МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Известия высших учебных заведений

# РАДИОФИЗИКА

ежемесячный научно-технический журнал

Издаётся с апреля 1958 г.

Том XLVI № 2 Нижний Новгород 2003

## Содержание

УДК 621.396.677

# ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА ГАЛЁРКИНА ПРИ АНАЛИЗЕ СТУПЕНЧАТЫХ РУПОРНЫХ АНТЕНН

*М. Б. Мануилов*

Изложен строгий метод электродинамического анализа ступенчатых рупорных антенн, построенный на основе метода тензорных функций Грина и метода Галёркина с учётом краевой особенности поля. Полученные результаты сравниваются с экспериментальными и теоретическими данными других работ. Рассмотрены характеристики направленности ступенчатых рупорных излучателей.

## ВВЕДЕНИЕ

Различные модификации ступенчатых рупорных излучателей находят широкое применение как в сантиметровом, так и в миллиметровом диапазонах длин волн [1, 2], в частности, в составе антенных решёток (АР). С другой стороны, строгое решение задачи об излучении ступенчатого рупора представляет интерес с методической точки зрения, поскольку данная задача может рассматриваться как ключевая для анализа широкого класса апертурных антенн. К этому классу следует отнести, во-первых, гладкие и гофрированные пирамидальные рупорные излучатели с апертурой больших электрических размеров, анализ которых обычно базируется на ступенчатой аппроксимации расширяющейся пирамидальной части [3–5]. К тому же классу апертурных антенн можно отнести и волноводные АР с невыступающими диэлектрическими покрытиями конечных размеров. Конечные АР прямоугольных волноводов с диэлектрическими покрытиями в трёхмерной постановке анализировались в [6] с учётом конечных размеров покрытия, в [7] — в случае многослойных бесконечных покрытий. Наиболее близка к реальным конструкциям трёхмерная модель волноводных АР с прямоугольным диэлектрическим покрытием конечных размеров [6]. Однако это направление теории АР остаётся в настоящее время недостаточно разработанным.

Чаще других для решения рассматриваемого класса задач использовался метод моментов, при этом основные методические различия связаны главным образом с выбором базисных функций. С этой точки зрения можно выделить два основных подхода. Первый подход в значительной степени базируется на методических рекомендациях [8] и предполагает поиск решения (поля или эквивалентного тока на апертуре) в виде разложения по собственным волнам прямоугольного волновода (см., например, [2, 6, 9–11]). Другой подход, разработанный авторами [12], основан на кусочной аппроксимации поля на апертуре с помощью треугольных импульсных функций и позднее применялся в ряде работ других авторов (см., например, [3, 5]). И в том, и в другом случае при анализе апертур больших электрических размеров резко возрастает порядок решаемых систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), что снижает численную эффективность алгоритмов.

Ниже изложено строгое электродинамическое решение задачи анализа ступенчатых рупорных антенн, которое непосредственно обобщается на случай волноводных АР с диэлектрическим покрытием конечных размеров и различных модификаций пирамидальных рупорных излучателей. Решение построено на основе метода тензорных функций Грина и метода Галёркина с учётом краевой особенности поля [13, 14].

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Обобщённая модель ступенчатого рупора с бесконечным идеально проводящим фланцем изображена на рис. 1 ($a$ — вид сверху, $б$ — продольное сечение структуры). Положение возбуждающего волновода задаётся координатами центра его апертуры ($x_1$, $y_1$) либо координатами одной из его вершин ($x_{01}$, $y_{01}$). Рупор заполнен диэлектриком с проницаемостью $\varepsilon_1$, а волновод — диэлектриком с проницаемостью $\varepsilon$. Волновод возбуждается волной $\mathrm{TE}_{pq}$ с амплитудой $B_{pq}^{h1}$.

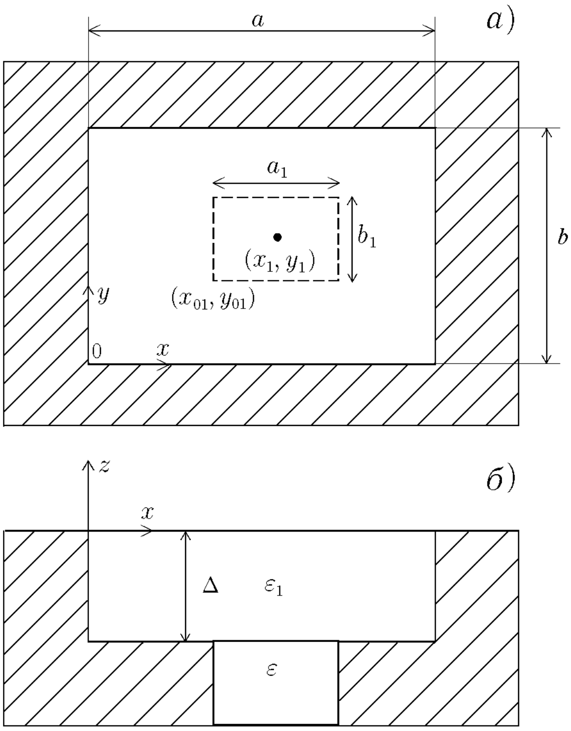



Рис. 1. Ступенчатый рупорный излучатель с бесконечным идеально проводящим фланцем

Основываясь на принципе эквивалентности, сведём исходную электродинамическую задачу к системе интегральных уравнений относительно магнитных токов на апертурах волновода и покрытия. Для этого удобно воспользоваться аппаратом тензорных (диадных) функций Грина [15, 16]. В наиболее общем случае возбуждения электромагнитного поля как электрическими, так и магнитными токами необходимы четыре тензорные функции Грина, которые вводятся соотношениями

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \\ = \int\limits_{V'} \left(\overline{\overline{\mathbf{G}}}_{11}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\mathbf{J}^{\mathrm{e}}(\mathbf{r}') + \overline{\overline{\mathbf{G}}}_{12}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\mathbf{J}^{\mathrm{m}}(\mathbf{r}')\right) \mathrm{d}V',$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \\ = \int\limits_{V'} \left(\overline{\overline{\mathbf{G}}}_{21}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\mathbf{J}^{\mathrm{e}}(\mathbf{r}') + \overline{\overline{\mathbf{G}}}_{22}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\mathbf{J}^{\mathrm{m}}(\mathbf{r}')\right) \mathrm{d}V'.$$

В рассматриваемой задаче источниками поля являются эквивалентные поверхностные магнитные токи, текущие по апертуре волновода ($\mathbf{J}_1^{\mathrm{m}}$) и диэлектрического покрытия ($\mathbf{J}_2^{\mathrm{m}}$), которые определены как $\mathbf{J}_\nu^{\mathrm{m}} = [\mathbf{n}, \mathbf{E}_\nu]$, где $\mathbf{E}_\nu$ — тангенциальная компонента электрического поля на $\nu$-й апертуре, $\mathbf{n}$ — вектор внешней нормали к указанной апертуре, $\nu = 1, 2$.

Воспользовавшись выражениями для тензорных функций Грина прямоугольных волноводов и резонаторов [16, 17] и условиями непрерывности тангенциальных компонент магнитного поля на общих границах областей, получим систему интегральных уравнений

$$\int\limits_{S_1} \left(\overline{\overline{\mathbf{G}}}{}_{22}^{(1)}(x,y;x',y') + \overline{\overline{\mathbf{G}}}{}_{22}^{\mathrm{cav}}(x,y,z=-\Delta;x',y',z'=-\Delta)\right) \mathbf{J}_1^{\mathrm{m}}(x',y')\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y' - \\ - \int\limits_{S} \overline{\overline{\mathbf{G}}}{}_{22}^{\mathrm{cav}}(x,y,z=-\Delta;x',y',z'=0)\mathbf{J}_2^{\mathrm{m}}(x',y')\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y' = 2\mathbf{H}_{\mathrm{inc}}^{(1)}(x,y),$$

$$-\int\limits_{S_1} \overline{\overline{\mathbf{G}}}{}_{22}^{\rm cav}(x,y,z=0;x',y',z'=-\Delta)\mathbf{J}_1^{\rm m}(x',y')\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y' +$$

$$+\int\limits_{S}\Big(\overline{\overline{\mathbf{G}}}{}_{22}^{\rm cav}(x,y,z=0;x',y',z'=0)+\overline{\overline{\mathbf{G}}}{}_{22}^{\rm ext}(x,y,z=0;x',y',z'=0)\Big)\,\mathbf{J}_2^{\rm m}(x',y')\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y' = 0, \quad (1)$$

где

$$G^{(1)}_{22\,xx} = \sum_{m,n} \frac{2\,(2-\delta_{0n})\left(k^2\varepsilon - \left(\alpha_m^{(1)}\right)^2\right)}{a_1 b_1 \gamma_{mn}^{(1)}} \times$$
$$\times \sin[\alpha_m^{(1)}\,(x-x_{01})]\cos[\beta_n^{(1)}\,(y-y_{01})]\sin[\alpha_m^{(1)}\,(x'-x_{01})]\cos[\beta_n^{(1)}\,(y'-y_{01})],$$

$$G^{(1)}_{22\,xy} = \sum_{m,n} \frac{-4\alpha_m^{(1)}\beta_n^{(1)}}{a_1 b_1\gamma_{mn}^{(1)}} \sin[\alpha_m^{(1)}\,(x-x_{01})]\cos[\beta_n^{(1)}\,(y-y_{01})]\cos[\alpha_m^{(1)}\,(x'-x_{01})]\sin[\beta_n^{(1)}\,(y'-y_{01})],$$

$$G^{(1)}_{22\,yx} = \sum_{m,n} \frac{-4\alpha_m^{(1)}\beta_n^{(1)}}{a_1 b_1\gamma_{mn}^{(1)}} \cos[\alpha_m^{(1)}\,(x-x_{01})]\sin[\beta_n^{(1)}\,(y-y_{01})]\sin[\alpha_m^{(1)}\,(x'-x_{01})]\cos[\beta_n^{(1)}\,(y'-y_{01})],$$

$$G^{(1)}_{22\,yy} = \sum_{m,n} \frac{2\,(2-\delta_{0n})\left(k^2\varepsilon - \left(\beta_n^{(1)}\right)^2\right)}{a_1 b_1 \gamma_{mn}^{(1)}} \times$$
$$\times \cos[\alpha_m^{(1)}(x-x_{01})]\sin[\beta_n^{(1)}\,(y-y_{01})]\cos[\alpha_m^{(1)}\,(x'-x_{01})]\sin[\beta_n^{(1)}\,(y'-y_{01})], \quad (2)$$

$$H^{(1)}_{{\rm inc}\,x}(x,y) = B^{h1}_{pq}\gamma^{(1)}_{pq}\alpha_p^{(1)}\sin[\alpha_p^{(1)}\,(x-x_{01})]\cos[\beta_q^{(1)}\,(y-y_{01})],$$
$$H^{(1)}_{{\rm inc}\,y}(x,y) = B^{h1}_{pq}\gamma^{(1)}_{pq}\beta_q^{(1)}\cos[\alpha_p^{(1)}\,(x-x_{01})]\sin[\beta_q^{(1)}\,(y-y_{01})], \quad (3)$$

$$\alpha_m^{(1)} = \frac{m\pi}{a_1}, \qquad \beta_n^{(1)} = \frac{n\pi}{b_1}, \qquad \gamma_{mn}^{(1)} = \sqrt{\left(\alpha_m^{(1)}\right)^2 + \left(\beta_n^{(1)}\right)^2 - k^2\varepsilon}, \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda};$$

$$G^{\rm cav}_{22\,xx} = \sum_{m,n}\frac{2\,(2-\delta_{0n})\,(k^2\varepsilon_1-\alpha_m^2)}{ab\gamma_{mn}}\sin(\alpha_m x)\cos(\beta_n y)\sin(\alpha_m x')\cos(\beta_n y')f(z,z'),$$

$$G^{\rm cav}_{22\,xy} = \sum_{m,n}\frac{-4\alpha_m\beta_n}{ab\gamma_{mn}}\sin(\alpha_m x)\cos(\beta_n y)\cos(\alpha_m x')\sin(\beta_n y')f(z,z'),$$

$$G^{\rm cav}_{22\,yx} = \sum_{m,n}\frac{-4\alpha_m\beta_n}{ab\gamma_{mn}}\cos(\alpha_m x)\sin(\beta_n y)\sin(\alpha_m x')\cos(\beta_n y')f(z,z'),$$

$$G^{\rm cav}_{22\,yy} = \sum_{m,n}\frac{2\,(2-\delta_{0m})\,(k^2\varepsilon_1-\beta_n^2)}{ab\gamma_{mn}}\cos(\alpha_m x)\sin(\beta_n y)\cos(\alpha_m x')\sin(\beta_n y')f(z,z'), \quad (4)$$

$$f(z,z') = \frac{1}{\mathrm{sh}(\gamma_{mn}\Delta)}\begin{cases}\mathrm{ch}[\gamma_{mn}\,(z+\Delta)]\,\mathrm{ch}(\gamma_{mn}z'), & z<z';\\ \mathrm{ch}(\gamma_{mn}z)\,\mathrm{ch}[\gamma_{mn}\,(z'+\Delta)], & z>z',\end{cases}$$

$$\alpha_m = \frac{m\pi}{a}, \qquad \beta_n = \frac{n\pi}{b}, \qquad \gamma_{mn} = \sqrt{\alpha_m^2+\beta_n^2-k^2\varepsilon_1};$$

$$G_{22\,\alpha\beta}^{\text{ext}} = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g_{\alpha\beta}(\xi,\eta) \frac{\exp[-j\xi\,(x-x') - j\eta\,(y-y')]}{\sqrt{\xi^2+\eta^2-k^2}}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta, \tag{5}$$

$g_{xx}(\xi,\eta) = k^2 - \xi^2$, $g_{xy}(\xi,\eta) = g_{yx}(\xi,\eta) = -\xi\eta$, $g_{yy}(\xi,\eta) = k^2 - \eta^2$, индексы $\alpha$ и $\beta$ принимают значения $x$ и $y$.

В системе (1) $\overline{\overline{\mathbf{G}}}_{22}^{(1)}$, $\overline{\overline{\mathbf{G}}}_{22}^{\text{cav}}$ и $\overline{\overline{\mathbf{G}}}_{22}^{\text{ext}}$ обозначают функции Грина волновода, прямоугольного резонатора (рупора) и внешнего полупространства соответственно, $\mathbf{H}_{\text{inc}}^{(1)}$ — магнитное поле падающей в волноводе волны $\mathrm{TE}_{pq}$ с амплитудой $B_{pq}^{h1}$. В выражениях (2)–(5) опущен для удобства множитель $1/(j\omega\mu_0)$, где $\omega$ — частота поля, $\mu_0$ — магнитная постоянная, $j$ — мнимая единица; $\delta_{0n}$ — символ Кронекера. Интегрирование проводится по площади раскрыва волновода $S_1$ и рупора $S$ соответственно. Компоненты тензорной функции Грина внешнего полупространства (5) были записаны в форме спектрального представления с учётом допустимости операции дифференцирования по координатам под знаком интеграла [18].

## 2. АЛГЕБРАИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ

Для решения системы интегральных уравнений (1) воспользуемся методом Галёркина с учётом краевой особенности поля [13, 14]. Принимая во внимание известную асимптотику поля в окрестности металлического ребра, будем искать компоненты магнитного тока на апертуре волновода в виде разложений:

$$J_{1x}^{\text{m}}(x,y) = \sum_{i=0}^{N_x'} \sum_{k=0}^{N_y'} u_{ik}^{1x} X_i^{1x}(x) Y_k^{1x}(y), \tag{6}$$

$$X_i^{1,x}(x) = \left(1 - \left(\frac{2\,(x-x_1)}{a_1}\right)^2\right)^{\tau+1/2} C_i^{\tau+1}\left(\frac{2(x-x_1)}{a_1}\right),$$

$$Y_k^{1x}(y) = \left(1 - \left(\frac{2\,(y-y_1)}{b_1}\right)^2\right)^{\tau-1/2} C_i^{\tau}\left(\frac{2\,(y-y_1)}{b_1}\right);$$

$$J_{1y}^{\text{m}}(x,y) = \sum_{i=0}^{N_x'} \sum_{k=0}^{N_y'} u_{ik}^{1y} X_i^{1y}(x) Y_k^{1y}(y), \tag{7}$$

$$X_i^{1y}(x) = \left(1 - \left(\frac{2\,(x-x_1)}{a_1}\right)^2\right)^{\tau-1/2} C_i^{\tau}\left(\frac{2\,(x-x_1)}{a_1}\right),$$

$$Y_k^{1y}(y) = \left(1 - \left(\frac{2\,(y-y_1)}{b_1}\right)^2\right)^{\tau+1/2} C_i^{\tau+1}\left(\frac{2\,(y-y_1)}{b_1}\right),$$

где $u_{ik}^{1x}$ и $u_{ik}^{1y}$ — неизвестные коэффициенты, $C_i^{\tau}(x)$ — полиномы Гегенбауэра, ортогональные с весом, в явном виде содержащим асимптотику поля. Параметр $\tau$ в (7), (8) определяется как $\tau = (2/\pi)\,\mathrm{arctg}\,(\sqrt{1+2\varepsilon/\varepsilon_1}) - 1/2$. В частности, в отсутствие диэлектрика $\tau = 1/6$ для прямоугольного ребра и $\tau = 0$ для плоского ребра.

Магнитный ток на апертуре рупора ищем в следующем виде:

$$J_{2x}^{\mathrm{m}}(x,y)=\sum_{i=0}^{N_x}\sum_{k=0}^{N_y}u_{ik}^{2x}X_i^{2x}(x)Y_k^{2x}(y), \tag{8}$$

$$X_i^{2x}(x)=\left(1-\left(\frac{x-a/2}{a/2}\right)^2\right)^{1/2}U_i\left(\frac{x-a/2}{a/2}\right),$$

$$Y_k^{2x}(y)=\left(1-\left(\frac{y-b/2}{b/2}\right)^2\right)^{-1/2}T_k\left(\frac{y-b/2}{b/2}\right);$$

$$J_{2y}^{\mathrm{m}}(x,y)=\sum_{i=0}^{N_x}\sum_{k=0}^{N_y}u_{ik}^{2y}X_i^{2y}(x)Y_k^{2y}(y), \tag{9}$$

$$X_i^{2y}(x)=\left(1-\left(\frac{x-a/2}{a/2}\right)^2\right)^{-1/2}T_i\left(\frac{x-a/2}{a/2}\right),$$

$$Y_k^{2y}(y)=\left(1-\left(\frac{y-b/2}{b/2}\right)^2\right)^{1/2}U_k\left(\frac{y-b/2}{b/2}\right),$$

где $T_i(x)$ и $U_i(x)$ — полиномы Чебышева 1-го и 2-го рода соответственно, $u_{ik}^{2x}$ и $u_{ik}^{2y}$ — неизвестные коэффициенты. Весовые множители полиномов Чебышева в данном случае менее точно соответствуют краевой особенности поля, чем весовые множители полиномов Гегенбауэра, однако применение разложений (8), (9) позволяет существенно упростить вычисление возникающих далее двойных несобственных интегралов.

Следуя методу Галёркина, сведём систему интегральных уравнений (1) к системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов $\tilde{u}_{ik}$, отличающихся от $u_{ik}$ в разложениях (6)–(9) постоянными множителями.

Матричные элементы итоговой СЛАУ содержат двойные ряды функций Бесселя, сходящиеся не хуже, чем $1/(mn\sqrt{m^2+n^2})$, при $\{m,n\}\to\infty$, и могут вычисляться непосредственно. Матричные элементы, соответствующие магнитному току на излучающей апертуре рупора, содержат кроме рядов двойные несобственные интегралы от произведений четырёх функций Бесселя. Вычисление этих интегралов в значительной степени определяет эффективность всего метода в целом и поэтому также является одним из ключевых моментов решения. Для вычисления возникающих интегралов использовались численный и аналитический методы, которые рассмотрены в приложении.

## 3. ДИАГРАММА НАПРАВЛЕННОСТИ И КОЭФФИЦИЕНТ ОТРАЖЕНИЯ ИЗЛУЧАТЕЛЯ

Для вычисления диаграммы направленности (ДН) ступенчатого рупора воспользуемся соотношениями, определяющими электрическое поле в дальней зоне излучения антенны [19], расположив начало отсчёта системы координат в центре апертуры (см. рис. 1). После подстановки в выражения для поля в дальней зоне излучения разложений магнитного тока на раскрыве рупора по полиномам Чебышева (8), (9) и выполнения необходимых преобразований компоненты векторной комплексной ДН принимают вид

$$F_\theta(\theta,\varphi)=F_x(\theta,\varphi)\cos\varphi+F_y(\theta,\varphi)\sin\varphi,$$

$$F_\varphi(\theta,\varphi) = -F_x(\theta,\varphi)\sin\varphi\cos\theta + F_y(\theta,\varphi)\cos\varphi\cos\theta, \tag{10}$$

где

$$F_x(\theta,\varphi) = \sum_{i=0}^{N_x}\sum_{k=0}^{N_y}(-\tilde{u}_{ik}^{2y}) J_i\left(\frac{ka}{2}\sin\theta\cos\varphi\right)\frac{J_{k+1}\left(\dfrac{kb}{2}\sin\theta\sin\varphi\right)}{\dfrac{kb}{2}\sin\theta\sin\varphi},$$

$$F_y(\theta,\varphi) = \sum_{i=0}^{N_x}\sum_{k=0}^{N_y}\tilde{u}_{ik}^{2x}\frac{J_{i+1}\left(\dfrac{ka}{2}\sin\theta\cos\varphi\right)}{\dfrac{ka}{2}\sin\theta\cos\varphi} J_k\left(\frac{kb}{2}\sin\theta\sin\varphi\right), \tag{11}$$

$\tilde{u}_{ik}^{2x}$, $\tilde{u}_{ik}^{2y}$ — коэффициенты из (8), (9), определяемые в результате решения СЛАУ, $J_i(z)$ — функции Бесселя 1-го рода $i$-го порядка, $\theta$ — угол места, $\varphi$ — азимутальный угол. В выражениях (11) для удобства опущен одинаковый множитель, исчезающий при нормировке ДН. Величины $F_x$ и $F_y$ в (10) соответствуют вкладу в ДН компонент $E_x$ и $E_y$ электрического поля на апертуре излучателя. Амплитудная диаграмма направленности $F(\theta,\varphi)$ находится по известным компонентам (10) как модуль суммы двух ортогональных векторов.

Коэффициент отражения при возбуждении рупора волной $\mathrm{TE}_{pq}$ определяется соотношением

$$R = \frac{2(2-\delta_{0p})\,(2-\delta_{0q})}{a_1 b_1\left[\left(\alpha_p^{(1)}\right)^2 + \left(\beta_q^{(2)}\right)^2\right]}\left[-\frac{a_1}{b_1}\sum_{i=0}^{N_x}\sum_{k=0}^{N_y}\tilde{u}_{ik}^{1y} F_i^{(1)}(\alpha_p^{(1)}a_1/2) F_k^{(2)}(\beta_q^{(1)}b_1/2) - \right.$$
$$\left. - \sum_{i=0}^{N_x}\sum_{k=0}^{N_y}\tilde{u}_{ik}^{1x} F_i^{(2)}(\alpha_p^{(1)}a_1/2) F_k^{(1)}(\beta_q^{(1)}b_1/2)\right] - 1,$$

где $\tilde{u}_{ik}^{1x}$, $\tilde{u}_{ik}^{1y}$ — коэффициенты из разложений (6), (7),

$$F_i^{(1)}(\alpha) = \frac{J_{i+\tau}(\alpha)}{\alpha^\tau}\begin{cases}\cos\alpha, & i = 0, 2, 4, \ldots; \\ j\sin\alpha, & i = 1, 3, 5, \ldots,\end{cases}$$

$$F_i^{(2)}(\alpha) = \frac{J_{i+1+\tau}(\alpha)}{\alpha^\tau}\begin{cases}\sin\alpha, & i = 0, 2, 4, \ldots; \\ -j\cos\alpha, & i = 1, 3, 5, \ldots;\end{cases}$$

остальные обозначения определены в (3).

## 4. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Результаты расчётов сравнивались с известными экспериментальными данными и теоретическими результатами, полученными другими методами. На рис. 2 изображены результаты расчётов по данной теории и экспериментальные результаты из работы [9] для входной нормированной проводимости одиночного волновода с бесконечным фланцем. Проводимость $Y/Y_0$ связана с коэффициентом отражения основной волны $R$ соотношением

$$\frac{Y}{Y_0} = \frac{G}{Y_0} + j\frac{B}{Y_0} = \frac{1-R}{1+R}.$$

Результаты данной теории графически точно совпадают с экспериментом, а также с теоретическими результатами [9], которые здесь не приводятся.

В работе [11] приведены графические зависимости модуля и фазы коэффициента отражения для прямоугольного волновода с бесконечным фланцем, полученные на основе решения Левина [8] в широком диапазоне электрических размеров апертуры волновода ($a \leq 5\lambda$). Во всех рассмотренных случаях наблюдалось графическое совпадение зависимостей модуля и фазы коэффициента отражения с результатами, полученными данным методом.

В табл. 1, 2 приведена сходимость изложенного выше метода для модуля и фазы коэффициента отражения $R$ заполненного диэлектриком рупора. Параметры $N_x$, $N_y$ определяют количество членов в разложениях магнитного тока на излучающей апертуре (8), (9), параметры $N'_x$, $N'_y$ — магнитного тока на апертуре волновода (6), (7), а $m_{\max}$, $n_{\max}$ и $m'_{\max}$, $n'_{\max}$ определяют длины рядов в матричных элементах СЛАУ, соответствующих модальным разложениям для прямоугольного резонатора (рупора) (4) и волновода (2). При практических расчётах методом Галёркина с учётом краевой особенности поля, как правило, достаточно выбрать $m_{\max} = n_{\max} = m'_{\max} = n'_{\max} = 20$; $N'_x = N'_y = 2$; $\{N_x, N_y\} = 4 \div 7$ для излучающих апертур с электрическими размерами порядка $2\lambda$.

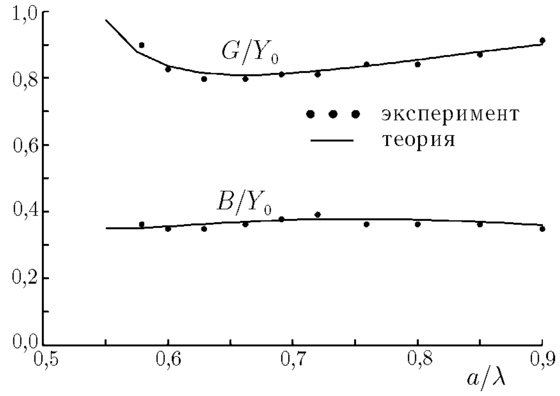



Рис. 2. Сравнение теоретических расчётов (сплошные линии) с экспериментальными результатами [9] (точки) для входной нормированной проводимости одиночного волновода с бесконечным фланцем; $a/b = 2{,}1$

Данные табл. 1, 2 соответствуют параметру $\tau = 0$ в разложениях (6), (7), что означает замену полиномов Гегенбауэра полиномами Чебышева 1-го и 2-го рода. Расчёты показывают, что при этом характер сходимости и точность результатов не претерпевают существенных изменений,

Таблица 1

Сходимость модуля и фазы коэффициента отражения для рупора по числу базисных функций на апертуре покрытия ($N'_x = N'_y = 2$; $m'_{\max} = n'_{\max} = 20$; $\varepsilon_1 = 2{,}56$; $\varepsilon = 1$; $a = 2{,}025\lambda$; $b = 0{,}9\lambda$; $a_1 = 0{,}72\lambda$; $b_1 = 0{,}31\lambda$; $\Delta = 1{,}5\lambda$).

| $N_x = N_y$ | $m_{\max} = n_{\max} = 20$ | | $m_{\max} = n_{\max} = 50$ | |
|---|---|---|---|---|
| | $\|R\|$ | $\arg R$ | $\|R\|$ | $\arg R$ |
| 2 | 0,63163 | 122,89 | 0,63114 | 120,47 |
| 3 | 0,64197 | 130,36 | 0,64268 | 128,63 |
| 4 | 0,68432 | 165,69 | 0,68592 | 165,93 |
| 5 | 0,67475 | 166,97 | 0,67649 | 167,21 |
| 6 | 0,68249 | 165,69 | 0,68291 | 165,70 |
| 7 | 0,66731 | 166,57 | 0,66837 | 166,82 |
| 8 | 0,66664 | 166,57 | 0,66813 | 166,90 |
| 9 | 0,66681 | 166,55 | 0,66818 | 166,86 |
| решение [10] | 0,6748 | 167,25 | 0,6748 | 167,25 |

Таблица 2

Сходимость модуля и фазы коэффициента отражения для рупора по числу базисных функций на апертуре волновода ($N_x = N_y = 7$; $m_{\max} = n_{\max} = 20$; параметры рупора см. в табл. 1).

| $N'_x = N'_y$ | $m'_{\max} = n'_{\max} = 20$ | | $m'_{\max} = n'_{\max} = 50$ | |
|---|---|---|---|---|
| | $\lvert R\rvert$ | $\arg R$ | $\lvert R\rvert$ | $\arg R$ |
| 1 | 0,68055 | 167,43 | 0,68079 | 167,42 |
| 2 | 0,66731 | 166,57 | 0,66760 | 166,71 |
| 3 | 0,67124 | 166,98 | 0,67142 | 167,10 |
| 4 | 0,67055 | 166,93 | 0,67057 | 167,01 |
| 5 | 0,67052 | 166,97 | 0,67056 | 167,04 |
| решение [10] | 0,6748 | 167,25 | 0,6748 | 167,25 |

а оба базиса обеспечивают практически одинаковую эффективность метода для данного класса задач. В частности, в соответствующих приближениях значения $|R|$ для двух названных базисов отличаются на величину порядка $2\cdot 10^{-4}$, а отличия $\arg R$ составляют сотые доли градуса.

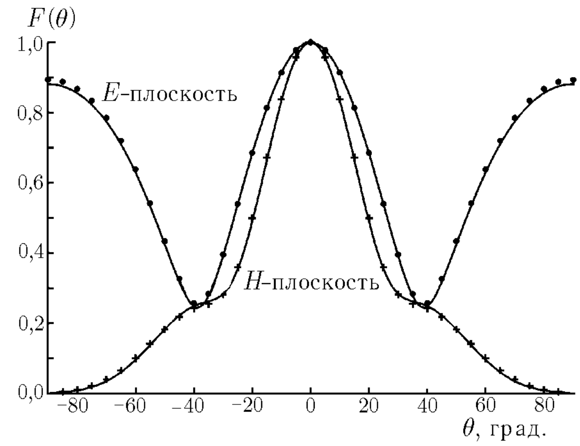



Рис. 3. Сравнение расчётов по данной теории (сплошные линии) с теоретическими результатами [10] (•, +) для ДН ступенчатого рупора с диэлектрическим заполнением. Параметры рупора: $\varepsilon_1 = 2{,}56$; $\varepsilon = 1$; $a = 2{,}025\lambda$; $b = 0{,}9\lambda$; $a_1 = 0{,}72\lambda$; $b_1 = 0{,}31\lambda$; $\Delta = 1{,}1\lambda$

В нижней строке табл. 1, 2 приведены значения $|R|$ и $\arg R$, рассчитанные методом Галёркина с тригонометрическими базисными функциями, соответствующими собственным TE/TM-волнам прямоугольного волновода [10] при учёте 15-ти типов волн на апертуре волновода и 72-х типов волн на апертуре рупора. Из табл. 1, 2 видно, что расхождение результатов двух методов составляет всего около 1 %. В тех случаях, когда при решении апертурных задач методом моментов в качестве базиса выбираются различные импульсные функции, известен упрощённый критерий, определяющий количество базисных функций, которое должно быть учтено [12]: не менее пяти функций разложения на длину волны для каждой компоненты тока или пятидесяти функций разложения на квадрат длины волны. Исходя из этого, в рассмотренном в табл. 1, 2 примере должно быть учтено не менее 100 импульсных базисных функций. Таким образом, выбор в качестве базисных функций взвешенных полиномов (6)–(9) обеспечивает приемлемую точность при минимальном числе членов разложения.

Область расширения ступенчатого рупора обычно является многомодовой, поэтому были исследованы сходимость и устойчивость метода вблизи критических частот возникающих в ней высших типов волн ($TE_{30}$, $TE_{50}$ и др.). Расчёты показали, что сходимость метода вблизи этих частот практически не ухудшается, а малые изменения размеров апертуры рупора вблизи критических значений в интервале $(10^{-5}\div 10^{-3})\lambda$ вызывали изменения результатов (коэффициента отражения и диаграммы направленности) примерно того же порядка. При этом переход от размеров апертуры, немного меньших критических, к размерам, немного бо́льшим критических,

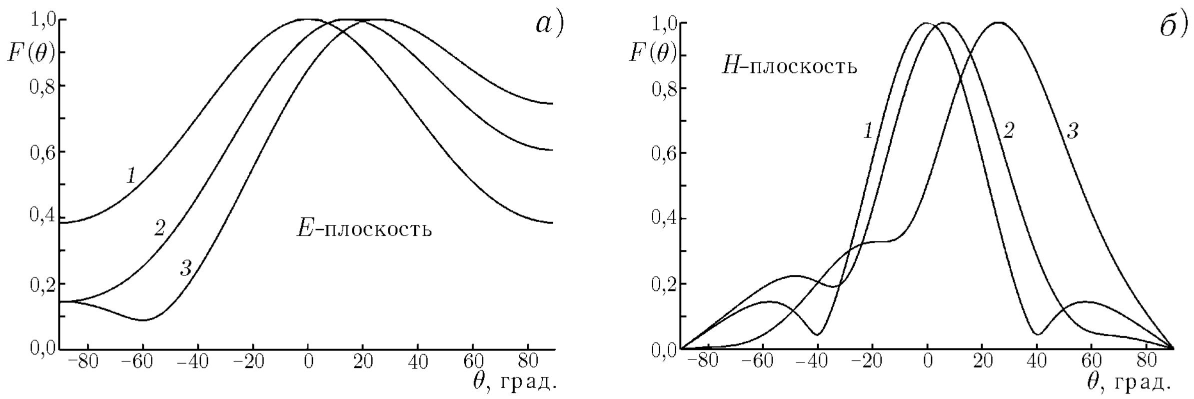



Рис. 4. Диаграммы направленности в главных плоскостях ступенчатого рупора с различным положением возбуждающего волновода. Параметры рупора $\varepsilon_1 = \varepsilon = 1$; $a = 1{,}6\lambda$; $b = 0{,}65\lambda$; $a_1 = 0{,}72\lambda$; $b_1 = 0{,}31\lambda$; $\Delta = 0{,}7\lambda$. Положение возбуждающего волновода: ($a$) $x_{01} = 0{,}44\lambda$; кривая *1* соответствует $y_{01} = 0{,}17\lambda$; *2* — $y_{01} = 0{,}1\lambda$; *3* — $y_{01} = 0{,}01\lambda$; (*б*) $y_{01} = 0{,}17\lambda$; кривая *1* соответствует $x_{01} = 0{,}44\lambda$; *2* — $x_{01} = 0{,}3\lambda$; *3* — $x_{01} = 0{,}01\lambda$

сопровождается плавным изменением ДН и $R$.

Сравнение характеристик направленности ступенчатых рупоров, рассчитанных изложенным выше методом, с результатами [10] также показывает хорошее совпадение, что видно из рис. 3, где изображены ДН в $E$- и $H$-плоскости одного из вариантов рупоров с диэлектрическим заполнением.

В качестве примера на рис. 4 приведены ДН в главных плоскостях рупорного излучателя без диэлектрического заполнения. При этом наряду со случаем симметричного расположения возбуждающего волновода (кривые *1* на рис. 4*а*, *б*) рассмотрены и случаи, когда он смещён вдоль узкой либо широкой сторон излучающей апертуры, т. е. в $E$- или $H$-плоскостях соответственно. Происходящее при этом смещение максимума ДН в сторону, противоположную смещению волновода, объясняется тем, что распределение поля на раскрыве рупора характеризуется запаздыванием по фазе в точках, более удалённых от возбуждающего волновода.

Влияние геометрии коробчатого рупора на ДН в главных плоскостях показано на рис. 5. При увеличении размера рупора в $E$-плоскости до $b \sim \lambda$ происходит сужение ДН в $E$-плоскости и уменьшение бокового излучения (рис. 5*a*). Одновременно с этим ухудшается согласование излучателя из-за возрастающего скачкообразного изменения размера структуры в $E$-плоскости. В частности, при фиксированном продольном размере рупора на рис. 5*a* модуль коэффициента отражения возрастает от 0,262 (кривая *1*) до 0,657 (кривая *7*). Дальнейшее увеличение размера рупора в $E$-плоскости ($b > \lambda$) приводит к существенному увеличению бокового излучения.

Особый интерес представляют ДН коробчатых рупоров в $H$-плоскости, которые делают этот тип излучателя подходящим для использования в составе АР с высокой направленностью [1, 2]. Размер апертуры рупора $a$ в $H$-плоскости выбирается в этом случае исходя из условия существования волны $\mathrm{TE}_{30}$ и затухания волны $\mathrm{TE}_{50}$. В силу симметрии структуры во́лны с чётными индексами не возбуждаются, и в области расширения существуют только волны $\mathrm{TE}_{10}$ и $\mathrm{TE}_{30}$, причём амплитуда возбуждённой волны $\mathrm{TE}_{30}$ определяется величиной скачкообразного изменения размера структуры в $H$-плоскости. Поскольку фазовые скорости волн $\mathrm{TE}_{10}$ и $\mathrm{TE}_{30}$ различны, выбором длины рупора можно добиться, чтобы на раскрыве излучателя сдвиг фаз между ними был близок к $\pi$, т. е. они находились в противофазе. Если при этом амплитуда волны $\mathrm{TE}_{30}$ составляет примерно половину амплитуды основной волны, то на раскрыве излучателя получится

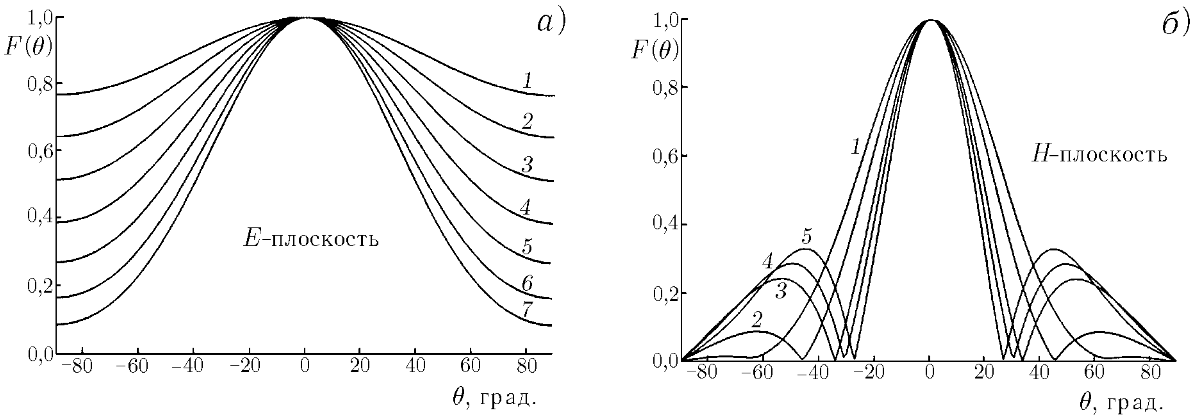



Рис. 5. Диаграммы направленности в главных плоскостях для ступенчатых рупоров при изменяющихся размерах раскрыва при $\varepsilon_1 = \varepsilon = 1$; $a_1 = 0{,}72\lambda$; $b_1 = 0{,}31\lambda$; (*а*) $a = 1{,}65\lambda$; $\Delta = 0{,}9\lambda$; кривая *1* соответствует $b = 0{,}35\lambda$; *2* — $b = 0{,}45\lambda$; *3* — $b = 0{,}55\lambda$; *4* — $b = 0{,}65\lambda$; *5* — $b = 0{,}75\lambda$; *6* — $b = 0{,}85\lambda$; *7* — $b = 0{,}95\lambda$; (*б*) $b = 0{,}32\lambda$; кривая *1* соответствует $a = 1{,}45\lambda$; $\Delta = 0{,}62\lambda$; *2* — $a = 1{,}55\lambda$; $\Delta = 0{,}67\lambda$; *3* — $a = 1{,}65\lambda$; $\Delta = 0{,}92\lambda$; *4* — $a = 1{,}8\lambda$; $\Delta = 1{,}18\lambda$; *5* — $a = 2{,}01\lambda$; $\Delta = 1{,}63\lambda$

почти равномерное амплитудно-фазовое распределение. В этом случае ДН рупора в $H$-плоскости будет иметь нули (рис. 5*б*), расположенные в секторе углов примерно $25^\circ < \theta < 55^\circ$. Несмотря на наличие боковых лепестков ДН, коэффициент направленного действия такого излучателя оказывается выше, чем у плавно расширяющегося $H$-секториального рупора. При этом удаётся обеспечить достаточно хорошее согласование излучателя. Например, на рис. 5*б* модуль коэффициента отражения $|R|$ меняется в пределах от 0,23 (кривая *2*) до 0,27 (кривая *4*).

Кроме того, излучатели такого типа в составе АР использовались для подавления дифракционных лепестков ДН в $H$-плоскости [1]. Как известно, ДН решётки излучателей определяется как произведение двух сомножителей: ДН одиночного излучателя и множителя решётки. В случаях, когда ближний дифракционный лепесток расположен в секторе $30^\circ < \theta < 50^\circ$, его почти полностью можно подавить, выбрав положение нуля в ДН элемента примерно совпадающим с положением дифракционного максимума. Требуемое же положение нулей в ДН излучателя, как видно из рис. 5*б*, может быть обеспечено выбором его геометрии.

Автор благодарен Лереру А. М., Мануилову Б. Д., Волошину В. А. за полезные дискуссии и Шабловскому В. М. за численные результаты, предоставленные для тестирования данного метода.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Интегралы, входящие в итоговую СЛАУ, можно записать в следующем виде:

$$I^{(\nu)}_{i'k'ik}(\alpha,\beta) = \sigma_{i'k'ik} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \frac{\Phi^{(\nu)}_{i'k'ik}(\alpha x_1, \beta x_2)}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 1}}\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2, \qquad (\text{П1})$$

где $\nu = 1, 2$,

$$\Phi^{(1)}_{i'k'ik}(\alpha x_1, \beta x_2) = J_{i'}(\alpha x_1) J_i(\alpha x_1) J_{k'}(\beta x_2) J_k(\beta x_2), \qquad (\text{П2})$$

$$\Phi^{(2)}_{i'k'ik}(\alpha x_1, \beta x_2) = \frac{J_{i'}(\alpha x_1) J_i(\alpha x_1) J_{k'+1}(\beta x_2) J_{k+1}(\beta x_2)}{x_2^2}, \qquad (\text{П3})$$

$\alpha = ka/2 = \pi a/\lambda$, $\beta = kb/2 = \pi b/\lambda$, $J_i(x)$ — функция Бесселя 1-го рода $i$-го порядка. Отметим, что подынтегральная функция в (П1) имеет интегрируемую особенность типа точки ветвления.

Воспользовавшись асимптотической формулой для функции Бесселя при больших значениях аргумента [20] ($J_\nu(z) \propto z^{-1/2}$ при $z \to \infty$), можно показать, что подынтегральные функции в (П1) убывают не хуже, чем $1/(x_1 x_2 \sqrt{x_1^2 + x_2^2})$, при $\{x_1, x_2\} \to \infty$. Исходя из этого, разобьём область интегрирования в (П1) на четыре части, задав постоянные $\{A_1, A_2\} > 1$ таким образом, чтобы можно было заменить соответствующие функции Бесселя их асимптотическими представлениями при больших $x_1$, $x_2$:

область I: $0 \le x_1 \le A_1$, $0 \le x_2 \le A_2$;

область II: $0 \le x_1 \le A_1$, $x_2 \ge A_2$;

область III: $x_1 \ge A_1$, $0 \le x_2 \le A_2$;

область IV: $x_1 \ge A_1$, $x_2 \ge A_2$.

Для области II заменим в (П2), (П3) функции Бесселя, зависящие от $x_2$, их асимптотическими представлениями. После этого соответствующие интегралы по переменной $x_2$ вычисляются аналитически, а остающиеся однократные интегралы по переменной $x_1$ с конечными пределами легко вычисляются численно, например с помощью квадратур Гаусса. Аналогичным образом выполняется интегрирование по области III. В области IV все функции Бесселя в (П2), (П3) могут быть заменены их асимптотическими представлениями, после чего все интегралы берутся аналитически.

Вычисление интегралов (П1) в прямоугольной области I удобно выполнить, перейдя к полярным координатам. При этом были использованы два способа вычисления. В первом способе интегрирование по области I выполняется численно, например с помощью квадратурных формул Гаусса и формулы прямоугольников. При этом особенность подынтегральной функции устраняется с помощью стандартной замены переменных. Второй способ вычисления интегралов аналитический. Рассмотрим его на примере интегралов первого типа ($\nu = 1$ в (П1)). Переходя к полярным координатам $r$, $\varphi$ и конечному верхнему пределу интегрирования $R > 1$, с учётом (П2) запишем

$$I^{(1)}_{i'k'ik}(\alpha, \beta, R) = \sigma_{i'k'ik} \int\limits_0^{\pi/2} \mathrm{d}\varphi \int\limits_0^R \frac{J_{i'}(\alpha r\cos\varphi) J_i(\alpha r\cos\varphi) J_{k'}(\beta r\sin\varphi) J_k(\beta r\sin\varphi)}{\sqrt{r^2-1}}\, r\,\mathrm{d}r. \tag{П4}$$

Далее в подынтегральном выражении (П4) разложим попарно произведения функций Бесселя с одинаковыми аргументами в степенной ряд [21]. Два полученных ряда по степеням аргументов функций Бесселя сходятся абсолютно и равномерно, поэтому при их перемножении получаем двойной ряд, который также сходится абсолютно и равномерно и может быть почленно проинтегрирован [22]. Выполнив почленное интегрирование в (П4), получаем

$$I^{(1)}_{i'k'ik}(\alpha, \beta, R) = \sigma_{i'k'ik} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^{m+l}\, d_m(i', i) \alpha^{2m+i'+i} d_l(k', k) \beta^{2l+k'+k} a_{ml}(R). \tag{П5}$$

Здесь коэффициенты разложения $d_m$ и $d_l$ удобно записать, воспользовавшись формулой удвоения гамма-функции [20]:

$$d_m(i', i) = \frac{\Gamma\left(m + \dfrac{i'+i+1}{2}\right) \Gamma\left(m + \dfrac{i'+i}{2} + 1\right)}{\sqrt{\pi}\, \Gamma(m+1)\Gamma(m+1+i')\Gamma(m+1+i)\Gamma(m+1+i+i')}\,. \tag{П6}$$

Кроме того, в (П5) использованы обозначения

$$a_{ml}(R) = a_{ml}^{(1)} \sum_{n=0}^{p} B_n \, (R^2 - 1)^{n+1/2} - j a_{ml}^{(2)}, \tag{П7}$$

где $j$ — мнимая единица,

$$a_{ml}^{(1)} = \frac{\Gamma\left(m + \dfrac{i' + i + 1}{2}\right) \Gamma\left(l + \dfrac{k' + k + 1}{2}\right)}{2\Gamma(p+1)},$$

$$a_{ml}^{(2)} = \frac{\sqrt{\pi}\, \Gamma\left(m + \dfrac{i' + i + 1}{2}\right) \Gamma\left(l + \dfrac{k' + k + 1}{2}\right)}{4\Gamma(p+3/2)},$$

$B_n = (2n{+}1)^{-1} \binom{p}{n}$; $\binom{p}{n} = p\,(p{-}1)\,\ldots\,(p{-}k{+}1)/n!$ — биномиальные коэффициенты; $p = m{+}l{+}q$; $q = (i' + i + k' + k)/2$.

Учитывая свойства гамма-функции, коэффициенты (П6), (П7) легко вычисляются с помощью рекуррентных соотношений

$$d_{m+1}(i', i) = d_m(i', i) \frac{[m + (i' + i + 1)/2]\,[m + (i' + i)/2 + 1]}{(m+1)\,(m+1+i')\,(m+1+i)\,(m+1+i+i')},$$

$$a_{m+1\,l}^{(1)} = a_{m\,l}^{(1)} \frac{m + (i' + i + 1)/2}{p+1}, \qquad a_{m\,l+1}^{(1)} = a_{m\,l}^{(1)} \frac{l + (k' + k + 1)/2}{p+1}.$$

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Sehm T., Lehto A., Raeisanen A. V. // IEEE Trans. Anten. Propag. 1999. V. 47, No. 7. P. 1 125.
2. Волошин В. А. // Вопросы радиоэлектроники. Сер. ОВР. 1993. Вып. 16. С. 3.
3. Liu K., Balanis C. A., Birtcher C. R., Barber C. R. // IEEE Trans. Anten. Propag. 1993. V. 41, No. 10. P. 1 379.
4. Encinar J. A., Rebollar J. M. // IEEE Trans. Anten. Propag. 1986. V. 34, No. 8. P. 961.
5. Wriedt T., Wolf K.-H., Arndt F., Tucholke U. // IEEE Trans. Anten. and Propag. 1989. V. 37, No. 6. P. 780.
6. Мануилов Б. Д., Борисов Б. Г., Сариев К. Э., Шабловский В. М. // Радиотехника. 1991. № 4. С. 60.
7. Patel P. D., Bailey M. C. // IEEE Trans. Anten. Propag. 1997. V. 45, No. 12. P. 1 749.
8. Левин Л. Современная теория волноводов. М.: Изд-во иностр. лит., 1954.
9. Mailloux R. J. // IEEE Trans. Anten. Propag. 1969. V. 17, No. 1. P. 49.
10. Борисов Б. П., Мануилов Б. Д., Шабловский В. М. // Радиотехника. 1990. № 5. С. 75.
11. Булгаков А. А., Горобец Н. Н., Лященко В. А. // Радиотехника и электроника. 2001. Т. 46, № 8. С. 961.
12. Харрингтон Р., Мауц Д. // Численные методы теории дифракции. М.: Мир, 1982. С. 79.
13. Заргано Г. Ф., Лерер А. М., Ляпин В. П., Синявский Г. П. Линии передачи сложных сечений. Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1983. 320 с.
14. Мануилов М. Б., Синявский Г. П. // Радиотехника и электроника. 2001. Т. 46, № 2. С. 141.

15. Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Т. 2. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 886 с.
16. Марков Г. Т., Панченко Б. А. // Изв. вузов. Радиотехника. 1964. Т. 7, № 1. С. 64.
17. Rahmat-Samii Y. // IEEE Trans. Microw. Theory Tech. 1975. V. 23, No. 9. P. 762.
18. Марков Г. Т., Чаплин А. Ф. Возбуждение электромагнитных волн. М.: Радио и связь, 1983. 296 с.
19. Сазонов Д. М. Антенны и усторойства СВЧ. М.: Высш. шк., 1988. 432 с.
20. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовиц, И. Стиган. М.: Наука, 1979. 832 с.
21. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1974. 296 с.
22. Титчмарш Е. Теория функций. М.: Наука, 1980. 464 с.

Ростовский госуниверситет,
г. Ростов-на-Дону, Россия

Поступила в редакцию
20 мая 2002 г.

**NUMERICAL-ANALYTICAL IMPLEMENTATION OF GALERKIN'S METOD FOR ANALYSIS OF BOX HORN ANTENNAS**

*M. B. Manuilov*

We describe a rigorous electrodynamical technique for analyzing box horn antennas. The method is based on the dyadic Green's function technique and Galerkin's method with allowance for the edge condition. The obtained results are compared with experimental and theoretical results of other works. The characteristics of box horn radiation patterns are considered.

УДК 621.3

# О ВОЗМОЖНОСТИ ВЗАИМОЗАХВАТА ВСТРЕЧНЫХ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ В ФОТОПОЛИМЕРИЗУЮЩИХСЯ КОМПОЗИЦИЯХ

*А. Л. Лонин, С. Н. Менсов*

Численно и экспериментально исследуется взаимодействие встречных световых пучков в фотополимеризующейся композиции. Предлагается качественная модель, позволяющая определить условия реализации режима взаимозахвата пучков. Показана возможность формирования единого неразветвляющегося канала между многомодовыми световодами в акриловых полимерах при углах между осями пучков до $4^\circ$.

Оптические волноведущие каналы находят широкое применение в современных информационных технологиях [1]. Создание таких каналов возможно при самоканализации световых пучков в нерелаксирующих нелинейных средах, например в фотополимеризующихся композициях. Самоканализация наблюдается в фотополимерах, чувствительных как к ультрафиолетовому [2], так и к видимому излучению [3]. Последние позволяют формировать световоды с длиной до нескольких сантиметров при интенсивности воздействующего света не более 10 мВт/мм$^2$. Однако при оптическом синтезе волноведущих структур также возникает необходимость исследования взаимодействия нескольких пучков. Такая задача рассматривалась ранее для случая полимерных сред с отрицательной нелинейностью [4]. В данной работе исследуется взаимодействие двух пучков, распространяющихся навстречу друг другу в слабопоглощающей среде с положительной нелинейностью (фотополимере), и обсуждаются условия реализации их взаимозахвата.

В фотополимеризующейся композиции под действием света происходит необратимый переход от жидкого мономера к твёрдому полимеру, сопровождающийся возрастанием показателя преломления [5]. Изменение показателя преломления зависит от экспозиции и может быть описано следующей экспозиционной характеристикой:

$$\Delta n(H) = n(H) - n_0 = \Delta n_{\max}\,[1 - \exp(-H^\gamma)], \tag{1}$$

где $n_0$ — показатель преломления мономера, $\Delta n_{\max}$ — максимальная добавка к показателю преломления при полной полимеризации, $H$ — нормированная экспозиция, связанная с интенсивностью света $I$ следующим соотношением:

$$H = \frac{1}{H_0}\int\limits_0^t I(t')\,\mathrm{d}t'. \tag{2}$$

Здесь $H_0$ и $\gamma$ — параметры, определяющие контраст фотополимеризующейся композиции; обычно полагают $\gamma = 2$ [6, 7], однако в сетчатых полимерах $\gamma$ может иметь и большее значение [8]. Из выражений (1) и (2) следует, что пространственно неоднородное распределение интенсивности инициирующего излучения приводит к формированию неоднородного распределения показателя преломления. Для двух некоррелированных между собой двумерных гауссовых пучков, распространяющихся навстречу друг другу под небольшим углом $\alpha$ к оси $z$, в рамках параксиального приближения [7] профиль суммарной интенсивности в плоскости $xz$ имеет вид

$$I_\Sigma(x', z') = I(0,0)\left[\frac{1}{\sqrt{1 + (l - z')^2}}\,\exp\!\left(-\frac{2\,(x' - b\,(l - z')\,\operatorname{tg}\alpha)^2}{1 + (l - z')^2}\right) + \right.$$

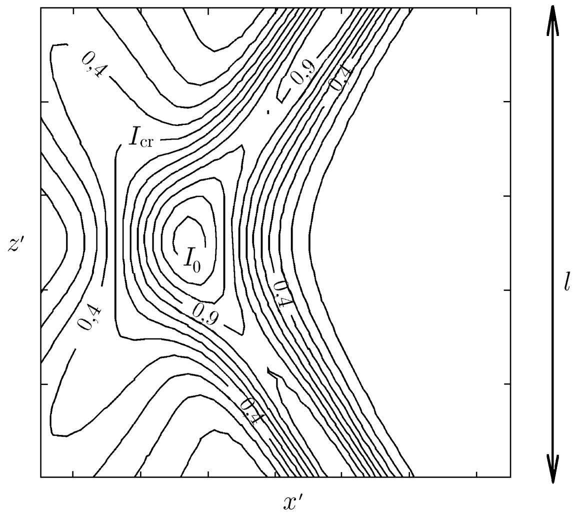



Рис. 1. Распределение суммарной интенсивности двух встречных пучков при $l = 2{,}5$ и $\alpha = 2^\circ$

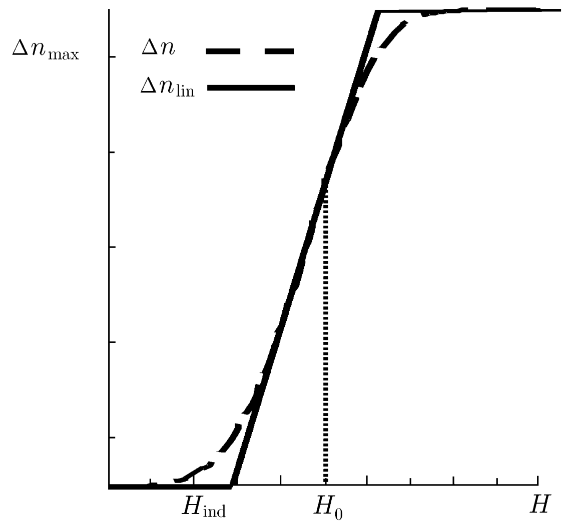



Рис. 2. Кусочно-линейная аппроксимация экспозиционной характеристики фотополимеризующейся композиции

$$+\frac{1}{\sqrt{1+z'^2}}\exp\biggl(-\frac{2\,(x'-bz'\operatorname{tg}\alpha)^2}{1+z'^2}\biggr)\biggr]. \qquad (3)$$

Здесь $I(0,0)$ — интенсивность в центре перетяжки каждого из пучков, $l$, $b$, $x'$ и $z'$ — безразмерные величины, определяемые следующими соотношениями:

$$x' = x/a, \qquad z' = 2z/(ka^2), \qquad b = ka/2, \qquad l = 2L/(ka^2), \qquad (4)$$

где $a$ — полуширина пучка, $L$ — расстояние между входными сечениями пучков, $k = 2\pi/\lambda$, $\lambda$ — длина волны излучения. Пример такого распределения представлен на рис. 1. Для световых пучков, обладающих большой дифракционной расходимостью (см. рис. 1), линии постоянной интенсивности (изофоты) имеют крестообразный вид вплоть до некоторой критической величины ($I < I_{\rm cr}$). Для бóльших интенсивностей они имеют округлую форму, расположенную в области пересечения пучков. Следовательно, уже в начальном распределении интенсивности $I$ существуют «предвестники» формирования крестообразной полимерной структуры, в которой пучки будут распространяться без изменения первоначального направления. Однако полимеризация идёт быстрее в точках с большей интенсивностью (см. (1), (2)). Поэтому на начальном этапе экспонирования среды будет формироваться область повышенного показателя преломления, форма которой соответствует строению изофот в области $I > I_{\rm cr}$ (см. рис. 1). На границе этой области будет происходить отражение каждого пучка в направлении, противоположном направлению распространения другого. При достаточной величине показателя преломления наступит полное внутреннее отражение и взаимозахват пучков.

Интенсивность, соответствующая критической изофоте, зависит от угла между пучками и от их дифракционной расходимости $l$ (4), а коэффициент отражения определяется максимальным изменением показателя преломления $\Delta n_{\rm max}$. Для нахождения соотношения между этими параметрами, при котором наблюдается взаимозахват пучков, воспользуемся следующей моделью.

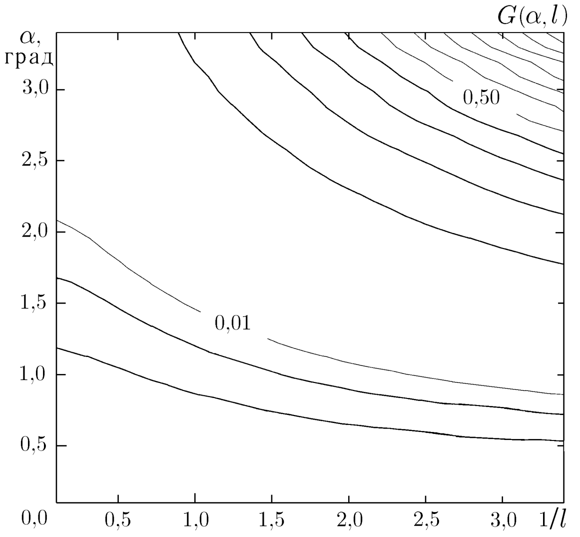



Рис. 3. Вид функции $G(\alpha,l)$

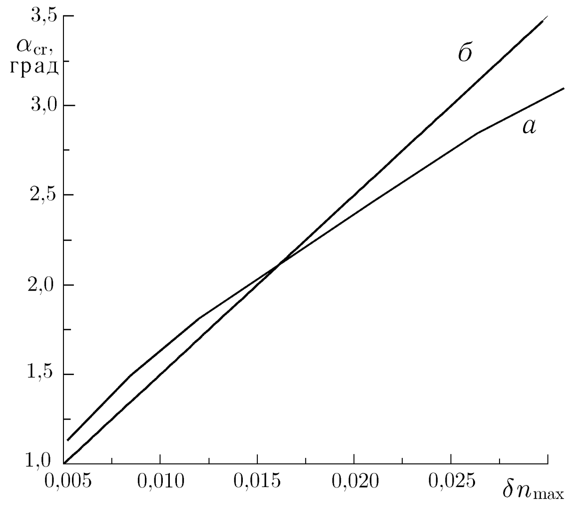



Рис. 4. Зависимость критического угла между пучками $\alpha_{\rm cr}$, необходимого для выполнения условий взаимозахвата, от максимального изменения показателя преломления при $l = 2{,}5$ и $\gamma = 4$

Аппроксимируем экспозиционную характеристику среды кусочно-линейной функцией:

$$\Delta n_{\rm lin}(H) = \begin{cases} 0, & H < H_{\rm ind}; \\ \Delta n_{\rm max}\left[\gamma \exp(-1)\,(H-1) + 1 - \exp(-1)\right], & H > H_{\rm ind}; \\ \Delta n_{\rm max}, & H > 1 + \gamma^{-1}, \end{cases} \tag{5}$$

где $H_{\rm ind} = 1 - [\exp(1) - 1]/\gamma$, т. е. будем считать, что до достижения экспозицией некоторого значения $H_{\rm ind}$ модификации среды не происходит. Для реальных сред это значение называется периодом индукции [4]. Далее показатель преломления возрастает по линейному закону со скоростью, соответствующей производной $\Delta n(H)$ в точке $H = 1$ (см. рис. 2). В этом случае к началу образования предвестников $X$-образной структуры (в момент времени $t = H_{\rm ind}/I_{\rm cr}$) в центре области пересечения пучков показатель преломления должен измениться на величину $\Delta n_{\rm lin}\,(H_{\rm ind} I_0/I_{\rm cr})$, где $I_0$ — максимальная интенсивность в этой области, причём $H_{\rm ind} I_0/I_{\rm cr} < 1 + \gamma^{-1}$ для небольших углов $\alpha$ и значений $\gamma$, соответствующих существующим фотополимерам. Сравнивая показатель преломления в центре области пересечения с величиной, необходимой для полного внутреннего отражения, с учётом закона Снелля [10] можно получить следующее инвариантное соотношение для параметров пучков ($\alpha$ и $l$), определяющее условия взаимозахвата:

$$G(\alpha,l) = (\cos^{-1}\alpha - 1)\,\frac{I_{\rm cr}(\alpha,l)}{I_0(\alpha,l) - I_{\rm cr}(\alpha,l)} \le \delta n_{\rm max}\left(\frac{\gamma+1}{\exp(1)} - 1\right), \tag{6}$$

где $\delta n_{\rm max} = \Delta n_{\rm max}/n_0$ — максимальное относительное изменение показателя преломления. Функцию $G(\alpha,l)$ можно определить с помощью (3) (см. рис. 3). Из выражения (6) видно, что каждая изолиния представляет собой зависимость критического угла $\alpha_{\rm cr}$, при котором происходит переход от режима взаимозахвата к независимому распространению пучков, от дифракционной расходимости $l$ при определённых параметрах среды ($\gamma$ и $\delta n_{\rm max}$). Пример зависимости критического угла от максимального изменения показателя преломления, полученной на основе описанной выше модели, представлен на рис. 4 (кривая $a$).

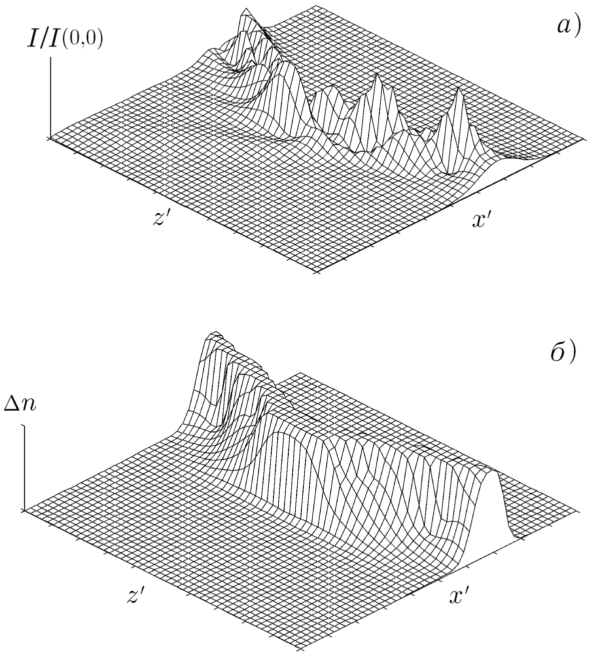



Рис. 5. Распределения интенсивности света (*а*) и показателя преломления (*б*) для случая взаимозахвата пучков ($\alpha = 1{,}5^\circ$)

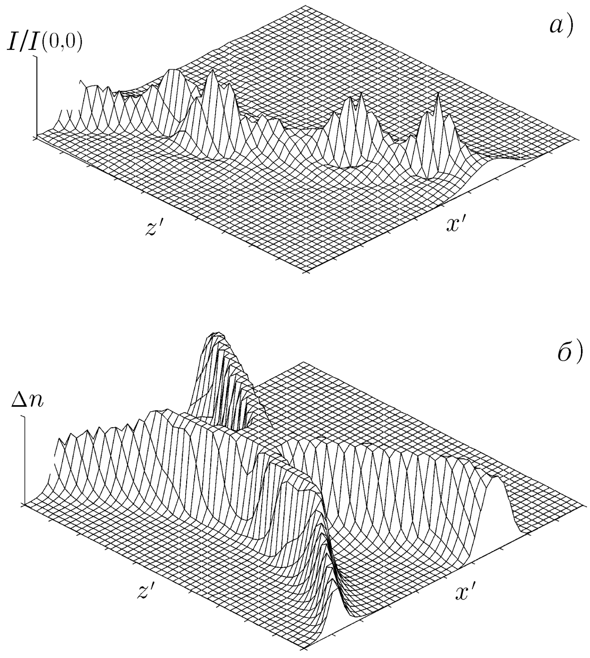



Рис. 6. Распределения интенсивности света (*а*) и показателя преломления (*б*) для случая образования крестообразной волноведущей структуры ($\alpha = 3{,}5^\circ$)

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ В ФОТОПОЛИМЕРЕ

Для проверки сделанных выше выводов об условиях реализации режима самозахвата пучков было проведено численное моделирование при следующих предположениях. Считалось, что характерный масштаб изменения комплексной амплитуды поля $A(x,z)$ в поперечном сечении светового пучка меньше, чем масштаб изменения амплитуды вдоль пучка, а модификация среды происходит медленно по сравнению с временем распространения световой волны на расстояние $L$. В этом случае поведение пучков будет описываться следующими параболическими уравнениями для комплексных амплитуд поля [10]:

$$\begin{aligned} 2ik\,\frac{\mathrm{d}A_1(x,z)}{\mathrm{d}z} &= \frac{\partial^2 A_1(x,z)}{\partial x^2} + \frac{2k^2\,\Delta n(x,z,H)}{n_0}\,A_1(x,z),\\ -2ik\,\frac{\mathrm{d}A_2(x,z)}{\mathrm{d}z} &= \frac{\partial^2 A_2(x,z)}{\partial x^2} + \frac{2k^2\,\Delta n(x,z,H)}{n_0}\,A_2(x,z), \end{aligned} \tag{7}$$

где комплексная амплитуда $A_1(x,z)$ соответствует первому пучку, распространяющемуся в положительном направлении оси $z$, а комплексная амплитуда $A_2(x,z)$ — второму пучку, распространяющемуся в противоположном направлении. Граничные условия имеют вид

$$A_1(x,0) = A_0 \exp\!\left(-\frac{x^2}{a^2} + ik_x x\right), \qquad A_2(x,L) = A_0 \exp\!\left(-\frac{x^2}{a^2} - ik_x x\right). \tag{8}$$

Здесь $A_0^2 = I(0,0)$, $k_x = k\sin\alpha$ — поперечная составляющая волнового вектора, определяющая угол наклона пучка к оси $z$, $\Delta n$ определяется из выражения (1).

При численном моделировании исследовалась эволюция $\Delta n$ в образующемся полимерном канале и поведение в нём излучения при различных параметрах пучков ($\alpha$ и $l$) и среды ($\Delta n_{\max}$ и $\gamma$).

Результаты проведённого моделирования подтвердили возможность формирования как единого неразветвляющегося волноводного канала, так и крестообразной структуры, определяющей распространение пучков в первоначальных направлениях. Примеры характерных для этих случаев распределений интенсивности света и показателя преломления среды представлены на рис. 5 и 6 соответственно для следующих значений параметров: $a = 7$ мкм; $\lambda = 0{,}63$ мкм; $\gamma = 4$; $\delta n_{\max} = 1$ %; $n_0 = 1{,}4$ (при этом $\alpha_{\rm cr} = 2°$). Зависимость $\alpha_{\rm cr}$ от $\delta n_{\max}$ приведена на рис. 4 (кривая *б*). Отсюда можно сделать вывод, что описанная выше качественная модель позволяет с достаточной точностью оценивать характер синтезируемой волноведущей структуры при заданных параметрах пучка и среды.

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РЕЖИМА ВЗАИМОЗАХВАТА ПУЧКОВ В ФОТОПОЛИМЕРЕ

Принимая во внимание, что эффект самоканализации наблюдается также для излучения, выходящего из торца световода [11], экспериментальное исследование процесса самозахвата было проведено на примере световых пучков, формирующихся на выходе двух градиентных многомодовых оптических волокон с диаметром сердцевины 50 мкм. В качестве нелинейной среды использовалась фотополимеризующаяся композиция на основе ОКМ-2 с хинонным фотоинициирующим комплексом [12]. Особенностью данной фоторегистрирующей среды является зависимость её контраста от интенсивности воздействующего излучения. Так, при интенсивности $I = 2$ мВт/мм$^2$ параметры данной среды следующие: $H_0 = 40$ мВт · с/мм$^2$, $\gamma = 4$; при $I = 10$ мВт/мм$^2$ параметры среды $H_0 = 80$ мВт · с/мм$^2$, $\gamma = 2$. Данные значения были определены методом светорасеяния [13].

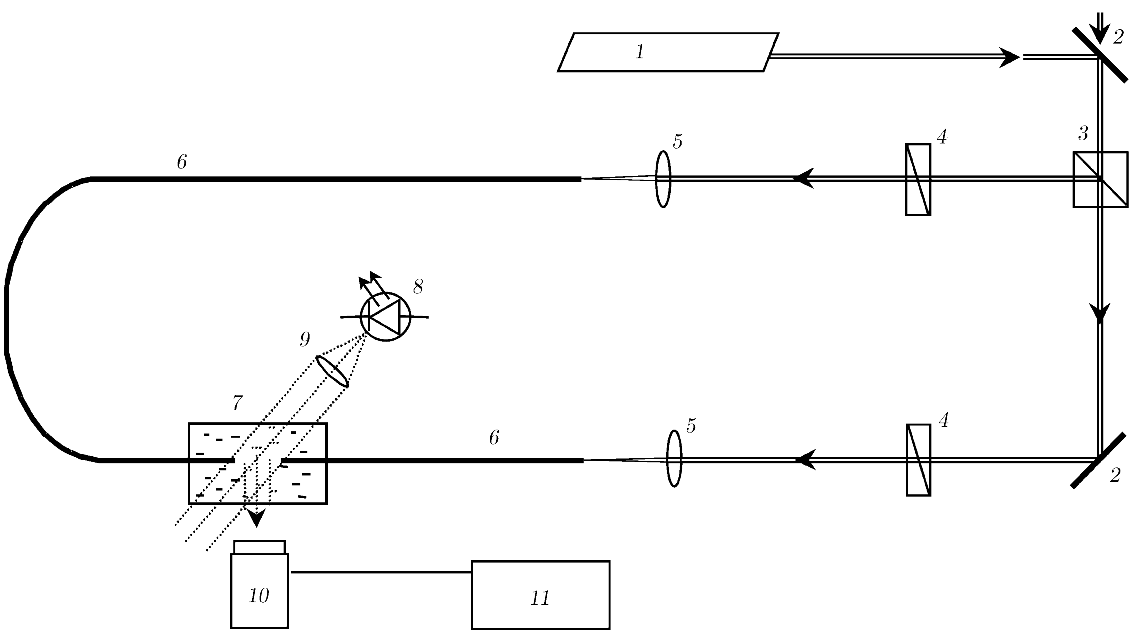



Рис. 7. Схема экспериментальной установки

Схема экспериментальной установки представлена на рис. 7. Здесь излучение He-Ne лазера *1* с длиной волны $\lambda = 0{,}63$ мкм разделялось на два пучка с помощью зеркал *2* и светоделительного кубика *3*. Затем эти пучки фокусировались на торцы оптических волокон *6* с помощью линз *5*. В начале эксперимента интенсивность света, идентичная для обоих пучков, выставлялась поляризационными аттенюаторами *4* и контролировалась калиброванным фотоприёмником. Взаимодействие пучков происходило в кювете *7* с фотополимеризующейся композицией. Визуализация процесса роста полимерного канала велась посредством боковой подсветки образующейся структуры инфракрасным излучением светодиода *8* с длиной волны $\lambda = 0{,}83$ мкм, коллимированным линзой *9*. Данный свет не вызывает реакцию фотополимеризации. Эволюция показателя преломления в объёме среды регистрировалась видеокамерой *10* и фиксировалась в цифровом виде с помощью ЭВМ *11*. Как показало проведённое исследование, формирование общего канала, соединяющего волокна, наблюдается только в случае интенсивности световых пучков менее 10 мВт/мм$^2$ при $\gamma > 2$. Самозахват происходит при углах $\alpha$ от 0 до 4°. За пределами этого интервала образующийся канал приобретает $X$-образную форму. Фотографии соответствующих полимерных структур, синтезированных оптическим излучением, представлены на рис. 8.

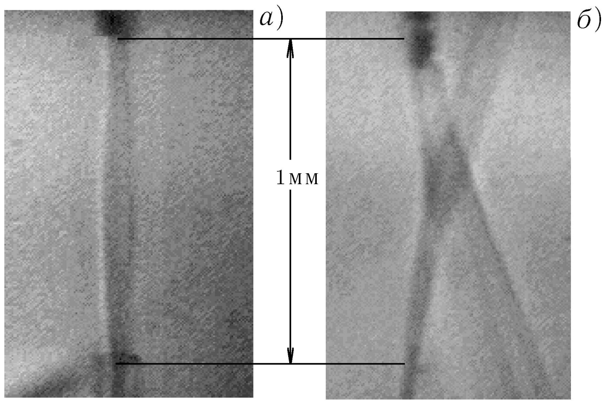



Рис. 8. Фотографии синтезированных оптическим излучением полимерных каналов при различном угле между направлениями распространения пучков: $\alpha = 2°$ (*а*) и $\alpha = 8°$ (*б*). Интенсивность излучения $I = 2$ мВт/мм$^2$; $\gamma \approx 4$

Таким образом, проведённое исследование показывает возможность осуществления режима взаимозахвата световых пучков, распространяющихся навстречу друг другу в фотополимере, что может быть использовано, в частности, для соединения оптических волокон. Для композиций на основе акриловых олигомеров взаимозахват может происходить при углах между пучками, достигающих нескольких градусов.

Работа поддержана РФФИ (грант № 01–03–33040) и научной школой В. А. Зверева и Н. С. Степанова (№ 00–15–96741).

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Ефтихеев Н. Н., Ефтихеева О. А., Компанец И. Н. и др. Информационная оптика. М.: Изд-во МЭИ, 2000. 612 с.
2. Kewitsch A. S., Yariv A. // Optic letters. 1996. V. 21, No. 1. P. 24.
3. Вдовин В. А., Лонин А. Л., Менсов С. Н. // Журнал технической физики. 2001. Т. 71, № 7. С. 67.
4. Sarkisov S. S., Curley M. J., Diggs D. E. et al. // Optical Engineering. 2000. V. 39, No. 3. P. 616.
5. Берлин А. А. Кинетика полимеризационных процессов. М.: Химия, 1978. 365 с.
6. Абакумов Г. А., Менсов С. Н., Семёнов А. В. // Оптика и спектроскопия. 1999. Т. 86, № 6. С. 1029.
7. Берлин А. А. Акриловые олигомеры и материалы на их основе. М.: Химия, 1983. 336 с.
8. Рощупкин В. П., Озерковский Б. В., Карапетян З. А. // Высокомолекулярные соединения. 1977. Т. 19А, № 10. С. 2239.

9. Зверев В. А. Формирование изображений волновыми полями. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 1998. 252 с.
10. Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П. Теория волн. М: Наука, 1979. 384 с.
11. Лонин А. Л., Менсов С. Н. // Известия РАН. Серия физическая. 2002. Т. 66, № 7. С. 973.
12. Патент РФ RU № 2138070 / Абакумов Г. А., Мамашева О. Н., Мураев В. А. и др. 1999.
13. Менсов С. Н., Семенов А. В. // Журнал технической физики. 1998. Т. 68, № 2. С. 137.

Нижегородский госуниверситет им. Н. И. Лобачевского,
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию
16 июля 2002 г.

**THE POSSIBILITY OF MUTUAL TRAPPING OF COUNTERPROPAGATING LIGHT BEAMS IN PHOTOPOLYMERIZABLE COMPOSITES**

*A. L. Lonin and S. N. Mensov*

Interaction of counterpropagating light beams in a photopolymerizable composite is studied numerically and experimentally. We propose a qualitative model which allows for finding the conditions of mutual trapping of the beams. It is shown that a single nonsplitting channel between two multimode fibers can be formed in an acrylic photopolymer if the angle between the beams does not exceed 4°.

УДК 534.26:534.232

# О РАБОТЕ ПРОТЯЖЁННОЙ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОЙ АНТЕННЫ В СКВАЖИНЕ

*Д. А. Касьянов*

В работе исследуется возможность получения реальных граничных условий для дифракционной задачи об излучении протяжённой пьезокерамической антенны, находящейся в скважине. Используется метод эквивалентных электромеханических схем, с помощью которого описывается связь между параметрами антенны и полем упругих колебаний, создаваемым при излучении. Показано, что оптимальные условия перехода акустической энергии из скважины в массив в рассматриваемом случае существенным образом отличаются от тех, которые возникают при использовании идеальных граничных условий. Получены выражения для потенциалов смещений в массиве. Приведены экспериментальные данные, подтверждающие теоретические исследования.

Проблеме излучения различных типов упругих волн из скважины в массив посвящено значительное количество работ. В основном решаются задачи, так или иначе связанные с акустическим каротажем (см., например, [1–3]). Существуют также работы, где рассматриваются дифракционные поля, создаваемые скважинными акустическими источниками в массиве, причём чаще всего исследуются задачи с идеальными граничными условиями, а решения ищутся в зоне дифракции Фраунгофера [4–7]. В [4] излучение скважинным акустическим прибором упругих волн в горный массив описывается с помощью задания упругих напряжений на внутренней поверхности цилиндрической скважины, в [5] — с помощью задания радиальных смещений. В [6, 7] учитывается существование водяного слоя между скважинной протяжённой акустической антенной и внутренней поверхностью скважины, однако на поверхности антенны задаются радиальные смещения. Таким образом, практически во всех известных работах, посвящённых излучению акустических полей из скважин, принципиально не рассматривается тот факт, что собственный импеданс излучающей антенны конечен и зависит от многих факторов: импеданса окружающего пространства, материала, из которого выполнен излучатель, и т. д. Попытки учесть реальные свойства цилиндрического пьезокерамического излучателя, работающего в скважине, присутствуют в работе [8], где исследуется частотная зависимость сопротивления излучения подобного источника. Однако результаты работы [8] не дают возможность даже сформулировать дифракционную задачу об излучении упругих полей в массив с помощью рассматриваемого источника. Кроме того, авторами [8] не рассматривается задача о поиске оптимальных соотношений между характерными параметрами пьезокерамического излучателя и скважины для максимальной передачи акустической энергии из скважины в массив.

Существует значительный цикл работ, посвящённых вопросу расширения полосы пропускания цилиндрических пьезокерамических преобразователей (см., например, [9, 10]). Основные характеристики цилиндрических излучателей в этих работах рассматриваются с позиции точных уравнений теории упругости и законов пьезоэффекта. Данные работы могут, в принципе, служить основой для исследования процессов, связанных с излучением акустических полей в массив из скважины с помощью протяжённых пьезокерамических антенн. Однако используемые в этих работах методы приводят к громоздким и трудно анализируемым выражениям, которые описывают связи между электромеханическими параметрами антенны и полем упругих колебаний. Кроме того, в качестве акустической нагрузки в этих работах предполагается жидкая среда. Компьютерное моделирование излучения пьезокерамического цилиндра

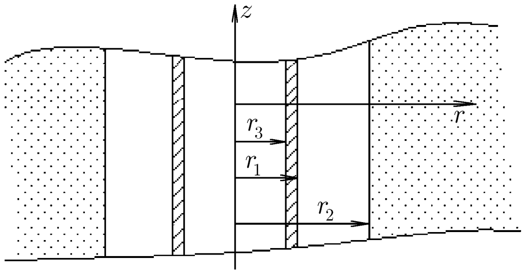



Рис. 1

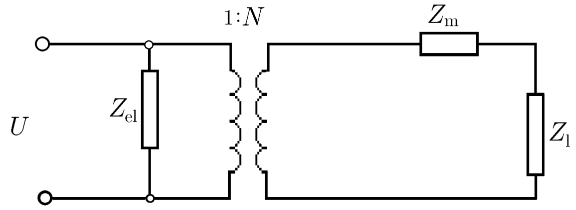



Рис. 2

в твёрдое полупространство из скважины с использованием метода конечных элементов представлено в работе [11]. К сожалению, авторам работы [11] не удалось получить удовлетворительные результаты для всей исследуемой ими полосы частот излучения цилиндра. Значительно расхождение между теоретическими и экспериментальными данными наблюдалось для частот, которые близки к частотам объёмных резонансов в системе цилиндрический источник—жидкость—скважина [11].

В данной работе пьезокерамическая антенна, излучающая из скважины в массив через жидкий кольцевой слой, моделируется с помощью известного метода эквивалентных электромеханических схем. Этот метод даёт возможность получить приближённые, но достаточно эффективные импедансные граничные условия на поверхности антенны и в дальнейшем сформулировать дифракционную задачу об излучении упругих волн из скважины в массив. В работе получены также соотношения между характерными параметрами пьезокерамической антенны и скважины, оптимальные для максимального прохождения акустической энергии в массив через жидкий слой.

Рассмотрим следующую модель. Пусть в безграничной изотропной однородной упругой среде находится бесконечная круговая цилиндрическая полость радиусом $r_2$, которая заполнена идеальной сжимаемой жидкостью. Твёрдая среда характеризуется плотностью $\rho_\mathrm{s}$, продольной скоростью звука $c_\mathrm{l}$, поперечной скоростью звука $c_\mathrm{t}$, упругими модулями $\lambda$ и $\mu$, для которых выполняются известные соотношения $\mu = \rho_\mathrm{s} c_\mathrm{t}^2$, $\lambda + 2\mu = \rho_\mathrm{s} c_\mathrm{l}^2$; жидкость характеризуется плотностью $\rho_\mathrm{f}$ и скоростью звука $c_\mathrm{f}$. В полости осесимметрично расположена протяжённая пьезокерамическая антенна с внешним радиусом $r_1$ и внутренним радиусом $r_3$. Геометрия коаксиальной системы антенна—жидкий слой—массив представлена на рис. 1. Пьезокерамика, из которой состоит антенна, характеризуется плотностью $\rho_\mathrm{c}$, скоростью распространения продольных волн в стержне $c_1^\mathrm{E}$, пьезоэлектрическим модулем $d_{31}$ и модулем гибкости $s_{11}^\mathrm{E}$. Считаем, что пьезокерамическая антенна совершает осесимметричные колебания, поляризацию пьезокерамики предполагаем радиальной. Антенна возбуждается переменным электрическим напряжением $U = U_0 \exp(i\omega t) f(z)$, где $f(z)$ — нормированное распределение электрического напряжения вдоль образующей протяжённой цилиндрической антенны.

Для расчёта движения пьезокерамических преобразователей часто используется метод эквивалентных электромеханических схем [12, 13], который позволяет выразить в явном виде скорость движения границы преобразователя и корректно записать после этого граничные условия дифракционной задачи. Общая структура подобных эквивалентных схем известна и изображена на рис. 2, где $Z_\mathrm{el}$ — импеданс электрической стороны преобразователя, $Z_\mathrm{m}$ — механический импеданс преобразователя, $Z_\mathrm{l}$ — импеданс нагрузки, $N$ — коэффициент электромеханической трансформации, с помощью которого можно пересчитывать на электрическую сторону импеданс механической стороны преобразователя: $Z_\mathrm{m}^\mathrm{el} = (1/N^2)\,(Z_\mathrm{m} + Z_\mathrm{l})$, и выразить внутренний импеданс преобразователя следующим образом: $1/Z_\mathrm{i}^\mathrm{el} = 1/Z_\mathrm{el} + 1/Z_\mathrm{m}^\mathrm{el}$.

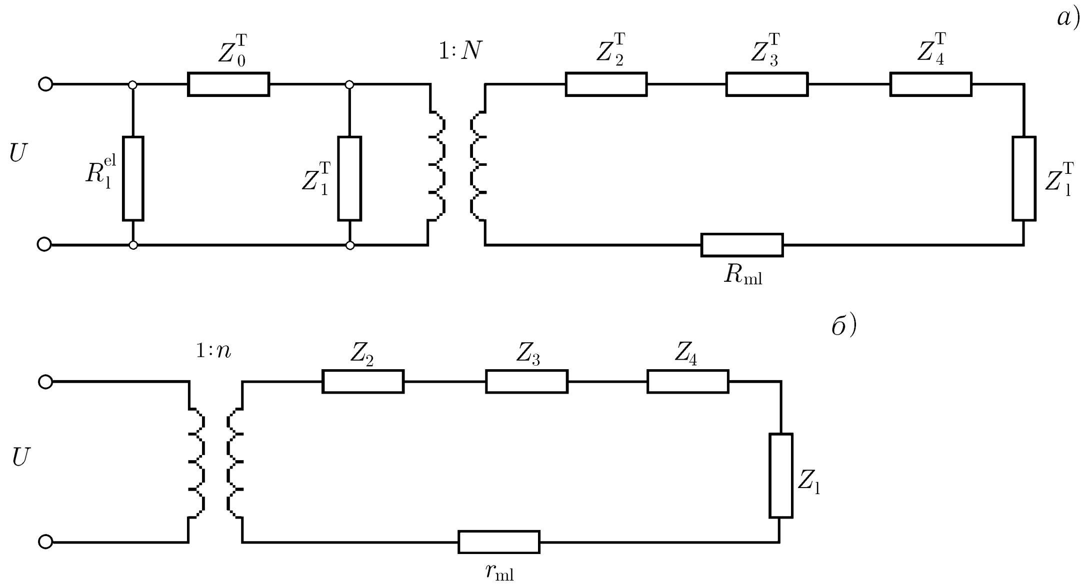



Рис. 3

Для некоторых случаев колебаний радиально поляризованного бесконечно длинного цилиндра известны точные эквивалентные электромеханические схемы [14], которые весьма сложны и неудобны для использования на практике, но на их основе можно получить достаточно простые приближённые эквивалентные схемы, например, при условии малой волновой толщины стенки цилиндра [12–14], что выполняется практически всегда.

Приближённая эквивалентная схема, удобная для наших исследований, представлена на рис. 3. На рис. 3*а* изображена эквивалентная схема протяжённой пьезокерамической антенны конечных размеров, которая согласована с питающим генератором; здесь введены следующие обозначения: $Z_0^{\mathrm{T}} = i\omega L$, где $L$ — внешняя индуктивность, компенсирующая статическую ёмкость антенны $C_{\mathrm{a}}^{\mathrm{T}}$, $Z_1^{\mathrm{T}} = 1/(i\omega C_{\mathrm{a}}^{\mathrm{T}})$, $R_1^{\mathrm{el}}$ — активное сопротивление электрических потерь антенны, которое можно выразить через тангенс диэлектрических потерь $\operatorname{tg}\sigma$: $R_1^{\mathrm{el}} \approx 1/(\omega C_{\mathrm{a}}^{\mathrm{T}} \operatorname{tg}\sigma)$; $Z_2^{\mathrm{T}}$, $Z_3^{\mathrm{T}}$, $Z_4^{\mathrm{T}}$ и $Z_{\mathrm{l}}^{\mathrm{T}}$ — интегральные эквивалентные импедансы, $R_{\mathrm{ml}}$ — интегральное сопротивление механических потерь в антенне. На практике чаще всего удаётся введением внешней индуктивности согласовать антенну с генератором, причём в случае, если у антенны невысокая добротность, согласование можно провести в достаточно широкой полосе частот [15]. Для дальнейшего анализа предположим, что достигнута идеальная компенсация статической ёмкости антенны, кроме того, пренебрежём величиной $R_1^{\mathrm{el}}$, т. к. обычно тангенс диэлектрических потерь для пьезокерамических материалов мал. Эти допущения приводят к эквивалентной схеме, изображённой на рис. 3*б*; здесь все импедансы, находящиеся на механической стороне преобразователя, нормированы на единицу длины антенны: $Z_2 = in^2/(\omega C_{\mathrm{a}})$, $Z_3 = 2\pi i\omega\delta r_{\mathrm{a}}\rho_{\mathrm{c}}$, $Z_4 = 2\pi\delta/(i\omega r_{\mathrm{a}} s_{11}^{\mathrm{E}})$, $n = 2\pi d_{31}/s_{11}^{\mathrm{E}}$, $r_{\mathrm{ml}}$ — погонное сопротивление механических потерь, импеданс $Z_2$ учитывает прямой пьезоэффект, $C_{\mathrm{a}}$ — погонная ёмкость, $r_{\mathrm{a}}$ и $\delta$ — соответственно средний радиус и толщина стенки пьезокерамического цилиндра. Используя определение коэффициента электромеханической трансформации $n$ (см., например, [13]), получим, что колебательную скорость поверхности цилиндра можно выразить следующим образом:

$$V = \frac{nU}{Z_{\mathrm{l}} + Z_{\mathrm{m}}}, \tag{1}$$

где $Z_{\mathrm{m}} = Z_2 + Z_3 + Z_4 + r_{\mathrm{ml}}$, направление вектора скорости совпадает с направлением внешней нормали к поверхности цилиндра, ориентированной вдоль оси $r$ на рис. 1.

Введём потенциал смещения $\varphi$ в жидкости, при этом $P_{\rm f} = -\rho_{\rm f}\,(\partial^2\varphi/\partial t^2)$ и $V_{\rm f} = (\partial/\partial t)\,\nabla\varphi$ — соответственно давление и скорость в жидкой среде; зависимость от времени определяется множителем $\exp(i\omega t)$. Если пьезокерамический излучатель нагружен при $r = r_1$ на удельный импеданс $Z_{\rm l}$, а при $r = r_3$ поверхность является свободной, получаем следующие граничные условия для напряжения $\sigma_{rr}$ (см., например, [14]):

$$\sigma_{rr}\big|_{r=r_3} = 0, \qquad \sigma_{rr}\big|_{r=r_1} = -i\omega Z_{\rm l} u_r, \tag{2}$$

где $u_r$ — радиальное смещение границы преобразователя. Далее воспользуемся условием неразрывности нормальной составляющей колебательной скорости на поверхности цилиндра и получим вместо (1) следующее соотношение, выполняющееся на границе $r = r_1$:

$$\nabla\varphi + \frac{\rho_{\rm f}\omega\varphi}{iZ_{\rm m}} = \frac{U_0 f(z) n}{i\omega Z_{\rm m}}\,. \tag{3}$$

Выражение (3) является тем необходимым граничным условием, с помощью которого можно сформулировать интересующую нас дифракционную задачу о распространении упругих волн в массиве при возбуждении их протяжённой пьезокерамической антенной, находящейся в скважине. Уравнения движения, выраженные через потенциал смещения $\varphi$ в жидкости, продольный $\varphi_{\rm l}$ и поперечный $\psi$ потенциалы смещений в массиве, запишутся в виде

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + k_{\rm f}^2\varphi = 0,$$

$$\frac{\partial^2\varphi_{\rm l}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_{\rm l}}{\partial r} + \frac{\partial^2\varphi_{\rm l}}{\partial z^2} + k_{\rm l}^2\varphi_{\rm l} = 0, \qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{\psi}{r^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + k_{\rm t}^2\psi = 0, \tag{4}$$

где $k_{\rm f}$ — модуль волнового вектора в воде, $k_{\rm l}$ и $k_{\rm t}$ — модули продольного и поперечного волновых векторов в массиве. Напряжения $\sigma_{rr}$, $\sigma_{rz}$ и смещения $u_r$, $u_z$ в массиве связаны с потенциалами посредством равенств

$$\sigma_{rr} = \frac{\lambda}{c_{\rm l}^2}\,\omega^2\varphi_{\rm l} + 2\mu\,\frac{\partial^2\varphi_{\rm l}}{\partial r^2} - 2\mu\,\frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial r}\,, \qquad \sigma_{rz} = \mu\left(2\,\frac{\partial^2\varphi_{\rm l}}{\partial z\partial r} - 2\,\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right) - \rho_{\rm s}\omega^2\psi;$$

$$u_r = \frac{\partial\varphi_{\rm l}}{\partial r} - \frac{\partial\psi}{\partial z}\,, \qquad u_z = \frac{\partial\varphi_{\rm l}}{\partial z} + \frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\psi}{r}\,. \tag{5}$$

На границе $r = r_1$ выполняется условие (3), на границе $r = r_2$ выполняются условия неразрывности нормальных составляющих смещений и напряжений и равенства нулю касательных напряжений:

$$u_r\big|_{r=r_2} = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\bigg|_{r=r_2}; \qquad \sigma_{rr}\big|_{r=r_2} = -P_{\rm f}\big|_{r=r_2}; \qquad \sigma_{rz}\big|_{r=r_2} = 0. \tag{6}$$

Процедура решения дифракционной задачи (3)–(6) стандартна. К системе уравнений (4), выражениям (5) и граничным условиям (3), (6) применяется интегральное преобразование Фурье по координате $z$. В результате система (4) преобразуется к виду

$$r^2\,\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + r\,\frac{\partial F}{\partial r} + r^2\,(k_{\rm f}^2 - \tau^2)\,F = 0,$$

$$r^2\,\frac{\partial^2 F_{\rm l}}{\partial r^2} + r\,\frac{\partial F_{\rm l}}{\partial r} + r^2\,(k_{\rm l}^2 - \tau^2)\,F_{\rm l} = 0, \qquad r^2\,\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2} + r\,\frac{\partial\Psi}{\partial r} + [r^2\,(k_{\rm t}^2 - \tau^2) - 1]\,\Psi = 0, \tag{7}$$

где $F(r,\tau)$, $F_\mathrm{l}(r,\tau)$ и $\Psi(r,\tau)$ — фурье-образы потенциалов $\varphi(r,z)$, $\varphi_\mathrm{l}(r,z)$ и $\psi(r,z)$ соответственно. Решения системы уравнений (7), удовлетворяющие условиям излучения при $r\to\infty$, ищутся в виде

$$F(r,\tau)=A(\tau)J_0\Big(r\sqrt{k_\mathrm{f}^2-\tau^2}\Big)-B(\tau)N_0\Big(r\sqrt{k_\mathrm{f}^2-\tau^2}\Big),$$
$$F_\mathrm{l}(r,\tau)=C(\tau)H_0^{(2)}\Big(r\sqrt{k_\mathrm{l}^2-\tau^2}\Big),\qquad \Psi(r,\tau)=D(\tau)H_1^{(2)}\Big(r\sqrt{k_\mathrm{t}^2-\tau^2}\Big),\tag{8}$$

где $J_0$ и $N_0$ — функции Бесселя и Неймана нулевого порядка, $H_0^{(2)}$ и $H_1^{(2)}$ — функции Ханкеля второго рода нулевого и первого порядка соответственно.

Подставляя выражения (8) в преобразованные по Фурье граничные условия (6) и (3), получаем систему четырёх линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов $A(\tau)$, $B(\tau)$, $C(\tau)$ и $D(\tau)$.

В дальнейшем нас будет интересовать поле объёмных деформаций $S_V$ в массиве, которое выражается через обратное преобразование Фурье от $F_\mathrm{l}$:

$$S_V(r,z)=k_\mathrm{l}^2\varphi_\mathrm{l}(r,z)=\frac{k_\mathrm{l}^2}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}C(\tau)H_0^{(2)}\left(r\sqrt{k_\mathrm{l}^2-\tau^2}\right)\exp(iz\tau)\,\mathrm{d}z.\tag{9}$$

Поле сдвиговых деформаций в массиве при возбуждении упругих волн протяжённой антенной мало́, т. к. предполагается, что характерный масштаб изменения функции $f(z)$ много больше длины поперечной волны в массиве.

Опуская промежуточные выкладки, связанные с определением коэффициентов $A(\tau)$, $B(\tau)$, $C(\tau)$ и $D(\tau)$, представим выражение для $S_V$ в виде

$$S_V=iA\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\Delta\,(a^2/2-\xi^2)}{\Xi}\,\frac{H_0^{(2)}\Big(c\sqrt{1-\xi^2}\Big)}{H_1^{(2)}\Big(c_0\sqrt{1-\xi^2}\Big)}\,\Phi(\xi)\exp(ic_1\xi)\,\mathrm{d}\xi,\tag{10}$$

где $\Phi(\xi)$ — интегральное преобразование Фурье от $f(z)$,

$$\Xi=\Delta_1\eta a^4\sqrt{1-\xi^2}-\frac{2a}{c_0}\sqrt{1-\xi^2}\sqrt{b^2-\xi^2}+4\,\frac{H_0^{(2)}\Big(c_0\sqrt{a^2-\xi^2}\Big)}{H_1^{(2)}\Big(c_0\sqrt{a^2-\xi^2}\Big)}\,\xi^2\times$$
$$\times\sqrt{1-\xi^2}\sqrt{a^2-\xi^2}\sqrt{b^2-\xi^2}+4\,\frac{H_0^{(2)}\Big(c_0\sqrt{1-\xi^2}\Big)}{H_1^{(2)}\Big(c_0\sqrt{1-\xi^2}\Big)}\,(a^2/2-\xi^2)^2\sqrt{b^2-\xi^2},$$

$$\Delta=\Big[N_1\Big(c_0\sqrt{b^2-\xi^2}\Big)\,J_0\Big(c_0\sqrt{b^2-\xi^2}\Big)-N_0\Big(c_0\sqrt{b^2-\xi^2}\Big)\,J_1\Big(c_0\sqrt{b^2-\xi^2}\Big)\Big]\Big/B,$$
$$\Delta_1=\Big[J_0\Big(c_0\sqrt{b^2-\xi^2}\Big)\,Y-N_0\Big(c_0\sqrt{b^2-\xi^2}\Big)\,I\Big]\Big/B,$$
$$B=N_1\Big(c_0\sqrt{b^2-\xi^2}\Big)\,I-J_1\Big(c_0\sqrt{b^2-\xi^2}\Big)\,Y,$$
$$I=J_1\Big[\Big(c_0-\frac{\chi}{b}\Big)\sqrt{b^2-\xi^2}\Big]-\frac{\rho_\mathrm{f}c_\mathrm{f}b}{iZ_\mathrm{m}\sqrt{b^2-\xi^2}}\,J_0\Big[\Big(c_0-\frac{\chi}{b}\Big)\sqrt{b^2-\xi^2}\Big],$$

$$Y = N_1\left[\left(c_0 - \frac{\chi}{b}\right)\sqrt{b^2-\xi^2}\right] - \frac{\rho_{\mathrm f} c_{\mathrm f} b}{iZ_{\mathrm m}\sqrt{b^2-\xi^2}}\, N_0\left[\left(c_0 - \frac{\chi}{b}\right)\sqrt{b^2-\xi^2}\right],$$

$$A = \frac{a^2\eta U_0 n}{\pi b c_{\mathrm f} Z_{\mathrm m}}, \qquad \eta = \frac{\rho_{\mathrm f}}{\rho_{\mathrm s}}, \qquad a = \frac{c_{\mathrm l}}{c_{\mathrm t}}, \qquad b = \frac{c_{\mathrm l}}{c_{\mathrm f}}, \qquad c_0 = k_{\mathrm l} r_2, \qquad c = k_{\mathrm l} r, \qquad c_1 = k_{\mathrm l} z,$$

$$\chi = k_{\mathrm f}\,(r_2 - r_1), \qquad c_0 - \chi/b = k_{\mathrm l} r_1;$$

$J_1$ и $N_1$ — функции Бесселя и Неймана первого порядка.

Если бы вместо граничного условия (3) было использовано условие $\nabla\varphi\big|_{r=r_1} = u_0 f(z)$, где $u_0$ — амплитуда начальных смещений на поверхности антенны, вид решения для $S_V$ был бы идентичен (10), но некоторые параметры записывались бы иначе, а именно

$$I = J_1\left[\left(c_0 - \frac{\chi}{b}\right)\sqrt{b^2-\xi^2}\right], \qquad Y = N_1\left[\left(c_0 - \frac{\chi}{b}\right)\sqrt{b^2-\xi^2}\right], \qquad A = \frac{Ma^2\eta}{\pi b}, \tag{11}$$

где $M$ — число Маха на поверхности излучателя. Случай подобных идеальных граничных условий исследован в [6, 7], где определено, что существуют условия резонансного прохождения акустической энергии от скважинной антенны, являющейся источником смещений, в массив. Условия эти налагаются на волновую толщину $\chi$ слоя жидкости, находящегося между скважинной антенной и внутренней стенкой скважины (для простоты скважина считается необсаженной). Резонансные значения $\chi$ определяются как корни уравнения

$$X(\chi) = N_1(c_0 b) J_1(c_0 b - \chi) - J_1(c_0 b) N_1(c_0 b - \chi) = 0 \tag{12}$$

и близки к величине $m\pi$, где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Фактически, реализуется ситуация, близкая к полуволновому резонансу коаксиального жидкого слоя, заключённого между двумя абсолютно жёсткими цилиндрическими границами.

В нашем случае использование более реальных граничных условий (3) приводит к тому, что эквивалентная выражению (12) формула для определения резонансных значений $\chi$ выглядит так:

$$X(\chi) = N_1(c_0 b)\left[J_1(c_0 b - \chi) - \frac{\rho_{\mathrm f} c_{\mathrm f}}{iZ_{\mathrm m}}\, J_0(c_0 b - \chi)\right] - J_1(c_0 b)\left[N_1(c_0 b - \chi) - \frac{\rho_{\mathrm f} c_{\mathrm f}}{iZ_{\mathrm m}}\, N_0(c_0 b - \chi)\right]. \tag{13}$$

Резонансное прохождение акустической энергии от пьезокерамической протяжённой скважинной антенны через жидкий слой в массив должно наблюдаться при тех значениях $\chi$, при которых $|X(\chi)|$ из (13) принимает минимальные значения.

Зададимся конкретным типом протяжённой пьезокерамической антенны, например из [15], и исследуем условия резонансного прохождения акустической энергии от данной антенны в массив в зависимости от диаметра скважины. Антенна состоит из пьезокерамических цилиндров с внешним диаметром 74 мм, внутренним диаметром 66 мм и высотой 32 мм, сделанных из пьезокерамики со следующими характеристиками: $c_1^{\mathrm E} = 3\,500$ м/с, $d_{31} = 1{,}95 \cdot 10^{-10}$ Кл/Н, $s_{11}^{\mathrm E} = 11{,}3 \cdot 10^{-12}$ м$^2$/Н, $\rho_{\mathrm c} = 7{,}2 \cdot 10^3$ кг/м$^3$; погонная ёмкость антенны $C_{\mathrm a} \approx 0{,}45$ мкФ/м. Исходя из эквивалентной схемы, изображённой на рис. 3*б*, получим выражение для удельного механического импеданса антенны:

$$\frac{Z_{\mathrm m}}{\rho_{\mathrm f} c_{\mathrm f}} = \frac{r_{\mathrm{ml}}}{\rho_{\mathrm f} c_{\mathrm f}} + i\,\frac{d_1}{\rho_{\mathrm f} c_{\mathrm f}}, \tag{14}$$

где

$$d_1 = \rho_{\mathrm c} c_1^{\mathrm E}\left[\frac{2\pi f\delta}{c_1^{\mathrm E}} - \frac{\delta}{(2\pi f/c_1^{\mathrm E})\, r_{\mathrm a}^2} + \frac{2\pi\rho_{\mathrm c}\,(c_1^{\mathrm E})^2\, d_{31}^2}{(2\pi f/c_1^{\mathrm E})\, r_{\mathrm a} C_{\mathrm a}}\right].$$

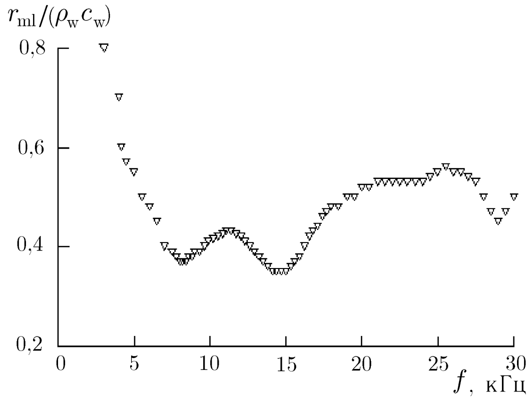



Рис. 4

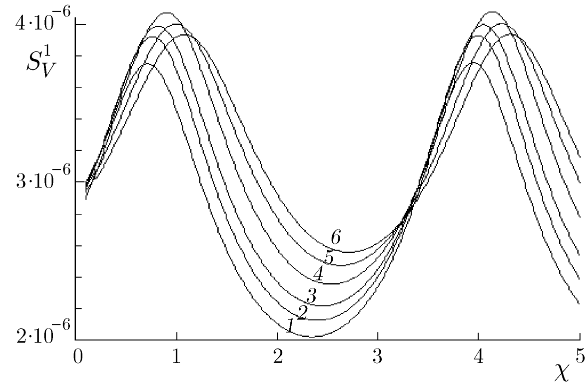



Рис. 5

Основной проблемой в расчётах является корректное определение величины $r_{\mathrm{ml}}/(\rho_{\mathrm{f}}c_{\mathrm{f}})$ (см., например, [12]), особенно если предполагается использование антенны под значительным статическим давлением (десятки мегапаскалей). Величина $r_{\mathrm{ml}}$ существенно зависит от внешнего давления и измерение её, если это необходимо, нужно проводить под рабочим давлением. При этом следует учесть, что величины $d_{31}$ и $s_{11}^{\mathrm{E}}$ также имеют зависимость от внешнего давления. В нашем случае протяжённая (с длиной около 5 метров) антенна использовалась при избыточном давлении не более 0,5 МПа в среде, по своим характеристикам близкой к воде [15]. При проведении дальнейших оценок для рассматриваемого случая будем пренебрегать влиянием внешнего избыточного давления и его изменением вдоль протяжённой антенны. В принципе, величину $r_{\mathrm{ml}}/(\rho_{\mathrm{f}}c_{\mathrm{f}})$ можно грубо оценить из измерений в воде электроакустического к. п. д. $\eta_{\mathrm{ea}}$ при работе на резонансной частоте антенны: $r_{\mathrm{ml}}/(\rho_{\mathrm{f}}c_{\mathrm{f}}) \approx 1/\eta_{\mathrm{ea}} - 1$ [13]. При этом необходимо предположить, что появление скважины не изменяет существенно интегральные механические потери в конструкции антенны, а касается лишь активной и реактивной составляющих сопротивления излучения. Резонансная частота антенны в скважине, являющаяся одной из нормальных частот системы из двух связанных колебательных систем, ниже, чем собственная резонансная частота антенны в воде. Следовательно, для корректного определения $r_{\mathrm{ml}}/(\rho_{\mathrm{f}}c_{\mathrm{f}})$ необходимо знать частотную зависимость этой величины, которая может быть определена при исследовании, например, частотной зависимости давления, создаваемого протяжённой пьезокерамической антенной в воде. Легко видеть, что давление $P$, измеряемое в воде на некотором расстоянии $R$ от антенны, можно записать в виде

$$P = \frac{\rho_{\mathrm{w}}c_{\mathrm{w}}nU\sqrt{r_1/R}}{Z_{\mathrm{m}} + Z_{\mathrm{l}}}\,. \tag{15}$$

Здесь $Z_{\mathrm{l}}$ является эквивалентным сопротивлением излучения протяжённой цилиндрической антенны в воде: $Z_{\mathrm{l}} = (\alpha + i\beta)\,\rho_{\mathrm{w}}c_{\mathrm{w}}$ (см., например, [12]), где $\alpha$ и $\beta$ — безразмерные коэффициенты при составляющих сопротивления излучения, $\rho_{\mathrm{w}}$ и $c_{\mathrm{w}}$ — соответственно плотность воды и скорость звука в ней. Окончательно для используемых приближений выражение (15) приобретает вид

$$P = \frac{nU\sqrt{r_1/R}}{r_{\mathrm{ml}}/(\rho_{\mathrm{w}}c_{\mathrm{w}}) + \alpha + i\,(d_1 + \beta)}\,. \tag{16}$$

На рис. 4 представлена частотная зависимость величины $r_{\mathrm{ml}}/(\rho_{\mathrm{w}}c_{\mathrm{w}})$ для антенны из [15], измеренная подобным образом.

Пользуясь экспериментальными данными и выражениями (10), (13), можно получить оптимальные условия прохождения акустической энергии в массив от рассматриваемой скважинной

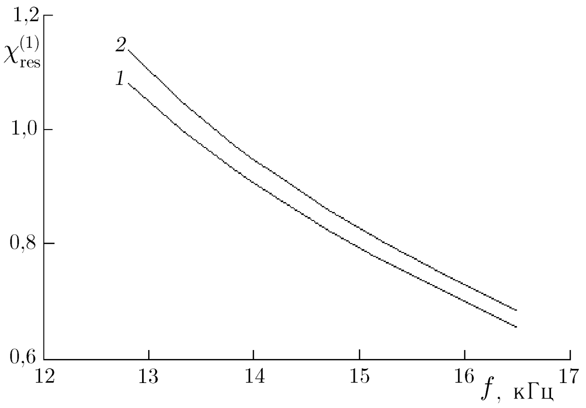



Рис. 6

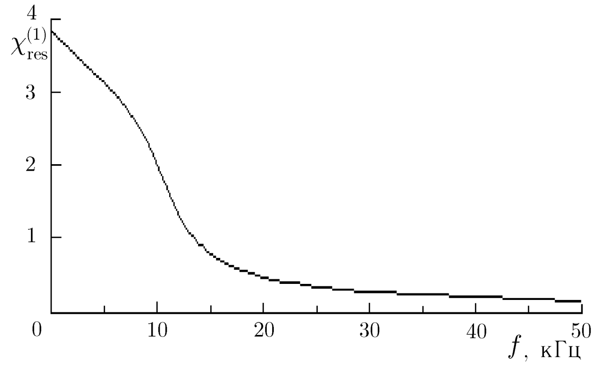



Рис. 7

антенны, работающей на разных частотах, в зависимости от параметра $\chi$. На рис. 5 представлено поле объёмных деформаций $S_V^1$ на расстоянии 1 м от оси скважины, полученное с помощью выражения (10) для исследуемого случая. Кривая *1* соответствует частоте излучения антенны $f = 15{,}7$ кГц; *2* — $f = 15{,}2$ кГц; *3* — $f = 14{,}7$ кГц; *4* — $f = 14$ кГц; *5* — $f = 13{,}3$ кГц; *6* — $f = 12{,}8$ кГц. Для расчёта взяты параметры из [15]: $\eta = 0{,}5$; $a = 2{,}11$; $b = 1{,}27$; $U_0 = 300$ В; предполагается, что жидкостью, находящейся в скважине, является вода. Измеренная в воде резонансная частота антенны $f_{\rm res}^{\rm w} = 14{,}7$ кГц. При работе антенны в скважине максимальная амплитуда объёмных деформаций в околоскважинном пространстве достигается на частоте $f_{\rm res}^{\rm b} = 14$ кГц при $\chi_{\rm res}^{(1)} = 0{,}9$; следующий максимум объёмных деформаций достигается при $\chi_{\rm res}^{(2)}$, причём $\chi_{\rm res}^{(2)} - \chi_{\rm res}^{(1)} \approx \pi$. При отстройке от частоты $f_{\rm res}^{\rm b}$ падает амплитуда объёмных деформаций $S_V^1$ и изменяется параметр $\chi_{\rm res}^{(1)}$, соответствующий оптимальному прохождению акустической энергии в массив. На рис. 6 представлено сравнение значений $\chi_{\rm res}^{(1)}$, полученных из выражений (10) (кривая *1*) и (13) (кривая *2*), при работе антенны на частоте, близкой к резонансной. Хорошо видно, что отличие значений $\chi_{\rm res}^{(1)}$, полученных из выражений (10) и (13), менее 10 %, что вполне приемлемо для практики. Таким образом, формулой (13), по всей видимости, можно пользоваться для оценок оптимальных условий излучения различных протяжённых антенн, находящихся в рамках эквивалентной схемы, изображённой на рис. 3*б*.

На рис. 7 на примере рассматриваемой антенны представлена зависимость величины $\chi_{\rm res}^{(1)}$ от частоты возбуждения протяжённой антенны, полученная с помощью выражения (13). При уменьшении волнового размера $kr_1$ антенны происходит переход к известной задаче об излучении точечного источника в скважине [16], где выполняется условие $J_1(\chi_{\rm res}^{(1)}) \to 0$ ($\chi_{\rm res}^{(1)} \to 3{,}82$; см. рис. 7).

Эквивалентная схема на рис. 3*б* применима для моделирования работы цилиндрического преобразователя вблизи низкочастотного радиального контурного резонанса. Тем не менее выражение (13) описывает закономерное стремление $\chi_{\rm res}^{(1)}$ к нулю при увеличении относительных волновых размеров стенки излучающего цилиндра (см. рис. 7), т. е. предельный переход к задаче, рассмотренной в [6, 7].

При используемых приближениях (3)–(6) величина $\chi_{\rm res}^{(1)}$, как следует из анализа выражений (10) и (13), практически не зависит от параметра $b$ и зависит от акустического импеданса скважинной жидкости $Z_{\rm b}^{\rm a}$. На рис. 8 представлена зависимость величины $\chi_{\rm res}^{(1)}$ от $Z_{\rm b}^{\rm a}/Z_{\rm w}^{\rm a}$ при работе антенны из [15] на частоте 14 кГц, где $Z_{\rm w}^{\rm a}$ — акустический импеданс воды. Легко видеть, что значительные изменения $\chi_{\rm res}^{(1)}$ происходят даже при небольших отклонениях $Z_{\rm b}^{\rm a}$ от акустического импеданса воды, причём как в сторону меньших значений (жидкие углеводороды), так и бо́льших (технологические жидкости, сильно минерализованная вода).

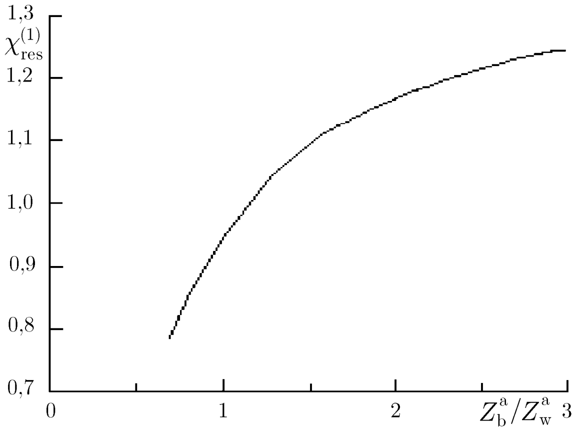



Рис. 8

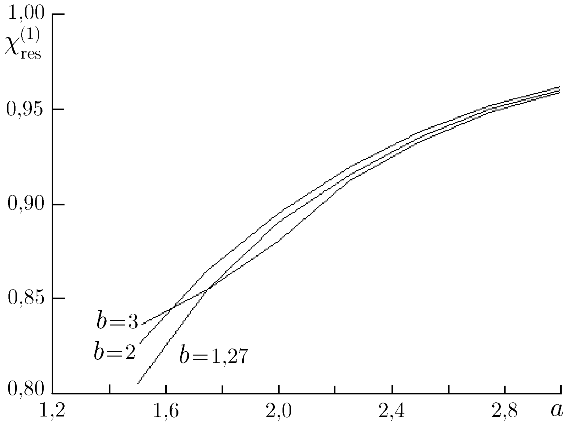



Рис. 9

Выражение (13) не описывает зависимости $\chi^{(1)}_{\rm res}$ от параметра $a$, хотя эта зависимость существует и её можно выделить, анализируя выражение (10). На рис. 9 изображены зависимости $\chi^{(1)}_{\rm res}(a)$ при различных значениях $b$. Хорошо видно, что при увеличении $a = c_{\rm l}/c_{\rm t}$ величина $\chi^{(1)}_{\rm res}$ растёт, причём при изменении параметра $a$ в два раза $\chi^{(1)}_{\rm res}$ изменяется не менее чем на 10 %, при этом $\chi^{(1)}_{\rm res}$ практически не зависит от параметра $b = c_{\rm l}/c_{\rm f}$. Таким образом, имея протяжённую высокодобротную антенну и проводя импедансные измерения в скважине оптимального диаметра, можно независимо оценить величину $c_{\rm t}$, характерную для данного массива, т. к. данные о значении $c_{\rm l}$ практически всегда можно получить стандартными методами акустического каротажа [1–3]. Однако эта возможность независимого определения $c_{\rm t}$ наталкивается на необходимость всегда иметь оптимальное соотношение между диаметрами антенны и скважины. Обычно ситуация такова, что диаметры антенны и скважины заданы заранее и неоптимальны. Случайные совпадения, как, например, в случае [15], где решались задачи, связанные с акустической интенсификацией геотехнологических процессов, являются лишь исключениями. Протяжённая пьезокерамическая антенна в [15] работала в скважине с эффективным внутренним диаметром $d_2 \approx 210$ мм, который достаточно хорошо соответствовал параметру $\chi^{(2)}_{\rm res}$. Оптимальной же для данной антенны с точки зрения прохождения акустической энергии в массив является скважина с внутренним диаметром $d_2 \approx 100$ мм, который, как будет видно из дальнейшего, соответствует параметру $\chi^{(1)}_{\rm res}$.

Сравним экспериментальные данные, полученные в результате геотехнологического полупромышленного эксперимента [15], с проведённым в данной работе теоретическим описанием процессов, связанных с излучением упругих волн из скважины с помощью протяжённой пьезокерамической антенны.

Устройство технологической скважины, из которой проводилась акустическая интенсификация, схематично представлено на рис. 10. Антенна *1* находится в скважинной жидкости *2* (параметры жидкости близки к параметрам воды), *3* — скважинный щелевой фильтр, изготовленный из полиэтилена, с внешним диаметром 210 мм и толщиной стенки 18 мм, *4* — гравийная обсыпка фильтра; размер частиц гравия не превышал 5 мм, средняя плотность гравийной обсыпки 1,8 т/м$^3$. Для изображённого на рис. 10 случая на рис. 11 представлена зависимость величины $S^1_V$ от частоты излучения протяжённой скважинной антенны. Зависимость получена с помощью выражения (10), параметры для расчёта взяты из [15], $U_0 = 300$ В, влияние гравийной обсыпки не учитывалось; не учитывалось также влияние щелевого фильтра, т. к. акустический импеданс полиэтилена, из которого сделан фильтр, близок к акустическому

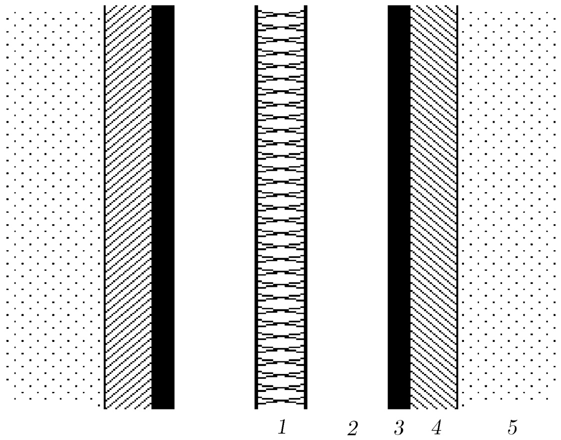



Рис. 10

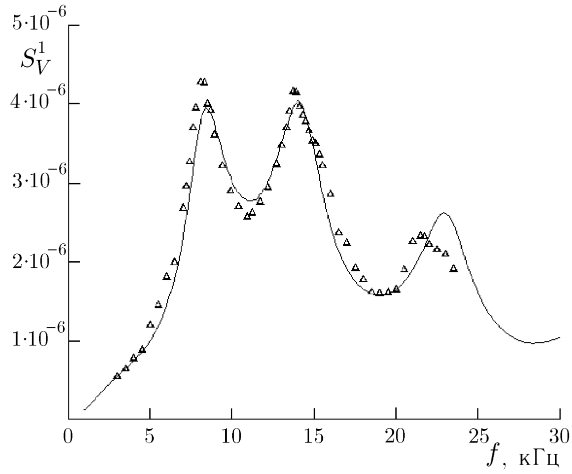



Рис. 11

импедансу воды. Здесь необходимо отметить, что, если бы расчёт собственных частот системы антенна—скважина выполнялся на основе формулы (12), то первый резонанс находился в районе 11 кГц, второй — в районе 22 кГц, и ошибка в расчётах была более чем существенной.

В ходе подготовки к эксперименту в [15] исследовалась импедансная характеристика антенны в скважине и оценивался электроакустический к. п. д. $\eta_{\text{ea}}$ при работе антенны на разных частотах. Зная зависимости активного входного сопротивления антенны и $\eta_{\text{ea}}$ от частоты, можно оценить $S_V^1$ при $U_0 = 300$ В исходя из экспериментальных данных. Треугольниками на рис. 11 обозначены полученные таким образом оценки. Нормальные частоты системы из двух связанных резонансных подсистем (скважины и антенны), полученные разными способами, практически не различаются. Отличия связаны, по всей видимости, с возможными неточностями в определении $\eta_{\text{ea}}$ при работе антенны в скважине и, вероятно, с тем, что не учитывалось влияние гравийной обсыпки, которая при определённых условиях может служить акустическим согласующим слоем. Таким образом, используя подход, заключающийся в применении метода эквивалентных электромеханических схем для записи граничных условий дифракционной задачи об излучении протяжённой пьезокерамической антенны в скважине, можно достаточно точно предсказать распределение резонансов и определить оптимальные геометрические условия излучения.

На поле подземного выщелачивания, где проводились эксперименты [15], использовался ещё один тип устройства добычных скважин, которые оборудовались фильтрами с внешним диаметром 140 мм и толщиной стенки 18 мм. Фильтры были изготовлены из полимера, акустический импеданс которого, как и у полиэтилена, близок к акустическому импедансу воды. Следовательно, эффективный внутренний диаметр $d_2$ скважины в зоне фильтра близок к 140 мм. На рис. 12 (кривая *1*) изображена частотная зависимость величины $S_V^1$ для случая работы антенны из [15] в скважине с $d_2 = 140$ мм. Небольшое уменьшение амплитуды поля объёмных деформаций в окрестности резонанса (ср. с рис. 11) связано с тем, что у конкретной антенны на частотах вблизи 11 кГц возрастают механические потери. К сожалению, в эксперименте, описанном в [15], не удалось испытать антенну в подобных условиях. Характерно, что эффективно воздействовать на призабойную зону продуктивного пласта акустическим полем из скважины с таким параметром $d_2$ с помощью используемой в [15] антенны можно было бы только на одной частоте. При этом необходимо отметить, что воздействие на разных частотах может оказаться принципиальным моментом в скважинных технологиях акустического воздействия, подобных

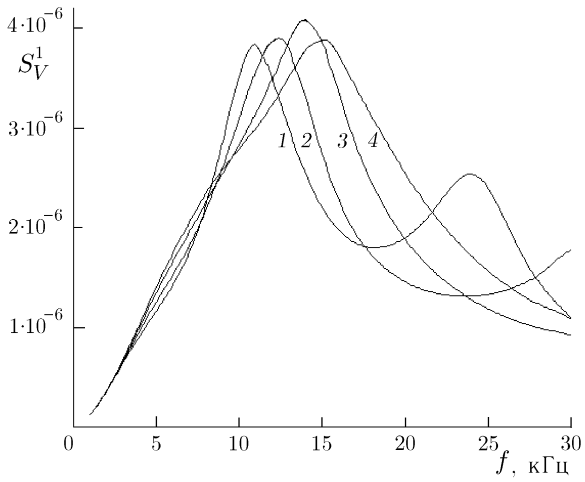



Рис. 12

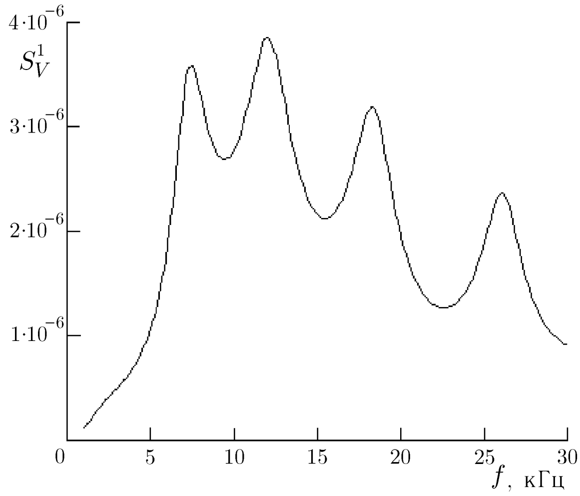



Рис. 13

представленной в [15]. На рис. 12 построены также зависимости для других значений параметра $d_2$: кривой *2* соответствует $d_2 = 120$ мм, кривой *3* — $d_2 = 100$ мм, кривой *4* — $d_2 = 90$ мм. Хорошо видно, что для данной антенны оптимальной с точки зрения прохождения акустической энергии в массив является скважина с внутренним диаметром $d_2 = 100$ мм. Если бы антенна работала в скважине, не оборудованной фильтром, то параметр $d_2$ был бы порядка 250 мм. На рис. 13 представлена частотная зависимость величины $S_V^1$ в этом случае. По всей видимости, при условии $d_2 = 250$ мм в эксперименте возможно было бы осуществить трёхчастотный режим обработки призабойной зоны пласта, что, несомненно, улучшило бы качество акустического воздействия по описанной в [15] технологии.

Ситуации, возникающие при излучении акустических волн в массив с помощью протяжённой пьезокерамической антенны, находящейся в скважине, могут быть весьма разнообразны. Основное влияние на характер прохождения акустической энергии в массив оказывает соотношение эффективных геометрических размеров излучающей антенны и скважины. Значительное влияние оказывают электромеханические параметры самой пьезокерамической антенны, которые зачастую трудно предсказать и необходимо измерить. Меньшее влияние оказывают характеристики массива, по крайней мере, пока выполняются граничные условия (6).

В настоящей работе рассмотрено излучение протяжённой некомпенсированной пьезокерамической антенны, находящейся в необсаженной скважине, которая заполнена жидкостью. Аналогичным образом можно рассмотреть задачу об излучении компенсированной антенны. Эквивалентную электромеханическую схему для записи граничных условий дифракционной задачи в этом случае можно получить, следуя результатам работы [14].

В скважинной акустике для излучения акустического поля из скважины часто используются магнитострикционные модули [17]. В принципе, на их основе можно создать протяжённую скважинную антенну. Эквивалентные электромеханические схемы магнитострикционных излучателей известны [12], и их также можно использовать для определения реальных граничных условий при решении дифракционных задач. Метод получения граничных условий на излучающей поверхности при этом аналогичен представленному в данной работе. Не представляет труда обобщение приведённого выше решения задачи на случай излучения акустической энергии из скважины в массив через обсадную колонну и закрепляющее её цементное кольцо. Дополнительные к (3) граничные условия для такой многослойной коаксиальной системы выписаны в [18].

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 00–02–16156 и 03–02–16805).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Булатова Ж. Н., Волкова Е. А., Дубров Е. Ф. Акустический каротаж. М.: Недра, 1970. 264 с.
2. Петкевич Г. И., Вербицкий Т. З. Акустические исследования горных пород в нефтяных скважинах. Киев: Наукова думка, 1970. 126 с.
3. Карус Е. В., Кузнецов О. Л., Файзуллин И. С. Межскважинное прозвучивание. М.: Недра, 1986. 149 с.
4. Васильев Ю. И. // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1968. № 1. С. 25.
5. Крутин В. Н., Ямщиков В. С. // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1971. № 10. С. 37.
6. Крутин В. Н., Кузнецов О. Л., Стрекозин В. В. // Ядерно-геофизические и геоакустические исследования скважин на нефть и газ. М.: ВНИИЯГГ, 1977. С. 5.
7. Крутин В. Н. // Новые геоакустические методы поиска и разведки месторождений полезных ископаемых. М.: ВНИИЯГГ, 1982. С. 76.
8. Бушер М. К., Михайлов А. В., Попов В. П. // Геофизика. 2001. № 3. С. 52.
9. Дианов Д. Б., Кузьменко А. Г. // Акуст. журн. 1970. Т. 16, № 2. С. 236.
10. Алексеев В. Н. // Акуст. журн. 1976. Т. 22, № 2. С. 179.
11. Ekeom D., Dubus B., Gradner C. // J. Acoust. Soc. Am. 1998. V. 104, No. 5. P. 2 779.
12. Подводные электроакустические преобразователи. Л.: Судостроение, 1983. 248 с.
13. Свердлин Г. М. Гидроакустические преобразователи и антенны. Л.: Судостроение, 1988. 200 с.
14. Дианов Д. Б., Кузьменко А. Г. // Акуст. журн. 1970. Т. 16, № 1. С. 42.
15. Касьянов Д. А., Шалашов Г. М. // Труды XI сессии РАО. Т. 2. М.: ГЕОС, 2001. С. 121.
16. Крауклис П. В., Крауклис Л. А. // Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Вып. 16. Л.: Наука, 1976. С. 41.
17. Кузнецов О. Л., Ефимова С. А. Применение ультразвука в нефтяной промышленности. М.: Недра, 1983. 172 с.
18. Крауклис П. В., Крауклис Л. А. // Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Вып. 17. Л.: Наука, 1976. С. 156.


Научно-исследовательский радиофизический институт,
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию
29 мая 2002 г.

## EXTENDED PIEZOCERAMIC ANTENNA RADIATING IN A BOREHOLE

*D. A. Kas'yanov*

We analyze the possibility for obtaining relevant boundary conditions in the diffraction problem of radiation of an extended piezoceramic antenna in a borehole. The method of equivalent electromechanical circuits is used to search for relationships between the characteristics of the antenna and the radiated fields of elastic vibrations. It is shown that the optimal conditions for acoustic energy transfer from a borehole into a massif in the considered case drastically differ from similar conditions corresponding to ideal boundary conditions. The expressions for potentials of displacements in the massif are obtained. Experimental data confirming the analytical results are adduced.

УДК 538.945

# ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО СВЧ ОТКЛИКА СВЕРХПРОВОДНИКОВ С ПОМОЩЬЮ ЛОКАЛЬНОЙ МЕТОДИКИ

*А. Ю. Аладышкин [1], А. А. Андронов [1], Е. Е. Пестов [1], Ю. Н. Ноздрин [1], В. В. Курин [1], А. М. Куколо [2], Р. Монако [2], М. Боффа [2]*

С помощью локальной методики исследована мощность СВЧ излучения $P_{3\omega}(T, P_\omega, H_{\rm dc})$ на утроенной частоте основного сигнала как функция температуры $T$, входной мощности $P_\omega$ и внешнего перпендикулярного поверхности сверхпроводника магнитного поля $H_{\rm dc}$ для плёнок, монокристаллов, поликристаллов $\rm YBa_2Cu_3O_7$ (YBCO) и плёнок Nb. Наиболее характерной особенностью температурной зависимости нелинейного отклика $P_{3\omega}(T)$ сверхпроводников является наличие максимума нелинейности вблизи критической температуры $T_{\rm c}$. Для плёнок YBCO получены пространственные распределения мощности третьей гармоники при различных температурах, которые демонстрируют неоднородное распределение $T_{\rm c}$ по поверхности сверхпроводника. При температурах порядка $2T_{\rm c}/3$ для плёнок и монокристаллов YBCO в зависимости $P_{3\omega}(T)$ обнаружены дополнительные максимумы нелинейности, связанные, по-видимому, с наличием нескольких сверхпроводящих фаз с разными критическими температурами. В плёнках Nb второй максимум нелинейности в зависимости $P_{3\omega}(T)$ возникает только при наличии внешнего магнитного поля. Экспериментальные данные интерпретируются в рамках двухжидкостной модели сверхпроводника, учитывающей феноменологическую нелинейную связь векторного потенциала $\mathbf{A}$ с плотностью сверхпроводящего тока $j_{\rm s}(A)$. Обсуждается вопрос о природе нелинейности в исследуемых сверхпроводниках.

## ВВЕДЕНИЕ

Отклик сверхпроводников на СВЧ излучение является нелинейным. Это приводит к ряду нелинейных эффектов: зависимости поверхностного импеданса от мощности входного сигнала [1], генерации высших гармоник основной частоты [2] или интермодуляции [3]. Исследования нелинейных СВЧ свойств сверхпроводников были начаты ещё в 1960-х годах (см. обзор [4] и приведённые в нём ссылки, [5]). В этих работах были предприняты первые попытки понимания природы нелинейного СВЧ отклика традиционных сверхпроводников. Интерес к данной тематике возобновился в связи с открытием высокотемпературных сверхпроводников (ВТСП), т. к. сильные нелинейные эффекты регистрируются в высокотемпературных сверхпроводниках при умеренной мощности сигнала (см., например, [2, 3]). Нелинейность СВЧ отклика ВТСП приводит к росту потерь, уменьшению добротности резонаторов и искажению сигналов в линиях передачи, что ограничивает применимость сверхпроводниковых СВЧ устройств. Для объяснения нелинейного отклика сверхпроводников предложено большое количество моделей: нелинейность, связанная с подавлением модуля параметра порядка (нелинейность уравнений Гинзбурга—Ландау) [6, 7], с наличием джозефсоновских (слабых) связей между гранулами в исследуемых образцах [1, 8], с движением вихрей в непараболическом потенциале пиннинга [9], с термически активированными скачками вихрей в потенциале пиннинга [10], с вязким течением вихрей [11], тепловая нелинейность [12, 13] и др. Однако несмотря на большое количество экспериментальных и теоретических работ, посвящённых данной проблеме, вопрос о природе нелинейности сверхпроводников до сих пор остаётся открытым. Поэтому исследование нелинейных свойств сверхпроводников важно какс прикладной, так и с фундаментальной точек зрения, поскольку изучение нелинейного отклика связано с исследованием свойств сверхпроводящего состояния.

В настоящей работе с помощью локальной методики (предварительные результаты приведены в [14]) исследована зависимость мощности СВЧ излучения на частоте третьей гармоники основного сигнала от внешнего постоянного магнитного поля и мощности СВЧ сигнала на основной частоте в широком диапазоне температур (4÷91 K) для плёнок, поликристаллов, монокристаллов $YBa_2Cu_3O_7$ (YBCO) и плёнок Nb. Также получены пространственные распределения нелинейного СВЧ отклика для плёнки YBCO при различных температурах ниже $T_c$.

Основной качественный результат экспериментальных исследований нелинейного отклика сверхпроводников — это наблюдение пика нелинейности в температурной зависимости мощности третьей гармоники СВЧ излучения $P_{3\omega}(T)$ в области температур, близких к $T_c$ (см. также [4, 6, 15, 16]). Локализация нелинейного отклика вблизи $T_c$ позволяет получать пространственные распределения $T_c$ на поверхности плёнки YBCO. В то же время, кроме высокотемпературного пика нелинейности (вблизи $T_c$), для плёнок и монокристаллов YBCO при низких температурах обнаружены дополнительные пики в зависимости $P_{3\omega}(T)$ вблизи $T \sim 2T_c/3$. В плёнках Nb второй максимум нелинейности в зависимости $P_{3\omega}(T)$ возникает только при наличии внешнего магнитного поля.

В этой работе мы обсудим применимость основных механизмов нелинейности (нелинейности Гинзбурга—Ландау, джозефсоновской нелинейности, нелинейности, связанной с движением вихрей, и тепловой нелинейности) к нашим экспериментальным данным и сделаем предположения о природе наблюдаемой нелинейности в сверхпроводниках.

Статья построена следующим образом. В разделе 1 описана общая схема экспериментальной установки и методика измерения нелинейного СВЧ отклика сверхпроводника. В разделе 2 рассчитаны линейный и нелинейный отклики тонкой сверхпроводящей плёнки в слабом СВЧ поле зонда. В разделе 3 приведены характеристики образцов и основные экспериментальные результаты. Раздел 4 посвящён обсуждению и интерпретации полученных экспериментальных результатов. В разделе 5 приведены основные результаты работы и сделаны заключительные замечания.

## 1. СХЕМА ЭКСПЕРИМЕНТА И МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЙ

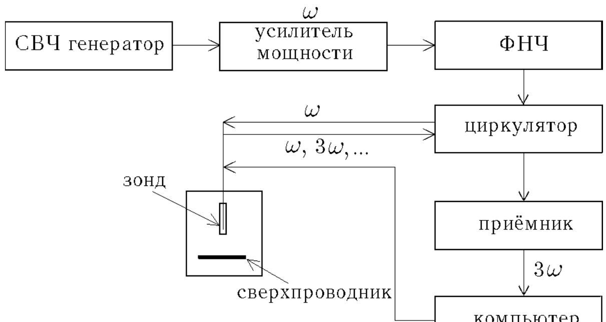



Рис. 1. Блок-схема экспериментальной установки для исследования нелинейных СВЧ свойств сверхпроводников

Для исследования нелинейных СВЧ свойств сверхпроводников широкое применение получила резонаторная методика, которая позволяет достичь уровня магнитных полей, необходимых для наблюдения нелинейных эффектов. Для этого используется, как правило, либо микрополосковый резонатор [1], либо объёмный резонатор с помещённым внутрь образцом [15, 17]. Однако с помощью этой методики могут быть определены только средние по поверхности характерные плотности токов и магнитные поля, при которых существенны нелинейные эффекты в сверхпроводнике. Альтернативой резонаторной методике является исследование нелинейных СВЧ свойств сверхпроводников с помощью ближнепольных СВЧ микроскопов [14, 18]. В этом случае создаётся сильное СВЧ поле, локализованное вблизи ближнепольного зонда на масштабах, много меньших длины волны.

В настоящей работе мы применили локальную методику измерений нелинейного СВЧ отклика сверхпроводника, использующую ближнепольный зонд с индуктивной связью. Блок-схема экспериментальной установки показана на рис. 1. Описываемая экспериментальная установка позволяет изучать генерацию третьей гармоники основной частоты сверхпроводником в широком температурном интервале ($4\div 91$ K). СВЧ генератор является источником сигнала в частотном диапазоне от 0,3 до 1,2 ГГц. В эксперименте частота первой гармоники $\omega/(2\pi)$ фиксирована и равна 472 МГц. Усилитель мощности используется для увеличения мощности сигнала на основной частоте до 0,1 Вт. Фильтр низких частот (ФНЧ) подавляет гармоники, генерируемые усилителем мощности. Уровень паразитного сигнала на частоте третьей гармоники составляет величину порядка $10^{-13}$ Вт. После прохождения через циркулятор СВЧ сигнал, распространяющийся по коаксиальному кабелю, подаётся на зонд (рис. 2). Зонд представляет собой медную проволочку длиной $l = 2$ мм и диаметром $D \le 50$ мкм, соединяющую внешний и внутренний проводники коаксиального кабеля. Поскольку волновой импеданс коаксиального кабеля значительно больше импеданса закорачивающей проволоки, при отражении СВЧ сигнала от ближнепольного зонда в медной проволоке течёт переменный ток высокой плотности. Этот высокочастотный ток создаёт квазистатическое магнитное поле, локализованное на масштабах порядка размеров зонда ($L_\parallel \sim 2$ мм, $L_\perp \sim 0{,}05$ мм, где $L_\parallel$ и $L_\perp$ — продольный и поперечный масштабы локализации магнитного поля соответственно). При взаимодействии сильного высокочастотного поля с исследуемым образцом из-за нелинейных свойств сверхпроводника в спектре отражённого сигнала возникают высшие гармоники основной частоты.

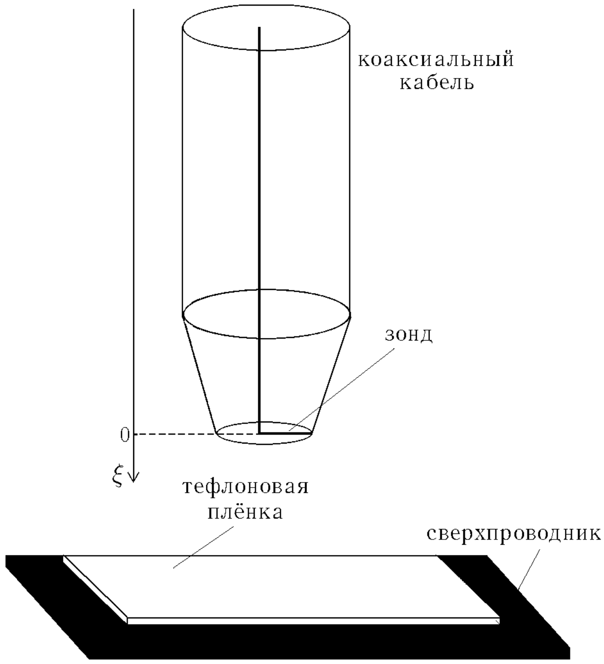



Рис. 2. Конструкция ближнепольного СВЧ зонда

При этом следует заметить, что ближнепольный зонд используется как для создания СВЧ поля, так и для регистрации отклика сверхпроводника на электромагнитное излучение. Для предотвращения электрического контакта зонда с исследуемым образцом, приводящего к генерации паразитного сигнала на частоте третьей гармоники, на образец помещается тефлоновая плёнка с толщиной 10 мкм. После прохождения через циркулятор (см. рис. 1) мощность третьей гармоники измеряется приёмником, и её значение считывается компьютером. В экспериментах мы также использовали систему позиционирования, которая позволяет проводить сканирование образца в плоскости плёнки. Управление этой системой осуществляется с помощью компьютера.

## 2. ЛИНЕЙНЫЙ И НЕЛИНЕЙНЫЙ ОТКЛИКИ ТОНКОЙ СВЕРХПРОВОДЯЩЕЙ ПЛЁНКИ НА СВЧ ИЗЛУЧЕНИЕ

### 2.1. Отражение СВЧ сигнала от ближнепольного зонда

Рассмотрим задачу об отражении электромагнитной волны, распространяющейся по коаксиальному кабелю с волновым сопротивлением $Z_0$ от зонда, имеющего импеданс $Z_{\rm tot}$ при $\xi = 0$

(см. рис. 2). Предполагая, что ток и напряжение в коаксиальном кабеле зависят от времени как $\exp(i\omega t)$, запишем выражения для амплитуды тока $I_\omega$ и напряжения $U_\omega$ на частоте $\omega$:

$$I_\omega = I_\omega^{\mathrm{i}} \exp(-ik\xi) + I_\omega^{\mathrm{r}} \exp(ik\xi), \tag{1}$$

$$U_\omega = Z_0[I_\omega^{\mathrm{i}} \exp(-ik\xi) - I_\omega^{\mathrm{r}} \exp(ik\xi)], \tag{2}$$

где $I_\omega^{\mathrm{i}}$ и $I_\omega^{\mathrm{r}}$ — амплитуды тока в падающей и отражённой волнах соответственно. Тогда амплитуда тока в закорачивающей проволоке (при $\xi = 0$) равна

$$I_\omega = I_\omega^{\mathrm{i}} \frac{2Z_0}{Z_0 + Z_{\mathrm{tot}}}\,. \tag{3}$$

Волновое сопротивление коаксиального кабеля в нашем случае равно $Z_0 = 50$ Ом. Оценим импеданс нагрузки $Z_{\mathrm{tot}}$. Импеданс $Z_{\mathrm{tot}}$ является суммой импеданса $Z_{\mathrm{in}}$, связанного с внутренней индуктивностью и активным сопротивлением зонда, и импеданса $Z_{\mathrm{ext}}$, соответствующего внешней индуктивности провода. На частоте $\nu = \omega/(2\pi) = 0{,}5$ ГГц при $T = 77$ К толщина скин-слоя в меди составляет $\delta(T = 77\ K) \sim 0{,}6$ мкм, и для проволоки радиуса $R = 10{\div}25$ мкм скин-эффект является сильным, т. е. $R \gg \delta$. Импеданс провода $Z_{\mathrm{in}}$ в случае сильного скин-эффекта имеет вид [19]

$$Z_{\mathrm{in}} = \frac{(1-i)\,l}{2\pi R\sigma\delta}\,, \tag{4}$$

где $\sigma$ — проводимость меди, $l$ — длина зонда. Полагая $R = 25$ мкм, $l = 2$ мм, $\sigma(T = 77\ \text{К}) = 6\cdot 10^8\ (\text{Ом}\cdot\text{м})^{-1}$, $\delta(T = 77\ \text{К}) = 0{,}6$ мкм [20], получаем, что при азотной температуре $Z_{\mathrm{in}} \approx 0{,}1$ Ом. Для оценки импеданса $Z_{\mathrm{ext}}$ воспользуемся формулой [19]

$$Z_{\mathrm{ext}} = -i\omega \frac{\mu_0}{\pi} \ln(2a/R)\, l, \tag{5}$$

полученной для провода, расположенного на высоте $a$ над поверхностью сверхпроводящей плёнки. Здесь $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$ Гн/м — магнитная постоянная. Подставляя $a = 35$ мкм, $R = 25$ мкм, $l = 2$ мм, получаем $Z_{\mathrm{ext}} \approx 2{,}4$ Ом.

Из приведённых выше оценок видно, что импеданс нагрузки $Z_{\mathrm{tot}} \approx 2{,}5$ Ом на данных частотах много меньше волнового импеданса: $Z_{\mathrm{tot}} \ll Z_0$, и формула (3) может быть преобразована к виду

$$I_\omega \approx 2I_\omega^{\mathrm{i}}. \tag{6}$$

Таким образом, амплитуда $I_\omega$ тока, текущего по проволоке, вдвое больше амплитуды $I_\omega^{\mathrm{i}}$ тока в падающей волне, распространяющейся по коаксиальному кабелю.

### 2.2. Линейный отклик

Рассмотрим теперь задачу о возбуждении экранирующих токов в тонкой сверхпроводящей плёнке зондом, расположенным на расстоянии $a$ от поверхности сверхпроводника (рис. 3). Выберем систему декартовых координат $(x, y, z)$ так, чтобы плоскость $x = 0$ совпадала с поверхностью плёнки, а ось $z$ была направлена вдоль медной проволоки. Поскольку длина электромагнитной волны, распространяющейся по коаксиальному кабелю, равна $\tilde\lambda = 2\pi c/\omega \approx 60$ см ($c = 3\cdot 10^8$ м/с — скорость света в вакууме) и $\tilde\lambda \gg \max\{a, D\}$, эту задачу можно решить в квазистатическом приближении. Кроме того, поскольку длина медной проволочки значительно больше её диаметра

($l \gg D$), в дальнейшем будем считать, что плотность стороннего тока $j_\omega^{\rm ext}$ не зависит от координаты $z$:

$$j_\omega^{\rm ext} = I_\omega \delta(x - a, y). \tag{7}$$

Для сверхпроводящей плёнки запишем материальную связь $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{E})$, воспользовавшись для простоты двухжидкостной моделью сверхпроводника $\mathbf{j}_\omega = \mathbf{j}_\omega^{\rm n} + \mathbf{j}_\omega^{\rm s}$ [21]:

$$\mathbf{j}_\omega^{\rm n} = \sigma_\omega^{\rm n} \mathbf{E}_\omega, \tag{8}$$

$$\mathbf{j}_\omega^{\rm s} = \sigma_\omega^{\rm s}(T) \mathbf{E}_\omega = \frac{-i\mathbf{E}_\omega}{\mu_0 \omega\, [\lambda(T)]^2}\,, \tag{9}$$

где $\sigma_\omega^{\rm n}$ и $\sigma_\omega^{\rm s}$ — проводимости, обусловленные нормальными и сверхпроводящими электронами, $\lambda(T) = \lambda_0/\sqrt{1 - (T/T_{\rm c})^4}$ — лондоновская глубина проникновения. Оценим соотношение между $\sigma_\omega^{\rm n}$ и $\sigma_\omega^{\rm s}$. Подставляя в (9) типичные параметры сверхпроводящих плёнок [22] $\lambda_0 = 1\,390$ Å(YBCO) или $\lambda_0 = 390$ Å (Nb), $\nu \simeq 0{,}5$ ГГц, $\sigma_\omega^{\rm n} \simeq 10^6$ (Ом · м)$^{-1}$, получаем, что область температур $\Delta T_1$ вблизи $T_{\rm c}$, в которой неравенства $\sigma_\omega^{\rm n} \ll \sigma_\omega^{\rm s}$ и $j_\omega^{\rm n} \ll j_\omega^{\rm s}$ не выполняются, мала ($\Delta T_1 \leq 0{,}0001\ T_{\rm c}$). Поэтому в дальнейшем будем считать, что температура не очень близка к $T_{\rm c}$ ($T < T_{\rm c} - \Delta T_1$), так что при расчёте линейного отклика можно пренебречь компонентой тока, обусловленной нормальными электронами.

Тогда пространственное распределение вектор-потенциала $\mathbf{A}_\omega(x, y)$, создаваемое сторонним током $\mathbf{j}_\omega^{\rm ext}$, расположенными над тонкой сверхпроводящей плёнкой толщины $d_0 \ll \lambda$, удовлетворяет следующему уравнению:

$$-\Delta \mathbf{A}_\omega(x, y) + \lambda_{\rm eff}^{-1} \mathbf{A}_\omega(x, y) \delta(x) = \mu_0 \mathbf{j}_\omega^{\rm ext}(x, y), \tag{10}$$

где $\lambda_{\rm eff} = \lambda^2/d_0$, $\operatorname{div} \mathbf{A}_\omega = 0$. Считая, что $\mathbf{A}_\omega = A_\omega(x, y) \mathbf{z}_0$, запишем уравнение (10) в скалярной форме:

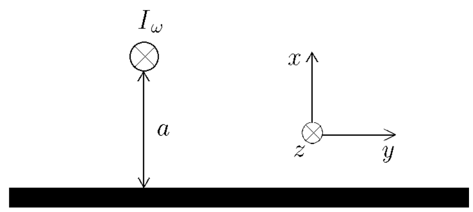



Рис. 3. Провод с СВЧ током $I_\omega$ над поверхностью бесконечной сверхпроводящей плёнки

$$-\Delta A_\omega(x, y) + \lambda_{\rm eff}^{-1} A_\omega(x, y) \delta(x) = \mu_0 I_\omega \delta(x - a, y). \tag{11}$$

Для решения уравнения (11) относительно $A_\omega(x, y)$ введём двумерные и одномерные фурье-компоненты (см., например, [23]):

$$A_\omega(k_x, k_y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} A_\omega(x, y) \exp(ixk_x + iyk_y)\, {\rm d}x\, {\rm d}y \tag{12}$$

и

$$A_\omega(k_y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} A_\omega(k_x, k_y) \frac{{\rm d}k_x}{2\pi} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} A_\omega(x, y) \delta(x) \exp(ixk_x + iyk_y)\, {\rm d}x\, {\rm d}y. \tag{13}$$

После преобразования Фурье получаем уравнение для фурье-образов:

$$(k_x^2 + k_y^2)\, A_\omega(k_x, k_y) + \lambda_{\rm eff}^{-1}\, A_\omega(k_y) = \mu_0 I_\omega \exp(ik_x a). \tag{14}$$

Выражая отсюда $A_\omega(k_x, k_y)$ и интегрируя по $k_x$, находим фурье-компоненту $A_\omega(k_y)$ в сверхпроводящей плёнке:

$$A_\omega(k_y) = \mu_0 I_\omega \frac{\lambda_{\rm eff} \exp(-|k_y| a)}{1 + 2\, |k_y|\, \lambda_{\rm eff}}\,. \tag{15}$$

Поскольку в нашем случае справедливо соотношение $a \gg \lambda_{\text{eff}}$, выражение (15) может быть преобразовано к виду

$$A_\omega(k_y) = \mu_0 I_\omega \lambda_{\text{eff}} \exp(-|k_y|a). \tag{16}$$

После вычисления обратного преобразования Фурье находим распределение $z$-компонент векторного потенциала $\mathbf{A}_\omega(y)$ и плотности сверхпроводящего тока $\mathbf{j}_\omega^{\text{s}}$ в плёнке:

$$A_\omega(y) = -\frac{\mu_0 \lambda^2 I_\omega a}{\pi d_0\,(a^2 + y^2)}\,, \tag{17}$$

$$j_\omega^{\text{s}}(y) = \frac{I_\omega a}{\pi d_0\,(a^2 + y^2)}\,. \tag{18}$$

Заметим, что распределения (17) и (18) соответствуют случаю идеального экранирования магнитного поля источника. Область температур вблизи $T_{\text{c}}$, где приближение полной экранировки не работает ($a \le \lambda_{\text{eff}}$), весьма мала ($\Delta T_2 \le 0{,}001 T_{\text{c}}$), так что при расчёте нелинейного отклика сверхпроводника для температур, не слишком близких к $T_{\text{c}}$ ($T < T_{\text{c}} - \Delta T_2$), мы воспользуемся найденными выше распределениями.

### 2.3. Нелинейный отклик

Рассчитаем нелинейный СВЧ отклик тонкой сверхпроводящей плёнки. В общем случае нелинейность СВЧ отклика сверхпроводника может быть связана с зависимостью проводимостей $\sigma_\omega^{\text{n}}$ и $\sigma_\omega^{\text{s}}$ от напряжённости электрического поля $E_\omega$. Поскольку нелинейный отклик наблюдается только в сверхпроводящем состоянии и исчезает при переходе образца в нормальное состояние, мы полагаем, что этот отклик определяется в основном зависимостью $\sigma_\omega^{\text{s}} = \sigma_\omega^{\text{s}}(E_\omega)$. Поэтому, придерживаясь феноменологического подхода, запишем нелинейную связь векторного потенциала $\mathbf{A}$ с плотностью сверхпроводящего тока $\mathbf{j}_{\text{s}}$ в приближении слабого сигнала ($A \ll A_{\text{c}}$):

$$\mathbf{j}_{\text{s}} = -\frac{\mathbf{A}}{\mu_0 \lambda^2}\left(1 - \frac{A^2}{A_{\text{c}}^2}\right), \tag{19}$$

где $A_{\text{c}}$ — феноменологический параметр, характеризующий величину критического тока для конкретного механизма нелинейности. Заметим, что такая феноменологическая связь может быть записана в приближении слабого сигнала, например, для нелинейности Гинзбурга—Ландау, джозефсоновской нелинейности, тепловой нелинейности, нелинейности, обусловленной движением вихрей, и т. д. Тогда, используя выражение (17) для векторного потенциала $A_\omega(x,y)$, полученное в первом приближении, и нелинейную связь (19), записываем уравнение для векторного потенциала на частоте третьей гармоники $A_{3\omega}^{\text{nl}}(x,y)$:

$$-\Delta A_{3\omega}^{\text{nl}}(x,y) + \lambda_{\text{eff}}^{-1} A_{3\omega}^{\text{nl}}(x,y)\delta(x) = \mu_0 j_{3\omega}^{\text{nl}}, \tag{20}$$

где

$$j_{3\omega}^{\text{nl}} = \frac{1}{4\mu_0 \lambda_{\text{eff}}}\,\frac{A_\omega^3}{A_{\text{c}}^2}\,\delta(x) \tag{21}$$

— ток, который для уравнения (20) может рассматриваться как сторонний. Для нахождения векторного потенциала на зонде $A_{3\omega}^{\text{nl}}(a,0)$ воспользуемся теоремой взаимности и выражениями

(17) и (7), сделав в них тривиальную замену частоты: $\mathbf{A}_\omega \to \mathbf{A}_{3\omega}$ и $\mathbf{j}_\omega^{\rm ext} \to \mathbf{j}_{3\omega}^{\rm ext}$. Тогда теорема взаимности на частоте третьей гармоники запишется в виде

$$\int \mathbf{j}_{3\omega}^{\rm ext}\mathbf{A}_{3\omega}^{\rm nl}\,{\rm d}V = \int \mathbf{j}_{3\omega}^{\rm nl}\mathbf{A}_{3\omega}\,{\rm d}V. \tag{22}$$

Здесь $\mathbf{A}_{3\omega}$ — векторный потенциал, создаваемый сторонним током $\mathbf{j}_{3\omega}^{\rm ext}$, а $\mathbf{A}_{3\omega}^{\rm nl}$ — векторный потенциал, создаваемый током $\mathbf{j}_{3\omega}^{\rm nl}$ (21), текущим по сверхпроводящей плёнке. После подстановки и вычисления интегралов получаем векторный потенциал на зонде:

$$A_{3\omega}^{\rm nl}(a,0) = \frac{5\mu_0^3\lambda^6 I_\omega^3}{64\pi^3 d_0^3 a^3 A_{\rm c}^2}\,. \tag{23}$$

Напряжение на зонде $U_{3\omega}$, обусловленное векторным потенциалом $A_{3\omega}^{\rm nl}$, меняющимся с частотой $3\omega$, равно

$$U_{3\omega} = -\frac{\partial A_{3\omega}^{\rm nl}}{\partial t}\,l. \tag{24}$$

Из соотношений (23) и (24) находим амплитуду напряжения на зонде на частоте третьей гармоники:

$$U_{3\omega} = \frac{15\omega\mu_0^3\lambda^6 I_\omega^3 l}{64\pi^3 d_0^3 a^3 A_{\rm c}^2}\,. \tag{25}$$

Вводя критический ток нелинейности

$$j_{\rm c} = -\frac{A_{\rm c}}{\mu_0\lambda^2}, \tag{26}$$

выражение (25) можно записать в виде

$$U_{3\omega} = \frac{15\omega\mu_0\lambda^2 I_\omega^3 l}{64\pi^3 d_0^3 a^3 j_{\rm c}^2}\,. \tag{27}$$

Мощность, излучаемая в линию передачи на утроенной частоте, равна

$$P_{3\omega} = \frac{U_{3\omega}^2}{2Z_0}\,, \tag{28}$$

входная мощность на основной частоте с учётом соотношения (6) равна

$$P_\omega = \frac{I_\omega^2 Z_0}{8}\,. \tag{29}$$

Используя соотношения (28) и (29), окончательно получаем нелинейную связь мощности третьей гармоники с мощностью первой гармоники, рассчитанную в приближении слабого СВЧ поля:

$$P_{3\omega} = \frac{P_\omega^3}{P_{\rm c}^2}\,, \tag{30}$$

где

$$P_{\rm c} = \frac{4Z_0^2\pi^3 d_0^3 a^3 j_{\rm c}^2}{15\omega\mu_0\lambda^2 l}\,. \tag{31}$$

Следует заметить, что несмотря на то, что расчёт был сделан для тонкой плёнки (т. е. в предположении $d_0 \ll \lambda$), все основные выводы и соотношения (30), (31) справедливы по порядку величины и для массивного сверхпроводника. Однако в случае массивного сверхпроводника при оценке мощности третьей гармоники необходимо сделать замену $d_0$ на $\lambda$ в формуле (31), соответствующую тому, что экранирующий ток сосредоточен в поверхностном слое толщины $\lambda$. При этом следует отметить, что в этом случае сигнал на частоте третьей гармоники будет меньше в $(d_0/\lambda)^6$ раз по сравнению со случаем тонкой сверхпроводящей плёнки.

## 3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

### 3.1. Характеристики образцов

В работе экспериментально исследовались плёнки, монокристаллы, поликристаллы YBCO и плёнки Nb. Плёнки YBCO с толщиной $300\div 1\,000$ Å были выращены методом магнетронного напыления на подложках из $NdGaO_3$ и $LaAlO_3$. Поликристаллические образцы были выполнены в виде таблетки с диаметром 18 мм и толщиной 2 мм. Монокристаллы YBCO в форме пластины с размерами $1\times 2\times 0{,}1$ мм были приготовлены в КФТИ РАН Е. Ф. Куковицким и С. Г. Львовым. Также были измерены плёнки Nb с толщиной $100\div 1\,000$ Å, выращенные на подложках из $Al_2O_3$ и Si.

Температурная зависимость удельного сопротивления образцов $\rho(T)$ измерялась стандартным четырёхзондовым методом. Критическая температура сверхпроводников $T_{\rm c}$ определялась как температура, при которой происходит падение удельного сопротивления $\rho$ образца на два порядка по сравнению с удельным сопротивлением $\rho_{\rm n}$ в нормальном состоянии. Типичная критическая температура для плёнок, монокристаллов и поликристаллов YBCO составляет $T_{\rm c}=86\div 91$ K (рис. 4). Плёнки Nb имели критическую температуру $T_{\rm c}=8\div 9$ K (рис. 5).

Для определения температурной зависимости плотности тока пиннинга $j_{\rm p}(T)$ для плёнок YBCO (рис. 4) и Nb (рис. 5) в интервале температур $4\div 91$ K были проведены эксперименты по измерению остаточной намагниченности плёнки. После увеличения магнитного поля до значений $B\geq 600$ Гс, обеспечивающих полное проникновение магнитного потока в плёнку, и последующего уменьшения его до нуля датчиком Холла определялось максимальное значение захваченного поля $\max\{B_z(x,y)\}$. Затем в рамках модели критического состояния $j=j_{\rm p}={\rm const}$ была проведена оценка средней по поверхности плёнки плотности тока пиннинга $j_{\rm p}$ по формуле [24]

$$j_{\rm p}=\frac{c\max\{B_z\}}{2\pi d_0\ln(L/R_{\rm H})}\,. \qquad (32)$$

Здесь $d_0$ — толщина плёнки, $L$ — размер плёнки, $R_{\rm H}\approx 250$ мкм — параметр, характеризующий пространственное разрешение датчика Холла. Типичные значения плотности тока пиннинга $j_{\rm p}$ составляют $8\cdot 10^5$ А/см$^2$ для плёнок YBCO при $T=77$ K и $3\cdot 10^6$ А/см$^2$ для плёнок Nb при $T=4{,}2$ K. Поликристаллы YBCO имели плотность тока пиннинга $j_{\rm p}(T=77\text{ K})\sim 10^3\div 10^4$ А/см$^2$.

Для плёнок YBCO также была измерена температурная зависимость эффективной плотности тока распаривания $j_{\rm eff}(T)$ (техника измерений приведена в работе [25]). Методика измерения $j_{\rm eff}$ основана на использовании в качестве источника магнитного поля малой ферромагнитной частицы (микромагнита). Эффективная плотность тока распаривания $j_{\rm eff}$ определялась на основе экспериментов по измерению поверхностного энергетического барьера Бина—Ливингстона тонких сверхпроводящих плёнок в интервале температур $77\div 91$ K. Для температуры $T=77$ K измеренное значение $j_{\rm eff}$ составило $2{,}5\cdot 10^6$ А/см$^2$ (см. рис. 4).

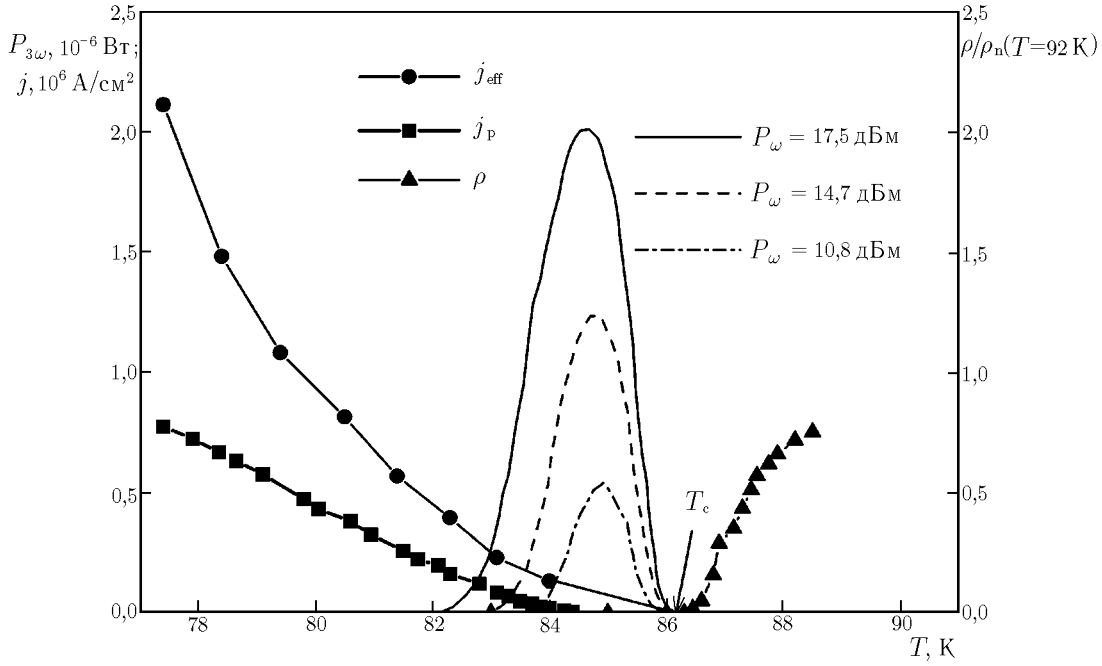



Рис. 4. Температурные зависимости мощности третьей гармоники $P_{3\omega}(T)$ при различных входной мощности $P_\omega$, плотности тока пиннинга $j_{\rm p}(T)$, эффективной плотности тока распаривания $j_{\rm eff}(T)$ и удельного сопротивления $\rho(T)$ для плёнки YBCO при температурах, близких к $T_{\rm c}$

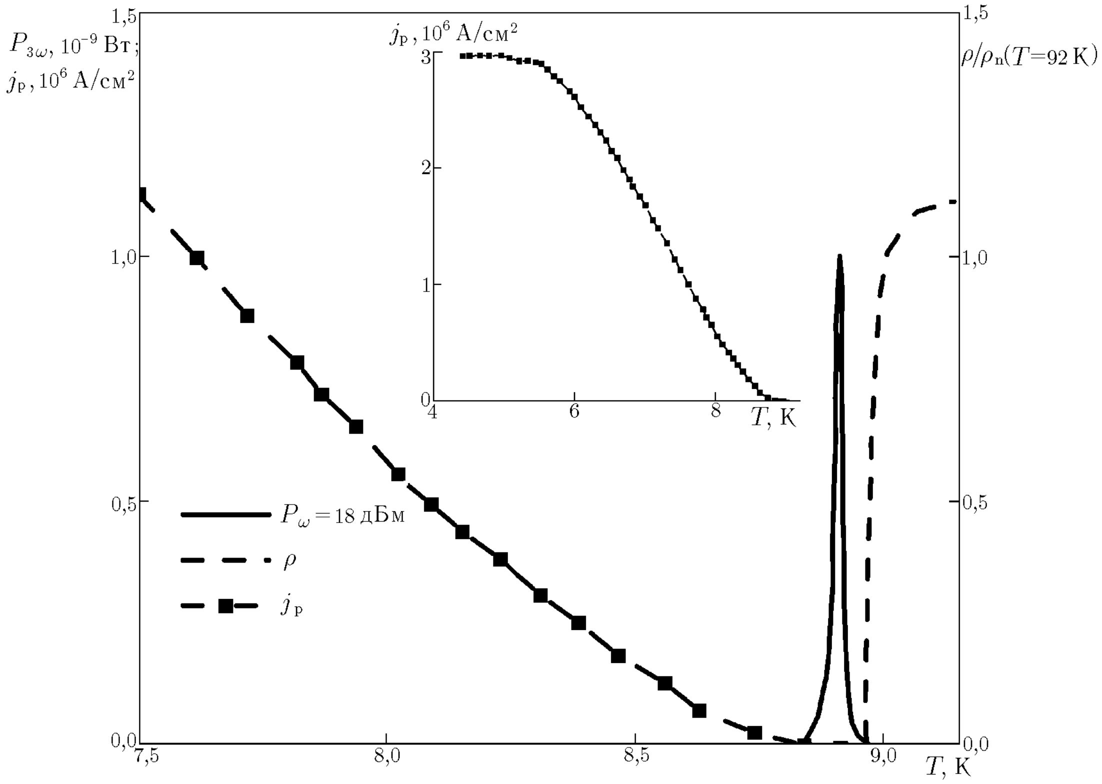



Рис. 5. Температурные зависимости мощности третьей гармоники $P_{3\omega}(T)$, плотности тока пиннинга $j_{\rm p}$ и удельного сопротивления $\rho$ для плёнки Nb при температурах, близких к $T_{\rm c}$. На вставке показана температурная зависимость плотности тока пиннинга $j_{\rm p}$ в температурном интервале от 4 до 9 К

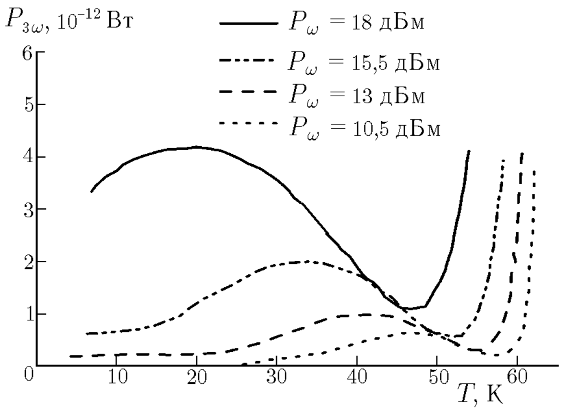



Рис. 6. Температурные зависимости мощности третьей гармоники $P_{3\omega}(T)$ при различной входной мощности $P_\omega$ для плёнок YBCO при низких температурах

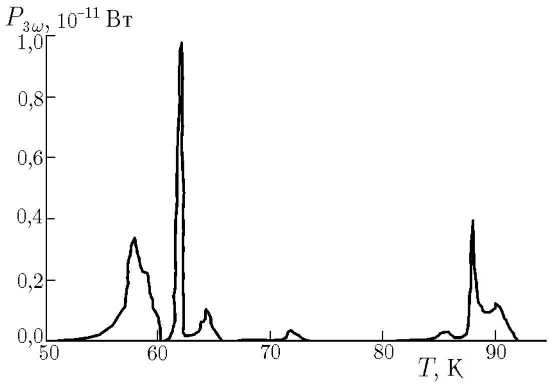



Рис. 7. Температурная зависимость мощности третьей гармоники $P_{3\omega}(T)$ для монокристалла YBCO при $P_\omega = 18$ дБм

**3.2. Температурная зависимость мощности третьей гармоники**

На рис. 4 представлены типичные температурные зависимости мощности третьей гармоники $P_{3\omega}(T)$ при различной входной мощности $P_\omega$ для плёнки YBCO в области температур, близких к $T_c$. Температурная зависимость нелинейного отклика демонстрирует характерный довольно узкий пик нелинейности шириной порядка 2÷3 K при температуре вблизи 85 K. При повышении мощности падающей волны $P_\omega$ максимум температурной зависимости нелинейного отклика $P_{3\omega}(T)$ увеличивается и монотонно смещается в сторону меньших температур. В то же время температура исчезновения нелинейного отклика (справа от пика нелинейности) практически не зависит от мощности первой гармоники $P_\omega$. На рис. 4 также представлены температурные зависимости плотности тока пиннинга $j_p(T)$, эффективной плотности тока распаривания $j_{eff}(T)$ и удельного сопротивления $\rho(T)$. Сравнивая зависимости $P_{3\omega}(T)$ и $\rho(T)$, можно заметить, что температура исчезновения нелинейного отклика равна температуре перехода сверхпроводника в сверхпроводящее состояние $T_c$ (определённой нами выше по результатам резистивных измерений). Кроме того, для плёнок YBCO наблюдается корреляция между зависимостями $P_{3\omega}(T)$ и $j_p(T)$: температура, при которой достигается максимум нелинейности, соответствует температуре исчезновения тока пиннинга.

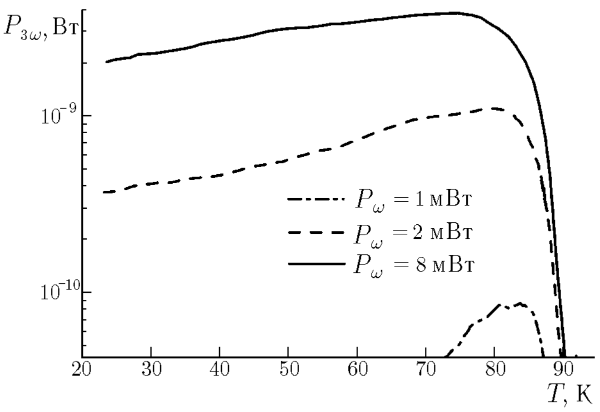



Рис. 8. Температурные зависимости мощности третьей гармоники $P_{3\omega}(T)$ при различной входной мощности $P_\omega$ для поликристалла YBCO

В области низких температур (при температурах, не слишком близких к $T_c$) некоторые плёнки YBCO демонстрируют довольно широкий максимум нелинейности (рис. 6), причём величина низкотемпературного пика зависимости $P_{3\omega}(T)$ на несколько порядков меньше величины высокотемпературного пика (вблизи $T_c$). Положение низкотемпературного максимума сильно зависит

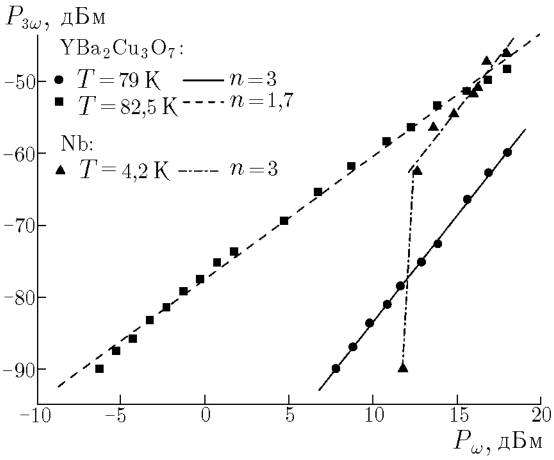



Рис. 9. Зависимости $P_{3\omega}(P_\omega)$ для плёнок YBCO и Nb при разной температуре и их аппроксимация степенным законом $P_{3\omega} \propto P_\omega^{\mathrm{n}}$

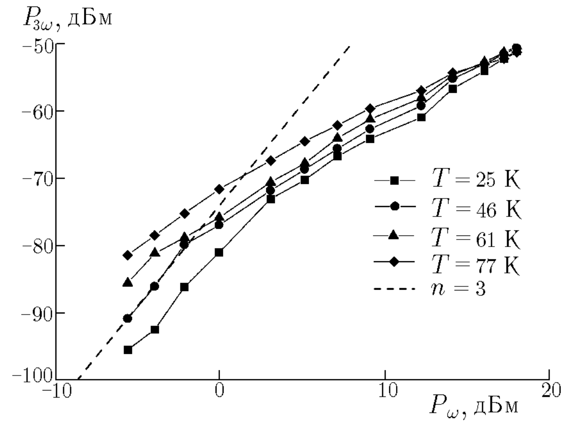



Рис. 10. Зависимость $P_{3\omega}(P_\omega)$ для поликристалла YBCO при различной температуре. Пунктирной линией показана зависимость $P_{3\omega} \propto P_\omega^3$

от мощности сигнала $P_\omega$. При минимальной мощности $P_\omega < 10{,}5$ дБм максимум расположен при $T \approx 50$ К, а при максимальной мощности $P_\omega = 18$ дБм максимум смещается к $T = 20$ К.

Температурная зависимость $P_{3\omega}(T)$ для монокристалла YBCO (рис. 7) демонстрирует несколько пиков нелинейности, лежащих в двух температурных интервалах: вблизи $T_c$ и в области температур $55\div75$ К.

В поликристаллических образцах, в отличие от монокристаллов и плёнок YBCO, наблюдается довольно широкий максимум нелинейности вблизи $T_c$, который при увеличении $P_\omega$ расширяется вплоть до гелиевых температур (рис. 8).

На рис. 5 показаны типичные температурные зависимости мощности третьей гармоники $P_{3\omega}(T)$, плотности тока пиннинга $j_{\mathrm{p}}(T)$ и удельного сопротивления $\rho(T)$ для сверхпроводящих плёнок Nb. В данных образцах мы наблюдали узкий пик нелинейности шириной порядка 0,1 К. Как видно из рис. 5, в плёнках Nb нелинейный отклик появляется (как и в случае плёнок YBCO) при переходе образца в сверхпроводящее состояние, а ток пиннинга $j_{\mathrm{p}}$ исчезает при температурах, меньших температуры, соответствующей максимуму нелинейного отклика.

### 3.3. Зависимость мощности третьей гармоники от входной мощности

На рис. 9 и 10 представлены зависимости мощности третьей гармоники $P_{3\omega}$ от входной мощности $P_\omega$ для плёнок YBCO, плёнок Nb и поликристаллов YBCO, построенные в двойном логарифмическом масштабе. Экспериментальные данные хорошо аппроксимируются степенным законом $P_{3\omega} \propto {P_\omega}^{\mathrm{n}}$.

В области низких и промежуточных температур для плёнок и поликристаллов YBCO $n \approx 3$, а при увеличении температуры или входной мощности наблюдается уменьшение показателя до $n \leq 2$ (рис. 9 и 10). Такое же отклонение зависимости $P_{3\omega}(P_\omega)$ от кубичной в сильных СВЧ полях наблюдалось, например, в работе [6] для плёнок YBCO.

Для некоторых тонких плёнок Nb ($d_0 < 300$ Å), выращенных на подложках из $Al_2O_3$, при $T = 4{,}2$ К удалось наблюдать ярко выраженный порог по мощности (рис. 9). При дальнейшем увеличении входной мощности $P_\omega$ показатель $n \approx 3$.

### 3.4. Зависимость мощности третьей гармоники от внешнего постоянного магнитного поля

Рассмотрим влияние внешнего магнитного поля $H_{\rm dc}$, перпендикулярного поверхности сверхпроводника, на нелинейный отклик плёнки YBCO. На рис. 11 представлены зависимости $P_{3\omega}$ от внешнего магнитного поля при $T = 83{,}5$ К и $T = 77$ К для плёнок YBCO. Поведение зависимости $P_{3\omega}(H_{\rm dc})$ качественно различается в области азотных температур и при температурах, близких к $T_{\rm c}$. При $T = 77$ К наблюдается довольно сильный гистерезис, и увеличение поля приводит к резкому возрастанию мощности третьей гармоники в магнитном поле $H_{\rm dc} \sim 10$ Гс. В области температур, близких к $T_{\rm c}$, необратимость зависимости $P_{3\omega}(H_{\rm dc})$ исчезает, и пик нелинейности в $P_{3\omega}(T)$ подавляется постоянным магнитным полем. Кроме того, при максимальной мощности входного сигнала наблюдается максимум в зависимости $P_{3\omega}(H_{\rm dc})$ (см. рис. 11), связанный с небольшим сдвигом пика нелинейности в $P_{3\omega}(T)$ в сторону меньших температур (магнитное поле $H_{\rm dc} \sim 100$ Гс сдвигает высокотемпературный пик на величину порядка 0,1 К).

В поликристаллических образцах YBCO наблюдалось аналогичное поведение зависимости $P_{3\omega}(H_{\rm dc})$. Однако в поликристаллах YBCO, в отличие от плёнок YBCO, наблюдалось более сильное смещение температуры максимума нелинейности в область низких температур при увеличении $H_{\rm dc}$ (рис. 12).

Влияние внешнего магнитного поля на нелинейный отклик в монокристаллах пока детально не исследовано. Однако наши предварительные результаты указывают на то, что при включении постоянного магнитного поля сложная структура низкотемпературных пиков в монокристаллах изменяется. В частности, некоторые из максимумов полностью подавляются даже слабым магнитным полем $H_{\rm dc} \leq 10$ Гс, а другие уменьшаются незначительно. По нашему мнению, вопрос о поведении этих пиков во внешнем магнитном поле очень важен для выяснения природы нелинейного отклика сверхпроводников и требует дальнейшего исследования.

На рис. 13 показана температурная зависимость нелинейного отклика для плёнок Nb при различном магнитном поле $H_{\rm dc}$. Поведение нелинейного отклика во внешнем постоянном магнитном поле в плёнках Nb сильно отличается от поведения зависимости $P_{3\omega}(H_{\rm dc})$ в плёнках YBCO. Во-первых, в слабых магнитных полях $H_{\rm dc} < 50$ Гс нелинейный отклик вблизи $T_{\rm c}$ сначала возрастает, а потом сильно подавляется магнитным полем порядка 450 Гс. Во-вторых, в сильных магнитных полях появляется второй максимум нелинейности в зависимости $P_{3\omega}(T)$, который увеличивается по амплитуде при увеличении $H_{\rm dc}$. При этом следует отметить, что эти максимумы нелинейного отклика во внешнем магнитном поле существуют при температурах, где отлична от нуля плотность тока пиннинга $j_{\rm p}$ (см. рис. 5 и 13). Наконец, увеличение внешнего магнитного поля приводит к сдвигу зависимости $P_{3\omega}(T)$ в область меньших температур, который коррелирует со сдвигом температурной зависимости удельного сопротивления $\rho(T)$ (рис. 13).

### 3.5. Пространственное распределение $P_{3\omega}(x,y)$ для плёнки YBCO

Разработанный локальный метод исследования нелинейности позволил определить пространственное распределение мощности третьей гармоники $P_{3\omega}(x,y)$ для плёнки YBCO при различных температурах ниже $T_{\rm c}$. В данных экспериментах мы использовали систему позиционирования, которая позволяла проводить сканирование с шагом 125 мкм в плоскости плёнки $(x,y)$ при фиксированной высоте зонда $a$ над её поверхностью. Как было отмечено выше, температура исчезновения нелинейного отклика в плёнке высокотемпературного сверхпроводника (ВТСП) соответствует критической температуре $T_{\rm c}$ (определённой нами в разделе 3.1; см. рис. 4). Поэтому, проводя сканирование пространственного распределения нелинейного отклика плёнки YBCO

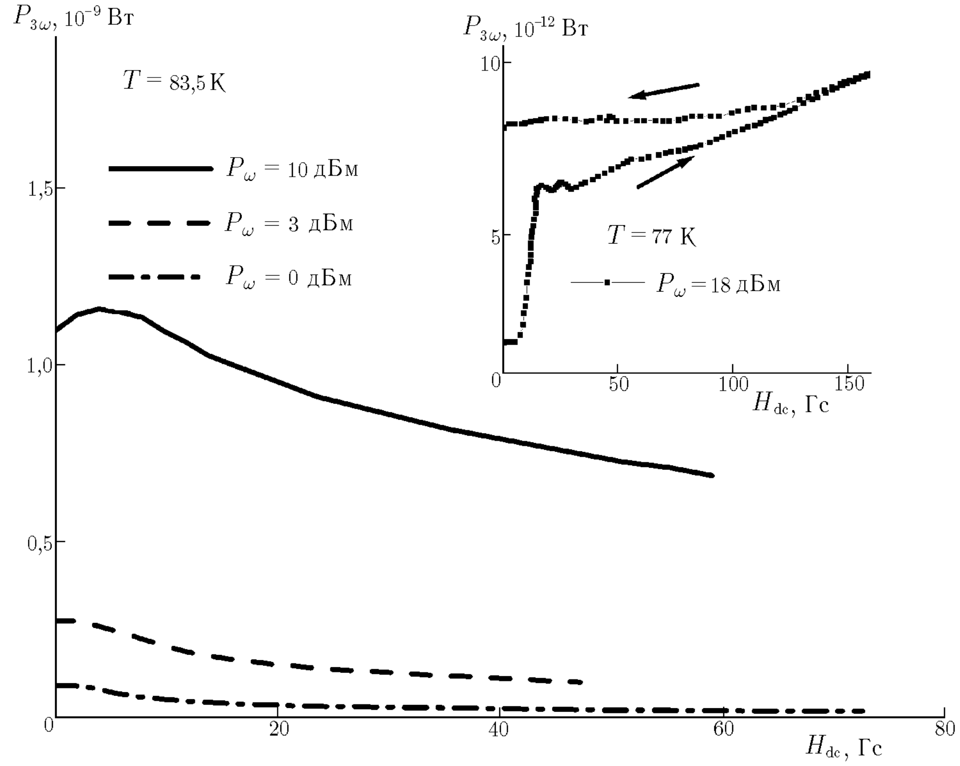



Рис. 11. Зависимость мощности третьей гармоники $P_{3\omega}$ от внешнего постоянного магнитного поля $H_{\rm dc}$ для плёнок YBCO при $T = 83{,}5$ К (на левом склоне пика нелинейности). На вставке показана зависимость $P_{3\omega}(H_{\rm dc})$ при $T = 77$ К

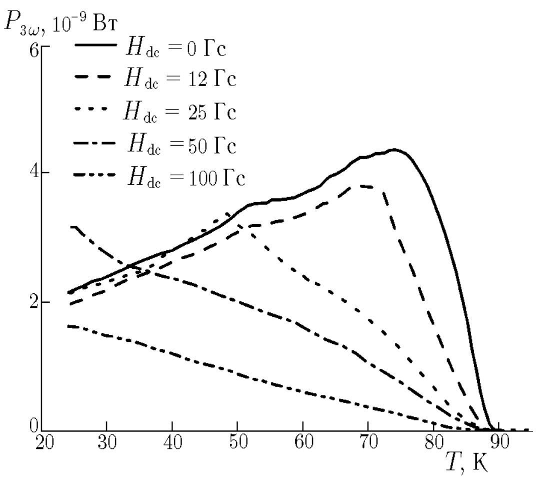



Рис. 12. Температурные зависимости мощности третьей гармоники $P_{3\omega}(T)$ при различном внешнем постоянном магнитном поле $H_{\rm dc}$ для поликристаллов YBCO

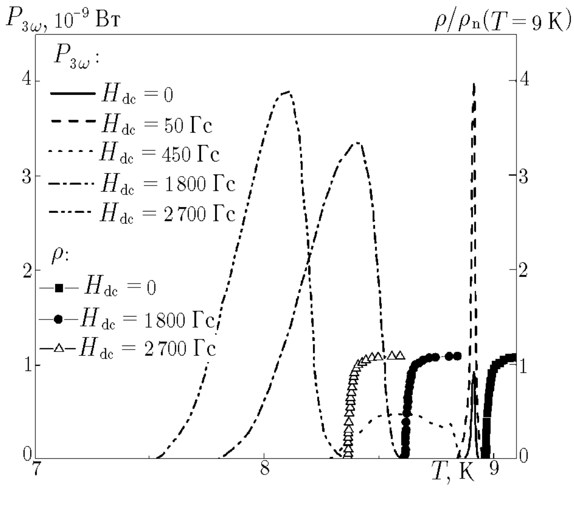



Рис. 13. Температурные зависимости мощности третьей гармоники $P_{3\omega}(T)$ и удельного сопротивления $\rho(T)$ при различном внешнем постоянном магнитном поле $H_{\rm dc}$ для плёнки Nb

при различных температурах, представляется возможным бесконтактно определить распределение критической температуры $T_{\rm c}$ в образце. На рис. 14 представлены результаты сканирования плёнки YBCO при фиксированной высоте зонда $a = 200$ мкм при $T = 88$ К (рис. 14*а*) и $T = 90$ К

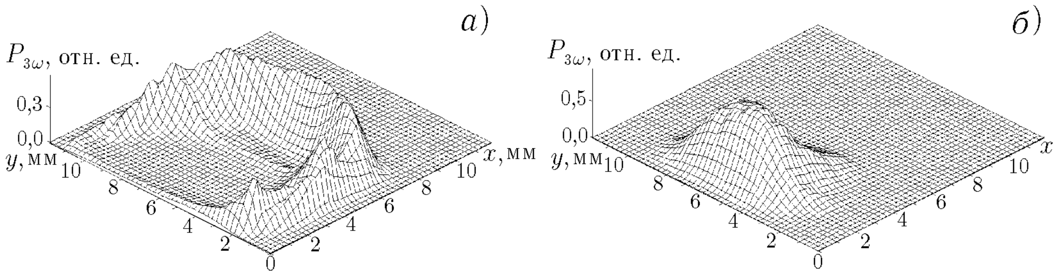



Рис. 14. Пространственное распределение нелинейного СВЧ отклика плёнки YBCO при $T = 88$ К (*а*) и $T = 90$ К (*б*). Проволочка зонда расположена параллельно оси $x$

(рис. 14*б*). Рис. 14*а*, *б* демонстрируют неоднородное распределение нелинейного отклика на поверхности плёнки, которое мы связываем с неоднородным распределением критической температуры $T_{\rm c}$ в сверхпроводящем образце. Действительно, область плёнки YBCO, в которой при $T = 90$ К нелинейность ещё наблюдается, а при $T = 88$ К исчезает, имеет более высокую критическую температуру по сравнению с областью плёнки, где нелинейный отклик наблюдается только при $T = 88$ К. Также следует отметить, что при приближении зонда к границе образца наблюдается увеличение мощности третьей гармоники (рис. 14*а*), связанное с возрастанием плотности экранирующих токов. Такое усиление тока зависит от ориентации проволочки (зонда) по отношению к границе плёнки. В частности, наибольшая плотность токов и, соответственно, наибольший нелинейный сигнал возникают в случае, когда она параллельна краю плёнки.

## 4. ОБСУЖДЕНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

В этом разделе мы систематизируем основные экспериментальные данные и обсудим возможную природу нелинейности YBCO и Nb. Поскольку природа нелинейного СВЧ отклика как в ВТСП, так и в низкотемпературных сверхпроводниках до конца не ясна, ниже мы обсудим наши экспериментальные результаты в рамках двухжидкостной модели сверхпроводника с феноменологической нелинейной связью $j_{\rm s}(A)$, определяемой выражением (19).

Эксперименты показали, что температурная зависимость нелинейного отклика сверхпроводников демонстрирует характерный пик нелинейности вблизи $T_{\rm c}$, причём при увеличении входной мощности или при приближении температуры к $T_{\rm c}$ наблюдается насыщение зависимости мощности третьей гармоники от мощности первой гармоники $P_{3\omega}(P_\omega)$. В общем случае пики нелинейности вблизи $T_{\rm c}$ (см. рис. 4–8) и насыщение зависимости $P_{3\omega}(P_\omega)$ (см. рис. 9 и 10) могут быть объяснены в рамках двухжидкостной модели сверхпроводника (8), (9). Действительно, полная плотность тока $j$, текущего по сверхпроводнику, есть сумма плотности сверхпроводящего тока $j_{\rm s}$ и плотности нормального тока $j_{\rm n} = \sigma_{\rm n} E$. При этом плотность сверхпроводящего тока $j_{\rm s}$ описывается нелинейной феноменологической связью $j_{\rm s}(A)$, которая справедлива для многих моделей нелинейности в пределе слабого сигнала ($A_\omega \ll A_{\rm c}$). Параметр $A_{\rm c}$ характеризует значение критического тока нелинейности $j_{\rm c}$, которое определяется конкретным механизмом нелинейности. В частности, связь (19) соответствует теории Гинзбурга—Ландау, если плотность критического тока нелинейности $j_{\rm c}$ в выражении (26) равна критической плотности тока распаривания Гинзбурга—Ландау $j_{\rm GL}$. Аналогичным образом следует ожидать, что и для других моделей нелинейного отклика зависимости (19), (21) тоже будут выполняться, если под соответствующими величинами ($\lambda$, $j_{\rm c}$) подразумевать их эффективные, средние значения (усреднённые плотности тока, эффективные глубины проникновения магнитного поля и т. д.; см., например, [26]). Поэтому в дальнейшем мы будем полагать, что для нелинейности, связанной с подавлением модуля параметра порядка, $j_c \approx j_{GL}$; для нелинейности, обусловленной наличием джозефсоновских связей, $j_c \approx j_J$; для нелинейности, связанной с негармоническими колебаниями в непараболическом потенциале пиннинга, $j_c \approx j_p$ и т. п.

При температурах не слишком близких к $T_c$, или при малом уровне входной мощности (т. е. в области применимости приближения слабого сигнала) теоретический расчёт (раздел 2.3) согласуется с экспериментальными данными. Действительно, при этих условиях мощность третьей гармоники $P_{3\omega}$ увеличивается с ростом температуры и наблюдается кубическая зависимость мощности третьей гармоники от мощности первой гармоники: $P_{3\omega} \propto {P_\omega}^3$ (см. рис. 9, 10).

В области температур, близких к $T_c$, или при высоком уровне входной мощности, т. е. в области сильного микроволнового поля ($A_\omega \sim A_c$), разложение (19) не справедливо, т. к. полный ток $j$, текущий по сверхпроводящей плёнке, становится порядка или больше критического тока нелинейности $j_c$. В этом случае полный ток уже не может переноситься только сверхпроводящим током $j_s$, и нормальная компонента $j_n = \sigma_n E$ становится существенной и требует корректного учёта. Следовательно, в сильном микроволновом поле будет наблюдаться ограничение сверхпроводящего тока $j_s$, текущего по плёнке, которое приводит к уменьшению нелинейного отклика при приближении температуры к $T_c$ или насыщению зависимости $P_{3\omega}(P_\omega)$.

### 4.1. Нелинейный СВЧ отклик YBCO

Природа нелинейности в YBCO исследовалась в ряде экспериментальных и теоретических работ, в которых для объяснения нелинейных свойств высокотемпературных сверхпроводников предлагались различные механизмы. Авторы [6, 7] связывают механизм излучения второй и третьей гармоник в плёнках и монокристаллах YBCO с нелинейностью Гинзбурга—Ландау. В работе [16] для интерпретации результатов по исследованию генерации третьей гармоники в монокристалле YBCO привлекалась двухжидкостная модель сверхпроводника с концентрациями сверхпроводящих и нормальных электронов, специальным образом зависящими от амплитуды волны. О существовании минимума в температурной зависимости амплитуды напряжённости электрического поля на утроенной частоте $E_{3\omega}(T)$ при $T \sim 40$ K для плёнок YBCO сообщается в работе [15]. Медленный рост $E_{3\omega}(T)$ при низких температурах авторы объясняют наличием слабых связей в образцах, высокотемпературный пик — рождением вихрей вблизи $T_c$ на краях образца и их вкладом в нелинейный отклик. Ниже мы обсудим применимость основных моделей нелинейности к нашим экспериментальным результатам, полученным для YBCO.

Для удобства анализа экспериментальных данных и особенностей нелинейного отклика плёнок, монокристаллов и поликристаллов YBCO выделим три температурных интервала: низких ($T \le 2T_c/3$ ), промежуточных ($2T_c/3 \le T \le 9T_c/10$) и близких к $T_c (T \ge 9T_c/10)$ температур.

#### 4.1.1. Нелинейный СВЧ отклик плёнок YBCO

**а) Промежуточные температуры.** Начнём с анализа нелинейных свойств плёнок YBCO при промежуточных температурах. В этом температурном диапазоне при $T = 79$ K для плёнки YBCO в эксперименте наблюдается кубическая зависимость мощности третьей гармоники от мощности первой гармоники: $P_{3\omega} \propto {P_\omega}^3$ (см. рис. 9). Такое поведение согласуется с теоретическим расчётом (30), (31), справедливым в приближении слабого сигнала ($A \ll A_c$). Оценим из экспериментальной зависимости $P_{3\omega}(P_\omega)$ критическую плотность тока $j_c$, который, как было отмечено выше, характеризует конкретный механизм нелинейности. Подставляя в формулы (30), (31) типичные параметры плёнок: $d_0 = 1\,000$ Å, $\lambda = 2\,000$ Å, и полагая $a = 35$ мкм,

$l = 2$ мм, получаем характерную критическую плотность тока нелинейности для плёнки YBCO: $j_{\rm c}(T = 79\ {\rm K}) \approx 3{\cdot}10^6$ А/см$^2$. Сравним полученное значение с плотностью токов, характеризующих различные механизмы нелинейности.

Одним из возможных механизмов, который может давать вклад в нелинейный отклик плёнок YBCO в этой области температур, является тепловая нелинейность. Как известно [13], природа тепловой нелинейности обусловлена диссипацией энергии и нагревом образца из-за наличия нормальных электронов в сверхпроводнике. В случае слабого микроволнового поля из уравнения теплового баланса [12] следует, что эти изменения температуры $\Delta T$ пропорциональны диссипируемой в образце мощности, т. е. $\Delta T \propto E^2$. В то же время изменения $\Delta T$ ведут к изменению концентрации сверхроводящих электронов $\Delta n_{\rm s}$ и, согласно выражению (9), к кубичной зависимости $j_{\rm s}(A)\,(A \ll A_{\rm c})$. Поэтому, действуя аналогично работе [12], можно оценить характерную плотность критического тока тепловой нелинейности $j_{\rm t}$. По нашим оценкам значение $j_{\rm t}$ для типичных параметров плёнок YBCO при температуре $T \approx 80$ K составляет $10^8 \div 10^9$ А/см$^2$, что значительно больше величины $j_{\rm c}(T = 79$ K), полученной в эксперименте. Таким образом, мы полагаем, что в области промежуточных температур этот механизм нелинейности не даёт существенного вклада в наблюдаемый нелинейный отклик.

Сравним значение $j_{\rm c}(T = 79$ K) с критическим током распаривания Гинзбурга—Ландау $j_{\rm GL}$. Для плёнки YBCO теоретический расчёт предсказывает $j_{\rm GL}(T = 79\ {\rm K}) \approx 10^7 \div 10^8$ А/см$^2$ [21], что на порядок превышает критическую плотность тока $j_{\rm c}(T = 79$ K). Следовательно, в области промежуточных температур, по нашему мнению, в эксперименте не наблюдается и нелинейность Гинзбурга—Ландау.

В то же время на рис. 4 приведены данные по измерению эффективной плотности тока распаривания $j_{\rm eff}$ (см. раздел 3.1) на тех же плёнках YBCO, на которых производились измерения нелинейного отклика. Температурная зависимость $j_{\rm eff}(T)$ получена из экспериментов по измерению локального энергетического барьера для вхождения вихрей в тонкие плёнки YBCO. Столь низкая эффективная плотность тока распаривания $j_{\rm eff}$ в исследуемых образцах $j_{\rm eff}/j_{\rm GL} \sim 10^{-2} \div 10^{-1}$, где $j_{\rm GL}$ — плотность тока распаривания в идеальном монокристаллическом образце, и, соответственно, аномально низкий барьер для рождения вихрей свидетельствуют о наличии в образце слабых джозефсоновских связей между сверхпроводящими гранулами (см. также [25]). В то же время полученная характерная плотность тока нелинейности $j_{\rm c}(T = 79$ K) по порядку величины совпадает с эффективной плотностью тока распаривания $j_{\rm eff}(T = 79\ {\rm K}) \approx 1{,}5 \cdot 10^6$ А/см$^2$ и с критическим током джозефсоновской среды $j_{\rm J}(T = 79\ {\rm K}) \sim 10^6$ А/см$^2$ в плёнках YBCO, полученным из микроволновых измерений [1]. Следовательно, нелинейный отклик в плёнках YBCO может быть связан с джозефсоновской нелинейностью.

Кроме вышеперечисленных механизмов нелинейности, в области промежуточных температур также может быть существенной вихревая нелинейность. Однако, поскольку плотность экранирующих токов, текущих по сверхпроводящей плёнке, $j_\omega^{\rm s}(T = 79\ {\rm K}) \le 10^6$ А/см$^2$ меньше $j_{\rm eff}(T = 79$ K), в области промежуточных температур в плёнки YBCO не проникают вихри, созданные СВЧ полем зонда. Поэтому при отсутствии магнитного поля такой механизм нелинейного отклика не реализуется из-за отсутствия вихрей, созданных СВЧ полем зонда.

Таким образом, мы полагаем, что нелинейный отклик в плёнке YBCO в области промежуточных температур при отсутствии внешнего постоянного магнитного поля $H_{\rm dc}$, по-видимому, определяется в основном джозефсоновской нелинейностью.

При включении внешнего постоянного магнитного поля $H_{\rm dc}$ начинается проникновение вихрей в сверхпроводник, и плёнки YBCO демонстрируют вихревой характер нелинейности (рис. 11). Однако в области внешнего магнитного поля $0 \le H_{\rm dc} \le 10$ Гс нелинейный отклик не зависит от $H_{\rm dc}$. Это может быть связано с тем, что вихри, созданные постоянным магнитным полем, ещё не достигают зонда, и дополнительного вклада в нелинейность не наблюдается. При дальнейшем увеличении $H_{\rm dc}$ мощность третьей гармоники резко возрастает, что свидетельствует о наличии вихревого вклада в нелинейном отклике. Кроме того, при выключении магнитного поля плёнки YBCO демонстрируют сильный гистерезис $P_{3\omega}(H_{\rm dc})$, который уменьшается по мере приближения температуры к $T_{\rm c}$. Мы считаем, что исчезновение гистерезиса в зависимости $P_{3\omega}(H_{\rm dc})$ обусловлено уменьшением тока пиннинга $j_{\rm p}$ при приближении температуры к $T_{\rm c}$ (рис. 4).

Таким образом, во внешнем постоянном магнитном поле при температурах, при которых плотность тока пиннинга отлична от нуля, ясно прослеживается нелинейный отклик плёнок YBCO, обусловленный движением вихрей, созданных внешним магнитным полем.

**б) Высокие температуры (близкие к $T_{\rm c}$).** При высоких температурах кроме внешнего магнитного поля сам СВЧ зонд может быть источником вихрей. Однако, поскольку СВЧ поле локализовано на масштабах порядка размеров зонда, высокочастотное магнитное поле на границе плёнки оказывается недостаточным для проникновения вихрей с краёв образца. Условием проникновения вихрей в тонкую плёнку в данной геометрии является достижение плотностью экранирующих токов $j_{\rm s}$ некоторого критического значения $j^*$, по порядку величины равного плотности тока распаривания Гинзбурга—Ландау $j_{\rm GL}$ для монокристаллических образцов или критическому джозефсоновскому току $j_{\rm J}$ для джозефсоновской среды. При увеличении температуры критическая плотность тока $j^*$, необходимая для создания вихревого состояния в исследуемых образцах, уменьшается. При некоторой температуре $T^*$ плотность экранирующих токов $j_\omega^{\rm s}$, текущих в сверхпроводящей плёнке, станет равна $j^*$. Эта температура $T^*$, конечно, определяется свойствами сверхпроводящего состояния. Например, для монокристаллических тонких плёнок температуру $T^*$ можно оценить из температурной зависимости $j_{\rm GL}(T)$ [21]. При максимальной мощности сигнала $P_\omega = 20$ дБм плотность экранирующих токов $j_\omega^{\rm s}$ равна $10^6$ А/см$^2$, и температура $T^*$ лежит достаточно близко к $T_{\rm c} = 86{,}4$ К: $T^* \geq 0{,}993 T_{\rm c} = 85{,}8$ К. В случае плёнок YBCO, исследованных нами в эксперименте, при максимальной мощности $P_\omega$ температура $T^*$ составляет величину порядка 80,1 К (рис. 4). Итак, мы полагаем, что в температурном интервале от $T^*$ до $T_{\rm c}$ СВЧ зонд может являться источником вихрей в плёнке YBCO, которые дают вклад в полный нелинейный отклик. Указанием на вихревой характер нелинейности вблизи $T_{\rm c}$ в отсутствие внешнего магнитного поля может служить экспериментально наблюдаемая корреляция температуры максимума нелинейности с температурой исчезновения тока пиннинга $j_{\rm p}$ (рис. 4).

В области низких температур некоторые плёнки YBCO демонстрируют низкотемпературный пик нелинейности (рис. 6). Поскольку аналогичные особенности температурной зависимости нелинейного отклика наблюдались также и в монокристаллах YBCO, нелинейные свойства плёнок YBCO при низких температурах мы рассмотрим в следующем разделе.

#### 4.1.2. Нелинейный СВЧ отклик монокристаллов YBCO

Температурная зависимость нелинейного отклика монокристаллов YBCO демонстрирует несколько низкотемпературных пиков нелинейности, расположенных вблизи 60 К, и серию пиков вблизи $T_{\rm c}$ (рис. 7). В некоторых плёнках YBCO также кроме высокотемпературного пика нелинейности наблюдается низкотемпературный пик (рис. 6). Наличие нескольких пиков нелинейности в монокристаллах YBCO связано, по-видимому, с наличием нескольких сверхпроводящих фаз, имеющих разную критическую температуру $T_{\rm c}$. Известно (см., например, [22]), что критическая температура монокристаллов $\rm YBa_2Cu_3O_{\it x}$ зависит от содержания кислорода $x$ и стехиометрического состава соединения, при этом возможные критические температуры близки к температурам пиков, наблюдавшихся нами в эксперименте (рис. 7). В то же время существование этих максимумов нелинейности в области температур порядка 60 К и при температурах, близких к $T_{\rm c}$, по нашему мнению, может быть связано с наличием двух устойчивых модификаций орторомбической фазы монокристалла $YBa_2Cu_3O_x$, имеющих различное содержание кислорода $x$ [22].

Исходя из этих данных, мы связываем наличие в монокристаллах и некоторых плёнках YBCO низкотемпературных пиков нелинейности с существованием низкотемпературных фаз в высокотемпературных сверхпроводниках YBCO. При этом следует отметить, что температурная зависимость $P_{3\omega}(T)$ для низкотемпературных пиков нелинейности, как и для пика нелинейности вблизи $T_{\rm c}$, может быть объяснена в рамках двухжидкостной модели сверхпроводника с феноменологической нелинейной связью (19) для всех обсуждаемых в настоящей работе моделей нелинейности.

#### 4.1.3. Нелинейный СВЧ отклик поликристаллов YBCO

Температурная зависимость нелинейного отклика $P_{3\omega}(T)$ в поликристаллических образцах YBCO отличается от аналогичной зависимости для плёнок и монокристаллов YBCO. Главное отличие состоит в том, что зависимость $P_{3\omega}(T)$ для поликристаллов YBCO имеет один широкий максимум (рис. 8), который при увеличении входной мощности $P_\omega$ расширяется вплоть до низких температур. В области низких температур в керамических образцах YBCO наблюдается кубическая зависимость $P_{3\omega}(P_\omega)$, и, соответственно, справедливо приближение слабого сигнала. Оценим аналогично разделу 4.1.1.а критический ток нелинейности $j_{\rm c}$ при $T = 46$ K для поликристаллов YBCO, используя рассчитанную зависимость $P_{3\omega}(P_\omega)$ (30), (31) и экспериментальные данные, представленные на рис. 10. Полагая $\lambda = 2\,000$ Å, $a = 25$ мкм, $l = 2$ мм и считая, что $d_0 \sim \lambda$, получаем $j_{\rm c} \approx 10^4 \div 10^5$ А/см$^2$, что соответствует данным по критическому току джозефсоновской среды $j_{\rm J}$ в поликристаллах [17]. Следовательно, в поликристаллах YBCO при низких температурах нелинейный отклик может быть связан с джозефсоновской нелинейностью.

#### 4.2. Нелинейный СВЧ отклик плёнок Nb

В отсутствие внешнего магнитного поля в некоторых тонких плёнках Nb, в отличие от плёнок YBCO, при температуре $T = 4{,}2$ K наблюдается порог в нелинейном отклике по мощности первой гармоники. Мы полагаем, что данный порог по мощности первой гармоники при гелиевых температурах связан с рождением вихрей СВЧ полем зонда. Оценим критическую плотность тока $j^*$, при которой начинается проникновение вихрей в плёнки Nb. Для пороговой мощности $P_\omega^{\rm o} = 12$ дБм, наблюдавшейся нами в эксперименте, критическая плотность тока $j^* \sim 1{,}5 \cdot 10^6$ А/см$^2$. Полученное значение $j^*$ как минимум на два порядка меньше тока распаривания Гинзбурга—Ландау в чистом Nb: $j_{\rm GL}(T = 4{,}2~{\rm K}) \approx 1{,}5 \cdot 10^8$ А/см$^2$. Это позволяет сделать вывод, что нелинейный отклик в плёнках Nb не связан с существенным подавлением модуля параметра порядка в сверхпроводнике. По нашему мнению, заниженное значение $j^*$ в плёнках Nb может быть связано с наличием джозефсоновских связей между кристаллитами и дефектов, которые приводят к уменьшению критической плотности тока проникновения вихрей до $j^* \approx 1{,}1 \cdot 10^6$ А/см$^2$ при $T = 4{,}2$ K [27]. Таким образом, нелинейность в плёнках Nb при гелиевых температурах при отсутствии постоянного магнитного поля определяется, по-видимому, движением вихрей, созданных СВЧ полем зонда, в областях с подавленной сверхпроводимостью.

Эксперименты показали, что нелинейный микроволновой отклик плёнок Nb очень чувствителен к внешнему перпендикулярному поверхности сверхпроводника постоянному магнитному полю $H_{\rm dc}$ (рис. 13). При включении $H_{\rm dc}$ наблюдалось сложное поведение температурной зависимости $P_{3\omega}(T)$ вблизи $T_{\rm c}$. Во-первых, пик нелинейности вблизи $T_{\rm c}$ с увеличением внешнего магнитного поля монотонно смещается в область меньших температур. При этом в малых полях

$H_{\rm dc} < 100$ Гс сначала происходит рост пика нелинейности вблизи $T_{\rm c}$, а затем, при увеличении поля до 450 Гс, амплитуда пика уменьшается. При дальнейшем увеличении постоянного магнитного поля возникает широкий максимум нелинейности, смещённый в область меньших температур. Величина низкотемпературного максимума нелинейности в этой области температур монотонно возрастает с увеличением внешнего постоянного магнитного поля. Сдвиг температурной зависимости нелинейного отклика в область меньших температур коррелирует с результатами измерений $\rho(T)$ в постоянном магнитном поле, указывающих на уменьшение критической температуры плёнки Nb во внешнем магнитном поле.

По нашему мнению, сильная зависимость величины низкотемпературного максимума от внешнего постоянного магнитного поля свидетельствует о вихревой природе нелинейности. В то же время низкотемпературные максимумы во внешнем магнитном поле существуют при температурах, при которых отличен от нуля ток пиннинга $j_{\rm p}$ (рис. 5 и 13), поэтому нелинейность в сильных магнитных полях определяется, по-видимому, нелинейным откликом, обусловленным непараболичностью потенциала пиннинга. Увеличение низкотемпературного максимума в магнитных полях может быть связано с увеличением концентрации запиннингованных вихрей во внешнем возрастающем магнитном поле. Таким образом, нелинейный отклик плёнок Nb в сильных магнитных полях при низких температурах, по нашему мнению, определяется откликом запинингованной вихревой решётки, созданной внешним магнитным полем.

В заключение этого раздела следует отметить, что природа наблюдаемой нелинейности СВЧ отклика сверхпроводников вблизи $T_{\rm c}$ нам до конца не ясна, поскольку при $T \to T_{\rm c}$ все критические токи $j_{\rm c}$, характеризующие различные механизмы нелинейности, стремятся к нулю, и многие механизмы (по крайней мере, теоретически) могут давать свой вклад в полный нелинейный отклик. Однако поведение зависимости $P_{3\omega}(H_{\rm dc})$ для плёнок YBCO качественно отличается от поведения аналогичной зависимости для плёнок Nb. По нашему мнению, такое различие может прояснить природу нелинейности вблизи $T_{\rm c}$ в изучаемых сверхпроводниках.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе мы использовали простой локальный метод исследования нелинейных СВЧ свойств сверхпроводников. Методика основана на применении в качестве источника СВЧ поля ближнепольного зонда с индуктивной связью. Зонд представляет собой тонкий провод, закорачивающий внешний и внутренний проводники коаксиального кабеля. Данная методика позволяет изучать локальные нелинейные свойства сверхпроводников и получать пространственное распределение мощности третьей гармоники основного сигнала на поверхности плёнки ВТСП.

На основе представленной методики нелинейный отклик сверхпроводника был исследован в широких пределах изменения СВЧ мощности (амплитуды высокочастотного магнитного поля), а также в широкой области температур и постоянного магнитного поля для плёнок, монокристаллов, поликристаллов YBCO и плёнок Nb. Проведено сопоставление результатов СВЧ измерений с одновременно измеренными транспортными и магнитными свойствами исследуемых образцов.

Перечислим основные полученные результаты настоящей работы:

1) Показано, что основной нелинейный СВЧ отклик сверхпроводника сосредоточен вблизи температуры сверхпроводящего перехода $T_{\rm c}$.

2) Локализация нелинейного отклика сверхпроводника вблизи $T_{\rm c}$ позволяет получать пространственное распределение критической температуры в плёнках YBCO.

3) Серия пиков в нелинейном отклике монокристаллов указывает на присутствие в них нескольких сверхпроводящих фаз с разной температурой сверхпроводящего перехода.

4) Нелинейный отклик при низких и промежуточных температурах ($T < 0{,}9\ T_c$) в плёнках и поликристаллах YBCO в отсутствие внешнего магнитного поля в значительной мере определяется наличием межгранульных джозефсоновских связей.

5) В некоторых плёнках Nb в отсутствие внешнего магнитного поля при температуре $T = 4{,}2$ K, в отличие от плёнок YBCO, наблюдается порог в нелинейном отклике по мощности первой гармоники, который мы связываем с проникновением вихрей в области с подавленной сверхпроводимостью.

6) В плёнках YBCO и Nb в области температур, при которых ток пиннинга отличен от нуля, ясно прослеживается нелинейный отклик, связанный с движением вихрей, созданных внешним магнитным полем.

7) Эксперименты показали, что нелинейный отклик вблизи $T_c$ как в плёнках YBCO, так и в плёнках Nb довольно чувствителен к внешнему магнитному полю, причём поведение зависимости $P_{3\omega}(H_{dc})$ для плёнок YBCO качественно отличается от поведения аналогичной зависимости для плёнок Nb. К сожалению, пока мы не можем объяснить такое различие, однако поведение зависимости $P_{3\omega}(H_{dc})$, по нашему мнению, может прояснить природу нелинейности в изучаемых сверхпроводниках.

В заключение следует отметить, что окончательные выводы о природе нелинейности могут быть сделаны только на основе детального теоретического анализа нелинейного отклика сверхпроводников и дополнительных экспериментальных данных (например, результатов рентгеноструктурного анализа, химического анализа и т. д.).

Работа поддержана РФФИ (гранты № 00–02–16158, 01–02–06197, 02–02–06572 и частично грант № 00–02–16528), программой РАН по поддержке молодых учёных России, МНТП «Сверхпроводимость» (№ 99033). Авторы работы благодарны А. С. Мельникову и Д. А. Рыжову за полезные обсуждения, А. К. Воробьёву за изготовление плёнок YBCO, а также С. А. Чурину, Е. Ф. Куковицкому и С. Г. Львову (КФТИ РАН) за любезно предоставленные образцы керамики и монокристаллов YBCO.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Nguyen P. P., Oates D. E., Dresselhaus G., Dresselhaus M. S. // Phys. Rev. B. 1993. V. 48. P. 6 400.
2. Wilker C., Shen Z.-Y., Pang P. // IEEE Trans. on Appl. Supercond. 1995. V. 5. P. 1 665.
3. Lung G.-Ch., Zhang D., Shih C.-Fu. et al. // IEEE Trans. on Microwave Theory Tech. 1995. V. 43. P. 3 020.
4. Samoilova T. B. // Supercond. Sci. Tech. 1995. V. 8. P. 259.
5. Горьков Л. П., Элиашберг Г. М. // ЖЭТФ. 1968. Т. 54. С. 612.
6. Боровицкая Е. С., Генкин В. М., Левиев Г. И. // ЖЭТФ. 1996. Т. 110. С. 1 081.
7. Больгинов В. В., Генкин В. М., Левиев Г. И., Овчинникова Л. В. // ЖЭТФ. 1999. Т. 115. С. 2 242.
8. Halbritter J. // J. of Supercond. 1995. V. 8. P. 691.
9. Van der Beek C. J., Geshkenbein V. B., Vinokur V. M. // Phys. Rev. B. 1993. V. 48. P. 3 393.
10. Belk N., Oates D. E., Feld D. A. et al. // Phys. Rev. B. 1997. V. 56. P. 11 966.
11. Golosovsky M., Davidov D., Farber E. et al. // Phys. Rev. B. 1991. V. 43. P. 10 390.
12. Жаров А. А., Коротков А. Л., Резник А. Н. // Сверхпроводимость. 1992. Т. 5. С. 419.
13. Hein M., Diete W., Getta M. et al. // IEEE Trans. on Appl. Supercond. 1997. V. 7. P. 1 264.
14. Pestov E. E., Kurin V. V., Nozdrin Yu. N. // IEEE Trans. on Appl. Supercond. 2001. V. 11. P. 131.
15. Hampel G., Batlog B., Krishana K. et al. // Appl. Phys. Lett. 1997. V. 71. P. 3 904.

16. Ciccatrello I., Fasio C., Gucieone M. et al. // Phys. Rev. B. 1994. V. 49. P. 6 280.
17. Кошелев А. Е., Левиев Г. И., Папикян Р. С. // ЖЭТФ. 1993. Т. 103. С. 942.
18. Hu W., Thanawalla A. S., Feenstra B. J. et al. // Appl. Phys. Lett. 1999. V. 75. P. 2 824.
19. Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны. М.: Радио и связь, 1988.
20. Физические величины: Справочник. М.: Энергоатомиздат, 1991.
21. Шмидт В. В. Введение в физику сверхпроводников. М.: Наука, 1982.
22. Плакида Н. М. Высокотемпературные сверхпроводники. М.: Международная программа образования, 1996.
23. Де Жен П. Сверхпроводимость металлов и сплавов. М.: Мир, 1968.
24. Micheenko P. N., Kuzovlev Yu. E. // Phys. C. 1993. V. 204. P. 229.
25. Аладышкин А. Ю., Воробьёв А. К., Вышеславцев П. П. и др. // ЖЭТФ. 1999. Т. 116. С. 1 735.
26. Сонин Э. Б. // Письма в ЖЭТФ. 1988. Т. 47. С. 415.
27. Chin C. C., Oates D. E., Dresselhaus G., Dresselhaus M. S. // Phys. Rev. B. 1992. V. 45. P. 4 788.

[1] Институт физики микроструктур РАН, г. Нижний Новгород, Россия
[2] Dipartimento di Fizica, Universitá di Salerno, Italy

Поступила в редакцию 25 февраля 2003 г.

**STUDY OF NONLINEAR RESPONSE OF SUPERCONDUCTORS IN THE MICROWAVE BAND USING A LOCAL TECHNIQUE**

*A. Yu. Aladyshkin, A. A. Andronov, E. E. Pestov, Yu. N. Nozdrin, V. V. Kurin, A. M. Cucolo, R. Monaco, and M. Boffa*

Using a local technique, we study the microwave radiation power $P_{3\omega}(T, P_\omega, H_{\rm dc})$ at the triple frequency of the main signal as a function of the temperature $T$, the input power $P_\omega$, and the external magnetic field $H_{\rm dc}$ perpendicular to the superconductor surface for $YBa_2Cu_3O_7$ (YBCO) films, monocrystals, and polycrystals and for Nb films. The most distinctive feature of the temperature dependence $P_{3\omega}(T)$ of nonlinear response of superconductors is a maximum of the nonlinearity near the critical temperature $T_{\rm c}$. Spatial distributions of the third-harmonic power are obtained for YBCO films at various temperatures. These distributions are indicative of nonuniform distribution of $T_{\rm c}$ over the superconductor surface. Additional nonlinearity maxima are discovered in the dependence $P_{3\omega}(T)$ for YBCO films and monocrystals at temperatures about $2T_{\rm c}/3$. These maxima are probably related to the existence of several superconducting phases with different critical temperatures. For Nb films, the second nonlinearity maximum in the dependence $P_{3\omega}(T)$ appears only in the presence of an external magnetic field. The experimental data are interpreted within the framework of a two-fluid model of a superconductor, which takes into account the phenomenological nonlinear relationship between the vector potential $\mathbf{A}$ and the superconducting current $j_{\rm s}(A)$. The origin of nonlinearity in the studied superconductors is discussed.

УДК 519.234:681.322

# СИНТЕЗ НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОГО КЛАССИФИКАТОРА НА ОСНОВЕ ИСКУССТВЕННЫХ НЕЙРОННЫХ RBF-СЕТЕЙ

*В. Р. Милов*

На основе объединения классических методов обработки сигналов и нейросетевых технологий получена непараметрическая процедура классификации. Разработан подход к структурно-параметрическому синтезу RBF-сетей, составляющих основу классификатора. Результаты моделирования подтверждают эффективность предложенной процедуры.

## ВВЕДЕНИЕ

Проблема обработки сигналов приобретает особую актуальность в условиях априорной неопределённости. При этом непараметрические процедуры оказываются значительно эффективнее, чем параметрические, если последние построены на основе моделей, не соответствующих реально протекающим процессам [1]. Проблема классификации при наличии существенной априорной неопределённости возникает во многих практических задачах: при распознавании текстов, речи и изображений, в медицинской и технической диагностике, при обнаружении сигналов в радио- и гидролокации, при приёме сигналов в системах радиосвязи [2–4]. Поэтому задача синтеза конструктивных непараметрических процедур классификации является актуальной.

## 1. ОПТИМАЛЬНАЯ БАЙЕСОВСКАЯ ПРОЦЕДУРА КЛАССИФИКАЦИИ

Задача многоальтернативной классификации связана с формированием решающего правила, позволяющего на основе обработки данных наблюдения $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ принимать решения $u = \varphi(\mathbf{x})$, $u \in \mathbf{U}$. Множество наблюдений $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{R}^m$, где $\mathbf{R}^m$ — $m$-мерное евклидово пространство. Множество решений $\mathbf{U} = (u_1, u_2, \ldots, u_{K_U})$ состоит из $K_U$ элементов, один из которых выбирается в результате выполнения процедуры классификации. Данные наблюдения $\mathbf{x}$ содержат информацию о неизвестном состоянии $\lambda \in \mathbf{\Lambda}$ некоторой (исследуемой) системы. Здесь $\mathbf{\Lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{K_\Lambda})$ — множество состояний.

Оптимальный байесовский классификатор [4] строится из условия минимизации среднего риска

$$R = \sum_{i=1}^{K_\Lambda} \sum_{j=1}^{K_U} g(u_j, \lambda_i) p_{ji} p_i. \tag{1}$$

Здесь $p_i$ — априорная вероятность состояния $\lambda_i \in \mathbf{\Lambda}$, $g(u_j, \lambda_i)$ — заданное значение потерь, а $p_{ji}$ — вероятность вынесения решения $u_j \in \mathbf{U}$ при условии, что система находится в состоянии $\lambda_i \in \mathbf{\Lambda}$.

Наименьший средний риск (1) достигается при использовании байесовского решающего правила [4]

$$\hat{u} = \arg \min_{u_j \in \mathbf{U}} \sum_{i=1}^{K_\Lambda} g(u_j, \lambda_i) p_i w_i(\mathbf{x}), \tag{2}$$

где $w_i(\mathbf{x})$ — условная плотность вероятности, определённая на множестве наблюдений $\mathbf{X}$ при фиксированном состоянии $\lambda_i \in \mathbf{\Lambda}$. Для классификации на основе (2) должны быть известны условные плотности вероятности $w_i(\mathbf{x})$ и априорные вероятности $p_i$, где $i = 1, 2, \ldots, K_\Lambda$.

## 2. МЕТОДЫ КЛАССИФИКАЦИИ ПРИ НАЛИЧИИ ОБУЧАЮЩИХ ВЫБОРОК

В условиях априорной неопределённости непосредственное применение решающего правила (2) невозможно. При этом процедура классификации строится с использованием выборочной последовательности независимых наблюдений $\{\mathbf{x}(n), \lambda(n)\}$, где $n = 1, 2, \ldots, N$. Используя значения $\lambda(n)$, представим последовательность наблюдений $\mathbf{x}(n)$ в виде $\mathbf{X}_i = \{\mathbf{x}_i(n)\}$, где $n = 1, 2, \ldots, N_i$, $i = 1, 2, \ldots, K_\Lambda$, $N_i$ — количество наблюдений, соответствующих $i$-му состоянию системы, а $\Sigma_{i=1}^{K_\Lambda} N_i = N$.

Среди множества методов классификации, таких, например, как методы потенциальных функций, $k$ ближайших соседей и др., байесовская методология решения задачи классификации позволяет учесть специфику решаемой задачи, задавая потери $g_{ji} = g(u_j, \lambda_i)$, которые возникают при вынесении решения $u_j \in \mathbf{U}$ в состоянии $\lambda_i \in \mathbf{\Lambda}$. При этом вместо неизвестных условных плотностей вероятностей $w_i(\mathbf{x})$ и априорных вероятностей $p_i$, где $i = 1, 2, \ldots, K_\Lambda$, в (2) используются их оценки. В некоторых задачах, например при синтезе приёмников дискретных сообщений в стохастических каналах связи [2], априорные вероятности состояний считаются известными. В противном случае $p_i$ могут быть оценены по обучающей выборке как $N_i/N$.

В условиях параметрической априорной неопределённости плотности вероятности $w_i(\mathbf{x}, \omega)$, где $i = 1, 2, \ldots, K_\Lambda$, известны с точностью до параметров $\omega$, которые оцениваются по выборке $\mathbf{X}_i$. В общем случае произвольных распределений оценка их параметров связана с решением нелинейной многоэкстремальной оптимизационной задачи большой размерности. Кроме того, качество решающего правила ухудшается, если используемые параметрические семейства распределений не позволяют адекватно описать генеральные совокупности.

В случае непараметрической априорной неопределённости в традиционных методах синтеза классификаторов используются гистограммные либо ядерные оценки плотности вероятности [5]. Для многомерных распределений гистограммные оценки неудобны из-за сложности выделения областей группирования наблюдений в $\mathbf{R}^m$. Количество слагаемых в ядерной оценке Парзена

$$\hat{w}_i(\mathbf{x}) = (N_i h_i^m)^{-1} \sum_{n=1}^{N_i} K\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(n)}{h_i}\right), \tag{3}$$

где $i = 1, 2, \ldots, K_\Lambda$, определяется количеством наблюдений $N_i$, соответствующих $i$-му состоянию системы, что затрудняет использование таких оценок для больших выборок. В выражении (3) $h_i$ — параметр сглаживания, $K(z)$ — ядро, удовлетворяющее ряду известных свойств [5].

В классических методах при формировании $\hat{w}_i(\mathbf{x})$, где $i = 1, 2, \ldots, K_\Lambda$, не учитывается тот факт, что эти оценки предназначены для построения классификатора. Поэтому качество оценок $\hat{w}_i(\mathbf{x})$ предлагается рассматривать с точки зрения эффективности синтезируемого классификатора.

## 3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КЛАССИФИКАЦИИ НА ОСНОВЕ СТРУКТУРНО-ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО СИНТЕЗА НЕЙРОННЫХ RBF-СЕТЕЙ

### 3.1. Применение нейронных RBF-сетей для решения задачи классификации

Для формирования конструктивной (реализуемой для любого числа $N$) оценки $m$-мерных плотностей вероятности воспользуемся полигауссовской аппроксимацией плотности вероятности [6, 7]:

$$\hat{w}_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{q_i} \vartheta_{ij} \varphi_{ij}(\mathbf{x}). \tag{4}$$

Здесь $\vartheta_{ij}$ — удельные веса (априорные вероятности) каждого из компонентов смеси вероятностных распределений $\varphi_{ij}(\mathbf{x})$, представляющих собой гауссовские плотности вероятности:

$$\varphi_{ij}(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x};\mathbf{M}_{ij},\mathbf{R}_{ij}) = (2\pi)^{-m/2}\,(\det\mathbf{R}_{ij})^{-1/2}\exp[-(\mathbf{x}-\mathbf{M}_{ij})^{\mathrm{T}}\,\mathbf{R}_{ij}^{-1}\,(\mathbf{x}-\mathbf{M}_{ij})/2], \tag{5}$$

где $\mathbf{M}_{ij}$ — векторы математического ожидания, состоящие из $m$ элементов, $\mathbf{R}_{ij}$ — ковариационные матрицы размера $m\times m$; $i=1,2,\,\ldots\,,K_\Lambda$; $j=1,2,\,\ldots\,,q_i$. Индекс T обозначает операцию транспонирования. Выражение (4) можно рассматривать как характеристику вход—выход искусственной нейронной RBF-сети [3, 8] с гауссовскими активационными функциями нейронов скрытого слоя (5). При этом непараметрический классификатор состоит из $K_\Lambda$ RBF-сетей (4) и (5), на выходе которых формируются оценки $\hat{w}_i(\mathbf{x})$, и блока вынесения решения, использующего эти оценки для вычислений по формуле (2).

При заданном числе нейронов скрытого слоя $q_i$ обучение RBF-сетей начинается с определения центров $\mathbf{M}_{ij}$, затем матриц $\mathbf{R}_{ij}$, а на последнем этапе — параметров линейного выходного слоя $\vartheta_{ij}$, где $j=1,2,\,\ldots\,,q_i$, $i=1,2,\,\ldots\,,K_\Lambda$. Качество нейросетевого классификатора зависит от количества нейронов скрытого слоя $q_i$, которое определяется с помощью предложенного алгоритма структурно-параметрического синтеза RBF-сетей [9].

### 3.2. Алгоритм структурно-параметрического синтеза классификатора

С позиций теоретико-вероятностного подхода к кластер-анализу компоненты смеси вероятностных распределений (4) определяют кластеры, образующие генеральную совокупность [7]. Для определения параметров RBF-сетей, на выходе которых формируются оценки $\hat{w}_i(\mathbf{x})$, синтезируем агломеративный иерархический алгоритм, основываясь на процедуре структурного синтеза [9]. На первом шаге алгоритма каждое наблюдение рассматривается как отдельный кластер, а оценка плотности вероятности (4) совпадает с оценкой Парзена (3). При этом параметры смеси (4) определяются выражениями $q_i=N_i$, $\vartheta_{ij}=N_i^{-1}$, $\mathbf{M}_{ij}=\mathbf{x}_i(j)$, $\mathbf{R}_{ij}=\sigma_i^2\mathbf{I}$, где $\mathbf{I}$ — единичная матрица размера $m\times m$; $j=1,2,\,\ldots\,,q_i$, $i=1,2,\,\ldots\,,K_\Lambda$. Величины $\sigma_i$ играют роль параметров сглаживания и определяются с помощью процедуры максимизации эмпирического перекрёстного правдоподобия [5]:

$$L(\sigma_i) = \prod_{l=1}^{N_i}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{N_i}\vartheta_{ij}\varphi(\mathbf{x}_i(l);\mathbf{M}_{ij},\mathbf{R}_{ij}(\sigma_i)), \tag{6}$$

где $i=1,2,\,\ldots\,,K_\Lambda$. На каждом последующем шаге работы алгоритма выполняется объединение двух ближайших кластеров, и количество компонент $q_i$ в смеси распределений (4) уменьшается на единицу. Расстояние между кластерами понимается в теоретико-вероятностном смысле как расстояние Кульбака [7]

$$d_{jl} = \int_{\mathbf{X}}[\varphi_{ij}(\mathbf{x})-\varphi_{il}(\mathbf{x})]\ln[\varphi_{ij}(\mathbf{x})/\varphi_{il}(\mathbf{x})]\,\mathrm{d}\mathbf{x}, \tag{7}$$

которое для случая гауссовских распределений принимает вид

$$d_{jl} = \frac{1}{2}\,(\mathbf{M}_{ij}-\mathbf{M}_{il})^{\mathrm{T}}\,(\mathbf{R}_{ij}^{-1}-\mathbf{R}_{il}^{-1})\,(\mathbf{M}_{ij}-\mathbf{M}_{il}) - \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\Big[(\mathbf{R}_{ij}-\mathbf{R}_{il})\,(\mathbf{R}_{ij}^{-1}-\mathbf{R}_{il}^{-1})\Big]. \tag{8}$$

Параметры гауссовской компоненты смеси, формируемой в результате объединения двух кластеров, определяем из условия минимума потерь информации при аппроксимации одного распределения другим [6]:

$$\vartheta_{iA} = \vartheta_{ij}+\vartheta_{il}, \tag{9}$$

$$\mathbf{M}_{iA} = (\vartheta_{ij}\mathbf{M}_{ij} + \vartheta_{il}\mathbf{M}_{il})/\vartheta_{iA}, \tag{10}$$

$$\mathbf{R}_{iA} = \left(\vartheta_{ij}\left[\mathbf{R}_{ij} + (\mathbf{M}_{ij} - \mathbf{M}_{iA})(\mathbf{M}_{ij} - \mathbf{M}_{iA})^{\mathrm{T}}\right] + \vartheta_{il}\left[\mathbf{R}_{il} + (\mathbf{M}_{il} - \mathbf{M}_{iA})(\mathbf{M}_{il} - \mathbf{M}_{iA})^{\mathrm{T}}\right]\right)/\vartheta_{iA}. \tag{11}$$

На каждом шаге алгоритма совокупность найденных параметров $\vartheta_{ij}$, $\mathbf{M}_{ij}$, $\mathbf{R}_{ij}$ определяет оценки плотностей вероятностей $\hat{w}_i(\mathbf{x})$, где $j = 1, 2, \ldots, q_i$, $i = 1, 2, \ldots, K_\Lambda$, которые, в свою очередь, могут использоваться в решающем правиле (2). Таким образом, находим семейство классификаторов, характеризующихся различными значениями эмпирического среднего риска

$$\hat{R} = N^{-1} \sum_{i=1}^{K_\Lambda} \sum_{j=1}^{K_U} g_{ji}\nu_{ji}, \tag{12}$$

где $\nu_{ji}$ — количество решений $\hat{u} = u_j$ в состоянии $\lambda_i$.

Известно, что значение эмпирического среднего риска, вычисленное на основе обучающей выборки, которая использовалась также для синтеза классификатора, оказывается в среднем меньше, чем при оценивании качества классификатора по независимым от обучения данным [7]. В условиях, когда дополнительная контрольная выборка отсутствует, для определения качества классификатора предлагается согласно [5, 7] использовать процедуру перекрёстной проверки (скользящего экзамена). Для этого из выборки выделяется одно наблюдение, которое рассматривается в качестве контрольного. По оставшимся $N-1$ наблюдениям строится классификатор, качество которого оценивается на основе выделенного контрольного наблюдения. Указанная процедура повторяется для каждого последовательно выделяемого наблюдения, а оценка качества классификатора определяется в результате усреднения по $N$ вариантам перекрёстной проверки. В результате процедуры структурного синтеза находится классификатор, характеризующийся наименьшим предсказанным значением среднего риска.

## 4. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕДУР КЛАССИФИКАЦИИ

Исследование эффективности предложенной процедуры классификации проведено с помощью статистического моделирования. Число состояний (классов) принято равным количеству решений: $K_\Lambda = K_U = K$, а ошибочные решения — равнозначно нежелательными: $g_{ji} = 1$ при $j \neq i$ и $g_{ji} = 0$ при $j = i$, где $i = 1, 2, \ldots, K$, $j = 1, 2, \ldots, K$. В этом случае средний риск (1) соответствует полной вероятности ошибки

$$P_{\mathrm{er}} = \sum_{i=1}^{K} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{K} p_{ji}p_i. \tag{13}$$

Оценкой $P_{\mathrm{er}}$ является коэффициент ошибок $K_{\mathrm{er}}$, вычисленный по контрольной выборке, которая не использовалась при обучении классификатора:

$$K_{\mathrm{er}} = N^{-1} \sum_{i=1}^{K} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{K} \nu_{ji}. \tag{14}$$

Для моделирования были выбраны следующие параметры: число классов $K = 2$, размерность пространства наблюдений $m = 2$: $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, априорные вероятности полагаются известными: $p_1 = p_2 = 0{,}5$. На рис. 1 представлена контрольная выборка объёма $N_{\mathrm{T}} = 1\,000$. Наблюдения, со-

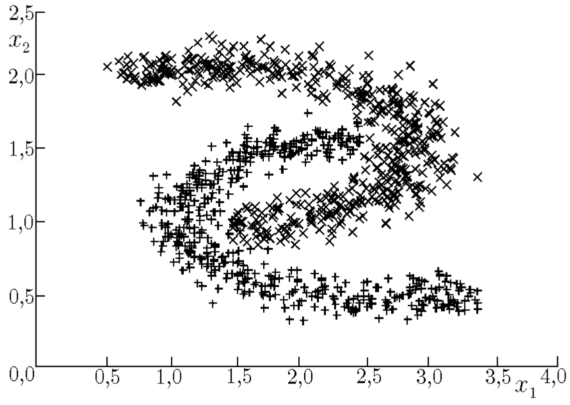



Рис. 1

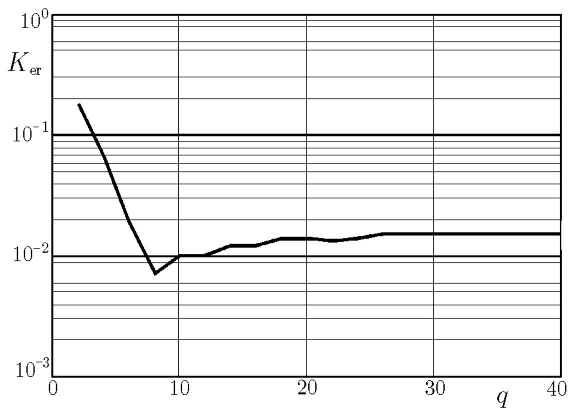



Рис. 2

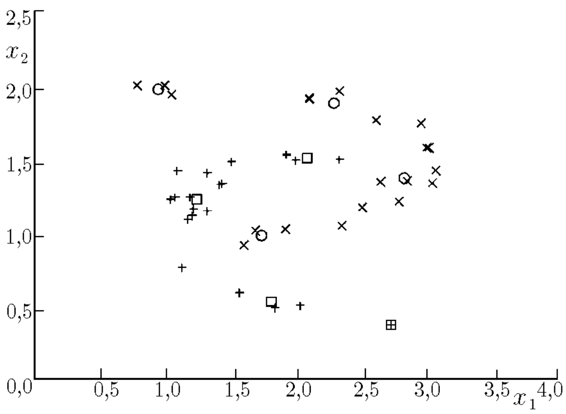



Рис. 3

ответствующие различным классам, обозначены символами $+$ и $\times$ соответственно; $x_1$ и $x_2$ — компоненты вектора наблюдений.

Для синтезированных классификаторов зависимость коэффициента ошибок от $q = q_1 + q_2$ показана на рис. 2. Коэффициент ошибок принимает наименьшее значение при $q_1 = q_2 = 4$. В результате работы алгоритма найдена структура классификатора, характеризующегося наименьшим коэффициентом ошибок $K_{\text{er}}(8) = 0{,}007$. Коэффициент ошибок для классификатора, построенного с использованием парзеновских оценок плотностей вероятности, оказался больше: $K_{\text{er}}(40) = 0{,}016$.

На рис. 3 представлена обучающая выборка объёма $N = 40$ и найденные в результате работы алгоритма центры кластеров $\mathbf{M}_{1j}$ и $\mathbf{M}_{2j}$, где $j = 1, 2, 3, 4$, обозначенные для различных классов символами $\circ$ и $\square$ соответственно. Статистическое моделирование показало, что количество компонент в оценках плотностей вероятности (4), по крайней мере, на порядок меньше, чем у классификаторов, построенных на основе оценок плотностей вероятности Парзена (3). При этом классификаторы, синтезируемые в соответствии с предложенной процедурой, характеризуются коэффициентом ошибок, в среднем на 15÷30 % меньшим, чем у «парзеновского» классификатора.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для случая непараметрической априорной неопределённости предложен подход к построению классификаторов на основе обучающих выборок. Классификатор основан на совокупности искусственных нейронных RBF-сетей, на выходе которых формируются полигауссовские оценки плотностей вероятностей $\hat{w}_i(\mathbf{x})$, где $i = 1, 2, \ldots, K_\Lambda$, и блока вынесения решения, реализующего байесовское решающее правило. Основу предложенного подхода составляет итеративная процедура структурно-параметрического синтеза RBF-сетей. При этом окончательная структура нейронных сетей определяется из условия минимизации прогнозируемого среднего риска, который определяется с помощью процедуры перекрёстной проверки.

Основные преимущества предложенного подхода по сравнению с классической процедурой на основе парзеновской оценки плотностей вероятности заключаются в лучшем качестве классификации (меньших значениях среднего риска или вероятности ошибки) и существенно меньшей сложности решающего правила, понимаемой как количество компонент в оценках плотностей вероятности. Предложенный классификатор в отличие от «парзеновского» работоспособен в условиях последовательно поступающих данных наблюдения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Добровидов А. В., Кошкин Г. М. Непараметрическое оценивание сигналов. М.: Наука, 1997.
2. Баранов В. Г., Белоусов Е. Л., Милов В. Р. Адаптация в системах цифровой радиосвязи. Н. Новгород: НГТУ, 2001.
3. Круглов В. В., Борисов В. В. Искусственные нейронные сети. Теория и практика. М.: Горячая линия—Телеком, 2001.
4. Репин В. П., Тартаковский Г. П. Статистический синтез при априорной неопределённости и адаптация информационных систем. М.: Сов. радио, 1977.
5. Деврой Л., Дьерфи Л. Непараметрическое оценивание плотности. $L_1$-подход. М.: Мир, 1988.
6. Милов В. Р. // Тез. докл. VIII Междунар. конф. «Радиолокация, навигация, связь». Воронеж, 2002. Т. 1. С. 256.
7. Прикладная статистика: Классификация и снижение размерности / Под ред. С. А. Айвазяна. М.: Финансы и статистика, 1989.
8. Schwenker F., Kestler H. A., Palm G. // Neural Networks. 2001. No. 14. P. 439.
9. Кондратьев В. В., Милов В. Р. // ДАН. 2002. Т. 386, № 3. С. 318.

Нижегородский государственный технический университет,
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию
26 апреля 2002 г.

## SYNTHESIS OF A NONPARAMETRIC CLASSIFIER BASED ON RBF ARTIFICIAL NEURAL NETWORKS

*V. R. Milov*

We obtain the nonparametric procedure of classification on the basis of combining classical signal processing methods and neural-network technologies. An approach to the structural parametric synthesis of the RBF networks constituting the classifier basis is developed. Simulation results confirm the efficiency of the proposed procedure.

УДК 621.301

# РАЗДЕЛЕНИЕ МНОГОЧАСТОТНОГО МНОГОЛУЧЕВОГО ПОЛЯ МЕТОДАМИ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

*В. Н. Шевченко*

В рамках теории квадратичной и неквадратичной регуляризации на основе $\ell_p$-норм исследована задача пространственной локализации мощности источников когерентных сигналов при минимальной априорной информации относительно формы, частотно-временны́х областей существования широкополосных сигналов и статистических характеристик возмущений. Численным экспериментом подтверждена эффективность предложенных алгоритмов цифрового восстановления (реконструкции) углового распределения мощности для кольцевой антенной решётки в условиях многолучевого распространения волн.

## ВВЕДЕНИЕ

Проблема локализации источников излучения, сводящаяся к оценке положения доминирующих максимумов пространственного спектра мощности, соответствующих направлениям прихода сигналов (direction-of-arrival, DOA), всесторонне изучена в рамках теории статистических решений [1–3]. Данный подход предполагает знание вероятностных характеристик шумов, неизбежно присутствующих в информационном канале. Вместе с тем при решении практических задач часто отсутствует достоверная информация о вероятностных характеристиках возмущений, а используемые в данной ситуации методы экспертных оценок [2] носят субъективный характер и, вследствие этого, не могут быть отнесены к разряду универсальных.

Известно, что восстановление исходного распределения мощности в пространстве как функции углов прихода или дальности до источников сигналов в случае сферичности волнового фронта относится к классу обратных задач. Для решения проблемы восстановления недостаточного сигнала при обработке изображений в астрономии, акустике, радиометрии и в ряде других областей [4] наряду с методом максимального правдоподобия, приводящим к классической схеме формирования луча на основе обратного преобразования Фурье, развиты более «утончённые» процедуры обращения. Среди них следует выделить методы Прони и максимальной энтропии [4, 5], метод минимума дисперсии Кэпона, методы, основанные на разложении пространственной корреляционной матрицы по собственным векторам и собственным значениям (MUSIC; EV (eigenvector)) [5] и метод подгонки параметров модели [6, 7]. Метод подгонки параметров модели требует знания числа лучей падающего поля. Другие методы имеют ограничения при пространственном разделении близко расположенных когерентных сигналов.

В последнее время для решения этих проблем находят применение вариационные методы, минимизирующие регуляризованную целевую функцию [8]. Данные методы используются при обработке изображений [9], в компьютерной томографии [10], в локации с высоким разрешением и синтезированной апертурой [11, 12]. Использованию вариационного принципа для оценки направления прихода гармонических сигналов на основе эквидистантной линейной решётки пассивных датчиков посвящён доклад [13]. В этой работе осталась неопределённость относительно постановки и решения задачи оптимизации для случая многократных измерений. Также не рассматривались антенные решётки достаточно сложной пространственной конфигурации, отличные от линейных, и методы обоснованного выбора параметров регуляризации. Кроме того, в перечисленных работах не нашла отражения проблема пространственной локализации сигналов при различной степени априорной неопределённости относительно их формы и параметров.

В связи с этим возникает необходимость обобщения и расширения области применения вариационных методов для пространственной локализации источников априорно неизвестных широкополосных сигналов со сложной структурой, мощность которых распределена по частоте и времени.

В настоящей работе в рамках теории регуляризации на основе $\ell_p$-норм с использованием квадратичных и неквадратичных регуляризирующих ограничений исследована задача пространственной локализации источников коррелированных широкополосных сигналов при минимальной априорной информации относительно формы, частотно-временны́х областей существования сигнала и статистических характеристик возмущений.

## 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ В ЗАДАЧЕ РЕКОНСТРУКЦИИ ПРОСТРАНСТВЕННОГО СПЕКТРА

При обработке в антенных решётках временны́е сигналы на выходе каждой $n$-й антенны, где $n = 1, 2, \ldots, N$, разбиваются на отрезки, и для каждого из них вычисляется дискретное преобразование Фурье. В результате формируется частотно-временна́я матрица спектральных плотностей

$$\dot{\mathbf{Y}} = \{\dot{\mathbf{Y}}(q,\ell)\} \tag{1}$$

размера $Q \times L$, элементы которой зависят от номера временно́го отрезка $q$, где $q = 1, 2, \ldots, Q$, и номера частотной дискреты $\ell$, где $\ell = 1, 2, \ldots, L$. Элементы матрицы (1) представляют собой $N$-мерные векторы: $\dot{\mathbf{Y}}(q,\ell) = \big(\dot{Y}_1(q,\ell), \dot{Y}_2(q,\ell), \ldots, \dot{Y}_N(q,\ell)\big)^{\mathrm{T}}$, элементами которых являются спектральные плотности сигналов, измеряемых на выходе $n$-й антенны решётки на $q$-м отрезке, причём

$$\dot{Y}_n(q,\ell) = \big|\dot{Y}_n(q,\ell)\big| \exp\big\{i\,[\psi_n(q,\ell) + \varphi(q,\ell)]\big\}, \tag{2}$$

где $|\dot{Y}_n(q,\ell)|$ — модуль, $\varphi(q,\ell)$ — составляющая фазы, обусловленная модуляцией сигнала, а $\psi_n(q,\ell)$ — составляющая фазы, зависящая от пространственного положения источников или направлений прихода лучей в случае многолучевого распространения волн.

Когерентное суммирование по частоте или времени спектральных плотностей (2) недопустимо из-за некоррелированности фаз $\varphi(q,\ell)$ на разных частотах и отрезках времени. В связи с этим известная постановка проблемы оптимизации на основе вариационного принципа [13], в наших обозначениях предусматривающая временно́е усреднение элементов вектора $\dot{\mathbf{Y}}(q,\ell)$ на фиксированной частоте $\ell$, вырождается, т. к. приводит к асимптотическому (при $Q \to \infty$) равенству $\sum_q \dot{\mathbf{Y}}(q,\ell) = 0$.

Введём вместо (1) матрицу взаимных спектральных плотностей

$$\dot{\mathbf{V}} = \{\dot{\mathbf{V}}(q,\ell)\}. \tag{3}$$

Элементы матрицы (3) представляют собой $N$-мерные векторы $\dot{\mathbf{V}}(q,\ell) = \big(\dot{V}_1(q,\ell), \dot{V}_2(q,\ell), \ldots, \dot{V}_N(q,\ell)\big)^{\mathrm{T}}$ с элементами

$$\dot{V}_n(q,\ell) = \dot{Y}_n(q,\ell)\dot{Y}_0^*(q,\ell), \tag{4}$$

где $\dot{Y}_0^*(q,\ell)$ — спектральная плотность сигнала, измеряемого на дополнительной опорной антенне решётки, индекс звёздочка означает комплексное сопряжение.

Совместим начало координат с опорной антенной, что соответствует $\psi_0(q,\ell) = 0$. Тогда из (4) с учётом (2) получаем

$$\dot{V}_n(q,\ell) = \big|\dot{Y}_n(q,\ell)\dot{Y}_0^*(q,\ell)\big| \exp\big[i\psi_n(q,\ell)\big]. \tag{5}$$

Таким образом, взаимные спектральные плотности (4), в отличие от (2), зависят только от пространственной разности фаз. Это обеспечивает возможность когерентного суммирования мощности сигнала по частоте и времени и позволяет записать выражение для измеренного амплитудно-фазового распределения, усреднённого в частотно-временно́й области существования сигнала, в виде

$$\dot{\mathbf{H}} = \sum_{q} \sum_{\ell} \nu_{q\ell} \dot{\mathbf{V}}(q, \ell), \tag{6}$$

где $\nu_{q\ell}$ — двоичные числа $(0, 1)$, отличные от нуля в полосе частот $2F_{\text{c}}$ и временно́м интервале существования сигнала.

Соотношение (4) при фиксированном значении $q$ может рассматриваться как одночастотная дискретная радиоголограмма, а (6) — как усреднённая по времени многочастотная радиоголограмма сигнала с шириной спектра $2F_{\text{c}}$ [6].

В случае, когда частота, ширина спектра и интервал существования сигнала неизвестны, для реализации алгоритма (6) необходимо предварительно найти значения $\nu_{q\ell}$, т. е. решить задачу локализации мощности сигнала в анализируемой частотно-временно́й области $(f_0 - F, f_0 + F) \otimes (t_0 - T, t_0 + T)$ [14, 15].

Таким образом, радиоголографическая обработка измерений обеспечивает локализацию и когерентное накопление мощности сигнала как по частоте, так и по времени. Это, в свою очередь, приводит к возможности постановки проблемы оптимизации в наиболее общем виде, необходимом для восстановления пространственного спектра сигналов, распределяющих свою мощность в частотной и временно́й областях.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $M$ — число угловых положений, соответствующих заданным потенциально возможным направлениям прихода сигналов. Тогда угловую зависимость комплексной амплитуды падающего поля можно представить в виде комплексного вектора $\dot{\mathbf{s}}$ размерности $M$. В условиях воздействия возмущающих факторов это приводит к следующей модели наблюдений:

$$\dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{A}}\dot{\mathbf{s}} + \dot{\mathbf{\Xi}}, \tag{7}$$

где $\dot{\mathbf{H}} = \left(\dot{h}_1, \dot{h}_2, \ldots, \dot{h}_N\right)^{\text{T}}$ — вектор зашумлённых измерений, $\dot{h}_n = \sum_q \sum_\ell \nu_{q\ell} \dot{V}_n(q, \ell)$, $\dot{\mathbf{\Xi}} = \left(\dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2, \ldots, \dot{\xi}_N\right)^{\text{T}}$ — вектор неизвестных шумовых возмущений, $\dot{\mathbf{A}}$ — заданная матрица размера $N \times M$, характеризующая возможные направления прихода сигнала от каждого потенциального источника.

Таким образом, в данной модели вектор $\dot{\mathbf{H}}$ в общем случае является предварительно усреднённой по времени многочастотной радиоголограммой широкополосного сигнала (6), а матрица $\dot{\mathbf{A}}$ известна и не зависит от пространственного положения источников.

В пространстве наблюдений введём функционал невязки в виде $\ell_2$-нормы

$$\sigma_2(\dot{\mathbf{s}}) = \left\| \dot{\mathbf{H}} - \dot{\mathbf{A}}\dot{\mathbf{s}} \right\|_2^2, \tag{8}$$

где $||\mathbf{X}||_p$ — обозначает $\ell_p$-норму вида $||\mathbf{X}||_p = \left(\sum_{m=1}^{M} |X_m|^p\right)^{1/p}$.

В данной постановке задачи $N < M$, в связи с чем число уравнений в (7) меньше числа неизвестных. В этом случае метод псевдообратной матрицы приводит к решению с минимальной нормой, обращающему в нуль (8), вида [16]

$$\hat{\dot{\mathbf{s}}} = \dot{\mathbf{A}}^{+} (\dot{\mathbf{A}}\dot{\mathbf{A}}^{+})^{-1} \dot{\mathbf{H}}, \tag{9}$$

при условии, что $\dot{\mathbf{A}}$ — матрица полного ранга и, соответственно, матрица $\dot{\mathbf{A}}\dot{\mathbf{A}}^{+}$ невырождена. Здесь индекс плюс обозначает эрмитовое сопряжение. При этом гарантируется единственность решения в тех случаях, когда более чем один вектор $\dot{\mathbf{s}}$ минимизирует (8). Выражение (9) описывает оптимальную нерегуляризированную оценку пространственного распределения мощности сигнала в предварительно локализованной частотно-временно́й области его существования.

В условиях априорной неопределённости относительно вероятностных характеристик вектора возмущений перейдём от задачи минимизации функционала (8) к задаче минимизации сглаживающего функционала

$$\sigma(\dot{\mathbf{s}}) = \sigma_2(\dot{\mathbf{s}}) + \gamma\sigma_p(\dot{\mathbf{s}}), \tag{10}$$

где $\sigma_2(\dot{\mathbf{s}})$ — функционал-критерий (8), отражающий качество получаемого распределения энергии, $\sigma_p(\dot{\mathbf{s}})$ — стабилизирующий функционал, обеспечивающий регуляризирующее ограничение, $\gamma$ — параметр регуляризации.

С целью исследования квадратичной и неквадратичной регуляризации выберем $\sigma_p(\dot{\mathbf{s}})$ в виде $\ell_p$-нормы и перепишем (10) в следующем виде:

$$\sigma(\dot{\mathbf{s}}) = \left\|\dot{\mathbf{H}} - \dot{\mathbf{A}}\dot{\mathbf{s}}\right\|_2^2 + \gamma\, \|\dot{\mathbf{s}}\|_p^p\,. \tag{11}$$

Требуется с учётом (7)–(11) определить оценку полезного сигнала $\dot{\mathbf{s}}$, доставляющую минимум неотрицательному функционалу (11) при квадратичных ($p = 2$) и неквадратичных ($p \leq 1$) регуляризирующих ограничениях, в виде

$$\hat{\dot{\mathbf{s}}}_\gamma = \arg\min_{\dot{\mathbf{s}}} \sigma(\dot{\mathbf{s}}). \tag{12}$$

## 3. СИНТЕЗ АЛГОРИТМОВ ОПТИМАЛЬНОЙ ОБРАБОТКИ НАБЛЮДЕНИЙ

### 3.1. Квадратичная оптимизация

Для построения регуляризованного решения в аналитическом виде положим в (11) $p = 2$. Выражение для оптимальной оценки $\hat{\dot{\mathbf{s}}}_{\gamma\backslash p=2}$ получим, приравнивая к нулю производную $\partial\sigma(\dot{\mathbf{s}})/\partial\dot{\mathbf{s}}^*$:

$$\hat{\dot{\mathbf{s}}}_{\gamma\backslash p=2} = \left[\dot{\mathbf{A}}^{+}\dot{\mathbf{A}} + \gamma\mathbf{E}\right]^{-1}\dot{\mathbf{A}}^{+}\dot{\mathbf{H}}, \tag{13}$$

где $\mathbf{E}$ — единичная матрица, причём параметр $\gamma$ определяется по невязке [17]

$$\left\|\dot{\mathbf{H}} - \dot{\mathbf{A}}\hat{\dot{\mathbf{s}}}_{\gamma\backslash p=2}\right\|_2^2 = C_0^2, \tag{14}$$

где, в свою очередь, имеет место следующая оценка сверху нормы вектора возмущений:

$$\|\mathbf{\Xi}\|_2^2 \leq C_0^2, \qquad C_0^2 = \text{const}. \tag{15}$$

Соотношения (13)–(15) описывают регуляризированную при квадратичных ограничениях оценку восстанавливаемого распределения. При $\gamma \to \infty$ и соответствующей нормировке наиболее общий алгоритм (13) совпадает с периодограммно-коррелограммным алгоритмом классического формирования луча.

### 3.2. Неквадратичная оптимизация

Во избежание проблем недифференцируемости $\ell_p$-нормы при $p \leq 1$, следуя [11], используем сглаженное приближение $\ell_p$-нормы и запишем модификацию целевой функции (11) в следующем виде:

$$\sigma(\dot{\mathbf{s}}) = \left\|\dot{\mathbf{H}} - \dot{\mathbf{A}}\dot{\mathbf{s}}\right\|_2^2 + \gamma \sum_{m=1}^{M} \left(|\dot{s}_m|^2 + \varepsilon\right)^{p/2}, \tag{16}$$

где $\dot{s}_m$ — $m$-й элемент вектора $\dot{\mathbf{s}}$, $\varepsilon$ — малое число.

После дифференцирования функционала $\sigma(\dot{\mathbf{s}})$ по $\dot{s}_m^*$ и приравнивания градиента нулю получаем систему квазилинейных уравнений

$$\left(\dot{\mathbf{A}}^+\dot{\mathbf{A}} + \gamma\mathbf{\Psi}(\dot{\mathbf{s}})\right)\dot{\mathbf{s}} = \dot{\mathbf{A}}^+\dot{\mathbf{H}}, \tag{17}$$

где

$$\mathbf{\Psi}(\dot{\mathbf{s}}) = \frac{p}{2}\,\mathrm{diag}\left(\frac{1}{\left(|\dot{s}_m|^2 + \varepsilon\right)^{1-p/2}}\right). \tag{18}$$

Учитывая, что матрица системы уравнений (17) зависит от неизвестного вектора $\dot{\mathbf{s}}$ через слагаемое $\mathbf{\Psi}(\dot{\mathbf{s}})$, находим начальное приближение, полагая $\mathbf{\Psi}(\dot{\mathbf{s}}) = 0$ и решая исходную систему уравнений (7) методом псевдообращения:

$$\hat{\dot{\mathbf{s}}}_{\gamma\backslash p\le 1}^{(0)} = \dot{\mathbf{A}}^+\,(\dot{\mathbf{A}}\dot{\mathbf{A}}^+)^{-1}\,\dot{\mathbf{H}}. \tag{19}$$

Следующие приближения находим, решая на каждой итерации систему линейных уравнений

$$\left(\dot{\mathbf{A}}^+\dot{\mathbf{A}} + \gamma\mathbf{\Psi}^{(z)}\right)\dot{\mathbf{s}}_{\gamma\backslash p\le 1}^{(z+1)} = \dot{\mathbf{A}}^+\dot{\mathbf{H}}, \tag{20}$$

где $z = 0, 1, \ldots$ — номер итерации, $\mathbf{\Psi}^{(z)} = \mathbf{\Psi}\left(\dot{\mathbf{s}}_{\gamma\backslash p\le 1}^{(z)}\right)$, а условие остановки выбирается в виде

$$\frac{\left\|\left(\dot{\mathbf{A}}^+\dot{\mathbf{A}} + \gamma\mathbf{\Psi}^{(z)}\right)\dot{\mathbf{s}}_{\gamma\backslash p\le 1}^{(z)} - \dot{\mathbf{A}}^+\dot{\mathbf{H}}\right\|_2}{\left\|\dot{\mathbf{H}}\right\|_2} \le \delta. \tag{21}$$

В (21) $\delta > 0$ — заданное малое число, а в числителе записана норма градиента целевой функции $\sigma(\hat{\dot{\mathbf{s}}}_{\gamma\backslash p\le 1}^{(z)})$. Сходимость данного алгоритма подтверждена исследованиями [10].

Полученные алгоритмы могут быть отнесены к когерентному варианту регуляризованной реконструкции. Рассмотрим некогерентный вариант регуляризованной реконструкции. Модель наблюдений (7) и постановка задачи (8)–(12) в частном случае, соответствующем замене вектора измерений (6) на вектор (2), приводят к алгоритмам реконструкции пространственного распределения энергии отдельного элемента сигнала $\hat{\dot{s}}_{\gamma\backslash p}(q,\ell)$. Оценка пространственного распределения энергии во всей пространственно-временно́й области существования сигнала находится по формуле

$$\bar{\dot{\mathbf{s}}}_{\gamma\backslash p} = \sum_{q,\,\ell} \nu_{q\ell} \left|\hat{\dot{s}}_{\gamma\backslash p}(q,\ell)\right|^2 \Big/ \sum_{q,\,\ell} \nu_{q\ell}, \tag{22}$$

где $\hat{\dot{s}}_{\gamma\backslash p}(q,\ell)$ — оценка, полученная одним из алгоритмов (13) или (19)–(21), после замены вектора измерений (6) на вектор (2). При этом значения двоичных чисел $\nu_{q\ell}$, описывающие частотно-временны́е области (не обязательно связные), занятые сигналом, предварительно находят ранее упоминавшимся в разделе 1 методом [14, 15].

## 4. РАНДОМИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА НЕКВАДРАТИЧНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Предположим, что амплитуда поля, падающего на антенную решётку, изменилась в $a$ раз. Тогда, используя (11), можно записать

$$\dot{\mathbf{H}}' = a\dot{\mathbf{H}}, \qquad \dot{\mathbf{s}}' = a\dot{\mathbf{s}}, \qquad \sigma'(\dot{\mathbf{s}}) = \left\|\dot{\mathbf{H}}' - \dot{\mathbf{A}}\dot{\mathbf{s}}'\right\|_2^2 + \gamma' \left\|\dot{\mathbf{s}}'\right\|_p^p . \tag{23}$$

Подставляя $\dot{\mathbf{H}}$ и $\dot{\mathbf{s}}'$ в $\sigma'(\dot{\mathbf{s}})$, получаем

$$\sigma'(\dot{\mathbf{s}}) = a^2 \left(\left\|\dot{\mathbf{H}} - \dot{\mathbf{A}}\dot{\mathbf{s}}\right\|_2^2 + \gamma' a^{p-2} \left\|\dot{\mathbf{s}}'\right\|_p^p\right). \tag{24}$$

Из сравнения выражений (11) и (24) находим

$$\gamma' = \gamma a^{2-p}. \tag{25}$$

Из выражения (25) видно, что при квадратичной оптимизации параметр регуляризации $\gamma$ не зависит от вариаций амплитуды входных данных.

В отличие от этого при неквадратичной оптимизации в случае $p = 1$ параметр $\gamma$ зависит от амплитуды линейно, а при $p < 1$ наблюдается нелинейная зависимость. Из (25) следует, что изменение параметра регуляризации $\gamma$ эквивалентно изменению амплитуды входных данных. С другой стороны, практически более важно, что из выражения (25) следует необходимость адаптации параметра $\gamma$ в соответствии с флуктуациями амплитуды входного сигнала. При этом в результате экспериментальных исследований установлено, что при $p < 1$ положение ложных максимумов в восстановленном распределении изменяется при изменении параметра регуляризации $\gamma$. Основываясь на данном факте, можно предложить метод статистического рандомизированного усреднения для увеличения динамического диапазона процесса восстановления:

$$\bar{\dot{\mathbf{s}}}_{\gamma\backslash p\le 1} = \sum_{k}^{K} \hat{\dot{\mathbf{s}}}_{\gamma\backslash p\le 1}(k), \tag{26}$$

где $k$ — текущий номер реконструкции,

$$\hat{\dot{\mathbf{s}}}_{\gamma\backslash p\le 1}(k) = \left(\dot{\mathbf{A}}^{+}\dot{\mathbf{A}} + \gamma(k)\mathbf{\Psi}(\dot{\mathbf{s}})\right)^{-1} \dot{\mathbf{A}}^{+}\dot{\mathbf{H}}, \tag{27}$$

а параметр регуляризации $\gamma(k)$, следуя принципу максимума энтропии [18], выбирается случайно из конечного интервала значений $\gamma_{\min} < \gamma(k) < \gamma_{\max}$ с равномерной плотностью вероятности. Алгоритм (26), (27) предусматривает усреднение результатов $K$ реконструкций, полученных при различных параметрах регуляризации $\gamma(k)$.

Таким образом, предложенная модификация обработки данных измерений (26), (27) благодаря рандомизации обеспечивает повышение эффективности когерентного и некогерентного вариантов регуляризованной реконструкции при наличии только одной реализации входных данных, что существенно при восстановлении пространственного спектра кратковременных сигналов.

Отметим ещё одну подобную (26) процедуру. Вектор $\dot{\mathbf{H}}$ содержит полную информацию о падающем поле, и из него может быть получена матрица всех межэлементных корреляций сигналов в антенной решётке при использовании каждого элемента решётки в качестве опорного для остальных. Оценки комплексного вектора $\dot{\mathbf{s}}$, полученные одним из алгоритмов (13) или (19)–(21) на основе матрицы всех межэлементных корреляций сигналов в решётке, могут быть усреднены для повышения устойчивости процедуры исключения общей флуктуирующей фазы.

## 5. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Методика и эффективность алгоритмов регуляризованной реконструкции пространственного спектра и их модификаций проверена в процессе численного эксперимента.

Используем кольцевую решётку с $N = 11$ и радиусом, равным длине волны. Это эквивалентно волновому расстоянию между соседними элементами решётки, под которым понимается отношение длины хорды соответствующей дуги окружности к длине волны, равному 0,563. Пусть на эту решётку под нулевым углом места, отсчитываемым от плоскости решётки, из дальней зоны приходят два когерентных сигнала, что соответствует условиям двухлучевого распространения волн. Отношение амплитуд сигналов $a_2/a_1 = 1$. Разность фаз между лучами от измерения к измерению меняется случайно в интервале от 0 до $2\pi$ в соответствии с равномерным законом распределения. Определим соотношение сигнал/шум как отношение мощностей двухлучевого сигнала и гауссового шума на выходе отдельного элемента решётки.

В процессе основного эксперимента использовались следующие методы реконструкции: 1) классический метод формирования луча; 2) метод псевдообращения (9); 3) метод квадратичной регуляризации (13); 4) параметрический метод подгонки параметров многолучевой модели [6, 7]; 5) метод неквадратичной регуляризации (19)–(21) при $p = 1$; 6) метод неквадратичной регуляризации при $p = 0{,}1$.

На первом этапе для случая большого различия углов прихода лучей проведём анализ сравнительной эффективности методов реконструкции при использовании одной реализации входных данных (отдельного частотно-временно́го элемента сигнала). В данном эксперименте углы прихода лучей полагались равными соответственно $\alpha_1 = 120°$ и $\alpha_2 = 170°$. На рис. 1*а*–*е* приведены гистограммы распределений оценок углов прихода, полученные для отношения сигнал/шум 15 дБ методами 1–6 соответственно. Символом $P$ по оси ординат обозначена вероятность (относительная частота) попадания найденных углов прихода в ячейку гистограммы размером 2° при общем числе независимых испытаний $10^3$. Метод 3 использовался с параметром $\gamma = 20$, а методы 5 и 6 — с $\gamma = 0{,}01$ и $\varepsilon = 10^{-6}$. Из рис. 1 следует, что в данном случае когерентные сигналы разделяются любым из рассмотренных методов. В правом верхнем углу каждого из рисунков приведены оценки углов прихода и соответствующие им вероятности, найденные по первым двум максимумам гистограммы. Метод 1 чувствителен к разности фаз между лучами, что приводит к раздвоению гистограммы в области истинного направления прихода каждого из лучей и, как следствие, к смещению оценок на 4°. Дополнительным экспериментом установлено, что в базовых направлениях, соответствующих областям ближних боковых лепестков диаграммы направленности антенной решётки, смещение угловых оценок при использовании методов 1 и 2 противоположно. Метод 3 выбором параметра $\gamma$ позволяет минимизировать это смещение. Наибольшую вероятность и высокую точность оценки обеспечивает метод 4. Однако этот метод требует знания числа лучей, которое в данном эксперименте полагалось равным двум. Среди непараметрических методов сопоставимую эффективность обеспечивают методы 3, 5 и 6.

На втором и последующих этапах моделирования рассмотрим ситуации, когда углы прихода лучей находятся в пределах одного интервала разрешения Релея, в рассматриваемом случае приблизительно равного 30°, и равны соответственно $\alpha_1 = 160°$ и $\alpha_2 = 170°$.

На рис. 1*ж*–*м* приведены результаты моделирования, полученные при отношении сигнал/шум 15 дБ. Видно, что при данных условиях эксперимента когерентные сигналы разделяются не всеми из рассматриваемых методов. Наиболее эффективными являются методы 4 и 6. Дополнительными испытаниями выявлено, что разрешающая способность этих методов в определённой степени зависит от разности фаз между сигналами лучей. Наихудшим является случай нулевой разности фаз. Наряду с воздействием шумов это приводит к «замыванию» гистограммы в области углов,

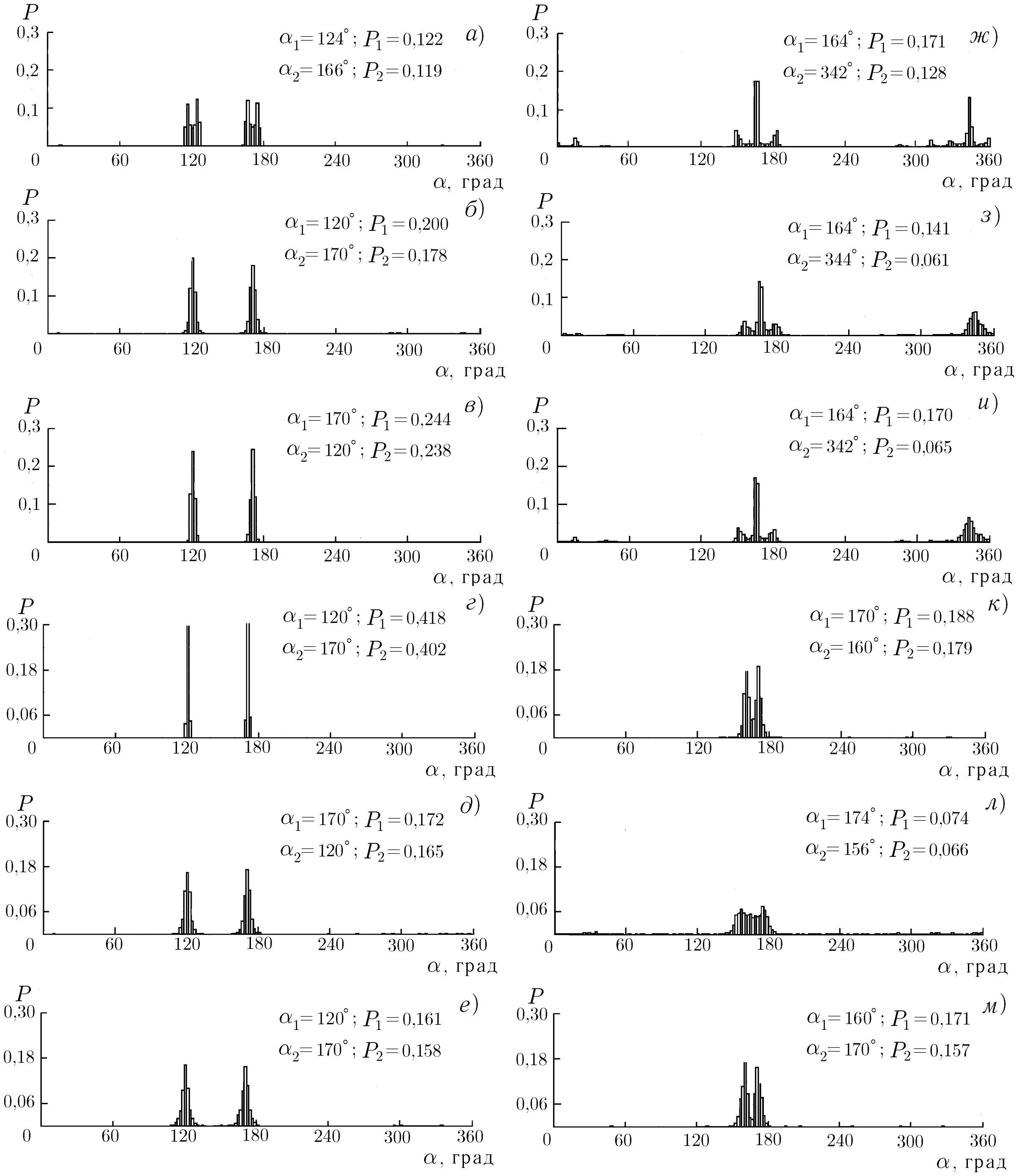



Рис. 1. Гистограммы распределений оценок углов прихода лучей

лежащей между истинными углами прихода лучей, что для метода 4 наглядно видно на рис. 1*к*. Особенностью метода 6 является то, что при фазовом сдвиге между лучами, равном $\pi$, его разрешающая способность возрастает. Однако одновременно наблюдается систематическое смещение оценок углов прихода обоих лучей на $3 \div 4^\circ$.

На третьем этапе экспериментальных исследований установлено, что в случае однократных измерений реконструкция с применением регуляризованного метода 6 с вероятностью, зависящей от

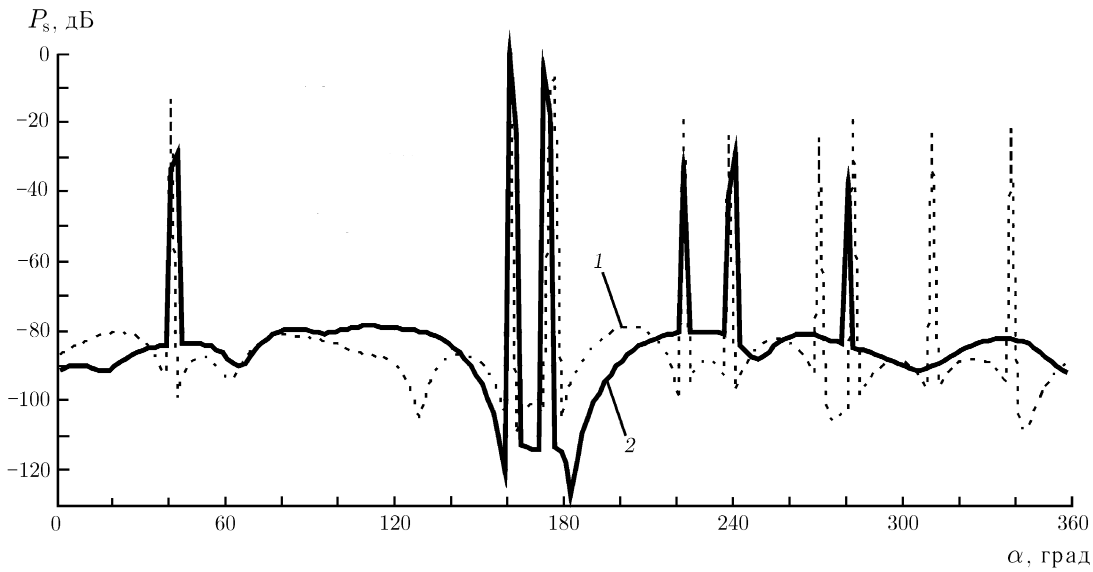



Рис. 2. Зависимости мощности сигнала от азимутального угла, полученные с помощью метода неквадратичной регуляризации без рандомизации параметра регуляризации (кривая *1*) и с рандомизацией параметра регуляризации (кривая *2*)

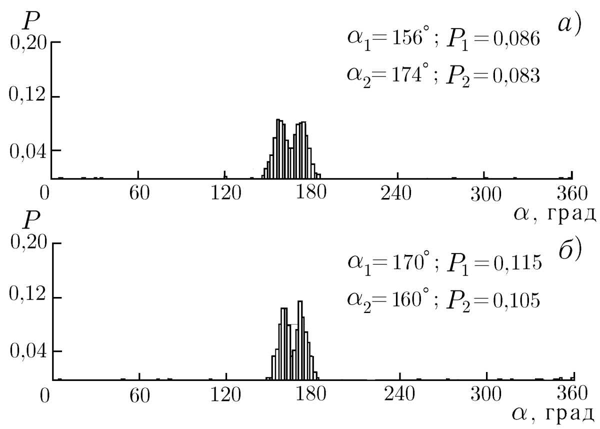



Рис. 3. Гистограммы распределений оценок углов прихода, полученных методом неквадратичной регуляризации без рандомизации параметра регуляризации (*а*) и с рандомизацией параметра регуляризации (*б*)

отношения сигнал/шум, приводит к возникновению в восстановленном распределении углов прихода лучей ложных максимумов. Рассмотрим эффективность модификации (26), (27) метода 6, основанной на рандомизации параметра регуляризации. В данном эксперименте полагалось, что когерентные сигналы лучей не отличаются по фазе на временно́м интервале наблюдения. На рис. 2 представлены реконструированные пространственные спектры в виде зависимостей мощности сигнала $P_{\rm s}$ как функции азимутального угла $\alpha$. Графики получены при отношении сигнал/шум 10 дБ по одной реализации сигнала в результате однократной реконструкции при фиксированных параметрах $p = 0{,}1$; $\gamma = 0{,}01$ и $\varepsilon = 10^{-6}$ (кривая *1*, оценки углов прихода $\alpha_1 = 160^\circ$, $\alpha_2 = 176^\circ$ и соответствующие значения мощности $P_{\rm s}^{(1)} = 1{,}241$ дБ, $P_{\rm s}^{(2)} = 0{,}563$ дБ) и в результате статистического рандомизированного усреднения десяти ($K = 10$) реконструкций при изменении параметра регуляризации в диапазоне значений $\gamma = 0{,}01 \div 0{,}3$ (кривая *2*, оценки углов прихода $\alpha_1 = 160^\circ$, $\alpha_2 = 172^\circ$ и соответствующие значения мощности $P_{\rm s}^{(1)} = 1{,}187$ дБ, $P_{\rm s}^{(2)} = 0{,}701$ дБ). Рис. 3 иллюстрирует результаты гистограммных испытаний метода 6 для случая реконструкции по одной реализации сигнала без рандомизации параметра регуляризации (рис. 3*а*) и с рандомизацией параметра регуляризации (рис. 3*б*) при отношении сигнал/шум 10 дБ и общем числе независимых испытаний 400. Из рис. 2 и 3 следует, что рандомизация алгоритма неквадратичной оптимизации при $p < 1$ повышает эффективность реконструкции в случае ограниченного набора входных данных, что расширяет применимость методов регуляризации при восстановлении пространственного спектра кратковременных одночастотных и многочастотных сигналов.

Рассмотренные примеры реконструкции основаны на использовании одиночной реализации сигнала. В заключение сравним возможности методов 4 и 6 при использовании предварительной обработки с когерентным накоплением энергии сложного сигнала в частотно-временно́й области его существования. В данном эксперименте полагаем, что при накоплении сигнала по времени или частоте разность фаз между лучами в соседних элементах сигнала изменяется не более чем на $\pi/6$. Например, для ионосферного канала это ориентировочно соответствует допустимому интервалу накопления 100 мс. При формировании гистограммы разность фаз между лучами в каждом из 400 испытаний, как и ранее, изменялась случайно в интервале от 0 до $2\pi$. Оценки углов прихода (верхние числа) и соответствующие им вероятности (нижние числа) при использовании одного ($Q = L = 1$) частотно-временно́го элемента сигнала и при когерентном накоплении десяти ($Q \times L = 10$) элементов представлены в табл. 1. Видно, что регуляризованный метод 6 в широком диапазоне входных отношений сигнал/шум обеспечивает точность оценки углов прихода когерентных сигналов лучей, сравнимую с точностью метода 4, реализация которого требует априорной информации о числе лучей.

Таблица 1

| | | Оценки углов прихода и соответствующие им вероятности при отношении сигнал/шум | | |
|---|---|---|---|---|
| Метод | $Q \times L$ | 5 дБ | 10 дБ | 15 дБ |
| 4 | 1 | $\frac{164^\circ}{0{,}07}$ $\frac{172^\circ}{0{,}06}$ | $\frac{158^\circ}{0{,}09}$ $\frac{172^\circ}{0{,}08}$ | $\frac{160^\circ}{0{,}18}$ $\frac{170^\circ}{0{,}19}$ |
| | 10 | $\frac{164^\circ}{0{,}09}$ $\frac{170^\circ}{0{,}10}$ | $\frac{160^\circ}{0{,}17}$ $\frac{170^\circ}{0{,}19}$ | $\frac{160^\circ}{0{,}30}$ $\frac{170^\circ}{0{,}30}$ |
| 6 | 1 | $\frac{164^\circ}{0{,}05}$ $\frac{172^\circ}{0{,}04}$ | $\frac{156^\circ}{0{,}09}$ $\frac{174^\circ}{0{,}08}$ | $\frac{160^\circ}{0{,}17}$ $\frac{170^\circ}{0{,}16}$ |
| | 10 | $\frac{160^\circ}{0{,}07}$ $\frac{172^\circ}{0{,}06}$ | $\frac{160^\circ}{0{,}10}$ $\frac{170^\circ}{0{,}12}$ | $\frac{160^\circ}{0{,}23}$ $\frac{170^\circ}{0{,}24}$ |

Для сравнения отметим, что некогерентный вариант регуляризованной реконструкции (27) с параметром $p = 0{,}1$ при отношении сигнал/шум 10 дБ обеспечивает сопоставимую с методом 6 эффективность при $Q \times L = 45$. Это позволяет рекомендовать использование метода неквадратичной регуляризованной реконструкции в когерентном и некогерентном вариантах на практике.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках теории регуляризации восстанавливаемых изображений на основе минимизации составленного из $\ell_2$- и $\ell_p$-норм сглаживающего функционала с квадратичными и неквадратичными ограничениями исследована проблема пространственной локализации источников априорно неизвестных широкополосных сигналов в условиях многолучевого распространения волн. Когерентный и некогерентный варианты регуляризованной реконструкции пространственного распределения мощности когерентных сигналов, предварительно радиоголографически локализованных в частотно-временны́х областях их существования (не обязательно связанных), в зависимости от требований к разрешающей способности могут быть реализованы алгоритмами квадратичной и неквадратичной регуляризации. Квадратичная оптимизация при предельных значениях параметра регуляризации сводится к классической схеме формирования луча, пропорциональной периодограмме. Итерационный алгоритм обращения в случае неквадратичной оптимизации обеспечивает повышенную разрешающую способность и отличается от известных схем применением метода псевдообращения при получении начального приближения, условием остановки итерационного процесса и рандомизацией параметра регуляризации при наличии только одной реализации входных данных. Этот подход позволяет преодолеть такие проблемы, как многолучёвость и априорная неопределённость относительно параметров сложных сигналов и шумов, улучшает качество реконструкции по сравнению с существующими методами как в случае многократных измерений, так и при наличии только одной реализации входных данных.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Монзинго Р. А., Миллер Т. У. Адаптивные антенные решётки: Введение в теорию. М.: Радио и связь, 1986.
2. Тихонов В. И., Харисов В. Н. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. М.: Радио и связь, 1991.
3. Shevchenko V. N., Ivanov N. M., Vertogradov G. G. // The 2nd European Workshop of Conformal Antennas, Netherlands, 24–25 April 2001. V. 2. P. 69.
4. Даджион Д., Мерсеро Р. Цифровая обработка многомерных сигналов: Пер. с англ. М.: Мир, 1988.
5. Джонсон Д. Х. // ТИИЭР. 1982. Т. 70, № 9. С. 126.
6. Ivanov N. M., Vertogradov G. G., Shevchenko V. N. // Millennium Conference on Antennas and Propagation —AP 2000, Davos, 9–14 April 2000. V. 1. P. 187.
7. Шевченко В. Н. // Радиотехника. 2002. № 12. С. 16.
8. Василенко Г. И., Тараторкин А. М. Восстановление изображений. М.: Радио и связь, 1986.
9. Vogel C. R., Oman M. E. // IEEE Trans. Image Processing. 1998. V. 7, No. 6. P. 813.
10. Charbonnier P., Blanc-Feraud L., Aubert G., Barlaud M. // IEEE Trans. Image Processing. 1997. V. 6, No. 2. P. 298.
11. Cetin M., Karl W., Castanon D. // Proceedings of the SPIE Conference on Algorithms for Imagery IX, Orlando, April 2002. V. 4727.
12. Cetin M., Karl W. C. // IEEE Trans. Image Processing. 2001. V. 10, No. 4. P. 623.
13. Cetin M., Malioutov D. M., Willsky A. S. // IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, Orlando, May 2002.
14. Шевченко В. Н. // Автометрия. 2003. Т. 39, № 1. С. 28.
15. Способ обнаружения и определения двумерного пеленга и частоты источников радиоизлучения Патент № 2190236 РФ. / Шевченко В. Н., Емельянов Г. С., Вертоградов Г. Г. Опубл. 2002; RU БИПМ № 27.
16. Марпл.-мл. С. Л. Цифровой спектральный анализ и его применения: Пер. с англ. М.: Мир, 1990.
17. Тихонов А. Н., Уфимцев М. В. Статистическая обработка результатов экспериментов. М.: Изд-во МГУ, 1988.
18. Ту Дж., Гонсалес Р. Принципы распознавания образов: Пер. с англ. М.: Мир, 1978.

Государственное конструкторское бюро АПС «Связь»,
г. Ростов-на-Дону, Россия

Поступила в редакцию
27 августа 2002 г.

**DIVISION OF A MULTIFREQUENCY MULTIPATH FIELD BY REGULARIZATION METHODS**

*V. N. Shevchenko*

Within the framework of the quadratic and non-quadratic regularization theory based on $\ell_p$ norms, we analyzed the problem of spatial localization of the power of coherent-signal sources using minimum *a priori* information on shapes, frequency-temporal domains of existence of wideband signals, and statistical characteristics of disturbances. A numerical experiment using a circular antenna array proves the efficiency of algorithms proposed for digital retrieval of the angular energy distribution under conditions of multipath propagation.

УДК 532.591

# ДИФФУЗИЯ ИНЕРТНЫХ ЧАСТИЦ В ТУРБУЛЕНТНОЙ ВЯЗКОЙ СРЕДЕ

*Е. З. Грибова*

На основе выведенного в работе уравнения Фоккера—Планка для якобиана преобразования лагранжевых координат в эйлеровы исследуется процесс диффузии частиц пассивной примеси в турбулентной вязкой среде. Решение уравнения позволяет изучить влияние инерционности на возникновение многопотоковости движения.

Исследование статистических характеристик поведения пассивной примеси в турбулентной среде весьма актуально для задач экологического мониторинга, проблем предсказания погоды и изменения климата. Поэтому этой теме посвящено уже достаточно много работ [1–5]. В частности, в [6–8] обнаружено явление локализации плавучей примеси, состоящее в образовании сгустков примеси повышенной плотности. Применительно к поведению примеси на поверхности жидкости кластеризация в поле случайных скоростей изучалась в [4, 6, 9, 10], причём в [10] учитывалась, кроме турбулентной, и молекулярная диффузия. Однако инертные свойства частиц примеси при этом не рассматривались.

Цель данной работы — изучение характера движения частиц пассивной примеси в вязкой турбулентной среде с учётом их инерционности. Известно [11], что из-за инерционности частиц примеси при движении в случайном поле скоростей формируется собственное поле скоростей примеси, которое отличается от поля скоростей среды. При этом именно поле скоростей пассивной примеси определяет диффузию частиц. В частности, это отличие порождает упомянутый эффект локализации примеси. Ниже исследуется влияние инерционности частиц на другую характеристику движения примеси — возникновение многопотоковости движения.

Пусть частица, обладающая массой, двигаясь со скоростью $v_0$, попадает в турбулентный поток. Исследуем диффузию частицы в такой среде в простейшем одномерном случае. Примером одномерного движения является узкий канал, преимущественно вдоль которого движется примесь.

На частицу со стороны среды действует сила сопротивления, пропорциональная относительной скорости движения частицы. Пусть $k$ — коэффициент вязкого трения в расчёте на единицу массы. В лагранжевом представлении движение частицы описывается системой уравнений

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = V, \qquad \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = k\,[V'(X(t),t) - V], \tag{1}$$

где $X$ и $V$ — лагранжевы координата и скорость частицы соответственно, $V'(X(t),t)$ — скорость движения среды, а начальные условия имеют вид

$$X(t=0) = y, \qquad V(t=0) = v_0.$$

Будем интересоваться статистикой якобиана преобразования лагранжевой координаты $X(t)$ в эйлерову $y(t)$:

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}y} = J(y,t).$$

Заметим, что эта величина имеет наглядный физический смысл [12]: она показывает, как меняется объём первоначально бесконечно малой жидкой частицы с начальной координатой $y$. Кроме того, положительность $J$ означает, что между лагранжевой и эйлеровой координатами имеется взаимно-однозначное соответствие, т. е. движение однопотоковое. Если же функция $J(y,t)$ знакопеременна, то это означает, что движение стало многопотоковым.

С учётом обозначений

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y} = U, \qquad \frac{\mathrm{d}V'}{\mathrm{d}t} = U'(X(t),t)$$

из (1) получим систему уравнений

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t} = U, \qquad \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = k\,[U'(X(t),t)\,J - U] \tag{2}$$

с начальными условиями

$$J(t=0) = 1, \qquad U(t=0) = \frac{\mathrm{d}v_0}{\mathrm{d}y} = 0. \tag{3}$$

Последнее равенство в (3) соответствует предположению, что поле начальных скоростей частицы однородно в пространстве, т. е. не зависит от её начальной координаты.

Будем считать случайное поле скоростей $V'(X(t),t)$ гауссовым дельта-коррелированным с нулевым средним. Очевидно, такими же статистическими свойствами будет обладать и вспомогательное поле $U'(X(t),t)$. Тогда плотность вероятностей

$$W(x,v,j,u;t) = \bigl\langle \delta[x - X(t)]\,\delta[v - V(t)]\,\delta[u - U(t)]\,\delta[j - J(t)]\bigr\rangle$$

(угловые скобки здесь и далее означают усреднение по ансамблю реализаций случайного поля $V'(X(t),t)$) решений системы (2) удовлетворяет уравнению Фоккера—Планка

$$\frac{\partial W}{\partial t} + v\,\frac{\partial W}{\partial x} - k\,\frac{\partial}{\partial v}(vW) + u\,\frac{\partial W}{\partial j} - k\,\frac{\partial}{\partial u}(uW) = \frac{k^2 D_{v'v'}}{2}\,\frac{\partial^2 W}{\partial v^2} + \frac{k^2 D_{u'u'}}{2}\,j^2\,\frac{\partial^2 W}{\partial u^2} \tag{4}$$

с начальными условиями

$$W(x,v,j,u;t) = \langle \delta(x-y)\,\delta(v-v_0)\,\delta(u)\,\delta(j-1)\rangle.$$

В (4) введены обозначения

$$D_{v'v'} = \int\limits_{-\infty}^{0} \bigl\langle v'(X(t'),t')v'(X(t),t)\bigr\rangle\,\mathrm{d}t', \qquad D_{u'u'} = \int\limits_{-\infty}^{0} \bigl\langle u'(X(t'),t')u'(X(t),t)\bigr\rangle\,\mathrm{d}t'.$$

Усредняя (4) по переменным $x$ и $v$, для плотности вероятностей

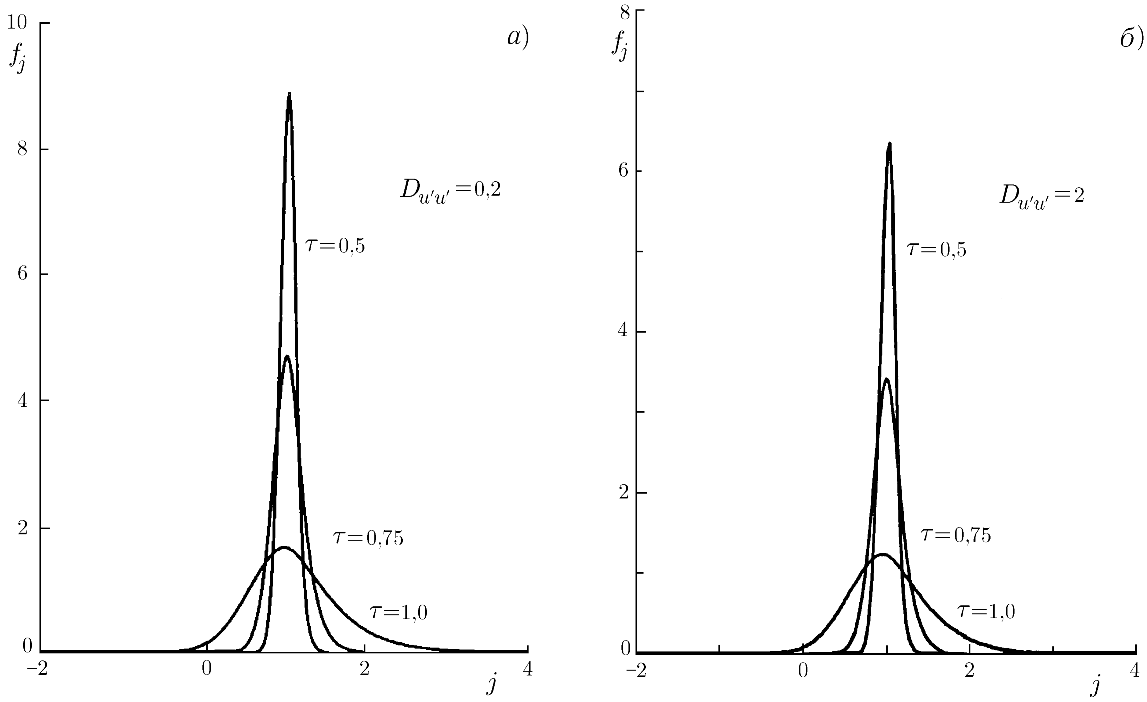
$$w(j,u;t) = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} W(x,v,j,u;t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v$$

получим уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\,\frac{\partial w}{\partial j} - k\,\frac{\partial}{\partial u}(uw) = \frac{k^2 D_{u'u'}}{2}\,j^2\,\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\,. \tag{5}$$

Для численного решения уравнения (5) с начальными условиями

$$w(j,u;t=0) = \langle \delta(u)\,\delta(j-1)\rangle$$



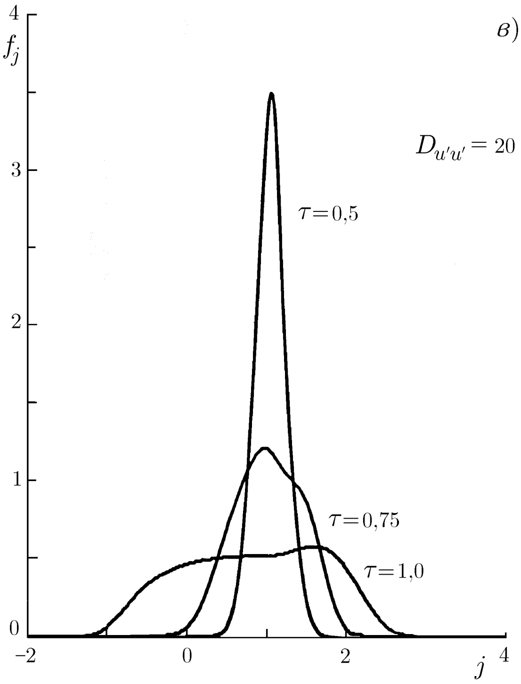




Рис. 1

перейдём к безразмерным величинам. Для этого, прежде всего, заметим, что в задаче есть два характерных параметра размерности времени: $1/k$ и $1/D_{u'u'}$. Однако, чтобы проследить эволюцию плотности вероятностей якобиана в зависимости от инерционности частиц и коэффициента диффузии, введём переменные

$$\tau = t/t_0, \qquad \upsilon = ut_0$$

так, что $t_0$ — величина размерности времени, не зависящая от параметров задачи $k$ и $D_{u'u'}$. Тогда для безразмерной плотности вероятностей

$$f(j,\upsilon;\tau) = t_0 w(j,u;t)$$

получим уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} + \upsilon\,\frac{\partial f}{\partial j} - kt_0\,\frac{\partial(\upsilon f)}{\partial \upsilon} = \frac{k^2 D_{u'u'}}{2}\,t_0^3 j^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial \upsilon^2}\,. \quad (6)$$

Уравнение (6) решалось методом переменных направлений с монотонной трёхточечной разностной схемой с порядком аппроксимации

$$\mathrm{O}\big(\tau + (\Delta\upsilon)^2 + (\Delta j)^2\big)$$

на каждом шаге по $\tau$ [13]. Сетка по переменным была выбрана так, что шаг по соответствующим переменным $\Delta\upsilon = \Delta j = 0{,}02$, при этом $-3 \le \upsilon \le 3$, $-2 \le j \le 4$; шаг по времени $\Delta\tau = 0{,}01$, параметр $t_0 = 1$. С помощью решения уравнения (6) вычислялась интересующая нас плотность вероятностей якобиана

$$f_j(j;\tau) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(j,\upsilon;\tau)\,\mathrm{d}\upsilon.$$

На рис. 1 представлена функция $f_j(j;\tau)$ в моменты времени $\tau = 0{,}5; 0{,}75; 1$ при коэффициенте вязкого трения $k = 1$ и разных значениях коэффициента диффузии $D_{u'u'}$. Видно, что начиная с некоторого момента времени плотность вероятностей $f_j(j;\tau)$ становится отличной от нуля в области отрицательных значений $j$. Это означает, что движение становится многопотоковым: в некоторые точки пространства попадает одновременно несколько частиц, имевших разные начальные координаты. Рис. 1 показывает, что многопотоковость возникает тем раньше и выражена тем заметнее, чем больше коэффициент диффузии.

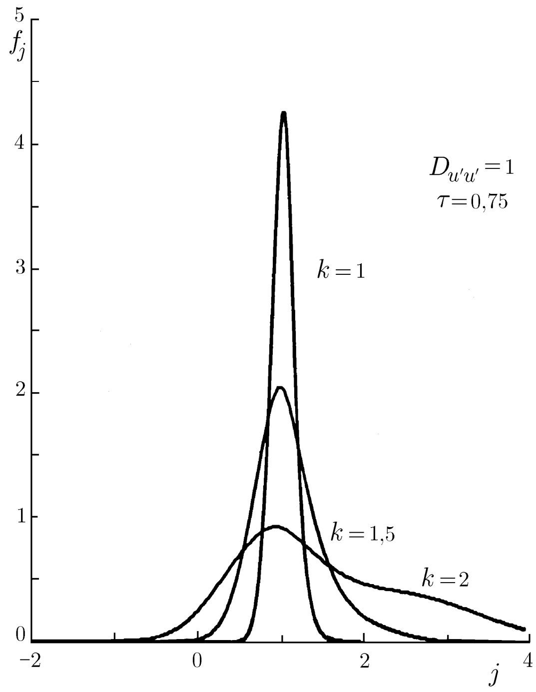


Рис. 2

Исследуем теперь влияние инертных свойств частицы. Заметим, что в соответствии с нашим определением величина $k$ обратно пропорциональна массе. На рис. 2 построена плотность вероятностей $f_j(j;\tau)$ в момент времени $\tau = 0{,}75$ для коэффициента диффузии $D_{u'u'} = 1$ при трёх значениях коэффициента вязкого трения $k$. Из приведённых графиков видно, что частица с большой массой, попадая в поле скоростей $V'(X(t),t)$, «не замечает» движения окружающей среды и практически не изменяет характер своего движения. Наоборот, более лёгкая частица (бóльшие значения $k$) быстрее подвергается действию окружающей среды и оказывается «вмороженной» в неё.

Полученное уравнение для плотности вероятностей $w(j,u;t)$ позволяет также исследовать поведение статистических моментов обратной к якобиану величины — концентрации примеси $n(t)$. В качестве примера изучим поведение средних: $\langle j\rangle = \langle n^{-1}\rangle$ и $\langle j^2\rangle = \langle n^{-2}\rangle$. Во-первых, из уравнения Фоккера—Планка (5) следует система уравнений

$$\frac{\mathrm{d}\langle j\rangle}{\mathrm{d}t} = \langle u\rangle, \qquad \frac{\mathrm{d}\langle u\rangle}{\mathrm{d}t} = -k\langle u\rangle,$$

решая которую с начальными условиями (3), находим

$$\langle j\rangle \equiv 1,$$

что, по сути, является следствием «закона сохранения массы» примеси. Во-вторых, из (5) получаем

$$\frac{\mathrm{d}\langle j^2\rangle}{\mathrm{d}t} = 2\,\langle uj\rangle, \qquad \frac{\mathrm{d}\langle uj\rangle}{\mathrm{d}t} = \langle u^2\rangle - k\,\langle uj\rangle, \qquad \frac{\mathrm{d}\langle u^2\rangle}{\mathrm{d}t} = -2k\,\langle u^2\rangle + k^2 D_{u'u'}\,\langle j^2\rangle.$$

Последняя система сводится к уравнению третьего порядка

$$\frac{\mathrm{d}^3\langle j^2\rangle}{\mathrm{d}t^3} + 3k\,\frac{\mathrm{d}^2\langle j^2\rangle}{\mathrm{d}t^2} + 2k^2\,\frac{\mathrm{d}\langle j^2\rangle}{\mathrm{d}t} - 2k^2\,D_{u'u'}\,\langle j^2\rangle = 0 \tag{7}$$

с начальными условиями

$$\langle j^2(t=0)\rangle = 1, \qquad \left.\frac{\mathrm{d}\langle j^2\rangle}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 0, \qquad \left.\frac{\mathrm{d}^2\langle j^2\rangle}{\mathrm{d}t^2}\right|_{t=0} = 0.$$

Решение уравнения (7) является экспоненциально нарастающим, причём при малых $k$ инкремент мало отличается от нуля. Это подтверждает сделанный ранее вывод о характере движения частицы: для частиц с большой массой $\langle j^2\rangle$ остаётся практически постоянным. К аналогичному результату приводят и малые значения коэффициента диффузии $D_{u'u'}$.

Автор благодарит А. И. Саичева за постоянное внимание к работе и неоднократные полезные обсуждения.

Работа выполнена при поддержке РФФИ и программы «Ведущие научные школы РФ» (грант № 00–15–96619).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Csanady G. T. Turbulent Diffusion in the Environment. Boston: Reidel, 1973.
2. Careta A., Sagues F., Ramirez-Piscina L., Sancho J. M. // J. Stat. Phys. 1993. V. 71, No. 1–2. P. 235.
3. Crisanti A., Vulpiani A. // J. Stat. Phys. 1993. V. 70, No. 1–2. P. 197.
4. Жукова И. С., Саичев А. И. // ПММ. 1997. Т. 61, вып. 5. С. 788.
5. Кляцкин В. И. // УФН. 1994. Т. 164, № 5. С. 531.
6. Кляцкин В. И., Саичев А. И. // ЖЭТФ. Т. 111, вып. 4. С. 1 297.
7. Saichev A. I., Woyczynski W. A. // Stochastic Models in Geosystems. The IMA Volumes in Mathematics and Its Applications. 1996. V. 85. P. 359.
8. Saichev A. I., Zhukova I. S. // Lecture Notes in Physics. 1998. V. 511. P. 353.
9. Кляцкин В. И., Гурарий Д. // УФН. 1999. Т. 169, № 2. С. 171.
10. Грибова Е. З., Жукова И. С., Саичев А. И., Войчинский В. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 2000. Т. 43, № 5. С. 456.
11. Maxey M. R. // J. Fluid Mech. 1987. V. 174. P. 441.
12. Гурбатов С. Н., Малахов А. Н., Саичев А. И. Нелинейные случайные волны в средах без дисперсии. М.: Наука, 1990. 216 с.
13. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. М.: Наука, 1989. 432 с.

Нижегородский госуниверситет им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию 16 октября 2002 г.

## DIFFUSION OF FINITE-MASS PARTICLES IN A TURBULENT VISCOUS MEDIUM

*E. Z. Gribova*

Based on a Fokker–Planck equation for the Jacobian of mapping of Lagrangian into Eulerian coordinates, derived in this paper, we analyze the process of diffusion of passive-tracer particles in a turbulent viscous medium. Solving this equation allows for studying the effect of finite masses (inertia) of the tracer particles on the appearance of multi-flow motion.

УДК 538.56:519.25

# К АНАЛИЗУ СПЕКТРАЛЬНО-КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ОДНОМЕРНОГО БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ

*О. В. Музычук*

Предложен аналитико-численный подход к нахождению корреляционной функции одномерного броуновского движения в мономодальном потенциальном профиле, описываемом полиномом невысокой степени. Подход основан на решении разомкнутых определённым образом цепочек дифференциальных уравнений для моментных функций флуктуаций координат частиц. Рассмотрены два способа размыкания: один базируется на квазилинейном разложении моментных функций, другой — на «бескумулянтном» разложении. Исследованы спектрально-корреляционные характеристики броуновского движения в биквадратном потенциальном профиле двух видов.

Изучение вероятностных характеристик нелинейного броуновского движения в различных потенциальных профилях актуально для многих проблем статистической радиофизики, радиоэлектроники, физической химии (см., например, [1, 2]). Соответствующим математическим аппаратом является теория марковских процессов и процессов диффузионного типа [3, 4]. Нахождение спектрально-корреляционных характеристик броуновского движения сопряжено с решением нестационарных уравнений Фоккера—Планка, при этом получить аналитические результаты, как правило, не удаётся. Для приближённого или качественного решения таких задач часто используется гауссово приближение, а также более общий кумулянтный подход [5]. Следует отметить важную работу [6], где на основе оригинальной методики получены точные результаты для корреляционных характеристик марковских процессов, в частности аналитические выражения для времени корреляции броуновского движения в ряде потенциальных профилей.

В настоящей статье изложен аналитико-численный подход к нахождению спектрально-корреляционных функций одномерного броуновского движения в симметричном мономодальном потенциале, описываемом полиномом невысокой степени. Метод анализа основан на решении разомкнутых определённым образом цепочек дифференциальных уравнений для моментных функций флуктуаций координат частиц. Рассмотрены два способа такого размыкания: один базируется на точных рекуррентных соотношениях для соответствующих моментов, другой — на «бескумулянтных» разложениях моментных функций. Исследованы спектрально-корреляционные характеристики одномерного броуновского движения в биквадратном потенциальном профиле двух видов.

**1**. Рассмотрим броуновское движение безынерционных частиц в одномерном потенциальном профиле $U(x)$. Уравнение Ланжевена для координат частиц запишем в виде

$$T\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + F(x) = \xi(t), \qquad F(x) = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}\,, \tag{1}$$

где $T$ — постоянная времени для соответствующей линейной системы. Положим профиль симметричным и зададим потенциальную силу разложением

$$F(x) = x\left(1 + \sum_{k=1}^{m} \gamma_k x^{2k}\right). \tag{2}$$

Шум $\xi(t)$ считаем гауссовым дельта-коррелированным процессом, полагая

$$\langle \xi(t)\rangle = 0, \qquad \langle \xi(t)\,\xi(t+\tau)\rangle = D_\xi \delta(\tau), \tag{3}$$

где $\delta(\tau)$ — дельта-функция. Будем искать корреляционную функцию флуктуаций координат частиц $B(\tau) = \langle x(t)\, x(t+\tau)\rangle$, соответствующую стационарному больцмановскому распределению координат

$$w_x(x) = C \exp\left[-\frac{U(x)}{D}\right], \qquad D = \frac{D_\xi}{2T}\,. \tag{4}$$

Обозначив

$$B_n(\tau) = \langle x(t)\, x^{2n-1}(t+\tau)\rangle, \qquad B_1(\tau) \equiv B(\tau), \tag{5}$$

на основании (1), (2) имеем

$$\frac{T}{2n-1}\,\frac{\mathrm{d}B_n(\tau)}{\mathrm{d}\tau} + B_n(\tau) + \sum_{k=1}^{m} \gamma_k B_{n+k}(\tau) = \langle x(t)\, x^{2n-2}(t+\tau)\, \xi(t+\tau)\rangle. \tag{6}$$

Используя для совместной моментной функции формулу Фуруцу—Новикова (см., например, [4]), дель- та-коррелированность шума и принцип причинности, запишем систему (6) в виде

$$\frac{1}{2n-1}\, B_n'(\theta) + B_n(\theta) + \sum_{k=1}^{m} \gamma_k B_{n+k}(\theta) = 2\,(n-1)\, D B_{n-1}(\theta), \tag{7}$$

где $n = 1, 2, \ldots$. Здесь и ниже штрих обозначает производную по безразмерному времени $\theta = \tau/T > 0$.

Очевидно, в случае линейной системы (что соответствует параболическому потенциалу $U(x)$) из (7) получаем корреляционную функцию

$$B(\theta) = D \exp(-|\theta|), \qquad D = \langle x^2\rangle, \tag{8}$$

или лоренцевский спектр флуктуаций с шириной $\Pi = 1/T$. В общем случае для нахождения корреляционной функции $B(\tau)$ из системы (7) нужно адекватным образом разомкнуть цепочку уравнений для старших моментных функций на некотором шаге.

**2**. Рассмотрим далее движение в потенциальных профилях вида

$$U(x) = \frac{x^2}{2}\left(1 + \gamma\,\frac{x^2}{2}\right), \tag{9а}$$

$$U(x) = \gamma\,\frac{x^4}{4}\,. \tag{9б}$$

Первый профиль соответствует квазилинейному броуновскому движению (при $\gamma \to 0$ приходим к выражению (8)), второй — принципиально нелинейному.[1] Для потенциала (9а) цепочка уравнений (7) примет вид трёхчленного взаимодействия:

$$(2n-1)^{-1}\, B_n'(\theta) + B_n(\theta) + \gamma B_{n+1}(\theta) = 2\,(n-1)\, D B_{n-1}(\theta), \tag{10}$$

где $n = 1, 2, \ldots$. Начальные условия — чётные моменты $B_n(0) = \langle x^{2n}\rangle \equiv I_n$ — определяются цепочкой соотношений

$$I_n + \gamma I_{n+1} = (2n-1)\, D I_{n-1}, \tag{11}$$

[1] В монографии [5] подобная задача решалась для потенциала (9б) в гауссовом и эксцессном приближениях; в работе [6] получены общие выражения для времени корреляции в степенном потенциальном профиле.

решение которой имеет вид непрерывной дроби [7, 8]. Рекуррентную формулу для $I_n$ можно записать в виде

$$I_n = D\mu_n I_{n-1}, \qquad \mu_n = \cfrac{2n-1}{1+\cfrac{(2n+1)\,\sigma}{1+\cfrac{(2n+3)\,\sigma}{1+\ldots}}}\,, \tag{12}$$

где $\sigma = \gamma D$. Эти дроби сходятся для любых значений $\sigma$, причём для нахождения моментов достаточно просуммировать одну дробь для $\mu_1$, поскольку имеет место рекуррентное соотношение

$$\sigma\mu_{n+1} = \frac{2n-1}{\mu_n} - 1,$$

где $n = 1, 2, \ldots$. Моменты $I_n$ можно найти и интегрированием соответствующего вероятностного распределения:

$$I_n = \int\limits_0^\infty I^n w_I(I)\,\mathrm{d}I, \qquad w_I(I) = \frac{C}{\sqrt{I}}\exp[-(1+\gamma I/2)\,I/(2D)], \qquad C = 1/I_0. \tag{13}$$

При этом, используя справочник [9], получаем

$$I_n = \left(\frac{2D}{\gamma}\right)^{n/2} \frac{\Gamma(n+1/2)D_{-(n+1/2)}(1/\sqrt{2\sigma})}{\sqrt{\pi}\,D_{-1/2}(1/\sqrt{2\sigma})}\,, \tag{14}$$

где $D_\alpha(\beta)$ — функции параболического цилиндра, $n = 1, 2, \ldots$.

С помощью преобразования Лапласа системы (10) очевидным образом можно прийти к цепочке алгебраических уравнений для соответствующих лапласовых переменных. Но, поскольку в неё аддитивно войдут начальные условия $I_n$, искомое решение нельзя представить в виде цепной дроби. Имеет смысл, однако, записать подобную цепочку уравнений для отыскания времени корреляции $\theta_{\mathrm{corr}}$. Введём $\theta_{\mathrm{corr}}$ и соответствующие временны́е масштабы функций $B_n(\theta)$ соотношением

$$\theta_{(n)} = B_n^{-1}(0)\int\limits_0^\infty B_n(\theta)\,\mathrm{d}\theta, \qquad \theta_{(1)} \equiv \theta_{\mathrm{corr}}. \tag{15}$$

Интегрируя (10) с учётом (12) и (15), приходим к цепочке уравнений

$$\theta_{\mathrm{corr}} + \sigma\mu_2\theta_{(2)} = 1, \qquad \theta_{(n)} + \sigma\mu_{n+1} = \frac{1}{2n-1} + \frac{2\,(n-1)}{\mu_{n-1}}\,\theta_{(n-1)}, \tag{16}$$

где $n = 2, 3, \ldots$.

Отсюда ясно, что время корреляции зависит от коэффициента нелинейности $\gamma$ и эффективной мощности шума $D$ только через их произведение $\sigma$ (соответствующее размерное время корреляции $\tau_{\mathrm{corr}} = = T\theta_{\mathrm{corr}}$). Для случая слабой нелинейности ($\sigma \ll 1$) из (16) находим

$$\theta_{\mathrm{corr}} = \frac{4\mu_1 - 1}{3\,(\mu_1 + 2/\mu_1 - 2)} \approx \frac{1+4\sigma}{1+11\sigma}\,. \tag{17}$$

**3**. Обратимся теперь к решению цепочки дифференциальных уравнений (10). Для её размыкания на $N$-м шаге можно опустить слагаемое с $B_{N+1}$ и решать оставшуюся систему из $N$ уравнений.

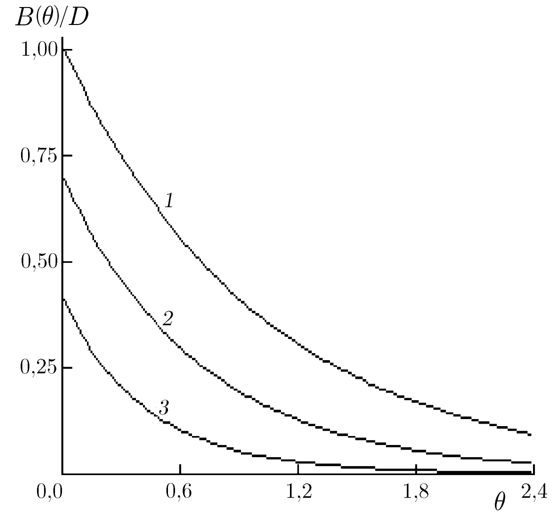



Рис. 1*а*. Нормированная корреляционная функция для профиля (9а). Кривые *1–3* соответствуют $\gamma = 0$; 0,5; 1,5

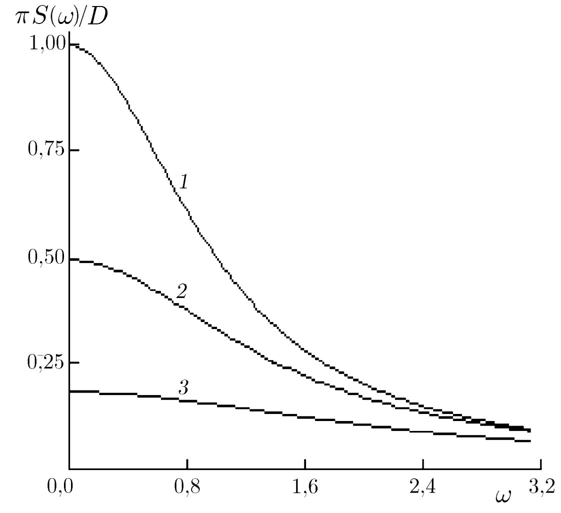



Рис. 1*б*. Спектр мощности флуктуаций координат, соответствующий рис. 1*а*

Но, как показывает численный анализ, целесообразно не отбрасывать этот член, а использовать для него рекуррентную формулу, подобную точному разложению соответствующего момента $I_n$ в (12):

$$B_{N+1}(\theta) \approx D\mu_{N+1} B_N(\theta). \tag{18}$$

Введя нормированные корреляционные функции $b_n(\theta) = D^{-n} B_n(\theta)$, запишем систему уравнений $N$-го приближения в виде

$$\begin{gathered} (2n-1)^{-1}\, b_n' + b_n + \sigma b_{n+1} = 2\,(n-1)\, b_{n-1}, \\ b_n(0) = \mu_n b_{n-1}(0), \qquad b_0(0) = 1, \qquad n = 1, 2, \ldots, N; \\ b_{N+1}(\theta) \approx \mu_{N+1} b_N(\theta). \end{gathered} \tag{19}$$

Соответствующий спектр мощности флуктуаций координат находим с помощью фурье-преобразования:

$$S(\omega) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty B(\theta) \cos(\omega\theta)\, \mathrm{d}\theta. \tag{20}$$

Результаты численного решения системы (19) для функции корреляции показаны на рис. 1*а*, [2] на рис. 1*б* приведены соответствующие спектры мощности. Кривые *1* на обоих рисунках относятся к линейной системе ($\gamma = 0$). Видно, что при фиксированной мощности теплового шума $D$ с увеличением $\gamma$, т. е. с ростом крутизны потенциальной ямы, происходит расширение спектра с уменьшением вклада низкочастотных компонент, а интенсивность флуктуаций при этом падает. (Напомним, что высота $S(0)$ и ширина $\Pi$ спектра связаны с временем корреляции соотношениями $S(0) = B(0)\theta_{\mathrm{corr}}/\pi$, $\Pi = \pi/\theta_{\mathrm{corr}}$.)

**4**. Рассмотрим теперь более крутой потенциальный профиль (9б). Соответствующие ему уравнения для корреляционной функции и чётных моментов имеют вид (10) и (11), где следует опустить «линейные» слагаемые $B_n$ и $I_n$ соответственно. При этом для моментов интенсивности приходим к рекуррентной формуле

$$I_2 = D/\gamma, \qquad I_{n+1} = (2n-1)\, I_2 I_{n-1}, \tag{21}$$

[2] Графики соответствуют 4-му приближению; при этом отличие от результатов 3-го приближения не превышает 5 % во всём диапазоне параметров кривых.

где $n = 2, 3, \ldots$. Отсюда находим точные значения чётных моментов интенсивности, а для получения нечётных моментов достаточно найти $I_1 = \langle x^2 \rangle$ интегрированием больцмановского распределения (4):

$$I_1 = 2\,\frac{\Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)}\sqrt{\frac{D}{\gamma}} = a\sqrt{\frac{D}{\gamma}}\,, \qquad a = 0{,}676, \tag{22}$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция. Таким же образом нетрудно найти и общее выражение:

$$I_n = \left(2\sqrt{\frac{D}{\gamma}}\right)^n \Gamma\left(\frac{2n+1}{4}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{1}{4}\right), \tag{23}$$

где $n = 1, 2, \ldots$.

Интегрируя (10), приходим к рекуррентной формуле для временны́х масштабов функций $B_n(\theta)$:

$$\gamma\theta_{(n+1)} I_{n+1} = 2\,(n-1)\,D\theta_{(n-1)} I_{n-1} + \frac{I_n}{2n-1}\,, \tag{24}$$

где $n = 1, 2, \ldots$. В частности, для $\theta_{(2)}$ имеем точное выражение

$$\theta_{(2)} = \frac{I_1}{\gamma I_2} = \frac{a}{\sqrt{\gamma D}}\,. \tag{25}$$

Однако представляющее основной интерес время корреляции $\theta_{\mathrm{corr}} = \theta_{(1)}$ из (24) найти нельзя. В работе [6] получено аналитическое выражение для времени корреляции, которое после численного интегрирования (в обозначениях настоящей статьи) имеет вид

$$\theta_{\mathrm{corr}} = \frac{0{,}72}{\sqrt{\gamma D}}\,. \tag{26}$$

Отметим, что результаты (25) и (26) отличаются весьма незначительно. На основании (22) и (26) запишем спектральную плотность на нулевой частоте:

$$S(0) = 0{,}487/\gamma. \tag{27}$$

Заметим, что она не зависит от интенсивности шума $D$.

Использованные выше квазилинейные разложения моментов $I_{N+1}$ и функций $B_{N+1}(\theta)$ здесь неприемлемы, поэтому для размыкания цепочки уравнений (10) приме́ним кумулянтный подход [5]. Мы не будем записывать уравнения для соответствующих функциям $B_n(\theta)$ кумулянтных функций $K_n(\theta)$ (что достаточно трудоёмко, а для произвольного $n$, по-видимому, невозможно), а используем «бескумулянтное» разложение моментной функции $B_{N+1}(\theta)$, приведённое в Приложении. Для численной процедуры, как и ранее, удобнее работать с нормированными функциями $b_n(\theta)$. Для контроля вычислительной процедуры используем точные результаты (26), (27). [3]

[3] Отличие соответствующих численных значений от этих выражений не превышает 5 % во всём диапазоне параметров кривых на рис. 2.

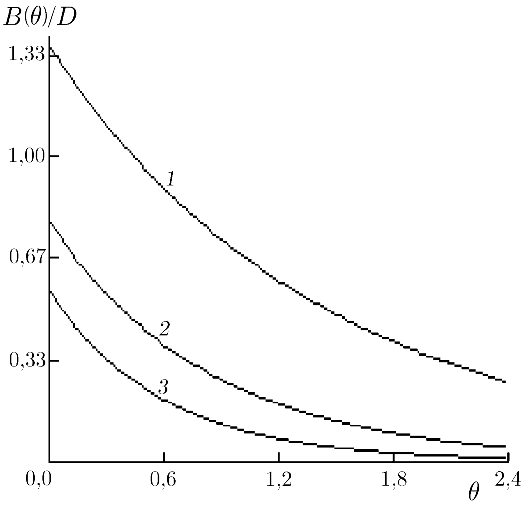



Рис. 2*а*. Нормированная корреляционная функция для профиля (9б). Кривые *1–3* соответствуют $\gamma = 0{,}25$; 0,5; 1,5

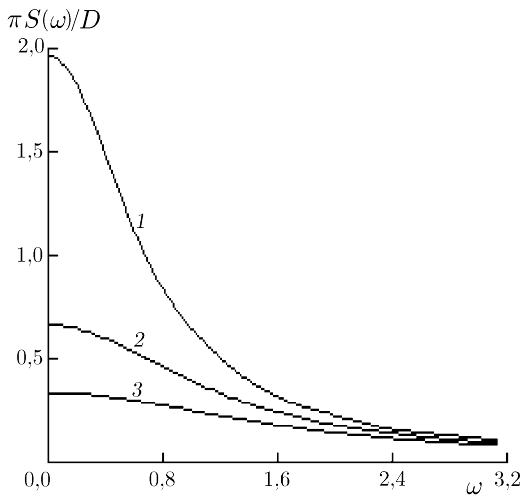



Рис. 2*б*. Спектр мощности флуктуаций координат, соответствующий рис. 2*а*

Результаты, полученные таким путём, показаны на рис. 2*а*, *б*. Из сравнения с рис. 1*а*, *б* видно, что качественный вид спектрально-корреляционных характеристик для обоих потенциальных профилей похож, а при $\gamma > 1$ малы и количественные отличия. Зависимости времени корреляции и спектральной плотности в нуле от нелинейности $\gamma$ для потенциальных профилей (9а) и (9б) при $D = 1$ приведены в табл. 1 и 2 соответственно. Существенная разница характеристик имеет место при малой нелинейности, когда для потенциала (9б) частицы слабо «чувствуют» нелинейное ограничение, при этом спектр флуктуаций координат в таком профиле существенно более низкочастотный.

Таблица 1

| $\gamma$ | $\theta_{\text{corr}}$ | $\pi S(0)$ |
|---|---|---|
| 0,0 | 1,00 | 1,00 |
| 0,2 | 0,73 | 0,54 |
| 0,4 | 0,63 | 0,39 |
| 1,0 | 0,49 | 0,23 |
| 1,5 | 0,44 | 0,18 |
| 2,0 | 0,40 | 0,15 |
| 3,0 | 0,34 | 0,11 |

Таблица 2

| $\gamma$ | $\theta_{\text{corr}}$ | $\pi S(0)$ |
|---|---|---|
| 0,1 | 2,28 | 4,87 |
| 0,2 | 1,61 | 2,44 |
| 0,4 | 1,14 | 1,22 |
| 1,0 | 0,72 | 0,49 |
| 1,5 | 0,59 | 0,32 |
| 2,0 | 0,51 | 0,24 |
| 3,0 | 0,42 | 0,16 |

Отметим также, что независимо от величины нелинейности высокочастотная асимптотика спектров для обоих профилей одинакова и имеет вид $S(\omega) \propto 1/\omega^2$, что соответствует свободному броуновскому движению [6].

В заключение отметим, что в случае полиномиальной нелинейности (2) с небольшим числом степеней $m$ для размыкания цепочек уравнений (7) применимы оба изложенных здесь способа, а методика, основанная на «бескумулянтном» разложении моментных функций, вообще весьма универсальна. Следует, однако, иметь в виду, что вопросы сходимости соответствующей процедуры при анализе нелинейных стохастических уравнений остаются открытыми.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Как известно, моменты $m_n$ и кумулянты $\text{æ}_n$ произвольного вероятностного распределения связаны соотношением

$$m_n = \text{æ}_n + \sum_{k=1}^{n-1} C_{n-1}^{k} m_k \text{æ}_{n-k}. \qquad (\text{П1})$$

Для симметричного распределения ($m_{2n+1} = 0$) запишем (П1) в виде

$$m_{2n} = \text{æ}_{2n} + \sum_{k=1}^{n-1} C_{2n-1}^{2k} m_{2k} \text{æ}_{2n-2k}. \qquad (\text{П2})$$

Преобразуем это соотношение для моментных функций с одним «сдвинутым» аргументом: $B_n(\theta) = \langle x(t)\, x^{2n-1}(t+\theta)\rangle$. Соответствующие кумулянтные функции обозначим $K_n(\theta)$, при этом, естественно,

$$B(\theta) = B_1(\theta) = K_1(\theta), \qquad B_n(0) = m_{2n} = I_n, \qquad K_n(0) = \text{æ}_{2n}.$$

Для этих функций разложение (П2) примет вид

$$B_n(\theta) = K_n(\theta) + \sum_{k=1}^{n-1} C_{2n-1}^{2k} I_k K_{n-k}(\theta). \qquad (\text{П3})$$

Последовательно выражая отсюда кумулянтные функции с номерами $s < n$, получаем искомые разложения. В частности,

$$B_2 = K_2 + 3I_1B_1, \qquad B_3 = K_3 + 10I_1K_2 + 5I_2K_1 = K_3 + 10I_1\,(B_2 - 3I_1B_1) + 5I_2B_1,$$
$$B_4 = K_4 + 21I_1K_3 + 35I_2K_2 + 7I_3K_1 = K_4 + 21I_1(B_3 - 10I_1B_2 + 30I_1^2B_1 - 5I_2B_1) +$$
$$+ 35I_2\,(B_2 - 3I_1B_1) + 7I_3B_1. \qquad (\text{П4})$$

Компьютерная реализация такой процедуры элементарна. Опуская старшие кумулянтные функции, получаем искомые приближённые разложения моментных функций. При этом первое — гауссово
($K_2 = 0$) приближение учитывает статистические связи 2-го порядка, второе — эксцессное ($K_3 = 0$) — до 4-го порядка и т. д.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 02–02–17517) и Минобразования РФ (грант № Е00–3.5–216).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хорстхемке В., Лефевр Р. Индуцированные шумом переходы: теория и применение в физике, химии и биологии. М.: Мир, 1987.
2. Климонтович Ю. Л. // УФН. 1994. Т. 164, № 8. С. 811.
3. Дынкин Е. Б. Марковские процессы. М.: Физматгиз, 1963.
4. Кляцкин В. И. Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами. М.: Наука, 1975.
5. Малахов А. Н. Кумулянтный анализ негауссовых случайных процессов и их преобразований. М.: Сов. радио, 1978.
6. Дубков А. А., Малахов А. Н., Саичев А. И. // Изв. вузов. Радиофизика. 2000. Т. 43, № 4. С. 369.

7. Музычук О. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1982. Т. 25, № 2. С. 190.
8. Музычук О. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1999. Т. 42, № 9. С. 922.
9. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962.

Нижегородский архитектурно-строительный университет,
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию
11 декабря 2002 г.

**ON ANALYSIS OF SPECTRO-CORRELATION CHARACTERISTICS OF ONE-DIMENSIONAL BROWNIAN MOTION**

*O. V. Muzychuk*

We propose an analytical–numerical approach to finding the correlation function of one-dimensional Brownian motion in a one-mode potential profile described by a low-order polynomial. The approach is based on solving chains of differential equations for the statistical moment functions of particle coordinate fluctuations, which are broken in a certain manner. Two methods of such breaking are considered. One method is based upon quasi-linear expansions of the moment functions, and another one, on "cumulantless" expansions. Spectro-correlation characteristics of Brownian motion in biquadratic potential profiles of two types are studied.