

Содержание

Кириллов В. В., Копейкин В. Н. Формирование резонансной структуры локальной индуктивности ионосферы в диапазоне $0,1 \div 10$ Гц	1
Каневский М. Б. О механизмах формирования РСА-изображения океана	13
Доильницина Э. Г., Тюхтин А. В. Особенности полей излучения некоторых источников в досветовом потоке недиспергирующей среды	21
Дмитренко А. Г., Колчин В. А. Рассеяние электромагнитных волн на структурах, содержащих тонкие проводники	31
Кузьмичёв И. К. Эффективность возбуждения колебаний в открытом резонаторе, включённом в волноводную линию передачи	41
Курин А. Ф. Вынужденные резонансные процессы при взаимодействии поля ТЕМ-ловушки с колеблющимися зарядами	52
Кожеватов И. Е., Куликова Е. Х. Широкополосная оптическая интерферометрия высоких порядков	72
Агудов Н. В., Сафонов А. В. Время установления стационарной неравновесной плотности броуновских частиц в среде с источником и стоком	82

УДК 550.388.3

ФОРМИРОВАНИЕ РЕЗОНАНСНОЙ СТРУКТУРЫ ЛОКАЛЬНОЙ ИНДУКТИВНОСТИ ИОНОСФЕРЫ В ДИАПАЗОНЕ 0,1 ÷ 10 Гц

В. В. Кириллов, В. Н. Копейкин

Решена задача об определении локальной индуктивности ионосферы — параметра двумерного телеграфного уравнения. Дана дневная (ночная) модель ионосферы при различной солнечной активности в интервале высот от 0 до 2000 км. Показано, что резонансная структура локальной индуктивности формируется интерференцией отражений от верхней (высоты больше 1000 км) и нижней (высоты меньше 300 км) частей ионосферы. Прослежено исчезновение отражений от верхней части ионосферы с повышением частоты (больше 8 Гц).

1. В работе [1] обсуждалось формирование резонансной структуры спектра регулярного шумового фона горизонтальных компонент магнитного поля в диапазоне частот 0,1 ÷ 10 Гц, которая понималась как интерференция отражений от ионосферы на двух различных уровнях. Однако рассмотрение электромагнитного поля в ионосфере проведено на полукачественном уровне.

Полное рассмотрение поля в диапазоне частот 0,1 ÷ 500 Гц в волноводе Земля—ионосфера можно достаточно точно и существенно проще, чем в точной волновой постановке задачи, провести методом двумерного телеграфного уравнения [2–6]. Согласно этому методу свойства ионосферы, т. е. верхней стенки волновода, для каждого места на земной поверхности определяются локальной матричной индуктивностью L и поверхностной плотностью ёмкости C . Поверхностная плотность ёмкости определяется вертикальным профилем проводимости нижней ионосферы над рассматриваемым местом земной поверхности (на высотах меньше 70 км). Этот параметр не имеет резонансной структуры и характеризуется гладкой частотной зависимостью [3–5]. Параметр L определяется через поверхностный импеданс Земли и поверхностный матричный импеданс ионосферы при нормальном падении волны снизу на уровне земной поверхности [3–6]:

$$\mathbf{L} = \mu_0 \mathbf{h}_L, \quad \mathbf{h}_L = \mathbf{h}_L^g + \mathbf{h}_L^i, \quad (1)$$

$$\mathbf{h}_L^g = \frac{i}{k} \boldsymbol{\delta}_g, \quad \mathbf{h}_L^i = \frac{i}{k} \boldsymbol{\delta}_i, \quad (2)$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м — магнитная проницаемость вакуума, k — волновое число падающей волны, $\boldsymbol{\delta}_g$ — приведённый поверхностный импеданс Земли в рассматриваемом месте, $\boldsymbol{\delta}_i$ — приведённый поверхностный матричный импеданс ионосферы на уровне земной поверхности при нормальном падении волны снизу.

Область ионосферы, формирующая локальную индуктивность в диапазоне 0,1 ÷ 10 Гц, простирается от 70 до 2000 км. В ионосфере образуются две области отражения: верхняя (на высотах 300 ÷ 2000 км) и нижняя (на высотах 70 ÷ 300 км). Интерференция отражений от этих двух областей приводит к резонансной структуре матричной индуктивности ионосферы как функции частоты.

2. В диапазоне частот от 0,1 до 300 Гц ионосфера — плазма с замагниченными ионами. Область ионосферы, существенная для локальной индуктивности L , простирается от 70 до 2000 км. Для определения локальной индуктивности требуются высотные профили электронной концентрации N_e , частоты соударений ионов с нейтральными частицами ν_{in} , эффективной частоты соударений электронов ν_e и средней массы иона (нейтральной частицы) M . При моделировании

ионосферных профилей следует учитывать, что для целей прогнозирования распространения электромагнитных волн указанного диапазона частот достаточно иметь профили, усреднённые в пределах ночной и дневной областей глобальной ионосферы. В ионосфере и атмосфере Земли средняя масса нейтральных частиц и ионов отличаются не более чем на 10%, что позволяет не различать их по массе. В диапазоне высот от поверхности Земли до 120 км состав нейтральной атмосферы практически не меняется, при этом средняя масса иона составляет около 30 а. е. м. В интервале 250 ÷ 500 км главной составляющей является атомарный кислород [7]. На высотах 120 ÷ 250 км состав ионосферы меняется довольно быстро. На высотах 500 ÷ 1000 км основными компонентами являются атомарный кислород и атомарный водород. Выше 1000 км наблюдается плавный переход состава ионосферы к атомарному водороду. Соотношения нейтральных компонент в ионосфере, за исключением верхней её части, слабо зависят от широты, освещённости и солнечной активности. В результате усреднения по данным международной модели ионосферы [8, 9] получается профиль средней массы иона, представленный на рис. 1.

На рис. 1 явно выделяются пять областей высот с различным ходом профиля средней массы. Выше высоты 1400 км масса иона совпадает с предельным значением, равным массе протона. Усреднённый профиль $M(z)$ не зависит от освещённости и солнечной активности.

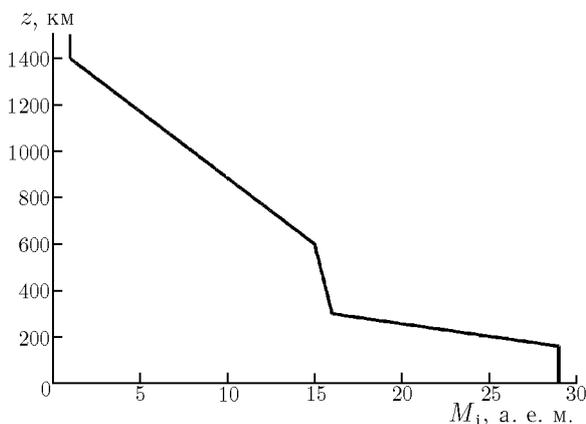


Рис. 1. Высотный профиль средней массы иона

Данные по частотам соударений ионов с нейтральными частицами ограничены. Профиль $\nu_{in}(z)$ частоты соударений ионов с нейтральными частицами определялся по концентрации нейтральных частиц N_n с известным лабораторным сечением рассеяния [10]. Распределение эффективного потенциала при упругом рассеянии ионов на нейтральных частицах близко к обратной четвертой степени расстояния, что приводит к коэффициенту связи частоты соударений ν_{in} с концентрацией N_n , не зависящему от температуры и определяемому лишь массой иона:

$$\nu_{in}[\text{с}^{-1}] = 0,78 \cdot 10^{-15} \sqrt{\frac{30}{M_i[\text{а.е.м.}]}} N_n[\text{м}^{-3}].$$

Эта связь близка к аналогичным формулам из [7]. Эффективная частота соударений для ионов $\nu_i \approx \nu_{in}$ и не содержит частоту соударений ионов с электронами ν_{ie} из-за значительной разности масс электрона и ионов. Эффективная частота соударений электронов ν_e является суммой частот соударений с нейтральными частицами ν_{en} и ионами ν_{ei} [11, 12]:

$$\begin{aligned} \nu_e &= \nu_{en} + \nu_{ei}, \\ \nu_{en}[\text{с}^{-1}] &= 0,63 \cdot 10^{-14} N_n[\text{м}^{-3}] \sqrt{\frac{T[\text{К}]}{300}}, \\ \nu_{ei}[\text{с}^{-1}] &= \frac{5,5 \cdot 10^{-6}}{(T_e[\text{К}])^{3/2}} N_e[\text{м}^{-3}] \left\{ \ln \left[\frac{2,8 \cdot 10^4 T_e[\text{К}]}{(N_e[\text{м}^{-3}])^{1/3}} \right] + \frac{1}{3} \ln \left(\frac{T}{T_e} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Здесь T_e — температура электронов. Концентрация нейтральных частиц N_n определялась из профиля давления p по уравнению состояния идеального газа:

$$p = N_n k T, \tag{3}$$

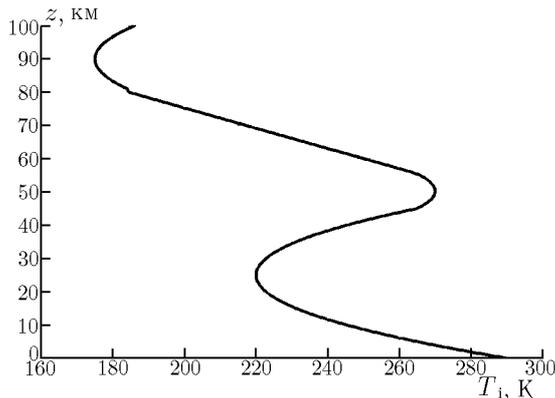


Рис. 2. Средний высотный профиль ионной температуры

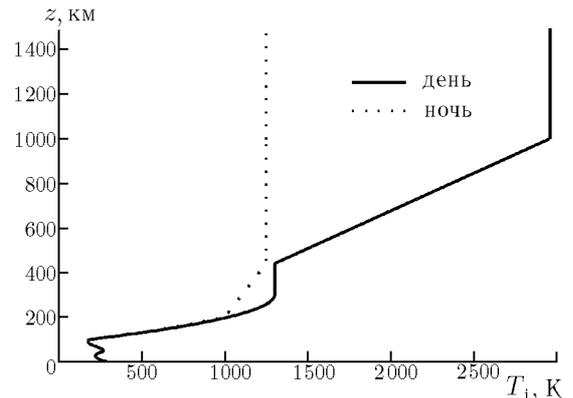


Рис. 3. Средние высотные профили ионной температуры

где T — температура ионов (нейтральных частиц), k — постоянная Больцмана. Профиль давления определяется из барометрического уравнения

$$p^{-1} \frac{dp}{dz} = -g \left(\frac{a}{a+z} \right)^2 \frac{M(z)}{kT(z)}, \quad (4)$$

где z — высота над поверхностью Земли, a — радиус Земли, g — ускорение свободного падения на поверхности Земли.

Профиль температуры в интервале высот $0 \div 100$ км брался из [13]. Для высот выше 100 км использовался средний профиль $T_i(z)$ ионной температуры по международной модели ионосферы [8]. Средний профиль $T_i(z)$ для высот ниже 300 км слабо зависит от освещённости и солнечной активности (см. рис. 2). Выше 300 км заметны вариации от дня к ночи тем большие, чем больше высота (см. рис. 3).

Высотный профиль электронной температуры T_e считается совпадающим с профилем ионной температуры на высотах меньше 100 км. При больших высотах электронная температура выбиралась согласно данным работ [8, 14]; зависимость $T_e(z)$ различна днём и ночью и не зависит от солнечной активности (см. рис. 4).

В результате интегрирования уравнения (4) получается профиль давления, по которому с учётом (3) восстанавливается профиль концентрации нейтральных частиц (см. рис. 5 и 6). Выше 200 км наблюдается некоторое различие профилей для дневных и ночных условий.

По полученному распределению концентрации нейтральной компоненты на высотах меньше 100 км был восстановлен профиль частоты соударений электронов с нейтральными частицами ν_{en} с использованием сечения упругого рассеяния из [11, 12], который был сопоставлен с профилем средней частоты соударений ν_{en} в интервале высот $60 \div 100$ км из [15]. Различие не превысило 10%, что указывает на пригодность этой методики для нахождения профилей частоты соударений. Профили частоты соударений ионов с нейтральными частицами, полученные по этой методике для дневных и ночных условий (рис. 7), немного различны на высотах больше 200 км.

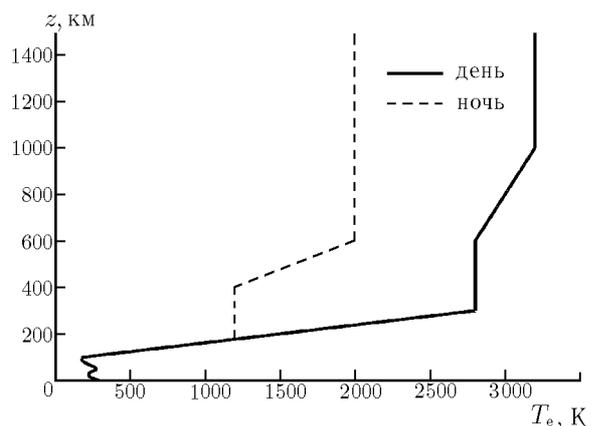


Рис. 4. Средние высотные профили электронной температуры

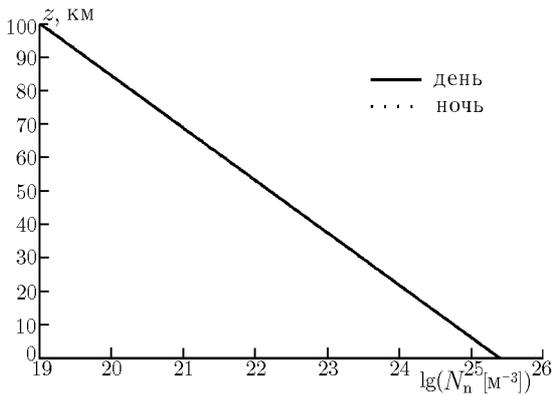


Рис. 5. Высотные профили концентрации нейтральных частиц

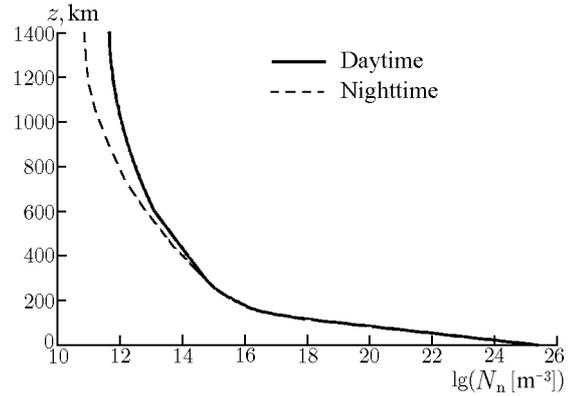


Рис. 6. Высотные профили концентрации нейтральных частиц

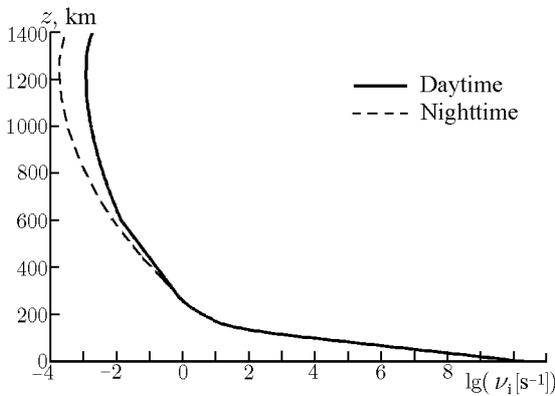


Рис. 7. Высотные профили частоты соударений ионов с нейтральными частицами

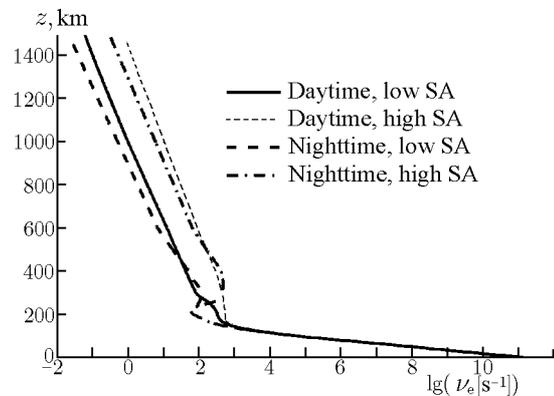


Рис. 8. Высотные профили соударений электронов с нейтральными частицами и ионами

Высотные профили эффективной частоты соударений электронов ν_e для дневных и ночных условий при различной солнечной активности (СА) представлены на рис. 8. На высотах больше 200 км преобладает ν_{ei} по сравнению с ν_{en} .

В литературе имеется много различных моделей профилей электронной концентрации [8, 15, 16]. Задача заключается в том, чтобы избавиться от излишних подробностей и получить надёжные средние профили. Для установления профилей в нижней части ионосферы (ниже 100 км) были усреднены логарифмы электронной концентрации на высоте 100 км по широте, долготе и сезонам отдельно в пределах ночной и дневной областей по данным стандарта [16]. Следует заметить, что при усреднении за рамками рассмотрения были оставлены полярные области из-за явного отличия полярной ионосферы от остальной ионосферы. Наклон профилей в нижней части был взят из другого стандарта [15]. Полученные при этом профили на высотах меньше 100 км практически не зависят от уровня солнечной активности.

В области высот больше 100 км использовались экспериментальные профили некогерентного рассеяния из [14]. В этой работе даны профили электронной концентрации и проведено их сравнение с аналогичными профилями международной модели ионосферы для трёх сезонов (зима, равноденствие, лето) для активного и спокойного Солнца в форте Milliton Hill (42,6° с.ш., 71,5° з.д.). Замечено систематическое расхождение экспериментальных и модельных профилей в верхней части ионосферы. Предполагая, что усреднение по сезонам эквивалентно усреднению

по широте, были получены средние профили электронной концентрации для дневных и ночных условий при активном и спокойном Солнце. Эти профили аппроксимированы экспонентой выше максимума F -слоя, параболой для логарифма электронной концентрации в области максимума F -слоя, экспоненциальной функцией между F -слоем и E -слоем и, наконец, ещё одной экспонентой (с убыванием по высоте ночью), моделирующей E -слой ионосферы. Оказалось, что на высотах меньше 105 км профили электронной концентрации не зависят от солнечной активности. В формальном выражении указанные модели профилей имеют следующий вид:

$$\lg(N_e[\text{M}^{-3}]) = \begin{cases} 11,12 + 0,912 \cdot 10^{-1} (z[\text{KM}] - 100), & z \leq 100 \text{ км}; \\ 11,12, & 100 \text{ км} < z \leq 105 \text{ км}; \\ 11,36 + 0,32 \cdot 10^{-2} (z[\text{KM}] - 180), & 105 < z \leq 180 \text{ км}; \\ 11,60 - 0,24 \left(\frac{z[\text{KM}] - 245}{52} \right)^2, & 180 \text{ км} < z \leq 284 \text{ км}; \\ 11,36 - 0,265 \cdot 10^{-2} (z[\text{KM}] - 284), & 284 \text{ км} < z \leq 1174,6 \text{ км}; \\ 7 + 2 \lg \left(1 + \frac{26557}{z[\text{KM}] - 879,5} \right), & z > 1174,6 \text{ км} \end{cases}$$

для дневных условий при минимуме солнечной активности,

$$\lg(N_e[\text{M}^{-3}]) = \begin{cases} 11,12 + 0,912 \cdot 10^{-1} (z[\text{KM}] - 100), & z \leq 100 \text{ км}; \\ 11,12, & 100 \text{ км} < z \leq 111 \text{ км}; \\ 11,96 + 0,77 \cdot 10^{-2} (z[\text{KM}] - 220), & 111 \text{ км} < z \leq 220 \text{ км}; \\ 12,12 - 0,16 \left(\frac{z[\text{KM}] - 330}{80} \right)^2, & 220 \text{ км} < z \leq 380 \text{ км}; \\ 11,96 - 0,23 \cdot 10^{-2} (z[\text{KM}] - 380), & 380 \text{ км} < z \leq 1232,2 \text{ км}; \\ 8 + 2 \lg \left(1 + \frac{3058,9}{z[\text{KM}] - 892,3} \right), & z > 1232,2 \text{ км} \end{cases}$$

для дневных условий при максимуме солнечной активности,

$$\lg(N_e[\text{M}^{-3}]) = \begin{cases} 9,5 + 0,13 (z[\text{KM}] - 100), & z \leq 100 \text{ км}; \\ 9,5 - 0,013 (z[\text{KM}] - 100), & 100 \text{ км} < z \leq 160 \text{ км}; \\ 10,75 + 0,027 (z[\text{KM}] - 235), & 160 \text{ км} < z \leq 235 \text{ км}; \\ 10,97 - 0,22 \left(\frac{z[\text{KM}] - 295}{60} \right)^2, & 235 \text{ км} < z \leq 355 \text{ км}; \\ 10,75 - 0,29 \cdot 10^{-2} (z[\text{KM}] - 355 \text{ км}), & 355 < z \leq 958,5 \text{ км}; \\ 7 + 2 \lg \left(1 + \frac{2426,2}{z[\text{KM}] - 689} \right), & z > 958,5 \text{ км} \end{cases}$$

для ночных условий при минимуме солнечной активности,

$$\lg(N_e[\text{M}^{-3}]) = \begin{cases} 9,5 + 0,13 (z[\text{KM}] - 100), & z \leq 100 \text{ км}; \\ 9,5 - 0,013 (z[\text{KM}] - 100), & 100 \text{ км} < z \leq 160 \text{ км}; \\ 11,56 + 0,027 (z[\text{KM}] - 265), & 160 \text{ км} < z \leq 265 \text{ км}; \\ 11,62 - 0,06 \left(\frac{z[\text{KM}] - 340}{75} \right)^2, & 265 \text{ км} < z \leq 415 \text{ км}; \\ 11,56 - 0,27 \cdot 10^{-2} (z[\text{KM}] - 415), & 415 \text{ км} < z \leq 992,8 \text{ км}; \\ 8 + 2 \lg \left(1 + \frac{2605,8}{z[\text{KM}] - 703,2} \right), & z > 992,8 \text{ км} \end{cases}$$

для ночных условий при максимуме солнечной активности.

Как видно из рис. 9, масштаб изменения профилей в верхней части составляет сотни километров против десятков километров в средней части и нескольких километров в нижней части. При одинаковой солнечной активности средний ночной профиль имеет максимум электронной концентрации на большей высоте. С понижением солнечной активности высоты максимумов снижаются, а максимальные концентрации уменьшаются.

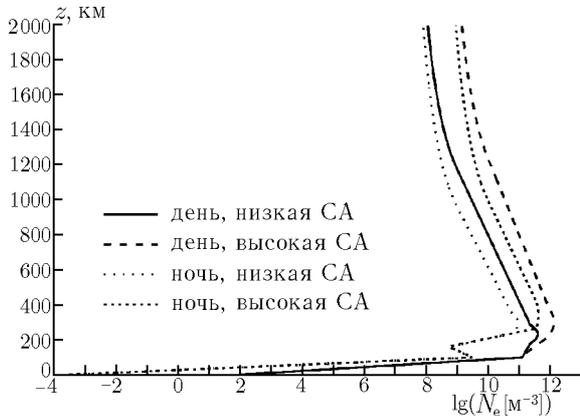


Рис. 9. Высотные профили электронной концентрации

Таким образом, в нашей модели в дневных и ночных условиях отличаются лишь профили $N_e(z)$, что даёт в совокупности четыре модели распределения электронной концентрации.

3. С точки зрения тензора диэлектрической проницаемости плазма с замагниченными ионами подобна прозрачному анизотропному диэлектрику без трёх вещественных главных осей. При нормальном падении уравнения электромагнитного поля в декартовой системе координат x , y , z , где ось z направлена по вертикали от рассматриваемой точки на земной поверхности, а ось x — по горизонтальной проекции земного магнитного поля \mathbf{B}_0 , имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{ik} \frac{dE_x}{dz} &= \eta_0 H_y, & \frac{1}{ik} \frac{dE_y}{dz} &= -\eta_0 H_x, \\ \frac{1}{ik} \frac{d(\eta_0 H_y)}{dz} &= \epsilon'_{xx} E_x + \epsilon'_{xy} E_y, & \frac{1}{ik} \frac{d(-\eta_0 H_x)}{dz} &= \epsilon'_{yx} E_x + \epsilon'_{yy} E_y, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ — импеданс вакуума,

$$\begin{aligned} \epsilon'_{xx} &= X' \frac{Y_e' Y_i' - 1}{(Y_e' Y_i' - 1)(Y_e' Y_i' h_z^2 - 1) - Y_e'^2 h_z^2}, & \epsilon'_{yy} &= X' \frac{Y_e' Y_i' h_z^2 - 1}{(Y_e' Y_i' - 1)(Y_e' Y_i' h_z^2 - 1) - Y_e'^2 h_z^2}, \\ -\epsilon'_{yx} = \epsilon'_{xy} &= iX' \frac{Y_e' h_z}{(Y_e' Y_i' - 1)(Y_e' Y_i' h_z^2 - 1) - Y_e'^2 h_z^2}, \\ X' &= \frac{X}{U_e}, & Y_e' &= \frac{Y_e}{U_e}, & Y_i' &= \frac{Y_i}{U_i}, & U_e &= 1 + i \frac{\nu_e}{\omega}, & U_i &= 1 + i \frac{\nu_i}{\omega}, \\ X &= \frac{\omega_0^2}{\omega^2}, & Y_e &= \frac{\omega_{He}}{\omega}, & Y_i &= \frac{\omega_{Hi}}{\omega}, \end{aligned} \quad (6)$$

$\omega_0^2 = N_e e^2 / (m_e \epsilon_0)$ — квадрат плазменной частоты электронов, $\omega_{He} = -e |B_0| / m_e$ — гирочастота электрона, $\omega_{Hi} = e |B_0| / M_i$ — гирочастота ионов, m_e и e — масса электрона и элементарный заряд соответственно, h_x , h_y и h_z — направляющие косинусы внешнего магнитного поля, N_e — концентрация электронов. Выражения (6) для коэффициентов уравнений системы (5) предполагают, что в рассматриваемой области ионосферы выполняются неравенства

$$\omega_0^2 \gg \omega_{He} \omega_{Hi} \quad (7a)$$

при $\omega_{Hi} \gg \omega$ или

$$\omega_0^2 \gg \frac{\omega_{He}^2}{\sqrt{1 + \nu^2/\omega^2}} \quad (7b)$$

при $\omega_{H,i} \ll \omega$. Эти неравенства выполняются для любой магнитной широты на частотах 0,1–500 Гц во всей рассматриваемой области ионосферы, кроме её нижней части (на высотах меньше 70 км), где ионосферу можно заменить вакуумом, что приводит к независимости локального импеданса нижней части ионосферы от неравенств (7).

Система дифференциальных уравнений (5) неудобна для непосредственного интегрирования, т. к. одно из двух решений этой системы, необходимых для определения ионосферного матричного импеданса, вообще говоря, теряет линейную независимость из-за потери точности при интегрировании, связанной с различным характером убывания в ионосфере амплитуд обыкновенной и необыкновенной волн. От системы уравнений (5) можно перейти к уравнениям для матричного импеданса (адмитанса), которые лишены этого недостатка. Однако зависимость этих объектов от высоты интегрирования близка к тангенциальной, и в слабо проводящей среде, которой является рассматриваемая плазма, при интегрировании проходятся точки, близкие к особенностям, что непреодолимо затрудняет численное интегрирование.

От системы уравнений (5) можно перейти к системе уравнений для бивектора [17], которая лишена перечисленных недостатков.

Обозначим динамические переменные системы (5) как

$$E_x = u^1, \quad E_y = u^2, \quad \eta_0 H_y = u^3, \quad -\eta_0 H_x = u^4. \quad (8)$$

Бивектор строится по двум линейно независимым решениям (обыкновенной и необыкновенной волнам) системы (5) так, что его компоненты имеют вид

$$w^{ik} = u_1^i u_2^k - u_1^k u_2^i, \quad w^{ik} + w^{ki} = 0. \quad (9)$$

Нижний индекс обозначает номер решения. Бивектор \mathbf{w} — простой, т. е. построенный из двух векторов. Для простого бивектора выполняется тождество

$$w^{12}w^{34} + w^{14}w^{23} - w^{13}w^{24} = 0.$$

Компоненты приведённого поверхностного импеданса δ^i , определяющего связь между электрическим и магнитным полями на поверхности Земли:

$$E_x = \delta_{xx}^i \eta_0 H_y + \delta_{xy}^i (-\eta_0 H_x), \quad E_y = \delta_{yx}^i \eta_0 H_y + \delta_{yy}^i (-\eta_0 H_x), \quad (10)$$

вычисляются по компонентам бивектора:

$$\delta_{xx}^i = \frac{w^{14}}{w^{34}}, \quad \delta_{yy}^i = -\frac{w^{23}}{w^{34}}, \quad \delta_{xy}^i = -\frac{w^{13}}{w^{34}}, \quad \delta_{yx}^i = \frac{w^{24}}{w^{34}}, \quad \delta_{xx}^i \delta_{yy}^i - \delta_{xy}^i \delta_{yx}^i = \frac{w^{12}}{w^{34}}. \quad (11)$$

Как следствие определений (8) и (9), из системы уравнений (5) получается система уравнений для компонент бивектора:

$$\begin{aligned} \frac{1}{ik} \frac{d}{dz} w^{12} &= w^{14} - w^{23}, & \frac{1}{ik} \frac{d}{dz} w^{13} &= \varepsilon'_{xy} w^{12}, & \frac{1}{ik} \frac{d}{dz} w^{14} &= \varepsilon'_{yy} w^{12} + w^{34}, \\ \frac{1}{ik} \frac{d}{dz} w^{23} &= -\varepsilon'_{xx} w^{12} - w^{34}, & \frac{1}{ik} \frac{d}{dz} w^{24} &= -\varepsilon'_{yx} w^{12}, \\ \frac{1}{ik} \frac{d}{dz} w^{34} &= -\varepsilon'_{yx} w^{13} + \varepsilon'_{xx} w^{14} - \varepsilon'_{yy} w^{23} + \varepsilon'_{xy} w^{24}. \end{aligned} \quad (12)$$

При выбранной ориентации оси x в плоскости магнитного меридиана $\varepsilon'_{xy} = -\varepsilon'_{yx}$, что приводит к равенству $w^{13} = w^{24}$ при любом z и позволяет сократить размерность системы (12) с 6 до 5.

Требуется найти одно решение системы уравнений (12), которое выше существенной области описывается ВКБ-методом и формируется согласно (9) обыкновенной и необыкновенной волнами, идущими вверх. Квадраты корней Букера обыкновенной и необыкновенной волн для модели плазмы (6) имеют вид

$$q_1^2 = \frac{X'}{Y_e'Y_i' - 1 - Y_e'Y_i'h_x^2/2 - Y_e'\sqrt{h_z^2 + Y_i'^2h_x^4/4}}, \quad q_2^2 = \frac{X'}{Y_e'Y_i' - 1 + Y_e'Y_i'h_x^2/2 - Y_e'\sqrt{h_z^2 + Y_i'^2h_x^4/4}},$$

$$\operatorname{Re} \sqrt{h_z^2 + Y_i'^2h_x^4/4} > 0, \quad \operatorname{Im} q_1 > 0, \quad \operatorname{Im} q_2 > 0;$$

поляризация волн даётся выражением

$$\left(\frac{E_x}{E_y}\right)_2 = \left(\frac{E_y}{E_x}\right)_1 = \gamma = \frac{-ih_z}{Y_i'h_x^2/2 + \sqrt{h_z^2 + Y_i'^2h_x^4/4}}.$$

Коэффициент поляризации не зависит от электронной концентрации и гирочастоты электронов. При вертикальном магнитном поле он имеет чисто мнимое значение, что указывает на круговую поляризацию волн. При горизонтальном магнитном поле волны линейно поляризованы. Для обыкновенной и необыкновенной волн в качестве начальных значений для системы (5) можно взять следующие выражения:

$$(E_x)_1 = u_1^1 = 1, \quad (E_y)_1 = u_1^2 = \gamma, \quad (\eta_0 H_y)_1 = u_1^3 = q_1, \quad (-\eta_0 H_x)_1 = u_1^4 = q_1\gamma;$$

$$(E_x)_2 = u_2^1 = \gamma, \quad (E_y)_2 = u_2^2 = 1, \quad (\eta_0 H_y)_2 = u_2^3 = q_2\gamma, \quad (-\eta_0 H_x)_2 = u_2^4 = q_2. \quad (13)$$

Начальные значения для системы (12) получаются из (13) с помощью (9):

$$w^{12} = 1 - \gamma^2, \quad w^{13} = \gamma(q_2 - q_1), \quad w^{14} = q_2 - \gamma^2q_1, \quad w^{23} = \gamma^2q_2 - q_1,$$

$$w^{34} = q_1q_2w^{12}, \quad w^{24} = w^{13}. \quad (14)$$

Высота, которой соответствуют эти начальные значения, находится из оценки применимости ВКБ-метода [18] по уравнениям

$$\left|\frac{1}{2kq_1^2} \frac{dq_1}{dz}\right| = \theta, \quad \left|\frac{1}{2kq_2^2} \frac{dq_2}{dz}\right| = \theta, \quad (15)$$

где θ — допустимая погрешность.

Переход электронной концентрации N_e к предельному значению $N_{e\infty}$ в межпланетном пространстве в нашей модели описывается выражением

$$N_e(z) = N_{e\infty} \left(1 + \frac{b}{z - z_0}\right)^2. \quad (16)$$

Параметры $N_{e\infty}$, z_0 и b модели электронной концентрации зависят от освещённости и солнечной активности и подобраны так, чтобы профиль электронной концентрации (16) сопрягался с профилем в более низкой части ионосферы непрерывно вместе со своей первой высотной производной. Такое сопряжение аппроксимаций выбрано для того, чтобы не внести дополнительных отражений. Остальные профили (средней массы иона, частоты соударений) считаются постоянными в верхней части ионосферы и совпадающими со своими значениями на верхней границе области

экспоненциальной аппроксимации для профиля электронной концентрации. При этих предположениях зависимость корней Букера q_1 , q_2 от высоты определяется только высотной зависимостью концентрации электронов (16). Уравнения (15) разрешаются явно и приводят к явным выражениям z_{u1} , z_{u2} на верхней границе существенной области для обыкновенной и необыкновенной волн:

$$z_{u1} - z_0 + b = \sqrt{\frac{b}{2k|q_{\infty 1}|\theta}}, \quad z_{u2} - z_0 + b = \sqrt{\frac{b}{2k|q_{\infty 2}|\theta}}. \quad (17)$$

Из (17) видно, что в пределах верхней переходной части профиля электронной концентрации верхняя граница существенной области опускается с ростом частоты, что связано с более резким возрастанием логарифмической производной корней Букера по сравнению с ростом самих корней при уменьшении высоты. На некоторых частотах (разных для обыкновенной и необыкновенной волн) верхняя граница существенной области опускается до начала переходной части профиля. Эти частоты удовлетворяют уравнениям

$$\left| \frac{\alpha}{4k_1 q_1 \theta} \right| = 1, \quad \left| \frac{\alpha}{4k_2 q_2 \theta} \right| = 1. \quad (18)$$

Корни Букера вычисляются на верхней границе области экспоненциальной аппроксимации профиля электронной концентрации, α^{-1} — высотный масштаб экспоненциального профиля электронной концентрации.

Имеются ещё две области, в которых применим ВКБ-метод. Одна из них находится выше максимума электронной концентрации (F -слой) и смещается к большим высотам с ростом частоты, т. к. для практически экспоненциального профиля электронной концентрации при повышении частоты область применимости ВКБ-метода расширяется в сторону более низких электронных концентраций. Таким образом, между границей этой области и уровнем (17) в переходной части электронного профиля лежит область высот, где ВКБ-метод не годится, что приводит к появлению отражений. На частотах (18) эти уровни совпадают на границе аппроксимаций, что приводит к исчезновению отражений от верхней части ионосферы. Ещё один уровень, выше которого можно использовать ВКБ-метод, находится ниже максимума электронной концентрации и понижается с ростом частоты. После смыкания верхнего и среднего уровней начальные данные (14) можно задавать на этом (третьем) уровне. Выше частоты (18) верхняя часть ионосферы не влияет на искомое решение.

Мы скрупулёзно не следовали общей схеме и для уменьшения пределов интегрирования использовали адмитансы двух волн от верхней переходной части ионосферы на её нижней границе. Аппроксимация профиля электронной концентрации (16) вместе с постоянством других параметров сводит задачу к интегрированию уравнения Уиттекера [19] специального вида с различными параметрами для разных волн. Функцией, удовлетворяющей условиям при $z \rightarrow \infty$, является функция Уиттекера W [19]. Начальные данные задавались на нижней границе переходной части профиля электронной концентрации по (13) с заменой q_1 на $-ik^{-1}W_1^{-1}dW_1/dz$ и q_2 на $-ik^{-1}W_2^{-1}dW_2/dz$ соответственно. В нижней части частотного диапазона параметры и аргумент функции Уиттекера малы, и логарифмическая производная рассчитывалась по аналитическим формулам [19]. В той части частотного диапазона, в которой верхняя граница существенной области приближается к нижней границе, использовать ряды неудобно из-за больших значений параметров и аргумента. В этой части диапазона частот логарифмическая производная получалась численным интегрированием.

4. На рис. 10–14 для различных моделей ионосферы приведены зависимости элементов матрицы локальной индуктивности ионосферы от частоты. В диапазоне частот 0,1÷8 Гц указанные за-

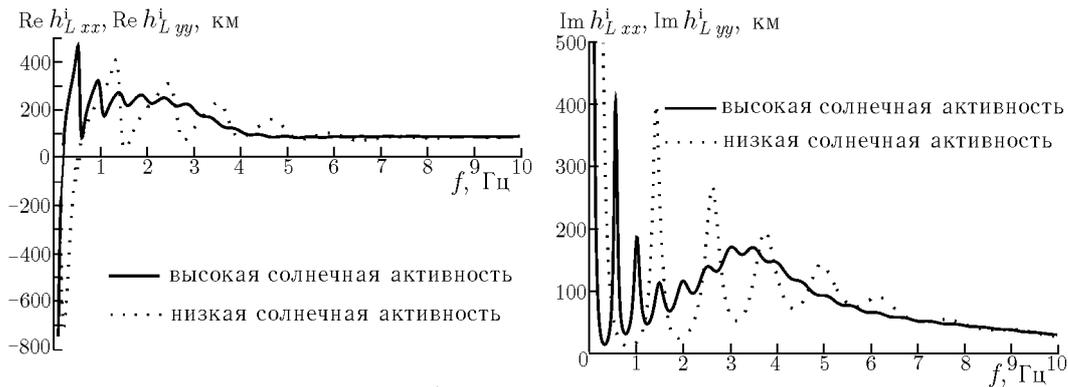


Рис. 10. Зависимость элементов матрицы h_L^i от частоты в ночных условиях на магнитной широте 60°

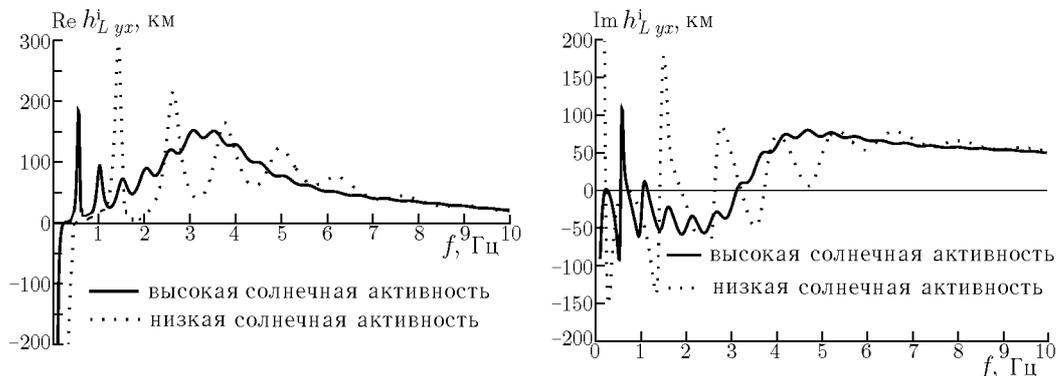


Рис. 11. Зависимость элементов матрицы h_L^i от частоты в ночных условиях на магнитной широте 60°

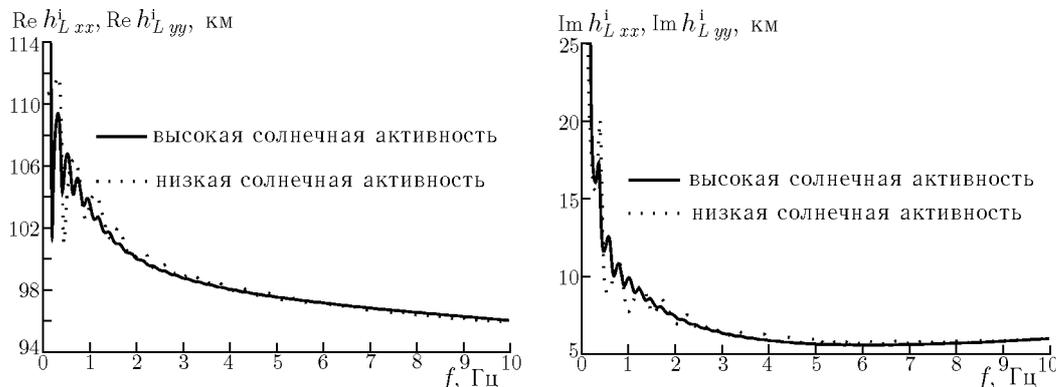
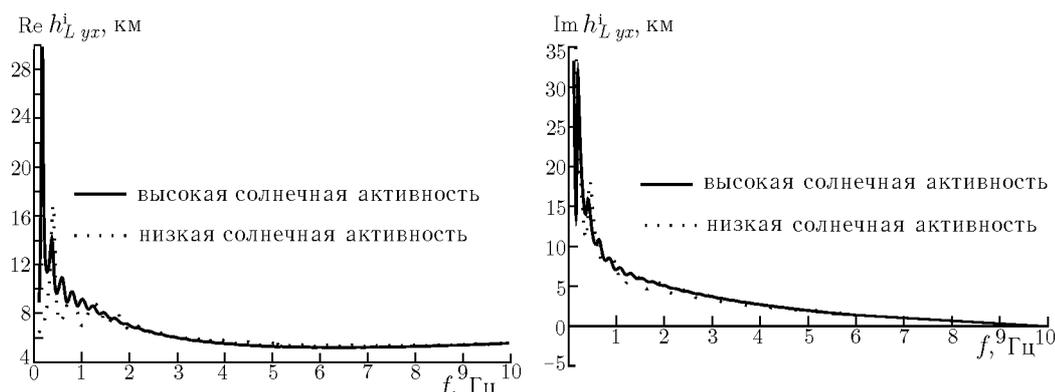
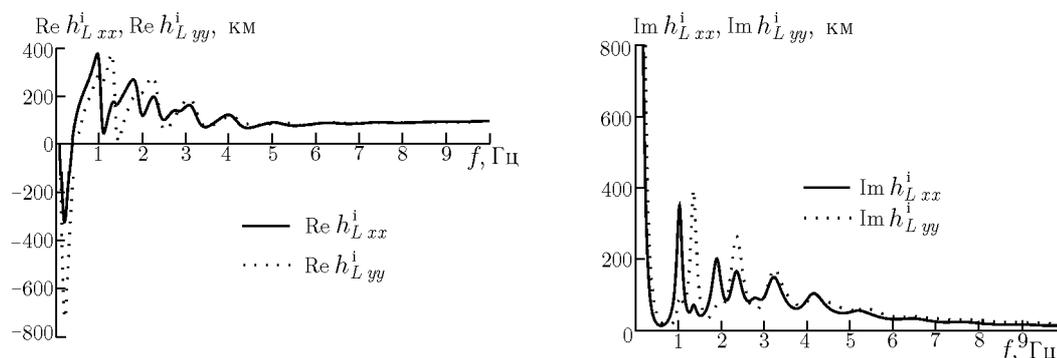


Рис. 12. Зависимость элементов матрицы h_L^i от частоты в дневных условиях на магнитной широте 60°

висимости имеют осциллирующий характер. Для ночной ионосферы размах колебаний достигает 50% [1] и более в нижней части частотного диапазона и убывает с ростом частоты. Для дневной ионосферы размах осцилляций мал и в нижней части частотного диапазона убывает с ростом частоты ещё резче. Частотный интервал между максимумами (минимумами) наибольший для ночной ионосферы в случае низкой солнечной активности и составляет 1,25 Гц. В случае высокой солнечной активности, когда концентрация электронов в F-слое выше, для ночной ионосферы период осцилляций составляет 0,5 Гц. Для дневной ионосферы этот интервал меньше, что объясняется ещё более высокой концентрацией электронов в F-слое [1].

В нижней части частотного диапазона для ночной ионосферы с понижением частоты зависимости мнимых частей элементов h_{Lxx}^i и h_{Lyy}^i матрицы локальной индуктивности демонстрируют

Рис. 13. Зависимость элементов матрицы \mathbf{h}_L^i от частоты в дневных условиях на магнитной широте 60° Рис. 14. Зависимость элементов матрицы \mathbf{h}_L^i от частоты в ночных условиях при низкой солнечной активности на магнитной широте 30°

асимптотическое поведение, что выражается в их резком возрастании. В случае низкой солнечной активности асимптотическое поведение наблюдается при более высокой частоте. Такое асимптотическое поведение локального импеданса определяется электронной концентрацией в межпланетном пространстве и свидетельствует о потере влияния земной ионосферы в формировании этого параметра. В случае дневной ионосферы её влияние пропадает на более низких частотах (порядка 0,002 Гц). Однако для дневной ионосферы в интервале частот от 0,002 до 0,1 Гц осцилляции зависимостей элементов матрицы отсутствуют из-за значительного влияния на этих частотах ионных соударений. Для магнитной широты 60° элементы h_{Lxx}^i и h_{Lyy}^i почти одинаковые. С понижением магнитной широты их различие увеличивается. Элементы h_{Lxy}^i не малые, что указывает на значительность анизотропии локальной индуктивности. Зависимости всех элементов матричного импеданса на частотах 6 ÷ 8 Гц становятся гладкими, что свидетельствует об исчезновении отражений от верхней ионосферы.

Таким образом, решена задача об определении локальной индуктивности ионосферы — параметра двумерного телеграфного уравнения. Дана дневная (ночная) модель ионосферы при различной солнечной активности в интервале высот от 0 до 2000 км. Показано, что резонансная структура локальной индуктивности формируется интерференцией отражения от верхней части ионосферы (высоты больше 1000 км) и отражения от нижней части (высоты меньше 300 км). Показано исчезновение отражений от верхней части ионосферы с повышением частоты (более 8 Гц).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беляев П. П., Поляков С. В., Рапопорт В. О., Трахтенгерц В. Ю. // Изв. вузов. Радиофизика. 1989. Т. 32, № 7. С. 802.

2. Кириллов В. В., Копейкин В. Н. // Изв. вузов. Радиофизика. 2002. Т. 45, № 12. С.
3. Кириллов В. В. // Проблемы дифракции и распространения волн. С.-Петербург: СПбГУ, 1993. Вып. 25. С. 35.
4. Кириллов В. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1996. Т. 39, № 9. С. 1103.
5. Кириллов В. В., Копейкин В. Н., Муштак В. К. // Геомагнетизм и астрономия. 1997. Т. 37, № 3. С. 114.
6. Кириллов В. В. // Радиотехника и электроника. 1998. Т. 43, № 7. С. 779.
7. Фактуллин М. Н., Зеленова Т. И., Козлов В. К. и др. Эмпирические модели среднеширотной ионосферы. М.: Наука, 1981. 256 с.
8. COSPAR International Reference Atmosphere. Berlin: Academic Verlag, 1972.
9. Prikner K. // Studio Geophys. Ggeod. 1980. V. 21. P. 816.
10. Мак-Даниель И., Мэзон Э. Подвижность и диффузия ионов в газах. М.: Мир, 1976. С. 280.
11. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. М.: Наука, 1967. С. 78.
12. Хаксли Л., Кромптон Р. Диффузия и дрейф электронов в газах. М.: Мир, 1977. С. 240.
13. Физика верхней атмосферы / Под ред. Дж. А. Ратклифа. М.: Физматгиз, 1963. С. 56.
14. Buonsanto M. J. // J. of Atm. Terr. Phys. 1989. V. 51, No. 5. P. 441.
15. ГОСТ 25645.157-94 Ионосфера Земли нижняя. Модель глобального распределения концентрации электронов и частоты соударений электронов для прогнозирования низкочастотных полей.
16. ГОСТ 25645.146-89 Ионосфера Земли. Модель глобального распределения концентрации, температуры и эффективной частоты соударений электронов.
17. Кириллов В. В., Проскурин Е. П. // Тез. докл. XII Межведомств. семинара по распространению километровых и более длинных волн. Красноярск, 1986. С. 15.
18. Галюк Ю. П., Георге А. В., Кириллов В. В. // Проблемы дифракции и распространения волн. Л.: ЛГУ, 1989. Вып. 22. С. 85.
19. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. Т. 2. II, М.: Физматгиз, 1963. С. 165.

Научно-исследовательский институт радиофизики
Санкт-Петербургского государственного университета,
г. Санкт-Петербург, Россия

Поступила в редакцию
8 апреля 2002 г.

FORMATION OF A RESONANCE STRUCTURE OF THE LOCAL INDUCTANCE OF THE IONOSPHERE AT FREQUENCIES 0.1–10 Hz

V. V. Kirillov and V. N. Kopeykin

We solve the problem of determination of the local inductance of the ionosphere, which is a parameter entering a two-dimensional telegraph equation. Day- and nighttime models of the ionosphere at altitudes from 0 to 2000 km for different solar activity are presented. It is shown that the resonance structure of the local inductance is formed by interference of reflections from the upper and lower ionosphere at altitudes above 1000 km and below 300 km, respectively. We demonstrate that reflections from the upper layers of the ionosphere disappear at frequencies higher than 8 Hz.

УДК 621.371.165:528.044.4

О МЕХАНИЗМАХ ФОРМИРОВАНИЯ РСА-ИЗОБРАЖЕНИЯ ОКЕАНА

М. Б. Каневский

Выполнен сравнительный анализ двух механизмов формирования РСА-изображения океана, обусловленных орбитальными скоростями на поверхности. Показано, что механизм флуктуаций эффективной плотности рассеивателей, в настоящее время общепринятый в качестве физической основы РСА-диагностики волнения, на самом деле работает лишь в случае достаточно пологой зыби. При наличии ветрового волнения определяющая роль принадлежит другому механизму, а именно флуктуациям числа элементов поверхности, чьи изображения из-за орбитальных скоростей случайным образом смещаются и накладываются одно на другое. В случае развитого ветрового волнения, распространяющегося в азимутальном направлении, энергетические вклады указанных механизмов в формирование РСА-изображения океана различаются примерно на два порядка.

ВВЕДЕНИЕ

Согласно установившимся представлениям изображение океана, полученное с помощью радиолокатора с синтезированной апертурой (РСА), описывается интегральной формулой вида [1–4]

$$\sigma_{\text{РСА}}(x, y) = \Delta x \int dy' \sigma_0(x, y') \left[\frac{\sin w(x, y, y')}{w(x, y, y')} \right]^2,$$

где

$$w = \frac{\pi}{\Delta y} [y - y' - (R/V) \widehat{v}_{\text{рад}}(x, y')]. \quad (1)$$

Здесь $\sigma_{\text{РСА}}$ — интенсивность РСА-сигнала, представленная в форме сечения рассеяния, x и y — дальностная и азимутальная координаты, отсчитываемые поперёк и вдоль направления движения РСА соответственно, σ_0 — удельное сечение рассеяния поверхности, R и V — наклонная дальность и скорость движения РСА, $\widehat{v}_{\text{рад}}$ — радиальная составляющая орбитальной скорости на поверхности, обусловленная волнами с длиной, по крайней мере, вдвое превышающей азимутальный размер $\Delta y_0 = \lambda R / (2V \Delta t)$ номинального элемента разрешения РСА (λ — длина электромагнитной волны, Δt — интервал синтезирования); Δy — размер реального элемента разрешения, расширенного из-за орбитальных скоростей, обусловленных волнами с длинами меньше Δy_0 (подробнее см. в [3]). Предполагается, что размер Δx элемента разрешения вдоль оси x мал по сравнению с характерной длиной волны на поверхности. Формула (1) приведена в несколько модифицированном по сравнению с [1–3] виде: в соответствии с [4] в качестве функции элемента разрешения здесь используется $[\sin(w)/w]^2$, а не $\exp(-w^2)$, что, разумеется, принципиальной роли не играет. Заметим, что в [4] это выражение фигурирует как «изображающая» часть сигнала на фоне спекл-шума.

Полагая величину σ_0 мало меняющейся в пределах элемента разрешения, разложим $\widehat{v}_{\text{рад}}$ в ряд по переменной y' в окрестности точки y_1 , нуля функции w , и ограничимся линейным членом разложения, после чего интеграл в (1) берётся. В результате получаем

$$\sigma_{\text{РСА}} \propto \frac{\sigma_0(x, y_1)}{\left| 1 + \frac{R}{V} \frac{\partial \widehat{v}_{\text{рад}}(x, y_1)}{\partial y} \Big|_{y=y_1} \right|}. \quad (2)$$

М. Б. Каневский

В работе [5] на основании (2) получено решение задачи о спектре РСА-изображения океана в виде

$$W_{\text{кл}}(\boldsymbol{\kappa}) = W_{\text{л}}(\boldsymbol{\kappa}) \exp \left[-\kappa_y^2 (R/V)^2 \sigma_{\text{рад}}^2 \right], \quad (3)$$

где $W_{\text{л}}(\boldsymbol{\kappa})$ и $W_{\text{кл}}(\boldsymbol{\kappa})$ — пространственные спектры изображения в линейном и квазилинейном по возвышениям поверхности приближениях соответственно, κ_y — компонента волнового вектора вдоль направления движения РСА, $\sigma_{\text{рад}}^2$ — дисперсия радиальной составляющей орбитальной скорости, определяемая по всему спектру волнения (последнее обстоятельство связано с тем, что в [5] в формуле, аналогичной (1), в качестве функции элемента разрешения в отличие от [1–4] используется δ -функция). Вообще говоря, в [5] формула для спектра изображения получена в виде ряда по степеням $W_{\text{л}}$, умноженного на содержащийся в (3) экспоненциальный фактор, однако там же говорится, что квазилинейное приближение пригодно в большинстве реальных ситуаций.

Работа [5] вызвала широкий резонанс прежде всего благодаря тому, что в ней предложена замкнутая процедура восстановления спектра волнения по спектру его РСА-изображения. Для нас же в данный момент представляет интерес формула (3), поскольку она даёт возможность оценить флуктуации интенсивности сигнала, описываемые формулой (2).

В соответствии с (2) РСА-изображение волнения формируется за счёт флуктуаций сечения рассеяния, а также за счёт флуктуаций производной $\partial \hat{v}_{\text{рад}} / \partial y$. Изменения знаменателя (2), вызванные флуктуациями производной, обычно трактуются как эквивалентные флуктуации плотности рассеивателей [1, 2, 5].

Первый механизм — общий для РСА и радиолокатора с реальной апертурой — давно и подробно изучался в рамках исследований модуляционной передаточной функции (см., например, [6, 7]). Вклад флуктуаций удельного сечения рассеяния σ_0 по сравнению с флуктуациями, связанными с орбитальными скоростями, заметен лишь в том случае, когда направление распространения волнения близко к направлению оси x [2]. Что касается влияния орбитальных скоростей, то в настоящей работе мы намерены показать, что описываемые формулой (2) «флуктуации плотности рассеивателей» — не единственный и не главный из «скоростных» механизмов формирования РСА-изображения океана.

1. ТРЕТИЙ МЕХАНИЗМ ФОРМИРОВАНИЯ РСА-ИЗОБРАЖЕНИЯ ОКЕАНА

В дальнейшем будем рассматривать ситуацию, когда волнение распространяется в азимутальном направлении, т. е. вдоль или против направления движения РСА. Поскольку в этом случае $\sigma_0 = \text{const}$, мы тем самым исключим из рассмотрения влияние флуктуаций сечения рассеяния.

Полагаем, что волнение является ветровым и полностью развитым, а спектр возвышений h поверхности описывается моделью Пирсона—Московитца:

$$E_h(k, \Phi) = W_h(k) \delta(\Phi - \Phi_0), \quad (4)$$

где

$$W_h(k) = (\alpha/2) \kappa_0^{-2} k^{-3} \exp(-1,25k^{-2}).$$

Здесь $\alpha = 8,1 \cdot 10^{-3}$, $k = \kappa/\kappa_0$, $\kappa_0 = \Omega_0^2/g$, $g = 9,8 \text{ м/с}^2$, Ω_0 — частота, соответствующая максимуму временного спектра волнения, Φ_0 — угол между направлением движения РСА и направлением распространения волнения, который мы считаем равным нулю. Спектр «крупномасштабной» орбитальной скорости \hat{v} имеет вид

$$W_{\hat{v}}(k) = g\kappa_0 k W_h(k) \exp(-k^2/k_{\text{РСА}}^2), \quad (5)$$

где $k_{\text{РСА}} = \Lambda_0 / (2 \Delta y_0)$, $\Lambda_0 = 2\pi / \kappa_0$.

Очевидно, запись в форме (2) предполагает, что уравнение

$$y - y' = \frac{R}{V} \widehat{v}_{\text{рад}}(y') \quad (6)$$

обладает единственным корнем, что, как показано ниже, выполняется далеко не всегда. Из геометрических соображений ясно, что с вероятностью, близкой к единице, корень уравнения (6) будет единственным лишь при условии

$$\frac{R}{V} \widehat{\sigma}_{\text{рад}} \ll \Lambda_{\widehat{v}},$$

или, что то же самое, при

$$\beta = \frac{R}{V} \frac{\widehat{\sigma}_{\text{рад}}}{\Lambda_{\widehat{v}}} \ll 1. \quad (7)$$

Здесь $\widehat{\sigma}_{\text{рад}}$ — среднеквадратическое значение радиальной составляющей орбитальной скорости, $\Lambda_{\widehat{v}}$ — характерная длина волны в спектре орбитальных скоростей, которую определим следующим образом:

$$\Lambda_{\widehat{v}} = \frac{2\pi}{\langle \kappa^2 \rangle^{1/2}}, \quad (8)$$

где

$$\langle \kappa^2 \rangle = \frac{1}{\widehat{\sigma}_{\text{орб}}^2} \int_0^{\infty} d\kappa \kappa^2 W_{\widehat{v}}(\kappa), \quad \widehat{\sigma}_{\text{орб}}^2 = \int_0^{\infty} d\kappa W_{\widehat{v}}(\kappa).$$

Отсюда следует

$$\beta = \frac{1}{2\pi} \frac{R}{V} \left[\int_0^{\infty} d\kappa \kappa^2 W_{\widehat{v}}(\kappa) \right]^{1/2} \cos \theta_0, \quad (9)$$

где θ_0 — угол падения зондирующего излучения. Используя (4), (5) и соотношение [8]

$$\Omega_0 = 0,82g/U, \quad (10)$$

где U — скорость приповерхностного ветра, а также дисперсионное соотношение $\Omega_0^2 = 2\pi g / \Lambda_0$, получаем

$$\beta \approx 7,8 \cdot 10^{-3} k_{\text{РСА}}^{1/2} \exp\left(-\frac{\sqrt{1,25}}{k_{\text{РСА}}}\right) \frac{g}{U} \frac{R}{V} \cos \theta_0. \quad (11)$$

Параметр $k_{\text{РСА}} = \Lambda_0 / (2 \Delta y_0)$ зависит от скорости ветра, поскольку в соответствии с (10) $\Lambda_0 \approx 9,3U^2/g$, отсюда

$$\beta \approx 1,7 \cdot 10^{-2} \exp\left(-0,24 \frac{g \Delta y_0}{U^2}\right) \left(\frac{g}{\Delta y_0}\right)^{1/2} \frac{R}{V} \cos \theta_0. \quad (12)$$

Зависимость β от скорости ветра рассчитывалась при $R/V = 120$ с, $\theta_0 = 30^\circ$, $\Delta y_0 = 7,5$ и 30 м. Такие значения параметров характерны для космических РСА, причём номинальное разрешение $7,5$ м взято здесь в качестве максимального, когда для синтеза апертуры используется весь главный лепесток диаграммы направленности локатора, а разрешение 30 м соответствует четверти лепестка. Второй режим применяется для того, чтобы путём некогерентного сложения нескольких изображений одного и того же участка поверхности, полученных от разных частей главного лепестка, снизить уровень спекл-шума [9].

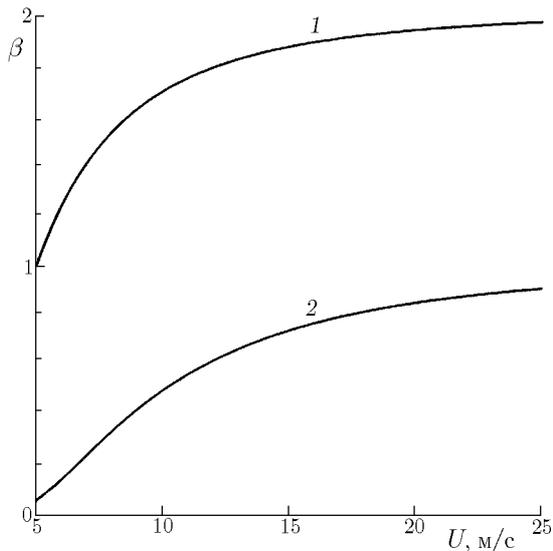


Рис. 1. Зависимость параметра β от скорости ветра при $\Delta y_0 = 7,5$ м (кривая 1) и $\Delta y_0 = 30$ м (кривая 2)

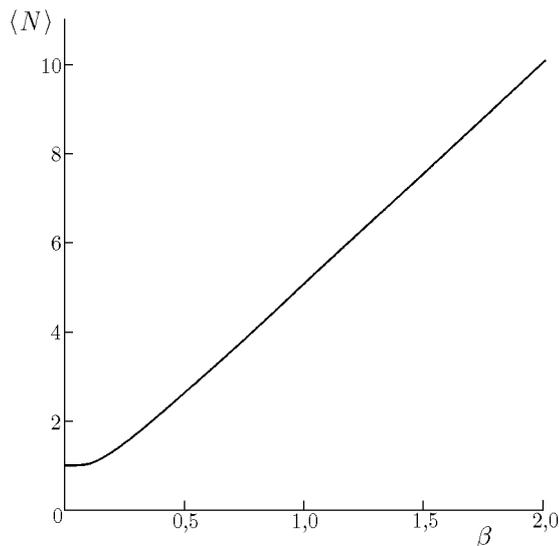


Рис. 2. Зависимость (13) среднего числа корней уравнения (6) от параметра β

Результаты расчёта по формуле (12) показаны на рис. 1. Видно, что в случае $\Delta y_0 = 7,5$ м условие (7) при сколько-нибудь заметном ветре заведомо не выполняется, а при $\Delta y_0 = 30$ м кривая лежит ниже уровня $\beta = 1$.

Однако (7) не является точным критерием, поэтому, чтобы сделать более определённые выводы относительно области применимости выражения (2), обратимся к работе [10], где в предположении нормального распределения величины $\widehat{v}_{\text{рад}}$ найдено среднее число $\langle N \rangle$ корней уравнения (6) как функция β :

$$\langle N \rangle = 2 \sqrt{2\pi} \beta \exp \left[- (2 \sqrt{2} \pi \beta)^{-2} \right] + \operatorname{erf} \left[(2 \sqrt{2} \pi \beta)^{-1} \right]. \tag{13}$$

Зависимость (13) показана на рис. 2. Если в качестве критерия, при выполнении которого событие $N > 1$ можно считать маловероятным, взять, например, условие $\langle N \rangle \leq 1,5$, т. е. $\beta \leq 0,3$, то из рис. 1 можно заключить, что при $\Delta y_0 = 30$ м выражение (2) справедливо в области $U \leq 7,5$ м/с. Однако с точки зрения задачи определения спектра волнения разрешение $\Delta y_0 = 30$ м при слабом ветре, т. е. при $\Lambda_0 \leq 50$ м, вряд ли можно считать удовлетворительным. К тому же, как показано в [3], из-за мелкомасштабных орбитальных скоростей реальный элемент разрешения оказывается значительно больше номинального.

Таким образом, выражение для интенсивности сигнала РСА в рассматриваемом случае ветрового волнения, распространяющегося вдоль оси y , следует записывать в виде

$$\sigma_{\text{РСА}} \propto \sigma_0 \sum_{n=1}^N \left| 1 + \frac{R}{V} \frac{d\widehat{v}_{\text{рад}}}{dy} \Big|_{y=y_n} \right|^{-1}, \tag{14}$$

где y_n — n -й корень уравнения (6). Следовательно, кроме двух указанных выше механизмов формирования РСА-изображения океана существует ещё и третий, связанный с флуктуациями случайной величины N . Физически условие $N > 1$ означает, что в точке изображения суммируются сигналы от нескольких участков поверхности — окрестностей точек y_n . Изображения этих

участков случайным образом смещаются и накладываются одно на другое, т. е. элемент разрешения распадается вдоль оси y на N частей, сосредоточенных в основном в области $y \pm (R/V) \hat{\sigma}_{\text{рад}}$. Этот принципиально нелинейный механизм подробно рассмотрен в работе [10], где показано, что с его помощью можно описать практически все особенности изображения океанического волнения, наблюдаемые в эксперименте.

Если волнение обладает спектром вида

$$E_h(\kappa, \Phi) \propto W_h(\kappa) \cos^{2p}(\Phi - \Phi_0),$$

то (см. [10]) для $p = 1$ имеет место следующее соотношение для характерной длины волны в спектре орбитальных скоростей: $\Lambda_{\hat{v}}^{(1)}/\Lambda_{\hat{v}} = 1,13$, причём $\Lambda_{\hat{v}}^{(p)}/\Lambda_{\hat{v}} \rightarrow 1$ при $p \rightarrow \infty$. Таким образом, оценки, выполненные по формулам (12) и (13), справедливы и для реального волнения с довольно широким угловым спектром.

Рассмотрим ситуацию, когда волнение представляет собой зыбь, параметры которой не связаны непосредственно со скоростью ветра в данном районе. Воспользуемся условием $\beta \leq 0,3$ для того, чтобы оценить максимальную высоту зыби, при которой пригодна формула (2). Очевидно (см. рис. 2), это условие может быть изменено только в сторону его ужесточения, т. е. полученные значения высоты зыби могут лишь уменьшиться.

Если для орбитальной скорости принять оценку $v_{\text{орб}} \approx \pi H_3/T_3$, H_3 и T_3 — высота и период зыби, то $\hat{\sigma}_{\text{орб}} \approx \pi H_3/(2T_3) \cos \theta_0$, и из условия $\beta \leq 0,3$ получаем

$$H_3 \leq 0,3 \left(\frac{R}{V} \right)^{-1} \frac{2\alpha}{\pi \cos \theta_0} T_3 \Lambda_3,$$

где $\alpha = \Lambda_{\hat{v}}/\Lambda_3$ — отношение характерной длины волны в спектре орбитальных скоростей к длине волны, отвечающей максимуму в спектре зыби. Для $R/V = 120$ с, $\theta_0 = 30^\circ$, $\Lambda_3 = 200$ м и, соответственно, $T_3 = 11,3$ с получаем $H_3 \leq 4,16\alpha$ м. Ясно, что величина α не может превысить единицу; в частности, в работе [10] для спектра зыби типа JONSWAP при $k_{\text{РСА}} = 10$ получено значение $\alpha = 0,4$. Таким образом, формула (2) справедлива лишь в случае достаточно пологой зыби.

2. СРАВНЕНИЕ ДВУХ «СКОРОСТНЫХ» МЕХАНИЗМОВ

В принципе, сказанного выше достаточно для того, чтобы убедиться в неправомерности построения теории РСА-изображения ветрового волнения на основе соотношения (2). Тем не менее мы продолжим наш анализ для того, чтобы сравнить два рассмотренных выше механизма по степени вклада каждого из них в полную мощность флуктуаций, формирующих изображение, поскольку в [10] такое сравнение не проводилось.

В соответствии с (14) величина $\sigma_{\text{РСА}}$ есть сумма случайного числа случайных слагаемых, т. е.

$$\sigma_{\text{РСА}} \propto a = \sum_{n=1}^N b_n, \quad (15)$$

причём $\langle a \rangle = \langle N \rangle \langle b \rangle$, а дисперсия величины a определяется выражением [11]

$$\sigma_a^2 = \langle b \rangle^2 \sigma_N^2 + \langle N \rangle \sigma_b^2, \quad (16)$$

где σ_N^2 и σ_b^2 — дисперсии соответствующих величин. Следовательно,

$$\frac{\langle(\sigma_{\text{PCA}} - \langle\sigma_{\text{PCA}}\rangle)^2\rangle}{\langle\sigma_{\text{PCA}}\rangle^2} = \frac{\sigma_a^2}{\langle a \rangle^2} = \frac{\sigma_N^2}{\langle N \rangle^2} + \frac{1}{\langle N \rangle} \frac{\sigma_b^2}{\langle b \rangle^2}. \quad (17)$$

Первое и второе слагаемые в правой части (17) определяют относительные энергетические вклады двух «скоростных» механизмов формирования изображения.

Для того, чтобы найти вклад флуктуаций величины $d\hat{v}/dy$, воспользуемся соотношениями (2) и (3), причём в последнем $\sigma_{\text{рад}}^2$ заменим на $\hat{\sigma}_{\text{рад}}^2$.

В линейном по возмущениям приближении из (2) следует

$$\sigma_{\text{PCA}} \propto \sigma_0 \left(1 - \frac{R}{V} \frac{d\hat{v}_{\text{рад}}}{dy} \right), \quad (18)$$

откуда получаем

$$W_{\text{л}}(\kappa) \propto \sigma_0^2 \cos^2 \theta_0 \left(\frac{R}{V} \right)^2 \kappa^2 W_{\hat{v}}(\kappa) \quad (19)$$

и, согласно (3),

$$W_{\text{кл}}(\kappa) \propto \sigma_0^2 \cos^2 \theta_0 \left(\frac{R}{V} \right)^2 \kappa^2 \exp \left[-\kappa^2 \left(\frac{R}{V} \right)^2 \hat{\sigma}_{\text{рад}}^2 \right] W_{\hat{v}}(\kappa). \quad (20)$$

Таким образом,

$$\frac{\sigma_b^2}{\langle b \rangle^2} = \cos^2 \theta_0 \left(\frac{R}{V} \right)^2 \int_0^\infty d\kappa \kappa^2 \exp \left[-\kappa^2 \left(\frac{R}{V} \right)^2 \hat{\sigma}_{\text{рад}}^2 \right] W_{\hat{v}}(\kappa). \quad (21)$$

Величину $\hat{\sigma}_{\text{рад}}^2$ нетрудно найти:

$$\hat{\sigma}_{\text{рад}}^2 = \cos^2 \theta_0 \int_0^\infty d\kappa W_{\hat{v}}(\kappa) = 4,77 \cdot 10^{-3} U^2 \exp \left(-0,48 \frac{g \Delta y_0}{U^2} \right) \cos^2 \theta_0, \quad (22)$$

поэтому

$$\exp \left[-\kappa^2 \left(\frac{R}{V} \right)^2 \hat{\sigma}_{\text{рад}}^2 \right] = \exp(-\gamma k^2), \quad (23)$$

где

$$\gamma = 2,15 \cdot 10^{-3} \left(\frac{R}{V} \frac{g}{U} \right)^2 \exp \left(-0,48 \frac{g \Delta y_0}{U^2} \right) \cos^2 \theta_0.$$

Подставив (5) и (23) в (21) и взяв интеграл, получаем

$$\frac{\sigma_b^2}{\langle b \rangle^2} = \frac{1,12 \cdot 10^{-2} \cos^2 \theta_0 (R/V)^2 g / \Delta y_0}{(1+A)^{1/2}} \exp \left[-0,48 \frac{g \Delta y_0}{U^2} (1+A)^{1/2} \right], \quad (24)$$

где

$$A = 4,65 \cdot 10^{-2} \cos^2 \theta_0 \left(\frac{R}{V} \right)^2 \left(\frac{U}{\Delta y_0} \right)^2 \exp \left(-0,48 \frac{g \Delta y_0}{U^2} \right).$$

В работе [10] выполнен расчёт дисперсии σ_N^2 флуктуаций числа корней уравнения (6) в зависимости от β при $k_{\text{РСА}} = 10$, причём оказалось, что $\sigma_N^2 \approx 10$ для β из интервала $0,5 \leq \beta \leq 2$. Значению $k_{\text{РСА}} = 10$ при $\Delta y_0 = 7,5$ и 30 м отвечают скорости ветра $U = 12,7$ и $25,4$ м/с, которым согласно рис. 1 соответствуют $\beta = 1,8$ и $0,9$. Затем из рис. 2 определяем среднее число корней уравнения (6) для каждого случая: $\langle N \rangle = 9$ и $4,5$. Теперь, проведя расчёт по формуле (24), мы можем сравнить между собой слагаемые в правой части (17), т. е. энергетические вклады двух механизмов формирования изображения.

Расчёт показал, что вклад флуктуаций числа N наложений изображений различных участков поверхности в первом случае более чем на два, а во втором — почти на полтора порядка превышает вклад флуктуаций производной орбитальной скорости («флуктуаций плотности рассеивателей»).

Таким образом, полученные в данном разделе численные оценки являются ещё одним свидетельством неправомерности использования формулы (2) в качестве основы для решения задач РСА-диагностики океана: эта формула применима лишь к случаю достаточно пологой зыби.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты выполненного в настоящей работе анализа позволяют утверждать, что РСА-изображение ветрового волнения океана формируется в основном флуктуациями случайного числа элементов поверхности, чьи изображения из-за орбитальных скоростей смещаются и накладываются одно на другое. Этот механизм принципиально нелинейный, поэтому понятие элемента разрешения здесь теряет тот смысл, который оно имеет в линейной теории. Разумеется, последнее утверждение относится именно к волнению, а не к тем объектам на поверхности, пространственно-временные характеристики которых не связаны непосредственно с полем орбитальных скоростей (например, льды, суда и их следы и пр.).

Напомним, что в условиях, когда волны распространяются в узком секторе (примерно $\pm 10^\circ$) вблизи направления оси x , изображение, как и в случае радиолокатора с реальной апертурой, формируется за счёт флуктуаций сечения рассеяния.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Alpers W. R., Rufenach C. L. // IEEE Trans. Ant. and Prop. 1979. V. 27, No. 5. P. 685.
2. Alpers W. R., Ross D. B., Rufenach C. L. // J. Geophys. Res. C. 1981. V. 86, No. 7. P. 6481.
3. Alpers W. R., Bruening C. // IEEE Trans. Geosci. and Remote Sensing. 1986. V. 24, No. 6. P. 873.
4. Каневский М. Б. // Изв. вузов. Радиофизика. 2002. Т. 45, № 11. С. 950.
5. Hasselmann K., Hasselmann S. // J. Geophys. Res. C. 1991. V. 96, No. 6. P. 10713.
6. Plant W. J., Keller W. C., Cross A. // J. Geophys. Res. C. 1983. V. 88, No. 14. P. 9747.
7. Bruening C. // ESA Special Publications. 1994. V. 361. Proc Second ERS-1 Symposium, Hamburg, Germany. P. 233.
8. Давидан И. Н., Лопатухин Л. И., Рожков В. А. Ветровое волнение в Мировом океане. Л.: Гидрометеоздат, 1985. 256 с.
9. Vachon P. W., West J. C. // IEEE Trans. Geosci. and Remote Sensing. 1991. V. 30, No. 3. P. 568.
10. Kanevsky M. B. // IEEE Trans. Geosci. and Remote Sensing. 1993. V. 31, No. 5. P. 1031.
11. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Т. 1. М.: Сов. радио, 1969. 752 с.

Институт прикладной физики РАН,
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию
30 декабря 2002 г.

MECHANISMS FOR THE SAR IMAGING OF THE OCEAN

M. B. Kanevsky

We perform a comparative analysis of two mechanisms for the formation of a synthetic aperture radar (SAR) image of the ocean, which are related to orbital velocities on the surface. It is shown that the mechanism of fluctuations of the effective density of scatterers, which is commonly accepted at present as the physical basis for the SAR diagnostics of roughness, actually works only in the case of a sufficiently flat swell. In the presence of wind roughness, the dominant role is played by another mechanism, namely, fluctuations of the number of surface elements whose images are randomly shifted and superimposed in the image plane due to orbital velocities. In the case of a developed wind roughness propagated in the azimuthal direction, the power contributions of two above-mentioned mechanisms to the SAR imaging of the ocean differ by about two orders of magnitude.

УДК 537.87

ОСОБЕННОСТИ ПОЛЕЙ ИЗЛУЧЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ИСТОЧНИКОВ В ДОСВЕТОВОМ ПОТОКЕ НЕДИСПЕРГИРУЮЩЕЙ СРЕДЫ

Э. Г. Доильнищина, А. В. Тюхтин

Исследуются поля излучения различных дипольных источников и источника типа бисферы в недиспергирующей среде, движущейся со скоростью, меньшей скорости света. Показано, в частности, что в ряде ситуаций имеет место смещение диаграммы направленности в направлении, противоположном скорости движения среды. Получены выражения для мощности потерь энергии рассматриваемых источников. Отмечено, что для бисферы и тороидного диполя мощность излучения с ростом скорости среды увеличивается быстрее, чем для обычных диполей.

Задачи об излучении различных источников в движущейся среде без дисперсии рассматривались достаточно давно (см. [1–3] и цитированную там литературу). Обращение к данной тематике в рамках настоящей статьи связано с двумя обстоятельствами. Во-первых, как будет видно из дальнейшего, некоторые весьма существенные особенности полей излучения, присущие самым различным источникам, до сих пор не были отмечены. Во-вторых, основное внимание ранее уделялось исследованию полей излучения электрического заряда и диполя. В то же время представляет интерес исследование полей более «экзотических» источников, к числу которых относятся тороидный диполь (ананоль) и бисфера.

Для сопоставления полей излучения разных источников и выявления общих закономерностей в настоящей работе последовательно рассматриваются четыре источника: электрический, магнитный и тороидный диполи, а также источник типа бисферы (отметим, что ранее в доступной нам литературе относительно подробно исследовался только случай электрического диполя [2, 3]). Напомним, что тороидный диполь представляет собой свёрнутый в тор соленоид, причём полагается, что электрический ток течёт по поверхности тора только в меридиональном направлении. Как известно, подобный источник не может быть сведён к обычным диполям. Он является простейшим представителем особого семейства мультипольных тороидных моментов, необходимость введения которых была доказана при анализе разложений электромагнитных полей и их источников [4]. Отметим, что в работе [5] рассматривалось излучение Вавилова—Черенкова движущегося тороидного диполя, однако только в случае, когда тороидный момент не зависит от времени в собственной системе отсчёта.

Источник типа бисферы представляет собой сферический конденсатор, состоящий из двух сфер с общим центром. Его обкладки имеют равные по величине заряды разного знака. Важным свойством бисферы в неподвижной стационарной среде является её полная «самоэкранированность»: поле существует только между обкладками, вне бисферы оно отсутствует. В движущейся среде, как будет видно из дальнейшего, это свойство нарушается.

Подчеркнём, что рассматриваемые источники считаются проницаемыми для частиц среды. Это допущение существенно, несмотря на малость размеров источников (к примеру, если считать бисферу непроницаемой, то свойство её самоэкранированности сохранится и в движущейся среде). На практике такие модели могут быть реализованы в виде металлических сетчатых структур, характерное расстояние между проводниками которых мало по сравнению с размерами объекта, а толщина проводов много меньше этого расстояния. Так, обкладка сферического конденсатора может быть сконструирована из двух систем взаимно ортогональных проводников, одна из которых образует сетку «меридианов», а другая — сетку «параллелей».

Э. Г. Доильнищина, А. В. Тюхтин

Напомним выражения для плотности тока, отвечающей различным гармоническим (зависимость от времени выбрана в виде $\exp(-i\omega t)$) источникам при пренебрежении их размерами по сравнению с расстоянием до точки наблюдения:

$$\mathbf{j} = -i\omega \mathbf{p} \delta(\mathbf{r}) \quad (1a)$$

для электрического диполя,

$$\mathbf{j} = c \operatorname{rot}[\mathbf{m} \delta(\mathbf{r})] \quad (1b)$$

для магнитного диполя,

$$\mathbf{j} = c \operatorname{rot} \operatorname{rot}[\mathbf{T} \delta(\mathbf{r})] \quad (1в)$$

для тороидного диполя,

$$\mathbf{j} = i\omega D \nabla \delta(\mathbf{r}) \quad (1г)$$

для бисферы, где \mathbf{p} , \mathbf{m} и \mathbf{T} — электрический, магнитный и тороидный дипольные моменты соответственно, D — параметр, зависящий от величины заряда бисферы и соотношения радиусов сфер [6]. Плотность заряда во всех случаях определяется законом его сохранения (для магнитного и тороидного диполей плотность заряда равна нулю).

Будем считать, что среда является однородной, непоглощающей и недиспергирующей. В собственной системе отсчёта среда изотропна и имеет показатель преломления $n = \sqrt{\varepsilon\mu} > 1$, где ε и μ — диэлектрическая и магнитная проницаемости соответственно. Скорость движения среды равна $\mathbf{u} = c\boldsymbol{\beta}$, где c — скорость света в вакууме.

Как известно, в движущейся среде электромагнитное поле подчиняется уравнениям Максвелла с материальными соотношениями Минковского, которые можно записать в виде [1]

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} + \chi \gamma^2 \mu^{-1} \{ \beta^2 \mathbf{E} - \boldsymbol{\beta} (\boldsymbol{\beta}, \mathbf{E}) + [\boldsymbol{\beta}, \mathbf{B}] \},$$

$$\mathbf{H} = \mu^{-1} \mathbf{B} + \chi \gamma^2 \mu^{-1} \{ \boldsymbol{\beta} (\boldsymbol{\beta}, \mathbf{B}) - \beta^2 \mathbf{B} + [\boldsymbol{\beta}, \mathbf{E}] \}, \quad (2)$$

где $\gamma^2 = (1 - \beta^2)^{-1}$, $\chi = n^2 - 1$, $\beta = u/c$. Для определения полей удобно воспользоваться векторным \mathbf{A} и скалярным φ потенциалами, которые вводятся стандартным образом:

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi + i\omega c^{-1} \mathbf{A}, \quad \mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (3)$$

При заданных плотности стороннего тока \mathbf{j} и плотности заряда ρ спектральные компоненты векторного и скалярного потенциалов определяются следующими формулами [1]:

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= \mu [1 - (1 - n^{-2}) \gamma^2] \Phi(\mathbf{r}) + \varepsilon^{-1} \chi \gamma^2 (\boldsymbol{\beta}, \mathbf{F}(\mathbf{r})), \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \mu \mathbf{F}(\mathbf{r}) + (1 - n^{-2}) \varepsilon^{-1} \gamma^2 \boldsymbol{\beta} [(\boldsymbol{\beta}, \mathbf{F}(\mathbf{r})) - \Phi(\mathbf{r})], \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int \rho(\mathbf{r}') G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad \mathbf{F}(\mathbf{r}) = c^{-1} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}') G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad (5)$$

$$G_0(\mathbf{r}) = R^{-1} [1(n_1) \exp(i\omega c^{-1} n_1 r) + 1(n_2) \exp(i\omega c^{-1} n_2 r)], \quad (6)$$

$$n_1 = \alpha^{-1} [-\chi \gamma^2 \beta \cos \theta + n \Psi(\theta)], \quad n_2 = \alpha^{-1} [-\chi \gamma^2 \beta \cos \theta - n \Psi(\theta)], \quad 1(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi > 0; \\ 0, & \xi < 0, \end{cases}$$

$$\Psi = \sqrt{\cos^2 \theta + \alpha \sin^2 \theta} = \sqrt{1 - \chi \gamma^2 \beta^2 \sin^2 \theta}, \quad R = r \Psi(\theta), \quad \alpha = \frac{1 - n^2 \beta^2}{1 - \beta^2}.$$

Здесь использована сферическая система координат r, θ, φ , причём угол θ отсчитывается от оси z , ориентированной по направлению движения среды. При «досветовом» ($n\beta < 1$) режиме движения среды $n_1 > 0, n_2 < 0$ для любого угла θ , и в выражении (6) имеется только первое слагаемое, отличное от нуля во всём пространстве. При «сверхсветовом» режиме ($n\beta > 1$) имеются оба слагаемых, но только в пределах конуса $\theta \leq \theta_* = \arctg(|\alpha|^{-1/2})$, вне которого они обращаются в нуль из-за того, что величины n_1 и n_2 становятся отрицательными.

Приведённые выражения позволяют рассчитать поле любого источника. В рамках данной работы мы будем рассматривать поля в волновой зоне, т. е. будем полагать расстояние от источника до точки наблюдения большим по сравнению с характерной длиной волны. Прежде всего отметим, что в волновой зоне поле любого источника разбивается на волны двух поляризаций. Для волн ТМ-поляризации магнитное поле и магнитная индукция ортогональны плоскости, образованной вектором скорости движения среды и радиус-вектором, соединяющим источник с точкой наблюдения. Векторы электрического поля и электрической индукции лежат в этой плоскости, причём вектор \mathbf{E} ортогонален радиус-вектору. Используя сферическую систему координат r, θ, φ , для ТМ-поляризации нетрудно получить соотношения

$$\begin{aligned} D_{\theta 1} &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} n_1 \Psi E_{\theta 1}, & D_{r 1} &= -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{\partial n_1}{\partial \theta} \Psi E_{\theta 1}, & B_{\varphi 1} &= n_1 E_{\theta 1}, & H_{\varphi 1} &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \Psi E_{\theta 1}, \\ D_{\theta 2} &= -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} n_2 \Psi E_{\theta 2}, & D_{r 2} &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{\partial n_2}{\partial \theta} \Psi E_{\theta 2}, & B_{\varphi 2} &= n_2 E_{\theta 2}, & H_{\varphi 2} &= -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \Psi E_{\theta 2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь индекс 1 относится к волне с эффективным показателем преломления n_1 , а индекс 2 — к волне с эффективным показателем преломления n_2 (напомним, что последняя имеется только при $n\beta > 1$). Соответствующие соотношения для волн ТЕ-поляризации, которые получаются из (7) с помощью замен $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H}, \mathbf{H} \rightarrow -\mathbf{E}, \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{B}, \mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{D}, \varepsilon \leftrightarrow \mu$ [7], можно записать в виде

$$\begin{aligned} D_{\varphi 1} &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{n_1}{\Psi} E_{\varphi 1}, & B_{\theta 1} &= -n_1 E_{\varphi 1}, & B_{r 1} &= \frac{\partial n_1}{\partial \theta} E_{\varphi 1}, & H_{\theta 1} &= -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{E_{\varphi 1}}{\Psi}, \\ D_{\varphi 2} &= -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{n_2}{\Psi} E_{\varphi 2}, & B_{\theta 2} &= -n_2 E_{\varphi 2}, & B_{r 2} &= \frac{\partial n_2}{\partial \theta} E_{\varphi 2}, & H_{\theta 2} &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{E_{\varphi 2}}{\Psi}. \end{aligned} \quad (8)$$

Отметим, что групповая скорость волн ориентирована вдоль радиус-вектора, проведённого из источника, в то время как направление фазовой скорости с ним не совпадает.

Ограничимся далее рассмотрением досветового режима движения среды. Опуская громоздкие промежуточные преобразования, выпишем соответствующие результаты для всех рассматриваемых источников.

В случае электрического диполя с моментом $\mathbf{p} = p_x \mathbf{e}_x + p_z \mathbf{e}_z$ имеем

$$E_{\theta} = \frac{\mu \omega^2}{c^2} \frac{-p_z \sin \theta + p_x \cos \theta \cos \varphi}{\Psi^3} f(r, \theta), \quad E_{\varphi} = -\frac{\mu \omega^2}{c^2} \frac{p_x \sin \varphi}{\Psi} f(r, \theta), \quad (9)$$

где $f(r, \theta) = r^{-1} \exp(i\omega c^{-1} n_1 r)$, а угол φ отсчитывается от оси x . Как видим, этот источник возбуждает только ТМ-волну, если он ориентирован вдоль скорости движения среды, а при наличии ортогональной компоненты p_x возбуждается также и ТЕ-волна.

В случае магнитного диполя с моментом $\mathbf{m} = m_x \mathbf{e}_x + m_z \mathbf{e}_z$ имеем

$$E_{\theta} = -\frac{\mu \omega^2}{c^2} m_x \frac{\sin \varphi}{\alpha \Psi^2} \left(n - \chi \gamma^2 \beta \frac{\cos \theta}{\Psi} \right) f(r, \theta),$$

$$E_\varphi = \frac{\mu\omega^2}{c^2} \left\{ m_x \frac{\cos \varphi}{\alpha\Psi} \left(\chi\gamma^2\beta - n \frac{\cos \theta}{\Psi} \right) + m_z n \frac{\sin \theta}{\Psi^2} \right\} f(r, \theta). \quad (10)$$

При параллельной потоку ориентации магнитный диполь возбуждает только ТЕ-волну, а волна ТМ-поляризации появляется только при наличии поперечной компоненты дипольного момента.

В случае анаполя с тороидным дипольным моментом $\mathbf{T} = T_x \mathbf{e}_x + T_z \mathbf{e}_z$ получаем

$$E_\theta = -\frac{i\mu\omega^3}{c^3\alpha} \left(n - \chi\gamma^2\beta \frac{\cos \theta}{\Psi} \right) \left[T_z \frac{n \sin \theta}{\Psi^3} + T_x \frac{\cos \varphi}{\alpha\Psi^2} \left(\chi\gamma^2\beta - \frac{n \cos \theta}{\Psi} \right) \right] f(r, \theta),$$

$$E_\varphi = -\frac{i\mu\omega^3}{c^3\alpha^2} T_x \frac{\sin \varphi}{\Psi} \left[\frac{n^2\alpha^2 \sin^2 \theta}{\Psi^2} + \left(\chi\gamma^2\beta - \frac{n \cos \theta}{\Psi} \right)^2 \right] f(r, \theta). \quad (11)$$

В случае источника типа бисферы возбуждаются только волны ТМ-поляризации:

$$E_\theta = -\frac{i\mu\omega^3}{c^3} \frac{\chi\gamma^2\beta}{\alpha} D \frac{\sin \theta}{\Psi^3} \left(1 - \beta n \frac{\cos \theta}{\Psi} \right) f(r, \theta). \quad (12)$$

Таким образом, чисто потенциальный источник, каковым является бисфера, в движущейся среде теряет свойство самоэкранированности и становится излучателем.

Отметим некоторые особенности угловых зависимостей компонент полей излучения разных источников. Остановимся сначала на случаях аксиально-симметричных полей, реализующихся при источниках в виде продольных диполей всех типов или бисферы. В неподвижной среде максимумы всех компонент полей излучения любого продольного диполя располагаются под прямым углом по отношению к направлению соответствующего дипольного момента. Как вытекает из приведённых выше формул, в движущейся среде диаграммы направленности либо остаются симметричными относительно ортогональной потоку плоскости (тогда $\theta_{\max} = \pi/2$), либо смещаются в направлении, противоположном скорости движения среды (тогда $\theta_{\max} > \pi/2$). К примеру, в случаях продольных электрического и магнитного диполей диаграммы для напряжённостей электрического и магнитного полей симметричны относительно плоскости, перпендикулярной скорости движения среды, а диаграммы для соответствующих индукций смещаются навстречу потоку. При источнике в виде параллельного тороидного диполя или бисферы смещаются навстречу потоку как диаграммы для $|\mathbf{E}|$ и $|\mathbf{H}|$, так и диаграммы для $|\mathbf{D}|$ и $|\mathbf{B}|$, причём смещение последних является более выраженным.

Сказанное иллюстрируют рис. 1 и 2, на которых приведены полярные диаграммы величин «силовых» векторов $|\mathbf{E}|$ и $|\mathbf{B}|$ в случаях источника в виде продольного электрического диполя (рис. 1) и бисферы (рис. 2). Всюду принято, что $n = 2$; разные типы кривых соответствуют различной скорости движения среды: сплошные линии соответствуют случаю $\beta = 0$ (для бисферы $\beta = 0,01$), короткий пунктир — $\beta = 0,3$, длинный пунктир — $\beta = 0,45$, штрих-пунктир — $\beta = 0,49$. Каждая диаграмма нормирована на своё максимальное значение (подчеркнём, что максимумы компонент полей в приведённом диапазоне скоростей среды меняются во много раз). Соответствующие диаграммы для продольного магнитного диполя похожи на диаграммы для электрического диполя, а для продольного тороидного диполя — на диаграммы для бисферы.

Все несимметричные (относительно нормальной потоку плоскости) диаграммы меняются с ростом скорости среды качественно одинаковым образом: с увеличением β угол θ_{\max} для той или иной диаграммы сначала растёт до некоторого предельного значения $\tilde{\theta}_{\max}$, а при дальнейшем увеличении скорости θ_{\max} уменьшается. При $\beta \rightarrow 1/n$ величина θ_{\max} стремится к $\pi/2$. Данные закономерности иллюстрирует рис. 3, на котором приведены зависимости θ_{\max} от β для магнитной индукции в случае источника в виде продольного электрического диполя. Отметим, что при этом величина $\cos^2 \theta_{\max}$ подчиняется алгебраическому уравнению четвёртого порядка, которое нетрудно

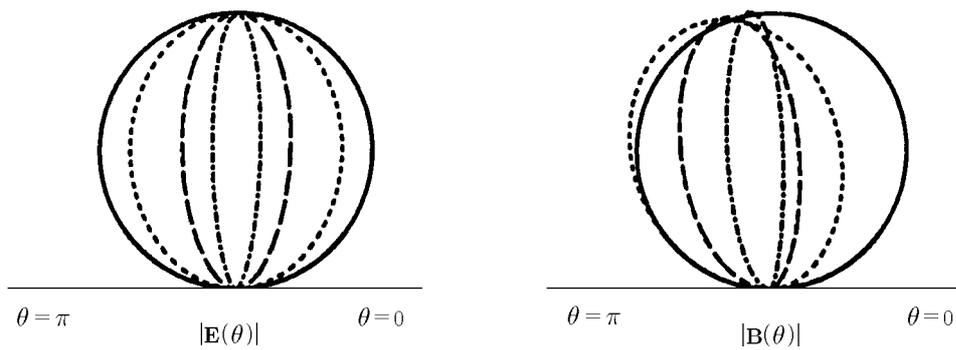


Рис. 1

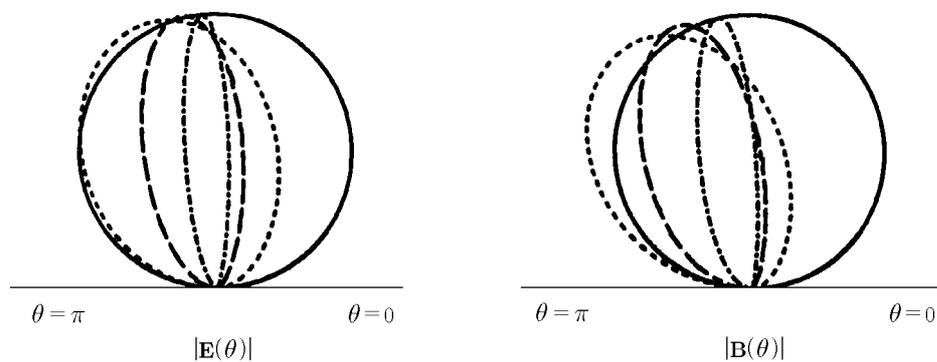


Рис. 2

разрешить численно. На рис. 3 разные кривые отвечают разным значениям n : кривая 1 соответствует $n = 1, 2$; 2 — $n = 1, 5$; 3 — $n = 2$; 4 — $n = 3$. Поведение функций $\theta_{\max}(\beta)$ для других асимметричных диаграмм различных источников аналогично приведённому на рис. 3. Величина θ_{\max} всегда определяется уравнением вида $\Psi(\theta) \cos \theta = -\beta \alpha f(\alpha, \cos^2 \theta)$, где $f(\alpha, \cos^2 \theta)$ — некоторая положительная функция, довольно слабо зависящая от обоих аргументов (её вид различен для разных источников и разных компонент поля). Интересно, что максимально достижимые углы $\tilde{\theta}_{\max}$ не могут быть слишком большими: анализ и численные расчёты показывают, что для всех диаграмм любого из рассматриваемых источников они не превышают 120° .

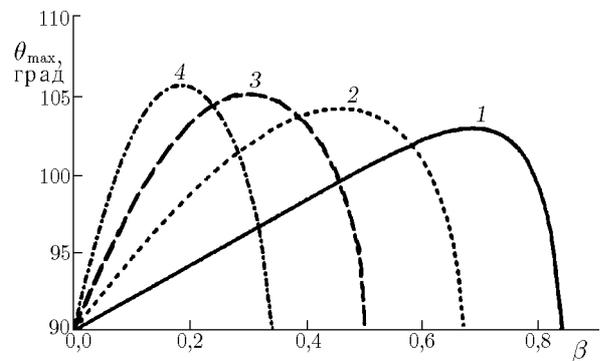


Рис. 3

Отметим теперь некоторые особенности случаев аксиально несимметричных полей, реализующихся при источниках в виде ортогональных (относительно β) диполей всех типов. На рис. 4 изображены нормированные полярные диаграммы для источника в виде поперечного электрического диполя, а на рис. 5 — для поперечного магнитного диполя (значения n, β выбраны такими же, как и на рис. 1, 2). Здесь также проявляется эффект смещения диаграмм направленности в направлении, противоположном скорости движения среды. В случае источника в виде электрического диполя этот эффект имеет место только для индукций, а в случае магнитного диполя

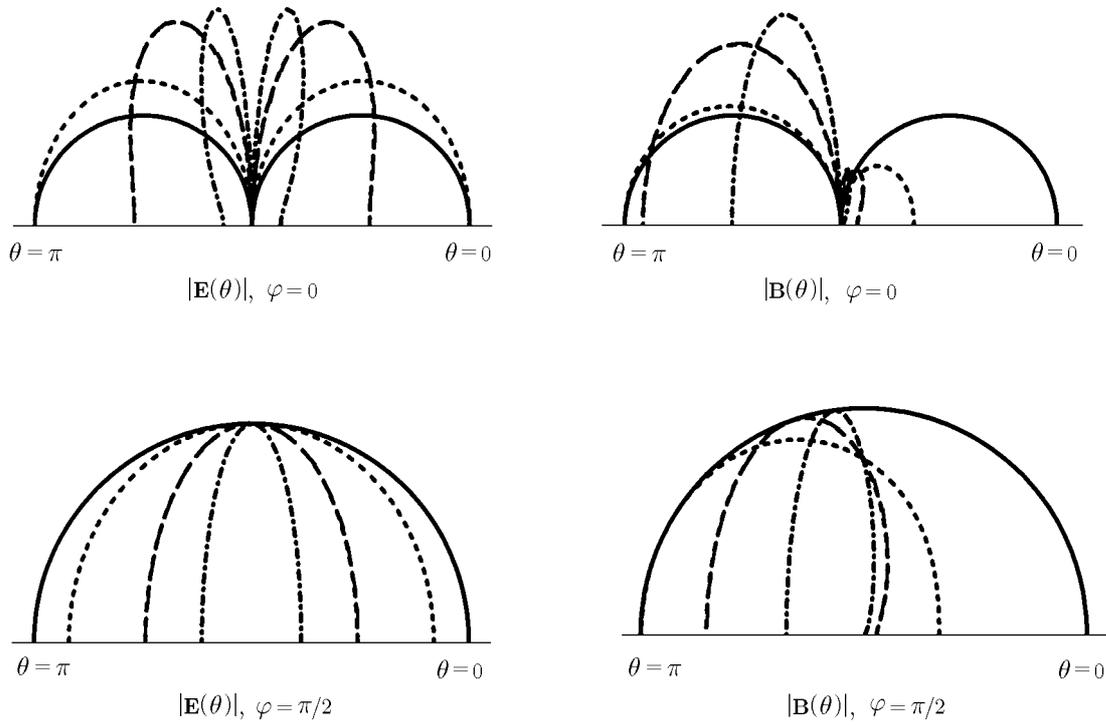


Рис. 4

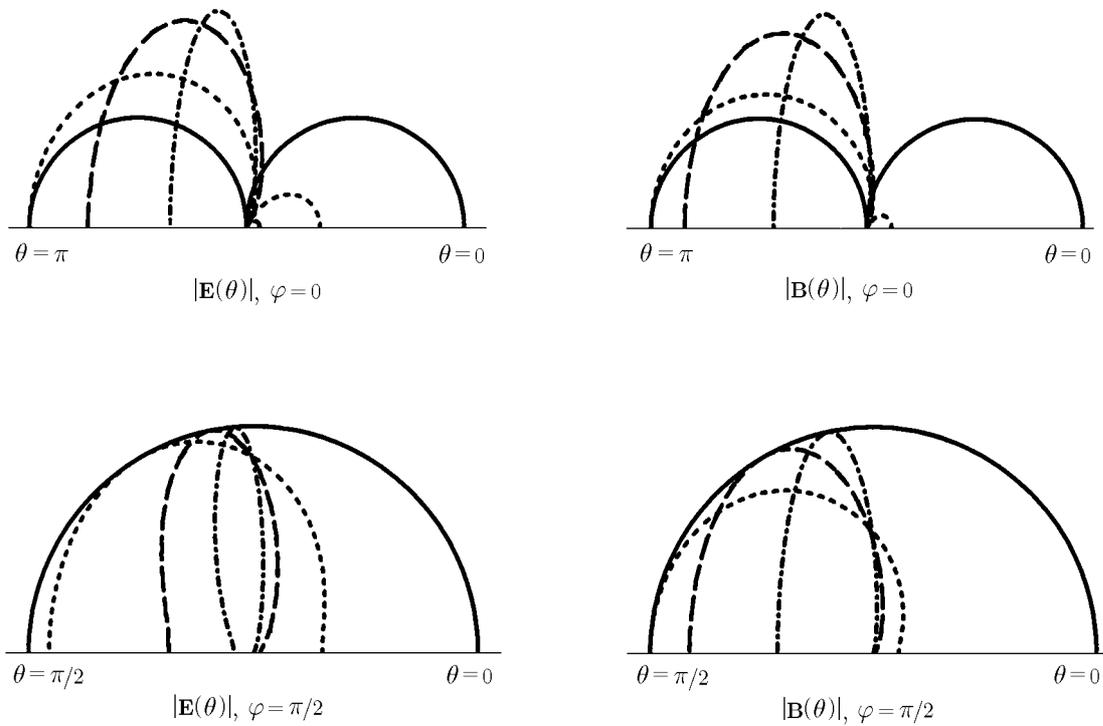


Рис. 5

проявляется также и для напряжённости полей. Диаграммы для тороидного диполя сходны с соответствующими диаграммами для магнитного диполя, но имеют ещё более выраженное смещение навстречу потоку (величины полей в области $\theta > \pi/2$ могут на много порядков превосходить величины полей в области $\theta < \pi/2$).

Обратимся теперь к энергетическим закономерностям, характеризующим поля различных источников. Напомним, что по поводу вида тензора энергии-импульса в движущейся среде в научной литературе долгое время велась дискуссия [8, 9]. К 70-м годам XX века ряд экспериментальных и теоретических результатов показал, что адекватное описание энергетических характеристик поля в движущейся среде даётся тензором энергии-импульса Абрагама [9]. Однако его основной «конкурент» — тензор энергии-импульса Минковского — не полностью потерял своё значение. В частности, оказалось, что расчёт потерь энергии источника удобнее вести, используя выражение для плотности потока энергии по Минковскому [9]. Это объясняется тем, что при таком подходе не нужно отдельно учитывать работу силы Абрагама над средой.

Усреднённая за период плотность потока энергии (по Минковскому) в движущейся среде определяется таким же выражением, как и в неподвижной среде, т. е. $\mathbf{S}^M = c \operatorname{Re} [\mathbf{E}, \mathbf{H}^*]/(8\pi)$. Из соотношений (8), (9) вытекает, что при досветовой скорости движения среды в волновой зоне вектор \mathbf{S}^M ориентирован вдоль радиус-вектора (т. е. вдоль групповой скорости волны) и определяется выражением

$$\mathbf{S}^M = S_r^M \mathbf{e}_r = \frac{c}{8\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} [|E_\theta|^2 \Psi + |E_\varphi|^2 / \Psi] \mathbf{e}_r. \quad (13)$$

Интегрирование этого выражения по сфере даёт усреднённую мощность W потерь энергии источника:

$$W = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} S_r^M r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi. \quad (14)$$

Интеграл (14) выражается через элементарные функции для всех рассматриваемых источников. Не останавливаясь на громоздких промежуточных выкладках, приведём формулы для S_r^M и W во всех рассматриваемых ситуациях:

1) Продольный электрический диполь ($\mathbf{p} = p_z \mathbf{e}_z$):

$$S_r^M = \mu \frac{cn}{8\pi} \left(\frac{\omega^2 p_z}{c^2 r} \right)^2 \frac{\sin^2 \theta}{\Psi^5}; \quad W = \frac{p_z^2 \omega^4 \mu n}{3c^3} w_{p\parallel}, \quad w_{p\parallel} = \frac{1}{\alpha^2}. \quad (15)$$

2) Поперечный электрический диполь ($\mathbf{p} = p_x \mathbf{e}_x$):

$$S_r^M = \mu \frac{cn}{8\pi} \left(\frac{\omega^2 p_x}{c^2 r} \right)^2 \frac{\cos^2 \theta + \alpha \sin^2 \theta \sin^2 \varphi}{\Psi^5};$$

$$W = \frac{p_x^2 \omega^4 \mu n}{3c^3} w_{p\perp}, \quad w_{p\perp} = \frac{1}{\alpha}. \quad (16)$$

3) Соответствующие формулы для продольного магнитного диполя ($\mathbf{m} = m_z \mathbf{e}_z$) получаются из (15) с помощью замены $p_z \rightarrow nm_z$.

4) Поперечный магнитный диполь ($\mathbf{m} = m_x \mathbf{e}_x$):

$$S_r^M = \mu \frac{cn^3}{8\pi} \left(\frac{\omega^2 m_x}{c^2 r} \right)^2 \frac{1}{\alpha^2} \left[\frac{\sin^2 \varphi}{\Psi^3} \left(1 - a \frac{\cos \theta}{\Psi} \right)^2 + \frac{\cos^2 \varphi}{\Psi^3} \left(a - \frac{\cos \theta}{\Psi} \right)^2 \right];$$

$$W = \frac{m_x^2 \omega^4 \mu n^3}{3c^3} w_{m\perp}, \quad w_{m\perp} = \frac{1 + a^2}{\alpha^3}, \quad (17)$$

где $a = \chi\gamma^2\beta/n$.

5) Продольный тороидный диполь ($\mathbf{T} = T_z \mathbf{e}_z$):

$$S_r^M = \mu \frac{cn}{8\pi} \left(T_z \frac{\omega^3}{c^3 r} \right)^2 \frac{n^4}{\alpha^2} \frac{\sin^2 \theta}{\Psi^5} \left(1 - a \frac{\cos \theta}{\Psi} \right)^2;$$

$$W = \frac{T_z^2 \omega^6 \mu n^5}{3c^5} w_{T\parallel}, \quad w_{T\parallel} = \frac{1 + a^2/5}{\alpha^4}. \quad (18)$$

6) Поперечный тороидный диполь ($\mathbf{T} = T_x \mathbf{e}_x$):

$$S_r^M = \mu \frac{cn}{8\pi} \left(T_x \frac{\omega^3}{c^3 r} \right)^2 \frac{n^4}{\alpha^4} \left\{ \frac{\cos^2 \varphi}{\Psi^3} \left(1 - a \frac{\cos \theta}{\Psi} \right)^2 \left(a - \frac{\cos \theta}{\Psi} \right)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{\sin^2 \varphi}{\Psi^3} \left[\left(a - \frac{\cos \theta}{\Psi} \right)^2 + \frac{\alpha^2 \sin^2 \theta}{\Psi^2} \right]^2 \right\};$$

$$W = \frac{T_x^2 \omega^6 \mu n^5}{3c^5} w_{T\perp},$$

$$w_{T\perp} = \frac{1}{\alpha^5} \left[1 + \beta^2 \chi \gamma^2 \left(\frac{22\chi\gamma^2}{5n^2} - 1 \right) + \beta^4 \chi^2 \gamma^4 \left(\frac{2}{5} - \frac{\chi\gamma^2}{n^2} + \frac{\chi^2 \gamma^4}{n^4} \right) \right]. \quad (19)$$

7) Бисфера:

$$S_r^M = \mu \frac{cn}{8\pi} \left(D \frac{\omega^3}{c^3 r} \right)^2 \frac{\chi^2 \beta^2}{(1 - n^2 \beta^2)^2} \frac{\sin^2 \theta}{\Psi^5} \left(1 - \beta n \frac{\cos \theta}{\Psi} \right)^2;$$

$$W = \frac{D^2 \omega^6 \mu n}{3c^5} w_D, \quad w_D = \frac{\beta^2 \chi^2 \gamma^4}{\alpha^4} \left(1 + \frac{n^2 \beta^2}{5} \right). \quad (20)$$

Очевидно, что основные закономерности для угловых зависимостей $S_r^M(\theta)$ качественно такие же, как и для напряжённостей электрического и магнитного полей. Эффект смещения зависимости $S_r^M(\theta)$ «навстречу потоку» имеет место в случаях поперечного магнитного диполя, тороидного диполя любой ориентации и бисферы. В случаях электрического диполя любой ориентации и продольного магнитного диполя угловые зависимости $S_r^M(\theta)$ симметричны относительно ортогональной потоку плоскости. Отметим, однако, что в работе [3] содержится вывод о «сдвигании» диаграммы направленности для вектора Умова—Пойнтинга в случае источника в виде электрического диполя. Причины такого заключения связаны с двумя обстоятельствами. Во-первых, авторы статьи [3] рассматривали, по существу, не электрический диполь «в чистом виде», а источник, плотность тока которого содержит некоторые дополнительные вихревые слагаемые порядка β . Это и приводит к смещению диаграммы направленности в первом порядке по β . Кроме того, было использовано иное представление диаграммы направленности как поверхности, на которой зависимость $S_r^M(\theta)$ постоянна. Если же использовать применяемое нами определение диаграммы направленности как полярной диаграммы для соответствующей функции, то в случае источника, рассмотренного в [3], оказывается справедливым эффект смещения диаграммы навстречу потоку.

Проанализируем полученные выражения для мощности источников излучения. В приведённых выше формулах выделены безразмерные множители w_s , определяющие зависимость мощности излучения от скорости движения среды (индекс s указывает на тип и ориентацию источника).

Как видим, мощность любого из рассматриваемых источников монотонно растёт с ростом скорости движения среды, обращаясь в бесконечность при $n\beta \rightarrow 1$. Эти зависимости определяются, прежде всего, множителями вида α^{-k} , где k — натуральное число, принимающее значения от 1 до 5 в зависимости от типа и ориентации источника (в рассматриваемом досветовом режиме движения среды $0 < \alpha < 1$). Отметим, что при ненулевой скорости движения среды имеют место соотношения

$$w_{p\perp} < w_{p\parallel} = w_{m\parallel} < w_{m\perp} < w_{T\parallel} < w_{T\perp}. \quad (21)$$

На рис. 6 приведены зависимости величин w_s от β для случая $n = 2$ (указанная около каждой кривой цифра соответствует номеру источника, который использовался выше). Как видим, мощность излучения поперечного электрического диполя увеличивается с ростом скорости среды медленнее, чем мощность продольного диполя. В то же время мощность излучения поперечного магнитного диполя с увеличением скорости движения среды нарастает быстрее, чем мощность продольного диполя. Это существенное различие между электрическим и магнитным диполями связано, очевидно, с разной природой этих источников: если первый ассоциируется с малым вибратором Герца, который имеет как токовую, так и зарядовую составляющие, то второй ассоциируется с рамкой с током и не несёт заряда.

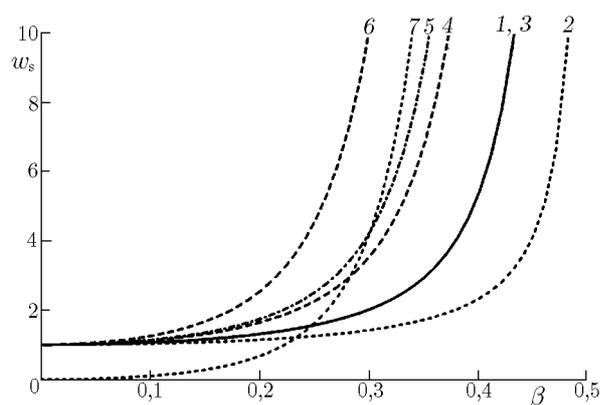


Рис. 6

Для тороидного диполя мощность излучения нарастает с увеличением скорости среды ещё быстрее, чем для поперечного магнитного диполя. При этом она оказывается наибольшей в случае поперечной ориентации тороидного дипольного момента, поскольку в основном определяется множителем α^{-5} . Таким образом, при скоростях движения среды, близких к скорости света в ней, наиболее эффективным излучателем является поперечный тороидный диполь. Мощность излучения источника типа бисферы при малых скоростях движения среды невелика (из-за множителя β^2). Однако с ростом скорости мощность излучения бисферы быстро увеличивается, и при достаточно больших скоростях она может стать даже более эффективным излучателем, чем продольный тороидный диполь.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 00-02-16857).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болотовский Б. М., Столяров С. Н. // Эйнштейновский сборник. 1978–1979. М.: Наука, 1983. С. 173.
2. Papas С. Н. Theory of Electromagnetic Wave Propagation. New York, Toronto, London, 1965.
3. Дерюгин И. А., Воронцов В. И. // Квантовая электроника. 1972. Вып. 6. С. 208.
4. Дубовик В. М., Тосунян Л. А. // Физика элементарных частиц и атомного ядра. 1983. Т. 14, вып. 5. С. 1193.
5. Гинзбург В. Л., Цытович В. Н. // ЖЭТФ. 1985. Т. 88, вып. 1. С. 84.
6. Миллер М. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т. 29, № 9. С. 991.
7. Столяров С. Н. // Эйнштейновский сборник. 1975–1976. М.: Наука, 1978. С. 152.

8. Паули В. Теория относительности. М.: Наука, 1983. 336 с.
9. Гинзбург В. Л., Угаров В. А. // УФН. 1976. Т. 118, № 1. С. 175.

Научно-исследовательский институт радиофизики
Санкт-Петербургского государственного университета,
г. Санкт-Петербург, Россия

Поступила в редакцию
29 мая 2002 г.

**FEATURES OF RADIATION FIELDS OF SOME SOURCES IN A SUBLUMINAL FLOW OF A
NONDISPERSIVE MEDIUM**

É. G. Doil'nitsyna and A. V. Tyukhtin

We study radiation fields of various dipole sources as well as of a source of bisphere type moving in a nondispersive medium with velocity less than the speed of light in this medium. In particular, it is shown that in certain cases, there is a displacement of the angular pattern of a source in the direction opposite to the medium flow. Expressions for energy losses of the considered sources are obtained. It is pointed out that the radiation power of both a bisphere and a toroidal dipole increases with increasing velocity of motion of the medium more rapidly compared with the ordinary dipoles.

УДК 537.874

РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА СТРУКТУРАХ, СОДЕРЖАЩИХ ТОНКИЕ ПРОВОДНИКИ

А. Г. Дмитренко, В. А. Колчин

Методом вспомогательных источников получено решение задачи рассеяния электромагнитных волн на структурах, составленных из конечного числа трёхмерных идеально проводящих тел, часть которых является тонкими проводниками. Кратко описан разработанный пакет прикладных программ. Приведены некоторые результаты численных расчётов, характеризующие влияние объёмных тел, расположенных вблизи тонких проводников, на распределение тока на проводниках.

ВВЕДЕНИЕ

Значительный интерес для исследователей представляет изучение рассеяния радиоволн совокупностью идеально проводящих тел, имеющих размеры, сравнимые с длиной волны падающего излучения. Этот интерес обусловлен необходимостью решения практически важных проблем электромагнитной совместимости, конструирования многоэлементных антенных систем, радиолокационной заметности и др.

Если расстояние между телами также сравнимо с длиной волны, корректная постановка проблем подобного рода приводит к необходимости решения граничных задач теории рассеяния с учётом электромагнитного взаимодействия между рассеивателями. В редких случаях (см., например, [1]) удаётся получить аналитическое решение. В большинстве же случаев приходится применять численные методы. Наиболее популярными из них являются методы конечных элементов [2] и методы интегральных уравнений [3].

В последние годы для решения задач рассеяния электромагнитных волн на системах взаимодействующих тел используется метод вспомогательных источников [4, 5]. В работе [5] методом вспомогательных источников получено решение задачи рассеяния электромагнитных волн на структурах, составленных из конечного числа объёмных идеально проводящих тел, ограниченных гладкими поверхностями произвольной формы. В качестве вспомогательных источников в [5] использована система дискретных источников — элементарных электрических диполей, которые размещены внутри каждого из тел структуры на вспомогательной поверхности, подобной в смысле гомотетии поверхности тела. Исследования показывают [6], что точность решения задачи существенно зависит от расстояния между вспомогательной поверхностью и поверхностью рассеивателя. Если вспомогательная поверхность расположена чрезмерно близко к поверхности тела, наблюдается увеличение нормы невязки граничных условий в точках, промежуточных по отношению к точкам коллокации, что свидетельствует о падении точности получаемого решения. Рост невязки при сближении поверхностей является прямым следствием дискретности выбранной системы вспомогательных источников: в выражениях для полей диполей существенную роль начинают играть члены порядка $1/R^3$ и $1/R^2$, где R — расстояние от диполя до точки на поверхности рассеивателя.

Если размеры рассеивателя вдоль одного из направлений много меньше длины волны (например, если рассеиватель — тонкий проводник), то невозможно выбрать вспомогательную поверхность внутри рассеивателя таким образом, чтобы избежать описанной выше ситуации, приводящей к потере точности получаемого решения. По этой причине подход, использованный в [5], неудобен для решения задач рассеяния на структурах, содержащих тонкие проводники.

А. Г. Дмитренко, В. А. Колчин

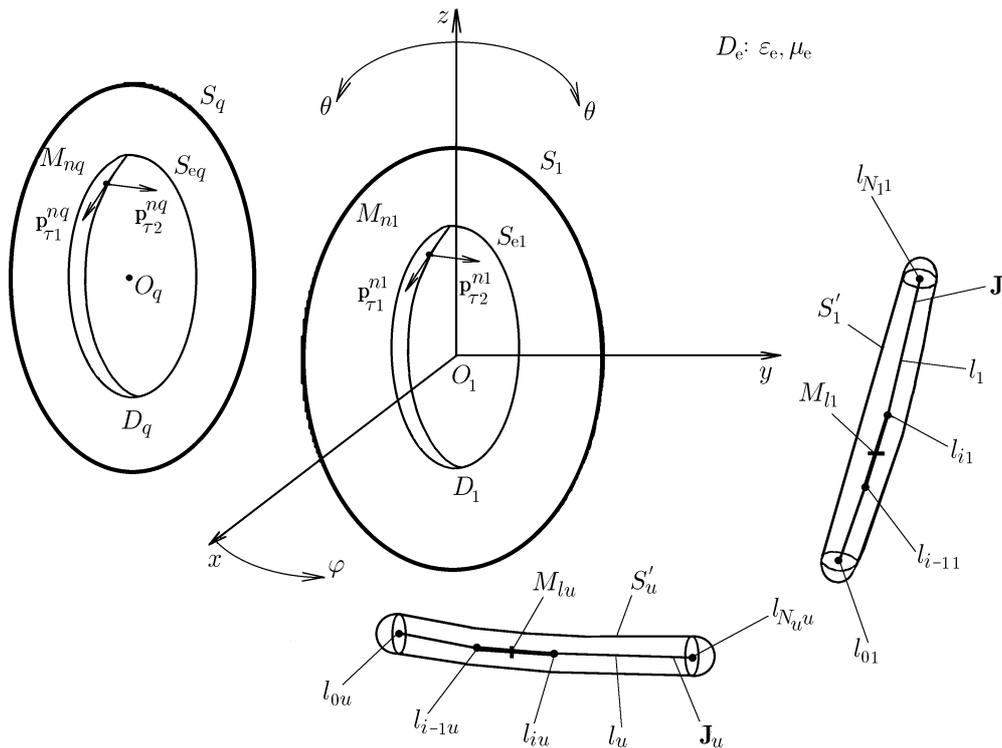


Рис. 1. Геометрия задачи

В данной работе для решения задачи рассеяния электромагнитных волн на структурах, содержащих тонкие проводники, использован вариант метода вспомогательных источников, в котором для представления полей тонких проводников используются вспомогательные источники в виде токов, непрерывно распределённых вдоль осей проводников. Это позволяет избежать ухудшения точности получаемого решения, обусловленного дискретностью источников. Для представления полей объёмных тел, как и в [5], используется система электрических диполей, дискретным образом расположенных на вспомогательной поверхности, подобной поверхности тела. Даны математическая формулировка метода и краткое описание возможностей реализованной на его основе программы для расчёта компонент рассеянного поля и контроля точности полученного решения. Приведены некоторые результаты численных расчётов, характеризующие влияние объёмных тел, расположенных вблизи тонких проводников, на распределение тока на проводниках.

1. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОД ЕЁ РЕШЕНИЯ

Геометрия задачи показана на рис. 1. Будем рассматривать стационарную (зависимость от времени выбрана в виде $\exp(-i\omega t)$) задачу дифракции электромагнитного поля $\{\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0\}$ на структуре, состоящей из Q идеально проводящих тел D_q , ограниченных поверхностями Ляпунова S_q ($q = 1, 2, \dots, Q$), и U тонких проводников, ограниченных поверхностями S'_u ($u = 1, 2, \dots, U$) и расположенных произвольным образом по отношению к телам D_q . Тела и проводники не пересекаются между собой. Под тонким проводником будем понимать идеальный проводник круглого сечения, диаметр которого конечен, но мал по сравнению с длиной волны. Эта структура размещена в однородной безграничной среде D_e с диэлектрической и магнитной проницаемостями ϵ_e и μ_e соответственно в декартовой системе координат с началом отсчёта, лежащим внутри тела с порядковым номером $q = 1$. Требуется найти рассеянное поле $\{\mathbf{E}_e, \mathbf{H}_e\}$ в области D_e .

Математическая постановка задачи имеет следующий вид:

$$[\nabla, \mathbf{E}_e] = i\omega\mu_e\mathbf{H}_e, \quad [\nabla, \mathbf{H}_e] = -i\omega\varepsilon_e\mathbf{E}_e \quad (1)$$

в области D_e ,

$$[\mathbf{n}_q, \mathbf{E}_e] = -[\mathbf{n}_q, \mathbf{E}_0] \quad (2)$$

на поверхностях S_q , где $q = 1, 2, \dots, Q$,

$$[\mathbf{n}_u, \mathbf{E}_e] = -[\mathbf{n}_u, \mathbf{E}_0] \quad (3)$$

на поверхностях S'_u , где $u = 1, 2, \dots, U$,

$$[\sqrt{\varepsilon_e}\mathbf{E}_e, \mathbf{R}/R] + \sqrt{\mu_e}\mathbf{H}_e = O(R^{-1}), \quad [\sqrt{\mu_e}\mathbf{H}_e, \mathbf{R}/R] - \sqrt{\varepsilon_e}\mathbf{E}_e = O(R^{-1}) \quad (4)$$

при $R \rightarrow \infty$. Здесь \mathbf{n}_q и \mathbf{n}_u — единичные векторы нормалей к поверхностям S_q тел D_q и к поверхностям S'_u тонких проводников, $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Суть предлагаемого метода заключается в следующем. Введём (см. рис. 1) внутри каждого из рассеивателей D_q вспомогательную поверхность $S_{eq} = K_{eq}S_q$, подобную поверхности рассеивателя S_q в смысле гомотетии с центром в точке O_q . Коэффициенты гомотетии (подобия) K_{eq} характеризуют удаление вспомогательных поверхностей от поверхностей соответствующих тел D_q и лежат в интервале $0 < K_{eq} < 1$. Если поверхность S_q является центральной, центр гомотетии выбирается совпадающим с центром поверхности. Выберем на каждой из вспомогательных поверхностей S_{eq} конечную совокупность точек M_{nq} , где $n = 1, 2, \dots, N_q$, $q = 1, 2, \dots, Q$. В каждой точке M_{nq} разместим пару независимых вспомогательных элементарных электрических диполей с моментами $\mathbf{p}_{\tau 1}^{nq} = p_{\tau 1}^{nq}\mathbf{e}_{\tau 1}^{nq}$, $\mathbf{p}_{\tau 2}^{nq} = p_{\tau 2}^{nq}\mathbf{e}_{\tau 2}^{nq}$, ориентированными вдоль единичных векторов $\mathbf{e}_{\tau 1}^{nq}$ и $\mathbf{e}_{\tau 2}^{nq}$, выбранных в плоскости, касательной к S_{eq} в точке M_{nq} . Указанные диполи излучают в однородную среду с параметрами ε_e, μ_e .

Внутри каждого из тонких проводников на его оси разместим непрерывно распределённый вспомогательный ток \mathbf{J}_u .

Представим неизвестное рассеянное поле $\{\mathbf{E}_e, \mathbf{H}_e\}$ в области D_e в виде суммы полей введённых вспомогательных диполей и токов:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_e(M) &= \frac{i\omega}{k_e^2} \left\{ \sum_{q=1}^Q \sum_{n=1}^{N_q} [\nabla, [\nabla, \mathbf{\Pi}_{nq}]] + \sum_{u=1}^U [\nabla, [\nabla, \mathbf{\Pi}'_u]] \right\}, \\ \mathbf{H}_e(M) &= \frac{1}{\mu_e} \left\{ \sum_{q=1}^Q \sum_{n=1}^{N_q} [\nabla, \mathbf{\Pi}_{nq}] + \sum_{u=1}^U [\nabla, \mathbf{\Pi}'_u] \right\}, \\ \mathbf{\Pi}_{nq} &= \Psi_e(M, M_{nq})\mathbf{p}_{\tau}^{nq}, \quad \mathbf{p}_{\tau}^{nq} = p_{\tau 1}^{nq}\mathbf{e}_{\tau 1}^{nq} + p_{\tau 2}^{nq}\mathbf{e}_{\tau 2}^{nq}, \quad \mathbf{\Pi}'_u = \int_{l_u} \Psi_e(M, M_{lu})\mathbf{J}_u dl. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $k_e = \omega\sqrt{\varepsilon_e\mu_e}$, $\Psi_e(M, M_{nq}) = (4\pi R_{MM_{nq}})^{-1} \exp(ik_e R_{MM_{nq}})$, $\Psi_e(M, M_{lu}) = (4\pi R_{MM_{lu}})^{-1} \times \exp(ik_e R_{MM_{lu}})$; $R_{MM_{nq}}$ и $R_{MM_{lu}}$ — расстояния от точек M_{nq} внутри тел D_q и точек M_{lu} на оси проводников до точки наблюдения M в области D_e ; $p_{\tau 1}^{nq}$ и $p_{\tau 2}^{nq}$ — неизвестные дипольные моменты; $q = 1, 2, \dots, Q$, $n = 1, 2, \dots, N_q$, N_q — число точек размещения диполей на вспомогательной поверхности S_{eq} ; \mathbf{J}_u — неизвестные осевые вспомогательные токи, $u = 1, 2, \dots, U$; интегрирование проводится вдоль оси проводников l_u .

Поле (5) удовлетворяет уравнениям Максвелла (1) и условиям излучения (4) в области D_e . Для того, чтобы удовлетворить граничным условиям (2), (3), необходимо соответствующим образом выбрать дипольные моменты $p_{\tau 1}^{nq}$ и $p_{\tau 2}^{nq}$, где $q = 1, 2, \dots, Q$, $n = 1, 2, \dots, N_q$, и распределения осевых токов \mathbf{J}_u , где $u = 1, 2, \dots, U$.

Введём кусочно-постоянную аппроксимацию осевых токов. Разобьём линию l_u каждого тока \mathbf{J}_u на N_u малых участков, в пределах каждого из которых ток можно считать постоянным. Тогда выражение для $\mathbf{\Pi}'_u$ в (5) приближённо можно записать в виде

$$\mathbf{\Pi}'_u \approx \sum_{i=1}^{N_u} J_{ui} \mathbf{e}_{ui} \int_{l_{i-1}^u}^{l_{iu}} \Psi_e(M, M_{lu}) dl, \quad (6)$$

где J_{ui} — ток на i -м участке проводника с номером u , \mathbf{e}_{ui} — единичный вектор, направление которого совпадает с направлением касательной в средней точке рассматриваемого участка. При таком подходе нахождение неизвестных распределений осевых токов сводится к нахождению $\sum_{u=1}^U N_u$ элементов тока.

Для определения дипольных моментов и элементов тока используем граничные условия (2) и (3), удовлетворяя им в соответствии с методом коллокаций. Пусть M_j ($j = 1, 2, \dots, L_q$) — точки коллокации на поверхности S_q , а M'_j ($j = 1, 2, \dots, L_u$) — точки коллокации на поверхности S'_u . Тогда для нахождения неизвестных $p_{\tau 1}^{nq}$, $p_{\tau 2}^{nq}$ ($q = 1, 2, \dots, Q$; $n = 1, 2, \dots, N_q$) и J_{ui} ($u = 1, 2, \dots, U$; $i = 1, 2, \dots, N_u$) получим следующую систему линейных алгебраических уравнений с комплексной матрицей размера $2(\sum_{q=1}^Q L_q + \sum_{u=1}^U L_u) \times (2\sum_{q=1}^Q N_q + \sum_{u=1}^U N_u)$:

$$\begin{aligned} [\mathbf{n}_q^j, \mathbf{E}_{eq}^j] &= -[\mathbf{n}_q^j, \mathbf{E}_{0q}^j], & q = 1, 2, \dots, Q, & \quad j = 1, 2, \dots, L_q, \\ [\mathbf{n}_u^j, \mathbf{E}_{eu}^j] &= -[\mathbf{n}_u^j, \mathbf{E}_{0u}^j], & u = 1, 2, \dots, U, & \quad j = 1, 2, \dots, L_u, \end{aligned} \quad (7)$$

где \mathbf{n}_q^j , \mathbf{E}_{eq}^j и \mathbf{E}_{0q}^j — векторы нормали и электрических компонент рассеянного (5) и возбуждающего полей в точке коллокации M_j на поверхности тела с номером q , а \mathbf{n}_u^j , \mathbf{E}_{eu}^j и \mathbf{E}_{0u}^j — векторы нормали и тех же компонент полей в точках коллокации M'_j на поверхности проводника с номером u .

Отметим, что в отличие от общепринятого подхода при рассмотрении тонких проводников (см., например, [7]), при котором пренебрегают азимутальной составляющей поверхностного тока по сравнению с продольной составляющей, в предлагаемом подходе граничные условия в каждой точке коллокации на поверхности проводников ставятся как для продольной, так и для азимутальной компонент полного поля. Кроме того, в отличие от обычно используемых систем линейных алгебраических уравнений метода дискретных источников [8], элементы матриц которых выражаются в конечном виде, $2(\sum_{q=1}^Q L_q + \sum_{u=1}^U L_u) \sum_{u=1}^U N_u$ элементов матрицы системы (7) содержат интегралы, которые возникают вследствие применения в соответствии с (5) необходимых дифференциальных операторов к функции $\mathbf{\Pi}'_u$.

Решение системы (7) определяется путём минимизации функционала

$$\Phi = \sum_{q=1}^Q \sum_{j=1}^{L_q} \left| [\mathbf{n}_q^j, \mathbf{E}_{eq}^j + \mathbf{E}_{0q}^j] \right|^2 + \sum_{u=1}^U \sum_{j=1}^{L_u} \left| [\mathbf{n}_u^j, \mathbf{E}_{eu}^j + \mathbf{E}_{0u}^j] \right|^2. \quad (8)$$

Задача минимизации функционала (8) решается методом сопряжённых градиентов.

После решения задачи минимизации (определения неизвестных дипольных моментов $p_{\tau 1}^{nq}$, $p_{\tau 2}^{nq}$ и элементов тока J_{ui}) необходимые характеристики рассеянного поля определяются из (5).

Контроль точности решения осуществляется путём вычисления относительного значения функционала (8) на сетке точек, представляющей собой совокупность точек коллокации и промежуточных к ним точек, выбираемых на поверхностях S_q и S'_u всех тел и проводников, входящих в систему:

$$\Delta = (\Phi'/\Phi_0)^{1/2}, \quad \Phi_0 = \sum_{q=1}^Q \sum_{m=1}^{L'_q} |[\mathbf{n}_q^m, \mathbf{E}_{0q}^m]|^2 + \sum_{u=1}^U \sum_{m=1}^{L'_u} |[\mathbf{n}_u^m, \mathbf{E}_{0u}^m]|^2, \quad (9)$$

где Φ' — значение функционала (8) на указанной выше совокупности точек, Φ_0 — значение соответствующей нормы падающего поля на этой же совокупности точек; L'_q — число точек коллокации и промежуточных точек на поверхности тела с номером q , L'_u — число точек коллокации и промежуточных точек на поверхности проводника с номером u .

2. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

На основе изложенного выше метода создана программа для расчёта компонент рассеянного поля и контроля точности полученного решения. Максимальное число тел, предусмотренное программой, равно пяти. Каждое из тел может быть либо трёхосным эллипсоидом, либо конечным цилиндром с эллиптическим поперечным сечением (с плоскими или скруглёнными торцами), либо параллелепипедом, либо тонким проводником. Острые кромки у цилиндров с плоскими торцами, а также рёбра и вершины параллелепипедов предполагаются скруглёнными; радиус скругления равен $0,01\lambda$, где $\lambda = 2\pi/k_e$ — длина волны падающего излучения. Указанный радиус скругления выбран на основании результатов вычислительных экспериментов по исследованию влияния радиуса скругления на скорость сходимости итерационного процесса метода сопряжённых градиентов и точность получаемого решения. При меньших радиусах скругления наблюдается уменьшение скорости сходимости итерационного процесса и точности получаемого решения. Предполагается также, что все проводники — круговые цилиндры со скруглёнными торцами, диаметр которых мал по сравнению с длиной волны λ и длиной цилиндра.

Помимо типов геометрии рассеивателей, входными параметрами программы являются координаты центров O_q объёмных тел и координаты осевых линий тонких проводников, определяющие взаимное расположение тел в рассеивающей структуре, а также размеры рассеивателей (в длинах волн), возбуждающее поле $\{\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0\}$, параметры подобия K_{eq} , числа точек размещения диполей N_q и точек коллокации L_q для каждого из тел, а также числа участков разбиения N_u и точек коллокации L_u для каждого из тонких проводников. Минимизация функционала (8) осуществляется методом сопряжённых градиентов; итерационный процесс останавливается при условии, что относительное изменение функционала на каждой из десяти последних итераций не превышает 0,001.

При помощи данной программы выполнена серия вычислительных экспериментов для оценки преимуществ рассматриваемого варианта метода вспомогательных источников при анализе рассеяния на тонких проводниках, для сравнения результатов с известными и получения характеристик рассеяния конкретных структур и распределений токов вдоль тонких проводников при наличии вблизи них объёмных тел. Некоторые из полученных результатов представлены ниже.

Рис. 2 иллюстрирует выигрыш в точности получаемого решения при использовании предлагаемого метода для расчёта рассеяния на тонком цилиндрическом проводнике круглого сечения по сравнению с использованием для этой же цели ранее предложенного [5] варианта метода вспомогательных источников, в котором пары тангенциально ориентированных диполей дискретным образом размещаются на вспомогательной поверхности, подобной поверхности рассеивателя. Длина

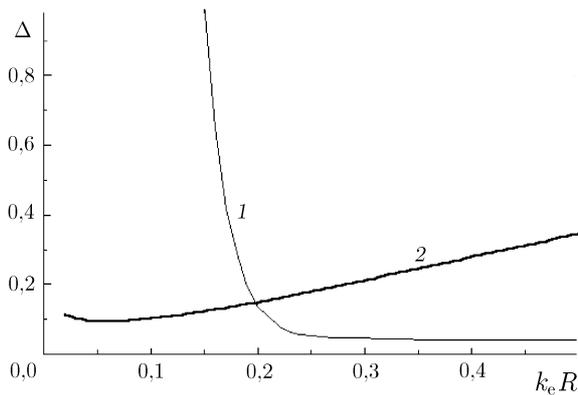


Рис. 2. Зависимость нормы невязки граничных условий от радиуса R цилиндрического проводника длиной $k_e l = 5,6$. Кривая 1 соответствует дискретному расположению диполей на вспомогательной поверхности; кривая 2 — непрерывно распределённому осевому току

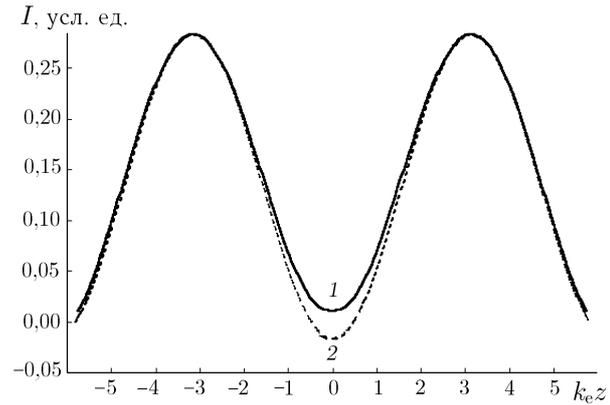


Рис. 3. Сравнение распределений токов, рассчитанных различными методами для цилиндрического проводника с длиной $k_e l = 11,6$. Кривая 1 соответствует предложенному в данной работе методу, кривая 2 — результаты работы [9]

цилиндрической части проводника $k_e l = 5,6$; ось проводника ориентирована вдоль оси z . Торцы проводника скруглены полусферами с радиусом, равным радиусу проводника. Проводник возбуждается плоской волной, падающей нормально к его оси, вектор электрического поля \mathbf{E}_0 падающей волны ориентирован вдоль оси проводника. По оси абсцисс отложен радиус проводника, выраженный в длинах волн, по оси ординат — относительная норма невязки (9) граничных условий.

Кривая 1 на рис. 2 соответствует результатам, полученным методом [5]. При применении этого метода вспомогательная поверхность S_e представляет собой цилиндр с длиной $k_e l = 5,6$ и радиусом $0,4k_e R$ с полусферическими «шапками» на торцах. Точки размещения диполей на поверхности S_e выбирались следующим образом: в каждом сечении $z = \text{const}$ равномерно по азимутальному углу φ располагались 4 точки; число сечений равно 64 на цилиндрической части и 2 на каждой из «шапок». Общее число точек размещения диполей равно 272. Точки коллокации на поверхности цилиндра расположены в тех же сечениях $z = \text{const}$, что и точки размещения диполей, но плотность их размещения выше: в каждом сечении расположено 8 точек. Общее число точек коллокации равно 544. Дипольные моменты на цилиндрической части проводника ориентированы вдоль ортов \mathbf{e}_z и \mathbf{e}_φ цилиндрической системы координат, на «шапках» — вдоль ортов \mathbf{e}_θ и \mathbf{e}_φ сферической системы координат. По этим же направлениям поставлены и граничные условия. Кривая 2 на рис. 2 соответствует результатам, полученным методом, предложенным в данной работе. В качестве вспомогательного источника выбран ток, непрерывно распределённый вдоль оси цилиндра. Линия тока разбита на 64 участка. Число участков разбиения линии тока равно числу сечений, в которых размещены диполи в предыдущем случае. Точки коллокации на поверхности цилиндра размещены в тех же сечениях $z = \text{const}$, что и при получении кривой 1; в каждом сечении равномерно по углу φ расположены четыре точки коллокации. Общее число точек коллокации равно 272. Направления, по которым поставлены граничные условия, выбраны такими же, как и при построении кривой 1. Вычисление интегралов, входящих в элементы матрицы системы (7), осуществлялось по формуле прямоугольников при последовательном увеличении числа разбиений участка $[l_{i-1u}, l_{iu}]$. В качестве значения интеграла принимался результат применения формулы прямоугольников на предыду-

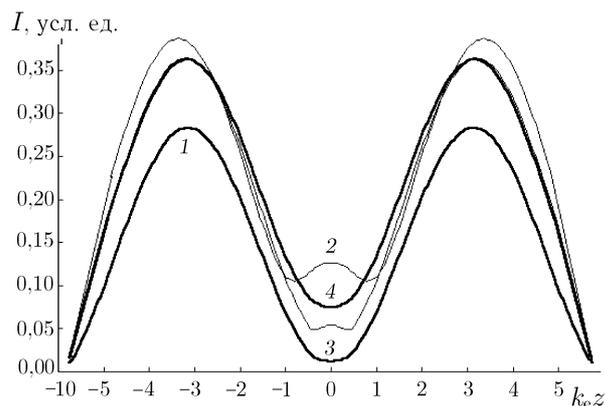


Рис. 4. Распределение тока вдоль проводника с длиной $k_e l = 11,6$ при наличии сферы радиуса $k_e R_s = 1$, расположенной на различных расстояниях r_0 от проводника. Кривая 1 соответствует случаю, когда сфера отсутствует, 2 — $r_0 = 0,05\lambda$, 3 — $r_0 = 0,5\lambda$, 4 — $r_0 = 4\lambda$

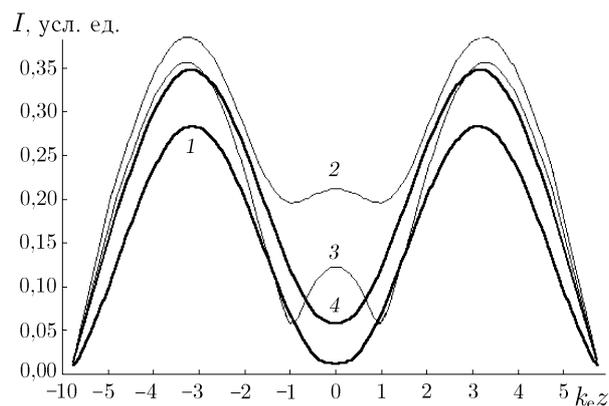


Рис. 5. Распределение тока вдоль проводника с длиной $k_e l = 11,6$ при наличии сфероида с полуосями $k_e a = k_e c = 3$ и $k_e b = 1$, расположенного на различных расстояниях r_0 от проводника. Кривая 1 соответствует случаю, когда сфероид отсутствует, 2 — $r_0 = 0,05\lambda$, 3 — $r_0 = 0,5\lambda$, 4 — $r_0 = 4\lambda$

щем разбиении, если последующее разбиение приводило к относительному изменению результата расчёта (по модулю) на величину $\delta < 0,001$. Вычислительный эксперимент показал, что время вычисления интегралов, входящих в элементы матрицы системы (7), существенно зависит от расстояния между рассматриваемым участком разбиения и соответствующей этому элементу точкой коллокации.

Как видно из рис. 2, для проводников с радиусом $k_e R < 0,2$ использование осевых токов в качестве вспомогательных источников приводит к существенному повышению точности расчёта. Для проводников с радиусом $k_e R \approx 0,2$ результаты, полученные с использованием дискретных источников и осевых токов, совпадают; при больших радиусах проводников предпочтение следует отдать методу [5], который обеспечивает гораздо более высокую точность решения задачи.

Рис. 3 иллюстрирует результаты сравнения распределения осевого вспомогательного тока для цилиндрического проводника с длиной $k_e l = 11,6$ и радиусом $k_e R = 0,05$, полученного предлагаемым методом (кривая 1), с распределением тока вдоль приёмного вибратора, полученным в работе [9] (кривая 2). Ось проводника ориентирована вдоль оси z ; проводник возбуждается плоской волной, падающей нормально к его оси так, что вектор \mathbf{E}_0 волны ориентирован вдоль оси проводника. По оси абсцисс отложено расстояние от середины проводника (вибратора), по оси ординат — модуль тока. При получении кривой 1 линия тока разбивалась на 128 участков. Число сечений $z = \text{const}$, в которых размещены точки коллокации, равно 128; в каждом сечении равномерно по углу φ расположены четыре точки коллокации. При данном числе разбиений и точек коллокации невязка (5) равна 0,08. При построении кривой 1 использована кубическая интерполяция полученной ступенчатой функции тока. Кривая 2, взятая из [9], получена методом интегрального уравнения в предположении, что радиус проводника много меньше длины волны.

Как видно из рис. 3, имеет место очень хорошее совпадение распределения осевого вспомогательного тока, полученного предлагаемым методом, с распределением физического тока вдоль проводника. Таким образом, предлагаемый метод пригоден, в том числе, для расчёта распределения тока вдоль тонких проводников.

Рис. 4 и 5 характеризуют влияние объёмных тел различных форм и размеров на распределение тока вдоль рассмотренного выше проводника длиной $k_e l = 11,6$ и радиусом $k_e R = 0,05$, расположенного на различных расстояниях от тел.

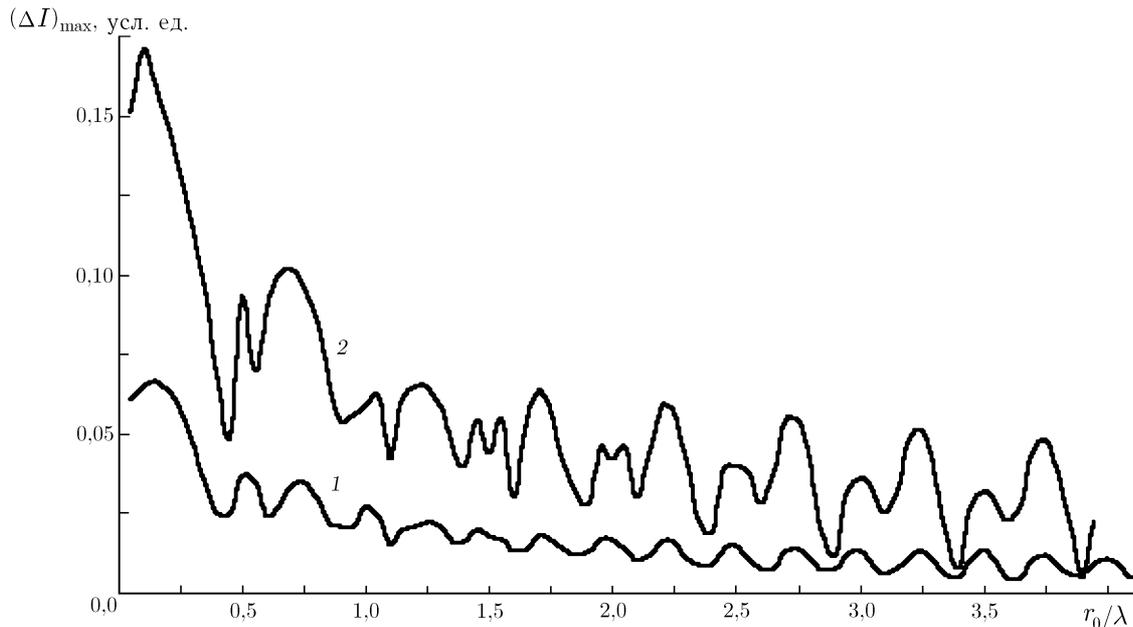


Рис. 6. Зависимость максимального отклонения распределения тока вдоль проводника от расстояния r_0 между проводником и объёмным телом. Кривая 1 соответствует случаю, когда в качестве объёмного тела выбрана сфера радиуса $k_e R_s = 1$, кривая 2 — случаю, когда объёмным телом является сфероид с полуосями $k_e a = k_e c = 3$ и $k_e b = 1$

Рис. 4 относится к случаю, когда в качестве объёмного тела выбрана сфера радиусом $k_e R_s = 1$. Начало отсчёта системы координат совмещено с центром сферы. Проводник, как и ранее, ориентирован вдоль оси z и расположен симметрично относительно сферы со стороны падающего поля. Последнее выбрано в виде плоской волны, распространяющейся вдоль положительного направления оси y , вектор \mathbf{E}_0 волны ориентирован вдоль оси проводника. По оси абсцисс отложено расстояние от середины проводника, по оси ординат — величина тока. Кривая 1 характеризует распределение тока в отсутствие сферы; кривые 2, 3 и 4 — распределение тока в случаях, когда наименьшее расстояние r_0 между поверхностями проводника и сферы равно $0,05\lambda$, $0,5\lambda$ и 4λ соответственно. Жирными линиями выделены распределения тока в случаях, когда сфера отсутствует (кривая 1) и когда она находится относительно далеко от проводника ($r_0 = 4\lambda$; кривая 4). В последнем случае можно ожидать уменьшение её влияния на распределение тока. В соответствии с предложенным подходом для представления рассеянного поля используются комбинированные вспомогательные источники в виде пар тангенциально ориентированных диполей, расположенных внутри сферы на вспомогательной поверхности ($K_e = 0,5$), которая также является сферой, и тока, непрерывно распределённого по оси проводника. Точки размещения диполей внутри сферы и точки коллокации на сфере распределены следующим образом. В каждом из 16 полусечений $\varphi = \text{const}$, отстоящих одно от другого на угловое расстояние $\Delta\varphi = 22,5^\circ$, равномерно по углу θ выбраны 16 точек размещения диполей. Линия тока внутри проводника разбита на 128 участков. Число поперечных сечений $z = \text{const}$, в которых размещены точки коллокации на поверхности проводника, выбрано равным 128; в каждом сечении равномерно по азимутальному углу расположены четыре точки коллокации. При таких параметрах метода невязка (9) равна 0,1.

Рис. 5 относится к случаю, когда в качестве объёмного тела выбран сфероид с полуосями $k_e a = k_e c = 3$ и $k_e b = 1$. Начало системы координат совмещено с центром сфероида; полуоси $k_e a$, $k_e b$ и $k_e c$ ориентированы вдоль осей x , y и z соответственно. Как и ранее, проводник ориен-

тирован вдоль оси z и симметрично расположен относительно сфероида со стороны падающей плоской волны, распространяющейся вдоль оси y , с вектором \mathbf{E}_0 , ориентированным вдоль оси проводника. Как и в случае сферы, кривые 1 и 2–4 характеризуют распределения тока в случаях, когда сфероид отсутствует и когда наименьшее расстояние r_0 между поверхностями проводника и сфероида равно $0,05\lambda$, $0,5\lambda$ и 4λ соответственно. Вспомогательная поверхность, на которой располагаются диполи, в данном случае представляет собой сфероид с полуосями $0,5k_e a$, $0,5k_e b$ и $0,5k_e c$. Точки размещения диполей на вспомогательной поверхности распределены следующим образом. В каждом из 16 полусечений $\varphi = \text{const}$, отстоящих одно от другого на угловое расстояние $\Delta\varphi = 22,5^\circ$, равномерно по углу θ выбраны 32 точки размещения диполей. Алгоритм размещения точек коллокации по отношению к точкам расположения диполей выбран таким же, как в предыдущем случае. Число участков, на которые разбита линия тока внутри проводника, число и координаты сечений проводников, в которых расположены точки коллокации, а также число точек коллокации в каждом сечении сохранены такими же, как и в предыдущем случае. Невязка (9) при данных параметрах метода равна 0,15.

Как показывают результаты, представленные на рис. 4 и 5, влияние объёмных тел с размерами порядка длины волны на распределение тока в тонких проводниках может быть существенным, даже если расстояние между телом и проводником равно 4λ . В процессе анализа влияния объёмных тел на распределение тока в проводнике было установлено, что это влияние меняется монотонно с изменением расстояния между телом и проводником. Чтобы количественно оценить эту зависимость, была проделана следующая работа. Расстояние r_0 между телом и проводником менялось с шагом $\Delta r_0 = \lambda/24$. Для каждой точки исследуемого интервала расстояний находилось распределение тока I вдоль оси проводника. Найденное распределение тока сравнивалось с распределением тока I_0 в отсутствие тела, и для каждой точки оси проводника определялось отклонение $\Delta I = |I - I_0|$. Далее устанавливалось максимальное отклонение $(\Delta I)_{\max} = \max |I - I_0|$ на множестве точек оси проводника.

На рис. 6 представлена зависимость $(\Delta I)_{\max}$ от расстояния между проводником и телом. Кривая 1 соответствует случаю, когда в качестве объёмного тела выбрана сфера, а кривая 2 — случаю, когда объёмным телом является сфероид. Как и следовало ожидать, зависимость $(\Delta I)_{\max}$ от r_0 имеет осциллирующий характер. Амплитуда осцилляций постепенно уменьшается с ростом расстояния r_0 . При $r_0 > 1,5\lambda$ для сферы и $r_0 > 2\lambda$ для сфероида чередование максимумов и минимумов приобретает регулярный характер. Такое поведение кривых можно объяснить, предполагая, что возбуждающее поле на оси проводника является суперпозицией падающей и отражённой от поверхности тела волн. Максимальное влияние объёмного тела на распределение тока будет иметь место в том случае, когда эти волны складываются либо в фазе, либо в противофазе, потому что в этих случаях суммарное возбуждающее поле будет в наибольшей степени отличаться от поля \mathbf{E}_0 , которое является возбуждающим в отсутствие объёмных тел. Указанные волны складываются либо в фазе, либо в противофазе, когда разность их фаз удовлетворяет условию

$$2k_e r_0 + (\varphi_0 - \varphi_r) = m\pi,$$

где φ_0 — фаза волны \mathbf{E}_0 на оси проводника, φ_r — начальная фаза отражённой волны, m — целое число. Из этого условия следует, что расстояние между соседними максимумами зависимости $(\Delta I)_{\max}$ от r_0 равно $\lambda/4$, как это и видно из рис. 6. Постепенное уменьшение амплитуды осцилляций объясняется сферическим характером отражённой от объёмного тела волны.

Хорошее соответствие полученных результатов представлению о возмущающем поле на оси проводника как о суперпозиции поля \mathbf{E}_0 и некоторого поля, отражённого от тела, позволяет предположить, что при сформулированных выше условиях на r_0 задачу нахождения распределения тока в проводе можно решать без полного учёта взаимодействия рассеивателей, просто полагая,

что возбуждающее поле на оси проводника равно суперпозиции падающего поля \mathbf{E}_0 и поля \mathbf{E}_s , рассеянного телом в отсутствие провода.

Работа выполнена при частичной поддержке Национального научного фонда Швейцарии (грант № 7SUPJ062306).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Cooray M. F. R., Ciric I. R. // *Comput. Phys. Commun.* 1991. V. 68, No. 1–3. P. 279.
2. Yee K., Chen J. // *IEEE Trans. Antennas and Propag.* 1997. V. 45, No. 3. P. 354.
3. Hwu S. U., Wilton D. R., Rao S. M. // *Proc. Antennas and Propag.* 1988. V. 2. P. 890.
4. Ерёмин Ю. А. // *Радиотехника и электроника.* 1994. Т. 39, № 5. С. 740.
5. Дмитренко А. Г., Колчин В. А. // *Изв. вузов. Радиофизика.* 2000. Т. 43, № 9. С. 766.
6. Дмитренко А. Г., Колчин В. А. // *Радиотехника и электроника.* 2001. Т. 46, № 3. С. 252.
7. Тил Г. А. // *Вычислительные методы в электродинамике* / Под ред. Р. Митры. М.: Мир, 1977. С. 17.
8. Ерёмин Ю. А., Свешников А. Г. *Метод дискретных источников в задачах электромагнитной дифракции.* М.: Изд-во МГУ, 1992. 182 с.
9. Марков Г. Т. *Антенны.* Л.: Госэнергоиздат, 1960.

Томский госуниверситет,
г. Томск, Россия

Поступила в редакцию
16 июля 2002 г.

SCATTERING OF ELECTROMAGNETIC WAVES BY STRUCTURES COMPRISING THIN WIRES

A. G. Dmitrenko and V. A. Kolchin

Using the method of auxiliary sources, we solve the problem of electromagnetic-wave scattering by structures composed of a finite number of three-dimensional perfectly conducting bodies, some of which are thin wires. The capabilities of the developed software package is briefly described. We present some results of numerical calculations aimed at analyzing the influence of three-dimensional bodies placed near thin wires on the current distributions along these wires.

УДК 621.372.413:621.372.8

ЭФФЕКТИВНОСТЬ ВОЗБУЖДЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ В ОТКРЫТОМ РЕЗОНАТОРЕ, ВКЛЮЧЁННОМ В ВОЛНОВОДНУЮ ЛИНИЮ ПЕРЕДАЧИ

И. К. Кузьмичёв

На основании анализа эквивалентной схемы отражательного открытого резонатора (ОР) получено выражение, определяющее эффективность возбуждения колебаний в такой резонансной системе. Проведено сравнение эффективности возбуждения низшего типа колебаний в ОР с помощью апертурного и щелевого элементов связи. Показано, что в области малых дифракционных потерь эффективность возбуждения одного и того же типа колебаний с помощью каждого из рассмотренных элементов связи велика и составляет не менее 95 %. В случае больших расстояний между зеркалами для запитки ОР целесообразно использовать апертурный элемент связи, обеспечивающий более высокую эффективность возбуждения исследуемого типа колебаний.

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, для возбуждения открытых резонаторов (ОР) используются преимущественно сосредоточенные элементы связи, расположенные на поверхности одного из зеркал резонатора и выполненные в виде щели или отверстия [1], геометрические размеры которых, как правило, меньше длины волны λ задающего генератора. При этом в силу того, что ширина диаграммы направленности таких элементов связи больше угловой апертуры противоположного зеркала, часть мощности, поступающей в ОР от генератора, излучается в окружающее пространство, образуя нерезонансный фон [2, 3] и снижая эффективность возбуждения колебаний.

Теоретическим оценкам и экспериментальному изучению уровня нерезонансного фона при возбуждении колебаний в ОР с помощью сосредоточенных элементов связи посвящено большое количество работ [4–12]. Однако противоречивость полученных в них результатов требует проведения дополнительных исследований.

Снизить уровень нерезонансного фона удалось с помощью предложенного автором апертурного элемента связи [13], представляющего собой прямоугольную апертуру с размерами раскрытия несколько λ (см. рис. 1). В этом случае согласовать структуры поля возбуждающей волны (волна H_{10} в подводящем волноводе) и поля низшего типа колебаний ОР (TE_{m0q} , где q — число полуволн между зеркалами резонатора) удалось за счёт изменения

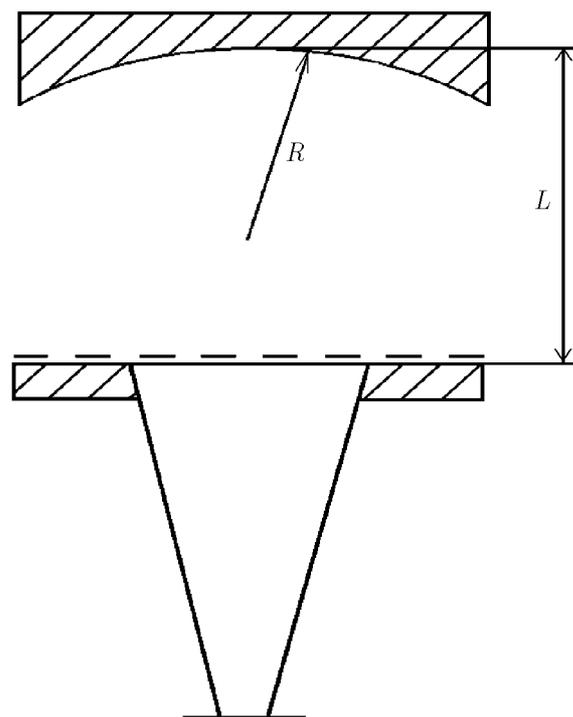


Рис. 1. ОР с апертурным элементом связи

геометрических размеров апертурного элемента связи, которые однозначно связаны с расстоянием между зеркалами резонатора L , радиусом кривизны R противолежащего зеркала и длиной волны λ . Связь ОР с подводющим волноводным трактом регулируется с помощью одномерных Е-поляризованных дифракционных решёток различного периода, расположенных в плоскости раскрыва элемента связи. Таким образом, возбуждение колебаний в ОР с помощью апертурного элемента связи по своим физическим особенностям ближе к распределённому возбуждению резонатора через полупрозрачную апертуру одного из зеркал [14]. При таком способе возбуждения осуществить полное преобразование подводимой к резонатору энергии в энергию резонансного колебания возможно только для одной конкретной геометрии ОР. В этом случае в плоскости входного зеркала резонатора должны совпадать структуры поля возбуждающей волны $ТЕМ_{mn}$ и поля колебания ОР $ТЕМ_{mnq}$, а также должны быть согласованы радиусы пятен возбуждающего и резонансного пучков и радиусы кривизны их фазовых поверхностей [14].

В связи с этим представляет интерес анализ эффективности возбуждения одного из типов колебаний в ОР с помощью апертурного элемента связи при перестройке резонатора, что часто бывает необходимо при проведении измерений. С практической точки зрения целесообразно также провести сравнительный анализ эффективности возбуждения одного и того же типа колебаний в ОР с помощью щелевого и апертурного элементов связи. Возбуждение ОР с помощью отверстия связи мы рассматривать не будем, поскольку в силу своей более высокой симметрии по сравнению с щелью такой элемент связи способствует возбуждению большего количества типов колебаний в резонаторе [8]. Исследованию этих вопросов и посвящена данная работа.

1. МЕТОД ЭКВИВАЛЕНТНЫХ СХЕМ

Как известно [15], представление резонатора СВЧ в виде колебательного контура с сосредоточенными параметрами имеет два основных недостатка. Во-первых, переходные процессы в резонаторе и в его эквивалентной схеме могут быть различными. Во-вторых, недостаточно полно раскрывается волновая природа процессов, происходящих в резонаторе. Если же в резонаторе существует невырожденный высокочастотный тип колебаний с малыми потерями мощности, то анализ энергетических характеристик резонансной системы можно провести с помощью метода эквивалентных схем [15, 16]. Такой подход является наиболее простым и наглядным. В этом случае резонатор можно представить в виде параллельного или последовательного колебательного контура. Выбор схемы определяется выбором плоскости отсчёта: если эту плоскость поместить в минимуме стоячей волны напряжения в волноводном тракте при расстройке, то резонатор представляется в виде параллельного колебательного контура, если же в максимуме — в виде последовательного колебательного контура [15].

Мы будем рассматривать представление отражательного ОР в виде параллельного колебательного контура с индуктивностью L_0 , ёмкостью C_0 и сопротивлением R_0 . В этом случае минимум стоячей волны напряжения в волноводе при расстройке расположен в плоскости $a-a$ (см. рис. 2а). Резонатор возбуждается с помощью идеального генератора тока, который характеризуется мгновенным значением тока i_T и имеет внутреннее сопротивление $R_T = \infty$ [17]. Устройство связи представим в виде четырёхполосника [18], связанного с генератором и резонатором с помощью идеальных трансформаторов тока с коэффициентами трансформации n_1 и n_2 соответственно. Связь ОР с подводющим волноводом будем описывать с помощью индуктивности связи $L_{св}$. Это отражает тот факт, что мы рассматриваем возбуждение резонатора щелевым элементом связи. Активными потерями в устройстве связи пренебрегаем, поскольку только в этом случае связь генератора с резонатором можно рассматривать с помощью идеальных трансформаторов [15]. Сопротивлением $R_{и}$ будем характеризовать связь ОР с внешним пространством.

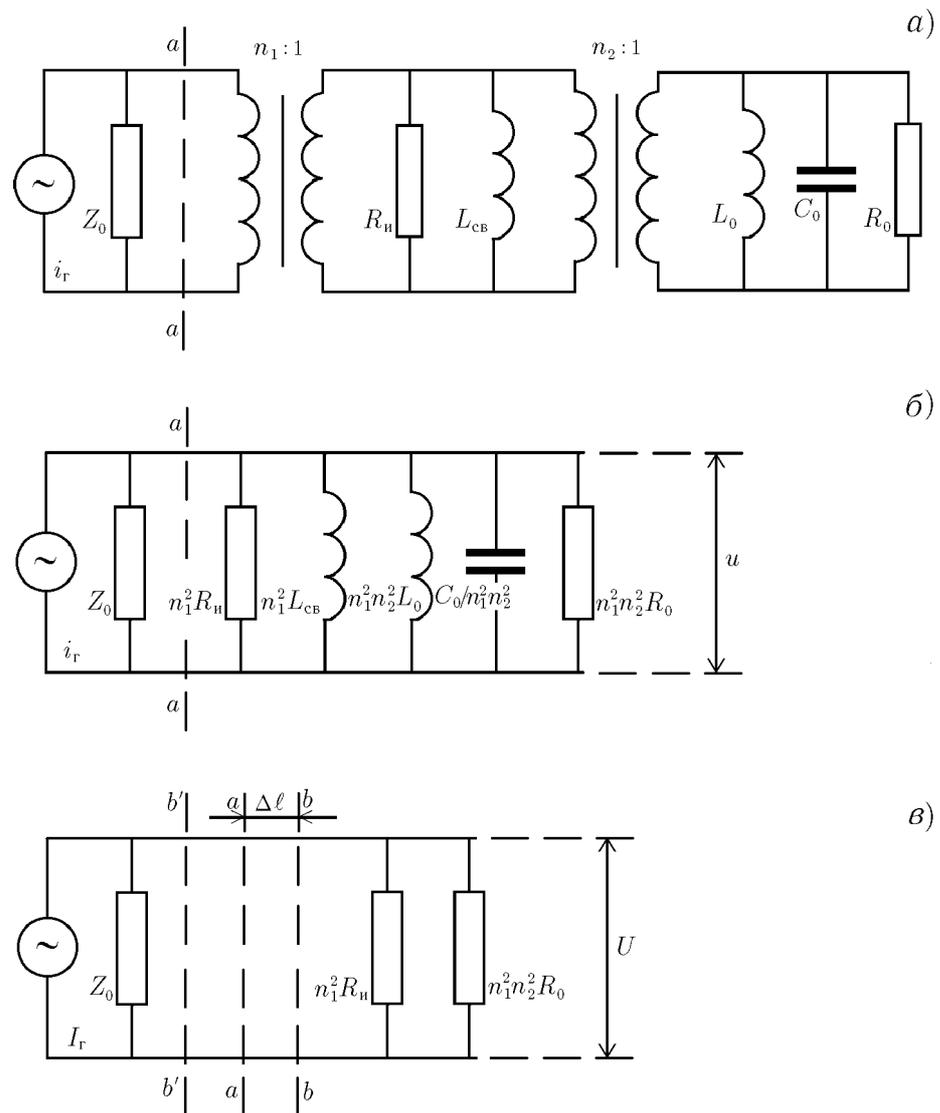


Рис. 2. Эквивалентные схемы отражательного ОР

Наличие этого сопротивления обусловлено тем, что параллельно с непосредственным возбуждением ОР происходит излучение СВЧ энергии из элемента связи в окружающее пространство. Вместе с тем генератор тока и резонатор с устройством связи нагружены на волновод с волновым сопротивлением Z_0 .

Проводить энергетический анализ резонансной системы удобнее с помощью приведённой эквивалентной схемы, изображённой на рис. 2б. Условием резонанса в такой колебательной системе является равенство нулю суммы всех реактивных проводимостей контура [17]:

$$\frac{\omega_p C_0}{n_1^2 n_2^2} - \frac{1}{n_1^2 n_2^2 \omega_p L_0} - \frac{1}{n_1^2 \omega_p L_{св}} = 0, \tag{1}$$

или

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC_0}}, \quad L = \frac{L_0 L_{св}}{n_2^2 L_0 + L_{св}}. \tag{2}$$

Тогда эквивалентная схема примет вид, изображённый на рис. 2в. Теперь можно найти действующее значение переменного напряжения U , приложенного к контуру:

$$U = I_{\Gamma} \frac{Z_0 n_1^2 R_{\text{и}} n_1^2 n_2^2 R_0}{Z_0 n_1^2 R_{\text{и}} + n_1^2 R_{\text{и}} n_1^2 n_2^2 R_0 + n_1^2 n_2^2 R_0 Z_0}, \quad (3)$$

где I_{Γ} — действующее значение тока. Мощность P_1 , рассеянную в резонаторе, определим как

$$P_1 = U^2 / (n_1^2 n_2^2 R_0), \quad (4)$$

а мощность P_2 , рассеянная в резонаторе и окружающем его пространстве, равна

$$P_2 = U^2 \frac{n_1^2 R_{\text{и}} + n_1^2 n_2^2 R_0}{n_1^2 R_{\text{и}} n_1^2 n_2^2 R_0}. \quad (5)$$

Эффективность η возбуждения колебания в ОР найдём как отношение мощностей P_1 и P_2 . С учётом выражений (3)–(5), опуская промежуточные выкладки, получим

$$\eta = 1 / \left(1 + \frac{n_1^2 n_2^2 R_0}{n_1^2 R_{\text{и}}} \right). \quad (6)$$

Наличие элемента связи на одном из зеркал ОР приведёт к тому, что при настройке в резонанс минимум стоячей волны напряжения в волноводном тракте сместится на расстояние $\Delta\ell$ из плоскости $a-a$ в плоскость $b-b$. Поскольку мы рассматриваем индуктивную связь, смещение произойдёт в сторону резонатора. Для ёмкостной связи ОР с подводящим волноводом минимум стоячей волны напряжения при настройке в резонанс сместится в сторону генератора (плоскость $b'-b'$). Такое смещение характерно для элементов связи в виде отверстия. Так как положительное направление отсчёта ℓ мы выбрали к генератору, то для индуктивной связи $\Delta\ell$ берётся со знаком минус, а для ёмкостной — со знаком плюс.

В момент резонанса в плоскости $b-b$ входное сопротивление $Z_{bb} = n_1^2 R_{\text{и}} n_1^2 n_2^2 R_0 / (n_1^2 R_{\text{и}} + n_1^2 n_2^2 R_0)$ и коэффициент отражения $\Gamma_{\text{ОР}}$ величины действительные. Но поскольку все рассуждения о представлении резонатора в виде параллельного колебательного контура с сосредоточенными параметрами справедливы только для плоскости $a-a$, то необходимо трансформировать Z_{bb} и $\Gamma_{\text{ОР}}$ в эту плоскость, где эти величины будут уже комплексными. Для трансформации Z_{bb} используем известное выражение [19], связывающее сопротивление в некотором сечении волноводной линии ($b-b$) с сопротивлением в произвольном сечении ($a-a$):

$$\frac{\dot{Z}_{aa}}{Z_0} = \frac{Z_{bb} + jZ_0 \operatorname{tg}(\varphi/2)}{Z_0 + jZ_{bb} \operatorname{tg}(\varphi/2)}, \quad (7)$$

где $\varphi = 2\gamma \Delta\ell$, $\gamma = 2\pi/\lambda_{\text{в}}$ — постоянная распространения в данном волноводном тракте, $\lambda_{\text{в}}$ — длина волны в волноводе. Аналогичным образом можно записать коэффициент отражения $\dot{\Gamma}_{\text{ОР}}$ в сечении $a-a$, зная коэффициент отражения $\Gamma_{\text{ОР}}$ в сечении $b-b$ [20]:

$$\dot{\Gamma}_{\text{ОР}} = |\Gamma_{\text{ОР}}| \exp(-j\varphi) = |\Gamma_{\text{ОР}}| (\cos \varphi - j \sin \varphi). \quad (8)$$

С другой стороны [19],

$$\frac{\dot{Z}_{aa}}{Z_0} = \frac{1 + \dot{\Gamma}_{\text{ОР}}}{1 - \dot{\Gamma}_{\text{ОР}}}. \quad (9)$$

Подставляя входное сопротивление Z_{bb} , выраженное через параметры эквивалентной схемы в момент резонанса, в (7), коэффициент отражения $\dot{\Gamma}_{OP}$, определяемый (8), в (9) и приравняв мнимые части выражений для \dot{Z}_{aa}/Z_0 , можно записать

$$1 + \frac{n_1^2 n_2^2 R_0}{n_1^2 R_{и}} = \sqrt{\frac{(1 - 2|\Gamma_{OP}| \cos \varphi + \Gamma_{OP}^2) \operatorname{tg}(\varphi/2) - 2|\Gamma_{OP}| \sin \varphi \operatorname{tg}^2(\varphi/2)}{(1 - 2|\Gamma_{OP}| \cos \varphi + \Gamma_{OP}^2) \operatorname{tg}(\varphi/2) + 2|\Gamma_{OP}| \sin \varphi}} \frac{n_1^2 n_2^2 R_0}{Z_0}. \quad (10)$$

Если теперь на ОР надеть металлический экран, это равносильно тому, что $R_{и} \rightarrow \infty$. Резонансная частота такого экранированного ОР (ЭОР) также будет определяться выражением (2) (см. рис. 2), а это значит, что при настройке ОР в резонанс минимум стоячей волны напряжения в линии снова сместится в плоскость $b-b$. При этом входное сопротивление $Z'_{bb} = n_1^2 n_2^2 R_0$ и коэффициент отражения $\Gamma_{ЭОР}$ величины действительные, которые по аналогии с Z_{bb} и Γ_{OP} трансформируем в сечение линии $a-a$ с помощью выражений (7) и (8). Приравняв мнимые части нормированного сопротивления в сечении $a-a$, определяемого, с одной стороны, с помощью Z'_{bb} , а с другой — коэффициентом отражения $\Gamma_{ЭОР}$, и опуская промежуточные выкладки, получаем

$$\frac{n_1^2 n_2^2 R_0}{Z_0} = \sqrt{\frac{(1 - 2|\Gamma_{ЭОР}| \cos \varphi + \Gamma_{ЭОР}^2) \operatorname{tg}(\varphi/2) + 2|\Gamma_{ЭОР}| \sin \varphi}{(1 - 2|\Gamma_{ЭОР}| \cos \varphi + \Gamma_{ЭОР}^2) \operatorname{tg}(\varphi/2) - 2|\Gamma_{ЭОР}| \sin \varphi \operatorname{tg}^2(\varphi/2)}}. \quad (11)$$

Теперь, используя соотношения (6), (10) и (11), запишем в окончательном виде выражение, определяющее эффективность возбуждения колебаний в ОР:

$$\eta = \sqrt{\frac{1 - 2|\Gamma_{ЭОР}| \cos \varphi + \Gamma_{ЭОР}^2 - 2|\Gamma_{ЭОР}| \sin \varphi \operatorname{tg}(\varphi/2)}{(1 - 2|\Gamma_{ЭОР}| \cos \varphi + \Gamma_{ЭОР}^2) \operatorname{tg}(\varphi/2) + 2|\Gamma_{ЭОР}| \sin \varphi}} \times \\ \times \sqrt{\frac{(1 - 2|\Gamma_{OP}| \cos \varphi + \Gamma_{OP}^2) \operatorname{tg}(\varphi/2) + 2|\Gamma_{OP}| \sin \varphi}{1 - 2|\Gamma_{OP}| \cos \varphi + \Gamma_{OP}^2 - 2|\Gamma_{OP}| \sin \varphi \operatorname{tg}(\varphi/2)}}. \quad (12)$$

Выразим добротности открытой резонансной системы через параметры эквивалентной схемы (см. рис. 2):

$$Q_0 = n_1^2 n_2^2 R_0 \frac{\omega_p C_0}{n_1^2 n_2^2} \quad (13)$$

— собственная добротность ОР,

$$Q_{св} = Z_0 \frac{\omega_p C_0}{n_1^2 n_2^2} \quad (14)$$

— добротность связи ОР с подводящим волноводом,

$$Q_{н} = \frac{Z_0 n_1^2 R_{и} n_1^2 n_2^2 R_0}{Z_0 n_1^2 R_{и} + n_1^2 R_{и} n_1^2 n_2^2 R_0 + n_1^2 n_2^2 R_0 Z_0} \frac{\omega_p C_0}{n_1^2 n_2^2} \quad (15)$$

— добротность нагруженного ОР. Если ввести добротность связи ОР с окружающим пространством как $Q_{вн} = n_1^2 R_{и} \frac{\omega_p C_0}{n_1^2 n_2^2}$, то из выражения (15) получаем

$$\frac{1}{Q_{н}} = \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_{св}} + \frac{1}{Q_{вн}}. \quad (16)$$

Полученное выражение отличается от известного соотношения теории объёмных резонаторов [15] наличием добротности связи ОР с внешним пространством. При надевании на ОР металлического экрана $R_{и} \rightarrow \infty$ ($Q_{вн} \rightarrow \infty$), и добротность нагруженного $Q_{н}$ как экранированного, так и

объёмного резонаторов будет определяться собственной добротностью Q_0 ОР и добротностью связи $Q_{св}$.

Введём коэффициент связи волноводного тракта с ОР как отношение мощности, рассеянной в подводящем волноводе, к мощности, рассеянной в резонаторе:

$$\beta_1 = \frac{U^2}{Z_0} : \frac{U^2}{n_1^2 n_2^2 R_0} = \frac{n_1^2 n_2^2 R_0}{Z_0} = \frac{Q_0}{Q_{св}}. \quad (17)$$

По аналогии введём коэффициент связи внешнего пространства с ОР как отношение мощности, рассеянной во внешнем пространстве, к мощности, рассеянной в резонаторе:

$$\beta_2 = \frac{U^2}{n_1^2 R_{и}} : \frac{U^2}{n_1^2 n_2^2 R_0} = \frac{n_1^2 n_2^2 R_0}{n_1^2 R_{и}} = \frac{Q_0}{Q_{вн}}. \quad (18)$$

Тогда выражение (15) для добротности нагруженного ОР примет вид $Q_{н} = Q_0 / (1 + \beta_1 + \beta_2)$. Оно отличается от известного соотношения для $Q_{н}$ [15] теории объёмных резонаторов наличием коэффициента связи со свободным пространством. С учётом принятых обозначений выражение (6) примет вид $\eta = 1 / (1 + \beta_2)$. Вводя коэффициент связи волноводного тракта с открытой резонансной системой (ОР и внешнее пространство) как отношение мощности, рассеянной во внешней цепи, к мощности, рассеянной в резонаторе и окружающем его пространстве:

$$\beta_3 = \frac{U^2}{Z_0} : \frac{U^2 (n_1^2 R_{и} + n_1^2 n_2^2 R_0)}{n_1^2 R_{и} n_1^2 n_2^2 R_0} = \frac{\beta_1}{1 + \beta_2} = \eta \beta_1, \quad (19)$$

выражение для добротности $Q_{н}$ нагруженного ОР можно представить в виде

$$Q_{н} = \frac{\eta Q_0}{1 + \beta_3}. \quad (20)$$

Полученное выражение показывает, что добротность нагруженного ОР в η раз меньше добротности нагруженного объёмного резонатора [15], имеющего такую же собственную добротность Q_0 и такую же связь с подводящим волноводом $\beta = \beta_3$. Выражение (20) позволяет по измеренным значениям $Q_{н}$, β_3 и η определить собственную добротность Q_0 ОР. При проведении экспериментальных исследований мы измеряем $\Gamma_{ЭОР}$ ($\beta_1 = (1 - \Gamma_{ЭОР}) / (1 + \Gamma_{ЭОР})$) и $\Gamma_{ОР}$ ($\beta_3 = (1 - \Gamma_{ОР}) / (1 + \Gamma_{ОР})$), поэтому выразим через эти коэффициенты связи основные параметры ОР:

$$\beta_2 = \frac{\beta_1 - \beta_3}{\beta_3}, \quad Q_0 = \frac{\beta_1 (1 + \beta_3)}{\beta_3} Q_{н}, \quad Q_{св} = \frac{Q_0}{\beta_1}, \quad Q_{вн} = \frac{\beta_3}{\beta_1 - \beta_3} Q_0.$$

2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Блок-схема экспериментальной установки, с помощью которой исследовалась эффективность возбуждения колебания TEM_{00q} в полусимметричном ОР, приведена на рис. 3. Резонатор образован плоским зеркалом 8 с диаметром 38 мм и сферическим фокусирующим зеркалом 9 с таким же диаметром и радиусом кривизны $R = 39$ мм. В центре плоского зеркала расположен элемент связи, который в одном случае представляет собой плавный переход с основного сечения волновода $3,6 \times 1,8$ мм к сечению $3,6 \times 0,16$ мм, а в другом — апертурный элемент связи с размерами $13,55 \times 9,25$ мм. Для регулирования связи с подводящим волноводом в раскрытие такого элемента связи помещена Е-поляризованная проволочная решётка с периодом 0,4 мм, выполненная из

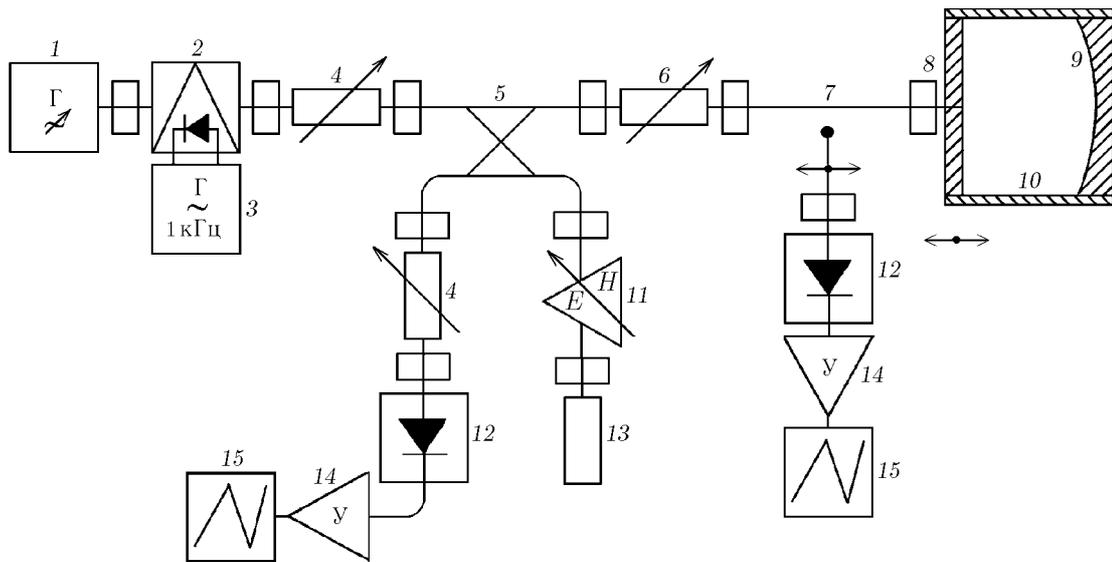


Рис. 3. Блок-схема экспериментальной установки

вольфрамового провода с диаметром 0,02 мм. Длина рупорного облучателя равна 150 мм и выбирается из условия равномерного распределения фазы поля в раскрыве (фазовая ошибка меньше 10°).

В качестве возбуждающего генератора используется отражательный клистрон 1 четырехмиллиметрового диапазона длин волн. СВЧ сигнал модулируется по амплитуде синусоидальным напряжением частотой 1 кГц от генератора 3 с помощью *p-i-n* диода 2. Развязка генератора с ОР осуществляется с помощью установочного аттенюатора 4. Для визуальной настройки системы в резонанс (когда отражённый от ОР сигнал минимален) в схеме предусмотрен дополнительный приёмный тракт. В состав этого тракта входят направленный ответвитель 5, развязывающий аттенюатор 4, кристаллический детектор 12, селективный усилитель 14, настроенный на частоту модулирующего напряжения, и осциллограф 15. В плече направленного ответвителя, содержащего согласованную нагрузку 13, расположен согласователь 11, позволяющий компенсировать возможные отражённые от волноводных соединений сигналы, которые могут исказить точность настройки в резонанс.

Сигнал, пропорциональный амплитуде стоячей волны напряжения в волноводе, регистрируется измерительной линией 7 и поступает в приёмный тракт, состоящий из кристаллического детектора 12, селективного усилителя 14 и осциллографа 15. Коэффициент стоячей волны напряжения исследуемого ОР вычисляется по формуле $10^{A/20}$, где A — разность между максимальным и минимальным значениями ослабления измерительного аттенюатора 6 в децибелах. Настройка системы в резонанс осуществляется перемещением плоского зеркала вдоль оси резонатора. Расстояние между отражателями определяется с помощью измерительного проекционного устройства ИЗВ-23 с точностью 1 мкм.

Для нахождения η по формуле (12) необходимо измерять коэффициенты отражения (коэффициенты стоячей волны напряжения) от ОР и ЭОР, т. е. от резонатора с таким же распределением поля, что и в открытом резонаторе, но при отсутствии излучения энергии в окружающее пространство. Для этого на ОР надевается экранирующий цилиндр 10. Однако следует подчеркнуть, что такое сопоставление двух резонаторов возможно только в тех случаях, когда, во-первых, омическими потерями в стенке экранирующего цилиндра, обусловленными продольной составляющей

магнитного поля резонансного колебания, можно пренебречь по сравнению с уровнем нерезонансного фона и, во-вторых, когда на резонансной частоте одновременно с исследуемым колебанием не происходит возбуждения других собственных типов колебаний ОР и ЭОР. В отсутствие этих колебаний, как показано в работе [21], в ЭОР существует колебание, параметры резонансного пучка которого совпадают с параметрами соответствующего колебания в ОР. Анализ, проведённый на основании работы [22], показал, что относительное изменение модуля коэффициента отражения за счёт омических потерь в стенке экранирующего цилиндра для исследуемой геометрии ОР не превышает 0,02%. Сравнивая это значение с изменением коэффициента отражения, вызванного экранированием ОР, видим, что омическими потерями в экране можно пренебречь. В этом случае ЭОР можно рассматривать как соответствующий ОР закрытый резонатор.

Экспериментально с помощью измерительной линии было показано, что смещения минимумов стоячей волны напряжения в линии при настройке в резонанс ОР и ЭОР, возбуждаемых одним и тем же элементом связи, с точностью до погрешности измерений совпадают во всём интервале изменения параметра L/R . Это подтверждает правильность вывода о равенстве резонансных частот ОР и ЭОР (см. выражение (2)). Для резонатора, возбуждаемого щелевым элементом связи, смещение минимума стоячей волны напряжения в волноводе составило $\Delta\ell = -0,034$ мм, а для ОР, возбуждаемого апертурным элементом связи $\Delta\ell = 0,024$ мм. Как видно, при возбуждении резонатора с помощью щелевого элемента связь ОР с волноводом носит индуктивный характер, а при возбуждении апертурным элементом связь ёмкостная.

На рис. 4 показаны зависимости $\Gamma_{ОР}$ (кривая 1) и $\Gamma_{ЭОР}$ (кривая 2) от изменения относительного расстояния L/R между зеркалами ОР и ЭОР, возбуждаемых щелевым элементом связи. Измерения выполнены для низшего типа колебаний резонатора. Увеличение $\Gamma_{ОР}$ и $\Gamma_{ЭОР}$ при $L/R = 0,727$ обусловлено возбуждением в резонаторе колебания типа «шепчущая галерея» [23], которое, взаимодействуя с исследуемым колебанием, локализовано в узкой полосе вблизи криволинейного отражателя. Резкое изменение $\Gamma_{ОР}$ и $\Gamma_{ЭОР}$ при $L/R = 0,468$ (полуконфокальная геометрия резонатора) и $L/R = 0,314$ связано с тем, что в этих случаях колебания $ТЕМ_{009}$ и $ТЕМ_{006}$ взаимодействуют с высшими типами колебаний резонансной системы. Здесь же показана зависимость коэффициента эффективности возбуждения η от относительного расстояния между зеркалами L/R при щелевом способе возбуждения ОР (кривая 3). Из рисунка видно, что по мере уменьшения расстояния между зеркалами резонатора дифракционные потери уменьшаются и η растёт, достигая при $L/R < 0,4$ приблизительно 95%, что согласуется с результатами, полученными в работах [8, 9]. В то же время в области больших дифракционных потерь ($L/R > 0,8$) эффективность возбуждения колебания $ТЕМ_{00q}$ в полусимметричном ОР не превышает 70%. Этот вывод хорошо согласуется с результатами работы [9].

Для сравнения на рис. 5 представлены зависимости $\Gamma_{ОР}$ (кривая 1) и $\Gamma_{ЭОР}$ (кривая 2) от L/R для ОР и ЭОР, возбуждаемых апертурным элементом связи. При $L/R = 0,723$ в резонаторе наряду с исследуемым колебанием, как и при щелевом способе запитки, возбуждается колебание типа «шепчущая галерея». В случае полуконфокальной геометрии ($L/R = 0,465$) тип колебаний $ТЕМ_{009}$ взаимодействует с высшим типом колебаний, возбуждаемым в ОР данной геометрии. Во всём остальном диапазоне перестройки в резонаторе возбуждается только исследуемое колебание, что связано с особенностями запитки ОР апертурным элементом связи [13]. На этом же рисунке показана зависимость η от L/R . Как видно, во всём диапазоне перестройки параметров резонатора эффективность возбуждения колебаний в ОР с помощью апертурного элемента связи выше. Отметим, что при $L/R < 0,4$ отличие эффективности возбуждения η при апертурном и щелевом способах запитки не превышает нескольких процентов, тогда как в области больших дифракционных потерь ($L/R > 0,8$) разность достигает уже 20%.

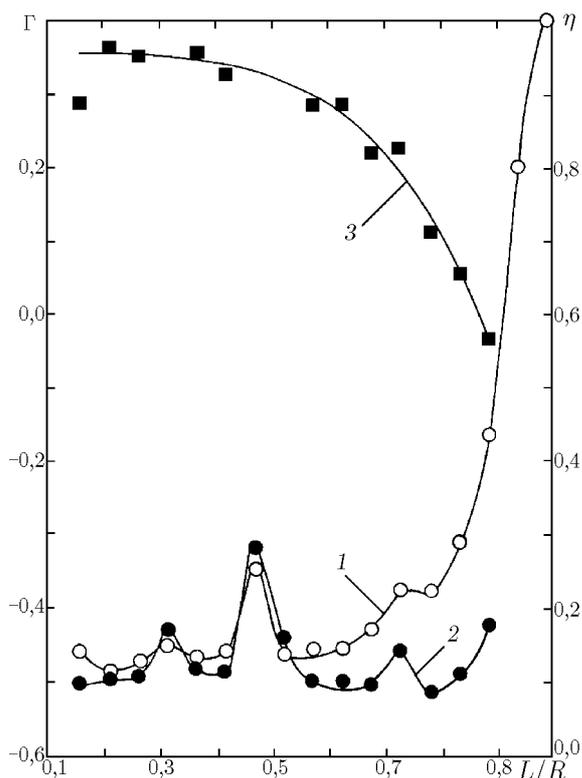


Рис. 4. Зависимости коэффициентов отражения Γ_{OP} , $\Gamma_{ЭOP}$ и эффективности возбуждения η от расстояния между зеркалами L/R для низшего типа колебаний, возбуждаемого в ОР с помощью щелевого элемента связи

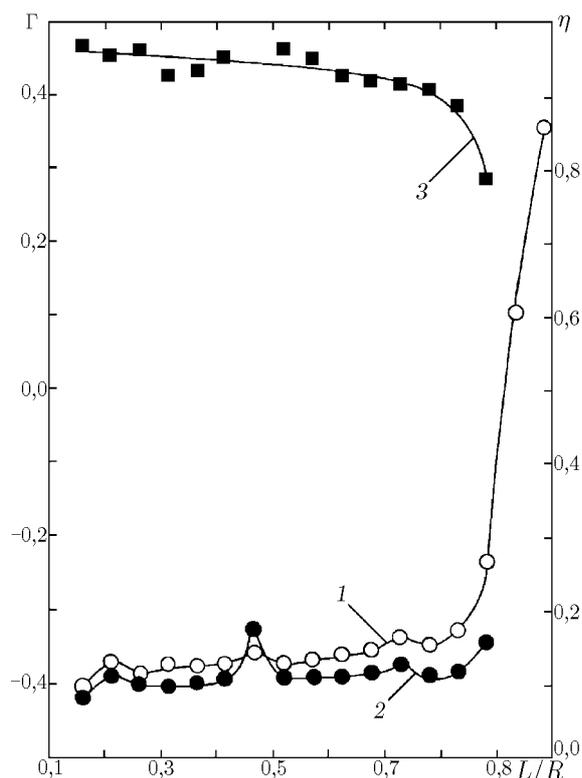


Рис. 5. Зависимости коэффициентов отражения Γ_{OP} , $\Gamma_{ЭOP}$ и эффективности возбуждения η от расстояния между зеркалами L/R для низшего типа колебаний, возбуждаемого в ОР с помощью апертурного элемента связи

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основании анализа эквивалентной схемы отражательного ОР были изучены энергетические характеристики и определены основные параметры такой резонансной системы. Получено выражение, позволяющее найти эффективность возбуждения колебания в резонаторе. Включение параллельно реактивности связи сопротивления $R_{н}$ на эквивалентной схеме отражает тот факт, что при возбуждении колебаний в ОР часть энергии излучается во внешнее пространство.

Проведённые экспериментальные исследования показали, что апертурный элемент связи обеспечивает более высокую эффективность возбуждения колебаний в резонаторе во всём диапазоне перестройки по сравнению с щелевым способом запитки. В области $L/R < 0,4$ отличие эффективности возбуждения низшего типа колебаний в ОР с помощью рассмотренных элементов связи не превышает нескольких процентов. При этом эффективность возбуждения очень высока и составляет не менее 95%. В области больших расстояний между зеркалами резонатора ($L/R > 0,6$) апертурный элемент связи обеспечивает значительно более высокую эффективность возбуждения колебаний (не менее 90%). Максимум добротности $Q_{н}$ нагруженного полусимметричного ОР достигается при $L/R \approx 0,75$ [24]. В связи с этим при использовании открытых резонансных систем в радиоспектроскопии, для измерения комплексной диэлектрической проницаемости различных материалов и т. д. для возбуждения колебаний целесообразно применять апертурный элемент

связи, который помимо более высокой эффективности возбуждения позволяет создавать измерительные ячейки на базе ОР, обладающие унимодальными резонансными характеристиками.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шестопалов В. П. Физические основы миллиметровой и субмиллиметровой техники. Т. 2. Киев: Наукова думка, 1985. 256 с.
2. Вайнштейн Л. А. Открытые резонаторы и открытые волноводы. М.: Сов. радио, 1966. 476 с.
3. Вайнштейн Л. А., Лесик Н. И., Рожнев А. Г., Трубецков Д. И. Лекции по электронике СВЧ и радиофизике. Кн. 3. Саратов: СГУ, 1983. С. 93.
4. Косарев Е. Л., Ципенюк Ю. М. // Электроника больших мощностей. 1968. Вып. 5. С. 105.
5. Cullen A. L. // Electron. Lett. 1970. V. 6, No. 8. P. 243.
6. Лебедюк И. И., Шевченко Ю. А. // Труды МВТУ. 1974. № 199. С. 193.
7. Овечкин С. М., Тагер А. С. // Электронная техника. Сер. Электроника СВЧ. 1985. № 3. С. 10.
8. Андросов В. П., Кузьмичёв И. К. Влияние на эффективность возбуждения открытого резонатора его параметров и связи с волноводом: Препринт № 354 ИРЭ АН Украины. Харьков, 1987.
9. Булгаков Б. М., Натаров М. П., Скрасанов В. Н. // ПТЭ. 1988. № 4. С. 118.
10. Veremey V. V., Kostenko A. A., Kuzmichev I. K., Khlopov G. I., Poyedinchuk A. E. // Int. J. of Infrared and Millimeter Waves. 1994. V. 15, No. 7. P. 1283.
11. Булгаков Б. М., Гламаздин В. В., Натаров М. П., Скрасанов В. Н. // Радиофизика и электроника. Харьков: ИРЭ НАН Украины, 1998. Т. 3, № 1. С. 11.
12. Мирошниченко В. С., Сенкевич Е. Б. // Радиофизика и электроника. Харьков: ИРЭ НАН Украины, 2002. Т. 7, № 2. С. 301.
13. Кузьмичёв И. К., Хлопов Г. И. // Квазиоптическая техника мм и субмм диапазонов волн. Харьков: ИРЭ АН УССР, 1989. С. 149.
14. Когельник Х. // Квазиоптика: Пер. с англ. и нем. / Под ред. Б. З. Каценеленбаума и В. В. Шевченко. М.: Мир, 1966. С. 210.
15. Альтман Дж. Устройства сверхвысоких частот: Пер. с англ. / Под ред. И. В. Лебедева. М.: Мир, 1968. 488 с.
16. Малышев В. А. // Радиотехника и электроника. 1976. Т. 21, № 8. С. 1631.
17. Курс теоретических основ электротехники / Е. П. Аржанников, Б. Я. Брунов, Л. М. Гольденберг, Н. А. Наумов / Под ред. Б. Я. Брунова. Л.: Изд-во Военной краснознамённой академии связи, 1957. 572 с.
18. Коцержинский Б. А., Мачусский Е. А., Першин Н. А., Тараненко В. П. // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1987. Т. 30, № 10. С. 13.
19. Лебедев И. В. Техника и приборы СВЧ. Т. 1. М.: Высшая школа, 1970. 440 с.
20. Малушков Г. Д. Антенны и устройства сверхвысоких частот. Ч. 1. Линии передачи и устройства сверхвысоких частот. М.: Моск. ин-т радиотехники, электроники и автоматики, 1973. 262 с.
21. Вертий А. А., Деркач В. Н., Попенко Н. А., Шестопалов В. П. // УФЖ. 1978. Т. 23, № 10. С. 1666.
22. Андросов В. П., Вертий А. А. // УФЖ. 1982. Т. 27, № 9. С. 1290.
23. Кузьмичёв И. К. // Доповіді НАН України. 1999. № 7. С. 76.
24. Суху Р. Ф. // ТИИЭР. 1963. Т. 51, № 1. С. 106.

Институт радиофизики и электроники НАН Украины
им. А. Я. Усикова,
г. Харьков, Украина

Поступила в редакцию
30 мая 2002 г.

**EFFICIENCY OF MODE EXCITATION IN AN OPEN RESONATOR CONNECTED TO A
WAVEGUIDE**

I. K. Kuz'michev

Based on an analysis of the equivalent circuit of a reflection open resonator (OR), we derive an expression for the efficiency of mode excitation in such a resonance system and compare the efficiency of excitation of the lowest OR mode by aperture and slot couplers. It is shown that the excitation efficiency of the same mode by each of the considered couplers is high for small diffraction losses and amounts to no less than 95%. To excite an OR with a large distance between the mirrors, it is expedient to use an aperture coupler ensuring a higher efficiency of excitation of the studied mode.

УДК 530.1:621.38

ВЫНУЖДЕННЫЕ РЕЗОНАНСНЫЕ ПРОЦЕССЫ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ПОЛЯ ТЕМ-ЛОВУШКИ С КОЛЕБЛЮЩИМИСЯ ЗАРЯДАМИ

А. Ф. Курин

Теоретически рассмотрены резонансные процессы в электромагнитной ловушке, которая образована циркулярно поляризованным стоячим высокочастотным полем плоских однородных волн и однородным магнитостатическим полем, ориентированным в направлении распространения волн (ТЕМ-ловушка). В отсутствие магнитостатического поля описан режим резонансного усиления поля ловушки ансамблем первоначально несфазируемых осцилляторов. При наличии магнитостатического поля рассмотрен режим резонансного ускорения зарядов от тепловых до релятивистских скоростей при ограниченном движении частиц. Показано, что колебания зарядов в ловушке подобны флаттеру в механических системах. Эффективный энергообмен происходит благодаря механизму взаимодействия М-типа.

ВВЕДЕНИЕ

Результаты данной работы, как и работ [1–3], расширяют изложенные в [4–8] представления о локализации заряженных частиц высокочастотными полями и вынужденных процессах при взаимодействии зарядов с полем ловушки.

Если снять введённое в [4–7] ограничение на амплитуду электрического поля и, значит, на амплитуду колебаний частиц значениями, при которых время пролёта частиц через область неоднородного поля становится соизмеримым с периодом колебаний поля (малый угол пролёта), то появляется возможность резонансного взаимодействия зарядов с высокочастотным полем. Физически резонанс обусловлен близостью частоты поля ω и частоты осцилляций частиц в потенциальной яме в узле стоячей волны [5]. В случае циркулярно поляризованных волн частота осцилляций частиц близка к частоте колебаний в магнитном поле в узле стоячей волны. При близости указанных частот за счёт магнитной силы высокочастотного поля колебания частиц с частотой ω в плоскости, поперечной направлению распространения волн (поперечное направление), возбуждают резонансные колебания в направлении распространения волн (продольное направление). Аналогично под действием магнитной силы продольные осцилляции в потенциальной яме приводят к резонансному движению в поперечном направлении. Существование резонансных режимов подтверждается анализом корней характеристического уравнения линеаризованной по своим переменным (координатам и проекциям скорости) системы уравнений движения частицы в модели, рассмотренной в [1–3]. Отметим высокую эффективность взаимодействия. Так, при ограниченном движении зарядов в резонансном режиме можно получить усиление с КПД, близким к единице [2, 3], а также ускорение частиц от тепловой до релятивистской скорости $v \sim 0,8c$, где c — скорость света в вакууме [3]. Из нерезонансных режимов взаимодействия интересен случай, когда поле усиливается ансамблем частиц с равномерным распределением по всем возможным углам влёта частиц в область взаимодействия [1].

Энергообмен поля и зарядов, а также траектории движения частиц могут быть вычислены только на основе нелинейных релятивистских уравнений движения. Однако до сих пор [2,

3] при нелинейном анализе методом усреднения в качестве порождающей использовалась линейная система уравнений, описывающая малые колебания нерелятивистской частицы. Такой подход ограничивал рамки анализа, поскольку позволял изучать лишь режимы взаимодействия при малых нелинейностях, т. е. в случае слаборелятивистских частиц и слабой неоднородности высокочастотного поля на траекториях зарядов.

В настоящей работе векторное релятивистское уравнение движения заряженной частицы в электромагнитном поле двух циркулярно поляризованных волн, образующих стоячую волну (ТЕМ-ловушка), преобразовано к системе уравнений, при наличии магнитостатического поля описывающих колебания в системе двух связанных осцилляторов. Эта система уравнений даёт возможность изучать как резонансные, так и нерезонансные режимы взаимодействия существенно релятивистских частиц с полем ловушки, поскольку уже в качестве порождающего уравнения в методе усреднения используется релятивистское нелинейное уравнение, совпадающее с уравнением маятника. Приближённое решение данного уравнения при больших углах отклонения маятника от положения равновесия известно с высокой точностью. Указанная система уравнений связанных осцилляторов преобразуется далее к системе уравнений для переменных Ван-дер-Поля, т. е. для амплитуд и фаз колебаний частиц с двумя степенями свободы. Описанный подход позволил проанализировать в настоящей работе энергообмен и траектории релятивистских частиц при резонансе в отсутствие магнитостатического поля. Показано, что в ансамбле неизохронных осцилляторов возможна фазовая группировка и генерация высокочастотного поля в результате взаимодействия О-типа. При этом частицы, совершая ограниченные колебания в направлении распространения волн, дрейфуют в поперечном направлении [7].

Рассматривается также режим резонансного ускорения частиц от тепловых до релятивистских скоростей в случае ограниченного движения зарядов при наличии магнитостатического поля. Характер колебаний частиц при этом подобен флаттеру в механических системах [9, 10]. Благодаря нелинейностям (вследствие релятивизма и неоднородности высокочастотного поля) выбором параметров флаттер можно ограничивать на уровне релятивистских скоростей. Приводится оценка достижимых скоростей. Движение зарядов в ловушке остаётся ограниченным в пространстве как в направлении магнитостатического поля, так и в плоскости, нормальной силовым линиям этого поля. Эти выводы следуют из анализа нелинейного уравнения консервативного осциллятора для амплитуды первой гармоники продольных колебаний, полученного из усреднённой системы уравнений в первом приближении метода усреднения с помощью трёх интегралов этой системы. Оценки показывают, что энергия, приобретаемая частицей в ловушке, распределяется между продольными и поперечными колебаниями заряда приблизительно поровну. Доказывается, что энергообмен при флаттере обусловлен взаимодействием М-типа.

Особенностью резонансного взаимодействия ансамбля частиц, отличающихся начальными фазами, с переменным полем ловушки в случае малой начальной энергии частиц (слабовозбуждённые осцилляторы) является их быстрая (за время порядка периода быстрых колебаний) фазовая группировка. Поэтому близкими являются медленные движения осцилляторов в ансамбле. Достижимые скорости частиц ансамбля слабо зависят от величины и направления их начальных скоростей при условии, что эти начальные скорости малы.

Как и в [1–3], задача рассматривается в приближении заданных амплитуд волн, пространственный заряд не учитывается. Все результаты аналитической теории проверялись численными расчётами на ЭВМ.

1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Рассмотрим движение отрицательного заряда $-e$ в однородном магнитостатическом поле \mathbf{B}_0 ,

направленном вдоль оси z декартовой системы координат x, y, z , и высокочастотном стоячем поле, образованном двумя бегущими навстречу друг другу вдоль оси z циркулярно поляризованными электромагнитными волнами, векторы напряжённости полей в которых вращаются в направлении, противоположном циклотронному вращению заряда в поле \mathbf{B}_0 (обыкновенные волны). Векторный потенциал стоячей волны равен

$$\mathbf{A} = \frac{E_0}{k} \sin(hz) (\cos \omega t, -\sin \omega t, 0), \quad (1)$$

где E_0 — амплитуда электрического поля \mathbf{E} , $h = nk$, $k = \omega/c$, n — показатель преломления немагнитной среды. Релятивистское уравнение движения для импульса \mathbf{p} частицы запишется в виде

$$\begin{aligned} \frac{dp_x}{dt} &= -\frac{eB_0}{c} \frac{dy}{dt} + \frac{e}{c} \frac{dA_x}{dt}, & \frac{dp_y}{dt} &= \frac{eB_0}{c} \frac{dx}{dt} + \frac{e}{c} \frac{dA_y}{dt}, \\ \frac{dp_z}{dt} &= -\frac{enE_0}{c} [v_x \cos(\omega t) - v_y \sin(\omega t)] \cos(hz), \end{aligned} \quad (2)$$

где v_x, v_y — составляющие скорости. Интегрируя уравнения (2) для p_x, p_y с начальными условиями $p_x(t_0) = p_{x0}, p_y(t_0) = p_{y0}, x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0, z(t_0) = z_0$, получаем

$$\begin{aligned} p_x &= p_{x0} - \frac{eB_0}{c} (y - y_0) + \frac{eA_x}{c} - \frac{eE_0}{\omega} \sin(hz_0) \cos(\omega t_0), \\ p_y &= p_{y0} + \frac{eB_0}{c} (x - x_0) + \frac{eA_y}{c} + \frac{eE_0}{\omega} \sin(hz_0) \sin(\omega t_0). \end{aligned} \quad (3)$$

Используя эти выражения, а также (1), релятивистскую формулу

$$\mathbf{v} = \frac{c^2 \mathbf{p}}{W} \quad (4)$$

и дифференциальное уравнение для энергии W

$$\frac{dW}{dt} = -e(\mathbf{v}, \mathbf{E}), \quad (5)$$

из уравнения (2) для p_z получаем записанное в безразмерном виде уравнение

$$\ddot{Z} + \Omega^2 \sin(Z) \cos(Z) = q\Omega^2 \left(X' \cos Z - n^{-2} \dot{Z} Y' \sin Z \right) + q_t \Omega^2 \left(n^{-2} \dot{Z} \sin(Z) \sin(\tau) - \cos(Z) \cos(\tau) \right). \quad (6)$$

Здесь $Z = hz$, X' и Y' — координаты частицы во вращающейся с частотой ω системе отсчёта, выраженные через координаты в лабораторной системе $X = h(x - x_0)$, $Y = h(y - y_0)$ по формулам

$$X' = X \sin T + Y \cos T, \quad Y' = -X \cos T + Y \sin T, \quad (7)$$

$T = \omega t$, $\Omega = n\varepsilon/\gamma$ — отношение гирочастоты в магнитном поле nE_0 к частоте поля ω , $\varepsilon = eE_0/(m_0 c \omega)$ — параметр электрического поля, m_0 — масса покоя заряда, $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ — релятивистский фактор, $v = |\mathbf{v}|$, $q = B_0/(nE_0)$ — постоянный параметр, равный отношению индукции магнитостатического поля к индукции магнитной составляющей в узле стоячей волны. Другой постоянный параметр в (6)

$$q_t = \frac{\gamma_0}{\varepsilon} \left[\beta_{t0}^2 - \frac{2\varepsilon}{\gamma_0} \beta_{t0} \sin(Z_0) \cos(T_0 + \varphi_0) + \frac{\varepsilon^2}{\gamma_0^2} \sin^2 Z_0 \right]^{1/2} \quad (8)$$

выражается через начальные значения (при $T = T_0 = \omega t_0$) релятивистского фактора γ_0 , координаты $Z_0 = hz_0$, поперечной \mathbf{B}_0 составляющей скорости $\beta_{t0} = v_{t0}/c$, $v_{t0} = (v_{x0}^2 + v_{y0}^2)^{1/2}$, при этом $\text{tg } \varphi_0 = v_{y0}/v_{x0}$. Параметр q_t обращается в нуль, если первоначально частица не имеет поперечной поля \mathbf{B}_0 (и направлению распространения волн) составляющей скорости ($\beta_{t0} = 0$) и находится в узле стоячей волны ($Z_0 = 0$). Назовём q_t параметром начальных поперечных возмущений. Фаза τ в (6) определяется выражением $\tau = T + \tau_0$, где

$$\text{tg } \tau_0 = \frac{v_{y0}/c + (\varepsilon/\gamma_0) \sin Z_0 \sin T_0}{v_{x0}/c - (\varepsilon/\gamma_0) \sin Z_0 \sin T_0}.$$

В уравнении (6) и далее точки над переменными означают дифференцирование по T . Слагаемые с Z в правой части уравнения (6) имеют релятивистскую природу.

Уравнения для координат X, Y следуют из выражений (3) с учётом формул (1), (4):

$$\dot{X} = -q\Omega Y + \Omega \sin(Z) \cos(T) + q_t \Omega \cos \tau_0, \quad \dot{Y} = q\Omega X - \Omega \sin(Z) \sin(T) + q_t \Omega \sin \tau_0. \quad (9)$$

Дифференцируя формулы преобразования координат (7) и подставляя (9) в полученные выражения, получаем уравнения для координат X', Y' во вращающейся системе отсчёта:

$$\dot{X}' + Y' = -q\Omega Y' + q_t \Omega \sin \tau, \quad \dot{Y}' - X' + \Omega \sin Z = q\Omega X' - q_t \Omega \cos \tau. \quad (10)$$

Наконец, для зависящей от T функции $\Omega = n\varepsilon/\gamma$ после дифференцирования Ω по T с учётом формул (1), (3)–(5) получаем уравнение

$$\dot{\Omega} = \frac{\Omega^3}{n^2} (-qY' + q_t \sin \tau) \sin Z. \quad (11)$$

Система уравнений (6), (10), (11) описывает движение частицы во вращающейся системе координат X', Y', Z и интегрируется с начальными условиями $T = T_0, Z = Z_0, \Omega = \Omega_0 = n\varepsilon/\gamma_0, X' = Y' = 0$. Система уравнений (6), (9), (11), если в (6), (11) подставить (7), описывает движение в лабораторной системе координат X, Y, Z и интегрируется с теми же начальными условиями.

Заметим, что линеаризация (6), (10), (11) по Z, X', Y', Ω приводит к системе уравнений

$$\begin{aligned} \ddot{Z} + \Omega_0^2 Z - q\Omega_0^2 X' &= -q_t \Omega_0^2 \cos \tau, \\ \dot{X}' + (1 + q\Omega_0) Y' &= q_t \Omega_0 \sin \tau, \quad \dot{Y}' - (1 + q\Omega_0) X' + \Omega_0 Z = -q_t \Omega_0 \cos \tau. \end{aligned} \quad (12)$$

Нелинейности в системе (6), (10), (11) связаны с неоднородностью высокочастотного поля (зависимость потенциала \mathbf{A} от Z) и релятивистской зависимостью массы частицы от энергии. В лабораторной системе координат после линеаризации получаем уравнения

$$\begin{aligned} \ddot{Z} + \Omega_0^2 Z &= q\Omega_0^2 (X \sin T + Y \cos T) - q_t \Omega_0^2 \cos \tau, \\ \dot{X} + q\Omega_0 Y &= \Omega_0 Z \cos T + q_t \Omega_0 \cos \tau, \quad \dot{Y} - q\Omega_0 X = -\Omega_0 Z \sin T + q_t \Omega_0 \sin \tau. \end{aligned} \quad (13)$$

Отметим некоторые особенности движения частиц, которые следуют из приведённых уравнений. Наиболее простую картину взаимодействия имеем при $q = q_t = 0$. Здесь взаимное влияние двух колебаний отсутствует. Однако существует одностороннее влияние. В этом случае, как видно из системы (6), (10), (11), а также из систем (12) и (13), колебания в направлении распространения волн, вдоль оси z (продольные колебания), происходят независимо от колебаний в плоскости xy или $x'y'$ (поперечных колебаний). В то же время за счёт магнитной составляющей высокочастотного поля продольное движение возбуждает поперечные колебания. Здесь возможен резонанс.

При $q \neq 0$ (существует магнитостатическое поле), как видно из системы (6), (10), (11), а также из (12), (13), каждая из указанных систем уравнений описывает связанные колебания. При этом в лабораторной системе отсчёта в линейном приближении одна парциальная частота равна циклотронной частоте $enE_0/(m_0c)$ в магнитном поле nE_0 , вторая — циклотронной частоте $eB_0/(m_0c)$ в магнитостатическом поле B_0 . Во вращающейся системе отсчёта вторая парциальная частота складывается из циклотронной частоты в поле B_0 и частоты ω . Кроме отмеченного влияния продольного движения частиц на поперечное, имеется влияние поперечного движения на продольное. Физически это обеспечивается продольной составляющей силы, обусловленной высокочастотным магнитным полем, которая возникает при возмущениях поперечной скорости, вызванных действием на частицы магнитостатического поля.

2. ОСНОВНЫЕ РЕЖИМЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

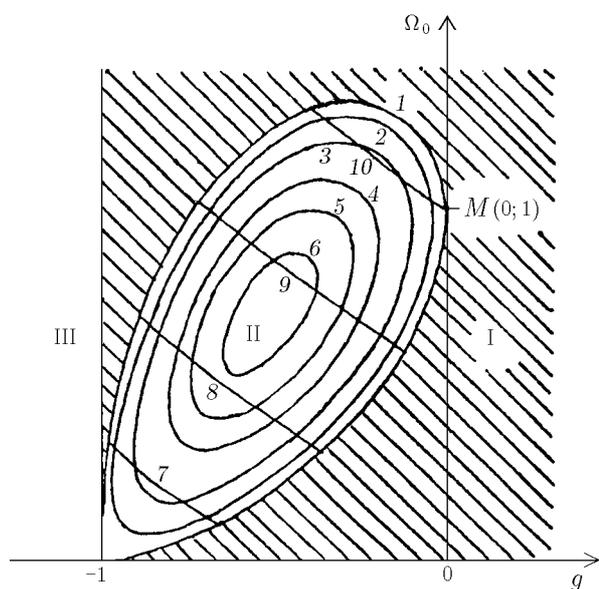


Рис. 1

комплексно-сопряжённых корней характеристического уравнения $k_1 = \delta' + i\delta''$, $k_2 = \delta' - i\delta''$, $k_3 = -\delta' + i\delta''$, $k_4 = -\delta' - i\delta''$, где

$$\delta' = \left(2\Omega_0 \sqrt{g'} - \Omega_0^2 - g'^2\right)^{1/2} / 2,$$

$$\delta'' = \left(2\Omega_0 \sqrt{g'} + \Omega_0^2 + g'^2\right)^{1/2} / 2.$$

В этом случае система (12) описывает колебания с экспоненциально нарастающей и затухающей амплитудами. Режим имеет место при g и Ω_0 , лежащих в области II на рис. 1. Границей областей I, II является замкнутая кривая 1, на которой $D = 0$. В области II нанесены линии $\delta' = \text{const}$ (кривые 2–6 соответствуют $\delta' = 0,01; 0,15; 0,2; 0,22; 0,24$) и $\delta'' = \text{const}$ (кривые 7–10 соответствуют $\delta'' = 0,25; 0,5; 0,75; 1$). Наконец, при $g' < 0$ (область III на рис. 1) имеем два мнимых и два вещественных корня различных знаков. Решение системы (12) в этом случае неограниченное, т. е. представляет собой суперпозицию трёх компонент: колебательного движения с постоянной амплитудой, а также экспоненциально затухающей и экспоненциально нарастающей составляющих.

Характеристическое уравнение линейной системы (12) является биквадратным и имеет корни $k_1 = i\lambda_1$, $k_2 = -i\lambda_1$, $k_3 = i\lambda_2$, $k_4 = -i\lambda_2$, где

$$\lambda_1 = \left(\Omega_0^2 + g'^2 + \sqrt{D}\right)^{1/2} / \sqrt{2},$$

$$\lambda_2 = \left(\Omega_0^2 + g'^2 - \sqrt{D}\right)^{1/2} / \sqrt{2}.$$

Здесь $g' = 1 + g$, $g = q\Omega_0 = eB_0/(m_0c\omega\gamma_0)$ — отношение гирочастоты в поле \mathbf{B}_0 к частоте ω , $D = (\Omega_0^2 + g'^2)^2 - 4\Omega_0^2g'$. В зависимости от знака величин g' и D получаем три варианта корней. При $g' > 0$, $D > 0$ все корни мнимые, различные, и система (12) описывает гармонические двухчастотные колебания с частотами λ_1 и λ_2 . Этому случаю ограниченного решения на рис. 1 соответствует заштрихованная область I значений параметров g , Ω_0 . При $g' > 0$, $D < 0$ имеем две пары

Заметим, что рассмотренные варианты корней характеристического уравнения имеют место и в теории флаттера механической модели [9].

Система (12) описывает связанные колебания двух осцилляторов, причём элементом связи является магнитостатическое поле ($g \neq 0$). Парциальными частотами колебаний являются Ω_0 и g' . В слабом магнитостатическом поле ($|g| \ll 1$) связь между осцилляторами является слабой, и при близких частотах $\Omega_0 \approx g' \approx 1$ (вблизи точки M на рис. 1) происходят биения. В области II на рис. 1 биения дают экспоненциально нарастающие колебания, известные в механических системах как флаттер, а движение в области III известно как дивергенция [9, 10].

Ниже будет показано, что благодаря нелинейностям, обусловленным неоднородностью высокочастотного поля и релятивизмом, флаттер можно ограничивать. При этом частицы способны ускоряться от тепловых до релятивистских скоростей. Достижимые скорости слабо зависят от величины и направления начальных скоростей частиц.

3. ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯДА В ОТСУТСТВИЕ МАГНИТОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ И НАЧАЛЬНЫХ ПОПЕРЕЧНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

В отсутствие магнитостатического поля и начальных поперечных возмущений ($q = q_t = 0$) уравнения во вращающейся системе отсчёта следуют из (6), (10), (11), а из (6), (9), (11) имеем уравнения в неподвижной системе отсчёта.

Из (11) получаем $\Omega = \text{const}$, а поскольку величина Ω^{-1} пропорциональна энергии частицы, то последняя остаётся постоянной в процессе взаимодействия частицы со стоячей волной, если частица инжектируется в узле поля в направлении распространения циркулярно поляризованных волн, образующих стоячую волну. Эта закономерность впервые получена в обзоре [11], физический механизм явления описан в [12].

Из уравнений видно, что продольное движение не зависит от поперечного и описывается нелинейным уравнением маятника. Приближённое решение этого уравнения для колебательного режима маятника при больших углах отклонения от положения равновесия $Z = 0$ известно с высокой точностью [13]. Во втором приближении асимптотического метода неизохронные колебания маятника описываются выражениями

$$2Z = a \cos \psi - \left(\frac{a^3}{192} + \frac{a^5}{4096} \right) \cos 3\psi + \frac{a^5}{20480} \cos 5\psi,$$

$$\psi = \nu (T - T_0) + \zeta, \quad \nu = \Omega \left(1 - \frac{a^2}{16} + \frac{a^4}{1024} \right). \quad (14)$$

Если частица инжектируется при $T = T_0$, $Z = 0$ в положительном направлении оси z , то $\zeta = -\pi/2$. Неизохронность обусловлена как релятивистской зависимостью Ω от γ , так и зависимостью частоты ν от амплитуды a .

Из уравнений также следует, что поперечное движение зависит от продольного. Используя выражение (14) для Z , вычислим $\sin Z$, удерживая члены до пятого порядка по a включительно:

$$\sin Z = c_1 \cos \psi + c_3 \cos(3\psi) + c_5 \cos(5\psi),$$

$$c_1 = \frac{a}{2} - \frac{a^3}{64} + \frac{a^5}{64^2}, \quad c_3 = -\frac{a^3}{128} + \frac{a^5}{2 \cdot 64^2}, \quad c_5 = \frac{a^5}{2 \cdot 64^2}. \quad (15)$$

Амплитуда a первой гармоники и частота ν являются величинами постоянными.

Из уравнений для X, Y после интегрирования с использованием (15) получаем поперечные координаты в неподвижной системе отсчёта:

$$X = w_1 + \bar{X}, \quad Y = w_2 + \bar{Y}, \quad (16)$$

где w_1, w_2 — произвольные константы интегрирования, а \bar{X}, \bar{Y} — частные решения:

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \frac{\Omega}{2} \sum_{i=1}^3 c_{2i-1} \left(\frac{\sin[T + (2i-1)\psi]}{1 + (2i-1)\nu} + \frac{\sin[T - (2i-1)\psi]}{1 - (2i-1)\nu} \right), \\ \bar{Y} &= \frac{\Omega}{2} \sum_{i=1}^3 c_{2i-1} \left(\frac{\cos[T + (2i-1)\psi]}{1 + (2i-1)\nu} + \frac{\cos[T - (2i-1)\psi]}{1 - (2i-1)\nu} \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Из формул (17) следует, что в поперечном движении имеется синхронизм при частоте осцилляций в магнитном поле nE_0 , близкой к частоте поля ω ($\nu \approx 1$). Имеется также синхронизм на нечётных гармониках указанной гирочастоты ($3\nu \approx 1$; $5\nu \approx 1$; ...). При этом частица, совершая медленные колебания с частотой, равной резонансной расстройке, перемещается на большие расстояния в поперечном направлении. На это движение накладываются быстрые колебания на комбинационных частотах. Медленное движение является синхронным дрейфом.

Анализ составляющих $\dot{\bar{X}}, \dot{\bar{Y}}$ скорости поперечного движения показывает, что при строгом синхронизме движение становится неограниченным. При этом проекции дрейфовой скорости $\dot{\bar{X}} = -(c_1\Omega/2) \sin T_0$, $\dot{\bar{Y}} = -(c_1\Omega/2) \cos T_0$ при $\nu = 1$, $\dot{\bar{X}} = (c_3\Omega/2) \sin(3T_0)$, $\dot{\bar{Y}} = (c_3\Omega/2) \cos(3T_0)$ при $3\nu = 1$, $\dot{\bar{X}} = -(c_5\Omega/2) \sin(5T_0)$, $\dot{\bar{Y}} = -(c_5\Omega/2) \cos(5T_0)$ при $5\nu = 1$.

Траектории поперечного движения для различных T_0 определяются из (16), (17) при начальных условиях $T = T_0$, $X = Y = 0$, $\zeta = -\pi/2$. При этом функции $X(T), Y(T)$ записываются в виде рядов по нечётным степеням a . Если отбросить слагаемые третьего и пятого порядка по a , получим траектории, соответствующие линейной системе уравнений движения, когда справедливы аппроксимации $\sin Z \approx Z$, $\cos Z \approx 1$. В этом случае при $\nu = 1$ (строгий синхронизм) траектории представляют собой циклоиды, в которых колебания происходят с частотой 2ω , а дрейф — со скоростью $v_0/2$, где v_0 — начальная скорость частицы по оси z , в направлении, противоположном вектору переменного магнитного поля в момент влёта T_0 . Учёт слагаемых с a^3, a^5 даёт поправки к указанным траекториям.

Умножая уравнение (6) для Z при $q = q_t = 0$ на \dot{Z} и интегрируя с начальными условиями $Z = 0, \dot{Z} = nv_0/c = n\beta_0$, получим известный закон сохранения энергии, который имеет место при продольных колебаниях:

$$\dot{Z}^2 + \Omega^2 \sin^2 Z = (n\beta_0)^2. \quad (18)$$

Полагая здесь $\dot{Z} = 0$ и $\sin^2 Z < 1$, находим условие ограниченности движения частицы:

$$\Omega > n|\beta_0|, \quad \text{или} \quad \varepsilon > \sqrt{\gamma^2 - 1}. \quad (19)$$

Это неравенство связывает энергию частицы $W \propto \gamma$ и амплитуду электрического поля, при которых происходит отражение. При выполнении условия (19) частица совершает вдоль оси z ограниченные периодические колебания с амплитудой Z_m , которая находится из (18) при $\dot{Z} = 0$. С другой стороны, Z_m определяется во втором приближении асимптотического метода [13] как

$$Z_m = \frac{a}{2} - \frac{a^3}{384} - \frac{a^5}{2048}. \quad (20)$$

Тогда при ограниченных колебаниях энергия частицы $W \propto \Omega^{-1}$ и амплитуда первой гармоники a оказываются связанными соотношением

$$\Omega^{-1} = \frac{1}{n\beta_0} \sin\left(\frac{a}{2} - \frac{a^3}{384} - \frac{a^5}{2048}\right). \quad (21)$$

Для оценок рабочей длины волны λ и напряжённости электрического поля может быть полезной формула

$$\Omega = 3,1 \cdot 10^{-2} n \gamma^{-1} E_0 \left[\frac{\text{кВ}}{\text{см}} \right] \lambda[\text{м}],$$

из которой следует, что при реализуемой в эксперименте напряжённости электрического поля резонанс на первой гармонике ($\Omega \approx \nu \approx 1$) можно получить в метровом диапазоне длин волн.

4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

Преобразуем систему уравнений (6), (9), (11) в лабораторной системе отсчёта к виду, удобному для использования метода усреднения. Если постоянные параметры q , q_t отличны от нуля и малы, то синхронизм сохраняется. При этом Ω , как следует из (11), является медленной переменной, поэтому будем следовать методике решения систем с медленно меняющимися параметрами [14, 15]. Так, в качестве порождающей системы уравнений выберем (6), (9), (11) при $q = q_t = 0$. Решение (14), (16), (17) этой системы содержит произвольные константы a , ζ , Ω , w_1 , w_2 и может быть записано в виде

$$2Z = Q(a, \psi), \quad 2\dot{Z} = \nu(a, \Omega)Q_\psi(a, \psi), \quad X = w_1 + \bar{X}(a, \psi, \Omega, T), \quad Y = w_2 + \bar{Y}(a, \psi, \Omega, T).$$

Следуя методу вариации произвольных постоянных, при преобразовании системы (6), (9), (11) указанные константы будем считать зависящими от T . После обычных вычислений [14, 15] получим следующие дифференциальные уравнения для новых переменных в лабораторной системе отсчёта:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \frac{2\Omega^2}{\Delta_1} [q(w_1 \sin T + w_2 \cos T + \bar{X}') - q_t \cos \tau] Q_\psi \cos \frac{Q}{2} = F_1, \\ \dot{\psi} &= \nu - \frac{2\Omega^2}{\Delta_1} [q(w_1 \sin T + w_2 \cos T + \bar{X}') - q_t \cos \tau] Q_a \cos \frac{Q}{2} = F_2, \\ \dot{\Omega} &= \frac{\Omega^3}{n^2} [q(w_1 \cos T - w_2 \sin T + \nu \bar{X}'_\psi) + q_t \sin \tau] \sin \frac{Q}{2} = F_3, \\ \dot{w}_1 &= -q\Omega(w_2 + \bar{Y}) + q_t \Omega \cos \tau_0 - \bar{X}_a F_1 - \bar{X}_\psi (F_2 - \nu) - \bar{X}_\Omega F_3, \\ \dot{w}_2 &= q\Omega(w_1 + \bar{X}) + q_t \Omega \sin \tau_0 - \bar{Y}_a F_1 - \bar{Y}_\psi (F_2 - \nu) - \bar{Y}_\Omega F_3, \end{aligned} \quad (22)$$

где Q определяется выражением (14), $\sin(Q/2)$ — выражением (15), $\cos(Q/2)$ вычисляется с помощью (14):

$$\cos \frac{Q}{2} = 1 - \frac{a^2}{16} + \frac{a^4}{1024} - \left(\frac{a^2}{16} - \frac{a^4}{512} \right) \cos(2\psi) + \frac{a^4}{1024} \cos(4\psi). \quad (23)$$

Определитель

$$\Delta_1 = Q_\psi (\nu Q_{a\psi} + \nu_a Q_\psi) - \nu Q_{\psi\psi} = \Omega r(a), \quad (24)$$

где $r(a) = a(1 - a^2/8 + 15a^4/64^2)$, не зависит от ψ [14, 15]; ν_a , Q_ψ , $Q_{a\psi}$ и $Q_{\psi\psi}$ — соответствующие частные производные от ν и Q . Далее, в (22)

$$\bar{X}' = \Omega \left[\frac{c_1}{1 - \nu^2} \cos \psi + \frac{c_3}{1 - 9\nu^2} \cos(3\psi) + \frac{c_5}{1 - 25\nu^2} \cos(5\psi) \right], \quad (25)$$

\bar{X} и \bar{Y} определяются выражениями (17), \bar{X}_a , \bar{X}_ψ , \bar{X}_Ω , \bar{Y}_a , \bar{Y}_ψ , \bar{Y}_Ω и \bar{X}'_ψ — соответствующие частные производные от \bar{X} , \bar{X}' и \bar{Y} .

Уравнения, входящие в систему (22), являются точными. Если q и q_t малы, то медленными переменными будут a , Ω , w_1 и w_2 . Фаза ψ является быстрой переменной. Система (22) интегрируется с начальными условиями $T = T_0$, $a = a_0$, $\psi = \psi_0 = \zeta$, $\Omega = \Omega_0$, $w_1 = w_{10} = -\bar{X}(a_0, \Omega_0, \psi_0, T_0)$, $w_2 = w_{20} = -\bar{Y}(a_0, \Omega_0, \psi_0, T_0)$. Условия для w_1 и w_2 получаются из начальных условий $X = X_0 = 0$, $Y = Y_0 = 0$.

Аналогичным образом могут быть преобразованы уравнения (6), (10), (11) во вращающейся системе координат.

5. РЕЗОНАНСНОЕ ДВИЖЕНИЕ В ОТСУТСТВИЕ МАГНИТОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ ПРИ НАЛИЧИИ НАЧАЛЬНЫХ ПОПЕРЕЧНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Рассмотрим некоторые особенности движения и энергообмена зарядов с полем в случае, когда $q = 0$ ($\mathbf{B}_0 = 0$) и $q_t \neq 0$. Эти особенности следуют из приведённых выше уравнений. Из уравнений (6), (13) для Z следует, что при наличии начальной поперечной скорости ($q_t \neq 0$) в переменном магнитном поле \mathbf{B} имеется продольная периодическая (с частотой ω) сила, зависящая от момента влёта τ_0 . При $\Omega \approx 1$, $3\Omega \approx 1$, ... эта сила является резонансной, и продольные колебания раскачиваются.

Мгновенная мощность (5) взаимодействия заряда с полем пропорциональна выражению $d(\Omega^{-1})/dT = -\Omega^{-2}\dot{\Omega}$, где $\dot{\Omega}$ даётся формулой (11). При $q = 0$, $Z_0 = 0$ имеем

$$\dot{\gamma} = -\varepsilon\beta_{t0} (\gamma_0/\gamma) \sin(\tau) \sin(Z),$$

откуда следует, что энергообмен, отсутствовавший, как указывалось, при $\beta_{t0} = 0$, существует благодаря наличию первоначальной поперечной скорости частицы. При $\Omega \approx 1$, $3\Omega \approx 1$, ... энергообмен согласно (15) носит резонансный характер, причём поперечная сила $\varepsilon \sin(\tau) \sin(Z)$ со стороны электрического поля на траекториях колеблющихся вдоль оси z частиц является неоднородной. Известно [16], что в этом случае ансамбль первоначально несфазированных частиц способен отдавать свою энергию полю вследствие фазовой группировки.

Отметим также, что при резонансе ($\Omega \approx 1$) электрическое поле является сильным ($\varepsilon \sim 1$). Однако и в сильном поле возможен медленный энергообмен ($|\dot{\gamma}| \ll 1$) при условии, что начальная поперечная скорость мала ($\beta_{t0} \ll 1$).

При $q = 0$ и $q_t \neq 0$ в системе (6), (9), (11) уравнения (6) и (11) не зависят от поперечных координат X , Y , а в системе (22) первые три уравнения не зависят от w_1 , w_2 . Таким образом, продольное движение может быть рассчитано независимо от поперечного.

При подстановке разложений (14), (15), (23) в систему уравнений (22) для a , ψ , Ω выделяется фаза $\Phi_1 = \psi - \tau$, которая при $\nu \approx 1$ и $q_t \ll 1$ является медленной переменной. При таком продольно-поперечном резонансе в первом приближении метода усреднения получим систему уравнений для медленных переменных a , Ω , Φ_1 и поперечных координат X , Y :

$$\dot{a} = \frac{2q_t\Omega^2 c_1}{\Delta_1} \sin \Phi_1, \quad \dot{\Omega} = -\frac{q_t\Omega^3 c_1}{2n^2} \sin \Phi_1, \quad \dot{\Phi}_1 = \nu - 1 + \frac{2q_t\Omega^2}{\Delta_1} \frac{dc_1}{da} \cos \Phi_1,$$

$$\dot{X} = \frac{\Omega c_1}{2} \cos(\Phi_1 + \tau_0) + q_t \Omega \cos \tau_0, \quad \dot{Y} = \frac{\Omega c_1}{2} \sin(\Phi_1 + \tau_0) + q_t \Omega \sin \tau_0. \quad (26)$$

Усреднённые по «быстрым» фазам уравнения для X, Y получены из (9) при $q = 0$. Система (26) интегрируется с начальными условиями $T = T_0, a = a_0, \Omega = \Omega_0, \Phi_1 = \Phi_0 = -\pi/2 - T_0 - \tau_0, X = 0, Y = 0$. При этом Ω_0 и a_0 связаны соотношением (21).

Если $q_t \ll 1$ и $3\nu \approx 1$ (резонанс на третьей гармонике продольных колебаний), то выделяется «медленная» фаза $\Phi_3 = 3\psi - \tau$. В первом приближении метода усреднения приходим к системе уравнений, аналогичной (26). Следует лишь заменить c_1 на c_3, Φ_1 на Φ_3, ν на 3ν , множитель 2 в уравнении для a на 6. Система интегрируется с начальными условиями $T = T_0, a = a_0, \Omega = \Omega_0, \Phi_3 = -3\pi/2 - T_0 - \tau_0, X = 0, Y = 0$.

Из (26) следует интеграл

$$\frac{1}{\Omega} - \frac{1}{\Omega_0} = \frac{1}{4n^2} \int_{a_0}^a r(a) da = \frac{1}{8n^2} \left[a^2 - a_0^2 - \frac{1}{16}(a^4 - a_0^4) + \frac{5}{64^2}(a^6 - a_0^6) \right], \quad (27)$$

связывающий в любой момент энергию частицы $W \propto \Omega^{-1}$ и амплитуду первой гармоники a .

При резонансе на третьей гармонике вместо (27) получаем интеграл, который отличается от (27) только числовым множителем при n^2 (24 вместо 8).

В случае резонанса на первой гармонике остановимся подробно на энергообмене электромагнитного поля и ансамбля частиц в линейном по q_t режиме при равномерном распределении частиц по Φ_0 . Как обычно делается в задачах электроники при изучении стартовых режимов генераторов, а также процессов в усилителях в режиме слабого сигнала [17], представим величину Ω^{-1} , пропорциональную энергии частицы W , в виде ряда по степеням q_t , удерживая слагаемые с q_t^2 . Используя систему (26), после интегрирования по T и усреднения по Φ_0 получаем

$$\frac{1}{\Omega} = \frac{1}{\Omega_0} + q_t^2 \frac{\Omega_0^2}{4n^2} \left(1 - \frac{\Omega_0 a_0^2}{8n^2} \right) \frac{1 - \cos \chi}{\chi^2} T^2 + q_t^2 \frac{\Omega_0^3 a_0^2}{64n^2} \left(1 + \frac{2\Omega_0}{n^2} \right) \frac{2(1 - \cos \chi) - \chi \sin \chi}{\chi^3} T^3, \quad (28)$$

где $\chi = (\nu_0 - 1)T$. В этом выражении оставлены слагаемые с a^2 . Оно имеет все характерные особенности вещественной части электрической проводимости классической активной среды в [16].

Из формулы (28) следует, что кроме поглощения, описываемого слагаемым с T^2 , в системе осцилляторов при $\nu_0 < 1$ имеется вынужденное излучение (слагаемое с T^3) как результат взаимодействия О-типа. В итоге при $\nu_0 < 1$ возможно усиление ($\Omega^{-1} < \Omega_0^{-1}$). Энергообмен О-типа, как известно [11, 16, 17], обусловлен фазовой группировкой неизохронных осцилляторов.

Нелинейный анализ энергообмена проведём на основе численного решения системы (26). Ансамбль частиц, равномерно распределённых по Φ_0 , моделировался N крупными частицами. КПД, усреднённый по Φ_0 , вычислялся по формуле

$$\eta = \frac{NW_0 - \sum_{i=1}^N W_i}{N(W_0 - m_0 c^2)} = \frac{1 - (\Omega_0/N) \sum_{i=1}^N \Omega_i^{-1}}{1 - \gamma_0^{-1}}, \quad (29)$$

где W_0 — начальная энергия частицы. При $\eta > 0$ имеем усиление поля.

Зависимости $\eta = \eta(T)$ имеют характер осцилляций, стремящихся к некоторому пределу при $T \rightarrow \infty$, что согласуется с выводами работы [18]. На рис. 2 в качестве примера при $N = 16, n = 1$,

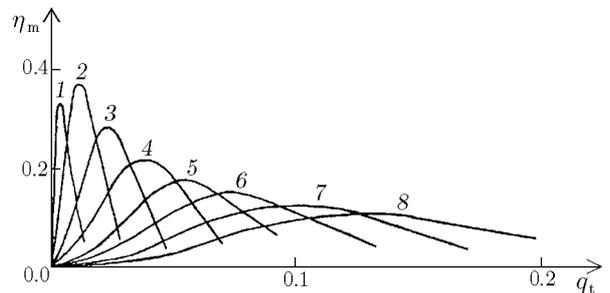


Рис. 2

$\beta_{z0} = v_{z0}/c = 0,3$ приведены зависимости $\eta_m = \eta_m(q_t)$ для $\Omega_0 = 1; 0,96; 0,92; 0,88; 0,84; 0,8; 0,76; 0,72$ (кривые 1–8 соответственно). Здесь η_m — значения η в первом максимуме кривых $\eta = \eta(T)$, полученных при фиксированных Ω_0, q_t . Как видно из рис. 2, при каждом Ω_0 имеется некоторое оптимальное значение q_t , при котором η_m достигает максимума. Прохождение резонанса при взаимодействии О-типа обеспечивается изменением величины Ω_0 .

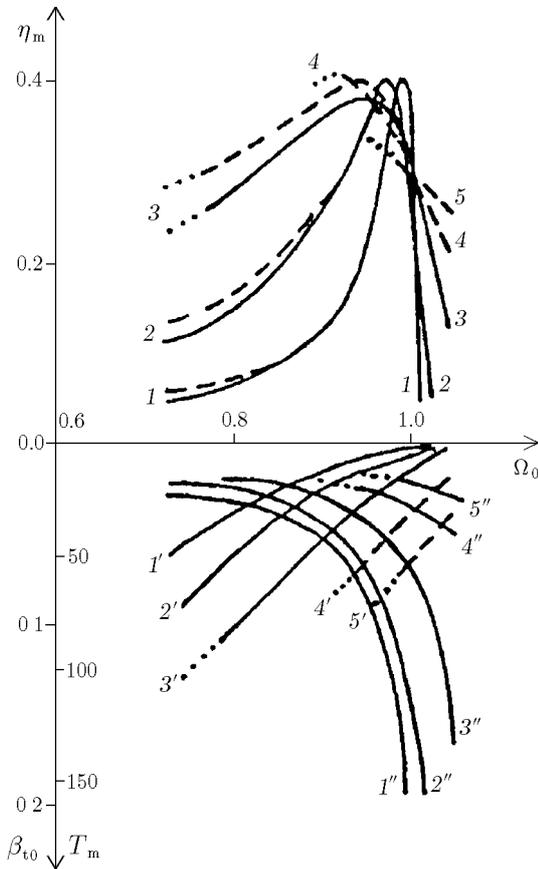


Рис. 3

На рис. 3 при $N = 16, n = 1, Z_0 = 0$ приведены зависимости η_m от Ω_0 в большом диапазоне значений β_{z0} ($\beta_{z0} = 0,2; 0,3; 0,5; 0,7; 0,8$, кривые 1–5 соответственно). Здесь η_m — значения η , оптимальные по $\beta_{t0} = q_t \Omega_0$, т. е. максимумы кривых $\eta_m = \eta_m(q_t)$ при фиксированных Ω_0 (см. рис. 2). На рис. 3 представлены также зависимости значений β_{t0} , обеспечивающих максимум зависимостей $\eta_m(q_t)$, от Ω_0 (кривые 1'–5', соответствующие перечисленным выше значениям β_{z0}). Кроме того, на рис. 3 показаны зависимости T_m (времени достижения КПД, равного η_m) от Ω_0 для указанных выше значений β_{z0} (кривые 1''–5'' соответственно). Пунктиром на рис. 3 показаны кривые, полученные численно по точным уравнениям (6), (9), (11). Как видно, усреднённая система даёт погрешность, растущую с увеличением нелинейностей. Поэтому кривые для $\beta_{z0} = 0,7; 0,8$ целиком вычислены по точным уравнениям. Отметим, что кривые на рис. 3 относятся к энергообмену при ограниченных колебаниях всех частиц ансамбля вдоль оси z ($Z_m < \pi/2$). Однако при большой первоначальной энергии те частицы ансамбля, которые попадают в ускоряющую фазу поля, способны преодолеть потенциальный барьер. На рис. 3 переход в этот режим отмечен точками на кривых 3–5, 3'–5', 3''–5''.

Остановимся на поперечном движении частиц при $q = 0, q_t \neq 0, Z_0 = 0, T_0 = 0$. Усреднённые проекции скорости в плоскости xy в лабораторной системе отсчёта определяются выражениями (26) первого приближения метода усреднения. Используя (26), представим \dot{X}, \dot{Y} в виде ряда по степеням q_t , ограничиваясь линейными по q_t слагаемыми. После усреднения по фазам колебаний получаем составляющие скорости дрейфа:

$$\frac{\dot{X}}{\cos \tau_0} = \frac{\dot{Y}}{\sin \tau_0} = n\beta_{t0} \left[1 + \frac{\Omega_0}{4(1-\nu_0)} \left(1 - \frac{\Omega_0 a_0^2}{8n^2} \right) - \frac{\Omega_0^2 a_0^2}{64(1-\nu_0)^2} \left(1 + \frac{2\Omega_0}{n^2} \right) \right]. \quad (30)$$

При $a_0^2 = 0$ формула (30) даёт значения, которые получаются из линейной системы (13), если в ней положить $q = 0$. Приближённую формулу (30) можно использовать для оценки скорости дрейфа частиц при $q_t \ll 1$ и малых нелинейных добавках (слагаемые с a_0^2). Из (30) следует, что при резонансе частица дрейфует в направлении, совпадающем с направлением начальной поперечной скорости, если $\nu_0 < 1$, и в противоположном направлении, если $\nu_0 > 1$. Этот вывод подтверждается численным анализом усреднённой системы (26). Однако имеющаяся зависимость

модуля скорости дрейфа от его направления, которая следует из такого анализа, приближёнными формулами (30) не описывается.

6. ОГРАНИЧЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЗАРЯДОВ ПРИ НАЛИЧИИ МАГНИТОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Особенностью системы (22) является наличие резонансных знаменателей $1 - \nu$, $1 - 3\nu$, $1 - 5\nu$ уже в решении X , Y (16), \bar{X}' (25) порождающей ($q = q_t = 0$) системы. Формально согласно принципу усреднения [19] требуется ограниченность правых частей уравнений системы (22). В нашей задаче можно указать режимы, когда в процессе резонансного взаимодействия при изменении частоты ν расстройки не обращаются в нуль, т. е. не наступают строгие резонансы. Тогда даже при первоначально малых расстройках выбором малых значений параметров q , q_t можно обеспечить малость правых частей уравнений (22), т. е. медленность изменения a , Ω , w_1 и w_2 . При этом можно использовать метод усреднения. Одним из таких режимов является ускорение частиц при $\nu_0 < 1$, $3\nu_0 < 1$ или $5\nu_0 < 1$, где начальная частота ν_0 определяется формулой (14), в которой $\Omega = \Omega_0$, $a = a_0$. При ускорении растёт амплитуда a и уменьшается Ω (увеличивается энергия $W \propto \Omega^{-1}$), при этом согласно (14) уменьшается частота ν , т. е. увеличивается каждая из расстроек $1 - \nu$, $1 - 3\nu$, $1 - 5\nu$. В результате правые части уравнений остаются ограниченными. Другим режимом является торможение частиц (усиление поля) при $\nu_0 > 1$, $3\nu_0 > 1$ или $5\nu_0 > 1$. Здесь частота ν растёт, и расстройки увеличиваются по абсолютной величине.

Однако фактически, как показано ниже, формально усреднённые системы, полученные из (22), имеют более широкое применение, чем в указанных двух режимах. Так, в частности, при $q_t = 0$ из усреднённой системы с помощью вычисленных интегралов движения удаётся получить уравнение консервативного осциллятора для амплитуды a первой гармоники продольных колебаний. Особенностью этого уравнения является отсутствие резонансных знаменателей в выражении для нелинейной силы, представленной в виде разложения по степеням a . Из этого уравнения получены закономерности взаимодействия при любых расстройках вблизи резонанса. Отсутствуют резонансные знаменатели и в формулах, описывающих поперечное движение.

Подставим выражения (14), (15), (17), (23), (25) в систему (22). Предполагая резонанс на первой гармонике ($\nu \approx 1$), выделяем «медленные» фазы $\Phi = \psi - T$, $2\Phi = 2(\psi - T)$. После усреднения по «быстрым» фазам получаем систему уравнений в первом приближении метода усреднения для медленных переменных. Далее, если воспользоваться заменой переменных (преобразование поворота) для поперечных координат $u_1 = w_1 \cos \Phi + w_2 \sin \Phi$, $u_2 = w_1 \sin \Phi - w_2 \cos \Phi$, эта система принимает наиболее простой вид:

$$\dot{a} = -\frac{2c_1\Omega^2}{\Delta_1} [qu_1 - q_t \sin(\Phi - \tau_0)], \quad \dot{\Omega} = \frac{c_1\Omega^3}{2n^2} [qu_1 - q_t \sin(\Phi - \tau_0)],$$

$$\dot{\nu} = \frac{a\nu^2}{8} \left[1 + \frac{2\nu}{n^2} + \left(1 + \frac{\nu}{n^2} \right) \frac{3a^2}{16} \right] [qu_1 - q_t \sin(\Phi - \tau_0)],$$

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 = q \left[Q + \left(P + R - \frac{\Delta}{q} \right) u_2 - \nu \left(1 + \frac{3a^2}{32} + \frac{31a^4}{64^2} \right) \frac{u_2^2}{a} \right] + \\ + q_t \left[P + R - \nu \left(1 + \frac{3a^2}{32} + \frac{31a^4}{64^2} \right) \frac{u_2}{a} \right] \cos(\Phi - \tau_0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{u}_2 = qu_1 \left[R - P + \frac{\Delta}{q} + \nu \left(1 + \frac{3a^2}{32} + \frac{31a^4}{64^2} \right) \frac{u_2}{a} \right] + \\ + q_t \left[(P - R) \sin(\Phi - \tau_0) + \nu \left(1 + \frac{3a^2}{32} + \frac{31a^4}{64^2} \right) \frac{u_1}{a} \cos(\Phi - \tau_0) \right], \\ \dot{\Phi} = \Delta + \frac{\nu}{a} \left(1 + \frac{3a^2}{32} + \frac{31a^4}{64^2} \right) [qu_2 + q_t \cos(\Phi - \tau_0)], \end{aligned} \quad (31)$$

где

$$\begin{aligned} P = \frac{\nu}{2(1-\nu^2)} \left\{ 2 - \nu^2 + \left[2 + \frac{\nu^2(1+\nu^2)}{1-\nu^2} \left(1 + \frac{2}{n^2} \right) \right] \frac{a^2}{16} + \right. \\ \left. + \left[\frac{63\nu^4 + 41\nu^2 - 6}{9\nu^2 - 1} - \frac{2\nu^2(\nu^2 + 1)}{1 - \nu^2} \left(7 + \frac{8}{n^2} \right) \right] \frac{a^4}{32^2} \right\}, \\ Q = \frac{a\nu^2}{4} \left\{ \frac{1}{\nu - 1} - \frac{\nu^2}{(\nu^2 - 1)^2} + \left[\frac{3}{\nu - 1} - \frac{\nu^2}{\nu^2 - 1} \left(\frac{2(6\nu - 1)}{(\nu^2 - 1)(3\nu - 1)} + \frac{1 + 2\nu/n^2}{(\nu + 1)^2} \right) \right] \frac{a^2}{32} \right\}, \\ R = \nu^3 \left\{ \frac{1 + 2/n^2}{(\nu - 1)^2} + \frac{3}{(\nu + 1)(3\nu - 1)} + \right. \\ \left. + \left[\frac{7 + 8/n^2}{(\nu - 1)^2} + \frac{16}{(\nu + 1)(3\nu - 1)} + \frac{5\nu^2 - 2\nu + 1}{(\nu + 1)^2(3\nu - 1)^2} \left(3 - \frac{2}{n^2} \right) \right] \frac{a^2}{32} \right\} \frac{a^2}{64}, \\ \Delta = \nu - 1 + q \frac{\Omega^3}{\Delta_1} \left(\frac{dc_1^2/da}{\nu^2 - 1} + \frac{dc_3^2/da}{9\nu^2 - 1} \right). \end{aligned} \quad (32)$$

Для дальнейшего анализа в систему уравнений (31) включено уравнение для частоты ν , которое получается из (14) с помощью уравнений (31) для a и Ω . В системе уравнений (31) функции (в том числе P , Q и R (32)), зависящие от a , представлены в виде разложений по степеням a . При этом, поскольку согласно (15) расстройка Δ (32) может быть вычислена до членов четвёртого порядка по a включительно, указанные функции вычислены также до слагаемых с a^4 . Заметим, что высокая точность вычислений с использованием (31) в режиме резонансного ускорения частиц до больших амплитуд a при ограниченном движении зарядов обеспечивается и в случае, если в (31) все функции, кроме Δ , брать с меньшей точностью, т. е. использовать разложения до третьего порядка по a включительно. В этом можно убедиться, сравнивая результаты расчётов по (31) и по точным уравнениям. Для системы уравнений (31) начальными являются значения $T = T_0$, $a = a_0$, $\Omega = \Omega_0$, $\nu = \nu_0 = \Omega_0(1 - a_0^2/16)$, $\Phi = \Phi_0 = \zeta - T_0$, $u_1 = u_{10} = A \cos \zeta$, $u_2 = u_{20} = A \sin \zeta$, где

$$A = \frac{a_0 \Omega_0 \nu_0}{2} \left(\frac{1 - a_0^2/32}{\nu_0^2 - 1} + \frac{3a_0^2/64}{9\nu_0^2 - 1} \right).$$

Из уравнений (31) для a , Ω следует интеграл усреднённого движения, совпадающий с интегралом (27), полученным в отсутствие магнитостатического поля. Ниже интеграл (27) используется для оценки достижимых в ловушке скоростей, а также при построении нелинейной теории колебаний зарядов в ловушке.

Остановимся подробно на энергообмене поля и ансамбля частиц в случае резонанса на первой гармонике в линейном по малым параметрам приближении при равномерном распределении частиц по начальным фазам. С помощью уравнения (11) вычислим величину Ω^{-1} , пропорциональную энергии частицы W , в виде ряда по степеням малых значений q и q_t , удерживая слагаемые

с q , q_t , q^2 , qq_t и q_t^2 . Существенно, что усреднение по начальным фазам даёт отличное от нуля слагаемое уже с q в первой степени:

$$\Omega^{-1} = \Omega_0^{-1} - q \frac{a_0^2 \Omega_0^2}{16n^2} \frac{1 - \cos \chi}{\chi^2} T^2, \quad (33)$$

где $\chi = (\nu_0 - 1)T$. Выражение (33) указывает на взаимодействие М-типа [17]. Знак энергообмена зависит от знака заряда. Так, при $q > 0$, когда магнитостатическое поле ориентировано в направлении оси z и циклотронное движение отрицательных зарядов противоположно направлению вращения векторов напряжённости высокочастотного поля (обыкновенные волны), согласно (33) имеем торможение частиц и усиление поля. При $q < 0$, когда циклотронное движение совпадает с направлением вращения векторов поля (необыкновенные волны), имеем ускорение отрицательно заряженных частиц. Напротив, для положительных зарядов ($\Omega < 0$, $\Omega_0 < 0$ в (33)) при $q > 0$ происходит ускорение частиц, при $q < 0$ — усиление поля. Дальнейшие вычисления усреднённого по начальным фазам значения Ω^{-1} приводят к появлению слагаемого (которое здесь не приводится) с q^2 , уточняющего (33), а также слагаемых с q_t^2 (см. (28)), описывающих поглощение и взаимодействие О-типа [17]. В результате при $|q| \sim q_t \ll 1$ преобладающим является взаимодействие М-типа.

При отсутствии начальных поперечных возмущений ($q_t = 0$) первые пять уравнений (31) не зависят от Φ . В этом случае из (31) кроме (27) следуют ещё два интеграла. Один из них связывает u_1 и a , другой — u_2 и a . С помощью этих трёх интегралов из системы (31) получаем уравнение консервативного осциллятора для амплитуды первой гармоники продольных колебаний:

$$\ddot{a} = -\beta_1 a - \beta_2 a^3 + \frac{\beta_3}{a^3} = f(a), \quad (34)$$

где постоянные коэффициенты β_1 , β_2 и β_3 вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \beta_1 = \frac{1}{4} \left[\delta^2 + (1 + \delta)g + \frac{17}{16}g^2 \right] - \left\{ 8\delta(1 + 5\delta) + (34 + 77\delta)g + 68g^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{n^2} \left[48\delta(1 - 3\delta) - (12 + 135\delta)g - \frac{481}{4}g^2 \right] \right\} \frac{a_0^2}{512}, \\ \beta_2 = \frac{1}{32} \left[\delta(1 + \delta) - 3 \left(1 + \frac{3\delta}{8} \right)g + \frac{9g^2}{4} \right] + \frac{1}{16n^2} \left[\delta(1 - 3\delta) - \left(1 + \frac{17}{16}\delta \right)g - \frac{143}{64}g^2 \right], \\ \beta_3 = \left(\delta + \frac{5g}{4} \right)^2 \frac{a_0^4}{4} + \left\{ \delta(1 - 3\delta) + \frac{5}{4} \left(1 - \frac{87}{20}\delta \right)g - \frac{125}{64}g^2 - \right. \\ \left. - \frac{2}{n^2} \left[\delta(1 - 3\delta) + \frac{5}{4} \left(1 - \frac{101}{20}\delta \right)g - \frac{195}{64}g^2 \right] \right\} \frac{a_0^6}{64}. \quad (35) \end{aligned}$$

Эти простые выражения получены из более громоздких путём разложения функций, зависящих от Ω_0 , по степеням малой расстройки $\delta = 1 - \Omega_0$. При этом, поскольку выражения содержат слагаемые с малыми величинами g и g^2 , в аппроксимации удержаны слагаемые до квадратов g , δ включительно. Отметим отсутствие резонансных знаменателей в уравнении (34). Нелинейная сила, как следует из (34), (35), представлена в виде разложения по степеням a_0 , a до членов третьего порядка.

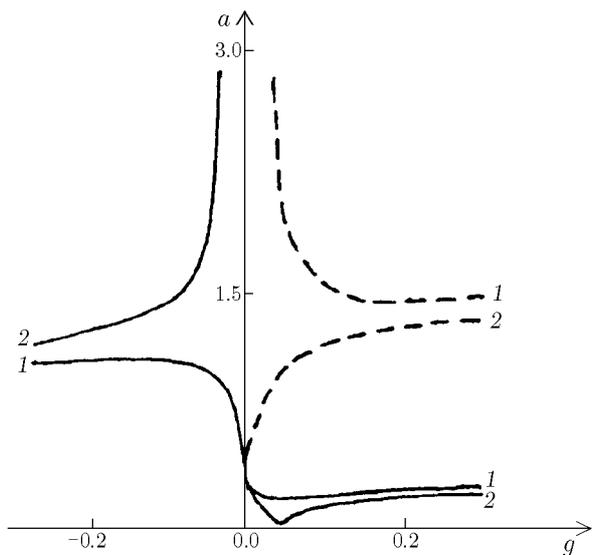


Рис. 4

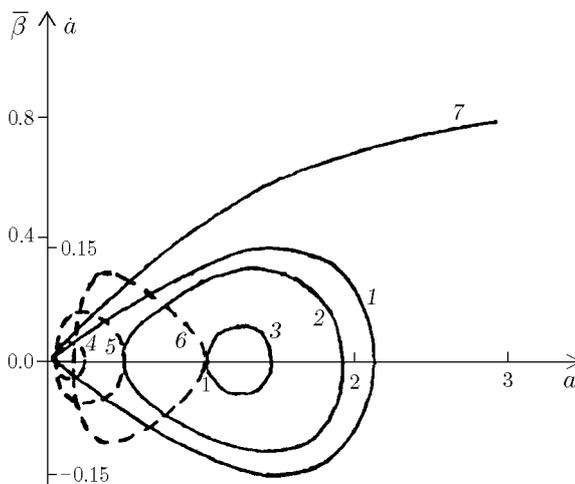


Рис. 5

Изучим колебания, описываемые уравнением (34). Алгебраическое уравнение $f(a) = 0$, определяющее положение равновесия осциллятора, является согласно (34), (35) квадратным относительно параметра g . Корни этого уравнения $g_1 = g_1(a)$ и $g_2 = g_2(a)$ при фиксированных Ω_0, a_0, n позволяют построить бифуркационную кривую [20]. Одновременно устанавливаем знак производной $f'(a)$ в точках этой кривой, т. е. в положении равновесия; при $f'(a) < 0$ положение равновесия устойчиво.

На рис. 4 показаны типичные зависимости равновесного значения амплитуды a от g . Для иллюстрации выбраны значения $n = 1, a_0 = 0,3, \Omega_0 = 0,95$ (кривая 1) и $\Omega_0 = 1,05$ (кривая 2). Пунктиром показаны ветви кривых 1, 2, соответствующие неустойчивым положениям равновесия ($f'(a) > 0$). Сплошным линиям на рис. 4 соответствуют устойчивые состояния равновесия. Отметим скачок устойчивого положения равновесия при $\Omega_0 > 1$ (кривая 2) при переходе через точку $g \approx 0$. Это значение g является бифуркационным. При $\Omega_0 < 1$ указанный скачок отсутствует. При $g = 0$ устойчивые колебания имеют амплитуду a , совпадающую с начальным значением $a_0 = 0,3$, что согласуется с упомянутым выше известным фактом об отсутствии энергообмена при $g = 0$.

Таким образом, приведённый анализ показывает, что существующие в реальной системе нелинейности могут ограничивать амплитуду резонансных колебаний частиц в области II (рис. 1) значений параметров g и Ω_0 , где линейная теория даёт неограниченные колебания.

Остановимся на анализе амплитуды a нелинейных колебаний. Умножив уравнение (34) на \dot{a} , проинтегрируем его с начальными условиями $a(0) = a_0, \dot{a}(0) = 0$. Значение производной $\dot{a}(0)$ при $q_t = 0$ следует из уравнения (31) для a с учётом начального значения $u_1(0) = 0$. В результате получим закон сохранения энергии осциллятора (34):

$$\dot{a}^2 = (a_0^2 - a^2) \left[\beta_1 + \frac{\beta_2}{2} (a_0^2 + a^2) - \frac{\beta_3}{a_0^2 a^2} \right]. \tag{36}$$

На рис. 5 в качестве иллюстрации при $n = 1, \Omega_0 = 1,05 (\delta = -0,05)$ приведены фазовые траектории, полученные из (36), в случае устойчивого движения (см. рис. 4). Кривые 1–3 построены для $a_0 = 0,01; 0,5; 1,0$ соответственно и характеризуют ускорение частиц, поскольку здесь полагается $g = -0,1 < 0$. Пунктирные кривые 4–6 построены для $a_0 = 0,2; 0,5; 1,0$ соответственно и

характеризуют усиление поля ловушки, т. к. в этом случае полагается $g = 0,1 > 0$. Сравнение кривых 1 и 2 показывает, что характерной особенностью ускорения является слабая зависимость максимального значения a и, следовательно, максимальной энергии ускоренных частиц от начальных значений a_0 (от начальной энергии).

Из формулы $\Omega = n\varepsilon/\gamma$, учитывая интеграл (27), находим средний по быстрым колебаниям квадрат скорости $\bar{\beta}^2$ в зависимости от a :

$$\bar{\beta}^2 = 1 - (1 - \beta_0^2) B(a), \quad (37)$$

где

$$B(a) = \left\{ 1 + \frac{\Omega_0}{8n^2} \left[a^2 - a_0^2 - \frac{1}{16} (a^4 - a_0^4) + \frac{5}{64^2} (a^6 - a_0^6) \right] \right\}^{-2}. \quad (38)$$

Оценим скорость, приобретаемую зарядом в ловушке при его ограниченном движении. На рис. 5 приведена кривая γ зависимости $\bar{\beta} = (\bar{\beta}^2)^{1/2}$ от a , полученной из (37), где для оценок полагаем $n = 1$, $\beta_0 = a_0 = 0$ (малая начальная скорость), $\Omega_0 = 1$ (резонанс). Видно, что в ловушке возможно ускорение зарядов от тепловых до релятивистских скоростей с $\beta \approx 0,8$.

Интересно оценить распределение энергии, приобретённой зарядом в электрическом поле ловушки, между продольными и поперечными колебаниями частицы. Анализ показывает, что при ускорении энергия распределяется между этими колебаниями приблизительно поровну.

Покажем теперь, что при ограниченных продольных колебаниях поперечное движение в плоскости xy также является ограниченным. Для этого вычислим сумму квадратов $X^2 + Y^2$ поперечных координат (16) как функцию амплитуды a , при этом используем интегралы системы (31). Точность, с которой получены эти интегралы при выводе уравнения (34), позволяет вычислить $X^2 + Y^2$ с удержанием квадратичных по a_0 и a слагаемых. После усреднения по быстрым колебаниям приходим к выражению

$$\overline{X^2 + Y^2} = \frac{\Omega_0}{4} \left[\frac{\Omega_0}{2} \left(\frac{a_0}{1 + \Omega_0} \right)^2 + \frac{a_0^2 - a^2}{g} \right]. \quad (39)$$

В этой формуле также отсутствуют резонансные знаменатели. Как следует из (39), при ускорении ($g < 0$) частица с отрицательным зарядом максимально удалена от начала координат ($X = Y = 0$), когда максимальна амплитуда её продольных колебаний. Максимальное удаление растёт с уменьшением $|g|$. Поперечное движение является ограниченным.

7. РЕЗОНАНСНОЕ УСКОРЕНИЕ ЧАСТИЦ ПРИ НАЛИЧИИ МАГНИТОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ И НАЧАЛЬНЫХ ПОПЕРЕЧНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Дальнейший анализ основан на результатах численного решения усреднённой системы (31) при $q_t \neq 0$. В этом случае резонансное ускорение частиц возможно как при отсутствии магнитостатического поля ($g = 0$), в том числе, как указывалось выше, при взаимодействии О-типа, так и при наличии слабого магнитостатического поля. В обоих случаях с переменным полем взаимодействуют ансамбли частиц, отличающихся при $T = T_0$ начальными фазами ζ и τ_0 , причём фаза ζ характеризует продольное движение частиц, а фаза τ_0 — поперечное движение. Если рассматривается ансамбль частиц, инжектированных одновременно при $T = T_0$ и $Z = 0$ в положительном направлении оси z , то $\zeta = -\pi/2$.

Отметим вначале одну особенность фазовой группировки частиц при ускорении. Для простоты рассмотрим линейные колебания в случае $g = 0$. В уравнении (12) для Z сила, действующая

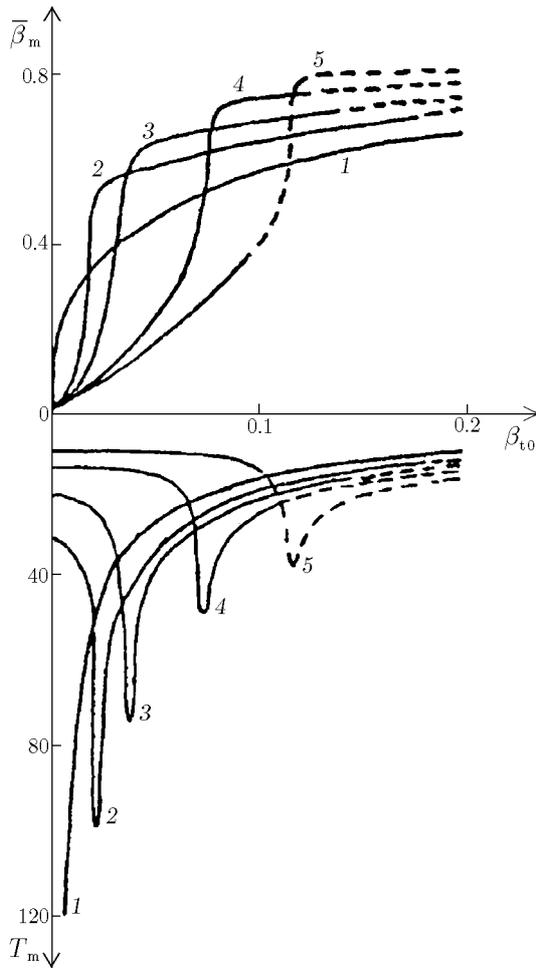


Рис. 6

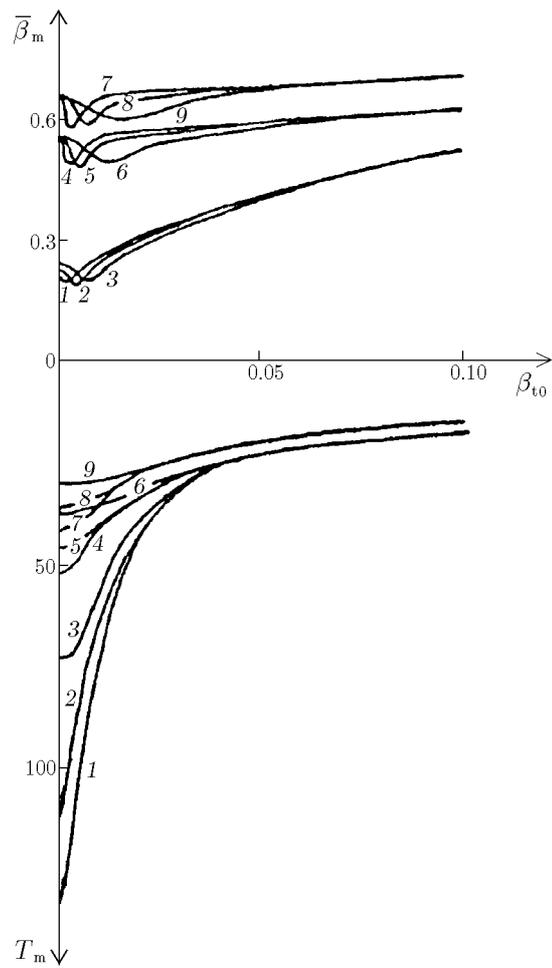


Рис. 7

на осциллятор, зависит от τ_0 . Решением этого уравнения с начальными условиями $Z(0) = Z_0$, $\dot{Z}(0) = \dot{Z}_0$ является выражение

$$Z(T) = -A_0 \cos(\Omega_0 T + \vartheta) + A_1 \cos(T + \tau_0), \tag{40}$$

где

$$A_0 = \left[\left(Z_0 - \frac{q_t \Omega_0 \cos \tau_0}{1 - \Omega_0^2} \right)^2 + \left(\frac{\dot{Z}_0}{\Omega_0} + \frac{q_t \sin \tau_0}{1 - \Omega_0^2} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad A_1 = \frac{q_t \Omega_0}{1 - \Omega_0^2} \tag{41}$$

— амплитуды свободных и вынужденных колебаний соответственно, ϑ — начальная фаза свободных колебаний, причём

$$\cos \vartheta = \frac{1}{A_0} \left(\frac{q_t \Omega_0 \cos \tau_0}{1 - \Omega_0^2} - Z_0 \right), \quad \sin \vartheta = \frac{1}{A_0} \left(\frac{\dot{Z}_0}{\Omega_0} + \frac{q_t \sin \tau_0}{1 - \Omega_0^2} \right). \tag{42}$$

Если ввести расстройку $\Omega_0 - 1$, то решение (40) преобразуется к виду

$$Z = A_2 \sin(T + \xi), \tag{43}$$

где фаза и амплитуда определяются выражениями

$$\begin{aligned} \cos \xi &= [A_0 \sin[(\Omega_0 - 1)T + \vartheta] - A_1 \sin \tau_0]/A_2, & \sin \xi &= [-A_0 \cos[(\Omega_0 - 1)T + \vartheta] + A_1 \cos \tau_0]/A_2, \\ A_2 &= [A_0^2 + A_1^2 - 2A_0A_1 \cos[(\Omega_0 - 1)T + \vartheta - \tau_0]]^{1/2}. \end{aligned} \quad (44)$$

Пусть начальные продольные и поперечные возмущения малы, т. е. $|Z_0| \sim |\dot{Z}_0| \sim q_t \ll 1$ (слабовозбуждённые осцилляторы). Пусть, кроме того, мала расстройка: $|\Omega_0 - 1| \sim q_t$ (резонанс). Тогда формула (43) описывает биения свободных и вынужденных колебаний осциллятора, причём амплитуда свободных колебаний A_0 (41) определяется главным образом действием силы в (12), поскольку слагаемые с множителем q_t в (41) порядка единицы, в то время как добавки Z_0 и \dot{Z}_0/Ω_0 малы. Максимальные значения амплитуд A_2 для осцилляторов с различными Z_0 , \dot{Z}_0 , τ_0 отличаются на малую величину порядка q_t , что следует из анализа выражения (44) для A_2 с учётом (41). Малы (порядка q_t) также и различия в постоянных начальных фазах $\vartheta - \tau_0$ в A_2 . В этом можно убедиться путём вычисления начальных (при $T = 0$) значений $\cos(\vartheta - \tau_0)$ с использованием формул (42). В результате, учитывая малость $|Z_0|$, $|\dot{Z}_0|$, $|\Omega_0 - 1|$ и q_t , получаем аппроксимации

$$\cos(\vartheta - \tau_0) = \begin{cases} 1 - q_t^2 \dots, & \Omega_0 < 1; \\ -(1 - q_t^2 \dots), & \Omega_0 > 1. \end{cases}$$

Сравнение со стандартными разложениями косинуса в окрестности точек $\vartheta - \tau_0 = 0$ и $\vartheta - \tau_0 = \pi$ даёт

$$\vartheta - \tau_0 = \begin{cases} q_t \dots, & \Omega_0 < 1; \\ \pi + q_t \dots, & \Omega_0 > 1. \end{cases}$$

В этих формулах множители q_t , q_t^2 указывают порядок малости величин, а многоточия заменяют постоянные множители при q_t , q_t^2 , которые имеют порядок единицы и выражаются через Z_0 , \dot{Z}_0 , Ω_0 , τ_0 .

Таким образом, медленные колебания первоначально слабовозбуждённых частиц, отличающиеся начальными значениями амплитуд и фаз, близки между собой. Этот вывод справедлив также при $g \neq 0$. Поэтому можно оценивать энергообмен ансамбля частиц с переменным полем, рассматривая взаимодействие только одной частицы.

Случай слабовозбуждённых осцилляторов более детально исследован на примере уравнения Дуффинга в [21]. В частности, рассмотрено влияние на группировку неизохронности, а также поведение во времени относительных фаз колебаний поля и частиц ансамбля. Показано, что фазовая группировка осцилляторов, имеющих первоначально существенно различные относительные фазы, происходит за малое (порядка периода быстрых колебаний) время.

На рис. 6 при $g = 0$, $n = 1$, $\beta_{z0} \ll 1$ (результаты слабо зависят от выбора β_{z0}) и $\Omega_0 = 1; 1,1; 1,15; 1,25; 1,35$ (кривые 1–5 соответственно) показаны зависимости от начальной поперечной скорости β_{t0} усреднённых по начальным фазам τ_0 (при равномерном распределении по τ_0) значений скорости $\bar{\beta}_m$ в первых максимумах кривых $\bar{\beta} = \bar{\beta}(T)$. При численных расчётах с использованием системы (31) полагали $Z(0) = Z_0 = 0$, так что $q_t = n\beta_{t0}/\Omega_0$. На рис. 6 показаны также зависимости от β_{t0} времени T_m достижения скорости $\bar{\beta}_m$ при указанных выше Ω_0 . Участки кривых, показанные пунктиром, относятся к случаю, когда хотя бы одна из частиц ансамбля, ускорившись в продольном направлении, преодолевает потенциальный барьер с границами $|Z| = \pi/2$. В поперечном направлении частицы дрейфуют со скоростями, зависящими от τ_0 .

Объясним ход кривых на рис. 6 с помощью результатов анализа энергообмена в линейном по q_t режиме (см. (28)). Все значения параметра Ω_0 , кроме $\Omega_0 = 1$ для кривой 1, выбраны так, что

выполняется условие $\nu_0 - 1 > 0$. При такой начальной частотной расстройке имеем ускорение зарядов, в том числе в результате взаимодействия О-типа. В процессе ускорения расстройка уменьшается за счёт уменьшения ν (14), причём чем больше максимальная скорость β_m , тем меньше значение $\nu - 1 > 0$ и, как следствие, больше время T_m достижения скорости β_m (участки возрастания зависимостей $T_m(\beta_{t0})$). Если же в процессе ускорения ν уменьшается настолько, что расстройка становится отрицательной ($\nu - 1 < 0$), то знак энергообмена О-типа меняется на противоположный. Кроме существующего ускорения появляется механизм торможения зарядов, что приводит к ограничению достижимых значений β_m . Теперь с ростом β_m увеличивается $|\nu - 1|$, и время T_m уменьшается (участки спадаания зависимостей $T_m(\beta_{t0})$). В случае кривой 1 расстройка $\nu - 1 < 0$ для всех T , и механизм торможения частиц проявляется постоянно, что ограничивает значения β_m .

На рис. 7 показаны зависимости $\bar{\beta}_m(\beta_{t0})$, $T_m(\beta_{t0})$ для $n = 1$, $\Omega_0 = 0,9$ и различных значений g и β_{z0} . Кривые 1–3 получены при $g = -0,0125$ для $\beta_{z0} = 0,01; 0,02; 0,05$ соответственно, кривые 4–6 — при $g = -0,05$, кривые 7–9 — при $g = -0,0875$ для тех же значений β_{z0} соответственно. Как видно из рис. 7, при увеличении $|g|$, когда во взаимодействии преобладающим становится механизм М-типа, достижимые скорости β_m при выбранном g слабо зависят не только от β_{z0} , как это было при отсутствии начальных поперечных возмущений, но и от β_{t0} . Движение является ограниченным также и в поперечном направлении.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Курин А. Ф., Курин Е. А. // ЖТФ. 1993. Т. 63, № 7. С. 55.
2. Курин А. Ф. // ЖТФ. 1994. Т. 64, № 8. С. 14.
3. Курин А. Ф. // Лекции по СВЧ электронике и радиофизике. 10-я зимняя школа-семинар: Межвуз. сб. науч. тр. Кн. 2. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 1996. С. 113.
4. Гапонов А. В., Миллер М. А. // ЖЭТФ. 1958. Т. 34, № 1. С. 242.
5. Миллер М. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1958. Т. 1, № 3. С. 110.
6. Миллер М. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1958. Т. 1, № 4. С. 166.
7. Литвак А. Г., Миллер М. А., Шолохов Н. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1962. Т. 5, № 6. С. 1160.
8. Геккер И. Р. Взаимодействие сильных электромагнитных полей с плазмой. М.: Атомиздат, 1978. 310 с.
9. Пановко Я. Г. Введение в теорию механических колебаний. М.: Наука, 1971. 240 с.
10. Ден-Гартог Дж. П. Механические колебания. М.: Физматгиз, 1960. 580 с.
11. Братман В. Л., Гинзбург Н. С., Нусинович Г. С., Петелин М. И., Юлпатов В. К. // Релятивистская высокочастотная электроника. Горький: ИПФ АН СССР, 1979. С. 157.
12. Глек Ю. Д., Курин А. Ф. // Радиотехника и электроника. 1988. Т. 33, № 4. С. 769.
13. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 504 с.
14. Митропольский Ю. А. Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний. М.: Наука, 1964. 432 с.
15. Моисеев Н. Н. Асимптотические методы нелинейных колебаний. 1981. 400 с.
16. Гапонов А. В., Петелин М. И., Юлпатов В. К. // Изв. вузов. Радиофизика. 1967. Т. 10, № 9–10. С. 1414.
17. Шевчик В. Н., Трубецков Д. И. Аналитические методы расчёта в электронике СВЧ. М.: Сов. радио, 1970. 584 с.

18. Гайдук В. И., Матвеев Р. Ф., Фиалковский А. Т., Дементенко В. В. // Радиотехника и электроника. 1973. Т. 18, № 4. С. 749.
19. Хапаев М. М. Усреднение в теории устойчивости. М.: Наука, 1986. 191 с.
20. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959. 915 с.
21. Курин А. Ф. // Изв. вузов. Радиофизика. 2002. Т. 45, № 7. С. 595.

Воронежский госуниверситет,
г. Воронеж, Россия

Поступила в редакцию
6 апреля 2001 г.

**INDUCED RESONANCE PROCESSES ACCOMPANYING INTERACTION OF THE FIELD OF A
TEM TRAP WITH OSCILLATING CHARGES**

A. F. Kurin

We theoretically analyze resonance processes in an electromagnetic trap (TEM trap) formed by a circularly polarized high-frequency standing field of homogeneous plane waves and a uniform static magnetic field aligned with the direction of wave propagation. A regime of resonance amplification of the trap field by an ensemble of initially non-phased oscillators in the absence of a static magnetic field is described. A regime of resonance acceleration of charges from thermal to relativistic velocities for limited particle motion in the presence of a static magnetic field is considered. It is shown that charge oscillations in the trap are similar to flutter in mechanical systems. The efficient energy exchange is stipulated by an M-type interaction mechanism.

УДК 531.717

ШИРОКОПОЛОСНАЯ ОПТИЧЕСКАЯ ИНТЕРФЕРОМЕТРИЯ ВЫСОКИХ ПОРЯДКОВ *

И. Е. Кожеватов, Е. Х. Куликова

Представлены обоснования метода получения широкополосного оптического излучения с синтезируемой временной когерентностью. Описаны созданные на основе метода широкополосные интерферометры Физо для контроля плоских и сферических поверхностей, а также для удалённого контроля оптической толщины образцов. Созданные устройства измеряют характеристики оптических элементов с диаметром до 300 мм с точностью до единиц ангстрем в реальном времени.

ВВЕДЕНИЕ

Предмет данной статьи, сформулированный в заголовке, требует некоторого уточнения.

Явление интерференции белого света или, точнее, широкополосного оптического излучения хорошо известно и давно применяется как в физических исследованиях, так и в прикладных задачах. Считается, что необходимым условием для наблюдения такой интерференции является малая, почти нулевая разность хода интерферирующих лучей. Интерференцию широкополосного излучения при больших разностях хода (интерференцию высоких порядков) большинство исследователей, в том числе и специалистов по оптической интерферометрии, считают невозможной. Однако ниже пойдёт речь именно о такой интерференции.

Данная статья имеет целью ознакомить читателей с явлением интерференции белого света при больших разностях хода и её применением в решении метрологических задач [1–5]. Содержание статьи связано с работами Научно-исследовательского радиофизического института (НИРФИ), выполняемыми в последние годы в лаборатории оптических измерений отдела сейсмофизики и акустики.

Следует отметить, что идеи, лежащие в основе широкополосной интерферометрии высоких порядков, были сформулированы сравнительно недавно, хотя работы по оптической интерферометрии были начаты в НИРФИ более 20 лет назад В. П. Лебедевым под руководством С. М. Горского. Задачи оптической интерферометрии разделяются на два класса: исследование спектров излучения с использованием в качестве эталона плеч интерферометра и тестирование оптических промежутков при известной длине волны зондирующего излучения. Начало работ по оптической интерферометрии в НИРФИ было связано с задачами измерения тонких спектральных эффектов, в частности эффекта Доплера.

В настоящее время соответствующее развитие получили и исследования по интерферометрии объектов по известным спектральным характеристикам излучения. Импульс для развития этих работ, в том числе и широкополосной интерферометрии, был дан настоятельной потребностью современных фундаментальных физических исследований, а также техники и технологий. Хотя в НИРФИ интенсивно ведутся и спектроскопические работы, и работы по зондированию объектов, в силу ограниченности объёма статьи внимание будет уделено только последним.

* Статья подготовлена к юбилею НИРФИ.

1. ШИРИНА СПЕКТРА ИЗЛУЧЕНИЯ И ВРЕМЕННАЯ КОГЕРЕНТНОСТЬ

Непосредственные наблюдения электромагнитных волновых процессов в оптическом диапазоне затруднительны в силу малости временных (10^{-14} с) и пространственных (10^{-6} м) интервалов, характерных для световых волн. Экспериментально, как правило, наблюдается только интенсивность излучения, являющаяся результатом усреднения колебательных процессов во временном и пространственном интервалах, значительных по сравнению с периодом колебаний и длиной световой волны. Излучение естественных источников света, основная доля которого представляет спонтанное излучение, состоит из случайного набора коротких по сравнению с временем наблюдения цугов волн. Интенсивность такого излучения в силу статистической независимости отдельных актов излучения близка к сумме интенсивностей отдельных составляющих.

Явление интерференции представляет собой сложение волн, в результате которого получается устойчивая во времени и пространстве картина распределения интенсивности, отличающаяся от суммы интенсивностей складывающихся компонентов. Такая картина не может иметь место без устойчивой пространственно-временной коррелированности этих волн. Для описания интерференции в оптике введено понятие временной когерентности. Формально она должна быть мерой корреляции, существующей между колебаниями в электромагнитном поле в различные моменты времени.

Существуют различные подходы к введению этого понятия. Рассмотрим его физический смысл на примере интерферометра Майкельсона (см. рис. 1). Коллиматорная линза L_1 , в фокусе которой находится источник S , создаёт плоский волновой фронт, падающий на светоделитель BS . Полученные в результате деления два идентичных параллельных пучка идут в двух взаимно перпендикулярных направлениях и отражаются от зеркал M_1 и M_2 , образующих два плеча интерферометра. Отражённые пучки складываются на светоделителе и собираются линзой L_2 на фотодетекторе PD .

В исходном состоянии плечи интерферометра равны, и разность хода между лучами равна нулю. Будем отодвигать одно из зеркал параллельно самому себе, увеличивая разность хода l . В случае монохроматического излучения интенсивность на выходе интерферометра будет меняться как

$$I(d) = I(0) \cos^2(\pi l/\lambda), \quad (1)$$

где $I(0)$ — интенсивность излучения при нулевой разности хода лучей, λ — длина волны излучения.

При идеальной монохроматичности излучения такой закон изменения интенсивности сохранился бы для сколь угодно большой разности хода l , что свидетельствует о бесконечной длине когерентности монохроматического излучения. Однако электромагнитные волны не бесконечны, они излучаются в виде цугов конечной длины. Последнее означает, что атом излучает не на одной частоте, а в целом спектре частот, ширина которого тем больше, чем меньше длина цуга.

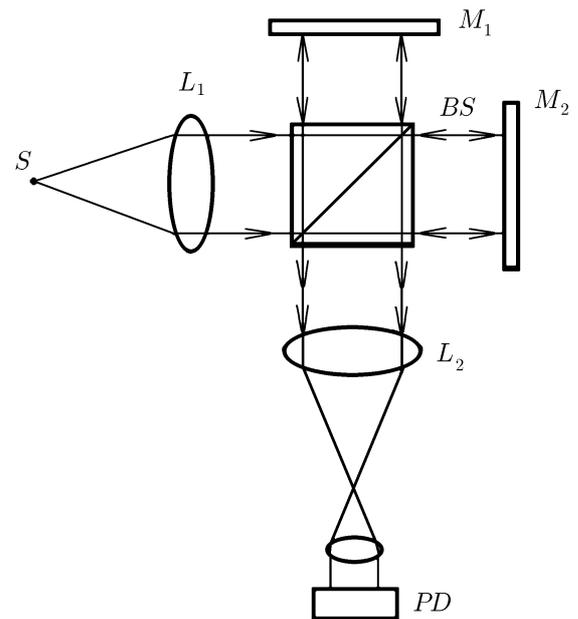


Рис. 1. Функциональная схема интерферометра Майкельсона: S — источник излучения, L_1 — коллиматорная линза, L_2 — объектив, BS — светоделитель, M_1 и M_2 — зеркала, PD — фотоприёмник

Установим такую разность хода, чтобы она была больше длины цугов волн. В этом случае составляющие одного и того же цуга после разделения светоделителем больше не встретятся. В момент наблюдения каждая из них будет складываться с цугами, испущенными в другое время и с фазами, распределёнными совершенно случайно. Если рассматривать все цуги и учитывать, что разность фаз между любыми двумя цугами принимает все возможные значения из интервала от 0 до 2π , то ясно, что интерференция в этом случае наблюдаться не будет.

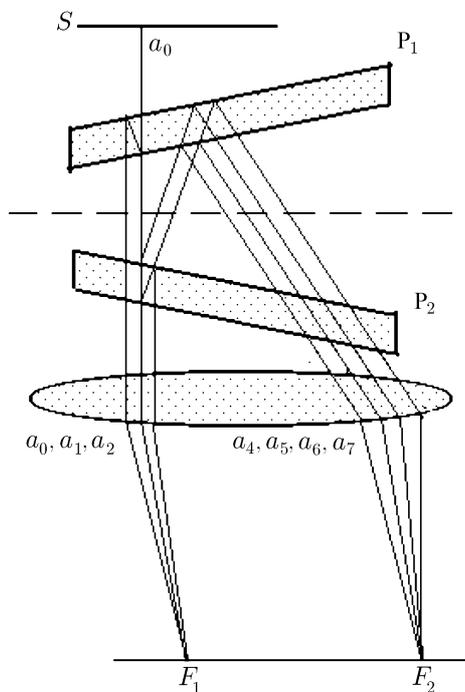


Рис. 2. Интерференция белого света в двух плоскопараллельных пластинах Π_1 и Π_2

Луч a_0 от широкополосного источника S даёт начало семи лучам. Каждый из них, за исключением луча a_0 , дважды отражается от поверхности пластин. Рассмотрим интерференцию только между лучами a_1 и a_2 . Луч a_1 прошёл три раза пластину Π_1 и один раз — пластину Π_2 . Луч a_2 прошёл один раз пластину Π_1 и три раза — пластину Π_2 . Эти лучи остаются параллельными лучу a_0 и собираются линзой в одну точку F_1 . Очевидно, что при равенстве толщины пластин Π_1 и Π_2 разность хода лучей a_1 и a_2 равна нулю, и мы можем наблюдать интерференцию белого света.

Такое рассмотрение находится в полном соответствии с выражением (2). Однако это явление можно интерпретировать и по-другому. Проведём пунктирную линию, как показано на рис. 2. Отнеся пластину Π_1 к источнику излучения, мы можем ничего не знать о ходе лучей в первой пластине и лишь констатировать модификацию спектра на её выходе. Зрительно излучение, вышедшее из первой пластины, остаётся таким же «белым». Не происходит и сужения спектра. Тем не менее излучение на выходе первой пластины проявляет способность интерферировать при большой разности хода, возникающей при одно- и двукратном прохождении через вторую пластину.

Такая интерпретация эксперимента явно противоречит общепринятому соотношению (2). Отметим тем не менее, что явление широкополосной интерферометрии при большой разности хода лучей не свидетельствует о несостоятельности понятия «когерентность», оно лишь говорит о том,

Данный пример иллюстрирует понятия времени когерентности τ , связанное с длительностью цугов, и длины когерентности l , связанное с длиной цугов, причём $l = c\tau$, где c — скорость света. Поскольку ширина спектра $\Delta\nu$ связана с длительностью цугов простым соотношением $\Delta\nu = 1/\tau$, то между максимальной разностью хода l_{\max} , при которой можно наблюдать интерференцию, и шириной спектра существует фундаментальное соотношение:

$$l_{\max} \leq \frac{c}{\Delta\nu} = \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda}, \quad (2)$$

где λ_0 — центральная длина волны, $\Delta\lambda$ — ширина спектра в шкале длин волн. Выражение (2) справедливо с точностью до численного коэффициента, зависящего от формы цуга.

Соотношения типа (2), по смыслу аналогичные соотношению неопределённости Гейзенберга, казалось бы, не дают никаких шансов для создания интерферометра высоких порядков белого света. Приведём ещё один пример. На рис. 2 представлена схема для наблюдения интерференции белого света, впервые описанная Брюстером [6]. Она включает в себя две плоскопараллельные пластины Π_1 и Π_2 , слегка наклонённые относительно друг друга.

что когерентность — понятие более сложное и не всегда может быть охарактеризовано монотонной функцией с одним параметром — шириной. Если явление не описывается упрощённой теорией, это свидетельствует о том, что мы вышли за границы её применимости, и необходимо перейти к более общему описанию или создать другую теорию. К счастью, для описания интерференции широкополосного излучения не надо делать ни того, ни другого, а надо просто воспользоваться существующим аппаратом фурье-спектроскопии.

Хотелось бы подчеркнуть, что пример наблюдения интерференции белого света, допускающий двойную интерпретацию, следует рассматривать как частный случай. На самом деле форма спектра используемого излучения не всегда поддаётся описанию в терминах разности хода. Более того, каждый из спектральных элементов может иметь свой независимый источник. Принципиальным для широкополосной интерферометрии высоких порядков является наличие особенностей функции автокогерентности при больших её аргументах.

2. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ФУРЬЕ-СПЕКТРОСКОПИИ

Аппарат фурье-спектроскопии был развит для расчёта спектров инфракрасного излучения по данным измерения их интерферограмм. Хорошим пособием по применению фурье-анализа в оптике служит книга [7]. Высокую эффективность аппарата фурье-анализа в интерферометрии можно проиллюстрировать с помощью описанного выше примера с интерферометром Майкельсона. Для монохроматического излучения со спектром в виде дельта-функции $B(\nu) = \delta(\nu - \nu_0)$ интенсивность на выходе интерферометра как функция разности хода лучей имеет вид

$$I(l) = I(0) + J(l) = \frac{1}{2} \left[I(0) + I(0) \cos \left(2\pi \frac{l\nu_0}{c} \right) \right], \quad (3)$$

причём переменная часть интенсивности $J(l)$, которая и называется интерферограммой, в этом случае описывается косинусоидой.

Нетрудно показать, что справедливо и обратное: если в интерферометре разность хода лучей зафиксирована и равна l_0 , то спектральная функция пропускания $B(\nu)$ будет описываться косинусоидой, но уже в спектральной плоскости, т. е. если $J(l) = \delta(l - l_0)$, то $B(\nu) \approx B_0 \cos(2\pi l_0 \nu / c)$. Существуют строгие доказательства справедливости следующих интегральных соотношений [8]:

$$B(\nu) \sim \int_0^{\infty} \left\{ \left[I(l) - \frac{I(0)}{2} \right] \cos \left(2\pi \frac{l\nu}{c} \right) \right\} dl, \quad (4)$$

$$I(l) - \frac{I(0)}{2} \sim \int_0^{\infty} B(\nu) \cos \left(2\pi \frac{l\nu}{c} \right) d\nu. \quad (5)$$

Основные соотношения фурье-спектроскопии (4), (5) позволяют получать спектр источника на основе его интерферограммы. Мы же использовали эти выражения для того, чтобы, формируя спектр источника, получать для зондирования объектов интерферограммы с требуемыми свойствами. С этой точки зрения интерференция в белом свете в пластине П_2 на рис. 2 объясняется просто. Первая пластина вносит в спектр излучения косинусоидальную составляющую. В соответствии с теоремой сдвига это приводит к появлению ещё одного максимума интерферограммы на разности хода, равной удвоенной толщине второй пластины, и объясняет наблюдаемую интерференцию высоких порядков на выходе второй пластины.

3. ШИРОКОПОЛОСНЫЕ ИНТЕРФЕРОМЕТРЫ ДЛЯ КОНТРОЛЯ ХАРАКТЕРИСТИК ОПТИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ

Данный раздел посвящён конкретным устройствам, принцип работы которых основан на интерференции широкополосного излучения высоких порядков. Из существующих примеров мы приводим только те, в которых получены качественно новые результаты, труднодостижимые с использованием традиционных методов интерферометрии. Все они связаны с решением задач бесконтактного контроля характеристик оптических элементов.

3.1. Широкополосный интерферометр для контроля профилей плоских поверхностей

Одним из устройств этого семейства является интерферометр белого света Физо для контроля профилей плоских поверхностей большой апертуры, подробно описанный авторами в работах [4–5]. Интерферометрические методы измерения профилей плоских поверхностей основаны на принципе измерения фазы интерферирующих лучей, отражённых от исследуемого образца и эталонной пластины, составляющих интерферометр. Точное определение фазы осуществляется путём введения её модуляции по известному временному закону, которая может быть реализована либо путём модуляции оптического промежутка измерительного интерферометра, либо путём модуляции длины волны зондирующего излучения.



Рис. 3. Экспериментально зафиксированный гравитационный прогиб кварцевой пластины в области с диаметром 60 мм

Использование широкополосного излучения позволило заменить модуляцию промежутка между образцом и эталонной пластиной, применяемую в методах традиционной интерферометрии [9–12], сканированием спектра зондирующего излучения [1, 2]. Это привело к важным последствиям. «Селективность» интерферограммы широкополосного излучения к расстоянию до исследуемого образца позволила уменьшить влияние вторичных переотражений лучей, бликов от других поверхностей. Неподвижность образца и эталонной пластины в течение измерений дала возможность снять ограничения на размер и массу исследуемых объектов. Использование широкополосного источника излучения позволило избавиться от спекловой неоднородности интерференционных картин.

Об эффективности и точности разработанного интерферометра как прибора для измерения профиля поверхности можно судить по следующему примеру. На рис. 3 представлена картина экспериментально зафиксированного гравитационного прогиба кварцевой пластины толщиной 25 мм, установленной на три точки опоры, расположенные на угловых расстояниях 120° относительно друг друга по её периметру. Чёрный цвет соответствует уровню $0,001\lambda_0$ (выпуклость), белый — уровню $-0,002\lambda_0$ (впадина). Зависимость между яркостью и уровнем линейна. Шаг между уровнями составляет $0,0005\lambda_0$ ($\lambda_0 = 6300 \text{ \AA}$), что соответствует приблизительно 3 \AA . Теоретические оценки гравитационного прогиба пластины с такими параметрами дают значения порядка 6 \AA , что соответствует примерно $0,001\lambda_0$. Из рис. 3 видно, что этот эффект достаточно уверенно разрешается.

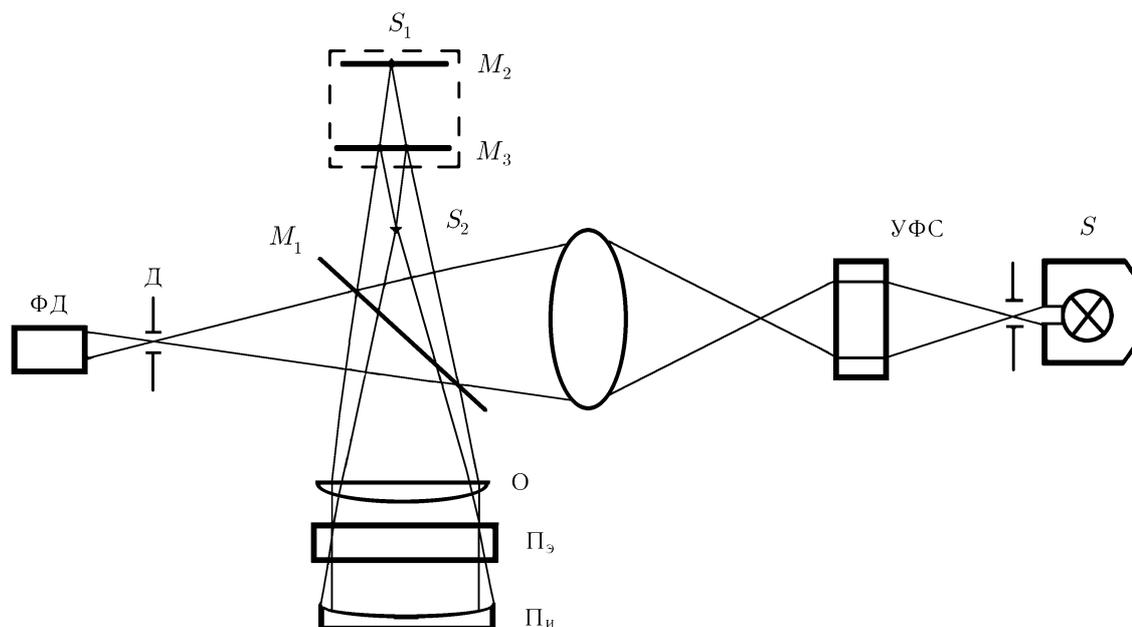


Рис. 4. Модифицированная схема интерферометра Физо для контроля сферических поверхностей: S — источник широкополосного излучения, УФС — управляемый формирователь спектра, M_1 — полупрозрачное стекло, M_2 и M_3 — зеркала расщепителя, S_1 и S_2 — мнимые источники, сформированные расщепителем, $Д$ — пространственный фильтр, ФД — фотодетектор, O — объектив, $П_э$ и $П_н$ — эталонная и исследуемая поверхности соответственно

3.2. Широкополосный интерферометр для контроля сферических поверхностей

Точный контроль сферических поверхностей в настоящее время является более сложной и в то же время актуальной проблемой. Особенность измерений сферических поверхностей заключается в отсутствии универсальной эталонной поверхности, с помощью которой можно было бы провести абсолютные оценки профилей исследуемых образцов.

Одним из способов решения проблемы эталонов является использование интерферометра Тваймана—Грина, одно из плеч которого содержит формирователь сферического волнового фронта [12–14]. Образец устанавливается на расстоянии, при котором радиус кривизны волнового фронта совпадает с радиусом кривизны контролируемой поверхности. По этому расстоянию определяют радиус кривизны, а отклонения от сферичности определяются по фазе интерферограммы. Однако пространственное разделение плеч интерферометра, позволяющее сравнивать сферические поверхности с плоскими, имеет огромный недостаток. Он связан с полной неидентичностью оптических путей, которые проходят лучи в каждом из плеч. В связи с этим точность измерений таких приборов, как правило, не превышает $0,1\lambda_0$.

Этот недостаток в существенной мере преодолён в одной из предложенных авторами модифицированных схем интерферометра Физо (рис. 4). Для того, чтобы осветить эталонную пластину и исследуемый образец одновременно сферическим и плоским фронтами, при помощи двух зеркал M_2 и M_3 (расщепителя), создаются два мнимых источника S_1 и S_2 . Один из источников находится в фокусе объектива Физо, а другой — ближе к фокусу или дальше от него в зависимости от знака кривизны исследуемой поверхности. Измерение сферичности осуществляется по сдвигу зеркала расщепителя M_3 , а отклонения от сферичности определяются по фазе интерферограммы

аналогично тому, как это выполняется в схеме для измерения плоских поверхностей. Дополнительные системы интерферирующих лучей, связанные с отражением сферического фронта от эталона и плоского фронта от образца, устраняются благодаря селективной способности широкополосного излучения интерферировать только при определённой разности хода лучей, о которой мы говорили выше.

Полученное устройство совмещает положительные свойства интерферометра Тваймана—Грина (наличие двух плеч со сферическим и плоским фронтами) и Физо (высокая точность, связанная с тем, что эти плечи физически совмещены).

3.3. Широкополосный интерферометр для *in situ* измерений характеристик оптических элементов

Не менее актуальной является задача определения оптических характеристик элементов в процессе их работы или изготовления. Традиционные методы измерения фазы интерферограмм ограничены измерением только воздушных промежутков. Свойство селективности интерферограмм широкополосного излучения к расстояниям дало возможность, используя оптический элемент как самостоятельную ячейку интерферометра, проводить точные *in situ* измерения геометрических и оптических характеристик удалённого объекта.

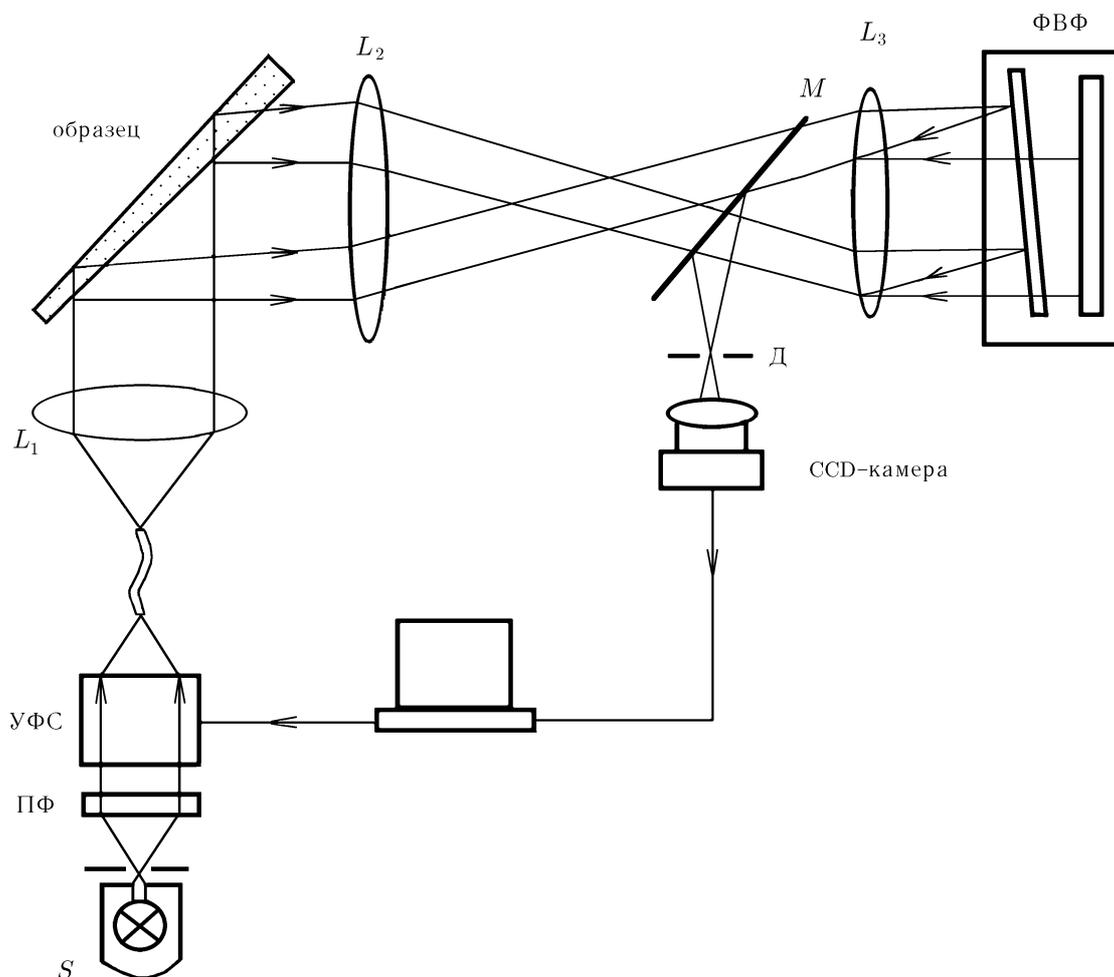


Рис. 5. Функциональная схема измерений оптической толщины удалённого образца

Один из вариантов схемы измерения оптической толщины удалённого образца с плоскими гранями представлен на рис. 5. Схема включает в себя источник широкополосного излучения S , предварительный оптический фильтр ПФ с центральной длиной волны $\lambda_0 = 6300 \text{ \AA}$ с шириной полосы пропускания $\Delta\lambda = 150 \text{ \AA}$, управляемый формирователь спектра УФС, световод, объективы L_1 , L_2 и L_3 , формирователь волновых фронтов ФВФ, исследуемый образец, диагональное зеркало M , пространственный фильтр D и матричный фотодетектор.

Поскольку изначально толщина образца может быть неизвестна, то сопряжение спектральных характеристик излучения с оптической толщиной образца осуществляется за счёт перестройки частоты спектральной гребёнки УФС. Ширина полосы зондирующего излучения определяет степень селективности интерферограммы к разности хода. Она подбирается с таким расчётом, чтобы гарантированно исключить влияние «нерабочих» интерферограмм и в то же время не усложнить процедуру согласования периода спектральной гребёнки с оптической толщиной образца.

Как видно из схемы, в процессе измерений исследуемый образец не подвергается никакому воздействию, кроме излучения, поэтому появляется возможность измерения его характеристик на расстоянии. В нашем случае это расстояние составляло 270 см.

На рис. 6 представлены изолинии оптических промежутков пробной кварцевой пластины с диаметром 40 мм и толщиной 10 мм. Отличительной особенностью данной картины от картины изолиний поверхности пластины является проявление структуры неоднородностей материала, из которого изготовлена пластина. В соответствии с этим в фазовой структуре интерферограммы появились мелкомасштабные неоднородности.

Отметим, что в действительности грани оптического элемента не всегда способны образовывать интерференционную картину: между ними может быть существенный клин или они могут иметь разную форму. Тем не менее пример на рис. 4, в котором оптический промежуток имел разные по форме грани, убеждает нас в том, что задача решаема. В самом деле, каждая из граней исследуемого удалённого объекта может освещаться своим формирователем волнового фронта. При этом могут быть скомпенсированы как клин между гранями, так и отличия в кривизне поверхностей. В результате мы сможем наблюдать интерференцию лучей, отражённых от разных граней пластины, которую в обычных условиях наблюдать невозможно.

Точная метрологическая калибровка не представляет технической сложности и может быть осуществлена путём проведения контрольных измерений пластин с известными характеристиками.

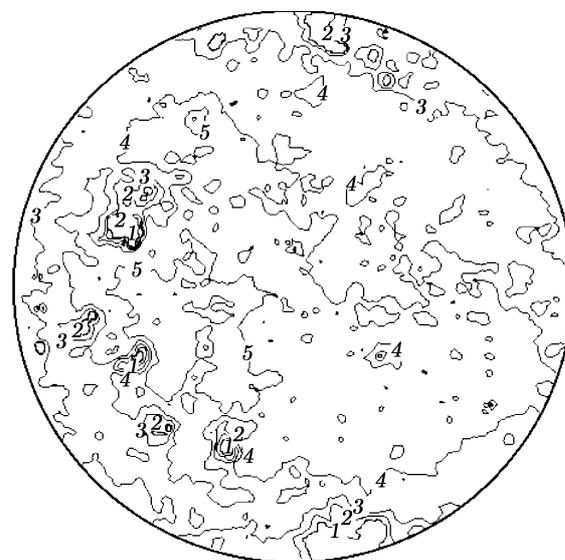


Рис. 6. Изолинии оптических промежутков кварцевой пластины с диаметром 40 мм и толщиной 10 мм. Шаг между изолиниями соответствует 10 \AA , номера 1 и 5 определяют изолинии, соответствующие минимальному и максимальному значениям неоднородностей. Мелкомасштабные структуры являются проявлением неоднородности материала, из которого изготовлена пластина

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В последние годы в связи с преодолением микронного рубежа в технике и технологиях возрос спрос на прецизионные измерения, способные обеспечить точность порядка нанометров и лучше. В настоящее время работы по созданию соответствующей метрологической базы идут с нарастающей интенсивностью.

Данная статья имела целью только познакомить читателей с новым разделом интерферометрии — оптической интерферометрией широкополосных источников высоких порядков. Вследствие этого мы не дали строгого изложения теоретических аспектов этого вопроса и подробного описания приборов, работа которых основана на этом явлении. Представленные примеры были подобраны в соответствии с их наглядностью.

В статье не затронут круг выполняемых в НИРФИ задач, связанных с оптическим зондированием объектов, не являющихся оптическими элементами: деталей машин, биологических тканей и т. д. Особенности этих объектов является не только их оптическая непрозрачность, но и сложность рельефа поверхностей. Тем не менее задачи метрологии таких объектов также успешно решаются методами интерферометрии широкополосного излучения.

Работа выполнена при частичной поддержке Федеральной научно-технической программы «Астрономия» (разд. 1.5.4.5, 1.5.5.1) и Национального научного фонда США (грант NSF USA РНУ-70140110).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кожеватов И. Е., Куликова Е. Х., Черрагин Н. П. // *Опт. и спектроскоп.* 1996. Т. 80, № 6. С. 1011.
2. Кожеватов И. Е., Куликова Е. Х., Черрагин Н. П. // *Опт. журнал.* 1997. Т. 64, № 9. С. 49.
3. Schwider J. // *Appl. Opt.* 1997. V. 36, No. 7. P. 1433.
4. Кожеватов И. Е., Куликова Е. Х., Черрагин Н. П. // *ПТЭ.* 2001. № 1. С. 104.
5. Кожеватов И. Е., Руденчик Е. А., Черрагин Н. П., Куликова Е. Х. // *Изв. вузов. Радиофизика.* 2001. Т. 44, № 7. С. 623.
6. Коломийцев Ю. В. *Интерферометры. Основы инженерной теории, применение.* Л.: Машиностроение, 1976. 34 с.
7. Зверев В. А. *Радиооптика.* М.: Советское радио, 1975.
8. Белл Р. Дж. *Введение в фурье-спектроскопию* / Под ред. Г. Н. Жижина. М.: Мир, 1975. С. 62.
9. Sasaki O., Okasaki H. // *Appl. Opt.* 1986. V. 25. P. 3137
10. Bowe B., Toal V. // *Optical Engineering.* 1998. V. 37. P. 1796.
11. Marshall R. H., Ning Y. N., Jiang X. Q., Palmer A. W., Meggitt B. T., Grattan K. T. // *Proc. SPIE.* 1996. V. 2594. P. 159.
12. Chiayu, Wyant J. C. // *Appl. Opt.* 1993. V. 32. P. 4698.
13. Schwider J., Falenstorfer O. // *Appl. Opt.* 1995. V. 34, No. 10. P. 2972.
14. Sommargren G. E. // *Laser Focus World.* 1995. No. 8. P. 61.

Научно-исследовательский радиофизический институт,
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию
16 октября 2001 г.

HIGHER-ORDER WIDEBAND OPTICAL INTERFEROMETRY*I. E. Kozhevator and E. Kh. Kulikova*

A method for obtaining wideband optical radiation with synthesized temporal coherency is substantiated. The wideband Fizeau interferometers for control of plane and spherical surfaces, as well as for remote control of the optical thickness of samples, created on the basis of this method are described. These devices measure the characteristics of optical elements having up to 300 mm in diameter with accuracy up to several Angström in real time.

УДК 539.219.3:621.382

ВРЕМЯ УСТАНОВЛЕНИЯ СТАЦИОНАРНОЙ НЕРАВНОВЕСНОЙ ПЛОТНОСТИ БРОУНОВСКИХ ЧАСТИЦ В СРЕДЕ С ИСТОЧНИКОМ И СТОКОМ

Н. В. Агудов, А. В. Сафонов

Обобщён метод отыскания временных характеристик нестационарной диффузии в одномерной среде, определено время установления стационарной неравновесной концентрации вещества в среде со стоком и источником частиц при произвольно меняющемся в пространстве потенциальном профиле. Рассмотрены конкретные примеры.

ВВЕДЕНИЕ

Задача нахождения скорости диффузии через потенциальные барьеры при наличии стоков и источников частиц возникает при решении различных проблем в физике, химии и биологии [1–7].

Данная статья является продолжением и дальнейшим развитием работ [8–11]. В [8] впервые был предложен новый метод определения точного времени релаксации к стационарным распределениям для произвольного кусочно-линейного потенциального профиля. Далее этот метод был обобщён на случай кусочно-параболического [9] и произвольного [10] потенциальных профилей. В продолжение этой темы в работе [11] был впервые рассмотрен вопрос о существовании стационарных неравновесных распределений плотности числа частиц в системах с источниками и стоками. В настоящей статье впервые находятся времена установления таких распределений в случае произвольно меняющегося в пространстве потенциального профиля.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОД РЕШЕНИЯ

Как известно, плотность числа броуновских частиц $\rho(x, t)$, диффундирующих в заданном потенциальном профиле $U(x)$ при наличии внешнего источника $r(x, t)$, описывается неоднородным уравнением диффузии (см., например, [11, 12]):

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial G(x, t)}{\partial x} + r(x, t). \quad (1)$$

Здесь

$$G(x, t) = -\frac{D}{2} \left[\frac{d\varphi(x)}{dx} \rho(x, t) + \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} \right] \quad (2)$$

— поток вещества, D — коэффициент диффузии (во многих задачах принимается, что $D = 2kT/h$, где T — температура броуновских частиц, k — постоянная Больцмана, h — эквивалентная вязкость), $\varphi(x) = 2U(x)/(hD) = U(x)/(kT)$ — безразмерный потенциальный профиль, а $r(x, t)$ — функция источника или стока частиц. Будем считать, что $r(x, t) > 0$. Тогда $r(x, t)$ — это число частиц, рождающихся в единицу времени в точке x в момент времени t .

Пусть в такой системе задан сток при $x \rightarrow +\infty$ (т. е. $U(x) \rightarrow -\infty$ при $x \rightarrow +\infty$). В этом случае может возникнуть стационарное неравновесное распределение плотности частиц, которое будет

зависеть от источника и стока. В работе [11] показано, что для существования такого распределения в случае постоянного во времени точечного источника $r(x, t) = r_0 \delta(x - x_0)$ необходимо, чтобы потенциальный профиль спадал при $x \rightarrow +\infty$ не медленнее, чем $\varphi(x) \propto -x^2$. Будем считать, что $r(x, t)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют этим условиям. Полагая также, что в начальный момент времени $\rho(x, 0) = 0$, поставим задачу нахождения времени установления стационарного неравновесного распределения плотности броуновских частиц в некотором слое либо в произвольной точке среды.

Время установления плотности частиц в слое $[l_1, l_2]$, где $l_1 < l_2$, определим аналогично [13] как характерное время установления стационарного значения массы вещества (здесь и далее под массой понимается полное число частиц в слое):

$$\theta(l_1, l_2) = \int_0^{\infty} [M(\infty) - M(t)] dt / M(\infty), \quad (3)$$

где $M(t)$ — масса вещества в наблюдаемом слое:

$$M(t) = \int_{l_1}^{l_2} \rho(x, t) dx. \quad (4)$$

Для решения поставленной задачи используем, следуя [8], метод преобразования Лапласа от плотности частиц:

$$Y(x, s) = \int_0^{\infty} \rho(x, t) \exp(-st) dt.$$

В этом случае исходное уравнение диффузии (1) преобразуется следующим образом:

$$sY(x, s) = -\frac{d\hat{G}(x, s)}{dx} + \frac{r_0}{s} \delta(x - x_0),$$

где $\hat{G}(x, s)$ есть образ Лапласа потока вещества (2):

$$s\hat{G}(x, s) = -\frac{D}{2} \left[\frac{d\varphi(x)}{dx} Y(x, s) + \frac{dY(x, s)}{dx} \right]. \quad (5)$$

Время установления (3) в терминах преобразования Лапласа примет вид

$$\theta(l_1, l_2) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{M(\infty) - s\hat{M}(s)}{sM(\infty)}, \quad (6)$$

где

$$\hat{M}(s) = \int_0^{\infty} M(t) \exp(-st) dt = \int_{l_1}^{l_2} Y(x, s) dx.$$

Заметим, что из (1) и (4) следует

$$\frac{dM(t)}{dt} = -G(l_2, t) + G(l_1, t) + r_0 \int_{l_1}^{l_2} \delta(x - x_0) dx. \quad (7)$$

Интеграл в правой части уравнения (7) равен r_0 , если источник частиц расположен внутри рассматриваемого слоя $[l_1, l_2]$, и обращается в нуль, если источник лежит вне его.

Используя преобразование Лапласа уравнения (7), запишем выражение для времени установления (6) в более удобной форме:

$$\theta(l_1, l_2) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{M(\infty) + \hat{G}(l_2, s) - \hat{G}(l_1, s) - \frac{r_0}{s} \int_{l_1}^{l_2} \delta(x - x_0) dx}{sM(\infty)}.$$

Поскольку для нахождения времени установления необходимо знать поведение функции $\hat{G}(x, s)$ лишь при $s \rightarrow 0$, разложим функции $Y(x, s)$ и $\hat{G}(x, s)$ в ряд по параметру s :

$$sY(x, s) = Z_0(x) + Z_1(x)s + Z_2(x)s^2 + \dots, \quad s\hat{G}(x, s) = H_0(x) + H_1(x)s + H_2(x)s^2 + \dots, \quad (8)$$

после чего, подставляя (8) в выражение для времени установления, получим

$$\theta(l_1, l_2) = \frac{H_2(l_2) - H_2(l_1)}{M(\infty)}. \quad (9)$$

Это выражение справедливо, если

$$H_0(l_2) - H_0(l_1) - r_0 \int_{l_1}^{l_2} \delta(x - x_0) dx = 0, \quad M(\infty) + H_1(l_2) - H_1(l_1) = 0. \quad (10)$$

Ниже мы покажем, что эти условия всегда выполняются.

Как и следовало ожидать, выражение (9) формально совпадает с временем релаксации, полученным в [10, 13]. Однако сходство это чисто внешнее. Разница заключается в уравнениях, определяющих функции $H_i(x)$ и $Z_i(x)$, где $i = 0, 1, \dots$, и связана с наличием в рассматриваемой задаче источника. Чтобы получить эти уравнения, подставим (8) в (1):

$$\begin{aligned} Z_0''(x) + Z_0'(x) \frac{d\varphi(x)}{dx} + Z_0(x) \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} &= -\frac{2r_0}{D} \delta(x - x_0), \\ Z_1''(x) + Z_1'(x) \frac{d\varphi(x)}{dx} + Z_1(x) \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} &= \frac{2}{D} Z_0(x), \\ Z_2''(x) + Z_2'(x) \frac{d\varphi(x)}{dx} + Z_2(x) \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} &= \frac{2}{D} Z_1(x), \\ &\dots \end{aligned} \quad (11)$$

Используя (5), получим:

$$H_0(x) = -\frac{D}{2} \left[\frac{d\varphi(x)}{dx} Z_0(x) + Z_0'(x) \right], \quad H_1(x) = -\frac{D}{2} \left[\frac{d\varphi(x)}{dx} Z_1(x) + Z_1'(x) \right], \quad \dots$$

Несложно заметить, что для $i \geq 0$

$$\frac{dH_{i+1}(x)}{dx} = -Z_i(x).$$

Отсюда, зная $Z_i(x)$, легко найти $H_{i+1}(x)$:

$$H_{i+1}(x) = -\int_0^x Z_i(u) du + \text{const.}$$

Тогда выражение для времени релаксации примет вид

$$\theta(l_1, l_2) = -\frac{\int_{l_1}^{l_2} Z_1(u) du}{M(\infty)}.$$

Таким образом, необходимо найти $Z_1(x)$ и $M(\infty)$. Это можно сделать с помощью уравнений (11). Решая их, получаем

$$Z_0(x) = C_2 \exp(-\varphi(x)) + C_1 \exp(-\varphi(x)) \int_{-\infty}^x \exp(\varphi(u)) du - \frac{2r_0}{D} \exp(-\varphi(x)) \int_{-\infty}^x \exp(\varphi(u)) 1(u - x_0) du, \quad (12)$$

$$Z_1(x) = B_2 \exp(-\varphi(x)) + B_1 \exp(-\varphi(x)) \int_{-\infty}^x \exp(\varphi(u)) du + \frac{2}{D} \exp(-\varphi(x)) \int_{-\infty}^x A(u) \exp(\varphi(u)) du, \quad (13)$$

где

$$A(u) = \int_{-\infty}^u Z_0(x) dx,$$

$1(x)$ — единичная функция, а C_1 , C_2 , B_1 и B_2 — константы, определяемые из граничных условий. Так, например, если потенциальный профиль имеет отражающую границу при $x \rightarrow -\infty$ и сток при $x \rightarrow +\infty$, то граничные условия имеют вид

$$Z_i(+\infty) = 0, \quad \frac{d\varphi(-\infty)}{dx} Z_i(-\infty) + Z_i'(-\infty) = 0.$$

Учитывая, что на основании предельных теорем теории преобразования Лапласа

$$\lim_{s \rightarrow 0} sY(s, x) = \rho(x, \infty) = Z_0(x), \quad \lim_{s \rightarrow 0} s\hat{G}(s, x) = G(x, \infty) = H_0(x),$$

определим установившееся значение массы вещества в слое:

$$M(\infty) = \int_{l_1}^{l_2} Z_0(x) dx.$$

Теперь легко показать, что условия (10) всегда выполняются. Поскольку

$$H_0(x) = -\frac{D}{2} \left[\frac{d\varphi(x)}{dx} Z_0(x) + Z_0'(x) \right],$$

то в силу (13)

$$H_0(x) = -\frac{D}{2} \left[\frac{2r_0}{D} 1(x - x_0) - C_1 \right],$$

откуда

$$H_0(l_2) - H_0(l_1) = G(l_2) - G(l_1) = r_0 [1(l_2 - x_0) - 1(l_1 - x_0)].$$

Выражение в правой части равно r_0 , если источник находится внутри слоя $[l_1, l_2]$, и обращается в нуль, если источник лежит вне его. Таким образом, в точке $x = x_0$ независимо от вида потенциального профиля имеет место скачок потока на величину r_0 . Это связано с наличием в точке $x = x_0$ источника $r(x, t)$.

Далее,

$$H_1(x) = -\frac{D}{2} \left[\frac{d\varphi(x)}{dx} Z_1(x) + Z_1'(x) \right] = -\frac{D}{2} \left[B_1 + \frac{2}{D} A(x) \right],$$

следовательно,

$$H_1(l_2) - H_1(l_1) = A(l_1) - A(l_2) = \int_{l_1}^{l_2} \rho(x) dx = M(\infty).$$

Таким образом, оба условия (10) выполнены.

В итоге время установления стационарной неравновесной плотности частиц оказывается равным

$$\theta(l_1, l_2) = -\frac{\int_{l_1}^{l_2} \left[B_2 e^{-\varphi(x)} + B_1 e^{-\varphi(x)} \int_{-\infty}^x e^{\varphi(u)} du + \frac{2}{D} e^{-\varphi(x)} \int_{-\infty}^x A(u) e^{\varphi(u)} du \right] dx}{\int_{l_1}^{l_2} \left[C_2 e^{-\varphi(x)} + C_1 e^{-\varphi(x)} \int_{-\infty}^x e^{\varphi(u)} du - \frac{2r_0}{D} e^{-\varphi(x)} \int_{-\infty}^x e^{\varphi(u)} 1(u - x_0) du \right] dx}.$$

Если в выражении для $\theta(l_1, l_2)$ мы устремим толщину слоя $[l_1, l_2]$ к нулю так, чтобы $l_1 \rightarrow l_2 \rightarrow x$, то в результате получим время релаксации в любой произвольной точке среды:

$$\theta(x) = -\frac{B_2 e^{-\varphi(x)} + B_1 e^{-\varphi(x)} \int_{-\infty}^x e^{\varphi(u)} du + \frac{2}{D} e^{-\varphi(x)} \int_{-\infty}^x A(u) e^{\varphi(u)} du}{C_2 e^{-\varphi(x)} + C_1 e^{-\varphi(x)} \int_{-\infty}^x e^{\varphi(u)} du - \frac{2r_0}{D} e^{-\varphi(x)} \int_{-\infty}^x e^{\varphi(u)} 1(u - x_0) du}.$$

2. ПРИМЕРЫ

В качестве первого примера рассмотрим простейший потенциальный профиль с отражающей границей в точке $x = 0$ и поглощающей стенкой в точке $x = L$:

$$\varphi(x) = \begin{cases} +\infty, & x \leq 0; \\ 0, & 0 < x < L; \\ -\infty, & x \geq L. \end{cases}$$

В этом случае время установления стационарной плотности частиц в слое $[0, L]$ в зависимости от расположения источника принимает вид

$$\theta(0, L, x_0) = \tau \frac{5/12 + 5a/12 - a^2/12}{1 + a}, \quad (14)$$

где $\tau = 2L^2/D$ — характерное время свободной диффузии, $a = x_0/L$ — безразмерная координата источника. Зависимость времени релаксации θ от безразмерной координаты a изображена на

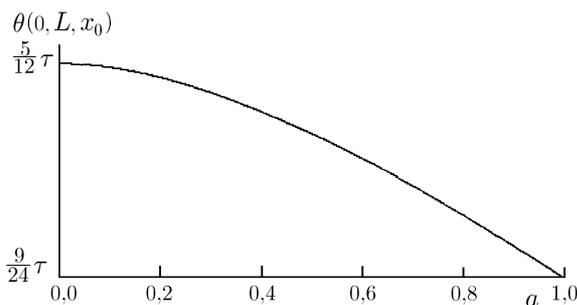


Рис. 1. Зависимость времени установления стационарной плотности частиц в слое $[0, L]$ от расположения источника $a = x_0/L$

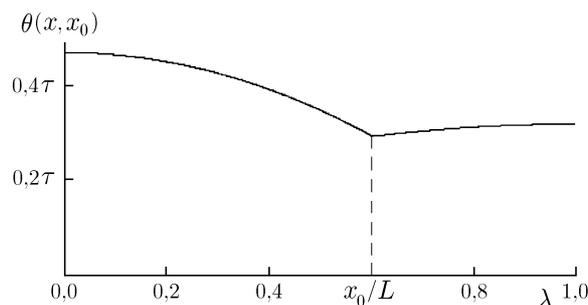


Рис. 2. Зависимость времени установления стационарной плотности частиц от расположения точки наблюдения $\lambda = x/L$

рис. 1. Как видно из графика, время релаксации монотонно убывает с увеличением a на промежутке $0 \leq a \leq 1$ и принимает минимальное значение при $a = 1$, что соответствует расположению источника вблизи явного стока в точке L . Это связано с тем, что при приближении источника к стоку уменьшается установившееся значение массы вещества, участвующей в диффузии:

$$M(\infty) = \frac{r_0}{D} (L^2 - x_0^2).$$

Другими словами, чем больше установившаяся масса вещества при постоянной интенсивности источника r_0 , тем больше времени требуется источнику, чтобы «накачать» её в систему. Заметим, что при $a \rightarrow 1$ ($x_0 \rightarrow L$) масса $M(\infty)$ стремится к нулю, в то время как время установления стремится к константе $9\tau/24$. Это связано с тем обстоятельством, что при любых $x_0 \neq L$ стационарное значение плотности частиц вблизи отражающей границы $\rho(0)$ отлично от нуля. Другими словами, как бы близко к стоку не располагался источник, всегда найдутся частицы, продиффундировавшие от точки x_0 к отражающей стенке с конечной средней скоростью (зависящей от коэффициента диффузии D), а значит, и за конечное время. При этом из физических соображений понятно, что лишь при $D \rightarrow \infty$ эта скорость будет бесконечно большой, а время установления нулевым. Это и следует из формулы (14), поскольку при $D \rightarrow \infty$ время свободной диффузии $\tau \rightarrow 0$.

Рассмотрим теперь время установления в произвольной точке среды:

$$\theta(x, x_0) = \tau \times \begin{cases} 1/3 - a^2/2 + \lambda/3 - \lambda^2/6, & x > x_0; \\ 1/3 - \lambda^2/2 + a/3 - a^2/6, & x < x_0, \end{cases} \quad (15)$$

где введено обозначение $\lambda = x/L$. Зависимость времени $\theta(x, x_0)$ от положения точки наблюдения изображена на рис. 2.

Сравнивая время установления для $x < x_0$ и $x > x_0$, можно заметить, что оно не изменится, если произвести замену $x \leftrightarrow x_0$. Однако такое свойство справедливо лишь для данной системы и связано со специальным видом потенциального профиля и граничных условий. Из (12) следует, что для произвольного потенциального профиля, неограниченно возрастающего при $x \rightarrow -\infty$ и убывающего быстрее, чем $-x^2$ при $x \rightarrow +\infty$, стационарная плотность частиц имеет вид

$$\rho(x) = \frac{2r_0}{D} \exp(-\varphi(x)) \begin{cases} \int_x^\infty \exp(\varphi(u)) du, & x > x_0; \\ \int_{x_0}^x \exp(\varphi(u)) du, & x < x_0. \end{cases}$$

Отсюда видно, что в общем случае при замене $x \leftrightarrow x_0$ стационарная плотность частиц преобразуется следующим образом:

$$\rho(x, x_0) \exp(-\varphi(x_0)) = \rho(x_0, x) \exp(-\varphi(x)), \quad (16)$$

и только в случае постоянного потенциального профиля при обмене местами точки источника и точки наблюдения стационарная плотность частиц, а вместе с ней и время установления не изменятся.

Заметим, что соотношение (16) останется верным, если потенциальный профиль будет иметь два стока, т. е. если $\varphi(x) \rightarrow -\infty$ при $x \rightarrow \pm\infty$.

Кроме того, из (15) следует, что время установления увеличивается с ростом расстояния между источником и точкой наблюдения, что представляется вполне естественным, и принимает наибольшее значение при их максимальном разнесении:

$$\theta_{\max} = \tau/2.$$

В качестве следующего примера рассмотрим метастабильные состояния с потенциальными барьерами. Для линейного потенциального барьера

$$\varphi(x) = \begin{cases} +\infty, & x \leq 0; \\ ax, & 0 < x < L \quad (a > 0); \\ -\infty, & x \geq L \end{cases} \quad (17)$$

и источника, расположенного в локальном минимуме потенциала, в точке $x = 0$ время установления плотности частиц в слое $[0, L]$ равно

$$\theta(0, L, \beta) = \tau \left[\frac{\exp(\beta)}{\beta^2} - \frac{2}{\beta} + \frac{2}{\beta^2} - \frac{3}{2(\exp(\beta) - \beta - 1)} \right], \quad (18)$$

где $\beta = aL$ — высота потенциального барьера. Для прямоугольного потенциального барьера

$$\varphi(x) = \begin{cases} +\infty, & x \leq 0; \\ 0, & 0 < x < L/2; \\ \beta, & L/2 < x < L; \\ -\infty, & x \geq L \end{cases}$$

это время равно

$$\theta(0, L, \beta) = \tau \frac{3 \exp(2\beta) + 5 \exp(\beta) + 2}{12 (\exp(\beta) + 1)}. \quad (19)$$

Сравним эти времена установления со средним временем первого достижения (СВПД) броуновской частицей точки стока $x = L$ из начальной точки $x = 0$. Напомним, что определение СВПД (см., например, [14]) отличается от времени установления (3), рассмотренного в данной работе. Выражения для СВПД в случае линейного барьера

$$T(0, L, \beta) = \tau \left(\frac{\exp(\beta)}{\beta^2} - \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta^2} \right)$$

и прямоугольного барьера

$$T(0, L, \beta) = \tau \left(\frac{\exp(\beta) + 1}{4} \right)$$

не совпадают с соответствующими временами установления (18) и (19). Тем не менее, как следует из рис. 3, где изображены зависимости этих времён от высоты барьера, времена установления (18) и (19) очень близки к СВПД для соответствующего потенциального профиля. Очевидно, это объясняется тем, что процесс установления стационарного распределения определяется главным образом именно СВПД точки стока.

Время перехода броуновских частиц через высокий потенциальный барьер исследовалось Крамерсом [1, 15]. Фактически, для определения времени перехода Крамерс использовал выражение

$$\theta = \frac{M(0)}{G(x_m, t)}, \quad (20)$$

где $M(0)$ — масса вещества (или полное число частиц) в потенциальной яме в начальный момент, $G(x_m, t)$ — поток вещества на вершине барьера, в точке максимума потенциала $x = x_m$. В системе, рассмотренной Крамерсом в [1], источника частиц не было и рассматривалось конечное число частиц. В этом случае поток через барьер не может быть постоянной величиной. Тем не менее при высоком барьере поток $G(x_m, t)$ настолько мал, что его можно приближённо считать постоянным: $G(x_m, t) \approx G(x_m)$. Поэтому определение (20), предложенное Крамерсом, работает только в приближении высокого потенциального барьера (или малого шума).

В задаче с постоянным источником частиц, рассмотренной в данной работе, поток в любой точке $x > x_0$ стремится со временем к постоянной величине $G(x, \infty) = r_0$ при любой высоте потенциального барьера. При этом масса вещества в области локального минимума потенциала также будет стремиться к постоянной величине $M(\infty)$. Можно определить время перехода через барьер аналогично (20) следующим образом:

$$\theta = \frac{M(\infty)}{G(L, \infty)} = \frac{M(\infty)}{r_0}, \quad (21)$$

где $M(\infty)$ — стационарная масса вещества в области $x < L$. Оказывается, что время перехода, определённое согласно (21), в точности (при любой высоте потенциального барьера) совпадает с СВПД границы L из той же точки $x = x_0$, где расположен постоянный источник частиц, если в точке $x = L$ расположена поглощающая граница. Если же поглощающая граница находится при $x \rightarrow \infty$, то время перехода (21) совпадает с полученным в [10] точным временем распада метастабильного состояния, определённого на интервале $x < L$. Таким образом, в любом случае приближённое определение времени перехода через потенциальный барьер, данное ранее Крамерсом для системы с конечным числом частиц, даёт точный ответ для системы с постоянным источником, где масса есть не исходная величина, а стационарная масса частиц в системе, а поток — стационарный поток в точке стока.

Работа поддержана РФФИ (проекты № 02-02-17517, 00-15-96620) и INTAS (проект № 01-0450).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kramers H. // Physica. 1940. V. 7. P. 248.

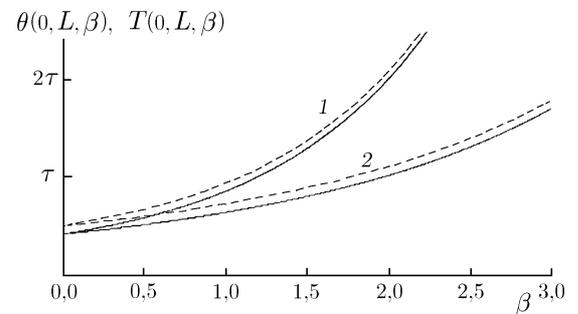


Рис. 3. Зависимость времени установления стационарной плотности частиц в слое $[0, L]$ от высоты ступенчатого (кривая 1) и линейного (кривая 2) барьеров. Пунктиром изображены соответствующие данным барьерам СВПД

2. Rice A. Diffusion Limited Reaction. Amsterdam: Elsevier, 1985.
3. Hynes J. T. // Annu. Rev. Phys. Chem. 1985. V. 36. P. 573.
4. Fleming G. R., Wolynes P. C. // Phys. Today. 1990. V. 43. P. 36.
5. Hirsch J. E., Huberman B. A., Scalapino D. J. // Physical Review A. 1982. V. 25. P. 519.
6. Samanta A., Gosh S. K. // J. Chem. Phys. 1992. V. 97. P. 9321.
7. Samanta A., Gosh S. K. // Physical Review E. 1993. V. 47. P. 4568.
8. Агудов Н. В., Малахов А. Н. // Изв. вузов. Радиофизика. 1993. Т. 36. С. 148.
9. Malakhov A. N., Pankratov A. L. // Physica A. 1996. V. 229. P. 109.
10. Malakhov A. N. // Chaos. 1997. V. 7. P. 488.
11. Дубков А. А., Малахов А. Н. // Изв. вузов. Радиофизика. 2000. Т. 43, № 9. С. 814.
12. Зельдович Я. Б., Мышкис А. Д. Элементы математической физики. М.: Наука, 1973.
13. Малахов А. Н. // Изв. вузов. Радиофизика. 1997. Т. 40. С. 886.
14. Понтрягин Л. А., Андронов А. А., Витт А. А. // ЖЭТФ. 1933. Т. 3. С. 165.
15. Pankratov A. // Advances in Chemical Physics. 2002. V. 121. P. 357.

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского,
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию
27 августа 2002 г.

**TIME OF RELAXATION TO A STATIONARY NONEQUILIBRIUM DISTRIBUTION OF
BROWNIAN PARTICLES IN A SYSTEM WITH A SOURCE AND A SINK**

N. V. Agudov, A. V. Safonov

The method for obtaining of time scales for non-stationary one dimensional diffusion is generalized. The times of relaxation to the stationary but non-equilibrium concentration of a substance in the system with a source, sink, and arbitrary potential profile are obtained and studied in details. The specific examples are considered.