МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Известия высших учебных заведений

РАДИОФИЗИКА

ежемесячный научно-технический журнал

Издаётся с апреля 1958 г.

Том XLV № 8 Нижний Новгород 2002

Содержание

Мень А. В., Брауде С. Я., Рашковский С. Л., Шарыкин Н. К., Шепелев В. А., Инютин Г. А., Ващишин Р. В., Браженко А. И., Булацен В. Г. Исследование угловой структуры излучения радиогалактики 3C295 в декаметровом диапазоне радиоволн 639

Кан В., Матюгов С. С., Яковлев О. И. Структура неоднородностей стратосферы по данным радиопросвечивания на трассах спутник—спутник 651

Григорьев Г. И., Савина О. Н. Акустико-гравитационные волны в атмосфере с кусочно-линейным температурным профилем 664

Кравцов Ю. А., Моркотун А. В., Чурюмов А. Н. Рассеяние электромагнитных волн на крутых морских мезомасштабных волночках: интерполяция результатов теории возмущений и геометрической теории дифракции 671

Каневский М. Б., Караев В. Ю., Баландина Г. Н. Модель доплеровского спектра СВЧ радиоволн, рассеянных морской поверхностью в обратном направлении под малыми углами скольжения 679

Карпов А. В., Наумов А. В. Исследование влияния взаимной ориентации антенн на характеристики метеорного радиоканала 684

Панин С. Б., Поединчук А. Е. Дифракция электромагнитной волны на решётке со слоем киральной среды 690

Власов С. Н. Дифракция упругих волн на цилиндрической бесконечной протяжённой полости с круговым поперечным сечением, заполненной жидкостью 702

Мальцев А. А., Зимина С. В. Влияние флуктуаций весового вектора на статистические характеристики адаптивной антенной решётки с быстрым рекуррентным алгоритмом настройки 708

Морозов О. А., Рыжкова Т. Г., Фидельман В. Р. Эффективный вычислительный алгоритм реализации метода максимальной энтропии в задачах обращения свёртки 722

УДК 523.164

ИССЛЕДОВАНИЕ УГЛОВОЙ СТРУКТУРЫ ИЗЛУЧЕНИЯ РАДИОГАЛАКТИКИ 3C295 В ДЕКАМЕТРОВОМ ДИАПАЗОНЕ РАДИОВОЛН

А. В. Мень [1], *С. Я. Брауде* [1], *С. Л. Рашковский* [1], *Н. К. Шарыкин* [1], *В. А. Шепелев* [1], *Г. А. Инютин* [1], *Р. В. Ващишин* [1], *А. И. Браженко* [2], *В. Г. Булацен* [2]

Приводятся результаты наблюдений угловой структуры излучения радиогалактики 3C295 в декаметровом диапазоне длин волн с помощью радиоинтерферометров УРАН-1 и УРАН-2. Показано, что в этом диапазоне радиоизображение объекта существенно отличается от результатов наблюдений на более высоких частотах. Определена простейшая модель структуры радиогалактики, состоящая из одного компонента с гауссовским распределением радиояркости с размерами $(7'',4 \pm 0'',4) \times (8'',7 \pm 0'',4)$ на частоте 25 МГц и $(9'',1 \pm 0'',5) \times$ $\times (10'',6 \pm 0'',5)$ на частоте 20 МГц при позиционном угле большей оси $157° \pm 17°$. Объяснена причина падения спектральной плотности потока излучения радиоисточника на частотах ниже 50 МГц.

ВВЕДЕНИЕ

Угловая структура излучения радиогалактики 3C295 исследовалась в широком диапазоне частот от 86 до 15 400 МГц с помощью простых радиоинтерферометров, систем суперсинтеза, апертурного синтеза и систем картографирования со сверхдлинными базами. Этот радиоисточник ассоциируется с гигантской эллиптической галактикой с красным смещением $z = 0{,}461$ и классифицируется как классический двойной объект типа FRII с крутым спектром. Его спектральный индекс α на частотах выше 1 400 МГц равен 0,98 ($S \propto \nu^{-\alpha}$, где S — спектральная плотность потока излучения, ν — частота), на более низких частотах α уменьшается до 0,56, а в интервале частот 50÷70 МГц в спектре источника наблюдается чётко выраженный максимум излучения с дальнейшим уменьшением спектральной плотности потока излучения с понижением частоты. Причины формирования такой спектральной зависимости обсуждались в ряде работ.

Впервые истинная структура радиогалактики 3C295 была определена на частоте $\nu = 410$ МГц при наблюдениях в Англии с высоким угловым разрешением с помощью радиоинтерферометра с базой, изменяющейся от $60\,000\lambda$ до $180\,000\lambda$, где λ — длина волны принимаемого излучения [1]. Источник оказался состоящим из двух компонентов с одинаковой интенсивностью излучения и размерами $1'' \times 0'',8$ [1], разнесённых на $4'',5$ при позиционном угле 143°. Аналогичные результаты были получены (также в Англии) на частотах 408 и 1 423 МГц с помощью радиоинтерферометра с базой $D = 24$ км ($33\,000\lambda$ и $114\,000\lambda$ соответственно). В этом случае радиоисточник состоял из двух одинаковых компонентов с размерами $2'',2 \times 1'',2$, разнесённых на $4''$ при позиционном угле 134° на частоте 408 МГц, и с размерами $1'',2 \times 0'',8$, разнесённых на $4'',4$ при позиционном угле 141° на частоте 1 423 МГц [2].

Несколько меньшие размеры компонентов радиогалактики были определены на частоте 5 000 МГц с помощью 5-километрового радиотелескопа суперсинтеза в Кембридже, обеспечивающего разрешение $2'' \times 2''\,\mathrm{cosec}\,\delta$, где δ — склонение источника [3]. Размер 1-го (северо-западного) компонента согласно этой работе составил $0'',7 \times 0'',7$, а 2-го (юго-восточного) — $1'' \times 1''$ при разносе их центров на $4'',4$ и позиционном угле 140°. При этом первый компонент обеспечивал 45 %, а второй — 55 % общей интенсивности радиоизлучения источника. Ещё меньшие размеры компонентов (около $0'',67 \times 0'',67$)

[1] Здесь и ниже угловые размеры радиоисточников приводятся на уровне 50 % интенсивности при гауссовском распределении радиояркости.

были получены при наблюдениях на этом же инструменте на частоте 15 400 МГц, при этом разнос центров компонентов составил $4''{,}6$ при позиционном угле 144° [4].

Существенно более высокое разрешение при наблюдениях радиогалактики 3C295 было получено с помощью систем MERLIN [5] в Англии, VLA [6] и VLBA [7] в США. Наблюдения на установке MERLIN велись на частотах 4 995, 1 666, 408 и 151 МГц, при этом на максимальной частоте было реализовано разрешение $0''{,}08$. При изменении частоты в указанном интервале угловой разнос центров максимальной яркости радиоизображения радиогалактики, состоявшего из двух компонентов, не изменялся, а угловые размеры компонентов на уровне изофот с минимальной спектральной плотностью потока излучения с понижением частоты несколько увеличивались.

Наблюдения на VLA [6] также велись на частотах 15 115, 8 711, 5 000 и 1 500 МГц, при этом на максимальной частоте было получено угловое разрешение $0''{,}1$. Кроме двухкомпонентного распределения радиояркости, практически такого же, как в [5] и других работах, на частотах 15 115 и 8 711 МГц было обнаружено слабо излучающее компактное, фактически неразрешённое ядро радиогалактики, расположенное между компонентами на расстоянии $1''{,}9$ от максимума яркости северо-западного компонента и $2''{,}8$ от максимума яркости юго-восточного компонента. При этом ядро и центры ярких областей («горячих пятен») компонентов объекта лежат почти на одной прямой с позиционным углом около 143°. Отметим, что на частоте 15 115 МГц ядро находится вне максимальных размеров компонентов, а на частоте 8 711 МГц оно уже примыкает к юго-восточному краю северо-западного компонента. На частоте 5 000 МГц в этой работе, а также в [5] ядро обнаружено не было, что может объясняться либо характером спектральной зависимости радиоизлучения ядра (спектральная плотность потока его излучения с понижением частоты монотонно падает), либо, возможно, эффектом реабсорбции в интервале от 5 000 до 8 711 МГц.

Максимальное разрешение $0''{,}02$ при наблюдении горячих пятен в радиогалактике 3C295 было реализовано на частоте 1 700 МГц с помощью системы радиоинтерферометров со сверхдлинными базами (VLBA), образованной шестью большими антеннами, расположенными на территории США [7]. Были детально исследованы морфология и спектры излучения горячих пятен, при этом выяснилось, что их структура существенно различается. Центральная область горячего пятна в северо-западном компоненте оказалась очень компактной с размером $0''{,}04 \times 0''{,}06$, тогда как в юго-восточном компоненте горячее пятно было сильно вытянутым, с размерами наиболее яркой части $0''{,}22 \times 0''{,}4$.

Значительно менее детально угловая структура излучения радиогалактики 3C295 была исследована в метровом диапазоне радиоволн. Радиоинтерферометрические наблюдения на частотах 158 МГц [8] и 86 МГц [9] не позволили детально определить модель распределения радиояркости источника 3C295 в этом диапазоне. При этом оказалось возможным лишь оценить максимальный угловой размер источника, равный $2''{,}2$ на частоте 158 МГц и $4''{,}4$ — на частоте 86 МГц. Единственные наблюдения, позволившие провести картографирование радиоисточника 3C295 (хотя и со сравнительно низким разрешением $2''{,}5 \times 2''{,}5$), были выполнены с помощью системы MERLIN на частоте 151 МГц [5]. В этой работе радиоисточник был определён как объект с двумя максимумами радиояркости и слившимися изофотами на уровне ниже 50 % от максимумов. Угловой разнос максимумов практически соответствовал разносу центров компонентов на сверхвысоких частотах. При этом максимальный угловой размер галактики был равен $\Delta\theta_{\max} \approx 13''{,}4$, минимальный — $\Delta\theta_{\min} \approx 9''{,}6$ (на уровне 10^{-3} от максимальной интенсивности) при позиционном угле главной оси около 156°,1.

В декаметровом диапазоне длин волн радиоинтерферометрические исследования источника 3C295 раньше вообще не проводились. Поэтому представляет большой интерес впервые определить угловую структуру излучения радиогалактики 3C295 методами радиоинтерферометрии на самых длинных радиоволнах, на которых ещё могут вестись наблюдения с поверхности Земли.

1. ИНСТРУМЕНТЫ, МЕТОДИКА НАБЛЮДЕНИЯ И ОБРАБОТКИ ДАННЫХ

Наблюдения радиогалактики 3C295 в декаметровом диапазоне длин волн были проведены на радиоинтерферометрах УРАН-1 и УРАН-2 с базами 42,3 км и 152,3 км соответственно, ориентированными практически вдоль направления запад—восток [10]. Интерференционные колебания образовывались путём перемножения сигналов антенны «Север—Юг» радиотелескопа УТР-2 [11] с сигналами антенн УРАН-1 и УРАН-2.

Антенна «Север—Юг» радиотелескопа УТР-2 принимала линейно поляризованные сигналы, а УРАН-1 и УРАН-2 — одновременно сигналы двух взаимно ортогональных (при приёме из зенита) линейных поляризаций. Благодаря этому учитывалось очень существенное в декаметровом диапазоне длин волн влияние эффекта Фарадея, связанного с вращением плоскости поляризации принимаемых сигналов в ионосфере Земли.

Антенна «Север—Юг» состояла из 6 параллельных меридиану рядов, в каждом из которых было по 240 широкополосных линейных излучателей. Размеры антенны $1\,846 \times 53$ м вдоль меридиана и параллели соответственно, эффективная площадь около 100 000 м^2.

Антенна радиоинтерферометра УРАН-1 состояла из 4, а УРАН-2 — из 8 параллельных рядов, ориентированных вдоль параллели, по 24 (УРАН-1) и 32 (УРАН-2) широкополосных турникетных излучателя в каждом ряду. Размеры этих антенн равнялись соответственно вдоль параллели и меридиана 193×28 м и 238×58 м, эффективные площади для каждой из линейных поляризаций составляли 5 300 м^2 и 14 000 м^2.

Пространственные частоты распределения радиояркости источника 3C295 на UV-плоскости $U_k(T_0)$ и $V_k(T_0)$, воспроизводимые интерферометрами УРАН-1 и УРАН-2, определяются соотношениями

$$U_1(T_0) = \frac{42\,276{,}7}{\lambda}\cos(T_0 - 2^\circ{,}2), \qquad V_1(T_0) = \frac{33\,512}{\lambda}\sin(T_0 - 2^\circ{,}2) - \frac{855{,}6}{\lambda} \tag{1}$$

для УРАН-1 и

$$U_2(T_0) = \frac{152\,292{,}6}{\lambda}\cos(T_0 + 0^\circ{,}38), \qquad V_2(T_0) = \frac{120\,719{,}7}{\lambda}\sin(T_0 + 0^\circ{,}38) + \frac{524{,}3}{\lambda} \tag{2}$$

для УРАН-2. Здесь T_0 — часовой угол относительно момента кульминации источника в градусах, λ — длина волны в метрах.

Наблюдения радиогалактики 3C295 велись одновременно на частотах 25 и 20 МГц в ночное время суток в весенний период 1999 года. При измерениях применялась методика, описанная в [12].Так как измерения фаз функции видности в этом диапазоне на радиоинтерферометрах УРАН пока не представляются возможными, определялся только модуль функции видности γ при разных T_0 в интервале от -3 до $+2$ часов относительно момента кульминации источника. При обработке записей определялись усреднённые значения модуля функции видности γ на каждом 20-минутном интервале. Данные при каждом часовом угле усреднялись за все дни наблюдений, и определялось средневзвешенное экспериментальное значение модуля функции видности $\hat{\gamma}_{\text{э}i}$ и его ошибка $\sigma_{\gamma i}$.

Из-за того, что интерферометры УРАН-1 и УРАН-2 не обеспечивали достаточного покрытия UV-плоскости, а также ввиду отсутствия фазовых измерений нельзя было использовать стандартные методы получения изображений, основывающиеся на применении двумерного преобразования Фурье комплексных функций видности с последующим уточнением полученных радиокарт.

Наиболее адекватным методом обработки полученных данных представлялось построение моделей распределения радиояркости объекта. В качестве составляющих таких моделей использовались наборы компонентов разных угловых размеров с разной спектральной плотностью излучения и гауссовским распределением радиояркости. При этом компоненты в общем случае могли быть эллиптическими с произвольными углами поворота осей и координатами центров. Исходя из параметров выбранной модели определялось расчётное значение модуля функции видности $\gamma_{\text{р}}(T_0)$, которое сравнивалось

с аналогичной экспериментальной зависимостью $\gamma_э(T_0)$. Зависимость $\gamma_р(T_0)$ определялась выражением

$$\gamma_р(T_0) = \left| \sum_{i=1}^{n} \frac{S_i}{S_0} \gamma_i(T_0) \exp[j\varphi_i(T_0)] \right|, \tag{3}$$

где

$$\gamma_i(T_0) = \exp[-3{,}556/(1-R_i^2)]\,[\Delta\theta_{\alpha i}^2 U_k^2(T_0) - 2\Delta\theta_{\alpha i}\,\Delta\theta_{\delta i} R_i U_k(T_0) V_k(T_0) + \Delta\theta_{\delta i} V_k^2(T_0)], \tag{4}$$

$$\frac{1}{\Delta\theta_{\alpha i}^2} = \frac{\cos^2\psi_i}{\Delta\theta_{\max i}^2} + \frac{\sin^2\psi_i}{\Delta\theta_{\min i}^2}, \qquad \frac{1}{\Delta\theta_{\delta i}^2} = \frac{\sin^2\psi_i}{\Delta\theta_{\max i}^2} + \frac{\cos^2\psi_i}{\Delta\theta_{\min i}^2},$$

$$R_i = \Delta\theta_{\alpha i}\Delta\theta_{\delta i}\cos\psi_i \sin\psi_i \left(\frac{1}{\Delta\theta_{\max i}^2} - \frac{1}{\Delta\theta_{\min i}^2} \right), \tag{5}$$

$$\varphi_i(T_0) = \frac{2\pi D_k}{\lambda}\,[\Delta\alpha_i \cos T_0 + \Delta\delta_i \sin\delta_0 \sin T_0]. \tag{6}$$

Здесь $\varphi_i(T_0)$ — фаза функции видности i-го компонента относительно первого, $\gamma_i(T_0)$ — модуль функции видности i-го компонента, n — число компонентов модели распределения радиояркости источника, δ_0 — среднее склонение источника, α_i, δ_i, $\Delta\theta_{\alpha i}$, $\Delta\theta_{\delta i}$, $\Delta\theta_{\max i}$, $\Delta\theta_{\min i}$ — прямое восхождение, склонение, угловые размеры по прямому восхождению и склонению, максимальный и минимальный угловые размеры i-го компонента соответственно, $\Delta\alpha_i = \alpha_i - \alpha_1$, $\Delta\delta_i = \delta_i - \delta_1$, ψ_i — угол между положением большей оси i-го компонента и направлением на запад, отсчитываемый по часовой стрелке (позиционный угол равен $90^\circ - \psi_i$), S_i — спектральная плотность потока излучения i-го компонента модели, $S_0 = \sum_{i=1}^{n} S_i$.

Варьированием параметров модели достигалось оптимальное согласование расчётных и экспериментальных данных. В качестве меры соответствия расчётной модели эксперименту использовался известный χ^2-критерий [13]:

$$\chi^2 = \sum_{1}^{N} \frac{[\hat{\gamma}_э(T_0) - \gamma_р(T_0)]^2}{\sigma_{\gamma э}^2(T_0)}, \tag{7}$$

где N — число независимых измерений средневзвешенных значений модуля функции видности $\hat{\gamma}_э$ при разных часовых углах. Наиболее достоверной считалась модель распределения радиояркости, которой соответствовал минимум $\chi^2_{\min}$ критерия (7) при достаточно большой вероятности его превышения $W_p(\chi^2 > \chi^2_{\min})$ [13], где

$$p = N - 1 - p_1. \tag{8}$$

Здесь p — число степеней свободы для данной модели, p_1 — число параметров модели распределения радиояркости.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ НАБЛЮДЕНИЙ УГЛОВОЙ СТРУКТУРЫ ИЗЛУЧЕНИЯ РАДИОГАЛАКТИКИ 3C295 В ДЕКАМЕТРОВОМ ДИАПАЗОНЕ ДЛИН ВОЛН

Результаты наблюдений на УРАН-1 представлены на рис. 1, где различными значками нанесены средневзвешенные значения модуля функции видности $\hat{\gamma}_э$ источника 3C295 в зависимости от часового угла T_0 на частотах 20 МГц (кружки) и 25 МГц (крестики). Вертикальными линиями указаны среднеквадратичные отклонения $\pm\sigma_{\gamma э}$, учитывающие случайный разброс данных. Аналогичные результаты для УРАН-2 приведены на рис. 2.

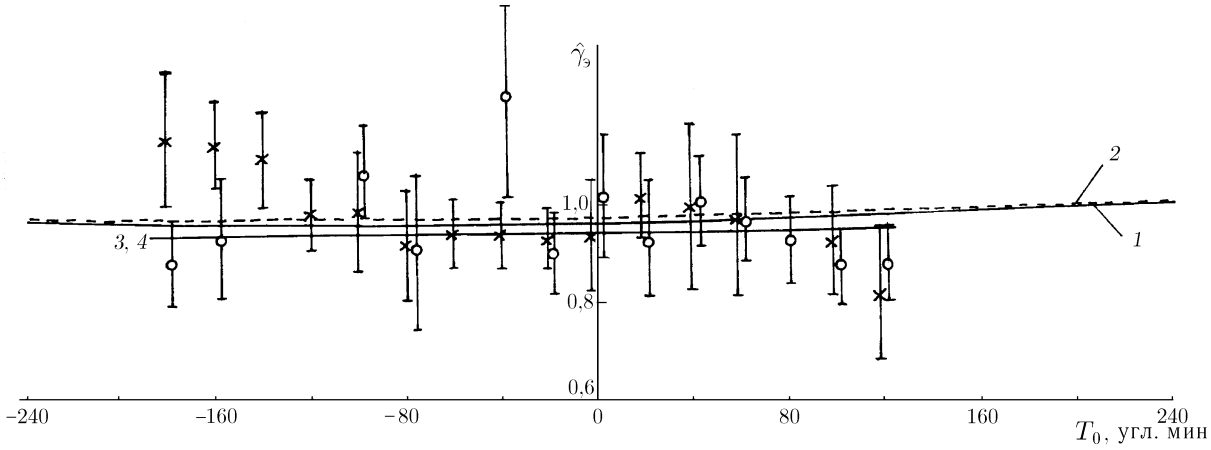

Рис. 1. Результаты измерений модуля функции видности радиогалактики 3C295 при разных часовых углах T_0 на интерферометре УРАН-1 на частотах 20 МГц (кружки) и 25 МГц (крестики). Сплошная кривая *1* и штриховая кривая *2* — расчётные зависимости $\gamma_р(T_0)$ для интерферометра на высоких частотах с такими же параметрами, как у УРАН-1 на частотах 25 и 20 МГц, для карты распределения радиояркости галактики 3C295, определённой на частоте 1 500 МГц с помощью VLA [6]. Сплошные прямые *3*, *4* — расчётные зависимости $\gamma_р(T_0)$ для интерферометра УРАН-1 для оптимальной однокомпонентной модели распределения радиояркости галактики 3C295 в декаметровом диапазоне длин волн (табл. 2) на частотах 25 и 20 МГц

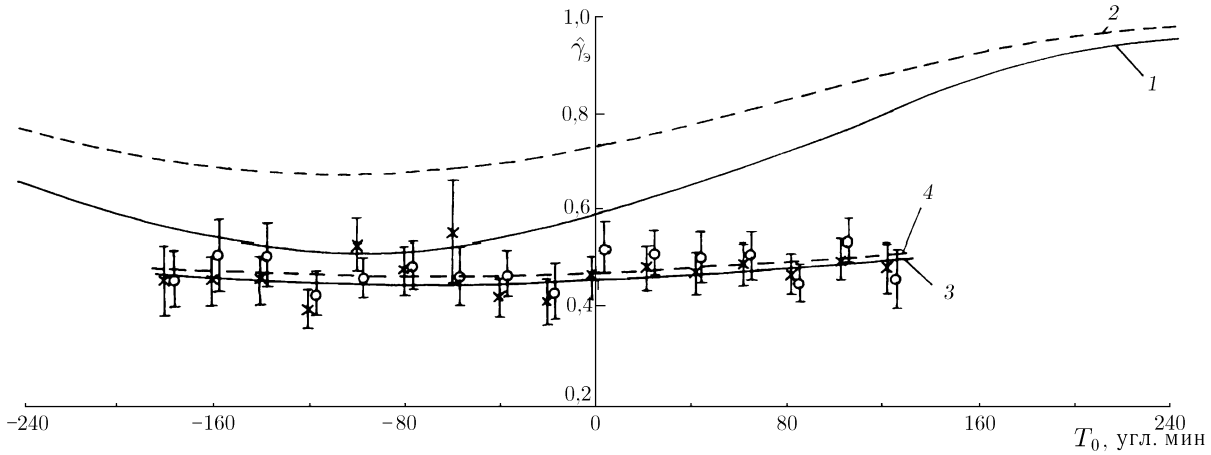

Рис. 2. Результаты измерений модуля функции видности радиогалактики 3C295 при разных углах T_0 на интерферометре УРАН-2 на частотах 20 МГц (кружки) и 25 МГц (крестики). Сплошная кривая *1* и штриховая кривая *2* — расчётные зависимости $\gamma_р(T_0)$ для интерферометра на высоких частотах с такими же параметрами, как у УРАН-2 на частотах 25 и 20 МГц, для карты распределения радиояркости галактики 3C295, определённой на частоте 1 500 МГц с помощью VLA [6]. Сплошная кривая *3* и штриховая кривая *4* — расчётные зависимости $\gamma_р(T_0)$ для интерферометра УРАН-2 для оптимальной однокомпонентной модели распределения радиояркости галактики 3C295 в декаметровом диапазоне длин волн (табл. 2) на частотах 25 и 20 МГц

Полные S_0 и интерференционные $S_и$ спектральные плотности потока радиоизлучения, измеренные на частотах 20 и 25 МГц, и усреднённые по всем часовым углам средневзвешенные значения модуля функции видности $\langle\hat{\gamma}_1\rangle$, $\langle\hat{\gamma}_2\rangle$ с ошибками измерений в предположении отсутствия зависимости модуля функции видности от T_0 для двух радиоинтерферометров приведены в табл. 1.

Представляет интерес сопоставление приведённых данных с результатами наблюдений на более высоких частотах, например на сантиметровых и дециметровых волнах, для которых имеются детальные радиокарты этой радиогалактики. Так как радиоизображением источника 3C295 в метровом и тем

более в декаметровом диапазоне длин волн мы не располагаем, ограничимся сравнением зависимостей модуля функции видности от часового угла, определённых на декаметровых волнах, с аналогичными данными, полученными на СВЧ.

Результаты расчётов модуля функций видности $\gamma_{\text{р}}(T_0)$, которые наблюдались бы на СВЧ интерферометрах с базами, ориентированными вдоль параллели, при тех же значениях D/λ, что у УРАН-1 (3 525 на частоте 25 МГц и 2 820 на частоте 20 МГц) и УРАН-2 (12 692 на частоте 25 МГц и 10 153 на частоте 20 МГц), показаны на рис. 1 и 2 сплошными кривыми *1* для $\nu = 25$ МГц и штриховыми кривыми *2* для $\nu = 20$ МГц. Такие же зависимости $\gamma_{\text{р}}(T_0)$ должны были наблюдаться интерферометрами УРАН-1 и УРАН-2, если бы распределение радиояркости источника 3C295 на декаметровых волнах оказалось таким же, как на дециметровых и сантиметровых волнах.

Расчёт зависимости $\gamma_{\text{р}}(T_0)$ проведён на основании цифровой карты распределения радиояркости источника 3C295, полученной на частоте 1 500 МГц с разрешением $1'' \times 1''$ [6], причём практически такие же результаты были получены при использовании приведённых в той же работе цифровых карт с максимальным разрешением до $0'',1$, полученных на частотах 5 000, 8 711 и 15 115 МГц. [2]

Расчётные зависимости $\gamma_{\text{р}}(T_0)$ для УРАН-1 (рис. 1) практически совпадают с $\gamma = 1$, что указывает на то, что радиоисточник 3C295 со сравнительно компактными компонентами при малом разносе между их центрами этим интерферометром практически не разрешается. Иная ситуация для интерферометра УРАН-2, который уже частично разрешает этот объект. При этом наблюдается заметная часовая зависимость $\gamma_{\text{р}}(T_0)$, объясняемая угловым разносом компонентов (см. рис. 2).

Как следует из рис. 1 и 2, расчётные зависимости $\gamma_{\text{р}}(T_0)$, определённые на основании радиокарты источника 3C295 на частоте 1 500 МГц, не совпадают с экспериментальными данными, полученными в декаметровом диапазоне длин волн (особенно для интерферометра УРАН-2 при положительных часовых углах), что указывает на существенное изменение модели распределения радиояркости объекта на низких частотах.

Рассмотрим вначале приближённо простейшие модели радиояркости источника, которые соответствуют полученным в декаметровом диапазоне длин волн данным, что позволит в дальнейшем ограничить область поиска наиболее оптимальных моделей с помощью ЭВМ. Для приведённых в табл. 1 значений $\langle\hat{\gamma}_1\rangle$, $\langle\hat{\gamma}_2\rangle$ в случае круговой изотропной модели распределения радиояркости источника 3C295 в декаметровом диапазоне длин волн, например на частоте 20 МГц, угловой размер компонента оказывается равным $8'',8$ по результатам наблюдений на УРАН-1 и $8'',9$ по данным, полученным на УРАН-2.

В случае более сложной модели распределения радиояркости, состоящей из двух компонентов разного размера и интенсивности, усреднённые по всем часовым углам T_0 средневзвешенные значения модуля функции видности определяются соотношениями

$$\langle\hat{\gamma}_1\rangle = \left|\dot{\gamma}_{\text{М}1}\,\frac{S_{\text{М}}}{S_0} + \dot{\gamma}_{\text{Б}1}\,\frac{S_{\text{Б}}}{S_0}\right|, \tag{9}$$

$$\langle\hat{\gamma}_2\rangle = \left|\dot{\gamma}_{\text{М}2}\,\frac{S_{\text{М}}}{S_0} + \dot{\gamma}_{\text{Б}2}\,\frac{S_{\text{Б}}}{S_0}\right|, \tag{10}$$

где $\dot{\gamma}_{\text{М}}$ и $\dot{\gamma}_{\text{Б}}$ — комплексные функции видности меньшего и большего (по размерам) компонентов, $S_{\text{М}}$ и $S_{\text{Б}}$ — соответствующие спектральные плотности потока излучения; индексы 1 и 2 соответствуют радиоинтерферометрам УРАН-1 и УРАН-2. На основе (9) и (10) в случае изотропных компонентов с гауссовским законом распределения радиояркости, пренебрегая разносом их центров (т. к. на УРАН-1 и на УРАН-2 не наблюдается заметная зависимость $\hat{\gamma}_1$ и $\hat{\gamma}_2$ от часового угла), можно определить интервал возможных значений $\Delta\theta_{\text{М}}$ и $\Delta\theta_{\text{Б}}$ в зависимости от $S_{\text{Б}}/S_0$ или $S_{\text{М}}/S_0$, полагая $S_{\text{М}} + S_{\text{Б}} = S_0$.

[2] Цифровые версии соответствующих карт были любезно предоставлены нам авторами упомянутой работы [6].

Таблица 1

Результаты наблюдений радиогалактики 3C295 с помощью интерферометров УРАН-1 и УРАН-2

ν, МГц	S_0, Ян	σ_{S_0}, Ян	Интерферометр УРАН-1				Интерферометр УРАН-2			
			$\langle\hat{\gamma}_1\rangle$	$\sigma_{\hat{\gamma}_1}$	$S_и$, Ян	$\sigma_{S_и}$, Ян	$\langle\hat{\gamma}_2\rangle$	$\sigma_{\hat{\gamma}_2}$	$S_и$, Ян	$\sigma_{S_и}$, Ян
25	100	15	0,99	0,19	99	24,1	0,46	0,09	46	11
20	67	11	0,95	0,18	64	16	0,48	0,09	32	8

Таблица 2

Параметры оптимальной однокомпонентной модели распределения радиояркости источника 3C295 в декаметровом диапазоне длин волн

ν, МГц	$\Delta\theta_{\max}$, угл. с	$\Delta\theta_{\min}$, угл. с	ψ, град	Интерферометр УРАН-1				Интерферометр УРАН-2			
				N	$\chi^2_{\min}$	p	$W_p(\chi^2 > \chi^2_{\min})$	N	$\chi^2_{\min}$	p	$W_p(\chi^2 > \chi^2_{\min})$
25	$8{,}7 \pm 0{,}4$	$7{,}4 \pm 0{,}4$	-67 ± 17	15	11,2	11	0,45	16	7,3	12	0,84
20	$10{,}6 \pm 0{,}5$	$9{,}1 \pm 0{,}5$	-67 ± 17	13	7,3	9	0,6	16	8,6	12	0,74

Таблица 3

Параметры оптимальной двухкомпонентной модели распределения радиояркости источника 3C295 в декаметровом диапазоне длин волн

ν, МГц	$\Delta\theta_1$, угл. с	$\Delta\theta_2$, угл. с	$\frac{S_1}{S_0}$	$\frac{S_2}{S_0}$	Интерферометр УРАН-1				Интерферометр УРАН-2			
					N	$\chi^2_{\min}$	p	$W_p(\chi^2 > \chi^2_{\min})$	N	$\chi^2_{\min}$	p	$W_p(\chi^2 > \chi^2_{\min})$
25	$4{,}7 \pm 0{,}3$	$7{,}7 \pm 0{,}4$	0,15	0,85	15	10,9	11	0,46	16	7,7	10	0,66
20	$4{,}7 \pm 0{,}3$	$9{,}7 \pm 0{,}5$	$\pm 0{,}02$	$\pm 0{,}1$	13	7,3	9	0,61	16	9,9	10	0,45

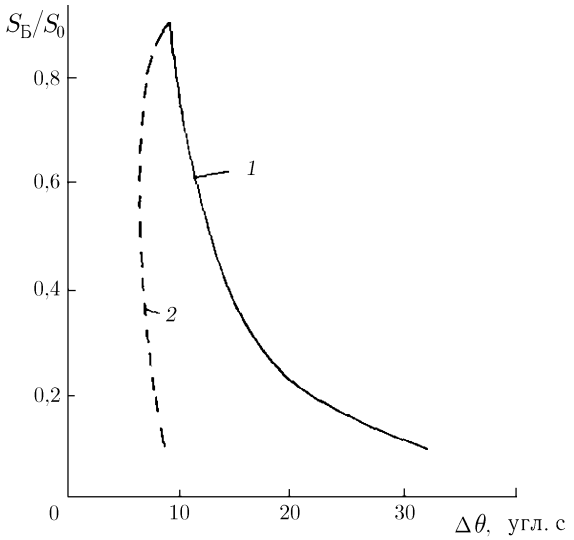

Рис. 3. Зависимость угловых размеров $\Delta\theta$ большего (кривая *1*) и меньшего (кривая *2*) (по размерам) компонентов модели распределения радиояркости источника 3C295, соответствующих значениям $\langle\hat{\gamma}_1\rangle$ и $\langle\hat{\gamma}_2\rangle$ на частоте 20 МГц, от относительной спектральной плотности потока излучения большего компонента $S_Б/S_0$

Результаты такого расчёта для частоты 20 МГц приведены на рис. 3 для большего (кривая *1*) и меньшего (кривая *2*) компонентов. За исключением случаев $S_Б/S_0 > 0{,}9$ и $S_Б/S_0 < 0{,}1$, когда модель становится практически однокомпонентной, размер меньшего компонента заключён в пределах от $6''{,}5$ до $9''$, а большего — от $9''$ до $32''$. При $S_Б/S_0 = 1$ и $S_Б/S_0 = 0{,}05$ результаты расчётов совпадают с результатами для однокомпонентной модели распределения радиояркости.[3]

Таким образом, в случае простейшей двухкомпонентной модели ядро—гало распределения радиояркости источника 3C295 возможен ряд вариантов (с различными размерами компонентов и соотношениями их потоков излучения), удовлетворяющих измеренным значениям $\langle\hat{\gamma}_1\rangle$ и $\langle\hat{\gamma}_2\rangle$. В связи с этим возникла необходимость более детального определения моделей, учитывающего зависимости $\hat{\gamma}_1(T_0)$ и $\hat{\gamma}_2(T_0)$. Такое исследование было проведено с помощью ЭВМ, причём оптимальные варианты были выбраны путём поиска минимума статистического χ^2-критерия (7). Результаты этих расчётов приведены в табл. 2 для модели, состоящей из одного эллиптического компонента, и в табл. 3 для двухкомпонентной модели, состоящей из круговых деталей с гауссовским распределением радиояркости. В табл. 3 индексы 1 и 2 относятся к первому (северо-западному) и второму (юго-восточному) компонентам модели.

Как следует из табл. 2, размеры источника на уровне 50 % яркости в наиболее вероятной для декаметрового диапазона длин волн модели распределения радиояркости источника 3C295 оказались примерно в 10 раз больше размеров отдельных компонентов радиогалактики на дециметровых и сантиметровых волнах и более чем вдвое превышают разнос их центров, равный приблизительно $4''{,}5$. При этом источник имеет форму эллипса, большая ось которого на обеих частотах длиннее малой оси примерно на 16 %, причём с понижением частоты от 25 до 20 МГц размеры компонента возрастают более чем на 20 %. Угол ψ между большой осью источника и направлением на запад отличается от угла между этим направлением и линией, соединяющей центры двух компонентов высокочастотных моделей радиоисточника,[4] однако это расхождение лежит в пределах среднеквадратичной ошибки измерения угла ψ.

Величины $\chi^2_{\min}$ на частотах 25 и 20 МГц для обоих интерферометров оказались сравнительно небольшими, что подтверждается достаточно высокими вероятностями их превышения. Исключением являются наблюдения на частоте 25 МГц на радиоинтерферометре УРАН-1, когда имели место большие ошибки измерений.

Из вышесказанного следует, что простейшая однокомпонентная модель распределения радиояркости источника 3C295 в декаметровом диапазоне длин волн является достаточно достоверной. Это подтверждается также расчётом зависимостей $\gamma_р(T_0)$ для указанной модели, результаты которого приведены на рис. 1 и 2 (кривые *3* для $\nu = 25$ МГц, кривые *4* — для $\nu = 20$ МГц).

[3] Заметим, что согласно (9) при $\dot{\gamma}_{М1} = 1$, $\langle\hat{\gamma}_1\rangle = 0{,}95$ (табл. 1) и $S_М + S_Б = S_0$ минимальная величина $S_Б/S_0 = 1 - \langle\hat{\gamma}_1\rangle = 0{,}05$.

[4] Согласно данным измерений на высоких частотах угол ψ заключён в пределах от $-40°$ [3] до $-53°$ [5].

Для радиоинтерферометра УРАН-1 расчётные зависимости для частот 25 и 20 МГц практически совпадают, причём зависимость $\gamma_{\rm p}$ от T_0 отсутствует, как и на более высоких частотах, где значения $\gamma_{\rm p}$ при всех T_0 примерно на 0,05 больше, чем для модели источника в декаметровом диапазоне.

Иная ситуация имеет место для интерферометра УРАН-2 (см. рис. 2), где зависимости для модели источника в декаметровом диапазоне и расчётный отклик на основании высокочастотной карты радиогалактики заметно различаются. При этом расчёты для модели источника в декаметровом диапазоне показывают зависимость $\gamma_{\rm p}$ от T_0, хотя и существенно более слабую, чем для высокочастотной радиокарты источника.

Параметры двухкомпонентной модели распределения радиояркости источника 3C295 в декаметровом диапазоне, приведённые в табл. 3, соответствуют случаю, когда оба компонента изотропны и центры их в декаметровом и высокочастотных диапазонах совпадают. Оказалось, что минимальные значения χ^2 при максимальной вероятности их превышения соответствуют моделям, у которых интенсивности излучения и размеры компонентов существенно различаются. Одна из таких моделей (см. табл. 3) соответствует случаю, когда первый компонент, имеющий меньший размер, излучает 15 % результирующего потока радиоизлучения объекта, а второй компонент, примерно вдвое больший по размеру, — 85 % от общего потока. При втором варианте двухкомпонентной модели, который представляется менее вероятным, наблюдается обратная картина: максимальный размер и поток излучения имеет первый компонент, а минимальные размер и поток — второй при тех же размерах и относительных потоках излучения, а также величинах $\chi^2_{\rm min}$, которые приведены в табл. 3.

При двухкомпонентной модели величины $\chi^2_{\rm min}$ и расчётные зависимости $\gamma_{\rm p}(T_0)$ на частотах 25 и 20 МГц у обоих интерферометров очень близки к соответствующим результатам, полученным для однокомпонентной модели, однако вероятности превышения полученных значений $\chi^2_{\rm min}$ для интерферометра УРАН-2 несколько меньше из-за увеличения числа параметров в случае двухкомпонентной модели.

На основании данных, полученных для оптимальной для декаметрового диапазона длин волн двухкомпонентной модели распределения радиояркости, можно сделать вывод, что такая модель источника 3C295 также является достоверной. Однако, учитывая большое различие потоков излучения компонентов, фактически она несущественно отличается от однокомпонентной модели, т. к. размеры более интенсивной детали радиоизображения почти такие же, как в случае однокомпонентной модели.

3. СПЕКТРАЛЬНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ИЗЛУЧЕНИЯ РАДИОГАЛАКТИКИ 3C295

Спектральная характеристика излучения радиогалактики 3C295 приведена на рис. 4 для диапазона частот от 12,6 МГц до 10 000 МГц. Здесь сплошной кривой показана частотная зависимость полной спектральной плотности потока радиоизлучения S_0 источника в интервале от 22 до 7 400 МГц: различными значками представлены результаты наблюдений на отдельных частотах: треугольники соответствуют данным, приведённым в [14], крестики — в [15], кружочки — результатам измерений, выполненных в данной работе. Как следует из рис. 4, спектр этого радиоисточника имеет чётко выраженный максимум в интервале от 50 до 70 МГц с максимальной спектральной плотностью потока излучения $S_{0\,\max} \approx 120$ Ян. Уменьшение спектральной плотности потока излучения на частотах, меньших частоты максимума, связано с каким-либо процессом затухания излучения в космосе. Представляется интересным выяснить, какой из физических механизмов, вызывающих такое затухание, имеет место в данном случае. В ряде работ, например в [6], предполагалось, что на спектр излучения радиогалактики 3C295 оказывает влияние реабсорбция (самопоглощение излучения). Однако детальный анализ показывает, что хотя реабсорбция и может, в принципе, приводить к такому виду спектров космических радиоисточников, спектральную характеристику излучения радиогалактики 3C295 объяснить влиянием этого эффекта, по-видимому, нельзя.

Согласно [16] угловой размер радиоисточника, в котором наблюдается реабсорбция, в секундах дуги равен

$$\Delta\theta_0 = S_{\rm m}^{1/2}\nu_{\rm m}^{-5/4}H_{\perp}^{1/4}\,[1-\exp(-\tau_0)]^{-1/2}(1+z)^{1/4}. \qquad (11)$$

Здесь $S_{\rm m}$ — максимальная спектральная плотность потока излучения в янских, $\nu_{\rm m}$ — частота максимума в МГц, $H_{\perp}$ — поперечная к направлению движения релятивистских электронов составляющая космического магнитного поля в микроэрстедах, z — красное смещение объекта, τ_0 — оптическая толщина среды на частоте $\nu_{\rm m}$. Величина τ_0 определяется из условия экстремума зависимости $S(\nu)$ [17]:

$$\exp(\tau_0) = 1 + \frac{2\alpha+5}{5}\,\tau_0, \qquad (12)$$

где α — спектральный индекс источника на частотах $\nu \gg \nu_{\rm m}$.

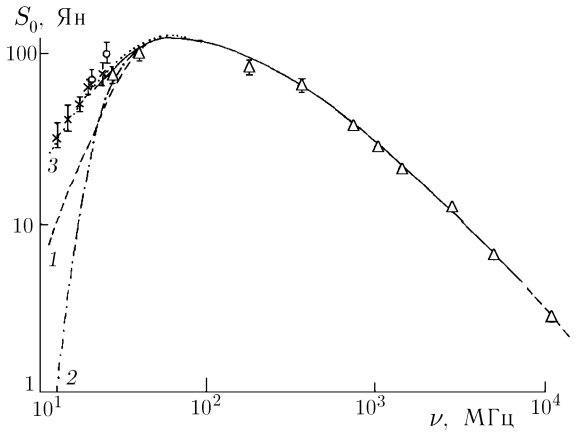

Рис. 4. Зависимость спектральной плотности потока радиоизлучения S_0 источника 3C295 от частоты. Сплошная кривая — зависимость от частоты полного потока радиоизлучения источника в интервале от 22 до 7 400 МГц, треугольники — данные наблюдений [14], крестики — данные [15], кружки — результаты измерений данной работы: штриховая кривая *1* — расчётная зависимость спектральной характеристики источника 3C295 на частотах $\nu \le \nu_{\rm m}$ при учёте реабсорбции, штрих-пунктирная кривая *2* — при учёте затухания излучения в космической плазме на трассе распространения радиоволн, пунктирная кривая *3* — при учёте затухания излучения в плазме самого радиоисточника

При 50 МГц $< \nu_{\rm m} <$ 70 МГц, $S_{\rm m} = 120$ Ян, $H_{\perp} = 500$ мкЭ [6], $z = 0{,}461$, $\alpha = 0{,}56$ (при 200 МГц $<$ $< \nu <$ 1 000 МГц), $\tau_0 = 0{,}39$ в соответствии с (11) угловой размер объекта, в котором имеет место реабсорбция, заключён в пределах от $0''{,}5$ до $0''{,}75$, что заметно меньше измеренных, например, на частоте 408 МГц размеров компонентов — $2''{,}2 \times 1''{,}2$ [2]. [5]

Указанное расхождение можно было бы попытаться объяснить наличием в компонентах этой радиогалактики более компактных деталей с достаточной интенсивностью излучения, тем более что в этом объекте такие центры радиояркости (горячие пятна) наблюдаются в обоих компонентах [5–7]. Однако спектральная плотность потока суммарного излучения обоих горячих пятен в 3C295 существенно меньше спектральной плотности потока радиоизлучения всего радиоисточника, например, на частоте 1 664 МГц. Согласно [7] она составляет примерно треть от общего излучения и в соответствии с [6] должна уменьшаться с понижением частоты, т. к. спектральные индексы у протяжённых компонентов заметно выше, чем у горячих пятен. Частоты максимумов спектров излучения этих пятен при наличии в них реабсорбции были бы значительно больше 50÷70 МГц. Поэтому влияние горячих пятен не может приводить к появлению наблюдаемого экстремума спектра S_0. В то же время возможный, в принципе, в горячих пятнах эффект реабсорбции может приводить к определённому искривлению спектра S_0, когда при $\nu \gg 50\div70$ МГц с понижением частоты спектральный индекс монотонно уменьшается, на что указывалось в [6], [7].

Заметим, и это самое существенное, что предположению о том, что наблюдаемый максимум спектра излучения S_0 всей радиогалактики связан с эффектом реабсорбции в ней, противоречит вид спектральной зависимости на низких частотах $\nu < \nu_{\rm m}$. У космических объектов, в которых наблюдается реабсорбция, спектральная зависимость $S(\nu)$ на всех частотах определяется соотношением [18, 19]

[5] Хотя измерения угловых размеров компонентов источника 3C295 в интервале частот от 50 до 70 МГц не проведены, не исключено, что на этих частотах угловые размеры заметно больше приведённых.

$$S(\nu) = S_{\mathrm{m}} \left(\frac{\nu}{\nu_{\mathrm{m}}}\right)^{5/2} \frac{1 - \exp\left[-\tau_0 \left(\nu/\nu_{\mathrm{m}}\right)^{-\alpha-5/2}\right]}{1 - \exp(-\tau_0)}\,. \tag{13}$$

Результаты расчёта $S(\nu)$ на основании (13) при приведённых выше значениях S_{m}, α и τ_0 при $\nu_{\mathrm{m}} = 55$ МГц иллюстрируются на рис. 4 штриховой кривой *1*, которая на частотах ниже 30 МГц явно не согласуется с экспериментальными данными. Зависимость спектральной плотности потока излучения от частоты при $\nu < \nu_{\mathrm{m}}$ в случае реабсорбции, как известно, пропорциональна $\nu^{5/2}$, в то время как экспериментальные данные изменяются с частотой примерно пропорционально $\nu^{3/2}$. Следует отметить, что параметры ν_{m} и S_{m} в этом расчёте выбраны приближённо, т. к. в области максимума излучения точные измерения ν_{m} и S_{m} пока не проводились. Однако при увеличении частоты ν_{m}, расхождение расчётной зависимости с экспериментальными данными усугубляется.

Ещё большее расхождение экспериментальной зависимости $S(\nu)$ с расчётом на низких частотах наблюдается при учёте такого широко известного физического механизма, как затухание излучения в областях плазмы, расположенной на пути распространения радиоволн в космосе, что также может приводить к формированию спектральных зависимостей с чётко выраженным максимумом излучения. Согласно [18, 19] в этом случае спектральная зависимость $S(\nu)$ определяется выражением

$$\ln\frac{S(\nu)}{S_{\mathrm{m}}} = \alpha \ln\frac{\nu_{\mathrm{m}}}{\nu} + \frac{\alpha}{2+\tilde{D}}\left[1 - \left(\frac{\nu_{\mathrm{m}}}{\nu}\right)^2 \left(1 + \tilde{D}\ln\frac{\nu_{\mathrm{m}}}{\nu}\right)\right], \tag{14}$$

где

$$\tilde{D} = \alpha/\tau_0 - 2. \tag{15}$$

Результаты расчёта зависимости $S(\nu)$ для этого случая при тех же, что и раньше, параметрах S_{m}, α и ν_{m}, соответствующей рассматриваемому механизму оптической толщине $\tau_0 = 0{,}26$ и $\tilde{D} = 0{,}154$ показаны на рис. 4 штрих-пунктирной кривой *2*. Убывание спектральной плотности потока излучения с понижением частоты при $\nu < \nu_{\mathrm{m}}$, как следует из рис. 4, происходит ещё быстрее ($S(\nu) \propto \nu^{4\div5}$), чем в случае реабсорбции, особенно на очень низких частотах.

Поэтому, хотя в [7] считается, что такой механизм («свободно-свободное поглощение») при некоторых неочевидных допущениях объясняет спектральную зависимость $S_0(\nu)$ на частотах ниже ν_{m}, такой вывод не представляется достаточно убедительным.

Иная ситуация наблюдается при учёте влияния на низкочастотную часть спектральной характеристики радиогалактики 3C295 затухания в плазме, находящейся в самом источнике. В этом случае, как показано в [18, 19],

$$S(\nu) = S_{\mathrm{m}} \left(\frac{\nu}{\nu_{\mathrm{m}}}\right)^{2-\alpha} \frac{1}{1+\tilde{D}_1 \ln(\nu_{\mathrm{m}}/\nu)} \frac{1 - \exp\left[-\tau_0 \left(\nu_{\mathrm{m}}/\nu\right)^2 (1 + \tilde{D}_1 \ln(\nu_{\mathrm{m}}/\nu))\right]}{1 - \exp(-\tau_0)}\,, \tag{16}$$

где

$$\tilde{D}_1 = \frac{\left[1 - \exp(-\tau_0)\right]\alpha}{1 - \exp(-\tau_0) - \tau_0 \exp(-\tau_0)} - 2. \tag{17}$$

Результаты расчёта зависимости $S(\nu)$ при приведённых выше параметрах S_{m}, ν_{m} и α, соответствующей указанному физическому механизму оптической толщине $\tau_0 = 0{,}58$ и $\tilde{D}_1 = 0{,}136$ показан на рис. 4 пунктирной кривой *3*, которая хорошо совпадает с имеющимися экспериментальными данными на частотах $\nu < 40$ МГц. При большей величине $\nu_{\mathrm{m}} = 60\div65$ МГц расчётные зависимости $S(\nu)$ на низких частотах несколько различаются с результатами эксперимента, однако во всех случаях уменьшение $S(\nu)$ с понижением частоты происходит примерно пропорционально $\nu^{3/2}$, т. е. так же, как в эксперименте.

Таким образом, наиболее вероятным физическим механизмом из рассмотренных выше, способных привести к формированию спектральных характеристик космических радиоисточников с чётко выраженным максимумом излучения, в случае радиогалактики 3C295 является затухание в ионизированной среде, находящейся в самом источнике.

При указанном механизме затухания согласно [20]

$$\tau_0 = \frac{A\,(B - \ln \nu_{\rm m}[\text{Гц}])}{(\nu_{\rm m}[\text{Гц}])^2}\,, \tag{18}$$

где

$$A = \frac{9{,}8 \cdot 10^{-3} (N_{\rm e}[\text{см}^{-3}])^2\, L[\text{см}]}{(T_{\rm e}[\text{K}])^{3/2}}\,, \qquad B = 17{,}7 + 1{,}51 \ln T_{\rm e}\,[\text{K}],$$

$T_{\rm e}$ — электронная температура, $N_{\rm e}$ — электронная концентрация плазмы, L — протяжённость области, заполненной плазмой. С другой стороны, как показано в [18, 19],

$$B = 1/\tilde{D}_1 + \ln \nu_{\rm m}[\text{Гц}], \qquad A = \tau_0\,(\nu_{\rm m}[\text{Гц}])^2\,\tilde{D}_1. \tag{19}$$

На основании (18) и (19) при указанных выше значениях $\nu_{\rm m}$, $\tilde{D}_1$ и τ_0 получаем, что электронная температура $T_{\rm e}$ оказывается равной 160 К, мера эмиссии $N_{\rm e}^2 L = 16{,}1$ см$^{-6}\cdot$ пк, что при размере радиогалактики в этом диапазоне около 70 кпк соответствует концентрации $N_{\rm e} \approx 0{,}015$ см$^{-3}$. Естественно, приведённые оценки $T_{\rm e}$ и $N_{\rm e}$ являются сугубо ориентировочными из-за идеализации теории, на основании которой были получены расчётные соотношения, а также из-за необходимости очень точного определения всех используемых параметров, что в длинноволновой части метрового диапазона и в декаметровом диапазоне длин волн пока является проблемой.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основании анализа рассмотренных вариантов оптимальных моделей распределения радиояркости источника 3C295 в декаметровом диапазоне длин волн с учётом, согласно литературным данным, тенденции изменения структуры радиоисточника при уменьшении частоты от 15 115 МГц до 151 МГц следует сделать вывод, что наиболее достоверной моделью является однокомпонентная.

Как уже отмечалось, детали одно- и двухкомпонентной моделей по размерам достаточно близки, и различие между этими моделями существенно лишь при объяснении причины значительного увеличения угловых размеров радиогалактики 3C295 в декаметровом диапазоне длин волн. Наиболее вероятным является существенное увеличение размеров одного или обоих компонентов радиогалактики, наблюдаемых на более высоких частотах, за счёт синхротронного излучения «высвеченных» релятивистских частиц, выброшенных из компактных компонентов, в относительно слабых космических магнитных полях, окружающих этот объект. При этом вид спектральной зависимости излучения радиогалактики 3C295 на самых низких частотах, как нам представляется, можно объяснить затуханием излучения в плазме самого радиоисточника.

Работа выполнена при поддержке INTAS (грант No. 97–1964) и INTAS CNES (грант No. 1450).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Anderson B., Donaldson W. // Mon. Notic. Roy. Astron. Soc. 1967. V. 137, No. 1. P. 81.
2. Wilkinson P. N. // Mon. Notic. Roy. Astron. Soc. 1972. V. 160. P. 305.
3. Pooley G. G., Henbest S. N. // Mon. Notic. Roy. Astron. Soc. 1974. V. 169. P. 477.
4. Laing R. A. // Mon. Notic. Roy. Astron. Soc. 1981. V. 195. P. 261.

5. Akujor C. E., Spencer R. E., Wilkinson P. N. // Mon. Notic. Roy. Astron. Soc. 1990. V. 244. P. 362.
6. Perley R. A., Taylor G. B. // Astron. J. 1991. V. 101, No. 5. P. 1 623.
7. Taylor G. B, Perley R. A. // Astron. Astrophys. 1992. V. 262. P. 417.
8. Allen L. R., Anderson B., Conway R. G. et al. // Mon. Notic. Roy. Astron. Soc. 1962. V. 124, No. 6. P. 477.
9. Володин Ю. В., Губанов А. Г., Дагкесаманский Р. Д. Исследование структуры внегалактических радиоисточников на волне 3,5 м: Препринт № 184 ФИАН СССР. Москва, 1985. 44 с.
10. Мень А. В., Брауде С. Я., Рашковский С. Л. и др. // Радиофизика и радиоастрономия. 1997. Т. 2, № 4. С. 385.
11. Мень А. В., Содин Л. Г., Шарыкин Н. К. и др. // Антенны. Москва: Связь, 1978. № 26. С. 15.
12. Мень А. В., Рашковский С. Л., Шепелев В. А. и др. // Радиофизика и радиоастрономия. 1998. Т. 3, № 3. С. 284.
13. Химмельблау Д. Анализ процессов статистическими методами. Москва: Мир, 1973. 957 с.
14. Kuhr H., Nauber U., Pauliny-Tooh I. I. K., Witzel A. A catalogue of radio sources: Preprint of Max-Planc-Institute for Radioastronomy. Bonn, 1981. 337 p.
15. Braude S. Ya., Sokolov K. P., Zakharenko S. M. The UTR-2 very low-frequency survey of radio sources in the declination range 41° to 52°: Preprint No. 62 of Institute for Radioastronomy. Kharkov, 1992. 67 p.
16. Каплан С. А., Пикельнер С. Б. Физика межзвёздной среды. Москва: Наука, 1979. 591 с.
17. Брауде С. Я. // Астрон. журн. 1965. Т. 42, № 6. С. 1 150.
18. Брауде С. Я., Мень А. В. // Кинематика и физика небесных тел. 1997. Т. 13, № 1. С. 74.
19. Мень А. В., Брауде С. Я. // Кинематика и физика небесных тел. 1997. Т. 13, № 1. С. 82.
20. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. Москва: Физматгиз., 1960. 683 с.

[1] Радиоастрономический институт НАН Украины, г. Харьков,
[2] Гравиметрическая обсерватория Института геофизики НАН Украины, г. Полтава, Украина

Поступила в редакцию
12 сентября 2001 г.

STUDY OF THE ANGLE STRUCTURE OF EMISSION FROM THE RADIO GALAXY 3C295 IN THE DECAMETER WAVELENGTH RANGE

A. V. Men', S. Y. Braude, S. L. Rashkovsky, N. K. Sharykin, V. A. Shepelev, G. A. Inuytin, R. V. Vashchishin, A. I. Brazhenko, and V. G. Bulathsen

We present the results of observations of the angular structure of radio source 3C295 at decameter waves using the URAN-1 and URAN-2 interferometers. It is shown that the radio image of 3C295 at these frequencies differs drastically from the structure of this object observed at higher frequencies. The simplest model of the structure of this radio galaxy, comprising single component with a Gaussian brightness distribution of angular size $(7''.4 \pm 0''.4) \times (8''.7 \pm 0''.4)$ at 25 MHz and $(9''.1 \pm 0''.5) \times (10''.6 \pm 0''.5)$ at 20 MHz, is determined. A decrease in the spectral density of the emission with decreasing frequency, observed below 50 MHz, is explained.

УДК 551.593.13:621.396.946

СТРУКТУРА НЕОДНОРОДНОСТЕЙ СТРАТОСФЕРЫ ПО ДАННЫМ РАДИОПРОСВЕЧИВАНИЯ НА ТРАССАХ СПУТНИК—СПУТНИК

В. Кан [1], *С. С. Матюгов* [2], *О. И. Яковлев* [2]

Проанализирована возможность мониторинга флуктуаций плотности или температуры в стратосфере по данным радиозатменных измерений амплитуды сигнала на трассах спутник—спутник в сантиметровом диапазоне длин волн. Сравнение экспериментальных спектров амплитудных флуктуаций с теоретическими, рассчитанными для комбинированной модели, содержащей как сильно анизотропные неоднородности, так и изотропную колмогоровскую турбулентность, показало, что основной вклад в флуктуации амплитуды радиоволн в стратосфере вносят анизотропные неоднородности, соответствующие модели насыщенных внутренних гравитационных волн. Показано, что радиозатменный метод эффективен для глобального дистанционного мониторинга внутренних волн в стратосфере.

ВВЕДЕНИЕ

Исследование неоднородностей плотности в стратосфере затменным методом сначала проводилось при измерениях флуктуаций интенсивности света звёзд на орбитальной станции «Мир» [1—3] и основывалось на анализе спектров мерцаний. Теория, описывающая связь статистических характеристик амплитуды и фазы волны с параметрами случайно-неоднородной атмосферы, достаточно полно разработана только для слабых флуктуаций интенсивности [4]. При оптическом зондировании со станции «Мир» диапазон высот в атмосфере, для которых выполняется условие слабых флуктуаций, ограничен снизу высотой 25÷30 км. Ниже начинается режим сильных мерцаний, количественная интерпретация которых затруднена. Анализ данных наблюдений мерцаний звёзд [1, 5] показал, что наблюдавшиеся в стратосфере низкочастотные мерцания обусловлены сильно анизотропными неоднородностями, для которых одномерный вертикальный спектр флуктуаций температуры имеет степенную зависимость с показателем −3 в диапазоне вертикальных масштабов от километра до приблизительно 50 м с последующим уменьшением спектральной плотности в области более мелких масштабов. Сравнение вертикальных спектров флуктуаций температуры (или плотности), полученных из наблюдений мерцаний и по данным контактных измерений на баллонах в стратосфере, показало их хорошее совпадение в области масштабов, бóльших 50 м [6]. Такие мезомасштабные анизотропные неоднородности могут генерироваться внутренними гравитационными волнами (ВГВ). В процессе распространения ВГВ наклонно вверх амплитуда волн быстро растёт из-за уменьшения плотности воздуха, и волны становятся неустойчивыми. В результате происходит их обрушение и насыщение амплитуд волн по определённому закону в зависимости от параметра устойчивости среды. В качестве такого параметра в модели насыщенных ВГВ выступает частота Брента—Вяйсяля. Обширную подборку теоретических и экспериментальных данных по модели насыщенных ВГВ можно найти, например, в [7]. В [6, 7] было также показано, что одномерные вертикальные спектры флуктуаций температуры, имеющие степенную зависимость с показателем −3, согласуются с моделью насыщенных ВГВ. Одновременные измерения радиальной скорости ветра с помощью радара и температуры на баллонах [8] также показывают хорошее согласие теории насыщенных ВГВ с экспериментом. Измерения высокочастотных мерцаний света [2, 3] позволили, наряду с анизотропными неоднородностями, исследовать и характеристики изотропной колмогоровской турбулентности.

Позже были проведены измерения флуктуаций амплитуды радиоволн на трассах станция «Мир»—геостационарные спутники. В радиодиапазоне флуктуации амплитуды слабее, чем в оптическом диапазоне, из-за сглаживания флуктуаций, обусловленных неоднородностями с размерами, меньшими радиуса первой зоны Френеля, и условие слабых флуктуаций выполняется вплоть до тропосферы. Кроме того, большой энергетический потенциал линии связи спутник—спутник и высокая фазовая стабильность сигналов позволяют осуществлять амплитудные и фазовые измерения вплоть до поверхности Земли. В измерениях использовались немодулированные сигналы сантиметрового (длина волны $\lambda = 2$ см) и дециметрового ($\lambda = 32$ см) диапазонов, излучавшиеся передатчиками, установленными на станции «Мир». При заходе станции в зону тени Земли радиоволны проходили через атмосферу и принимались на геостационарном спутнике, который ретранслировал принятые сигналы на наземный измерительный пункт. Регулярная и случайная составляющие коэффициента преломления воздуха приводят к изменениям амплитуды радиоволн, проходящих через атмосферу по трассе спутник—спутник. Разделение на регулярную и случайную компоненты достаточно условно и обусловлено пространственными масштабами явлений. Под регулярными мы подразумеваем структуры с вертикальными размерами порядка высоты однородной атмосферы $H_0 = 5 \div 8$ км и бóльшие, а под случайными — структуры с меньшими вертикальными масштабами. Результаты исследования регулярной и случайной структуры радиосигналов в различных условиях на трассах станция «Мир»—геостационарный спутник приведены в [9–12]. Анализ амплитудных флуктуаций сантиметровых радиоволн выявил различие структуры неоднородностей коэффициента преломления в тропосфере и в стратосфере. По данным [12] в тропосфере в 50 % случаев пространственный спектр неоднородностей коэффициента преломления является степенным со спектральным индексом, равным 11/3. В стратосфере в 50 % случаев спектральный индекс близок к 5, и лишь в 13 % реализаций он равен 11/3.

Впервые регулярный радиозатменный мониторинг метеопараметров атмосферы был осуществлён с помощью спутника «Microlab-1», принимавшего высокостабильное по фазе радиоизлучение навигационных спутников GPS на длинах волн 19 и 24 см [13]. Результаты, полученные с помощью спутника «Microlab-1», продемонстрировали эффективность радиозатменного метода при глобальном мониторинге атмосферы и стимулировали работы по созданию спутниковых радиозатменных систем.

Исследование неоднородной структуры атмосферы по флуктуациям амплитуды сантиметровых радиоволн предпочтительнее по сравнению с измерениями в дециметровом диапазоне, т. к. при использовании существенно более коротких волн улучшается пространственное разрешение, в несколько раз увеличивается диапазон исследуемых масштабов неоднородностей, при этом на длине волны 2 см практически устраняется влияние ионосферы.

Отличие структуры неоднородностей в стратосфере от классической турбулентности стимулирует интерес к исследованию этой области атмосферы. Характерная для стратосферы сильная устойчивая температурная стратификация, подавляя вертикальные движения, благоприятствует образованию анизотропных, вытянутых по горизонтали, неоднородностей плотности.

Целью данной работы является анализ возможности мониторинга статистических характеристик случайных неоднородностей плотности и температуры стратосферы по данным радиозатменных измерений амплитуды сигнала и сравнение результатов эксперимента, осуществлённого в сантиметровом диапазоне длин волн, с теорией.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ

Интерпретация спутникового затменного эксперимента существенно упрощается при использовании приближения эквивалентного фазового экрана, моделирующего влияние атмосферы [14, 15]. Схема затменных измерений приведена на рис. 1. Плоскость фазового экрана проходит через центр Земли O, точку C перигея радиолуча и перпендикулярна трассе распространения AB. Здесь $a =$

$= 6\,371$ км — радиус Земли, $L_1 \approx 2\,300$ км, $L_2 \approx 41\,700$ км. Так как расстояния L_1 от излучателя A до фазового экрана и L_2 от экрана до приёмника в точке B за время наблюдения меняются относительно мало, их изменение не будем принимать во внимание. Фазовый экран вносит дополнительное возмущение фазы сигнала по сравнению с распространением в вакууме:

$$\varphi = \langle\varphi\rangle + \delta\varphi = k\left(\langle\Psi\rangle + \delta\Psi\right) = k\int\limits_l \left(\langle N\rangle + \delta N\right)\mathrm{d}l, \tag{1}$$

где Ψ — эйконал, N — индекс рефракции в атмосфере, $k = 2\pi/l$, угловые скобки означают статистическое среднее, а значок δ — соответствующие флуктуационные компоненты, т. е. $\delta N \equiv N - \langle N\rangle$. При зондировании стратосферы интеграл в (1) можно вычислять по прямой линии AB.

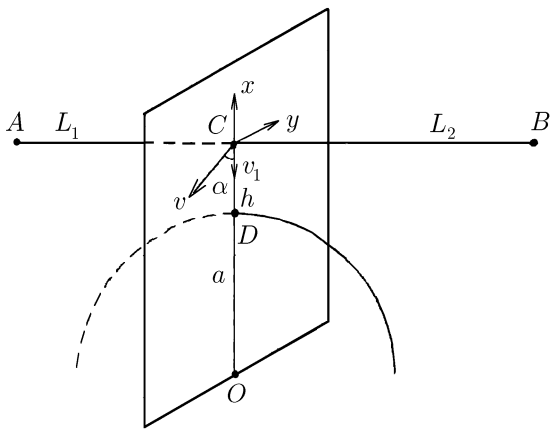

Рис. 1. Схема эксперимента

Флуктуации эйконала $\delta\Psi$ на выходе фазового экрана вызывают соответствующие флуктуации амплитуды δE в точке B. Движение передатчика и приёмника приводит к перемещению луча по фазовому экрану и, как следствие, к наблюдаемым флуктуациям. Анализ рассматриваемых явлений удобно проводить в системе координат с началом в точке C и осями x и y, лежащими в плоскости экрана и направленными вдоль локальной вертикали и по горизонтали к поверхности Земли соответственно. Ограничимся условием слабых флуктуаций амплитуды $\langle(\delta E/\langle E\rangle)^2\rangle < 0{,}5$, которое выполняется при зондировании стратосферы. Далее, говоря о характеристиках флуктуаций какой-либо величины, мы будем подразумевать её относительное значение, т. е. отношение флуктуационной составляющей к среднему значению этой величины. Предполагая, что флуктуации фазы или эйконала после фазового экрана распределены по нормальному закону, для двумерного спектра F_E флуктуаций амплитуды, соответствующего высоте перигея луча h, в соответствии с [16, 17] можно записать

$$F_E(\kappa_1,\kappa_2;h) = k^2\sin^2\left(\frac{L_2}{2k\gamma}\,q(h)\kappa_1^2 + \frac{L_2}{2k\gamma}\,\kappa_2^2\right)\langle\Psi(h)\rangle^2\,F_\psi(\kappa_1,\kappa_2;h), \tag{2}$$

где κ_1, κ_2 — вертикальные и горизонтальные волновые числа в плоскости фазового экрана, $\gamma = (L_1 + L_2)/L_1$, $q(h)$ — регулярное рефракционное ослабление мощности сигнала, $\langle\Psi(h)\rangle$ — среднее значение эйконала, F_ψ — двумерный спектр флуктуаций эйконала $\delta\Psi \equiv \delta\Psi/\langle\Psi\rangle$. Выражения для q и $\langle\Psi(h)\rangle$ в случае изотермической атмосферы приведены в [18, 19]. Высота h входит в (2) как плавно меняющийся параметр.

Спектр F_ψ флуктуаций эйконала на фазовом экране определяется трёхмерным спектром Φ_ν флуктуаций индекса рефракции в атмосфере [14–17, 19]. Спектр Φ_ν традиционно представляют в виде степенной зависимости с показателем степени $-p$; степенной участок ограничен внешним и внутренним масштабами неоднородностей. Параметры спектра — структурная характеристика, коэффициент анизотропии неоднородностей, внешний и внутренний масштабы — могут плавно зависеть от высоты h.

Примем, что в стратосфере существуют два типа неоднородностей плотности: сильно анизотропные неоднородности с одномерным вертикальным спектром, описываемым моделью насыщенных внутренних гравитационных волн [7], и изотропная колмогоровская турбулентность. Следуя [15], представим

трёхмерный спектр флуктуаций индекса рефракции в общем виде, допускающем переход к обеим моделям:

$$\Phi_\nu(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3; h) = C^2(h)\eta^2 \left[\kappa_1^2 + \eta^2 \left(\kappa_2^2 + \kappa_3^2\right)\right]^{-p/2}, \tag{3}$$

где $C^2(h)$ — коэффициент, характеризующий высотную зависимость флуктуаций индекса рефракции, η — коэффициент анизотропии, который определяется как отношение характерных горизонтальных масштабов неоднородностей к вертикальным. В частном случае, при $p = 11/3$ и $\eta = 1$, Φ_ν представляет собой спектр колмогоровской турбулентности с $C^2 = 0{,}033\, C_\nu^2$, где C_ν^2 — структурная характеристика флуктуаций индекса рефракции или температуры.

Для модели насыщенных внутренних гравитационных волн вертикальный (односторонний, $\kappa_1 > 0$) спектр относительных флуктуаций индекса рефракции представляется в виде [7]

$$V_\nu(\kappa_1) = A\, \frac{N_{\rm W}^4}{g^2}\, \kappa_1^{-3}, \tag{4}$$

где A — числовой коэффициент, $N_{\rm W}$ — частота Брента—Вяйсяля, равная 0,022 рад/с для стратосферы по модели стандартной атмосферы, g — ускорение свободного падения. Спектр Φ_ν для модели насыщенных внутренних гравитационных волн также описывается формулой (3), если положить в ней

$$C^2 = A\, \frac{(p-2)\, N_{\rm W}^4}{4\pi g^2}, \qquad p = 5, \qquad \eta \gg 1. \tag{5}$$

Возможность представления Φ_ν в виде степенной зависимости (3) без учёта внешнего и внутреннего масштабов неоднородностей для слабых флуктуаций связана со следующими обстоятельствами. Если внешний масштаб много больше радиуса первой зоны Френеля $r_{\rm F} = \sqrt{\lambda L_1 L_2/(L_1 + L_2)} \approx$ $\approx$ 0,2 км для $\lambda = 2$ см, то его роль при рассмотрении амплитудных флуктуаций несущественна при $p < 6$ [20]. С другой стороны, дифракционный масштаб $r_{\rm F}$, характеризующий поперечное лучу пространственное разрешение, на два порядка превышает возможные значения внутреннего масштаба для колмогоровской турбулентности [4] и в 4 раза — характерный вертикальный масштаб, равный примерно 50 м для анизотропных неоднородностей.

В общем случае согласно [14, 15] можно принять предположение, что поле случайных флуктуаций индекса рефракции $\delta\nu = \delta N/\langle N\rangle$ является локально однородным в сферическом слое. Эта гипотеза учитывает изменение ориентации неоднородностей в атмосферном слое относительно зондирующего луча, что может быть существенно для сильно анизотропных слоистых неоднородностей. Спектры F_ψ и Φ_ν в этом случае связаны интегральным соотношением, приведённым в [14, 20]. Если коэффициент анизотропии η меньше критического значения $\eta_{\rm cr} = \sqrt{a/H_0} \approx 30$, то, как показано в [20], можно не учитывать изменение ориентации неоднородностей. В этом случае спектры F_ψ и Φ_ν связаны согласно [14, 20, 21] соотношением

$$F_\psi(\kappa_1, \kappa_2; h) = \sqrt{\frac{\pi}{aH_0}}\, \Phi_\nu(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3 = 0; h). \tag{6}$$

Для упрощения расчётов при вычислении спектров флуктуаций амплитуды в случае анизотропных неоднородностей мы будем пользоваться соотношением (6) и положим $\eta = 25$, хотя оценки по данным наблюдений мерцаний звёзд [5], полученные в результате совместного анализа вертикальных и горизонтальных спектров мерцаний, показывают, что анизотропия неоднородностей слоистого типа превышает критическую. Возможность такого упрощения основана на том, что, как показано в [20], амплитудные флуктуации быстро насыщаются при $\eta \geq \eta_{\rm cr}$, и результаты расчётов дисперсии и спектров флуктуаций амплитуды с использованием соотношения (6) при $\eta = 25$ не отличаются существенно от результатов расчёта по точным формулам при $\eta > \eta_{\rm cr}$.

Траекторию движения точки C перигея радиолуча (см. рис. 1) в течение короткого интервала времени измерений можно аппроксимировать отрезком прямой, характеризуемой углом захода α по отношению к вертикали. При $\alpha = 0$ реализуется строго вертикальный заход, при $\alpha = 90°$ — горизонтальное сечение атмосферы. Заходы с промежуточными значениями α мы будем называть наклонными. Тогда одномерный пространственный спектр флуктуаций амплитуды, измеренный на этом отрезке траектории, согласно [21, 22] можно записать в виде

$$V_E(\kappa;\alpha,h) = \int F_E(\kappa/\cos\alpha - \kappa'\sin\alpha, \kappa'\cos\alpha)\,\mathrm{d}\kappa', \tag{7}$$

где κ — волновое число вдоль выбранного отрезка траектории на фазовом экране.

Для перехода к частотному спектру амплитудных флуктуаций воспользуемся гипотезой «замороженности» турбулентности, которая, учитывая высокую скорость движения спутника, хорошо выполняется. Тогда частотный спектр флуктуаций амплитуды для частот $f \geq 0$ можно согласно [4] записать в виде

$$G_E(f;\alpha,h) = \frac{4\pi}{v}\,V_E(\kappa;\alpha,h), \tag{8}$$

где $\kappa = 2\pi f/v$, v — скорость перемещения точки C по фазовому экрану (см. рис. 1). Уравнения (2), (3), (6)–(8) составляют полную систему, связывающую измеряемые частотные спектры флуктуаций амплитуды с трёхмерным спектром флуктуаций Φ_ν индекса рефракции. Задавая параметры спектра Φ_ν для выбранного типа неоднородностей, можно рассчитать соответствующий спектр G_E флуктуаций амплитуды. Сравнение расчёта с экспериментом позволяет оценить в модели (3) коэффициент C^2, характеризующий интенсивность турбулентности для выбранного типа неоднородностей.

При зондировании анизотропных неоднородностей луч пересекает их в основном по вертикали, если выполняется условие $\operatorname{tg}\alpha < \eta$, т. е. все спектры амплитудных флуктуаций становятся подобными при их пересчёте к вертикальным волновым числам. Так как для анизотропных неоднородностей $\eta \gg 1$, это условие выполняется даже для очень наклонных заходов. В этом случае частоты флуктуаций амплитуды определяются вертикальной компонентой скорости движения точки перигея $v_1 = v\cos\alpha$. С увеличением α спектральная плотность на низких частотах возрастает, т. к. частоты флуктуаций амплитуды, обусловленных анизотропными неоднородностями, смещаются в низкочастотную область из-за уменьшения v_1, хотя полная скорость v, определяемая относительным движением спутников, при этом увеличивается. В случае же изотропных неоднородностей, наоборот, частоты флуктуаций возрастают с увеличением скорости v, а спектральная плотность в низкочастотной области, соответственно, уменьшается. Таким образом, при увеличении угла α происходит частотное разделение анизотропной и изотропной компонент флуктуаций амплитуды измеряемого сигнала, как это и было показано при оптическом просвечивании [3].

В спектрах флуктуаций амплитуды можно выделить два участка: низкочастотный и высокочастотный, границей которых служит частота f_{F}, соответствующая масштабу Френеля. Для анизотропных неоднородностей (при условии $\operatorname{tg}\alpha < \eta$) $f_{\mathrm{F}} = v_1/r_{\mathrm{F}}$, а для изотропной турбулентности $f'_{\mathrm{F}} = v/r_{\mathrm{F}}$. Здесь при качественном рассмотрении мы не учитываем эффект сжатия зоны Френеля по вертикали в $\sqrt{q}$ раз, т. к. в стратосфере $q \approx 1$. Анализ вычисленных спектров показывает, что для режима слабых флуктуаций спектральные плотности G_E для обеих моделей неоднородностей в низкочастотной области $f < f_{\mathrm{F}}$ асимптотически приближаются к некоторым постоянным значениям, а в высокочастотной области, т. е. в области дифракционного спада, как показано в [15, 20, 21], их асимптотики зависят от частоты как

$$G_E(f)\Big|_{f \gg f_{\mathrm{F}}} \propto f^{-p+1} \tag{9}$$

и не зависят от анизотропии неоднородностей. По асимптотике экспериментальных спектров в высокочастотной области можно определить спектральный индекс p и приоритет той или иной модели. Предпочтительнее, однако, проводить измерения при таких больших углах α, при которых происходит заметное частотное разделение вкладов анизотропных и изотропных неоднородностей в спектральную плотность флуктуаций. При частотном разделении спектров можно точнее оценить и их наклон в высокочастотной области вследствие меньшего взаимного наложения спектров, обусловленных изотропными и анизотропными неоднородностями.

В [15, 19] показано, что для спектра (3) зависимость дисперсии σ_E^2 флуктуаций амплитуды от длины зондирующей волны при произвольном коэффициенте анизотропии η представляется в виде

$$\sigma_E^2 \propto \lambda^b, \tag{10}$$

где $b = -3 + p/2$. Здесь $b = -1/2$ для $p = 5$ и $b = -7/6$ для $p = 11/3$. Обозначим через Q отношение дисперсий флуктуаций амплитуды при $p = 5$ и при $p = 11/3$. Тогда Q зависит от длины волны как $\lambda^{2/3}$, т. е. чем больше длина волны, тем больше доминируют мерцания, вызванные неоднородностями, имеющими спектр с бóльшим спектральным индексом. В частности, отношение дисперсий Q для $\lambda = 2$ см примерно в 10^3 раз превышает Q при оптическом просвечивании на длине волны $\lambda = 0{,}5$ мкм. Как показывают данные наблюдений мерцаний звёзд, в стратосфере соотношение между интенсивностями изотропной ($p = 11/3$) и анизотропной ($p = 5$) турбулентностей таково, что они дают сравнимый вклад в полную дисперсию мерцаний в оптическом диапазоне [3]. При переходе к радиодиапазону можно ожидать, что амплитудные флуктуации в стратосфере будут в основном определяться анизотропными неоднородностями.

2. ИЗМЕРЕНИЯ И ОБРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

При радиозатменных измерениях установленный на станции «Мир» передатчик излучал немодулированный сигнал на длине волны $\lambda = 2$ см. Радиоволны круговой поляризации излучались антенной с шириной диаграммы направленности 10°. При заходе станции «Мир» в зону тени Земли максимум диаграммы направленности ориентировался по касательной к земной поверхности в направлении геостационарного спутника. Принимаемый на геостационарном спутнике сигнал усиливался и ретранслировался на наземный измерительный пункт без искажения фазы сигнала. В усилителе мощности, установленном на геостационарном спутнике, имелась автоматическая регулировка усиления (АРУ) с динамическим диапазоном около 20 дБ и постоянной времени порядка 1 с. Из-за влияния АРУ коэффициент усиления в линии связи станция «Мир»—геостационарный спутник—Земля изменялся в зависимости от уровня сигнала, принимаемого на геостационарном спутнике. Для исключения влияния изменений коэффициента усиления на результаты радиозатменных измерений проводились сеансы калибровок. Калибровочные измерения осуществлялись сразу после окончания сеанса радиозатменных измерений. При калибровках приёмная антенна геостационарного спутника ориентировалась на наземный пункт управления. На наземном пункте включался имитатор бортового передатчика станции «Мир», излучавший сигнал через антенну, аналогичную установленной на станции. Принятый на геостационарном спутнике сигнал ретранслировался на Землю, т. е. сигнал проходил по тому же тракту, что и при радиозатменных измерениях. Калибровка осуществлялась во всём диапазоне изменений уровня сигнала при радиозатмении путём уменьшения излучаемой мощности вплоть до исчезновения ретранслируемого геостационарным спутником сигнала. Шаг изменения уровня излучаемого сигнала составлял 1 дБ. Полученная при калибровке амплитудная характеристика использовалась для коррекции изменений усиления в линии связи при затменных измерениях. Частота принятого на наземном измерительном пункте сигнала понижалась последовательным гетеродинированием до 32 кГц. После

гетеродинирования сигнал поступал на линейный детектор с динамическим диапазоном 48 дБ и постоянной времени 2 мс. Отсчёты напряжения с выхода детектора, пропорциональные амплитуде принимаемого сигнала, осуществлялись с частотой 152 Гц.

Измерения начинались за 10 мин до касания линией визирования (прямая AB на рис. 1) поверхности Земли в точке D и заканчивались после исчезновения сигнала. Внеатмосферный участок измерений использовался для контроля изменений усиления в линии связи, суммарного уровня шума передатчика и приёмника и калибровки данных. Измерения после исчезновения сигнала позволяли контролировать уровень шума приёмника, а также частотную характеристику и нулевой уровень детектора.

Определение минимальной высоты перигея луча h над земной поверхностью осуществлялось с использованием данных об орбитах станции «Мир» и геостационарного спутника и с учётом влияния рефракции атмосферы на основе модели экспоненциального высотного профиля индекса рефракции $N(h)$. Зависимость $N(h)$ подбиралась с учётом имеющихся данных о значениях индекса рефракции вблизи земной поверхности.

Для обработки были выбраны данные измерений с наибольшим углом захода α (рис. 1). В измерениях использовался геостационарный спутник, расположенный над меридианом 16° з. д. В табл. 1 приведена краткая характеристика сеансов наблюдений, данные которых были использованы в этой работе. Координаты точки C на рис. 1 и угол захода α даны на время, соответствующее высоте перигея луча $h = 30$ км.

Таблица 1

Номер сеанса	Дата	Координаты перигея		α, град
		Широта, град	Долгота, град	
1	26.05.98	40,5 с. ш.	62,2 в. д.	72,4
2	27.05.98	47,4 с. ш.	60,7 в. д.	65,7
3	09.07.98	42,9 ю. ш.	61,7 в. д.	71,7

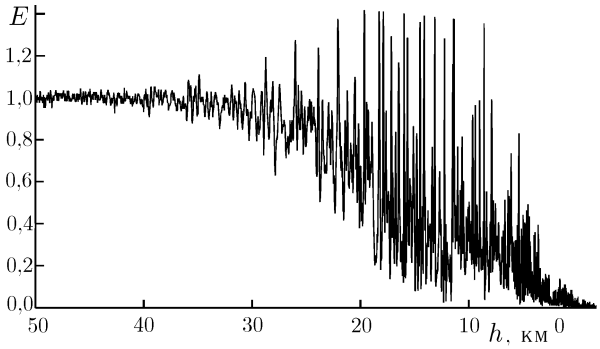

Рис. 2. Изменение нормированной амплитуды сигнала в сеансе № 3 при уменьшении высоты h

На рис. 2 приведена типичная зависимость нормированной амплитуды радиоволны от высоты перигея луча для сеанса № 3. На высотах более 40 км малые вариации амплитуды сигнала обусловлены шумами. Ниже начинают проявляться флуктуации амплитуды, усиливающиеся по мере погружения радиолуча в атмосферу. На высоте около 13 км проявляется область тропопаузы с характерным изломом среднего хода амплитуды. Отметим, что начиная с высот 6÷7 км и ниже характер сигнала меняется: амплитудные флуктуации становятся более высокочастотными и группируются в отдельных областях.

Участок записи сигнала, относящийся к стратосфере, использовался для определения частотных спектров флуктуаций амплитуды. Определение спектральной плотности проводилось по интервалам длительностью 3,35 с; соответствующее им изменение высоты h составляло около 3 км. Средний ход амплитуды на этих участках реализаций учитывался линейным трендом. Спектры рассчитывались с помощью быстрого преобразования Фурье, сглаживание полученных значений мощности флуктуаций амплитуды проводилось в прямоугольном окне с постоянной добротностью, равной 2. Полученные спектры корректировались на высоких частотах по

измеренной частотной характеристике детектора и из них вычитался вклад шумов, определённый по измерениям в высотном интервале от 45 до 50 км.

3. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

На рис. 3 и 4 приведены экспериментальные и теоретические частотные спектры флуктуаций амплитуды в диапазоне высот от 18 до 36 км для сеансов № 3 и № 1 соответственно. Среднее значение высоты h и среднеквадратичное значение флуктуаций амплитуды σ_E указаны около соответствующего спектра. По вертикальным осям на рис. 3 и 4 отложена безразмерная величина fG_E, по горизонтальным осям — частота флуктуаций f. Экспериментальные значения fG_E показаны на рис. 3 и 4 треугольниками. Тонкими ломаными линиями, обозначенными цифрой *1* (здесь и далее номера кривых указаны только на панелях, расположенных вверху слева), на рисунках показана измеренная на внеатмосферном участке спектральная плотность шума. Теоретические спектры, рассчитаные для изотропной колмогоровской турбулентности, показаны пунктирными кривыми *3*, а для случая сильно анизотропных неоднородностей, соответствующих модели насыщенных внутренних гравитационных волн, кривыми *2*. Полагая, что изотропные и анизотропные неоднородности статистически независимы, их общий вклад в режиме слабых флуктуаций определяется суммой спектров для каждого типа неоднородностей. Суммарный теоретический спектр флуктуаций амплитуды показан на рисунках толстой линией, обозначенной цифрой *4*. Кривые *2* до частоты $f \approx 10$ Гц совпадают с кривыми *4*. Коэффициент анизотропии η и спектральный индекс p спектра Φ_v в (3) при расчётах задавались в соответствии с выбранными моделями неоднородностей плотности, а числовой коэффициент C^2 для каждого типа турбулентности подбирался по наилучшему совпадению расчётов с экспериментом.

При реализованных в наблюдениях углах α дифракционные максимумы теоретических спектров fG_E для анизотропных неоднородностей соответствовали частоте 3,5÷4 Гц, а для изотропных неоднородностей — 13÷13,5 Гц. Сильное разнесение спектров по частоте существенно облегчает их селекцию. Из рис. 3 и 4 видно, что флуктуации амплитуды радиосигнала в стратосфере в основном определяются анизотропными неоднородностями, вносящими доминирующий вклад в дисперсию σ_E^2 флуктуаций амплитуды. Вклад колмогоровской турбулентности во флуктуации амплитуды мал. Вклады изотропных и анизотропных неоднородностей сравнимы лишь на частотах $f \geq 10$ Гц, в области спадания экспериментальных спектров, где уже существенно влияние шума. В тропосфере, где иное, чем в стратосфере, соотношение между интенсивностями турбулентностей разного типа, флуктуации амплитуды радиоволны, обусловленные колмогоровской турбулентностью, выражены гораздо сильнее [12].

Спектры на рис. 3 и 4 качественно похожи друг на друга, несмотря на различие географической широты, сезона измерений и характера подстилающей поверхности. В количественном плане можно отметить, что спектры, полученные зимой над Индийским океаном (рис. 3), превышают по амплитуде спектры, полученные весной над Туркменией (рис. 4) при тех же высотах зондирования h.

Остановимся подробнее на сравнении результатов измерений с расчётом по модели насыщенных внутренних гравитационных волн. При расчёте модельного спектра и сравнении его с экспериментом свободным параметром был коэффициент $C^2 \propto AN_{\mathrm{W}}^4$ в (5); все остальные параметры, входящие в (3), были фиксированы. В нашем случае мы можем оценить только один из параметров A и N_{W}, зафиксировав другой.

На рис. 5 треугольниками, кружками и квадратиками для данных, полученных соответственно в сеансах измерений № 1, 2 и 3, приведены полученные нами оценки коэффициента A при заданной частоте Брента—Вяйсяля $N_{\mathrm{W}} = 0{,}022$ рад/с. Среднее значение коэффициента A оказалось равным 0,14 в диапазоне высот $h = 15 \div 30$ км. Если в соответствии с [7, 23] положить $A = 0{,}1$, то среднее значение частоты Брента—Вяйсяля $N_{\mathrm{W}} = 0{,}024$ рад/с. В [5] по наблюдениям мерцаний звёзд получено,

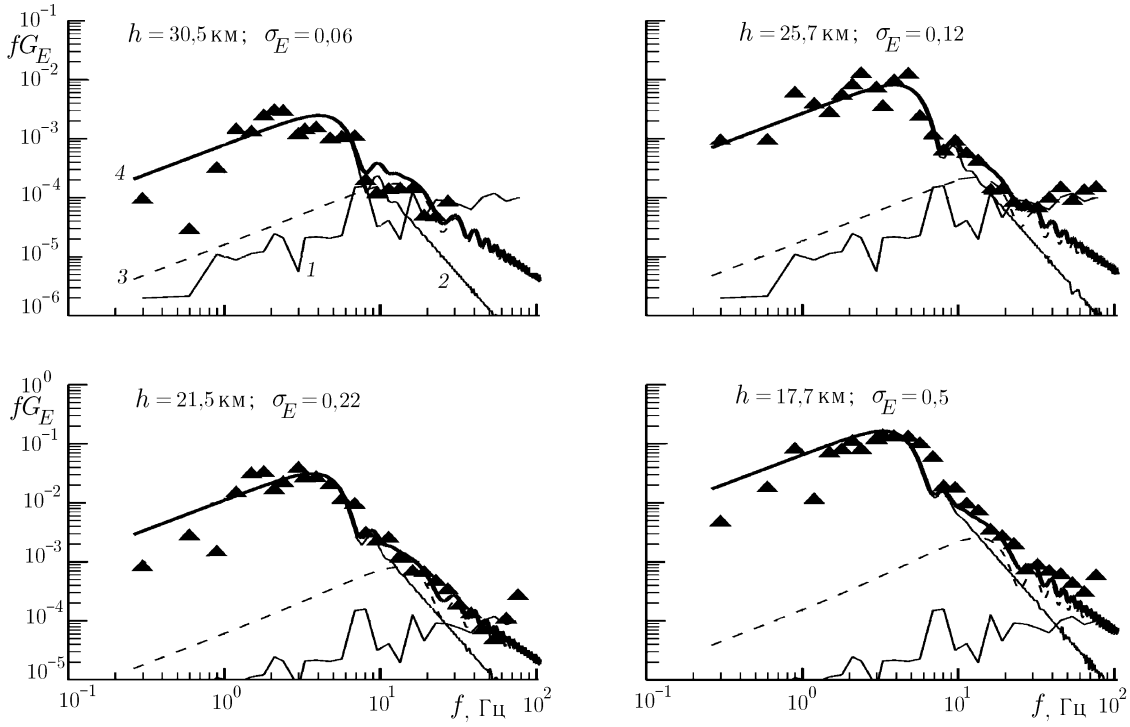

Рис. 3. Частотные спектры флуктуаций величины $fG_E(f)$ в сеансе № 3

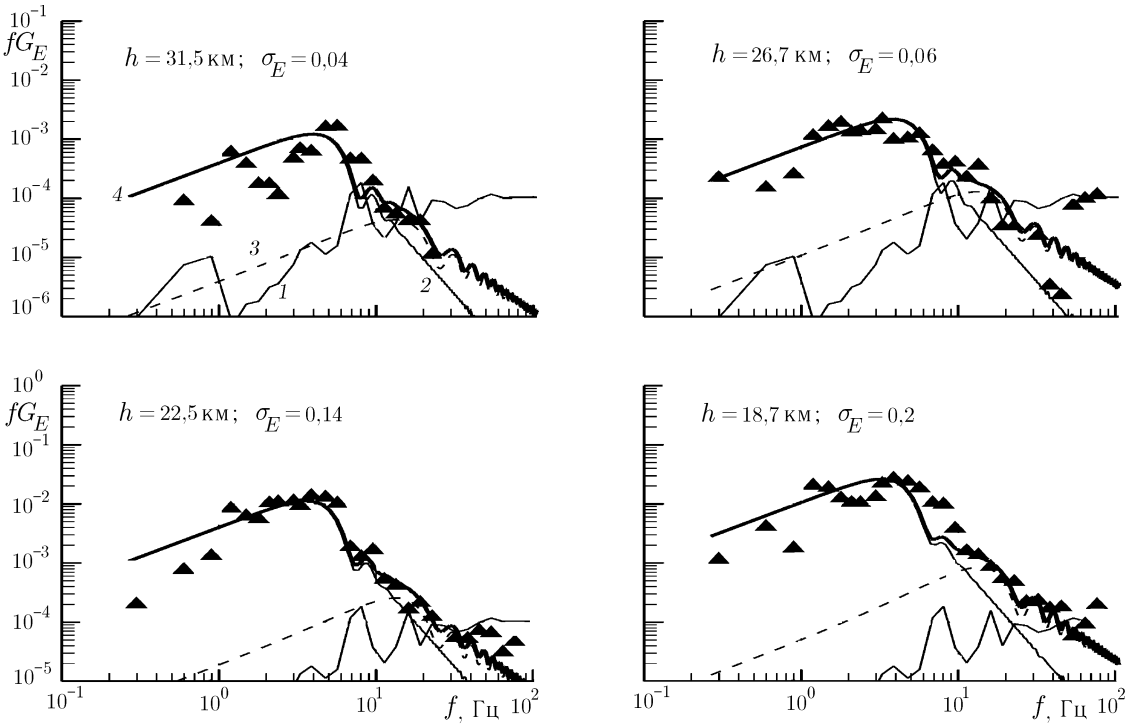

Рис. 4. Частотные спектры флуктуаций величины $fG_E(f)$ в сеансе № 1

что $A \approx 0{,}06$ в диапазоне высот 24÷36 км; в этом диапазоне высот радиопросвечивание даёт близкие значения A. В [24] представлены результаты проводившихся в течение нескольких лет зондовых измерений температуры с высоким разрешением и их сравнение с моделью насыщенных ВГВ. Приведённые

в [24] в табл. 1 данные показывают, что в стратосфере коэффициент A равен в среднем 0,11, а частота Брента—Вяйсяля $N_{\mathrm{W}} = 0{,}025$ рад/с.

На рис. 5 можно заметить, что значения A, полученные в сеансе № 3 зимой, в среднем превышают соответствующие величины, полученные весной. Изменение характера волновой активности зимой, выражающееся в увеличении температурных флуктуаций (а следовательно, и коэффициента A), отмечалось и в зондовых измерениях. В [24] получено, что средние значения A, полученные зимой, превышали результаты летних измерений в 3—4 раза, при этом для частоты Брента—Вяйсяля не отмечено заметной разницы между летними и зимними значениями. Как видно на рис. 5, в сеансах № 2 и 3 наблюдается локальное превышение значений A (или N_{W}) над средними в диапазоне высот 15÷20 км. В работе [8] на измеренных высотных профилях частоты Брента—Вяйсяля в диапазоне высот 17÷21 км также наблюдается локальный максимум.

Приведённые в нашей работе результаты получены на примере только трёх сеансов радиозатменных измерений, поэтому отмеченные детали сезонного и высотного поведения коэффициента A носят, скорее, качественный, чем количественный характер. Однако удовлетворительное согласие среднего значения этого параметра с данными зондовых измерений и моделью насыщенных внутренних гравитационных волн показывает, что данные о флуктуациях амплитуды сигнала при радиопросвечивании атмосферы на трассе спутник—спутник могут быть использованы для контроля характеристик внутренних волн в стратосфере.

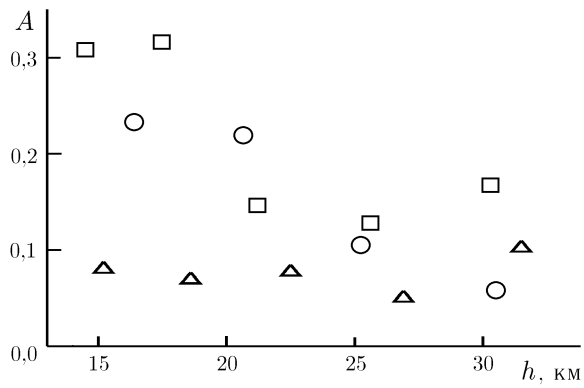

Рис. 5. Оценки коэффициента A по данным радиопросвечивания

Отметим, что аналогичная методика определения параметров трёхмерных спектров флуктуаций показателя преломления из сравнения экспериментальных и модельных спектров флуктуаций амплитуды применялась в [21, 25] при интерпретации данных радиопросвечивания атмосферы Венеры с помощью межпланетных станций.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе исследована возможность мониторинга случайного поля флуктуаций плотности или температуры в стратосфере по измерениям амплитуды сигнала при радиопросвечивании атмосферы на трассах спутник—спутник. Проанализированы данные трёх сеансов наблюдений, проведённых на трассе орбитальная станция «Мир»—геостационарный спутник с использованием радиоволн с длиной 2 см. Определены спектры флуктуаций амплитуды, проведено сравнение экспериментальных спектров с теоретическими, рассчитанными для двух типов неоднородностей, характерных для стратосферы: сильно анизотропных неоднородностей с одномерным вертикальным спектром со степенным показателем −3 и изотропной колмогоровской турбулентности. Первому типу неоднородностей соответствует модель насыщенных внутренних гравитационных волн. Показано, что подавляющий вклад в измеренные дисперсию и спектры флуктуаций амплитуды радиоволн в стратосфере вносят сильно анизотропные неоднородности.

Сравнивая результаты затменного зондирования стратосферы в оптическом и радиодиапазонах, можно отметить следующие обстоятельства, связанные с различием длин волн зондирующего излучения. Первое обстоятельство связано с различием размера зоны Френеля, обуславливающим чувствительность и пространственную разрешающую способность метода. В оптическом диапазоне при наблюдении заходов звёзд со спутников с высотой орбиты 350 км размер зоны Френеля составляет

около 1 м. Высокая чувствительность оптического просвечивания позволяет исследовать структуру неоднородностей плотности начиная с высот 60÷70 км [9, 10]. При этом диапазон исследуемых высот, в котором применимо приближение слабых флуктуаций и, следовательно, возможна корректная количественная интерпретация данных при исследовании атмосферной турбулентности, ограничен снизу высотами 25÷30 км. В радиодиапазоне размер зоны Френеля в сотни раз больше, и усреднение неоднородностей с меньшими масштабами приводит к существенно меньшему уровню флуктуаций сигнала. Для рассматриваемых в этой статье данных флуктуации амплитуды, превышающие шумовые, начинаются с высот 35÷40 км. При этом условия применимости приближения слабых флуктуаций простираются вплоть до тропосферы, т. е. на 10÷15 км ниже, чем в оптическом диапазоне. С этой точки зрения оптическое и радиопросвечивание дополняют друг друга, расширяя высотный диапазон и диапазон масштабов исследуемых неоднородных структур в атмосфере. Второе обстоятельство связано с тем, что во флуктуации сигнала в оптическом и радиодиапазонах неоднородные структуры разных типов вносят различный относительный вклад. В частности, при радиопросвечивании стратосферы можно ожидать доминирующего проявления насыщенных внутренних гравитационных волн в амплитудных флуктуациях.

Проведённый анализ амплитудных измерений показывает, что затменное радиопросвечивание на трассах спутник—спутник может быть использовано для глобального дистанционного мониторинга характеристик внутренних волн в стратосфере.

Авторы благодарят А. С. Гурвича за полезные замечания при обсуждении результатов работы. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 00–05–64376, 01–02–16002 и 01–05–64944).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров А. П., Гречко Г. М., Гурвич А. С. и др. // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1990. Т. 26, № 1. С. 5.
2. Гречко Г. М., Гурвич А. С., Кан В. и др. // Докл. РАН. 1997. Т. 357, № 5. С. 683.
3. Гурвич А. С., Кан В., Савченко С. А. и др. // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2001. Т. 37, № 4. С. 469.
4. Татарский В. И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. М.: Наука, 1967.
5. Grechko G. M., Gurvich A. S., Kan V. et al. // Adv. Space Res. 1992. V. 12, No. 10. P. 169.
6. Dalaudier F., Gurvich A. S., Kan V., Sidi C. // Adv. Space Res. 1994. V. 14, No. 9. P. 61.
7. Smith S. A., Fritts D. C., Van Zandt T. E. // J. Atmos. Sci. 1987. V. 44, No. 10. P. 1 404.
8. Tsuda T., Van Zandt T. E., Mizumoto M. et al. // J. Geophys. Res. D. 1991. V. 96, No. 9. P. 17 265.
9. Вилков И. А., Матюгов С. С., Яковлев О. И. // Радиотехника и электроника. 1993. Т. 38, № 5. С. 795.
10. Yakovlev O. I., Matyugov S. S., Vilkov I. A. // Radio Sci. 1995. V. 30, No. 3. P. 591.
11. Ануфриев В. А., Матюгов С. С., Яковлев О. И. // Радиотехника и электроника. 2000. Т. 45, № 1. С. 48.
12. Матюгов С. С., Яковлев О. И., Ануфриев В. А. // Радиотехника и электроника. 2001. Т. 46, № 7. С. 826.
13. Rocken C., Anthes R., Exner M. et al. // J. Geophys. Res. D. 1997. V. 102, No. 25. P. 29 849.
14. Гурвич А. С. // Изв. вузов. Радиофизика. 1984. Т. 27, № 8. С. 951.
15. Гурвич А. С. // Оптика атмосферы. 1989. Т. 2, № 3. С. 239.
16. Haugstad B. S. // Radio Sci. 1978. V. 13, No. 3. P. 435.
17. Hubbard W. B., Jokipii J. R., Wilking B. A. // ICARUS. 1978. V. 34, No. 34. P. 374.
18. Яковлев О. И. Космическая радиофизика. М.: РФФИ, 1998.

19. Гурвич А. С., Кан В. // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 1997. Т. 33, № 3. С. 314.
20. Gurvich A. S., Brekhovskikh V. L. // Waves in Random Media. 2001. V. 11. P. 163.
21. Woo R., Ishimaru A., Yang F.-Ch. // Radio Sci. 1980. V. 15, No. 3. P. 695.
22. Гурвич А. С., Кан В. // Оптика атмосферы. 1989. Т. 2, № 4. С. 339.
23. Fritts D. C. // PAGEOPH. 1989. V. 130, No. 2–3. P. 343.
24. Fritts D. C., Tsuda T., Sato T. et al. // J. Atmos. Sci. 1988. V. 45, No. 12. P. 1 741.
25. Leroy S. S., Ingersoll A. P. // J. Atmos. Sci. 1996. V. 53, No. 7. P. 1 018.

[1] Институт физики атмосферы РАН,
[2] Институт радиотехники и электроники РАН,
г. Москва, Россия

Поступила в редакцию
27 ноября 2001 г.

THE STRUCTURE OF STRATOSPHERIC IRREGULARITIES ACCORDING TO RADIO-OCCULTATION DATA OBTAINED USING SATELLITE-TO-SATELLITE PATHS

V. Kan, S. S. Matyugov, and O. I. Yakovlev

We analyze the possibility of monitoring density or temperature fluctuations in the stratosphere based on data of amplitude radio-occultation measurements at centimeter waves using satellite-to-satellite paths. Comparison of the experimental spectra of amplitude fluctuations with the theoretical spectra calculated for a model containing both strongly anisotropic irregularities and an isotropic Kolmogorov turbulence showed that the amplitude fluctuations of radio waves in the stratosphere are mainly contributed by anisotropic irregularities which correspond to the model of saturated internal gravity waves. The efficiency of the radio occultation technique for the global remote monitoring of internal waves in the stratosphere is demonstrated.

УДК 551.511.3

АКУСТИКО-ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ В АТМОСФЕРЕ С КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫМ ТЕМПЕРАТУРНЫМ ПРОФИЛЕМ

Г. И. Григорьев [1], *О. Н. Савина* [2]

Рассмотрена задача о распространении акустико-гравитационных волн в атмосфере с постоянным градиентом температуры в приземной области. Представление температурной зависимости от высоты в виде линейной функции позволило свести волновое уравнение к гипергеометрическому, причём этот вывод справедлив как в случае сжимаемой среды, так и в приближении её несжимаемости. Решение уравнения представлено в виде вырожденных гипергеометрических функций. Для анализа полученных решений рассмотрена двухслойная модель полуограниченной атмосферы, в верхнем слое которой фоновая температура не меняется с высотой. Подробно рассмотрены результаты в приближении несжимаемой среды. Для указанной модели найдены аналитические выражения для полей возмущений, а также получено характеристическое уравнение, решение которого позволило определить дисперсионные характеристики волны при больших по сравнению с толщиной слоя горизонтальных масштабах волн на частоте, близкой к частоте Брента—Вяйсяля.

ВВЕДЕНИЕ

Акустико-гравитационные волны играют важную роль в динамике атмосферы и океана [1, 2]. Свойства этих волн изучались как для простых моделей сред с постоянной температурой, так и для более сложных, при построении которых учитывались реальные профили температуры и ветровых движений [3—13]. Для решения такого рода задач использовались различные аналитические и численные методы.

В данной работе, используя линейное приближение, мы рассмотрим некоторые вопросы распространения акустико-гравитационных волн в атмосфере, в приземном слое которой температура имеет постоянный градиент.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ВЫВОД ИСХОДНЫХ УРАВНЕНИЙ

Свойства линейных акустико-гравитационных волн детально изучены для модели изотермической атмосферы с высотным профилем температуры $T_0(z) = \mathrm{const}$ [14]. При произвольной зависимости температуры $T_0(z)$ и плотности $\rho_0(z)$ газа от вертикальной координаты z эта задача сильно усложняется, и в общем случае для её решения необходимо использовать численные методы [10—13].

В данной работе рассматривается случай кусочно-линейной аппроксимации высотного профиля температуры, когда наряду с областью, где температура не зависит от высоты, имеется область, где

$$T_0(z) = T_\mathrm{s}\,(1 + \alpha z). \tag{1}$$

Здесь T_s — температура на уровне $z = 0$, αT_s — постоянный градиент температуры. Нетрудно проверить, что в плоско-слоистой атмосфере, температура которой определяется соотношением (1), равновесные плотность $\rho_0(z)$ и давление $p_0(z)$ меняются с высотой z в соответствии с формулами

$$\rho_0(z) = \rho_\mathrm{s}\,(1 + \alpha z)^{-(1+\eta)}, \tag{2}$$

$$p_0(z) = p_\mathrm{s}\,(1 + \alpha z)^{-\eta}, \tag{3}$$

где $\eta = 1/(\alpha H_{\rm s})$, а $\rho_{\rm s}$, $p_{\rm s}$ и $H_{\rm s}$ — соответственно плотность, давление и высота однородной атмосферы на уровне $z = 0$. При расчётах будем использовать декартову систему координат, ось z которой направлена против силы тяжести.

Для принятой модели высота однородной атмосферы $H_0(z)$ и квадрат скорости звука $c^2 = \gamma p_0/\rho_0$ являются линейными функциями координаты z:

$$H_0(z) = H_{\rm s}\,(1+\alpha z), \qquad c^2(z) = c_{\rm s}^2\,(1+\alpha z). \tag{4}$$

Отметим, что для случая конвективного равновесия [15], когда $p_0\rho_0^{-\gamma} = \mathrm{const}$, температура T_0 изменяется по закону (1) с

$$\alpha = \alpha_{\rm ad} = -(\gamma-1)/(\gamma H_{\rm s}), \tag{5}$$

где γ — показатель адиабаты.

Поведение слабых возмущений в атмосфере с произвольной высотной зависимостью температуры описывается известной системой гидродинамических уравнений [15]. Из этой системы можно получить уравнения для различных физических величин. В частности, уравнение для $\chi = \mathrm{div}\,\mathbf{v}$ имеет следующий вид [9]:

$$\frac{\partial^4\chi}{\partial t^4} - c^2\,\Delta\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} + \left(\gamma g - \frac{\mathrm{d}c^2}{\mathrm{d}z}\right)\frac{\partial^3\chi}{\partial t^2\,\partial z} - \left[(\gamma-1)\,g^2 + g\frac{\mathrm{d}c^2}{\mathrm{d}z}\right]\Delta_\perp\chi = 0. \tag{6}$$

Здесь t — время, $\Delta = \partial^2/\partial z^2 + \Delta_\perp$ — оператор Лапласа, $\Delta_\perp = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$, g — ускорение свободного падения. Уравнение для вертикальной компоненты скорости w можно представить в виде

$$c^2\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\Delta_\perp\right)\frac{\partial^4 w}{\partial t^2\,\partial z^2} + \left[c^2\left(\frac{\mathrm{d}c^2}{\mathrm{d}z} + \gamma g\right)\Delta_\perp - \gamma g\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\frac{\partial^3 w}{\partial t^2\,\partial z} - \\ - \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\Delta_\perp\right)^2 + gc^2\frac{\mathrm{d}c^2}{\mathrm{d}z}\Delta_\perp^2 + (1-\gamma)\,g^2\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\Delta_\perp\right)\Delta_\perp\right]w = 0. \tag{7}$$

Сопоставление уравнений (6) и (7) показывает, что их совпадение имеет место лишь при $T_0(z) = \mathrm{const}$. При фиксированной зависимости $c(z)$ уравнение (7) является более сложным, к тому же оно имеет более высокий порядок по времени и горизонтальным координатам, чем уравнение (6).

В приближении несжимаемой среды $\chi = 0$ ($\omega^2 \ll c^2k^2$, или формально $c \to \infty$) уравнение (7) сильно упрощается и для $w \propto \exp(-i\omega t + ikx)$ переходит в

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2} + f(z)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} - k^2\left(1 + g\frac{f(z)}{\omega^2}\right)w = 0, \tag{8}$$

где

$$f(z) = \frac{1}{\rho_0}\,\frac{\mathrm{d}\rho_0}{\mathrm{d}z} = \frac{1}{p_0}\,\frac{\mathrm{d}p_0}{\mathrm{d}z} - \frac{1}{T_0}\,\frac{\mathrm{d}T_0}{\mathrm{d}z}\,.$$

При учёте движения среды в горизонтальном направлении (со скоростью u_0) и потерь вследствие соударений с другими частицами уравнение (8) принимает вид

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2} + f(z)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} - k^2\left[1 - \frac{gf(z)}{\Omega\,(\Omega-\nu)}\right]w = 0, \tag{9}$$

где $\Omega = iku_0 - i\omega + \nu$, ν — частота соударений.

2. СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ ПОЛЕВЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ВЫСОТНОЙ ЗАВИСИМОСТИ ТЕМПЕРАТУРЫ

Связь между полевыми переменными при распространении акустико-гравитационных волн в изотермической атмосфере хорошо известна. Это так называемые поляризационные соотношения [1, 3]. В общем случае, когда справедливо уравнение (6), можно привести их аналог, полагая $\chi \propto \exp(-i\omega t + ikx)$ и выражая давление p, плотность ρ, а также компоненты скорости u, w через величину $\chi = \operatorname{div}\mathbf{v}$ и её производную:

$$p = i\omega\rho_0\delta\left[c^2 g\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}z} + \left(c^2\omega^2 - \gamma g^2\right)\chi\right], \tag{10}$$

$$i\omega\rho = \rho_0\left\{\chi + \delta f\left[c^2\omega^2\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}z} + g\left(k^2c^2 - \gamma\omega^2\right)\chi\right]\right\}, \tag{11}$$

$$u = ik\delta\left[c^2 g\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}z} + \left(c^2\omega^2 - \gamma g^2\right)\chi\right], \tag{12}$$

$$w = \delta\left[c^2\omega^2\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}z} + g\left(k^2c^2 - \gamma\omega^2\right)\chi\right], \tag{13}$$

где $\delta = (g^2k^2 - \omega^4)^{-1}$.

Вариации температуры T определяются из уравнения состояния идеального газа $p = \rho\kappa T/m$:

$$\frac{i\omega T}{T_0} = (\gamma - 1)\chi + \frac{\delta}{T_0}\frac{\mathrm{d}T_0}{\mathrm{d}z}\left[c^2\omega^2\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}z} + g\left(k^2c^2 - \gamma\omega^2\right)\chi\right]. \tag{14}$$

Таким образом, находя χ из уравнения (6), при помощи формул (10)–(14) можно найти другие физические параметры среды и соотношения между ними.

Действуя аналогичным образом, для случая несжимаемой среды, когда справедливо уравнение (8), получаем

$$iku = -\frac{\partial w}{\partial z}, \tag{15}$$

$$i\omega\rho/\rho_0 = f(z)w, \tag{16}$$

$$ik^2p = -\omega\rho_0\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}, \tag{17}$$

$$i\omega\frac{T}{T_0} = -\frac{\omega^2}{k^2}\frac{1}{v_0^2}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} - f(z)w, \tag{18}$$

где $v_0^2 = \kappa T_0/m$, κ — постоянная Больцмана, m — масса частиц.

3. ВЫВОД ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ

Перейдём теперь к анализу задачи о распространении акустико-гравитационных волн в неизотермической атмосфере в более детальной постановке. Пусть некоторый слой высоты h с линейно изменяющейся температурой $T_0(z) \equiv T_\mathrm{s}(1 + \alpha z)$ ограничивается снизу (при $z = 0$) твёрдой поверхностью, а вверху (при $z \geq h$) переходит в изотермическое полупространство (см. рис. 1). Полагая, как и выше, что все величины пропорциональны $\exp(-i\omega t + ikx)$, уравнение (6) для $\chi = \operatorname{div}\mathbf{v}$ в слое с линейным профилем температуры заменой переменных $\xi = \xi_0 + 2kz$, $\psi = \chi\exp(-\xi/2)$ сводится к гипергеометрическому уравнению

$$\xi\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}\xi^2} + (b - \xi)\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\xi} - a\psi = 0, \tag{19}$$

в котором $a = a_1 = b_1/2 - 1/(2\alpha k)\left[\omega^2/c_s^2 + k^2(\omega_{gs}^2 + \alpha g)/\omega^2\right]$, $b = b_1 = 1 - \eta$, $\omega_{gs}^2 = (\gamma - 1)\, g^2/c_s^2$, $c_s = c(0)$, $\xi_0 = 2k/\alpha$. К такому же виду сводится уравнение (8) для w в случае несжимаемой среды. В этом случае $a = a_2 = b_2(1 + gk/\omega^2)/2$, $b_2 = -(1 + \eta)$.

Если параметр b не целое число, то общее решение уравнения (19) можно записать с помощью вырожденных гипергеометрических функций [16]:

$$\psi = A\varphi_1 + B\varphi_2, \tag{20}$$

где $\varphi_1 = \Phi(a, b, \xi)$, $\varphi_2 = \xi^{1-b}\,\Phi(a - b + 1, 2 - b, \xi)$, A и B — постоянные.

Ниже более подробно рассмотрим случай несжимаемой среды. Если источник внутренних гравитационных волн в такой среде расположен на границе $z = 0$ или в нижнем слое, то распространяющиеся в верхнем полупространстве волны будут уходить от границы $z = h$ в случае, когда проекция групповой скорости на вертикальную ось положительна. При этом выражение для вертикальной компоненты скорости можно записать в виде

$$w_2 = \\ = C\exp\left[\frac{z-h}{2H_2} - i\omega t + ikx - ik_z\,(z-h)\right]. \tag{21}$$

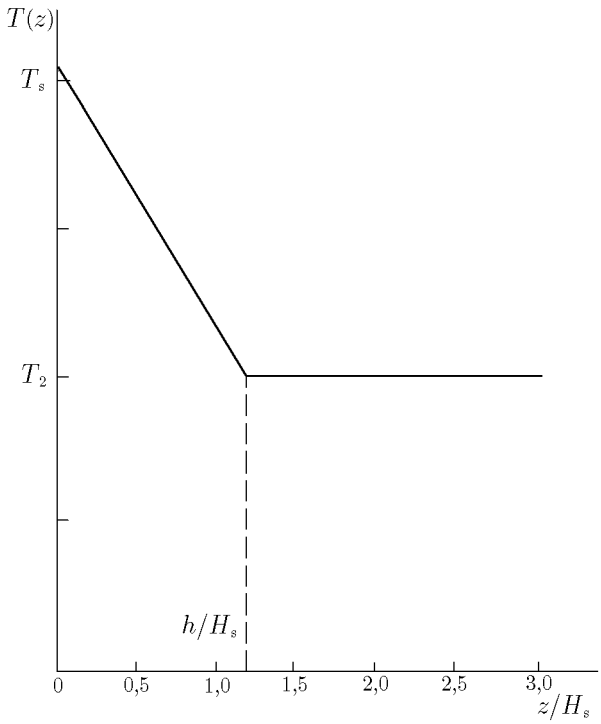

Рис. 1. Модель профиля температуры атмосферы

Здесь и ниже индекс 1 соответствует нижнему неизотермическому слою, индекс 2 — верхнему изотермическому. Частота ω и компоненты волнового вектора k и k_z связаны соотношением

$$\omega^2 = \omega_{g2}^2 k^2\,(k^2 + k_z^2 + k_2^2)^{-1}, \tag{22}$$

где $\omega_{g2}^2 = g/H_2$, $k_2 = 1/(2H_2)$, $H_2 = H_s\,(1 + \alpha h)$. Для определения постоянных A, B и C воспользуемся граничными условиями. На твёрдой поверхности при $z = 0$ обращается в нуль вертикальная компонента скорости:

$$w_1|_{z=0} = 0. \tag{23}$$

Условие непрерывности вертикальной компоненты скорости w и давления p при $z = h$ в отсутствие скачка плотности ρ_0 запишем в виде

$$w_1|_{z=h} = w_2|_{z=h}, \qquad \left.\frac{\partial w_1}{\partial z}\right|_{z=h} = \left.\frac{\partial w_2}{\partial z}\right|_{z=h}. \tag{24}$$

Выполнив необходимые вычисления с учётом решений (20), (21) и граничных условий (23), (24), получаем характеристическое уравнение

$$D(\omega, k) = [1 + 1/(2kH_2)]\,[\varphi_1(\xi_0)\varphi_2(\xi_1) - \varphi_2(\xi_0)\varphi_1(\xi_1)] - \\ - 2\left[\varphi_1(\xi_0)\left.\frac{\partial\varphi_2}{\partial\xi}\right|_{\xi=\xi_1} - \varphi_2(\xi_0)\left.\frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi}\right|_{\xi=\xi_1}\right] = 0, \tag{25}$$

в котором $\xi_0 = 2k/\alpha$, $\xi_1 = \xi_0 + 2kh$, $\varphi_1(\xi) = \Phi(a, b, \xi)$, $\varphi_2(\xi) = \xi^{1-b}\Phi(a - b + 1, 2 - b, \xi)$.

При записи формулы (25) предполагалось выполненным условие

$$k_z H_2 \ll kH_2 + 1/2. \tag{26}$$

Отметим, что производная первого порядка от вырожденной гипергеометрической функции даётся формулой [16]

$$\frac{\mathrm{d}\Phi(a, b, x)}{\mathrm{d}x} = \frac{a}{b}\Phi(a + 1, b + 1, x),$$

а для отрицательных значений α, когда $\xi_0 < 0$, $\xi_1 < 0$, уместно воспользоваться преобразованием Куммера [16] [1]:

$$\Phi(a, b, x) = \exp(x)\Phi(b - a, b, -x).$$

Если в качестве граничного условия при $z = h$ использовать $w = 0$ (твёрдая поверхность при $z = h$), то вместо уравнения (25) получается дисперсионное соотношение

$$\varphi_1(\xi_1)\varphi_2(\xi_0) = \varphi_2(\xi_1)\varphi_1(\xi_0), \tag{27}$$

аналитическое исследование которого в общем случае также довольно сложно.

4. РЕШЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ЧАСТНЫХ СЛУЧАЕВ

Характеристическое дисперсионное уравнение (25) сильно упрощается в предельном случае $|\alpha| \times \times h \ll 1$ ($\Delta\xi = \xi_1 - \xi_0 = 2kh \ll \xi_0$), т. к. вместо специальных функций φ_1 и φ_2 оно содержит вронскиан $W(\varphi_1, \varphi_2) = (1 - b)\,\xi_0^{-b}\exp(\xi_0)$ и его производную, а для k получаем соотношение $2kh \approx Z - h/H_\mathrm{s}$, где Z — корень уравнения $Z^2 + 6Z - 4 = 0$. Этот предельный случай соответствует малым изменениям температуры в слое и масштабам внутренних гравитационных волн, существенно превышающим высоту h неизотермического слоя.

Для более общего случая анализ характеристического уравнения (25) был проведён численно. Для определённости мы рассмотрели случай отрицательного градиента температуры. Поиск корней уравнения проводился при следующих значениях параметров: $\eta = (\alpha H_\mathrm{s})^{-1} = -3{,}3$; $h = 1{,}2H_\mathrm{s}$, характерных для рассматриваемой области атмосферы (см., например, [17]). При этом принимались во внимание только решения, удовлетворяющие соотношению (26). Для нахождения решения численно определялись области, где $D(\omega, k)$ в формуле (25) обращается в нуль (см. рис. 2), после чего с высокой степенью точности (до 10^{-20}) определялись корни дисперсионного уравнения. Численный анализ дал возможность для заданных горизонтальных волновых чисел найти соответствующие (в общем случае комплексные) частоты. Анализируя рассчитанную указанным методом зависимость $\omega(k)$ на всей плоскости комплексных частот, можно определить условия устойчивости полученного решения относительно градиента температуры $T_0(z)$ и других параметров задачи. В области частот и волновых чисел, удовлетворяющих соотношению (26), были найдены корни, соответствующие устойчивому решению. Так, например, волновым числам $k = 1{,}9H_\mathrm{s}^{-1}$ и $k = 5H_\mathrm{s}^{-1}$ соответствуют частоты $\omega_1 = 0{,}835\omega_{g\mathrm{s}}$ и $\omega_2 = 0{,}957\omega_{g\mathrm{s}}$. Таким образом, на частотах, близких к частоте Брента—Вяйсяля, в атмосфере, температура которой линейно уменьшается с высотой, распространяются устойчивые возмущения с горизонтальными масштабами порядка высоты однородной атмосферы.

[1] Заметим, что при отрицательных α значение $|\alpha|h$ не может превышать единицы. Случай $\alpha < 0$ и $|\alpha|h = 1$ рассмотрен в [15].

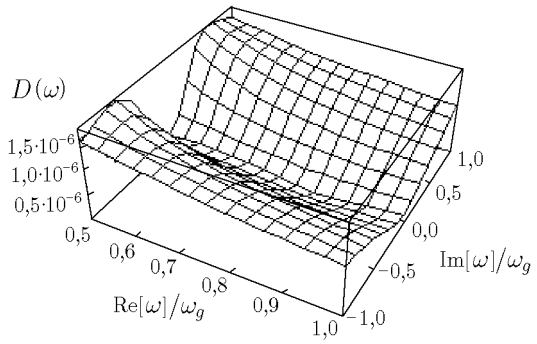

Рис. 2. Зависимость $D(\omega)$ при $k = 1{,}9/H_{\mathrm{s}}$

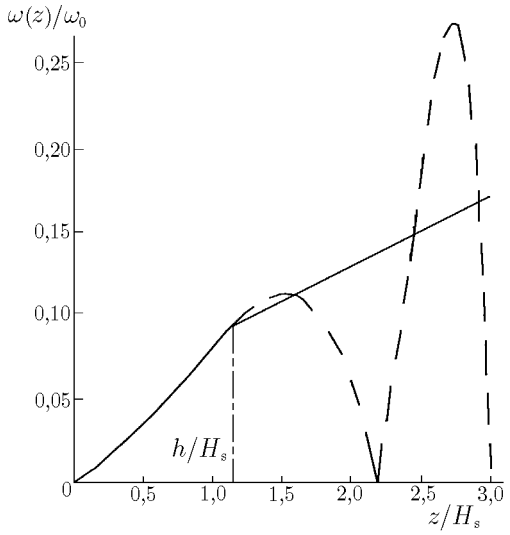

Рис. 3. Зависимость вертикальной скорости от высоты

Представляет также интерес высотная зависимость амплитуды вертикальной скорости частиц. Для найденной устойчивой моды с горизонтальным волновым числом $k = 1{,}9H_{\mathrm{s}}^{-1}$ построен график зависимости $w(z)$ в рассматриваемой двухслойной модели (сплошная линия на рис. 3). Из рис. 3 видно, что найденное решение не имеет нулей в пределах линейного слоя (пунктиром обозначено решение уравнения (19)).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Описание свойств акустико-гравитационных волн в реальной атмосфере требует выбора реалистичной модели среды. В данной работе для кусочно-линейного профиля атмосферной температуры получен общий вид дисперсионного соотношения, связывающего частоту и горизонтальное волновое число таких волн через гипергеометрические функции Куммера. Предварительный анализ уравнения (25) показал наличие устойчивого решения с частотой, близкой к частоте Брента—Вяйсяля. Исследование зависимости вертикальной скорости среды от высоты показало, что найденное решение приблизительно экспоненциально растёт с высотой.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 00–05–65051 и 00–05–64695), а также по программе «Интеграция».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Госсард Э., Хук У. Волны в атмосфере. М.: Мир, 1978. 532 с.
2. Филлипс О. М. Динамика верхнего слоя океана. М.: Мир, 1969. 285 с.
3. Hines C. O. // Can. J. Phys. 1960. V. 38. P. 1 441.
4. Yeh K. C., Liu C. H. // Rev. Geophys. Space Phys. 1974. V. 12. P. 193.
5. Григорьев Г. И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1999. Т. 42, № 1. С. 3.
6. Christie D. R. // J. Atmos. Sci. 1989. V. 46. P. 1 462.
7. Stenflo L. // Physica Scripta. 1998. V. 75. P. 306.
8. Dickinson R. E. // Rev. Geophys. 1969. V. 7. P. 483.

9. Григорьев Г. И. // Изв. АН СССР. ФАО. 1976. Т. 12. С. 100.
10. Greenfield R. J., Harkrider D. G. // Geophys. J. R. Astron. Soc. 1971. V. 26. P. 323.
11. Савина О. Н. // Геомагнетизм и аэрономия. 1996. Т. 36. С. 180.
12. Савина О. Н. // Геомагнетизм и аэрономия. 1996. Т. 36. С. 104.
13. Klostermeyer J. // J. Atmos. Terr. Phys. 1972. V. 34, No. 5. P. 765.
14. Григорьев Г. И., Савина О. Н. // Неустойчивости и волновые явления в системе ионосфера—термосфера. Горький: ИПФ АН СССР, 1989. С. 26.
15. Ламб Г. Гидродинамика. М. Л.: Гостехтеоретиздат, 1947.
16. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. М.: Наука, 1977. 342 с.
17. Матвеев А. Г. Курс общей метеорологии. Физика атмосферы. Л.: Гидрометеоиздат, 1984.

[1] Научно-исследовательский радиофизический институт,
[2] Нижегородский государственный технический университет,
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию
29 ноября 2001 г.

ACOUSTIC-GRAVITY WAVES IN THE ATMOSPHERE WITH A PIECEWISE-LINEAR TEMPERATURE PROFILE

G. I. Grigor'ev and O. N. Savina

We consider the problem of propagation of acoustic-gravity waves in the atmosphere with a constant temperature gradient in the near-surface layer. The assumption of linear temperature dependence on height allowed us to reduce the wave equation to the hypergeometric form, regardless of the compressibility of the medium. The solution of this equation is represented in terms of degenerate hypergeometric functions. To analyze the obtained solution, we consider a two-layer model of a half-bounded atmosphere with a height-independent background temperature in the upper layer. The results are studied in detail under the approximation of an incompressible medium. For the model specified above, we find analytical expressions for the perturbation fields and obtain a characteristic equation whose solution allows us to calculate wave dispersion characteristics at frequencies close to the Brunt—Väisälä frequency for large horizontal scales as compared to the layer thickness.

УДК 551.463.7

РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА КРУТЫХ МОРСКИХ МЕЗОМАСШТАБНЫХ ВОЛНОЧКАХ: ИНТЕРПОЛЯЦИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ И ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ДИФРАКЦИИ

Ю. А. Кравцов [1,2], *А. В. Моркотун* [1], *А. Н. Чурюмов* [1]

Исследована зависимость сечения обратного рассеяния электромагнитных волн СВЧ диапазона от высоты h крутых уединённых мезомасштабных волночек. Сечение рассеяния рассчитано на основе борновского приближения теории возмущений, применимой при малых высотах волночек ($kh \ll 1$, где k — волновое число), и на основе геометрической теории дифракции, справедливой при $kh \gg 1$. Предложена удобная интерполяционная формула, которая при умеренных углах скольжения даёт удовлетворительную оценку сечения рассеяния при произвольных значениях kh, в т. ч. в промежуточном случае $kh \sim 1$, который не описывается ни одной из существующих теорий.

ВВЕДЕНИЕ

Для описания обратного рассеяния электромагнитных волн на морской поверхности в подавляющем большинстве работ используется двухмасштабная модель волнения, представляющая собой наложение коротких гравитационно-капиллярных возмущений («рябь») с характерными масштабами от нескольких миллиметров до нескольких дециметров на крупномасштабные волны длиной в несколько метров и более. Сечение рассеяния в двухмасштабной модели рассчитывается на основе первого (борновского) приближения теории возмущений с последующим усреднением по наклонам крупной волны [1–6].

Двухмасштабная модель, основанная на борновском приближении, вполне удовлетворительно описывает бóльшую часть экспериментальных данных. Однако некоторые явления, наблюдаемые преимущественно под малыми углами скольжения (обзор таких явлений приведён в работе [7]), явно выходят за рамки стандартной двухмасштабной модели и требуют введения ещё одной компоненты волнения, а именно — крутых, готовящихся обрушиться уединённых мезомасштабных волночек с характерной длиной $1 \div 2$ м и высотой $10 \div 30$ см. Теория рассеяния на таких волночках, основанная на геометрической теории дифракции (ГТД), была построена в [8–11]. В этих работах, в сущности, предлагается трёхкомпонентная модель волнения: мелкая рябь на крупной волне при наличии уединённых крутых мезомасштабных волн.

Результаты расчётов, проведённых в [8–11], удовлетворительно согласуются с многочисленными экспериментальными данными, полученными для сантиметрового диапазона длин электромагнитных волн. Но экстраполяция этих результатов на дециметровый диапазон длин волн оказывается неправомерной, т. к. в дециметровом диапазоне нарушается условие малости длины волны λ по сравнению с высотой крутых волночек h, выполнение которого необходимо при использовании ГТД.

В данной работе проведены расчёты сечений рассеяния в рамках борновского приближения для модели крутых неровностей и сделана попытка сопрячь результаты теории малых возмущений с результатами, полученными ранее [11] на основе ГТД. В работе предлагается интерполяционная формула для сечения рассеяния на уединённой волне, переходящая в предельных случаях $kh \ll 1$ и $kh \gg 1$, где $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, соответственно в результаты теории возмущений и ГТД. Таким образом, мы получаем уникальную возможность аналитического описания обратного рассеяния как коротких (миллиметровых и сантиметровых), так и длинных (дециметровых) электромагнитных волн.

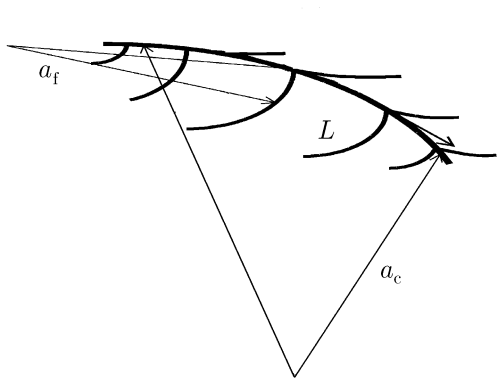

Рис. 1. Трёхмерный профиль уединённой волночки

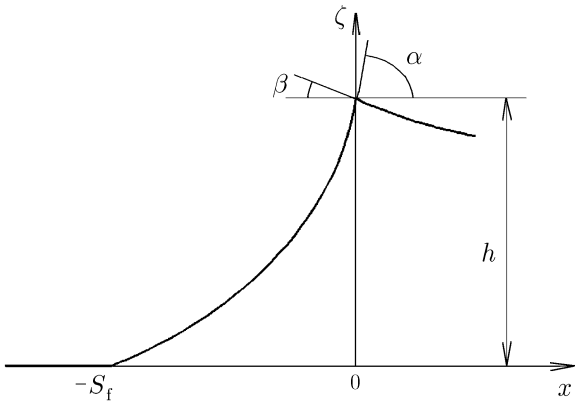

Рис. 2. Модель профиля крутой уединённой волночки в плоскости $y = 0$. Ось y направлена перпендикулярно плоскости чертежа

Материал статьи изложен в следующей последовательности. Модель крутой уединённой волночки описана в разделе 1. Результаты расчётов сечения рассеяния по методу малых возмущений даны в разделе 2, а по методу ГТД — в разделе 3. Интерполяция этих результатов на случай промежуточных высот ($kh \sim 1$) проведена в разделе 4. В разделе 5 кратко описана общая картина рассеяния электромагнитного излучения на морской поверхности с точки зрения трёхкомпонентной модели волнения.

1. МОДЕЛЬ КРУТЫХ МЕЗОМАСШТАБНЫХ ВОЛНОЧЕК

Модель, которая берётся в данной работе за основу описания рассеяния электромагнитного излучения на крутых уединённых волночках, предполагает, что волночки имеют крутой передний склон, пологий задний склон и заострённую кромку, как это показано на рис. 1. Форму искривлённого переднего склона и кромки удобно аппроксимировать параболами с радиусами кривизны a_f и a_c соответственно. Задний склон волночки аппроксимируем показательной функцией.

Пусть ось x ориентирована против направления движения волночки, а ось y направлена перпендикулярно оси x в горизонтальной плоскости. Тогда, обозначая через ζ отклонение точки морской поверхности от её равновесного положения, можно записать

$$\zeta(x,y) = \left\{ \left[h + \frac{a_f}{\sin^2\alpha} \left(\cos\alpha - \frac{x\sin(2\alpha)}{2a_f} - \sqrt{\cos^2\alpha - \frac{2x\sin\alpha}{a_f}} \right) \right] \times \right.$$
$$\left. \times\ \theta(x+S_f)\,\theta(-x) + h\exp\left(-\frac{x}{h}\,\mathrm{tg}\beta\right)\theta(x) \right\} \left(1 - \frac{y^2}{2a_c h}\right) \theta(y + \sqrt{2a_c h})\,\theta(\sqrt{2a_c h} - y). \quad (1)$$

Здесь $\theta(x)$ — функция единичного скачка, S_f — «длина» переднего склона, α и β — углы наклона переднего и заднего склонов, лежащие в плоскости $y = 0$ и образующиеся касательными к морской поверхности и горизонтальной прямой (см. рис. 2). Данная модель является довольно грубой, однако для выявления качественных особенностей зависимости сечения рассеяния от высоты волночки h (точнее, от безразмерного параметра kh) её использование вполне оправданно.

Величина S_f связана с радиусом кривизны a_f и углом α следующим образом:

$$S_f = h \left\{ \mathrm{ctg}\,\alpha + \sec\alpha \left[\frac{a_f}{h} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2h\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{a_f \sin\alpha}} \right) \mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{cosec}\,\alpha \right] \right\}.$$

Условие вещественности S_{f} налагает ограничение на возможные значения угла α в принятой модели. Это условие, геометрическая интерпретация которого состоит в достижении параболой, описывающей форму переднего склона, подстилающей плоскости, сводится к выполнению неравенства

$$\alpha \geq \arccos\left(\frac{\sqrt{h^2 + a_{\mathrm{f}}^2} - h}{a_{\mathrm{f}}}\right).$$

Интересуясь зависимостью сечения рассеяния от высоты волночки, мы примем, что линейные размеры волночки (a_{f} и a_{c}) изменяются пропорционально её высоте: $a_{\mathrm{f}} \propto h$ и $a_{\mathrm{c}} \propto h$.

Следует заметить, что угол наклона переднего склона волны α здесь не может превышать 90°, в то время как согласно [7–11] максимальное обратное рассеяние на высоких волночках имеет место при $\alpha > 90°$. Такое ограничение связано с существенным упрощением задачи при использовании метода малых возмущений.

2. РАССЕЯНИЕ НА ВОЛНОЧКАХ МАЛОЙ ВЫСОТЫ (ПРИБЛИЖЕНИЕ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ)

В данной работе рассматривается рассеяние горизонтально поляризованного электромагнитного излучения, при этом морская вода считается идеальным проводником. Это позволяет ограничиться анализом рассеяния скалярного поля на «абсолютно мягкой» поверхности. Мы рассмотрим рассеяние только в направлении, противоположном направлению движения волночки, т. е. в направлении против ветра (up-wind).

Пусть длина электромагнитной волны значительно превышает высоту волночки, так что выполняется условие $kh \ll 1$. В рамках первого порядка теории возмущений борновское приближение сечение рассеяния определяется формулой [1–6]

$$\sigma_{\mathrm{B}} = 16\pi^2 k^4 \sin^4\gamma\, |F(\mathbf{q}_\perp)|^2, \tag{2}$$

где γ — угол скольжения (угол между волновым вектором электромагнитной волны и горизонтальной плоскостью), $F(\mathbf{q}_\perp)$ — преобразование Фурье от профиля волночки $\zeta(x, y)$ (см. (1)):

$$F(\mathbf{q}_\perp) = \frac{1}{4\pi^2}\int \zeta(x, y)\exp(-i\mathbf{q}_\perp\boldsymbol{\rho})\,\mathrm{d}^2\rho,$$

$\boldsymbol{\rho} \equiv \{x, y\}$ — радиус-вектор в горизонтальной плоскости. Здесь через $\mathbf{q}_\perp \equiv \{q_x, q_y\}$ обозначена проекция вектора обратного рассеяния $\mathbf{q} = 2k\mathbf{n}_{\mathrm{s}}$ на подстилающую плоскость, единичный вектор $\mathbf{n}_{\mathrm{s}}$ указывает направление распространения рассеянного излучения. При рассеянии против ветра имеет место равенство $\mathbf{q}_\perp = \{-2k\cos\gamma, 0\}$. Формула (2) справедлива при наблюдении из дальней зоны.

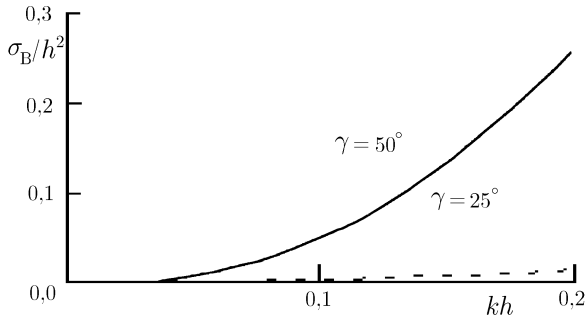

Рис. 3. Зависимость сечения рассеяния, рассчитанного по методу малых возмущений, от параметра kh при $a_{\mathrm{c}} = 100h$; $a_{\mathrm{f}} = h$; $\alpha = 80°$; $\beta = 5°$ для двух углов скольжения: $\gamma = 25°$ и $\gamma = 50°$

Зависимость борновского сечения рассеяния σ_{B} от безразмерного параметра kh аналитически выражается достаточно громоздкой формулой, которую мы здесь не приводим. Графики $\sigma_{\mathrm{B}}(kh)$ представлены на рис. 3. В частном случае, когда передний склон волны вертикален ($\alpha = 90°$), при $(kh)^2 \ll (\mathrm{tg}^2\beta\sec^2\gamma)/4$ и $a_{\mathrm{f}} \gg (h\,\mathrm{tg}\,\beta)/6$ справедливо следующее оценочное соотношение:

$$\sigma_{\mathrm{B}} = AL^2\,\mathrm{ctg}^2\beta\sin^4\gamma\,(kh)^4. \tag{3}$$

Здесь A — коэффициент порядка 0,1, $L = \sqrt{a_c h}$ — величина, имеющая смысл длины гребня волночки. Заметим, что оценочное сечение рассеяния (3) не зависит от радиуса кривизны переднего склона a_f и что сечение рассеяния резко уменьшается при настильных углах наблюдения, т. е. при $\gamma \to 0$.

3. РАССЕЯНИЕ НА ВЫСОКИХ ВОЛНОЧКАХ (ПРИБЛИЖЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ДИФРАКЦИИ)

Если высота крутой волночки существенно превышает длину электромагнитной волны ($kh \gg 1$), то для описания рассеяния можно воспользоваться приёмами ГТД. Рассеянное поле $\mathbf{E}_s$ в дальней зоне при горизонтальной поляризации излучения определяется формулой [8–11]

$$\mathbf{E}_s = \int \mathrm{d}l \, \frac{\exp(ikR)}{R} \, D\mathbf{E}_i, \qquad (4)$$

где R — расстояние между точкой интегрирования на кромке и точкой наблюдения, $\mathbf{E}_i$ — поле падающего излучения, D — коэффициент дифракции, который может быть найден путём решения двумерной задачи о рассеянии электромагнитного излучения на касательном клине [12] (см. рис. 4). Интегрирование в (4) проводится вдоль криволинейной кромки волночки.

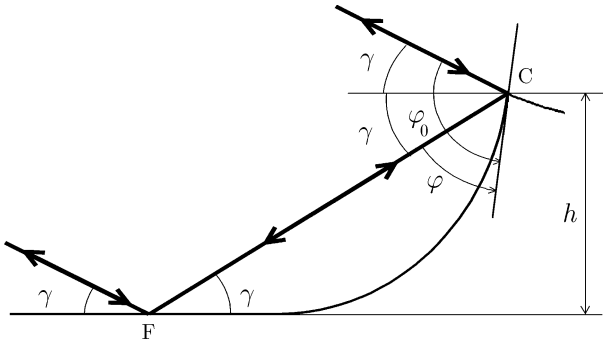

Рис. 4. Четыре канала рассеяния: C, CF, FC и FCF

В отличие от канонической задачи о дифракции на клине [13], в данном случае мы имеем дело с дифракцией на криволинейном клине, который асимптотически стремится к горизонтальной плоскости. Благодаря этому в данной задаче возникают четыре канала рассеяния. Во-первых, рассеяние может произойти вблизи кромки волночки, после чего рассеянное излучение возвращается к наблюдателю. Следуя нашим предыдущим работам [7–11], назовём этот канал C-каналом (от crest — кромка). Во-вторых, волна может испытать рассеяние дважды: сначала вблизи кромки, а затем на морской поверхности у подножия волночки. Этот канал назовём CF-каналом (от foot — подножие). Третий канал рассеяния (FC-канал) соответствует отражению сначала от морской поверхности у подножия волночки, а затем рассеянию вблизи кромки. CF- и FC-каналы полностью когерентны между собой. Наконец, четвёртый канал (FCF-канал) соответствует отражению у подножия волночки, затем рассеянию на кромке и снова отражению у подножия.

Поля, рассеянные по различным каналам, складываются с учётом разностей фаз между ними, которые определяются фазами коэффициентов дифракции:

$$D = D_C + D_{CF} + D_{FC} + D_{FCF} = D_C + 2D_{CF} + D_{FCF} = \\ = D^{cw}(\phi_0, \phi_0) + 2D^{cw}(\phi_0, \phi)\exp(2ikh\sin\gamma) + D^{cw}(\phi, \phi)\exp(4ikh\sin\gamma). \qquad (5)$$

Здесь $D^{cw}(\xi, \eta)$ — коэффициент дифракции на искривлённом клине (curved wedge). Аргументы ξ и η представляют собой локальные углы падения и рассеяния, измеряемые от передней поверхности волны. Коэффициенты дифракции, отвечающие CF- и FC-каналам, равны друг другу и объединены в выражении (5) в одно слагаемое $2D_{CF}$, поскольку волны, рассеянные по каналам CF и FC, всегда когерентны между собой.

В формуле (5) коэффициент отражения от морской поверхности считается равным единице, что соответствует сделанному ранее предположению о бесконечной проводимости воды.

Интерференция волн, рассеянных по различным каналам, приводит к сильным осцилляциям в зависимости сечения рассеяния $\sigma_{GTD}(kh)$. Практический интерес представляют усреднённые (по тому или иному набору параметров) сечения рассеяния. На качественном уровне операцию усреднения

можно провести, складывая интенсивности рассеянных волн или, что фактически то же самое, квадраты модулей коэффициентов дифракции:

$$|D_{\text{eff}}|^2 = |D^{\text{cw}}(\phi_0, \phi_0)|^2 + 4\,|D^{\text{cw}}(\phi_0, \phi)|^2 + |D^{\text{cw}}(\phi, \phi)|^2. \tag{6}$$

Такая сумма демонстрирует гораздо меньшие осцилляции, чем исходное выражение (5).

Расчёт, основанный на модели с параболическим передним склоном волночки, приводит к следующему выражению для $D^{\text{cw}}(\xi, \eta)$ [11]:

$$D^{\text{cw}}(\xi, \eta) = \sqrt{\frac{ika_{\text{f}} \cos\left[(\xi - \eta)/2\right]}{4\pi \sin^3\left[(\xi + \eta)/2\right]}} \exp\left[\frac{ika_{\text{f}}}{2}\,\frac{(\cos\xi + \cos\eta)^2}{\sin\xi + \sin\eta}\right] F_{(-)}\left(-\sqrt{\frac{ka_{\text{f}}}{2}}\,\frac{\cos\xi + \cos\eta}{\sqrt{\sin\xi + \sin\eta}}\right) -$$
$$- \frac{1}{2\pi \sin(\xi + \eta)} + \frac{1}{2\delta} \sin\frac{\pi^2}{\delta} \left\{\frac{1}{\cos(\pi^2/\delta) - \cos[\pi\,(\xi - \eta)/\delta]} - \frac{1}{\cos(\pi^2/\delta) - \cos[\pi\,(\xi + \eta)/\delta]}\right\},$$

где δ — внешний угол раствора касательного клина, обе грани которого являются плоскими. Через $F_{(-)}$ обозначен интеграл Френеля:

$$F_{(-)}(\tau) = \sqrt{\frac{i}{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\tau} \exp(-ix^2)\,\mathrm{d}x.$$

Форма заднего склона волночки здесь несущественна, т. к. используется первое приближение ГТД. Это обусловлено тем обстоятельством, что задний склон не освещается первичной волной.

Чтобы найти рассеянное поле $\mathbf{E}_{\text{s}}$ и сечение рассеяния, нужно задаться формой кромки и законом изменения коэффициента дифракции $|D_{\text{eff}}|^2$ вдоль кромки. Для оценки примем экспоненциальную зависимость коэффициента дифракции от «поперечной» координаты y (см. подпись к рис. 2):

$$|D_{\text{eff}}|^2 = |D_{\text{eff}}(y = 0)|^2 \exp(-y^2/L^2)\,.$$

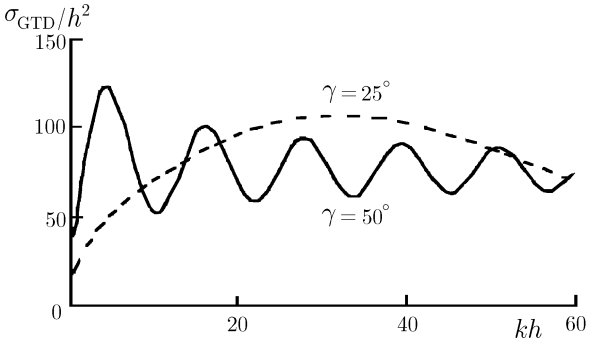

Рис. 5. Зависимость сечения рассеяния, рассчитанного по методу ГТД, от параметра kh при $a_{\text{c}} = 100h$; $a_{\text{f}} = h$; $\alpha = 80^\circ$; $\beta = 5^\circ$ для двух углов скольжения: $\gamma = 25^\circ$ и $\gamma = 50^\circ$

При этом получается следующее выражение для сечения рассеяния в дальней зоне:

$$\sigma_{\text{GTD}} = \frac{2\pi L^2 |D_{\text{eff}}(y = 0)|^2}{\sqrt{1 + 4\,(kh)^2 \sin^2\gamma}}\,. \tag{7}$$

Зависимость сечения σ_{GTD} от параметра kh при двух разных значениях γ показана на рис. 5.

При умеренных углах скольжения $\gamma \sim 50^\circ$ сечение рассеяния описывается следующей предельно упрощённой оценкой:

$$\sigma_{\text{GTD}} = \frac{a_{\text{c}} a_{\text{f}} \operatorname{ctg}\gamma}{4} \left(\frac{1}{\cos^4\gamma} + 1\right). \tag{8}$$

Эта оценка отвечает вертикальному переднему склону волночки и нулевому углу наклона заднего склона β, когда внешний угол раствора клина составляет $\delta = 3\pi/2$. Первое слагаемое в скобках отражает вклад C-канала, а второе — вклад CF- и FC-каналов.

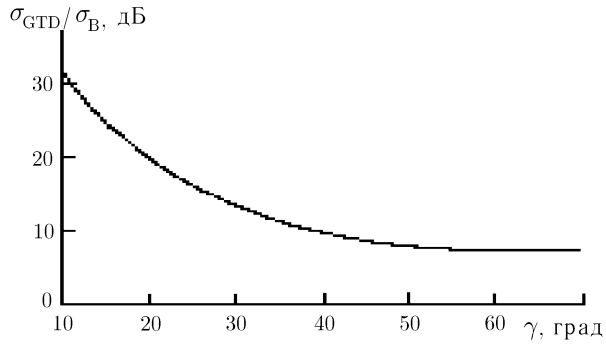

Рис. 6. Зависимость отношения $\sigma_{\rm GTD}/\sigma_{\rm B}$ от угла скольжения γ при $kh = 1$; $a_{\rm c} = 100h$; $a_{\rm f} = h$; $\alpha = 80°$; $\beta = 5°$

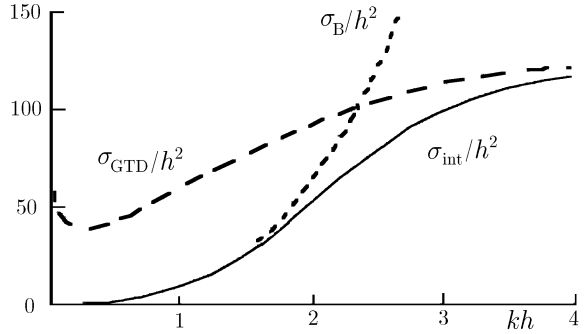

Рис. 7. Интерполяция зависимости сечения рассеяния от параметра kh в переходной области; $a_{\rm c} = 100h$; $a_{\rm f} = h$; $\alpha = 80°$; $\beta = 5°$; $\gamma = 50°$

4. ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ПРОМЕЖУТОЧНЫХ ВЫСОТ

Результаты, полученные для двух предельных случаев $kh \ll 1$ и $kh \gg 1$, становятся неприменимыми в промежуточной области $kh \sim 1$. Однако в этой области можно предложить следующую интерполяционную формулу для сечения рассеяния:

$$\sigma_{\rm int} = \left[(\sigma_{\rm B})^{-2} + (\sigma_{\rm GTD})^{-2}\right]^{-1/2}. \tag{9}$$

Эта формула, переходящая в (2) при малых kh и в (7) при больших kh, обеспечивает аналитическое описание зависимости $\sigma(kh)$ для волночек произвольной высоты. Благодаря этому интерполяционная формула (9) предоставляет уникальную возможность единообразно рассматривать рассеяние радиоволн как сантиметрового, так и дециметрового диапазонов.

Анализ показывает, что отношение $\sigma_{\rm GTD}/\sigma_{\rm B}$ сильно зависит от угла скольжения γ. В качестве примера на рис. 6 проиллюстрирован характер изменения отношения $\sigma_{\rm GTD}/\sigma_{\rm B}$ при увеличении угла γ для определённых значений геометрических параметров задачи. Согласно рис. 6 сечения $\sigma_{\rm B}$ и $\sigma_{\rm GTD}$ для выбранных значений параметров сопоставимы только при достаточно больших γ. При настильном наблюдении $\sigma_{\rm B}$ и $\sigma_{\rm GTD}$ в области промежуточных высот отличаются на несколько порядков величины. Поэтому предлагаемая формула (9) обеспечивает удовлетворительную интерполяцию при углах $\gamma \geq 40°$.

Общее представление о соотношении между сечениями $\sigma_{\rm B}(kh)$, $\sigma_{\rm GTD}(kh)$ и $\sigma_{\rm int}(kh)$ даёт рис. 7. Сходные результаты могут быть получены и для вертикальной поляризации электромагнитных волн.

5. ОБЩАЯ КАРТИНА РАССЕЯНИЯ В РАМКАХ ТРЁХКОМПОНЕНТНОЙ МОДЕЛИ ВОЛНЕНИЯ

В рамках трёхкомпонентной модели волнения морской поверхности сечение рассеяния единичной площадки складывается из сечения рассеяния на мелкомасштабной компоненте волнения (ряби) $\sigma_{\rm r}$, которое рассчитывается по теории возмущений, и из сечения рассеяния на крутых волночках $\sigma_{\rm s}$, которое рассчитывается по геометрической теории дифракции при $kh \gg 1$ и по теории возмущений при $kh \ll 1$. Эффективное сечение рассеяния на крутых волночках, отнесённое к единице площади, можно записать как

$$\sigma_{\rm s} = n\bar{\sigma}_1,$$

где n — число крутых волночек на единицу площади, а $\bar{\sigma}_1$ — среднее сечение рассеяния на единичной волночке. В результирующем сечении

$$\sigma = \sigma_{\rm r} + \sigma_{\rm s}, \tag{10}$$

зависящем от угла скольжения γ, следует ещё провести усреднение по наклонам крупномасштабной компоненты волнения, а также учесть возможные эффекты затенения [1].

Каждое из двух слагаемых в (10) обладает характерными угловыми (угломестными и азимутальными) зависимостями, что даёт надежду на разделение вкладов σ_r и σ_s в измеренные в ходе эксперимента значения σ. Такой подход открывает путь к построению универсальных моделей рассеяния, пригодных для использования в более широком диапазоне углов и частот, чем модели, учитывающие только две компоненты волнения морской поверхности.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе рассчитано сечение рассеяния электромагнитных волн на крутых уединённых мезомасштабных волночках в рамках метода малых возмущений. Полученные результаты сопоставлены с сечением рассеяния, рассчитанным в рамках геометрической теории дифракции. Предложена удобная интерполяционная формула, сопрягающая результаты ГТД и теории возмущений и пригодная для волночек произвольной высоты при умеренных углах скольжения. Интерполяционная формула позволяет проследить переход от коротких (миллиметровых и сантиметровых) электромагнитных волн к длинным (дециметровым) и открывает путь к построению универсальных частотно-угловых закономерностей рассеяния электромагнитных волн на морской поверхности с учётом трёх компонент волнения: крупномасштабных (энергонесущих) волн, мелкомасштабной компоненты (ряби) и мезомасштабных крутых волночек.

Авторы работы признательны РФФИ за частичную поддержку данной работы в рамках проекта № 01-02-16174, а также фондам INTAS (грант № 99-0242) и CRDF (грант № RG1-2341-MO-02). Один из авторов (Ю. А. Кравцов) выражает глубокую признательность Фонду Александра фон Гумбольдта (Alexander von Humboldt Foundation) за поддержку данной работы во время пребывания в Свободном университете Берлина.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Басс Ф. Г., Фукс И. М. Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. М.: Наука, 1972. 424 с.
2. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. Т. 2. Случайные поля. М.: Наука, 1978. 464 с.
3. Исимару А. Распространение и рассеяние волн в случайно неоднородных средах: В 2-х томах. М.: Мир, 1981.
4. Wright J. W. // IEEE Trans. Antennas Propag. 1968. V. 13. P. 217.
5. Valenzuela G. R. // Boundary Layer Meteorol. 1978. V. 13. P. 61.
6. Beckmann P., Spizzichino A. The scattering of electromagnetic waves from rough surface. New York: McMillan, 1963.
7. Кравцов Ю. А., Литовченко К. Ц., Митягина М. И., Чурюмов А. Н. // Радиотехника. 2000. № 1. С. 61.
8. Кравцов Ю. А., Митягина М. И., Чурюмов А. Н. // Изв. вузов. Радиофизика. 1999. Т. 42, № 3. С. 240.
9. Кравцов Ю. А., Митягина М. И., Чурюмов А. Н. // Изв. РАН. Серия физическая. 1999. Т. 63, № 12. С. 2 403.
10. Churyumov A. N., Kravtsov Yu. A. // Waves in Random Media. 2000. V. 10, No. 1. P. 1.
11. Churyumov A. N., Kravtsov Yu. A., Lavrova O. Yu., Litovchenko K. Ts., Mityagina M. I., Sabinin K. D. // Advances in Space Research. 2002 (в печати).

12. Боровиков В. А., Кинбер Б. Е. Геометрическая теория дифракции. М.: Связь, 1978. 247 с.
13. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 8. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1992. 664 с.

[1] Институт космических исследований РАН,
г. Москва, Россия
[2] Space research Centre, Polish Academy of Sciences, Warsawa, Poland

Поступила в редакцию
14 марта 2002 г.

ELECTROMAGNETIC-WAVE SCATTERING FROM STEEP MESOSCALE WAVELETS: INTERPOLATING THE RESULTS OF THE PERTURBATION THEORY AND THE GEOMETRICAL THEORY OF DIFFRACTION

Yu. A. Kravtsov, A. V. Morkotun, and A. N. Churyumov

We analyze the dependence of the microwave backscattering cross section on the height h of steep isolated mesoscale wavelets. The scattering cross section is calculated based on the Born approximation of the perturbation theory valid for small wavelet heights $kh \ll 1$, where k is the wave number, and also within the framework of the geometrical theory of diffraction valid for $kh \gg 1$. We propose a convenient interpolation formula which yields a plausible estimation of the scattering cross-section for arbitrary values ofkh, including the intermediate case $kh \sim 1$ that cannot be described by the well-known theories.

УДК 621.371.165:528.044.4

МОДЕЛЬ ДОПЛЕРОВСКОГО СПЕКТРА СВЧ РАДИОВОЛН, РАССЕЯННЫХ МОРСКОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ В ОБРАТНОМ НАПРАВЛЕНИИ ПОД МАЛЫМИ УГЛАМИ СКОЛЬЖЕНИЯ

М. Б. Каневский, В. Ю. Караев, Г. Н. Баландина

На основании известных экспериментальных данных предложена модель доплеровского спектра горизонтально поляризованного сигнала трёхсантиметрового диапазона длин волн, рассеянного в обратном направлении морской поверхностью при углах скольжения порядка 10° и скорости ветра 3÷11 м/с. Модель представлена в виде суперпозиции спектральных линий Лоренца и Фойгта с коэффициентами, отражающими сравнительный энергетический вклад различных механизмов рассеяния в зависимости от скорости приповерхностного ветра.

Вопрос о механизмах рассеяния СВЧ радиоволн морской поверхностью под малыми углами скольжения в настоящее время ещё не имеет ясного физического ответа. Однако ввиду прикладной значимости области малых углов скольжения представляется весьма желательным уже сейчас иметь модель рассеяния, построенную на экспериментальных данных и в то же время включающую в себя достаточно правдоподобные физические предположения. Структура такой модели вырисовывается при соответствующей обработке результатов ряда экспериментов, проводившихся в различных условиях [1—3]. Указанная обработка, предложенная в работе [1], состояла в аппроксимации экспериментальных доплеровских спектров с помощью трёх известных спектральных линий — Гаусса, Лоренца и Фойгта, каждой из которых отвечает определённый механизм рассеяния [1, 2]. Здесь мы используем термин «аппроксимация» вместо употреблявшегося в работах [1, 2] выражения «разложение по системе базисных линий», т. к. указанные три линии не являются полной системой ортогональных функций. Тем не менее, поскольку каждой из этих линий соответствует конкретный физический механизм, результаты такой обработки оказываются достаточно устойчивыми и физически интерпретируемыми.

Согласно [1, 2] доплеровский спектр сигнала сантиметрового диапазона длин волн представляет собой суперпозицию линий Гаусса и Фойгта для случая вертикальной поляризации и (если угол скольжения достаточно мал) Лоренца и Фойгта для случая горизонтальной поляризации. С увеличением угла скольжения гауссовская линия, соответствующая брэгговской компоненте рассеяния, появляется также и в спектре горизонтально поляризованного сигнала.

При заданном угле скольжения соотношение между интенсивностью различных линий зависит от скорости приповерхностного ветра. Очевидно, для установления этой зависимости необходимы систематические измерения доплеровских спектров в достаточно широком интервале скоростей ветра. Такие измерения были выполнены в работе [3] на длине волны 3,2 см для двух поляризаций при угле скольжения 10°. На основании обработки этих данных по указанной выше методике в настоящей работе представлена модель доплеровского спектра обратно рассеянного сигнала трёхсантиметрового диапазона длин волн при скорости ветра 3÷11 м/с.

На рис. 1 приведены примеры аппроксимации экспериментальных спектров с помощью функций Гаусса и Фойгта для вертикально поляризованного сигнала и Лоренца и Фойгта для горизонтально поляризованного сигнала при скорости ветра 6 м/с. Спектры, снятые по точкам с экспериментальных кривых [3] и переведённые из логарифмического масштаба в линейный, представлены в виде функций скорости u рассеивателей на поверхности. Связь u с доплеровской частотой ν даётся соотношением

$$\nu = \frac{2u}{\lambda}\cos\psi_0, \tag{1}$$

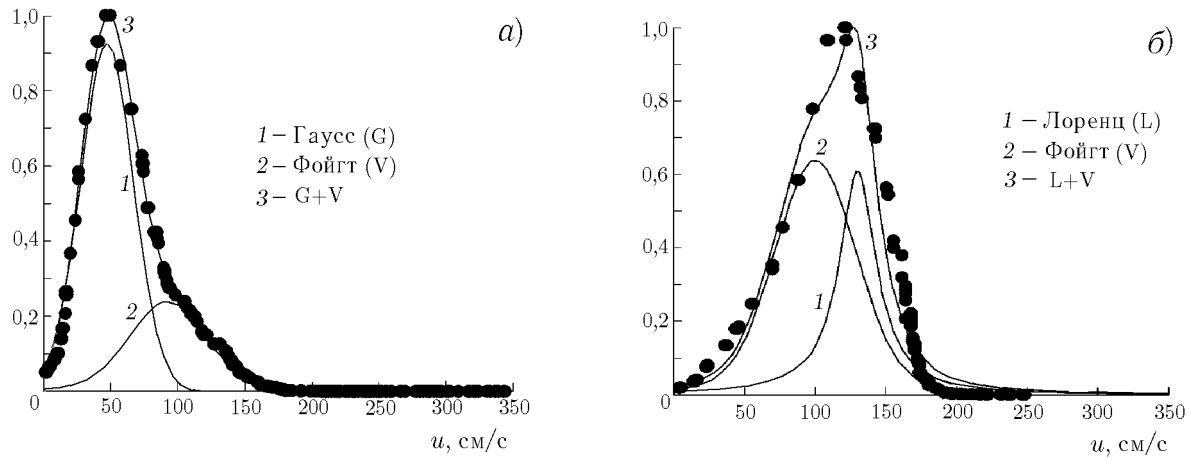

Рис. 1. Доплеровские спектры сигнала с вертикальной (*а*) и горизонтальной (*б*) поляризацией; длина волны 3,2 см, скорость ветра 6 м/с, угол скольжения 10°

где λ и ψ_0 — длина электромагнитной волны и угол скольжения падающего луча соответственно.

Стандартная высота для измерения скорости приповерхностного ветра составляет 10 м. Поскольку не во всех экспериментах скорость ветра измеряется именно на этой высоте, целесообразно, как это сделано в [3], приводить значения так называемой скорости трения u_*, которая при нейтральной стратификации приповерхностного слоя атмосферы связана с U_z — скоростью ветра на высоте z — соотношением

$$U_z = \frac{u_*}{0{,}4} \ln\left(\frac{z}{z_0}\right), \tag{2}$$

где

$$z_0 = \frac{0{,}684}{u_*} + 4{,}28 \cdot 10^{-5} u_*^2 - 0{,}0443.$$

Здесь скорости U_z и u_* выражены в сантиметрах в секунду, а z и z_0 — в сантиметрах.

Измерения доплеровских спектров вертикально поляризованного сигнала (см., например, [4]) свидетельствуют о том, что положение максимума спектра и его ширина хорошо согласуются с теорией микроволнового рассеяния, основанной на двухмасштабной модели водной поверхности. При этом форма спектра в основном является гауссовской, что также согласуется с теорией. Энергетический вклад небрэгговского механизма рассеяния, приводящий к появлению линии Фойгта и, соответственно, к некоторому растяжению высокочастотного крыла спектра (см. рис. 1), не превышает 30 % [2].

Что касается горизонтально поляризованного сигнала, то все накопленные к настоящему времени экспериментальные данные свидетельствуют о том, что в этом случае модель доплеровского спектра должна иметь существенно иной вид.

Полученная в результате обработки экспериментальных данных [3] и предлагаемая здесь модель доплеровского спектра горизонтально поляризованного сигнала трёхсантиметрового диапазона длин волн, рассеянного в обратном направлении при углах падения порядка 10° и наблюдении навстречу ветру, выглядит следующим образом:

$$D(u) = A f_{\mathrm{L}}(u) + (1 - A)\, f_{\mathrm{V}}(u), \tag{3}$$

$$f_{\mathrm{L}}(u) = \frac{1}{\pi} \frac{\Delta u_{\mathrm{L}}}{(u - u_{\mathrm{L}})^2 + (\Delta u_{\mathrm{L}})^2}, \qquad f_{\mathrm{V}}(u) = \frac{1}{\pi^{3/2}\, \Delta u'} \int \frac{\exp(-y^2)\, \mathrm{d}y}{\left(\dfrac{u - u_{\mathrm{V}}}{\Delta u'} - y\right)^2 + 1};$$

$$\Delta u_{\mathrm{L}}\ [\text{см/с}] = -10 + 1{,}36 u_*\ [\text{см/с}], \qquad \Delta u' = \Delta u'_{\mathrm{L}} = \Delta u'_{\mathrm{G}} = u_*.$$

Таблица 1

Параметры модели

U_{10}, м/с	u_*, см/с	u_{L}, см/с	u_{V}, см/с	A
2,6	10	30	30	0,02
4,3	15	70	60	0,07
5,9	20	120	85	0,45
7,2	25	140	98	0,75
8,2	30	158	105	0,84
9,2	35	167	109	0,88
10,1	40	176	111	0,90
11,0	45	184	112	0,92

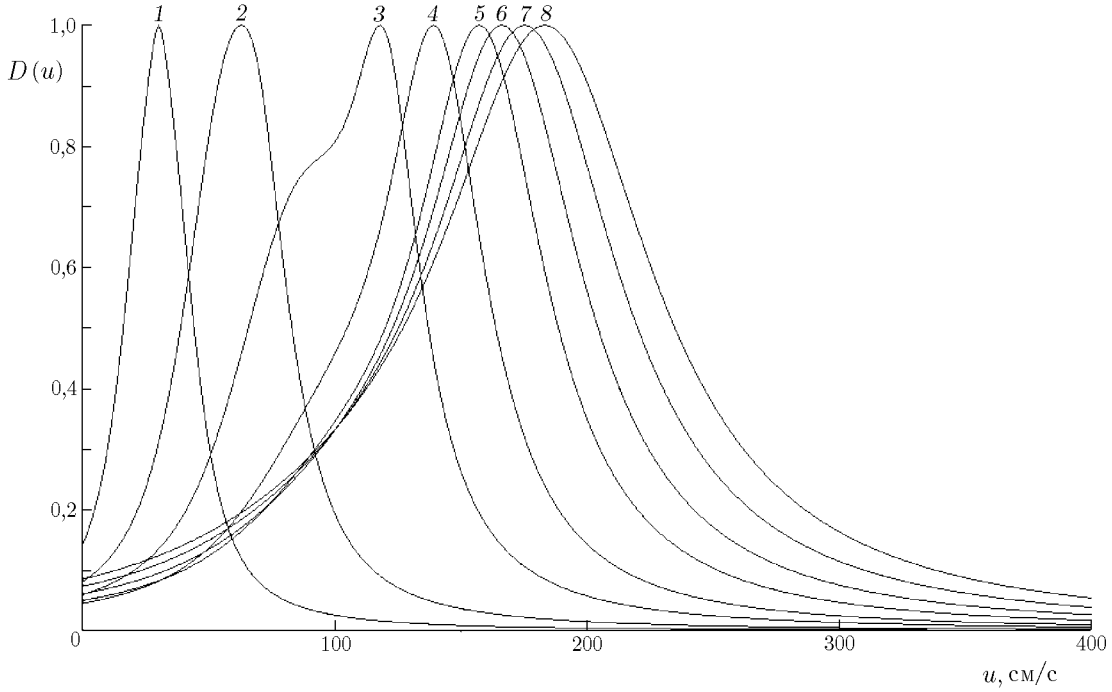

Рис. 2. Модель доплеровского спектра горизонтально поляризованного сигнала сантиметрового диапазона длин волн: кривая *1* соответствует $u_* = 10$ см/с; *2* — $u_* = 15$ см/с; *3* — $u_* = 20$ см/с; *4* — $u_* = 25$ см/с; *5* — $u_* = 30$ см/с; *6* — $u_* = 35$ см/с; *7* — $u_* = 40$ см/с; *8* — $u_* = 45$ см/с (см. табл. 1)

Значения параметров u_*, u_{L}, u_{V} и A приведены в табл. 1 вместе с соответствующими значениями U_{10} скорости ветра на высоте 10 м.

Функции f_{L} и f_{V} — линии Лоренца и Фойгта, причём выражение для линии Фойгта, представляющей собой свёртку линий Лоренца и Гаусса, записано для частного случая, когда полуширины $\Delta u'_{\mathrm{L}}$ и $\Delta u'_{\mathrm{G}}$ (на уровне $\exp(-1)$) входящих в свёртку линий равны между собой. Поскольку функции f_{L} и f_{V} нормированы так, что интегралы от них, взятые в бесконечных пределах, равняются единице, коэффициенты A и $1 - A$ отражают энергетический вклад соответствующего механизма рассеяния.

На рис. 2 приведены спектры, рассчитанные по формулам (3) для всех значений u_* из табл. 1. На рис. 3 показана зависимость положения u_0 максимума спектра от u_*; здесь же приведена кривая, рас-

считанная на основании эмпирической формулы работы [5]:

$$\nu_0\ [\text{Гц}] = 44{,}4\frac{U\ [\text{м/с}]}{\lambda\ [\text{см}]}\,, \tag{4}$$

где ν_0 — частота максимума спектра, U — скорость ветра (высота не уточняется). Формула (4) получена на основании данных, относящихся к углам скольжения $0{,}6^\circ \div 2^\circ$, с чем, по-видимому, и связано отличие кривых на рис. 3.

На рис. 2 обращает на себя внимание немонотонная (как и в исходных экспериментальных данных) зависимость ширины спектра от скорости ветра. В рамках модели (3) эта немонотонность имеет место на участке наиболее быстрого изменения соотношения между интенсивностями различных спектральных линий.

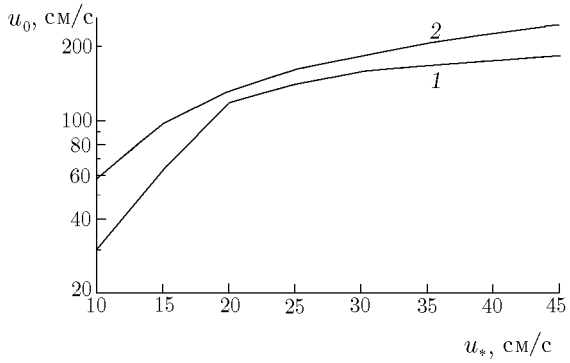

Рис. 3. Положение спектрального максимума, рассчитанное на основе модели (3) (кривая *1*) и эмпирической формулы (4) кривая *2*

Предлагаемую модель доплеровского спектра можно интерпретировать следующим образом.

При слабом ветре горизонтально поляризованный сигнал рассеивается на континууме мелких волн с различными фазовыми скоростями. В этих условиях, если распределение фазовых скоростей волн является гауссовским, доплеровский спектр отражённого сигнала описывается линией Фойгта. При усилении ветра на поверхности возникают структуры с конечным временем жизни, возможно, связанные с обрушениями коротких (примерно на порядок меньших, чем доминантная волна) гравитационных волн. Поэтому наряду с линией Фойгта в спектре появляется и с ростом скорости ветра становится превалирующей линия Лоренца, соответствующая случаю, когда рассеяние происходит на объекте с фиксированной скоростью и конечным временем жизни.

Таким образом, модель доплеровского спектра (3), будучи, вообще говоря, эмпирической, допускает правдоподобную физическую интерпретацию и предлагается для использования как в прикладных, так и в исследовательских целях.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 99–02–18388).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lee P. H. Y., Barter J. D., Beach K. L., Caponi E. et al. // IEE. Proc. Radar, Sonar, Navig. 1995. V. 147. P. 252.
2. Каневский М. Б., Караев В. Ю., Лубяко Л. И., Зуйкова Э. М. и др. // Изв. вузов. Радиофизика. 2001. Т. 44, № 11. С. 922.
3. Lee P. H. Y., Barter J. D., Caponi E., Caponi M. et al. // IEEE Trans. Ant. and Prop. 1996. V. 44, No. 3. P. 333.
4. Trizna D. B. // IEEE J. Oceanic Engrg. 1985. V. 10, No. 4. P. 368.
5. Кулемин Г. П., Разсказовский В. Б. Рассеяние миллиметровых радиоволн поверхностью Земли под малыми углами. Киев: Наукова Думка, 1987. 230 с.

Институт прикладной физики РАН,
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию
2 октября 2001 г.

MODEL OF A DOPPLER SPECTRUM OF MICROWAVES BACKSCATTERED BY A SEA SURFACE AT SMALL GRAZING ANGLES

M. B. Kanevsky, V. Yu. Karaev, and G. N. Balandina

On the basis of known experimental data, we propose a model of a Doppler spectrum of a horizontally polarized 3-cm microwave signal backscattered by a sea surface at small grazing angles about 10° for wind velocities 3–11 m/s. The model is represented as the superposition of Lorentz and Voight spectral lines with coefficients describing relative energy contributions of different scattering mechanisms as functions of the surface-wind velocity.

УДК 621.391.818.8

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ВЗАИМНОЙ ОРИЕНТАЦИИ АНТЕНН НА ХАРАКТЕРИСТИКИ МЕТЕОРНОГО РАДИОКАНАЛА

А. В. Карпов, А. В. Наумов

В работе приводится описание аппаратуры и методика проведения эксперимента на короткой метеорной радиолинии (85 км). Особенностью эксперимента является одновременный мониторинг притока метеорного вещества в атмосферу радаром, расположенным в одном из пунктов радиолинии, и фиксация основных характеристик радиолинии.

ВВЕДЕНИЕ

Метеорное распространение радиоволн, занимая относительно узкий сегмент в области средств связи, продолжает развиваться, о чём говорят регулярные публикации в зарубежной печати [1—4] и информация, представленная в сети Интернет [5, 6]. Для средних и длинных метеорных радиолиний методики повышения производительности (коэффициента заполнения и часовой численности метеоров) достаточно хорошо изучены и сводятся к применению адаптивных антенных решёток [3] и различных методов модуляции с переменной скоростью передачи данных [4]. Для коротких радиолиний наряду с выше упомянутыми существуют также достаточно простые, но эффективные методы, основанные на изменении ориентации максимума диаграммы направленности (ДН) антенных систем в азимутальной плоскости. К таким методам можно отнести: боковое распространение [7], когда ДН антенн отклоняются от оси радиолинии на различные углы, метод Вейцена [8], когда ДН антенн ориентируются на область за одним из пунктов радиолинии, и «северный» метод [9], когда ДН антенн метеорных радиолиний, расположенных в северном полушарии, ориентируются на север вне зависимости от расположения радиолинии относительно сторон света.

Авторами [10] предложен и теоретически обоснован метод повышения производительности короткой метеорной радиолинии, основанный на использовании данных метеорного радара, находящегося в одном из пунктов радиолинии, — метод слежения. В данной работе приводятся описание проведённого авторами первичного цикла наблюдений и некоторые предварительные результаты, полученные в 2001 г. на радиолинии Ореховка—Лаишево протяжённостью 85 км.

1. ОПИСАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА

Измерение характеристик метеорного радиоканала проводилось при помощи выносного приёмного пункта, работающего совместно с радаром КГУ-М5 [11]. Аппаратура позволяет зафиксировать время появления и продолжительность существования канала любой физической природы (метеорного, ионосферного либо возникающего вследствие отражения от летательных аппаратов) между передатчиком радара и приёмным пунктом. Круглосуточный поворот антенны передающего пункта 4 раза в час с ориентацией по стронам света является обязательным условием осуществления мониторинга притока метеорного вещества. Основные технические характеристики аппаратуры приведены в табл. 1.

Одновременное наблюдение как притока метеорного вещества, так и характеристик радиолинии позволяет оценить различные методы ориентации ДН антенных систем с точки зрения повышения производительности коротких радиолиний. Необходимо отметить, что в ходе эксперимента ни один из методов ориентации ДН, используемых на коротких радиолиниях, в чистом виде не был реализован из-за

Таблица 1

Передающий пункт (радиолокатор)

рабочая частота	32,8 МГц
мощность излучения	0,8 кВт (средняя), 20 кВт (импульсная)
антенна передатчика	волновой канал: 2×5 элементов
антенна приёмника	волновой канал: 3 элемента
полоса пропускания приёмника	60 кГц
чувствительность	1 мкВ
режим работы	круглосуточный, поворот антенн 4 раза в час (по 15 мин на каждую сторону света)
коэффициент стоячей волны в фидере	не более 1,1
поляризация излучения	горизонтальная

Выносной приёмный пункт

чувствительность	1 мкВ
полоса пропускания	20 кГц
антенна	волновой канал: 3 элемента
ориентация максимума ДН антенны по азимуту	северо-запад
коэффициент стоячей волны в фидере	не более 1,7
поляризация излучения	горизонтальная

отсутствия технической возможности вращения антенны приёмного пункта. В силу этого приведённые результаты представляют собой некоторое сочетание различных методов, используемых применительно к условиям коротких метеорных радиолиний.

Подключение антенны приёмного пункта к приёмнику осуществлялось через согласующий переходник с волнового сопротивления 75 Ом на 50 Ом с потерями 1,7 дБ. Регистрация осуществлялась при помощи 8-разрядной платы аналого-цифрового преобразования на компьютере с процессором AMD486-80. Относительно сторон света радиолиния была ориентирована в направлении северо-запад—юго-восток. Благодаря рельефу местности прямая волна отсутствовала при любой ориентации антенны передающего пункта.

Приём и регистрация сигналов, отражённых от метеорных следов, проводились в автоматическом режиме на основе априорных данных о форме импульса передатчика радиолокатора (частота импульсов модуляции 400 Гц, скважность 25). На рис. 1 приведён участок записи радиоотражения от переуплотнённого метеорного следа на выходе приёмника.

В процессе образования и распада метеорного следа происходит дополнительная модуляция сигнала, что приводит к изменению соотношения сигнал/шум в десятки раз в течение одного отражения. Это создаёт определённые трудности при идентификации и регистрации радиоотражения.

Автоматическая идентификация наличия сигнала осуществлялась корреляционным методом, когда для оцифрованной последовательности входного сигнала вычислялась автокорреляционная функция по периоду T сигнала:

$$B_S(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T S(t) S(t+\tau)\, \mathrm{d}t. \qquad (1)$$

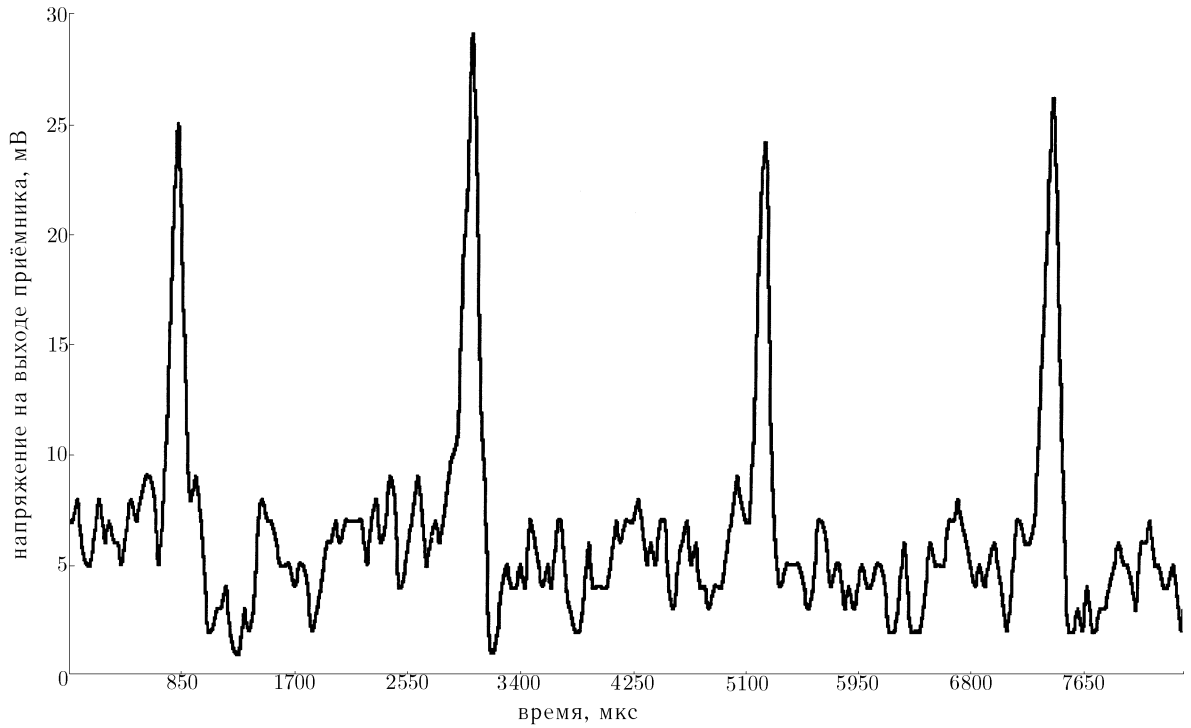

Рис. 1

Автокорреляционная функция (1) имеет максимум при $\tau = nT$, где n — любое целое число. При вычислении этой функции мы полагали $\tau = T$, интегрирование заменили на суммирование по отсчётам входного сигнала и для уменьшения объёма вычислений отказались от множителя $1/T$, который учитывается в дальнейшем при выборе порога. Время аналого-цифрового преобразования с учётом ввода оцифрованных данных в компьютер составляет 37 мкс. Соответственно, количество выборок за период равно 67, и формула для вычисления корреляционной функции принимает вид

$$B_S = \sum_{i=1}^{67} S_i S_{i+67}. \tag{2}$$

Выражение (2) представляет, по сути, коэффициент корреляции между двумя соседними периодами сигнала. При превышении корреляционной функцией некоторого определённого порога B_τ принимается решение о приёме сигнала. Порог срабатывания является функцией отношения сигнал/шум и скважности импульсов передатчика. В аналитическом виде получить зависимость сложно, поэтому в ходе экспериментов порог подбирался экспериментально. В силу большой скважности эффективность корреляционного обнаружения значительно снижается. Это вынуждает либо вводить высокий порог срабатывания (но тогда регистрируется только очень сильный сигнал), либо (в случае низкого порога) иметь большое количество ложных срабатываний, что также нежелательно.

Для уменьшения вероятности ложного срабатывания использовалось накопление. Начало регистрации осуществлялось только в случае превышения корреляционной функцией порога B_τ на протяжении n периодов подряд. Значение n в сочетании с порогом B_τ корреляционной функции выбирается экспериментально, исходя из допустимого количества ложных срабатываний. Если обозначить вероятность ложного срабатывания на одном периоде через p, результирующая вероятность ложного срабатывания P примет вид

$$P = [p(B_\tau)]^n. \tag{3}$$

Путём увеличения n можно насколько угодно уменьшить вероятность ложного срабатывания. Естественно, что при этом увеличивается минимальная длительность регистрируемых радиоотражений.

Использованный метод не лишён и определённых недостатков. Во-первых, период модулирующей функции не точно совпадает с 67 выборками входного сигнала по времени, что приводит к накоплению временной разницы, появлению ошибки в вычислении корреляционной функции и прерыванию регистрации. Однако на следующем периоде сигнала вновь происходит «захват», и регистрация продолжается как регистрация следующего метеорного отражения. Наличие меток времени в записываемых данных позволяет учесть это при обработке и рассматривать такие «разорванные» следы как единое целое. Во-вторых, метод не позволяет регистрировать одновременное наличие нескольких сигналов, отражённых от различных метеорных следов. В-третьих, невозможно автоматически идентифицировать метеорные и неметеорные моды распространения радиоволн. Это делается вручную при обработке данных на основе формы зарегистрированного сигнала и длительности отражения.

При приёме в реальном масштабе времени осуществлялась идентификация метеорного отражения вышеописанным методом, а в результирующий файл заносилась информация только о величине сигнала в момент прохождения импульса локатора (пики на рис. 1), т. е. информация об изменении мощности отражённого сигнала в процессе формирования и распада метеорной ионизации.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТА

Результаты, полученные в ходе эксперимента, можно разделить на две части: (1) описывающие интегральные показатели конкретной метеорной радиолинии (суточный ход численности метеоров и коэффициента заполнения, распределения амплитуды и длительности метеорных радиоотражений) и (2) иллюстрирующие влияние различной ориентации антенн на производительность радиолинии.

На рис. 2 приведёны графики суточного хода численности метеоров (сплошная линия) и коэффициента заполнения (штриховая линия) для марта 2001 г. (усреднённые значения). Коэффициент заполнения является основным фактором, определяющим пропускную способность метеорной линии связи, и показывает относительную долю времени, в течение которого существуют пригодные для связи метеорные следы. Максимум численности метеоров приходится на 3 часа местного времени, минимум — на 18 часов; глубина суточного хода численности составляет 5,8. Максимальный значение коэффициент заполнения приходится на 5 часов утра и составляет 0,518 %. Вечерний максимум коэффициента заполнения (в районе 20 часов), по-видимому, обусловлен распространением неметеорных мод радиоволн.

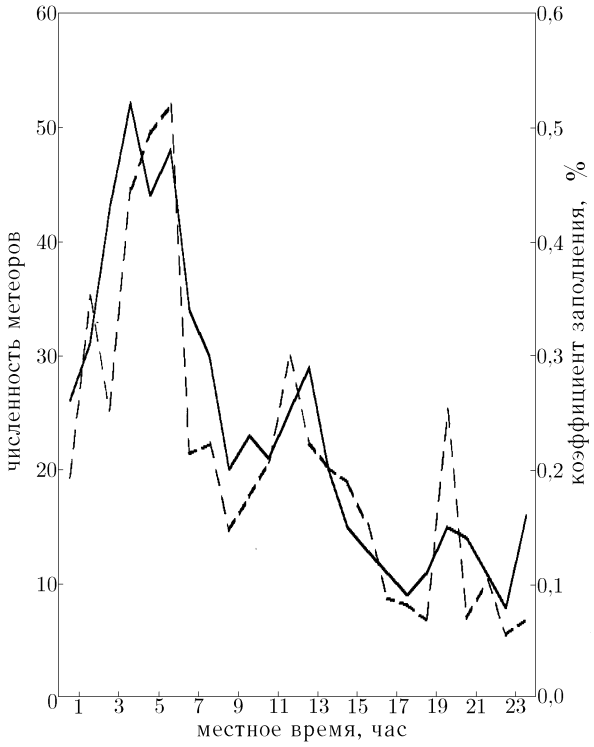

Рис. 2

Минимальная регистрируемая длительность следов в данном цикле эксперимента составила 0,05 с, максимальная длительность зарегистрированного отражения — 8 с.

Результаты наблюдений, иллюстрирующие эффективность различных методов ориентации антенн на короткой радиолинии, сведены в табл. 2 и 3, где приведено оптимальное направление ДН (с точки

Таблица 2

время	февраль	март	август
00÷03 LT	*0—1*	*0—1*	*0*
03÷06 LT	*0—1*	*0—1*	*0—1*
06÷09 LT	*1—2*	*1—2*	*1*
09÷12 LT	*2*	*1—2*	*0—1*
12÷15 LT	*2—3*	*2*	*1—2*
15÷18 LT	*3—2*	*2—3*	*2—3*
18÷21 LT	*3—2*	*3—0*	*0—3*
21÷24 LT	*1—0*	*0—1*	*0—3*

Таблица 3

время	февраль	март	август
00÷03 LT	*0—1*	*0*	*0—3*
03÷06 LT	*0*	*0*	*0—3*
06÷09 LT	*0—3*	*0—1*	*0*
09÷12 LT	*1*	*0—1*	*0—1*
12÷15 LT	*3*	*1*	*1*
15÷18 LT	*3*	*2—3*	*3*
18÷21 LT	*0—3*	*0—3*	*0—3*
21÷24 LT	*1—0*	*0*	*0*

зрения численности метеоров) для трёх месяцев наблюдений. Так как наблюдается значительный суточный ход численности регистраций, сутки разделены на восемь периодов по 3 часа, в течение которых численность регистраций меняется незначительно.

В табл. 2 приведены ориентации ДН антенн радиолокатора, соответствующие максимальной численности метеорных радиоотражений, зарегистрированных приёмником радиолокатора. Цифры в таблице соответствуют следующим ориентациям антенн: *0* — север, *1* — восток, *2* — юг, *3* — запад. Как видно из табл. 2, в целом направления оптимальной ориентации для соответствующего интервала времени для разных месяцев совпадают за исключением того, что для летних месяцев преимущественная ориентация ДН на север выражена более ярко.

В табл. 3 представлены оптимальные ориентации ДН антенны передающего пункта для тех же периодов наблюдений на выносном пункте (радиолиния длиной 85 км). Необходимо отметить, что на радиолинии оптимальная ориентация в южном направлении фиксировалась значительно реже, чем для приёмника локатора, и наблюдалась исключительно в вечерние часы наблюдений, что связано с ориентацией ДН антенны приёмного пункта на северо-запад.

3. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

В эксперименте получены как данные о численности метеорных радиоотражений и коэффициенте заполнения для короткой метеорной радиолинии, так и результаты радиолокационных наблюдений, дающие информацию о притоке метеорного вещества и распределениях скоростей и высот сгорания метеорных частиц. По результатам наблюдений (табл. 2 и 3) определена корреляция (не менее 0,7) между направлением с максимальной численностью метеорных радиоотражений, полученным для локатора в одном из пунктов радиолинии, и направлением с максимальной численностью метеоров для радиолинии, хотя отражения происходят в этих двух случаях от различных метеорных следов. Это иллюстрирует эффективность метода слежения, предложенного авторами.

Другой метод ориентации ДН антенн — «северный» — также можно считать эффективным применительно к радиолинии такой протяжённости. Направления на север и на северо-восток оказываются предпочтительными в половине случаев. Сравнить количественно эти два метода, а также оценить другие не представляется возможным из-за невозможности вращения антенны выносного пункта. Другим препятствием является ориентация радиолинии в направлении северо-запад—юго-восток.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В эксперименте 2001 г. впервые получено экспериментальное подтверждение преимуществ использования режима слежения для ориентации антенн при распространении радиоволн на коротких

метеорных радиолиниях. В данном цикле экспериментов отработана методика регистрации и аппаратура экспериментальных исследований на коротких метеорных радиолиниях. Полученные результаты позволяют говорить о преимуществе предложенного авторами метода слежения. В силу ограниченности возможностей предварительного эксперимента произвести количественные оценки всех известных в настоящее время методов не представляется возможным.

Настоящая работа выполнена при поддержке Минобразования РФ (грант № ТОО–31–1168).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Merrill S. C., Desourdis R. I. // Radio Sci. 1995. V. 30, No. 3. P. 765.
2. Akram A., Cannon P. // Radio Sci. 1996. V. 31, No. 2. P. 367.
3. Akram A., Cannon P. // Radio Sci. 1997. V. 32, No. 3. P. 1 023.
4. Mui S. // IEEE Trans. Comm. 1994. P. 211.
5. Веб-сайт группы исследователей колледжа FUKUI www.tcp-ip.or.jp/kaze/rmd.htm
6. Веб сайт Международной метеорной организации (IMO) www.imo.net
7. Асири Т. и др. // Изв. вузов. Радиофизика. 1989. Т. 32. С. 912.
8. Weitzen J. A. // IEEE Trans. Comm. 1987. V. 35. P. 217.
9. Richardson J. E. MS radiometeor project: AMS bulletin. 1997.
10. Карпов А. В. и др. // Изв. вузов. Радиофизика. 1997. Т. 40, № 6. С. 693.
11. Пупышев Ю. А. и др. // Метеорное распространение радиоволн. Казань: Изд-во КГУ, 1978. Вып. 14.

Казанский госуниверситет,
г. Казань, Россия

Поступила в редакцию
14 марта 2002 г.

STUDY OF THE INFLUENCE OF THE MUTUAL ORIENTATION OF ANTENNAS ON THE CHARACTERISTICS OF A METEOR RADIO CHANNEL

A. V. Karpov and A. V. Naumov

We describe an equipment and a method for performing an experiment on a short meteor radio line of 85 km in length. The feature of the experiment is the monitoring of the meteor-matter deposition to the atmosphere using a radar located at one point of the radio line with the simultaneous determination of the main radio-line characteristics.

УДК 535.37.421

ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА РЕШЁТКЕ СО СЛОЕМ КИРАЛЬНОЙ СРЕДЫ

С. Б. Панин, А. Е. Поединчук

Рассмотрена векторная задача дифракции наклонно падающей эллиптически поляризованной волны на одномерной периодической решётке, расположенной в слоистой среде с киральным слоем. Использование процедуры аналитической регуляризации, основанной на задаче Римана—Гильберта, позволило получить корректный и эффективный метод решения такого класса задач. Проведённое численное исследование показало, что дифракция при наличии киральной среды имеет ряд характерных особенностей.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время наблюдается возросший интерес к исследованию электромагнитных свойств систем с искусственными композиционными материалами. Среди этих материалов, синтезированных для СВЧ диапазона, особое внимание уделяется киральным средам [1, 2], для которых характерно проявление пространственной дисперсии. В оптическом диапазоне свойства природных киральных сред: оптическая активность и круговой дихроизм — давно известны. Искусственные киральные среды в СВЧ диапазоне проявляют эти свойства в значительно большей мере.

Сравнительно недавнее появление эффективных технологий изготовления образцов киральных сред открыло новые возможности их применения. Использование таких сред позволяет не только изменять характеристики систем, но в ряде случаев получить новые свойства даже в хорошо известных структурах. В этой связи отметим появление волны с кросс-поляризацией в отражённом поле при нормальном падении линейно поляризованной волны на ленточную решётку с изотропным киральным полупространством [3].

Данная работа посвящена развитию предложенного в [3] метода в рамках решения векторной задачи дифракции наклонно падающей эллиптически поляризованной волны на структуре, состоящей из плоской периодической решётки и слоистой среды, которая включает киральный слой. Такая структура, обладая богатым и своеобразным спектром пространственных и поверхностных гармоник, может быть использована, например, в качестве компоненты микрополосковых антенн, замедляющих систем и преобразователей поляризации. Подобная структура рассматривалась в работе [4], где в интегральной форме было получено решение задачи о возбуждении настила из линейных проводников (с шириной значительно меньшей, чем длина возбуждающей волны) на киральной подложке с приближёнными граничными условиями анизотропной проводимости, что позволило проанализировать некоторые электродинамические характеристики рассеянного поля в дальней зоне.

Развиваемый метод позволяет находить строгое и эффективное в вычислительном смысле решение без каких-либо ограничений на соотношение геометрических параметров структуры и длины падающей волны.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Схема структуры, на которой происходит дифракция, приведена на рис. 1. В плоскости $z = h_1$ расположена периодическая ленточная решётка, образованная бесконечно тонкими идеально проводящими лентами, параллельными оси x; период решётки l, ширина щелей d. Слоистую среду образуют

четыре области: $h_1 < z$, $0 < z < h_1$, $-h_2 < z < 0$ и $z < -h_2$, с материальными параметрами $\varepsilon_j = \varepsilon_j' + i\varepsilon_j''$, $\mu_j = \mu_j' + i\mu_j''$, которые определяют соответственно диэлектрическую и магнитную проницаемости среды в j-й области ($j = 1, 2, 3, 4$). В дальнейшем предполагаем, что потери в первой среде ($z > h_1$) отсутствуют. Третью область структуры заполняет киральная среда с параметром киральности $\gamma = \gamma' + i\gamma''$.

Сверху на решётку наклонно падает плоская электромагнитная волна с частотой ω: $\mathbf{E}^{\rm in} = \mathbf{E}_0 \exp\bigl(i\mathbf{k}^{\rm in}\mathbf{r}\bigr)$, $\mathbf{H}^{\rm in} = \mathbf{H}_0 \exp\bigl(i\mathbf{k}^{\rm in}\mathbf{r}\bigr)$, где $\mathbf{k}^{\rm in} = (0, -k_1 \sin\alpha_1, -k_1 \cos\alpha_1)$, $k_1 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_1\mu_0\mu_1}$, α_1 — угол между волновым вектором $\mathbf{k}^{\rm in}$ и осью z, отсчитываемый по часовой стрелке, ε_0 и μ_0 — электрическая и магнитная постоянные; временная зависимость полей имеет вид $\exp(-i\omega t)$. Необходимо определить поле, возникшее в результате дифракции.

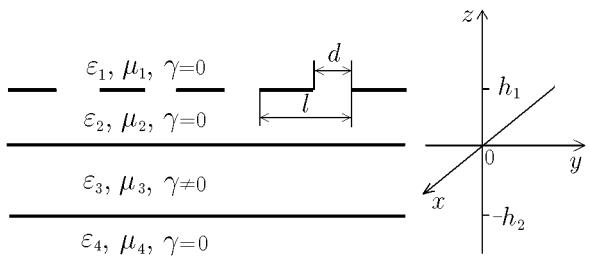

Рис. 1

Решение будем искать в виде полного поля, равного сумме падающего и вторичного полей. Независимость падающего поля от координаты x, а также однородность решётки вдоль оси x исключают зависимость искомого поля от этой координаты. С точки зрения ориентации векторов падающего поля исходная задача может быть сведена к следующим частным случаям: E-поляризации, когда $\mathbf{E}_0 = (\tilde{e}, 0, 0)$, и H-поляризации, когда $\mathbf{H}_0 = (\tilde{h}, 0, 0)$.

Для существования и единственности решения необходимо [5], чтобы оно удовлетворяло уравнениям Максвелла, которые для слоя j имеют вид

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = \begin{cases} i\omega\mu_0\mu_j\mathbf{H}, & j = 1,2,4; \\ i\omega\,(\mu_0\mu_3\mathbf{H} - i\gamma\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\,\mathbf{E}), & j = 3, \end{cases} \qquad \operatorname{rot}\mathbf{H} = \begin{cases} -i\omega\varepsilon_0\varepsilon_j\mathbf{E}, & j = 1,2,4; \\ -i\omega\,(\varepsilon_0\varepsilon_3\mathbf{E} + i\gamma\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\,\mathbf{H}), & j = 3, \end{cases} \tag{1}$$

условию излучения на бесконечности, граничным условиям, условию квазипериодичности и условию конечности энергии поля в любой ограниченной области пространства.

2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОЛЯ

Для рассматриваемой двухмерной задачи из (1) при $j = 3$ можно получить следующие соотношения, определяющие поле в однородной киральной среде:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^+ + \mathbf{E}^-, \qquad \mathbf{H} = \mathbf{H}^+ + \mathbf{H}^- = -\frac{i}{\rho_3}(\mathbf{E}^+ - \mathbf{E}^-),$$

$$\Delta_{yz}u^\pm + (k^\pm)^2\,u^\pm = 0, \qquad E_x^\pm = u^\pm(y,z), \qquad E_y^\pm = \mp\frac{1}{k^\pm}\frac{\partial u^\pm}{\partial z}, \qquad E_z^\pm = \pm\frac{1}{k^\pm}\frac{\partial u^\pm}{\partial y},$$

где $k^\pm = -k_3\,(1 \pm \eta)$, $k_3 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_3\mu_0\mu_3}$, $\eta = \gamma/\sqrt{\varepsilon_3\mu_3}$, $\rho_3 = \sqrt{\mu_0\mu_3}/\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_3}$. Наличие потерь определяет комплексность материальных параметров, причём необходимо выполнение следующих условий [1]: $\operatorname{Im}\varepsilon_3 > 0$, $\operatorname{Im}\mu_3 > 0$ и $\operatorname{Im}\varepsilon_3\operatorname{Im}\mu_3 > (\operatorname{Im}\gamma)^2$. Таким образом, электрическое поле определяется суммой полей $\mathbf{E}^+$ и $\mathbf{E}^-$, через компоненту E_x^+ и E_x^- выражаются все составляющие поля, а собственными волнами являются волны правой и левой круговой поляризации с постоянными распространения k^+ и k^-. При этом, несмотря на двухмерность задачи, искомые поля содержат все компоненты, т. е. рассматривается векторная задача.

Геометрия структуры позволяет решать рассматриваемую краевую задачу методом разделения переменных. Предполагая существование решения, будем искать его в виде разложения в ряды Фурье. Подставляя эти ряды в уравнение Гельмгольца, определяемое из (1), можно представить поля в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} E_1^x \\ H_1^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{e} \\ \tilde{h} \end{pmatrix} \exp[-ik_1\,(y\sin\alpha_1 + z\cos\alpha_1)] + \\ + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \exp\Big[i\zeta_n^{(1)}\,(z-h_1)\Big] \exp(i\xi_n y) \quad \text{при} \quad h_1 < z,$$

$$\begin{pmatrix} E_2^x \\ H_2^x \end{pmatrix} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \begin{pmatrix} c_n^+ \\ d_n^+ \end{pmatrix} \exp\Big(i\zeta_n^{(2)} z\Big) + \begin{pmatrix} c_n^- \\ d_n^- \end{pmatrix} \exp\Big[-i\zeta_n^{(2)}\,(z-h_1)\Big] \right\} \exp(i\xi_n y) \quad \text{при} \quad 0 < z < h_1,$$

$$\begin{pmatrix} E_3^x \\ i\rho_3 H_3^x \end{pmatrix} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \begin{pmatrix} x_n^+ \\ x_n^+ \end{pmatrix} \exp(i\zeta_n^+ z) + \begin{pmatrix} x_n^- \\ x_n^- \end{pmatrix} \exp(-i\zeta_n^+ z) + \right. \\ \left. + \begin{pmatrix} y_n^+ \\ -y_n^+ \end{pmatrix} \exp(i\zeta_n^- z) + \begin{pmatrix} y_n^- \\ -y_n^- \end{pmatrix} \exp(-i\zeta_n^- z) \right\} \exp(i\zeta_n^{(2)} h_1) \exp(i\xi_n y) \quad \text{при} \quad -h_2 < z < 0,$$

$$\begin{pmatrix} E_4^x \\ H_4^x \end{pmatrix} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \begin{pmatrix} g_n \\ t_n \end{pmatrix} \exp\Big[-i\zeta_n^{(4)}\,(z+h_2)\Big] \exp(i\xi_n y) \quad \text{при} \quad z < -h_2.$$

Здесь $\xi_n = 2\pi n/l - k_1 \sin\alpha_1$, $\zeta_n^{(j)}\big|_{j\neq 3} = \sqrt{k_j^2 - (\xi_n)^2}$, $k_j = \omega\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_j\mu_0\mu_j}$, $\zeta_n^{\pm} = \sqrt{(k^{\pm})^2 - (\xi_n)^2}$ — постоянные распространения; $j = 1, 2, 4$. Для $\zeta_n^{(j)}$, $\zeta_n^{\pm}$ выбраны ветви с положительной действительной и мнимой частью, что обеспечивает выполнение условия излучения на бесконечности.

Полученное представление поля удовлетворяет условию квазипериодичности и соответствует разложению Рэлея дифрагированного поля в виде суперпозиции парциальных волн пространственного спектра, состоящей из конечного числа распространяющихся однородных волн ($\{\zeta_n^{(j)}, \zeta_n^{\pm}\} \in \mathbb{R}$) и бесконечного числа поверхностных замедленных неоднородных волн ($\{\zeta_n^{(j)}, \zeta_n^{\pm}\} \in \mathbb{C}$). Характер распространения этих волн уже определён, а амплитуды и фазы определяются неизвестными коэффициентами.

3. СИСТЕМЫ ПЕРВОГО РОДА

Из обращения в нуль тангенциальных составляющих электрического поля на металлических лентах решётки и непрерывности магнитного поля на щелях получаем следующие системы функциональных уравнений:

$$\begin{cases} \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \zeta_n^{(2)} \Big[m_n^{(1)} c_n^+ \exp\Big(i\zeta_n^{(2)} h_1\Big) + m_n^{(2)} c_n^- \Big] \exp(ik_n^y y) = 2\tilde{e}\dfrac{\mu_2}{\mu_1}\zeta_0^{(1)} \exp\Big(-i\zeta_0^{(1)} h_1\Big), & |y| < d/2; \\ \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \Big[m_n^{(3)} c_n^+ \exp\Big(i\zeta_n^{(2)} h_1\Big) + m_n^{(4)} c_n^- \Big] \exp(ik_n^y y) = 0, & d/2 < |y| < l/2, \end{cases} \qquad (2)$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \left[e_n^{(1)} d_n^+ \exp\left(i\zeta_n^{(2)} h_1\right) + e_n^{(2)} d_n^-\right] \exp(ik_n^y y) = -2\tilde{h} \exp\left(-i\zeta_0^{(1)} h_1\right), & |y| < d/2; \\ \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \zeta_n^{(2)} \left[e_n^{(3)} d_n^+ \exp\left(i\zeta_n^{(2)} h_1\right) + e_n^{(4)} d_n^-\right] \exp(ik_n^y y) = 0, & d/2 < |y| < l/2, \end{cases} \tag{3}$$

где $m_n^{(1,2)} = \mp 1 + \mu_2 \zeta_n^{(1)}/(\mu_1 \zeta_n^{(2)})$, $m_n^{(3,4)} = 1$, $e_n^{(1,2)} = -1 \pm \varepsilon_1 \zeta_n^{(2)}/(\varepsilon_2 \zeta_n^{(1)})$, $e_n^{(3,4)} = \pm 1$; $k_n^y = 2\pi n/l$. Неравенства $|y| < d/2$ и $d/2 < |y| < l/2$ определяют положение щели и ленты соответственно.

Используя граничные условия при $z = 0$ и $z = -h_2$, состоящие в непрерывности тангенциальных компонент поля, выразим $c_n^{\pm}, d_n^{\pm}$ и x_n^+, y_n^+ через x_n^-, y_n^-. Теперь системы (2), (3) можно представить в следующем виде:

$$\begin{cases} \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \zeta_n^{(2)} \nu_n^{(1)} \left[X_n + \left(\tilde{a}_n^{(11)} x_n^- + \tilde{a}_n^{(12)} y_n^-\right)\right] \exp(ik_n^y y) = I^{\mathrm{e}}, & |y| < d/2; \\ \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \exp(ik_n^y y) = 0, & d/2 < |y| < l/2, \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} Y_n \exp(ik_n^y y) = 0, & |y| < d/2; \\ \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \zeta_n^{(2)} \nu_n^{(2)} \left[Y_n + \left(\tilde{a}_n^{(21)} x_n^- + \tilde{a}_n^{(22)} y_n^-\right)\right] \exp(ik_n^y y) = I^{\mathrm{h}}, & d/2 < |y| < l/2, \end{cases} \tag{5}$$

где $X_n = a_n^{(21)} x_n^- + a_n^{(22)} y_n^-$, $Y_0 = b_0^{(11)} x_0^- + b_0^{(12)} y_0^- - 4i\rho_3 \tilde{h} \exp(-ik_1 h_1 \cos\alpha_1)$, $Y_n\big|_{n\neq 0} = b_n^{(11)} x_n^- + b_n^{(12)} y_n^-$; $\nu_n^{(1)} = m_n^{(2)}/m_n^{(4)}$, $\nu_n^{(2)} = e_n^{(4)}/e_n^{(2)}$; выражения для коэффициентов $\tilde{a}_n^{(11,12)}$, $\tilde{a}_n^{(21,22)}$, $a_n^{(21,22)}$, $b_n^{(11,12)}$ и $I^{\mathrm{e,h}}$ приведены в Приложении 1.

Итак, исходная краевая задача сведена к связанным системам парных сумматорных уравнений с ядрами в виде тригонометрических функций. Используя ортогональность функций $\exp(ik_n^y y)$ на интервале $[-l/2, l/2]$, можно от (4), (5) перейти к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений, которая эквивалентна операторному уравнению первого рода в гильбертовом пространстве. Как известно [6], с вычислительной точки зрения уравнения первого рода обладают рядом существенных недостатков. Главный из них — рост числа обусловленности матриц, соответствующих конечным системам уравнений, при увеличении порядка усечения исходной системы. Это обстоятельство не позволяет, вообще говоря, получить решение такого типа систем с заданной точностью методом усечения.

4. АНАЛИТИЧЕСКАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ

Альтернативный подход к построению решения основан на идее аналитической регуляризации [5, 7]. Представим полученные системы как операторное уравнение вида

$$\mathbf{AZ} = \mathbf{b}, \qquad \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где $\mathbf{A}$ — линейный оператор, задаваемый левыми частями систем (4), (5), $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ — векторы, элементами которых являются неизвестные коэффициенты, $\mathbf{b}$ — известный вектор, связанный с падающей волной. Можно показать, что $\mathbf{A}$ — неограниченный оператор, пространство действия которого определяется из требования выполнения условия Мейкснера [7].

Первый этап регуляризации состоит в разбиении оператора $\mathbf{A}$ на главную часть $\mathbf{A}_0$, в которой выделена особенность исходного оператора, и вполне непрерывную часть $\mathbf{A}_1$. При этом уравнение (6) записывается как

$$(\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1)\mathbf{Z} = \mathbf{b},$$

где $\mathbf{A}_0$ имеет ограниченный обратный оператор $\mathbf{A}_0^{-1}$, а $\mathbf{A}_1$ — компактный оператор.

На втором этапе регуляризации на основе метода задачи Римана—Гильберта [7] строится оператор $\mathbf{A}_0^{-1}$ в аналитическом виде. Применяя $\mathbf{A}_0^{-1}$ к (6), получаем

$$(\mathbf{I}+\mathbf{H})\mathbf{Z}=\mathbf{B}, \tag{7}$$

где $\mathbf{I}$ — тождественный оператор, $\mathbf{H}=\mathbf{A}_0^{-1}\mathbf{A}_1$ — ядерный оператор, $\mathbf{B}=\mathbf{A}_0^{-1}\mathbf{b}$. Очевидно, что (7) является фредгольмовым уравнением второго рода, а оператор $\mathbf{A}_0^{-1}$ играет роль левостороннего регуляризатора. Удачное выделение особенности в исходном операторе $\mathbf{A}$ обеспечивает полную непрерывность оператора $\mathbf{H}$ и быстрое убывание матричных элементов в системе (7). Это гарантирует хорошую сходимость приближённых решений и позволяет эффективно решать уравнение (7) в широком диапазоне изменения параметров исходной задачи.

В дальнейшем целесообразно использовать следующие обозначения:

$$Q^{\mathrm{e,h}}=\frac{I^{\mathrm{e,h}}}{k_2}-\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\gamma_m^{(1,2)}\left(\tilde a_m^{(11,21)}x_m^-+\tilde a_m^{(12,22)}y_m^-\right)\exp(ik_m^y y),$$

$$\beta_m=\frac{\xi_m}{k_2}=\frac{1}{\chi_2}(m+m_0+\theta),\qquad \gamma_m^{(1,2)}=\nu_m^{(1,2)}\frac{\zeta_m^{(2)}}{k_2},\qquad \chi_j=\frac{l}{\lambda_0}\sqrt{\varepsilon_j\mu_j},$$

в которых λ_0 — длина волны в вакууме, $m_0+\theta=\chi_2\beta_0$, где m_0 — ближайшее к $\chi_2\beta_0$ целое число, $-1/2\le\theta<1/2$. Проведём смещение индекса на m_0 и введём новые неизвестные

$$\bar X_0=X_{-m_0}/\chi_2,\qquad \bar X_n\big|_{n\neq0}=\beta_{n-m_0}X_{n-m_0};$$

$$\bar Y_0=(-1)^{-m_0}Y_{-m_0}/\chi_2,\qquad \bar Y_n\big|_{n\neq0}=(-1)^{n-m_0}\beta_{n-m_0}Y_{n-m_0}.$$

Теперь, дифференцируя по y второе уравнение системы (4) и первое уравнение системы (5), можно привести рассматриваемые системы к следующему виду:

$$\begin{cases}\sum\limits_{\substack{n=-\infty\\n\neq0}}^{+\infty}\bar X_n\exp(in\varphi)+\theta\bar X_0=0, & \delta<|\varphi|<\pi;\\ \sum\limits_{\substack{n=-\infty\\n\neq0}}^{+\infty}\frac{|n|}{n}\bar X_n\exp(in\varphi)+\theta\bar X_0=F^{(1)}, & |\varphi|<\delta;\\ \sum\limits_{\substack{n=-\infty\\n\neq0}}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+\theta}\bar X_n+\bar X_0=0, & \varphi=\pi;\end{cases}\qquad \begin{cases}\sum\limits_{\substack{n=-\infty\\n\neq0}}^{+\infty}\bar Y_n\exp(in\varphi)+\theta\bar Y_0=0, & \tilde\delta<|\varphi|<\pi;\\ \sum\limits_{\substack{n=-\infty\\n\neq0}}^{+\infty}\frac{|n|}{n}\bar Y_n\exp(in\varphi)+\theta\bar Y_0=F^{(2)}, & |\varphi|<\tilde\delta;\\ \sum\limits_{\substack{n=-\infty\\n\neq0}}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+\theta}\bar Y_n+\bar Y_0=0, & \varphi=\pi;\end{cases}$$

где $\varphi=2\pi y/l$, $\delta=\pi d/l$, $\tilde\delta=\pi-\delta$,

$$F^{(1)}=\frac{1}{1-\varepsilon_\infty^{(1)}}\left[\sum_{\substack{n=-\infty\\n\neq0}}^{+\infty}\bar X_n\tau_n^{(1)}\frac{|n|}{n}\exp(in\varphi)+\bar X_0\left(\varepsilon_0^{(1)}-\varepsilon_\infty^{(1)}\theta\right)-iQ^{\mathrm{e}}\exp(im_0\varphi)\right],$$

$$F^{(2)}=\frac{1}{1-\varepsilon_\infty^{(2)}}\left[\sum_{\substack{n=-\infty\\n\neq0}}^{+\infty}\bar Y_n\tau_n^{(2)}\frac{|n|}{n}(-1)^n\exp(in\varphi)+\bar Y_0\left(\varepsilon_0^{(2)}-\varepsilon_\infty^{(2)}\theta\right)-iQ^{\mathrm{h}}(-1)^{m_0}\exp(im_0\varphi)\right],$$

$$\varepsilon_0^{(1,2)}=\theta+i\nu_{-m_0}^{(1,2)}\sqrt{\chi_2^2-\theta^2},\quad \varepsilon_{m_0}^{(1,2)}=1+i\frac{\gamma_0^{(1,2)}}{\beta_0},\quad \varepsilon_n^{(1,2)}\big|_{n\neq m_0}=1+i\nu_{n-m_0}^{(1,2)}\sqrt{\frac{\chi_2^2}{(n+\theta)^2}-1},$$

$$\tau_n^{(1,2)}\big|_{n\neq 0} = \varepsilon_n^{(1,2)} - \varepsilon_\infty^{(1,2)}, \quad \varepsilon_\infty^{(1,2)} = \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n^{(1,2)} = 1 - \nu_\infty^{(1,2)}, \quad \nu_\infty^{(1)} = \frac{\mu_1+\mu_2}{\mu_1}, \quad \nu_\infty^{(2)} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}.$$

Третьи уравнения приведённых выше систем определяют постоянные, потерянные при дифференцировании.

Выделим в каждой системе сингулярную и вполне непрерывную части. Можно считать, что $F^{(1,2)}$ являются достаточно гладкими периодическими функциями, которые можно представить в виде хорошо сходящихся рядов: $F^{(1,2)} = \Sigma_{n=-\infty}^{+\infty} f_n^{(1,2)} \exp(in\varphi)$, где $f_n^{(1,2)}$ — линейные комбинации неизвестных $\bar{X}_n, \bar{Y}_n$. Действительно, записывая ряды, содержащиеся в $Q^{\mathrm{e,h}}(x_n^-, y_n^-)$, с использованием переменных $\bar{X}_n, \bar{Y}_n$ и соответствующим образом группируя слагаемые, получим

$$\begin{pmatrix} F^{(1)} \\ F^{(2)} \end{pmatrix} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\begin{pmatrix} \bar{a}_n^{(11)} \\ (-1)^n\, \bar{a}_n^{(21)} \end{pmatrix} \bar{X}_n + \begin{pmatrix} \bar{a}_n^{(12)} \\ (-1)^n\, \bar{a}_n^{(22)} \end{pmatrix} \bar{Y}_n \right] \exp(in\varphi) + \begin{pmatrix} \bar{a}^{(1)} \\ (-1)^{m_0}\, \bar{a}^{(2)} \end{pmatrix} \exp(im_0\varphi),$$

где коэффициенты $\bar{a}_n^{(11,21)}$, $\bar{a}^{(12,22)}$ и $\bar{a}^{(1,2)}$ определены в Приложении 2.

Асимптотические оценки параметров малости $\tau_n^{(1,2)} = \mathrm{O}(n^{-2})$, а также поведение коэффициентов $\tilde{a}_n^{(11,12)}$, $\tilde{a}_n^{(21,22)}$ при $|n| \to \infty$ позволяют получить

$$f_n^{(1,2)}\big|_{|n|\to\infty} = \frac{\sigma_n^{(1,2)}}{n^2} + \mathrm{O}[\exp(-\sigma\,|n|)],$$

где

$$\sigma = 4\pi \frac{h_1}{l} \left| 1 - \frac{\chi_1 \sin\alpha_1}{n} \right| \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\chi_2}{n - \chi_1 \sin\alpha_1} \right)^2 \right] > 0$$

и $\Sigma_{n=-\infty}^{n=+\infty} |\sigma_n^{(1,2)}|^2 < \infty$. Следовательно, функции $F^{(1,2)}$ являются непрерывно дифференцируемыми по φ на интервале $[-\pi, \pi]$.

Считая $F^{(1,2)}$ известными, можно формально полагать, что полученные функциональные системы являются несвязанными. Рассматриваемые системы эквивалентны задаче Римана—Гильберта [5, 7] о восстановлении аналитической функции по её предельным значениям на дуге единичного круга. Применяя известный метод решения этой задачи к каждой системе, можно получить следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \theta\bar{X}_0 = \sum\limits_{p=-\infty}^{+\infty} V_{0p} \left(\alpha_p^0 \bar{X}_p + \beta_p \bar{Y}_p \right) + b_0, & \bar{X}_n = \sum\limits_{p=-\infty}^{+\infty} V_{np} \left(\alpha_p^{(n)} \bar{X}_p + \beta_p \bar{Y}_p \right) + b_n, \\ \theta\bar{Y}_0 = \sum\limits_{p=-\infty}^{+\infty} \tilde{V}_{0p} \left(\tilde{\alpha}_p \bar{X}_p + \tilde{\beta}_p^{(0)} \bar{Y}_p \right) + \tilde{b}_0, & \bar{Y}_n = \sum\limits_{p=-\infty}^{+\infty} \tilde{V}_{np} \left(\tilde{\alpha}_p \bar{X}_p + \tilde{\beta}_p^{(n)} \bar{Y}_p \right) + \tilde{b}_n, \end{cases} \tag{8}$$

где

$$\alpha_0^{(n)} = \bar{a}_0^{(11)} + \frac{R_n^{[\theta]}}{V_{n0}}, \qquad \alpha_p^{(n)} = \bar{a}_p^{(11)}, \qquad \beta_p = \bar{a}_p^{(12)}, \qquad b_n = \bar{a}^{(1)} V_{nm_0},$$

$$\tilde{\alpha}_p = \bar{a}_p^{(21)}, \qquad \tilde{\beta}_0^{(n)} = \bar{a}_0^{(22)} + \frac{\tilde{R}_n^{[\theta]}}{\tilde{V}_{n0}}, \qquad \tilde{\beta}_p^{(n)} = \bar{a}_p^{(22)}, \qquad \tilde{b}_n = \bar{a}^{(2)} \tilde{V}_{nm_0},$$

$V_{np} = V_n^{(p)}(u) + R_n^{[\theta]}(u) V_{[\theta]}^{(p)}(u)$, $R_n^{[\theta]} = -R_n(u)/R_{[\theta]}(u)$, $\tilde{V}_{np} = V_{np}(\tilde{u})$, $\tilde{R}_n^{[\theta]} = R_n^{[\theta]}(\tilde{u})$, $u = -\tilde{u} = \cos\delta$. Величины $V_n^{(p)}(u)$, $R_n(u)$ и $V_{[\theta]}^{(p)}(u)$, $R_{[\theta]}(u)$ определены в [5].

Из оценок коэффициентов $\alpha_p^{(n)}, \tilde{\beta}_p^{(n)} = \mathrm{O}(n^{-2})$, $\tilde{\alpha}_p, \beta_p = \mathrm{O}[\exp(-\sigma\,|n|)]$ и поведения величин $V_n^{(p)}$, $R_n, V_{[\theta]}^{(p)}, R_{[\theta]}$ при $\{|n|, |p|\} \to \infty$ следует, что (8) является системой второго рода фредгольмового типа и может быть представлена в операторной форме (7), где

$$\mathbf{H} = -\begin{pmatrix} h_{np}^{(11)} & h_{np}^{(12)} \\ h_{np}^{(21)} & h_{np}^{(22)} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \bar{X}_n \\ \bar{Y}_n \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_n \\ \tilde{b}_n \end{pmatrix},$$

$p = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, $h_{00}^{(11)} = V_{00}\alpha_0^{(0)} + (1-\theta)$, $h_{np}^{(11)} = V_{np}\alpha_p^{(n)}$, $h_{np}^{(12)} = V_{np}\beta_p$, $h_{np}^{(21)} = \tilde{V}_{np}\tilde{\alpha}_p$, $h_{00}^{(22)} = \tilde{V}_{00}\tilde{\beta}_0^{(0)} + (1-\theta)$, $h_{np}^{(22)} = \tilde{V}_{np}\tilde{\beta}_p^{(n)}$. Анализ нормы оператора $\mathbf{H}$ показал, что, задавшись малым параметром, можно методом последовательных приближений получить аналитическое решение.

5. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим частный случай — задачу дифракции нормально падающей волны на решётке, расположенной на высоте $z = h_1$ над плоскостью раздела кирального и некирального полупространств. Этот случай реализуется, когда $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, $\mu_1 = \mu_2$, $\gamma = 0$ при $z > 0$, а киральная среда с параметрами ε_3, μ_3 и $\gamma \neq 0$ заполняет полупространство $z < 0$, т. е. $h_2 \to \infty$.

Введём коэффициенты отражения $(a_0^{(x)}, a_0^{(y)})$ и прохождения $(b_0^{(x)}, b_0^{(y)})$ для x- и y-составляющих электрического поля: $a_0^{(x)} = a_0$, $a_0^{(y)} = -\rho_1 b_0$ при $z > h_1$ и $b_0^{(x)} = (x_0^- + y_0^-)\exp(ik_1h_1)$, $b_0^{(y)} = -i\,(x_0^- - y_0^-)\exp(ik_1h_1)$ при $z < 0$, определяющие усреднённое по периоду решётки поле. Индекс x соответствует полю E-поляризации, индекс y — полю H-поляризации. В дальнейшем под основной поляризацией будем понимать поляризацию падающего поля, а кросс-поляризацией будем называть поляризацию, перпендикулярную основной. Используя граничные условия, можно получить следующие соотношения:

$$a_0^{(x)} + \tilde{e}\exp(-ik_1h_1) = \Omega b_0^{(x)}, \qquad a_0^{(y)} + \rho_1\tilde{h}\exp(-ik_1h_1) = \Omega b_0^{(y)},$$

где $\Omega = (1/2)\,[(1-\rho_1/\rho_3)\exp(ik_1h_1) + (1+\rho_1/\rho_3)\exp(-ik_1h_1)]$, $\rho_1 = \sqrt{\mu_0\mu_1}/\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_1}$. Отметим, что введённые величины связаны функциональной зависимостью, обусловленной граничными условиями.

Характерной чертой поведения коэффициентов отражения в зависимости от частотного параметра $\chi = l/\lambda_0$ является наличие особенностей типа классической аномалии Вуда [8] в точках скольжения $\chi_n^{\mathrm{w}} = n/\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}$ и особенностей в окрестности точек $\chi_n^{\pm} = n\,\mathrm{Re}\big[1/(\sqrt{\varepsilon_3\mu_3} \pm \gamma)\big]$. Из представления поля видно, что величины χ_n^{w} и $\chi_n^{\pm}$, где $n = 0, \pm1, \ldots$, определяют значения частотного параметра, при которых n-ная гармоника соответственно некирального и кирального полупространств становится распространяющейся. Зависимость коэффициентов отражения поля основной поляризации от χ представлена на рис. 2*а*. При $\chi_1^{\pm} < \chi < \chi_1^{\mathrm{w}}$ в киральной среде (оптически более плотной) распространяется большее количество волн, чем в некиральной. При малых h_1 убывающие по мере удаления от решётки поверхностные гармоники, попадая в киральную среду, становятся распространяющимися и уносят часть энергии. Такое перераспределение энергии объясняет особенности коэффициентов отражения поля основной поляризации в окрестности точек $\chi_n^{\pm}$.

Частотная зависимость коэффициентов отражения поля кросс-поляризации показана на рис. 2*б*, где сплошные кривые относятся к левой оси, штриховая кривая — к правой. Появление в киральной среде при $\chi_n^{\pm}$ новых распространяющихся гармоник круговой поляризации приводит, в силу соблюдения граничных условий, к отражению от киральной среды всех составляющих поля, что и объясняет рост коэффициентов отражения поля кросс-поляризации в этих точках. Величина этих коэффициентов зависит от количества энергии, передаваемой затухающими поверхностными волнами в киральную

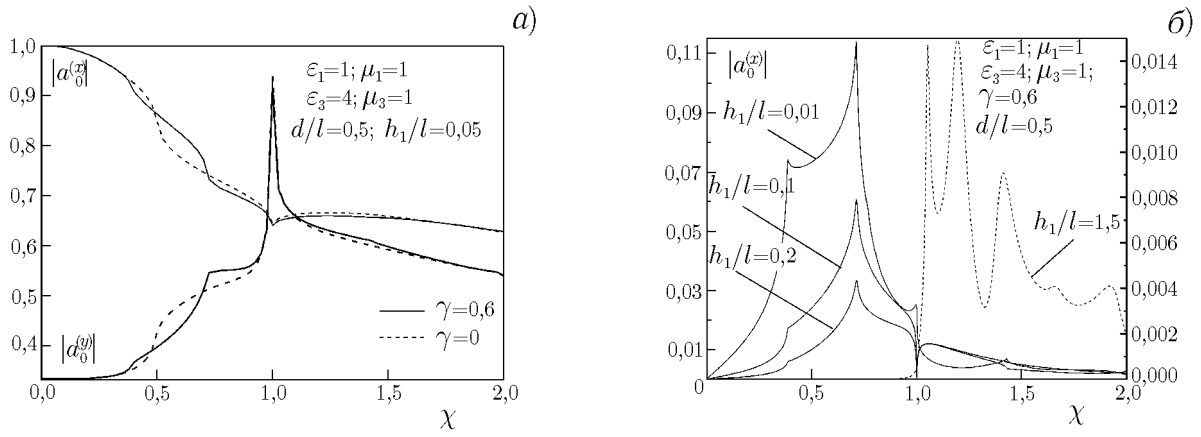

Рис. 2

среду. При небольших расстояниях с увеличением h_1 эти коэффициенты убывают. Для $|\zeta_1^{(1)} h_1 \gg 1$ поверхностное поле решётки не попадает во вторую среду, а нулевая гармоника основной поляризации, распространяющаяся нормально, не возбуждает отражённое поле кросс-поляризации. Следовательно, поле кросс-поляризации отсутствует до тех пор, пока при $\chi > \chi_1^{\mathrm{w}}$ в некиральной среде не появится гармоника с индексом $n = 1$, распространяющаяся под углом к оси z.

Коэффициенты отражения поля кросс-поляризации совпадают для случаев E- и H-поляризации падающего поля. Это можно связать с равенством кросс-коэффициентов отражения от киральной среды и с тем, что волне при её преобразовании от падающей к отражённой приходится дважды «пройти» через решётку, для которой применим принцип взаимности [8].

Исследуем частотную зависимость коэффициентов отражения при одновременном падении волн E- и H-поляризации (рис. 3). Пусть $|\tilde{e}| = 1$, $|\rho_1 \tilde{h}| = 1$; разность фаз волн E- и H-поляризации обозначим $\delta\phi = \arg(\tilde{h}/\tilde{e})$. Теперь в зависимости от $\delta\phi$ суперпозиция падающих волн будет иметь различную поляризацию. В частности, синфазность волн даёт линейно поляризованную волну, а при $\delta\phi = \pm\pi/2$ имеем волны правой и левой круговой поляризации соответственно.

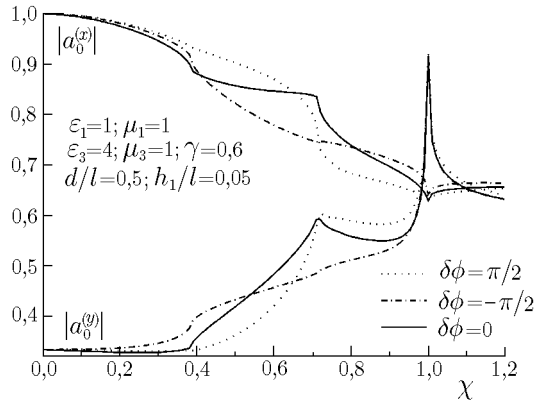

Рис. 3

При падении волны правой круговой поляризации особенность в окрестности χ_1^- выражена сильнее, чем вблизи χ_1^+. Это объясняется эффективной передачей энергии при совпадении частот и типов поляризации возбуждающего поля и появляющейся в окрестности χ_1^- распространяющейся гармоники киральной среды, также имеющей правую круговую поляризацию. В окрестности же χ_1^+ падающая волна и соответствующая гармоника киральной среды хотя и имеют круговую поляризацию, но в силу различного направления вращения плоскости поляризации взаимодействуют слабо. При падении линейно поляризованной волны особенности в окрестности χ_1^+ и χ_1^- проявляются в равной мере.

Частотную зависимость коэффициентов отражения в условиях поглощения демонстрирует рис. 4. Учёт потерь приводит к уменьшению и сглаживанию модулей коэффициентов отражения. При этом поле основной поляризации (рис. 4*а*) реагирует на потери слабее, чем поле кросс-поляризации (рис. 4*б*).

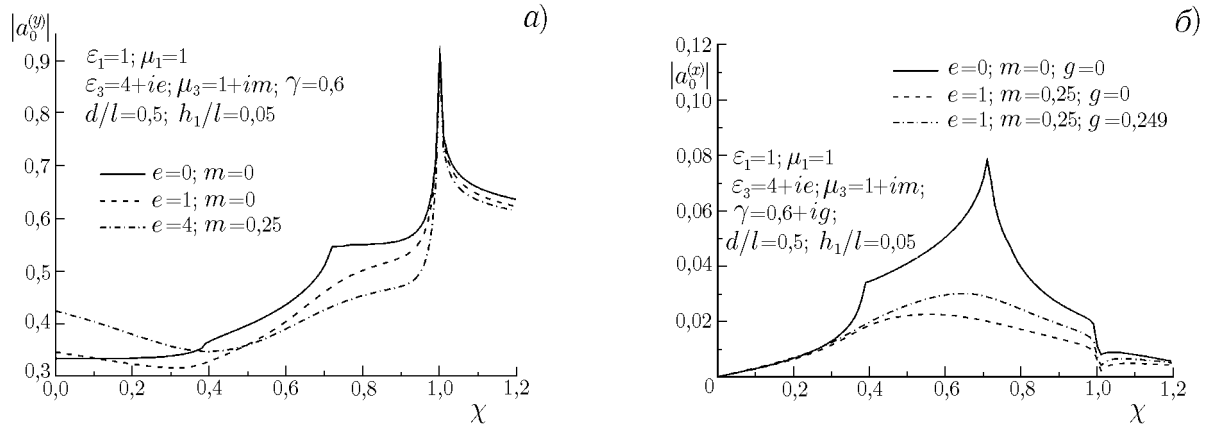

Рис. 4

Комплексность параметра киральности приводит к тому, что волны правой и левой круговой поляризации распространяются с разным затуханием, так при $\gamma'' > 0$ большее поглощение имеют волны правой круговой поляризации, а при $\gamma'' < 0$ — левой. Поэтому поглощение слабее сказывается на дифракции в тех точках, в которых распространяющиеся гармоники имеют меньшее затухание.

На рис. 5 приведена зависимость коэффициентов отражения от величины относительного параметра киральности η для $\chi = \chi_1^-(\eta)$ при падении поля H-поляризации (сплошная кривая относится к левой оси, а штриховая — к правой). Рост η приводит к увеличению χ_1^-, т. е. к переходу в коротковолновую область, где зависимость $|a_0^{(y)}|$ имеет в целом возрастающий характер.

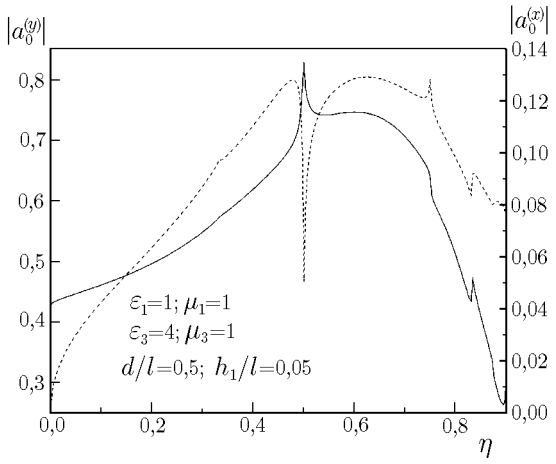

Рис. 5

Амплитуда поля кросс-поляризации $|a_0^{(x)}|$, обусловленного киральной средой, с ростом η в одноволновой области некирального полупространства ($\chi < \chi_1^{\mathrm{w}}$) монотонно увеличивается. Коэффициенты отражения имеют особенности в точках появления новых распространяющихся гармоник, т. е. при условии $\chi_1^-(\eta) = \chi_n^{\mathrm{w}}$ (см. рис. 5).

Поведение коэффициентов отражения в зависимости от прозрачности решётки $\Theta = d/l$, для случая падения H-поляризованной волны показано на рис. 6. Когда $\chi < \chi_1^{\mathrm{w}}$ и $|\zeta_1^{(1)} h_1| < 1$, возбуждение поля кросс-поляризации в структуре связано с существованием высших пространственных гармоник. При этом величина $|a_0^{(x)}|$ имеет максимум при $\Theta = 0{,}5$ (рис. 6*а*), т. к. она определяется в основном поверхностной гармоникой с индексом $n = 1$ первой среды, амплитуда которой при $\Theta = 0{,}5$ достигает максимума [8].

Коэффициент отражения поля основной поляризации может иметь минимум (рис. 6*б*), который в длинноволновом приближении реализуется при

$$\frac{l}{\lambda_0}\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}\,\ln([1-\cos(\pi d/l)]/2) = -\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\,,$$

$$\sin(4\pi\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}\,h_1/\lambda_0 + \vartheta) = -\sqrt{1-r^2}, \qquad r\exp(i\vartheta) = \frac{\rho_3-\rho_1}{\rho_1+\rho_3}\,. \tag{9}$$

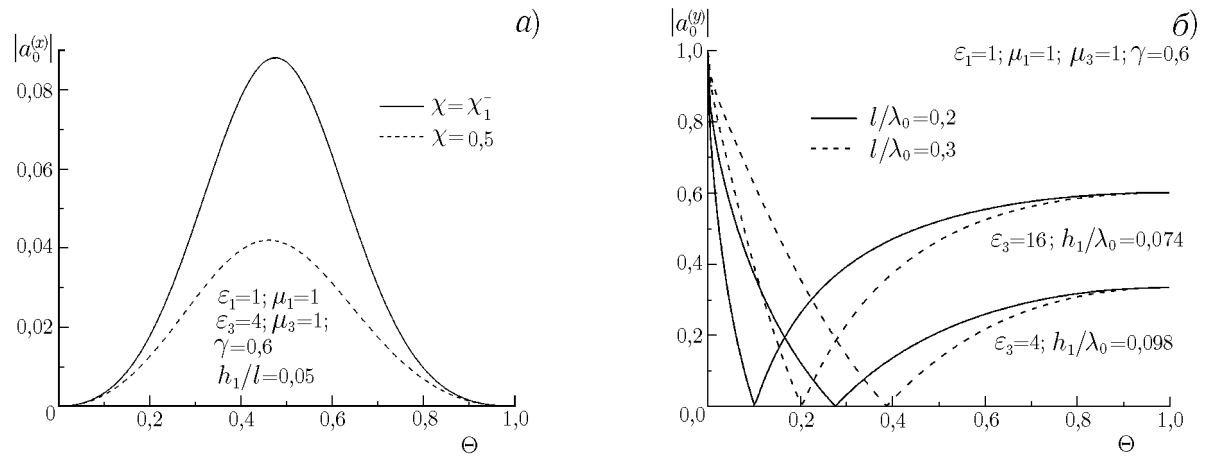

Рис. 6

Итак, несмотря на наличие решётки и границы раздела сред с несогласованными волновыми сопротивлениями, возможно добиться отсутствия отражения поля основной поляризации ($\min|a_0^{(y)}| = 0$). Несложно показать, что условия (9) определяют режим, близкий к собственному режиму рассматриваемой структуры.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, решена векторная задача дифракции наклонно падающей эллиптически поляризованной электромагнитной волны на одномерной периодической решётке со слоистой средой, которая содержит киральный слой. Использование процедуры аналитической регуляризации, основанной на методе задачи Римана—Гильберта, позволило получить корректный и эффективный метод решения.

Проведённое численное исследование показало, что дифракция при наличии киральной среды имеет ряд характерных особенностей, связанных, в первую очередь, с круговой поляризацией её собственных волн. Дифракция существенно зависит от того, какую (левую или правую) эллиптическую поляризацию имеет возбуждающее поле. Значительное влияние на дифракцию оказывают резонансные явления в слоях структуры и процессы, связанные с перераспределением энергии между распространяющимися гармониками поля. Учёт потерь в киральной среде приводит к специфическим особенностям дифракции.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

$$\tilde{a}_n^{(11,12)} = M_n^{(2,4)}\left[\frac{m_n^{(1)}m_n^{(4)}}{m_n^{(2)}} - m_n^{(3)}\right], \qquad \tilde{a}_n^{(21,22)} = E_n^{(2,4)}\left[\frac{e_n^{(2)}e_n^{(3)}}{e_n^{(4)}} - e_n^{(1)}\right];$$

$$a_n^{(21,22)} = m_n^{(4)}M_n^{(1,3)} + m_n^{(3)}M_n^{(2,4)}, \qquad b_n^{(11,12)} = e_n^{(2)}E_n^{(1,3)} + e_n^{(1)}E_n^{(2,4)};$$

$$M_n^{(1,3)} = m_n^{(5,7)} + m_n^{(6,8)}\Phi_n^{(1,4)}\exp(2i\zeta_n^{\pm}h_2) + m_n^{(8,6)}\Phi_n^{(3,2)}\exp\left[i\left(\zeta_n^{+} + \zeta_n^{-}\right)h_2\right],$$

$$M_n^{(2,4)} = m_n^{(6,8)}\exp(2i\zeta_n^{(2)}h_1) + m_n^{(5,7)}\Phi_n^{(1,4)}\exp\left[2i\left(\zeta_n^{\pm}h_2 + \zeta_n^{(2)}h_1\right)\right] +$$
$$+ m_n^{(7,5)}\Phi_n^{(3,2)}\exp\left[i\left(\left(\zeta_n^{+} + \zeta_n^{-}\right)h_2 + 2\zeta_n^{(2)}h_1\right)\right];$$

$$m_n^{(5,7)} = 1+\frac{\mu_2}{\mu_3}\frac{1}{1\pm\eta}\frac{\zeta_n^{\pm}}{\zeta_n^{(2)}}, \quad m_n^{(6,8)} = 2-m_n^{(5,7)}, \quad m_n^{(12,10)} = 1+\frac{\mu_4}{\mu_3}\frac{1}{1\pm\eta}\frac{\zeta_n^{\pm}}{\zeta_n^{(4)}}, \quad m_n^{(9,11)} = 2-m_n^{(12,10)};$$

$$e_n^{(5,7)} = \mp\left(1+\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}\frac{1}{1\pm\eta}\frac{\zeta_n^{\pm}}{\zeta_n^{(2)}}\right), \quad e_n^{(6,8)} = 2-e_n^{(5,7)}, \quad e_n^{(12,9)} = 1+\frac{\varepsilon_4}{\varepsilon_3}\frac{1}{1\pm\eta}\frac{\zeta_n^{\pm}}{\zeta_n^{(4)}}, \quad e_n^{(10,11)} = 2-e_n^{(12,9)};$$

$$\Phi_n^{(1,4)} = -\frac{m_n^{(9,11)}e_n^{(9,12)}+m_n^{(10,12)}e_n^{(10,11)}}{m_n^{(12)}e_n^{(9)}+m_n^{(10)}e_n^{(12)}}, \qquad \Phi_n^{(2,3)} = \frac{m_n^{(10,12)}e_n^{(11,10)}-m_n^{(11,9)}e_n^{(9,12)}}{m_n^{(12)}e_n^{(9)}+m_n^{(10)}e_n^{(12)}};$$

$$I^{\mathrm{e}} = 4\tilde{e}\frac{\mu_2}{\mu_1}\zeta_0^{(1)}\exp(-i\zeta_0^{(1)}h_1), \qquad I^{\mathrm{h}} = -4i\tilde{h}\rho_3\nu_0^{(2)}\zeta_0^{(2)}\exp(-i\zeta_0^{(1)}h_1).$$

Коэффициенты $E_n^{(1,3)}$ и $E_n^{(2,4)}$ могут быть получены из приведённых выше выражений при помощи формальной замены $M \to E$, $m \to e$ при сохранении соответствующих индексов. Если четвёртый слой заменить идеально проводящим экраном, то

$$\Phi_n^{1,4} = \pm\frac{\bar{\zeta}_n^{+}-\bar{\zeta}_n^{-}}{\bar{\zeta}_n^{+}+\bar{\zeta}_n^{-}}, \qquad \Phi_n^{2,3} = -\frac{2\bar{\zeta}_n^{\mp}}{\bar{\zeta}_n^{+}+\bar{\zeta}_n^{-}},$$

где $\bar{\zeta}_n^{\pm} = \zeta_n^{\pm}/k^{\pm}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

$$\bar{a}_0^{(11,22)} = \frac{1}{1-\varepsilon_\infty^{(1,2)}}\left\{\left[\varepsilon_0^{(1,2)}-\varepsilon_\infty^{(1,2)}\theta\right]-\left[\theta-\varepsilon_0^{(1,2)}\right]\left(\tilde{a}_{-m_0}^{(11,21)}t_{-m_0}^{(11,12)}+\tilde{a}_{-m_0}^{(12,22)}t_{-m_0}^{(21,22)}\right)\right\},$$

$$\bar{a}_n^{(11,22)}\big|_{n\neq 0} = \frac{1}{1-\varepsilon_\infty^{(1,2)}}\frac{|n|}{n}\left\{\tau_n^{(1,2)}-\left[1-\varepsilon_n^{(1,2)}\right]\left(\tilde{a}_{n-m_0}^{(11,21)}t_{n-m_0}^{(11,12)}+\tilde{a}_{n-m_0}^{(12,22)}t_{n-m_0}^{(21,22)}\right)\right\},$$

$$\bar{a}_0^{(12,21)} = \frac{(-1)^{-m_0+1}}{1-\varepsilon_\infty^{(1,2)}}\left[\theta-\varepsilon_0^{(1,2)}\right]\left(\tilde{a}_{-m_0}^{(11,21)}t_{-m_0}^{(12,11)}+\tilde{a}_{-m_0}^{(12,22)}t_{-m_0}^{(22,21)}\right),$$

$$\bar{a}_n^{(12,21)}\big|_{n\neq 0} = \frac{(-1)^{n-m_0+1}}{1-\varepsilon_\infty^{(1,2)}}\frac{|n|}{n}\left[1-\varepsilon_n^{(1,2)}\right]\left(\tilde{a}_{n-m_0}^{(11,21)}t_{n-m_0}^{(12,11)}+\tilde{a}_{n-m_0}^{(12,22)}t_{n-m_0}^{(22,21)}\right),$$

$$\bar{a}^{(1,2)} = \frac{i}{1-\varepsilon_\infty^{(1,2)}}\left(\gamma_0^{(1,2)}\left[\tilde{a}_0^{(11,21)}t^{(x)}+\tilde{a}_0^{(12,22)}t^{(y)}\right]-\frac{I^{\mathrm{e,h}}}{k_2}\right),$$

$$t_n^{(11,21)} = \frac{\pm b_n^{(12,11)}}{a_n^{(21)}b_n^{(12)}-a_n^{(22)}b_n^{(11)}}, \qquad t_n^{(12,22)} = \frac{\mp a_n^{(22,21)}}{a_n^{(21)}b_n^{(12)}-a_n^{(22)}b_n^{(11)}},$$

$$t^{(x,y)} = \frac{\mp I^{\mathrm{h}}a_0^{(22,21)}}{\zeta_0^{(2)}\nu_0^{(2)}\left(a_0^{(21)}b_0^{(12)}-a_0^{(22)}b_0^{(11)}\right)}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lindell I. V., Sihvola A. H., Tretyakov S. A., Viitanen A. J. Electromagnetic waves in chiral and biisotropic media. Boston, London: Artech House Inc.,1994. 291 p.

2. Sihvola A. H. Electromagnetic mixing formulas and applications. London: The Institution of Electrical Engineers, 1999. 350 p.
3. Panin S. B., Poyedinchuk A. Ye. // Telecom. and Radio Eng. 1999. V. 53, No. 4, 5. P. 98.
4. Goshin G., Lugina N. // Proc. URSI Int. Symp. on EM Theory. St. Petersburg, 1995. P. 2.
5. Шестопалов В. П., Литвененко Л. Н., Масалов С. А. Дифракция волн на решётках. Харьков: Изд-во Харьковского госуниверситета, 1973. 267 с.
6. Tikhonov A. N., Arsenin V. Y. Solutions of ill-posed problems. Washington: Winston, 1977. 434 p.
7. Шестопалов В. П., Тучкин Ю. А., Поединчук А. Е., Сиренко Ю. К. Новые методы решения прямых и обратных задач теории дифракции. Харьков: Изд-во Харьковского госуниверситета, 1997. 284 с.
8. Шестопалов В. П., Кириленко А. А., Масалов С. А., Сиренко Ю. К. Резонансное рассеяние волн. Дифракционные решётки. Том 1. Киев: Наукова Думка, 1986. 232 с.

Институт радиофизики и электроники НАН Украины, г. Харьков, Украина

Поступила в редакцию
18 января 2002 г.

ELECTROMAGNETIC-WAVE DIFFRACTION BY A GRATING WITH A CHIRAL LAYER

S. B. Panin and A. Ye. Poyedinchuk

We consider a vector problem of diffraction of an obliquely incident, elliptically polarized wave by a one-dimensional periodic grating located in a layered medium with a chiral layer. The use of analytical regularization based on the Riemann–Hilbert problem allows us to obtain a rigorous and efficient method for solving such diffraction problems. The performed numerical study reveals certain features of diffraction in the presence of a chiral medium.

УДК 622.011.4+622.023

ДИФРАКЦИЯ УПРУГИХ ВОЛН НА ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ БЕСКОНЕЧНОЙ ПРОТЯЖЁННОЙ ПОЛОСТИ С КРУГОВЫМ ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ, ЗАПОЛНЕННОЙ ЖИДКОСТЬЮ

С. Н. Власов

В работе на основе уравнений теории упругости и гидроакустики проведён расчёт структуры полей, возникающих при падении плоских волн на бесконечно протяжённую цилиндрическую полость с круговым поперечным сечением, заполненную жидкостью. В зависимости от типа падающей волны (продольной или сдвиговой) определена переменная составляющая давления на оси полости.

В [1] описаны исследования по межскважинному акустическому зондированию, при которых в одну скважину помещался излучатель, а в другую — приёмник. Излучатель возбуждал в сплошной среде как продольные, так и поперечные волны. Вследствие наличия горизонтальной поверхности имеет место взаимная трансформация поперечных и продольных волн. Приёмник является скалярным: он измеряет только возмущение давления. Для достаточно точной интерпретации результатов измерений необходимо представление об эффективности возбуждения акустических волн в приёмной скважине различными типами упругих волн. Указанная эффективность может быть определена на основе решения задачи о дифракции упругих плоских волн с различной поляризацией на цилиндрической полости, заполненной жидкостью. Ниже приведено решение данной задачи.

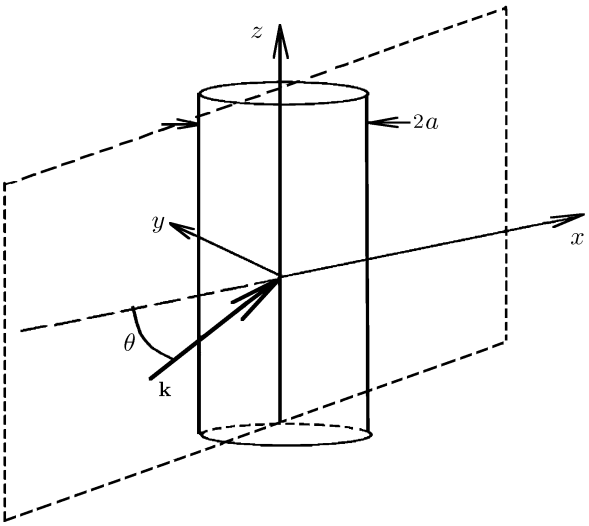

Рис. 1. Цилиндрическая полость в сплошной среде

На рис. 1 показана цилиндрическая полость диаметром $2a$, заполненная жидкостью с плотностью ρ. Скорость звуковых волн в заполняющей жидкости равна v. Окружающая среда, в которой находится полость, характеризуется плотностью ρ_{T} и скоростями $v_{\parallel}$ и $v_{\perp}$ распространения продольных и поперечных упругих волн. Ось полости совпадает с осью z системы координат. На полость падает плоская волна под углом $\pi/2-\theta$ к её оси. Поляризация волны может быть различна. В случае продольной волны колебания частиц происходят вдоль волнового вектора. Для описания волн этого типа мы используем скалярный потенциал φ [2]. Поперечные волны могут быть двух поляризаций. В первом случае частицы колеблются перпендикулярно волновому вектору в плоскости, проходящей через волновой вектор и ось полости. Во втором случае частицы колеблются перпендикулярно этой плоскости и волновому вектору. Для описания этих волн мы используем векторные потенциалы $\boldsymbol{\psi}_{\parallel}$ и $\boldsymbol{\psi}_{\perp}$ [2, 3].

Сформулируем уравнения, решая которые, можно описать дифракционные явления. Для этого поле внутри полости будем описывать давлением p, вне её введём потенциалы φ, $\boldsymbol{\psi}_{\parallel}$ и $\boldsymbol{\psi}_{\perp}$. Векторные потенциалы представим в следующем виде [4]:

$$\boldsymbol{\psi}_{\parallel} = \mathrm{rot}(\mathbf{z}_0\psi_{\parallel}), \qquad \boldsymbol{\psi}_{\perp} = \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}(\mathbf{z}_0\psi_{\perp}),$$

где $\mathbf{z}_0$ — единичный вектор вдоль оси z, а скалярные функции p, φ, $\psi_\parallel$ и $\psi_\perp$ удовлетворяют уравнениям

$$\Delta\, p + k^2 p = 0, \qquad \Delta\, \varphi + k_\parallel^2 \varphi = 0, \qquad \Delta\, \psi_\parallel + k_\perp^2 \psi_\parallel = 0, \qquad \Delta\, \psi_\perp + k_\perp^2 \psi_\perp = 0,$$

где $k = \omega/v$, $k_\parallel = \omega/v_\parallel$, $k_\perp = \omega/v_\perp$, ω — несущая частота. Вектор смещения $\mathbf{u}$ выражается через скалярный и векторные потенциалы известным образом [2]:

$$\mathbf{u} = \frac{\operatorname{grad} p}{\omega^2 \rho}\,, \qquad \mathbf{u} = \operatorname{grad} \varphi + \operatorname{rot}(\boldsymbol{\psi}_\parallel + \boldsymbol{\psi}_\perp).$$

Рассмотрим сначала, как с помощью введённых потенциалов описываются плоские волны с различной поляризацией. Пусть

$$\varphi = A \exp(-ihz - ik_x x),$$

где $k_x = k_\parallel \cos\theta$, $h = \sqrt{k_\parallel^2 - k_x^2} = k_\parallel \sin\theta$, A — амплитуда. Смещение частиц в волне направлено вдоль волнового вектора:

$$\mathbf{u} = -iA\,(\mathbf{z}_0 h + \mathbf{x}_0 k_x) \exp(-ihz - ik_x x).$$

В случае потенциала $\boldsymbol{\psi}_\parallel = (B_\parallel/k_\perp) \operatorname{rot}[\mathbf{z}_0 \exp(-ihz - ik_x x)]$, где $B_\parallel$ — амплитуда, а множитель $1/k_\perp$ вводится для удобства дальнейших выкладок, имеем

$$\boldsymbol{\psi}_\parallel = i\mathbf{y}_0 \frac{B_\parallel}{k_\perp} k_x \exp(-ihz - ik_x x),$$

где $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{y}_0$ — орты соответствующих осей. Смещение в этом случае описывается выражением

$$\mathbf{u} = -\frac{B_\parallel}{k_\perp} k_x\,(\mathbf{x}_0 h - \mathbf{z}_0 k_x) \exp(-ihz - ik_x x)$$

и перпендикулярно волновому вектору.

В случае потенциала $\boldsymbol{\psi}_\perp = (B_\perp/k_\perp^2) \operatorname{rot}\operatorname{rot}[\mathbf{z}_0 \exp(-ihz - ik_x x)]$, где $B_\perp$ — амплитуда, имеем

$$\boldsymbol{\psi}_\perp = -\frac{B_\perp}{k_\perp^2} k_x\,(\mathbf{x}_0 h - \mathbf{z}_0 k_x) \exp(-ihz - ik_x x).$$

В этом случае смещение

$$\mathbf{u} = i\mathbf{y}_0 B_\perp k_x \exp(-ihz - ik_x x)$$

перпендикулярно волновому вектору и плоскости, проходящей через волновой вектор и ось z.

Рассмотрим дифракцию плоской продольной волны на цилиндрической полости. Внутри последней решение уравнения (1) будем искать в виде

$$p = \exp(-ihz) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m J_m(kr) \cos(m\psi),$$

где $J_m(kr)$ — функция Бесселя первого рода m-го порядка, ψ — азимутальный угол. Вне полости потенциалы предста́вим в следующем виде:

$$\varphi = \varphi_0 + \exp(-ihz) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} B_m H_m^{(2)}(k_\parallel \cos\theta r)\, \cos(m\psi),$$

$$\psi_\parallel = \exp(-ihz) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} B_{\parallel m} H_m^{(2)}\left(\sqrt{k_\perp^2 - h^2}\, r\right) \cos(m\psi),$$

$$\psi_\perp = \exp(-ihz) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} B_{\perp m} H_m^{(2)}\left(\sqrt{k_\perp^2 - h^2}\, r\right) \sin(m\psi),$$

где $H_m^{(2)}(t)$ — функции Ханкеля второго рода m-го порядка, A_m, B_m, $B_{\|m}$ и $B_{\perp m}$ — коэффициенты, характеризующие рассеяние падающей волны в волны разных азимутальных гармоник разной поляризации, $\varphi_0 = \exp(-ihz - ik_x x)$ — падающая плоская волна с единичной амплитудой. Последнюю представим в виде [4]

$$\varphi_0 = \exp(-ihz - ik_x x) = \exp(-ihz) \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \, (-i)^m \, J_m(k_x r) \, \cos\psi,$$

где $\varepsilon_0 = 1$ и $\varepsilon_m = 2$ при $m > 0$.

Приведённые выше решения удовлетворяют уравнениям теории упругости и гидроакустики. На границе полости выполняются также условия равенства нормальных смещений:

$$\frac{1}{\omega^2 \rho} \frac{\partial p}{\partial r}\bigg|_{r=a} = \frac{\partial \varphi}{\partial r}\bigg|_{r=a} + \mathrm{rot}_r \, \boldsymbol{\psi}_\perp\big|_{r=a} + \mathrm{rot}_r \, \boldsymbol{\psi}_\|\big|_{r=a}, \tag{1}$$

и равенства нормального напряжения σ_{rr} давлению, взятому с обратным знаком:

$$\sigma_{rr} = \lambda \left(u_{rr} + u_{\psi\psi} + u_{zz}\right)\big|_{r=a} + 2\mu u_{rr}\big|_{r=a} = -p\big|_{r=a}. \tag{2}$$

В последнем равенстве $\lambda = \rho_{\mathrm{T}} \left(v_\|^2 - 2v_\perp^2\right)$ и $\mu = \rho_{\mathrm{T}} v_\perp^2$ — коэффициенты Ламэ.

Предполагая вязкость малой, используем также условия «проскальзывания» на границе полости, которые сводятся к равенству нулю тангенциальных напряжений

$$\sigma_{r\psi} = 2\mu u_{r\psi} = \mu \left(\frac{\partial u_\psi}{\partial r} - \frac{u_\psi}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \psi} \right), \qquad \sigma_{rz} = 2\mu u_{rz} = \mu \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right):$$

$$\left(\frac{\partial u_\psi}{\partial r} - \frac{u_\psi}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \psi} \right)\bigg|_{r=a} = 0, \tag{3}$$

$$\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right)\bigg|_{r=a} = 0. \tag{4}$$

Равенств (1)–(4) достаточно для определения коэффициентов A_m, B_m, $B_{\|m}$, $B_{\perp m}$. Для каждой азимутальной гармоники можно записать по четыре независимых уравнения.

В работе (1) датчик давления помещён на оси полости, поэтому интерес представляют только гармоники с низшим индексом $m = 0$, у которых давление на оси отлично от нуля. Ниже выписаны системы уравнений для неизвестных коэффициентов рассеяния после введения обозначений $K = k/k_\|$, $K_\perp = k_\perp/k_\|$, $A = k_\| a$ в случае падения продольной волны:

$$\frac{A_m \sqrt{K^2 - \sin^2\theta}}{\omega^2 \rho} J_m'\Big(A \sqrt{K^2 - \sin^2\theta}\Big) - B_m \cos\theta H_m^{(2)\prime}(A\cos\theta) + \frac{B_{m\|}}{k_\perp} k_\| i \sin\theta \sqrt{K_\perp^2 - \sin^2\theta} \times$$
$$\times H_m^{(2)\prime}\Big(A \sqrt{K_\perp^2 - \sin^2\theta}\Big) - B_{m\perp} \frac{m}{A} H_m^{(2)}\Big(A \sqrt{K_\perp^2 - \sin^2\theta}\Big) = \varepsilon_m (-i)^m \cos\theta J_m'(A\cos\theta),$$

$$\frac{A_m}{\omega^2 \rho} J_m\Big(A \sqrt{K^2 - \sin^2\theta}\Big) + B_m \left[-\frac{\lambda \rho_{\mathrm{T}}}{(\lambda + 2\mu)\,\rho} H_m^{(2)}(A\cos\theta) + \frac{2\mu\rho_{\mathrm{T}}}{(\lambda + 2\mu)\,\rho} \cos^2\theta H_m^{(2)\prime\prime}(A\cos\theta) \right] -$$
$$- \frac{2\mu\rho_{\mathrm{T}}}{(\lambda + 2\mu)\,\rho} \frac{B_{m\|}}{K_\perp} i \sin\theta \left(K_\perp^2 - \sin^2\theta\right) H_m^{(2)\prime\prime}\Big(A \sqrt{K_\perp^2 - \sin^2\theta}\Big) +$$

$$+\frac{2\mu\rho_{\mathrm{T}}}{(\lambda+2\mu)\,\rho}\,B_{m\perp}\left[\frac{m\sqrt{K_\perp^2-\sin^2\theta}}{A}\,H_m^{(2)\prime}\Bigl(A\sqrt{K_\perp^2-\sin^2\theta}\Bigr)-\frac{m}{A^2}\,H_m^{(2)\prime}\Bigl(A\sqrt{K_\perp^2-\sin^2\theta}\Bigr)\right]=$$
$$=\varepsilon_m\,(-i)^m\left[\frac{\lambda\rho_{\mathrm{T}}J_m(A\cos\theta)}{(\lambda+2\mu)\,\rho}-\frac{2\mu\rho_{\mathrm{T}}\cos^2\theta J_{-m}{}''(A\cos\theta)}{(\lambda+2\mu)\,\rho}\right],$$

$$B_m\left[-\frac{m\cos\theta}{A}\,H_m^{(2)\prime}(A\cos\theta)+\frac{m}{A^2}\,H_m^{(2)}(A\cos\theta)\right]+$$
$$+\,B_{m\|}\left[\frac{im\sin\theta\sqrt{K_\perp^2-\sin^2\theta}}{AK_\perp}\,H_m^{(2)\prime}\Bigl(A\sqrt{K_\perp^2-\sin^2\theta}\Bigr)-\frac{im\sin\theta}{A^2K_\perp}\,H_m^{(2)}\Bigl(A\sqrt{K_\perp^2-\sin^2\theta}\Bigr)\right]+$$
$$+\,B_{m\perp}\left[\frac{K_\perp^2-\sin^2\theta}{2}\,H_m^{(2)}\Bigl(A\sqrt{K_\perp^2-\sin^2\theta}\Bigr)+\frac{\sqrt{K_\perp^2-\sin^2\theta}}{A}\,H_m^{(2)\prime}\Bigl(A\sqrt{K_\perp^2-\sin^2\theta}\Bigr)-\right.$$
$$\left.-\,\frac{m^2}{A^2}\,H_m^{(2)}\Bigl(A\sqrt{K_\perp^2-\sin^2\theta}\Bigr)\right]=\varepsilon_m\,(-i)^m\left[\frac{m\cos\theta}{A}\,J_m'(A\cos\theta)-\frac{m}{A^2}\,J_m(A\cos\theta)\right],$$

$$-\,iB_m\sin(2\theta)H_m^{(2)\prime}(A\cos\theta)+B_{m\|}\sqrt{K_\perp^2-\sin^2\theta}\,\frac{K_\perp^2-\sin^2\theta}{K_\perp}\,H_m^{(2)\prime}\Bigl(A\sqrt{K_\perp^2-\sin^2\theta}\Bigr)-$$
$$-\,B_{m\perp}\,\frac{im\sin\theta}{A}\,H_m^{(2)}\Bigl(A\sqrt{K_\perp^2-\sin^2\theta}\Bigr)=\varepsilon_m\,(-i)^m\,i\sin(2\theta)J_m'(A\cos\theta).$$

В случае падения на полость плоской волны с поперечной поляризацией, когда частицы колеблются в плоскости, проходящей через волновой вектор и ось полости, система уравнений для определения коэффициентов рассеяния для гармоники $m=0$ при введении обозначений $\bar A=k_\perp a$, $h=k_\perp\sin\theta$ и $\bar K=k/k_\perp$ выглядит следующим образом:

$$\frac{A_0\sqrt{\bar K^2-\sin^2\theta}}{\omega^2\rho}\,J_0'\Bigl(\bar A\sqrt{\bar K^2-\sin^2\theta}\Bigr)-B_0\sqrt{1/K_\perp^2-\sin^2\theta}\,H_0^{(2)\prime}\Bigl(\bar A\sqrt{1/K_\perp^2-\sin^2\theta}\Bigr)+$$
$$+\,B_{0\|}i\sin\theta\cos\theta H_0^{(2)\prime}(\bar A\cos\theta)=i\sin\theta\cos\theta J_1(\bar A\cos\theta),$$

$$\frac{A_0}{\omega^2\rho}\,J_0\Bigl(\bar A\sqrt{\bar K^2-\sin^2\theta}\Bigr)+B_0\left[-\frac{\lambda\rho_{\mathrm{T}}}{(\lambda+2\mu)\,\rho}H_0^{(2)}\Bigl(\bar A\sqrt{1/K_\perp^2-\sin^2\theta}\Bigr)+\right.$$
$$\left.+\,\frac{2\rho_{\mathrm{T}}}{\rho}\,\bigl(1/K_\perp^2-\sin^2\theta\bigr)\,H_0^{(2)\prime\prime}\Bigl(\bar A\sqrt{1/K_\perp^2-\sin^2\theta}\Bigr)\right]-$$
$$-\,2B_{0\|}\,\frac{\rho_{\mathrm{T}}}{\rho}\,i\sin\theta\cos^2\theta H_m^{(2)\prime\prime}(\bar A\cos\theta)=-2i\,\frac{\rho_{\mathrm{T}}\sin\theta\cos^2\theta J_1'(\bar A\cos\theta)}{\rho}\,,$$

$$B_{0\perp}\left[\cos^2\theta\,H_0^{(2)}(\bar A\cos\theta)+\frac{2\cos\theta}{\bar A}\,H_0^{(2)\prime}(\bar A\cos\theta)\right]=0,$$

$$-2iB_0\sin\theta\sqrt{1/K_\perp^2-\sin^2\theta}\,H_0^{(2)\prime}\Big(\bar A\sqrt{1/K_\perp^2-\sin^2\theta}\Big)+B_{0\|}\cos\theta\,(1-2\sin^2\theta)\,H_0^{(2)\prime}(\bar A\cos\theta)=$$
$$=-\cos\theta\,(\sin^2\theta-\cos^2\theta)\,J_1(\bar A\cos\theta).$$

В случае падения на полость плоской волны с поперечной поляризацией, когда частицы колеблются перпендикулярно плоскости, проходящей через волновой вектор и ось полости, система уравнений для определения коэффициентов рассеяния для гармоники $m=0$ выглядит следующим образом:

$$\frac{A_0\sqrt{\bar K^2-\sin^2\theta}}{\omega^2\rho}\,J_0'\Big(\bar A\sqrt{\bar K^2-\sin^2\theta}\Big)-B_0\sqrt{1/K_\perp^2-\sin^2\theta}\,H_0^{(2)\prime}\Big(\bar A\sqrt{1/K_\perp^2-\sin^2\theta}\Big)+$$
$$+B_{0\|}i\sin\theta\cos\theta H_0^{(2)\prime}(\bar A\cos\theta)=0,$$

$$\frac{A_0}{\omega^2\rho}\,J_0\Big(\bar A\sqrt{\bar K^2-\sin^2\theta}\Big)+B_0\Big[-\frac{\lambda\rho_{\rm T}}{(\lambda+2\mu)\,\rho}H_0^{(2)}\Big(\bar A\sqrt{1/K_\perp^2-\sin^2\theta}\Big)+$$
$$+\frac{2\rho_{\rm T}}{\rho}\,(1/K_\perp^2-\sin^2\theta)\,H_0^{(2)\prime\prime}\Big(\bar A\sqrt{1/K_\perp^2-\sin^2\theta}\Big)\Big]-$$
$$-2B_{0\|}\,\frac{\rho_{\rm T}}{\rho}\,i\sin\theta\cos^2\theta H_0^{(2)\prime\prime}(\bar A\cos\theta)=0,$$

$$B_{0\perp}\Big[\cos^2\theta\,H_0^{(2)}(\bar A\cos\theta)+\frac{2\cos\theta}{\bar A}\,H_0^{(2)\prime}(\bar A\cos\theta)\Big]=-J_0(\bar A\cos\theta)\cos^2\theta-\frac{2J_0'(\bar A\cos\theta)}{\bar A}\,\cos\theta,$$

$$-2iB_0\sin\theta\sqrt{1/K_\perp^2-\sin^2\theta}\,H_0^{(2)\prime}\Big(\bar A\sqrt{1/K_\perp^2-\sin^2\theta}\Big)+B_{0\|}\cos\theta\,(1-2\sin^2\theta)\,H_0^{(2)\prime}(\bar A\cos\theta)=0.$$

В случае, если в аргументе функции Ханкеля $1/K_\perp^2-\sin^2\theta<0$, что соответствует возбуждению прижатых продольных волн вне полости, необходимо, как обычно, заменить $H_0^{(2)}(\bar A\sqrt{1/K_\perp^2-\sin^2\theta})$ на модифицированную функцию Ханкеля $K_0(\bar A\sqrt{\sin^2\theta-1/K_\perp^2})$.

Результаты расчётов возмущения давления на оси полости, нормированного на напряжение в падающей волне, при разном отношении плотностей внешней среды и жидкости в зависимости от угла θ приведены на рис. 2, 3. Из этих рисунков следует, что эффективность возбуждения симметричной гармоники продольной волной (рис. 2) и поперечной волной (рис. 3) с вектором смещения частиц, лежащим в плоскости, проходящей через волновой вектор падающей волны и ось полости, сравнимы, хотя имеют разные диаграммы направленности. Эффективность возбуждения симметричной гармоники волной с вектором смещения, перпендикулярным плоскости, проходящей через волновой вектор падающей волны и ось полости, существенно (при данных параметрах на несколько порядков величины) меньше.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 99–02–16957, 00–02–16423 и 00–15–96772) и МНТЦ (проект № 2067). Автор благодарен В. С. Авербаху и В. И. Таланову за полезные дискуссии.

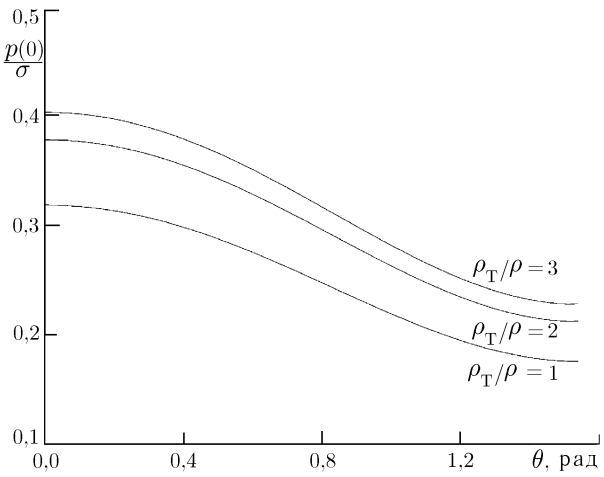

Рис. 2. Зависимость давления на оси полости, нормированного на напряжение в падающей продольной волне, при $k_\parallel a = 0{,}1$; $v_\parallel/v_\perp = 2$; $v_\parallel/v = 3$ и различном отношении плотности среды к плотности жидкости

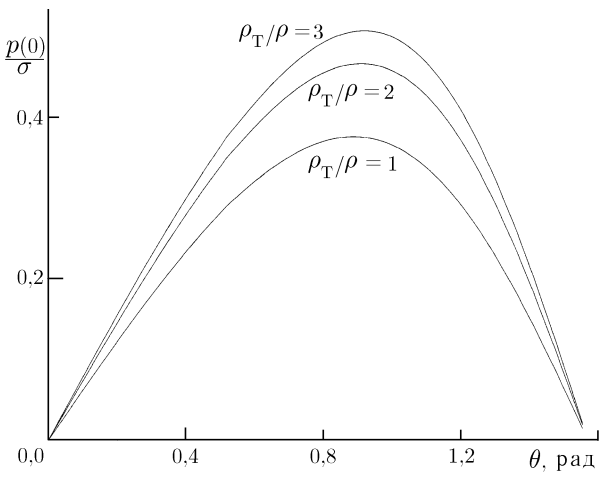

Рис. 3. Зависимость давления на оси полости, нормированного на напряжение в падающей сдвиговой волне, при $k_\parallel a = 0{,}1$; $v_\parallel/v_\perp = 2$; $v_\parallel/v = 3$ и различном отношении плотности среды к плотности жидкости

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боголюбов Б. Н., Лобанов В. Н., Рылов В. И., Стромков А. А., Таланов В. И. Использование когерентных сложных и тональных сигналов при межскважинном акустическом зондировании: Препринт № 550 ИПФ РАН. 2000 г.
2. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. Москва: Наука, 1973.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости. Наука, 1965.
4. Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Москва: Изд-во иностр. лит-ры, 1960.

Институт прикладной физики РАН, г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию
19 ноября 2001 г.

DIFFRACTION OF ELASTIC WAVES BY A CYLINDRICAL INFINITE EXTENDED CAVITY OF A CIRCULAR CROSS SECTION FILLED WITH A LIQUID

S. N. Vlasov

Based on the equations of the theory of elasticity and hydroacoustics, we calculate the field structure originating from a plane wave incident on an infinite cylindrical cavity of a circular cross section filled with a liquid. The variable component of the pressure on the cavity axis is determined in the cases of longitudinal or shear incident wave.

УДК 621.396.6

ВЛИЯНИЕ ФЛУКТУАЦИЙ ВЕСОВОГО ВЕКТОРА НА СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ АДАПТИВНОЙ АНТЕННОЙ РЕШЁТКИ С БЫСТРЫМ РЕКУРРЕНТНЫМ АЛГОРИТМОМ НАСТРОЙКИ

А. А. Мальцев, С. В. Зимина

В данной работе представлены результаты статистического анализа адаптивной антенной решётки, настраивающейся по быстрому рекуррентному алгоритму обращения выборочной оценки корреляционной матрицы, при учёте флуктуаций весового вектора. На основе методов теории возмущений в первом, так называемом борновском, приближении получены спектрально-корреляционные характеристики выходного сигнала антенной решётки. Показано, что флуктуации приводят к искажениям сигнала на выходе адаптивной антенной решётки. Сравнение полученных выражений с соответствующими формулами для антенной решётки с градиентным алгоритмом настройки показало, что при равных скоростях сходимости указанных алгоритмов искажения выходного сигнала сильнее в случае быстрого рекуррентного алгоритма. Показано также, что флуктуации весового вектора при быстром алгоритме настройки неизотропны: отсутствуют в направлении ограничений, минимальны в направлении на помеху и максимальны во всех остальных направлениях. Флуктуации весового вектора в адаптивной антенной решётке с градиентным алгоритмом настройки в подпространстве ограничений изотропны: одинаковы во всех направлениях и равны по величине флуктуациям в направлении на помеху при быстром алгоритме. В направлении ограничений при градиентном алгоритме настройки флуктуации весового вектора также отсутствуют.

ВВЕДЕНИЕ

Использование адаптивных антенных решёток для пространственной обработки сигналов позволяет существенно улучшить характеристики телекоммуникационных, радиолокационных и гидроакустических систем. Известно, что осуществить точную настройку адаптивных антенных решёток (ААР) и тем самым достигнуть теоретически предельного качества пространственной обработки сигналов [1–3] не позволяют флуктуации весовых коэффициентов. Уровень возникающих в ААР флуктуаций определяется алгоритмом настройки весового вектора. Исследование влияния флуктуаций весовых коэффициентов на характеристики адаптивных решёток с градиентными алгоритмами настройки было проведено в работах [4–6]. В настоящее время в ААР начинают всё шире использовать так называемые быстрые алгоритмы настройки на основе прямого или рекуррентного обращения выборочной корреляционной матрицы входных сигналов. Поэтому представляется интересным исследовать флуктуации весовых коэффициентов в таких системах.

Статистическое исследование быстрых алгоритмов настройки в настоящее время явно недостаточно. Имеется всего несколько работ, посвящённых анализу некоторых статистических характеристик алгоритмов непосредственного обращения выборочной корреляционной матрицы [7–9]. В работе [7] впервые был проведён статистический анализ адаптивной антенной решётки, максимизирующей отношение сигнал/шум, с алгоритмом непосредственного обращения корреляционной матрицы. В работах [8, 9] были получены новые результаты по статистическому анализу ААР с ограничениями, свидетельствующие о том, что, как и в исследованном ранее градиентном алгоритме [4], наличие статистической связи между вектором входных сигналов и адаптируемым весовым вектором приводит к искажениям выходного сигнала и уменьшению среднего значения выходной мощности ААР по сравнению со стационарным режимом при оптимальном значении весового вектора. Этот эффект зависит от

числа одновременно обрабатываемых выборок входного сигнала и с физической точки зрения, очевидно, эквивалентен эффекту «перекомпенсации» выходной мощности в ААР с градиентными алгоритмами настройки [4, 5]. Статистический анализ ААР с быстрыми рекуррентными алгоритмами обращения выборочной корреляционной матрицы в известных нам работах не проводился, если не считать краткий анализ адаптивных систем, минимизирующих средний квадрат ошибки, представленный в [2].

В настоящей работе детально исследуется влияние флуктуаций весовых коэффициентов на характеристики узкополосной ААР с линейными ограничениями, работающей по быстрому рекуррентному алгоритму настройки. Для решения данной задачи использовался метод теории возмущений, с помощью которого в первом приближении найдены аналитические выражения для корреляционной матрицы флуктуаций весового вектора, спектра и мощности выходного сигнала ААР. Проведённое компьютерное моделирование показало достаточно хорошее совпадение полученных теоретических результатов с численным экспериментом.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОД РЕШЕНИЯ

В большинстве практических задач, связанных с адаптивными антенными решётками, априорно неизвестен вид корреляционной матрицы $\mathbf{R_{XX}}$ входных сигналов, что приводит к необходимости оценивать данную матрицу на основе выборочных данных. Представим оценку корреляционной матрицы $\mathbf{R_{XX}}$ в виде $\hat{\mathbf{R}}_k = (1-\alpha)\Sigma_{n=-\infty}^{k}\alpha^n\mathbf{X}^*(k-n)\mathbf{X}^{\mathrm{T}}(k-n)$, где $\mathbf{X}(k)$ — вектор входных сигналов, α — коэффициент «забывания», который уменьшает вклад в выборочную корреляционную матрицу $\hat{\mathbf{R}}_k$ более ранних по времени выборок входных сигналов по сравнению с более поздними; индексы T и $*$ означают транспонирование и комплексное сопряжение соответственно.

Настройка вектора весовых коэффициентов $\mathbf{W}$ антенной решётки по быстрому рекуррентному алгоритму обращения выборочной корреляционной матрицы с линейными ограничениями на диаграмму направленности описывается N-мерным векторным уравнением, которое в дискретном времени имеет вид

$$\mathbf{W}(k+1) = \mathbf{P}\left[\mathbf{W}(k) - \mu_{\mathrm{R}}\left(\mathbf{P}\hat{\mathbf{R}}_k\mathbf{P}\right)^{+}\mathbf{P}\mathbf{X}^*(k+1)\mathbf{X}^{\mathrm{T}}(k+1)\mathbf{W}(k)\right] + \mathbf{W}_{\mathrm{q}}. \qquad (1)$$

Здесь $\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{C}\left(\mathbf{C}^{\mathrm{H}}\mathbf{C}\right)^{-1}\mathbf{C}^{\mathrm{H}}$ — проекционная матрица (матричный фильтр в контуре управления ААР), обеспечивающая введение многократных линейных ограничений на диаграмму направленности ААР; $\mathbf{C} \equiv [\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \ldots, \mathbf{C}_L]$ — матрица ограничений с размерностью $N \times L$, столбцами которой являются линейно-независимые векторы ограничений $\mathbf{C}_l$, L — число вводимых ограничений; $\mu_{\mathrm{R}} = 1-\alpha$ — коэффициент адаптации рекуррентного алгоритма; $\mathbf{W}_{\mathrm{q}}$ — вектор комплексных весовых коэффициентов, соответствующих диаграмме направленности покоя (при отсутствии внешних помех); индексы + и H означают псевдообращение [3] и эрмитовское сопряжение соответственно, $\mathbf{I}$ — единичная матрица с размерностью $N \times N$.

Для статистического анализа уравнения (1) воспользуемся методом последовательных приближений, подробно изложенным в [4, 5]. Введём следующие обозначения:

$$\mathbf{W} = \langle\mathbf{W}\rangle + \tilde{\mathbf{W}}, \qquad \mathbf{M_{XX}}(k) \equiv \mathbf{R_{XX}} + \tilde{\mathbf{\Phi}}(k), \qquad (2)$$

где случайный весовой вектор $\mathbf{W}$ и стохастическая матрица $\mathbf{M_{XX}} \equiv \mathbf{X}^*(k)\mathbf{X}^{\mathrm{T}}(k)$ представлены в виде сумм их средних значений $\langle\mathbf{W}\rangle$, $\mathbf{R_{XX}}$ и флуктуационных составляющих $\tilde{\mathbf{W}}(k)$, $\tilde{\mathbf{\Phi}}(k)$.

Усредняя (1) и используя обозначения (2), найдём уравнение для $\langle\mathbf{W}\rangle$ вблизи стационарного состояния, положив при этом $(\mathbf{P}\hat{\mathbf{R}}_k\mathbf{P})^{+} \approx (\mathbf{P}\mathbf{R_{XX}}\mathbf{P})^{+} = \mathrm{const}$:

$$\langle\mathbf{W}(k+1)\rangle = \mathbf{P}\langle\mathbf{W}(k+1)\rangle - (1-\alpha)\,\mathbf{P}\left(\mathbf{P}\mathbf{R_{XX}}\mathbf{P}\right)^{+}\left[\mathbf{P}\mathbf{R_{XX}}\langle\mathbf{W}(k)\rangle + \mathbf{\Delta_W}\right] + \mathbf{W}_{\mathrm{q}}. \qquad (3)$$

Здесь $\mathbf{\Delta_W} \equiv \langle \tilde{\mathbf{\Phi}} \tilde{\mathbf{W}} \rangle$ — вектор кумулянтных функций третьего порядка, учитывающих статистическую зависимость флуктуаций весовых коэффициентов $\tilde{\mathbf{W}}$ и входных сигналов $\mathbf{X}(k+1)$.

Для определения стационарного среднего значения вектора весовых коэффициентов $\mathbf{W}_{\text{ст}} \equiv \langle \mathbf{W}(k) \rangle$ и других статистических характеристик ААР воспользуемся методом возмущений по параметру $\mu_{\text{R}} = 1 - \alpha$, который будем полагать малым ($\mu_{\text{R}} \ll 1$). В качестве нулевого приближения возьмём среднее значение вектора весовых коэффициентов $\langle \mathbf{W} \rangle_0 \equiv \mathbf{W}_0$, получающееся из усреднения уравнения (1) в приближении «прямого размыкания» всех смешанных моментов:

$$\mathbf{W}_0(k+1) = \mathbf{P}\mathbf{W}_0(k+1) - (1-\alpha)\,\mathbf{P}\,(\mathbf{P}\mathbf{R}_{\mathbf{XX}}\mathbf{P})^{+}\,\mathbf{P}\mathbf{R}_{\mathbf{XX}}\mathbf{W}_0(k) + \mathbf{W}_{\text{q}}. \tag{4}$$

В этом приближении мы пренебрегаем флуктуациями весового вектора, считая $\mathbf{W}(k) = \langle \mathbf{W}(k) \rangle_0 = \mathbf{W}_0(k)$. Заметим, что для получения (4) из уравнения (3) следует положить

$$\mathbf{\Delta_W} \equiv \langle \tilde{\mathbf{\Phi}} \tilde{\mathbf{W}} \rangle = \mathbf{\Delta}_{\mathbf{W}0} = \mathbf{0}. \tag{5}$$

Стационарное значение весового вектора в нулевом приближении будет удовлетворять уравнению

$$\mathbf{D}\mathbf{W}_0 + (1-\alpha)\,(\mathbf{P}\mathbf{R}_{\mathbf{XX}}\mathbf{P})^{+}\,\mathbf{P}\mathbf{R}_{\mathbf{XX}}\mathbf{W}_0 = \mathbf{W}_{\text{q}}, \tag{6}$$

где $\mathbf{D} = \mathbf{I} - \mathbf{P} = \mathbf{C}\,(\mathbf{C}^{\text{H}}\mathbf{C})^{-1}\,\mathbf{C}^{\text{H}}$ — проекционная матрица, дополнительная к $\mathbf{P}$. Решение уравнения (6) имеет вид:

$$\mathbf{W}_{0\text{ст}} = \mathbf{W}_{\text{q}} - (\mathbf{P}\mathbf{R}_{\mathbf{XX}}\mathbf{P})^{+}\,\mathbf{P}\mathbf{R}_{\mathbf{XX}}\mathbf{W}_{\text{q}}. \tag{7}$$

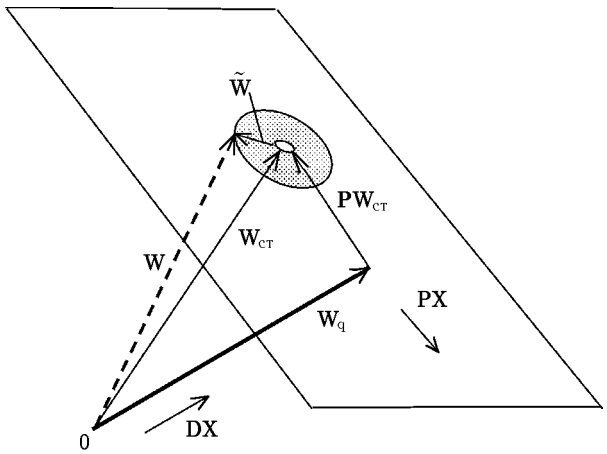

Рис. 1. Геометрическая интерпретация алгоритма настройки с линейными пространственными ограничениями

Например, в случае ААР с однократным линейным ограничением на диаграмму направленности при наличии одной помехи данное решение записывается следующим образом [3]:

$$\mathbf{W}_{0\text{ст}} = \mathbf{W}_{\text{q}} - \\ - \frac{P_\xi}{P_{\xi_1}}\,(\boldsymbol{\xi}^{\text{T}}\mathbf{W}_{\text{q}})\,\mathbf{P}\boldsymbol{\xi}^{*} \Big/ \left(1 + \frac{P_\xi}{P_{\xi_1}}\boldsymbol{\xi}^{\text{T}}\mathbf{P}\boldsymbol{\xi}^{*}\right), \tag{8}$$

где $\boldsymbol{\xi}$ — вектор-фазор помехи, P_ξ и P_{ξ_1} — мощности помехи и собственного шума ААР соответственно.

Для анализа флуктуаций весового вектора в окрестности стационарного решения найдём уравнение для вектора поправки $\mathbf{W}_{\text{п}}(k) \equiv \mathbf{W}(k) - \mathbf{W}_0 = \langle \mathbf{W}_{\text{п}}(k) \rangle + \tilde{\mathbf{W}}(k)$ к нулевому приближению. Вычитая выражение (4) из формулы (1), получим вид указанного уравнения:

$$\mathbf{W}_{\text{п}}(k+1) = \mathbf{P}\left\{\mathbf{W}_{\text{п}}(k) - \mu_{\text{R}}\,(\mathbf{P}\mathbf{R}_{\mathbf{XX}}\mathbf{P})^{+}\,\mathbf{P}\,[\mathbf{R}_{\mathbf{XX}}\mathbf{W}_{\text{п}}(k) + \tilde{\mathbf{\Phi}}(k+1)\mathbf{W}(k)]\right\}. \tag{9}$$

В установившемся режиме $\mathbf{W}_{\text{п}}(k) = \mathbf{P}\mathbf{W}_{\text{п}}(k)$, $\mathbf{D}\mathbf{W}_{\text{п}}(k) = \mathbf{0}$. Это означает, что все поправки (средние и флуктуационные) к нулевому приближению лежат в подпространстве ограничений. Поэтому матрицу $\mathbf{P}\mathbf{R}_{\mathbf{XX}}$ в (9) можно заменить на эквивалентную эрмитовскую матрицу $\mathbf{P}\mathbf{R}_{\mathbf{XX}}\mathbf{P}$.

На рис. 1 дана геометрическая интерпретация алгоритма настройки ААР с линейными пространственными ограничениями. Пространство весовых коэффициентов и сигналов можно представить в

виде двух подпространств: подпространства ограничений, определяемого с помощью проекционной матрицы $\mathbf{P}$, и дополнительного к нему подпространства, определяемого проекционной матрицей $\mathbf{D}$. Вид проекционной матрицы задаёт размерности выделенных подпространств и особенности настройки антенной решётки. Настройка ААР происходит в подпространстве ограничений: оптимальный весовой вектор принадлежит данному подпространству, флуктуации весового вектора также происходят в подпространстве ограничений.

Преобразуем уравнение для флуктуаций (9), переходя в $\mathbf{Q}$-матричное представление, диагонализирующее эрмитовскую матрицу $\mathbf{PR_{XX}P}$: $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{PR_{XX}PQ}$. Можно показать, что матрица $\mathbf{PR_{XX}P}$ имеет L нулевых собственных значений, соответствующих ортонормированным векторам-столбцам $\mathbf{C}_l$ матрицы ограничений $\mathbf{C}$. Значения остальных $N-L$ собственных чисел λ_n матрицы $\mathbf{PR_{XX}P}$ лежат между наименьшим $\lambda_{\min}$ и наибольшим $\lambda_{\max}$ собственными числами матрицы $\mathbf{R_{XX}}$ [4, 10]. Таким образом, диагональная матрица $\mathbf{\Lambda}$ будет иметь вид

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & \lambda_{N-L} & 0 & . & 0 \\ 0 & . & 0 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 \end{bmatrix}, \qquad \lambda_{\min} \le \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_{N-L} \le \lambda_{\max}. \tag{10}$$

В $\mathbf{Q}$-матричном представлении уравнение (9) примет вид:

$$\mathbf{Y}(k+1) = \mathbf{AY}(k) - (1-\alpha)\,\mathbf{Q}^{-1}\,(\mathbf{PR_{XX}P})^{+}\,\mathbf{P}\tilde{\mathbf{\Phi}}(k+1)\mathbf{W}(k), \tag{11}$$

где введены обозначения

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{W}_{\text{п}}, \qquad \mathbf{W}_{\text{п}} = \mathbf{QY}, \qquad \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^{+}, \tag{12}$$

$$\mathbf{A} = \alpha \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \vdots & \mathbf{0} \\ \ldots & \vdots & \ldots \\ \mathbf{0} & \vdots & \mathbf{0} \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Решение уравнения (11) можно формально записать следующим образом:

$$\mathbf{Y}(k+1) = -\mu_{\text{R}} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{A}^n \mathbf{Q}^{-1}\,(\mathbf{PR_{XX}P})^{+}\,\mathbf{P}\tilde{\mathbf{\Phi}}(k+1-n)\,[\mathbf{W}_0 + \mathbf{QY}(k-n)]. \tag{14}$$

Ряд теории возмущений по малому параметру $\mu_{\text{R}} \ll 1$ можно построить, итерируя уравнение (14) [4]. В результате вектор $\mathbf{Y}(k)$ и соответствующий ему вектор поправки $\mathbf{W}_{\text{п}}(k) = \mathbf{QY}(k)$ запишутся в виде

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_3 + \ldots, \tag{15}$$

$$\mathbf{W}_{\text{п}}(k) = \mathbf{QY}(k) = \mathbf{W}_{\text{п}1}(k) + \mathbf{W}_{\text{п}2}(k) + \mathbf{W}_{\text{п}3}(k) + \ldots. \tag{16}$$

Члены ряда (15) записываются следующим образом:

$$\mathbf{Y}_1(k+1) = -\mu_{\text{R}} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{A}^n \mathbf{Q}^{-1}\,(\mathbf{PR_{XX}P})^{+}\,\mathbf{P}\tilde{\mathbf{\Phi}}(k+1-n)\mathbf{W}_{0\text{ст}},$$

$$\mathbf{Y}_2(k+1) = -\mu_{\mathrm{R}} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{A}^n \mathbf{Q}^{-1} \left(\mathbf{P}\mathbf{R}_{\mathbf{XX}}\mathbf{P}\right)^+ \mathbf{P}\tilde{\mathbf{\Phi}}(k+1-n)\mathbf{Q}\mathbf{Y}_1(k-n) =$$

$$= \mu_{\mathrm{R}}^2 \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{A}^{m+n}\mathbf{Q}^{-1} \left(\mathbf{P}\mathbf{R}_{\mathbf{XX}}\mathbf{P}\right)^+ \mathbf{P}\tilde{\mathbf{\Phi}}(k+1-n) \left(\mathbf{P}\mathbf{R}_{\mathbf{XX}}\mathbf{P}\right)^+ \mathbf{P}\tilde{\mathbf{\Phi}}(k+1-n-m-1)\mathbf{W}_{0\text{ст}},$$

$$\mathbf{Y}_{p+1}(k+1) = -\mu_{\mathrm{R}} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{A}^n \mathbf{Q}^{-1} \left(\mathbf{P}\mathbf{R}_{\mathbf{XX}}\mathbf{P}\right)^+ \mathbf{P}\tilde{\mathbf{\Phi}}(k+1-n)\mathbf{Q}\mathbf{Y}_p(k-n). \tag{17}$$

Для вычисления интересующих нас статистических характеристик ААР с помощью формул (17) необходимо задать конкретный вид временнóй зависимости вектора входных сигналов. Ниже рассмотрим случай узкополосной антенной решётки и будем считать, что на приёмные элементы ААР поступают полезный сигнал и помеха, обладающие различными коэффициентами автокорреляции между соседними отсчётами. Корреляционную функцию полезного сигнала зададим формулой

$$\mathbf{R}_{\mathbf{SS}}(k, k+n) \equiv \langle \mathbf{S}^*(k)\mathbf{S}^{\mathrm{T}}(k+n)\rangle = \mathbf{R}_{\mathbf{SS}} r_{\mathbf{S}}^{|n|},$$

а корреляционную функцию помехи выражением

$$\mathbf{R}_{\boldsymbol{\xi\xi}}(k, k+n) \equiv \langle \boldsymbol{\xi}^*(k)\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(k+n)\rangle = \mathbf{R}_{\boldsymbol{\xi\xi}} r_{\boldsymbol{\xi}}^{|n|},$$

где $r_{\mathbf{S}}$ и $r_{\boldsymbol{\xi}}$ — коэффициенты корреляции между соседними отсчётами полезного сигнала и помехи соответственно. Общая корреляционная матрица входных сигналов с учётом взаимной некоррелированности полезного сигнала и помехи примет следующий вид:

$$\mathbf{R}_{\mathbf{XX}}(k, k+n) \equiv \langle \mathbf{X}^*(k)\mathbf{X}^{\mathrm{T}}(k+n)\rangle = \mathbf{R}_{\mathbf{SS}}(k, k+n) + \mathbf{R}_{\boldsymbol{\xi\xi}}(k, k+n) = \mathbf{R}_{\mathbf{SS}} r_{\mathbf{S}}^{|n|} + \mathbf{R}_{\boldsymbol{\xi\xi}} r_{\boldsymbol{\xi}}^{|n|}. \tag{18}$$

Будем считать, что вектор-фазор принимаемого полезного сигнала $\mathbf{S}(k)$ принадлежит подпространству ограничений, т. е. может быть представлен в виде линейной комбинации векторов $\mathbf{C}_l$. Тогда, как нетрудно проверить, будут выполняться следующие равенства:

$$\mathbf{P}\mathbf{S}^*(k) \equiv \mathbf{0}, \qquad \mathbf{P}\mathbf{R}_{\mathbf{SS}}\mathbf{P} = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{P}\left(\mathbf{R}_{\boldsymbol{\xi\xi}} + \mathbf{R}_{\mathbf{SS}}\right)\mathbf{P} = \mathbf{P}\mathbf{R}_{\boldsymbol{\xi\xi}}\mathbf{P},$$

$$\langle \tilde{\mathbf{W}}^+(m)\left[\mathbf{R}_{\boldsymbol{\xi\xi}}(m, m+n) + \mathbf{R}_{\mathbf{SS}}(m, m+n)\right]\tilde{\mathbf{W}}(m+n)\rangle = \langle \tilde{\mathbf{W}}^+(m)\mathbf{R}_{\boldsymbol{\xi\xi}}\tilde{\mathbf{W}}(m+n)\rangle\, r_{\boldsymbol{\xi}}^{|n|},$$

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{P}\left[\mathbf{R}_{\boldsymbol{\xi\xi}}(m, m+n) + \mathbf{R}_{\mathbf{SS}}(m, m+n)\right]\mathbf{P}\mathbf{Q} = \mathbf{\Lambda} r_{\boldsymbol{\xi}}^{|n|}. \tag{19}$$

Отсюда видно, что, поскольку $\mathbf{P}\mathbf{R}_{\mathbf{SS}}\mathbf{P} = \mathbf{0}$, матрица $\mathbf{Q}$, диагонализируя матрицу $\mathbf{P}\mathbf{R}_{\mathbf{XX}}\mathbf{P}$, одновременно диагонализирует также и эрмитовскую матрицу помехового сигнала $\mathbf{P}\mathbf{R}_{\boldsymbol{\xi\xi}}\mathbf{P}$. На основе полученных соотношений (15)–(19) в следующих разделах получены аналитические выражения для основных статистических характеристик ААР.

2. КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ И СПЕКТРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВЫХОДНОГО СИГНАЛА ААР

Рассмотрим влияние флуктуаций весовых коэффициентов на корреляционные характеристики сигнала на выходе ААР. Непосредственно из (2) и (17) видно, что в первом (борновском) приближении поправка к среднему значению весового вектора равна нулю: $\langle \mathbf{Y}_1(k)\rangle = 0$, $\langle \mathbf{W}_{\text{п}1}(k)\rangle = 0$, поскольку $\langle \tilde{\mathbf{\Phi}}(k)\rangle = 0$. Для нахождения моментных функций более высокого порядка всюду ниже будем дополнительно предполагать, что $\mathbf{X}(k)$ является комплексным гауссовским случайным вектором.

Корреляционная функция выходного сигнала может быть записана в виде

$$K_Z(m,m+n) \equiv \langle Z^*(m)Z^{\mathrm{T}}(m+n)\rangle = \langle [\mathbf{X}^{\mathrm{T}}(m)\mathbf{W}(m-1)]^* \, [\mathbf{X}^{\mathrm{T}}(m+n)\mathbf{W}(m+n-1)]\rangle =$$
$$= K_{Z0}(m,m+n) + \langle \tilde{\mathbf{W}}^{\mathrm{H}}(m-1)\tilde{\mathbf{\Phi}}(m,m+n)\rangle \, \mathbf{W}_{\text{ст}}^{\mathrm{H}} + \mathbf{W}_{\text{ст}}^{\mathrm{H}} \, \langle \tilde{\mathbf{\Phi}}(m,m+n)\tilde{\mathbf{W}}(m+n-1)\rangle +$$
$$+ \langle \tilde{\mathbf{W}}^{\mathrm{H}}(m-1)\mathbf{X}^*(m)\mathbf{X}^{\mathrm{T}}(m+n)\tilde{\mathbf{W}}(m+n-1)\rangle. \quad (20)$$

Здесь первое слагаемое

$$K_{Z0}(m,m+n) \equiv \mathbf{W}_{\text{ст}}^{\mathrm{H}} \, \langle \mathbf{X}^*(m)\mathbf{X}^{\mathrm{T}}(m+n)\rangle \, \mathbf{W}_{\text{ст}} = r_{\mathbf{S}}^{|n|} \, \langle |Z|^2\rangle_{\mathbf{S}} \; + r_{\boldsymbol{\xi}}^{|n|} \, \langle |Z|^2\rangle_{\boldsymbol{\xi}}$$

— корреляционная функция выходного сигнала при постоянном стационарном весовом векторе, а флуктуационная часть корреляционной матрицы входного сигнала имеет вид

$$\tilde{\mathbf{\Phi}}(m,m+n) \equiv \mathbf{X}^*(m)\mathbf{X}^{\mathrm{T}}(m+n) - \langle \mathbf{X}^*(m)\mathbf{X}^{\mathrm{T}}(m+n)\rangle. \quad (21)$$

Используя метод возмущений по малому параметру μ_{R}, в первом (борновском) приближении для второго и третьего слагаемых в (20) получим выражения

$$\langle \tilde{\mathbf{W}}^{\mathrm{H}}(m-1)\tilde{\mathbf{\Phi}}(m,m+n)\rangle \, \mathbf{W}_{\text{ст}} + \mathbf{W}_{\text{ст}}^{\mathrm{H}} \, \langle \tilde{\mathbf{\Phi}}(m,m+n)\tilde{\mathbf{W}}(m+n-1)\rangle = \mathbf{\Delta}_{\mathbf{W}}^{\mathrm{H}}\mathbf{W}_{\text{ст}} + \mathbf{W}_{\text{ст}}^{\mathrm{H}}\mathbf{\Delta}_{\mathbf{W}} =$$
$$= -(1-\alpha) \, \langle |Z|^2\rangle_{\mathbf{S}} \, \mathrm{Sp}[(\mathbf{PR_{XX}P})^+ \, \mathbf{PR}_{\boldsymbol{\xi\xi}}] \left[\frac{\left(r_{\mathbf{S}}^{|n|} + r_{\boldsymbol{\xi}}^{|n|}\right) r_{\mathbf{S}} \, r_{\boldsymbol{\xi}}}{1 - r_{\mathbf{S}} r_{\boldsymbol{\xi}}} + r_{\boldsymbol{\xi}} \frac{r_{\mathbf{S}}^{|n|} - r_{\boldsymbol{\xi}}^{|n|}}{r_{\mathbf{S}} - r_{\boldsymbol{\xi}}} \right] -$$
$$- (1-\alpha) \, \langle |Z|^2\rangle_{\boldsymbol{\xi}} \, \mathrm{Sp}[(\mathbf{PR_{XX}P})^+ \, \mathbf{PR}_{\boldsymbol{\xi\xi}}] \, r_{\boldsymbol{\xi}}^{|n|} \left[\frac{2r_{\boldsymbol{\xi}}^2}{1 - r_{\boldsymbol{\xi}}^2} + |n| \right]. \quad (22)$$

Последнее, четвёртое слагаемое в (20) может быть представлено в виде суммы:

$$\langle \tilde{\mathbf{W}}^{\mathrm{H}}(m-1)\mathbf{X}^*(m)\mathbf{X}^{\mathrm{T}}(m+n)\tilde{\mathbf{W}}(m+n-1)\rangle =$$
$$= \langle \tilde{\mathbf{W}}^{\mathrm{H}}(m-1)\mathbf{R_{XX}}(m,m+n)\tilde{\mathbf{W}}(m+n-1)\rangle + \langle \tilde{\mathbf{W}}^{\mathrm{H}}(m-1)\mathbf{\Phi}(m,m+n)\tilde{\mathbf{W}}(m+n-1)\rangle.$$

Второе слагаемое последнего выражения имеет второй порядок малости относительно параметра μ_{R}, поэтому в первом приближении имеем

$$\langle \tilde{\mathbf{W}}^{\mathrm{H}}(m-1)\mathbf{X}^*(m)\mathbf{X}^{\mathrm{T}}(m+n)\tilde{\mathbf{W}}(m+n-1)\rangle \approx \langle \tilde{\mathbf{W}}^{\mathrm{H}}(m-1)\mathbf{R_{XX}}(m,m+n)\tilde{\mathbf{W}}(m+n-1)\rangle =$$
$$= \frac{1-\alpha}{2} r_{\boldsymbol{\xi}}^{|n|} \left[\langle |Z|^2\rangle_{\mathbf{S}} \, \frac{1 + r_{\mathbf{S}} r_{\boldsymbol{\xi}}}{1 - r_{\mathbf{S}} r_{\boldsymbol{\xi}}} + \langle |Z|^2\rangle_{\boldsymbol{\xi}} \, \frac{1 + r_{\boldsymbol{\xi}}^2}{1 - r_{\boldsymbol{\xi}}^2} \right] \mathrm{Sp}[(\mathbf{PR_{XX}P})^+ \, \mathbf{PR}_{\boldsymbol{\xi\xi}}]. \quad (23)$$

В итоге окончательное выражение для корреляционной функции выходного сигнала ААР в стационарном режиме работы примет вид

$$K_Z(n) = r_{\mathbf{S}}^{|n|} \, \langle |Z|^2\rangle_{\mathbf{S}} + r_{\boldsymbol{\xi}}^{|n|} \, \langle |Z|^2\rangle_{\boldsymbol{\xi}} \; +$$
$$+ \frac{1-\alpha}{2} r_{\boldsymbol{\xi}}^{|n|} \left[\langle |Z|^2\rangle_{\mathbf{S}} \, \frac{1 + r_{\mathbf{S}} r_{\boldsymbol{\xi}}}{1 - r_{\mathbf{S}} r_{\boldsymbol{\xi}}} + \langle |Z|^2\rangle_{\boldsymbol{\xi}} \, \frac{1 + r_{\boldsymbol{\xi}}^2}{1 - r_{\boldsymbol{\xi}}^2} \right] \mathrm{Sp}[(\mathbf{PR_{XX}P})^+ \, \mathbf{PR}_{\boldsymbol{\xi\xi}}] -$$
$$- (1-\alpha) \, \langle |Z|^2\rangle_{\mathbf{S}} \, \mathrm{Sp}[(\mathbf{PR_{XX}P})^+ \, \mathbf{PR}_{\boldsymbol{\xi\xi}}] \left[\frac{\left(r_{\mathbf{S}}^{|n|} + r_{\boldsymbol{\xi}}^{|n|}\right) r_{\mathbf{S}} \, r_{\boldsymbol{\xi}}}{1 - r_{\mathbf{S}} r_{\boldsymbol{\xi}}} + r_{\boldsymbol{\xi}} \frac{r_{\mathbf{S}}^{|n|} - r_{\boldsymbol{\xi}}^{|n|}}{r_{\mathbf{S}} - r_{\boldsymbol{\xi}}} \right] -$$
$$- (1-\alpha) \, \langle |Z|^2\rangle_{\boldsymbol{\xi}} \, \mathrm{Sp}[(\mathbf{PR_{XX}P})^+ \, \mathbf{PR}_{\boldsymbol{\xi\xi}}] \, r_{\boldsymbol{\xi}}^{|n|} \left[\frac{2r_{\boldsymbol{\xi}}^2}{1 - r_{\boldsymbol{\xi}}^2} + |n| \right]. \quad (24)$$

Для наглядности проанализируем формулу (24) в случае воздействия на ААР мощной и узкополосной (по сравнению с сигналом) помехи ($r_{\boldsymbol{\xi}} \gg r_{\mathbf{S}}$). При выполнении этих условий из (24) получим

$$K_Z(n) = r_{\boldsymbol{\xi}}^{|n|} \left\{ 1 + \frac{1-\alpha}{2} \left[\frac{1-3r_{\boldsymbol{\xi}}^2}{1-r_{\boldsymbol{\xi}}^2} - 2\,|n| \right] \mathrm{Sp}[(\mathbf{PR_{XX}P})^+ \mathbf{PR}_{\boldsymbol{\xi\xi}}] \right\} \mathbf{W}_{\text{ст}}^{\text{H}} \mathbf{R}_{\boldsymbol{\xi\xi}} \mathbf{W}_{\text{ст}} + \\ + \left\{ r_{\mathbf{S}}^{|n|} - \frac{1-\alpha}{2} \mathrm{Sp}[(\mathbf{PR_{XX}P})^+ \mathbf{PR}_{\boldsymbol{\xi\xi}}]\, r_{\boldsymbol{\xi}}^{|n|} \right\} \mathbf{W}_{\text{ст}}^{\text{H}} \mathbf{R_{SS}} \mathbf{W}_{\text{ст}}, \quad (25)$$

где $|n| > 0$. Нетрудно видеть, что первое слагаемое в этом выражении соответствует помеховому сигналу, а второе описывает корреляционную функцию полезного сигнала на выходе ААР. В практически наиболее интересном случае, когда векторы-фазоры помех не попадают в определённое ограничениями подпространство векторов $\mathbf{C}_l$ (например, когда источники помех находятся вне главного лепестка диаграммы направленности антенной решётки), помеха достаточно хорошо подавляется, и остаточная мощность помехи на выходе ААР (первое слагаемое в (25)) оказывается много меньше мощности полезного сигнала (второе слагаемое в (25)):

$$\mathbf{W}_{\text{ст}}^{\text{H}} \mathbf{R}_{\boldsymbol{\xi\xi}} \mathbf{W}_{\text{ст}} \ll \mathbf{W}_{\text{ст}}^{\text{H}} \mathbf{R_{SS}} \mathbf{W}_{\text{ст}}.$$

В этом случае влияние флуктуаций весового вектора, как видно из выражения в фигурных скобках во втором слагаемом в (25), приводит к искажениям корреляционной матрицы полезного сигнала на выходе адаптивной антенной решётки (эффекту «перекомпенсации», который пропорционален коэффициенту адаптации μ_{R}, мощности помехи в подпространстве ограничений, определяемой шпуром матрицы $(\mathbf{PR_{XX}P})^+ \mathbf{PR}_{\boldsymbol{\xi\xi}}$, и коэффициенту автокорреляции помехи $r_{\boldsymbol{\xi}}$). Таким образом, «перекомпенсация» является вредным явлением, приводящим к искажениям полезного сигнала и снижению эффективности работы ААР.

Кратко рассмотрим влияние флуктуаций весовых коэффициентов на спектральные характеристики сигнала на выходе ААР. Дискретный спектр мощности выходного сигнала (его комплексной огибающей) определяется выражением [2]

$$S_Z(\Omega) \equiv \sum_{n=-\infty}^{+\infty} K_Z(n) z^{-n}, \quad (26)$$

где $z = e^{j\Omega}$ — непрерывная комплексная переменная, Ω — нормированная частота.

Найдём спектральную плотность мощности полезного сигнала на выходе антенной решётки в случае воздействия на ААР мощной узкополосной помехи. Для этого подставим выражение (25) для корреляционной функции полезного выходного сигнала ААР в (26) и, проведя преобразования, получим выражение для спектральной плотности мощности полезного сигнала на выходе адаптивной антенной решётки:

$$S_Z(\Omega) = \left[\frac{1-r_{\mathbf{S}}^2}{1+r_{\mathbf{S}}^2 - 2r_{\mathbf{S}}\cos\Omega} - \frac{1-\alpha}{2} \mathrm{Sp}[(\mathbf{PR_{XX}P})^+ \mathbf{PR}_{\boldsymbol{\xi\xi}}] \frac{1-r_{\boldsymbol{\xi}}^2}{1+r_{\boldsymbol{\xi}}^2 - 2r_{\boldsymbol{\xi}}\cos\Omega} \right] \mathbf{W}_{\text{ст}}^{\text{H}} \mathbf{R_{SS}} \mathbf{W}_{\text{ст}}. \quad (27)$$

Анализ выражения (27) показывает, что эффект «перекомпенсации» приводит к появлению провала в спектре выходного полезного сигнала на частотах действия мощных помех. Для иллюстрации на рис. 2 изображены спектральные плотности мощности полезного выходного сигнала ААР с рекуррентным адаптивным алгоритмом настройки весового вектора (кривые *1*) и, для сравнения, ААР с градиентным алгоритмом настройки (кривые *2*) [5]. Спектр полезного сигнала на выходе ААР без учёта флуктуаций весового вектора представлен кривыми *3*. Спектральные плотности мощности на рис. 2

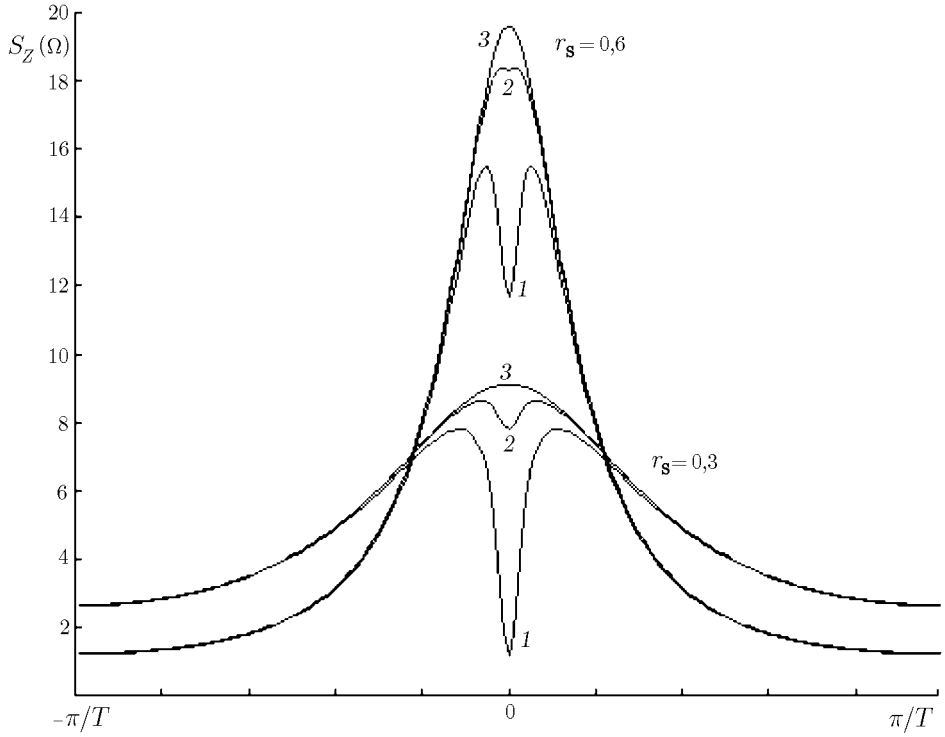

Рис. 2. Спектральная плотность мощности полезного выходного сигнала $S_Z(\Omega)$ ААР с быстрым рекуррентным (кривые *1*) и градиентным (кривые *2*) алгоритмами настройки; спектральная плотность мощности без учёта флуктуаций весового вектора представлена кривыми *3*. Период дискретизации $T = 1$; $r_{\boldsymbol{\xi}} = 0{,}9$; $\mu_{\mathrm{R}} = 0{,}0284$; $\mu_{\mathrm{G}} = 0{,}004$

рассчитывались для случая равных скоростей сходимости обоих алгоритмов, которая, как следует из анализа уравнений сходимости, достигается при $\mu_{\mathrm{R}} = \mu_{\mathrm{G}}\lambda_{\max}^{(R)}$, где $\lambda_{\max}^{(R)}$ — максимальное собственное число корреляционной матрицы входных сигналов $\mathbf{R_{XX}}$. Из рис. 2 можно видеть, что при выполнении этого условия эффект «перекомпенсации» выходного сигнала при быстром рекуррентном алгоритме настройки имеет существенно бóльшую величину, чем при градиентном алгоритме. Следует также отметить, что при уменьшении ширины частотной полосы полезного сигнала (случай, когда коэффициент корреляции $r_{\mathbf{S}} = 0{,}6$) «перекомпенсация» спектра уменьшается.

3. ОДНОМОМЕНТНЫЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ААР

Рассмотрим более подробно одномоментные характеристики флуктуаций весовых коэффициентов и их влияние на суммарную мощность выходного сигнала $\langle |Z|^2 \rangle_{\text{ст}}$.

Матрицу ковариации вектора весовых коэффициентов в стационарном режиме работы в совпадающие моменты времени в борновском приближении можно представить в виде

$$\mathbf{K}_{\tilde{\mathbf{W}}} \equiv \langle \tilde{\mathbf{W}}^* \tilde{\mathbf{W}}^{\mathrm{T}} \rangle = \mathbf{K}_{\tilde{\mathbf{W}}}(m,m) \equiv \langle \tilde{\mathbf{W}}^*(m) \tilde{\mathbf{W}}^{\mathrm{T}}(m) \rangle \approx \mathbf{Q}^* \langle \mathbf{Y}_1^*(m) \mathbf{Y}_1^{\mathrm{T}}(m) \rangle \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}. \tag{28}$$

Используя (17), можно определить вид корреляционной матрицы для вектора весовых коэффициентов $\mathbf{Y}$ (10) в $\mathbf{Q}$-матричном представлении:

$$\langle \mathbf{Y}_1^* \mathbf{Y}_1^{\mathrm{T}} \rangle = \frac{1-\alpha}{2} \left\{ \frac{1+r_{\boldsymbol{\xi}}^2}{1-r_{\boldsymbol{\xi}}^2} \langle |Z|^2 \rangle_{\boldsymbol{\xi}} + \frac{1+r_{\mathbf{S}} r_{\boldsymbol{\xi}}}{1-r_{\mathbf{S}} r_{\boldsymbol{\xi}}} \langle |Z|^2 \rangle_{\mathbf{S}} \right\} (\mathbf{Q}^{-1})^* \left[(\mathbf{P}\mathbf{R_{XX}}\mathbf{P})^+ \right]^* (\mathbf{Q}^{-1})^{\mathrm{T}}. \tag{29}$$

Подставив (29) в (28), найдём:

$$\mathbf{K}_{\tilde{\mathbf{W}}} = \frac{1-\alpha}{2}\left\{\frac{1+r_{\boldsymbol{\xi}}^2}{1-r_{\boldsymbol{\xi}}^2}\langle|Z|^2\rangle_{\boldsymbol{\xi}} + \frac{1+r_{\mathbf{S}}r_{\boldsymbol{\xi}}}{1-r_{\mathbf{S}}r_{\boldsymbol{\xi}}}\langle|Z|^2\rangle_{\mathbf{S}}\right\}[(\mathbf{P}\mathbf{R}_{\mathbf{XX}}\mathbf{P})^{+}]^{*}. \tag{30}$$

Из формулы (30) видно, что, поскольку собственные числа корреляционной матрицы входных сигналов ААР $\mathbf{R}_{\mathbf{XX}}$ при воздействии внешних помех различны, то в общем случае собственные числа корреляционной матрицы флуктуаций весового вектора $\mathbf{K}_{\tilde{\mathbf{W}}}$ также различны. Поэтому флуктуации весового вектора при быстром алгоритме настройки неизотропны в пространстве весовых коэффициентов. Заметим, что при градиентном алгоритме флуктуации весов изотропны (флуктуации весовых коэффициентов некоррелированы и имеют одинаковую дисперсию) [4, 5].

Например, используя формулу (30), нетрудно найти суммарную мощность флуктуаций весовых коэффициентов для ААР с однократным линейным ограничением при воздействии одной помехи: указанная мощность очевидно определяется шпуром корреляционной матрицы $\mathbf{K}_{\tilde{\mathbf{W}}}$. Из (30) видно, что для определения этой характеристики необходимо знать шпур псевдоинвертированной эрмитовской корреляционной матрицы входных сигналов, который находится достаточно легко. В результате имеем

$$\mathrm{Sp}(\mathbf{K}_{\tilde{\mathbf{W}}}) = \frac{1-\alpha}{2}\left\{\frac{1+r_{\boldsymbol{\xi}}^2}{1-r_{\boldsymbol{\xi}}^2}\langle|Z|^2\rangle_{\boldsymbol{\xi}} + \frac{1+r_{\mathbf{S}}r_{\boldsymbol{\xi}}}{1-r_{\mathbf{S}}r_{\boldsymbol{\xi}}}\langle|Z|^2\rangle_{\mathbf{S}}\right\}\times$$
$$\times\frac{1}{P_{\xi 1}}\frac{(N-1)+(P_{\xi}/P_{\xi 1})\,N\,(N-2)\,[1-|f(U_{\xi})|^2]}{1+(P_{\xi}/P_{\xi 1})\,N\,[1-|f(U_{\xi})|^2]}, \tag{31}$$

где $U = \pi\sin\theta$, θ — угол прихода пробного сигнала по отношению к нормали ААР, $U_{\xi} = \pi\sin\theta_{\xi}$, θ_{ξ} — угол прихода помехи, $|f(U)| = |\sin NU/2/(N\sin U/2)|$ — нормированная диаграмма направленности равноамплитудной линейной антенной решётки, сфазированной на нормально падающую волну. Зависимость шпура корреляционной матрицы флуктуаций весового вектора от угла прихода помехи представлена на рис. 3. Из рис. 3 видно, что эффективная мощность флуктуаций весов максимальна в направлении ограничений. При других углах прихода помехового сигнала она имеет некоторое постоянное минимальное значение. При равных скоростях сходимости сравнение быстрого (кривая *1*) и градиентного (кривая *2*) алгоритмов показывает, что суммарная мощность флуктуаций весового вектора в случае градиентного алгоритма настройки меньше, чем в случае быстрого алгоритма.

Суммарную мощность выходного сигнала с учётом флуктуаций весовых коэффициентов на выходе ААР можно записать в виде

$$\langle|Z|^2\rangle_{\text{ст}} = \langle|Z|^2\rangle_0 + \boldsymbol{\Delta}_{\mathbf{W}}^{\mathrm{H}}\mathbf{W}_{\text{ст}} + \mathbf{W}_{\text{ст}}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\Delta}_{\mathbf{W}} + \langle\tilde{\mathbf{W}}^{\mathrm{H}}(m-1)\mathbf{X}^{*}(m)\mathbf{X}^{\mathrm{T}}(m)\tilde{\mathbf{W}}(m-1)\rangle, \tag{32}$$

где

$$\langle|Z|^2\rangle_0 \equiv \mathbf{W}_{\text{ст}}^{\mathrm{H}}\mathbf{R}_{\mathbf{XX}}\mathbf{W}_{\text{ст}} = \mathbf{W}_{\text{ст}}^{\mathrm{H}}\mathbf{R}_{\mathbf{SS}}\mathbf{W}_{\text{ст}} + \mathbf{W}_{\text{ст}}^{\mathrm{H}}\mathbf{R}_{\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}}\mathbf{W}_{\text{ст}} = \langle|Z|^2\rangle_{\mathbf{S}} + \langle|Z|^2\rangle_{\boldsymbol{\xi}} \tag{33}$$

— выходная мощность без учёта флуктуаций весовых коэффициентов. Суммарная мощность $\langle|Z|^2\rangle_{\text{ст}}$ может быть получена из общего выражения (24) для корреляционной функции сигнала на выходе ААР: из формулы (24) можно найти слагаемые в (32), учитывающие влияние флуктуаций весовых коэффициентов, если положить в ней $n = 0$. Тогда после приведения подобных получим

$$\langle|Z|^2\rangle_{\text{ст}} = \left\{1 + \frac{1-\alpha}{2}\,\frac{1-3r_{\boldsymbol{\xi}}^2}{1-r_{\boldsymbol{\xi}}^2}\,\mathrm{Sp}[(\mathbf{P}\mathbf{R}_{\mathbf{XX}}\mathbf{P})^{+}\,\mathbf{P}\mathbf{R}_{\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}}]\right\}\langle|Z|^2\rangle_{\boldsymbol{\xi}} +$$
$$+\left\{1 + \frac{1-\alpha}{2}\,\frac{1-3r_{\mathbf{S}}r_{\boldsymbol{\xi}}}{1-r_{\mathbf{S}}r_{\boldsymbol{\xi}}}\,\mathrm{Sp}[(\mathbf{P}\mathbf{R}_{\mathbf{XX}}\mathbf{P})^{+}\,\mathbf{P}\mathbf{R}_{\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}}]\right\}\langle|Z|^2\rangle_{\mathbf{S}}. \tag{34}$$

Заметим, что при одинаковых коэффициентах корреляции полезного сигнала и помехи ($r_{\mathbf{S}} = r_{\boldsymbol{\xi}}$) формула (34) ещё более упрощается:

$$\langle |Z|^2 \rangle_{\text{ст}} = \left\{ 1 + \frac{1-\alpha}{2} \frac{1-3r_{\boldsymbol{\xi}}^2}{1-r_{\boldsymbol{\xi}}^2} \operatorname{Sp}[(\mathbf{PR_{XX}P})^+ \mathbf{PR}_{\boldsymbol{\xi\xi}}] \right\} \langle |Z|^2 \rangle_0. \tag{35}$$

Сравнение полученной формулы с выражением, найденным в работе [4] для градиентного алгоритма, показывает, что качественное влияние флуктуаций на выходную мощность для обоих алгоритмов одинаковое. При настройке ААР в обоих случаях может наблюдаться как увеличение выходной мощности, так и её уменьшение в зависимости от коэффициентов корреляции $r_{\boldsymbol{\xi}}$ и $r_{\mathbf{S}}$ между соседними отсчётами помехи и сигнала соответственно.

В случае воздействия на антенную решётку мощной узкополосной (по сравнению с сигналом) помехи мощность выходного сигнала имеет вид

$$\langle |Z|^2 \rangle_{\text{ст}} = \left\{ 1 + \frac{1-\alpha}{2} \frac{1-3r_{\boldsymbol{\xi}}^2}{1-r_{\boldsymbol{\xi}}^2} \operatorname{Sp}[(\mathbf{PR_{XX}P})^+ \mathbf{PR}_{\boldsymbol{\xi\xi}}) \right\} \langle |Z|^2 \rangle_{\boldsymbol{\xi}} + \\ + \left\{ 1 - \frac{1-\alpha}{2} \operatorname{Sp}[(\mathbf{PR_{XX}P})^+ \mathbf{PR}_{\boldsymbol{\xi\xi}}) \right\} \langle |Z|^2 \rangle_{\mathbf{S}}. \tag{36}$$

Сравнение формулы (36) с аналогичным выражением, найденным для градиентного алгоритма [4, 5], показало, что «перекомпенсация» выходной мощности (как полезного, так и помехового сигналов) при быстром алгоритме настройки в $\lambda_{\max}^{(R)} \times \times \operatorname{Sp}[(\mathbf{PR_{XX}P})^+ \mathbf{PR}_{\boldsymbol{\xi\xi}}]/\operatorname{Sp}(\mathbf{PR}_{\boldsymbol{\xi\xi}})$ раз больше, чем при градиентном.

Полученные в этом разделе теоретические результаты сравнивались с результатами компьютерного моделирования. Моделировалась 7-элементная узкополосная ААР с однократным линейным ограничением на диаграмму направленности в направлении полезного сигнала. Расстояние между элементами ААР было равно половине длины волны входного сигнала. Для рассматриваемого примера матрица ограничений $\mathbf{C}$ имеет размерность $N \times 1$ и равна $\mathbf{C} = \mathbf{C}_1 = \mathbf{S}^*$, где

$$\mathbf{S} = \{\exp(-\pi j \sin\Theta_{\mathbf{S}}), \exp(-2\pi j \sin\Theta_{\mathbf{S}}), \ldots, \\ \exp(-7\pi j \sin\Theta_{\mathbf{S}})\}$$

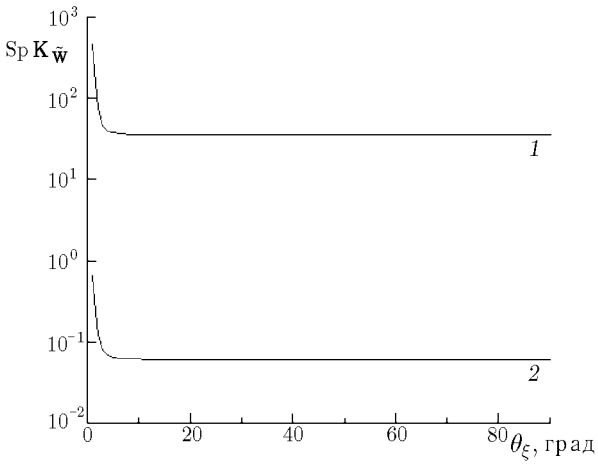

Рис. 3. Зависимость шпура корреляционной матрицы флуктуаций весового вектора от угла прихода помехи в случае быстрого рекуррентного алгоритма (кривая *1*) и градиентного алгоритма (кривая *2*); $\mu_{\text{R}} = 0{,}0284$; $\mu_{\text{G}} = 0{,}004$; $r_{\mathbf{S}} = 0$; $r_{\boldsymbol{\xi}} = 0$

— вектор-фазор полезного сигнала, где $\Theta_{\mathbf{S}}$ — угол прихода полезного сигнала относительно нормали к плоскости решётки. Весовые коэффициенты ААР настраивались по быстрому рекуррентному алгоритму обращения выборочной ковариационной матрицы (1).

В качестве входного сигнала на антенную решётку подавалась сумма полезного сигнала, приходящего с направления, нормального к плоскости решётки, и одной помехи, приходящей под углом 45° к нормали решётки. Комплексные амплитуды входных сигналов формировались из двух независимых

источников гауссовского белого шума. Мощность помехи считалась равной единице и была в 10 раз больше мощности полезного сигнала. В ААР присутствовал также собственный шум, мощность которого составляла 0,1 мощности полезного сигнала. Коэффициент адаптации μ_{R} был выбран равным 0,01.

Начальными (стартовыми) весовыми коэффициентами служил стационарный весовой вектор $\mathbf{W}_{\text{ст}}$, а стартовой псевдообратной матрицей — $(\mathbf{PR_{XX}P})^{+}$, рассчитанные теоретически. Экспериментальное определение корреляционной матрицы флуктуаций весового вектора $\mathbf{K}_{\tilde{\mathbf{W}}}$ и мощности сигналов на выходе антенны $\langle|Z|^2\rangle_{\text{ст}}$ осуществлялось путём усреднения по 40 000 выборок весовых коэффициентов и выходных сигналов. По оценке корреляционной матрицы находились её собственные числа и собственные векторы.

Для определения максимальных и минимальных флуктуаций весового вектора в пространстве весовых коэффициентов исследовалась ориентация эллипсоида, осями которого служили собственные векторы матрицы $\mathbf{K}_{\tilde{\mathbf{W}}}$, а главные полуоси определялись её собственными числами. Теоретические и найденные из численного эксперимента собственные числа матрицы $\mathbf{K}_{\tilde{\mathbf{W}}}$ (а также собственные числа матрицы $\mathbf{K}_{\tilde{\mathbf{W}}}$ для градиентного алгоритма, полученные для случая равных скоростей сходимости алгоритмов $\mu_{\mathrm{G}} = \mu_{\mathrm{R}}/\lambda_{\max}^{(R)}$; $\lambda_{\max}^{(R)} \approx 7$) представлены в табл. 1.

Таблица 1

Теоретически вычисленные собственные числа матрицы $\mathbf{K}_{\tilde{\mathbf{W}}}$		Собственные числа оценки матрицы $\mathbf{K}_{\tilde{\mathbf{W}}}$	
Быстрый рекуррентный алгоритм	Градиентный алгоритм	Быстрый рекуррентный алгоритм	Градиентный алгоритм
2,4984	0,0035	2,6983	0,0036
2,4984	0,0035	2,6574	0,0018
2,4984	0,0035	2,4664	0,0032
2,4984	0,0035	2,2495	0,0029
2,4984	0,0035	1,9748	0,0031
0,0036	0,0035	0,0037	0,0035
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Из табл. 1 видно, что при обоих алгоритмах флуктуации весового вектора отсутствуют в направлении, соответствующем нулевому собственному числу матрицы $\mathbf{K}_{\tilde{\mathbf{W}}}$ (это направление соответствует направлению прихода полезного сигнала и задаётся вектором ограничений $\mathbf{C}_1$). В направлении, соответствующем направлению прихода помехи $\mathbf{P}\boldsymbol{\xi}$, флуктуации весовых коэффициентов в быстром рекуррентном алгоритме минимальны, и их дисперсия определяется минимальным собственным числом матрицы $\mathbf{K}_{\tilde{\mathbf{W}}}$, равным 0,0036. В остальных направлениях, соответствующих другим собственным векторам матрицы $\mathbf{K}_{\tilde{\mathbf{W}}}$ для быстрого алгоритма, флуктуации весовых коэффициентов существенно больше (дисперсия около 2,5) и приблизительно одинаковы. В случае настройки антенной решётки по градиентному алгоритму флуктуации весового вектора в подпространстве ограничений одинаковы по всем направлениям [4, 5] и равны флуктуациям весового вектора в случае быстрого алгоритма в направлении на помеху.

Рис. 4 иллюстрирует результаты, представленные в табл. 1. На нём качественно показана диаграмма рассеяния в подпространстве ограничений для случайного весового вектора ААР с быстрым и градиентным адаптивными алгоритмами настройки. Для быстрого рекуррентного алгоритма обращения выборочной оценки корреляционной матрицы поверхностью равной вероятности рассеяния является эллипсоид, малая полуось которого соответствует направлению помехового сигнала, т. е. флуктуации

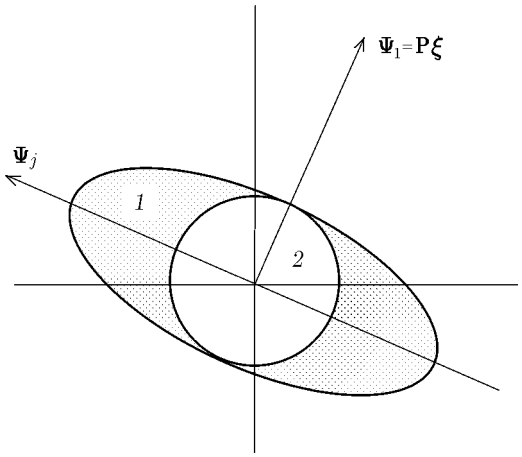

Рис. 4. Диаграмма рассеяния для случайного весового вектора ААР с быстрым (*1*) и градиентным (*2*) адаптивными алгоритмами настройки

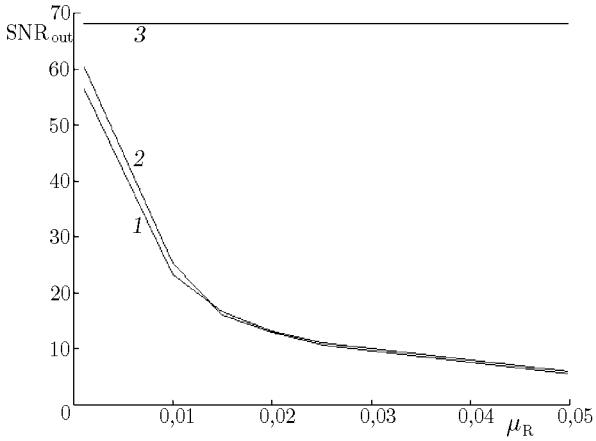

Рис. 5. Зависимость выходного отношения сигнал/шум от коэффициента адаптации $\mu_{\rm R}$; *1* — теоретическое выходное отношение сигнал/шум при учёте флуктуаций; *2* — экспериментальное выходное отношение сигнал/шум; *3* — теоретическое выходное отношение сигнал/шум, рассчитанное без учёта флуктуаций

весового вектора ААР с быстрым алгоритмом настройки минимальны в направлении прихода помехи. Расположение большой полуоси эллипсоида соответствует другим $(N-2)$-м собственным векторам матрицы $\mathbf{K}_{\tilde{\mathbf{W}}}$, в направлении которых флуктуации существенно больше. Для сравнения на рис. 4 приведена поверхность равной вероятности диаграммы рассеяния для градиентного алгоритма, при котором собственные числа матрицы $\mathbf{K}_{\tilde{\mathbf{W}}}$ равны друг другу и данная поверхность является сферой, т. е. флуктуации весового вектора для градиентного алгоритма изотропны и равны флуктуациям весового вектора быстрого рекуррентного алгоритма в направлении помехи.

Для рассматриваемой ААР с семью элементами была исследована зависимость выходного отношения сигнал/шум $\mathrm{SNR}_{\rm out}$ от коэффициента адаптации $\mu_{\rm R}$ для быстрого алгоритма настройки (1). Теоретические результаты и экспериментальные кривые приведены на рис. 5. Следует отметить, что при отсутствии флуктуаций в антенной решётке ($\mathbf{W}=\mathbf{W}_{\rm opt}$) данное отношение имеет постоянное значение $\mathrm{SNR}_{\rm out}=69$ (кривая *3* на рис. 5) и находится по формуле $\mathrm{SNR}_{\rm out}=\langle|Z|^2\rangle_{\mathbf{S}}/(\langle|Z|^2\rangle_0-\langle|Z|^2\rangle_{\mathbf{S}})$. Флуктуации приводят к уменьшению отношения сигнал/шум на выходе ААР, зависящему от коэффициента адаптации $\mu_{\rm R}$. Теоретическое выходное отношение сигнал/шум при учёте флуктуаций (для случая, когда коэффициенты корреляции между отсчётами входных сигналов таковы, что отсутствует эффект «перекомпенсации»: $R_{\boldsymbol{\xi}}<1/\sqrt{3}; r_{\mathbf{S}}<r_{\boldsymbol{\xi}}/3$) может быть рассчитано с учётом формул (33), (34) из выражения $\mathrm{SNR}_{\rm out}=\langle|Z|^2\rangle_{\mathbf{S}}/(\langle|Z|^2\rangle_{\rm ст}-\langle|Z|^2\rangle_{\mathbf{S}})$ (кривая *1* на рис. 5). Экспериментальное отношение сигнал/шум на выходе ААР находилось с помощью выражения $\mathrm{SNR}_{\rm out}=N^2\langle|S_{(1)}|^2\rangle_{\mathbf{S}}/\langle|NS_{(1)}-\mathbf{W}^{\rm T}\mathbf{X}|^2\rangle$ (кривая *2* на рис. 5), где $S_{(1)}$ — полезный сигнал на первом антенном элементе. Анализируя полученные выражения, нетрудно увидеть, что с ростом коэффициента адаптации отношение сигнал/шум убывает приблизительно обратно пропорционально $\mu_{\rm R}$.

Из рис. 5 видно, что, например, отношение сигнал/шум, равное в отсутствие флуктуаций 69, при наличии флуктуаций уменьшается в 1,15 раза при $\mu_{\rm R}=10^{-3}$, в 3,14 раза при $\mu_{\rm R}=10^{-2}$ и в 6,9 раза при $\mu_{\rm R}=3\cdot10^{-2}$. Выходное отношение сигнал/шум, рассчитанное с учётом флуктуаций весового вектора, уже при $\mu_{\rm R}\geq0{,}01$ значительно меньше (в два раза), чем выходное отношение сигнал/шум, найденное без учёта флуктуаций.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье представлены результаты анализа влияния флуктуаций весового вектора на статистические характеристики адаптивных антенных решёток с быстрым рекуррентным алгоритмом настройки. Проведено сравнение этих результатов с характеристиками ААР, настраивающихся по простому дискретному градиентному алгоритму. Проведённое исследование позволяет сделать следующие выводы:

1) В ААР с ограничениями отсутствуют флуктуации весового вектора в направлениях, заданных этими ограничениями. Однако флуктуации весового вектора приводят к искажениям выходного сигнала адаптивных антенных решёток, и используемый алгоритм настройки оказывает существенное влияние на эти искажения.

2) Сравнительный анализ показал, что флуктуации весового вектора в ААР с простым дискретным градиентным алгоритмом настройки изотропны во всех направлениях подпространства ограничений. В адаптивной решётке, настраивающейся по быстрому рекуррентному алгоритму, флуктуации весового вектора в пространстве ограничений неизотропны: минимальны в направлении прихода помехи, а во всех остальных направлениях имеют, как правило, много большую величину (порядка отношения мощности помехи к мощности собственного шума).

3) Флуктуации весового вектора приводят к уменьшению отношения сигнал/шум на выходе ААР обратно пропорционально коэффициенту адаптации μ_{R}.

4) Быстрый рекуррентный алгоритм настройки, обладая преимуществами по сходимости, имеет при этом бóльшую величину флуктуаций, искажающих полезный сигнал на выходе системы.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 00–02–17602, 00–15–96620 и 02–02–06308) и NATO PST. CLG. 977419.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Монзинго Р. А., Миллер Т. У. Адаптивные антенные решётки. М.: Радио и связь, 1986.
2. Уидроу Б., Стирнз С. Адаптивная обработка сигналов. М.: Радио и связь, 1989. 440 с.
3. Hudson J. E. Adaptive array principles. IEE, 1991.
4. Игнатенко С. В., Мальцев А. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1994. Т. 37, № 12. С. 1 532.
5. Мальцев А. А., Зимина С. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 2000. Т. 43, № 1. С. 83.
6. Maltsev A. A., Zimina S. V. // Antenna theory and techniques: Proceedings of 3rd International Conference. Sevastopil, Ukraine, 1999. P. 287.
7. Reed I. S., Mallett J. D., Brennan L. E. // IEEE Trans. AES. 1974. V. 10, No. 6. P. 853.
8. Van Veen B. D. // IEEE Trans. Signal Proc. 1991. V. 39, No. 6. P. 1 470.
9. Krolik J. L., Swingler D. N. // IEEE Trans. Signal Proc. 1994. V. 42, No. 2. P. 445.
10. Фрост О. // ТИИЭР. 1973. Т. 61, № 6. С. 75.

Нижегородский госуниверситет им. Н. И. Лобачевского,
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию
18 сентября 2001 г.

INFLUENCE OF THE WEIGHT-VECTOR FLUCTUATIONS ON STATISTICAL PROPERTIES OF AN ADAPTIVE ANTENNA ARRAY WITH FAST RECURRENT TUNING ALGORITHM

A. A. Maltsev and S. V. Zimina

We present the results of statistical analysis of an adaptive antenna array tuned in accordance with the fast recurrent algorithm of inversion of the sample estimate of correlation matrix with allowance for the weight-vector fluctuations. Using the perturbation-theory methods in the first (Born) approximation, we obtain the spectral-correlation characteristics of the output signal of an antenna array. Fluctuations are shown to result in signal distortions at the output of an adaptive antenna array. Comparing the obtained expressions with the corresponding formulas for an antenna array with a gradient tuning algorithm, we see that for equal convergence rates of the above algorithms, the output-signal distortions are more pronounced for the fast recurrent algorithm. It is also shown that the weight-vector fluctuations are anisotropic for the fast algorithm, i.e., they are absent in the restriction direction, minimal in the interference direction, and maximal in all other directions. The weight-vector fluctuations in an adaptive antenna array with the gradient tuning algorithm are isotropic in the restriction subspace, i.e., they are the same in all directions and are equal in magnitude to fluctuations in the interference direction for the fast algorithm. The weight-vector fluctuations are also absent in the restriction direction for the gradient tuning algorithm.

УДК 519.246

ЭФФЕКТИВНЫЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ РЕАЛИЗАЦИИ МЕТОДА МАКСИМАЛЬНОЙ ЭНТРОПИИ В ЗАДАЧАХ ОБРАЩЕНИЯ СВЁРТКИ

О. А. Морозов, Т. Г. Рыжкова, В. Р. Фидельман

В работе рассмотрен теоретико-информационный подход к решению некорректных задач реконструкции функций, основанный на использовании принципа максимальной энтропии. На этой основе предложены эффективный вычислительный алгоритм реализации схемы решения задачи реконструкции функций и способ регуляризации задачи восстановления функции из свёртки. Предложенный метод регуляризации во многих случаях обеспечивает высокое качество восстановления. Если точность восстановления недостаточна, найденные этим методом множители Лагранжа могут служить наилучшим (в смысле наименьших квадратов) начальным приближением для их итерационного уточнения.

ВВЕДЕНИЕ

Многие задачи из различных областей науки, таких, как реконструктивная томография, восстановление изображений, радиоастрономия, сводятся к решению интегрального уравнения вида

$$\int_a^b \varphi(x)K(x,s)\,\mathrm{d}x = F(s), \tag{1}$$

где $F(s)$ — некоторая наблюдаемая функция, $K(x,s)$ — известное ядро, $\varphi(x)$ — неизвестная функция, которую необходимо определить. Например, в задаче восстановления изображения функция $F(s)$ представляет собой наблюдаемое изображение, $K(x,s)$ — передаточная функция оптической системы, $\varphi(x)$ — восстанавливаемое распределение яркости.

Будем рассматривать случай, когда ядро зависит от разности аргументов, т. е. уравнение принимает специальный вид свёртки. В таком виде может быть представлена, например, задача формирования радиоизображения, в которой регистрируемое изображение представляет собой свёртку исходного распределения интенсивности с аппаратной функцией антенны. Тогда уравнение (1) принимает вид

$$\int_a^b \varphi(x)K(x-y)\,\mathrm{d}x = f(y), \tag{2}$$

Уравнение (2) является интегральным уравнением Фредгольма первого рода с ядром типа свёртки. Известно [1], что в общем случае задача обращения этого уравнения некорректна. Это связано, в частности, с тем, что аппаратная функция известна лишь с некоторой точностью, набор данных является ограниченным и содержит шумы. В связи с этим при решении подобного рода задач часто необходимо получать приближённое решение, компромиссное в отношении точности и устойчивости.

Для решения задачи реконструкции функций по ограниченному набору зашумлённых данных и преодоления некорректности этой задачи предложено несколько подходов. Хорошо известны методы решения, основанные на принципе максимальной энтропии (МЭ), в частности, реализация принципа МЭ на основе критерия χ^2 [2, 3].

С математической точки зрения метод МЭ сводится к оптимизации функционала информационной энтропии относительно функции решения с ограничениями в виде учтённых посредством лагранжевых множителей априорных данных. Энтропия может быть записана в виде [4]

$$H = -\int \rho(x) \ln \rho(x)\, \mathrm{d}x,$$

где $\rho(x)$ — функция плотности распределения вероятности.

Принцип МЭ позволяет использовать в качестве $\rho(x)$ любую функцию, обладающую свойствами плотности распределения вероятности — положительной определённостью и нормировкой, что делает его применимым ко многим задачам.

Для систем, описываемых уравнением (2), ограничения принимают вид свёртки:

$$\int_a^b \rho(x) K(x - y_k)\, \mathrm{d}x = f(y_k), \tag{3}$$

где $k = 1, 2, \ldots, M$, M — количество ограничений. Обычно измеряемые данные представляют собой дискретный набор точек. В этом случае количество ограничений (3) совпадает с количеством точек.

Таким образом, оптимизируемый функционал запишется в виде

$$H + \sum_{k=1}^{M} \lambda_k \left[f(y_k) - \int_a^b \rho(x) K(x - y_k)\, \mathrm{d}x \right].$$

Поскольку этот функционал является выпуклым, существует единственное решение [4, 5] в виде непрерывного распределения с множителями Лагранжа, играющими роль параметров:

$$\rho(x) = \exp\left[-\sum_{k=1}^{M} \lambda_k K(x - y_k) \right]. \tag{4}$$

Такое решение, в отличие от подхода на основе критерия χ^2, позволяет учитывать имеющиеся ограничения наилучшим (в смысле наиболее полного использования априорной информации) образом. Непрерывный вид решения позволяет восстанавливать сигнал не только в наблюдаемых точках, но и между ними. Если есть возможность учесть все ограничения, при подходе, основанном на принципе МЭ, достигается качественное и полное восстановление исходной функции $\rho(x)$. Кроме того, применение принципа МЭ гарантирует оптимальное в информационном смысле использование достоверной части информации [2].

При практической реализации данного подхода могут возникать трудности, связанные с вычислением неизвестных множителей Лагранжа, которые находятся путём подстановки выражения (4) в известные ограничения (3). Решение получающейся системы из M уравнений, нелинейных относительно λ_k, обычно сводится к задаче многомерной оптимизации, которая решается различными итерационными методами, например методом Хука—Дживса [6]. Возникающие при этом сложности связаны с большими вычислительными затратами, определяемыми количеством ограничений (объёмом выборки данных), что характерно, например, для задач восстановления изображений. Увеличение выборки данных приводит к плохой сходимости алгоритмов многомерной оптимизации и, как следствие, к многократному увеличению количества итераций. Это становится серьёзной проблемой, если необходимо получать смену кадров (восстановленных изображений) в реальном времени, например, в акустике, гидролокации, медицинской интроскопии и т. д. Поэтому актуальной является задача разработки алгоритмов быстрого поиска множителей Лагранжа.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА НА ОСНОВЕ МЕТОДА ПСЕВДООБРАЩЕНИЯ

В работе [7] был предложен алгоритм решения некорректных задач спектрального оценивания на основе принципа максимальной энтропии, позволяющий существенно повысить вычислительную эффективность классического метода МЭ, а в ряде случаев избежать итерационной процедуры поиска множителей Лагранжа. Суть предлагаемого алгоритма состоит в обращении формулы (4) и получении множителей в аналитическом виде.

Если в задаче обращения свёртки определить вектор решений $\boldsymbol{\rho} = (\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_N)$, вектор данных $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_M)$ и матрицу значений функции, описывающих ядро уравнения, $\mathbf{K} = \{K_{mn}\}$, где $m = 1, 2, \ldots, M$, $n = 1, 2, \ldots, N$, то выражение (3) можно записать в следующем виде:

$$\mathbf{f} = \mathbf{K}\boldsymbol{\rho}. \tag{5}$$

Тогда решение (4) в матричной форме будет выглядеть следующим образом:

$$\boldsymbol{\rho} = \exp(-\mathbf{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}), \tag{6}$$

где $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_M)$ — вектор множителей Лагранжа.

Подставив решение (6) в выражение (5), получим

$$\mathbf{f} = \mathbf{K}\exp(-\mathbf{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}). \tag{7}$$

Если $\mathbf{K}$ — невырожденная квадратная матрица, то существует матрица $\mathbf{K}^{-1}$, обратная матрице $\mathbf{K}$, обладающая свойством

$$\mathbf{K}\mathbf{K}^{-1} = \mathbf{I},$$

где $\mathbf{I}$ — единичная матрица. В этом случае, умножая выражение (7) слева на эту матрицу, получаем

$$\mathbf{K}^{-1}\mathbf{f} = \exp(-\mathbf{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}).$$

Логарифмируя это выражение и ещё раз умножая его на матрицу $\mathbf{K}^{-1}$, получаем выражение для множителей Лагранжа:

$$\boldsymbol{\lambda} = \left(\mathbf{K}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\,[-\ln(\mathbf{K}^{-1}\mathbf{f})]. \tag{8}$$

В некоторых случаях вид матрицы $\mathbf{K}^{-1}$ может быть найден аналитически. Так, например, в задаче спектрального оценивания матрица $\mathbf{K}$ представляет собой матрицу комплексных экспонент, и обратная к ней матрица $\mathbf{K}^{-1}$ есть просто комплексно-сопряжённая транспонированная матрица $\mathbf{K}$ [7]. Если обратная матрица $\mathbf{K}^{-1}$ существует и известна точно, то выражение (8) определяет точные значения множителей Лагранжа $\boldsymbol{\lambda}$.

Если матрица $\mathbf{K}$ вырожденная или прямоугольная, обратная матрица $\mathbf{K}^{-1}$ не существует. Вместо неё используется псевдообратная матрица $\mathbf{K}^{+}$ (обобщённая обратная матрица Мура—Пенроуза [8]), которая существует для любой матрицы $\mathbf{K}$, в том числе для квадратной вырожденной и прямоугольной. Использование псевдообратной матрицы приводит к замене точного решения псевдорешением (нормальным псевдорешением системы линейных уравнений $\mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ называется вектор $\mathbf{x} = \mathbf{K}^{+}\mathbf{b}$, имеющий наименьшую евклидову длину среди всех векторов, обеспечивающих минимум величины $||\mathbf{K}\mathbf{x} - \mathbf{b}||$). В случае квадратной невырожденной матрицы $\mathbf{K}$ её псевдообратная матрица совпадает с обратной, и псевдорешение соответствует точному решению.

Предложенный алгоритм применим также для рассматриваемой задачи (2), но в отличие от задачи спектрального оценивания вместо обратной матрицы $\mathbf{K}^{-1}$ используется псевдообратная матрица. Действительно, в задаче (2) оператор $\mathbf{K}(x - y)$ может иметь любой вид, и, как говорилось выше, задача оказывается некорректной. Поэтому возможно, что обратный оператор или не существует, или

определён не на всей области определения $K(x-y)$, или не является непрерывным. В этом случае использование псевдообратной матрицы позволяет преодолеть трудности, связанные с некорректностью задачи [1]. Роль решения (8) в этом случае будет играть псевдорешение:

$$\boldsymbol{\lambda} = \left(\mathbf{K}^{\mathrm{T}}\right)^{+} \left[-\ln(\mathbf{K}^{+}\,\mathbf{f})\right]. \tag{9}$$

Следует отметить, что произведение, стоящее в (8) и (9) под знаком логарифма, может оказаться близким к нулю. Это, в частности, может являться следствием плохой обусловленности исходной матрицы $\mathbf{K}$ и погрешности в исходных данных $\mathbf{f}$. Обычная практика решения подобных проблем методами регуляризации требует отбросить компоненты, которые могут вызвать большие осцилляции в решении. Однако установлено, что в данном случае отбросить эти компоненты (что эквивалентно занулению соответствующих множителей Лагранжа) нельзя, поскольку это соответствует привнесению ложной информации и приводит к резкому изменению вида решения.

Псевдорешение лишь минимизирует норму невязки, но не даёт искомого точного решения. Чтобы приблизить псевдорешение к точному, необходимо каким-либо образом изменить формулу (9), чтобы обойти некорректность задачи.

Предлагается ввести в выражение (9) регуляризующий параметр $\varepsilon \ll 1$, и не отбрасывать компоненты произведения $\mathbf{K}^{+}\mathbf{f}$, которые оказываются меньше параметра ε, а заменить их на этот параметр. Тогда поиск множителей Лагранжа производится по формуле

$$\boldsymbol{\lambda} = -\left(\mathbf{K}^{\mathrm{T}}\right)^{+} \mathbf{r}, \tag{10}$$

где

$$\mathbf{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_M), \qquad r_i = \begin{cases} \ln(\mathbf{K}^{+}\mathbf{f})_i, & (\mathbf{K}^{+}\mathbf{f})_i \geq \varepsilon; \\ \ln(\varepsilon), & (\mathbf{K}^{+}\mathbf{f})_i < \varepsilon, \end{cases}$$

$i = 1, 2, \ldots, M$. Для восстановления искомой функции найденные множители Лагранжа (10) подставляются в решение (4).

Во многих случаях функция, восстановленная из свёртки предложенным методом, является вполне приемлемой. При необходимости достижения более высокой точности восстановления найденные предложенным методом множители Лагранжа являются наилучшими в смысле наименьших квадратов начальным приближением для последующего итерационного уточнения значений $\boldsymbol{\lambda}$.

2. ЗАМЕЧАНИЯ ПО ПРОГРАММНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ АЛГОРИТМА

Следует отметить, что при реализации данного подхода основными моментами являются построение псевдообратной матрицы и подбор параметра ε.

Для построения псевдообратных матриц был выбран алгоритм, основанный на сингулярном разложении матриц. Алгоритм включает фильтрацию в пространстве сингулярных чисел, что делает задачу построения псевдообратных матриц устойчивой. Сингулярное разложение гарантирует нахождение псевдообратной матрицы для матриц любого вида. Кроме того, при построении псевдообратной матрицы на основе метода сингулярного разложения происходит фильтрация шумов, содержащихся в матрице, описывающей ядро уравнения, что значительно повышает устойчивость алгоритма к шумам,

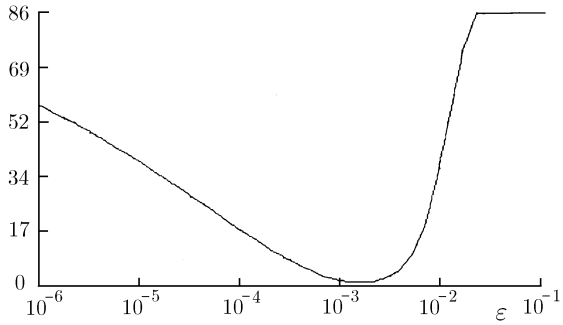

Рис. 1

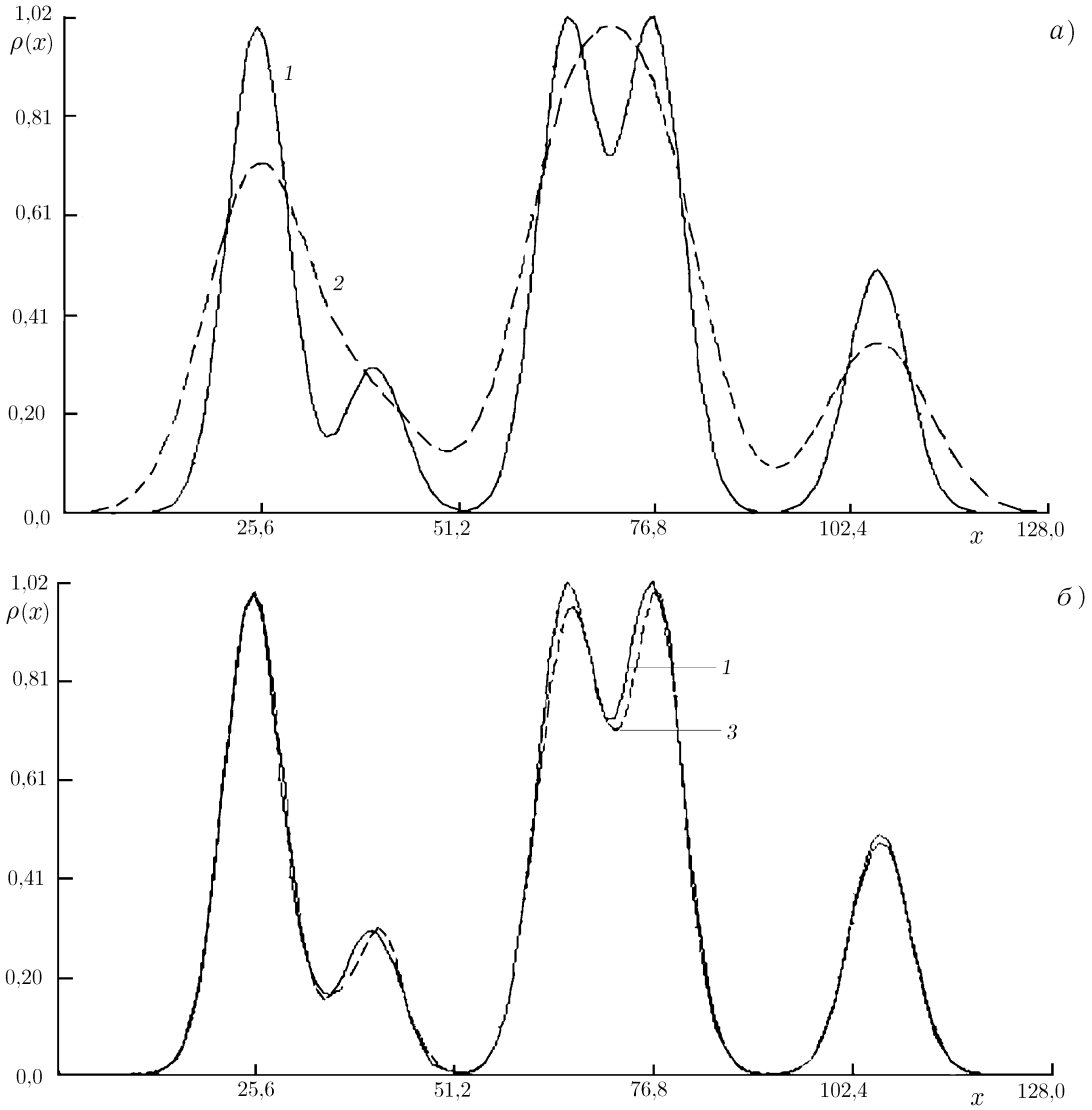

Рис. 2

содержащимся в измерениях аппаратной функции. Для реализации сингулярного разложения существуют устойчивые сходящиеся алгоритмы [8].

Приём, использованный для получения выражения (10), в том или ином виде часто используется при решении задач наименьших квадратов для получения более надёжных оценок параметров задачи [8]. Однако за повышение надёжности приходится платить возможным увеличением невязок. Для выбора оптимального параметра при решении конкретной задачи предлагается построить модель этой задачи и провести исследование зависимости коэффициента среднеквадратичного отклонения (СКО) исходного модельного и восстановленного сигналов от параметра ε. Характерный вид такой зависимости представлен на рис. 1. Оптимальным считается значение параметра, при котором среднеквадратичное отклонение минимально. Для решения конкретной задачи можно использовать значения параметра, близкие к оптимальному и принадлежащие интервалу, который определяется требуемой точностью.

При необходимости найденные этим методом множители Лагранжа могут служить начальным приближением для их итерационного уточнения.

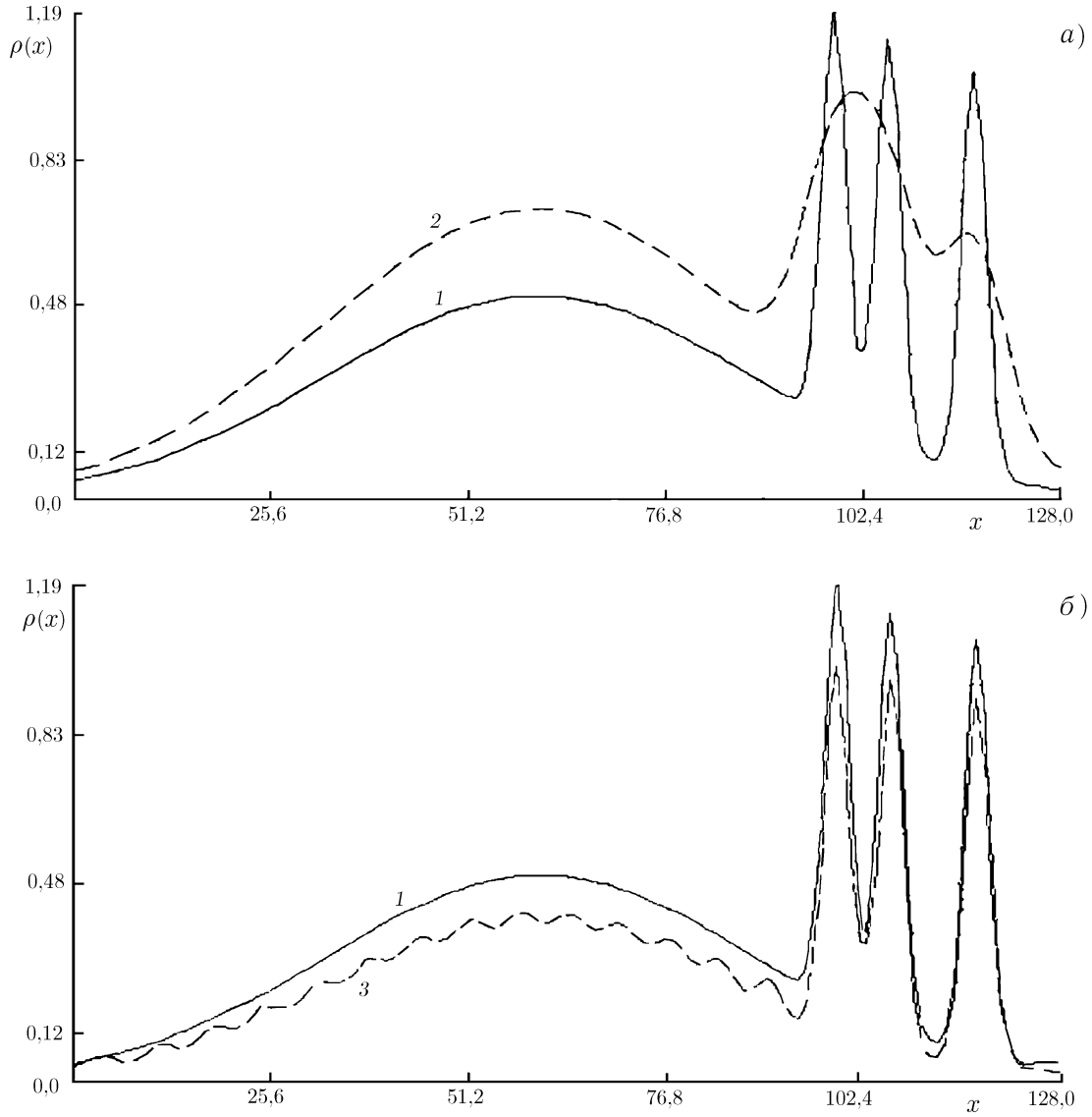

Рис. 3

3. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Для демонстрации возможностей предложенного алгоритма была смоделирована задача восстановления сигнала из свёртки, описываемая уравнением (2). В качестве исходного сигнала использовалась сумма гауссовых экспонент, а в качестве ядра уравнения — функция Гаусса с большей полушириной. Измеряемые данные представляли собой результат свёртки первых двух моделей. Сигнал, восстанавливаемый из свёртки по формулам (4) и (10), сравнивался с исходным с помощью коэффициента среднеквадратичного отклонения.

На рис. 2–4 представлены результаты применения предложенного алгоритма с регуляризующим параметром ε (на этих рисунках кривая *1* представляет исходный сигнал $\rho(x)$, *2* — результат свёртки $f(x)$, *3* — восстановленный сигнал) в типичных для задач восстановления сигнала из свёртки случаях.

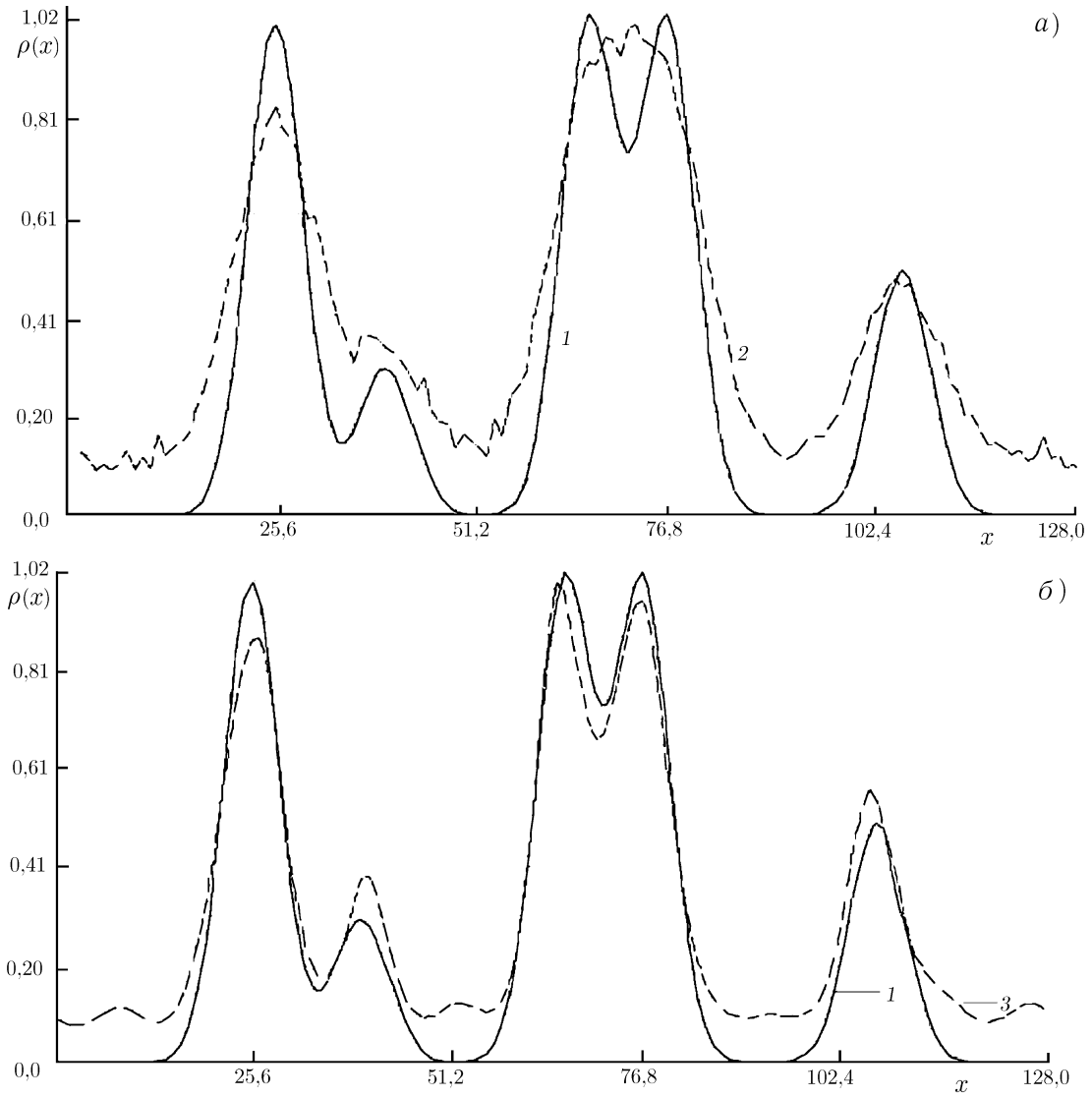

Рис. 4

На рис. 2*а, б* исходный сигнал представляет собой близко сдвинутые пики различной амплитуды, полуширина которых в 1,5÷2 раза меньше полуширины функции, соответствующей ядру уравнения (2). В таких случаях сигнал восстанавливается достаточно точно (СКО $< 0{,}5$ %) с параметром регуляризации ε, лежащим в пределах от 10^{-4} до 10^{-3}.

При увеличении полуширины функции, соответствующей ядру уравнения, восстановление будет менее точным, но во многих случаях всё же сравнимым с вышеописанным случаем. Регуляризующий параметр при этом увеличивается до значений порядка 10^{-2}.

Предложенный алгоритм применим также для случаев, когда пики исходного сигнала имеют разную полуширину. В случаях, когда пики перекрываются, как, например, на рис. 3, происходит изменение амплитуды восстановленного сигнала (рис. 3*б*). Точность восстановления может быть разной в зависимости от полуширины функции, с которой производится свёртка. Для функции, смоделированной на рис. 3, оптимальным параметром является $\varepsilon = 8 \cdot 10^{-3}$, при этом СКО $\approx 2{,}5$ %.

Алгоритм устойчив при работе с данными, содержащими шум. При этом уровень шума в восстановленном сигнале значительно ниже, чем в исходном. На рис. 4*а* показан исходный сигнал *1* и сигнал *2* —

результат свёртки исходного сигнала с аппаратной функцией, содержащий шум (энергия шума составляет 10 % энергии сигнала). При таком уровне шума восстановление предложенным алгоритмом даёт СКО порядка 3,3 %. Для данной модели результаты восстановления показаны на рис. 4*б*. В реальных задачах шум, как правило, содержится в сигнале, принимаемом антенной, т. е. шум накладывается на исходный сигнал и потом сглаживается в результате свёртки с аппаратной функцией. Таким образом, предложенный алгоритм можно успешно применять при работе с реальными данными.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Традиционный подход к использованию принципа максимальной энтропии приводит к необходимости решения нелинейных систем уравнений. Такая задача часто оказывается неустойчивой и требует больших вычислительных затрат. Использование предложенного алгоритма быстрого поиска множителей Лагранжа позволяет избежать итерационных процедур решения нелинейных систем. С другой стороны, использование процедуры псевдообращения позволяет фильтровать шумы, содержащиеся в матрице, описывающей ядро уравнения, что повышает устойчивость алгоритма. Моделирование показало, что по сравнению с традиционным методом максимальной энтропии использование предложенного алгоритма значительно сокращает время поиска решения уравнения (2) (для одномерного случая при 128 отсчётах и поиске множителей Лагранжа на основе метода многомерной оптимизации Хука—Дживса — примерно на порядок) и вместе с тем даёт сравнимые по точности результаты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Василенко Г. М., Тараторин А. М. Восстановление изображений. М.: Радио и связь, 1986.
2. Джейнс Э. Т. // ТИИЭР. 1982. Т. 70, № 9. С. 33.
3. Построение изображений в астрономии по функциям когерентности / Под ред. К. Ван Схонвелда. М.: Мир, 1982. 215 с.
4. Кей С. М., Марпл С. Л. // ТИИЭР. 1981. Т. 69, № 11. С. 5.
5. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
6. Базара М., Шетти К. Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы. М.: Мир, 1982.
7. Аратский Д. Б., Морозов О. А., Солдатов Е. А., Фидельман В. Р. // Автометрия. 1991. № 6. С. 97.
8. Каханер Д., Моулер К., Нэш С. Численные методы и математическое обеспечение. М.: Мир, 1998.

Нижегородский госуниверситет им. Н. И. Лобачевского,
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию
1 апреля 2002 г.

COMPUTATIONALLY ROBUST ALGORITHM OF THE MAXIMUM ENTROPY METHOD FOR THE SOLUTION OF DECONVOLUTION PROBLEMS

O. A. Morozov, T. G. Ryzhkova, and V. R. Fidelman

We discuss an information-theory approach to to solving incorrect problems of function reconstruction based on the use of the maximum entropy principle. On this basis, we propose a computationally effective algorithm for function reconstruction and a method for regularization of the problem of function recovery from the convolution. The proposed regularization method yields good results in most cases. If the higher precision of reconstruction is required, then the Lagrange factors found by this method can be used as the best initial approximation (in the least-square sense) for an iterative search of exact values of these factors.