

Содержание

Бубукин И. Т., Станкевич К. С. Миллиметровая радиометрия температурной плёнки на морской поверхности	261
Гайкович К. П. Обратные задачи ближнепольной радиотермометрии	268
Ерухимова М. А., Токман М. Д. О «безрезонансном» параметрическом циклотронном излучении	280
Ковалёв Н. Ф. О двумерном брэгговском резонаторе	299
Кириченко А. Я., Когут А. Е., Кутузов В. В., Солодовник В. А. Особенности характеристик вынужденных колебаний типа шепчущей галереи в эллипсоидальном диэлектрическом резонаторе с малым эксцентриситетом	314
Неволин В. И. Использование численных решений в методе Фурье для уравнения Фоккера—Планка—Колмогорова при анализе стохастических нелинейных систем первого порядка в нелинейных обнаружителях	322

УДК 537.86.029.65/.79; 551.465.7

МИЛЛИМЕТРОВАЯ РАДИОМЕТРИЯ ТЕМПЕРАТУРНОЙ ПЛЁНКИ НА МОРСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

И. Т. Бубужкин, К. С. Станкевич

В результате натурных измерений теплового радиоизлучения взволнованной морской поверхности в прибрежной зоне восточного побережья Крыма, в полосе частот $53 \div 55$ ГГц получены данные о температуре воды на глубине 0,2 мм и отражательных свойствах морской поверхности. Измерение интенсивности радиоизлучения поверхности при подсветке её сигналом известной, но изменяющейся мощности позволяет получить данные одновременно о температуре и коэффициенте отражения. В эксперименте такой подсветкой являлось радиоизлучение атмосферы на склоне полосы поглощения молекулярного кислорода, принимаемое разнесёнными по частоте каналами радиометра-спектрометра. Измеренная температура воды $T_S = (5,4 \pm 1,0)^\circ \text{C}$ оказалась меньше, чем температура воздуха и воды на глубине. Коэффициент отражения равен $R = 0,349 \pm 0,05$.

В статье рассматривается измерение распределений температуры воды на поверхности экваторий в реальных условиях ветрового волнения. Точные данные о температурной стратификации важны для определения тепловых потоков и теплообмена между океаном и атмосферой, а также для совершенствования подспутниковых измерений, необходимых для калибровки результатов космического дистанционного зондирования.

Тепловая плёнка на границе раздела атмосфера—морская поверхность имеет толщину порядка 10 мм, в ней значительны градиенты температуры, которые определяют тепловой поток и теплообмен между водой и атмосферой. В реальных условиях волнения возможно только дистанционное измерение температуры по данным об интенсивности собственного излучения моря. В миллиметровом и сантиметровом диапазонах радиоволн излучение формируется в скин-слое с толщиной от десятых долей до нескольких миллиметров, который локализуется внутри температурной плёнки. Поэтому по радиоизлучению моря на этих длинах волн возможно восстановить температурную стратификацию в поверхностной плёнке. Для этого необходимы радиометрические измерения, по крайней мере, на двух длинах волн [1], из которых одна выбирается в миллиметровом, а другая — в сантиметровом диапазонах.

С этой целью необходимы исследования радиоизлучения температурной плёнки на морской поверхности в условиях ветрового волнения в миллиметровом диапазоне длин волн. Радиоизлучение морской поверхности — флуктуирующее излучение, порождаемое ветровым волнением, и главной проблемой при дистанционном определении температуры взволнованной поверхности является определение коэффициента отражения, который должен быть известен на момент измерения радиояркостной температуры. Непосредственные измерения коэффициента отражения в натуральных условиях невозможны. В сантиметровом диапазоне длин волн разработаны инерционные методы, позволяющие исключать влияние крупномасштабного волнения и учитывать отдельно вклад ряби [2], но они не применимы в миллиметровом диапазоне. Ниже описан уникальный метод дистанционного измерения отражательных свойств взволнованной морской поверхности на волнах 5-миллиметрового диапазона. В результате по абсолютным измерениям радиояркостной температуры излучения морской поверхности впервые измерен коэффициент отражения в натуральных условиях и определена температура воды.

Радиояркостная температура моря в направлении угла визирования θ равна

$$T_M(-\theta, t) = [1 - R_\lambda(-\theta, t)]T_S + R_\lambda(-\theta, t)T_H(\theta, t), \quad (1)$$

И. Т. Бубужкин, К. С. Станкевич

откуда

$$T_S = T_M(-\theta, t) + R_\lambda(-\theta, t)[T_S - T_H(\theta, t)], \quad (2)$$

где T_S — температура воды в скин-слое, $R_\lambda(-\theta, t)$ — коэффициент отражения морской поверхности. Как видно из (2), для дистанционного измерения температуры воды должны быть известны абсолютные величины яркостной температуры излучения моря $T_M(-\theta, t)$ и атмосферы в направлении зеркально отражённого поверхностью луча $T_H(\theta, t)$.

Исследования проводились в диапазоне частот $53 \div 55$ ГГц, попадающем на склон полосы поглощения молекулярного кислорода в атмосфере. Радиометр-спектрометр имел четыре канала, разнесённых по частоте в этом диапазоне, и в каждом канале проводились абсолютные измерения радиояркостных температур излучения моря и атмосферы. Интенсивность подсветки морской поверхности излучением атмосферы увеличивается с частотой, и в нашем эксперименте в зависимости от частоты канала и погодных условий радиояркостная температура подсветки изменялась от 234 до 278 К. Излучательная способность воды имеет слабую частотную зависимость, и в пределах полосы $53 \div 55$ ГГц ей можно пренебречь, т. е. считать одинаковыми коэффициенты отражения R_λ во всех каналах. Тогда построенная по экспериментальным данным корреляционная зависимость между радиояркостными температурами излучения моря $T_M(-\theta)$ и атмосферы $T_H(\theta)$, как видно из (1), определяет коэффициент отражения морской поверхности $R_\lambda(-\theta, t)$ в реальных условиях ветрового волнения, а также температуру воды в скин-слое. Поскольку радиояркостная температура $T_H(\theta)$ близка к температуре воды T_S , то, как следует из (2), флуктуации радиоизлучения моря из-за изменчивости коэффициента отражения существенно уменьшаются, и, следовательно, повышается отношение сигнал/шум при измерении яркостной температуры.

В нашем эксперименте яркостная температура моря T_M измерялась относительно собственного излучения абсолютно чёрного диска, находящегося при температуре окружающего воздуха T_0 . Диск вносился в диаграмму направленности антенны и экранировал морскую поверхность, его телесный угол определил пространственное разрешение. Морская поверхность и диск находились в волновой зоне антенны на расстоянии порядка $10D^2/\lambda$, где D — диаметр антенны, λ — длина волны принимаемого излучения.

Для абсолютных измерений радиояркостной температуры необходима калибровка антенных температур. Точная калибровка антенных температур возможна только по радиоизлучению двух абсолютно чёрных тел, одно из которых находится при температуре окружающего воздуха, а второе нагревается или охлаждается. В нашем эксперименте это было технически трудно реализовать. Поэтому в качестве второго эталона излучения с известной температурой использовалось радиоизлучение неба в зените:

$$T_H(\theta = 0) = T_A(\theta = 0) + 2,73e^{-\tau_\lambda}, \quad (3)$$

где второе слагаемое в правой части учитывает изотропное космическое микроволновое излучение с температурой 2,73 К, τ_λ — оптическая толщина атмосферы в зените.

Измерение поглощения радиоволн в атмосфере основано на использовании плоскостлой модели атмосферы и записи яркостной температуры радиоизлучения в виде

$$T_A(\theta) = T_B(1 - e^{-\tau_\lambda \sec \theta}), \quad (4)$$

где T_B — средняя температура атмосферы. При сканировании диаграммы направленности антенны по зенитному углу с целью получения стабильных, свободных от изменения сильных фоновых излучений распределений антенных температур применялось перископическое изменение зенитного угла луча неподвижной антенны. В эксперименте в качестве антенны использовался

длинный рупор, имевший ширину диаграммы на уровне половинной мощности $5,5^\circ$ и направленный горизонтально на отражающий диск. Металлический диск устанавливался на расстоянии $D^2/(2\lambda)$ от центра раскрыва рупора под углом 45° к его оси. Изменение зенитного угла луча антенны достигалось вращением наклонного диска, от которого переотражался луч. Измерение детального профиля $T_A(\theta)$ занимает около 20 минут, и за это время в атмосфере может меняться распределение температуры, влажности и влажности. Поэтому оптическая толщина атмосферы определялась по отсчётам антенной температуры на трёх зенитных углах: $\theta = 30^\circ$, 50° и 70° , по которым вычислялась оптическая толщина τ_λ как решение трансцендентного уравнения

$$Be^{0,41\tau_\lambda} = (1 + B) - e^{-1,36\tau_\lambda}, \quad (5)$$

где

$$B = \frac{n(\theta = 70^\circ) - n(\theta = 50^\circ)}{n(\theta = 50^\circ) - n(\theta = 30^\circ)},$$

$n(\theta)$ — антенная температура в произвольных единицах. Согласно (4) яркостная температура излучения плоскостной атмосферы определяется средней температурой атмосферы и полным поглощением на луче зрения, которые, в свою очередь, зависят от высотных профилей метеорологических параметров. Поэтому среднюю температуру атмосферы T_B , как и оптическую толщину τ_λ , необходимо измерять в натуральных условиях. Поскольку диапазон частот $53 \div 56$ ГГц характеризуется большим поглощением, зависящим от частоты, среднюю температуру атмосферы необходимо измерять на частотах каждого канала радиометра-спектрометра. Заметим, что средняя температура атмосферы зависит также от полного поглощения γ на луче зрения и, следовательно, в общем случае является функцией зенитного угла. В [3] показано, что отношение T_B/T_0 , где T_0 — температура воздуха у земной поверхности, практически постоянно при $\gamma < 10$. В нашем случае это означает, что для выбранных зенитных углов $\theta < 70^\circ$ во всех каналах T_B не зависит от зенитного угла, что учитывалось в методике измерений оптической толщины атмосферы. Однако на приземных трассах или при настильных углах визирования тепловое радиоизлучение атмосферы формируется в приземном слое с известной температурой T_0 , и тогда $T_B = T_0$, а поскольку в 5-миллиметровом диапазоне длин волн $\gamma(\theta = 90^\circ) \gg 1$, то радиояркостная температура

$$T_A(\theta = 90^\circ) = T_0. \quad (6)$$

Как известно, эти особенности 5-миллиметрового диапазона длин волн широко используют при восстановлении высотного профиля температуры в атмосфере [4].

Будем считать, что температура радиоизлучения атмосферы не изменяется в пределах ширины диаграммы направленности, что обеспечивается применением антенны, имеющей достаточно высокое разрешение. Тогда разность антенных температур на двух углах

$$n(\theta_2, \theta_1) = n(\theta_2) - n(\theta_1) \propto T_H(\theta_2) - T_H(\theta_1)$$

пропорциональна разности яркостных температур неба, а для разности антенных температур в направлении горизонта и зенитного угла θ_1 с учётом (6) имеем

$$n(\theta \approx 90^\circ, \theta_1) = n(\theta \approx 90^\circ) - n(\theta_1) \propto T_0 - T_H(\theta_1).$$

Из отношения этих разностей получим

$$[T_0 - T_H(\theta_1)] \frac{n(\theta_2) - n(\theta_1)}{n(\theta \approx 90^\circ) - n(\theta_1)} = T_H(\theta_2) - T_H(\theta_1). \quad (7)$$

С учётом (3) и (4) получим следующее выражение для средней температуры атмосферы:

$$T_B = \frac{T_0 - 2,73e^{-1,6616\tau_\lambda} + 2,73 \left(\frac{n(\theta \approx 90^\circ, 0)}{n(52,5^\circ, 0)} - 1 \right) (e^{-\tau_\lambda} - e^{-1,6616\tau_\lambda})}{1 - e^{-\tau_\lambda} + \frac{n(\theta \approx 90^\circ, 0)}{n(52,5^\circ, 0)} (e^{-\tau_\lambda} - e^{-1,6616\tau_\lambda})}, \quad (8)$$

где зенитные углы $\theta_1 = 0$ и $\theta_2 = 52,5^\circ$ выбраны применительно к нашему эксперименту. Таким образом, в результате измерений температуры воздуха T_0 в приземном слое, $T_B(\lambda)$ и τ_λ в каждом канале были определены радиояркие температуры (3) и (4).

Абсолютные измерения температуры радиоизлучения моря проводились на вертикальной поляризации при угле визирования $\theta = 52,5^\circ$ от надира. Эксперимент в каждом частотном канале проводился циклами. Цикл включал измерения разности антенных температур излучения моря относительно абсолютно чёрного диска и излучения атмосферы в зените относительно того же абсолютно чёрного диска, температура которого была известна. Циклы повторялись несколько раз. Одновременно регистрировались температура и влажность воздуха, скорость ветра u на высоте 5 м и температура воды на глубине 1 м. Яркие температуры радиоизлучения моря и атмосферы приведены в табл. 1, в ней же содержатся данные о метеопараметрах.

Таблица 1

номер канала	$T_M(\theta = 52,5^\circ)$, К	$T_H(\theta = 52,5^\circ)$, К	T_0 , °С	$t_{\text{воды}}$, °С	τ_λ	u , м/с
3	263,1	234,6	17,2	16	1,00	2,1
4	266,2	248,3	15,2	15	1,20	2,8
4	267,0	248,3	15,0	15	1,20	2,8
4	271,3	251,0	17,0	16	1,20	0,7
2	273,8	267,1	16,6	16	1,55	3,0
2	276,0	264,9	14,2	15	1,55	2,5
1	277,4	278,2	14,2	15	2,10	2,8

Измерения проводились в ноябре при сухой безоблачной погоде; экспериментальная установка располагалась на пирсе Карадагского природного заповедника (восточное побережье Крыма).

Как отмечено выше, измерение интенсивности радиоизлучения поверхности при подсветке её сигналом известной, но изменяющейся мощности позволяет получить данные одновременно о температуре и коэффициенте отражения. В нашем эксперименте такой подсветкой являлось радиоизлучение атмосферы на склоне полосы поглощения молекулярного кислорода, принимаемое разнесёнными по частоте каналами радиометра-спектрометра. На рис. 1 представлена корреляционная зависимость между радиояркими температурами излучения моря и атмосферы; коэффициент корреляции равен 0,952. Наклон зависимости определяет коэффициент отражения взволнованной поверхности, который в нашем случае был равен $R(\theta = 52,5^\circ) = 0,349 \pm 0,05$.

Получен основной результат натурального эксперимента по дистанционному определению температуры воды в поверхностной плёнке толщиной 0,2 мм: температура воды $T_S = (5,4 \pm 1,0)^\circ \text{С}$. Ошибка в определении T_S зависит главным образом от погрешности измерения коэффициента отражения и в нашем случае составляет 14%. Её можно уменьшить, сократив время измерительного цикла за счёт совершенствования методики.

Измеренная температура воды оказалась меньше, чем температура воздуха и воды на глубине. Локальное взаимодействие морской поверхности с атмосферой формирует величину и направление теплового потока:

$$Q = Q_E + Q_T + Q_R + Q_P, \quad (9)$$

где Q_E — тепловой поток, связанный с испарением, Q_T — поток вследствие контактного теплообмена с атмосферой, Q_R — разность тепловых потоков за счёт собственного излучения морской поверхности и нисходящего излучения атмосферы, Q_P — тепловой поток проникающей солнечной радиации. Морская поверхность теряет энергию на испарение и теплопередачу, соответствующие потоки тепла равны [5]

$$Q_E = \rho_a \zeta L (q_S - q_z) u_z \frac{\text{кал}}{\text{см}^2 \cdot \text{с}}, \quad Q_T = 4,1 \cdot 10^{-4} Q_E \frac{T_S - T_z}{q_S - q_z}, \quad (10)$$

где $\rho_a \zeta = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ г} \cdot \text{см}^3$, $L = 585 \text{ кал/г}$ — скрытая теплота испарения, q_S , q_z и T_S , T_z — удельная влажность и температура над морской поверхностью и на высоте z над ней соответственно, u_z — скорость ветра на высоте z . Удельная влажность, температура и скорость ветра измерялись в процессе эксперимента. При температуре поверхности $T_S = 5^\circ \text{ С}$, воздуха $T_z = 15^\circ \text{ С}$ ($T_S - T_z < 0$) и $q_S - q_z < 0$ перенос тепла и влаги шёл из атмосферы в море:

$$Q_E = -0,7 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кал}}{\text{см}^2 \cdot \text{с}},$$

$$Q_T = -1,6 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кал}}{\text{см}^2 \cdot \text{с}}.$$

Уходящий поток теплового излучения морской поверхности при температуре $T_S = 5^\circ \text{ С}$ равен $Q_L = 8,09 \cdot 10^{-3} \text{ кал}/(\text{см}^2 \cdot \text{с})$. Максимум в спектре уходящего излучения приходится на длину волны $\lambda_{\text{max}} = 10 \text{ мкм}$ в инфракрасном диапазоне. Скин-слой, в котором формируется это излучение, имеет толщину $0,09 \text{ мм}$, т. е. всего в 2 раза меньше скин-слоя для излучения на длине волны $\lambda = 5 \text{ мм}$. Если во время измерений яркостная температура нисходящего инфракрасного излучения атмосферы была меньше 203 К , то разность Q_R тепловых потоков уходящего и приходящего излучений будут превосходить приток тепла $Q_E + Q_T$. Яркостная температура инфракрасного излучения 203 К соответствует оптической толщине $\tau = 1,2$; эксперимент проводился при безоблачной атмосфере и, следовательно, температура нисходящего инфракрасного излучения была существенно меньше. Поэтому уходящее излучение охлаждало поверхностную плёнку. Кроме того, эксперимент проводился с пирса вблизи берега; как известно, на мелководье температурный режим носит неустановившийся характер, в данном случае хотя бы за счёт выноса холодной воды на поверхность. Радиационное охлаждение и вынос холодной воды на поверхность, возможно, являются причиной разницы температур на глубине и в тонкой температурной плёнке.

Миллиметровая радиометрия температурной плёнки на морской поверхности даёт возможность исследования процессов переноса тепла и влаги в условиях ветрового волнения. Представим зависимости коэффициента отражения и температуры от скорости ветра в виде

$$R = R_f + \alpha u_z, \quad T_S = T_0 - \beta u_z. \quad (11)$$

Тогда на основании (1) радиационно-ветровая зависимость имеет вид

$$\frac{\partial T_M}{\partial u_z} = - [\beta(1 - R_f) + \alpha(T_0 - T_A)] + 2\alpha\beta u_z. \quad (12)$$

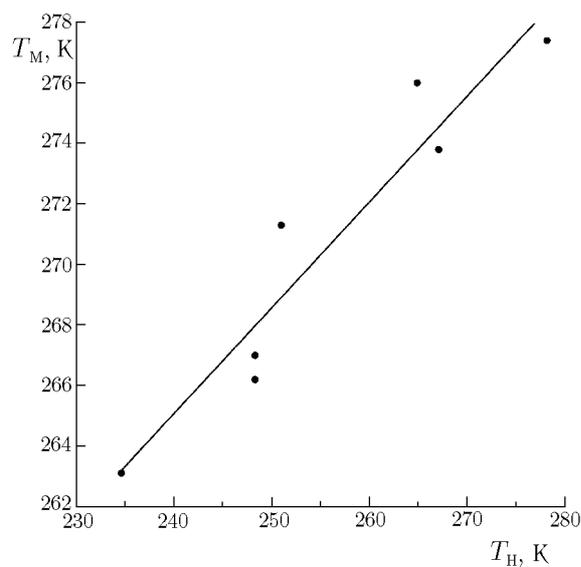


Рис. 1

Разность измеренных и вычисленных коэффициентов отражения составляет $R - R_f = 0,12$, и при $u_z = 2,8$ м/с имеем $\alpha = 4,3 \cdot 10^{-2}$ с/м. Из теоретических оценок [6] следует ожидать $\beta \approx 0,3$. Тогда при сильной подсветке моря излучением атмосферы в полосе поглощения молекулярного кислорода при $\tau_\lambda > 1,5$ вторым слагаемым в правой части (12) можно пренебречь, и измеренная радиационно-ветровая зависимость (при постоянном Q_R)

$$\frac{\partial T_M}{\partial u_z} = -\beta(1 - R_f) \quad (13)$$

определяется переносом влаги и тепла. По данным проведённого эксперимента зависимость (13) была получена (при $0 < \beta < 0,9$), но её погрешность оказалась значительной. На волнах сантиметрового диапазона $T_0 \gg T_A$, и радиационно-ветровая зависимость

$$\frac{\partial T_M}{\partial u_z} = -\alpha(T_0 - T_A) \quad (14)$$

описывает изменения коэффициента отражения при ветровом волнении.

Другим важным результатом эксперимента является измерение коэффициента отражения морской поверхности в натуральных условиях при ветровом волнении. Скорость ветра, измеряемая на высоте $z = 6$ м над уровнем моря, менялась значительно, её средняя величина была равна $u_z = 2,8$ м/с. Обнаружена значительная разница между теоретическим и экспериментальными значениями коэффициента отражения. Вычисленный френелевский коэффициент отражения с использованием моделей диэлектрической проницаемости воды [7] при угле визирования 52° и температуре воды $T_S = 5^\circ$ С равен $R_f = 0,228$. Измеренная величина $R = 0,349$ почти на 50% больше френелевского значения. Обычно изменения коэффициента отражения связывают с ветровым волнением поверхности. Крупномасштабное (по сравнению с длиной волны принимаемого излучения) волнение приводит к увеличению коэффициента отражения, однако расчёты показали, что при скорости ветра $u = 3$ м/с ожидаемое увеличение составляет $\Delta R = 0,007$, т. е. более чем на порядок меньше обнаруженной разницы. Мелкомасштабное волнение (в нашем случае капиллярные волны) увеличивает излучение взволнованной поверхности по сравнению с гладкой поверхностью [8], что эквивалентно уменьшению коэффициента отражения. Таким образом, получается, что известные модели ветровой структуры морской поверхности не объясняют полученный в эксперименте коэффициент отражения на длине волны $\lambda = 5$ мм. Во время эксперимента, как отмечалось выше, перенос тепла и влаги был направлен из атмосферы в море, поэтому испарения не было. В этих условиях тонкий поверхностный слой температурной плёнки (толщина скин-слоя на длине волны $\lambda = 5$ мм равна 0,2 мм) мог оказаться насыщенным молекулами атмосферных газов, растворённых в воде, вследствие чего уменьшилась вязкость и соответствующее время молекулярной релаксации. Вычисления показывают, что, например, коэффициент отражения ровной поверхности $R = 0,349$ может быть получен при уменьшении в 3 раза времени молекулярной релаксации воды. Заметим, что эффект изменения молекулярной релаксации воды может оказаться существенным только на волнах миллиметрового диапазона. В инфракрасном диапазоне скин-слой ещё меньше и составляет приблизительно 0,1 мм при $\lambda = 10$ мкм, однако в этом диапазоне время молекулярной релаксации воды практически не влияет на величину диэлектрической проницаемости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хунджуа Г. Г., Гусев А. М., Андреев Е. Г. и др. // Изв. АН СССР. ФАО. 1977. Т. 13, № 7. С. 753.

2. Бубукин И. Т., Станкевич К. С. // Труды XX-й Всероссийской научной конференции «Распространение радиоволн», 2-4 июля 2002 г., Нижний Новгород. С. 374.
3. Кисляков А. Г., Станкевич К. С. // Изв. вузов. Радиофизика. 1967. Т. 10, № 9-10. С. 1244.
4. Наумов А. П., Ошарина Н. Н., Троицкий А. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1999. Т. 17, № 1. С. 45.
5. Перри А. Х., Уокер Дж. М. Система океан—атмосфера. Л.: Гидрометеиздат, 1979. 196 с.
6. Океанология. Физика океана: 1. Гидрофизика океана / Под ред. В. М. Каменковича, А. С. Моница. М.: Наука, 1978. 912 с.
7. Stogrin A. // IEEE Trans. on Microwave Theory and Tech. 1971. V. 9, No 8. P. 733.
8. Ирисов В. Г., Трохимовский Ю. Г., Эткин В. С. // Дистанционные методы исследования океана. Горький: ИПФ АН СССР, 1987. 196 с.

Научно-исследовательский радиофизический институт,
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию
23 апреля 2002 г.

MILLIMETER-WAVE RADIOMETRY OF A TEMPERATURE FILM ON THE SEA SURFACE

I. T. Bubukin and K. S. Stankevich

Using in-situ measurements of thermal radio emission at frequencies 53–55 GHz from a rough sea surface in the coastal zone of the eastern Crimea shore, we obtain data on the water temperature at a depth of 0.2 mm and on the reflection characteristics of the sea surface. Measuring the intensity of radio emission from a surface irradiated by the signal with known variable power allows one to obtain simultaneous data on the temperature and reflection coefficient. In our experiment, the atmospheric radio emission in the wing of the molecular oxygen absorption band, received by the channels of a radiometer–spectrometer at different frequencies, plays the role of such an irradiation. The measured water temperature $T_S = (5.4 \pm 1.0)^\circ\text{C}$ turns out to be less than the air temperature and the in-depth water temperature. The reflection coefficient is equal to $R = 0.349 \pm 0.05$.

УДК 621.371:615.47

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ БЛИЖНЕПОЛЬНОЙ РАДИОТЕРМОМЕТРИИ*К. П. Гайкович*

Показано, что одномерная задача ближнеполевой СВЧ радиометрии в случае плавно неоднородной среды сводится к интегральному уравнению, аналогичному известному решению уравнения переноса излучения, ядро которого зависит только от одного параметра, определяемого из эксперимента. Это позволяет использовать для определения подповерхностного профиля температуры набор ближнеполевых антенн произвольной конструкции, добываясь того, чтобы эффективная глубина формирования излучения, принимаемого этими антеннами, перекрывала диапазон глубин зондирования. В случае ближнеполевых измерений также оказывается возможным модифицировать ранее полученное совместное решение уравнений переноса излучения и теплопроводности и применить его для контроля подповерхностного профиля температуры по динамике принимаемого сигнала.

ВВЕДЕНИЕ

Методы подповерхностного температурного зондирования по данным СВЧ радиометрических измерений (см. избранные работы [1–18] наиболее известных коллективов в этой области) развиваются на протяжении уже более чем двух десятилетий, однако полученные результаты до сих пор не оправдывают сделанных ранее прогнозов. Причины такого состояния дел связаны и с трудностями учёта влияния свойств отражения, пропускания и рассеяния излучения поверхностью, и с трудностью достижения высокой точности калибровки (особенно в нескольких каналах), и со сложностью решения возникающих обратных задач, которые, как правило, относятся к классу некорректных. Проблемы, связанные с влиянием отражения излучения от поверхности, решались двумя способами: путём создания согласованных со средой контактных антенн [1–12] и путём измерений при наличии фонового излучения, близкого по яркостной температуре к температуре поверхности среды (например, под отражающим экраном [13, 14, 16, 17] или на частоте, лежащей в линии сильного атмосферного поглощения [15]).

Для зондирования подповерхностного профиля температуры применялись, как правило, многочастотные методы с использованием радиометров на нескольких длинах волн. Трудности таких измерений оказались столь существенными, что эти методы (за единичными исключениями) практически не вышли за рамки чисто научных экспериментов. Для сред, в которых отсутствуют внутренние тепловые источники, так что эволюция их глубинной температуры определяется только граничными условиями на поверхности, была предложена и использована методика восстановления подповерхностного профиля температуры по измерениям предшествующей динамики яркостной температуры излучения среды, измеренной только на одной длине волны [16, 17].

Другой одноволновый метод, в разных вариантах предложенный в [5, 6, 10–12, 18], основан на зависимости эффективной глубины формирования излучения, принимаемого контактной антенной, от её размеров и устройства. Так, в [5] предлагалось выделять различные моды, возбуждаемые средой в волноводе; для этих мод получены уравнения формирования в одномерно-неоднородной среде, причём для плавно неоднородных сред эти уравнения получены в явном виде. В [6, 12] измерялись передаточные функции различных контактных антенн и предлагалось использовать их набор для восстановления температурного профиля из системы уравнений с использованием указанных эмпирических передаточных функций; в [10, 11, 18] предлагался близкий к описанному выше подход, основанный на зависимости глубины формирования принимаемого

излучения от размера или высоты антенны над поверхностью. В [18] для диэлектрически однородной среды был выполнен анализ формирования излучения с учётом передаточной функции произвольной контактной (или, в общем случае, ближнеполевой) антенны и получены интегральные соотношения, связывающие излучение и профиль температуры, в которых были выделены составляющие волнового и квазистационарного полей. Показано, что с уменьшением размера апертуры антенны или её высоты над поверхностью среды вклад квазистационарных колебаний поля в измеряемый сигнал становится определяющим. При этом эффективная толщина слоя, в котором формируется принимаемое излучение, уменьшается и для маленьких антенн становится много меньше толщины скин-слоя, определяемого поглощением. Эти эффекты были обнаружены и исследованы в [9], а в [10, 11] использованы для восстановления подповерхностного профиля температуры.

Вместе с тем в работах [10, 11] имелась некоторая теоретическая неполнота. Дело в том, что в полученных соотношениях между излучением и профилем температуры зависимость передаточной функции от размера антенны задавалась однопараметрической модельной функцией (гауссовым распределением тока на апертуре). Из этих соотношений вычислялась эффективная глубина формирования принимаемого излучения, и результат вычислений сопоставлялся со значением, полученным из эксперимента [9]. Оказалось, что вычисленные и измеренные значения эффективной глубины близки, что позволило поставить обратную задачу восстановления температурного профиля по зависимости измеренного излучения среды от размера антенны. Вместе с тем очевидно, что трудно рассчитывать на возможность такого однопараметрического описания для любой антенны независимо от её конструкции, которая к тому же может быть несимметричной. Вычисление же передаточных функций для произвольных антенн представляет собой практически неразрешимую задачу; к тому же неясно, что в таком случае использовать в качестве параметра, от которого зависит передаточная функция (ядро решаемого уравнения).

В данной работе показано, что в случае однородной среды в передаточную функцию антенны можно ввести в явном виде параметр эффективной глубины формирования излучения, который определяется из эксперимента, а само уравнение свести к виду, аналогичному известному решению уравнения переноса. Это позволило для случая ближнеполевых измерений модифицировать полученное ранее совместное решение уравнений переноса излучения и теплопроводности и использовать это соотношение для определения подповерхностного профиля температуры водной среды по динамике измеряемого в ближней зоне излучения. Удалось обобщить теорию формирования сигнала, принимаемого в ближней зоне, для случая плавно неоднородной среды. Установлено, что и в этом случае ядро уравнения зависит только от одного параметра, которым является средневзвешенное поперечное волновое число принимаемых антенной мод.

1. ФОРМИРОВАНИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ, ПРИНИМАЕМОГО БЛИЖНЕПОЛЕВЫМИ АНТЕННАМИ, И ПОСТАНОВКА ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ БЛИЖНЕПОЛЕВОЙ РАДИОТЕРМОМЕТРИИ

1.1. Однородная среда

Воспользуемся выражением для эффективной температуры излучения T_B (яркостной температуры), принимаемого идеальной согласованной со средой антенной с эффективным размером D на высоте h над поверхностью среды с подповерхностным профилем температуры $T(z)$, которое было получено в [18] для диэлектрически однородного полупространства $z \leq 0$:

$$T_B(h, D) = \int_{-\infty}^0 T(z)K(z, h, D) dz, \quad (1)$$

где

$$K(z, h, D) = \tilde{K}(z, h, D) / \int_{-\infty}^0 \tilde{K}(z', h, D) dz',$$

$$\begin{aligned} \tilde{K}(z, h, D) = \iint d\kappa_x d\kappa_y \left(\frac{\kappa_y^2}{\kappa^2} |T_E(\kappa)|^2 + \frac{\kappa_x^2}{\kappa^2} |T_H(\kappa)|^2 |n_{\parallel}^2| \right) \left| \frac{k_0 + \sqrt{k_0^2 - \kappa^2}}{\sqrt{k_0^2 - \kappa^2}} \right|^2 \times \\ \times \exp \left[2 \operatorname{Im} \left(\sqrt{\varepsilon k_0^2 - \kappa^2} z \right) \right] |E_a(\boldsymbol{\kappa})| \begin{cases} 1, & \kappa \leq k_0; \\ \exp(-2 \sqrt{\kappa^2 - k_0^2} h), & \kappa > k_0, \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

ε — комплексная диэлектрическая проницаемость среды,

$$T_E = \frac{2 \sqrt{k_0^2 - \kappa^2}}{\sqrt{k_0^2 - \kappa^2} + \sqrt{\varepsilon k_0^2 - \kappa^2}} \quad \text{и} \quad T_H = \frac{2 \sqrt{\varepsilon} \sqrt{k_0^2 - \kappa^2}}{\varepsilon \sqrt{k_0^2 - \kappa^2} + \sqrt{\varepsilon k_0^2 - \kappa^2}}$$

— френелевские коэффициенты, $|n_{\parallel}^2| = (|\sqrt{\varepsilon k_0^2 - \kappa^2}|^2 + \kappa^2) / (|\varepsilon| k_0^2)$, $k_0 = 2\pi/\lambda$, λ — длина волны в свободном пространстве, $\kappa^2 = \kappa_x^2 + \kappa_y^2$, $E_a(\boldsymbol{\kappa}) = \iint E_a(\mathbf{r}) \exp(i\boldsymbol{\kappa}\mathbf{r}) d\mathbf{r}$ — спектр распределения электрического поля по апертуре антенны, которое определяет эффективный размер апертуры D . В работах [9–11, 18] это распределение задавалось однопараметрической функцией вида

$$E_a(r) = E_0 \exp(-4r^2/D^2). \quad (3)$$

В (1), (2) полагалось, что антенна согласована со средой и коэффициент полезного действия антенны $\eta = 1$. В соотношениях (1), (2) можно выделить вклады волновой и квазистационарной (ближнепольной) компонент в принимаемом излучении. Вклад волновой компоненты определяется областью интегрирования $\kappa \leq k_0$, тогда как вклад квазистационарной компоненты определяет область $\kappa > k_0$. Это позволяет выразить ядро (2) уравнения (1) в виде суммы двух слагаемых $K = K_W + K_Q$ и, следовательно, условно разделить в самом уравнении (1) вклады волновой и квазистационарной компонент. Вклад ближнепольной компоненты становится определяющим при малом размере апертуры антенны ($D \ll \lambda$) и при малой высоте антенны над поверхностью ($h \ll \lambda$). Если ввести эффективную толщину слоя, в котором формируется принимаемое излучение, как

$$d_{\text{eff}}(h, D) = \left| \int_{-\infty}^0 z K(z, h, D) dz \right|, \quad (4)$$

то оказывается, что при стремлении размера контактной антенны к нулю величина d_{eff} становится много меньше толщины скин-слоя поглощения $d_{\text{sk}} = 1/(2k_0 \operatorname{Im} \sqrt{\varepsilon})$, который определяет формирование волновой компоненты поля, и также стремится к нулю. В [10, 11, 18] было предложено использовать зависимость яркостной температуры от размера или высоты антенны над поверхностью для восстановления подповерхностного профиля температуры $T(z)$ из решения интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода (1). В [9] в ходе экспериментов с водной средой, в которой создавался линейный профиль температуры, были измерены и сопоставлены с результатами расчёта по формулам (1) и (4) зависимости $T_B(h, D)$ и $d_{\text{eff}}(h, D)$. Близость измеренных и рассчитанных значений позволила реализовать в [10, 11] метод восстановления температурного профиля по измеренной зависимости $T_B(D)$. Зависимость $T_B(h)$ использовать не удалось из-за быстрого уменьшения коэффициента полезного действия антенны η с ростом высоты h . Однако даже достигнутый успех не позволяет признать удовлетворительным теоретическое описание

передаточной функции (2), основанное на однопараметрической модели (3) распределения поля по апертуре, годное, вообще говоря, лишь для оценочных расчётов. Оказалось, однако, что эта проблема имеет довольно простое решение.

Весьма сложные соотношения (2) можно представить в более компактном виде:

$$T_B(h, D) = \int_{-\infty}^0 T(z) \left[\iint F(\kappa_x, \kappa_y, D, h) \exp[\tilde{\gamma}(\kappa)z] d\kappa_x d\kappa_y \right] dz, \quad (5)$$

откуда видно, что можно эффективно воспользоваться теоремой о среднем:

$$T_B(h, D) = \int_{-\infty}^0 T(z) \exp[\tilde{\gamma}(\bar{\kappa})z] \Phi(D, h) dz,$$

где $\tilde{\gamma}(\bar{\kappa}) = 2 \operatorname{Im} \sqrt{\varepsilon k_0^2 - \bar{\kappa}^2} = \tilde{\gamma}(D, h)$, $\bar{\kappa} = \bar{\kappa}(D, h)$ — средневзвешенное значение модуля поперечного волнового числа принимаемых антенной мод, а из условия единичной нормировки ядра следует, что $\Phi(D, h) = \tilde{\gamma}(\bar{\kappa})$. Это позволяет представить уравнение (5) в виде, аналогичном известному решению уравнения переноса для поглощающего полупространства, причём таким образом, что ядро этого уравнения зависит только от одного параметра $\bar{\kappa}$:

$$T_B(\bar{\kappa}) = \int_{-\infty}^0 T(z) \tilde{\gamma}(\bar{\kappa}) \exp[\tilde{\gamma}(\bar{\kappa})z] dz, \quad (6)$$

где $\tilde{\gamma}$ является аналогом коэффициента поглощения $\gamma = 1/d_{sk}$ в решении уравнения переноса излучения. Простой физический смысл параметра $\tilde{\gamma}$ можно видеть, если вычислить эффективную толщину слоя, в котором формируется принимаемое ближнеполюсное излучение, используя определение (4). Оказывается, что $\tilde{\gamma} = 1/d_{eff}$, и мы имеем интегральное уравнение, зависящее только от параметра антенны, легко определяемого из эксперимента с контролируемым профилем температуры:

$$T_B(d_{eff}) = \int_{-\infty}^0 T(z) \exp(z/d_{eff})/d_{eff} dz. \quad (7)$$

Таким образом, можно использовать зависимость d_{eff} от размера антенны, её формы и высоты над поверхностью для решения задачи восстановления профиля температуры из интегрального уравнения (7), в котором ядро в отличие от уравнения (1) оказывается заданным точно. Естественным условием для качественного восстановления профиля температуры, которое возможно до глубин порядка толщины скин-слоя поглощения d_{sk} на выбранной длине волны, является равномерное перекрытие интервала $0 < d_{eff} < d_{sk}$, которое достигается комбинацией антенн различного размера и устройства или вариацией высоты антенны над поверхностью. Оценочные расчёты d_{eff} согласно (1) для различных сред в зависимости от параметров антенны приведены в [11].

Предлагаемый подход позволяет так же, как и в работах [8, 10, 11, 13, 14], использовать для решения задачи ближнеполюсного зондирования метод обобщённой невязки Тихонова, но существенно более простой вид ядра уравнения (7) по сравнению с ядром (1) позволяет создать гораздо более эффективные алгоритмы. В этой связи отметим также упомянутый выше метод [5, 12], основанный на определении передаточных функций (1) из эксперимента, который сводится к решению недоопределённой и плохо обусловленной системы уравнений. Предлагаемый в данной

работе подход, помимо возможности применять более мощный метод Тихонова, позволяет вместо этих функций измерять только параметр d_{eff} .

1.2. Плавно неоднородная среда

Рассмотрим формирование излучения, принимаемого ближнепольной антенной в среде, диэлектрическая проницаемость которой зависит от глубины: $\varepsilon = \varepsilon(z)$, причём $|\varepsilon^{-1} d_{\text{eff}} d\varepsilon/dz| \ll 1$, т. е. среда плавно неоднородная. Для такого геометрооптического приближения очевидным образом модифицируется выражение для отдельной компоненты спектра принимаемого антенной излучения и так же, как в (5), выполняется интегрирование по поперечному волновому числу с учётом передаточной функции антенны в общем виде. Тогда для антенны, согласованной со средой, получается следующее уравнение:

$$T_B = \int_{-\infty}^0 T(z) \left[\iint F(\kappa_x, \kappa_y) \operatorname{Im} \left(2 \sqrt{k_0^2 \varepsilon(z) - \kappa^2} \right) \times \right. \\ \left. \times \exp \left(- \int_z^0 \operatorname{Im} \left(2 \sqrt{k_0^2 \varepsilon(z') - \kappa^2} \right) dz' \right) d\kappa_x d\kappa_y \right] dz, \quad (8)$$

где спектр передаточной функции F антенны определяется её размером, положением и конструкцией. К этому уравнению также можно применить теорему о среднем и использовать условие единичной нормировки ядра. Тогда получаем простое уравнение

$$T_B(\bar{\kappa}) = \int_{-\infty}^0 T(z) \operatorname{Im} \left(2 \sqrt{k_0^2 \varepsilon(z) - \bar{\kappa}^2} \right) \exp \left(- \int_z^0 \operatorname{Im} \left(2 \sqrt{k_0^2 \varepsilon(z') - \bar{\kappa}^2} \right) dz' \right) dz, \quad (9)$$

которое можно записать в виде, полностью аналогичном решению уравнения переноса для плавно неоднородной среды:

$$T_B(\bar{\kappa}) = \int_{-\infty}^0 T(z) \tilde{\gamma}(z, \bar{\kappa}) \exp \left(- \int_z^0 \tilde{\gamma}(z', \bar{\kappa}) dz' \right) dz, \quad (10)$$

т. е. и для плавно неоднородной среды мы получаем уравнение, ядро которого зависит только от одного параметра $\bar{\kappa}$ — средневзвешенного значения модуля поперечного волнового числа принимаемых антенной мод. Этот параметр, в свою очередь, зависит от размеров, положения и конструкции антенны и может быть определён из эксперимента с контролируемым профилем температуры для данной неоднородной среды и конкретной используемой антенны. Развитый подход позволяет существенно расширить область задач, решаемых методом ближнепольной радиотермометрии.

2. СОВМЕСТНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ПРИНИМАЕМОГО БЛИЖНЕПОЛЬНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ И ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

В [15] на основе совместного решения уравнений переноса излучения и теплопроводности были получены уравнения, связывающие динамику температурного профиля и теплового потока через поверхность среды с наблюдаемой в дальней зоне яркостной температурой теплового излучения среды. На основе этих уравнений были развиты методы одночастотного контроля динамики температуры водной среды, грунта и атмосферы [16, 17]. Показанная выше возможность представить

измерения ближнеполюного излучения среды в виде (7) позволяет применить аналогичный метод и в этом случае.

Подповерхностный профиль температуры $T(z, t)$ в среде может быть представлен как решение уравнения теплопроводности. При отсутствии внутренних тепловых источников при граничном условии $T(0, t) = T_0(t)$ профиль температуры определяется соотношением

$$T(z, t) = \int_{-\infty}^t T_0(\tau) \frac{-z}{\sqrt{4\pi a^2 (t - \tau)^3}} \exp\left[-\frac{z^2}{4a^2 (t - \tau)}\right] d\tau, \quad (11)$$

где a^2 — коэффициент теплопроводности. Следуя методике [16], подставляем (11) в (10) и получаем соотношения, связывающие яркостную температуру принимаемого ближнеполюного излучения и профиль температуры в однородной среде:

$$T_B(t) = \int_{-\infty}^t T_0(\tau) \left[\frac{\tilde{\gamma} a}{\pi (t - \tau)} - (\tilde{\gamma} a)^2 \operatorname{erfc}(\tilde{\gamma} a \sqrt{t - \tau}) \exp[(\tilde{\gamma} a)^2 (t - \tau)] \right] d\tau, \quad (12)$$

$$T(z, t) = \int_{-\infty}^t T_B(\tau) \exp\left[-\frac{z^2}{4a^2 (t - \tau)}\right] \left[\frac{1}{\tilde{\gamma}} \left(\frac{z^2}{2a^2 (t - \tau)} - 1 \right) - z \right] \frac{d\tau}{\sqrt{4\pi a^2 (t - \tau)^3}}. \quad (13)$$

Эти соотношения совпадают с полученными в [16], если в последних выполнить замену $\gamma \rightarrow \tilde{\gamma} = 1/d_{\text{eff}}$. Таким образом, появляется возможность точного определения профиля температуры в среде из соотношения (13) по ближнеполюным измерениям предшествующей динамики теплового излучения с помощью только одной антенны. Дополнительная информация, которую содержит уравнение теплопроводности, регуляризует некорректное интегральное уравнение (7) и позволяет получить его точное решение. Аналогичным образом преобразуются и остальные соотношения, полученные в [16], в частности выражения для определения потока тепла через поверхность по измерениям динамики теплового излучения среды; аналогичным образом может быть выполнено и обобщение на случай неоднородной среды.

3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Полученные теоретические результаты были применены к ближнеполюным измерениям водной среды [10, 11]. Измерения проводились на длине волны 31 см с помощью высокочувствительного радиометра (флуктуационная чувствительность 0,05 К при постоянной интегрирования 1 с) как для дистиллированной (деионизованной) воды, так и для растворов соли NaCl, от концентрации которой сильно зависят диэлектрические параметры водной среды, особенно мнимая часть диэлектрической проницаемости. Было обнаружено, что с ростом концентрации соли происходит переход от температурной зависимости, характерной для диэлектриков (уменьшение поглощения с ростом температуры), к зависимости, характерной для проводников (увеличение поглощения с ростом температуры). Это приводит к тому, что при концентрации соли 1,8 г/л мнимая часть диэлектрической проницаемости на длине волны 31 см практически не зависит от температуры, что позволяет с хорошей точностью пользоваться теорией, развитой для диэлектрически однородной среды. Это позволило использовать в [10, 11] соотношения (1)–(4) и получить убедительные результаты, показавшие наличие эффекта ближнего поля. С использованием метода Тихонова

профиль температуры восстанавливался из решения уравнения (1) по данным измерений антеннами различного размера в процессе разогрева среды с поверхности (с помощью кольцевого проволочного нагревателя).

Здесь те же данные используются для восстановления профиля температуры из уравнения (7) с параметрами d_{eff} , определёнными из эксперимента с линейным профилем температуры. Результаты восстановления оказались близкими к полученным в [10, 11] на основе решения уравнения (1), но всё же лучше соответствующими данным прямых измерений профиля температуры, что представляется естественным, поскольку при задании размера антенны в (1) возникало некоторое отклонение от реально наблюдавшейся толщины d_{eff} , в то время как в (7) этот экспериментальный параметр используется непосредственно.

Были определены также средние значения модуля поперечного волнового числа $\bar{\kappa}$ в (6). Оказалось, что для антенны с размером 1 см величина $\bar{\kappa} = 1,61 \text{ см}^{-1}$, тогда как для антенны с размером 4 см $\bar{\kappa} = 1,13 \text{ см}^{-1}$ при $k_0 = 0,203 \text{ см}^{-1}$. Учитывая, что волновая компонента поля формируется частью спектра, лежащей в интервале $0 < \kappa < k_0$, а квазистационарная — модами в области $\kappa > k_0$, можно сделать вывод, что в этих экспериментах имеет место существенный вклад ближнеполюсной компоненты в результаты измерений. Эти результаты для однородной среды можно считать прямым количественным доказательством обнаружения эффекта ближнего поля.

Для случая измерений неоднородного профиля температуры дистиллированной воды приближение диэлектрически однородной среды может легко нарушаться. Так, при изменении температуры воды от 20 до 30° С толщина скин-слоя d_{sk} уменьшается с 19,5 до 12,3 см. Поэтому для линейного профиля $T(z) = (313,3 + 2,16z[\text{см}]) \text{ К}$ средние значения модуля поперечного волнового числа $\bar{\kappa}$ определялись из уравнения (9), полученного выше для плавно неоднородной среды. Было получено, что для антенны с размером 1 см $\bar{\kappa} = 1,48 \text{ см}^{-1}$, тогда как для антенны с размером 4 см $\bar{\kappa} = 1 \text{ см}^{-1}$. Эти значения оказываются близкими к приведённым выше величинам для случая солёной воды, несмотря на то, что поглощение в солёной воде существенно больше (толщина скин-слоя для солёности 1,8 г/л составляет всего $d_{\text{sk}} = 4,1 \text{ см}$). Это свидетельствует о том, что параметр $\bar{\kappa}$ определяется в основном не поглощением в измеряемой среде, а антенной, что может существенно упростить методику ближнеполюсных измерений. Отметим, что и в рассматриваемом случае диэлектрически неоднородной водной среды также имеет место соотношение $\bar{\kappa} > k_0$, т. е. ближнеполюсная компонента вносит существенный вклад в результаты измерений.

В данной работе аналогичные контактные радиометрические измерения в процессе поверхностного нагрева и последующего (после выключения нагревателя) охлаждения дистиллированной водной среды использовались для восстановления профиля температуры из решения точного уравнения (12). На рис. 1 показан набор из пяти антенн с линейным размером от 0,5 до 4 см, применявшихся в этих измерениях. Параметр $\bar{\kappa}$ определялся из эксперимента при известном профиле температуры. Оказалось, что $\bar{\kappa} = 1,77; 1,66; 1,48; 1,15$ и $0,38 \text{ см}^{-1}$ для антенн с размером $D = 0,5; 1; 2; 3$ и 4 см соответственно при $k_0 = 0,203 \text{ см}^{-1}$, т. е. для данного набора антенн имеет место соотношение $\bar{\kappa} > k_0$, и, следовательно, в этих экспериментах существенный вклад в результаты измерений вносит ближнеполюсная компонента.

Установлено, что величины $\bar{\kappa}$ устойчивы к большим вариациям температуры и солёности воды, однако в (12), как уже отмечалось, нельзя пренебречь зависимостью $\varepsilon[T(z)]$. Поэтому уравнение (12) становится нелинейным. В рассматриваемом случае использовалось то обстоятельство, что профиль диэлектрической проницаемости становится неоднородным постепенно, по мере роста температуры. Поэтому для восстановления динамики профиля температуры в среде на начальном этапе нагрева уравнение (12) решалось методом Тихонова в приближении однородной среды, а далее для каждого последующего момента времени использовался профиль $\varepsilon(z)$, вычисленный по профилю $T(z)$, восстановленному в предыдущий момент времени.

Результаты измерений T_B для всех антенн из набора представлены на рис. 2а вместе с данными прямых контактных измерений температуры на пяти различных глубинах. Начальный момент измерений соответствовал времени включения нагревателя; на 19-й минуте он был выключен.

На рис. 2б представлены результаты определения температурных профилей $T(z, t_i)$ из (12) для фиксированных моментов времени t_i в сравнении с профилями, полученными в те же моменты времени путём контактных измерений. Можно видеть, что рассматриваемый метод восстановления оказывается весьма точным. Видно, что динамика нагрева по-разному проявляет себя для различных антенн. Если маленькие антенны ($D = 0,5; 1$ см) после 19-й минуты реагируют на начавшееся охлаждение поверхностного слоя уменьшением яркостной температуры, то антенны большего размера более чувствительны к продолжающемуся, несмотря на охлаждение поверхности, нагреву более глубоких слоёв.

Для антенн большого размера результат приближается к яркостной температуре, рассчитанной для наблюдений в волновой зоне, т. е., как это и должно быть, с ростом размера антенны вклад ближнего поля уменьшается.

Полученный выше результат (соотношение (13)) совместного решения уравнений теплопроводности и формирования излучения, принимаемого ближнеполюсной антенной, использован для восстановления подповерхностных профилей температуры водной среды (диэлектрически однородной, при солёности 1,8 г/л) в процессе её поверхностного нагрева. Использовались данные измерений [10, 11] динамики $T_B(t)$ для контактной ($h = 0$) антенны размером $D = 1$ см на длине волны 31 см. Результаты этих измерений представлены на рис. 3а вместе с данными прямых контактных измерений температуры на пяти различных глубинах. Начальный момент измерений соответствовал времени включения нагревателя. На рис. 3б показаны результаты определения профиля температуры $T(z, t_i)$ из (13) для фиксированных моментов времени t_i в сравнении с профилями, полученными в те же моменты времени путём контактных измерений. Можно видеть, что рассматриваемый метод восстановления профиля температуры в среде оказывается весьма точным.

Следует отдельно затронуть вопрос о методике измерений и способах достижения необходимой для решения обратных задач высокой точности. Измеряемая радиометром антенная температура связана с эффективной яркостной температурой среды соотношением

$$T_a = (1 - R) [\eta T_B + (1 - \eta) T_0], \quad (14)$$

где R — коэффициент отражения от антенны, η — коэффициент полезного действия, T_0 — температура антенны. Согласования со средой, т. е. малости коэффициента отражения R , можно добиться для антенны любого размера с помощью подбора параметров согласующего резонатора. Для хорошо согласованных антенн остаточный малый коэффициент отражения практически не зависит от температуры среды [11] и поэтому в нашем случае просто компенсируется при калибровке по излучению воды при двух различных значениях температуры (одно из них желательно выбирать вблизи температуры измеряемой среды, второе — так, чтобы обеспечить возможно большую разницу эталонных температур с целью уменьшения погрешности шкалы).

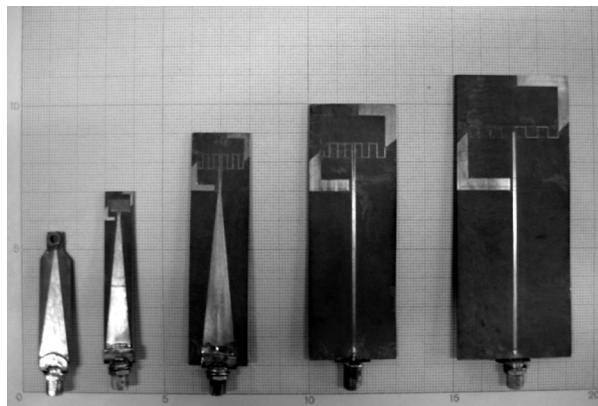


Рис. 1. Набор ближнеполюсных антенн

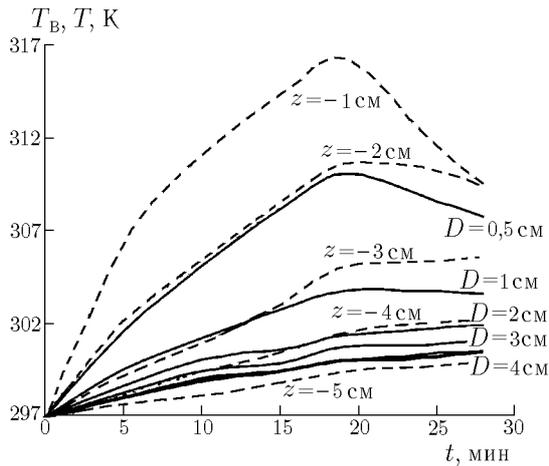


Рис. 2а. Динамика температуры T водной среды на различных глубинах (пунктирные кривые) и яркостная температура T_B излучения для набора антенн, показанного на рис. 1 (сплошные кривые). Жирная кривая — вычисленная динамика яркостной температуры теплового излучения в дальней зоне

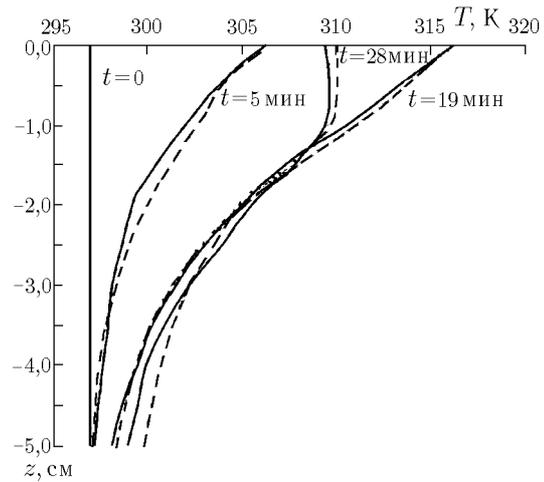


Рис. 2б. Восстановленные по радиометрическим данным (пунктирные кривые) и измеренные контактным методом (сплошные кривые) профили температуры водной среды в различные моменты времени для процесса, показанного на рис. 2а

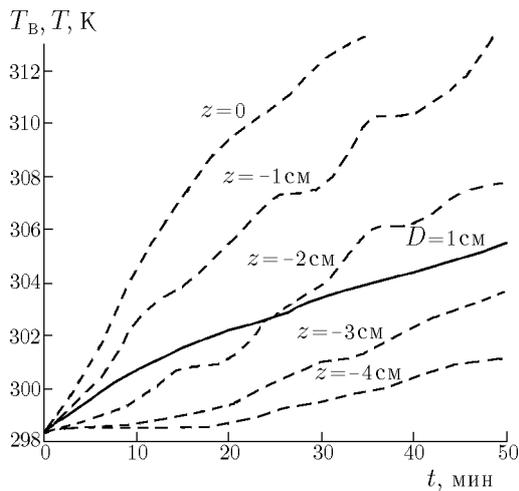


Рис. 3а. Измерения динамики яркостной температуры $T_B(t)$ (сплошная кривая); контактные измерения динамики температуры водной среды на различных глубинах (пунктирные кривые)

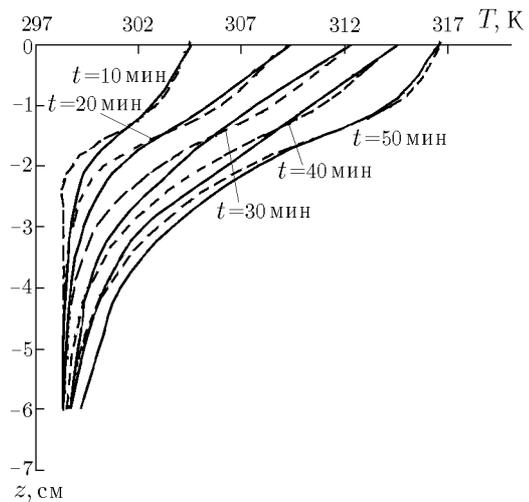


Рис. 3б. Профили температуры водной среды $T(z)$, определённые из (13) с интервалом 10 мин по измерениям динамики $T_B(t)$ (пунктирные кривые); профили температуры $T(z)$, измеренные контактным термометром (сплошные кривые)

Коэффициент полезного действия η антенны неизбежно уменьшается с уменьшением её размера, что при измерениях в контакте со средой приводит к динамике измеряемого сигнала, связанной с изменением температуры антенны T_0 при тепловом контакте. Это становится серьёзной проблемой для антенн размером менее 1 см, поскольку ограничивает время интегрирования. Укажем

простой способ чисто математического решения этой проблемы. Полагая для простоты $R = 0$, (14) можно представить в виде

$$T_a(\bar{\kappa}) = \eta \int_{-\infty}^0 T(z)K(z, \bar{\kappa}) dz + (1 - \eta) \left[\int_{-\infty}^0 \frac{dT}{dz} dz + T(z = -\infty) \right]. \quad (15)$$

Интегрируя по частям первое слагаемое так, чтобы получить интеграл от производной температуры, получаем

$$T_a(\bar{\kappa}) = \eta \left[\int_{-\infty}^0 \frac{dT}{dz} K'(z, \bar{\kappa}) dz + T(z = -\infty) \right] + (1 - \eta) \left[\int_{-\infty}^0 \frac{dT}{dz} dz + T(z = -\infty) \right]. \quad (16)$$

Объединяя слагаемые в (16), получаем интегральное уравнение относительно производной температуры:

$$T_a(\bar{\kappa}) = \int_{-\infty}^0 \frac{dT}{dz} [\eta K'(z, \bar{\kappa}) + (1 - \eta)] dz + T(z = -\infty). \quad (17)$$

Интегральное уравнение (17) можно решать методом Тихонова относительно производной температуры, а потом определять $T(z)$, интегрируя полученное распределение. Значение η легко определяется из эксперимента по наблюдаемой динамике антенной температуры после приведения антенны в тепловой контакт со средой. Глубинная температура $T(z = -\infty)$ в (17) в нашем случае, как и во многих других, представляющих практический интерес (например, глубинная температура тела в медицине), известна.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе удалось показать, что одномерная задача ближнеполюсной СВЧ радиометрии сводится к интегральному уравнению Фредгольма 1-го рода, аналогичному известному решению уравнения переноса излучения. Простой вид ядра этого уравнения, которое зависит только от одного определяемого из эксперимента параметра — средневзвешенного значения модуля поперечного волнового числа принимаемых антенной мод — позволяет использовать для определения подповерхностного профиля температуры набор ближнеполюсных антенн произвольного размера и конструкции или менять высоту антенны над поверхностью среды, добиваясь, чтобы эффективная глубина формирования излучения перекрывала диапазон глубин зондирования. Разработанная теория успешно апробирована в контролируемых условиях для восстановления подповерхностного профиля температуры водной среды.

По аналогии с полученным ранее совместным решением уравнений переноса излучения и теплопроводности получено совместное решение уравнения для ближнеполюсных измерений и уравнения теплопроводности, которое успешно использовано для контроля подповерхностного профиля температуры по динамике принимаемого ближнеполюсного излучения. Таким образом, приведённые в статье результаты создали теоретическую и экспериментальную основу для развития СВЧ ближнеполюсного температурного зондирования сред. Дальнейший анализ должен включить случай слоистой среды, а также случай неоднородного распределения температуры.

Автор признателен Г. М. Альтшуллеру и В. Л. Ваку за помощь в экспериментах.

Результаты данной статьи получены при поддержке РФФИ (грант № 01–02–432), а также программы Отделения физических наук РАН «Проблемы радиофизики» и частично опубликованы в материалах Международной конференции ММЕТ'02 (Киев, Украина, 10–13 сентября 2002 г.), Т. 1, С. 183–185.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bardaty F., Solimini D. // Radio Sci. 1983. V. 18, No. 6. P. 1393.
2. Leroy I., Bocquet B., Mamouni A. // Physiol. Meas. 1998. V. 19. P. 127.
3. Nikita K. S., Stamatakos G. S., Uzunoglu N. K., Karafotias A. // IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques. 2000. V. 48, No. 11. P. 2003.
4. Троицкий В. С., Аранжереев В. А., Густов А. В. и др. // Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т. 29, № 1. С. 62.
5. Шмаленюк А. С. О возможности диагностики параметров неоднородных сред по модовым характеристикам их тепловых шумов: Препринт № 2 (357) ИРЭ АН СССР. М., 1983.
6. А. С. № 1396730 СССР, G 01 J 5/50. Способ определения глубинных температур объекта / Маречек С. В., Муськин Ю. Н., Поляков В. М., Шмаленюк В. С.
7. Павлова П. С., Поляков В. М. // Труды Всесоюзн. конф. «Методические вопросы определения температуры биологических объектов радиофизическими методами». М.: ИРЭ АН СССР, 1985. С. 8.
8. Гайкович К. П., Сумин М. И., Троицкий Р. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1988. Т. 31, № 9. С. 1104.
9. Гайкович К. П., Резник А. Н. // Письма в ЖЭТФ. 2000. Т. 72, вып. 11. С. 792.
10. Gaikovich K. P., Reznik A. N., Vaks V. L., Yurasova N. V. // Phys. Rev. Lett. 2002. V. 88, No. 10. Article № 104302.
11. Вакс В. Л., Гайкович К. П., Резник А. Н. // Изв. вузов. Радиофизика. 2002. Т. 45, № 1. С. 8.
12. Маречек С. В., Поляков В. М. // Успехи современной электроники. Зарубежная радиоэлектроника. 2001. № 11. С. 21.
13. Гайкович К. П., Резник А. Н., Сумин М. И., Троицкий Р. В. // Изв. АН СССР. ФАО. 1987. Т. 23, № 7. С. 761.
14. Гайкович К. П., Резник А. Н., Троицкий Р. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1989. Т. 32, № 12. С. 1467.
15. Троицкий А. В., Троицкий Р. В. // Тезисы докл. 2-й научной конф. «Применение дистанционных радиофизических методов в исследованиях природной среды» (Муром, июль 1992). М.: ИРЭ РАН, 1992. С. 43.
16. Gaikovich K. P. // IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing. 1994. V. 32, No. 4. P. 885.
17. Gaikovich K. P., Troitsky R. V. // IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing. 1998. V. 36, No. 1. P. 341.
18. Резник А. Н. // Изв. вузов. Радиофизика. 1991. Т. 34, № 5. С. 512.

Институт физики микроструктур РАН,
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию
10 декабря 2002 г.

INVERSE PROBLEMS OF THE NEAR-FIELD RADIOTHERMOMETRY

K. P. Gaikovich

It is shown that the one-dimensional problem of near-field microwave radiometry in the case of a smoothly inhomogeneous medium can be reduced to an integral equation similar to the well-known solution of the radiation transfer equation. The kernel of this integral equation depends on only one parameter determined experimentally. This makes it possible to determine the subsurface temperature profiles by using a set of near-field antennas of arbitrary design for which the sounding-depth range is overlapped by the effective depth of formation of the radiation received by these antennas. In the case of near-field measurements, the previously obtained joint solution of the radiation transfer equation and the thermal diffusion equation can also be modified and applied for monitoring the subsurface temperature profile using the temporal dependence of the received signal.

УДК 533.9:621.039

О «БЕЗРЕЗОНАНСНОМ» ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ЦИКЛОТРОННОМ ИЗЛУЧЕНИИ

М. А. Ерухимова, М. Д. Токман

Исследуется эффект усиления когерентного бихроматического излучения при его циклотронном параметрическом взаимодействии с промодулированным ансамблем классических электронов-осцилляторов. Анализируется механизм энергообмена излучения с электронами при отсутствии парциального синхронизма волн с частицами. Устанавливаются особенности энергообмена при взаимодействии волн с релятивистскими и нерелятивистскими частицами.

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время вслед за развитием новой области квантовой электроники, изучающей такие эффекты, как стимулированное излучение при отсутствии инверсии и электромагнитно-индуцированная прозрачность (см. обзоры [1, 2]), начались исследования аналогичных объектов в классических системах [3–10]. Речь идёт, в частности, о системах, в которых одновременное усиление двух высокочастотных электромагнитных волн достигается за счёт их параметрического циклотронного взаимодействия с модулированным электронным ансамблем, устойчивым по отношению к генерации каждой из волн по отдельности. При этом прямым классическим аналогом квантового лазера без инверсии является так называемый классический мазер без инверсии (МБИ) [3]. В МБИ параметрическая неустойчивость двух высокочастотных (ВЧ) волн достигается за счёт их взаимодействия с модулированным ансамблем резонансных частиц, т. е. таких частиц, которые находятся в условиях циклотронного (или доплеровского) синхронизма с обеими ВЧ волнами в течение взаимодействия. При этом в отличие от обычного мазера функция распределения электронов является в среднем неинвертированной¹ в резонансной области; усиление бихроматического (но не монохроматического) излучения обеспечивается за счёт оптимально сфазированной с биениями ВЧ волн модуляции функции распределения.

Данная работа посвящена изучению другого режима указанной параметрической неустойчивости — усилению бихроматического циклотронного излучения при отсутствии резонансных частиц. Этот режим в отличие от МБИ, где используется среда с промодулированной активной восприимчивостью, может быть назван усилением в реактивной среде. При этом необходимо уточнить, что чисто реактивной (т. е. бездиссипативной) средой является электронный ансамбль без модуляции, однако в среде с пространственной или временной дисперсией модуляция некоторого параметра с необходимостью приводит к комплексному отклику на монохроматическое воздействие [12], так что возможность такого усиления в «реактивной» среде не является парадоксальной. Условия, при которых реализуется данный режим параметрической неустойчивости, во многом напоминают условия, при которых протекает хорошо известное индуцированное рассеяние [11, 13]: в обоих случаях частицы ансамбля, не являясь резонансными по отношению к двум высокочастотным волнам, находятся в резонансе с биениями этих волн. Однако, в отличие от обсуждаемого в данной работе эффекта, в режиме стандартного рассеяния невозможно одновременное усиление двух взаимодействующих волн. Принципиальные отличия этих двух процессов будут подробно обсуждаться в данной работе.

¹ Такая система устойчива по отношению к генерации каждой из двух ВЧ волн по отдельности.

Обсуждаемый здесь режим параметрической неустойчивости был впервые обнаружен в работе [4], где рассматривалось циклотронное взаимодействие ансамбля релятивистских электронов с двумя бриллюэновскими составляющими одной волноводной моды с несколько отличными частотами. Параметрическое взаимодействие волн обеспечивалось предварительной модуляцией функции распределения электронов по продольной (относительно постоянного магнитного поля) координате и времени. Проведённый в работе [4] анализ был основан на решении линеаризованного кинетического уравнения в укороченных переменных и укороченных уравнений возбуждения волн (по поводу этой методики см., например, [3, 14–16]). Анализ полученного в работе [4] дисперсионного соотношения показал, что в данной системе возможно одновременное усиление волн при отсутствии парциального синхронизма частиц с ВЧ волнами, т. е. при отсутствии резонансных частиц. Для этого в импульсном пространстве пучок частиц должен совершать колебания, при которых отличные от нуля отстройки синхронизма с первой и второй ВЧ волнами осциллируют в противофазе. Такой тип модуляции возможен в силу специфической зависимости отстроек синхронизма от компонент импульса электронов, учитывающей как релятивистскую отстройку циклотронной частоты, так и доплеровский сдвиг. Как следствие, осцилляции соответствующих «реактивных» восприимчивостей оказываются противофазными, что обеспечивает необходимый для одновременного усиления двух высокочастотных мод тип параметрической связи.

Результаты анализа, представленного в работе [4], однако, недостаточны для формирования ясной физической картины такого «безрезонансного» усиления.

Во-первых, в работе [4] получено выражение для линейного инкремента неустойчивости, формируемой на временах взаимодействия, больших в масштабе расстройки доплеровского синхронизма частиц с ВЧ волнами. На этих временах частицы действительно можно считать нерезонансными. Однако на стадии «включения» режима параметрической неустойчивости (или при влёте электронов в пространство взаимодействия), когда время взаимодействия мало в вышеуказанном смысле, разделение частиц на резонансные и нерезонансные невозможно: в течение этого времени все частицы эффективно участвуют в энергообмене с высокочастотным полем. Поэтому важно выяснить характер интегрального энергообмена, т. е. учесть его и на стадии «включения» высокочастотного поля.

Во-вторых, полученное в работе [4] выражение для инкремента неустойчивости применимо лишь к рассмотренному там частному случаю сонаправленного распространения волн. Однако, как показывает анализ, проведённый в данной статье, наиболее интересной с точки зрения эффективности интегрального энергообмена является схема со встречным распространением волн.

Кроме того, результаты линейной кинетической теории не проясняют механизм энергообмена между бихроматическим полем и электронами. Важно, в частности, установить, в чём принципиальное отличие данного режима, в котором происходит одновременное усиление волн, от стандартного рассеяния ВЧ волн на частицах [11, 13].

Основная задача данной работы – это исследование нового, достаточно интересного режима взаимодействия частиц с бихроматическим полем.

Данная работа построена по следующему плану. В разделе 1 представлена более полная (по сравнению с развитой в работе [4]) линейная кинетическая теория взаимодействия бихроматического излучения с нерезонансными, но близкими к резонансу частицами. Различаются два типа систем: с сонаправленным и встречным распространением ВЧ волн. Акцентируется внимание на знаке интегрального (в течение всего времени взаимодействия) энергообмена частиц с высокочастотным полем. Установлено, что наиболее эффективному энергообмену соответствует случай, когда встречные волны распространяются со скоростью света вдоль магнитного поля. В разделе 2 исследуются нелинейные уравнения движения частиц в поле двух волн с целью выяснения физического механизма энергообмена, соответствующего усилению волн. При этом анализ проводится

в системе отсчёта, где частоты двух ВЧ волн равны, т. к. при обычном индуцированном рассеянии энергообмен между полем и частицами в такой системе отсчёта отсутствует. Анализируется нелинейное уравнение для энергии частицы без наложения каких бы то ни было условий её близости к резонансу. Установлено, что эффект «безрезонансного» усиления имеет место и в общем случае. Получено выражение для энергообмена на начальной стадии взаимодействия частиц с волнами, распространяющимися вдоль магнитного поля со скоростью света. Исследована эффективность «безрезонансного» усиления по сравнению с поглощением энергии волн, происходящим на стадии становления квазистационарного режима параметрического взаимодействия. Показано, что поглощение на начальной стадии может быть несущественно в системе с релятивистскими частицами, близкими к резонансу, а также в системе с нерелятивистскими частицами в условиях сильной отстройки от циклотронного резонанса. В разделе 3 исследуется вопрос о том, какая степень свободы механического движения частиц является энергетическим резервуаром в том или ином режиме параметрической неустойчивости. В заключении приведён сравнительный анализ режимов параметрического «безрезонансного» усиления и обычного индуцированного рассеяния.

1. ЛИНЕЙНАЯ КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ УСИЛЕНИЯ ВИХРОМАТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ (ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ С БЛИЗКИМИ К РЕЗОНАНСУ ЭЛЕКТРОНАМИ)

Рассмотрим две плоские электромагнитные волны, распространяющиеся под углом к постоянному магнитному полю $\mathbf{B} = B\mathbf{z}_0$ (см. рис. 1), имеющие одинаковое поперечное (по отношению к магнитному полю) волновое число k_{\perp} и разные частоты ω_1 и ω_2 . Электрическое поле в этом случае имеет вид

$$\mathbf{E} = y_0 \sum_{j=1}^2 \text{Re}[E_j \exp(ik_{\perp}x + ik_{\parallel j}z - i\omega_j t - i\pi/2)]. \tag{1}$$

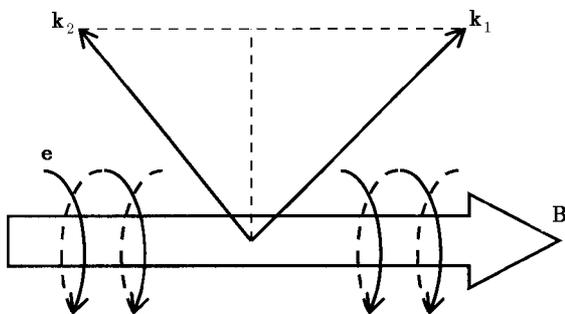


Рис. 1. Циклотронное взаимодействие бихроматической волны с ансамблем электронов

Здесь x, y, z — декартовы координаты, $\mathbf{z}_0, \mathbf{y}_0$ и \mathbf{x}_0 — орты соответствующих осей, E_j — комплексные амплитуды парциальных волн. Условию доплеровского резонанса с этими волнами на первой гармонике циклотронной частоты соответствуют электроны с компонентами импульса $p_{\parallel R} = mc\rho_{\parallel R}$ и $p_{\perp R} = mc\rho_{\perp R}$:

$$\omega_j = \omega_B/\gamma_R + ck_{\parallel j}\beta_{\parallel R}, \tag{2}$$

где $\omega_B = eB/(mc)$, e и m — элементарный заряд и масса покоя электрона соответственно, c — скорость света в вакууме, γ_R и $\beta_{\parallel R}$ — соответственно

релятивистский гамма-фактор и нормированная на скорость света продольная скорость резонансных частиц. Рассмотрим взаимодействие этого поля с ансамблем электронов. Пусть импульсы электронов $p_{\parallel} = mc\rho_{\parallel}$, $p_{\perp} = mc\rho_{\perp}$ близки к резонансным значениям, так что выполнено условие

$$\max\{(\rho_{\parallel} - \rho_{\parallel R})^2\} \ll \max\{|\rho_{\perp}^2 - \rho_{\perp R}^2|\} \ll \rho_{\perp R}^2. \tag{3}$$

При этом можно описывать движение частиц в рамках приближения нелинейного маятника [3, 14–16]. В этом случае для записанной в укороченных переменных функции распределения частиц $f(r, \chi, \theta, z, X, t)$, где $r = \rho_{\parallel} - \rho_{\parallel R}$, $\chi = \rho_{\perp}^2/2 - \rho_{\perp R}^2/2$, θ — фаза циклотронного вращения,

X — поперечная координата центра ларморовской окружности, можно использовать следующую форму уравнения Лиувилля [3, 4]:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \omega_H \frac{\partial}{\partial \theta} + c\beta_{\parallel} \frac{\partial}{\partial z}\right) f + \sum_{j=1}^2 F_j \left(\frac{\omega_B}{\omega_j} \frac{\partial}{\partial \chi} + n_{\parallel j} \frac{\partial}{\partial r}\right) f = 0. \quad (4)$$

Здесь

$$\omega_H = \frac{\omega_B}{\gamma_R} \left(1 - \frac{\chi}{\gamma_R^2} - \frac{\beta_{\parallel R} r}{\gamma_R}\right), \quad \beta_{\parallel} = \beta_{\parallel R} + \frac{r}{\gamma_R} (1 - \beta_{\parallel R}^2) - \frac{\beta_{\parallel R} \chi}{\gamma_R^2},$$

$$F_j = G \operatorname{Re}[\alpha_j \exp(i\theta + ik_{\perp} X + ik_{\parallel j} z - i\omega_j t)], \quad G = \rho_{\perp R} J_1'(k_{\perp} r_H) / \gamma_R,$$

$n_{\parallel j} = ck_{\parallel j} / \omega_j$ — продольный показатель преломления j -й волны, $r_H = c\rho_{\perp R} / \omega_B$ — гирорадиус резонансных частиц, J_1 — функция Бесселя первого рода 1-го порядка, штрих означает производную по аргументу, $\alpha_j = eE_j / (mc)$ — нормированная амплитуда волны. Используем уравнения возбуждения волн, записанные в укороченной форме (см. [14]):

$$\frac{\partial \alpha_j}{\partial t} + \frac{c^2 k_{\parallel j}}{\omega_j} \frac{\partial \alpha_j}{\partial z} = -\frac{2\pi e}{mc} I_j. \quad (5)$$

Амплитуды резонансных гармоник тока I_j , являющиеся источниками в уравнениях (5), при условии (3) выражаются через функцию распределения следующим образом [3, 4, 14]:

$$I_j = ecG \left\langle \int d\chi dr d\theta f \exp(-i\theta - ik_{\perp} X - ik_{\parallel j} z + i\omega_j t) \right\rangle_{t,z}. \quad (6)$$

Здесь угловые скобки обозначают усреднение по временному и пространственному периоду биений взаимодействующих волн. При записи уравнения (5) предполагалось, что волновые векторы и частоты волн связаны «вакуумным» дисперсионным соотношением:

$$\omega_j = c \sqrt{k_{\perp}^2 + k_{\parallel j}^2}. \quad (7)$$

Параметрическая связь двух рассматриваемых волн обеспечивается модуляцией функции распределения частиц, которую в начальный момент времени задаём в виде²

$$f_{\text{in}}(t=0) = f_0(\chi, r) + f_M(\chi, r) \cos(\varphi_M + \kappa z), \quad (8)$$

где $\kappa = k_{\parallel 1} - k_{\parallel 2}$. При этом невозмущённая полем волны функция распределения в последующие моменты времени отличается от (8) фазой модулированной компоненты, принимающей вид $\varphi_M + \kappa z - \kappa c\beta_{\parallel} t = \varphi_M + \kappa z - \Omega t + \Delta_M t$, где $\Omega = \omega_1 - \omega_2 = c\kappa\beta_{\parallel R}$,

$$\Delta_M = \Omega - c\kappa\beta_{\parallel} = c\kappa(\beta_{\parallel R} - \beta_{\parallel}) = \frac{\Omega\chi}{\gamma_R^2} - \frac{c\kappa r}{\gamma_R} (1 - \beta_{\parallel R}^2). \quad (9)$$

Здесь Δ_M — отстройка частицы от параметрического синхронизма с волной биений.

Решая кинетическое уравнение (4) в линейном приближении по амплитуде поля, для резонансных гармоник тока (6) получим следующие выражения:

$$I_1 = ecG^2 \alpha_1 \int d\chi dr f_0 \hat{L}_1 \xi(\Delta_1, t) + \frac{ecG^2 \alpha_2}{2} e^{i\varphi_M} \int d\chi dr f_M e^{i\Delta_M t} \hat{L}_1 \xi(\Delta_2, t),$$

² Для определённости будем рассматривать начальную задачу. Хотя с точки зрения практических приложений имеет смысл рассмотреть данную задачу в «краевой» постановке, для выяснения принципиальных моментов «временная» постановка задачи более удобна.

$$I_2 = ecG^2\alpha_2 \int d\chi dr f_0 \hat{L}_2 \xi(\Delta_2, t) + \frac{ecG^2\alpha_1}{2} e^{-i\varphi_M} \int d\chi dr f_M e^{-i\Delta_M t} \hat{L}_2 \xi(\Delta_1, t). \quad (10)$$

Здесь

$$\xi(\Delta, t) = \frac{i}{\Delta} [1 - \cos(\Delta t)] + \frac{\sin(\Delta t)}{\Delta}, \quad (11)$$

$$\hat{L}_j = \frac{\omega_B}{\omega_j} \frac{\partial}{\partial \chi} + n_{\parallel j} \frac{\partial}{\partial r}, \quad (12)$$

$$\Delta_j = \omega_j - \omega_H - ck_{\parallel j} \beta_{\parallel} = \frac{\omega_j}{\gamma_R} \frac{\chi}{\gamma_R} + \frac{\omega_j}{\gamma_R} r (\beta_{\parallel R} - n_{\parallel j}) = \Delta_{\chi j} + \Delta_{rj}; \quad (13)$$

Δ_j — отстройка парциального синхронизма с j -й волной. В формуле (13) мы разделили вклады в отстройку Δ_j , связанные с отличием поперечной и продольной компонент импульса электронов от соответствующих резонансных значений. Отметим принципиальную особенность зависимости отстроек Δ_j от компонент импульсов электронов. Для рассматриваемых волн с одинаковым поперечным волновым числом и «вакуумным» дисперсионным соотношением (7), связывающим частоту волны и компоненты волнового вектора, с учётом резонансного условия (2) справедливы неравенства $n_{\parallel 1} > \beta_{\parallel R}$, $n_{\parallel 2} < \beta_{\parallel R}$ (см. [4]). Как следствие, получаем, что отстройки Δ_1 и Δ_2 (13) при отклонении продольной компоненты импульса от резонансного значения меняются противоположным образом.

Потребуем, чтобы выполнялись два условия. Первое означает, что к рассматриваемому моменту времени нарушилось условие парциального синхронизма с ВЧ волнами для всех частиц ансамбля:

$$\Delta_j t \gg 1. \quad (14)$$

Иными словами, все частицы ансамбля нерезонансны волнам. Другим условием ограничим время взаимодействия, потребовав сохранения параметрического синхронизма частиц с волнами:

$$\Delta_M t \ll 1. \quad (15)$$

Условие (15) означает, что все частицы резонансны волне биений ВЧ поля. Принимая во внимание выражения (9) и (13), получаем, что условия (14) и (15) совместны, если, во-первых, частоты волн близки:

$$\Omega \ll \omega_j, \quad \omega_1 \approx \omega_2 \approx \omega. \quad (16)$$

Во-вторых, необходимо, чтобы отстройка парциального синхронизма (13) определялась в основном отличием поперечного импульса от резонансного значения:

$$r |\beta_{\parallel R} - n_{\parallel j}| \ll \chi / \gamma_R. \quad (17)$$

При этом $\Delta_1 \approx \Delta_2 \approx \Delta_{\chi} = \omega \chi / \gamma_R^2$, а для $\Delta_{rj} = \omega r (\beta_{\parallel R} - n_{\parallel j}) / \gamma_R$ из (9) и (15) получаем

$$\Delta_{rj} t \ll 1. \quad (18)$$

Для волноводных мод условие близости частот (16) выполняется, если волны распространяются с близкими по модулю продольными волновыми векторами в одном направлении ($k_{\parallel 1} \approx k_{\parallel 2}$ и, соответственно, $n_{\parallel 1} \approx n_{\parallel 2}$) либо в противоположных направлениях ($k_{\parallel 1} \approx -k_{\parallel 2}$ и, соответственно, $n_{\parallel 1} \approx -n_{\parallel 2}$) относительно постоянного магнитного поля. Сопоставляя соотношения (2) и (7), можно показать, что в первом случае (именно он был рассмотрен в работе [4]) $\beta_{\parallel R} \approx n_{\parallel 1} \approx n_{\parallel 2}$, в то время как во втором случае $\beta_{\parallel R} \approx 0$. В обоих случаях

$$n_{\parallel 1} - \beta_{\parallel R} \approx -(n_{\parallel 2} - \beta_{\parallel R}), \quad (19)$$

при этом $\Delta_{r1} \approx -\Delta_{r2}$. Важно также отметить следующее: в отличие от случая сонаправленного распространения волн, при встречном распространении из неравенства (17) следует, что характерная отстройка продольного импульса частиц в пучке от резонансного значения должна быть много меньше характерной отстройки поперечного импульса.

Используя соотношения (14), (15), (18), упростим выражения для резонансных гармоник тока (10), разложив подынтегральные функции $\exp(\pm i\Delta_M t)$ и $\hat{L}_j \xi(\Delta_i, t)$ по малым параметрам $\Delta_M t$ и Δ_{rj}/Δ_χ соответственно. Оставляя линейные члены и усредняя полученные выражения по быстрым осцилляциям с частотой Δ_χ , получим следующие уравнения параметрической связи двух волн³:

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_1}{dt} + i\delta\alpha_1 &= -e^{i\varphi_M} [iD^s + (\Gamma t + iD)] \alpha_2, \\ \frac{d\alpha_2}{dt} + i\delta\alpha_2 &= -e^{-i\varphi_M} [iD^s - (\Gamma t + iD)] \alpha_1, \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} \delta &= -\frac{2\pi e^2 \omega}{m\gamma_R} G^2 (1 - n_{\parallel}^2) \int \frac{f_0 d\chi dr}{\Delta_\chi^2}, \\ D^s &= -\frac{\pi e^2 \omega G^2}{m\gamma_R} (1 - n_{\parallel 1} n_{\parallel 2}) \int \frac{f_M d\chi dr}{\Delta_\chi^2}, \\ D &= \frac{2\pi e^2 G^2 \omega^2}{m\gamma_R^2} (1 - n_{\parallel 1} n_{\parallel 2}) (n_{\parallel 1} - \beta_{\parallel R}) \int \frac{r f_M dr d\chi}{\Delta_\chi^3}, \\ \Gamma &= \frac{\pi e^2 G^2 \omega c k}{m\gamma_R^2} (1 - n_{\parallel 1} n_{\parallel 2}) \int \frac{[-(1 - \beta_{\parallel R}^2)r + \beta_{\parallel R} \chi / \gamma_R] f_M dr d\chi}{\Delta_\chi^2}. \end{aligned} \quad (21)$$

В выражениях (20), (21) учтено, что близкие по модулю продольные показатели преломления волн $n_{\parallel j}$ ($n_{\parallel 1}^2 \approx n_{\parallel 2}^2 \approx n_{\parallel}^2$) могут быть как одного, так и разных знаков. Это обстоятельство, не отражаясь на линейном коэффициенте δ , существенно сказывается на величине параметрических коэффициентов D^s , Γ и D .⁴

Решение системы (20) может быть представлено в рамках метода вариации произвольной постоянной в следующем виде:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= C_1(t) \exp\left(\int_0^t \mu_1(\tau) d\tau\right) + C_2(t) \exp\left(\int_0^t \mu_2(\tau) d\tau\right), \\ \alpha_2 &= C_1(t) A_1(t) \exp\left(\int_0^t \mu_1(\tau) d\tau\right) + C_2(t) A_2(t) \exp\left(\int_0^t \mu_2(\tau) d\tau\right), \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$\mu_1(t) = -i\delta + i\sqrt{(D^s)^2 + (\Gamma t + iD)^2}, \quad \mu_2(t) = -i\delta - i\sqrt{(D^s)^2 + (\Gamma t + iD)^2}; \quad (23)$$

³ Указанное усреднение можно понимать в двух смыслах. Можно считать, что помимо условия (14) выполнено условие $\langle \delta \Delta_j \rangle t \gg 1$, где $\langle \delta \Delta_j \rangle$ — определяемый функцией распределения (8) характерный разброс парциальных отстроек синхронизма. При этом усреднение проводится по ансамблю, а $\xi(\Delta, t)$ переходит в асимптотическое выражение, соответствующее правилу обхода Ландау. С другой стороны, можно считать ансамбль узким в фазовом пространстве, и под усреднением понимать усреднение по времени.

⁴ Коэффициент D в формуле (21) зависит от параметров первой и второй волн несимметричным образом. Здесь нужно пояснить, что при записи коэффициентов уравнений (20) учтены условия (16) и (19).

$$A_1 = ie^{i\varphi_M} \frac{\sqrt{\Gamma t + iD + iD^s}}{\sqrt{\Gamma t + iD - iD^s}}, \quad A_2 = -ie^{i\varphi_M} \frac{\sqrt{\Gamma t + iD + iD^s}}{\sqrt{\Gamma t + iD - iD^s}}. \quad (24)$$

Как следует из (23), одна из двух бихроматических мод является неустойчивой при условии

$$D \neq 0. \quad (25)$$

Это условие выполняется в случае отличной от нуля антисимметричной части зависимости модулированной компоненты функции распределения $f_M(\chi, r)$ от r . При достаточно слабом отклонении функции $f_M(r)$ от антисимметричной зависимости, когда

$$f_M(\chi, r) \approx -f_M(\chi, -r), \quad (26)$$

а именно при выполнении условия

$$|D^s| \ll |D|, \quad (27)$$

отношения парциальных амплитуд экспоненциальных решений не зависят от времени: $A_{1,2}(t) \approx \approx \pm ie^{i\varphi_M}$, и сами экспоненциальные решения являются независимыми решениями системы (20) (коэффициенты $C_j \approx \text{const}$). При этом инкремент неустойчивого решения определяется выражением⁵

$$\text{Re}\mu \approx |D|, \quad (28)$$

а отношение амплитуд парциальных компонент усиливаемой бихроматической моды равно

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \approx -i \frac{D}{|D|} e^{i\varphi_M}. \quad (29)$$

Мы получили, что, несмотря на отсутствие резонансных ВЧ волнам частиц (см. условие (14)), в системе происходит одновременное усиление двух волн, параметрически связанных посредством модуляции функции распределения электронного ансамбля. Существенно, что модуляция должна соответствовать таким колебаниям пучка в фазовом пространстве, при которых отстройки синхронизма с первой и второй ВЧ волнами осциллируют в противофазе (как следует из (13) и (19)). За счёт этого отклик в среде на первую волну оказывается промодулированным в противофазе относительно модуляции отклика на вторую волну. В итоге параметрическая связь волн принимает вид, допускающий их одновременное усиление при отсутствии активной части восприимчивости электронной среды.

Мы установили, что в рассматриваемой системе на достаточно больших временах (14) после начала взаимодействия устанавливается квазистационарный режим «безрезонансой» перекачки энергии из промодулированного электронного ансамбля в ВЧ поле. Необходимо сравнить этот энергообмен с энергообменом, происходящим на стадии «включения» квазистационарного взаимодействия, т. е. на временах меньше или порядка характерной обратной отстройки синхронизма частиц с ВЧ волнами. Вычислим полную работу поля над средой, проинтегрировав уравнение для среднего на периоде ВЧ поля изменения энергии среды:

$$\left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle = \text{Re}(I_1^* E_1 + I_2^* E_2), \quad (30)$$

где I_j определяются выражениями (10); звёздочка обозначает комплексное сопряжение. Усреднив результат по периоду осцилляций $2\pi/\Delta\chi$, при учёте условий (15), (16) и (17) получим

⁵ Заметим, что параметрическое взаимодействие приводит не только к усилению (поглощению) взаимодействующих ВЧ волн, но и к их частотной модуляции. Даже при строгом выполнении условия (26) в выражении для $\mu_{1,2} = -i\delta \pm i\Gamma t \mp D$ нельзя пренебречь зависящим от времени слагаемым.

$$\langle W \rangle - W(t=0) = A_R + A_{NR}, \quad (31)$$

где

$$A_R = -\frac{4e^2 G^2 |E|^2 \omega}{m\gamma_R} (1 - n_{\parallel}^2) \int \frac{f_0}{\Delta_{\chi}^3} d\chi dr, \quad (32)$$

$$A_{NR} = \frac{2e^2 G^2 |E|^2 \omega}{m\gamma_R} (1 - n_{\parallel 1} n_{\parallel 2}) \left| \int \frac{f_M \Delta_{r2}}{\Delta_{\chi}^3} d\chi dr \right| t. \quad (33)$$

Здесь A_R — работа поля над средой, совершаемая на начальном этапе взаимодействия, когда нельзя разделить электродинамические «отклики» резонансных и нерезонансных частиц, A_{NR} — работа, совершаемая полем в процессе «безрезонансного» параметрического взаимодействия. Выражение (33) получено с учётом соотношения (29). Оценим отношение A_{NR}/A_R , показывающее эффективность «безрезонансного» усиления. Полагая

$$\left| \int \frac{f_M \Delta_{r2}}{\Delta_{\chi}^3} d\chi dr \right| \sim \bar{\Delta}_R \int \frac{f_0}{\Delta_{\chi}^3} d\chi dr, \quad (34)$$

где $\bar{\Delta}_R$ — определяемая характерным значением продольного импульса электронов величина отстройки $|\Delta_{r1}| \approx |\Delta_{r2}|$, получим

$$\frac{A_{NR}}{A_R} \sim \frac{1 - n_{\parallel 1} n_{\parallel 2}}{1 - n_{\parallel}^2} \bar{\Delta}_R t. \quad (35)$$

Имея в виду условие (18), получаем, что отношение A_{NR}/A_R может быть порядка и больше единицы (и, следовательно, «безрезонансный» энергообмен может быть определяющим), только если рассматриваемые волны распространяются в противоположные стороны с продольной фазовой скоростью, близкой к скорости света, т. е. в направлении, близком к направлению постоянного магнитного поля:

$$n_{\parallel 1} \approx -n_{\parallel 2} \approx 1. \quad (36)$$

Необходимо подчеркнуть, что представленный анализ проводился в условиях близости импульсов электронов к резонансным значениям (см. неравенства (3)). Эти условия в совокупности с условием (17), при котором имеет место эффект «безрезонансного» усиления, эквивалентны тому, что в задаче имеется большой «резонансный» параметр

$$R = \frac{v_{\perp}^2 \omega_j}{c^2 \Delta_j}, \quad (37)$$

где v_{\perp}^2 — характерное значение квадрата поперечной компоненты скорости электронов. Отметим, что при этом принципиален учёт релятивизма при записи уравнений. В нерелятивистском приближении имеем $R \ll 1$. В дальнейшем мы откажемся от ограничений, задаваемых условиями (3), и проанализируем эффект «безрезонансного» усиления при разных значениях параметра R .

2. МЕХАНИЗМ «БЕЗРЕЗОНАНСНОГО» ЭНЕРГООБМЕНА (АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦ)

В данном разделе проанализируем механизм энергообмена между бихроматическим полем и ансамблем нерезонансных частиц. Напомним, что в рассматриваемом случае происходит одновременное усиление двух волн в отличие от процесса индуцированного рассеяния [11, 13]. При обычном рассеянии выполняется соотношение Мэнли-Роу [12], выражающее закон сохранения

числа квантов излучения. При этом энергообмен поля со средой определяется изменением частоты волн при рассеянии, что соответствует изменению энергии квантов излучения. Проанализируем эффект «безрезонансного» параметрического усиления, решая нелинейные уравнения движения частиц в поле волн постоянной интенсивности. При этом перейдём в систему отсчёта, в которой частоты двух волн равны. В этой системе отсчёта в случае обычного индуцированного рассеяния энергообмен частиц с полем отсутствует, поэтому специфика рассматриваемого режима параметрической неустойчивости в этой системе отсчёта наиболее наглядна.

В соответствии с результатами раздела 1 рассмотрим наиболее эффективную с точки зрения интегрального энергообмена схему, когда две волны распространяются вдоль магнитного поля навстречу друг другу со скоростью света. Электрическое \mathbf{E} и магнитное \mathbf{B} поля в сопровождающей волне биений системе отсчёта запишем в следующем виде (рассматриваем циркулярно поляризованную волну):

$$\mathbf{E} = \text{Re}[E(z)\mathbf{e}_+e^{-i\omega t}], \quad \mathbf{B} = \text{Re}[B(z)\mathbf{e}_+e^{-i\omega t}] + B\mathbf{z}_0, \quad (38)$$

где

$$E(z) = E_0(e^{ikz} + e^{-i\varphi_0 - ikz}), \quad B(z) = -\frac{c}{\omega} \frac{\partial E(z)}{\partial z}, \quad \mathbf{e}_+ = \mathbf{x}_0 + i\mathbf{y}_0. \quad (39)$$

Рассмотрим релятивистские уравнения движения частицы с координатой \mathbf{r}_p и импульсом \mathbf{p} в поле (38):

$$\dot{\mathbf{p}} = \text{Re}\left(-eE(z)\mathbf{e}_+e^{-i\omega t} - \frac{e}{c}[\mathbf{v}, B(z)\mathbf{e}_+e^{-i\omega t} + B\mathbf{z}_0]\right), \quad \dot{\mathbf{r}}_p = \mathbf{v} = \mathbf{p}/(m\gamma), \quad (40)$$

с начальными условиями

$$p_{\parallel}(t=0) = P_{\parallel 0} = m\gamma_0 V_{\parallel 0}, \quad \mathbf{p}_{\perp}(t=0) = \mathbf{P}_{\perp 0} = m\gamma_0 \mathbf{V}_{\perp 0}, \quad z(t=0) = z_0. \quad (41)$$

Воспользуемся также уравнением, описывающим изменение энергии ω частицы:

$$d\omega/dt = -e\mathbf{E}(z, t)\mathbf{v}. \quad (42)$$

Результаты раздела 1 основывались на предположении, что, несмотря на отсутствие в системе резонансных частиц, импульсы частиц близки к резонансному значению:

$$R \gg 1, \quad (43)$$

где резонансный параметр R определяется формулой (37). В частности, линейная кинетическая теория, представленная в разделе 1, основывалась на уравнениях движения типа уравнений нелинейного маятника, которые являются приближённой (при условии (43)) формой строгих уравнений движения (40). Результатом этой приближённой теории, в частности, является вывод об отсутствии энергообмена между частицами и волнами, распространяющимися вдоль магнитного поля со скоростью света, на начальной стадии «включения» взаимодействия⁶. Проанализируем данную схему параметрического взаимодействия, отказавшись от ограничения (43).

Заметим, что в рассматриваемой системе отсчёта, в которой $\omega_1 = \omega_2$ и $v_{\parallel R} = 0$, условие (17) сводится к малости «доплеровской» расстройки синхронизма по отношению к «циклотронной» расстройке⁷:

$$kv_{\parallel} \ll \Delta_0, \quad (44)$$

⁶ По-видимому, это следствие пренебрежения эффектом «силовой» группировки [14].

⁷ В данной системе отсчёта отстройка синхронизма, связанная с отличием поперечного импульса от резонансного значения $\Delta_{\chi j}$, полностью определяется отстройкой гирочастоты частиц от частоты поля (равной гирочастоте резонансных частиц), в то время как расстройка синхронизма, связанная с отстройкой продольного импульса $\Delta_{\tau j}$, определяется доплеровским сдвигом.

где

$$\Delta_0 = \omega - \omega_B/\gamma_0. \quad (45)$$

Условие (14), означающее, что частица совершает большое число осцилляций в поле волны, позволяет представить её движение в виде суперпозиции медленного и осциллирующего (быстрого) движений:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= p_{\parallel} \mathbf{z}_0 + \mathbf{p}_{\perp} = (P_{\parallel} + \tilde{p}_{\parallel}) \mathbf{z}_0 + \text{Re} \left[(P_{\perp} + \tilde{p}_{\perp}) \mathbf{e}_+ \exp \left(-i \frac{eB}{mc\gamma_0} t \right) \right], \\ \mathbf{v} &= v_{\parallel} \mathbf{z}_0 + \mathbf{v}_{\perp} = (V_{\parallel} + \tilde{v}_{\parallel}) \mathbf{z}_0 + \text{Re} \left[(V_{\perp} + \tilde{v}_{\perp}) \mathbf{e}_+ \exp \left(-i \frac{eB}{mc\gamma_0} t \right) \right]. \end{aligned} \quad (46)$$

Поперечные компоненты импульса и скорости частицы представлены в следующем виде:

$$\mathbf{p}_{\perp} = \text{Re} \{ p_{\perp} \mathbf{e}_+ \exp[-ieB/(mc\gamma_0)t] \}, \quad \mathbf{v}_{\perp} = \text{Re} \{ v_{\perp} \mathbf{e}_+ \exp[-ieB/(mc\gamma_0)t] \}. \quad (47)$$

При такой записи быстрые компоненты продольного и поперечного импульса (и, соответственно, скорости) \tilde{p}_{\parallel} и \tilde{p}_{\perp} в первом приближении осциллируют с частотой, равной циклотронной отстройке Δ_0 , а медленные компоненты P_{\parallel} и P_{\perp} на соответствующем временном масштабе $2\pi/\Delta_0$ меняются слабо.

Исследуем характер изменения энергии частицы. Полагая амплитуду волны достаточно малой, так что выполняется неравенство

$$|\tilde{v}_{\parallel}| \omega t/c \ll 1, \quad (48)$$

воспользуемся теорией возмущений. Условие (48) означает, что связанный с резким «включением» высокочастотного поля разброс частиц по скоростям $\Delta V_{\parallel} \sim |\tilde{v}_{\parallel}|$ несущественен. При этом зависимость поля от продольной координаты движущейся частицы может быть разложена в ряд по малому возмущению ξ траектории движения $Z = V_{\parallel 0} t + z_0$ с постоянной невозмущённой скоростью:

$$E(z) = E(Z) + \xi \frac{dE(Z)}{dZ}. \quad (49)$$

В линейном приближении по амплитуде поля изменение энергии подчиняется уравнению

$$dw^{(1)}/dt = -e \text{Re} (E[Z(t)] V_{\perp 0}^* e^{-i\Delta_0 t}), \quad (50)$$

проинтегрировав которое, получаем

$$w^{(1)} = -e \text{Re} \left\{ E_0 V_{\perp 0}^* i \left[\frac{1}{\Delta_1} (e^{ikZ-i\Delta_0 t} - e^{ikZ_0}) + \frac{1}{\Delta_2} (e^{-ikZ-i\Delta_0 t-i\varphi_0} - e^{-ikZ_0-i\varphi_0}) \right] \right\}. \quad (51)$$

Заметим, что усреднённое по начальным фазам гировращения линейное возмущение энергии равно нулю. Проанализируем уравнение для энергии частицы в квадратичном приближении по амплитуде поля:

$$\frac{dw^{(2)}}{dt} = -e \text{Re} (E(Z) v_{\perp}^{(1)*} e^{-i\Delta_0 t}) - e \text{Re} \left(\xi \frac{\partial E[Z(t)]}{\partial Z} V_{\perp 0}^* e^{-i\Delta_0 t} \right). \quad (52)$$

Фигурирующее в правой части уравнения (52) линейное возмущение поперечной скорости подчиняется уравнению

$$\frac{dv_{\perp}^{(1)}}{dt} = \frac{\left(-dw^{(1)}/dt + i \frac{eB}{mc\gamma_0} w^{(1)} \right)}{mc^2\gamma_0} V_{\perp 0} - \frac{eE[Z(t)]}{m\gamma_0} e^{-i\Delta_0 t} - i \frac{e}{m\gamma_0\omega} V_{\parallel 0} \frac{\partial E[Z(t)]}{\partial Z} e^{-i\Delta_0 t}, \quad (53)$$

в которое нужно подставить как правую часть уравнения (50), так и его решение (51). В итоге для $v_{\perp}^{(1)}$ получим следующее выражение:

$$v_{\perp}^{(1)} = \frac{e}{m\gamma_0} \left\{ E_0 \frac{i}{\Delta_1} \left(e^{ikZ-i\Delta_0 t} - e^{ikZ_0} \right) \left(\frac{1}{2} \frac{|V_{\perp 0}|^2}{c^2} + \frac{1}{2} \frac{\omega_B}{\gamma_0 \Delta_1} \frac{|V_{\perp 0}|^2}{c^2} - 1 + \frac{V_{\parallel 0}}{c} \right) + \right. \\ \left. + E_0 \frac{i}{\Delta_2} \left(e^{-ikZ-i\Delta_0 t-i\varphi_0} - e^{-ikZ_0-i\varphi_0} \right) \left(\frac{1}{2} \frac{|V_{\perp 0}|^2}{c^2} + \frac{1}{2} \frac{\omega_B}{\gamma_0 \Delta_2} \frac{|V_{\perp 0}|^2}{c^2} - 1 - \frac{V_{\parallel 0}}{c} \right) - \right. \\ \left. - E_0^* \frac{i}{\Delta_1} \left(e^{-ikZ+i\Delta_0 t} - e^{-ikZ_0} \right) \frac{1}{2} \frac{|V_{\perp 0}|^2}{c^2} \left(1 + \frac{\omega_B}{\gamma_0 \Delta_1} \right) - \right. \\ \left. - E_0^* \frac{i}{\Delta_2} \left(e^{ikZ+i\Delta_0 t+i\varphi_0} - e^{ikZ_0+i\varphi_0} \right) \frac{1}{2} \frac{|V_{\perp 0}|^2}{c^2} \left(1 + \frac{\omega_B}{\gamma_0 \Delta_2} \right) - \right. \\ \left. - t \frac{\omega_B}{\gamma_0} \frac{V_{\perp 0}}{c^2} \operatorname{Re} \left[E_0 V_{\perp 0}^* \left(\frac{e^{ikZ_0}}{\Delta_1} + \frac{e^{-ikZ_0-i\varphi_0}}{\Delta_2} \right) \right] \right\}. \quad (54)$$

Линейное возмущение продольной координаты ξ подчиняется уравнению

$$\frac{d\xi}{dt} = v_{\parallel}^{(1)}, \quad (55)$$

где

$$\frac{dv_{\parallel}^{(1)}}{dt} = -\frac{V_{\parallel 0}}{mc^2\gamma_0} \frac{dw^{(1)}}{dt} + \frac{e}{m\gamma_0\omega} \operatorname{Re} \left(iV_{\perp 0}^* \frac{\partial E[Z(t)]}{\partial Z} e^{-i\Delta_0 t} \right). \quad (56)$$

Из (55), (56) для линейного возмущения продольной скорости и координаты получаем следующие выражения:

$$v_{\parallel}^{(1)} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{ieE_0}{m\gamma_0} \frac{V_{\perp 0}^*}{c} \left[\frac{V_{\parallel 0}}{c} \left(\frac{e^{ikZ-i\Delta_0 t} - e^{ikZ_0}}{\Delta_1} + \frac{e^{-ikZ-i\Delta_0 t-i\varphi_0} - e^{-ikZ_0-i\varphi_0}}{\Delta_2} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \left(\frac{e^{ikZ-i\Delta_0 t} - e^{ikZ_0}}{\Delta_1} - \frac{e^{-ikZ-i\Delta_0 t-i\varphi_0} - e^{-ikZ_0-i\varphi_0}}{\Delta_2} \right) \right] \right\}, \quad (57)$$

$$\xi = \operatorname{Re} \left(\frac{eE_0}{m\gamma_0} \frac{V_{\perp 0}^*}{c} \left\{ \frac{e^{ikZ-i\Delta_0 t} - e^{ikZ_0}}{\Delta_1^2} \left(1 - \frac{V_{\parallel 0}}{c} \right) - \frac{e^{-ikZ-i\Delta_0 t-i\varphi_0} - e^{-ikZ_0-i\varphi_0}}{\Delta_2^2} \left(1 + \frac{V_{\parallel 0}}{c} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + it \left[\frac{e^{ikZ_0}}{\Delta_1} \left(1 - \frac{V_{\parallel 0}}{c} \right) - \frac{e^{-ikZ_0-i\varphi_0}}{\Delta_2} \left(1 + \frac{V_{\parallel 0}}{c} \right) \right] \right\} \right). \quad (58)$$

Подставив выражения (54) и (58) в (52), уравнение для изменения энергии частицы в квадратичном приближении по амплитуде поля можно представить в следующем виде:

$$\frac{dw^{(2)}}{dt} = \frac{d\tilde{w}}{dt} + \frac{d\langle w \rangle_{\Delta_0 t \gg 1}}{dt}. \quad (59)$$

Здесь $d\tilde{w}/dt$ — осциллирующее с частотой Δ_0 изменение энергии, $d\langle w \rangle_{\Delta_0 t \gg 1}/dt$ — усреднённое по большому числу осцилляций изменение энергии частицы. Второй член в правой части (59) — скорость «безрезонансного» энергообмена. В общем случае (без использования приближений (43)

и (44)) это слагаемое определяется выражением

$$\begin{aligned} \frac{d\langle w \rangle_{\Delta_0 t \gg 1}}{dt} = & -\frac{e^2 |E_0|^2}{m\gamma_0} \sin(2kZ + \varphi_0) \times \\ & \times \left[-\frac{1}{\Delta_1} \left(\frac{1}{2} \frac{|V_{\perp}|^2}{c^2} + \frac{1}{2} \frac{|V_{\perp}|^2 \omega_H}{c^2 \Delta_1} + \frac{1}{2} \frac{|V_{\perp}|^2 \omega}{c^2 \Delta_1} \left(1 - \frac{V_{\parallel}}{c} \right) - 1 + \frac{V_{\parallel}}{c} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\Delta_2} \left(\frac{1}{2} \frac{|V_{\perp}|^2}{c^2} + \frac{1}{2} \frac{|V_{\perp}|^2 \omega_H}{c^2 \Delta_2} + \frac{1}{2} \frac{|V_{\perp}|^2 \omega}{c^2 \Delta_2} \left(1 + \frac{V_{\parallel}}{c} \right) - 1 - \frac{V_{\parallel}}{c} \right) \right]. \quad (60) \end{aligned}$$

Из формулы (60) следует, что знак усреднённого изменения энергии частицы в ВЧ поле, амплитуда которого периодически зависит от координаты, постоянен в течение ограниченного промежутка времени

$$\kappa V_{\parallel} t < \pi. \quad (61)$$

Подчеркнём, что неравенство (61) соответствует условию параметрического синхронизма (15). Кроме того, необходимо потребовать выполнения условия (44) малости доплеровской расстройки синхронизма по сравнению с циклотронной расстройкой. При этом уравнение (60) можно упростить и привести к виду

$$\frac{d\langle w \rangle}{dt} = -\frac{e^2}{m\gamma_0} \frac{1}{2\omega\Delta_0} \left[1 - R + \frac{\omega}{\Delta_0} (2R - 1) \right] V_{\parallel 0} \frac{\partial |E[Z(t)]|^2}{\partial Z}, \quad (62)$$

где

$$|E(Z)|^2 = 2|E_0|^2 [1 + \cos(2kZ + \varphi_0)]. \quad (63)$$

Здесь и далее с учётом (44) резонансный параметр (37) записываем в виде

$$R = \frac{|V_{\perp}|^2 \omega}{c^2 \Delta_0}. \quad (64)$$

При $R \gg 1$ (условие (43)) из (62) получаем уравнение

$$\frac{d\langle w \rangle}{dt} = -\frac{\omega}{\Delta_0^3} \frac{e^2}{m\gamma_0} \frac{|V_{\perp 0}|^2}{c^2} V_{\parallel 0} \frac{\partial |E[Z(t)]|^2}{\partial Z}. \quad (65)$$

Уравнение (65) справедливо для релятивистской частицы, движущейся в поле стоячей волны при наличии постоянного магнитного поля, при условии, что поперечная и продольная компоненты импульса частицы мало (но на конечную величину) отличаются от резонансных значений. При этом выполняется и менее жёсткое условие близости частоты осцилляций электронов и частоты волны:

$$\omega \gg \Delta_0. \quad (66)$$

Отметим следующую зависимость знака изменения энергии частицы от знака расстройки парциального синхронизма Δ_0 в соответствии с формулой (65): если $\Delta_0 > 0$, то энергия частицы уменьшается при её движении в направлении увеличения модуля поля; при $\Delta_0 < 0$ ситуация противоположная.

Как следует из общей формулы (62), при любом отличии начального импульса частицы от резонансного значения движение в поле волны с постоянной во времени и меняющейся в пространстве амплитудой сопровождается изменением полной средней энергии частицы. При этом принципиально наличие магнитного поля и/или учёт релятивизма. При отсутствии магнитного

поля, как хорошо известно [13, 17], нерелятивистское движение частицы происходит с сохранением её полной средней энергии, состоящей из энергии медленного движения ведущего центра и средней энергии осцилляционного движения (это видно из формулы (62), в которой нужно положить $\Delta_0 = \omega$ и $R = |V_{\perp}|^2/c^2 = 0$. Из общего выражения (62) следует и другой известный результат: при движении нерелятивистской частицы в магнитном поле сохраняется сумма её полной средней кинетической энергии и энергии взаимодействия магнитного момента, осциллирующего в поле волны электрона с магнитным полем [13, 17]:

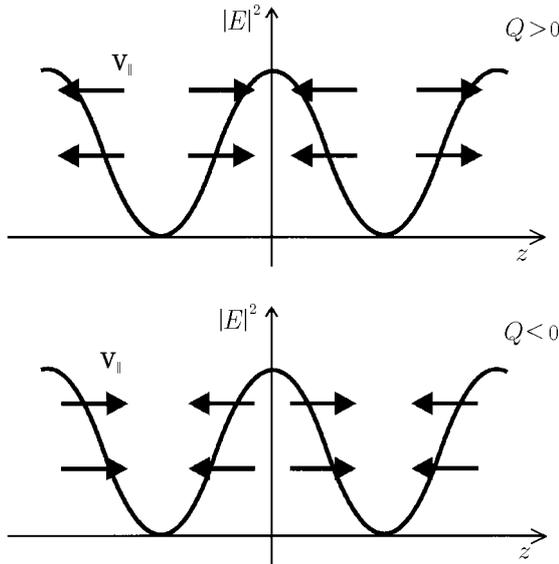


Рис. 2. «Решётка» модуляции скорости в электронном ансамбле относительно стоячей волны, образованной бихроматическим полем в одночастотной системе отсчёта

электронного ансамбля. А именно, должно выполняться следующее соотношение между фазой модуляции φ_M (начальную функцию распределения задаём в прежнем виде (8)) и фазой φ_0 , определяющей пространственную зависимость амплитуды волны (см. рис. 2):

$$\varphi_0 = \varphi_M - \frac{\pi}{2} \text{sign}Q, \tag{69}$$

где $Q = \frac{1}{\Delta_0} \left[1 - R + \frac{\omega}{\Delta_0} (2R - 1) \right]$ (при этом для определённости полагаем величину $\int p_{\parallel} f_M(p_{\parallel}) dp_{\parallel}$ положительной). При условии (43) получим, что соотношение фазового синхронизма (69), в котором нужно положить $\text{sign}Q = \text{sign}\Delta_0$, находится в полном соответствии с аналогичным соотношением (29), полученным в разделе 1 в рамках линеаризованного кинетического описания.

Сопоставим изменение энергии W электронного ансамбля с линейным инкрементом неустойчивости при помощи следующего соотношения:

$$\frac{d\langle W \rangle}{dt} = \int \frac{d\langle w(P_{\parallel 0}, P_{\perp 0}, z_0, t) \rangle}{dt} f_{\text{in}} \left(P_{\parallel 0}, \frac{|P_{\perp 0}|^2}{2}, z_0 \right) dP_{\parallel 0} d\frac{|P_{\perp 0}|^2}{2} dz_0 = -\frac{1}{\pi} \text{Re}(\mu |E_0|^2). \tag{70}$$

В приближении (43) с учётом выражения (65) для изменения энергии одной частицы и соотношения (69) получим результат линейной кинетической теории для инкремента неустойчивости $\text{Re}\mu$

$$\langle w \rangle - \mu B = \text{const}. \tag{67}$$

При этом уравнение для энергии частицы имеет вид

$$\frac{d\langle w \rangle}{dt} = \frac{\omega_B}{\omega \Delta_0^2} \frac{e^2}{2m} V_{\parallel 0} \frac{\partial |E[Z(t)]|^2}{\partial Z}. \tag{68}$$

Энергия частицы уменьшается при её движении в направлении уменьшения модуля поля. Уравнение (68) следует из (62), если положить $R \ll 1$ и $\gamma_0 = 1$.

Основываясь на полученном результате, нетрудно прояснить роль модуляции электронного ансамбля по продольному импульсу при «безрезонансном» параметрическом усилении. При отсутствии такой модуляции доли частиц, получающих энергию и отдающих её, одинаковы. Однако промодулировав в начальный момент времени продольную скорость частиц в ансамбле по продольной координате в определённом соответствии с зависимостью (63), можно получить на временном интервале (61) уменьшение энергии

(см. (28) и (21), где нужно положить $G = |V_{\perp R}|/c$, $n_{\parallel 1} = -n_{\parallel 2} = 1$, $\beta_{\parallel R} = 0$). Из полученного общего выражения (62) следует, что условие (43), не являясь необходимым для осуществления режима «безрезонансного» усиления, определяет, однако, наиболее оптимальные для этого условия.

Оценка полной энергии, теряемой электронным ансамблем за время «безрезонансного» взаимодействия, с учётом формул (62) и (70) определяется выражением

$$A_{NR} = \frac{e^2 |E_0|^2}{2m\gamma_0} \left| \left(\frac{1-R}{\omega\Delta_0} + \frac{2R-1}{\Delta_0^2} \right) \int \kappa V_{\parallel} t f_M \left(p_{\parallel}, \frac{p_{\perp}^2}{2} \right) dp_{\parallel} d\frac{p_{\perp}^2}{2} \right|. \quad (71)$$

Здесь для простоты полагаем, что электронный ансамбль является узким в фазовом пространстве, так что циклотронная отстройка $\Delta_0(p_{\perp})$ мало меняется на масштабах пучка. При этом, заметим, изменение доплеровской расстройки κV_{\parallel} принципиально.

Для полноты картины необходимо также оценить энергообмен между полем и электронным ансамблем на стадии становления «безрезонансного» режима взаимодействия. Эта величина определяется разницей между начальным значением усреднённой по периоду осцилляций $2\pi/\Delta_0$ энергии частицы и невозмущённым значением полной энергии w_0 . Необходимо проинтегрировать уравнение (59) с учётом осцилляторного члена $d\tilde{w}/dt$, который в приближении (44) может быть записан в виде

$$\frac{d\tilde{w}}{dt} = 2 \frac{e^2 |E_0|^2}{m\gamma_0} \left[\frac{1}{\Delta_0} \sin(\Delta_0 t) - \frac{1}{2} \frac{|V_{\perp}|^2}{c^2} t \cos(\Delta_0 t) \right]. \quad (72)$$

В результате получим

$$\langle w \rangle - w_0 = 2 \frac{e^2 |E_0|^2}{m\gamma_0} \frac{1}{\Delta_0^2} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{|V_{\perp}|^2}{c^2} \right). \quad (73)$$

Данная величина, проинтегрированная по ансамблю, определяет увеличение энергии электронов за счёт взаимодействия с полем на временах, ограниченных условием $\Delta_j t < \pi$, при котором область эффективного энергообмена с ВЧ волнами в фазовом пространстве включает в себя весь ансамбль электронов:

$$A_R = 2 \frac{e^2 |E_0|^2}{m\gamma_0} \frac{1}{\Delta_0^2} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{|V_{\perp}|^2}{c^2} \right) N, \quad (74)$$

где N — концентрация частиц. Выражение (74) определяет энергообмен на стадии «включения» квазистационарного режима усиления в системе, где $n_{\parallel 1} = -n_{\parallel 2}$. Здесь этот результат получен на основе строгих уравнений, за рамками приближения $R \gg 1$.

Оценим величину A_{NR}/A_R , характеризующую эффективность «безрезонансного» усиления ВЧ поля. Определим интеграл в выражении (71) по порядку величины следующим образом:

$$\left| \int \kappa V_{\parallel} t f_M \left(p_{\parallel}, \frac{p_{\perp}^2}{2} \right) dp_{\parallel} d\frac{p_{\perp}^2}{2} \right| \sim |\kappa \bar{V}_{\parallel} t| \int f_0 \left(p_{\parallel}, \frac{p_{\perp}^2}{2} \right) dp_{\parallel} d\frac{p_{\perp}^2}{2} = |\kappa \bar{V}_{\parallel} t| N, \quad (75)$$

где \bar{V}_{\parallel} — характерная продольная скорость электронов. В результате получим

$$\frac{A_{NR}}{A_R} \sim \left| \frac{\Delta_0}{\omega} (1-R) + 2R-1 \right| |\kappa \bar{V}_{\parallel} t|. \quad (76)$$

Отсюда видно, что в силу условия сохранения синхронизма (61) в течение времени параметрического взаимодействия энерговклад электронов в ВЧ поле при отсутствии парциального синхронизма может существенно превышать энергию, которую электроны успевают получить на начальной стадии энергообмена, если выполнено условие

$$\left| \frac{\Delta_0}{\omega} + 2 \frac{|V_{\perp}|^2}{c^2} \frac{\omega}{\Delta_0} - \frac{|V_{\perp}|^2}{c^2} - 1 \right| \gg 1. \quad (77)$$

Условие (77) может быть выполнено в двух случаях: при

$$\frac{|V_{\perp}|^2}{c^2} \left| \frac{\omega}{\Delta_0} \right| \gg 1 \quad (78)$$

либо при

$$|\Delta_0| \gg \omega. \quad (79)$$

Условие (78) соответствует упомянутому ранее условию (43). Таким образом, в рассмотренной в разделе 1 системе, в которой поле взаимодействует с частицами с релятивистскими импульсами, близкими к соответствующему резонансному значению, энергопотери ВЧ поля на стадии «включения» квазистационарного режима усиления могут быть несущественны. При условии (78) отношение (76) принимает вид

$$\frac{A_{NR}}{A_R} \sim |R| |\kappa \bar{V}_{\parallel} t|. \quad (80)$$

Процесс «безрезонансного» параметрического усиления является энергетически эффективным также в кардинально иной ситуации, когда частота осцилляций заряженной частицы в магнитном поле намного превосходит частоту волны:

$$\omega \ll \omega_B / \gamma_0, \quad (81)$$

что эквивалентно условию (79). Интересно, что при заданной величине постоянного магнитного поля в условиях (81) отношение

$$\frac{A_{NR}}{A_R} \sim \left| \frac{\Delta_0}{\omega} \right| |\kappa \bar{V}_{\parallel} t| \quad (82)$$

тем больше, чем менее энергичны частицы; оптимальной является ситуация, когда частицы нерелятивистские.

3. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭНЕРГОЗАТРАТ ПО СТЕПЕНЯМ СВОБОДЫ ПРИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ «БЕЗРЕЗОНАНСНОЙ» ГЕНЕРАЦИИ

В данном разделе проанализируем, за счёт энергии какого движения (поперечного или продольного) происходит параметрическое «безрезонансное» усиление. При этом ограничимся рассмотрением двух упомянутых в разделе 2 случаев, в которых «безрезонансный» энергообмен превалирует над энергопотерями поля на стадии «включения» параметрического взаимодействия.

Скорость изменения средней энергии частицы в квадратичном приближении по амплитуде поля может быть представлена как сумма скоростей изменения энергии различных типов движения:

$$\frac{d\langle w \rangle}{dt} = \frac{d}{dt} \left(w_{\perp}^{\text{gr}} + \langle w_{\perp}^{\text{osc}} \rangle + w_{\parallel}^{\text{sl}} + \langle w_{\parallel}^{\text{osc}} \rangle \right). \quad (83)$$

Здесь

$$\frac{dw_{\perp}^{\text{gr}}}{dt} = \frac{1}{2m\gamma_0} \frac{d|P_{\perp}|^2}{dt} \quad (84)$$

— изменение энергии гировращения частицы,

$$\frac{dw_{\parallel}^{\text{sl}}}{dt} = \frac{1}{2m\gamma_0} \frac{dP_{\parallel}^2}{dt} \quad (85)$$

— изменение энергии медленного продольного движения,

$$\frac{d\langle w_{\perp}^{\text{osc}} \rangle}{dt} = \frac{1}{2m\gamma_0} \frac{d\langle |\tilde{p}_{\perp}|^2 \rangle}{dt}, \quad \frac{d\langle w_{\parallel}^{\text{osc}} \rangle}{dt} = \frac{1}{2m\gamma_0} \frac{d\langle |\tilde{p}_{\parallel}|^2 \rangle}{dt} \quad (86)$$

— изменение средней осцилляторной энергии поперечного и продольного движения частицы в поле волны соответственно.

Рассмотрим систему с релятивистскими частицами, импульсы которых близки к резонансному значению, т. е. ограничимся приближением (43). Найдём средние значения квадратов продольной и поперечной компонент импульса электрона, используя релятивистскую связь

$$\tilde{p}_{\perp}^{(1)} = \frac{1}{c^2} \left(\tilde{w}^{(1)} V_{\perp 0} + w_0 \tilde{v}_{\perp}^{(1)} \right), \quad \tilde{p}_{\parallel}^{(1)} = \frac{1}{c^2} \left(\tilde{w}^{(1)} V_{\parallel 0} + w_0 \tilde{v}_{\parallel}^{(1)} \right) \quad (87)$$

и строгие соотношения (51), (54) и (57). Упростим результирующие выражения, используя приближения (43) и (44), и в итоге получим

$$\begin{aligned} \langle \tilde{p}_{\parallel}^2 \rangle_{\Delta_0 t \gg 1} &\approx \frac{e^2 |E_0|^2}{\Delta_0^2} \frac{|V_{\perp 0}|^2}{c^2} [1 - \cos(2kZ + \varphi_0)], \\ \langle |\tilde{p}_{\perp}|^2 \rangle_{\Delta_0 t \gg 1} &\approx \frac{e^2 |E_0|^2}{\Delta_0^2} \left(R^2 - 2R \frac{|V_{\perp 0}|^2}{c^2} - 2R \right) [1 + \cos(2kZ + \varphi_0)]. \end{aligned} \quad (88)$$

В квадратичном приближении по амплитуде волны запишем уравнение для медленного продольного движения:

$$\frac{dP_{\parallel}^{(2)}}{dt} = \left\langle \text{Re} \left(-\frac{e}{c} \left[\mathbf{v}_{\perp}^{(1)}, B(Z) \mathbf{e}_+ e^{-i\omega t} \right] - \frac{e}{c} \left[\text{Re} \left(V_{\perp 0} \mathbf{e}_+ e^{-i\omega_B / \gamma_0} \right), \xi \frac{\partial B(Z)}{\partial Z} \mathbf{e}_+ e^{-i\omega t} \right] \right) \right\rangle_{\Delta_0 t \gg 1}. \quad (89)$$

Используя соотношения (54) и (58), получим, что при выполнении условий (43) и (44) уравнение (89) сводится к виду

$$\frac{dP_{\parallel}^{(2)}}{dt} \approx -\frac{2e^2 |E_0|^2}{\gamma_0 m c \Delta_0} R \sin(2kZ + \varphi_0). \quad (90)$$

Для медленного изменения комплексной поперечной компоненты импульса в квадратичном приближении по амплитуде поля получаем⁸

$$\frac{dP_{\perp}^{(2)}}{dt} \approx i \frac{eB}{m c \gamma_0} \left(P_{\perp}^{(2)} - m \gamma_0 V_{\perp}^{(2)} \right) - e \left\langle \xi \frac{\partial E(Z)}{\partial Z} e^{-i\Delta_0 t} \right\rangle_{\Delta_0 t \gg 1}. \quad (91)$$

Учитывая релятивистскую связь

$$V_{\perp}^{(2)} = P_{\perp}^{(2)} / (m \gamma_0) - \left\langle p_{\perp}^{(1)} \text{Re} \left(P_{\perp 0} p_{\perp}^{(1)*} / [m \gamma_0 (m c \gamma_0)^2] \right) \right\rangle_{\Delta_0 t \gg 1} \quad (92)$$

и соотношения (51), (54), (58) и (87), из (91) получим следующее приближённое уравнение для медленного изменения квадрата модуля поперечной компоненты импульса

$$\frac{d|P_{\perp}|^2}{dt} \approx \frac{2k V_{\parallel} e^2 |E_0|^2}{\Delta_0^2} \left(R^2 - 2R \frac{|V_{\perp 0}|^2}{c^2} + 2R \right) \sin(2kZ + \varphi_0). \quad (93)$$

⁸ При записи этого уравнения можно пренебречь действием силы Лоренца со стороны магнитного поля волны в силу выполнения условий (43) и (44).

На основе полученных выражений (88), (90) и (93) можно показать, что изменение средней энергии поперечного движения частицы оказывается в $4\omega/\Delta_0$ раз больше изменения средней энергии продольного движения. В свою очередь, изменение энергии поперечного движения складывается из близких по модулю и противоположных по знаку изменений энергии гировращения w_{\perp}^{gr} и средней осцилляторной энергии $\langle w_{\perp}^{\text{osc}} \rangle$:

$$\frac{dw_{\perp}^{\text{gr}}}{dt} \propto \left(-R^2 + 2R \left| \frac{V_{\perp 0}}{c} \right|^2 - 2R \right) V_{\parallel 0} \frac{\partial |E[Z(t)]|^2}{\partial Z}, \quad (94)$$

$$\frac{d\langle w_{\perp}^{\text{osc}} \rangle}{dt} \propto \left(R^2 - 2R \left| \frac{V_{\perp 0}}{c} \right|^2 - 2R \right) V_{\parallel 0} \frac{\partial |E[Z(t)]|^2}{\partial Z}. \quad (95)$$

Среднее изменение полной энергии частицы определяется формулой (65).

Итак, получаем, что в системе с релятивистскими частицами, близкими к резонансу, процесс «безрезонансного» усиления ВЧ поля сопровождается уменьшением энергии поперечного движения частиц (изменение энергии продольного движения при этом пренебрежимо мало) за счёт преобладающего уменьшения энергии гировращения (при $\Delta_0 > 0$) либо средней энергии осцилляторного движения (при $\Delta_0 < 0$). В последнем случае, на первый взгляд, возникает парадокс. Действительно, энергия осцилляторного движения приобретает частицами именно на стадии «включения» параметрического взаимодействия, поэтому как потери энергии осцилляций могут превышать увеличение энергии на начальной стадии? Объяснение заключается в том, что начальный энерговклад со стороны поля сопровождается одновременно возбуждением осцилляторного поперечного движения в поле волны и уменьшением энергии гировращения. При этом энергетически эти процессы почти полностью компенсируют друг друга.

Определим, за счёт энергии какого типа движения происходит параметрическое «безрезонансное» усиление в ситуации, когда волна взаимодействует с нерелятивистскими частицами. Характер движения нерелятивистской частицы в поле нерезонансной волны, в том числе и закон изменения её средней энергии, хорошо известен [13, 17]. Здесь же изложим известные результаты в свете интересующей нас проблемы.

Скорость изменения энергии поперечного движения частицы в нерелятивистском приближении определяется изменением средней энергии поперечного осцилляторного движения:

$$\frac{d\langle w_{\perp}^{\text{osc}} \rangle}{dt} = \frac{e^2}{2m\omega\Delta_0} \frac{\omega}{\Delta_0} V_{\parallel 0} \frac{\partial |E[Z(t)]|^2}{\partial Z}, \quad (96)$$

по сравнению с которым изменение энергии гировращения $w_{\perp}^{\text{rg}} = m|V_{\perp}|^2/2$ пренебрежимо мало. При этом изменение средней энергии продольных осцилляций $\langle w_{\parallel}^{\text{osc}} \rangle = m\langle |\tilde{v}_{\parallel}|^2 \rangle/2$ пренебрежимо мало по сравнению с изменением энергии продольного движения ведущего центра:

$$\frac{dw_{\parallel}^{\text{sl}}}{dt} = -\frac{e^2}{2m\omega\Delta_0} V_{\parallel 0} \frac{\partial |E[Z(t)]|^2}{\partial Z}. \quad (97)$$

Таким образом, если циклотронная частота много больше частоты поля (условие (81)), изменение средней энергии нерелятивистской частицы определяется изменением энергии медленного продольного движения. Интересно отметить, что при взаимодействии поля с ансамблем нерелятивистских частиц, при сильной отстройке от циклотронного резонанса, на начальной стадии (когда $|\Delta_0|t \leq 1$) энергия вкладывается в поперечное движение (как в осцилляторное, так и в циклотронное), однако на стадии «безрезонансного» взаимодействия усиление поля происходит

за счёт уменьшения энергии продольного движения, которое может превышать начальный энергосклад со стороны ВЧ волны.

Здесь необходимо отметить, что в проведённом в данной работе анализе энергетических соотношений в процессе «безрезонансного» параметрического усиления оставлен без внимания способ создания предварительной модуляции электронного ансамбля по продольному импульсу и, соответственно, энергозатраты со стороны некоего низкочастотного источника на возбуждение этой модуляции. Однако из качественных соображений представляется, что в системе с нерелятивистскими частицами при сильной отстройке от циклотронного резонанса эти энергозатраты сравнимы с энергоскладом электронов в усиливаемое ВЧ поле, поскольку при таком усилении энергия черпается из продольного движения частиц. В этом смысле система с релятивистскими частицами, близкими к резонансу, представляется более перспективной, поскольку источником «безрезонансного» параметрического усиления в этой системе является энергия поперечного движения. При этом передаваемая ВЧ полю доля энергии ансамбля электронов может быть оценена в рамках следующих соотношений. Полная энергия, теряемая электронным ансамблем за время «безрезонансного» взаимодействия, определяется выражением (71), где нужно положить $R \gg 1$, $\omega \gg \Delta_0$; соответствующий момент модулированной компоненты функции распределения оценим по формуле (75). Положим амплитуду поля соответствующей порогу применимости линейного решения (используем условие (48) с учётом соотношения (57)). В результате для плотности энергии, полученной полем из среды за всё время эффективного взаимодействия (т. е. пока выполняется неравенство (61)), получим следующую простую оценку:

$$A_{NR} = mc^2 \gamma_0 N \frac{(\kappa \bar{V}_{\parallel})^2}{\omega \Delta_0}. \quad (98)$$

Малость параметра $(\kappa \bar{V}_{\parallel})^2 / (\omega \Delta_0)$, определяющего коэффициент полезного действия «безрезонансного» усиления, должна соответствовать условию реализации этого процесса (44), а также условию (43), при котором мало поглощение на стадии «включения» параметрического взаимодействия.

Вопрос о соотношении энергозатрат на возбуждение модуляции распределения электронов и энергосклада в усиливаемое поле требует дополнительного исследования.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение ещё раз напомним о принципиальных отличиях рассматриваемого режима взаимодействия частиц с полем от индуцированного рассеяния. Во-первых, в процессе индуцированного рассеяния необходимая для осуществления энергообмена модуляция электронного ансамбля формируется самосогласованно под действием ВЧ поля. Далее, режиму индуцированного рассеяния соответствует асимптотическое поведение системы на временах, не ограниченных условием (15). При этом модуляция электронного ансамбля имеет вид «решётки» возмущений плотности, движущейся со скоростью волны биений, и существенно отличается от задаваемой выражением (26) модуляции скорости потока, которая ещё не трансформировалась в возмущение плотности.

Таким образом, в рассматриваемом в данной работе линейном режиме «безрезонансного» усиления принципиальным оказывается ограничение на время взаимодействия. Более того, можно предположить, что при определённых видах распределения частиц на стадии «включения» режима индуцированного рассеяния может происходить одновременное усиление (или поглощение) волн в соответствии с изложенным здесь механизмом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kocharovskaya O. // Phys. Rep. 1992. V. 219, No. 3-6. P. 175.
2. Harris S. E. // Phys. Today. 1997. V. 50. P. 36.
3. Гапонов-Грехов А. В., Токман М. Д. // ЖЭТФ. 1997. Т. 112, № 4(10). С. 1176.
4. Ерухимова М. А., Токман М. Д. // ЖЭТФ. 2000. Т. 118, № 2(8). С. 291.
5. Ерухимова М. А., Токман М. Д. // Изв. вузов. Радиофизика. 2001. Т. 44, № 1-2. С. 190.
6. Ерухимова М. А., Токман М. Д. // Физика плазмы. 2001. Т. 27, № 10. С. 921.
7. Litvak A. G., Tokman M. D. // Phys. Rev. Lett. 2002. V. 88, № 9. P. 095003.
8. Крячко А. Ю., Литвак А. Г., Токман М. Д. // ЖЭТФ. 2002. Т. 122, № 4(10). С. 805.
9. Shvets G., Wurtele J. S. // Phys. Rev. Lett. 2002. V. 89. P. 115 003.
10. Artemiev A. I., Fedorov M. V., Rostovtsev Y. V. et al. // Phys. Rev. Lett. 2000. V. 85. P. 4510.
11. Железняков В. В. Излучение в астрофизической плазме. М.: Наука, 1997. 528 с.
12. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. С. 623.
13. Литвак А. Г. // Вопросы теории плазмы / Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Атомиздат, 1980. Т. 10. С. 164.
14. Братман В. Л., Гинзбург Н. С., Нусинович Г. С. и др. // Релятивистская высокочастотная электроника / Под ред. А. В. Гапонова-Грехова. Горький: ИПФ АН СССР, 1979. С. 157.
15. Кищенко А. Б., Панкратов И. М., Степанов К. Н. // ЖТФ. 1975. Т. 45. С. 912.
16. Litvak A. G., Sergeev A. M., Suvorov E. V., Tokman M. D., Khazanov I. V. // Phys. Fluids. B. 1993. V. 5. P. 4347.
17. Миллер М. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1958. Т. 1, № 3. С. 110.

Институт прикладной физики РАН,
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию
14 марта 2003 г.

ON THE "NONRESONANCE" PARAMETRIC CYCLOTRON RADIATION

M. A. Erukhimova, M. D. Tokman

We study the effect of amplification of a coherent bichromatic radiation due to its cyclotron parametric interaction with a modulated ensemble of classical electron oscillators. The mechanism of energy exchange between the radiation and the electrons in the absence of partial synchronism of the waves and particles is analyzed. The features of the energy exchange in the course of interaction of the waves with relativistic and nonrelativistic particles are pointed out.

УДК 621.372.81

О ДВУМЕРНОМ БРЭГГОВСКОМ РЕЗОНАТОРЕ

Н. Ф. Ковалёв

Приведён вывод систем дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений, позволяющих корректно исследовать собственные волны и высокочастотные колебания коаксиальных систем с неглубокой двоякопериодической гофрировкой стенок. Проанализированы дисперсионные свойства собственных волн коаксиального волновода с указанной гофрировкой с учётом дифракционных эффектов для квазикритических волн. Для краевой задачи с нулевыми граничными условиями, которая описывает частную разновидность коаксиальных резонаторов, рассмотренных в [1], получены упрощённые выражения для собственных комплексных частот и добротностей, из которых следует вывод о возможном сгущении спектра высокочастотных колебаний при увеличении как продольного, так и поперечного размеров резонатора.

В обзоре [1] рассмотрены собственные колебания в резонаторах, образованных двумя близко расположенными пластинами с двоякопериодической гофрировкой. Результатом этих исследований является вывод о существовании в подобных электродинамических системах уединённых колебаний с уникальными по добротности и структуре поля свойствами, использование которых, например, в СВЧ генераторах позволило бы «в идеальном случае... практически неограниченно увеличивать поперечные размеры системы, а следовательно, и интегральную мощность излучения». Тем не менее, в работе [1] не указаны какие-либо физические ограничения на размеры рассматриваемых систем. Наша работа посвящена исследованию одного из возможных механизмов такого ограничения — сгущения спектра высокочастотных колебаний при увеличении размеров резонатора. Существенно, что этот эффект не может быть проанализирован в рамках использованного в [1] «геометрооптического приближения». Для адекватного анализа в данном случае нужен более строгий метод расчёта, вариант которого предложен в настоящей работе для одного из возможных типов коаксиальной системы из [1]. С целью большей наглядности здесь будут применяться простые аналитические методы исследования.

1. Рассмотрим коаксиальный волновод (см. рис. 1) с идеально проводящими стенками. Внешняя стенка гофрирована:

$$\rho = R_0 + l(\varphi, z), \quad (1a)$$

$$l(\varphi, z) \equiv a_1 [\cos(\bar{h}z - \bar{m}\varphi) + \cos(\bar{h}z + \bar{m}\varphi)],$$

а внутренняя гладкая:

$$\rho = R_0 - a_0, \quad (1b)$$

где \bar{m} и $\bar{h} = 2\pi/d$ — постоянные гофрировки, а остальные обозначения пояснены на рис. 1. Здесь

и далее используется правая цилиндрическая система координат (ρ, φ, z) и гауссовская система единиц; зависимость от времени выбрана в виде $\exp(i\omega t)$.

Предполагаются выполненными ограничивающие условия

$$a_1 \ll a_0 \ll \lambda \ll R_0, \quad (2)$$

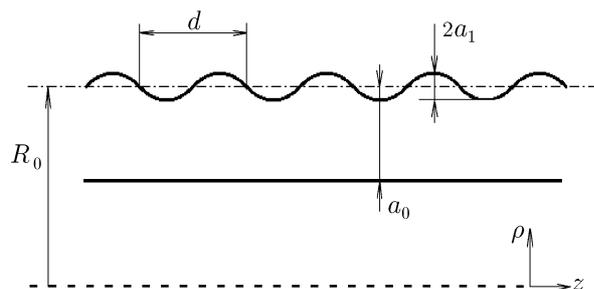


Рис. 1. Схема коаксиального волновода и резонатора с гофрированной внешней стенкой

Н. Ф. Ковалёв

299

где λ — длина волны излучения в свободном пространстве, что допускает применение простейшего варианта метода возмущений [2], основанного на замене идеально проводящей стенки (1а) цилиндрической поверхностью ($\rho = R_0$) с граничными условиями

$$E_z(\rho = R_0) \approx - \left[l \frac{\partial E_z}{\partial \rho} + \frac{\partial l}{\partial z} E_\rho \right]_{\rho=R_0}, \quad E_\varphi(\rho = R_0) \approx - \left[l \frac{\partial E_\varphi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial l}{\partial \varphi} E_\rho \right]_{\rho=R_0}. \quad (3)$$

При такой постановке в качестве базисной удобно использовать полную систему вращающихся собственных волн регулярного ($l = 0$) осесимметричного волновода, частным случаем которого является коаксиальный волновод:

$$\hat{\mathbf{E}}^j = \mathbf{E}^j(\rho) \exp[-i(h_j z + m_j \varphi)], \quad \hat{\mathbf{H}}^j = \mathbf{H}^j(\rho) \exp[-i(h_j z + m_j \varphi)], \quad (4)$$

удовлетворяющих условиям чётности

$$h_{-j} = -h_j, \quad m_{-j} = -m_j, \quad (5)$$

которые, в свою очередь, позволяют записать соотношение ортогональности в универсальном виде

$$\int_{s_\perp} \left([\hat{\mathbf{H}}^{-j}, \hat{\mathbf{E}}^\nu] - [\hat{\mathbf{H}}^\nu, \hat{\mathbf{E}}^{-j}] \right) \mathbf{z}_0 dS = N_j \delta_{\nu j}, \quad (6)$$

где $\delta_{\nu j}$ — символ Кронекера, s_\perp — поперечное сечение волновода, \mathbf{z}_0 — орт оси z ,

$$N_j = \int_{s_\perp} \left([\hat{\mathbf{H}}^{-j}, \hat{\mathbf{E}}^j] - [\hat{\mathbf{H}}^j, \hat{\mathbf{E}}^{-j}] \right) \mathbf{z}_0 dS \quad (7)$$

— норма волны. В (4) индекс j является номером волны и принимает как положительные, так и отрицательные целочисленные значения, кроме $j = 0$. Положительным значениям $j \geq 1$ соответствуют прямые волны, для которых $h_j > 0$ при $h_j^2 > 0$ и $h_j = -i|h_j|$ при $h_j^2 < 0$, а отрицательными индексами $j \leq -1$ отмечаются встречные волны. Азимутальное число m_j может принимать все без исключения целочисленные значения как для прямых, так и для встречных волн. Волны, отличающиеся только знаками у m_j , являются вырожденными.

Для вывода уравнений здесь будет использована лемма Лоренца

$$\operatorname{div} \left([\hat{\mathbf{H}}^{-j}, \mathbf{E}] - [\mathbf{H}, \hat{\mathbf{E}}^{-j}] \right) = 0, \quad (8)$$

в которой \mathbf{E} и \mathbf{H} — искомые поля. Путём интегрирования леммы (8) по тонкому поперечному слою регулярного волновода ($l = 0$) и учёта необходимых граничных условий нетрудно получить дифференциальное соотношение

$$\frac{d}{dz} \int_{s_\perp} \left([\hat{\mathbf{H}}^{-j}, \mathbf{E}] - [\mathbf{H}, \hat{\mathbf{E}}^{-j}] \right) \mathbf{z}_0 dS = - \oint_{\rho=R_0} [\hat{\mathbf{H}}^{-j}, \mathbf{E}] \boldsymbol{\rho}_0 ds, \quad (9)$$

где $\boldsymbol{\rho}_0$ — орт оси ρ . Если представить поперечные к оси волновода составляющие полного поля в виде рядов:

$$\mathbf{E}_\perp = \sum_\nu P_\nu(z) \mathbf{E}_\perp^\nu(\rho) \exp(-im_\nu \varphi), \quad \mathbf{H}_\perp = \sum_\nu P_\nu(z) \mathbf{H}_\perp^\nu(\rho) \exp(-im_\nu \varphi), \quad (10)$$

подставить их в левую часть соотношения (9) и применить условие ортогональности (6), то (9) преобразуется в систему уравнений

$$\frac{dP_j}{dz} + ih_j P_j = -\frac{\exp(-ih_j z)}{N_j} \oint_{\rho=R_0} [\hat{\mathbf{H}}^{-j}, \mathbf{E}] \rho_0 ds, \quad (11)$$

которая даже в случае неравномерной сходимости рядов (10) является точной.

В волноводе (1), (2) на частотах $k = 2\pi/\lambda \approx \bar{h}$ возможно выполнение брэгговских, т. е. резонансных, условий вида

$$|h_1 - h_{-2} - \bar{h}| \ll \bar{h}, \quad m_1 - m_{-2} = \pm \bar{m} \quad (12)$$

одновременно для шести распространяющихся волн. Для удобства эти волны переобозначаются согласно схеме, приведённой на рис. 2. Нижний индекс теперь будет равен азимутальному числу, а направление распространения волны будет учитываться дополнительным верхним знаком у амплитуд или знаком перед волновым числом, т. е. далее все $h > 0$. Как видно из диаграммы на рис. 2, две волны с амплитудами P_n^+ и P_n^- близки к кабельным, поэтому в дальнейшем они будут называться квазикабельными, а четыре оставшиеся волны с амплитудами $P_{n+\bar{m}}^+$, $P_{n+\bar{m}}^-$ и $P_{n-\bar{m}}^+$, $P_{n-\bar{m}}^-$ будут называться квазикритическими, или «шепчущими».

После подстановки приближённых граничных условий (3), представления полей в виде рядов по собственным волнам и выполнения операции усреднения от системы (11) остаются только шесть взаимосвязанных уравнений относительно медленно изменяющихся комплексных амплитуд:¹

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{P}_n^+}{dz} + i(h_n - \bar{h})\tilde{P}_n^+ &= i\frac{\alpha}{2}(P_{n+\bar{m}}^+ + P_{n-\bar{m}}^+ + P_{n+\bar{m}}^- + P_{n-\bar{m}}^-), \\ \frac{d\tilde{P}_n^-}{dz} - i(h_n - \bar{h})\tilde{P}_n^- &= -i\frac{\alpha}{2}(P_{n+\bar{m}}^+ + P_{n-\bar{m}}^+ + P_{n+\bar{m}}^- + P_{n-\bar{m}}^-), \\ \frac{dP_{n+\bar{m}}^+}{dz} + ih_{n+\bar{m}}P_{n+\bar{m}}^+ &= i\frac{\alpha k}{2h_{n+\bar{m}}}(\tilde{P}_n^+ + \tilde{P}_n^-), \\ \frac{dP_{n+\bar{m}}^-}{dz} - ih_{n+\bar{m}}P_{n+\bar{m}}^- &= -i\frac{\alpha k}{2h_{n+\bar{m}}}(\tilde{P}_n^+ + \tilde{P}_n^-), \\ \frac{dP_{n-\bar{m}}^+}{dz} + ih_{n-\bar{m}}P_{n-\bar{m}}^+ &= i\frac{\alpha k}{2h_{n-\bar{m}}}(\tilde{P}_n^+ + \tilde{P}_n^-), \\ \frac{dP_{n-\bar{m}}^-}{dz} - ih_{n-\bar{m}}P_{n-\bar{m}}^- &= -i\frac{\alpha k}{2h_{n-\bar{m}}}(\tilde{P}_n^+ + \tilde{P}_n^-), \end{aligned} \quad (13)$$

¹ Уравнения, близкие к (13), приведены без вывода и анализа в статье [3].

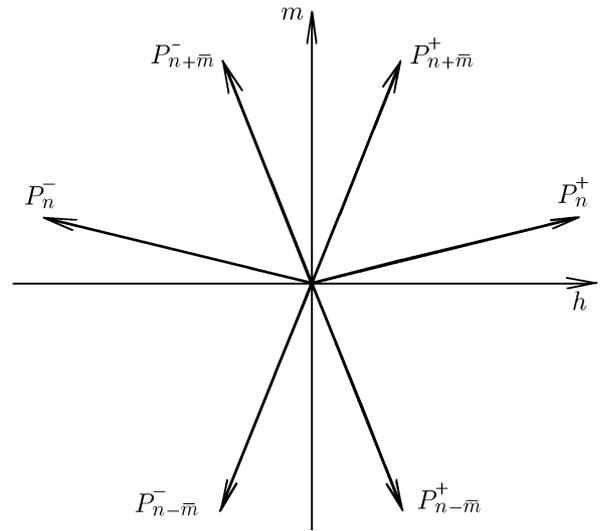


Рис. 2. Диаграмма волновых векторов взаимодействующих волн и схема их обозначений в случае $n \geq 0$

где

$$h_{n+\bar{m}}^2 = k^2 - \left(\frac{n+\bar{m}}{R_0}\right)^2, \quad h_{n-\bar{m}}^2 = k^2 - \left(\frac{n-\bar{m}}{R_0}\right)^2, \quad h_n^2 = k^2 - \left(\frac{n}{R_0}\right)^2, \quad (14)$$

$$\alpha = \frac{\bar{h}a_1}{2a_0} \quad (15)$$

— параметр, характеризующий связь волн и имеющий размерность волнового числа,

$$\tilde{P}_n^+ = P_n^+ \exp(i\bar{h}z), \quad \tilde{P}_n^- = P_n^- \exp(-i\bar{h}z) \quad (16)$$

— приведённые медленно изменяющиеся амплитуды квазикабельных волн. Потоки энергии, переносимые каждой из парциальных волн, с точностью до общего для всех волн множителя можно положить равными [2]

$$\Pi_\nu^+ = |P_\nu^+|^2 h_\nu, \quad \Pi_\nu^- = -|P_\nu^-|^2 h_\nu. \quad (17)$$

При выводе системы (13) вместе с (2) предполагались выполненными дополнительные условия

$$h_{n+\bar{m}} \ll k, \quad h_{n-\bar{m}} \ll k, \quad |n| \ll \bar{m}, \quad |n/R_0| \ll k, \quad k - h_n \ll k, \quad |k - \bar{h}| \ll k, \quad (18)$$

ограничивающие класс исследуемых волн и режимы их взаимодействия.

В частном случае $n = 0$, который в [1] назван симметричным, система (13) распадается на две независимые подсистемы. Если амплитуды сгруппировать следующим образом:

$$P_{\bar{m}}^+ + P_{-\bar{m}}^+ = P^+, \quad P_{\bar{m}}^- + P_{-\bar{m}}^- = P^-, \quad (19)$$

то

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{P}_0^+}{dz} + i(k - \bar{h})\tilde{P}_0^+ &= i\frac{\alpha}{2}(P^+ + P^-), & \frac{d\tilde{P}_0^-}{dz} - i(k - \bar{h})\tilde{P}_0^- &= -i\frac{\alpha}{2}(P^+ + P^-), \\ \frac{dP^+}{dz} + ih_{\bar{m}}P^+ &= i\frac{\alpha k}{h_{\bar{m}}}(\tilde{P}_0^+ + \tilde{P}_0^-), & \frac{dP^-}{dz} - ih_{\bar{m}}P^- &= -i\frac{\alpha k}{h_{\bar{m}}}(\tilde{P}_0^+ + \tilde{P}_0^-); \end{aligned} \quad (20)$$

$$\frac{d}{dz}(P_{\bar{m}}^+ - P_{-\bar{m}}^+) + ih_{\bar{m}}(P_{\bar{m}}^+ - P_{-\bar{m}}^+) = 0, \quad \frac{d}{dz}(P_{\bar{m}}^- - P_{-\bar{m}}^-) - ih_{\bar{m}}(P_{\bar{m}}^- - P_{-\bar{m}}^-) = 0. \quad (21)$$

Последняя из подсистем (21) описывает квазикритические прямую и встречную волны регулярного волновода, не связанные с кабельными волнами из-за поляризационной ортогональности.

Примечательной особенностью полученных систем уравнений, отмеченной и в [1], является отсутствие в первом приближении (2) прямой связи между встречными квазикабельными волнами и между квазикритическими волнами, вращающимися в разных направлениях. Это свойство положено в основу метода решения краевой задачи о резонансных колебаниях, который будет использован в третьем разделе.

2. С целью выяснения физики процессов представляется уместным сначала остановиться на собственных волнах гофрированного коаксиального волновода (1), определив их обычным условием

$$P_\nu = \hat{P}_\nu \exp(-i\delta z), \quad \frac{d\hat{P}_\nu}{dz} = 0 \quad (22)$$

для всех медленно изменяющихся амплитуд, входящих в уравнения (13) или (20), (21). Получающееся в результате дисперсионное соотношение можно записать так, чтобы его правая часть была пропорциональна квадрату малого параметра связи α^2 между парциальными волнами:

$$(h_{n+\bar{m}}^2 - \delta^2)(h_{n-\bar{m}}^2 - \delta^2)[(h_n - \bar{h})^2 - \delta^2] = \alpha^2 k (h_n - \bar{h}) [h_{n+\bar{m}}^2 + h_{n-\bar{m}}^2 - 2\delta^2], \quad (23)$$

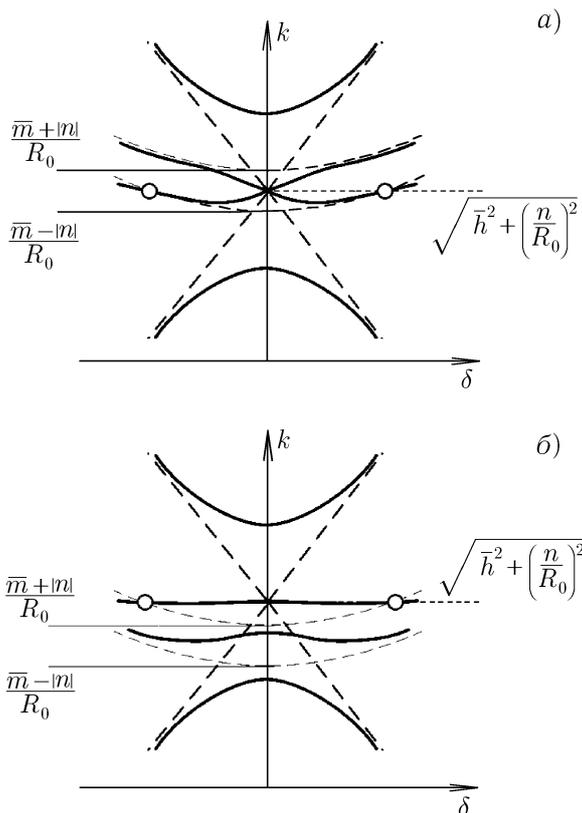


Рис. 3. Фрагменты бриллюэновских диаграмм для собственных азимутально-несимметричных волн с $n \neq 0$ в коаксиальном гофрированном волноводе; пунктирные линии соответствуют парциальным волнам; кружочками обозначены точки пересечения дисперсионных кривых собственных и парциальных волн; представлены случаи $\bar{h} = \bar{m}/R_0$ (а) и $\bar{h}^2 + (n/R_0)^2 > (\bar{m} + |n|)^2/R_0^2$ (б)

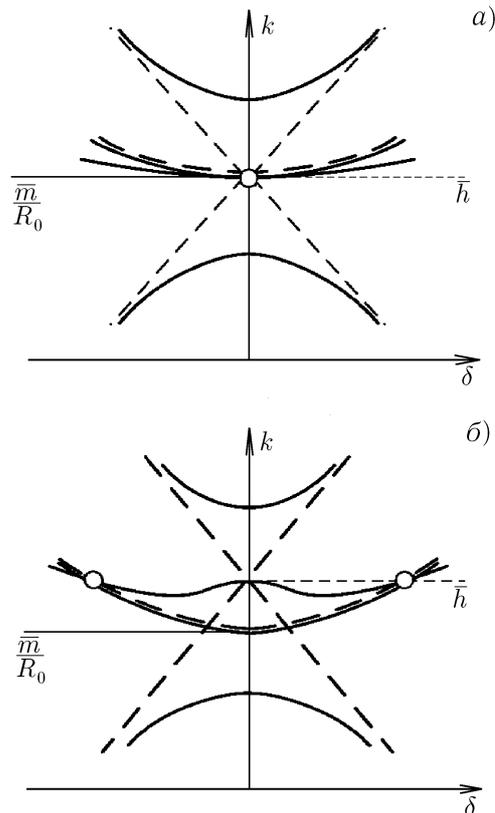


Рис. 4. Фрагменты бриллюэновских диаграмм для собственных осесимметричных волн с $n = 0$ в коаксиальном гофрированном волноводе; пунктирные линии соответствуют парциальным волнам; кружочками обозначены точки пересечения кривых дисперсии собственных и парциальных волн; представлены случаи $\bar{h} = \bar{m}/R_0$ (а) и $\bar{h} > \bar{m}/R_0$ (б)

или в осесимметричном случае ($n = 0$)

$$h_{\bar{m}}^2 - \delta^2 = 0, \tag{24a}$$

$$(h_{\bar{m}}^2 - \delta^2) [(k - \bar{h})^2 - \delta^2] = 2\alpha^2 k (k - \bar{h}). \tag{24б}$$

Первое из соотношений (24), как и следовало ожидать, совпадает с дисперсией волн, в том числе и «шепчущих», в регулярном волноводе.

Хотя численный анализ выражений (23) и (24) не представляет затруднений, тем не менее представляется более наглядным и полезным привести качественные дисперсионные кривые в бриллюэновской плоскости для нормальных и парциальных волн (рис. 3 и 4).

Если, как и в [1], принять «геометрооптическое приближение», т. е. в (13) положить

$$\frac{dP_{n+\bar{m}}^+}{dz} = \frac{dP_{n+\bar{m}}^-}{dz} = \frac{dP_{n-\bar{m}}^+}{dz} = \frac{dP_{n-\bar{m}}^-}{dz} = 0, \tag{25}$$

то (23) и (24) заменяются существенно более простыми выражениями ²

$$h_{n+\bar{m}}^2 h_{n-\bar{m}}^2 [(h_n - \bar{h})^2 - \delta^2] = \alpha^2 k (h_n - \bar{h}) [h_{n+\bar{m}}^2 + h_{n-\bar{m}}^2], \tag{26}$$

$$h_{\bar{m}}^2 = 0, \tag{27a}$$

$$h_{\bar{m}}^2 [(k - \bar{h})^2 - \delta^2] = 2\alpha^2 k (k - \bar{h}). \tag{27б}$$

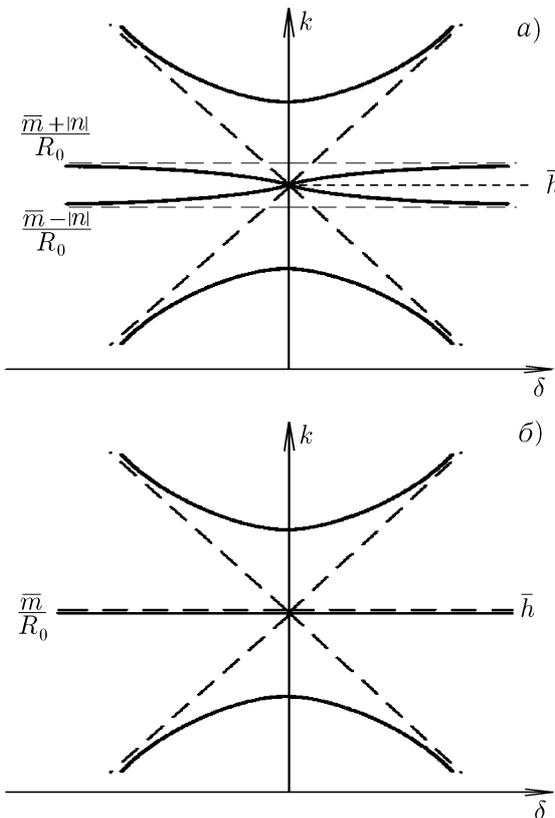


Рис. 5. Иллюстрации к решениям уравнений (26) и (27) для случая $\bar{h} = \bar{m}/R_0$

Кривые, иллюстрирующие решения уравнений (26) и (27) приведены на рис. 5а и б соответственно.

В области малых волновых чисел $|\delta| \ll \bar{h}$ зависимости $k = k(\delta)$, показанные на рис. 3а и 4а, близки к соответствующим кривым на рис. 5. Тем не менее с помощью дисперсионных соотношений (26), (27) и уравнения (13) с учтёнными в них условиями (25) нельзя получить полное решение задачи о высокодобротных колебаниях с частотами $k \approx \bar{h}$ в гофрированном коаксиальном резонаторе и, соответственно, дать исчерпывающий анализ его селективных свойств. В отсутствие дифракционных явлений, т.е. при выполнении условий (25), среди решений (13) с $\bar{m} = \bar{h}R_0$ существуют особые осесимметричные ($n = 0$) колебания, имеющие неограниченно высокие добротности, т.е. $\text{Im } k = 0$, и бесконечную степень вырождения. Эти аномальные свойства, привлёкшие внимание авторов [1], являются следствиями тождественного равенства нулю групповой скорости ($v_{гр} = c dk/d\delta = 0$, где c — скорость света в вакууме) собственных волн с дисперсионной зависимостью в виде горизонтальной прямой $k = \bar{h}$ (средняя линия на рис. 5б) и интерференционной компенсацией дифракционных потерь с разных участков резонатора (1). Учёт

всех производных в (13) в корне изменяет дисперсионные свойства этих волн. Например, для осесимметричных волн с $n = 0$, $\bar{h} = \bar{m}/R_0$ и $|\delta| \ll \bar{h}$ в первом приближении ³

$$k = \bar{h} + \frac{\delta^4}{2\alpha^2 \bar{h}}, \tag{28}$$

групповая скорость $v_{гр} \approx 2c\delta^3/(\alpha^2 \bar{h})$ при этом становится не равной тождественно нулю, полной компенсации дифракционных потерь для собственных колебаний не возникает, а частота $k = \bar{h}$ принимает смысл граничной частоты между полосой запираания $k < \bar{h}$ и полосой пропускания $k > \bar{h}$ (см. рис. 4а). Особенностью зависимости (28) является её нулевая кривизна в точке отсечки

² Кроме пренебрежения производными, в [1] принят также ряд дополнительных допущений, что приводит к несколько отличному от (26) и (27) дисперсионным кривым. Впрочем, для дальнейшего обсуждения это отличие не принципиально.

³ В частном случае $\bar{h} = \bar{m}/R_0$ этот фрагмент дисперсионных кривых, для которого указанное выше вырождение снимается, был получен в статье [3].

$k = \bar{h}$. Это свойство качественно отличает (28) от дисперсии квазикритических волн в регулярных волноводах, в частности от (24а), и в принципе может быть использовано для построения электродинамических систем с повышенной селективностью.

Если принять условия (25), то для квазикритических волн с дисперсией (27а), т. е. не связанных с кабельными волнами, групповая скорость также становится тождественно равной нулю со всеми вытекающими отсюда последствиями.

Приближение (25) не применимо (или ограничено применимо) и при исследовании более общего случая осесимметричных колебаний с $k \approx \bar{h}$ и $\bar{m} \neq \bar{h}R_0$ (см. рис. 4б). В качестве иллюстрации этого вывода достаточно отметить существование решения системы (20) при выполнении (25) в виде резонансного колебания с $\text{Im } k = 0$, имеющего тем не менее нескомпенсированные радиационные потери (!).

Ещё более радикальные различия наблюдаются в дисперсионных кривых для случая несимметричных волн, когда $n \neq 0$ (ср. рис. 3а и 5а): пропадают минимумы на промежуточных кривых ($k \leq \bar{h}$), где $v_{\text{гр}} = 0$, и, самое главное, нет точек пересечения дисперсионных кривых нормальных волн с кривыми дисперсии парциальных волн (на рис. 3а эти точки отмечены кружочками). Физический смысл и важность для дальнейшего анализа этих точек пересечения обсуждается в следующем разделе.

Несколько другой становится ситуация, если перейти к исследованиям свойств резонансных колебаний и собственных волн, соответствующих верхней и нижней ветвям дисперсионных зависимостей, представленных на рис. 3 и 4. Как следует из сравнения (23) с (26) и (24) с (27), «геометрооптическое приближение», т. е. (25), для оценочных расчётов вполне применимо вплоть до граничных частот $k_{\text{lim}} = k(\delta = 0)$. В силу этого обстоятельства собственные волны и колебания из этих частотных поддиапазонов здесь обсуждаться не будут.

Уместно отметить, что азимутально-несимметричные волны с $n \neq 0$, отличающиеся направлением вращения, являются двукратно вырожденными. Используя это обстоятельство, можно, как и для осесимметричных волн (19)–(21), методом суперпозиции построить невращающиеся «синусные» и «косинусные» собственные волны, которые, однако, одинаково возбуждают квазикабельные волны.

3. Полученные выше системы уравнений (13) или (20) с учётом соответствующих граничных условий позволяют корректно решить любую задачу о сложных брэгговских рефлекторах, являющихся основой «двухзеркальных» резонаторов [1], и о высокодобротных собственных колебаниях резонаторов в виде отрезка гофрированного волновода (1), (2). Однако здесь будет рассмотрена только краевая задача для однородной системы уравнений (13) с нулевыми граничными условиями, имитирующими небольшие ступеньки, запирающие квазикритические волны на краях гофрированного участка (1) длины L :

$$P^+(0) + P^-(0) = 0, \quad P^+(L) + P^-(L) = 0, \quad (29а)$$

$$\tilde{P}_0^+(0) = 0, \quad \tilde{P}_0^-(L) = 0, \quad (29б)$$

Это, разумеется, не единственный вариант граничных условий. В частности, в [3] для расчёта добротности осесимметричных волн с $n = 0$ и $\bar{h} = \bar{m}/R_0$ использовались другие граничные условия (так называемые условия излучения).⁴ В этом смысле рассматриваемая нами модель имеет ограниченную применимость, но представляется удобной для исследования, поскольку позволяет отдельно рассмотреть влияние дифракционных потерь, связанных только с квазикабельными волнами. Что же касается излучения квазикритических волн, то это хорошо известное явление [3, 4], которое в принципе важно для анализа селективных свойств брэгговских резонаторов, с

⁴ Вопрос о конструктивных решениях, реализующих такие граничные условия, требует отдельного анализа.

целью упрощения выкладок и последующих формул здесь рассматриваться не будет. Отметим, что в обзоре [1] для осесимметричных волн определяющей полагалась омическая добротность, а динамика несимметричных волн рассчитывалась в геометрикооптическом приближении.

Вначале исследуем более простой случай осесимметричных колебаний, описываемых системой (20) с краевыми условиями (29). Первые два уравнения из (20) вместе с (29б) удобно представить в интегральном виде:

$$\begin{aligned}\tilde{P}_0^+ &= i \frac{\alpha}{2} \exp[-i(k - \bar{h})z] \int_0^z P(\bar{z}) \exp[i(k - \bar{h})\bar{z}] d\bar{z}, \\ \tilde{P}_0^- &= -i \frac{\alpha}{2} \exp[i(k - \bar{h})z] \int_L^z P(\bar{z}) \exp[-i(k - \bar{h})\bar{z}] d\bar{z},\end{aligned}\quad (30)$$

где

$$P = P^+ + P^- \quad (31)$$

— комплексная амплитуда, подчиняющаяся уравнению второго порядка, не имеющему каких-либо особенностей в правой части:

$$\frac{d^2 P}{dz^2} + h_m^2 P = 2\alpha k (\tilde{P}_0^+ + \tilde{P}_0^-). \quad (32)$$

После подстановки (30) в (32) получается очень простое и удобное для анализа интегрально-дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned}\frac{d^2 P}{dz^2} + h_m^2 P &= i\alpha^2 k \int_0^L P(z) dz + i\alpha^2 k \left\{ \exp[-i(k - \bar{h})z] \int_0^z P(\bar{z}) [\exp[i(k - \bar{h})\bar{z}] - 1] d\bar{z} - \right. \\ &\quad \left. - \exp[i(k - \bar{h})z] \int_L^z P(\bar{z}) [\exp[-i(k - \bar{h})\bar{z}] - 1] d\bar{z} + \right. \\ &\quad \left. + [\exp[-i(k - \bar{h})z] - 1] \int_0^z P(\bar{z}) d\bar{z} - [\exp[i(k - \bar{h})\bar{z}] - 1] \int_L^z P(\bar{z}) d\bar{z} \right\},\end{aligned}\quad (33)$$

в котором функция, заключённая в фигурные скобки, является аналитической по отношению к параметру $k - \bar{h}$ и обращается в нуль в точке $k = \bar{h}$. Структура уравнения (33) хорошо приспособлена к применению метода Фурье в сочетании с методом последовательных интегрирований, особенно для высокодобротных колебаний на частотах, близких к резонансным.

Уравнение (33) вместе с (29а) описывает, как уже отмечалось, только собственные колебания, связанные с излучательными потерями из-за возбуждения кабельных волн. При достаточно высокой добротности какого-либо колебания продольная структура его поля становится близкой к

$$P \propto \sin\left(\frac{q\pi}{L} z\right), \quad (34)$$

где q — число продольных вариаций. Это обстоятельство позволяет использовать (34) в качестве нулевого приближения при решении уравнения (33). Другая часть колебаний, запертых ступеньками и не связанных из-за поляризации с кабельными волнами (21) и (24а), имеет, очевидно, бесконечные добротности и распределения полей, также близкие к синусоидальным (34),

т. е. обладает хорошо известными свойствами, и в силу этого обстоятельства здесь обсуждаться не будут.

Правую часть уравнения (33), ответственную за радиационные потери, можно условно разделить на две части. С первой из них связаны сравнительно высокие потери у собственных колебаний с нечётными продольными индексами $q = 1, 3, \dots$, для которых в правой части общего уравнения (33) достаточно сохранить наиболее значимое слагаемое:

$$\frac{d^2 P}{dz^2} + h_m^2 P \approx i\alpha^2 k \int_0^L P(z) dz, \quad q = 1, 3, \dots \quad (35)$$

Колебания с чётными индексами ($q = 2, 4, \dots$) более высокочастотны, поскольку для них в первом приближении метода последовательного интегрирования интеграл, входящий в (35), обращается в нуль, и уравнение (33) приобретает другой вид:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 P}{dz^2} + h_m^2 P = i\alpha^2 k \left\{ \exp[-i(k - \bar{h})z] \int_0^z P(\bar{z}) [\exp[i(k - \bar{h})\bar{z}] - 1] d\bar{z} - \right. \\ \left. - \exp[i(k - \bar{h})z] \int_L^z P(\bar{z}) [\exp[-i(k - \bar{h})\bar{z}] - 1] d\bar{z} + \right. \\ \left. + [\exp[-i(k - \bar{h})z] - 1] \int_0^z P(\bar{z}) d\bar{z} - [\exp[i(k - \bar{h})z] - 1] \int_L^z P(\bar{z}) d\bar{z} \right\}, \quad q = 2, 4, \dots \quad (36) \end{aligned}$$

Как уже отмечалось, на частоте $k = \bar{h}$ правая часть уравнения (36) обращается в нуль. Это явление интерференционной компенсации как радиационных потерь, так и реактивного смещения частоты возникает на частотах пересечения кривых дисперсии нормальных волн с кривыми дисперсии парциальных волн (см. рис. 3 и 4). Подобным образом можно, в частности, объяснить отсутствие радиационных потерь для колебаний с дисперсионной кривой (24а).

В диапазоне частот

$$(k - \bar{h})^2 \ll \alpha^2, \quad |k - \bar{h}| < 1/L \quad (37)$$

путём разложения правой части (36) в ряд Тейлора можно получить ещё более простое уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 P}{dz^2} + h_m^2 P = -\alpha^2 k (k - \bar{h}) \left[\int_0^z P(\bar{z}) (\bar{z} - z) d\bar{z} + \int_L^z P(\bar{z}) (\bar{z} - z) d\bar{z} \right] - \\ - i \frac{\alpha^2}{2} k (k - \bar{h})^2 \int_0^L P(\bar{z}) (\bar{z} - z)^2 d\bar{z}. \quad (38) \end{aligned}$$

Если теперь применить метод Фурье, то из (35) и (38) нетрудно получить упрощённые и весьма удобные расчётные формулы для частот и добротностей колебаний:

$$k^2 \approx \left(\frac{\bar{m}}{R_0} \right)^2 + \left(\frac{q\pi}{L} \right)^2 + 8i\alpha^2 \frac{kL}{(q\pi)^2}, \quad (39)$$

$$Q \approx \frac{(q\pi)^2}{8} \frac{\bar{h}L}{(\alpha L)^2} \quad (40)$$

для колебаний с нечётными продольными индексами q , и

$$k^2 \approx \left(\frac{\bar{m}}{R_0}\right)^2 + \left(\frac{q\pi}{L}\right)^2 - 6\alpha^2 k(k - \bar{h}) \left(\frac{L}{q\pi}\right)^2 + 2i\alpha^2 k(k - \bar{h})^2 \frac{L^3}{(q\pi)^2}, \quad (41)$$

$$Q \approx \frac{2(\bar{h}L)^3}{(\alpha L)^2 [(q\pi/L)^2 + (\bar{m}/R_0)^2 - \bar{h}^2]^2} \frac{(q\pi)^2}{L^4} \quad (42)$$

для осесимметричных колебаний с чётными продольными индексами q .

Уравнение (35) легко решить аналитически и получить строгое характеристическое уравнение

$$\operatorname{tg}\left(\frac{h_{\bar{m}}L}{2}\right) = \frac{h_{\bar{m}}L}{2} + \frac{ih_{\bar{m}}^3}{2\alpha^2 k},$$

из которого следует, что формулы (39) и (40) приближённо верны при $(\alpha L)^2 \ll (q\pi)^2/(\bar{h}L)$. Что касается области применимости формул (41) и (42), то она может быть легко определена, так как уравнение (38) (как, впрочем, и (35)) последовательным дифференцированием сводится к линейному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами.

В случае $\bar{h} = \bar{m}/R_0$ добротности чётных мод хотя и не обращаются в бесконечность:

$$Q \approx \frac{2(\bar{h}L)^3}{(q\pi)^2(\alpha L)^2}, \quad (43)$$

но значительно превышают добротности нечётных мод (39), если индекс q не слишком велик.⁵ Это обстоятельство объясняется меньшей степенью компенсации радиационных потерь для колебания с нечётными продольными индексами q . Для моды с $q = 1$ компенсации вообще нет. Изменением степени компенсации объясняются и разные зависимости от q добротностей чётных (43) и нечётных (40) колебаний.

Аналогичным образом полную систему дифференциальных уравнений (13) можно свести к двум взаимосвязанным интегрально-дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{d^2 P_{n+\bar{m}}}{dz^2} + h_{n+\bar{m}}^2 P_{n+\bar{m}} &= i \frac{\alpha^2 k}{2} \exp[-i(h_n - \bar{h})z] \int_0^z (P_{n+\bar{m}} + P_{n-\bar{m}}) \exp[i(h_n - \bar{h})\bar{z}] d\bar{z} - \\ &- i \frac{\alpha^2 k}{2} \exp[i(h_n - \bar{h})z] \int_L^z (P_{n+\bar{m}} + P_{n-\bar{m}}) \exp[-i(h_n - \bar{h})\bar{z}] d\bar{z}, \end{aligned} \quad (44a)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 P_{n-\bar{m}}}{dz^2} + h_{n-\bar{m}}^2 P_{n-\bar{m}} &= i \frac{\alpha^2 k}{2} \exp[-i(h_n - \bar{h})z] \int_0^z (P_{n+\bar{m}} + P_{n-\bar{m}}) \exp[i(h_n - \bar{h})\bar{z}] d\bar{z} - \\ &- i \frac{\alpha^2 k}{2} \exp[i(h_n - \bar{h})z] \int_L^z (P_{n+\bar{m}} + P_{n-\bar{m}}) \exp[-i(h_n - \bar{h})\bar{z}] d\bar{z}, \end{aligned} \quad (44b)$$

в которых учтены граничные условия $\tilde{P}_n^+(0) = \tilde{P}_n^-(L) = 0$. В (44) приняты обозначения

$$P_{n+\bar{m}} = P_{n+\bar{m}}^+ + P_{n+\bar{m}}^-, \quad P_{n-\bar{m}} = P_{n-\bar{m}}^+ + P_{n-\bar{m}}^-$$

⁵ Добротность, соответствующая дифракционными потерям осесимметричной моды, рассчитанная в [3], отличается от (43), что объясняется использованием других граничных условий.

для комплексных амплитуд, на которые налагаются краевые условия

$$P_{n+\bar{m}}(0) = P_{n+\bar{m}}(L) = 0, \quad (45a)$$

$$P_{n-\bar{m}}(0) = P_{n-\bar{m}}(L) = 0. \quad (45b)$$

Если для определённости положить $n > 0$, то в диапазоне частот

$$\frac{\bar{m} - n}{R_0} < k < \frac{\bar{m} + n}{R_0} \quad (46)$$

волновое число $h_{n-\bar{m}}$ в случае $\text{Im } k = 0$ является действительной величиной, т. е. $h_{n-\bar{m}}^2 > 0$, а для $h_{n+\bar{m}}$ величина $h_{n+\bar{m}}^2 < 0$ и, соответственно, парциальные волны с амплитудами $P_{n+\bar{m}}^+$, $P_{n+\bar{m}}^-$ не распространяются. В силу этого обстоятельства резонансное увеличение возможно только для амплитуд $P_{n-\bar{m}}$, когда $|q\pi/L - h_{n-\bar{m}}| \rightarrow 0$. В свою очередь, для высокочастотных резонансов к системе (44) применим метод последовательных интегрирований с первой итерацией в виде

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 P_{n-\bar{m}}}{dz^2} + h_{n-\bar{m}}^2 P_{n-\bar{m}} = \\ & = i \frac{\alpha^2 k}{2} \int_0^L P_{n-\bar{m}}(z) dz + i \frac{\alpha^2 k}{2} \left\{ \exp[-i(h_n - \bar{h})z] \int_0^z P_{n-\bar{m}} \left[\exp[i(h_n - \bar{h})\bar{z}] - 1 \right] d\bar{z} - \right. \\ & \quad \left. - \exp[i(h_n - \bar{h})z] \int_L^z P_{n-\bar{m}} \left[\exp[-i(h_n - \bar{h})\bar{z}] - 1 \right] d\bar{z} + \right. \\ & \quad \left. + \left[\exp[-i(h_n - \bar{h})z] - 1 \right] \int_0^z P_{n-\bar{m}} d\bar{z} - \left[\exp[i(h_n - \bar{h})\bar{z}] - 1 \right] \int_L^z P_{n-\bar{m}} d\bar{z} \right\}. \quad (47) \end{aligned}$$

Если ограничиться первым приближением (47), то колебания, как и в осесимметричном случае, можно разделить на низкочастотные нечётные с продольными индексами $q = 1, 3, \dots$ и высокочастотные чётные ($q = 2, 4, \dots$). Для исследований селективных свойств рассматриваемой резонансной системы интерес представляет только вторая группа колебаний, частоты и добротности которых находятся аналогичным способом:⁶

$$k^2 \approx \left(\frac{\bar{m} - n}{R_0} \right)^2 + \left(\frac{q\pi}{L} \right)^2 - 3\alpha^2 k (h_n - \bar{h}) \left(\frac{L}{q\pi} \right)^2 + i\alpha^2 k (h_n - \bar{h})^2 \frac{L^3}{(q\pi)^2}, \quad (48)$$

$$Q \approx \frac{4(\bar{h}L)^3}{(\alpha L)^2 [(q\pi/L)^2 + (\bar{m}/R_0)^2 - \bar{h}^2 - 2(\bar{m}n)/R_0^2]^2} \frac{(q\pi)^2}{L^4}. \quad (49)$$

Границы применимости полученных формул нуждаются в специальном исследовании, которое выходит за рамки данной работы.

Необходимо отметить, что поле на закритических ступеньках не обращается в нуль, как принято в (45б), и частично проникает в закритическую область. Это обстоятельство приводит к нецелочисленным значениям q в выражениях для частот и добротностей и, соответственно, к небольшому увеличению радиационных потерь из-за недостаточно полной их компенсации, т. е.

$$\int_0^L (P_{n+\bar{m}} + P_{n-\bar{m}}) dz \neq 0. \quad (50)$$

⁶ Учёт нераспространяющихся волн позволяет корректно рассмотреть переход от (49) к (42), при котором в формуле (49) появляется дополнительный множитель $1/2$.

Выражения для добротностей (40) и (49) имеют характерную «резонансную» структуру. При некотором значении $q = q_p$ (согласно (46) $n > 0$), удовлетворяющем соотношению

$$(q_p \pi / L)^2 = (2\bar{m}n / R_0^2) + \bar{h}^2 - (\bar{m} / R_0)^2, \tag{51}$$

добротности колебаний с чётными q обращаются в бесконечность (см. рис. 6), т.е. дифракционные потери, связанные с квазикабельными волнами, полностью скомпенсированы. Соответственно, (34) становится точным решением задач (29), (33) и (44), (45). Очевидно, компенсация возможна только при выполнении условия

$$2 \frac{\bar{m}n}{R_0^2} + \bar{h}^2 - \left(\frac{\bar{m}}{R_0}\right)^2 > 0. \tag{52}$$

Если положить $\bar{h} = \bar{m} / R_0$, как это сделано в обзоре [1], то полная компенсация для осесимметричных волн становится невозможной (рис. 6а), поскольку индекс q принимает только чётные положительные значения и $q \neq 0$. Добротности же несимметричных колебаний (для определённости выбрано $n \geq 1$) могут принимать и предельно большие значения в зависимости от величины $L / (\pi \sqrt{2\bar{h}n / R_0})$. На рис. 6а кружочками отмечены добротности трёх собственных колебаний: с $q = 2$ для $n = 0$ и с $q = q_p \pm 1$ для $n \geq 1$, когда q_p — нечётное число. Как видно, даже в этой наиболее благоприятной ситуации существенных различий между добротностями нет, т.е. селекция по азимутальному индексу отсутствует. Иной становится ситуация, если допустить выполнение условий (25). Добротности всех осесимметричных чётных колебаний ($n = 0$; $q = 2, 4, \dots$) принимают предельно большие значения, а добротности всех несимметричных колебаний становятся предельно малыми. Качественно эта картина показана на рис. 6а волнистыми линиями. Верхняя линия соответствует осесимметричным колебаниям, а нижняя — азимутально-несимметричным колебаниям. Столь внушительная разница между осесимметричными и несимметричными колебаниями, по-видимому, и привела авторов [1] к выводу о малой значимости дифракционных явлений (25) и возможности реализации неограниченно высокой степени селекции. Как показывает рассмотренный контрпример, подобный вывод справедлив не всегда и не для любых граничных условий на краях гофрированного участка коаксиального резонатора.

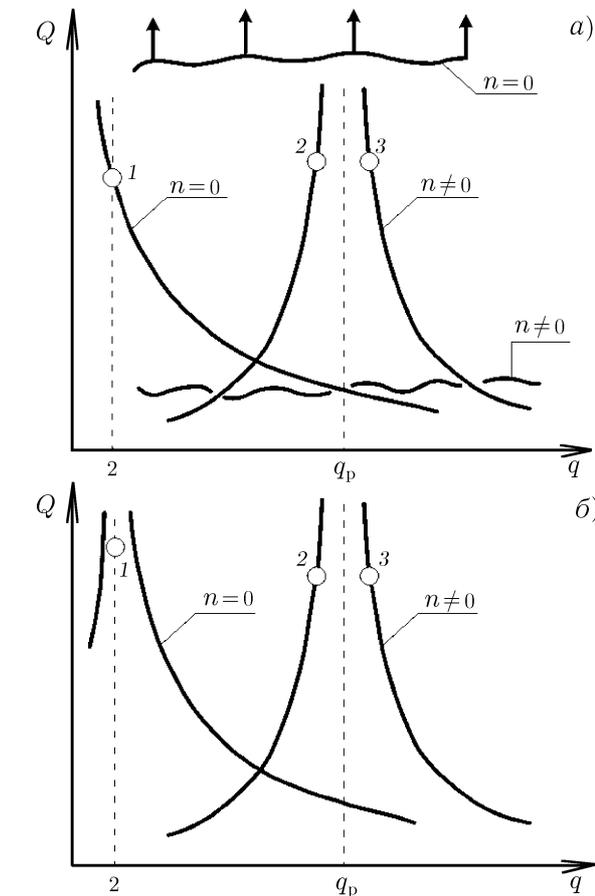


Рис. 6. Качественные зависимости дифракционных добротностей от q для осесимметричных ($n = 0$) и несимметричных ($n \neq 0$) колебаний с чётными индексами q ; волнистыми линиями условно обозначены те же зависимости при принятии «геометрооптического приближения» (25); кружочками обозначены добротности конкурирующих колебаний; представлены случаи $\bar{h} = \bar{m} / R_0$ (а) и $\bar{h}^2 = (\bar{m} / R_0)^2 + (2\pi / L)^2$ (б)

Если в качестве критерия селекции, к примеру, принять большое отношение только дифракционных добротностей, связанных с излучением квазикабельных волн для рабочего и конкурирующего колебаний, то в рассматриваемом резонаторе ему всегда можно удовлетворить. Например,

добротность основного ($q = 2$) осесимметричного ($n = 0$) колебания всегда можно сделать неограниченно большой, заменив соотношение $\bar{h} = \bar{m}/R_0$ условием

$$\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 = \bar{h}^2 - \left(\frac{\bar{m}}{R_0}\right)^2, \quad (53)$$

т. е. увеличив немного радиус резонатора R_0 . Соответствующие качественные зависимости приведены на рис. 6б. В большинстве приложений, однако, этот критерий малоэффективен. Нужно, очевидно, сравнивать полные добротности, т. е. учитывать все возможные потери высокочастотного поля. При этом важно, что полная добротность самого высокодобротного рабочего колебания обычно ограничена каким-либо дополнительным условием.

В качестве примера рассуждений можно было бы ограничить поперечные размеры резонатора условием предельного смещения пика зависимости $Q(q)$ до соседних с основным колебаний, т. е. до колебаний с $n = \pm 1$ и с продольными индексами $q = 4$, что приводит к простому френелевскому условию

$$\frac{L^2}{\pi R_0 \lambda} > 1. \quad (54)$$

Однако не совсем ясно, как технически воспользоваться этой весьма благоприятной ситуацией.

В обзоре [1] обсуждаются в основном резонаторы с размерами $L/\lambda \approx 10^2$ и более.⁷ Для таких резонаторов минимальные возможные дифракционные добротности у наиболее «опасных» конкурирующих колебаний можно оценить по формуле (49), если положить в ней $q = q_p \pm 1$ и, подобно [1], $\alpha L \approx 1$:

$$Q_{\min} \approx \frac{4\pi}{(\alpha L)^2} \left(\frac{L}{\lambda}\right)^3 \approx 10^7. \quad (55)$$

Эта минимальная добротность тем не менее во много раз превышает добротность, связанную с тепловыми потерями в стенках резонатора в миллиметровом диапазоне длин волн ($Q_{\text{ом}} \leq 10^4$ для меди при комнатной температуре). Полные добротности рабочего и конкурирующего колебаний оказываются в рассматриваемом случае сравнимыми. Таким образом, селективные свойства двумерных коаксиальных брэгговских резонаторов, рассмотренных в [1], имеют ограничения, которые не могут быть установлены в рамках «геометрооптического приближения».

4. Применимость любого из вариантов метода связанных волн ограничена, как известно, небольшими расстройками и малой связью между волнами. Но если требуется уточнить границу применимости метода, в частности неравенств (2), то нужны дополнительные исследования. В данной работе мы ограничимся указанием аналогии рассмотренной задачи с задачей о распространении осесимметричных волн E -типа в полом круглом волноводе с осесимметричной гофрировкой, для которой имеется стро-

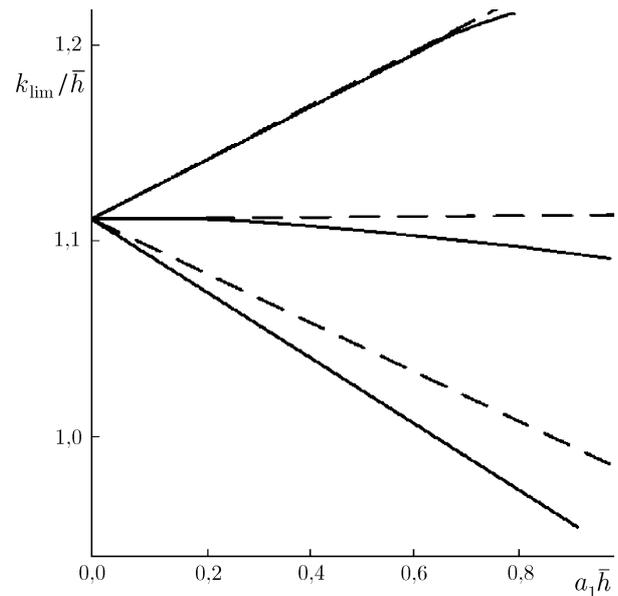


Рис. 7. Зависимости критических частот ($k_{\text{lim}} = k(\delta = 0)$) для осесимметричных волн в осесимметричном гофрированном волноводе; сплошные линии соответствуют точным расчётам, а пунктирные — методу связанных волн; $\bar{h}R_0 = 4,96871$

⁷ При такой длине гофрированных участков становится необходимым также учёт квадратичных, т. е. пропорциональных a_1^2 , членов, что можно сделать, например, путём обобщения (3).

гое численное решение. ⁸ Применение к этому частному случаю принятого выше метода со всеми дополнительными условиями приводит к дисперсионному соотношению

$$(k^2 - g_2^2 - \delta^2) [(h_1 - \bar{h})^2 - \delta^2] = \frac{a_1^2}{R_0^2} \bar{h}^2 k (h_1 - \bar{h}), \quad (56)$$

аналогичному (24б). В (56) использованы близкие к введённым ранее обозначения: R_0 — средний радиус волновода, причём гофрировка выбрана синусоидальной с амплитудой a_1 ,

$$h_1 = \sqrt{k^2 - g_1^2}, \quad g_1 = \mu_1/R_0, \quad g_2 = \mu_2/R_0,$$

μ_1 и μ_2 — первые два корня уравнения $J_0(x) = 0$; где $J_0(x)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Если ограничиться случаем

$$g_2^2 = g_1^2 + \bar{h}^2,$$

подобным $\bar{m} = \bar{h}R_0$ и представленным на рис. 4а, то уравнение (56) приобретает вид

$$(h_1^2 - \bar{h}^2 - \delta^2) [(h_1 - \bar{h})^2 - \delta^2] = \frac{a_1^2}{R_0^2} \bar{h}^2 k (h_1 - \bar{h}), \quad (57)$$

близкий к ранее исследованному.

На рис. 7 приведены зависимости граничных частот $k_{\text{lim}} = k(\delta = 0)$ от нормированной глубины гофрировки $a_1\bar{h}$, вычисленные из (56) и полученные путём решения интегральных уравнений из работы [5]. Как видно, метод связанных волн со всеми дополнительными упрощениями даёт вполне удовлетворительный не только качественный, но количественный результат до глубины гофрировки, достигающей $a_1 \approx 0,1d$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе получены решения задачи (13), (22) для собственных волн и в первом приближении краевой задачи (13), (29) для резонансных колебаний с небольшими азимутальными индексами $|n| \ll \bar{m}$, но с произвольным (в рамках принятых ограничений) соотношением между \bar{m}/R_0 и \bar{h} . Задачу о резонаторе, конечно же, можно уточнить, построив второе приближение, которое также представимо в аналитическом виде. Второе приближение к тому же позволяет более корректно оценить границы применимости полученных соотношений.

Следует ещё раз подчеркнуть, что упрощённые формулы (39)–(42), (48) и (49) не дают полного представления о спектре собственных колебаний рассмотренного брэгговского резонатора, тем более резонаторов с какими-либо другими краевыми условиями для квазикритических волн. Однако уже из этих формул следует вывод, согласующийся с формулой Рэлея–Джинса [4], о сгущении спектра колебаний с увеличением размеров резонатора. С явлением увеличения плотности высокочастотных собственных колебаний связано основное (принципиальное) ограничение на допустимые размеры любых, в том числе и рассмотренных, резонансных систем. Такого рода ограничение не было учтено в [1]. Очевидно, основная задача селекции включает в себя и определение предельных размеров резонатора. При этом необходимо также учитывать ограничение полной добротности выбранного рабочего типа колебаний каким-либо дополнительным практическим условием. Проблеме корректного вычисления предельных размеров некоторых разновидностей двумерных брэгговских резонаторов будет посвящена отдельная статья.

⁸ В этой системе роль квазикритических играют моды с большими радиальными индексами, а не «шепчущие» волны. В остальном свойства обеих систем близки, и их можно рассматривать как взаимно дополнительные.

В заключение прокомментируем экспериментальную проверку свойств обсуждаемых резонаторов, выполненную в [6]. Как следует из этой работы, спектральные свойства резонаторов существенно зависят от конфигурации гофр. В силу этой зависимости трудной и ещё более неопределённой становится отмеченная задача селекции, в частности, формулировка краевых условий для квазикритических волн. В то же время из-за отсутствия анализа точности и малой информативности экспериментального материала в [6] вывод, сформулированный в [1]: «... измеренные частоты и добротности собственных мод соответствуют расчётным, что подтверждает высокие селективные свойства резонаторов нового типа», представляется нам слишком оптимистичным.

Автор выражает признательность рецензентам за критические замечания, способствовавшие улучшению статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гинзбург Н. С., Песков Н. Ю., Сергеев А. С. и др. // Изв. вузов. Радиофизика. 2001. Т. 44, № 5–6. С. 533.
2. Каценеленбаум Б. З. Теория нерегулярных волноводов с медленно меняющимися параметрами. М.: Изд-во АН СССР, 1961. 215 с.
3. Гинзбург Н. С., Коноплёв Н. В., Сергеев А. С. // ЖТФ. 1996. Т. 66, № 5. С. 108.
4. Вайнштейн Л. А. Открытые резонаторы и открытые волноводы. М.: Сов. радио, 1966. 476 с.
5. Ковалёв Н. Ф., Фильченков С. Е. // Изв. вузов. Радиофизика. 2000. Т. 43, № 11. С. 989.
6. Песков Н. Ю., Гинзбург Н. С., Денисов Г. Г. и др. // Письма в ЖТФ. 2000. Т. 26, № 8. С. 72.

Институт прикладной физики РАН,
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию
5 февраля 2003 г.

ON THE TWO-DIMENSIONAL BRAGG RESONATOR

N. F. Kovalev

We derive systems of differential and integro-differential equations which allow one to correctly analyze eigenwaves and high- Q oscillations in coaxial systems with a weak two-period corrugation of the walls. The dispersion characteristics of the eigenwaves of a coaxial waveguide with such a corrugation are studied with allowance for the diffraction effects for the quasi-critical waves. In the case of the boundary-value problem with a zero boundary conditions, which describes specific type of coaxial resonators considered in [1], we obtain simplified formulas for the complex eigenfrequencies and Q -factors. The obtained expressions are indicative of the possible spectrum crowding of high- Q oscillations with increasing both the longitudinal and transverse size of the resonator.

УДК 621.372.8

ОСОБЕННОСТИ ХАРАКТЕРИСТИК ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ТИПА ШЕПЧУЩЕЙ ГАЛЕРЕИ В ЭЛЛИПСОИДАЛЬНОМ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОМ РЕЗОНАТОРЕ С МАЛЫМ ЭКСЦЕНТРИСИТЕТОМ

А. Я. Кириченко, А. Е. Козут, В. В. Кутузов, В. А. Солодовник

Экспериментально исследованы колебания типа шепчущей галереи, возбуждаемые в диэлектрическом эллипсоидальном резонаторе источником излучения с сосредоточенными параметрами и путём распределённой связи диэлектрической резонансной структуры с диэлектрическим волноводом. Установлены закономерности формирования полей колебаний и их спектров при различном взаимном расположении резонатора и элемента возбуждения. Показано влияние градиента кривизны поверхности эллипсоида на поведение энергетических характеристик вынужденных колебаний.

Широкое применение сферических и полусферических диэлектрических резонаторов (ДР) с колебаниями типа шепчущей галереи в технике миллиметровых волн связано с их высокой собственной добротностью и возможностью создания на основе ДР многоэлементной базы для ряда СВЧ приборов и устройств [1, 2]. Высокие добротности колебаний типа шепчущей галереи при соотношении радиуса R резонатора и длины волны λ в диэлектрике $R/\lambda \geq 5$ определяются малым затуханием волн шепчущей галереи. Последние, распространяясь в узкой области диэлектрика, падают на криволинейную границу раздела диэлектрика и внешней среды под очень пологими углами, так что их коэффициент отражения от внутренней поверхности диэлектрика близок к единице. В связи с этим излучение энергии из резонатора мало. При использовании источника возбуждения с сосредоточенными параметрами области локализации полей вынужденных колебаний типа шепчущей галереи на сферической поверхности ДР имеют форму неоднородных поясков, сходящихся в области источника и его отображения (диаметрально противоположная область) и расходящихся на периферии между ними [3, 4]. Геометрические размеры поясков определяются апертурой источника излучения и соотношением радиуса кривизны ДР и длины волны.

Неоднородность формы ДР, в частности его эллиптичность, нарушает центральную симметрию резонатора и может привести к ряду интересных эффектов, связанных с изменением его спектральных и энергетических характеристик и перераспределением полей вынужденных колебаний [5]. С позиций геометрооптических представлений вариация малых и больших осей эллипсоида может привести к появлению приоритетного направления лучевого потока в резонаторе и образованию на его поверхности областей, закрытых для полей колебаний [6].

С целью изучения особенностей, проявляющихся при переходе от сферической формы резонанса к эллиптической, в качестве объекта исследований целесообразным является выбор диэлектрического эллипсоида с незначительным различием длин геометрических осей. Изменение направления распространения волн в таком резонаторе с малым градиентом кривизны (различием кривизны поверхности эллипсоида на разных её участках) путём перемещения элемента возбуждения колебаний по одной из криволинейных координат позволит проследить динамику изменения спектральных и энергетических характеристик колебаний: от спектра резонатора, близкого по своим электродинамическим свойствам к диэлектрической сфере, до спектра колебаний эллипсоидального резонатора, и провести их сравнительный анализ. Отличие добротности колебаний эллипсоидального ДР с малым эксцентриситетом от добротности колебаний сферического ДР

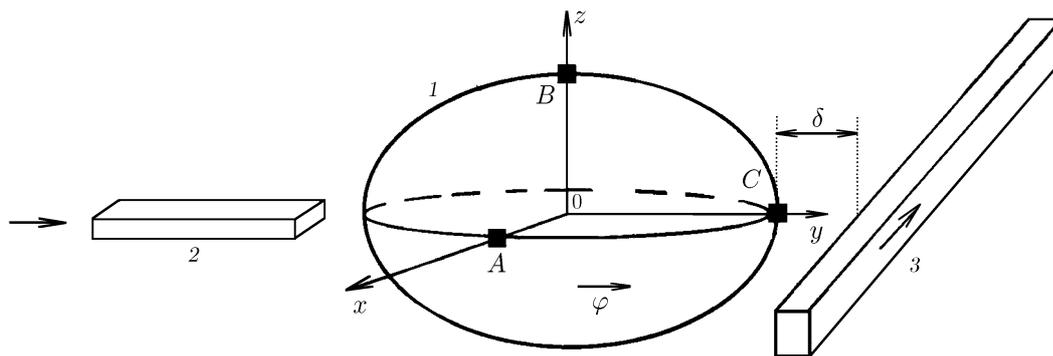


Рис. 1

может быть связано лишь с изменением радиационных потерь, определяемых отношением радиуса кривизны к длине волны. Известно, что при больших радиусах сферического резонатора (и, следовательно, при высокой добротности колебаний типа шепчущей галереи), радиационные потери пренебрежимо малы по сравнению с потерями в диэлектрике, поэтому их измерения представляют определённые трудности [7]. В связи с этим для исследований целесообразно выбрать эллипсоид с малыми радиусами кривизны. В этом случае радиационные потери оказываются сравнимыми с потерями в диэлектрике, и их изменение может ощутимо сказаться на различии добротностей колебаний эллипсоидального и сферического ДР.

На рис. 1 показан объект экспериментальных исследований. Диэлектрический двухосный вытянутый эллипсоид вращения 1 находится в держателе (на рис. 1 не показан). Эллипсоид, выполненный из фторопласта с диэлектрической проницаемостью $\epsilon = 2,08$, имеет малые геометрические полуоси $a = |OA| = |OB| = 19$ мм и большую полуось $b = |OC| = 20$ мм. Держатель резонатора изготовлен из материала с диэлектрической проницаемостью, близкой к диэлектрической проницаемости вакуума (пористый пенопласт). Для возбуждения колебаний в исследуемом ДР использовался источник волн с сосредоточенными параметрами 2 (открытый конец прямоугольного металлического волновода) или распределённая связь резонатора с однородным прямоугольным диэлектрическим волноводом 3, выполненным из того же материала, что и ДР. Для согласования источника излучения волн с диэлектрическим резонатором металлический волновод заполнялся диэлектриком (фторопластом). Открытый конец металлического волновода сечением $7,2 \times 3,4$ мм располагался на расстоянии $1 \div 1,5$ мм от поверхности ДР.

В резонансной системе диэлектрический волновод— диэлектрический резонатор имелась возможность изменять параметр связи подводящего волновода с исследуемым резонатором путём изменения прицельного расстояния δ (см. рис. 1) между ними. В эксперименте использовались диэлектрические волноводы с поперечным сечением $7,2 \times d$ мм, где $d = 1,0; 1,2; 1,5; 2,2; 2,8$ и $3,4$ мм.

Экспериментальные исследования были проведены в восьмимиллиметровом диапазоне длин волн с помощью панорамного измерителя коэффициента стоячей волны по напряжению (КСВН). По величине КСВН устанавливались уровни связи источника излучения волн с полями вынужденных колебаний исследуемого ДР и определялись амплитуды резонансных откликов колебаний. Поскольку расстоянием источника излучения до поверхности эллипсоида можно было управлять, по максимальной величине резонансного отклика (минимальному значению КСВН в резонансе) определялась оптимальная связь p источника излучения с полями колебаний в резонаторе и его резонансная частота f_0 . Измерение частот f_1 и f_2 , соответствующих половинному уровню мощности при отстройке от резонанса, позволяло измерить добротность нагруженного резонатора $Q_H = f_0 / (f_1 - f_2)$ и определить собственную добротность Q_0 на частоте f_0 , т. к. $Q_0 = 2Q_H$ в слу-

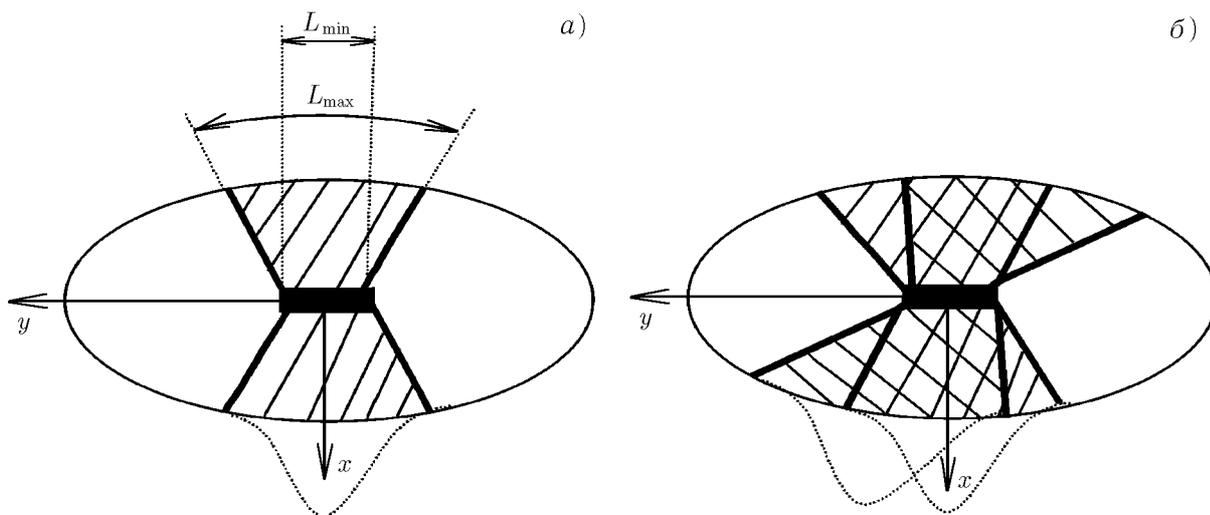


Рис. 2

чае оптимальной связи источника излучения с полями колебаний в резонаторе [8]. Погрешность определения собственной добротности в условиях эксперимента не превышала 2 %. Идентификация мод колебаний осуществлялась по распределению электромагнитного поля, проникающего из диэлектрической среды в свободное пространство. Для этого малое металлическое пробное тело (в частности, сфера с радиусом, значительно меньшим длины волны в диэлектрике) подносилось к поверхности резонатора и возмущало резонансное поле. Перемещение возмущающего пробного тела вдоль азимутальной или полярной координаты эллипсоида на фиксированном расстоянии от его поверхности позволяло установить количество вариаций поля вдоль направления выбранной координаты. По направлению смещения резонансной частоты (к более низким или к более высоким частотам от f_0) определялось, на какую из компонент электромагнитного поля, электрическую или магнитную, преимущественно влияет наличие пробного тела, т. е. определялась поляризация поля в точке введения пробного тела [9]. Измерения спектров вынужденных колебаний проводились при изменении азимутальной координаты φ_i элемента возбуждения колебаний в плоскости сечения резонатора xy , образованной пересечением его большой и малой осей (рис. 1). Отсчёт координаты φ_i ведётся от плоскости, образованной пересечением малых осей эллипсоида (E -плоскости металлического и диэлектрического волноводов лежат в плоскости малых осей при $\varphi_i = 0$).

Методом пробного тела установлено, что как открытым концом металлического волновода, так и при распределённой связи с диэлектрическим волноводом при расположении их относительно поверхности эллипсоида согласно рис. 1 и при произвольном значении их координат φ_i в исследуемом ДР одновременно возбуждаются моды TM_{nml} ($E_r \neq 0$) и TE_{nml} ($E_r = 0$); здесь E_r — радиальная составляющая вектора напряжённости электрического поля, индексы n, m, l обозначают число вариаций поля по полярной θ , азимутальной φ и радиальной r координатам соответственно. При этом пробное тело оказывало большее влияние на электрическую компоненту полей колебаний (ТМ-моды).

При $\varphi_i = 0$ поля ТМ-колебаний на поверхности ДР локализируются в областях, имеющих форму неоднородных поясков (заштрихованная область на рис. 2а). Расположение источника излучения относительно осей эллипсоида схематически показано на рис. 2 чёрным прямоугольником. Сужения поясков имеют место вблизи источника и его отображения. В области между ними поясок расширяется, и на резонансной частоте $f = 33,864$ ГГц отношение его поперечного сечения

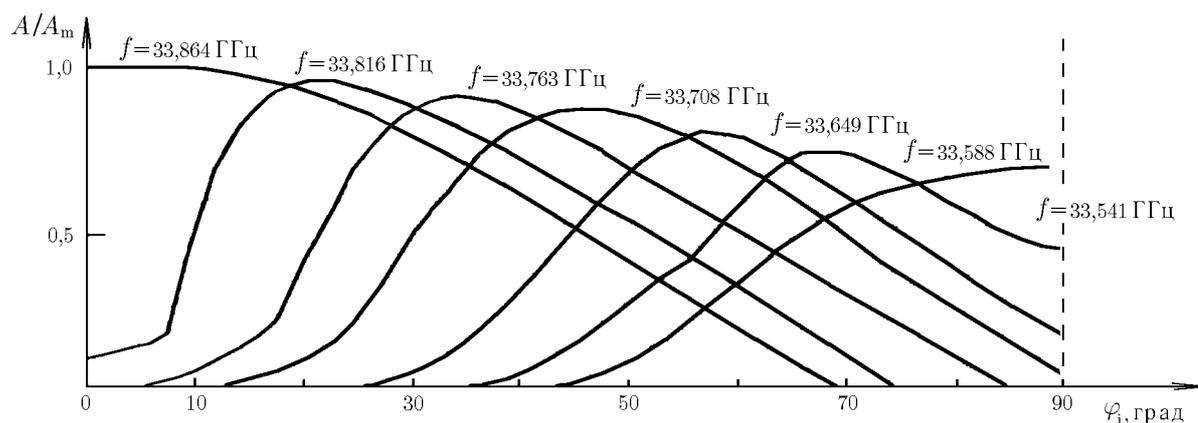


Рис. 3

в области наибольшего расширения L_{\max} и в области сужения L_{\min} составляет $L_{\max}/L_{\min} \approx 4,2$. Величина $L_{\min} \approx 7,2$ мм близка к размеру широкой стенки металлического волновода. Малые геометрические оси эллипсоида при этом лежат в центральном сечении пояска. При переходе к низкочастотной границе исследуемого диапазона ширина области локализации поля колебания на периферии её расширенной части увеличивается таким образом, что $L_{\max}/L_{\min} \approx 4,8$. Отметим, что при используемых размерах ДР в нём не возбуждаются высшие азимутальные моды с индексами $m > 1$.

Даже при незначительном изменении координаты φ_i источника излучения относительно $\varphi_i = 0$ частота резонансного отклика понижается и поясок локализации поля деформируется. Ширина резонансного отклика увеличивается, а сам он представляет собой совокупность более мелких резонансов. Результаты идентификации соответствующих им колебаний показали, что они соответствуют одной моде, т. к. имеют одинаковый набор значений индексов n, m, l , характеризующих одинаковое число вариаций полей вдоль координат θ, φ и r соответственно. Различие между ними заключается лишь в частоте; по-видимому, они образованы волнами, распространяющимися вдоль поверхности диэлектрика по различным траекториям, отличающимся своей формой и протяжённостью. В дальнейшем такие колебания будем называть принадлежащими или соответствующими одной общей моде.

Свидетельством одновременного появления нескольких криволинейных диэлектрических волноводных каналов в приповерхностном слое эллипсоида являются результаты исследования распределения полей колебаний на его поверхности (рис. 2б). Каждому из них соответствует неоднородный по форме поясок локализации поля. В области наибольшего расширения поясков поля колебаний перекрываются лишь частично, и их совокупность представляет собой суммарный поясок с выраженными сужениями и расширениями между ними. Его размеры зависят от количества возникших колебаний и определяются координатой φ_i источника излучения. Зависимость амплитуды A резонансного отклика колебания, приведённой к её наибольшему значению A_m , от положения источника излучения в виде открытого конца металлического волновода, положение которого характеризуется координатой φ_i , представлена графически на рис. 3. Данная зависимость позволяет судить о количестве одновременно возбуждаемых в исследуемом ДР колебаний, соответствующих одной моде, а также об эффективности их возбуждения. Видно, что наибольшее число резонансных откликов колебаний (до $N = 7$) наблюдается в интервале изменения φ_i от 30° до 70° . При дальнейшем увеличении величины φ_i до 90° число возбуждаемых колебаний уменьшается, и в предельном случае $\varphi_i = 90^\circ$ их количество составляет $N = 4$. Резонансные отклики

колебаний, возникших при увеличении координаты φ_i источника излучения от 0 до 90° , занимают низкочастотный участок спектральной кривой, соответствующей их общей моде, поскольку образующие их волны распространяются в ДР вдоль больших по длине траекторий. Наибольшая эффективность возбуждения таких колебаний в точках максимума зависимости $A/A_m(\varphi_i)$ с увеличением φ_i понижается. Можно предположить, что низкая эффективность их возбуждения определяется более высокими радиационными потерями энергии в связи с влиянием градиента кривизны поверхности диэлектрического эллипсоида.

Объяснение результатов, полученных при возбуждении колебаний источником излучения с сосредоточенными параметрами, удобно провести на основе геометрооптических представлений. При расположении H -плоскости волновода перпендикулярно плоскости, образованной пересечением малых осей двухосного эллипсоида, т. е. при $\varphi_i = 0$, крайние лучи, исходящие из источника под одинаковыми углами, падают на эллиптическую поверхность ДР под одинаковыми углами вследствие одинаковой кривизны поверхности в точках падения. Распространяясь вдоль поверхности по траекториям, по форме близким к окружности, они проходят одинаковый путь, сходясь в области отображения источника. При этом наблюдается эффект фокусировки волн шепчущей галереи, который наблюдался ранее для диэлектрической полусферы, расположенной на плоском металлическом зеркале [3]. При $\varphi_i \neq 0$ различная кривизна поверхности ДР в точках падения лучей определяет и различные траектории прохождения лучей в эллипсоиде, отличающиеся по форме, длине и расположению относительно геометрических осей ДР. Форма поясков локализации полей колебаний определяется направлением распространения лучей вдоль криволинейной поверхности резонатора.

Более полную информацию о потерях энергии колебаний в ДР несёт их собственная добротность. Однако её определение было затруднено из-за одновременного возбуждения на близких частотах колебаний, чьи резонансные отклики частично перекрывались.

Для решения задачи разрежения спектра колебаний, принадлежащих одной моде, в эксперименте использовалась распределённая связь диэлектрического волновода с ДР. При этом в экспериментальных исследованиях большое внимание уделялось выбору оптимальной связи диэлектрического волновода с полями вынужденных колебаний в резонаторе. Очевидно, что сильная связь может привести к захвату подводимой электромагнитной энергии полями нескольких колебаний, принадлежащих их общей моде, и проявиться в сгущении спектра. Слабая связь затруднит экспериментальные исследования из-за ограниченной чувствительности измерительной аппаратуры. Основным критерием выбора оптимальной связи в рассматриваемой системе диэлектрический волновод—диэлектрический резонатор является слабая зависимость частоты резонансного отклика от прицельного расстояния δ , поскольку, как показали предшествующие результаты, переход от возбуждения одного колебания к другому, соответствующего их общей моде, осуществляется с изменением резонансной частоты. Значение параметра связи диэлектрического волновода с ДР, как показано в [10], определяется размерами и физическими свойствами материала диэлектрического волновода, а также прицельным расстоянием δ .

При всех используемых в эксперименте диэлектрических волноводах и различных значениях δ в широкой полосе изменения координаты φ_i элемента возбуждения колебаний ($\varphi_i = 10^\circ \div 80^\circ$) центральная частота и ширина спектральной кривой моды, представляющей собой совокупность более мелких резонансных откликов, определяются величиной φ_i . Подобные результаты, свидетельствующие об одновременном возбуждении на близких частотах колебаний, принадлежащих общей моде, были получены при использовании источника излучения с сосредоточенными параметрами. При $\varphi_i = 0$ и $\varphi_i = 90^\circ$ ширина спектральной кривой минимальна. Поля колебаний на эллиптической поверхности ДР локализуются в узких областях, имеющих форму неоднородных поясков с сужениями в области связи с диэлектрическим волноводом и в окрестности её

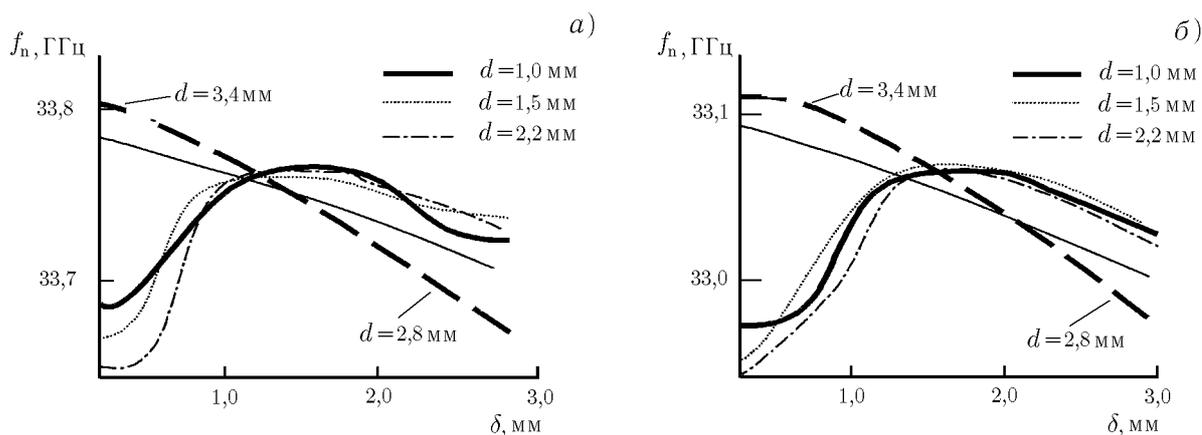


Рис. 4

отображения и с расширением между ними.

На рис. 4 графически отображена зависимость центральной частоты f_n спектральной кривой выбранной моды от величины δ для используемых в эксперименте диэлектрических волноводов, измеренная при $\varphi_i = 0$ (рис. 4а) вблизи частоты $f = 33,8$ ГГц и $\varphi_i = 90^\circ$ (рис. 4б) при $f \approx 33$ ГГц. Видно, что зависимости $f_n(\delta)$ для диэлектрических волноводов с малой толщиной (от 1 до 2,2 мм) имеют немонотонный характер. В интервалах изменения величины δ от 1 до 2,25 мм при $\varphi_i = 0$ и от 1,25 до 2 мм при $\varphi_i = 90^\circ$ кривые указанной зависимости имеют пологий участок, который характеризуется наименьшим изменением частоты f_n , в среднем не превышающем погрешность её измерения. Этим участкам кривых для разных волноводов соответствуют близкие частоты, различие между которыми не превышает 0,15 %. Результаты определения параметра связи p диэлектрического волновода с ДР показали, что при указанных выше прицельных расстояниях δ его значение мало зависит от самой величины δ (параметр p изменяется на 3÷5 %) и в среднем составляет $p_1 = 0,85$ при $\varphi_i = 0$ и $p_2 = 0,8$ при $\varphi_i = 90^\circ$.

Монотонное понижение частоты f_n с ростом δ для диэлектрических волноводов с толщиной $d = 2,8$ и 3,4 мм сопровождается резким понижением параметра связи, что может объясняться сильным влиянием диэлектрического волновода как неоднородности на поля вынужденных колебаний во всём исследуемом интервале изменения прицельного расстояния δ .

Результаты измерения распределения полей вынужденных колебаний типа шепчущей галереи на поверхности диэлектрического эллипсоида показали, что наиболее узкие области их локализации регистрируются при прицельных расстояниях, соответствующих наиболее пологим участкам кривых зависимости $f_n(\delta)$, когда параметр связи диэлектрического волновода с ДР мало изменяется. Для диэлектрического волновода с малой толщиной пояски локализации полей колебаний в областях сужения и расширения имеют близкие размеры, так что отношение L_{\max}/L_{\min} составляет 1,53 при $\varphi_i = 0$ ($f \approx 33,8$ ГГц) и 1,4 при $\varphi_i = 90^\circ$ ($f \approx 33$ ГГц).

Следует отметить, что результаты, качественно отражающие подобное поведение зависимости $f_n(\delta)$, а также результаты измерения параметра связи диэлектрического волновода с ДР и распределения полей колебаний на эллиптической поверхности ДР были получены и для других мод в исследуемом диапазоне частот. Переход к низкочастотным модам сопровождается уменьшением параметра связи и ростом максимальной ширины пояски локализации их поля.

Таким образом, проведённые измерения центральной частоты спектральной кривой исследуемой моды, параметра связи диэлектрического волновода с ДР и распределения полей вынужденных колебаний типа шепчущей галереи на поверхности диэлектрического эллипсоида показали,

что путём изменения условий возбуждения колебаний в резонаторе диэлектрическим волноводом при их распределённой связи удаётся выделить только одно колебание в спектре конкретной моды и определить его собственную добротность.

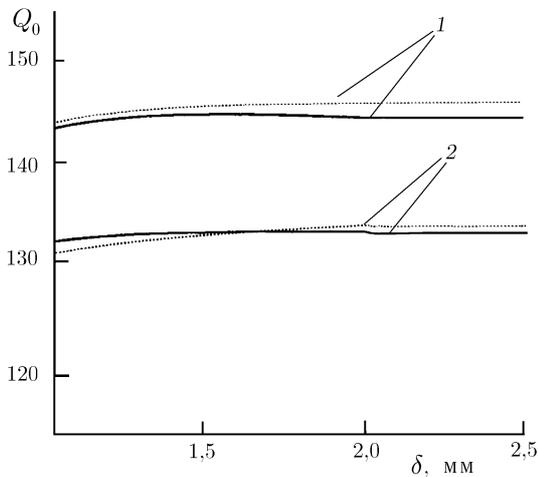


Рис. 5

На рис. 5 показана зависимость собственной добротности Q_0 колебаний типа шепчущей галереи в диэлектрическом эллипсоиде от прицельного расстояния δ , измеренная при изменении величины δ от 1 до 2,25 мм, что соответствует возбуждению только одного колебания, принадлежащего исследуемой моде. Результаты исследований, проведённых на частоте $f \approx 33,8$ ГГц при $\varphi_1 = 0$, показаны кривыми 1, на частоте $f \approx 33,0$ ГГц при $\varphi_1 = 90^\circ$ — кривыми 2. Использовались диэлектрические волноводы с толщиной $d = 1,2$ мм (сплошная линия) и 2,2 мм (пунктир). Изменение собственной добротности на этом участке кривой не превышает погрешность её определения и составляет не более 1 %. Собственная добротность при этом имеет наиболь-

шие значения по сравнению с другими участками зависимости $Q_0(\delta)$. Следует отметить хорошее соответствие результатов, полученных при использовании волноводов разной толщины. Различие в результатах определения Q_0 , полученных с использованием диэлектрических волноводов разной толщины, не превышает 2 %. Численное значение собственной добротности, определённой при $\varphi_1 = 0$, в среднем составляет $Q_0 = 143$; при $\varphi_1 = 90^\circ$ добротность $Q_0 = 130$. Сравнивая результаты определения добротности Q_0 колебаний, полученные при различном взаимном расположении диэлектрического волновода и ДР, видно, что при изменении координаты φ_1 элемента возбуждения колебаний от 0 до 90° их добротность понижается.

Напомним, что каждому значению φ_1 соответствует волноводный криволинейный диэлектрический канал на поверхности резонатора в виде неоднородного по форме пояска определённой протяжённости. Его длина максимальна при $\varphi_1 = 90^\circ$ и минимальна при $\varphi_1 = 0$. Без учёта влияния градиента кривизны поверхности исследуемого ДР каждый волноводный канал на его поверхности может быть представлен в виде пояска эквивалентной протяжённости, кривизна которого на отдельных участках была бы постоянной. Это позволяет осуществить переход от вынужденных колебаний резонатора с эллиптической формой поверхности к колебаниям сферических ДР, радиус которых изменялся бы в соответствии с протяжённостью криволинейного волноводного канала. Однако проведённые ранее исследования со сферическими и полусферическими ДР показали, что собственная добротность колебаний с увеличением радиуса резонатора растёт [7]. Поэтому понижение собственной добротности Q_0 колебаний в вытянутом диэлектрическом эллипсоиде при увеличении длины пробега образующих их волн связано с неоднородностью формы поверхности ДР и объясняется ростом радиационных потерь энергии на участках с различным радиусом кривизны поверхности.

Подобные результаты, отражающие понижение собственной добротности колебаний в диэлектрическом эллипсоиде, обусловленное влиянием градиента кривизны его поверхности, были получены и на других резонансных частотах. Численный анализ показал, что с уменьшением резонансной частоты собственная добротность колебаний типа шепчущей галереи понижается, что объясняется общим ростом радиационных потерь энергии.

Таким образом, в работе показано, что в отличие от сферического резонатора спектральные

характеристики вынужденных колебаний типа шепчущей галереи эллипсоидального ДР и распределение их полей зависят от расположения источника излучения волн относительно геометрических осей резонатора. Эффективность возбуждения колебаний и их собственная добротность в таком резонаторе зависят от выбора направления распространения образующих их волн шепчущей галереи и количественно определяются градиентом кривизны поверхности эллипсоида.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Брагинский В. Б., Ильченко В. С. // Докл. АН СССР. 1987. Т. 293, № 6. С. 1358.
2. Vasiliev V. V., Velichansky V. L., Ilchenko V. L., Gorodetsky M. I., Hollberg L., Yarovitsky A. V. // Opt. Commun. 1998. V. 158. P. 305.
3. Харьковский С. Н., Когут А. Е., Солодовник В. А. // Письма в ЖТФ. 1995. Т. 21, № 18. С. 38.
4. Харьковский С. Н., Когут А. Е., Кутузов В. В. // Письма в ЖТФ. 1996. Т. 22, вып. 20. С. 34.
5. Ильченко М. Е., Взятыхшев В. Ф., Гассанов Л. Г. и др. Диэлектрические резонаторы / Под ред. М. Е. Ильченко. М.: Радио и связь, 1989. 328 с.
6. Вайнштейн Л. А. Открытые резонаторы и открытые волноводы. М.: Сов. радио, 1966. 475 с.
7. Когут А. Е., Кутузов В. В., Филиппов Ю. Ф., Харьковский С. Н. // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1997. Т. 40, № 2. С. 19.
8. Гинзтон Э. Л. Измерения на сантиметровых волнах. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 519 с.
9. Валитов Р. А., Дюбко С. Ф., Макаренко Б. И. и др. Измерения на миллиметровых и субмиллиметровых волнах. Методы и техника / Под ред. Р. А. Валитова, Б. И. Макаренко. М.: Радио и связь, 1984. 296 с.
10. Кириченко А. Я., Солодовник В. А., Филиппов Ю. Ф., Харьковский С. Н. // Применение радиоволн мм и субмм диапазонов: Сб. научн. тр. ИРЭ АН УССР. Харьков, 1990. С. 69.

Институт радиофизики и электроники им. А. Я. Усикова
НАН Украины, г. Харьков, Украина

Поступила в редакцию
5 июня 2002 г.

THE FEATURES OF THE CHARACTERISTICS OF FORCED WHISPERING-GALLERY MODES IN AN ELLIPSOIDAL DIELECTRIC RESONATOR WITH SMALL ECCENTRICITY

A. Ya. Kirichenko, A. E. Kogut, V. V. Kutuzov, and V. A. Solodovnik

We study experimentally whispering-gallery modes excited in a dielectric ellipsoidal resonator by a lumped-parameter radiation source and through distributed coupling of a dielectric resonant structure with a dielectric waveguide. Peculiarities of the formation of mode fields and spectra for different mutual locations of the resonator and the exciting element are pointed out. The influence of the derivative of the ellipsoid-surface curvature on the behavior of the energy characteristics of forced modes is found.

УДК 621.31.2

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЧИСЛЕННЫХ РЕШЕНИЙ В МЕТОДЕ ФУРЬЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ФОККЕРА—ПЛАНКА—КОЛМОГороВА ПРИ АНАЛИЗЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА В НЕЛИНЕЙНЫХ ОБНАРУЖИТЕЛЯХ

В. И. Неволин

Излагается методика анализа характеристик нелинейных обнаружителей, основанных на алгоритмах нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка. Методика базируется на численных решениях уравнений Фоккера—Планка—Колмогорова в форме функциональных рядов по полиномам Эрмита—Чебышева как для нелинейных систем, так и для их линейных аналогов, при этом результаты последних рекуррентно трансформируются на нелинейные системы.

Важнейшими проблемами при выделении сигналов из шумов, например в задачах обнаружения, являются вопросы преодоления априорной неопределённости [1]. Поэтому в настоящее время для подобных задач интенсивно разрабатываются разнообразные робастные и непараметрические (свободные от распределений) методы, которые основываются на нелинейных процедурах [2]. В [3] для решения непараметрических задач обнаружения предложено использовать алгоритмы типа нелинейных стохастических дифференциальных уравнений.

Одним из наиболее эффективных аналитических методов исследования нелинейных стохастических систем в настоящее время является метод марковских процессов с получением и решением уравнений Фоккера—Планка—Колмогорова (ФПК) [4–6]. Однако применение этого метода для анализа характеристик обнаружителей, использующих нелинейные алгоритмы с достаточно произвольными нелинейными функциями [7], сопряжено с трудностями математического характера при решении параболического уравнения ФПК с переменными коэффициентами [6].

Структурно простейший нелинейный непараметрический обнаружитель, предназначенный для обнаружения импульсных сигналов с неизвестными параметрами в аддитивном белом гауссовом шуме, может использовать, как показано в [7], алгоритм обработки случайного процесса $x(t)$ в виде следующего нелинейного дифференциального уравнения первого порядка:

$$\tau(x) \frac{dx}{dt} + x = s(t, \lambda) + n(t), \quad (1)$$

где $0 \leq t \leq T$, $s(t, \lambda)$ — подлежащий обнаружению финитный сигнал с неизвестными параметрами λ и длительностью $\tau_u \leq T$ (λ может принадлежать гильбертову пространству), $\tau(x)$ — нелинейная функция, определяющая характеристики обнаружителя, основными из которых в подобном алгоритме обработки являются непараметрические свойства, $n(t)$ — белый гауссовый шум со спектральной плотностью N_0 .

Определение характеристик подобного обнаружителя можно проводить по критерию Неймана—Пирсона; при этом вероятности нулевой и альтернативных гипотез определяются из соответствующих плотностей вероятности, которые могут быть найдены на основе (1), например, из уравнения ФПК. Случайный процесс $x(t)$ согласно теореме Дуба [6] является марковским процессом, поэтому для него может быть записано уравнение ФПК, например, по методике [8]:

$$\frac{\partial p(x, t, \lambda)}{\partial t} = \left(\frac{1}{4} \frac{\partial^2 k_2(x)}{\partial x^2} - \frac{\partial k_1(x, t, \lambda)}{\partial x} \right) p(x, t, \lambda) +$$

$$+ \left(\frac{3}{4} \frac{\partial k_2(x)}{\partial x} - k_1(x, t, \lambda) \right) \frac{\partial p(x, t, \lambda)}{\partial x} + \frac{k_2(x)}{2} \frac{\partial^2 p(x, t, \lambda)}{\partial x^2}. \quad (2a)$$

Здесь

$$k_1(x, t, \lambda) = \left\langle \frac{s(\lambda, t) + n(t) - x}{\tau(x)} \right\rangle = \frac{s(\lambda, t) - x}{\tau(x)}, \quad k_2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N_0}{2\tau^2(x)} \delta(\tau) d\tau = \frac{N_0}{2\tau^2(x)} \quad (2б)$$

коэффициенты сноса и диффузии соответственно, $\delta(\tau)$ — дельта-функция.

В стационарном случае, т. е. при $\partial p(x, t)/\partial t = 0$ и $s(t, \lambda) = B = \text{const}$, из (2a) можно получить стационарное решение вида

$$p_{\text{ст}}(x) = \frac{c\tau(x)}{\sqrt{N_0/2}} \exp \left[-\frac{4}{N_0} \int_0^x (z - B) \tau(z) dz \right], \quad (3)$$

где параметр c определяется из условия нормировки.

Как известно, решение нестационарного уравнения (2a), например в виде фундаментальных решений [9], существует, однако аналитическое решение удаётся получить лишь при некоторых частных значениях коэффициентов сноса и диффузии [6, 8].

Однако в нелинейной задаче (1) коэффициенты сноса и диффузии имеют достаточно сложный вид (2б), определяемый в основном характером нелинейной функции $\tau(x)$. Поэтому вследствие отсутствия общего решения уравнения (2a) его частное решение можно получить в случае стационарного воздействия и при использовании численных методов. Для этого следует принять, что сигнал имеет вид прямоугольного импульса т. е.

$$s(t, \lambda) = \begin{cases} 0, & t \notin [0, \tau_u]; \\ S_0, & t \in [0, \tau_u], \end{cases}$$

при этом в уравнении (2a) коэффициенты будут зависеть только от одной переменной. Как известно (см., например, [10]), подобное уравнение можно решать методом Фурье, т. е. проводя разделение переменных. Для этого уравнение (2a) удобно представить в каноническом виде:

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = A_0(x)p(x, t) + A_1(x) \frac{\partial p(x, t)}{\partial x} + A_2(x) \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2}, \quad (4)$$

где $A_0(x)$, $A_1(x)$ и $A_2(x)$ — детерминированные функции, зависящие от одной переменной x и определённые через коэффициенты сноса и диффузии и удовлетворяющие условию Липшица [6].

Особенности уравнений (2) и (4) в задаче (1) заключаются в том, что граничные условия являются нулевыми при $x = \pm\infty$, т. е. при численном решении, проводимом на конечном интервале $x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$, они неизвестны. Из физического смысла задачи в качестве начальных условий должна быть выбрана дельта-функция, а при численном решении — некоторая модель начальных условий, например

$$f(x) = p(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \exp[-x^2/(2\sigma_0^2)], \quad (5)$$

где σ_0 — некоторая достаточно малая экспериментально выбираемая величина.

Частные решения уравнения (4), удовлетворяющие граничным условиям, по методу Фурье записываются в виде

$$p(x, t) = Q(x)T(t). \quad (6)$$

После дифференцирования (6) и подстановки в (4) получаем (ниже принято $Q(x) = Q$, $T(t) = T$)

$$A_2 Q'' T + A_1 Q' T + A_0 Q T = \tau_0 Q T',$$

или

$$\frac{A_2 Q'' + A_1 Q' + A_0 Q}{Q} = \tau_0 \frac{T'}{T}, \quad (7)$$

где τ_0 — нормирующий размерный коэффициент, который для физической системы, описываемой уравнением (1), имеет смысл постоянной времени; штрих здесь и далее обозначает производную по аргументу.

Поскольку левая часть (7) является функцией x , а правая — функцией t , то равенство возможно, когда левая и правая части постоянны [9]. Поэтому (7) можно представить в виде

$$\frac{A_2 Q'' + A_1 Q' + A_0 Q}{Q} = \tau_0 \frac{T'}{T} = -\lambda,$$

где $\lambda = \text{const}$, и перейти к системе из двух обыкновенных линейных дифференциальных уравнений:

$$A_2 Q'' + A_1 Q' + A_0 Q = -\lambda Q, \quad (8a)$$

$$T' + \frac{\lambda T}{\tau_0} = 0. \quad (8б)$$

При единственном условии $p(x, t) \neq 0$ существует бесконечное множество значений $\lambda = \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots$, при которых система уравнений (8) имеет решение [10]. Каждое значение λ , для которого краевая задача (4) допускает нетривиальное решение, называют собственным значением, а соответствующее этому λ решение Q — собственной функцией.

Таким образом, для уравнения (8a) имеется бесконечное множество собственных значений $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots$ и соответствующих им собственных функций $Q_0(x), Q_1(x), \dots, Q_n(x), \dots$. Для уравнения (8б) при $\lambda_n > 0$ решение можно представить в виде

$$T_n(t) = T_n \exp[-\lambda_n t / \tau_0],$$

где T_n — некоторые постоянные.

Решение $Q(x)$ линейного дифференциального уравнения второго порядка (8a), как следует из вышеизложенного, существует и может быть получено различными, в том числе численными, методами. Как известно (см., например, [8]), решение для нестационарной плотности (6) по методу Фурье с учётом вышеизложенного можно записать в виде ряда:

$$p(x, t) = Q_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} T_k \exp(-\lambda_k t / \tau_0) Q_k(x). \quad (9)$$

Первое слагаемое в правой части выражения (9) имеет смысл стационарной плотности вероятности, т. е. $p_{\text{ст}}(x) = Q_0(x)$, и может быть найдено как с помощью выражения (3), так и из численного решения уравнения (8a) с учётом условия нормировки $\int_{-\infty}^{+\infty} p_{\text{ст}}(x) dx = 1$. Поскольку в общем случае, в том числе и для нелинейных задач, остальные действительные собственные функции $Q_k(x)$ будут иметь достаточно сложный вид, их можно получить численным решением уравнения (8a), например, рекуррентным образом или с использованием метода Галёркина [11] при начальных условиях, определённых из подобного исходного численного решения для стационарной плотности $Q_0(x)$ в выражении (9).

Однако, как показали результаты численного моделирования, даже в простейшем случае, а именно для линейного аналога задачи (1), т. е. при $\tau(x) = \tau_0$ и $s(t, \lambda) = 0$, собственные функции $Q_k(x)$ являются неортогональными, что приводит к значительным трудностям при определении сходимости рядов, представляющих собой решение задачи. В нелинейном случае, т. е. при произвольной функции $\tau(x)$, подобные трудности существенно увеличиваются.

Если задача (1) линейна, то, как было отмечено в результате численного моделирования, решение уравнения (8а) в виде сходящегося ряда по собственным функциям существует в случае, когда последние записываются с помощью ортогональных полиномов:

$$Q_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp[-x^2/(2\sigma^2)] C_k H_k(x/\sigma), \quad (10)$$

где $k = 0, 1, 2, 3, \dots$, при этом

$$Q_0(x) = p_{\text{ст}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp[-x^2/(2\sigma^2)].$$

Здесь $H_k(x/\sigma)$ — полиномы Эрмита—Чебышева, σ — параметр, определяемый при численном решении из условия нормировки, C_k — соответствующие весовые коэффициенты.

Подставляя выражение (10) в уравнение (8а), можно получить, что собственные значения $\lambda_k = k$ при $k = 0, 1, 2, 3, \dots$, и выражение для нестационарной плотности вероятности будет иметь вид

$$p(x, t) = Q_0(x) + Q_0(x) \sum_{k=1}^{\infty} C'_k \exp(-kt/\tau_0) H_k(x/\sigma). \quad (11)$$

В общем случае при заданной амплитуде прямоугольного видеоимпульса, т. е. для $s(t, \lambda) = S_0$ при $t \in [0, \tau_u]$, выражение (11) приводится к виду

$$p(x, t) = Q_0(x - S_0) + Q_0(x - S_0) \sum_{k=1}^{\infty} C''_k \exp(-kt/\tau_0) H_k\left(\frac{x - S_0}{\sigma}\right). \quad (12)$$

Таким образом, в линейном аналоге задачи (1) нестационарную плотность вероятности в любой момент времени можно представить в виде ряда (12) по ортогональным функциям, при этом коэффициенты C_k определяются как коэффициенты обобщённого ряда Фурье.

Следует отметить, что для получения нестационарного решения уравнения (4) в виде ряда (9), как было отмечено выше, в качестве начальных условий должна быть принята некоторая модель, например (5), причём для численного решения она может быть достаточно произвольной. Эта модель является основой для определения коэффициентов Фурье, т. е. начальные условия в виде ряда в общем виде записываются следующим образом:

$$f(x) = Q_0(x) + Q_1(x) + Q_2(x) + Q_3(x) + \dots,$$

и весовые коэффициенты ряда (см. (10)) определяются как коэффициенты Фурье с помощью весовой функции:

$$C_k = \frac{\int_a^b r(x) [f(x) - p_{\text{ст}}(x)] \dot{Q}_k(x) dx}{\|\dot{Q}_k(x)\|^2}, \quad (13)$$

где $k = 0, 1, 2, 3, \dots$, $r(x) = p_{\text{ст}}^{-1}(x)$ — весовая функция, $\|\dot{Q}_k(x)\|^2$ — квадраты норм собственных функций, $\dot{Q}_k(x) = p_{\text{ст}}(x) H_k(x/\sigma)$; a и b — границы интервала, на котором ищется решение.

Определение весовых коэффициентов (13) можно проводить численно при произвольной модели начальных условий и аналитически для соответствующих аналитических моделей начальных условий.

Коэффициенты C'_k, C''_k для рядов (11), (12) определяются из (13) после подстановки выражения (10):

$$C'_k = \frac{\int_a^b [f(x) - p_{ст}(x)] H_k(x/\sigma) dx}{\left| \int_a^b p_{ст}(x) H_k(x/\sigma) dx \right|^2}, \quad C''_k = \frac{\int_a^b [f(x) - p_{ст}(x - S_0)] H_k[(x - S_0)/\sigma] dx}{\left| \int_a^b p_{ст}(x - S_0) H_k[(x - S_0)/\sigma] dx \right|^2},$$

где $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

Для нелинейного алгоритма (1) нестационарная плотность вероятности в уравнении (4) является негауссовой практически для любого момента времени $t > 0$. Согласно изложенной выше методике её также можно представить в виде ряда (9), при этом негауссовая стационарная плотность вероятности может быть записана как ряд Эджворда:

$$p_{ст}(x) = p_{\Gamma}(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{b_k}{\sigma^k} H_k\left(\frac{x - m}{\sigma}\right) = p_{\Gamma}(x) \sum_{k=0}^{\infty} C_k H_k\left(\frac{x - m}{\sigma}\right),$$

где $p_{\Gamma}(x) = (\sqrt{2\pi}\sigma)^{-1} \exp[-(x - m)^2/(2\sigma^2)]$ — гауссовое распределение с параметрами, определёнными, например, из численного решения, $b_k = \sigma^k \langle H_k[(x - m)/\sigma] \rangle$ — квазимоменты; угловые скобки обозначают статистическое усреднение.

Для нелинейной системы (1) разность в подынтегральном выражении в (13) будет определяться аналогично, но через двойной ряд Эджворда:

$$\Delta f(x) = f(x) - p_{ст}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k(x) = p_{\Gamma}(x) \sum_{k=1}^{\infty} q_k H_k(x) = p_{\Gamma}(x) \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} a_{ki} H_i(x), \quad (14)$$

где q_k определяются через квазимоменты b_k . Собственные функции в (14) для нелинейной системы (1) записаны в виде ряда по полиномам Эрмита—Чебышева:

$$Q_k(x) = p_{\Gamma}(x) \sum_{i=0}^{\infty} a_{ki} H_i(x), \quad (15)$$

где $k = 1, 2, 3, \dots$

Таким образом, для нелинейной системы весовые коэффициенты для ряда (9) могут определяться выражением, аналогичным (13):

$$q_k = \frac{1}{\|\dot{Q}_k\|^2} \int_a^b \Delta f(x) H_k(x) dx,$$

где $k = 1, 2, 3, \dots$ Окончательное определение коэффициентов ряда (9) проводится на основе решения системы

$$\sum_{i=0}^n a_{ki} = q_k \quad (16)$$

и сопоставления рядов (15) с соответствующими численными решениями для собственных функций уравнения (8а). Определение коэффициентов a_{ki} может также проводиться по методу Галёркина, т. к. разложение (14) использует ортогональный базис полиномов Эрмита—Чебышева.

Пусть предельным случаем нелинейной системы (1) является её линейный аналог при $\tau(x) = \tau_0$. Тогда в предельном случае (т. е. при достаточно малой нелинейности) двойные суммы в (14) стремятся к одинарным, а именно в (16) $n \rightarrow i$ и $a_{ki} \rightarrow a_{k0} = q_k$. Поэтому в случае слабо нелинейной системы может использоваться изложенная выше методика решения уравнения ФПК линейной системы.

Определение характеристик обнаружения проводится на основе выражений (11), (12), причём апробация методики численного решения задачи обнаружения для линейного аналога задачи (1) проводилась при $\tau_0 = 1$, $N_0 = 3$. Параметр σ_0 слабо влияет на нестационарную плотность вероятности в момент принятия решения, но имеет минимальное значение, для которого вычислительный процесс обладает устойчивостью; как было установлено экспериментально, для данных параметров это минимальное значение $\sigma_0 = 0,005$. Относительная среднеквадратическая ошибка аппроксимации стационарных распределений, полученных по алгоритмам (11), (12), точными гауссовыми распределениями составляет около 10^{-7} . Подобную погрешность имеют численные решения и при $t \in [0,25\tau_u, \tau_u]$. На интервале $0 < t < 0,25\tau_u$ вследствие отличия начального распределения от дельта-функции погрешность численного решения может быть значительной.

Можно отметить, что влияние последующих слагаемых в выражениях (11) и (12) существенно в основном при малых значениях показателя экспоненты, т. е. при $t/\tau_0 \ll 1$.

Таким образом, численное решение подобной задачи может быть получено с приемлемой точностью для любого момента времени $t \in [0,25\tau_u, \tau_u]$, при этом достаточно $N = 18 \div 20$ членов ряда.

Характеристики обнаружения для сигнала в виде прямоугольного импульса при линейном алгоритме обработки по изложенной выше методике решения уравнения ФПК показаны кривой 1 на рис. 1. С погрешностью 10^{-7} с ней совпадают результаты точного решения по спектрально-корреляционному методу [8]. Кривая 2 на рис. 1 — оптимальная характеристика обнаружения подобного сигнала. Расчёт отношения сигнал/шум проводился по формуле

$$q = \sqrt{\frac{2S_0^2\tau_u}{N_0}}.$$

Характеристики обнаружения для нелинейного алгоритма (1) на основе изложенной методики решения уравнения ФПК исследовались при следующих условиях: $\tau(x) = \tau_0 [1 - k_1 \text{th}[k_2(x - x_0)]]$ — нелинейная функция (подобная функция следует из синтеза по критерию априорной неопределённости [3] и обеспечивает устойчивое численное решение уравнения (1) [7]), $k_1 = 0,01$; $\tau_0 = 1$; k_2 и x_0 — варьируемые параметры, $N_0 = 3$; $s(t, \lambda) = S_0$; $\tau_u = 0,5$ — длительность сигнала.

Как отмечено выше, вследствие нелинейных преобразований в алгоритме обработки (1) распределения случайного процесса $x(t)$ в различные моменты времени отличаются от гауссовых,

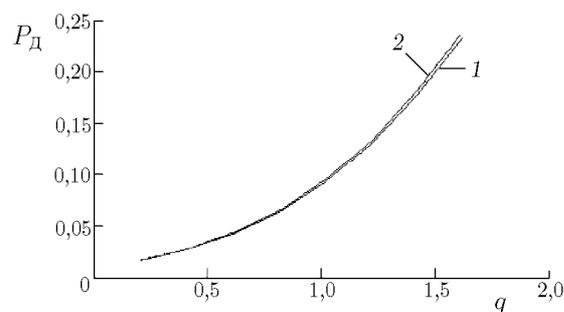


Рис. 1. Характеристики обнаружения импульса (вероятности правильного обнаружения) при фиксированной вероятности ложной тревоги $P_F = 0,01$ в зависимости от отношения сигнал/шум

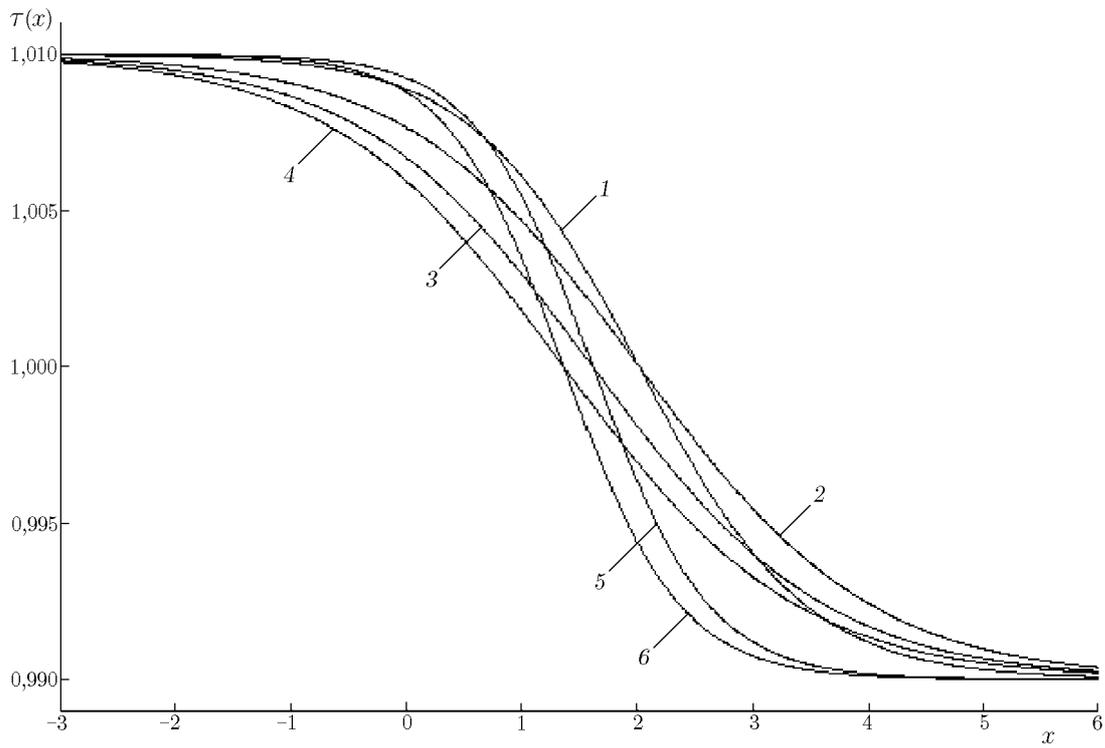


Рис. 2. График нелинейной функции $\tau(x)$

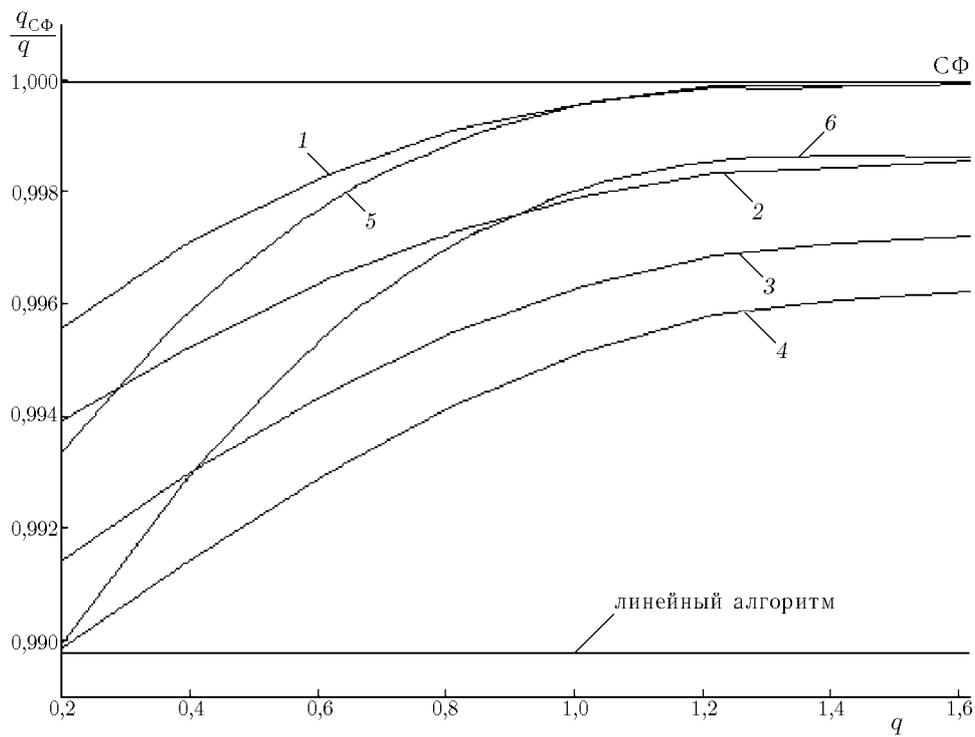


Рис. 3. Графики относительной эффективности характеристик обнаружения

поэтому в соответствующих уравнениях ФПК нарушается ортогональность собственных функций, и C_k в (11), (12) не являются коэффициентами Фурье. Поэтому исследования нелинейных обнаружителей проводились при слабо выраженной нелинейной функции, чтобы коэффициенты C'_k , C''_k рядов (11) и (12) определялись аналогично случаю линейной задачи. При этом в (11) и (12) стационарная плотность вероятности $p_{ст}(x)$ определяется выражением (3).

Графики нелинейных функций $\tau(x)$ приведены на рис. 2, где кривая 1 соответствует параметрам $x_0 = 2$, $k_2 = 0,7$; кривая 2 — $x_0 = 2$, $k_2 = 0,5$; кривая 3 — $x_0 = 1,6$, $k_2 = 0,5$; кривая 4 — $x_0 = 1,35$, $k_2 = 0,5$; кривая 5 — $x_0 = 1,6$, $k_2 = 1$; кривая 6 — $x_0 = 1,35$, $k_2 = 1$.

Относительные эффективности нелинейных алгоритмов по характеристикам обнаружения при фиксированной вероятности ложной тревоги $P_F = 0,01$ приведены на рис. 3. По оси ординат откладывается проигрыш в отношении сигнал/шум исследуемых алгоритмов по сравнению с оптимальным (согласованным) фильтром. Для сопоставления также показаны результаты для согласованного фильтра и соответствующего линейного алгоритма, т. е. при $\tau(x) = \tau_0$. На рис. 3 кривая 1 соответствует параметрам $x_0 = 2$, $k_2 = 0,7$; кривая 2 — $x_0 = 2$, $k_2 = 0,5$; кривая 3 — $x_0 = 1,6$, $k_2 = 0,5$; кривая 4 — $x_0 = 1,35$, $k_2 = 0,5$; кривая 5 — $x_0 = 1,6$, $k_2 = 1$; кривая 6 — $x_0 = 1,35$, $k_2 = 1$. Прямая СФ — верхняя граница относительной эффективности.

Как следует из рис. 3, из рассмотренных нелинейностей можно выделить такие, при которых результаты близки к согласованному фильтру, т. е. оптимальному, фильтру. Можно также отметить, что для данных параметров нелинейного алгоритма его результаты превосходят результаты используемого линейного аналога ($\tau_0 = 1$). Как следует из графиков, лучшие результаты при нелинейной обработке были получены при параметрах $x_0 = 2$, $k_2 = 0,7$ и $x_0 = 1,6$, $k_2 = 1$ при $k_1 = 0,01$ указанной выше нелинейной функции $\tau(x)$ (кривые 1 и 5 на рис. 2). А именно, на рис. 3 кривые 1, 5 относительной эффективности нелинейных алгоритмов асимптотически приближаются к предельному значению, соответствующему согласованному фильтру. Согласно рис. 2 этим графикам соответствуют функции $\tau(x)$ с более выраженной нелинейностью (кривые 1, 5). Таким образом, полученные в данной работе теоретические результаты по асимптотической оптимальности нелинейных обнаружителей хорошо согласуются с полученными автором экспериментальными результатами [7].

Можно также отметить, что при низких отношениях сигнал/шум (менее единицы) вследствие нелинейного подавления сигнала шумом асимптотическая эффективность всех нелинейных алгоритмов снижается.

Таким образом, предложенный метод численных решений уравнения ФПК можно использовать для анализа нелинейных обнаружителей, характеристики которых могут быть близки к оптимальным. Подобные нелинейные обнаружители при фиксированной вероятности ложной тревоги могут иметь равномерную наибольшую мощность, т. е. эффективно использоваться при непараметрическом обнаружении.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники: В 3 кн. М.: Сов. радио, 1976. Кн. 3.
2. Хьюбер П. Робастность в статистике: Пер. с англ. М.: Мир, 1984.
3. Неволин В. И. // Электросвязь. 2002. № 10. С. 38.
4. Пугачёв В. С., Синицин И. Н. Теория стохастических систем: Учеб. пособие. М.: Логос, 2000.
5. Шахтарин Б. И. Случайные процессы в радиотехнике. М.: Радио и связь, 2000.
6. Тихонов В. И., Миронов М. А. Марковские процессы. М.: Сов. радио, 1977.

7. Неволин В. И. // Радиолокация, навигация, связь: 4-я Международная НТК, Воронеж, 2000. Т. 1. С. 24.
8. Стратонович Р. Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М.: Сов. радио, 1961.
9. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968.
10. Толстов Г. П. Ряды Фурье. М.: Наука, 1980.
11. Демидович Б. П., Марон К. А., Шувалова Э. З. Численные методы анализа. М.: Наука, 1967.

Южно-Уральский госуниверситет, г. Кыштым, Россия

Поступила в редакцию
16 октября 2002 г.

**USING NUMERICAL SOLUTIONS IN THE FOURIER METHOD FOR THE
FOKKER–PLANCK–KOLMOGOROV EQUATION IN THE ANALYSIS OF STOCHASTIC
NONLINEAR FIRST-ORDER SYSTEMS FOR NONLINEAR DETECTORS**

V. I. Nevolin

We describe a procedure for an analysis of the detection performance of first-order nonlinear detectors based on algorithms of the first-order nonlinear differential equations. Our procedure is based on numerical solutions of the Fokker–Planck–Kolmogorov equations in the form of functional series over the Hermit–Chebyshev polynomials for both nonlinear systems and their linear analogs. The results for the linear cases can be recurrently transformed to nonlinear systems.