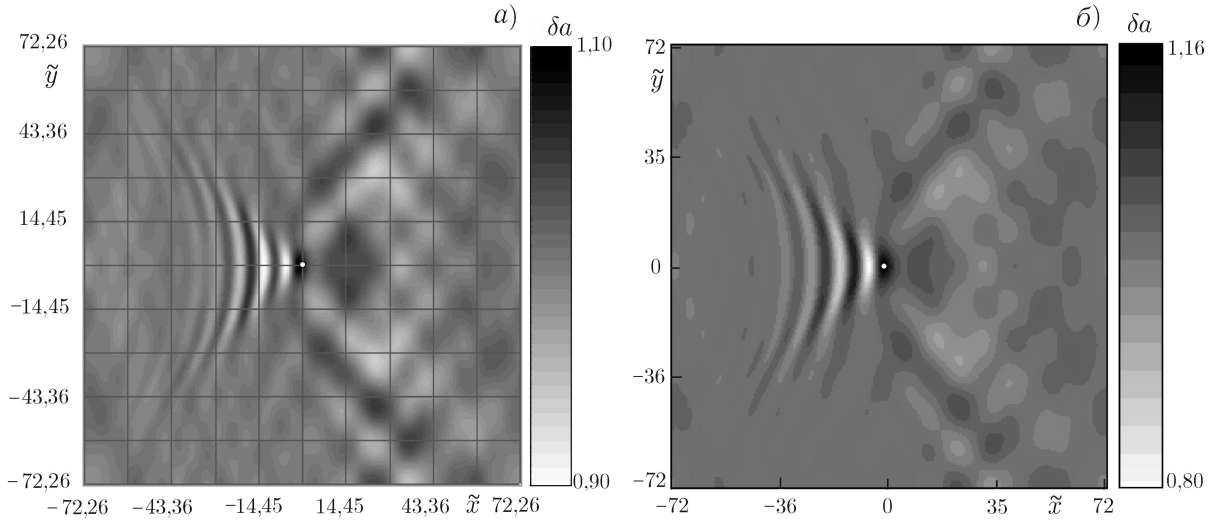

Рис. 6. Результаты теоретических расчётов, соответствующих экспериментальным данным рис. 4*а* для области 4×4 м: *а* — результат решения уравнения (1); *б* — уравнения (2)

В пространственном распределении амплитуды поверхностных волн есть области её уменьшения и увеличения. Основная область уменьшения амплитуды находится перед сферой для поверхностных волн с частотой $f = 2{,}5$ Гц, над сферой для поверхностных волн с $f = 2{,}9$ Гц и за сферой для поверхностных волн с $f = 3{,}5$ Гц. Это связано с тем, что групповая скорость поверхностных волн увеличивается с уменьшением f, и для поверхностных волн с $f = 2{,}5$ Гц, групповая скорость которых больше U_0, возмущения переносятся вперёд, а для поверхностных волн с $f = 3{,}5$ Гц, соответственно, в основном назад. Из рис. 4 и 5 видно, что с увеличением частоты поверхностной волны возрастает изменчивость её амплитуды. Это несколько не согласуется с теоретическими представлениями, т. к. групповая скорость поверхностных волн с частотой $f = 2{,}9$ Гц близка к скорости движения сферы, и для таких волн должны регистрироваться наибольшие значения диапазона изменения величины δa. Возможное объяснение состоит в том, что поверхностные волны с $f = 3{,}5$ Гц изначально генерировались с очень большой амплитудой, чтобы они не затухали при распространении до области измерений (коэффициент затухания для этих поверхностных волн в несколько раз больше, чем для других). Тогда эффекты, связанные с нелинейностью поверхностных волн приводят к быстрому увеличению их изменчивости [5]. Из сравнения рис. 4 и 5 видно, что структура аномалий поверхностного волнения и изменчивость амплитуды поверхностных волн на этих рисунках очень близки. Исключение составляют рис. 4*в* и 5*в*, на которых структура аномалий поверхностного волнения похожа, но диапазон изменения величины δa на рис. 4*в* больше. Можно высказать предположение, что это связано с отличием расстояния от волнопродуктора до области измерений на этих рисунках (6 м и 5 м), а изменчивость амплитуды нелинейных поверхностных волн нарастает очень быстро.

На рис. 6*а*, *б* показаны результаты расчётов, соответствующих экспериментальным данным рис. 4*а*, причём на рис. 6*а* показаны результаты, полученные путём решения уравнения (1), а на рис. 6*б* — уравнения (2). Рис. 6*а* и *б* близки, что говорит о допустимости использования (1) в расчётах, хотя характерные размеры неоднородного течения близки к длине поверхностной волны. Диапазон изменения величины δa при применении как (1), так и (2) оказался в четыре раза меньше, чем в эксперименте. Структура аномалий поверхностного волнения в теоретических расчётах и в эксперименте имеет некоторые схожие черты, но есть и существенные различия. Область максимальных значений δa в эксперименте несколько смещена в отрицательном направ-

лении оси x относительно аналогичной области, полученной в расчётах. Были проведены расчёты с увеличенной в 1,3 раза величиной a_0 (такую амплитуду поверхностные волны должны иметь непосредственно у волнопродуктора). Результаты расчётов практически совпали с представленными на рис. 4*а*, т. е. нелинейность поверхностных волн в данном случае не играет роли. В целом расчёты трансформации поверхностных волн с частотой 2,5 Гц показали довольно существенное отличие от экспериментальных данных. Выяснением причин этого различия предполагается заняться в дальнейшем.

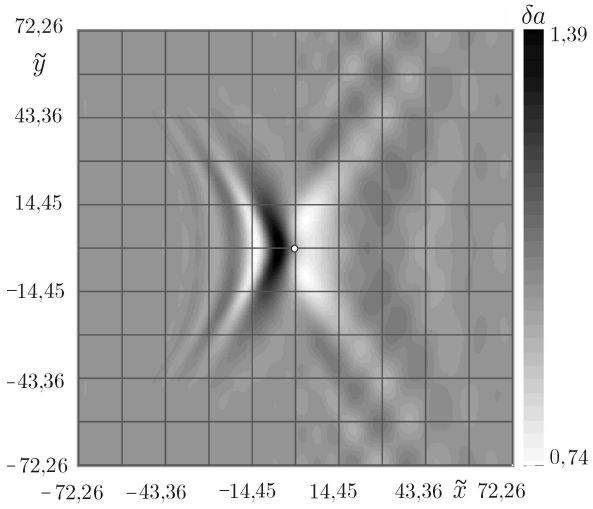

Рис. 7. Результаты теоретических расчётов, соответствующих экспериментальным данным рис. 4*б* для области 4 × 4 м

Групповая скорость поверхностных волн с частотой 2,9 Гц близка к скорости движения сферы, поэтому естественно ожидать больши́х изменений амплитуды таких поверхностных волн в поле даже слабого неоднородного течения вокруг движущейся сферы. Результаты численных расчётов подтверждают это предположение. На рис. 7 показаны результаты расчётов, соответствующие рис. 4*б* ($L = 6$ м). Диапазон изменения величины δa в расчётах и эксперименте незначительно отличается, структура поля изменения амплитуды поверхностных волн имеет много общего. Расчёты для меньших значений a_0 показали, что влияние нелинейности поверхностных волн в данном случае также незначительно, т. е. полученная существенная изменчивость характеристик поверхностных волн является следствием их близости к условию синхронизма.

Результаты теоретических расчётов на частоте 3,5 Гц, соответствующих экспериментальным данным рис. 4*в*, показаны на рис. 8*а* и для в два раза большего значения a_0 — на рис. 8*б*. В первом случае диапазон изменения δa получился меньше, чем в эксперименте, а во втором случае даже несколько больше. Структура пространственного распределения амплитуды поверхностных волн на рис. 8*б* близка к полученной в эксперименте, совпадают даже некоторые детали.

Результаты экспериментов и расчётов при различных амплитудах a_0 и частоте 2,9 Гц показаны на рис. 9 и 10 соответственно. На рис. 9*а* приведены распределения δa, полученные акустическими датчиками, при средней амплитуде поверхностных волн в области измерения 0,4 мм, на рис. 9*б* — при средней амплитуде поверхностных волн в области измерения 1,1 мм. Из рис. 9 видно, что с увеличением средней амплитуды поверхностных волн возрастает их относительная изменчивость, области существенного изменения a_0 смещаются вперёд (в положительном направлении оси x). Увеличение изменчивости амплитуды поверхностных волн вследствие эффектов, связанных с их нелинейностью, было получено ранее теоретически [5], смещение области аномалий поверхностного волнения вперёд связано, по-видимому, с увеличением групповой скорости поверхностных волн при возрастании их амплитуды. Результаты расчётов при больши́х значениях a_0, соответствующие рис. 9*б*, показаны на рис. 10. Влияние нелинейности поверхностных волн приводит к ещё большей (по сравнению с линейным случаем) изменчивости их амплитуды. Кроме того, структура аномалий поверхностного волнения изменяется в этом случае быстрее, чем для линейных поверхностных волн.

При проведении расчётов трансформации поверхностных волн с частотой $f = 2{,}9$ Гц исследовалось влияние на полученные результаты различных членов уравнения (1). Как уже отмечалось выше, нелинейность поверхностных волн может приводить к возрастанию изменчивости их ам-

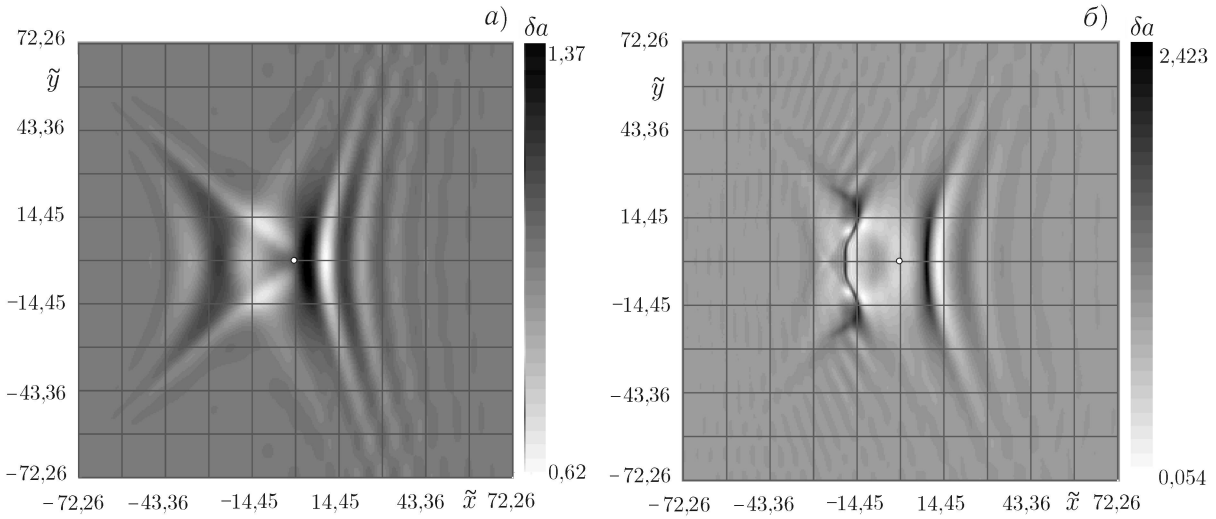

Рис. 8. Результаты теоретических расчётов, соответствующих экспериментальным данным рис. 4*в*; величина a_0 для рис. 8*б* в два раза больше, чем для рис. 8*а*

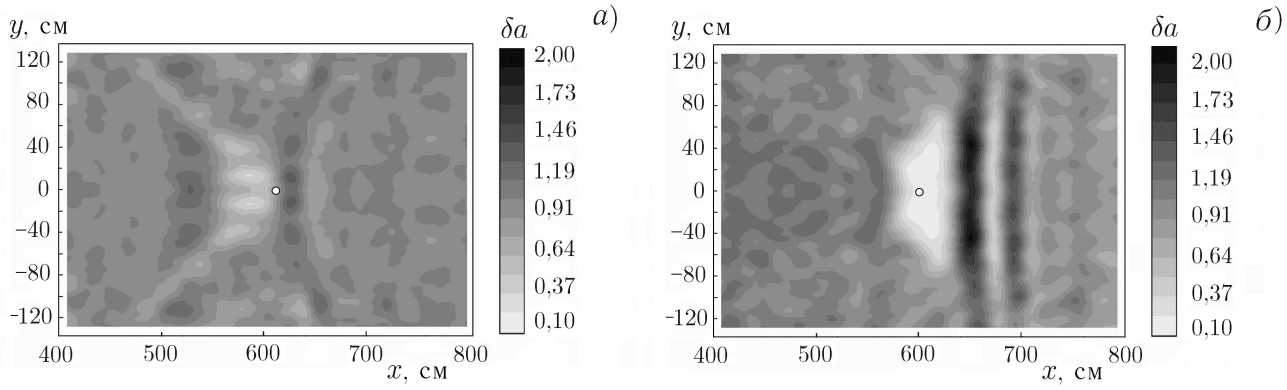

Рис. 9. Полученные с помощью акустических измерителей двумерные распределения амплитуды поверхностных волн при $L = 6$ м и частоте $f = 2{,}9$ Гц: *а* — средняя амплитуда поверхностных волн в области измерений равна 0,4 мм, *б* — средняя амплитуда поверхностных волн равна 1,1 мм

плитуды. Учёт капиллярных эффектов в поверхностных волнах и их нелинейной дисперсии слабо влияет на диапазон изменения δa, но изменяет структуру пространственного распределения амплитуды. При этом в отсутствие членов, отвечающих за нелинейную дисперсию, учёт капиллярных эффектов не приводит к изменению результатов расчётов. В отсутствие капиллярных эффектов ($T = 0$ в уравнении (1)) учёт нелинейной дисперсии поверхностных волн приводит к уменьшению мелкомасштабной изменчивости их амплитуды, небольшие области увеличения и уменьшения амплитуды исчезают, но положение основных аномалий поверхностного волнения сохраняется. Несколько неожиданным оказалось, что учёт капиллярных эффектов при сохранении нелинейной дисперсии (т. е. при учёте всех членов уравнения (1)) также приводит к мелкомасштабной изменчивости амплитуды поверхностных волн; в частности, вид аномалий поверхностного волнения при $x < 0$ на рис. 10 является следствием учёта эффектов капиллярности.

В заключение отметим, что поверхностные волны в зависимости от их частоты, амплитуды и времени распространения демонстрируют весьма разнообразный характер изменчивости в поле обтекания сферы. Поэтому особый интерес представляет детальное сопоставление экспериментальных данных с результатами теоретических расчётов.

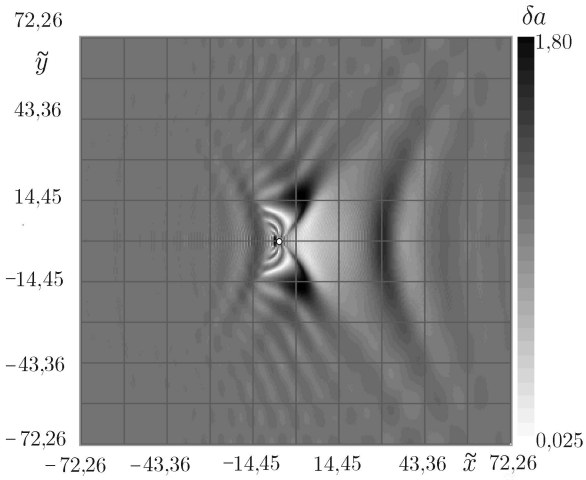

Рис. 10. Результаты теоретических расчётов для области 4 × 4 м, соответствующих экспериментальным данным на рис. 9*б*

Сопоставление результатов численных расчётов с экспериментальными данными показало, что предлагаемая модель трансформации поверхностных волн в поле неоднородного течения удовлетворительно описывает основные её закономерности. Вместе с тем существуют и расхождения в теоретических и экспериментальных результатах, в частности, изменение амплитуды поверхностных волн в расчётах, как правило, меньше, чем в эксперименте. Выяснение причин указанного расхождения будет предметом дальнейших исследований.

2. ИССЛЕДОВАНИЕ ВНУТРЕННИХ ВОЛН

2.1. Особенности устройства бассейна, в частности наличие температурной стратификации, масштабно моделирующей сезонный пикноклин океана, позволяют проводить исследования, направленные на изучение различных механизмов возбуждения и трансформации внутренних волн. В натурных условиях, в частности, при приближении пикноклина к поверхности внутренние волны могут возбуждаться движением дрейфующих айсбергов [10, 11].

Айсберги в районе арктического шельфа имеют средний линейный размер D по горизонтали порядка нескольких десятков метров, их осадка $T_{\text{а}}$, определяемая толщиной ледника в месте скола айсберга, равна 40÷80 м [10]. Скорости дрейфа айсбергов невелики и в среднем составляют порядка 0,1÷0,3 м/с, максимальные наблюдаемые скорости составляли 1,0÷1,5 м/с. Малые скорости дрейфа айсбергов позволяли при исследовании их физических моделей предполагать, что волновые процессы имеют второстепенное значение. Это допущение верно, если рассматривать приповерхностный слой океана как сплошную однородную среду, не учитывая вертикального изменения плотности.

В действительности айсберги дрейфуют под воздействием ветра и течений, пересекая сезонный пикноклин. В Арктике пикноклин выражен наиболее отчётливо. За счёт интенсивного речного стока и таяния льдов плотность верхнего распреснённого слоя воды значительно меньше плотности нижнего слоя, более солёного и холодного: разность плотностей составляет $\Delta\rho \sim 3$ кг/м^3. Глубина залегания пикноклина в зоне арктического шельфа невелика, порядка 20÷40 м, а в некоторых случаях резкий скачок плотности наблюдался на глубине 10 м.

Выполненные ранее лабораторные исследования доказали [11, 12], что дрейф айсбергов, имеющих в Арктике осадку порядка 80 м и малые скорости, проходит в условиях интенсивной генерации ими внутренних волн. Амплитуда волн в следе айсберга сравнима с толщиной пикноклина и может составлять 5÷7 м. При этом вынужденная система внутренних волн является практически плоской с углами раскрытия переднего фронта $60^\circ \le \beta \le 90^\circ$ и медленным спаданием амплитуды поперёк траектории движения айсберга (порядка 30 % на расстоянии $3D$).

При этом в натурных условиях генерация внутренних волн дрейфующим айсбергом происходит на фоне волновых процессов в пикноклине, вызванных иными природными факторами.

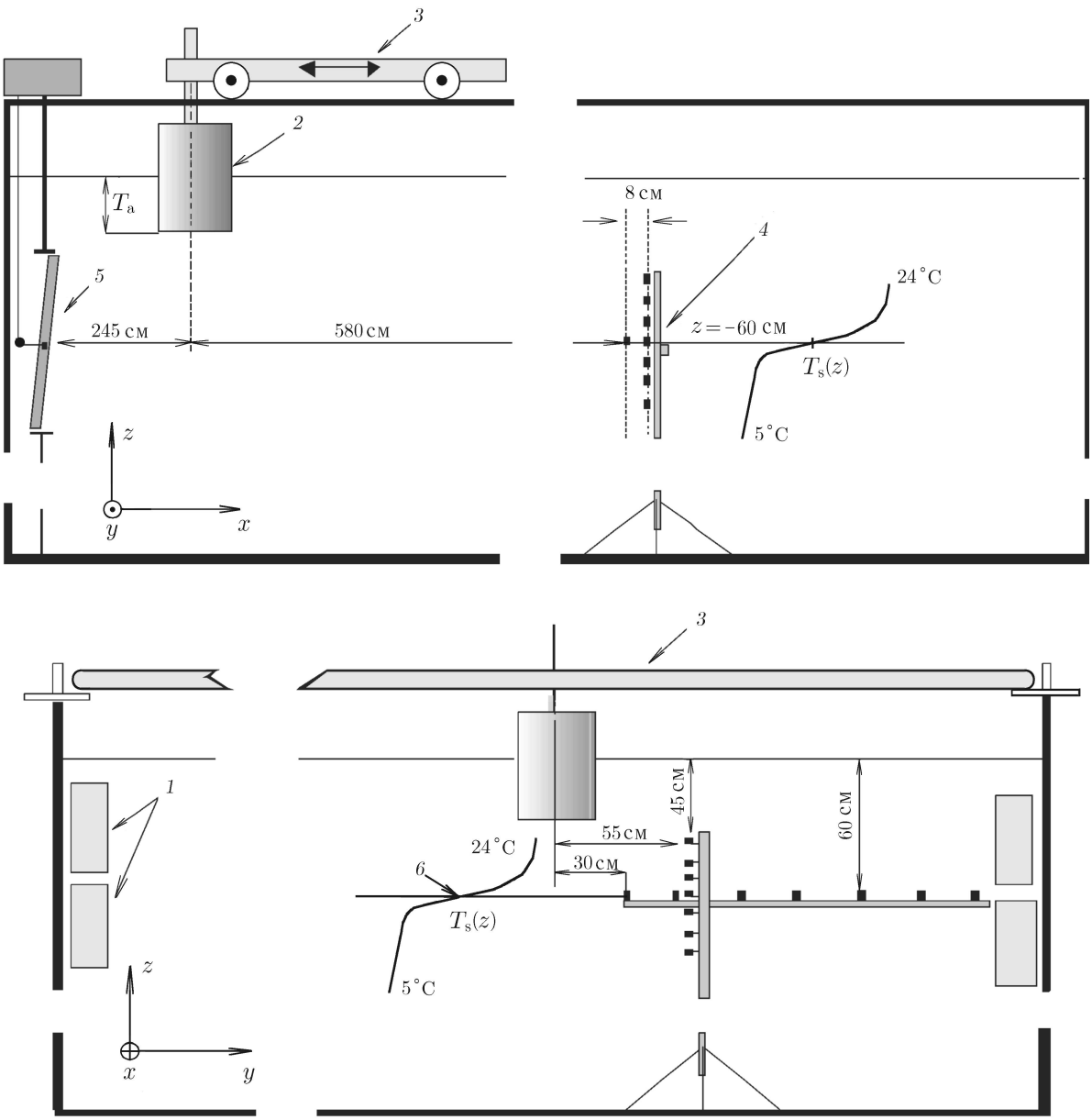

Рис. 11. Схема экспериментальной установки: *1* — теплообменники, *2* — модель, *3* — буксировочная тележка, *4* — система датчиков, *5* — волнопродуктор, *6* — зависимость температуры от глубины

Описанная выше конфигурация присоединённого волнового следа — практически плоские волны с относительно большой амплитудой и близость частотных диапазонов присоединённой и фоновой волновых систем образуют физические предпосылки к взаимодействию присоединённой волновой системы дрейфующего айсберга с фоновыми внутренними волнами.

Ранее подобная задача решалась лишь в линейной постановке для поверхностных волн применительно к корабельной гидродинамике [13]. Теоретически взаимодействие внутренних волн относительно большой амплитуды (порядка толщины пикноклина) с присоединённой системой внутренних волн за телом, равномерно движущимся в непрерывно стратифицированной жидкости, ранее не исследовалось. Условия моделирования внутренних волновых процессов в пикноклине, создаваемые в термостратифицированном бассейне, позволяют исследовать взаимодействие двух волновых систем экспериментальными методами.

2.2. Схема лабораторного оборудования, использованного в эксперименте по изучению влияния движения айсбергов на внутренние волны, показана на рис. 11. В частности, использовалась горизонтально однородная термостратификация с пикноклином на глубине $h_{\rm p} \approx 0{,}6$ м и перепадом температур $\Delta T_{\rm s} \sim 8 \div 10\,^{\circ}$C в слое с толщиной 0,25 м. Пикноклин моделировал приповерхностный слой шельфовой зоны с коэффициентом геометрического подобия $K_L = L_{\rm H}/L_{\rm M} = 100$, где $L_{\rm H}$ и $L_{\rm M}$ — характерные длины в натурных и модельных условиях.

Внутренняя фоновая волна генерировалась волнопродуктором *5* (см. рис. 11). Амплитуда $A_{\rm w}$ и частота $\omega_{\rm w}$ фоновых внутренних волн изменялись путём вариации максимального угла наклона пластины и частоты её колебаний.

Эксперименты проводились при частотах $\omega_{\rm w1} = 0{,}3N_{\rm max}$ и $\omega_{\rm w2} = 0{,}5N_{\rm max}$, где $N_{\rm max}$ — собственная частота внутренних волн на горизонте центра пикноклина. Волна имела вертикальную структуру 1-й моды. Амплитуда фоновых волн $A_{\rm w} = 0{,}015$ м была выбрана в соответствии с натурными параметрами с учётом масштабного коэффициента.

После формирования и измерения параметров системы фоновых волн вертикальный цилиндр буксировался в попутном или встречном направлении относительно направления распространения фоновой волны.

Буксировка модели *2* выполнялась с помощью тележки *3*, движущейся по бортам бассейна. Измерение параметров внутренних волн проводилось с помощью горизонтальной и вертикальной гирлянд термисторов (*4* на рис. 11). Показания вертикальной гирлянды, состоявшей из шести термисторов, расположенных в зоне пикноклина ($z = -(0{,}51 \div 0{,}76)$ м) с интервалом 0,05 м, позволяли исследовать модовый состав вынужденного волнового поля. Горизонтальная гирлянда из восьми термисторов с интервалом 0,1 м располагалась перпендикулярно траектории движения цилиндра на глубине центра пикноклина $h_{\rm p}$. Первый датчик находился на расстоянии 0,3 м от оси движения модели, что позволяло полностью восстанавливать волновую картину и анализировать характеристики внутренних волн.

Айсберг моделировался цилиндром с диаметром $D_{\rm m} = 0{,}4$ м и осадкой $T_{\rm a}$. Диапазоны осадки $T_{\rm a}$ и скорости буксировки $U_{\rm a}$ соответствовали данным натурных измерений параметров дрейфа айсбергов [10]: $0{,}5 \le T_{\rm a}/h_{\rm p} \le 1{,}5$; $0{,}25 \le U_{\rm a}/c_1 \le 1{,}5$, где c_1 — фазовая скорость 1-й внутренней моды в длинноволновом пределе. Указанные диапазоны относительной осадки и скорости айсберга соответствовали режимам генерации 1-й и 2-й мод внутренних волн.

По данным лабораторного эксперимента длина внутренней волны в следе составляла $\lambda = 3$ м, что соответствует натурным значениям $\lambda = 300$ м (или $(4 \div 8)\,D$, где D — характерный поперечный размер айсберга). Согласно линейной теории взаимодействия регулярных фоновых волн и волн в следе за телом [13], при $\lambda/D > 1{,}5$ размеры тела практически не оказывают влияния на параметры суммарной волновой системы.

2.3. Были получены зависимости амплитуды волн от частоты фоновых волн $\omega_{\rm w}$, характеристик движения модели айсберга (скорости $U_{\rm a}$ и заглубления $T_{\rm a}$), а также направления движения фоновой волновой системы относительно направления движения модели. На рис. 12 приведены временны́е зависимости фоновой структуры волнового поля в следе за моделью по данным горизонтальной гирлянды датчиков.

Амплитуда волн зависела от соотношения скорости буксировки цилиндра $U_{\rm a}$ и фазовой скорости фоновой волны $c_{\rm w}$, отношение $c_* = U_{\rm a}/c_{\rm w}$ играло роль резонансного параметра.

Соотношение скоростей модели и волн не является критическим при их встречном движении, когда относительная скорость двух волновых систем равна сумме $U_{\rm a}$ и $c_{\rm w}$. Это обеспечивает сверхкритический режим генерации волн, в результате чего волновая система имеет стационарный характер во всём диапазоне исследуемых скоростей цилиндра $U_{\rm a}$ (см. рис. 12*a*; пунктирные линии на рисунке характеризуют границы возмущений, вносимых моделью айсберга).

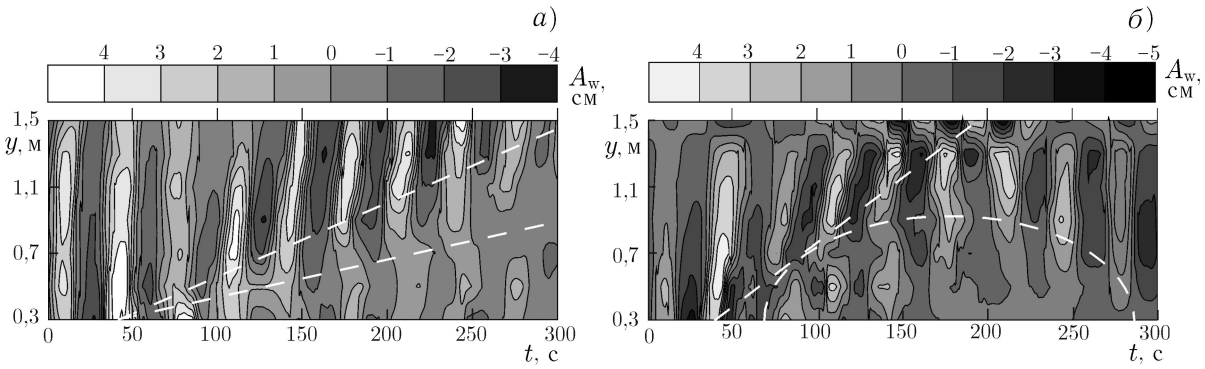

Рис. 12. Структура волнового следа за цилиндром при $T_a/h_p = 1$, $U_a/c_1 = 1$, $U_a/c_w = 0{,}8$ в случае встречного (*а*) и попутного (*б*) движения модели и фоновых волн

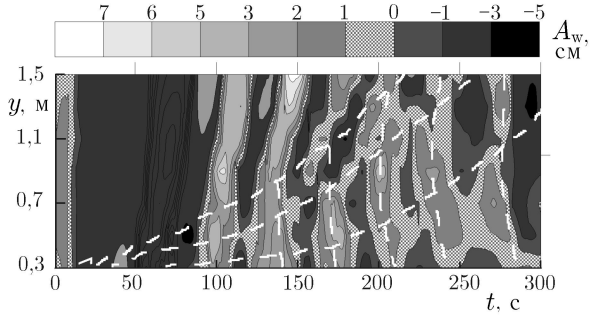

Рис. 13. Структура волнового следа при попутном движении модели и фоновых волн при $T_a/h_p = 1{,}2$, $U_a/c_1 = 2$, $U_a/c_w = 1{,}6$

При движении тела на попутном фоновом волнении, когда относительная скорость волновых систем равна разности U_a и c_w, соотношение этих скоростей имеет существенное значение. В случае близких значений U_a и c_w процесс формирования стационарной фазовой картины суммарной волновой системы требует большего времени. Для $c_* < 1$ волновая картина, фиксируемая измерительной системой, установленной на расстоянии 7 м от волнопродуктора, является явно нестационарной (см. рис. 12*б*). При дальнейшем росте скорости модели ($U_a > c_w$) фоновые волны движутся медленнее тела, и возникает движение, похожее на движение при встречном волнении. В этом случае наблюдалась стационарная картина волнового поля (см. рис. 13), характерная для сверхкритического режима движения тела относительно фоновой волны.

При $U_a = 1{,}25c_1 = c_w$, относительном заглублении модели $T_a/h_p = 0{,}83$ и встречном движении модели и фоновых волн в ходе экспериментов была получена нетипичная для линейной волновой теории фазовая структура. В частности, наблюдалось существенное уменьшение амплитуды фоновой волны вне спутного следа (рис. 14*а, б*). Следует отметить, что в данном случае соотношение скорости движения тела и фазовой скорости 1-й моды $U_a/c_1 = 1{,}25$ характерно для случаев распространения нелинейных волн в жидкости конечной глубины (или в слоях конечной толщины в стратифицированной жидкости). Поскольку во всех остальных случаях ослабление фоновых волн вне волнового следа за телом не наблюдалось, можно предположить, что подобная картина является результатом нелинейного взаимодействия волновых систем.

Для проверки нелинейной природы наблюдаемого эффекта была проведена серия дополнительных экспериментов при уменьшении амплитуды фоновой волны. Для меньших амплитуд фоновых волн эффект их гашения вне «корабельного» волнового следа не повторялся (см. рис. 14*в*), что говорит в пользу нелинейной природы межволнового взаимодействия.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведённые исследования показали эффективность использования бассейна для моделирования поверхностных и внутренних волновых явлений в верхних слоях океана.

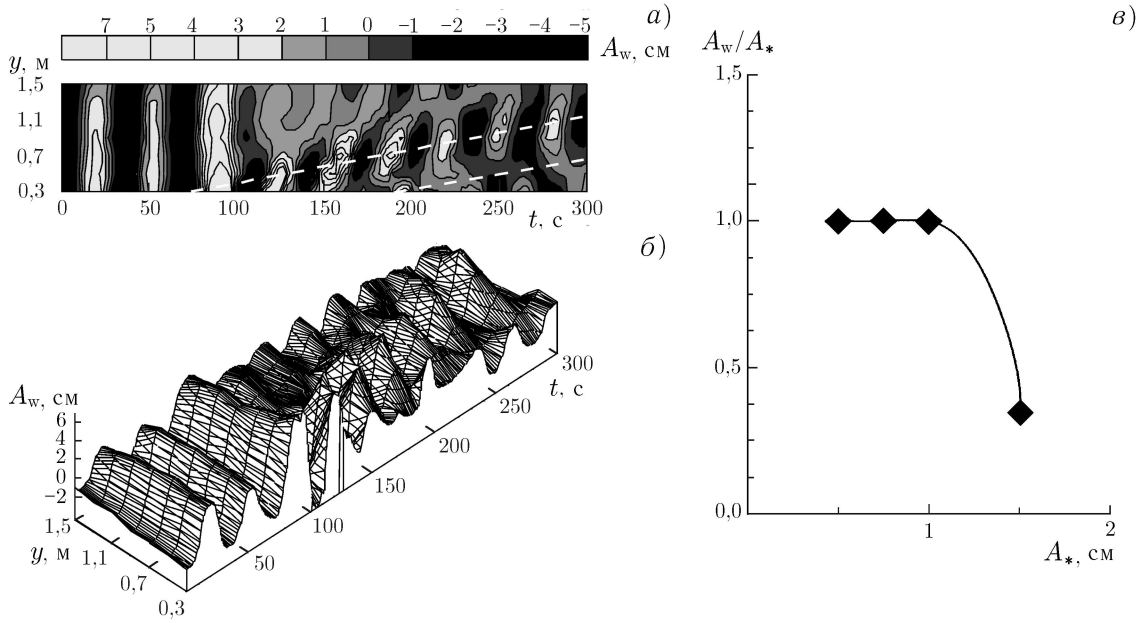

Рис. 14. Картина волнового поля в центре пикноклина при $T_a/h_p = 0{,}83$, $U_a/c_1 = 1{,}25$, $U_a/c_w = 1$: временна́я зависимость фазовой структуры волнового следа в центре пикноклина (*а*), трёхмерная картина временны́х изменений фазовой структуры по данным горизонтальной гирлянды датчиков (*б*), амплитуда A_w фоновой волны после прохождения тела (вне спутного следа) в зависимости от её первоначальной амплитуды A_* (*в*)

Проведены измерения пространственно-временно́й изменчивости амплитуды поверхностных волн в поле обтекания погружённой сферы и в её отсутствие. Во втором случае получены оценки затухания поверхностных волн и показано, что оно обусловлено наличием на поверхности упругой плёнки. В случае воздействия неоднородного поля обтекания сферы на поверхностные волны зарегистрированы области уменьшения и увеличения их амплитуды. С уменьшением частоты поверхностных волн области изменчивости их амплитуды смещаются относительно сферы в направлении её движения. Наибольшие изменения амплитуды зарегистрированы для поверхностных волн, групповая скорость которых близка к скорости движения сферы, или для более высокочастотных волн. С увеличением времени воздействия неоднородного течения на поверхностные волны области изменчивости их амплитуды расширяются, а диапазон изменения амплитуды увеличивается. Показано, что на начальной стадии развития аномалий поверхностного волнения определяющим является условие группового синхронизма, на последующих стадиях основную роль может играть нелинейность поверхностных волн. В этом случае регистрируется быстрое нарастание изменчивости амплитуды поверхностных волн.

Основные особенности трансформации поверхностных волн в поле обтекания погружённой сферы, полученные в проведённых для условий эксперимента теоретических расчётах, оказались аналогичными описанным в предыдущем абзаце. Величина изменения и структура двумерного распределения амплитуды поверхностных волн, как находящихся в групповом синхронизме со сферой, так и более высокочастотных, в теоретических расчётах и в эксперименте близки. Вместе с тем на более низких частотах изменение амплитуды поверхностных волн в расчётах меньше, чем в эксперименте. Кроме того, в ходе расчётов получено, что на той стадии развития аномалий поверхностного волнения, когда существенную роль играет нелинейность поверхностных волн, наблюдается быстрое изменение структуры аномалий. Учёт капиллярных эффектов в поверхностных волнах приводит к уменьшению масштабов изменчивости их амплитуды.

Экспериментально доказано, что фоновые внутренние волны с частотами, близкими к частотам внутренних волн в следе айсберга, приводят к значительной трансформации поля присоединённых волн.

Параметры результирующей волновой системы не зависят от соотношения характерных горизонтальных размеров модели и длины внутренней волны.

Критическими для процесса волнообразования при наличии фонового волнения являются фазовая скорость c_{w} и относительное направление фоновой волны. Суммарная волновая система является стационарной во всём диапазоне скоростей движения модели при встречном направлении фоновых волн. При попутном направлении характер суммарной волновой системы зависит от соотношения скорости буксировки U_{a} и фазовой скорости фоновых волн c_{w}. При $U_{\mathrm{a}} \leq c_{\mathrm{w}}$ система волн в следе имела выраженный нестационарный характер. При $U_{\mathrm{a}} > c_{\mathrm{w}}$ суммарная волновая система имела типично стационарную фазовую картину, т. к. в данном случае фоновые волны движутся медленнее модели, и возникает движение, похожее на движение при встречном волнении.

Кроме того, при $U_{\mathrm{a}} = 1{,}25c_1$ наблюдалось демпфирование фоновых волн вне волнового следа за моделью. Это говорит о наличии нелинейного взаимодействия фоновой и присоединённой волновых систем с перераспределением энергии между ними.

Таким образом, при известных средних линейных размерах айсбергов и параметрах фоновой гидрологии возможен прогноз структуры окружающего их поля вынужденных волн, а также критических скоростей дрейфа.

Авторы выражают искреннюю благодарность Д. П. Короткову и Б. В. Серину за помощь в проведении экспериментов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 02–05–65099), INTAS (грант № 01–0025), NOAA, ETL (Боулдер, США) и программы Президиума РАН «Нелинейная динамика и солитоны». Лабораторный эксперимент выполнен на установке № 01–19, финансируемой Министерством промышленности, науки и технологий РФ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арабаджи В. В., Богатырёв С. Д., Баханов В. В. и др. // Приповерхностный слой океана. Физические процессы и дистанционное зондирование: Сб. трудов / Под ред. В. И. Таланова, Е. Н. Пелиновского. Н. Новгород, 1999. Т. 2. С. 231.
2. Басович А. Я., Таланов В. И. // Известия АН СССР. ФАО. 1977. Т. 13, № 7. С. 766.
3. Басович А. Я., Баханов В. В., Богатырёв С. Д. и др. // Известия РАН. ФАО. 1997. Т. 33, № 3. С. 402.
4. Bakhanov V. V., Kazakov V. I., Kemarskaya O. N. // 1998 International Geoscience and Remote Sensing Symposium Proceedings. V. 5. P. 2 568.
5. Баханов В. В., Таланов В. И. // Приповерхностный слой океана. Физические процессы и дистанционное зондирование: Сб. трудов / Под ред. В. И. Таланова, Е. Н. Пелиновского. Н. Новгород, 1999. Т. 1. С. 81.
6. Bakhanov V. V., Vlasov S. N., Kazakov V. I. et al. // Progress in Nonlinear Science. International Conference Dedicated to the 100th Anniversary of A. A. Andronov. V. 2. Frontiers of Nonlinear Physics. Nizhny Novgorod, Russia, 2002. P. 201.
7. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 736 с.
8. Phillips O. M. Dynamics of the Upper Ocean. Cambridge Univ. Press, 1977. 336 p.

9. Монин А. С., Красицкий В. П. Явления на поверхности океана. Л.: Гидрометеоиздат, 1985. 375 с.
10. Васильева В. В., Писаревская Л. Г., Шишкина О. Д. // Известия РАН. ФАО. 1995. Т. 31, № 6. С. 842.
11. Бертрам В., Васильева В. В., Коростелёв В. Г., Писаревская Л. Г., Шишкина О. Д. // Известия РАН. ФАО. 1999. Т. 35, № 5. С. 689.
12. Шишкина О. Д. Экспериментальное моделирование генерации внутренних волн при дрейфе айсберга в приповерхностном пикноклине: Препринт ИПФ РАН № 547. Нижний Новгород, 2000. 24 с.
13. Войткунский Я. И. Сопротивление движению судов. Л.: Судостроение, 1988. 287 с.

Институт прикладной физики РАН,
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию
3 июня 2003 г.

MODELLING OF INTERNAL AND SURFACE WAVES OF THE REAL OCEAN IN THE LARGE THERMOSTRATIFIED TEST BASIN AT THE INSTITUTE OF APPLIED PHYSICS OF THE RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES

V. V. Bakhanov, S. N. Vlasov, V. I. Kazakov, O. N. Kemarskaya, E. V. Koposova, and O. D. Shishkina

We discuss the results of the studies of surface-wave transformation by inhomogeneous flows, performed in the basin of the Institute of Applied Physics of the Russian Academy of Sciences, and the results of modelling of the influence of iceberg motion on regular background internal waves in a subsurface pyknocline.

Transformation of surface waves in the streamline field of an immersed sphere is studied both experimentally and theoretically. It is shown that even weakly inhomogeneous flows can cause noticeable changes in the surface-wave field. The sizes of the spatial region in which the characteristics of the surface waves are changed considerably exceed the sizes of the inhomogeneous-flow region. It is found that the nonlinearity of the surface waves leads to an increase in the variability of the surface-wave amplitude in a broad frequency range. The proposed theoretical model describes well the experimentally obtained main features of the transformation of nonlinear surface wave in the inhomogeneous-flow field.

It is proved experimentally that background internal waves with frequencies close to those of internal waves in the iceberg wake lead to a considerable transformation of the field of attached waves. The parameters of the resulting wave system are independent of characteristic horizontal sizes of the iceberg model and the length of the internal wave. The total wave system is stationary in the entire velocity range of the model in the case of counterpropagation of the background waves. If the background waves copropagate, then the character of the wave system depends on the relationship between the towing velocity and the phase velocity of the background waves. In particular, the wave system in the wake can have both a pronounced nonstationary character and a typical stationary phase pattern.

УДК 551.463

ЛУЧЕВОЙ ХАОС ПРИ ДАЛЬНЕМ РАСПРОСТРАНЕНИИ ЗВУКА В ОКЕАНЕ

А. Л. Вировлянский

Для описания хаотического поведения лучевых траекторий в глубоководных акустических волноводах на трассах длиной до 3÷5 тысяч километров разработан приближённый аналитический подход. Динамика лучей исследована с помощью гамильтонова формализма с использованием канонических переменных действие—угол. Использована реалистическая модель волновода с флуктуациями показателя преломления, обусловленными случайным полем внутренних волн. Указан малый параметр задачи, позволяющий линеаризовать стохастические уравнения Гамильтона (лучевые уравнения) и аппроксимировать флуктуирующую компоненту переменной действия винеровским случайным процессом, представляющим простейшую модель диффузии. Стохастическая лучевая теория, базирующаяся на этом приближении, использована для анализа свойств времён прихода лучей, т. е. времён пробега звуковых импульсов вдоль отдельных лучей, соединяющих источник и приёмник. Дано количественное объяснение эффекта разбиения времён прихода хаотических лучей на компактные кластеры.

ВВЕДЕНИЕ

Возможность дальнего распространения звука в океане (на расстояния порядка сотен и тысяч километров) обусловлена существованием подводного звукового канала — естественного волновода, удерживающего захваченные им волны от взаимодействия с сильно поглощающим дном [1–3]. Теоретическое описание акустических полей в подводных волноводах базируется на решении обычного волнового уравнения, причём вследствие медленности гидродинамических процессов в морской воде зависимость скорости звука от времени можно учитывать квазистатически, т. е. работать в приближении «замороженной» среды. Во многих случаях основной интерес представляет вклад волн, которые не взаимодействуют не только с дном, но и с поверхностью (многократные отражения от случайной движущейся поверхности воды разрушают когерентность сигналов), и задача сводится к анализу волновых полей в чисто рефракционном волноводе.

Дополнительное упрощение связано с тем, что все неоднородности в толще морской воды сильно вытянуты по горизонтали, и их характерные размеры в горизонтальной плоскости обычно на два порядка превосходят вертикальные масштабы. Поэтому горизонтальной рефракцией волн часто можно пренебречь [1–3]. В этом приближении задача становится двумерной, и скорость звука задаётся функцией $c(r,z)$, зависящей от дистанции r и глубины z. В типичных моделях волноводов эта функция представлена в виде

$$c(r,z) = c_0(r,z) + \delta c(r,z), \tag{1}$$

где $c_0(r,z)$ — невозмущённое поле скорости звука, плавно зависящее от обеих координат, $\delta c(r,z)$ — малое возмущение, описывающее флуктуации параметров среды (примеры c_0 и δc приведены ниже, в разделе 1.2) [2, 4]. В задачах о дальнем распространении звука в океане основным фактором, определяющим возмущение $\delta c(r,z)$, считается случайное поле внутренних волн [2]. По порядку величины отношение $|\delta c|/c_0$ равно $5\cdot 10^{-4}$. Пространственные масштабы функции $\delta c(r,z)$ (от единиц до десятков километров по горизонтали и от десятков до сотен метров по вертикали), как правило, велики по сравнению с длиной волны.

В опытах по дальнему распространению звука в океане используются звуковые импульсы на частотах порядка 100 Гц (ширина полосы обычно варьируется от одной десятой до половины несущей частоты). Анализ временнóй структуры принимаемых сигналов обычно выполняется в рамках приближения геометрической оптики. К сожалению, вопрос о границах применимости данного приближения исследован недостаточно. Тем не менее численное моделирование полей в подводных акустических волноводах свидетельствует, что лучевая теория позволяет правильно предсказывать многие важные характеристики принимаемых сигналов даже на трассах протяжённостью до нескольких тысяч километров [5–8]. Многие результаты, полученные в приближении геометрической оптики, неплохо согласуются как с расчётами, выполненными методом параболического уравнения, так и с данными натурных экспериментов.

В приближении геометрической оптики принятый сигнал моделируется суперпозицией звуковых импульсов, каждый из которых прошёл по одному из лучей, соединяющих источник и приёмник. Времена прихода данных импульсов — времена прихода лучей — в значительной мере определяют структуру импульсного сигнала, поэтому их изучение является одной из главных задач подводной акустики.

Лучевая траектория в волноводе представляет собой осциллирующую кривую, форма (топология) которой характеризуется идентификатором $\pm M$. Знак идентификатора соответствует знаку угла выхода луча из источника, M — число точек поворота на пути из источника в приёмник.

Замечательным свойством сигналов в глубоководных акустических волноводах, которое было известно из экспериментов уже в конце 70-х годов, является неожиданно высокая стабильность начальной части принятого сигнала, формируемой крутыми лучами, вышедшими из источника под большими углами. Звуковые импульсы, приходящие по крутым лучам, устойчиво разрешаются во времени, а их времена прихода с хорошей точностью могут быть рассчитаны с использованием невозмущённой модели среды, не учитывающей флуктуации δc [9]. Поэтому в схемах акустического мониторинга температурных полей океана времена прихода лучей рассматриваются в качестве основных входных параметров при решении обратных задач [9–11].

Наблюдаемая в экспериментах устойчивость времён прихода лучей наводила на мысль, что вариации лучевых траекторий (по крайней мере, для крутых лучей) под влиянием флуктуаций показателя преломления относительно невелики. Популярная в 80-е и 90-е годы теория Дашена и Флатте [2], созданная для описания статистики сигналов в подводных волноводах, базировалась на гипотезе о том, что невозмущённый луч расщепляется на пучок микролучей с близкими траекториями. Смысл этого утверждения заключается в следующем. Если в невозмущённом волноводе все лучи, попадающие в точку наблюдения, обычно имеют разные идентификаторы, то в возмущённом волноводе (общее число принимаемых лучей там резко увеличивается) появляются большие группы лучей с одинаковым идентификатором, т. е. с одинаковой топологией. Все траектории, входящие в каждую такую группу, мало отклоняются от невозмущённого луча с соответствующим идентификатором.

Однако во второй половине 90-х годов, когда появление мощных компьютеров позволило моделировать динамику лучей в реалистичных моделях волноводов, выяснилось, что ситуация на самом деле гораздо сложнее и интереснее. Слабые неоднородности показателя преломления, обусловленные влиянием случайных внутренних волн, вызывают хаотическое поведение большинства лучевых траекторий, в том числе и крутых [5, 6]. В механике аналогичное явление носит название динамический хаос [12]. Хаотические лучи отличаются сильной неустойчивостью: для траекторий с очень близкими начальными условиями разность вертикальных координат Δz с увеличением расстояния r растёт по экспоненциальному закону:

$$\Delta z \propto \exp(\lambda r). \tag{2}$$

Такой рост наблюдается лишь до тех пор, пока величина Δz остаётся малой по сравнению со всеми характерными масштабами среды в поперечном сечении волновода. Заметим также, что (2) описывает лишь среднеквадратичный рост разности координат, и его нельзя трактовать как монотонный рост ширины лучевой трубки. В условиях лучевого хаоса количество лучей, попадающих в точку наблюдения, также растёт по закону (2). Показатели Ляпунова λ обычно имеют величину порядка 1/100 км$^{-1}$ для пологих лучей и 1/300 км$^{-1}$ для крутых лучей. На дистанциях, превышающих 1 000 км, лучевой хаос уже хорошо развит, и при построении статистической модели сигнала это явление необходимо принимать во внимание.

Следует подчеркнуть, что хаотическая динамика траекторий наблюдается в отдельных реализациях поля скорости звука, т. е. в детерминированных моделях среды. Лучевой хаос имеет место не только в случае, когда неоднородность является реализацией некоторого случайного поля, но даже при наличии простого периодического возмущения [13, 14].

Возникает естественный вопрос о том, каким образом хаотическая динамика лучей сочетается со стабильностью начальной части принимаемого сигнала. Ответ дают результаты численного моделирования. Оказывается, времена прихода хаотических лучей разбиваются на компактные кластеры, причём каждый кластер формируется лучами с одинаковым идентификатором. Центр кластера близок к времени прихода невозмущённого луча с таким же идентификатором. Разбиение времён прихода на кластеры впервые было обнаружено в работе [15] (см. также [16, 17]).

Отметим два следующих важных момента. Во-первых, число лучей с одинаковым идентификатором на длинной трассе может быть гигантским. Оно растёт по тому же экспоненциальному закону, что и Δz в (2). Во-вторых, несмотря на близость времён прихода этих лучей, их траектории в промежуточных точках трассы могут существенно расходиться в пространстве. Например, минимум одной из них и максимум другой могут наблюдаться при близких значениях координаты r. Таким образом, упомянутая выше гипотеза Дашена и Флатте на длинных трассах не выполняется: хотя невозмущённый луч действительно разбивается на пучок микролучей, траектории последних отнюдь не являются близкими.

В данной статье изложен метод приближённого аналитического описания хаотической динамики лучей, основанный на использовании гамильтонова формализма в канонических переменных действие—угол (I, θ). Эти переменные широко применяются для анализа финитных движений частиц в механике и исследования осцилляций лучевых траекторий в волноводах [13, 18]. Переменная действия I определяет амплитуду и длину цикла траектории, а угловая переменная θ (её не следует путать с геометрическим углом скольжения луча) задаёт положение текущей точки луча внутри заданного цикла. Можно сказать, что угловая переменная играет роль фазы осциллирующей траектории.

Малость флуктуаций скорости звука приводит к тому, что даже на длинных трассах изменение переменной действия I остаётся малым по сравнению с характерным масштабом функции, выражающей зависимость невозмущённого гамильтониана от I. Наличие этого малого параметра, который трудно «разглядеть», работая в стандартных переменных импульс—координата, позволило построить простую теорию возмущений для приближённого расчёта статистических характеристик лучей.

Основное внимание мы уделяем исследованию кластеров времён прихода лучей. Наш метод позволяет оценить ширину кластера и его сдвиг относительно времени прихода невозмущённого луча. Показано, что в реальных океанических волноводах этот сдвиг происходит в сторону малых времён, т. е. импульсы вдоль возмущённых лучей приходят чуть раньше, чем вдоль невозмущённых. Получен количественный критерий разрешения кластеров.

Из-за ограниченности объёма статьи при выводе некоторых формул использованы упрощающие предположения, которые не являются принципиальными и сделаны только для сокращения

выкладок. Часть формул приводится без вывода. Подробный вывод всех формул и анализ границ их применимости изложен в работах [19, 20].

1. СВЯЗЬ ВРЕМЁН ПРОБЕГА ЗВУКОВЫХ ИМПУЛЬСОВ ВДОЛЬ ХАОТИЧЕСКИХ И РЕГУЛЯРНЫХ ЛУЧЕЙ

1.1. Гамильтонов формализм для описания лучевых траекторий

В данной работе для простоты будем считать, что невозмущённое поле скорости звука в (1) не зависит от r, т. е. по всей трассе оно задаётся плавной функцией $c_0(z)$. Полагаем, что ось z направлена вниз и поверхность воды совпадает с плоскостью $z = 0$. Показатель преломления $n(r, z)$ равен $c_\mathrm{r}/c(r, z)$, где c_r — вспомогательная константа, которую в подводной акустике всегда можно выбрать таким образом, что $|c - c_\mathrm{r}| \ll c_\mathrm{r}$. При этом $n(r, z) = n_0(z) + \delta n(r, z)$, где $n_0(z) = c_\mathrm{r}/c_0(z)$, а $\delta n \approx -\delta c/c_\mathrm{r}$ — малое возмущение показателя преломления, ответственное за возникновение лучевого хаоса.

Для анализа лучевой структуры поля воспользуемся гамильтоновым формализмом [13, 21], в рамках которого лучевые траектории задаются уравнениями

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r} = \frac{\partial H}{\partial p}\,, \qquad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} = -\frac{\partial H}{\partial z}\,, \tag{3}$$

где

$$H = -\sqrt{n^2 - p^2}\,. \tag{4}$$

Функцию H можно трактовать как гамильтониан некоторой (воображаемой) механической системы. Фигурирующий в (3) и (4) параметр траектории p является аналогом механического импульса, а расстояние r играет роль времени. Связь импульса и гамильтониана с углом скольжения луча χ даётся соотношениями

$$p = n \sin\chi, \qquad H = -n\cos\chi. \tag{5}$$

Время прихода луча выражается интегралом вдоль траектории:

$$t = \int \mathrm{d}s/c(r, z), \tag{6}$$

где $\mathrm{d}s$ — элемент длины лучевой траектории, и может быть представлено в виде

$$t = S/c_\mathrm{r}, \tag{7}$$

где

$$S = \int (p\,\mathrm{d}z - H\,\mathrm{d}r) \tag{8}$$

— так называемый эйконал, являющийся полным аналогом механического действия.

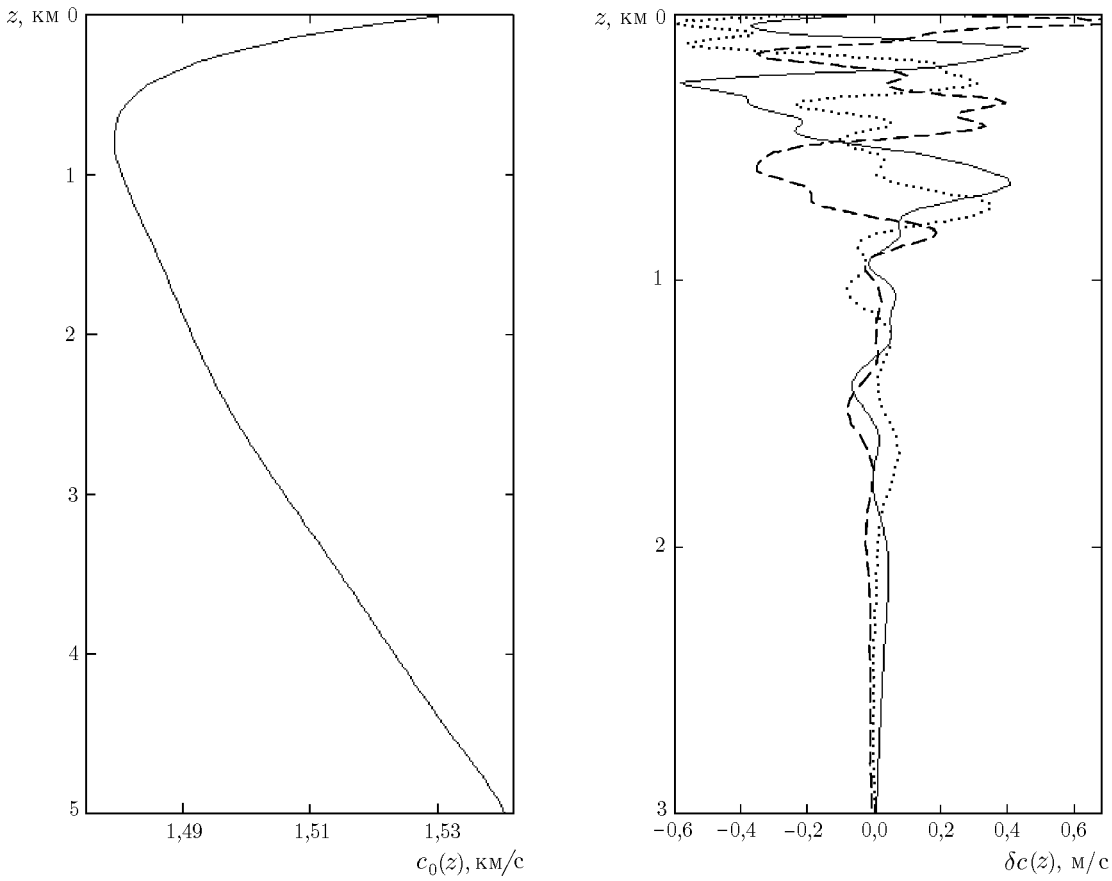

Рис. 1. Невозмущённый профиль скорости звука $c_0(z)$ (слева) и вертикальные профили возмущения $\delta c(r, z)$ на трёх разных дистанциях (справа)

1.2. Распределение приходов лучей на плоскости время—глубина

Для изучения свойств времён прихода лучей рассмотрим реалистичную модель глубоководного акустического волновода с невозмущённым профилем скорости звука $c_0(z)$, показанным в левой части рис. 1. Слабые флуктуации скорости звука $\delta c(r, z)$ вызваны влиянием случайного поля внутренних волн, статистика которых задана эмпирическим спектром Гарретта—Манка [2]. В каждой точке волновода среднее (по ансамблю неоднородностей) возмущение $\langle \delta c(r, z) \rangle = 0$. Для численного моделирования конкретных реализаций поля $\delta c(r, z)$ мы пользуемся методом, предложенным в работе [4]. Опуская детали (см. [19, 20], где эта модель волновода описана более подробно), отметим лишь, что среднеквадратичная амплитуда возмущения скорости $\delta c(r, z)$ вблизи поверхности равна 0,5 м/с и спадает с глубиной по закону $\exp(-z/L)$, где $L = 0{,}66$ км. Спектр зависимости возмущения от горизонтальной координаты r сосредоточен в интервале пространственных частот от $2\pi/100$ км$^{-1}$ до $2\pi/4$ км$^{-1}$. В правой части рис. 1 изображены вертикальные профили поля $\delta c(r, z)$ на трёх разных дистанциях. В такой модели волновода лучи ведут себя хаотически.

Путём численного решения уравнений Гамильтона (3) рассчитаны траектории 48 000 лучей, выходящих из точечного источника, расположенного на оси волновода (т. е. в миниму-

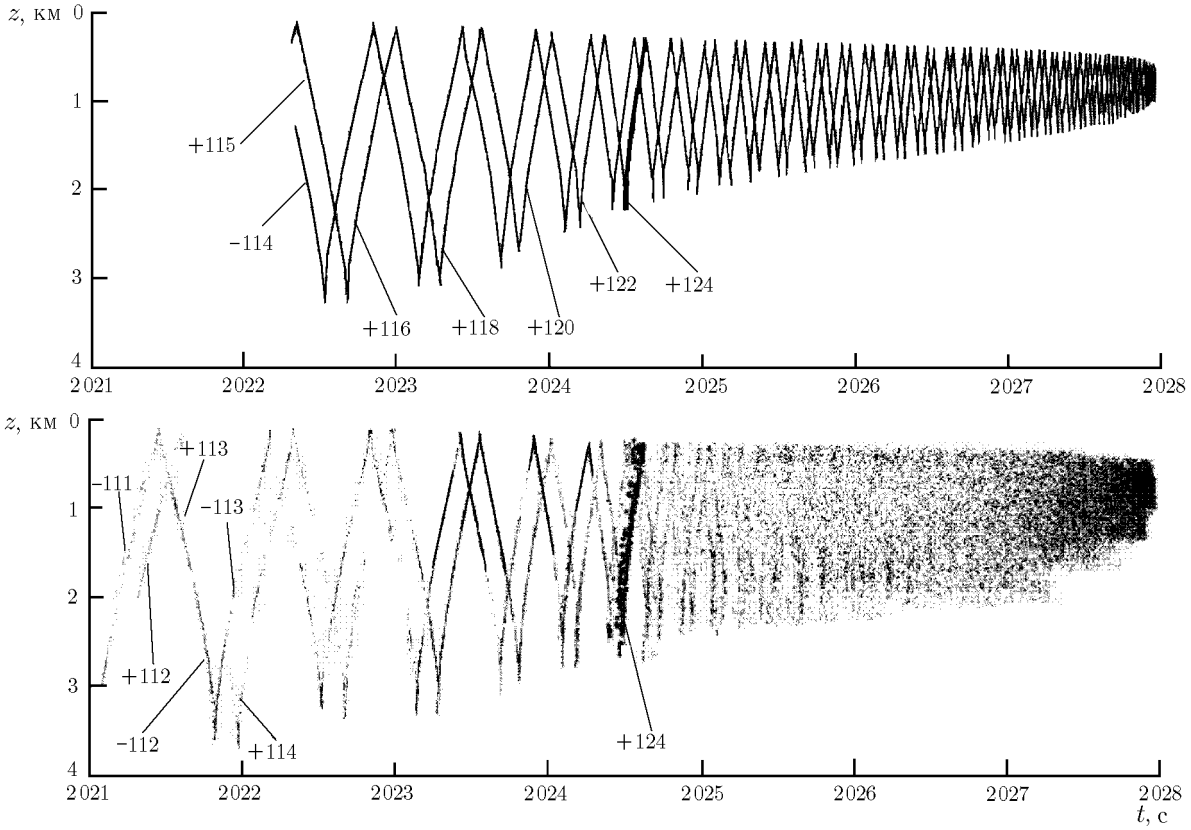

Рис. 2. Приходы лучей на плоскости время—глубина (t—z-диаграмме) на дистанции 3 000 км в невозмущённом (вверху) и возмущённом (внизу) волноводах. Точечный источник звука расположен на глубине 0,78 км. Указаны идентификаторы лучей, формирующие некоторые сегменты диаграмм. Приходы лучей с идентификатором +124 на верхнем графике выделены жирной линией, а на нижнем — жирными точками

ме $c_0(z)$) на глубине $z_s = 0{,}78$ км. Начальные импульсы p_0 этих лучей равномерно заполняют интервал, отвечающий диапазону углов скольжения $-12° < \chi < 12°$. Траектории ещё 16 000 лучей, вышедших из того же источника и с углами скольжения, лежащими в том же диапазоне, рассчитаны в невозмущённом волноводе ($\delta c = 0$).

На основе этих данных были построены так называемые t—z-диаграммы для дистанции 3 000 км, показанные на рис. 2. Каждая точка на t—z-диаграмме изображает приход луча на плоскости время—глубина. На верхнем графике (невозмущённый волновод) точки образуют две непрерывные кусочно-ломаные линии, одна из которых формируется лучами, вышедшими из источника вверх, а другая — лучами, вышедшими вниз. Зависимость между временем прихода луча и его вертикальной координатой в возмущённом волноводе (нижний график) также выражается непрерывной функцией. Однако в условиях лучевого хаоса зависимость между t и z на длинных трассах становится настолько сложной, что рассматриваемый веер лучей оказывается недостаточно плотным для визуализации этой непрерывности. Случайный разброс точек на t—z-диаграмме является индикатором лучевого хаоса.

На рис. 2 видно, что начальные участки t—z-диаграмм, формирующиеся крутыми лучами, в возмущённом и невозмущённом волноводах не слишком сильно отличаются. При наличии возмущения отрезки t—z-диаграммы, расположенные слева, расплываются сравнительно мало и не перекрываются. Этот факт, отражающий устойчивость начальной части принимаемого сигнала, хорошо известен и наблюдался как в численных, так и в натурных экспериментах [5–7].

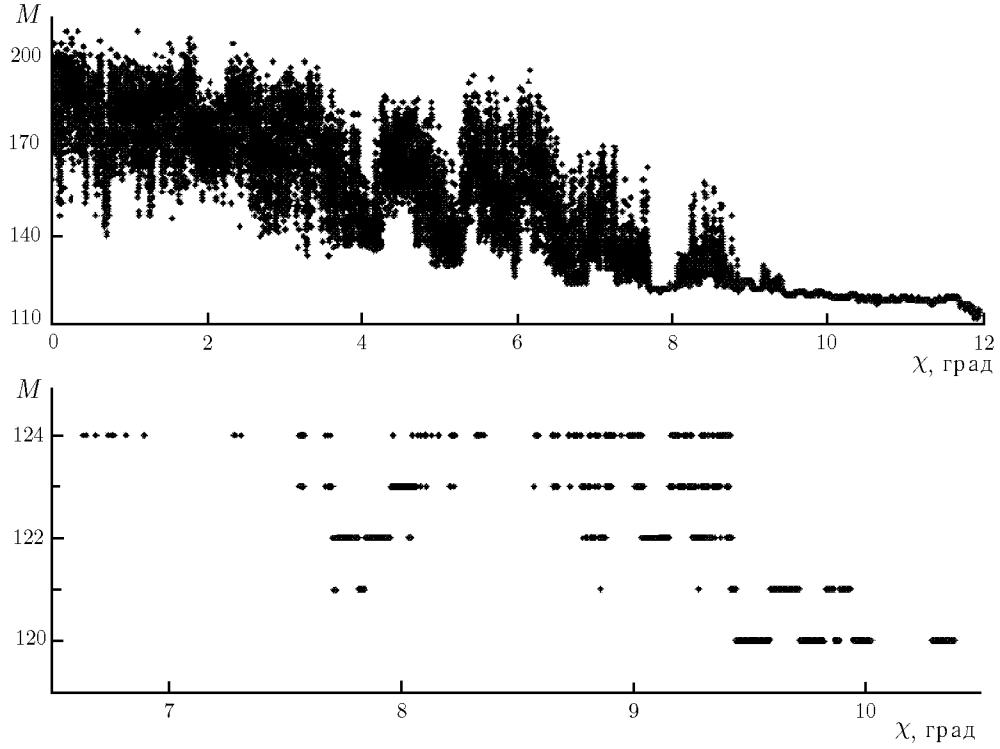

Рис. 3. Зависимость числа точек поворота луча на дистанции 3 000 км в возмущённом волноводе от угла выхода луча из источника (вверху) и увеличенное изображение части верхнего графика (внизу)

1.3. Связь между временами прихода лучей и топологиями лучевых траекторий

В типичных глубоководных океанических волноводах длина цикла луча растёт с ростом угла выхода из источника. Поэтому на фиксированном расстоянии от источника крутые лучи успевают совершить меньшее число осцилляций, чем пологие, и, соответственно, идентификаторы крутых лучей имеют меньшие значения параметра M. Каждый сегмент (отрезок) t—z-диаграммы в невозмущённом волноводе формируется лучами с одинаковым идентификатором. В возмущённом волноводе тем же свойством обладают лучи, формирующие чуть расплывшиеся, но всё же ясно различимые сегменты, наблюдаемые в начальной части диаграммы. На рис. 2 значения идентификаторов (выборочно) указаны около соответствующих сегментов. Отметим, что времена прихода лучей на фиксированной дистанции в среднем растут с ростом M.

Как показывают численные расчёты, даже на очень длинных трассах времена прихода возмущённого и невозмущённого лучей с одинаковыми идентификаторами, соединяющих одни и те же точки волновода, оказываются неожиданно близкими. В особенности это относится к крутым лучам и проявляется в отмеченной выше устойчивости сегментов t—z-диаграммы с наименьшими значениями M. Данное явление удивительным образом сочетается с отмечавшейся ранее крайне высокой чувствительностью лучей к вариациям начальных условий. На рис. 3 показана зависимость числа точек поворота луча M на дистанции 3 000 км от угла выхода из источника χ. Из рис. 3 видно, что два луча с близкими начальными условиями могут иметь разное число точек поворота, т. е. совершенно разную топологию. Сказанное относится не только к пологим, но и к менее хаотическим крутым лучам. На нижней части рис. 3 видно, что интервалы углов выхода

лучей с траекториями, насчитывающими от 120 до 124 точек поворота (как видно на рис. 2, такие лучи формируют устойчивые неперекрывающиеся сегменты), существенно перекрываются.

Несмотря на схожесть t—z-диаграмм, зависимости времён прихода лучей от углов выхода из источника в невозмущённом и возмущённом волноводах кардинально различаются. Если мы выберем некоторый невозмущённый луч и начнём монотонно изменять угол его выхода χ, то соответствующая точка на t—z-диаграмме будет монотонно двигаться по кусочно-ломаной линии, переходя от одного сегмента к другому. Действуя аналогичным образом в возмущённом волноводе, мы увидим, что точка, изображающая луч на t—z-диаграмме, хаотически «скачет» в плоскости время—глубина. В этом хаосе, однако, есть нетривиальная закономерность: в начальной части t—z-диаграммы точка случайным образом «прыгает» от одного невозмущённого сегмента к другому (не обязательно к соседнему) и обратно, а отнюдь не заполняет (более или менее равномерно) некоторую область на плоскости время—глубина, как было бы естественно ожидать.

На рис. 2 связь между топологией и временем прихода луча ярко проявляется в наличии на нижнем графике сегментов с идентификаторами -111; ±112; ±113 и $+114$. На верхнем графике таких сегментов нет. Дело в том, что в невозмущённом волноводе их образуют лучи с углами выхода $|\chi| > 12^\circ$, которых в расматриваемом веере лучей нет. На нижнем графике лучи с указанными идентификаторами появились за счёт рассеяния на неоднородностях скорости звука. Таким образом, дополнительные сегменты, появившиеся из-за рассеяния на случайных неоднородностях, имеют регулярную форму и практически совпадают с невозмущёнными сегментами, отсутствующими на верхнем графике!

При регистрации сигнала точечным приёмником, расположенным на глубине z_0, времена прихода лучей определяются пересечениями t—z-диаграммы с горизонтальной линией $z = \mathrm{const}$. В невозмущённом волноводе пересечение с каждым сегментом диаграммы задаёт один луч. При наличии возмущения сегменты размываются, и, как следствие этого, вместо отдельных времён прихода мы получаем кластеры таких времён. На основании перечисленных выше свойств t—z-диаграмм сформулируем основные свойства кластеров.

(а) Каждый кластер формируется группой лучей с одним и тем же идентификатором.

(б) Центр кластера близок к времени прихода невозмущённого луча с соответствующим идентификатором.

(в) Количество хаотических лучей, формирующих кластер, экспоненциально растёт с дистанцией.

(г) Хотя формирующие кластер лучи имеют одинаковое количество точек поворота (одинаковые топологии) и близкие времена прихода, в промежуточных точках трассы их траектории могут существенно расходиться.

Разбиение времён прихода хаотических лучей на компактные кластеры впервые было обнаружено в работе [15] при расчёте хаотических траекторий в волноводе с периодическим возмущением (см. также [16, 17]).

Очень важен тот факт, что кластеры, формируемые крутыми лучами, не перекрываются. В опытах с короткими звуковыми импульсами это проявляется в разрешении приходов крутых лучей в начальной части принимаемого сигнала даже на очень длинных трассах (до 3÷5 тысяч километров [7, 8]). Давно было замечено, что времена прихода таких импульсов близки к временам прихода лучей, рассчитанных в рамках простой детерминированной модели среды, не учитывающей влияние внутренних волн [9]. Как уже говорилось во введении, раньше считалось, что при наличии случайных неоднородностей невозмущённый луч разбивается на пучок стохастических микролучей, траектории которых мало отличаются от исходной невозмущённой траектории [2]. Это, однако, противоречит свойству (г). Численные расчёты хаотических лучевых траекторий,

которые стали возможны с появлением в 90-е годы мощных персональных компьютеров, показали, что компактность кластеров вовсе не означает близости траекторий формирующих их лучей. Ниже изложена приближённая количественная теория кластеров времён прихода лучей (эта теория построена в работах [19, 20]) и явно указан параметр, определяющий условия их разрешения.

2. ОПИСАНИЕ ХАОТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ ЛУЧЕЙ В КАНОНИЧЕСКИХ ПЕРЕМЕННЫХ ДЕЙСТВИЕ—УГОЛ

2.1. Определение переменных действие—угол

Лучевые траектории в подводном акустическом волноводе представляют собой осциллирующие кривые. Для их описания (как и для описания колебаний механической частицы в потенциальной яме) наряду с переменными импульс—координата (p, z) удобно использовать канонические переменные действие—угол (I, θ) [13, 18]. Для определения последних рассмотрим невозмущённый волновод с гамильтонианом

$$H_0 = -\sqrt{n_0^2(z) - p^2}\,. \tag{9}$$

Согласно закону Снеллиуса (аналог закона сохранения энергии в механике) величина H_0 сохраняется вдоль луча, поэтому (9) определяет импульс p как функцию координаты z:

$$p = \pm\sqrt{n_0^2(z) - H_0^2}\,. \tag{10}$$

Переменная действия задана интегралом по периоду (циклу) невозмущённой траектории:

$$I = \frac{1}{2\pi}\oint p\,\mathrm{d}z = \frac{1}{\pi}\int\limits_{z_{\min}}^{z_{\max}} \sqrt{n_0^2(z) - H_0^2}\,\mathrm{d}z. \tag{11}$$

Здесь $z_{\min}$ и $z_{\max}$ — глубины нижней и верхней точек поворота луча. Интеграл (11) определяет «энергию» H_0 как функцию переменной действия I. Важной характеристикой волновода является производная этой функции

$$\frac{\mathrm{d}H_0}{\mathrm{d}I} = \frac{2\pi}{D} = \omega, \tag{12}$$

задающая пространственную частоту осцилляций траектории. В этой формуле D — длина цикла (период) луча.

Известную производящую функцию канонического преобразования, связывающего пары переменных (p, z) и (I, θ) [13, 18], мы представим в виде

$$G(I, z) = \begin{cases} \displaystyle\int\limits_{z_{\min}}^{z} \sqrt{n_0^2(z) - H_0^2(I)}\,\mathrm{d}z, & p > 0; \\ \displaystyle 2\pi I - \int\limits_{z_{\min}}^{z} \sqrt{n_0^2(z) - H_0^2(I)}\,\mathrm{d}z, & p < 0, \end{cases} \tag{13}$$

где $z_{\min}$ и $z_{\max}$ рассматриваются как функции I. Каноническое преобразование

$$z = z(I, \theta), \qquad p = p(I, \theta) \tag{14}$$

(обе функции периодические по θ с периодом 2π) задано уравнениями

$$p = \frac{\partial G}{\partial z}\,, \qquad \theta = \frac{\partial G}{\partial I}\,. \tag{15}$$

Несмотря на то, что данное преобразование определено для невозмущённого плоскослоистого волновода, формально оно может быть применено и при наличии возмущения. Подставляя (14) в (4), возмущённый гамильтониан представим в виде

$$H(I,\theta,r) = H_0(I) + V(I,\theta,r), \tag{16}$$

где $V \approx \delta c/c_{\rm r}$. Уравнения Гамильтона в переменных действие—угол принимают вид

$$\frac{{\rm d}I}{{\rm d}r} = -\frac{\partial V}{\partial \theta}\,, \tag{17}$$

$$\frac{{\rm d}\theta}{{\rm d}r} = \omega + \frac{\partial V}{\partial I}\,. \tag{18}$$

Эйконал S в новых переменных выражается интегралом

$$S = \int (I\,{\rm d}\theta - H\,{\rm d}r) + s, \tag{19}$$

где s — функция, зависящая от начальных и конечных параметров лучевой траектории. Явное выражение для s приведено в [19, 20].

2.2. Малые параметры задачи

Малость вариаций скорости звука δc, которая формально выражается наличием в задаче безразмерного малого параметра

$$\mu = \delta c/c, \tag{20}$$

разумеется, приводит к тому, что на небольших дистанциях разность вертикальных координат возмущённой (при $\delta c \neq 0$) и невозмущённой ($\delta c = 0$) лучевых траекторий с одинаковыми начальными условиями остаётся малой по сравнению с вертикальными масштабами неоднородностей среды. Однако на интересующих нас дистанциях порядка 1 000 км, где лучевой хаос хорошо развит, это условие заведомо не выполняется.

Тем не менее в задаче имеется другой малый параметр, наличие которого позволяет существенно упростить анализ хаотической динамики лучей:

$$\nu = \frac{\delta I}{I_*} = \frac{\delta I}{\omega}\,\frac{{\rm d}\omega}{{\rm d}I}\,. \tag{21}$$

Условие $\nu \ll 1$ выражает малость вариаций переменной действия δI вдоль луча по сравнению с I_* — характерным масштабом функций $\omega(I)$ и $H_0(I)$. Подчеркнём, что данное условие отнюдь не предполагает малости δI по сравнению с начальным значением переменной действия при $r = 0$. При использовании традиционных переменных импульс—координата наличие малого параметра (21) установить непросто.

2.3. Разность времён прихода лучей

Сравним времена прихода возмущённого и невозмущённого лучей, траектории которых удовлетворяют следующим условиям: (а) обе траектории выходят из одного и того же источника и приходят в одну и ту же точку наблюдения; (б) углы выходов лучей из источника, а значит, и их начальные импульсы, близки; (в) то же самое верно относительно углов прихода лучей в точку наблюдения. Условия (а)–(в) не являются принципиальными и введены исключительно для упрощения выкладок; общий случай рассмотрен в работах [19, 20]. Параметры невозмущённого луча будем отмечать нижним индексом u. Близость лучевых траекторий в промежуточных точках трассы не предполагается. Более того, траектории могут иметь разное число циклов N и N_{u}.

Воспользуемся формулой (19) и учтём, что согласно (18)

$$\mathrm{d}\theta = (\omega + \partial V/\partial I)\,\mathrm{d}r. \tag{22}$$

При этом эйконалы возмущённого и невозмущённого лучей равны

$$S = s + \int (I\omega - H_0)\,\mathrm{d}r + \int \left(I\frac{\partial V}{\partial I} - V\right)\mathrm{d}r \tag{23}$$

и

$$S_{\mathrm{u}} = s_{\mathrm{u}} + \left[\omega(I_{\mathrm{u}})I_{\mathrm{u}} - H_0(I_{\mathrm{u}})\right] r \tag{24}$$

соответственно. В (24) учтено, что в невозмущённом волноводе переменая действия остаётся постоянной вдоль траектории луча. Поскольку члены s и s_{u} определяются только начальными и конечными параметрами лучей, в силу условий (а)–(в) их разность мала, и в дальнейшем мы не будем её учитывать.

Для приближённого вычисления разности $S - S_{\mathrm{u}}$ воспользуемся малостью параметра ν. Легко проверить, что с точность до членов $\mathrm{O}(\nu^3)$

$$I\omega(I) - H_0(I_{\mathrm{u}}) = I\omega(I) - H_0(I) + I_{\mathrm{u}}\omega'(I_{\mathrm{u}})\,\Delta I + \left[\omega'(I_{\mathrm{u}}) + I_{\mathrm{u}}\omega''(I_{\mathrm{u}})\right](\Delta I)^2/2,$$

где $\Delta I = I - I_{\mathrm{u}}$. Здесь и далее штрих означает производную по I. Вычитая (24) из (23) с учётом приведённого равенства, получаем

$$S - S_{\mathrm{u}} = \int \Big(I_{\mathrm{u}}\omega'(I_{\mathrm{u}})\,\Delta I + \left[\omega'(I_{\mathrm{u}}) + I_{\mathrm{u}}\omega''(I_{\mathrm{u}})\right](\Delta I)^2/2\Big)\mathrm{d}r + \int \left(I\frac{\partial V}{\partial I} - V\right)\mathrm{d}r. \tag{25}$$

Упростим это выражение. Из условий (а)–(в) следует, что разность угловых переменных возмущённого и невозмущённого лучей $\theta - \theta_{\mathrm{u}} = 2\pi\,(N - N_{\mathrm{u}})$. Интегрируя уравнение (22) вдоль трассы, с точностью до членов $\mathrm{O}(\nu^3)$ получаем

$$2\pi\,(N - N_{\mathrm{u}}) = \int \left[\omega'(I_{\mathrm{u}})\,\Delta I + \omega''(I_{\mathrm{u}})\,(\Delta I)^2/2\right]\mathrm{d}r + \int \frac{\partial V}{\partial I}\,\mathrm{d}r. \tag{26}$$

С учётом (26) соотношение (25) переходит в

$$S - S_{\mathrm{u}} = 2\pi\,\Delta N\,I_{\mathrm{u}} + \frac{\omega'(I_{\mathrm{u}})}{2}\int (\Delta I)^2\,\mathrm{d}r - \int V\,\mathrm{d}r. \tag{27}$$

Кроме пренебрежения членами $\mathrm{O}(\nu^3)$ в этом выражении отброшен интеграл $\int \Delta I\,\partial V/\partial I\,\mathrm{d}r$, вклад которого мал по сравнению с последним слагаемым [20].

Формула (27) даёт неожиданно простое выражение для разности времён прихода возмущённого и невозмущённого лучей $\tau = (S - S_{\mathrm{u}})/c_{\mathrm{r}}$ в виде суммы трёх компонент:

$$\tau = \tau_N + \tau_I + \tau_V, \tag{28}$$

где

$$c_{\mathrm{r}}\tau_N = 2\pi\,(N - N_{\mathrm{u}})\,I_{\mathrm{u}}, \tag{29}$$

$$c_{\mathrm{r}}\tau_I = \frac{\omega'(I_{\mathrm{u}})}{2}\int(\Delta I)^2\,\mathrm{d}r, \tag{30}$$

$$c_{\mathrm{r}}\tau_V = -\int\frac{\delta c}{c_0^2}\,\mathrm{d}r. \tag{31}$$

Отметим, что данные соотношения применимы и для сравнения времён прихода двух невозмущённых лучей. При этом $\tau_I = \tau_V = 0$, и τ_N выражает задержку между «параллельными» сегментами t—z-диаграммы. На длинных трассах при $N \gg 1$, $N_{\mathrm{u}} \gg 1$ и $N - N_{\mathrm{u}} = \mathrm{O}(1)$ переменные действия I_{u} всех лучей, формирующих соседние сегменты, мало отличаются друг от друга. «Параллельные» сегменты с идентификаторами $\pm(M+2)$ и $\pm M$ (в этом случае $N - N_{\mathrm{u}} = 1$) сдвинуты друг относительно друга вдоль оси t примерно на $2\pi I_{\mathrm{u}}/c_{\mathrm{r}}$. Другим способом этот результат получен в работах [22–24].

При рассмотрении разности времён прихода возмущённого и невозмущённого лучей с одинаковыми идентификаторами $\tau_N = 0$ и $\tau = \tau_I + \tau_V$. Слагаемые τ_I и τ_V имеют разный физический смысл. В случае, когда траектории сравниваемых лучей близки (это бывает на коротких трассах), основную роль играет слагаемое τ_V, которое представляет собой изменение времени пробега сигнала вследствие небольших вариаций скорости звука вдоль траектории [2]. Слагаемое τ_I, напротив, начинает доминировать на длинных трассах [20] и учитывает вариации времени прихода луча из-за изменения формы его траектории под влиянием возмущения. Для статистического описания кластера времён прихода лучей необходимо уметь рассчитывать статистические характеристики τ_I, которые согласно (30), в свою очередь, выражаются через статистические характеристики I. Последние могут быть рассчитаны в рамках простейшей статистической модели флуктуаций переменной действия, изложенной в следующем разделе.

2.4. Переменная действия в приближении винеровского процесса

Малость случайного возмущения δc приводит к тому, что изменение переменной действия I на горизонтальных маштабах неоднородностей среды (см. раздел 1.2) мало. Поэтому для получения статистического описания переменной I правую часть (17) формально можно рассматривать как случайную δ-коррелированную функцию. Тогда $I(r)$ будет марковским процессом с плотностью вероятности $P(I, r)$, подчиняющейся уравнению Фоккера—Планка:

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial I}\left(B\frac{\partial P}{\partial I}\right). \tag{32}$$

Вычисление коэффициента диффузии B подробно обсуждается в [20], где показано, что в нашей модели среды зависимость B от I достаточно слаба и данный коэффициент с хорошей точностью можно считать постоянным и равным

$$B = 1{,}5 \cdot 10^{-7}\ \text{км}. \tag{33}$$

В этом приближении

$$I = I_{\rm s} + x, \tag{34}$$

где $I_{\rm s} = I(0)$ — начальное значение действия, а $x(r)$ — винеровский случайный процесс [25, 26]. Последний начинается в точке $x(0) = 0$ и подчиняется стохастическому уравнению

$$\frac{{\rm d}x}{{\rm d}r} = \xi(r), \tag{35}$$

где ξ — белый шум со средним значением и функцией корреляции, равными

$$\langle \xi \rangle = 0, \qquad \langle \xi(r)\xi(r') \rangle = B\delta(r - r'). \tag{36}$$

Здесь и далее угловые скобки означают статистическое усреднение. Вследствие гауссовости винеровского процесса все его статистические характеристики определяются средним значением и функцией корреляции:

$$\langle x \rangle = 0, \qquad \langle x(r)x(r') \rangle = B \min\{r, r'\}. \tag{37}$$

Обратим внимание на следующий важный момент. Случайная функция $I(r)$, заданная соотношениями (34)–(36), может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Однако переменная действия по определению неотрицательна. Это обстоятельство легко учитывается введением отражающей границы при $I = 0$. Решение уравнения Фоккера—Планка (32) с постоянным коэффициентом диффузии и начальным условием $P(I, 0) = \delta(I - I_{\rm s})$ при наличии отражающей границы хорошо известно [25, 26]:

$$P(I, r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Br}} \left[\exp\left(-\frac{(I - I_{\rm s})^2}{2Br} \right) + \exp\left(-\frac{(I + I_{\rm s})^2}{2Br} \right) \right]. \tag{38}$$

Пользуясь малостью параметра ν (см. (21)), заменим $\omega(I)$ в (18) на $\omega(I_{\rm s}) + \omega'(I_{\rm s})x$. Кроме того, оказывается, что последнее слагаемое в правой части (18) обычно мало́ по сравнению с $\omega'(I_{\rm s})x$, и им можно пренебречь. В результате получаем

$$\theta = \theta_{\rm s} + \omega(I_{\rm s})r + \omega'(I_{\rm s}) \int\limits_0^r x(r_1)\, {\rm d}r_1, \tag{39}$$

где $\theta_{\rm s} = \theta(0)$ — начальное значение переменной угол.

В рассматриваемом здесь приближении (мы будем называть его приближением винеровского процесса) статистические моменты и многие другие характеристики переменных I и θ легко выражаются в квадратурах. Полученные формулы позволяют построить аналитическое описание хаотической лучевой структуры поля в неоднородном волноводе. В данной статье приближение винеровского процесса использовано для анализа кластеров времён прихода лучей.

Все лучи условно разделим на крутые и пологие, отнеся к крутым (пологим) те из них, которые пересекают ось канала под углом скольжения больше (меньше) 5° (здесь имеется в виду среднеквадратичная величина угла скольжения). Смысл данного разбиения заключается в том, что для крутых лучей можно пренебречь «отражениями» переменной действия от границы $I = 0$. Соответственно, в формуле (38) можно пренебречь вторым слагаемым в квадратных скобках. При этом описание статистики лучей существенно упрощается. Так, например, I с расстоянием расплывается по диффузионному закону

$$\langle (I - I_{\rm s})^2 \rangle = Br. \tag{40}$$

В дальнейшем мы ограничимся анализом только крутых лучей.

3. ОСНОВНЫЕ ПАРАМЕТРЫ КЛАСТЕРОВ ВРЕМЁН ПРИХОДА ЛУЧЕЙ

Рассмотрим кластер времён прихода, который формируется лучами с одинаковым идентификатором (см. раздел 1.3). Начнём с оценки смещения кластера относительно времени прихода невозмущённого луча с таким же идентификатором. Переменную действия невозмущённого луча обозначим через J. Разность времён прихода возмущённого луча из кластера и невозмущённого луча задаётся соотношением (28) с $\tau_N = 0$. На трассах длиной порядка 1 000 км, которые мы рассматриваем в этой статье, слагаемое τ_I обычно превосходит τ_V [20], поэтому для оценки смещения кластера достаточно усреднить τ_I (см. (30)). Расчёт усложняется тем обстоятельством, что усреднение следует проводить по лучам, имеющим одинаковые идентификаторы. Условие равенства идентификаторов сформулируем с помощью приближённой формулы для разностей угловых переменных возмущённого и невозмущённого лучей:

$$\Delta\theta = \Delta\theta_{\rm s} + \omega'(I_{\rm s})r\left[I_{\rm s} - J + \frac{1}{r}\int\limits_0^r x(r_1)\,{\rm d}r_1\right], \tag{41}$$

где $\Delta\theta_{\rm s}$ — разность начальных значений θ, а $I_{\rm s}$ — начальное значение действия возмущённого луча. При выводе этого выражения мы снова воспользовались малостью параметра ν. Требование обращения в нуль выражения в квадратных скобках налагает ограничения на возможные реализации винеровского процесса $x(r)$, близкие к тем, которые налагает требование равенства идентификаторов. Поэтому расчёт величины $\langle\tau_I\rangle$ в приближении винеровского процесса выполняется с помощью формул из раздела 2.4 с учётом ограничения

$$I_{\rm s} - J + \frac{1}{r}\int\limits_0^r x(r_1)\,{\rm d}r_1 = 0. \tag{42}$$

Опуская выкладки (они подробно описаны в [20]), приведём окончательный результат. Среднее смещение кластера времён прихода крутых лучей равно

$$\langle\tau\rangle \approx \langle\tau_I\rangle = \frac{\omega'(J)}{12c_{\rm r}}\,Br^2. \tag{43}$$

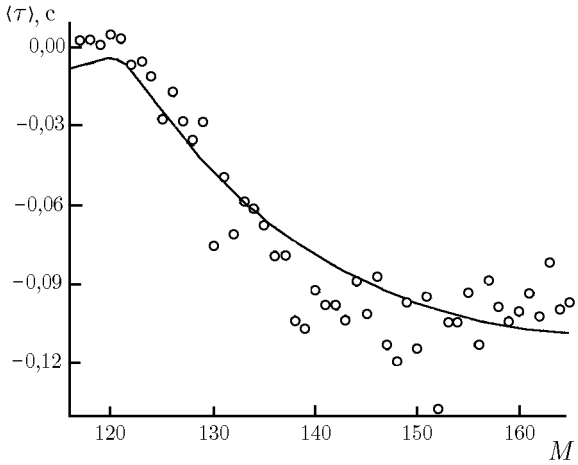

Рис. 4. Смещение кластера, формируемого лучами с идентификаторами $+M$, относительно прихода невозмущённого луча с таким же идентификатором. Источник и приёмник расположены на глубине 0,78 км. Кружки — результат численного расчёта траекторий для одной из реализаций неоднородностей, сплошная линия — теоретическая оценка по формуле (43)

Эта оценка получена для ситуации, когда приёмник находится на оси волновода (в нашей модели — на глубине 0,78 км). Обратим внимание на то важное обстоятельство, что знак смещения определяется знаком производной $\omega'(J)$. В глубоководных волноводах длина цикла луча всегда растёт с увеличением угла выхода из источника, и данная производная всегда отрицательна. Поэтому при дальнем распространении звуковые импульсы вдоль возмущённых лучей приходят раньше (по крайней мере, в среднем), чем вдоль невозмущённых лучей с такими же идентификаторами. С точки зрения t—z-диаграммы это означает, что возмущение приводит не только к размытию сегментов, но и к их небольшому смещению влево — в сторону малых времён прихода. Величина смещения показана на рис. 4, где

сравниваются средние смещения сегментов, полученные при прямом расчёте лучевых траекторий и при использовании формулы (43).

Аналогичным образом можно оценить ширину кластера времён прихода. В приближении винеровского процесса с учётом ограничения (42) получаем [20]

$$\sigma_\tau = \left(\langle\tau^2\rangle - \langle\tau\rangle^2\right)^{1/2} \approx 0{,}9\,|\langle\tau\rangle|. \tag{44}$$

Как видим, среднеквадратичный разброс точек кластера мало отличается от его смещения, поэтому о величине σ_τ можно судить по данным, приведённым на рис. 4. Отметим, что $\langle\tau\rangle$ и σ_τ растут пропорционально квадрату расстояния.

С помощью полученных формул можно сформулировать критерий разрешения кластера. В соответствии с замечанием, сделанным в конце раздела 2.3, интервал между кластерами с идентификаторами $\pm(M+2)$ и $\pm M$ приближённо равен $\tau^* = 2\pi J/c_{\text{г}}$. Интервал между соседними кластерами может быть грубо оценён как $\tau^*/4$. Оценивая ширину кластера как $3\sigma_\tau$, введём параметр

$$R = \frac{\tau^*}{3\sigma_\tau} \approx \frac{2\pi J}{|\omega'|\,Br^2}\,.$$

Условие $R < 1$ означает, что кластер не перекрывается со своими соседями. Это же условие означает разрешение соответствующего сегмента t—z-диаграммы. В нашей модели параметр R принимает наиболее близкое к единице значение на сегменте t—z-диаграммы, формируемом лучами с идентификатором $+124$. На рис. 2 сегменты с данным идентификатором в возмущённом и невозмущённом волноводах выделены жирной линией и жирными точками соответственно.

С точки зрения регистрации сигнала вертикальной антенной представляет интерес ширина интервала углов прихода лучей, формирующих кластер. Можно показать, что оценка этого интервала в случае, когда приёмник находится на оси волновода, имеет вид

$$\Delta\chi = \frac{\omega\sqrt{Br/3}}{n\sin\chi_{\text{c}}}\,,$$

где n — показатель преломления в точке приема, ω и χ_{c} — пространственная частота осцилляций невозмущённого луча и угол скольжения этого луча в точке приёма соответственно. На дистанции 3 000 км оценка $\Delta\chi$ для кластеров с χ_{c} из интервала углов от 5° до 15° варьируется от 1,4° до 0,4°.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе изложен метод приближённого описания хаотической динамики лучей в глубоководных акустических волноводах. Использование канонических переменных действие—угол помогло найти малый параметр задачи, с помощью которого удаётся существенно упростить анализ лучевой структуры поля на длинных трассах. Обсуждаемый здесь подход позволяет глубже понять механизм «кластеризации» времён прихода лучей и получить оценки ширины кластера и его смещения относительно времени прихода импульса вдоль исходного невозмущённого луча.

На коротких и длинных трассах действуют два различных механизма уширения кластеров. На коротких трассах (до нескольких сотен километров) траектории лучей, формирующих кластер, не сильно отклоняются от траектории невозмущённого луча, и вариации времён прихода лучей определяются флуктуациями скорости звука вдоль траекторий. При этом в формуле для разности времён прихода возмущённого и невозмущённого лучей с одинаковым идентификатором

(см. (28)–(31)) преобладает член τ_V, и ширина кластера с дистанцией растёт пропорционально $r^{1/2}$. На трассах с длиной более 1 000 км на первый план выходит другой механизм, связанный с тем, что несмотря на совпадение идентификаторов (сходство топологий) траектории формирующих кластер лучей существенно расходятся в пространстве. При этом разброс времён их прихода определяется членом τ_I, и ширина кластера растёт пропорционально r^2.

Знак смещения кластеров относительно времени прихода невозмущённого луча определяется зависимостью длины цикла траектории от амплитуды угла выхода из источника. В типичном глубоководном волноводе, в котором крутые лучи имеют более длинные циклы, чем пологие, это смещение направлено в сторону малых времён прихода. Однако теоретически вполне можно представить себе волновод, где смещение имеет противоположный знак.

Полученные формулы для ширины кластера, а также критерий разрешения соседних кластеров во времени дают количественные оценки, характеризующие стабильность начальной части принимаемого сигнала при дальнем распространении звука в океане.

Обратим внимание на то обстоятельство, что наш анализ базируется на общих соотношениях гамильтонова формализма, которые широко используются во многих задачах теории распространения волн и механики. Так, например, описание траектории луча в переменном по трассе волноводе с формальной точки зрения аналогично описанию колебаний нелинейного осциллятора под действием нестационарной внешней силы. Поэтому мы ожидаем, что эффект кластеризации времён прихода лучей может иметь аналоги в других физических системах. Тот факт, что данный эффект был впервые обнаружен в подводной акустике, по-видимому, объясняется тем значением, которое в этой науке придаётся изучению свойств времени прихода луча. В механике аналогичная величина — механическое действие — обычно не измеряется в экспериментах, поэтому изучению её свойств не уделяется большого внимания.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 03–02–17246).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бреховских Л. М., Лысанов Ю. П. Теоретические основы акустики океана. Л.: Гидрометеоиздат, 1982.
2. Распространение звука во флуктуирующем океане / Под ред. С. Флатте. М.: Мир, 1982.
3. Распространение волн и подводная акустика / Под ред. Дж. Б. Келлера, Дж. С. Пападакиса. М.: Мир, 1980.
4. Colosi J. A., Brown M. G. // J. Acoust. Soc. Am. 1998. V. 103. P. 2 232.
5. Simmen J., Flatte S. M., Wan G.-Y. // J. Acoust. Soc. Am. 1997. V. 102. P. 239.
6. Brown M. G., Viechnicki J. // J. Acoust. Soc. Am. 1998. V. 104. P. 2 090.
7. Worcester P. F., Cornuelle B. D., Dzieciuch M. A. et al. // J. Acoust. Soc. Am. 1999. V. 105. P. 3 185.
8. Dushaw B. D., Howe B. M., Mercer J. A., Spindel R. C., the ATOC Group. // IEEE Journal of Oceanic Engineering. 1999. V. 24. P. 202.
9. Munk W., Wunsch C. // Deep-Sea Res. 1979. V. 26. P. 123.
10. Spiesberger J., Metzger K. // J. Geophys. Res. 1991. V. 96. P. 4 869.
11. Dushaw B. D. // IEEE Journal of Oceanic Engineering. 1999. V. 24. P. 215.
12. Заславский Г. М. Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1984.
13. Заславский Г. М., Абдуллаев С. С. // УФН. 1991. Т. 161, вып. 8. С. 1.
14. Palmer D. R., Brown M. G., Tappert F. D., Bezdek H. F. // Geophys. Res. Lett. 1988. V. 15. P. 569.

15. Tappert F. D., Tang X. // J. Acoust. Soc. Am. 1996. V. 99. P. 185.
16. Palmer D. R., Georges T. M., Jones R. M. // Comput. Phys. Commun. 1991. V. 65. P. 219.
17. Spiesberger J. L., Tappert F. D. // J. Acoust. Soc. Am. 1996. V. 99. P. 173.
18. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. М.: Наука, 1973.
19. Virovlyansky A. L. // J. Acoust. Soc. Am. 2003. V. 113. P. 2 523.
20. Virovlyansky A. L. Ray travel times in range-dependent acoustic waveguides (http://xxx.lanl.gov/PS_cache/nlin/pdf/0012/0012015.pdf).
21. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1973.
22. Вировлянский А. Л. // Акуст. журн. 1985. Т. 31, вып. 5. С. 664.
23. Munk W., Wunsch C. // Rev. Geophys. and Space. Phys. 1983. V. 21. P. 1.
24. Virovlyansky A. L. // J. Acoust. Soc. Am. 1995. V. 97. P. 3 180.
25. Гардинер К. В. Стохастические методы в естественных науках. М.: Мир, 1986.
26. Тихонов В. И., Миронов М. А. Марковские процессы. М.: Сов. радио, 1977.

Институт прикладной физики РАН,
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию
3 июня 2003 г.

RAY CHAOS AT LONG RANGE SOUND PROPAGATION IN THE OCEAN

A. L. Virovlyansky

We develop an approximate analytical approach for the description of stochastic behavior of sound rays in deep water acoustic waveguides with paths up to $3-5$ thousand kilometers. The ray dynamics is studied using the Hamiltonian formalism in terms of the action–angle canonical variables. A realistic model of underwater waveguide with internal-wave-induced perturbations of the sound speed field is applied. We point out a small parameter of the problem, which allows one to linearize the Hamilton (ray) equations and approximate the action variable by a Wiener process representing the simplest model of diffusion. The stochastic ray theory based on this approximation is applied to an analysis of ray travel times, i. e., the arrival times of sound pulses coming to a receiver via different ray paths. The formation of compact clusters of the chaotic-ray travel times is explained quantitatively.

УДК 534.6

О ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ФОКУСИРОВКЕ ИМПУЛЬСА, ОБРАЩЁННОГО ВО ВРЕМЕНИ

В. А. Зверев

В работе [1] сообщается, что экспериментально путём обращения волны во времени получен эффект фокусировки импульса с размером фокального пятна $\lambda/14$. Это трактуется авторами [1] как преодоление дифракционного предела. С этим и другими утверждениями авторов [1], настаивающих на новой физике волн, обращаемых во времени, нельзя согласиться без подробного анализа явления. Здесь рассмотрена физическая природа пространственной фокусировки импульса, обращённого во времени. Показано, что эффект сужения фокального пятна сверх дифракционного предела является следствием наблюдения поля источника, расположенного в ближней зоне точки наблюдения. Эффект не может рассматриваться как преодоление дифракционного предела и не связан с новой физикой волн.

В [1] показано, что с помощью временно́го обращения волн (ВОВ) в акустике (time-reversed acoustic, TRA) [1, 2], удаётся сфокусировать импульс так, что пятно фокусировки имеет размер не $\lambda/2$, а $\lambda/14$, где λ — длина акустической волны. Это блестящий опыт, сочетающий возможности как акустики, так и оптики. Однако этот превосходно выполненный опыт не был по-настоящему объяснён. Физическая основа ВОВ изложена в работе [3]. Задачей настоящей статьи является, основываясь на [3], объяснить результат проведённого опыта и выяснить его связь с дифракцией, дифракционным пределом, а также необходимость привлечения для объяснения его результатов новой физики волн, на чём настаивают авторы [1].

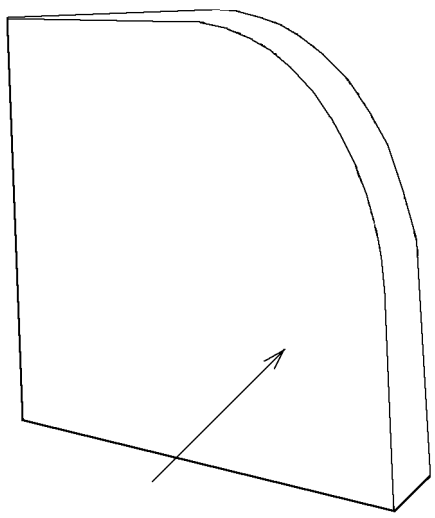

Рис. 1

Опыт, о котором идёт речь в [1], поставлен следующим образом. В стеклянной пластине, примерная форма которой показана на рис. 1, с помощью миниатюрного датчика (показан стрелочкой) с размером $\lambda/14$ возбуждались поперечные волны Лэмба. Возбуждение осуществлялось импульсом длительностью 5 мкс с несущей частотой 500 кГц и полосой на уровне 3 дБ, равной 200 кГц. В образце акустические волны многократно отражались от границ, образуя так называемое реверберационное поле, существовавшее до 2 мс. Это поле принималось с помощью лазерного луча в точке расположения излучателя и запоминалось. Это, по терминологии [2], первый шаг эксперимента. Второй шаг заключается в том, что принятое колебание вновь излучается из той же точки, в которой оно было принято, с обратным ходом времени. Акустическое поле в пластине, возникающее во время второго шага эксперимента, фиксировалось с помощью лазерного интерферометра на площади 20×20 мм с центром в точке излучения на первом шаге. В этом опыте точка излучения и точка приёма совпадали.

В [1] описаны два опыта. Во время опыта А на втором шаге излучалась только часть колебания, зафиксированного на первом шаге. Примерный вид такого колебания, обращённого

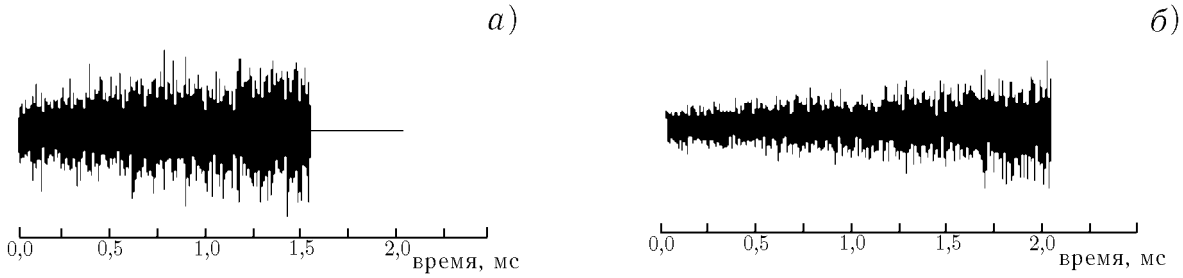

Рис. 2

во времени, показан на рис. 2*а*. При излучении отсутствует последняя, наиболее интенсивная часть обращённого во времени колебания. Во время опыта Б на втором шаге излучалось всё записанное колебание, включая ту его часть, которая непосредственно примыкает к началу записи колебания во время первого шага. Примерный вид осциллограммы этого колебания показан на рис. 2*б*.

Как в опыте А, так и в опыте Б на втором шаге эксперимента наблюдалась пространственная фокусировка волн, однако она была существенно разной в обоих опытах. В опыте А фокусировка наблюдалась в пространственной области, имеющей поперечный размер порядка $\lambda/2$, а в опыте Б наблюдалась фокусировка в области, поперечный размер которой составлял всего $\lambda/14$ (размер применённого излучателя). На приведённых в [1] результатах опыта Б отчётливо видны тонкие импульсы, пульсирующие во времени в соответствии с осциллограммой короткого импульса, излучённого во время первого шага. Амплитуда этих импульсов существенно превышает максимальный размах сигнала, наблюдаемого в опыте А.

Результаты опыта объяснены в [1] только качественно. Объяснение, приведённое авторами, не может быть положено в основу математического моделирования явления. В нём никак не отражены дифракционные явления и целый ряд параметров, от которых существенно зависит результат опыта, в частности геометрия использовавшегося в опыте образца. Интерпретируя наблюдения, авторы используют монохроматическое приближение, что, как показано ниже, никак нельзя делать при пояснении особенностей пространственной фокусировки при ВОВ. Объясняя наблюдаемое явление, авторы опираются и на другие положения, с которыми нельзя согласиться. Например, считается, что в опыте А укорочена часть колебания, включающая источник, в то время как оставшаяся часть колебания во время второго шага удовлетворяет волновому уравнению с нулевой правой частью, т. е. без источника. На самом деле колебания, используемые на втором шаге, в любой момент времени равноправны в смысле создания источника. Всё колебание, используемое во время второго шага как в опыте А, так и в опыте Б, а не только какая-то его часть, является источником наблюдаемых волн.

В связи с этим возникает задача полного количественного объяснения наблюдений с учётом основных факторов, от которых зависит результат опыта.

Прежде всего, требуется объяснить возникновение пространственной фокусировки при использовании ВОВ. Сделаем это, следуя работе [3]. В [3] использован результат, полученный ранее в [4] и состоящий в том, что процесс распространения полигармонической волны можно при соблюдении некоторого условия описать в виде процесса, происходящего во времени. Не останавливаясь на формулировке общего условия возможности временнóго описания (это сделано в [3, 4]), заметим, что этому условию удовлетворяет источник сферической волны вида

$$A(x, y, z = 0, t) = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)F(t). \tag{1}$$

Здесь x и y — поперечные координаты, z — продольная координата (в направлении распростране-

ния волны) [4], $A(x, y, z = 0, t)$ — волновое поле в виде функции координат и времени в плоскости $z = 0$, $F(t)$ — функция времени.

Временно́е описание распространения волны является теоретической основой ВОВ. Процесс с применением ВОВ состоит их двух шагов [2]. На первом шаге точечным источником излучается короткий импульс. При этом сигнал распространяется в пространстве в виде сферической волны, которая рассеивается на неоднородностях, вкраплённых в среду, и на её границах. В результате такого рассеяния в точку приёма приходит цуг частично перекрывающихся импульсов:

$$y(t) = \sum_j R_j F(t - t_j). \tag{2}$$

Здесь $F(t)$ — форма первоначально излучённого импульса, t_j — время распространения сигнала от точки излучения до точки приёма с рассеянием сигнала на рассеивателе с номером j, R_j — коэффициент рассеяния на j-м рассеивателе.

В спектральном представлении (2) имеет следующий вид:

$$C_y(\omega) = C_F(\omega) z(\omega), \tag{3}$$

где $z(\omega)$ — временна́я частотная характеристика тракта распространения волн:

$$z(\omega) = \sum_j R_j \exp(i\omega t_j). \tag{4}$$

Принятый сигнал (2) запоминается, что необходимо для перехода ко второму шагу. Второй шаг заключается в том, что записанный сигнал обращается во времени и снова излучается из той точки, в которой он был принят, в ту же самую среду, которая предполагается «замороженной» в течение первого и второго шагов. На втором шаге имеем обращённый во времени сигнал $y(-t)$. Спектр такого сигнала будет комплексно-сопряжённым со спектром (3) первоначального сигнала: $C_y^*(\omega)$. Спектр сигнала, принятого в точке излучения, найдётся по той же формуле (3) с учётом того, что форма и спектр частотной характеристики тракта распространения волн (4) остаются неизменными как при распространении к точке приёма, так и обратно, т. к. распределения задержек t_j и коэффициентов рассеяния R_j не зависят от направления распространения волны. Таким образом, с учётом первого и второго шагов спектр сигнала, принятого в точке излучения, будет иметь вид

$$C_{\text{г}}(\omega) = z(\omega) z^*(\omega) C_F^*(\omega). \tag{5}$$

Форма сигнала в точке его излучения на втором шаге найдётся как обратное преобразование Фурье от (5). На основе (5) можно количественно оценить результат ВОВ.

Отметим, что формулой, аналогичной (5), описывается процесс обращения волнового фронта (ОВФ) для монохроматического сигнала, распространяющегося в свободном пространстве.

В самом деле, распространение монохроматической волны от плоскости $z = 0$, на которой задано исходное распределение комплексных амплитуд, до параллельной плоскости, находящейся на расстоянии z, описывается следующим разложением монохроматического волнового поля по плоским волнам [4, 5]:

$$p(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \iint g(u_1, u_2) \zeta(z, u_1, u_2) \exp(iu_1 x + iu_2 y)\, \mathrm{d}u_1\, \mathrm{d}u_2. \tag{6}$$

Здесь u_1 и u_2 — пространственные частоты, соответствующие поперечным координатам x и y, $g(u_1, u_2)$ — фурье-спектр комплексной амплитуды в плоскости $z = 0$, $\zeta(z, u_1 u_2)$ — пространственная частотная характеристика тракта распространения волны между указанными плоскостями.

Для свободного пространства эта характеристика имеет вид

$$\zeta(z, u_1, u_2) = \exp\left(iz\sqrt{k^2 - u_1^2 - u_2^2}\right). \tag{7}$$

Здесь z — расстояние, пройденное волной в свободном пространстве, $k = 2\pi/\lambda$, λ — длина волны.

В спектральном представлении (6) выглядит следующим образом [4, 5]:

$$g_z(u_1, u_2) = \zeta(z, u_1, u_2) g_0(u_1, u_2). \tag{8}$$

Здесь g_z — пространственный спектр поля по поперечным координатам в плоскости z, g_0 такой же спектр в плоскости $z = 0$.

Формула, имеющая вид (6) или (8), может быть интерпретирована как прохождение сигнала $p(x, y, 0)$ через фильтр с частотной характеристикой $\zeta(z, u_1, u_2)$. Для ОВФ в качестве исходного следует взять поле, комплексно-сопряжённое функции, полученной на выходе фильтра (6). Комплексно-сопряжённое поле $p^*(x, y, z)$ следует пропустить через тот же фильтр (участок свободного пространства той же длины). В результате, подставив в (8) комплексно-сопряжённое поле $p^*(x, y, z)$, получим

$$g_{2z}(u_1, u_2) = \zeta(z, u_1, u_2) g_z^*(u_1, u_2). \tag{9}$$

Подставив в (9) g_z^* из (8), имеем

$$g_{2z}(u_1, u_2) = \zeta(z, u_1, u_2)\zeta^*(z, u_1, u_2) g_0^*(u_1, u_2). \tag{10}$$

Мы получили результат ОВФ для монохроматического поля и в свободном пространстве в форме, аналогичной ВОВ (5).

Соотношения (5) и (10) могут быть истолкованы как процесс прохождения сигнала через фильтр. Два первых сомножителя в (5) и (10) играют роль частотной характеристики фильтра обращения волн (ФОВ), а третий сомножитель является спектром входного сигнала ФОВ. Форма частотных характеристик обоих ФОВ такова, что их импульсные характеристики (спектры частотных характеристик) представляют собой автокорреляционные функции частотной характеристики свободного пространства в случае ОВФ или частотной характеристики временно́й волновой системы (4) в случае ВОВ. Свойства этих частотных характеристик существенно различны, что определяет различия между ОВФ и ВОВ при аналогичном виде описывающих их математических формул (5) и (10). Так, фильтр обращения волн для ОВФ, являющийся квадратом модуля (7), при $z \gg \lambda$ пропускает все пространственные частоты без искажений в интервале, определяемом условием [4, 5]

$$u_1^2 + u_2^2 \le k^2. \tag{11}$$

Это условие определяет предельную ширину пространственного спектра сигнала комплексной амплитуды, получаемую в результате ОВФ при больших z. Однако при $z \ll \lambda$, в так называемом ближнем поле, ФОВ с такой частотной характеристикой свободно пропускает пространственные частоты с периодами много меньше λ, что для нас очень существенно. Форма сигнала на выходе ОВФ для больших расстояний ($z \gg \lambda$), как следует из (10), определяется видом комплексно-сопряжённого входного сигнала $p^*(x, y, 0)$ в диапазоне пространственных частот, определяемом неравенством (11).

Рассмотрим с этих же позиций ВОВ. Частотная характеристика фильтра при ВОВ не содержит ограничений вида (11). Временной спектр сигнала при ВОВ ограничивается только полосой пропускания среды. Частотная характеристика фильтра для ВОВ, входящая в (10), содержит постоянную составляющую. В силу этого импульс, посланный на первом шаге, появляется на

втором шаге в виде функции времени. Такое появление начального импульса отнюдь не является следствием того, что мы «подмешали» этот импульс на втором шаге, как это трактуется в [1] при описании опыта Б, в котором появляется начальный импульс в полном соответствии с (10).

В отличие от ОВФ, которое рассматривается только в виде пространственной зависимости, временно́е обращение волны формирует результат, зависящий как от времени, так и от пространственных координат. Зависимость от времени описывается непосредственно соотношением (5), а зависимость от пространственных координат — аналогичным соотношением через пространственную зависимость корреляционной функции временны́х частотных характеристик.

Для получения пространственной зависимости ВОВ следует учесть особенности второго шага преобразования. Если во время второго шага принимаем сигнал не в точке его излучения, а в иной точке, то в соотношение (5), а следовательно, и в ФОВ, войдёт уже не автокорреляционная функция временно́й частотной характеристики (4) волновой линейной системы, а взаимно-корреляционная функция этой системы. Одной из функций, формирующих взаимно-корреляционную функцию, является функция передачи от точки излучения до точки приёма на первом шаге, а второй — функция передачи от точки приёма на первом шаге до точки приёма на втором шаге. Вид этой функции взаимной корреляции определяет пространственную зависимость результата ВОВ, или фокусировку получающегося при ВОВ сигнала. Это существенно отличает пространственные преобразования, совершаемые при ВОВ, от ОВФ. При ОВФ, как уже отмечалось выше, пространственное преобразование представляет собой входной сигнал (с учётом условия (11)). При ВОВ пространственное преобразование (фокусировка) не зависит от формы сигнала, а целиком определяется полем взаимной корреляции частотных характеристик. В силу этого, недопустимо использование монохроматического приближения при объяснении особенностей пространственной фокусировки при ВОВ, как это сделано в [1].

На фокусировку волн при ВОВ налагаются те же ограничения спектра пространственных частот, что и при ОВФ. Дело в том, что сигналы и в случае ВОВ распространяются в виде волн, а волны свободно распространяются в пространстве только при условии (11). Волны, чьи пространственные частоты так велики, что не удовлетворяют условию (11), являются неоднородными, их амплитуда экспоненциально убывает в направлении распространения.

Представим себе такой опыт. На непрозрачный экран, в центре которого имеется отверстие с радиусом $a \ll \lambda$, падает излучение с длинами волн, близкими к λ. Пусть это отверстие проецируется на плоскость наблюдения, отстоящую от экрана на расстоянии $R \gg \lambda$. Пусть проекционная система, с помощью которой отверстие проецируется на экран, обладает достаточно большой апертурой и малыми искажениями. Пусть эти искажения столь малы, что ими можно пренебречь при таком уменьшении длины волны λ, при котором выполняется условие (11). Но у нас оно не выполняется. Как это отразится на изображении отверстия? Изображение отверстия пройдёт через пространственный фильтр, «срезающий» верхние пространственные частоты, которые не удовлетворяют условию (11). В связи с этим изображение отверстия размоется так, что его масштаб составит примерно $\lambda/2$. Что будет, если мы приблизим плоскость наблюдения к отверстию на расстояние $R \ll \lambda$? В этом случае неоднородность волн не проявляется, и мы получим чёткое изображение отверстия с масштабом $a \ll \lambda$.

Результаты такого мысленного эксперимента показаны на рис. 3. На рис. 3*а* показан результат пространственной фильтрации сигнала, изображённого на рис. 3*б*. Полоса пространственных частот на рис. 3*а* сокращена по сравнению с сигналом на рис. 3*б* в 8 раз. Такой мысленный эксперимент имеет непосредственное отношение к опыту, поставленному в [1]. Различие между опытами А и Б [1] заключается в том, что в опыте А убран сигнал, примыкающий по времени к моменту наблюдения. Соответствующая волна тратит это время на распространение в среде. При этом

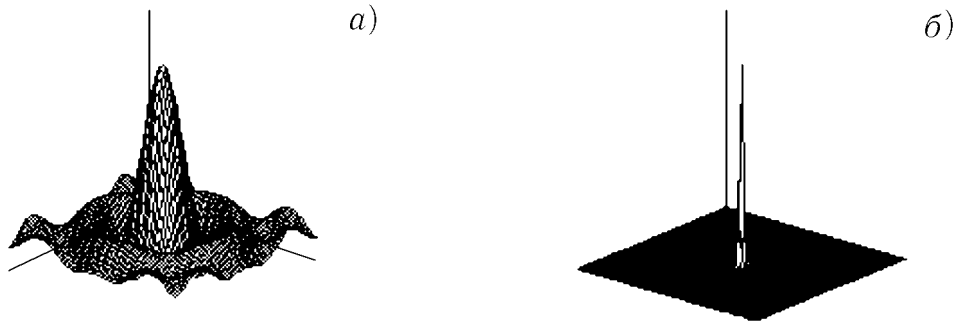

Рис. 3

она подвергается пространственной фильтрации, ибо её пространственный масштаб мал и не удовлетворяет условию (11). В опыте Б сигнал продолжается вплоть до самого момента наблюдения и наблюдается в момент, когда волне никуда дальше распространяться не нужно. Опыт Б соответствует мысленному эксперименту, который иллюстрируется рис. 3.

Но, может быть, результат опыта А получается иным по другим причинам, а не потому, что волна в среде становится неоднородной? То, что это не так, доказывает численный эксперимент, позволяющий поставить опыты А и Б без учёта влияния условия (11). В численном эксперименте есть возможность учесть только один параметр, изменившийся в опыте А по сравнению с опытом Б: длину реализации сигнала на втором шаге. Численное моделирование осуществлялось по формуле (5). Вычислялся результат ВОВ на основе спектра сигнала (одиночный импульс со средней частотой 500 кГц и шириной полосы на уровне 3 дБ, равной 200 кГц) и частотной характеристики, в качестве которой была взята реализация случайного процесса в полосе 1 МГц. Результаты восстановления формы импульса, полученный с помощью ВОВ, показаны на рис. 4. На рис. 4*а* показан импульс, полученный при укороченной реализации (см. рис. 2*а*), а на рис. 4*б* — импульс, полученный при полной реализации (см. рис. 2*б*). Как видно из рис. 4, импульсы, полученные с помощью ВОВ при укороченной и полной реализации, практически ничем не отличаются. Оба импульса, как и полагается в силу (10), повторяют входной сигнал, обращённый во времени. Для появления на выходе ВОВ начального импульса совсем необязательно присутствие этого импульса в конце второго шага эксперимента, как считается в [1].

Этот расчёт соответствует упоминавшемуся выше мысленному эксперименту при укороченной длине волны. Как показывает приведённый расчёт, результаты опытов А и Б [1] отличаются только в силу того, что сигнал в опыте А распространяется в отрезке пространства, чего в опыте Б нет.

Наряду с численным экспериментом, результат которого приведён выше, нами были выполнены несколько численных опытов, в которых моделировалась пространственная фокусировка волн при ВОВ. Результат этих опытов следующий. Пространственная фокусировка волн при ВОВ происходит одинаково как при укороченной реализации сигнала на втором шаге обращения, так и при полной её длине. Различие в фактически происходящей фокусировке, которое наблюдали авторы [1], является следствием распространения волны в среде с нарушением условия (11). В опыте А [1] это нарушение сказывается вследствие конечного z, а в опыте Б [1] оно не сказывается в силу $z = 0$.

На этом основании можно заключить, что эксперимент, результаты которого приведены в [1], не только не свидетельствует о преодолении дифракционного предела, а наоборот, является

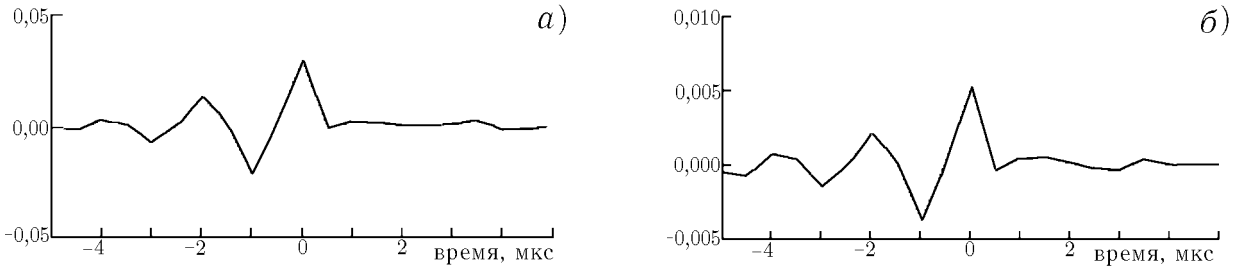

Рис. 4

блестящим опытом, подтверждающим наличие дифракционного предела, выраженного условием (11). Кроме того, результат опыта можно объяснить, не прибегая ни к какой новой физике, с которой якобы (согласно [1]) связаны волны, полученные с помощью ВОВ.

Автор благодарен В. И. Таланову за постановку задачи и полезные обсуждения. Работа поддержана РФФИ (проекты № 00–15–96741 и 02–02–17056).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. de Rosny J., Fink M. // Phys. Rev. Lett. 2002. V. 89, No. 12. Article no. 124 301(3).
2. Fink M., Cassereau D., Derode A., Prada C., Roux P., Tanter M., Thomas J.-L., Wu F. // Rep. Prog. Phys. 2000. V. 63. P. 1 933.
3. Зверев В. А. // Акуст. журн. (в печати).
4. Зверев В. А. Радиооптика. М.: Сов. радио, 1975. 304 с.
5. Зверев В. А. Физические основы формирования изображений волновыми полями. Н. Новгород: ИПФ РАН, 1998. 252 с.

Институт прикладной физики РАН,
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию
4 апреля 2003 г.

SPATIAL FOCUSING OF A TIME-REVERSED PULSE

V. A. Zverev

Focusing of a pulse with the focal-spot size $\lambda/14$, obtained experimentally by the method of time reversal of a wave is reported in [1], where it is treated as overcoming of the diffraction limit. This and other statements in [1] implying new physical concepts of time-reversed waves need detailed analysis. We consider the physical nature of spatial focusing of a time-reversed pulse and show that the focal-spot narrowing below the diffraction limit results from observation of the field of a source located in the near zone of the observation point. This phenomenon cannot be treated as overcoming of the diffraction limit and is not related to the new physical concepts of waves.

УДК 534.2:550.834

КОГЕРЕНТНАЯ СЕЙСМОАКУСТИКА

А. В. Лебедев, А. И. Малеханов

Статья содержит краткий обзор исследований, ведущихся в ИПФ РАН в области когерентной сейсмоакустики. Обсуждаются различные схемы использования мощных гидроакустических излучателей в качестве сейсмоакустических источников и теоретические модели для их анализа и численного моделирования. Рассматриваются методы построения изображений (реконструкции) неоднородностей земных пород с высоким пространственным разрешением, основанные на использовании когерентных сигналов, в том числе сигналов в виде псевдослучайных последовательностей с большим числом посылок. Особое внимание уделяется результатам ряда натурных экспериментов, выполненных в последние годы, которые демонстрируют преимущества и новые возможности когерентных методов сейсмоакустической диагностики на различных глубинах (от десятков метров до десятков километров).

ВВЕДЕНИЕ

Сейсмоакустика представляет собой важную область прикладной акустики, которая связана с дистанционными исследованиями земных пород с помощью акустических сигналов. Поскольку в упругих земных породах могут распространяться не только продольные волны сжатия (P-волны), как в жидкости, но и поперечные сдвиговые волны (S-волны), а также их различные комбинации, то использование этого термина подразумевает, вообще говоря, значительно более широкое толкование акустических сигналов, чем в гидроакустике.

Как и в гидроакустике, различные задачи дистанционного акустического зондирования земных пород являются, по существу, разновидностями общей постановки обратной задачи реконструкции свойств (параметров) самой среды или находящихся в ней неоднородностей в результате обработки специальным образом подобранных зондирующих сигналов. С этой точки зрения развитие сейсмоакустики обнаруживает вполне определённый радиофизический контекст, заключающийся в применении универсальных подходов к решению обратных задач волновой диагностики неоднородных сред. Одним из таких подходов, хорошо известным и разработанным в целом ряде областей радиофизики, является использование когерентных свойств регистрируемых сигналов с целью повышения разрешающей способности по пространственным и (или) временно́й координатам в результате применения специальных процедур обработки сигналов в приёмной системе.

Развитие технических средств сейсмоакустики в последние десятилетия сопровождалось постепенным переходом от мощных, но плохо управляемых взрывных источников к источникам, импульсы излучения которых можно было бы синхронизировать и когерентно накапливать. Это привело к разработке вибрационного поверхностного источника типа «Вибросейс» [1], обеспечивающего сейчас около половины всех работ по сейсморазведке. Возбуждение сейсмических волн таким источником производится вертикальными колебаниями стальной плиты площадью 2 м^2 при помощи силового гидроцилиндра, нагруженного статическим весом (порядка 20 т) транспортного средства со всем оборудованием. На частоте 10 Гц вибрационный источник с усилием 10 т излучает объёмные P-волны с мощностью около 10 Вт. Типичным режимом работы «Вибросейса» является линейная частотная модуляция излучаемого сигнала в полосе 10÷40 Гц с временем перестройки частоты около 30 с, что обеспечивается смешанной электронно-гидравлической схемой управления; при этом возможно синхронное сложение зондирующих посылок от нескольких

установок. С помощью подобных источников успешно осуществляется не только сейсморазведка на малых и средних глубинах (до нескольких километров), но и зондирование земной коры на глубину до 60 км [2]. Принципиальным их недостатком является относительно малая мощность излучения объёмных волн и отсутствие долговременной стабильности излучения, что обусловлено как флуктуациями механических параметров всей конструкции, так и неконтролируемыми изменениями свойств подповерхностного грунта под действием интенсивных вибраций. В результате число накапливаемых посылок не превышает, как правило, нескольких десятков.

Аналогичным образом низкочастотные (в диапазоне ниже 1 кГц) гидроакустические источники также эволюционировали от взрывных через электроискровые и пневматические к высококогерентным резонансным излучателям. Разработанные в ИПФ РАН источники электромагнитного типа способны развивать акустическую мощность порядка нескольких киловатт в диапазоне от десятков до сотен герц при полностью электронной и стабилизированной с высокой точностью системе управления, что позволяет использовать специальные виды зондирующих сигналов [3, 4]. Использование таких источников направлено на проведение достаточно тонких измерений амплитудно-фазовых и спектральных характеристик принимаемых на большом удалении сигналов, которые содержат в себе всю информацию о свойствах канала распространения. Одним из убедительных примеров реализации «когерентных возможностей» в низкочастотной гидроакустике является серия пробных экспериментов по акустической термометрии океанических бассейнов на сверхдлинных акустических трассах [5, 6].

Важно подчеркнуть, что разработанные к настоящему времени монопольные гидроакустические излучатели [3, 4] создают в воде существенно более интенсивные сигналы (в сравнении с уровнем излучения упомянутых выше сейсмических источников) в частотном диапазоне, близком к активно используемому при сейсмическом зондировании, при сравнительно малых габаритах и весе. При этом работа на более высоких частотах (сотни герц) даёт принципиальную возможность повышения пространственной разрешающей способности. Но основное потенциальное преимущество их использования в качестве источников сейсмических волн заключается в том, что высокая и долговременная стабильность излучаемых сигналов позволяет реализовать нехарактерные для сейсмоакустики когерентные методы формирования и регистрации сигнального поля. Среди них — фазирование группы излучателей для «подсветки» отдельных участков грунта, синтез приёмной апертуры и современные методы корреляционной обработки сигналов для повышения пространственной разрешающей способности зондирования.

Таким образом, последовательный анализ возможностей применения когерентных методов в сейсмоакустике, включающий анализ эффективности применения мощных гидроакустических излучателей в качестве когерентных источников сейсмоакустических сигналов и адекватных методов построения сейсмоакустических изображений неоднородностей грунта с высоким пространственным разрешением, представляет значительный интерес. Цель настоящей статьи — краткий обзор исследований в этом новом направлении, выполненных в ИПФ РАН за последнее десятилетие на базе фундаментальных и прикладных результатов, полученных в смежных областях волновой диагностики неоднородных сред, прежде всего в области гидроакустики. Основное внимание уделено результатам натурных экспериментов, которые продемонстрировали потенциальные преимущества когерентных методов в сейсмоакустике для различных приложений.

Материал статьи представлен следующим образом. В разделе 1 приведены результаты экспериментов, показавших высокую эффективность гидроакустических излучателей как источников сейсмических волн и хорошее соответствие с выполненными теоретическими расчётами [7–9]. В разделе 2 представлены результаты оригинальных работ [10, 11], посвящённых исследованию возможностей использования сложных фазоманипулированных сигналов гидроакустического излучателя и их корреляционного анализа в приёмной системе с целью повышения разрешающей

способности и глубины сейсмоакустического зондирования. В зависимости от мощности и частоты излучения глубина зондирования, при которой удаётся надёжно восстановить геологический рельеф, может составлять от единиц до десятков километров. В разделе 3 основной акцент сделан на специальных методах накопления и обработки когерентных сейсмоакустических сигналов, способных обеспечить высокую разрешающую способность при построении изображений достаточно контрастных подповерхностных неоднородностей грунта (например, подземных сооружений) [12]. Описание мобильного приёмно-излучающего комплекса, разработанного в ИПФ РАН для проведения работ по сейсмоакустическому зондированию на малых глубинах с высоким пространственным разрешением в интересах инженерной сейсморазведки, представлено в разделе 4. Здесь же представлены некоторые из результатов полевых экспериментов, полученных с использованием этого комплекса. В заключительном разделе 5 подведены итоги выполненных исследований и кратко обсуждаются направления дальнейших продвижений.

1. ЭФФЕКТИВНОСТЬ ВОЗБУЖДЕНИЯ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЛН ГИДРОАКУСТИЧЕСКИМИ ИЗЛУЧАТЕЛЯМИ

Очевидно, что специфика сейсмического использования гидроакустического излучателя (любого типа) заключается в решении вопроса эффективной передачи излучаемой им мощности из воды в земные породы. На сегодняшний день в ИПФ РАН предложены и апробированы две схемы, которые характеризуются достаточно высоким коэффициентом передачи мощности в объёмные сейсмические волны при гораздо более слабом возбуждении «паразитных» поверхностных волн.

Одними из первых в этом направлении были статья [7] и доклад на съезде Американского акустического общества [8], в которых были представлены теоретические оценки эффективности излучения объёмных сейсмических волн при использовании в качестве согласующего элемента заполненного водой резервуара, в который помещается сам излучатель. Анализ предложенной схемы возбуждения сейсмических волн показал, что гидроакустический излучатель, установленный в верхней части жёсткой трубы, заполненной водой и заглублённой в грунт, может обеспечить полезную мощность излучения, сравнимую с акустической мощностью, излучаемой им в водной среде (например, до 1 кВт на частотах 20÷200 Гц [3]). В отличие от традиционных источников типа «Вибросейс» поверхностные волны возбуждаются при этом слабо, и основная доля мощности излучения приходится на объёмные волны P- и S-типа. Именно такая схема излучения была успешно использована при выполнении демонстрационного эксперимента по сейсмоакустическому зондированию подземных сооружений [12], результаты которого приведены в следующем разделе.

Вместе с тем подобная «резервуарная» схема использования гидроакустического излучателя при оптимальном согласовании её характеристик с излучением имеет ярко выраженные резонансные свойства, что создаёт неудобства при практическом использовании такой установки в различных породах (фактически, для повышения эффективности излучателя необходимо подбирать механические и геометрические параметры конструкции в соответствии с геоакустическими свойствами окружающей породы). Поэтому очевидный интерес представляет и другая схема, в которой излучатель помещается непосредственно в естественный водоём. Последний обеспечивает согласование гидроакустического излучения с грунтом, свободное от механических резонансов конструкции в первой схеме. Кроме того, такая схема имеет и другое потенциальное преимущество, связанное с тем, что интересные для сейсмологии и сейсморазведки регионы весьма часто оказываются расположенными либо вблизи природных водоёмов (рек, озёр, морских проливов), либо сами представляют собой водоём (наиболее важный пример — океанический шельф).

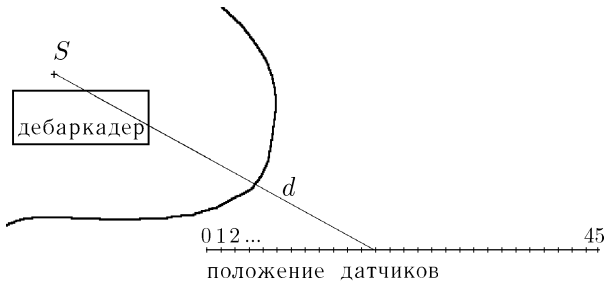

Рис. 1. Схема измерений на реке Троца. Точка 0 удалена от излучателя на 42 м, точка 45 — на 170 м. Источник располагался в точке S

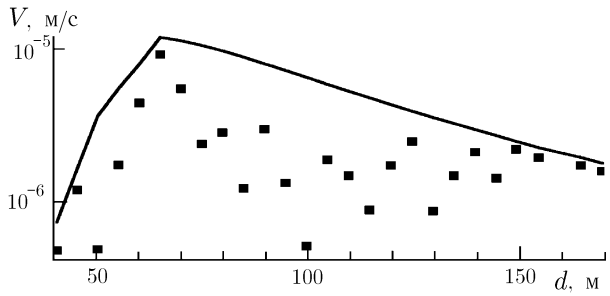

Рис. 2. Рассчитанные (сплошная линия) и измеренные (точки) амплитуды вертикальной проекции скорости колебаний поверхности в зависимости от расстояния до соответствующего датчика (см. рис. 1)

Точный расчёт эффективности возбуждения сейсмических волн при непосредственной передаче мощности гидроакустического излучения из воды в грунт сопряжён с необходимостью учёта особенностей акватории (профиля дна, контура берегов и т. п.), что сильно усложняет вычисления. Вместе с тем очевидно, что для получения оценочных величин подобные детали не столь важны, а связанная с ними специфика (например, возможное появление зон повышенной интенсивности излучения (фокусировки) из-за геометрических особенностей акватории) могут быть качественно поняты на основе простых эвристических соображений. В работе [9] для теоретического анализа этой схемы была использована наиболее простая модель: монопольный гидроакустический источник, расположенный в однородном жидком слое с постоянной глубиной, который, в свою очередь, лежит на упругом полупространстве. Несмотря на столь существенную идеализацию, эта модель позволила получить подтверждённые натурным экспериментом количественные оценки, касающиеся возбуждения различных типов сейсмических волн.

Первые эксперименты были проведены в акватории Нижегородского водохранилища в месте впадения в него реки Троца (Нижегородская область, Россия). Залив, образованный поймой реки, имеет глубину вблизи берега 4÷6 метров; в месте установки излучателя глубина составляла $H = 4{,}5$ м. Гидроакустический излучатель, имевший акустическую мощность $W_0 = 400$ Вт и рабочую частоту 227 Гц, был опущен в воду на глубину $h = 2$ м. Сейсмоприёмники были расположены на берегу залива через каждые 3 м. На рис. 1 показана схема эксперимента (детальное описание измерений и оборудования можно найти в работе [11]).

Было установлено [11], что измеренные вертикальные компоненты скорости обусловлены главным образом отражёнными объёмными волнами (амплитуда смещений обратно пропорциональна расстоянию). Отражающий горизонт располагался на глубине $H_\mathrm{b} = 30$ м и не имел существенного наклона. Анализ времён прихода излучённых импульсов в зависимости от расстояния между источником и приёмниками показал, что скорость продольной волны $c_1 = 1\,300 \div 1\,400$ и $1\,800 \div 1\,950$ м/с в верхнем слое (до 30 м) и глубже него соответственно. Использование дополнительного ударного возбудителя для определения скорости волны Рэлея [13] показало, что скорость этой волны составляла $V_\mathrm{R} = 190$ м/с. Полученная величина V_R соответствует скорости поперечной волны $c_2 \approx 200$ м/с в верхнем слое.

Дополнительно были проведены гидроакустические измерения для определения параметров дна. Было показано, что излучатель возбуждает первую моду волновода, образованного слоем жидкости. Наблюдалось увеличение давления у дна, обусловленное боковой волной, на расстоянии примерно 4 м от источника. Это позволило оценить угол полного внутреннего отражения $\theta^* = \arcsin(c_0/c_1)$ и скорость распространения продольной волны в дне: $c_1 \approx 1\,700$ м/с (здесь c_0 — скорость звука в жидкости, которая полагалась равной 1 500 м/с). Измеренные скорости про-

дольной и поперечной волн в грунте c_1 и c_2, плотность грунта $\varrho = 2\,000$ кг/м^3, глубина водоёма в точке S (рис. 1) и глубина погружения источника составляли параметры модели [9].

Измеренные сейсмоприёмниками вертикальные смещения земной поверхности в сравнении с теоретическими оценками показаны на рис. 2 (сплошная линия соответствует расчёту в рамках отмеченной выше идеализированной модели [9]). Видно, что измеренные и рассчитанные величины находятся в удовлетворительном согласии. Подчеркнём, что эксперимент был проведён вблизи берега реального водоёма с переменной глубиной, в то время как в модели рассмотрен безграничный слой жидкости постоянной толщины. Неучтённые в модельных расчётах факторы, в частности рассеяние и переотражения на границах раздела слоисто-неоднородного грунта, привели к уменьшению амплитуды принятого сигнала (точки на рис. 2) по сравнению с прогнозируемой величиной (сплошная линия на рис. 2). Для углов падения, близких к скользящим (при наибольшем удалении приёмников от линии берега), когда влияние этих неучтённых в модели факторов ослабевает, экспериментальные результаты наиболее близки к расчёту.

Важно, что в отличие от «резервуарной» схемы использования гидроакустического излучателя [7] высокие уровни излучения достигаются в широком диапазоне частот. Максимальная эффективность излучения имеет место в окрестности критической частоты низшей моды акустического волновода в слое жидкости, которая легко может быть определена экспериментально. Напротив, при фиксированной рабочей частоте излучения максимум эффективности достигается путём подбора соответствующей глубины водоёма. Например, для частоты порядка 100 Гц оптимальная глубина водоёма составляет от 3 м (песчаный или глинистый грунт) до 6 м (скальные породы).

Для выполненного эксперимента рассчитанное значение полезной мощности излучения сейсмической P-волны составило $0{,}4W_0 = 160$ Вт. Согласно расчётам [9] при оптимальном согласовании рабочей частоты и глубины водоёма в месте расположения излучателя может быть достигнута полная передача гидроакустической мощности в продольную волну. Для сравнения отметим, что сейсмический источник «Вибросейс», развивающий усилие в 20 тонн, излучает в продольную волну на частоте 100 Гц примерно 14 Вт.

Таким образом, предложенные схемы возбуждения сейсмических волн с помощью гидроакустических излучателей позволяют добиться высокого коэффициента преобразования мощности излучателя в объёмные сейсмические волны. Схема возбуждения «из воды в грунт», при которой излучатель находится в мелководном природном водоёме, наиболее приспособлена для возбуждения продольных волн сжатия, которые, в свою очередь, в настоящее время активно используются в большинстве сейсмических приложений. Кроме энергетических преимуществ, принципиальным достоинством этой схемы является уникальная для сейсмики возможность использования фактора когерентности — высокой долговременной стабильности излучаемых сигналов и невозмущающего воздействия на подстилающие породы, т. е. на исследуемый канал передачи сигналов. Характерные примеры использования этого ключевого фактора приведены в следующем разделе.

2. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СЛОЖНЫХ СИГНАЛОВ И МЕТОДОВ КОГЕРЕНТНОЙ ОБРАБОТКИ

Как было отмечено выше, принципиальным преимуществом использования высококогерентных источников в задачах сейсмоакустического зондирования является возможность когерентного накопления сигналов с целью увеличения глубины зондирования или повышения разрешающей способности при умеренных и малых уровнях излучения. В зависимости от конкретных целей и условий эксперимента возможны различные способы реализации подобного «накопительного» подхода — формирование сигнального поля нескольких фазированных источников (синтез излучающей апертуры), формирование пространственно-развитой приёмной системы на базе одного

или небольшого числа приёмников (синтез приёмной апертуры), излучение сигнала в виде последовательности модулированных посылок специального вида, согласованная фильтрация которых обеспечивает эффективную «фокусировку» корреляционной функции принятого сигнала, а также комбинации перечисленных методов. Все перечисленные способы достаточно хорошо известны и активно применяются в различных областях (в радио- и гидролокации, радиоастрономии, связи и др.), поэтому их адаптация в приложении к задачам когерентной сейсмоакустики оказалась успешной.

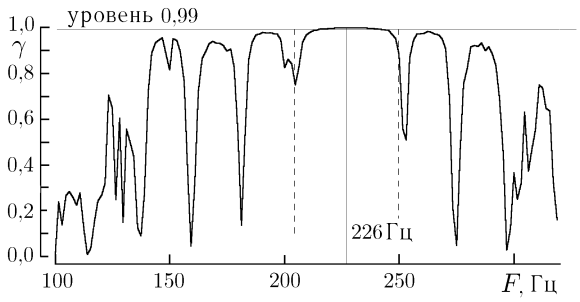

Рис. 3. Коэффициент когерентности излучения γ. Усреднение проводилось по 50-ти импульсам излучения. Пунктирными линиями отмечена полоса частот, отвечающая 90 % мощности излучения ($\Delta f = 2/T$)

Первая серия демонстрационных экспериментов в этом направлении была выполнена в 1996—1998 г. В самых первых из них, проведённых в бассейне реки Троца в 1996 г., использовался относительно высокочастотный излучатель с рабочей частотой 227 Гц (см. предыдущий раздел), временна́я стабильность которого (на уровне 10^{-7}) позволила использовать сигналы в виде фазоманипулированных псевдослучайных последовательностей (ПСП) большой длительности (255 символов), а протяжённую приёмную антенну синтезировать с помощью единственного геофона, перемещаемого с дискретным шагом по земной поверхности. В результате удалось осуществить зондирование структурных неоднородностей породы на рекордной для данной частоты глубине — до 2 км [11]. Разрешение по глубине, определяемое длительностью одного символа ПСП (пять периодов несущей), в пересчёте на пространственный масштаб составило приблизительно 30÷40 м.

В последующих экспериментах [9] было показано, что высокая когерентность излучения позволяет производить фазирование излучения двух источников и также осуществлять накопление большого (порядка нескольких сотен) числа посылок ПСП. Частота излучения в эксперименте по фазированию двух излучателей составляла $f = 226$ Гц при длительности импульсов $T \approx 44{,}2$ мс (10 периодов сигнала несущей частоты). Когерентность сигнала на максимально удалённом (рис. 1) сейсмоприёмнике составляла более 99 % в окрестности несущей частоты излучения, что хорошо видно на рис. 3, где представлен результат накопления 50-ти импульсов. При дальнейшем увеличении числа импульсов излучения вид зависимости, представленной на рис. 3, не изменялся. Уменьшение когерентности принимаемого сигнала наблюдалось на частотах, отвечающих малому уровню спектральных составляющих излучения, и было обусловлено присутствием в сигнале посторонних шумов природного и техногенного происхождения. Подчеркнём, что при использовании вибрационных источников «Вибросейс» удаётся провести когерентное накопление не более 20 импульсов, что связано с изменением свойств грунта в области, прилегающей к вибратору [1].

В буквальном смысле уникальным оказался эксперимент, выполненный при испытании на Ладожском озере созданного в ИПФ РАН автономного излучающего комплекса для реализации американо-российского проекта ACOUS (Arctic Climate Observation using Underwater Sound) осенью 1998 г. Этот проект был нацелен на апробацию прототипа системы долговременного акустического мониторинга средней температуры вод Арктического бассейна на стационарных акустических трассах с протяжённостью до 3 000 км [5, 14], поэтому ключевое требование к излучающему комплексу заключалось в обеспечении высокой мощности (250 Вт) и высокой долговременной стабильности сигналов (на уровне 10^{-11}) на выбранной для проведения эксперимента

частоте 20,5 Гц [3].

Поскольку несущая частота созданного комплекса составила около 20 Гц, он представлялся весьма перспективным в плане глубинного просвечивания земных пород. Параллельно с гидроакустическими испытаниями комплекса в акватории озера были специально проведены измерения принимаемого на берегу (на удалении 2 км) сейсмического сигнала. В целом схема этого эксперимента была аналогична предыдущим [11]. В результате анализа сигнала корреляционной свёртки принятой и опорной ПСП посылок (255 символов, один символ включал 10 периодов сигнала несущей частоты) были надёжно установлены приходы отражённых сигналов от границ раздела отдельных слоёв горных пород, лежащих на глубине до 20 км. Несмотря на то, что подробная реконструкция параметров пород и их «привязка» к известной для данного региона геологической структуре не входила в задачи пробного эксперимента, сам по себе результат представляется убедительным свидетельством возможностей когерентного «гидроакустического» подхода к глубинному сейсмоакустическому зондированию.

Остановимся подробнее на первом из перечисленных здесь экспериментов. Подчеркнём прежде всего, что основной смысл применения ПСП [15] в качестве зондирующих сигналов состоит в том, что последовательности длительностью $T = \mathcal{N}\tau$ отвечает корреляционная функция с треугольным основным лепестком шириной τ и максимумом, равным $\mathcal{N}$ (в данном случае $\mathcal{N} = 255$). Уровень боковых лепестков для моментов времени $\tau < t < T$ в идеальном случае будет равен единице. Таким образом, при высокой когерентности источника (при больши́х $\mathcal{N}$) зондирование псевдослучайными последовательностями аналогично зондированию одинарным импульсом с большой амплитудой, хотя сами посылки ПСП могут иметь при этом весьма умеренную амплитуду, при которой заведомо отсутствуют разного рода эффекты нелинейных искажений и воздействия на исследуемую среду. Сама же ПСП представляет собой модуляцию синусоидального сигнала несущей частоты кодовой последовательностью с большой базой, состоящей из $\mathcal{N} = 2^n - 1$ символов; в конце каждого символа производится изменение фазы колебаний на 0 или π по случайному закону. Отметим также, что в акустике океана ПСП-сигналы используются уже достаточно давно и именно с теми же целями — для повышения разрешающей способности при реконструкции характеристик акустического поля в океанических волноводах или самой океанической среды (см., например, [16, 17]).

В обсуждаемом эксперименте [10, 11] длительность элементарного символа выбиралась равной 5-ти периодам волны несущей частоты и составляла $\tau = 22{,}12$ мс. Конечная длительность излучаемых импульсов приводит к перекрытию регистрируемых импульсов, возникающих в результате отражений и переотражений от границ различных слоёв породы, что затрудняет восстановление кинематических характеристик отдельных посылок. Полное число хорошо различимых импульсов для трассы, показанной на рис. 1, и выбранной длительности символа ПСП составляло 10. Для разрешения частично перекрывающихся импульсов и более точного определения временны́х задержек была произведена внутриимпульсная декомпозиция [18]. В результате кинематические характеристики были определены путём линейной аппроксимации времён прихода для 32-х наиболее удалённых точек. Аппроксимация проводилась таким образом, чтобы минимизировать среднеквадратичное отклонение наблюдаемых значений от модельных. Отметим, что при удалении от источника на максимальное для данной трассы расстояние 200 м амплитуда сейсмического сигнала на поверхности превышала уровень шумов различной природы на 20 дБ. Это означает, что, допуская определённое ослабление принимаемого сигнала, можно уменьшить минимальную длительность символа ПСП до трёх периодов волны несущей частоты и добиться заметного дополнительного увеличения временного разрешения приходящих импульсов.

Прежде чем переходить в результатам реконструкции геологической структуры пород, дадим краткую справку о ней из известных источников [19]. Верхняя часть разреза (ВЧР), лежащая

на глубинах 0÷500 м, начинается с зоны малых скоростей на глубинах 0÷3 м, образованной рыхлыми породами с характерными скоростями P-волн около 500 м/с и декрементом затухания $\theta \sim 0{,}3$. Ниже залегает зона пониженных скоростей (глубины 3÷30 м), где $c_1 \sim 1\,000$ м/с и $\theta \sim 0{,}1$. Далее идут тонкие (толщиной 10÷30 м) малоконтрастные слои до глубины 300 м ($c_1 = 2\,000$ м/с, $\theta \approx 0{,}03$), переходящие в несколько мощных пластов с хорошо отражающими границами. Наконец, ниже подошвы ВЧР до кристаллической платформы, лежащей на глубине 2 км, опять расположены малоконтрастные слои. Скачок параметра ϱc на границе платформы велик, и она должна быть хорошо выражена на коррелограмме. На юге Нижегородской области глубина залегания Русской платформы равна 1 км, на севере — 3 км, так что её уклон составляет всего 0,3°. Поскольку исследуемая трасса принадлежит пойме реки Троца, то в подповерхностной зоне малых скоростей возможны пласты с выклиниванием. Кроме того, до глубин 100 м в толще осадочных пород могут находиться крупные глыбы более плотных кристаллических пород.

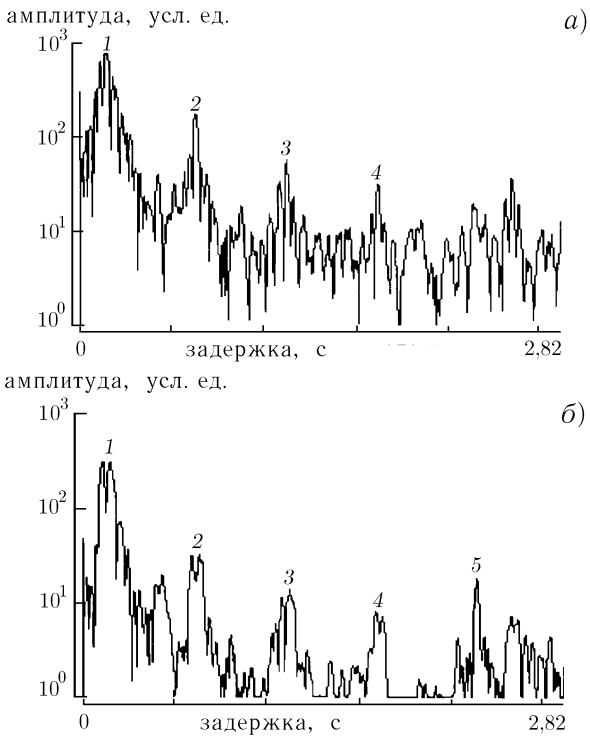

Рис. 4. Кореллограммы для одного (*а*) и 4-х синфазно сложенных соседних геофонов (*б*)

На рис. 4 показаны коррелограммы (свёртки принятых и опорного ПСП-сигналов) в двух различных случаях: для сигнала, принятого с одного геофона (*а*), и для суммарного сигнала с четырёх соседних геофонов (*б*). Синфазное сложение сигналов от группы геофонов было проведено для формирования приёмной диаграммы направленности с основным лепестком, направленным вертикально вниз, с целью регистрации отражений от более глубоких слоёв.

В результате обработки полученных коррелограмм была восстановлена структура приповерхностного слоя на глубине 20÷30 м. При этом граница раздела является контрастной, поскольку отчётливо были видны даже четырёхкратные отражения излучённых импульсов от неё и земной поверхности. Скорость продольных волн в слое, расположенном на глубине более 30 м, составила 1 850÷1 950 м/с, а в слое на глубине 0÷30 м — 1 300÷1 400 м/с. Синфазное сложение сигналов в четырёх соседних точках приёма уменьшает уровень импульсов *1÷4* на 15 дБ (эти импульсы отвечают отражениям от слоёв с малой глубиной залегания, и уменьшение их амплитуды происходит за счёт диаграммы направленности приёмной системы. При этом появляется новый отклик *5* с задержкой 2,4 с и отношением сигнал/шум около 20 дБ (см. рис. 4). Отметим, что выделение сигнала *5* происходит как вследствие когерентного сложения четырёх сигналов, так и уменьшения в месте его расположения корреляционных шумов от сигнала *1*. Когерентное сложение сигналов более чем четырёх соседних геофонов на любом участке трассы не приводит к дальнейшему увеличению уровня импульса *5* и снижению уровня импульса *1*.

Для более наглядной реконструкции структуры различных слоёв по данным коррелограмм, аналогичных рис. 4, были построены полутоновые профилограммы. На рис. 5 в яркостном виде

представлены амплитуды функции взаимной корреляции (рис. 4) для 45-ти точек измерения. При построении профилограммы производилось попарное когерентное сложение сигналов двух соседних групп геофонов с последующей нормировкой на максимум, чтобы исключить регулярное уменьшение амплитуды, обусловленное геометрической расходимостью и затуханием излучения. Тёмные области соответствуют максимальной амплитуде сигнала. Близкие к горизонтальным регулярные полосы одинаковой яркости соответствуют объективно существующим геологическим слоям. Видны также неровности границ отдельных слоёв с пространственным масштабом порядка десятка метров.

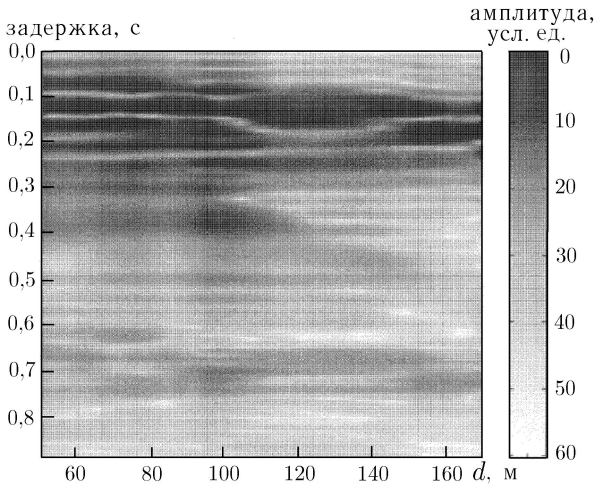

Рис. 5. Профилограмма для синфазно сложенных сигналов 2-х соседних геофонов. По вертикали — величина задержки в секундах, по горизонтали — удаление от источника в метрах. При средней скорости $c_1 \sim 2\,000$ м/с задержке в 1 с отвечает глубина 1 км

Таким образом, применение известных и хорошо развитых для различных приложений процедур формирования и обработки когерентных сигналов даёт возможность построения сейсмоакустических изображений слабоконтрастных неоднородностей земных пород на различных глубинах с высоким разрешением. В свою очередь, это оказывается возможным благодаря использованию нетрадиционных для сейсмики режимов высококогерентного излучения.

3. ПОСТРОЕНИЕ СЕЙСМОАКУСТИЧЕСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ МЕТОДОМ ФОКУСИРОВКИ

Наряду с использованием специальных зондирующих сигналов в виде ПСП большой длительности, используемых для решения различных задач диагностики неоднородных сред, в сейсмоакустике возможны и другие подходы к реализации универсальных процедур пространственно-временно́й обработки сигналов с высоким разрешением. Одной из таких процедур, имеющей широкое распространение в радио- и гидролокации, является согласованная фильтрация узкополосных сигналов. Максимизация отклика согласованного пространственно-временно́го фильтра на сигнал, содержащий неизвестные параметры (например, координаты источника), позволяет получить оценку этих параметров и локализовать источник в среде при условии, что сама среда распространения известна (а именно, известны пространственные распределения характеризующих её параметров). С другой стороны, эта же процедура максимизации отклика может быть применена для решения обратной (томографической) задачи — оценки параметров среды распространения при условии, что геометрия расположения источников и приёмников полностью известна.

Подчеркнём, что основное условие применимости методов согласованной фильтрации в любой из этих двух постановок задачи заключается в стационарности среды распространения на временах, необходимых для накопления сигнала и формирования отклика согласованного фильтра. К примеру, в гидроакустике это условие оказывается серьёзным препятствием при увеличении дальности обнаружения (локализации) источника в силу флуктуаций параметров океанической среды, и причины «рассогласования» результатов обработки с ростом масштабов накопления сигнала (во временно́й и пространственной областях) здесь имеют принципиально статистический характер. Напротив, в сейсмоакустике неоднородности среды распространения являются факти-

чески «замороженными» на этих масштабах, поэтому основная трудность согласования модели принимаемого опорного сигнала с реальным сигналом заключается в эффективной параметризации среды, имеющей весьма сложную внутреннюю структуру.

В работе [12] сообщается о проведении эксперимента, в котором впервые были продемонстрированы возможности построения сейсмоакустических изображений подземных сооружений с использованием метода синтезированной апертуры по различным направлениям, что позволило применить специальную процедуру перестраиваемой фокусировки синтезированной антенны с целью томографической реконструкции неоднородностей.

Эксперимент был проведён на территории полигона Центральной сейсмической обсерватории (г. Обнинск, Калужская область, Россия) в ноябре–декабре 1997 г. Объектом исследования был тоннель сечения 2×3 м, расположенный на глубине 30 м. Согласно данным бурения (на расстоянии 200 м от тоннеля), при увеличении глубины от 0 до 40 м скорость P-волн возрастает от 500 до 1 800 м/с, причём на глубинах 25÷40 м расположен слой известковой породы, подверженной карстовым изменениям.

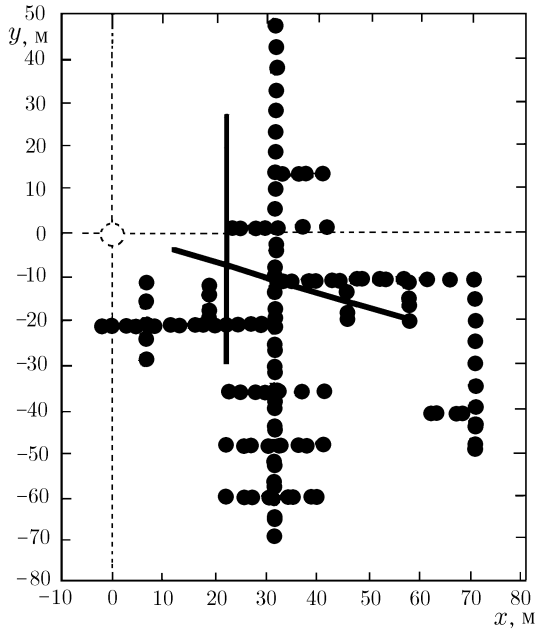

Рис. 6. Расположение элементов измерительной системы относительно тоннеля

Излучающее устройство было выполнено на базе электромагнитного гидроакустического преобразователя, помещённого в цилиндрическую металлическую ёмкость с диаметром и высотой 1,5 м. Ёмкость заглублялась в землю и целиком заполнялась водой. Согласно выводам работ [7, 20] поверхностные волны в этом случае возбуждаются слабо, и акустическая энергия делится примерно поровну между P- и S-волнами. На рабочей частоте 195,3 Гц мощность акустического излучения составляла около 100 Вт. Первичным генератором являлся рубидиевый стандарт частоты, который использовался как для задания управляющих сигналов излучения, так и для синхронизации излучаемых и принимаемых сигналов. Для приёма использовались акселерометры с чувствительностью 100 мВ/мс$^{-2}$, сигнал с которых после усиления и фильтрации поступал на 16-разрядный аналого-цифровой преобразователь. Для дополнительного увеличения отношения сигнал/шум производилось когерентное накопление 64-х импульсов (импульс состоял из 10-ти периодов сигнала несущей частоты при скважности излучения 25).

Высокая стабильность излучения позволила синтезировать приёмную апертуру на двух пересекающихся профилях путём последовательной перестановки единственного геофона. При этом сохранялись соотношения фаз принимаемых и излучаемого сигналов на несущей частоте, что обеспечило возможность последующей согласованной обработки. На рис. 6 дан общий план (вид сверху) расположения источника и измерительной системы вместе с проекцией на поверхность центральной оси основного тоннеля и его ответвлений (координаты даны в метрах). Использованы следующие условные обозначения: источник сигнала (координаты $(0, 0)$) — пунктирный кружок, жирные точки — тоннель на глубине 30 м, сплошные линии — синтезированная приёмная антенна. Первый профиль с общей длиной 45 м и расстоянием между точками измерения 0,5 м был почти перпендикулярен тоннелю и имеет продольный вынос источника (расстояние от источ-

ника до ближайшей точки профиля) 12 м. Второй профиль был параллелен тоннелю и проходился с шагом 1 м.

Построение сейсмоакустического изображения с общей точки зрения методов обработки сигналов — результат согласованной пространственно-временно́й фильтрации сигналов от заданного множества рассеивателей с известными (заданными) координатами $\mathbf{r}_m = (x_m, y_m, z_m)$. Эти точки, на приём сигналов от которых последовательно «настраивается» многоэлементная антенна, являются точками пространственной фокусировки согласованного фильтра. Общее число таких точек составило $90 \times 130 \times 40$ по координатам x, y, z соответственно, число отсчётов по частоте — 27 в полосе 40 Гц. Модель сигнала, принимаемого на каждом из элементов приёмной антенны (на каждом шаге измерения), имеет вид

$$S_p(t) = \sum_m A_m S_0\Big[t - \tilde{t}(\mathbf{r}_\mathrm{s}, \mathbf{r}_p, \mathbf{r}_m)\Big], \tag{1}$$

где p — индекс элемента антенны (положения приёмника), $\mathbf{r}_\mathrm{s}$, $\mathbf{r}_p$ и $\mathbf{r}_m$ — координаты излучателя, приёмников и рассеивателей соответственно, S_0 — излучаемый (опорный) сигнал, A_m — амплитудный коэффициент, учитывающий затухание и эффективность возбуждения принимаемого типа волн, $\tilde{t}$ — временна́я задержка принимаемых сигналов.

Алгоритм построения изображения рассеивающих неоднородностей максимизирует отклик согласованного фильтра, имеющий следующий вид во временно́й и частотной областях соответственно:

$$F(\mathbf{r}) = \left| \sum_p \int\limits_{t\in\tau} S_0^*\Big[t - \tilde{t}_0(\mathbf{r}_\mathrm{s}, \mathbf{r}_p, \mathbf{r})\Big] S_p(t)\,\mathrm{d}t \right|^2, \tag{2}$$

$$F(\mathbf{r}) = \left| \sum_p \sum_{f_0-\Delta f/2}^{f_0+\Delta f/2} X_p(f) X_0^*(f) \exp\Big[2i\pi f \tilde{t}_0(\mathbf{r}_\mathrm{s}, \mathbf{r}_p, \mathbf{r})\Big] \right|^2, \tag{3}$$

где τ — длительность сигнального импульса, $X_p(f)$ и $X_0(f)$ — фурье-спектры принимаемого и опорного сигналов соответственно, f_0 и Δf — несущая частота и ширина полосы сигнала, $\tilde{t}_0$ — пробная задержка; индекс $*$ обозначает комплексное сопряжение. В (3) производится суммирование по дискретному набору частот, отвечающих окну быстрого преобразования Фурье. Видно, что согласование фильтра заключается, по существу, в согласовании оценки задержки $\tilde{t}_0(\mathbf{r}_\mathrm{s}, \mathbf{r}_p, \mathbf{r})$ с реальной задержкой, фигурирующей в выражении (1). Оценка величины $\tilde{t}_0$ зависит (при известных $\mathbf{r}_\mathrm{s}$, $\mathbf{r}_p$ и $\mathbf{r}$) только от выбранных значений скорости распространения, которая сама зависит от пространственных переменных. Следовательно, ключевым этапом обработки является выбор этой зависимости.

Ввиду отсутствия надёжной априорной информации о пространственной зависимости (прежде всего, от глубины) упругих параметров породы, в качестве нулевого приближения была использована наиболее простая модель однородного слоя с некоторой средней скоростью распространения c_0. В этом случае задержка оценивается как $\tilde{t}_0 = (|\mathbf{r} - \mathbf{r}_p| + |\mathbf{r} - \mathbf{r}_\mathrm{s}|)/c_0$. Вопрос при этом заключается в выборе величины средней скорости, которая, в свою очередь, обеспечивает максимум контраста фокусировок (откликов фильтра) над средним уровнем фона изображения. Контраст был определён в виде следующего функционала:

$$Q = \frac{\max[F_{12}(\mathbf{r})]}{M[F_{12}(\mathbf{r})]}, \tag{4}$$

где $M[F_{12}(\mathbf{r})]$ — средний уровень пространственного (по переменной $\mathbf{r}$) распределения фокусировок (3), взятых по всем точкам наблюдения (по обеим апертурам) [12].

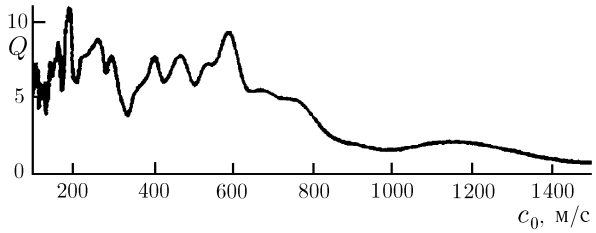

Рис. 7. Зависимость контраста изображения Q от скорости распространения сейсмической волны

На рис. 7 приведена зависимость величины Q от средней скорости c_0. Видно наличие нескольких максимумов, соответствующих скоростям 200, 340, 480, 580 и 1 200 м/с. Для фокусировок (2), (3) было использовано значение $c_0 = 580$ м/с, которому отвечает чётко локализованный максимум контраста и которое вполне согласуется с априорными данными сейсморазведки. Отметим, что выбор других опорных значений средней скорости (отвечающих другим максимумам на приведённой зависимости) также позволил получить удовлетворительное изображение тоннеля, однако попытки использовать более сложные модели кусочно-постоянного распределения скорости по глубине не привели к успеху. Это означает, что выбранная идеализация среды, явно не учитывающая наличие в ней тонкой слоистой структуры, обеспечила определённую устойчивость оценки $\tilde{t}_0$ и отклика согласованного фильтра (уровня фокусировки) по отношению к ошибкам в оценке средней скорости. В то же время привлечение более сложных моделей среды в условиях априорной неопределённости её параметров привело, напротив, к большей чувствительности этих величин к ошибкам «рассогласования».

На рис. 8 показаны тонограммы двумерных изображений (сечений) тоннеля в различных плоскостях: в плоскости xy на глубине 30 м (*а*), в плоскости xz для точки $y_0 = 10$ м (*б*) и в плоскости yz для точки $x_0 = 30$ м (*в*). Более светлые области соответствуют повышенному уровню рассеянного поля и выявляют очертания как основной части (продольного ствола) тоннеля, так и некоторых его ответвлений. Максимальный перепад уровня сигнала, представляемого светлыми и тёмными

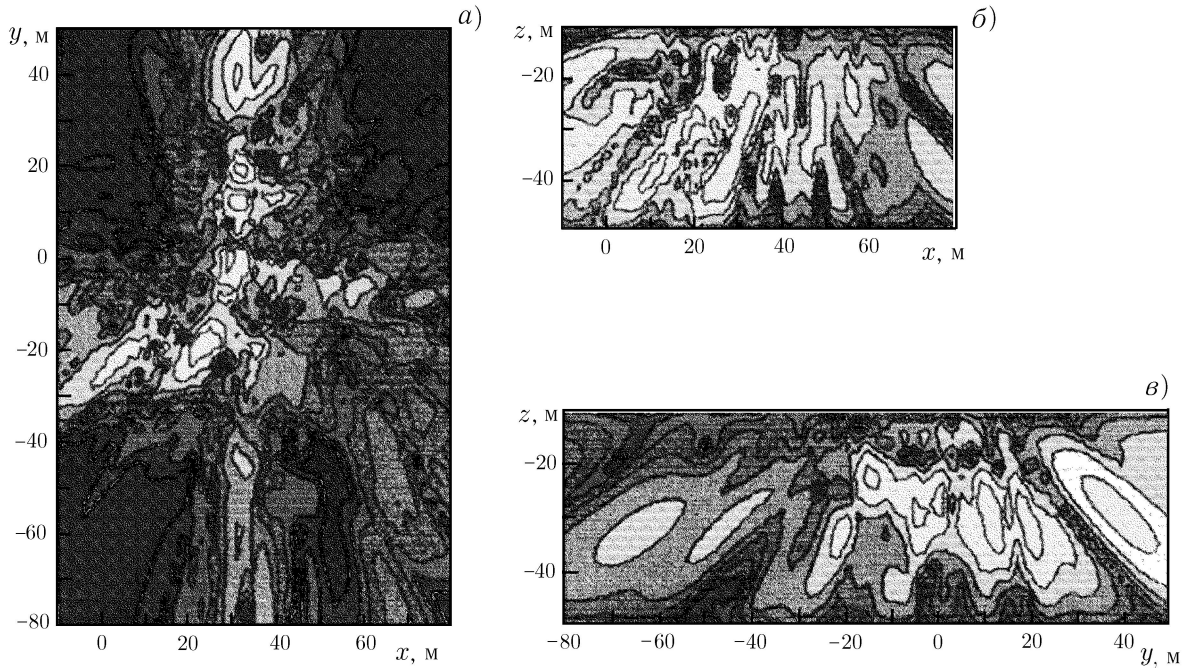

Рис. 8. Яркостные изображения пространственного сечения тоннеля в плоскости xy на глубине 30 м (*а*), в плоскости xz в точке $y_0 = 10$ м (*б*) и в плоскости yz в точке $x_0 = 30$ м (*в*). Отношение уровней сигналов, соответствующих чёрному и белому фону составляет 40 дБ

областями на тонограммах, составляет 40 дБ. Неполная визуализация всех деталей конструкции связана с дополнительными искажающими факторами — экранировкой поля основной частью тоннеля и повышенной удалённостью отдельных точек наблюдения. Очевидно, что получение более качественного изображения предполагает акустическую «подсветку» объекта с нескольких позиций, что позволит более эффективно использовать пространственно-развитую апертуру. Тем не менее полученная в эксперименте совокупность сечений передаёт качественно правильную картину реальной конструкции подземного сооружения и позволяет верно оценить его пространственные параметры.

Таким образом, применение метода согласованной фильтрации в сочетании с синтезом пространственно-развитой приёмной антенны (например, крестообразной) и процедурой накопления сигналов на каждом из её элементов позволяет использовать преимущества когерентного освещения исследуемой области земных пород с целью получения контрастных изображений находящихся в ней неоднородностей. Для получения качественных изображений необходимо, чтобы контраст реконструируемых неоднородностей заметно превышал контраст структурных неоднородностей окружающей их среды. Это означает, что приложения подобных методов могут быть связаны, прежде всего, с инженерной сейсморазведкой подземных сооружений, разного рода пустот (например, карстового происхождения) и других объектов.

4. МОБИЛЬНЫЙ ПРИЁМНО-ИЗЛУЧАЮЩИЙ КОМПЛЕКС СЕЙСМОАКУСТИЧЕСКОЙ ДИАГНОСТИКИ

Наряду с теми возможностями сейсмоакустической диагностики на различных глубинах, которые могут быть реализованы при использовании когерентных гидроакустических излучателей, согласованных тем или иным образом с земной породой, безусловный интерес представляет также и «когерентное» развитие традиционного подхода к возбуждению сейсмических волн с помощью поверхностных вибрационных излучателей. Как отмечалось выше, необходимым условием высокой долговременной когерентности излучаемых сигналов является в этом случае относительная малая нагрузка на грунт, т. е. речь идёт о диагностике приповерхностных слоёв земных пород на малых глубинах. При этом можно эффективно использовать относительно высокие частоты излучения (сотни герц), что позволяет дополнительно повысить разрешающую способность.

С этой целью в ИПФ РАН разработан маломощный вибрационный излучатель в диапазоне частот 100÷800 Гц на базе преобразователя электродинамического типа с полностью электронным управлением, который развивает силу 200 Н. Благодаря использованию электронной системы управления и слабому воздействию на грунт сейсмический сигнал является высококогерентным. Это означает, что, как и в описанных выше схемах излучения, при формировании изображения можно осуществить накопление большого числа последовательных посылок (в выполненных экспериментах накапливалось до 512 посылок), а также, благодаря сохранению абсолютной фазы сигналов, синтезировать протяжённые приёмные апертуры. На основе этого излучателя был создан мобильный приёмно-излучающий комплекс сейсмоакустической диагностики с высоким разрешением для малоглубинной инженерной сейсморазведки [21]. После краткого описания самого комплекса приведём результаты, полученные в ходе обработки данных ряда полевых измерений.

На рис. 9 показана схема приёмно-излучающего комплекса (располагается в автомобиле УАЗ 2206-014). Излучающая часть комплекса состоит из ЭВМ «Explorer M» (ноутбук) с цифро-аналоговым преобразователем DAQCard-1200 (ЦАП) и фильтра низких частот (ФНЧ), усилителя мощности, излучателя с трактом калибровки, а также программного обеспечения формирования всех режимов излучения. Сигнал, сформированный в ЭВМ, поступает на цифро-аналоговый преобразователь, затем через фильтр низких частот — на усилитель мощности и излучатель. ЦАП

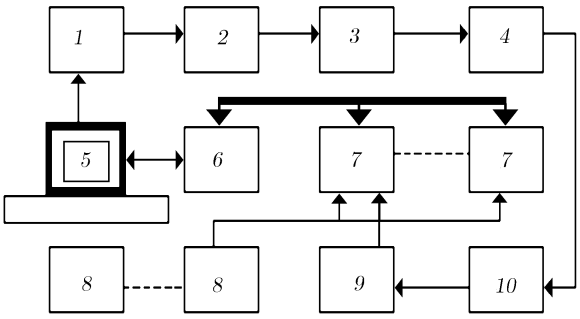

Рис. 9. Блок-схема приёмно-излучающего комплекса: *1* — цифро-аналоговый преобразователь, *2* — фильтр низких частот, *3* — усилитель мощности, *4* — излучатель, *5* — ЭВМ, *6* — крейт-контроллер, *7* — аналого-цифровой преобразователь, *8* — сейсмоприёмники, *9* — усилитель 2635 B&K, *10* — акселерометр ДГ-1

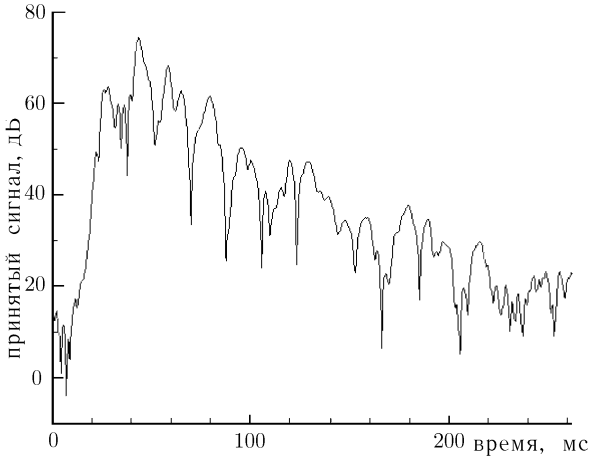

Рис. 10. Временна́я структура огибающей принятого сигнала на коротком профиле при зондировании импульсами с несущей частотой 200 Гц и длительностью три периода несущей с амплитудным окном Хэннинга. Временно́е накопление 32 импульса, пространственное усреднение по 12-и геофонам. Хорошо видны максимумы на временах 43, 58, 81 и 120÷130 мс, соответствующие приходам отражённых волн от четырёх границ

обладает разрешением 12 бит и имеет два буфера по 2 048 байта. Скорость считывания данных задаётся внутренним таймером с разрешением 16 бит. Стабильность считывания определяется внутренним кварцевым генератором.

Основной частью приёмного комплекса является ЭВМ «Explorer M», крейт LTC-36 с модулями аналого-цифрового преобразования (АЦП) LC-202 и крейт-контроллером LC-014, а также приёмная сейсмическая антенна. Модуль LC-202 является четырёхканальным прецизионным аналого-цифровым преобразователем с широким динамическим диапазоном и частотным диапазоном от 0 до 25,5 кГц. Каждый измерительный канал включает в себя 16-битный сигма-дельта аналого-цифровой преобразователь, антиалайзинговый фильтр и инструментальный усилитель. Сигнальный процессор модуля типа ADSP-2186 фирмы «Analog Device» обеспечивает управление аналоговой частью модуля, цифровую фильтрацию, а также обеспечивает протокол сбора данных и передачу их в ЭВМ через крейт-контроллер и принтерный порт. Синхронизация с излучающей частью комплекса осуществляется при помощи импульса, поступающего со второго канала ЦАП на внешний запуск АЦП-модуля LC-202. Приёмная антенна состоит из сейсмоприёмников-акселерометров типа СПАН-4 и согласующего устройства. Программное обеспечение комплекса состоит из программ формирования и излучения сейсмоакустических сигналов, программ сбора, предварительной обработки, отображения и регистрации принятых сигналов.

Возможности комплекса были апробированы в серии полевых экспериментов 1999–2002 гг. на территории Нижегородской и Владимирской областей.

В ходе экспедиции в г. Дзержинск в 2001 г. проведена инженерная сейсморазведка площадки под строительство склада пропана. Для обнаружения отражённых и преломлённых волн были пройдены два линейных профиля. Длинный профиль использовался для анализа структуры слоёв методом преломлённых сейсмических волн, короткий профиль — методом отражённых волн [1, 18, 22]. Используемый при зондировании сигнал представлял собой последовательность из 32-х импульсов, следующих с интервалом 0,5 с. Длительность каждого импульса составляла три периода несущей частоты, форма огибающей — амплитудное окно Хэннинга, так что фактическая длительность импульса составляла примерно

полтора периода несущей частоты. Шаг расстановки геофонов на длинном профиле составлял 1 м, длина профиля 64 м, несущие частоты сигналов 50, 80, 125 и 200 Гц. На коротком профиле шаг расстановки геофонов составлял 0,25 м, длина профиля 8 м, несущие частоты сигналов 200, 400 и 625 Гц.

Анализ распределения ускорений на длинном профиле отчётливо показал наличие прямых, отражённых и преломлённых волн. Наблюдались и кратные отражения от границ. Метод преломлённых волн позволил получить информацию о скоростях распространения волн в каждом слое [18]. Для определения глубин контрастных границ и толщин слоёв грунта необходимо, кроме определяемых по преломлённым волнам скоростей волн в слоях, знать ещё и временны́е задержки отражённых волн. Эти задержки можно определять при вертикальном зондировании (метод отражённых волн) с использованием коротких профилей с более частой расстановкой геофонов. Для подавления прямых (в том числе и поверхностных) волн и для лучшего выделения сигналов, соответствующих распространяющимся почти вертикально отражённым волнам, было проведено пространственное усреднение волнового поля скользящим окном по группе из 12-ти геофонов (синтез антенны с соответствующей диаграммой направленности). Принятые сигналы отражённых волн показаны на рис. 10. Времена прихода импульсов на рис. 10 имеют постоянную систематическую поправку +27 мс, равную полуширине импульса излучения.

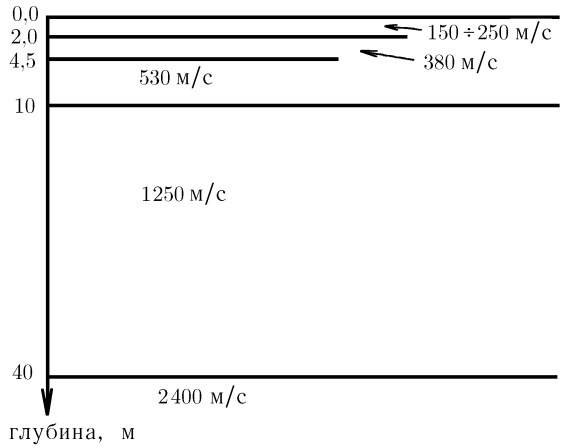

Рис. 11. Первое приближение модели слоистой структуры грунта с указанием глубины границ и скорости волн в слоях

Предварительный анализ структуры волновых полей на длинном и коротком профилях, проведённый методами отражённых и преломлённых волн, позволил построить первое приближение модели слоистой структуры грунта, которая включает в себя четыре слоя, лежащих на полупространстве. Скорость сейсмической волны в полупространстве составила 2 400 м/с, в трёх слоях над ним 1 250, 530 и 370 м/с соответственно, скорость волн в самом верхнем приповерхностном слое грунта лежит в интервале 150÷250 м/с, что согласуется с данными для грунта такого же типа, на котором проводилось данное исследование. Задержки отражённых волн от нижних границ первых трёх слоёв составили соответственно 19, 34 и 57 мс. Задержка отражённой волны от самой глубокой, четвёртой границы составила 95÷105 мс. Этому отражению отвечает максимум в распределении огибающей волнового поля во временно́м интервале 120÷130 мс (см. рис. 10).

Время пробега волны через каждый слой при вертикальном зондировании равно половине разности задержек волн, отражённых от нижней и верхней границ этого слоя, и составило для каждого из слоёв (отсчитывая слои сверху вниз) 9,5, 7,5, 11,5 и 25 мс. Зная скорость волны в каждом слое, для толщины слоёв получаем приблизительно: 2, 2,5, 5,5 и 30 м, а для глубины залегания границ — 2, 4,5, 10 и 40 м соответственно (см. рис. 11). Заметим, что модель слоистой структуры приповерхностной части грунта (а именно число слоёв, их толщина и скорости волн в них) может уточняться при анализе структуры волнового поля при вертикальном зондировании сигналами с более высокой несущей частотой, обеспечивающей лучшее разрешение.

В ходе экспедиции в г. Саров в 2001 г. с использованием мобильного комплекса были проведены эксперименты по обнаружению искусственной неоднородности: отрезка трубы магистрального газопровода с диаметром 0,5 м и длиной 2 м, закопанной на глубину 1,5 м. Расстановка сейсмо-

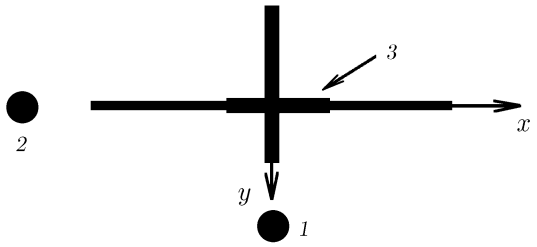

Рис. 12. Блок-схема эксперимента: *1, 2* — излучатели (продольный вынос 1,5 м), *3* — проекция искусственной неоднородности; толстой линией показана крестообразная приёмная антенна (расстояние между геофонами 0,5 м, число геофонов 16)

приёмников и излучателей показана на рис. 12.

Обработка массива данных проводилась методом когерентной фокусировки, описанной выше в разделе 3; число элементов разрешения в направлениях осей x, y и z составляло 30, 20 и 30 соответственно. После проведения эксперимента при расположении приёмной антенны над неоднородностью (см. рис. 12), подобные же измерения проводились при переносе приёмно-передающей системы на 10 м вдоль оси x для контрольного эксперимента на участке без неоднородности. Результаты в виде полутоновых проекций интенсивности рассеянного сигнала по трём координатам показаны на рис. 13. Нетрудно видеть, что неоднородность на проекциях проявляется как отчётливое белое пятно.

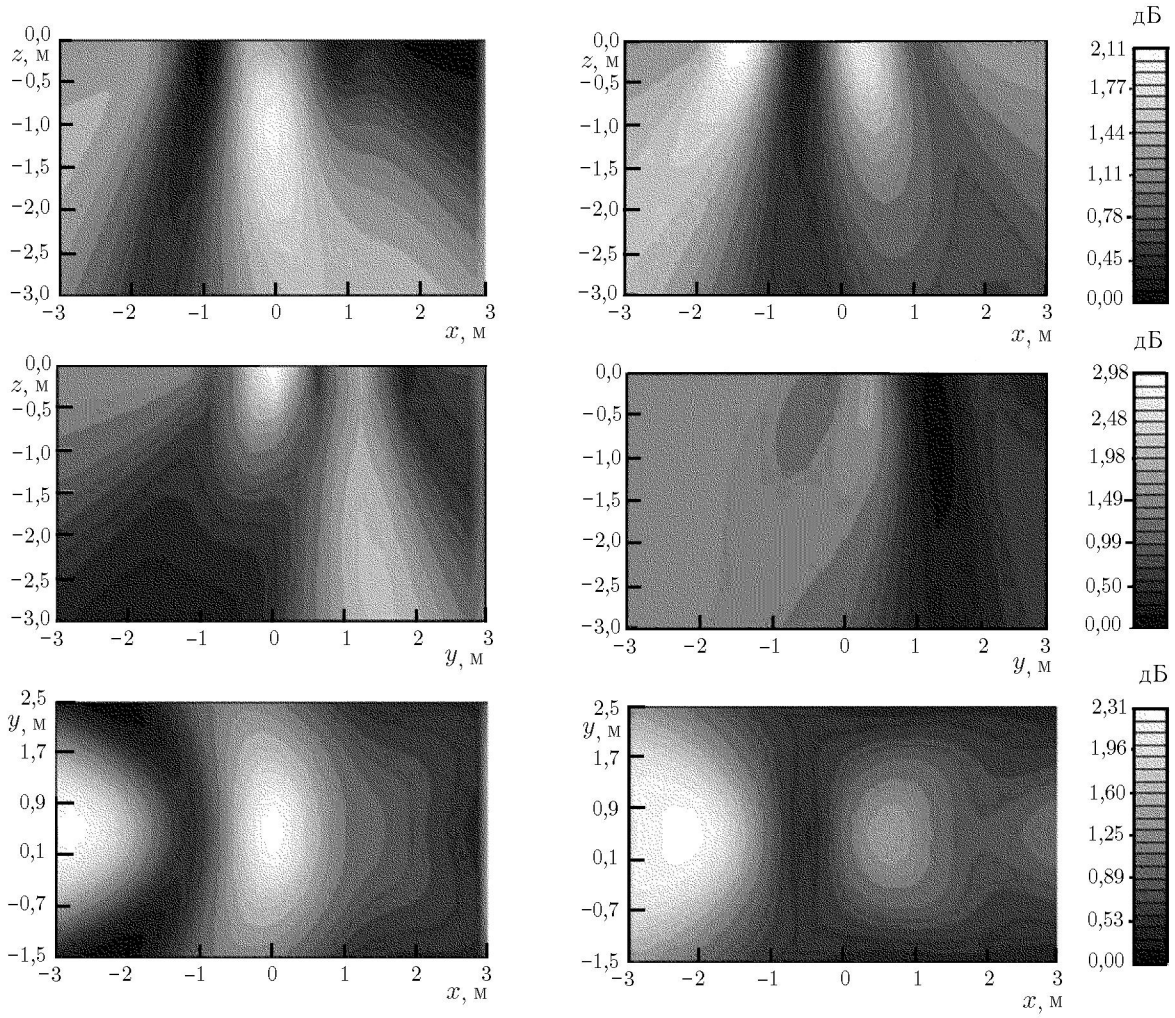

Рис. 13. Левый столбец относится к определению месторасположения неоднородностей, правый столбец — контрольный эксперимент. Сечение в плоскости xz дано для $y = 0$, сечение в плоскости yz — для $x = 0$, горизонтальному сечению xy соответствует глубина 1,5 м. На нижнем рисунке слева центральное светлое пятно соответствует неоднородности

Таким образом, испытания комплекса продемонстрировали его возможности для решения задач сейсмического профилирования приповерхностных слоёв, что представляет значительный интерес для инженерной сейсморазведки (например, при строительстве ответственных сооружений, диагностике оползневых склонов и т. п.).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выполненные в ИПФ РАН теоретические и экспериментальные исследования показали, что когерентные методы волновой диагностики неоднородных сред могут быть с успехом развиты в приложении к сейсмоакустике. В качестве высококогерентных источников сейсмических волн использовались как специальные гидроакустические источники, обладающие уникальным на сегодняшний день соотношением параметров (акустическая мощность, коэффициент полезного действия, долговременная стабильность, полоса излучения), так и маломощные вибрационные излучатели. В зависимости от целей и условий эксперимента может быть выбрана та или иная схема возбуждения зондирующих сейсмических волн при сохранении главного достоинства — обеспечения высокой временно́й когерентности сигналов. Это позволяет обеспечить более высокую в сравнении с традиционными источниками типа «Вибросейс» разрешающую способность и глубину сейсмоакустического зондирования при относительно малых уровнях мощности зондирующих сигналов, не оказывающих заметного искажающего влияния на исследуемую среду. Та же идеология использования когерентных методов накопления и обработки сигналов была положена в основу разработки мобильного приёмно-излучающего комплекса инженерной сейсморазведки, созданного на базе наземного электродинамического излучателя.

Выполненные исследования и апробированные при этом технические разработки позволяют говорить о формировании нового направления — когерентной сейсмоакустики. Долговременная стабильность фазы излучаемых сигналов и обусловленная этим возможность их точной синхронизации с опорными сигналами, широкие возможности в использовании современного арсенала алгоритмов управления, накопления и обработки сигналов позволяют надеяться на дальнейшую разработку перспективных приложений. Среди них — томография приповерхностных слоёв земли в интересах инженерной сейсморазведки (визуализация подземных сооружений и естественных неоднородностей грунта, определение оползнеопасности склонов), зондирование земной коры на малых и средних глубинах в интересах разведки месторождений, в том числе на морском шельфе, мониторинг тектонического состояния земных пород на стационарных сейсмических трассах, в том числе с использованием внутрискважинных излучателей и трёхкоординатных сейсмоприёмников.

Перспективы дальнейшего развития когерентной сейсмоакустики с точки зрения разработки новых методов проведения измерений и реконструкции параметров среды не ограничиваются теми подходами, которые нашли своё отражение в настоящем обзоре. К важному и очень перспективному направлению можно отнести разработку специфических нелинейных методов сейсмоакустической диагностики, основанных на использовании установленной сравнительно недавно сильной акустической нелинейности горных пород [23, 24]. Аномально высокая (в сравнении с линейными характеристиками) чувствительность нелинейных параметров горных пород к разного рода дефектам и перестройкам внутренней микроструктуры даёт очевидные основания полагать, что нелинейные параметры могут являться тем информативным признаком «незаметных» динамических процессов в среде, который в состоянии обеспечить их регистрацию и адекватную интерпретацию. Подчеркнём, что и здесь когерентность излучения должна играть принципиальную роль, поскольку когерентное накопление (вдоль трассы распространения) нелинейных эффектов в среде позволит существенно понизить уровень воздействия на среду (фактически, из-

лучаемую мощность), необходимый для регистрации этих процессов. Первые демонстрационные эксперименты в этом направлении [25, 26] показали, что использование когерентных источников позволяет надёжно регистрировать эффекты нелинейного распространения сейсмоакустических волн, в частности нелинейное самовоздействие в виде амплитудно-зависимого фазового сдвига распространяющейся волны [26] при очень малых амплитудах деформаций в волне, не превышающих 10^{-10} (максимальная удалённость приёмника составляла 170 м), при частоте излучения 227 Гц.

В заключение авторы считают своим приятным долгом выразить благодарность В. С. Авербаху и Ю. К. Постоенко за полезные обсуждения в процессе написания статьи. Работы, результаты которых нашли отражение в этом обзоре, были инициированы академиком В. И. Талановым и выполнялись большим коллективом сотрудников ИПФ РАН: В. С. Авербахом, В. В. Артельным, Б. Н. Боголюбовым, Ю. А. Дубовым, А. И. Жаровым, В. Ю. Зайцевым, Ю. М. Заславским, В. Д. Кукушкиным, А. П. Марышевым, В. Е. Назаровым, К. Е. Пигаловым, Ю. К. Постоенко, А. М. Сутиным, О. Р. Фаизовым и А. В. Циберевым.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ в рамках проектов № 02–02–17089 и 03-02-31006 Минпромнауки РФ в рамках госконтракта № 40.020.1.1.1171 и проектов поддержки ведущих научных школ России НШ–1637.2003.2, НШ–1631.2003.2, НШ–1641.2003.2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шнеерсон М. Б., Майоров В. В. Наземная сейсморазведка с невзрывными источниками колебаний. М.: Недра, 1980.
2. Braver J. A., Oliver J. E. // Ann. Rev. Earth Planet. Sci. 1980. V. 8. P. 205.
3. Bogolyubov B. N., Burlakova I. B., Dolinin D. V., Dubovoy Yu. A., Maryshev A. P., Farfel V. A. // Proc. of the US—Russia Workshop on Experimental Underwater Acoustics. Institute of Applied Physics, RAS, Nizhny Novgorod, 2000. P. 48.
4. Slavinsky M. M., Bogolyubov B. N. Evaluation of electromagnetic source for ocean climate acoustic thermometry at Lake Seneca: Technical report. Woods Hole Oceanographic Institution, 1993.
5. Mikhalevsky P. N., Gavrilov A. N., Baggeroer A. B. // IEEE J. Ocean. Eng. 1999. V. 24, No 2. P. 183.
6. Virovlyansky A. L., Artel'ny V. V., Stromkov A. A. // Proc. of the US—Russia Workshop on Experimental Underwater Acoustics. Institute of Applied Physics, RAS, Nizhny Novgorod, 2000. P. 33.
7. Лебедев А. В., Сутин А. М. // Акустический журнал. 1996. Т. 42, № 6. С. 812.
8. Lebedev A. V., Sutin A. M. // ASA 130-th Meeting, 27 November–1 December 1995., St. Louis, Missouri, USA.
9. Авербах В. С., Боголюбов Б. Н., Дубовой Ю. А., Заславский Ю. М., Лебедев А. В., Марышев А. П., Назаров В. Е., Пигалов К. Е., Таланов В. И. // Акустический журнал. 2002. Т. 48, № 2. С. 149.
10. Лебедев А. В., Марышев А. П. // Акустика океана: Сб. трудов школы-семинара акад. Л. М. Бреховских. М.: Геос, 1998. С. 109.
11. Авербах В. С., Боголюбов Б. Н., Заславский Ю. М., Лебедев А. В., Марышев А. П., Постоенко Ю. К., Таланов В. И. // Акустический журнал. 1999. Т. 45, № 1. С. 1.
12. Авербах В. С., Артельный В. В., Боголюбов Б. Н., Заславский Ю. М., Кукушкин В. Д., Лебедев А. В., Марышев А. П., Постоенко Ю. К., Таланов В. И. // Акустический журнал. 2001. Т. 47, № 4. С. 437.

13. Stokoe K. H., Rix G. R., Nazarian S. // Proc. of 12-th Int. Conf. Soil Mech. and Found. Engng. Rio de Janeiro, 1989. V. 1. P. 331.
14. Gavrilov A. N., Mikhalevsky P. N. // Proc. of the US—Russia Workshop on Experimental Underwater Acoustics. Institute of Applied Physics, RAS, Nizhny Novgorod, 2000. P. 61.
15. Диксон Р. К. Широкополосные системы. М.: Связь, 1979.
16. Welser E. V. // J. Acoust. Soc. Amer. 1973. V. 54, No 3. P. 755.
17. Зверев В. А., Стромков А. А. Численные методы обработки сигналов. Н. Новгород: ИПФ РАН, 2001.
18. Хаттон Л., Уэрдингтон М., Мейкин Дж. Обработка сейсмических данных, теория и практика. М.: Мир, 1989.
19. Кулинич Г. С., Фридман Б. И. Геологические путешествия по горьковской земле. Горький: Волго-Вят. кн. изд.-во, 1990.
20. Авербах В. С., Заславский Ю. М. // Физика Земли. 1997. № 12. С. 1.
21. Авербах В. С., Артельный В. В., Боголюбов Б. Н., Марышев А. П., Постоенко Ю. К., Таланов В. И. // Методы акустической диагностики неоднородных сред: Сб. науч. тр. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 2002. С. 207.
22. Горяинов Н. Н., Ляховицкий Ф. М. Сейсмические методы в инженерной геологии. М.: Недра, 1979.
23. Проблемы нелинейной сейсмики / Под ред. А. В. Николаева, И. Н. Галкина. М.: Наука, 1987.
24. Nazarov V. E., Ostrovsky L. A., Soustova I. A., Sutin A. M. // Phys. Earth Planet. Inter. 1988. V. 50, No 1. P. 65.
25. Боголюбов Б. Н., Дубовой Ю. А., Зайцев В. Ю., Заславский Ю. М., Марышев А. П., Назаров В. Е., Сутин А. М., Таланов В. И. Опыт применения высококогерентного гидроакустического излучателя для возбуждения упругих волн и исследования нелинейных сейсмоакустических эффектов: Препринт ИПФ РАН № 380. Нижний Новгород, 1995.
26. Зайцев В. Ю., Назаров В. Е., Таланов В. И. // Акустический журнал. 1999. Т. 45, № 6. С. 799.

Институт прикладной физики РАН,
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию
10 июня 2003 г.

COHERENT SEISMOACOUSTICS

A. V. Lebedev and A. I. Malekhanov

This paper presents a brief review of the last-decade studies in the field of coherent seismoacoustics carried out at the Institute of Applied Physics of the Russian Academy of Sciences. We comparatively describe various schemes of using powerful hydroacoustic radiators as efficient seismic sources, as well as theoretical models for their analysis and numerical simulations. Methods for high-resolution seismoacoustic imaging (retrieval) of geological strata, based on coherent signals (in particular, coded by large pseudorandom sequencies) are considered. A special attention is paid to the results of a number of recent field experiments demonstrating advantages and new capabilities of coherent methods of seismoacoustic diagnostics at various depths ranging from a few tens of meters to a few tens of kilometers.

УДК 519.24+534.26

МНОГОРАКУРСНЫЙ АПЕРТУРНЫЙ СИНТЕЗ

В. И. Турчин, И. Ш. Фикс, Г. А. Шаронов

Предложена новая разновидность апертурного синтеза — многоракурсный апертурный синтез — для реконструкции дальнего поля по результатам измерения ближнего поля движущегося стохастического источника (измерения проводятся приёмной антенной с длиной, сравнимой с длиной источника). Эта разновидность апертурного синтеза основана на некоторых свойствах пространственной корреляционной функции ближнего поля источника, которая зависит от текущих положений источника и приёмной системы. Исследованы статистические свойства реконструированной диаграммы направленности, а также влияние ширины полосы спектральной плотности мощности и скорости источника на результат реконструкции; проведено численное моделирование.

ВВЕДЕНИЕ

Апертурный синтез (АС) широко применяется в антенной технике при приёме сигнала от движущегося источника либо при движении приёмных элементов относительно наблюдаемого источника. Как известно, за счёт соответствующей обработки сигналов АС позволяет добиться той же угловой или пространственной разрешающей способности, что и при использовании обычной (заполненной) апертуры, покрывающей область взаимных перемещений источника и приёмной системы.

Обычно рассматриваются две разновидности АС [1]: когерентный АС, используемый при приёме детерминированных сигналов (монохроматических, импульсных и т. д.), и некогерентный АС, который применяется при наблюдении источников случайных широкополосных сигналов.

Когерентный АС используется в локаторах бокового обзора (см., например, [2, 3]), при построении изображения движущихся целей в радиолокации [4], при реконструкции диаграмм направленности антенн по их ближнему полю [5]. Принципиальное отличие некогерентного АС от когерентного, в котором одиночный приёмный элемент измеряет комплексную амплитуду поля $p(\mathbf{r})$ в зависимости от координаты $\mathbf{r}$, заключается в использовании, по крайней мере, пары приёмных элементов с координатами $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$, с помощью которых измеряется комплексная пространственная корреляционная функция случайного поля $P = \langle p(\mathbf{r}_1)p^*(\mathbf{r}_2)\rangle$. Некогерентный АС обычно применяется в радиоастрономии при построении изображений внеземных источников радиоизлучения [6] — источников широкополосного случайного сигнала, δ-коррелированных по угловой координате. Для бесконечно удалённых источников, как следует из теоремы ван Циттерта—Цернике [7], пространственная корреляционная функция зависит только от разности $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ и инвариантна относительно плоскопараллельного смещения источника.

Насколько известно, практически нигде ранее не рассматривалась процедура АС для реконструкции характеристик движущегося протяжённого источника стационарного случайного поля, измеряемого заполненной апертурой ограниченных размеров, расположенной вблизи траектории источника. Очевидно, что реализация АС в этом случае будет существенно отличаться от известного «радиоастрономического» варианта из-за нестационарности принимаемых случайных сигналов вследствие движения источника и малых расстояний до приёмной системы. Наибольший практический интерес такая задача представляет для акустики, где существует проблема

измерения уровня шума, создаваемого различными движущимися техническими средствами (автомобилями, поездами, кораблями и т. д.). При её решении обычно приходится учитывать следующие обстоятельства.

Во-первых, измерения желательно выполнять вблизи источника шума с точки зрения простоты учёта влияния среды распространения и выделения поля шумового источника из фоновых шумов.

Во-вторых, среди прочих характеристик источника наибольший интерес представляет угловая зависимость средней интенсивности его случайного поля в зоне Фраунгофера [1].

В-третьих, должно учитываться «естественное» движение источника, которое может быть использовано для повышения информативности измерений.

Первые два обстоятельства предполагают, что измерения выполняются в ближней зоне излучателя шума, а угловая зависимость поля в зоне Фраунгофера (диаграмма направленности) реконструируется по измеренным данным. При неподвижном излучателе процедуру измерения и последующую реконструкцию диаграммы направленности (ДН) можно осуществить путём несложной модификации известного «радиоастрономического» варианта некогерентного АС, например, используя последовательное перемещение пар приёмных элементов вблизи излучателя и соответствующие методы реконструкции интенсивности дальнего поля по измеренной пространственной корреляционной функции ближнего поля. Движение излучателя, однако, вносит существенную специфику в схему измерений. Использование этого движения и составляет основной предмет исследований в данной работе в рамках следующей постановки задачи. Пусть протяжённый источник случайного стационарного во времени поля движется относительно приёмной антенной решётки (заполненной апертуры) небольших размеров, причём минимальное расстояние между решёткой и траекторией движения меньше расстояния до границы дальней зоны источника, определяемого как $2L^2/\lambda$, где L — размер источника, λ — длина волны (вначале предполагаем, что сигнал принимается в узкой полосе частот и λ отвечает центральной частоте этой полосы). Требуется реконструировать угловую зависимость средней интенсивности излучения источника в дальней зоне по пространственно-временным отсчётам случайного ближнего поля.

Как уже отмечалось выше, подобная задача ранее не ставилась. Методам реконструкции дальнего поля излучателей по измерениям ближнего поля уделялось много внимания как в электродинамике (см., например, [5, 8, 9]), так и в акустике [10] в случае детерминированных (чаще — монохроматических) сигналов, причём при измерениях обычно использовалась техника когерентного АС — последовательное сканирование ближнего поля «точечным» приёмным элементом. Измерение характеристик движущегося протяжённого шумового источника рассматривалось в [11, 12], но в рамках модели сигналов весьма общего вида, что приводило к достаточно сложным алгоритмам реконструкции и позволяло анализировать результат лишь численно без наглядной физической интерпретации.

Предлагаемое в настоящей работе решение основано на следующей идее [13]. Очевидно, что прямое использование методов когерентного АС, т. е. преобразования временно́й координаты в пространственную, для движущегося стохастического излучателя невозможно, т. к. временны́е отсчёты наблюдаемого поля при широкой полосе излучаемого шума будут статистически независимы. В то же время текущие оценки пространственной корреляционной функции поля, при-

[1] Если измерение средней интенсивности случайного поля выполнено на определённом расстоянии в дальней зоне, то расчёт уровня шума на другом (бо́льшем) расстоянии выполняется тривиально в соответствии с законом убывания интенсивности сферической волны. Однако такой способ пересчёта для измерений, выполненных в ближней зоне, может привести к существенной погрешности при произвольной функции пространственной корреляции протяжённого источника. Это и является причиной, по которой источник шума удобно характеризовать (для заданного угла наблюдения) средней интенсивностью поля в дальней зоне, отнесённой к интенсивности на заранее оговорённой дистанции.

нимаемого элементами решётки $P = \langle p(\mathbf{r}_n)p^*(\mathbf{r}_m)\rangle$, где $\mathbf{r}_n$ — координата n-го элемента приёмной решётки, будут зависеть от смещения источника относительно центра решётки, что является следствием малого расстояния между источником и приёмной системой. При движении источника приёмная система «видит» его под разными ракурсами в начале, середине и конце движения, что и послужило основанием для введения термина «многоракурсный АС». Как будет показано ниже, именно зависимость пространственной корреляционной функции от смещения источника относительно приёмной системы позволяет решить поставленную задачу.

В разделе 1 приводятся соотношения, связывающие пространственную корреляционную функцию «нитевидного» источника в ближней зоне и функцию угловой корреляции его дальнего поля; в разделе 2 рассматриваются ограничения на полосу частот и скорость движения источника, возникающие при реконструкции его дальнего поля; в разделе 3 приведены результаты численного моделирования реконструкции дальнего поля источника.

1. СВЯЗЬ МЕЖДУ КОРРЕЛЯЦИОННЫМИ ФУНКЦИЯМИ В БЛИЖНЕЙ И ДАЛЬНЕЙ ЗОНАХ

Будем рассматривать одномерный («нитевидный») излучатель с длиной L, характеризуемый некоторым неизвестным распределением сторонних монопольных источников $m(x')$, $-L/2 \le x' \le \le L/2$. Такая аппроксимация может использоваться для сильно вытянутых вдоль одной координаты излучателей.

Вначале будем считать, что излучается строго монохроматический сигнал частоты f. Угловая зависимость поля в зоне Фраунгофера $d(s)$ — диаграмма направленности излучателя — в этом случае представляется в виде

$$d(s) = \int\limits_{-L/2}^{L/2} m(x')\exp(-i\kappa s x')\,\mathrm{d}x', \tag{1}$$

где $\kappa = 2\pi f/c$, c — скорость распространения сигнала, s — нормированное волновое число; при $|s| \le 1$ (в области вещественных углов) $s = \sin\theta$, где угол θ отсчитывается от нормали к излучателю. Связь между комплексным полем $p(x)$, создаваемым излучателем на линии, параллельной ему и отстоящей от него на расстоянии R, и ДН $d(s)$ определяется с помощью известного разложения по плоским волнам:

$$p(x) = \frac{\kappa}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d(s)h_R(s)\exp(i\kappa s x)\,\mathrm{d}s, \tag{2}$$

где

$$h_R(s) = i\pi H_0^{(1)}(\kappa R\sqrt{1-s^2}), \tag{3}$$

$H_0^{(1)}(z)$ — функция Ханкеля 1-го рода нулевого порядка. При бесконечной длине приёмной апертуры (неважно, образована она бесконечной цепочкой приёмных элементов либо одним приёмным элементом, который перемещается вдоль линии наблюдения) ДН в области вещественных углов находится с помощью тривиального обращения — обратного преобразования Фурье разложения (2). Очевидно, что в области мнимых углов $|s| > 1$ при $\kappa R > 1$ ДН не может быть реконструирована из-за быстрого убывания $|h_R(s)|$ с ростом s. По реконструированной ДН с помощью обращения преобразования (1) может быть найдено и распределение сторонних источников $m(x')$. При этом,

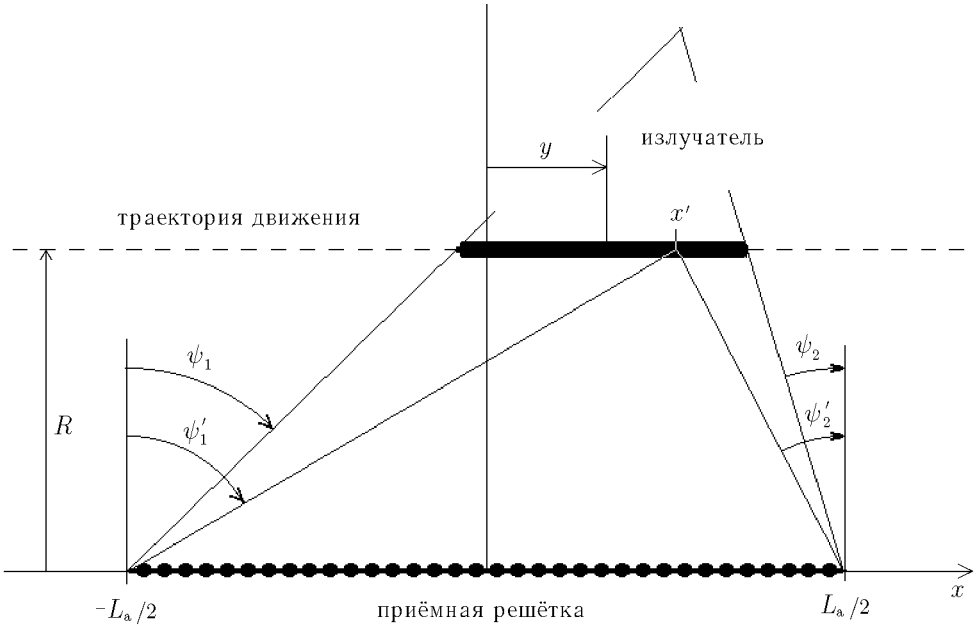

Рис. 1. Текущее взаимное расположение излучателя и приёмной антенной решётки; при данном положении излучателя относительно решётки $\{\psi_1,\, \psi_1'\} > 0$, $\{\psi_2,\, \psi_2'\} < 0$

поскольку $d(s)$ известна только в области вещественных углов $|s| \le 1$, пространственное разрешение Δ_r, с которым может быть реконструировано это распределение, составляет $\Delta_r = \lambda/2$, где λ — длина волны.

Ограничение длины приёмной апертуры приводит к двум взаимосвязанным эффектам: увеличению интервала пространственного разрешения Δ_r и ограничению диапазона углов, в котором может быть реконструирована ДН. Как показано в [14], для взаимного расположения излучателя и приёмной апертуры с длиной L_a, представленного на рис. 1, при $L \gg \lambda$, $L_\mathrm{a} \gg \lambda$ и $R \gg \lambda$

$$\Delta_r = \frac{\lambda}{|\sin\psi_2' - \sin\psi_1'|}\,, \tag{4}$$

а ДН может быть реконструирована в интервале

$$\sin\psi_1 < s < \sin\psi_2. \tag{5}$$

Углы ψ_1', ψ_2' и ψ_1, ψ_2 показаны на рис. 1 и находятся из тривиальных геометрических построений. Отметим, что эти углы зависят не только от размера приёмной апертуры, но и от смещения y центра источника относительно центра приёмной апертуры. Соотношение (5) становится особенно наглядным при $R > 2L^2/\lambda$, когда линия наблюдения находится в зоне Фраунгофера излучателя. В этом случае

$$p(x) \approx \frac{c_{xy}}{R} d(s_{xy}) \exp(i\kappa c_{xy}), \qquad s_{xy} = \frac{x+y}{\sqrt{R^2 + (x+y)^2}}\,, \quad c_{xy} = \sqrt{1 - s_{xy}^2} \tag{6}$$

и соотношение (5) представляет тривиальный факт: ДН определяется там, где измеряется.

Угловая зависимость поля в зоне Фраунгофера стохастического излучателя со случайным распределением сторонних источников $m(x')$, имеющим нулевое среднее и второй момент — функцию пространственной корреляции $M(x', x'') = \langle m(x') m^*(x'') \rangle$, описывается также вторым мо-

ментом — функцией угловой корреляции $D(s', s'') = \langle d(s')d^*(s'')\rangle$:

$$D(s', s'') = \int\limits_{-L/2}^{L/2}\int\limits_{-L/2}^{L/2} M(x', x'')\exp[-i\kappa\,(s'x' - s''x'')]\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}x''. \tag{7}$$

Выражение (7) приведено в приближении узкой полосы приёма: $\Delta f \ll c/L$. В этом приближении зависимость $D(s', s'')$ связана с пространственной корреляционной функцией поля на линии наблюдения $P(x_1, x_2) = \langle p(x_1)p^*(x_2)\rangle$ соотношением

$$P(x_1, x_2) = \left(\frac{\kappa}{2\pi}\right)^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} D(s', s'')h_R(s')h_R^*(s'')\exp[i\kappa\,(s'x_1 - s''x_2)]\,\mathrm{d}s'\,\mathrm{d}s''. \tag{8}$$

Для практических целей наибольший интерес представляет главная диагональ функции угловой корреляции $D(s) = D(s, s)$ — средняя ДН излучателя по мощности. При неподвижном излучателе измерение пространственной корреляционной функции может выполняться либо с помощью пары приёмных элементов, перемещаемых таким образом, чтобы перебрать все их взаимные положения — пары координат (x_1, x_2) внутри квадратной области $L_\mathrm{a} \times L_\mathrm{a}$, либо с помощью антенной решётки с длиной L_a (заполненной апертуры). В последнем случае процедура реконструкции функции угловой корреляции $D(s', s'')$ либо её главной диагонали $D(s)$ может быть упрощена: измерив серию статистически независимых реализаций случайного поля $\{p_j(x)\}$, где j — номер временно́го отсчёта, можно, обращая (2), найти серию реализаций случайных угловых зависимостей $\{d_j(s)\}$, а затем, выполнив усреднение, получить оценку функции угловой корреляции: $\hat{D}(s', s'') = J^{-1}\sum_{j=1}^{J} d_j(s')d_j^*(s'')$. И в первом, и во втором случае функция угловой корреляции будет реконструирована внутри квадратной области, определяемой (5).

Пусть теперь в нашем распоряжении находятся серии измерений для различных смещений y центра источника относительно центра приёмной заполненной апертуры. Как следует из элементарных геометрических построений (см. рис. 1), каждому смещению y будет соответствовать свой сектор углов (5), причём при изменении y в бесконечных пределах соответствующие секторы (5) покроют всю область видимых углов $-1 \le s \le 1$. Таким образом, можно «сшить» оценки $\hat{D}(s', s'')$ для разных y, т. е. реконструировать искомую угловую зависимость внутри всей области вещественных углов.

Алгоритм такой сшивки для ДН по мощности $D(s)$ следует непосредственно из (8). Зависимость функции корреляции поля на линии наблюдения от переменных x_1, x_2 и y представляется в виде

$$P(x_1 - y, x_2 - y) = \\ = \left(\frac{\kappa}{2\pi}\right)^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} D(s', s'')h_R(s')h_R^*(s'')\exp[i\kappa\,(s'x_1 - s''x_2)]\exp[-i\kappa y\,(s' - s'')]\,\mathrm{d}s'\,\mathrm{d}s''. \tag{9}$$

Взяв в бесконечных пределах интеграл от (9) по переменной y, получим

$$Q(x_1, x_2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} P(x_1 - y, x_2 - y)\,\mathrm{d}y = \frac{\kappa}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} D(s)\,|h_R(s)|^2\exp[i\kappa s\,(x_1 - x_2)]\,\mathrm{d}s. \tag{10}$$

Как видно из (10), оценку произведения $D(s)\,|h_R(s)|^2$ можно получить с помощью обратного преобразования Фурье от функции $Q(x_1, x_2)$ по обеим переменным x_1, x_2 (для простоты будем рассматривать непрерывную координату на линии наблюдений):

$$D_h(s) = [D(s)\,|h_R(s)|^2] \otimes F_{\rm a}(s) = \frac{1}{L_{\rm a}} \int\limits_{-L_{\rm a}/2}^{L_{\rm a}/2} \int\limits_{-L_{\rm a}/2}^{L_{\rm a}/2} Q(x_1, x_2) \exp[-i\kappa s\,(x_1 - x_2)]\,{\rm d}x_1\,{\rm d}x_2, \qquad (11)$$

где $F_{\rm a}(s)$ — ДН приёмной апертуры по мощности: $F_{\rm a}(s) = (L_{\rm a}/\lambda)\,{\rm sinc}^2(L_{\rm a}s/\lambda)$, удовлетворяющая условию нормировки $\int F_{\rm a}(s)\,{\rm d}s = 1$, $\otimes$ — операция свёртки, ${\rm sinc}\,x = \sin(\pi x)/(\pi x)$. Для получения окончательной оценки ДН необходимо разделить (11) на $|h_R(s)|^2 \otimes F_{\rm a}(s)$. [2] Последнее выражение, однако, представляет собой в точности результат преобразования по формулам (10), (11) поля точечного источника единичной амплитуды, имеющего ДН $D(s) \equiv 1$:

$$D_0(s) = |h_R(s)|^2 \otimes F_{\rm a}(s) = \\ = \frac{1}{L_{\rm a}} \int\limits_{-L_{\rm a}/2}^{L_{\rm a}/2} \int\limits_{-L_{\rm a}/2}^{L_{\rm a}/2} \left\{ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_0(x_1, y) p_0^*(x_2, y)\,{\rm d}y \right\} \exp[-i\kappa s\,(x_1 - x_2)]\,{\rm d}x_1\,{\rm d}x_2, \qquad (12)$$

где

$$p_0(x, y) = \frac{\exp(i\kappa r)}{r}, \qquad r = \sqrt{R^2 + (x - y)^2}\,. \qquad (13)$$

Окончательная оценка ДН представляется в виде (см. (11), (12))

$$\hat{D}(s) = D_h(s)/D_0(s). \qquad (14)$$

Очевидно, что (11) и (14) определяют ДН излучателя по мощности, сглаженную главным лепестком ДН приёмной апертуры, во всём секторе вещественных углов. Таким образом, мы показали, как можно использовать движение излучателя относительно приёмной решётки, чтобы найти его ДН по мощности. Конечное угловое разрешение при этом не играет особой роли; при конечных размерах излучателя локальные максимумы его ДН имеют угловую ширину, бóльшую λ/L, так что для реконструкции всех характерных особенностей ДН должно выполняться условие $L_{\rm a} \approx L$. Также не играет особой роли и сомножитель $|h_R(s)|^2$ в (11), который является монотонно возрастающей функцией s^2 и компенсируется знаменателем в (14). Ещё раз подчеркнём, что предложенный многоракурсный АС основан на свойстве пространственной корреляционной функции поля в ближней зоне (10); на это свойство, по-видимому, ранее не обращалось внимания, хотя оно достаточно тривиально.

Обычно процедура АС трактуется как заполнение некоторой области проекций, по которым находится искомая функция; в качестве примера можно привести заполнение т. н. uv-плоскости при реконструкции распределения яркости в радиоастрономии (см., например, [15]). Размеры и топология заполненной области обычно характеризуют качество реконструкции. В нашем случае естественно рассматривать заполнение плоскости нормированных волновых чисел s', s''. Мы располагаем полной информацией о стохастическом излучателе в том случае, когда заполнен весь квадрат $S = \{-1 \le s' \le 1;\ -1 \le s'' \le 1\}$ на этой плоскости, соответствующий вещественным углам (неоднородные волны игнорируем). При фиксированном положении излучателя с длиной L относительно приёмной решётки с длиной $L_{\rm a}$ заполненным оказывается квадрат

[2] При этом мы учитываем, что $|h_R|$ имеет интегрируемую особенность при $|s| \to 1$.

$S_y = \{\sin\psi_1 \le s' \le \sin\psi_2;\ \sin\psi_1 \le s'' \le \sin\psi_2\}$, показанный на рис. 2 слева (см. (5)). При движении источника этот квадрат начинает менять размеры и скользить вдоль главной диагонали $s' = s''$; в результате оказывается заполненной область, показанная на рис. 2 справа. Как видно из рис. 2, за счёт движения излучателя заполняется далеко не вся область S, а лишь её часть, примыкающая к главной диагонали. Очевидно, что значения $D(s', s'')$ вдоль этой диагонали как раз и характеризуют ДН по мощности. Нетрудно показать, что заполнение контрдиагонали $s' = -s''$, напротив, характеризует пространственное разрешение, с которым может быть реконструировано, например, распределение средней мощности сторонних источников вдоль излучателя — главная диагональ функции пространственной корреляции $M(x', x')$. Как следует из рис. 2, при многоракурсном АС контрдиагональ не заполняется, так что пространственное разрешение при реконструкции $M(x')$ оказывается примерно таким же, как и при фиксированном расположении излучателя напротив приёмной решётки.

В приведённой выше формулировке многоракурсного АС использовались преобразования пространственной корреляционной функции ближнего поля, т. е. преобразования детерминированной функции. При обработке экспериментальных данных, естественно, должны использоваться реализации случайного поля $p(x, t)$, зависящие от координат приёмных элементов x и времени t. При этом $Q(x_1, x_2)$ естественно заменить её оценкой — случайной функцией

$$\tilde{Q}(x_1, x_2) = v \int p(x_1, t) p^*(x_2, t)\, \mathrm{d}t \tag{15}$$

с учётом очевидной замены $y = vt$, где v — скорость излучателя. Оценка (15) достаточно очевидна. При её использовании достигаются два эффекта: усреднение по времени отсчётов случайного поля, заменяющее усреднение по ансамблю, и интегрирование по траектории движения излучателя в соответствии с (10). Несмотря на это, однако, замена Q на $\tilde{Q}$ требует строгого обоснования. При этом обосновании необходимо также учесть, что временной спектр излучаемого шума имеет конечную ширину и деформируется при движении источника из-за эффекта Доплера. Кроме того, $\tilde{Q}(x_1, x_2)$ есть случайная величина, и для получения практически приемлемых результатов её среднеквадратичное отклонение (СКО) должно быть существенно меньше среднего. Эти вопросы рассматриваются в следующем разделе.

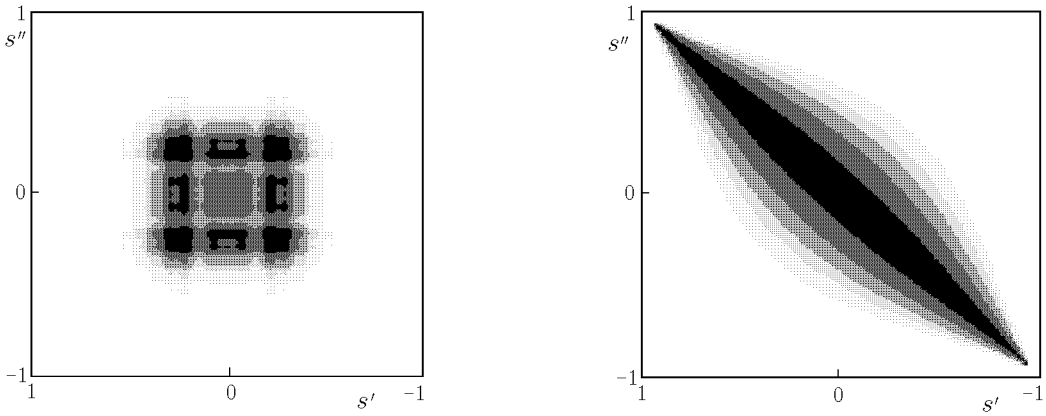

Рис. 2. Заполнение квадрата на плоскости нормированных волновых чисел, соответствующего вещественным углам: слева — для неподвижного излучателя ($y = 0$), справа — для движущегося излучателя; $\lambda = 7{,}25$ м, $L_\mathrm{a} = R = 100$ м

2. СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МНОГОРАКУРСНОГО СИНТЕЗА; ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ

Рассмотрим вначале первый и второй моменты случайной величины $\tilde{Q}$ (15). Пусть излучатель характеризуется случайным пространственно-временны́м распределением монопольных сторонних источников $\mu(x', t)$; тогда при его движении со скоростью v отсчёты случайного поля представляются в виде [3]

$$p(x,t) = \int\limits_{-L/2}^{L/2} \mu(x', t - r(t)/c) \frac{\mathrm{d}x'}{r(t)}\,, \qquad r(t) = \sqrt{R^2 + (x - x' - vt)^2}\,. \tag{16}$$

Для спектрального представления μ в виде

$$\mu(x', t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} m(x', f) \exp(-2\pi i f t)\,\mathrm{d}f$$

(16) переходит в

$$p(x,t) = \int\limits_{-L/2}^{L/2} \mathrm{d}x' \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}f\, m(x', f) r^{-1}(t) \exp[-2\pi i f\,(t - r(t)/c)]. \tag{17}$$

В дальнейшем будем предполагать, что μ как функция времени является стационарным случайным процессом, и функция пространственной корреляции сторонних источников M в спектральном представлении определяется как

$$\langle m(x', f') m^*(x'', f'') \rangle = M(x', x'', f') \delta(f' - f''). \tag{18}$$

При этом мы должны рассматривать диаграмму направленности D как функцию не только угловой переменной s, но и частоты f с учётом того, что в (7) $\kappa = 2\pi f/c$.

Будем анализировать две ситуации: (1) временной спектр сторонних источников на излучателе сосредоточен в узкой полосе с шириной Δf и центральной частотой f_0; (2) временной спектр представляет собой гладкую функцию, и выделение требуемого частотного интервала осуществляется за счёт полосовой фильтрации принимаемых сигналов.

В первом случае будем считать, что $D(s, f) \approx D(s) W(f - f_0)$, где спектральная плотность мощности (СПМ) W сосредоточена в достаточно узкой полосе частот Δf. Нетрудно показать, что для такого представления первый момент случайной величины $\tilde{Q}$, получаемой прямым интегрированием по времени с заменой $\mathrm{d}y = v\,\mathrm{d}t$, есть

$$\langle \tilde{Q}(x_1, x_2) \rangle \approx \frac{\kappa_0}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} D(s)\, |h_R(s)|^2\, \Phi[(x_1 - x_2)\, s/c] \exp[i\kappa_0 s\,(x_1 - x_2)]\,\mathrm{d}s, \tag{19}$$

где $\kappa_0 = 2\pi f_0/c$, $\Phi(\tau)$ — функция корреляции, отвечающая СПМ $W(f)$. Функцию корреляции можно считать постоянной и равной $\Phi(0)$, если $\Delta f \ll L_\mathrm{a} s/c$, т. е. справедливо обычное узкополосное приближение для приёмной антенной решётки. При этом (19) фактически совпадает с

[3] Здесь для звукового поля мы игнорируем тот факт, что источник движется относительно неподвижной среды распространения; учёт этого факта приводит к поправкам в (16) порядка v^2/c^2, которые несущественны при $v/c \ll 1$.

(10), т. е. для узкополосного шума первый момент оценки $\tilde{Q}$ совпадает с точным значением Q. Заметим, что в (19) не входит скорость движения излучателя.

Во втором случае удобно перейти от временно́го представления наблюдаемого случайного сигнала $p(x,t)$ к его спектральному представлению

$$u(x,f) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x,t)\exp(2\pi i f t)\,\mathrm{d}t. \tag{20}$$

После некоторых преобразований получаем

$$u(x,f) = \frac{i\pi}{v}\int \mathrm{d}x' \int \mathrm{d}f'\, m(x',f') H_0^{(1)}(\kappa' R\sqrt{1-s'^2})\exp[i\kappa' s'\,(x-x')], \tag{21}$$

где

$$\beta s' = (f'-f)/f', \tag{22}$$

$\beta = v/c$, $\kappa' = 2\pi f'/c$. Далее вместо $\tilde{Q}$ будем рассматривать первый момент произведения спектров $\tilde{U}(x_1,x_2,f) = u(x_1,f)u^*(x_2,f)$ — взаимную спектральную мощность, а при вычислении $\langle\tilde{U}\rangle$ перейдем от интегрирования по частоте f' к интегрированию по угловой переменной s', используя (22):

$$\langle\tilde{U}(x_1,x_2,f)\rangle = \frac{\kappa}{2\pi v}\int D(s',f\eta)\,|\tilde{h}_R(s')|^2\,\exp[i\kappa s'\eta\,(x_1-x_2)]\eta^2\,\mathrm{d}s', \tag{23}$$

где $\eta = (1-\beta s')^{-1}$, $\tilde{h}_R(s') = i\pi H_0^{(1)}(\kappa\eta R\sqrt{1-s'^2})$, $\kappa = 2\pi f/c$. Как следует из (23), представление второго момента принятых сигналов через взаимную спектральную мощность оказывается почти идентичным (10); различие заключается в том, что в (23) в явном виде входит скорость движения источника в виде множителя η. Отличие это, однако, несущественно при условии, что $\beta \ll 1$ и $D(s,f)$ — достаточно гладкая функция частоты, не имеющая «пиков» с относительной шириной, меньшей v/c; в этом случае можно положить $\eta \approx 1$.

Очевидно, что (23) позволяет переформулировать процедуру обработки при многоракурсном АС, переходя от интегрирования по времени в (14) или в (10) к интегрированию по частоте. Это выглядит вполне естественно, если учесть известную теорему Парсеваля. При этом будет находиться оценка $\hat{D}(s)$, усреднённая по частоте в некотором заданном интервале $f^{(1)} \le f \le f^{(2)}$:

$$\hat{D}(s) = \int\limits_{f^{(1)}}^{f^{(2)}} D(s,f)\,\mathrm{d}f. \tag{24}$$

Отметим, что сверху на интервал частот ограничение не налагается, поскольку при интегрировании по частоте учитывается частотная зависимость фазы экспоненты, входящей в (11).

Выше мы показали, что первые моменты квадратичных форм, используемых для построения оценок ДН излучателя по мощности, при весьма незначительных ограничениях на скорость движения излучателя совпадают с точными выражениями, представляющими интегралы от функции пространственной корреляции поля на линии наблюдения. Теперь нужно показать, что СКО этих оценок существенно меньше первых моментов. Вывод выражения для СКО в произвольном случае достаточно громоздок, и мы ограничимся его оценкой для диагональных элементов случайной величины $\tilde{Q}$ в случае точечного излучателя шума. Нетрудно показать, что при этом характерным частотным интервалом, определяемым временны́м масштабом убывания наблюдаемого поля при движении излучателя, является величина $\Delta f_R = v/R$. При этом отношение СКО

к $\langle\tilde{Q}\rangle$ пропорционально $\sqrt{\Delta f_R/\Delta f}$, где Δf — полоса излучения в ситуации (1) либо полоса, внутри которой производится суммирование в (24) [4]. Таким образом, условием малости СКО по сравнению с первым моментом является

$$\Delta f \gg \Delta f_R = v/R. \tag{25}$$

В заключение приведём окончательный вид процедур обработки сигналов для многоракурсного АС в векторно-матричных обозначениях, принятых для алгоритмов обработки сигналов в антенных решётках; интегрирование по непрерывной координате на приёмной апертуре при этом заменим суммированием по элементам приемной решётки, а интегрирование по времени — суммированием по временны́м отсчётам t_j:

$$\hat{D}(s) = \frac{\mathbf{w}^{\mathrm{H}}\tilde{\mathbf{Q}}\mathbf{w}}{\mathbf{w}^{\mathrm{H}}\mathbf{Q}_0\mathbf{w}} = \frac{\sum\limits_j |\mathbf{w}^{\mathrm{H}}\mathbf{p}_j|^2}{\sum\limits_j |\mathbf{w}^{\mathrm{H}}\mathbf{p}_{0j}|^2}, \tag{26}$$

где

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \sum_j \mathbf{p}_j\mathbf{p}_j^{\mathrm{H}}, \qquad \mathbf{Q}_0 = \sum_j \mathbf{p}_{0j}\mathbf{p}_{0j}^{\mathrm{H}}, \tag{27}$$

$\mathbf{p}_j$ — j-й временной отсчёт сигнального вектора в антенной решётке, $\mathbf{p}_{0j}$ — вектор, представляющий поле точечного источника единичной амплитуды, находящегося в j-й точке траектории, на элементах приёмной решётки (см. (13)),

$$\mathbf{w}(s) = (\exp(i\kappa s x_1), \ldots, \exp(i\kappa s x_N))^{\mathrm{T}} \tag{28}$$

— вектор весовых коэффициентов, $x_1, \ldots, x_N$ — координаты приёмных элементов антенной решётки, индексы T и H обозначают операции транспонирования и эрмитового сопряжения соответственно. Отметим, что элементы $\mathbf{Q}_0$ имеют размерность м$^{-2}$, как следует из (13), а элементы $\mathbf{Q}$ для акустических измерений имеют размерность Па^2; таким образом, $\hat{D}$ имеет размерность Па$^2 \cdot$ м^2, и для определения уровня шума на расстоянии R_0 следует разделить (26) на R_0^2.

Альтернативным вариантом в соответствии с (23) является суммирование в частотной области:

$$\hat{D}(s) = \frac{\sum\limits_j |\mathbf{w}_j^{\mathrm{H}}\mathbf{u}_j|^2}{\sum\limits_j |\mathbf{w}_j^{\mathrm{H}}\mathbf{u}_{0j}|^2}, \tag{29}$$

где $\mathbf{u}_j$ — j-й отсчёт сигнального вектора в частотной области после преобразования Фурье (20), $\mathbf{u}_{0,j}$ — аналогичные векторы для поля точечного источника. При этом получается оценка ДН (24), усреднённая по интервалу частот, внутри которого выполняется суммирование. Заметим, что в отличие от (26) весовые векторы в (29) зависят от j в силу частотной зависимости (28).

При обработке данных, естественно, можно комбинировать (26) и (29), вычисляя преобразования Фурье внутри временны́х блоков, а затем выполняя суммирование и по частоте, и по времени.

Процедуры (26), (29) могут быть обобщены для достаточно разнообразных экспериментальных ситуаций. В частности, в [16] приведены выражения для весовых коэффициентов (28) для траектории излучателя, ориентированной под произвольным углом к приёмной решётке. Там же приведена модификация весовых коэффициентов для случая, когда измерения выполняются в

[4] Эта оценка справедлива, если $\Delta f \gg \Delta f_R$.

однородном полупространстве, ограниченном плоскостью с коэффициентом отражения, не зависящим от угла падения. Следуя подходу, изложенному в [17], можно найти в явном виде весовые коэффициенты для измерений, выполняемых в произвольной плоскослоистой среде с известной функцией Грина, если антенная решётка и траектория движения источника лежат в плоскостях, параллельных слоям среды.

3. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

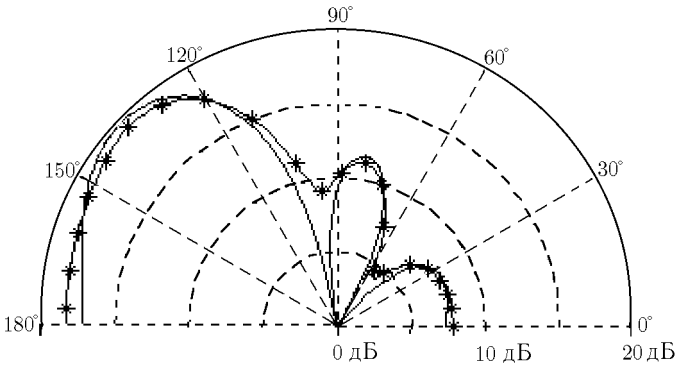

Рис. 3. ДН для модельного распределения сторонних источников; сплошная кривая — точная угловая зависимость ДН, звёздочками отмечена реконструированная ДН

Для иллюстрации вышесказанного приведём пример реконструкции ДН тонального излучателя с заданным распределением монопольных источников вида

$$m(x') = (0{,}1 + x'/L)\exp(i\kappa s_0 x'), \qquad (30)$$

где $-L/2 < x' < L/2$. На рис. 3 приведён результат реконструкции угловой зависимости ДН излучателя $D(\theta)$ с распределением (30); при расчёте бралось $L = 40$ м, $L_{\rm a} = 96$ м, $R = 50$ м, $f = 50$ Гц, $c = 1\,450$ м/с, $s_0 = 1{,}2$; смещение y менялось в пределах ± 300 м. Угол θ на рис. 3 меняется в пределах от $0°$ до $180°$; $\theta = 90°$ соответствует перпендикуляру к линии источника. Как видно из рис. 3, ДН воспроизводится с хорошей точностью; основное отличие реконструированной ДН заключается в «заплывании» нулей ДН, что является следствием ограниченного размера приёмной решётки.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложена (в частности, применительно к диагностике движущихся одномерных излучателей шума) оригинальная разновидность апертурного синтеза (АС) — многоракурсный АС, отличающийся от известных разновидностей АС: от когерентного АС — отсутствием временнóй когерентности сигналов, от «радиоастрономического» варианта некогерентного АС — использованием существенной нестационарности пространственной корреляционной функции. Показано, что за счёт интегрирования по траектории движения излучателя (по времени) «мгновенных» диадных произведений отсчётов случайного поля может быть найдена диаграмма направленности излучателя во всём диапазоне вещественных углов и построена оценка корреляционной функции источников на излучателе.

Предложена интерпретация многоракурсного АС как процедуры заполнения некоторой области на плоскости нормированных волновых чисел s', s'' внутри квадрата $\{-1 \le s' \le 1;\ -1 \le s'' \le 1\}$, отвечающего вещественным углам при разложении поля по плоским волнам. В рамках предложенного подхода показано, что при использовании многоракурсного апертурного синтеза за счёт движения излучателя указанная область увеличивается (вытягивается вдоль диагонали $s' = s''$) по сравнению с ситуацией, когда применяется обычная техника некогерентного АС при неподвижном излучателе.

Работа поддержана Office of Naval Research (грант CRDF RPO-1345).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зверев В. А. // Акустический журнал. 1995. Т. 41, № 5. С. 790.
2. Радиолокационные станции обзора земли / Г. С. Кондратенко, В. А. Потехин, А. П. Реутов, Ю. А. Феоктистов. М.: Радио и связь, 1983. 282 с.
3. Ikeda O., Sato T., Minamide Y., Fukushima A. // JASA. 1985. V. 78, No. 1. P. 112.
4. Mensa D. L. High Resolution Radar Cross-Section Imaging. Norword, MA: Artech House, 1991.
5. Методы измерения характеристик антенн СВЧ / Под ред. Н. М. Цейтлина. М.: Радио и связь, 1985. 368 с.
6. Построение изображений в астрономии по функциям когерентности: Пер. с англ. / Под ред. К. Ван Схонвелда. М.: Мир, 1982. 320 с.
7. Борн М., Вольф Э. Основы оптики: Пер. с англ. М.: Наука, 1973. 719 с.
8. Курочкин А. П. // Антенны / Под ред. Л. Д. Бахраха. М.: Изд. предпр. ред. ж. Радиотехника. 1997. Вып. 1 (38). С. 5.
9. Yaghjian A. D. // IEEE Trans. Antennas and Propag. 1986. V. 34, No. 1. P. 30.
10. Borgiotti G. V., Rosen E. M. // JASA. 1992. V. 92, No. 2. P. 807.
11. Вдовичева Н. К., Турчин В. И., Фикс И. Ш. // Изв. вузов. Радиофизика. 1998. Т. 41, № 9. С. 1 163.
12. Вдовичева Н. К., Турчин В. И., Фикс И. Ш. // Акуст. журнал. 1999. Т. 45, № 6. С. 767.
13. Турчин В. И., Фикс И. Ш. Многоракурсный апертурный синтез: Препринт ИПФ РАН № 431. Н. Новгород, 1997. 23 с.
14. Кнафель А. Н., Салин Б. М., Семёнова Л. Р., Турчин В. И., Фогель А. Л. // Виброакустические поля сложных объектов и их диагностика: Сб. научн. тр. / Отв. ред. Б. М. Салин. Горький: ИПФ АН СССР, 1989. С. 118.
15. Турчин В. И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1983. Т. 26, № 11. С. 1 335.
16. Турчин В. И., Фикс И. Ш. Многоракурсный апертурный синтез для широкополосных источников. Препринт ИПФ РАН № 583. Н. Новгород, 2001. 26 с.
17. Салин Б. М., Турчин В. И. // Акуст. журнал. 1992. Т. 38, № 1. С. 150.

Институт прикладной физики РАН,
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию
27 марта 2003 г.

MULTIASPECT APERTURE SYNTHESIS

V. I. Turchin, I. Sh. Fiks, G. A. Sharonov

A novel kind of aperture synthesis named multiaspect aperture synthesis is proposed for far-field reconstruction from near field measurements of moving noise source (measurements are provided with receiving array of finite length comparable with source length). This kind of aperture synthesis is based on some properties of near field spatial correlation function which is sensitive to displacement of source with current location of source and receiving system. Statistical properties of reconstructed far field pattern as well as effects of noise spectral power density bandwidth and source velocity on reconstructed source characteristics are studied, numerical simulation and experimental approbation of the proposed technique for measurement of noise emission of moving cylindrical shell are conducted.

УДК 681. 787.7

НОВЫЕ ПОДХОДЫ К ШИРОКОПОЛОСНОЙ ВОЛОКОННО-ОПТИЧЕСКОЙ ИНТЕРФЕРОМЕТРИИ ДЛЯ ОПТИЧЕСКОЙ КОГЕРЕНТНОЙ ТОМОГРАФИИ

В. М. Геликонов, Г. В. Геликонов, С. Ю. Ксенофонтов, Р. В. Куранов, А. Н. Морозов, А. В. Мяков, А. А.Туркин, И. В. Турчин, Д. В. Шабанов

Разработаны новые методы сверхширокополосной интерферометрии в инфракрасном диапазоне для повышения предельных возможностей оптической когерентной томографии (ОКТ). Это позволило, в частности, создать оптический когерентный микроскоп, объединяющий принципы конфокальной микроскопии и ОКТ. Для увеличения продольного разрешения синтезирован сверхширокий оптический спектр на основе двух суперлюминесцентных диодов с разнесёнными спектрами излучения. В результате было достигнуто продольное пространственное разрешение 3,4 мкм при поперечном разрешении 3,9 мкм. Получены изображения внутренней структуры биологических тканей на клеточном уровне. Описаны экспериментальные результаты по исследованию биологической ткани методом кросс-поляризационной ОКТ.

ВВЕДЕНИЕ

Одно из главных направлений развития оптической интерферометрии в последние 10–15 лет было связано с оптической когерентной томографией (ОКТ) [1–8]. Этот метод локации микронеоднородностей сильно рассеивающих сред базируется на низкокогерентной рефлектометрии, которая, в свою очередь, использует интерферометр с широкополосным источником света для детектирования и измерения сигнала, отражённого с различных глубин исследуемой среды. Создание фемтокоррелированных источников света с высокой пространственной когерентностью в видимом и ближнем ИК диапазонах частот, таких, как лазеры с длительностью импульсов порядка 10 фс и суперлюминесцентные полупроводниковые и волоконно-оптические излучатели со спектральной полосой в несколько десятков нанометров, позволило получать пространственное разрешение лоцируемых объектов на уровне 10 мкм и меньше. Это обстоятельство оказалось принципиально важным для ряда приложений, прежде всего для оптической томографии биологических объектов, где открылась возможность неинвазивного исследования морфологической структуры поверхностных биотканей на глубине до 1,5÷2 мм.

Интерес, проявляемый к ОКТ биотканей, в последние годы весьма значителен, что явилось мощным стимулом к развитию новых направлений в широкополосной оптической интерферометрии, открывающих дополнительные диагностические возможности метода. Это касается, прежде всего, повышения пространственного разрешения локации до нескольких микрон и создания оптической когерентной микроскопии [9–10]. В биомедицинских приложениях это позволило бы наблюдать структуры в живых биотканях на клеточном и субклеточном уровне на глубинах в сотни микрон, что является чрезвычайно интересным для ранней диагностики различных, в том числе онкологических, патологий. Другим направлением является использование поляризационных свойств зондирующего излучения в низкокогерентной интерферометрии [11–13]. Детектирование сигналов с разной поляризацией, приходящих от одного и того же отражающего объекта по одному и тому же пути в мутной среде, позволяет измерять как поляризационные характеристики рассеяния, так и другие электродинамические параметры биоткани. В ряде случаев это

может оказаться принципиальным для дифференциальной диагностики патологий. Наконец, серьёзной задачей ОКТ биотканей является увеличение скорости получения изображений (в идеале до видеостандарта) при сохранении их качества. Это требует создания схем широкополосной оптической интерферометрии с максимально эффективным использованием мощности источника зондирующего излучения.

В данной работе изложен подход нашей группы к развитию перечисленных выше направлений широкополосной оптической интерферометрии и приведены экспериментальные результаты, демонстрирующие новые возможности ОКТ.

1. ОПТИЧЕСКАЯ КОГЕРЕНТНАЯ МИКРОСКОПИЯ НА ОСНОВЕ ШИРОКОПОЛОСНОГО ВОЛОКОННО-ОПТИЧЕСКОГО ИНТЕРФЕРОМЕТРА

Оптическая когерентная микроскопия (ОКМ) объединяет лучшие достижения метода оптической когерентной томографии (ОКТ) по продольному разрешению и метода конфокальной микроскопии (КМ) по поперечному разрешению. В работе [9] техника ОКТ впервые использована для повышения оптического разрешения в конфокальной микроскопии. Метод ОКМ и его потенциальные возможности были подробно исследованы в работе [14]. ОКМ-изображения тонкого (с толщиной 5 мкм) слоя, лежащего на глубине 500 мкм, демонстрировали структуры с пространственным разрешением порядка клеточных размеров.

Одной из основных проблем ОКМ является получение высокого продольного разрешения за счёт использования, как и в ОКТ, сверхширокополосных источников света. Так, в работе [10] был применён титан-сапфировый лазер со спектральной полосой излучения 350 нм, что позволило реализовать в биоткани продольное разрешение 1 мкм и поперечное разрешение 3 мкм на длине волны 0,8 мкм. В работе [15] использовалось суперлюминесцентное излучение кристалла $TiAl_2O_3$ с мощностью 40 мкВт на длине волны 0,8 мкм в спектральной полосе 138 нм. Было получено ультравысокое продольное разрешение в ОКТ, равное 2,2 мкм в воздухе и 1,7 мкм в биологической ткани.

Возможность получения сверхвысокого аксиального продольного разрешения в ОКТ за счёт генерации континуума на длине волны 1,3 мкм в полосе 370 нм было продемонстрировано в работе [16]. Было получено продольное разрешение 2,5 мкм в воздухе и 2 мкм в ткани. Рекордное продольное аксиальное разрешение за счёт генерации суперконтинуума было продемонстрировано в работе [17]. При спектре излучения, лежащем в диапазоне длин волн от 550 до 950 нм, было получено продольное разрешение порядка 0,75 мкм в свободном пространстве, соответствующее разрешению 0,5 мкм в биологической ткани.

Наиболее компактными широкополосными источниками ИК излучения являются полупроводниковые диоды. Впервые в методе ОКМ объединялось излучение нескольких источников света — суперлюминесцентных диодов с взаимно смещёнными спектрами [18]. В результате были получены изображения микросфер с диаметром 6 мкм на глубине 500 мкм в рассеивающей среде, образованной частицами с размером 0,2 мкм. В ОКТ-системах с волоконно-оптическим интерферометром для повышения продольного разрешения также использовались два суперлюминесцентных диода с близкими спектрами излучения и разнесёнными на 25 нм центральными длинами волн (830 нм и 855 нм) [19]. Была реализована эффективная ширина спектра 50 нм, что соответствовало аксиальному разрешению 6÷7 мкм в биоткани. Очевидно, что полупроводниковые источники пока не столь эффективны при получении предельного аксиального разрешения, однако в этой области ИК оптики наблюдается быстрый прогресс.

Второй основной проблемой ОКМ является реализация аксиального сканирования фокального пятна при острой фокусировке и зоны когерентного приёма при их пространственном

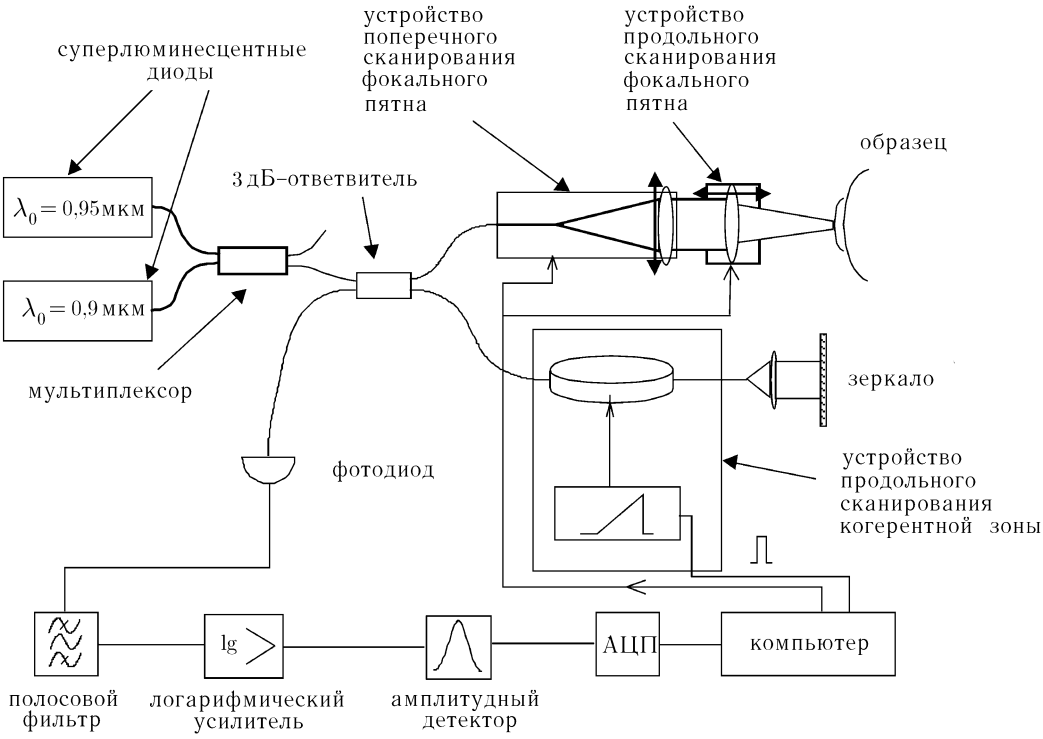

Рис. 1. Функциональная схема оптического когерентного микроскопа

совмещении. Так, в работах [9, 14] для этой цели через фокус высокоапертурной линзы двигался сам наблюдаемый объект. ОКМ-изображения получались для тонкого слоя объекта вблизи фокальной области. В работах [10, 15] выполнялась послойная зонная фокусировка с последующим сшиванием полученных изображений. Частично эту проблему удалось преодолеть с помощью метода «динамического фокуса» [17, 18], в котором зона когерентного приёма и область острой фокусировки совмещены и перемещаются одновременно в аксиальном направлении. Для такого совместного движения выходной объектив сигнального плеча и ретрорефлектор в опорном плече монтировались на одной сканирующей платформе. Однако такой метод совмещения удовлетворительно работает лишь при относительно небольших перемещениях ввиду лишь частичной компенсации рассогласования области когерентности и зоны острой фокусировки. Представляет большой интерес метод «динамического когерентного фокуса» [20], согласно которому при сканировании фокус перемещался через объект без изменения оптической длины измерительного плеча. Вследствие этого «когерентные ворота» остаются в фокусе луча без дополнительной подстройки опорного плеча.

В работе [21] рассмотрен способ точного совмещения фокальной зоны и области когерентного приёма при сканировании образца с определённым показателем преломления. Совмещение достигалось за счёт соответствующего перемещения выходного конца волокна и линзы внутри объектива. Это использовалось для нахождения показателя преломления отдельных поверхностных слоёв биоткани in vivo.

В данной работе исследовались наиболее оптимальные методы оптической когерентной микроскопии с целью построения компактного макета микроскопа с гибким сигнальным плечом и выносным датчиком для использования в экспериментальных и клинических условиях.

Обсуждаемая в этой работе схема широкополосного интерферометра для ОКМ (см. рис. 1) базируется на схеме традиционного ОКТ-интерферометра с использованием одномодового ани-

зотропного волокна [2]. Волоконно-оптический интерферометр Майкельсона содержит измерительное и опорное плечи, по которым излучение распространяется в виде фиксированной волноводной моды с заданной поляризацией. В качестве источника используется комбинированное излучение двух суперлюминесцентных полупроводниковых диодов. Излучение от источника поступает по волоконной части измерительного плеча на оптический сканер, который фокусирует луч на исследуемом объекте, перемещает область фокуса в двух направлениях в поперечной к лучу плоскости (поперечное сканирование) и одновременно осуществляет обратный ввод рассеянного исследуемым объектом излучения. Волоконная часть опорного плеча подводит излучение к референтному зеркалу и осуществляет транспортировку его назад, к светоделителю. Электромагнитные волны — рассеянная исследуемым объектом и отражённая от референтного зеркала — интерферируют на светоделителе при разности хода, не превышающей длину когерентности, после чего суммарная оптическая волна подаётся на фотодиод.

Разность геометрических длин плеч интерферометра ΔL модулируется по линейному закону $\Delta L = \Delta\dot{L}\,t$ для осуществления гетеродинного приёма рассеянного назад света, что соответствует последовательному «просмотру» объекта от поверхности в глубину (или продольному периодическому сканированию области когерентности в направлении оси z). Для этого осуществляются противофазные упругие растяжение и сжатие волокон в плечах интерферометра при помощи модуляторов на основе пьезоэлектрических преобразователей [22]. При этом в соответствии с общим принципом низкокогерентной интерферометрии отсчитываемая от поверхности объекта глубина h, с которой принимается сигнал, меняется со скоростью $\dot{h} = \Delta\dot{L}\,n_{\rm fgr}/n_{\rm mgr}$, где $n_{\rm fgr}$ и $n_{\rm mgr}$ — групповые показатели преломления электромагнитной волны в волокне и исследуемом объекте. При линейном изменении разности плеч со скоростью $\Delta\dot{L}$ оптические частоты в плечах интерферометра отличаются на величину доплеровского сдвига. Детектор выделяет в сигнале интерференции компоненту на доплеровской частоте $F = 2\,\Delta\dot{L}\,n_{\rm f}/\lambda_0 = 2n_{\rm mgr}\,\dot{h}n_{\rm f}/(\lambda_0 n_{\rm fgr})$, где $n_{\rm f}$ — фазовый показатель преломления в волокне, λ_0 — длина волны зондирующего излучения в вакууме. Так, например, для длины волны 0,9 мкм доплеровской частоте 1 МГц соответствует скорость изменения оптической разности плеч интерферометра $\Delta\dot{L}\,n_{\rm f} \sim 0{,}45$ м/с.

Оптический сканер осуществляет также режим «динамического фокуса» за счёт продольного (в направлении оси z) сканирования выходной линзы объектива. В сканере используется двухлинзовый объектив, который позволяет реализовать максимальную числовую апертуру выходной линзы. Увеличение объектива равно единице, при этом диаметр фокального пятна менее 4 мкм. В разработанном интерферометре принципы когерентного и конфокального приёма реализованы при сканировании практически на всю глубину, на которой острота фокусировки света ещё не потеряна вследствие процессов многократного рассеяния в исследуемой среде.

В соответствии с применяемой схемой детектирования и аналоговой обработки результирующий сигнал содержит компоненту, пропорциональную логарифму коэффициента обратного рассеяния излучения в приёмную апертуру излучателя-приёмника (т. е. излучения, перехватываемого апертурой одномодового волокна в оптическом зонде). Получаемое при сканировании по глубине (за счёт изменения разности оптических путей в плечах интерферометра) и вдоль поверхности объекта (за счёт перемещения зондирующего луча) двумерное поле интенсивности рассеянного назад сигнала визуализируется на экране монитора и может записываться в память компьютера для хранения и последующей обработки. В отличие от большинства других методов получения изображений в мутных средах, восстановление изображения по сигналу не требует решения сложной обратной задачи. Каждому элементу разрешения по глубине соответствует определённое время распространения света до него и обратно, т. е. определённая разность хода в интерферометре. Это обусловливает как относительную простоту интерпретации получаемых изображений, так и возможность их визуализации в реальном масштабе времени (в процессе сканирования).

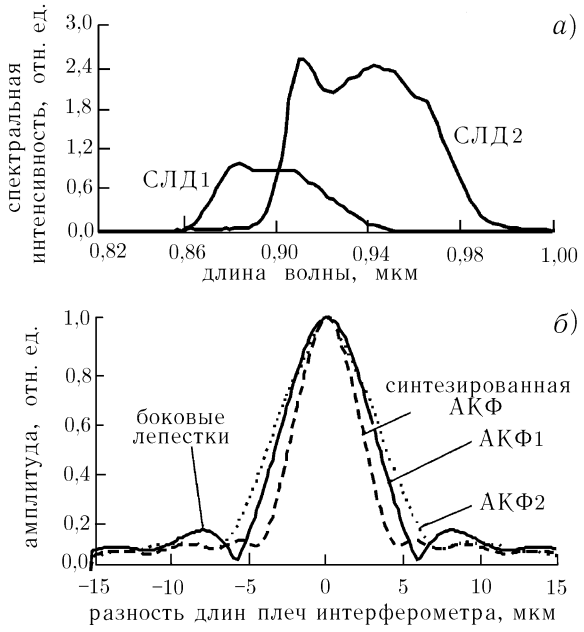

Рис. 2. Спектральные характеристики суперлюминесцентных диодов (*а*) и автокорреляционные функции (*б*)

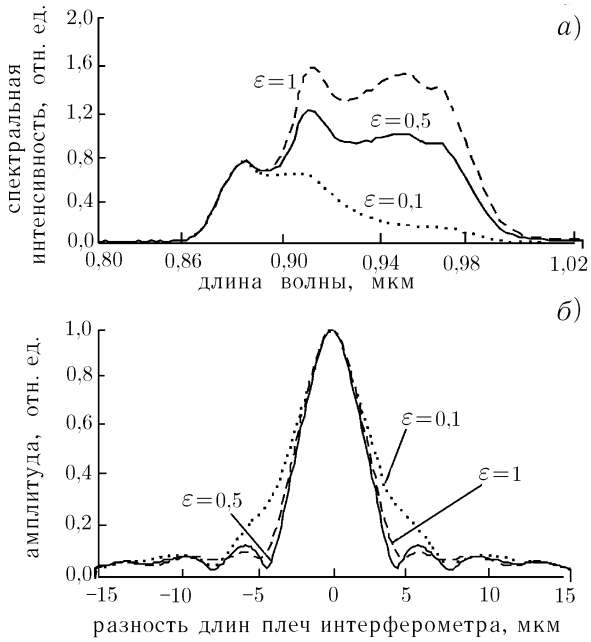

Рис. 3. Синтез сверхширокополосного излучения на основе двух СЛД. Синтезированный спектр (*а*) и соответствующая автокорреляционная функция (*б*)

Принципиально новыми моментами в описанной выше схеме низкокогерентной интерферометрии, позволяющими применить её в оптическом когерентном микроскопе, являются совмещение излучения суперлюминесцентных источников для расширения частотной полосы зондирующего сигнала, использование сверхширокополосных волоконно-оптических элементов, не обужающих спектр сигнала при прохождении через интерферометр, регуляризация спектра доплеровского сигнала при помощи цифровой обработки и система синхронного сканирования «ворот когерентности» и геометрического фокуса. Остановимся подробнее на каждом из этих моментов.

В схеме ОКМ используются суперлюминесцентные полупроводниковые диоды (СЛД) на основе однослойных квантоворазмерных (GaAl)As-гетороструктур с центральной длиной волны излучения 907 и 948 нм, шириной полосы около 53 и 72 нм и исходной мощностью в одномодовом волоконном выходе 0,9 и 3 мВт соответственно. На рис. 2*а* приведены спектры излучения используемых суперлюминесцентных диодов (СЛД1 и СЛД2) и соответствующие автокорреляционные функции (АКФ1 и АКФ2). Как видно, спектры обоих СЛД имеют сложную форму, присущую квантоворазмерным гетероструктурам [23]. Очевидно, что форма суммарного спектра, отличная от гауссовой, должна существенно зависеть от соотношения исходных мощностей отдельных СЛД. На рис. 3*а* приведён ряд спектров излучения, рассчитанных при суммировании полной исходной мощности коротковолнового СЛД и части мощности длинноволнового (параметр ε определяет относительное ослабление исходной мощности длинноволнового СЛД за счёт токовой накачки). На рис. 3*б* приведены соответствующие АКФ. На основе применения специально изготовленного мультиплексора нам удалось экспериментально реализовать суммарный спектр излучения сложной формы с максимальной шириной более 100 нм, которому соответствовала минимальная ширина основного пика АКФ, равная 4,9 мкм. При этом боковые лепестки АКФ ниже основного на 17,5 дБ.

Другим новым элементом, специально разработанным и созданным для ОКМ-интерферометра,

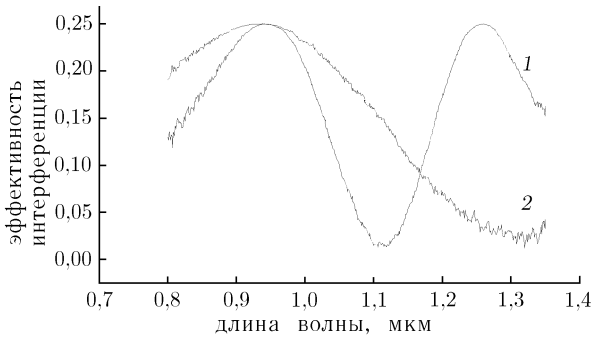

Рис. 4. Эффективность перекачки при проходе вперёд и назад для ответвителей с обычной шириной полосы (кривая *1*) и с увеличенной шириной полосы (кривая *2*)

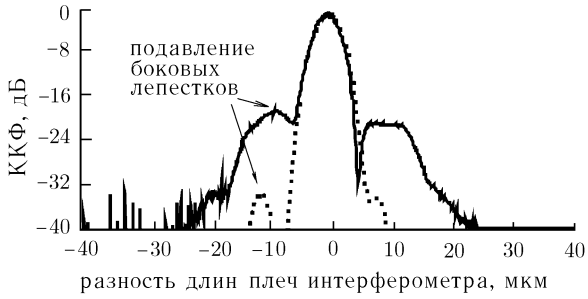

Рис. 5. Кросскорреляционная функция до (сплошная линия) и после (пунктир) регуляризации

был сверхширокополосный волоконно-оптический 3 дБ-ответвитель. Нами были усовершенствованы ответвители, в которых оптическая связь мод осуществляется за счёт взаимодействия убывающих полей мод в оболочке волокна. Такой тип ответвителя, в отличие от сварного, позволяет получить высокую степень развязки поляризационных мод с коэффициентом экстинкции более 35 дБ. Однако обычные ответвители такого типа имеют спектральную селективность, неприемлемую для широкополосной интерферометрии. В результате проведённых исследований [24] был разработан широкополосный ответвитель, вносящий минимальные искажения при источнике света со спектральной полосой порядка 100 нм. На рис. 4 приведены экспериментальные зависимости коэффициента передачи при последовательном прохождении и ответвлении света в обычном (применяемом нами в ОКТ) и разработанном ответвителях. Как следует из рис. 4, ширина полосы разработанного ответвителя увеличилась приблизительно вдвое.

Как отмечалось выше, объединённое в одномодовом волокне излучение двух СЛД с разнесёнными спектрами имеет оптический спектр с формой, отличной от гауссовой. Это приводит к появлению боковых лепестков (максимумов) в автокорреляционной функции на расстоянии ± 10 мкм от центрального лепестка на уровне около -18 дБ по отношению к нему. Данное обстоятельство свидетельствует о наличии артефактов на томографических изображениях. Для снижения уровня боковых лепестков кросскорреляционной функции (ККФ) была применена методика регуляризации спектра доплеровского сигнала при помощи цифровой обработки. Для этого была найдена функция, после умножения на которую форма спектра кросскорреляционной функции становилась близкой к гауссовой. С использованием такой функции преобразовывался записанный радиочастотный сигнал и восстанавливалось томографическое изображение. На рис. 5 приведена форма ККФ до и после регуляризации спектра. Как видно, регуляризация привела к уменьшению боковых лепестков на 17 дБ. На рис. 6 приведены спектры доплеровского сигнала до и после регуляризации и спектр регуляризующей функции.

На рис. 7 в качестве примера приведены формы сигнала при сканировании двух тонких рассеивающих границ, отстоящих друг от друга на расстоянии 18 мкм, до и после регуляризации. Как видно из рисунка, боковой лепесток большего отклика по амплитуде превосходит центральный лепесток слабого отклика, что не позволяет разрешить слабо рассеивающую границу. В сигнале же на выходе регуляризующего фильтра рассеивающие объекты различимы. Возможно, форма сигнала в области перекрытия лепестков, расположенной между регулярными откликами, зависит от разности фаз двух перекрывающихся во времени сигналов. В итоге подавление сигнала в этой полосе при регуляризации зависело от расстояния между откликами и в данном случае составило 8 дБ. Если же расстояние между сканируемыми элементами превысит длину когерентности,

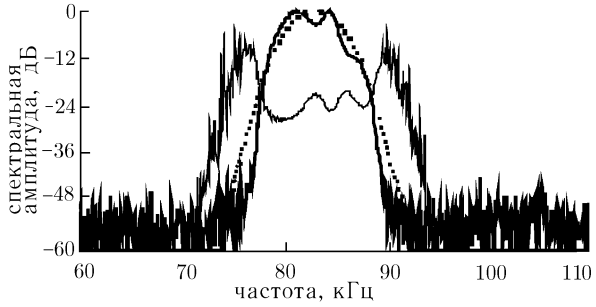

Рис. 6. Спектры сигналов перед (толстая сплошная линия) и после (пунктир) регуляризации, а также спектр функции регуляризации (сплошная тонкая линия)

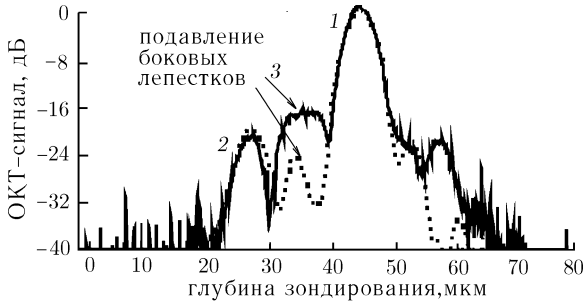

Рис. 7. ОКТ-сигнал от двух отражателей (пики *1* и *2* на сплошной линии) и ОКТ-сигнал после спектральной регуляризации (пунктир). Боковой лепесток большего отклика (пик *3*) до регуляризации превосходит по амплитуде центральный лепесток слабого отклика (пик *2*)

то степень подавления боковых лепестков в результате регуляризации будет такой же, как и для ККФ, и составит 17 дБ.

Метод «динамического фокуса», который применялся в данной работе, основан на продольном перемещении фокального пятна в глубину объекта за счёт сканирования выходной линзы синхронно с перемещением зоны когерентности вследствие модуляции разности длин плеч интерферометра. Для пояснения определим соотношение между продольным сдвигом фокального пятна в среде и положением «ворот когерентности». Если фокальное пятно при движении линзы находится в однородной среде с показателем преломления n, то, как показано в работе [20], при сдвиге линзы на $\Delta z_{\rm L}$ оптический путь света в сигнальном плече до фокуса увеличивается на $nn_{\rm g}\,\Delta z_{\rm L}$, где $n_{\rm g}$ — групповой показатель преломления среды. При сканировании разности хода в интерферометре на величину Δz в свободном пространстве перемещение «ворот когерентности» в среде составляет $\Delta z/n_{\rm g}$. Очевидно, что исходно совмещённые фокальное пятно и центр когерентной зоны не расходятся в процессе сканирования только при условии $nn_{\rm g}\,\Delta z_{\rm L} = \Delta z/n_{\rm g}$. Таким образом, при фиксированной скорости изменения разности длин плеч, определяющей доплеровскую частоту, скорость аксиального перемещения выходной линзы должна быть равна $\Delta\dot{z}_{\rm L} = \Delta\dot{z}/(nn_{\rm g}^2)$.

Релеевская длина перетяжки при диаметре фокального пятна 4 мкм составляет 26 мкм, что налагает высокие требования на точность её пространственного совмещения с областью когерентного приёма при движении через сканируемую область. Несомненно, в реальной среде, например в биоткани, не всегда возможно осуществить точное совмещение когерентной и фокальной зон. Причиной этого являются локальные отклонения показателя преломления от среднего значения, присущие слоям биоткани [21]. Рассогласование зон при достаточно толстых слоях исследуемой среды может превышать размер самой фокальной зоны. Это рассогласование можно устранить в каждом отдельном слое, скорректировав закон движения линзы. Для получения изображения с максимальным разрешением во всей сканируемой области, необходимо получить несколько двумерных картин с коррекцией фокусировки для конкретных слоёв биоткани и в последующем провести сшивку этих картин.

В экспериментальной реализации «динамического фокуса» выходная линза оптического сканера была подвешена на гибком подвесе и колебалась под действием электромагнитного управителя с частотой 100 Гц по триангулярному закону. Амплитудно-частотная характеристика системы

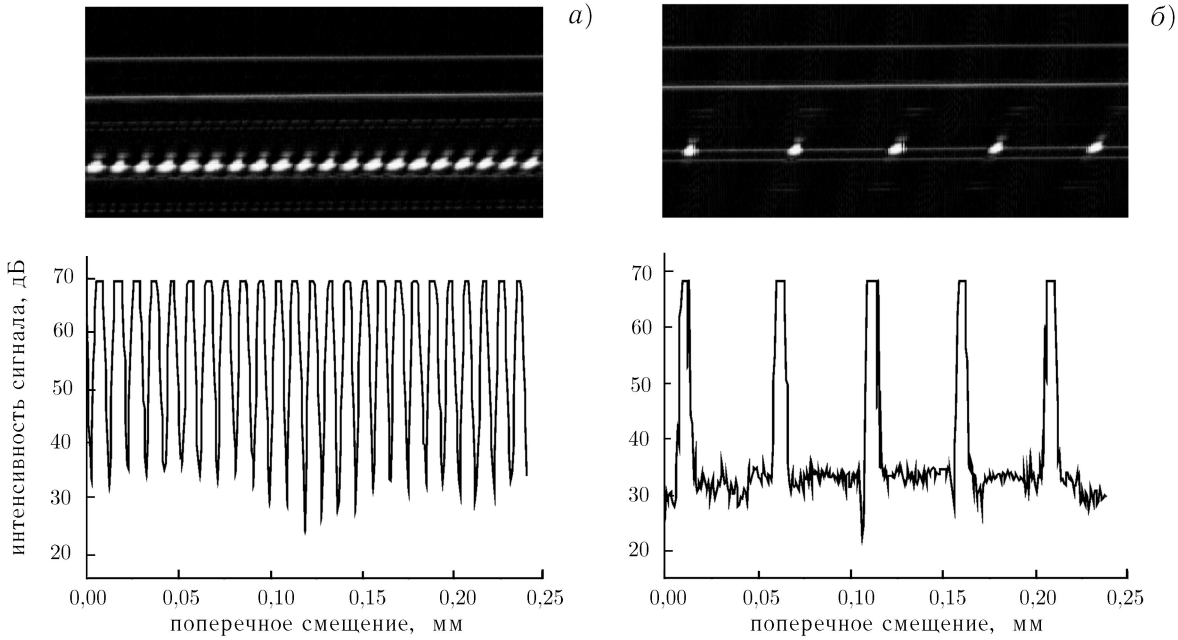

Рис. 8. ОКМ-изображения структур с периодом 10 мкм (*а*) и 50 мкм (*б*)

имела характерную форму с резонансной частотой около 40 Гц и добротностью порядка 4. Управляющий триангулярный сигнал предварительно искажался для компенсации влияния резонанса, поскольку частота сканирования линзы была не слишком далека от резонансной. В результате было получено, что при размахе колебаний линзы 0,6 мм отличие реального закона сканирования линзы от заданного не превышало 2 % примерно на 80 % размаха движения.

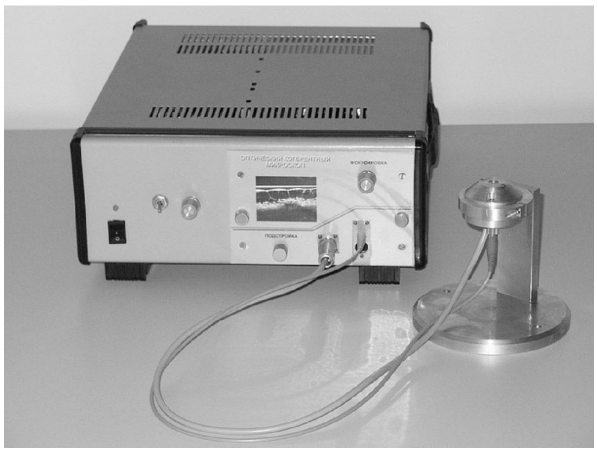

Рис. 9. Оптический когерентный микроскоп

Анализ поперечного разрешения оптического когерентного микроскопа проводился с помощью тестовой оптической пластины с нанесёнными на неё с шагом 10 мкм и 50 мкм штрихами. Типичное изображение пластины, которое представлено на рис. 8, демонстрирует контраст на уровне 30 дБ.

Созданная нами экспериментальная установка для ОКМ (см. рис. 9) была использована с целью получения изображений различных биологических объектов в сравнении с традиционным методом ОКТ. На рис. 10*а*, *б* для примера приведены томограммы листьев растений, полученные с помощью ОКТ и ОКМ. Если данные ОКТ позволяют дифференцировать в основном слои клеток и иногда очень крупные клетки с размером порядка 50÷100 мкм, то на ОКМ-изображениях отчётливо видны отдельные клетки с размером 10÷20 мкм, входящие в состав этих слоёв. Вопрос о визуализации внутриклеточных структур связан не только с разрешающей способностью прибора, но и с методикой сканирования. Дело в том, что обычно ядро клетки расположено эксцентрично и не всегда попадает в «срез» скана. Проведение пошагового ОКМ-сканирования объекта со сдвигом между «срезами» в единицы микрон и воспроизведение трёхмерного изображения позволило детектировать ядра клеток с возможностью оценки их формы и размеров. Был

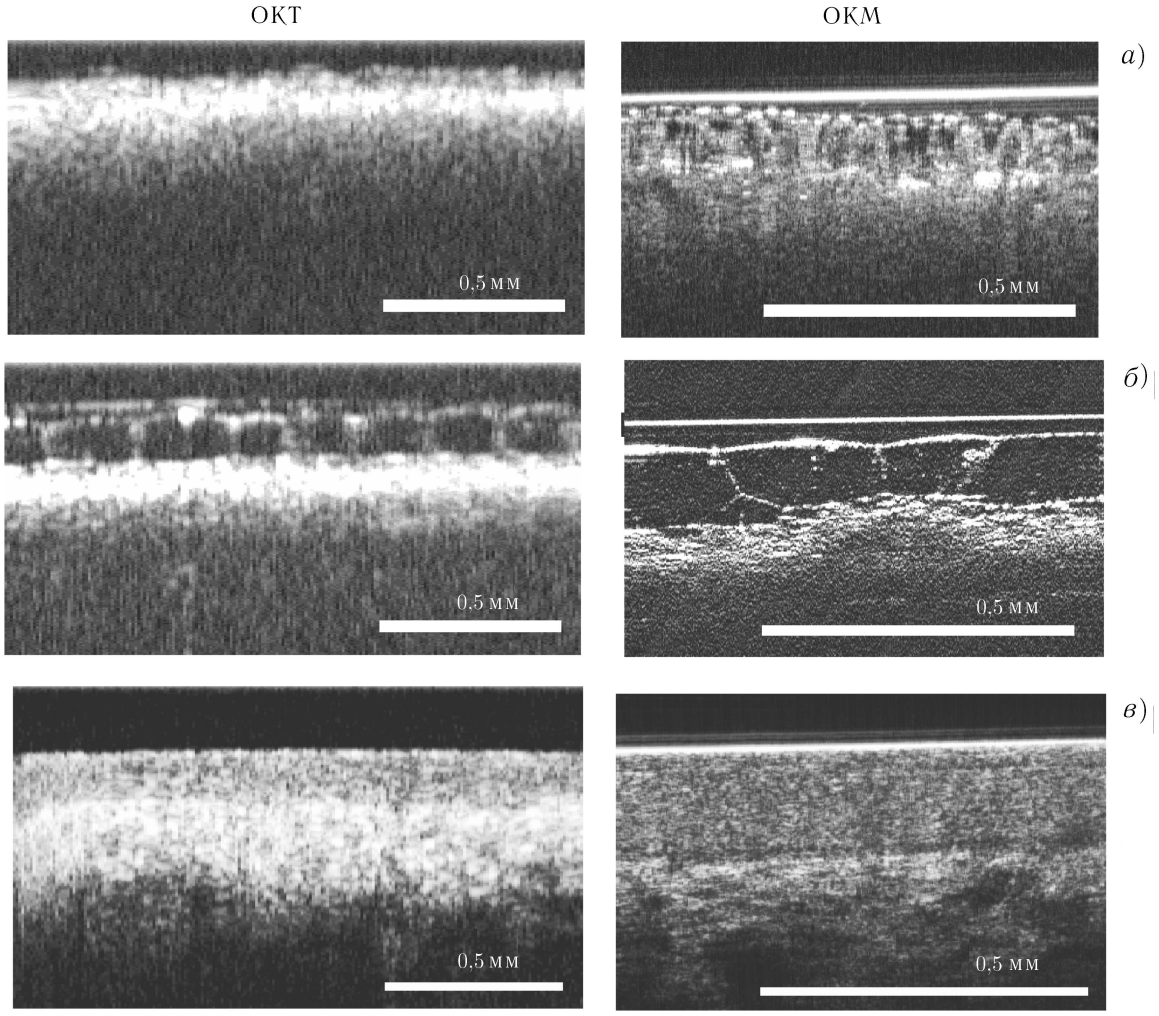

Рис. 10. ОКТ- и ОКМ-изображения листьев томата (*а*), традесканции (*б*), шейки матки ex vivo (*в*)

разработан оригинальный алгоритм визуализации трёхмерного изображения, который в отличие от обычных методик позволяет рассматривать внутреннюю структуру объекта, а также изменять углы наблюдения.

Результаты эксперимента по наблюдению структуры слизистых оболочек внутренних органов человека ex vivo представлены на рис. 10*в*. При сравнительном анализе оптических изображений отмечено, что стандартная ОКТ позволяет визуализировать эпителий и подлежащую строму, т. е. тканевые слои, в то время как при ОКМ удаётся детектировать отдельные клетки, входящие в состав эпителия. Клеточный уровень разрешения, достигаемый с помощью ОКМ, позволяет надеяться на реализацию в недалёком будущем идеи создания неинвазивной оптической биопсии.

2. КРОССПОЛЯРИЗАЦИОННЫЙ ВАРИАНТ ОПТИЧЕСКОЙ КОГЕРЕНТНОЙ ТОМОГРАФИИ

Возможности традиционной ОКТ могут быть расширены за счёт получения информации о поляризационных свойствах излучения, рассеянного изучаемым объектом. Применительно к зондированию биотканей это реализовано в методе поляризационно-чувствительной ОКТ (ПЧ

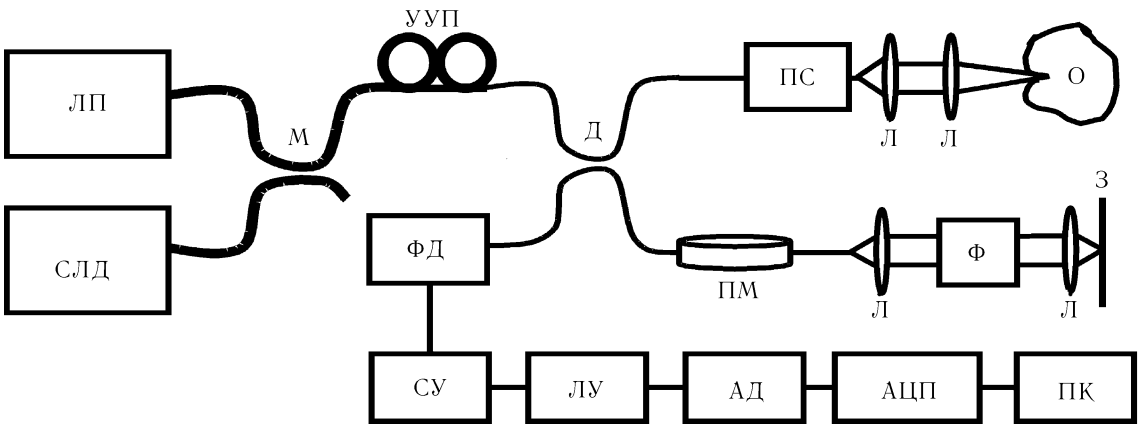

Рис. 11. Экспериментальная установка для кроссполяризационной ОКТ: ЛП — лазер подсветки, М — мультиплексор, УУП — устройство управления поляризацией, Д — 3 дБ-ответвитель, ПС — поперечный сканер, О — исследуемый объект, ПМ — сканер продольного хода, Л — линзы, ФД — фотодиод, Ф — фарадеевский вращатель плоскости поляризации на 45°, З — глухое зеркало, СУ — селективный усилитель, ЛУ — логарифмический усилитель, АД — амплитудный детектор, АЦП — аналого-цифровой преобразователь, ПК — персональный компьютер. Жирная линия соответствует изотропному одномодовому волокну, тонкая линия соответствует анизотропному волокну

ОКТ) [11–13]. Известно, что некоторые структурные компоненты биоткани, например коллагеновые волокна стромы, составляющей основу здоровой слизистой оболочки, способны сильно деполяризовать падающее излучение [25]. Кроме того, волокнистые структуры в тканях, в частности коллагены, обладают линейным двулучепреломлением, а это означает, что при распространении в таких тканях поляризация излучения изменяется в зависимости от величины двулучепреломления и размера области. Деполяризация и двулучепреломление приводят к появлению в рассеянном назад свете компоненты с поляризацией, ортогональной исходной. Различные по природе патологические процессы характеризуются как различным содержанием коллагеновых волокон, так и их пространственной организацией. Следовательно, сравнительный анализ свойств рассеянного назад биотканью излучения с ортогональной по отношению к исходной поляризацией может быть положен в основу метода ранней диагностики неоплазии.

В большинстве работ по применению ПЧ ОКТ критерием патологического изменения биоткани является уменьшение её макроскопического двулучепреломления. Как показывают эксперименты, для достоверного определения вариаций двулучепреломления среды необходимо обеспечить отношение сигнал/шум не менее 10÷15 дБ, что затруднительно при исследовании слоёв, лежащих на глубине более 300÷500 мкм [26]. С другой стороны, известно, что для ранней диагностики неопластического процесса необходим уверенный приём сигнала с глубины 400÷700 мкм. Для получения достоверной информации с глубинных слоёв (до 1,5 мм) может быть использован вариант ПЧ ОКТ — метод кроссполяризационной ОКТ (КП ОКТ). Метод КП ОКТ основан на детектировании компоненты рассеянного назад излучения с поляризацией, ортогональной линейно поляризованному зондирующему излучению.

Широкополосный интерферометр в реализованной нами схеме для КП ОКТ (рис. 11) отличался от традиционного волоконно-оптического интерферометра Майкельсона наличием фарадеевского вращателя в опорном плече. В случае, когда фарадеевский вращатель в опорном плече отсутствует, регистрируется компонента рассеянного назад излучения, совпадающая по поляризации с исходной. Поскольку действие фарадеевского вращателя на излучение сводится лишь к повороту произвольной поляризации на заданный угол, и знак поворота не зависит от направления распространения излучения, то при наличии фарадеевского вращателя (с поворотом

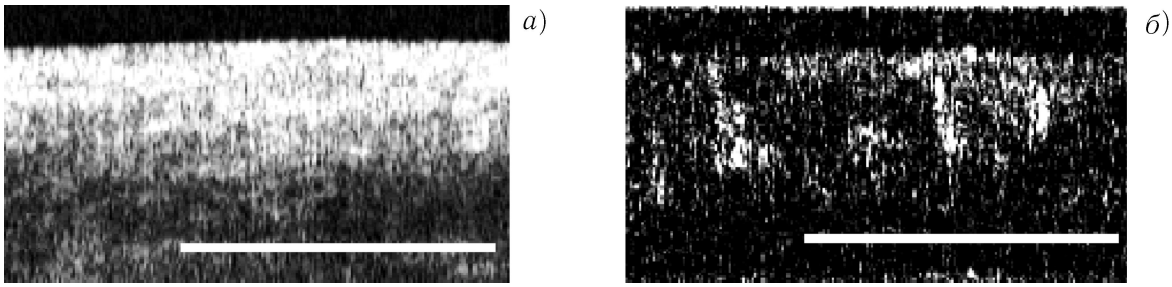

Рис. 12. Стандартный ОКТ-образ карциномы пищевода (*а*) и образ, полученный методом КП ОКТ (*б*). Белая полоса соответствует 1 мм

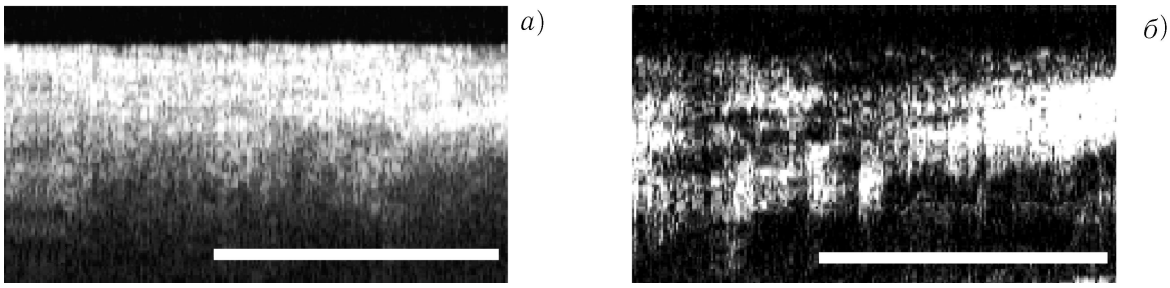

Рис. 13. Стандартный ОКТ-образ рубцовых изменений пищевода (*а*) и образ, полученный методом КП ОКТ (*б*). Белая полоса соответствует 1 мм

плоскости поляризации на 45°) в опорном плече назад возвращается излучение, ортогонально поляризованное по отношению к исходному. В этом случае интерферирует только компонента света, рассеянная биобъектом назад в ортогональной поляризации. Время перенастройки системы составляло 30 с. Необходимо отметить, что при перенастройке системы для получения изображения в ортогональной поляризации положение оптического сканера было фиксировано, что обеспечило получение обоих типов изображения одного и того же участка объекта.

На рис. 12, 13 представлены сравнительные изображения образцов биотканей (карциномы и рубцовой ткани соответственно), полученные методами ОКТ и КП ОКТ при исследованиях патологий пищевода. Стандартные ОКТ-образы данных патологий почти не отличаются и не обладают выраженной структурой. При этом образы указанных патологий, полученные методом КП ОКТ, существенно отличаются друг от друга. Клетки раковой опухоли практически не деполяризуют зондирующее излучение и не обладают двулучепреломлением, поэтому средний уровень сигнала при зондировании карциномы методом КП ОКТ существенно меньше (приблизительно на 10 дБ) уровня сигнала, полученного при зондировании рубцовой ткани. На образах карциномы, полученных методом КП ОКТ, на фоне очень слабого сигнала видны вертикально ориентированные включения более сильного сигнала, которые, как показали параллельные гистологические исследования, хорошо коррелируют с одиночными вертикально ориентированными коллагеновыми волокнами. В свою очередь, образы рубцовой ткани пищевода, полученные методом КП ОКТ, выявляют значительную способность рассеивать назад в ортогональной поляризации. При этом на образе рубцовой ткани можно выделить достаточно большое количество хаотически расположенных участков как интенсивного, так и слабого сигнала. Это связано с пространственной организацией и значительной концентрацией коллагеновых волокон. Таким образом, применение широкополосной поляризационно-чувствительной интерферометрии позволяет в некоторых практически важных случаях повысить информативность (специфичность) традиционной ОКТ.

3. ШИРОКОПОЛОСНЫЕ ИНТЕРФЕРОМЕТРЫ С МАКСИМАЛЬНО ЭФФЕКТИВНЫМ ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МОЩНОСТИ ИСТОЧНИКА ИЗЛУЧЕНИЯ

Одной из основных проблем, которые приходится решать при разработке оптических интерферометров, входящих в состав низкокогерентных рефлектометров и устройств для ОКТ, является обеспечение максимального отношения сигнал/шум для возможно более глубокой локации рассеивающих сред. Высокая эффективность использования мощности источника излучения является принципиальным условием для решения этой проблемы.

В классическом оптическом интерферометре Майкельсона, волоконный аналог которого приведён на рис. 1, мощность источника используется максимально эффективно при равном разделении света между сигнальным и опорным каналами (при коэффициенте расщепления 3 дБ). Однако при локации сильно рассеивающих сред мощность сигнала, возвращающегося в сигнальное плечо интерферометра от объекта, как правило, весьма мала по сравнению с мощностью сигнала в опорном плече, и на уровень шума при приёме сигнала интерференции практически влияет только излучение в опорном плече. Оказывается (см. ниже), что в этих условиях 25 % исходной мощности источника, которая после ответвителя проходит к фотоприёмнику из опорного плеча, превышает оптимальный уровень (с точки зрения обеспечения максимального отношения сигнал/шум), и в опорное плечо необходимо вводить специальные аттенюаторы. В интерферометре Майкельсона и в близких схемах существенные потери света необходимы для устранения шумов, дополнительных к тепловым и дробовым. Так, при использовании низкокогерентного шумового излучения суперлюминесцентных полупроводниковых источников предельная чувствительность ограничивается наличием избыточных шумов, обусловленных биениями спектральных компонент. Другим недостатком обычной схемы интерферометра Майкельсона является то, что ещё 25 % исходной мощности источника возвращаются из опорного плеча назад к излучателю. Это может повлиять на режим его работы, что особенно существенно при повышенной мощности источника. В частности, данное обстоятельство приводит к искажению спектра зондирующего излучения, что недопустимо для оптической когерентной томографии. В данном разделе рассмотрено несколько новых интерференционных схем, в которых указанные недостатки в существенной мере устранены [27].

Для понимания идеи построения новых схем проанализируем сначала предельные характеристики интерферометра Майкельсона с точки зрения отношения сигнал/шум. Введём коэффициент α, определяющий пропускание мощности оптическим ответвителем в один из каналов (соответственно, величина $1-\alpha$ определяет мощность, ответвляющуюся в соседний канал), и коэффициенты $K \ll 1$ и γ, определяющие ослабление света по интенсивности при распространении в сигнальном и опорном плечах соответственно. Очевидно, что коэффициент K обусловлен ослаблением света при обратном рассеянии в неоднородной исследуемой среде. Минимальное значение K (определяющее в конечном счёте и максимальную глубину локации среды) при отношении сигнал/шум, равном единице, может быть представлено в виде

$$K = \frac{1}{2I_{\mathrm{S}}I_{\mathrm{R}}\gamma}\left(2eI_{\mathrm{R}}\gamma + \frac{2I_{\mathrm{R}}^2\gamma^2}{\Delta\nu} + \frac{4kT}{2\pi F_{\mathrm{D}}LQ}\right)\frac{F_{\mathrm{D}}}{Q}\,, \tag{1}$$

где $I_{\mathrm{S}} = I_{\mathrm{R}} = \alpha\,(1-\alpha)\,I$, I — ток на приёмном фотодиоде с квантовым выходом 1 при подведении к нему всей мощности источника, I_{S} и I_{R} — фототоки при детектировании сигнальной и опорной волн соответственно, F_{D} — доплеровская частота приёма, Q — добротность входного контура, подбираемая для согласования широкополосного гетеродинного приёма равной «оптической добротности» $Q_0 = \lambda/\Delta\lambda$, которая определяется через длину волны λ и ширину полосы $\Delta\lambda$ источника излучения, $\Delta\nu = c\,\Delta\lambda/\lambda^2$ — спектральная полоса частот излучения суперлюминесцентного диода, L — индуктивность входного контура с импедансом $Z = 2\pi F_{\mathrm{D}}LQ$, c — скорость

света в вакууме, e — элементарный заряд, k — постоянная Больцмана, T — температура среды. Слагаемые в скобках в (1) описывают соответственно вклад дробовых, избыточных и тепловых шумов в полосе приёмника. Знаменатель первого множителя в (1) пропорционален квадрату интенсивности полезного сигнала на фотодиоде.

Зависимость $K(\gamma, \alpha)$ свидетельствует о наличии оптимума предельной чувствительности, который достигается при $\alpha = 0{,}5$ и $\gamma_{\rm opt} \ll 1$, т. е. при значительном ослаблении света в опорном плече. Нетрудно видеть, что предельная чувствительность

$$K_{\rm lim} = \frac{4}{I}\left[e + \sqrt{\frac{8kT}{Z\,\Delta\nu}}\right]\frac{F_{\rm D}}{Q} \tag{2}$$

реализуется при равенстве избыточных и тепловых шумов. Для достижения этого необходимо ослаблять интенсивность опорного плеча в $\gamma_{\rm opt}$ раз, где

$$\gamma_{\rm opt}^2 = \left(\frac{4kT}{Z}\right)\Big/\left(\frac{I^2}{8\,\Delta\nu}\right). \tag{3}$$

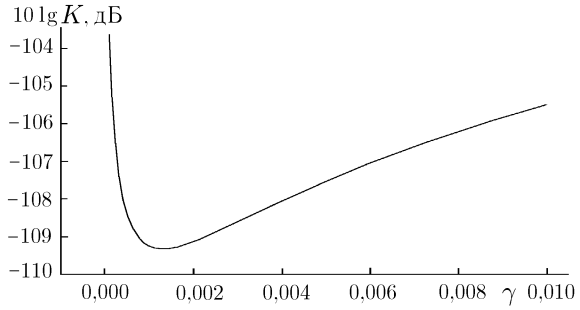

Рис. 14. Зависимость предельной чувствительности от ослабления света в опорном плече интерферометра

На рис. 14 зависимость $10\lg K$ от γ представлена для значений $I = 3$ мА, $\Delta\nu = 1{,}3\cdot 10^{13}$ с$^{-1}$, $F_{\rm D}/Q = 28$ кГц, $Z = 110$ кОм, $\alpha = 0{,}5$, близких к используемым в эксперименте. Величина $\gamma_{\rm opt}$ равна в этом случае $1{,}3\cdot 10^{-3}$. Необходимость сильного ослабления света в опорном плече интерферометра Майкельсона для снижения избыточных шумов свидетельствует о неоптимальности данной схемы для задач ОКТ рассеивающих сред.

Наиболее простым способом борьбы с избыточным шумом является использование балансного приёма [28]. Для этого в схему добавляется второй фотоприёмник, на который поступает часть сигнала непосредственно от источника низкокогерентного оптического излучения, и в приёмном контуре обеспечивается компенсация избыточных шумов двух фотодиодов за счёт их балансного вычитания.

Помимо балансного приёма эффективность использования мощности в интерферометре можно повысить за счёт использования поляризационного ответвителя. Кроме того, схему балансного приёма можно выполнить, не используя специального ответвления оптической мощности источника света к дополнительному фотодиоду. Такой интерферометр изображён на рис. 15. Основу интерферометра составляет ответвитель с поляризационно зависимыми коэффициентами деления, например $\alpha/(1-\alpha)$ для вертикальной поляризации и 0,5/0,5 для горизонтальной. Такие характеристики светоделителя позволяют направить дополнительную мощность в сигнальное плечо, а при обратном проходе получить максимальный сигнал интерференции с одновременной компенсацией избыточных шумов. Для переключения поляризации волны, бегущей в обратном направлении, можно использовать пластинки $\lambda/4$ или фарадеевские вращатели плоскости поляризации на 45°, помещённые на выходах волокон обоих плеч интерферометра.

Относительная чувствительность K в таком интерферометре при отношении сигнал/шум, равном единице, определяется выражением

$$K = \frac{1}{I^2\alpha\,(1-\alpha)}\left[eI\,(1-\alpha) + \frac{2kT}{Z}\right]\frac{F_{\rm D}}{Q}, \tag{4}$$

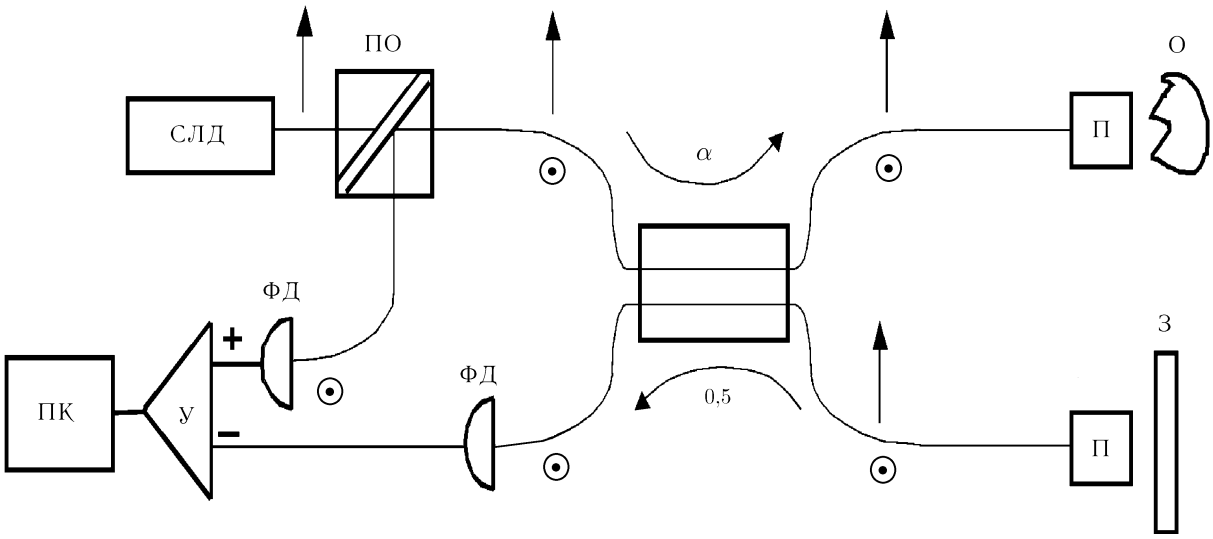

Рис. 15. Оптическая схема поляризационного интерферометра с неодинаковой эффективностью разделения волн при прямом и обратном ходе и балансным приёмом: СЛД — суперлюминесцентный диод, ПО — поляризационный ответвитель, П — фарадеевские вращатели плоскости поляризации на 45°, О — объект наблюдения, З — зеркало, ФД — фотодиоды, У — усилитель, ПК — персональный компьютер; стрелки обозначают направление электрического поля световой волны

полученному при оптимальном значении $\gamma = 1$.

Для сравнения на рис. 16 представлена зависимость $K(\alpha)$ при $T = 300$ К, $I = 3$ мА и $\gamma = 0{,}001;\ 1$.

Предельная чувствительность реализуется при

$$\alpha \approx 1 - \sqrt{\frac{2kT}{eIZ}}\,, \qquad (5)$$

при этом выражение для оптимальной чувствительности имеет вид

$$K_{\lim} = \frac{e}{I}\left(1 + \sqrt{\frac{8kT}{eIZ}}\right)\frac{F_{\mathrm{D}}}{Q}\,. \qquad (6)$$

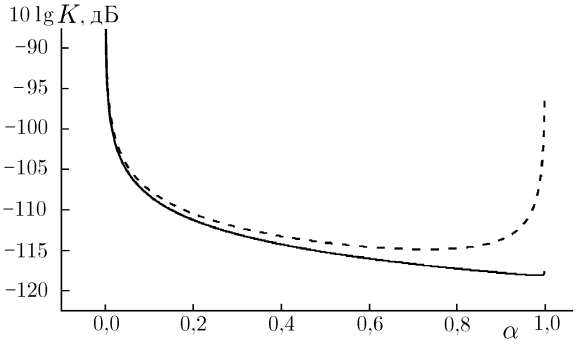

Рис. 16. Зависимость предельной чувствительности от распределения интенсивности волн прямого направления в поляризационном интерферометре при $\gamma = 0{,}001$ (пунктир) и $\gamma = 1$ (сплошная линия)

Как видно, оптимальным условиям приёма рассеянного излучения соответствует малый уровень потерь в опорном плече и перераспределение исходной оптической мощности в сигнальное плечо. Разумеется, при обратном прохождении сигнальная и опорная волны должны поровну разделяться на фотоприёмные системы. Выигрыш по сравнению с оптимальной схемой с обычным интерферометром Майкельсона составляет около 9 дБ при $\alpha \sim 1$ ($10\lg K \sim -118$ дБ), при $\alpha = 0{,}5$ выигрыш равен 6 дБ ($10\lg K \sim -115$ дБ). Запас чувствительности можно использовать для перехода на более высокие частоты приёма для повышения скорости получения томограмм.

Можно также рассмотреть возможность достижения более высокой предельной чувствительности в симметричном интерферометре (такую схему можно использовать не только в оптическом диапазоне), о котором в литературе ранее не упоминалось. В случае двухволновой интерференции любой интерферометр имеет два выхода с противофазным сигналом, и, вообще говоря, два входа

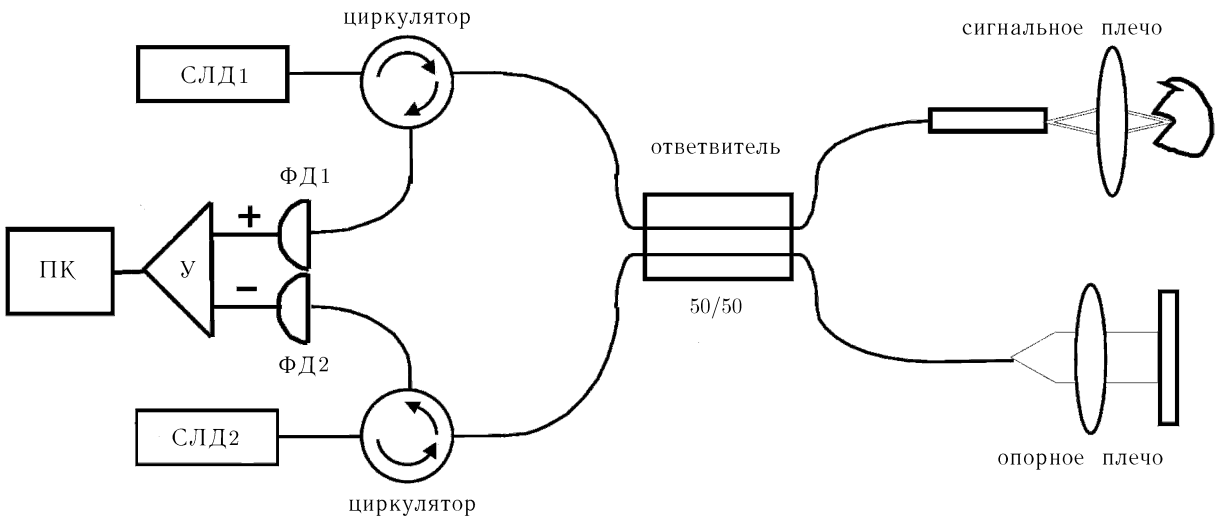

Рис. 17. Оптическая схема эффективного симметричного интерферометра; обозначения элементов схемы те же, что и на рис.15

для подачи излучения в интерферометр. Как правило, используется один вход для ввода излучения. Вход и выход в частном случае могут быть совмещены. Более того, возможно построение симметричного интерферометра требуемой конфигурации с двумя входами и двумя выходами (см. рис. 17). Порты ответвителя со стороны источников излучения являются двунаправленными. В них функционально объединены входы и выходы интерферометра. Для разделения входного и выходного излучения можно применять невзаимные циркуляторы. Такой интерферометр позволяет принять весь интерференционный сигнал и использовать максимальную возможную мощность излучения. Таким образом, схема интерферометра, приведённая на рис. 17, является предельной. В неё нельзя подать больше излучения и нельзя принять больший интерференционный сигнал.

Для источников с выходными фототоками I_1, I_2 зависимость относительной чувствительности K имеет вид

$$K \approx \frac{\left[eI_1\,(1-\alpha) + eI_2\alpha + \dfrac{2kT}{Z}\right]\dfrac{F_{\mathrm{D}}}{Q}}{4\,(I_1+I_2)^2\,\alpha^2\,(1-\alpha)^2}\,. \tag{7}$$

На рис. 18 представлены зависимости $K(\alpha)$ при $I_1 = I_2 = 3$ мА и $I_1 = I_2 = 1{,}5$ мА.

Как видно из рис. 18, при суммарном фототоке двух источников 3 мА (пунктирная кривая) коэффициент $10\lg K = -115$ дБ при $\alpha = 0{,}5$, как и в поляризационном интерферометре Майкельсона с балансным приёмом, обсуждавшемся выше. При токах $I_1 = I_2 = 3$ мА имеем $10\lg K = -118$ дБ, как и в поляризационном интерферометре Майкельсона с балансным приёмом при $\alpha \sim 1$.

Основным преимуществом предельной схемы интерферометра является возможность без потерь осуществлять мультиплексирование излучения двух частично перекрывающихся по спектру источников излучения, используя ответвитель. Так, даже идеальный спектрально-селективный мультиплексор, дополнительно введённый в обычный интерферометр, приводит к спектрально-неравномерным потерям при объединении излучения двух источников с перекрывающимися спектрами (см. рис. 19). Причиной этого является то обстоятельство, что спектральное распределение каждого из источников на двух выходах мультиплексора различно. Именно поэтому с использованием мультиплексора невозможно использовать всю мощность двух источников с неперекрывающимися спектрами. В предельной схеме таких потерь не возникает, поскольку можно

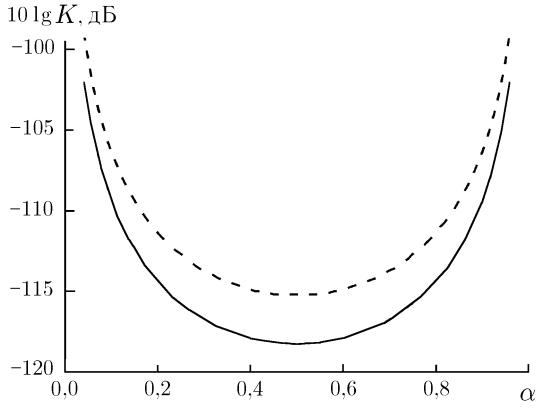

Рис. 18. Зависимость предельной чувствительности от отношения интенсивностей разделяемых лучей в симметричном интерферометре при $I_1 = I_2 = 3$ мА (сплошная линия) и $I_1 = I_2 = 1{,}5$ мА (пунктир)

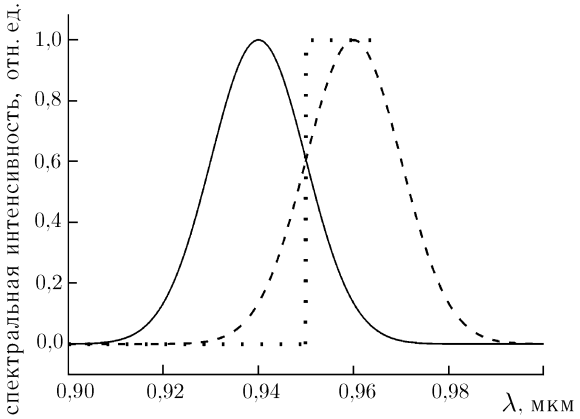

Рис. 19. Спектральная схема оптического суммирования излучения источников с близкими спектрами при ступенчатом мультиплексоре. Сплошная линия соответствует спектру излучения одного источника, штриховая — другого, пунктиром показан результат действия идеального мультиплексора

использовать широкополосный ответвитель, который поровну разделяет излучение по спектрам каждого из источников. Спектральное распределение суммарного излучения на обоих выходах ответвителя при этом одинаково, что особенно важно для получения предельного разрешения при широкополосном корреляционном приёме, в частности, в оптической когерентной томографии.

Суммируя, можно отметить, что интерферометр Майкельсона (см. рис. 17), использующий два входа и два выхода, реализует целый ряд преимуществ. Это подавление избыточных шумов источников, возможность суммирования излучения двух источников в самом интерферометре без использования дополнительного мультиплексора, получение излучения с одинаковыми оптическими спектрами на обоих выходах интерферометра, что приводит к предельно узкой функции кросскорреляции и, наконец, достижение наибольшей предельной чувствительности.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в данной работе приведены результаты, полученные на ряде современных направлений развития метода оптической когерентной томографии. Создан оптический когерентный микроскоп, позволивший реализовать пространственное разрешение локации в несколько микрон. При этом в биомедицинских приложениях возможно наблюдать структуры в живых биотканях на клеточном и субклеточном уровне на глубинах в сотни микрон.

Использование поляризационных свойств зондирующего излучения в низкокогерентной интерферометрии позволило осуществить детектирование сигнала на разных поляризациях, приходящего от одного и того же отражающего объекта по одному и тому же пути в рассеивающей среде. Это создало возможность измерения как поляризационных характеристик рассеяния, так и электродинамических параметров биоткани. Получение изображений с разрешением порядка внутриклеточных размеров, а также поляризационных характеристик рассеяния представляет большой интерес для ранней диагностики различных, в том числе онкологических, патологий.

Предложен ряд схем широкополосной оптической интерферометрии с максимально эффективным использованием мощности источника зондирующего излучения. Это открывает новые возможности для увеличения скорости получения изображений с высоким качеством.

Авторы выражают благодарность А. М. Сергееву за полезные обсуждения и помощь в подготовке публикации, а также медицинскому персоналу Нижегородской медицинской академии, Нижегородской областной больницы им. Н. А. Семашко и Нижегородского областного онкологического диспансера. Работа была частично поддержана РФФИ (гранты № 01–02–17721, 03–02–17253, 03–02–06420), а также CRDF (грант № RB2–2389–NN–02).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Huang D., Swanson E. A., Lin C. P., Schuman J. S., Stinson W. G., Chang W., Hee M. R., Flotte T., Gregory K., Puliafito C. A., Fujimoto J. G. // Science. 1991. V. 254. P. 1 178.
2. Геликонов В. М., Геликонов Г. В., Гладкова Н. Д., Куранов Р. В., Никулин Н. К., Петрова Г. А., Починко В. В., Правденко К. И., Сергеев А. М., Фельдштейн Ф. И., Ханин Я. И., Шабанов Д. В. // Письма в ЖЭТФ. 1995. Т. 61. С. 149.
3. Fercher A. F. // J. of Biomedical Optics. 1996. V. 1. P. 157.
4. Schmitt J. M. // IEEE J. of Selected Topics in Quantum Electronics. 1999. V. 5. P. 1 205.
5. Fujimoto J. G., Drexler W., Morgner U., Kartner F., Ippen E. // Optics and Photonics News. 2000. V. 11. P. 24.
6. Tuchin V. V. // SPIE Press. Washington, 2000.
7. Sergeev A. M., Dolin L. S., Reitze D. H. // Optics and Photonics News. July, 2001. P. 28.
8. Bouma B. E., Tearney G. J. // Marcel Dekker, Inc. New York, 2002. P. 741.
9. Izatt J. A., Hee M. R., Owen G. M., Swanson E. A., Fujimoto J. G. // Optics Letters. 1994. V. 19. P. 590.
10. Drexler W., Morgner U., Kartner F. X., Pitris C., Boppart S. A., LI X. D., Ippen E. P., Fujimoto J. G. // Optics. Letters. 1999. V. 24. P. 1 221.
11. Kuranov R. V., Sapozhnikova V. V., Turchin I. V., Zagainova E. V., Gelikonov V. M., Kamensky V. A., Snopova L. B., Prodanetz N. N. // Optics Exspress. 2002. V. 10. P. 707.
12. de Boer J. F., Srinivas S. M., Park B. H., Pham T. H., Chen Z. P., Milner T. E., Nelson J. S. // IEEE J. of Selected Topics in Quantum Electronics. 1999. V. 5. P. 1 200.
13. Schmitt J. M., Xiang S. H. // Optics Letters. 1998. V. 23. P. 1 060.
14. Izatt J. A., Kulkarni M. D., Wang H.-W., Kobayashi K., Sivak M. V. Jr. // IEEE J. of Selected Topics in Quantum Electronics. 1996. V. 2. P. 1 017.
15. Kovalevicz A. M., Ko T., Hartl I., Fujimoto J. G., Pollnau M., Salathe R. P. // Optics Express. 2002. V. 10. P. 349.
16. Hartl I., Li X. D., Chudoba C., Ghanta R. K., Ko T. H., Fujimoto J. G., Ranka J. K., Windeler R. S. // Optics Letters. 2001. V. 26. P. 608.
17. Povazay B., Bizheva K., Unterhuber A., Hermann B., Sattmann H., Fercher A. F., Drexler W., Apolonski A., Wadsworth W. J., Knight J. C., Russel P. S. J., Vetterlein M., Scherzer E. // Optics. Letters. 2002. V. 27. P. 1 800.
18. Schmitt J. M., Lee S. L., Yung K. M. // Optics Communications. 1997. V. 142. P. 203.
19. Baumgartner A., Hitzenberger C. K., Sattmann H., Dresler W., Fercher A. F. // J. of Biomedical Optics. 1998. V. 3. P. 45.
20. Lexer F., Hitzenberger C. K., Drexler W., Molebny S., Sattmann H., Sticker M., Fercher A. F. // J. of Modern Optics. 1999. V. 46. P. 541.
21. Knuttel A., Boehlau-Godau M. // J. of Biomedical Optics. 2000. V. 5. P. 83.
22. Пат. 583564 США / Feldchtein F. I., Gelikonov V. M., Gelikonov G. V., Gladkova N. D., Leonov V. I., Sergeev A. M., Khanin Y. I.; Опубл. 1998.

23. Батоврин В. К., Гармаш И. А., Геликонов В. М., Геликонов Г. В., Любарский А. В., Плявенек А. Г., Сафин С. А., Семёнов А. Т., Шидловский В. Р., Шраменко М. В., Якубович С. Д. // Квант. электроника. 1996. Т. 23. С. 113.
24. Геликонов В. М., Геликонов Г. В. Препринт ИПФ РАН № 586. Нижний Новгород, 2001.
25. Jacques S. L., Roman J. R., Lee K. // Laser Sur. Med. 2000. V. 26. P. 119.
26. Schoenenberger K., Colston B. W. Jr., Maitland D. J., DaSilva L. B., Everett M. J. // Applied. Optics. 1998. V. 37. P. 6 026.
27. Оптический интерферометр (варианты): Пат. 2169347 РФ / Геликонов В. М., Геликонов Г. В., Куранов Р. В., Сергеев А. М., Фельдштейн Ф. И.; Опубл. 2001.
28. Abbas G. L., Chan V. W. S., Yee T. K. // Optics Letters. 1983. V. 8. P. 419.

Институт прикладной физики РАН,
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию
26 июня 2003 г.

NEW APPROACHES IN WIDEBAND FIBER-OPTICAL INTERFEROMETRY FOR OPTICAL COHERENT TOMOGRAPHY

V. M. Gelikonov, G. V. Gelikonov, S. Yu. Ksenofontov, R. V. Kuranov, A. N. Morozov, A. V. Myakov, A. A. Turkin, I. V. Turchin, and D. V. Shabanov

We have developed methods of IR ultrawideband interferometry for increasing the limiting potential of optical coherent tomography (OCT). This permitted, in particular, to create an optical coherent microscope combining the principles of confocal microscopy and OCT. To increase the longitudinal resolution, we synthesized an ultrawideband optical spectrum based on two superluminescent diodes with separated radiation spectra. The resulting longitudinal resolution was 3.4 μm and the transverse resolution was 3.9 μm. Images of the inner structure of biological tissues are obtained at the cellular level. Experimental results of a study of biological tissue by the method of cross-polarization OCT are described.

УДК 535.36

О ПРОЯВЛЕНИИ ЭФФЕКТОВ МНОГОКРАТНОГО ОБРАТНОГО РАССЕЯНИЯ В ОПТИЧЕСКИХ ТОМОГРАММАХ СЛОИСТЫХ МУТНЫХ СРЕД

Г. В. Геликонов, Л. С. Долин, Е. А. Сергеева, И. В. Турчин

Исследовано влияние многократного обратного рассеяния на оптические томограммы слоистых мутных сред, получаемые методами оптической когерентной томографии или импульсной локации. Изложена методика расчёта сигналов обратного рассеяния различной кратности, проанализированы эффекты замедления спада томографического сигнала и уменьшения контраста изображения слоистых структур, обусловленные многократным рассеянием. Теоретически и экспериментально (с помощью оптического томографа) исследован эффект размытия изображения задней границы рассеивающего слоя, вызванный разбросом фотонов по пробегам.

Методы оптической томографии мутных сред основываются на тех или иных способах разделения сигналов, приходящих из среды с различных глубин. В системах лазерно-импульсного зондирования сигналы разделяются по времени прихода [1–3]. При формировании изображений методом оптической когерентной томографии (ОКТ) глубина расположения наблюдаемого слоя среды определяется по времени задержки опорного сигнала в референтном плече интерферометра [4–6]. В обоих случаях изображение строится на основе модели, согласно которой время задержки сигнала, образующего элемент изображения, однозначно связано с расстоянием до элемента среды, от которого сигнал отразился. Реальные томографические сигналы не вполне точно описываются этой моделью, поскольку в них проявляются эффекты многократного рассеяния света в среде. Рассеяние света на малые углы («вперёд») вызывает дополнительную задержку сигнала и увеличивает продольный размер элемента разрешения [7]. Эти эффекты могут быть учтены путём определённой корректировки указанной модели, но не требуют её кардинального изменения. Многократное рассеяние света на большие углы (для краткости мы называем его многократным обратным рассеянием) может приводить к тому, что сигналы от удалённого и близко расположенного слоёв среды будут поступать на приёмник одновременно. Учёт этих эффектов в общем случае требует использования существенно иных моделей и алгоритмов формирования изображений. В основном такие модели развиваются применительно к задаче наблюдения поглощающих неоднородностей мутной среды на больши́х оптических глубинах (с относительно низким пространственным разрешением) [8, 9].

В настоящей работе исследовано влияние многократного обратного рассеяния на изображения слоистых мутных сред, получаемые методами ОКТ или импульсной локации в условиях, когда однократное обратное рассеяние даёт основной вклад в принимаемый сигнал (благодаря чему слоистые структуры могут наблюдаться с высоким пространственным разрешением). Изложена методика расчёта сигналов рассеяния различной кратности, приведены аналитические выражения для сигналов однократного, двукратного и трёхкратного обратного рассеяния. С помощью данных выражений выполнено компьютерное моделирование томограмм слоистых мутных сред и показано, каким образом в этих томограммах проявляются эффекты многократного обратного рассеяния.

С помощью оптического томографа экспериментально исследован один из эффектов многократного обратного рассеяния — размытие изображения задней границы слоя мутной среды

конечной толщины. Экспериментальные данные сопоставлены с результатами компьютерного моделирования томограмм.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Сигналы при ОКТ и импульсной локации связаны соотношениями подобия [7], согласно которым на выходе оптического томографа с квадратичным детектором видеосигнала воспроизводится энергетический отклик среды на зондирующий импульс, огибающая которого (по мощности) повторяет возведённую в квадрат автокорреляционную функцию зондирующего сигнала. Поэтому в теоретическом разделе работы мы будем для определённости исследовать метод импульсной локации, имея в виду, что результаты этого исследования в равной мере могут быть использованы и для решения задач ОКТ.

Полагаем, что диаграммы направленности излучателя и приёмника соосны, ориентированы по нормали к границе среды, занимающей область $z > 0$, а их апертуры сфокусированы на плоскость $z = z_{\mathrm{f}}$. При выполнении конкретных расчётов считаем, что эти диаграммы одинаковы и имеют гауссовое угловое распределение. Телесный угол приёма $\Omega^{(\mathrm{r})}$ и эффективную площадь апертуры приёмника $\Sigma^{(\mathrm{r})}$ задаём в соответствии с условием

$$\Sigma^{(\mathrm{r})}\Omega^{(\mathrm{r})} = \lambda^2, \tag{1}$$

где λ — длина волны.

Объектом исследования будут искажения изображения с масштабами, превышающими продольный размер элемента разрешения, который определяется длительностью зондирующего импульса на глубине расположения наблюдаемого слоя среды. Поэтому при расчёте сигналов многократного обратного рассеяния длительность зондирующего импульса считаем бесконечно малой. Мы не учитываем также когерентные эффекты при обратном рассеянии [10]: достаточно очевидно, что в сигналах многократного обратного рассеяния они не могут заметно проявляться.

Оптические свойства среды характеризуем показателем истинного поглощения a и функцией объёмного рассеяния $\beta(z,\gamma)$, где z — глубина, γ — угол рассеяния. Полагаем, что эта функция содержит «направленную» и «изотропную» компоненты:

$$\beta(z,\gamma) = \beta_1(\gamma) + \beta_2(z), \tag{2}$$

первая из которых (β_1) не зависит от глубины, а вторая (β_2) — от угла рассеяния. В соответствии с этим полный показатель рассеяния

$$b = 2\pi \int\limits_0^\pi \beta(z,\gamma)\sin\gamma\,\mathrm{d}\gamma \tag{3}$$

представляем в виде суммы показателей малоуглового (b_1) и изотропного (b_2) рассеяния:

$$b(z) = 2\pi \int\limits_0^\pi \beta_1(\gamma)\sin\gamma\,\mathrm{d}\gamma + 2\pi \int\limits_0^\pi \beta_2(z)\sin\gamma\,\mathrm{d}\gamma = b_1 + b_2(z), \tag{4}$$

а индикатрису рассеяния — в виде

$$x(z,\gamma) = \frac{4\pi\beta}{b} = \frac{x_1(\gamma) + p_2}{1 + p_2}\,, \tag{5}$$

где

$$p_2(z) = b_2(z)/b_1 \tag{6}$$

— отношение показателей изотропного и малоуглового рассеяния. Предполагаем, что дисперсия индикатрисы малоуглового рассеяния

$$\gamma_1^2 = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} \gamma^2 x_1(\gamma)\sin\gamma\,\mathrm{d}\gamma \tag{7}$$

удовлетворяет условию $\gamma_1^2 \ll 1$.

2. МЕТОДИКА РАСЧЁТА СВЕТОЛОКАЦИОННОГО СИГНАЛА

Модель светолокационного сигнала строим на основе уравнения переноса излучения

$$\left(v^{-1}\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{\Omega}\,\nabla + a + b\right) L(\mathbf{r},\mathbf{\Omega},t) = \int\limits_{4\pi} L(\mathbf{r},\mathbf{\Omega}',t)\beta(z,\gamma)\,\mathrm{d}\Omega', \tag{8}$$

где L — яркость излучения в точке $\mathbf{r}$ среды в направлении единичного вектора $\mathbf{\Omega}$ в момент времени t, $\gamma = \arccos(\mathbf{\Omega}\mathbf{\Omega}')$, $\mathrm{d}\Omega'$ — элемент телесного угла, v — скорость света в среде. Решение уравнения (8) ищем в виде суммы двух слагаемых: $L = L_0 + L_\mathrm{d}$, первое из которых удовлетворяет уравнению

$$\left(v^{-1}\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{\Omega}\,\nabla + a_1 + b_1\right) L_0(\mathbf{r},\mathbf{\Omega},t) = \int\limits_{4\pi} L_0(\mathbf{r},\mathbf{\Omega}',t)\beta_1(\gamma)\,\mathrm{d}\Omega' \tag{9}$$

и описывает «направленную» компоненту поля излучения, т. е. поле пучка подсветки в фиктивной среде с узкой индикатрисой рассеяния $x_1(\gamma)$, показателем рассеяния b_1 и показателем поглощения $a_1(z) = a + b_2(z)$. При этом для диффузной компоненты поля (L_d) получается уравнение

$$\left(v^{-1}\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{\Omega}\,\nabla + a_1 + b_1\right) L_\mathrm{d}(\mathbf{r},\mathbf{\Omega},t) = \int\limits_{4\pi} L_\mathrm{d}(\mathbf{r},\mathbf{\Omega}',t)\beta_1(\gamma)\,\mathrm{d}\Omega' + \beta_2 E, \tag{10}$$

где $E(\mathbf{r},t)$ — полная облучённость в точке $\mathbf{r}$ среды в момент времени t:

$$E(\mathbf{r},t) = \int\limits_{4\pi} L(\mathbf{r},\mathbf{\Omega},t)\,\mathrm{d}\Omega. \tag{11}$$

Формально (10) можно рассматривать как уравнение для поля распределённых источников $\beta_2 E$ в среде без изотропного рассеяния. Поэтому мощность импульсного сигнала обратного рассеяния $P(t)$ можно записать в виде

$$P(t) = \Sigma^{(\mathrm{r})}\Omega^{(\mathrm{r})}\int\limits_V \beta_2(z)\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} E(\mathbf{r},t')E_0^{(\mathrm{r})}(\mathbf{r},t-t')\,\mathrm{d}t'\right]\mathrm{d}^3\mathbf{r}, \tag{12}$$

который отличается от выражения для сигнала однократного обратного рассеяния [3] только тем, что под знаком интеграла в нём стоит функция $E(\mathbf{r},t)$ вместо $E_0(\mathbf{r},t)$. Через $E_0^{(\mathrm{r})}(\mathbf{r},t)$ мы обозначаем направленную компоненту поля облучённости от вспомогательного источника с такими

же, как у приёмника, апертурой и диаграммой направленности, излучающего в момент времени $t = 0$ сигнал в виде δ-импульса с единичной энергией.

Соотношение (12) является строгим следствием уравнения переноса излучения при условии, что на границе среды выполняется условие $L_0 = 0$ при $\Omega_z < 0$ (через Ω_z обозначена проекция $\mathbf{\Omega}$ на ось z). Заменив $\beta_2(z)$ на $\beta_2(\mathbf{r})$, это соотношение можно применять к средам с произвольно неоднородными оптическими характеристиками $a(\mathbf{r})$, $\beta(\mathbf{r}, \gamma)$. Разумеется, оно не решает задачу нахождения светолокационного сигнала, а всего лишь сводит её к расчёту распределений облучённости в среде от реального и вспомогательного источников. Если полную облучённость E и светолокационный сигнал $P(t)$ разложить в ряды по степеням кратности обратного рассеяния:

$$E = E_0 + E_1 + E_2 + \ldots, \tag{13}$$

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + \ldots, \tag{14}$$

то из (12) получим соотношение

$$P_n(t) = \Sigma^{(\mathrm{r})}\Omega^{(\mathrm{r})} \int\limits_V \beta_2(z) \left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} E_{n-1}(\mathbf{r}, t') E_0^{(\mathrm{r})}(\mathbf{r}, t - t')\, \mathrm{d}t' \right] \mathrm{d}^3\mathbf{r}, \tag{15}$$

позволяющее выразить мощность n-кратно обратно рассеянного сигнала через облучённость среды светом, испытавшим $n - 1$ актов обратного рассеяния.

Первый член (E_0) ряда (13) и функция $E_0^{(\mathrm{r})}$ описывают структуру реального и вспомогательного пучков подсветки в фиктивной среде с узкой индикатрисой рассеяния. Поэтому для их расчёта можно воспользоваться существующими моделями функции размытия пучка [3], построенными на основе решений уравнения переноса излучения в малоугловом приближении. Последующие члены ряда находятся с помощью формул

$$E_n = \int\limits_{4\pi} L_n\, \mathrm{d}\Omega, \tag{16}$$

где $n = 1, 2, \ldots$, и системы уравнений

$$\left(v^{-1} \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{\Omega}\, \nabla + a_1 + b_1 \right) L_n(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, t) = \int\limits_{4\pi} L_n(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}', t) \beta_1(\gamma)\, \mathrm{d}\Omega' + \beta_2 E_{n-1}(\mathbf{r}, t), \tag{17}$$

которая следует из уравнения (8), если его решение искать в виде ряда по кратностям обратного рассеяния:

$$L = L_0 + L_1 + L_2 + \ldots. \tag{18}$$

Используя метод функции Грина, произвольный член этого ряда можно представить в интегральной форме через β_2 и распределение облучённости от точечного мононаправленного δ-импульсного источника в среде без изотропного рассеяния. Однако полученные таким образом решения имеют слишком сложный вид и мало пригодны для численного анализа. Поэтому вместо уравнений (17) мы будем использовать уравнения транспортного приближения

$$\left(v^{-1} \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{\Omega}\, \nabla + a_1 \right) L_n(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, t) = \beta_2 E_{n-1}(\mathbf{r}, t), \tag{19}$$

которые не учитывают влияние малоуглового рассеяния на структуру поля излучения изотропных распределённых источников, входящих в правую часть уравнений (17). Такое упрощение

уравнений не должно приводить к заметным погрешностям в решении задачи, поскольку эффекты размытия эффективных диаграмм направленности источника и приёмника, обусловленные малоугловым рассеянием, будут учтены путём соответствующего задания функции $E_0^{(\mathrm{r})}$ в уравнении (12) и функции E_0 в уравнении для L_1.

Уравнения (19) приводят к рекуррентным соотношениям

$$L_n(\mathbf{r},\mathbf{\Omega},t)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^\infty b_2(z-\Omega_z s)E_{n-1}(\mathbf{r}-\mathbf{\Omega}s,t-s/v)\,\exp\left[-as-\int_0^s b_2(z-\Omega_z s')\,\mathrm{d}s'\right]\mathrm{d}s, \qquad (20)$$

которые в дальнейшем и будут использованы для расчёта функций E_n при $n>1$.

Полагая, что показатель изотропного рассеяния $b_2(z)=4\pi\beta_2$ меняется плавно в масштабе длины зондирующего импульса, которая определяется начальной длительностью импульса и его продольным размытием на трассе распространения, направленную компоненту распределения облучённости в пучке подсветки будем задавать в виде

$$E_0(\mathbf{r},t)=W\bar{E}^{(\mathrm{s})}(\mathbf{r}_\perp,z)\,\delta(t-z/v), \qquad (21)$$

где W — энергия зондирующего импульса, $\bar{E}^{(\mathrm{s})}$ — распределение облучённости (в среде без изотропного рассеяния) от непрерывного источника с единичной мощностью и такой же, как у реального источника, диаграммой направленности, $\mathbf{r}_\perp$ — составляющая $\mathbf{r}$ в плоскости $z=\mathrm{const}$. Поле вспомогательного δ-импульсного источника $E_0^{(\mathrm{r})}$ аналогичным образом выразим через поле облучённости $\bar{E}^{(\mathrm{r})}$, формируемое непрерывным источником с единичной мощностью и характеристиками направленности приёмника:

$$E_0^{(\mathrm{r})}(\mathbf{r},t)=\bar{E}^{(\mathrm{r})}(\mathbf{r}_\perp,z)\,\delta(t-z/v). \qquad (22)$$

С учётом (22) формула (15) упрощается и принимает вид

$$P_n(t)=\frac{1}{4\pi}\,\Sigma^{(\mathrm{r})}\Omega^{(\mathrm{r})}\int\limits_0^\infty b_2(z)\left[\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}E_{n-1}(\mathbf{r}_\perp,z,t-z/v)\bar{E}^{(\mathrm{r})}(\mathbf{r}_\perp,z)\,\mathrm{d}^2\mathbf{r}_\perp\right]\mathrm{d}z. \qquad (23)$$

3. ПРИБЛИЖЕНИЕ ОДНОКРАТНОГО ОБРАТНОГО РАССЕЯНИЯ

Из (21), (23) следует известная формула [3]

$$P_1(t)=\frac{vW}{8\pi}\,\Sigma^{(\mathrm{r})}\Omega^{(\mathrm{r})}b_2(vt/2)\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\bar{E}^{(\mathrm{s})}(\mathbf{r}_\perp,vt/2)\bar{E}^{(\mathrm{r})}(\mathbf{r}_\perp,vt/2)\,\mathrm{d}^2\mathbf{r}_\perp, \qquad (24)$$

согласно которой сигнал однократного обратного рассеяния в момент времени t пропорционален показателю изотропного рассеяния среды на глубине $z=vt/2$. Интегральный сомножитель в правой части (24) учитывает эффекты размытия диаграмм направленности источника и приёмника из-за малоуглового рассеяния света в слое среды с толщиной z, а также ослабление сигнала, приходящего с глубины z, вследствие его поглощения и обратного рассеяния при двукратном прохождении через слой.

Распределения $\bar{E}^{(\mathrm{s})}$, $\bar{E}^{(\mathrm{r})}$ зададим в виде

$$\bar{E}^{(\mathrm{s}),(\mathrm{r})}(\mathbf{r}_\perp, z) = \exp\left(-az - \int_0^z b_2(z')\,\mathrm{d}z'\right)\left[\frac{1}{\pi d_0^{(\mathrm{s}),(\mathrm{r})}}\,\exp\left(-b_1 z - \frac{\mathbf{r}_\perp^2}{d_0^{(\mathrm{s}),(\mathrm{r})}}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1-\exp(-b_1 z)}{\pi d_1^{(\mathrm{s}),(\mathrm{r})}}\,\exp\left(-\frac{\mathbf{r}_\perp^2}{d_1^{(\mathrm{s}),(\mathrm{r})}}\right)\right], \quad (25)$$

$$d_0^{(\mathrm{s}),(\mathrm{r})}(z) = \left(r_0^{(\mathrm{s}),(\mathrm{r})}\right)^2 (1 - z/z_\mathrm{f})^2 + \pi^{-1}\Omega^{(\mathrm{s}),(\mathrm{r})} z^2, \quad (26)$$

$$d_1^{(\mathrm{s}),(\mathrm{r})}(z) = d_0^{(\mathrm{s}),(\mathrm{r})} + \frac{1}{3}\,\gamma_1^2 b_1 z^3\,[1 - \exp(-b_1 z)]^{-1}, \quad (27)$$

где $r_0^{(\mathrm{s})}$ и $r_0^{(\mathrm{r})}$ — эффективные радиусы апертур источника и приёмника, $\Omega^{(\mathrm{s})}$ и $\Omega^{(\mathrm{r})}$ — эффективные телесные углы излучения и приёма [7]. Приведённые формулы описывают эволюцию структуры гауссового волнового пучка в среде с сильно анизотропным рассеянием и получены на основе решения уравнения переноса излучения в малоугловом диффузионном приближении.

Подставляя (25)–(27) в (24) и переходя к безразмерным переменным

$$\tau = b_1 vt/2, \qquad \tau' = b_1 z, \quad (28)$$

сигнал однократного обратного рассеяния можно представить в виде

$$P_1(t) = Ap(\tau)\exp\left[-2\int_0^\tau p(\tau')\,\mathrm{d}\tau'\right]\times$$
$$\times\left[\frac{\exp(-2\tau)}{D_0^{(\mathrm{s})}(\tau) + D_0^{(\mathrm{r})}(\tau)} + \frac{\exp(-\tau)\,[1-\exp(-\tau)]}{D_0^{(\mathrm{s})}(\tau) + D_1^{(\mathrm{r})}(\tau)} + \frac{\exp(-\tau)\,[1-\exp(-\tau)]}{D_1^{(\mathrm{s})}(\tau) + D_0^{(\mathrm{r})}(\tau)} + \frac{[1-\exp(-\tau)]^2}{D_1^{(\mathrm{s})}(\tau) + D_1^{(\mathrm{r})}(\tau)}\right], \quad (29)$$

где

$$A = \frac{vW}{8\pi^2}\,\Sigma^{(\mathrm{r})}\Omega^{(\mathrm{r})} b_1^3 \exp(-avt), \quad (30)$$

$$D_0^{(\mathrm{s}),(\mathrm{r})}(\tau) = b_1^2 d_0^{(\mathrm{s}),(\mathrm{r})} = \left(b_1 r_0^{(\mathrm{s}),(\mathrm{r})}\right)^2\left(1 - \frac{\tau}{b_1 z_\mathrm{f}}\right)^2 + \pi^{-1}\Omega^{(\mathrm{s}),(\mathrm{r})}\tau^2, \quad (31)$$

$$D_1^{(\mathrm{s}),(\mathrm{r})}(\tau) = b_1^2 d_1^{(\mathrm{s}),(\mathrm{r})} = D_0^{(\mathrm{s}),(\mathrm{r})}(\tau) + \frac{1}{3}\,\gamma_1^2\tau^3\,[1-\exp(-\tau)]^{-1}, \quad (32)$$

$$p(\tau) = p_2(\tau/b_1) = \frac{b_2(\tau/b_1)}{b_1} \quad (33)$$

— отношение показателей изотропного и малоуглового рассеяния (см. (6)) как функция безразмерной глубины τ.

4. СИГНАЛ ДВУКРАТНОГО ОБРАТНОГО РАССЕЯНИЯ

Выражение для сигнала двукратного обратного рассеяния можно получить описанным способом без дополнительных упрощающих предположений:

$$P_2(t) = A\int_0^\tau\int_0^\tau p(\tau_1)p(\tau_2)F(\tau,\tau_1,\tau_2)\,\mathrm{d}\tau_1\,\mathrm{d}\tau_2, \quad (34)$$

где

$$F(\tau,\tau_1,\tau_2) = (2\tau-\tau_1-\tau_2)^{-1}\exp\left[-\int_0^{\tau_1} p(\tau')\,\mathrm{d}\tau' - \int_0^{\tau_2} p(\tau')\,\mathrm{d}\tau' - \frac{2\tau-\tau_1-\tau_2}{\tau_1-\tau_2}\int_{\tau_2}^{\tau_1} p(\tau')\,\mathrm{d}\tau'\right]\times$$
$$\times\left\{\frac{\exp(-\tau_1-\tau_2)}{D_0^{(\mathrm{s})}(\tau_2)+D_0^{(\mathrm{r})}(\tau_1)}\exp\left[-\frac{4\,(\tau-\tau_1)\,(\tau-\tau_2)}{D_0^{(\mathrm{s})}(\tau_2)+D_0^{(\mathrm{r})}(\tau_1)}\right]+\frac{1-\exp(-\tau_1)}{D_0^{(\mathrm{s})}(\tau_2)+D_1^{(\mathrm{r})}(\tau_1)}\times\right.$$
$$\times\exp\left[-\tau_2-\frac{4\,(\tau-\tau_1)\,(\tau-\tau_2)}{D_0^{(\mathrm{s})}(\tau_2)+D_1^{(\mathrm{r})}(\tau_1)}\right]+\frac{1-\exp(-\tau_2)}{D_1^{(\mathrm{s})}(\tau_2)+D_0^{(\mathrm{r})}(\tau_1)}\exp\left[-\tau_1-\frac{4\,(\tau-\tau_1)\,(\tau-\tau_2)}{D_1^{(\mathrm{s})}(\tau_2)+D_0^{(\mathrm{r})}(\tau_1)}\right]+$$
$$\left.+\frac{[1-\exp(-\tau_1)]\,[1-\exp(-\tau_2)]}{D_1^{(\mathrm{s})}(\tau_2)+D_1^{(\mathrm{r})}(\tau_1)}\exp\left[-\frac{4\,(\tau-\tau_1)\,(\tau-\tau_2)}{D_1^{(\mathrm{s})}(\tau_2)+D_1^{(\mathrm{r})}(\tau_1)}\right]\right\}. \quad (35)$$

5. СИГНАЛ ТРЁХКРАТНОГО ОБРАТНОГО РАССЕЯНИЯ

Выражение для сигнала P_3 при произвольной зависимости $p(\tau)$ оказывается очень сложным и мало пригодным для численного анализа. Однако для слоя однородной мутной среды конечной толщины z_0 расчёт этого сигнала приближённо сводится к вычислению двукратных интегралов:

$$P_3(t) = Ap^3\exp(-2p\tau)\eta(\tau), \quad (36)$$

$$\eta(\tau) = \int_0^{\tau_\mathrm{m}}\int_0^{\tau_\mathrm{m}} F_1\,\mathrm{d}\tau_1\,\mathrm{d}\tau_2 + \int_0^{\alpha}\left[\int_0^{\beta} F_2\,\mathrm{d}\tau_2 + \int_{\beta}^{\tau_\mathrm{m}} F_3\,\mathrm{d}\tau_2\right]\mathrm{d}\tau_1 + \int_{\alpha}^{\tau_\mathrm{m}}\left[\int_0^{\tau_\mathrm{m}} F_2\,\mathrm{d}\tau_2\right]\mathrm{d}\tau_1, \quad (37)$$

$$\tau_\mathrm{m} = \begin{cases}\tau, & \tau<\tau_0;\\ \tau_0, & \tau>\tau_0,\end{cases}\qquad \tau_0 = b_1 z_0, \quad (38)$$

$$\alpha = \begin{cases}\tau_\mathrm{m} - 2\sqrt{D(\tau_\mathrm{m})}, & \tau_\mathrm{m} > 2\sqrt{D(\tau_\mathrm{m})};\\ 0, & \tau_\mathrm{m} < 2\sqrt{D(\tau_\mathrm{m})},\end{cases} \quad (39)$$

$$\beta = 3\tau_1 - 2\tau_\mathrm{m} + 2\sqrt{D(\tau_\mathrm{m}) + 2\,(\tau_\mathrm{m}-\tau_1)^2}, \quad (40)$$

$$D(\tau) = \left(b_1 r_0^{(\mathrm{s})}\right)^2\left(1-\frac{\tau}{b_1 z_\mathrm{f}}\right)^2 + \pi^{-1}\Omega^{(\mathrm{s})}\tau^2 + \frac{1}{3}\gamma_1^2\tau^3, \quad (41)$$

$$F_1 = \frac{1}{4f_2}\ln\frac{T_2\sqrt{T_1^2-f_1T_1+f_2}}{T_1\sqrt{T_2^2-f_1T_2+f_2}}, \quad (42)$$

$$F_2 = \frac{f_1}{4f_2f_3}\left(\operatorname{arctg}\frac{2T_2-f_1}{f_3} - \operatorname{arctg}\frac{2T_1-f_1}{f_3}\right), \quad (43)$$

$$F_3 = \frac{f_1}{4f_2f_3}\left(\operatorname{arcth}\frac{2T_1-f_1}{f_3} - \operatorname{arcth}\frac{2T_2-f_1}{f_3}\right), \quad (44)$$

$$T_1 = |\tau_1-\tau_2|,\qquad T_2 = \frac{1}{2}\left[2\tau-\tau_1+\frac{\tau_1\,(\tau_1-2\tau_2)}{2\tau-\tau_1}\right], \quad (45)$$

$$f_1 = 2\tau-\tau_1-\tau_2,\qquad f_2 = \frac{1}{2}\left[f_1^2 - T_1^2 + D(\tau_\mathrm{m})\right], \quad (46)$$

$$f_3 = \sqrt{|4f_2 - f_1^2|}\,. \tag{47}$$

При выводе этого выражения вместо формул (25)–(27) была использована простейшая аппроксимация функции размытия пучка:

$$\bar{E}^{(\mathrm{s})} = b_1^2\,(\pi D)^{-1}\exp[-a_1 z - (b_1 r_\perp)^2/D] \tag{48}$$

с параметром D, определяемым по формуле (41). Интегральное выражение для поля E_1 было приближённо представлено через элементарные функции, а поле $\bar{E}^{(\mathrm{r})}$ определялось по формуле $\bar{E}^{(\mathrm{r})} = \delta(\mathbf{r}_\perp)\exp(-a_1 z)$, которая не учитывает размытие эффективной диаграммы направленности приёмника из-за малоуглового рассеяния света. Эти упрощения были сделаны на основании оценок, которые показывают, что эффекты малоуглового рассеяния в основном проявляются в сигнале однократного обратного рассеяния, а на сигнал P_3 влияют очень слабо.

6. СИГНАЛ МНОГОКРАТНОГО ОБРАТНОГО РАССЕЯНИЯ

Для слоя однородной мутной среды конечной толщины можно предложить достаточно простую модель импульсного отклика, учитывающую обратное рассеяние произвольной кратности. Модель строится следующим образом: поле облучённости в среде ищется в виде $E = E_0 + E_\mathrm{d}$; направленная составляющая поля E_0 определяется по формулам (21), (48), диффузная компонента E_d находится из диффузионного уравнения

$$\frac{\partial E_\mathrm{d}}{\partial t} - \frac{v}{3b_2}\,\Delta E_\mathrm{d} + avE_\mathrm{d} = vb_2E_0, \tag{49}$$

после чего поле E подставляется в формулу

$$P(t) = \frac{1}{4\pi}\,\Sigma^{(\mathrm{r})}\Omega^{(\mathrm{r})}\int\limits_0^\infty b_2(z)\left[\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} E(\mathbf{r}_\perp, z, t - z/v)\bar{E}^{(\mathrm{r})}(\mathbf{r}_\perp, z)\,\mathrm{d}^2\mathbf{r}_\perp\right]\mathrm{d}z, \tag{50}$$

которая следует из (12), (22). В результате принимаемый сигнал представляется в виде суммы сигналов однократного обратного рассеяния P_1 и диффузного рассеяния P_d:

$$P(t) = P_1(t) + P_\mathrm{d}(t), \qquad P_\mathrm{d}(t) = Ap^2\int\limits_0^{\tau_\mathrm{m}}\int\limits_0^{\tau_\mathrm{m}}\Phi(\tau, \tau_1, \tau_2)\,\mathrm{d}\tau_1\,\mathrm{d}\tau_2, \tag{51}$$

где

$$\Phi = \left[D(\tau_2) + D(\tau_1) + \frac{4f_1}{3p}\right]^{-1}\sqrt{\frac{3p}{\pi f_1}}\exp\left[-\frac{3p}{4f_1}\,(\tau_1 - \tau_2)^2 - p\,(\tau_1 + \tau_2)\right], \tag{52}$$

а функции P_1, τ_m, D, f_1 определяются формулами (29), (38), (41) и (46) соответственно.

Заметим, что расчёт импульсного отклика среды в диффузионном приближении возможен только при определённых ограничениях на толщину слоя z_0, время задержки сигнала t и величину показателей поглощения a и изотропного рассеяния b_2: $z_0 \gg b_2^{-1}$, $t \gg (b_2 v)^{-1}$, $b_2 \gg a$. Однако при выводе формул (51), (52) диффузионное уравнение использовалось для нахождения эффективных источников принимаемого сигнала, а не самого сигнала. Поэтому нет оснований считать, что указанные ограничения в полной мере распространяются на эти формулы.

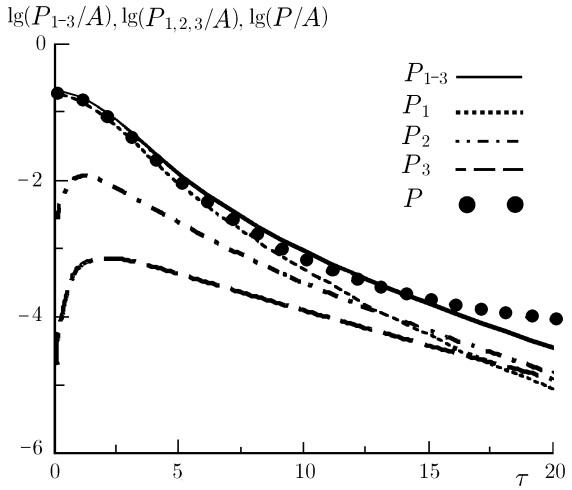

Рис. 1. Результаты расчёта мощности импульсных сигналов обратного рассеяния различной кратности P_1, P_2, P_3 и суммарных сигналов $P_{1-3} = P_1 + P_2 + P_3$, $P = P_1 + P_{\rm d}$, приходящих из однородной мутной среды с оптической глубины $\tau = b_1 vt/2$. Расчёты выполнены при $p = 0{,}1$; $\gamma_1^2 = 0{,}04$; $b_1 z_{\rm f} \to \infty$; $b_1 r_0 = 0{,}3$

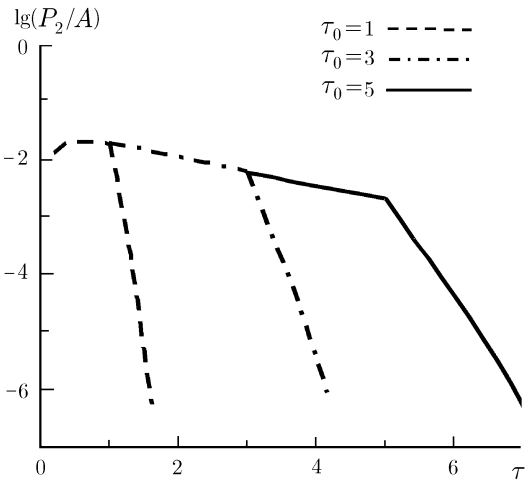

Рис. 2. Сигнал двукратного обратного рассеяния, приходящий из слоёв однородной мутной среды конечной толщины z_0. Значения $\tau_0 = b_1 z_0$ указаны на рисунке, прочие параметры те же, что для рис. 1

7. ЭФФЕКТЫ МНОГОКРАТНОГО ОБРАТНОГО РАССЕЯНИЯ

На рис. 1–8 представлены результаты расчёта томографических сигналов для системы наблюдения с одинаковыми радиусами апертур источника и приёмника: $r_0^{(\rm s)} = r_0^{(\rm r)} = r_0$, и телесными углами излучения и приёма: $\Omega^{(\rm s)} = \Omega^{(\rm r)} = \lambda^2/(\pi r_0^2)$, заданными в соответствии с формулой (1).

Кривые на рис. 1 изображают зависимости мощности сигналов при различной кратности обратного рассеяния P_1, P_2, P_3 и мощности суммарного сигнала, рассчитанной по формулам $P_{1-3} = P_1 + P_2 + P_3$, $P = P_1 + P_{\rm d}$, от безразмерной глубины $\tau = b_1 vt/2$ для случая однородной мутной среды. Кривые соответствуют значениям $p = 0{,}1$; $\gamma_1^2 = 0{,}04$; $b_1 z_{\rm f} \to \infty$; параметр $b_1 r_0 = 0{,}3$ выбран близким к значению, которое реализуется при диагностике кожного покрова и слизистых оболочек медицинскими приборами ОКТ [1, 2, 4–6]. Из рис. 1 видно, что сигналы рассеяния высших кратностей начинают влиять на характер спада полного сигнала в интервале глубин $\tau \sim 5 \div 10$, а при $\tau \sim 15$ сравниваются с сигналом однократного обратного рассеяния. В диапазоне $\tau < 15$ результаты расчёта отражённого сигнала в приближении трёхкратного обратного рассеяния (P_{1-3}) удовлетворительно согласуются с результатами расчёта суммарного сигнала в диффузионном приближении. При $\tau > 15$ приближение трёхкратного обратного рассеяния приводит к заниженным значениям мощности сигнала.

Рис. 2–4 иллюстрируют эффект послесвечения слоя мутной среды конечной толщины, обусловленный запаздыванием сигналов двукратного и трёхкратного рассеяния по отношению к сигналу однократного обратного рассеяния. Эффект проявляется в размытии изображения задней границы слоя (томограф «видит» среду там, где её нет). Сигнал двукратного рассеяния за границей слоя спадает очень резко. Это объясняется тем, что двукратно рассеянные фотоны отстают от однократно рассеянных на расстояние порядка ширины пучка подсветки на глубине τ. Трёхкрат-

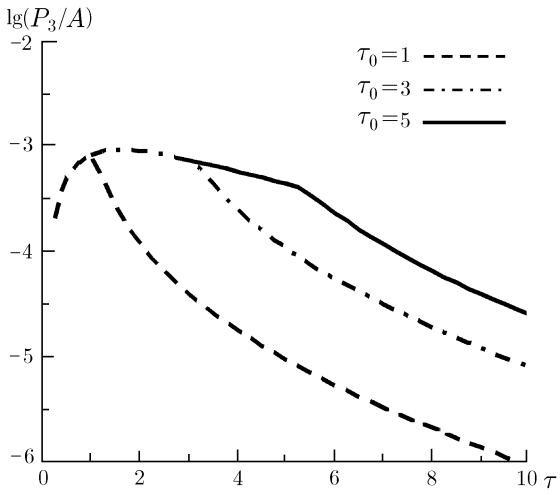

Рис. 3. Сигнал трёхкратного обратного рассеяния, приходящий из слоёв однородной мутной среды конечной толщины. Значения τ_0 указаны на рисунке, прочие параметры те же, что для рис. 1

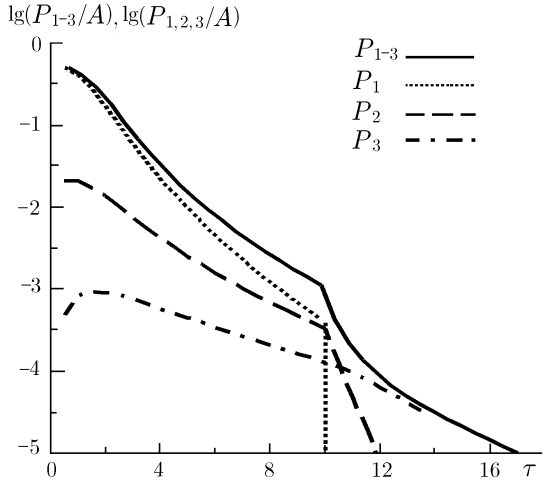

Рис. 4. Сигналы обратного рассеяния разной кратности и суммарный сигнал $P_{1-3} = P_1 + P_2 + P_3$ при $\tau_0 = 10$ (прочие параметры те же, что для рис. 1)

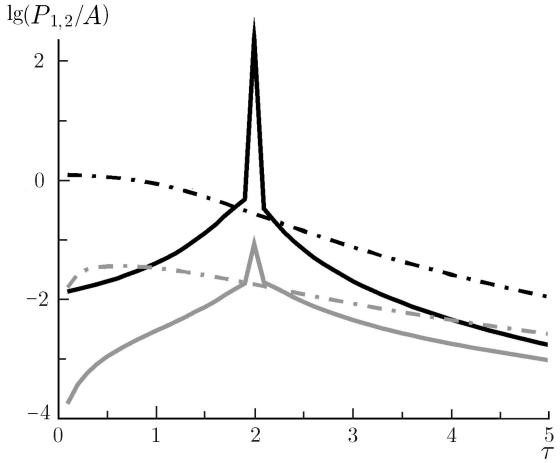

Рис. 5. Влияние фокусировки пучка подсветки на сигналы однократного (чёрная линия) и двукратного (серая линия) обратного рассеяния при $b_1 r_0 = 2$, $b_1 z_{\rm f} = 2$ (прочие параметры те же, что для рис. 1). Штрих-пунктиром показаны сигналы в отсутствие фокусировки ($b_1 z_{\rm f} \to \infty$)

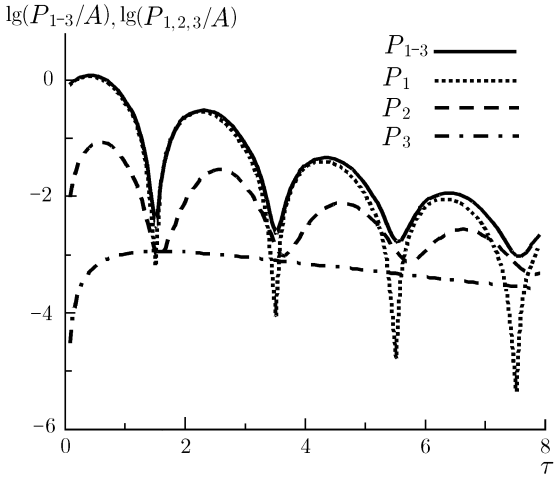

Рис. 6. Отображение слоистой структуры $p(\tau) = 0{,}1\,[1 + \sin(\pi\tau)]$ сигналами обратного рассеяния разной кратности и суммарным сигналом $P_{1-3} = P_1 + P_2 + P_3$ при значениях параметров, соответствующих рис. 1

но рассеянные фотоны имеют возможность вернуться в приёмник, рассеявшись первый и третий раз внутри пучка подсветки, а второй раз — вдали от него. Поэтому образуемый ими сигнал спадает медленнее.

Благодаря тому, что сигнал P_2 образуется фотонами, рассеянными внутри пучка подсветки, он реагирует на фокусировку этого пучка (см. рис. 5) и воспроизводит вариации показателя рассеяния (см. рис. 6), правда, с некоторым пространственным сдвигом и потерей контраста.

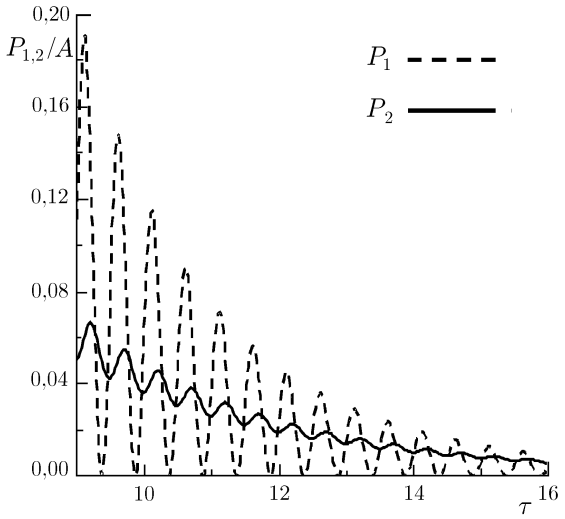

Рис. 7. Отображение слоистой структуры $p(\tau) = 0{,}1\,[1 + \sin(4\pi\tau)]$ сигналами однократного и двукратного обратного рассеяния при значениях параметров, соответствующих рис. 1

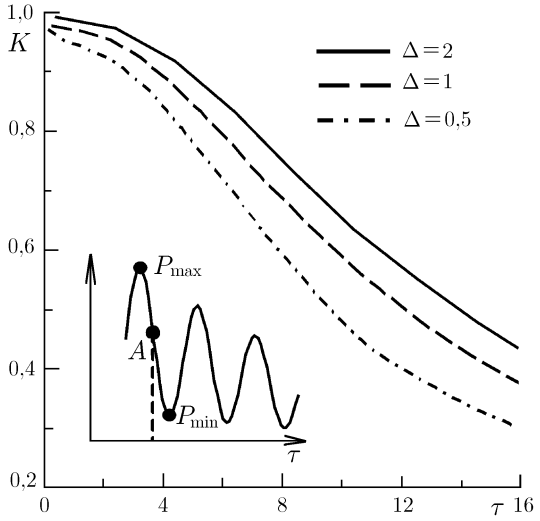

Рис. 8. Контраст изображения слоистой структуры $p(\tau) = 0{,}1\,[1 + \sin(2\pi\tau/\Delta)]$, рассчитанного в приближении $P = P_1 + P_2$, в зависимости от τ и периода структуры Δ. Контраст изображения определён как $K = (P_{\max} - P_{\min})/(P_{\max} + P_{\min})$, где $P_{\max}$ и $P_{\min}$ — максимальное и минимальное значения P в ближайшей окрестности точки A (см. вставку). Значения Δ указаны в верхней части рисунка, прочие параметры те же, что для рис. 1

Сигнал P_3 и сигналы рассеяния высших кратностей слабо реагируют на локальные изменения показателя рассеяния и образуют световой фон, снижающий контрастность изображения слоистых структур. Как видно из рис. 8, потеря контраста может наблюдаться уже при $\tau \sim 5$.

8. ТОМОГРАФИЧЕСКИЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Для проверки теоретической модели сигналов многократного обратного рассеяния был выполнен эксперимент по наблюдению размытия изображения задней границы слоя мутной среды с помощью медицинского оптического томографа.

В качестве объекта наблюдения использовался слой пастеризованной молочной эмульсии 10 %-й жирности толщиной 0,3 мм. Показатель рассеяния эмульсии $b = 7{,}6$ мм$^{-1}$ и её индикатриса рассеяния были измерены стандартным методом. Путём соответствующей обработки индикатрисы рассеяния были найдены значения её интегральных параметров: $\gamma_1^2 = 0{,}46$; $p = 1{,}2$.

Для наблюдения использовался томограф с рабочей длиной волны 1,3 мкм, разрешением по глубине около 15 мкм и поперечным разрешением порядка 20 мкм. Эффект размытия изображения задней границы слоя иллюстрирует томограмма и кривые спадания томографического сигнала, приведённые на рис. 9*а*. Экспериментальная кривая получена путём усреднения томограмм по 150 вертикальным строкам, теоретические кривые построены на основе результатов расчёта сигнала с учётом первых трёх кратностей обратного рассеяния (сплошная линия) и в диффузионном приближении (штриховая линия). Сигналы нормировались на их значение при $z = 0$.

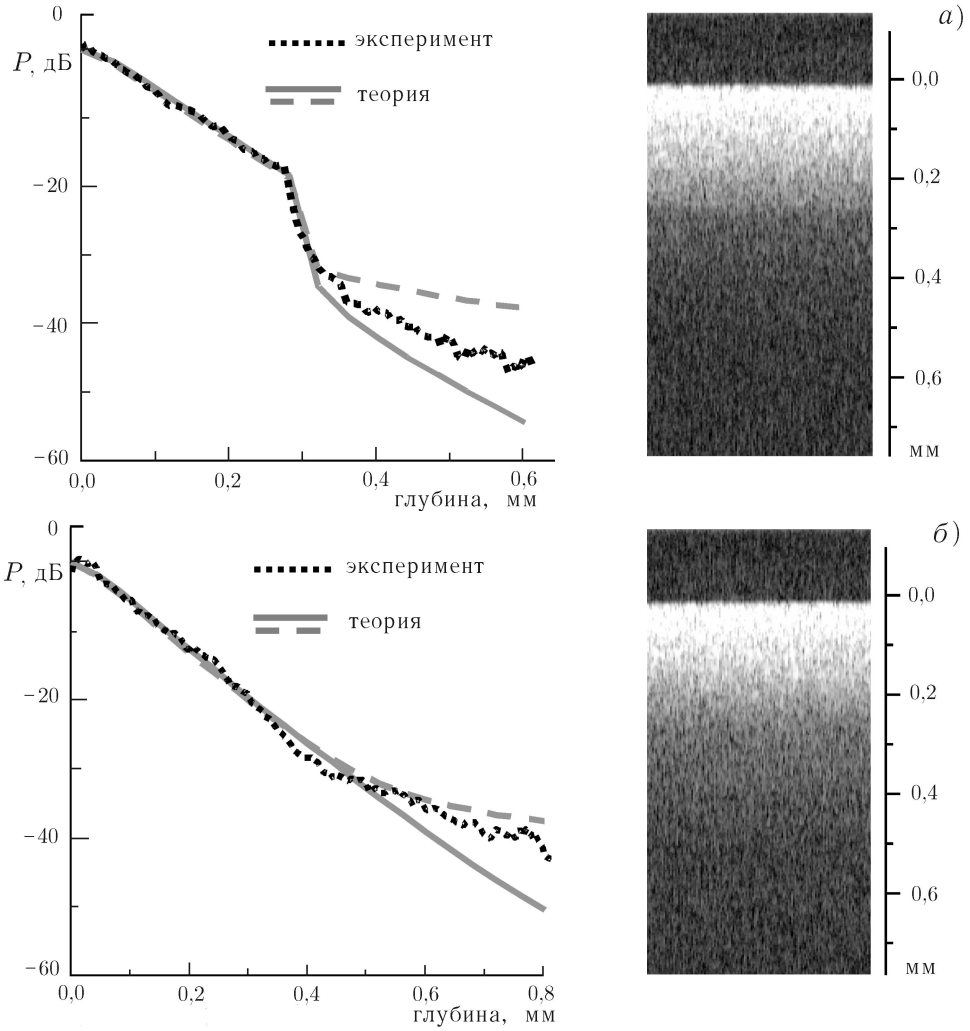

Рис. 9. Экспериментальные и теоретические кривые спадания томографического сигнала при наблюдении слоя молочной эмульсии с параметрами $b = 7{,}6$ мм$^{-1}$; $p = 1{,}2$; $\gamma_1^2 = 0{,}46$. Рис. 9*а* — толщина слоя равна 300 мкм, рис. 9*б* — толщина слоя превышает глубину сканирования. В правой части рисунков показаны томограммы слоёв. Параметры пучка подсветки $z_{\rm f} = 650$ мкм; $r_0 = 9$ мкм

На рис. 9*б* приведены аналогичные данные для слоя большой толщины, превышающей максимальную глубину сканирования.

Как видно из рис. 9*б*, характер спадания сигнала, отражённого очень толстым слоем среды, достаточно хорошо согласуется с «диффузионной» моделью (формулы (51), (52)). Сигнал послесвечения слоя среды с толщиной 0,3 мм описывается формулами диффузионного приближения и приближения, учитывающего первые три кратности рассеяния, примерно с одинаковой погрешностью разного знака.

Работа выполнена при поддержке Совета при Президенте Российской Федерации по государственной поддержке ведущих научных школ (грант № НШ–1637.2003.2) и Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 01–02–17721, 03–02–06420, 02–05–64975).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Tuchin V. V. // SPIE. Washington, USA, 2000. Article no. 98227-0010.

2. Sergeev A. M., Dolin L. S., Reitze D. H. // Optics and Photonics News. 2001. No. 7. P. 28.
3. Долин Л. С., Левин И. М. Справочник по теории подводного видения. Л.: Гидрометеоиздат, 1991. 230 с.
4. Bouma B. E., Tearney G. J. Handbook of Optical Coherence Tomography. New York: Marcel Dekker, 2002.
5. Schmitt J. M. // IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics. 1999. V. 5, No. 4. P. 1 205.
6. Геликонов В. М., Геликонов Г. В., Гладкова Н. Д. и др. // Письма в ЖЭТФ. 1995. Т. 61, № 2. С. 149.
7. Долин Л. С. // Изв. вузов. Радиофизика. 1998. Т. 41, № 10. С. 1 258.
8. Arridge S. R. // Inverse Problems. 1999. V. 15, No. 2. P. R41.
9. Arridge S. R., Hebden J. C. // Physics in Medicine and Biology. 1997. V. 42, No. 5. P. 841.
10. Кравцов Ю. А., Саичев А. И. // УФН. 1982. Т. 137, вып. 3. С. 501.

Институт прикладной физики РАН,
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию
4 апреля 2003 г.

MULTIPLE BACKSCATTERING EFFECTS IN OPTICAL COHERENCE TOMOGRAPHY IMAGES OF LAYERED TURBID MEDIA

G. V. Gelikonov, L. S. Dolin, E. A. Sergeeva, and I. V. Turchin

We study the influence of multiple backscattering on optical coherence tomography (OCT) or pulsed-sounding images of layered turbid media. A method for calculating the signal of various backscattering orders is proposed. The retarding effects of tomography-signal dropping are analyzed. The contrast attenuation of a layered-medium image due to multiple backscattering is examined. The blurring effect of the image of a scattering-layer back boundary caused by a delay of multiply scattered photons compared with single scattered ones is studied theoretically and experimentally using an OCT device.