

Содержание

Жарова Н. А., Литвак А. Г., Миронов В. А. Самовоздействие сверхкороткого лазерного импульса в среде с нормальной дисперсией групповой скорости	331
Кузнецов Е. А. Интегральные критерии волновых коллапсов	342
Гильденбург В. Б., Жарова Н. А., Позднякова В. И. Нелинейная динамика волновых пучков и пакетов в ионизируемой среде	360
Руденко О. В. Самовоздействие пучков волн, содержащих ударные фронты	377
Доброхотов В. В., Марков Г. А. Самофокусировка и каналирование волновых пучков в условиях ионизационной нелинейности в неоднородном магнитном поле	392
Лобанов В. Е., Сухоруков А. П. Гибридные параметрические солитоны в нелинейных фотонных кристаллах	407
Карташов Д. В., Ким А. В., Скобелев С. А. Нелинейная динамика волновых полей в нерезонансных средах: от солитонов огибающей к видеосолитонам	415
Громов Е. М., Тютин В. В. Короткие солитоны огибающей. Изотропные и анизотропные среды	429
Бабин А. А., Еремин В. И., Кирсанов А. В. О восстановлении амплитудных и фазовых характеристик сверхкороткого волнового пакета с помощью автокорреляционных методов	443
Заборонкова Т. М., Кудрин А. В., Лях М. Ю. Возбуждение несимметричных волн заданными источниками в магнитоактивной плазме при наличии цилиндрического плазменного канала	452
Богомолов Я. Л., Петелин М. И., Тай М. Л., Юнаковский А. Д. О синтезе брэгговских рефлекторов для электронных ускорительных структур с квазиоптическим вводом излучения	472
Власов С. Н., Копосова Е. В. Дифракция на гофрированной границе сред. Полная трансформация падающей волны в дифракционный максимум	482

УДК 533.87

САМОВОЗДЕЙСТВИЕ СВЕРХКОРОТКОГО ЛАЗЕРНОГО ИМПУЛЬСА В СРЕДЕ С НОРМАЛЬНОЙ ДИСПЕРСИЕЙ ГРУППОВОЙ СКОРОСТИ

Н. А. Жарова, А. Г. Литвак, В. А. Миронов

Приведены результаты численного и аналитического исследования решений трёхмерного нелинейного уравнения Шрёдингера с гиперболическим пространственным оператором. Отдельно рассмотрена эволюция системы для двух типов начальных распределений поля: гауссового и трубчатого. Исследовано влияние нелинейной дисперсии на процесс деления волновых пакетов при их самосжатии к оси системы. Показано, что в случае гауссовых волновых пакетов в широкой области изменения параметра нелинейной дисперсии имеет место дополнительная фокусировка, которая приводит к заметному увеличению амплитуды одного из образующихся при делении импульсов. Для распределений специальной формы следует также отметить образование движущихся неоднородностей и возбуждение вторичных волновых полей, характерных для гиперболической системы.

ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что динамика пространственно-ограниченных квазимонохроматических волновых пакетов в слабодиспергирующих нелинейных средах описывается эволюционным уравнением

$$i \frac{\partial \psi}{\partial z} + \Delta_{\perp} \psi - \alpha \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} + |\psi|^2 \psi = 0. \quad (1)$$

Здесь ψ — комплексная нормированная огибающая электромагнитного поля волны $E = E_{\text{NL}} \psi(z, x, y, \tau) \exp(i\omega t - ikz_e)$, распространяющейся вдоль оси z с групповой скоростью $v_{\text{gr}} = (k'_{\omega})^{-1}$, $\alpha = \text{sign}[(v_{\text{gr}})'_{\omega}]$ определяется знаком дисперсии групповой скорости, E_{NL} — характерное нелинейное поле, $\tau = (t - z_e/v_{\text{gr}}) k^{3/2} c^2 / (\omega |(v_{\text{gr}})'_{\omega}|^{1/2})$, безразмерные эволюционная переменная z и поперечные координаты x, y связаны с соответствующими размерными величинами $z_e, x_{\text{tr}}, y_{\text{tr}}$ соотношениями $z = kz_e/2, x = kx_{\text{tr}}, y = ky_{\text{tr}}, k$ — волновое число, c — скорость света в вакууме, $\Delta_{\perp} = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$.

Это уравнение было впервые сформулировано в работе [1] для пакетов электромагнитных волн, но в реальности оно применимо для описания динамики нелинейных волн различной природы. Так, в случае двумерного волнового пакета ($\Delta_{\perp} = \partial^2/\partial x^2$) оно определяет динамику нелинейных волн на поверхности воды [2] и пространственную эволюцию волновых пакетов в замагниченной плазме в области параметров, соответствующих седловым участкам на поверхности показателя преломления [3, 4]. Исследование образования локализованных волн аномально большой амплитуды на глубокой воде (волн-убийц), по существу, тоже проводится в рамках двумерного уравнения (1) [5, 6]. Это же уравнение описывает физический (электрон-позитронный) вакуум [7]. В последнее время трёхмерное уравнение (1) активно используется для изучения особенностей самовоздействия ультракоротких лазерных импульсов в конденсированных средах и газах, обладающих нормальной дисперсией групповой скорости $((v_{\text{gr}})'_{\omega} > 0)$ [8–14]. В этом случае существенную роль играет конкуренция процессов нелинейной рефракции (самофокусировки) пакета в поперечном направлении и продольного дисперсионного расплывания. В дальнейшем мы будем интересоваться именно случаем нормальной дисперсии, т. е. будем полагать в (1) $\alpha = 1$.

Н. А. Жарова, А. Г. Литвак, В. А. Миронов

Особенность самовоздействия волн в рамках (1) проявляется уже на стадии модуляционной неустойчивости плоской волны. Инкремент такой неустойчивости определяется выражением

$$\Gamma^2 = (\kappa_{\perp}^2 - \kappa^2) [2A_0^2 - (\kappa_{\perp}^2 - \kappa^2)], \quad (2)$$

где A_0 — амплитуда плоской волны, $\kappa_{\perp}$ и κ — поперечное и продольное волновые числа возмущения. Величина Γ достигает максимума не на сфере в пространстве волновых чисел, как в случае нелинейного уравнения Шрёдингера (НУШ) с эллиптическим пространственным оператором, а на гиперболической поверхности

$$\kappa_{\perp}^2 - \kappa^2 = A_0^2, \quad (3)$$

т. е. в рамках уравнения (1) неустойчивость возможна для сколь угодно малых масштабов ($L \approx \approx 1/k$), лишь бы характерные продольный ($L_{\parallel} \approx 1/\kappa$) и поперечный ($L_{\perp} \approx 1/\kappa_{\perp}$) масштабы неоднородности удовлетворяли соотношению (3). Наиболее «крупномасштабной» является самофокусировочная неустойчивость ($\kappa = 0$, $\kappa_{\perp} = A_0$).

Как и стандартное НУШ с эллиптическим оператором, уравнение (1) имеет ряд интегралов, среди которых наиболее важными являются интеграл энергии

$$I = \int |\psi|^2 \mathbf{dr} \, d\tau \quad (4)$$

и гамильтониан

$$H = \int (|\nabla_{\perp} \psi|^2 - |\psi'_{\tau}|^2 - |\psi|^4/2) \mathbf{dr} \, d\tau. \quad (5)$$

Гамильтониан H системы отражает особенности самовоздействия волновых полей в рамках уравнения (1), связанные с конкуренцией процессов в продольном и поперечном направлениях. Из (5) видно существование специфического для рассматриваемого гиперболического НУШ класса распределений поля, для которых дифракционные и дисперсионные процессы компенсируют друг друга ($|\nabla_{\perp} \psi|^2 \approx |\psi'_{\tau}|^2$). Очевидно, что указанные распределения поля являются аттракторами для распределений, локализованных вблизи гипербол (гиперболоидов), поскольку роль нелинейности для них возрастает. В силу структурных особенностей этих распределений трудно ожидать, что такие режимы могут быть реализованы из начальных распределений гауссовой формы. Этим ситуация заметно отличается от поведения системы в рамках стандартного (эллиптического) НУШ. В уравнениях параболического типа, к которому относится НУШ с эллиптическим пространственным оператором, на начальном этапе эволюции поля происходит симметризация распределения волнового пакета. В результате имеет место такая унификация начальных условий, что дальнейшая эволюция системы, по существу, «помнит» лишь интеграл энергии (4). В рассматриваемом нами случае (1) НУШ с гиперболическим пространственным оператором динамика системы оказывается существенным образом зависящей от типа начального распределения.

Предметом данной статьи является анализ общей динамики трёхмерных волновых пакетов в среде с нормальной дисперсией групповой скорости, описываемой уравнением (1) безотносительно к перечисленным выше физическим процессам. Наряду с обзором ранее опубликованных работ [8, 9, 12–14], статья содержит новые результаты, связанные с учётом зависимости групповой скорости волнового пакета от амплитуды, что может быть существенно для достаточно коротких (в масштабе длины волны) пакетов. Рассмотрена долговременная эволюция системы для начальных распределений гауссовой формы (раздел 1) и распределений специального вида, для которых «гиперболичность» исходного уравнения (1) проявляется наиболее заметно (раздел 2). Развитие неустойчивости (2) в такой системе в ряде случаев сопровождается возбуждением интенсивных мелкомасштабных неоднородностей, для описания которых необходимо учитывать

дисперсию нелинейности. Постановка задачи и соответствующее обобщение НУШ приведены в разделе 1.

1. САМОВОЗДЕЙСТВИЕ ВОЛНОВЫХ ПАКЕТОВ ГАУССОВОЙ ФОРМЫ

1. Качественный анализ самовоздействия волновых пакетов гауссовой формы в рамках безабберационного приближения, в котором обычно предполагается, что форма пакета остаётся гауссовой, а фазовый фронт является параболическим, показал [15–17], что дисперсионное расплывание вдоль z не предотвращает схлопывание пакета в поперечном направлении. Существует критическая энергия пакета, при превышении которой происходит квазиклассический волновой коллапс [8–10] с образованием сингулярности. Однако при численном решении исходного уравнения (1) динамика пакета не выходит в режим коллапса из-за развития неустойчивости типа (2), приводящей к дроблению структуры волнового поля в продольном направлении [8, 9, 12].

На рис. 1 приведены результаты численного исследования самовоздействия аксиально-симметричного трёхмерного волнового пакета с начальной гауссовой формой

$$\psi(r, \tau, z = 0) = \psi_0 \exp[-r^2/(2a_0^2) - \tau^2/(2b_0^2)],$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$; $\psi_0 = 2,4$; $a_0 = 1$; $b_0 = 4$. Динамика структуры линий уровня $|\psi(r, \tau)| = \text{const}$ показывает, что на начальном этапе происходит преимущественное схлопывание центральной части пакета в поперечном направлении. Однако сжатие это неравномерное по τ : в центре, где амплитуда поля больше, процесс происходит быстрее, чем на периферии. В результате в центре пакета образуется перетяжка. С этого момента начинается эволюция распределения главным образом в продольном направлении. Перетяжка рвётся, энергия быстро выбрасывается из центра пакета к его краям. Пакет делится на две части, которые распространяются в противоположных по τ направлениях. Заметим, что с увеличением начальной амплитуды ψ_0 генерируемые в этом процессе импульсы приобретают гофрированную форму [12]. Дальнейшее дробление, возможно, предотвращается движением сгустка.

2. Образование мелкомасштабных интенсивных вторичных структур приводит к необходимости учёта дополнительных факторов (зависимости групповой скорости волнового пакета от амплитуды, дисперсии более высокого порядка и др.). Далее мы ограничимся исследованием влияния нелинейной дисперсии, выражающейся в зависимости групповой скорости от амплитуды поля. В результате соответствующего обобщения (1) приходим к уравнению

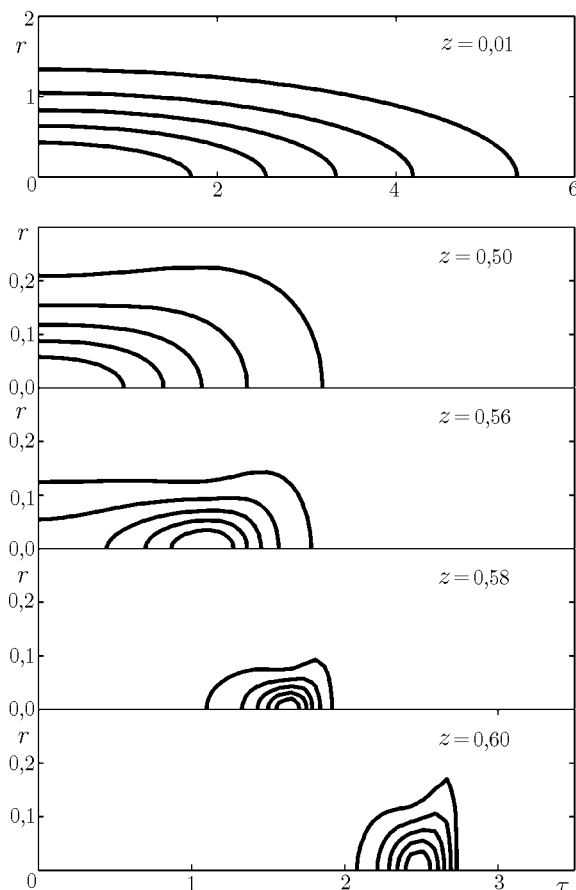


Рис. 1. Структура изолиний распределения амплитуды поля в последовательные моменты «времени» z в задаче без нелинейной поправки к групповой скорости для начального распределения вида $\psi(r, \tau, z = 0) = 2,4 \exp(-r^2/2 - \tau^2/32)$

$$i \frac{\partial \psi}{\partial z} + i\beta |\psi|^2 \frac{\partial \psi}{\partial \tau} + \Delta_{\perp} \psi - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} + |\psi|^2 \psi = 0. \quad (6)$$

Такое уравнение получается естественным образом, например, в нелинейной оптике при переходе к медленно меняющейся огибающей для описания сверхкоротких лазерных импульсов в среде с квадратичной дисперсией. Параметр β , характеризующий вклад нелинейной дисперсии, определяется в этом случае выражением $\beta = \sqrt{\epsilon} [\partial(\omega^2 \epsilon) / \partial \omega] / [4\omega^{3/2} (\partial v_{\text{gr}} / \partial \omega)^{1/2}]$, где $\epsilon(\omega)$ — диэлектрическая проницаемость среды. Видно, что при уменьшении дисперсии среды $(\partial v_{\text{gr}} / \partial \omega \rightarrow 0)$ влияние слагаемого с β в (6) может быть определяющим.

В теории нелинейных волн с этим слагаемым обычно связывают деформацию профиля волнового пакета и образование ударной волны огибающей [18]. Ясно, что в случае $\Delta_{\perp} = \partial^2 / \partial x^2$ линейная (квадратичная) дисперсия должна стабилизировать «опрокидывание» огибающей и приводить к решениям солитонного типа [19, 20]. На качественном уровне механизм стабилизации дробления трёхмерного волнового пакета состоит в следующем. Для скорости центра масс волнового пакета [15] в продольном направлении $v_{\tau} = \int \tau |\psi|^2 d\tau dr / \int |\psi|^2 d\tau dr$ из уравнения (6) нетрудно найти

$$v_{\tau} = \int [\beta |\psi|^4 / 2 + i(\psi^* \psi'_{\tau} - \psi \psi'^{*}_{\tau})] d\tau dr / \int |\psi|^2 d\tau dr = \text{const}. \quad (7)$$

Это означает, что волновой пакет с плоским фазовым фронтом по r и отсутствием первоначальной фазовой модуляции по τ движется с постоянной скоростью

$$v_{\tau} = \frac{\beta}{2} \int |\psi_0|^4 d\tau dr / \int |\psi_0|^2 d\tau dr. \quad (8)$$

Отсюда можно сделать следующую оценку. Нелинейная дисперсия играет заметную роль, если за «время» поперечного схлопывания $z_s \approx a_0^2 / (2\sqrt{b_0/P})$, где a_0 — начальный поперечный размер пучка, $P = \psi_0^2 a_0^2 b_0$ — полная энергия пакета, центр масс волнового пакета сместится на характерный продольный размер b_0 . Это возможно для импульсов с длительностью

$$b_0 < (\beta \pi P)^{2/3}. \quad (9)$$

Проведённые численные расчёты подтверждают сделанные выводы (см. рис. 2). Для волнового пакета с продольным размером $b_0 = 4$ и энергией $P = 10$ стабилизация «коллапса» происходит при $\beta = 0,3$ (см. рис. 3). Нелинейная дисперсия ($\beta \neq 0$) приводит к подавлению неустойчивости дробления и формированию одного максимума поля с амплитудой меньшей, чем при $\beta = 0$.

Асимметрия в динамике эволюции системы является довольно очевидным результатом. Менее тривиальной представляется возможность генерации в этом процессе более коротких и интенсивных импульсов. Исследование динамики поля с начальным гауссовым распределением показало, что зависимость максимальной амплитуды поля от β не является монотонной. Для рассматриваемых параметров волнового пакета в интервале $0 < \beta < 0,3$ имеет место дополнительная фокусировка волнового поля, приводящая к росту максимальной амплитуды с увеличением β . Определение β , при котором амплитуда поля достигает абсолютного максимума, представляет собой довольно сложную задачу, поскольку уже при $\beta = 0,01$ (см. рис. 3) масштаб локализации поля в области максимума оказывается порядка шага сетки.

В заключение этого раздела отметим, что эффект дополнительной фокусировки поля, связанный с нелинейной дисперсией, довольно подробно исследовался в случае распространения импульсов в среде с аномальной дисперсией [19, 20]. Этот результат может быть перенесён и на среду с нормальной дисперсией, но для его реализации необходимы более сильные поля. Поперечная

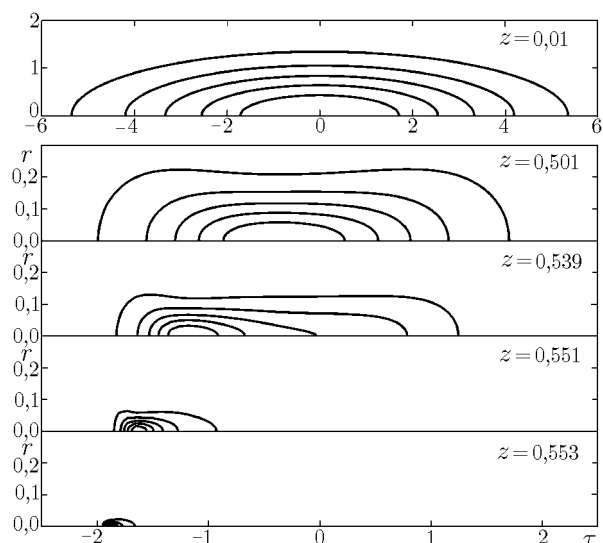


Рис. 2. Структура изолиний распределения амплитуды поля в последовательные моменты «времени» в задаче с нелинейной поправкой к групповой скорости (коэффициент нелинейной дисперсии $\beta = 0,03$) для начального распределения вида $\psi(r, \tau, z = 0) = 2,4 \exp(-r^2/2 - \tau^2/32)$

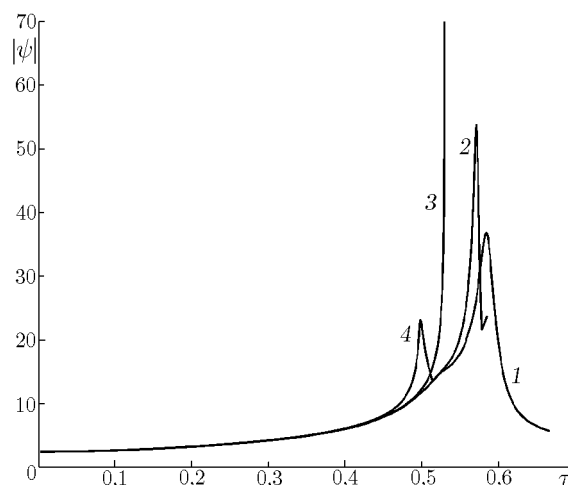


Рис. 3. Зависимость максимального значения поля от параметра нелинейной дисперсии: $\beta = 0$ (кривая 1), $\beta = 0,01$ (кривая 2), $\beta = 0,1$ (кривая 3) и $\beta = 0,3$ (кривая 4)

самофокусировка неодномерного волнового пакета способствует проявлению рассматриваемого эффекта в более слабых полях.

2. САМОВОЗДЕЙСТВИЕ ВОЛНОВЫХ ПАКЕТОВ ПРИ СПЕЦИАЛЬНОМ ТИПЕ НАЧАЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

1. Для иллюстрации специфических особенностей самовоздействия волнового пакета, связанных с гиперболическим видом пространственного оператора в (1), рассмотрим аксиально-симметричные решения уравнения (1) вида $\psi(z, \sqrt{r^2 - \tau^2})$. Эволюцию распределений, локализованных вблизи гиперboloидов $\eta^2 = r^2 - \tau^2$, можно описывать уравнением

$$i \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta^2 \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) + |\psi|^2 \psi = 0. \quad (10)$$

Это уравнение хорошо известно в теории волновых коллапсов. Оно описывает «сферически симметричный» коллапс [15, 21, 22]. В отличие от режима самофокусировки аксиально-симметричных пучков возникающая в решении уравнения (10) сингулярность является протяжённой по z , т. е. распределённой. В рассматриваемой задаче это означает, что локализованное в окрестности гипербол поле эволюционирует с образованием особенности вблизи поверхности конуса $|\tau| = r$. Внутри конуса ($|\tau| > r$) динамика соответствующего автомодельного распределения поля $\psi = \psi(z, \sqrt{\tau^2 - r^2})$ описывается уравнением вида (10), но с дефокусирующей нелинейностью, т. е. со знаком минус перед нелинейным членом. Таким образом, сингулярность формируется вблизи границы, где нелинейность меняет знак. Следует специально отметить следующую особенность уравнения (10): исходное уравнение (1) для колоколообразных распределений описывает процесс двумерной самофокусировки в поперечном направлении, ослабленный дефокусировкой в

продольном направлении. Напротив, уравнение (10) свидетельствует о возможности более быстрого «беспорогового» коллапса при сохранении темпа дефокусировки вдоль гипербола на прежнем уровне.

Для исследования эволюции начальных распределений, локализованных вблизи гиперболоидов $\eta^2 = r^2 - \tau^2$, удобно перейти к новым переменным

$$\zeta = (r^2 - \tau^2)/4, \quad \tau = \tau. \quad (11)$$

Такое преобразование позволяет исследовать эволюцию чётного по τ распределения волнового поля как в области с фокусирующей нелинейностью (вне конуса, $|\tau| < r$ или $\zeta > 0$), так и в «дефокусирующей» области, где дисперсия преобладает над дифракцией (внутри конуса, $|\tau| < r$ или $\zeta < 0$). В безабберационном приближении [15–17] для гауссовых распределений волнового поля

$$\psi(\zeta, \tau, z) = \frac{\psi_0}{\sqrt{ab}} \exp \left[-\frac{(\zeta - \rho)^2}{2a^2} - \frac{\tau^2}{2b^2} + i\phi(\zeta - \rho)^2 \right] \quad (12)$$

можно найти уравнения (см. подробнее [13, 14]), которые описывают изменение характерного размера области локализации волнового поля $a(z)$ и величины $\rho(z) = \int \zeta |u|^2 d\zeta / I$ в процессе эволюции системы. Параметр $\rho(z)$ представляет собой, по сути, центр масс распределения (12). Вблизи границы, на которой дисперсия меняет знак ($\zeta \approx 0$), асимптотическое решение этих уравнений для случая отрицательного гамильтониана H имеет вид

$$\rho \approx 2(\rho_0 |H|/I)^{1/2} (z_0 - z), \quad (13)$$

$$a \approx \frac{1}{8} \left(\frac{u_0^2}{b} \right)^{1/2} \left(\frac{\rho_0}{a_0} \right)^{1/6} (z_0 - z), \quad (14)$$

где ρ_0 — начальное положение центра масс, значение эволюционной координаты $z_0 = (\rho_0 I / |H|)^{1/2}$ соответствует пересечению центром масс границы $\zeta = 0$. Это означает, что по мере приближения центра масс к границе смены режима самовоздействия (фокусировки на дефокусировку) амплитуда поля обращается в бесконечность по закону

$$\psi(\zeta \rightarrow 0, z \rightarrow z_0) \propto (z_0 - z)^{-1/2}. \quad (15)$$

Соответствующее автомодельное решение с таким же характером особенности построено в [13].

2. Описанная выше картина самовоздействия волновых пакетов подтверждается численным исследованием динамики начальных гауссовых распределений поля, локализованных вблизи гиперболоидов $r^2 - \tau^2 = a_0^2$, а также более простых трубчатых распределений, локализованных вблизи $r^2 = a_0^2$. Оказывается, что в процессе эволюции последние приобретают подковообразную форму (12) и в дальнейшем ведут себя совершенно аналогичным образом.

Для стабилизации коллапса и исследования дальнейшей эволюции системы использованы ставшие уже общепринятыми модельные способы регуляризации исходного уравнения (1). Они связаны с учётом насыщения нелинейности, или нелинейного поглощения излучения в сильных полях (см. подробнее в [13]). Здесь мы рассмотрим эволюцию системы при учёте нелинейной диссипации типа многофотонного поглощения:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} + |\psi|^2 \psi + i\gamma |\psi|^8 \psi = 0, \quad (16)$$

где γ — параметр нелинейной диссипации. На основе уравнения (16) рассмотрим эволюцию начального распределения трубчатой формы

$$\psi = \psi_0 \frac{r^4}{a_r^5} \exp \left[-\frac{r^2}{2a_r^2} - \frac{\tau^2}{2a_\tau^2} \right]. \quad (17)$$

Можно ожидать, что в неоднородном (по τ) распределении типа (17) с полной мощностью, превышающей критическую, центральная часть волнового пакета ($\tau \approx 0$) будет фокусироваться к оси $r = 0$ быстрее, чем периферийная ($\tau \sim a_\tau$). В результате естественным образом сформируется распределение подковообразной формы (12), для которого аналитически показана возможность коллапса.

Результаты численного расчёта для параметров $a_r = 2$, $a_\tau = 12$ представлены на рис. 4. Видно, что довольно продолжительное время занимает самофокусировка волнового пучка, которая происходит без изменения характерного радиуса трубчатого распределения (17). На следующем этапе следует отметить формирование подковообразной структуры. Этот процесс сопровождается развитием неустойчивости дробления. Однако в рассматриваемом нами случае, в отличие от случая двумерного волнового пакета [23, 24], она не играет заметной роли и стабилизируется смещением подковообразного распределения к оси системы. В процессе схлопывания к центру импульс дробится пополам. Максимальная амплитуда поля в фокальной области остаётся практически постоянной в течение довольно длительной эволюции волнового поля [13]. Области сильного поля распространяются на расстояния, существенно превышающие продольную длину импульса, без заметного изменения пространственной структуры. Нелинейное поглощение энергии пакета при прохождении через область коллапса достигает 70 % [13].

В целом численное моделирование показывает, что расплывание подковообразного распределения поля в продольном направлении практически не сказывается на динамике образования сингулярности. Однако очевидно, что в режиме схлопывания к центру периферийная часть волнового пакета достигнет оси системы позже его центральной части, что способствует поддержанию достаточно большого волнового поля в течение всего времени взаимодействия. В этом смысле рассмотренный тип коллапса следует отнести к распределённым.

3. Далее перейдём к исследованию особенностей эволюции трубчатых волновых пучков (15) при наличии нелинейной дисперсии. Для этой цели воспользуемся следующим уравнением:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial z} + i\beta |\psi|^2 \frac{\partial \psi}{\partial \tau} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} + i\gamma |\psi|^8 \psi = 0. \quad (18)$$

Численное исследование показывает, что во всём рассматриваемом нами диапазоне $0 < \beta \leq 3$ начальная стадия процесса проходит так же, как при $\beta = 0$: трубчатые волновые пакеты сужаются в поперечном направлении (см. рис. 5 и 6). С ростом β темп сжатия уменьшается. В остальном режимы, представленные на рис. 5 и 6, заметно различаются. При малых β ($\beta < 0,5$), как и при $\beta = 0$, формируется подковообразное распределение волнового поля. С ростом β процесс схлопывания волнового пакета к оси системы и формирования особенности замедляется. При дальнейшем увеличении β ($\beta > 0,5$) процесс схлопывания волнового пакета замедляется настолько, что преобладающим становится смещение центра масс распределения поля к заднему фронту импульса (см. рис. 6). В результате возбуждаются довольно сильные динамические неоднородности в распределении поля. Как уже говорилось, для эволюции одномерных импульсов уравнение (18) при $\gamma = 0$ имеет решение в виде движущегося солитона [19, 20]. В рассматриваемой неодномерной задаче с гиперболическим пространственным оператором движущаяся локализованная неоднородность может возбуждать волновые поля на характеристиках. Для анализа структуры

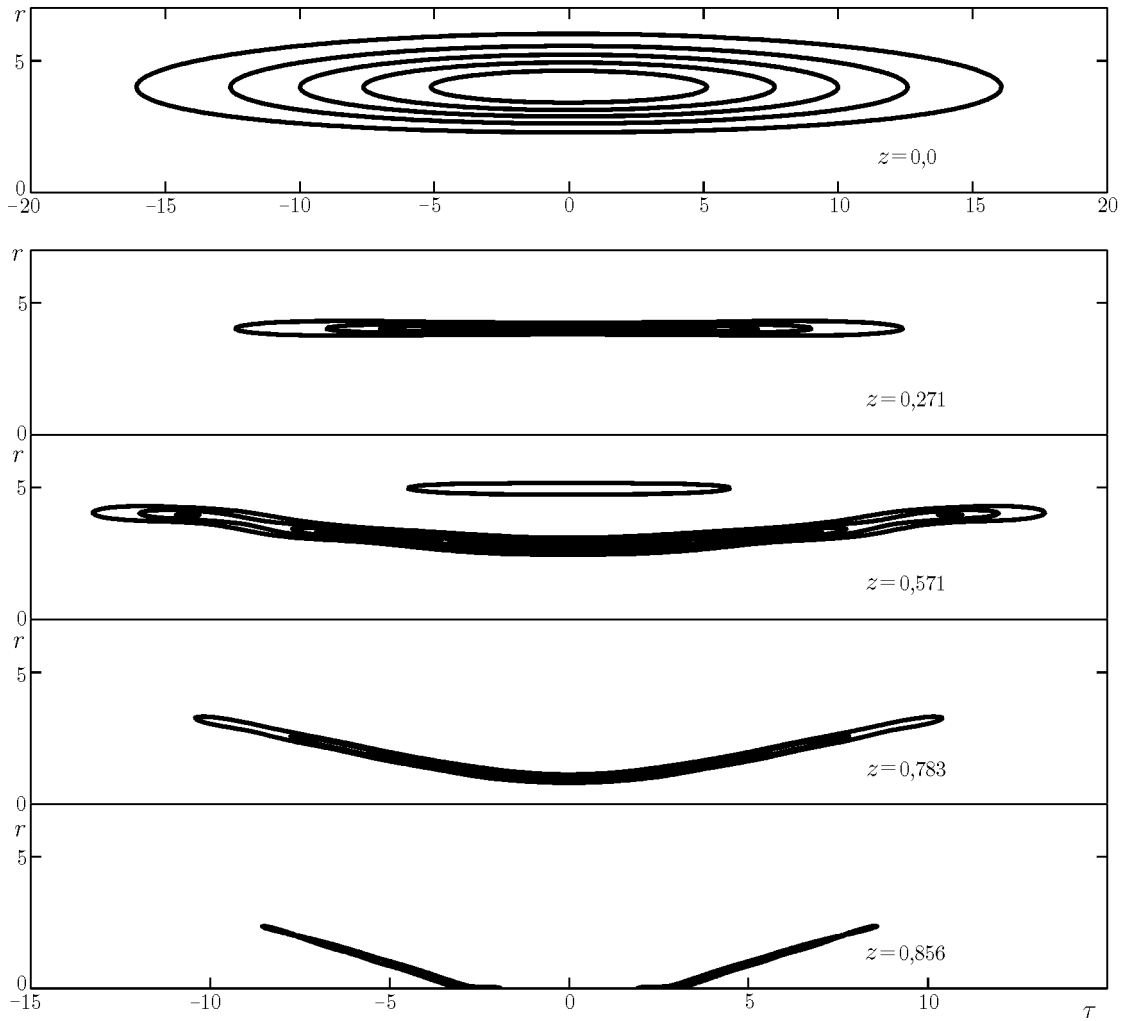


Рис. 4. Структура изолиний распределения амплитуды поля в последовательные моменты «времени» в задаче без нелинейной поправки к групповой скорости для начального распределения вида $\psi(r, \tau, z = 0) = 0,1r^4 \exp(-r^2/8 - \tau^2/288)$. Особенность на оси $r = 0$ стабилизируется здесь путём учёта диссипативного члена $\gamma |\psi|^8$ с параметром $\gamma = 2 \cdot 10^{-8}$

характеристик обратимся к наиболее простому уравнению соответствующего типа:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} \approx f(x) \delta(\tau - Vz), \quad (19)$$

которое описывает поля вне локализованного источника (здесь $\delta(\tau)$ — дельта-функция Дирака). В системе координат, движущейся со скоростью V , (19) преобразуется к виду

$$-iV \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta^2} = f(x) \delta(\zeta), \quad (20)$$

где $\zeta = Vz - \tau$. Переходя к новой функции $\psi = F \exp(iq\zeta)$, это уравнение можно преобразовать к хорошо известному в теории волновых процессов уравнению

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial \zeta^2} - q^2 F = f(x) \delta(\zeta) \exp(-iq\zeta), \quad (21)$$

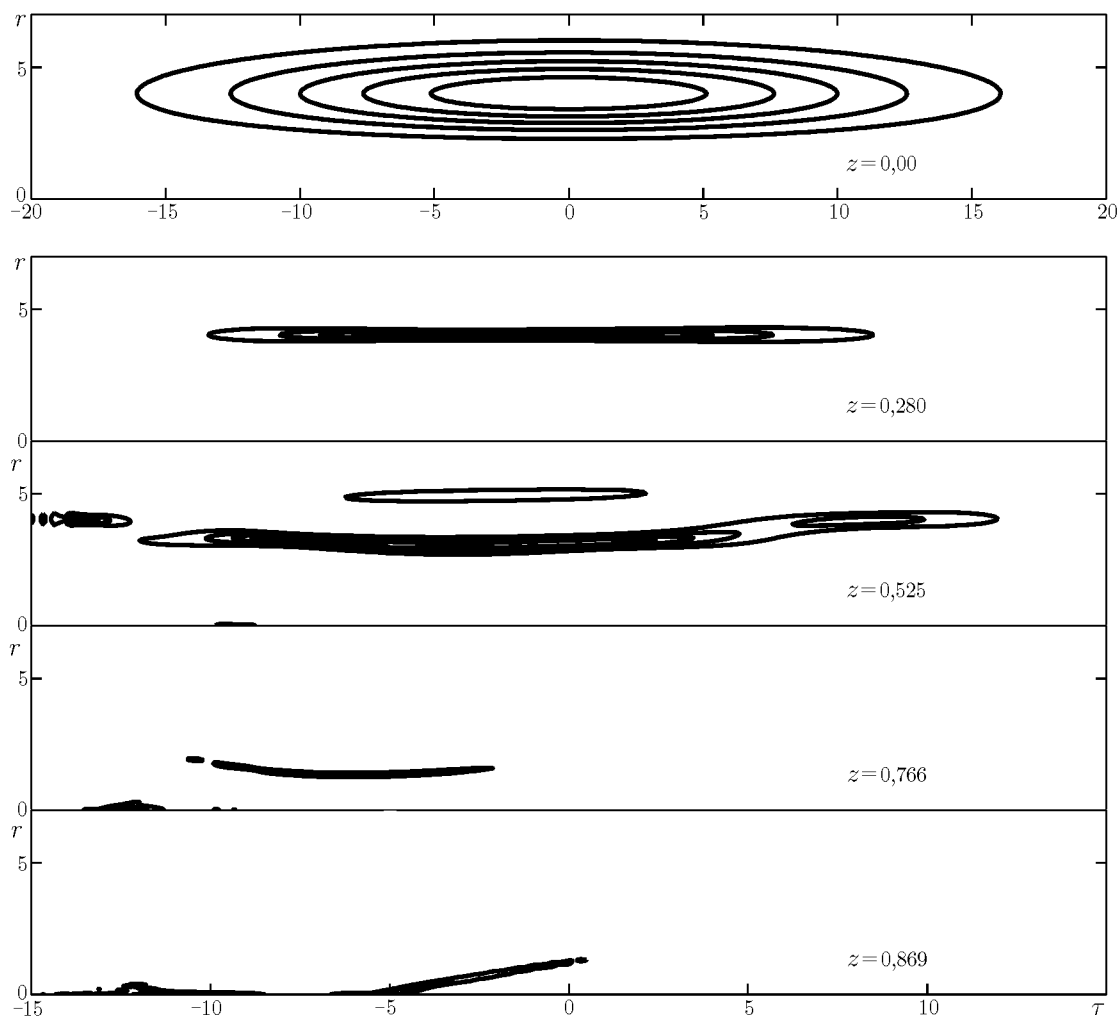


Рис. 5. Последовательные моменты эволюции начального распределения поля в виде «полого» импульса того же вида и с учётом такой же нелинейной диссипации, что и на рис. 4. Параметр нелинейной дисперсии $\beta = 0,3$ здесь оказывается достаточно велик, чтобы придать заметную асимметрию распределению поля

где $q = -V/2$, которое описывает возбуждение волн в среде с дисперсией. Вне локализованного источника решение этого уравнения (функция Римана) имеет вид

$$F \propto J_0(2q \sqrt{\zeta^2 - x^2}) \quad (22)$$

при $\zeta > |x|$, где $J_0(x)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка, и экспоненциально спадает в области $\zeta < |x|$. Возбуждаемые таким образом волновые структуры имеют максимальную амплитуду на характеристике $\zeta \approx |x|$ и осциллируют в области $\zeta > |x|$. Для $\beta > 0,7$ они отчётливо наблюдаются при численном исследовании (см. рис. 6). На рис. 6 видно усиление волнового поля на характеристиках $\zeta = |x|$. В целом структура волнового поля имеет вид ударной волны в среде с дисперсией. В силу аксиальной симметрии задачи своего максимального значения поле достигает в некоторый момент $z = 0,28$ на оси системы в месте пересечения характеристик. Осцилляции волнового поля показаны на рис. 6б в увеличенном масштабе. Отличительной особенностью этого режима самовоздействия является генерация очень короткого электромагнитного импульса на оси системы в результате «аксиального» усиления поля.

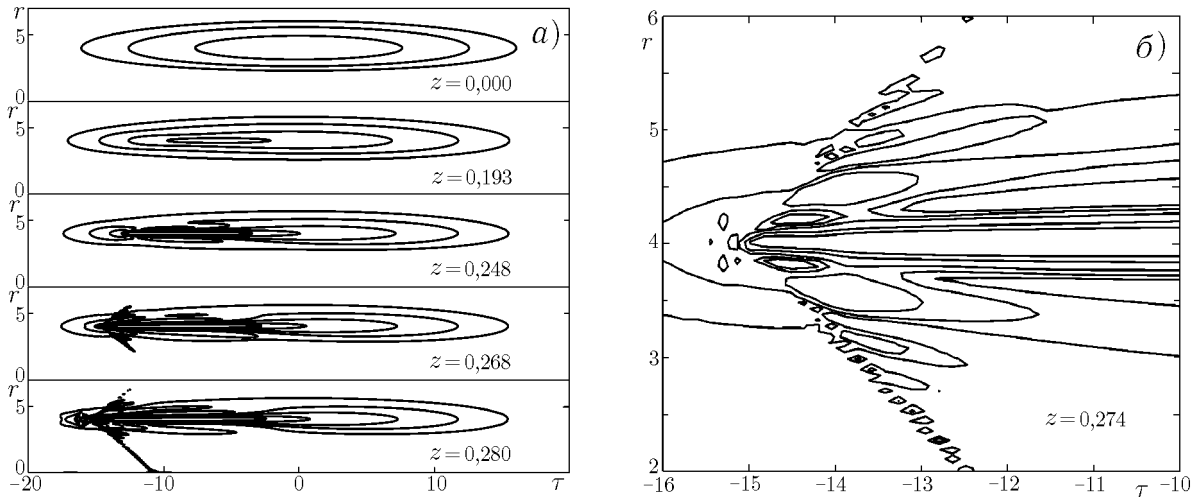


Рис. 6. Последовательные моменты эволюции начального распределения поля в виде «полого» импульса (см. подпись к рис. 4) при параметре нелинейной дисперсии $\beta = 2$. Смещение максимума распределения поля к заднему фронту импульса сопровождается излучением энергии преимущественно в направлении характеристик. На рис. 6б, где показаны в увеличенном масштабе изолинии вблизи характеристик, отчётливо видна осциллирующая структура поля

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изложенные результаты свидетельствуют о том, что динамика самовоздействия трёхмерных волновых пакетов в рамках НУШ с гиперболическим пространственным оператором существенно зависит от типа начального распределения поля в пакете. В частности, для начальных распределений, отражающих особенности гиперболического пространственного оператора НУШ, имеет место коллапс волнового поля вблизи оси системы. При учёте нелинейного (многофотонного) поглощения, стабилизирующего неограниченное возрастание поля, эволюция такого распределения заканчивается так же, как и для начальных условий гауссова типа: дефокусирующий характер нелинейности в продольном направлении приводит в конечном счёте к делению оставшейся (непоглощённой при коллапсе) части волнового пакета на два сверхкоротких импульса. На этом этапе существенную роль играет нелинейная дисперсия среды. В случае колоколообразных начальных распределений проявляется эффект дополнительной фокусировки, т. е. происходит заметное увеличение амплитуды одного из вторичных импульсов по сравнению со случаем отсутствия нелинейной дисперсии. Этот эффект может оказаться существенным для генерации сверхкоротких лазерных импульсов. В случае начальных распределений трубчатого типа, эволюция которых сопровождается коллапсом, нелинейная дисперсия приводит к образованию движущейся неоднородности кольцевой формы. При сильной нелинейной дисперсии ($\beta \approx 1$) происходит возбуждение характерной структуры поля типа ударной волны в среде с дисперсией, более детальное исследование которой требует дальнейших численных расчётов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 02-02-17277, 01-02-17388).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Литвак А. Г., Таланов В. И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1967. Т. 10. С. 539.
2. Ablowitz M. J., Segur H. Solitons and the Inverse Scattering Transport. Philadelphia: SIAM, 1981.

3. Литвак А. Г., Петрова Т. А., Сергеев А. М., Юнаковский А. Д. // Физика плазмы. 1983. Т. 9. С. 495.
4. Литвак А. Г., Сергеев А. М., Шахова Н. А. // Письма в ЖЭТФ. 1979. Т. 5. С. 86.
5. Onavato M., Osborne A. R., Serio M., Bertone S. // Phys. Rev. Lett. 2001. V. 86. P. 5 831.
6. Pelinovsky E., Talipova T., Slunyeu A., Kokorina A., Kharif C. // Труды межд. конф. «Progress in Nonlinear Science», 2000. P. 179.
7. Розанов Н. Н. // ЖЭТФ. 1998. Т. 113. С. 513.
8. Жарова Н. А., Литвак А. Г., Петрова Т. А. и др. // Письма в ЖЭТФ. 1986. Т. 44. С. 12.
9. Жарова Н. А., Литвак А. Г., Петрова Т. А. и др. // Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т. 29. С. 1 137.
10. Ranka J. E., Schrimmer R. W., Gaeta A. L. // Phys. Rev. Lett. 1996. V. 77. P. 3 783.
11. Luther G. G., Newell A. C., Moloney J. V. et al. // Opt. Lett. 1994. V. 19. P. 789.
12. Germashevski K., Grauer B., Berge L. et al. // Physica. D. 2001. V. 151. P. 175.
13. Жарова Н. А., Литвак А. Г., Миронов В. А. // Письма в ЖЭТФ. 2002. Т. 75. С. 655.
14. Жарова Н. А., Литвак А. Г., Миронов В. А. // ЖЭТФ. 2003. Т. 123, № 4. С. 726.
15. Власов В. Н., Таланов В. И. Самофокусировка волн. Н. Новгород: ИПФ РАН, 1997.
16. Таланов В. И. // Письма в ЖЭТФ. 1965. Т. 2. С. 218.
17. Литвак А. Г. // Письма в ЖЭТФ. 1966. Т. 4. С. 341.
18. Ахманов С. А., Выслоух В. А., Чиркин А. С. Оптика фемтосекундных лазерных импульсов. М.: Наука, 1988.
19. Выслоух В. А., Чередник И. В. // Теор. и мат. физика. 1987. Т. 71. С. 13.
20. Головченко Е. А., Дианов Е. М., Прохоров А. М., Серкин В. М. // Письма в ЖЭТФ. 1985. Т. 42. С. 74.
21. Власов С. Н., Пискунова Л. В., Таланов В. И. // ЖЭТФ. 1989. Т. 95. С. 1 945.
22. Захаров В. Е., Косматов Н. Е., Швец В. Ф. // Письма в ЖЭТФ. 1989. Т. 49. С. 431.
23. Литвак А. Г., Миронов В. А., Шер Э. М. // ЖЭТФ. 2000. Т. 118. С. 1 463.
24. Litvak A. G., Mironov V. A., Sher E. M. // Phys. Rev. E. 2000. V. 61. P. 891.

Институт прикладной физики РАН,
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию
21 июня 2003 г.

SELF-EFFECT OF A SUPERSHORT LASER PULSE IN A MEDIUM WITH NORMAL GROUP-VELOCITY DISPERSION

N. A. Zharova, A. G. Litvak, and V. A. Mironov

We present the results of numerical and analytical analysis of solutions of the three-dimensional (3D) nonlinear Schrödinger equation with hyperbolic spatial operator. Evolution of the system is considered in separate for two types of the initial field: a Gaussian distribution and a hollow-type (tubular or horseshoe) distribution. The effect of the nonlinear dispersion on wave-packet splitting during self-compression toward the system axis is studied. It is shown that additional focusing of Gaussian wave packets takes place in a wide range of the nonlinear-dispersion parameter. This effect results in a noticeable amplitude growth of one of the two secondary pulses formed as a result of the splitting. For hollow-type distributions, we note the formation of moving inhomogeneities and the excitation of secondary wave fields typical of the hyperbolic system.

Н. А. Жарова, А. Г. Литвак, В. А. Миронов

УДК 537.86

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ КРИТЕРИИ ВОЛНОВЫХ КОЛЛАПСОВ

Е. А. Кузнецов

В данной работе представлен обзор результатов исследований интегральных критериев волновых коллапсов — достаточных критериев формирования особенностей за конечное время из начально гладких распределений волнового поля. Все эти критерии основаны на решении мажорирующего дифференциального неравенства второго порядка, которое может быть получено для широкого круга моделей, в том числе для нелинейного уравнения Шрёдингера, нелинейного уравнения Клейна—Гордона, нестационарного уравнения Гинзбурга—Ландау, уравнений гидродинамики пыли, уравнения нелинейной струны (Буссинеска), обобщённого уравнения Кадомцева—Петвиашвили.

ВВЕДЕНИЕ

Критерий Власова—Петрищева—Таланова [1] волнового коллапса в рамках двумерного нелинейного уравнения Шрёдингера, найденный в 1971 году, является одним из основополагающих результатов в теории волновых коллапсов. Это был первый строгий результат для нелинейных волновых систем с дисперсией. Он показал, что формирование особенности волнового поля за конечное время возможно, несмотря на наличие линейной дисперсии волн, которая, например, в линейной оптике препятствует возникновению точечных особенностей — фокусов.

Нелинейное уравнение Шрёдингера (НУШ) записывается для волновой функции ψ и в безразмерных переменных имеет вид

$$i\psi_t + \Delta\psi + |\psi|^2\psi = 0. \quad (1)$$

Здесь и далее нижний индекс t обозначает частную производную по времени. НУШ описывает движение квантовомеханической частицы в самосогласованном потенциале с притяжением $U = -|\psi|^2$. Именно притяжение в этом случае есть причина возникновения особенности. С точки зрения квантовой механики коллапс в рамках нелинейного уравнения Шрёдингера может быть интерпретирован как падение частицы на центр в самосогласованном потенциале [2].

Уравнение (1) часто называют также уравнением Гросса—Питаевского [3, 4]. В частности, оно с хорошей точностью описывает длинноволновые нелинейные колебания конденсата слабо неидеального бозе-газа при отрицательной длине рассеяния. В настоящее время уравнение (1) — базовая модель для изучения нелинейной динамики бозе-конденсатов (см., например, [5, 6]). В нелинейной оптике двумерное уравнение (1) описывает стационарную самофокусировку света в среде с керровской нелинейностью; волновая функция в этом случае есть огибающая поля квазимонохроматической электромагнитной волны, время t имеет смысл координаты вдоль распространения светового пучка, а второе слагаемое в (1) описывает дифракцию пучка в поперечном направлении.

Критерий Власова—Петрищева—Таланова следует из соотношения для второй производной по времени от среднего квадрата размера распределения $\langle r^2 \rangle = N^{-1} \int r^2 |\psi|^2 d\mathbf{r}$:

$$\frac{d^2}{dt^2} \int r^2 |\psi|^2 d\mathbf{r} = 8H, \quad (2)$$

где H — гамильтониан, равный

$$H = \int |\nabla\psi|^2 d\mathbf{r} - \frac{1}{2} \int |\psi|^4 d\mathbf{r} \equiv X - Y, \quad (3)$$

$$N = \int |\psi|^2 d\mathbf{r}$$

— полное число квазичастиц. Равенство (2) проверяется прямым вычислением. Соотношение (2) также часто называют теоремой вириала, поскольку величину $N \langle r^2 \rangle$ можно рассматривать в качестве момента инерции. В классической механике наиболее простой способ получения теоремы вириала, т. е. соотношения между средней кинетической и средней потенциальной энергией, состоит как раз в вычислении второй производной по времени от полного момента инерции всей системы.

Поскольку H является сохраняющейся величиной, то соотношение (2) дважды интегрируется:

$$\int r^2 |\psi|^2 d\mathbf{r} = 4Ht^2 + C_1 t + C_2, \quad (4)$$

где C_1 и C_2 — дополнительные интегралы движения. Их наличие связано с существованием двух неётеровских симметрий — линзового преобразования (этот факт был установлен В. И. Талановым [7] в 1970 г.) и масштабных преобразований [8] (см. также [9, 10]).

Отсюда немедленно следует критерий Власова—Петрищева—Таланова: для любого распределения поля с отрицательным гамильтонианом

$$H < 0 \quad (5)$$

при произвольных C_1 и C_2 средний квадрат размера распределения $\langle r^2 \rangle$ обращается в нуль за конечное время, что, в силу сохранения N , свидетельствует о формировании особенности поля ψ .

В трёхмерной ситуации ($D = 3$) вместо (2) имеем

$$\frac{d^2}{dt^2} \int r^2 |\psi|^2 d\mathbf{r} = 4(2H - Y), \quad (6)$$

при этом равенство в (4) заменяется на неравенство

$$N \langle r^2 \rangle < 4Ht^2 + C_1 t + C_2, \quad (7)$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования, определяемые начальными условиями. Отсюда следует тот же достаточный критерий коллапса, что и при $D = 2$: $H < 0$ [11].

Как один из наиболее ярких, критерий Власова—Петрищева—Таланова получил наибольшую известность в физической литературе. Математики обратили внимание на работу [1] позднее. В 1974 году Ливайн [12] предложил использовать для нахождения достаточных критериев коллапсов мажорирующие дифференциальные неравенства второго порядка для положительно определённой интегральной величины R вида (см. также [13])

$$R_{tt}R - (1 + \alpha) R_t^2 \geq f(R), \quad (8)$$

где число $\alpha > 0$ и функция $f(R)$ определяются исходя из конкретной модели. При этом коллапсу соответствует обращение величины R в бесконечность за конечное время.

Неравенство (8) после простой замены переменных (см. [13])

$$R = A^{-1/\alpha} \quad (9)$$

может быть представлено в форме

$$A_{tt} \leq -\frac{\partial V}{\partial A}, \quad (10)$$

где

$$V(A) = \int^A \alpha A^{1+2/\alpha} f(A^{-1/\alpha}) dA.$$

Это неравенство имеет простую механическую интерпретацию: A играет роль координаты частицы, а $V(A)$ — её потенциальной энергии. В частности, для НУШ (1) $A = N \langle r^2 \rangle$, а потенциал линеен: $V(A) = -8HA$.

Момент достижения частицей начала координат $A = 0$ будет соответствовать времени коллапса в данной системе. Отсюда легко найти необходимые условия на вид потенциала $V(A)$ и начальные данные, при которых возможно такое падение на центр, а также оценить время коллапса t_0 . Для достижения частицей начала координат $A = 0$ достаточно потребовать, чтобы потенциал $V(A)$ рос монотонно с увеличением A . Тогда при движении влево ($A_t < 0$) неравенство (10) может быть проинтегрировано один раз:

$$E(t) = \frac{A_t^2}{2} + V(A) \geq E(0). \quad (11)$$

Здесь $E(0)$ — энергия частицы в начальный момент времени $t = 0$, а $E(t)$ — текущее значение энергии частицы. Из неравенства (11) следует, что при движении частицы влево её энергия растёт. В этом случае верхняя оценка величины t_0 даётся интегралом:

$$t_0 \leq \int_0^{A(0)} \frac{dA}{2\sqrt{E(0) - V(A)}}. \quad (12)$$

Таким образом, для монотонных потенциалов достаточным критерием коллапса является условие отрицательности начальной скорости:

$$A_t(0) < 0.$$

При положительной начальной скорости частица, вообще говоря, может не отразиться от точки остановки. Однако если производная $\partial V/\partial A$ ограничена снизу некоторой (положительной) величиной B , то частица достигнет нуля всегда, вне зависимости от начального значения скорости. Это следует из оценки, которая получается после двойного интегрирования по t уравнения (10):

$$A \leq -\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} \frac{\partial V}{\partial A} dt_2 + C_1 t + C_2 \leq -\frac{B}{2} t^2 + C_1 t + C_2.$$

В 1978 году подход Ливайна был использован Калантаровым и Ладыженской [14] для нахождения критерия коллапса для уравнения нелинейной струны (часто называемого также уравнением Буссинеска). Вопрос о коллапсе для интегрируемого уравнения, каким является уравнение Буссинеска (см. [15]), был в то время удивительным и вызвал большую дискуссию. Впоследствии этот вопрос нашёл своё объяснение в рамках метода обратной задачи рассеяния в работах [16, 17].

Последующие работы по нахождению интегральных критериев коллапса (см. [18–24]) показали, что все они так или иначе основаны на использовании мажорирующих неравенств вида (8). В данном обзоре на конкретных примерах мы покажем, как строится положительно определённая интегральная величина R , и дадим вывод соответствующих мажорирующих неравенств. Из вида выражения для величины R и её временного поведения можно сделать заключение относительно того, какие характеристики волнового поля (например, амплитуда поля или её пространственные производные) становятся бесконечными, и получить оценку времени коллапса.

План статьи следующий. Вначале, следуя работам [13, 19], мы рассмотрим, как может быть улучшен критерий (5) для сверхкритического трёхмерного коллапса, описываемого НУШ (1). В следующем разделе мы остановимся на критериях коллапсов для нелинейного уравнения Клейна–Гордона, которое возникает при описании запорогового поведения при неустойчивости Кельвина–Гельмгольца [22], а также для нестационарного уравнения Гинзбурга–Ландау, которое, в частности, описывает поведение диссипативных систем вблизи бифуркации — перехода из пространственно-однородных ламинарных состояний в пространственно-неоднородные состояния. В третьем разделе мы обратимся к системам гидродинамического типа: к уравнениям гидродинамики пыли (с нулевым давлением) [24] и уравнению нелинейной струны [14, 21]. В заключительном разделе, следуя работе Турицына и Фальковича [18], мы получим критерий коллапса для обобщённого уравнения Кадомцева–Петвиашвили. По своей форме критерий для обобщённого уравнения Кадомцева–Петвиашвили совпадает с критерием Власова–Петрищева–Таланова, демонстрируя возможность появления коллапса при отрицательном значении гамильтониана. В заключительном разделе мы обсудим также вопрос о возможности коллапса для гиперболического НУШ [23], описывающего, в частности, распространение импульсов электромагнитных волн в средах с нормальной дисперсией.

Важное место во всём обзоре будет уделено самому методу построения неравенств вида (8). В основе этого подхода лежат различные интегральные оценки. Прежде всего, это неравенства соболевского типа, которые вытекают из знаменитых теорем вложения С. Л. Соболева, в частности, для пространств L_p и W_2^1 с нормами

$$\|u\|_p = \left[\int |u|^p dx \right]^{1/p} \quad (p > 0), \quad \|u\|_{W_2^1} = \left[\int (|u|^2 + |\nabla u|^2) dx \right]^{1/2}$$

соответственно. Впервые эти неравенства были использованы при доказательстве устойчивости ионно-акустических солитонов в замагниченной плазме [24], основанном на ограниченности гамильтониана. Позже этот подход широко применялся для установления устойчивости различного типа солитонов (см., например, обзор [26]). Для задачи коллапса эти неравенства использовались Вайнштейном [27] (см. также [28]). Эти оценки тесным образом связаны с солитонными решениями, которые выступают в качестве сепаратрис, отделяющих коллапсирующие состояния от распределений, расширяющихся за счёт линейных эффектов — дифракции и дисперсии волн. В частности, именно так обстоит дело для трёхмерного НУШ.

1. КРИТЕРИЙ КОЛЛАПСА ДЛЯ ТРЁХМЕРНОГО НУШ

Как видно из (6), при $D = 3$ критерий коллапса (5) для НУШ недостаточно точен, поскольку при его выводе использована простейшая оценка величины Y . В этом разделе мы покажем, как оценка (5) может быть улучшена. Будет продемонстрировано, что коллапс возможен при положительном гамильтониане, пороговое значение которого совпадает со значением H для основного солитонного (s) решения уравнения (1):

$$\psi(r, t) = \lambda \phi_0(\lambda r) \exp(i\lambda^2 t). \quad (13)$$

Здесь нормированная волновая функция ϕ_0 , будучи сферически-симметричной и не имеющей нулей, подчиняется уравнению

$$-\phi_0 + \Delta\phi_0 + |\phi_0|^2\phi_0 = 0. \quad (14)$$

Отсюда следует, что для солитонного решения полное число частиц обратно пропорционально λ :

$$N_s = N_0/\lambda, \quad (15)$$

где согласно [28] $N_0 = 18,94$. Легко видеть, что решение (13) представляет собой стационарную точку гамильтониана H при фиксированном числе частиц N :

$$\delta(H + \lambda^2 N) = 0.$$

Уже отсюда можно сделать ряд заключений относительно возможной устойчивости или неустойчивости солитонных решений. Следуя [2], рассмотрим масштабные преобразования волновой функции ψ , сохраняющие полное число частиц ($N = \text{inv}$):

$$\psi(r) \rightarrow a^{-3/2}\psi_s(r/a).$$

При таких преобразованиях гамильтониан H становится функцией масштабного параметра a :

$$H(a) = \frac{X_s}{a^2} - \frac{Y_s}{a^3}.$$

Солитону соответствует максимум этой функции, который достигается при $a = 1$, что указывает на его возможную неустойчивость. Такая неустойчивость действительно имеет место. Линейный критерий устойчивости Колоколова—Вахитова [29]

$$\frac{\partial N_s}{\partial \lambda^2} > 0 \quad (16)$$

в соответствии с (15) не выполняется, что означает неустойчивость солитона. Важно отметить также, что при $a \rightarrow 0$ гамильтониан $H(a)$ благодаря нелинейному взаимодействию оказывается неограниченной снизу функцией, что указывает на возможность коллапса при уменьшении характерного размера распределения, а при $a \rightarrow \infty$ эта функция стремится к нулю за счёт дисперсионного члена в $H(a)$. Поэтому можно говорить, что солитонное решение представляет собой сепаратрису, отделяющую коллапсирующие решения от неколлапсирующих. Именно этим обстоятельством мы воспользуемся в дальнейшем для нахождения более строгого критерия коллапса.

В точке максимума гамильтониана, соответствующей солитонному решению, между интегралами X_s и Y_s имеет место соотношение $2X_s = 3Y_s$. Другое соотношение между этими интегралами получается после умножения (14) на ψ и интегрирования по $\mathbf{r}$. В результате из двух полученных соотношений следует

$$X_s = 3N_0^2/N_s, \quad Y_s = 2N_0^2/N_s, \quad H_s = N_0^2/N_s. \quad (17)$$

Для того, чтобы найти более точную (по сравнению с (6)) оценку, воспользуемся мультипликативным вариантом неравенства Соболева [30, 31]:

$$Y \leq CN^{1/2}X^{3/2}, \quad (18)$$

где C — некоторая постоянная. Наилучшее значение C находится путём минимизации функционала J :

$$C_{\text{best}} = \min J[\psi] = \min \left(\frac{N^{1/2}X^{3/2}}{Y} \right). \quad (19)$$

Легко проверить, что соответствующее уравнение Лагранжа—Эйлера для экстремума функционала J совпадает с уравнением (14) для солитонных решений. Минимальное значение J достигается для сферически-симметричного солитона без узлов (основное состояние). Согласно (17) постоянная C_{best} оказывается равной (см., например, [26, 27])

$$C_{\text{best}} = \frac{2}{3\sqrt{3}N_0}. \quad (20)$$

В результате неравенство (18) приобретает вид

$$Y \leq \frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{N^{1/2}}{N_0} X^{3/2}. \quad (21)$$

Рассмотрим далее функцию

$$F = X - C_{\text{best}} N^{1/2} X^{3/2}. \quad (22)$$

По построению F представляет собой нижнюю границу гамильтониана H при фиксированном N и как функция X имеет максимум при $X = X_N = 3N_0^2/N$, равный $F = H_N = N_0^2/N$. Здесь H_N — значение гамильтониана для основного солитона. Таким образом, на плоскости (H, X) можно выделить три области:

- 1) $0 < H < H_N$ при $0 < X < X_N$;
- 2) $H_N > H > -\infty$ при $X_N \leq X < \infty$. Эта область включает в себя полуплоскость $H < 0$;
- 3) $H > H_N$ при $0 < X < \infty$.

В первой области для всех значений H величина X не превосходит $X_N = 3N_0^2/N$. Поэтому в силу соотношения неопределённости

$$\langle r^2 \rangle \geq \frac{9N}{4X}, \quad (23)$$

т. е. среднее значение $\langle r^2 \rangle$ ограничено снизу. В результате коллапс распределения в целом оказывается невозможным. Более того, поскольку величина X ограничена сверху, можно показать, что и формирование особенности волновой функции ψ невозможно для всех $t > 0$ [13].

Для второй области можно написать следующую оценку:

$$N \frac{d^2 \langle r^2 \rangle}{dt^2} = 4(2H - Y) = 4(3H - X) \leq 4(3H - X_N) = 12(H - H_N). \quad (24)$$

Интегрируя далее (24), мы приходим к неравенству

$$N \langle r^2 \rangle \leq 6(H - H_N)t^2 + C_1 t + C_2, \quad (25)$$

откуда следует более строгий критерий для трёхмерного коллапса:

$$H < H_N = N_0^2/N. \quad (26)$$

Здесь H_N — значение гамильтониана для основного солитона. Как и критерий Власова—Петрищева—Таланова, критерий (26) является только достаточным.

В третьей области, где $H > H_N$, коллапс (всего распределения как целого) возможен только при определённых начальных условиях. Путём подбора постоянных C_1 и C_2 можно достичь того, чтобы среднее значение $\langle r^2 \rangle$ обращалось в нуль. Например, коллапс имеет место при $C_1 \neq 0$, что соответствует начально подфокусированному распределению, когда начальное значение X больше X_N при выполнении следующего ограничения (см. [13]):

$$C_1 \leq -\sqrt{24(H - H_N)C_2}.$$

2. КРИТЕРИИ КОЛЛАПСА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА—ГОРДОНА И УРАВНЕНИЯ ГИНЗБУРГА—ЛАНДАУ

Рассмотрим релятивистски-инвариантное уравнение Клейна—Гордона с кубическим нелинейным членом:

$$\eta_{tt} = \gamma\eta + \Delta\eta + |\eta|^2\eta. \quad (27)$$

Уравнение такого вида было выведено в [22] для описания запорогового (инкремент $\gamma > 0$) поведения поверхностных гравитационно-капиллярных волн, возбуждаемых ветром благодаря неустойчивости Кельвина—Гельмгольца. Величина η в этом случае имеет смысл огибающей волны с несущим волновым вектором $\mathbf{k}_0 = \mathbf{n}\sqrt{g/\alpha}$, где g — ускорение свободного падения, α — коэффициент поверхностного натяжения, $\mathbf{n}$ — единичный вектор, направленный вдоль скорости ветра; оператор Лапласа Δ в (27) двумерный. Важной особенностью этого уравнения является факт притяжения — знак плюс перед нелинейным членом $|\eta|^2\eta$. Последнее означает, что для пространственно-однородных состояний при $\gamma > 0$ нелинейность не приводит к стабилизации линейной неустойчивости, а наоборот, её усиливает, приводя к взрывному (за конечное время) росту амплитуды η .

Рассмотрим вопрос о критериях коллапса для пространственно-локализованных распределений η . Для этого введём положительно определённую величину $R = \int |\eta|^2 d\mathbf{r} > 0$ и рассмотрим её эволюцию во времени. Уравнение (27) позволяет найти, что

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = -4H + \int (6|\eta_t|^2 + 2|\nabla\eta|^2 + 2|\gamma||\eta|^2) d\mathbf{r}. \quad (28)$$

Здесь H — гамильтониан системы (27), равный

$$H = \int (|\eta_t|^2 - \gamma|\eta|^2 + |\nabla\eta|^2 - |\eta|^4/2) d\mathbf{r}.$$

Умножая далее обе части (28) на R и используя неравенство Коши—Буняковского, приходим к неравенству вида (8):

$$R_{tt}R - 3R_t^2/2 \geq -4HR + 2\gamma R^2. \quad (29)$$

Переходя по формуле (9) от R к новой переменной A : $R = A^{-2}$, приходим к неравенству (10), где потенциал определяется выражением

$$V(A) = -\frac{HA^4}{2} + \frac{\gamma A^2}{2}.$$

Если норма R обратится в бесконечность за конечное время, это будет означать, что решение уравнения (27) теряет свою гладкость, и у решения возникнет особенность не позднее, чем R станет бесконечной величиной. Для величины A появление особенности означает, что частица достигла начала координат ($A = 0$) за конечное время. Если скорость A_t отрицательна, то мы приходим к неравенству (11):

$$E(t) = \frac{A_t^2}{2} + V(A) \geq E(0). \quad (30)$$

Знак неравенства означает, что частица при своём движении к центру набирает энергию. Из этого соотношения легко находятся все возможные случаи, когда частица достигает точки $A = 0$. Коллапс имеет место:

- 1) при $H < 0$ и $\gamma < 0$, если $E(0) > 0$ и $A_t < 0$;
- 2) при $H < 0$ и $\gamma > 0$, если $A_t(0) < 0$;

3) при $H > 0$ и $\gamma > 0$, если $A_t(0) < 0$, $A^2(0) < \gamma/(2H)$ и $E(0) < \gamma^2/(8H)$ или если $A_t(0) < 0$ и $E(0) > \gamma^2/(8H)$.

Во всех этих случаях верхняя оценка времени коллапса t_0 находится с помощью интеграла (12).

Учитывая, что частица вблизи начала координат $A = 0$ имеет определённую скорость, вблизи особенности для нормы $R = \int |\eta|^2 d\mathbf{r}$ возникает оценка

$$\int |\eta|^2 d\mathbf{r} \geq \frac{C}{(t_0 - t)^2}. \quad (31)$$

Важно отметить, что оценка (31) не зависит от размерности пространства. Она отвечает росту амплитуды для пространственно-однородных решений по закону $\eta \propto (t_0 - t)^{-1}$ при почти неизменной или даже растущей области коллапсирующего решения.

Похожая ситуация реализуется при коллапсе, описываемом уравнением Гинзбурга—Ландау вида

$$\psi_t = \gamma\psi + \Delta\psi + 2|\psi|^2\psi. \quad (32)$$

Такой вариант уравнения Гинзбурга—Ландау возникает вблизи критической точки при жёстком режиме возбуждения. Например, он реализуется при описании генерации импульсов в круговых лазерах с нелинейной поглощающей ячейкой, просветляющейся при росте интенсивности [32], и вблизи порога конвекции бинарных жидкостей [33, 34].

Для чисто действительных ψ уравнение (32) превращается в нелинейное уравнение теплопроводности (о приложениях этого уравнения к задаче горения см. классическую работу Пискунова, Петровского, Колмогорова [35]).

Для пространственно-однородных решений факт формирования особенности ψ проверяется просто. Если $\gamma > 0$, то для малых начальных данных ψ вначале растёт экспоненциально, а затем, на нелинейной стадии, «взрывается» за конечное время. При $\gamma < 0$ только для начальных данных $2|\psi_0|^2 > |\gamma|$ возможна реализация взрывного режима.

Получим теперь критерий коллапса для пространственно-локализованных распределений ($\psi \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$).

Уравнение (32) относится к градиентным системам, т. е. может быть записано в виде

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\delta F}{\delta\psi^*}. \quad (33)$$

Здесь

$$F = \int (|\nabla\psi|^2 - \gamma|\psi|^2 - |\psi|^4) d\mathbf{r} \equiv X - \gamma N - Y \quad (34)$$

представляет собой функционал Ляпунова, или свободную энергию, поскольку

$$\frac{dF}{dt} = -2 \int |\psi_t|^2 d\mathbf{r} \leq 0. \quad (35)$$

Таким образом, F уменьшается со временем; в частности, если $F < 0$ в начальный момент времени, то свободная энергия F будет отрицательна при всех $t > 0$. При этом согласно (32) величина N подчиняется уравнению

$$\frac{dN}{dt} = 2\gamma N - 2X + 4Y = -2F + 2Y, \quad (36)$$

откуда видно, что при отрицательном значении F мощность N растёт со временем.

В качестве функционала R возьмём отношение $-F/N$. Для начальных условий с отрицательным значением F величина R будет положительно определена во все моменты времени. Далее найдём временную производную от R :

$$\frac{dR}{dt} = \frac{2}{N} \int |\psi_t|^2 d\mathbf{r} + \frac{FN_t}{N^2}. \quad (37)$$

Первый член в этом соотношении оценим с помощью неравенства Коши—Буняковского:

$$\frac{dN}{dt} = 2 \int |\psi\psi_t| d\mathbf{r} \leq 2N^{1/2} \left(\int |\psi_t|^2 d\mathbf{r} \right)^{1/2}.$$

Подставляя оценку интеграла $\int |\psi_t|^2 d\mathbf{r}$ в (37), с учётом определения F (34) получаем искомое мажорирующее неравенство:

$$\frac{dR}{dt} \geq \frac{N_t}{N^2} \left(\frac{N_t}{2} + F \right) \geq 2 \frac{R}{N} (-F + Y + N) \geq 2R^2. \quad (38)$$

Данное неравенство первого порядка есть простейший вариант общего неравенства (8). Неравенство (38) просто интегрируется, откуда следует оценка величины R [20] (см. также [21]):

$$2R \geq \frac{1}{t_0 - t},$$

где время t_0 выражается через начальное значение $R|_{t=0} = R_0$:

$$t_0 = \frac{1}{2R_0}.$$

Данная оценка может быть усилена при $\gamma < 0$ примерно таким же образом, каким был получен критерий (26). Достаточный критерий коллапса в этом случае даёт верхнюю оценку начальной величины F [21]:

$$F \Big|_{t=0} < F_s,$$

где F_s — свободная энергия для основного солитонного решения НУШ (13).

3. КОЛЛАПСЫ В СИСТЕМАХ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТИПА

Данный раздел мы начнём с простейшей гидродинамической модели — уравнений Эйлера для пыли, когда её давлением можно пренебречь:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (39)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = 0. \quad (40)$$

Здесь предполагается, что скорость $\mathbf{v}$ достаточно быстро стремится к нулю на бесконечности, чтобы все нормы, рассматриваемые ниже, были конечны.

Решение уравнений (39), (40) просто найти с помощью лагранжевого описания. В лагранжевых переменных уравнение (40) описывает движение свободных частиц:

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{v}_0(\mathbf{a})t, \quad (41)$$

где $\mathbf{v}_0(\mathbf{a})$ — начальная скорость. Свободное движение лагранжевых частиц есть причина опрокидывания для пылевой гидродинамики, что соответствует пересечению траекторий жидких частиц. В терминах отображения (41), описывающего переход от эйлерового описания к лагранжевому, опрокидывание означает обращение якобиана J в нуль. Этот процесс есть коллапс для уравнений (39), (40), в результате чего градиент скорости и плотность ρ в точках обращения якобиана в нуль оказываются бесконечными. По этой причине опрокидывание иногда называют градиентной катастрофой.

Следует отметить, что уравнения (39), (40) имеют важные астрофизические приложения: согласно Я. Б. Зельдовичу [36], опрокидывание — причина формирования протогалактик из звёздной пыли.

Локально условие опрокидывания и время опрокидывания определяются из начальной скорости $\mathbf{v}_0(\mathbf{a})$. Мы не будем останавливаться подробно на этом вопросе (детали см., например, в [37]) и в этом разделе получим достаточный интегральный критерий опрокидывания.

Начнём с одномерного уравнения (40):

$$v_t + vv_x = 0. \quad (42)$$

Введём интегралы с целыми n :

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^n dx.$$

Из (42) легко получить, что эволюция этих интегралов определяется следующими рекуррентными соотношениями:

$$\frac{dI_n}{dt} = -(n-1)I_{n+1}. \quad (43)$$

В частности, при $n = 2$ и $n = 3$ указанные соотношения имеют вид

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^3 dx, \quad (44)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^3 dx = -2 \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^4 dx. \quad (45)$$

Применяя неравенство Коши—Буняковского к правой части (44), имеем

$$\frac{dI_2}{dt} \leq \left(I_2 \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^4 dx \right)^{1/2}. \quad (46)$$

Подставляя далее

$$I_4 = \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^4 dx = \frac{1}{2} \frac{d^2 I_2}{dt^2}$$

в (46), приходим к замкнутому неравенству для интеграла I_2 :

$$I_2 \frac{d^2 I_2}{dt^2} - 2 \left(\frac{dI_2}{dt} \right)^2 \geq 0, \quad (47)$$

которое представляет собой частный вид неравенства (8) с $f(R) = 0$. Переход к новой переменной A : $I_2 = A^{-1}$, приводит (46) к неравенству

$$A_{tt} \leq 0. \quad (48)$$

Отсюда следует, что критерий коллапса даётся ограничением на начальное значение производной dI_2/dt при $t = 0$ [24]:

$$\left. dI_2/dt \right|_{t=0} > 0,$$

или

$$I_3(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} v_{0x}^3 dx < 0.$$

В многомерной ситуации аналогичный критерий также может быть получен в случае, когда матрица

$$U_{ij} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$$

при $t = 0$ имеет чисто действительные собственные значения. Такая ситуация может быть реализована при выполнении следующего условия:

$$2(\operatorname{tr} \mathbf{S})^2 - \frac{2}{D} \operatorname{tr}(\mathbf{S}^2) \geq \omega^2, \quad (49)$$

Здесь tr означает след матрицы, $\mathbf{S}$ — симметричная часть матрицы деформаций скорости $\mathbf{U}$: $\mathbf{S} = (\mathbf{U} + \mathbf{U}^T)/2$, $\omega = \operatorname{rot} \mathbf{v}$ — завихрённость; индекс T обозначает операцию транспонирования.

В многомерном случае мажорирующее неравенство записывается для величины

$$I = \int (\det U)^2 d\mathbf{r}$$

и имеет вид (подробности вывода см. в работе [24])

$$I \frac{d^2 I}{dt^2} - \left(1 + \frac{1}{D}\right) \left(\frac{dI}{dt}\right)^2 \geq 0, \quad (50)$$

где D — размерность пространства. Неравенство (50) путём замены

$$A = I^{-1/D}$$

сводится к (48). Критерий коллапса по-прежнему заключается в том, что начальная скорость частицы должна быть отрицательной:

$$A_t(0) < 0, \quad \text{или} \quad I_t(0) > 0.$$

Время коллапса при этом оценивается как

$$t_0 < \frac{DI(0)}{I_t(0)} = -\frac{1}{\langle \lambda(0) \rangle},$$

где $\langle \lambda \rangle$ — среднее собственное значение матрицы $\mathbf{U}$ при $t = 0$:

$$\langle \lambda \rangle = \frac{1}{D} \sum_i \bar{\lambda}_i = \frac{1}{DI} \int \operatorname{tr} \mathbf{U} (\det \mathbf{U})^2 d\mathbf{r}.$$

Следующий пример системы гидродинамического типа — уравнение Буссинеска:

$$U_{tt} - U_{xx} + U_{xxxx} + (U^2)_{xx} = 0. \quad (51)$$

Для волн малой амплитуды это уравнение даёт закон дисперсии

$$\omega^2 = k^2 + k^4,$$

совпадающий со спектром Боголюбова для колебаний конденсата слабо неидеального бозе-газа. Нелинейность в уравнении (51) — гидродинамическая: при отсутствии дисперсии, т. е. при $\omega^2 \approx k^2$, (51) превращается в нелинейное акустическое уравнение, описывающее, в частности, опрокидывание звуковой волны конечной амплитуды (простая волна Римана). В этом случае функцию U можно трактовать как флуктуацию плотности, на величину которой естественно наложить ограничение

$$\int_{-\infty}^{+\infty} U \, dx = 0, \quad (52)$$

выражающее закон сохранения массы.

Таким образом, уравнение (51) в отличие от (39) и (40) учитывает сразу оба фактора — дисперсию и нелинейность. Для этого уравнения легко находятся решения в виде стационарных волн, зависящих от $x - ct$, которые совпадают с решениями уравнения Кортевега-де Вриза в виде кноидальных волн. В частности, совпадают солитонные решения для обоих уравнений. Более того, оба эти уравнения допускают представление Лакса, т. е. могут быть проинтегрированы с помощью метода обратной задачи рассеяния [15, 38]. Несмотря на свою «интегрируемость», уравнение (51) содержит решения коллапсирующего типа. Впервые этот факт был продемонстрирован Калантаровым и Ладыженской [14] в 1978 году. Для доказательства существования коллапса в (51) было построено мажорирующее неравенство типа (8) для положительно определённой величины

$$R = \int_{-\infty}^{+\infty} W^2 \, dx,$$

где $U = W_x$ (в соответствии с (52) предполагается, что W стремится к нулю на бесконечности).

Уравнение (51) относится к гамильтоновым уравнениям с

$$H = \int_{-\infty}^{+\infty} (\Phi_x^2/2 + W_x^2/2 + W_{xx}^2/2 - W_x^3/3) \, dx \equiv I_1 + I_2 + I_3 - I_4, \quad (53)$$

где Φ имеет смысл потенциала скорости, определяемого из уравнений

$$W_t = \Phi_x, \quad \Phi_t = W_x - W_{xxx} - W_x^2. \quad (54)$$

Чтобы найти соответствующее неравенство, найдём сначала первую производную величины R по времени:

$$R_t = -2 \int_{-\infty}^{+\infty} W \Phi_x \, dx \leq 2R^{1/2} (2I_1)^{1/2}. \quad (55)$$

Для второй производной согласно (54) имеем

$$R_{tt} = 4I_1 - 4I_2 - 4I_3 + 6I_4. \quad (56)$$

Подставляя далее величину R и её производные (55) и (56) в выражение $R_{tt}R - (1 + \alpha) R_t^2$, после простых преобразований с учётом определения H (53) получим

$$R_{tt}R - (1 + \alpha) R_t^2 \geq R[-6H + 2I_2 + 2I_3 + 2(1 - 4\alpha)I_1]. \quad (57)$$

Отсюда видно, что при $\alpha = 1/4$ в силу положительности интегралов I_2 и I_3 это неравенство сводится к виду (8):

$$R_{tt}R - (1 + 1/4) R_t^2 \geq -6HR. \quad (58)$$

После замены переменных

$$R = A^{-1/4}$$

мы приходим к неравенству (10) с потенциалом

$$V(A) = -HA^6/4.$$

Отсюда видно, что частица может достичь начала координат при отрицательной начальной скорости и положительной начальной энергии $E(0)$. Если $H < 0$, то коллапс — обращение интеграла R в бесконечность за конечное время — возможен при выполнении условия [14]

$$A_t(0) < 0, \text{ или } \int_{-\infty}^{+\infty} W \Phi_x dx \Big|_{t=0} > 0.$$

При $H > 0$ коллапс тоже возможен, но при выполнении двух условий:

$$A_t(0) < 0 \text{ и } E(0) > 0,$$

которые в переменных W и Φ записываются в виде

$$R_t(0) > 0, \quad 32R_t^2(0) - \frac{H}{R^{14}(0)} > 0.$$

Как показано в [19], данные критерии для уравнения (51) обобщаются на случай периодических граничных условий.

Мажорирующее неравенство может быть также получено для «улучшенного» уравнения Буссинеска с отрицательной дисперсией [19]:

$$U_{tt} - U_{xx} - U_{xxtt} + (U^2)_{xx} = 0. \quad (59)$$

В отличие от классического интегрируемого уравнения Буссинеска с отрицательной дисперсией, уравнение (59) имеет устойчивый закон дисперсии:

$$\omega^2 = \frac{k^2}{1 + k^2}.$$

Для уравнения (59) мажорирующее неравенство строится для величины [19]

$$R = \int_{-\infty}^{+\infty} (g^2 + g_x^2) dx > 0,$$

где $g_x = U$ и $0 < \alpha \leq 1/4$.

4. ОБОБЩЕНИЯ КРИТЕРИЯ ВЛАСОВА—ПЕТРИЩЕВА—ТАЛАНОВА

В этом разделе мы рассмотрим, как условия типа критерия Власова—Петрищева—Таланова могут быть использованы для изучения коллапсов в трёхмерных волновых системах. Мы обсудим два примера: обобщённое трёхмерное уравнение Кадомцева—Петвиашвили

$$\frac{\partial}{\partial z} (U_t + U_{zzz} + (n+2)(n+1)U^{n+2}U_z) = \Delta_{\perp} U \quad (60)$$

и так называемое гиперболическое нелинейное уравнение Шрёдингера

$$i\psi_t + \Delta_{\perp} \psi - \psi_{zz} + |\psi|^2 \psi = 0. \quad (61)$$

В этих двух уравнениях $\Delta_{\perp} = \partial_{xx} + \partial_{yy}$ — оператор Лапласа в плоскости, поперечной к оси z , которая соответствует основному направлению распространения волны.

Случай $n = 3$ в (60) отвечает классическому уравнению Кадомцева—Петвиашвили. Уравнение Кадомцева—Петвиашвили с $n = 4$ возникает при описании волн звукового типа в антиферромагнетиках при определённых углах распространения [18].

Гиперболическое НУШ (61) возникает при описании эволюции квазимонохроматических волн с отрицательной дисперсией, что отвечает знаку минус перед слагаемым ψ_{zz} (см. [39–41]). Классические примеры таких волн — поверхностные гравитационные волны на глубокой воде и электромагнитные волны в нелинейных диэлектриках с нормальной дисперсией.

Начнём анализ с уравнения Кадомцева—Петвиашвили (60), полагая $n = 4$. Рассмотрим величину

$$\langle r_{\perp}^2 \rangle = \frac{1}{N} \int r_{\perp}^2 U^2 d\mathbf{r},$$

которая в силу сохранения $N = \int U^2 d\mathbf{r}$ имеет смысл среднего квадрата радиуса пучка. Как впервые показано в [18], для величины $\langle r_{\perp}^2 \rangle$ может быть установлен аналог теоремы вириала (6):

$$\frac{d^2}{dt^2} \int r_{\perp}^2 U^2 d\mathbf{r} = 48H - 8 \int U_z^2 d\mathbf{r}, \quad (62)$$

где H — сохраняющий своё значение гамильтониан, при $n = 4$ равный

$$H = \int \left[\frac{U_z^2}{2} + \frac{(\nabla_{\perp} W)^2}{2} - U^4 \right] d\mathbf{r}.$$

Отсюда немедленно следует оценка

$$\frac{d^2}{dt^2} \int r_{\perp}^2 U^2 d\mathbf{r} < 48H. \quad (63)$$

Таким образом, при $H < 0$ происходит коллапс пучка [18] — его сжатие (формально — до нуля). Можно показать, что критерий коллапса $H < 0$ имеет место и для всех целых значений $n > 4$.

Вопрос о критерии коллапса для классического трёхмерного уравнения Кадомцева—Петвиашвили, наиболее важного с точки зрения различных приложений, тем не менее остаётся до сих пор открытым, хотя о возможности коллапса свидетельствуют факт неограниченности снизу гамильтониана H при постоянном значении $N = \int U^2 d\mathbf{r}$, а также наблюдение коллапса при численном моделировании [42, 43].

Для гиперболического нелинейного уравнения Шрёдингера (61) в трёхмерной геометрии мы покажем, как, анализируя неравенства вириального типа, можно сделать заключение о невозможности коллапса волнового пакета как целого на стадии, когда имеется сжатие импульса по всем трём направлениям. Следует отметить, что представленное ниже доказательство, строго говоря, не исключает возникновения особенностей при начальных данных, отличных от рассматриваемых в этом разделе.

Уравнение (61) с гиперболическим оператором второго порядка описывает различное поведение волнового пакета в продольном направлении (вдоль оси z) и в направлении, поперечном к этой оси. В поперечном направлении квазичастицы притягиваются друг к другу, стремясь сжать пучок поперёк. В продольном направлении квазичастицы имеют отрицательную массу, поэтому нелинейность стремится увеличить размер пакета вдоль оси z . Главный вопрос в этой связи состоит в том, успеет ли образоваться особенность за счёт сжатия в поперечном направлении, несмотря на разлёт квазичастиц в продольном направлении.

Уравнение (61) является гамильтоновым с

$$H = \int |\nabla_{\perp} \psi|^2 d\mathbf{r} - \int |\psi_z|^2 d\mathbf{r} - \int \frac{|\psi|^4}{2} d\mathbf{r} \equiv I_{\perp} - I_z - Y. \quad (64)$$

Рассмотрим, как меняются средние квадраты размера волнового пакета вдоль и поперёк оси z , $\langle z^2 \rangle$ и $\langle r_{\perp}^2 \rangle$. Вычисления, аналогичные (2), дают

$$N \frac{d^2 \langle r_{\perp}^2 \rangle}{dt^2} = 4 \left[2 \int |\nabla_{\perp} \psi|^2 d\mathbf{r} - \int |\psi|^4 d\mathbf{r} \right], \quad (65)$$

$$N \frac{d^2 \langle z^2 \rangle}{dt^2} = 8 \int |\psi_z|^2 d\mathbf{r} + 2 \int |\psi|^4 d\mathbf{r}. \quad (66)$$

Величины $\langle r_{\perp}^2 \rangle$, $I_{\perp}$ из уравнения (65) и $\langle z^2 \rangle$, I_z из уравнения (66) связаны соотношением неопределённости:

$$I_{\perp} \langle r_{\perp}^2 \rangle \geq N, \quad I_z \langle z^2 \rangle \geq N/4. \quad (67)$$

С учётом этих соотношений и определения H (64) можно оценить правые части (65) и (66):

$$N \frac{d^2 \langle r_{\perp}^2 \rangle}{dt^2} = 8H + 8I_z \geq -4H + \frac{2N}{\langle z^2 \rangle}, \quad (68)$$

$$N \frac{d^2 \langle z^2 \rangle}{dt^2} = -4H + 4I_z + 4I_{\perp} > -4H + \frac{4N}{\langle r_{\perp}^2 \rangle}. \quad (69)$$

Рассмотрим теперь режим всестороннего сжатия, наиболее благоприятный с точки зрения коллапса, когда

$$\frac{d \langle r_{\perp}^2 \rangle}{dt} < 0, \quad \frac{d \langle z^2 \rangle}{dt} < 0,$$

и покажем, что понимаемый как уменьшение среднего квадрата поперечного и/или продольного размеров до нуля ($\langle r_{\perp}^2 \rangle \rightarrow 0$, $\langle z^2 \rangle \rightarrow 0$) коллапс в этом случае невозможен.

Вначале докажем, что при $d \langle z^2 \rangle / dt < 0$ средний квадрат продольного размера волнового пакета не может обратиться в нуль. Рассмотрим уравнение (66), из которого с учётом (67) следует замкнутое неравенство для $\langle z^2 \rangle$:

$$N \frac{d^2 \langle z^2 \rangle}{dt^2} \geq 8I_z \geq \frac{2N}{\langle z^2 \rangle}. \quad (70)$$

При $d\langle z^2 \rangle / dt < 0$ это соотношение допускает однократное интегрирование по времени:

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{d\langle z^2 \rangle}{dt} \right)^2 - 2 \ln \langle z^2 \rangle \leq \mathcal{E}(0), \quad (71)$$

где $\mathcal{E}(0)$ — начальное значение $\mathcal{E}(t)$. Если $\langle z^2 \rangle \rightarrow 0$, то левая часть этого неравенства растёт за счёт слагаемого с логарифмом до бесконечности, что противоречит неравенству (71). Таким образом, сжатие до $\langle z^2 \rangle \rightarrow 0$ невозможно.

Покажем теперь, что невозможно и сжатие до нуля в поперечном направлении. Для этого умножим неравенство (68) на $d\langle z^2 \rangle / dt < 0$, а неравенство (69) на $d\langle r_{\perp}^2 \rangle / dt < 0$, результаты сложим, а затем в полученном выражении проведём интегрирование по времени от нуля до t . В результате получим

$$E(t) = N \frac{d\langle r_{\perp}^2 \rangle}{dt} \frac{d\langle z^2 \rangle}{dt} - 8H \langle z^2 \rangle + 4H \langle r_{\perp}^2 \rangle - 2N \ln \langle z^2 \rangle - 4N \ln \langle r_{\perp}^2 \rangle \leq E(0), \quad (72)$$

где $E(0)$ — конечное значение $E(t)$ в начальный момент времени. Из этого неравенства немедленно следует невозможность коллапса на стадии сжатия, поскольку первый член в левой части неравенства (72) положителен по определению, члены, пропорциональные H , конечны, а логарифмическое слагаемое при $\langle r_{\perp}^2 \rangle \rightarrow 0$ оказывается бесконечно большим. Это не согласуется с тем, что зависимость $E(t)$ ограничена сверху начальным значением $E(0)$. Таким образом, на наиболее «опасной» стадии всестороннего сжатия коллапс трёхмерного распределения волнового поля как целого невозможен [23]. Означает ли это, что коллапс в такой системе вообще невозможен? Строго говоря, нет. Во-первых, потому, что критерии типа критерия Власова—Петрищева—Таланова являются достаточными. Во-вторых, представленный анализ показывает, что коллапс, если он вообще возможен, следует искать для режимов, когда имеется истечение газа квазичастиц в продольном направлении, ведущее к росту продольного масштаба волнового пакета. До сих пор, однако, этот вопрос остаётся открытым, несмотря на значительный интерес к этой проблеме (см., например, последние публикации [44–46] на эту тему).

Данная работа поддержана РФФИ (грант № 00–01–00929), Программой поддержки ведущих научных школ РФ и INTAS (грант № 00–00292).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Власов С. Н., Петрищев В. А., Таланов В. И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1971. Т. 14. С. 1353.
2. Захаров В. Е., Кузнецов Е. А. // ЖЭТФ. 1986. Т. 91. С. 1310.
3. Gross E. P. // Nuovo Cimento. 1961. V. 20. P. 454.
4. Питаевский Л. П. // ЖЭТФ. 1961. Т. 40. С. 640.
5. Flambaum V., Kuznetsov E. // Proc. NATO ARW "Singularities in Fluids, Optics and Plasmas" / Ed. by E. Caflisch, G. Papanicolaou. Kluwer Publ., 1993. P. 197.
6. Berge L., Rasmussen J. J. // Phys. Lett. A. 2002. V. 304. P. 136.
7. Таланов В. И. // Письма ЖЭТФ. 1970. Т. 11. С. 303.
8. Власов С. Н., Таланов В. И. Частное сообщение. 1984.
9. Kuznetsov E. A., Turitsyn S. K. // Phys. Lett. A. 1985. V. 112. P. 273.
10. Власов С. Н., Таланов В. И. Самофокусировка волн. Н. Новгород: ИПФ РАН, 1997.
11. Захаров В. Е. // ЖЭТФ. 1972. Т. 62. С. 1745.
12. Levine H. A. // Trans. Am. Math. Soc. 1974. V. 192. P. 1.
13. Kuznetsov E. A., Rasmussen J. J., Rypdal K., Turitsyn S. K. // Physica D. 1995. V. 87. P. 273.

14. Kalantarov V., Ladyzhenskaya O. // J. Sov. Math. 1978. V. 10. P. 53.
15. Захаров В. Е. // ЖЭТФ. 1973. Т. 65. С. 219.
16. Fal'kovich G. E., Spector M. D., Turitsyn S. K. // Phys. Lett. A. 1983. V. 99. P. 271.
17. Орлов А. Ю. Soliton collapse in integrable systems: Препринт ИАЭ СО АН СССР. Новосибирск, 1983.
18. Турицын С. К., Фалькович Г. Е. // ЖЭТФ. 1985. Т. 89. С. 258.
19. Turitsyn S. K. // Phys. Rev. E. 1993. V. 47. P. R13.
20. Fujita H. J. // Fac. Sci. Univ. Tokio. Sect. A: Math. 1966. V. 16. P. 105.
21. Turitsyn S. K. // Phys. Rev. E. 1993. V. 47. P. R796.
22. Кузнецов Е. А., Лушников П. М. // ЖЭТФ. 1995. Т. 108. С. 614.
23. Berge L., Kuznetsov E. A., Rasmussen J. J. // Phys. Rev. E. 1996. V. 53. P. R1 340.
24. Kuznetsov E. A. // Physica D. 2003 (accepted). <http://ru.arxiv.org/pdf/physics/0204080>.
25. Захаров В. Е., Кузнецов Е. А. // ЖЭТФ. 1974. Т. 66. С. 594.
26. Kuznetsov E. A., Rubenchik A. M., Zakharov V. E. // Phys. Rep. 1986. V. 142. P. 103.
27. Weinstein M. I. // Commun. Math. Phys. 1983. V. 87. P. 567.
28. Rasmussen J. J., Rypdal K. // Physica Scripta. 1986. V. 33. P. 481.
29. Вахитов Н. Г., Колоколов А. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1973. Т. 16. С. 1 020.
30. Nirenberg L. // Ann. Sci. Norm. Sup. Pisa. 1966. V. 20, No. 4. P. 73.
31. Ладыженская О. А. Математические проблемы динамики несжимаемой вязкой жидкости. М.: Наука, 1970.
32. Belanger P. A. // J. Opt. Soc. Am. B. 1991. V. 8. P. 2 077.
33. Schopf W., Kramer L. // Phys. Rev. Lett. 1991. V. 66. P. 2 316.
34. Kaplan E., Kuznetsov E., Steinberg V. // Phys. Rev. E. 1994. V. 50. P. 3 712.
35. Колмогоров А. Н., Петровский И. Г., Пискунов Н. С. // Бюлл. МГУ. Математика и механика. 1937. Т. 1. С. 1.
36. Zeldovich Ya. B. // Astron. Astrophys. 1970. V. 5. P. 84.
37. Frisch U. Turbulence. The legacy of A. N. Kolmogorov. Cambridge Univ. Press, 1995.
38. Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. Теория солитонов. Метод обратной задачи рассеяния. М.: Наука, 1980.
39. Захаров В. Е. // ПМТФ. 1968. Т. 9. С. 86.
40. Литвак А. Г., Петрова Т. А., Сергеев А. М., Юнаковский А. Д. // Физика плазмы. 1983. Т. 9. С. 495.
41. Жарова Н. А., Литвак А. Г., Петрова Т. А., Сергеев А. М., Юнаковский А. Д. // Письма в ЖЭТФ. 1986. Т. 44. С. 12.
42. Кузнецов Е. А., Мушер С. Л., Шафаренко А. В. // Письма в ЖЭТФ. 1983. Т. 37. С. 241.
43. Кузнецов Е. А., Мушер С. Л. // ЖЭТФ. 1986. Т. 91. С. 1 605.
44. Bergé L., Germaschewski K., Grauer R., Rasmussen J. J. // Phys. Rev. Lett. 2002. V. 89. Article no. 153 902.
45. Жарова Н. А., Литвак А. Г., Миронов В. А. // Письма в ЖЭТФ. 2002. Т. 75. С. 655.
46. Жарова Н. А., Литвак А. Г., Миронов В. А. // ЖЭТФ. 2003. Т. 123. С. 726.

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН,
г. Москва, Россия

Поступила в редакцию
30 июня 2003 г.

INTEGRAL CRITERIA OF WAVE COLLAPSES

E. A. Kuznetsov

We present an overview of the results of analysis of the integral criteria of wave collapses, i.e., the sufficient criteria of the formation of singularities from initially smooth wave-field distributions in a finite time. All such criteria are based on solving a majorizing second-order differential inequality which can be obtained for a wide range of models, including the nonlinear Schrödinger equation, the nonlinear Klein–Gordon equation, the time-dependent Ginzburg–Landau equation, the equations of dust hydrodynamics, the (Boussinesq) nonlinear-string equation, and the generalized Kadomtsev–Petviashvili equation.

УДК 533.951

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА ВОЛНОВЫХ ПУЧКОВ И ПАКЕТОВ В ИОНИЗИРУЕМОЙ СРЕДЕ

В. Б. Гильденбург¹, Н. А. Жарова¹, В. И. Позднякова²

Представлен обзор исследований по нелинейной динамике системы плазма—поле, формируемой в процессах пробоя газа лазерным или микроволновым излучением высокой интенсивности. Доминирующая в этих процессах ионизационная нелинейность приводит к существенной модификации известных эффектов самовоздействия волн в среде и к ряду эффектов нового типа, отсутствующих при других механизмах нелинейности. Описаны важнейшие из этих эффектов: ионизационно-полевая неустойчивость плоской волны, самоканалирование излучения в виде поверхностных или вытекающих волн, автоконверсия спектра ионизирующего излучения. Приведены результаты компьютерного моделирования динамики неравновесных свободно локализованных разрядов, создаваемых сфокусированными микроволновыми и лазерными импульсами.

ВВЕДЕНИЕ

Исследование процессов самовоздействия волн, обусловленного ионизационной (так называемой отрицательной) нелинейностью, стимулируется потребностями и перспективами разнообразных практических приложений. Часть из них связывается с возможностью использования мощного электромагнитного излучения различных частотных диапазонов (от радио до оптического) для создания газоразрядной плазмы с заданными свойствами, другая часть касается проблем транспортировки или преобразования частотного спектра самого этого излучения в условиях вызываемого им пробоя среды. Исследования в данной области охватывают в настоящее время весьма широкий круг проблем и ключевых моделей, во многом сходный с тем, который был сформирован известными работами по теории самофокусировки волн, выполненными В. И. Талановым и его сотрудниками (см. монографию [1] и цитированную в ней литературу) для сред с положительной (фокусирующей) нелинейностью. К этому кругу проблем принадлежит, в частности, описание линейной и нелинейной стадий ионизационно-полевых неустойчивостей волны, изучение динамики сфокусированного излучения в условиях пробоя и анализ возможности его ионизационного самоканалирования.

Изменение знака нелинейности (знака нелинейной поправки к диэлектрической проницаемости или показателю преломления среды) приводит, естественно, к изменению знака нелинейной рефракции волнового пучка (см., например, [2]). Создаваемая в процессе пробоя среды неоднородная плазма оказывает на пучок дефокусирующее действие, что, в принципе, может остановить процесс пробоя уже на весьма малом уровне электронной концентрации [3–5]. Наряду с этим очевидным и хорошо известным свойством, процесс ионизационного самовоздействия поля в среде характеризуется также некоторыми важными и примечательными особенностями, не присущими другим нелинейным механизмам в изотропной плазме (пондеромоторному, тепловому, релятивистскому). Одна из них — это способность вызывать эффекты взаимной концентрации (совместной локализации) поля и плазмы [6, 7]. Эти эффекты приводят к развитию в волновых полях ионизационных неустойчивостей различных типов — как крупномасштабных, так и мелкомасштабных (плазменно-резонансных) [6–8]. Они же делают возможным (несмотря на

дефокусирующий характер ионизационной нелинейности) самоканалирование ионизирующего излучения в виде поверхностных или вытекающих волн, направляемых самоподдерживающимися плазменными волноводами со свободной границей [9–11].

Другая важная особенность ионизационного самовоздействия волн — непрерывное и монотонное изменение (уменьшение) показателя преломления среды в процессе пробоя. Такое изменение может вызвать эффект сильного параметрического преобразования частотного спектра ионизирующего излучения [12–15] (адиабатическая автоконверсия, «синий сдвиг» несущей, генерация спектрального суперконтинуума).

В настоящем обзоре представлены результаты теоретического исследования некоторых динамических моделей неравновесных микроволновых и оптических разрядов, иллюстрирующие отмеченные выше особенности ионизационного самовоздействия волн. Рассмотрены крупно- и мелкомасштабные ионизационно-полевые неустойчивости плоской волны (раздел 1), различные виды ионизационного самоканалирования (раздел 2), адиабатическая автоконверсия частоты одномерных волновых пакетов (раздел 3) и динамика поля и плазмы при пробое газа сфокусированными микроволновыми и лазерными импульсами (раздел 4). Во всех случаях основным предметом исследования является пространственно-временная эволюция переменного поля и плазмы в так называемых неравновесных (холодных) разрядах с горячими электронами и холодными молекулами. Подобные неравновесные режимы ионизации характерны для начальных стадий любых разрядов, а для широкого класса условий их создания и поддержания оказываются единственно реализуемыми.

1. ИОНИЗАЦИОННО-ПОЛЕВЫЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ

1.1. Постановка задачи. Общее дисперсионное уравнение

Различные модели ионизационно-полевых неустойчивостей, обусловленных взаимным усилением возмущений амплитуды поля и плотности плазмы в разрядах различных типов, рассматривались в работах [6–8, 16, 17]. В качестве опорной модели, позволяющей описать их типичные кинематические характеристики, мы рассмотрим здесь (следуя в основном методике, использованной в работе [8]) однородный стационарный разряд, поддерживаемый в холодном газе полем бегущей плоской электромагнитной волны. Частота волны ω предполагается достаточно большой по сравнению с частотой соударений электронов ν , что позволяет пренебречь на интересующих нас пространственных масштабах поглощением волны, рассматривая плазму как среду с чисто действительной (положительной) диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 1 - n$, где $n = N/N_c$, N — электронная концентрация (плотность плазмы), $N_c = m\omega^2/(4\pi e^2)$ — её критическое значение, e и m — заряд и масса электрона. Стационарность невозмущённого однородного состояния обеспечивается балансом процессов ударной ионизации и потерь частиц, обусловленных прилипанием электронов к нейтральным молекулам и электрон-ионной рекомбинацией. Динамика неоднородных возмущений управляется, наряду с указанными элементарными процессами, также и процессами диффузии (электронной или амбиполярной). Такой режим поддержания и эволюции плазмы в волновом поле характерен, в частности, для свободно локализованных микроволновых разрядов в газах достаточно низкого давления (отвечающего условию $\nu \ll \omega$), где впервые и наблюдались рассматриваемые неустойчивости [8, 18].

Эволюция поля и плазмы в рассматриваемой модели описывается векторным волновым уравнением

$$-\frac{2i\omega}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \Delta \mathbf{E} + \nabla \left(\frac{\mathbf{E}}{\varepsilon} \nabla \varepsilon \right) + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mathbf{E} = 0 \quad (1)$$

для медленной временной огибающей электрического поля, представляемого в виде $\text{Re}[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \exp(i\omega t)]$, и уравнением баланса электронов

$$\frac{\partial N}{\partial t} = D \Delta N + (\nu_i - \nu_a) N - \alpha N^2, \quad (2)$$

в котором частота ионизации $\nu_i = \nu_i(|\mathbf{E}|)$ рассматривается как заданная быстро растущая функция амплитуды поля, а коэффициент диффузии D , частота прилипания электронов ν_a и коэффициент электрон-ионной рекомбинации α , зависящие от амплитуды поля (в окрестности порога пробоя) гораздо слабее, предполагаются постоянными [2, 19].

Пусть в стационарном состоянии

$$N = N_0, \quad \mathbf{E} = \mathbf{x}_0 E_0 \exp(-ik \sqrt{\varepsilon_0} z), \quad \nu_i = \nu_i(E_0) \equiv \nu_{i0} = \nu_a + \alpha N_0, \quad (3)$$

где $k = \omega/c$, $\varepsilon_0 = 1 - n_0$, $n_0 = N_0/N_c$. Полагая для возмущенного состояния $n = n_0 + n_1(\mathbf{r}, t)$, $E_x = (E_0 + E_1) \exp(-ik \sqrt{\varepsilon_0} z)$ и выполняя несложные преобразования в рамках стандартной схемы исследования устойчивости малых пространственно-периодических возмущений вида $\{n_1, E_1\} \propto \exp(\gamma t - i\mathbf{\kappa} \mathbf{r})$, получаем следующее дисперсионное уравнение, связывающее временную постоянную возмущения γ с его волновым вектором $\mathbf{\kappa}$:

$$(\gamma + \gamma_0) \left[\frac{\kappa^2}{k^2} + 4 \frac{k^2}{\kappa^2} \left(\frac{\gamma}{\omega} - i \frac{\kappa_z}{k} \sqrt{\varepsilon_0} \right)^2 \right] = \beta \left(\frac{\kappa_x^2}{k^2 \varepsilon_0} - 1 \right). \quad (4)$$

Здесь $\gamma_0 = \alpha N_0 + D\kappa^2$ — декремент собственного затухания возмущений плотности, $\beta = n_0 E_0 d\nu_{i0}/dE_0$ — параметр, определяющий нелинейную связь между возмущениями поля и плотности плазмы. При $\beta = 0$ эти возмущения независимы и корни уравнения (4) (при действительном $\mathbf{\kappa}$) отрицательные или чисто мнимые ($\text{Re } \gamma \leq 0$, неустойчивостей нет). При $\beta > 0$ некоторые корни приобретают положительные действительные части, т. е. разряд оказывается неустойчивым. Анализ решения дисперсионного уравнения в различных областях пространства волновых векторов $\mathbf{\kappa}$ при различных соотношениях между параметрами позволяет выявить основные типы неустойчивости.

1.2. Вынужденное ионизационное рассеяние

Рассмотрим вначале случай малых значений параметра связи β . Выражая проекции волнового вектора через сферические углы:

$$\kappa_z = \kappa \cos \psi, \quad \kappa_x = \kappa \sin \psi \cos \varphi, \quad (5)$$

где ψ — полярный угол, образуемый вектором $\mathbf{\kappa}$ с осью z , φ — угол между проекцией вектора $\mathbf{\kappa}$ на плоскость xy и осью x , т. е. направлением электрического поля, с точностью до членов первого порядка по β получаем следующие выражения для корней γ :

$$\gamma_1 = i\tilde{\gamma}_+ + \frac{\beta\omega}{4} \frac{i\gamma_0 + \tilde{\gamma}_+}{\gamma_0^2 + \tilde{\gamma}_+^2} B, \quad \gamma_2 = i\tilde{\gamma}_- - \frac{\beta\omega}{4} \frac{i\gamma_0 + \tilde{\gamma}_-}{\gamma_0^2 + \tilde{\gamma}_-^2} B, \quad (6)$$

$$\gamma_3 = -\gamma_0 - \beta B G^{-1}, \quad (7)$$

где

$$\tilde{\gamma}_+ = \omega \frac{\kappa}{k} \left(\sqrt{\varepsilon_0} \cos \psi + \frac{\kappa}{2k} \right), \quad \tilde{\gamma}_- = \omega \frac{\kappa}{k} \left(\sqrt{\varepsilon_0} \cos \psi - \frac{\kappa}{2k} \right), \quad B = 1 - \frac{\kappa^2}{k^2 \varepsilon_0} \sin^2 \psi \cos^2 \varphi, \quad (8)$$

$$G = \frac{\kappa^2}{k^2} + 4 \frac{k^2}{\kappa^2} \left(\frac{\gamma_0}{\omega} + i \frac{\kappa}{k} \sqrt{\varepsilon_0} \cos \psi \right)^2. \quad (9)$$

Из трёх ветвей решения $\gamma_1(\kappa)$, $\gamma_2(\kappa)$ и $\gamma_3(\kappa)$ первые две (высокочастотные) являются «зеркально сопряжёнными»: $\gamma_1(\psi) = \gamma_2^*(\pi - \psi)$, т.е. значениям $\gamma_1(\kappa)$ и $\gamma_2(-\kappa)$ соответствует одно и то же волновое возмущение. Третья ветвь симметрична по κ : $\gamma_3(\psi) = \gamma_3^*(\pi - \psi)$. Отсюда следует, что достаточно исследовать функции $\gamma_1(\psi)$, $\gamma_2(\psi)$ и $\gamma_3(\psi)$ в области углов $0 < \psi < \pi/2$. В этой области при $\gamma_0 \ll \omega$ поправки к невозмущённым значениям корней γ_2 и γ_3 имеют острые резонансные максимумы в окрестности точки

$$\kappa = \kappa_0 = 2k \sqrt{\varepsilon_0} \cos \psi, \quad (10)$$

соответствующей волновому синхронизму возмущений концентрации с суммарным полем двух собственных электромагнитных волн невозмущённой системы (падающей и рассеянной под углом $\psi_r = \pi - 2\psi$). Максимум $\text{Re } \gamma_2$ достигается в точке $\kappa = \kappa_0 + 2\gamma_0 k^2 / (\kappa_0 \omega)$, где

$$\gamma_2 = -i\gamma_0(\kappa_0) + \frac{\beta \omega B(\kappa_0)}{8\gamma_0(\kappa_0)}, \quad (11)$$

$$\gamma_0(\kappa_0) = \alpha N_0 + 4D\varepsilon_0 k^2 \cos^2 \psi, \quad B(\kappa_0) = 1 - \sin^2(2\psi) \cos^2 \varphi. \quad (12)$$

В области применимости этой формулы, т.е. при достаточно малых β :

$$\beta B \ll 8\varepsilon_0 \gamma_0 \cos^2 \psi, \quad \beta B \ll 8\gamma_0^2 / \omega, \quad (13)$$

инкремент неустойчивости $\text{Re } \gamma_2 \ll |\text{Im } \gamma_2|$, а величина $\text{Re } \gamma_3$ всегда отрицательна ($\text{Re } \gamma_3 = -\gamma_0$).

Наличие максимума инкремента при $\kappa \approx \kappa_0$ характерно для неустойчивостей, связанных с процессами вынужденного рассеяния волн в среде. Здесь мы также фактически имеем дело с процессом такого рода, который естественно назвать вынужденным ионизационным рассеянием. Волна параметра (резонансная решётка плотности плазмы) формируется в этом процессе благодаря возмущениям скорости ионизации и распространяется, как следует из отрицательности $\text{Im } \gamma_2$, в направлении, образующем тупой угол $\pi - \psi$ с осью z , т.е. преимущественно навстречу волне накачки. Сдвиг частоты рассеянной волны при этом положителен. Инкремент $\text{Re } \gamma_1$ в области $0 < \psi < \pi/2$ имеет максимум, аналогичный (11), в окрестности точки $\kappa = 0$, где также выполняется условие синхронного взаимодействия волн (для рассеяния под малыми углами). Соответствующие крупномасштабные неустойчивости, как и особенности поведения инкремента $\text{Re } \gamma_2$ вблизи направления $\psi = \pi/2$, способные представлять интерес для разрядов достаточно большой протяжённости, рассмотрены в [8].

Угловая зависимость инкремента $\text{Re } \gamma_2$ в плоскости, перпендикулярной электрическому полю ($\varphi = \pi/2$), полностью определяется множителем $\gamma_0^{-1} = (\alpha N_0 + 4D\varepsilon_0 k^2 \cos^2 \psi)^{-1}$ в формуле (11). В случае сильной рекомбинации (малые D , большие α) эта зависимость выражена слабо; в случае сильной диффузии инкремент максимален при $\psi \approx \pi/2$, т.е. для малых углов рассеяния. В случае $\varphi \neq \pi/2$, т.е. для возмущений с волновым вектором κ , имеющим отличную от нуля проекцию κ_x на направление электрического поля, необходимо учитывать также поляризационный множитель $B = 1 - \sin^2(2\psi) \cos^2 \varphi$, обращающий в нуль величину $\text{Re } \gamma_2$ для направлений рассеяния, близких к направлению вектора $\mathbf{E}$ ($\varphi = 0$, $\psi = \pi/4$). Характерный масштаб неустойчивости (расстояние между соседними стратами $\Lambda = 2\pi/\kappa_0$) близок к половине длины волны накачки для рассеяния назад и сильно возрастает при уменьшении угла рассеяния.

При выходе параметра связи β за пределы, устанавливаемые неравенствами (13), выражения для корней дисперсионного уравнения существенно изменяются. В частности, в области

$$8\gamma_0^2 / \omega \ll \beta B \ll 8\omega \varepsilon_0^2 \cos^4 \psi, \quad (14)$$

представляющей достаточно реалистической для основной зоны углов рассеяния как в микроволновом, так и в оптическом диапазонах, вблизи точки $\kappa = \kappa_0$ ($|\kappa - \kappa_0| \ll \kappa_0 \sqrt{\beta B/\omega}$) имеем

$$\gamma_2 = (1 - i) \sqrt{\beta \omega B/8} \quad \gamma_3 = -(1 - i) \sqrt{\beta \omega B/8}. \quad (15)$$

При значениях $\beta B \sim \nu_{i0}$, достигающихся, как правило, при плотности плазмы $N_0 \sim 0,1N_c$, неустойчивость является весьма быстрой — инкремент намного превышает частоту ионизации ν_{i0} в поле волны накачки: $\text{Re } \gamma_2 \sim \sqrt{\omega \nu_{i0}} \gg \nu_{i0}$. Несмотря на высокие значения инкремента, в реальных пространственно-ограниченных разрядах данная неустойчивость может стать существенной лишь в том случае, если она успевает развиться за время прохождения электромагнитной волны через область ионизации. Легче всего такая ситуация реализуется в оптических разрядах, создаваемых сфокусированными лазерными импульсами высокой интенсивности в плотных газах. Возникающие в этих условиях неустойчивости исследовались для различных механизмов ионизации (ударного, туннельного, многофотонного) в работах [16, 17].

1.3. Плазменно-резонансная мелкомасштабная неустойчивость

Если параметр β превышает некоторый (определяемый ниже) порог β_c , на низкочастотной ветви корней $\gamma_3(\kappa)$ появляется неустойчивость, которая, в отличие от рассмотренной выше, не связана с какими-либо условиями волнового синхронизма и может развиваться на масштабах, много меньших длины электромагнитной волны. Для анализа этой неустойчивости в уравнении (4) можно положить $\gamma/\omega = 0$, записывая выражение для корня γ_3 в области не слишком малых положительных значений разности $\kappa - \kappa_0 \gg \kappa_0 \sqrt{\beta B/\omega}$ в виде

$$\gamma_3 = -\gamma_0 + \beta \frac{\kappa_x^2 - k^2 \varepsilon_0}{(\kappa^2 - \kappa_0^2) \varepsilon_0}. \quad (16)$$

Неустойчивость может существовать в коротковолновой части ветви $\kappa_x > k \sqrt{\varepsilon_0}$. Её инкремент и ширина области существования $\Delta \kappa$ максимальны при $\kappa \parallel \mathbf{E}$ ($\kappa = \kappa_x$, т. е. $\psi = \pi/2$, $\varphi = 0$), где

$$\gamma_3 = -(\alpha N_0 + D \kappa^2) + \beta \left(\frac{1}{\varepsilon_0} - \frac{k^2}{\kappa^2} \right). \quad (17)$$

Максимум $\gamma_3(\kappa)$ равен

$$\gamma_{3 \max} = \varepsilon_0^{-1} \beta - 2 \sqrt{\beta D k^2} - \alpha N_0 \quad (18)$$

и достигается в точке

$$\kappa_{\max} = (\beta k^2 / D)^{1/4}. \quad (19)$$

Пороговое условие возникновения неустойчивости при отсутствии рекомбинации, как следует из (18), имеет вид

$$\beta > \beta_c = 4 \varepsilon_0^2 D k^2. \quad (20)$$

Волновое число и пространственный масштаб на пороге неустойчивости (при $\beta = \beta_c$) определяются выражениями

$$\kappa_{\max}(\beta_c) = k \sqrt{2 \varepsilon_0}, \quad \Lambda = \lambda / \sqrt{2 \varepsilon_0}. \quad (21)$$

При сильном превышении порога ($\beta \gg \beta_c$) неустойчивость существует в широкой полосе волновых чисел

$$k \sqrt{\varepsilon_0} < \kappa < 2k \sqrt{\varepsilon_0 \beta / \beta_c}. \quad (22)$$

Поскольку величина β пропорциональна плотности плазмы $n_0 = N_0/N_c$, неустойчивость становится возможной на той стадии процесса пробоя газа, когда плотность начинает превышать некоторое пороговое значение:

$$n_0 > n_{0c} = \beta_c (E_0 d\nu_{i0}/dE_0)^{-1}, \quad (23)$$

в практически интересных случаях лежащее в области $0,01 \div 0,1$. Рекомбинация приводит к повышению порога неустойчивости и полностью подавляет её при условии

$$\alpha N_0 > \beta/\varepsilon_0, \quad (24)$$

которое может выполняться (при малом отношении N_0/N_c) и в том случае, когда рекомбинация играет малую роль в общем балансе частиц, т. е. при $\alpha N_0 \ll \nu_a$.

Данная апериодическая неустойчивость, приводящая (на линейной стадии) к образованию в разряде плоских неподвижных слоёв (страт), перпендикулярных вектору электрического поля, может рассматриваться как ионизационный аналог известной модуляционной неустойчивости в плазме с фокусирующей (стрикционной или пондеромоторной) нелинейностью. Её физический механизм весьма прост и основан, фактически, на явлении плазменного резонанса: пока плотность плазмы остаётся ниже критической ($n < 1$), её увеличение в тонком слое, перпендикулярном полю, сопровождается ростом амплитуды поля ($E_x = \text{const}/\varepsilon$), что, в свою очередь, приводит к возрастанию частоты ионизации ν_i и, следовательно, к дальнейшему росту n . Инкремент неустойчивости, естественно, сильно возрастает с приближением к частоте плазменного резонанса (при $\varepsilon_0 \rightarrow 0$). В отличие от модуляционной неустойчивости, возникающей лишь в узкой резонансной области вблизи поверхности критической плотности, рассматриваемая ионизационная неустойчивость, называемая также квазистатической или плазменно-резонансной, может охватывать практически всю область прозрачности плазмы ($1 > n_0 > n_{0c}$). Развитие неустойчивости на нелинейной стадии приводит к мелкомасштабному дроблению разряда на слои или квазисферические плазменные сгустки с закритической плотностью и может сопровождаться генерацией интенсивных ленгмюровских волн [6, 7, 20]. Подобное дробление наблюдалось в экспериментах по микроволновому пробоя газа в сфокусированных волновых пучках [4, 18]; изложенные выше теоретические представления находятся в удовлетворительном согласии с данными этих экспериментов как в отношении условий возникновения неустойчивости, так и её характерных скоростей и масштабов.

2. САМОКАНАЛИРОВАНИЕ ИОНИЗИРУЮЩЕГО ИЗЛУЧЕНИЯ

2.1. Поверхностная волна в свободно локализованном плазменном волноводе

Как было показано в работе [9], уравнения электродинамики в безграничной однородной изотропной среде с дефокусирующей (ионизационной) нелинейностью допускают существование стационарной свободно локализованной структуры в виде медленной поверхностной волны, направляемой ею же созданным плазменным волноводом со свободной границей. Такая структура, не требующая для своего поддержания ни стороннего источника ионизации, ни газоразрядной трубки, отделяющей ионизованную область от неионизованной, может рассматриваться как один из немногих примеров, в которых волновое поле и изотропная (незамагниченная) плазма оказывают друг на друга локализирующее действие и концентрируются в одной и той же области пространства. Этим, в частности, данная структура принципиально отличается от структуры, возникающей в процессе самофокусировки или самоканалирования квазиоптического волнового

пучка в плазме с фокусирующей (стрикционной) нелинейностью, где поперечная пространственная локализация волны сопряжена с образованием области пониженной плотности в заранее приготовленной плазме.

Выполненные ранее теоретические и экспериментальные исследования генерации плазмы поверхностной волной в основном относились либо к разрядам внутри наполненных газом трубок [21–23], либо к структурам, формируемым в результате фокусировки волн свистового диапазона в гиротропной плазме газового разряда в постоянном магнитном поле [24]. Имеются лишь отдельные экспериментальные указания на возможность получения протяжённых квазицилиндрических плазменно-полевых структур, не удерживаемых стенками трубки или постоянным магнитным полем [21]. Исследование условий образования и динамических свойств подобных структур в свободной атмосфере представляет интерес как с точки зрения общей теории нелинейных волновых процессов, так и в связи с перспективами их использования для создания свободно локализованных в газе плазменных волноводов и осуществления направленной передачи больших потоков электромагнитной энергии через ионизируемую среду. Ниже представлены результаты анализа, проведённого недавно на основании сравнительно простой динамической модели [10], которая описывает процесс формирования плазменных волноводов со свободной границей, сопровождаемый адиабатической трансформацией быстрой волны в медленную, в условиях туннельной ионизации газа полем двух пересекающихся плоских волн.

Анализ основывается на компьютерном моделировании в рамках начальной (временной) задачи. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ в однородной безграничной газовой среде электромагнитное поле задано в виде суперпозиции двух плоских волн p -поляризации с одинаковыми амплитудами E_0 и одинаковыми по модулю волновыми векторами $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$, лежащими в плоскости yz и образующими равные углы ϑ_0 с осью z ($k_{1z} = k_{2z} = h_0 = (\omega_0/c) \cos \vartheta_0$, $k_{1y} = -k_{2y} = g_0 = (\omega_0/c) \sin \vartheta_0$, ω_0 — частота волны при отсутствии возмущений, связанных с ионизацией газа). Электрическое поле обеих волн имеет компоненты E_y и E_z , а магнитное поле — компоненту H_x .

Изменения плотности плазмы описываем при помощи известного (рассматриваемого здесь в качестве модельного) выражения для скорости туннельной ионизации атома водорода:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = w = 4\Omega (N_g - N) \frac{E_a}{E} \exp\left(-\frac{2E_a}{3E}\right), \quad (25)$$

где $\Omega = 4,16 \cdot 10^{16} \text{ с}^{-1}$, $E_a = 5,14 \cdot 10^9 \text{ В/см}$ — атомные единицы частоты и поля, N_g — концентрация атомов газа, $E(t)$ — абсолютная величина мгновенной (быстро осциллирующей во времени) напряжённости электрического поля. В рамках адиабатического приближения, справедливого при достаточно малой скорости ионизации, поле при $t > 0$ можно рассматривать как бегущую в положительном направлении оси z поперечно-неоднородную квазимонохроматическую волну

$$\mathbf{E}(y, t) \exp(i\varphi(t) - ih_0 z), \quad \mathbf{H}(y, t) \exp(i\varphi(t) - ih_0 z) \quad (26)$$

с медленно (но в широких пределах) меняющейся частотой $\omega(t) = d\varphi/dt$ и постоянным продольным волновым числом h_0 . Поперечное распределение магнитного поля $H_x(y)$ и частота $\omega(t)$ (вообще говоря, комплексная) могут быть определены в каждый момент времени как собственная функция и собственное значение, отвечающие реализующемуся в этот момент распределению плотности плазмы $N(y, t)$, в стационарной краевой задаче с периодическими граничными условиями

$$H_x(y) = H_x(y + L), \quad L = 2\pi/g_0 = \text{const} \quad (27)$$

для уравнения

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) + \left(\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon - h_0^2 \right) H_x = 0. \quad (28)$$

Здесь $\varepsilon = 1 - \omega_p^2 / [\omega(\omega - i\nu)]$, $\omega_p^2 = 4\pi e^2 N/m$, ν — частота соударений электронов. Компоненты электрического поля E_y и E_z , определяющие скорость ионизации w , выражаются через H_x с помощью уравнений Максвелла:

$$\omega \varepsilon E_y = -ch_0 H_x, \quad \omega \varepsilon E_z = ic \partial H_x / \partial y. \quad (29)$$

Нормирующий множитель в определении собственной функции $H_x(y)$ в каждый момент времени находится на основании приведённого в [10] эволюционного уравнения, определяющего скорость потерь энергии в плазме с учётом соударений электронов и передачи энергии поля вновь рождающимся электронам.

Как показали проведённые численные расчёты, общий сценарий эволюции разряда выглядит следующим образом. Ввиду резкой зависимости средней скорости ионизации от амплитуды поля, на начальном этапе ионизация происходит в основном только внутри тонких слоёв в окрестности интерференционных максимумов электрического поля ($y = 0, \pm L/2, \dots$). С ростом плотности плазмы в каждом тонком слое растёт также компонента поля E_y (в соответствии с «квазистатической» формулой $E_y = \text{const}/\varepsilon$). Рост E_y приводит к увеличению скорости ионизации w и к ещё большему увеличению E_y . Таким образом, увеличение максимумов плотности плазмы и амплитуды поля происходит в режиме пространственного и временного обострения вплоть до того момента, когда величина $\text{Re } \varepsilon$ обращается в нуль. После перехода максимума плотности через значение, отвечающее плазменному резонансу, её рост замедляется и происходит постепенное расширение образовавшихся закритических слоёв. Описанный процесс подобен реализующемуся на нелинейной стадии плазменно-резонансной неустойчивости [6, 7]. Заметим, что частота соударений электронов и другие параметры задачи в проведённых расчётах выбирались таким образом, чтобы на стадии максимальной скорости роста поля и плотности плазмы всё же не нарушалось используемое в данном подходе адиабатическое приближение. Одновременно с образованием плазменных слоёв происходит изменение собственной частоты поля ω . В начале процесса (при $\text{Re } \varepsilon > 0$) частота несколько увеличивается, но после перехода плотности через критическое значение частота начинает убывать и падает до уровня, меньшего её начальной величины ω_0 . При этом фазовая скорость волны $V_{ph} = \omega/h_0$ также понижается и (при условии $h_0 \approx \omega/c$) становится меньше скорости света: волна из быстрой превращается в медленную поверхностную, прижатую к образовавшимся в пучностях поля плазменным слоям. Представленные на рис. 1–3 результаты численных расчётов, проведённых при $ch_0/\omega = 0,95$ ($\vartheta_0 = 18,2^\circ$), $E_0/E_a = 0,025$, $N_g/N_c(\omega_0) = 2,5$, демонстрируют образование плазменного слоя в пучности волны, сопровождаемое преобразованием объёмной волновой моды в поверхностную (рис. 1), изменение частоты волны (рис. 2) и обусловленное процессами поглощения уменьшение энергии поля на единицу площади слоя (рис. 3).

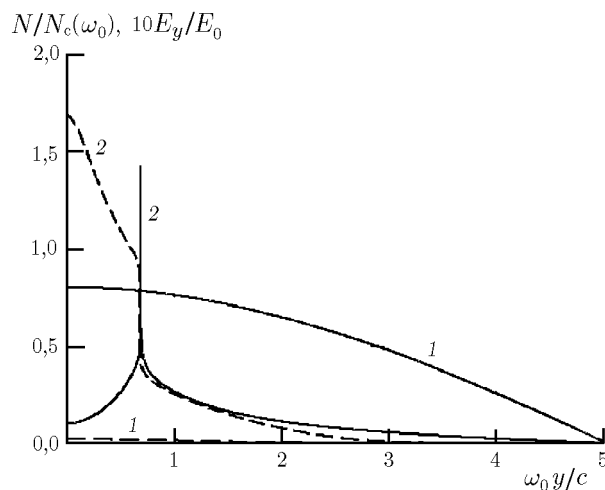


Рис. 1. Поперечные распределения амплитуды электрического поля (сплошные кривые) и плотности плазмы (пунктир) для двух моментов времени: $\omega_0 t = 2$ (кривые 1) и $\omega_0 t = 191$ (кривые 2)

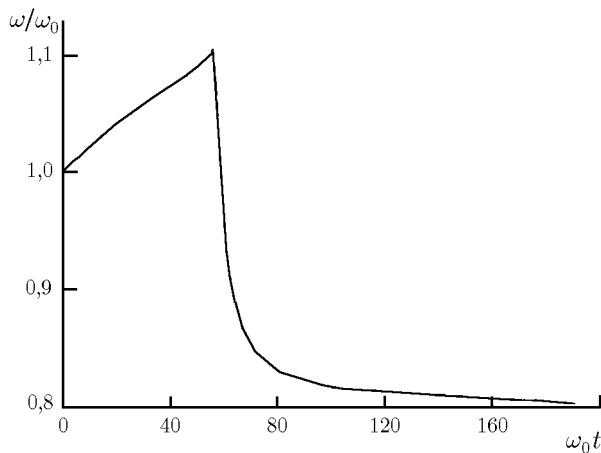


Рис. 2. Зависимость частоты поля от времени; резкое убывание частоты начинается в момент перехода плотности через точку плазменного резонанса ($\omega_0 t \approx 56$)

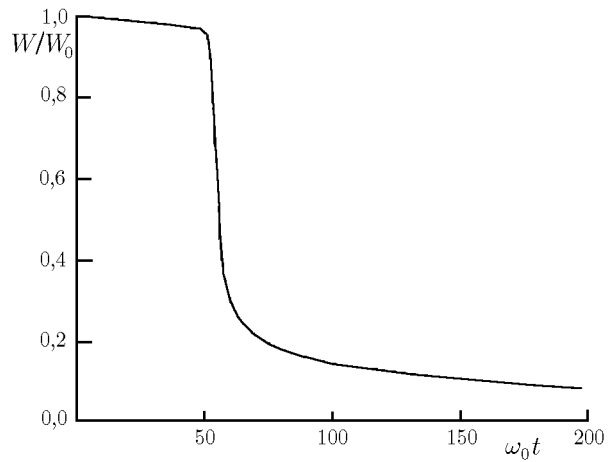


Рис. 3. Зависимость энергии волны W , приходящейся на единицу площади плазменного слоя в интервале $0 < y < L$, от времени. Резкое убывание энергии начинается одновременно с началом падения частоты поля ($\omega_0 t \approx 56$)

2.2. Плазменный волновод, направляющий волну с утечкой

Как показано в работе [11], резкая зависимость скорости туннельной ионизации от амплитуды поля позволяет сформировать однородный плазменный волновод, поддерживаемый в режиме насыщения ионизации запертой внутри него быстрой волной с утечкой. Газ внутри волновода полностью ионизован и отделён от внешней неионизованной области тонким переходным слоем, в котором плотность плазмы падает до нуля. Амплитуда волны, вытекающей из волновода в окружающее пространство, весьма мала вследствие того, что волна внутри волновода испытывает почти скользящее падение на его границу. Для круглого плазменного волновода радиуса a с плотностью плазмы $N_0 = N_g$ при выполнении условий $(\omega a/c)^{-2} \ll N_0/N_c \ll 1$ характерная длина затухания волны, определяемая её утечкой наружу, равна

$$l \approx \frac{1}{6} (\omega/c)^2 a^3 \sqrt{N_0/N_c}. \quad (30)$$

Эта длина, в принципе, может значительно превосходить релеевскую длину $l_F = (\omega/c) a^2$ сфокусированного пучка того же радиуса a .

3. АДИАБАТИЧЕСКАЯ АВТОКОНВЕРСИЯ ЧАСТОТЫ ОДНОМЕРНОГО ВОЛНОВОГО ПАКЕТА

Явление преобразования частоты волнового поля (фазовая модуляция) в среде с заданным законом изменения параметра известно достаточно давно [25, 26] и хорошо изучено в рамках приближения геометрической оптики [27, 28]. Связанный с этим явлением слабый сдвиг частоты в условиях ионизационного самовоздействия волны рассчитывался (в рамках метода возмущений) и наблюдался экспериментально в оптическом и микроволновом диапазонах [29–31]. Явление сильного адиабатического сдвига несущей частоты импульса, ионизирующего газ на трассе распространения, и обусловливаемый им эффект предотвращения отсечки сигнала в образующейся

закритической плазме были проанализированы как в рамках обычного геометрикооптического приближения [12, 14], так и на основе его модификации, учитывающей быстрые пульсации скорости ионизации и плотности плазмы в переменном поле [13–15]. Некоторые результаты этого анализа приведены ниже.

Если скорость ионизации $\partial N/\partial t$ есть заданная функция действительного поля $E_x = A \cos \varphi$ линейно поляризованной локально квазигармонической волны ($\partial N/\partial t = w(|E_x|)$), то уравнения переноса локальной частоты $\omega = \partial \varphi(z, t)/\partial t$ и интенсивности $A^2(z, t)$, вытекающие из волнового уравнения

$$c^2 \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \frac{4\pi e^2}{m} N E_x, \quad (31)$$

имеют вид

$$\frac{\partial(\omega^2)}{\partial t} + V_g \frac{\partial(\omega^2)}{\partial x} = \frac{4\pi e^2}{m} \langle w \rangle, \quad (32)$$

$$\frac{\partial(A^2)}{\partial t} + \frac{\partial(V_g A^2)}{\partial x} = -F. \quad (33)$$

Здесь $F = 4\pi e^2 A^2 \langle w \sin^2 \varphi \rangle / (m\omega^2)$ — величина, определяющая скорость диссипации, обусловленной передачей энергии поля вновь рождающимся электронам (потери энергии, вызванные соударениями электронов, как и потери электронов в уравнении баланса $\partial N/\partial t = w$, в интересующих нас условиях не существенны), $V_g = c \sqrt{1 - 4\pi e^2 \langle N \rangle / (m\omega^2)}$ — групповая скорость волны; угловые скобки обозначают усреднение по периоду волны $2\pi/\omega$. Изменение разности $\omega^2 - \omega_p^2$ вдоль характеристики $z = z(t)$, $dz/dt = V_g$ (групповой траектории любого элемента волны), как следует из (32), описывается уравнением

$$d(\omega^2 - \omega_p^2)/dt = -V_g d(\omega_p^2)/dz, \quad (34)$$

откуда видно, что плазма при пробое всегда будет оставаться прозрачной ($\omega > \omega_p$) при условии $d(\omega_p^2)/dz < 0$. Это условие выполняется, например, при распространении прямоугольного импульса в однородной среде вследствие большей длительности процесса ионизации в точках, дальше отстоящих от его переднего фронта. Запирание (отражение) импульса будет иметь место лишь при достаточно сильной неоднородности ионизируемой среды, например, на её резкой границе.

Характер изменения интенсивности волны в процессе преобразования частоты существенно зависит от механизма ионизации. Могут представлять интерес два случая: (1) ионизация электронным ударом и (2) прямая ионизация полем волны (многофотонная, или туннельная). В первом случае $w = \nu_i N$, причём частота ионизации ν_i не зависит от фазы волны и может рассматриваться как заданная функция параметра $U = A/\omega$. При этом скорость диссипации $F = 2\pi e^2 N A^2 \nu_i / (m\omega^2) = A^2 / (2\omega^2) \partial(\omega_p^2)/\partial t$. В простейшем частном случае однородного пробоя газа в поле однородной плоской волны (начальная задача для импульса бесконечной длительности) имеем

$$\omega^2 - \omega_p^2 = k^2 c^2 = \text{const}, \quad A^2 \omega = A_0^2 \omega_0 = \text{const}, \quad (35)$$

$$\frac{d(\omega^2)}{dt} = \nu_i [U(\omega)] (\omega^2 - k^2 c^2), \quad U(\omega) = \frac{A(\omega)}{\omega} = U_0 \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^{3/2}, \quad (36)$$

где ω_0 , A_0 , U_0 — значения соответствующих величин при $t = 0$. Как следует из (35), при увеличении частоты амплитуда волны убывает как $1/\sqrt{\omega}$. Более сложные задачи преобразования параметров излучения, входящего из вакуума в ионизируемую среду, были рассмотрены в [12, 14].

Скорость ионизации атомов газа полем волны (при отсутствии прямого фотоэффекта, т. е. при $\omega \ll \Omega$) существенно зависит от соотношения энергии осцилляций свободных электронов

$W_{\sim} = e^2 A^2 / (2m\omega^2)$ и энергии ионизации атома $I \sim \hbar\Omega$ [32]. При $W_{\sim} \ll I$ скорость ионизации (называемой в этом случае многофотонной), как и при ударной ионизации, не зависит от фазы поля, и характер изменения амплитуды в этом случае близок к описанному выше. В противоположном предельном случае, при $W_{\sim} \gg I$, реализуется туннельная ионизация, скорость которой (см. формулу (25)) при $A \ll E_a$ пренебрежимо мала во всех фазах поля, исключая узкие области вблизи фазы максимума ($\cos \varphi = \pm 1$). Электроны, рождающиеся в этих фазах поля, не приобретают постоянной составляющей скорости, т. е. не забирают энергию волны необратимым образом, вследствие чего скорость диссипации F в уравнении переноса интенсивности сильно снижается, и убывание амплитуды резко замедляется по сравнению со случаем ударной ионизации. Оценки, проведённые в [13], показывают, что в рамках рассматриваемого одномерного приближения сдвиг частоты мощного лазерного импульса, производящего туннельную ионизацию газа, может достигать 100 % на трассах длиной порядка 1 см без заметных потерь энергии.

4. ДИНАМИКА ПРОБОЯ ГАЗА В СХОДЯЩИХСЯ ВОЛНОВЫХ ПУЧКАХ

Характер пространственно-временной эволюции поля и плазмы при пробое газа полем сфокусированного волнового пучка сильно зависит от несущей частоты, максимальной амплитуды и длительности ионизирующего электромагнитного импульса, давления и сорта газа, угла фокусировки пучка. Мы остановимся здесь на двух важных характерных примерах, в разное время привлекавших внимание исследователей.

4.1. Разряд в поле квазиоптического микроволнового пучка [4, 33]

Развитие разряда в неоднородном поле сфокусированных импульсов умеренной интенсивности и достаточно большой длительности имеет на начальной стадии характер волны пробоя. Она зарождается в области фокуса пучка и вследствие быстрой остановки лавинообразного процесса пробоя в области, экранируемой от падающего излучения образующейся плазмой, перемещается в виде широкого пика ионизации преимущественно навстречу пучку. Передний склон этого пика (фронт ионизации) движется со скоростью, обратно пропорциональной осевому градиенту интенсивности излучения, и при достаточно больших размерах области, где поле превышает порог пробоя E_{th} , может убежать далеко от фокальной плоскости. В условиях, когда диффузия и рекомбинация не подавляют развитие мелкомасштабной плазменно-резонансной неустойчивости (см. раздел 1), фронт волны пробоя дробится на отдельные плазмойды, продолжающие двигаться навстречу излучению, и разряд приобретает весьма сложную мелкомасштабную структуру [6]. Такие условия реализуются в некоторой промежуточной области давлений газа (для воздуха — порядка десяти торр) — там, где, с одной стороны, уже достаточно мала частота соударений электронов ($\nu \ll \omega$), а с другой — ещё не стали слишком сильными эффекты диффузионного подавления неустойчивости. При отсутствии неустойчивости максимальная плотность плазмы в пике волны пробоя определяется двумя основными электродинамическими механизмами остановки электронной лавины в квазиоптическом пучке: поглощением электромагнитной волны, обусловленным соударениями электронов (при $\nu \gg \omega$), или рефракционной расходимостью пучка (при $\nu \ll \omega$) в созданной им радиально-неоднородной плазме. Увеличение плотности в каждом поперечном сечении пучка продолжается с невозмущённой скоростью до тех пор, пока поглощение или рефракция в области, примыкающей к этому сечению со стороны падающего потока излучения, не приведут к заметному ослаблению поля. Как показали аналитические и численные расчёты на базе параболического уравнения для комплексной амплитуды поля и уравнения баланса вида (2), при малых углах схождения пучка $\vartheta \ll 1$ указанные механизмы ослабления поля

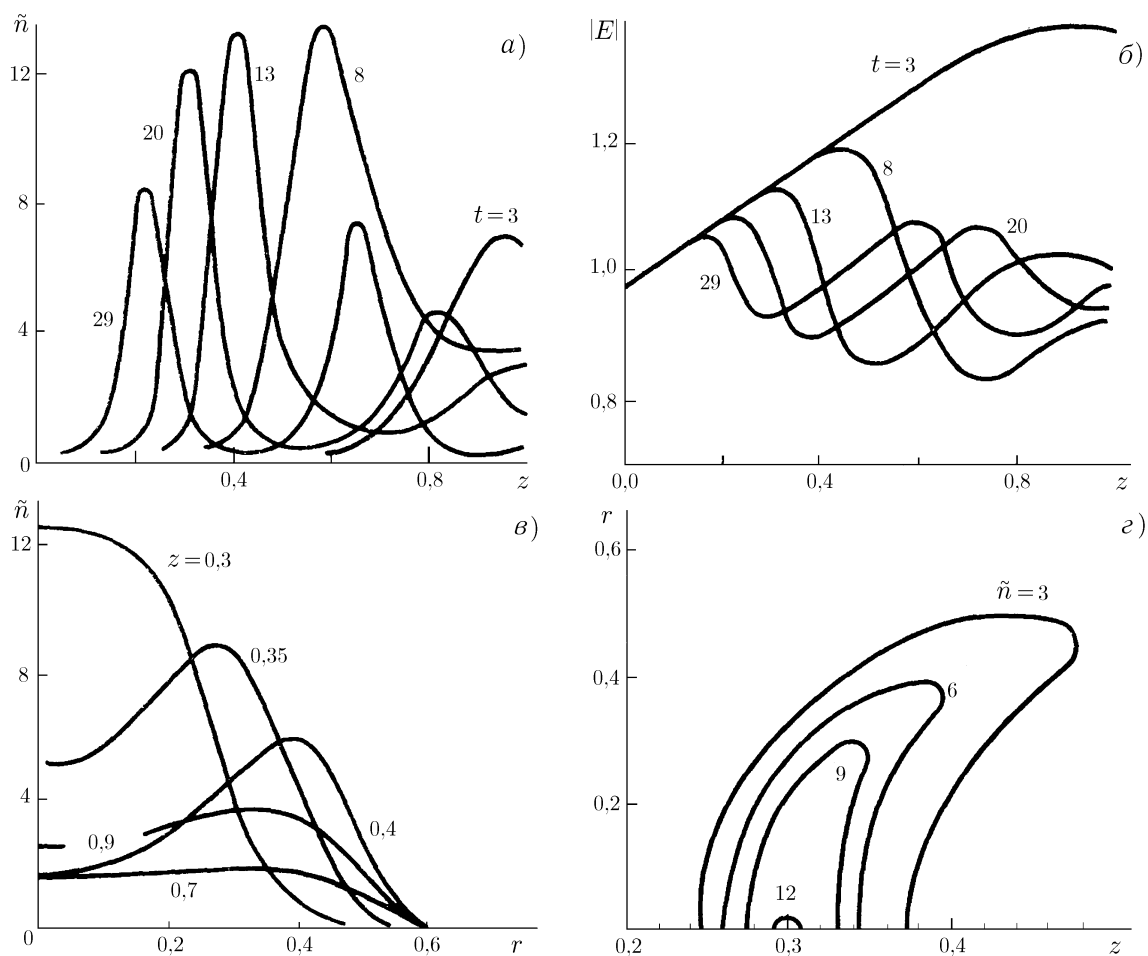


Рис. 4. Эволюция осевого (а, б) и радиального (в) профилей плотности плазмы и амплитуды поля; изолинии распределения плотности плазмы на плоскости zr при $t = 20$ (г)

приводят к остановке электронной лавины в пике волны пробоя уже при сравнительно малой плотности

$$N_{\max} \approx N_c (1 + \nu/\omega) \vartheta^2 \ln(N_{\max}/N_0). \quad (37)$$

Здесь N_0 — начальная (затравочная для возникновения электронной лавины) плотность плазмы. Этот результат находится в удовлетворительном согласии с данными прямых измерений плотности плазмы в проведённых лабораторных экспериментах [4]. Заметим, что оценка максимума плотности в стационарном разряде приводит к выражению, подобному (37), но не содержащему логарифмического множителя, который в типичных условиях микроволнового пробоя достигает величины порядка $10 \div 15$.

При выходе из области сильного поля плотность плазмы в волне пробоя и её экранирующая способность уменьшаются, поле в области фокуса вновь усиливается, что может стать причиной возникновения вторичных (как правило, более слабых) волн пробоя. Описанная общая картина динамики разряда иллюстрируется на рис. 4 результатами численного моделирования, основанного на совместном решении параболического уравнения для поля осесимметричного пучка (с учётом поправок к показателю преломления, обусловленных наличием неоднородной плазмы) и уравнения баланса (2) для плотности плазмы (в режиме, контролируемом процессами ударной ионизации и прилипания электронов, т. е. при $D = \alpha = 0$). Расчёты проводились с использованием

ем аппроксимации $\nu_i/\nu_a = (|E|/E_{th})^4$ при $\nu/\omega = 0,2$, $|E|_{max}/E_{th} = 1,4$. На графиках использованы безразмерные переменные: $t \rightarrow \nu_a t$, $r \rightarrow r/a$, $z \rightarrow z/(ka^2)$, $E \rightarrow E/E_{th}$, $\tilde{n} = N/(N_c \vartheta^2)$, где a — радиус невозмущённого (гауссового) пучка в фокальной плоскости, $k = \omega/c$, $\vartheta = (ka)^{-2}$. Значение $z = 1$ отвечает положению фокуса невозмущённого пучка. Представленные результаты относятся к той области давлений газа (воздуха), где диффузия достаточно сильна для подавления мелкомасштабных неустойчивостей, но не играет роли в формировании общей (крупномасштабной) структуры разряда.

4.2. Оптический пробой газа полем сфокусированных лазерных импульсов фемтосекундной длительности

Исследование этого явления привлекает внимание в последнее время в связи с перспективой его использования для управляемого преобразования спектров излучения, создания лазерно-плазменных ускорителей заряженных частиц и генерации рентгеновского излучения. В области значений интенсивности $10^{14} \div 10^{16}$ Вт/см² (представляющихся достаточно умеренными при современном уровне лазерной техники) ионизационная нелинейность благодаря её малой инерционности оказывается единственным нелинейным механизмом, влияющим на динамику фемтосекундных импульсов. В импульсах столь малой длительности, в отличие от описанной выше волны пробоя в длинном микроволновом импульсе, граница области ионизации движется не навстречу падающему излучению, а в направлении его распространения вместе с передним фронтом импульса, причём ввиду отсутствия на малых временах процессов распада плазмы импульс может оставлять за собой ионизованный след достаточно большой протяжённости. С целью выяснения возможности реализации в данном процессе рассмотренных выше эффектов ионизационной автоконверсии спектра и самоканалирования излучения нами было проведено численное моделирование (дополняющее и уточняющее некоторые результаты наших аналогичных предыдущих расчётов [11, 15]) в рамках двумерной волновой задачи. Поскольку ни геометрикооптическое, ни параксиальное (параболическое) приближения не достаточны для описания интересующих нас явлений сильного преобразования спектра ультракоротких импульсов, моделирование проводилось на базе точного (двумерного) волнового уравнения для поперечного электрического поля волны с ТЕ-поляризацией:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{4\pi e^2}{mc^2} NE, \quad (38)$$

Здесь x и z — соответственно поперечная и продольная (по отношению к направлению распространения импульса) координаты, электрическое поле направлено по оси y . Уравнение (38) решалось совместно с уравнением для плотности плазмы (25) (в предположении туннельного механизма ионизации) при начальных условиях, отвечающих заданию на входе в ионизируемую среду фокусируемого гауссова импульса малой длительности. При отсутствии ионизации поле этого импульса в некоторый момент времени (когда центр импульса достигает фокальной плоскости $z = 0$) имеет вид

$$E(x, z) = E_0 \sin(kz) \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2} - \frac{z^2}{(c\tau)^2}\right), \quad (39)$$

где $k = \omega_0/c$, ω_0 — невозмущённая частота, 2τ — длительность импульса. На границах расчётной области ставились граничные условия «идеально согласованного слоя» [34], отвечающие условию излучения. Результаты расчёта представлены в безразмерных переменных $x \rightarrow kx$, $z \rightarrow kz$, $t \rightarrow \omega_0 t$, $E \rightarrow E/E_a$, $n = N/N_c(\omega_0)$ на рис. 5–12 для двух наборов параметров, различающихся максимальной невозмущённой амплитудой поля E_0 и радиусом фокального пятна a при одинаковых значениях остальных параметров: $\omega_0 \tau = 9,4$, $\Omega/\omega_0 = 22$, $N_g/N_c(\omega_0) = 0,135$. При меньшей

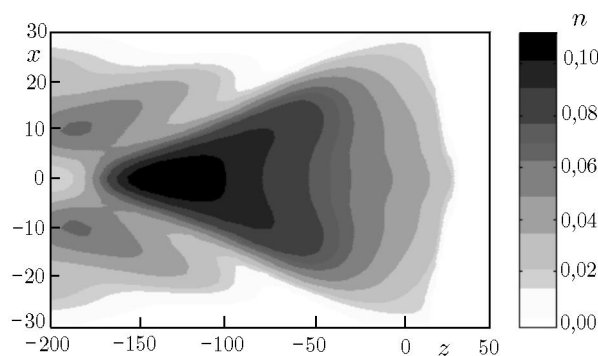


Рис. 5. Пространственное распределение плотности плазмы после прохождения лазерного импульса ($\omega_0 t = 905$; $E_0/E_a = 0,17$; $k_0 a = 5$)

Рис. 6. Пространственно-временная эволюция электрического поля лазерного импульса $E(x, z, t)$; рисунки (а)–(г) соответствуют моментам времени $\omega_0 t = 503$; 805 и 905 ($E_0/E_a = 0,17$; $k_0 a = 5$)

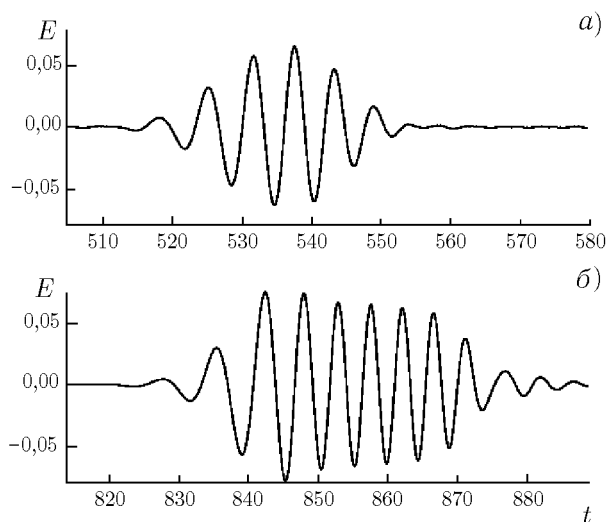
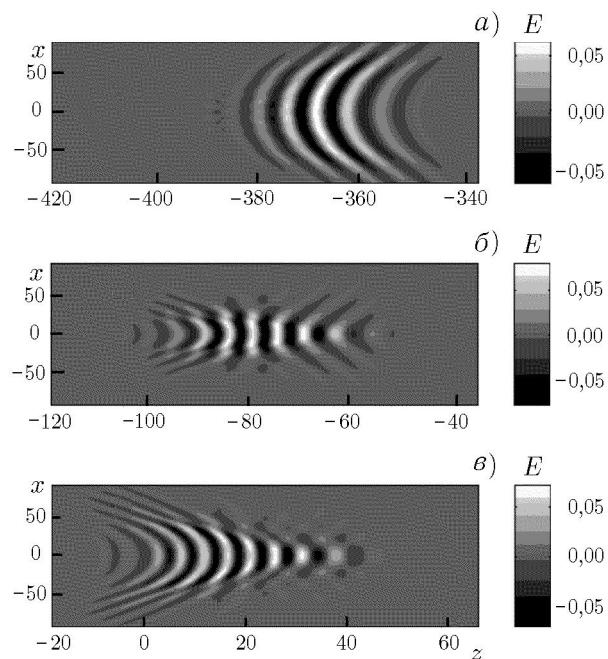


Рис. 7. Зависимость электрического поля от времени при $x = 0$, $z = -337$ (а) и $z = -28$ (б) ($E_0/E_a = 0,17$; $k_0 a = 5$)

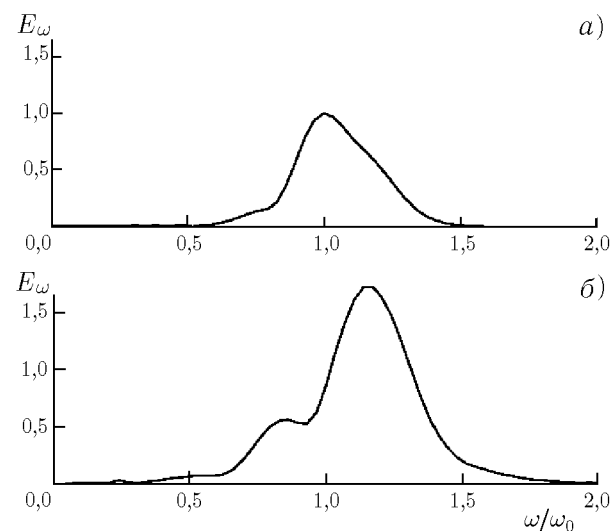


Рис. 8. Временные спектры электрического поля, отвечающие временным реализациям, приведённым на рис. 7

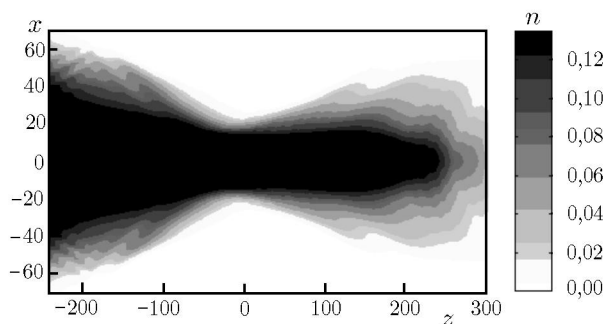


Рис. 9. Пространственное распределение плотности плазмы после прохождения лазерного импульса ($\omega_0 t = 679$; $E_0/E_a = 0,45$; $k_0 a = 4,3$)

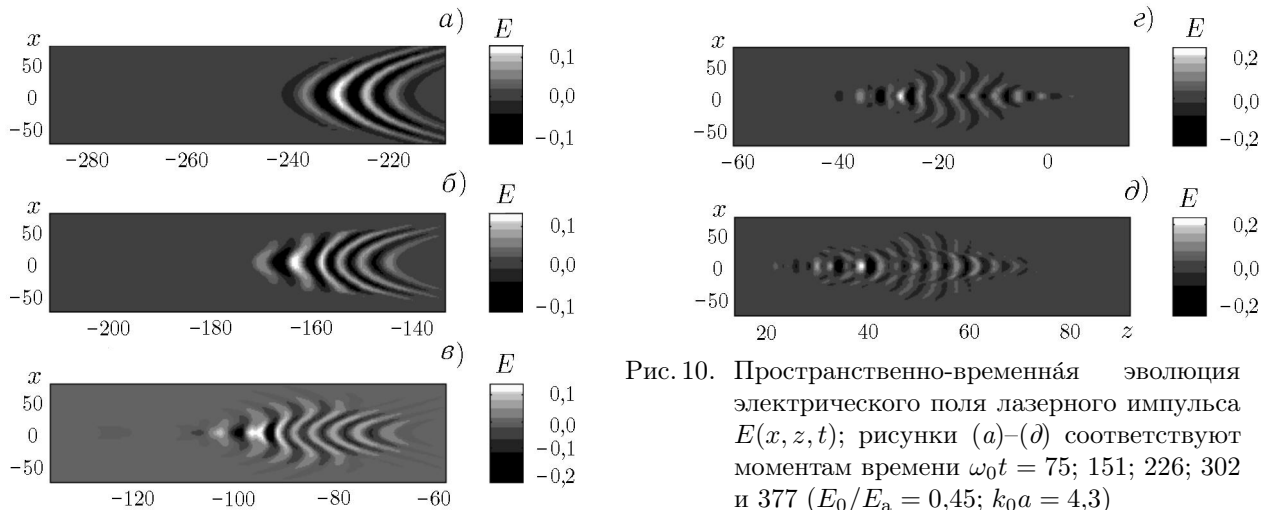


Рис. 10. Пространственно-временная эволюция электрического поля лазерного импульса $E(x, z, t)$; рисунки (а)–(д) соответствуют моментам времени $\omega_0 t = 75; 151; 226; 302$ и 377 ($E_0/E_a = 0,45$; $k_0 a = 4,3$)

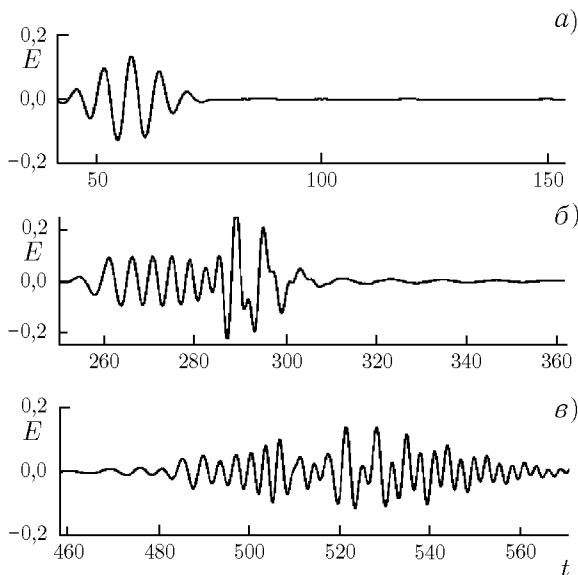


Рис. 11. Зависимость электрического поля от времени при $x = 0$, $z = -247$ (а), $z = -39$ (б) и $z = 169$ (в) ($E_0/E_a = 0,45$; $k_0 a = 4,3$)

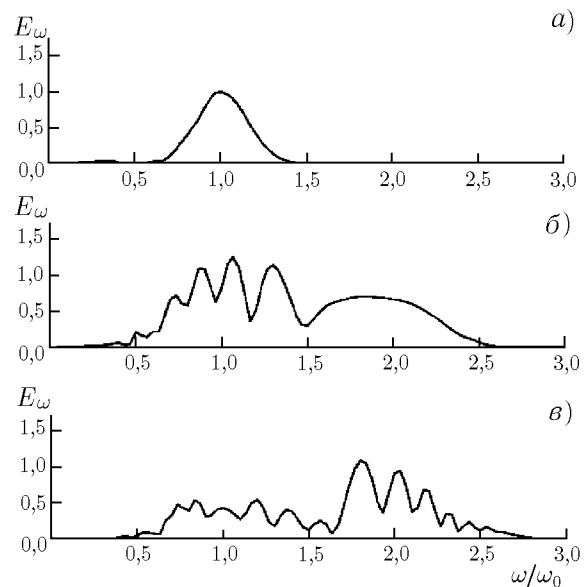


Рис. 12. Временные спектры электрического поля, отвечающие временным реализациям рис. 11

амплитуде поля и большей ширине фокального пятна ($E_0/E_a = 0,17$; $k_0 a = 5$; рис. 5–8) заметная ионизация газа начинается лишь после достаточного уменьшения поперечного размера импульса вследствие фокусировки и достигает максимальной предельной величины ($N = N_g$) в сравнительно узкой области, не доходя до фокуса (рис. 5). Сдвиг максимума спектра импульса, прошедшего ионизованную область, составляет в этом случае около 20 % (рис. 8). Иная картина эволюции поля и плазмы (рис. 9–12) имеет место при более высокой амплитуде поля ($E_0/E_a = 0,45$) и несколько меньшей ширине фокального пятна ($k_0 a = 4,3$). Полная ионизация газа достигается в этом случае внутри протяжённой квазицилиндрической области, простирающейся от входной границы ($z = -250$) до $z \approx 250$ (рис. 9). Полная длина образовавшегося плазменного волновода составляет около 28 релеевских длин невозмущённого пучка, что, по-видимому, позволяет говорить о реализации в данном случае описанного в разделе 2 эффекта самоканалирования в режиме на-

сыщения ионизации. Спектр прошедшего импульса испытывает в этом случае сильное уширение со сдвигом вверх вплоть до частот порядка $(2 \div 2,5) \omega_0$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 02–02–17271, 01–02–16575) и РАН (грант № 1999(6)–37).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Власов С. Н., Таланов В. И. Самофокусировка волн. Н. Новгород: ИПФ РАН, 1997.
2. Гуревич А. В., Шварцбург А. Б. Нелинейная теория распространения радиоволн в ионосфере. М.: Наука, 1973.
3. Гильденбург В. Б. // ЖЭТФ. 1980. Т. 78. С. 952.
4. Вихарев А. Л., Гильденбург В. Б., Голубев С. В. и др. // ЖЭТФ. 1988. Т. 94. С. 136.
5. Leemans W. P., Clayton C. E., Mori W. B. et al. // Phys. Rev. A. 1992. V. 46. P. 1091.
6. Gildenburg V. B., Vvedenskii N. V. // Phys. Plasmas. 2001. V. 8. P. 1953.
7. Введенский Н. В., Гильденбург В. Б. // Письма в ЖЭТФ. 2002. Т. 76. С. 440.
8. Гильденбург В. Б., Ким А. В. // ЖЭТФ. 1978. Т. 74. С. 141.
9. Гильденбург В. Б., Кочетов А. В., Литвак А. Г., Фейгин А. М. // ЖЭТФ. 1983. Т. 84. С. 48.
10. Gildenburg V. B., Zharova N. A., Bakunov M. I. // Phys. Rev. E. 2001. V. 63. Article no. 066402.
11. Sergeev A. M., Lontano M., Kim A. V. et al. // Laser and Particle Beams. 1999. V. 17. P. 129.
12. Гильденбург В. Б., Крупнов А. В., Семёнов В. Е. // Письма в ЖТФ. 1988. Т. 14. С. 1695.
13. Гильденбург В. Б., Ким А. В., Сергеев А. М. // Письма в ЖЭТФ. 1990. Т. 51. С. 91.
14. Gildenburg V. B., Kim A. V., Krupnov V. A. et al. // IEEE Trans. on Plasma Science. 1993. V. 21. P. 34.
15. Gildenburg V. B., Pozdnyakova V., Shereshevskii I. A. // Phys. Lett. A. 1995. V. 203. P. 214.
16. Lontano M., Lampis G., Kim A. V., Sergeev A. M. // Physica Scripta. 1996. V. T63. P. 141.
17. Antonsen T. M., Bian Jr. Z. // Phys. Rev. Lett. 1999. V. 82. P. 3617.
18. Вихарев А. Л., Гильденбург В. Б., Иванов О. А., Степанов А. Н. // Физика плазмы. 1984. Т. 10. С. 165.
19. Gurevich A. V., Borisov N. D., Milikh J. M. // Artificially ionized regions in the atmosphere. Amsterdam. Gordon and Breach, 1997.
20. Gildenburg V. B., Litvak A. G., Zharova N. A. // Phys. Rev. Lett. 1997. V. 78. P. 2968.
21. Moisan M., Pantel R., Hubert J. et al. // J. of Microwave Power. 1979. V. 14. P. 57.
22. Shivarova A., Zhelyazkov I. // Electromagnetic Surface Modes / Ed. by A. D. Boardman. John Wiley and Sons, 1982. P. 466.
23. Aliev Yu. M., Grosse S., Schluter H., Shivarova A. // Phys. Plasmas. 1996. V. 3. P. 3162.
24. Марков Г. А., Миронов В. А., Сергеев А. М. // Письма в ЖЭТФ. 1979. Т. 29. С. 672.
25. Михельсон В. А. // ЖРФХО. Часть физическая. 1899. Т. 31. С. 119.
26. Laue M. // Handbuch der Experimentalphysik. 1928. V. 18. P. 60.
27. Степанов Н. С. // Изв. вузов. Радиофизика. 1976. Т. 19. С. 960.
28. Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И. Геометрическая оптика неоднородных сред. М.: Наука, 1980.
29. Yablonovitch E. // Phys. Rev. 1974. V. 10. P. 1888.
30. Wood W. M., Siders C. W., Downer M. C. // Phys. Rev. Lett. 1991. V. 67. P. 3523.
31. Kuo S. P. // Phys. Rev. Lett. 1990. V. 65. P. 1000.
32. Келдыш Л. В. // ЖЭТФ. 1964. Т. 47. С. 1945.
33. Gildenburg V. B., Litvak A. G., Yunakovsky A. D. // J. de Physique C. 1979. V. 40, No. 7. P. 215.
34. Berenger J. P. // J. Comput. Phys. 1994. V. 114. P. 185.

¹ Институт прикладной физики РАН,
² Институт физики микроструктур РАН,
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию
30 июня 2003 г.

NONLINEAR DYNAMICS OF WAVE FIELDS AND PACKETS IN AN IONIZABLE MEDIUM

V. B. Gildenburg, N. A. Zharova, and V. I. Pozdnyakova

We present a review of the studies of nonlinear dynamics of the plasma–field system formed in the processes of breakdown of a gas by high-intensity laser or microwave radiation. The ionization instability dominating these processes significantly modifies the known effects of self-action of waves in a medium and gives rise to a number of new effects which are absent for other nonlinearity mechanisms. We describe the most important among these effects, such as the ionization–field instability of a plane wave, the self-channeling of radiation in the form of surface or leaky waves, and the auto-conversion of the spectrum of ionizing radiation. The results of numerical simulations of the dynamics of nonequilibrium freely-localized discharges created by focused microwave and laser pulses are presented.

УДК 534.222

САМОВОЗДЕЙСТВИЕ ПУЧКОВ ВОЛН, СОДЕРЖАЩИХ УДАРНЫЕ ФРОНТЫ

О. В. Руденко

Дан краткий обзор эффектов нелинейного самовоздействия пучков сильно искажённых волн, содержащих крутые ударные фронты. Обсуждаются особенности инерционных самовоздействий периодических пилообразных волн в квадратично-нелинейных недиспергирующих средах за счёт формирования акустического ветра, а также тепловой линзы, созданной в результате нелинейной диссипации на фронтах. Безынерционные самовоздействия анализируются на примерах периодических трапециевидальных волн, которые формируются в кубично-нелинейной среде и содержат чередующиеся скачки сжатия и разрежения, а также одиночных однополярных импульсных сигналов, содержащих ударный фронт. Приведены математические модели, описывающие эти явления, даны решения соответствующих нелинейных уравнений. Проведено качественное сопоставление с явлениями оптического самовоздействия и с имеющимися экспериментальными данными.

ВВЕДЕНИЕ

Теория самофокусировки света, развитая В. И. Талановым, содержит ряд основополагающих результатов не только для физики мощного лазерного излучения, но и для общей теории нелинейных волн. Идеи первых работ В. И. Таланова в этой области (см. [1–6]) оказали заметное влияние на постановку и развитие аналогичных исследований в ряде других разделов физики, в частности в нелинейной акустике и теории нелинейных волновых пучков, распространяющихся в средах со слабой дисперсией. Настоящая работа посвящена краткому обзору проблем пространственного самовоздействия волн с широким частотным спектром, временные профили которых содержат разрывы или крутые ударные фронты конечной ширины, малой по сравнению с периодом волны или с характерной длительностью импульсного сигнала.

Известно, что при распространении интенсивных волн в среде со слабой дисперсией происходит их искажение, которое накапливается с увеличением пройденного расстояния и приводит к исчезновению мелких деталей и формированию профилей универсальной формы [7]. Так, в квадратично-нелинейной недиспергирующей среде периодическая плоская волна приобретает форму «пилы», представляющей собой последовательность прямолинейных участков с одинаковым наклоном, соединённых ударными фронтами. В кубично-нелинейной среде каждый «зубец пилы» имеет трапецевидную форму и содержит два ударных фронта: сжатия и разрежения. Одиночное возмущение, локализованное во времени, в результате совместного действия квадратичной нелинейности, поглощения и дифракции принимает форму N -волны. В средах с более сложными свойствами могут формироваться асимптотически универсальные профили иных типов. Однако практически во всех случаях, благодаря конкуренции нелинейных и диссипативных процессов, эти профили оказываются квазистабильными, т. е. при распространении таких волновых структур их форма сохраняется, изменяются лишь параметры: пиковые значения возмущений, а для импульсов — ещё и длительность.

Аналогичным свойством обладает квазигармоническая волна в диспергирующей среде. Именно поэтому для описания её самовоздействия можно перейти от полевых уравнений, содержащих пространственные переменные и время, к более простым моделям типа нелинейного уравнения

Шрёдингера для параметра (комплексной амплитуды), зависящего лишь от пространственных координат. Иногда таким образом (путём исключения из числа переменных времени) удаётся упростить и нелинейные уравнения, описывающие поведение пучков волн, профили которых содержат ударные фронты.

1. САМОВОЗДЕЙСТВИЕ ПУЧКОВ СЛАБО ИСКАЖЁННЫХ УЛЬТРАЗВУКОВЫХ ВОЛН ЗА СЧЁТ НАГРЕВАНИЯ СРЕДЫ И ФОРМИРОВАНИЯ АКУСТИЧЕСКОГО ВЕТРА

На возможность теплового самовоздействия акустических пучков по аналогии с лазерными пучками указано в работе [8]. В средах, при нагревании которых скорость звука c растёт, т. е. $\delta = (\partial c / \partial T)_p / c > 0$ (например, в воде при комнатной температуре), происходит дефокусировка пучка, а в средах с отрицательным температурным коэффициентом $\delta < 0$ (в большинстве жидкостей) пучок самофокусируется. Обзор первых теоретических работ по самовоздействию акустических пучков дан в книге [9], однако наблюдать эффект удалось позднее [10, 11]. Библиография последующих публикаций имеется в обзоре [12] и в книге [13], однако она не может считаться исчерпывающей, поскольку исследования самовоздействий гармонических волн в акустике продолжают до сих пор [14].

Другой механизм самовоздействия, обусловленный формированием потоков в поле мощной ультразвуковой волны [9], приводит к дефокусировке, т. к. скорость волны увеличивается с приближением к оси пучка (ветер сильнее в той области, где интенсивность ультразвука выше).

Следует заметить, что оба эти явления достаточно просты и не имеют явно выраженной нелинейной специфики. Поскольку и нагревание среды, и формирование акустических потоков происходят на временах порядка десятков секунд или даже минут, описанные самовоздействия аналогичны явлениям при модуляции акустических свойств среды внешними источниками тепла и заданными течениями, позволяющим управлять пучками с помощью тепловых и конвективных линз. По-видимому, эти процессы неоднократно наблюдались в 50-е годы, когда были созданы пьезопреобразователи для возбуждения мощного ультразвука в жидкостях [15] (В. А. Буров и Л. К. Зарембо, частные сообщения), однако они не были интерпретированы как нелинейные эффекты.

Оригинальная конфигурация в виде «рюмки» — два аксиально-симметричных вращающихся в противоположных направлениях тороидальных вихря — наблюдалась при ориентации пучка вертикально вниз (по направлению силы тяжести) [16]. Внутренний вихрь был обусловлен акустическим течением, внешний — термоконвекцией. В области, где вихри почти гасят друг друга и результирующая скорость потока мала, наблюдалось увеличение интенсивности звука на порядок и сужение пучка в 2–3 раза.

В работе [17] была выведена упрощённая система уравнений, описывающая тепловое самовоздействие акустического пучка в условиях, отвечающих эксперименту [16], т. е. с учётом акустического и термоконвекционного потоков. Уравнения для аксиально-симметричной задачи имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{c} \left(\frac{U_x}{c} + \delta T \right) \frac{\partial p}{\partial \tau} - \frac{\varepsilon}{c^3 \rho} p \frac{\partial p}{\partial \tau} - \frac{b}{2c^3 \rho} \frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2} \right] = \frac{c}{2} \Delta_{\perp} p, \quad (1)$$

$$\frac{\partial U_x}{\partial t} + U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + U_r \frac{\partial U_x}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P_0}{\partial x} + \frac{\eta}{\rho} \Delta_{\perp} U_x + F - \beta g T, \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (r U_x) + \frac{\partial}{\partial r} (r U_r) = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + U_x \frac{\partial T}{\partial x} + U_r \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\kappa}{\rho c_p} \Delta_{\perp} T + \frac{c}{c_p} F. \quad (4)$$

Здесь x, r — цилиндрические координаты, ось x совпадает с осью пучка, $\tau = t - x/c$ — «запаздывающее» время в системе, движущейся вместе с волной со скоростью звука c , $\Delta_{\perp}$ — лапласиан по радиальной координате, ε и b — нелинейный и диссипативный параметры [18], η — сдвиговая вязкость, β — термический коэффициент объёмного расширения, c_p и κ — теплоёмкость и теплопроводность среды, g — ускорение свободного падения, p и ρ — приращение давления в волне и плотность среды соответственно.

Уравнение (1) описывает пучок с учётом акустической нелинейности, диссипативных эффектов и дифракции; в отличие от известного уравнения Хохлова—Заболотской—Кузнецова [19], оно учитывает также модуляцию скорости распространения волны изменением температуры T и продольной составляющей U_x скорости течения $\mathbf{U} = (U_x, U_r)$. Поглощение волны приводит к генерации потоков несжимаемой жидкости, описываемых уравнениями (2) и (3), а также к изменению распределения температуры, динамика которого описывается уравнением (4). Давление P_0 в квазиэккартовском течении [18] зависит от x, t и не зависит от r . Радиационная сила в правых частях (2) и (4) даётся формулой

$$F = \frac{b}{c^5 \rho^3} \left\langle \left(\frac{\partial p}{\partial \tau} \right)^2 \right\rangle, \quad (5)$$

где угловые скобки означают усреднение по быстрым акустическим осцилляциям (по времени τ).

Система связанных нелинейных уравнений (1)–(4) позволяет описать самовоздействие как гармонических, так и сильно искажённых (негармонических) волн. Эта система использована ниже для описания волн с широким частотным спектром.

2. ТЕПЛОВАЯ САМОФОКУСИРОВКА ПИЛООБРАЗНЫХ ВОЛН

В тех случаях, когда акустическая нелинейность несущественна (формально $\varepsilon = 0$), в уравнении (1) можно исключить «быстрое» время τ , положив

$$p = A(x, r) \exp(-i\omega\tau). \quad (6)$$

При этом для комплексной амплитуды A получается следующее параболическое уравнение:

$$\frac{\partial A}{\partial x} + ik \left(\frac{U_x}{c} + \delta T \right) A + \frac{b\omega^2}{2c^3\rho} A = \frac{i}{2k} \Delta_{\perp} A, \quad (7)$$

где $k = \omega/c$ — волновое число. Оставшиеся уравнения (2)–(4) связаны с (7) «силой» (5), которая теперь имеет вид

$$F = \frac{b\omega^2}{c^5\rho^3} A^2. \quad (8)$$

В тех случаях, когда нужно учитывать акустическую нелинейность, «быстрое» время удаётся исключить лишь в приближении нелинейной геометрической акустики. Полагая в уравнении (1)

$$p = p(x, r, \theta), \quad (9)$$

где $\theta = \tau - \psi(x, r)/c$, в пределе коротких длин волн (малых по сравнению с масштабами тепловых и гидродинамических неоднородностей) получим

$$\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{c^3\rho} p \frac{\partial p}{\partial \theta} - \frac{b}{2c^3\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + \frac{\partial p}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{p}{2} \Delta_{\perp} \psi = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right)^2 + \frac{U_x}{c} + \delta T = 0. \quad (11)$$

Уравнение переноса (10) напоминает уравнение Бюргерса, используемое для плоских нелинейных волн [18], и отличается от него двумя последними слагаемыми, учитывающими изменение сечения лучевых трубок. Уравнение (11) — это уравнение эйконала, характеризующее искривление лучей из-за неоднородности температурного и гидродинамического полей.

Уравнение (10) описывает формирование и последующее распространение пилообразной волны с конечной шириной ударного фронта, каждый период которой даётся формулой [18]

$$p(x, r, \theta) = A(x, r) \left[-\frac{\omega \theta}{\pi} + \operatorname{th} \left(\frac{\varepsilon}{b} A(x, r) \theta \right) \right], \quad -\frac{\pi}{\omega} < \theta < \frac{\pi}{\omega}. \quad (12)$$

Выражение (12) можно рассматривать как обобщение формулы (6) на случай учёта акустической нелинейности. Здесь неизвестная функция A есть пиковое давление в «пиле» — аналог амплитуды гармонической волны в формуле (6).

Подставляя (12) в уравнения (10) и (5), приведём их к следующему виду:

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\varepsilon \omega}{\pi c^3 \rho} A^2 + \frac{\partial A}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{A}{2} \Delta_{\perp} \psi = 0, \quad (13)$$

$$F = \frac{2}{3\pi} \frac{\varepsilon \omega}{c^5 \rho^3} A^3. \quad (14)$$

Слагаемое, пропорциональное εA^2 в уравнении (13), описывает нелинейное поглощение, которое усиливается с ростом A . «Сила» (14), в отличие от (8), определяется не диссипативными свойствами среды b , а только нелинейностью ε . Поэтому самовоздействие пилообразных волн должно происходить и в идеальных средах, где обычное поглощение отсутствует. Заметим также, что согласно формуле (14) «сила» F пропорциональна A^3 , а не A^2 , как в формуле (8) для гармонических волн.

Уравнение (13) удаётся решить для параболической формы волнового фронта, полагая

$$\psi(x, r, t) = \varphi(x, t) + \frac{r^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \ln f(x, t). \quad (15)$$

Точное решение нелинейного уравнения (13) с учётом (15) имеет вид

$$A = \frac{p_0}{f} \Phi \left(\frac{r}{af} \right) \left[1 + \frac{1}{x_s} \Phi \left(\frac{r}{af} \right) \int_0^x \frac{dx'}{f(x', t)} \right]^{-1}. \quad (16)$$

Здесь p_0 — исходная амплитуда волны на оси пучка, функция Φ описывает исходное поперечное распределение амплитуды: $A(x=0, r) = p_0 \Phi(r/a)$, a — начальный радиус пучка, характерная нелинейная длина

$$x_s = \frac{\pi c^3 \rho}{\varepsilon \omega p_0} \quad (17)$$

соответствует расстоянию, на котором в плоской волне с такими же параметрами образуется разрыв, и определяет масштаб нелинейного поглощения волны [18]. Когда акустическая нелинейность мала, расстояние x_s велико, и интегральным членом в квадратных скобках в решении (16) можно пренебречь; при этом функция f описывает одновременно изменение ширины пучка

и пикового давления на его оси. Когда нелинейность существенна, происходит изменение формы пучка: нелинейное затухание сильнее выражено вблизи оси, где пиковое давление больше, поэтому выпуклый пучок сглаживается, становясь в поперечном сечении более однородным.

Уравнение эйконала (11) с учётом (15) принимает вид

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f \left(\frac{U_2}{c} + \delta T_2 \right), \quad (18)$$

где $T_2(x, t)$ и $U_2(x, t)$ — коэффициенты в разложении температуры и скорости течения в ряд по поперечной координате:

$$T = T_0 - \frac{r^2}{2} T_2, \quad U_x = U_0 - \frac{r^2}{2} U_2.$$

Если распределения температуры и скорости известны, из уравнения (18) можно определить функцию f и тем самым решить задачу — рассчитать пространственное распределение пикового давления (16) пилообразной волны в любой момент времени.

В дальнейшем будем считать, что самовоздействие происходит в неподвижной среде. Явления, связанные с возникновением потоков в поле пилообразных волн и учётом гидродинамической конвективной нелинейности, обсуждались в работе [20].

Первый эксперимент по наблюдению тепловой самофокусировки за счёт нелинейного поглощения ультразвуковой волны описан в работе [21]. Волновой пучок на частоте 2 МГц с мощностью 20 Вт и шириной 30 мм пропусклся через ацетон — слабодиссипативную жидкость. В результате интенсивность волны на оси заметно возрастала. В течение 20÷30 с устанавливалось стационарное значение интенсивности, превосходящее начальное в 1,5 раза.

Значительно позднее появилась серия работ, посвящённых экспериментам и компьютерному моделированию эффектов самовоздействия пилообразных волн в биотканях (см., например, [22, 23]). Эти работы были стимулированы конкретными проблемами ультразвуковой терапии (гипертермия) и хирургии с использованием сфокусированных пучков большой интенсивности. Оказалось, в частности, что тепловое самовоздействие приводит к сдвигу фокальной области, который следует учитывать для прицельного воздействия мощного ультразвука на обрабатываемую область ткани.

Для описания этого явления рассмотрим стационарный режим, полагая производную по времени в уравнении теплопроводности (4) равной нулю. При этом из (4) получаем

$$T_2 = \frac{\rho c}{2\kappa} F = \frac{\varepsilon \omega p_0^3}{3\pi \kappa c^4 \rho^2} \frac{1}{f^3} \left[1 + \frac{1}{x_s} \int_0^x \frac{dx'}{f(x')} \right]^{-3}. \quad (19)$$

Исключая из (18) и (19) переменную T_2 , получим уравнение для f [24]:

$$\left[1 + \Pi \int_0^z \frac{dz'}{f(z')} \right]^3 f^2 \frac{d^2 f}{dz^2} = \pm \Pi^3. \quad (20)$$

Здесь Π — безразмерная амплитуда волны на входе в среду:

$$\Pi = \frac{x_0}{x_s} = \frac{\pi |\delta| c^2}{3\kappa \varepsilon \omega} p_0, \quad x_0 = \frac{\pi^2 \delta c^5 \rho}{3\kappa \varepsilon^2 \omega^2},$$

$z = x/x_0$ — безразмерная продольная координата. Знак плюс в правой части уравнения (20) соответствует положительным значениям температурного коэффициента δ , при которых происходит

дефокусировка; знак минус соответствует случаю самофокусирующей среды. Для нахождения функции $f(z)$ следует решить уравнение (20) с граничными условиями

$$f(z=0) = 1, \quad f'(z=0) = K,$$

где $K = x_0/R$ — безразмерная кривизна волнового фронта на входе в среду.

При $\Pi = 1$, $K = -1$ нелинейное интегро-дифференциальное уравнение (20) имеет точное решение $f = \exp(-z)$. В этом специальном случае, как видно из (16), $A(r=0, z) = p_0$, т. е. в результате самодефокусировки и нелинейного поглощения пиковое давление на оси исходного сфокусированного пучка сохраняется постоянным. При других значениях параметров нужно интегрировать уравнение (20) численно [24].

На рис. 1 изображены зависимости от расстояния радиуса пучка $a(z)/a$, определённого по уровню пикового давления $1/e$ от его значения на оси. Сплошные кривые соответствуют дефокусирующей среде ($\Pi = 10$), штриховые — среде без самовоздействия. Тепловая дефокусировка приводит к наблюдавшимся в [22–24] явлениям: формированию перетяжки конечных размеров и её удалению от точки линейного фокуса. Например, нижняя кривая на рис. 1 ($K = -100$) может соответствовать следующим параметрам: частота волны 4 МГц, исходный радиус пучка 3 см, радиус кривизны фронта $-9,4$ см, пиковое давление 1,3 атм. В таком эксперименте (вода, мягкая биоткань) перетяжка сдвинется относительно фокуса примерно на 1,4 см, а её радиус составит 3,6 мм, что на порядок больше радиуса дифракционной перетяжки.

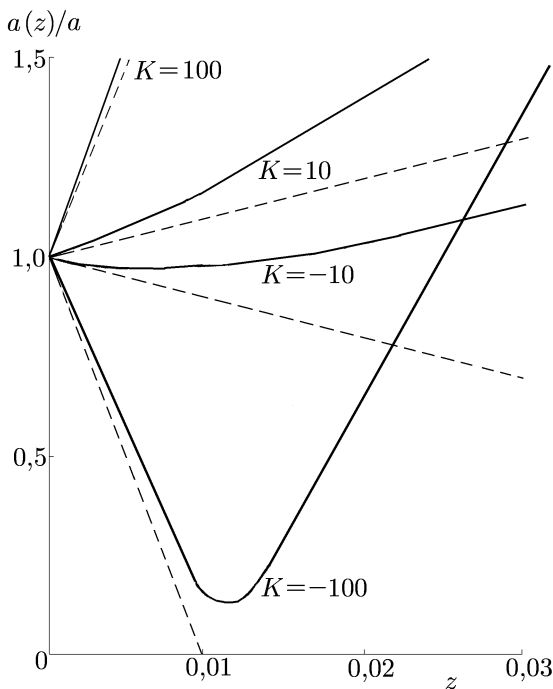


Рис. 1

На рис. 2а аналогичные зависимости радиуса пучка $a(z)/a$ приведены для случая самофокусирующей среды при различных значениях безразмерной амплитуды $\Pi = 0,1; 1$ и 10. Исходный фронт волны был плоским. На рис. 2б изображены зависимости нормированной амплитуды $A(z)/p_0$ на оси пучка от расстояния z . При $\Pi = 0,1$ отчётливо выражены явления нелинейного поглощения и сглаживания поперечной структуры пучка (изотропизации характеристики направленности): амплитуда волн на небольших расстояниях уменьшается, ширина пучка растёт. Вблизи нелинейного фокуса $z = z_f$ наблюдаются обратные зависимости: ширина пучка обращается в нуль при неограниченном росте амплитуды. Расстояние z_f , на котором происходит самофокусировка, быстро уменьшается с увеличением амплитуды Π .

Рассмотрим теперь процесс нестационарного самовоздействия, когда теплопроводность несущественна и диффузионным членом в уравнении (4) можно пренебречь. При этом

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{c}{c_p} F = \frac{2\varepsilon\omega}{3\pi c^4 \rho^2 c_p} A^3. \quad (21)$$

Определим T_2 путём разложения уравнения (21) в ряд по поперечной координате. Подставляя найденное выражение в уравнение (18), придём к следующему уравнению для функции

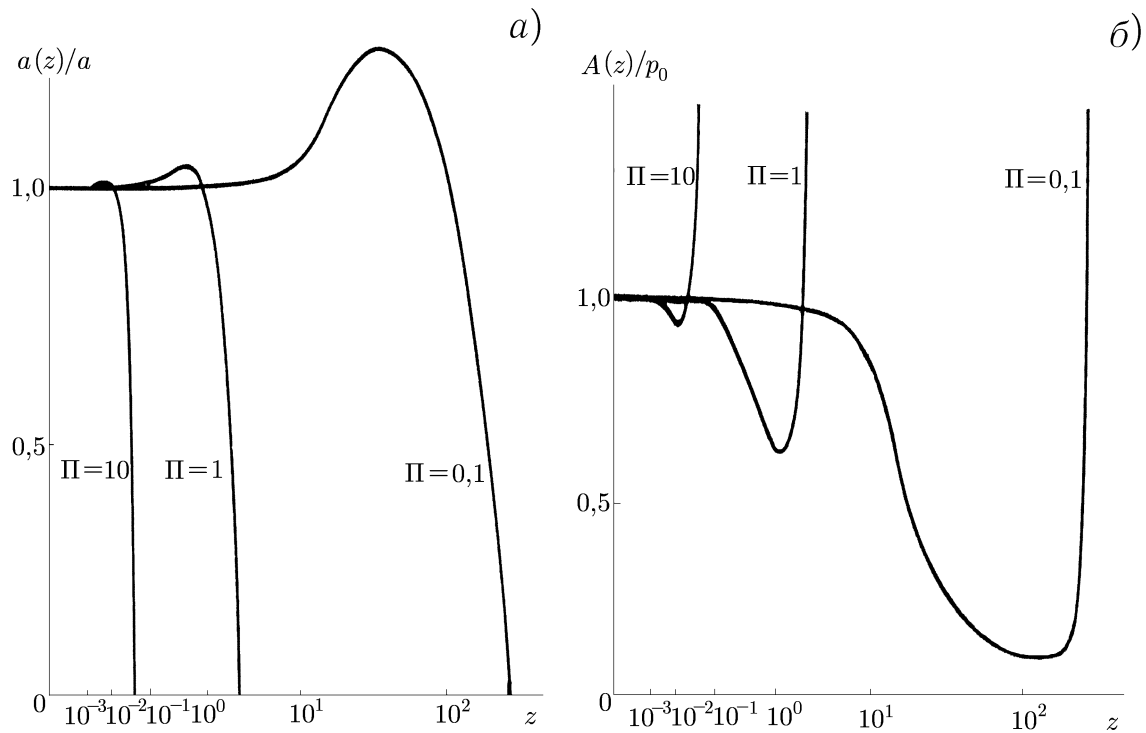


Рис. 2

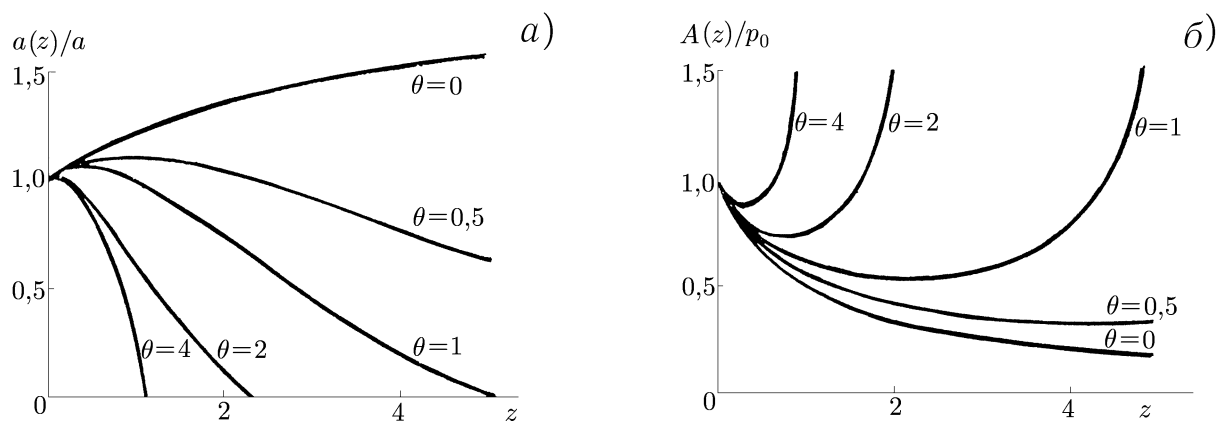


Рис. 3

$f(x, t)$ [24]:

$$f^5 \left[1 + \int_0^z \frac{dz'}{f(z', \theta)} \right]^4 \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{f} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right) = \pm 1. \quad (22)$$

Здесь введены новые безразмерные переменные

$$z = x/x_s, \quad \theta = t/t_0, \quad (23)$$

где

$$t_0 = \frac{\varepsilon \omega \rho c_p a^2}{4\pi |\delta| c^2 p_0}.$$

Как и ранее (см. (20)), знак плюс в правой части уравнения (22) отвечает положительным δ (дефокусировка), знак минус соответствует случаю самофокусирующей среды. Граничные и начальные условия для постановки задачи надо выбрать так:

$$f(z=0) = f(\theta=0) = 1, \quad \left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{K}{\Pi} = \frac{x_s}{R}. \quad (24)$$

Задача (22), (24) решалась численно. На рис. 3 изображены зависимости характеристик пучка от расстояния z в последовательные моменты времени в случае самофокусирующей среды. Первоначально фронт волны был плоским. Рис. 3а иллюстрирует поведение ширины пучка, рис. 3б — амплитуды волны на оси. Видно, что в начальный момент времени ширина пучка увеличивается с ростом z , а пиковое давление на оси уменьшается вследствие нелинейного поглощения. С течением времени среда прогревается, в результате чего тепловая линза усиливается. Пучок фокусируется, и фокус движется к излучателю. Скорость этого движения уменьшается со временем.

3. БЕЗЫНЕРЦИОННОЕ САМОВОЗДЕЙСТВИЕ

Ещё в работе [18] было показано, что в квадратично-нелинейной среде без дисперсии поперечное распределение интенсивности, средней по периоду волны, не изменяется. Вместе с тем происходит генерация гармоник, пространственная локализация которых различна: чем выше номер гармоники, тем в более узкой приосевой области она сосредоточена. Если дифракция несущественна для волны с основной частотой, она тем более мала для высших гармоник; следовательно, квадратичная нелинейность не может искривлять лучи. Заметная дифракция приводит к появлению фазовых сдвигов между гармониками. В результате сложения расфазированных гармоник вместо обычной «пилы» образуется профиль более сложной формы [25]: в пределах каждого периода профиль в области сжатия становится высоким и острым, а в области разрежения — сглаженным. Пик давления в области сжатия может даже превысить исходную величину. Однако локальное увеличение давления в некоторой области, движущейся с околосвуковой скоростью, вряд ли имеет смысл связывать с самофокусировкой. Указанные в работе [25] особенности наблюдались во многих экспериментах (см., например, [26]).

В работе [27] обсуждается возможность автолокализованного распространения звуковых пучков (по аналогии с явлением, описанным В.И. Талановым [1]), для которых дифракционная расходимость компенсируется нелинейной неинерционной рефракцией. Такая возможность, по видимому, может быть реализована для пучков и волновых профилей специальной формы.

В кубично-нелинейных средах распространение недиспергирующих волновых пучков описывается уравнением

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{\partial p}{\partial x} + \gamma p^2 \frac{\partial p}{\partial \tau} - \beta \frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2} \right] = \frac{c}{2} \Delta_{\perp} p, \quad (25)$$

где коэффициенты β и γ характеризуют диссипативные и нелинейные свойства среды. Например, в акустике кубичная нелинейность является основной для сдвиговых волн в бездефектном твёрдом теле. Безынерционное самовоздействие на основе модели (25) исследовано в работах [28–32].

Обычный для диспергирующих сред переход (6) от полевого описания (25) к уравнению типа уравнения Шрёдингера для комплексной амплитуды

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \beta \omega^2 A = \frac{i}{2k} \Delta_{\perp} A + i\gamma \omega |A|^2 A \quad (26)$$

здесь неправилен по следующим причинам. Как показано в работе [3], уравнение (26) при $\beta = 0$ описывает неустойчивость плоского фронта волны в тех случаях, когда её интенсивность превышает критическое значение:

$$A^2 > A_{\text{cr}}^2 = \frac{c}{\gamma \omega^2} \frac{a_1^2 + a_2^2}{a_1^2 a_2^2}. \quad (27)$$

При этом амплитуда любой пространственной гармоники возмущения $A'(x) \cos(y/a_1) \cos(z/a_2)$, где y и z — декартовы координаты в поперечном сечении пучка, экспоненциально растёт с расстоянием. Таким образом, в самофокусирующей среде плоская волна при условии (27) неустойчива, она разбивается на отдельные самофокусирующиеся пучки с мощностью порядка критической.

С другой стороны, исходная гармоническая плоская волна, описываемая уравнением (25), трансформируется в сигнал с пилообразным профилем; в отличие от квадратично-нелинейных сред [18] «зубцы пилы» в кубичной среде имеют трапециевидную форму (см, например, [30]). В результате нелинейного поглощения на ударных фронтах амплитуда возмущения уменьшается по закону $A(x) = A_0 (1 + \alpha \gamma \omega A_0^2 x)^{-1/2}$, где $\alpha = (3 - 2 \ln 2)/(4\pi)$.

Таким образом, нелинейный член $\gamma p^2 \partial p / \partial \tau$ в уравнении (25) отвечает за два противоположных процесса: рост амплитуды вследствие самофокусировки и нелинейное затухание из-за формирования ударных фронтов. Ясно, что пользоваться уравнением (26) для недиспергирующих волн нельзя. В этом случае нужно развивать адекватные подходы, учитывающие специфику поведения пилообразных волн.

Используя (9) и переходя к приближению нелинейной геометрической акустики, получим вместо (25) пару уравнений: переноса

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \gamma (p^2 - \langle p^2 \rangle) \frac{\partial p}{\partial \theta} - \beta \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + \nabla_{\perp} \psi \nabla_{\perp} p + \frac{p}{2} \Delta_{\perp} \psi = 0 \quad (28)$$

и эйконала

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{2} (\nabla_{\perp} \psi)^2 = \gamma c \langle p^2 \rangle. \quad (29)$$

Умножим теперь (28) на p и усредним по периоду волны. В результате получим уравнение для средней интенсивности:

$$\frac{\partial J}{\partial x} + \nabla_{\perp} \psi \nabla_{\perp} J + J \Delta_{\perp} \psi = -2\beta \left\langle \left(\frac{\partial p}{\partial \theta} \right)^2 \right\rangle, \quad (30)$$

где $J = \langle p^2 \rangle$. Правая часть уравнения (30) связана с нелинейной диссипацией энергии на ударных фронтах и вычисляется на основе выражений, описывающих структуру фронтов. В периодической трапециевидной «пиле» [30] ударная волна сжатия имеет вид перепада между значениями $-2A$ и A , а волна разрежения — между $2A$ и $-A$. Фронт сжатия на периоде с номером n описывается неявным выражением

$$\ln \left| \frac{1 + 2p/A}{1 - p/A} \right| + \frac{3}{1 - p/A} = \frac{9\gamma}{2\beta} A^2 (\theta - \theta_n). \quad (31)$$

Здесь θ_n — константа, определяющая положение фронта в профиле волны. Аналогичная формула справедлива для ударной волны разрежения. Рассчитав правую часть (30) на основе (31), в пределе исчезающе малой линейной диссипации придём к следующей системе уравнений [30]:

$$\frac{\partial J}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial r}(JV) + \frac{m}{r}JV = -\alpha\omega\gamma J^2, \quad (32)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial r} = \gamma c \frac{\partial J}{\partial r}. \quad (33)$$

Здесь $m = 0$ для плоского (щелевого) пучка, $m = 1$ для осесимметричного круглого пучка, $V = \partial\psi/\partial r$. Коэффициент α определяется структурой профиля трапецевидной «пилы». Система (32), (33) похожа на уравнения, описывающие течение баротропной сжимаемой жидкости, которые использовались ранее для анализа абберационной самофокусировки света [33]. Принципиальное различие заключается в том, что нелинейность, которая определяется слагаемыми с γ , присутствует в обоих уравнениях. При этом правая часть уравнения (32) ответственна за нелинейное поглощение, а правая часть (33) — за искривление лучей. В оптической задаче нелинейное поглощение отсутствует, и система (32), (33) при $m = 0$ решается точно.

В нашем случае система (32), (33) также имеет интересные решения. Для параболической формы фронта (15) точным решением (32) будет выражение ($m = 1$)

$$J = \frac{1}{f^2(x)} J_0 \left(\frac{r}{af} \right) \left[1 + \alpha\omega\gamma J_0 \left(\frac{r}{af} \right) \int_0^x \frac{dx'}{f^2(x')} \right]^{-1}. \quad (34)$$

Здесь J_0 — исходная интенсивность на оси пучка. С учётом (34) уравнение (33) сводится к нелинейному интегро-дифференциальному уравнению

$$f^3 \frac{d^2 f}{dx^2} = -\frac{1}{x_d x_s} \left[1 + \frac{\alpha}{x_s} \int_0^x \frac{dx'}{f^2(x')} \right]^{-2} + \frac{1}{x_d^2} \quad (35)$$

для функции f , которая описывает изменение амплитуды волны и ширины пучка. Последний член в правой части (35) — дифракционная поправка, позволяющая устранить особенность в фокусе [32]; характерное расстояние формирования разрыва x_s и масштаб дифракции x_d даются следующими выражениями:

$$x_s = \frac{1}{\omega\gamma J_0}, \quad x_d = \frac{ka^2}{2}.$$

Уравнение (35) удаётся линеаризовать, введя новую переменную

$$\xi = \frac{x_s}{\alpha x_d} + \frac{1}{x_d} \int_0^x \frac{dx'}{f^2(x')}, \quad d\xi = \frac{1}{x_d} \frac{dx}{f^2(x)}. \quad (36)$$

С учётом (36) уравнение (35) примет вид

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \left(\frac{1}{f} \right) + \left(1 - \frac{x_s}{\alpha^2 x_d} \frac{1}{\xi^2} \right) \frac{1}{f} = 0. \quad (37)$$

Общее решение уравнения (37) выражается через функции Бесселя первого (J_ν) и второго (N_ν) рода порядка ν :

$$f(\xi) = \frac{\xi^{-1/2}}{C_1 J_\nu(\xi) + C_2 N_\nu(\xi)},$$

$$\nu = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{4x_s}{\alpha^2 x_d}}. \quad (38)$$

Постоянные C_1 и C_2 в решении (38) определяются из граничных условий при $x = 0$, или $\xi = x_s/(\alpha x_d)$:

$$f(x=0) = 1, \quad \left. \frac{df}{d\xi} \right|_{x=0} = \frac{x_d}{R}.$$

Подробный анализ этого удивительного решения (определение минимальной ширины пучка, угловой расходимости в дальнем поле, зависимостей ширины пучка и амплитуды волны на оси от расстояния) проведён в работе [32].

Точное решение уравнения (35) при отсутствии дифракционной поправки было найдено в работе [30].

На рис. 4 приведены зависимости ширины пучка от расстояния, нормированного на величину, характеризующую положение нелинейного фокуса при отсутствии дифракции. На входе в среду фронт волны был плоским. Кривые 1–4 соответствуют значениям параметра x_s/x_d , равным 0,02; 0,2; 1 и 4. Видно, что при слабо выраженной дифракции происходит заметное сужение пучка.

На рис. 5 штриховыми кривыми 1 показано поведение функции f в зависимости от расстояния (того же, что и на рис. 4), определяющей ширину пучка, при отсутствии дифракции. Сплошные кривые 2 (для f) и 3 (для амплитуды «пилы») построены с учётом дифракционных поправок. На малых расстояниях амплитуда уменьшается из-за нелинейной диссипации энергии, происходящей на фронтах пилообразной волны. Затем нелинейная фокусировка «притормаживает»

этот процесс и может даже немного усилить волну в фокальной области. За фокусом пучок становится расходящимся; вследствие расходимости и нелинейного поглощения амплитуда волны уменьшается. Кривые на рис. 5а–в построены для $x_s/x_d = 10^{-3}$, 10^{-2} и 10^{-1} соответственно.

Как видно из рис. 5, при отсутствии дисперсии кубичная нелинейность не приводит к существенному росту амплитуды. Хотя пучок заметно сужается и имеет нелинейную перетяжку, фактор усиления невелик из-за принципиально неустраняемого поглощения на ударных фронтах «пилы». Наибольшего усиления «амплитуды пила» в фокусе (порядка 1,65) удаётся достичь при $x_s/x_d \approx 0,06$ [30].

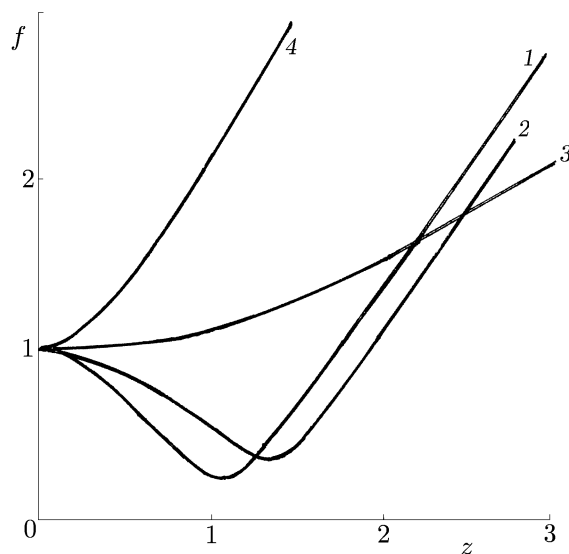


Рис. 4

4. САМОРЕФРАКЦИЯ ИМПУЛЬСОВ

Самовоздействие одиночных импульсных сигналов, содержащих ударные фронты [34], представляет интерес для ряда приложений нелинейной акустики и механики. Нелинейные импульсы возбуждаются взрывными источниками [35], электрическими разрядами [36], лазерным излучением [37, 38]. В последние годы исследования мощных импульсов были стимулированы медицинскими приложениями — для ударно-волновой экстракорпоральной литотрипсии (бесконтактного

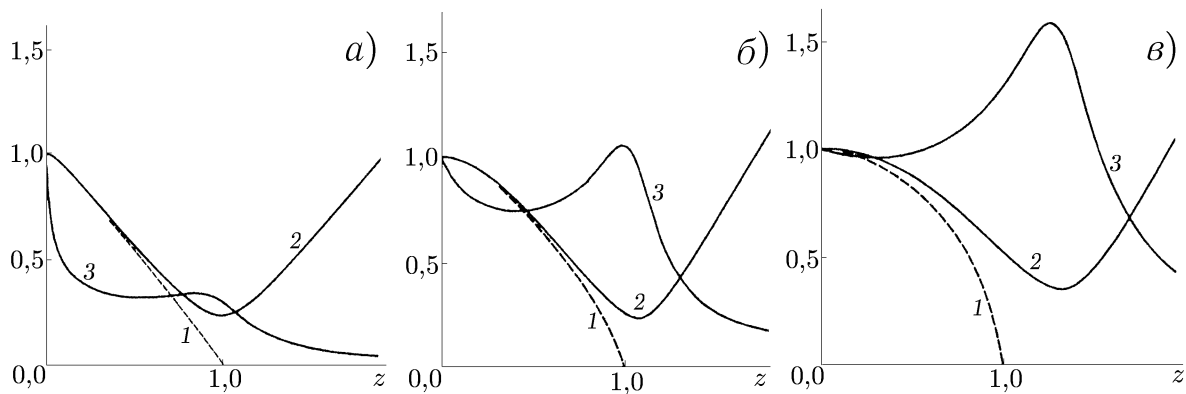


Рис. 5

неинвазивного разрушения почечных камней) [38, 39] и дистанционной ультразвуковой эластометрии сдвиговых модулей упругости мягких биотканей [40].

При создании литотриптеров проводились измерения параметров возбуждаемых ими сфокусированных импульсов, в ходе которых были обнаружены нелинейные явления: саморефракция, насыщение пикового давления в фокусе, увеличение размеров фокальной области, её сдвиг от генератора и ряд других [37–39]. Для понимания природы этих явлений и их математического описания потребовались дополнительные исследования.

Явление саморефракции [34] связано с нелинейным изменением Δc скорости распространения ударного фронта, которая растёт с увеличением скачка давления A : $\Delta c = \varepsilon A / (2c\rho)$. Поскольку величина A вблизи оси больше, чем на периферии пучка, наблюдается «выпрямление» фронта сфокусированной волны. Одновременно идёт процесс нелинейного затухания, и распределение амплитуды A по фронту становится более однородным, что замедляет саморефракцию. Нетрудно видеть, что описанные процессы приводят к смещению положения фокуса в нелинейной среде по отношению к его положению в случае линейной среды и увеличивают размер перетяжки. Эти явления наблюдались в экспериментах, описанных в обзоре [7].

Нелинейное поведение одиночного сфокусированного импульса описано в работе [41] на основе стандартного уравнения Хохлова–Заболотской ($U_x = T = b = 0$ в уравнении (1)). Совершая замену переменных (9) и переходя к приближению нелинейной геометрической акустики, получим пару уравнений

$$\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{c^3 \rho} \left(p - \frac{A}{2} \right) \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{\partial p}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{p}{2} \Delta_{\perp} \psi = 0, \quad (39)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right)^2 = -\frac{\varepsilon}{2c^2 \rho} A \quad (40)$$

в той области, где волна содержит разрыв с пиковым давлением A . Аналогичная система, в которой $A = 0$, описывает импульс на стадии до образования ударного фронта.

Считая фронт параболическим (15) и совершая замену переменных

$$P = f(x)p, \quad B = f(x)A, \quad \zeta = r/(af), \quad \xi = \int_0^x \frac{dx'}{f(x')}, \quad (41)$$

сведём уравнение переноса к уравнению типа простых волн:

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} - \frac{\varepsilon}{c^3 \rho} \left(P - \frac{B}{2} \right) \frac{\partial P}{\partial \theta} = 0, \quad (42)$$

которое легко решается. В результате для пикового давления в одиночном импульсе длительностью $2T_0$, имеющем исходную форму во времени в виде равнобедренного треугольника, получаем

$$A(x, r) = \frac{p_0}{f} \Phi\left(\frac{r}{af}\right) \left[1 + \frac{1}{2x_s} \Phi\left(\frac{r}{af}\right) \int_{x_1}^x \frac{dx'}{f(x', t)} \right]^{-1/2}. \quad (43)$$

Здесь $x_1 = R[1 - \exp(-x_s/R)]$ — расстояние, на котором в сфокусированной волне образуется разрыв, $x_s = c^3 \rho T_0 / (\varepsilon p_0)$ — расстояние формирования разрыва в соответствующей плоской волне. Подставляя результат (43) в уравнение эйконала (40), приведём его к следующему виду:

$$f^2 \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{1}{2x_s x_d} \left[1 + \frac{1}{4x_s} \int_{x_1}^x \frac{dx'}{f(x', t)} \right] \left[1 + \frac{1}{2x_s} \int_{x_1}^x \frac{dx'}{f(x', t)} \right]^{-3/2}. \quad (44)$$

Здесь $x_d = a^2 / (2cT_0)$ — характерный масштаб дифракции. Граничными условиями при $x = x_1$ будут следующие соотношения:

$$f(x = x_1) = 1 - \frac{x_1}{R}, \quad \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_1} = -\frac{1}{R}. \quad (45)$$

Уравнение (44) с условиями (45) решалось численно. Варьировались параметры $\Pi = R/x_s$ (безразмерное пиковое давление) и $D = R/x_d$ (безразмерный радиус дифракционной перетяжки).

При малых значениях Π максимум пикового давления достигается в фокусе $x = R$ и составляет большую (при слабо выраженной дифракции) величину p_0/D .

Типичная нелинейная кривая зависимости давления от расстояния содержит четыре характерных участка. Вначале пиковое давление растёт из-за схождения волны к фокусу. Затем, после образования разрыва, начинается нелинейное затухание, и, несмотря на фокусировку, пиковое давление может даже уменьшиться. По мере приближения к фокусу (третий участок) давление растёт, и в некоторой точке $x > R$ достигает максимума. Наконец, на четвёртом участке, за фокусом, импульс ослабляется как из-за геометрической расходимости, так и вследствие нелинейного поглощения.

Важной особенностью является уменьшение максимума пикового давления с ростом p_0 . При достаточно больших исходных значениях, например при $\Pi \geq 100$ и $D = 0,01$, усиления нет вовсе.

Таким образом, рефракция приводит к новому явлению — ограничению пикового давления в сфокусированных импульсных сигналах. Напомним, что обычное нелинейное затухание несколько ослабляет зависимость давления в фокусе от исходного пикового давления, но не может уничтожить эту зависимость совсем [18] (как это происходит в случае периодических пилообразных сигналов). Многочисленные расчёты позволили оценить этот максимум:

$$A_{\max} \sim 1,5 \frac{c^2 \rho}{2\varepsilon} \frac{a}{R}. \quad (46)$$

Как видно из эмпирической формулы (46), давление в фокусе равно произведению характерного внутреннего давления в среде на половину угла схождения исходного пучка. Для воды при схождении 30° оценка (46) даёт 1 300 атм, что соответствует экспериментальным данным [39].

Итак, нелинейность сильно влияет на процесс фокусировки импульсных сигналов. Помимо поглощения на ударном фронте происходит самодефокусировка, обусловленная зависимостью скорости фронта от пикового давления. Из-за этого размер фокального пятна может заметно

превосходить своё значение в случае линейной среды, причём он увеличивается с ростом исходной амплитуды. Продольный размер фокального пятна также увеличивается, т. е. нелинейные эффекты в целом «размывают» фокальную область. Кроме того, поперечное распределение амплитуды становится более однородным; нелинейный фокус образуется на больших расстояниях, чем линейный. Амплитуда импульса в фокусе при больших значениях исходного пикового давления p_0 от него практически не зависит — наступает нелинейное насыщение.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этом кратком обзоре упомянута лишь малая часть экспериментальных работ по самовоздействию пилообразных волн и одиночных импульсов, содержащих ударные фронты. В последние годы появляется много интересных работ в этой области, и, по-видимому, пора провести обсуждение физики наблюдавшихся явлений. Однако здесь автор преследовал более простую цель: подчеркнуть специфику эффектов самовоздействия пучков широкополосных, сильно искажённых волновых профилей, а также обсудить связь используемых здесь уравнений и теоретических моделей с теорией оптической самофокусировки, развитой в классических работах В. И. Таланова [1–6] и его коллег.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Таланов В. И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1964. Т. 7, № 5. С. 564.
2. Таланов В. И. // Письма в ЖЭТФ. 1965. Т. 2, вып. 5. С. 218.
3. Беспалов В. И., Таланов В. И. // Письма в ЖЭТФ. 1966. Т. 3, вып. 12. С. 471.
4. Таланов В. И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1966. Т. 9, № 2. С. 410.
5. Таланов В. И. // Письма в ЖЭТФ. 1970. Т. 11, вып. 6. С. 303.
6. Власов С. Н., Таланов В. И. Самофокусировка волн. Н. Новгород: ИПФ РАН, 1997.
7. Руденко О. В. // Успехи физ. наук. 1995. Т. 165, № 9. С. 1011.
8. Аскарьян Г. А. // Письма в ЖЭТФ. 1966. Т. 4, вып. 4. С. 144.
9. Бахвалов Н. С., Жилейкин Я. М., Заболотская Е. А. Нелинейная теория звуковых пучков. М.: Наука, 1982.
10. Ассман В. А., Бункин Ф. В., Верник А. В., Ляхов Г. А., Шипилов К. Ф. // Письма в ЖЭТФ. 1985. Т. 41, № 4. С. 148.
11. Андреев В. Г., Карабутов А. А., Руденко О. В., Сапожников О. А. // Письма в ЖЭТФ. 1985. Т. 41, № 9. С. 381.
12. Бункин Ф. В., Ляхов Г. А., Шипилов К. Ф. // Успехи физ. наук. 1995. Т. 165, № 10. С. 1145.
13. Наугольных К. А., Островский Л. А. Нелинейные волновые процессы в акустике. М.: Наука, 1990.
14. Vinogradov E. A., Shipilov K. F. // Physics of Vibrations. 2002. V. 10, No. 2. P. 72.
15. Буров А. К. // Акуст. журн. 1958. Т. 4, № 4. С. 315.
16. Армеев В. Ю., Карабутов А. А., Сапожников О. А. // Акуст. журн. 1987. Т. 33, № 2. С. 177.
17. Карабутов А. А., Руденко О. В., Сапожников О. А. // Вестник Моск. ун-та. Физика, астроном. 1988. Т. 29, № 4. С. 63.
18. Руденко О. В., Солуян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975.
19. Новиков Б. К., Руденко О. В., Тимошенко В. И. Нелинейная гидроакустика. Л.: Судостроение, 1981.
20. Карабутов А. А., Руденко О. В., Сапожников О. А. // Акуст. журн. 1988. Т. 34, № 4. С. 644.

21. Карабутов А. А., Руденко О. В., Сапожников О. А. // Акуст. журн. 1989. Т. 35, № 1. С. 67.
22. Le Floch C., Tanter M., Fink M. // Appl. Phys. Lett. 1999. V. 74, No. 20. P. 3062.
23. Hallaj I. M., Cleveland R. O., Нунунен К. // J. Acoust. Soc. Am. 2001. V. 109, No. 5 (Pt. 1). P. 2245.
24. Руденко О. В., Сагатов М. М., Сапожников О. А. // ЖЭТФ. 1990. Т. 98, № 3 (9). С. 808.
25. Руденко О. В., Солуян С. И., Хохлов Р. В. // Доклады АН СССР. 1975. Т. 225, № 5. С. 1053.
26. Андреев В. Г., Карабутов А. А., Руденко О. В. // Акуст. журн. 1985. Т. 31, № 4. С. 423.
27. Маков Ю. Н. // Акуст. журн. 2000. Т. 46, № 5. С. 680.
28. Rudenko O. V. // Advances in Nonlinear Acoustics. World Scientific, 1993. P. 3.
29. Руденко О. В., Сапожников О. А. // Квантовая электроника. 1993. Т. 20, № 10. С. 1028.
30. Руденко О. В., Сапожников О. А. // ЖЭТФ. 1994. Т. 106, № 2 (8). С. 395.
31. Руденко О. В., Сухоруков А. А. // Акуст. журн. 1995. Т. 41, № 5. С. 822.
32. Руденко О. В., Сухоруков А. А. // Изв. Академии наук. Сер. физическая. 1996. Т. 60, № 12. С. 6.
33. Ахманов С. А., Сухоруков А. П., Хохлов Р. В. // Успехи физ. наук. 1967. Т. 93, № 1. С. 19.
34. Фридман В. Е. // Акуст. журн. 1982. Т. 28, № 4. С. 551.
35. Лаврентьев Э. В., Кузян О. Н. Взрывы в море. Л.: Судостроение, 1977.
36. Наугольных К. А., Рой Н. А. Электрические разряды в воде. М.: Наука, 1971.
37. Аскаръян Г. А., Королёв М. Г., Юркин А. В. // Письма в ЖЭТФ. 1990. Т. 51, № 11. С. 586.
38. Андреев В. Г., Вероман В. Ю., Денисов Г. А., Руденко О. В., Сапожников О. А. // Акуст. журн. 1992. Т. 38, № 4. С. 588.
39. Coleman F. J., Saunders J. E. // Ultrasound in Medicine and Biology. 1989. V. 15. P. 213.
40. Sarvazyan A. P., Rudenko O. V., Swanson S. D., Folwkes J. B., Emelianov S. Y. // Ultrasound in Medicine and Biology. 1998. V. 24, No. 9. P. 1419.
41. Мусатов А. Г., Руденко О. В., Сапожников О. А. // Акуст. журн. 1992. Т. 38, № 3. С. 502.

Московский госуниверситет им. М. В. Ломоносова,
г. Москва, Россия

Поступила в редакцию
30 июня 2003 г.

SELF-ACTION OF WAVE BEAMS CONTAINING SHOCK FRONTS

O. V. Rudenko

We present a brief review of the nonlinear self-action of beams of strongly distorted waves containing steep shock fronts. Features of inertial self-actions of periodic sawtooth-shaped waves in quadratic nonlinear media without dispersion are discussed. These phenomena can be caused by an acoustic wind or thermal lens formed as a result of the nonlinear dissipation at the fronts. Non-inertial self-actions are analyzed by two examples: (i) periodic trapezoidal waves which are formed in cubic nonlinear media and contain alternating compression and rarefaction shocks and (ii) a single-pulse signal containing a shock front. Mathematical models and solutions to corresponding nonlinear equations are given. A qualitative comparison with optical self-action phenomena and with available experimental data is performed.

УДК 533.951

САМОФОКУСИРОВКА И КАНАЛИРОВАНИЕ ВОЛНОВЫХ ПУЧКОВ В УСЛОВИЯХ ИОНИЗАЦИОННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ В НЕОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В. В. Доброхотов, Г. А. Марков

Экспериментально исследован эффект ионизационного самоканалирования волновых полей свистового диапазона частот в неоднородном магнитном поле. Показано, что образующаяся плазменная неоднородность локализует излучение короткого высокочастотного источника внутри разрядного канала, вытянутого вдоль внешнего магнитного поля. Обнаружена возможность управления в широких пределах параметрами формируемого плазменно-волнового канала, дисперсионными характеристиками и структурой волновых полей путём изменения магнитного поля в заданной области пространства. Предложена и опробована в лабораторном эксперименте методика формирования плазменного резонатора, в котором пространственные распределения плазмы и поля подобны распределениям плазмы и поля вдоль геомагнитной силовой трубки магнитосферного резонатора. Обнаружена неустойчивость плазмы в таком резонаторе в окрестности частоты продольных колебаний электронов между магнитными пробками.

ВВЕДЕНИЕ

Внешнее магнитное поле не влияет на структуру полей электромагнитных источников до тех пор, пока амплитуда этих полей недостаточна для пробоя окружающей среды. В разреженных газах ВЧ пробой на частотах $\omega < \omega_{Be}$, $\omega \gg \nu_e$, где ω_{Be} — гирочастота электронов, ν_e — частота столкновений электронов, принципиально изменяет конфигурацию и величину ближних (квазистатических) и дальних полей источников (полей излучения). Формируемое при разряде плазменное образование существенно изменяет диаграмму направленности и согласование излучателя с окружающей средой и источником питания. Например, излучение электрического дипольного источника, ориентированного вдоль внешнего магнитного поля, может быть сконцентрировано вдоль его оси в узком плазменном волноводе, формируемом этим излучением [1]. Для источника малой мощности ($W_0 \leq 100$ Вт) и малой длины ($l_a \ll \lambda_0$, где λ_0 — длина волны в свободном пространстве) каналируемые моды являются квазипотенциальными плазменными волнами [2, 3], локализованными в шнуре плотной плазмы (концентрация плазмы $N_e > N_{кр} = \omega^2 m / (4\pi e^2)$, где e и m — заряд и масса электрона соответственно) за счёт полного внутреннего отражения. В свистовом диапазоне частот ($\omega_{LN} < \omega < \{\omega_p, \omega_{Be}\}$, где ω_{LN} — частота нижнегибридного резонанса, ω_p — плазменная частота) ВЧ источник в неоднородной замагниченной плазме может возбуждать волновые процессы с широким спектром пространственных масштабов, от величин порядка толщины проволоки антенных колец до вакуумной длины волны [4]. Однако волны с малой длиной затухают вблизи источника (характерный пространственный масштаб затухания $L_{sat} = \lambda_{||} \omega / \nu_e$, где $\lambda_{||}$ — продольный масштаб волны), а волны с большими масштабами ($\lambda_{||} \sim \lambda_0$) плохо возбуждаются коротким ($l_a \ll \lambda_0$) источником. За пределами резонансного конуса источника [2, 5–7] длина волны, формирующей разрядный канал, обычно близка к резонансной для используемой антенны. В случае дипольного источника длина волны $\lambda_{||} \sim 2l_a$, коэффициент замедления $p = \lambda_0 / \lambda_{||} \gg 1$. В нарастающем вдоль оси волновода магнитном поле $B_z(z)$ дисперсия каналируемых волн такова [8, 9], что квазипотенциальная волна может трансформироваться в слабо замедленную ($\lambda_{||} \sim \lambda_0$) поверхностную вихревую моду [10].

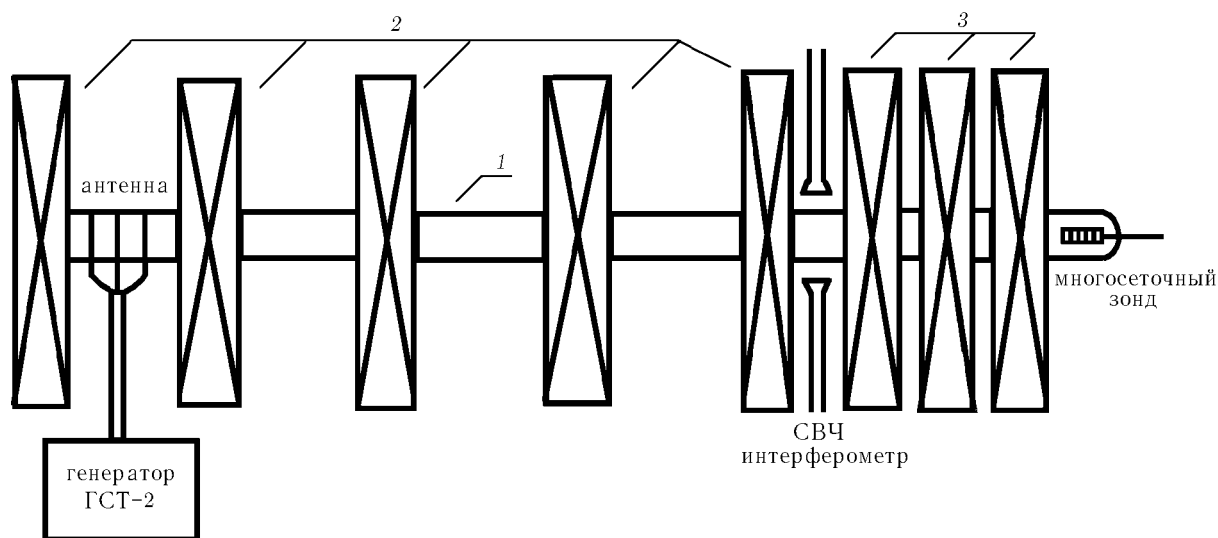


Рис. 1. Схема экспериментальной установки для исследования ионизационного самоканалирования вистлеров в неоднородном магнитном поле

Для эффекта ионизационного самоканалирования волн такая трансформация означает переход основной роли в нагреве разрядных электронов и формировании плазменного волновода от продольной ($\mathbf{E} \parallel \mathbf{B}$) квазипотенциальной компоненты электрического поля волны к поперечным, вихревым компонентам электрического поля. При этом возможны изменения структуры разрядного канала, концентрации и энергетических спектров заряженных частиц в канале.

В первой части настоящей работы приведены результаты исследования ионизационного самоканалирования волнового пучка, излучаемого квадрупольным источником, ориентированным вдоль внешнего неоднородного магнитного поля. Показано, что при возбуждении ВЧ разряда в свистовом диапазоне частот формируется локализованный на оси источника тонкий (с радиусом $R_{\perp} \ll l_a$) плазменный волновод, диаметр которого заметно уменьшается при удалении от источника в нарастающем аксиально-симметричном магнитном поле $B_z(z)$. Концентрация плазмы в волноводе при этом увеличивается с ростом расстояния z от источника. В результате вдоль волновода существенно меняются дисперсионные свойства и структура каналируемых волн. Плазменный волновод улучшает согласование короткого ($l_a \ll \lambda_0$) квадрупольного источника с окружающим пространством и локализует его излучение вдоль магнитного поля. Если такой источник поместить в центральную часть пробочной магнитной ловушки, то структура формируемого волновода будет напоминать магнитосферный дакт повышенной концентрации. В магнитных пробках концентрация плазмы в дакте максимальна, а его диаметр минимален, в центральной части ловушки концентрация плазмы минимальна, а диаметр максимален.

Во второй части работы приведены результаты исследования плазменного резонатора, формируемого квадрупольным ВЧ источником в пробочной магнитной ловушке. Обнаружены электромагнитные неустойчивости плазмы в таком резонаторе в окрестности баунс-частоты колебаний разрядных электронов между магнитными пробками и ниже гирочастоты ионов для центральной части ловушки.

1. САМОКАНАЛИРОВАНИЕ И ТРАНСФОРМАЦИЯ ВОЛН, ФОРМИРУЮЩИХ РАЗРЯДНЫЙ КАНАЛ В НЕОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Эксперименты этого раздела были выполнены на установке, схема которой приведена на рис. 1. Плазменный волновод формировался в результате ионизационного самоканалирования

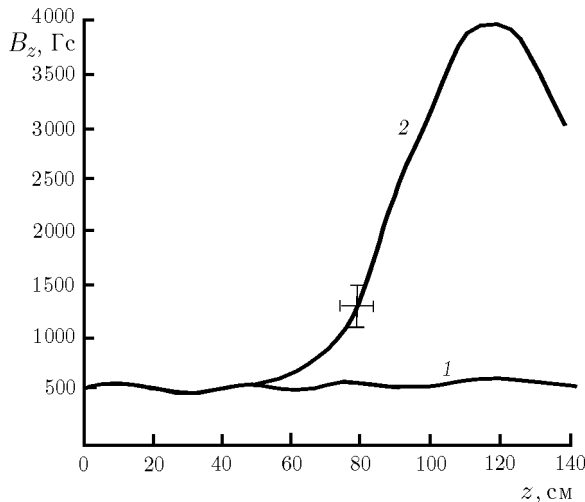


Рис. 2. Графики зависимости индукции внешнего аксиально-симметричного магнитного поля от продольной координаты z вдоль оси разрядного баллона для однородного (кривая 1) и неоднородного нарастающего (кривая 2) распределения $B_z(0, z)$

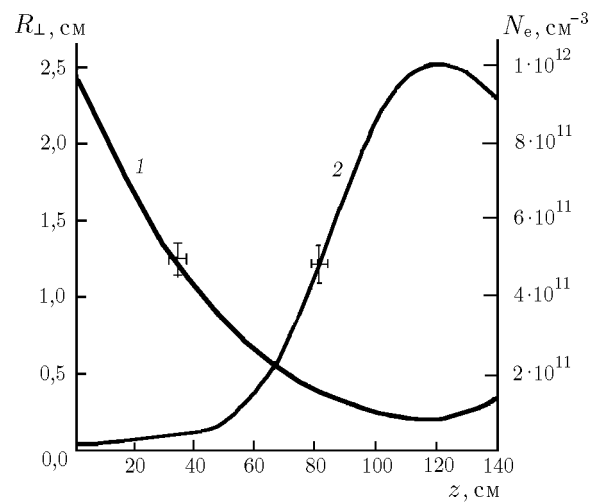


Рис. 3. Экспериментальные распределения вдоль плазменно-волнового канала его радиуса $R_{\perp}(z)$ (кривая 1) и концентрации плазмы $N_e(z)$ (кривая 2) для случая неоднородного нарастающего распределения поля $B_z(0, z)$, соответствующего кривой 2 на рис. 2

плазменных волн, возбуждаемых в стеклянном баллоне (рис. 1, элемент 1) с длиной 180 см и диаметром $2a = 6$ см при давлении воздуха $P \approx 10^{-3}$ Торр линейной квадрупольной антенной, состоящей из трёх колец с диаметром 6 см, размещённых перпендикулярно оси баллона у его конца на расстоянии 6 см друг от друга (длина антенны $l_a = 12$ см). Высокочастотное напряжение ($f_0 = 200$ МГц, $V_0 = 50$ В) от генератора ГСТ-2 подводилось к возбуждающим кольцам антенны с помощью коаксиального кабеля. Крайние кольца были соединены с внешней обмоткой кабеля, а центральное кольцо — с внутренней жилой кабеля. Мощность генератора составляла 50 Вт, вводимая в разряд мощность $W_0 \approx 20$ Вт. Внешнее магнитное поле создавалось двумя соленоидами (рис. 1, катушки 2 и 3) с автономным питанием, что позволяло изменять распределение магнитной индукции $B_z(z)$ вдоль оси разрядного баллона от квазиравномерного ($\bar{B}_z \approx 550$ Гс, $\Delta B/\bar{B}_z \approx 0,1$) до пробочного ($B_{\max}/\bar{B}_z \approx 7$) с максимумом поля приблизительно 3800 Гс на расстоянии $z \sim 120$ см от ВЧ источника. На рис. 2 приведены графики зависимости индукции внешнего магнитного поля от продольной координаты z вдоль оси разрядного баллона для однородного (кривая 1) и неоднородного нарастающего (кривая 2) распределения $B_z(0, z)$. Изменение величины магнитного поля вдали от ВЧ источника практически не влияло на согласование источника с разрядом и, следовательно, на параметры плазменного волновода вблизи источника, но позволяло исследовать изменения поперечного сечения волновода, концентрации плазмы и структуры каналируемых волн в области неоднородного магнитного поля.

Радиус волновода $R_{\perp}$ определялся по размеру области яркого свечения плазмы. При предположении радиального распределения концентрации плазмы степенным законом $n(r, z) = N_0(z) \times [1 + (r/d(z))^3]^{-1}$, который совпадал с экспериментальным распределением $N_{\text{exp}}(r, z)$ с точностью $(n - N_{\text{exp}})/N_{\text{exp}} \sim 10^{-1}$, оказалось, что $R_{\perp} \approx d/2$. Усреднённая по поперечному сечению разрядного канала концентрация плазмы $N_e(z) = R_{\perp}^{-1} \int_0^a N_{\text{exp}}(r, z) dr$ определялась с помощью интерферометра [11] на частоте 9,74 ГГц, а также по дисперсионным характеристикам поверхностных волн, направляемых разрядным каналом [9]. На рис. 3 представлены экспериментальные распределения $R_{\perp}(z)$ (кривая 1) и $N_e(z)$ (кривая 2) для случая пробочного распределения поля $B_z(0, z)$,

соответствующего кривой 2 на рис. 2.

Принципиально важным экспериментальным результатом является возрастание концентрации стационарной плазмы вдоль волновода от значения $N_e \sim (2 \div 5) \cdot 10^9 \text{ см}^{-3}$ в области ВЧ источника до уровня $N_e \approx 10^{12} \text{ см}^{-3}$ ($N_e/N_{\text{кр}} > 10^3$) в области сильного поля $B_{\text{max}} \approx 3800 \text{ Гс}$ (см. рис. 3). Наблюдаемое увеличение концентрации плазмы с ростом расстояния от ВЧ источника сопровождалось сужением разрядного канала в несколько раз (от $R_{\perp} \approx 2,5 \text{ см}$ до $R_{\perp} \approx 0,3 \text{ см}$). Важно, что электронное давление в канале ($P_e = N_e \kappa T_e$, где κ — постоянная Больцмана, T_e — электронная температура) существенно выше в области магнитной пробки по сравнению с давлением в области ВЧ источника, поэтому формирование канала за счёт потоков частиц из области ВЧ источника в данных условиях невозможно. Ближнее (потенциальное) поле источника также не может обеспечить наблюдаемую структуру разряда.

Энергетические спектры заряженных частиц в волновом канале определялись экранированным четырёхсеточным зондом, расположенным у выхода из магнитной пробки в торце разрядного баллона на его оси. На рис. 4 приведены нормированные на максимальные значения зависимости тока электронов I_e на коллектор зонда от тормозящего потенциала U , измеренные в разрядном канале при однородном распределении внешнего магнитного поля (кривая 1) и в нарастающем вдоль оси z магнитном поле (кривая 2), соответствующем кривой 2 на рис. 2.

Следует отметить, что для разряда сравнительно малой мощности ($W_0 \approx 20 \text{ Вт}$) относительное количество электронов с энергией больше 50 эВ на оси волноводного канала оказалось весьма высоким (более 30 %). Как видно из рис. 4, при отклонении продольного распределения внешнего магнитного поля от однородного возрастает относительная величина потока быстрых электронов.

Из прямых измерений длины волны излучения, формирующего канал, с помощью штыревой приёмной антенны с длиной 3 см, которая перемещалась вдоль стенки разрядной колбы, обнаружено, что при малых значениях магнитного поля $\tilde{B}_z < 500 \text{ Гс}$ и $N_e < 2 \cdot 10^9 \text{ см}^{-3}$ продольный масштаб волны в канале определялся размером возбуждающей антенны: $\lambda_{\parallel} \approx l_a$. При $\tilde{B}_z > 500 \text{ Гс}$ улучшалось согласование ВЧ источника с разрядом, возрастала концентрация плазмы в канале, а длина волны увеличивалась до размера зазора между катушками магнитного соленоида вблизи источника ($\lambda_{\parallel} \approx 21 \text{ см}$ при $\tilde{B}_z \geq 550 \text{ Гс}$). С увеличением магнитного поля в пробке концентрация плазмы в этой области сильно возрастала (см. рис. 3). При этом увеличивалась длина волны в области пробки, т.е. уменьшался коэффициент замедления волны, формирующей разрядный канал. На рис. 5 показаны экспериментальные распределения амплитуды продольной компоненты электрического волнового поля вдоль поверхности разрядного баллона для случаев однородного внешнего магнитного поля (кривая 1) и сильно неоднородного магнитного поля (кривая 2), соответствующих экспериментальным условиям кривых 1 и 2 на рис. 2 соответственно. Следует отметить, что структура волновых полей в области магнитной пробки ($z > 100 \text{ см}$) соответствует стоячей волне с длиной $\lambda_{\parallel} \approx 21 \text{ см}$ в случае однородного поля (кривая 1 на рис. 5) и $\lambda_{\parallel} \approx 70 \text{ см}$ в случае неоднородного нарастающего поля $B_z(z)$ (кривая 2 на рис. 5). Образование стоячей моды обусловлено отражением волны от резкого перепада концентрации плазмы у торцевой поверхности многосеточного зонда ($z = 140 \text{ см}$), перекрывающего разрядный канал.¹ Сложная структура $E_z(z)$ объясняется интерференцией собственной волны плазменного канала с ближним полем ВЧ источника и волнами, отражёнными от многосеточного зонда ($z = 140 \text{ см}$) и от скачка внутреннего диаметра катушек основного соленоида (внутренний диаметр 22 см) и соленоида пробки (внутренний диаметр 10 см, $z = 100 \text{ см}$). В ходе

¹ Корпус многосеточного зонда представляет собой латунный цилиндр с диаметром 30 мм и длиной 100 мм.

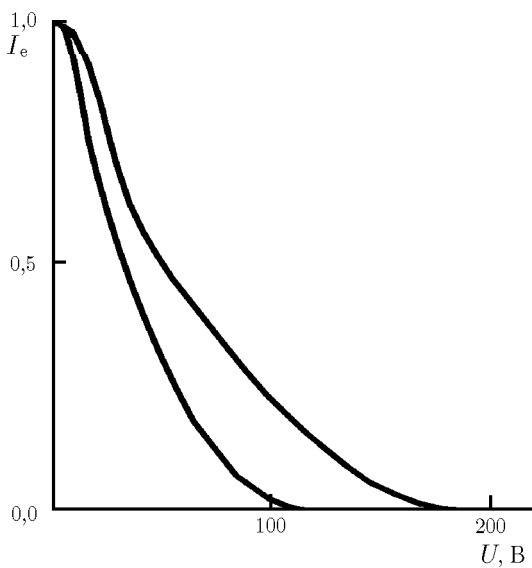


Рис. 4. Нормированные на максимальные значения зависимости тока электронов на коллектор четырёхсеточного зонда от тормозящего потенциала, полученные при однородном распределении внешнего магнитного поля (кривая 1) и в нарастающем вдоль оси z магнитном поле (кривая 2), соответствующем кривой 2 на рис. 2

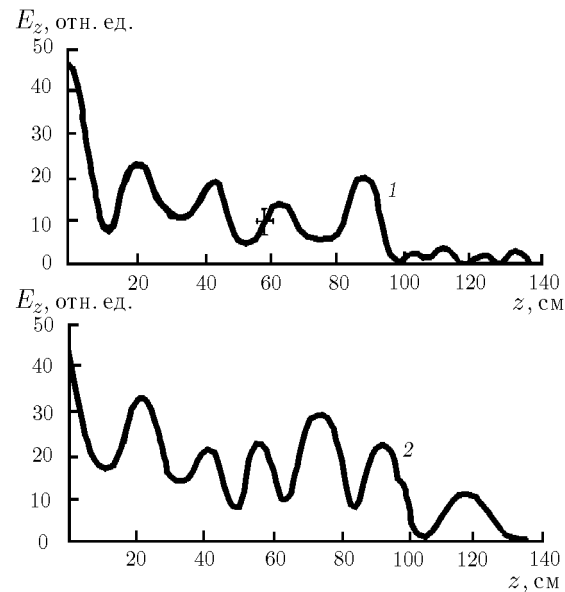


Рис. 5. Распределение амплитуды продольной компоненты электрического волнового поля $E_z(z)$ вдоль поверхности разрядного баллона для случая квазиоднородного внешнего магнитного поля $\tilde{B}_z(0, z) \approx 550$ Гс (кривая 1) и для неоднородного нарастающего внешнего поля $B_z(0, z)$ (кривая 2), соответствующего кривой 2 на рис. 2

эксперимента было также исследовано поперечное распределение продольной компоненты электрического поля волны, формирующей разряд, и зависимость радиальной H_r и азимутальной H_φ составляющих магнитного поля волны вблизи границы разрядного канала ($r = R_\perp$) в области магнитной пробки от величины внешнего магнитного поля B_z . Поперечные составляющие магнитного поля волны определялись с помощью приёмной антенны в форме вытянутой вдоль оси z проволочной петли с длиной 5 см и шириной 0,8 см, а распределение $E_z(r)$ определялось штыревой антенной. Оказалось, что и в сильном, и в слабом магнитном поле распределение $E_z(r)$ незначительно менялось внутри плазменного столба. Этот факт свидетельствует о наблюдении основной симметричной моды [9], каналируемой в узком плазменном столбе.

Азимутальная компонента H_φ магнитного поля выросла в 7 раз, а радиальная H_r возросла в 5 раз при изменении магнитной индукции B_z от 550 до 3800 Гс, что свидетельствует об увеличении вихревых составляющих волнового поля моды, каналируемой в неоднородном поле $B_z(z)$. Отметим, что амплитуда радиальной компоненты H_r оказалась значительно меньше амплитуды компоненты H_φ ($H_r \ll H_\varphi$), поэтому достоверность измерений H_r существенно меньше.

Прежде чем перейти к обсуждению экспериментальных результатов, отметим ещё раз, что длина свободного пробега электронов в наших экспериментах $l_e \geq 50$ см, поэтому стационарное распределение электронного давления $P_e = N_e k T_e$ вдоль разрядного канала близко к распределению концентрации плазмы $N_e(z)$. Увеличение концентрации плазмы $N_e(z)$ в канале и давления $P_e(z)$ с ростом расстояния от ВЧ источника можно объяснить только наличием в области магнитной пробки достаточно сильных волновых полей, способных создать локализованный плазменный волновод с концентрацией заряженных частиц, существенно превышающей концентрацию N_e в области ВЧ источника. Заметим, что излучение квадрупольного источника

вдоль своей оси возможно только при наличии подходящего плазменного волновода. Поэтому экспериментальные данные, приведённые на рис. 3, являются прямым доказательством эффекта ионизационного самоканализирования волновых полей, формирующих наблюдаемое стационарное распределение плазмы и поля. Значительное возрастание в области пробки поперечных компонент магнитного поля волны и её длины до масштабов порядка и больше длины свистовой волны в однородной плазме с такими же, как и в канале, параметрами, свидетельствует о наличии трансформации сильно замедленной ($p \geq 7$) квазипотенциальной волны, возбуждаемой источником в области сравнительно слабого ($B_z \sim 550$ Гс) магнитного поля, в слабо замедленную ($p \leq 2$) вихревую волну в области сильного поля ($B_z \sim 3800$ Гс). Отметим, что речь идёт об одной и той же «основной» [9] осесимметричной волноводной моде (зависимость $E_z(r)$ не имеет нулей внутри разрядного канала), поле которой, преимущественно квазипотенциальное в области ВЧ источника, трансформируется в преимущественно вихревое в области магнитной пробки ($B_z > 3600$ Гс). Трансформатором служит, по-видимому, плазменный волновод, формируемый излучением ВЧ источника в неоднородном магнитном поле.

Для построения самосогласованной модели наблюдаемого явления необходимо решать систему уравнений четвёртого порядка для поля совместно с уравнениями для концентрации плазмы, формируемой полем волны, и для температуры электронов [12, 13]. В настоящее время получены самосогласованные решения в приближениях либо квазипотенциальных [2, 3], либо свистовых волн [13], когда можно понизить порядок уравнений для поля. Решение полной системы уравнений с учётом неоднородности внешнего магнитного поля представляет определённые трудности, поэтому физическую картину наблюдаемого явления рассмотрим качественно на примере волн замагниченного плазменного столба.

Дисперсионные свойства и структура волновых полей, направляемых однородным плазменным столбом в продольном магнитном поле, рассмотрены в ряде работ (см., например, [8–10]). В случае неоднородного столба в неоднородном магнитном поле предложенная в [8] теория неприемима, однако для объяснения экспериментальных результатов можно воспользоваться грубой кусочно-однородной по оси z моделью плазменного столба в кусочно-однородном магнитном поле. Оправданием такой модели является тот факт, что продольный масштаб волновых полей (см. рис. 5) меньше масштабов неоднородностей распределений $B_z(z)$, $N_e(z)$ и $R_\perp(z)$ всюду, кроме области сильных полей ($B > 3600$ Гс). Компоненты электрического и магнитного полей симметричных мод цилиндрического плазменного волновода в продольном магнитном поле удобно представить в следующем виде [14]:

$$\begin{aligned} E_r &= \varepsilon^{-1} (\Phi - g\Psi), & H_r &= -pE_\varphi; & E_\varphi &= i\Psi, & H_\varphi &= p^{-1}\Phi; \\ E_z &= -\frac{i}{k_0 p \eta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\Phi), & H_z &= -\frac{1}{k_0 r} \frac{\partial}{\partial r} (r\Psi). \end{aligned} \quad (1)$$

Функции Φ и Ψ внутри плазменного столба определяются выражениями

$$\Psi = A_+ J_1(k_1 r) + A_- J_1(k_2 r), \quad \Phi = \mu_1 A_+ J_1(k_1 r) + \mu_2 A_- J_1(k_2 r), \quad (2)$$

а снаружи столба — выражениями

$$\Psi = BK_1(k_\nu r), \quad \Phi = CK_1(k_\nu r). \quad (3)$$

Соотношения между коэффициентами A_+ , A_- , B и C определяются из непрерывности компонент E_φ , H_φ , E_z и H_z на боковой поверхности волноводного канала. Дисперсионное уравнение для симметричных волн замагниченного плазменного цилиндра имеет следующий вид [8]:

$$\frac{(y_1 + Z\eta)(y_2 + Z)}{(y_2 + Z\eta)(y_1 + Z)} = \frac{\mu_2}{\mu_1}. \quad (4)$$

Здесь

$$y_1 = \frac{k_1 J_0(k_1 a)}{J_1(k_1 a)}, \quad y_2 = \frac{k_2 J_0(k_2 a)}{J_1(k_2 a)}, \quad Z = \frac{k_\nu K_0(k_\nu a)}{K_1(k_\nu a)},$$

$$k_1^2 = \frac{\chi_1^2 + \chi_2^2}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\chi_1^2 - \chi_2^2)^2 + 4\gamma_1 \gamma_2}, \quad k_2^2 = \frac{\chi_1^2 + \chi_2^2}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\chi_1^2 - \chi_2^2)^2 + 4\gamma_1 \gamma_2},$$

$$\chi_1^2 = \frac{k_0^2}{\varepsilon} [\varepsilon(\varepsilon - p^2) - g^2], \quad \chi_2^2 = \frac{k_0^2}{\varepsilon} \eta(\varepsilon - p^2), \quad k_\nu = k_0 \sqrt{p^2 - 1},$$

$$\gamma_1 = \frac{k_0^2}{\varepsilon} g, \quad \gamma_2 = \frac{k_0^2}{\varepsilon} p^2 g \eta, \quad \mu_1 = \frac{k_1^2 - \chi_1^2}{\gamma_1}, \quad \mu_2 = \frac{k_2^2 - \chi_1^2}{\gamma_1},$$

$J_n(kr)$ — функция Бесселя n -го порядка, $K_n(kr)$ — функция Макдональда n -го порядка;

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2 (\omega - i\nu_e)}{\omega [(\omega - i\nu_e)^2 - \omega_{Be}^2]}, \quad g = \frac{\omega_p^2 \omega_{Be}}{\omega [(\omega - i\nu_e)^2 - \omega_{Be}^2]}, \quad \eta = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega (\omega - i\nu_e)}$$

— компоненты тензора диэлектрической проницаемости замагниченной плазмы в случае $\omega \gg \omega_{\text{ЛН}}$ [15]; $\omega_p = \sqrt{4\pi e^2 N_e / m}$.

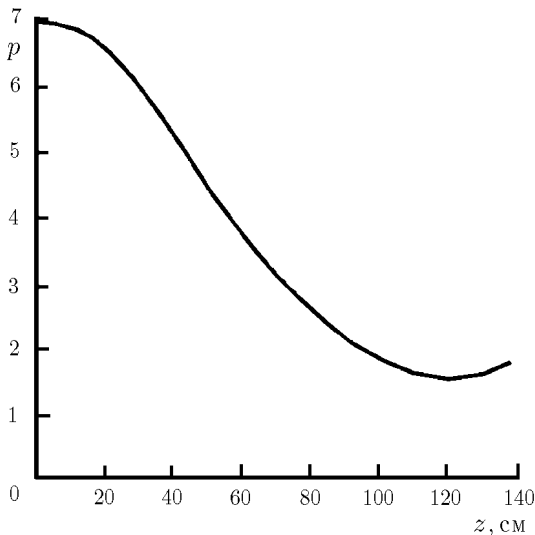


Рис. 6. График изменения коэффициента замедления $p = \lambda_0 / \lambda_{\parallel}$ волны, формирующей разрядный канал, вдоль оси разрядного баллона для случая неоднородного нарастающего магнитного поля $B_z(0, z)$, соответствующего кривой 2 на рис. 2

На рис. 6 изображено распределение коэффициента замедления каналируемой волны $p(z) = \lambda_0 / \lambda_{\parallel}$ вдоль оси разрядной колбы, полученное из решения дисперсионного уравнения (4) для «основной» симметричной моды по измеренным в ходе эксперимента значениям магнитного поля $B_z(z)$, концентрации $N_e(z)$ и радиуса столба $R_{\perp}(z)$. Уменьшение коэффициента замедления в области сильного магнитного поля соответствует наблюдаемому росту пространственных волновых масштабов, представленному на рис. 5.

В свистовом диапазоне частот изменение коэффициента замедления и, соответственно, длин каналируемых волн может сопровождаться принципиальным изменением структуры и свойств полей этих волн, что, в свою очередь, может сильно влиять на их возбуждение заданными источниками, на коэффициенты их отражения от неоднородностей параметров и т. д. Для пояснения этих утверждений обратимся к уравнению, описывающему поверхности показателей преломления необыкновенной волны в однородной замаг-

ниченной плазме [14]:

$$q_1^2 = \frac{1}{2\varepsilon} \left[\varepsilon^2 - g^2 + \varepsilon\eta - (\eta + \varepsilon)p^2 + \sqrt{(\eta - \varepsilon)^2 p^4 + 2[g^2(\eta + \varepsilon) - \varepsilon(\eta - \varepsilon)^2]p^2 + (\varepsilon^2 - g^2 - \varepsilon\eta)^2} \right],$$

$$q_2^2 = \frac{1}{2\varepsilon} \left[\varepsilon^2 - g^2 + \varepsilon\eta - (\eta + \varepsilon)p^2 - \sqrt{(\eta - \varepsilon)^2 p^4 + 2[g^2(\eta + \varepsilon) - \varepsilon(\eta - \varepsilon)^2]p^2 + (\varepsilon^2 - g^2 - \varepsilon\eta)^2} \right]. \quad (5)$$

Здесь $q_1 = k_1/k_0$ и $q_2 = k_2/k_0$ — нормированные на волновое число в свободном пространстве $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ поперечные волновые числа в плазме.

При заданных параметрах плазмы и коэффициенте замедления p из (5) всегда можно найти два значения поперечной составляющей волнового вектора q_1 и q_2 . В общем случае значения q_1

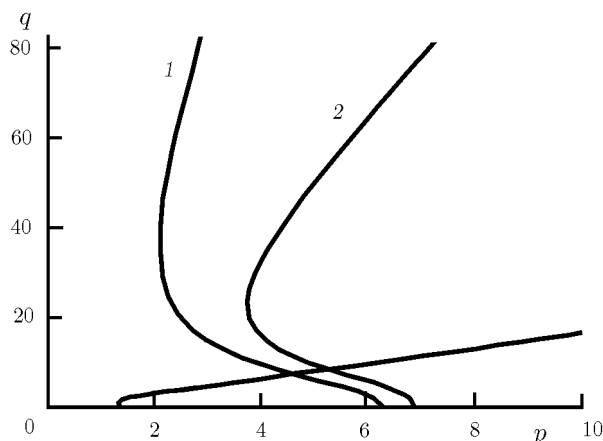


Рис. 7. Поверхности показателей преломления для условий, соответствующих области источника (кривая 1, $z = 10$ см, $N_e = 2 \cdot 10^9$ см $^{-3}$, $B_z = 550$ Гс), промежуточной области (кривая 2, $z = 75$ см, $N_e = 3 \cdot 10^{11}$ см $^{-3}$, $B_z = 1000$ Гс) и области магнитной пробки (кривая 3, $z = 120$ см, $N_e = 10^{12}$ см $^{-3}$, $B_z = 3800$ Гс)

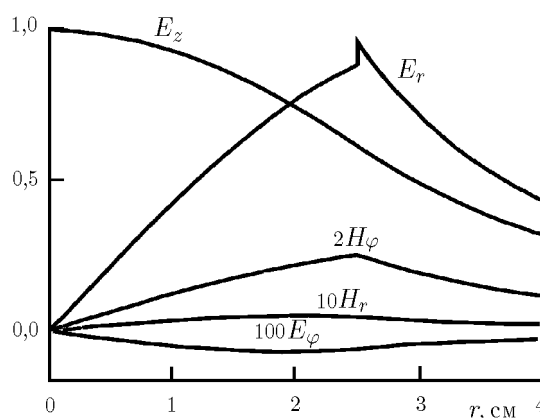


Рис. 8. Поперечное распределение электрических (E_z , E_r , E_φ) и магнитных (H_φ , H_r) компонент поля основной симметричной моды цилиндрического плазменного волновода с параметрами, соответствующими случаю $z = 10$ см, $N_e = 2 \cdot 10^9$ см $^{-3}$, $B_z = 550$ Гс; зависимости нормированы на максимальное значение компоненты E_z

и q_2 комплексны. В однородной бесстолкновительной плазме электромагнитный источник излучает волны с действительными значениями p и q , а минимальному значению p соответствует замедление волны конической рефракции [14].

В неоднородной плазме для удовлетворения граничных условий на поверхности раздела сред с разными параметрами необходимо учитывать зависимости полей каналируемой волны от обоих значений q_1 и q_2 . Поэтому в структуре волновых полей, направляемых плазменным цилиндром в продольном магнитном поле, могут присутствовать и квазипотенциальная (плазменная), и свистовая компоненты [14, 16]. Относительные величины этих компонент и их пространственная локализация зависят от параметров плазмы и могут сильно различаться.

В рамках грубой модели кусочно-однородного канала мы воспользуемся соотношениями (1)–(5) для выяснения структуры волновых полей на квазиоднородных участках в области магнитной пробки и вдали от неё. На рис. 7 приведены зависимости $q_1(p)$, $q_2(p)$, рассчитанные по соотношению (5) для условий, соответствующих области источника (кривая 1, $z = 10$ см), промежуточной области (кривая 2, $z = 75$ см) и области магнитной пробки (кривая 3, $z = 120$ см).

Вблизи ВЧ источника, где коэффициент замедления $p \approx 7$, поперечная структура волнового поля каналируемой моды определяется полем квазипотенциальной (плазменной) волны с действительным поперечным волновым числом $q_1 = 12,45$ ($k_1 = q_1 k_0$) и полем свистовой волны, локализованным вблизи боковой поверхности плазменного столба $q_2 = 7,45i$ ($k_2 = q_2 k_0$). На рис. 8 показана поперечная структура волнового поля основной симметричной моды, определённая для этого случая согласно выражениям (1)–(3). В этой структуре максимальные значения имеют продольная (E_z) и радиальная (E_r) составляющие электрического поля волны, что характерно для квазипотенциальной моды. В случае квазиоднородного распределения $B_z(z)$ такая структура волновых полей (см. рис. 8) не изменяется вдоль разрядного канала. Ситуация меняется вдали от ВЧ источника в области сильного магнитного поля $B_z \geq 3600$ Гс. В этом случае измерения коэффициента замедления по кривой 2 на рис. 5 дают величину $p \approx 2,2$. Это значение находится несколько правее точки конической рефракции $p_{cr} \approx 2,14$ на кривой 3 (рис. 7), оба

соответствующих ему поперечных волновых числа положительны и действительны ($q_1 \approx 28,18$, $q_2 \approx 46,44$). По структуре полей эти волны близки к волнам конической рефракции. Квазипотенциальные составляющие поля в них малы по сравнению с вихревыми. Рассчитанный для однородного плазменного столба в центральной части пробки с экспериментальными параметрами ($B_z = 3800$ Гс, $N_e = 10^{12}$ см $^{-3}$, $R_\perp = 0,3$ см) коэффициент замедления $p \approx 1,56$ (см. рис. 6) меньше коэффициента замедления волны конической рефракции $p_{\text{ст}} \approx 2,14$. Это означает, что в центральной части пробки поперечная структура поля волны в столбе выражается через пару комплексно-сопряжённых поперечных волновых чисел ($q_1 = 25,9 + 25,34i$, $q_2 = 25,9 - 25,34i$). На рис. 9 приведены графики поперечного распределения компонент электромагнитного поля каналируемой волны, рассчитанные для этого случая согласно выражениям (1)–(3). В этой волне максимальные значения имеют поперечные составляющие E_r электрического и H_φ магнитного полей, что характерно для слабо замедленной симметричной электромагнитной моды цилиндрического волновода [10]. Из-за ограниченного продольного размера области сильного магнитного поля (см. рис. 2) нам не удалось детально исследовать структуру этой моды. Однако можно сравнить изменения амплитуды компоненты H_φ волнового поля у границы плазменного волновода (при $r \approx R_\perp$) на рис. 8 и 9 с экспериментальными измерениями этих изменений при увеличении поля B_z в пробке от 550 до 3800 Гс. В условиях наших экспериментов большая часть вводимой мощности (больше $0,9W_0$) идёт на ионизацию газа и формирование плазменного волновода, поэтому можно предположить равенство потоков энергии, переносимых каналируемой модой через область пробки в случаях квазиоднородного и неоднородного нарастающего по z распределений магнитного поля $B_z(z)$. В этом предположении максимальное значение компоненты H_φ на рис. 9 выросло в 8 раз по сравнению с максимумом H_φ на рис. 8, что близко к приведённому выше экспериментальному результату.

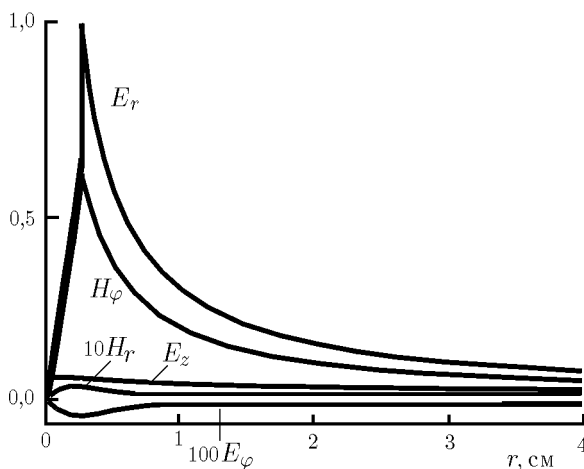


Рис. 9. Поперечное распределение электрических (E_z , E_r , E_φ) и магнитных (H_φ , H_r) компонент поля основной симметричной моды цилиндрического плазменного волновода с параметрами, соответствующими случаю $z = 120$ см, $N_e = 10^{12}$ см $^{-3}$, $B_z = 3800$ Гс; нормированы на максимальное значение компоненты E_r

Приведённые экспериментальные данные и модельные расчёты позволяют сформулировать общую физическую картину наблюдаемого явления. В нижнегибридном диапазоне частот короткий ВЧ источник ($l_a \ll \lambda_0$) формирует разряд в виде самолокализованного на оси источника плазменного канала (волновода), вытянутого из фокуса резонансной поверхности источника [1–3] вдоль внешнего магнитного поля. Если мощность источника невелика, то концентрация плазмы в канале устанавливается на уровне, соответствующем оптимальному возбуждению собственной моды волновода, длина которой близка к длине возбуждающего квадрупольного источника: $\lambda_\parallel \sim \sim l_a$. Нагрев электронов в этом месте канала осуществляется в основном за счёт компоненты E_z электрического поля волны. Это квазипотенциальная волна, локализованная внутри плазменного волновода за счёт полного внутреннего отражения. Коэффициент замедления такой волны велик ($p = \lambda_0/\lambda_\parallel \approx \lambda_0/l_a \gg 1$). Дисперсия собственных волн плазменного волновода зависит от

величины магнитного поля B_z , радиуса волновода и концентрации плазмы в нём [8, 9]. В нарастающем вдоль волновода магнитном поле $B_z(z)$ коэффициент замедления собственной моды

убывает с ростом расстояния от ВЧ источника. В исследуемом случае плазменно-волнового разряда с увеличением магнитного поля уменьшается радиус разрядного канала и растёт концентрация плазмы в нём (см. рис. 3). При этом меняется соотношение между квазипотенциальными и вихревыми составляющими волнового поля. В результате волна трансформируется из квазипотенциальной (вблизи ВЧ источника) в вихревую (свистовую) моду в области сильного поля B_z , а при переходе через область конической рефракции — в слабо замедленную поверхностную волну [10]. Нагрев электронов и формирование разрядного канала в окрестности магнитных пробок осуществляется за счёт радиальной составляющей электрического поля каналируемой моды. Плазма в таких разрядах оказалась сильно неравновесной. В энергетических спектрах электронов наблюдаются мощные потоки быстрых (надтепловых) частиц, выбрасываемых из разрядного канала вдоль внешнего магнитного поля.

Обнаруженная возможность управления стационарной структурой плазменно-волнового разрядного канала и неравновесным энергетическим распределением электронов в нём с помощью неоднородного магнитного поля позволяет реализовать формирование плазменного резонатора, в котором пространственные распределения плазмы и магнитного поля подобны соответствующим распределениям вдоль силовой трубки геомагнитного поля в магнитосферном резонаторе. В результате появляется возможность моделирования неравновесных волновых процессов в магнитосфере Земли в лабораторных условиях. Во второй части данной работы приведены результаты исследования стационарной структуры и динамических явлений в плазменном резонаторе, сформированном излучением квадрупольного ВЧ источника в пробочной магнитной ловушке.

2. ИССЛЕДОВАНИЕ НЕРАВНОВЕСНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ В ПЛАЗМЕННОМ ВОЛНОВОДЕ, СФОРМИРОВАННОМ ВОЛНОВЫМ ПУЧКОМ В ПРОБОЧНОЙ МАГНИТНОЙ ЛОВУШКЕ

Экспериментальное моделирование неравновесных процессов в магнитосфере Земли является важной задачей современной физики. Потребности в подобном моделировании связаны с трудностями и дороговизной натурных экспериментов, с необходимостью более глубокого понимания физики солнечно-земных связей и сложностью теоретического описания нестационарных динамических явлений в магнитосфере Земли. В данной части работы представлены результаты исследования структуры и динамики плазменно-волнового разряда в пробочной магнитной ловушке. На рис. 10 представлена схема экспериментальной установки. Плазменно-волновой разряд возбуждался в стеклянном баллоне с длиной 1500 мм и диаметром 60 мм (рис. 10, элемент 1) при давлении гелия $P \sim 10^{-3}$ Торр линейной квадрупольной антенной, состоящей из трёх колец с диаметром 60 мм, размещённых в центральной части баллона перпендикулярно его оси на расстоянии приблизительно 60 мм друг от друга. Высокочастотное напряжение ($f_0 = 195$ МГц, $V_0 = 50$ В) от генератора ГСТ-2 ($W_0 \sim 20$ Вт) подводилось к возбуждающим кольцам с помощью коаксиального кабеля аналогично случаю, описанному в предыдущем разделе. Продольное магнитное поле создавалось двумя соленоидами с автономным питанием (рис. 10, катушки 2 и 3). Катушки соленоида 2 формировали квазиоднородное поле ($B_z \approx 330$ Гс, $\Delta B_z/B_z < 0,1$) во всём объёме разрядного баллона, катушки соленоида 3 формировали поле в пробках. Расстояние между центрами пробок $l \sim 1200$ мм. Концентрация плазмы в разрядном канале определялась с помощью интерферометра на частоте 9,55 ГГц.

На рис. 11 приведены распределения магнитной индукции $B_z(z)$ (кривая 1) и усреднённой по поперечному сечению разрядного канала концентрации плазмы $N_e(z)$ (кривая 2) вдоль продольной оси z . Важным экспериментальным результатом является существенное возрастание концен-

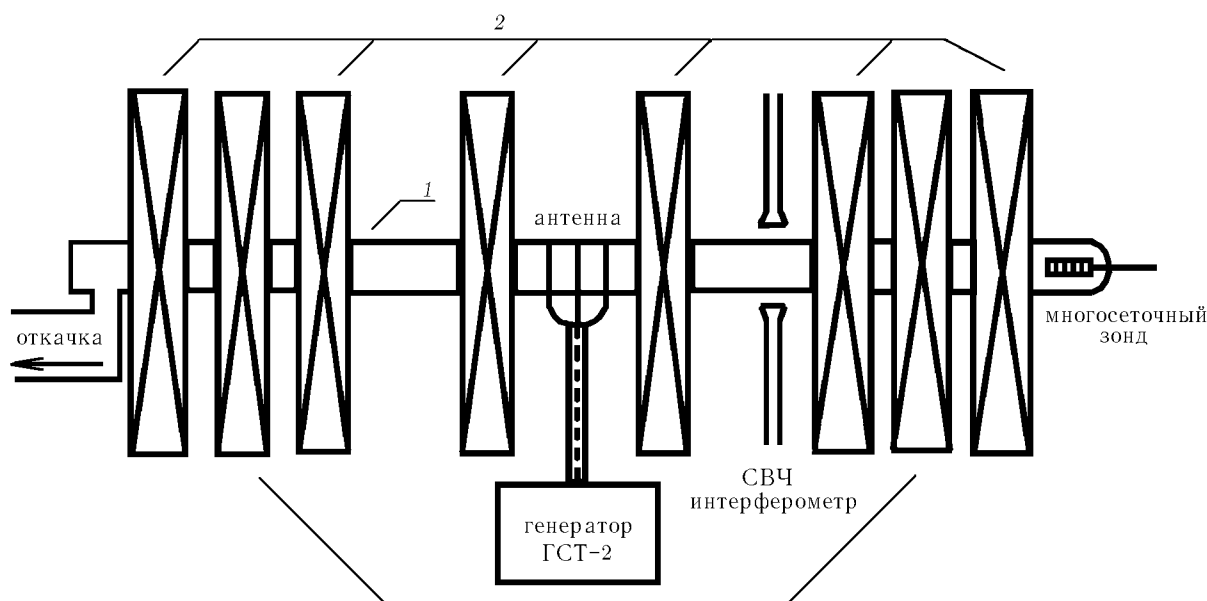


Рис. 10. Схема экспериментальной установки для моделирования мазерных явлений в магнитосферном резонаторе

трации плазмы при удалении от возбуждающей антенны вдоль оси разрядного баллона к магнитным пробкам. Этот результат качественно отличается от результатов экспериментов, проводившихся в пробочных ловушках с распадающейся плазмой, в которых концентрация в плазменном образовании существенно уменьшается при удалении от центра ловушки к пробкам. В наших экспериментах плазма создавалась в условиях ионизационного самоканалирования волновых полей, излучаемых квадрупольной антенной. В данном случае оказалось, что амплитуда волновых полей вдали от источника достаточна для создания и поддержания высокой концентрации плазмы в области сильного магнитного поля в пробках. Отметим, что распределения на рис. 11 качественно отражают распределения магнитного поля и концентрации плазмы вдоль силовой трубки магнитосферного резонатора. Это соответствие даёт новые экспериментальные возможности лабораторного моделирования и изучения нестационарных процессов в магнитосфере Земли. Самостоятельный научный интерес представляют новые знания о структуре и динамике плазменных образований, формируемых ВЧ разрядом в магнитной ловушке, и энергетические спектры заряженных частиц в разрядном канале.

На рис. 12 приведены кривая торможения (1) вылетающих из ловушки разрядных электронов $I_e(U)$, измеренная с помощью четырёхсеточного зонда (см. рис. 10), и распределение электронов в этом потоке по энергиям $F_e(U) \propto U^{-1/2} dI_e/dU$ (кривая 2). Из приведённых данных видна неравновесность электронов исследуемого ВЧ разряда в пробочной магнитной ловушке. Относительное уменьшение потоков быстрых электронов в ловушке (см. рис. 12) по сравнению со случаем нарастающего вдоль разрядного канала магнитного поля (см. рис. 4) связано, на наш взгляд, с уменьшением (более чем в 2 раза) длины плазменно-волнового канала, в котором происходит ускорение электронов плазменными волнами.

Магнитосфера Земли также является пробочной магнитной ловушкой для заряженных частиц. Плазме в таких ловушках присуща инверсия населённости по поперечным скоростям. Частиц с малыми поперечными скоростями в плазме меньше, чем частиц с большими поперечными скоростями. Частицы с малыми поперечными скоростями не удерживаются магнитными пробками и высыпаются из магнитосферы вдоль силовых линий магнитного поля в плотные слои

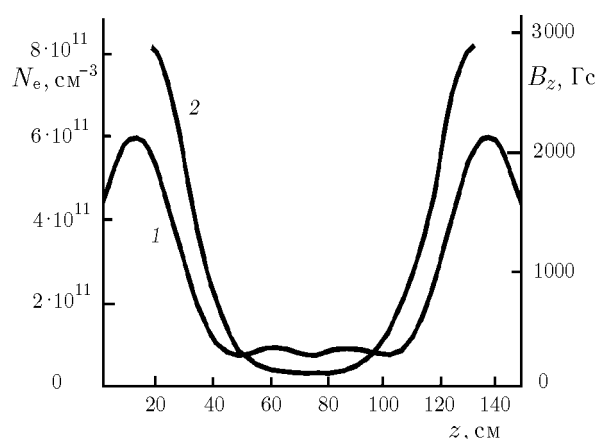


Рис. 11. Экспериментальные распределения внешнего магнитного поля $B_z(0, z)$ вдоль плазменно-волнового канала (кривая 1) и концентрации плазмы в нём $N_e(z)$ (кривая 2) в магнитной ловушке пробочного типа (см. рис. 10)

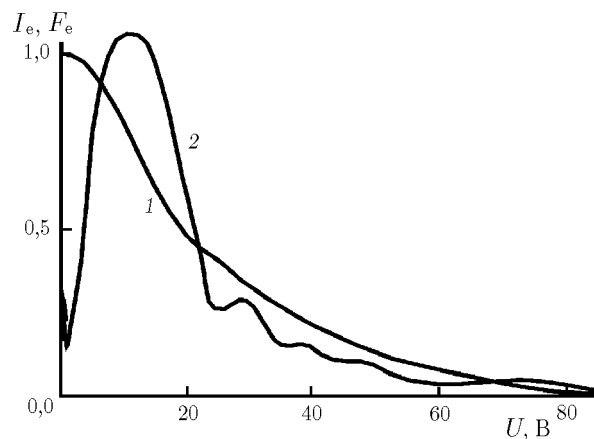


Рис. 12. Зависимость тока вылетающих из ловушки разрядных электронов на коллектор зонда от тормозящего потенциала $I_e(U)$ (кривая 1) и распределение электронов в потоке на зонд по энергиям $F_e(U)$ (кривая 2), нормированные на максимальные значения

атмосферы, где рекомбинируют. Частицы с большими поперечными скоростями отражаются от магнитных пробок, перемещаясь от одной точки отражения к другой вдоль силовых линий, и их концентрация увеличивается за счёт диффузии частиц из радиационных поясов. Если количество таких частиц начинает превышать некоторый пороговый уровень, шумовые волновые поля, всегда существующие в магнитосфере, стимулируют возбуждение магнитосферного мазера [17, 18].

Лабораторное моделирование динамики магнитосферного альфвеновского мазера представляет большой интерес для исследователей неравновесных волновых процессов в магнитосфере Земли, геофизиков и разработчиков каналов КНЧ радиосвязи. В настоящем разделе работы представлены результаты лабораторных экспериментов, в которых были исследованы спектры собственных колебаний полей и частиц в плазменно-волновом канале, сформированном излучением линейной квадрупольной антенны в пробочной магнитной ловушке (см. рис. 10). Для регистрации низкочастотных неустойчивостей использовалась приёмная антенна в виде симметричного электрического диполя, которая через низкочастотный фильтр с помощью коаксиального кабеля соединялась с осциллографом «DSO Classic-6 000», позволяющим определять спектральные характеристики принимаемого сигнала. Приёмный диполь располагался на поверхности разрядного баллона вдоль оси z посередине между центром ловушки и максимумом магнитного поля в пробке. Результаты экспериментов представлены на рис. 13 и 14 в виде зависимостей спектральной плотности мощности сигнала от частоты $S(f)$.

На рис. 13 характерный максимум на графике спектральной плотности мощности излучения S на частоте $f \sim 1$ МГц соответствует колебаниям быстрых электронов (с энергией порядка $25 \div 30$ эВ) между пробками магнитной ловушки. Характерные максимумы на графике спектральной плотности мощности излучения на частотах f от 12,5 до 95 кГц (рис. 14), по-видимому, соответствуют резонансному возбуждению ионных циклотронных мод плазменного резонатора. Положение резонансных максимумов на частотной оси зависело только от магнитных полей в солениоде и в пробках магнитной ловушки. Следует также отметить, что увеличение давления $P > 3 \cdot 10^{-3}$ Торр или выключение магнитного поля в пробках приводило к исчезновению максимумов на характерных резонансных частотах. Этот факт может служить подтверждением наблю-

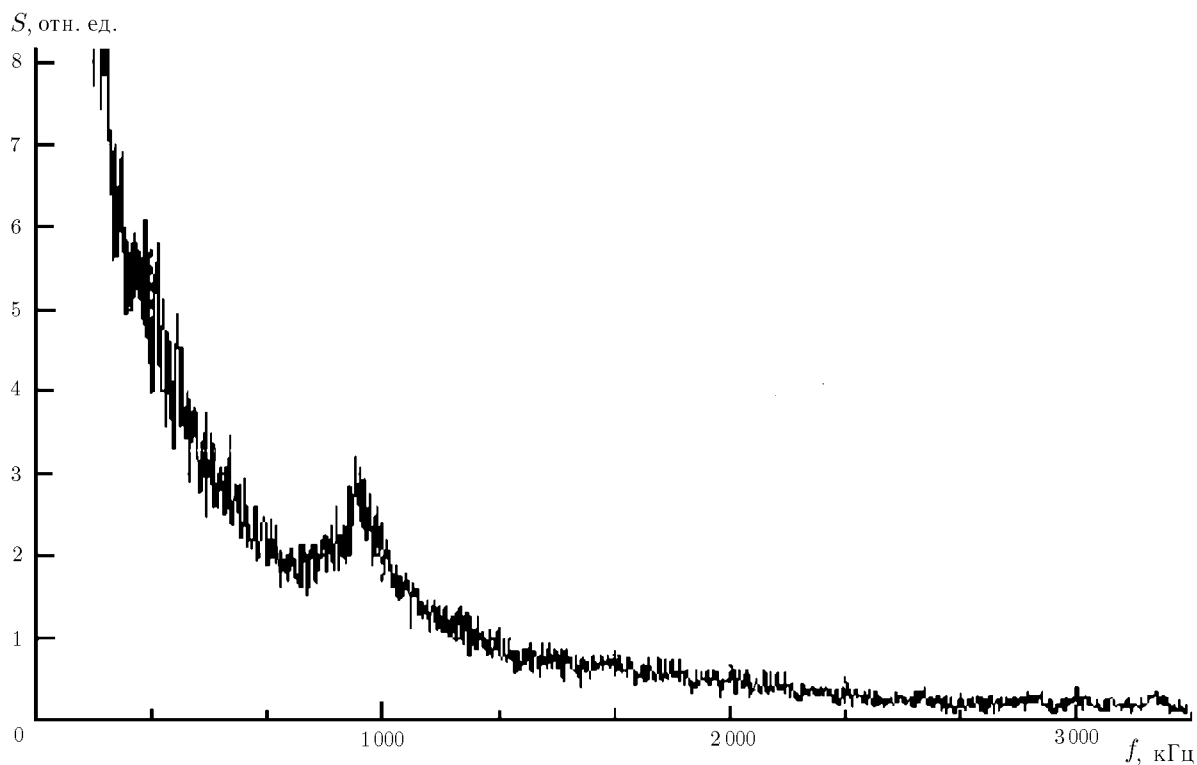


Рис. 13. Спектральная плотность мощности электрических колебаний в плазменном резонаторе (рис. 10) на частоте продольных колебаний разрядных электронов между пробками магнитной ловушки

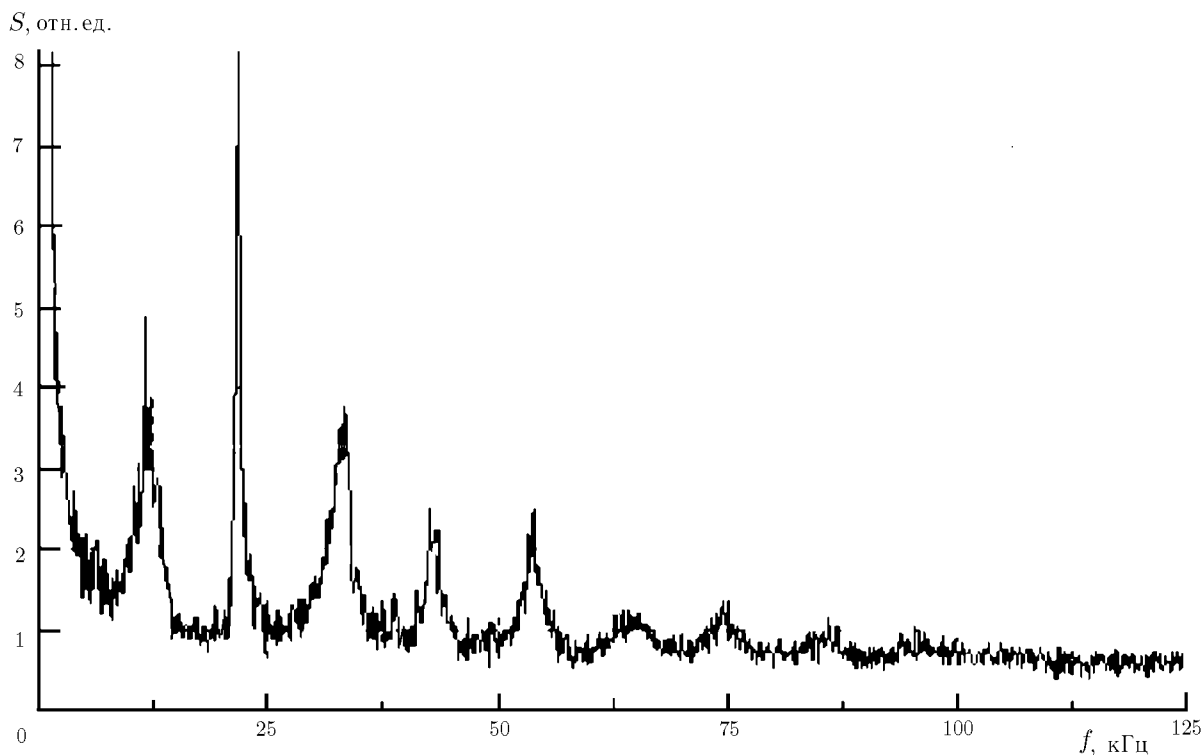


Рис. 14. Спектральная плотность мощности собственных колебаний плазменного резонатора в пробочной магнитной ловушке (рис. 10) в окрестности ионного циклотронного резонанса

дения собственных колебаний плазменного резонатора, частота которых зависит прежде всего от геометрических параметров магнитной ловушки и параметров плазменного резонатора, но не зависит от частоты сигнала, формирующего разрядный канал. Полученные в работе результаты позволяют сделать вывод о возможности лабораторного исследования управляемых мазерных эффектов в пробочной магнитной ловушке магнитосферного типа. Обсуждение представленных экспериментальных результатов данного раздела и сопоставление их с выводами теоретического анализа выходит за рамки данного сообщения и будет опубликовано отдельно. Здесь только отметим, что возбуждение ионных циклотронных мод возможно как за счёт ионной циклотронной неустойчивости, так и за счёт черенковского механизма. Излучение на частоте колебаний быстрых (с энергией порядка $25 \div 30$ эВ) электронов между магнитными пробками (на баунс-частоте) связано, по-видимому, с клистронным эффектом.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе развиваются идеи В. И. Таланова [19] в приложении к физике ВЧ разрядов в магнитном поле. В ней приведены результаты экспериментального исследования самофокусировки и каналирования пучка электромагнитных волн свистового диапазона частот в неоднородном магнитном поле в условиях ионизационной нелинейности. Показано, что образующаяся в результате ВЧ разряда плазменная неоднородность принципиально изменяет структуру электромагнитных полей излучателя и локализует волновые поля в узком плазменном волноводе, вытянутом от источника вдоль внешнего магнитного поля. В нарастающем вдоль продольной оси аксиально-симметричном магнитном поле обнаружено существенное сужение плазменного волновода с ростом расстояния от источника и значительный рост концентрации плазмы в обуженной части волновода. В этом случае, как оказалось, вдоль волновода меняются дисперсионные свойства и структура каналируемых волн, формирующих этот волновод. В пробочной магнитной ловушке такой волновод представляет собой плазменный резонатор, в котором продольное распределение магнитного поля и плазмы подобны соответствующим распределениям вдоль геомагнитной трубки в магнитосферном резонаторе. В работе опробована методика формирования стационарного плазменного резонатора магнитосферного типа излучением квадрупольного ВЧ источника в пробочной магнитной ловушке. Обнаружена неустойчивость разрядной плазмы в таком резонаторе в окрестности баунс-частоты электронов. Неустойчивость наблюдается только при малых давлениях, когда длина свободного пробега электронов порядка и более длины резонатора.

Полученные в работе результаты позволяют сделать вывод о возможности управления параметрами формируемого плазменно-волнового канала, дисперсионными характеристиками и структурой волновых полей путём изменения магнитного поля в заданной области пространства. Особый интерес представляют возможности лабораторного моделирования магнитосферных мазерных эффектов в пробочной магнитной ловушке с плазменным каналом, сформированным ВЧ разрядом в свистовом диапазоне частот.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 01-02-16949, 03-02-06477), Совета по поддержке ведущих научных школ (грант № 1637.2003.2), КЦФЕ (грант Е 02-3.5-478), программы «Университеты России» (грант УР.01.01.039), а также Минпромнауки РФ (контракт № 40.020.1.1.1171).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Марков Г. А. // ЖЭТФ. 1998. Т. 113, № 4. С. 1289.
2. Марков Г. А., Миронов В. А., Сергеев А. М. // Письма в ЖЭТФ. 1979. Т. 29. С. 672.

3. Марков Г. А., Миронов В. А., Сергеев А. М., Соколова И. А. // ЖЭТФ. 1981. Т. 80, № 6. С. 2264.
4. Мареев Е. А., Чугунов Ю. В. Антенны в плазме. Нижний Новгород, 1991.
5. Fisher R. K., Gould R. W. // Phys. Rev. Lett. 1969. V. 22, No. 21. P. 1093.
6. Fisher R. K., Gould R. W. // Phys. Lett. 1970. V. A31, No. 5. P. 235.
7. Марков Г. А. // Физика плазмы. 1988. Т. 14, № 9. С. 1094.
8. Кондратенко А. Н. Плазменные волноводы. М.: Атомиздат, 1976.
9. Бодров С. Б., Марков Г. А. // Физика плазмы. 2002. Т. 28, № 12. С. 1077.
10. Кауфман Р. Н., Рябова Н. А. // Физика плазмы. 1980. Т. 6, № 5. С. 1027.
11. Голант В. Е. // Основы физики плазмы. Т. 2. / Под ред. А. А. Галеева, Р. Судана. М.: Энергоатомиздат, 1984. С. 534.
12. Гуревич А. В., Шварцбург А. Б. Нелинейная теория распространения радиоволн в ионосфере. М.: Наука, 1973.
13. Кудрин А. В., Курина Л. Е., Марков Г. А. // ЖЭТФ. 1997. Т. 112, № 4. С. 1285.
14. Kondrat'ev I. G., Kudrin A. V., Zaboronkova T. M. Electrodynamics of Density Ducts in Magnetized Plasmas. Amsterdam: Gordon and Breach, 1999.
15. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. М.: Наука, 1967.
16. Заборонкова Т. М., Кудрин А. В., Марков Г. А. // Физика плазмы. 1993. Т. 19, № 6. С. 769.
17. Беспалов П. А., Трахтенгерц В. Ю. Альфвеновские мазеры. Горький, 1986.
18. Трахтенгерц В. Ю., Демехов А. Г. // Природа. 2002. № 4. С. 25.
19. Власов С. Н., Таланов В. И. Самофокусировка волн. ИПФ РАН: Нижний Новгород, 1997.

Нижегородский госуниверситет им. Н. И. Лобачевского,
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию
29 мая 2003 г.

SELF-FOCUSING AND CHANNELING OF WAVE BEAMS IN A NONUNIFORM MAGNETIC FIELD UNDER CONDITIONS OF IONIZATION NONLINEARITY

V. V. Dobrokhотов, G. A. Markov

We study experimentally the effect of ionization self-channeling of wave fields in the whistler range in a nonuniform magnetic field. It is shown that the formed plasma nonuniformity localizes the emission from a short high-frequency source inside a discharge channel stretched along an external magnetic field. We found a possibility to control the parameters of the formed plasma-wave channel and the dispersion characteristics and structures of wave fields in wide limits by varying the magnetic field in a specified spatial region. We propose and test a method for the formation of a plasma resonator in the laboratory experiment. The spatial plasma and field distributions in this resonator are similar to those along a geomagnetic field tube of the magnetospheric resonator. We reveal the plasma instability in such a resonator in the vicinity of the frequency of electron bounce oscillations between magnetic mirrors.

УДК 621.373.8

ГИБРИДНЫЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ СОЛИТОНЫ В НЕЛИНЕЙНЫХ ФОТОННЫХ КРИСТАЛЛАХ

В. Е. Лобанов, А. П. Сухоруков

Анализируются свойства трёхчастотного пространственного параметрического солитона, формирующегося в результате процесса каскадного утращения частоты в квадратичных кристаллах с периодически инвертированными доменами. Разработаны метод усреднения и вариационный метод, позволившие с хорошей точностью аналитически описать свойства пространственных солитонов, исследованных в численных экспериментах.

ВВЕДЕНИЕ

В современной нелинейной оптике важное место занимают исследования пространственных и временных солитонов. Временные солитоны находят применение, в частности, в волоконных линиях связи. Однако раньше стали изучаться пространственные солитоны, в которых дифракционное расплывание компенсируется эффектом самофокусировки. Первые теоретические работы в этой области были выполнены для сред с керровской нелинейностью [1–3]. Так как керровские солитоны с двумерным поперечным сечением оказались неустойчивыми, то их применение ограничивается волоконной оптикой или планарными системами. Этого недостатка лишены параметрические солитоны в квадратично-нелинейных средах. Они были открыты в 1974 году [4] и впервые наблюдались в лазерных экспериментах в 1995 году [5]. Параметрические, или, как ещё их называют, квадратичные, солитоны существуют благодаря параметрическому механизму взаимодействия между волнами разных частот. Хотя солитоны имеют, по крайней мере, две частотные компоненты, например основную и вторую гармоники, их можно возбуждать в режиме генерации второй гармоники, когда из-за дифракции на некотором расстоянии прекращается перекачка энергии и наступает режим солитонного распространения. Частотные компоненты параметрических солитонов находятся в нелинейном фазовом синхронизме, при котором дисперсионная расстройка компенсируется нелинейным изменением величины волновых векторов. Однако, если расстройка слишком велика, то порог возбуждения многоцветных солитонов настолько сильно возрастает, что становится не достижимым в экспериментах. Уменьшить естественную дисперсию можно в фотонных кристаллах, в которых создана периодическая модуляция линейного показателя преломления или квадратичной восприимчивости. Наиболее простой путь модуляции нелинейных свойств основан на периодической переориентации соседних слоёв (доменов). При этом периодически меняется знак квадратичной нелинейности, вследствие чего возникает своеобразная нелинейная решётка. Она проявляется при параметрическом взаимодействии волн, когда расстройка волновых векторов кратна вектору решётки. В этих условиях возникает квазисинхронизм: разность фаз периодически подстраивается в синхронизм при переходе от одного слоя к другому.

Развитие техники реализации квазисинхронных процессов открыло дорогу для более тщательного исследования пространственных солитонов в средах с квадратичной нелинейностью. Изучение свойств подобных солитонов может оказаться полезным, например, для разработки преобразователей частоты. Для плоских волн эффективность преобразования резко падает при наличии некомпенсированных расстройек. В солитонном режиме подобный процесс менее чувствителен к расстройкам, что позволяет создать более стабильное устройство для преобразования частоты. Это свойство, в частности, было использовано для создания стабильного параметрического

В. Е. Лобанов, А. П. Сухоруков

усилителя наносекундных импульсов, работающего на основе процесса трёхволнового взаимодействия (при наличии только одного квадратичного канала) в солитонном режиме и обладающего улучшенными характеристиками [6].

Предсказанные в 1974 году [4], до 1995 года параметрические солитоны в квадратично-нелинейных средах изучались только теоретически, т. к. экспериментальное исследование было затруднено требованием достаточно большой мощности (порядка 10 ГВт/см² для пучка радиуса 20 мкм), необходимой для их возбуждения [5]. Долгое время оставался открытым вопрос о возможности формирования пространственных солитонов в квазисинхронных кристаллах, пока в 1997 году в [7] не было доказано их существование путём численного моделирования. Там же продемонстрировано, что в отличие от квадратичных солитонов в однородных средах так называемые QPM-солитоны (от quasi-phase-matched — квазисинхронный) имеют амплитуды, быстро осциллирующие в окрестности некоторых средних значений из-за наличия больших фазовых расстройек внутри каждого слоя. В 1999 году был проведён эксперимент [8] по наблюдению квадратичного солитона на длине волны 1064 нм в периодически модулированном ниобате лития. Было установлено, что для пучка радиуса 22 мкм пороговая мощность возбуждения солитона составляет 1,35 ГВт/см². Такое значительное снижение пороговой мощности дало новый импульс исследованиям квадратичных пространственных солитонов. В численных экспериментах были открыты новые типы солитонов, в частности квазипериодические солитоны в структурах типа решёток Фибоначчи [9]. В связи с нуждами телекоммуникаций привлекают внимание многоцветные каскадные солитоны: трёхцветные, получающиеся в результате каскадного утроения частоты [10], и пятицветные, получающиеся при накачке на двух частотах [11]. Каскадные солитоны были исследованы в приближении однородной среды, хотя ясно, что их генерация возможна лишь с помощью техники квазисинхронных взаимодействий.

Итак, с развитием техники квазисинхронных процессов существенно возросло число способов применений материалов с квадратичной нелинейностью, поэтому на повестку дня встал вопрос о более точных моделях для описания сред с периодической модуляцией нелинейной восприимчивости. Первоначально для этих целей использовалась модель гармонической нелинейной решётки, позволяющая свести уравнения для неоднородной среды к хорошо изученным уравнениям для однородной среды в условиях полного синхронизма [12]. Этот метод широко применялся для исследования генерации второй гармоники (ГВГ) и каскадных процессов в периодически неоднородных средах. Однако в 1997 году при исследовании пространственных солитонов при ГВГ в среде с периодически инвертированными доменами было численно показано наличие индуцированной кубичной нелинейности [7], которая в литературе получила название асимметричной из-за отсутствия самовоздействия на второй гармонике. Эта индуцированная кубичная нелинейность, появляющаяся за счёт несинхронных взаимодействий в средах с квадратичной нелинейностью, может быть как фокусирующей, так и дефокусирующей в зависимости от знака волновой расстройки, и её сила может быть увеличена модуляцией решётки [13]. Ярким примером, показывающим наличие данного эффекта, является случай, когда конкуренция между линейной и нелинейной решётками приводит к уменьшению эффективной квадратичной нелинейности. Хотя на первый взгляд в этом случае солитоны не должны существовать, расчёты показали возможность наблюдения «тёмных» и «светлых» солитонов в подобных средах [14]. Этот парадокс элегантно объясняется включением в модель асимметричной кубичной нелинейности, которая и поддерживает нелинейные солитоны, присущие кубичному уравнению Шрёдингера. Необходимость учёта кубичной нелинейности также показана для задач, описывающих модуляционную неустойчивость в средах с периодической модуляцией нелинейной восприимчивости [15], а также при описании осциллирующих пространственных солитонов. Все эти эффекты были подтверждены численно и, следовательно, большое количество теоретических результатов говорит в пользу

существования индуцированной кубичной нелинейности. В 2001 году наличие асимметричной кубичной нелинейности было доказано экспериментально. В [16] представлены наблюдения отличий несогласованных процессов генерации второй гармоники и генерации разностной частоты. Тот факт, что многие предсказанные кубичные эффекты не были найдены экспериментально, можно объяснить одной из следующих причин. Во-первых, слишком мала интенсивность излучения; во-вторых, индуцированная и собственная кубичные нелинейности компенсируют друг друга. Здесь следует отметить, что обычные материалы с квадратичной нелинейностью являются самофокусирующими и имеют нормальную дисперсию. Следовательно, коэффициенты индуцированной и собственной кубичной нелинейности имеют разные знаки.

Таким образом, использование сред с периодической модуляцией нелинейной восприимчивости не только ведёт к возможности осуществления параметрических процессов, экспериментальная реализация которых в однородных средах зачастую невозможна, но и выявляет новые эффекты в ранее изученных процессах.

Настоящая работа логически продолжает цикл исследований, проведённых в лаборатории нелинейных волн физического факультета МГУ и посвящённых каскадным квадратичным процессам при условии двойного квазисинхронизма. В работе [17] подобные процессы были детально изучены только для плоских волн, а в работе [10] были исследованы трёхчастотные солитонные решения для модулированных волн. Однако для анализа процессов авторы использовали модель гармонической нелинейной решётки, а такой подход, как показали исследования последних лет, не всегда позволяет адекватно описать динамику процесса. Целью работы является численное и аналитическое исследование свойств трёхчастотного пространственного параметрического солитона, формирующегося в результате процесса каскадного утроения частоты в квадратично-нелинейных кристаллах с периодически инвертированными доменами.

1. ДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ОГИБАЮЩИХ

Параметрическое взаимодействие волн кратных частот в слоисто-неоднородной среде будем анализировать, пользуясь системой уравнений для медленно меняющихся амплитуд:

$$\begin{aligned}\frac{\partial A_1}{\partial z} &= -id_1 \frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2} - ip(z)\beta_3 A_3 A_2^* \exp(-i \Delta k_3 z) - ip(z)\beta_2 A_2 A_1^* \exp(-i \Delta k_2 z), \\ \frac{\partial A_2}{\partial z} &= -id_2 \frac{\partial^2 A_2}{\partial x^2} - 2ip(z)\beta_3 A_3 A_1^* \exp(-i \Delta k_3 z) - ip(z)\beta_2 A_1^2 \exp(i \Delta k_2 z), \\ \frac{\partial A_3}{\partial z} &= -id_3 \frac{\partial^2 A_3}{\partial x^2} - 3ip(z)\beta_3 A_1 A_2 \exp(i \Delta k_3 z),\end{aligned}\quad (1)$$

где $A_j(x, z)$ — комплексная амплитуда, $d_j = 1/(2k_j)$ — коэффициент дифракции, k_j — продольное волновое число j -го пучка, $j = 1, 2, 3$; $\Delta k_3 = k_3 - k_2 - k_1$, $\Delta k_2 = k_2 - 2k_1$ — расстройки волновых векторов; $\beta_2 = 2\pi\omega \mathbf{e}_1 \hat{\chi}^{(2)} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 / (cn)$, $\beta_3 = 2\pi\omega \mathbf{e}_1 \hat{\chi}^{(2)} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 / (cn)$ — коэффициенты квадратичной нелинейности, отвечающие за двухчастотное и трёхчастотное взаимодействие соответственно, $\mathbf{e}_j$ — единичный вектор поляризации электрического поля волны, $\hat{\chi}^{(2)}$ — тензор квадратичной восприимчивости, n — показатель преломления, c — скорость света в вакууме, ω — циклическая частота. Параметр $p(z)$, характеризующий модуляцию знака нелинейной восприимчивости, представляет собой знакопеременную функцию, равную 1 или -1 на длине h отдельного домена кристалла; $\Lambda = 2h$ — период модуляции. Будем считать, что начальные условия задаются в виде $A_j(x, 0) = E_{j0} \exp(-x^2/w^2 + i\varphi_j)$. Система (1) обладает законом сохранения полной мощности $I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} (|A_1|^2 + |A_2|^2 + |A_3|^2) dx$.

Перейдём к безразмерным координатам: $\bar{A}_j = A_j/E_0$, где E_0 — максимальная начальная амплитуда, $\bar{z} = z/l$, $\bar{x} = x/w$, $\bar{\beta}_2 = \beta_2 E_0 l$, $\bar{\beta}_3 = \beta_3 E_0 l$, $\Delta \bar{k}_2 = \Delta k_2 l$, $\Delta \bar{k}_3 = \Delta k_3 l$, $\bar{d}_j = d_j l/w^2$, где w — начальная ширина пучка, l — характерная длина (в данной статье характерная длина много больше периода модуляции и сравнима с дифракционной длиной $l_{\text{диф}} = w^2/(4d_1)$, т. е. $l \sim l_{\text{диф}} \sim 100\Lambda$). В дальнейшем черту при обозначении нормированных величин будем опускать. Так как $|\Delta k_j|/k_j \ll 1$, то при расчётах будем полагать, что коэффициенты дифракции гармоник связаны простыми соотношениями: $d_2 = d_1/2$, $d_3 = d_1/3$.

2. КАСКАДНЫЙ ТРЁХЧАСТОТНЫЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СОЛИТОН

Интенсивности захваченных в солитон гармоник осциллируют около средних значений с периодом, равным половине периода модуляции (см. рис. 1).

Подобные осцилляции возникают из-за модуляции свойств кристалла и в однородной среде не наблюдаются, как и при анализе процесса в рамках модели гармонической нелинейной решётки. Интересно, что при выходе из квазисинхронного кристалла в однородную нелинейную среду солитон распадается из-за наличия большой нескомпенсированной расстройки.

Для объяснения осцилляций интенсивности трёхцветных параметрических пространственных солитонов в квазисинхронных кристаллах воспользуемся методом усреднения [7], позволяющим учесть негармоничность модуляции нелинейной восприимчивости. Следует отметить, что данный метод применим для случаев, когда период модуляции много меньше дифракционной длины.

Пусть ГВГ происходит при квазисинхронизме первого порядка, а генерация суммарной частоты — при квазисинхронизме m -го порядка, где m — нечётное число. Отсюда следует, что $\Delta k_2 - K = 0$, $\Delta k_3 - mk = 0$, где $K = 2\pi/\Lambda$, Λ — период модуляции. В этом случае система уравнений для медленно меняющихся амплитуд пучков принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_1}{\partial z} &= -id_1 \frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2} - ip_1 \beta_2 A_2 A_1^* - i\beta_2 A_2 A_1^* \sum_{n \neq 1} p_n \exp[i(n-1)Kz] - \\ &\quad - ip_m \beta_3 A_3 A_2^* - i\beta_3 A_3 A_2^* \sum_{n \neq m} p_n \exp[i(n-m)Kz], \\ \frac{\partial A_2}{\partial z} &= -id_2 \frac{\partial^2 A_2}{\partial x^2} - ip_{-1} \beta_2 A_1^2 - i\beta_2 A_1^2 \sum_{n \neq -1} p_n \exp[i(n+1)Kz] - \\ &\quad - 2ip_m \beta_3 A_3 A_1^* - 2i\beta_3 A_3 A_1^* \sum_{n \neq m} p_n \exp[i(n-m)Kz], \\ \frac{\partial A_3}{\partial z} &= -id_3 \frac{\partial^2 A_3}{\partial x^2} - 3ip_{-m} \beta_3 A_2 A_1 - 3i\beta_3 A_2 A_1 \sum_{n \neq -m} p_n \exp[i(n+m)Kz], \end{aligned} \quad (2)$$

где p_n — коэффициенты разложения в ряд Фурье ступенчатой функции $p(z)$. Из (2) видно, что в негармонической периодической решётке $p(z)$ возникает своеобразное нелинейное рассеяние, в результате которого появляются новые пространственные гармоники взаимодействующих волн. Для упрощения дальнейшего анализа процессов, описываемых (2), разложим искомые функции в ряд Фурье:

$$A_1 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_{1n} \exp(inKz), \quad A_2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_{2n} \exp(inKz), \quad A_3 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_{3n} \exp(inKz). \quad (3)$$

Будем считать, что коэффициенты a_{jn} медленно меняются по сравнению с $\exp(iKz)$ и высшие гармоники являются величинами порядка $1/K$ ($K \gg 1$) по сравнению с a_{j0} . Подставляя разложе-

ние (3) в систему (2) и учитывая только члены низшего порядка малости, при $n \neq 0$ получим выражения для высших гармоник разложений (3):

$$\begin{aligned} a_{1n} &= -\beta_2 \frac{a_{20} a_{10}^*}{K} \frac{p_{n+1}}{n} - \beta_3 \frac{a_{30} a_{20}^*}{K} \frac{p_{n+m}}{n}, & a_{2n} &= -\beta_2 \frac{a_{10}^2}{K} \frac{p_{n-1}}{n} - 2\beta_3 \frac{a_{30} a_{10}^*}{K} \frac{p_{n+m}}{n}, \\ a_{3n} &= -3\beta_3 \frac{a_{20} a_{10}}{K} \frac{p_{n-m}}{n}. \end{aligned} \quad (4)$$

Нулевые гармоники в разложении (3) несут информацию о средней амплитуде пучков: $a_{10} = \langle A \rangle$, $a_{20} = \langle A_2 \rangle$, $a_{30} = \langle A_3 \rangle$. Подставляя (4) в (2) и учитывая только члены низшего порядка малости, получим уравнения для средних амплитуд:

$$\begin{aligned} \frac{da_{10}}{dz} &= -ip_1 \beta_2 a_{20} a_{10}^* - ip_m \beta_3 a_{30} a_{20}^* + ia_{10} (f_1 |a_{20}|^2 + 2f_5 |a_{30}|^2 + f_3 |a_{10}|^2 + 3f_6 |a_{20}|^2) + \\ &\quad + 3if_4 a_{30} a_{10}^* a_{10} + if_2 a_{20}^2 a_{30}^*, \\ \frac{da_{20}}{dz} &= -ip_{-1} \beta_2 a_{10}^2 - 2ip_m \beta_3 a_{30} a_{10}^* + ia_{20} (2f_1 |a_{10}|^2 + 2f_5 |a_{30}|^2 + 6f_6 |a_{10}|^2) + 4if_2 a_{30} a_{20}^* a_{10}, \\ \frac{da_{30}}{dz} &= -3ip_{-m} \beta_3 a_{20} a_{10} + ia_{30} (6f_5 |a_{10}|^2 + 3f_5 |a_{20}|^2) + 3if_4 a_{10}^3 + 3if_2 a_{20}^2 a_{10}^*, \end{aligned} \quad (5)$$

где f_j — константы, определяемые функцией модуляции. Для используемой здесь зависимости $p(z)$ имеем $p_{-n} = -p_n$, $p_n^* = -p_n$; тогда

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{\beta_2^2}{K} \sum_{n \neq 0} \frac{p_{n+1} p_{n+1}^*}{n}, & f_2 &= \frac{\beta_2 \beta_3}{K} \sum_{n \neq 0} \frac{p_{n+1}^* p_{n+m}}{n}, \\ f_3 &= \frac{\beta_2^2}{K} \sum_{n \neq 0} \frac{p_{n-1} p_{1-n}}{n}, & f_4 &= \frac{\beta_2 \beta_3}{K} \sum_{n \neq 0} \frac{p_{n-1}^* p_{n+m}}{n}, \\ f_5 &= \frac{\beta_3^2}{K} \sum_{n \neq 0} \frac{p_{n+m} p_{n+m}^*}{n}, & f_6 &= \frac{\beta_3^2}{K} \sum_{n \neq 0} \frac{p_{n-m} p_{m-n}}{n}. \end{aligned}$$

В данной задаче индуцированная кубичная нелинейность мала по сравнению с квадратичной и, за исключением небольших поправок к порогу возбуждения и амплитуде солитона, существенной роли не играет. Однако при использовании решёток с более сложной функцией модуляции, например при наличии постоянной составляющей [13] или при двойной модуляции [14, 18], кубичные эффекты могут стать сравнимыми с квадратичными и заметно влиять на свойства солитонов. Учёт кубичной нелинейности приводит также к интересным результатам при рассмотрении квазисинхронных процессов преобразования частоты и полностью оптического переключения, чувствительных к фазовым расстройкам [19].

Солитонные решения будем искать в виде $a_{10}(x, z) = a_{10} \exp(i\lambda z)$, $a_{20}(x, z) = -ia_{20} \exp(2i\lambda z)$, $a_{30}(x, z) = -a_{30} \exp(3i\lambda z)$, где a_{10} , a_{20} и a_{30} — действительные огибающие солитона. Отметим, что в квазисинхронных кристаллах частотные компоненты параметрического солитона приобретают другие фазовые сдвиги, нежели в однородных средах [10]. Это является одним из отличительных признаков квазисинхронных солитонов.

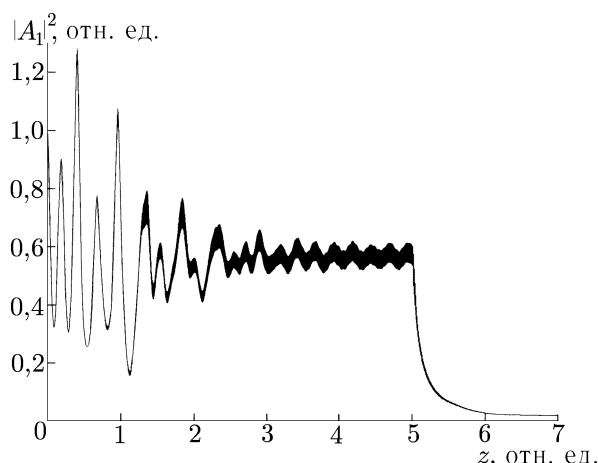


Рис. 1. Стадии распространения пучка первой гармоники: при $0 < z < 2,5$ — формирование солитона, при $2,5 < z < 5$ — распространение солитона в квазисинхронном кристалле, при $5 < z < 7$ — распад солитона при выходе из квазисинхронного кристалла в однородную несинхронную среду

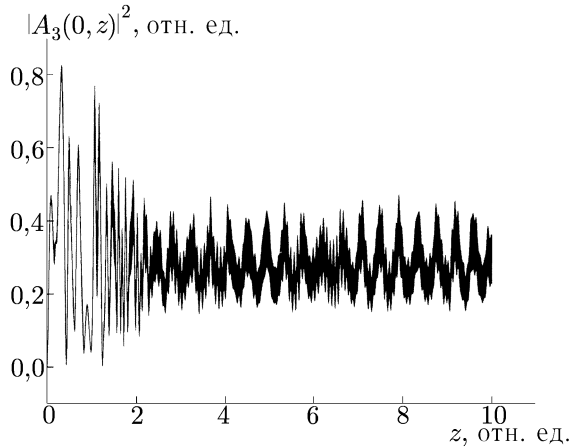


Рис. 2. Зависимость нормированной интенсивности на оси пучка третьей гармоники от расстояния

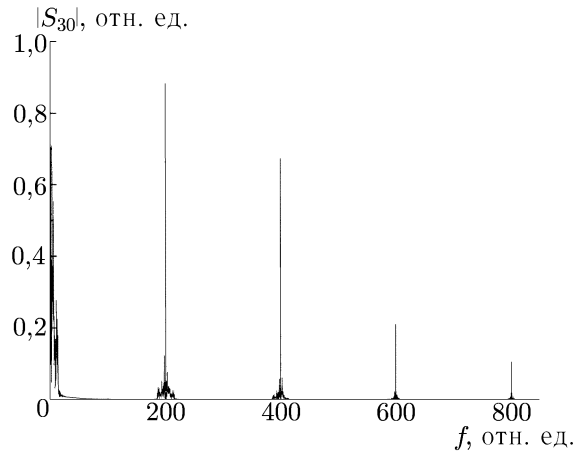


Рис. 3. Спектр пространственных осцилляций интенсивности третьей гармоники на оси солитона

Исходя из соотношений (3) и (4), запишем интенсивность первой гармоники в виде

$$\begin{aligned}
 I_{1\omega} &= |A_1|^2 = \left(a_{10} + \sum_{n \neq 0} a_{1n} \exp(inKz) \right) \left(a_{10} + \sum_{n \neq 0} a_{1n} \exp(inKz) \right)^* = \\
 &= \left(a_{10} + i \frac{\beta_2}{K} a_{20} a_{10} \sum_{n \neq 0} \frac{p_{n+1}}{n} \exp(inKz) + i \frac{\beta_3}{K} a_{30} a_{20} \sum_{n \neq 0} \frac{p_{n+m}}{n} \exp(inKz) \right) \times \\
 &\quad \times \left(a_{10} - i \frac{\beta_2}{K} a_{20} a_{10} \sum_{n \neq 0} \frac{p_{n+1}^*}{n} \exp(-inKz) - i \frac{\beta_3}{K} a_{30} a_{20} \sum_{n \neq 0} \frac{p_{n+m}^*}{n} \exp(-inKz) \right).
 \end{aligned}$$

Отбрасывая члены порядка K^{-2} ($K \gg 1$), получаем

$$I_{1\omega} \approx a_{10}^2 + \frac{8\beta_2}{\pi K} a_{20} a_{10}^2 \sum_{t=1}^{\infty} \frac{\cos(2tKz)}{4t^2 - 1} + \frac{8\beta_3}{\pi K} a_{30} a_{20} a_{10} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\cos(2lKz)}{4l^2 - m^2}. \quad (6)$$

Проделявая аналогичные операции для интенсивности на второй и третьей гармониках $I_{2\omega}$ и $I_{3\omega}$, получим

$$I_{2\omega} \approx a_{20}^2 - \frac{8\beta_2}{\pi K} a_{20} a_{10}^2 \sum_{t=1}^{\infty} \frac{\cos(2tKz)}{4t^2 - 1} + \frac{16\beta_3}{\pi K} a_{30} a_{20} a_{10} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\cos(2lKz)}{4l^2 - m^2}, \quad (7)$$

$$I_{3\omega} \approx a_{30}^2 - \frac{24\beta_3}{\pi K} a_{30} a_{20} a_{10} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\cos(2lKz)}{4l^2 - m^2}. \quad (8)$$

Закон сохранения, следующий из исходной системы (1), в методе усреднения выполняется, причём полная мощность равна средней, т. к. из (6)–(8) следует

$$I_{1\omega} + I_{2\omega} + I_{3\omega} = a_{10}^2 + a_{20}^2 + a_{30}^2 = |A_1|^2 + |A_2|^2 + |A_3|^2.$$

Для проверки соотношения (8) разложим в ряд Фурье полученную при прямом моделировании (1) интенсивность на оси пучка третьей гармоники, захваченного в солитон в квазисинхронном кристалле (рис. 2), и рассмотрим получившийся спектр.

Как показал численный эксперимент, l -й пик, где $l = 1, 2, \dots$, в спектре пространственных осцилляций интенсивности третьей гармоники на оси солитона соответствует пространственной частоте $f = 2lk$ (в данных расчётах $K = 100$), а амплитуды пиков с ростом l уменьшаются по закону $1/(4l^2 - m^2)$ (рис. 3), в рассматриваемом случае $m = 1$ — порядок квазисинхронизма для процесса генерации суммарной частоты (ГСЧ), что в точности соответствует формуле (8).

Средние параметры солитона можно рассчитать, воспользовавшись вариационным методом [20]. В пренебрежении индуцированными кубичными эффектами для огибающих солитона запишем лагранжиан

$$L = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{dw}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 + \frac{1}{\chi} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 \right] - \frac{1}{2} \left(w^2 v + 2wvu - w^2 - \alpha v^2 - \frac{\alpha_1}{\chi} u^2 \right) \right\} dx, \quad (9)$$

где

$$A_1 = \frac{\gamma}{2\beta_2} w(x) e^{-i\gamma z}, \quad A_2 = \frac{\gamma}{\beta_2} v(x) e^{-2i\gamma z + i\Delta k_2 z}, \quad A_3 = \frac{\gamma}{\beta_3} u(x) e^{-3i\gamma z + i\Delta k_3 z},$$

$\Delta k = \Delta k_2 + \Delta k_3$, $z \rightarrow z/\gamma$, $x \rightarrow x/\sqrt{2\gamma k_1}$, $\chi = 9(\beta_3/\beta_2)^2$, $\alpha = 2(2\gamma - \Delta k_2)/\gamma$, $\alpha_1 = 3(3\gamma - \Delta k)/\gamma$. Подставим в (9) пробные функции в виде $w = a \exp(-\rho x^2)$, $v = b \exp(-\delta x^2)$, $u = c \exp(-\eta x^2)$. Проинтегрировав по x и продифференцировав по параметрам, получим систему алгебраических уравнений относительно параметров пучков.

Нами была найдена зависимость соотношения амплитуд третьей и первой гармоник в зависимости от отношения нелинейных коэффициентов двух типов взаимодействия (см. рис. 4). Из рисунка видно, что когда $\beta_2 \gg \beta_3$, трехчастотный солитон практически переходит в двухчастотный солитон. Также было проведено сравнение результатов, полученных вариационным методом, с результатами прямых численных расчётов как в модели гармонической нелинейной решётки, так и в квазисинхронном кристалле. Сравнивались отношения амплитуд гармоник на оси солитона при различных значениях параметра β_2/β_3 . Сопоставление полученных данных показало, что для солитонов, описываемых в рамках модели гармонической нелинейной решётки, результаты прямого численного моделирования и вариационного метода отличаются примерно на $3 \div 5\%$. Для солитонов в квазисинхронных кристаллах разница сильно зависит от начальных условий и свойств среды. Пока квадратичные члены много больше кубичных (5), точность вариационного метода для квазисинхронизма первого порядка тоже примерно $3 \div 7\%$, но с ростом нормированного коэффициента нелинейности $\beta E_0 l$ она убывает. Для порядков квазисинхронизма намного выше первого точность вариационного метода падает значительно. В частности, было проведено сравнение результатов для $\beta_2/\beta_3 = 5$. Для однородной среды отличие составило 5% , в кристалле с периодически инвертированными доменами при $\beta_2 E_0 l = 45$ — 4% , при $\beta_2 E_0 l = 100$ — 37% , а при $\beta_2 E_0 l = 45$, но в пятом порядке для процесса ГСЧ — 16% .

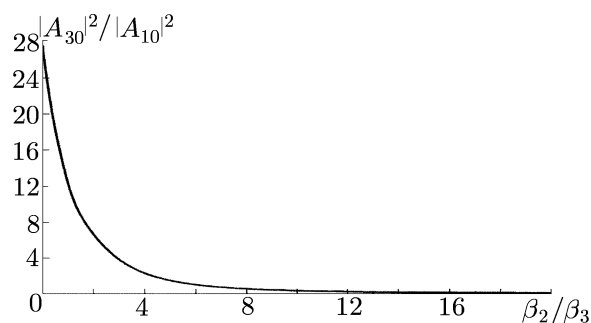


Рис. 4. Зависимость отношения интенсивностей на оси пучков третьей и первой гармоник от отношения коэффициентов нелинейности, рассчитанная с помощью вариационного метода

ВЫВОДЫ

В данной работе проводилось численное и аналитическое исследование пространственных солитонов, образующихся в результате трёхволнового взаимодействия волновых пучков в среде с

периодической модуляцией нелинейной восприимчивости при интерференции двух квадратичных каналов взаимодействия с учётом дифракции. Описаны некоторые характерные свойства полученных солитонов и рассмотрена зависимость динамики их формирования от свойств среды. В рамках метода усреднения проанализированы особенности солитонов в квазисинхронных средах и показано хорошее соответствие аналитических оценок результатам численного моделирования. Проведено изучение огибающей солитона с помощью вариационного метода и оценена его точность.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахманов С. А., Сухоруков А. П., Хохлов Р. В. // УФН. 1967. Т. 93, № 1. С. 19.
2. Chiao R. Y., Garmire E., Townes C. H. // Phys. Rev. Lett. 1964. V. 13. P. 479.
3. Talanov V. I. // Radio Phys. 1964. V. 7. P. 254.
4. Карамзин Ю. Н., Сухоруков А. П. // Письма в ЖЭТФ. 1974. Т. 20. С. 734.
5. Torruellas W. E., Wang Z., Hagan D. J., VanStryland E. W., Stegeman G. I., Torner L., Menyuk C. R. // Phys. Rev. Lett. 1995. V. 74, No. 25. P. 5036.
6. Rodriguez S. C., Torres J. P., Torner L., Fejer M. // J. Opt. Soc. Am. B. 2002. V. 19, No. 6. P. 1396.
7. Clausen C. B., Bang O., Kivshar Y. S. // Phys. Rev. Lett. 1997. V. 78, No. 25. P. 4749.
8. Bourliaguet B., Couderc V., Barthelemy A., Ross G. W., Smith P. G. R., Hanna D. C., De Angelis C. // Opt. Lett. 1999. V. 24. P. 1410.
9. Clausen C. B., Kivshar Y. S., Bang O., Christiansen P. L. // Phys. Rev. Lett. 1999. V. 83, No. 23. P. 4740.
10. Kivshar Y. S., Alexander T. J., Saltiel S. // Opt. Lett. 1999. V. 24, No. 11. P. 759.
11. Towers I. N., Malomed B. A. Polychromatic solitons in a quadratic medium: Electronic preprint. <http://arxiv.org/pdf/nlin.PS/0208045>.
12. Чиркин А. С., Юсупов Д. Б. // Квант. электрон. 1982. Т. 9, № 8. С. 1625.
13. Bang O., Clausen C. B., Christiansen P. L. // Opt. Lett. 1999. V. 24, No. 20. P. 1413.
14. Corney J. F., Bang O. // Phys. Rev. E. 2001. V. 64. Article no. 047601.
15. Corney J. F., Bang O. // Phys. Rev. Lett. 2001. V. 87, No. 13. Article no. 133901.
16. Di Trapani P. et al. // Phys. Rev. Lett. 2001. V. 87, No. 18. Article no. 183902.
17. Егоров О. А., Сухоруков А. П. // Изв. РАН. Сер. физ. 1998. Т. 62. С. 2345.
18. Johansen S. K., Carrasco S., Torner L., Bang O. // Opt. Comm. 2002. V. 203. P. 393.
19. Bang O., Graversen T. B., Corney J. F. // Opt. Lett. 1998. V. 23, No. 7. P. 506.
20. Steblina V., Kivshar Y. S., Lisak M., Malomed B. A. // Opt. Comm. 1995. V. 118. P. 345.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия

Поступила в редакцию
21 июня 2003 г.

HYBRID PARAMETRIC SOLITONS IN NONLINEAR PHOTONIC CRYSTALS

V. E. Lobanov and A. P. Sukhorukov

We analyze the characteristics of a three-frequency spatial parametric soliton formed by virtue of the cascaded frequency tripling in quadratic periodically-poled crystals. A variational approach and a method of averaging are developed, which make it possible to describe analytically with good accuracy the characteristics of the spatial solitons studied numerically.

УДК 535.135+681.7.069.24

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ В НЕРЕЗОНАНСНЫХ СРЕДАХ: ОТ СОЛИТОНОВ ОГИБАЮЩЕЙ К ВИДЕОСОЛИТОНАМ

Д. В. Карташов, А. В. Ким, С. А. Скобелев

Дан анализ нового класса уединённых решений волнового поля, который описывает распространение в прозрачной нерезонансной среде солитоноподобных структур циркулярно поляризованного оптического излучения, содержащих конечное число периодов колебаний поля. Особенностью этих решений является их плавная трансформация от солитонных решений шрёдингеровского типа, соответствующих длинным импульсам с большим числом осцилляций поля, к предельно коротким, фактически однопериодным, видеоимпульсам. Рассмотрена реализуемость таких солитонных структур для поля с линейной поляризацией и численно показана их структурная устойчивость, в том числе и относительно столкновений. На основании исследования устойчивости, а также преемственной связи найденных волновых солитонов с солитонами нелинейного уравнения Шрёдингера высказано предположение, что они могут играть такую же фундаментальную роль в нелинейной динамике рассматриваемых волновых полей. В частности, посредством численного моделирования показано, что найденные решения проявляют себя основными элементарными составляющими в таком динамическом процессе, как временная компрессия первоначально протяжённого импульса до весьма малых длительностей. При этом предельная степень компрессии определяется солитонными структурами с близкой к минимальной длительностью.

ВВЕДЕНИЕ

К одному из важных этапов развития теории нелинейных волновых процессов вообще и теории нелинейного распространения волновых пакетов в частности следует, несомненно, отнести приращение для описания эволюции медленной оггибающей волнового поля нелинейного уравнения Шрёдингера (НУШ), учитывающего наряду с дисперсионным распылением пакета и нелинейность среды керровского типа [1, 2]. Универсальный характер этого уравнения и необычайно широкая сфера его применений сделали НУШ, по сути, одним из краеугольных в нелинейной физике. Замечательной особенностью НУШ является наличие у него уединённых решений — солитонов Шрёдингера, устойчивых элементарных структур, играющих фундаментальную роль в нелинейной динамике волновых процессов [3]. Закономерен вопрос о характере эволюции волновых полей, локализованных в малых пространственно-временных областях, когда используемых для НУШ приближений оказывается недостаточно для описания соответствующей динамики поля. Очевидно, что первый и естественный шаг на этом пути состоит в обобщении НУШ, т. е. в дополнении исходного уравнения новыми слагаемыми, ответственными за дисперсионные и нелинейные эффекты более высоких порядков, в рамках приближения медленно меняющейся амплитуды. Следует отметить, что такой путь носит достаточно универсальный характер, и весьма примечательным и интересным на этом пути является поиск солитонных решений полученных обобщённых уравнений Шрёдингера (см., например, [4]). Однако важный шаг мог бы состоять также и в отказе от чрезвычайно плодотворного приближения медленности изменения амплитуды на масштабах быстрых осцилляций поля. По-видимому, на этом пути не существует универсального обобщения НУШ до нелинейного волнового уравнения для полного поля, в котором могли бы существовать волновые солитонные структуры, подобные солитонам Шрёдингера, и такое рассмотрение может быть проведено лишь на примере конкретной задачи. Мы покажем, что возможно существование устойчивых солитоноподобных структур волнового поля, которые, с одной

стороны, содержат конечное число осцилляций поля, а с другой — имеют преобладающую связь с солитонами Шрёдингера и способны, по-видимому, играть такую же фундаментальную роль в динамике волновых процессов. В качестве конкретной задачи мы рассмотрим распространение оптического излучения в прозрачной изотропной среде с безынерционной нелинейностью керровского типа. Будем полагать среду нерезонансной, допускающей введение феноменологическим образом низкочастотной и высокочастотной дисперсии. Анализ данной задачи является важным и с практической точки зрения ввиду значительных успехов в лазерной генерации световых импульсов сверхкороткой длительности, включая предельно короткие импульсы с длительностью в несколько периодов оптических колебаний [5–7]. В настоящее время напряжённость полей в таких импульсах может достигать характерных внутриатомных величин, и вопросы взаимодействия предельно коротких импульсов электромагнитного излучения с веществом весьма актуальны.

Отметим, что вопросам самовоздействия предельно коротких импульсов в нерезонансных средах к настоящему времени посвящено довольно большое число работ, в которых проведены главным образом численные исследования распространения одномерных сигналов [8–12]. В частности, эти исследования показали, что, наряду со сложной динамикой поля, при определённых условиях возможно возбуждение волновых структур бризерного типа, имеющих солитоноподобную форму огибающей и периодическую внутреннюю структуру. Отметим также практический аспект интереса к этим задачам, связанный с возможностью эффективного укорочения оптических импульсов до весьма малых длительностей, сопоставимых с периодом оптических колебаний. Техника получения лазерного излучения ультракороткой длительности, используемая на сегодняшний день, основана на эффекте генерации спектрального континуума и создания нелинейной частотной модуляции лазерного излучения благодаря его самовоздействию в плотных газах в диэлектрических капиллярах. Для компенсации этой частотной модуляции и временной компрессии излучение с выхода капилляра поступает в компрессор, состоящий из линейных дисперсионных элементов [6]. Длительность импульса, достигаемая с помощью такой техники компрессии, составляет два периода оптических колебаний и является, по сути, предельной в силу ограниченности спектральной полосы оптических элементов компрессора. Дальнейшее уменьшение длительности до одного периода световой волны таким методом невозможно в силу отсутствия оптических элементов, обладающих достаточно широкой спектральной полосой. В то же время в работе [9] указывалось, что при соответствующем подборе параметров среды и лазерного импульса эффект нелинейной самомодуляции может приводить не только к генерации спектрального континуума, но и к временному самосжатию импульса до одного оптического периода.

Применительно к резонансным средам анализ полных волновых полей, основанный на модели двухуровневой среды, представлен в [13, 14] (см. также [10] и цитированную там литературу). Отметим также одну из первых работ [15], в которой были найдены солитоноподобные структуры волнового поля в полупроводниковой плазме с непараболическим законом дисперсии для электронной компоненты.

План статьи следующий. В разделе 1 кратко обсуждаются исходные уравнения, описывающие эволюцию волнового поля без масштабного разделения на медленную огибающую и высокочастотное заполнение. В следующем разделе показывается существование нового класса солитонных решений для волнового поля с циркулярной поляризацией, имеющие место для сред с низкочастотной («плазменной») дисперсией. Показывается преобладающая связь таких решений с солитонами нелинейного уравнения Шрёдингера и его обобщений. Реализуемость подобных солитонных структур для поля с линейной поляризацией и их роль в динамике волновых процессов рассматривается в разделе 3. В разделе 4 исследуются влияние «высокочастотной» дисперсии на интересующие нас солитонные режимы распространения, а также возможности предельной компрессии оптических импульсов.

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнение, описывающее распространение оптических импульсов с конечным числом осцилляций поля в изотропной нерезонансной среде, может быть получено с помощью стандартной методики восстановления эволюционного уравнения из дисперсионного соотношения, которое определяется зависимостью показателя преломления от частоты оптического излучения. В области прозрачности среды такая зависимость может быть представлена в самом общем виде следующим образом [11]:

$$n^2(\omega) = n_0^2 + 2cn_0 \sum_{j=1}^{\infty} \left(a_j \omega^{2j} - \frac{b_j}{\omega^{2j}} \right). \quad (1)$$

Здесь n_0 — статическое значение показателя преломления, a_j и b_j — эмпирические константы, ответственные за «высокочастотную» и «низкочастотную» дисперсию среды соответственно, c — скорость света в вакууме. Во многих важных с практической точки зрения случаях зависимость показателя преломления (1) может быть значительно упрощена благодаря тому, что дисперсионная кривая среды с высокой степенью точности аппроксимируется первыми тремя слагаемыми (статическим значением показателя преломления и членами ряда, отвечающими $j = 1$). В частности, дисперсия атомарных газов при не слишком высоких давлениях в инфракрасном и оптическом диапазонах имеет вид $n^2(\omega) = n_0^2 + a\omega^2$ [16], а дисперсия прозрачных диэлектриков в ближнем инфракрасном диапазоне и в части оптического диапазона определяется первыми тремя слагаемыми в (1) [11]. Ограничиваясь далее случаем распространения излучения в среде с безынерционной нелинейностью керровского типа, векторное волновое уравнение для электрического поля волны можно представить в виде

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{n_0^2}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{2n_0 b}{c} \mathbf{E} - \frac{2n_0 a}{c} \frac{\partial^4 \mathbf{E}}{\partial t^4} + \frac{g}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(E^2 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) + \frac{h}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\mathbf{E}, \left[\mathbf{E}, \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right] \right]. \quad (2)$$

Здесь индекс 1 опущен для удобства изложения, т. е. $a_1 \equiv a$, $b_1 \equiv b$, постоянные g и h характеризуют нелинейный показатель преломления среды (см., например, [17]). Приближение безынерционной нелинейности является оправданным в силу того, что при малой длительности лазерного излучения единственным физическим механизмом, обеспечивающим нелинейность показателя преломления на таких временных масштабах, является нелинейность поляризационного отклика электронных оболочек. Характерное время задержки электронного отклика составляет доли фемтосекунды и мало по сравнению с длительностью одного периода колебаний в ближнем инфракрасном и оптическом диапазонах. При этом для электронной нелинейности справедливы соотношения $h = 2g/3$, $g = 2n_2/c$, где n_2 — экспериментально измеряемый коэффициент нелинейности.

Для детального анализа динамической задачи удобно использовать эволюционное уравнение для поля в простейшей форме редуцированного одномерного волнового уравнения. Полагая изменения распределения поля малыми на масштабах, соизмеримых с характерными длинами волн, и пренебрегая отражённой волной, для волнового поля, бегущего вдоль оси z , из (2) получаем уравнение

$$\frac{2}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z} + \frac{2n_0 b}{c} \int_{-\infty}^{\tau} \mathbf{E} d\tau' + \frac{2n_0 a}{c} \frac{\partial^3 \mathbf{E}}{\partial \tau^3} + \frac{2n_2}{c} \left(E^2 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \tau} \right) + \frac{4n_2}{3c} \left[\mathbf{E}, \left[\mathbf{E}, \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \tau} \right] \right] = 0, \quad (3)$$

где $\tau = t - zn_0/c$ — время в сопровождающей системе координат. Как отмечено в работе [11], данное уравнение включает в себя минимальное необходимое число слагаемых для учёта дисперсионных и нелинейных эффектов, достаточное для полного описания многих прозрачных сред, и

может рассматриваться в качестве базового уравнения при анализе динамики предельно коротких импульсов в нерезонансной среде.

Как нетрудно показать, введением высокочастотного заполнения уравнение (3) сводится к нелинейному уравнению Шрёдингера для медленно меняющейся амплитуды поля, а также к различным его обобщениям.

Из уравнения (3) следует, что для локализованных распределений поля выполняется интегральное соотношение вида

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E} d\tau = \mathbf{0}, \quad (4)$$

выражающее отсутствие среднего поля у таких распределений и указывающее на их осциллирующий характер, что в первую очередь связано с низкочастотной дисперсией среды.

2. СОЛИТОННЫЕ СТРУКТУРЫ ЦИРКУЛЯРНО ПОЛЯРИЗОВАННОГО ПОЛЯ

При анализе волновой динамики в теории нелинейных волн обычно разделяют системы с высокочастотной и низкочастотной дисперсией: для первых в каждом приближении повышается порядок производных в уравнении (3), для вторых же растёт кратность интегралов в (3) [18]. Начнём рассмотрение эволюции оптического поля с наиболее важного для интересующих нас вопросов случая, когда основную роль в динамике волновых процессов играет низкочастотная («плазменная») дисперсия среды. Используя масштабную инвариантность уравнения (3), запишем его в проекциях на соответствующие оси ($\mathbf{E} = \mathbf{e}_x E_x + \mathbf{e}_y E_y$) в безразмерных переменных:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z \partial \tau} + E_x + \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} [(E_x^2 + E_y^2) E_x] = 0, \quad \frac{\partial^2 E_y}{\partial z \partial \tau} + E_y + \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} [(E_x^2 + E_y^2) E_y] = 0, \quad (5)$$

где $\mathbf{e}_x$ и $\mathbf{e}_y$ — орты декартовой системы координат, E_x и E_y — соответствующие проекции вектора электрического поля. Данное уравнение описывает, в частности, распространение предельно коротких импульсов в оптическом волокне в области аномальной дисперсии [11], а также их самовоздействие в ионизованном газе, в котором плазменная дисперсия преобладает над газовой дисперсией, связанной с нейтральными частицами [9].

Принимая во внимание интегральное соотношение (4) и учитывая, что групповые и фазовые скорости волн могут быть различны, представим решения уравнений (5) в виде

$$E_x(z, \tau) = a(z, \tau) \cos \varphi(z, \tau), \quad E_y(z, \tau) = a(z, \tau) \sin \varphi(z, \tau), \quad (6)$$

описывающем эволюцию циркулярно поляризованного поля. Тогда для амплитуды $a(z, \tau)$ и фазы $\varphi(z, \tau)$ волнового поля получим следующую систему точных уравнений:

$$a_{z\tau} - \varphi_z \varphi_\tau a + a + 6aa_\tau^2 + 3a^2 a_{\tau\tau} - \varphi_\tau^2 a^3 = 0, \quad (7a)$$

$$a\varphi_{z\tau} + a_z \varphi_\tau + \varphi_z a_\tau + 6a^2 a_\tau \varphi_\tau + \varphi_{\tau\tau} a^3 = 0, \quad (7b)$$

где нижний индекс означает частную производную по соответствующей переменной. Полагая, что огибающая поля распространяется с постоянной скоростью, ищем решения в виде

$$a(z, \tau) = a(\xi), \quad \varphi(z, \tau) = \omega\tau - kz + \int_{-\infty}^{\xi} g(a) d\xi', \quad (8)$$

где $\xi = \tau - \gamma z$. Локальные частоты и волновые векторы определяются как $\varphi_\tau = \omega + g(a)$, $\varphi_z = -k - \gamma g(a)$, где k — волновое число в пределе малых амплитуд поля, γ — обратная величина

групповой скорости волновой структуры. Подставляя полученные соотношения в (76) и определяя ω как несущую частоту сигнала в пределе малых амплитуд ($g(a) \rightarrow 0$ при $a \rightarrow 0$), находим, что

$$g(a) = \frac{\omega a^2 (3\gamma - 2a^2)}{2(\gamma - a^2)^2},$$

$k = -\gamma\omega$, при этом выражение для фазы поля имеет вид

$$\varphi(z, \tau) = \omega\tau + \gamma\omega z + \int_{-\infty}^{\xi} \frac{\omega a^2 (3\gamma - 2a^2)}{2(\gamma - a^2)^2} d\xi'. \quad (9)$$

Таким образом, импульс волнового поля не только может включать в себя конечное число колебаний, но также должен быть модулированным по фазе, т. е. содержать частотный чирп, вообще говоря, достаточно сложной формы: $\varphi_\tau \sim g(a)$. Уравнение для амплитуды (7а) при этом принимает вид

$$u_{\eta\eta} - \frac{6uu_\eta^2}{1-3u^2} - \frac{u}{1-3u^2} \left\{ \delta^2 - \frac{u^2 [4(1-u^2)^2 - u^2]}{4(1-u^2)^3} \right\} = 0, \quad (10)$$

где введены новые переменные $\eta = \omega\xi$ и $u = a/\sqrt{\gamma}$. Как легко видеть, в этом случае семейство солитоноподобных решений является однопараметрическим, т. е. зависит от параметра $\delta^2 = (\gamma\omega^2)^{-1} - 1 > 0$. В соответствии с первым интегралом уравнения (10), имеющим вид

$$\left(\frac{du}{d\eta} \right)^2 = \frac{u^2}{(1-3u^2)^2} \left[\delta^2 - \frac{3}{2}(\delta^2 + 1)u^2 + \frac{(4-5u^2)u^2}{4(1-u^2)^2} \right] + \frac{C}{(1-3u^2)^2}, \quad (11)$$

где C — постоянная интегрирования, равная нулю для локализованных распределений поля, его решения в общем случае можно представить лишь в квадратурах. Однако возможные типы решений могут быть легко проанализированы на фазовой плоскости, на которой фазовые траектории (11) симметричны относительно оси $u = 0$. Ограничиваясь рассмотрением полуплоскости $u \geq 0$, можно видеть, что уравнение (10) имеет четыре состояния равновесия: три центра и седловую точку в начале координат, разделённые особыми прямыми $u = 1/\sqrt{3}$ и $u = 1$. Вид фазовой плоскости существенно зависит от параметра δ (см. рис. 1). Интересующим нас солитонным решениям соответствует замкнутая сепаратриса из седла в седло ($C = 0$), существующая только при $\delta^2 \leq \delta_c^2 = 1/8$ и включающая в себя одно или два состояния равновесия типа центр. При $\delta^2 < 1/8$ указанная сепаратриса включает ближайшее состояние равновесия; типичная фазовая плоскость для этого случая показана на рис. 1а. Для этих параметров максимальная амплитуда солитона ограничена сверху: $u_{\max} < 1/\sqrt{3}$. Зависимость среднеквадратичной длительности таких солитонов

$$\tau_s = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \eta^2 u^2 d\eta / \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 d\eta \right]^{1/2}$$

от амплитуды представлена на рис. 1б. При $u_{\max}^2 \ll 1$ уравнение (11) может быть проинтегрировано, при этом приближённое решение представляется в неявном виде:

$$6\delta \sqrt{\delta^2 - u^2/2} - \text{Arch}(\sqrt{2}\delta/u) = \pm \delta\eta. \quad (12)$$

Выражение (12) с хорошей точностью описывает динамику поля вплоть до $\delta \approx \delta_c$, исключая лишь само предельное значение. На рис. 2б показаны характерные осциллограммы поля, соответствующие точному и приближённому солитонным решениям при $\delta = 0,32$ и включающие в себя около полутора периодов оптических колебаний. Как видно, эти решения весьма близки.

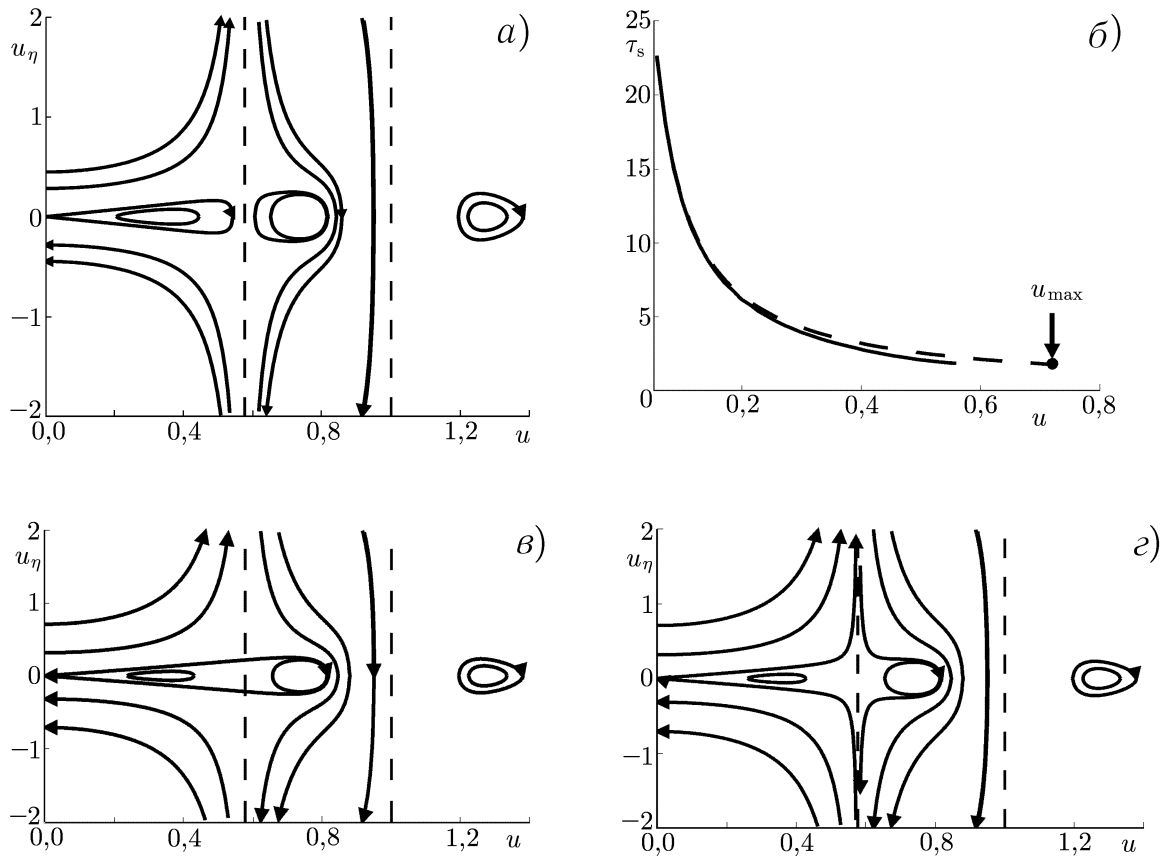


Рис. 1. Фазовая плоскость для уравнения (10) при $\delta = 0,34 < \delta_c$ (а), $\delta = 1/\sqrt{8} = \delta_c$ (в), $\delta = 0,36 > \delta_c$ (г) и зависимость длительности солитонов от амплитуды (б, сплошная линия). Точкой отмечено значение, соответствующее предельному солитону. Для сравнения показана та же зависимость для солитонов Шрёдингера, $\tau_s \propto a_s^{-1}$ (б, штриховая линия)

При $\delta^2 = 1/8$ вид сепаратрисы качественно меняется и ввиду снятия особенности при $u^2 = 1/3$ включает два состояния равновесия (рис. 1в). Данное решение является изолированным и условно может быть названо предельным солитоном, соответствующим минимальной возможной длительности $\tau_s = 1,84$ и, соответственно, максимальной возможной амплитуде $u_{\max} = \sqrt{2/3}$. Точное решение, описывающее такой солитон, имеет ту же функциональную зависимость, что и (12), однако соответствует солитону с максимальной допустимой энергией:

$$\sqrt{\frac{2-3u^2}{3}} - \frac{1}{\sqrt{2} \operatorname{Arch}} \left(\sqrt{\frac{2}{3u^2}} \right) = \pm \frac{\eta}{4}. \quad (13)$$

Здесь следует отметить, что в узкой окрестности границы $\delta^2 \approx 1/8$, как следует из (10), возможны быстрые изменения амплитуды поля, свидетельствующие о необходимости рассмотрения более общей модели (3).

При $\delta^2 > 1/8$ происходит разрыв замкнутой сепаратрисы, что указывает на отсутствие локализованных решений (рис. 1г).

Установим связь полученных решений с хорошо известными солитонами огибающей, существующими в рамках нелинейного уравнения Шрёдингера и его обобщений [3, 4]. Длительность найденных локализованных распределений поля приблизительно обратно пропорциональна их

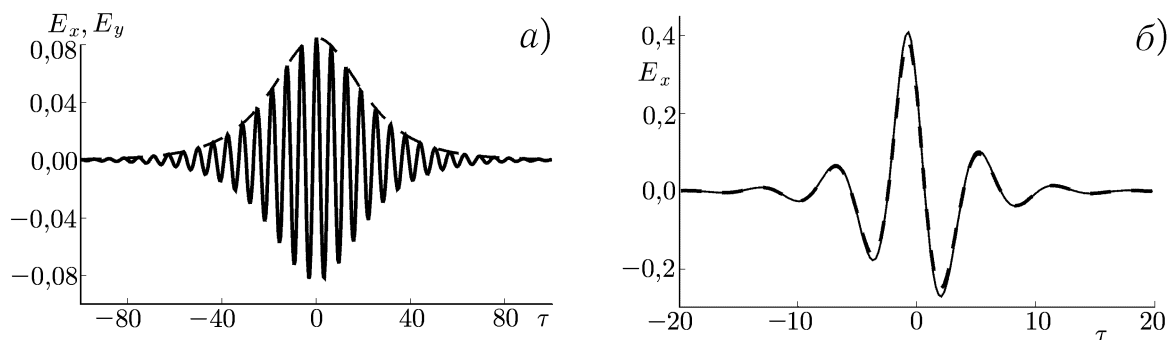


Рис. 2. Точные солитонные решения (сплошные кривые), отвечающие $\delta = 0,06$ (а) и $\delta = 0,32$ (б). Штриховыми линиями показаны солитон НУШ (а) и приближённое аналитическое решение (12)

амплитуде, поэтому переход к длинным квазимонохроматическим импульсам, содержащим много осцилляций поля, осуществляется при малых амплитудах $u^2 \ll 1/3$, что, как следует из уравнения (11), имеет место при $\delta^2 \ll 1/9$. В этом случае (11) сводится к уравнению для нахождения солитонов НУШ:

$$u_\eta^2 = u^2 (\delta^2 - u^2/2), \quad (14)$$

имеющим своим решением зависимость $u(\eta) = \sqrt{2} \delta \operatorname{ch}^{-1}(\delta \eta)$. Для сравнения на рис. 2а сплошной линией показано точное решение для волнового солитона при $\delta = 0,06$, а штриховой линией — шрёдингеровский солитон для огибающей. При увеличении амплитуды длительность солитона уменьшается, и всё возрастающую роль начинают играть процессы, связанные с дисперсией групповых скоростей, что в первую очередь отражается на структуре фазовой модуляции импульса (9). Его амплитудная зависимость трансформируется при этом в солитоны огибающей обобщённого нелинейного уравнения Шрёдингера [4], которые, как нетрудно получить из (11), проводя разложение многочленов и удерживая слагаемые следующего порядка малости, имеют вид

$$u(\eta) = \frac{2\delta}{\sqrt{1 + \operatorname{ch}(2\delta\eta)}}. \quad (15)$$

При дальнейшем увеличении амплитуды длительность солитона становится соизмеримой с периодом оптических колебаний, налагая тем самым в соответствии с интегралом (4) ограничение сверху на допустимые значения поля, что отражается, по сути, в существовании предельного солитонного решения.

В целом можно заключить, что найденные нами солитонные структуры волнового поля имеют прямую преемственную связь с солитонами Шрёдингера и позволяют осуществить переход от солитонов огибающей квазигармонического излучения к оптическим видеосолитонам (см. рис. 2).

3. ДИНАМИКА СОЛИТОНОВ ВОЛНОВОГО ПОЛЯ С ЛИНЕЙНОЙ ПОЛЯРИЗАЦИЕЙ

3.1. Солитонный режим распространения

Детальный анализ динамической задачи естественно начать с наиболее простого случая — линейно поляризованного поля, когда с наименьшими затратами можно провести достаточно исчерпывающее численное моделирование волновой динамики. Для поля с линейной поляризацией $\mathbf{E} = \mathbf{e}_x E$ уравнение (3) может быть записано в виде

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z \partial \tau} + E + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 (E^3)}{\partial \tau^2} = 0. \quad (16)$$

В первую очередь нас будет интересовать возможность реализации солитоноподобных структур волнового поля, аналогичных волновым солитонам циркулярно поляризованного поля. Как известно, отличие нелинейной динамики линейно поляризованного поля от поля с циркулярной поляризацией заключается, прежде всего, в возможности более быстрого обогащения спектрального состава импульса поля, в первую очередь, на утроенных частотах в силу кубического характера нелинейности. Таким образом, реализуемость солитоноподобных структур и их роль в динамике поля зависят от эффективности возбуждения спектральных компонент на утроенных частотах, которая определяется как дисперсией среды, так и её нелинейными свойствами. В рассматриваемой нами диспергирующей среде с плазменным законом дисперсии условия волновых синхронизмов для резонансного возбуждения спектральных гармоник поля в линейном режиме не выполняются. Однако, очевидно, что для достаточно высоких частот, где низкочастотная дисперсия практически не проявляется, расстройки волновых синхронизмов могут быть малыми. Для оценки влияния нелинейности обратимся к простейшей задаче о возбуждении третьей гармоники синусоидального сигнала с заданной интенсивностью.

Представляя поле в виде

$$E(z, \tau) = \frac{1}{2} [E(z) \exp(i\omega\tau - ikz) + \text{к.с.}] + \frac{1}{2} [E_3(z) \exp(3i\omega\tau - ik_3z) + \text{к.с.}],$$

из (16) получим следующую систему уравнений для соответствующих амплитуд:

$$i \frac{\partial E}{\partial z} = \frac{\omega}{4} |E|^2 E, \quad i \frac{\partial E_3}{\partial z} = \frac{\omega}{4} [E^3 \exp(i \Delta k z) + 6 |E|^2 E_3], \quad (17)$$

где $\Delta k = k_3 - 3k = 8/(3\omega)$ — линейная фазовая расстройка. Решая эту систему уравнений, получаем следующее выражение для интенсивности третьей гармоники:

$$|E_3(z)|^2 = \frac{E_0^6 \omega^2}{4} \frac{\sin^2(\Delta \tilde{k} z / 2)}{(\Delta \tilde{k})^2}, \quad (18)$$

где $\Delta \tilde{k} = \Delta k + 3\omega E_0^2/4 = 8/(3\omega) + 3\omega E_0^2/4$, E_0^2 — начальная интенсивность сигнала на основной частоте. Как следует из (18), в той области частот, где низкочастотная дисперсия существенна, амплитуда третьей гармоники всегда мала. Об этом свидетельствуют также численные расчёты [8, 9], показывающие, что в области аномальной дисперсии соответствующие спектральные компоненты малы.

Представляя далее решение уравнения (16) в виде $E(z, \tau) = 2a(z, \tau) \cos \varphi(z, \tau)$ и полагая компоненты поля на утроенных частотах (3φ) малыми, получаем уравнения для $a(z, \tau)$ и $\varphi(z, \tau)$, в точности совпадающие с системой (7), и, соответственно, то же уравнение (11) для нахождения солитонных распределений поля. Таким образом, анализ солитонных решений для циркулярно поляризованного волнового поля может быть распространён (естественно, с известными оговорками) и на линейно поляризованные поля, в нелинейной динамике которых упомянутые выше волновые солитоны должны также играть важную роль.

Для изучения свойств этих волновых структур и их роли в динамике нелинейного распространения нами проведено численное исследование уравнения (16). Численное моделирование проводилось с использованием псевдоспектрального метода, точность которого контролировалась сохранением гамильтониана:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{E^4}{2} - \left(\int_{-\infty}^{\tau} E d\tau' \right)^2 \right) d\tau = \text{const.}$$

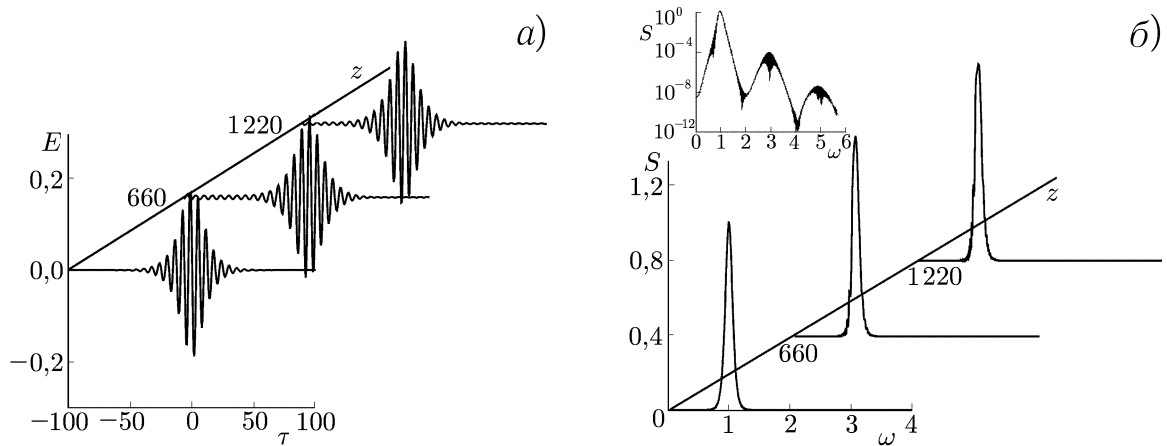


Рис. 3. Временная (а) и спектральная (б) эволюция линейно поляризованного солитона вдоль трассы распространения. На вставке приведён спектр солитона при $z/L_{nl} = 400$ в логарифмическом масштабе

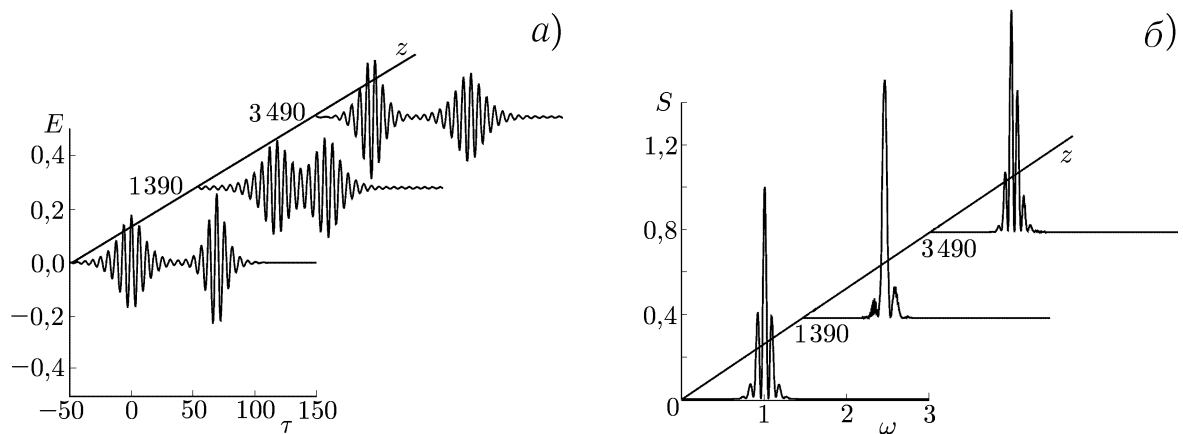


Рис. 4. Временная (а) и спектральная (б) динамика столкновения двух волновых солитонов

Для характеристики трассы распространения импульсов поля выделим характерные масштабы уравнения (16). Аналогично уравнению для огибающей, мы можем определить характерные дисперсионный и нелинейный масштабы. Однако, в отличие от солитонов НУШ, солитонные решения уравнения (16) содержат два масштаба, соответствующие заполнению и огибающей в смысле их представления в виде (6). Поэтому в качестве опорных масштабов выберем характерную дисперсионную длину $L_{dis} \propto \omega_*^2/\Delta\omega$ и характерную длину нелинейного взаимодействия $L_{nl} \propto \Delta\omega/(\omega_*^2 E_{max}^2)$, где ω_* — характерная (например, центральная) частота в спектре импульса, $\Delta\omega$ — ширина его спектра, E_{max} — максимальная амплитуда поля. На рис. 3 представлена эволюция временного распределения поля (рис. 3а) и соответствующей ей спектральной интенсивности (рис. 3б) вдоль трассы распространения для входного импульса, заданного в виде волнового солитона при $\delta = 0,15$. Для данного входного распределения поля характерные масштабы L_{dis} , L_{nl} примерно равны и приближённо лежат в интервале от 3 до 4. Как следует из рис. 3, солитонный импульс поля является устойчивым образованием и распространяется на расстояния, значительно превышающие характерные трассовые масштабы ($L \sim 400L_{nl}$), без изменения своих параметров. Наблюдаемая при этом внутренняя динамика импульса связана лишь с изменениями

фазы его заполнения по мере распространения в среде. Наблюдаемая также в численном расчёте небольшая утечка энергии в виде убегających волн связана, по-видимому, с приближённым характером солитонных распределений поля ввиду генерации третьей и более высоких гармоник поля (см. вставку на рис. 3б). Энергетические потери на рассчитанной трассе с длиной $L \approx 400L_{\text{нл}}$ составили порядка 6 % от общей энергии начального импульса.

3.2. Структурная устойчивость солитонов

Результаты численного анализа солитонного режима распространения, приведённые на рис. 3, показывают, что солитонные структуры волнового поля (9) и (11) устойчивы относительно малых возмущений и легко могут быть сформированы соответствующим выбором начального профиля поля. Однако не очевидно, что волновые солитоны с достаточно сложной внутренней структурой в виде частотно-модулированного заполнения будут устойчивы относительно конечных возмущений (например, относительно соударений), как солитоны Шрёдингера. Как известно, это является одним из важных признаков, определяющих фундаментальную роль таких структур в общей динамике волновых процессов. Будем понимать под структурной устойчивостью волнового солитона не только устойчивость солитоноподобной структуры огибающей, но также и неизменность его спектра. На рис. 4 приведена временная и спектральная эволюция волнового поля, представляющего собой суперпозицию двух разнесённых во времени солитонных решений уравнения (16) с различными амплитудами, но одинаковыми несущими частотами (см. (9)). Из определения параметра δ и его связи с амплитудой солитонов следует, что солитоны с большей амплитудой имеют большую скорость движения. Поэтому больший по амплитуде солитон на некоторой трассе догоняет солитон с меньшей амплитудой. Отметим, что в области взаимодействия солитонов фаза заполнения остаётся непрерывной. Далее солитоны проходят сквозь друг друга, оставаясь прежними после взаимодействия, практически с первоначальной структурой волнового поля: больший солитон проходит сквозь меньший без заметного обмена энергией между ними и без потерь энергии на излучение. Последнее обстоятельство особенно наглядно демонстрирует эволюция спектрального распределения интенсивности (рис. 4б). В спектре поля в начальный момент наблюдаются интерференционные максимумы, период которых увеличивается по мере сближения солитонов и вновь восстанавливается после их взаимодействия. Процесс столкновения солитонов редуцированного нелинейного волнового уравнения (16) и связь динамики их взаимодействия с динамикой столкновения солитонов уравнения НУШ ещё предстоит детально исследовать. Однако отметим, что устойчивость линейно поляризованных солитонов уравнения (16) в процессе столкновения, несмотря на их приближённый характер, является, на наш взгляд, важным результатом и позволяет с большим основанием называть эти структуры солитонами. Это даёт основание также полагать, что рассматриваемые солитоны представляют собой некоторые фундаментальные структурные образования, которые определяют нелинейную динамику волнового поля.

4. ВОЛНОВАЯ ДИНАМИКА С УЧЁТОМ ВЫСОКОЧАСТОТНОЙ ДИСПЕРСИИ

4.1. Динамика линейно поляризованных солитонов

Следующим важным моментом с точки зрения реализуемости найденных нами солитонных решений редуцированного нелинейного волнового уравнения является их динамика с учётом высокочастотной составляющей дисперсии среды. Учёт этой дисперсии, в частности, необходим при рассмотрении задачи самовоздействия волнового поля в прозрачных диэлектриках, важнейшим

примером которых являются оптические волокна. Уравнение (16) с учётом высокочастотной составляющей дисперсии может быть представлено в виде (см. уравнение (3))

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z \partial \tau} + E - \beta \frac{\partial^4 E}{\partial \tau^4} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 (E^3)}{\partial \tau^2} = 0. \quad (19)$$

Отметим, что коэффициент β в этом уравнении введён для удобства исследования влияния четвёртой производной амплитуды поля на динамику распространения импульсов. Как известно, введение четвёртой производной в уравнении (19) может приводить к существенному изменению дисперсионных свойств среды, в частности к появлению точки нулевой дисперсии групповых скоростей ($\omega_{cr} = (3\beta)^{-1/4}$). На рис. 5 представлена эволюция поля, заданного на входе в среду в виде волнового солитона уравнения (16), соответствующего $\delta = 0,15$ и частоте заполнения $\omega = 1$ при $\beta = 0,1$. При этих параметрах отношение ω/ω_{cr} составляет 1,35, так что точка нулевой дисперсии групповой скорости находится на высокочастотном краю спектра импульса (рис. 5б). Из рис. 5а видно, что интенсивность излучения энергии солитоном в виде убегающих квазигармонических волн заметно возросла, что привело к уменьшению его амплитуды примерно на 16 % и возрастанию длительности на 30 %. Механизмом разрушения солитона при этом, по-видимому, служит четырёхволновое параметрическое взаимодействие волн в среде с кубической нелинейностью. Добавление высокочастотной дисперсии делает возможным выполнение условий фазового синхронизма для такого параметрического процесса [19], а близость спектра импульса к точке нулевой дисперсии групповых скоростей минимизирует влияние эффектов группового запаздывания на эффективность параметрического взаимодействия. Наличие параметрического взаимодействия чётко прослеживается в эволюции спектра солитона (рис. 5б). Видно, что при выбранных параметрах происходит эффективная (до 20 % по интенсивности и до 4 % по энергии) генерация волны на частоте $\omega = 2,65$, которая затем практически прекращается вследствие обращения процесса энергообмена между волнами, что связано, прежде всего, с эффектами фазовой кросс-модуляции волн. При дальнейшем увеличении параметра β часть спектра солитона оказывается в области с нормальным законом дисперсии групповой скорости, вследствие чего происходит его быстрое разрушение. Отметим, что в случае, когда центральная частота в спектре импульса близка к точке нулевой дисперсии групповой скорости ω_{cr} , наблюдается эффективная генерация спектрального континуума, сопровождающаяся расплыванием импульса во временной области [11, 12].

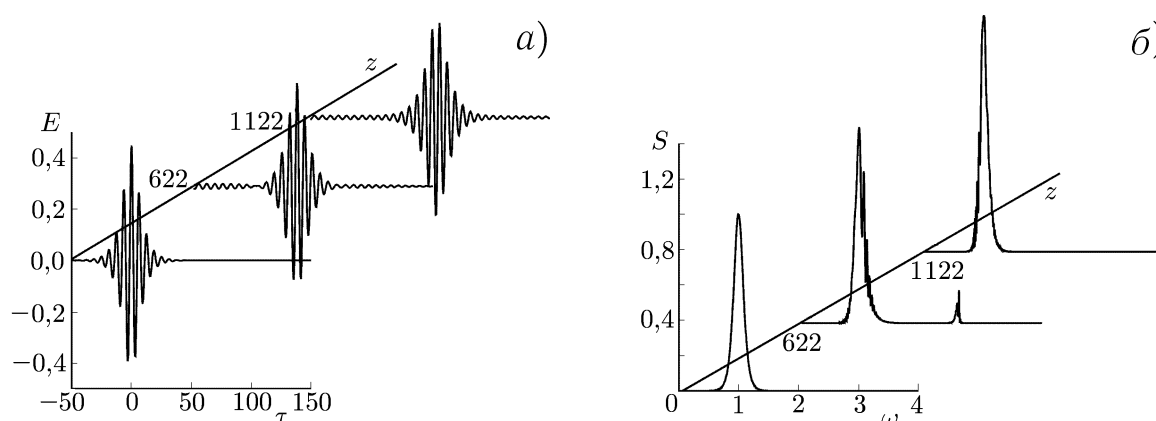


Рис. 5. Временная (а) и спектральная (б) эволюция волнового солитона с линейной поляризацией поля при $\beta = 0,1$

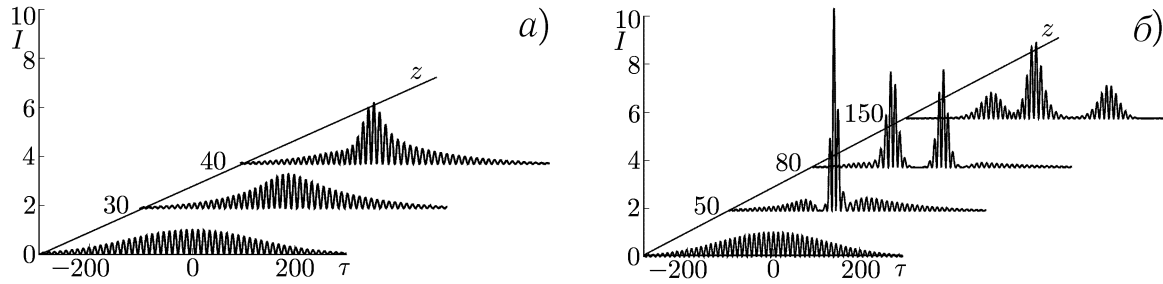


Рис. 6. Динамика входного импульса гауссовой формы вдоль трассы распространения (интенсивность импульса нормирована на своё начальное значение)

4.2. Компрессия волновых пакетов

Далее мы рассмотрим возможность компрессии оптических импульсов до предельно малых длительностей, порядка и менее периода оптических колебаний. При решении поставленной задачи будем основываться на найденных нами солитоноподобных волновых структурах, соответствующих минимальным возможным длительностям волнового импульса. На рис. 6 представлена эволюция оптического импульса при его распространении в нелинейной среде. В начале импульс имеет гауссову форму с несущей частотой $\omega = 0,3\omega_{cr}$ и энергией, примерно в три раза превышающей энергию предельного солитона (13). По мере распространения импульса в среде наблюдается его эффективное сжатие, причём следует обратить внимание, что процесс компрессии сопровождается появлением заметной асимметрии в распределении интенсивности поля I (рис. 6а). Это отличает его от компрессии импульсов в рамках НУШ [20] и является проявлением нелинейности дисперсии групповой скорости, присутствующей в уравнении (19). Процесс сжатия протекает немонотонно, и максимальная компрессия импульса происходит на сравнительно небольшом отрезке трассы распространения (рис. 6б). При этом оказывается, что при превышении начальной энергии импульса над энергией предельного солитона в два и более раза минимальная длительность сжатого импульса практически не зависит от его начальных параметров и близка к длительности предельного солитона (12), которая составляет менее одного периода колебаний несущей частоты (см. рис. 1б). При дальнейшем распространении импульса в среде происходит его последовательное дробление на солитоны (12) (см. рис. 6б), причём число образующихся солитонов определяется отношением энергии начального распределения к энергии предельного солитона (13). В частности, на рис. 6 в процессе распространения исходного импульса сформировались три солитоноподобные структуры. Их взаимодействие при последующем распространении носит довольно сложный характер (это не отражено на рис. 6), однако существенным для нас в данной работе является сам факт их формирования и последующая устойчивость при взаимодействии друг с другом. Таким образом, при распространении произвольного импульса поля в среде с керровской нелинейностью с преобладанием низкочастотной дисперсии, когда реализуется аномальная зависимость групповой скорости от частоты, происходит его эффективное временное сжатие. При этом процесс сжатия определяется найденными нами солитонными решениями нелинейного волнового уравнения, а минимальная длительность сжатого импульса определяется минимальной возможной длительностью предельного волнового солитона.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе дан анализ солитоноподобных структур волнового поля, имеющих преемственную связь с солитонами Шрёдингера, и их роли в общей динамике волновых процессов. Найденные

нами волновые структуры имеют форму солитонов огибающей, однако включают в себя конечное число осцилляций поля и естественным образом имеют своим решением предельный волновой солитон с максимальной допустимой энергией и минимальной возможной длительностью (менее одного периода колебаний), который может быть назван видеосолитоном. Их принципиальное отличие от бризерных решений, которые, как правило, неустойчивы в случае континуальных сред, заключается в наличии модулированной по фазе структуры волнового поля. Этот факт представляется естественным для сред с керровской нелинейностью, однако он, по-видимому, играет важную роль в устойчивости найденных волновых структур. Следует отметить, что именно устойчивость относительно соударений и преemственная связь найденных волновых солитонов с солитонами Шрёдингера позволяет рассматривать их в качестве базовых структур волнового поля, играющих, возможно, такую же фундаментальную роль в динамике волновых процессов, как и солитоны Шрёдингера. В частности, как показывают результаты наших численных исследований, найденные волновые структуры проявляют себя устойчивыми элементарными составляющими в таком динамическом процессе, как временная компрессия первоначально широкого импульса до весьма малых длительностей, формируя на определённом этапе предельно короткий импульс с длительностью в несколько осцилляций поля и амплитудой, значительно превышающей амплитуду предельного солитона. При достаточном (более чем в два раза) превышении энергии начального распределения поля над энергией предельного солитона минимальная длительность сжатого импульса поля практически не зависит от его энергии и определяется минимальной возможной длительностью волнового солитона. Этот результат имеет важное значение с точки зрения экспериментального получения оптических импульсов предельно короткой длительности. В частности, использование солитонного режима компрессии лазерных импульсов позволяет, в принципе, достичь длительности лазерного излучения, меньшей одного оптического периода, что, как указывалось во введении, невозможно для существующей в настоящее время методики получения лазерного излучения предельно короткой длительности. К примеру, результаты компрессии гауссового импульса, приведённые на рис. 6, соответствуют реализуемой экспериментальной ситуации по сжатию лазерного импульса с начальной длительностью 40 фс и интенсивностью приблизительно 10^{13} Вт/см², распространяющемуся в диэлектрическом капилляре с диаметром 150 мкм и длиной 50 см, заполненном газо-плазменной смесью при давлении плазмы в несколько торр и давлении нейтрального газа в несколько атмосфер. В результате, как показывают численные расчёты, на выходе капилляра будет сформирован импульс с длительностью около 1,5 фс.

Авторы выражают глубокую признательность В. А. Миронову и А. М. Сергееву за интерес к работе и плодотворные обсуждения в процессе её выполнения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Таланов В. И. // Письма в ЖЭТФ. 1965. Т. 2. С. 218.
2. Литвак А. Г., Таланов В. И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1967. Т. 10. С. 539.
3. Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. Теория солитонов. М.: Наука, 1980.
4. Громов Е. М., Таланов В. И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1998. Т. 41. С. 222.
5. Baltuska A., Wei Z. Y., Pshenichnikov M. S., Wiersma D. A. // Opt. Lett. 1997. V. 22. P. 102.
6. Nisoli M., De Silvestri S., Svelto O. // Opt. Lett. 1997. V. 22. P. 502.
7. Brabec T., Krausz F. // Rev. Mod. Phys. 2000. V. 72. P. 545.
8. Козлов С. А., Сазонов С. В. // ЖЭТФ. 1997. Т. 111. С. 404.
9. Nazarkin A., Korn G. // Phys. Rev. Lett. 1999. V. 83. P. 4748.
10. Маймистов А. И. // Квантовая электроника. 2000. Т. 30. С. 287.

11. Козлов С. А. // Проблемы когерентной и нелинейной оптики / Под ред. И. П. Гурова, С. А. Козлова. СПб., 2000. С. 12.
12. Husakou A. V., Kalosha V. P., Herrmann J. // Opt. Lett. 2001. V. 26. P. 1 022.
13. Eilbeck J. C., Gibbon J. D., Coudrey P. J., Bullough R. K. // J. Phys. A. 1973. V. 6. P. 1 337.
14. Беленов Е. М., Крюков П. Г., Назаркин А. В. и др. // Письма в ЖЭТФ. 1988. Т. 47. С. 523.
15. Горшков К. А., Козлов В. А., Островский Л. А. // ЖЭТФ. 1973. Т. 65. С. 195.
16. Dalgarno A., Kingston A. E. // Proc. R. Soc. London. Ser. A. 1966. V. 259. P. 424.
17. Власов С. Н., Таланов В. И. Самофокусировка волн. Н. Новгород: ИПФ РАН, 1997.
18. Островский Л. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1974. Т. 4. С. 455.
19. Misoguti L., Backus S., Durfee C. G. et al. // Phys. Rev. Lett. 2001. V. 87. Article no. 013 601.
20. Chen C. M., Kelley P. L. // J. Opt. Soc. Am. B. 2002. V. 19. P. 1 961.

Институт прикладной физики РАН,
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию
10 июня 2003 г.

**NONLINEAR DYNAMICS OF WAVE FIELDS IN NONRESONANCE MEDIA:
FROM ENVELOPE SOLITONS TOWARD VIDEOSOLITONS**

D. V. Kartashov, A. V. Kim, and S. A. Skobelev

We analyze a new class of soliton solutions for a wave field, which describes propagation of soliton-like structures of circularly polarized electromagnetic field, comprising a finite number of field-oscillation periods, in a transparent nonresonance medium. The considered solutions feature a smooth transition from the soliton solutions of Schrödinger type, which correspond to long pulses with a large number of field oscillations, to extremely short, virtually single-cycle videopulses. We show that such solutions can also be important for linearly polarized laser electric fields. The structural stability of few-optical-cycle solitons is demonstrated numerically, including the case of their collision. Based on stability analysis and with allowance for the genealogic relation between the obtained wave solitons and the solitons of the nonlinear Schrödinger equation, we argue that the former solitons can play the same fundamental role in the nonlinear dynamics of the considered wave fields. In particular, it is shown by numerical simulations that the few-optical-cycle solutions turn out to be the basic elementary components of such a dynamical process as the temporal compression of an initially long pulse to a pulse of very short duration. In this case, the minimum duration of a compressed pulse is determined by soliton structures of about minimal duration.

УДК 537.87

КОРОТКИЕ СОЛИТОНЫ ОГИБАЮЩЕЙ. ИЗОТРОПНЫЕ И АНИЗОТРОПНЫЕ СРЕДЫ

Е. М. Громов, В. В. Тютин

Найдены новые классы коротких (порядка нескольких длин волн) скалярных и векторных солитонов в рамках третьего приближения теории нелинейной дисперсии волн. Короткие скалярные солитоны найдены в рамках нелинейного уравнения Шрёдингера третьего порядка, которое включает как члены, описывающие нелинейную дисперсию, так и слагаемое, учитывающее линейную дисперсию третьего порядка. Исследовано взаимодействие этих солитонов и доказана их устойчивость. Также исследована эволюция произвольного короткого волнового пакета. Короткие векторные солитоны найдены в рамках связанного нелинейного уравнения Шрёдингера третьего порядка, проанализированы взаимодействие этих солитонов и их устойчивость.

1. ВВЕДЕНИЕ. ПРОТЯЖЁННЫЕ СКАЛЯРНЫЕ И ВЕКТОРНЫЕ СОЛИТОНЫ

Распространение высокочастотных волновых пакетов в нелинейной изотропной диспергирующей среде обычно анализируется во втором (квазиоптическом) приближении теории нелинейной дисперсии волн. Для изотропной среды в этом приближении огибающая $\psi(x, t)$ высокочастотного волнового пакета $\psi(x, t) \exp(i\omega_0 t - ik_0 x)$ описывается хорошо известным нелинейным уравнением Шрёдингера второго порядка (НУШ) [1]:

$$2i \frac{\partial \psi}{\partial t} + q \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + 2\alpha |\psi|^2 \psi = 0, \quad (1)$$

где $\xi = x - V_g^L t$, $V_g^L = (\partial \omega / \partial k)|_{k=k_0, |\psi|=0}$ — групповая скорость линейных волн с волновым числом k_0 и частотой ω_0 , удовлетворяющими нелинейному дисперсионному соотношению $\omega = \omega(k, |\psi|^2)$, $q = -(\partial^2 \omega / \partial k^2)|_{k=k_0, |\psi|=0}$ — параметр линейной дисперсии второго порядка, $\alpha = (\partial \omega / \partial |\psi|^2)|_{k=k_0, |\psi|=0}$ — параметр кубичной нелинейности. При выполнении условия $\alpha q > 0$, когда нелинейное сжатие волнового поля компенсирует дисперсионное расплывание, в рамках НУШ (1) существует хорошо известное солитонное решение с произвольной амплитудой A_0 [1]:

$$\psi(\xi, t) = \frac{A_0}{\operatorname{ch}(\xi A_0 \sqrt{\alpha/q})} \exp\left(i \frac{\alpha}{2} A_0^2 t\right). \quad (2)$$

Как показано в [2], солитонное решение (2) является единственным устойчивым локализованным решением уравнения (1): любой локализованный волновой пакет в рамках НУШ (1) эволюционирует к системе солитонов (2) с различными амплитудами. Взаимодействие таких солитонов в рамках уравнения (1) подобно взаимодействию частиц, т. е. является упругим: количество и параметры солитонов в результате взаимодействия не изменяются.

При распространении волновых пакетов в двулучепреломляющей (анизотропной) нелинейной диспергирующей среде существенны эффекты взаимодействия волновых полей разной поляризации. До последнего времени в качестве базового уравнения, учитывающего такие эффекты

и описывающего в двулучепреломляющих средах динамику протяжённого векторного волнового пакета $\mathbf{E} = \mathbf{e}_1 U(x, t) \exp(i\omega_u t - ik_0 x) + \mathbf{e}_2 W(x, t) \exp(i\omega_w t - ik_0 x)$, использовалось связанное нелинейное уравнение Шрёдингера второго порядка (ЧУШ) [3, 4]:

$$2i \frac{\partial U}{\partial t} + q \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 2\alpha (|U|^2 + \sigma |W|^2) U = 0, \quad (3)$$

$$2i \frac{\partial W}{\partial t} + q \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + 2\alpha (|W|^2 + \sigma |U|^2) W = 0. \quad (4)$$

Здесь U и W — медленно изменяющиеся огибающие разных компонент волнового пакета с поляризациями $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ и близкими частотами: $|\omega_u - \omega_w| \ll \{\omega_u, \omega_w\}$, σ — параметр нелинейной связи между поляризационными компонентами пакета. В рамках системы уравнений (3), (4) существует протяжённый векторный солитон (двухкомпонентное солитонное решение):

$$U(\xi, t) = \frac{A_0 \exp[i(\alpha A_0^2/2 + Kq)t + iK\xi]}{\operatorname{ch}(\sqrt{\alpha/q} A_0 (\xi - Kqt) \sqrt{1 + \lambda^2 \sigma})}, \quad W = \lambda U, \quad (5)$$

где K — добавочное волновое число, λ — параметр, удовлетворяющий условию $(\lambda^2 - 1)(\sigma - 1) = 0$, что соответствует $\lambda^2 = 1$ при $\sigma \neq 1$ и произвольной величине λ при $\sigma = 1$. Векторное солитонное решение было исследовано в рамках ЧУШ в [3, 4]. Последний случай ($\sigma = 1$) соответствует «солитонам Манакова» [3].

Второе приближение теории дисперсии нелинейных волн корректно описывает динамику волновых пакетов только при условии, что ширина как пространственного, так и временного спектров ($\Delta\omega$ и Δk), а так же нелинейность $|\psi|$ достаточно малы:

$$\nu \sim \sqrt{\frac{\Delta\omega}{\omega}} \sim \frac{\Delta k}{k} \sim |\psi| \ll 1. \quad (6)$$

Но для волновых пакетов малой протяжённости Δ (например, порядка нескольких длин волны) и большой интенсивности второе приближение теории дисперсии нелинейных волн более не пригодно. Так, в [5, 6] экспериментально показано, что для нелинейных коротких волновых пакетов, содержащих от 3 до 30 волн, на расстояниях более 5 длин волнового пакета проявляются эффекты (например, самоукручение одного из фронтов исходно симметричного пакета), которые не могут быть описаны в рамках уравнения второго порядка по величине ν . При сравнении результатов натурных и численных экспериментов в [6] показано, что эти эффекты полностью описываются уравнением третьего порядка. Для коротких интенсивных волновых пакетов уравнение, описывающее огибающую пакета, не может быть получено из нелинейного дисперсионного соотношения, т. к. при этом нельзя учесть влияние нелокальной и нестационарной нелинейности.

2. ИЗОТРОПНЫЕ СРЕДЫ

Для описания коротких импульсов в изотропных средах можно ограничиться в базовом уравнении членами третьего порядка относительно величины ν . При этом базовое уравнение для огибающей волнового пакета (нелинейное уравнение Шрёдингера третьего порядка, НУШ-3) принимает вид [7, 8]:

$$2i \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + \beta |\psi|^2 \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \mu \psi \frac{\partial |\psi|^2}{\partial \xi} \right) + q \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + 2\alpha |\psi|^2 \psi + i\gamma \frac{\partial^3 \psi}{\partial \xi^3} = 0. \quad (7)$$

Уравнение (7) содержит члены как третьего, так и второго порядка относительно величины ν . Члены с параметрами β и μ описывают зависимость локальной групповой скорости от интенсивности волнового поля $|\psi|^2$ (нелинейная дисперсия) и могут быть получены только из исходных полевых уравнений. Член с параметром γ и пространственной производной третьего порядка функции ψ описывает линейную дисперсию третьего порядка (линейную аберрацию), $\gamma = -(1/3)(\partial^3 \omega / \partial k^3)|_{k=k_0, |\psi|=0}$. Уравнения этого вида (как НУШ, так и НУШ-3 — см., например, [7–10]) используются для описания нелинейных волновых пакетов в одномодовых диэлектрических оптических волокнах. В работе [9] приведены оценки параметров нелинейной дисперсии β и μ для оптических волновых пакетов в зависимости от их протяжённости: $\beta \sim \mu \sim 10^{-3}$ для пакетов, содержащих сотни тысяч волн, и $\beta \sim \mu \sim 1$ для пакетов, содержащих до тысячи волн. К настоящему времени солитонные решения НУШ-3 в различных частных случаях исследовались как численно (например, в [11]), так и аналитически (см. [2–9, 11–22]). В работе [11] рассмотрено солитонное решение с зависящим от пространственных координат дополнительным волновым числом в случае распространения волнового пакета в точке нулевой линейной дисперсии второго порядка ($q = 0$) и в пренебрежении нелинейной дисперсией ($\beta = \mu = 0$). Методом обратной задачи рассеяния [2] уравнение (7) было решено при определённых соотношениях между его параметрами. В том числе было получено точное N -солитонное решение [12–15] в следующих случаях: при $\alpha = q = 0$ и действительной волновой функции ψ уравнение (7) сводится к модифицированному уравнению Кортевега—де-Вриза, решение которого было получено в работах [12, 13]; при $\mu = 0$ и $q\beta = 3\gamma\alpha$ (условия Хироты) уравнение (7) сводится к уравнению Хироты, которое было исследовано в [13]; при $q = \alpha = 1$, $\beta = 6\gamma$, $\mu = 3\gamma$ уравнение (7) анализировалось в [14]. Односолитонные решения, найденные в [13, 14] имеют не зависящие от пространственных координат дополнительные волновые числа. Огибающая односолитонного решения, полученного в [13], имеет один максимум, огибающие решений, полученных в [14, 16], — либо один, либо два максимума. НУШ с учётом нелинейной дисперсии при $\alpha = \gamma = 0$ и $\beta = \mu$ («derivative» НУШ был рассмотрен в [15]: в этом случае уравнение (7) имеет решение в виде алгебраического солитона. Другие аналитические методы решения НУШ-3 в случаях, когда метод обратной задачи рассеяния не может быть использован, основаны на сведении исходного уравнения к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Эти методы позволяют успешно находить односолитонные решения [17–19]. В частности, солитоны с модулированным волновым числом в рамках НУШ-3 при отсутствии члена, описывающего линейную дисперсию третьего порядка ($\gamma = 0$), были найдены в [17, 19]: при $\beta = \mu$ в [17] и при произвольных коэффициентах нелинейной дисперсии β и μ в [19]. При произвольных β , μ и малом параметре γ аналогичные солитоны были описаны в [21]. Добавочные волновые числа солитонных решений, полученных в [17, 19, 21], пропорциональны квадрату амплитуд солитонов. Солитонное решение с не зависящим от пространственных координат дополнительным волновым числом было получено в точке нулевой дисперсии в работе [18] сведением НУШ-3 к обыкновенному дифференциальному уравнению.

2.1. Короткие скалярные солитоны огибающей в однородных средах

Для произвольных коэффициентов НУШ-3 в работе [19] было найдено солитонное решение:

$$\psi(\eta, t) = \frac{A_0}{\operatorname{ch}(\eta A_0 \sqrt{\varepsilon})} \exp(i\Omega t + iK\eta), \quad (8)$$

где

$$\varepsilon = \frac{\Theta}{3\gamma} > 0, \quad \eta = \xi - Vt, \quad \Theta = \beta + 2\mu,$$

$$V = Kq - \frac{3}{2} \gamma K^2 + \frac{\Theta}{6} A_0^2, \quad \Omega = \frac{\Theta}{3} A_0^2 (q - 3\gamma K) + \frac{K^2}{2} (\gamma K - q). \quad (9)$$

Найденный солитон (8) существует в среде, в которой параметр линейной дисперсии третьего порядка γ и результирующий параметр нелинейной дисперсии $\Theta = \beta + 2\mu$ имеют одинаковый знак ($\gamma\Theta > 0$). Неограниченная стационарная волна была исследована в рамках НУШ-3 в [22, 23].

2.1.1. Динамика волновых пакетов в рамках НУШ-3. Устойчивость коротких солитонов огибающей. Для исследования динамики коротких волновых пакетов уравнение (7) решалось численно [10, 24, 25]. В рамках этого уравнения начальное распределение волнового поля было задано в виде локализованного колокообразного («sech-like») импульса

$$\psi(\eta, t = 0) = \frac{A_0}{\text{ch}(\eta A_0 \sqrt{\varepsilon}/\Delta)}$$

при различных A_0 , Δ и различных параметрах α , β , μ , q и γ уравнения (7). Было показано, что в рамках (7) с произвольными параметрами, удовлетворяющими условию $\gamma\Theta > 0$, исходный импульс эволюционирует к одному или нескольким солитонам (8) с различными амплитудами и линейной волне. Количество образующихся солитонов и их параметры зависят как от параметров исходного импульса, так и от параметров НУШ-3. Такой характер эволюции произвольного волнового пакета подтверждает устойчивость солитонов (8) в рамках НУШ-3. Солитонное решение (8) не существует в рамках уравнения (7) с параметрами, удовлетворяющими условию $\gamma\Theta < 0$, и в этом случае исходный импульс эволюционирует к линейной волне малой амплитуды.

2.1.2. Взаимодействие коротких скалярных солитонов огибающей. Взаимодействие коротких солитонов огибающей в рамках уравнения (7) исследовалось численно в [10, 25]. В рамках этого уравнения начальное распределение волнового поля было задано в виде суперпозиции двух солитонов разной амплитуды, разнесённых на большое расстояние в пространстве:

$$\psi(\eta, t = 0) = \frac{A_1 \exp(iK\eta)}{\text{ch}\left[(\eta - \Delta) A_1 \sqrt{\Theta/(3\gamma)}\right]} + \frac{A_2 \exp(iK\eta)}{\text{ch}\left[(\eta + \Delta) A_2 \sqrt{\Theta/(3\gamma)}\right]}. \quad (10)$$

Здесь A_1 и A_2 — амплитуды первого и второго солитонов соответственно, расстояние между солитонами 2Δ много больше характерного размера более широкого солитона $1/[A_2 \sqrt{\Theta/(3\gamma)}]$. Эволюция начального распределения (10) в рамках уравнения (7) исследовалась численно при различных параметрах НУШ-3, удовлетворяющих условию существования солитона, и при различных амплитудах солитонов A_1 , A_2 в начальный момент времени.

Взаимодействие этих солитонов отличается от взаимодействия частиц и является неупругим: оно сопровождается излучением части волнового поля из области взаимодействия, при этом параметры солитонов после взаимодействия отличаются от параметров до взаимодействия. Амплитуда изначально более интенсивного солитона в результате взаимодействия увеличивается, а менее интенсивного — уменьшается. Это отличает взаимодействие коротких солитонов огибающей в рамках НУШ-3 от взаимодействия солитонов в рамках хорошо известного нелинейного уравнения Шрёдингера (НУШ). Напомним, что взаимодействие солитонов в рамках НУШ носит упругий характер, т. е. поля излучения отсутствуют, а параметры солитонов до и после взаимодействия совпадают. Неупругость взаимодействия солитонов является эффектом, вызванным нелинейной дисперсией.

При малом отличии начальных амплитуд (и, соответственно, начальных скоростей) солитонов, поля взаимодействующих солитонов перекрываются незначительно. В результате взаимодействия более быстрый солитон усиливается, а более медленный — затухает.

Уменьшение начальной амплитуды более быстрого солитона существенно меняет характер взаимодействия солитонов. В этом случае поля взаимодействующих солитонов перекрываются полностью, в результате чего солитон с меньшей амплитудой полностью разрушается, а солитон с большей амплитудой усиливается.

Изменение параметров НУШ-3 приводит лишь к изменению излучаемой части волнового поля и порогового отношения амплитуд взаимодействующих солитонов A_1/A_2 , при превышении которого происходит разрушение меньшего солитона. Следует отметить, что при выполнении условий Хироты $\mu = 0$, $q\beta = 3\gamma\alpha$ взаимодействие солитонов (8) является упругим.

2.2. Короткие скалярные солитоны огибающей в неоднородных средах

Динамика коротких солитонов в неоднородных средах может описываться НУШ-3 с добавочным членом, соответствующим неоднородности определённого типа, например внешнему линейному потенциалу dx :

$$2i \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + V_g^L \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + q \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + 2\alpha |\psi|^2 \psi = -2i \left(\beta |\psi|^2 \frac{\partial \psi}{\partial x} + \mu \psi \frac{\partial |\psi|^2}{\partial x} \right) - i\gamma \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} - dx\psi.$$

Данное уравнение имеет точное односолитонное решение вида

$$\psi(\xi, t) = \frac{A_0}{\text{ch}(\xi A_0 \sqrt{\alpha/q})} \exp \left[i \left(\frac{\alpha}{4q} A_0^2 t + \frac{d}{2} \xi t + \Phi(t) \right) \right],$$

где

$$\xi = x - \left(V_g^L + \frac{\beta}{6} A_0^2 \right) t - \frac{qd}{4} t^2 + \frac{\gamma d^2}{8} t^3, \quad \mu = 0, \quad \frac{\beta}{3\gamma} = \frac{\alpha}{q},$$

$$\Phi(t) = \left(V_g^L - \frac{\beta}{6} A_0^2 \right) \frac{d}{4} t^2 + \frac{qd^2}{12} t^3 - \frac{3\gamma d^3}{64} t^4.$$

Траектория этого солитона в среде с линейным потенциалом является параболой третьего порядка:

$$x_{\text{sol}} = \left(V_g^L \frac{\beta}{6} A_0^2 \right) t + \frac{qd}{4} t^2 - \frac{\gamma d^2}{8} t^3.$$

Найденное солитонное решение в случае $\gamma = \beta = 0$ сводится к хорошо известному солитону Чена [26].

Кроме случая линейного внешнего потенциала, траектории коротких волновых пакетов исследовались при произвольном потенциальном профиле [19, 20, 27]. Так, в [19, 20] было получено незамкнутое (требующее знания формы волнового пакета в каждый момент времени) уравнение, описывающее траекторию пакета в среде с произвольными параметрами. В [27] при выполнении условий Хироты получено замкнутое (не требующее знания формы волнового пакета в каждый момент времени) уравнение для траектории пакета в слабо неоднородной среде. Характер движения волнового пакета при заданном потенциале зависит от параметров среды и самого пакета. Особенно важно, что возможно движение, отличное от поведения частицы в потенциальном профиле. В случае параболического потенциала показано, что возможно как локализованное движение пакета на «холме» (колебания в окрестности вершины потенциального профиля), так и нелокализованное движение в «яме» (выход пакета из потенциальной ямы). В случае периодического потенциала показано, что возможно движение пакета с четырьмя точками поворота на

периоде потенциала, локализованное на периоде движение (с двумя точками поворота), а также прямое движение без точек поворота. Отличие траекторий коротких волновых пакетов от траекторий частиц обусловлено нелинейной дисперсией.

3. АНИЗОТРОПНЫЕ СРЕДЫ

Аналогично тому, как в изотропных средах для описания динамики коротких волновых пакетов необходимо учитывать в модельном уравнении члены высокого порядка, для описания коротких импульсов в анизотропных средах можно ограничиться в базовом уравнении членами третьего порядка относительно величины ν . В двулучепреломляющей нелинейной диспергирующей среде базовым уравнением, описывающим динамику медленно меняющихся огибающих U и W различных поляризационных компонент короткого векторного волнового пакета $\mathbf{E} = \mathbf{e}_1 U(x, t) \exp(i\omega_u t - ik_0 x) + \mathbf{e}_2 W(x, t) \exp(i\omega_w t - ik_0 x)$ при $|\omega_u - \omega_w| \ll \{\omega_u, \omega_w\}$, в этом приближении является связанное нелинейное уравнение Шрёдингера третьего порядка (СНУШ-3) [28, 29]:

$$2i \left[\frac{\partial U}{\partial t} + \beta (|U|^2 + \sigma_\beta |W|^2) \frac{\partial U}{\partial \xi} + \mu U \frac{\partial (|U|^2 + \sigma_\mu |W|^2)}{\partial \xi} \right] + q \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 2\alpha (|U|^2 + \sigma_\alpha |W|^2) U + i\gamma \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} = 0, \quad (11)$$

$$2i \left[\frac{\partial W}{\partial t} + \beta (|W|^2 + \sigma_\beta |U|^2) \frac{\partial W}{\partial \xi} + \mu W \frac{\partial (|W|^2 + \sigma_\mu |U|^2)}{\partial \xi} \right] + q \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + 2\alpha (|W|^2 + \sigma_\alpha |U|^2) W + i\gamma \frac{\partial^3 W}{\partial \xi^3} = 0, \quad (12)$$

где $\xi = x - V_g^L t$, $V_g^L = \partial\omega/\partial k = \partial\omega_u/\partial k = \partial\omega_w/\partial k$ — групповая скорость линейной волны с волновым числом k и частотой ω , удовлетворяющими нелинейному дисперсионному соотношению $\omega = \omega(k, |U|^2, |W|^2)$, $q = -\partial^2\omega/\partial k^2 = -\partial^2\omega_u/\partial k^2 = -\partial^2\omega_w/\partial k^2$ — параметр линейной дисперсии второго порядка, $\gamma = -(1/3)\partial^3\omega/\partial k^3 = -(1/3)\partial^3\omega_u/\partial k^3 = -(1/3)\partial^3\omega_w/\partial k^3$ — параметр линейной дисперсии третьего порядка (линейная абберация), $\alpha = \partial\omega/\partial |U|^2 = \partial\omega/\partial |W|^2 = \partial\omega_u/\partial |W|^2 = \partial\omega_w/\partial |W|^2 = \partial\omega_u/\partial |U|^2 = \partial\omega_w/\partial |U|^2$ — параметр кубичной нелинейности; параметры β и μ соответствуют зависимости локальной групповой скорости от интенсивности волны (нелинейная дисперсия), σ_α , σ_β и σ_μ — параметры связи поляризационных компонент волнового пакета. Связанные уравнения Шрёдингера (см. [3] для СНУШ или [30] для СНУШ-3) используются для описания векторных волновых пакетов (состоящих из двух компонент различной поляризации) в двулучепреломляющих оптических волокнах. При $\sigma_\alpha = \sigma_\beta = \sigma_\mu = 0$ СНУШ-3 сводится к паре несвязанных НУШ-3, которые имеют решение в виде коротких скалярных солитонов огибающей [19]. В [29] приведён вывод системы (11), (12) из уравнений Максвелла для электромагнитных (в том числе оптических) волновых пакетов в анизотропных нелинейных диспергирующих средах. Следует отметить, что при этом выводе в предположении близости частот поляризационных компонент ($|\omega_u - \omega_w| \ll \{\omega_u, \omega_w\}$) пренебрегалось различием параметров как линейной, так и нелинейной восприимчивостей среды для компонент U и W . В противном (более общем) случае, при учёте различия параметров среды для различных компонент волнового пакета, однотипные параметры в уравнениях системы (11), (12) (аналогично — для системы (3), (4)) следует считать различными: $q_u \neq q_w$, $\alpha_u \neq \alpha_w$, $\gamma_u \neq \gamma_w$ и т. д. Однако столь общий

случай никем не рассматривается вследствие больших технических сложностей при вычислениях. В данной работе рассматривается простой вид связанных уравнений, когда в каждом из них используются одинаковые однотипные параметры.

В данной работе представлен класс коротких векторных солитонов огибающей в рамках СНУШ-3, а также исследована устойчивость этих векторных солитонов и их взаимодействие друг с другом.

3.1. Общие свойства СНУШ-3.

Умножив (11) на U^* , прибавив к полученному уравнению комплексно-сопряжённое уравнение и проинтегрировав результат при условии нулевого поля на бесконечности ($U|_{\xi \rightarrow \pm\infty} \rightarrow 0$), ($W|_{\xi \rightarrow \pm\infty} \rightarrow 0$) получаем выражение, описывающее изменение энергии компоненты векторного волнового пакета с поляризацией $\mathbf{e}_1$:

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} |U|^2 d\xi = -(2\mu\sigma_\mu - \beta\sigma_\beta) \int_{-\infty}^{+\infty} |U|^2 \frac{\partial |W|^2}{\partial \xi} d\xi. \quad (13)$$

Изменение энергии компоненты волнового пакета с поляризацией $\mathbf{e}_1$ определяется параметрами связи σ_μ и σ_β . Аналогично изменение энергии компоненты волнового пакета с поляризацией $\mathbf{e}_2$ описывается выражением

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} |W|^2 d\xi = (2\mu\sigma_\mu - \beta\sigma_\beta) \int_{-\infty}^{+\infty} |U|^2 \frac{\partial |W|^2}{\partial \xi} d\xi. \quad (14)$$

Сложив выражения (13) и (14), получаем закон сохранения энергии всего векторного волнового пакета в целом:

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} (|U|^2 + |W|^2) d\xi = 0. \quad (15)$$

3.2. Короткие векторные солитоны огибающей

СНУШ-3 (11), (12) имеет решение в виде векторного двухкомпонентного солитона [28, 29]:

$$U(\eta, t) = \frac{A_0}{\text{ch}(\tilde{\varepsilon} A_0 \eta)} \exp(i\Omega_u t + iK_u \eta), \quad (16)$$

$$W(\eta, t) = \frac{\lambda A_0}{\text{ch}(\tilde{\varepsilon} A_0 \eta)} \exp(i\Omega_w t + iK_w \eta), \quad (17)$$

где $\eta = \xi - V_c t$, $\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\tilde{\Theta}/(3\gamma)}$, $\tilde{\Theta} = \Theta + \lambda^2(\beta\sigma_\beta + 2\mu\sigma_\mu)$. Дополнительные волновые числа K_u , K_w имеют вид

$$K_u = \frac{q\Theta - 3\gamma\alpha + \lambda^2[q(\beta\sigma_\beta + 2\mu\sigma_\mu) - 3\gamma\alpha\sigma_\alpha]}{6\gamma\mu(1 + \lambda^2\sigma_\mu)}, \quad (18)$$

$$K_w = \frac{\lambda^2(q\Theta - 3\gamma\alpha) + q(\beta\sigma_\beta + 2\mu\sigma_\mu) - 3\gamma\alpha\sigma_\alpha}{6\gamma\mu(\lambda^2 + \sigma_\mu)}. \quad (19)$$

Дополнительная скорость V_c (для обеих компонент солитона она одна и та же) и частоты Ω_u, Ω_w в решении (16), (17) зависят от амплитуды A_0 :

$$V_c = \frac{\tilde{\Theta}}{6} A_0^2 + K_u q - \frac{3}{2} \gamma K_u^2 = \frac{\tilde{\Theta}}{6} A_0^2 + K_w q - \frac{3}{2} \gamma K_w^2,$$

$$\Omega_u = \left(\frac{\tilde{\Theta}}{6} A_0^2 - \frac{K_u^2}{2} \right) (q - 2\gamma K_u) \quad \Omega_w = \left(\frac{\tilde{\Theta}}{6} A_0^2 - \frac{K_w^2}{2} \right) (q - 2\gamma K_w). \quad (20)$$

Короткий векторный солитон (16), (17) существует при условии $[\Theta + \lambda^2 (\beta\sigma_\beta + 2\mu\sigma_\mu)] \gamma > 0$.

Параметр λ в этом решении может быть найден из соотношения

$$(\lambda^2 - 1) [(\beta\sigma_\beta + 2\mu\sigma_\mu) - \Theta] = 0 \quad (21)$$

при учёте условия

$$(K_u - K_w) \left(K_u + K_w \frac{2q}{3\gamma} \right) = 0. \quad (22)$$

Различные частные значения этого параметра анализируются ниже.

3.2.1. Короткие векторные солитоны с равными амплитудами поляризационных компонент. При $\lambda^2 = 1$ из (16), (17) имеем решение в виде короткого векторного солитона с одинаковыми амплитудами компонент:

$$|U| = |W| = \frac{A_0}{\text{ch}(\tilde{\varepsilon} A_0 \eta)}, \quad K_u = K_w. \quad (23)$$

3.2.2. Короткие векторные солитоны огибающей с различными амплитудами поляризационных компонент. При $\lambda^2 \neq 1$ имеем решение в виде короткого векторного солитона с различными амплитудами компонент, который существует при дополнительном условии $\beta\sigma_\beta + 2\mu\sigma_\mu = \Theta$. В этом случае различие между добавочными волновыми числами компонент $K_u - K_w$ при учёте (18), (19) равно

$$K_u - K_w = \frac{(\lambda^4 - 1)p}{6\gamma\mu(\lambda^2 + \sigma_\mu)(1 + \lambda^2\sigma_\mu)}, \quad (24)$$

где $p = q\beta(\sigma_\mu - \sigma_\beta) - 3\gamma\alpha(\sigma_\mu - \sigma_\alpha)$. При $p = 0$ имеем $K_u = K_w$, λ — произвольный параметр. Короткие векторные солитоны (16), (17) с различными произвольными амплитудами и одинаковыми добавочными волновыми числами компонент существуют при условиях

$$q\beta(\sigma_\mu - \sigma_\beta) = 3\gamma\alpha(\sigma_\mu - \sigma_\alpha), \quad \Theta = \beta\sigma_\beta + 2\mu\sigma_\mu. \quad (25)$$

В частности, условия (25) выполняются при $\sigma_\mu = \sigma_\beta = \sigma_\alpha = 1$.

При $p \neq 0$ имеем $K_u \neq K_w$, а параметр λ должен удовлетворять условию

$$\lambda^4\delta + 2\lambda^2r + \delta = 4q\mu[\lambda^4\sigma_\mu + \lambda^2(1 + \sigma_\mu^2) + \sigma_\mu], \quad (26)$$

где

$$\delta = (q\Theta - 3\gamma\alpha)\sigma_\mu + (q\Theta - 3\gamma\alpha\sigma_\alpha), \quad r = (q\Theta - 3\gamma\alpha) + \sigma_\mu(q\Theta - 3\gamma\alpha\sigma_\alpha).$$

Условие (26) выполняется для произвольных λ в двух случаях:

- 1) $\sigma_\mu = \sigma_\beta = 1, \quad 2q\beta = 3\gamma\alpha(1 + \sigma_\alpha);$
- 2) $\delta = 4q\mu\sigma_\mu, \quad r = 2q\mu(1 + \sigma_\mu^2).$

В других случаях для определения параметра λ необходимо решать уравнение (26). Такое решение соответствует короткому векторному солитону огибающей с различными фиксированными амплитудами поляризационных компонент.

В частном случае СНУШ-3 (11), (12) имеет пару решений в виде однокомпонентных коротких солитонов огибающей (короткие скалярные солитоны), совпадающих с солитонными решениями НУШ-3 [19]:

$$\begin{aligned} U(\eta, t) &= \frac{A_0}{\text{ch}(\varepsilon A_0 \eta)} \exp(i\Omega_u t + iK_u \eta), & W &= 0, \\ W(\eta, t) &= \frac{A_0}{\text{ch}(\varepsilon A_0 \eta)} \exp(i\Omega_w t + iK_w \eta), & U &= 0, \end{aligned}$$

у которых $K_u = K_w = K$, $\Omega_u = \Omega_w = \Omega$, $V_c = V$.

3.3. Устойчивость коротких векторных солитонов огибающей

Проанализируем устойчивость коротких векторных солитонов огибающей в адиабатическом приближении. Решение уравнений (11), (12) представим в виде векторного солитона с медленно меняющимися параметрами:

$$|U|^2 = \frac{A_u^2(t)}{\text{ch}^2\left[\left(\xi - \xi_{0u} \int_0^t V_u(t) dt\right) A_u(t) \tilde{\varepsilon}\right]}, \quad (27)$$

$$|W|^2 = \frac{\lambda^2 A_w^2(t)}{\text{ch}^2\left[\left(\xi - \xi_{0w} \int_0^t V_w(t) dt\right) A_w(t) \tilde{\varepsilon}\right]}. \quad (28)$$

При учёте (27), (28) выражение (15) принимает вид

$$A_u(t) + \lambda^2 A_w(t) = S = \text{const}. \quad (29)$$

Скорость каждой компоненты векторного солитона в адиабатическом приближении определяется соотношениями

$$V_u = \frac{A_u^2}{6} \tilde{\Theta} + K_u q - \frac{3}{2} \gamma K_u^2, \quad V_w = \frac{A_w^2}{6} \tilde{\Theta} + K_w q - \frac{3}{2} \gamma K_w^2.$$

Для невозмущённого векторного солитона $A_u = A_w = A_0$ и $V_u = V_w = V_c$. При малом различии амплитуд компонент векторного солитона: $|A_u - A_w| \ll A_0$, разность их скоростей имеет вид

$$V_u - V_w = \frac{\tilde{\Theta} A_0}{3} (A_u - A_w). \quad (30)$$

Подставляя (27), (28) в (13) и принимая во внимание (30), имеем

$$\dot{A}_u = -\lambda^2 \tilde{\varepsilon}^2 (2\mu\sigma_\mu - \beta\sigma_\beta) A_w^3 A_u^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sh}(\eta A_w \tilde{\varepsilon}) d\eta}{\text{ch}^2[(\eta - y(t)) A_u \tilde{\varepsilon}] \text{ch}^3(\eta A_w \tilde{\varepsilon})}, \quad (31)$$

где $\Delta\xi_0 = \xi_{0u} - \xi_{0w}$ и $y(t) = \int_0^t [A_u(t) - A_w(t)] dt + 3\Delta\xi_0/(\tilde{\Theta} A_0)$; точка обозначает производную по времени. Используя новую переменную $y(t)$, с учётом (29) уравнение (31) принимает вид

$$\ddot{y} = \tilde{\varepsilon} \frac{2\mu\sigma_\mu - \beta\sigma_\beta}{(1 + \lambda^2)^3} (S - \dot{y})^2 (S + \lambda^2 \dot{y})^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sh}(\eta) d\eta}{\text{ch}^2[(\eta - y\rho) (S + \dot{y}\lambda^2)/(S - \dot{y})] \text{ch}^3(\eta)}, \quad (32)$$

где

$$\rho = \frac{\tilde{\varepsilon}\tilde{\Theta}A_0(S - \dot{y})}{3(1 + \lambda^2)}. \quad (33)$$

Стационарная точка $y_{\text{st}} = 0$ уравнения (32) определяется из условия $\dot{y} = \ddot{y} = 0$ и соответствует невозмущённому короткому векторному солитону с одинаковыми поляризационными компонентами амплитуды A_0 . Для малых возмущений в окрестности стационарной точки, ограничиваясь только членами первого порядка по y и $\dot{y}$, из (32) получаем линейное уравнение

$$\ddot{y} + \frac{8}{45}\tilde{\varepsilon}^2\tilde{\Theta}(\beta\sigma_\beta - 2\mu\sigma_\mu)(1 + \lambda^2)A_0^6y = 0. \quad (34)$$

При $(\beta\sigma_\beta - 2\mu\sigma_\mu)\tilde{\Theta} > 0$ стационарная точка уравнения (34) — центр, что соответствует устойчивому короткому векторному солитону. Период колебаний координат максимумов компонент такого короткого векторного солитона друг относительно друга равен

$$T = \frac{3\sqrt{5}\pi}{A_0^3\tilde{\varepsilon}\sqrt{2\tilde{\Theta}(\beta\sigma_\beta - 2\mu\sigma_\mu)(1 + \lambda^2)}}. \quad (35)$$

Период осцилляций T возрастает с уменьшением амплитуды векторного солитона: $T \propto 1/A_0^3$. В частном случае, для коротких векторных солитонов с равными амплитудами компонент ($\lambda^2 = 1$) и при $\sigma_\beta = \sigma_\mu = \sigma$, имеем период колебаний компонент солитона

$$T = \frac{3\pi}{2A_0^3(1 + \sigma)}\sqrt{\frac{15\gamma}{\sigma\Theta(\beta^2 - 4\mu^2)}}. \quad (36)$$

При $(\beta\sigma_\beta - 2\mu\sigma_\mu)\tilde{\Theta} < 0$ стационарная точка уравнения (34) — седло. Это соответствует неустойчивому векторному солитонному решению, компоненты которого расходятся в пространстве друг от друга.

3.4. Динамика коротких векторных волновых пакетов в рамках СНУШ-3

Для исследования динамики коротких векторных волновых пакетов в рамках СНУШ-3 (11), (12) численно решалась следующая начальная задача: на интервале $-350 \leq \eta \leq 350$ при нулевых условиях на границах интервала $\eta = \pm 350$ в нулевой момент времени $t = 0$ начальный импульс задавался в виде векторного локализованного колоколообразного («sech-like») импульса:

$$U(\eta, t = 0) = W(\eta, t = 0) = \frac{A_0}{\text{ch}(\tilde{\varepsilon}\eta A_0/\Delta)}, \quad (37)$$

при различных A_0 , Δ и различных параметрах уравнений (11), (12). Поляризационные компоненты общего распределения волнового поля совпадают по модулю друг с другом во все моменты времени: $|U(\eta, t)| = |W(\eta, t)|$. Было показано, что в рамках уравнений (11), (12) с произвольными параметрами, удовлетворяющими условию существования векторного солитона, исходный импульс эволюционирует к одному (рис. 1) или к нескольким (рис. 2) векторным солитонам (16), (17) с различными амплитудами и линейной волне. Количество образующихся солитонов и их параметры зависят как от параметров исходного импульса, так и от параметров СНУШ-3. Такой характер эволюции произвольного волнового пакета подтверждает устойчивость солитонов (16), (17) в рамках СНУШ-3.

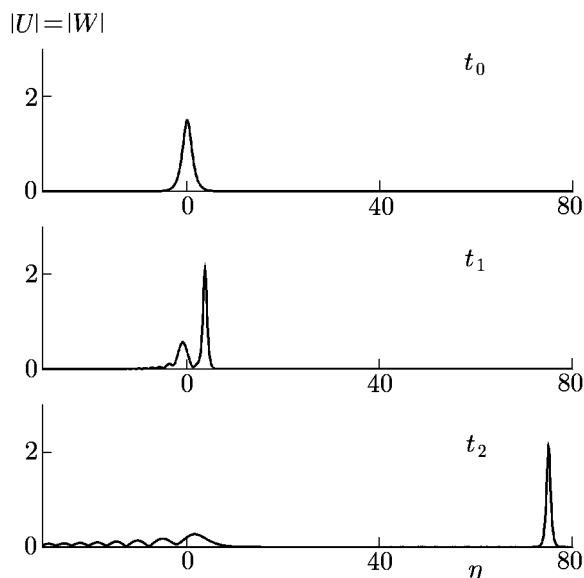


Рис. 1. Динамика векторного волнового пакета. Распределение по η модулей поляризационных компонент волнового поля $|U| = |W|$ в различные моменты времени $t_0 < t_1 < t_2$ в рамках уравнений (11), (12) при $\alpha = q = \gamma = 1$, $\beta = 2$, $\mu = 1/2$ и $\sigma_\alpha = \sigma_\beta = \sigma_\mu = 2/3$ для начального импульса (37) с амплитудой $A_0 = 1,5$ и шириной $\Delta = 1,67$. Параметры образующегося одиночного импульса полностью соответствуют параметрам векторного солитона (16), (17) с амплитудой $A_0 \approx 2,12$

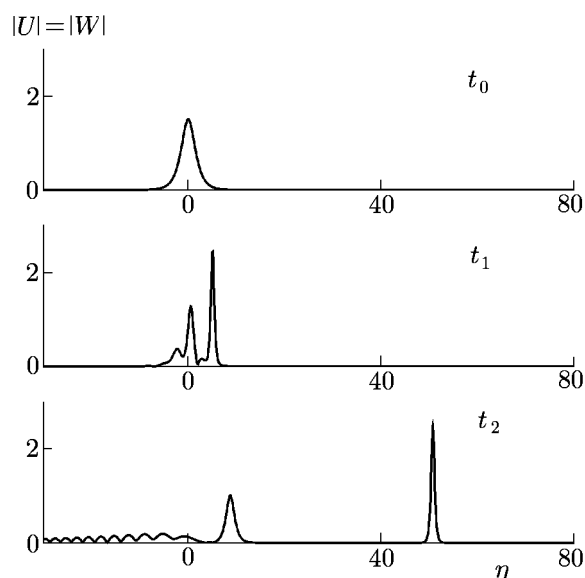


Рис. 2. То же, что на рис. 1, но при ширине начального импульса $\Delta = 2,5$. В этом случае из начального импульса образуются два солитона с амплитудами $A_{01} \approx 2,47$ и $A_{02} \approx 1,01$. Каждый из них описывается выражениями (16), (17)

3.5. Взаимодействие коротких векторных солитонов огибающей

Для исследования взаимодействия коротких векторных солитонов в рамках СНУШ-3 (11), (12) численно решалась следующая начальная задача: при $\sigma_\mu = \sigma_\beta = \sigma_\alpha = 2/3$, $\lambda = 1$ (в этом случае короткий векторный солитон является устойчивым при условии $\gamma\Theta(\beta^2 - 4\mu^2) > 0$) на интервале $-350 \leq \eta \leq 350$ при нулевых условиях на границах интервала $\eta = \pm 350$ в момент времени $t = 0$ начальный импульс задавался в виде суперпозиции двух коротких векторных солитонов различной амплитуды, разнесённых на большое расстояние друг от друга:

$$U(\eta, 0) = \left(\frac{A_1}{\text{ch}[\tilde{\varepsilon}A_1(\eta - \Delta)]} + \frac{A_2}{\text{ch}[\tilde{\varepsilon}A_2(\eta + \Delta)]} \right) \exp(iK_u\eta), \quad (38)$$

$$W(\eta, 0) = \left(\frac{A_1}{\text{ch}[\tilde{\varepsilon}A_1(\eta - \Delta)]} + \frac{A_2}{\text{ch}[\tilde{\varepsilon}A_2(\eta + \Delta)]} \right) \exp(iK_w\eta), \quad (39)$$

где A_1 и A_2 — амплитуды первого и второго солитонов. Расстояние между солитонами 2Δ много больше ширины каждого солитона $1/(\tilde{\varepsilon}A_1)$ и $1/(\tilde{\varepsilon}A_2)$. Поляризационные компоненты общего распределения волнового поля совпадают по модулю друг с другом во все моменты времени: $|U(\eta, t)| = |W(\eta, t)|$. Взаимодействие солитонов рассматривалось как при выполнении условий Хироты ($\mu = 0$, $q\beta = 3\gamma\alpha$), так и без этих условий.

3.5.1. Взаимодействие коротких векторных солитонов огибающей при выполнении условий Хироты. При выполнении условий Хироты взаимодействие коротких векторных солитонов является упругим: волновое поле не излучается, а параметры солитонов после взаимодействия остаются такими же, как до взаимодействия. Пример такого взаимодействия в моменты времени $t_0 < t_1 < t_2$ приведён на рис. 3.

3.5.2. Взаимодействие коротких векторных солитонов огибающей при невыполнении условий Хироты. При невыполнении условий Хироты взаимодействие коротких векторных солитонов отличается от взаимодействия частиц и является неупругим: взаимодействие сопровождается излучением части волнового поля из области взаимодействия в виде линейной волны малой амплитуды, а параметры солитонов в результате взаимодействия изменяются. На рис. 4, 5 представлены распределения по пространственной координате η модуля огибающей волнового пакета $|U(\eta, t)| = |W(\eta, t)|$ в различные моменты времени $t_0 < t_1 < t_2$.

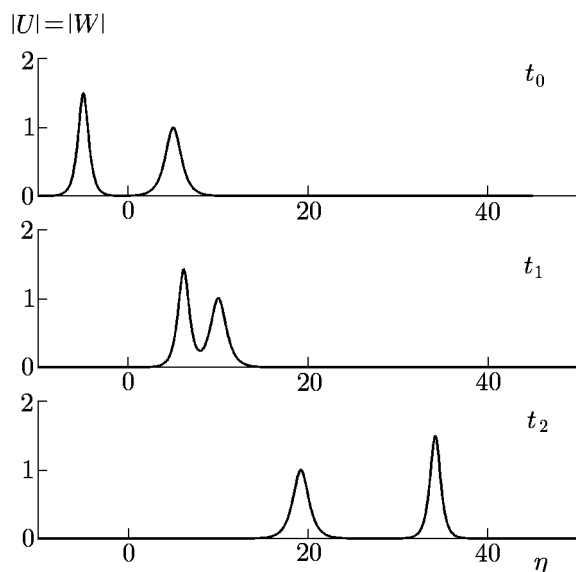


Рис. 3. Взаимодействие векторных солитонов. Распределение по η модулей поляризационных компонент волнового поля $|U| = |W|$ в различные моменты времени $t_0 < t_1 < t_2$ в рамках уравнений (11), (12) при выполнении условий Хироты ($q = \gamma = \alpha = 1$, $\beta = 3$, $\mu = 0$), $\sigma_\alpha = \sigma_\beta = \sigma_\mu = 2/3$ и при начальном распределении (38), (39) с амплитудами $A_1 = 1,5$, $A_2 = 1$. В результате взаимодействия солитоны обмениваются амплитудами, излучения нет (взаимодействие упругое)

взаимодействия солитон с меньшей амплитудой полностью разрушается, а солитон с большей амплитудой усиливается, его амплитуда становится равной 1,9.

Изменение параметров СНУШ-3 приводит лишь к изменению излучаемой части волнового поля и изменению порогового отношения амплитуд взаимодействующих солитонов A_1/A_2 , при превышении которого происходит разрушение меньшего солитона.

Исходная амплитуда более интенсивного солитона $A_1 = 1,5$, а исходная амплитуда менее интенсивного солитона $A_2 = 1,3$ для рис. 4 и $A_2 = 1$ для рис. 5. При взаимодействии солитоны обмениваются энергией. В результате взаимодействия амплитуда менее интенсивного до взаимодействия солитона увеличивается, а амплитуда более интенсивного до взаимодействия солитона уменьшается. При малом различии между начальными амплитудами солитонов, что соответствует малому различию между скоростями солитонов (см. рис. 4), волновые поля солитонов при взаимодействии перекрываются слабо. Амплитуда более интенсивного после взаимодействия солитона становится равной 1,59, а амплитуда менее интенсивного после взаимодействия солитона становится равной 1,17. В результате взаимодействия часть волнового поля излучается из области взаимодействия в виде линейной волны малой амплитуды. Если различие между исходными амплитудами солитонов увеличивается, характер взаимодействия изменяется (см. рис. 5). В этом случае волновые поля обоих солитонов перекрываются полностью. В результате такого взаимодей-

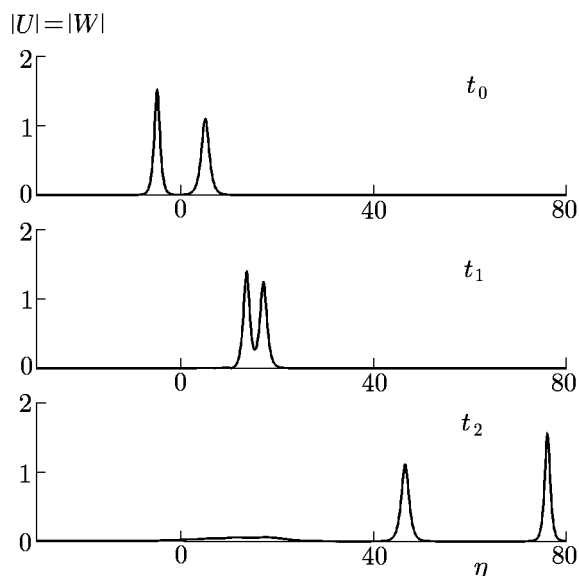


Рис. 4. То же, что на рис. 3, при невыполнении условий Хироты ($q = \gamma = \alpha = 1$, $\beta = 2$, $\mu = 1/2$) и при начальном распределении (38), (39) с амплитудами $A_1 = 1,5$, $A_2 = 1,3$. После взаимодействия амплитуда большего солитона составляет 1,59, амплитуда меньшего солитона — 1,17, а часть волнового поля излучается в виде линейной волны

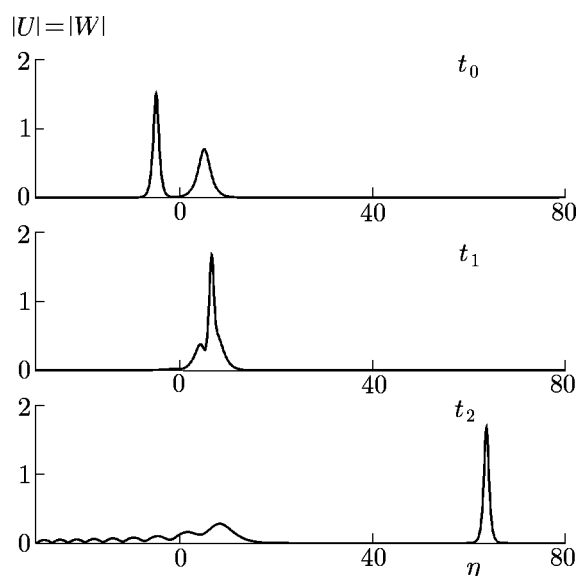


Рис. 5. То же, что на рис. 4, но при начальном распределении (38), (39) с амплитудами $A_1 = 1,5$, $A_2 = 1$. После взаимодействия амплитуда большего солитона составляет 1,9, а меньший солитон полностью разрушается

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение отметим, что учёт в нелинейном уравнении Шрёдингера членов высокого порядка существенно изменяет старые, хорошо известные результаты и даёт новые эффекты, новые решения, которые не могут быть описаны в предыдущем (параболическом) приближении. С помощью уравнений высокого порядка удаётся описать отличную от взаимодействия частиц динамику коротких импульсов. В рамках таких уравнений возможно успешно описать распространение коротких интенсивных оптических импульсов в нелинейных волоконных линиях связи, поверхностные гравитационные волны на глубокой воде.

Работа выполнена при государственной поддержке ведущих научных школ (проект № НШ-1637.2003.2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Таланов В. И. // Письма в ЖЭТФ. 1965. Т. 2. С. 218.
2. Захаров В. Е., Шабат А. В. // ЖЭТФ. 1972. Т. 34. С. 62.
3. Манаков С. В. // ЖЭТФ. 1973. Т. 38. С. 248.
4. Menyuk C. R. // J. Quantum Electron. 1987. V. 23. P. 174.
5. Ming-Yang Su // Phys. Fluids. 1982. V. 25, No. 12. P. 2167.

6. Gromov E. M., Talanov V. I. // Int. School in Nonlinear Science "Nonlinear Waves. Synchronization and Pattern". N. Novgorod: Nizhny Novgorod State University, 1995. P. 23.
7. Agrawal G. P. Nonlinear Fiber Optics. Orlando, Fla.: Academic, 1989.
8. Hasegawa A. Optical Solitons in Fibers. Berlin: Springer-Verlag, 1989.
9. Frantzeskakis D. J., Hizanidis K., Tombas G. S., Belia I. // IEEE J. of Quantum Electronics. 1995. V. 31, No. 1. P. 183.
10. Gromov E. M., Talanov V. I. // Chaos. 2000. V. 10, No. 3. P. 551.
11. Wai P. K. A., Menyuk C. R., Chen H. H., Lee Y. C. // Opt. Lett. 1987. No. 12. P. 628.
12. Wadati M. // J. Phys. Soc. Jap. 1972. No. 32. P. 1681.
13. Hirota R. // J. Phys. Soc. Jap. 1972. No. 33. P. 1456.
14. Sasa N., Satsuma J. // J. Phys. Soc. Jap. 1991. No. 60. P. 409.
15. Kaup D. J., Nawa A. C. // J. Math. Phys. 1978. V. 19. P. 798.
16. Ghosh S., Kundu A., Nandy S. // J. Math. Phys. 1999. V. 40, No. 4. P. 1993.
17. Anderson D., Lisak M. // Phys. Rev. A. 1983. No. 27. P. 1393.
18. Frantzeskakis D. J., Hizanidis K., Polymilis C. // J. Opt. Soc. Am. B. 1995. No. 9. P. 687.
19. Громов Е. М., Таланов В. И. // ЖЭТФ. 1996. Т. 83. С. 73.
20. Громов Е. М., Таланов В. И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1996. Т. 39, № 6. С. 735.
21. Тютин В. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1997. Т. 40, № 7. С. 877.
22. Gromov E. M., Tyutin V. V. // Wave Motion. 1998. V. 28. P. 13.
23. Li Z., Li L., Tian H., Zhou G. // Phys. Rev. Lett. 2000. V. 84, No. 18. P. 4096.
24. Громов Е. М., Пискунова Л. В., Тютин В. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1998. Т. 41, № 12. С. 1551.
25. Gromov E. M., Piskunova L. V., Tyutin V. V. // Phys. Lett. A. 1999. V. 256. P. 153.
26. Chen H. H., Liu C. S. // Phys. Fluids. 1978. V. 21. P. 377.
27. Gromov E. M., Tyutin V. V., Vorontsov D. E. // Phys. Lett. A. 1999. V. 257. P. 182.
28. Gromov E. M., Tyutin V. V., Vorontsov D. E. // Phys. Lett. A. 2001. V. 287. P. 233.
29. Воронцов Д. Е., Громов Е. М., Пискунова Л. В., Тютин В. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 2002. Т. 45, № 7. С. 614.
30. Nakkeeran K., Porsezian K., Shanmugha Sundaram P., Mahalingam A. // Phys. Rev. Lett. 1998. V. 80, No. 7. P. 1425.

Институт прикладной физики РАН,
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию
3 июня 2003 г.

SHORT ENVELOPE SOLITONS. ISOTROPIC AND ANISOTROPIC MEDIA

E. M. Gromov, V. V. Tyutin

We find new classes of short scalar and vector solitons of lengths about several wavelengths within the framework of the third-order approximation of the nonlinear wave dispersion theory. Short scalar solitons are found within the framework of the third-order nonlinear Schrödinger equation (NSE-3) including both the nonlinear dispersion terms and the third-order linear dispersion term. Interaction of these solitons is studied, and the soliton stability is proved. Short vector soliton are found within the framework of the coupled third-order nonlinear Schrödinger equation (CNSE-3). Interaction and stability of such solitons are studied.

УДК 621.378.325

О ВОССТАНОВЛЕНИИ АМПЛИТУДНЫХ И ФАЗОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СВЕРХКОРОТКОГО ВОЛНОВОГО ПАКЕТА С ПОМОЩЬЮ АВТОКОРРЕЛЯЦИОННЫХ МЕТОДОВ

А. А. Бабин, В. И. Ерёмин, А. В. Курсанов

На основе анализа сигнала интерференционного автокоррелятора интенсивности теоретически и экспериментально продемонстрирована простая методика восстановления временного распределения амплитуды и фазы сверхкороткого светового импульса. В предположении гауссовой огибающей модулированного по фазе волнового пакета получено аналитическое выражение для этого сигнала в случае квадратичной и кубичной фазы, наглядно демонстрирующее тип фазовой модуляции оптического сигнала. Экспериментальные результаты полностью согласуются с аналитическими. Показано, в частности, что квадратичная фаза (линейный чирп) определяется в эксперименте с точностью лучше 10 %, что даёт возможность измерять с такой же точностью параметр k_2 , характеризующий дисперсионные свойства среды во втором приближении теории дисперсии. Измерение кубичной фазы сверхкороткого волнового пакета таким способом возможно лишь для достаточно больших значений квадратичного чирпа.

Проблема измерения длительности сверхкоротких световых импульсов, излучаемых лазером с синхронизованными модами, возникла одновременно с созданием таких лазеров и имеет более чем тридцатилетнюю историю [1, 2]. С тех пор длительность импульсов, генерируемых непосредственно с помощью ОКГ, сократилась более чем на три порядка и достигла практически предельной величины в несколько периодов световой волны. За это время были не только существенно улучшены методики измерения временных параметров огибающей сверхкороткого импульса, но и разработаны методы анализа амплитуды и фазы электромагнитного поля сверхкороткого волнового пакета. Необходимо отметить, что восстановление временных параметров поля сверхкороткого лазерного импульса по измеряемым энергетическим величинам становится всё более актуальной задачей, особенно в связи с бурным развитием нового раздела лазерной физики — физики сверхсильных световых полей. Оказывается, что характер взаимодействия таких полей с веществом зависит не только от вида заполнения оптического импульса, но и от абсолютной фазы поля.

Методы, позволяющие восстанавливать полное поле светового импульса, условно можно разделить на три группы. Первая группа методов основана на интерференционных измерениях, имеет длительную историю и, соответственно, наиболее полно разработана. Ясно, что, используя интерференцию сверхкороткого импульса во временном или спектральном пространстве, можно, в принципе, получить информацию о соответствующем распределении фазы поля. Этим измерениям посвящено огромное количество работ, из которых укажем только ключевые [3–6]. Другая, сравнительно недавно появившаяся группа работ [7–9] использует математически доказанный факт, что многомерная (не интерференционная) автокорреляционная или кросскорреляционная функция позволяет восстановить фазовое распределение короткого импульса. (В эксперименте, как правило, измеряется двумерное распределение сигнала на плоскости частота–задержка, а итерационный алгоритм обработки даёт искомые параметры). В англоязычной литературе наиболее разработанный на сегодня метод этой группы имеет аббревиатуру «FROG» [9]. Третья группа методов [10–12], использующая результаты одновременных спектральных и корреляционных энергетических измерений и некоторый итерационный алгоритм, также даёт возможность нахождения амплитудных и фазовых характеристик светового импульса.

Методы восстановления параметров поля сверхкороткого волнового пакета, относящиеся к первой группе (интерференционные), более просты в реализации и обработке по сравнению с методами второй группы. Однако последние более наглядны, поскольку дают возможность качественно установить характер фазовой модуляции светового импульса непосредственно по виду двумерного распределения получаемого сигнала, хотя скорость получения количественной информации здесь зачастую не удовлетворяет потребностям эксперимента. С этой точки зрения методы третьей группы существенно более быстродействующие, поскольку в них итерационная процедура восстановления поля основывается на операциях с одномерными массивами данных. Однако проблема точности получения искомых величин для этих методов ещё не закрыта.

В настоящей работе показано, что в некоторых случаях и для интерференционных методов удаётся объединить наглядность, простоту и скорость получения информации о фазе и амплитуде светового импульса. На наш взгляд, работа в значительной мере носит методический характер, хотя имеет и практическое применение, связанное с измерением дисперсионных характеристик оптических материалов.

Легко показать, что для интерференционного автокоррелятора интенсивности, схема которого приведена в многочисленных публикациях (см., например, [13]), сигнал с выхода фотоприёмника имеет вид

$$U(\tau) \approx \int_{-\infty}^{+\infty} \{\rho^2(t) + \rho^2(t + \tau) + 2\rho(t)\rho(t + \tau) \cos[\varphi(t) - \varphi(t + \tau)]\}^2 dt, \quad (1)$$

где $\rho(t)$ и $\varphi(t)$ — медленная амплитуда (огibaющая) и фаза поля оптического импульса $E(t)$ соответственно:

$$E(t) = \rho(t) \exp[j\varphi(t)] + \rho^*(t) \exp[-j\varphi(t)]. \quad (2)$$

Выражение (2) справедливо, как известно [14], до тех пор, пока выполняется неравенство $\omega_0\tau_0 > 1$, т. е. пока огibaющая $\rho(t)$ содержит хотя бы несколько оптических периодов; здесь ω_0 и τ_0 — центральная частота и длительность огibaющей волнового пакета. Заметим, что сигнал (1), строго говоря, не является автокорреляционной функцией интенсивности $G(\tau)$, хотя и содержит ее:

$$G(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho^2(t)\rho^2(t + \tau) dt. \quad (3)$$

Помимо информативной части, в выражении (1) для $U(\tau)$ содержится постоянная составляющая — фон, который, как правило, затрудняет измерение временных характеристик в эксперименте. Этот факт хорошо известен и неоднократно обсуждался [1, 13]. Нетрудно построить схему автокоррелятора, выходной сигнал которого не будет содержать фон (так называемый бесфоновый автокоррелятор), однако в этом случае, как следует из (1), полностью теряется информация о фазовой структуре импульса. Тем не менее такие измерители временных параметров сверхкороткого импульса широко применяются в эксперименте, поскольку они дают достаточно надёжную информацию о длительности огibaющей волнового пакета.

Из (1) следует, что сигнал $U(\tau)$ содержит информацию о временной зависимости амплитуды огibaющей и фазы. Как это обычно бывает для обратных задач, восстановление параметров поля $E(t)$ в общем случае не представляется возможным в силу некорректности решения интегрального уравнения (1). Однако для некоторых частных случаев, важных с практической точки зрения, из этого выражения удаётся определить $\rho(t)$ и $\varphi(t)$. Рассмотрим такую возможность подробнее.

Будем считать, что медленная огибающая $\rho(t)$ имеет гауссов вид, а фазу $\varphi(t)$ представим в виде полинома третьей степени:

$$\rho(t) = \rho_0 \exp[-t^2/(2\tau_0^2)], \quad \varphi(t) = \omega_0 t + \alpha t^2/2 + \beta t^3/3. \quad (4)$$

Здесь ρ_0 — амплитуда огибающей волнового пакета, а коэффициенты α и β отвечают за линейный и квадратичный чирп частоты. В этом предположении временное распределение амплитуды волнового пакета определяется одним параметром — длительностью огибающей τ_0 , а фазовое распределение — коэффициентами α и β . Представление фазы в виде (4) соответствует разложению в ряд Тейлора, где каждое следующее слагаемое много меньше предыдущего. Для сверхкоротких волновых пакетов (для которых справедливо выражение (2)), распространяющихся в материальной среде со слабой дисперсией, т. е. в полосе прозрачности, обычно вполне достаточно ограничиться таким разложением фазы. Положим вначале $\beta = 0$, т. е. учтём только линейный чирп входного оптического импульса. В этом случае выражение (1) для сигнала с выхода коррелятора $U(\tau)$ будет иметь вид

$$U(\tau) \approx 1 + 2G(\tau) + [G(\tau)]^{M^2} \cos(2\omega_0\tau) + 4[G(\tau)]^{(2+M^2)/4} \cos(\omega_0\tau) \cos[\sqrt{M^2 - 1}\tau^2/(4\tau_0^2)]. \quad (5)$$

Здесь параметр M — число, показывающее, во сколько раз может быть сжат во времени исходный модулированный по фазе импульс с длительностью огибающей τ_0 за счёт компенсации его квадратичной фазы [14]:

$$M^2 = (\Delta\omega/\Delta\omega_0)^2 = 1 + (\alpha\tau_0^2)^2, \quad (6)$$

где $\Delta\omega$ — ширина спектра входного оптического сигнала, $\Delta\omega_0 = 1/\tau_0$ — ширина спектра спектрально-ограниченного импульса. Для такого импульса $\alpha = 0$ и, следовательно, $M = 1$. Отметим, что выражение (5) было получено в работах [3, 4], однако авторы [3] не привели его к столь наглядному виду, что, по-видимому, затруднило его дальнейший анализ, а используемая в работе [4] аппроксимация верхней и нижней ветвей огибающей сигнала $U(\tau)$ для нахождения параметра α недостаточно точна, особенно при анализе импульсов с малым числом периодов оптического поля.

Проанализируем полученное выражение. Сигнал $U(\tau)$ действительно не является автокорреляционной функцией интенсивности (3) даже для спектрально-ограниченного оптического сигнала и содержит несколько характерных временных масштабов. Самый большой масштаб $\tau_1 \sim \sqrt{2}\tau_0$ связан с длительностью огибающей $\rho(t)$ и определяется функцией $G(\tau) = \exp[-\tau^2/(2\tau_0^2)]$. Следующие, более мелкие масштабы определяются третьим и четвёртым слагаемыми в правой части (5):

$$\tau_2 \sim 2\tau_0/(M^2 - 1)^{1/4}, \quad \tau_3 \sim 2\sqrt{2}\tau_0/(2 + M^2)^{1/2}, \quad \tau_4 \sim 2\tau_0/M. \quad (7)$$

Наконец, наименьший временной масштаб в (5) является оптическим периодом светового сигнала: $\tau_5 \sim 1/\omega_0$. При $M > 1$ временная иерархия указанных масштабов следующая: $\tau_1 > \tau_2 > \tau_3 > \tau_4 > \tau_5$. Это означает, что при наличии линейного чирпа сигнал $U(\tau)$ должен иметь локализованную вблизи $\tau = 0$ осциллирующую часть, определяемую в основном последним слагаемым в правой части (5), и плавные крылья, спадающие в соответствии с законом, определяемым функцией $G(\tau)$. Причём чем больше величина M , т. е. чем более далёк оптический импульс от спектрально-ограниченного, тем более локализована в окрестности $\tau = 0$ осциллирующая часть сигнала. В том случае, когда регистрирующая система производит усреднение по наименьшему масштабу τ_5 , сигнал $U(\tau) \sim 1 + 2G(\tau)$ не содержит информацию о фазе светового импульса. Этот факт также хорошо известен [3, 13].

Графики зависимости $U(\tau)$, вычисленные в соответствии с (5) для различных длительностей импульса τ_0 и значений параметра M , приведены на рис. 1. Из анализа данных зависимо-

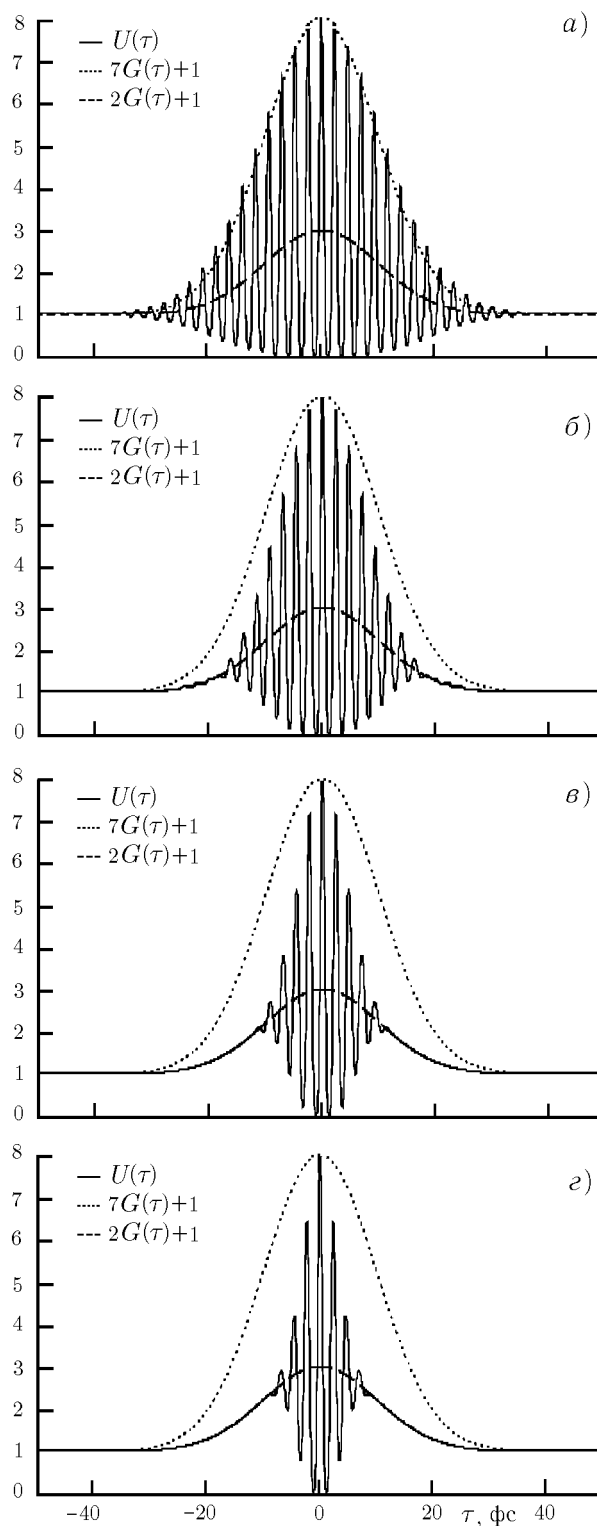


Рис. 1. Вид сигнала $U(\tau)$ при квадратичной фазовой модуляции для импульса с длительностью $\tau_0 = 10$ фс при $M = 1$ (а), $M = 2$ (б), $M = 4$ (в) и $M = 6$ (г)

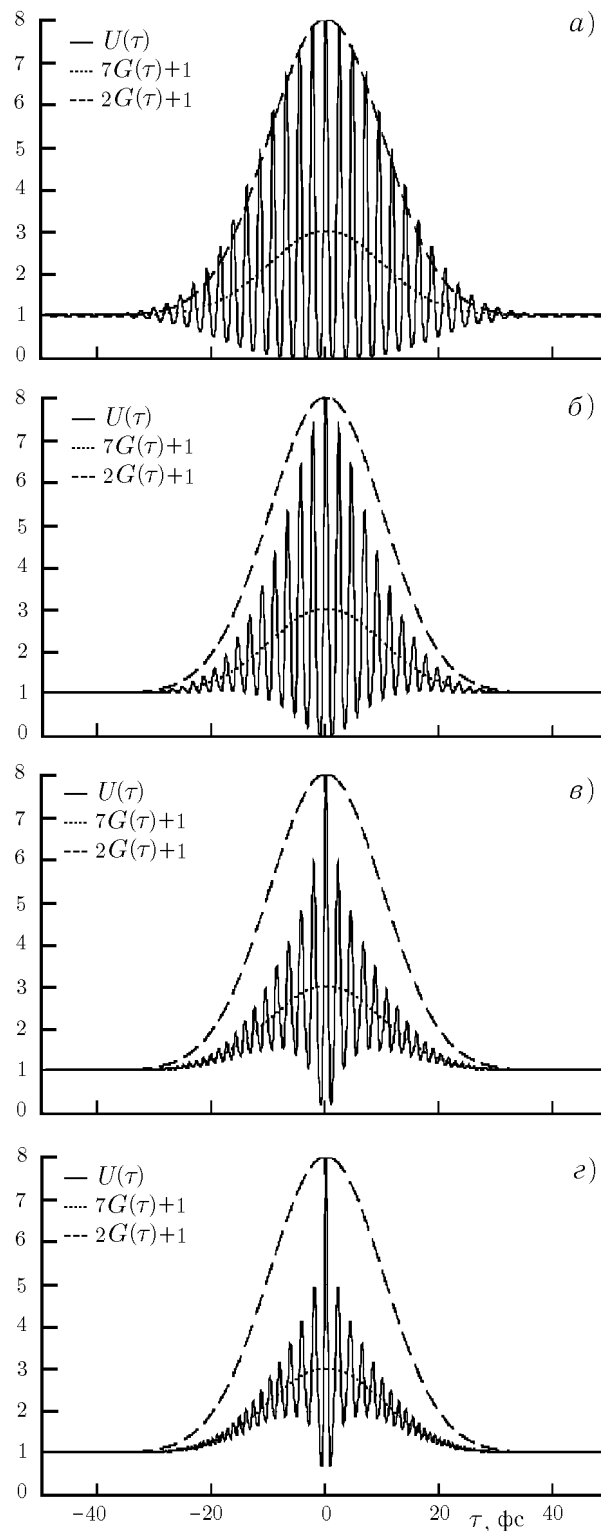


Рис. 2. Вид сигнала $V(\tau)$ при кубической фазовой модуляции для импульса с длительностью $\tau_0 = 10$ фс при $N = 1$ (а), $N = 5$ (б), $N = 20$ (в) и $N = 50$ (г)

стей следует, что, хотя сигнал интерференционного автокоррелятора интенсивности не позволяет получать истинную автокорреляционную функцию, по верхней ветви огибающей $(7G(\tau) + 1)$ осциллирующей части сигнала с вполне достаточной для эксперимента точностью можно определять его длительность только для спектрально-ограниченного светового импульса. Это довольно отрадный факт, поскольку именно такой способ измерения длительности сверхкоротких оптических импульсов применяется практически всеми исследователями. Появление гладких, без периодической модуляции, плавно спадающих крыльев в сигнале свидетельствует о наличии квадратичной фазовой модуляции анализируемого волнового пакета. Таким образом, вид измеряемой зависимости $U(\tau)$ даёт информацию о наличии линейного чирпа частоты в оптическом сигнале. Для получения численного значения коэффициента α , как следует из (6), необходимо определить M и τ_0 . Процедура нахождения этих величин детально будет приведена ниже, при описании экспериментальной проверки расчётов. Заметим только, что знак коэффициента α , как это видно из (6), данный метод определить не позволяет и, следовательно, для его нахождения нужна либо какая-нибудь априорная информация, либо постановка дополнительного эксперимента.

Перейдём теперь к анализу влияния нелинейного чирпа частоты, т. е. кубичной добавки к фазе в (4), на вид сигнала $U(\tau)$. Для этого положим в (4) $\alpha = 0$. Такую ситуацию в эксперименте можно получить, если предварительно скомпенсировать квадратичную фазу при помощи, например, призменного компенсатора дисперсии. В этом предположении также можно получить аналитическое выражение для сигнала на выходе интерференционного автокоррелятора интенсивности:

$$V(\tau) \approx 1 + 2G(\tau) + G(\tau) \cos[\Phi(\tau)] / \sqrt[4]{4F^2(\tau) - 3} + 4[G(\tau)]^{1-F^2(\tau)/4} \cos[\Psi(\tau)] / \sqrt{F(\tau)}, \quad (8)$$

где

$$F(\tau) = \sqrt{1 + (N^2 - 1)\tau^2/(2\tau_0)^2}, \quad (9a)$$

$$\Phi(\tau) = 2\omega_0\tau + (1/2) \arctg[(\tau/\tau_0) \sqrt{N^2 - 1}] + (\tau/\tau_0)^3 \sqrt{N^2 - 1}/6, \quad (9b)$$

$$\Psi(\tau) = \omega_0\tau + (1/2) \arctg[\tau/(2\tau_0) \sqrt{N^2 - 1}] + [F^2(\tau)/16 + 1/12] (\tau/\tau_0)^3 \sqrt{N^2 - 1}, \quad (9b)$$

$$N^2 = 1 + (\beta\tau_0^3)^2. \quad (9g)$$

Структура выражения $V(\tau)$, как следует из (8), аналогична (5). Первые два слагаемых в этих выражениях совпадают, а третье и четвёртое слагаемые представляют собой осциллирующие добавки. Физический смысл параметра N аналогичен смыслу определённого выше параметра M . Заметим, что в рассматриваемом случае локализация осциллирующей части сигнала вблизи значения $\tau = 0$ значительно менее выражена, чем при квадратичной фазе, поскольку показатель степени функции $G(\tau)$ в последнем слагаемом в правой части (8), определяющий эту локализацию, стремится к единице с ростом N . Кроме того, из (8), (9) следует, что модуляция выходного сигнала становится значительно более неперiodической, чем в случае линейного чирпа частоты, причём чем больше параметр N , тем выше неперiodичность наблюдаемых осцилляций. Следовательно, наличие нелинейного чирпа частоты в сигнале можно определять по уширению профилей гармоник сигнала $V(\tau)$ на частотах ω_0 и $2\omega_0$.

Графики зависимости сигнала $V(\tau)$ для различных значений N приведены на рис. 2. Анализ этих зависимостей показывает, что в этом случае процедура определения параметров τ_0 и β более трудоёмка и сложна, чем в случае линейного чирпа частоты, поскольку в поведении кривых $V(\tau)$ не удаётся выделить характерные особенности, определяемые только τ_0 или только β , особенно при малых N . При сравнительно слабой фазовой модуляции ($N < 5$), в отличие от случая квадратичной фазы, полученные зависимости близки сигналу $V(\tau)$ в случае $N = 1$. Это обстоятельство, безусловно, затрудняет восстановление искомых величин из экспериментальных данных. При

$N \geq 5$ различие в поведении зависимостей $V(\tau)$ для различных N уже вполне измеримо, и можно выделить те самые характерные участки, о которых говорилось выше. Следовательно, в данной ситуации достаточно легко определяются параметры τ_0 и β . Однако столь большие значения N вряд ли достижимы в реальных ситуациях. В предельном случае $N \gg 1$ сигнал $V(\tau)$ будет иметь гладкий вид, определяемый первыми двумя слагаемыми в (8) с очень узким пиком в окрестности $\tau = 0$, поскольку всегда $V(0) = 8$ (так называемый пик когерентности). Определение знака β , как и при квадратичной фазовой модуляции, невозможно, что связано с физическим принципом работы данного коррелятора. Таким образом, экспериментальная возможность измерения кубичной фазы сверхкороткого светового импульса с помощью традиционного интерференционного автокоррелятора интенсивности представляется весьма проблематичной, за исключением, быть может, каких-либо специальных случаев.

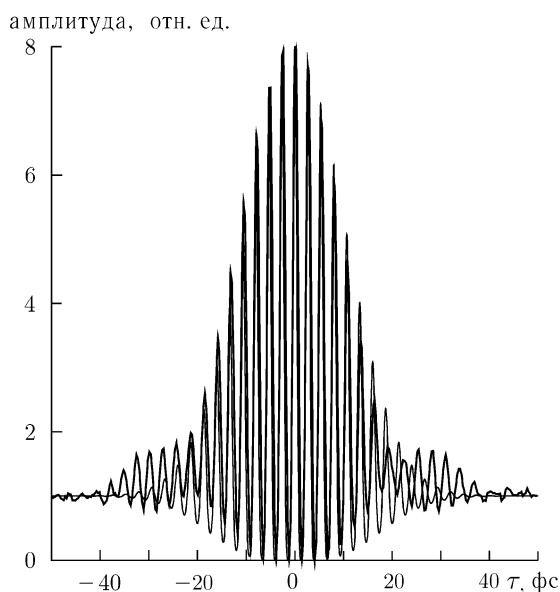


Рис. 3. Вид сигнала на выходе интерференционного автокоррелятора интенсивности для спектрально-ограниченного волнового пакета. Толстая линия — экспериментальная реализация, тонкая — вычисленная по формуле (5) при $M = 1$

го пакета на входе автокоррелятора. Полная длительность скомпенсированного импульса $2\tau_0$, измеренная по интерференционной автокорреляционной функции (см. рис. 3) составила приблизительно 20 фс на уровне e^{-1} от максимума интенсивности. Полученное из измерений произведение $\Delta\omega \tau_0$ оказалось равным 1,3, что на 30 % превышает соответствующую величину для спектрально-ограниченного импульса гауссовой формы. Это обстоятельство связано, как известно [16], с небольшим отличием формы генерируемого спектра от гауссова, что и имело место в эксперименте. Заметим, что аппаратное усреднение автокорреляционной функции, приведённой на рис. 3, по быстрым осцилляциям дало то же самое значение τ_0 , что говорит (в соответствии с выражениями (5) и (8)) об отсутствии фазовой модуляции в световом импульсе на выходе компенсатора.

Идея эксперимента довольно проста: нужно внести фазовую модуляцию в исходный спектрально-ограниченный лазерный импульс и посмотреть, как будет при этом выглядеть выходной сигнал автокоррелятора. В оптическом диапазоне фазовую модуляцию сверхкороткого импульса, как известно [14], легко получить, пропуская его через линейную диспергирующую среду. Поэтому

В том случае, когда в исследуемом оптическом сигнале одновременно присутствуют и квадратичная, и кубичная фазовые модуляции, в предположении гауссова профиля огибающей сигнала также можно получить аналитическое выражение для выходного сигнала интерференционного автокоррелятора интенсивности. Это выражение похоже на полученные выше зависимости $U(\tau)$ и $V(\tau)$, однако оно стало значительно более громоздким и потеряло наглядность, присутствующую в зависимости $U(\tau)$.

Для проверки расчётов был поставлен эксперимент, суть которого заключалась в получении сигнала интерференционного автокоррелятора интенсивности для модулированного по фазе сверхкороткого оптического импульса. Источником излучения служил кольцевой фемтосекундный лазер, описанный в работе [15]. Внешний призмный компенсатор дисперсии, установленный непосредственно после выходного зеркала лазера, использовался для компенсации дисперсии материала подложки этого зеркала с целью получения спектрально-ограниченного волново-

в эксперименте для достижения этой цели мы устанавливали плоскопараллельные пластинки непосредственно перед входом автокоррелятора, изготовленные из различных материалов.

Характерный вид получаемого при этом выходного сигнала приведён на рис. 4. Как следует из рис. 4, наблюдаемая картина полностью соответствует теоретическим представлениям для случая квадратичной фазы (заметим, что осциллограмма аналогичного вида была получена в работе [5] для импульса с длительностью приблизительно 13 пс с линейным чирпом частоты). Избыточный шум в сигнале связан с использованием в нашем эксперименте не оптимального по полосе частот усилителя. Найдём параметры модулированного по фазе светового импульса, поступающего на вход коррелятора, полагая, что материальная среда вносит лишь квадратичную добавку к фазе. Легче всего найти длительность огибающей τ_0 по форме крыльев сигнала $U(\tau)$. Как видно из (5), форма крыльев сигнала описывается выражением $U(\tau) \sim 1 + 2G(\tau)$, следовательно, в предположении гауссовой формы огибающей волнового пакета сразу находится параметр τ_0 . Следующий шаг состоит в подборе такого параметра M , чтобы осциллирующие части экспериментальной и расчётной зависимостей $U(\tau)$ совпадали наилучшим образом (заметим, что ещё один параметр, ω_0 , входящий в выражение (5), легко находится либо из периода осцилляций по рис. 3, либо из спектральных измерений по среднему значению частоты спектра анализируемого импульса). Таким образом, поставленная задача в этом приближении полностью решена: по выходному сигналу интерференционного автокоррелятора нам удалось измерить параметры τ_0 и коэффициент α при квадратичной фазе. Кубичная добавка к фазе для прозрачных оптических материалов, как известно, много меньше квадратичной. Следовательно, в нашем случае в увеличение длительности огибающей τ_0 она практически не даёт вклада, что означает малое отличие параметра N от единицы и, как следует из теоретического рассмотрения, невозможность измерения параметра β в поставленном эксперименте. В данном эксперименте с помощью сканирующего автокоррелятора интенсивности мы определили, по существу, средние параметры сверхкороткого волнового пакета, поскольку анализируемый сигнал представлял собой последовательность импульсов фемтосекундного диапазона, следующих с частотой повторения около 100 МГц. В принципе, такого же рода интерференционный автокоррелятор можно реализовать и для редко повторяющихся и даже одиночных световых импульсов, если применять стандартную схему одноимпульсного коррелятора [17], в которой используется нелинейный кристалл, обладающий касательным (сверхшироким по углу) синхронизмом, как это предложено в [17].

Следует отметить ещё одну интересную, на наш взгляд, возможность, которая следует из всего вышеизложенного. Мы продемонстрировали достаточно простой способ измерения квадратичной фазы модулированного по фазе волнового пакета. Это обстоятельство можно использовать

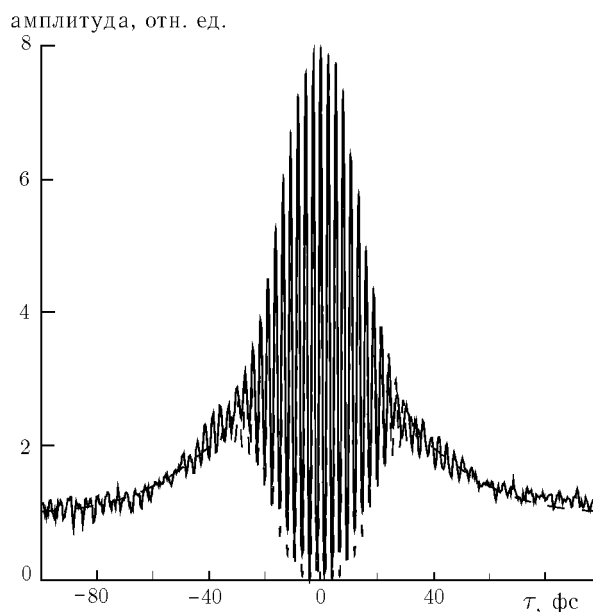


Рис. 4. Вид сигнала на выходе интерференционного автокоррелятора интенсивности для модулированного по фазе волнового пакета (исходный спектрально-ограниченный сигнал пропущен через пластинку из ZnSe с толщиной 3,25 мм). Сплошная линия соответствует экспериментальной реализации, штриховая — вычислениям по формуле (5) при $\tau_0 = 33,5$ фс и $M = 4,47$

для измерения параметра k_2 , характеризующего дисперсионные свойства материальной среды, а именно дисперсию групповой скорости [14]. В самом деле, для огибающей $\rho(t)$ и фазы $\varphi(t)$, определённых выражениями (4), при $\beta = 0$ легко получить связь между k_2 и α :

$$k_2 = \alpha \tau_0^4 / (h [1 + (\alpha \tau_0^2)^2]) = \tau_0^2 (M^2 - 1)^{1/2} / (h M^2), \quad (10)$$

где h — толщина пластинки. Из (10) следует, что экспериментально определив параметры τ_0 и M модулированного по фазе сверхкороткого светового импульса, прошедшего через пластинку, и измерив её толщину, сразу же можно найти величину k_2 . Известен ещё и другой, традиционный способ определения параметра k_2 — через вторую производную зависимости показателя преломления n от длины волны λ [14]. Следовательно, сравнивая дисперсионные параметры k_2 , полученные этими двумя методами, можно оценить адекватность предложенного нами способа. Помещая пластинки из различных материалов перед входом автокоррелятора и регистрируя выходной сигнал, по изложенной методике мы измерили параметры τ_0 и M для этих материалов и по формуле (10) вычислили для них величину k_2 . Используя зависимости $n(\lambda)$ для этих материалов [18], были получены значения k_2 по формулам, приведённым в [14]. Результаты измерений и расчётов представлены в табл. 1.

Таблица 1

Материал	$k_2, \text{фс}^2/\text{с}$	
	измерения	вычисления
KY-1	458	410
CaF ₂	304	290
LiF	253	220
Al ₂ O ₃	690	640
ZnSe	790	900
ПММА	600	—

Следует отметить, что в наших экспериментах точность определения дисперсионного параметра k_2 для каждого материала оказалась не хуже 3 %, в то же время вычисленное значение k_2 систематически (кроме случая пластины из ZnSe) отличается от измерений на 10÷12 %. Возможно это обстоятельство связано с отличием профиля огибающей используемого в эксперименте импульса от гауссова. Для селенида цинка при вычислении параметра k_2 мы использовали собственную, быть может, не достаточно точную аппроксимацию зависимости $n(\lambda)$, что могло

привести к увеличению ошибки при вычислении k_2 .

Таким образом, предложенный метод измерения абсолютной величины дисперсионного параметра k_2 , основанный на анализе выходного сигнала интерференционного автокоррелятора интенсивности, с вполне удовлетворительной экспериментальной точностью (около 10 %) даёт верный результат.

Работа частично поддержана РФФИ (грант № 01-02-17512).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кузнецова Т. И. // ЖЭТФ. 1968. Т. 55, № 6(12). С. 2453.
2. Верёвкин Ю. К., Дауме Э. Я., Макаров А. И., Новиков М. А., Хижняк А. И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1971. Т. 14. С. 860.
3. Sala K. L., Kenney-Wallace G. A., Hall G. E. // IEEE QE. 1980. V. 16. P. 990.
4. Diels J. C. M., Fontane J. J., McMichel I. C., Simoni F. // Appl. Opt. 1985. V. 24. P. 1270.
5. Naganumo K., Mogi K., Yamada H. // IEEE QE. 1989. V. 25. P. 1225.
6. Iaconis C., Walmsley I. A. // Optics Letters. 1998. V. 23. P. 792.
7. DeLong K. W., Fittinghoff D. N., Trebino R. // IEEE QE. 1996. V. 32. P. 1253.
8. Koumans R. G. M. P., Yariv A. // IEEE QE. 2000. V. 36. P. 137.

9. Kane D. J. // IEEE QE. 1999. V. 35. P. 421.
10. Naganuma K., Mogi K., Yamada H. // IEEE QE. 1989. V. 25. P. 1 225.
11. Peatross J., Rundquist A. // J. Opt. Soc. Am. B. 1998. V. 15. P. 216.
12. Nicholson J. W., Jasapara J., Omenetto F. G., Taylor A. J. // Optics Letters. 1999. V. 24, No. 23. P. 1 774.
13. Крюков П. Г. // Волоконно-оптические технологии, материалы и устройства. 1999. № 2. С. 63.
14. Ахманов С. А., Выслоух В. А., Чиркин А. С. Оптика фемтосекундных лазерных импульсов. М.: Наука, 1988.
15. Бабин А. А., Киселёв А. М., Кирсанов А. В., Степанов А. Н. // Квантовая электроника. 2002. Т. 32. С. 401.
16. Rousseau G., McCarthy N., Piche M. // Proc. SPIE. 2000. V. 4087. P. 910.
17. Brun A., Georges P., Le Saux G., Salin F. // J. Phys. D.: Appl. Phys. 1991. V. 24. P. 1 225.
18. Воронкова Е. М., Гречушников Б. Н., Дистлер Г. И., Петров И. П. Оптические материалы для инфракрасной техники. М.: Наука, 1965.

Институт прикладной физики РАН,
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию
9 июня 2003 г.

RETRIEVING THE AMPLITUDE AND PHASE PARAMETERS OF AN ULTRASHORT WAVE PACKET BY AUTOCORRELATION METHODS

A. A. Babin, V. I. Eremin, and A. V. Kirsanov

Based on an analysis of the signal of an interferometric intensity autocorrelator, we demonstrate theoretically and experimentally a simple technique for retrieving the temporal distributions of the amplitude and phase of an ultrashort light pulse. Assuming that a phase-modulated wave packet has a Gaussian envelope, we derive an analytical expression for the autocorrelator signal in the cases of a linear- and quadratic-chirp optical pulse. The experimental and theoretical results are in excellent agreement. In particular, we show that a linear chirp (quadratic phase modulation) can be measured with a good experimental accuracy of no worse than 10%. This yields the possibility of measuring the parameter k_2 , which describes the dispersion characteristics of a medium in the second order of the dispersion theory, with the same accuracy. Measuring a quadratic chirp by the proposed method is possible only if such a chirp is sufficiently large.

УДК 533.951

ВОЗБУЖДЕНИЕ НЕСИММЕТРИЧНЫХ ВОЛН ЗАДАНЫМИ ИСТОЧНИКАМИ В МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ ПРИ НАЛИЧИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ПЛАЗМЕННОГО КАНАЛА

Т. М. Заборонкова¹, А. В. Кудрин², М. Ю. Лях²

Рассмотрена задача о возбуждении электромагнитного поля ограниченными в пространстве заданными источниками произвольной конфигурации в магнитоактивной плазме при наличии цилиндрического плазменного канала, ориентированного вдоль внешнего магнитного поля. Получено строгое решение для полного поля, содержащее как дискретную, так и непрерывную части пространственного спектра возбуждаемых волн. Проанализированы выражения для диаграммы направленности и полной мощности излучения заданных источников. Применительно к свистовому диапазону частот рассчитана мощность излучения кольцевого электрического тока, расположенного в канале с повышенной плотностью плазмы. Показано, что в данном частотном диапазоне наличие такого канала может приводить к значительному увеличению мощности излучения кольцевых токов по сравнению со случаем их размещения в однородной фоновой плазме независимо от ориентации рассматриваемых источников.

ВВЕДЕНИЕ

Исследованию особенностей возбуждения и распространения электромагнитных волн при наличии открытых направляющих структур посвящено большое число работ (см., например, [1–13] и цитируемую там литературу). В [1–10] рассматривались открытые изотропные регулярные и нерегулярные направляющие системы. Методы, разработанные для таких систем, получили дальнейшее развитие в работах, в которых изучались открытые анизотропные и гиротропные направляющие системы, расположенные в изотропной среде [7, 11–13]. В последнее время значительный интерес вызывают открытые гиротропные направляющие структуры, окружённые гиротропной фоновой средой. Это, в частности, объясняется необходимостью исследования возбуждения и распространения электромагнитных волн в магнитоактивной плазме при наличии плазменных каналов (дактов плотности), ориентированных вдоль внешнего магнитного поля [14]. Как известно, такие плазменные образования существуют в естественных условиях околоземного космического пространства [15, 16], а также могут возникать вследствие различных нелинейных эффектов в ближнем поле антенн [17–21]. В этой связи повышенное внимание уделяется исследованию влияния дактов плотности на характеристики антенн в замагниченной плазме. Как показано в [22, 23] применительно к свистовому диапазону частот, наличие канала с повышенной плотностью плазмы может приводить к заметному увеличению мощности излучения простейших азимутально-симметричных кольцевых токов, возбуждающих поля, которые не зависят от азимутального угла. Напомним, что строгое решение задачи об излучении заданных азимутально-симметричных токов в магнитоактивной плазме при наличии цилиндрического плазменного канала было получено в [24] (см. также [14]).

В данной работе исследуется излучение заданных несимметричных токов при наличии цилиндрического плазменного канала, находящегося в фоновой магнитоактивной плазме. На основе полученного решения проводится сопоставление характеристик излучения несимметричных

источников в свистовом диапазоне частот с соответствующими характеристиками азимутально-симметричных источников в случае дакта плотности, параметры которого отвечают условиям активных ионосферных экспериментов [21].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Итак, рассмотрим заданные гармонические во времени (пропорциональные $\exp(i\omega t)$) электрические и магнитные токи с плотностями $\mathbf{j}^e(\rho, \phi, z)$ и $\mathbf{j}^m(\rho, \phi, z)$ соответственно, расположенные в ограниченной области пространства $\rho \leq b$, $|z| \leq d$ в магнитоактивной плазме при наличии цилиндрического плазменного канала, ориентированного вдоль внешнего магнитного поля $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{z}_0$; здесь ρ , ϕ , z — цилиндрические координаты. Будем полагать, что плотность плазмы N зависит только от координаты ρ , причём функция $N(\rho)$ является кусочно-непрерывной в интервале $0 \leq \rho \leq a$ и принимает постоянное значение $N = N_a$ при $\rho > a$, где a — радиус канала.

Напомним, что тензор диэлектрической проницаемости холодной магнитоактивной плазмы имеет вид

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon & -ig & 0 \\ ig & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Выражения для компонент тензора приведены, например, в [25]. Далее компоненты тензора (1) внутри канала ($\rho < a$) и в фоновой плазме ($\rho > a$) будем обозначать $\tilde{\varepsilon}$, $\tilde{g}$, $\tilde{\eta}$ и ε_a , g_a , η_a соответственно. Для устранения трудностей, связанных с резонансным поглощением в неоднородной плазме без потерь при изменении знаков компонент ε , η , необходимо потребовать, чтобы в отсутствие потерь значения этих компонент проходили через нуль скачком.

Решение для поля в области вне источников будем искать в виде разложения по собственным волнам цилиндрического плазменного канала:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \sum_{s=-,+} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{\alpha=o,e} \sum_q \mathbf{E}_{m,s,\alpha}(\rho, q) \exp[-im\phi - ik_0 p_{s,\alpha}(q)z], \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}) &= \sum_{s=-,+} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{\alpha=o,e} \sum_q \mathbf{H}_{m,s,\alpha}(\rho, q) \exp[-im\phi - ik_0 p_{s,\alpha}(q)z]. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь q — поперечное волновое число в фоновой плазме, нормированное на волновое число в свободном пространстве $k_0 = \omega/c$, m — азимутальный индекс ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), функции $p_{s,\alpha}(q)$ описывают зависимость нормированного на k_0 продольного волнового числа p от поперечного волнового числа q для «обыкновенной» ($\alpha = o$) и «необыкновенной» ($\alpha = e$) нормальных волн фоновой плазмы, индекс s отмечает направление распространения волны ($s = +$ и $s = -$ отмечают волны, распространяющиеся в положительном и отрицательном направлениях оси z соответственно), $\mathbf{E}_{m,s,\alpha}(\rho, q)$ и $\mathbf{H}_{m,s,\alpha}(\rho, q)$ — векторные функции, описывающие радиальное распределение поля собственной волны, отвечающей поперечному волновому числу q и индексам m , s , α . Функции $p_{s,\alpha}(q)$ подчиняются соотношениям $p_{+, \alpha}(q) \equiv p_{\alpha}(q) = -p_{-, \alpha}(q)$, где

$$p_{\alpha}(q) = \left[\varepsilon_a - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\varepsilon_a}{\eta_a} \right) q^2 + \chi_{\alpha} R_p(q) \right]^{1/2}, \quad R_p(q) = \left[\frac{1}{4} \left(1 - \frac{\varepsilon_a}{\eta_a} \right)^2 q^4 - \frac{g_a^2}{\eta_a} q^2 + g_a^2 \right]^{1/2}, \quad (3)$$

$$\chi_o = -\chi_e = -1.$$

Здесь предполагается, что $\text{Re } R_p(q) > 0$ и $\text{Im } p_{\alpha}(q) < 0$.

Векторные функции $\mathbf{E}_{m,s,\alpha}(\rho, q)$, $\mathbf{H}_{m,s,\alpha}(\rho, q)$ могут быть описаны с помощью двух скалярных функций $E_{z;m,s,\alpha}(\rho, q)$, $H_{z;m,s,\alpha}(\rho, q)$. Связь поперечных и продольных (по отношению к оси z) компонент указанных векторных функций даётся соотношением

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & -ig & 0 & -p_{s,\alpha} \\ ig & \varepsilon & p_{s,\alpha} & 0 \\ 0 & p_{s,\alpha} & 1 & 0 \\ p_{s,\alpha} & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{\rho;m,s,\alpha} \\ E_{\phi;m,s,\alpha} \\ H_{\rho;m,s,\alpha} \\ H_{\phi;m,s,\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{m}{k_0\rho} H_{z;m,s,\alpha} \\ \frac{i}{k_0} \frac{\partial H_{z;m,s,\alpha}}{\partial \rho} \\ \frac{m}{k_0\rho} E_{z;m,s,\alpha} \\ \frac{i}{k_0} \frac{\partial E_{z;m,s,\alpha}}{\partial \rho} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Продольные компоненты $E_{z;m,s,\alpha}(\rho, q)$, $H_{z;m,s,\alpha}(\rho, q)$ удовлетворяют следующей системе уравнений [14]:

$$\begin{aligned} \hat{L}_m H_{z;m,s,\alpha} + k_0^2 \left(\frac{g^2}{p_{s,\alpha}^2 - \varepsilon} - p_{s,\alpha}^2 + \varepsilon \right) H_{z;m,s,\alpha} &= \frac{ip_{s,\alpha}g}{p_{s,\alpha}^2 - \varepsilon} \hat{L}_m E_{z;m,s,\alpha} + \\ &+ \left(\frac{g^2}{p_{s,\alpha}^2 - \varepsilon} - p_{s,\alpha}^2 + \varepsilon \right) \left\{ \left(ip_{s,\alpha} \frac{\partial E_{z;m,s,\alpha}}{\partial \rho} + \frac{m}{\rho} H_{z;m,s,\alpha} \right) \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{g}{g^2 - (p_{s,\alpha}^2 - \varepsilon)^2} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \left(ip_{s,\alpha} \frac{m}{\rho} E_{z;m,s,\alpha} + \frac{\partial H_{z;m,s,\alpha}}{\partial \rho} \right) \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{p_{s,\alpha}^2 - \varepsilon}{g^2 - (p_{s,\alpha}^2 - \varepsilon)^2} \right] \right\}, \quad (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [g^2 + \varepsilon(p_{s,\alpha}^2 - \varepsilon)] \hat{L}_m E_{z;m,s,\alpha} + k_0^2 \eta [g^2 - (p_{s,\alpha}^2 - \varepsilon)^2] E_{z;m,s,\alpha} &= -ip_{s,\alpha}g \hat{L}_m H_{z;m,s,\alpha} - \\ &- [g^2 - (p_{s,\alpha}^2 - \varepsilon)^2] \left\{ ip_{s,\alpha} \left(ip_{s,\alpha} \frac{m}{\rho} E_{z;m,s,\alpha} + \frac{\partial H_{z;m,s,\alpha}}{\partial \rho} \right) \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{g}{g^2 - (p_{s,\alpha}^2 - \varepsilon)^2} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial E_{z;m,s,\alpha}}{\partial \rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{g^2 + \varepsilon(p_{s,\alpha}^2 - \varepsilon)}{g^2 - (p_{s,\alpha}^2 - \varepsilon)^2} \right] - ip_{s,\alpha} \frac{m}{\rho} H_{z;m,s,\alpha} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{p_{s,\alpha}^2 - \varepsilon}{g^2 - (p_{s,\alpha}^2 - \varepsilon)^2} \right] \right\}, \quad (6) \end{aligned}$$

где

$$\hat{L}_m = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{m^2}{\rho^2}.$$

Для отыскания значений q , по которым проводится суммирование в (2), и отвечающих им собственных волн

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{E}_{m,s,\alpha}(\mathbf{r}, q) \\ \mathbf{H}_{m,s,\alpha}(\mathbf{r}, q) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{E}_{m,s,\alpha}(\rho, q) \\ \mathbf{H}_{m,s,\alpha}(\rho, q) \end{Bmatrix} \exp[-im\phi - ik_0 p_{s,\alpha}(q)z] \quad (7)$$

необходимо, чтобы величины $\mathbf{E}_{m,s,\alpha}(\rho, q)$, $\mathbf{H}_{m,s,\alpha}(\rho, q)$, полученные в результате решения уравнений (5), (6), были регулярными на оси z и удовлетворяли граничным условиям, заключающимся в непрерывности компонент $E_{\phi;m,s,\alpha}(\rho, q)$, $E_{z;m,s,\alpha}(\rho, q)$, $H_{\phi;m,s,\alpha}(\rho, q)$ и $H_{z;m,s,\alpha}(\rho, q)$ в точках разрыва функции $N(\rho)$, а также следующим условиям ограниченности при $\rho \rightarrow \infty$ [8]:

$$\rho^{1/2} |\mathbf{E}_{m,s,\alpha}(\rho, q)| < R_{m,\alpha}^{(1)}, \quad \rho^{1/2} |\mathbf{H}_{m,s,\alpha}(\rho, q)| < R_{m,\alpha}^{(2)}, \quad (8)$$

где $R_{m,\alpha}^{(1)}$ и $R_{m,\alpha}^{(2)}$ — некоторые постоянные. Можно показать, что полное поле, получающееся при суммировании (интегрировании) собственных волн по найденным значениям q , удовлетворяет

условию излучения на бесконечности. Подчеркнём, что условия (8) оказываются здесь достаточными для отыскания собственных значений q и отвечающих им собственных волн в отличие от случая негиротропной фоновой среды ($g_a = 0$), когда наряду с условиями ограниченности требуется наложение некоторых дополнительных условий на искомые поля собственных волн [8,10,13].

2. ВОЛНЫ ДИСКРЕТНОЙ И НЕПРЕРЫВНОЙ ЧАСТЕЙ СПЕКТРА

Перейдём к отысканию и анализу решений уравнений (5), (6). Рассмотрим вначале простейший случай однородного канала, в котором плотность плазмы постоянна и равна $\tilde{N}$ при $\rho < a$ ($\tilde{N} \neq N_a$). В этом случае решение уравнений (5), (6) представляется в виде цилиндрических функций. В частности, выражения для продольных компонент поля внутри канала ($\rho < a$) выглядят таким образом:

$$E_{z;m,s,\alpha}(\rho, q) = \frac{i}{\tilde{\eta}} \sum_{k=1}^2 B_{m,s,\alpha}^{(k)}(q) \tilde{n}_{s,\alpha}^{(k)} \tilde{q}_{\alpha}^{(k)} J_m(k_0 \tilde{q}_{\alpha}^{(k)} \rho), \quad (9)$$

$$H_{z;m,s,\alpha}(\rho, q) = - \sum_{k=1}^2 B_{m,s,\alpha}^{(k)}(q) \tilde{q}_{\alpha}^{(k)} J_m(k_0 \tilde{q}_{\alpha}^{(k)} \rho). \quad (10)$$

Здесь J_m — функции Бесселя порядка m , $B_{m,s,\alpha}^{(1)}$ и $B_{m,s,\alpha}^{(2)}$ — подлежащие определению коэффициенты, $\tilde{q}_{\alpha}^{(1)}$ и $\tilde{q}_{\alpha}^{(2)}$ — поперечные волновые числа во внутренней области канала, отвечающие продольному волновому числу $p_{\alpha}(q)$:

$$\tilde{q}_{\alpha}^{(1,2)}(q) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\tilde{\varepsilon} - \frac{\tilde{g}^2}{\tilde{\varepsilon}} + \tilde{\eta} - \left(\frac{\tilde{\eta}}{\tilde{\varepsilon}} + 1 \right) p_{\alpha}^2(q) - \chi^{(1,2)} R_q(p_{\alpha}(q)) \right]^{1/2}, \quad \chi^{(1)} = -\chi^{(2)} = 1,$$

$$R_q(p) = \left\{ \left(\frac{\tilde{\eta}}{\tilde{\varepsilon}} - 1 \right)^2 p^4 + 2 \left[\frac{\tilde{g}^2}{\tilde{\varepsilon}} \left(\frac{\tilde{\eta}}{\tilde{\varepsilon}} + 1 \right) - \tilde{\varepsilon} \left(\frac{\tilde{\eta}}{\tilde{\varepsilon}} - 1 \right)^2 \right] p^2 + \left(\tilde{\varepsilon} - \frac{\tilde{g}^2}{\tilde{\varepsilon}} - \tilde{\eta} \right)^2 \right\}^{1/2}. \quad (11)$$

Величины $\tilde{n}_{s,\alpha}^{(1)}$ и $\tilde{n}_{s,\alpha}^{(2)}$, входящие в выражение (9), даются формулой

$$\tilde{n}_{s,\alpha}^{(1,2)}(q) = -\tilde{\varepsilon} \left[\left(\tilde{q}_{\alpha}^{(1,2)}(q) \right)^2 + p_{\alpha}^2(q) + \frac{\tilde{g}^2}{\tilde{\varepsilon}} - \tilde{\varepsilon} \right] / [\tilde{g} p_{s,\alpha}(q)]. \quad (12)$$

Поля вне канала ($\rho > a$) записываются следующим образом:

$$E_{z;m,s,\alpha}(\rho, q) = \frac{i}{\eta_a} \left[\sum_{k=1}^2 C_{m,s,\alpha}^{(k)}(q) n_{s,\alpha}^{(1)} q H_m^{(k)}(k_0 q \rho) + C_{m,s,\alpha}(q) n_{s,\alpha}^{(2)} q_{\alpha} H_m^{(2)}(k_0 q_{\alpha} \rho) + D_{m,s,\alpha}(q) n_{s,\alpha}^{(2)} q_{\alpha} H_m^{(1)}(k_0 q_{\alpha} \rho) \right], \quad (13)$$

$$H_{z;m,s,\alpha}(\rho, q) = - \sum_{k=1}^2 C_{m,s,\alpha}^{(k)}(q) q H_m^{(k)}(k_0 q \rho) - C_{m,s,\alpha}(q) q_{\alpha} H_m^{(2)}(k_0 q_{\alpha} \rho) - D_{m,s,\alpha}(q) q_{\alpha} H_m^{(1)}(k_0 q_{\alpha} \rho). \quad (14)$$

Здесь $H_m^{(1)}$ и $H_m^{(2)}$ — функции Ханкеля 1-го и 2-го рода порядка m , $C_{m,s,\alpha}^{(1)}$, $C_{m,s,\alpha}^{(2)}$, $C_{m,s,\alpha}$ и $D_{m,s,\alpha}$ — подлежащие определению коэффициенты. Остальные величины в (13), (14) даются формулами

$$q_\alpha(q) = \left[\varepsilon_a - p_\alpha^2(q) - \frac{g_a}{\varepsilon_a} \left(g_a - \frac{\eta_a p_{s,\alpha}(q)}{n_{s,\alpha}^{(1)}(q)} \right) \right]^{1/2}, \quad (15)$$

$$n_{s,\alpha}^{(1)}(q) = -\varepsilon_a \left[q^2 + p_\alpha^2(q) + \frac{g_a^2}{\varepsilon_a} - \varepsilon_a \right] / [g_a p_{s,\alpha}(q)], \quad (16)$$

$$n_{s,\alpha}^{(2)}(q) = -\varepsilon_a \left[q_\alpha^2(q) + p_\alpha^2(q) + \frac{g_a^2}{\varepsilon_a} - \varepsilon_a \right] / [g_a p_{s,\alpha}(q)]. \quad (17)$$

Отметим, что наличие в выражениях (13) и (14) слагаемых, зависящих от «дополнительного» поперечного волнового числа q_α связано с анизотропными свойствами магнитоактивной плазменной среды. Для определённости положим $\text{Im } q_o(q) < 0$, $\text{Im } q_e(q) < 0$. При таком выборе ветвей функций $q_o(q)$ и $q_e(q)$ в выражениях для поля вне канала необходимо потребовать выполнения соотношения $D_{m,s,\alpha} = 0$, чтобы результирующее поле не противоречило условиям ограниченности (8).

Выражения для поперечных компонент поля внутри и вне канала получаются из (9), (10) и (13), (14) с помощью соотношений (4), в которых следует положить $\varepsilon = \tilde{\varepsilon}$, $g = \tilde{g}$, $\eta = \tilde{\eta}$ при $\rho < a$ и $\varepsilon = \varepsilon_a$, $g = g_a$, $\eta = \eta_a$ при $\rho > a$.

Удовлетворяя условиям непрерывности тангенциальных компонент поля на границе канала $\rho = a$ с учётом соотношения $D_{m,s,\alpha} = 0$, приходим к системе линейных уравнений для неизвестных коэффициентов $B_{m,s,\alpha}^{(1)}$, $B_{m,s,\alpha}^{(2)}$, $C_{m,s,\alpha}^{(1)}$, $C_{m,s,\alpha}^{(2)}$ и $C_{m,s,\alpha}$, которую можно представить в виде

$$\hat{\mathbf{S}} \begin{pmatrix} B_{m,s,\alpha}^{(1)} \\ B_{m,s,\alpha}^{(2)} \\ C_{m,s,\alpha}^{(1)} \\ C_{m,s,\alpha}^{(2)} \end{pmatrix} = C_{m,s,\alpha}^{(1)} \mathbf{F}. \quad (18)$$

Элементы матрицы $\hat{\mathbf{S}}$ и вектора-столбца $\mathbf{F}$ записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} S_{1k} &= \tilde{Q}_\alpha^{(k)} J_m(\tilde{Q}_\alpha^{(k)}), & S_{13} &= -QH_m^{(2)}(Q), & S_{14} &= -Q_\alpha H_m^{(2)}(Q_\alpha), \\ S_{2k} &= \tilde{\eta}^{-1} \tilde{n}_{s,\alpha}^{(k)} \tilde{Q}_\alpha^{(k)} J_m(\tilde{Q}_\alpha^{(k)}), & S_{23} &= -\eta_a^{-1} n_{s,\alpha}^{(1)} QH_m^{(2)}(Q), & S_{24} &= -\eta_a^{-1} n_{s,\alpha}^{(2)} Q_\alpha H_m^{(2)}(Q_\alpha), \\ S_{3k} &= \tilde{Q}_\alpha^{(k)} J_m(\tilde{Q}_\alpha^{(k)}) J_m^{(k)}, & S_{33} &= -QH_m^{(2)}(Q) \mathcal{H}_m^{(2)}, & S_{34} &= -Q_\alpha H_m^{(2)}(Q_\alpha) \mathcal{H}_m, \\ S_{4k} &= \tilde{n}_{s,\alpha}^{(k)} \tilde{Q}_\alpha^{(k)} J_m(\tilde{Q}_\alpha^{(k)}) \hat{J}_m^{(k)}, \\ S_{43} &= -n_{s,\alpha}^{(1)} QH_m^{(2)}(Q) \hat{\mathcal{H}}_m^{(2)}, & S_{44} &= -n_{s,\alpha}^{(2)} Q_\alpha H_m^{(2)}(Q_\alpha) \hat{\mathcal{H}}_m, \\ F_1 &= QH_m^{(1)}(Q), & F_2 &= \eta_a^{-1} n_{s,\alpha}^{(1)} QH_m^{(1)}(Q), \\ F_3 &= QH_m^{(1)}(Q) \mathcal{H}_m^{(1)}, & F_4 &= n_{s,\alpha}^{(1)} QH_m^{(1)}(Q) \hat{\mathcal{H}}_m^{(1)}, \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_\alpha^{(k)} &= k_0 \tilde{q}_\alpha^{(k)} a, & Q &= k_0 q a, & Q_\alpha &= k_0 q_\alpha a, \\ J_m^{(k)} &= \frac{J_{m+1}(\tilde{Q}_\alpha^{(k)})}{\tilde{Q}_\alpha^{(k)} J_m(\tilde{Q}_\alpha^{(k)})} + m \frac{\tilde{\mathbf{a}}_\alpha^{(k)}}{(\tilde{Q}_\alpha^{(k)})^2}, & \hat{J}_m^{(k)} &= \frac{J_{m+1}(\tilde{Q}_\alpha^{(k)})}{\tilde{Q}_\alpha^{(k)} J_m(\tilde{Q}_\alpha^{(k)})} - m \frac{\tilde{\mathbf{b}}_\alpha^{(k)}}{(\tilde{Q}_\alpha^{(k)})^2}, & k &= 1, 2; \\ \mathcal{H}_m^{(1,2)} &= \frac{H_{m+1}^{(1,2)}(Q)}{QH_m^{(1,2)}(Q)} + m \frac{\mathbf{a}_\alpha^{(1)}}{Q^2}, & \hat{\mathcal{H}}_m^{(1,2)} &= \frac{H_{m+1}^{(1,2)}(Q)}{QH_m^{(1,2)}(Q)} - m \frac{\mathbf{b}_\alpha^{(1)}}{Q^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_m &= \frac{H_{m+1}^{(2)}(Q_\alpha)}{Q_\alpha H_m^{(2)}(Q_\alpha)} + m \frac{\mathbf{a}_\alpha^{(2)}}{Q_\alpha^2}, & \hat{\mathcal{H}}_m &= \frac{H_{m+1}^{(2)}(Q_\alpha)}{Q_\alpha H_m^{(2)}(Q_\alpha)} - m \frac{\mathbf{b}_\alpha^{(2)}}{Q_\alpha^2}, \\
\tilde{\mathbf{a}}_\alpha^{(1,2)} &= \left(\tilde{q}_\alpha^{(1,2)} \right)^2 \frac{1 - p_{s,\alpha}/\tilde{n}_{s,\alpha}^{(2,1)}}{p_{s,\alpha}^2 - \tilde{\varepsilon} + \tilde{g}}, & \tilde{\mathbf{b}}_\alpha^{(1,2)} &= \left(\tilde{q}_\alpha^{(1,2)} \right)^2 \frac{(\tilde{\varepsilon} - \tilde{g})/\tilde{n}_{s,\alpha}^{(2,1)} - p_{s,\alpha}}{\tilde{n}_{s,\alpha}^{(1,2)} (p_{s,\alpha}^2 - \tilde{\varepsilon} + \tilde{g})}, \\
\mathbf{a}_\alpha^{(1,2)} &= \left(q_\alpha^{(1,2)} \right)^2 \frac{1 - p_{s,\alpha}/n_{s,\alpha}^{(2,1)}}{p_{s,\alpha}^2 - \varepsilon_a + g_a}, & \mathbf{b}_\alpha^{(1,2)} &= \left(q_\alpha^{(1,2)} \right)^2 \frac{(\varepsilon_a - g_a)/n_{s,\alpha}^{(2,1)} - p_{s,\alpha}}{n_{s,\alpha}^{(1,2)} (p_{s,\alpha}^2 - \varepsilon_a + g_a)}, \\
q_\alpha^{(1)} &= q, & q_\alpha^{(2)} &= q_\alpha.
\end{aligned} \tag{20}$$

Очевидно, что коэффициенты $B_{m,s,\alpha}^{(1)}$, $B_{m,s,\alpha}^{(2)}$, $C_{m,s,\alpha}^{(1)}$, $C_{m,s,\alpha}^{(2)}$ и $C_{m,s,\alpha}$ определяются с точностью до множителя, не зависящего от пространственных координат. При надлежащем выборе этого множителя выражения для коэффициентов записываются в удобном для анализа виде:

$$\begin{aligned}
B_{m,s,\alpha}^{(1,2)} &= \chi^{(1,2)} \frac{4}{i\pi} \left(\tilde{Q}_\alpha^{(1,2)} J_m(\tilde{Q}_\alpha^{(1,2)}) \right)^{-1} \left[\frac{n_{s,\alpha}^{(1)} - n_{s,\alpha}^{(2)}}{\eta_a} \left(n_{s,\alpha}^{(1)} J_m^{(2,1)} - \tilde{n}_{s,\alpha}^{(2,1)} \hat{J}_m^{(2,1)} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\tilde{n}_{s,\alpha}^{(2,1)}}{\tilde{\eta}} - \frac{n_{s,\alpha}^{(1)}}{\eta_a} \right) \left(n_{s,\alpha}^{(1)} \mathcal{H}_m - n_{s,\alpha}^{(2)} \hat{\mathcal{H}}_m \right) - m n_{s,\alpha}^{(1)} \frac{\mathbf{a}_\alpha^{(1)} + \mathbf{b}_\alpha^{(1)}}{Q^2} \left(\frac{\tilde{n}_{s,\alpha}^{(2,1)}}{\tilde{\eta}} - \frac{n_{s,\alpha}^{(2)}}{\eta_a} \right) \right], \tag{21}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{m,s,\alpha}^{(1,2)} &= \chi^{(1,2)} Q H_m^{(2,1)}(Q) \left[\frac{n_{s,\alpha}^{(2)} - n_{s,\alpha}^{(1)}}{\eta_a} \left(\tilde{n}_{s,\alpha}^{(2)} \hat{J}_m^{(2)} J_m^{(1)} - \tilde{n}_{s,\alpha}^{(1)} \hat{J}_m^{(1)} J_m^{(2)} \right) + \right. \\
&\quad + \frac{\tilde{n}_{s,\alpha}^{(2)} - \tilde{n}_{s,\alpha}^{(1)}}{\tilde{\eta}} \left(n_{s,\alpha}^{(2)} \mathcal{H}_m^{(2,1)} \hat{\mathcal{H}}_m - n_{s,\alpha}^{(1)} \hat{\mathcal{H}}_m^{(2,1)} \mathcal{H}_m \right) + \left(\frac{\tilde{n}_{s,\alpha}^{(2)}}{\tilde{\eta}} - \frac{n_{s,\alpha}^{(2)}}{\eta_a} \right) \left(n_{s,\alpha}^{(1)} J_m^{(1)} \hat{\mathcal{H}}_m^{(2,1)} - \tilde{n}_{s,\alpha}^{(1)} \hat{J}_m^{(1)} \mathcal{H}_m^{(2,1)} \right) + \\
&\quad + \left(\frac{n_{s,\alpha}^{(1)}}{\eta_a} - \frac{\tilde{n}_{s,\alpha}^{(2)}}{\tilde{\eta}} \right) \left(n_{s,\alpha}^{(2)} J_m^{(1)} \hat{\mathcal{H}}_m - \tilde{n}_{s,\alpha}^{(1)} \hat{J}_m^{(1)} \mathcal{H}_m \right) + \left(\frac{n_{s,\alpha}^{(2)}}{\eta_a} - \frac{\tilde{n}_{s,\alpha}^{(1)}}{\tilde{\eta}} \right) \left(n_{s,\alpha}^{(1)} J_m^{(2)} \hat{\mathcal{H}}_m^{(2,1)} - \tilde{n}_{s,\alpha}^{(2)} \hat{J}_m^{(2)} \mathcal{H}_m^{(2,1)} \right) + \\
&\quad \left. + \left(\frac{\tilde{n}_{s,\alpha}^{(1)}}{\tilde{\eta}} - \frac{n_{s,\alpha}^{(1)}}{\eta_a} \right) \left(n_{s,\alpha}^{(2)} J_m^{(2)} \hat{\mathcal{H}}_m - \tilde{n}_{s,\alpha}^{(2)} \hat{J}_m^{(2)} \mathcal{H}_m \right) \right], \tag{22}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{m,s,\alpha} &= \frac{4}{i\pi} \left(Q_\alpha H_m^{(2)}(Q_\alpha) \right)^{-1} \left[\left(\frac{\tilde{n}_{s,\alpha}^{(2)}}{\tilde{\eta}} - \frac{n_{s,\alpha}^{(1)}}{\eta_a} \right) \left(n_{s,\alpha}^{(1)} J_m^{(1)} - \tilde{n}_{s,\alpha}^{(1)} \hat{J}_m^{(1)} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{n_{s,\alpha}^{(1)}}{\eta_a} - \frac{\tilde{n}_{s,\alpha}^{(1)}}{\tilde{\eta}} \right) \left(n_{s,\alpha}^{(1)} J_m^{(2)} - \tilde{n}_{s,\alpha}^{(2)} \hat{J}_m^{(2)} \right) - m n_{s,\alpha}^{(1)} \frac{\mathbf{a}_\alpha^{(1)} + \mathbf{b}_\alpha^{(1)}}{Q^2} \frac{\tilde{n}_{s,\alpha}^{(2)} - \tilde{n}_{s,\alpha}^{(1)}}{\tilde{\eta}} \right]. \tag{23}
\end{aligned}$$

Формулы (9), (10), (13), (14) с учётом выражений (21)–(23) и условия $D_{m,s,\alpha} = 0$ описывают поле собственной волны однородного плазменного канала, отвечающей некоторому поперечному волновому числу q и индексам m, s, α .

В случае, когда плотность плазмы внутри канала зависит от ρ , решение уравнений (5), (6) при $\rho < a$ не может быть выражено через известные функции. Однако в фоновой среде ($\rho > a$) поле по-прежнему даётся формулами (13), (14). Для отыскания поля во внутренней области необходимо найти два линейно независимых решения $\tilde{E}_{z;m,s,\alpha}^{(1)}(\rho, q)$, $\tilde{H}_{z;m,s,\alpha}^{(1)}(\rho, q)$ и $\tilde{E}_{z;m,s,\alpha}^{(2)}(\rho, q)$, $\tilde{H}_{z;m,s,\alpha}^{(2)}(\rho, q)$ системы уравнений (5), (6) в интервале $0 \leq \rho \leq a$ для заданного значения q . Очевидно, что в общем случае такие решения могут быть получены только численно. При этом следует учесть, что в пределе $\rho \rightarrow 0$ соответствующие решения должны удовлетворять условиям

$$\tilde{E}_{z;m,s,\alpha}^{(k)}(\rho, q) \rightarrow \frac{i\tilde{n}_{s,\alpha}^{(k)}}{\tilde{\eta}(0)} \left(\frac{\rho}{a}\right)^{|m|}, \quad \tilde{H}_{z;m,s,\alpha}^{(k)}(\rho, q) \rightarrow -\left(\frac{\rho}{a}\right)^{|m|}, \quad (24)$$

где $k = 1, 2$. В формулах (24) величина $\tilde{\eta}(0)$ отвечает плотности $N(0)$, а величины $\tilde{n}_{s,\alpha}^{(1)}$ и $\tilde{n}_{s,\alpha}^{(2)}$ вычисляются по формуле (12) при той же плотности плазмы. Поле во внутренней области представляется в виде суперпозиции линейно независимых решений:

$$E_{z;m,s,\alpha}(\rho, q) = \sum_{k=1}^2 B_{m,s,\alpha}^{(k)}(q) \tilde{E}_{z;m,s,\alpha}^{(k)}(\rho, q), \quad (25)$$

$$H_{z;m,s,\alpha}(\rho, q) = \sum_{k=1}^2 B_{m,s,\alpha}^{(k)}(q) \tilde{H}_{z;m,s,\alpha}^{(k)}(\rho, q). \quad (26)$$

В этом случае коэффициенты $B_{m,s,\alpha}^{(1)}$, $B_{m,s,\alpha}^{(2)}$, $C_{m,s,\alpha}^{(1)}$, $C_{m,s,\alpha}^{(2)}$ и $C_{m,s,\alpha}$ можно получить, воспользовавшись формулами (21)–(23), если в последних выполнить следующие замены:

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_\alpha^{(k)} J_m(\tilde{Q}_\alpha^{(k)}) &\rightarrow -k_0 a \tilde{H}_{z;m,s,\alpha}^{(k)}(a, q), & \frac{\tilde{n}_{s,\alpha}^{(k)}}{\tilde{\eta}} &\rightarrow i \frac{\tilde{E}_{z;m,s,\alpha}^{(k)}(a, q)}{\tilde{H}_{z;m,s,\alpha}^{(k)}(a, q)}, \\ J_m^{(k)} &\rightarrow \frac{i}{k_0 a} \frac{\tilde{E}_{\phi;m,s,\alpha}^{(k)}(a, q)}{\tilde{H}_{z;m,s,\alpha}^{(k)}(a, q)}, & \tilde{n}_{s,\alpha}^{(k)} \hat{J}_m^{(k)} &\rightarrow \frac{1}{k_0 a} \frac{\tilde{H}_{\phi;m,s,\alpha}^{(k)}(a, q)}{\tilde{H}_{z;m,s,\alpha}^{(k)}(a, q)}, \end{aligned} \quad (27)$$

где $k = 1, 2$. В (27) использованы функции $\tilde{E}_{\phi;m,s,\alpha}^{(1)}(\rho, q)$, $\tilde{H}_{\phi;m,s,\alpha}^{(1)}(\rho, q)$ и $\tilde{E}_{\phi;m,s,\alpha}^{(2)}(\rho, q)$, $\tilde{H}_{\phi;m,s,\alpha}^{(2)}(\rho, q)$, которые представляют собой линейно независимые решения для азимутальных компонент поля внутри канала, отвечающие решениям $\tilde{E}_{z;m,s,\alpha}^{(1)}(\rho, q)$, $\tilde{H}_{z;m,s,\alpha}^{(1)}(\rho, q)$ и $\tilde{E}_{z;m,s,\alpha}^{(2)}(\rho, q)$, $\tilde{H}_{z;m,s,\alpha}^{(2)}(\rho, q)$ для продольных компонент.

Полученное представление поля позволяет найти спектр собственных значений q и соответствующие собственные волны цилиндрического плазменного канала. Во-первых, как нетрудно убедиться, поля, представленные при $\rho > a$ в виде (13), (14), с учётом соотношения $D_{m,s,\alpha} = 0$ удовлетворяют условиям ограниченности (8) при всех действительных значениях поперечного волнового числа q . Далее, опираясь на результаты рассмотрения, выполненного в [14], можно показать, что

$$\mathbf{E}_{m,s,\alpha}(\rho, q \exp(\pm i\pi)) = \mathbf{E}_{m,s,\alpha}(\rho, q), \quad \mathbf{H}_{m,s,\alpha}(\rho, q \exp(\pm i\pi)) = \mathbf{H}_{m,s,\alpha}(\rho, q). \quad (28)$$

Отсюда следует, что отрицательные значения q могут быть исключены из рассмотрения. Таким образом, все положительные значения q образуют непрерывный спектр собственных значений.

Наряду с непрерывным спектром значений q условия (8) могут выполняться и для некоторых дискретных комплексных значений $q = q_{m,n}$ ($n = 1, 2, \dots$), являющихся корнями уравнений

$$C_{m,s,\alpha}^{(1)}(q_{m,n}) = 0 \quad \text{при} \quad \text{Im } q_{m,n} < 0 \quad (29)$$

и

$$C_{m,s,\alpha}^{(2)}(q_{m,n}) = 0 \quad \text{при} \quad \text{Im } q_{m,n} > 0. \quad (30)$$

С учётом соотношений (28) и свойств функций Ханкеля нетрудно убедиться, что корни уравнения (30) не дают новых решений для поля, поэтому их можно не рассматривать. Здесь так же, как и в случае азимутально-симметричных волн, предполагается, что дискретную часть спектра собственных значений q образуют лишь те корни уравнения (29), для которых имеет место неравенство $|\text{Im } q_{m,n}| < |\text{Im } q_\alpha(q_{m,n})|$ (подробности см. в [14]). Индекс α , при котором это неравенство

выполняется, будем далее обозначать через $\hat{\alpha}$. Очевидно, что волны, отвечающие дискретным значениям $q_{m,n}$, представляют собой собственные (локализованные) моды плазменного канала. Поля собственных мод записываются в виде

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{E}_{m,n_s}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{H}_{m,n_s}(\mathbf{r}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{E}_{m,n_s}(\rho) \\ \mathbf{H}_{m,n_s}(\rho) \end{Bmatrix} \exp(-im\phi - ik_0 p_{m,n_s} z), \quad (31)$$

где $p_{m,n_s} = p_{s,\hat{\alpha}}(q_{m,n})$ — постоянная распространения собственной моды (волны дискретной части спектра) с индексами m, n_s , причём предполагается, что индексы $n_+ = n > 0$ и $n_- = -n < 0$ отвечают волнам дискретной части спектра, распространяющимся в положительном и отрицательном направлениях оси z соответственно, а $\mathbf{E}_{m,n_s}(\rho) = \mathbf{E}_{m,s,\hat{\alpha}}(\rho, q_{m,n})$, $\mathbf{H}_{m,n_s}(\rho) = \mathbf{H}_{m,s,\hat{\alpha}}(\rho, q_{m,n})$ — векторные функции, описывающие распределение поля данной моды по координате ρ . Заметим, что при $q = q_{m,n}$ (т. е. в случае волн дискретной части спектра) выражение для коэффициента $C_{m,s,\hat{\alpha}}^{(2)}$ в (22) существенно упрощается:

$$C_{m,s,\hat{\alpha}}^{(2)} = \frac{4}{i\pi} \left(Q H_m^{(2)}(Q) \right)^{-1} \left[\frac{\tilde{n}_{s,\hat{\alpha}}^{(2)} - \tilde{n}_{s,\hat{\alpha}}^{(1)}}{\tilde{\eta}} \left(n_{s,\hat{\alpha}}^{(1)} \mathcal{H}_m - n_{s,\hat{\alpha}}^{(2)} \hat{\mathcal{H}}_m \right) + \right. \\ \left. + \left(\frac{n_{s,\hat{\alpha}}^{(2)}}{\eta_a} - \frac{\tilde{n}_{s,\hat{\alpha}}^{(2)}}{\tilde{\eta}} \right) \left(n_{s,\hat{\alpha}}^{(1)} J_m^{(1)} - \tilde{n}_{s,\hat{\alpha}}^{(1)} \hat{J}_m^{(1)} \right) + \left(\frac{\tilde{n}_{s,\hat{\alpha}}^{(1)}}{\tilde{\eta}} - \frac{n_{s,\hat{\alpha}}^{(2)}}{\eta_a} \right) \left(n_{s,\hat{\alpha}}^{(1)} J_m^{(2)} - \tilde{n}_{s,\hat{\alpha}}^{(2)} \hat{J}_m^{(2)} \right) \right]. \quad (32)$$

3. ПОЛНОЕ ПОЛЕ ЗАДАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

С учётом проведённого выше рассмотрения поле в области $|z| > d$ при наличии цилиндрического плазменного канала представляется в виде следующего разложения по собственным волнам дискретной и непрерывной частей спектра:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}) \end{Bmatrix} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{n_s} a_{m,n_s} \begin{Bmatrix} \mathbf{E}_{m,n_s}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{H}_{m,n_s}(\mathbf{r}) \end{Bmatrix} + \sum_{\alpha=o,e} \int_0^\infty a_{m,s,\alpha}(q) \begin{Bmatrix} \mathbf{E}_{m,s,\alpha}(\mathbf{r}, q) \\ \mathbf{H}_{m,s,\alpha}(\mathbf{r}, q) \end{Bmatrix} dq \right). \quad (33)$$

Здесь a_{m,n_s} и $a_{m,s,\alpha}$ — коэффициенты возбуждения волн дискретной и непрерывной частей спектра соответственно. В разложении (33) следует положить $n_s = n > 0$, $s = +$ при $z > d$ и $n_s = -n$, $s = -$ при $z < -d$.

Поля волн дискретной и непрерывной частей спектра, входящие в разложение (33), удовлетворяют следующим соотношениям ортогональности:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\infty \left(\left[\mathbf{E}_{m,n}(\mathbf{r}), \mathbf{H}_{\tilde{m},\tilde{n}}^{(T)}(\mathbf{r}) \right] - \left[\mathbf{E}_{\tilde{m},\tilde{n}}^{(T)}(\mathbf{r}), \mathbf{H}_{m,n}(\mathbf{r}) \right] \right) \mathbf{z}_0 \rho d\rho d\phi = \frac{4\pi}{c} N_{m,n} \delta_{m,-\tilde{m}} \delta_{n,-\tilde{n}}, \quad (34)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\infty \left(\left[\mathbf{E}_{m,s,\alpha}(\mathbf{r}, q), \mathbf{H}_{\tilde{m},\tilde{n}}^{(T)}(\mathbf{r}) \right] - \left[\mathbf{E}_{\tilde{m},\tilde{n}}^{(T)}(\mathbf{r}), \mathbf{H}_{m,s,\alpha}(\mathbf{r}, q) \right] \right) \mathbf{z}_0 \rho d\rho d\phi = 0, \quad (35)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\infty \left(\left[\mathbf{E}_{m,s,\alpha}(\mathbf{r}, q), \mathbf{H}_{\tilde{m},\tilde{s},\tilde{\alpha}}^{(T)}(\mathbf{r}, \tilde{q}) \right] - \left[\mathbf{E}_{\tilde{m},\tilde{s},\tilde{\alpha}}^{(T)}(\mathbf{r}, \tilde{q}), \mathbf{H}_{m,s,\alpha}(\mathbf{r}, q) \right] \right) \mathbf{z}_0 \rho d\rho d\phi = \\ = \frac{4\pi}{c} N_{m,s,\alpha}(q) \delta(q - \tilde{q}) \delta_{m,-\tilde{m}} \delta_{s,-\tilde{s}} \delta_{\alpha,\tilde{\alpha}}, \quad (36)$$

которые могут быть получены с использованием леммы Лоренца в транспонированном виде [13, 14]. Здесь $\delta_{\alpha,\beta}$ — символ Кронекера, $\delta(q)$ — дельта-функция Дирака, знак (Т) отмечает поля, взятые во вспомогательной («транспонированной») среде, описываемой транспонированным тензором диэлектрической проницаемости $\hat{\epsilon}^T$. Нормировочные величины $N_{m,n}$ и $N_{m,\alpha} = N_{m,+,\alpha}$ для волн, распространяющихся в положительном направлении оси z , даются следующими формулами:

$$N_{m,n} = \frac{1}{2\pi i} \left. \frac{dN_{m,\hat{\alpha}}}{dq} \right|_{q=q_{m,n}}, \quad N_{m,\alpha}(q) = -\frac{4c}{k_0^2} \left[\frac{dp_\alpha(q)}{dq} \right]^{-1} \left[1 + \left(n_{s,\alpha}^{(1)} \right)^2 / \eta_a \right] C_{m,s,\alpha}^{(1)}(q) C_{m,s,\alpha}^{(2)}(q). \quad (37)$$

Нетрудно показать, что $N_{m,-n} = -N_{m,n}$, $N_{m,-,\alpha}(q) = -N_{m,+,\alpha}(q)$. Соотношения ортогональности (34)–(36) и выражения (37) выводятся аналогично тому, как это делается в [24] применительно к случаю азимутально-симметричных волн.

Далее, действуя по аналогии с методом, разработанным для отыскания коэффициентов возбуждения волн экранированных и открытых изотропных волноводов (см., например, [8, 26]), получаем выражения для коэффициентов возбуждения собственных волн:

$$a_{m,\pm n} = \frac{1}{N_{m,n}} \int \left[\mathbf{j}^e(\mathbf{r}) \mathbf{E}_{-m,\mp n}^{(T)}(\mathbf{r}) - \mathbf{j}^m(\mathbf{r}) \mathbf{H}_{-m,\mp n}^{(T)}(\mathbf{r}) \right] d\mathbf{r}, \quad (38)$$

$$a_{m,\pm,\alpha}(q) = \frac{1}{N_{m,\alpha}(q)} \int \left[\mathbf{j}^e(\mathbf{r}) \mathbf{E}_{-m,\mp,\alpha}^{(T)}(\mathbf{r}, q) - \mathbf{j}^m(\mathbf{r}) \mathbf{H}_{-m,\mp,\alpha}^{(T)}(\mathbf{r}, q) \right] d\mathbf{r}, \quad (39)$$

где интегрирование проводится по области, занятой токами.

Мы не приводим выражений для поля в области $|z| < d$, поскольку они могут быть легко получены при помощи метода, изложенного в [26] применительно к случаю экранированных волноводов (см. также [14]).

4. ПОЛЕ ИЗЛУЧЕНИЯ В СВИСТОВОМ ДИАПАЗОНЕ ЧАСТОТ

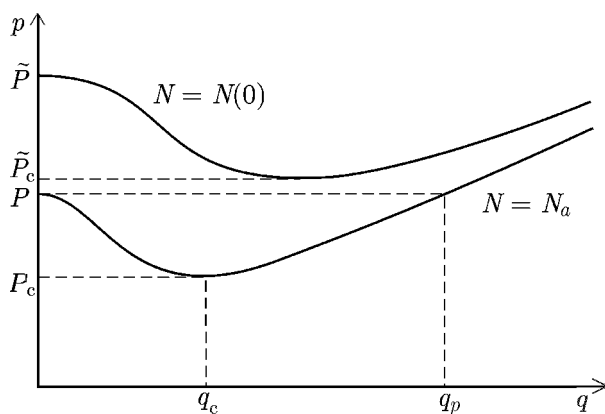


Рис. 1. Поверхности показателя преломления «необыкновенной» волны в частотном диапазоне (40) для двух значений плотности плазмы $N = N(0)$ и $N = N_a$ ($N(0) > N_a$)

Опираясь на общие выражения (33), (38), (39), проанализируем важный для приложений частный случай, а именно исследуем влияние канала с повышенной плотностью плазмы на излучение заданных источников в свистовом диапазоне частот

$$\omega_{\text{ЛН}} < \omega \ll \omega_{\text{Н}} \ll \omega_{\text{р}}, \quad (40)$$

где $\omega_{\text{ЛН}}$ — нижняя гибридная частота, $\omega_{\text{Н}}$ и $\omega_{\text{р}}$ — гирочастота и плазменная частота электронов соответственно. Ограничимся далее рассмотрением случая, когда потери в плазменной среде отсутствуют. Напомним, что в диапазоне (40) из двух нормальных волн однородной магнитоактивной плазмы распространяющейся является только «необыкновенная» волна ($\alpha = e$).

На рис. 1 изображены поверхности показателя преломления этой волны для двух значений плотности плазмы $N = N(0)$, $N = N_a$ и введены обозначения q_c , q_p , используемые в дальнейшем. Заметим, что последующее рассмотрение будет в

основном посвящено излучению однородного кольцевого электрического тока (магнитной антенны), находящегося на оси канала. Тем не менее это рассмотрение может быть без труда обобщено на случай любого физически реализуемого источника.

Напомним, что в диапазоне (40) при каждом фиксированном значении азимутального индекса m канал с повышенной плотностью плазмы поддерживает не более одной собственной моды (волны дискретной части спектра) [27]. При этом в зависимости от параметров канала и значения индекса m в выражение $p_{m,\pm n} = p_{\pm,\hat{\alpha}}(q_{m,n})$ для постоянных распространения собственных мод ($n = 1$) может входить как $\hat{\alpha} = e$, так и $\hat{\alpha} = o$.

Наряду с собственными модами возбуждаемое поле содержит также волны непрерывной части спектра, вклад которых в области пространства вне источников описывается формулой

$$\mathcal{F}_j(\rho, \phi, z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{\alpha=o,e} \int_{\Gamma} J_{m,s,\alpha}(q) \frac{(-k_0^2) \mathcal{F}_{j;m,s,\alpha}(\rho, q) \exp[-im\phi - ik_0 p_{\alpha}(q)|z|]}{4c \left(1 + \eta_a^{-1} \left(n_{s,\alpha}^{(1)}\right)^2\right) C_{m,s,\alpha}^{(1)}(q) \Delta C_{m,s,\alpha}(q)} p'_{\alpha}(q) dq, \quad (41)$$

где $j = 1, 2, \dots, 6$, $\mathcal{F}_1 = E_{\rho}$, $\mathcal{F}_2 = E_{\phi}$, $\mathcal{F}_3 = E_z$, $\mathcal{F}_4 = H_{\rho}$, $\mathcal{F}_5 = H_{\phi}$, $\mathcal{F}_6 = H_z$ — компоненты поля, отвечающего непрерывной части спектра, $\mathcal{F}_{j;m,s,\alpha}$ — соответствующие компоненты поля отдельной волны непрерывной части спектра, штрих обозначает дифференцирование по аргументу,

$$\begin{aligned} \Delta C_{m,s,\alpha}(q) &= C_{m,s,\alpha}^{(2)}(q) - C_{m,s,\alpha}^{(1)}(q), \\ J_{m,s,\alpha}(q) &= a_{m,s,\alpha}(q) N_{m,\alpha}(q). \end{aligned} \quad (42)$$

В (41) путь интегрирования Γ на комплексной плоскости q проходит по действительной оси, причём в области отрицательных значений q он идёт вдоль нижнего берега разреза, проведённого по отрицательной действительной полуоси от точки ветвления $q = 0$ функций Ханкеля $H_m^{(1)}(k_0 q \rho)$ и $H_m^{(2)}(k_0 q \rho)$. При выводе выражения (41) были учтены формулы (28), а также соотношения [14]

$$\begin{aligned} C_{m,s,\alpha}^{(1)}(q \exp(-i\pi)) &= (-1)^{m+1} C_{m,s,\alpha}^{(2)}(q), & \Delta C_{m,s,\alpha}(q \exp(\pm i\pi)) &= (-1)^{m+1} \Delta C_{m,s,\alpha}(q), \\ p'_{\alpha}(-q) &= -p'_{\alpha}(q). \end{aligned} \quad (43)$$

Мы перешли от интегрирования по положительной полуоси q к интегрированию по всей действительной оси с целью облегчения вычисления компонент поля в дальней зоне. Прежде чем обратиться к этим вычислениям, обсудим аналитические свойства подынтегральных выражений в (41) для $\alpha = e$ и $\alpha = o$. На рис. 2 изображены листы римановых поверхностей подынтегральных выражений с $\alpha = e$ (рис. 2а) и $\alpha = o$ (рис. 2б), отвечающие указанным выше условиям $\text{Im } p_{\alpha} < 0$, $\text{Im } q_{\alpha} < 0$, $\text{Re } R_p > 0$. На данных листах показаны точки ветвления подынтегральных выражений и идущие от них разрезы (подробности см. в [14]), а также контур интегрирования Γ . Кроме того, крестиками отмечены точки $q = q_{m,n}$, являющиеся нулями коэффициента $C_{m,s,\alpha}^{(1)}$, т. е. полюсами подынтегрального выражения в (41)¹; кружками отмечены точки $q = q_{m,\nu}$ ($\nu = 1, 2, \dots$), которые являются нулями коэффициента $C_{m,s,e}^{(1)}$, но располагаются на листе, где $-3\pi < \arg q < -\pi$, $\text{Im } p_e < 0$, $\text{Im } q_e < 0$, $\text{Re } R_p > 0$. Полюсы подынтегрального выражения в (41) в точках $q = q_{m,\nu}$

¹ Нетрудно видеть, что полюсы $q = q_{m,n}$ соответствуют волнам дискретной части спектра, т. к. являются корнями уравнения (29). Заметим, что при отсутствии потерь в среде на частотах из диапазона (40) выполняется соотношение $q_{\hat{\alpha}}(q_{m,n}) = -q_{m,n}^*$ (см. рис. 2), где звёздочка обозначает операцию комплексного сопряжения. Поэтому здесь для определения точек $q = q_{m,n}$ необходимо ввести малые потери, выбрать в качестве $q_{m,n}$ корни уравнения (29), удовлетворяющие неравенству $|\text{Im } q_{m,n}| < |\text{Im } q_{\hat{\alpha}}(q_{m,n})|$, и затем перейти к случаю среды без потерь.

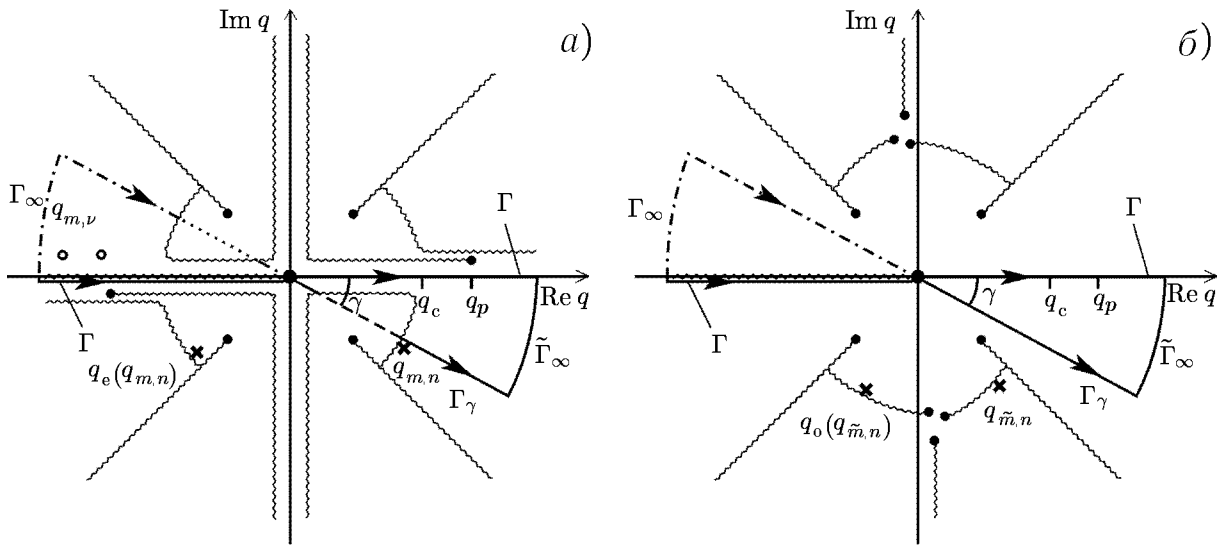


Рис. 2. Римановы поверхности подынтегральных выражений в (41) для «необыкновенной» (а) и «обыкновенной» (б) волн и контуры интегрирования Γ , Γ_γ

отвечают вытекающим (несобственным) модам, направляемым каналом с повышенной плотностью плазмы [14, 27]. Постоянные распространения вытекающих мод даются в данном случае выражением $p_{m,\pm\nu} = p_{\pm,\hat{\alpha}}(q_{m,\nu})$, где $\hat{\alpha} = e$.

Выражение (41) можно преобразовать, выделив из-под знака интеграла несобственные моды. Для этого деформируем контур интегрирования так, чтобы он проходил по прямой $\text{Im } q = -\text{tg } \gamma \text{ Re } q$ (см. рис. 2). Новый путь интегрирования, таким образом, состоит из линии Γ_γ и двух дуг Γ_∞ и $\tilde{\Gamma}_\infty$ бесконечно большого радиуса, причём штрихпунктирная линия на рис. 2 обозначает части контура, проходящие по листу $-3\pi < \arg q < -\pi$, $\text{Im } p_\alpha < 0$; пунктирная линия отвечает части контура, лежащей на листе $-3\pi < \arg q < -\pi$, $\text{Im } p_\alpha > 0$; штриховая линия — части контура, идущей по листу $-\pi < \arg q < \pi$, $\text{Im } p_\alpha > 0$. Заметим, что угол γ можно выбрать так, чтобы он удовлетворял условию

$$\max_{m,\nu} [\arctg(-\text{Im } q_{m,\nu} / \text{Re } q_{m,\nu})] < \gamma \ll \pi/4. \quad (44)$$

Как оказывается, дуга $\tilde{\Gamma}_\infty$ не даёт вклад в интеграл по новому контуру. Несложно показать, что в областях пространства, определяемых соотношениями

$$|z| > \begin{cases} d, & \rho < a; \\ d + (\rho - a) |\eta_a|^{1/2} \varepsilon_a^{-1/2}, & \rho > a \end{cases} \quad (45)$$

при $b < a$ и

$$|z| > \begin{cases} d + (b - a) |\eta_a|^{1/2} \varepsilon_a^{-1/2}, & \rho < b; \\ d + (\rho - a) |\eta_a|^{1/2} \varepsilon_a^{-1/2}, & \rho > b \end{cases} \quad (46)$$

при $b > a$, интеграл по дуге Γ_∞ также обращается в нуль. Очевидно, что при $\rho \gg \max(a, b)$, $|z| \gg d$ границы областей (45), (46) близки к конической поверхности $\rho = |z| \text{tg } \theta_r$, где угол $\theta_r = \arctg \sqrt{\varepsilon_a / |\eta_a|}$ отвечает резонансному направлению.

При переходе к новому контуру интегрирования следует учесть, что некоторые из полюсов $q_{m,n}$ могут оказаться выше линии Γ_γ . В этом случае из-под знака интеграла в (41) выделяются

вычеты, которые уничтожают отвечающие данным полюсам вклады волн дискретной части спектра в (33). В результате соответствующие моды оказываются введенными под знак интеграла по q . Кроме того, в результате перехода к новому контуру из интеграла в (41) выделяются вычеты, отвечающие несобственным модам. Выражение, остающееся под интегралом, можно преобразовать так, чтобы интегрирование проводилось только по контуру $\Gamma_\gamma^{(+)}$, который является частью контура Γ_γ , лежащей в 4-м квадранте. При этом для собственных мод, оставшихся невведенными под знак интеграла, и несобственных мод, выделенных из-под знака интеграла, а также волн, отвечающих значениям $q \in \Gamma_\gamma^{(+)}$, будут справедливы соотношения ортогональности, совпадающие по форме с (34)–(36), если в последних контур интегрирования по действительным значениям ρ заменить на контур в комплексной плоскости ρ , состоящий из участка $0 < \rho < \rho_0 = \max(a, b)$, расположенного на действительной оси ρ , и луча, идущего под углом γ к действительной оси от $\rho = \rho_0$ до бесконечности в полуплоскости $\text{Im } \rho > 0$. В итоге оказывается, что коэффициенты возбуждения вытекающих мод $a_{m,\nu}$ и волн с поперечными волновыми числами $q \in \Gamma_\gamma^{(+)}$ могут быть вычислены методом, основанным на лемме Лоренца, аналогично тому, как это сделано в [24] для азимутально-симметричных мод.

Используя выражение (41), найдём поле излучения источников при $r = (\rho^2 + z^2)^{1/2} \rightarrow \infty$, основной вклад в которое, как известно, дают окрестности седловых точек подынтегрального выражения, отвечающего в (41) «необыкновенной» (распространяющейся) волне. Деформируя контур интегрирования на комплексной плоскости q так, чтобы он проходил по путям наискорейшего спуска в окрестности седловых точек, и используя некоторые результаты работ [23, 24], где аналогичные расчёты проводились применительно к случаю $m = 0$, получим

$$\mathcal{F}_j = \sum_i \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{p'_e(q_{\zeta_i}) W_{j;m,s}(q_{\zeta_i})}{2r [q_{\zeta_i} p''_e(q_{\zeta_i}) \sin \theta |\cos \theta|]^{1/2}} \times \\ \times \exp \left[-im\phi - ik_0 q_{\zeta_i} r \sin \theta - ik_0 p_e(q_{\zeta_i}) r |\cos \theta| + i \frac{\pi m}{2} \right]. \quad (47)$$

Здесь r, θ, ϕ — сферические координаты, $s = +$ и $s = -$ при $\theta < \pi/2$ и $\pi/2 < \theta < \pi$ соответственно, суммирование по i проводится по седловым точкам $q = q_{\zeta_i}(\theta)$, являющимся корнями уравнения

$$p'_e(q) + |\text{tg } \theta| = 0. \quad (48)$$

Остальные величины в (47) определяются следующим образом:

$$W_{j;m,s}(q) = \begin{cases} f_j^{(1)}(q) V_m^{(1)}(q), & q \in (-\infty, -q_p], q \in [0, q_c]; \\ f_j^{(2)}(-q_e(q)) V_m^{(2)}(-q_e(q)), & q \in [-q_p, -q_c], \end{cases} \\ f_1^{(k)} = -i(p_{s,e} n_{s,e}^{(k)} + g_a)/\varepsilon_a, \quad f_2^{(k)} = -1, \quad f_3^{(k)} = i n_{s,e}^{(k)} q_e^{(k)}/\eta_a, \\ f_4^{(k)} = p_{s,e}, \quad f_5^{(k)} = -i n_{s,e}^{(k)}, \quad f_6^{(k)} = -q_e^{(k)}, \quad k = 1, 2; \\ V_m^{(1)} = \Delta C_{m,s,e}(q) V_m^{(0)}, \quad V_m^{(2)} = C_{m,s,e}(q) V_m^{(0)}, \\ V_m^{(0)} = -k_0 J_{m,s,e}(q) \left[c \left(1 + \eta_a^{-1} \left(n_{s,e}^{(1)} \right)^2 \right) C_{m,s,e}^{(1)}(q) \Delta C_{m,s,e}(q) \right]^{-1}. \quad (49)$$

Очевидно, что положение седловых точек не зависит от азимутального индекса, т. е. значения q_{ζ_i} те же, что и в случае азимутально-симметричного поля [23, 24]. Как видно из выражения (47),

полученное поле действительно удовлетворяет условию излучения на бесконечности ($r \rightarrow \infty$), что и следовало ожидать.

Используя формулу (47) и действуя по аналогии с [23], найдём диаграмму направленности излучения по мощности:

$$D(\theta, \phi) = \frac{c}{32\pi} \frac{1}{\sin \theta \cos^2 \theta} \sum_i \frac{p_e'^2(q_{\zeta_i}(\theta))}{|q_{\zeta_i}(\theta) p_e''(q_{\zeta_i}(\theta))|} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{\tilde{m}=-\infty}^{+\infty} P_{m,\tilde{m},s}(|q_{\zeta_i}(\theta)|) \exp[-i(m - \tilde{m})\phi], \quad (50)$$

где

$$P_{m,\tilde{m},s}(q) = \begin{cases} \sigma_s \operatorname{Re} \left[W_{1;m,s}(q) W_{5;\tilde{m},s}^*(q) - W_{2;m,s}(q) W_{4;\tilde{m},s}^*(q) \right], & q \in [0, q_c]; \\ \sigma_s \operatorname{Re} \left[W_{1;m,s}(qe^{-i\pi}) W_{5;\tilde{m},s}^*(qe^{-i\pi}) - W_{2;m,s}(qe^{-i\pi}) W_{4;\tilde{m},s}^*(qe^{-i\pi}) \right], & q \in [q_c, \infty), \end{cases}$$

$$\sigma_{\pm} = \pm 1. \quad (51)$$

Заметим, что диаграмма направленности (50) так же, как и в случае азимутально-симметричного поля, регулярна при $\theta \rightarrow 0$ и имеет интегрируемую особенность вблизи конуса Стори $\theta = \theta_S = -\arctg p_e'(q_S)$, где величина q_S определяется из уравнения $p_e''(q_S) = 0$. Наличие вытекающих мод приводит к возникновению у диаграммы направленности резких максимумов в направлениях $\theta = \theta_{m,\nu} = -\arctg p_e'(\operatorname{Re} q_{m,\nu})$, близких к резонансному направлению $\theta = \theta_r$ ². Действительно, как видно из (49) и (51), каждая из функций $P_{m,\tilde{m},s}(q)$, входящих в формулу для диаграммы направленности, имеет полюсы в точках $q = q_{m,\nu} \exp(i\pi)$, расположенные в окрестности действительной оси ($|\operatorname{Im} q_{m,\nu}| \ll |\operatorname{Re} q_{m,\nu}|$). Поэтому при $q \approx |\operatorname{Re} q_{m,\nu}|$ функция $P_{m,\tilde{m},s}(q)$ резко возрастает, что и приводит к возникновению соответствующих максимумов.

5. ИЗЛУЧАЕМАЯ МОЩНОСТЬ

Интегрирование диаграммы направленности $D(\theta, \phi)$ по полному телесному углу даёт мощность P_{rad} , излучаемую в фоновую среду:

$$P_{\text{rad}} = \frac{c}{16} \sum_{s=-,+} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} q^{-1} p_e'^2(q) P_{m,m,s}(q) dq. \quad (52)$$

С учётом собственных мод канала результирующее выражение для полной мощности излучения принимает вид

$$P_{\Sigma} = \sum_{m,\pm n} P_{m,\pm n} + P_{\text{rad}}, \quad (53)$$

где $P_{m,\pm n}$ — мощность, идущая в собственную моду с индексами $m, \pm n$.

Полную мощность излучения можно отыскать, и не ограничиваясь рамками диапазона (40). При отсутствии потерь в среде для волн дискретной и непрерывной частей спектра с действительными постоянными распространения справедливы соотношения ортогональности в энергетическом смысле:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} ([\mathbf{E}_{m,n}(\mathbf{r}), \mathbf{H}_{\tilde{m},\tilde{n}}^*(\mathbf{r})] + [\mathbf{E}_{\tilde{m},\tilde{n}}^*(\mathbf{r}), \mathbf{H}_{m,n}(\mathbf{r})]) \mathbf{z}_0 \rho d\rho d\phi = \frac{16\pi}{c} P_{m,n} \delta_{m,\tilde{m}} \delta_{n,\tilde{n}}, \quad (54)$$

² Указанные особенности диаграммы направленности наблюдаются в полупространстве $z > 0$. В полупространстве $z < 0$ аналогичные особенности имеют место при $\theta = \pi - \theta_S$ и $\theta = \pi - \theta_{m,\nu}$.

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\infty ([\mathbf{E}_{m,s,\alpha}(\mathbf{r}, q), \mathbf{H}_{\tilde{m},\tilde{n}}^*(\mathbf{r})] + [\mathbf{E}_{\tilde{m},\tilde{n}}^*(\mathbf{r}), \mathbf{H}_{m,s,\alpha}(\mathbf{r}, q)]) \mathbf{z}_0 \rho d\rho d\phi = 0, \quad (55)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\infty ([\mathbf{E}_{m,s,\alpha}(\mathbf{r}, q), \mathbf{H}_{\tilde{m},\tilde{s},\tilde{\alpha}}^*(\mathbf{r}, \tilde{q})] + [\mathbf{E}_{\tilde{m},\tilde{s},\tilde{\alpha}}^*(\mathbf{r}, \tilde{q}), \mathbf{H}_{m,s,\alpha}(\mathbf{r}, q)]) \mathbf{z}_0 \rho d\rho d\phi =$$

$$= \frac{16\pi}{c} \mathcal{P}_{m,s,\alpha}(q) \delta(q - \tilde{q}) \delta_{m,\tilde{m}} \delta_{s,\tilde{s}} \delta_{\alpha,\tilde{\alpha}}, \quad (56)$$

где

$$\mathcal{P}_{m,+, \alpha}(q) = -\mathcal{P}_{m,-, \alpha}(q) = -\frac{c}{2k_0^2} \left[\frac{dp_\alpha(q)}{dq} \right]^{-1} \left[1 + (n_{+, \alpha}^{(1)})^2 / \eta_a \right] \left[|C_{m,+, \alpha}^{(1)}(q)|^2 + |C_{m,+, \alpha}^{(2)}(q)|^2 \right]. \quad (57)$$

Процедура вывода формул (54)–(57) во многом аналогична доказательству соотношений ортогональности (34)–(36) и здесь не приводится.

С учётом соотношений (54)–(56) выражение для полной мощности излучения приобретает следующий вид:

$$P_\Sigma =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left\{ \sum_n [|a_{m,n}|^2 + |a_{m,-n}|^2] \mathcal{P}_{m,n} + \sum_{\alpha=o,e} \int [|a_{m,+, \alpha}(q)|^2 + |a_{m,-, \alpha}(q)|^2] \mathcal{P}_{m,+, \alpha}(q) dq \right\}, \quad (58)$$

где интегрирование проводится по положительным действительным значениям q , при которых постоянные распространения $p_{s,\alpha}(q)$ являются чисто действительными. Заметим, что $P_{m,\pm n} = |a_{m,\pm n}|^2 \mathcal{P}_{m,n}$. Очевидно, что в рассматриваемом нами частотном диапазоне (40) интеграл, отвечающий нераспространяющейся «обыкновенной» волне ($\alpha = o$), вклада в (58) не даёт.

6. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЁТОВ МОЩНОСТИ ИЗЛУЧЕНИЯ

Итак, нами были получены выражения для мощности излучения заданных источников при наличии цилиндрического канала с повышенной плотностью плазмы. В данном разделе в качестве примера приведём результаты расчёта мощности излучения кольцевых электрических токов, изображённых на рис. 3.

Рассмотрим источник, представляющий собой однородный кольцевой электрический ток $\mathbf{j}^{(\perp)}(\mathbf{r})$, ось которого перпендикулярна $\mathbf{B}_0$ (рис. 3). Плотность такого тока может быть записана следующим образом:

$$\mathbf{j}^{(\perp)} = (zy_0 - yz_0) I_0 b^{-1} \delta(x) \delta(\sqrt{y^2 + z^2} - b), \quad (59)$$

где x, y, z — декартовы координаты, b — радиус кольца ($b < a$).

Расчёт мощности излучения был проведён для однородного плазменного канала с плотностью $\tilde{N}$ при $\rho < a$. Напомним, что в диапазоне (40) канал с повышенной плотностью плазмы наряду с собственными модами направляет также слабовытекающие несобственные моды, действительные части комплексных постоянных распространения $p_{m,\nu}$ которых удовлетворяют условию

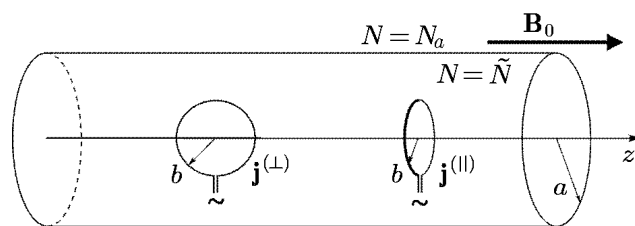


Рис. 3. Расположение источников с токами $\mathbf{j}^{(\perp)}$ и $\mathbf{j}^{(\parallel)}$

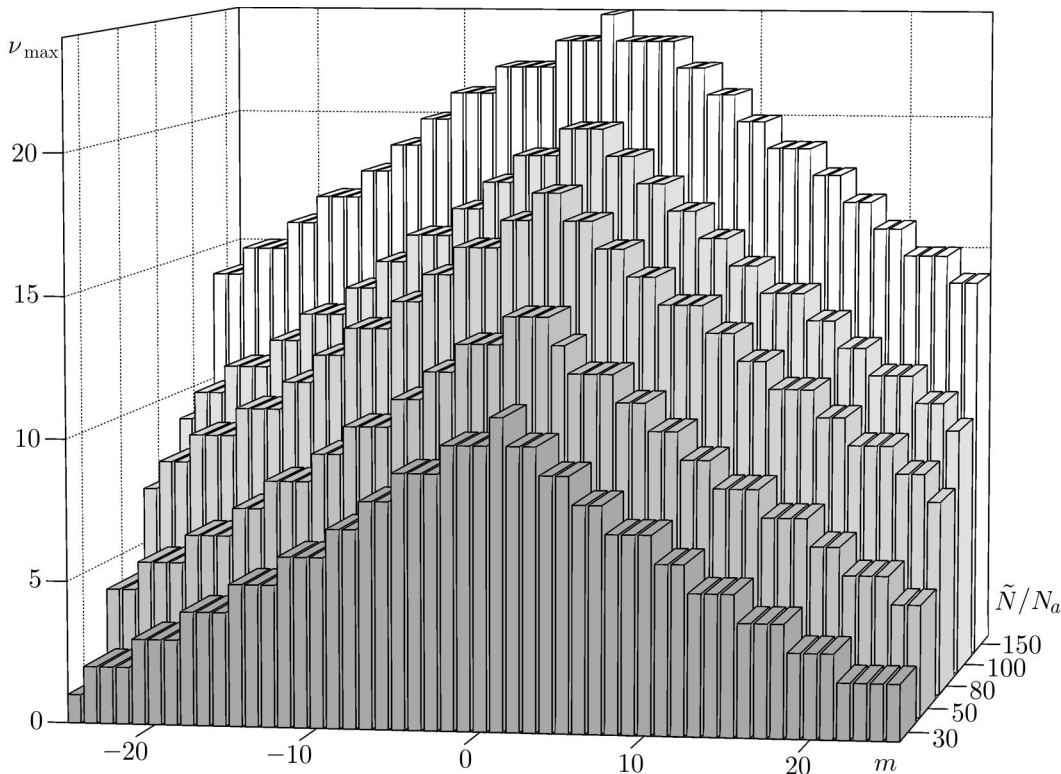


Рис. 4. Число $\nu_{\max}$ слабывтекающих мод, удовлетворяющих условию (60), при различных значениях азимутального индекса m и плотности плазмы $\tilde{N}$ внутри канала для $\omega/(2\pi) = 30$ кГц, $a = 5$ м, $B_0 = 0,5$ Гс ($\omega_H = 8,78 \cdot 10^6$ с $^{-1}$), $N_a = 10^6$ см $^{-3}$ ($\omega_p = 5,64 \cdot 10^7$ с $^{-1}$)

$$\tilde{P}_c < \operatorname{Re} p_{m,\nu} < \tilde{P}, \quad (60)$$

где $\tilde{P}^2 = \tilde{\varepsilon} + |\tilde{g}|$, $\tilde{P}_c^2 \approx 4\tilde{\varepsilon}$ (см. [27] и рис. 1). На рис. 4 приведена диаграмма, показывающая число $\nu_{\max}$ вытекающих мод, удовлетворяющих условию (60), при различных значениях азимутального индекса m и плотности плазмы $\tilde{N}$ внутри канала для $\omega/2\pi = 30$ кГц, $a = 5$ м и заданных значений $B_0 = 0,5$ Гс ($\omega_H = 8,78 \cdot 10^6$ с $^{-1}$), $N_a = 10^6$ см $^{-3}$ ($\omega_p = 5,64 \cdot 10^7$ с $^{-1}$), отвечающих условиям активных ионосферных экспериментов по созданию искусственных дактов с повышенной плотностью плазмы [21].

Нетрудно убедиться, что источник (59) возбуждает только несимметричные волны с азимутальными индексами $m = \pm 1, \pm 3, \dots$. Отметим, что при выбранных параметрах собственные моды плазменного канала дают пренебрежимо малый вклад в полную мощность излучения, поэтому их можно просто не учитывать. Данный факт объясняется особенностями структуры полей собственных мод в рассматриваемой области частот [27]. Таким образом, имеем $P_\Sigma \approx P_{\text{rad}}$. Для вычисления P_{rad} (см. (52)) нам потребуется величина $J_{m,s,e}(q)$, которая в случае источника (59) описывается при нечётных m следующим выражением:

$$J_{m,+,e}(q) = -J_{m,-,e}(q) = 4I_0 \exp[i\pi(m-1)/2] \int_0^b \sum_{k=1}^2 B_{m,+,e}^{(k)} \left\{ \frac{\tilde{n}_{+,e}^{(k)} \tilde{q}_e^{(k)} \rho}{\tilde{\eta} \sqrt{b^2 - \rho^2}} \cos(k_0 p_e \sqrt{b^2 - \rho^2}) \times \right. \\ \left. \times J_m(k_0 \tilde{q}_e^{(k)} \rho) - \sin(k_0 p_e \sqrt{b^2 - \rho^2}) \left[\frac{\tilde{n}_{+,e}^{(k)} p_e + \tilde{g}}{\tilde{\varepsilon}} J_{m+1}(k_0 \tilde{q}_e^{(k)} \rho) + m \tilde{a}_e^{(k)} \frac{J_m(k_0 \tilde{q}_e^{(k)} \rho)}{k_0 \tilde{q}_e^{(k)} \rho} \right] \right\} d\rho. \quad (61)$$

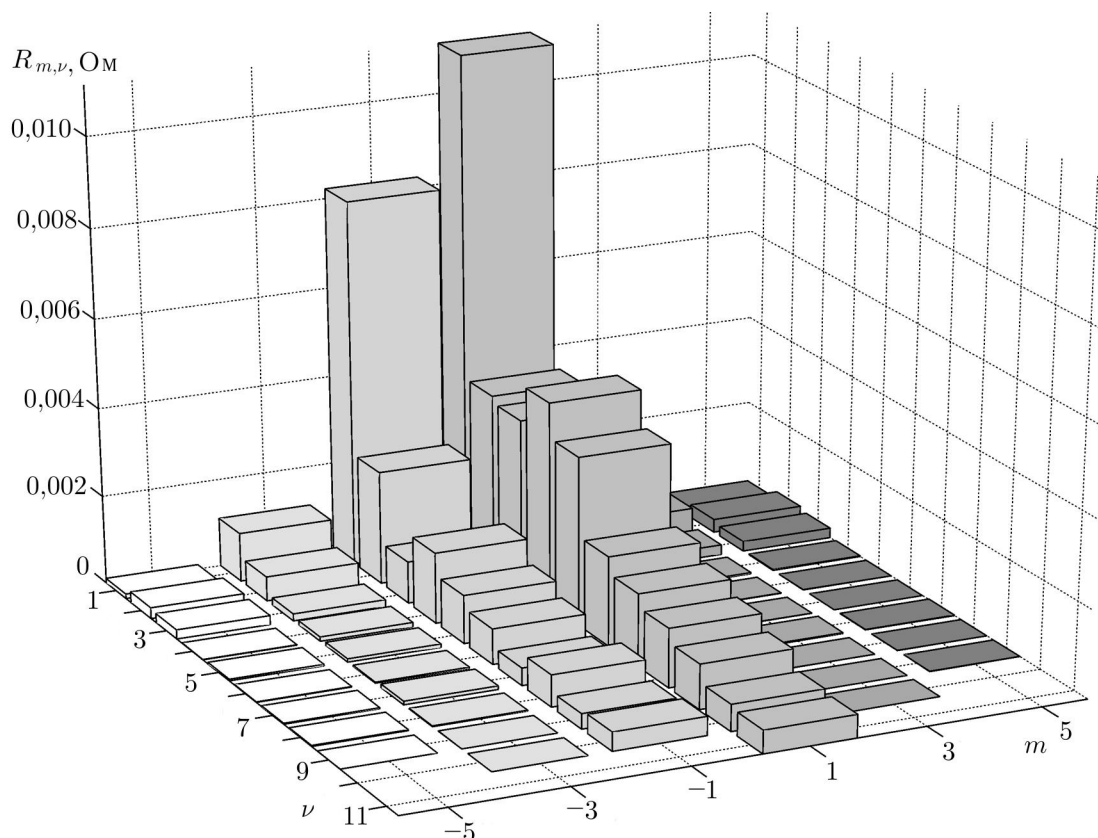


Рис. 5. Зависимость парциальных сопротивлений излучения $R_{m,\nu}$ в слабовытекающие моды, возбуждаемые током $\mathbf{j}^{(\perp)}$, от азимутального и радиального индексов при $b = 2,5$ м, $\tilde{N} = 3 \cdot 10^7$ см $^{-3}$; значения остальных параметров те же, что и для рис. 4

Оказывается, что при $\tilde{N} \gg N_a$, когда все несобственные моды, постоянные распространения которых удовлетворяют условию (60), являются слабовытекающими [27], расстояние между отвечающими им соседними максимумами функций $P_{m,m,s}(q)$ в (52) существенно превышает ширину максимумов. В этом случае при вычислении интеграла от $q^{-1}p_e'^2(q)P_{m,m,s}(q)$ по окрестности максимума $|\operatorname{Re} q_{m,\nu}| - \Delta q \leq q \leq |\operatorname{Re} q_{m,\nu}| + \Delta q$ начиная с некоторого значения $\Delta q = \Delta_{m,\nu} \ll \ll |\operatorname{Re}(q_{m,\nu+1} - q_{m,\nu})|$ результат интегрирования практически перестаёт зависеть от Δq . Очевидно, что величину

$$P_{m,\pm\nu} = \frac{c}{16} \int_{|\operatorname{Re} q_{m,\nu}| - \Delta_{m,\nu}}^{|\operatorname{Re} q_{m,\nu}| + \Delta_{m,\nu}} q^{-1} p_e'^2(q) P_{m,m,\pm}(q) dq = \int_{|\operatorname{Re} q_{m,\nu}| - \Delta_{m,\nu}}^{|\operatorname{Re} q_{m,\nu}| + \Delta_{m,\nu}} |a_{m,\pm,e}(q)|^2 \mathcal{P}_{m,\pm,e}(q) dq \quad (62)$$

можно назвать парциальной мощностью, идущей в вытекающую моду с индексами $m, \pm\nu$. Описанное поведение подынтегрального выражения в (52) свидетельствует о том, что для слабовытекающих мод приближённо имеет место энергетическая ортогональность. Поэтому для отыскания мощности, идущей в данные моды, вполне приемлемо суммирование величин (62). При этом парциальная мощность $P_{m,\nu}$ может также быть подсчитана с высокой степенью точности путём интегрирования плотности потока энергии соответствующей моды по поперечному сечению $z = z_{m,\nu} = \text{const}$ в пределах $0 \leq \rho \leq z \operatorname{tg} \theta_{m,\nu}^{(r)}$, где $\theta_{m,\nu}^{(r)}$ — угловая координата границы области, в которой несобственные моды, выделенные из-под знака интеграла, экспоненциально

спадают по r (см. [14]). Величина $z_{m,\nu}$ выбирается таким образом, чтобы выполнялось условие $(|\eta_a|/\varepsilon_a)^{1/2} \max(a, b) \ll z_{m,\nu} \ll |k_0 \operatorname{Im} p_{m,\nu}|^{-1}$. Примечательно, что численные расчёты мощностей $P_{m,\nu}$, выполненные в соответствии с описанными выше способами, дают практически совпадающие результаты.

На рис. 5 приведена диаграмма, показывающая зависимость парциальных сопротивлений излучения $R_{m,\nu} = 2(P_{m,\nu} + P_{m,-\nu})/|I_0|^2$ от азимутального m и радиального ν индексов ($P_{m,\nu} = P_{m,-\nu}$) в случае возбуждения несимметричных мод источником (59) радиуса $b = 2,5$ м в дакте с плотностью плазмы $\tilde{N} = 3 \cdot 10^7$ см⁻³. Остальные параметры те же, что и для рис. 4. При выбранных параметрах все несобственные моды, принадлежащие области (60), действительно являются слабовытекающими. С увеличением индекса ν величина $\operatorname{Re} p_{m,\nu}$ и число мелкомасштабных вариаций поля моды по радиусу увеличиваются (см. [27]), что приводит к уменьшению $J_{m,s,e}(q_{m,\nu})$ и, как следствие, парциальных сопротивлений излучения³. Как видно из рис. 5, моды с азимутальными индексами $|m| \geq 3$ дают весьма малый вклад в полную мощность излучения по сравнению с модами, отвечающими $m = \pm 1$. Это объясняется тем, что поля мод с достаточно большими значениями $|m|$ «отжаты» от оси системы, что приводит к слабому их возбуждению источником (59).

Таблица 1 позволяет судить о влиянии дакта с повышенной плотностью плазмы на полное сопротивление излучения $R_{\perp} = 2P_{\Sigma}/|I_0|^2$ тока $\mathbf{j}^{(\perp)}$ при тех же значениях параметров ω , a , b , B_0 и N_a , что и для рис. 5. Для сравнения здесь же приведены значения относительного увеличения полного сопротивления излучения $R_{\parallel}$, отвечающего электрическому току $\mathbf{j}^{(\parallel)}(\mathbf{r}) = \phi_0 I_0 \delta(z) \delta(\rho - b)$, ось которого параллельна внешнему магнитному полю $\mathbf{B}_0$ (см. [22] и рис. 3). При отсутствии канала, т. е. в однородной замагниченной плазме с плотностью $N = N_a = 10^6$ см⁻³, сопротивления излучения токов $\mathbf{j}^{(\perp)}$ и $\mathbf{j}^{(\parallel)}$ при выбранных значениях ω , b , B_0 составляют $R_{\perp,a} = 2,30 \cdot 10^{-3}$ Ом и $R_{\parallel,a} = 3,53 \cdot 10^{-3}$ Ом соответственно.

На рис. 6а и 6б изображены зависимости сопротивления излучения $R_{\perp}$ источника (59) от его радиуса b при $\tilde{N} = 3 \cdot 10^7$ см⁻³ и $\tilde{N} = 10^8$ см⁻³ соответственно (значения остальных параметров прежние).

Таблица 1

$\tilde{N}, \text{см}^{-3}$	$R_{\perp}/R_{\perp,a}$	$R_{\parallel}/R_{\parallel,a}$
$3 \cdot 10^7$	25,8	22,6
$5 \cdot 10^7$	40,5	33,7
$8 \cdot 10^7$	56,1	47,3
$1 \cdot 10^8$	66,5	54,9

Как видно из представленных данных, в свистовом диапазоне частот (40) наличие канала с повышенной плотностью плазмы может приводить к значительному увеличению полной мощности излучения однородных кольцевых электрических токов по сравнению со случаем их размещения в однородной фоновой плазме. При $a > b$, $k_0 b |\tilde{\eta}| > 1$ основная доля излучаемой мощности идёт в выделяемые из непрерывного спектра слабовытекающие моды, постоянные распро-

странения которых удовлетворяют условию (60). Заметим, что в случае источника (59) главный вклад в излучаемую мощность дают моды с азимутальными индексами $m = \pm 1$, причём с увеличением плотности плазмы в канале заметно возрастает относительный вклад мод с индексом $m = 1$. Обратим внимание на то, что в рассматриваемом случае полное сопротивление излучения однородного кольцевого электрического тока довольно слабо зависит от угла между осью симметрии источника и направлением внешнего магнитного поля. Примечательно, что согласно результатам работы [28] в свистовом диапазоне частот (при условии $\omega \gg \omega_{\text{ЛН}}$) аналогичное поведение сопротивления излучения данного источника имеет место и при его размещении в однородной магнитоактивной плазме.

Следует отметить, что для указанных параметров полные сопротивления излучения $R_{\perp}$, $R_{\parallel}$

³ Заметим, что в случае источника (59) фактор возбуждения $J_{m,s,\alpha}$ (см. (42), (61)) содержит только компоненты E_{ρ} и E_z , в которые мелкомасштабная (квазиэлектростатическая) составляющая вносит существенный вклад [27].

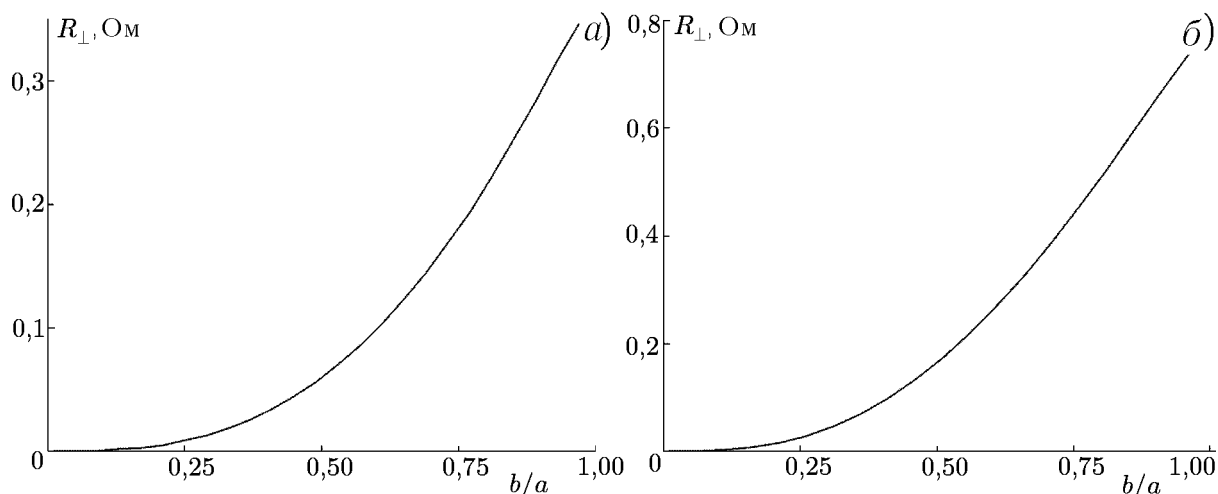


Рис. 6. Зависимости сопротивления излучения $R_{\perp}$ от радиуса источника при $\tilde{N} = 3 \cdot 10^7 \text{ см}^{-3}$ (а) и $\tilde{N} = 10^8 \text{ см}^{-3}$ (б); значения остальных параметров те же, что и для рис. 4

токов $\mathbf{j}^{(\perp)}$, $\mathbf{j}^{(\parallel)}$ при наличии плазменного канала оказываются достаточно близкими к сопротивлениям излучения $\tilde{R}_{\perp}$, $\tilde{R}_{\parallel}$, отвечающим расположению этих же токов в однородной плазме с плотностью $N = \tilde{N}$, и довольно быстро стремятся к $\tilde{R}_{\perp}$, $\tilde{R}_{\parallel}$ с увеличением радиуса канала a . Заметим, что применительно к азимутально-симметричному однородному кольцевому электрическому току, расположенному в слабонеоднородном канале с повышенной плотностью плазмы, такой предельный переход к случаю однородной плазмы был ранее рассмотрен в работе [29] (см. также [18]) в рамках некоторого приближённого подхода.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе получено строгое решение задачи о возбуждении электромагнитного поля ограниченными в пространстве заданными электрическими и магнитными токами в магнитоактивной плазме при наличии цилиндрического плазменного канала. Решение представлено в виде разложения по системе собственных волн канала со смешанным (дискретно-непрерывным) спектром. Проведён подробный математический анализ построенного решения и дана его физическая интерпретация. Показано, что коэффициенты возбуждения волн дискретной и непрерывной частей спектра, а также несобственных волн, выделяемых из непрерывного спектра, могут быть получены методом, основанным на использовании леммы Лоренца и обобщающим известную теорию возбуждения открытых волноводов в изотропной среде [8, 9, 13] на случай открытых направляющих систем с гиротропным заполнением, находящихся в фоновой гиротропной среде.

На основе полученного решения исследована структура поля излучения несимметричных источников в дальней зоне при наличии плазменного канала, выведены и проанализированы выражения для диаграммы направленности и полной мощности излучения таких источников. Установлено, что в свистовом диапазоне частот наличие канала с повышенной плотностью плазмы может приводить к заметному увеличению полной мощности излучения однородного кольцевого электрического тока, находящегося на оси канала, по сравнению со случаем размещения такого тока в однородной фоновой плазме независимо от его ориентации. При этом в случае достаточно большой плотности плазмы внутри канала основная доля излучаемой мощности идёт в поддерживаемые каналом несобственные слабовытекающие моды.

Наконец, отметим, что данное исследование является необходимым этапом для последующего рассмотрения особенностей нелинейного формирования самоподдерживающихся цилиндрических волноводных каналов [30], которые могут возникать в магнитоактивной плазме при распространении интенсивных несимметричных свистовых волн. Такое исследование представляется весьма актуальным, поскольку в опубликованных к настоящему времени работах подробно изучено лишь самовоздействие азимутально-симметричных свистов (см., например, [17, 31–33]).

Настоящая работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 01-02-16949, 01-02-17390, 03-02-06475), программ «Ведущие научные школы» (грант № НШ-1639.2003.2) и «Университеты России» (проект № УР.01.01.039), а также Министерства образования РФ (гранты № Е02-3.5-478, Е02-3.5-479) и Минпромнауки РФ (контракт № 40.020.1.1.1171).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Marcuvitz N. // IRE Trans. Antennas Propagat. 1956. V. AP-4, No. 3. P. 192.
2. Таланов В. И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1958. Т. 1, № 3. С. 64.
3. Миллер М. А., Таланов В. И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1961. Т. 4, № 5. С. 795.
4. Таланов В. И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1961. Т. 4, № 6. С. 1065.
5. Tamir T., Oliner A. A. // Proc. IEEE. 1963. V. 51, No. 2. P. 317.
6. Вайнштейн Л. А. Открытые резонаторы и открытые волноводы. М.: Сов. радио, 1966. 475 с.
7. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. Т. 1, 2. М.: Мир, 1978. 1110 с.
8. Шевченко В. В. Плавные переходы в открытых волноводах. Введение в теорию. М.: Наука, 1969. 192 с.
9. Шевченко В. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1971. Т. 14, № 8. С. 1242.
10. Маркузе Д. Оптические волноводы. М.: Мир, 1974. 576 с.
11. Seshadri S. R., Yip G. L. // Electron. Lett. 1966. V. 2, No. 1. P. 30.
12. Yip G. L., Seshadri S. R. // Can. J. Phys. 1967. V. 45, No. 11. P. 3627.
13. Маненков А. Б. // Изв. вузов. Радиофизика. 1981. Т. 24, № 1. С. 84.
14. Kondrat'ev I. G., Kudrin A. V., Zaboronkova T. M. Electrodynamics of density ducts in magnetized plasmas. Amsterdam: Gordon and Breach, 1999. 288 p.
15. Helliwell R. A. Whistlers and related ionospheric phenomena. Stanford: Stanford University Press, 1965. 365 p.
16. Helliwell R. A. // Modern Radio Science 1993 / Ed. by H. Matsumoto. New York: Oxford University Press, 1993. P. 189.
17. Вдовиченко И. А., Марков Г. А., Миронов В. А., Сергеев А. М. // Письма в ЖЭТФ. 1986. Т. 44, вып. 5. С. 216.
18. Мареев Е. А., Чугунов Ю. В. Антенны в плазме. Н. Новгород: ИПФ АН СССР, 1991. 232 с.
19. Kostrov A. V., Kudrin A. V., Kurina L. E., Luchinin G. A., Shaykin A. A., Zaboronkova T. M. // Physica Scripta. 2000. V. 62, Pt. 1. P. 51.
20. Голубятников Г. Ю., Егоров С. В., Ерёмин Б. Г., Литвак А. Г., Стриковский А. В., Толкачёва О. Н., Чугунов Ю. В. // ЖЭТФ. 1995. Т. 107, вып. 2. С. 441.
21. Chugunov Yu. V., Markov G. A. // J. Atmos. Sol.-Terr. Phys. 2001. V. 63, No. 17. P. 1775.
22. Заборонкова Т. М., Кондратьев И. Г., Кудрин А. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1994. Т. 37, № 7. С. 887.
23. Заборонкова Т. М., Кондратьев И. Г., Кудрин А. В. // Радиотехника и электроника. 1997. Т. 42, вып. 1. С. 43.
24. Kondrat'ev I. G., Kudrin A. V., Zaboronkova T. M. // Physica Scripta. 1996. V. 54, Pt. 1. P. 96.
25. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. М.: Наука, 1967. 684 с.

26. Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны. М.: Радио и связь, 1988. 440 с.
27. Заборонкова Т. М., Кудрин А. В., Лях М. Ю., Попова Л. Л. // Изв. вузов. Радиофизика. 2002. Т. 45, № 10. С. 835.
28. Wang T. N. C., Bell T. F. // IEEE Trans. Antennas Propagat. 1972. V. AP-20, No. 3. P. 394.
29. Голубятников Г. Ю., Егоров С. В., Костров А. В., Мареев Е. А., Чугунов Ю. В. // ЖЭТФ. 1988. Т. 94, вып. 4. С. 124.
30. Власов С. Н., Таланов В. И. Самофокусировка волн. Н. Новгород: ИПФ РАН, 1997. 220 с.
31. Литвак А. Г. // Вопросы теории плазмы. М.: Атомиздат, 1980. Вып. 10. С. 164.
32. Karpman V. I., Kaufman R. N., Shagalov A. G. // J. Plasma Phys. 1984. V. 31, Pt. 2. P. 209.
33. Кудрин А. В., Курина Л. Е., Марков Г. А. // ЖЭТФ. 1997. Т. 112, вып. 4(10). С. 1285.

¹ Нижегородский государственный технический
университет, г. Нижний Новгород,

Поступила в редакцию
29 мая 2003 г.

² Нижегородский государственный университет
им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия

EXCITATION OF NONSYMMETRIC WAVES BY GIVEN SOURCES IN A MAGNETOPLASMA IN THE PRESENCE OF A CYLINDRICAL PLASMA CHANNEL

T. M. Zaboronkova, A. V. Kudrin, and M. Yu. Lyakh

We consider the problem of excitation of electromagnetic field by spatially bounded arbitrary given sources in a magnetoplasma in the presence of a cylindrical plasma channel aligned with an external magnetic field. We obtain a rigorous solution for the full field comprising both the discrete and continuous parts of the spatial spectrum of excited waves. Expressions for the radiation pattern and total radiated power of given sources are analyzed. For the whistler range, we calculate the radiation power of a ring electric current located in a channel with enhanced plasma density. It is shown that in this range, the presence of such a channel can lead to a significant increase in the radiation power of ring currents as compared with the case where the considered sources are immersed in a uniform background magnetoplasma, regardless of their orientation.

УДК 621.372.81

О СИНТЕЗЕ БРЭГГОВСКИХ РЕФЛЕКТОРОВ ДЛЯ ЭЛЕКТРОННЫХ УСКОРИТЕЛЬНЫХ СТРУКТУР С КВАЗИОПТИЧЕСКИМ ВВОДОМ ИЗЛУЧЕНИЯ

Я. Л. Богомолов, М. И. Петелин, М. Л. Тай, А. Д. Юнаковский

Предложен аналитический метод синтеза радиальных брэгговских рефлекторов для ускорительных структур квазиоптического типа [1, 2], позволяющий обеспечить необходимую добротность структуры и её согласование с падающим волновым потоком.

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

В настоящее время перспективы линейных ускорителей электронов и позитронов связывают с использованием всё более высокочастотной накачки [3–5]. Соответственно, становится более привлекательным использование в таких ускорителях квазиоптических компонентов. Один из возможных вариантов такой структуры [1, 2] (см. рис. 1, 2) представляет собой периодический набор металлических дисков, который облучается волновым потоком, сфокусированным на ось канала, где при заданной величине синхронной инжектированным ультрарелятивистским частицам составляющей осевого электрического поля аккумулируется минимальная энергия микроволнового излучения. Для этого поле должно достаточно быстро спадать в радиальном направлении и, таким образом, параксиальная область должна представлять собой резонатор с добротностью, соответствующей длительности питающего импульса. Параксиальную локализацию поля можно было бы обеспечить перемычками или достаточно узкими зазорами между дисками, однако оба метода чреваты технологическими трудностями. Более привлекательно выглядит гофрировка дисков, превращающая зазор между ними в радиальный брэгговский рефлектор (см. рис. 1). При этом направление осевого электрического поля в двух соседних промежутках между дисками противоположно, что соответствует π -моду E -типа.

Внутренняя часть резонатора должна быть осесимметричной, однако в удалённой от оси части дисков их осевая симметрия должна быть нарушена так (см. рис. 2), чтобы в пределах сектора, в котором локализован падающий волновой поток, рабочая мода резонатора во всех зазорах между дисками имела поля, одинаковые как по величине, так и по направлению. Для этого в секторе питания каждые два соседние радиальные канала должны различаться между собой профилем радиальной гофрировки так, чтобы распространяющиеся в них в радиальном направлении волны сдвигались относительно друг друга по фазе на 180° . Радиальное спадание поля внутри сектора питания должно быть относительно слабым.

С учётом того, что фазовая скорость синхронной электронам гармоники близка к скорости света, период поля в приосевой области должен быть близок к длине волны λ в свободном пространстве. Следовательно, зазор между дисками должен быть меньше, чем $\lambda/2$, а в этом случае в нём может распространяться лишь волна кабельного типа, у которой магнитное поле имеет только азимутальную компоненту, а электрическое — только осевую и радиальную компоненты.

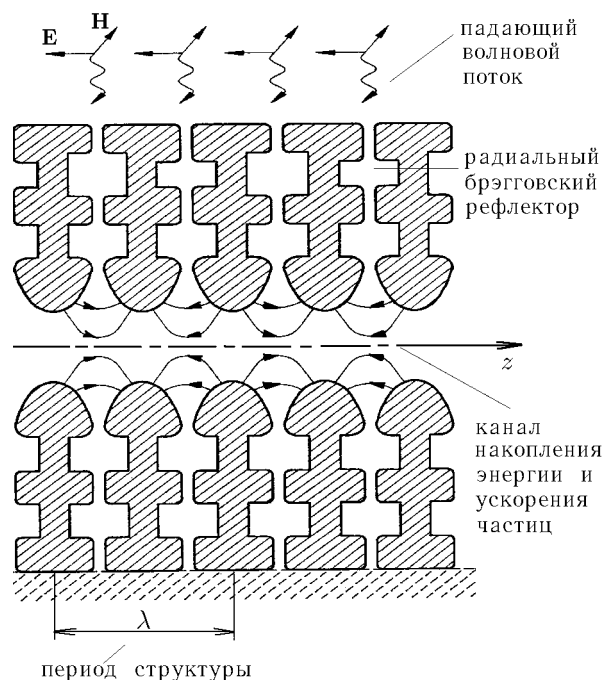


Рис. 1. Продольное сечение квазиоптического ускорителя электронов

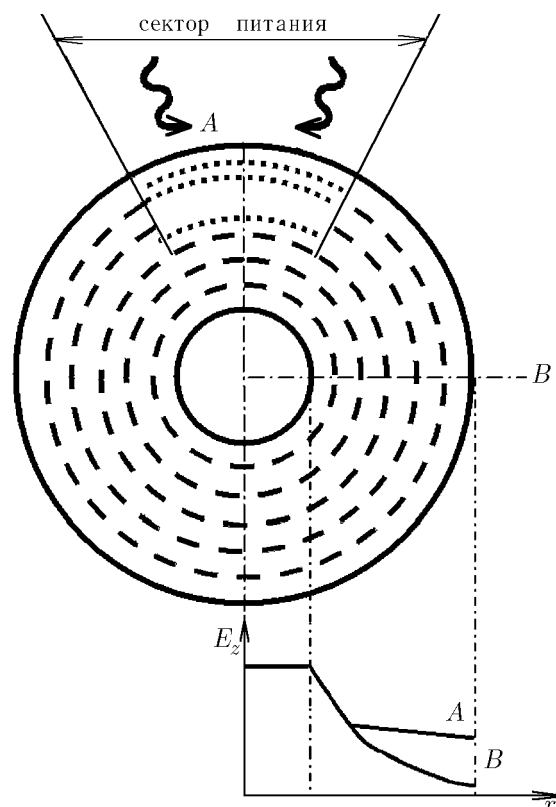


Рис. 2. Радиальный брэгговский рефлектор, питаемый сходящимся волновым потоком

2. ПРИНЯТЫЕ ИДЕАЛИЗАЦИИ

Будем считать, что из сектора питания в структуру поступает одночастотный стационарный сходящийся волновой поток, а излучение из структуры за пределами этого сектора пренебрежимо мало. Таким образом, во всей структуре реализуется режим стоячей волны, когда электрическое и магнитное поля меняются во времени с относительным сдвигом фазы 90° и электрическое поле $\mathbf{E} = \text{Re} [\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}) \exp(i\omega t)]$ можно описывать действительной функцией $\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r})$.

Будем считать, что из технологических соображений и условий электропрочности определены максимальная $d_{\max}$ и минимальная $d_{\min}$ величины зазора между дисками $d(r)$ (см. рис. 1, 3). Другими словами, в дисках, образующих плоские каналы шириной $d_{\min}$, проточены радиальные канавки, зазор в которых равен $d_{\max}$. На каждом из участков с постоянным зазором между дисками $d(r) = \text{const}$ электрическое поле имеет преимущественно z -составляющую. Её радиальная зависимость может быть приближённо описана линейной комбинацией функций Бесселя и Неймана, а на достаточном удалении от оси в виде

$$E_m(x) = A_m \cos x + B_m \sin x, \quad (1)$$

где $x = k(r - r_0)$, $k = \omega/c$, r — радиальная координата, m — номер участка с постоянным зазором, A_m , B_m и r_0 — некоторые постоянные, c — скорость света в вакууме.

На стыке двух соседних участков в квазистационарном приближении можно считать выполненными условия непрерывности тока и напряжения [6]:

$$\frac{dE_m}{dr} = \frac{dE_{m+1}}{dr}, \quad (2)$$

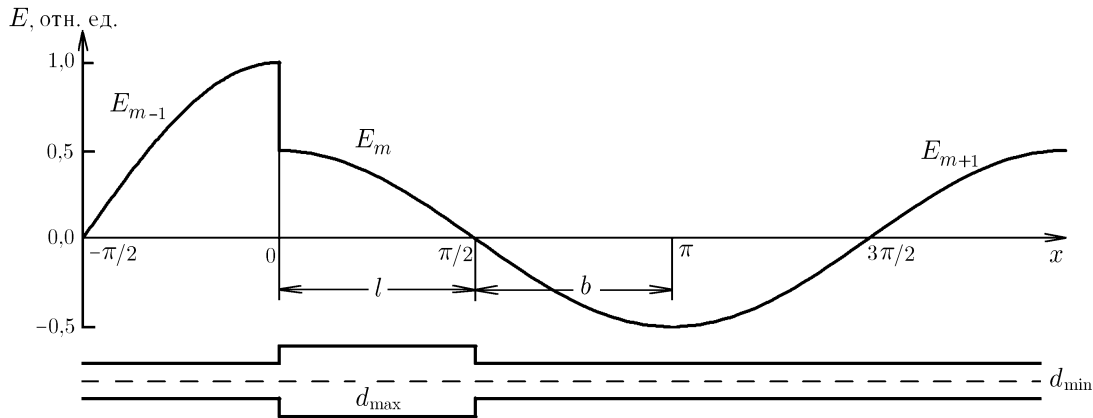


Рис. 3. Нерегулярный канал, максимизирующий отражение волны ($M = d_{\max}/d_{\min} = 2$)

$$E_m d_m = E_{m+1} d_{m+1}. \quad (3)$$

3. НЕРЕГУЛЯРНОСТЬ КАНАЛА, ОБЕСПЕЧИВАЮЩАЯ БЫСТРОЕ РАДИАЛЬНОЕ СПАДАНИЕ ПОЛЯ

Рассмотрим отдельный канал с канавкой в виде участка с зазором $d_m = d_{\max}$, расположенного между двумя участками с одинаковыми зазорами $d_{m-1} = d_{m+1} = d_{\min}$ (см. рис. 4). Для определённости будем считать, что бóльшим m соответствуют бóльшие радиальные расстояния. Зафиксировав отношение

$$M = d_m/d_{m+1} > 1, \quad (4)$$

найдем оптимальное расположение краёв канавки, минимизирующее отношение амплитуд электрического поля в $(m+1)$ -й и $(m-1)$ -й секциях канала:

$$\xi = \frac{|E_{m+1}|_{\max}}{|E_{m-1}|_{\max}}. \quad (5)$$

Выберем начало отсчёта координаты x в ближайшем к левой границе канавки максимуме поля E_{m-1} . Поле на $(m-1)$ -м участке зададим в виде

$$E_{m-1} = A_{m-1} \cos x. \quad (6)$$

По аналогии с обычным волноводным дросселем [7] одну из границ канавки канала представляется целесообразным расположить в максимуме поля E_{m-1} (что минимизирует амплитуду поля E_m), а другую — в нуле поля E_m (что обеспечивает равенство амплитуд полей E_m и E_{m+1}). В результате на основании условий (2), (3) находим поле на m -м участке канала:

$$E_m = \frac{A_{m-1}}{M} \cos x. \quad (7)$$

При этом канал расширяется и сужается в точках $x = 0$ и $x = \pi/2$ соответственно (рис. 3). Таким образом, амплитуда поля в $(m-1)$ -й секции канала оказывается больше амплитуды поля в $(m+1)$ -й секции канала в M раз, т. е.

$$\xi = 1/M. \quad (8)$$

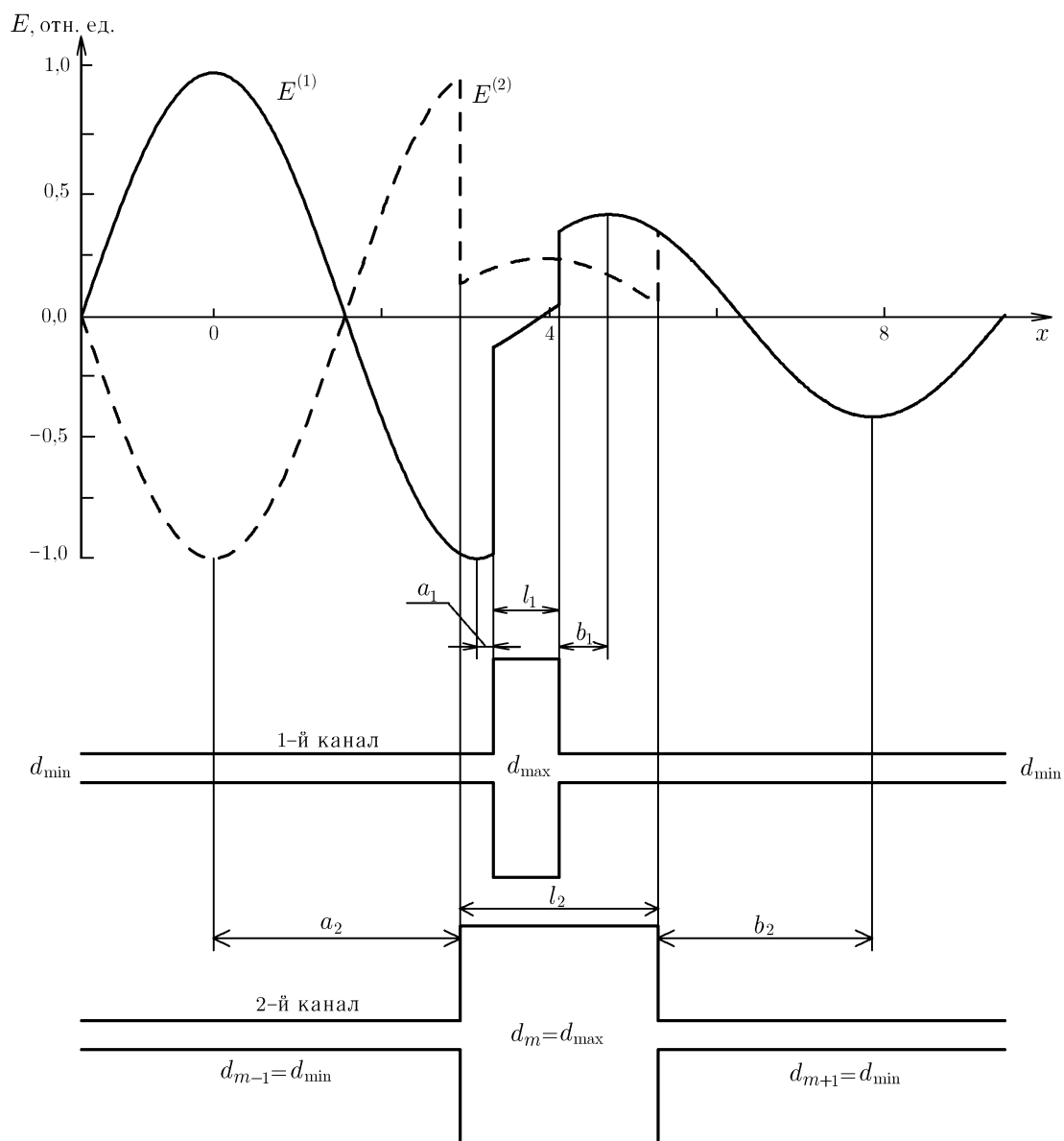


Рис. 4. Система двух нерегулярных каналов, обеспечивающая противофазность полей на выходах; сплошная линия — поле в первом канале, штриховая линия — поле во втором канале ($M = d_{\max}/d_{\min} = 7,5$)

Покажем, что это значение действительно является минимальным при всех возможных расположениях краёв и длинах канавки. Пусть l — длина канавки, a и b — расстояния от краёв канавки до ближайших к ним экстремумов полей E_{m-1} и E_{m+1} соответственно (см. рис. 2, соответствующий случаю $a = 0$). Введём обозначения

$$u = \operatorname{tg} a, \quad v = \operatorname{tg} b, \quad s = a + l + b. \quad (9)$$

Тогда условия (2), (3) имеют вид

$$uA_{m-1} = A_mu - B_m, \quad A_{m-1} = M(A_m + B_mu).$$

Отсюда следует

$$\frac{A_m}{A_{m-1}} = \frac{1 + Mu^2}{M(1 + u^2)}, \quad \frac{B_m}{A_{m-1}} = \frac{u(1 - M)}{M(1 + u^2)}. \quad (10)$$

При использовании условий (2), (3) в точке $x = a + l$ введём новую координату

$$\bar{x} = s - x. \quad (11)$$

Ось $\bar{x}$ направлена противоположно оси x , а её начало отсчёта лежит в точке $x = s$, т. е. в экстремуме поля E_{m+1} . Введение переменной $\bar{x}$ существенно упрощает дальнейшие выкладки.

Обозначая электрическое поле как функцию координаты $\bar{x}$ в виде

$$\bar{E}(\bar{x}) = \bar{A} \cos \bar{x} + \bar{B} \sin \bar{x},$$

для связи поля внутри канавки с полем в $(m+1)$ -й секции аналогично (10) получаем соотношения

$$\frac{\bar{A}_m}{\bar{A}_{m+1}} = \frac{1 + Mv^2}{M(1 + v^2)}, \quad \frac{\bar{B}_m}{\bar{A}_{m+1}} = \frac{(1 - M)v}{M(1 + v^2)}. \quad (12)$$

Поскольку внутри канавки поля, определённые в разных системах отсчёта, одинаковы, должно выполняться равенство $\bar{E}_m(\bar{x}) = \bar{E}_m(s - x) = E_m(x)$, т. е. из (10) и (12) с необходимостью следует

$$A_{m-1} \frac{(Mu^2 + 1) \cos x + u(1 - M) \sin x}{1 + u^2} = \bar{A}_{m+1} \frac{(Mv^2 + 1) \cos \bar{x} + v(1 - M) \sin \bar{x}}{1 + v^2}. \quad (13)$$

Приравнивая коэффициенты при соответствующих гармонических функциях ($\cos \bar{x} = \cos(s - x)$, $\sin \bar{x} = \sin(s - x)$), получаем

$$\xi^2 = \frac{\bar{A}_{m+1}^2}{A_{m-1}^2} = \frac{(1 + M^2 u^2)(1 + v^2)}{(1 + M^2 v^2)(1 + u^2)}, \quad (14)$$

$$\operatorname{ctg} s = \frac{(1 + Mu^2)(1 + Mv^2) - uv(1 - M)^2}{(1 - M)(1 + Muv)(u + v)}. \quad (15)$$

Таким образом, существует процедура, позволяющая определить коэффициент ослабления поля ξ и длину канавки $l = s - a - b$ при заданных значениях M , a и b (или u и v).

Так как $M > 1$, то правая часть (14) стремится к минимальному значению M^{-2} при $u = 0$, $v \rightarrow \infty$, что согласуется с (8). При этом из (9) сразу находим оптимальные значения искомых параметров: $a = n_0 \pi$, $b = \pi/2 + n_1 \pi$, после подстановки которых в (9) и (15) находим $s = n_2 \pi$, $l = \pi/2 + n_3 \pi$; здесь n_0 и n_2 — натуральные числа, n_1 и n_3 — целые неотрицательные числа. Таким образом, получились оптимальные координаты краёв канавки a и $a + l$, предсказанные выше (см. рис. 3).

4. КОМБИНАЦИЯ НЕРЕГУЛЯРНОСТЕЙ, ОБЕСПЕЧИВАЮЩАЯ СИНФАЗНОСТЬ ПОЛЕЙ НА ПЕРИФЕРИИ СОСЕДНИХ КАНАЛОВ

Рассмотрим систему, состоящую из двух соседних каналов с одинаковыми зазорами, но различными по форме и расположению проточками (см. рис. 4). На входе в резонатор (приосевой объём) поля в этих каналах предполагаются одинаковыми по величине, но противоположными по направлению (см. рис. 1, 4), т. е. описываются выражением (1) с одинаковыми по модулю, но

противоположными по знаку постоянными A_{m-1} и B_{m-1} . Необходимо синтезировать отличающиеся профили каналов так, чтобы на периферии (при больших радиусах) поля были одинаковы как по величине, так и по направлению:

$$E_{m+1}^{(2)}(x) \equiv E_{m+1}^{(1)}(x), \quad (16)$$

и минимальны по амплитуде.

Аналогично (8) и (9) введём обозначения u_1, v_1, s_1, ξ_1^2 и u_2, v_2, s_2, ξ_2^2 для каждого из двух каналов. Тогда (14) и (15) определяют две пары равенств, связывающих между собой индексированные величины в первом и во втором каналах. Условие (16) означает, что должны выполняться равенства

$$s_1(u_1, v_1) = s_2(u_2, v_2) + n\pi, \quad \xi_1^2(u_1, v_1) = \xi_2^2(u_2, v_2), \quad (17)$$

где n — целое число.

Задача заключается в нахождении экстремума функций $\xi_1^2(u_1, v_1)$ и $\xi_2^2(u_2, v_2)$ при наличии условий (17).

Введём функцию

$$f_1(u_1, v_1, u_2, v_2, \lambda_1, \mu_1) = \xi_1^2(u_1, v_1) + \lambda_1 [s_1(u_1, v_1) - s_2(u_2, v_2)] + \mu_1 [\xi_1^2(u_1, v_1) - \xi_2^2(u_2, v_2)], \quad (18)$$

где λ_1 и μ_1 — множители Лагранжа. Необходимыми условиями экстремума функции f_1 являются

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} &= \lambda_1 \frac{\partial s_1}{\partial u_1} + (1 + \mu_1) \frac{\partial \xi_1^2}{\partial u_1} = 0, & \frac{\partial f_1}{\partial v_1} &= \lambda_1 \frac{\partial s_1}{\partial v_1} + (1 + \mu_1) \frac{\partial \xi_1^2}{\partial v_1} = 0, \\ \frac{\partial f_1}{\partial u_2} &= -\lambda_1 \frac{\partial s_2}{\partial u_2} - \mu_1 \frac{\partial \xi_2^2}{\partial u_2} = 0, & \frac{\partial f_1}{\partial v_2} &= -\lambda_1 \frac{\partial s_2}{\partial v_2} - \mu_1 \frac{\partial \xi_2^2}{\partial v_2} = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Аналогичные условия получаются и для функции $f_2(u_1, v_1, u_2, v_2, \lambda_2, \mu_2) = \xi_2^2(u_2, v_2) + \lambda_2 (s_1 - s_2) + \mu_2 (\xi_1^2 - \xi_2^2)$, поэтому в дальнейшем для простоты индексы у введённых функций f_1 и f_2 можно опустить.

Из (19) с необходимостью следует

$$\frac{\partial \xi^2}{\partial u} \frac{\partial s}{\partial v} = \frac{\partial \xi^2}{\partial v} \frac{\partial s}{\partial u}. \quad (20)$$

При величине s , не кратной π , соотношение (20) можно переписать в виде

$$\frac{\partial \xi^2}{\partial u} \frac{\partial \operatorname{ctg} s}{\partial v} = \frac{\partial \xi^2}{\partial v} \frac{\partial \operatorname{ctg} s}{\partial u}. \quad (21)$$

Дифференцируя функции (14), (15) по u и v , получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi^2}{\partial u} &= \frac{2u(1+v^2)(M^2-1)}{(1+M^2v^2)(1+u^2)^2}, & \frac{\partial \xi^2}{\partial v} &= \frac{2v(1+M^2u^2)(1-M^2)}{(1+u^2)(1+M^2v^2)^2}, \\ \frac{\partial \operatorname{ctg} s}{\partial u} &= \frac{(1-Mu^2)(1+v^2)(1+M^2v^2)}{(M-1)(u+v)^2(1+Muv)^2}, & \frac{\partial \operatorname{ctg} s}{\partial v} &= \frac{(1-Mv^2)(1+u^2)(1+M^2u^2)}{(M-1)(u+v)^2(1+Muv)^2}. \end{aligned} \quad (22)$$

Подставляя (22) в (21), получаем соотношение

$$u(1-Mv^2) + v(1-Mu^2) = 0. \quad (23)$$

Данное соотношение имеет два решения, $u = -v$ и $Muv = 1$. Поскольку первому решению соответствует $\sin s = 0$ и $\xi = 1$ (абсолютный максимум функции $\xi^2(u, v)$), интерес представляет только решение

$$Muv = 1, \quad (24)$$

при котором

$$\operatorname{ctg} s = \frac{(1 + Mu^2)^2 - u^2(1 - M)^2}{2u(1 - M)(1 + Mu^2)}, \quad (25)$$

$$\xi = \frac{1 + M^2u^2}{M(1 + u^2)}. \quad (26)$$

Согласно (26) ξ является чётной функцией от u , монотонно растущей при $u > 0$. Поэтому совпадение величины ξ для двух каналов с разными значениями u может иметь место только при

$$u_1 = -u_2. \quad (27)$$

При этом условии функция $\operatorname{ctg} s$, являющаяся нечётной функцией от u , может принимать одинаковые значения, лишь обратившись в нуль:

$$(1 + Mu^2)^2 - u^2(1 - M)^2 = 0. \quad (28)$$

В силу условий (27) и (28) получаем

$$u_1 = -u_2 = \frac{M - 1 - \sqrt{(M - 1)^2 - 4M}}{2M}. \quad (29)$$

Подкоренное выражение в (29) положительно только при

$$M \geq M_{\text{кр}} = (1 + \sqrt{2})^2 \approx 5,8, \quad (30)$$

т. е. решение поставленной задачи существует только при $M > M_{\text{кр}}$.

Для соответствующих оптимальных координат левых краёв канавок (см. рис. 4) на основании (9) имеем

$$a_1 = \arctg u_1 + n_1\pi, \quad a_2 = \pi - a_1 + n_2\pi. \quad (31)$$

Теперь из (9), (16) и (17) находим другие оптимальные параметры канавок:

$$b_1 = \arctg[1/(Mu_1)] + n_3\pi, \quad b_2 = \pi - b_1 + n_4\pi, \quad (32)$$

$$l_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{n_5\pi}{2}, \quad l_2 = \frac{3\pi}{4} + \frac{n_6\pi}{2}, \quad (33)$$

$$s_1 = \frac{\pi}{2} + n_7\pi, \quad s_2 = \frac{\pi}{2} + n_8\pi. \quad (34)$$

В формулах (31)–(34) $n_1, n_2, \dots, n_8$ — целые неотрицательные числа.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что данные параметры канавок обеспечивают выполнение условия (16), т. е. обеспечивают противофазность полей на входах в два соседних канала резонатора и синфазность на их периферии.

Найденное из (26), (29) отношение амплитуд полей E_{m+1} и E_{m-1}

$$\xi = \frac{3 - M + \sqrt{(M - 1)^2 - 4M}}{1 - 3M + \sqrt{(M - 1)^2 - 4M}} M \quad (35)$$

с ростом M монотонно убывает; в частности, $\xi = 1$ при $M = (1 + \sqrt{2})^2$ и $\xi \approx 2/M$ при $M \gg 1$.

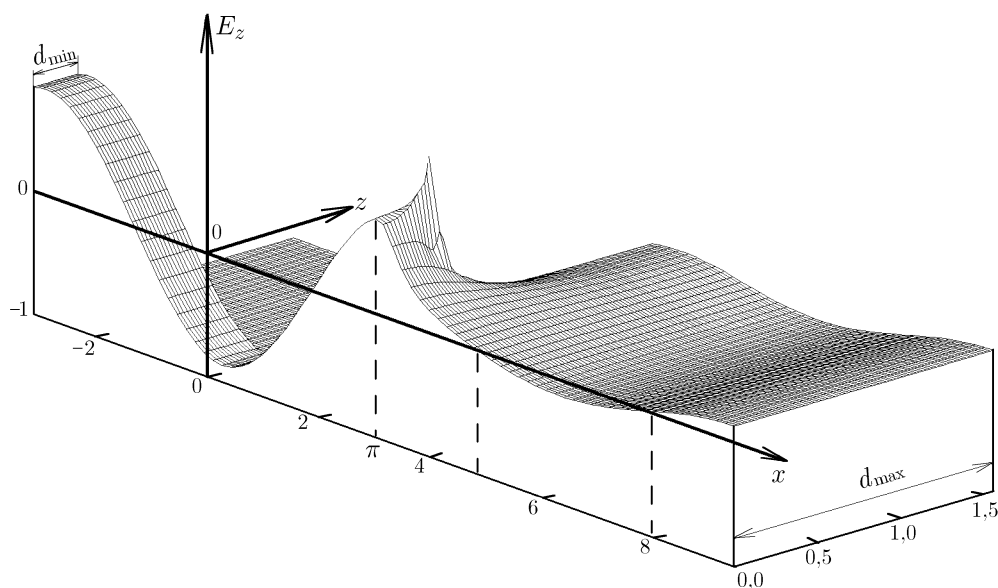


Рис. 5. Поведение компоненты E_z электрического поля в канале с уступом. В окрестности уступа ($x = \pi$) видна зависимость решения от координаты z ($d_{\max} = \lambda/4$, $M = d_{\max}/d_{\min} = 6$)

5. УТОЧНЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕЗУЛЬТАТОВ С ПОМОЩЬЮ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Представленные выше аналитические результаты получены для ступенчатых профилей при использовании условий (2), (3), которые справедливы лишь при ширине канала, малой по сравнению с длиной волны λ . В случае, когда ширина канала сравнима с λ , оптимальные параметры резонаторов могут быть уточнены с помощью численного моделирования, которое также позволяет ответить на вопрос, насколько применимы полученные аналитические решения для реальных, сглаженных в целях электропрочности профилей волноводов. Для этого была рассмотрена задача о рассеянии волны на сочленении полубесконечных каналов различной ширины.

На достаточном удалении от оси ускорительной структуры задача описывается скалярным уравнением Гельмгольца в декартовых координатах для азимутальной компоненты магнитного поля H_φ :

$$\frac{\partial^2 H_\varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 H_\varphi}{\partial x^2} + k^2 H_\varphi = 0. \quad (36)$$

При этом продольная E_z и радиальная E_r компоненты электрического поля выражаются явным образом через H_φ . Граничные условия

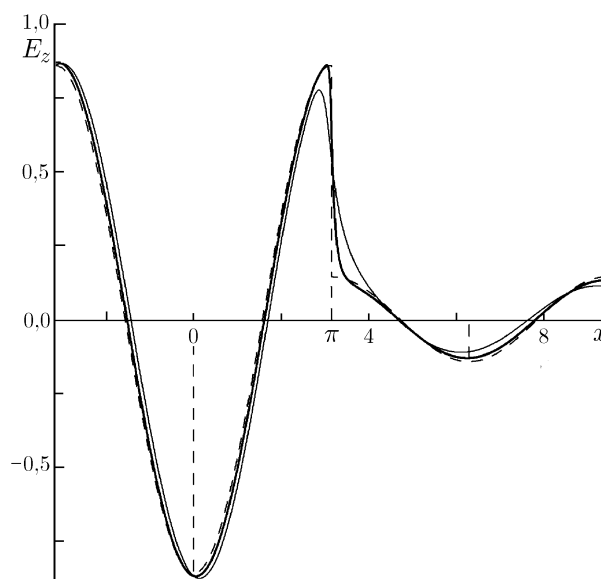


Рис. 6. Сравнение численного и асимптотического решений на оси симметрии волноводного канала ($M = d_{\max}/d_{\min} = 6$, $d_{\max} = \lambda/4$ — максимальный возможный зазор канала). Штриховая линия соответствует асимптотическому решению, тонкая и жирная сплошные линии — численным решениям при $d_{\max} = \lambda/4$ и $d_{\max} = \lambda/16$ соответственно

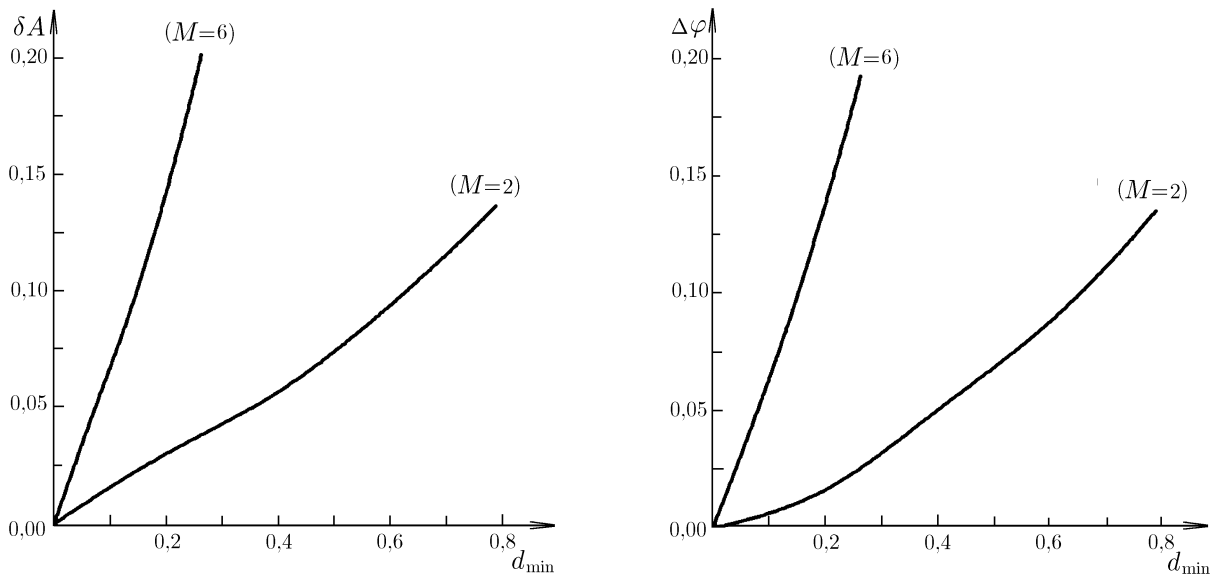


Рис. 7. Относительное отклонение амплитуд δA и фаз $\Delta\varphi$ численных решений от асимптотического решения в точке экстремума компоненты E_z в зависимости от ширины волноводного канала

представляют собой условия Неймана на металлической поверхности и условия излучения Зоммерфельда для прошедшей и отражённой волн. Данная задача в приближении узких каналов имеет асимптотическое решение [6], которое вытекает из условий (2), (3). С этим решением необходимо сравнить численные решения, полученные на основе метода дискретных источников (МДИ) [8].

Рассеянная волна ищется в виде линейной комбинации функций Грина оператора (36), определённого в объёмлющей области (в качестве которой используется бесконечная полоса ширины $d_{\max}$) с условиями излучения. При этом источники размещаются вне области, ограниченной металлическими поверхностями. Неизвестные коэффициенты линейной комбинации находятся из системы линейных алгебраических уравнений, являющейся дискретной аппроксимацией оператора граничных условий на металлической поверхности. Более детально МДИ в приложении к рассматриваемой задаче описан в [9]. Там же представлен график численного решения в окрестности острия (вершины угла), подтверждающий наличие особенности вида $r^{-1/3}$ для продольной компоненты электрического поля E_z ; здесь $r = \sqrt{(x - x_1)^2 + (z - z_1)^2}$, x_1 и z_1 — координаты острия. Вычислительные эксперименты по сглаживанию острия скруглениями различных радиусов показывают, что сама особенность исчезает, а решение вне малой окрестности острия меняется незначительно, что и даёт основание утверждать, что сглаживание профилей канавок слабо влияет на решение.

В окрестности сочленения двух волноводов решение является неоднородным по продольной координате z , однако при удалении от уступа по радиальной координате x эта неоднородность экспоненциально спадает. Это спадание тем быстрее, чем уже канал (см. рис. 5). При этом в случае, когда зазоры узкого и широкого каналов $d_{\min}$ и $d_{\max}$ стремятся к нулю, имеет место сходимость численного решения задачи рассеяния к асимптотическому (см. рис. 6). Исследование зависимости отклонения амплитуд и фаз численного и асимптотического решений от размеров каналов показало, что при предельной глубине канавки $d_{\max} = \lambda/4$ отклонение составляет 13 % при $M = 2$ и 20 % при $M = 6$ (см. рис. 7).

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Параметры периферийной части квазиоптической резонансной ускорительной структуры могут быть приближённо, с точностью около 10 %, рассчитаны на основе аналитических формул (30)–(34). Результаты расчёта могут быть уточнены относительно простыми численными методами.

Данная работа была выполнена совместно с фирмой «Omega-P» и поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 01–01–00577) и грантом Министерства энергетики США.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Petelin M. I., Caryotakis G., Tolkachev A. A., Kuzikov S. V., Postoenko G. K., Tai M. L., Yunakovsky A. D. // High Energy Density Microwaves / Ed. by R. M. Phillips. Woodbury, N. Y.: American Institute of Physics, 1998. P. 304.
2. Petelin M. I. // Strong Microwaves in Plasmas: Proceedings of the Int. Workshop / Ed. by A. G. Litvak. N. Novgorod, 2003. V. 1. P. 82.
3. Wilson P. B. // Applications of High Power Microwaves / Ed. by A. V. Gaponov-Grekhov, V. L. Granatstein. Boston, London: Artech House, 1994. P. 229.
4. Wilson P. B. // Proceedings of the ITP Conference on Future High Energy Colliders, University of California, Santa Barbara, 1996.
5. Балакин В. Е., Казаков С. Ю., Лунин А. Е., Чашурин В. И. // Вакуумная СВЧ электроника. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 2002. С. 13.
6. Справочник по волноводам: Пер. с англ. / Под ред. Я. Н. Фельда. М.: Сов. радио, 1952.
7. Slater J. C., Frank N. H. Electromagnetism. N.Y., 1947.
8. Ерёмин Ю. А., Свешников А. Г. Метод дискретных источников в задачах электромагнитной дифракции. М.: Изд-во МГУ, 1992.
9. Bogomolov Ya. L., Yunakovsky A. D. // Proceedings of Int. Seminar Day on Diffraction 2001. St. Petersburg, 2001. P. 26.

Институт прикладной физики РАН, г. Нижний Новгород,
Россия

Поступила в редакцию
26 июня 2003 г.

SYNTHESIS OF BRAGG REFLECTORS FOR ELECTRON ACCELERATION STRUCTURES WITH QUASI-OPTICAL FEED

Ya. L. Bogomolov, M. I. Petelin, M. L. Tai, A. D. Yunakovsky

For accelerating structures of quasi-optical type [1, 2], radial Bragg reflectors can be synthesized analytically to provide the necessary Q -factor of the structure and coupling of the structure to the feeding wave flow.

УДК 537.874.2

ДИФРАКЦИЯ НА ГОФРИРОВАННОЙ ГРАНИЦЕ СРЕД. ПОЛНАЯ ТРАНСФОРМАЦИЯ ПАДАЮЩЕЙ ВОЛНЫ В ДИФРАКЦИОННЫЙ МАКСИМУМ

С. Н. Власов, Е. В. Копосова

На примере простейшего (синусоидального) профиля гофра в приближении отсутствия потерь в веществе исследованы режимы полной трансформации волны в дифракционный максимум при её падении на гофрированную металлическую поверхность или гофрированный раздел двух диэлектрических сред. Выявлены численно-интуитивные закономерности возникновения и эволюции таких режимов с ростом амплитуды гофра. Показано, что режимы полной трансформации падающей волны в дифракционный максимум возможны как в случае автоколлимации, так и при существенном отклонении от неё. Исследование выполнено на базе численного метода решения интегрального уравнения посредством специально созданной системы интерактивной обработки информации в среде «Visual Fortran».

ВВЕДЕНИЕ

Теория дифракции на гофрированных границах сред является основой для анализа дифракционных решёток [1–6], которые широко используются как и в микроволновом, так и в оптическом диапазоне длин волн. Их применяют в спектроанализаторах, в квазиоптических открытых резонаторах [7–11] в качестве селекторов типов колебаний, в частности, в приборах с релятивистскими электронными пучками. Дифракционные решётки часто являются элементами различных систем сжатия импульсов [12–15], а также преобразователей типов волн [16]. Как известно, при падении плоской волны на гофрированную границу двух сред волна рассеивается под некоторыми углами, определяемыми её длиной, углом падения и периодом решётки [17, 18]. Направление, в котором распространяется рассеянная волна при стремлении амплитуды гофра к нулю, является направлением главного максимума. Оно может совпадать с направлением отражённой волны при дифракции на металлической поверхности или с направлением прошедшей и, возможно, отражённой волны при дифракции на границе прозрачных диэлектриков. Главные максимумы имеют слабую дисперсию. Интерес представляют, как правило, побочные максимумы, отличные от главных. Они обладают сильной дисперсией. Во многих приложениях интересно достижение возможно более полной трансформации падающего излучения в один из диспергирующих порядков.

Возможность полного преобразования энергии волны, падающей под углом на решётку, в один из диспергирующих порядков неоднократно обсуждался [1–5]. Впервые такое преобразование было рассмотрено в [19] для отражения в режиме автоколлимации (при распространении одного из побочных максимумов отражённой волны навстречу падающей) в случае дифракции на металлическом эшелетте с гофром в виде прямоугольного треугольника. При этом была дана простая физическая интерпретация явления. При падении s-поляризованной волны (вектор электрического поля перпендикулярен направляющей гофр и лежит в плоскости падения) перпендикулярно ступеньке эшелетта она полностью отражается обратно, если на высоте ступеньки укладывается целое число полуволн. В этом случае граничные условия удовлетворяются суперпозицией только двух встречных волн.

Для более сложных профилей гофра и случая падения р-поляризованной волны (вектор электрического поля параллелен гофру и перпендикулярен плоскости падения) таких простых решений, удовлетворяющих граничным условиям, не существует. Последние удовлетворяются лишь суперпозицией достаточно большого числа распространяющихся гармоник. Для их нахождения требуется применение численных методов. Приближённые численные методы (например, метод Релея), разработанные достаточно давно, дают возможность исследовать решётки лишь с мелким профилем гофра, существенно меньшим длины волны. Именно в последние два десятилетия, характеризующиеся значительным ростом вычислительных мощностей и их общедоступностью, а также разработкой точных алгоритмов расчёта [1, 2, 6], и стало возможным детальное исследование рассеивающих свойств различных решёток, в том числе со сложной формой и сравнимой с длиной волны глубиной.

Проведённые в [1, 2] исследования свойств решёток не ставили целью выявить закономерности режимов полной трансформации падающей волны в незеркальный неавтоколлимационный максимум. В [3] было обращено внимание на аномальные, или резонансные, режимы рассеяния волн на решётках, в частности, была численно показана принципиальная возможность полного отражения в направлении, не совпадающем с зеркальным и антизеркальным. Такой режим был обнаружен и исследован численно для многоволновой области при больших углах телескопичности на гофре в виде волноводных канавок, содержащих диэлектрическое заполнение. В [20] исследовался вопрос о возможности аналитического описания режимов аномального рассеяния волн (в частности, зануления зеркального максимума) глубокогогофрированной металлической или диэлектрической средой с большим показателем преломления на основе выделения электромагнитных резонансов. Полученные формулы также требуют численного анализа. Возможность полного отражения волны в произвольном направлении была продемонстрирована в [21] для двухступенчатой структуры, представляющей собой гофрированную поверхность с расположенной на некотором расстоянии от неё пластиной. В этом случае для осуществления рассматриваемого режима рассеяния требовалась настройка фазы волны при пробеге между элементами структуры.

Принцип организации режима полного незеркального отражения в неавтоколлимационном направлении, реализованный в [21], прослеживается и в случаях существования подобного режима при отражении от простейших гофрированных поверхностей. Он проявляется в необходимости существования параметра, дополнительного по отношению к параметрам двухволнового режима при простейшем профиле гофра. В приближении существования только двух волн рассеяние может быть описано простейшим качественным соотношением [22]. Из этого соотношения следует, что с изменением параметров гофра полная трансформация может осуществляться либо в зеркальный, либо в автоколлимационный максимум. При нарушении условия автоколлимации полная трансформация не происходит. Однако в соотношение из [22] не входят амплитуды поверхностных гармоник. Поэтому возможность полной трансформации при нарушении условия автоколлимации может возникнуть в том случае, когда появляются поверхностные гармоники с достаточно большой амплитудой, что имеет место вблизи границы перехода поверхностной гармоники в пространственную. На основе этого предположения осуществлялся поиск режимов полной трансформации для гофрированной границы диэлектриков.

В настоящей работе приводятся результаты исследования режимов полной трансформации плоской волны в дифракционный максимум при её падении на гофрированную металлическую поверхность или гофрированный раздел двух диэлектрических сред. Изучается простейший профиль гофра — синусоидальный — при отсутствии потерь в веществе. Основное внимание уделяется анализу существования режимов полной трансформации при отсутствии автоколлимации.

Сначала исследование проводится для идеально проводящей поверхности с синусоидальной гофрировкой с целью выявить основные закономерности существования режимов полной транс-

формации волн s- и p-поляризаций в дифракционный (в данном случае — для -1 -й гармоники) максимум в зависимости от глубины гофра. Затем рассматривается полное отражение s- и p-поляризованных волн от гофрированной границы диэлектрика при падении из диэлектрика в двухволновом режиме и проводится анализ закономерностей существования режимов полной трансформации при изменении диэлектрической проницаемости сред в широких пределах. Наконец, в четырёхволновой области исследуются закономерности явления полного прохождения волн s- и p-поляризаций через гофрированный раздел диэлектриков в незеркальный максимум.

Пренебрежение потерями в средах существенно упрощает поиск условий, при которых возможны режимы полной трансформации энергии в диспергирующий максимум. Наличие потерь с неизбежностью внесёт дополнительные факторы в являющуюся достаточно сложной картину проявления рассматриваемых режимов. Исследование влияния потерь в веществе на рассматриваемые режимы выходит за рамки настоящей работы.

Разумеется, привести все интересные результаты, полученные в ходе численных расчётов, невозможно. Поэтому в статье обсуждаются только наиболее яркие, с нашей точки зрения, результаты.

1. МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЯ

Математически задача решается методом интегрального уравнения [2, 6], построение и решение которого для задачи рассеяния плоской волны на гофрированной границе металлов и диэлектриков описаны в [22, 23] и кратко приводятся здесь лишь для справки.

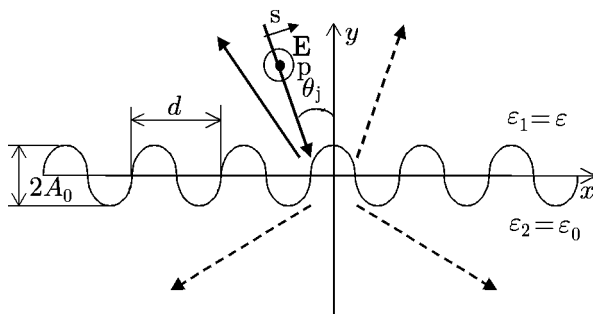


Рис. 1. Гофрированная граница двух диэлектриков с проницаемостями ε_1 и ε_2

Рассмотрим гофрированную границу двух диэлектриков (см. рис. 1) с проницаемостями ε_1 и ε_2 (в частном случае $\varepsilon_1 = \varepsilon > \varepsilon_2 = \varepsilon_0$). Пусть гофр с периодом d имеет высоту $2A_0$ и описывается формулой

$$y = A(x) = A_0 \sin(2\pi x/d). \quad (1)$$

Ограничимся исследованием случая, когда зависимость полей от продольной координаты z отсутствует. В этих условиях можно по отдельности рассмотреть рассеяние ТЕ-волн, у которых вектор электрического поля параллелен направляющей гофра и перпендикулярен плоскости падения (p-поляризация), и ТМ-волн, у которых вектор электрического поля перпендикулярен направляющей гофра и лежит в плоскости падения (s-поляризация).

Для описания ТЕ-волн удобно использовать компоненту E_z электрического поля вдоль направляющей гофра, а для описания ТМ-волн — компоненту H_z магнитного поля. В каждой из задач (для ТЕ- или ТМ-волн) эти компоненты мы обозначим через Ψ .

Пусть из верхней (в частности, более плотной) среды на эту границу под углом θ_j падает волна:

$$\Psi^{(i)}(x, y) = e^{(i)} \exp(ik \sqrt{\varepsilon_1} \sin(\theta_j)x - ik \sqrt{\varepsilon_1} \cos(\theta_j)y) = \exp(ik_{0x}x - ik_{0y}^{(1)}y), \quad (2)$$

где $k = \omega/c$, c — скорость света в вакууме, $e^{(i)}$ — амплитуда волны, которую можно полагать равной единице.

В соответствии с принципом Гюйгенса поле в верхней и нижней средах может быть выражено через поле и его нормальную производную на верхней и нижней стороне границы соответственно:

$$\Psi^{(1)}(x, y) = \Psi^{(i)}(x, y) + \int \left\{ G^{(1)}(x - x', y - y') \frac{\partial}{\partial n'} \Psi^{(1)}(x', y') - \Psi^{(1)}(x', y') \frac{\partial}{\partial n'} G^{(1)}(x - x', y - y') \right\} ds', \quad (3)$$

$$\Psi^{(2)}(x, y) = - \int \left\{ G^{(2)}(x - x', y - y') \frac{\partial}{\partial n'} \Psi^{(2)}(x', y') - \Psi^{(2)}(x', y') \frac{\partial}{\partial n'} G^{(2)}(x - x', y - y') \right\} ds', \quad (4)$$

где интегрирование проводится на периоде d вдоль кривой, описывающей форму гофра:

$$ds' = dx' \sqrt{1 + (dy'/dx')^2}, \quad (5)$$

$$G^{(l)}(x - x', y - y') = \frac{1}{2id} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k_{ym}^{(l)}} \exp \left[ik_{xm} (x - x') + ik_{ym}^{(l)} (y - y') \right] \quad (6)$$

— двумерные функции Грина верхней и нижней сред, $l = 1, 2$. Они соответствуют полю в среде, создаваемому решёткой коллинеарных линейных источников, расположенных с периодом d по координате x с разностью фаз между соседними элементами, равной $k \sqrt{\varepsilon_1} d \sin \theta_j$ и $k \sqrt{\varepsilon_2} d \sin \theta_j$ для верхней и нижней сред соответственно. В выражении (6)

$$k_{xm}^{(1)} = k_{xm}^{(2)} = k_{xm} = k \sqrt{\varepsilon_1} \sin \theta_j + \frac{2\pi m}{d}, \quad (7)$$

$$k_{ym}^{(l)} = \begin{cases} \sqrt{k^2 \varepsilon_l - k_{xm}^2}, & k^2 \varepsilon_l > k_{xm}^2; \\ i \sqrt{k_{xm}^2 - k^2 \varepsilon_l}, & k_{xm}^2 > k^2 \varepsilon_l, \end{cases} \quad (8)$$

где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; $l = 1, 2$.

Нормальные к границе диэлектриков производные функций Грина по координатам источников с использованием выражения

$$\frac{\partial}{\partial n'} = \frac{1}{\sqrt{1 + (dy'/dx')^2}} \left[-\frac{dy'}{dx'} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial y'} \right] \quad (9)$$

могут быть представлены следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial n'} {}^{(l)} G(x - x', y - y') = - \frac{\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left(\operatorname{sgn}(y - y') - \frac{k_{xm}}{k \sqrt{\varepsilon_l}} \frac{dy'}{dx'} \right) \exp \left[ik_{xm} (x - x') + ik_{ym}^{(l)} |y - y'| \right]}{2d \sqrt{1 + (dy'/dx')^2}}. \quad (10)$$

Аналогично производные функций Грина по координатам точки наблюдения имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial n} {}^{(l)} G(x - x', y - y') = \frac{\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left(\operatorname{sgn}(y - y') - \frac{k_{xm}}{k \sqrt{\varepsilon_l}} \frac{dy}{dx} \right) \exp \left[ik_{xm} (x - x') + ik_{ym}^{(l)} |y - y'| \right]}{2d \sqrt{1 + (dy/dx)^2}}. \quad (11)$$

Здесь $l = 1, 2$;

$$\operatorname{sgn}(y - y') = \begin{cases} +1, & y > y'; \\ -1, & y < y'. \end{cases} \quad (12)$$

Величины поля и его производные по обе стороны границы связаны граничными условиями непрерывности тангенциальных компонент полей E и H :

$$\Psi^{(1)}(x, y) \Big|_{y=A(x)} = \Psi^{(2)}(x, y) \Big|_{y=A(x)}, \quad \rho \frac{\partial}{\partial n} \Psi^{(1)}(x, y) \Big|_{y=A(x)} = \frac{\partial}{\partial n} \Psi^{(2)}(x, y) \Big|_{y=A(x)}, \quad (13)$$

где коэффициент $\rho = 1$ для ТЕ-волн и $\rho = \varepsilon_2/\varepsilon_1$ для ТМ-волн.

Введём вспомогательную функцию $\Phi[x, y(x)]$, определённую на гофрированной границе и связанную с полем Ψ формулой

$$\int \left\{ G^{(1)}(x - x', y - y') \frac{\partial}{\partial n'} \Psi^{(1)}(x', y') - \Psi^{(1)}(x', y') \frac{\partial}{\partial n'} G^{(1)}(x - x', y - y') \right\} ds' = \\ = \int G^{(1)}(x - x', y - y') \Phi(x', y') ds'. \quad (14)$$

Тогда поле в верхней среде и его нормальная производная по координатам точки наблюдения согласно (3) могут быть выражены через эту функцию:

$$\Psi^{(1)}(x, y) = \Psi^{(i)}(x, y) + \int G^{(1)}(x - x', y - y') \Phi(x', y') ds', \quad (15)$$

$$\frac{\partial}{\partial n} \Psi^{(1)}(x, y) = \frac{\partial}{\partial n} \Psi^{(i)}(x, y) + \int \frac{\partial}{\partial n} G^{(1)}(x - x', y - y') \Phi(x', y') ds', \quad (16)$$

где нормальная производная падающего поля имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial n} \Psi^{(i)}(x, y) = -\frac{i}{\sqrt{1 + (dy/dx)^2}} \left(k_{0x} \frac{dy}{dx} + k_{0y} \right) \exp(ik_{0x}x - ik_{0y}y). \quad (17)$$

Поместим точку наблюдения на границу сред $y = A(x)$, являющуюся местонахождением вторичных источников. Согласно [24] для интегралов, содержащих нормальные производные функций Грина, после выделения особенностей получаем:

$$\int \frac{\partial}{\partial n} G^{(l)}(x - x', y - y') \Phi(x', y') ds \Big|_{y=A(x)} = \\ = \int \frac{\partial}{\partial n} G^{(l)}(x - x', y - y') \Phi(x', y') ds' \Big|_{y=A(x)} + (-1)^{l-1} \frac{\Phi(x, y)}{2} \Big|_{y=A(x)}, \quad (18)$$

$$\int \frac{\partial}{\partial n'} G^{(l)}(x - x', y - y') \Phi(x', y') ds \Big|_{y=A(x)} = \\ = \int \frac{\partial}{\partial n'} G^{(l)}(x - x', y - y') \Phi(x', y') ds' \Big|_{y=A(x)} - (-1)^{l-1} \frac{\Phi(x, y)}{2} \Big|_{y=A(x)}, \quad (19)$$

где $\int$ обозначает интеграл в смысле главного значения, $l = 1, 2$. Тогда нормальная производная поля в верхней среде (16) с учётом (18) записывается как

$$\frac{\partial}{\partial n} \Psi^{(1)}(x, y) \Big|_{y=A(x)} = \\ = \frac{\partial}{\partial n} \Psi^{(i)}(x, y) \Big|_{y=A(x)} + \int \frac{\partial}{\partial n} G^{(1)}(x - x', y - y') \Phi(x', y') ds' \Big|_{y=A(x)} + \frac{\Phi(x, y)}{2} \Big|_{y=A(x)}, \quad (20)$$

а выражение для поля в нижней среде (4) на границе $y = A(x)$ при подстановке (15) и (20) имеет вид

$$\frac{\Psi^{(2)}(x, y)}{2} \Big|_{y=A(x)} = - \int \left\{ G^{(2)}(x - x', y - y') \frac{\partial}{\partial n'} \Psi^{(2)}(x', y') - \Psi^{(2)}(x', y') \frac{\partial}{\partial n'} G^{(2)}(x - x', y - y') \right\} ds' \Big|_{y=A(x)}. \quad (21)$$

Для неизвестной функции $\Phi[x, y(x)]$ с учётом граничных условий (13) может быть сформулировано интегральное уравнение [20, 21] Фредгольма I-го рода:

$$\int K(x - x', y - y') \Phi(x', y') ds' \Big|_{y=A(x)} + \frac{\Psi^{(i)}(x, y)}{2} \Big|_{y=A(x)} + \int \left[\rho G^{(2)}(x - x', y - y') \frac{\partial}{\partial n'} \Psi^{(i)}(x', y') - \Psi^{(i)}(x', y') \frac{\partial}{\partial n'} G^{(2)}(x - x', y - y') \right] ds' = 0 \Big|_{y=A(x)}, \quad (22)$$

ядро которого имеет вид

$$K(x - x', y - y') = \frac{1}{2} \left[G^{(1)}(x - x', y - y') + \rho G^{(2)}(x - x', y - y') \right] + \int \left[\rho G^{(2)}(x - x'', y - y'') \frac{\partial}{\partial n''} G^{(1)}(x'' - x', y'' - y') - \frac{\partial}{\partial n''} G^{(2)}(x - x'', y - y'') G^{(1)}(x'' - x', y'' - y') \right] ds''. \quad (23)$$

Поле $\Psi^{(1)}$ в верхней среде выражается через функцию $\Phi(x, y)$ согласно (15). Поле $\Psi^{(2)}$ в нижней среде выразим через функцию $\Phi(x, y)$, используя (4):

$$\Psi^{(2)}(x, y) = - \int \left\{ \rho F_1(x', y') G^{(2)}(x - x', y - y') - F_2(x', y') \frac{\partial}{\partial n'} G^{(2)}(x - x', y - y') \right\} ds', \quad (24)$$

где

$$F_1(x', y') = \frac{\partial}{\partial n'} \Psi^{(i)}(x', y') + \frac{\Phi(x', y')}{2} + \int \frac{\partial}{\partial n'} G^{(1)}(x' - x'', y' - y'') \Phi(x'', y'') ds'',$$

$$F_2(x', y') = \Psi^{(i)}(x', y') + \int G^{(1)}(x' - x'', y' - y'') \Phi(x'', y'') ds''. \quad (25)$$

Во всём пространстве, за исключением приграничной области, включающей канавки гофра $A(x)$ по ту и другую сторону границы, в функциях Грина и их производных можно положить

$$|y - A(x)| = \begin{cases} y - A(x), & y > \max[A(x)]; \\ A(x) - y, & y < \min[A(x)]. \end{cases} \quad (26)$$

С учётом (26) представим дифракционное поле в обеих средах вне канавок как суперпозицию плоских волн:

$$\Psi^{(1)}(x, y) = \sum_m R_m \exp(ik_{mx}x - ik_{my}^{(1)}y), \quad y > \max[A(x)];$$

$$\Psi^{(2)}(x, y) = \sum_m T_m \exp(ik_{mx}x - ik_{my}^{(2)}y), \quad y < \min[A(x)], \quad (27)$$

где комплексные амплитуды гармоник R_m в верхнем и T_m в нижнем полупространствах определяются как

$$R_m = \int \frac{\Phi(x', y')}{2idk_{my}^{(1)}} \exp\left(-ik_{my}^{(1)}y' - im\frac{2\pi}{d}x'\right) ds', \quad (28)$$

$$T_m = - \int \left\{ \frac{\rho F_1(x', y')}{2idk_{my}^{(2)}} + \frac{F_2(x', y')}{2d\sqrt{1 + (dy'/dx')^2}} \left(-1 - \frac{k_{mx}}{k_{my}^{(2)}} \frac{dy'}{dx'}\right) \right\} \exp\left(ik_{my}^{(2)}y' - im\frac{2\pi}{d}x'\right) ds'. \quad (29)$$

Можно определить коэффициенты передачи по дифракционным максимумам как отношение плотности энергии в определённой гармонике к плотности энергии в падающей волне. Для каждой гармоники эти коэффициенты определяются выражениями

$$P_m^{(1)} = |R_m|^2 \frac{k_{my}^{(1)}}{k_{0y}^{(1)}}, \quad P_m^{(2)} = |T_m|^2 \frac{k_{my}^{(2)}}{k_{0y}^{(1)}} \rho \quad (30)$$

для верхней и нижней сред соответственно, где $\rho = 1$ для ТЕ-волн и $\rho = \varepsilon_2/\varepsilon_1$ для ТМ-волн.

В случае идеально проводящей металлической гофрированной поверхности уравнения, описывающие рассеяние плоской волны, выводятся и выглядят существенно проще, чем для диэлектриков, поскольку строятся только для верхнего полупространства. Они также могут быть сведены к интегральным уравнениям Фредгольма I-го и II-го рода непосредственно для функции, описывающей поле $\mathbf{E}$ или $\mathbf{H}$ [3, 4].

2. РЕЗУЛЬТАТЫ

Ниже изложены результаты численного решения уравнения (22). Основное внимание обращается на наличие режимов достаточно высокой (близкой к полной) трансформации энергии падающей волны в волну отражённой или прошедшей -1 -й гармоники ($m = -1$) в случае нарушения условий автоколлимации:

$$k\sqrt{\varepsilon_1} \sin \theta_j \neq \pi/d. \quad (31)$$

Используя классификацию работ [1, 2], будем рассматривать области параметров, при которых распространяется определённое число гармоник.

Число гармоник, уносящих энергию от границы, с составляющими волнового вектора $k_{xm}^{(1)} = k_{xm}^{(2)} = k_{xm}$ и $k_{ym}^{(1)}, k_{ym}^{(2)}$ удовлетворяющих равенствам (7) и (8), ограничено. Эти гармоники являются распространяющимися. Остальные гармоники являются поверхностными.

Основной для рассмотрения положим так называемую двухволновую область, в которой в верхнем полупространстве существуют две распространяющиеся гармоники (0-вая и -1 -вая), а в нижнем полупространстве распространяющиеся волны отсутствуют (т. е., например, в случае диэлектрика все волны прижатые). Таким образом, в случае падения волны из более плотного диэлектрика двухволновый режим реализуется при выполнении двух условий: при отсутствии любых распространяющихся волн в нижней среде (см. рис. 1) и наличии 0-й и -1 -й гармоник в верхней среде, т. е. при

$$k\sqrt{\varepsilon} \sin \theta_j - \frac{2\pi}{d} < -k\sqrt{\varepsilon_0}, \quad k\sqrt{\varepsilon} \sin \theta_j > k\sqrt{\varepsilon_0}; \quad k\sqrt{\varepsilon} \sin \theta_j - \frac{2\pi}{d} > -k\sqrt{\varepsilon}. \quad (32)$$

Для металлической поверхности этот режим реализуется при отсутствии -2 -й и 1 -й гармоник и наличии 0-й и -1 -й:

$$k \sin \theta_j - \frac{4\pi}{d} < -k, \quad k \sin \theta_j + \frac{2\pi}{d} > k; \quad k \sin \theta_j - \frac{2\pi}{d} > -k. \quad (33)$$

Будем рассматривать также близкую к двухволновой четырёхволновую область. Четырёхволновый режим для диэлектрика реализуется при отсутствии в нижней среде -2 -й и 1 -й гармоник и наличии 0 -й и -1 -й гармоник в обеих средах:

$$\begin{aligned} k\sqrt{\varepsilon} \sin \theta_j - \frac{4\pi}{d} < -k\sqrt{\varepsilon_0}, & \quad k\sqrt{\varepsilon} \sin \theta_j + \frac{2\pi}{d} > k\sqrt{\varepsilon_0}; \\ k\sqrt{\varepsilon} \sin \theta_j - \frac{2\pi}{d} > -k\sqrt{\varepsilon_0}, & \quad k\sqrt{\varepsilon} \sin \theta_j < k\sqrt{\varepsilon_0}; \quad k\sqrt{\varepsilon} \sin \theta_j - \frac{2\pi}{d} > -k\sqrt{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (34)$$

Приведём построенную на неравенствах (32)–(34) простейшую диаграмму, демонстрирующую распределение рассматриваемых областей параметров (см. рис. 2). По оси абсцисс данной диаграммы отложен дифракционный параметр верхней среды, представляющий собой отношение периода решётки к длине волны в верхней среде (в этой среде расположен источник падающей волны). В случае металлической границы для верхней среды следует полагать $\varepsilon = 1$. По оси ординат отложен параметр отклонения от автоколлимации, представляющий собой отношение проекции волнового вектора падающей волны на плоскость решётки к величине $2\pi/d$. Его среднее на диаграмме значение, равное $0,5$, соответствует режиму автоколлимации. Прямыми линиями на поле диаграммы обозначены границы областей, соответствующих разному числу распространяющихся волн. Стрелками обозначен переход из одной области параметров в другую, при котором появляется та или иная гармоника, а буквами R и T (отражение и прохождение) с соответствующими индексами указано, какая именно гармоника становится распространяющейся. Жирным тёмным ромбом отмечена область существования 0 -й и -1 -й гармоник в верхней среде. Светлыми линиями отделена аналогичная область существования 0 -й и -1 -й гармоник в нижней среде, местонахождение которой определяется величиной проницаемости диэлектрика. Так, в случае $\varepsilon = 2$, соответствующей диаграмме на рис. 2, область двухволнового режима расположена при дифракционном параметре $0,5 \leq d\sqrt{\varepsilon}/\lambda \leq 0,5\sqrt{\varepsilon/\varepsilon_0} = 0,7$, а четырёхволнового режима — в интервале $0,5\sqrt{\varepsilon/\varepsilon_0} = 0,7 \leq d\sqrt{\varepsilon}/\lambda \leq 1,5$ и ограничена со стороны больших значений дифракционного параметра параметрами верхней среды. Для больших значений проницаемости $\varepsilon > 10$ верхней среды точка возникновения 0 -й и -1 -й гармоник в нижней среде $d\sqrt{\varepsilon}/\lambda = 0,5\sqrt{\varepsilon/\varepsilon_0}$ уходит за пределы существования аналогичных гармоник в верхней среде в сторону больших дифракционных параметров. При $\varepsilon \gg 10$ нижняя среда перестаёт оказывать влияние на рассеяние волн, и картина отражения полностью определяется двухволновым режимом верхней среды подобно тому, как это происходит в случае рассеяния на металле.

Проследим эволюцию возникновения режима полного отражения в -1 -ую гармонику с ростом амплитуды гофра. Будем представлять энергию отражённой в -1 -ую гармонику волны на диаграмме (рис. 2) согласно шкале, показанной под диаграммой — интенсивность окраски пропорциональна относительной величине энергии. Для наглядности точки полного отражения в -1 -ую

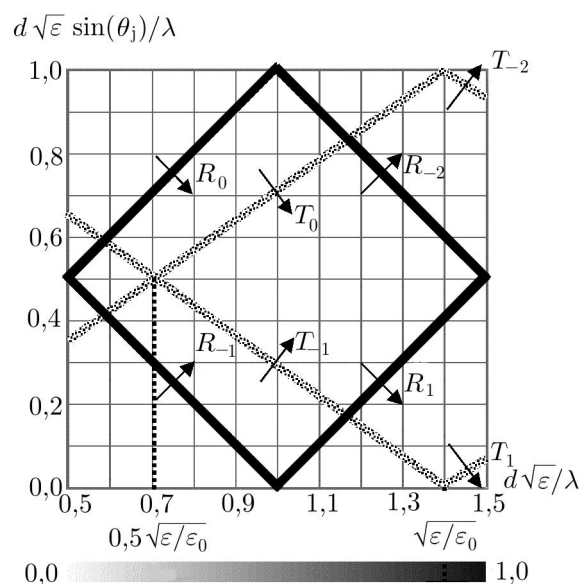


Рис. 2. Диаграмма, демонстрирующая распределение областей с различным количеством распространяющихся волн. По оси абсцисс отложен дифракционный параметр верхней среды, по оси ординат — параметр отклонения от автоколлимации

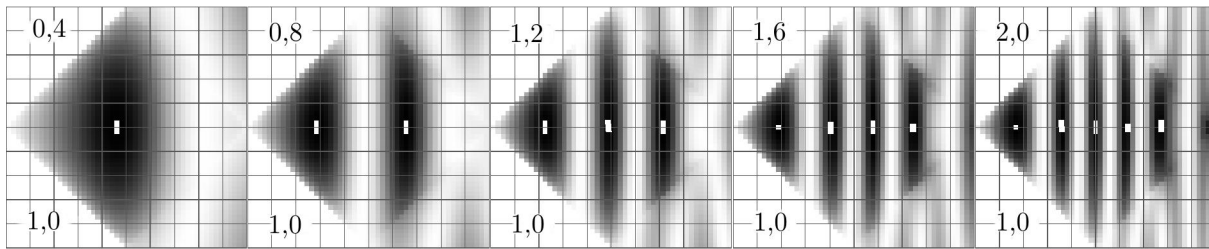


Рис. 3а. Серия диаграмм для рассеяния р-поляризованной волны на гофрированной идеально проводящей поверхности, демонстрирующих возникновение и эволюцию режима полного отражения в -1 -ую гармонику с ростом амплитуды гофра (область параметров $0,5 < d/\lambda < 1,5$ по горизонтали и $0 < d \sin(\theta_j)/\lambda < 1$ по вертикали)

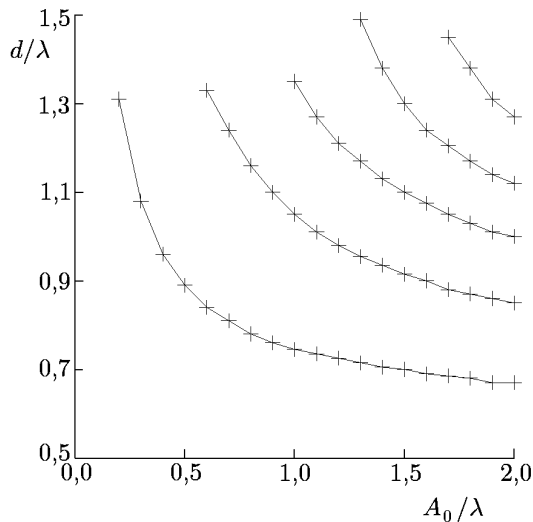


Рис. 3б. Линии существования режима полного отражения в (-1) -ую гармонику на плоскости $(d/\lambda, A_0/\lambda)$ при рассеянии р-поляризованной волны на гофрированной идеально проводящей поверхности

гармонику (при относительной энергии отражения $P_{-1}^{(1)}$, превосходящей 0,995), которые должны быть окрашены наиболее интенсивно, будем для контраста отмечать белым цветом. Результаты представим в виде диаграмм для различных амплитуд гофра. На каждой диаграмме в верхнем левом углу укажем отношение амплитуды гофра к длине волны в верхней среде, содержащей источник падающей волны, а в нижнем левом углу каждой диаграммы приведём максимальную относительную энергию отражения в -1 -ую гармонику для текущей амплитуды гофра на исследуемой плоскости параметров.

2.1. Дифракция р-волны на идеально проводящей поверхности

Рассмотрим сначала рассеяние р-поляризованной волны на гофрированной идеально проводящей поверхности. На рис. 3а представлена серия диаграмм на исследуемой области параметров $0,5 < d/\lambda < 1,5$ и $0 < d \sin(\theta_j)/\lambda < 1$, демонстрирующих возникновение и эволюцию режима полного отражения в -1 -ую гармонику с ростом амплитуды гофра. Возникнув при некоторой амплитуде гофра, с дальнейшим её ростом область режима полного отражения смещается в сторону меньших дифракционных параметров, оставаясь всегда на оси диаграммы, соответствующей режиму автоколлимации. Помимо автоколлимации в данном случае режим полного отражения в -1 -ую гармонику отсутствует. При увеличении амплитуды наблюдается повторение режима полного отражения, область которого возникает вновь при больших значениях дифракционного параметра и смещается в сторону меньших его значений с ростом амплитуды гофра. Таким образом, режиму полного отражения в -1 -ую гармонику в данном случае на плоскости $(d/\lambda, A_0/\lambda)$ соответствует ряд непрерывных линий (см. рис. 3б), точно удовлетворяющих в режиме автоколлимации качественному аналитическому представлению [22].

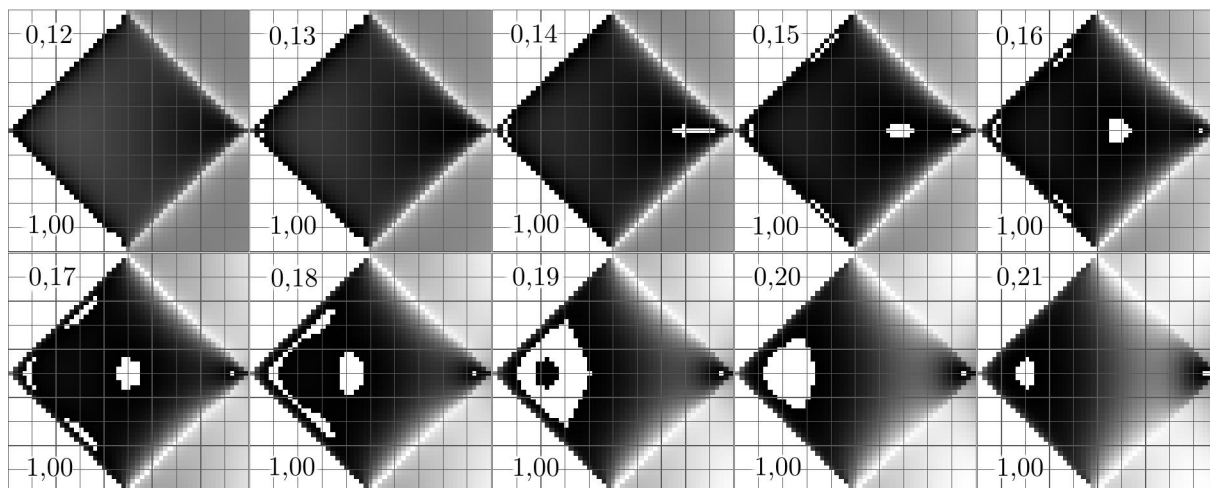


Рис. 4. Серия диаграмм для рассеяния s-поляризованной волны на гофрированной идеально проводящей поверхности, демонстрирующих наличие режима полного отражения в -1 -ую гармонику в отличных от автоколлимации условиях (область параметров $0,5 < d/\lambda < 1,5$ по горизонтали и $0 < d \sin(\theta_j)/\lambda < 1$ по вертикали)

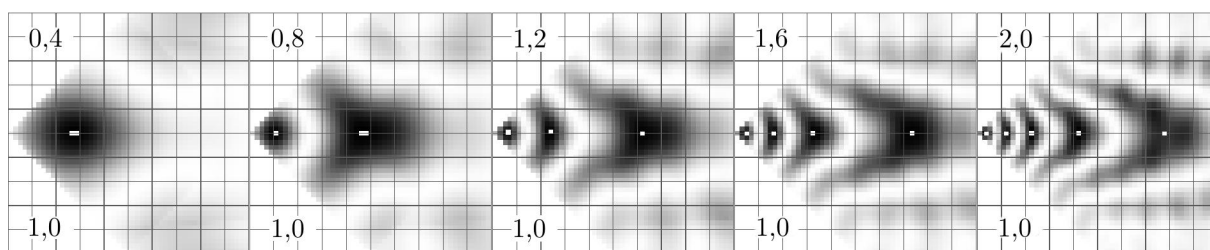
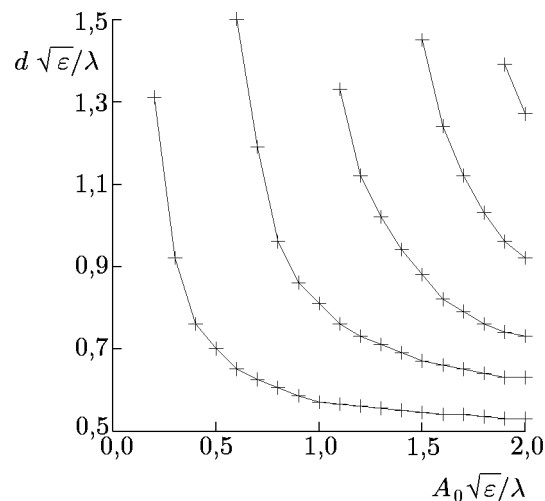


Рис. 5а. Серия диаграмм для рассеяния p-поляризованной волны на гофрированной границе диэлектриков с большим перепадом проницаемости $\varepsilon = 100$, демонстрирующих возникновение и эволюцию режима полного отражения в -1 -ую гармонику с ростом амплитуды гофра (область параметров $0,5 < d\sqrt{\varepsilon}/\lambda < 1,5$ по горизонтали и $0 < d\sqrt{\varepsilon} \sin(\theta_j)/\lambda < 1$ по вертикали)

Рис. 5б. Линии существования режима полного отражения в -1 -ую гармонику на плоскости $(d\sqrt{\varepsilon}/\lambda, A_0\sqrt{\varepsilon}/\lambda)$ при рассеянии p-поляризованной волны на гофрированной границе диэлектриков с большим перепадом проницаемости $\varepsilon = 100$



2.2. Дифракция s-волны на идеально проводящей поверхности

В случае рассеяния s-поляризованной волны на гофрированной идеально проводящей поверхности картина эволюции режима полного отражения совершенно иная (рис. 4). Возникая при достаточно малой амплитуде гофра, режим полного отражения осуществляется одновременно как вблизи границ возникновения распространяющихся гармоник помимо автоколлимации сим-

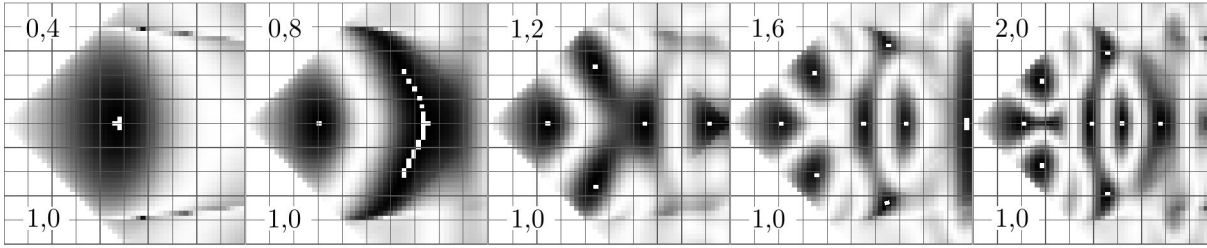


Рис. 6а. Серия диаграмм для рассеяния s-поляризованной волны на гофрированной границе диэлектриков с большим перепадом проницаемости $\varepsilon = 100$, демонстрирующих попеременно возникающие с ростом амплитуды гофра области режима полного отражения в -1 -ую гармонику как при условии автоколлимации, так и с отстройкой по углу (область параметров $0,5 < d\sqrt{\varepsilon}/\lambda < 1,5$ по горизонтали и $0 < d\sqrt{\varepsilon} \sin(\theta_j)/\lambda < 1$ по вертикали)

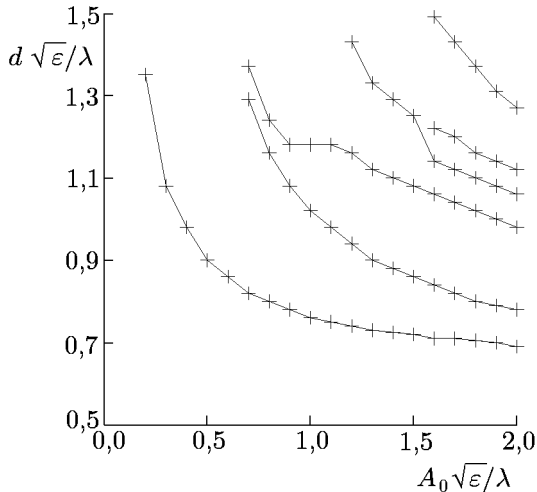


Рис. 6б. Линии существования режима полного отражения в -1 -ую гармонику на плоскости $(d\sqrt{\varepsilon}/\lambda, A_0\sqrt{\varepsilon}/\lambda)$ при рассеянии s-поляризованной волны на гофрированной границе диэлектриков с большим перепадом проницаемости $\varepsilon = 100$

метрично относительно оси $d \sin \theta_j / \lambda = 0,5$ (при малых значениях d/λ), так и при условии автоколлимации (при больших значениях d/λ). С ростом амплитуды гофра области на диаграмме, соответствующие режиму полного отражения, сближаются, эволюционируя в кольцо с провалом по относительной энергии отражения в его центре. Эта фигура с дальнейшим ростом амплитуды гофра преобразуется в пятно полного отражения на оси, соответствующей условию автоколлимации. С дальнейшим ростом амплитуды гофра область режима полного отражения исчезает и впоследствии возникает вновь, повторяя в более сжатом (в сторону меньших d/λ) виде ту же картину эволюции (на рисунке не показано). Если при малых амплитудах гофра коэффициенты отражения являются быстроменяющимися, то с ростом A_0 они становятся более устойчивыми, качественно приближаясь к нижней линии на рис. 3б.

2.3. Дифракция р-волны на границе диэлектриков с большим перепадом проницаемости (полное отражение)

Рассмотрим теперь рассеяние р-поляризованной волны на гофрированной границе диэлектриков в случае очень большой проницаемости $\varepsilon = 100$ (взаимодействие с пограничными прижатыми волнами практически отсутствует). На рис. 5а представлены диаграммы на исследуемой области параметров $0,5 < d\sqrt{\varepsilon}/\lambda < 1,5$ и $0 < d\sqrt{\varepsilon} \sin(\theta_j)/\lambda < 1$, демонстрирующие возникновение и эволюцию режима полного отражения в -1 -ую гармонику с ростом амплитуды гофра. Аналогично картине эволюции для идеально проводящей поверхности, возникнув при некоторой амплитуде гофра, с дальнейшим её ростом область режима полного отражения смещается в сторону меньших дифракционных параметров, оставаясь всегда на оси диаграммы, соответствующей режиму автоколлимации. При больших амплитудах также наблюдается повторение режима полного отражения, область которого возникает вновь при больших значениях дифракционного параметра

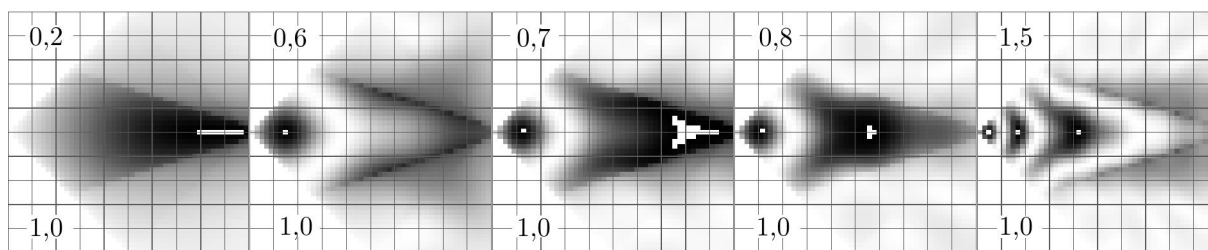
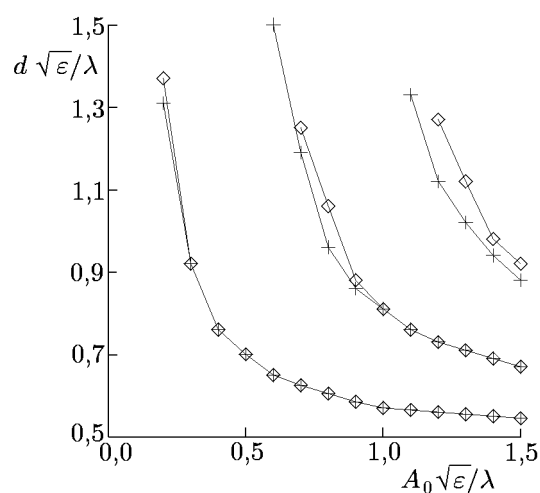


Рис. 7а. Серия диаграмм для рассеяния р-поляризованной волны на гофрированной границе диэлектриков со средним перепадом проницаемости $\varepsilon = 10$, демонстрирующих особенности эволюции режима полного отражения в -1 -ую гармонику с ростом амплитуды гофра (на рисунке показана плоскость параметров $0,5 < d\sqrt{\varepsilon}/\lambda < 1,5$ по горизонтали и $0 < d\sqrt{\varepsilon} \sin(\theta_j)/\lambda < 1$ по вертикали)

Рис. 7б. Линии существования режима полного отражения в -1 -ую гармонику на плоскости $(d\sqrt{\varepsilon}/\lambda, A_0\sqrt{\varepsilon}/\lambda)$ при рассеянии s-поляризованной волны на гофрированной границе диэлектриков со средним перепадом проницаемости $\varepsilon = 10$ (отмечены ромбами). Для сравнения приведены линии, соответствующие $\varepsilon = 100$ (отмечены крестиками)



и смещается в сторону меньших его значений с ростом амплитуды гофра. В отличие от случая отражения от идеально проводящей поверхности форма областей, соответствующих большему значению энергии отражения, имеет вид не перпендикулярных оси линий, а колоколообразных образований, вытянутых по оси в сторону больших $d\sqrt{\varepsilon}/\lambda$. Режиму полного отражения в -1 -ую гармонику на плоскости $(d\sqrt{\varepsilon}/\lambda, A_0\sqrt{\varepsilon}/\lambda)$ соответствует ряд непрерывных линий (см. рис. 5б), также качественно удовлетворяющих аналитическому представлению [20] в двухволновой области.

2.4. Дифракция s-волны на границе диэлектриков с большим перепадом проницаемости (полное отражение)

Для того же диэлектрика при рассеянии s-поляризованной волны картина эволюции режима полного отражения другая (рис. 6а). Здесь наблюдаются попеременно возникающие с ростом амплитуды гофра области режима полного отражения в -1 -ую гармонику, расположенные то на оси, соответствующей условию автоколлимации, то вне неё (с отстройкой по углу) в виде симметричных относительно оси образований. С ростом амплитуды гофра эта структура смещается в сторону меньших значений $d\sqrt{\varepsilon}/\lambda$, а на её месте рождается следующая, постепенно заполняя всю область ячейками с имеющейся внутри каждой ячейки точкой полного отражения. Согласно полученной картине полное отражение в данном случае возможно при существенном отклонении от условия автоколлимации в широком диапазоне углов. Для такой картины рассеяния представление режимов полного отражения в -1 -ую гармонику на плоскости параметров $(d\sqrt{\varepsilon}/\lambda, A_0\sqrt{\varepsilon}/\lambda)$, показанное на рис. 6б, демонстрирует набор видоизменённых по отношению к изображённому на рис. 5б линий, имеющих переходы друг в друга и точки бифуркации.

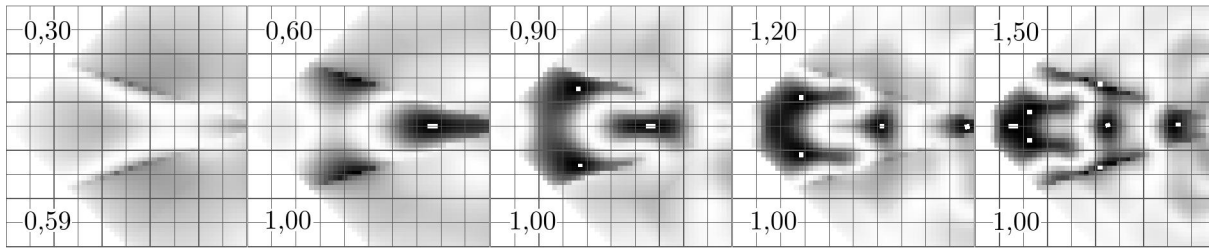


Рис. 8а. Серия диаграмм для рассеяния s-поляризованной волны на гофрированной границе диэлектриков со средним перепадом проницаемости $\varepsilon = 10$, демонстрирующих особенности эволюции режима полного отражения в -1 -ую гармонику с ростом амплитуды гофра (на рисунке показана область параметров $0,5 < d\sqrt{\varepsilon}/\lambda < 1,5$ по горизонтали и $0 < d\sqrt{\varepsilon} \sin(\theta_j)/\lambda < 1$ по вертикали)

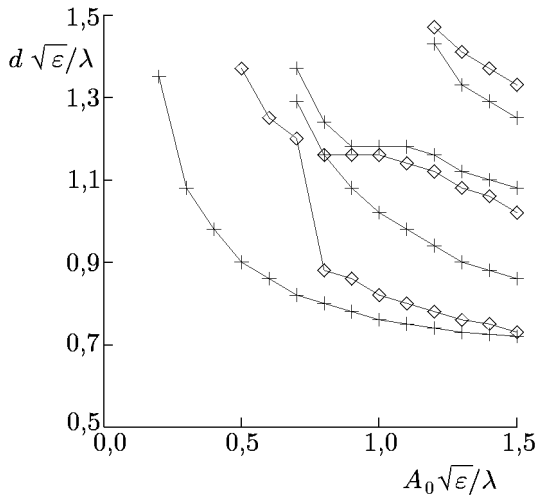


Рис. 8б. Линии существования режима полного отражения в -1 -ую гармонику на плоскости $(d\sqrt{\varepsilon}/\lambda, A_0\sqrt{\varepsilon}/\lambda)$ при рассеянии s-поляризованной волны на гофрированной границе диэлектриков со средним перепадом проницаемости $\varepsilon = 10$ (отмечены ромбами). Для сравнения приведены линии, соответствующие $\varepsilon = 100$ (отмечены крестиками)

2.5. Дифракция p- и s-волн на границе диэлектриков с умеренным перепадом проницаемости (полное отражение)

С уменьшением диэлектрической проницаемости верхней среды двухволновая область на диаграмме, показанной на рис. 2, сужается и ограничивается наличием распространяющихся гармоник в нижней среде при некотором отклонении от автоколлимации. Проявившееся влияние взаимодействия с прижатыми волнами вблизи области их возникновения несколько видоизменяет картину появления режимов полного отражения в -1 -ую гармонику. На рис. 7а, 8а представлена серия диаграмм для $\varepsilon = 10$ на той же области параметров $0,5 < d\sqrt{\varepsilon}/\lambda < 1,5$ и $0 < d\sqrt{\varepsilon} \sin(\theta_j)/\lambda < 1$, демонстрирующих эволюцию режима полного отражения с ростом амплитуды гофра для p- и s-поляризованных волн соответственно, а на рис. 7б, 8б изображены линии, соответствующие режиму полного отражения как для $\varepsilon = 10$ (отмечены ромбами), так и для $\varepsilon = 100$ (отмечены крестиками), для сравнения. Видно, что эти линии почти совпадают. Однако качественным отличием в картине возникновения режимов полного отражения в -1 -ую гармонику является тенденция к появлению таких режимов при отсутствии автоколлимации для p-поляризованной волны, чего не было при $\varepsilon = 100$.

Дальнейшее уменьшение диэлектрической проницаемости верхней среды ещё более сужает двухволновую область и увеличивает влияние взаимодействия волн вблизи границы. На рис. 9, 10 представлена серия диаграмм для $\varepsilon = 4$ соответственно для p- и s-поляризованных волн на части изображённой на рис. 2 области параметров $0,5 < d\sqrt{\varepsilon}/\lambda < 1,0$ и $0,4 < d\sqrt{\varepsilon} \sin(\theta_j)/\lambda < 0,6$, демонстрирующих эволюцию режима полного отражения с ростом амплитуды гофра, а на рис. 11, 12 — серия таких же диаграмм для $\varepsilon = 2$ при $0,5 < d\sqrt{\varepsilon}/\lambda < 0,7$ и $0,4 < d\sqrt{\varepsilon} \sin(\theta_j)/\lambda < 0,6$. Тенденция изменения картины возникновения полного отражения в -1 -ую гармонику прослеживается достаточно чётко. При $\varepsilon = 4$ такие режимы в случае отклонения от условий автоколлимации наблюдаются и для p-, и для s-поляризованных волн, а при $\varepsilon = 2$ — уже только для p-волны, для

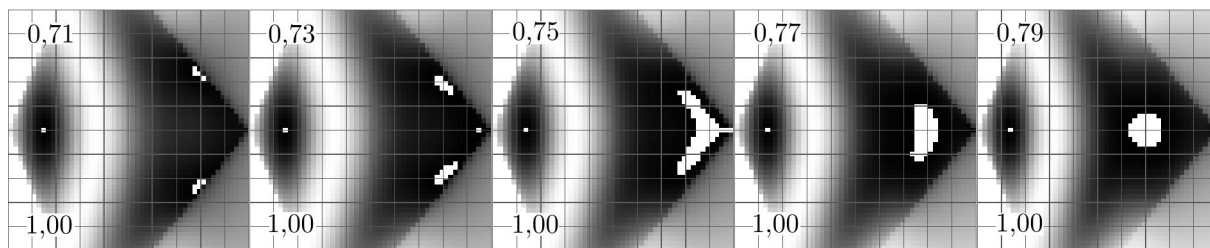


Рис. 9. Серия диаграмм режима полного отражения в -1 -ую гармонику при $\varepsilon = 4$ для р-поляризованной волны на части изображённой на рис. 2 области параметров: $0,5 < d\sqrt{\varepsilon}/\lambda < 1,0$ и $0,4 < d\sqrt{\varepsilon} \sin(\theta_j)/\lambda < 0,6$

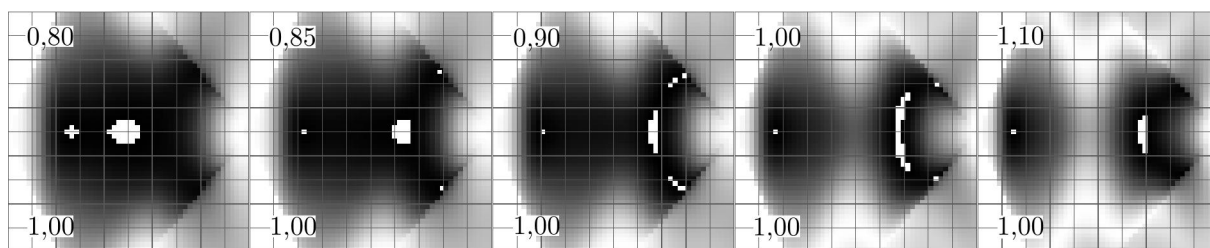


Рис. 10. Серия диаграмм режима полного отражения в -1 -ую гармонику при $\varepsilon = 4$ для s-поляризованной волны на части изображенной на рис. 2 области параметров: $0,5 < d\sqrt{\varepsilon}/\lambda < 1,0$ и $0,4 < d\sqrt{\varepsilon} \sin(\theta_j)/\lambda < 0,6$

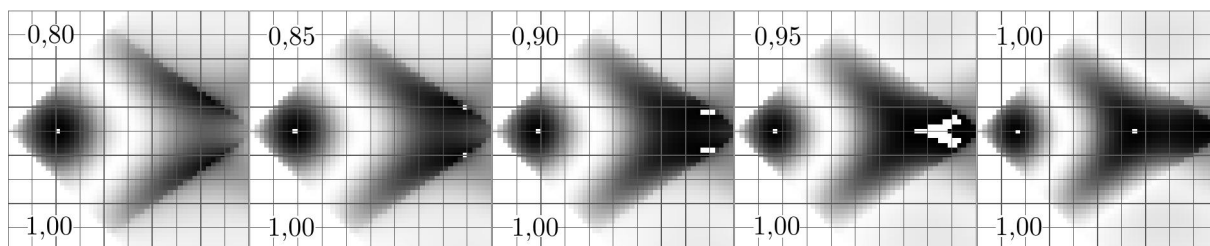


Рис. 11. Серия диаграмм режима полного отражения в -1 -ую гармонику при $\varepsilon = 2$ для р-поляризованной волны на части изображенной на рис. 2 области параметров: $0,5 < d\sqrt{\varepsilon}/\lambda < 0,7$ и $0,4 < d\sqrt{\varepsilon} \sin(\theta_j)/\lambda < 0,6$

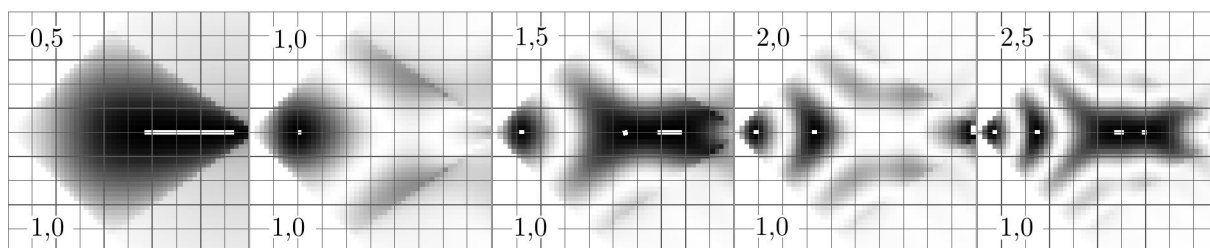


Рис. 12. Серия диаграмм режима полного отражения в -1 -ую гармонику при $\varepsilon = 2$ для s-поляризованной волны на части изображенной на рис. 2 области параметров: $0,5 < d\sqrt{\varepsilon}/\lambda < 0,7$ и $0,4 < d\sqrt{\varepsilon} \sin(\theta_j)/\lambda < 0,6$

которой они не были возможны при больших ε . При этом для s-поляризованной волны режимы полного отражения в -1 -ую гармонику исчезают [25].

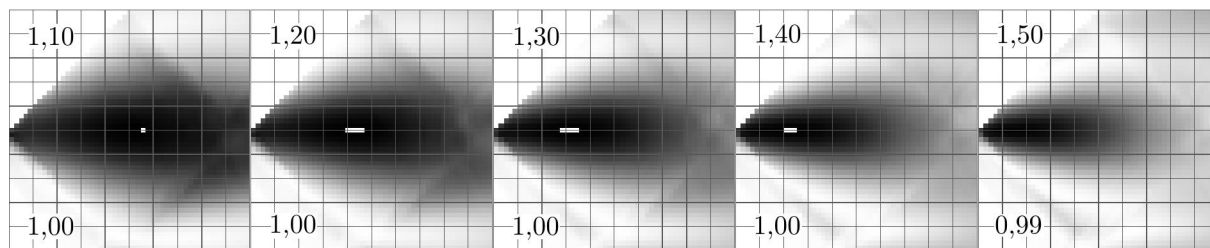


Рис. 13. Диаграммы энергии прохождения в -1 -ую гармонику с ростом амплитуды гофра для р-поляризованной волны на области параметров $0,5 < d/\lambda < 1,5$ по горизонтали и $0 < d \sin(\theta_j)/\lambda < 1$ по вертикали

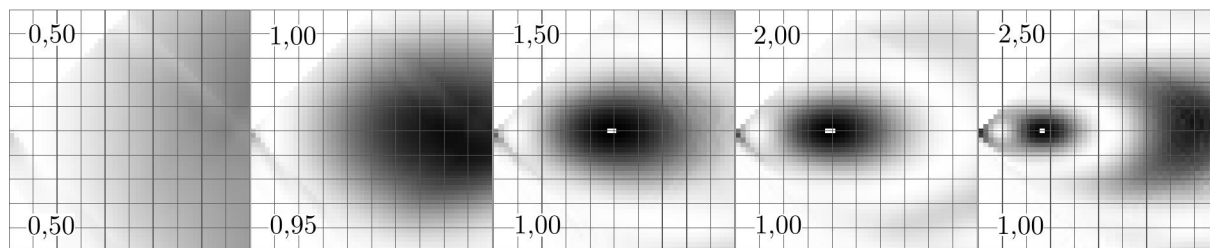


Рис. 14. Диаграммы энергии прохождения в -1 -ую гармонику с ростом амплитуды гофра для s-поляризованной волны на области параметров $0,5 < d/\lambda < 1,5$ по горизонтали и $0 < d \sin(\theta_j)/\lambda < 1$ по вертикали

2.6. Дифракция р- и s-волн на границе диэлектриков с умеренным перепадом проницаемости (полное прохождение)

Рассмотрим теперь эволюцию режимов полного прохождения в незеркальный максимум через гофрированную границу диэлектрика. Для этого можно рассматривать ситуацию падения волны из более плотной среды, как рассматривалось ранее, или, наоборот, падение волны из менее плотной в более плотную среду ($\varepsilon_1 = \varepsilon = 1 > \varepsilon_2 = \varepsilon_0$). Будем исследовать последний случай на примере тефлона ($\varepsilon = 2$). На рис. 13, 14 для р- и s-поляризованных волн соответственно представлены диаграммы относительной энергии прохождения в -1 -ую гармонику с ростом амплитуды гофра на области параметров $0,5 < d/\lambda < 1,5$ и $0 < d \sin(\theta_j)/\lambda < 1$. Анализ показывает существование режима полного прохождения для р-поляризованной волны лишь при некоторых параметрах. Для s-поляризованной волны линия существования этого режима на диаграмме непрерывна. И для р-, и для s-поляризованных волн режим полного прохождения в -1 -ую гармонику в рассматриваемой области наблюдается только при выполнении условия автоколлимации [26].

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в работе на примере простейшего (синусоидального) профиля гофра в приближении отсутствия потерь в веществе исследованы режимы полной трансформации падающей волны в дифракционный максимум при её падении на гофрированную металлическую поверхность или гофрированный раздел двух диэлектрических сред. Выявлены закономерности возникновения и эволюции таких режимов с ростом амплитуды гофра. Показано, что режимы полной трансформации падающей волны в дифракционный максимум возможны как при автоколлимации, так и при существенном отклонении от неё. В частности, для металлов и диэлектриков с большой проницаемостью, когда нет существенного взаимодействия с прижатыми волнами вблизи границ их возникновения, режимы полного отражения в -1 -ую гармонику при отклонении от

автоколлимации наблюдаются лишь для s-поляризованной волны. Для р-поляризованной волны такие режимы возможны только при выполнении условия автоколлимации. Для диэлектриков с умеренным значением ε , когда взаимодействие волн становится существенным, наблюдается обратная картина: режимы полного отражения в -1 -ую гармонику при отклонении от автоколлимации наблюдаются лишь для р-поляризованной волны, а для s-поляризованной волны они возможны только при условии автоколлимации. Режим полного прохождения в -1 -ую гармонику для р-поляризованной волны возможен лишь в отдельных точках. Для s-поляризованной волны линия существования этого режима непрерывна. И для р-, и для s-поляризованных волн режим полного прохождения в -1 -ую гармонику наблюдается только при условии автоколлимации.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 03-02-17293) и Совета по поддержке ведущих научных школ (грант № НШ-1637.2003.2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шестопапов В. П., Литвиненко Л. Н., Масалов С. А., Сологуб В. Г. Дифракция волн на решётках. Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1973.
2. Electromagnetic theory of gratings / Ed. by R. Petit. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1980.
3. Шестопапов В. П., Кириленко А. А., Масалов С. А., Сиренко Ю. К. Резонансное рассеяние волн. Т.1. Дифракционные решётки. Киев: Наукова думка, 1986.
4. Шестопапов В. П., Сиренко Ю. К. Динамическая теория решёток. Киев: Наукова думка, 1989.
5. Сиренко Ю. К. // Успехи современной радиоэлектроники. 2000. Вып. 10. С. 5.
6. Вайнштейн Л. А., Суков А. И. // Радиотехника и электроника. 1984. Т. 19, вып. 8. С. 1472.
7. Авербах В. С., Власов С. Н., Таланов В. И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1967. Т. 10, № 9–10. С. 1333.
8. Власов С. Н., Копосова Е. В., Павельев А. Б., Хижняк В. И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1996. Т. 39, № 6. С. 691.
9. Власов С. Н., Копосова Е. В., Павельев А. Б., Пылин А. В., Хижняк В. И. // Письма в ЖТФ. 1991. Т. 17, № 4. С. 8.
10. Ковалёв Н. Ф. // Изв. вузов. Радиофизика. 2003. Т. 46, № 4. С. 299.
11. Гинзбург Н. С., Песков Н. Ю., Сергеев А. С. и др. // Изв. вузов. Радиофизика. 2001. Т. 44, № 5–6. С. 533.
12. Ахманов С. А., Выслоух В. А., Чиркин А. С. Оптика фемтосекундных лазерных импульсов. М.: Наука, 1988.
13. Perry M. D., Boyd R. D., Britten J. A., Decker D., Shore B. M., Shannon C., Shoults E. // Opt. Lett. 1995. V. 20, No. 8. P. 940.
14. Власов С. Н., Казакова Н. Г., Копосова Е. В. // ЖТФ. 1998. Т. 68, № 2. С. 82.
15. Данилов Ю. Ю., Кузиков С. В., Павельев В. Г., Кошуринов Ю. И., Лещинский С. М. // Письма в ЖТФ. 2001. Т. 27, № 19. С. 5.
16. Ковалёв Н. Ф., Орлова И. М., Петелин М. И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1968. Т. 11, № 5. С. 783.
17. Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П., Теория волн. М.: Наука, 1979, 383 с.
18. Горелик Г. С. Колебания и волны. М., Л.: Гостехтеоретиздат, 1950. 551 с.
19. Косарев Е. Л. // Письма в ЖЭТФ. 1966. Т. 3, вып. 7. С. 295.
20. Ахманов С. А., Семиногов В. Н., Соколов В. И. // ЖЭТФ. 1987. Т. 93, вып. 5 (11). С. 1654.
21. Власов С. Н., Копосова Е. В. // Письма в ЖТФ. 1992. Т. 18, вып. 9. С. 29.
22. Власов С. Н., Копосова Е. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1994. Т. 37, № 3. С. 351.

23. Власов С. Н., Копосова Е. В., Паршин В. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 2000. Т. 43, № 10. С. 908.
24. Ваганов Р. Б., Каценеленбаум Б. З. Основы теории дифракции. М.: Наука, 1982.
25. Власов С. Н., Копосова Е. В. // Письма в ЖТФ. 1993. Т. 19, вып. 19. С. 80.
26. Власов С. Н., Копосова Е. В. // ЖТФ. 1993. Т. 63, вып. 7. С. 123.

Институт прикладной физики РАН,
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию
28 мая 2003 г.

**DIFFRACTION ON A CORRUGATED INTERFACE.
TOTAL TRANSFORMATION OF AN INCIDENT WAVE TO THE DIFFRACTION MAXIMUM**

S. N. Vlasov and E. V. Kuposova

Using an elementary (sinusoidal) corrugation profile in the approximation of absence of losses in the material as an example, we study the regimes of total transformation of an incident wave to the diffraction maximum on a corrugated metal surface or corrugated boundary of two dielectric media. A numerically intuitive pattern of the origin and evolution of such regimes with increasing corrugation amplitude is outlined. It is shown that the regimes of total transformation of an incident wave to the diffraction maximum are possible both in the case of autocollimation and the case of a considerable deviation from it. The examination is based on a numerical method of solving the integral equation using a specially created interactive processing system in Visual Fortran.