

Содержание

- Колесник С. Н., Тинин М. В., Афанасьев Н. Т.** Имитационное моделирование распространения радиоволн в случайно-неоднородной ионосфере ..... 731
- Плужников А. Д., Приблудова Е. Н.** Обобщённые характеристики пространственно-временного разрешения сигналов при малой скважности радиолокационного зондирования и сканировании по угловой координате ..... 746
- Сугак В. Г., Кириченко В. А.** Экспериментальные результаты радиолокационного зондирования подповерхностных зон, загрязнённых нефтепродуктами ..... 757
- Бубновский А. Ю., Шевцов Б. М.** О влиянии длительности исходного сигнала на нестационарные отражения в случайной среде ..... 766
- Короновский А. А., Трубецков Д. И., Храмов А. Е.** Влияние внешнего сигнала на автоколебания в распределённой системе винтовой электронный поток—встречная электромагнитная волна ..... 773
- Флакман А. Г.** Подавление взаимных помех в параллельных пространственных каналах в ММО-системах связи ..... 793
- Музычук О. В.** Релаксация вероятностных характеристик броуновского движения, вызванного дихотомической случайной силой ..... 802

УДК 621.371

## ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ РАДИОВОЛН В СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ ИОНОСФЕРЕ

*С. Н. Колесник, М. В. Тинин, Н. Т. Афанасьев*

Представлены методика и результаты имитационного моделирования распространения радиоволн в случайно-неоднородной ионосфере с учётом сферичности Земли и фоновой ионосферы. Рассматриваются вероятностные распределения углов прихода и соответствующих им углов излучения, амплитуды и эйконала, полученные при имитационном моделировании. Делается вывод о симметричности наиболее вероятной траектории относительно области отражения от ионосферного слоя, а также о равенстве средних углов прихода и соответствующих им средних углов излучения. Путём моделирования получены статистические характеристики волны, а именно дисперсии углов прихода, эйконала, корреляционные функции эйконала и поля. Результаты моделирования дисперсии углов прихода и эйконала сравниваются с результатами первого приближения теории возмущений. Показана необходимость учёта флуктуаций эйконала в свободном от неоднородностей пространстве, вызванных флуктуациями углов выхода нижних лучей из ионосферного слоя со случайными неоднородностями.

### ВВЕДЕНИЕ

В теоретических исследованиях ионосферного распространения радиоволн широко используются различные приближённые методы решения волнового уравнения. Это связано с сильно ограниченным кругом задач распространения радиоволн в неоднородных средах, допускающих строгое решение, удобное для анализа. Среди этих приближённых методов особое место занимают геометрооптическое приближение и его обобщения, учитывающие то, что при ионосферном распространении радиоволн характерный масштаб неоднородностей, существенно влияющих на структуру радиосигнала, довольно часто значительно превышает длину волны. В этом приближении решение волнового уравнения сводится к решению уравнений (эйконала и переноса) в частных производных первого порядка, решение которых легко находится при наличии характеристик (лучей) — решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Несмотря на возможности численного интегрирования этих лучевых уравнений, многие исследователи при построении лучей используют приближённые методы. Это обусловлено необходимостью достаточно оперативно исследовать распространение радиоволн в изменчивой пространственно неоднородной ионосфере. Из приближённых методов в расчётах траекторий наибольшее применение нашёл метод возмущений (прямое разложение) [1].

Благодаря теории возмущений в последнее время были достигнуты значительные результаты при описании влияния регулярных [1–3] и случайных [4] неоднородностей на распространение радиоволн. Тем не менее вопросы распространения радиоволн в случайно-неоднородных средах, особенно в средах с регулярной рефракцией, остаются не до конца исследованными в силу своей сложности. На современном этапе исследований практически все расчёты статистических характеристик волны ведутся в малоугловом, или в первом, приближении теории возмущений, т. е. вариации параметров радиоволны вычисляются вдоль невозмущённой траектории. Это налагает значительные ограничения на амплитуду случайных неоднородностей среды и позволяет учесть лишь флуктуации волны, связанные с флуктуациями диэлектрической проницаемости среды. Учёт следующих членов ряда возмущения позволяет учесть флуктуации параметров радиоволны, вызванные флуктуациями её траектории [5]. Кроме того, при выходе траектории из случайно-неоднородного ионосферного слоя угол выхода будет флуктуировать, соответственно будет флуктуировать и путь, пройденный волной в свободном пространстве. Это

может привести к значительным флуктуациям фазы, которые будут увеличиваться с ростом свободного от случайных неоднородностей пространства между поверхностью Земли и границей слоя случайных неоднородностей. Такие дополнительные флуктуации фазы могут сказаться на поведении статистических моментов поля. В большинстве работ это обстоятельство не учитывалось и считалось, что флуктуации характеристик радиоволны на поверхности Земли в точке приёма совпадают с флуктуациями на выходе из случайно-неоднородного ионосферного слоя [6].

Проверке этих предположений посвящена данная работа. Для этого был применён метод имитационного моделирования, на основе которого рассчитывались статистические характеристики волны, прошедшей через случайно-неоднородный ионосферный слой. При этом задача решалась с учётом сферичности Земли и фоновой ионосферы. Численные расчёты проводились по строгим геометрическим формулам для различной интенсивности неоднородностей. Полученные таким образом результаты накапливались в виде массивов данных, а затем обрабатывались.

Статья состоит из следующих основных разделов. В первом разделе рассматривается способ численного моделирования двумерного гауссова поля случайных неоднородностей диэлектрической проницаемости. Во втором разделе приводятся формулы, по которым осуществлялось вычисление параметров волны, прошедшей через случайно-неоднородную ионосферу, а также представлены основные формулы, которые применялись при обработке массивов данных результатов имитационного моделирования. В третьем разделе кратко рассмотрен вывод формул для статистических характеристик радиоволны с использованием первого приближения метода возмущений для уравнений геометрической оптики. Результаты имитационного моделирования представлены в четвёртом разделе, там же они сравниваются со статистическими характеристиками поля, полученными в первом приближении метода возмущений для уравнений геометрической оптики.

## 1. МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ

В настоящее время существует большое количество методов формирования случайных полей с заданными статистическими характеристиками [7–10]. Например, в работе [10] предлагается формировать случайные поля неоднородностей, применяя ограниченное число фурье-мод со случайными параметрами. В работах [7, 9] излагается принцип моделирования трёхмерной турбулентной среды набором сферически симметричных неоднородностей различных масштабов.

Однако в первом случае требуется суммирование большого числа фурье-мод в каждой точке модельного поля, т. к. при недостаточном их количестве точность аппроксимации корреляционной функции среды существенно ухудшается.

Поэтому, взяв за основу принцип, описанный в работах [7, 9], для формирования однородного случайного двумерного поля неоднородностей диэлектрической проницаемости с гауссовой корреляционной функцией в сферической системе координат  $\{r, \theta, \phi\}$  нами использовалась модель в виде суммы гауссоид:

$$\tilde{\varepsilon}(r, \phi) = \sigma_{\varepsilon}(r) \sqrt{\frac{R\Phi r}{l_x l_r N \pi}} \sum_{i=1}^N n_i \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{r - r_i}{l_r} \right)^2 \right] \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{[\phi - \phi_i] r}{l_x} \right)^2 \right], \quad (1)$$

где  $\sigma_{\varepsilon}^2(r)$  — функция, описывающая изменение дисперсии диэлектрической проницаемости в пространстве,  $R$  и  $\Phi$  — размеры участка, в пределах которого формируется случайное поле по  $r$  и  $\phi$  соответственно,  $N$  — количество неоднородностей,  $l_r$  и  $l_{\phi} = l_x/r$  — масштабы неоднородностей по  $r$  и  $\phi$  (величина  $l_r$  имеет ту же размерность, что и  $l_z$  в декартовой системе координат),  $n_i$  — равномерно распределённая дискретная случайная величина, принимающая значения  $-1$  или  $1$ ,  $r_i$  и  $\phi_i$  — координаты центров неоднородностей — случайные величины, распределённые равномерно в интервалах  $r_i \in [0, R]$

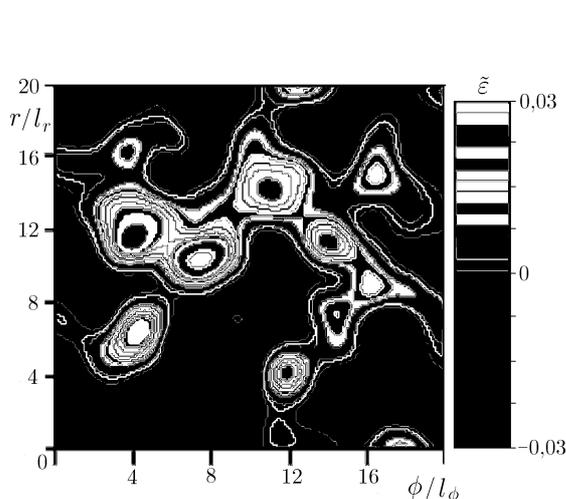


Рис. 1

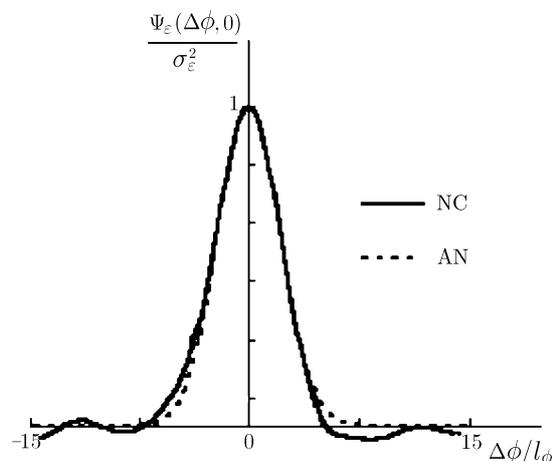


Рис. 2

и  $\phi_i \in [0, \Phi]$ . Все  $i$ -тые отсчеты независимы,  $n_i$ ,  $r_i$  и  $\phi_i$  — независимые случайные величины. Поле (1) имеет математическое ожидание  $\langle \tilde{\varepsilon} \rangle = 0$  и характеризуется корреляционной функцией вида

$$\Psi_\varepsilon(r_1, r_2, \phi_1, \phi_2) \approx \sigma_\varepsilon(r_1)\sigma_\varepsilon(r_2) \exp \left[ - \left( \frac{r_1 - r_2}{2l_r} \right)^2 \right] \exp \left[ - \left( \frac{[\phi_1 - \phi_2] r_0}{2l_x} \right)^2 \right], \quad (2)$$

где  $r_0 = (r_1 + r_2)/2$ . В формуле (1) сделано предположение, что  $r \gg l_x$ , а в формуле (2) при дальнейших расчётах в разделе 3 полагается, что  $r_0$  — точка на средней траектории, т. е.  $r_0 = r(\phi_1 + \phi_2)/2$ .

В качестве примера на рис. 1 представлена одна из реализаций случайного поля неоднородностей при  $N = 200$  и  $R/l_r = \Phi/l_\phi = 20$ . На рис. 2 изображено сечение (в плоскости  $r_1 = r_2$  при  $\sigma_\varepsilon(r_1) = \sigma_\varepsilon(r_2) = \text{const}$ ) двумерного пространственного коэффициента корреляции (NC), полученного путём статистической обработки 400 численных реализаций поля (1), и пространственного коэффициента корреляции (AN), рассчитанного по формуле (2);  $\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2$ . Из рис. 2 видно, что эти кривые практически полностью совпадают. Здесь на рис. 2 и далее в формулах мы предполагаем изотропность случайных неоднородностей, т. е. считаем, что  $l_\phi r = l_r = l_\varepsilon$ .

## 2. РАСЧЁТ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК РАДИОВОЛНЫ, ОТРАЖЁННОЙ ОТ СФЕРИЧЕСКОГО ИОНОСФЕРНОГО СЛОЯ СО СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ, НА ОСНОВЕ ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Рассмотрим в скалярном приближении распространение радиоволны через сферическую двумерную случайно-неоднородную среду с регулярной рефракцией с учётом сферичности Земли. Пусть точечный источник гармонического излучения с частотой  $\omega$  расположен на земной поверхности (см. рис. 3) в точке с координатами  $\phi = \phi_0$ ,  $r = r_e$ , где  $r_e$  — радиус Земли. Необходимо найти характеристики поля волны, прошедшей ионосферу, в точке с координатами  $\phi = \phi_t$ ,  $r = r_e$ . При этом будем считать, что невозмущённый луч в сферических координатах расположен в плоскости экватора.

Для неоднородной в среднем ионосферы диэлектрическую проницаемость зададим следующим образом:

$$\varepsilon(r, \phi) = \bar{\varepsilon}(r) + \tilde{\varepsilon}(r, \phi), \quad (3)$$

где  $\bar{\varepsilon}(r)$  — регулярный профиль диэлектрической проницаемости,  $\tilde{\varepsilon}(r, \phi)$  — случайные возмущения неоднородности диэлектрической проницаемости, имеющие гауссову плотность распределения вероятностей. Параметры неоднородностей выбирались так, чтобы выполнялись условия применимости геометрической оптики.

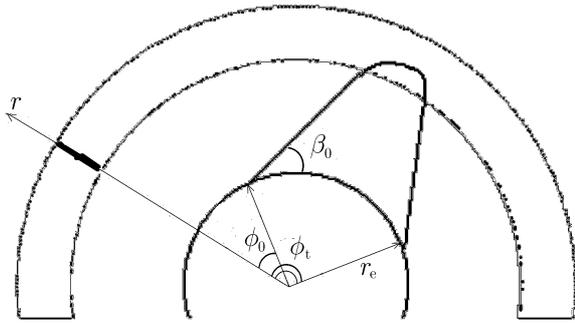


Рис. 3

Как известно [2, 4], поле в геометрооптическом приближении имеет вид

$$U(\mathbf{r}) \approx A(\mathbf{r}) \exp[ik\varphi(\mathbf{r})], \tag{4}$$

где  $k = 2\pi/\lambda$  — волновое число,  $\mathbf{r} = (r, \phi)$ , а эйконал

$$\varphi = \int \sqrt{\varepsilon[\mathbf{r}(s)]} ds \tag{5}$$

является интегралом вдоль луча, описываемого системой уравнений

$$\frac{dr}{d\phi} = r \operatorname{tg} \beta, \quad \frac{d\beta}{d\phi} = \frac{1}{2\varepsilon} \left[ r \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \phi} \operatorname{tg} \beta \right] + 1 \tag{6}$$

с начальными условиями  $r(\phi_0) = r_e$  и  $\beta(\phi_0) = \beta_0$ . Здесь  $\beta(\phi)$  — угол между касательной к лучу и касательной к поверхности Земли.

При численном моделировании эйконал удобно определять как решение следующего дифференциального уравнения:

$$\frac{d\varphi}{d\phi} = \frac{\sqrt{\varepsilon} r}{\cos \beta}. \tag{7}$$

Амплитуда поля в точке приёма  $A(\phi_t)$  в рассматриваемой здесь двумерной задаче определяется следующим образом:

$$A(\phi_t) = C \left\{ \frac{\partial r(\phi_t)}{\partial \beta_0} \cos[\beta(\phi_t)] \right\}^{-1/2} \Big|_{r=r_e}, \tag{8}$$

где  $C$  — константа, характеризующая мощность источника. Функция  $\partial r/\partial \beta_0$  определяется как решение следующих уравнений, полученных путём дифференцирования системы (6) по углу  $\beta_0$  падения волны на слой:

$$\frac{d}{d\phi} \left( \frac{\partial r}{\partial \beta_0} \right) = \frac{\partial r}{\partial \beta_0} \operatorname{tg} \beta + \frac{r}{\cos^2 \beta} \frac{\partial \beta}{\partial \beta_0},$$

$$\frac{d}{d\phi} \left( \frac{\partial \beta}{\partial \beta_0} \right) = \frac{1}{2\varepsilon} \left\{ \frac{\partial \beta}{\partial \beta_0} \frac{1}{\cos^2 \beta} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \phi} + \frac{\partial r}{\partial \beta_0} \left[ \operatorname{tg} \beta \left( \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial r \partial \phi} - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \phi} \right) - \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} - r \left( \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial r^2} - \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right)^2 \right) \right] \right\}. \tag{9}$$

Система (9) решается с начальными условиями  $\partial r(\phi_0)/\partial \beta_0 = 0$ ,  $\partial \beta(\phi_0)/\partial \beta_0 = 1$ .

При имитационном моделировании уравнения (6), (7), (9) были объединены в систему и численно интегрировались для каждого значения  $\beta_0$  и для каждой реализации случайного поля неоднородностей (1). Рассчитанные таким образом реализации характеристик траекторий, эйконала и амплитуды поля сохранялись для последующего анализа. На их основе вычислялась реализация поля волны (4).

Статистический анализ полученных численных результатов проводился по методике обработки статистических данных [11].

Несмещённая оценка дисперсии действительной случайной величины  $Y$ , полученной в результате  $n$  независимых опытов, определялась как

$$\sigma_Y^2 = \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i^2 - m_Y^2 \right) \frac{n}{n-1}, \quad (10)$$

где  $m_Y = (1/n) \sum_{i=1}^n Y_i$  — математическое ожидание случайной величины  $Y$ ,  $n$  — количество опытов. Несмещённая оценка пространственного коэффициента корреляции действительной случайной величины  $Y$  определялась по формуле

$$\Psi_Y(r_1, r_2) = \frac{n}{(n-1) \sqrt{\sigma_Y^2(r_1) \sigma_Y^2(r_2)}} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i(r_1) Y_i(r_2) - m_Y(r_1) m_Y(r_2) \right), \quad (11)$$

где  $\sigma_Y^2(r_\mu)$  и  $m_Y(r_\mu)$  — дисперсия и математическое ожидание случайной величины  $Y(r_\mu)$ ,  $\mu = 1; 2$ .

Модуль несмещённого пространственного коэффициента корреляции комплексной случайной величины  $\dot{u} = a + ib$  (такой является, например, поле (4) в некоторой точке) рассчитывался в виде

$$|\Psi_u(r_1, r_2)| = \sqrt{\frac{[\Psi_{a1a2}(r_1, r_2) + \Psi_{b1b2}(r_1, r_2)]^2 + [\Psi_{b1a2}(r_1, r_2) - \Psi_{a1b2}(r_1, r_2)]^2}{\sigma_u^2(r_1) \sigma_u^2(r_2)}}, \quad (12)$$

где  $\Psi_{a1a2}(r_1, r_2)$ ,  $\Psi_{b1b2}(r_1, r_2)$ ,  $\Psi_{b1a2}(r_1, r_2)$ ,  $\Psi_{a1b2}(r_1, r_2)$  — функции взаимной корреляции случайных полей  $a(r)$  и  $b(r)$  в точках  $r_1$  и  $r_2$ ,  $\sigma_u^2(r)$  — дисперсия случайного поля  $\dot{u}(r)$ .

В результате обработки массива численных реализаций были получены статистические характеристики радиоволны, а именно дисперсия угла прихода  $\sigma_\beta^2$ , пространственный коэффициент корреляции эйконала  $\Psi_\varphi(r_1, r_2)$  и модуль пространственного коэффициента корреляции поля  $\Psi_U(r_1, r_2)$ .

### 3. ВЫВОД ПРИБЛИЖЁННЫХ ФОРМУЛ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА ВОЗМУЩЕНИЙ

При применении метода возмущений в геометрооптическом приближении полагаем, что случайная компонента диэлектрической проницаемости  $\tilde{\varepsilon}(r, \phi)$ , входящая в (3), достаточно мала, т. е.  $\tilde{\varepsilon}(r, \phi) \ll \bar{\varepsilon}(r)$ . С учётом этого представим решение уравнений (6), (7) в виде

$$\beta = \bar{\beta} + \tilde{\beta}, \quad r = \bar{r} + \tilde{r}, \quad \varphi = \bar{\varphi} + \tilde{\varphi}, \quad (13)$$

где  $\bar{\beta}$ ,  $\bar{r}$  и  $\bar{\varphi}$  — решение системы (6) и уравнения (7) в отсутствие неоднородностей (т. е. при  $\varepsilon(r, \phi) = \bar{\varepsilon}(r)$ ), а  $\tilde{\beta}$ ,  $\tilde{r}$  и  $\tilde{\varphi}$  — возмущения, вызванные наличием случайных неоднородностей. Подставляя (3), (13) в уравнения (6), (7) и полагая возмущения малыми, разложим левые и правые части уравнений в ряд по степеням этих малых величин, после чего нетрудно получить систему лучевых уравнений для невозмущённых лучей, совпадающую с системой (6) при  $\varepsilon(r, \phi) = \bar{\varepsilon}(r)$ , и систему лучевых уравнений первого приближения теории возмущений:

$$\frac{d\tilde{r}}{d\phi} = \tilde{r} \operatorname{tg} \bar{\beta} + \frac{\tilde{r}\tilde{\beta}}{\cos^2 \bar{\beta}}, \quad \frac{d\tilde{\beta}}{d\phi} = -\frac{\tilde{r}}{2} \left[ \frac{\partial \ln \bar{\varepsilon}}{\partial r} - \bar{r} \frac{\partial^2 \ln \bar{\varepsilon}}{\partial r^2} \right] + \frac{1}{2} \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\tilde{\varepsilon}}{\bar{\varepsilon}} \right) - \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{\tilde{\varepsilon}}{\bar{\varepsilon}} \right) \operatorname{tg} \bar{\beta} \right], \quad (14)$$

$$\frac{d\tilde{\varphi}}{d\phi} = \frac{\tilde{r}}{2 \cos \bar{\beta}} \frac{\tilde{\varepsilon}}{\sqrt{\bar{\varepsilon}}}. \quad (15)$$

Во входящие в (14), (15) функции  $\tilde{\varepsilon}$ ,  $\bar{\varepsilon}$  и их производные вместо аргумента  $r$  нужно подставить невозмущённое (т. е. полученное при  $\varepsilon(r, \phi) = \bar{\varepsilon}(r)$ ) решение  $\bar{r}$ .

Линейную систему (14) нетрудно свести к одному линейному неоднородному уравнению второго порядка для вариации траектории  $\tilde{r}$ , решение которого при краевых условиях

$$\tilde{r}(\phi_0) = \tilde{r}(\phi_e) = 0 \tag{16}$$

имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{r}(\phi) = & \int_{\phi_0}^{\phi} \frac{R_{r0}(\phi)R_{\beta 0}(\phi') - R_{r0}(\phi')R_{\beta 0}(\phi)}{W_r(\phi')} f(\phi') d\phi' - \\ & - \frac{R_{\beta 0}(\phi)}{R_{\beta 0}(\phi_t)} \int_{\phi_0}^{\phi_t} \frac{R_{r0}(\phi)R_{\beta 0}(\phi') - R_{r0}(\phi')R_{\beta 0}(\phi)}{W_r(\phi')} f(\phi') d\phi'. \end{aligned} \tag{17}$$

Здесь

$$f(\phi) = \frac{\bar{r}}{2} \left[ 1 + \left( \frac{1}{\bar{r}} \frac{d\bar{r}}{d\phi} \right)^2 \right] \left[ \bar{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\tilde{\varepsilon}}{\bar{\varepsilon}} \right) - \frac{1}{\bar{r}} \frac{d\bar{r}}{d\phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{\tilde{\varepsilon}}{\bar{\varepsilon}} \right) \right], \tag{18}$$

$W_r(\phi)$  — определитель Вронского, равный

$$W_r(\phi) = R'_{r0}(\phi)R_{\beta 0}(\phi) - R'_{\beta 0}(\phi)R_{r0}(\phi) = -\frac{\bar{r}^4(\phi)\bar{\varepsilon}(\phi)}{\bar{r}_e^3 \cos^2 \beta_0}.$$

Функции  $R_{r0}(\phi)$ ,  $R_{\beta 0}(\phi)$  определяются путём дифференцирования «невозмущённого» решения  $\bar{r}(\phi, r_0, \beta_0)$  по начальным значениям  $r_0, \beta_0$  [12]:

$$R_{\beta 0} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial \beta_0}, \quad R_{r0} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial r_0}. \tag{19}$$

С учётом (17) из (14) для флуктуации угла прихода нетрудно получить

$$\tilde{\beta}_t = \frac{\cos^2 \bar{\beta}_t}{\bar{r}_t} \frac{W_r(\phi_t)}{R_{\beta 0}(\phi_t)} \int_{\phi_0}^{\phi_t} \frac{R_{\beta 0}(\phi)}{W_r(\phi)} f(\phi) d\phi. \tag{20}$$

Вывод формул для статистических моментов начнём с корреляционной функции эйконала. Приведём выражение (15) к интегральному виду, усредним его и перейдём к новым переменным интегрирования

$$\xi = \phi_1 - \phi_2, \quad \eta = \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}. \tag{21}$$

При этом будем предполагать, что все функции, входящие в интеграл, кроме  $\Psi_\varepsilon$ , медленные и зависят только от переменной  $\eta$ , а все статистические характеристики измеряются на поверхности Земли, т. е.  $r_1 = r_2 = r_e$ . Тогда для дисперсии эйконала нетрудно получить

$$\sigma_\varphi^2(\phi_t) = \frac{1}{4} \int_{\phi_0}^{\phi_t} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\bar{r}^2(\eta)}{\bar{\varepsilon}[\bar{r}(\eta)] \cos^2(\beta[\bar{r}(\eta)])} \Psi_\varepsilon \left[ \frac{d\bar{r}}{d\eta} \xi, \xi \right] d\eta d\xi. \tag{22}$$

Выражение для дисперсии угла прихода получаем путём усреднения выражения (20):

$$\sigma_{\beta}^2(\phi_t) = \frac{\cos^4 \bar{\beta}_t}{r_t^2} \frac{W_r^2(\phi_t)}{R_{\beta 0}^2(\phi_t)} \int_{\phi_0}^{\phi_t} \int_{\phi_0}^{\phi_t} \frac{R_{\beta 0}(\phi_1) R_{\beta 0}(\phi_2)}{W_r(\phi_1) W_r(\phi_2)} F_1(\phi_1, \phi_2) d\phi_1 d\phi_2, \quad (23)$$

где

$$F_1(\phi_1, \phi_2) = \langle f(\phi_1) f(\phi_2) \rangle = g(\phi_1) g(\phi_2) \left( \bar{r}(\phi_1) \bar{r}(\phi_2) \frac{\partial^2}{\partial r_1 \partial r_2} \left[ \frac{\Psi_{\varepsilon}}{\bar{\varepsilon}_1 \bar{\varepsilon}_2} \right] - \right. \\ \left. - \frac{\bar{r}(\phi_1)}{\bar{r}(\phi_2) \bar{\varepsilon}_2} \frac{d\bar{r}(\phi_1)}{d\phi_1} \frac{\partial^2}{\partial r_1 \partial \phi_2} \left[ \frac{\Psi_{\varepsilon}}{\bar{\varepsilon}_1} \right] - \frac{\bar{r}(\phi_2)}{\bar{r}(\phi_1) \bar{\varepsilon}_1} \frac{d\bar{r}(\phi_2)}{d\phi_2} \frac{\partial^2}{\partial r_2 \partial \phi_1} \left[ \frac{\Psi_{\varepsilon}}{\bar{\varepsilon}_2} \right] + \right. \\ \left. + \frac{d\bar{r}(\phi_1)}{d\phi_1} \frac{d\bar{r}(\phi_2)}{d\phi_2} \frac{1}{\bar{r}(\phi_1) \bar{r}(\phi_2) \bar{\varepsilon}_1 \bar{\varepsilon}_2} \frac{\partial^2 \Psi_{\varepsilon}}{\partial \phi_1 \partial \phi_2} \right), \quad (24)$$

$$g(\phi) = \frac{\bar{r}(\phi)}{2} \left( 1 + \left[ \frac{1}{\bar{r}(\phi)} \frac{d\bar{r}(\phi)}{d\phi} \right]^2 \right) = \frac{\bar{r}}{2 \cos^2(\bar{\beta}[\bar{r}(\phi)])}, \quad \bar{\varepsilon}_1 = \bar{\varepsilon}(\bar{\phi}_1), \quad \bar{\varepsilon}_2 = \bar{\varepsilon}(\bar{\phi}_2).$$

С учётом корреляционной функции случайных неоднородностей среды (2) из выражений (22), (23) несложно получить формулы для статистических характеристик волны, прошедшей через случайно-неоднородную ионосферу. Тогда для дисперсии эйконала имеем

$$\sigma_{\varphi}^2(\phi_t) = \frac{l_{\varepsilon} \sqrt{\pi}}{2r_{\varepsilon}^2 \cos^2 \beta_0} \int_{\phi_0}^{\phi_t} \bar{r}^3(\eta) \sigma_{\varepsilon}^2[\bar{r}(\eta)] \cos(\bar{\beta}[\bar{r}(\eta)]) d\eta. \quad (25)$$

При получении окончательного выражения для дисперсии угла прихода воспользуемся тем, что функция  $\bar{\varepsilon}(r)$  гораздо более плавная чем  $\Psi_{\varepsilon}$ . Поэтому в (24)  $\bar{\varepsilon}(r)$  выносим за знак дифференцирования как константу, а при дифференцировании  $\Psi_{\varepsilon}$  ту же операцию выполняем с  $\sigma_{\varepsilon}(r)$ . Перейдя к переменным интегрирования (21), для дисперсии угла получаем

$$\sigma_{\beta}^2(\phi_t) = \frac{r_{\varepsilon}^2 \sqrt{\pi}}{4l_{\varepsilon} R_{\beta 0}^2(\phi_t)} \int_{\phi_0}^{\phi_t} \frac{R_{\beta 0}^2(\eta) \sigma_{\varepsilon}^2[\bar{r}(\eta)] d\eta}{\bar{r}(\eta) \bar{\varepsilon}^2[\bar{r}(\eta)] \cos(\bar{\beta}[\bar{r}(\eta)])}. \quad (26)$$

Несмотря на все упрощения, интегрирование выражений (25), (26) вдоль невозмущённых траекторий является достаточно сложной задачей. Кроме того, решения уравнений для лучевых траекторий в регулярной среде найдено лишь для некоторого небольшого количества функций, описывающих профиль электронной концентрации. Поэтому для вычисления статистических характеристик формулы (25), (26) были преобразованы в дифференциальные уравнения и решались численно совместно с уравнениями для невозмущённых лучевых траекторий.

#### 4. РЕЗУЛЬТАТЫ ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

При имитационном моделировании регулярный профиль диэлектрической проницаемости задавался в виде

$$\bar{\varepsilon}(r) = 1 - \alpha \exp \left[ - \left( \frac{r - r_m}{Y_m} \right)^4 \right], \quad (27)$$

где  $r_m$  и  $Y_m$  — высота максимума слоя и его полутолщина соответственно,  $\alpha = \omega_{кр}^2 / \omega_p^2 = 0,207$ ,  $\omega_{кр} = 6$  МГц и  $\omega_p = 13,2$  МГц — критическая и рабочая частоты. Случайные неоднородности в виде слоя [13] размещались внутри профиля (27). Профиль диэлектрической проницаемости слоя со случайными неоднородностями (далее — профиль неоднородностей) выбирался в виде

$$\sigma_\varepsilon(r) = (1 - \alpha) \mu \exp \left[ - \left( \frac{r - r_m}{Y_n} \right)^4 \right], \quad (28)$$

где  $Y_n$  — полутолщина профиля неоднородностей,  $\mu$  — среднее квадратическое отклонение возмущений среды. Максимум профиля неоднородностей (28) совпадает с минимумом регулярного профиля (27).

Сначала рассмотрим гистограммы распределений углов прихода, эйконала и амплитуды. Будем рассматривать распределения этих характеристик вблизи границы регулярной зоны тени (при дальности трассы  $D = 1\,479$  км) и вдали от зоны тени в освещённой зоне (для верхних лучей  $D = 1\,600$  км, для нижних лучей  $D = 2\,435$  км). Полутолщина  $Y_n$  профиля неоднородностей при моделировании выбиралась равной 74 км. На рис. 4–6 представлены гистограммы распределения углов приёма (рис. 4а–6а) и соответствующих им углов излучения (рис. 4б–6б) для различных дальностей при  $\mu = 5\%$ .

Как видно из рис. 4, распределения углов излучения и приёма в районе регулярной зоны тени ( $D = 1\,479$  км) практически не отличаются и близки к нормальному закону распределения. Вместе с законом распределения и средними значениями углов в точках приёма и излучения, будет анализироваться наиболее вероятный угол  $\beta_B$  прихода и излучения. Наиболее вероятный угол соответствует максимуму распределения на гистограмме. Из рис. 4 видно, что среднее значение угла прихода отличается от наиболее вероятного.

Вдали от границы зоны тени ( $D = 2\,435$  км) средние значения углов приёма (рис. 5а) и излучения (рис. 5б) для нижних лучей также весьма близки. Распределения имеют незначительную несимметричность относительно своих максимумов, вызванную регулярной рефракцией. Наиболее вероятные значения углов приёма и излучения также практически совпадают.

На рис. 6 показаны гистограммы распределения углов для верхних лучей ( $D = 1\,600$  км) в освещённой зоне. Как и для нижних лучей, практически сохраняется равенство средних углов прихода и излучения, а также наиболее вероятных углов  $\beta_B$ .

Несимметрия математических ожиданий углов прихода и излучения, как видно из рис. 5 и 6, не превышает  $0,4^\circ$ . Отличие средних углов, возможно, появляется из-за погрешностей имитационного моделирования. К тому же, как показало моделирование, с уменьшением возмущений диэлектрической проницаемости среды несимметрия средних углов приёма и излучения уменьшается. Из анализа гистограмм распределения углов приёма и излучения можно сделать вывод о том, что в двухточечной постановке задачи в среде со слоистым регулярным фоном и изотропными случайными неоднородностями наиболее вероятная и средняя траектории симметричны относительно области отражения от ионосферного слоя. В работе [14] был проведён анализ распределений углов прихода и излучения в случайно-неоднородной среде с регулярной рефракцией на основе уравнения Эйнштейна—Фоккера, которое соответствует одноточечной постановке задачи. В результате был сделан вывод о неравенстве наиболее вероятных углов приёма и излучения. Следовательно, наиболее вероятная траектория несимметрична относительно области отражения от ионосферного слоя. Однако если перейти от одноточечной постановки задачи в [14] к двухточечной, как это делается в работе [15], то, скорее всего, распределения углов прихода и излучения, представленные в данной работе и в работе [14], совпадут.

На рис. 7–9 представлены гистограммы относительных распределений амплитуды (рис. 7а–9а) и эйконала (рис. 7б–9б) для верхних и нижних лучей вдали от регулярной зоны тени и в окрестности границы регулярной зоны тени.

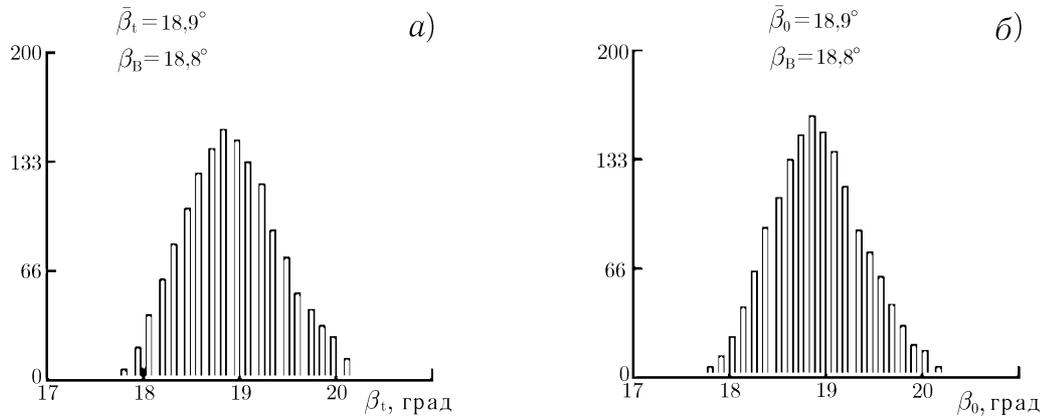


Рис. 4

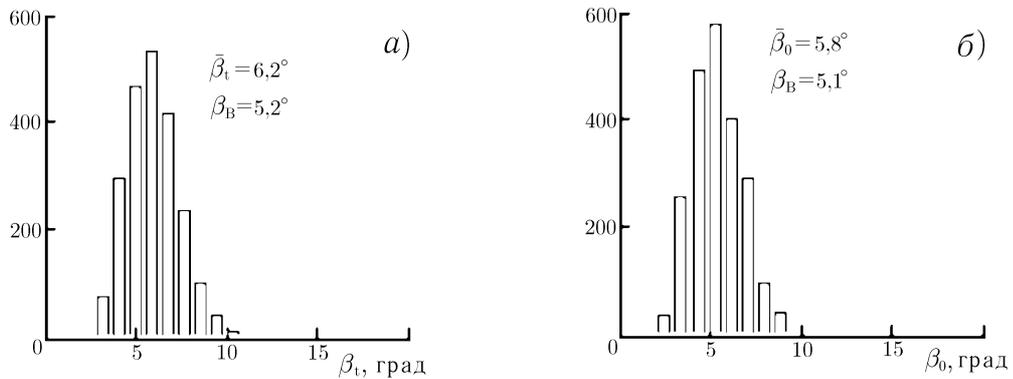


Рис. 5

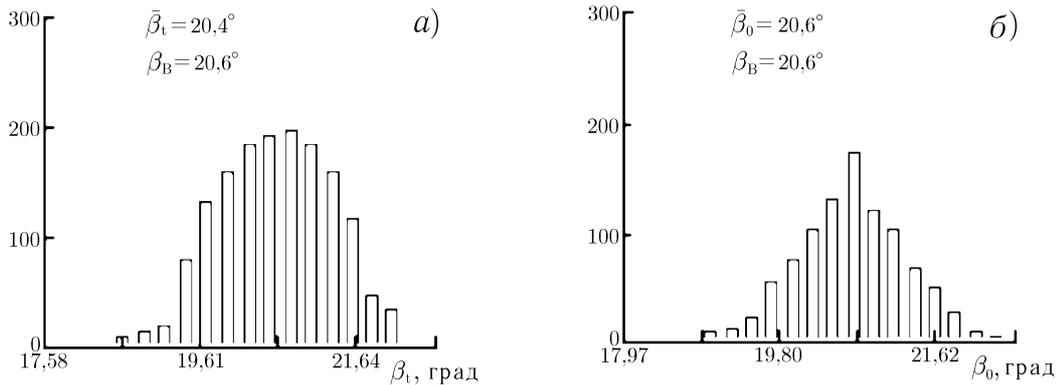


Рис. 6

Вблизи границы регулярной зоны тени (рис. 7) распределение амплитуды можно аппроксимировать законом Релея, а эйконал — гауссовым распределением вероятностей. Такие же распределения имеют амплитуда и эйконал верхних лучей (рис. 8), однако в распределении эйконала (рис. 8б) появляется незначительная несимметричность относительно максимума распределения.

Распределение амплитуды нижних лучей (рис. 9а) достаточно хорошо может быть описано как логнормальным, так и релеевским законом распределения вероятностей, а закон распределения флуктуаций эйконала (рис. 9б) близок к нормальному закону распределения с большой дисперсией или к

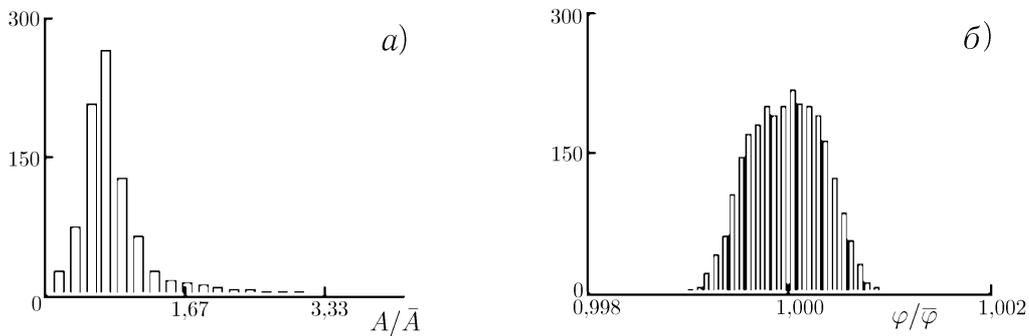


Рис. 7

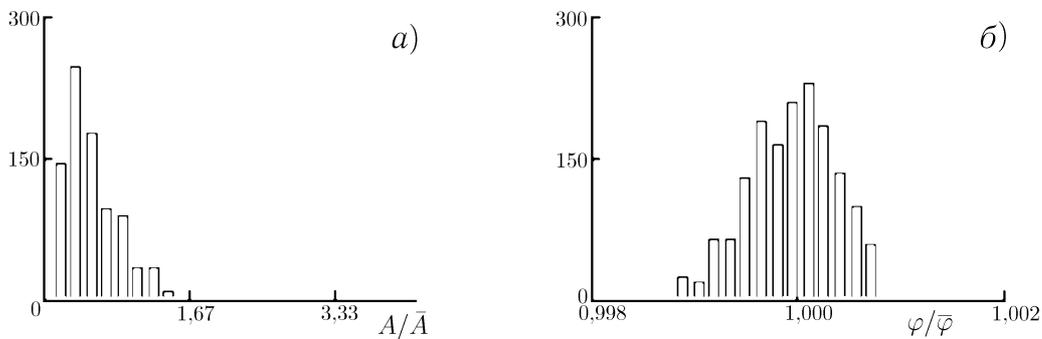


Рис. 8

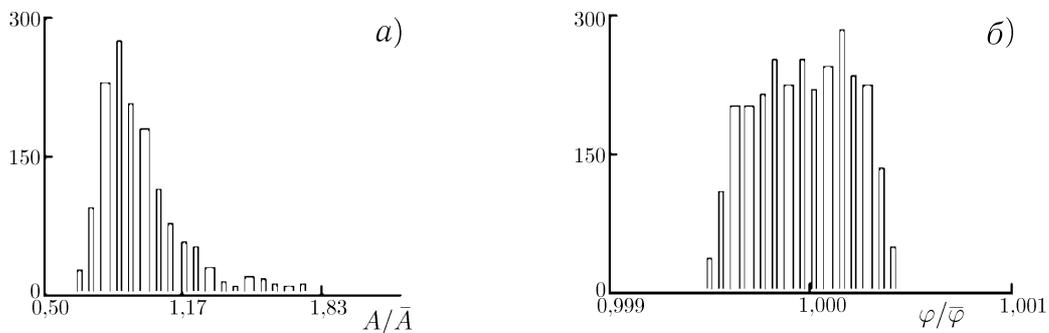


Рис. 9

равномерному закону распределения. Недостаточная нормализация флуктуаций эйконала возникает потому, что нижний луч с малыми углами излучения проходит малое расстояние в области случайных неоднородностей.

Графики среднеквадратического отклонения (СКО) флуктуаций углов нижних лучей, полученные на основе результатов имитационного моделирования (ИМ) и формулы (26), т. е. в первом приближении метода возмущений (МВ), представлены на рис. 10. Вычисления проводились при различных возмущениях среды и масштабах профиля неоднородностей. Из рис. 10 видно, что СКО угла, рассчитанное в первом приближении метода возмущений, хорошо согласуется с результатами имитационного моделирования.

На рис. 11 представлены графики СКО флуктуаций эйконала нижних лучей для различных возмущений среды и толщин профиля неоднородностей. Необходимо отметить, что полутолщина профиля неоднородностей  $Y_n$  рис. 11а выбиралась так, чтобы траектории лучей с начальными углами излучения

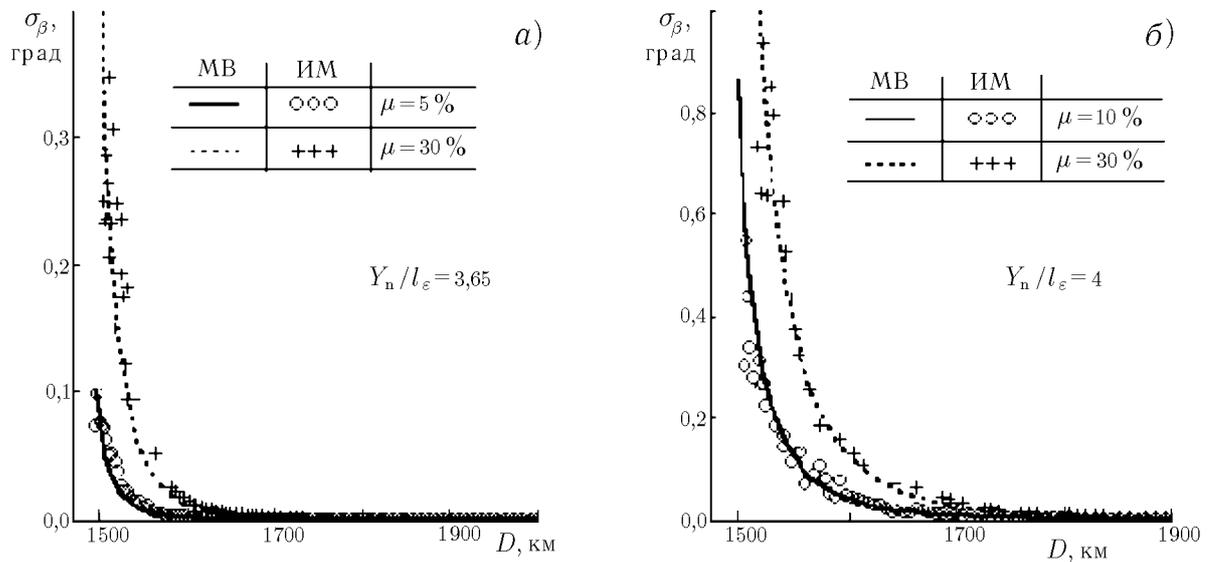


Рис. 10

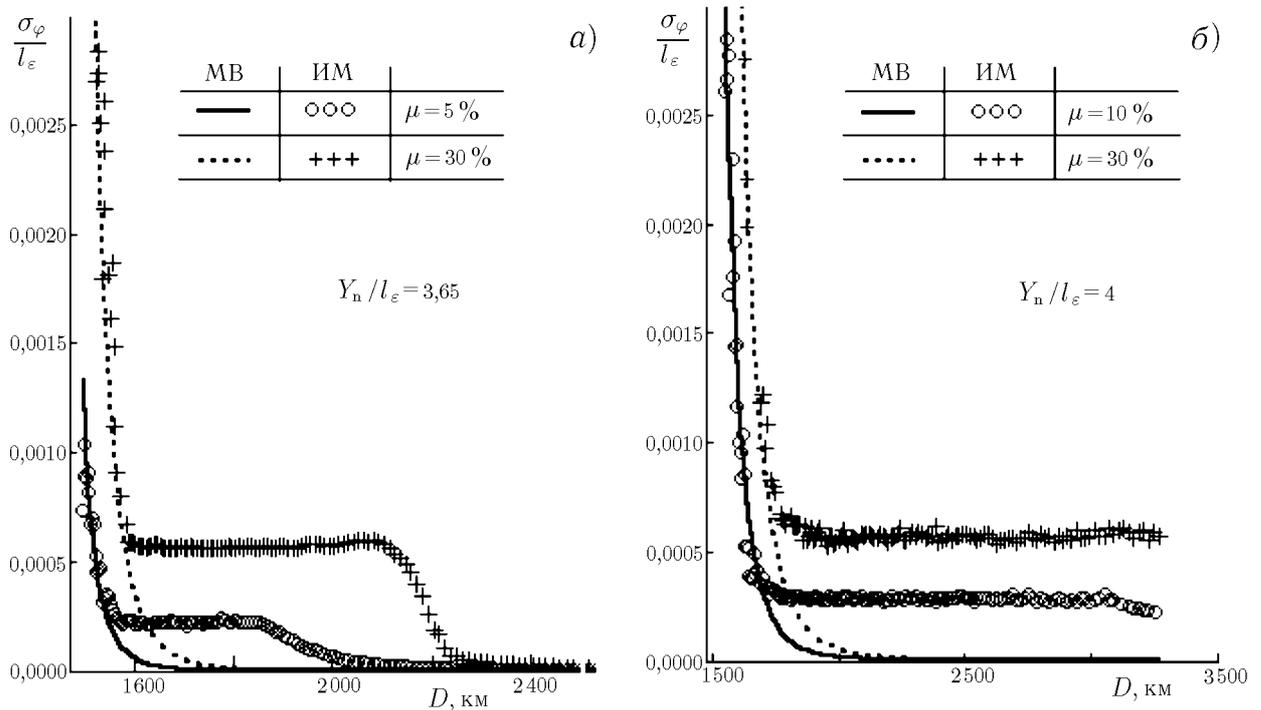


Рис. 11

менее  $2^\circ$  не проходили через случайные неоднородности среды. Из рис. 11а видно, что среднеквадратические отклонения флуктуаций эйконала, рассчитанные численно и с использованием метода возмущений, совпадают лишь на дальностях, близких к дальности регулярной зоны тени. С увеличением расстояния от источника излучения СКО эйконала, полученное численно, уменьшается гораздо медленнее, чем СКО, рассчитанное по формуле (25), и становится близко к нулю в случае, когда нижние лучи перестают касаться области случайных неоднородностей. Такое различие в результатах, получен-

ных с помощью имитационного моделирования и на основе первого приближения метода возмущений, можно объяснить флуктуациями траекторий лучей в свободном от неоднородностей пространстве, вызванными флуктуациями углов выхода из слоя со случайными неоднородностями. В случае нижних лучей с уменьшением начального угла излучения увеличивается расстояние, пройденной волной в свободном от неоднородностей пространстве. Поэтому даже небольшие флуктуации угла могут привести к значительным флуктуациям эйконала. Вблизи регулярной зоны тени расстояние, пройденное волной в свободном от неоднородностей пространстве, наименьшее. Следовательно, различия между результатами имитационного моделирования и первого приближения метода возмущений уменьшаются. Из графиков также видно, что поведение СКО эйконала, рассчитанного на основе имитационного моделирования, зависит от полутолщины слоя неоднородностей.

Связь расхождения результатов имитационного моделирования и метода возмущений с длиной пути, пройденного нижним лучом в свободном от неоднородностей пространстве, подтверждает рис. 12. Графики для СКО эйконала (рис. 12а) и угла (рис. 12б) построены при условии, что нижняя граница регулярного слоя и профиля неоднородностей находятся на поверхности Земли:  $Y_m = Y_n$ . Как видно из рис. 12, СКО флуктуаций углов и эйконала, рассчитанные с помощью имитационного моделирования и в первом приближении метода возмущений на всей длине трассы практически совпадают. То обстоятельство, что на нижней границе слоя неоднородностей метод возмущений описывает флуктуации эйконала, говорит о том, что для описания флуктуаций эйконала с учётом свободного пространства можно использовать решение для флуктуаций в слое, полученное в первом приближении метода возмущений, дополненное решением для флуктуаций эйконала в свободном пространстве, которое можно получить из геометрии луча. Необходимо отметить, что в статье представлены результаты имитационного моделирования для СКО эйконала вблизи границы регулярной зоны тени, на расстоянии, превышающем СКО луча, а не на самой границе зоны тени. Это связано с тем, что при наличии случайных неоднородностей лучи, излучённые под углами, соответствующими углам невозмущённых нижних лучей, начинают трансформироваться в верхние лучи и наоборот. Это приводит к тому, что на расстояниях от регулярной зоны тени, меньших, чем СКО луча, чёткое различие между верхними и нижними лучами установить практически невозможно. Кроме того, при приближении к границе зоны тени используемые нами геометрооптические формулы неприменимы, необходимо использовать обобщения геометрической оптики (например метод интерференционного интеграла).

На рис. 13 приведены графики для СКО флуктуаций эйконала (рис. 13а) и углов (рис. 13б) верхних лучей для различных возмущений неоднородностей среды. Из рисунка видно, что метод возмущений достаточно точно описывает флуктуации угла при всех представленных на рис. 13б значениях  $\mu$ . СКО флуктуаций эйконала, рассчитанные численно, совпадают с результатами метода возмущений только при  $\mu < 3\%$ . Различия в расчётах СКО флуктуаций эйконала и сходство для СКО углов при  $\mu = 3\%$  можно объяснить тем, что в первом приближении метода возмущений выражение для угла учитывает флуктуации траектории в случайно-неоднородной среде, а в выражении для СКО эйконала эти флуктуации не учитываются. Свободное от неоднородностей пространство (в данном случае для верхних лучей) не вносит заметной погрешности в вычисления СКО эйконала методом возмущений, т. к. основной вклад в флуктуации эйконала вносит участок траектории, проходящий сквозь случайно-неоднородный слой. В случае нижних лучей с малыми углами излучения наблюдается обратная ситуация, когда основной вклад во флуктуации эйконала вносят флуктуации траектории в свободном от неоднородностей пространстве, связанные с флуктуациями угла выхода волны из случайно-неоднородного слоя.

Корреляционные функции эйконала и поля в геометрооптическом приближении в области применимости первого приближения метода возмущений для эйконала в настоящее время достаточно хорошо исследованы. Поэтому далее рассмотрим корреляционные функции поля и эйконала для случая нижних лучей, а именно при дальности трассы  $D = 1800$  км, когда метод возмущений в первом при-

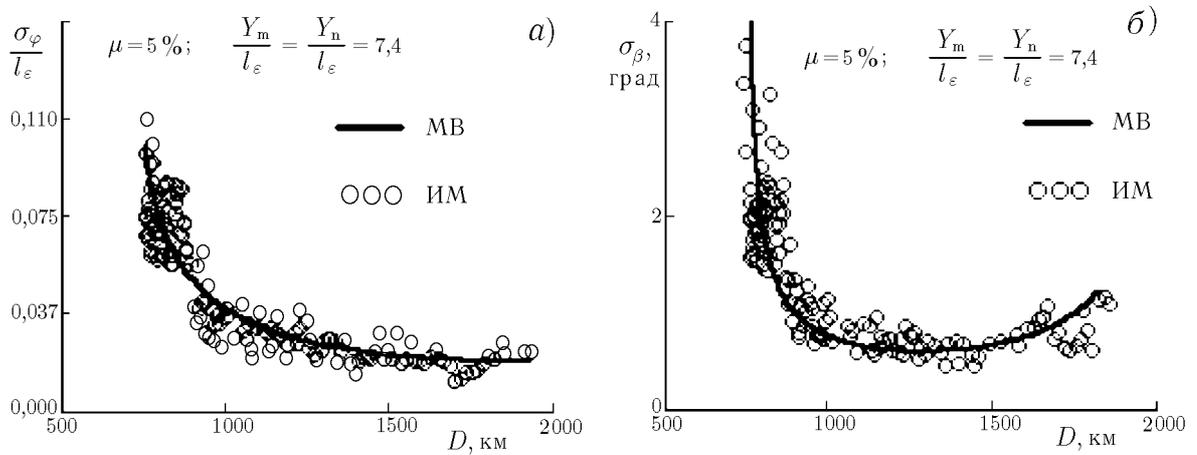


Рис. 12

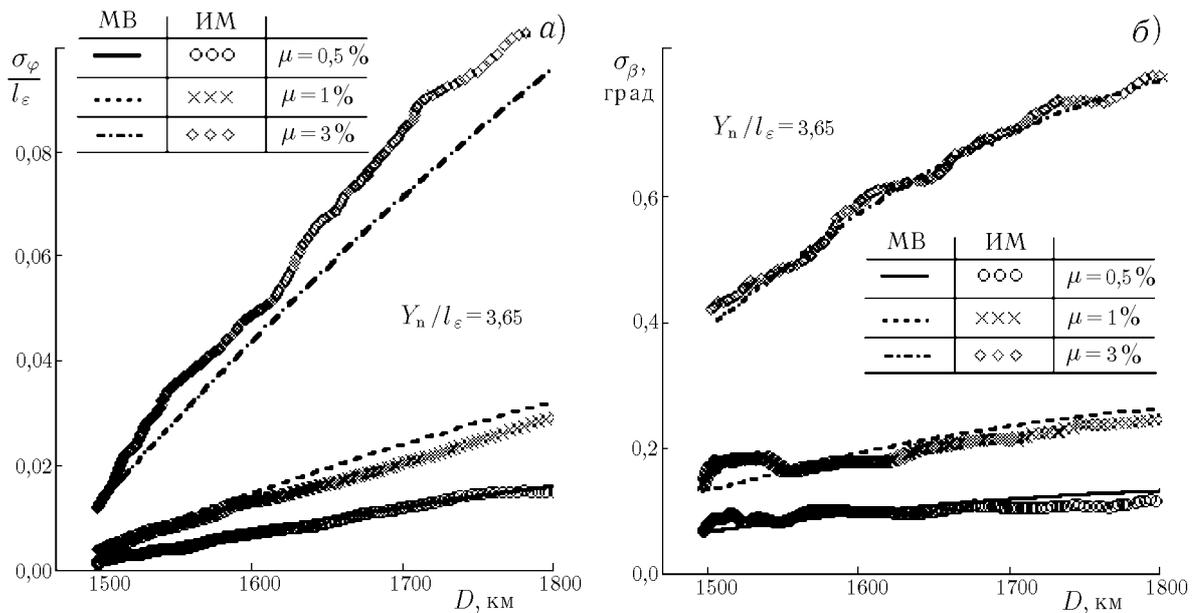


Рис. 13

ближении не описывает вариации эйконала (см. рис. 11).

На рис. 14 изображён пространственный коэффициент корреляции эйконала нижних лучей при дальности трассы 1800 км, рассчитанный на основе имитационного моделирования, для различных возмущений среды. Из рисунка видно, что скорость уменьшения корреляционной функции зависит от возмущения среды, тогда как в первом приближении метода возмущений для эйконала, как известно [4], радиус корреляции нормированной корреляционной функции не зависит от возмущения среды. С увеличением амплитуды случайных неоднородностей скорость уменьшения коэффициента корреляции, полученного на основе имитационного моделирования, увеличивается. При  $\mu = 5\%$  флуктуации эйконала становятся практически не коррелированными. Анализ результатов численного моделирования показал, что при  $\mu = 5\%$  заметно проявляется многолучёвость, хотя условие малости флуктуаций уровня поля по сравнению с флуктуациями фазы ещё выполняется.

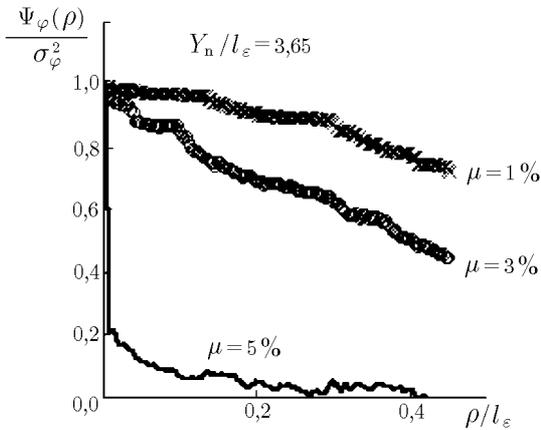


Рис. 14

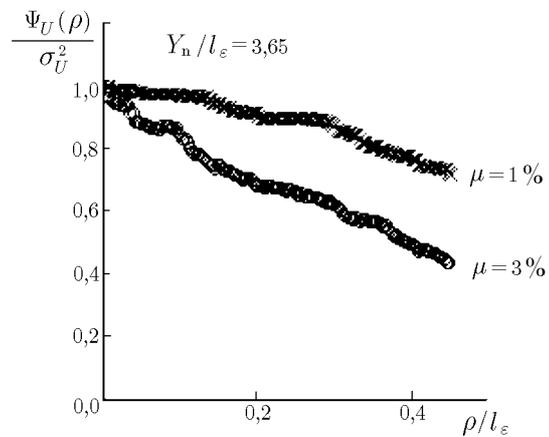


Рис. 15

Графики для коэффициента корреляции поля при дальности трассы 1 800 км и различных возмущениях неоднородностей среды представлены на рис. 15. Из рисунка видно, что коэффициент корреляции поля практически совпадает с коэффициентом корреляции эйконала, и скорость уменьшения корреляционной функции зависит от возмущения среды. Случай, когда коэффициенты корреляции поля и фазы совпадают, соответствует слабым флуктуациям фазы [4].

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Применение имитационного моделирования позволяет исследовать процессы распространения радиоволн за пределами применимости приближённых методов, а именно первого приближения метода возмущений, к уравнениям геометрической оптики. Моделирование распространения радиоволны в случайно-неоднородной ионосфере при двухточечной постановке задачи показало, что математические ожидания углов приёма и соответствующих им углов излучения в сферической регулярной слоистой среде со случайными изотропными неоднородностями практически равны. Дисперсия эйконала нижних лучей при малых углах излучения в большой степени зависит от расстояния, пройденного волной в пространстве от источника излучения до слоя с неоднородностями, и от расстояния, пройденного волной от слоя с неоднородностями до точки наблюдения, а также от размеров и положения случайно-неоднородного слоя внутри регулярного ионосферного слоя. Для нижних лучей, близких к регулярной зоне тени, и для верхних лучей флуктуации траекторий в свободном от неоднородностей пространстве, вызванные флуктуациями углов выхода из слоя, не вносят значительных погрешностей в расчёты, выполненные на основе первого приближения метода возмущений для эйконала.

Анализ результатов имитационного моделирования для флуктуаций поля показал, что при дальностях трассы, при которых отсутствуют флуктуации поля согласно первому приближению метода возмущений для уравнений геометрической оптики, имеется флуктуирующая компонента поля радиоволны. Это обстоятельство также необходимо учитывать при использовании геометрикооптического поля для описания парциальных волн в различных интегральных представлениях полей [16, 17].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 00–02–17780 и 00–15–98509).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кравцов Ю. А., Фейзулин З. И. // Радиотехника и электроника. 1971. Т. 16, № 10. С. 1 777.
2. Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И. Геометрическая оптика неоднородных сред. М.: Наука, 1980.
3. Баранов В. А., Кравцов Ю. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1975. Т. 18, № 1. С. 52.
4. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. Ч. 2. Случайные поля. М.: Наука, 1978.
5. Татарский В. И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. М.: Наука, 1967. 450 с.
6. Гусев В. Д., Виноградова М. Б. // Геомагнетизм и аэрономия. 1980. Т. 20, № 4. С. 682.
7. Акимов П. И., Баскаков С. И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1983. Т. 26, № 1. С. 82.
8. Шалыгин А. С., Палагин Ю. И. Имитационные модели случайных полей. С.-Петербург, 1998.
9. Крашенинников В. Р., Васильев К. К. Методы фильтрации многомерных случайных полей. Саратов: Изд-во Саратовского университета, 1990.
10. Chevret P., Blanco-Benon Ph., Juve D. // J. Acoustical Society of America. 1996. No. 2. P. 3 587.
11. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. М.: Высшая школа, 1998.
12. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1970. 332 с.
13. Алимов В. А., Ерухимов Л. М., Мясников Е. Н., Рахлин А. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1997. Т. 40, № 4. С. 446.
14. Голынский С. М., Гусев В. Д. // Геомагнетизм и аэрономия. 1984. Т. 24, № 1. С. 52.
15. Саичев А. И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1978. Т. 21, № 7. С. 998.
16. Tinin M. V. // Waves in Random Media. 1998. V. 8. P. 329.
17. Kravtsov Yu. A., Tinin M. V. // Radio Sci. 2000. V. 35, No. 6. P. 1 315.

Научно-исследовательский институт прикладной физики,  
ГОУ ВПО «Иркутский госуниверситет»,  
г. Иркутск, Россия

Поступила в редакцию  
1 июля 2002 г.

#### MIMIC SIMULATIONS OF RADIO-WAVE PROPAGATION IN A RANDOMLY IRREGULAR IONOSPHERE

*S. N. Kolesnik, M. V. Tinin, and N. T. Afanas'ev*

We present a technique and the results of mimic simulation of radio-wave propagation in a randomly irregular ionosphere with allowance for the Earth's sphericity and the background ionosphere. Based on consideration of the probability distributions of the angle of reception and of the corresponding amplitude, eikonal, and angle of radiation, obtained by the mimic modeling, we conclude that the most probable ray path is symmetric with respect to the region of its reflection from the ionosphere and that the mean reception angle and the corresponding mean radiation angle are equal. The simulations yield statistical characteristics of a wave, such as the variances of the reception angle and the eikonal, as well as the correlation functions of the eikonal and the field. The simulation results concerning the variances of reception angles and eikonal are compared with the results of the first approximation of the perturbation theory. It is shown that eikonal fluctuations in irregularity-free space, caused by fluctuations of angles of the lower rays escaping from an ionospheric layer with random irregularities, should be taken into account.

УДК 621.391.82

## ОБОБЩЁННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОГО РАЗРЕШЕНИЯ СИГНАЛОВ ПРИ МАЛОЙ СКВАЖНОСТИ РАДИОЛОКАЦИОННОГО ЗОНДИРОВАНИЯ И СКАНИРОВАНИИ ПО УГЛОВОЙ КООРДИНАТЕ

*А. Д. Плужников, Е. Н. Приблудова*

Проведён анализ пространственного разрешения по дальности, а также совместного пространственного и доплеровского радиолокационного разрешения.

### 1. ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Результаты теории пространственно-временной обработки сигналов широко используются для повышения разрешающей способности и помехозащищённости локаторов. Причём традиционным является использование пространственной обработки сигналов (в частности, адаптивной) для подавления активных помех, что реализуется благодаря различию направлений на обнаруживаемую цель и на постановщики помех [1, 2]. В качестве средства борьбы с пассивными помехами традиционно рассматривается временная (доплеровская) селекция движущихся целей. Известным направлением улучшения селекции движущихся целей является уменьшение скважности радиолокационного зондирования [3, 4]. При этом либо повышается частота повторения зондирующих импульсов, так что период их следования оказывается в несколько раз меньше времени запаздывания сигнала от максимально удалённой цели (времени распространения электромагнитной волны до такой цели и обратно к локатору), либо увеличивается длительность импульсов до значений, соизмеримых с упомянутым временем запаздывания. Улучшение селекции движущихся целей в данном случае связано с повышением качества временного (доплеровского) разрешения сигналов [4, 5]. Но при малой скважности зондирования слабые полезные сигналы от дальних целей принимаются одновременно с мощными пассивными помехами от объектов, расположенных на малых и средних дальностях. В работах [6–10] предложен метод пространственной селекции целей при ускоренном сканировании (повышенной скорости обзора по угловой координате) в указанных условиях. Однако в настоящее время отсутствует теория, которая позволяла бы выявить возможности пространственного разрешения на основе различий дальностей объектов и обосновать предложенное решение [6–10] с данной точки зрения. По этим причинам ниже развиваются результаты работы [5] путём их обобщения на режим сканирования для однопозиционных локаторов и анализируется ускоренное сканирование. Проведённый анализ позволяет, в частности, доказать, что увеличение скорости обзора по угловой координате приводит к преобразованию различий дальностей объектов в пространственные различия переизлучённых сигналов, обеспечивая пространственное разрешение по дальности и возможность пространственной селекции слабого полезного сигнала от дальней цели на фоне мощных пассивных помех от ближних объектов.

Как уже было отмечено, временной селекцией и временным разрешением в данной работе мы называем соответственно не разрешение и селекцию сигналов по времени запаздывания, а их разрешение и селекцию на основе различий доплеровских смещений частоты. Такая терминология объясняется тем, что упомянутое доплеровское разрешение реализуется методами временной обработки, т. е. обработки разнесённых во времени (например, с помощью линий задержки) отсчётов сигналов [5].

## 2. МОДЕЛЬ АНАЛИЗИРУЕМОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрим линейную антенную систему, вращающуюся вокруг своего центра с постоянной угловой скоростью  $\Omega$  в плоскости обзора, на которой введены угловая координата  $\alpha$  (азимут), радиальная координата  $R$  (дальность), отсчитываемая от центра вращения. Выберем начала отсчёта текущего времени  $t$  и угла  $\alpha$  так, чтобы значение  $\Omega t$  этого угла определяло нормаль к приёмной антенне. Введём также следующие обозначения:  $\lambda$  — рабочая длина волны,  $\nu(t)$  — нормированная комплексная огибающая зондирующего сигнала,  $G\{\varepsilon\}$  — нормированная диаграмма направленности по излучению с направлением главного максимума  $\varepsilon = \varepsilon_0$ , где  $\varepsilon = \alpha - \Omega t$  — угол, отсчитываемый в плоскости обзора от нормали к приёмной антенне. Предположим, что  $x$  — координата вдоль раскрыва приёмной антенны с размером апертуры  $\Pi$ , точка  $x = 0$  соответствует середине раскрыва (центру антенны).

## 3. АНАЛИЗ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОГО СИГНАЛА

Определим пространственно-временной сигнал как комплексную огибающую напряжённости переизлучённого точечным объектом поля, действующего в точке с заданной пространственной координатой  $x$  в заданный момент времени  $t$ . Таким образом, это амплитудно-фазовое распределение поля по раскрыву приёмной антенны в некоторый момент времени. Такой сигнал найдём по методике [5], обобщая её на случай сканирующей системы в соответствии с работами [11, 12]:

$$y_x(t) = \mu R^{-2} w(x) \exp(j\omega t) \nu(t - t_R) G[\alpha - \Omega(t - t_R)] \exp[2\pi j (x/\lambda) (\alpha - \Omega t)], \quad (1)$$

где  $\alpha$  и  $R$  — текущие координаты объекта,  $\omega$  — доплеровское смещение частоты,  $\mu$  — комплексная константа,

$$w(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq \Pi/2; \\ 0, & |x| > \Pi/2, \end{cases} \quad (2)$$

$$t_R = 2R/c, \quad (3)$$

$c$  — скорость света.

Заметим, что формула (2) не является аппроксимацией амплитудного распределения поля по раскрыву антенны: множитель  $w(x)$  в правой части (1) лишь показывает, что пространственно-временной сигнал определён только на интервале  $|x| \leq \Pi/2$ , соответствующем раскрыву.

Модуль величины (1) достигает максимума в момент времени

$$t = t_{\max} \approx t_R + (\alpha - \varepsilon_0)/\Omega. \quad (4)$$

Последний экспоненциальный множитель в (1) не позволяет при  $\Omega \neq 0$  представить пространственно-временной сигнал в виде произведения двух частей, одна из которых зависела бы от времени  $t$ , а другая — от пространственной координаты  $x$ . При этом оптимальная пространственно-временная обработка не разделяется на пространственную и временную обработки [6].

В момент (4) наибольшей интенсивности принимаемого сигнала (1) упомянутый экспоненциальный множитель при учёте (3) имеет вид  $\exp[2\pi j (x/\lambda) (\varepsilon_0 - 2\Omega R/c)]$ . С учётом этого выражения и формулы (2), можно сделать заключение о том, что при  $\Omega \neq 0$  изменение дальности  $R$  объекта приводит к изменению фазового распределения на раскрыве антенны в момент наибольшей интенсивности принимаемого сигнала. Этот эффект можно назвать преобразованием различий дальностей объектов в пространственные различия отражённых сигналов, или дальностно-угловой конверсией, т. к. подобные пространственные различия без сканирования могли бы возникать лишь вследствие различий угловых координат объектов. Указанный эффект не является широко известным. Он обеспечивает возможность пространственного разрешения сигналов, переизлучённых с различных дальностей (имеющих различное время запаздывания относительно зондирующего сигнала).

Появление такой возможности является принципиальной основой осуществления предложенной нами ранее [6–10] (для случая зондирования с малой скважностью) пространственной селекции эхосигнала на фоне пассивных помех при различных дальностях цели и мешающих объектов-переизлучателей. В частности, возможна селекция слабого полезного сигнала от дальней цели на фоне мощных пассивных помех от ближних объектов (см. ниже).

#### 4. ОСНОВНЫЕ ДОПУЩЕНИЯ ПРИ АНАЛИЗЕ РАЗРЕШЕНИЯ СИГНАЛОВ

Для анализа разрешения сигналов определим обобщённую многомерную пространственно-временную корреляционную функцию [5, 11, 12]

$$\chi(\alpha', t'_R, \omega') = \iint_{-\infty}^{+\infty} y_x^*(t + t') y_x^0(t) dx dt, \quad (5)$$

где звёздочка обозначает комплексное сопряжение; опорный сигнал с частотой  $\omega^0$ , переизлучённый с некоторого направления  $\alpha^0$  и дальности  $R^0$ , записывается в виде

$$y_x^0(t) = y_x(t) \Big|_{\alpha=\alpha^0, R=R^0, \omega=\omega^0}; \quad (6)$$

$$\alpha' = \alpha - \alpha^0; \quad t'_R = t_R - t_R^0; \quad \omega' = \omega - \omega^0; \quad t_R^0 = 2R^0/c. \quad (7)$$

Зададим  $\alpha' = 0$  и с учётом (1)–(4), (6), (7) выберем временной сдвиг  $t'$  так, чтобы при любом  $t'_R$  обеспечивалось временное совпадение сомножителей (сигналов) в интеграле (5). Тогда пространственно-временное разрешение сигналов возможно лишь благодаря их доплеровским различиям (они позволяют осуществлять временное разрешение) и указанной выше дальностно-угловой конверсии (пространственное разрешение).

#### 5. ПРОСТРАНСТВЕННОЕ РАЗРЕШЕНИЕ ПО ДАЛЬНОСТИ

Количественную характеристику пространственного разрешения по дальности можно определить, обобщая на данный случай понятие постоянной разрешения Вудворда [13]:

$$\delta_t = \int_{-\infty}^{+\infty} |\chi_0(0, t'_R, 0)|^2 dt'_R, \quad (8)$$

где нормированная корреляционная функция

$$\chi_0(\alpha', t'_R, \omega') = \chi(\alpha', t'_R, \omega') / \chi(0, 0, 0). \quad (9)$$

При сделанных допущениях соотношения (1)–(9) позволяют найти

$$\delta_t = \lambda \Pi^{-1} \Omega^{-1} \approx \theta \Omega^{-1}, \quad (10)$$

где  $\theta = \lambda \Pi^{-1}$  — ширина приёмной диаграммы направленности.

Согласно (10) качество пространственного разрешения (и, следовательно, пространственной селекции сигналов на фоне пассивных помех) повышается не только при увеличении апертуры антенны или сужении диаграммы направленности, что является известным результатом [5], но и при ускорении сканирования. В этом смысле ускорение сканирования эквивалентно увеличению апертуры антенны и сужению её диаграммы направленности в плоскости сканирования.

## 6. ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СЕЛЕКЦИЯ СИГНАЛОВ ПРИ МАЛОЙ СКВАЖНОСТИ ЗОНДИРОВАНИЯ

Для решения возникающей при малой скважности зондирования или непрерывном излучении (см. выше) задачи пространственной селекции сигнала с дальности  $R_s$  в условиях временного наложения на него пассивных помех с дальностей  $R \ll R_s$  целесообразно потребовать

$$\delta t \leq t_s = 2R_s/c.$$

Тогда из (10) следует впервые упомянутая в [6] необходимость повышения скорости обзора по угловой координате, при котором

$$\Omega t_s > \theta.$$

Основываясь на работах [6–12], рассмотрим появление при такой (повышенной) скорости обзора (или, как ещё будем говорить, при ускоренном сканировании) возможности пространственной селекции радиолокационных сигналов малой скважности (или непрерывных сигналов) на фоне пассивных помех, действующих одновременно с сигналами, но отражённых с других дальностей. Другими словами, рассмотрим возможность селекции слабого полезного сигнала от дальней цели на фоне мощных пассивных помех от ближних объектов. Представим себе, что диаграмма направленности по излучению (штриховая линия на рис. 1) и приёмная диаграмма направленности (сплошная линия на рис. 1) антенной системы различны: во время сканирования основные лепестки этих диаграмм смещены относительно друг друга на постоянный угол  $\Omega t_s$ . Указанные диаграммы практически не успевают повернуться за время запаздывания мешающих отражений от близко расположенных объектов (за время распространения электромагнитной волны от локатора до объектов и обратно), и эти пассивные помехи приходят под углами, соответствующими главному лепестку диаграммы направленности по излучению и, следовательно, боковым лепесткам приёмной диаграммы. Таким образом, пассивные помехи от ближних объектов (наиболее интенсивные) в процессе приёма будут ослабляться. За время же  $t_s$  запаздывания полезного сигнала от дальней цели диаграмма поворачивается на угол  $\Omega t_s$ , и сигнал приходит под углом, соответствующим основному лепестку приёмной диаграммы направленности, т. е. сигнал принимается с усилением.

Таким образом, ускорение обзора по угловой координате обеспечивает дальностно-угловую конверсию, пространственное разрешение сигналов, переизлученных с различных дальностей, даже при совпадении угловых координат объектов-переизлучателей, а также пространственную селекцию сигналов на фоне пассивных помех, основанную на использовании различия дальностей целей и мешающих объектов, что требуется при малой скважности зондирования или непрерывном излучении.

Однако необходимое для этого ускорение обзора приводит к расширению спектра радиолокационных отражений, ухудшению их временного (доплеровского) разрешения и, следовательно, к ухудшению временной (доплеровской) селекции движущихся целей на фоне пассивных помех. В связи с этим целесообразно провести анализ влияния скорости сканирования на пространственно-временное разрешение в целом и на пространственно-временную селекцию сигналов. Качество пространственно-временной селекции при ускоренном сканировании проанализировано, в частности, в работах [7, 8]. Ниже проведём анализ пространственно-временного разрешения сигналов.

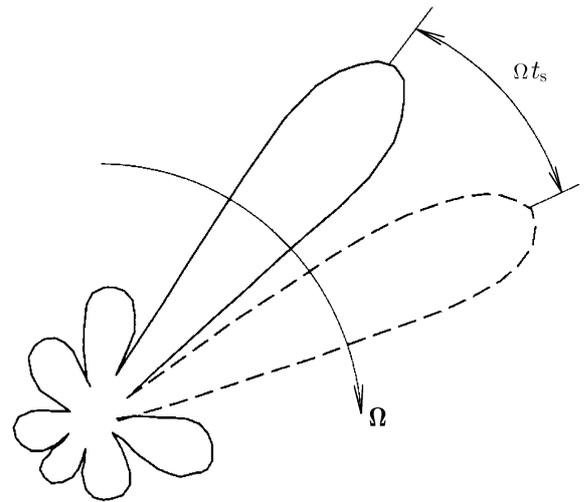


Рис. 1

7. ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОЕ РАЗРЕШЕНИЕ СИГНАЛОВ В СКАНИРУЮЩЕЙ СИСТЕМЕ

Пространственно-временное разрешение при сделанных допущениях, согласно (1)–(7), характеризуется функцией

$$\chi(0, t'_R, \omega') = G_x\{\Omega t'_R\} G_t\{\omega'\}, \tag{11}$$

где

$$G_x\{\Omega t'_R\} = \int_{-\infty}^{+\infty} w^2(x) \exp[2\pi j (x/\lambda) \Omega t'_R] dx = \Pi \sin[\pi (\Pi/\lambda) \Omega t'_R] / [\pi (\Pi/\lambda) \Omega t'_R], \tag{12}$$

$$G_t\{\omega'\} = \int_{-\infty}^{+\infty} |\nu(t - t'_R)|^2 |G\{\alpha^0 - \Omega(t - t'_R)\}|^2 \exp(-j\omega' t) dt. \tag{13}$$

Как видно из (11)–(13), повышение скорости обзора  $\Omega$  приводит к сужению пространственно-временной корреляционной функции вдоль оси  $t'_R$  (улучшению пространственного разрешения по дальности) и к расширению её вдоль оси  $\omega'$  (ухудшению доплеровского, т. е. временного, разрешения). Такие деформации иллюстрируют показанные на рис. 2 и 3 контуры сечений функции (11) плоскостью, параллельной осям  $t'_R, \omega'$  и называемой далее горизонтальной плоскостью, для меньшей (сплошные контуры) и большей (штриховые) скорости обзора. Рис. 2 соответствует непрерывному зондирующему сигналу, а рис. 3 — периодической последовательности зондирующих импульсов. Отмеченное ухудшение временного (доплеровского) разрешения при ускорении сканирования, необходимом для реализации пространственного разрешения по дальности и пространственной селекции сигналов на фоне пассивных помех, объясняется расширением спектра радиолокационных отражений и приводит к ухудшению временной (доплеровской) селекции движущихся целей на фоне пассивных помех.

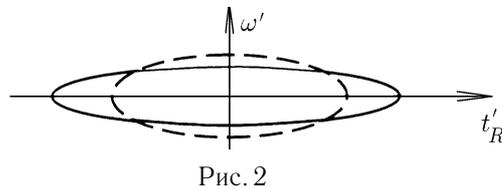


Рис. 2

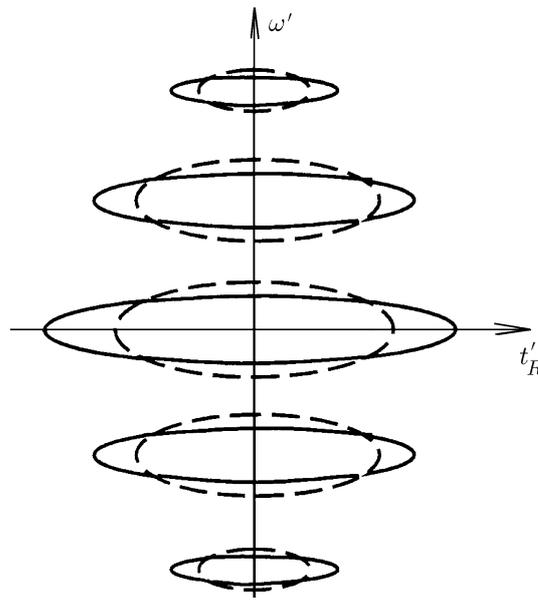


Рис. 3

В связи с противоположным влиянием изменения скорости сканирования на пространственное и временное разрешение, а также на пространственную и временную селекцию сигналов целесообразно провести более подробный анализ этого влияния. Качество пространственно-временной селекции сигналов при ускоренном сканировании проанализировано, в частности, в работах [7, 8, 11]. В данной работе проведём анализ пространственно-временного разрешения. Количественную характеристику такого разрешения (постоянную разрешения) определим согласно [5] и аналогично (8):

$$\delta_{t\omega} = \iint_{-\infty}^{+\infty} |\chi_0(0, t'_R, \omega')|^2 dt'_R d\omega'. \tag{14}$$

По аналогии с [4, 5, 13] подынтегральное выражение в формуле (14) назовём пространственно-временной функцией неопределённости, или пространственно-временным телом неопределённости. Тогда постоянную разрешения (14) можно называть объёмом тела неопределённости.

Из (11)–(14), теоремы Парсевала [5, 13] и теоремы о перестановке пределов интегрирования следует

$$\delta_{t\omega} = 2\pi\Pi^{-1}\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} |\nu[(\alpha^0 - \varepsilon)/\Omega]|^4 |G\{\varepsilon\}|^4 d\varepsilon \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} |\nu[(\alpha^0 - \varepsilon)/\Omega]|^2 |G\{\varepsilon\}|^2 d\varepsilon \right]^{-2}. \quad (15)$$

### 8. ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОЕ РАЗРЕШЕНИЕ СИГНАЛОВ БОЛЬШОЙ ДЛИТЕЛЬНОСТИ

Дальнейший анализ конкретизируем вначале для случая, когда скважность зондирования уменьшается за счёт увеличения длительности  $\tau$  периодически излучаемых зондирующих импульсов (см. раздел 1). При этом селекция движущихся целей может быть реализована за счёт использования внутрипериодной временной обработки сигнала длительностью  $\tau$  (обработки одиночного импульса длительностью  $\tau$ ). В данном случае этот сигнал должен быть сложным, т. е. должен иметь большое произведение длительности на ширину спектра [4, 5, 13]. С учётом временной обработки сигнала, имеющего вид одиночного импульса, функция  $\nu[(\alpha^0 - \varepsilon)/\Omega]$  в подынтегральном выражении для постоянной разрешения (15) должна быть отлична от нуля на интервале длительностью  $\tau$ . Для определённости и упрощения анализа предположим, что на указанном интервале нормированная огибающая  $|\nu[(\alpha^0 - \varepsilon)/\Omega]| = 1$  и середина интервала соответствует моменту времени  $t = \alpha^0/\Omega$ . Тогда соотношение (15) принимает вид

$$\delta_{t\omega} = 2\pi\Pi^{-1}\lambda \int_{-\Omega\tau/2}^{\Omega\tau/2} |G\{\varepsilon\}|^4 d\varepsilon \left[ \int_{-\Omega\tau/2}^{\Omega\tau/2} |G\{\varepsilon\}|^2 d\varepsilon \right]^{-2}. \quad (16)$$

При гауссовой [6] аппроксимации диаграммы направленности  $G\{\varepsilon\}$  с шириной  $\theta$  по уровню  $-3$  дБ из (16) получим

$$\delta_{t\omega} = \sqrt{2} \pi \theta^{-1} \Pi^{-1} \lambda \delta_{\tau\omega}(\gamma_\tau), \quad (17)$$

где относительная скорость обзора

$$\gamma_\tau = \Omega\tau/\theta, \quad (18)$$

$$\delta_{\tau\omega}(\gamma_\tau) = \operatorname{erf} \left\{ (\pi/2)^{1/2} \gamma_\tau \right\} \operatorname{erf}^{-2} \left\{ (\pi^{1/2}/2) \gamma_\tau \right\}, \quad (19)$$

интеграл вероятности

$$\operatorname{erf}(\vartheta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\vartheta \exp(-\zeta^2) d\zeta. \quad (20)$$

Зависимость (19) показана на рис. 4. Как видно, объём (14) или (17) тела неопределённости не остаётся постоянным при изменении параметров пространственно-временного сигнала, связанном с изменением относительной скорости обзора (18) и вызывающим отмеченную раньше деформацию функции  $\chi_0(0, t'_R, \omega')$  (см. рис. 2, 3), т. е. в данном случае, строго говоря, нельзя упоминать о принципе неопределённости, как в [5, 13]. Однако условно (для краткости) указанную функцию всё же называем телом неопределённости (см. выше).

Согласно (17)–(20) и рис. 4 объём тела неопределённости  $\delta_{t\omega} \rightarrow \infty$  при  $\gamma_\tau \rightarrow 0$ . Данный результат легко получить также по формуле (16) без конкретизации (или аппроксимации) диаграммы направленности  $G\{\varepsilon\}$ . Для его пояснения учтём, что согласно (18)  $\gamma_\tau = 0$  в любом из трёх случаев: при  $\Omega = 0$ , при  $\tau = 0$  либо при одновременном выполнении последних двух равенств. При  $\Omega = 0$  исчезает возможность пространственного разрешения сигналов на основе различий дальностей объектов-переизлучателей. Это означает равномерность тела неопределённости вдоль оси  $t'_R$  для любого  $\omega'$  и, следовательно, бесконечный объём тела (см. его сечение горизонтальной плоскостью на рис. 5). Аналогично (см. рис. 6) бесконечным будет этот объём и при  $\tau = 0$ , когда невозможным оказывается разрешение на основе доплеровских различий сигналов (из-за бесконечной протяжённости сплошного спектра сигналов). При  $\Omega = 0$  и  $\tau = 0$  тело неопределённости с бесконечным объёмом ограничено бесконечно протяжённой горизонтальной поверхностью с единичным уровнем ( $\chi_0(0, t'_R, \omega') = 1$  при любых значениях  $t'_R$  и  $\omega'$ ).

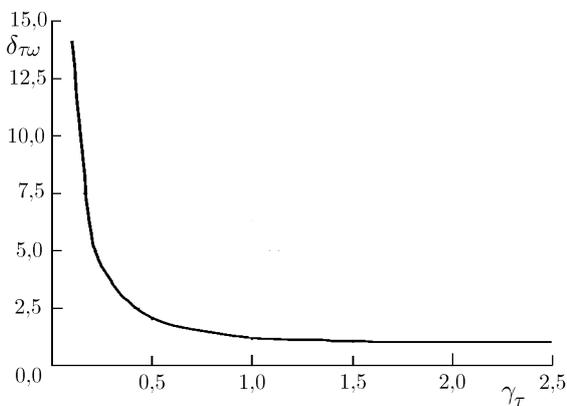


Рис. 4

Сокращение (см. рис. 4) объёма (17) с увеличением относительной скорости обзора (18) показывает, что, несмотря на ухудшение временного (доплеровского) разрешения при  $\tau = \text{const}$  и росте  $\Omega$  (см. выше), качество пространственно-временного разрешения при этом повышается. Последнее связано с улучшением пространственного разрешения. При  $\Omega = \text{const}$  и увеличении  $\gamma_\tau$  объём тела неопределённости уменьшается, а пространственно-временное разрешение, соответственно, улучшается за счёт роста  $\tau$  и улучшения в связи с этим [4, 5, 13] временного разрешения.

Однако при достаточно большом  $\gamma_\tau$  его изменения уже не оказывают влияния на объём тела неопределённости, поскольку при этом  $\delta_{t\omega}(\gamma_\tau) \approx 1$  (см. рис. 4). Аналогичный результат получим по формулам (15), (16) для произвольной диаграммы направленности  $G\{\varepsilon\}$ . Действительно, как следует из (18),  $\gamma_\tau \rightarrow \infty$  при  $\Omega\tau \rightarrow \infty$ , когда (16) совпадает с формулой (15), записанной при условии  $|\nu(t)| = 1$ , что соответствует непрерывному режиму зондирования и соотношению

$$\delta_{t\omega} = 2\pi\Pi^{-1}\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} |G\{\varepsilon\}|^4 d\varepsilon \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} |G\{\varepsilon\}|^2 d\varepsilon \right]^{-2}.$$

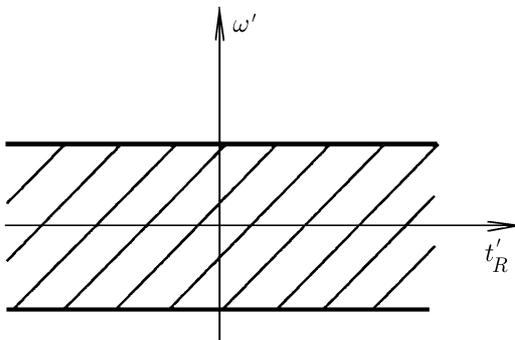


Рис. 5

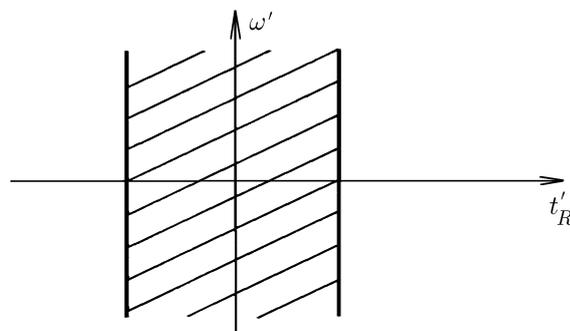


Рис. 6

Последнее соотношение определяет величину, не зависящую от скорости обзора и длительности сигнала. Значит, при непрерывном зондирующем сигнале объём тела неопределённости, т. е. качество пространственно-временного разрешения, не зависит от скорости обзора и длительности сигнала.

### 9. ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОЕ РАЗРЕШЕНИЕ СИГНАЛОВ С ПОВЫШЕННОЙ ЧАСТОТой ПОВТОРЕНИЯ

Теперь рассмотрим случай, когда скважность зондирования уменьшается за счёт повышения частоты повторения зондирующих импульсов. Импульсное зондирование полагаем периодическим в бесконечных временных пределах:

$$|\nu[(\alpha^0 - \varepsilon)/\Omega]| = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\nu_\tau(\varepsilon/\Omega - kT)|, \quad (21)$$

где  $T$  — период зондирующих импульсов; нормированная огибающая зондирующего импульса с длительностью  $\tau$  для определённости может быть записана в виде

$$|\nu_\tau(t)| = \begin{cases} 1, & |t| \leq \tau/2; \\ 0, & |t| > \tau/2. \end{cases} \quad (22)$$

С учётом (15), (21), (22) для случая повышенной частоты повторения зондирующих импульсов получаем

$$\delta_{t\omega} = 2\pi\Pi^{-1}\lambda\Omega\tau \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |G\{k\Omega T\}|^4 \left[ \Omega\tau \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |G\{k\Omega T\}|^2 \right]^{-2}. \quad (23)$$

При гауссовой [6] аппроксимации диаграммы направленности  $G\{\varepsilon\}$  из (23) получим

$$\delta_{t\omega} = 2\pi (T/\tau) \Pi^{-1} \lambda \delta_{T\omega}(\gamma_T), \quad (24)$$

где относительная скорость обзора

$$\gamma_T = \Omega T / \theta, \quad (25)$$

$$\delta_{T\omega}(\gamma_T) = \gamma_T^{-1} \theta_3(0; 2\gamma_T^2/\pi) \theta_3^{-2}(0; \gamma_T^2/\pi), \quad (26)$$

тэта-функция

$$\theta_3(\eta; \zeta) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-k^2 \pi^2 \zeta) \cos(2k\pi\eta). \quad (27)$$

Согласно (24)–(27) и рис. 7 при повышенной частоте повторения зондирующих импульсов, как и в исследованном ранее случае сигналов большой длительности, повышение скорости обзора приводит к монотонному сокращению объёма тела неопределённости, т. е. к улучшению пространственно-временного разрешения.

Заметим, что в данном случае увеличение относительной скорости обзора (25) сопровождается сокращением числа импульсов в переизлучённом объектом пачке, что при оптимальной обработке сигнала означает сокращение числа обрабатываемых временных (череспериодных) отсчётов и ухудшение по этой причине временного разрешения. Более интересным с точки зрения соответствия реальной радиолокационной практике является случай, когда изменение относительной скорости обзора не приводит к изменению числа  $K$  обрабатываемых череспериодных отсчётов. Тогда число  $K$  должно быть меньше числа импульсов в отражённой пачке, что соответствует структуре широко распространённых

систем на базе нерекурсивных фильтров ограниченного порядка и оптимальной обработке ими сигнала, образованного из  $K$  соседних импульсов пачки. При этом в правой части (21) ограничимся лишь  $K$  слагаемыми. Для определённости и простоты будем считать  $K$  нечётным (в противном случае соотношения оказываются несколько более громоздкими, но приводят к тем же, по существу, результатам). Тогда  $K \geq 3$  ( $K = 1$  соответствует отсутствию межпериодной временной обработки) и

$$|\nu[(\alpha^0 - \varepsilon)/\Omega]| = \sum_{k=-(K-1)/2}^{(K-1)/2} |\nu_\tau(\varepsilon/\Omega - kT)|, \quad (28)$$

Из (15), (22) и (28) следует

$$\delta_{t\omega} = 2\pi\Pi^{-1}\lambda\Omega\tau \sum_{k=-(K-1)/2}^{(K-1)/2} |G\{k\Omega T\}|^4 \left[ \Omega\tau \sum_{k=-(K-1)/2}^{(K-1)/2} |G\{k\Omega T\}|^2 \right]^{-2},$$

а при условии гауссовой аппроксимации диаграммы направленности вновь убедимся в справедливости (24), (25), где, однако,

$$\delta_{T\omega}(\gamma_T) = \gamma_T^{-1} \left[ 1 + 2 \sum_{k=1}^{(K-1)/2} \exp(-2\pi k^2 \gamma_T^2) \right] \left[ 1 + 2 \sum_{k=1}^{(K-1)/2} \exp(-\pi k^2 \gamma_T^2) \right]^{-2}. \quad (29)$$

Графики функции (29) представлены на рис. 8 для  $K = 3$  (сплошная линия),  $K = 5$  (штриховая линия) и  $K = 7$  (пунктир). Они имеют характерные особенности, связанные с немонотонным изменением функций при  $\gamma_T \ll 1$ , когда число импульсов в переизлучённом объектом пачке достаточно велико: для любого числа  $K$  при заданных скважности и длительности (малой) импульсов имеется определённый оптимум скорости обзора  $\Omega = \gamma_T \theta / T$ , минимизирующий объём тела неопределённости. Уменьшение  $\Omega$  относительно оптимума отрицательно влияет на пространственно-временное разрешение сигналов из-за ухудшения пространственного разрешения, а увеличение  $\Omega$  — из-за ухудшения временного (доплеровского) разрешения в связи с расширением спектра сигналов. Оптимум  $\Omega$  смещается влево по мере увеличения  $K$ , т. к. растёт длительность последовательности из  $K$  равноотстоящих на период  $T$  зондирующих импульсов. Вследствие этого существенная модуляция такой последовательности при сканировании, ведущая к расширению спектра переизлучённых сигналов, появляется при меньшей скорости обзора.

Рассмотрение зависимостей, приведённых на рис. 8, при больших  $\gamma_T$  не представляет существенного интереса в связи с нарушением при этом (как показывает более детальный анализ) взаимно однозначного соответствия между дальностью объекта и фазовым распределением поля на раскрыве антенны.

Приведём некоторые количественные данные. Оценки [7], сделанные при оптимизации параметров локатора с дальностью действия 300 км и рабочей длиной волны 3 см, показали, что, например, для  $K = 3$  возможен следующий выбор частоты повторения зондирующих импульсов и скорости обзора: частота повторения повышается до 10 кГц, т. е. период следования зондирующих импульсов оказывается в 20 раз меньше времени запаздывания сигнала от максимально удалённой цели; скорость обзора повышается так, что угловое перемещение диаграммы направленности за упомянутое время запаздывания превышает её ширину (ширина диаграммы направленности по излучению и ширина приёмной диаграммы направленности предполагаются приблизительно одинаковыми) в 2,7 раза, т. е. при ширине диаграммы направленности (в азимутальной плоскости) равной  $3^\circ$ , сканирование по азимуту будет осуществляться со скоростью  $4,05 \cdot 10^3$  град/с. Очевидно, реализация указанной скорости обзора

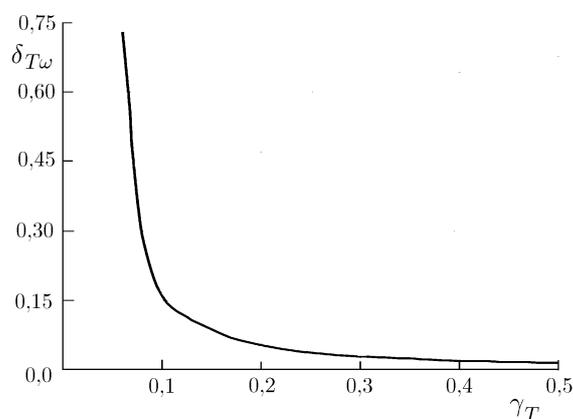


Рис. 7

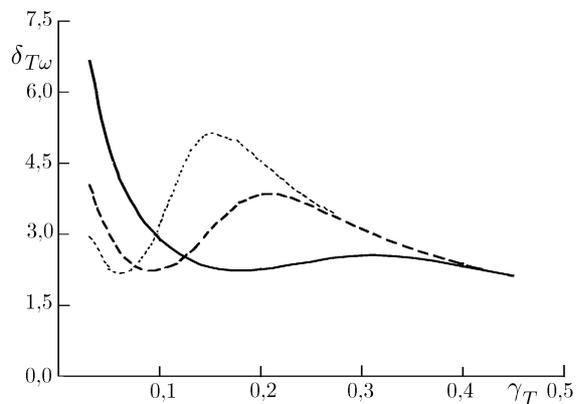


Рис. 8

должна обеспечиваться путём электронного сканирования, например, с помощью цилиндрической антенной решётки. Перечисленные параметры, как показывают расчёты [7], при наличии реальных пассивных помех обеспечивают выигрыш 17 дБ в отношении сигнал—помеха по сравнению со случаем традиционно используемых низких скоростей обзора по азимуту и низкой частоты повторения зондирующих импульсов (при однозначном измерении дальности классическим импульсным методом).

## 10. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Согласно проведённому анализу увеличение скорости обзора по угловой координате (скорости сканирования) позволяет осуществить дальностно-угловую конверсию, т.е. преобразовать различия дальностей объектов в пространственные различия переизлучённых сигналов (различия фазового распределения поля по раскрытию приёмной антенны), что обеспечивает пространственное разрешение по дальности и возможность пространственной селекции (полезной при малой скважности зондирования) слабого полезного сигнала от дальней цели на фоне мощных пассивных помех от ближних объектов. Улучшение пространственного разрешения по дальности при ускорении сканирования сопровождается ухудшением временного (доплеровского) разрешения сигналов, но в итоге пространственно-временное разрешение при импульсном зондировании улучшается. В последнем случае возможна оптимизация скорости обзора.

Работа выполнена при поддержке Минобразования РФ.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Монзинго Р. А., Миллер Т. У. Адаптивные антенные решётки. М.: Радио и связь, 1986.
2. Мальцев А. А., Савинов И. В., Серебряков Г. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1989. Т. 32, № 2. С. 193.
3. Справочник по радиолокации / Под ред. М. Сколника: В 4-х т. М.: Сов. радио, 1979. Т. 3. С. 528.
4. Свистов В. М. Радиолокационные сигналы и их обработка. М.: Сов. радио, 1977.
5. Коростелёв А. А. Пространственно-временная теория радиосистем. М.: Радио и связь, 1987.
6. Плужников А. Д., Рындык А. Г. // Радиотехника и электроника. 1987. Т. 32, № 10. С. 2220.
7. Кашаев С. М., Плужников А. Д., Рындык А. Г. // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1990. № 9. С. 71.
8. Плужников А. Д. // Изв. вузов. Радиофизика. 1991. Т. 34, № 4. С. 371.

9. Плужников А. Д. // Радиотехника и электроника. 1991. Т. 36, № 12. С. 2412.
10. Плужников А. Д. // Изв. вузов. Радиофизика. 1993. Т. 36, № 9–10. С. 809.
11. Pluzhnikov A. D., Pribludova E. N. // The Proceedings of the 8th International Conference on Signal Processing Applications and Technology. 1997. V. 2. P. 1537.
12. Pluzhnikov A. D., Pribludova E. N., Torgushin E. I. // Signal Processing. 1998. V. 65. P. 129.
13. Кук Ч., Бернфельд М. Радиолокационные сигналы. М.: Сов. радио, 1971.

Нижегородский государственный технический университет,  
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию  
28 февраля 2001 г.

**GENERALIZED CHARACTERISTICS OF THE SPATIO-TEMPORAL SIGNAL RESOLUTION FOR RADAR SOUNDING  
WITH A SMALL PULSE PERIOD-TO-DURATION RATIO AND ANGULAR-COORDINATE SCANNING**

*A. D. Pluzhnikov and E. N. Pribludova*

We analyze the spatial distance resolution and the joint spatial and Doppler radar resolution.

УДК 537.226+528.813

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАДИОЛОКАЦИОННОГО ЗОНДИРОВАНИЯ ПОДПОВЕРХНОСТНЫХ ЗОН, ЗАГРЯЗНЁННЫХ НЕФТЕПРОДУКТАМИ

*В. Г. Сугак, В. А. Кириченко*

В статье приведены экспериментальные оценки возможности применения радиолокаторов подповерхностного зондирования, адаптированных для картографирования подповерхностных зон, загрязнённых нефтепродуктом (линз) в результате экологических аварий. Испытания радиолокатора проводились в месте расположения крупной линзы авиационного керосина, лежащей на глубине примерно 6 м. На основе сравнения радиолокационных измерений и геологических данных, полученных при бурении скважин, сделан вывод о целесообразности применения радиолокаторов подповерхностного зондирования для картографирования подповерхностных линз нефтепродуктов.

### ВВЕДЕНИЕ

Среди задач, обусловленных проблемами защиты окружающей среды, важное место занимает защита подземных вод от загрязнения нефтепродуктами. Это связано с наличием значительного числа объектов, являющихся источниками загрязнения окружающей природной среды, а также высокой токсичностью нефтепродуктов и продуктов их распада.

Теоретической оценке возможности применения радиофизических методов подповерхностного зондирования для задач разведки и картографирования участков с очагами подповерхностного загрязнения посвящён ряд работ. Проведённые измерения зависимостей электрических характеристик типичных грунтов от степени насыщения нефтепродуктом, выполненные в лабораторных условиях [1] и лизиметре, показали, что имеется принципиальная основа для применения методов подповерхностного зондирования к решению указанных задач. Ряд экспериментальных измерений [2], выполненных с использованием лабораторного макета радиолокатора подповерхностного зондирования (РПЗ), по обнаружению подповерхностного участка с искусственно созданным слоем, насыщенным нефтепродуктом, подтвердили возможности метода.

Основной задачей дальнейших исследований стало выполнение цикла полевых измерений для исследования возможностей новой технологии разведки и картографирования подповерхностных линз нефтепродукта.

### 1. ВИДЫ ЗАГРЯЗНЕНИЯ ПОЧВ НЕФТЕПРОДУКТАМИ

Потерянные в результате утечек нефтепродукты просачиваются в землю и через породы зоны аэрации достигают уровня первого от поверхности водоносного горизонта. Поскольку подавляющее большинство нефтепродуктов легче воды, они накапливаются на поверхности грунтовых вод, образуя линзы углеводородов, имеющие различные размеры и конфигурации. Эти линзы плавают на поверхности воды и движутся вместе с последней к местам её разгрузки, естественным (реки, моря и т. д.) или искусственным (водозаборные скважины, дренажи и пр.). В процессе формирования линз образуется несколько видов загрязнения геологической среды:

1) Загрязнение почво-грунтов. Этот вид загрязнения обычно формируется непосредственно в местах пролива нефтепродукта. Площадь такого загрязнения сравнительно невелика.

2) Загрязнение пород зоны аэрации. Существуют два основных пути такого загрязнения. Первый — загрязнение грунтов при инфильтрации пролитых нефтепродуктов вниз. Второй — загрязнение грунтов при естественных сезонных колебаниях уровня грунтовых вод. В первом случае загрязнение фиксируется в основном в местах пролива. Во втором — на всей площади наличия свободных нефтепродуктов. При этом происходит загрязнение пород водоносного горизонта ниже среднего уровня водо-нефтепродуктового контакта (ВНК). Толщина слоя загрязнённых пород обычно не превышает  $1 \div 2$  м.

В результате действия указанных механизмов образуются два максимума загрязнения по глубине: первый — у поверхности, второй — над уровнем грунтовых вод.

Объём нефтепродуктов, который может накопиться в зоне аэрации, зависит от сорбционной ёмкости пород, которая, в свою очередь, определяется их литологическим составом. Максимальной сорбционной ёмкостью обладают суглинки, а минимальной — песок.

### 1.1. Линзы подвижного нефтепродукта

Как известно, линзы подвижного нефтепродукта формируются на поверхности грунтовых вод. Их размеры определяются целым рядом технических и геологических факторов.

Общий объём линзы в первую очередь зависит от объёма пролива. Как показывает опыт, потери нефтепродуктов составляют обычно от 0,5 до 5 % (чаще  $1 \div 2$  %) от годового оборота и зависят от состояния технических средств и технологической дисциплины на объектах. Более опасны сооружения подземного типа, т. к. в случае аварийных утечек последние не сразу обнаруживаются и требуют больше времени на ликвидацию.

Площадь распространения жидких подвижных нефтепродуктов зависит не только от их объёма, но и от конкретных геолого-гидрогеологических условий в районе объекта-загрязнителя. Так, если в разрезе преобладают слабопроницаемые породы, линза локализуется вблизи источника, но может иметь значительную мощность. Противоположную картину можно наблюдать, когда преобладают высокопроницаемые породы. В этом случае нефтепродукты распространяются вместе с водой на значительные расстояния от источника, загрязняя большую площадь при небольшой мощности линзы. Этот вариант экологически более опасен. На практике мы чаще имеем дело с ситуациями, промежуточными по отношению к двум этим крайним случаям.

Для решения прикладных задач строение линзы представляется следующим образом. На поверхности грунтовых вод плавает слой нефтепродукта. Граница между двумя жидкостями (ВНК) не является резкой. Существует некоторая переходная зона, где с глубиной содержание углеводородов падает, а воды — растёт. Однако толщина этой зоны сравнительно невелика, и в ряде случаев при расчётах её можно пренебречь. Внутри слоя нефтепродукта нефтенасыщенность никогда не равна 100 %, т. к. часть пор занята водой. В зоне постоянного наличия нефтепродуктов порода смачивается углеводородами, в зоне же колебаний ВНК, когда нефтепродукты попадают в водонасыщённую породу, последняя ими не смачивается, т. к. на поверхности зёрен породы присутствует слой связанной воды. Капиллярные силы в этом случае направлены таким образом, что препятствуют движению углеводородов, поэтому они могут вытеснить воду только из наиболее крупных пор.

## 2. МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ МАСШТАБОВ ЗАГРЯЗНЕНИЯ

Основными источниками информации о масштабе загрязнения являются геофизические, буровые, опытно-фильтрационные, опытно-миграционные и лабораторные работы. Но даже при использовании

самых передовых методик приходится признать, что возможности буровых работ и лабораторных исследований достаточно ограничены. В первую очередь это связано с тем, что и те, и другие характеризуют лишь отдельные точки пространства и могут давать достаточно случайные результаты, особенно в гетерогенных средах.

Помимо указанных, наиболее широко в гидрогеологии применяется электроразведка методами сопротивления и вызванной поляризации, что предопределено тесной связью этих параметров с глинистостью, пористостью, влажностью, фильтрационными параметрами, содержанием водорастворимых солей и другими характеристиками грунта. Обычно с применением электроразведки оценивают литологический состав, минерализацию подземных вод и засоление пород зоны аэрации, а также фильтрационные параметры.

Анализ полученных материалов показывает, что для зоны полного водонасыщения породы с относительно высокими коллекторскими свойствами (пески глинистые, удельное электрическое сопротивление  $10 \div 25 \text{ Ом} \cdot \text{м}$ ) заметно отличаются от пород с низкими коллекторскими свойствами (суглинки, глины, удельное электрическое сопротивление  $3 \div 10 \text{ Ом} \cdot \text{м}$ ) по удельному электрическому сопротивлению, что создаёт предпосылки для решения поставленной задачи этими методами.

В качестве дополнительного геофизического метода обычно применяется сейсморазведка методом поверхностного взрыва, используемая для оценки глубины уровня грунтовых вод.

Применение радиолокации основано на отличиях отражающей способности слоя при насыщении нефтепродуктом и в естественном состоянии. Экспериментальные исследования электрических характеристик типичных для зоны аэрации пород (суглинки, пески) в зависимости от влажности и степени насыщения нефтепродуктом [3], выполненные как в лабораторных условиях с использованием стандартных керн пород, так и в лизиметре, оборудованном специальными датчиками, дали возможность обосновать применение РПЗ для указанных целей. Помимо этого, использование радиолокации при высокоточном определении глубины уровня грунтовых вод может дать самостоятельный эффект, поскольку при заметной мощности слоя жидких нефтепродуктов (около 1 м и более) «зеркало» грунтовых вод, как правило, прогибается, и эта особенность может быть использована как критерий для обнаружения техногенных линз жидких нефтепродуктов.

Теоретическое обоснование возможности применения радиофизических методов для указанной задачи приведено в [1, 4]. На основе моделирования процессов распространения радиоволн в слоях зоны аэрации и выбора типовой модели её строения вычислены средние коэффициенты отражения от границ различных слоёв с учётом экспериментальных данных по изменениям их электрических характеристик при насыщении нефтепродуктом. В табл. 1 представлены средние коэффициенты отражения для типовых схем строения зоны аэрации [1]. При определении средней по зоне аэрации объёмной влажности грунтов были взяты следующие значения: 22 % — при мощности (толщине) зоны аэрации 8 и более метров (зоны аэрации 1-го типа); 28 % — при мощности зоны аэрации 5÷8 метров (зоны аэрации 2-го типа) и 33 % — при мощности зоны аэрации 3÷5 и менее метров (зоны аэрации 3-го типа).

Таблица 1

Переход	Тип зоны аэрации	Коэффициент отражения
суглинок—песок	2	$0,12 \div 0,3$
насыщенный нефтепродуктом суглинок—суглинок	1	$0,03 \div 0,15$
насыщенный нефтепродуктом песок—песок	1	$0,09 \div 0,13$

Как видно из табл. 1, разница в коэффициентах отражения рассмотренных слоёв по сравнению с

переходом суглинок при влажности 20 %—суглинок при влажности 10 %, что заведомо больше существующих в реальных условиях градиентов влажности, превышает 6 дБ. Если учесть, что затухание радиоволн рассмотренного диапазона не превышает  $5 \div 8$  дБ/м для песка и  $12 \div 15$  дБ/м для суглинка при самых больших значениях влажности, которые наблюдались в экспериментах, можно сделать вывод о возможности выделения и различения сигналов, соответствующих отражениям от рассмотренных слоёв.

Эти обстоятельства определяют целесообразность опробования радиолокационных методов подповерхностного зондирования для целей картографирования подповерхностных зон, загрязнённых нефтепродуктом.

### 3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЙ РАДИОЛОКАТОР ПОДПОВЕРХНОСТНОГО ЗОНДИРОВАНИЯ

Проведённый цикл теоретических и экспериментальных исследований [5] позволил определить ряд требований и технических решений, которые легли в основу разработанного варианта РПЗ.

В основу был положен метод зондирования с применением сетки частот. Как было показано в ряде работ (см., например, [6]), зондирование в реальных грунтах на разные глубины требует применения адаптивных принципов выбора полосы и расположения спектра частот зондирующего сигнала. Этим требованиям легче удовлетворить, применяя зондирующий сигнал с пошаговым или непрерывным изменением несущей частоты.

В качестве излучающей системы были выбраны антенны, меньше излучающие в верхнее полупространство и обладающие подавленными лепестками диаграммы направленности вдоль земной поверхности для уменьшения влияния поверхностных мод. Такими свойствами в значительной степени обладают магнитные щелевые антенны на основе открытых резонаторных структур, которые в последнее время начинают широко использоваться в подповерхностной радиолокации [4].

Кроме того, использование указанных типов зондирующих сигналов даёт возможность сравнительно легко применять методы накопления сигналов (что эквивалентно сужению эффективной полосы частот), приводящие к выигрышу в соотношении сигнал/помеха и в конечном счёте достигать большей глубины зондирования.

В мировой литературе отмечается также, что применение зондирующих сигналов с пошаговым изменением несущей частоты позволяет получать более чёткие изображения подповерхностной структуры грунта [7] по сравнению с импульсными локаторами за счёт меньшего уровня ложных откликов, обусловленных переходными процессами при прохождении импульсов через звенья приёмно-передающих трактов.

Основываясь на вышесказанном, был разработан опытный образец РПЗ, блок-схема которого приведена на рис. 1, а основные параметры — в табл. 2.

Таблица 2

Мощность излучения, Вт	1
Ширина спектра зондирующего сигнала, МГц	110
Разрешающая способность по глубине, см	$30 \div 40$
Эквивалентная ширина полосы частот приёмника, Гц	0,7

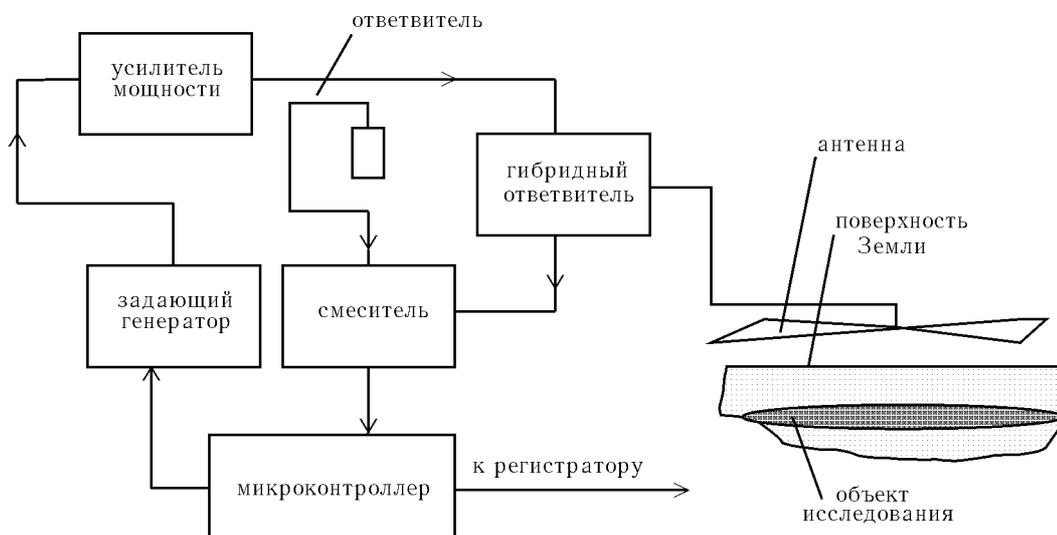


Рис. 1. Блок-схема РПЗ

#### 4. УСЛОВИЯ ПРОВЕДЕНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТОВ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Проверка возможностей применения РПЗ для картографирования границ залегания и мощности линзы с нефтепродуктом осуществлялась на участке, где геологическим способом была оцифрована подповерхностная зона, содержащая авиационный керосин. Участок находился на территории бывшего военного аэродрома (Сумская область). В настоящее время территория находится в заброшенном состоянии (железобетонные плиты взлётно-посадочных полос убраны).

На рис. 2 приведена карта участка с указанием расположения скважин, по которым определялась зона залегания линзы керосина. На этой же карте приведены трассы проходов РПЗ, отмеченные пунктирными линиями, с указанием названия соответствующих им файлов, содержащих результаты зондирования.

На рис. 3 приведён разрез, показывающий сечение линзы в месте наибольшей мощности (данные получены по результатам бурения с применением экстраполяции).

Привязка радиолокационных данных к глубинам расположения границ слоёв различного литологического состава (чернозём, суглинок, песок, насыщенный керосином песок, уровень грунтовых вод) осуществлялась по геологическим данным, полученным из скважин, наиболее близких к соответствующим трассам прохода РПЗ. По этим данным (глубина слоя, влажность) пересчитывалась скорость распространения волн в соответствующем слое грунта, после чего полученное радиолокационное изображение сечения подповерхностной структуры грунта трансформировалось соответствующим образом по глубине.

На рис. 4 приведён разрез скважины, показывающий литологический состав пород в месте, соответствующем максимальной мощности линзы, а в табл. 3 — основные геологические данные пород в этой скважине. Данные по глубине расположения границ литологических пород в этой скважине можно сравнить с радиолокационным изображением сечения пород зоны аэрации на трассе прохода РПЗ вблизи этой скважины (рис. 5, скан № 3).

Как указывалось выше, в слое суглинка капиллярные силы сдерживают проникновение нефтепродуктов к уровню поверхности подземных вод. Нефтепродукт скапливается под местом его пролива из источника загрязнения, образуя насыщенные слои. Распространение его в этой ситуации происходит

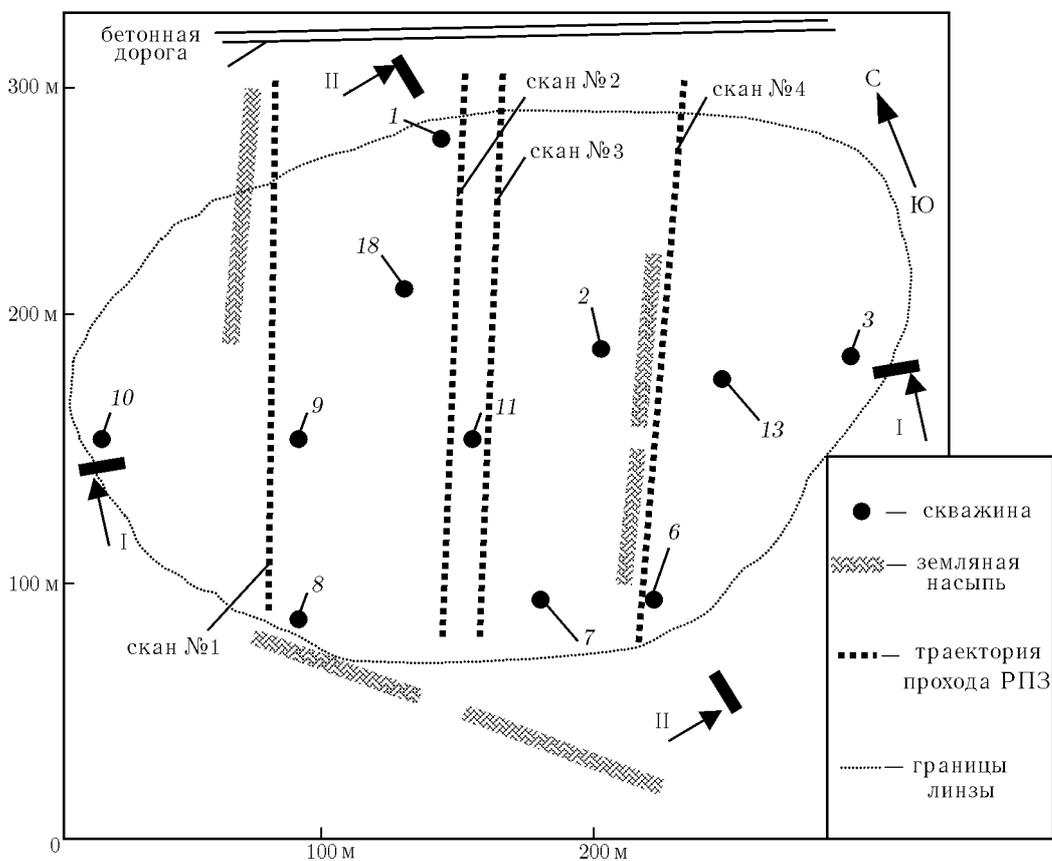


Рис. 2. Схема экспериментального участка

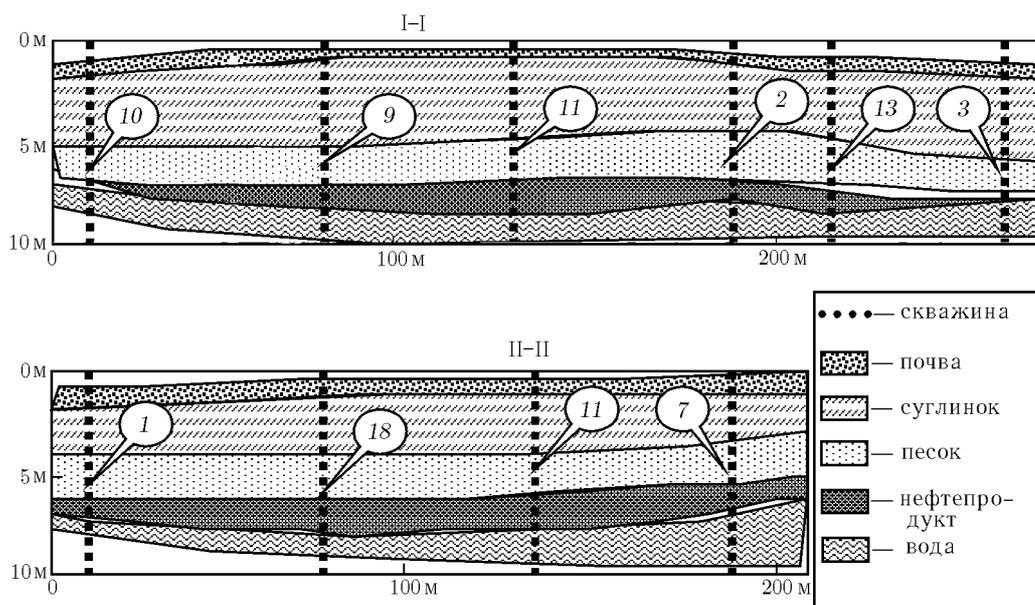


Рис. 3. Сечения линзы

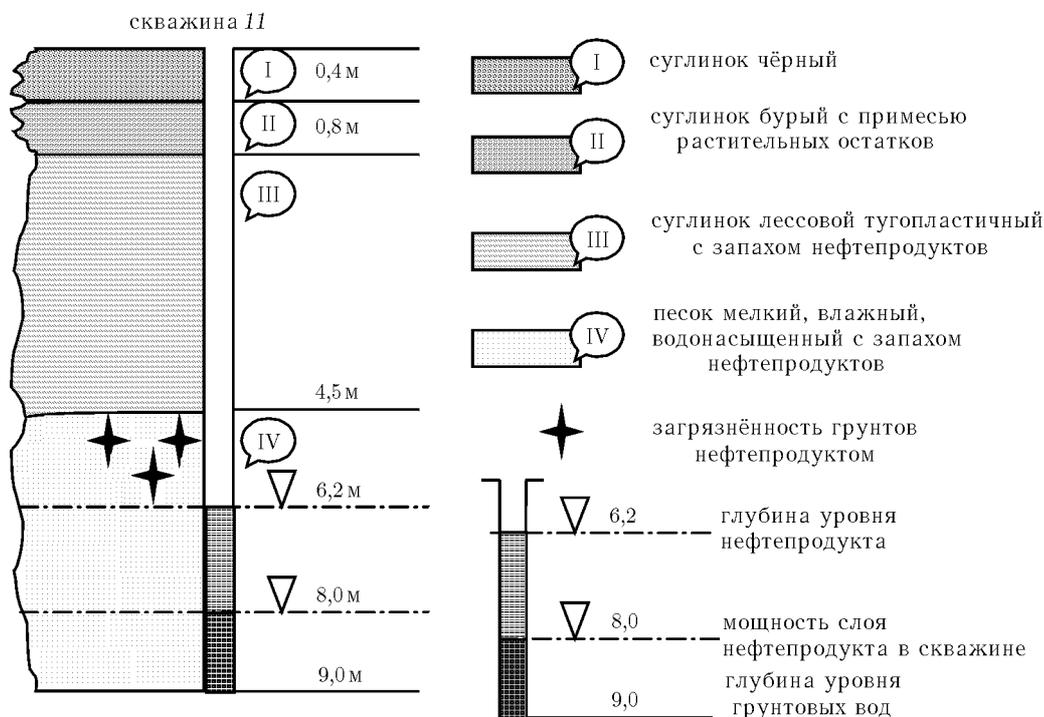


Рис. 4. Разрез скважины

Таблица 3

## Физические свойства грунтов

Номер слоя	Влажность, доли/ед.	Удельный вес грунта, кН/м <sup>3</sup>	Коэффициент пористости	Степень влажности, %
I	0,22			
II	0,22			
III	0,189	16,65	0,88	58
IV	0,152	19,00	0,59	71

очень медленно. Если слой суглинка небольшой, то нижняя граница насыщения достигает слоя песка, и нефтепродукт начинает через этот слой распространяться до уровня грунтовых вод. Образуется линза, которая локализуется вблизи источника загрязнения. Именно эта ситуация, по-видимому, имеет место в данном случае.

В соответствии с проведёнными ранее исследованиями [4] слои пород при насыщении нефтепродуктом изменяют свои электрические характеристики (комплексную диэлектрическую проницаемость). Поэтому коэффициенты отражения радиоволн от границ таких слоёв отличаются от соответствующих коэффициентов в ситуации, когда породы этих же слоёв находятся в естественных условиях. На радиолокационных изображениях сечений земли на участках, загрязнённых нефтепродуктом, появляются зоны с отличающимся контрастом.

На рис. 5а–г представлены четыре радиолокационных сечения земли, соответствующих трассам прохода РПЗ, показанным на рис. 2 пунктирными линиями. Рис. 5б соответствует проходу РПЗ через

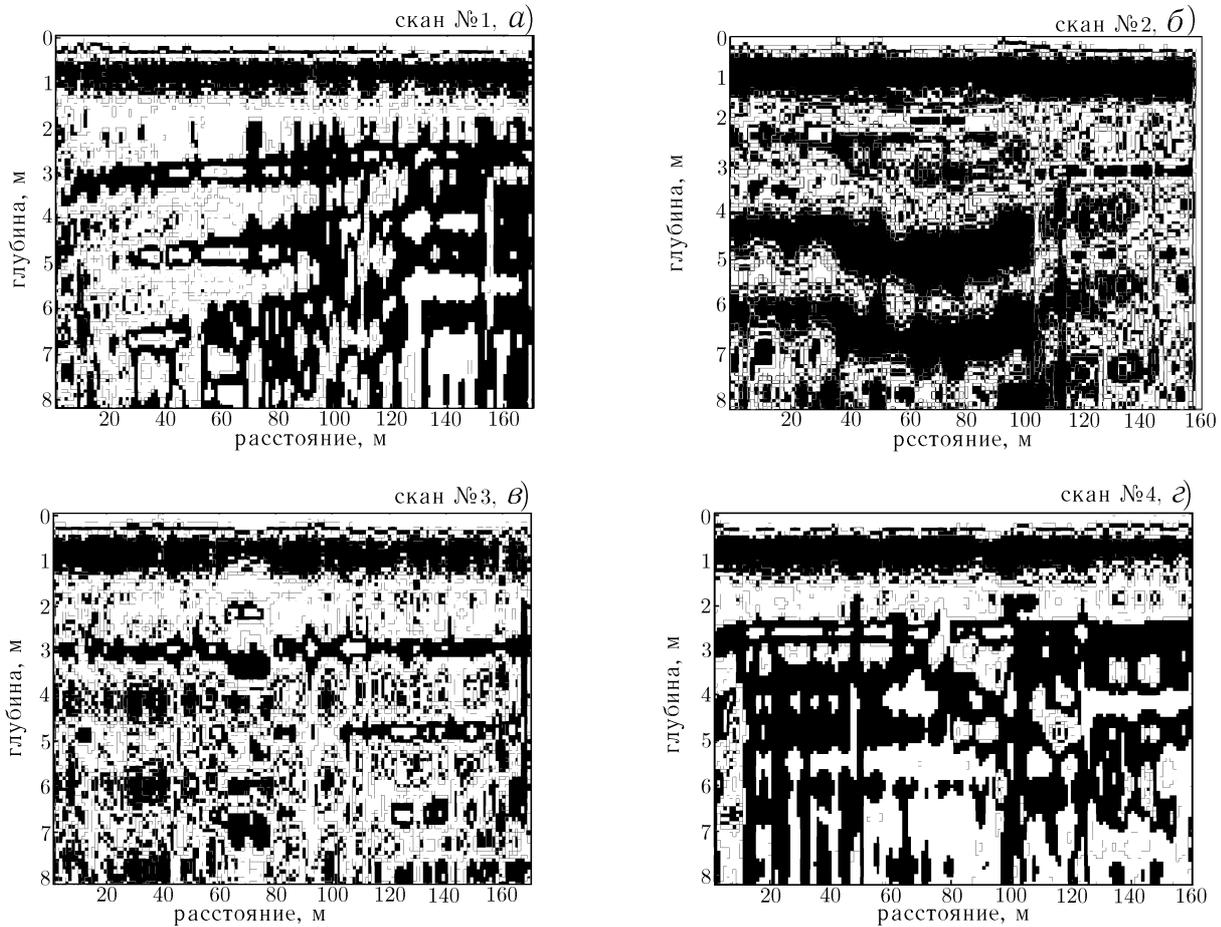


Рис. 5. Радиолокационные сечения

участок максимальной мощности линзы. Так как степень зачернения на радиолокационных изображениях сечений земли пропорциональна коэффициентам отражения от границ соответствующих слоёв, то границы зон, насыщенных нефтепродуктом, как в слое суглинка вблизи поверхности, так и в слое песка (участки изображения с повышенным тёмным контрастом) хорошо просматриваются. По-видимому, этот участок соответствует месту, где хранился нефтепродукт (авиационный керосин) и где происходила его утечка вблизи или на поверхности земли. Как указывалось выше, этот случай соответствует ситуации, когда в результате утечки нефтепродукта образуются два максимума загрязнения по глубине: первый — у поверхности, второй — над уровнем грунтовых вод.

Как видно из рис. 5, трассы проходов РПЗ соответствуют области с минимальным загрязнением (рис. 5а и г), области с максимальным загрязнением (рис. 5б) и области с умеренным загрязнением (рис. 5в). Видно, что верхняя граница залегания линзы керосина более отчётливо наблюдается на сканах № 2 и № 3 и менее отчётливо — на сканах № 1 и № 4, соответствующих краям пространственного залегания линзы (на рисунках это границы, расположенные на глубине примерно 6 м).

Следует отметить, что данные, основанные на геологическом бурении скважин, не позволили обнаружить указанное выше место пролива нефтепродуктов, соответствующее скану № 2, из-за недостаточно мелкой сетки бурения.

Более детальная радиолокационная съёмка всего участка загрязнения могла бы дать возможность построить трёхмерное изображение пространственной структуры линзы.

### ВЫВОДЫ

Проведён цикл экспериментальных исследований с применением адаптированного к задачам гидрогеологии радиолокатора подповерхностного зондирования, направленный на оценку возможностей его использования для картографирования подповерхностных зон, загрязнённых нефтепродуктом. Показано, что с помощью таких радиолокаторов можно обнаруживать места вытекания нефтепродуктов из мест их хранения и транспортировки, а также картографировать подповерхностные зоны их скопления (линзы) на глубинах до 10 м. Таким образом, использование подповерхностной радиолокации для целей картографирования подповерхностных зон, загрязнённых нефтепродуктом, является вполне оправданным и может дать значительный экономический эффект.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кузьмин В. В., Сугак В. Г. // Радиофизика и радиоастрономия. 1997. Т. 2, № 3. С. 274.
2. Сугак В. Г. // Радиофизика и радиоастрономия. 1998. Т. 3, № 2. С. 130.
3. Сугак В. Г., Кузьмин В. В., Рыжикова С. В. // Захист довкілля від техногенного впливу: Збірник наукових праць. № 1. Кременчуг, 1998,
4. Дручили́н С. В. // Радиотехника и электроника. 1994. Т. 44, № 6. С. 696.
5. Овчинкин О. А., Сугак В. Г. Влияние электрических свойств грунта на характеристики сигнала при подповерхностном зондировании. (в печати).
6. Сугак В. Г. // Радиофизика и электроника: Сб. научн. Трудов ИРЭ НАН Украины. 1998. Т. 3, № 3. С. 78.
7. Davis J. L., Annan A. P. // Geophys. Prospecting. 1998. V. 37. P. 531.

Институт радиофизики и электроники  
им. А. Я. Усикова НАН Украины,  
г. Харьков, Украина

Поступила в редакцию  
31 октября 2001 г.

### EXPERIMENTAL RESULTS OF RADAR SOUNDING OF SURFACE OIL-POLLUTED AREAS

*V. G. Sugak and V. A. Kirichenko*

We present experimental results of estimation of the possibility of using ground penetrating radars (GPRs) which were adapted for mapping of subsurface zones, polluted by oil products (lenses) due to ecological accidents. The radar was tested at the site of a large lens with air kerosene at a depth of about 6 m. On the basis of comparison of radar measurements and geological data obtained by well-boring it is shown that use of GPRs for mapping subsurface lenses with oil products is reasonable.

УДК 538.56:519.25

## О ВЛИЯНИИ ДЛИТЕЛЬНОСТИ ИСХОДНОГО СИГНАЛА НА НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ОТРАЖЕНИЯ В СЛУЧАЙНОЙ СРЕДЕ

А. Ю. Бубновский, Б. М. Шевцов

С помощью метода инвариантного погружения численно исследуются статистические характеристики рассеяния назад плоских нормально падающих на случайную одномерную среду импульсов. Локальный коэффициент отражения среды моделируется центральным гауссовым процессом с экспоненциальной корреляционной функцией. Рассматриваются временные зависимости средней интенсивности и коэффициента эксцесса отражений при различных длительности и частоте заполнения исходного сигнала. Показано, что затухание и флуктуации отражений возрастают при увеличении длительности исходного сигнала по отношению к временному масштабу неоднородности среды и зависят от частотного заполнения. Проведено сопоставление численных результатов для средней интенсивности с полученными ранее аналитическими решениями. Обсуждаются условия возникновения волнового стохастического резонанса в нестационарных отражениях.

В [1] исследовались нестационарные отражения в случайных средах в зависимости от формы падающего импульса, а в [2] — статистические характеристики откликов на дельта-импульс в зависимости от временного масштаба неоднородности среды. Однако эффекты, связанные с изменением длительности исходного сигнала при фиксированном масштабе неоднородностей для различных случаев частотного заполнения, ни в этих, ни в более ранних работах [3–9] не рассматривались.

Ниже исследуются средняя интенсивность и коэффициент эксцесса случайных нестационарных отражений при изменении отношения длительности падающего импульса к радиусу корреляции среды на примере видеосигналов, радиосигналов и сигналов со случайным заполнением. Обсуждаются особенности флуктуационных явлений в откликах среды при различных соотношениях параметров задачи. Полученные при этом численные результаты для средней интенсивности сопоставляются с известными аналитическими решениями для предельных случаев длительности исходного импульса.

В одномерном случае отражения нестационарной волны от неоднородного слоя, ограниченного интервалом  $[0, z]$ , ядро оператора рассеяния назад  $R(\chi, z)$ , или отклик среды на дельта-импульс, падающий справа, находится из решения уравнения [1, 2]

$$\left(\frac{\partial}{\partial \chi} + \frac{\partial}{\partial t}\right) R(\chi, t) = -\rho(\chi) \int_0^t R(\chi, t - \zeta) R(\chi, \zeta) d\zeta, \quad R(\chi, 0) = \rho(\chi), \quad (1)$$

где  $t$  — время,  $\chi(z) = 2 \int_0^z dz'/c(z')$  — удвоенное время прихода сигнала из точки 0 в точку  $z$ ,  $c(z)$  — скорость сигнала,  $\rho(\chi) = -(1/2) d[\ln Z(\chi)]/d\chi$  — функция отражательной способности среды, или локальный коэффициент отражения,  $Z(\chi)$  — импеданс среды. Решение уравнения (1) рассматривается на временном интервале  $0 \leq t \leq \chi$ . Предполагается, что импеданс  $Z(\chi)$  — непрерывная и непрерывно дифференцируемая функция, разрывы производной допускаются только на границах неоднородного слоя; вне слоя импеданс постоянный. На кинематическую характеристику среды  $c(z)$  не налагается никаких ограничений кроме того, что  $c(z)$  — заданная внутри слоя положительно-определённая детерминированная функция, используемая при преобразовании координат  $z \rightarrow \chi$ . Характеристика среды  $\rho(\chi)$  — центрированный гауссов процесс с экспоненциальной корреляционной функцией.

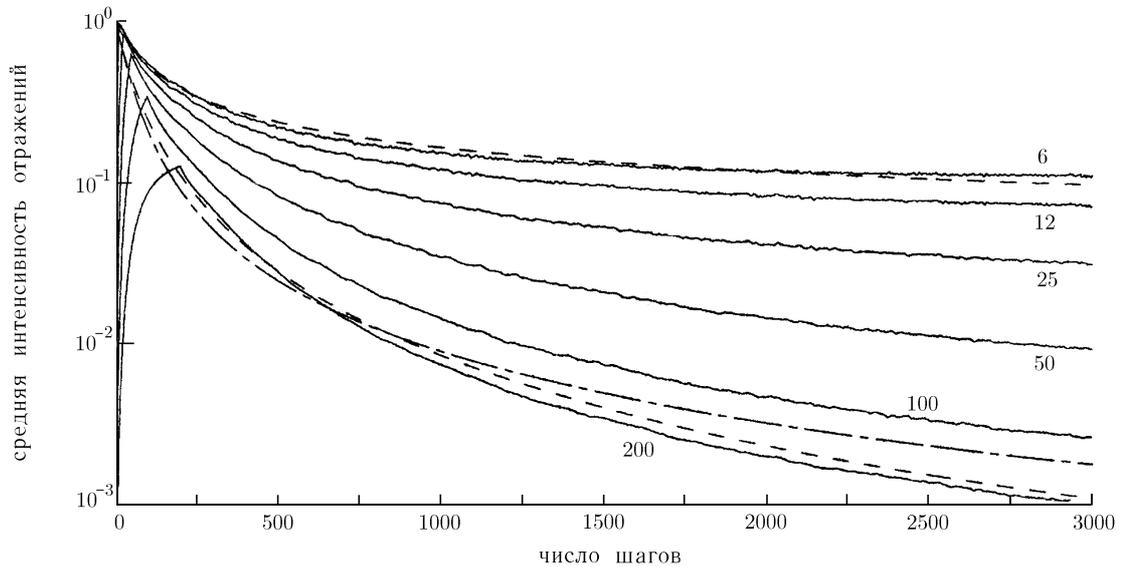


Рис. 1

При падении на слой справа импульса произвольной формы  $w_0(t)$ , отличного от нуля при  $t > 0$ , отражённое поле на правой границе слоя  $w_R(\chi, t)$  находится с помощью выражения

$$w_R(\chi, t) = \int_0^t R(\chi, t - \zeta) w_0(\zeta) d\zeta. \quad (2)$$

По ансамблю из  $10^4$  реализаций сигнала  $w(t) = w_R(\chi, t)$ , найденных с помощью (1), (2) и вычислительного алгоритма, рассмотренного в [1, 2], получены следующие статистические характеристики отражений. На рис. 1 в логарифмическом масштабе приведены временные зависимости нормированной на энергию падающего импульса средней интенсивности отражений  $k \langle w^2(t) \rangle$  (непрерывные линии). Исходные импульсы  $w_0(t)$  имели прямоугольную форму (без частотного заполнения) и единичную амплитуду. Кривые помечены цифрами, которые соответствуют длительности исходного импульса в шагах по времени, величина шага 0,01. Нормировочный множитель  $k$  определяется по формуле  $k = (100/\Delta n)^2$ , где  $\Delta n$  — длительность исходного импульса в шагах по времени.

Верхняя штриховая кривая на рис. 1 — аналитическое решение для отражения дельта-импульса [2, 3]:

$$\langle R^2(t) \rangle = \sigma_\rho^2 (T + 2) / [2 (T + 1)^{3/2}], \quad (3)$$

где  $T = t/T_0$ ,  $T_0 = (2\sigma_\rho^2 r_\rho)^{-1}$ ,  $\sigma_\rho^2$  и  $r_\rho$  — дисперсия и радиус корреляции локального коэффициента отражения  $\rho(\chi)$ . В эксперименте полагалось  $\sigma_\rho^2 = 1$ ,  $r_\rho = 0,5$  (50 шагов по времени). При выбранных параметрах  $T_0 = 1$ , выполняется условие  $r_\rho < T_0$ , и режим рассеяния вполне можно считать диффузионным [2].

Нижняя штриховая кривая на рис. 1 — нормированное на энергию исходного сигнала аналитическое решение для случая отражения видеоимпульса с длительностью, намного превышающей временной масштаб неоднородностей среды [3–7]:

$$2\pi \langle w^2(t) \rangle = D(\omega) / [D(\omega) t + 1]^2, \quad (4)$$

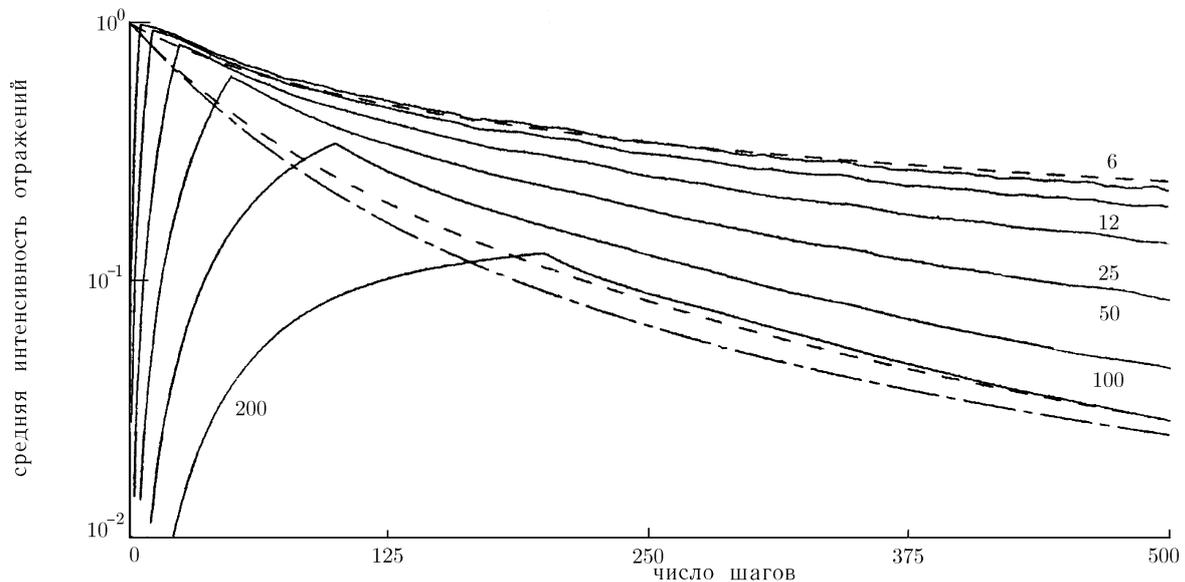


Рис. 2

где  $D(\omega) = 2 \int_0^\infty B(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau$ ,  $B(\tau)$  — корреляционная функция процесса  $\rho(\tau)$ ,  $D(\omega)$  — коэффициент диффузии на частоте  $\omega$  заполнения сигнала, которая в данном случае равна нулю. Принимая во внимание, что  $B(\tau) = \sigma_\rho^2 \exp(-\tau/r_\rho)$ , выражение для коэффициента диффузии можно записать в виде  $D(\omega) = 2\sigma_\rho^2 r_\rho / [1 + (\omega r_\rho)^2]$ ; при выбранных параметрах  $D(0) = 1$ .

Штрих-пунктирная кривая, приведённая на рис. 1 для сравнения, — ядро оператора рассеяния назад линейной теории переноса, которая с той же целью рассматривалась в [3]:

$$J(t) = t^{-1} \exp(-2\alpha t) I_1(2\alpha t), \tag{5}$$

где  $J(t)$  — интенсивность отражённого сигнала,  $\alpha$  — локальный коэффициент отражения среды по интенсивности,  $I_1(x)$  — функция Бесселя мнимого аргумента. Для сопоставления решений (3)–(5) надо положить  $\alpha = D(0) = 1/T_0$ , т. е.  $\alpha = 1$ .

На рис. 2 те же кривые, что и на рис. 1, представлены более подробно при малых временах наблюдения, что позволяет лучше рассмотреть временной интервал, в пределах которого исходные импульсы входят в среду. Из рис. 1 можно заключить, что экспериментальные кривые для различной длительности исходного импульса расположились между двумя асимптотиками, роль которых играют решения (3) и (4), и хорошо с ними согласуются в двух предельных случаях, в то время как с результатом линейной теории переноса (5) согласие отсутствует. Важный результат заключается в том, что закон затухания средней интенсивности отражений плавно меняется при изменении длительности падающего импульса по отношению к временному масштабу неоднородностей среды. Это непосредственно может быть использовано при дистанционном зондировании для определения временного масштаба неоднородностей среды. Решение же линейной теории переноса (5) по характеру затухания наилучшим образом соответствует среднему оклику среды при длительности исходного импульса 100 шагов по времени, хотя по величине эти решения немного отличаются. Отметим, что отношение длительности исходного импульса и характерной длины волны падающего излучения к временному масштабу неоднородностей среды в данном случае равно двум (брэгговское соотношение), а значит, можно сказать, что линейная теория переноса неплохо описывает резонансное рассеяние в случайных средах.

Для более последовательного сопоставления статистического решения и выражения (5) необходимо совершить двойной предельный переход: длительность исходного импульса и временной масштаб

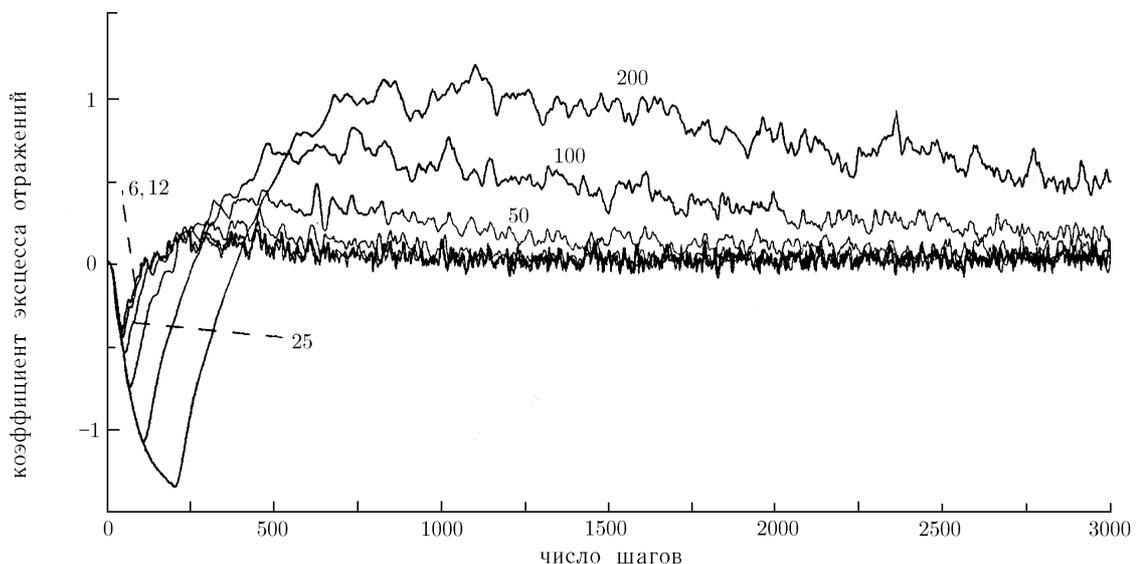


Рис. 3

неоднородностей среды следует одновременно устремить к нулю. Однако такой эксперимент, связанный с повышенным объёмом вычислений, выходит за рамки настоящей статьи.

Рассмотрим флуктуации интенсивности отражений для импульсов без заполнения. Коэффициент эксцесса, характеризующий величину флуктуаций, представлен на рис. 3; кривые помечены цифрами, соответствующими длительности исходного импульса, как и на рис. 1 и 2. Видно, что по мере вхождения импульса в среду флуктуации убывают, затем начинают расти, и в области многократного рассеяния имеет место стохастический резонанс, который возрастает с увеличением длительности исходного импульса (кривые 50, 100 и 200). Резонанс заметно начинает расти, когда длительность импульса достигает и превосходит временной масштаб неоднородностей среды. Область подавления флуктуаций уменьшается с уменьшением длительности исходного импульса и достигает значений, соответствующих дельта-импульсу (кривые 6 и 12; кривая 25 также близка к ним). Из зависимости флуктуационной компоненты отражений от длительности исходного импульса можно сделать вывод, что стохастический волновой резонанс — явление, связанное с узкополосными сигналами и обусловленное когерентными волновыми эффектами [10]. При коротких импульсах (широкополосных сигналах) резонанс происходит на уровне, который наблюдается при отражении дельта-импульса. Чувствительность флуктуаций отражений к соотношению между временным масштабом неоднородностей среды и длительностью исходного сигнала может быть использована в дистанционном зондировании, как и изменение закона затухания средней интенсивности отражений, обсуждавшееся выше.

Рассмотрим отражения импульсов единичной амплитуды с синусоидальным и шумовым заполнением. Средняя интенсивность отражений  $k \langle w^2(t) \rangle$ , нормированная на энергию падающего импульса, представлена на рис. 4, а коэффициент эксцесса — на рис. 5. Кривые, соответствующие отражениям радиоимпульсов, помечены двумя числами, первое из которых означает длительность исходного импульса, а второе — период синусоидального заполнения (в шагах по времени). Графики, соответствующие отражениям шумовых импульсов, помечены буквой N и парой чисел, первое из которых соответствует длительности исходного импульса, а второе — радиусу корреляции шумового заполнения (также в шагах по времени). Нормировочный множитель  $k$  для средней интенсивности отражений радиоимпульсов определяется по формуле  $k = 2(100/\Delta n)^2$ , а для шумовых импульсов по формуле  $k = (100/\Delta n)^2$ , где  $\Delta n$  — длительность исходного импульса в шагах по времени. Штриховая и штрихпунктирная кривые означают то же, что и на рис. 1 и 2, и даны для сравнения.

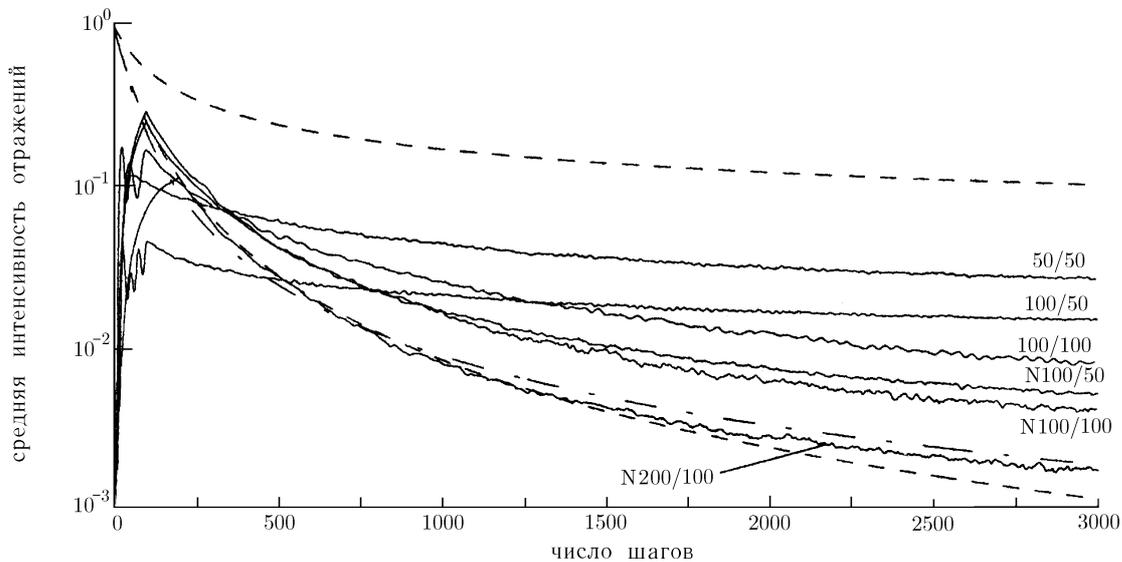


Рис. 4

На рис. 4 кривые 50/50 и 100/50 очень медленно спадают во времени. Это связано с тем, что коэффициент диффузии при такой частоте заполнения очень мал, примерно в 36 раз меньше, чем у импульсов без заполнения. Это создаёт серьёзные вычислительные трудности и делает область больших кратностей рассеяния недостижимой при данной схеме расчётов. Различие амплитуд этих двух откликов такое же, как и при аналогичных отражениях видеоимпульсов, и определяется энергией импульсов. А вот различие затухания этих откликов незначительное, поскольку оно определяется коэффициентом диффузии, а он мал. Из-за этого область многократного рассеяния, где возникает зависимость затухания от длительности исходного сигнала, исследовать не удаётся. При уменьшении частоты заполнения коэффициент диффузии растёт (см. (4)), вследствие чего растут амплитуда и затухание отражений (ср. кривые 100/50 и 100/100 на рис. 4). При невысоких частотах заполнения исходного импульса удаётся исследовать зависимость затухания средней интенсивности отражений от длительности падающего сигнала. Разумеется, результат получается таким же, как и в случае отражения импульсов без заполнения.

Как следует из рис. 4 (кривые N100/50 и N100/100), зависимость затухания средней интенсивности отражений от радиуса корреляции шумового заполнения весьма слабая. Отражения шумовых сигналов имеют широкий спектр, сравнимый со спектром неоднородностей среды, поэтому они не чувствительны к небольшим изменениям параметров спектра исходного сигнала, но при этом, как и отражения импульсов с синусоидальным заполнением, они имеют меньшее затухание по сравнению с импульсами без заполнения. Это видно из сравнения рис. 1 и 4. Зависимость затухания средней интенсивности отражений от длительности исходных шумовых сигналов такая же, как и у отражений видео- и радиоимпульсов. Затухание увеличивается с ростом длительности исходного импульса (см. кривые N100/100 и N200/100 на рис. 4).

Рассмотрим флуктуационные явления в отражениях импульсов с заполнением. При фиксированной частоте синусоидального заполнения с увеличением длительности исходного сигнала, как и у импульсов без заполнения, возникает стохастический резонанс (см. кривые 50/50 и 100/50 на рис. 5). При фиксированной длительности исходного импульса и понижении частоты заполнения резонанс в отражениях исчезает (см. кривые 100/50 и 100/100 на рис. 5).

У отражений импульсов с шумовым заполнением флуктуационные явления уже в начальные моменты времени весьма высоки. Затем они медленно затухают и слабо зависят от изменения радиуса корреляции заполнения (см. кривые N100/50 и N100/100 на рис. 5) и от длительности исходного сиг-

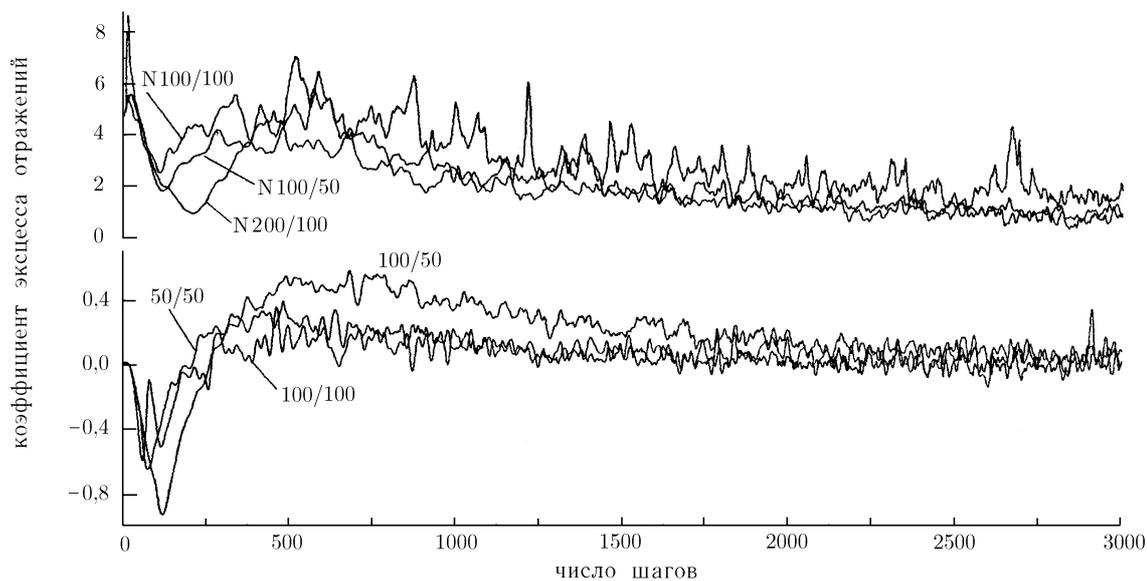


Рис. 5

нала (см. кривые N100/100 и N200/100 там же). Наличием сильных флуктуаций в начальные моменты времени шумовые отражения существенно отличаются от отражений видео- и радиоимпульсов. То, что такое поведение флуктуаций не относится к резонансным явлениям, обсуждается ниже.

Важной особенностью флуктуационных эффектов является то, что они возникают уже в области невысоких кратностей рассеяния, в то время как различие в затухании отражений отмечается при многократном рассеянии. Это особенно хорошо видно на примере отражений с синусоидальным заполнением (кривые 50/50 и 100/50 на рис. 4 и 5).

Ранее флуктуации в квазимонохроматических отражениях рассматривались с помощью аналитического решения [3], которое давало их неограниченный рост. Этот результат, не согласующийся с поведением флуктуаций на рис. 3 и 5, является следствием приближения, которое использовалось в [3] для вычисления высоких моментов отражений. В то же время для вычислений второго момента это приближение не требовалось, и согласие решений получилось достаточно хорошим (см. выражения (3) и (4) и их сопоставление с расчётами на рис. 1).

В заключение можно обсудить итоги данной работы и двух предшествующих [1, 2], поскольку они тесно связаны. Стохастический волновой резонанс в нестационарных отражениях, под которым понимается рост флуктуаций в определённой временной области, зависит от соотношения трёх основных параметров задачи: временного масштаба неоднородностей среды, характерного времени отражения и длительности исходного импульса. Форма импульсов и их заполнение также играют немаловажную роль, но длительность импульса при этом является определяющей.

Особое место занимает случай отражения шумовых сигналов, обладающих низкой когерентностью, поэтому их отражения и не следует рассматривать в связи с обсуждаемым стохастическим резонансом.

В случае отражений дельта-импульсов стохастический резонанс нарастает при увеличении временного масштаба неоднородностей среды и приближении его к характерному времени отражения [2]. Когда временной масштаб неоднородностей превосходит время отражения, мы имеем дело с вырожденным случаем среды, характеризующимся неограниченным ростом флуктуаций в отражениях [2]. Когда выполняется обратное соотношение этих двух параметров, что соответствует диффузионному режиму рассеяния, мал и резонанс, но появляется дополнительная возможность его роста с увеличением длительности падающего импульса. Этот рост начинается, когда длительность импульса дости-

гает и превосходит временной масштаб неоднородностей среды. Дальнейшее увеличение длительности исходного импульса до характерного времени отражения и более не вносит существенных изменений в интенсивность флуктуационной компоненты сигнала, а меняет лишь характер нестационарных отражений [1].

Авторы выражают благодарность В. И. Кляцкину и К. В. Кошелю за полезные обсуждения результатов работы.

Работа выполнена при содействии Программы поддержки ведущих научных школ (грант № 00–15–98608).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бубновский А. Ю., Шевцов Б. М. // Изв. вузов. Радиофизика. 2001. Т. 44. С. 847.
2. Бубновский А. Ю., Шевцов Б. М. // Изв. вузов. Радиофизика. 2002. Т. 45. (в печати).
3. Шевцов Б. М. // Изв. вузов. Радиофизика. 1982. Т. 25. С. 1 032.
4. Абрамович Б. С., Гурбатов С. Н. // Изв. вузов. Радиофизика. 1980. Т. 23. С. 42.
5. Аристов С. Н., Гурбатов С. Н. // Изв. вузов. Радиофизика. 1981. Т. 24. С. 960.
6. Burridge R., Papanicolaou G., Sheng P. et al. // SIAM J. Appl. Math. 1989. V. 49. P. 582.
7. Кляцкин В. И., Саичев А. И. // УФН. 1992. Т. 162. С. 161.
8. Asch M., Kohler W., Papanicolaou G. et al. // Waves in Random Media. 1996. V. 6. P. 293.
9. Гулин О. Э., Ярошук И. О. // Изв. вузов. Радиофизика. 1999. Т. 42. С. 383.
10. Кляцкин В. И., Гурарий Д. // УФН. 1999. Т. 169. С. 171.

Тихоокеанский океанологический институт им. В. И. Ильичёва  
ДВО РАН, г. Владивосток, Россия

Поступила в редакцию  
7 февраля 2002 г.

#### INFLUENCE OF THE INITIAL-SIGNAL DURATION ON NONSTATIONARY REFLECTIONS IN A RANDOM MEDIUM

*A. Yu. Bubnovsky and B. M. Shevtsov*

Using an invariant imbedding method, we study numerically the statistical characteristics of backscattering of plane impulse waves incident normally on a random one-dimensional medium. The local reflection coefficient of the medium is simulated by a central Gaussian process with an exponential correlation function. We consider the time dependence of the average intensity and kurtosis of reflections for various durations and carrier frequencies of the initial signal. It is shown that the attenuation and fluctuations of reflections increase with the initial-signal duration normalized to the time scale of the medium inhomogeneity and depend on the signal carrier. Numerical results for the average intensity are compared with previously obtained analytical solutions. We discuss the appearance conditions of a wave stochastic resonance in nonstationary reflections.

УДК 621.385

## ВЛИЯНИЕ ВНЕШНЕГО СИГНАЛА НА АВТОКОЛЕБАНИЯ В РАСПРЕДЕЛЁННОЙ СИСТЕМЕ ВИНТОВОЙ ЭЛЕКТРОННЫЙ ПОТОК—ВСТРЕЧНАЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ВОЛНА

*А. А. Короновский, Д. И. Трубецков, А. Е. Храмов*

Исследуется синхронизация колебаний в активной распределённой системе, состоящей из винтового электронного пучка, взаимодействующего с встречной волной в волноводе (мазер на циклотронном резонансе с встречной волной). Изучены характеристики неавтономных пространственно-временных колебаний в системе при различной степени неизохронности электронов-осцилляторов. Рассмотрены физические процессы, сопровождающие переход распределённой автоколебательной системы в режим синхронизации.

### ВВЕДЕНИЕ

При взаимодействии винтового электронного пучка с ТЕ-модами волновода при выполнении условия синхронизма электромагнитной и электронной волн

$$\omega \approx \hat{\omega}, \quad \hat{\omega} + \beta_0(\hat{\omega})v_{\parallel} - \omega_c = 0 \quad (1)$$

имеет место генерация высокочастотного излучения [1–6]. Здесь  $\hat{\omega}$  — частота синхронизма,  $\omega_c$  — циклотронная частота,  $v_{\parallel}$  — продольная скорость электронов, т. е. скорость, направленная вдоль внешнего магнитного поля,  $\beta_0(\hat{\omega})$  — постоянная распространения в волноводе без электронного потока. В такой системе (мазер на циклотронном резонансе (МЦР) с встречной волной) имеет место инерционная группировка электронов, связанная с релятивистской неизохронностью электронов-осцилляторов винтового (поливинтового) пучка. Характерной особенностью МЦР с встречной волной является возможность эффективной перестройки частоты генерации за счёт изменения продольной скорости электронов  $v_{\parallel}$  или статического магнитного поля  $B_0$ .<sup>1</sup> Вызывает большой интерес исследование влияния различных типов внешних сигналов на такую систему. Важность рассмотрения этой задачи обусловлена как практическими аспектами разработки гироприборов с управляемыми характеристиками [10], так и теоретическим интересом к исследованию синхронизации автоколебаний в распределённой активной среде. Последнее особенно интересно, т. к. в настоящее время имеется достаточно большое число работ по исследованию синхронизации, в том числе и хаотической (см., например, обзорные работы [14, 15]), либо в системах с сосредоточенными параметрами, описываемыми обыкновенными дифференциальными уравнениями или отображениями, либо в цепочках и решётках связанных осцилляторов [16, 17]. Однако авторам не известны работы<sup>2</sup>, посвящённые детальному теоретическому исследованию синхронизации колебаний в активных распределённых системах, модели которых формулируются в дифференциальных уравнениях в частных производных.

<sup>1</sup> Заметим, что в реальных устройствах для этих целей часто используется одновременное изменение геометрии волновода и величины магнитного поля вдоль пространства взаимодействия (см., например, [7–10]). Используемая в статье модель в этом смысле идеализирована. Вместе с тем в ряде работ [11–13] рассматриваются гироприборы на бегущих волнах с неизменной геометрией волновода и постоянным магнитным полем вдоль пространства взаимодействия.

<sup>2</sup> Заметим, что имеется ряд работ [18–23] по теоретическому исследованию влияния внешнего сигнала на лампу обратной волны в рамках стационарной теории и работ по изучению (в первую очередь экспериментальному) колебаний в связанных системах генераторов на виртуальном катоде [24–26]. Однако сколь-нибудь полной картины явления синхронизации в распределённых автоколебательных системах из этих работ извлечь не удаётся.

В данной работе с помощью численного моделирования исследуются особенности синхронизации автоколебаний внешним гармоническим сигналом в системе винтовой электронный пучок—встречная электромагнитная волна.

### 1. ИССЛЕДУЕМАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрим взаимодействие цилиндрического слабoreлятивистского винтового пучка с ТЕ-модой волновода в рамках простейшей нестационарной модели, предполагая, что поле в поперечном сечении электронного пучка однородное, продольная скорость  $v_{\parallel} \approx \text{const}$  (т. е. пренебрежём взаимодействием с высокочастотными составляющими магнитного поля). Нестационарный процесс является узкополосным, вследствие чего в рабочей полосе частот можно учитывать взаимодействие винтового пучка только со встречной волной. Последнее означает, что дисперсионное уравнение вблизи частоты синхронизма  $\hat{\omega}$  можно линеаризовать и представить в виде

$$\omega \approx \hat{\omega} + \left( \frac{d\omega}{d\beta_0} \right)_{\omega=\hat{\omega}} [\beta_0(\omega) - \beta_0(\hat{\omega})], \quad (2)$$

где  $(d\omega/d\beta_0)_{\omega=\hat{\omega}} = v_g(\hat{\omega})$  — групповая скорость волны на частоте  $\hat{\omega}$ .

Система уравнений, описывающая динамику простой модели МЦП с встречной волной, состоит из уравнения движения электронов слабoreлятивистского винтового пучка [4] и уравнения возбуждения встречной волны электронным потоком [27, 28], которые можно записать в виде

$$\frac{d\beta}{d\xi} - j\mu(1 - |\beta|^2)\beta = F, \quad (3)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} - \frac{\partial F}{\partial \xi} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \beta d\theta_0, \quad (4)$$

где  $\beta = r \exp(j\theta)$  — комплексный радиус траекторий электронов ансамбля, первоначально равномерно распределённых по фазе относительно высокочастотного поля,  $F = F(\xi, \tau)$  — медленно меняющаяся комплексная безразмерная амплитуда поля в сечении пучка ( $E(z, t) = \text{Re}\{F(\xi, \tau)E_0 \exp[j(\hat{\omega}t + \beta_0 z)]\}$ ),  $\xi = \beta_0(\hat{\omega})\varepsilon z$  — безразмерная продольная координата,  $\tau = \hat{\omega}\varepsilon(t - z/v_{\parallel})(1 + v_{\parallel}/|v_g|)^{-1}$  — безразмерное время в движущейся с продольной скоростью пучка  $v_{\parallel}$  системе координат; усреднение производится по частоте  $\hat{\omega}$ , которая удовлетворяет условию (1). Кроме того, введены следующие обозначения:  $\mu = v_{\parallel}/(2\varepsilon c)$  — параметр неизохронности, характеризующий меру инерционности системы,

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{I_0 K}{4V_0} \left( 1 + \frac{v_{\perp 0}^2}{v_{\parallel}^2} \right)} \ll 1$$

— параметр взаимодействия,

$$\omega_c = \frac{eB_0}{m_0 c} \left( 1 - \frac{v_{\parallel}^2 + v_{\perp 0}^2}{2c^2} \right)$$

— циклотронная частота при  $\xi = 0$ ,  $K$  — сопротивление связи,  $v_{\perp 0}$  — начальная поперечная скорость электронов,  $I_0$  и  $V_0$  — постоянные составляющие тока и напряжения пучка,  $c$  — скорость света в вакууме,  $m_0$  и  $e$  — масса покоя электрона и элементарный заряд соответственно,  $B_0$  — внешнее магнитное поле.

Уравнения (3) и (4) решаются при следующих начальных и граничных условиях:

$$F(\xi, \tau = 0) = f^0(\xi), \quad \beta(\xi = 0) = \exp(j\theta_0), \quad \theta_0 \in [0, 2\pi]. \quad (5)$$

Внешний гармонический управляющий сигнал  $F(\xi = A, \tau) = F_0 \exp(j\Omega\tau)$  вводится на коллекторном конце системы  $\xi = A$ , где  $A$  — безразмерная длина системы,  $F_0$  — амплитуда внешнего сигнала,  $\Omega$  — отстройка частоты внешнего воздействия от частоты  $\hat{\omega}$ , удовлетворяющей условию (1).

В работах [27, 29, 30] исследована динамика рассматриваемой системы в автономном режиме и показано наличие в ней различных режимов колебаний: стационарной генерации, периодической и хаотической автомодуляции. На рис. 1а представлено примерное разбиение плоскости управляющих параметров длина системы  $A$  — параметр неизохронности  $\mu$  на области, соответствующие характерным режимам генерации. Кривая 1 соответствует бифуркационной линии возникновения стационарного режима генерации, когда амплитуда выходного поля после переходного процесса становится отличной от нуля и  $|F(\xi = 0, \tau)| = \text{const}$ , что соответствует одночастотному режиму генерации МЦР с встречной волной на частоте  $\omega_0$ . Кривая 2 — линия потери устойчивости одночастотного режима. При переходе через неё амплитуда выходного сигнала  $|F(\xi = 0, \tau)|$  начинает зависеть от времени — возникает режим автомодуляции. В этом случае выходной сигнал содержит сложный набор спектральных компонент. Вблизи линии 2 имеет место одночастотная автомодуляция. В этом случае в спектре выходного сигнала содержатся базовая высокочастотная спектральная составляющая, близкая к частоте  $\hat{\omega}$ , и частоты  $\hat{\omega} \pm 2\pi f_A$ , где  $f_A$  — частота автомодуляции. На линии 3 происходит усложнение выходного сигнала: имеет место удвоение периода автомодуляции. Кривая 4 соответствует возникновению сложнопериодической модуляции выходного сигнала. Кривая 5 — линия перехода к режимам хаотической автомодуляции, когда зависимость  $|F(\xi = 0, \tau)|$  ведёт себя существенно нерегулярно, а спектр генерации становится сплошным.

Иллюстрацией наблюдающихся в автономной системе переходов между колебательными режимами являются рис. 1б, в, на которых представлены бифуркационные диаграммы колебаний медленно меняющейся амплитуды выходного поля  $|F(\xi = 0, \tau)|$  с изменением параметра неизохронности  $\mu$  при двух значениях безразмерной длины системы  $A = 3$  (рис. 1б) и  $A = 4$  (рис. 1в). На рисунках отложены максимумы  $F_{\max}$  амплитуды выходного сигнала МЦР с встречной волной в зависимости от

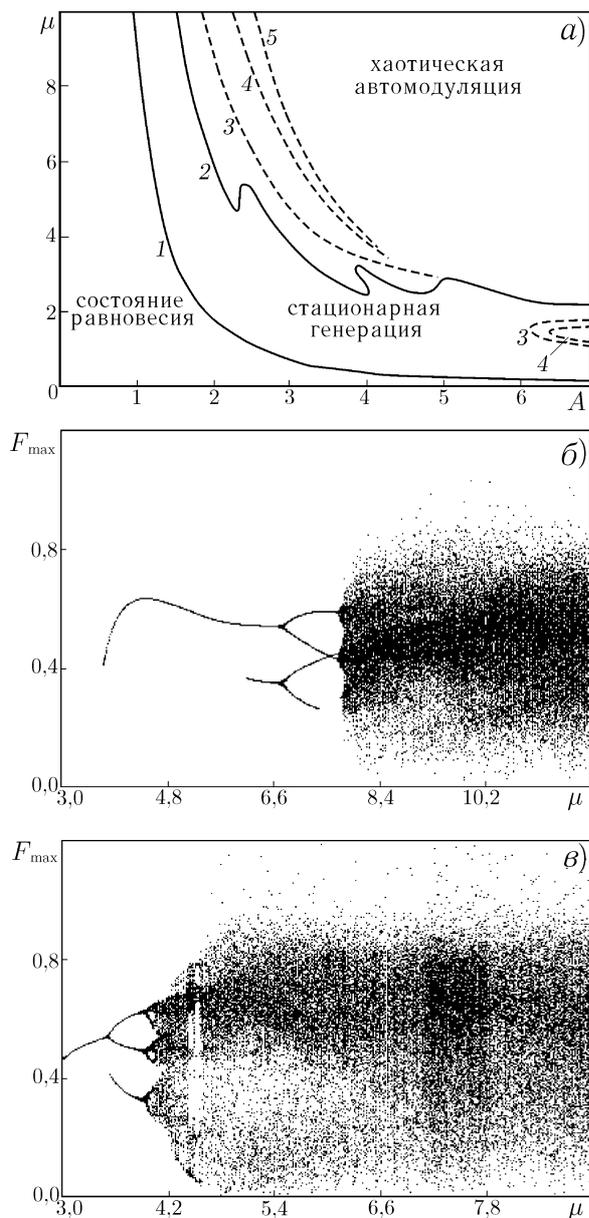


Рис. 1

параметра  $\mu$ . С увеличением неизохронности электронов-осцилляторов в системе наблюдается возбуждение автоколебаний с постоянной амплитудой (режим стационарной генерации). При некотором  $\mu = \mu_{кр}$  возникает периодическая автомодуляция. Максимумы поля на бифуркационных диаграммах откладываются начиная с этого значения параметра неизохронности. При дальнейшем росте параметра неизохронности имеет место удвоение периода автомодуляции, и далее генератор переходит в режим хаотической автомодуляции выходного сигнала.

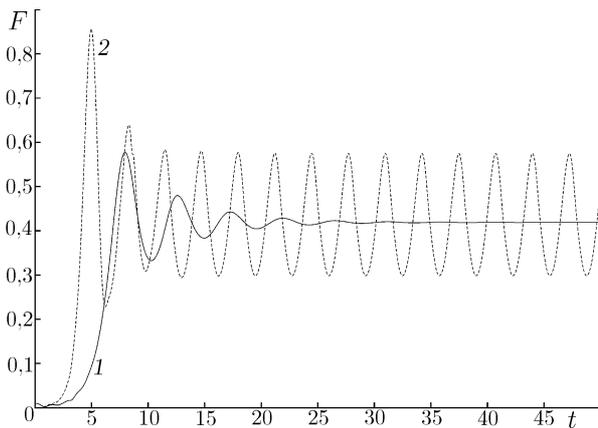


Рис. 2

Неавтономные режимы генерации МЦР с встречной волной в представленной статье рассматриваются при безразмерной длине системы  $A = 3$ . При этом исследуется влияние внешнего сигнала на стационарную генерацию и режим периодической автомодуляции. Исследования проводились при  $\mu = 2$  (режим стационарной генерации с частотой  $\omega_0 = -0,58\pi$  и амплитудой  $F = 0,42$  выходного поля) и при  $\mu = 4$  (режим автомодуляции,  $\omega_0 = -0,76\pi$ ). Отрицательные частоты автономной генерации определяются тем, что рассматриваемая в нашей нормировке частота  $\omega_0$  представляет собой поправку к частоте синхронизма  $\hat{\omega}$ .

На рис. 2 представлены соответствующие временные реализации выходного сигнала  $|F(\xi = 0, \tau)|$  (кривая 1 соответствует режиму стационарной генерации, 2 — автомодуляции).

Коэффициент преобразования поперечной кинетической энергии электронов в энергию поля  $\eta_{\perp} = 1 - 1/(2\pi) \int_0^{2\pi} |\beta|^2 d\theta$  в рассматриваемых режимах составляет приблизительно 0,18, что близко к оптимальному значению [27].

## 2. РЕЖИМЫ КОЛЕБАНИЙ В НЕАВТОНОМНОМ МЦР С ВСТРЕЧНОЙ ВОЛНОЙ

На рис. 3 представлено разбиение плоскости параметров амплитуда  $F_0$  — частота  $\Omega$  внешнего воздействия на области, соответствующие характерным режимам пространственно-временных колебаний в МЦР с встречной волной для режима стационарной генерации (рис. 3а) и автомодуляции (рис. 3б) в автономном режиме. Фактически, рассматривается влияние сигнала на распределённую автоколебательную систему при различной степени фазовой нелинейности (порядка  $\mu(1 - |\beta|^2)\beta$ ), определяющей изменение фаз компонент волны тока. Рассмотрим динамику генератора под воздействием управляющего сигнала более подробно.

При близости частоты  $\Omega$  внешнего воздействия к собственной частоте  $\omega_0$  стационарной генерации автономной системы в генераторе имеет место режим синхронизации (см. рис. 3а и 3б), в котором частота выходного сигнала  $\omega$  определяется частотой  $\Omega$  внешнего воздействия, а амплитуда выходного сигнала  $F(\xi = 0, \tau)$  после окончания переходного процесса постоянна ( $F(\xi = 0, \tau) = \text{const}$ , режим стационарной генерации). При  $\mu = 2$  синхронизация колебаний наблюдается при сколь угодно малой амплитуде  $F_0$  внешнего сигнала, а область синхронизации симметрично расширяется при отстройке частоты  $\Omega$  от  $\omega_0$  при увеличении  $F_0$ . При  $\mu = 4$  режим стационарной генерации на частоте внешнего воздействия возникает при конечной амплитуде  $F_0$  внешнего воздействия, а форма области синхронизации сильно несимметрична. При выходе из области синхронизации с изменением параметров внешнего сигнала, как видно из рис. 3, имеет место сложная картина перестройки колебательных режимов генератора. Кратко рассмотрим характеристики различных колебательных режимов неавтономной системы, при необходимости снова обращаясь к рис. 3.

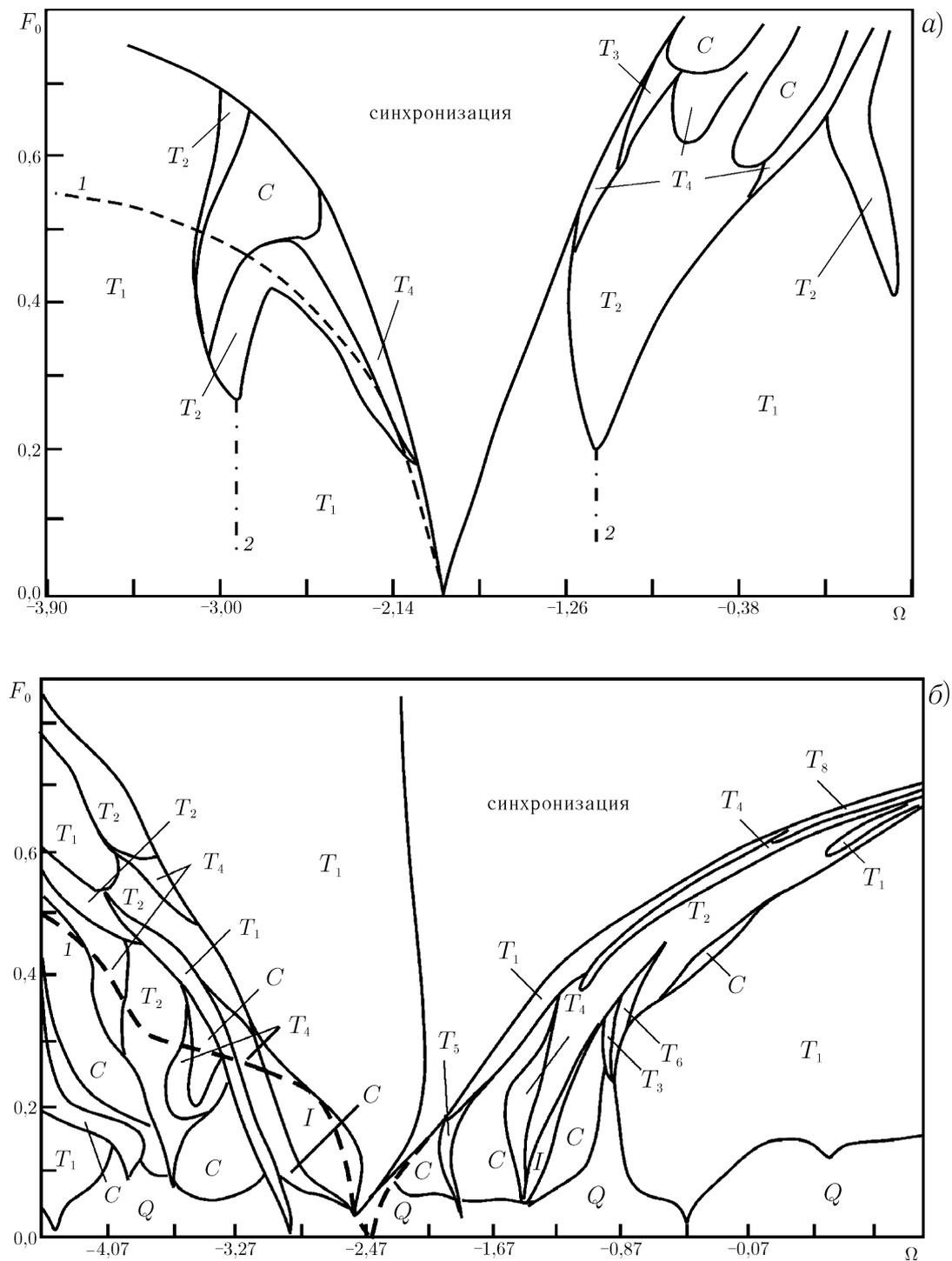


Рис. 3

Амплитудно-частотные характеристики МЦР с встречной волной, представляющие собой зависимости амплитуды выходного сигнала  $|F(\xi = 0)|$  от частоты  $\Omega$  в пределах области синхронизации, построенные при различной амплитуде синхронизирующего сигнала  $F_0$  (величина  $F_0$  отмечена на рис. 4 возле соответствующих кривых), приведены для режимов с параметром неизохронности  $\mu = 2$

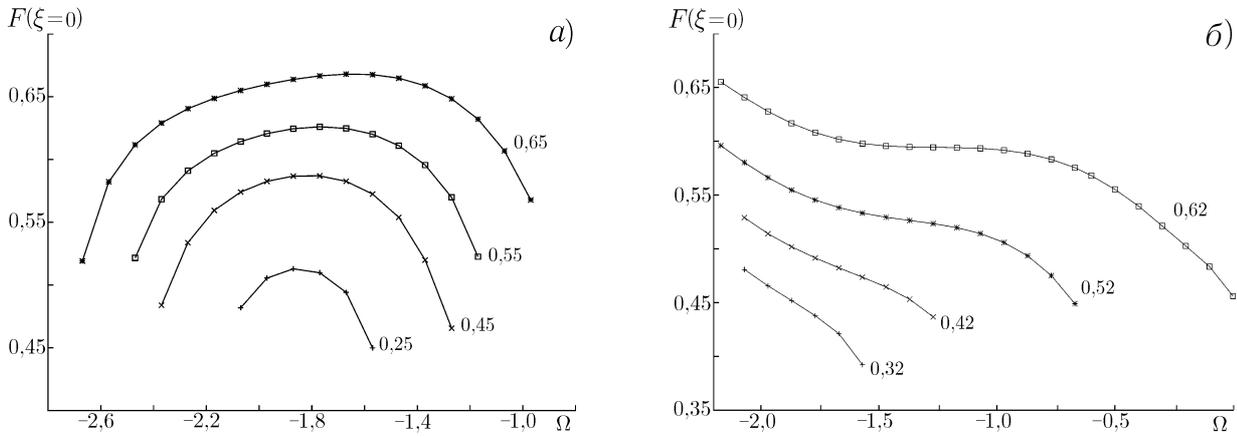


Рис. 4

(рис. 4а) и  $\mu = 4$  (рис. 4б). В первом случае амплитуда стационарной генерации минимальна на границах области синхронизации и достигает максимума в центре «клюва» (области синхронизации на рис. 3а). С увеличением амплитуды внешнего воздействия максимум зависимости амплитуды выходного сигнала от частоты  $\Omega$  сдвигается в область бóльших частот. В случае бóльшей нелинейности (рис. 4б) вид амплитудно-частотной характеристики генератора в области синхронизации качественно меняется: амплитуда выходного сигнала в стационарном режиме уменьшается с ростом отстройки частоты управляющего сигнала  $\Omega$  от частоты синхронизма  $\hat{\omega}$ .

При пересечении управляющими параметрами границы области синхронизации на карте режимов (см. рис. 3) имеет место переход системы в режим автомодуляции, который характеризуется тем, что амплитуда выходного сигнала генератора  $|F(\xi = 0, \tau)|$  начинает зависеть от времени. При этом в зависимости от частоты и амплитуды внешнего сигнала могут возникать режимы как периодической, так и хаотической автомодуляции. В последнем случае амплитуда выходного сигнала ведёт себя существенно нерегулярно, совершая колебания со сплошным спектром. На карте режимов (рис. 3) области периодической автомодуляции обозначены символами  $T_i$ , где индекс  $i$  соответствует периоду автомодуляции, области хаотической автомодуляции — символом  $C$ .

При малой фазовой нелинейности ( $\mu = 2$ ) из рис. 3а видно, что режимы периодической автомодуляции с единственной базовой частотой  $f_A = 1/T_A$ , где  $T_A$  — период автомодуляции, возникают при небольших амплитудах внешнего воздействия  $F_0$ . На рис. 5а, построенном при параметрах внешнего воздействия  $F_0 = 0,15, \Omega = -3,07$ , представлены характеристики колебаний (спектр мощности  $P(f)$ , фазовый портрет и зависимость от времени амплитуды выходного поля  $|F(\xi = 0, \tau)|$ ), соответствующие режиму периодической автомодуляции. Для восстановления фазовых портретов использовался метод Такенса [31], сводящийся к построению фазовых векторов вида

$$\mathbf{x} = \{x(\tau), x(\tau - \Delta\tau), \dots, x(\tau - (m - 1) \Delta\tau)\},$$

где  $x$  — колебания поля  $|F(\xi = 0, \tau)|$  на выходе системы,  $\Delta\tau$  — время задержки,  $m$  — размерность вложения ( $m = 2$  соответствует проекции аттрактора на плоскость).

С ростом  $F_0$  при определённых частотах  $\Omega$  наблюдается удвоения периода (области  $T_2$  и  $T_4$  на карте режимов (рис. 3)). На рис. 5б представлены характеристики колебаний для режима  $T_2$  ( $F_0 = 0,65, \Omega = -0,77$ ). На фазовом портрете (предельном цикле) появляется петля, характерная для удвоения периода цикла.

При большой амплитуде внешнего воздействия на карте режимов при малой фазовой нелинейности наблюдается несколько областей хаотической автомодуляции. Переход к ним происходит из режимов периодической автомодуляции после одного или двух удвоений периода автомодуляции  $T_A$ . Режим

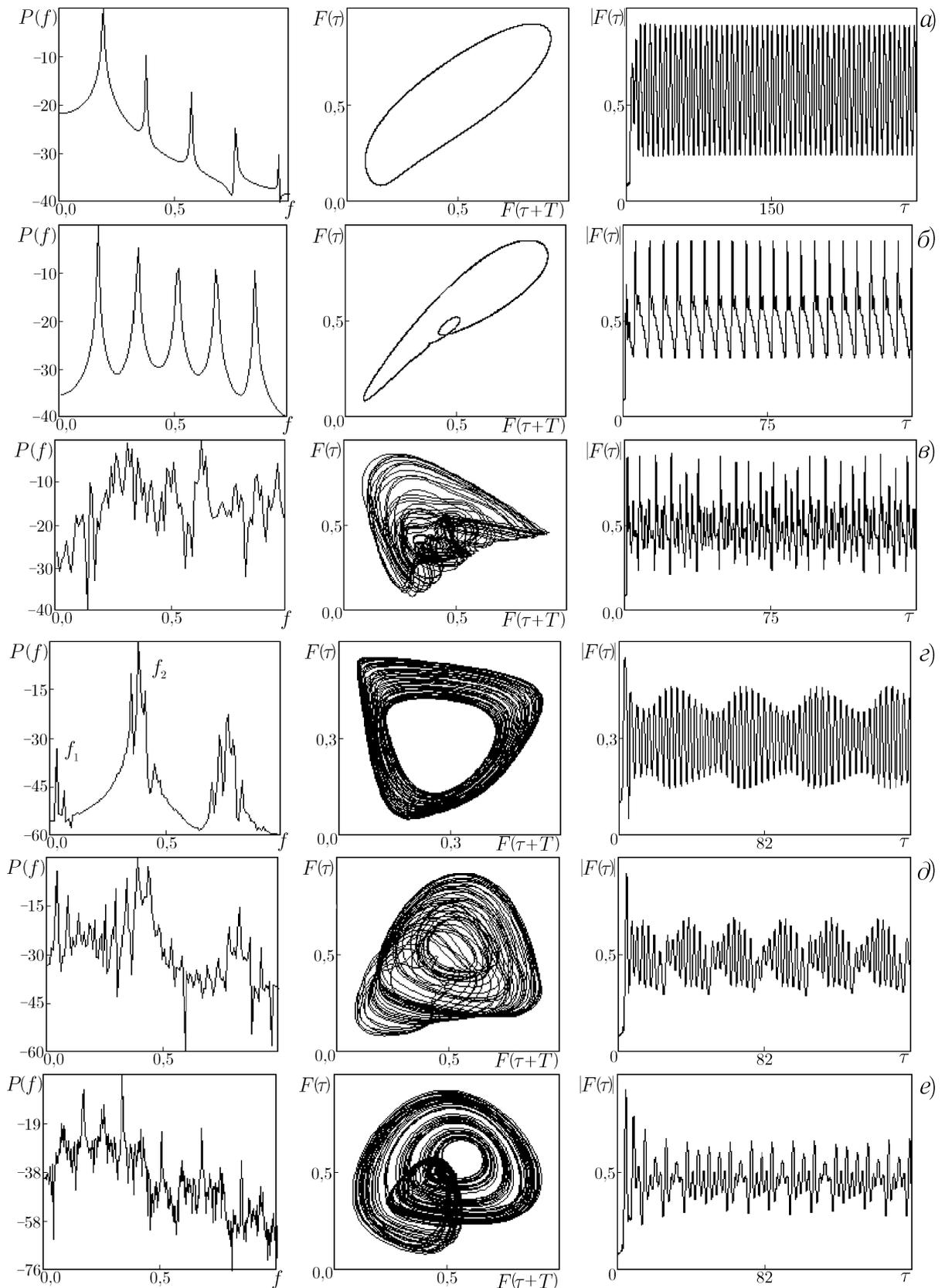


Рис. 5

хаотической автомодуляции характеризуется сплошным сильно изрезанным спектром мощности (см. рис. 5в;  $F_0 = 0,55$ ,  $\Omega = -2,87$ ); фазовый портрет колебаний однороден и также свидетельствует о сложных колебаниях в системе.

При большом параметре неизохронности  $\mu = 4$  вид карты режимов вне области синхронизации существенно меняется (см. рис. 3б). Перестройка режимов при изменении параметров управляющего сигнала достаточно сложна: имеет место большое количество переходов порядок—хаос и хаос—порядок с изменением различных динамических характеристик выходного сигнала генератора (спектра мощности, фазового портрета и т. д.). Рассмотрим подробнее колебательные режимы, возникающие в системе при большой расстройке по частоте.

При небольших амплитудах внешнего сигнала в системе наблюдаются квазипериодические автоколебания (соответствующие области на карте режимов отмечены символом  $Q$ ). Их характеристики представлены на рис. 5г, построенном при  $F_0 = 0,02$  и  $\omega = -0,67$ . В спектре мощности имеют место две основные спектральные компоненты с неизмеримыми частотами  $f_1 < f_2$  (отмечены на спектре), а остальные спектральные компоненты являются их комбинациями вида  $nf_2 \pm pf_1$ , где  $n, p$  — целые числа.

В области  $\Omega - \omega_0 < 0$ , как видно из рис. 3б, к границе «клюва» синхронизации примыкает область периодической автомодуляции (область  $T_1$ ), которая с увеличением амплитуды внешнего воздействия сильно расширяется. При больших расстройках  $\Omega - \omega_0$  и амплитуде внешнего сигнала  $F_0$  меньшей, чем необходимо для возникновения режимов периодической автомодуляции  $T_1$ , наблюдаются различные режимы как хаотической, так и периодической автомодуляции выходного сигнала неавтономной системы.

Выход из области периодической автомодуляции  $T_1$  при уменьшении частоты управляющего сигнала  $\Omega$  имеет место через перемежаемость (область на карте режимов (рис. 3б), обозначенная символом  $I$ ). В этом случае на зависимости амплитуды  $|F(\xi = 0, \tau)|$  выходного сигнала генератора от времени наблюдаются фазы почти периодических колебаний, прерываемых короткими фазами нерегулярных движений. Длительность участков регулярных движений  $\ell$  растёт при приближении к границе области периодической автомодуляции по степенному закону как  $\ell = \text{const}/\sqrt{|\Omega - \Omega_p|}$ , где  $\Omega_p$  — частота, соответствующая границе области периодической автомодуляции. Характеристики хаотических колебаний в данном случае при большой отстройке  $|\Omega - \Omega_p|$  представлены на рис. 5д, построенном при управляющих параметрах  $F_0 = 0,12$ ,  $\Omega = -2,77$ . Другим хаотическим режимом, возникающим при воздействии на пучок электронов внешним сигналом с малой амплитудой  $F_0$ , является режим  $C$  (см. рис. 3б). Характеристики колебаний амплитуды выходного сигнала в этом случае представлены на рис. 5е ( $F_0 = 0,12$ ,  $\Omega = -3,57$ ). Сравнение фазовых портретов на рис. 5д и е показывает, что вид спектра мощности и структура аттрактора в указанных режимах различны.

Для количественной оценки различия хаотических режимов определялась корреляционная размерность хаотических аттракторов с помощью алгоритма Грассбергера и Прокаччио [32]. Напомним, что корреляционная размерность аттрактора  $D$  есть функция масштаба наблюдения  $\varepsilon$ :

$$D(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln C(\varepsilon)}{\ln \varepsilon},$$

где  $C(\varepsilon)$  — число пар точек, расстояние между которыми в фазовом пространстве меньше  $\varepsilon$  (редуцированный корреляционный интеграл), даётся соотношением

$$C(\varepsilon) = \frac{1}{MN} \sum_{j=1}^M \sum_{\substack{i=1, \\ i \neq j}}^N H(\varepsilon - |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|).$$

Здесь  $M$  — число точек редукции,  $N$  — число точек во временной реализации,  $H$  — функция Хевисайда,  $\mathbf{x}$  — вектор состояния в фазовом пространстве, восстанавливаемый по методу Такенса. При

вычислениях использовалось число отсчётов во временной реализации  $N = 250\,000$ , а число точек редукции  $M = 10\,000$ .

На рис. 6 показаны зависимости наклона корреляционного интеграла  $D(\varepsilon)$  колебаний амплитуды выходного поля  $|F(\xi = 0, \tau)|$  для обоих типов хаотического поведения неавтономной системы при  $\mu = 4$  при увеличивающейся размерности пространства вложения аттрактора  $m$ . Рис. 6а соответствует режиму хаотической динамики  $C$ , рис. 6б — режиму  $I$ . В первом случае хорошо видна область постоянной корреляционной размерности  $D$  при изменении размерности пространства вложения  $m$  — так называемая область скейлинга, соответствующая  $\ln(\varepsilon/\varepsilon_0) \in (10^{-3}, 2 \cdot 10^{-2})$ . Выше и ниже этой области значения  $D$  сильно зависят от масштаба наблюдения  $\varepsilon$  в силу конечных размеров аттрактора и краевых ошибок [33]. В области скейлинга размерность  $D$  хаотического аттрактора режима  $C$  равна приблизительно 1,75. Размерность является дробной величиной, что характерно для динамического хаоса.

В режиме  $I$  чётко выделенную область скейлинга на зависимостях  $D(\varepsilon)$  определить не удаётся, что свидетельствует о неоднородности хаотического аттрактора в этом случае. Усредняя наклон корреляционного интеграла в диапазоне масштабов наблюдения  $\ln(\varepsilon/\varepsilon_0) \in (10^{-2}, 10^{-1})$  по кривой, построенной при  $m = 9$ , оцениваем размерность хаотического множества как  $D \approx 2,17$ . Неоднородность аттрактора и большая размерность  $D$  свидетельствуют о большей сложности хаотических колебаний в режиме  $I$ , наблюдающемся при выходе из областей автомодуляции. Заметим, что и в первом, и втором случаях имеет место насыщение размерности аттракторов с ростом размерности пространства вложения  $m$ . Это свидетельствует о динамической природе случайных процессов в неавтономном генераторе на винтовом пучке с встречной волной, т. к. для шумовых колебаний размерность  $D$  имеет тенденцию увеличиваться пропорционально размерности пространства вложения.

На карте режимов имеется также несколько узких областей периодической автомодуляции на фоне режимов хаотической динамики, которые возникают при малой амплитуде  $F_0$  внешнего сигнала и с ростом  $F_0$  расширяются, при этом внутри таких «клювов» имеет место усложнение колебаний через удвоение периода автомодуляции. Отметим, что на рис. 3б для наглядности не приведена вся тонкая структура наблюдающихся в неавтономной системе колебательных режимов.

### 3. ХАРАКТЕРИСТИКИ СИНХРОННОГО И АСИНХРОННОГО РЕЖИМОВ РАБОТЫ МЦР С ВСТРЕЧНОЙ ВОЛНОЙ

Рассмотрим, как изменяются количественные характеристики режима автомодуляции при изменении частоты  $\Omega$  и амплитуды  $F_0$  внешнего сигнала в случае малой и большой фазовой нелинейности.

Исследуем вначале случай, когда параметр неизохронности  $\mu = 2$ . На рис. 7а–в представлены зависимости амплитуды  $F_A$  и периода  $T_A$  автомодуляции в периодическом режиме от частоты при различной амплитуде  $F_0$  внешнего сигнала. При всех  $F_0$  автомодуляция возникает жёстко по амплитуде (см. рис. 7а, б): имеет место скачок величины  $F_A$  при выходе из области синхронизации. Амплитуда автомодуляции растёт с увеличением отстройки от режима синхронизации, достигает максимального значения, а далее начинает уменьшаться. При прохождении максимума зависимости  $F_A(\Omega)$  меняется и характер автомодуляции. При частотах, лежащих между частотой, соответствующей максимуму амплитуды автомодуляции, и частотой, соответствующей границе «клюва» синхронизации, т. е. приблизительно для  $\Omega \in (-3,25, -2)$  и  $\Omega \in (-1,6, -0,5)$ , периодическая автомодуляция носит сложный негармонический характер. При приближении к максимуму зависимости  $F_A(\Omega)$  с уменьшением (или увеличением) частоты  $\Omega$  временная зависимость  $F(\xi = 0, \tau)$  приобретает вид последовательности «импульсов» генерации с большой амплитудой. При прохождении частотой внешнего воздействия значения, соответствующего максимуму амплитуды автомодуляции (штрих-пунктирная линия 2 на рис. 3а), характер автомодуляции становится близким к гармоническому. Период автомодуляции (рис. 7в) на границе области синхронизации стремится к бесконечности и с ростом расстройки плавно

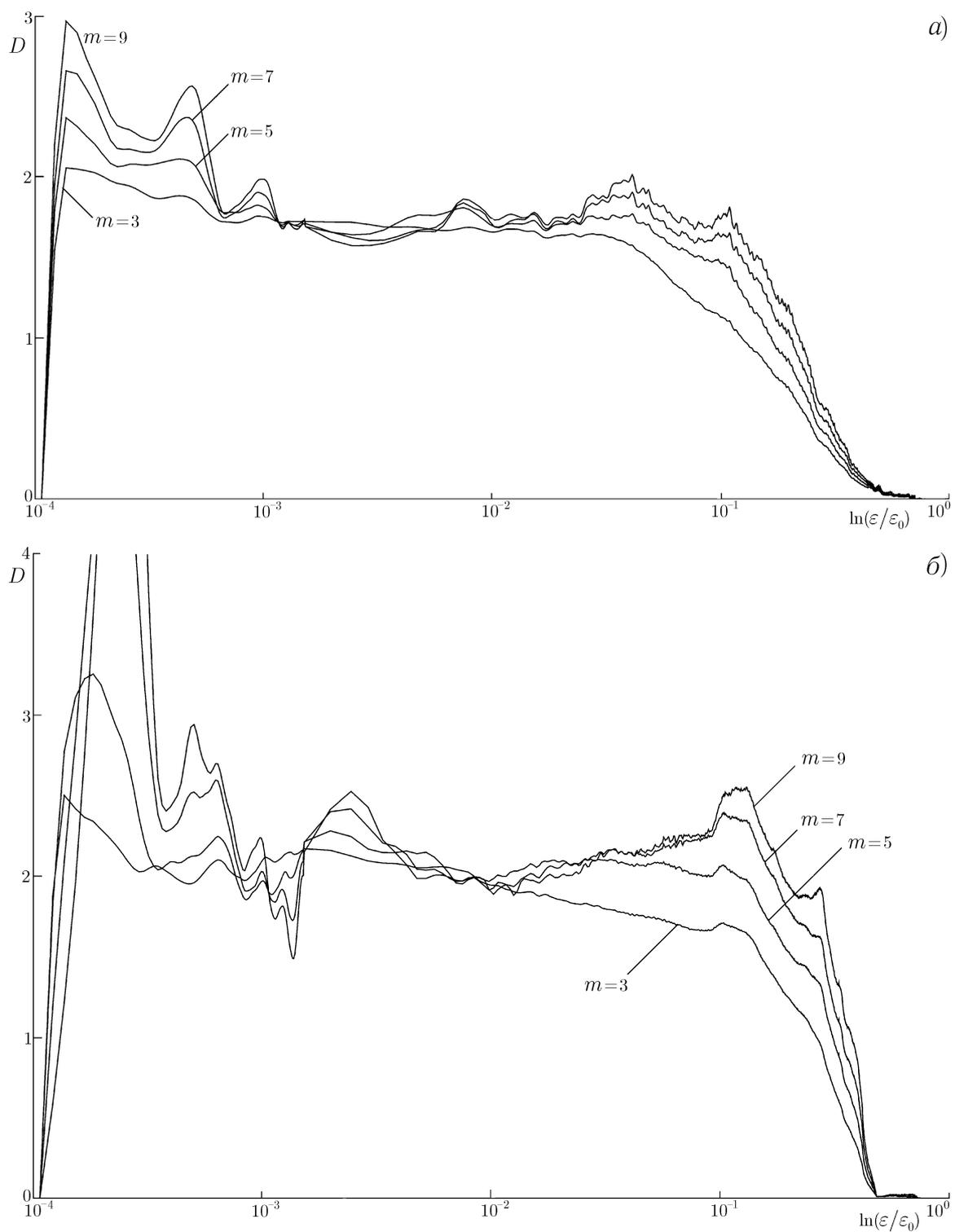


Рис. 6

уменьшается. При большой амплитуде внешнего воздействия зависимость амплитуды автомодуляции  $F_A$  от частоты  $\Omega$  претерпевает изменения (см. рис. 7б).

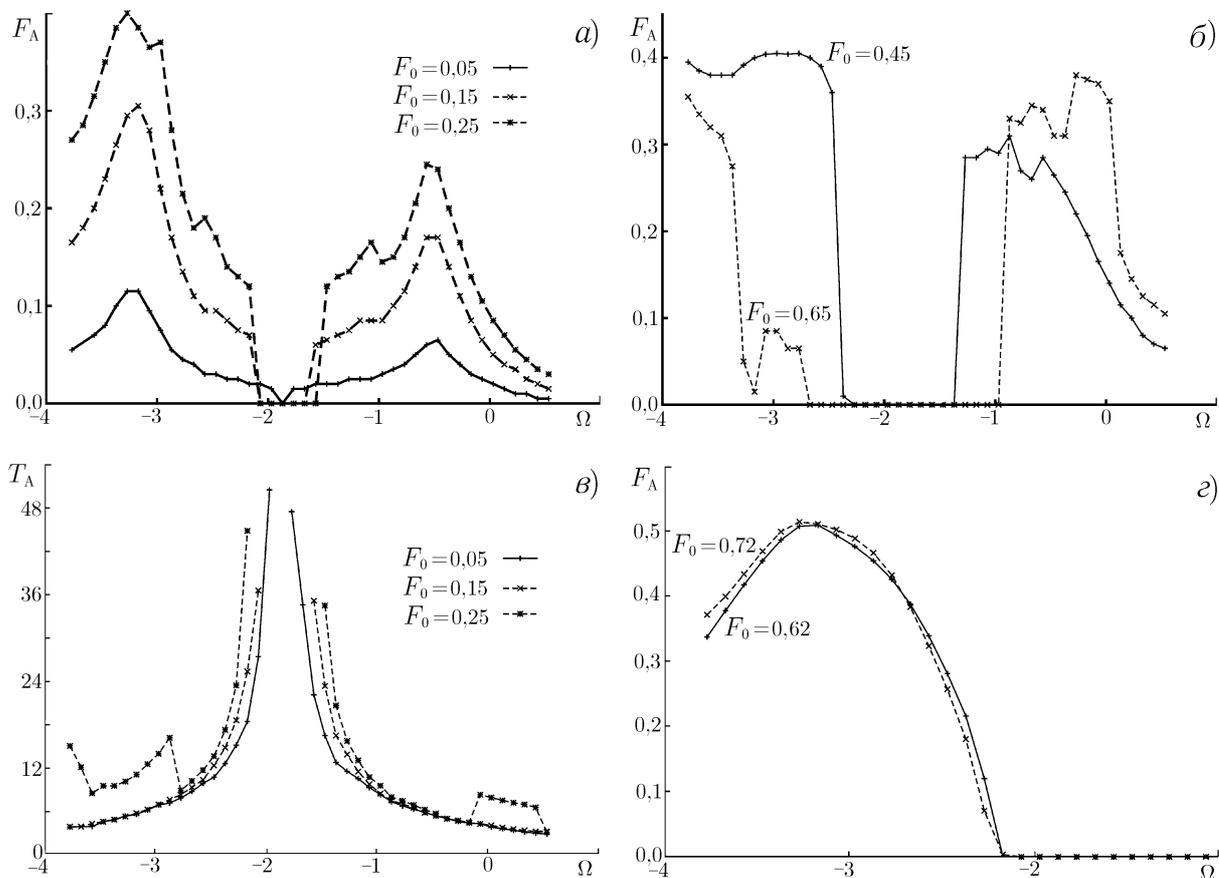


Рис. 7

При большой нелинейности  $\mu$  характер перехода системы в режим автомодуляции из области синхронизации принципиально меняется: на границе области «клюва» синхронизации возникает автомодуляция, амплитуда которой равна нулю, а частота автомодуляции имеет конечное значение  $f_A(\Omega_s) \neq 0$ . На рис. 7г представлены зависимости амплитуды автомодуляции  $F_A$  от частоты  $\Omega$ , соответствующие режиму периодической автомодуляции (область  $T_1$  на рис. 3б) при  $F_0 = 0,62$  и  $0,72$ . Видно, что амплитуда автомодуляции  $F_A$  растёт от нуля на границе области синхронизации, достигает максимума и уменьшается к границе режима периодической автомодуляции.

Заметим, что автомодуляция, возникающая при выходе из области синхронизации исследуемой распределённой автоколебательной системы, не является аналогом биений, которые наблюдаются при выходе из режимов синхронизации классических конечномерных автоколебательных систем (см., например, [34]). Во-первых, частота автомодуляции  $\omega_A$  лежит достаточно далеко от комбинационных частот  $\Omega \pm \omega$ . Во-вторых, при исследовании захвата частоты  $\omega$  высокочастотной компоненты выходного сигнала  $F(\tau) \exp(j\omega t)$  внешним сигналом с частотой  $\Omega$  было обнаружено следующее явление. Область захвата частоты высокочастотного сигнала существенно больше, чем область синхронизации, под которой понимается режим стационарной генерации, отмеченный на карте режимов (рис. 3) как область синхронизации. Рис. 8 иллюстрирует вышесказанное. На нём представлены зависимости разности частот  $\omega - \Omega$  высокочастотных колебаний на выходе системы от частоты управляющего сигнала  $\Omega$  при различной амплитуде  $F_0$  внешнего сигнала при  $\mu = 2$  (рис. 8а) и  $\mu = 4$  (рис. 8б).

Из сравнения рис. 3 и 8 видно, что область захвата частоты со стороны больших частот совпадает с границей области автомодуляции (и, соответственно, области синхронизации), а со стороны меньших

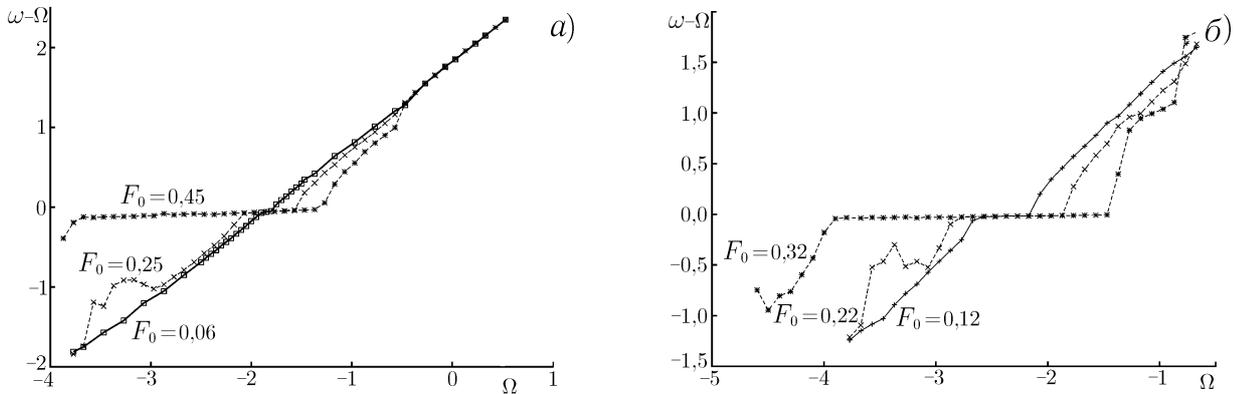


Рис. 8

частот (слева на рис. 3) частота внешнего воздействия, при которой имеет место захват частоты, лежит существенно левее границы режима стационарной генерации. Граница области захвата частоты в области меньших частот нанесена на рис. 3 штриховой линией (кривая 1).

Заметим, что линия 1 и граница области синхронизации не совпадают при любой сколь угодно малой амплитуде внешнего воздействия  $F_0$  как при малой ( $\mu = 2$ , рис. 3а), так и при большой ( $\mu = 4$ , рис. 3б) фазовой нелинейности.

Будем называть колебательный режим, в котором высокочастотные автоколебания в распределённой системе происходят на частоте внешнего управляющего сигнала, режимом квазисинхронизации. В этом режиме генерация сверхвысокочастотного излучения имеет место на частоте  $\omega_0 \approx \Omega$ , а амплитуда выходного поля  $|F(\xi = 0, \tau)|$  может медленно меняться во времени с временным масштабом порядка  $T_A$ . Область квазисинхронизации исследуемой неавтономной системы соответствует области на карте режимов (см. рис. 3) между линией 1 и правой границей «клюва» синхронизации.

При выходе из области квазисинхронизации частота высокочастотной генерации при увеличении отстройки частоты внешнего воздействия  $\Omega$  от частоты генерации  $\hat{\omega}$  автономной системы стремится к частоте автономной генерации.

Таким образом, можно говорить о «расщеплении» границы «клюва» синхронизации при воздействии внешнего гармонического сигнала на автоколебания в распределённой активной системе винтовой электронный пучок—встречная электромагнитная волна. Если под синхронизацией понимать установление в автоколебательной системе колебаний на частоте управляющего воздействия  $\Omega$  без дополнительных компонент в спектре мощности генерации (т. е. с не изменяющейся во времени амплитудой  $|F(\xi = 0, \tau)|$ ), то граница области синхронизации соответствует области стационарной генерации на карте режимов (см. рис. 3). Другая ситуация складывается, если под синхронизацией понимать только захват частоты высокочастотной генерации в МЦР с встречной волной управляющим сигналом, так что  $|\Omega - \omega| = \text{const}$ . Тогда область синхронизации (или квазисинхронизации) занимает существенно бóльшую область на плоскости управляющих параметров. При этом в режиме квазисинхронизации амплитуда выходного сигнала  $|F(\xi = 0, \tau)|$  может вести себя достаточно сложно во времени, совершая как периодические, так и хаотические колебания. Вместе с тем высокочастотная генерация в системе происходит на частоте внешнего воздействия.

#### 4. ФИЗИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ

Рассмотрим физические процессы, сопровождающие перестройку режимов колебаний в МЦР с встречной волной под воздействием внешнего управляющего сигнала.

Исследуем сначала процессы в системе, сопровождающие захват частоты генерации в приборе внешним сигналом с амплитудой  $F_0$  и частотой  $\Omega$ . Частота высокочастотной генерации определяется как поправка  $\omega_0$  к частоте «холодного» синхронизма  $\hat{\omega}$ . Частота  $\omega_0$  определяется фазой  $\varphi_F(\xi, \tau)$  поля  $F(\xi, \tau) = |F(\xi, \tau)| \exp[j\varphi_F(\xi, \tau)]$ . В режиме одночастотной генерации поправка к частоте может быть представлена в виде

$$\omega_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi_F(0, \tau)}{t}. \quad (6)$$

Если считать фазу  $\varphi_F(\xi, \tau)$  периодической функцией с периодом  $2\pi$ , т. е. рассматривать функцию

$$\bar{\varphi}_F(\xi, \tau) = \varphi_F(\xi, \tau) \bmod 2\pi,$$

то период функции  $\bar{\varphi}_F$  равен  $1/\omega_0$  (см. рис. 9а, на котором представлены проекции распределения поля  $|F|$  и фазы поля  $\bar{\varphi}_F$  на плоскость  $(\xi, \tau)$  в режиме стационарной автономной генерации (параметр  $\mu = 2$ ,  $\omega_0 = 1,82$ ). При сложной динамике фазы  $\bar{\varphi}_F(\tau)$  частота  $\omega_0$ , находящаяся из соотношения (6), определяет характерный временной масштаб высокочастотной генерации в винтовом пучке.

Квазисинхронизация колебаний, т. е. генерация высокочастотного излучения в МЦП с встречной волной на частоте  $\omega_0 = \Omega$ , соответствует периодическим колебаниям фазы  $\bar{\varphi}_F$  с частотой  $\Omega$ . При этом амплитуда выходного высокочастотного поля  $|F|$  может вести себя во времени достаточно сложно, демонстрируя режимы как периодической, так и хаотической автомодуляции.

Рассмотрим подробнее поведение амплитуды и фазы поля  $F$  в генераторе на винтовом пучке в области синхронизации и вне её при малой неизохронности  $\mu = 2$ . На рис. 9б–г показаны пространственно-временные распределения амплитуды и фазы поля  $F$ , построенные при амплитуде внешнего воздействия  $F_0 = 0,3$  и различных частотах  $\Omega$ : рис. 9б соответствует  $\Omega = -3,27$  (режим автомодуляции с периодом 1, отличный от синхронизации и квазисинхронизации); рис. 9в —  $\Omega = -1,57$  (режим стационарной генерации, область синхронизации); рис. 9г —  $\Omega = -0,97$  (режим автомодуляции с периодом 2, отличный от режима квазисинхронизации).

Как показывает анализ рис. 9б и г, в режиме, отличном от режимов квазисинхронизации и синхронизации, пространство взаимодействия можно условно разделить на две области. В первой, примыкающей к коллекторному концу системы  $\xi = A$ , колебания фазы  $\bar{\varphi}_F$  происходят с частотой внешнего воздействия  $\Omega$ . Далее в достаточно узкой области пространства взаимодействия происходит резкое изменение фазы поля  $\bar{\varphi}_F$ , которая практически скачком изменяется на  $\pi$ . В области вблизи выхода системы  $\xi = 0$  колебания фазы имеют место на частоте  $\omega$ , отличной от  $\Omega$ . При этом частота генерации  $\omega$  стремится к частоте автономной генерации  $\omega_0$  при всё большей отстройке частоты внешнего воздействия  $\Omega$  от границы области квазисинхронизации (ср. с рис. 8, на котором представлены зависимости частоты генерации системы  $\omega - \Omega$  от частоты управляющего сигнала). Таким образом, пространство взаимодействия неавтономной системы делится на две характерные области пространственно-временных колебаний — область синхронных с управляющим сигналом временных колебаний и область, в которой имеют место колебания с частотой, отличной от частоты управляющего сигнала. Эти две характерные области разделены узкой областью, в которой наблюдаются резкие скачкообразные изменения фазы поля  $\bar{\varphi}_F$ . С увеличением отстройки  $\Omega - \Omega_s < 0$  от границы «клюва» квазисинхронизации область пространства, в которой наблюдаются синхронные колебания, уменьшается.

В области квазисинхронизации колебания во всём пространстве взаимодействия происходят на частоте внешнего воздействия  $\Omega$ . Проекция распределения  $\bar{\varphi}_F(\xi, \tau)$  (рис. 9в) идентична наблюдаемой в случае автономных колебаний (см. рис. 9а), но на частоте  $\omega_0 = \Omega$ .

При большой неизохронности  $\mu > 3$ , соответствующей автомодуляции выходного сигнала генератора в автономном режиме, картина разрушения состояния квазисинхронизации при отрицательной отстройке  $\Omega - \Omega_s < 0$  выглядит аналогично. Для иллюстрации этого на рис. 10а представлены распределения  $|F(\xi, \tau)|$  и  $\bar{\varphi}_F$ , построенные при  $\mu = 4$ ,  $F_0 = 0,32$  и  $\Omega = -4,27$ , что соответствует области

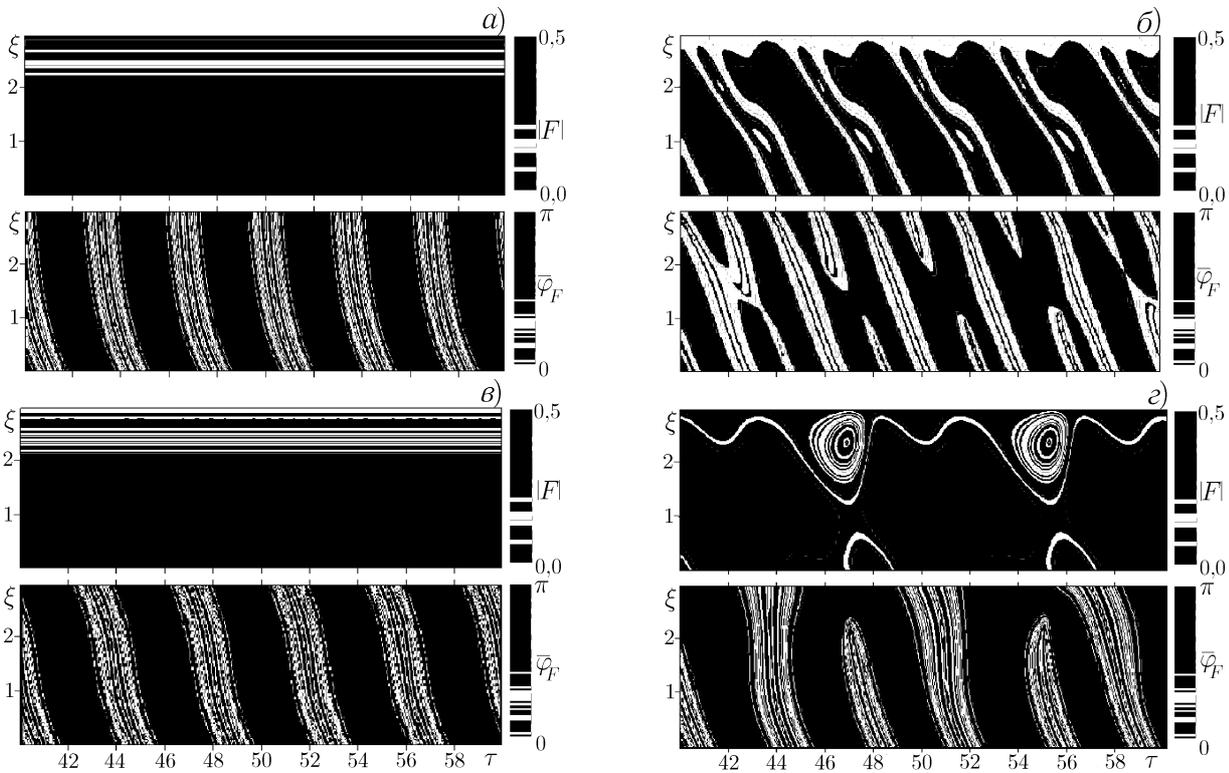


Рис. 9

вблизи границы «клюва» квазисинхронизации. Амплитуда выходного сигнала  $|F(\xi = 0, \tau)|$  в этом случае ведёт себя сложным образом, демонстрируя хаотическую автомодуляцию, что хорошо видно на пространственно-временном распределении амплитуды поля. Что касается распределения  $\bar{\varphi}_F$ , которое и определяет частоту генерации системы в данном режиме, то оно близко к характерному для режима квазисинхронизации (это выражается в отсутствии резких скачков фазы поля). При этом фаза в пространстве ведёт себя нерегулярным образом; характерная частота генерации  $\omega_0 < \Omega$ . Однако, как и раньше в области вблизи правого конца системы  $\xi = A$ , динамика фазы регулярна и происходит на частоте, равной частоте управляющего сигнала  $\Omega$ .

При положительной отстройке  $\Omega - \Omega_s > 0$  и большом параметре неизохронности  $\mu$  ситуация меняется. В этом случае в первой области, примыкающей к правой границе системы  $\xi = A$ , наблюдаются не колебания на частоте внешнего сигнала  $\Omega$ , как было при малом  $\mu$ , а квазипериодические колебания с базовыми частотами  $\omega_0$  и  $\Omega$ . Это хорошо видно из анализа пространственно-временных распределений фазы  $\bar{\varphi}_F$ , представленных на рис. 10б, который построен для управляющих параметров  $\mu = 4$ ,  $F_0 = 0,32$  и  $\Omega = 0,33$  (режим периодической автомодуляции, не соответствующий области квазисинхронизации).

Рассмотрим теперь возникновение автомодуляционных режимов в исследуемой системе под воздействием управляющего сигнала. Анализ исследуемой неавтономной системы свидетельствует об амплитудном механизме (см., например, работы [29, 35–37]) возникновения периодической и хаотической автомодуляции в неавтономном генераторе. В этом случае возникающие в неавтономной системе различные режимы автомодуляции выходного сигнала связаны, во-первых, с запаздывающим характером обратной связи [38] и, во-вторых, с перегруппировкой электронов в сильном поле [29, 39, 40], т. е. с амплитудной нелинейностью системы.

На рис. 11а представлены распределения тока  $|I(\xi)|$  (сплошная линия) и поля  $|F(\xi)|$  (штриховая

линия) при стационарной генерации (параметр неизохронности  $\mu = 2$ ) в автономном режиме работы МЦР с встречной волной. Оба распределения имеют вид функций с одним максимумом. Это соответствует формированию на длине пространства взаимодействия одного фазового сгустка. Уменьшение тока  $|I(\xi)|$  к концу пространства взаимодействия  $\xi = A$  свидетельствует о разгруппировке фазового сгустка электронов-осцилляторов. При малых амплитудах внешнего воздействия вид распределений тока и поля качественно не меняется (см. рис. 11б, построенный при параметрах  $F_0 = 0,15$ ,  $\Omega = -1,67$ , которые соответствуют границе области синхронизации).

При выходе из области синхронизации влияние внешнего сигнала сказывается в нарушении фазовых соотношений, соответствующих режиму стационарной генерации, между комплексными амплитудами  $F$  и  $I$ . Как следствие этого, режим синхронизации со стационарными распределениями тока и поля вдоль системы теряет устойчивость. Это связано с возникновением дополнительной распределённой обратной связи в системе: сгруппированный в сильном поле винтовой электронный пучок приходит к коллекторному концу системы  $\xi = A$  со скоростью  $v_{\parallel}$  уже перегруппировавшись; возбуждаемое сгруппированным током поле смещается со скоростью  $v_g$  к входному концу  $\xi = 0$  системы; сгруппированный в слабом поле пучок возбуждает теперь сильное поле, в котором винтовой электронный пучок и перегруппировывается. В результате вся картина повторяется с периодом  $T \sim \sim 2A(1/v_{\parallel} + 1/v_g)$ , а время  $T/2$  можно рассматривать как характерное время запаздывания в возникающей цепи дополнительной обратной связи.

Таким образом, при переходе частоты  $\Omega$  через границу области синхронизации при данном  $F_0$  ранее стационарные распределения  $|I|$  и  $|F|$  начинают смещаться к входному концу системы  $\xi = 0$ , причём максимум поля при движении растёт из-за взаимодействия с волной тока, пока не достигнет конца системы (точки  $\xi = 0$ ). Из оставшегося распределения  $F(\xi)$  под влиянием внешнего поля опять выделяется основной тип колебаний, и процесс повторяется периодически. Это иллюстрирует рис. 12а, на котором представлены пространственно-временные распределения поля  $|F(\xi, \tau)|$  в системе для режима периодической автомодуляции при  $F_0 = 0,15$ ,  $\Omega = -0,97$ . Видно, что выходной сигнал в данном случае периодически промодулирован с частотой  $\Omega_A \approx 0,13$ .

Следует заметить, что при большой неизохронности ( $\mu > 3$ ), когда в автономной системе наблюдается автомодуляция, при воздействии на систему управляющего сигнала в области синхронизации удаётся разорвать дополнительную внутреннюю обратную связь. Это обусловлено тем, что внешний управляющий сигнал «навязывает» исследуемой системе некоторое распределение фазы поля  $\varphi_F$  в пространстве взаимодействия, которое характеризуется отсутствием резких скачков фазы в пространстве и соответствует оптимальному в смысле возникновения режима стационарной генерации фазовому соотношению между волнами тока и поля в МЦР с встречной волной.

Ситуация меняется при росте амплитуды внешнего воздействия  $F_0$ . В этом случае влияние внеш-

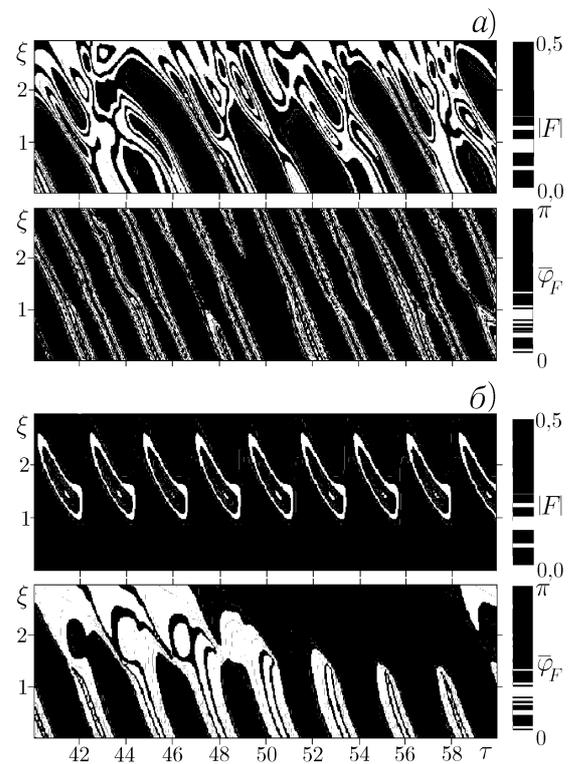


Рис. 10

него сигнала приводит к разгруппировке и затем к формированию вторичного фазового сгустка. Как следствие, распределения тока и поля вдоль пространства взаимодействия приобретают двугорбый вид (см. рис. 11в, построенный при параметрах внешнего воздействия  $F_0 = 0,45$  и  $\Omega = -2,27$ , соответствующих области синхронизации; на зависимости  $|I(\xi)|$  появляется второй максимум в области  $\xi > 2,5$ ). При потере устойчивости режима, характеризуемого «многогорбыми» распределениями поля и тока, при выходе из области синхронизации за время прохода излучения вдоль системы успевают сформироваться не один (как при малой амплитуде  $F_0$ ), а два или четыре максимума. Это хорошо видно на рис. 12б, на котором представлены распределения поля  $|F(\xi, \tau)|$  в системе для режима автомодуляции с периодом 2 при  $F_0 = 0,45$ ,  $\Omega = -2,67$ . Поэтому при выходе из области синхронизации и потери устойчивости режима стационарной генерации возникают режимы автомодуляции с периодом 2 и 4.

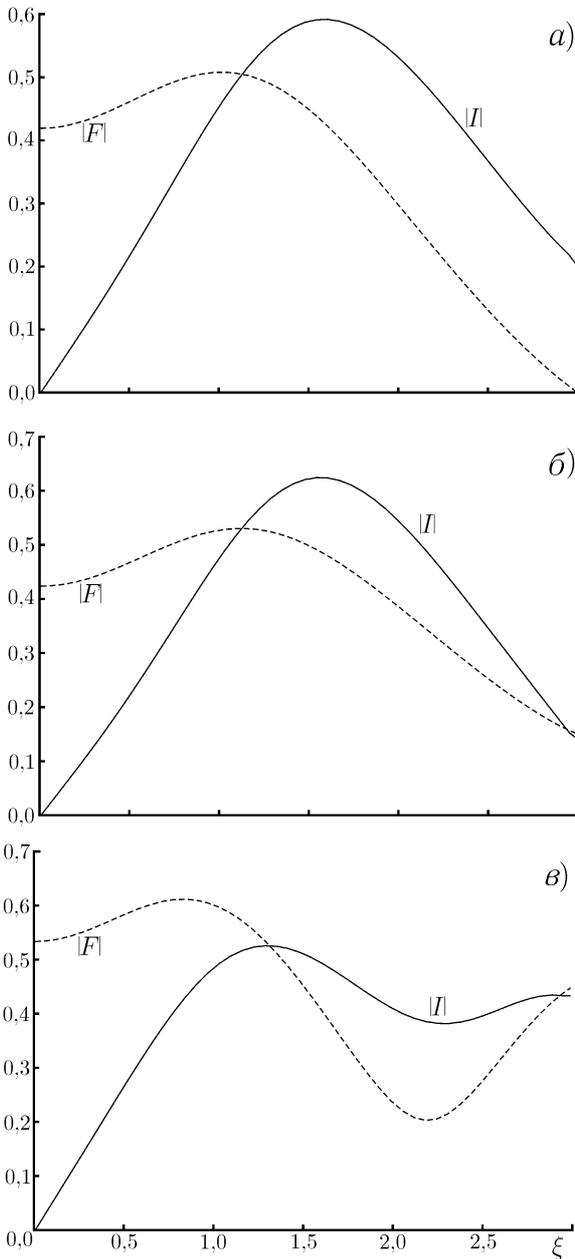


Рис. 11

Учитывая всё вышесказанное, можно ввести длину синхронизации  $A_s$  (совпадающую с длиной области синхронных колебаний  $\xi \in (A - A_s, A)$ ), на которой имеют место высокочастотные колебания на частоте внешнего воздействия  $\Omega$ . Далее в области пространства взаимодействия  $\xi \sim A_s$  имеет место разрушение режима синхронизации, которое связано с резкими скачками фазы поля и, как следствие, с изменением внутренней структуры электронного пучка (фазовой перегруппировкой электронов-осцилляторов винтового пучка). Разрушение режима синхронизации на некоторой длине пространства взаимодействия  $A_s$  определяется нарушением фазовых соотношений между волнами тока и поля, приводящим к возникновению более сложной структуры пространственно-временных распределений поля  $F$ . При фиксированных длине системы  $A$  и параметре неизохронности  $\mu$  «паразитный» набег фазы поля, возникающий за счёт воздействия на систему управляющего сигнала с амплитудой  $F_0$  и приводящий на длине  $A_s$  к разрушению режима колебаний на частоте внешнего воздействия, постоянен и не зависит от частоты внешнего воздействия. Обозначая «паразитный» набег фазы через  $\Delta\varphi$ , можно записать, что  $\Delta\varphi = |\Omega - \omega_0| A_s / v_g$ , или

$$A_s = \frac{\Delta\varphi v_g}{|\Omega - \omega_0|}. \tag{7}$$

Зависимость набег фазы  $\Delta\varphi$  от амплитуды внешнего поля при малых  $F_0$  может быть представлена

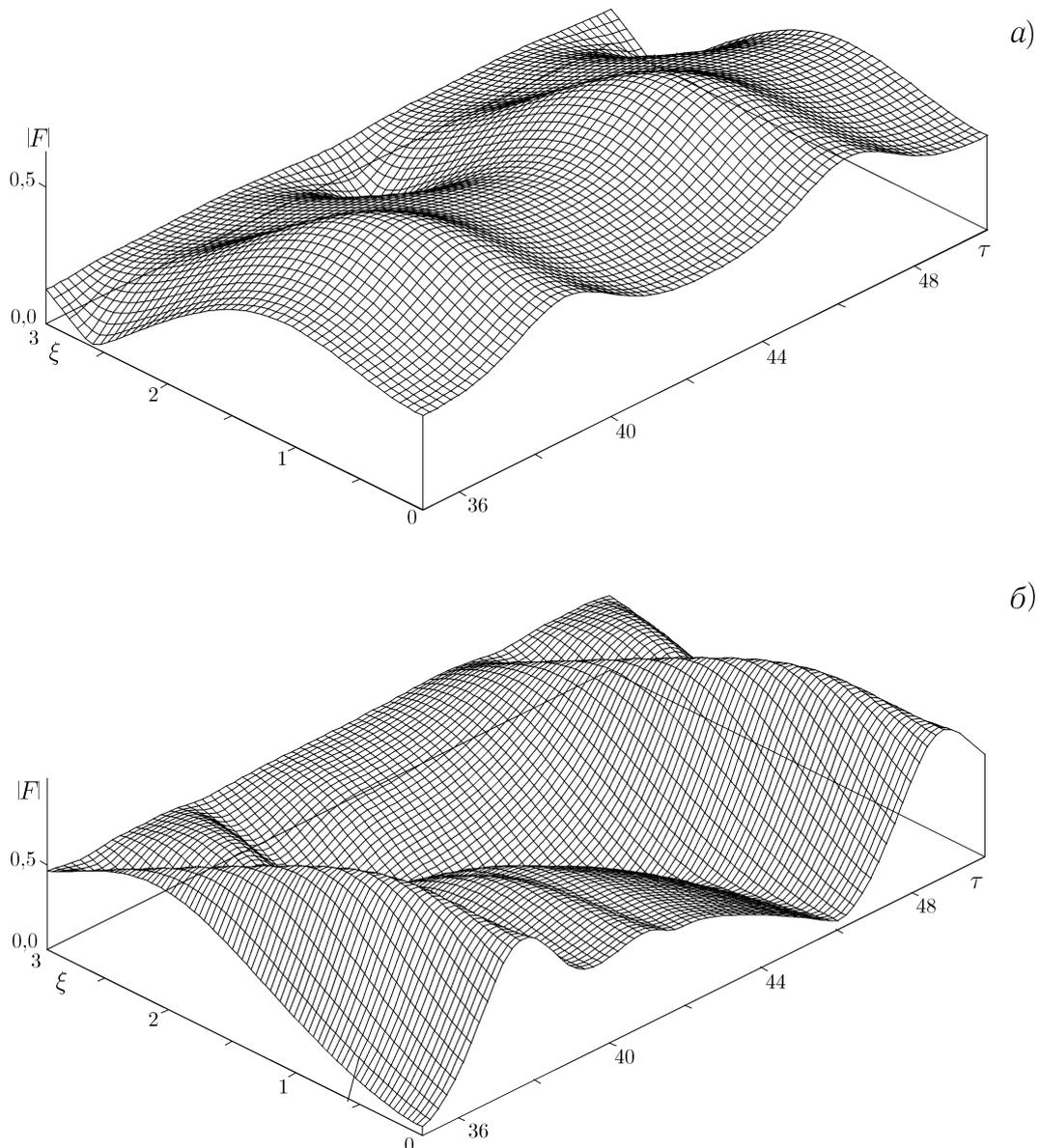


Рис. 12

как  $\Delta\varphi = \chi F_0$ , где  $\chi$  — коэффициент пропорциональности, зависящий при фиксированной длине системы от параметра неизохронности  $\mu$ . Это связано с тем, что при небольшом увеличении амплитуды внешнего поля  $F_0$  имеет место уменьшение фазовой разгруппировки и последующей перегруппировки электронов-осцилляторов винтового пучка, приводящее к нарушению фазового соотношения  $\Delta\varphi$  и, как следствие, к сохранению режима синхронных колебаний на бóльшей длине пространства взаимодействия  $A_s$ .

Границе области квазисинхронизации соответствует длина синхронизации, равная длине пространства взаимодействия:  $A_s = A$ . Тогда из соотношения (7) следует, что для границы области квазисинхронизации на плоскости  $(\Omega, F_0)$  можно записать

$$|\Omega_s - \omega_0| = \frac{\chi v_g}{A} F_0 \propto F_0, \quad (8)$$

где частота  $\Omega_s$  соответствует границе «клюва».

Как следует из анализа численных результатов (см. рис. 3а), граница области квазисинхронизации подчиняется соотношению (8) при амплитудах внешнего воздействия  $F_0 \leq 0,3$ , при этом зависимость  $F_0(\Omega_s)$  является линейной и симметричной относительно частоты  $\omega_0$  автономной высокочастотной генерации. Далее граница «клюва» синхронизации начинает отклоняться от линейной зависимости и теряет симметрию, что связано с нелинейностью функции  $\varphi_0(F_0)$  при больших  $F_0$  (фактически, с нелинейностью амплитудной характеристики МЦР с встречной волной). Из соотношения (8) также следует, что ширина области квазисинхронизации уменьшается с увеличением длины пространства взаимодействия  $A$ .

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в работе исследовано влияние внешнего гармонического сигнала на автоколебания в простой модели МЦР с встречной волной. Рассмотрены режимы синхронизации и показано, что при различных параметрах нелинейности имеют место как режимы синхронизации (соответствующие стационарной генерации в приборе на частоте внешнего воздействия), так и квазисинхронизации (генерации на базовой частоте, определяемой управляющим сигналом, с медленным изменением амплитуды выходного сигнала).

При значительных отстройках частоты внешнего воздействия имеет место установление режимов периодической и хаотической автомодуляции выходного сигнала, причём при сильной нелинейности вид карты режимов на плоскости амплитуда—частота внешнего воздействия существенно более сложен, чем в случае слабой нелинейности. Система в этом случае демонстрирует сложную последовательность переходов порядок—хаос и хаос—порядок в зависимости от частоты и амплитуды управляющего сигнала. Заметим, что сложная динамика исследуемой системы при малом параметре неизохронности  $\mu$  наблюдается вблизи окрестности границ области синхронизации при больших амплитудах внешнего сигнала, а при большом  $\mu$  — при малой амплитуде внешнего воздействия и значительных отстройках частоты внешнего воздействия от частоты автономной высокочастотной генерации. Меняется также вид амплитудно-частотной характеристики генератора в режиме синхронизации и характер возникновения хаотической автомодуляции при увеличении степени фазовой нелинейности  $\mu$  системы.

С точки зрения физических процессов в электронном пучке воздействие внешнего управляющего сигнала сводится к влиянию на внутреннюю распределённую обратную связь, имеющую место в генераторе на винтовом пучке. Режимы синхронизации и квазисинхронизации соответствуют возникновению в пространстве взаимодействия режимов пространственно-временных колебаний на частоте внешнего воздействия во всём пространстве взаимодействия. Выход из области квазисинхронизации сопровождается формированием двух характерных областей с различной частотой колебаний в них. На границе областей имеют место скачки фазы поля и, как следствие, фазовая перегруппировка электронов-осцилляторов пучка. Механизм возникновения автомодуляции выходного сигнала определяется формированием дополнительной распределённой обратной связи и носит амплитудный характер.

В заключение отметим, что представляет интерес изучение влияния внешнего гармонического сигнала (или управляющего сигнала более сложной формы) на режимы хаотической автомодуляции в МЦР с встречной волной.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проекты № 02–02–16351 и 01–02–17392).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гапонов А. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1959. Т. 2, № 3. С. 443.
2. Гапонов А. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1959. Т. 2, № 3. С. 450.
3. Гапонов А. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1961. Т. 4, № 3. С. 547.
4. Юлпатов В. К. // Вопросы радиоэлектроники. Сер. 1. Электроника. 1965. № 12. С. 15.
5. Юлпатов В. К. // Вопросы радиоэлектроники. Сер. 1. Электроника. 1965. № 12. С. 24.
6. Гиротрон: Сб. научных трудов. Горький: Изд-во ИПФ АН СССР, 1981.
7. Братман В. Л., Новожилов С. Л., Петелин М. И. // Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ. 1976. № 11. С. 46.
8. Chu K. R., Lau Y. Y., Barnett L. R., Granatstein V. L. // IEEE Trans. Electron. Dev. 1981. V. 28, No. 7. P. 866.
9. Chen Z. G., Döring H. // Int. J. Infrared and Millimeter Waves. 1984. V. 5, No. 5. P. 691.
10. Felch K. L., Danly B. G., Jory H. R., Kreisler K. E., Lawsom W., Levush B., Temkin R. J. // Proc. IEEE. 1999. V. 87, No. 5. P. 752.
11. Kou C. S., Chen S. H., Barnett L. R., Chen H. Y., Chu K. R. // Phys. Rev. Lett. 1993. V. 70, No. 7. P. 924.
12. Chu K. R., Chen H. Y., Hung C. L., Chang T. H., Barnett L. R., Chen S. H., Yang T. T. // Phys. Rev. Lett. 1998. V. 81, No. 21. P. 4760.
13. Nusinovich G. S., Vlasov A. N., Antonsen T. M. // Phys. Rev. Lett. 2001. V. 87, No. 21. Article number 218301.
14. Rulkov N. F., Sushchik M. M., Tsimring L. S. // Phys. Rev. E. 1995. V. 51, No. 2. P. 980.
15. Pecora L. M., Carroll T. L., Jonson G. A., Mar D. J. // Chaos. 1997. V. 7, No. 4. P. 520.
16. Афраймович В. С., Некоркин В. И., Осипов Г. В., Шалфеев В. Д. Устойчивость, структуры и хаос в нелинейных сетях синхронизации / Под ред. А. В. Гапонова-Грехова, М. И. Рабиновича. Горький: ИПФ АН СССР, 1989.
17. Алексеев А. А., Шалфеев В. Д. // Изв. вузов. Радиофизика. 1993. Т. 36, № 8. С. 808.
18. Канавец В. И. // Вестник МГУ. Сер. 3. 1961. № 2. С. 32.
19. Wong M. J., Sims G. D., Stephenson I. M. // J. Electronics and Control. 1961. V. 11, No. 6. P. 684.
20. Рапопорт Г. П. // Радиотехника и электроника. 1964. Т. 9, № 1. С. 118.
21. Железовский Е. Е., Кальянов Э. В. // Вопросы радиоэлектроники. Сер. Электроника. 1965. Вып. 4. С. 44.
22. Кац А. М. // Электронная техника. Сер. Электроника СВЧ. 1966. Вып. 5. С. 37.
23. Солнцев В. А. // Электронная техника. Сер. Электроника СВЧ. 1966. Вып. 9. С. 30.
24. Григорьев В. П., Жерлицын А. Г., Коваль Т. В., Кузнецов С. И., Мельников Г. В. // Письма в ЖТФ. 1988. Т. 14. С. 2164.
25. Woo W., Benford J., Fittinghoff D., Harteneck B., Price D., Smith R., Sze H. // J. Appl. Phys. 1989. V. 65, No. 2. P. 861.
26. Храмов А. Е. // Радиотехника и электроника. 1999. Т. 44, № 2. С. 211.
27. Дмитриев А. Ю., Трубецков Д. И., Четвериков А. П. // Изв. вузов. Радиофизика. 1991. Т. 34, № 9. С. 595.
28. Кузнецов С. П., Трубецков Д. И. Электроника ламп с обратной волной. Саратов: Изд-во Саратовского университета, 1975. С. 135.
29. Трубецков Д. И., Четвериков А. П. // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1994. Т. 2, № 5. С. 3.

30. Дмитриев А. Ю., Коневец А. Е., Пищик Л. А., Трубецков Д. И., Четвериков А. П. // Лекции по электронике СВЧ и радиофизике. Материалы 7-й зим. школы-семинара инженеров. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1986. С. 61.
31. Takens F. // Lect. Notes in Math. Warwick: Springer-Verlag, 1980. V. 898. Dynamical Systems and Turbulence / Ed. by R. A. Rand and L. S. Young. P. 366.
32. Grassberger P., Procaccia J. // Phys. Rev. Lett. 1983. V. 50. P. 346.
33. Кипчатов А. А. // Письма в ЖТФ. 1995. Т. 21, вып. 15. С. 90.
34. Рабинович М. И., Трубецков Д. И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1988.
35. Блиох Ю. П., Бородкин А. В., Любарский А. Г., Онищенко Н. М., Файнберг Я. Б. // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1993. Т. 1, № 1–2. С. 34.
36. Рыскин Н. М., Титов В. Н. // Изв. вузов. Радиофизика. 1999. Т. 42, № 6. С. 566.
37. Дмитриева Т. В., Рыскин Н. М., Титов В. Н., Шигаев А. М. // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1999. Т. 7, № 6. С. 66.
38. Кузнецов С. П. // Изв. вузов. Радиофизика. 1982. Т. 25. С. 1 410.
39. Гинзбург Н. С., Кузнецов С. П., Федосеева Т. Н. // Изв. вузов. Радиофизика. 1978. Т. 21, № 7. С. 1 037.
40. Анфиногентов В. Г., Храмов А. Е. // Изв. вузов. Радиофизика. 1998. Т. 41, № 9. С. 1 137.

Саратовский госуниверситет им. Н. Г. Чернышевского,  
ГосУНЦ «Колледж»,  
г. Саратов, Россия

Поступила в редакцию  
8 апреля 2002 г.

**INFLUENCE OF AN EXTERNAL SIGNAL ON AUTO-OSCILLATIONS  
IN THE DISTRIBUTED SYSTEM “HELICAL ELECTRON BEAM—BACKWARD ELECTROMAGNETIC WAVE”**

*A. A. Koronovsky, D. I. Trubetskov, and A. E. Khramov*

We study synchronization of oscillations in an active distributed system consisting of a helical electron beam interacting with a backward wave in the waveguide (backward-wave cyclotron resonance maser). Characteristics of nonautonomous spatio-temporal oscillations in a system with different degrees of non-isochronism of electron-oscillators are examined. Physical processes accompanying transition of a distributed auto-oscillation system to the synchronization regime are considered.

УДК 621.391.1

## ПОДАВЛЕНИЕ ВЗАИМНЫХ ПОМЕХ В ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КАНАЛАХ В МІМО-СИСТЕМАХ СВЯЗИ

*А. Г. Флакман*

Исследуется влияние дискретности информации о состоянии канала, передаваемой по обратной линии приёмник—передатчик, на эффективность МІМО-систем (multiple-input multiple-output systems). Показано, что такая дискретность приводит к энергетическим потерям и появлению взаимных помех в параллельных собственных каналах МІМО-системы. Предложен метод подавления взаимных помех, который обеспечивает значительное уменьшение энергетических потерь и восстанавливает независимость собственных каналов по отношению к передаваемым символам, но приводит к корреляции выходных собственных шумов. Найдены выражения для максимально правдоподобной оценки принятых сигналов, учитывающие коррелированность шумов. Приводятся результаты математического моделирования для случая релейских замираний сигналов, показывающие высокую эффективность предложенного метода.

### ВВЕДЕНИЕ

Основной проблемой в создании перспективных систем связи является увеличение надёжности и темпа передачи данных, которые должны обеспечиваться при различных условиях распространения сигналов, в том числе при глубоких замираниях. Перспективный путь решения этой проблемы заключается в использовании так называемых МІМО-систем с антенными решётками на обоих концах линии. В таких системах возможна передача данных по независимым параллельным каналам, формируемым с помощью адаптивных передающей и приёмной диаграммообразующих схем (ДОС), которые согласованы со случайным пространственным каналом связи [1–6]. Весовые векторы ДОС являются собственными векторами переходной матрицы  $\mathbf{H}$ , состоящей из коэффициентов передачи между элементами обеих антенных решёток. Поэтому такие каналы принято называть собственными. Независимость собственных каналов даёт возможность представить МІМО-систему как совокупность одноканальных систем и использовать более простые принципы кодирования и модуляции, а также алгоритмы оценки переданных символов.

Для формирования собственных каналов приёмник должен оценить элементы матрицы  $\mathbf{H}$ . Затем необходимо вычислить весовые векторы обеих ДОС и информацию о весовых векторах передающей ДОС сообщить на передатчик по обратной линии приёмник—передатчик. Эту информацию будем далее называть служебной. На практике матрица  $\mathbf{H}$  оценивается с некоторой ошибкой, обусловленной влиянием собственных шумов и замираниями сигналов, а также конечной длиной используемой псевдошумовой обучающей последовательности. В условиях релейских замираний ошибка оценивания матрицы  $\mathbf{H}$  может приводить к значительному снижению эффективности работы МІМО-систем [7–9]. Однако даже при точном знании матрицы  $\mathbf{H}$  информация о состоянии канала известна на передающем конце линии с некоторой ошибкой, источником которой является дискретность передаваемой служебной информации. В самом деле, информация о векторах передающей ДОС передаётся с помощью конечного числа бит и поэтому всегда является дискретной. Число служебных бит должно быть минимально возможным, т. к. по обратной линии также передаётся другая (не служебная) информация, которая не может быть передана одновременно со служебной. Однако чрезмерное уменьшение числа служебных бит приводит к увеличению дискрета квантования весовых коэффициентов и тем самым к более сильному искажению соответствующей информации. В результате состояние пространственного

канала связи становится известным на передающем конце линии с некоторой ошибкой, влияние которой на эффективность ММО-систем, использующих параллельную передачу данных по собственным каналам, в литературе не рассматривалось.

В настоящей работе показано, что дискретность служебной информации, передаваемой по обратной линии приёмник—передатчик, приводит к нарушению независимости собственных каналов и появлению взаимных помех. Эти помехи, во-первых, вызывают энергетические потери, т. е. уменьшают отношение мощности сигнала к суммарной мощности собственного шума и взаимных помех (ОСШП) на выходе собственных каналов. Во-вторых, символы, передаваемые через отдельные собственные каналы, перемешиваются между собой, поэтому необходимо использовать более сложные алгоритмы их совместной оценки. В работе предложен способ уменьшения влияния дискретности обратной линии не за счёт увеличения объёма служебной информации, а на основе полной компенсации на приёмном конце линии взаимных помех в собственных каналах. Получены выражения для энергетических потерь в отношении мощности сигнала к мощности собственного шума (ОСШ) при такой компенсации. Приводятся результаты математического моделирования для частного случая релейских замираний сигналов, показывающие высокую эффективность предложенного метода.

## 1. ВЛИЯНИЕ ДИСКРЕТНОСТИ ИНФОРМАЦИИ О СОСТОЯНИИ КАНАЛА

Рассмотрим ММО-систему, состоящую из  $M$  передающих и  $N$  приёмных антенн, и будем считать вначале, что состояние канала на передающем конце линии известно точно. Пусть  $h_{nm}$  — комплексный коэффициент передачи сигналов из  $m$ -й передающей антенны в  $n$ -ую приёмную антенну. Коэффициенты  $h_{nm}$  образуют переходную матрицу  $\mathbf{H}$  размерности  $N \times M$ . Число  $L$  независимых собственных каналов для передачи информации равно минимальному числу передающих или приёмных антенн, т. е.  $L = \min\{M, N\}$ . Матрица  $\mathbf{H}$  имеет сингулярное разложение вида  $\mathbf{H} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}^{1/2}\mathbf{V}^H$  [10], где матрицы  $\mathbf{U} = (\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \dots, \mathbf{U}_L)$  и  $\mathbf{V} = (\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \dots, \mathbf{V}_L)$  состоят из собственных векторов матриц  $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$  и  $\mathbf{H}^H\mathbf{H}$  соответственно,  $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_L\}$  — диагональная матрица, составленная из ненулевых собственных чисел  $\lambda_i$  этих матриц; индекс  $\mathbf{H}$  обозначает эрмитовое сопряжение. Для формирования собственных каналов в качестве весовых векторов адаптивной передающей ДОС необходимо выбрать векторы  $\mathbf{V}_i$ , а роль весовых векторов адаптивной приёмной ДОС должны играть собственные векторы  $\mathbf{U}_i$ . Общая схема ММО-системы с собственными каналами показана на рис. 1.

Обозначим  $\mathbf{C}(t) = (c_1(t), c_2(t), \dots, c_L(t))^T$   $L$ -мерный вектор входных сигналов, где индекс  $T$  обозначает операцию транспонирования. Тогда  $M$ -мерный вектор сигналов  $\mathbf{S}(t) = (s_1(t), s_2(t), \dots, s_M(t))^T$  на выходе передающей ДОС может быть представлен в виде

$$\mathbf{S}(t) = \mathbf{V}\mathbf{R}^{1/2}\mathbf{C}(t), \quad (1)$$

где  $\mathbf{R} = \text{diag}\{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_L\}$  — диагональная матрица, составленная из чисел  $\rho_i$ , которые дают распределение мощности между параллельными каналами.

Вектор  $\mathbf{X}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t))^T$  сигналов в элементах приёмной антенной решётки равен

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{H}\mathbf{S}(t) + \mathbf{Z}(t), \quad (2)$$

где  $\mathbf{Z}(t) = (z_1(t), z_2(t), \dots, z_N(t))^T$  — вектор собственных шумов, которые будем считать гауссовскими некоррелированными во времени и в приёмных каналах антенной решётки случайными процессами с нулевым средним и единичной дисперсией, т. е.  $\langle z_i \rangle = 0$  и  $\langle z_i(t_1)z_j^*(t_2) \rangle = \delta_{ij}\delta_{t_1 t_2}$ , где  $\delta_{\alpha\beta}$  — символ Кронекера, угловые скобки и звёздочка обозначают статистическое среднее и комплексное сопряжение соответственно. При единичной дисперсии шумов величины  $\rho_i$  в матрице  $\mathbf{R}$  имеют смысл ОСШ в приёмных каналах антенной решётки.

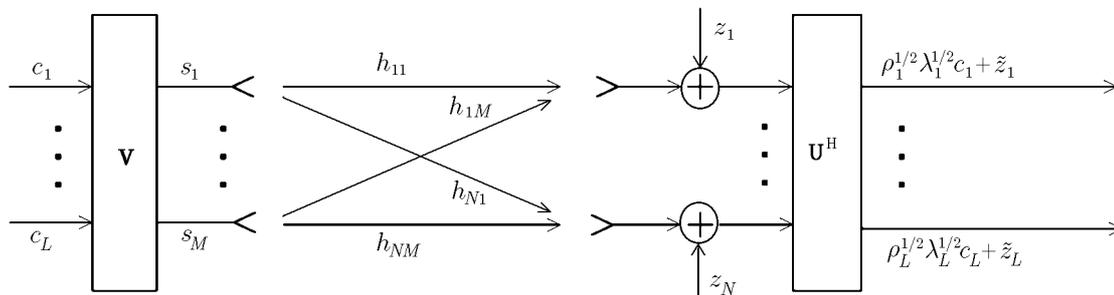


Рис. 1

Вектор сигнала на выходе ДОС имеет вид  $\mathbf{Y}(t) = \mathbf{U}^H \mathbf{X}(t)$ , или с учётом (2)  $\mathbf{Y}(t) = \mathbf{U}^H \mathbf{H} \mathbf{S}(t) + \mathbf{U}^H \mathbf{Z}(t)$ . Принимая во внимание сингулярное разложение матрицы  $\mathbf{H}$ , с помощью (1) получим

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{\Lambda}^{1/2} \mathbf{R}^{1/2} \mathbf{C}(t) + \tilde{\mathbf{Z}}(t), \quad (3)$$

где  $\tilde{\mathbf{Z}}(t) = \mathbf{U}^H \mathbf{Z}(t)$  — вектор собственных шумов на выходе ДОС.

Приёмная ДОС не изменяет статистические свойства собственных шумов, которые являются статистически независимыми на разных выходах ДОС. Поэтому собственные каналы обеспечивают независимую передачу информации, а ММО-система может быть представлена как совокупность  $L$  независимых одноканальных систем. Из (3) следует, что ОСШ на выходе  $i$ -го собственного канала равно  $\eta_i = \rho_i \lambda_i$ .

Скорость передачи данных в системах связи определяется пропускной способностью, равной максимальному числу бит, которые можно передать без ошибки через пространственный канал за одну секунду в полосе частот 1 Гц (бит  $\cdot$  с $^{-1}$   $\cdot$  Гц $^{-1}$ ). Так как собственные каналы являются независимыми, то пропускная способность ММО-системы является суммой пропускных способностей отдельных каналов и равна [11, 12]

$$C = \sum_{i=1}^L \log_2(1 + \rho_i \lambda_i). \quad (4)$$

Рассмотрим алгоритм максимально правдоподобной (МП) [11, 12] оценки символа  $\mathbf{C}(t)$ , который часто используется в системах связи. Совместная функция плотности вероятности  $L$ -мерного комплексного вектора  $\tilde{\mathbf{Z}}(t)$  собственных шумов на выходе приёмной ДОС с единичной корреляционной матрицей равна [13]

$$p[\tilde{\mathbf{Z}}(t)] = \pi^{-L} \exp\{-\tilde{\mathbf{Z}}^H(t) \tilde{\mathbf{Z}}(t)\}. \quad (5)$$

С учётом (3) условную плотность вероятности случайного процесса  $\mathbf{Y}(t)$  при условии, что был передан некоторый символ  $\hat{\mathbf{C}}(t)$ , можно представить в виде

$$p[\mathbf{Y}(t) | \hat{\mathbf{C}}(t)] = \pi^{-L} \exp\left\{-\left|\mathbf{Y}(t) - \mathbf{\Lambda}^{1/2} \mathbf{R}^{1/2} \hat{\mathbf{C}}(t)\right|^2\right\}. \quad (6)$$

Это выражение является функцией правдоподобия для  $L$ -мерного символа  $\hat{\mathbf{C}}(t)$ . Максимально правдоподобная оценка предполагает выбор такого символа  $\hat{\mathbf{C}}(t)$ , который будет максимизировать функцию правдоподобия (6). Из (6) следует, что при независимых собственных каналах каждая компонента вектора  $\mathbf{C}(t)$  может оцениваться независимо от других, а алгоритм МП оценки заключается в минимизации евклидова расстояния между принимаемым сигналом и всеми возможными гипотезами в

отдельном собственном канале, т. е. имеет вид

$$\min_{\hat{c}_i} \left| y_i(t) - \sqrt{\rho_i \lambda_i} \hat{c}_i(t) \right|^2, \quad (7)$$

где  $i = 1, 2, \dots, L$ .

Пусть теперь служебная информация о весовых векторах  $\mathbf{V}_k$  сообщается на передатчик по обратной линии с помощью конечного числа бит, т. е. весовые векторы известны на передающем конце линии с некоторыми искажениями из-за дискретизации их значений. Возможны два варианта использования обратной линии. В первом из них передаётся информация об амплитуде и фазе каждого из весовых коэффициентов, а во втором — информация об их реальной и мнимой частях. Ниже будем рассматривать первый вариант.

Представим  $m$ -тую компоненту вектора  $\mathbf{V}_k$  в виде  $(\mathbf{V}_k)_m = a_{km} \exp(j\varphi_{k,m})$ . Нормируем амплитуду весовых векторов на максимальную амплитуду  $\max_{k,m}(a_{km})$  и предположим, что для передачи амплитуды и фазы используется  $n_a$  и  $n_\varphi$  бит соответственно. Учтём, что амплитуды весовых векторов распределены равномерно в интервале  $[0, 1]$ , а фазы — в интервале  $[0, 2\pi]$ . Тогда размер дискрета при квантовании амплитуды и фазы составляет  $1/2^{n_a}$  и  $2\pi/2^{n_\varphi}$  соответственно. Например, если  $n_a = 1$  и  $n_\varphi = 3$ , то по обратному каналу передаются два значения амплитуды (0,25 и 0,75) и восемь значений фазы ( $0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ, 180^\circ, 225^\circ, 270^\circ$  и  $315^\circ$ ). Общее число служебных бит, необходимое для передачи всех весовых векторов, зависит от соотношения между числом передающих ( $M$ ) и приёмных ( $N$ ) антенн. Если передающих антенн меньше ( $M < N$ ), то имеется  $M$  собственных каналов, каждый из которых формируется с помощью  $M$ -мерного вектора. Поэтому для передачи всех весовых векторов требуется  $M^2(n_a + n_\varphi)$  бит. В обратном случае большего числа передающих антенн ( $M > N$ ) может быть сформировано  $N$  собственных каналов, и для передачи всех весовых векторов требуется большее число бит, равное  $MN(n_a + n_\varphi)$ .

При дискретном обратном канале матрица  $\mathbf{V}$  передающей ДОС известна с некоторой ошибкой, которую можно представить в виде матрицы  $\Delta\mathbf{V}$ , т. е. вместо точной матрицы  $\mathbf{V}$  на передающем конце линии имеется матрица  $\tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{V} + \Delta\mathbf{V}$ . Тогда для вектора сигналов  $\mathbf{S}(t)$  на выходе передающей ДОС вместо (1) получим  $\mathbf{S}(t) = \tilde{\mathbf{V}}\mathbf{R}^{1/2}\mathbf{C}(t)$ . С учётом этого выражение и сингулярного разложения переходной матрицы  $\mathbf{H}$  смесь сигнала и шума на выходе собственных каналов записывается в виде

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{\Lambda}^{1/2}\mathbf{R}^{1/2}\mathbf{C}(t) + \mathbf{\Lambda}^{1/2}(\mathbf{V}^H \Delta\mathbf{V})\mathbf{R}^{1/2}\mathbf{C}(t) + \tilde{\mathbf{Z}}(t). \quad (8)$$

Матрица  $\mathbf{V}^H \Delta\mathbf{V}$  в (8) является недиагональной:  $(\mathbf{V}^H \Delta\mathbf{V})_{ik} = \mathbf{V}_i^H \Delta\mathbf{V}_k$ . Поэтому (8) удобно преобразовать к следующему виду:

$$y_i(t) = \sqrt{\lambda_i \rho_i} c_i (1 + \mathbf{V}_i^H \Delta\mathbf{V}_i) + \sqrt{\lambda_i} \sum_{\substack{k=1, \\ k \neq i}}^L c_k \sqrt{\rho_k} (\mathbf{V}_i^H \Delta\mathbf{V}_k) + \tilde{z}_i, \quad (9)$$

где  $i = 1, 2, \dots, L$ . Первое слагаемое в (9) представляет собой полезный сигнал, передаваемый по  $i$ -му собственному каналу. Второе слагаемое является перекрёстной помехой, которая обусловлена неортогональностью собственных каналов из-за дискретности обратной линии. Поэтому не только символ  $c_i$ , но и символы  $c_k$ , где  $k \neq i$ , передаются по  $i$ -му каналу, т. е. каждый канал создаёт помеху для других собственных каналов. Наконец, последнее слагаемое описывает собственный шум, некоррелированный в разных собственных каналах.

Из (9) найдём, что ОСШП на выходе  $i$ -го собственного канала равно

$$\eta_k = \frac{\rho_k \lambda_k |1 + \mathbf{V}_k^H \Delta \mathbf{V}_k|^2}{1 + \rho_k \lambda_k \sum_{\substack{i=1, \\ i \neq k}}^L |\mathbf{V}_i^H \Delta \mathbf{V}_i|^2}. \quad (10)$$

Как следует из (10), ОСШП на выходе собственных каналов перестаёт увеличиваться с увеличением мощности  $\rho_i$  при достаточно больших значениях  $\rho_i$  из-за дискретности обратной линии. Кроме того, с ростом числа  $M$  передающих антенн относительная ошибка дискретизации, определяемая величиной  $|\Delta \mathbf{V}_k|/|\mathbf{V}_k|$ , будет уменьшаться. Следовательно, влияние дискретности обратной линии зависит от соотношения между числом передающих и приёмных антенн и будет меньше для ММО-систем с большим числом передающих антенн. Из (9) также видно, что для оценки переданных символов необходимо сначала их «распутать», т. е. решить систему линейных уравнений (9) относительно всех неизвестных  $c_i$ .

## 2. ПОДАВЛЕНИЕ ВЗАИМНЫХ ПОМЕХ В СОБСТВЕННЫХ КАНАЛАХ

Влияние дискретности обратной линии может быть уменьшено за счёт увеличения числа служебных бит для передачи весовых коэффициентов. Однако такой подход является нежелательным, т. к. в это время обратная линия оказывается занятой, и по ней невозможна передача другой (не служебной) информации. Поэтому рассмотрим другой способ, который заключается в полном подавлении взаимных помех в собственных каналах. Принципиальная возможность такого способа основана на том, что ошибки  $\Delta \mathbf{V}_i$  в весовых векторах из-за дискретизации обратной линии являются известными. Поэтому возможна «подстройка» приёмной ДОС под передающую ДОС и компенсация этих ошибок.

Будем использовать вместо точных векторов  $\mathbf{U}_i$  приёмной ДОС векторы  $\tilde{\mathbf{U}}_i = \mathbf{U}_i + \Delta \mathbf{U}_i$ . Векторы  $\mathbf{U}_i$  взаимно ортогональны, а векторы  $\tilde{\mathbf{U}}_i$  таким свойством не обладают. Следовательно, приёмная ДОС будет формировать набор неортогональных лучей. Векторы  $\Delta \mathbf{U}_i$  выберем таким образом, чтобы обеспечить полное подавление перекрёстных помех, определяемых вторым слагаемым в (9).

Введём в рассмотрение эквивалентный канал, который состоит из передающей ДОС, пространственного канала и приёмной ДОС (матрицы  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{U}^H$  соответственно). Этот канал описывается матрицей  $\mathbf{U}^H \mathbf{H} \mathbf{V}$ , которая является диагональной при недискретном обратном канале, что обеспечивает ортогональность собственных каналов и отсутствие перекрёстных помех. При дискретном обратном канале матрица  $\mathbf{U}^H \mathbf{H} \tilde{\mathbf{V}}$  становится недиагональной. Её диагональные элементы дают амплитуды сигналов в собственных каналах, а недиагональный  $ik$ -й элемент представляет собой перекрёстную помеху в  $i$ -м канале, созданную  $k$ -м каналом.

Матрицу  $\tilde{\mathbf{U}} = (\tilde{\mathbf{U}}_1, \tilde{\mathbf{U}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{U}}_L)$  весовых векторов приёмной ДОС, обеспечивающую подавление перекрёстных помех, можно найти из условия, что матрица эквивалентного канала является диагональной, например единичной матрицей  $\mathbf{I}$ , т. е.

$$\tilde{\mathbf{U}}^H \mathbf{H} \tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{I}. \quad (11)$$

Обе части этого уравнения умножим справа на матрицу  $(\mathbf{H} \tilde{\mathbf{V}})^H$ . В результате получим, что искомая матрица

$$\tilde{\mathbf{U}} = [(\mathbf{H} \tilde{\mathbf{V}})(\mathbf{H} \tilde{\mathbf{V}})^H]^{-1} \mathbf{H} \tilde{\mathbf{V}}. \quad (12)$$

Найдём корреляционную матрицу  $\mathbf{D}$  шумов на выходе ДОС. Учитывая статистическую независимость входных шумов, получим

$$\mathbf{D} = \langle \tilde{\mathbf{z}}(t) \tilde{\mathbf{z}}^H(t) \rangle = (\mathbf{H} \tilde{\mathbf{V}})^H [(\mathbf{H} \tilde{\mathbf{V}})(\mathbf{H} \tilde{\mathbf{V}})^H]^{-2} (\mathbf{H} \tilde{\mathbf{V}}). \quad (13)$$

Отсюда следует, что собственные шумы являются коррелированными в разных собственных каналах, т. е. эти каналы оказываются развязанными по полезным сигналам, но связанными по шумам. Условие (11) означает, что мощность полезного сигнала в собственных каналах является единичной. Поэтому ОСШ в  $i$ -м собственном канале будет определяться соответствующим диагональным элементом матрицы (13):

$$\tilde{\eta}_i = \rho_i \left\{ (\mathbf{H}\tilde{\mathbf{V}})^H \left[ (\mathbf{H}\tilde{\mathbf{V}}) (\mathbf{H}\tilde{\mathbf{V}})^H \right]^{-2} (\mathbf{H}\tilde{\mathbf{V}}) \right\}_{ii}. \quad (14)$$

Если ММО-система состоит из одинакового числа передающих и приёмных антенн ( $M = N$ ), то матрица  $\mathbf{H}\tilde{\mathbf{V}}$  является квадратной, и выражение (12) для матрицы приёмной ДОС имеет более простой вид:  $\tilde{\mathbf{U}} = [(\mathbf{H}\tilde{\mathbf{V}})^H]^{-1}$ .

Введём в рассмотрение диагональную матрицу, состоящую из значений ОСШ в собственных каналах:  $\tilde{\mathbf{\Lambda}} = \text{diag}\{\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2, \dots, \tilde{\eta}_L\}$ . Тогда для смеси сигнала и собственного шума на выходе  $i$ -го собственного канала вместо (8) имеем

$$\tilde{\mathbf{Y}}(t) = \tilde{\mathbf{\Lambda}}^{1/2} \mathbf{R}^{1/2} \mathbf{C}(t) + \tilde{\mathbf{Z}}(t). \quad (15)$$

Так как собственные каналы являются связанными по шумам, то алгоритм МП оценки принятых сигналов является более сложным, чем в случае ортогональных собственных каналов, когда компоненты вектора сигналов оцениваются независимо с помощью (7). Совместная функция плотности вероятности  $L$ -мерного комплексного вектора  $\tilde{\mathbf{Z}}(t)$  собственных шумов на выходе приёмной ДОС с корреляционной матрицей  $\mathbf{D}$  имеет вид [13]

$$p[\tilde{\mathbf{Z}}(t)] = \pi^{-L} (\det \mathbf{D})^{-1} \exp\left(-\tilde{\mathbf{Z}}^H(t) \mathbf{D}^{-1} \tilde{\mathbf{Z}}(t)\right), \quad (16)$$

где  $\det \mathbf{D}$  — определитель матрицы  $\mathbf{D}$ .

Найдём из (15) вектор  $\tilde{\mathbf{Z}}$  и подставим в (16). В результате получим выражение для условной плотности вероятности случайного процесса  $\tilde{\mathbf{Y}}(t)$  при условии, что был передан символ  $\hat{\mathbf{C}}(t)$ . Затем можно найти выражение для МП оценки:

$$\min_{\hat{\mathbf{C}}} \left\{ \left( \tilde{\mathbf{Y}}(t) - \tilde{\mathbf{\Lambda}}^{1/2} \mathbf{R}^{1/2} \hat{\mathbf{C}}(t) \right)^H \mathbf{D}^{-1} \left( \tilde{\mathbf{Y}}(t) - \tilde{\mathbf{\Lambda}}^{1/2} \mathbf{R}^{1/2} \hat{\mathbf{C}}(t) \right) \right\}. \quad (17)$$

Из (17) следует, что корреляция собственных шумов приводит к необходимости совместной оценки компонент переданного сигнала. При этом для оценки пропускной способности ММО-системы можно воспользоваться выражением (4), в котором необходимо учесть энергетические потери за счёт подавления взаимных помех, т. е. заменить ОСШ  $\eta_i = \rho_i \lambda_i$  на ОСШ  $\tilde{\eta}_i$ , определённое выражением (14).

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Влияние дискретности обратной линии при передаче по ней служебной информации о весовых векторах передающей ДОС будем характеризовать ОСШП на выходе всех собственных каналов и суммарной пропускной способностью ММО-систем. Выберем два варианта использования обратной линии. В первом из них с помощью двух бит передаются четыре значения фазы каждого весового коэффициента, а амплитуда считается равной единице, т. е.  $n_\varphi = 2, n_a = 0$ . Во втором с помощью трёх бит передаются восемь значений фазы весовых коэффициентов, а на передачу информации об амплитудах затрачивается один бит, т. е.  $n_\varphi = 3, n_a = 1$ .

Рассмотрим две ММО-системы. Первая из них состоит из двух передающих и четырёх приёмных антенн ( $M = 2, N = 4$ ), а вторая, наоборот, из четырёх передающих и двух приёмных антенн

( $M = 4, N = 2$ ). Число собственных каналов в обеих ММО-системах равно двум. Наибольший интерес представляет случай распространения сигналов в случайной однородной рассеивающей среде, когда коэффициенты передачи  $h_{nm}$  между передающими и приёмными антеннами имеют релеевское распределение амплитуд и равномерное распределение фаз и некоррелированы между собой [14], т. е. коэффициенты корреляции  $\langle h_{nm}h_{pq}^* \rangle$  равны  $\delta_{np}\delta_{mq}$ . Будем считать также, что используется равномерное распределение мощности между собственными каналами, а полная мощность является постоянной и равна  $P_0$ , т. е.  $\rho_1 = \rho_2 = P_0/2$ . Введём параметр  $\rho$ , который имеет смысл ОСШ для системы с одной передающей и одной приёмной антенной и численно равен мощности  $P_0$  при единичной мощности шумов. Так как ОСШП на выходе собственных каналов и суммарная пропускная способность системы являются случайными величинами, то представляют интерес усреднённые по релеевским замираниям средние величины.

На рис. 2 и 3 показано среднее ОСШП на выходе первого и второго собственных каналов соответственно в зависимости от ОСШ  $\rho$  для ММО-системы с  $M = 2$  и  $N = 4$  без подавления взаимных помех (кривая 1), а также при использовании алгоритма подавления этих помех (кривая 2). Кривая 3 соответствует случаю недискретной обратной линии. Предполагается, что для передачи фазы каждой компоненты весовых векторов используются два бита ( $n_\varphi = 2$ ), а информация об амплитуде не передаётся ( $n_a = 0$ ). На рис. 4 приведены результаты для средней пропускной способности. Кривые 1 и 2 построены для случая обратной линии, использующей два бита для передачи служебной информации ( $n_\varphi = 2, n_a = 0$ ), без подавления и с подавлением взаимных помех соответственно, а кривые 3 и 4 — для обратной линии, использующей четыре бита ( $n_\varphi = 3, n_a = 1$ ). Кривая 5 соответствует случаю недискретной обратной линии. Видно, что предложенный способ подавления взаимных помех приводит к значительному увеличению ОСШП в собственных каналах и пропускной способности системы и даёт возможность значительно уменьшить полную мощность при фиксированных ОСШ в этих каналах или пропускной способности системы. Например, зафиксируем пропускную способность на уровне  $C = 9 \text{ бит} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{Гц}^{-1}$ . Для недискретной обратной линии необходимое ОСШ составляет  $\rho = 11,5 \text{ дБ}$ . При передаче 4-х бит по обратной линии ОСШ должно быть увеличено до  $\rho = 16,5 \text{ дБ}$ , т. е. приблизительно на 5 дБ, а при передаче только 2-х бит такая пропускная способность вообще не может быть реализована. При подавлении взаимных помех требуемое ОСШ уменьшается до  $\rho = 12,5 \text{ дБ}$  при  $n_\varphi = 2, n_a = 0$  и до  $\rho = 11,7 \text{ дБ}$  при  $n_\varphi = 3, n_a = 1$ . Следовательно, при использовании 4-х бит подавление взаимных помех позволяет практически устранить энергетические потери из-за дискретности обратной линии. Аналогичные обозначения используются на рис. 5, на котором приведены результаты для средней пропускной способности ММО-системы с четырьмя передающими и с двумя приёмными антеннами ( $M = 4, N = 2$ ).

Сравнивая рис. 4 и 5, можно увидеть, что влияние дискретности обратной линии и эффективность подавления взаимных помех в собственных каналах зависит от соотношения между числом передающих и приёмных антенн в ММО-системе. Если передающих антенн меньше ( $M < N$ ), то дискретность обратной линии оказывает большее влияние и, соответственно, эффективность подавления взаимных помех выше, чем в противоположном случае ( $M > N$ ).

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в настоящей работе исследовано влияние дискретности обратной линии приёмник—передатчик на эффективность ММО-систем, использующих адаптивные передающую и приёмную ДОС для формирования параллельных собственных каналов. Показано, что дискретность обратной линии приводит к появлению взаимных помех в собственных каналах, т. е. к нарушению их независимости. В результате символы, передаваемые через отдельные каналы, перемешиваются между собой, что приводит к необходимости использовать более сложные алгоритмы для их совместной оцен-

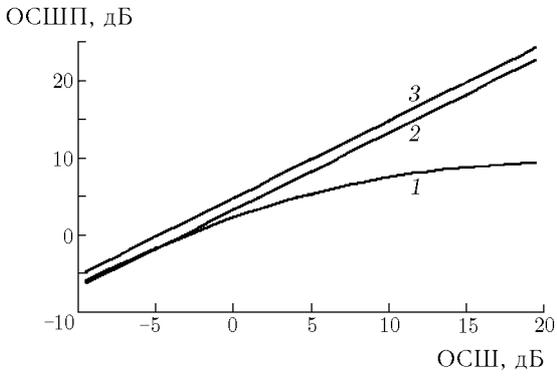


Рис. 2

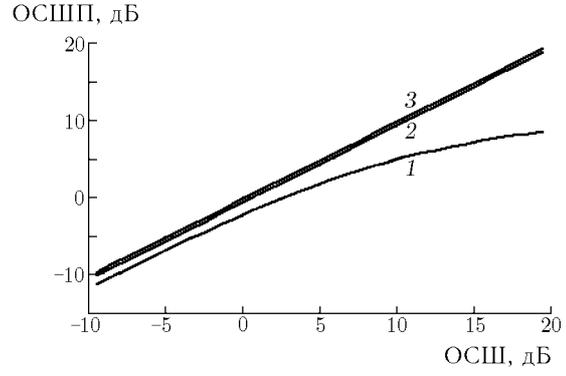


Рис. 3

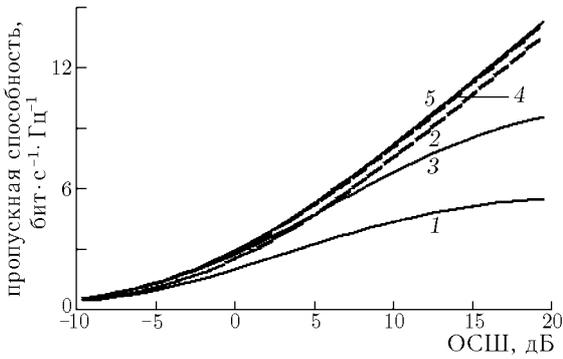


Рис. 4

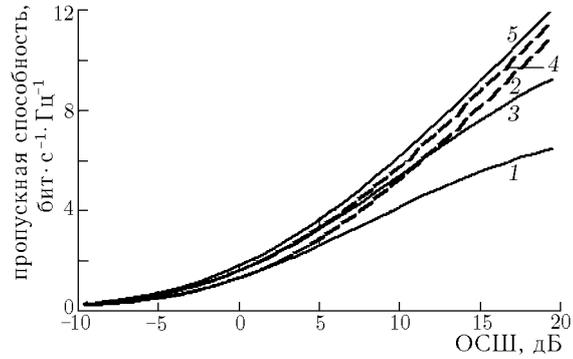


Рис. 5

ки. Кроме того, взаимные помехи уменьшают ОСШП на выходе собственных каналов и тем самым пропускную способность ММО-системы.

Предложен метод подавления взаимных помех в собственных каналах, уменьшающий влияние дискретности обратной линии и обеспечивающий значительное увеличение ОСШП в собственных каналах и пропускной способности ММО-системы. Получены выражения для энергетических потерь в ОСШ из-за компенсации взаимных помех. Показано, что подавление помех восстанавливает независимость собственных каналов по отношению к передаваемым символам, но приводит к корреляции выходных собственных шумов. Найдены выражения для шумовой корреляционной матрицы и МП оценки принятых сигналов на фоне коррелированных шумов. Приводятся результаты математического моделирования для случая релейских замираний сигналов, показывающие высокую эффективность предложенного метода, которая зависит от соотношения числа передающих и приёмных антенн и при одинаковой ошибке дискретизации уменьшается с ростом числа передающих антенн.

Данная работа выполнена при поддержке программы «Ведущие научные школы» (грант № 00–15–96620) и РФФИ (грант № 00–02–17602).

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Liberti J. C., Rappaport T. S. Smart Antennas for Wireless Communications: IS-95 and Third Generation CDMA Applications. Prentice Hall Inc., 1999.

2. Foschini G. J. // Bell Labs Technical J. 1996. P. 41.
3. Andersen J. B. // IEEE Antennas and Propagation Magazine. 2000. V. 42, No. 2. P. 12.
4. Paulraj A. J., Paradias C. B. // IEEE Signal Processing Magazine. 1997. V. 38, No. 11. P. 49.
5. Ермолаев В. Т., Маврычев Е. А., Флакман А. Г. // Зарубежная радиоэлектроника. Успехи современной радиоэлектроники. 2001. № 9. С. 50.
6. Maltsev A. A., Rubtsov A. E., Tiraspolsky S. A. // Proc. of the 5th Scientific Conference on Radio Physics devoted to the 100th Anniversary of A. A. Andronov's Birth, Nizhny Novgorod, Russia, May 7, 2001.
7. Bevan D. D. N., Ermolayev V. T., Flaksman A. G. // IEE Proceedings. Radar, Sonar and Navigation. 1998. V. 145, No. 1. P. 63.
8. Schramm P. // IEEE Trans. on Comm. 1998. V. 46, No. 9. P. 1 122.
9. Thompson J. S., Bevan D. D. N. // IEEE Sensor Array and Multichannel Signal Processing Workshop (SAM2000). Cambridge MA, 2000. P. 424.
10. Воеводин В. В. Линейная алгебра. М.: Наука, 1980.
11. Финк Л. М. Теория передачи дискретных сообщений. М.: Советское радио, 1970.
12. Proakis J. D. Digital Communications. International Edition. McGraw-Hill, 1995.
13. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника. М.: Радио и связь, 1982.
14. Parsons J. D. The Mobile Radio Propagation Channel. London: Pentech Press, 1994.

Нижегородский госуниверситет им. Н. И. Лобачевского,  
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию  
26 апреля 2002 г.

#### CROSSTALK ELIMINATION IN PARALLEL SPATIAL CHANNELS IN MIMO COMMUNICATION SYSTEMS

*A. G. Flaksman*

We study the influence of discreteness of information on the channel condition, which is transmitted over the receiver-transmitter return line, on the effectiveness of MIMO systems. It is shown that such discreteness results in energy losses and appearance of crosstalk in parallel eigenchannels of the MIMO system. We propose the method of crosstalk elimination, which ensures a pronounced decrease in energy losses and restores the independence of eigenchannels with respect to transmitted symbols, but leads to correlation of output own noise. Expressions for a maximum likely estimate of received signals allowing for the noise correlation are found. Mathematical simulation results are presented for the case of Rayleigh fading of signals showing the high effectiveness of the proposed method.

УДК 538.56:519.25

## РЕЛАКСАЦИЯ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ, ВЫЗВАННОГО ДИХОТОМИЧЕСКОЙ СЛУЧАЙНОЙ СИЛОЙ

*О. В. Музычук*

Рассмотрена релаксация среднеквадратичных характеристик координат броуновского движения частиц в симметричном потенциальном профиле под действием дихотомической случайной силы. Использован аналитико-численный метод анализа, основанный на численном решении цепочки дифференциальных уравнений для моментов координат и совместных корреляций. Вычислительная процедура контролируется на основе точных результатов, которые можно найти в предельных случаях дельта-коррелированного и квазистатического случайного воздействия. Выяснена зависимость дисперсии распределения и времени её релаксации от интенсивности и времени корреляции шума.

Как известно, исследование вероятностных характеристик неравновесного броуновского движения в регулярных и случайных потенциалах представляет интерес для ряда приложений в электронике, физической химии и других областях. При этом случайную силу обычно полагают гауссовым дельта-коррелированным шумом [1, 2]. Для классической (т. е. термодинамической) модели это соответствует действительности. При более общей трактовке броуновского движения, а также в определённых химических и биологических моделях [3] действующий на систему шум может иметь любой масштаб корреляции. Исследовать при этом релаксацию вероятностных характеристик возможно, лишь комбинируя аналитический и численный подходы.

Рассмотрим релаксацию моментов координат частиц, совершающих броуновское движение в симметричном потенциальном профиле под действием телеграфной (дихотомической) случайной силы, используя аналитико-численный подход, изложенный в [4]. В работе [5] исследовалась релаксация вероятностных характеристик «розового» броуновского движения, вызванного гауссовым экспоненциально-коррелированным шумом. Дихотомический процесс с пуассоновской статистикой перескоков имеет такую же функцию корреляции, однако в силу весьма простых соотношений для разложения совместных моментов [6] использование такой модели случайной силы существенно упрощает анализ и даёт возможность адекватного статистического описания системы в весьма широком диапазоне значений интенсивности и времени корреляции шума.<sup>1</sup>

Рассмотрим стохастическое уравнение

$$T\dot{x} + F(x) = \xi(t), \quad F(x) = x[1 + f(x)], \quad (1)$$

описывающее координату броуновской частицы, движущейся в потенциальном профиле с возвращающей силой  $-F(x)$ . Положим процесс  $\xi(t)$  дихотомическим, принимающим значения  $\pm\sigma$  с пуассоновской статистикой перескоков. При этом

$$\langle \xi \rangle = 0, \quad \langle \xi(t) \xi(t + \tau) \rangle = \sigma^2 \exp(-\Pi |\tau|). \quad (2)$$

Нелинейную часть силы считаем чётной функцией:

$$f(x) = \sum_{k=1}^m \beta_k x^{2k}, \quad (3)$$

<sup>1</sup> При малых временах корреляции среднеквадратичные характеристики системы для обеих моделей действующего шума отличаются мало, а при дельта-коррелированном шуме — совпадают [7].

что соответствует симметричному потенциалу. Положим также, что он имеет единственный минимум при  $x = 0$ .

Обозначив

$$I_n = \langle x^{2n} \rangle, \quad J_n = \langle \xi x^{2n-1} \rangle, \quad (4)$$

где  $n = 1, 2, \dots$ , от уравнения (1) можно перейти к следующей системе уравнений для описания релаксации чётных моментов:

$$\frac{I'_n}{2n} = -I_n - \sum_{k=1}^m \beta_k I_{n+k} + J_n, \quad \frac{J'_n}{2n-1} = - \left( 1 + \frac{\nu}{2n-1} \right) J_n - \sum_{k=1}^m \beta_k J_{n+k} + p I_{n-1}, \quad (5)$$

где  $n = 1, 2, \dots$ . Здесь и ниже штрих обозначает производную по безразмерному времени  $\theta = t/T$ ,

$$p = \sigma^2, \quad \nu = \Pi T \quad (6)$$

— мощность шума и относительная ширина спектра соответственно. Ниже также используем безразмерные параметры

$$\tau = \nu^{-1}, \quad D = p\tau \quad (7)$$

(последний пропорционален спектральной плотности шума на нулевой частоте).

Заметим предварительно, что в линейном случае легко найти точные результаты для релаксации искомого момента. Так, система уравнений для дисперсии ( $D_x = I_1, J = J_1$ ) имеет вид

$$D'_x + 2D_x = 2J, \quad J' + (1 + \nu)J = p. \quad (8)$$

При этом ( $D_0 = D_x(0), J(0) = 0$ )

$$D_x(\theta) = D_0 \exp(-2\theta) + D_1(\theta),$$

$$D_1(\theta) = \frac{D}{\tau + 1} \left[ 1 + \frac{\tau + 1}{\tau - 1} \exp(-2\theta) - \frac{2\tau}{\tau - 1} \exp[-(1 + 1/\tau)\theta] \right]. \quad (9)$$

Соответствующее стационарное значение

$$D_x \equiv D_x(\infty) = \frac{D}{1 + \tau} = \frac{p}{1 + \nu}. \quad (10)$$

Для стационарных значений чётных моментов нетрудно записать следующие рекуррентные формулы:

$$I_n = \frac{(2n-1)DI_{n-1}}{1 + (2n-1)\tau}, \quad (11)$$

где  $n = 1, 2, \dots$ . Отметим, что в предельных случаях дельта-коррелированного ( $\tau \rightarrow 0, D = \text{const}$ ) и квазистатического ( $\nu \rightarrow 0, p = \text{const}$ ) шума имеем соответственно

$$I_n \Big|_{\tau=0} = (2n-1)!! D^n, \quad I_n \Big|_{\nu=0} = p^n. \quad (12)$$

Для решения системы (5) в общем случае используем матричное описание. Введя векторы

$$\mathbf{X}_1 = \{I_1, J_1\}, \quad \mathbf{X}_2 = \{I_2, I_3, \dots, I_{m+1}; J_2, J_3, \dots, J_{m+1}\},$$

$$\mathbf{X}_{N+1} = \{I_{mN}, I_{mN+1}, \dots, I_{2mN}; J_{mN}, \dots, J_{2mN}\},$$

где  $2m$  — наибольшая степень в разложении нелинейной части силы  $f(x)$ , запишем (5) в форме трёх-членного взаимодействия:

$$\mathbf{X}'_n + \mathbf{A}_n \mathbf{X}_n + \mathbf{B}_n \mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{C}_n, \tag{13}$$

где  $n = 1, 2, \dots$ . Здесь  $\mathbf{A}_n, \mathbf{B}_n, \mathbf{C}_n$  — квадратные матрицы <sup>2</sup>, элементы которых находятся с помощью системы (5). Для замыкания цепочки уравнений (13) на  $N$ -м шаге можно отбросить вектор  $\mathbf{X}_{N+1}$  (при невысоких порядках приближения целесообразно не отбрасывать этот вектор, а использовать для его компонент «линейное» разложение (11)). Заметим, что для сходимости указанной процедуры необходима (хотя и не достаточна) сходимость соответствующих матричных цепных дробей для стационарных значений искомых характеристик. <sup>3</sup>

Релаксация нечётных моментов описывается аналогичным образом, если ввести переменные

$$\tilde{I}_n = \langle x^{2n-1} \rangle, \quad \tilde{J}_n = \langle \xi x^{2n-2} \rangle, \tag{14}$$

где  $n = 1, 2, \dots$ , а в системе (5) заменить  $2n$  на  $2n - 1$ . Естественно, в симметричном потенциальном профиле стационарные значения  $\tilde{I}_n$  равны нулю.

Начальные условия задаём детерминированными (соответствующими начальному дельта-распределению частиц  $W_0(x) = \delta(x - x_0)$ ):

$$\tilde{I}_n(0) = x_0^{2n-1}, \quad I_n(0) = x_0^{2n}, \tag{15}$$

либо гауссовыми (соответствующими гауссову начальному распределению с  $\langle x \rangle_0 = 0, D_x = D_0$ ):

$$I_1(0) = D_0, \quad I_n(0) = (2n - 1)!! D_0^n, \quad \tilde{I}_n(0) = 0, \tag{16}$$

где  $n = 1, 2, \dots$ . Начальные значения  $J_n(0)$  являются нулевыми.

Стационарные значения векторов  $\mathbf{X}_n$  для чётных моментов определяются матричной цепной дробью:

$$\mathbf{X}_n = \frac{\mathbf{C}_n \mathbf{X}_{n-1}}{\mathbf{A}_n + \frac{\mathbf{B}_n \mathbf{C}_{n+1}}{\mathbf{A}_{n+1} + \frac{\mathbf{B}_{n+1} \mathbf{C}_{n+2}}{\dots}}}. \tag{17}$$

Для кубичной нелинейности ( $\beta_1 \equiv \beta, \beta_k = 0$  при  $k > 1$ ) размерность векторов  $\mathbf{X}_n$  не зависит от их номера и равна двум, что существенно упрощает численный анализ, поэтому далее рассмотрим этот случай. При этом

$$\mathbf{A}_n = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & a_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_n = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ p & 0 \end{pmatrix}, \quad a_n = \frac{1 + \nu}{2n - 1}, \tag{18}$$

и дробь (17) легко суммируется численно. В частности, во втором приближении стационарное значение дисперсии имеет вид

$$D_x \equiv I_1 = D \left[ 1 + \tau + \frac{3\beta D (1 + 2\tau)}{3 + \tau} \right]^{-1}. \tag{19}$$

Контроль решения уравнений релаксации (13) будем осуществлять на основе точных результатов для стационарных значений моментов, которые можно найти в предельных случаях дельта-коррелиро-

<sup>2</sup> При  $m > 1$  размерность матриц  $\mathbf{A}_n, \mathbf{B}_n$  и  $\mathbf{C}_n$  разная, однако «лишние» элементы в  $\mathbf{B}_n$  и «недостающие» в  $\mathbf{C}_n$  нулевые.

<sup>3</sup> Некоторые вопросы сходимости таких дробей исследовались численно в [8].

ванного и квазистатического шума  $\xi(t)$ . В первом случае они находятся на основе распределения Больцмана

$$w_x(x) = C \exp \left[ -\frac{x^2 + \beta x^4/2}{2D} \right]. \quad (20)$$

Для квазистатической случайной силы с плотностью вероятности

$$w_\xi(x) = \frac{1}{2} [\delta(x - \sigma) + \delta(x + \sigma)], \quad \sigma = \sqrt{p}, \quad (21)$$

из исходного уравнения (1) при  $f(x) = \beta x^3$  нетрудно найти стационарное вероятностное распределение координат

$$w_x(x) = \frac{1}{2} (1 + 3\beta x^2) [\delta(z - \sigma) + \delta(z + \sigma)], \quad z = x + \beta x^3. \quad (22)$$

Интегрируя его, получим

$$\langle x^{2n} \rangle = y^{2n} (1 + 3\beta y^2), \quad (23)$$

где  $y$  — действительный корень уравнения  $\beta y^3 + y = \sigma$ , т. е.

$$y = \sqrt[3]{\sqrt{Q} + \sigma/(2\beta)} - \sqrt[3]{\sqrt{Q} - \sigma/(2\beta)}, \quad Q = \frac{1}{4\beta^2} \left( p + \frac{4}{27}\beta \right). \quad (24)$$

Отметим, что релаксацию под действием квазистатической случайной силы  $\xi$  (с любой заданной плотностью вероятности  $w_\xi(\xi)$ ) можно найти численно непосредственно из уравнения (1). Для этого, полагая  $\xi$  случайной величиной, находим его решение вида  $x(t) = X(t; \xi)$ , а затем любую интересующую нас вероятностную характеристику находим путём усреднения:

$$\langle \varphi \rangle = \int \varphi[X(t; \xi)] w_\xi(\xi) d\xi. \quad (25)$$

Результаты, полученные с помощью матричных цепных дробей для стационарной дисперсии координат, приведены на рис. 1, 2. Рис. 1 иллюстрирует зависимость средней интенсивности  $D_x$  от относительного времени корреляции  $\tau$  при различных значениях  $\beta$ . Спадающие кривые соответствуют случаю  $D = \text{const}$ , растущие —  $p = \text{const}$ . Значками  $\times$  показаны соответствующие квазистатические значения (23). Значения при  $\tau = 0$  совпадают с контрольными (отмечены символами  $\circ$ ), полученными на основе (20). На диаграмме под рис. 1 показан порядок приближения  $N$ , при котором достигается заданная точность  $\varepsilon = 0,002$  (для стационарных значений соседних приближений должно выполняться условие  $|\langle x^2 \rangle_N - \langle x^2 \rangle_{N-1}| \leq \varepsilon$ ). Кривая  $a$  соответствует случаю  $D = \text{const}$ , а кривая  $b$  —  $p = \text{const}$ .

На рис. 2 приведена зависимость средней интенсивности от мощности шума  $p$  при разных значениях относительного времени корреляции (номера кривых растут с ростом  $\tau$ ). При всех значениях параметров рисунков численная процедура сходится с контролируемой точностью.

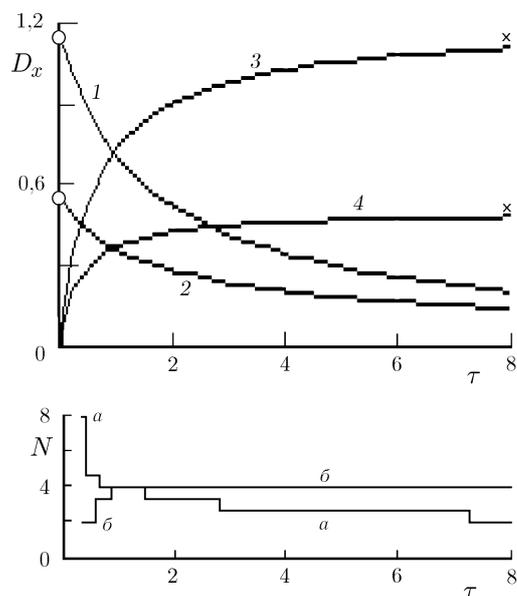


Рис. 1. Зависимость стационарной дисперсии координат от относительного времени корреляции  $\tau$ . Кривая 1 соответствует случаю  $D = 2, \beta = 0$ ; кривая 2 —  $D = 2, \beta = 1$ ; кривая 3 —  $p = 2, \beta = 0$ ; кривая 4 —  $p = 2, \beta = 1$

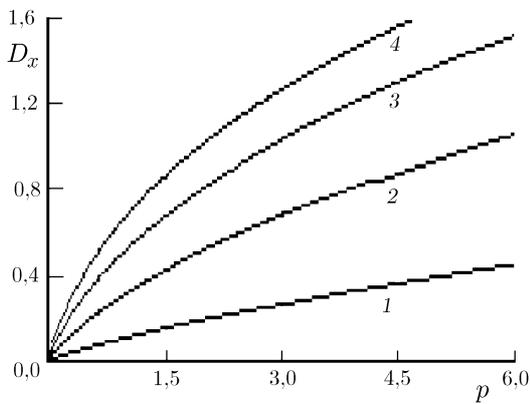


Рис. 2. Зависимость стационарной дисперсии координат от мощности шума. Кривые 1–3 соответствуют  $\tau = 0,1; 0,5$  и 2, кривая 4 — квазистатическая зависимость. Все кривые построены при  $\beta = 0,5$  дисперсии уменьшается и время релаксации.

Отметим, что использованная численная процедура, основанная на матричных цепных дробях, при телеграфной случайной силе сходится в более широкой области параметров системы, чем при гауссовой случайной силе [5]. Это обусловлено существенно меньшим числом дифференциальных уравнений, задействованных для построения приближений соответствующих порядков. Как показывает численный анализ, при  $\beta D \lesssim 5$  использованный здесь подход даёт разумную точность для шума  $\xi(t)$  с любым конечным временем корреляции.

До сих пор начальные условия полагались детерминированными. Если же начальное распределение частиц имеет отличную от нуля дисперсию  $D_0$ , то в процессе релаксации дисперсия имеет минимум. Этот эффект установлен в [5] для случая гауссова шума  $\xi(t)$ ; для дихотомического шума он также имеет место (см. рис. 4, кривые с индексом  $a$ ). Частицы сначала скатываются на дно потенциальной ямы, и лишь спустя некоторое время (порядка времени корреляции шума) их распределение начинает устанавливаться в соответствии с потенциальным профилем. Эффект есть только при «розовом» шу-

На рис. 3, 4 показано установление среднего значения и дисперсии координат. Рис. 3а и табл. 1 иллюстрируют зависимость релаксации указанных величин от относительного времени корреляции шума при фиксированной спектральной плотности  $D$ , рис. 3б и табл. 2 — при фиксированной мощности шума  $p$ . В табл. 1, 2 приведены стационарные значения дисперсии и соответствующие значения при дельта-коррелированном ( $D_{del}$ ) и квазистатическом ( $D_{st}$ ) шуме  $\xi(t)$ , а также времена релаксации среднего значения ( $\tau_{\langle x \rangle}$ ) и дисперсии ( $\tau_D$ ). Как видно из рис. 3а и табл. 1, при  $D = const$  с увеличением  $\tau$  времена релаксации  $\tau_{\langle x \rangle}$  и  $\tau_D$  растут (последнее — более заметно). При фиксированной мощности шума  $p$  тенденция та же, но выражена слабее. С увеличением  $\beta$  кроме естественного уменьшения

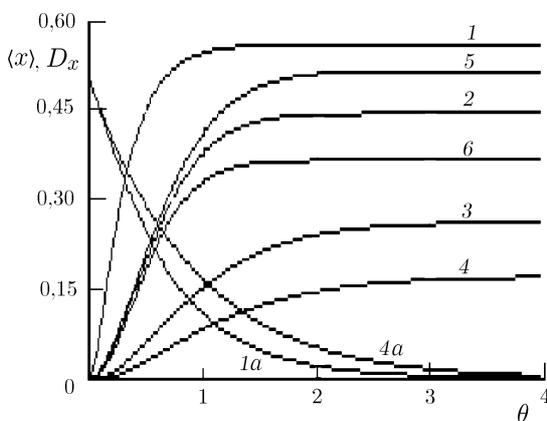


Таблица 1

номер кривой	$D_x$	$D_{del}$	$D_{st}$	$\tau_{\langle x \rangle}$	$\tau_D$
1	0,56	0,58	3,09	0,65	0,36
2	0,44	0,58	0,93	0,64	0,70
3	0,26	0,58	0,36	0,83	1,10
4	0,17	0,58	0,21	0,87	1,30
5	0,51	0,69	1,19	0,83	0,76
6	0,36	0,47	0,70	0,64	0,62

Рис. 3а. Релаксация среднего значения и дисперсии координат при  $D = 1$ . Кривые 1–4 — дисперсия  $D_x$  для  $\beta = 0,5; \tau = 0,05; 0,5; 2$  и 4 соответственно. Кривые 1а–4а — релаксация среднего значения при тех же параметрах (кривые 2а и 3а расположены между кривыми 1а и 4а). Кривые 5, 2, 6 — дисперсия  $D_x$  при  $\tau = 0,5; \beta = 0,25; 0,5$  и 1 соответственно

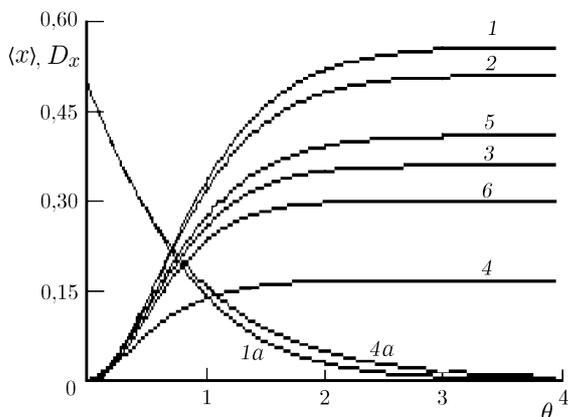


Таблица 2

номер кривой	$D_x$	$D_{del}$	$D_{st}$	$\tau_{\langle x \rangle}$	$\tau_D$
1	0,56	2,41	0,59	0,75	1,08
2	0,51	1,48	0,59	0,76	1,04
3	0,36	0,58	0,59	0,79	0,88
4	0,17	0,20	0,59	0,84	0,72
5	0,41	0,69	0,72	0,86	0,96
6	0,30	0,47	0,47	0,69	0,80

Рис. 3б. Релаксация среднего значения и дисперсии координат при  $p = 1$ . Кривые 1–4 — дисперсия  $D_x$  для  $\beta = 0,5$ ;  $\tau = 10$ ; 4; 1 и 0,25 соответственно. Кривые 1а–4а — релаксация среднего значения при тех же параметрах (см. вставку на рис. 3а). Кривые 5, 3, 6 — дисперсия  $D_x$  при  $\tau = 1$ ;  $\beta = 0,25$ ; 0,5 и 1 соответственно

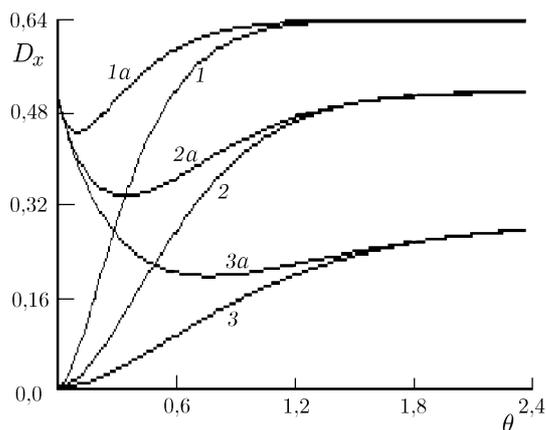


Рис. 4. Релаксация дисперсии координат при  $\beta = 0,25$ . Кривые 1–3 соответствуют  $\tau = 0,1$ ; 0,5 и 2 при  $D_0 = 0$ . Кривые 1а–3а соответствуют тем же значениям  $\tau$  при  $D_0 = 0,5$

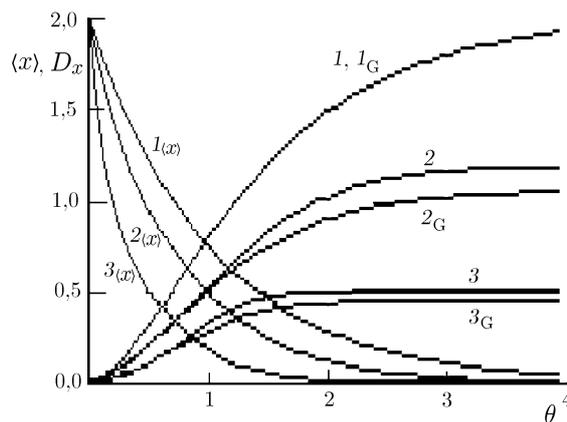


Рис. 5. Релаксация среднего значения и дисперсии координат под действием квазистатической случайной силы при  $p = 2$ . Кривые 1 и  $1_G$  соответствуют  $\beta = 0$ , кривые 2 и  $2_G$  —  $\beta = 0,25$ , кривые 3 и  $3_G$  —  $\beta = 2$ ; кривые  $1_{\langle x \rangle}$ ,  $2_{\langle x \rangle}$  и  $3_{\langle x \rangle}$  — средние значения при  $\beta = 0$ ; 0,25 и 2 соответственно

ме; он не является чисто нелинейным<sup>4</sup>, хотя при нелинейной возвращающей силе (при более крутом потенциальном профиле) выражен сильнее.

На рис. 5 показана релаксация среднего значения и дисперсии координат для случая квазистатического шума  $\xi$ , полученная на основании (25). Рассмотрено усреднение по вероятностному распределению  $w_\xi$  как для дихотомической, так и для гауссовой случайной силы (кривые с индексом G). Параметром рисунка является коэффициент нелинейности  $\beta$ . С ростом  $\beta$ , как и с увеличением мощности шума  $p$ , время релаксации уменьшается. Отметим, что при медленно меняющейся случайной

<sup>4</sup> Как следует из (9), минимум дисперсии в линейном случае достигается при

$$\theta = \frac{\tau}{\tau - 1} \ln \left( 1 + \frac{D_0(\tau - 1)}{D} \right).$$

Очевидно, что при  $\tau = 0$ , как и при  $D_0 = 0$ , минимум отсутствует.

силе среднее значение устанавливается несколько быстрее, чем дисперсия распределения. Наибольшее отличие кривых, соответствующих гауссовому и дихотомическому шуму, имеет место при «средних» значениях параметра нелинейности  $\beta$ . Релаксация средних значений в обоих случаях практически одинакова. Заметим, что в линейной системе для релаксации среднеквадратичных величин обе модели шума адекватны при любых временах корреляции  $\tau$ .

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 00–15–96620, 02–02–17517) и Минобразования (грант № Е00–3.5–216).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Климонтович Ю. Л. // УФН. 1994. Т. 164, № 8. С. 811.
2. Malakhov A. N. // Chaos. 1997. V. 7. P. 488.
3. Хорстхемке В., Лефевр Р. Индуцированные шумом переходы: теория и применение в физике, химии и биологии. М.: Мир, 1987. 397 с.
4. Музычук О. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1999. Т. 42, № 9. С. 922.
5. Малахов А. Н., Музычук О. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 2001. Т. 44, № 11. С. 984.
6. Кляцкин В. И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. М.: Наука, 1980.
7. Малахов А. Н., Музычук О. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1980. Т. 23, № 8. С. 968.
8. Музычук О. В. // Прикл. математика и механика. 1991. Т. 55. Вып. 4. С. 620.

Нижегородский архитектурно-строительный университет,  
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию  
22 мая 2002 г.

#### RELAXATION OF THE PROBABILITY CHARACTERISTICS OF A BROWNIAN MOTION UNDER THE ACTION OF DIHOTOMIC RANDOM FORCE

*O. V. Muzychuk*

Relaxation of the mean-square characteristics of coordinates of the Brownian motion of particles in a symmetric potential profile under the action of dihatomic random force is discussed. An analytical-numerical analysis method based on the numerical solution of a chain of differential equations for coordinate moments and combined correlations is used. Calculation procedure is controlled on the basis of exact results, which can be found in the limiting cases of the delta-correlated and quasistatic stochastic action. The dependence of the distribution variance and its relaxation time on the noise intensity and correlation time is obtained.