МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Известия высших учебных заведений

РАДИОФИЗИКА

ежемесячный научно-технический журнал

Издаётся с апреля 1958 г.

Том XLV №7 **Нижний Новгород** **2002**

Содержание

УДК 621.396.96

ФЛУКТУАЦИИ АМПЛИТУДЫ И ФАЗЫ ДЕЦИМЕТРОВЫХ РАДИОВОЛН ПРИ ПРОСВЕЧИВАНИИ АТМОСФЕРЫ НА ТРАССАХ СПУТНИК—СПУТНИК

В. А. Ануфриев, О. И. Яковлев

Приведены результаты экспериментальных исследований атмосферных флуктуаций амплитуды и фазы дециметровых радиоволн при затменных измерениях на трассах между навигационными спутниками GPS и спутником MICROLAB. Представлены зависимости дисперсии флуктуаций амплитуды и фазы от минимальной высоты лучевой линии и частотные спектры флуктуаций. Экспериментальные данные сопоставлены с теорией распространения радиоволн в статистически неоднородных средах, определены индекс спектра неоднородностей коэффициента преломления атмосферы, внешний масштаб неоднородностей и дисперсия флуктуаций коэффициента преломления. Показано, что радиозатменный метод позволяет осуществить мониторинг мелкомасштабных неоднородностей атмосферы.

ВВЕДЕНИЕ

Радиопросвечивание атмосферы на трассах спутник—спутник позволило развить эффективный метод глобального контроля распределения температуры в тропосфере и стратосфере. Определение высотных профилей температуры этим методом базируется на связи регулярного изменения фазы и амплитуды с углом рефракции радиоволн, а следовательно, с зависимостью коэффициента преломления от высоты. Использование дециметровых радиоволн на трассах между навигационными спутниками GPS и спутником MICROLAB дало возможность провести массовое радиопросвечивание атмосферы в разных районах Земли и показать высокую эффективность затменного метода для глобального контроля распределения температуры в атмосфере [1–3].

Другое направление радиозатменных исследований связано с разработкой метода контроля степени турбулентности или мелкомасштабной неоднородности атмосферы; при этом стремятся найти связь флуктуаций амплитуды и фазы радиоволн с параметрами неоднородностей атмосферы. В работах [4–8] дан анализ флуктуаций амплитуды сантиметровых радиоволн на трассах между орбитальной станцией «Мир» и геостационарными спутниками и показана возможность исследований неоднородностей атмосферы радиозатменным методом. Радиоканал GPS—MICROLAB отличается высокой стабильностью частоты, что позволяет проводить исследования флуктуаций фазы и амплитуды дециметровых радиоволн. В [9, 10] дан предварительный анализ атмосферных флуктуаций фазы дециметровых радиоволн на трассе GPS—MICROLAB. Для разработки затменного метода контроля мелкомасштабной неоднородности атмосферы необходимо использовать результаты совместного анализа флуктуаций и фазы, и амплитуды.

Цель этой работы состоит в анализе флуктуаций амплитуды и фазы при распространении дециметровых радиоволн через атмосферу на затменных трассах между навигационными спутниками GPS и спутником MICROLAB.

1. ОСОБЕННОСТИ ИССЛЕДОВАНИЙ И ПЕРВИЧНАЯ ОБРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Эксперименты по радиопросвечиванию атмосферы были осуществлены с использованием дециметровых радиоволн с длиной $\lambda = 19$ см, когда спутник MICROLAB (точка B на рис. 1) принимал сигналы спутников GPS (точка A). При движении спутников минимальная высота лучевой линии $|CD| = H_0$ уменьшается, при этом регистрируются изменения фазы φ и амплитуды E радиоволн, распространяющихся через атмосферу по трассе AB. На рис. 1 центру Земли соответствует точка O, а точка D на поверхности Земли указывает район, где осуществляется радиопросвечивание атмосферы; пунктиром показана условная граница атмосферы. Вариации $\varphi(t)$ и $E(t)$ имеют две составляющие: регулярные изменения $\varphi_0(t)$ и $E_0(t)$, обусловленные средним высотным профилем приведённого коэффициента преломления $N(h)$ в районе радиопросвечивания, т. е. вблизи точки C, и случайные флуктуации $\delta\varphi$ и δE, связанные со статистическими неоднородностями коэффициента преломления δN. Для определения статистических характеристик флуктуаций $\delta\varphi$ и δE сигнала находились регулярные изменения фазы и амплитуды путём аппроксимации зависимостей $\varphi_0(t)$ и $E_0(t)$ на коротких интервалах времени ΔT полиномами второй степени. Затем из зависимостей $\varphi(t)$ и $E(t)$ вычитались изменения фазы и амплитуды, соответствующие регулярным трендам; таким образом получались случайные функции $\delta\varphi(t)$ и $\delta E(t)$ с нулевым средним значением. Экспериментальные зависимости $\delta\varphi(t)$ и $\delta E(t)$ подвергались стандартной процедуре статистической обработки, в результате которой для каждого сеанса радиопросвечивания атмосферы находились несколько значений дисперсии флуктуаций фазы σ_φ^2 и относительной амплитуды σ_E^2, а также графики спектров флуктуаций фазы $G_\varphi(F)$ и амплитуды $G_E(F)$ (здесь F — частота флуктуаций). Эти статистические характеристики радиосигналов относились к минимальной высоте H_0 лучевой линии; значения H_0 определялись по данным об орбитах спутников GPS и MICROLAB с учётом рефракции радиоволн в атмосфере. При просвечивании атмосферы радиоволны распространяются и через ионосферу. Чтобы исключить влияние ионосферы и технических факторов, мы определяли флуктуационные характеристики радиосигналов при высоте лучевой линии $H_0 = 40\div60$ км, когда влиянием атмосферы можно пренебречь. Малое влияние ионосферных неоднородностей и аппаратурных шумов на флуктуации фазы и амплитуды сигнала исключалось с помощью обычной процедуры, считая, что дисперсии и спектральные плотности статистически независимых случайных процессов складываются. Для выяснения закономерностей флуктуаций радиоволн мы обработали данные 49 сеансов радиопросвечивания атмосферы. Радиозатменные эксперименты были осуществлены в период со 2 по 19 февраля 1997 г. в районе с координатами 120°÷153° в. д. и 20°÷60° с. ш.

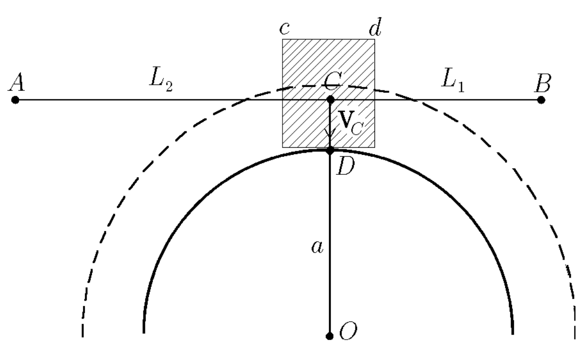

Рис. 1. Схема радиопросвечивания атмосферы на трассе спутник—спутник

В экспериментах расстояние L_1 от спутника MICROLAB до области максимального приближения лучевой линии к поверхности Земли составляло 3 300 км, а расстояние L_2 от спутников GPS до точки C — 25 600 км (см. рис. 1). Длительность радиопросвечивания атмосферы, когда высота H_0 изменялась от 35 до 2 км, составляла $25\div38$ с. При затменном радиопросвечивании атмосферы область наибольшего приближения лучевой линии к поверхности Земли (точка C на рис. 1) имеет две компоненты скорости: вертикальную компоненту $V_C = \mathrm{d}H_0/\mathrm{d}t$, лежащую в плоскости рис. 1, и перпендикулярную плоскости рис. 1 компоненту V^*. В этой работе мы анализируем экспериментальные данные при $V^* \ll V_C$, т. е. в случае почти вертикального сечения атмосферы лучевой линией. В этих сеансах скорость V_C в стратосфере была равна 1,7÷2,5 км/с, а в тропосфере из-за влияния рефракции она уменьшалась и составляла 0,45÷0,7 км/с.

2. ДИСПЕРСИЯ ФЛУКТУАЦИЙ АМПЛИТУДЫ И ФАЗЫ

Дисперсию флуктуаций амплитуды и фазы мы определяли на интервалах времени $\Delta T = 4$ с, в

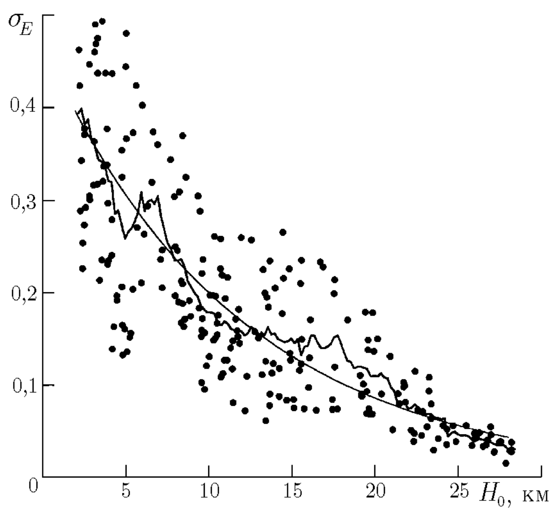

Рис. 2

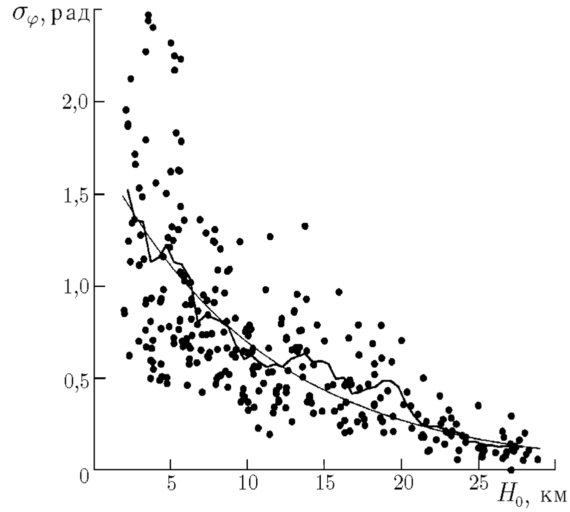

Рис. 3

течение которых минимальная высота H_0 лучевой линии уменьшалась на $7\div10$ км в стратосфере и на $1{,}8\div2{,}6$ км в тропосфере. В одном сеансе радиопросвечивания получалось пять—семь значений σ_E и σ_φ. На рис. 2 представлены результаты определения среднеквадратичного отклонения σ_E относительной амплитуды сигнала для разных минимальных высот H_0 лучевой линии. Разброс экспериментальных значений σ_E на этом рисунке, показанных точками, обусловлен изменчивостью метеоусловий; усреднённая зависимость σ_E от H_0 показана сплошной ломаной кривой. Уверенная регистрация атмосферных флуктуаций амплитуды начинается в стратосферной области при $H_0 = 23\div26$ км, где в среднем $\sigma_E = 0{,}05$. При $H_0 = 13\div17$ км интенсивность флуктуаций остаётся примерно постоянной при среднем значении $\sigma_E = 0{,}15$, а в тропосфере при $H_0 = 3\div6$ км наблюдается очень сильный разброс значений среднеквадратичного отклонения амплитуды при среднем $\sigma_E = 0{,}31$.

На рис. 3 показана зависимость среднеквадратичного отклонения фазы сигнала от высоты H_0, где точки соответствуют значениям σ_φ в радианах для разных сеансов радиопросвечивания атмосферы, а сплошная ломаная кривая — средняя экспериментальная зависимость. Анализ флуктуаций фазы показал, что начиная с высот $H_0 = 23\div26$ км удаётся определить σ_φ, при этом среднее значение σ_φ в указанном интервале равно 0,18 рад. При уменьшении высоты H_0 наблюдается монотонное увеличение флуктуаций фазы, и при $H_0 = 13\div17$ км в среднем $\sigma_\varphi = 0{,}53$ рад. В тропосфере наблюдаются очень большие флуктуации фазы: зарегистрированные в разных сеансах значения σ_φ варьируются от 0,5 до 2,6 рад при среднем значении 1,2 рад для интервала высот $H_0 = 3\div6$ км.

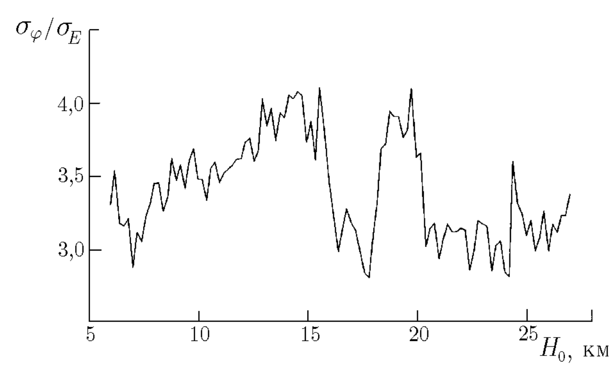

Рис. 4

Из сравнения рис. 2 и 3 следует, что средние зависимости $\sigma_\varphi(H_0)$ и $\sigma_E(H_0)$ подобны. На рис. 4 представлен график зависимости их отношения от высоты H_0, из которого следует, что $\sigma_\varphi/\sigma_E = 3{,}4\pm\pm0{,}6$ и слабо зависит от H_0. Необходимо отметить, что среднее отношение σ_φ/σ_E в разных сеансах радиопросвечивания атмосферы изменяется в больших пределах.

3. СПЕКТРЫ ФЛУКТУАЦИЙ АМПЛИТУДЫ И ФАЗЫ

Спектры амплитудных и фазовых флуктуаций мы определяли на временных интервалах $\Delta T = 5$ с, соответствующих изменению минимальной высоты лучевой линии на 8÷12 км в стратосфере и 2,2÷3 км в тропосфере. На рис. 5 представлены типичные спектры флуктуаций амплитуды $G_E(F)$ для трёх сеансов радиопросвечивания атмосферы. Спектры на рис. 5*а* получены для тропосферной области, а на рис. 5*б* соответствуют стратосферным высотам. Кривые *1*, *2* и *3* соответствуют разным сеансам радиопросвечивания атмосферы, в которых наблюдались сильно отличающиеся уровни флуктуаций. Из рис. 5 следует, что на частотах $F < 2$ Гц спектральная плотность $G_E(F)$ слабо зависит от частоты, а при $F > 2$ Гц величина $G_E(F)$ с ростом частоты быстро убывает. При $F > 2$ Гц экспериментальные спектры хорошо аппроксимируются зависимостью $G_E \propto F^{-n}$, и по экспериментальным данным удаётся определить спектральный индекс n. На рис. 6 приведены гистограммы распределения значений индекса n, полученных в разных сеансах радиопросвечивания атмосферы. Из рис. 6*а* следует, что в тропосфере в 75 % случаев спектральный индекс заключён в пределах $n = 2{,}2 \div 3{,}4$ при среднем значении $n = 2{,}7 \pm 0{,}6$, а в стратосферной области (рис. 6*б*) спектральный индекс в основном лежит в интервале от 2 до 4.

Спектры флуктуаций фазы $G_\varphi(F)$ в затменных экспериментах при $\lambda = 19$ см были проанализированы в [10], где приведены примеры экспериментальных спектров $G_\varphi(F)$ и показано, что они также хорошо описываются зависимостью $G_\varphi \propto F^{-m}$. Оказалось, что для тропосферы экспериментальное среднее значение спектрального индекса $m = 2{,}2 \pm 0{,}4$, а для стратосферы $m = 2{,}6 \pm 0{,}5$.

4. СОПОСТАВЛЕНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ С ТЕОРИЕЙ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ СТАТИСТИЧЕСКОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ АТМОСФЕРЫ

Из теории распространения радиоволн в статистически неоднородной среде [11] следует, что спектральные индексы n и m связаны с показателем p пространственного спектра флуктуаций коэффициента преломления простым соотношением

$$p = n + 1 = m + 1. \tag{1}$$

Из этого соотношения и найденных значений n и m видно, что наблюдаемые флуктуации амплитуды и фазы радиоволн обусловлены неоднородностями атмосферы, которые характеризуются следующими значениями p: по амплитудным данным в тропосфере среднее значение $p = 3{,}8 \pm 0{,}6$, в стратосфере показатель p изменяется от 3 до 5; спектральный анализ флуктуаций фазы показал, что в тропосфере среднее значение $p = 3{,}2 \pm 0{,}4$, а в стратосфере $p = 3{,}6 \pm 0{,}5$.

Для определения связи дисперсии флуктуаций амплитуды (σ_E^2) и фазы (σ_φ^2) с высотной зависимостью дисперсии флуктуаций коэффициента преломления ($\sigma_N^2(h)$) зададимся следующим приближённым соотношением:

$$\sigma_N(h) = \sigma_0 \exp(-\beta h). \tag{2}$$

Здесь h — высота над поверхностью Земли, β и σ_0 — численные параметры. Из теории распространения радиоволн в статистически неоднородных средах для турбулентной среды при $p = 11/3$ следуют соотношения [11, 12]

$$\sigma_\varphi^2 = k^2 L_0 \sigma_0^2 \int\limits_{-L_2}^{L_1} \exp(-2\beta h)\, \mathrm{d}x, \tag{3}$$

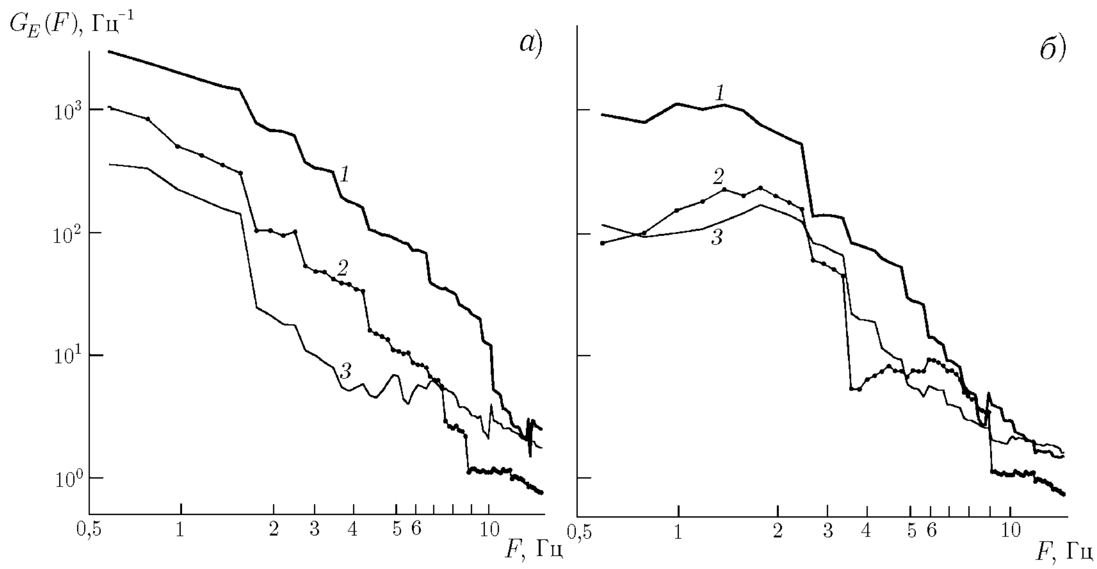

Рис. 5. Типичные спектры флуктуаций амплитуды для тропосферной (a) и стратосферной ($б$) областей

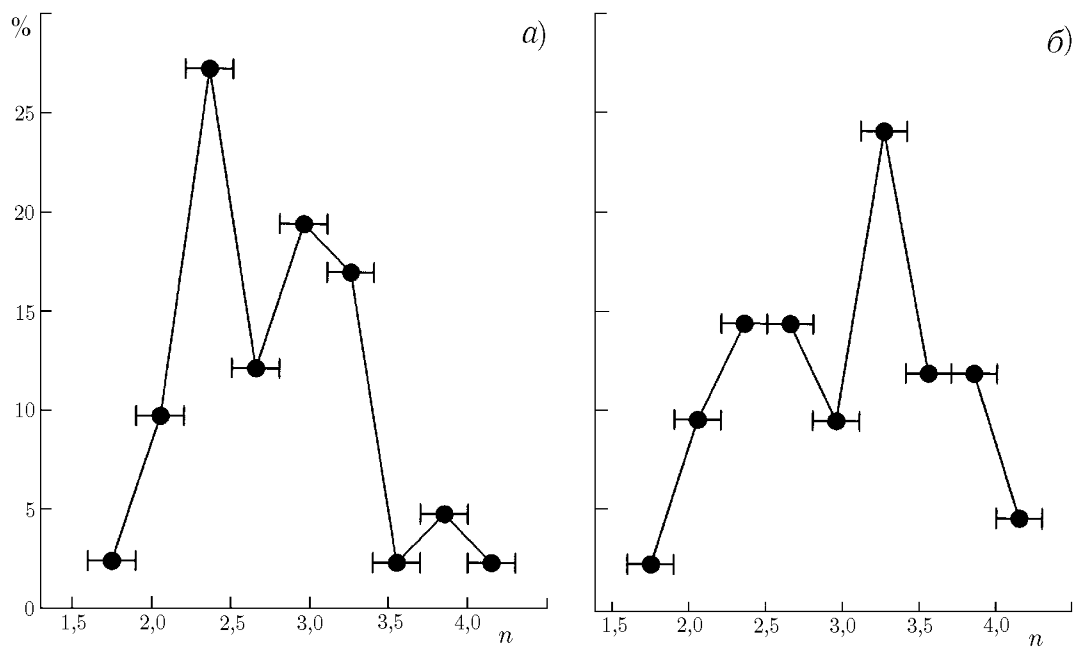

Рис. 6. Гистограммы распределения спектрального индекса n для тропосферной (a) и стратосферной ($б$) областей

$$\sigma_E^2 = k^{7/6} L_0^{-2/3} \sigma_0^2 L^{-5/6} \int_0^L [x\,(L-x)]^{5/6} \exp(-2\beta h)\,\mathrm{d}x. \tag{4}$$

В формулах (3) и (4) L_0 — внешний масштаб неоднородностей, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, $L = |AB| = L_1 + L_2$ — расстояние между спутниками (см. рис. 1). Интегрирование ведётся вдоль лучевой линии AB. В формуле (3) за начало координат принята точка C, в формуле (4) — точка A, положительное направление интегрирования в обоих выражениях от A к B. При анализе этих соотношений учтём, что высота h в атмосфере много меньше радиуса Земли, поэтому

$$\sigma_\varphi^2 = k^2 L_0 \left[\sigma_0^2 \exp(-2\beta H_0)\right] \Delta L, \tag{5}$$

$$\sigma_E^2 = k^{7/6} L_0^{-2/3} \left(\frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}\right)^{5/6} \left[\sigma_0^2 \exp(-2\beta H_0)\right] \Delta L, \tag{6}$$

где

$$\Delta L = (\pi a/\beta)^{1/2}, \tag{7}$$

a — радиус Земли. В (5) и (6) квадратными скобками выделены множители, соответствующие дисперсии флуктуаций коэффициента преломления $\sigma_N^2(H_0)$ при наибольшем приближении лучевой линии к поверхности Земли (точка C на рис. 1). Множитель ΔL — эффективная толщина условного слоя статистически неоднородной среды, который обуславливает такие же флуктуации, как и сферически симметричная неоднородная среда, описываемая соотношением (2). Этот условный слой cd показан на рис. 1 затемнением.

В экспериментах нам удалось определить среднее отношение σ_φ/σ_E. С другой стороны, из формул (5) и (6) получаем

$$\left(\frac{\sigma_\varphi}{\sigma_E}\right)^2 = k^{5/6} L_0^{5/3} \left(\frac{L_1 + L_2}{L_1 L_2}\right)^{5/6}. \tag{8}$$

Из (8) следует, что отношение σ_φ/σ_E определяется длиной волны, расстояниями L_1, L_2, внешним масштабом неоднородностей L_0 и, в соответствии с экспериментом, не зависит от H_0. Выражение (8) позволяет определить внешний масштаб неоднородностей, если известно отношение σ_φ/σ_E. Используя найденное во втором разделе отношение $\sigma_\varphi/\sigma_E \approx 3{,}4$, а также значения L_1, L_2 и λ, получаем, что в среднем $L_0 = 1{,}4$ км. Сопоставив экспериментальные зависимости $\sigma_\varphi(H_0)$ и $\sigma_E(H_0)$, представленные на рис. 2 и 3 ломаными кривыми, с расчётами этих зависимостей по формулам (5) и (6), показанные на рисунках сплошными гладкими кривыми, найдём параметры β и σ_0. Экспериментальные данные и результаты расчёта хорошо согласуются, если положить $\beta = 0{,}1$ км$^{-1}$ и $\sigma_0 = 2 \cdot 10^{-6}$. При указанных β и σ_0 среднеквадратичное отклонение флуктуаций коэффициента преломления $\sigma_N(h)$ составляет $1{,}2\cdot 10^{-6}$ и $0{,}45\cdot 10^{-6}$ для высоты h, равной 5 и 15 км соответственно. Теперь можно определить толщину условного слоя ΔL: при найденном значении β получим $\Delta L = 430$ км.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Показано, что характеристики флуктуаций амплитуды и фазы дециметровых радиоволн в затменных экспериментах на трассах спутник—спутник удовлетворительно описываются теорией распространения радиоволн в статистически неоднородной среде. Сопоставление экспериментальных данных с теорией позволяет определить показатель p степенного пространственного спектра неоднородностей атмосферы, внешний масштаб неоднородностей L_0 и зависимость дисперсии флуктуаций коэффициента преломления от высоты $\sigma_N^2(h)$.

Показатель p пространственного спектра неоднородностей коэффициента преломления атмосферы надёжно определяется по частотным спектрам флуктуаций амплитуды и фазы. Независимые амплитудные и фазовые данные существенно повышают достоверность определения p. По амплитудным и по фазовым данным значения p для тропосферы соответствуют спектру развитой турбулентности с $p = 11/3$. В стратосферной области наблюдается сильная изменчивость спектрального индекса p. Ранее этот вывод был сделан в работе [13] на основе наблюдения флуктуаций света, где показано, что часто регистрируются значения $p \approx 5$.

При анализе флуктуаций сантиметровых радиоволн в затменных экспериментах на трассах между орбитальной станцией «Мир» и геостационарным спутником также было показано, что при радиопросвечивании тропосферы в основном наблюдаются спектры амплитудных флуктуаций с индексом n, соответствующим $p = 3{,}5 \pm 0{,}5$, т. е. в тропосфере флуктуации коэффициента преломления обусловлены классической турбулентностью среды [8]. Согласно работе [8] в стратосфере в основном наблюдались спектры флуктуаций с индексом $p = 4{,}6 \pm 0{,}5$ и только в 13 % сеансов радиопросвечивания получались значения p, близкие к $11/3$. Таким образом, можно считать установленным, что флуктуации амплитуды и фазы в радиозатменных экспериментах на трассах спутник—спутник для области высот $H_0 = 2 \div 8$ км действительно обусловлены турбулентностью атмосферы, показатель степенного пространственного спектра неоднородностей которой $p = 11/3$. В тропосфере температура понижается с увеличением высоты и атмосфера находится в неустойчивом состоянии, поэтому легко образуется сильная турбулентность. Нерегулярно в этой области высот наблюдаются инверсии температуры, которые вызывают большие изменения амплитуды радиоволн. Изменения амплитуды сигнала при радиопросвечивании таких слоистых структур описаны в [5, 7, 14]. При анализе статистических неоднородностей тропосферы радиозатменным методом влияние таких слоистых структур должно быть исключено, т. е. интервалы высот ΔH_0, в которых регистрируются большие характерные изменения амплитуды и фазы, не должны использоваться при определении индексов m и n. В стратосфере температура слабо увеличивается с высотой или же образуется изотермическая область, поэтому атмосфера находится в устойчивом состоянии. При этом на стратосферных высотах образуются слоистые и волновые структуры, а классическая турбулентность проявляется в меньшей мере. Поэтому регистрируемые значения m и n, а следовательно, и показатель пространственного спектра неоднородностей атмосферы p изменяются в больших пределах.

При определении внешнего масштаба неоднородностей L_0 трудность заключается в том, что отдельное использование амплитудных или фазовых экспериментальных данных не позволяет определить L_0, т. к. в соответствующие теоретические соотношения входят другие неизвестные параметры. Мы показали, что из данных эксперимента можно определить отношение среднеквадратичных отклонений фазы и амплитуды σ_φ/σ_E, а теоретическое соотношение (8) для этой величины определяется внешним масштабом и известными параметрами, что позволяет определить L_0. Выражение (8) получено в приближении (2), однако это ограничение не является принципиальным. Нетрудно показать, что (8) справедливо и при другой зависимости $\sigma_N(h)$, если $p = 11/3$.

Степень мелкомасштабной неоднородности атмосферы может характеризоваться интенсивностью флуктуаций амплитуды и фазы, т. е. величинами σ_φ и σ_E, которые удаётся уверенно измерять в интервале высот $2 \div 25$ км. Параметры σ_φ и σ_E в теории связаны с дисперсией флуктуаций коэффициента преломления σ_N^2. Высотную зависимость $\sigma_N(h)$ удаётся определить только по усреднённым за много сеансов радиоданным. В отдельных сеансах радиопросвечивания мы встречаемся с очень сильными изменениями флуктуационных характеристик σ_φ, σ_E и спектров $G_\varphi(F)$, $G_E(F)$, так что определение σ_N становится затруднительным. Поэтому интенсивность мелкомасштабной неоднородности атмосферы лучше характеризовать дисперсией флуктуаций фазы σ_φ^2 и амплитуды σ_E^2, не прибегая к пересчёту этих величин в σ_N^2. Для повышения достоверности получаемых сведений об интенсивности неоднородностей атмосферы следует использовать результаты одновременных амплитудных и фазовых измерений. Такой условной характеристикой степени неоднородности атмосферы при массовом радиозатменном мониторинге атмосферы с использованием сигналов навигационных спутников при $\lambda = 19$ см может быть принята величина

$$\sigma = (\sigma_\varphi + 3{,}4\sigma_E)/2.$$

Для тропосферы, когда в большинстве случаев $p = 11/3$, характеристика σ^2 описывает интенсивность турбулентности среды. В стратосфере, где часто наблюдаются слоистые структуры, величина σ отражает уровень турбулентности воздуха только в частных случаях, когда последняя сильно выражена и экспериментальные значения p близки к $11/3$.

Мы провели сравнение эксперимента с теорией при условии справедливости соотношения (2). Высотная зависимость $\sigma_N(h)$ определяется метеорологическими факторами и может претерпевать сильные изменения; известно, что в нижней тропосфере при $h < 3$ км величина σ_N слабо зависит от высоты. На этих высотах на флуктуации амплитуды оказывает влияние рефракционное ослабление радиоволн, которое мы не учитывали. В связи с этим формулы (5) и (6) справедливы при $H_0 > 3$ км.

Наш эксперимент показал, что при усреднении данных, полученных за месяц измерений, флуктуационные характеристики радиосигналов соответствуют зависимости (2) при $H_0 > 3$ км. Существенным ограничением при сопоставлении эксперимента с теорией является сделанное нами предположение об изотропности статистических неоднородностей атмосферы. В действительности неоднородности атмосферы анизотропны, а их характерные масштабы по вертикали много меньше, чем по горизонтали. В этой работе проанализированы результаты экспериментов, когда осуществлялось почти вертикальное сечение атмосферы лучевой линией. Поэтому найденные параметры неоднородностей, т. е. значения p, L_0 и σ_N, относятся к «вертикальным» спектрам неоднородностей. Анализ характеристик статистических неоднородностей атмосферы возможен и при почти горизонтальном сечении атмосферы лучевой линией, когда проявляются эффекты анизотропии неоднородностей. В работе [15] дан анализ флуктуаций сантиметровых волн в затменных экспериментах при почти горизонтальном сечении атмосферы.

В этой работе мы стремились вскрыть закономерности флуктуаций амплитуды и фазы дециметровых радиоволн в затменных экспериментах на трассах между навигационными спутниками GPS и спутником MICROLAB. В работах [4, 5, 7, 8] был дан анализ флуктуаций сантиметровых радиоволн при затменных измерениях на трассах между орбитальной станцией «Мир» и геостационарными спутниками. Найденные экспериментальные закономерности для дециметровых и сантиметровых радиоволн находятся в логическом соответствии и удовлетворительно описываются теорией распространения радиоволн в статистически неоднородных средах. Эти исследования обосновывают возможность мониторинга турбулентности атмосферы.

Авторы выражают благодарность А. Г. Павельеву и С. С. Матюгову за помощь в выполнении этой работы. Мы благодарим также Университетскую корпорацию атмосферных исследований США (UCAR) за предоставленную возможность использовать первичные данные об измерении амплитуды и фазы радиоволн в экспериментах GPS/MET.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 01–02–16002).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kursinski E. R., Hajj G. A., Schofield J. T. et al. // J. Geophys. Res. 1997. V. 102, No. D19. P. 23 429.
2. Rocken C. R., Anthes M., Exner M. et al. // J. Geophys. Res. 1997. V. 102, No. D25. P. 29 849.
3. Anthes R., Rocken C., Kuo Y. // Terr. Atmos. Oceanic Sci. 2000. V. 11, No. 1. P. 115.
4. Вилков И. А., Матюгов С. С., Яковлев О. И. // Радиотехника и электроника. 1993. Т. 38, № 5. С. 795.
5. Yakovlev O. I., Matyugov S. S., Vilkov I. A. // Radio Sci. 1995. V. 30, No. 3. P. 591.
6. Гурвич А. С., Кан В. // Изв. АН. ФАО. 1997. Т. 33, № 3. С. 314.
7. Ануфриев В. А., Матюгов С. С., Яковлев О. И. // Радиотехника и электроника. 2000. Т. 45, № 1. С. 48.
8. Матюгов С. С., Яковлев О. И., Ануфриев В. А. // Радиотехника и электроника. 2001. Т. 46, № 7. С. 826.

9. Гурвич А. С., Кан В., Фёдорова О. В. // Изв. АН. ФАО. 2000. Т. 36, № 3. С. 330.
10. Яковлев О. И., Ануфриев В. А., Матюгов С. С., Павельев А. Г. // Радиотехника и электроника. 2001. Т. 46, № 12. С. 1.
11. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. Ч. 2. М.: Наука, 1978. 463 с.
12. Исимару А. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. Т. 2. М.: Мир, 1981. 317 с.
13. Александров А. П., Гречко Г. М., Гурвич А. С. и др. // Изв. АН. ФАО. 1990. Т. 26, № 1. С. 5.
14. Яковлев О. И., Вилков И. А., Гришмановский В. А. и др. // Радиотехника и электроника. 1992. Т. 37, № 1. С. 42.
15. Кан В., Матюгов С. С., Яковлев О. И. // Изв. Вузов. Радиофизика. 2002 (в печати).

Институт радиотехники и электроники РАН,
г. Москва, Россия

Поступила в редакцию
19 декабря 2001 г.

AMPLITUDE AND PHASE FLUCTUATIONS OF DECIMETER RADIO WAVES RAYING THE ATMOSPHERE VIA SATELLITE-TO-SATELLITE PATHS

V. A. Anufriev and O. I. Yakovlev

We present the results of experimental studies of the atmospheric phase and amplitude fluctuations of decimeter radio waves in radio occultation measurements using paths connecting the MICROLAB satellite and the satellites of the GPS navigation system. The dependences of the amplitude- and phase-fluctuation variance on the minimum altitude of the ray trajectory and the frequency spectra of the fluctuations are presented. The experimental data are compared with the theory of radio-wave propagation in random media. We determine the spectral index of irregularities of the atmospheric refractive index, the external scale of the irregularities, and the variance of the refractive-index fluctuations. It is shown that the radio occultation technique allows one to monitor small-scale irregularities of the atmosphere.

УДК 537.876

ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ДИПОЛЯ, ОКРУЖЁННОГО ПЛАЗМЕННЫМ ЦИЛИНДРОМ С ПОЛОСТЬЮ

Т. И. Бичуцкая, Г. И. Макаров

Решена задача о влиянии изотропного плазменного окружения цилиндрической формы малого радиуса ($ka \ll 1$) с центральной вакуумной полостью на излучение источника электромагнитных волн во внешнюю вакуумную среду. Получены условия и исследованы свойства резонансного излучения в зависимости от относительного размера внутренней полости. Показано расщепление резонансной частоты на две, коэффициенты прохождения на которых могут превосходить резонансный коэффициент прохождения для сплошного плазменного цилиндра. Проведено сравнение полученных результатов с излучением из двухслойного сферического плазменного резонатора.

Излучающие антенны, окружённые небольшой плазменной областью, на резонансных частотах способны усиливать излучение на несколько порядков [1–4] по сравнению с вакуумом при том же подводимом токе. Резонансные частоты связаны с плазменной частотой соотношениями $\omega = \omega_{\rm p}/\sqrt{3}$ [3] и $\omega = \omega_{\rm p}/\sqrt{2}$ [4] для сферической и цилиндрической плазменной области соответственно. Существование резонансов возможно при условии малых размеров плазменного окружения: $ka \ll 1$, где $k = \omega/c$ — волновое число в свободном пространстве, c — скорость света, a — поперечный размер окружающей плазменной области.

Рассмотренная ранее [1–4] модель сплошного плазменного резонатора нуждается в уточнении из-за наличия обеднённой ионной оболочки [5] вокруг излучателя, расположенного в плазме. Размеры такой оболочки зависят от множества факторов [6]: электронной концентрации плазмы, приложенного к излучателю напряжения, размеров излучателя, его частоты и др. Резонансные частоты для усложнённой модели резонатора будут отличаться от ранее изученных и будут зависеть от размеров ионной оболочки, которую в большинстве случаев [6–9] можно считать вакуумной. Опуская конкретные механизмы образования такой оболочки, исследуем излучение источника из плазменной области для модели вакуумной оболочки с резкими границами.

Рассмотрим излучение источника, окружённого узким бесконечно протяжённым плазменным цилиндром с центральной вакуумной полостью, поперечный размер которой будет меняться в пределах заданного размера a плазменной области. Построим решение уравнений Максвелла для такого резонатора и проанализируем частотную зависимость коэффициента прохождения электромагнитного поля (ЭМП) во внешнюю вакуумную среду при изменении размера вакуумной полости.

При цилиндрической форме плазменного резонатора с внутренней полостью исследуем, как и в [4] для сплошного резонатора, излучение во внешнюю вакуумную среду источника — горизонтального электрического диполя (ГЭД), помещённого на оси резонатора в начале цилиндрической системы координат (r, φ, z) (см. рис. 1). Будем полагать, что диэлектрическая проницаемость внутренней полости $(0 < r < r_1)$ равна ε_1, плазмы $(r_1 < r < a)$ — ε, внешней среды $(r > a)$ — ε_3. Величины ε_1 и ε_3 в дальнейшем положим равными единице, а пока сохраним их разными, чтобы проанализировать выражение для коэффициента прохождения при предельных размерах внутренней полости. Заметим, что в рамках поставленной задачи, как и в аналогичной задаче для слоистого плазменного резонатора сферической формы [10], для коэффициента прохождения не удаётся получить предельный переход к случаю нулевого размера внутренней полости, ранее изученному в [4]. Для осуществления указанного предельного перехода дополнительно, как и в [10], рассмотрим задачу, в которой источник излучения смещён из начала координат за границу малой внутренней полости, в плазменный слой. При этом смещение источника должно иметь такое направление, при котором ось диполя направлена по касательной к цилиндрической границе раздела двух сред, чтобы при пересечении последней источником компоненты ЭМП не менялись скачком. В качестве направления смещения возьмем $\varphi_0 = \pi/2$ (в [10] выбиралось направление $\vartheta_0 = \pi/2$) и поместим ГЭД в точку $(r_0, \varphi_0, 0)$, где $r_1 < r_0 < a$. После предельного перехода в построенном решении к нулевому размеру внутренней полости ($r_1 = 0$) устремим источник в начало координат ($r_0 = 0$). В результате получим ранее изученный коэффициент прохождения [4] для ГЭД, помещённого на оси однородного плазменного цилиндра.

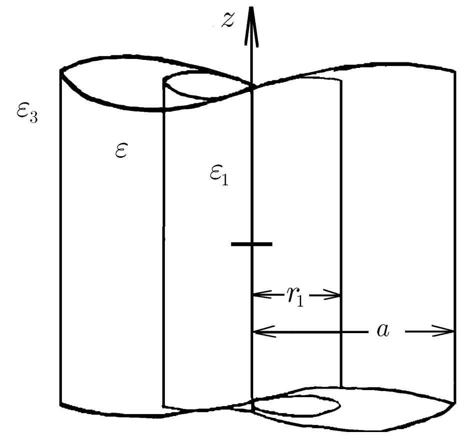

Рис. 1

Рассмотрим вначале задачу с источником, расположенным на оси внутреннего цилиндра с диэлектрической проницаемостью ε_1. Тангенциальные к поверхности цилиндра компоненты ЭМП, преобразованные по Фурье по системе функций $\exp(i\lambda\bar{z})$ и $\exp(im\varphi)$ имеют вид

$$E_{z_{m\lambda}} = C_{\text{u}} H_m^{(1)}(\bar{r}\sqrt{\bar{\varepsilon}_1}) + R_{\parallel}^{(1)} J_m(\bar{r}\sqrt{\bar{\varepsilon}_1}), \qquad H_{z_{m\lambda}} = C_{\text{v}} H_m^{(1)}(\bar{r}\sqrt{\bar{\varepsilon}_1}) + R_{\perp}^{(1)} J_m(\bar{r}\sqrt{\bar{\varepsilon}_1}),$$

$$i\bar{r}H_{\varphi_{m\lambda}} = -\frac{\varepsilon_1}{\bar{\varepsilon}_1} H_m^{(1)}(\bar{r}\sqrt{\bar{\varepsilon}_1}) \left(C_{\text{u}} Z_m + \frac{i\lambda m}{\varepsilon_1} C_{\text{v}} \right) - \frac{\varepsilon_1}{\bar{\varepsilon}_1} J_m(\bar{r}\sqrt{\bar{\varepsilon}_1}) \left(R_{\parallel}^{(1)} Y_m + \frac{i\lambda m}{\varepsilon_1} R_{\perp}^{(1)} \right),$$

$$i\bar{r}E_{\varphi_{m\lambda}} = \frac{1}{\bar{\varepsilon}_1} H_m^{(1)}(\bar{r}\sqrt{\bar{\varepsilon}_1}) \left(C_{\text{v}} Z_m - i\lambda m C_{\text{u}} \right) + \frac{1}{\bar{\varepsilon}_1} J_m(\bar{r}\sqrt{\bar{\varepsilon}_1}) \left(R_{\perp}^{(1)} Y_m - i\lambda m R_{\parallel}^{(1)} \right)$$

во внутренней полости ($0 \le r \le r_1$) и

$$E_{z_{m\lambda}} = D_{\parallel}^{\text{p}} H_m^{(1)}(\bar{r}\sqrt{\bar{\varepsilon}}) + R_{\parallel} J_m(\bar{r}\sqrt{\bar{\varepsilon}}), \qquad H_{z_{m\lambda}} = D_{\perp}^{\text{p}} H_m^{(1)}(\bar{r}\sqrt{\bar{\varepsilon}}) + R_{\perp} J_m(\bar{r}\sqrt{\bar{\varepsilon}}),$$

$$i\bar{r}H_{\varphi_{m\lambda}} = -\frac{\varepsilon}{\bar{\varepsilon}} H_m^{(1)}(\bar{r}\sqrt{\bar{\varepsilon}}) \left(D_{\parallel}^{\text{p}} Z_m + \frac{i\lambda m}{\varepsilon} D_{\perp}^{\text{p}} \right) - \frac{\varepsilon}{\bar{\varepsilon}} J_m(\bar{r}\sqrt{\bar{\varepsilon}}) \left(R_{\parallel} Y_m + \frac{i\lambda m}{\varepsilon} R_{\perp} \right),$$

$$i\bar{r}E_{\varphi_{m\lambda}} = \frac{1}{\bar{\varepsilon}} H_m^{(1)}(\bar{r}\sqrt{\bar{\varepsilon}}) \left(D_{\perp}^{\text{p}} Z_m - i\lambda m D_{\parallel}^{\text{p}} \right) + \frac{1}{\bar{\varepsilon}} J_m(\bar{r}\sqrt{\bar{\varepsilon}}) \left(R_{\perp} Y_m - i\lambda m R_{\parallel} \right)$$

в плазменной среде ($r_1 \le r \le a$). Здесь компоненты $H_{\varphi_{m\lambda}}$ и $H_{z_{m\lambda}}$ магнитного поля умножены на импеданс свободного пространства $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$, $\bar{r} = kr$, $\bar{z} = kz$, $\bar{\varepsilon} = \varepsilon - \lambda^2$, $\bar{\varepsilon}_1 = \varepsilon_1 - \lambda^2$, $Y_m = z\dot{J}_m(z)/J_m(z)$, $J_m(z)$ и $\dot{J}_m(z)$ — функция Бесселя первого рода порядка m и её производная по аргументу, $Z_m = z\dot{H}_m^{(1)}(z)/H_m^{(1)}(z)$, $H_m^{(1)}(z)$ и $\dot{H}_m^{(1)}(z)$ — функция Ханкеля первого рода порядка m и её производная по аргументу, $R_{\parallel}^{(1)}$ и $R_{\perp}^{(1)}$ — коэффициенты отражения полей TM- и TE-поляризации от границы $r = r_1$, $R_{\parallel}$ и $R_{\perp}$ — коэффициенты отражения полей TM- и TE-поляризации от границы $r = a$, $D_{\parallel}^{\text{p}}$ и $D_{\perp}^{\text{p}}$ — коэффициенты прохождения полей TE- и TM-поляризации через границу $r = a$. Для ГЭД с дипольным моментом $Il/(i\omega)$, где I — ток на входе антенны, l — эффективная длина вибратора, коэффициенты возбуждения полей TE- и TM-поляризации равны соответственно $C_{\text{v}} = C_0\sqrt{\bar{\varepsilon}_1}$ и $C_{\text{u}} = C_{\text{v}} i\lambda m/\varepsilon_1$, где $C_0 = IlkZ_0/(16\pi)$. Решение, удовлетворяющее условию излучения на бесконечности в среде с диэлектрической проницаемостью ε_3, содержит только функции Ханкеля с коэффициентами прохождения $D_{\|,m}$, $D_{\perp,m}$ через границу $r=a$:

$$\begin{gathered}
E_{z_{m\lambda}}=D_{\|,m}H_m^{(1)}(\bar r\sqrt{\bar\varepsilon_3}),\qquad H_{z_{m\lambda}}=D_{\perp,m}H_m^{(1)}(\bar r\sqrt{\bar\varepsilon_3}),\\
i\bar rH_{\varphi_{m\lambda}}=-\frac{\varepsilon_3}{\bar\varepsilon_3}H_m^{(1)}(\bar r\sqrt{\bar\varepsilon_3})\left(D_{\|,m}Z_m+\frac{i\lambda m}{\varepsilon_3}D_{\perp,m}\right),\\
i\bar rE_{\varphi_{m\lambda}}=\frac{1}{\bar\varepsilon_3}H_m^{(1)}(\bar r\sqrt{\bar\varepsilon_3})\left(D_{\perp,m}Z_m-i\lambda mD_{\|,m}\right),
\end{gathered}\tag{1}$$

где $\bar\varepsilon_3=\varepsilon_3-\lambda^2$. Записывая граничные условия для тангенциальных компонент ЭМП на поверхности внутреннего цилиндра с радиусом $r=r_1$ и внешнего плазменного цилиндра с радиусом $r=a$, получим систему из восьми уравнений, из которых определяются коэффициенты прохождения $D_{\|,m}$, $D_{\perp,m}$ компонент $E_{z_{m\lambda}}$, $H_{z_{m\lambda}}$ поля во внешнюю среду. Их выражения для азимутальной волны $m=\pm1$ (единственной, которая возбуждается расположенным на оси цилиндра ГЭД) в квазистатическом приближении имеют вид

$$D_{\|,m}=i\lambda m\,\frac{\sqrt{\bar\varepsilon_3}}{\varepsilon_3}\,\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}\,\frac{4}{(1+\varepsilon/\varepsilon_1)\,(1+\varepsilon/\varepsilon_3)-\alpha^2\,(1-\varepsilon/\varepsilon_1)\,(1-\varepsilon/\varepsilon_3)}\,,\qquad D_{\perp,m}=\frac{\varepsilon_3}{i\lambda m}\,D_{\|,m}.\tag{2}$$

В (2) опущен множитель C_0 и учтены первые члены степенных разложений цилиндрических функций, принимая во внимание малые размеры цилиндра ($ka\ll1$). В выражение (2) входит параметр $\alpha=r_1/a$, который определяет относительный размер вакуумной оболочки. Отметим, что при $\alpha=0$ формула (2) не переходит в известное [4] выражение для коэффициента прохождения ЭМП горизонтального электрического диполя, расположенного на оси однородного плазменного цилиндра, так что диапазон изменения α в (2) ограничен снизу некоторым малым значением α_0.

Для малой окрестности $0\le\alpha\le\alpha_0$ нулевого значения α рассмотрим задачу с излучателем в виде ГЭД, который смещён из начала координат в точку $(r_0,\varphi_0,0)$, расположенную в плазменной среде: $r_0>r_1$, $\varphi_0=\pi/2$. Электромагнитное поле смещённого источника содержит множество азимутальных гармоник, среди которых мы оставим только главную с азимутальным числом $m=\pm1$, поскольку амплитуды остальных, пропорциональные более высоким степеням малого смещения источника kr_0, малы. Поэтому при решении задачи со смещённым источником ограничимся только этим членом ряда и для него будем искать коэффициент прохождения во внешнюю среду с диэлектрической проницаемостью ε_3. Решение во внутренней полости $r<r_1$ будет содержать функции, не имеющие особенности в начале координат:

$$\begin{gathered}
E_{z_{m\lambda}}=D_{\|}^{(1)}J_m(\bar r\sqrt{\bar\varepsilon_1}),\qquad H_{z_{m\lambda}}=D_{\perp}^{(1)}J_m(\bar r\sqrt{\bar\varepsilon_1}),\\
i\bar rH_{\varphi_{m\lambda}}=-\frac{\varepsilon_1}{\bar\varepsilon_1}\,J_m(\bar r\sqrt{\bar\varepsilon_1})\left(D_{\|}^{(1)}Y_m+\frac{i\lambda m}{\varepsilon_1}D_{\perp}^{(1)}\right),\\
i\bar rE_{\varphi_{m\lambda}}=\frac{1}{\bar\varepsilon_1}\,J_m(\bar r\sqrt{\bar\varepsilon_1})\left(D_{\perp}^{(1)}Y_m-i\lambda mD_{\|}^{(1)}\right),
\end{gathered}$$

где $D_{\|}^{(1)}$ и $D_{\perp}^{(1)}$ — коэффициенты прохождения ЭМП ТМ- и ТЕ-поляризации через границу $r=r_1$. В плазменном слое представление поля в областях $r_1<r<r_0$ и $r_0<r<a$ будет разным. Так, для $r_1<r<r_0$ имеем

$$E_{z_{m\lambda}}=C_{\mathrm u}^{(1)}J_m(\bar r\sqrt{\bar\varepsilon})+R_{\|}J_m(\bar r\sqrt{\bar\varepsilon}),\qquad H_{z_{m\lambda}}=C_{\mathrm v}^{(1)}J_m(\bar r\sqrt{\bar\varepsilon})+R_{\perp}J_m(\bar r\sqrt{\bar\varepsilon}),$$

$$i\bar rH_{\varphi_{m\lambda}}=-\frac{\varepsilon}{\bar\varepsilon}\,J_m(\bar r\sqrt{\bar\varepsilon})\left(C_{\mathrm u}^{(1)}Y_m+\frac{i\lambda m}{\varepsilon}\,C_{\mathrm v}^{(1)}\right)-\frac{\varepsilon}{\bar\varepsilon}\,J_m(\bar r\sqrt{\bar\varepsilon})\left(R_{\|}Y_m+\frac{i\lambda m}{\varepsilon}\,R_{\perp}\right),$$

$$i\bar{r}E_{\varphi_{m\lambda}} = \frac{1}{\bar{\varepsilon}} J_m(\bar{r}\sqrt{\bar{\varepsilon}}) \left(C_{\rm v}^{(1)} Y_m - i\lambda m C_{\rm u}^{(1)} \right) + \frac{1}{\bar{\varepsilon}} J_m(\bar{r}\sqrt{\bar{\varepsilon}}) \left(R_\perp Y_m - i\lambda m R_\parallel \right),$$

где коэффициенты возбуждения ЭМП $C_{\rm u}^{(1)} = -C_0\,[i\lambda m/(\varepsilon \bar{r}_0)]\, H_m^{(1)}(\bar{r}_0\sqrt{\bar{\varepsilon}})$ и $C_{\rm v}^{(1)}$ связаны соотношением $C_{\rm v}^{(1)} = C_{\rm u}^{(1)}\,[\varepsilon/(i\lambda m)]\, Z_m$, $\bar{r}_0 = kr_0$, $R_\parallel$ и $R_\perp$ — коэффициенты отражения ЭМП ТМ- и ТЕ-поляризации от границы $r = a$. Для $r_0 < r < a$ получаем

$$E_{z_{m\lambda}} = C_{\rm u}^{(2)} H_m^{(1)}(\bar{r}\sqrt{\bar{\varepsilon}}) + R_\parallel^{(1)} H_m^{(1)}(\bar{r}\sqrt{\bar{\varepsilon}}), \qquad H_{z_{m\lambda}} = C_{\rm v}^{(2)} H_m^{(1)}(\bar{r}\sqrt{\bar{\varepsilon}}) + R_\perp^{(1)} H_m^{(1)}(\bar{r}\sqrt{\bar{\varepsilon}}),$$

$$i\bar{r}H_{\varphi_{m\lambda}} = -\frac{\varepsilon}{\bar{\varepsilon}} H_m^{(1)}(\bar{r}\sqrt{\bar{\varepsilon}}) \left(C_{\rm u}^{(2)} Z_m + \frac{i\lambda m}{\varepsilon} C_{\rm v}^{(2)} \right) - \frac{\varepsilon}{\bar{\varepsilon}} H_m^{(1)}(\bar{r}\sqrt{\bar{\varepsilon}}) \left(R_\parallel^{(1)} Z_m + \frac{i\lambda m}{\varepsilon} R_\perp^{(1)} \right),$$

$$i\bar{r}E_{\varphi_{m\lambda}} = \frac{1}{\bar{\varepsilon}} H_m^{(1)}(\bar{r}\sqrt{\bar{\varepsilon}}) \left(C_{\rm v}^{(2)} Z_m - i\lambda m C_{\rm u}^{(2)} \right) + \frac{1}{\bar{\varepsilon}} H_m^{(1)}(\bar{r}\sqrt{\bar{\varepsilon}}) \left(R_\perp^{(1)} Z_m - i\lambda m R_\parallel^{(1)} \right),$$

где коэффициенты возбуждения ЭМП $C_{\rm u}^{(2)} = -C_0\,[i\lambda m/(\varepsilon \bar{r}_0)]\, J_m(\bar{r}_0\sqrt{\bar{\varepsilon}})$ и $C_{\rm v}^{(2)}$ связаны соотношением $C_{\rm v}^{(2)} = C_{\rm u}^{(2)}\,[\varepsilon/(i\lambda m)]\, Y_m$, $R_\parallel^{(1)}$ и $R_\perp^{(1)}$ — коэффициенты отражения ЭМП ТМ- и ТЕ-поляризации от границы $r = r_1$. Во внешней среде решение описывается выражениями (1). Используя граничные условия для касательных компонент полей на границах плазменного слоя, в квазистатическом приближении получим для коэффициентов прохождения ЭМП смещённого ГЭД выражения

$$D_{\parallel,m}^{(\varepsilon)} = 2i\lambda m\,\frac{\sqrt{\bar{\varepsilon}_3}}{\varepsilon_3}\,\frac{1 + \varepsilon/\varepsilon_1 - (r_1/r_0)^2\,(1 - \varepsilon/\varepsilon_1)}{(1 + \varepsilon/\varepsilon_1)\,(1 + \varepsilon/\varepsilon_3) - \alpha^2\,(1 - \varepsilon/\varepsilon_1)\,(1 - \varepsilon/\varepsilon_3)}\,, \qquad D_{\perp,m}^{(\varepsilon)} = \frac{\varepsilon_3}{i\lambda m}\, D_{\parallel,m}^{(\varepsilon)}, \tag{3}$$

в которых опущен множитель C_0 и учтены первые члены степенных разложений цилиндрических функций. В отличие от (2) выражения (3) существенно зависят от положения источника относительно границы r_1 внутренней полости. Так, при расположении смещённого ГЭД на поверхности внутренней полости $r_0 = r_1$ коэффициенты прохождения (2), (3) во внешнюю среду с диэлектрической проницаемостью ε_3 связаны соотношениями

$$D_{\parallel,m} = D_{\parallel,m}^{(\varepsilon)}, \qquad D_{\perp,m} = D_{\perp,m}^{(\varepsilon)}, \tag{4}$$

как и должно быть при касательном расположении оси диполя относительно границы раздела двух сред.

Поясним полученные выражения для коэффициентов прохождения (2), (3) при предельных параметрах α. В случае $\alpha = 1$ толщина плазменного слоя равна нулю, и коэффициенты прохождения (2)

$$D_{\parallel,m} = i\lambda m\,\frac{\sqrt{\bar{\varepsilon}_3}}{\varepsilon_3}\,\frac{2}{1 + \varepsilon_1/\varepsilon_3}\,, \qquad D_{\perp,m} = \frac{\varepsilon_3}{i\lambda m}\, D_{\parallel,m}$$

становятся равными коэффициентам прохождения излучения ГЭД, расположенного в среде с диэлектрической проницаемостью ε_1, во внешнюю среду. В другом предельном случае $\alpha = 0$, когда внутренняя полость цилиндра сжимается до нулевого размера ($r_1 < r_0$, $r_1 = 0$), коэффициенты прохождения (3)

$$D_{\parallel,m}^{(\varepsilon)} = i\lambda m\,\frac{\sqrt{\bar{\varepsilon}_3}}{\varepsilon_3}\,\frac{2}{1 + \varepsilon/\varepsilon_3}\,, \qquad D_{\perp,m}^{(\varepsilon)} = \frac{\varepsilon_3}{i\lambda m}\, D_{\parallel,m}^{(\varepsilon)}$$

становятся равными коэффициентам прохождения ЭМП ГЭД, расположенного в среде с диэлектрической проницаемостью ε, во внешнюю среду с диэлектрической проницаемостью ε_3 и совпадают с полученными ранее выражениями [4]. Таким образом, для цилиндрического резонатора с полостью, как и для аналогичного сферического резонатора [10], коэффициенты прохождения при предельных параметрах α не отличаются от соответствующих коэффициентов для однородного резонатора.

Учитывая в степенном разложении цилиндрических функций следующий член, ответственный за потери на излучение:

$$H_1^{(1)}(z) \approx -\frac{2i}{\pi z}\left(1-\frac{z^2}{4}\,[C]\right), \qquad \frac{z\dot H_1^{(1)}(z)}{H_1^{(1)}(z)} \approx -\left(1+\frac{z^2}{2}\,[C]\right),$$

где $[C]=2C-i\pi+2\ln(z/2)$, C — постоянная Эйлера, для коэффициентов прохождения вместо (2), (3) получим приближённые выражения

$$D_{\parallel,m} = i\lambda m\,\frac{\sqrt{\bar\varepsilon_3}}{\varepsilon_3}\,\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}\,\frac{4}{(1-\gamma_1/2)\,(1-\gamma_{3a}/2)}\,\frac{1}{\Delta}\,, \tag{5}$$

$$D^{(\varepsilon)}_{\parallel,m} = i\lambda m\,(2+\gamma_{3a})\,\frac{\sqrt{\bar\varepsilon_3}}{\varepsilon_3}\left[1+\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}+\gamma_1^{(1)}+\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^2\left(1-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\right)\left(1+\frac{\gamma_0}{2}\right)\left(1+\frac{\gamma_1}{2}\right)\right]\frac{1}{\Delta}\,. \tag{6}$$

Здесь

$$\Delta = \left(1+\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}+\gamma_1^{(1)}\right)\left(1+\frac{\varepsilon}{\varepsilon_3}+\gamma_a\right)+\alpha^2\left(1-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\right)\left(1-\frac{\varepsilon}{\varepsilon_3}\right)\left(1-\frac{\gamma_a}{2}\right)\left(1+\frac{\gamma_1}{2}\right),$$

$\gamma_a=-i\pi\bar a^2\bar\varepsilon/2$, $\gamma_1=-i\pi\bar r_1^2\bar\varepsilon/2$, $\gamma_0=-i\pi\bar r_0^2\bar\varepsilon/2$, $\gamma_1^{(1)}=-i\pi\bar r_1^2\bar\varepsilon_1/2$, $\gamma_{3a}=-i\pi\bar a^2\bar\varepsilon_3/2$, $\bar a=ka$, $\bar r_1=kr_1$. Коэффициенты прохождения $D_{\perp,m}$, $D^{(\varepsilon)}_{\perp,m}$ ЭМП ТЕ-поляризации связаны с коэффициентами $D_{\parallel,m}$, $D^{(\varepsilon)}_{\parallel,m}$ прежними соотношениями (2), (3).

Теперь, полагая $\varepsilon_1=\varepsilon_3=1$, подставим коэффициенты прохождения (5), (6) в компоненты ЭМП во внешней среде (1) и вычислим интегралы по λ при $m=1$ в дальней зоне ($|\bar r\,\sqrt{\bar\varepsilon_3}|\gg 1$) методом наискорейшего спуска в седловой точке $\lambda=\cos\theta$, где θ — угол между осью z и направлением из источника в точку наблюдения. Затем, объединяя результат с аналогичным для $m=-1$, получим для компонент прошедшего ЭМП в вакууме следующие выражения:

$$E_z = -\frac{\exp ikR}{R}\,D_\parallel\cos\theta\sin\theta\cos\varphi, \qquad H_z = -\frac{\exp ikR}{R}\,D_\perp\sin\theta\sin\varphi,$$

$$E_r = \frac{\exp ikR}{R}\,D_\parallel\cos^2\theta\cos\varphi, \qquad H_r = \frac{\exp ikR}{R}\,D_\perp\cos\theta\sin\varphi,$$

$$E_\varphi = -\frac{e^{ikR}}{R}\,D_\perp\sin\varphi, \qquad H_\varphi = \frac{e^{ikR}}{R}\,D_\parallel\cos\theta\cos\varphi,$$

Здесь введены обозначения $D_\parallel\cos\theta=D_{\parallel,+1}-D_{\parallel,-1}$ и $D_\perp=D_{\perp,+1}+D_{\perp,-1}$, так что коэффициенты прохождения излучения обеих поляризаций $D_\parallel=D_\perp=D$ имеют вид

$$D = \frac{4}{\Delta_1-i\pi\bar a^2\,\Delta_2/4}\,, \tag{7}$$

где

$$\Delta_1=(1+\varepsilon)\,(1+1/\varepsilon)+\alpha^2\,(1-\varepsilon)\,(1-1/\varepsilon), \qquad \Delta_2=(\varepsilon-1/\varepsilon)\left(1-\alpha^2\right).$$

Аналогично для излучения смещённого источника коэффициенты прохождения имеют вид

$$D^{(\varepsilon)}_\parallel = D^{(\varepsilon)}_\perp = D^{(\varepsilon)} = 2\,\frac{1+1/\varepsilon+(r_1/r_0)^2\,(1-1/\varepsilon)}{\Delta_1-i\pi\bar a^2\,\Delta_2/4}\,. \tag{8}$$

В выражениях (7), (8) опущен множитель $iIlkZ_0/(4\pi)$.

Исследуем частотную зависимость коэффициента прохождения для различных значений α. Интервал изменения α разобьём на три области, выделив малые окрестности вблизи предельных значений $\alpha=0$ и $\alpha=1$:

$$0 \le \alpha \le \alpha_0 \text{ — область I;}$$
$$\alpha_0 \le \alpha \le \alpha_1 \text{ — область II;}$$
$$\alpha_1 \le \alpha \le 1 \text{ — область III,}$$

где $\alpha_0 = r_0/a$, а величина α_1 будет определена ниже.

Исследуем резонансные свойства коэффициентов прохождения (7), (8) в зависимости от параметра α в областях II, III и I соответственно.

Полагая вначале, что абсолютная величина действительной части $\varepsilon_{\rm Re}$ диэлектрической проницаемости плазмы много больше её мнимой части,

$$|\varepsilon_{\rm Re}| \gg \varepsilon_{\rm Im}, \tag{9}$$

получим, что условие резонанса в (7), (8) определяется в виде $\operatorname{Re}\Delta_1 = 0$, или

$$(\varepsilon_{\rm Re} + 1/\varepsilon_{\rm Re})\,(1-\alpha^2) + 2\,(1+\alpha^2) = 0. \tag{10}$$

Удовлетворяющие (10) значения диэлектрической проницаемости

$$\varepsilon_{\rm Re}^{(1)} = -\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\,, \qquad \varepsilon_{\rm Re}^{(2)} = -\frac{1-\alpha}{1+\alpha} \tag{11}$$

содержат дробно-линейную зависимость от α (в отличие от квадратичной в исходных выражениях) и при $\alpha \to 0$ переходят в известное [4] условие резонанса $\varepsilon = -1$ для сплошного плазменного цилиндра. Для диэлектрической проницаемости плазмы

$$\varepsilon = 1 - \frac{1}{x^2\,(1 + i\tilde{\nu}_{\rm p}/x)}\,, \tag{12}$$

где $\tilde{\nu}_{\rm p} = \nu/\omega_{\rm p}$, $x = \omega/\omega_{\rm p}$, ν — эффективная частота соударений электронов с ионами и нейтральными молекулами, $\omega_{\rm p}$ — плазменная круговая частота электронов, соответствующие (11) резонансные частоты записываются в виде

$$\omega^{(1)} = \frac{\omega_{\rm p}}{\sqrt{2}}\,\sqrt{1-\alpha}\,, \qquad \omega^{(2)} = \frac{\omega_{\rm p}}{\sqrt{2}}\,\sqrt{1+\alpha} \tag{13}$$

и при $\alpha = 0$ переходят в резонансную частоту [4] сплошного плазменного цилиндра. Отметим, что резонансные частоты для аналогичного сферического слоистого плазменного резонатора [10] аддитивно зависят не от α, а от α^3 и при $\alpha = 0$ имеют различные предельные значения, одно из которых, низкочастотное, совпадает с резонансной частотой однородной плазменной сферы. При переходе от (11) к (13) использовались приближённые выражения для диэлектрической проницаемости плазмы: $\varepsilon_{\rm Re} \approx 1 - 1/x^2$, $\varepsilon_{\rm Im} \approx \tilde{\nu}_{\rm p}/x^3$, справедливость которых, а также неравенства (9) подтверждается значениями резонансных частот (13) для всех α за исключением области III.

Резонансные частоты (13) образуют с ростом α низкочастотную $\omega^{(1)}$ и высокочастотную $\omega^{(2)}$ ветви. Резонансная частота $\omega = \omega_{\rm p}/\sqrt{2}$ для сплошного плазменного цилиндра [4] является точкой выхода обеих ветвей (13) при $\alpha = 0$. Вследствие слияния точек выхода в случае цилиндрического слоистого резонатора не представляется возможным идентифицировать принадлежность ветвей резонансу плазмы с внутренним или внешним вакуумом, в отличие от случая аналогичного сферического резонатора [10], в котором точки выхода ветвей разделены. С ростом малого размера вакуумной полости (параметра α) резонансные частоты (13) смещаются по направлению к своим предельным значениям при $\alpha = 1$: $\omega^{(1)} = 0$ и $\omega^{(2)} = \omega_{\rm p}$, как и в случае слоистого сферического резонатора. Конкретные значения резонансных частот в области III не описываются формулами (13) и будут изучены в дальнейшем.

Для α из области II коэффициент прохождения (7) на резонансных частотах (13) имеет следующее приближённое представление для $\alpha \ll 1$:

$$|D^{(1)}| \approx \frac{1}{2\alpha}\,\frac{1}{\dfrac{\tilde{\nu}_{\mathrm{p}}\sqrt{2}}{\sqrt{1-\alpha}\,(1+\alpha)} + \dfrac{\gamma_{\mathrm{p}}}{4}\,(1-\alpha)}\,, \qquad |D^{(2)}| \approx \frac{1}{2\alpha}\,\frac{1}{\dfrac{\tilde{\nu}_{\mathrm{p}}\sqrt{2}}{\sqrt{1+\alpha}\,(1-\alpha)} + \dfrac{\gamma_{\mathrm{p}}}{4}\,(1+\alpha)}\,; \tag{14}$$

соответственно для области I, используя (8), получаем

$$|D^{(\varepsilon,1)}| \approx \frac{1}{2}\,\frac{1+\alpha a^2/r_0^2}{\dfrac{\tilde{\nu}_{\mathrm{p}}\sqrt{2}}{\sqrt{1-\alpha}} + \dfrac{\gamma_{\mathrm{p}}}{4}\,(1-\alpha^2)}\,, \qquad |D^{(\varepsilon,2)}| \approx \frac{1}{2}\,\frac{|1-\alpha a^2/r_0^2 + i\,(a^2/r_0^2)\,\tilde{\nu}_{\mathrm{p}}\sqrt{2}\,\sqrt{1+\alpha}|}{\dfrac{\tilde{\nu}_{\mathrm{p}}\sqrt{2}}{\sqrt{1+\alpha}} + \dfrac{\gamma_{\mathrm{p}}}{4}\,(1-\alpha^2)} \tag{15}$$

при $\alpha^2 \gg \tilde{\nu}_{\mathrm{p}}^2$ и

$$|D^{(\varepsilon,1)}| \approx \frac{1+\alpha a^2/r_0^2}{\dfrac{\tilde{\nu}_{\mathrm{p}}\sqrt{2}}{(1-\alpha)^{3/2}} + \dfrac{\gamma_{\mathrm{p}}}{2}\,(1-\alpha^2)}\,, \qquad |D^{(\varepsilon,2)}| \approx \frac{1-\alpha a^2/r_0^2}{\dfrac{\tilde{\nu}_{\mathrm{p}}\sqrt{2}}{(1+\alpha)^{3/2}} + \dfrac{\gamma_{\mathrm{p}}}{2}\,(1-\alpha^2)} \tag{16}$$

при $\alpha^2 \ll \tilde{\nu}_{\mathrm{p}}^2$, где $\gamma_{\mathrm{p}} = \pi\tilde{a}_{\mathrm{p}}^2/4$, $\tilde{a}_{\mathrm{p}} = \omega_{\mathrm{p}} a/c$. Полоса пропускания, соответствующая коэффициенту прохождения (7), для низкочастотного и высокочастотного резонанса имеет вид

$$\frac{\Delta\omega^{(1)}}{\omega_{\mathrm{p}}} = \frac{\tilde{\nu}_{\mathrm{p}}}{2} + \frac{\gamma_{\mathrm{p}}\sqrt{2}}{16}\,(1-\alpha^2)\,\sqrt{1-\alpha}\,, \qquad \frac{\Delta\omega^{(2)}}{\omega_{\mathrm{p}}} = \frac{\tilde{\nu}_{\mathrm{p}}}{2} + \frac{\gamma_{\mathrm{p}}\sqrt{2}}{16}\,(1-\alpha^2)\,\sqrt{1+\alpha}\,. \tag{17}$$

Полоса пропускания, соответствующая коэффициенту (8), определяется из (17) при $\alpha^2 \gg \tilde{\nu}_{\mathrm{p}}^2$, а при $\alpha^2 \ll \tilde{\nu}_{\mathrm{p}}^2$ описывается выражениями

$$\frac{\Delta\omega^{(1)}}{\omega_{\mathrm{p}}} = \frac{\tilde{\nu}_{\mathrm{p}}}{2} + \frac{\gamma_{\mathrm{p}}\sqrt{2}}{8}\,(1-\alpha)^{3/2}\,(1-\alpha^2), \qquad \frac{\Delta\omega^{(2)}}{\omega_{\mathrm{p}}} = \frac{\tilde{\nu}_{\mathrm{p}}}{2} + \frac{\gamma_{\mathrm{p}}\sqrt{2}}{8}\,(1+\alpha)^{3/2}\,(1-\alpha^2). \tag{18}$$

Отметим, что выражения (14)–(18) для коэффициента прохождения и полосы пропускания в отличие от аналогичных выражений для слоистой сферы [10] различны при $\alpha > \tilde{\nu}_{\mathrm{p}}$ и $\alpha < \tilde{\nu}_{\mathrm{p}}$ и имеют не кубическую, а линейную и квадратичную зависимость от α.

Проанализируем полученные результаты в зависимости от α, предполагая, что тепловые потери и потери на излучение являются малыми величинами одного порядка, и сравним их с аналогичными выражениями [4]

$$|D_0| = \frac{1}{\tilde{\nu}_{\mathrm{p}}\sqrt{2} + \gamma_{\mathrm{p}}/2}\,, \qquad \frac{\Delta\omega}{\omega_{\mathrm{p}}} = \frac{\tilde{\nu}_{\mathrm{p}}}{2} + \frac{\gamma_{\mathrm{p}}\sqrt{2}}{8} \tag{19}$$

для случая однородного плазменного цилиндра, окружающего ГЭД, в которых в силу малости параметров $\tilde{\nu}_{\mathrm{p}}$ и $\tilde{a}_{\mathrm{p}}$ коэффициент прохождения на несколько порядков превышает единицу, а ширина полосы на несколько порядков меньше резонансной частоты.

Для малых α из области II резонансные значения (14) коэффициентов прохождения для низкочастотной и высокочастотной ветвей, обратно пропорциональные α, значительно превосходят коэффициент прохождения D_0 (19) для однородного плазменого цилиндра, а соответствующие полосы пропускания (17) несколько у́же, чем (19). В отсутствие тепловых потерь или в случае, когда они значительно меньше потерь на излучение, полоса пропускания для слоистого плазменного цилиндра становится в два раза у́же полосы для однородного плазменного цилиндра. С ростом параметра α резонансные значения (14) коэффициентов прохождения уменьшаются, и подчёркивается вклад тепловых потерь. Вклад тепловых потерь в полосу пропускания (17) не зависит от размера вакуумной полости.

Для малых α из области I при расположении смещённого диполя на границе вакуумной полости $r_0 = r_1$ резонансные значения модулей коэффициентов прохождения (15) совпадают с соответствующими выражениями (14) для источника в виде ГЭД, расположенного на оси цилиндра. При дальнейшем уменьшении размера r_1 внутренней полости низкочастотный коэффициент прохождения (15) плавно уменьшается до значения (16), совпадающего при $\alpha = 0$ с резонансным значением (19) коэффициента прохождения для однородного плазменного цилиндра. Резонансное значение высокочастотного коэффициента прохождения согласно (15) с уменьшением r_1 вначале падает почти до нуля при $\alpha = r_0^2/a^2$, а затем возрастает до значения (16), равного (19) при $\alpha = 0$. Полоса пропускания (17) для каждого из резонансов, вначале несколько меньшая, чем (19), с уменьшением параметра α становится ей равной: согласно (18) при $\alpha = 0$. Из (13), (17) можно определить параметр α_{01}, при превышении которого ($\alpha > \alpha_{01}$) существуют две раздельные резонансные кривые. Последние можно считать разрешёнными, если, как и в случае резонансного излучения из сплошного анизотропного плазменного цилиндра [11], интервал между резонансными частотами превосходит полосу пропускания (17). Введём также параметр α_{02}, который определяется из условия, что при $\alpha < \alpha_{02}$ двухслойный цилиндрический резонатор ведёт себя согласно (16), (18) как сплошной плазменный цилиндр. Указанные параметры описываются выражениями

$$\alpha_{01} \approx \frac{\tilde{\nu}_{\text{p}}\sqrt{2}}{2} + \frac{\gamma_{\text{p}}}{2}, \qquad \alpha_{02} \approx 2\sqrt{2}\,\tilde{\nu}_{\text{p}}\left(\frac{r_0}{a}\right)^2. \tag{20}$$

Отметим, что в сферическом двухслойном резонаторе [10] параметр α_{02}, определяемый из условия, что при $\alpha < \alpha_{02}$ исчезающий высокочастотный резонансный коэффициент прохождения становится меньше коэффициента прохождения в вакууме и двухслойный резонатор ведёт себя как сплошная плазменная сфера, достигается при большем относительном размере внутренней полости: $\alpha_{02}^3 \approx \approx \tilde{\nu}_{\text{p}}\sqrt{6}r_0^3/(4a^3)$.

Результаты численных расчётов модуля коэффициента прохождения D (7), нормированного на резонансное значение D_0 (19) для сплошного плазменного цилиндра, изображены на рис. 2 в зависимости от относительной частоты ω/ω_{p} пунктирными кривыми *1*–*4*, соответствующими четырём значениям $\alpha = 0{,}2$; $0{,}4$; $0{,}6$; $0{,}8$ при параметре потерь $\Pi = \tilde{\nu}_{\text{p}}/2 = \gamma_{\text{p}}/(4\sqrt{2}) = 0{,}01$. Рисунок иллюстрирует смещение резонансной частоты с ростом размера вакуумной полости и соотношение между коэффициентами прохождения для двух ветвей резонансной частоты. Для сравнения сплошной линией показана также нормированная на максимальное значение (19) зависимость коэффициента прохождения для сплошного плазменного цилиндра [4]. Видно, что для всех α низкочастотный резонансный коэффициент прохождения превышает высокочастотный и с ростом α (кривая *4*) резонанс пропадает. В случае аналогичного слоистого резонатора сферической формы [10] превышение низкочастотного резонансного коэффициента прохождения над высокочастотным имеет место для ограниченного интервала изменения α (для $\alpha > 0{,}5$).

На рис. 3 для случая смещённого диполя приведены результаты численных расчётов модуля коэффициента прохождения (8), нормированного на D_0 (19), при максимальном сжатии внутренней полости резонатора: $r_1 \le r_0$ (область I). Кривые *1*–*4* рассчитаны для четырёх значений $\alpha = 0{,}2$; $0{,}1$; $0{,}05$; $0{,}01$ и, соответственно, четырёх значений $r_1/r_0 = 1$; $0{,}5$; $0{,}25$; $0{,}05$ при том же параметре потерь $\Pi = 0{,}01$. Кривая *1*, рассчитанная для $r_1 = r_0$ по выражению (8), совпадает с кривыми *1* на рис. 2, рассчитанными по (7). При сжатии внутренней полости резонатора кривые *1*–*4* на рис. 3 иллюстрируют слияние резонансных частот с уменьшением α в области I, а также плавное уменьшение низкочастотного резонансного значения коэффициента прохождения до предельной величины $|D^{(\varepsilon)}| = D_0$, совпадающей

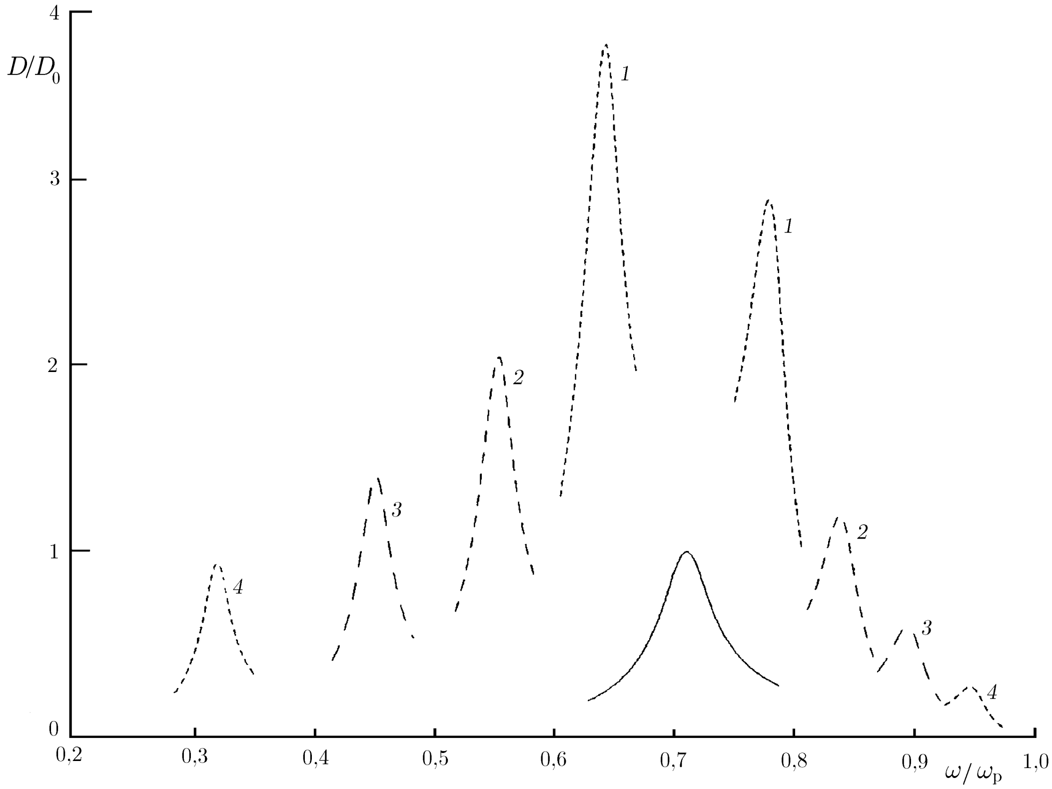

Рис. 2

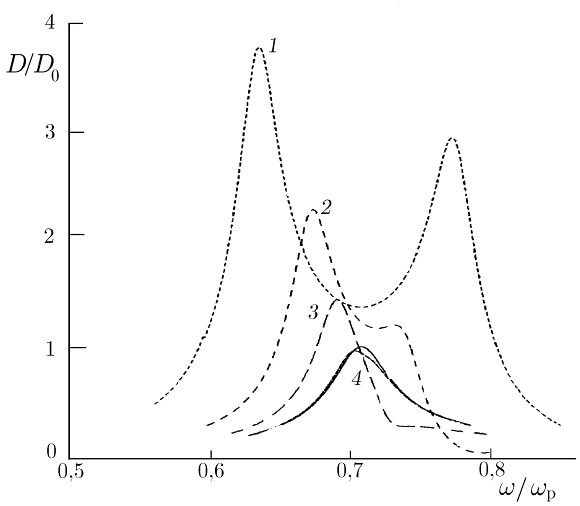

Рис. 3

с резонансным значением коэффициента прохождения для случая сплошного плазменного цилиндра, и плавное уменьшение почти до нуля высокочастотного резонансного коэффициента прохождения при $\alpha = (r_0/a)^2$ согласно (15) (кривая *3*). Отметим, что для меньших значений α при принятом параметре потерь резонансные кривые *4* обеих ветвей сливаются и переходят в резонансную кривую для однородного плазменного цилиндра. Полосы пропускания для обеих резонансных ветвей примерно равны и почти не зависят от α при равном влиянии тепловых потерь и потерь на излучение.

Теперь перейдём к исследованию коэффициента прохождения (7) в области III для значений α, близких к единице. Для $\alpha = 1 - \delta$, где $\delta \ll 1$, коэффициент прохождения (7) можно представить в более удобном виде:

$$D = \frac{1}{\tilde{\Delta}} = \frac{1}{1 + \delta^* \left[\varepsilon + 1/\varepsilon - i\gamma_\text{p} x^2 \left(\varepsilon - 1/\varepsilon\right)\right]}\,, \qquad (21)$$

где $\delta^* = \delta/2$, и изучим его отдельно для низко- и высокочастотных резонансов, для которых будем использовать в (21) различные представления для ε.

Для низкочастотного резонанса, который находится в области $x \ll 1$, для ε (12) справедливо приближённое представление

$$\varepsilon_{\rm Re} \approx -\frac{1}{x^2+\tilde{\nu}_{\rm p}^2}\,, \qquad \varepsilon_{\rm Im} \approx \frac{\tilde{\nu}_{\rm p}}{x}\,\frac{1}{x^2+\tilde{\nu}_{\rm p}^2}\,, \tag{22}$$

из которого следует $|\varepsilon_{\rm Re}| \gg 1$, $|\varepsilon_{\rm Im}| \gg 1$. При таком соотношении реальной и мнимой частей диэлектрической проницаемости ε уравнение для резонансной частоты вытекает из условия максимума модуля коэффициента прохождения (21):

$$\frac{\rm d}{{\rm d}\omega}(|\tilde{\Delta}|^2) = 0, \tag{23}$$

а полоса пропускания $\Delta\omega$ на уровне $D_0/\sqrt{2}$ определяется из разложения $|\tilde{\Delta}|^2$ в ряд Тейлора в окрестности резонансной частоты ω_0:

$$\Delta\omega = \sqrt{2}\,\frac{|\tilde{\Delta}|_0}{\sqrt{[{\rm d}^2(|\tilde{\Delta}|^2)/({\rm d}\omega)^2]\Big|_{\omega=\omega_0}}}\,,$$

где $D_0 = (|\tilde{\Delta}|_0)^{-1}$ — модуль коэффициента прохождения на резонансной частоте. В результате уравнение (23) для резонансной частоты сводится к уравнению третьего порядка относительно x^2:

$$x^6 + x^4\,(\tilde{\nu}_{\rm p}^2 - \delta^*) - 3x^2\tilde{\nu}_{\rm p}^2\delta^*/2 - \tilde{\nu}_{\rm p}^4\delta^*/2 = 0, \tag{24}$$

оценка решений которого показывает следующее. Определяющим параметром существования вещественного решения оказывается коэффициент при x^4 в уравнении (24). При $\delta^* \gg \tilde{\nu}_{\rm p}^2$, когда этот коэффициент отрицателен, существует один положительный корень уравнения (24) $x^2 = \delta^*$. Соответствующие этому корню резонансная частота, модуль коэффициента прохождения и полоса пропускания

$$\omega = \omega_{\rm p}\sqrt{\delta^*}, \qquad |D| = \frac{1}{\tilde{\nu}_{\rm p}/\sqrt{\delta^*} + \gamma_{\rm p}\delta^*}\,, \qquad \frac{\Delta\omega}{\omega_{\rm p}} = \frac{\tilde{\nu}_{\rm p}}{2} + \frac{\gamma_{\rm p}\delta^*}{2}\sqrt{\delta^*}$$

показывают, что в этой области коэффициент прохождения по-прежнему на несколько порядков превышает единицу. В случае положительного значения коэффициента, при $\delta^* \ll \tilde{\nu}_{\rm p}^2$, уравнение (24) не имеет положительных корней и резонанс не существует. В промежуточной области можно положить $\delta^* = \tilde{\nu}_{\rm p}^2$. Тогда для единственного положительного корня уравнения (24) $x^2 = \tilde{\nu}_{\rm p}^2\sqrt{2}$ выражения для частоты и модуля коэффициента прохождения

$$\omega = \omega_{\rm p}\tilde{\nu}_{\rm p}2^{1/4}, \qquad |D| \approx 1 + 1/\sqrt{2}$$

показывают, что на этой частоте резонанс исчезает. Таким образом, если относительная толщина плазменного слоя сравнима с $\tilde{\nu}_{\rm p}^2$, низкочастотный резонанс в таком резонаторе исчезает.

Для высокочастотного резонанса в области III $\alpha \approx 1$ и $x \approx 1$. Введём новую переменную $1/x^2 = 1 + \xi$, где $0 < \xi \ll 1$. Для ε будут справедливы выражения

$$\varepsilon_{\rm Re} \approx -\xi, \qquad \varepsilon_{\rm Im} \approx \tilde{\nu}_{\rm p},$$

для которых не выполняется соотношение (9). Резонансная частота и в этом случае определяется выражением (23), которое сводится к квадратному уравнению

$$\xi^2 - \xi\delta^* - \tilde{\nu}_{\rm p}^2 = 0$$

при пренебрежении слагаемыми, содержащими малые параметры δ^*, $\tilde{\nu}_{\rm p}$, $\gamma_{\rm p}$, по сравнению с 1. Корень приведённого уравнения зависит от соотношения относительной толщины плазменного слоя и тепловых потерь. В области $(\delta^*/2)^2 \gg \tilde{\nu}_{\rm p}^2$ для корня уравнения $\xi \approx \delta^*$ резонансная частота, коэффициент прохождения и полоса пропускания

$$\omega = \omega_{\rm p}/\sqrt{1+\delta^*}, \qquad |D| = \frac{1}{\tilde{\nu}_{\rm p}/\delta^* + \gamma_{\rm p}}\,, \qquad \frac{\Delta\omega}{\omega_{\rm p}} = \frac{\tilde{\nu}_{\rm p}}{2} + \frac{\gamma_{\rm p}}{2}\,\delta^*$$

демонстрируют наличие резонанса, но уже при $\delta^* = 2\tilde{\nu}_{\rm p}$ аналогичные выражения свидетельствуют о его отсутствии:

$$\omega = \omega_{\rm p}\Big/\sqrt{1+\tilde{\nu}_{\rm p}\,(1+\sqrt{2})}\,, \qquad |D| = 1+\sqrt{2},$$

так что при $(\delta^*/2)^2 \ll \tilde{\nu}_{\rm p}^2$, где $\omega = \omega_{\rm p}/\sqrt{1+\tilde{\nu}_{\rm p}}$, $|D| = 1+\delta^*/(2\tilde{\nu}_{\rm p})$, резонанс не выражен. Таким образом, если относительная толщина плазменного слоя δ сравнима с величиной $4\tilde{\nu}_{\rm p}$, то высокочастотный резонанс в цилиндрическом слоистом резонаторе, как и в сферическом резонаторе при $\delta \approx 3\tilde{\nu}_{\rm p}$, исчезает. При дальнейшем уменьшении δ, когда исчезает низкочастотный резонанс ($\delta \approx \tilde{\nu}_{\rm p}^2$), пропадают резонансные свойства двухслойной цилиндрической или сферической плазменной структуры.

Таким образом, сравнительный анализ полученных результатов для двухслойного плазменного резонатора цилиндрической и сферической [10] формы, окружающего источник, приводит к следующим выводам.

Наличие вакуумной полости в плазменном резонаторе, окружающем источник, в отличие от плазменного резонатора без полости приводит к наличию двух резонансов, низкочастотного и высокочастотного, которые существенно зависят от относительного размера вакуумной полости.

С уменьшением относительного размера вакуумной полости в области I параметра α (рис. 3) обе резонансные частоты для цилиндрического двухслойного резонатора переходят в резонансную частоту для однородного плазменного цилиндра $\omega = \omega_{\rm p}/\sqrt{2}$, а в случае сферического двухслойного резонатора — в частоты $\omega = \omega_{\rm p}/\sqrt{3}$ и $\omega = \omega_{\rm p}\sqrt{2/3}$, меньшая из которых является резонансной частотой сплошной плазменной сферы. Резонансный коэффициент прохождения для низкочастотной ветви в случае двухслойного резонатора цилиндрической или сферической формы плавно уменьшается до резонансного значения для соответствующего сплошного плазменного резонатора. Резонансный коэффициент прохождения для высокочастотной ветви в случае двухслойного цилиндрического резонатора, оставаясь меньше низкочастотного коэффициента прохождения, плавно уменьшается до нуля и затем нарастает до резонансного значения для сплошного плазменного резонатора. Резонансный коэффициент прохождения для высокочастотной ветви в случае двухслойного сферического резонатора, вначале превосходящий низкочастотное значение, плавно уменьшается до нуля при $\alpha \to 0$. Относительный размер вакуумной полости, при меньших значениях которого слоистый плазменный резонатор ведёт себя как сплошной, определяется величиной потерь в плазме для обеих форм резонатора (формула (20) для цилиндрического резонатора).

С ростом относительного размера вакуумной полости в области II резонансные частоты смещаются по направлению к своим предельным значениям $\omega = 0$ и $\omega = \omega_{\rm p}$ для обеих форм резонатора. Низкочастотный коэффициент прохождения, в случае цилиндрического резонатора превосходящий высокочастотный, с ростом параметра α уменьшается, как и в случае сферического резонатора, в котором превышение низкочастотного коэффициента прохождения над высокочастотным достигается начиная с некоторого α в области II. При дальнейшем увеличении относительного размера вакуумной полости, в области III, исчезает вначале высокочастотный, а затем и низкочастотный резонанс для обеих форм плазменного резонатора.

Полоса пропускания для обоих резонансов с ростом α меняется незначительно. Полоса пропускания для низкочастотного резонанса в случае резонатора цилиндрической формы несколько у́же, чем для сферического резонатора, а для высокочастотного резонанса — у́же в случае сферической формы резонатора.

Таким образом, учёт обеднённой ионной оболочки, образующейся вокруг излучателя, помещённого в плазму, приводит к более выраженному резонансному воздействию плазменного окружения цилиндрической или сферической формы на излучение в вакуум. Как и в случае сплошного плазменного резонатора, излучение из двухслойного цилиндрического резонатора имеет преимущество при доминирующих малых тепловых потерях в плазме, а из сферического резонатора — при доминирующих малых потерях на излучение.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 01–02–17084а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пистолькорс А. А., Зимина В. И. // Вопросы радиоэлектроники. Сер. общ.-техн. 1964. Т. 12, вып. 1. С. 3.
2. Акиндинов В. В., Ерёмин С. М., Киселёв С. И. и др. // Радиотехника и электроника. 1978. Т. 23, № 9. С. 1 807.
3. Новиков В. В., Соловьёв В. Ю. // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 4: Физика, химия. 1996. Вып. 4 (25). С. 27.
4. Бичуцкая Т. И., Макаров Г. И. // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 4: Физика, химия. 1999. Вып. 2 (11). С. 68.
5. Ратклифф Дж. Введение в физику ионосферы и магнитосферы. М.: Мир, 1975.
6. Whale H. A. // J. Geophys. Res. 1964. V. 69, No. 3. P. 447.
7. Seshardi S. R., Bhatnagar K. L. // Can. J. Phys. 1967. V. 45, No. 2. P. 350.
8. Бренгауз Г. Е. // Космич. исслед. АН СССР. 1971. Т. 9, вып. 4. С. 626.
9. Messiaen A. M., Vandenplas P. E. // Elecron. Lett. 1967. V. 3, No. 1. P. 26.
10. Бичуцкая Т. И., Макаров Г. И. // Радиотехника и электроника (в печати).
11. Бичуцкая Т. И., Макаров Г. И. // Радиотехника и электроника. 2001. Т. 46, № 8. С. 1.

Санкт-Петербургский госуниверситет,
г. Санкт-Петербург, Россия

Поступила в редакцию
17 октября 2001 г.

RADIATION OF AN ELECTRIC DIPOLE SURROUNDED BY A HOLLOW PLASMA CYLINDER

T. I. Bichutskaya and G. I. Makarov

We solve the problem of the influence of a small ($ka \ll 1$) isotropic plasma cylinder with a coaxial free-space cavity on the radiation from a source of electromagnetic waves to an outer region of free space. Conditions of the resonance radiation are obtained and its characteristics as functions of the inner-cavity relative size are studied. We show that the resonance frequency splits into two frequencies such that the transmission coefficients at these frequencies can exceed the resonance transmission coefficient for a cavity-free plasma cylinder. The results obtained are compared with those for the case of an emission from a two-layer spherical plasma resonator.

УДК 533.951

РЕЗОНАНСНОЕ РАДИАЦИОННОЕ СТОЛКНОВЕНИЕ ЗАРЯДОВ ВО ВНЕШНЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

А. В. Акопян

Исследуется характер тормозного излучения, генерируемого при столкновении релятивистского электрона с ионом во внешнем продольном магнитном поле. В рамках теории малых возмущений получено общее выражение для электрического поля излучения. Показано, что величина резонансного пика в спектральной линии обусловлена малой диссипативной силой радиационного трения. Подробно анализируется влияние внешнего магнитного поля на спектральную интенсивность и поляризацию волны.

ВВЕДЕНИЕ

Характерная особенность процессов высших порядков по электрон-фотонному взаимодействию — возможность их резонансного протекания во внешних электромагнитных полях. В результате возникает резонансная расходимость в сечении процесса, вычисленного по теории возмущений. При квантовом подходе, как правило, возникшая расходимость устраняется путём учёта какой-либо поправки в соответствующей электронной и фотонной функции [1, 2]. Чаще всего учитывается вклад квантовых радиационных сдвигов масс заряда и фотона во внешнем постоянном или переменном поле и вершинных радиационных поправок. В итоге указанные малые поправки приводят к смещению энергетических уровней и естественному уширению спектральных линий.

При классическом рассмотрении появившаяся расходимость в сечении процесса во внешнем поле может быть устранена следующим образом. При наличии плазменной среды частоте в резонансном знаменателе приписывается малая мнимая часть, связанная со столкновительной или бесстолкновительной диссипацией волны. Однако при таком подходе мнимая добавка определяет только ширину спектральной линии, но не сдвиг линии относительно резонансной частоты. В случае перехода к вакууму единственной диссипативной величиной является сила радиационного трения (торможение излучением). Действие данной силы приводит к естественному уширению линии и её сдвигу в излучательных процессах, протекающих при наличии связанных состояний [3]. Важность учёта этой силы заключается в том, что при больших значениях внешнего поля и энергии заряженных частиц она может стать доминирующей электромагнитной силой [4]. Данный факт может представлять определённый интерес при интерпретации спектральных линий пульсаров и других сильно намагниченных излучающих объектов, содержащих высокоэнергичные заряженные частицы. При этом необходимо сопоставить вклады плазменной и радиационной диссипаций при формировании линий излучения этих объектов.

Цель представленной работы — изучение элементарного акта тормозного излучения при электрон-ионном радиационном столкновении в продольном магнитном поле. Точный расчёт процесса связан с определёнными трудностями, что приводит к необходимости применения различных приближённых методов. Ниже в классическом приближении в рамках теории малых возмущений выводится выражение для электрического поля излучения произвольной поляризации. Затем в ультрарелятивистском пределе с учётом резонанса изучаются спектральные интенсивности отдельных компонентов тормозного излучения. Отметим, что ранее в [5] было изучено влияние внешнего поля на данное излучение вдали от резонанса.

1. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ИЗЛУЧЕНИЯ

Пусть в вакууме пробный электрон, движущийся первоначально в момент времени $t=-\infty$ с релятивистской скоростью $\mathbf{v}_0=\mathrm{const}$ вдоль однородного постоянного магнитного поля с напряжённостью $\mathbf{B}\upuparrows\mathbf{z}$, сталкивается с тяжёлым ионом, который считается неподвижным кулоновским центром. При элементарном акте взаимодействия под совместным действием поля иона и внешнего поля электрон, претерпевая нестационарное дрейфообразное ускорение, передаёт импульс $\hbar\mathbf{q}$ и испускает квант тормозного излучения с волновым вектором $\mathbf{k}$ и частотой $\omega=kc$, где c — скорость света.

Уравнение для скорости $\mathbf{v}=\mathbf{v}(t)$ в системе покоя иона имеет вид

$$\dot{\mathbf{v}}=\frac{e}{m\gamma}\left[\nabla-\frac{\mathbf{v}}{c^2}\,(\mathbf{v}\nabla)\right]\varphi-\omega_B\,[\mathbf{v}\mathbf{n}_B]-\tau\ddot{\mathbf{v}}. \qquad (1)$$

Здесь $\dot{\mathbf{v}}$, $\ddot{\mathbf{v}}$ — первая и вторая производные скорости по времени, e — элементарный заряд, m — масса покоя электрона, $\gamma=(1-v^2/c^2)^{-1/2}$ — релятивистский фактор, $\omega_B=eB/(mc\gamma)$ — гирочастота, $\mathbf{n}_B=\mathbf{B}/B$, $\tau=2r_{\mathrm{e}}\gamma/(3c)$, $r_{\mathrm{e}}=e^2/(mc^2)$ — классический радиус электрона. Кроме того, в (1)

$$\varphi=\varphi[\mathbf{r}(t)]=4\pi Ze\int\frac{\exp[i\mathbf{q}\mathbf{r}(t)]\mathrm{d}\mathbf{q}}{(2\pi)^3\,q^2} \qquad (2)$$

— поле, созданное зарядом Ze иона в точке нахождения электрона с мгновенным радиус-вектором $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$.

Последний член в правой части (1) описывает вклад малой радиационной силы, приводящей к уширению линии излучения. Следует отметить, что в релятивистском выражении для данной силы [4] мы пренебрегли членами, пропорциональными $\dot{\mathbf{v}}^2$ ввиду их малости при слабых возмущениях.

Уравнение (1) решается в предположении, что поле иона (2) представляет собой малый фактор возмущения. Тогда

$$\mathbf{v}(t)=\mathbf{v}_0+\mathbf{v}^{(1)}(t)+\ \ldots\ ,\qquad \mathbf{r}(t)=\mathbf{r}_0+\int\limits_{-\infty}^{t}\mathbf{v}(t')\,\mathrm{d}t', \qquad (3)$$

где $\mathbf{r}_0$ — невозмущённый радиус-вектор, $\mathbf{v}^{(1)}(t)$ — возмущение скорости, причём

$$v^{(1)}(t)\ll v_0. \qquad (4)$$

С учётом (2) запишем

$$\mathbf{v}^{(1)}(t)=\int\mathbf{v}^{(1)}(\mathbf{q})\exp[i\mathbf{q}\mathbf{r}(t)]\,\mathrm{d}\mathbf{q}/(2\pi)^3, \qquad (5)$$

где $\mathbf{v}^{(1)}(\mathbf{q})$ — фурье-образ возмущения скорости. Выполнив спектральное разложение величин, из (1)–(5) в низшем приближении для ускорения $\mathbf{w}^{(1)}_\omega(\mathbf{q})=i\,(\mathbf{q}\mathbf{v})\,\mathbf{v}^{(1)}_\omega(\mathbf{q})$ получим (опуская в дальнейшем индекс 0 у $\mathbf{v}_0$)

$$\mathbf{w}^{(1)}_\omega(\mathbf{q})=\frac{Ze^2}{2\pi^2m\gamma}\frac{\exp(i\mathbf{q}\mathbf{r}_0)}{q^2}\left\{\frac{\mathbf{n}_B\,(\mathbf{n}_B\mathbf{q})}{\gamma^2}+\frac{(\mathbf{q}\mathbf{v})^2}{(\mathbf{q}\mathbf{v})^2\,[1-i\tau\,(\mathbf{q}\mathbf{v})]^2-\omega_B^2}\times\right.$$
$$\left.\times\left([\mathbf{n}_B\,[\mathbf{q}\mathbf{n}_B]]-\frac{i\omega_B}{(\mathbf{q}\mathbf{v})}\,[\mathbf{q}\mathbf{n}_B]\right)\right\}\delta(\omega-(\mathbf{q}+\mathbf{k})\,\mathbf{v}). \qquad (6)$$

В (6) первое слагаемое в фигурных скобках, обратно пропорциональное γ^2 и не зависящее от B, описывает ускорение вдоль поля. Второе слагаемое, содержащее резонансный знаменатель, даёт ускорение поперёк $\mathbf{B}$. Аргумент δ-функции отражает закон сохранения энергии в классическом пределе. Кроме того, в (6) в соответствии с предположением о малости радиационной силы принято, что

$$\tau\,(\omega-\mathbf{k}\mathbf{v})\ll 1. \qquad (7)$$

Наличие в пространстве выделенного направления приводит к характерной поляризации излучения. Введём взаимно перпендикулярные единичные векторы поляризации $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{k}}^{(\alpha)}$ и распространения волны $\mathbf{n_k} = \mathbf{k}/k$ (см. рис. 1):

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{k}}^{(\alpha)} = \frac{1}{N}\{\cos\vartheta\cos\varphi_0;\ \cos\vartheta\sin\varphi_0;\ -\sin\vartheta\cos\varphi_0\}, \quad \mathbf{n_k} = \{\sin\vartheta;\ 0;\ \cos\vartheta\}. \tag{8}$$

Здесь ϑ — угол излучения между $\mathbf{B}$ и $\mathbf{k}$, φ_0 — угол поляризации волны моды α, образованный проекцией вектора $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{k}}^{(\alpha)}$ на плоскость xy и осью x, $N = \left(1 - \sin^2\vartheta\sin^2\varphi_0\right)^{1/2}$.

Пользуясь стандартной методикой [4], из (6) и (8) для фурье-образа электрического поля тормозного излучения получим

$$\mathbf{E}_\omega^{(\alpha)}(\mathbf{q}) = \frac{Zer_{\rm e}\exp[i\,(kR + \mathbf{qr}_0)]}{\pi\gamma qR\zeta^2\omega N}\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{k}}^{(\alpha)}\left\{\frac{\sin\vartheta\cos\varphi_0\cos\Theta}{\gamma^2} + \right.$$
$$+ \frac{\zeta^2\sin\Theta}{\zeta^2\,(1 - i\tau\omega\zeta)^2 - \eta^2}\left[\xi\cos\varphi_0\left(\cos\phi - \frac{i\eta}{\zeta}\sin\phi\right) + \right.$$
$$\left.\left. + \ \zeta\cos\vartheta\sin\varphi_0\left(\sin\phi + \frac{i\eta}{\zeta}\cos\phi\right)\right]\right\}\delta\Big(\zeta - \frac{qv}{\omega}\cos\Theta\Big), \tag{9}$$

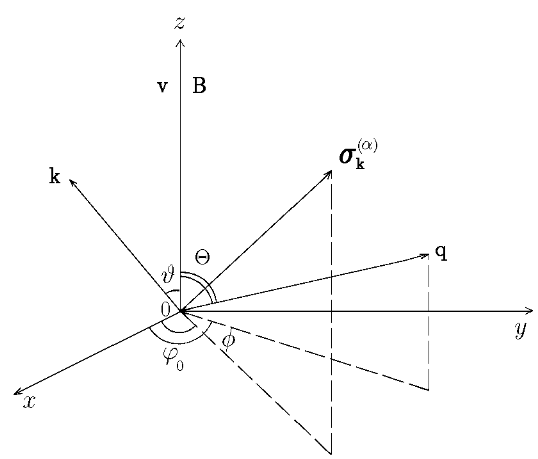

Рис. 1

где R — расстояние до точки наблюдения, $\eta = \omega_B/\omega$; $\zeta = 1 - (v/c)\cos\vartheta$; $\xi = v/c - \cos\vartheta$. Остальные используемые в (9) углы показаны на рис. 1.

Отдельные компоненты поля (9) отличаются друг от друга не только по величине, но и по фазе. Однако эти фазы и их сдвиги не представляют практического интереса при непосредственном измерении компонент (9).

Как следует из (9), поле излучения резонансно нарастает при

$$\omega \simeq \frac{\omega_B}{1 - v\cos\vartheta/c}\,. \tag{10}$$

Ниже обсуждается физическая суть данного эффекта.

2. СПЕКТРАЛЬНАЯ ИНТЕНСИВНОСТЬ ИЗЛУЧЕНИЯ

Дальнейший анализ выполним посредством расчёта частотно-углового распределения интенсивности $I_\omega^{(\alpha)}(\Omega)$ тормозного излучения, решая уравнение

$$\frac{\mathrm{d}^2 I_\omega^{(\alpha)}(\Omega)}{\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}\Omega} = \frac{cR^2}{2\pi}\int\left|\mathbf{E}_\omega^{(\alpha)}(\mathbf{q})\right|^2\,\mathrm{d}\mathbf{q}, \tag{11}$$

где $\mathrm{d}\Omega$ — элемент телесного угла.

Полученные результаты позволяют найти общее выражение для интенсивности, пригодное для описания излучения при произвольной поляризации и энергии электрона. Далее, однако, для конкретности обсудим случай испускания волны ультрарелятивистским электроном. Кроме того, задавая предварительно поляризационный угол φ_0, проследим за тем, как магнитное поле, управляя возмущением движения электрона, по-разному будет влиять на поведение соответствующих мод волны.

Итак, примем $v \approx c$; $\gamma \gg 1$. При этом из (9) и (11) может показаться, что резонансное нарастание интенсивности произойдёт в широком интервале углов: $0 \lesssim \vartheta \lesssim \pi$. Соответственно, из (10) кажущиеся резонансные частоты тоже лежат в широком диапазоне:

$$\frac{\omega_B}{2} \lesssim \omega \lesssim 2\gamma^2\omega_B. \tag{12}$$

Однако согласно анализу, как и в случае отсутствия внешнего поля, быстрый заряд излучает в основном в направленном вперёд узком конусе с углом раствора $\vartheta \lesssim \gamma^{-1}$. Вне конуса излучение, испускаемое как вблизи, так и вдали от резонанса, релятивистски подавлено. Тогда из (9) и (10) следует, что внутри конуса резонанс будет наиболее эффективно проявляться в окрестности высокой частоты

$$\omega_{\text{рез}} \simeq \frac{2\gamma^2\omega_B}{1+\gamma^2\vartheta^2}\,. \tag{13}$$

Подставляя в (8), (9) углы поляризации $\varphi_0 = 0;\ \pi/2$, получим продольную ($\|$) и поперечную ($\perp$) компоненты поля, направленные соответственно параллельно и перпендикулярно плоскости излучения $(\mathbf{k},\mathbf{B})$. Тогда из (8), (9) и (11), пренебрегая малыми членами, для интенсивности излучения соответствующих поляризаций получим

$$\frac{\mathrm{d}^2 I_\omega^{(\perp)}(\vartheta^*)}{\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}\vartheta^*} = 8Z^2 r_{\mathrm{e}}^3 mc^2 L \frac{(1+\vartheta^*)^2 + 4\eta^2\gamma^4}{\left|(1+\vartheta^*)^2\,(1-i\omega_B\tau)^2 - 4\eta^2\gamma^4\right|^2}\,, \tag{14}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 I_\omega^{(\|)}(\vartheta^*)}{\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}\vartheta^*} = \frac{(1-\vartheta^*)^2}{(1+\vartheta^*)^2}\,\frac{\mathrm{d}^2 I_\omega^{(\perp)}(\vartheta^*)}{\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}\vartheta^*}\,. \tag{15}$$

Здесь $\vartheta^* = \gamma^2\vartheta^2$; $L = \ln[Cmc^2\gamma^2/(\hbar\omega)]$ — логарифм Бете—Гайтлера, C — постоянная порядка единицы. При интегрировании по $\mathbf{q}$ формально принято, что максимальное значение q равно обратной комптоновской длине: $q_{\max} = mc/\hbar$. Кроме того, квадрат δ-функции заменяется через её первую степень согласно [6]. Заметим, что, как следует из аргумента δ-функции в (9), наибольший прицельный параметр $d_{\max} \sim q_{\min}^{-1}$ совпадает с длиной когерентности: $d_{\max} = l_{\text{ког}} = 2\gamma^2 c/\omega$.

Из (14) и (15) следует, что вследствие радиационного трения спектральные линии в окрестности резонансной частоты (13) обладают естественной шириной

$$\Gamma = \frac{\omega_{\text{рез}}}{2}\,(\omega_B\tau). \tag{16}$$

Здесь наряду с (7) считается, что

$$\omega_B\tau = \frac{1}{137}\,\frac{2B}{3B_0} \ll 1, \tag{17}$$

где $B_0 = m^2c^3/(e\hbar) = 4{,}4\cdot 10^{13}$ Гс — критическое магнитное поле. При условии (17) влияние радиационной силы на тормозное излучение в намагниченном вакууме мало.

Из (14) и (15) также следует, что линии сдвинуты относительно $\omega_{\text{рез}}$ на величину

$$\Delta\omega \approx \omega_{\text{рез}}\,(\omega_B\tau)^2. \tag{18}$$

Выражения (16) и (18) описывают важные и свойственные для рассматриваемого излучения характеристики. Именно с учётом этих фактов в резонансных знаменателях в (14) и (15) без особого ущерба для результатов была выполнена замена $\gamma^{-2}\,(1+\vartheta^*)\,\omega\tau/2$ на $\omega_B\tau$.

Интегрируя по всем углам излучения, из (14) и (15) для частотных спектров интенсивностей получим

$$\frac{\mathrm{d}I_\omega^{(\perp)}}{\mathrm{d}\omega} = \frac{4Z^2 r_\mathrm{e}^3 mc^2 L}{M} \operatorname{arctg} \frac{2M}{|1-a^2|}\,, \tag{19}$$

$$\frac{\mathrm{d}I_\omega^{(\|)}}{\mathrm{d}\omega} = \frac{8Z^2 r_\mathrm{e}^3 mc^2 L}{a^2} \left\{4 - \frac{2}{a}\ln\frac{(1+a)^2}{(1-a)^2+M^2} + \ln\bigl[(1+a^2)^2+M^2\bigr] + \right. \\ \left. + \frac{1}{2M}\left[(4+a^2)\operatorname{arctg}\frac{2M}{|1-a^2|} - 4a\operatorname{arctg}\frac{2aM}{|1-a^2|}\right]\right\}, \tag{20}$$

где $a = 2\gamma^2\omega_B/\omega$; $M = a\omega_B\tau$.

Приведём также выражение для спектральной интенсивности в случае неполяризованного (н) излучения. Из (19) и (20) получим

$$\frac{\mathrm{d}I_\omega^{(\text{н})}}{\mathrm{d}\omega} = \frac{4Z^2 r_\mathrm{e}^3 mc^2 L}{a^2} \left\{4 - \frac{2}{a}\ln\frac{(1+a)^2}{(1-a)^2+M^2} + \ln\bigl[(1+a^2)^2+M^2\bigr] + \right. \\ \left. + \frac{1}{M}\left[(2+a^2)\operatorname{arctg}\frac{2M}{|1-a^2|} - 2a\operatorname{arctg}\frac{2aM}{|1-a^2|}\right]\right\}. \tag{21}$$

Этот результат можно получить также непосредственно из (8), (9) и (11) путём усреднения интенсивности по всем поляризациям. Дисперсионная формула (21) есть не что иное, как обобщение классической формулы Бете—Гайтлера для интенсивности тормозного излучения на случай наличия внешнего продольного магнитного поля.

Выше мы пренебрегли малым вкладом продольной части ускорения электрона в генерацию тормозного излучения. Уровень соответствующего излучения, не зависящего от частоты и приложенного поля, падает обратно пропорционально квадрату энергии электрона, т. е. подвергается сильному релятивистскому подавлению во всём спектре частот (см. также [7]).

Полученные формулы в целом описывают распределение интенсивности излучения во всём спектре частот как внутри, так и вне линии резонанса. Для иллюстрации результатов обсудим сначала поведение интенсивностей $I_\omega^{(\perp)}$ и $I_\omega^{(\|)}$ вдали от резонансного диапазона, т. е. при

$$\bigl|\omega - 2\gamma^2\omega_B\bigr| \gg 2\gamma^2\omega_B^2\tau. \tag{22}$$

Как следует из (19)–(21), в области низких частот ($\omega \ll 2\gamma^2\omega_B$) излучение подавляется магнитным полем: $\mathrm{d}I_\omega^{(\perp)}/\mathrm{d}\omega \propto \omega^2$; $\mathrm{d}I_\omega^{(\|)}/\mathrm{d}\omega \sim \mathrm{d}I_\omega^{(\text{н})}/\mathrm{d}\omega \propto \omega^2\ln(\omega^{-1})$. Отметим по этому поводу, что, как показано ранее в [8, 9] методом эквивалентных фотонов и в [10] в приближении мягких фотонов, в области низких частот интенсивность тормозного излучения в поперечном магнитном поле ($\mathbf{v} \perp \mathbf{B}$) тоже убывает, но более медленно, по закону $\omega^{2/3}\ln(\omega^{-1})$. Таким образом, для рассматриваемого процесса характерно магнитно-релятивистское подавление инфракрасной расходимости на низких частотах.

В другой области вне резонансного спектра, в интервале частот $2\gamma^2\omega_B \ll \omega \ll mc^2\gamma/\hbar$, из (19), (20) следует

$$\frac{\mathrm{d}I_\omega^{(\perp)}}{\mathrm{d}\omega} = 8Z^2 r_\mathrm{e}^3 mc^2 L; \quad \frac{\mathrm{d}I_\omega^{(\|)}}{\mathrm{d}\omega} = \frac{1}{3}\frac{\mathrm{d}I_\omega^{(\perp)}}{\mathrm{d}\omega}\,. \tag{23}$$

Интенсивности зависят от частоты и квадрата энергии логарифмически. Взяв полусумму выражений в (23), получим обычную формулу Бете—Гайтлера. К такому же выводу придём, исходя из формулы (21). Данный факт указывает на то, что при больших энергиях обычная формула Бете—Гайтлера в намагниченном вакууме применима только в области высоких частот $\omega \gg 2\gamma^2\omega_B$ [5]. При этом внешнее поле даст лишь малую поправку к спектру свободного тормозного излучения.

Обсудим теперь характер излучения в резонансном диапазоне

$$|\omega - 2\gamma^2\omega_B| \lesssim 2\gamma^2\omega_B^2\tau. \tag{24}$$

Из (19) и (20) вытекает, что на резонансной частоте $2\gamma^2\omega_B$ интенсивности обеих мод достигают одинакового пикового значения:

$$\frac{\mathrm{d}I_\omega^{(\parallel)}}{\mathrm{d}\omega} \approx \frac{\mathrm{d}I_\omega^{(\perp)}}{\mathrm{d}\omega} \approx 3\pi\, 137 \left(\frac{B_0}{B}\right) Z^2 r_\mathrm{e}^3 mc^2 \ln\left(\frac{\gamma}{2}\frac{B_0}{B}\right). \tag{25}$$

Строго говоря, здесь величина магнитного поля ограничена снизу условием (24), правая часть которого зависит от поля квадратично.

Из (17) и (25) приходим к выводу о том, что благодаря радиационному трению в магнитном поле резонансное значение интенсивности тормозного излучения может намного превосходить уровень, определяемый формулой Бете—Гайтлера. Суть обнаруженного эффекта заключается в следующем. При столкновении излучение возникает благодаря рассеянию виртуальных квантов поля иона на электроне, совершающем ускоренное дрейфообразное движение в магнитном поле под действием этих же квантов [11]. В этом случае при условии (10) или (13), когда «частота» виртуальных квантов $\mathbf{qv} = \omega\,(1 - (v/c)\cos\vartheta) \simeq \omega_B$, рассеяние осуществляется наиболее эффективно, что в итоге приводит к резонансному росту интенсивности излучения.

Вкратце обсудим вопрос о поляризации излучения. Из (14), (15) для степени линейной поляризации получим

$$\alpha_\omega(\gamma,\vartheta) = \frac{2\gamma^2\vartheta^2}{1+\gamma^4\vartheta^4}\,. \tag{26}$$

Данная формула применима во всём спектре частот и углов излучения $\vartheta \lesssim \gamma^{-1}$. В частности, как следует из (26), вдоль $\mathbf{B}$, т. е. вдоль оси конуса направленности, волна не поляризована. На границе конуса излучение линейно поляризовано так, что электрический вектор перпендикулярен плоскости $(\mathbf{k},\mathbf{B})$. Таким образом, в рассматриваемом случае внешнее поле может существенно влиять как на форму спектральных линий, так и на их поляризацию.

Изложенный здесь метод позволяет аналогичным образом изучить процесс тормозного излучения волн других поляризаций.

Обсудим также следующий важный вопрос. В настоящем изложении мы строго ограничились классическим подходом. Если же попытаться пользоваться квантовым формализмом, то надо исходить из следующего. Рассматриваемый процесс представляет собой особый случай тормозного излучения электрона, исходно находящегося на «выделенном» нулевом уровне Ландау, причём главное квантовое число $n = 0$, а проекция спина на направление поля $s_\parallel = 1/2$. Будем полагать, что столкновение не приводит к кулоновскому возбуждению (столкновительной накачке) поперечных квантовых уровней. Для этого необходимо, как следует из решения уравнения Дирака [6], чтобы

$$\Delta p_\perp = |\Delta\mathbf{p}_\perp| < mc\sqrt{2B/B_0}\,, \tag{27}$$

где $\Delta\mathbf{p}_\perp$ — поперечный к полю $\mathbf{B}$ импульс, приобретённый электроном при пролёте через поле иона (2). Выполнение критерия (27) обеспечивает применимость здесь классического подхода, без учёта вклада каких-либо квантовых переходов. Отметим в этой связи, что аналогичный эффект «упругого» тормозного излучения без квантовых переходов при определённых условиях может иметь место также в радиационных столкновениях с участием атомов [12].

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получены общие дисперсионные выражения для спектральных интенсивностей, описывающих тормозное излучение при электрон-ионном радиационном столкновении в широком интервале частот в намагниченном вакууме.

Как следует из изложенного, наличие внешнего магнитного поля приводит к существенному видоизменению спектральной интенсивности тормозного излучения. На спектральной линии вблизи характерной частоты $\omega \simeq 2\gamma^2\omega_B$ образуется узкая резонансная область, внутри которой уровень интенсивности резко возрастает. При низких частотах ($\omega \ll 2\gamma^2\omega_B$) излучение в целом подавлено совместным действием магнитного поля и релятивистских эффектов. В области высоких частот ($\omega \gg 2\gamma^2\omega_B$) выражение для спектральной интенсивности переходит в формулу Бете—Гайтлера.

Вкратце изучается характер линейной поляризации тормозного излучения, испущенного внутри конуса направленности.

Представляет интерес изучение резонансного эффекта в случае поперечного магнитного поля и сравнение пиковых интенсивностей тормозного и синхротронного излучений. Отметим, что, несмотря на наличие циклотронной частоты в резонансном знаменателе, в рассматриваемом здесь случае синхротронное излучение отсутствует.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тернов И. М., Халилов В. Р., Родионов В. Н. Взаимодействие заряженных частиц с сильным магнитным полем. М.: Изд-во МГУ, 1982.
2. Тернов И. М., Жуковский В. Ч., Борисов А. В. Квантовые процессы в сильном магнитном поле. М.: Изд-во МГУ, 1989.
3. Джексон Дж. Классическая электродинамика. М.: Мир, 1965.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М.: Наука, 1967.
5. Акопян А. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1990. Т. 33, № 8. С. 930.
6. Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1969.
7. Акопян А. В., Цытович В. Н. // ЖЭТФ. 1977. Т. 72, № 5. С. 1 824.
8. Жуковский В. Ч. // ЖЭТФ. 1974. Т. 66, № 1. С. 9.
9. Борисов А. В., Жуковский В. Ч., Хаммид Ш. // Вестник МГУ. Физика, астрономия. 1980. Т. 21, № 4. С. 17.
10. Волощенко А. М., Жуковский В. Ч., Павленко Ю. Г. // Вестник МГУ. Физика, астрономия. 1976. Т. 17, № 5. С. 560.
11. Акопян А. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1995. Т. 38, № 10. С. 1 001.
12. Кротов Ю. А. // Изв. вузов. Физика. 2001. Т. 44, № 3. С. 13.

Институт радиофизики и электроники НАН Армении,
г. Аштарак, Армения

Поступила в редакцию
20 мая 1999 г.

RESONANCE RADIATIVE COLLISION OF CHARGED PARTICLES IN AN EXTERNAL MAGNETIC FIELD

A. V. Akopyan

We analyze bremsstrahlung due to collision of a relativistic electron with an ion in an external longitudinal magnetic field. Within the framework of the perturbation method, a general expression for the electric field of radiation is derived. It is shown that the magnitude of the resonance peak of the spectral line is determined by the small dissipative force of radiation reaction. The influence of the external field on the specific intensity and polarization of the wave is analyzed in detail.

УДК 519.64+531.715+535.8+538.56+621.3

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ СТАТИСТИЧЕСКОЙ НАНОМЕТРОВОЙ ШЕРОХОВАТОСТИ ПОВЕРХНОСТИ ПО ДАННЫМ РАССЕЯНИЯ СВЕТА В ПЛАНАРНОМ ОПТИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ ПРИ НАЛИЧИИ СЛУЧАЙНОГО АДДИТИВНОГО ШУМА

А. А. Егоров

Компьютерным моделированием получено решение прямой и обратной задач волноводного рассеяния света на статистической стационарной нанометровой шероховатости поверхности при наличии случайного аддитивного белого шума. Показано, что разработанная ранее процедура обработки данных рассеяния в дальней зоне (или в эквивалентной фурье-плоскости) позволяет и при очень низком отношении сигнал—шум ($\mathrm{SNR} \geq 1$) получить достаточную информацию о статистических свойствах шероховатости. Для заданного шума при $\mathrm{SNR} \geq 1$ разработанный алгоритм позволяет в модельных расчётах определить субволновые интервалы корреляции шероховатостей порядка $\lambda/20 \div \lambda/30$, где λ — длина световой волны, с ошибкой не более $10 \div 30$ %, а среднеквадратичную высоту шероховатостей порядка 50Å — с ошибкой менее 15 %.

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] была рассмотрена задача о рассеянии монохроматического света в статистически нерегулярном планарном оптическом волноводе (ПВ). Предполагалось, что моды рассеяния, формирующие оптический образ объекта (уединённый микрообъект или статистическая нерегулярность), регистрируются «точечным» (с достаточно малой апертурой) фотодетектором в виде излучательных воздушных мод и мод подложки планарного оптического волновода. Если условия рассеяния волноводной моды на статистическом ансамбле микрообъектов (шероховатость поверхности или неоднородность волноводного слоя) удовлетворяют первому приближению теории возмущений, то регистрируемая точечным фотодетектором в дальней зоне (или в эквивалентной ей фурье-плоскости) интенсивность рассеянного излучения (диаграмма рассеяния, или функция отклика) является, фактически, отображением функции спектральной плотности (ФСП) ансамбля в пространстве волновых чисел. Известно, что в этом случае рассеяние зависит только от статистических характеристик второго порядка ансамбля микрообъектов: ФСП или её фурье-образа — автокорреляционной функции (АКФ). Автокорреляционная функция и функция спектральной плотности содержат всю информацию об основных параметрах исследуемого ансамбля микрообъектов. В рассматриваемом случае первое приближение теории возмущений справедливо, если, например, статистические шероховатости поверхностей пластинок, образующих границы планарного оптического волновода, малы по сравнению как с длиной волны лазерного излучения, так и с толщиной волноводного слоя. Как и ранее, полагается, что исследуемые поверхности обработаны однотипно и принадлежат одному эргодическому ансамблю, поэтому восстановленная АКФ и определяемые статистические параметры шероховатости поверхности — среднеквадратичная высота и интервал корреляции — одинаковы для обеих границ волновода.

1. ПРЯМАЯ ЗАДАЧА ВОЛНОВОДНОГО РАССЕЯНИЯ СВЕТА В СТАТИСТИЧЕСКИ НЕРЕГУЛЯРНОМ ПЛАНАРНОМ ОПТИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ ПРИ НАЛИЧИИ СЛУЧАЙНОГО АДДИТИВНОГО ШУМА

Используя полученное ранее решение задачи о рассеянии направляемой волноводной моды в планарном нерегулярном оптическом волноводе при высоком отношении сигнал—шум [1], перейдём к решению прямой задачи рассеяния при наличии случайного аддитивного шума (полученное ранее решение описывает рассеяние при $\mathrm{SNR} > 10^2$). Рассматриваемый нерегулярный ПВ и схема регистрации рассеянного света аналогичны показанным на рис. 1 в работе [1]. Исследуется рассеяние на шероховатости однотипных кварцевых пластинок. Симметричный планарный волновод образован двумя кварцевыми пластинками и расположенным между ними тонким волноводным слоем оптически прозрачной жидкости с показателями преломления n_1, n_3 и n_2 соответственно: $n_1 = n_3 = 1{,}46$; $n_2 = 1{,}59$ (для длины волны излучения гелий-неонового лазера $\lambda = 0{,}63$ мкм). В общем случае нерегулярность структуры ПВ может быть обусловлена неровностями границ раздела сред, образующих волновод, подповерхностными дефектами (так называемый трещиноватый, или дефектный, слой) и неоднородностями показателя преломления волноводного слоя. Полагается, что рассеяние света на неоднородностях показателя преломления волноводного слоя незначительно и много меньше рассеяния на шероховатостях.

Решение прямой задачи заключается в нахождении функции отклика на исследуемую шероховатость (диаграммы рассеяния). Диаграмма рассеяния измеряется главным образом в ближней зоне, дальней зоне (фурье-плоскости) или плоскости изображения. При использовании точечного фотоприёмника (функция фильтрации фотодетектора является дельта-функцией) в фурье-плоскости зашумлённая диаграмма рассеяния $P(\beta,\gamma)$ может быть представлена в виде

$$\langle P(\beta,\gamma)\rangle = C_0\, \langle \Phi(\beta,\gamma) F(\beta,\gamma)\rangle + \langle N(\beta,\gamma)\rangle, \tag{1}$$

где β — продольная составляющая постоянной распространения мод рассеяния, формирующих оптический образ объекта, γ — эффективный показатель преломления, C_0 — нормировочный множитель, $\Phi(\beta,\gamma)$ — оптическая передаточная функция планарного волновода (или созданного с его помощью волноводного оптического микроскопа), $F(\beta,\gamma)$ — ФСП статистического ансамбля микрообъектов, $N(\beta,\gamma)$ — интенсивность случайного аддитивного действительного шума, заданного в области измерения диаграммы рассеяния (вопрос о природе шума в экспериментальных исследованиях составляет предмет отдельного исследования); угловые скобки означают усреднение по эргодическому ансамблю статистически идентичных систем. Первое слагаемое в правой части уравнения (1) является диаграммой рассеяния при $\mathrm{SNR} > 10^2$ (здесь и далее SNR даётся в максимуме диаграммы рассеяния). Оптический образ объекта (диаграмма рассеяния) записывается в виде дискретного цифрового набора значений интенсивности отклика в N точках отсчёта, где $N \approx 5\cdot 10^2 \div 3\cdot 10^3$.

Модельная функция спектральной плотности тестовой статистической стационарной шероховатости поверхности подложки ПВ задавалась в гауссовом виде:

$$\langle F(\beta,\gamma)\rangle = \frac{2\sigma^2 r}{L}\, \exp\left[\frac{-(\beta_0-\beta)^2\, r^2}{2}\right], \tag{2}$$

где $\beta_0 = k\gamma$ — постоянная распространения волноводной моды, $k = 2\pi/\lambda$, σ — среднеквадратичная высота шероховатости, r — интервал корреляции, L — длина области, содержащей шероховатость. Соответствующая ей автокорреляционная функция $B(u)$, являющаяся фурье-образом ФСП, имеет вид

$$B(u) = \sigma^2 \exp[-(u/r)^2], \tag{3}$$

где $u = z - z'$, z и z' — координаты в плоскости подложки волновода.

Ниже приведены полученные в результате численного моделирования характерные зашумлённые нормированные диаграммы рассеяния при различном уровне шума, а также график, характеризующий заданный шумовой процесс.

На рис. 1 показаны диаграммы рассеяния в дальней зоне в диапазоне наблюдаемых покровных (воздушных) мод рассеяния при отношении сигнал—шум $\mathrm{SNR} \ge 1$ для следующих значений γ: кривая *1* соответствует $\gamma = 1{,}479$, кривая *2* — $\gamma = 1{,}525$, кривая *3* — $\gamma = 1{,}556$, кривая *4* — $\gamma = 1{,}571$

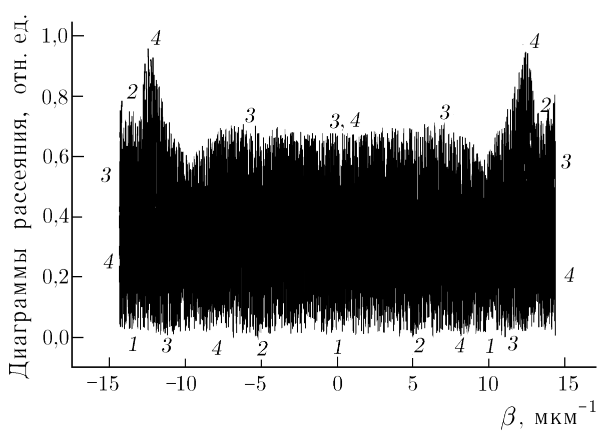

Рис. 1

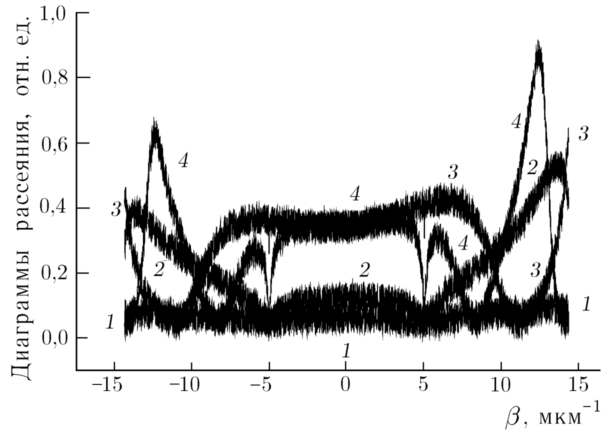

Рис. 2

(при этом соответствующая толщина волновода $h = \lambda/5$; $\lambda/2$; λ и $3\lambda/2$). Цифры *1–4* на рис. 1 показывают только некоторый максимальный уровень соответствующих диаграмм (ср. с рис. 2). Геометрические параметры статистической шероховатости поверхности имеют следующие значения: $\sigma = 5$ нм; $r = 30$ нм ($\lambda/20$). На рис. 2 показаны аналогичные диаграммы рассеяния для $\mathrm{SNR} \geq 10$. При изменении r от 30 до 20 нм (от $\lambda/20$ до $\lambda/30$) получаются подобные, но более пологие диаграммы рассеяния. Из рис. 1 видно, что при уровне шума, сравнимом с уровнем сигнала, практически невозможно использовать зрительный анализ диаграмм рассеяния для их априорной идентификации. Определённые трудности возникают, если для решения обратной задачи используется метод подбора, основанный на известном решении прямой задачи [2]. Основной недостаток такого способа нахождения решения обратной задачи связан с отсутствием непрерывной связи диаграммы рассеяния со свойствами нерегулярностей (проблема устойчивости решения), если класс возможных решений не ограничен компактным множеством. Только при указанной ограниченности класса возможных решений метод подбора (и близкий к нему метод квазирешения) становится устойчивым. Наложение такого рода условий на возможные решения требует использования априорной информации, носящей количественный или качественный характер. В этом случае анализ полученной информации возможен только путём компьютерной обработки сигнала по некоторому оптимальному алгоритму обработки данных измерения. Приведённые здесь и в работе [1] диаграммы рассеяния при $\mathrm{SNR} \geq 10^2$ достаточно полно характеризуют поведение диаграмм рассеяния в дальней зоне для рассматриваемого типа нерегулярных волноводов при наличии случайного аддитивного шума и изменении отношения сигнал—шум от приблизительно 1 до 100. Динамика зашумлённых диаграмм рассеяния при изменении γ вполне очевидна из рис. 1, 2.

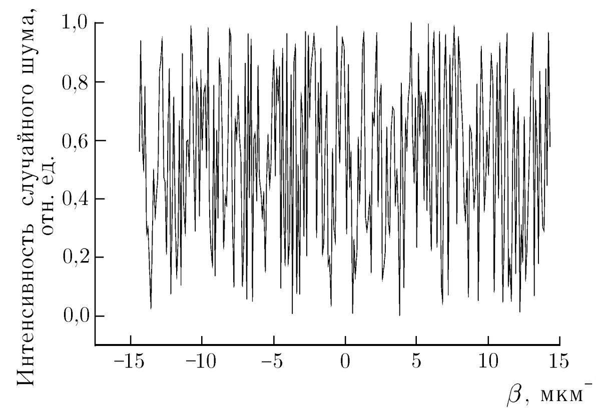

Рис. 3

На рис. 3 приведена одна из реализаций случайного белого шумового действительного процесса $N(\xi)$, заданного в области существования наблюдаемых мод рассеяния $\beta \in (-kn_1, kn_1)$. Функция спектральной плотности данного шума, как известно, близка к прямоугольному низкочастотному спектру [3]. Вследствие конечной точности счёта на компьютере и ограниченности интервала задания шумового процесса график автокорреляционной функции шума был близок к зависимости $\sin(x)/x$.

2. РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ВОЛНОВОДНОГО РАССЕЯНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ СЛУЧАЙНОГО АДДИТИВНОГО ШУМА

Решение обратной задачи в случае волноводного рассеяния света на статистических нерегулярностях заключается в восстановлении АКФ (и/или ФСП) и определении соответствующих параметров нерегулярностей по данным рассеяния, полученным, например, в ближней или дальней зоне (фурье-плоскости) [1].

2.1. Восстановление автокорреляционной функции и определение геометрических параметров статистической шероховатости при наличии аддитивного шума

Если регистрация интенсивности мод рассеяния производится в дальней зоне (фурье-плоскости) точечным фотодетектором, то восстановленная АКФ $R(u,\gamma)$ может быть определена по формуле [1]

$$R(u,\gamma)_{\rm sm} = C_0^{-1} \int \frac{\langle P(\beta,\gamma)\rangle\, \Phi^* E(u,\beta)}{|\Phi|^2 + \mu M}\, \exp[i\,(\beta_0-\beta)\,u]\,{\rm d}\beta, \tag{4}$$

где звёздочка обозначает комплексное сопряжение, μ — параметр регуляризации, $E(u,\beta)$ — сглаживающая (фильтрующая) функция, которая подбирается из условия минимума среднеквадратичной ошибки восстановления АКФ [1]. Простейшие стабилизаторы p-го порядка взяты в виде $M=\beta^{2p}$ или $M=(\beta_0-\beta)^{2p}$, где $p\geq 0$ — порядок регуляризации; функция M может иметь, в принципе, любой темп роста при $\beta\to\infty$. Формула (4) позволяет получить приближённое корректное решение обратной задачи с использованием процедуры квазиоптимальной фильтрации [1]. При $M=\mu^{-1}\,(S/N)^{-1}$ формула (4) даёт оптимальное регуляризованное решение обратной задачи, которое совпадает с результатом применения процедуры оптимальной фильтрации по Винеру [2]. Здесь S и N — спектральные плотности сигнала и шума соответственно, S/N — отношение сигнал—шум. Ниже для примера приведены два графика, характеризующие восстановление автокорреляционной функции шероховатостей поверхности кварцевой подложки ПВ при наличии случайного аддитивного шума высокой интенсивности.

На рис. 4 приведены результаты восстановления АКФ по формуле (4) для $M=(\beta_0-\beta)^{2p}$, $E(u,\beta)=\sin(mu\beta)/(mu\beta)$ при следующих параметрах: $\mu\approx 1{,}0$; $p\approx 0{,}8$; $m\approx 12$; коэффициент γ задавался так же, как и на рис. 1: указанным значениям γ соответствуют кривые *2*—*5*. Заданная гауссова АКФ $B(u)$ (кривая *1*) имела следующие параметры: $\sigma=5$ нм, $r=30$ нм; отношение сигнал—шум $\mathrm{SNR}\geq 10$. Среднеквадратичная ошибка восстановления АКФ для оптимального значения [1, 4, 5] $\gamma_{\rm opt}\approx 1{,}525$ (кривая *3* на рис. 4) составляет около 27 %, тогда как при $\mathrm{SNR}\geq 10^2$ она не превышает 20÷25 %. Для интервала корреляции $r=20$ нм ошибка восстановления АКФ несколько выше, чем при $r=\lambda/20$. При использовании простейшего стабилизатора p-го порядка $M=\beta^{2p}$ получаются похожие результаты.

Рис. 5 аналогичен рис. 4, но отношение сигнал—шум $\mathrm{SNR}\geq 1$. При этом оптимальные параметры задачи следующие: $\mu\approx 2{,}0$; $p\approx 0{,}7$; $m\approx 12$. Видно, что в этом случае разработанный алгоритм обработки данных измерения также позволяет достаточно эффективно восстанавливать АКФ из очень сильно зашумлённой диаграммы рассеяния. Здесь среднеквадратичная ошибка восстановления АКФ для того же значения коэффициента замедления (кривая *3* на рис. 5) равна примерно 30 %. Для интервала корреляции $r=20$ нм ошибка восстановления АКФ равна приблизительно 40 %. При использовании стабилизирующей функции $M=\beta^{2p}$ получены похожие результаты.

Для гауссовой сглаживающей функции $E(u,\beta)=\exp[-a\,(u\beta)^2]$ получены аналогичные результаты во всём диапазоне изменения r, от $\lambda/30$ до $\lambda/20$. Следовательно, в классе решений, получаемых с помощью достаточно простых стабилизаторов p-го порядка, представленный метод решения обратной

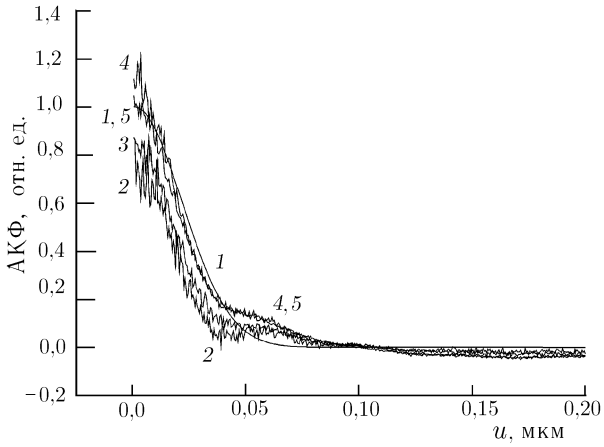

Рис. 4

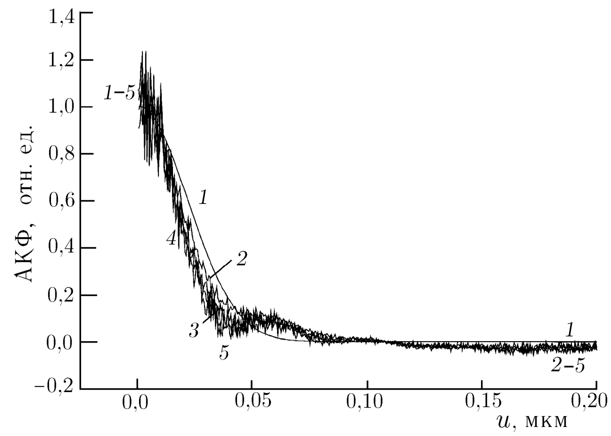

Рис. 5

задачи волноводного рассеяния света позволяет найти регуляризованное квазиоптимальное решение при наличии сильного случайного аддитивного белого шума. Без использования данного алгоритма обработки зашумлённых данных наблюдается известная неустойчивость решения обратной задачи, когда малые (при SNR ≥ 10) изменения в начальных данных (в диаграмме рассеяния) приводят к большим изменениям в выходных данных (в восстановленной АКФ). Разработанный метод может быть интерпретирован как комбинация классической регуляризации и эффективного (скользящего) сглаживания (квазиоптимальной фильтрации) в точках отсчёта сигнала. Отметим, что переход к дискретному представлению функций ($P(\beta,\gamma)$, $R(\beta,\gamma)$, $F(\beta,\gamma)$ и др.) даёт широкие возможности использования развитого физико-математического аппарата обработки дискретных сигналов при наличии шумов [6, 7].

Определение интервала корреляции тестовой статистической шероховатости кварцевой поверхности проводилось по известным формулам [1, 5]. Напомним, что интервалы корреляции r_1, r_2 и r_3 определяются соответственно в виде интеграла, интеграла модуля и интеграла квадрата модуля восстановленной нормированной АКФ, а r_4 определяется с помощью второй производной той же функции. Для восстановленной при оптимальном коэффициенте замедления автокорреляционной функции (кривая *3* на рис. 4; SNR ≥ 10) интервалы корреляции имеют следующие значения: $r_1 = 29$ нм, $r_2 = 29$ нм, $r_3 = 38$ нм; r_4 не удалось определить, т. к. процесс вычисления не сходился в случае применения дифференциальной формулы к зашумлённой АКФ. С наименьшей относительной ошибкой около 3,4 % определён первый интервал корреляции. Среднеарифметическое значение $r_{\rm ar} = 40$ нм отличается от заданного приблизительно на 6,6 %. При использовании гауссовой сглаживающей функции и тех же оптимальных параметрах задачи получены аналогичные результаты. Небольшое увеличение параметров μ и m позволяет снизить в обоих случаях эту ошибку примерно до 3÷6 %.

Для АКФ на рис. 5 (кривая *3*; SNR ≥ 1) определённые интервалы корреляции имеют следующие значения: $r_1 = 23$ нм, $r_2 = 28$ нм, $r_3 = 32$ нм; r_4 не удалось определить по тем же причинам, что и выше. С наименьшей относительной ошибкой около 7 % определены второй и третий интервалы корреляции. Среднеарифметическое значение $r_{\rm ar} = 28$ нм отличается от заданного приблизительно на 7 %, т. е. как и при высоком отношении сигнал—шум [1].

Аналогичная тенденция наблюдается и для интервалов корреляции в диапазоне изменения r от $\lambda/20$ до $\lambda/30$. Как видно из полученных результатов, точность восстановления АКФ с помощью предложенного алгоритма обработки зашумлённых данных измерений в дальней зоне является вполне достаточной для надёжного определения субволновых интервалов корреляции шероховатостей.

Среднеквадратичное отклонение шероховатостей поверхности от плоскости (среднеквадратичная высота) σ определялось по формуле [3]

$$\sigma^2 = R(u,\gamma)\big|_{u\to 0} - R(u,\gamma)\big|_{u\to\infty}. \qquad (5)$$

В обоих рассмотренных выше случаях (кривая *3* на рис. 4, 5) ошибка определения σ не превышает $5\div20$ %. При $r = \lambda/30$ ошибка приблизительно равна $5\div30$ %. При $\mathrm{SNR} \geq 100$ (см. [1]) указанная ошибка в обоих случаях составляет менее $1\div5$ %. Использование восстановленной регуляризованной АКФ для определения среднеквадратичной высоты позволило существенно уменьшить ошибку определения σ по сравнению с формулой, использующей интегрирование функции спектральной плотности [1, 5].

Минимальная погрешность, достижимая при аппроксимации исходной неограниченно протяжённой функции спектральной плотности $F(\beta,\gamma) \in L_2(-\infty,+\infty)$ с помощью функций ограниченной протяжённости $\tilde{F}_i(\beta,\gamma) \in L_2(-\beta,\beta)$ определяется формулой [1]

$$\min(l_{L_2}) = \int\limits_{-\infty}^{-\beta_{\max}} \left|\langle F(\beta,\gamma)\rangle - \langle \tilde{F}_i(\beta,\gamma)\rangle_{\mathrm{sm}}\right|^2 \mathrm{d}\beta + \int\limits_{\beta_{\max}}^{+\infty} \left|\langle F(\beta,\gamma)\rangle - \langle \tilde{F}_i(\beta,\gamma)\rangle_{\mathrm{sm}}\right|^2 \mathrm{d}\beta. \tag{6}$$

Здесь $\beta_{\max}$ определяет граничную пространственную частоту, выше которой оптическая передаточная функция системы равна нулю. Как показано в работе [4], эта ошибка теоретически может быть менее 1 % при точных входных данных (т. е. при достаточно высоком отношении сигнал—шум при измерении диаграммы рассеяния) и представлении искомой ФСП в виде ряда Тейлора с числом коэффициентов разложения N не менее 15. Поскольку среднеквадратичная ошибка восстановления функции спектральной плотности обратно пропорциональна N [4], то при точных входных данных можно надеяться на восстановление статистических характеристик нерегулярностей с небольшой ошибкой при параметрах нерегулярностей, удовлетворяющих требуемым ограничениям [4]. Однако при восстановлении этих характеристик из неточно заданной (зашумлённой) диаграммы рассеяния и особенно при экстраполяции спектра далеко за пределы диапазона наблюдаемых мод рассеяния среднеквадратичная ошибка будет сильно возрастать. Важно отметить, что при наличии шума и дискретизации вычислений минимизация ошибки восстановления АКФ по невязке (6) требует аккуратности при численной реализации алгоритма.

Полученные результаты компьютерного моделирования подтверждают, что разработанный метод позволяет получить приближённое корректное решение поставленной обратной задачи с относительной среднеквадратичной ошибкой восстановления АКФ не более 40 % при наличии аддитивного белого шума, близкого к уровню сигнала. При этом ошибка определения субволновых интервалов корреляции $r \sim \lambda/20\div\lambda/30$ составляет менее 10 %, а среднеквадратичной высоты $\sigma \sim 50$ Å — не более 35 %.

2.2. Проблема сверхразрешения при наличии интенсивного случайного шума

Не претендуя на полноту, отметим некоторые пути дальнейшего повышения точности восстановления функции спектральной плотности, автокорреляционной функции и определения соответствующих параметров нерегулярностей при наличии интенсивного случайного шума.

1) Нахождение оптимальных для данного процесса сглаживающих (фильтрующих) функций и параметров решения обратной задачи.

2) Применение эффективной экстраполяции спектра за пределы диапазона регистрируемых мод рассеяния, что может увеличить число пространственных степеней свободы оптического сигнала [8]. В последнем случае надо учитывать, что эффективная ширина спектра в рассматриваемом случае примерно в $3\div10$ раз больше полосы волновых чисел, лежащих в диапазоне наблюдаемых мод рассеяния [1].

3) Использование фазовой информации, что может повысить разрешение системы примерно вдвое, т. к. в этом случае в два раза увеличивается число степеней свободы оптического сигнала. Аналогичный выигрыш получается при передаче информации только при одной поляризации (в нашем случае это использование, например, только ТЕ-моды) [8]. Важно отметить, что в пределах фундаментального инварианта информационной ёмкости оптической системы, т. е. числа полных степеней свободы оптического сигнала (соотношение Лауэ), можно изменять соотношение между пространственными, временны́ми и поляризационными степенями свободы, сохраняя неизменным их полное число (теорема Лукоша).

4) При достижении сверхразрешения возможно применение метода Бейкуса—Гильберта, в котором не предполагается существование обратного оператора [9]. В этом случае приближённое решение обратной задачи рассеяния ищется на некотором компактном множестве, позволяющем получить корректное решение в классе целых функций. Этот подход может сильно сузить класс исследуемых нерегулярностей до нерегулярностей, описываемых достаточно плавными и гладкими функциями. Это могут быть, например, шероховатости сверхгладкой оптической поверхности (с очень низкими потерями на рассеяние), применяемой в системах с высокой плотностью записи информации, в лазерной оптике, в интегральной оптоэлектронике и других высокотехнологичных областях. Для достижения такого класса чистоты поверхности необходима её обработка до уровня примерно 19—21-го класса [5].

5) Применение метода Габора, относящегося к преобразованиям вэйвлетного типа, также позволяет получить приближённое корректное решение задачи. Однако необходимость выбора подходящего набора базисных функций, по которым производится разложение, и потребность нахождения устойчивых алгоритмов численного обращения матриц (см., например, [10]), особенно при наличии шумов, также несколько ограничивает возможности метода.

Как правило, компьютерная реализация вышеперечисленных методов требует решения достаточно сложных проблем и построения высокоэффективных вычислительных алгоритмов. Очевидно, наилучшего результата во всех случаях можно достичь, если известна или каким-либо образом определена статистика шума (см., например, [2, 3]). Наличие априорной информации об исследуемом объекте также позволяет улучшить точность восстановления характеристик случайных нерегулярностей и, соответственно, повысить разрешение метода.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработанный метод нахождения приближённого корректного решения обратной задачи позволяет с приемлемой для экспериментов точностью восстанавливать автокорреляционную функцию статистической стационарной нанометровой шероховатости поверхности по данным рассеяния, полученным в дальней зоне (в фурье-плоскости) при наличии интенсивного аддитивного случайного белого шума. Решение обратной задачи сводится к построению достаточно эффективного квазиоптимального регуляризующего оператора, использующего метод наименьших квадратов. При отношении сигнал—шум SNR ≥ 1 разработанный алгоритм позволяет в модельных расчётах определить субволновые интервалы корреляции шероховатостей $r \sim \lambda/20 \div \lambda/30$ с ошибкой не более 10 %, а среднеквадратичную высоту $\sigma \sim 50$ Å с ошибкой менее 35 %.

Важным преимуществом описанного метода измерений является реализация режима волноводного рассеяния, который позволяет повысить чувствительность измерений в $10^2 \div 10^3$ раз по сравнению с методами однократного рассеяния благодаря многократному синфазному рассеянию света на исследуемой статистической шероховатости поверхности. Другим серьёзным преимуществом метода является возможность исследования рассеяния в широком диапазоне поперечных размеров нерегулярностей, включая и размеры порядка длины волны зондирующего излучения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Егоров А. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 2000. Т. 43, № 12. С. 1 090.
2. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1981.
3. Ахманов С. А., Дьяков Ю. Е., Чиркин А. С. Введение в статистическую радиофизику и оптику. М.: Наука, 1981.
4. Egorov A. A. // Laser Physics. 1998. V. 8, No. 2. P. 536.
5. Егоров А. А. // Изв. РАН. Сер. физ. 1999. Т. 63, № 6. С. 1 125.
6. Васильев В., Гуров И. Компьютерная обработка сигналов в приложении к интерферометрическим системам. СПб.: БХВ—Санкт-Петербург, 1998.
7. Ярославский Л. П. Цифровая обработка сигналов в оптике и голографии. М.: Радио и связь, 1987.
8. Аблеков В. К., Колядин С. А., Фролов А. В. Высокоразрешающие оптические системы. М.: Машиностроение, 1985.
9. Colton D., Kress R. Integral equation methods in scattering theory. New York: John Wiley and Sons, 1983.
10. Zibulski M., Zeevi Y. Y. // IEEE Trans. On Signal Processing. 1993. V. 41, No. 8. P. 2 679.

Российский университет дружбы народов,
г. Москва, Россия

Поступила в редакцию
11 апреля 2001 г.

RETRIEVAL OF CHARACTERISTICS AND DETERMINATION OF PARAMETERS OF A STATISTICAL NANOMETER-SCALE SURFACE ROUGHNESS BY THE LIGHT SCATTERING DATA IN A PLANAR OPTICAL WAVEGUIDE IN THE PRESENCE OF ADDITIVE NOISE

A. A. Yegorov

Based on numerical modeling, we obtain solutions for the direct and inverse problems of the waveguide light scattering by a stationary statistical nanometer-scale surface roughness in the presence of additive white noise. It is shown that the procedure developed earlier for processing far-zone scattering data (or data on the equivalent Fourier plane) allows for obtaining sufficient information on the statistical characteristics of surface roughness even for the very low level of the signal-to-noise ratio (SNR ≥ 1). In the case of a given noise with SNR ≥ 1, the developed algorithm makes in possible to determine, within the framework of model calculations, the subwavelength correlation radii $\sim \lambda/20 \div \lambda/30$ of the roughness with an error not greater than $10 \div 30\%$ and the rms height of the roughness ~ 50 Å with an error less than 35%.

УДК 551.468

БИСПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ГРАВИТАЦИОННО-КАПИЛЛЯРНЫХ ВОЛН

Г. Н. Бочков [1], К. В. Горохов [1], С. А. Ермаков [2], И. Р. Коннов [2], Ю. Б. Щегольков [2]

Выполнено лабораторное исследование нелинейной фазовой связи между короткими гравитационными волнами с длиной порядка 10 см и их высшими гармониками, включая «паразитную» капиллярную рябь. На основе методов биспектрального анализа сделан вывод о наличии в спектре гравитационно-капиллярных волн (ГКВ) высших гармоник основной низкочастотной компоненты. Для определения количественных соотношений между вкладами свободных и вынужденных компонент в спектре ГКВ использована функция нормализованной бикогерентности. Показано, что она корректно определена как для широкополосных случайных процессов, так и для полигармонических случайных сигналов. Получено количественное соотношение между вкладами свободных и вынужденных волн в спектре ГКВ на частоте второй гармоники.

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что при возбуждении гравитационно-капиллярных волн (ГКВ) на поверхности воды наблюдается целый ряд нелинейных эффектов, исследование которых принципиально важно при построении моделей ветрового волнения и интерпретации данных дистанционного зондирования морской поверхности [1]. Одним из таких эффектов является генерация высших гармоник поверхностных волн, проявляющаяся в возникновении пика в спектре ветровых волн на второй (а иногда и третьей) гармонике частоты энергонесущего максимума. Генерация гармоник проявляется и в виде несинусоидальности профиля поверхностных волн (особенно коротких гравитационных волн сантиметрового и дециметрового диапазонов), что, в свою очередь, приводит к асимметрии функции распределения наклонов ветровых волн [2]. Вынужденные гармоники в стационарной нелинейной поверхностной волне движутся с фазовой скоростью основной гармоники, поэтому закон дисперсии отдельных гармоник в спектре ветровых волн может существенно отличаться от дисперсии свободных ГКВ. Это было обнаружено в лабораторных экспериментах Рамамоньярисоа (см. [2]), в ходе которых установлено, что фазовая скорость гармоник спектра с частотами, большими удвоенной частоты энергонесущего пика, в отличие от скорости свободных ГКВ слабо зависит от частоты и близка к скорости волн на частоте максимума.

Учёт процессов генерации вынужденных гармоник, наряду с задачей построения моделей спектров ветровых волн, весьма важен также при исследовании волнения когерентными доплеровскими радиолокаторами и интерпретации частотных спектров их сигналов.

Нелинейность профиля поверхностных волн особенно сильно проявляется в случае коротких ГКВ (длина волны порядка 10 см). Хорошо известно [2, 3], что при достаточной амплитуде таких волн на их передних склонах возбуждается капиллярная (т. н. «паразитная») рябь. Этот процесс можно интерпретировать как генерацию высших гармоник, движущихся с фазовой скоростью ГКВ и одновременно удовлетворяющих дисперсионному соотношению в области капиллярных волн. Групповая скорость этих «резонансных» гармоник равна дисперсионной групповой скорости капиллярных волн. Поскольку групповая скорость капиллярных волн превышает их фазовую скорость, а следовательно, и фазовую скорость несущей ГКВ, «паразитная» рябь распространяется по переднему склону профиля ГКВ от гребня к впадине. Очевидно, в спектре ветровых ГКВ сантиметрового и миллиметрового диапазонов должны присутствовать как высшие гармоники более низкочастотных сантиметровых и дециметровых компонент, так и волны, непосредственно генерируемые ветром и распространяющиеся как свободные ГКВ. Таким образом, возникает задача различения свободных и вынужденных гармоник в спектре коротких ветровых волн.

Вынужденные гармоники высокочастотной ряби связаны по фазе с более низкочастотными компонентами волн, тогда как фазы свободных гармоник независимы. В спектре энергии ветровых волн информация о фазах гармоник, как известно, теряется, однако в высших моментах и спектрах более высокого, чем второй, порядка (СВП, или полиспектры) эта информация сохраняется (см., например, обзор [4]). По характеру СВП (а именно по отличию их от нуля) можно судить об отклонении функции распределения процесса от гауссовской. Наоборот, если процесс негауссовский, то его полиспектры третьего и более высоких порядков отличны от нуля. Поскольку функция распределения наклонов гравитационных и особенно капиллярных ветровых волн асимметрична (а следовательно, негауссова [2]), то уже простейший из СВП — биспектр — позволит сделать вывод о наличии или отсутствии нелинейной фазовой связи между гармониками спектра.

В работе [5] биспектральный анализ регулярных поверхностных волн гравитационного диапазона (частота основной гармоники 0,3 Гц) был использован для обнаружения фазовой связи гармоник. Однако применяемая в [5] методика не позволяет сделать количественные оценки степени фазовой связи различных гармоник.

В данной работе (см. также [6]) с помощью биспектрального анализа впервые исследована степень квадратичной фазовой связи между короткими гравитационными волнами (длина волны порядка 10 см, частота около 4 Гц) и их высшими гармониками, включая «паразитную» капиллярную рябь (с частотой от 50 Гц). Получено количественное соотношение между вкладами свободных и вынужденных волн в спектре ГКВ на частоте второй гармоники.

1. ТЕОРИЯ

Как известно, для стационарных случайных процессов спектр и биспектр определяются следующим образом:

$$S(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\langle x(t),x(t+\tau)\rangle\exp(-i\omega\tau)\,\mathrm{d}\tau, \tag{1}$$

$$B(\omega_1,\omega_2)=\frac{1}{(2\pi)^2}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\langle x(t),x(t+\tau_1),x(t+\tau_2)\rangle\exp[-i\,(\omega_1\tau_1+\omega_2\tau_2)]\,\mathrm{d}\tau_1\,\mathrm{d}\tau_2, \tag{2}$$

где $\langle x(t),x(t+\tau)\rangle$ и $\langle x(t),x(t+\tau_1),x(t+\tau_2)\rangle$ — кумулянтные функции второго и третьего порядков процесса $x(t)$ соответственно [7]. Другими, эквивалентными определениями спектра и биспектра, как известно, являются

$$S(\omega)=\lim_{T\to\infty}\hat S(T^{-1};\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\langle X_T(\omega,t),X_T^*(\omega,t)\rangle, \tag{3}$$

$$B(\omega_1,\omega_2)=\lim_{T\to\infty}\hat B(T^{-1};\omega_1,\omega_2)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\langle X_T(\omega_1,t),X_T(\omega_2,t),X_T^*(\omega_1+\omega_2,t)\rangle, \tag{4}$$

где

$$X_T(\omega)=\int\limits_{-T/2}^{+T/2}x(t)\exp(-i\omega t)\,\mathrm{d}t=|X_T(\omega)|\exp[i\varphi_T(\omega)], \tag{5}$$

знак звёздочка обозначает комплексное сопряжение. Формулы (3), (4) являются практической основой для вычисления спектров и биспектров. Величины $\hat S(n;\omega)$ и $\hat B(n;\omega_1,\omega_2)$ имеют смысл эмпирических спектра и биспектра, вычисленных с конечным разрешением $\Pi=1/T$ [8]. Отметим, что если

$\langle x(t) = 0 \rangle$, то кумулянтные средние в (3), (4) заменяются на моментные. Из (4) с учётом свойств симметрии кумулянтных средних нетрудно получить свойства симметрии биспектра [4], из которых, в свою очередь, следует, что биспектр полностью определяется своими значениями в области $\omega_1 > \omega_2 > 0$.

Как видно из (4), биспектр $B(\omega_1, \omega_2)$ описывает трёхчастотное взаимодействие, т. е. статистическую связь между тремя составляющими, частоты ω_1, ω_2, ω_3 которых удовлетворяют соотношению $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$.

Согласно (4), (5) в модуль полиспектра дают вклад амплитуды и фазы спектральных компонент случайного сигнала, причём в $|X_T(\omega)|$ в определённой степени повторяется информация, содержащаяся в спектре (3). Исходя из этого, для выявления фазовой когерентной структуры анализируют нормированный модуль биспектра $b(\omega_1, \omega_2)$:

$$b^2(\omega_1, \omega_2) = \frac{|B(\omega_1, \omega_2)|^2}{S(\omega_1) S(\omega_2) S(\omega_1 + \omega_2)}\,, \tag{6}$$

называемый бикогерентностью [4, 9, 10].

Необходимо отметить, что величина $b(\omega_1, \omega_2)$ имеет размерность Гц$^{-1/2}$ и может принимать любые значения в интервале $[0, \infty)$ (см. Приложение). Более того, например, для полигармонических процессов, имеющих дискретные (сингулярные) компоненты в спектре, бикогерентность (6) не определена. Поэтому при описании степени статистической связанности трёх спектральных компонент с частотами ω_1, ω_2 и $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ в случае полигармонических процессов целесообразно применять нормализованную бикогерентность

$$C(\omega_1, \omega_2) = \lim_{T \to \infty} C(T^{-1}; \omega_1, \omega_2) = \lim_{T \to \infty} \frac{|\hat{B}(T^{-1}; \omega_1, \omega_2)|}{\sqrt{T \hat{S}(T^{-1}; \omega_1) \hat{S}(T^{-1}; \omega_2) \hat{S}(T^{-1}; \omega_1 + \omega_2)}} \tag{7}$$

как предел последовательности эмпирических нормализованных бикогерентностей $C(T^{-1}; \omega_1, \omega_2)$. Как показано в Приложении, для стационарных случайных процессов, не имеющих кубически связанных по фазе составляющих, нормализованная бикогерентность принимает значения из интервала $[0, 1]$.

Рассмотрим теперь биспектральные характеристики для следующей простой модели волнового процесса:

$$\begin{aligned} x(t) = A_1 \cos(\omega_{01} t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_{02} t + \varphi_2) + A_3 \cos(\omega_{03} t + \varphi_3) + \\ + A_4 \cos[(\omega_{01} + \omega_{02})\, t + \varphi_1 + \varphi_2] + A_5 \cos[(\omega_{01} - \omega_{02})\, t + \varphi_1 - \varphi_2], \end{aligned} \tag{8}$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ — независимые равномерно распределённые на интервале $[0, 2\pi)$ случайные фазы, $\omega_{03} = \omega_{01} + \omega_{02}$, а слагаемые с амплитудами A_4 и A_5 являются результатом нелинейного (квадратичного) взаимодействия синусоид с частотами ω_{01} и ω_{02}. Как известно, спектр данного процесса в области $\omega > 0$ имеет вид

$$\begin{aligned} S(\omega) = \frac{A_1^2}{4} \delta(\omega - \omega_{01}) + \frac{A_2^2}{4} \delta(\omega - \omega_{02}) + \frac{A_3^2}{4} \delta(\omega - \omega_{03}) + \\ + \frac{A_4^2}{4} \delta[\omega - (\omega_{01} + \omega_{02})] + \frac{A_5^2}{4} \delta[\omega - (\omega_{01} - \omega_{02})]. \end{aligned} \tag{9}$$

Используя (4), (5), получаем биспектр процесса (8) в области частот $\omega_1 > \omega_2 > 0$:

$$B(\omega_1, \omega_2) = \frac{A_1 A_2 A_4}{8} \delta(\omega_1 - \omega_{01}) \delta(\omega_2 - \omega_{02}) + \frac{A_1 A_2 A_5}{8} \delta(\omega_1 - \omega_{02}) \delta[\omega_2 - (\omega_{01} - \omega_{02})]. \tag{10}$$

Нетрудно видеть, что бикогерентность (6), соответствующая спектру (9) и биспектру (10), не определена. В то же время нормализованная бикогерентность для пар частот ω_{01}, ω_{02} и ω_{02}, $\omega_{01}-\omega_{02}$ имеет вполне определённые значения:

$$C^2(\omega_{01},\omega_{02}) = \frac{A_4^2}{A_3^2+A_4^2}\,, \qquad C^2(\omega_{02},\omega_{01}-\omega_{02}) = \frac{A_5^2}{A_3^2+A_5^2}\,. \tag{11}$$

В данном случае величина $C^2(\omega_{01},\omega_{02})$ показывает, какая часть мощности на частоте $\omega_{03}=\omega_{01}+\omega_{02}$ в спектре процесса $x(t)$ приходится на волну, нелинейно связанную с волнами на частотах ω_{01} и ω_{02}. Если бикогерентность $C^2(\omega_{01},\omega_{02})$ близка к единице, то можно говорить о почти полной фазовой когерентности между гармониками на частотах ω_{01}, ω_{02} и ω_{03}, тогда как близкая к нулю бикогерентность свидетельствует о практически полной фазовой независимости этих гармоник. Если же функция $C^2(\omega_{01},\omega_{02})$ принимает значения между нулём и единицей, то в сигнале присутствуют как свободные волны, так и связанные по фазе компоненты. Аналогичный смысл имеет величина $C^2(\omega_{01},\omega_{01}-\omega_{02})$.

2. ЭКСПЕРИМЕНТ

Эксперименты проводились в кольцевом лабораторном бассейне овальной формы с двумя прямолинейными участками. Большая ось бассейна имеет длину 6 м, малая — 4 м, длина прямолинейного участка 3 м; ширина лотка составляет 0,3 м, глубина воды 0,3 м. Лоток был закрыт сверху кожухом, при этом высота воздушного канала составляла 0,3 м. Исследование регулярных волн проводилось на прямом участке бассейна. Волны генерировались с помощью волнопродуктора, частота колебаний которого $f_{\rm R}=4{,}8$ Гц. Эксперименты с ветровыми волнами проводились при скорости ветра 4,3 м/с.

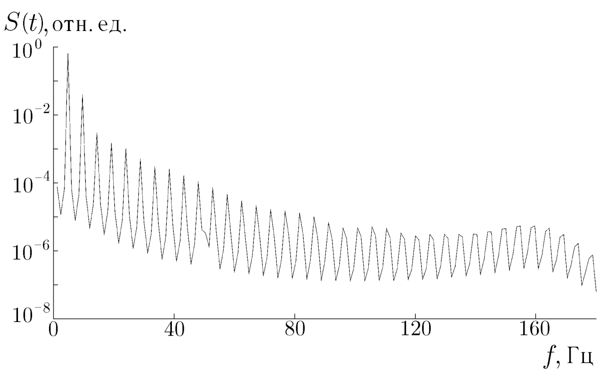

Рис. 1. Спектр наклонов регулярных поверхностных волн

Наклоны волн измерялись с помощью лазерного наклономера и позиционно чувствительного фотоприёмника, затем данные поступали в компьютер через аналого-цифровой преобразователь (частота дискретизации 1 000 Гц). Вычисление спектральных и биспектральных характеристик наклонов волн осуществлялось методом комплексной демодуляции [4]. При обработке данных использовалось усреднение как по времени, так и по частоте (каждая выборка объёмом 2 100 000 точек была разделена на 42 сегмента по 50 000 точек в каждом).

3. РЕЗУЛЬТАТЫ

Спектр наклонов регулярных поверхностных волн, пропорциональный их амплитудному спектру, представлен на рис. 1, а нормализованная бикогерентность наклонов (в дальнейшем — бикогерентность) — на рис. 2*а, б*. На рис. 3 показан срез бикогерентности наклонов регулярных поверхностных волн по линии $f_2=f_{\rm R}=4{,}8$ Гц.

Как видно из рис. 2, на частотах выше 50 Гц для одной и той же частоты f_1 бикогерентность на линии $f_2=f_{\rm R}$ выше, чем на линии $f_2=2f_{\rm R}$, бикогерентность на линии $f_2=2f_{\rm R}$ выше, чем на линии

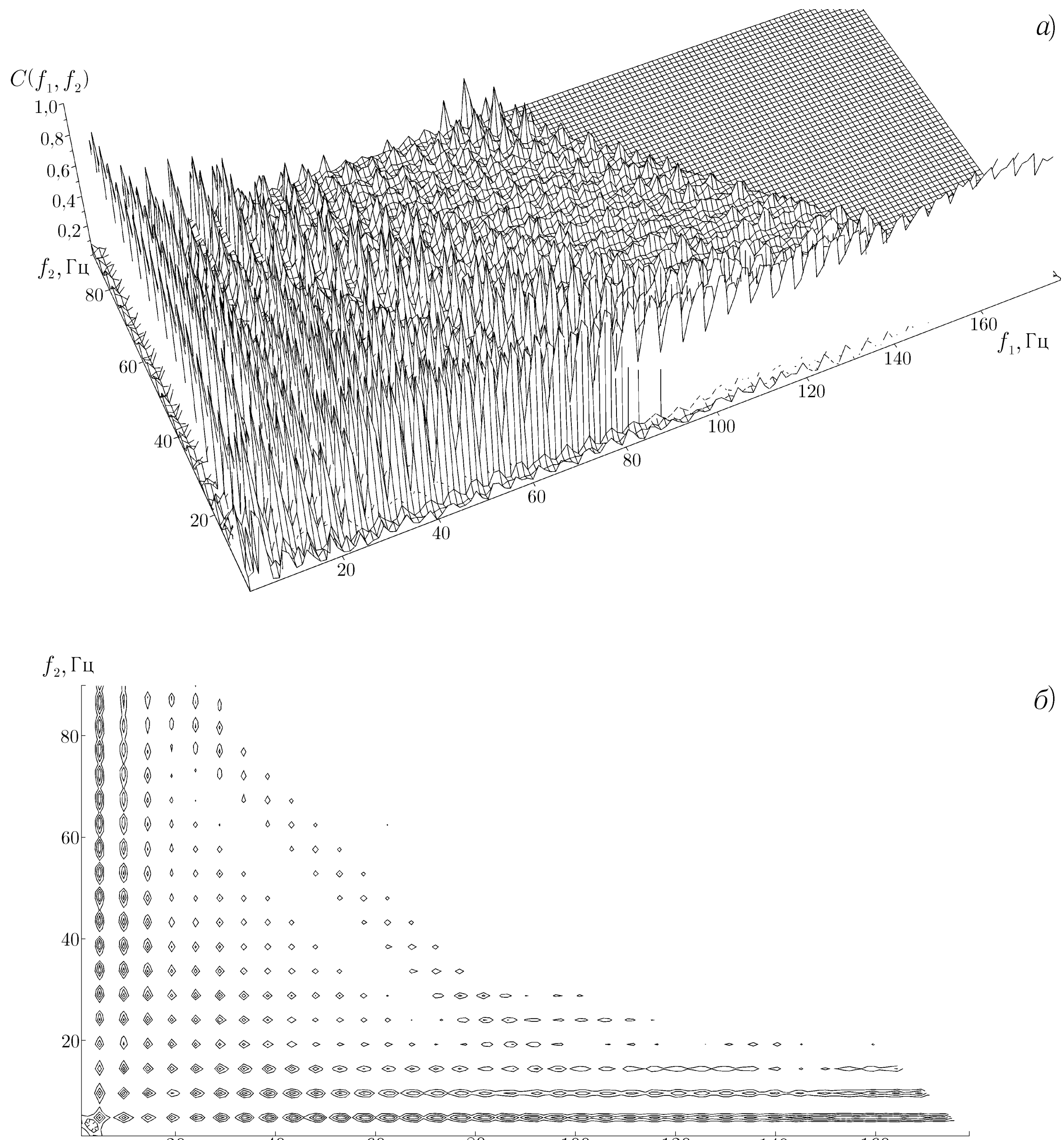

Рис. 2. Бикогерентность наклонов регулярных поверхностных волн: рельеф (a) и изолинии от уровня 0,3 с интервалом 0,2 ($б$)

$f_2 = 3f_{\mathrm{R}}$ и т. д. Это означает, что высокочастотные гармоники взаимодействуют с первой гармоникой сильнее, чем со второй, а со второй сильнее, чем с третьей и т. д.

Для оценки относительной мощности вынужденной волны на частоте второй гармоники в данном случае может быть использована первая формула (11):

$$C^2(f_{\mathrm{R}}, f_{\mathrm{R}}) = \frac{(A_1, A_1)^2}{(A_1, A_1)^2 + B_2^2}\,, \tag{12}$$

где A_1 — амплитуда основной гармоники поверхностных волн, возбуждаемой волнопродуктором,

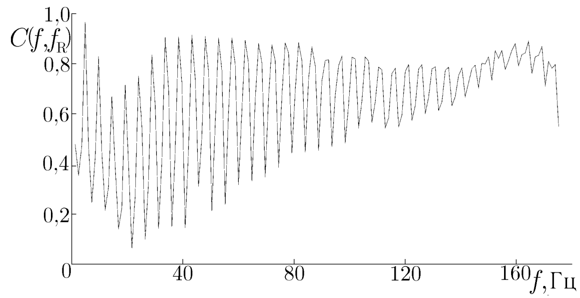

Рис. 3. Срез бикогерентности наклонов регулярных поверхностных волн по линии $f_2 = f_\mathrm{R} = 4{,}8$ Гц

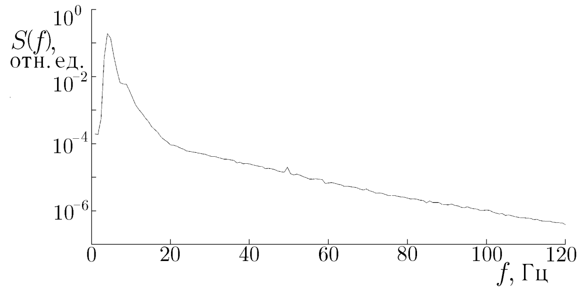

Рис. 4. Спектр наклонов ветровых поверхностных волн

(A_1, A_1) — амплитуда второй гармоники поверхностных волн, возникающая вследствие нелинейности среды, B_2 — амплитуда свободной поверхностной волны, возбуждаемой волнопродуктором на частоте $2f_\mathrm{R}$.

Таким образом, величина $C^2(f_\mathrm{R}, f_\mathrm{R})$ показывает, какая часть мощности в спектре поверхностных волн приходится на вторую гармонику (с частотой $2f_\mathrm{R}$), возникающую вследствие взаимодействия основных гармоник:

$$\frac{S_\mathrm{c}(2f_\mathrm{R})}{S(2f_\mathrm{R})} = C^2(f_\mathrm{R}, f_\mathrm{R}), \tag{13}$$

где $S_\mathrm{c}(2f_\mathrm{R})$ — мощность связанной по фазе компоненты. В данном случае $C^2(f_\mathrm{R}, f_\mathrm{R}) \approx 0{,}96^2 \approx 0{,}93$ (см. рис. 3), следовательно, на частоте $2f_\mathrm{R}$ на долю связанных по фазе волн приходится около 93 % мощности. Относительно невысокая бикогерентность на линии $f_2 = f_\mathrm{R}$ на нескольких следующих частотах f_1, кратных основной (см. рис. 3), объясняется неидеальностью волнопродуктора, приводящей к возникновению волн на кратных частотах. Зная (или предполагая) закон нелинейного взаимодействия волн и используя формулу (7), можно определить долю энергии (мощности), приходящуюся на свободные и связанные волны и на других частотах.

Спектр наклонов ветровых волн представлен на рис. 4, а бикогерентность — на рис. 5 *а*, *б*. На рис. 6 показан срез бикогерентности наклонов ветровых поверхностных волн по линии $f_2 = f_0 = 4{,}8$ Гц (эта частота находится в полосе энергонесущего максимума).

Бикогерентность для $f_1 = f_2 = 4$ Гц равна 0,54, а для $f_1 = f_2 = 4{,}8$ Гц близка к 0,6. Описывая спектр ветровых волн как набор квазигармонических составляющих и применяя формулу (12), приходим к выводу, что более 35 % мощности на удвоенной частоте энергонесущего максимума в спектре ветровых волн приходится на вынужденные колебания.

Бикогерентность в области частот «паразитной» ряби превышает 0,35 (см. рис. 6). Исходя из физической модели явления, можно сделать вывод о наличии в этой области высших гармоник более низкочастотных компонент спектра. В интервале между частотой энергонесущего максимума (в данном случае приблизительно 4,8 Гц) и областью частот паразитной ряби бикогерентность сравнительно мала, что указывает на доминирование свободных волн над вынужденными. Отметим, что профиль бикогерентности имеет вид гребня («хребта»), параллельного координатной оси, с шириной по второй координате около 2 Гц в интервале частот энергонесущего максимума. Максимум бикогерентности приходится на область частот от 50 Гц и выше, что согласно [11] соответствует частотам «паразитной» ряби, генерируемой крутыми ГКВ. Менее выраженный гребень, также параллельный оси частот, соответствует второй гармонике частоты энергонесущего максимума. Это означает, что «паразитная» рябь на некоторой фиксированной частоте F образуется в основном в результате взаимодействия основной гармоники энергонесущего максимума с частотой f_0 и компоненты «паразитной» ряби с частотой

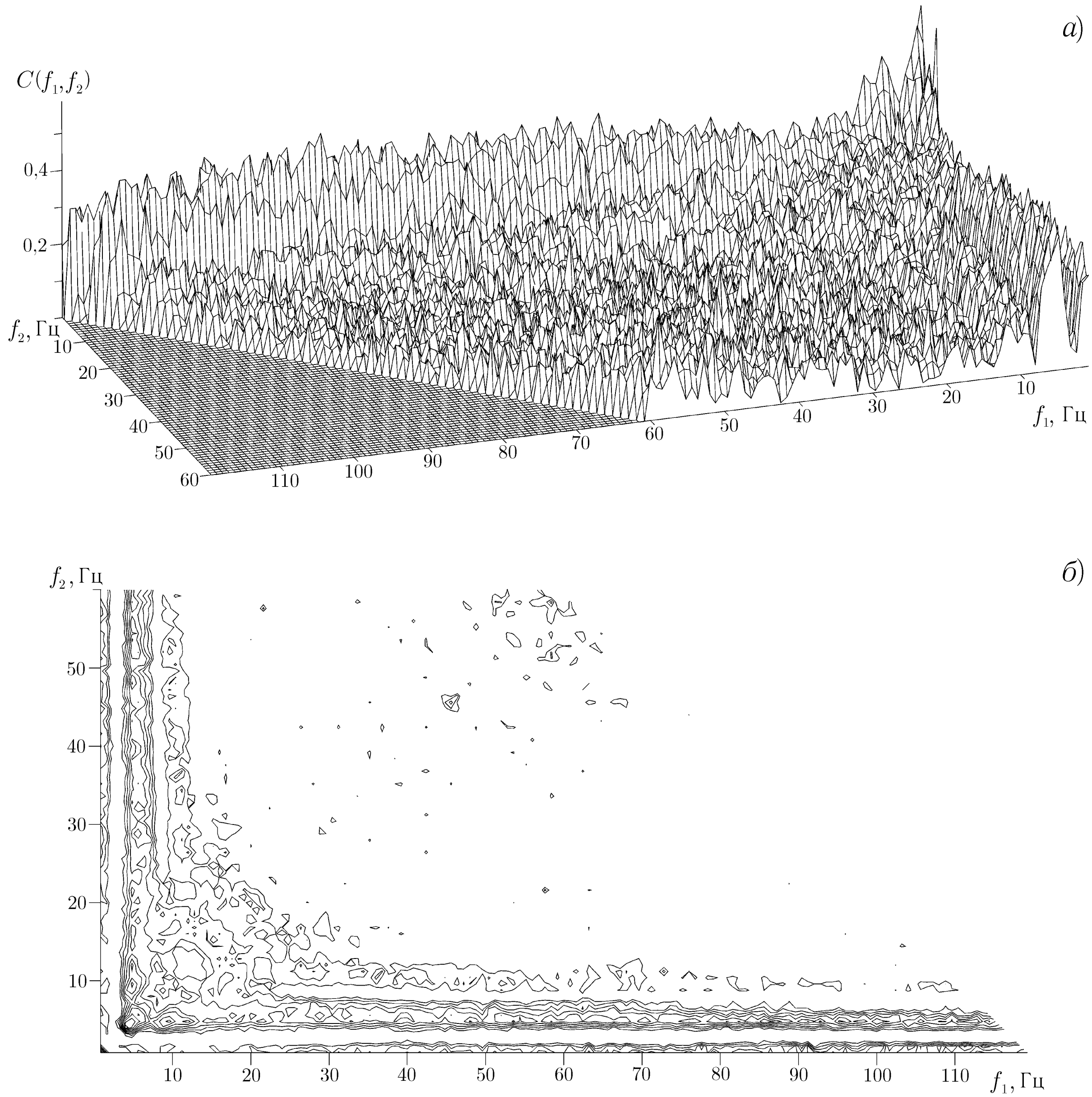

Рис. 5. Бикогерентность наклонов ветровых поверхностных волн: рельеф (a) и изолинии от уровня 0,15 с интервалом 0,05 ($б$)

$F-f_0$ и в меньшей степени в результате взаимодействия второй гармоники с частотой $2f_0$ и компоненты «паразитной» ряби с частотой $F-2f_0$ (напомним, что биспектральные характеристики позволяют анализировать результаты только трёхволнового взаимодействия).

Таким образом, как для регулярных, так и для ветровых волн наблюдаются сходные механизмы образования гармоник в гравитационно-капиллярном диапазоне, в частности в области частот «паразитной» ряби.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведённые исследования позволили установить наличие квадратичной фазовой связи между короткими гравитационными волнами (с длиной волны порядка 10 см) и их высшими гармониками, включая «паразитную» капиллярную рябь (с частотой порядка 50 Гц и выше).

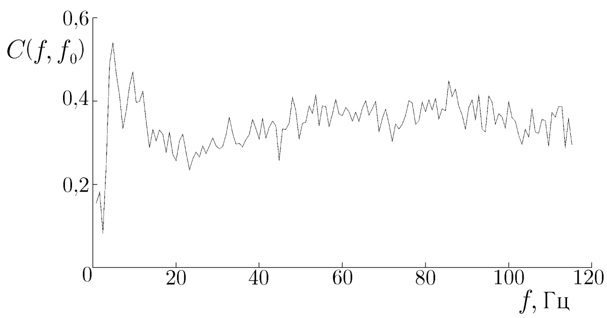

Рис. 6. Срез бикогерентности наклонов ветровых поверхностных волн по линии $f_2 = f_0 = 4{,}8$ Гц

Для определения количественного соотношения между вкладами свободных и вынужденных волн в спектре ГКВ, как показано в данной работе, целесообразно использовать нормализованную бикогерентность, которая корректно определена как для широкополосных случайных процессов, так и для полигармонических случайных сигналов.

Получено количественное соотношение между вкладами свободных и вынужденных волн в спектре ГКВ на частоте второй гармоники основной низкочастотной моды. Установлено, что вклад вынужденных волн на удвоенной частоте энергонесущего максимума в спектре ветровых ГКВ составляет более 35 %.

Показано, что вклад вынужденных высокочастотных гармоник в спектр нелинейных ГКВ может быть значительным. Несмотря на то, что для более детальных количественных оценок необходимо использовать конкретные модели нелинейности волн, анализ нормализованных бикогерентностей регулярных и ветровых ГКВ позволил выявить основные закономерности механизма образования вынужденных гармоник в диапазоне ГКВ, в частности в области частот «паразитной» ряби. Так, хотя в возбуждении (в результате квадратичного взаимодействия) вынужденной волны с частотой F могут принимать участие любые пары волн, частоты f_1 и f_2 которых удовлетворяют условию $f_1 + f_2 = F$, наибольший вклад вносят пары с частотами f_R и $F - f_\mathrm{R}$, а также $2f_\mathrm{R}$ и $F - 2f_\mathrm{R}$, где f_R — частота основной гармоники (в случае регулярных волн) или энергонесущего максимума (в случае ветровых волн).

Можно предположить, что и в натурных условиях доля мощности, приходящаяся на нелинейно связанные гармоники в спектре поверхностных капиллярных волн, значительна, что должно учитываться в моделях этих волн.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 99–05–64797, 00–15–96620, 00–15–96772 и 02–05–65102) и ФЦП «Интеграция» (проект № 200, 2001 г.).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Рассмотрим ограничения, налагаемые на бикогерентности (6), (7) в общем случае. Для этого воспользуемся неравенством Коши—Буняковского для кумулянтных средних двух произвольных комплексных случайных величин [6]:

$$|\langle f, g^* \rangle|^2 \le \langle f, f^* \rangle \, \langle g, g^* \rangle. \qquad (\Pi 1)$$

Подставляя в (П1) $f = X_T(\omega_1) X_T(\omega_2)$, $g = X_T(\omega_3)$ и раскрывая сложные кумулянтные скобки с использованием известных формул кумулянтного анализа [6], при $\langle X_T(\omega) \rangle = 0$ получаем

$$|\langle X_T(\omega_1), X_T(\omega_2), X_T^*(\omega_3) \rangle|^2 \le \langle |X_T(\omega_3)|^2 \rangle \times$$

$$\times \left(\langle |X_T(\omega_1)|^2 \rangle \, \langle |X_T(\omega_2)|^2 \rangle + |\langle X_T(\omega_1), X_T^*(\omega_2) \rangle|^2 + \langle X_T(\omega_1), X_T^*(\omega_1), X_T(\omega_2), X_T^*(\omega_2) \rangle \right). \qquad (\Pi 2)$$

Разделив обе части неравенства (П2) на неотрицательную величину $\langle |X_T(\omega_1)|^2 \rangle \langle |X_T(\omega_2)|^2 \rangle \langle |X_T(\omega_3)|^2 \rangle$, получаем неравенство для эмпирической нормализованной бикогерентности:

$$C^2(T^{-1};\omega_1,\omega_2) \le 1 + \frac{|\langle X_T(\omega_1), X_T^*(\omega_2)\rangle|^2}{\langle|X_T(\omega_1)|^2\rangle\,\langle|X_T(\omega_2)|^2\rangle} + Q(T^{-1};\omega_1,-\omega_2,\omega_2), \qquad (\text{П3})$$

где

$$Q(T^{-1};\omega_1,\omega_2,\omega_3) = \frac{\langle X_T(\omega_1), X_T(\omega_2), X_T(\omega_3), X_T^*(\omega_1+\omega_2+\omega_3)\rangle}{\sqrt{\langle|X_T(\omega_1)|^2\rangle\,\langle|X_T(\omega_2)|^2\rangle\,\langle|X_T(\omega_3)|^2\rangle\,\langle|X_T(\omega_1+\omega_2+\omega_3)|^2\rangle}} \qquad (\text{П4})$$

— нормализованная эмпирическая трикогерентность.

Умножая обе части (П3) на T и учитывая, что из сопоставления (3), (4), (6) и (7) следует

$$b^2(\omega_1,\omega_2) = \lim_{T\to\infty} TC^2(T^{-1};\omega_1,\omega_2), \qquad (\text{П5})$$

нетрудно сделать вывод, что бикогерентность (6) в общем случае может принимать любые неотрицательные значения.

В тоже время, переходя в (П3) к пределу $T \to \infty$ и учитывая, что для стационарных процессов второе слагаемое в правой части (П3) стремится к нулю, имеем

$$C^2(\omega_1,\omega_2) \le 1 + Q(\omega_1,-\omega_2,\omega_2). \qquad (\text{П6})$$

В (П6) $Q(\omega_1,-\omega_2,\omega_2)$ — нормализованная трикогерентность, характеризующая степень кубической связи по фазе составляющих на частотах ω_1, ω_2. Таким образом, из (П6) следует, что для процессов, не имеющих кубически связанных по фазе составляющих, нормализованная бикогерентность принимает значения от нуля до единицы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Монин А. С., Красицкий В. П. Явления на поверхности океана. Л.: Гидрометеоиздат, 1985. 375 с.
2. Филлипс О. М. Динамика верхнего слоя океана. Л.: Гидрометеоиздат, 1980. 320 с.
3. Longuet-Higgins M. S. // J. Fluid Mech. 1963. V. 16. P. 138.
4. Никиас Х. Л., Рагувер Р. В. // ТИИЭР. 1987. Т. 75, № 7. С. 5.
5. Chandran V., Elgar S. L. // IEEE Trans. Signal Proc. 1991. V. 39, No. 12. P. 2 640.
6. Бочков Г. Н., Горохов К. В., Ермаков С. А., Коннов И. Р., Щегольков Ю. Б. Биспектральный анализ регулярных и ветровых нелинейных поверхностных волн гравитационно-капиллярного диапазона: Препринт № 419 ИПФ РАН. Н. Новгород, 1996. 24 с.
7. Малахов А. Н. Кумулянтный анализ случайных негауссовских процессов и их преобразований. М.: Сов. радио, 1978. 376 с.
8. Бочков Г. Н., Горохов К. В., Коннов И. Р. // Письма в ЖТФ. Т. 20, вып. 8. С. 35.
9. Haubrich A. // J. Geophys. Res. 1965. V. 70, No. 6. P. 1 415.
10. Kim Y. C., Powers E. Y. // IEEE Trans. Plasma Sci. V. 7. P. 120.
11. Ермаков С. А., Рувинский К. Д., Салашин С. Г., Фрейдман Г. И. // Изв. АН СССР. ФАО. 1986. № 10. С. 1 072.

[1] Нижегородский госуниверситет им. Н. И. Лобачевского,
[2] Институт прикладной физики РАН,
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию
26 декабря 2001 г.

BISPECTRAL ANALYSIS OF GRAVITY CAPILLARY WAVES

G. N. Bochkov, K. V. Gorokhov, S. A. Ermakov, I. R. Konnov, and Yu. B. Shchegol'kov

We perform a laboratory study of the nonlinear phase relation between short gravity waves with a length of the order of 10 cm and their higher harmonics, including "spurious" capillary ripple. The presence of higher harmonics of the basic low-frequency component in the spectrum of the gravity capillary waves (GCW) is confirmed on the basis of methods of bispectral analysis. To determine the quantitative relations between the contributions of free and forced components in the GCW spectrum, we use the function of normalized bicoherence. We show that it is correctly determined for both broadband random processes and polyharmonic random signals. The quantitative relation between the contributions from free and forced waves in the GCW spectrum at the frequency of the second harmonic is obtained.

УДК 530.1:621.38

ОСОБЕННОСТИ ФАЗОВОЙ ГРУППИРОВКИ СЛАБОВОЗБУЖДЁННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПЕРЕМЕННОЙ СИЛЫ

А. Ф. Курин

С использованием уравнения Дуффинга рассмотрена резонансная группировка осцилляторов, имеющих малые начальные амплитуды, под действием переменной силы. Аналитически вычислены относительные фазы колебаний осцилляторов и силы. Показано, что все первоначально несфазированные осцилляторы за короткое время, сравнимое с периодом быстрых колебаний, приобретают близкие фазы и, как следствие, близкие амплитуды. Амплитуды могут быть вычислены с использованием простых уравнений осциллятора, синфазного с внешней силой. Дано физическое объяснение группировки.

ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известны закономерности резонансной фазовой группировки возбуждённых неизохронных классических осцилляторов под действием высокочастотной силы [1, 2]. В частности, фазовая группировка электронных осцилляторов, обусловленная релятивистской зависимостью гирочастоты от энергии, лежит в основе работы электронных мазеров [1, 2]. При значительной начальной энергии возбуждения осцилляторов преобладает развивающаяся во времени группировка вследствие динамических фазовых смещений неизохронных частиц за счёт изменения частоты их колебаний под действием силы. Фазовые смещения зависят от начальных фаз осцилляторов.

В настоящей работе рассматриваются особенности группировки осцилляторов при малой начальной энергии возбуждения, когда малы динамические фазовые смещения вследствие неизохронности частиц. Предполагается отсутствие связей между осцилляторами, взаимодействующими с периодической во времени силой. Частицы ансамбля отличаются начальными значениями координат и скоростей, что определяет первоначальный разброс по относительным фазам колебаний силы и осцилляторов. В настоящей работе анализируется поведение этих фаз во времени. Показано, что за короткое время, сравнимое с периодом быстрых колебаний частиц, все первоначально несфазированные осцилляторы приобретают близкие фазы. При этом фаза быстро образовавшегося сгустка близка к фазе того осциллятора, который первоначально имел равное нулю ускорение и максимальную скорость в направлении действующей силы (синфазный осциллятор). Поэтому при резонансе колебания всех частиц ансамбля за одинаковое время достигают приблизительно одинаковых амплитуд. Амплитуды слабовозбуждённых первоначально несфазированных осцилляторов приближённо могут быть вычислены с использованием наиболее простых уравнений синфазного осциллятора. Установлено, что указанная группировка не связана с неизохронностью, она имеет место в том числе и в ансамбле линейных осцилляторов. В ансамбле нелинейных осцилляторов фазовый сгусток оказывается более компактным благодаря дополнительной группировке, вызванной неизохронностью колебаний.

Показано, что с физической точки зрения быстрое установление близких фаз осцилляторов с малой начальной энергией объясняется тем, что при возбуждении свободных колебаний частиц составляющая этих колебаний, возникающая за счёт резонансной силы (одинаковая по амплитуде и фазе для всех частиц ансамбля), оказывается преобладающей по сравнению с имеющей разброс по фазам составляющей, определяемой малыми начальными скоростями осцилляторов и малыми начальными отклонениями от положения равновесия. Тогда в ансамбле линейных осцилляторов при резонансе близкими будут амплитуды и фазы биений отдельных частиц.

Поведение ансамблей слабовозбуждённых осцилляторов в переменных полях рассматривалось, в частности, в задаче о резонансном ускорении зарядов полем ТЕМ-ловушки [3]. Показано, что при этом возможно ускорение электронов от тепловых скоростей до релятивистских, причём достижимые скорости слабо зависят от начальных условий: направления и величины нерелятивистских скоростей частиц ансамбля. Представления, изложенные в настоящей работе, объясняют эту закономерность. Заметим, что резонансный энергообмен осцилляторов с источником действующей на них силы определяется именно свободным движением частиц, что отмечалось в работе [4, стр.142 и 173].

При изучении фазовой группировки используется известное уравнение Дуффинга [5]. В частности, анализируется поведение во времени относительных фаз колебаний переменной силы и осцилляторов, имеющих различные начальные фазы. Отметим, что такой анализ в случае взаимодействия О-типа содержится в [6].

1. ФИЗИЧЕСКИЙ МЕХАНИЗМ ГРУППИРОВКИ

Рассмотрим уравнение Дуффинга [5]

$$\ddot{z} + \omega^2 z = -\varepsilon b z^3 + \varepsilon a \cos(\Omega t), \tag{1}$$

где $\omega \sim 1$, $\Omega \sim 1$ — постоянные частоты, $a \sim 1$, $|b| \sim 1$; $0 < \varepsilon \ll 1$ — малый параметр. Решением линейного уравнения, которое следует из (1), если пренебречь нелинейным слагаемым, с начальными условиями $z(0) = z_0$, $\dot{z}(0) = \dot{z}_0$ является выражение

$$z = -A\cos(\omega t + \chi) + B\cos(\Omega t), \tag{2}$$

где

$$A = \sqrt{\left(z_0 + \frac{\varepsilon a}{\Omega^2 - \omega^2}\right)^2 + \frac{\dot{z}_0^2}{\omega^2}}\,, \qquad B = \frac{\varepsilon a}{\omega^2 - \Omega^2}\,, \qquad \operatorname{tg}\chi = -\frac{\dot{z}_0/\omega}{z_0 + \varepsilon a/(\Omega^2 - \omega^2)}\,. \tag{3}$$

Первое слагаемое в (2) описывает свободные колебания осциллятора, второе — вынужденные колебания. Если начальные условия малы (z_0, $\dot{z}_0 \sim \varepsilon$, т. е. осцилляторы слабовозбуждённые), то при резонансе ($|\Omega - \omega| \sim \varepsilon$) и при $a \sim 1$ слагаемые с z_0, $\dot{z}_0$ в (3) также малы. При этом свободные колебания осцилляторов, отличающихся начальными фазами (начальными значениями z_0, $\dot{z}_0$), близки, поскольку в этих колебаниях преобладает не зависящая от начальных условий составляющая, обусловленная действием внешней силы. Близкими являются также амплитуды и фазы биений отдельных частиц.

Проведём некоторые оценки. Выражение (2) преобразуется к виду

$$z = D\sin(\Omega t + \psi),$$

где

$$D = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos[(\omega - \Omega)\,t + \chi]}\,, \qquad \operatorname{tg}\psi = \frac{B - A\cos[(\omega - \Omega)\,t + \chi]}{A}\,. \tag{4}$$

Вычисляя D в (4), можно убедиться, что амплитуды биений $D_{\rm m} = |A+B|$ осцилляторов, имеющих различные начальные фазы, отличаются на малую величину порядка ε. Малым (также порядка ε) является и разброс начальных фаз биений χ. Действительно, приближённое вычисление $\cos\chi$ с использованием формул (3) даёт

$$\cos\chi = \begin{cases} 1 + d + \ \ldots\ , & \varepsilon a/(\omega^2 - \Omega^2) > 0; \\ -(1 + d + \ \ldots), & \varepsilon a/(\omega^2 - \Omega^2) < 0, \end{cases} \tag{5}$$

где величина $d = [z_0^2 - \dot{z}_0^2/(2\omega^2)]\,[(\omega^2 - \Omega^2)/(\varepsilon a)]^2$ мала (порядка ε^2). Сравнение (5) со стандартным разложением косинуса в окрестности точек $\chi = 0$ и $\chi = \pi$ даёт оценку начальных фаз биений: $\chi \sim \varepsilon$ при $\varepsilon a/(\omega^2 - \Omega^2) > 0$ и $(\chi - \pi) \sim \varepsilon$ при $\varepsilon a/(\omega^2 - \Omega^2) < 0$.

2. УСРЕДНЁННАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ

Как известно [5], решение уравнения Дуффинга (1) в переменных Ван-дер-Поля x, y (амплитуда и фаза) ищется в виде

$$z = x\cos y. \tag{6}$$

Для x, y получается система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = \frac{\varepsilon}{\omega}\,bx^3\cos^3 y\sin y - \frac{\varepsilon}{\omega}\,a\cos(\Omega t)\sin y, \qquad \dot{y} = \omega + \frac{\varepsilon}{\omega}\,bx^2\cos^4 y - \frac{\varepsilon}{x\omega}\,a\cos(\Omega t)\cos y, \tag{7}$$

эквивалентная исходному уравнению (1).

Введём также относительную фазу $\Theta = \Omega t - y$. Уравнение для Θ имеет вид

$$\dot{\Theta} = \Omega - \dot{y}. \tag{8}$$

Остановимся подробно на возможности использования метода усреднения [5] при решении системы (7), (8). Будем считать в (8) постоянную частотную расстройку $\Delta = \Omega - \omega$ малой, т. е. положим $|\Delta| \sim \varepsilon$ (резонанс). Тогда фазу Θ можно считать медленной переменной ($\dot{\Theta} \sim \varepsilon$), если в уравнении (7) для y стоящая в знаменателе амплитуда $x \sim 1$. При малой начальной амплитуде $x_0 \sim \varepsilon$ справедлива оценка $\dot{\Theta} \sim 1$, однако эта оценка не является фиксированной, т. к. в результате резонансной раскачки колебаний амплитуда x быстро растёт и, следовательно, уменьшается скорость изменения Θ. Поскольку ошибка здесь не накапливается во времени, следует ожидать, что использование уже первого приближения метода усреднения, предполагающего медленность фазы Θ, даст хорошее совпадение с точным решением вплоть до малых значений x_0. Приведённое ниже сравнение результатов вычислений методом усреднения и численным методом на ЭВМ подтверждают это предположение.

Как известно [5], при решении системы (7), (8) методом усреднения для переменных используется замена

$$x = \bar{x} + \varepsilon u_1^1(\bar{x},\bar{\Theta},\bar{y}) + \mathrm{O}(\varepsilon^2), \qquad \Theta = \bar{\Theta} + \varepsilon u_1^2(\bar{x},\bar{\Theta},\bar{y}) + \mathrm{O}(\varepsilon^2), \qquad y = \bar{y} + \mathrm{O}(\varepsilon). \tag{9}$$

Новые (усреднённые) переменные $\bar{x}$, $\bar{\Theta}$ в первом приближении метода усреднения находятся из системы дифференциальных уравнений

$$\dot{\bar{x}} = p\sin\bar{\Theta}, \qquad \dot{\bar{\Theta}} = \Delta - q\bar{x}^2 + p/\bar{x}\cos\bar{\Theta}, \tag{10}$$

которые получаются из (7), (8) усреднением по быстрой фазе y, а функции εu_1^1, εu_1^2 оказываются равными

$$\begin{aligned} \varepsilon u_1^1 &= -\frac{q\bar{x}^3}{12\omega}\,[\cos(4\bar{y}) + 4\cos(2\bar{y})] + \frac{p}{\omega}\cos(\Omega t + \bar{y}),\\ \varepsilon u_1^2 &= -\frac{q\bar{x}^2}{12\omega}\,[\sin(4\bar{y}) + 8\sin(2\bar{y})] - \frac{p}{\omega\bar{x}}\sin(\Omega t + \bar{y}). \end{aligned} \tag{11}$$

В формулах (10), (11) введены малые (порядка ε) коэффициенты $p = \varepsilon a/(2\omega) > 0$; $q = 3\varepsilon b/(8\omega)$. При выводе выражений (11) произвольные функции, зависящие от медленных переменных $\bar{x}$, $\bar{\Theta}$ [5], положены равными нулю с тем, чтобы (11) описывали только быстрые колебания.

Из системы (10) получаем интеграл движения

$$\cos\bar{\Theta} = -\frac{\Delta}{2p}\bar{x} + \frac{q}{4p}\bar{x}^3 + \frac{C}{\bar{x}}\,, \tag{12}$$

где

$$C = x_0\cos\Theta_0 + \frac{\Delta}{2p}x_0^2 - \frac{q}{4p}x_0^4 \tag{13}$$

— константа интегрирования, в которой x_0 и Θ_0 — начальные значения амплитуды x и фазы Θ соответственно. С помощью интеграла (12) и уравнения (10) для $\bar{\Theta}$ после дифференцирования по времени t уравнения (10) для $\bar{x}$ приходим к уравнению консервативного осциллятора для амплитуды $\bar{x}$:

$$\ddot{\bar{x}} + \left[\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 + \frac{qpC}{2}\right]\bar{x} = \frac{q\Delta\bar{x}^3}{2} - \frac{3q^2\bar{x}^5}{16} + \frac{p^2C^2}{\bar{x}^3}\,. \tag{14}$$

3. ГРУППИРОВКА ЛИНЕЙНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

Рассмотрим вначале частный случай, когда в (10)–(13) $q = 0$ (осциллятор (1) линейный) и $\Delta = 0$ (строгий резонанс). Тогда после исключения $\bar{x}$ из уравнения (10) для $\bar{\Theta}$ и интеграла (12) с учётом (13) получаем уравнение

$$\dot{\bar{\Theta}}x_0\cos\Theta_0 = p\cos^2\bar{\Theta}. \tag{15}$$

Для осцилляторов с $\cos\Theta_0 = 0$ решением уравнения (15) будут корни тригонометрического уравнения $\cos\bar{\Theta} = 0$, т. е. фазы являются постоянными величинами $\bar{\Theta} = \pi/2 + n\pi$, где $n = 0, \pm1, \ldots$. Если $\cos\Theta_0 \neq 0$, то после интегрирования (15) с начальным условием $\bar{\Theta}(0) = \Theta_0$ приходим к выражению

$$\bar{\Theta} = \mathrm{arctg}\left(\frac{pt}{x_0\cos\Theta_0} + \mathrm{tg}\,\Theta_0\right) + n\pi, \tag{16}$$

где $n = 0, \pm1, \ldots$. Из выражения (16) следует, что решения $\bar{\Theta} = \pi/2 + 2n\pi$ $(n = 0, \pm1, \ldots)$ являются устойчивыми, и решения $\bar{\Theta} = -\pi/2 + 2n\pi$ $(n = 0, \pm1\,, \ldots)$ — неустойчивыми.

Выражение для амплитуды $\bar{x}$ получается интегрированием первого уравнения (10) с учётом (16)

$$\bar{x} = x_0\left[\cos^2\Theta_0 + \left(\frac{pt}{x_0} + \sin\Theta_0\right)^2\right]^{1/2}. \tag{17}$$

Формула (17) описывает рост амплитуды при строгом резонансе. При $\Theta_0 = \pi/2$ имеем $\bar{x} = x_0 + pt$.

На рис. 1 в качестве примера показаны зависимости $\bar{\Theta}(t)$ при $p/x_0 = 1$; $\Delta = 0$ для восьми осцилляторов с начальной фазой $\Theta_0 = -\pi/2$ (это неустойчивое состояние показано пунктиром); $-\pi/4$; 0; $\pi/4$; $\pi/2$ (устойчивое состояние); $3\pi/4$; π; $5\pi/4$. Штриховыми линиями на рис. 1 показаны кривые, полученные для $\Theta_0 = 0$; $5\pi/4$ путём численного решения системы точных уравнений (7) при $\Delta = 0$; $q = 0$. Кривые носят характер затухающих колебаний. Этот результат следует из теории усреднения: в выражении (11) для u_1^2 амплитуда $p/(\omega\bar{x})$ быстрых колебаний фазы уменьшается с ростом амплитуды $\bar{x}$ колебаний осциллятора.

В результате группировки за короткое время (это время уменьшается с уменьшением начальной амплитуды x_0) образуется компактный фазовый сгусток в окрестности устойчивого состояния с $\bar{\Theta} =$

$= \Theta_0 = \pi/2$. Из формулы (6) и выражения $\Theta = \Omega t - y$ следует, что фаза $\Theta = \pi/2$ принадлежит осциллятору, который первоначально (при $t = 0$) имел нулевое ускорение и скорость $\dot{z} = x_0\omega$ в направлении действия силы в уравнении (1). Будем называть такой осциллятор синфазным.

Таким образом, для каждого осциллятора, кроме осциллятора с $\Theta_0 = \pi/2$, вблизи начального значения $t = 0$ решение $\Theta = \Theta(t)$ имеет пограничный слой, характерный для интегральных кривых сингулярно возмущённых дифференциальных уравнений.

Из формулы (17) следует, что амплитуды $\bar{x}$ осцилляторов с различными начальными фазами при всех $t > 0$ отличаются на величину порядка x_0.

Рассмотрим случай линейных ($q = 0$) осцилляторов с расстройкой $\Delta \neq 0$. Поскольку далее исследуются закономерности поведения только усреднённых амплитуды x и фазы Θ, знак усреднения (черту сверху) будем опускать. Тогда после исключения x из уравнения (10) для Θ и интеграла (12) получаем уравнение

$$C\,(\dot{\Theta} - \Delta)^2 - (\dot{\Theta} - \Delta/2)p\cos^2\Theta = 0. \tag{18}$$

При $\Delta = 0$ из этого уравнения следует (15).

Если $C = 0$, т. е. начальные фазы Θ_0 равны

$$\begin{aligned} \Theta_0^+ &= \arccos[-x_0\Delta/(2p)] + 2n\pi, \\ \Theta_0^- &= -\arccos[-x_0\Delta/(2p)] + 2n\pi, \end{aligned} \tag{19}$$

где $n = 0, \pm 1, \ldots$, то уравнение (18) имеет частные решения Θ в виде линейной зависимости:

$$\Theta^+ = t\Delta/2 + \Theta_0^+, \qquad \Theta^- = t\Delta/2 + \Theta_0^-. \tag{20}$$

При $\Delta \sim \varepsilon$, $p \sim \varepsilon$, $x_0 \sim \varepsilon$ начальные фазы (19) близки к значениям $\Theta_0^+ = \pi/2 + 2n\pi$ и $\Theta_0^- = -\pi/2 + 2n\pi$, где $n = 0, \pm 1, \ldots$.

Решение (20) с Θ_0^+ является устойчивым, с Θ_0^- — неустойчивым. В этом можно убедиться путём анализа знака производной в уравнениях

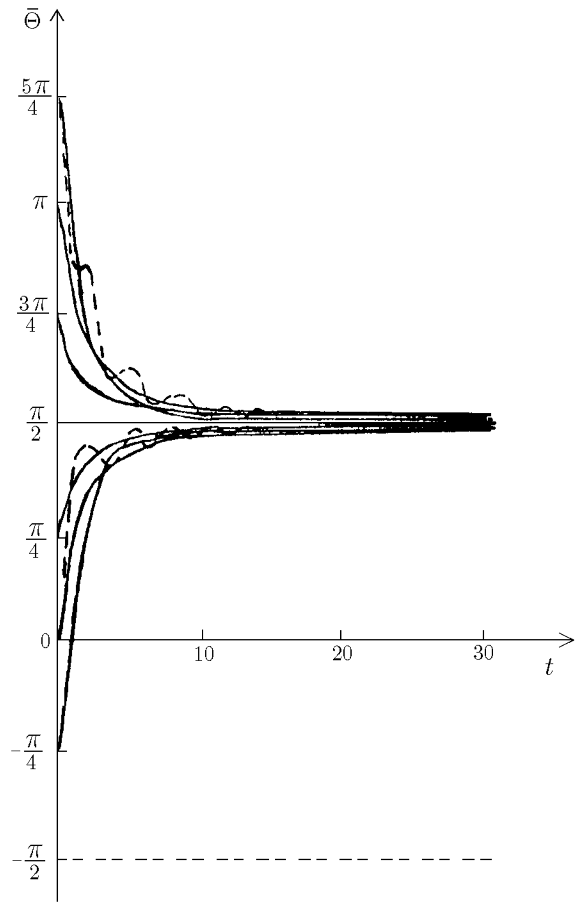

Рис. 1

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Theta - \Theta^+) = \frac{px_0}{x^2}\,(\cos\Theta_0 - \cos\Theta_0^+), \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Theta - \Theta^-) = \frac{px_0}{x^2}\,(\cos\Theta_0 - \cos\Theta_0^-), \tag{21}$$

которые получаются при $q = 0$ в результате подстановки интеграла (12) с учётом (13) в уравнение (10) для Θ. Действительно, если первоначально $\Theta - \Theta^+ < 0$, т. е. $\Theta_0 < \Theta_0^+$, и, следовательно, $\cos\Theta_0 > \cos\Theta_0^+$, то знак производной положительный. Это значит, что разность $\Theta - \Theta^+$ уменьшается. Если же первоначально $\Theta - \Theta^+ > 0$, т. е. $\Theta_0 > \Theta_0^+$ и, следовательно, $\cos\Theta_0 < \cos\Theta_0^+$, то знак производной отрицательный, и разность $\Theta - \Theta^+$ вновь уменьшается. В итоге имеем устойчивость решения Θ^+. Аналогичные рассуждения для Θ^- приводят к выводу о возрастании разности $\Theta - \Theta^-$ при любом Θ_0 и, следовательно, неустойчивости этого решения.

Осциллятор с начальной фазой Θ_0^+(19) ($C = 0$) и линейной зависимостью $\Theta^+(t)$ (20) будем также называть синфазным.

Проинтегрируем уравнение (18), считая $C \neq 0$. Для этого сначала разрешим его относительно производной $\dot{\Theta}$:

$$\dot{\Theta}_1 = \frac{p}{2C}\cos^2\Theta_1 + \Delta + \sqrt{\frac{p}{2C}\cos^2\Theta_1\left(\frac{p}{2C}\cos^2\Theta_1 + \Delta\right)},$$
$$\dot{\Theta}_2 = \frac{p}{2C}\cos^2\Theta_2 + \Delta - \sqrt{\frac{p}{2C}\cos^2\Theta_2\left(\frac{p}{2C}\cos^2\Theta_2 + \Delta\right)}, \tag{22}$$

и в результате интегрирования получим

$$\Theta_1 - \arcsin(\gamma\sin\Theta_1) + C_1 = t\Delta, \qquad \Theta_2 + \arcsin(\gamma\sin\Theta_2) + C_2 = t\Delta, \tag{23}$$

где $\gamma = (1 + 2C\Delta/p)^{-1/2}$, C_1, C_2 — произвольные константы.

Два решения (23) позволяют построить зависимости $\Theta = \Theta(t)$ для осцилляторов с различными начальными фазами $\Theta_0 \in [0; 2\pi[$. Однако, поскольку в (23) фаза Θ не выражена через t, построение указанных зависимостей требует дополнительного анализа, позволяющего выбрать из двух решений Θ_1, Θ_2 (23) требуемое решение для определённого интервала изменения аргумента t. Кроме того, на границах интервалов необходимо сшивать соответствующие решения, в результате чего определяются константы интегрирования C_1 и C_2.

Процедуру построения функций $\Theta(t)$ можно существенно упростить, если воспользоваться интегралом (12) при $q = 0$, где зависимость $x(t)$ получаем с помощью интеграла энергии

$$\dot{x}^2 + \left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 x^2 + \frac{p^2C^2}{x^2} = p^2 + pC\Delta. \tag{24}$$

Этот интеграл следует из уравнения осциллятора (14) при начальных условиях $x = x_0$, $\dot{x} = p\sin\Theta_0$. Интегрирование (24) даёт искомую зависимость:

$$x(t) = \sqrt{2}\,\frac{p}{|\Delta|}\left[1 + C\Delta/p - \sqrt{1 + 2C\Delta/p}\,\sin\left(\mp t\,|\Delta| + \arcsin\frac{1 + C\Delta/p - \Delta^2x_0^2/(2p^2)}{\sqrt{1 + 2C\Delta/p}}\right)\right]^{1/2}. \tag{25}$$

Здесь верхний знак (минус) следует брать для осцилляторов с $0 < \Theta_0 < \pi$, нижний знак (плюс) — для осцилляторов с $\pi < \Theta_0 < 2\pi$. При $\Theta_0 = 0;\ \pi$ из (25) следует выражение

$$x(t) = \sqrt{2}\,\frac{p}{|\Delta|}\left[1 \pm \frac{\Delta}{p}x_0 + \frac{\Delta^2}{2p^2}x_0^2 - \left(1 \pm \frac{\Delta}{p}x_0\right)\cos(t\Delta)\right]^{1/2}. \tag{26}$$

Здесь знак плюс следует брать для $\Theta_0 = 0$, знак минус — для $\Theta_0 = \pi$.

На рис. 2*а* в качестве примера представлены кривые $\Theta(t)$, построенные по формулам (12) ($q = 0$), (25), (26) при $p = 0{,}01$; $\Delta = 0{,}05$; $x_0 = 0{,}1$ для следующих начальных фаз: $\Theta_0 = \Theta_0^+$ (синфазный осциллятор, линия *1*); $-\pi/4$; 0; $\pi/4$; 1,95; 4,3; $3\pi/4$; π; $5\pi/4$ (кривые *2*–*9* соответственно). Пунктирной прямой показано неустойчивое решение Θ^- (20) с начальной фазой Θ_0^- (19).

Остановимся подробнее на построении линии *1* для синфазного осциллятора с Θ_0^+ (19). Эта линия описывается уравнением прямой (20), полученным из дифференциального уравнения (18) при $C = 0$. В этом уравнении с ростом t по достижении значения фазы $\Theta = 3\pi/2$ множитель $\cos^2\Theta$ обращается в нуль. В этот момент другой множитель $\dot{\Theta} - \Delta/2$ может принимать произвольное значение, что говорит о неопределённости фазы, т. е. о её скачке. Из интеграла (12) при $q = C = 0$; $\Theta = 3\pi/2$ следует $x = 0$, что означает полное торможение колебаний осциллятора, после чего следует раскачка колебаний: тормозящая фаза скачком меняется на ускоряющую. Поскольку линию *1* на рис. 2*а* следует

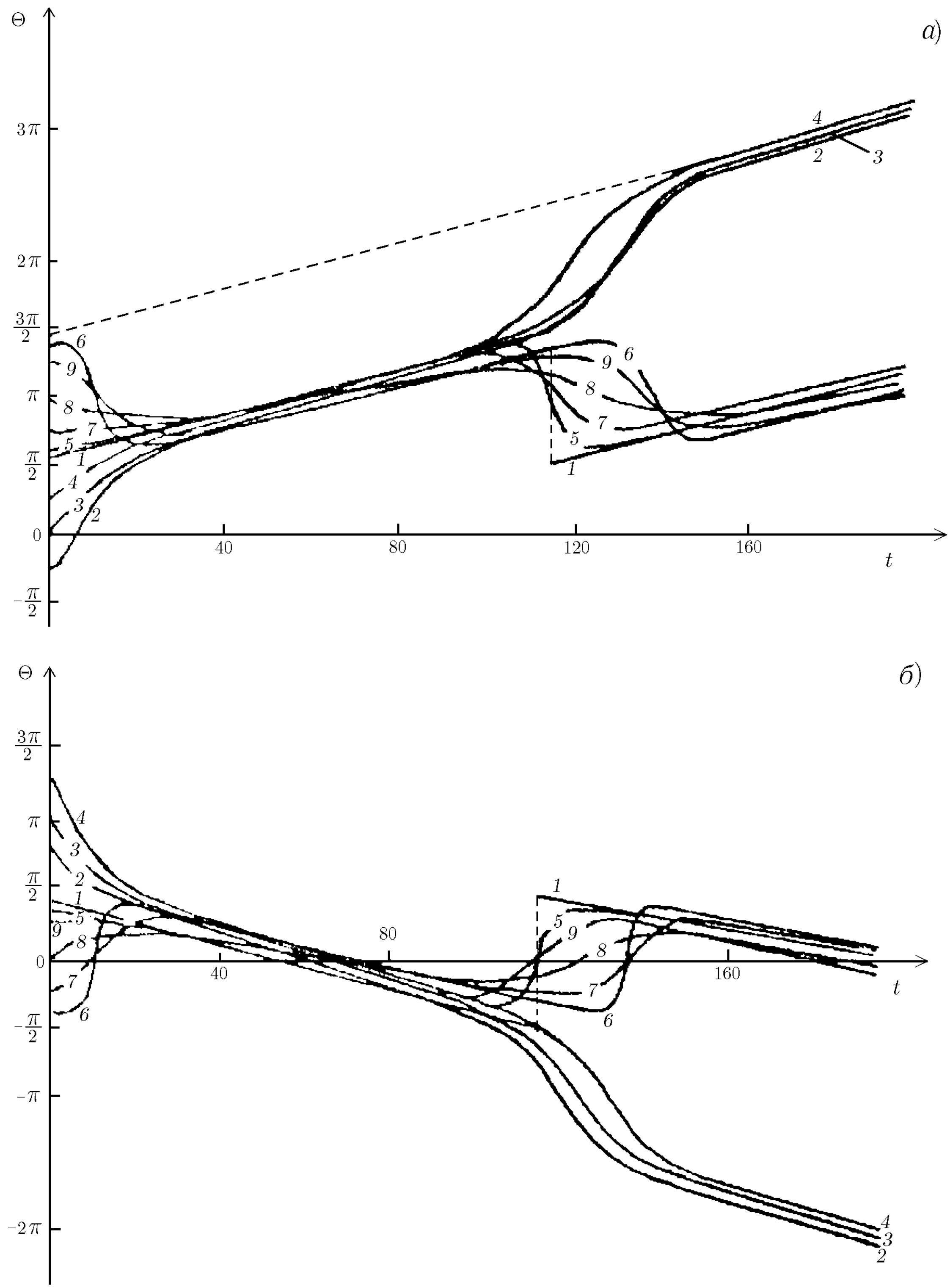

Рис. 2

рассматривать как предел последовательности кривых *6*, *9*, *8*, *7*, *5* при стремлении соответствующих им начальных фаз к Θ_0^+, то величина скачка равна π и после скачка устанавливается значение фазы $\pi/2$. Как видно из рис. 2*а*, все осцилляторы в начале своего движения быстро оказываются в ускоряющей фазе, группируясь около синфазного осциллятора. При $\Theta > \pi$ фаза становится тормозящей, амплитуды осцилляторов уменьшаются, затем происходит быстрая разгруппировка, после чего осцилляторы вновь собираются в ускоряющей фазе. Заметим, что при этом фазы осцилляторов *2–4* и *1*, *5–9* отличаются приблизительно на 2π.

На рис. 2*б* в качестве примера представлены кривые $\Theta = \Theta(t)$, построенные при $p = 0{,}01$; $\Delta = -0{,}05$; $x_0 = 0{,}1$ для следующих начальных фаз: $\Theta_0 = \Theta_0^+$ (синфазный осциллятор, линия *1*); $3\pi/4$; π; $5\pi/4$; 1,15; $-1{,}2$; $-\pi/4$; 0; $\pi/4$ (кривые *2–9* соответственно). И здесь все осцилляторы быстро группируются около синфазного осциллятора. Как и при $\Delta > 0$, линия *1* для синфазного осциллятора имеет скачки при $x = 0$, где тормозящая фаза сменяется ускоряющей.

Из формулы (25) при $\Delta \neq 0$ получим приближённое (оставляем слагаемые с $C \sim \varepsilon$ в первой степени) выражение для максимального значения $x_{\max}$ амплитуды x:

$$x_{\max} \approx 2\frac{p}{|\Delta|}\left(1 + \frac{C\Delta}{2p}\right), \tag{27}$$

откуда с учётом (13) следует, что разброс максимальных амплитуд осцилляторов, имеющих различные начальные фазы, приближённо определяется выражением

$$\Delta x_{\max} \approx 2x_0. \tag{28}$$

Формула (27) показывает также, что максимальная амплитуда $x_{\max}$ синфазного ($C = 0$) осциллятора не зависит от x_0.

4. ГРУППИРОВКА НЕЛИНЕЙНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

Рассмотрим слабовозбуждённые осцилляторы с $q \neq 0$. Тогда из уравнения (14) с начальными условиями $x = x_0$, $\dot{x} = p \sin\Theta_0$ следует интеграл энергии

$$\dot{x}^2 + \left(\frac{\Delta^2}{4} + \frac{pqC}{2}\right)x^2 - \frac{q\Delta}{4}x^4 + \frac{q^2}{16}x^6 + \frac{p^2C^2}{x^2} = p^2 + pC\Delta. \tag{29}$$

Уравнение (29) приводит к эллиптическому интегралу

$$t = \pm 2\int\limits_{z_1}^{z_2} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{-q^2z^4 + 4q\Delta z^3 - 4\left(\Delta^2 + 2pqC\right)z^2 + 16\left(p^2 + pC\Delta\right)z - 16p^2C^2}}, \tag{30}$$

где $z = x^2$. При приведении интеграла к нормальной форме по известной методике будем вычислять все коэффициенты преобразований в виде разложений по степеням малых значений резонансной расстройки Δ и константы C, пропорциональной x_0, удерживая слагаемые, содержащие квадраты этих величин. После несложных вычислений вместо (30) получаем интеграл

$$t = \beta\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}, \tag{31}$$

где

$$\beta = 3^{-1/4}\left(2p^2|q|\right)^{-1/3}\left(1 + \frac{\delta}{6} - \frac{\delta^2}{24} - \frac{4\delta c}{9} - \frac{4c^2}{9}\right),$$

$$k^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{4}\left[1+\frac{2\sqrt{3}+3}{3}\left(\delta+\frac{5\delta^2}{6}-\frac{8c^2}{3}\right)\right], \qquad \delta=\Delta(2p^2q)^{-1/3}, \qquad c = C\left(\frac{q}{4p}\right)^{1/3}. \quad (32)$$

Пределы интегрирования φ_1, φ_2 в (31) получаются из пределов $z_1 = x_1^2$, $z_2 = x_2^2$ в (30) по формулам замены переменных

$$s_1 = \frac{\nu - x_1^2}{x_1^2-\mu}, \qquad s_2 = \frac{\nu - x_2^2}{x_2^2-\mu}, \sin\varphi_1 = \sqrt{1+s_1^2/m}, \qquad \sin\varphi_2 = \sqrt{1+s_2^2/m}, \quad (33)$$

которые использовались при преобразовании (30) в (31). Здесь

$$\nu = \left(\frac{4p}{q}\right)^{2/3}\left[\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\frac{\delta}{6}+\frac{(\sqrt{3}-2)\,c}{3}+\frac{(\sqrt{3}-2)\,\delta^2}{36}+\frac{4\,(\sqrt{3}-1)\,\delta c}{9}+\frac{\sqrt{3}\,c^2}{3}\right],$$
$$\mu = \left(\frac{4p}{q}\right)^{2/3}\left[-\frac{\sqrt{3}+1}{2}+\frac{\delta}{6}-\frac{(\sqrt{3}+2)\,c}{3}-\frac{(\sqrt{3}+2)\,\delta^2}{36}-\frac{4\,(\sqrt{3}+1)\,\delta c}{9}-\frac{\sqrt{3}\,c^2}{3}\right],$$
$$m = (4\sqrt{3}-7)\left[1+\frac{2\sqrt{3}\,\delta}{3}-\frac{4\sqrt{3}\,c}{3}+\frac{2\,(3-\sqrt{3})\,\delta^2}{9}-\frac{8\delta c}{3}+\frac{4\,(6-5\sqrt{3})\,c^2}{9}\right]. \quad (34)$$

Если в интеграле (31) $\varphi_1 = 0$ ($s_1 = \sqrt{-m}$, $s_2 = -\sqrt{-m}$) и $\varphi_2 = \pi/2$ ($s_1 = s_2 = 0$), то имеем полный эллиптический интеграл первого рода K [7]. Если $\varphi_1 = 0$ и $\varphi_2 = \varphi$, то получаем неполный эллиптический интеграл первого рода

$$F(\alpha,\varphi) = \int\limits_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \quad (35)$$

где $\sin\alpha = k$, $\sin\varphi = \sqrt{1+s^2/m}$, $s = (\nu - x^2)/(x^2-\mu)$. Величина $s = -\sqrt{-m}$ соответствует максимальному значению x, величина $s = \sqrt{-m}$ — минимальному. Значения $x_{\max}$, $x_{\min}$ вычисляются из первой формулы (33). Для $x_{\max}$ получаем выражение

$$x_{\max} = \left(\frac{4p}{|q|}\right)^{1/3}\left(1+\frac{\delta}{3}-\frac{c}{3}+\frac{2\delta c}{9}-\frac{2c^2}{9}\right). \quad (36)$$

Время T движения в интервале амплитуд от $x_{\min}$ до $x_{\max}$ (половина периода медленных колебаний) определяется формулой

$$T = 2\beta K. \quad (37)$$

При $k^2 < 1$ полный интеграл K разлагается в ряд по степеням k^2 [7]:

$$K = \frac{\pi}{2}\left[1+2\,\frac{k^2}{8}+9\left(\frac{k^2}{8}\right)^2+50\left(\frac{k^2}{8}\right)^3+\frac{1225}{4}\left(\frac{k^2}{8}\right)^4+\ldots\right]. \quad (38)$$

Сделаем оценки, используя приведённые формулы. Из выражения (37) с учётом (32), (38) следует, что при малой расстройке δ периоды медленных колебаний осцилляторов, имеющих различные начальные фазы Θ_0, отличаются на величину второго порядка малости, поскольку в k^2 (32) отсутствует линейное по $c \sim x_0$ слагаемое, а в β (32) произведение δc имеет второй порядок малости.

Из формулы (36) оцениваем разброс максимальных амплитуд осцилляторов с различными начальными фазами, ограничиваясь учётом величин первого порядка малости:

$$\Delta x_{\max} \simeq 2x_0/3. \quad (39)$$

Сравнение (39) с (28) показывает, что разброс максимальных амплитуд нелинейных осцилляторов в три раза меньше разброса $\Delta x_{\max}$ для линейных осцилляторов. Более компактный фазовый сгусток в ансамбле нелинейных осцилляторов получается благодаря их дополнительной группировке, обусловленной неизохронностью колебаний [1]. Из формулы (36) следует, что максимальная амплитуда $x_{\max}$ синфазного ($c = 0$) осциллятора не зависит от x_0, как это было и в случае линейного осциллятора.

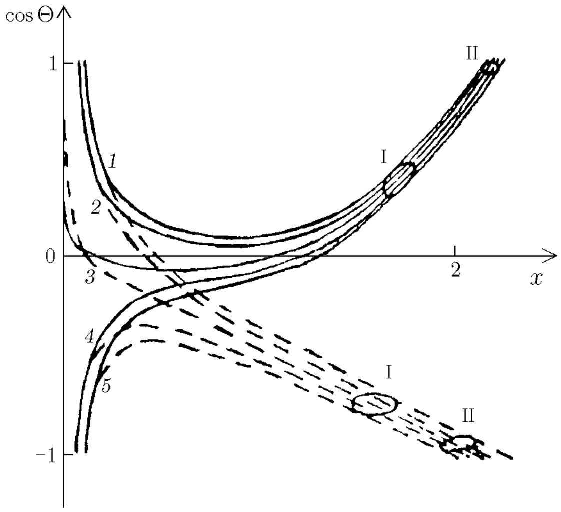

Рис. 3

В качестве иллюстрации на рис. 3 в системе координат $(\cos\Theta, x)$ показана динамика фазового сгустка в ансамбле осцилляторов с равномерным распределением по начальным фазам: $\Theta_0 = 0$ (кривые *1*); $\pi/4$ и $7\pi/4$ (кривые *2*); $\pi/2$ и $3\pi/2$ (кривые *3*); $3\pi/4$ и $5\pi/4$ (кривые *4*); π (кривые *5*). Для нелинейных осцилляторов ($q \neq 0$, сплошные кривые на рис. 3) взяты значения параметров $p = 0{,}04$; $q = 0{,}02$; $\Delta = 0{,}012$; $x_0 = 0{,}1$. Сгусток I получен при $t = 44$, сгусток II — при $t = 60$. Для линейных осцилляторов ($q = 0$, пунктирные кривые на рис. 3) выбраны значения $p = 0{,}04$; $\Delta = 0{,}038$; $x_0 = 0{,}1$. Сгустки I, II получены при $t = 44$ и 70 соответственно. Выбранные значения частотных расстроек Δ обеспечивают приблизительно равные периоды медленных колебаний амплитуды x, т. е. одинаковое время группировки под действием равных сил. Все кривые на рис. 3 построены по формуле (12).

Поясним методику построения фазового сгустка нелинейных осцилляторов. Момент времени t и координата x любой точки на контуре сгустка связаны уравнением (31). Для значений $t > T/2$ с помощью (31) получаем формулу

$$t = T \pm (\Delta t)_1 - (\Delta t)_2, \tag{40}$$

где

$$(\Delta t)_1 = \beta F(\alpha, \varphi_0), \qquad \sin\varphi_0 = \sqrt{1 + \frac{s_0^2}{m}}, \qquad s_0 = \frac{\nu - x_0^2}{x_0^2 - \mu};$$

$$(\Delta t)_2 = \beta F(\alpha, \varphi), \qquad \sin\varphi = \sqrt{1 + \frac{s^2}{m}}, \qquad s = \frac{\nu - x^2}{x^2 - \mu}. \tag{41}$$

За время $(\Delta t)_1$ амплитуда колебаний x меняется от своего начального значения x_0 до минимального $x_{\min}$. В выражении (40) верхний знак (плюс) берём для осцилляторов с начальной фазой $\pi < \Theta_0 < 2\pi$, которые согласно (10) имеют начальные скорости $\dot{x}(0) < 0$, нижний знак (минус) — для осцилляторов с $0 < \Theta_0 < \pi$, у которых $\dot{x}(0) > 0$. Если $\Theta_0 = 0; \pi$, то $\varphi_0 = 0$ и $(\Delta t)_1 = 0$. За время $(\Delta t)_2$ амплитуда меняется от текущего значения x в момент времени t до максимального $x_{\max}$. Рис. 4 поясняет сказанное. Здесь сплошная кривая $x(t)$ соответствует осцилляторам с $\dot{x}(0) < 0$, штриховая — осцилляторам с $\dot{x}(0) > 0$.

Далее из выражения (40) с использованием (41) получаем

$$F(\alpha, \varphi) = \frac{t - T \mp (\Delta t)_1}{\beta}. \tag{42}$$

Выбрав значение t (момент, когда строится фазовый сгусток) и определив T (37), $(\Delta t)_1$ (41) и β (32), находим по формуле (42) значение интеграла $F(\alpha, \varphi)$. По таблицам этого интеграла [7] определяем значение φ, затем из формул (41) — величину s и, наконец, x. При выбранном t указанная процедура повторяется для осцилляторов с различными начальными фазами Θ_0.

Фазовые сгустки линейных осцилляторов на рис. 3 построены с использованием формул (25), (26).

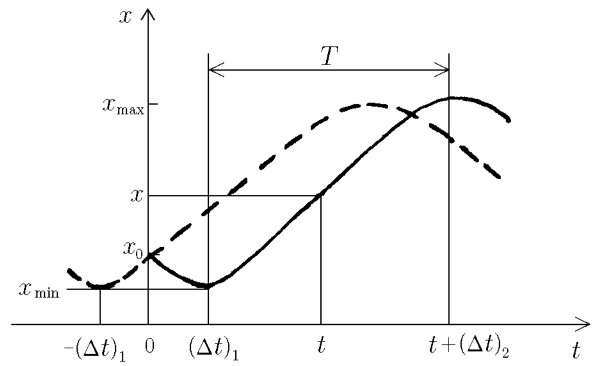

Рис. 4

Отметим особенности группировки линейных и нелинейных осцилляторов при больших t. Период $2\pi/|\Delta|$ медленных колебаний амплитуды линейных осцилляторов одинаков для всех частиц с различными начальными фазами Θ_0 (изохронные колебания). У этих колебаний имеется постоянный зависящий от Θ_0 сдвиг по фазе, поэтому в результате периодически возникающей группировки (после очередной разгруппировки) каждый раз формируется одинаковый фазовый сгусток. Период $2T$ (37) медленных колебаний амплитуды нелинейных осцилляторов зависит от Θ_0, поэтому фазовый сгусток периодически не воспроизводится и размывается со временем. Как следствие, для таких осцилляторов величины, усреднённые по начальным фазам (например, энергия), медленно осциллируя, при $t \to \infty$ стремятся к некоторому пределу (это явление описано в [8]). В случае слабовозбуждённых осцилляторов фазовый сгусток размывается очень медленно, и амплитуда колебаний указанных усреднённых по Θ_0 величин существенно затухает только за время $t \gg T$.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Установленные с помощью простой модели закономерности резонансной фазовой группировки ансамбля первоначально несфазированных слабовозбуждённых осцилляторов под действием переменной силы имеют универсальный характер. Полученные выводы могут быть полезными при изучении конкретных схем взаимодействия, использующих ансамбли осцилляторов, как для понимания происходящих процессов, так и для количественных оценок взаимодействия. В частности, с большой точностью вплоть до больших значений t о поведении ансамбля осцилляторов можно судить по результатам анализа синфазного осциллятора, который описывается наиболее простыми соотношениями. Точность оценок возрастает с уменьшением начальной энергии осцилляторов. В качестве примера укажем на уравнение нелинейного осциллятора (14) настоящей работы. Если $C = 0$ (синфазный осциллятор), то правая часть уравнения становится многочленом, т. е. аналитической функцией относительно x. При этом условии, как известно [5], существуют эффективные методы построения приближённого решения уравнений и систем уравнений, например метод Ляпунова—Пуанкаре.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гапонов А. В., Петелин М. И., Юлпатов В. К. // Изв. вузов. Радиофизика. 1967. Т. 10, № 9—10. С. 1414.
2. Братман В. Л., Гинзбург Н. С., Нусинович Г. С., Петелин М. И., Юлпатов В. К. // Релятивистская высокочастотная электроника. Горький: ИПФ АН СССР, 1979. С. 157.
3. Курин А. Ф. // Лекции по СВЧ электронике и радиофизике. 10-я зимняя школа-семинар: Межвуз. сб. науч. тр. Кн. 2. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 1996. С. 113.

4. Вайнштейн Л. А., Лесик Н. И., Рожнев А. Г., Трубецков Д. И. // Лекции по электронике СВЧ и радиофизике. 6-я зимняя школа-семинар инженеров. Кн. 3. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1983.
5. Моисеев Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1981. 400 с.
6. Гайдук В. И., Палатов К. И., Петров Д. М. Физические основы электроники СВЧ. М.: Сов.радио, 1971. 600 с.
7. Янке Е., Эмде Ф. Таблицы функций с формулами и кривыми. М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1959. 420 с.
8. Гайдук В. И., Матвеев Р. Ф., Фиалковский А. Т., Дементиенко В. В. // Радиотехника и электроника. 1973. Т. 18, № 4. С. 749.

Воронежский госуниверситет,
г. Воронеж, Россия

Поступила в редакцию
6 апреля 2001 г.

FEATURES OF PHASE BUNCHING OF WEAKLY EXCITED OSCILLATORS UNDER THE ACTION OF AN ALTERNATING FORCE

A. F. Kurin

Using the Duffing equation, we consider resonance bunching of oscillators with small initial amplitudes under the action of an alternating force. The relative phases of the oscillators and of the force are calculated analytically. It is shown that all the initially unphased oscillators acquire close phases and, consequently, close amplitudes over a short time comparable with the period of fast oscillations. The amplitudes can be calculated using simple equations of an oscillator that is in phase with the external force. A physical explanation of the bunching is given.

УДК 621.382.2.22

ИССЛЕДОВАНИЕ КОРРЕЛЯЦИИ МЕЖДУ НИЗКОЧАСТОТНЫМ ШУМОМ И ВОЛЬТ-АМПЕРНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ ДИОДА С БАРЬЕРОМ ШОТТКИ НА ОСНОВЕ GaAs

В. Г. Божков, Т. М. Табакаева, А. А. Усольцев

Проведены исследования корреляции низкочастотного ($1/f$) шума и вольт-амперной характеристики диода с барьером Шоттки (ДБШ) с балочными выводами на основе GaAs. Показано, что наибольшей чувствительностью к совершенству ДБШ и, соответственно, максимальной корреляцией с низкочастотным шумом (коэффициент корреляции $k_{\text{кор}} > 0{,}9$), измеренным в диапазоне токов $10^{-4} \div 10^{-3}$ А на частотах $8 \div 10$ кГц, обладает показатель идеальности вольт-амперной характеристики n и его приращение, измеренные в этом же диапазоне токов. Значения n, соответствующие меньшим токам ($10^{-6} \div 10^{-5}$ А), обычно не превышают 1,1 и корреляции с низкочастотным шумом не обнаруживают. Наличие корреляции связывается в основном с неоднородным распределением высоты барьера по поверхности контакта.

ВВЕДЕНИЕ

Известны публикации [1–9], подтверждающие связь параметров вольт-амперной характеристики (ВАХ) и низкочастотного шума. В большей части из указанных работ речь идёт о связи низкочастотного (обычно $1/f$) шума с периферийными избыточными токами (токами утечки). В случаях, когда показатель идеальности ВАХ изменяется в достаточно широких пределах, между его значением и уровнем низкочастотного шума наблюдается хорошо выраженная корреляция [2, 5, 9]. В последних работах речь идёт о кремниевых диодах с барьером Шоттки (ДБШ).

Наиболее обстоятельное исследование арсенидогаллиевых ДБШ проведено в работе [6]. В ней рассмотрены диоды Ti–GaAs с мезаструктурой на основе низколегированного материала (концентрация носителей заряда порядка $3 \cdot 10^{15}$ см$^{-3}$) и относительно большим диаметром контакта (200 мкм). В работе отмечена слабая корреляция низкочастотного шума и показателя идеальности ВАХ n (коэффициент корреляции $k_{\text{кор}} = 0{,}35$) в силу узкого диапазона значений $n = 1{,}03 \div 1{,}09$ и недостаточной для такой ситуации точности их определения. Вместе с тем была обнаружена сильная связь уровня низкочастотного шума с концентрацией ловушки E2, расположенной на 0,31 эВ ниже дна зоны проводимости ($k_{\text{кор}} = 0{,}91$). Корреляция низкочастотного шума с другими параметрами ДБШ оказалась весьма сложной и относительно слабой.

В предлагаемой работе представлены результаты исследования корреляции низкочастотного шума с параметрами ДБШ, полученные при разработке диодов на основе GaAs с балочными выводами, предназначенных для работы в сантиметровом диапазоне длин волн и обладающих пониженным уровнем низкочастотного шума.

1. ОБРАЗЦЫ И МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЙ

Экспериментальные исследования проведены на арсенидогаллиевых диодах с балочными выводами (ДБВ) типа АА149 и на экспериментальных диодах типа 180А и 184А, созданных по типу диодов АА149. Наиболее важные конструктивные и электрофизические параметры (показатель идеальности

Таблица 1

Конструктивные и электрофизические параметры исследуемых диодов

	Тип образца	Материал	Параметры материала	Метал-лизация БШ	Размер контакта, мкм	Параметры ДБШ n	C, пФ	r_s, Ом
1	180А-6	GaAs (n_1–n_2–n^+–i)	$n_1 = 8{,}5 \cdot 10^{16}$ см$^{-3}$, $d_{n_1} = 0{,}2$ мкм, $n_2 = 2{,}2 \cdot 10^{16}$ см$^{-3}$, $d_{n_2} = 0{,}6$ мкм	TiAu	8×12	1,07	0,052	6,7
2	184А-3	GaAs (n_1–n_2–n^+–i)	см. выше	RhPt-TiAu	10×10	1,08	0,053	4,2
3	180А-13	GaAs (n_1–n_2–n^+–i)	см. выше	TiAu	10×10	1,08	0,054	7,2
4	АА149-3	GaAs (n_1–n^+–i)	$n_1 = 3{,}5 \cdot 10^{16}$ см$^{-3}$, $d_{n_1} = 0{,}19$ мкм	TiAu	12×14	1,05	0,085	4,1
5	АА149-9	GaAs (n_1–n^+–i)	$n_1 = 2{,}6 \cdot 10^{16}$ см$^{-3}$, $d_{n_1} = 0{,}22$ мкм	TiAu	10×13	1,06	0,068	2,7

ВАХ n, ёмкость C и последовательное сопротивление r_s) исследуемых образцов из различных партий приведены в табл. 1, где в четвёртой колонке также приведены концентрация носителей заряда в различных слоях рассматриваемой структуры и толщина этих слоёв.

Конструктивно диод АА149 подобен диоду АА138 миллиметрового диапазона длин волн [10], но предназначен для работы в сантиметровом диапазоне и поэтому имеет несколько бо́льшие линейные размеры и бо́льшую площадь выпрямляющего контакта. Есть разница и в конструкции активного элемента: диоды АА138 формировались напылением титана и золота во вскрытые в диэлектрике (SiO_2) окна с последующим созданием балочных выводов, тогда как диоды АА149 — нанесением металлизации TiAu на поверхность GaAs с последующей гравировкой металлизации, нанесением SiO_2, вскрытием в нём окон над металлизацией и формированием балочных выводов. Особенностью конструкции является то, что для уменьшения паразитной ёмкости анодный вывод диода изолирован от подложки воздушным каналом [10].

Экспериментальные диоды 180А и 184А выполнены на неоднородно легированном материале с дополнительным высоколегированным слоем вблизи поверхности (см. табл. 1). В диоде типа 184А использована и другая металлизация для барьера Шоттки (БШ): двухслойная металлизация RhPt создавалась электрохимическим осаждением слоёв родия (0,2 мкм) и платины (0,2 мкм) в окна SiO_2 с последующим нанесением двухслойной металлизации TiAu, на которой затем формировались балочные выводы.

Для измерения низкочастотного шума использовался метод непосредственного измерения шумового напряжения с применением двухканального корреляционного способа подавления шумов измерительной установки [6]. Из измерений шумового напряжения рассчитывались спектральные плотности мощности флуктуаций тока S_i, а из них — шумовое отношение $t_n = S_i R_д/(4kT)$, где $R_д$ — дифференциальное сопротивление диода, k — постоянная Больцмана, T — температура.

Прямые вольт-амперные характеристики диодов измерялись в диапазоне токов $10^{-7} \div 10^{-2}$ А с декадной дискретностью (кривая *1* на рис. 1). Из них с помощью вспомогательной прямой *3*, проведённой через точки, соответствующие напряжениям U_6 и U_5, с помощью известной процедуры рассчитывали показатель идеальности ВАХ n и последовательное сопротивление r_s:

$$n = \frac{q\,(U_5 - U_6)}{kT}\,\frac{1}{\ln 10}\,, \tag{1}$$

$$r_{\mathrm{s}} = \frac{U_2 - U_{\mathrm{n}}}{I} = 10^2 \left\{U_2 - [U_6 + 4\,(U_5 - U_6)]\right\}. \qquad (2)$$

В последнем выражении напряжение U выражается в вольтах, а ток I — в амперах. Идеальная ВАХ (кривая *2* на рис. 1), описываемая выражением

$$I = I_{\mathrm{s}} \exp\left[\frac{q\,(U - I r_{\mathrm{s}})}{nkT}\right], \qquad (3)$$

является «трёхточечной» моделью реальной прямой ВАХ, поскольку рассчитывается по трём точкам последней, соответствующим токам 10^{-6}, 10^{-5} и 10^{-2} А и смещениям U_6, U_5 и U_2. В (3) I_{s} — ток насыщения, получаемый известным способом при экстраполяции $U \to 0$. Роль идеальной ВАХ поясняется при анализе корреляции низкочастотного шума и параметров ВАХ.

Рис. 1

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ И ОБСУЖДЕНИЕ

Предварительные исследования включали существенно больше типов образцов, чем указано в табл. 1 (122 образца 14 типов). Среди них были образцы, созданные как на промышленном материале, так и на материале, выращенном в НИИПП, с ориентацией подложки (100) и (111). После исследований частотных спектров $S_{\mathrm{i}}(f)$ при токе 1 мА отбирались образцы с небольшими отклонениями от зависимости вида $S_{\mathrm{i}} \propto 1/f$ (таких было большинство). В частности, были исключены из дальнейшего анализа образцы на подложках (111), обнаружившие повышенные шумы с характерным «лоренцевским» спектром. Шумовые отношения для отобранных образцов, измеренные при токе 1 мА на частоте 10 кГц, составляли от единиц до сотен. Наиболее низкие значения t_{n} характерны для диодов типа 184А с металлизацией RhPt.

Корреляционные зависимости между шумовым отношением при указанных токе и частоте и показателем идеальности (1), последовательным сопротивлением (2) и ёмкостью БШ исследовались на выборке объёмом 60 образцов, принадлежащих в основном типам, указанным в табл. 1. Все расчёты параметров линейной регрессии и коэффициента корреляции выполнены методом наименьших квадратов, обеспечивающим состоятельность и несмещённость полученных оценок.

Как и в работе [6], практически отсутствует корреляция t_{n} с показателем идеальности n: коэффициент корреляции составляет 0,14 при изменении n в пределах $1{,}02 \div 1{,}1$. Как показали дальнейшие исследования, причины этого заключаются не только в узком диапазоне значений n, соизмеримом с погрешностью измерения, но и в том, что параметры n и t_{n} (определяемые в соответствии с установившимися требованиями и традицией) относятся к различным участкам ВАХ.

Не выражена корреляция t_{n} и с последовательным сопротивлением r_{s}: $k_{\text{кор}} = 0{,}32$ при изменении r_{s} в пределах $2 \div 20$ Ом. Причиной этого также может быть существенное отличие токов, при которых определялись параметры t_{n} и r_{s}.

Более заметная корреляция наблюдается между шумовым отношением и ёмкостью ДБШ: $k_{\text{кор}} \approx$ $\approx -0{,}65$. Это вполне ожидаемо, т. к. бóльшим ёмкостям соответствуют бóльшая площадь контакта либо бóльшая концентрация носителей. Оба эти фактора должны приводить к уменьшению уровня низкочастотного шума.

Учитывая сказанное выше о возможном влиянии различных условий измерения показателя идеальности (в области относительно малых токов $10^{-6} \div 10^{-5}$ А) и шумового отношения (при токе 1 мА) на их корреляцию и известную чувствительность низкочастотного шума к аномалиям ВАХ непосредственно в рабочей точке, было решено провести измерение значений t_n и n в одной области токов. Как выяснилось, наиболее подходящей для такого исследования является область токов $10^{-4} \div 10^{-3}$ А (см. рис. 1). Шумовое отношение определялось при токе 10^{-4} А на частоте 8 кГц. Вместо показателя идеальности измерялась разность смещений $U_{34} = U_3 - U_4$, соответствующая указанному диапазону токов (связь величины U_{34} с показателем идеальности определяется, как известно, соотношением $n_{34} = [qU_{34}/(kT)] \ln 10$). Корреляция шумового отношения и величины U_{34} для произвольно выбранных 33 диодов представлена на рис. 2. Уравнение линии регрессии значений t_n на U_{34} имеет вид

$$t_\mathrm{n} = 6{,}64 U_{34}\,[\text{мВ}] - 443{,}20 \tag{4}$$

при коэффициенте корреляции $k_\text{кор} = 0{,}85 \pm 0{,}09$ (уровень значимости оценки составляет 0,05). Как видно, корреляция между значениями t_n и U_{34} выражена вполне определённо. В принципе, параметр U_{34} может быть использован для оценки ожидаемого уровня низкочастотного шума ДБВ. Недостатком такой оценки является зависимость от величины последовательного сопротивления, колебания которого могут внести дополнительную неопределённость в связь между t_n и U_{34}.

Более объективным параметром ВАХ для анализа корреляции может быть величина $\Delta U_{34} = (U_3 - U_4) - (U_3' - U_4') = U_{34} - \big((nkT/q) \ln 10 + 0{,}9 \cdot 10^{-3} r_\mathrm{s}\,[\text{Ом}]\big)$. Смещения U_3' и U_4' соответствуют токам 10^{-3} и 10^{-4} А для идеальной характеристики (кривая *2* на рис. 1), и разность между ними может быть получена из ВАХ (3). Достоинство параметра ΔU_{34} в том, что он исключает влияние последовательного сопротивления r_s на величину U_{34} и устраняет неудобство, связанное с влиянием на него температуры. По существу, ΔU_{34} характеризует изменение показателя идеальности (величину Δn_{34}) при изменении тока от 10^{-4} до 10^{-3} А, т. е. рост n при увеличении тока. Заметим, что идеальная характеристика (кривая *2* на рис. 1), которая описывается выражением (3), тем и отличается от реальной, что для неё $n = \mathrm{const}$.

На рис. 3 представлена корреляция шумового отношения t_n, измеренного при токе 10^{-4} А на частоте 8 кГц, и величины ΔU_{34} для произвольной партии из 50 диодов. Уравнение линии регрессии значений $\ln t_\mathrm{n}$ на $\ln(\Delta U_{34} + 1)$ имеет вид

$$\ln t_\mathrm{n} = 2{,}51 \ln(\Delta U_{34}\,[\text{мВ}] + 1) + 0{,}29 \tag{5}$$

при коэффициенте корреляции $k_\text{кор} = 0{,}91 \pm 0{,}05$ (уровень значимости оценки составляет 0,05). Величина коэффициента корреляции не оставляет сомнений в том, что ВАХ и низкочастотный шум в указанном диапазоне токов определяются одними и теми же свойствами контактов с БШ. Столь же сильная корреляция ($k_\text{кор} > 0{,}9$) наблюдалась и между ΔU_{34} и величиной t_n, измеренной при токе 10^{-3} А на частоте 10 кГц.

Рост показателя идеальности ВАХ в области больших токов, где начинает сказываться влияние последовательного сопротивления диода (особенно для СВЧ диодов, обладающих относительно малой площадью контакта), — достаточно известное явление [11, 12]. Причиной роста могут быть поверхностные электронные состояния и промежуточный слой на контакте, вклад которых в увеличение n растёт по мере понижения барьера (т. е. по мере роста прямого смещения) [13]:

$$n = 1 + \frac{C_\mathrm{sc} + C_\mathrm{ss}}{C_\delta}\,. \tag{6}$$

Рис. 2

Рис. 3

Здесь $C_{\rm sc}$ — ёмкость барьера, $C_{\rm ss}$ — ёмкость поверхностных состояний, C_δ — ёмкость промежуточного слоя на контакте. Важно отметить, что согласно известным данным плотность поверхностных электронных состояний в запрещённой зоне может расти по мере приближения к дну зоны проводимости [14], что также способствует усилению их влияния. Увеличение показателя идеальности n может быть связано и с туннелированием и понижением высоты барьера вследствие эффекта сил изображения, влияние которых также растёт с ростом смещения. В качестве дополнительных причин в [11] предполагается влияние локальных центров термополевой эмиссии (царапин, ямок травления, дефектов структуры), которая также приводит к повышению показателя идеальности ВАХ [15].

Другой причиной искажения ВАХ в области больших прямых смещений может быть неоднородное распределение высоты барьера по поверхности контакта, что может имитировать увеличение показателя идеальности ВАХ [12]. Наиболее вероятная область локального понижения высоты барьера — периферия контакта, где ожидается максимальное влияние упругих напряжений растяжения, вызванных воздействием металла и защитного диэлектрика [16]. На рис. 1 показано формирование ВАХ в области больших токов в условиях неоднородного барьера (изображение условное). Как видно, реальная ВАХ (кривая *1*) может быть представлена как сумма ВАХ (штриховые линии без нумерации) отдельных участков контакта («субдиодов») с различной площадью и различной высотой барьера. При малых токах суммарный ток определяется участками с меньшей высотой барьера и меньшей площадью и, как следствие, с бóльшим последовательным сопротивлением. Именно последнее обстоятельство и приводит к отклонению реальной ВАХ от прямой линии (в полулогарифмическом масштабе) при относительно малых токах, которое воспринимается как увеличение показателя идеальности ВАХ с ростом тока.

Такая «конструкция» ВАХ позволяет вполне логично объяснить значительный рост высокочастотного разогревного шума [11, 12], поскольку большáя часть тока концентрируется в субдиодах с относительно малой высотой барьера, малой площадью и высоким последовательным сопротивлением, где и происходит разогрев электронного газа вследствие высокой напряжённости поля. Повышенный низкочастотный шум для подобных диодов выявлен, по-видимому, впервые.

Хотя природа высокочастотного и низкочастотного шумов существенно отлична, влияние плотности тока на последний таково, что объяснение наблюдаемой корреляции неоднородностью между показателем идеальности ВАХ и уровнем низкочастотного шума БШ также представляется логичным. Действительно, известно (см., например, [1]), что интенсивность шума пропорциональна плотности тока. Это означает, что в неоднородном диоде субдиоды с пониженной высотой барьера и относительно малой площадью контакта характеризуются максимальной плотностью тока, а следовательно, и повышенным уровнем низкочастотного шума. Иначе говоря, неоднородные ДБШ с повышенным показателем идеальности в области больших токов должны характеризоваться повышенным низкочастотным шумом.

В соответствии с рис. 1 естественно ожидать, что такая корреляция между показателем идеальности и уровнем низкочастотного шума будет ослабевать с уменьшением тока, поскольку при этом разница в показателях идеальности однородных (совершенных) и неоднородных диодов исчезает. В то же время неоднородные диоды в области малых токов должны сохранять относительно высокий уровень шума, т. к. именно в этой ситуции концентрация тока в отдельных субдиодах (а следовательно, и плотность тока) оказывается наибольшей. В этом случае мы сталкиваемся с хорошо известной из практики ситуацией, когда совершенные (судя по показателю идеальности) диоды характеризуются широким разбросом уровня шума. Отсутствию (или значительному ослаблению) корреляции между показателем идеальности ВАХ и уровнем шума в этом случае способствует и возрастание относительной погрешности в определении величины n при её приближении к единице, о чём уже говорилось ранее.

Хотя обоснование роли неоднородности БШ в проявлении низкочастотного шума представляется вполне логичным, нельзя упускать из виду и возможное повышение с ростом тока роли поверхностных электронных состояний и объёмных ловушек (плотность которых вблизи дна зоны проводимости может быть повышенной из-за индивидуальных особенностей материала и технологии) в процессах токопрохождения. По мере приближения уровня Ферми к зоне проводимости (при больших прямых смещениях) участие указанных состояний в процессах захвата и туннелирования становится более вероятным, что также может приводить к росту как показателя идеальности, так и низкочастотного шума.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение подчеркнём наиболее важные и интересные моменты данной работы. Как оказалось, наиболее «чувствительной» областью ВАХ для исследования корреляции с низкочастотным шумом является область достаточно больших прямых токов ($10^{-4} \div 10^{-3}$ А), где существенно понижается высота барьера и начинает играть роль последовательное сопротивление ДБШ. При этом закономерности корреляции (связи) между уровнем низкочастотного шума и показателем идеальности ВАХ в указанной области и в целом таковы, что они вполне объясняются преимущественным влиянием неоднородности высоты барьера (наличием участков контакта с пониженной высотой барьера). Такое объяснение представляется убедительным ещё и потому, что ранее оно было использовано при анализе корреляции высокочастотного шума и ВАХ ДБШ в той же области токов. Наконец, существуют многочисленные свидетельства наличия указанных неоднородностей в реальных ДБШ как в работах нашей лаборатории, так и в других известных публикациях.

Полученные результаты представляются важными и с практической точки зрения, поскольку дают возможность вести отбор наиболее совершенных (малошумящих) диодов по относительно простым измерениям ВАХ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hsu Shen T. // IEEE Trans. Electron. Devices. 1970. V. 17, No. 7. P. 496.
2. Martinez A., Esteve D. et al. // Conf. Ser. No. 22. London: Inst. of Phys., 1974. Proc. Manchester Conf. Met.-Semicond. Contacts. P. 67.
3. Wall E. L. // Solid-State Electron. 1976. V. 19. P. 389.

4. Sisson M. J., Hansom A. M., Grant A. J. et al. // Electron. Lett. 1978. V. 14, No. 20. P. 682.
5. Kleinpenning T. G. M. // Solid-State Electron. 1979. V. 22. P. 121.
6. Божков В. Г., Усольцев А. А., Хан А. В. // Радиотехника и электроника. 1986. Т. 31. С. 180.
7. Божков В. Г., Малаховский О. Ю., Бычков А. Г., Сироткин Е. Г. // Электронная техника. Сер. 2. Полупроводниковые приборы. 1987. Вып. 5 (190). С. 14.
8. Малаховский О. Ю., Божков В. Г., Бычков А. Г., Головизина И. В. // Радиотехника и электроника. 1992. Т. 37, вып. 1. С. 142.
9. Дмитриев М. Д., Якимов А. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1993. Т. 36, № 5. С. 456.
10. Божков В. Г., Вилисова В. В., Куркан К. И. и др. // Электронная промышленность. 1993. № 9. С. 82.
11. Божков В. Г., Малаховский О. Ю., Леуский В. Е., Струков И. А. // Радиотехника и электроника. 1983. Т. 28. С. 1 182.
12. Kollberg E. L., Zirath H., Jelenski A. // IEEE Trans. MTT. 1986. V. 34, No. 9. P. 913.
13. Божков В. Г. // Изв. вузов. Физика. 1987. Т. 30, № 1. С. 29.
14. Зи С. М. Физика полупроводниковых приборов: Пер. с англ. М.: Мир, 1984.
15. Божков В. Г., Кашкан А. А. // Электронная техника. Сер. 2. Полупроводниковые приборы. 1981. Вып. 7 (150). С. 12.
16. Божков В. Г. // Седьмая Российская конф. «Арсенид галлия». 21–23 октября 1999 г, Томск. С. 13.

Федеральное государственное
унитарное предприятие «НИИПП»,
г. Томск, Россия

Поступила в редакцию
23 апреля 2001 г.

STUDY OF THE CORRELATION BETWEEN LOW-FREQUENCY NOISE AND THE CURRENT-VOLTAGE CHARACTERISTICS OF GaAs SCHOTTKY-BARRIER DIODES

V. G. Bozhkov, T. M. Tabakaeva, and A. A. Usol'tzev

Correlation between low-frequency ($1/f$) noise and the current-voltage ($I - V$) characteristic of a beam-lead GaAs Schottky-barrier diode (SBD) is studied. It is shown that the ideality factor n of the $I - V$ characteristic (and its increase) in the current range 10^{-4}–10^{-3} A has the most pronounced correlation (the correlation coefficient $k_{\rm cor} > 0.9$) with low-frequency noise measured for the same currents at frequencies 8–10 kHz, i.e., n is mostly sensitive to the the series resistance of the SBD. At the same time, the values of n in the 10^{-6}–10^{-5} A range usually do not exceed 1.1 and do not show correlation with low-frequency noise. The correlation is explained predominantly by the barrier-height nonuniformity over the Schottky-barrier contact.

УДК 537.87

КОРОТКИЕ ВЕКТОРНЫЕ СОЛИТОНЫ ОГИБАЮЩЕЙ

Д. Е. Воронцов, Е. М. Громов, Л. В. Пискунова, В. В. Тютин

Найден класс решений связанного нелинейного уравнения Шрёдингера третьего порядка в виде коротких векторных солитонов. В адиабатическом приближении проанализирована устойчивость найденных солитонов. Аналитические результаты подтверждены численным моделированием динамики коротких векторных импульсов в рамках указанного уравнения.

При распространении волновых пакетов в двояколучепреломляющей нелинейной диспергирующей среде существенны эффекты взаимодействия волновых полей разной поляризации. До последнего времени в качестве базового уравнения, учитывающего такие эффекты и описывающего в двояколучепреломляющих средах динамику векторного волнового пакета $\mathbf{E} = \mathbf{e}_1 A_1(x,t)\exp(i\omega_1 t - ik_0 x) + \mathbf{e}_2 A_2(x,t)\exp(i\omega_2 t - ik_0 x)$, где A_1, A_2 — огибающие компонент волнового пакета с различными поляризациями $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и близкими частотами ω_1, ω_2 ($|\omega_1 - \omega_2| \ll \{\omega_1, \omega_2\}$), использовалось связанное нелинейное уравнение Шрёдингера второго порядка [1, 2]:

$$2i\frac{\partial A_1}{\partial t} + q\frac{\partial^2 A_1}{\partial \xi^2} + 2\alpha\left(|A_1|^2 + \sigma |A_2|^2\right) A_1 = 0, \tag{1}$$

$$2i\frac{\partial A_2}{\partial t} + q\frac{\partial^2 A_2}{\partial \xi^2} + 2\alpha\left(|A_2|^2 + \sigma |A_1|^2\right) A_2 = 0, \tag{2}$$

где q — параметр линейной дисперсии второго порядка для волн с волновым числом k и частотой ω, α — параметр кубичной нелинейности, σ — параметр нелинейной связи между компонентами векторного волнового пакета. Система (1), (2) описывает динамику векторных волновых пакетов в сопровождающей системе отсчёта, движущейся со скоростью линейных волн $V_{\mathrm{g}}^{\mathrm{L}}$: $\xi = x - V_{\mathrm{g}}^{\mathrm{L}} t$.

Система уравнений (1), (2) имеет решение в виде протяжённого векторного солитона (двухкомпонентное солитонное решение):

$$A_1(\xi,t) = \frac{A_0\exp[i\,(\alpha A_0^2/2 + Kq)\,t + iK\xi]}{\operatorname{ch}(\sqrt{\alpha/q}\,A_0(\xi - Kqt)\,\sqrt{1+\lambda^2\sigma})}\,, \qquad A_2 = \lambda A_1,$$

где K — свободный параметр, λ — параметр, удовлетворяющий условию $\left(\lambda^2 - 1\right)(\sigma - 1) = 0$, что соответствует $\lambda^2 = 1$ при $\sigma \neq 1$ [2] и произвольному значению λ при $\sigma = 1$. Последний случай соответствует солитонам Манакова [1].

Связанное нелинейное уравнение Шрёдингера описывает достаточно протяжённые векторные волновые пакеты. Но описание коротких векторных пакетов (протяжённостью в несколько десятков длин волны) в рамках этого уравнения является некорректным. Для описания динамики коротких векторных волновых пакетов необходимо использовать уравнение, учитывающее эффекты третьего приближения теории нелинейной дисперсии — связанное нелинейное уравнение Шрёдингера третьего порядка:

$$2i\left[\frac{\partial A_1}{\partial t} + \beta\left(|A_1|^2 + \sigma_\beta |A_2|^2\right)\frac{\partial A_1}{\partial \xi} + \mu A_1 \frac{\partial\left(|A_1|^2 + \sigma_\mu |A_2|^2\right)}{\partial \xi}\right] + {} \\ {} + q\frac{\partial^2 A_1}{\partial \xi^2} + 2\alpha\left(|A_1|^2 + \sigma_\alpha |A_2|^2\right) A_1 + i\gamma\frac{\partial^3 A_1}{\partial \xi^3} = 0, \tag{3}$$

$$2i\left[\frac{\partial A_2}{\partial t}+\beta\left(|A_2|^2+\sigma_\beta\,|A_1|^2\right)\frac{\partial A_2}{\partial\xi}+\mu A_2\frac{\partial\left(|A_2|^2+\sigma_\mu\,|A_1|^2\right)}{\partial\xi}\right]+ \\ +q\frac{\partial^2A_2}{\partial\xi^2}+2\alpha\left(|A_2|^2+\sigma_\alpha\,|A_1|^2\right)A_2+i\gamma\frac{\partial^3A_2}{\partial\xi^3}=0, \quad (4)$$

где γ — параметр линейной дисперсии третьего порядка (линейная аберрация), параметры β и μ соответствуют зависимости локальной групповой скорости от интенсивности волны (нелинейная дисперсия), σ_α, σ_β, σ_μ — параметры нелинейной связи между компонентами векторного волнового пакета. Система уравнений, аналогичных системе (3), (4), использовалась в [3] для описания векторных солитонов с различными частотами компонент ($|\omega_1-\omega_2|\sim\{\omega_1,\omega_2\}$) при учёте из членов третьего порядка только линейной дисперсии ($\beta=\mu=0$). При этом коэффициент связи σ_α принимал значения $2/3\le\sigma_\alpha\le2$. Как показано в Приложении, система уравнений (3), (4) может быть получена для векторных волновых пакетов в двояколучепреломляющих волоконных линиях связи из уравнений Максвелла.

В случае изотропной среды, т. е. при отсутствии связи между компонентами векторного волнового пакета ($\sigma_\alpha=\sigma_\beta=\sigma_\mu=0$) система (3), (4) сводится к паре несвязанных нелинейных уравнений Шрёдингера третьего порядка [4] вида:

$$2i\left(\frac{\partial A}{\partial t}+\beta\,|A|^2\frac{\partial A}{\partial\xi}+\mu A\frac{\partial|A|^2}{\partial t}\right)+q\frac{\partial^2A}{\partial\xi^2}+2\alpha|A|^2A+i\gamma\frac{\partial^3A}{\partial\xi^3}=0. \quad (5)$$

Уравнение (5) может быть получено для скалярных волновых пакетов в оптических волоконных линиях связи также из уравнений Максвелла [5]. При этом выводе в уравнении были отброшены все члены более высокого порядка малости относительно величины ν^3 ($\nu\sim|(k_0A_i)^{-1}\,\partial A_i/\partial\xi|\sim|A_i|$, $i=1,2$). При $\mu\ne0$ уравнение (5) описывает негамильтонову подсистему исходной гамильтоновой системы, описываемой уравнениями Максвелла. Одним из следствий этого является то, что хотя описываемый уравнением (5) волновой пакет сохраняет свою энергию, но при $\mu\ne0$ он изменяет свой импульс [6]

$$p=\frac{i}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(A\frac{\partial A^*}{\partial\xi}-A^*\frac{\partial A}{\partial\xi}\right)\mathrm{d}\xi,$$

где A^* — комплексно-сопряжённая к A величина:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=\mu\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}\,|A|^4\,\mathrm{d}\xi,\qquad A=|A|\exp(i\varphi).$$

Это явление связано с описанием исходной системы взаимодействующих в среде полей разных типов (например, электромагнитного и звукового) уравнением, учитывающим поле только одного типа. Для более корректного описания динамики электромагнитных волновых пакетов требуется учёт существующих в среде полей других типов.

К настоящему времени было проведено несколько исследований стационарных волн в рамках нелинейного уравнения Шрёдингера третьего порядка. Исследования проводились как численно [7, 8], так и аналитически. Методом обратной задачи рассеяния при определённых соотношениях между параметрами уравнения найдены N-солитонные решения (см., например, [9, 10]). Ряд работ посвящён описанию односолитонных решений указанного уравнения при отсутствии различных членов [11–13]. Так же ранее были найдены нелокализованные стационарные волны — солитоны на подложке [14, 15].

В [16] экспериментально исследовано самоукручение фронта коротких волновых пакетов, что подтверждает необходимость учёта в модельном уравнении членов более высокого порядка малости относительно величины ν^2. Аналитически самоукручение одного из фронтов нестационарного волнового пакета в рамках нелинейного уравнения Шрёдингера третьего порядка (5) исследовалось в [17] при $\gamma = 0$, $\beta = \mu$ и в [18] при условии линейной связи между амплитудой импульса и дополнительным волновым числом. Как показано в [19], в рамках уравнения (5) существует класс решений в виде коротких солитонов огибающей

$$A(\xi,t) = \frac{A_0}{\operatorname{ch}[(\xi - Vt)\, A_0\varepsilon]}\ \exp(i\Omega t + iK\xi), \tag{6}$$

где

$$K = \frac{q\Theta - 3\alpha\gamma}{6\mu\gamma}\,, \qquad V = Kq - \frac{3}{2}\gamma K^2 + \frac{\Theta}{6}A_0^2, \qquad \Omega = \frac{\Theta}{6\gamma}A_0^2\,(q - 3K\gamma) + \frac{K^2}{2}\,(K\gamma - q),$$

$\varepsilon = \sqrt{\Theta/(3\gamma)}$, $\Theta = \beta + 2\mu$ — результирующий параметр нелинейной дисперсии. Солитонное решение (6) существует в средах с одинаковым знаком параметра линейной дисперсии третьего порядка и результирующего параметра нелинейной дисперсии ($\gamma\Theta > 0$), в которых эффект самоукручения (обусловленный нелинейной дисперсией) компенсируется эффектом линейной аберрации (обусловленной линейной дисперсией третьего порядка). В работе [20] показано, что короткие солитоны (6) являются единственным устойчивым классом локализованных решений уравнения (5): произвольный импульс в рамках нелинейного уравнения Шрёдингера третьего порядка при условии $\gamma\Theta > 0$ эволюционирует к системе солитонов (6) и линейной квазипериодической волне.

В данной работе для двояколучепреломляющих сред в рамках связанного нелинейного уравнения Шрёдингера третьего порядка найден класс решений в виде коротких векторных солитонов, а также исследована их устойчивость.

Закон сохранения энергии коротких векторных волновых пакетов. Умножая уравнение (3) на A_1^* (комплексно-сопряжённую к A_1 функцию), складывая полученное уравнение с комплексно-сопряжённым ему и интегрируя с учётом отсутствия поля на бесконечности $((A_i)\big|_{\xi\to\pm\infty} \to 0)$, получим выражение для изменения энергии компоненты волнового пакета с поляризацией $\mathbf{e}_1$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |A_1|^2\ \mathrm{d}\xi = -\,(2\mu\sigma_\mu - \beta\sigma_\beta)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |A_1|^2\,\frac{\partial\,|A_2|^2}{\partial\xi}\,\mathrm{d}\xi. \tag{7}$$

Изменение энергии волнового пакета с поляризацией $\mathbf{e}_1$ определяется параметрами σ_μ и σ_β. Аналогично для изменения энергии компоненты волнового пакета с поляризацией $\mathbf{e}_2$ получаем

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |A_2|^2\ \mathrm{d}\xi = (2\mu\sigma_\mu - \beta\sigma_\beta)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |A_1|^2\,\frac{\partial\,|A_2|^2}{\partial\xi}\,\mathrm{d}\xi. \tag{8}$$

Складывая (7) и (8), получаем закон сохранения энергии векторного волнового пакета в целом:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(|A_1|^2 + |A_2|^2\right)\,\mathrm{d}\xi = 0. \tag{9}$$

Короткие векторные солитоны. Представляя решение системы уравнений (3), (4) в виде стационарной волны:

$$A_1(\xi,t) = a_1(\eta)\exp(i\Omega_1 t + iK_1\eta), \qquad A_2(\xi,t) = a_2(\eta)\exp(i\Omega_2 t + iK_2\eta), \tag{10}$$

где $\eta = \xi - V_{\text{c}}t$, для амплитуд a_1, a_2 получаем систему четырёх уравнений:

$$\gamma\frac{\mathrm{d}^3a_1}{\mathrm{d}\eta^3} + 2\Theta a_1^2\frac{\mathrm{d}a_1}{\mathrm{d}\eta} + 2\beta\sigma_\beta a_2^2\frac{\mathrm{d}a_1}{\mathrm{d}\eta} + 4\mu\sigma_\mu a_1 a_2\frac{\mathrm{d}a_2}{\mathrm{d}\eta} + \left(2qK_1 - 2V_{\text{c}} - 3\gamma K_1^2\right)\frac{\mathrm{d}a_1}{\mathrm{d}\eta} = 0, \tag{11}$$

$$(q - 3\gamma K_1)\frac{d^2a_1}{d\eta^2} + 2(\alpha - \beta K_1)a_1^3 + 2(\alpha\sigma_\alpha - \beta\sigma_\beta K_1)a_2^2a_1 + {} \\ + \left(\gamma K_1^3 - qK_1^2 + 2V_{\text{c}}K_1 - 2\Omega_1\right)a_1 = 0, \tag{12}$$

$$\gamma\frac{\mathrm{d}^3a_2}{\mathrm{d}\eta^3} + 2\Theta a_2^2\frac{\mathrm{d}a_2}{\mathrm{d}\eta} + 2\beta\sigma_\beta a_1^2\frac{\mathrm{d}a_2}{\mathrm{d}\eta} + 4\mu\sigma_\mu a_2 a_1\frac{\mathrm{d}a_1}{\mathrm{d}\eta} + \left(2qK_2 - 2V_{\text{c}} - 3\gamma K_2^2\right)\frac{\mathrm{d}a_2}{\mathrm{d}\eta} = 0, \tag{13}$$

$$(q - 3\gamma K_2)\frac{\mathrm{d}^2a_2}{\mathrm{d}\eta^2} + 2(\alpha - \beta K_2)a_2^3 + 2(\alpha\sigma_\alpha - \beta\sigma_\beta K_2)a_1^2a_2 + {} \\ + \left(\gamma K_2^3 - qK_2^2 + 2V_{\text{c}}K_2 - 2\Omega_2\right)a_2 = 0. \tag{14}$$

Система уравнений (11)–(14) имеет частные однокомпонентные решения в виде коротких солитонов, совпадающие с решением (6) в рамках скалярных несвязанных нелинейных уравнений Шрёдингера третьего порядка:

$$\begin{cases} a_1 = A_0/\mathrm{ch}(\varepsilon A_0\eta), \\ a_2 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 = 0, \\ a_2 = A_0/\mathrm{ch}(\varepsilon A_0\eta), \end{cases} \tag{15}$$

для которых $K_1 = K_2 = K$, $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$ и $V_{\text{c}} = V$.

Для нахождения двухкомпонентного решения системы уравнений (11)–(14) представим искомое решение в виде $a_2 = \lambda a_1$. Интегрируя уравнения (11) и (13) по η с учётом условия $a_1(\eta \to -\infty) \to 0$, получаем следующую систему:

$$\frac{\mathrm{d}^2a_1}{\mathrm{d}\eta^2} + \frac{2}{3\gamma}\left[\Theta + \lambda^2(\beta\sigma_\beta + 2\mu\sigma_\mu)\right]a_1^3 + \frac{2qK_1 - 2V_{\text{c}} - 3\gamma K_1^2}{\gamma}a_1 = 0, \tag{16}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2a_1}{\mathrm{d}\eta^2} + 2\frac{(\alpha - \beta K_1) + \lambda^2(\alpha\sigma_\alpha - \beta\sigma_\beta K_1)}{q - 3\gamma K_1}a_1^3 + \frac{\gamma K_1^3 - qK_1^2 + 2V_{\text{c}}K_1 - 2\Omega_1}{q - 3\gamma K_1}a_1 = 0, \tag{17}$$

$$\lambda\left\{\frac{\mathrm{d}^2a_1}{\mathrm{d}\eta^2} + \frac{2}{3\gamma}\left[\Theta\lambda^2 + (\beta\sigma_\beta + 2\mu\sigma_\mu)\right]a_1^3 + \frac{2qK_2 - 2V_{\text{c}} - 3\gamma K_2^2}{\gamma}a_1\right\} = 0, \tag{18}$$

$$\lambda\left[\frac{\mathrm{d}^2a_1}{\mathrm{d}\eta^2} + 2\frac{(\alpha - \beta K_2)\lambda^2 + (\alpha\sigma_\alpha - \beta\sigma_\beta K_2)}{q - 3\gamma K_2}a_1^3 + \frac{\gamma K_2^3 - qK_2^2 + 2V_{\text{c}}K_2 - 2\Omega_2}{q - 3\gamma K_2}a_1\right] = 0. \tag{19}$$

Уравнения (16)–(19) образуют согласованную систему при

$$\left(\lambda^2 - 1\right)\left[(\beta\sigma_\beta + 2\mu\sigma_\mu) - \Theta\right] = 0, \tag{20}$$

$$(K_1 - K_2)\left(K_1 + K_2 - \frac{2q}{3\gamma}\right) = 0, \tag{21}$$

где добавочные волновые числа K_1, K_2 имеют вид

$$K_1 = \frac{q\Theta - 3\gamma\alpha + \lambda^2\left[q(\beta\sigma_\beta + 2\mu\sigma_\mu) - 3\gamma\alpha\sigma_\alpha\right]}{6\gamma\mu(1 + \lambda^2\sigma_\mu)}, \tag{22}$$

$$K_2 = \frac{\lambda^2 (q\Theta - 3\gamma\alpha) + q(\beta\sigma_\beta + 2\mu\sigma_\mu) - 3\gamma\alpha\sigma_\alpha}{6\gamma\mu(\lambda^2 + \sigma_\mu)}\,. \qquad (23)$$

При указанных условиях система (16)–(19) имеет следующее векторное солитонное решение:

$$a_1 = \frac{A_0}{\mathrm{ch}(\tilde{\varepsilon}A_0\eta)}\,, \qquad a_2 = \frac{\lambda A_0}{\mathrm{ch}(\tilde{\varepsilon}A_0\eta)}\,, \qquad (24)$$

где $\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\tilde{\Theta}/(3\gamma)}$, $\tilde{\Theta} = \Theta + \lambda^2 (\beta\sigma_\beta + 2\mu\sigma_\mu)$. Дополнительная скорость V_{c} и частоты Ω_1, Ω_2 в решении (24) определяются амплитудой A_0:

$$V_{\text{c}} = \frac{\tilde{\Theta}}{6}A_0^2 + qK_{1,2} - \frac{3}{2}\gamma K_{1,2}^2, \qquad \Omega_1 = \left(\frac{\tilde{\Theta}}{6}A_0^2 - \frac{K_1^2}{2}\right)(q - 2\gamma K_1), \qquad \Omega_2 = \left(\frac{\tilde{\Theta}}{6}A_0^2 - \frac{K_2^2}{2}\right)(q - 2\gamma K_2).$$

Решение в виде короткого векторного солитона (24) существует при условии

$$\left[\Theta + \lambda^2 (\beta\sigma_\beta + 2\mu\sigma_\mu)\right]\gamma > 0.$$

Влияние параметра λ на решение определяется выражением (20) с учётом (21) и подробно рассмотрено ниже.

Солитоны с одинаковыми амплитудами. При $\lambda^2 = 1$ из (24) имеем короткий векторный солитон с одинаковыми амплитудами компонент:

$$a_1 = \pm a_2 = \pm\frac{A_0}{\mathrm{ch}(\tilde{\varepsilon}A_0\eta)}\,, \qquad K_1 = K_2. \qquad (25)$$

Солитоны с различными амплитудами. При $\lambda^2 \neq 1$ имеем решение в виде короткого векторного солитона с различными амплитудами компонент, который существует при дополнительном условии $\beta\sigma_\beta + 2\mu\sigma_\mu = \Theta$. В этом случае, принимая во внимание выражения (22) и (23), имеем

$$K_1 - K_2 = \frac{\left(\lambda^4 - 1\right)\text{æ}}{6\gamma\mu(\lambda^2 + \sigma_\mu)(1 + \lambda^2\sigma_\mu)}\,, \qquad \text{æ} = q\beta(\sigma_\mu - \sigma_\beta) - 3\gamma\alpha(\sigma_\mu - \sigma_\alpha).$$

При æ $= 0$ имеем $K_1 = K_2$, λ — произвольный параметр. Короткие векторные солитоны (24) с различными произвольными амплитудами и одинаковыми волновыми числами компонент реализуются при условиях

$$q\beta(\sigma_\mu - \sigma_\beta) = 3\gamma\alpha(\sigma_\mu - \sigma_\alpha), \qquad \Theta = \beta\sigma_\beta + 2\mu\sigma_\mu. \qquad (26)$$

В частности, соотношения (26) выполняются при $\sigma_\mu = \sigma_\beta = \sigma_\alpha = 1$.

При æ $\neq 0$ имеем $K_1 \neq K_2$, а параметр λ удовлетворяет условию

$$\lambda^4\delta + 2\lambda^2\nu + \delta = 4q\mu\left[\lambda^4\sigma_\mu + \lambda^2\left(1 + \sigma_\mu^2\right) + \sigma_\mu\right], \qquad (27)$$

где

$$\delta = (q\Theta - 3\gamma\alpha)\sigma_\mu + (q\Theta - 3\gamma\alpha\sigma_\alpha), \qquad \nu = (q\Theta - 3\gamma\alpha) + \sigma_\mu(q\Theta - 3\gamma\alpha\sigma_\alpha).$$

Соотношение (27) выполняется для произвольного λ в двух случаях:

а) $\sigma_\mu = \sigma_\beta = 1$, $2q\beta = 3\gamma\alpha(1 + \sigma_\alpha)$;

б) $\delta = 4q\mu\sigma_\mu$, $\nu = 2q\mu(1 + \sigma_\mu^2)$.

В других случаях параметр λ фиксирован и определяется из (27).

Устойчивость коротких векторных солитонов. Проанализируем устойчивость коротких векторных солитонов в адиабатическом приближении. В этом приближении решение уравнений (3), (4) представим в виде векторного солитона с медленно меняющимися параметрами:

$$|A_1|^2 = \frac{a_1^2(t)}{\operatorname{ch}^2\left[\left(\xi - \xi_{0_1} - \int_0^t V_1(\tilde t)\,\mathrm{d}\tilde t\right) a_1(t)\tilde\varepsilon\right]}\,,$$
$$|A_2|^2 = \frac{\lambda^2 a_2^2(t)}{\operatorname{ch}^2\left[\left(\xi - \xi_{0_2} - \int_0^t V_2(\tilde t)\,\mathrm{d}\tilde t\right) a_2(t)\tilde\varepsilon\right]}\,. \tag{28}$$

С учётом (28) выражение (9) принимает вид

$$a_1(t) + \lambda^2 a_2(t) = S = \text{const}. \tag{29}$$

Скорость каждой компоненты векторного солитона в адиабатическом приближении определяется следующим образом:

$$V_1 = \frac{a_1^2}{6}\,\tilde\Theta + K_1 q - \frac{3}{2}\,\gamma K_1^2, \qquad V_2 = \frac{a_2^2}{6}\,\tilde\Theta + K_2 q - \frac{3}{2}\,\gamma K_2^2 \tag{30}$$

Для невозмущённого векторного солитона $a_1 = a_2 = A_0$ и $V_1 = V_2 = V_{\text{c}}$. При малом отличии компонент векторного солитона ($|a_1 - a_2| \ll A_0$) разница их скоростей имеет вид

$$V_1 - V_2 = \frac{\tilde\Theta A_0}{3}\,(a_1 - a_2). \tag{31}$$

Подставляя (28) в (7) и принимая во внимание (31), имеем

$$\frac{\mathrm{d}a_1}{\mathrm{d}t} = -\lambda^2\tilde\varepsilon^2\,(2\mu\sigma_\mu - \beta\sigma_\beta)\,a_2^3 a_1^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sh}(\eta a_2\tilde\varepsilon)\,\mathrm{d}\eta}{\operatorname{ch}^2\left[(\eta - y(t))\,a_1\tilde\varepsilon\right]\operatorname{ch}^3(\eta a_2\tilde\varepsilon)}\,, \tag{32}$$

где $y\,(t) = \int_0^t [a_1(\tilde t) - a_2(\tilde t)]\,\mathrm{d}\tilde t + 3\,\Delta\xi_0/(\tilde\Theta A_0)$, $\Delta\xi_0 = \xi_{0_1} - \xi_{0_2}$. Используя новую переменную $y(t)$ и учитывая (29), уравнение (32) записывается в виде

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = \tilde\varepsilon\,\frac{2\mu\sigma_\mu - \beta\sigma_\beta}{(1+\lambda^2)^3}\,\left(S - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2\left(S + \lambda^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sh}\eta\,\mathrm{d}\eta}{\operatorname{ch}^2\left[(\eta - y\rho)\,\dfrac{(S + \lambda^2\,\mathrm{d}y/\mathrm{d}t)}{(S - \mathrm{d}y/\mathrm{d}t)}\right]\operatorname{ch}^3\eta}\,, \tag{33}$$

где

$$\rho = \frac{\tilde\varepsilon\tilde\Theta A_0\,(S - \mathrm{d}y/\mathrm{d}t)}{3\,(1+\lambda^2)}\,.$$

Стационарная точка уравнения (33) $y_{\text{st}} = 0$ определяется из условия $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = \mathrm{d}^2y/\mathrm{d}t^2 = 0$ и соответствует невозмущённому короткому векторному солитону с амплитудой A_0. Для малых возмущений в окрестности стационарной точки, ограничиваясь только членами первого порядка по y и $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$, из (33) получаем линейное уравнение

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + \frac{8}{45}\tilde\varepsilon^2\tilde\Theta\,(\beta\sigma_\beta - 2\mu\sigma_\mu)\left(1+\lambda^2\right)A_0^6 y = 0. \tag{34}$$

При $(\beta\sigma_\beta - 2\mu\sigma_\mu)\,\tilde\Theta > 0$ стационарная точка уравнения (34) — центр, что соответствует устойчивому векторному солитону. Период колебаний координат максимумов компонент короткого векторного солитона друг относительно друга равен

$$T = \frac{3\sqrt{5}\,\pi}{A_0^3\tilde\varepsilon\,\sqrt{2\tilde\Theta\,(\beta\sigma_\beta - 2\mu\sigma_\mu)\,(1+\lambda^2)}}\,. \qquad (35)$$

Период осцилляций T возрастает с убыванием амплитуды векторного солитона: $T \sim 1/A_0^3$. В частном случае, для коротких векторных солитонов с равными амплитудами компонент ($\lambda^2 = 1$) и при $\sigma_\beta = \sigma_\mu = \sigma$, для периода колебаний компонент солитона имеем

$$T = \frac{3\pi}{2A_0^3\,(1+\sigma)}\sqrt{\frac{15\gamma}{\sigma\Theta\,(\beta^2 - 4\mu^2)}}\,. \qquad (36)$$

При $(\beta\sigma_\beta - 2\mu\sigma_\mu)\,\tilde\Theta < 0$ стационарная точка уравнения (34) — седло, что соответствует неустойчивому векторному солитонному решению, компоненты которого расходятся в пространстве друг от друга.

Численное моделирование. Для интерпретации полученных аналитических результатов рассмотрим численно динамику коротких векторных волновых пакетов в рамках связанного нелинейного уравнения Шрёдингера третьего порядка (3), (4) с параметрами $\sigma_\alpha = \sigma_\beta = \sigma_\mu = \sigma = 2/3$, $\alpha = q = \gamma = 1$. Начальные условия зададим в виде возмущённого короткого солитона со смещёнными на расстояние Δ друг относительно друга компонентами:

$$A_1(\xi, t=0) = \frac{A_0\exp(iK\xi)}{\mathrm{ch}[\varepsilon\sqrt{1+\sigma}A_0\xi]}\,, \qquad A_2(\xi, t=0) = \frac{A_0\exp(iK\xi)}{\mathrm{ch}[\varepsilon\sqrt{1+\sigma}\,A_0(\xi-\Delta)]}\,. \qquad (37)$$

При $\Delta = 0$ выражение (37) совпадает с невозмущённым коротким векторным солитонным решением с равными амплитудами компонент ($\lambda^2 = 1$). При $\Delta \neq 0$ мы имеем возмущённый короткий векторный солитон.

Уравнения (3), (4) были решены при начальных условиях (37) и смещении $\Delta = 1$ при разных параметрах β, μ. Распределение абсолютных значений огибающих волнового пакета $|A_1|$ и $|A_2|$ в разные моменты времени показано на рис. 1 (пунктирная и сплошная кривые соответственно) для начального импульса в рамках уравнений (3), (4) при $\beta = 3$, $\mu = 0$, $A_0 = 1$. В этом случае начальный векторный волновой пакет (рис. 1a) эволюционирует к одиночному локализованному импульсу и квазипериодической волне с малой амплитудой. Параметры одиночного локализованного импульса полностью соответствуют параметрам короткого векторного солитона (25) с равными амплитудами компонент при $A_0 \approx 0{,}8$:

$$|A_1| = |A_2| = \frac{A_0}{\mathrm{ch}(\varepsilon A_0\,(\xi - V_\mathrm{c}t)\,\sqrt{1+\sigma}\,)}\,.$$

Скорость импульса $V_\mathrm{c} \approx 0{,}65$ соответствует скорости солитона (25) с нулевым добавочным волновым числом $K_1 = K_2 = 0$:

$$V_\mathrm{c} = \frac{\Theta\,(1+\sigma)}{6}\,A_0^2.$$

Изменение со временем наибольшего значения огибающей волнового пакета $\max(|A_2|)$ в рамках связанного нелинейного уравнения Шрёдингера третьего порядка для начального волнового пакета (37) с выбранными параметрами показана на рис. 2 (зависимость от времени величины $\max(|A_1|)$

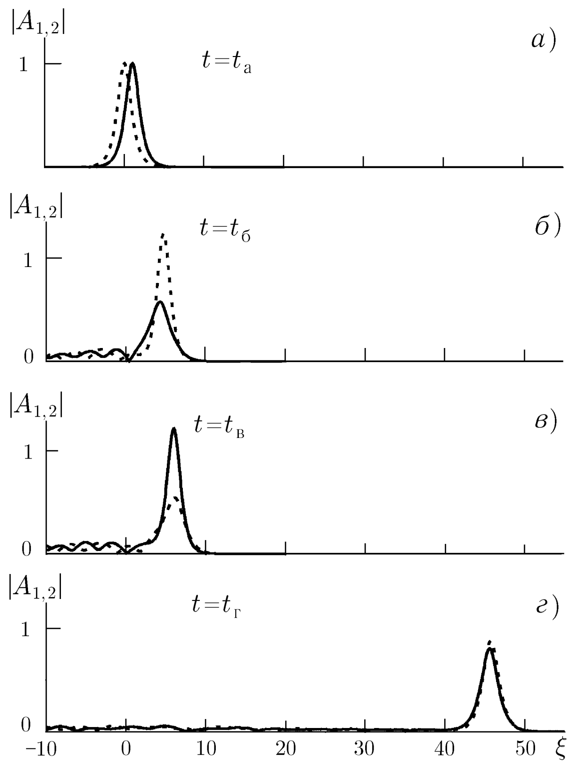

Рис. 1. Распределения абсолютных значений огибающих $|A_1|$ и $|A_2|$ (пунктирная и сплошная кривые соответственно) компонент векторного волнового пакета в рамках связанного нелинейного уравнения Шрёдингера третьего порядка (3), (4) при $\sigma_\alpha = \sigma_\beta = \sigma_\mu = \sigma = 2/3$, $\alpha = q = \gamma = 1$, $\beta = 3$, $\mu = 0$ для начального импульса с амплитудой $A_0 = 1$ и смещением $\Delta = 1$ в различные моменты времени; $t_{\text{а}} < t_{\text{б}} < t_{\text{в}} < t_{\text{г}}$

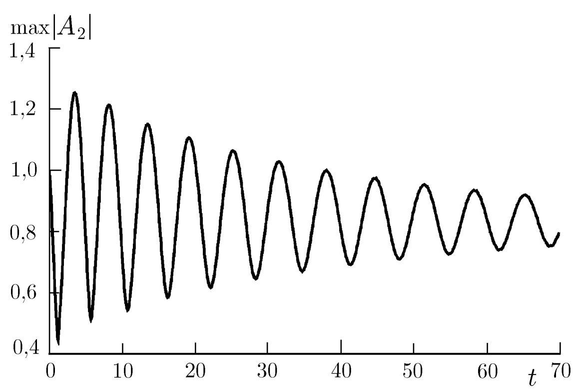

Рис. 2. Эволюция $\max(|A_2|)$ в рамках связанного нелинейного уравнения Шрёдингера третьего порядка при $\sigma_\alpha = \sigma_\beta = \sigma_\mu = \sigma = 2/3$, $\alpha = q = \gamma = 1$, $\beta = 3$, $\mu = 0$ для начального импульса (37) с амплитудой $A_0 = 1$ и смещением $\Delta = 1$

выглядит аналогично). Возмущённый короткий векторный солитон эволюционирует к стационарному состоянию после колебаний амплитуд компонент. На начальном этапе период осцилляций $T \approx 4{,}1$, что соответствует периоду осцилляций (36) при $\sigma = 2/3$, $\beta = 3$, $\mu = 0$ и $A_0 = 0{,}86$:

$$T \approx 2{,}6/A_0^3. \tag{38}$$

С течением времени период осцилляций возрастает до значения $T \approx 6{,}2$. Это обусловлено излучением части энергии солитона и убыванием амплитуд компонент векторного солитона до значения $A_0 = 0{,}77$, которое соответствует периоду осцилляций, полученному в адиабатическом приближении (38).

Смена знака параметра $\beta - 2\mu$ меняет характер эволюции начального векторного пакета (37). Это иллюстрирует приведённое на рис. 3 распределение абсолютного значения огибающих волнового пакета $|A_1|$ и $|A_2|$ в разные моменты времени (пунктирная и сплошная кривые соответственно), полученное для начального импульса (37) в рамках уравнений (3), (4) при $\beta = 1$, $\mu = 1$. В этом случае короткие векторные солитоны неустойчивы. Компонента с огибающей A_1 (пунктирная кривая) начального векторного пакета (рис. 3*а*) эволюционирует к квазипериодической волне с малой амплитудой и большой протяжённостью (рис. 3*в*). Параметры одиночного локализованного импульса полностью соответствуют параметрам короткого солитонного решения (15) с амплитудой $A_0 \approx 1{,}3$ и скоростью $V \approx 0{,}56$, что при нулевом добавочном волновом числе $K_1 = K_2 = 0$ соответствует $V = \Theta A_0^2/6$.

В общем случае, при выполнении условий существования векторного солитона (24) и при $(\beta\sigma_\beta - 2\mu\sigma_\mu)\tilde{\Theta} > 0$, исходный импульс, не совпадающий с векторным солитонным решением, эволюционирует к одному векторному солитону (24) (или к нескольким солитонам с различными амплитудами) с излучением некоторой части энергии волнового поля в виде квазипериодической волны малой амплитуды.

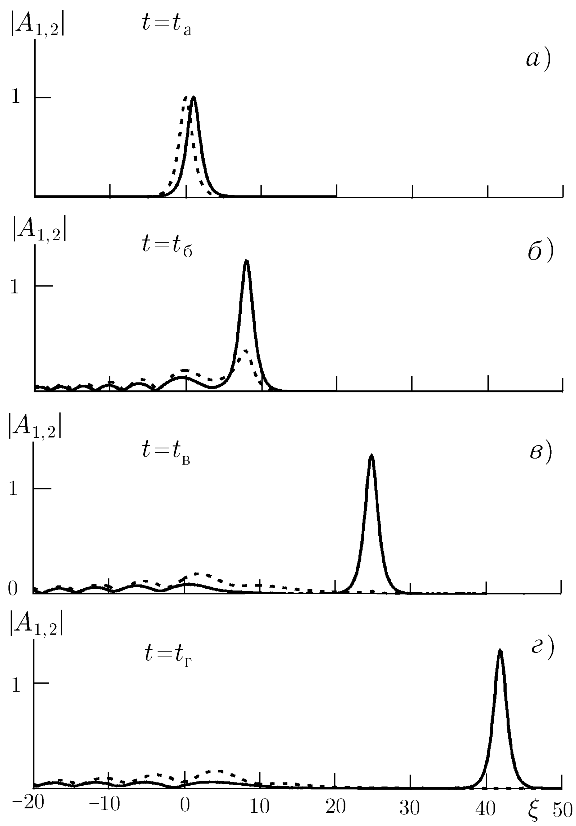

Рис. 3. Распределения абсолютных значений огибающих $|A_1|$ и $|A_2|$ (пунктирная и сплошная кривые соответственно) компонент векторного волнового пакета в рамках связанного нелинейного уравнения Шрёдингера третьего порядка (3), (4) при $\sigma_\alpha = \sigma_\beta = \sigma_\mu = \sigma = 2/3$, $\alpha = q = \gamma = \beta = \mu = 1$ для начального импульса с амплитудой $A_0 = 1$ и смещением $\Delta = 1$ в различные моменты времени; $t_а < t_б < t_в < t_г$

Отсюда следует соответствие аналитического и численного результатов исследования динамики коротких векторных импульсов.

С учётом (44) (см. Приложение) векторные солитоны существуют в рамках уравнений (3), (4) при $\lambda^2 = 1$ и при условии $\beta\gamma\,(1 + \sigma_\beta) > 0$. Условие устойчивости солитонов $\tilde\Theta\,(\beta\sigma_\beta - 2\mu\sigma_\mu) > 0$ в этом случае имеет вид $1 + \sigma_\beta < 0$. Таким образом, короткие векторные солитоны в волоконных линиях устойчивы при $\beta\gamma < 0$, $1 + \sigma_\beta < 0$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 00–02–16596 и 00–15–96772) и в рамках гранта № 349 6-го конкурса-экспертизы научных проектов молодых учёных РАН.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Рассмотрим распространение векторных электромагнитных волновых пакетов с разными поляризациями $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и волновыми числами k_1, k_2 в двояколучепреломляющей оптической волоконной линии. Представим электрическое поле в виде суперпозиции двух компонент с разными поляризациями:

$$\mathbf{E}(z,t) = \mathbf{e}_1 A_1(z,t)\exp(i\omega_0 t - ik_1 z) + \\ + \mathbf{e}_2 A_2(z,t)\exp(i\omega_0 t - ik_2 z),$$

где A_1, A_2 — медленно меняющиеся амплитуды компонент, ось z совпадает с осью волоконной линии. Динамика амплитуд A_1, A_2 может быть описана уравнением

$$-c^2\,\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} + 4\pi\,\frac{\partial^2\mathbf{P}^{\rm L}}{\partial t^2} + 4\pi\,\frac{\partial^2\mathbf{P}^{\rm NL}}{\partial t^2} = 0, \quad (39)$$

где $\mathbf{P}^{\rm L}$ и $\mathbf{P}^{\rm NL}$ линейная и нелинейная поляризуемости соответственно.

Представляя линейную поляризуемость в виде $\mathbf{P}^{\rm L} = \mathbf{e}_1 P_1^{\rm L}\exp(i\omega_0 t - ik_1 z) + \mathbf{e}_2 P_2^{\rm L}\exp(i\omega_0 t - ik_2 z)$, для $P_1^{\rm L}$, $P_2^{\rm L}$ в третьем приближении теории дисперсии получаем

$$P_i^{\rm L} = \vartheta_i A_i - i\,\frac{\partial\vartheta_i}{\partial\omega}\frac{\partial A_i}{\partial t} - \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2\vartheta_i}{\partial\omega^2}\frac{\partial^2 A_i}{\partial t^2} + \frac{i}{6}\,\frac{\partial^3\vartheta_i}{\partial\omega^3}\frac{\partial^3 A_i}{\partial t^3}\,, \quad (40)$$

где A_i — амплитуда электрического поля с поляризацией $\mathbf{e}_i$, ϑ_i — линейная восприимчивость среды для волнового числа k_i, которая удовлетворяет линейному дисперсионному соотношению $\omega^2\,[1 + 4\pi \times \vartheta_i(\omega)] = c^2 k_i^2$; $i = 1, 2$. Представляя нелинейную поляризуемость в виде $\mathbf{P}^{\rm NL} = \mathbf{e}_1 P_1^{\rm NL}\exp(i\omega_0 t -$

$-ik_1z) + \mathbf{e}_2 P_2^{\mathrm{NL}} \exp(i\omega_0 t - ik_2 z)$, в третьем приближении теории нелинейной дисперсии имеем

$$P_i^{\mathrm{NL}} = 3\chi_i^{(3)} |A_i|^2 A_i + \left(2\chi_i^{(3)} - 3i \frac{\partial \chi_i^{(3)}}{\partial \omega} \right) |A_j|^2 A_i - \\ - 6i \frac{\partial \chi_i^{(3)}}{\partial \omega} \frac{\partial}{\partial t} \left(|A_i|^2 A_i \right) - 3i \frac{\partial \chi_i^{(3)}}{\partial \omega} \frac{\partial}{\partial t} \left(|A_j|^2 \right) A_i, \quad (41)$$

где индексы i и j принимают значения 1 или 2 ($j \neq i$), $\chi_i^{(3)}$ — кубическая восприимчивость среды на частоте ω_i. Подставим в (39) выражения для линейной P_i^{L} и нелинейной P_i^{NL} поляризуемостей и удержим в результирующем выражении члены третьего порядка по параметру

$$\nu \sim \left| \frac{1}{\omega_i A_i} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right| \sim |A_i| \,.$$

Полагая $|\omega_1 - \omega_2| \ll \{\omega_1, \omega_2\}$, пренебрежём различием параметров как линейной, так и нелинейной восприимчивости: $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta$, $\chi_1^{(3)} = \chi_2^{(3)} = \chi^{(3)}$. Затем, переходя в систему отсчёта, движущуюся с групповой скоростью линейных волн $V_{\mathrm{g}}^{\mathrm{L}}$: $\tau = t - z/V_{\mathrm{g}}^{\mathrm{L}}$, $z' = z$, и ограничивая наше рассмотрение третьим приближением теории нелинейной дисперсии, получим (опуская в дальнейшем штрих) связанное нелинейное уравнение Шрёдингера третьего порядка:

$$2i \frac{\partial A_1}{\partial z} + q \frac{\partial^2 A_1}{\partial \tau^2} + 2\alpha \left(|A_1|^2 A_1 + \sigma_\alpha |A_2|^2 A_1 \right) + i\gamma \frac{\partial^3 A_1}{\partial \tau^3} + \\ + 2i\beta \left(|A_1|^2 \frac{\partial A_1}{\partial \tau} + \sigma_\beta |A_2|^2 \frac{\partial A_1}{\partial \tau} \right) + 2i\mu \left(A_1 \frac{\partial |A_1|^2}{\partial \tau} + \sigma_\mu A_1 \frac{\partial |A_2|^2}{\partial \tau} \right) = 0, \quad (42)$$

$$2i \frac{\partial A_2}{\partial z} + q \frac{\partial^2 A_2}{\partial \tau^2} + 2\alpha \left(|A_2|^2 A_2 + \sigma_\alpha |A_1|^2 A_2 \right) + i\gamma \frac{\partial^3 A_2}{\partial \tau^3} + \\ + 2i\beta \left(|A_2|^2 \frac{\partial A_2}{\partial \tau} + \sigma_\beta |A_1|^2 \frac{\partial A_2}{\partial \tau} \right) + 2i\mu \left(A_2 \frac{\partial |A_2|^2}{\partial \tau} + \sigma_\mu A_2 \frac{\partial |A_1|^2}{\partial \tau} \right) = 0, \quad (43)$$

где

$$q = -\frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2}\,, \qquad \alpha = 6\pi \frac{\omega_0^2 \chi^{(3)}}{c^2 k}\,, \qquad \gamma = -\frac{1}{3} \frac{\partial^3 k}{\partial \omega^3}\,,$$

$$\beta = \mu = \frac{6\pi\omega}{c^2 k} \left[\chi^{(3)} \left(\frac{V_{\mathrm{f}}}{V_{\mathrm{g}}^{\mathrm{L}}} - 1 \right) - \omega \frac{\partial \chi^{(3)}}{\partial \omega} \right], \qquad \sigma_\alpha = \frac{2}{3} - \frac{i}{\chi^{(3)}} \frac{\partial \chi^{(3)}}{\partial \omega}\,,$$

$$\sigma_\beta = \frac{1}{3 \left[\chi^{(3)} \left(1 - V_{\mathrm{f}}/V_{\mathrm{g}}^{\mathrm{L}} \right) - \omega\, \partial \chi^{(3)}/\partial \omega \right]} \left(2 - \frac{V_{\mathrm{f}}}{V_{\mathrm{g}}^{\mathrm{L}}} \right) \left(2\chi^{(3)} - 3i \frac{\partial \chi^{(3)}}{\partial \omega} \right),$$

$$\sigma_\mu = \frac{1}{3 \left[\chi^{(3)} \left(1 - V_{\mathrm{f}}/V_{\mathrm{g}}^{\mathrm{L}} \right) - \omega\, \partial \chi^{(3)}/\partial \omega \right]} \left[\left(2 - \frac{V_{\mathrm{f}}}{V_{\mathrm{g}}^{\mathrm{L}}} \right) \left(2\chi^{(3)} - 3i \frac{\partial \chi^{(3)}}{\partial \omega} \right) + 3\omega \frac{\partial \chi^{(3)}}{\partial \omega} \right],$$

$V_{\mathrm{f}} = \omega_0/k$ — фазовая скорость волны. Видно, что параметры σ_α, σ_β и σ_μ комплексные. В частном случае нелинейной среды с $\partial \chi^{(3)}/\partial \omega = 0$ все параметры уравнений (42), (43) действительные и имеют вид

$$q = -\frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2}\,, \qquad \gamma = \frac{1}{3} \frac{\partial^3 k}{\partial \omega^3}\,, \qquad \alpha = 6\pi \frac{\omega_0^2 \chi^{(3)}}{c^2 k}\,, \qquad \beta = \mu = \frac{6\pi\omega_0}{c^2 k} \chi^{(3)} \left(\frac{V_{\mathrm{f}}}{V_{\mathrm{g}}^{\mathrm{L}}} - 1 \right),$$

$$\sigma_\alpha = \frac{2}{3}\,, \qquad \sigma_\beta = \sigma_\mu = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{1 - V_\mathrm{f}/V_\mathrm{g}^\mathrm{L}}\right). \tag{44}$$

Полученные выше уравнения (42), (43) полностью совпадают с используемыми в данной работе уравнениями (3), (4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Манаков С. В. // ЖЭТФ. 1974. Т. 38. С. 248.
2. Menyuk C. R. // J. Quantum Electron. 1987. V. 23. P. 174.
3. Frantzeskakis // Phys. Lett. A. 2001 (in press).
4. Agraval G.V. // Nonlinear Fiber Optics. San Diego: Academic, 1995. P. 263.
5. Громов Е. М., Таланов В. И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1996. Т. 39, № 6. С. 735.
6. Gromov E. M., Talanov V. I. // Chaos. 2000. V. 10. P. 551.
7. Wai P. K. A., Menyuk C. R., Chen H. H., Lee Y. C. // Opt. Lett. 1987. V. 12. P. 628.
8. Мезенцев В. К., Турицын С. К. // Квантовая электроника. 1991. Т. 18, № 5. С. 610.
9. Hirota R. // J. Math. Phys. 1973. V. 14. P. 805.
10. Sasa N., Satsuma J. // J. Phys. Soc. Jap. 1991. V. 60. P. 409.
11. Kaup D. J., Newell A. C. // J. Math. Phys. 1978. V. 19. P. 798.
12. Chen H. H., Lee Y. C., Liu C. S. // Physica Scripta. 1979. V. 20. P. 490.
13. Frantzeskakis D. J., Hizanidis K., Tombas G. S., Belia I. // IEEE J. Quantum Electron. 1995. V. 31. P. 183.
14. Gromov E. M., Tyutin V. V. // Wave Motion. 1998. V. 28, No. 1. P. 13.
15. Li Z., Li L., Tian H., Zhou G. // Phys. Rev. Lett. 2000. V. 84, No. 18. P. 4 096.
16. Brabec T., Krausz F. // Rev. Mod. Phys. 2000. V. 72, No. 2. P. 545.
17. Anderson D., Lisak M. // Phys. Rev. A. 1983. V. 27. P. 1 393.
18. Zaspel C. E. // Phys. Rev. Lett. 1999. V. 82. P. 723.
19. Громов Е. М., Таланов В. И. // ЖЭТФ. 1996. Т. 110. С. 137.
20. Gromov E. M., Piskunova L. V., Tyutin V. V. // Phys. Lett. A. 1999. V. 256. P. 153.

Институт прикладной физики РАН,
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию
25 октября 2001 г.

SHORT VECTOR ENVELOPE SOLITONS

D. E. Vorontsov, E. M. Gromov, L. V. Piskunova, and V. V. Tyutin

We find a class of short vector soliton solutions of the coupled third-order nonlinear Schrödinger equation (CNSE-3) and analyze the stability of such solitons in the adiabatic approximation. The analytical results are confirmed by numerical simulations of the dynamics of perturbed short vector solitons corresponding to the CNSE-3.

УДК 621.391.1

ПРИЁМ СИГНАЛА С НЕИЗВЕСТНОЙ ДЛИТЕЛЬНОСТЬЮ

А. П. Трифонов, Ю. Э. Корчагин

Синтезированы максимально правдоподобный и оптимальный (байесовский) алгоритмы обнаружения и измерения длительности сигнала произвольной формы, наблюдаемого на фоне аддитивного белого гауссовского шума. Найдены точные выражения для характеристик максимально правдоподобных алгоритмов. С помощью моделирования на ЭВМ определены характеристики байесовских алгоритмов.

ВВЕДЕНИЕ

В работах [1–3] рассмотрена задача оптимального приёма прямоугольного импульса с неизвестной длительностью на фоне гауссовского белого шума. Показано, что полезный сигнал является разрывным по неизвестному параметру, выполнен синтез максимально правдоподобных (МП) и байесовских обнаружителей и измерителей длительности импульса. Найдены точные выражения для характеристик эффективности МП обнаружителя и измерителя длительности.

Однако реальные условия генерации и распространения приводят к необходимости приёма сигналов, форма которых отличается от прямоугольной. В связи с этим представляет интерес синтез и анализ алгоритмов приёма сигнала произвольной формы с неизвестной длительностью.

В данной работе синтезированы МП и байесовские алгоритмы обнаружения и оценки длительности сигнала произвольной формы, принимаемого на фоне аддитивного гауссовского белого шума. С использованием методики, изложенной в работе [4], найдены точные характеристики эффективности МП обнаружителя и измерителя длительности сигнала. Выполнено статистическое моделирование байесовских алгоритмов обнаружения и оценки длительности сигнала на ЭВМ.

1. ОБНАРУЖЕНИЕ СИГНАЛА С НЕИЗВЕСТНОЙ ДЛИТЕЛЬНОСТЬЮ

Рассмотрим задачу обнаружения сигнала

$$s(t,\tau) = \begin{cases} f(t), & 0 \le t \le \tau; \\ 0, & t < 0,\ t > \tau, \end{cases} \tag{1}$$

наблюдаемого в течение интервала времени $[0,T]$ на фоне аддитивного гауссовского белого шума $n(t)$ с односторонней спектральной плотностью N_0. Здесь $f(t)$ — функция, описывающая форму сигнала, длительность импульса $\tau \in [T_1, T_2]$ предполагается случайной величиной с априорной плотностью вероятности $W(\tau)$. Реализация наблюдаемых данных при этом запишется в виде $x(t) = \gamma_0 s(t,\tau_0) + n(t)$. Индекс нуль здесь и далее означает истинное значение соответствующего параметра. Параметр γ_0 дискретный и принимает два значения: $\gamma_0 = 0$ (в наблюдаемой реализации сигнал отсутствует) и $\gamma_0 = 1$ (в наблюдаемой реализации сигнал присутствует).

Будем считать, что априорные вероятности отсутствия и наличия сигнала известны: $p_0 = P(\gamma_0 = 0)$ и $p_1 = P(\gamma_0 = 1)$. По наблюдаемой реализации $x(t)$ необходимо оптимальным образом решить, какое значение принимает параметр γ.

Логарифм функционала отношения правдоподобия (ФОП) в этом случае будет зависеть от параметров γ и τ и согласно [1, 2] может быть записан в виде

$$L(\gamma,\tau)=\frac{2\gamma}{N_0}\int\limits_0^{\tau} f(t)\,[x(t)-f(t)/2]\,\mathrm{d}t.$$

В соответствии с МП алгоритмом [1, 2] оценка дискретного параметра γ может быть найдена как

$$\gamma_{\mathrm{m}}=\arg\sup_{\gamma}\left[\sup_{\tau}L(\gamma,\tau)\right].$$

Учитывая, что $L(\gamma=0,\tau)=0$, получаем, что МП алгоритм обнаружения заключается в сравнении абсолютного (наибольшего) максимума логарифма ФОП с нулём. Если выполняется неравенство

$$L=\sup L(\tau)>0, \tag{2}$$

где

$$L(\tau)=L(\gamma=1,\tau), \tag{3}$$

то выносится решение о наличии сигнала в принятой реализации ($\gamma_{\mathrm{m}}=1$), в противном случае — об отсутствии сигнала ($\gamma_{\mathrm{m}}=0$).

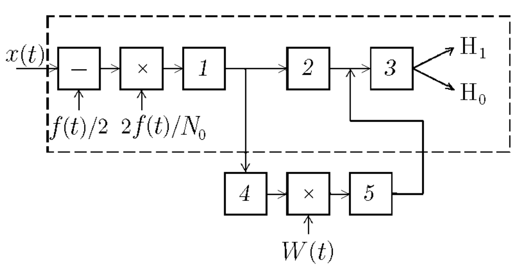

Рис. 1

Аналогично [3] вместо алгоритма (2) можно использовать обобщённый МП алгоритм обнаружения [1], основанный на сравнении абсолютного максимума логарифма ФОП с некоторым порогом c. Если

$$L>c, \tag{4}$$

выносится решение о наличии сигнала ($\gamma_{\mathrm{m}}=1$), если $L<c$ — о его отсутствии ($\gamma_{\mathrm{m}}=0$). Порог c в выражении (4) может выбираться исходя из различных критериев оптимальности [1, 2].

На рис. 1 штриховой линией выделена структурная схема МП обнаружителя сигнала (1), где *1* обозначает интегратор на интервале времени $[0,t]$; $t\in[0,T_2]$, *2* — пиковый детектор, определяющий наибольшее значение сигнала, *3* — пороговое устройство, осуществляющее сравнение выходного сигнала пикового детектора с порогом c и выносящее решение о наличии или отсутствии сигнала.

Качество обнаружения будем характеризовать средней вероятностью ошибки [1]

$$P_{\mathrm{e}}=p_0\alpha+p_1\beta, \tag{5}$$

где α — вероятность ошибки 1-го рода (ложной тревоги), $\beta=\int_{T_1}^{T_2}\beta(\tau)W(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ — безусловная вероятность ошибки 2-го рода (пропуска сигнала); а $\beta(\tau_0)$ — условная вероятность пропуска сигнала с длительностью τ_0.

Согласно [1] вероятности ошибок определяются выражениями

$$\alpha=P[\sup L(\tau)>c\,|\,\gamma_0=0]=1-P_0(c), \tag{6}$$

$$\beta=P[\sup L(\tau)<c\,|\,\gamma_0=1]=P_1(c), \tag{7}$$

где $P_j(c) = F_{2j}(c, c, T_2)$,

$$F_{2j}(u, v, T) = P\left[\sup_{T_1 \le \tau \le T} L(\tau) < u,\ \sup_{T < \tau \le T_2} L(\tau) < v \,|\, \gamma_0 = j\right], \quad j = 0; 1. \tag{8}$$

Для нахождения функций (8) воспользуемся методикой [4]. Случайный процесс $L(\tau)$ (3) является гауссовским, следовательно, для его полного статистичесго описания достаточно найти первые два момента [5]. Обозначая аналогично [4] $L_j(\tau) = L(\tau \,|\, \gamma_0 = j)$, где $j = 0$; 1, и выполняя усреднение, получаем

$$S_0(\tau) = \langle L_0(\tau)\rangle = -\frac{1}{N_0}\int\limits_0^{\tau} f^2(t)\,\mathrm{d}t, \qquad S_1(\tau) = \langle L_1(\tau)\rangle = \frac{2}{N_0}\int\limits_0^{\min(\tau,\tau_0)} f^2(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{N_0}\int\limits_0^{\tau} f^2(t)\,\mathrm{d}t, \tag{9}$$

$$B(\tau_1, \tau_2) = \big\langle [L_0(\tau_1) - S_0(\tau_1)]\,[L_0(\tau_2) - S_0(\tau_2)]\big\rangle = \\ = \big\langle [L_1(\tau_1) - S_1(\tau_1)]\,[L_1(\tau_2) - S_1(\tau_2)]\big\rangle = \frac{2}{N_0}\int\limits_0^{\min(\tau_1,\tau_2)} f^2(t)\,\mathrm{d}t. \tag{10}$$

Известно [1, 4], что функция

$$Q(\tau) = \frac{2}{N_0}\int\limits_0^{\tau} f^2(t)\,\mathrm{d}t \tag{11}$$

представляет собой отношение сигнал/шум (ОСШ) на выходе МП приёмника для сигнала (1), наблюдаемого на фоне белого шума.

Положим аналогично [4], что функция $f(t)$, описывающая форму сигнала, обращается в нуль только на части интервала $[0, \tau]$, имеющей нулевую меру. Тогда $Q(\tau)$ (11) является монотонно возрастающей функцией, и моменты (9), (10) логарифма ФОП можно переписать как

$$S_0(\tau) = -Q(\tau)/2; \qquad S_1(\tau) = \min[Q(\tau), Q(\tau_0)] - Q(\tau)/2; \qquad B(\tau_1, \tau_2) = \min[Q(\tau_1), Q(\tau_2)]. \tag{12}$$

Перейдём в выражении (3) к новой переменной $\lambda = Q(\tau)$, причём $\lambda \in [\Lambda_1, \Lambda_2]$, где $\Lambda_1 = Q(T_1)$, $\Lambda_2 = Q(T_2)$. Учитывая (12), можно при $\gamma_0 = 0$ представить логарифм ФОП (3) в виде

$$L_0(\tau) = L_0[\tau(\lambda)] = \mu_0(\lambda) = -\lambda/2 + \nu(\lambda). \tag{13}$$

Здесь $\tau(\lambda)$ определяется из решения уравнения $Q(\tau) = \lambda$, а $\nu(\lambda)$ — гауссовский случайный процесс, который обладает моментами

$$\langle \nu(\lambda)\rangle = 0, \qquad \langle \nu(\lambda_1)\nu(\lambda_2)\rangle = \min(\lambda_1, \lambda_2). \tag{14}$$

Соответственно при $\gamma_0 = 1$ логарифм ФОП (3) допускает представление

$$L_1(\tau) = L_1[\tau(\lambda)] = \mu_1(\lambda) = \min(\lambda_0, \lambda) - \lambda/2 + \nu(\lambda), \tag{15}$$

где $\lambda_0 = Q(\tau_0)$ — ОСШ для принятого сигнала.

Используя представления (13) и (15), функции распределения (8) запишем как

$$F_{2j}(u,v,T) = F_{2j}(u,v,\Lambda) = P\left[\sup_{\Lambda_1\le\lambda\le\Lambda}\mu_j(\lambda) < u,\ \sup_{\Lambda<\lambda\le\Lambda_2}\mu_j(\lambda) < v|\gamma_0 = j\right], \tag{16}$$

где $\Lambda = Q(T)$, $j = 0; 1$.

Марковские свойства случайного процесса $\mu_0(\lambda)$ позволяют найти функцию $F_{20}(u,v,T)$, при подстановке которой в выражение (6) получаем вероятность ложной тревоги в виде [4]

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Lambda_1}}\int\limits_0^\infty \exp\left[-\frac{(\xi - c - \Lambda_1/2)^2}{2\Lambda_1}\right]\left\{\Phi\left(\frac{\sqrt{\Lambda_2-\Lambda_1}}{2} + \frac{\xi}{\sqrt{\Lambda_2-\Lambda_1}}\right) - \right.$$
$$\left. - \exp(-\xi)\Phi\left(\frac{\sqrt{\Lambda_2-\Lambda_1}}{2} - \frac{\xi}{\sqrt{\Lambda_2-\Lambda_1}}\right)\right\}\mathrm{d}\xi, \tag{17}$$

где $\Phi(x) = (2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^x \exp(-t^2/2)\,\mathrm{d}t$ — интеграл вероятности. Как следует из (17), вероятность ложной тревоги α не зависит от вида функции $f(t)$, описывающей форму сигнала, и от вида функции $Q(\tau)$ (11), представляющей собой ОСШ на выходе МП приёмника [4]. Вероятность ложной тревоги полностью определяется минимальным $\Lambda_1 = \min Q(\tau) = Q(T_1)$ и максимальным $\Lambda_2 = \max Q(\tau) = Q(T_2)$ значениями ОСШ (11). При этом вероятность ложной тревоги возрастает с уменьшением минимального значения ОСШ $Q(T_1)$ и с увеличением диапазона изменения ОСШ $Q(T_2) - Q(T_1)$.

Перейдём к определению вероятности пропуска сигнала (1). Согласно (7) для нахождения вероятности пропуска β необходимо найти функцию $F_{21}(u,v,\Lambda)$ (16).

Введём вспомогательный случайный процесс

$$\chi_1(\lambda) = \begin{cases} u - \mu_1(\lambda), & \Lambda_1 \le \lambda \le \Lambda; \\ v - \mu_1(\lambda), & \Lambda < \lambda \le \Lambda_2, \end{cases}$$

который согласно (14) и (15) является марковским с коэффициентами сноса и диффузии

$$k_1 = \frac{1}{2}\times\begin{cases} -1, & \Lambda_1 \le \lambda \le \lambda_0; \\ \ \ 1, & \lambda_0 < \lambda \le \Lambda_2, \end{cases} \qquad k_2 = 1$$

соответственно. Тогда вероятность (16) при $j = 1$ определяется выражением [2, 6]

$$F_{21}(u,v,\Lambda) = P[\chi_1(\lambda) > 0] = \int\limits_0^\infty W(\chi,\Lambda_2)\,\mathrm{d}\chi. \tag{18}$$

Здесь $W(\chi,\lambda)$ — решение уравнения Фоккера—Планка—Колмогорова

$$\frac{\partial W(\chi,\lambda)}{\partial\lambda} + \frac{\partial}{\partial\chi}[k_1 W(\chi,\lambda)] - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\chi^2}[k_2 W(\chi,\lambda)] = 0 \tag{19}$$

при граничных условиях

$$W(\chi = 0,\lambda) = W(\chi = -\infty,\lambda) = 0$$

и начальном условии

$$W(\chi,\lambda = \Lambda_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Lambda_1}}\exp\left[-\frac{(\chi - u + \Lambda_1/2)^2}{2\Lambda_1}\right].$$

Решая уравнение (19) методом отражения с переменой знака [6] и используя выражение (18), находим функцию распределения

$$F_{21}(u,v,\Lambda) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\Lambda\,(\lambda_0-\Lambda)}} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \exp\left[-\frac{(\xi_1-\xi_2+(\lambda_0-\Lambda)/2)^2}{2\,(\lambda_0-\Lambda)}\right] \left\{1-\exp\left[-\frac{2\xi_1\xi_2}{\lambda_0-\Lambda}\right]\right\} \times$$
$$\times \left[\Phi\left(\frac{\sqrt{\Lambda_2-\lambda_0}}{2}+\frac{\xi_2}{\sqrt{\Lambda_2-\lambda_0}}\right)-\exp(-\xi_2)\Phi\left(\frac{\sqrt{\Lambda_2-\lambda_0}}{2}-\frac{\xi_2}{\sqrt{\Lambda_2-\lambda_0}}\right)\right] \times$$
$$\times \left\{\exp\left[-\frac{(\xi_1-v+\Lambda/2)^2}{2\Lambda}\right]\Phi\left(\frac{u\Lambda+(\xi_1-v)\,\Lambda_1}{\sqrt{\Lambda\Lambda_1\,(\Lambda-\Lambda_1)}}\right)-\exp\left[u-\frac{(\xi_1+2u-v+\Lambda/2)^2}{2\Lambda}\right] \times\right.$$
$$\left.\times\, \Phi\left(\frac{u\Lambda-(\xi_1+2u-v)\,\Lambda_1}{\sqrt{\Lambda\Lambda_1\,(\Lambda-\Lambda_1)}}\right)\right\} \mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\xi_2$$

при $\Lambda \le \lambda_0$ и

$$F_{21}(u,v,\Lambda) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\lambda_0\,(\Lambda-\lambda_0)}} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \exp\left[-\frac{(\xi_2-\xi_1+u-v-(\Lambda-\lambda_0)/2)^2}{2\,(\Lambda-\lambda_0)}\right] \times$$
$$\times \left[\Phi\left(\frac{\sqrt{\Lambda_2-\Lambda}}{2}+\frac{\xi_2}{\sqrt{\Lambda_2-\Lambda}}\right)-\exp(-\xi_2)\Phi\left(\frac{\sqrt{\Lambda_2-\Lambda}}{2}-\frac{\xi_2}{\sqrt{\Lambda_2-\Lambda}}\right)\right] \times$$
$$\times \left\{\Phi\left(u\sqrt{\frac{\lambda_0-\Lambda_1}{\lambda_0\Lambda_1}}+\xi_1\sqrt{\frac{\Lambda_1}{\lambda_0\,(\lambda_0-\Lambda_1)}}\right)-\Phi\left(u\sqrt{\frac{\lambda_0-\Lambda_1}{\lambda_0\Lambda_1}}-\xi_1\sqrt{\frac{\Lambda_1}{\lambda_0\,(\lambda_0-\Lambda_1)}}\right) \times\right.$$
$$\left.\times \exp\left[-\frac{2u\xi_1}{\lambda_0}\right]\right\}\left\{1-\exp\left[-\frac{2\xi_1(\xi_2+u-v)}{\Lambda-\lambda_0}\right]\right\}\exp\left[-\frac{(u-\xi_1-\lambda_0/2)^2}{2\lambda_0}\right]\mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\xi_2 \quad (20)$$

при $\Lambda > \lambda_0$.

Подставляя функцию (20) в формулу (7), получаем точное выражение для вероятности пропуска сигнала:

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda_0}} \int\limits_0^\infty \exp\left[-\frac{(\xi+\lambda_0/2)^2+c^2-c\lambda_0}{2\lambda_0}\right]\left[\Phi\left(\frac{\sqrt{\Lambda_2-\lambda_0}}{2}+\frac{\xi}{\sqrt{\Lambda_2-\lambda_0}}\right)-\right.$$
$$\left.-\exp(-\xi)\Phi\left(\frac{\sqrt{\Lambda_2-\lambda_0}}{2}-\frac{\xi}{\sqrt{\Lambda_2-\lambda_0}}\right)\right]\left\{\Phi\left(c\sqrt{\frac{\lambda_0-\Lambda_1}{\lambda_0\Lambda_1}}+\xi\sqrt{\frac{\Lambda_1}{\lambda_0(\lambda_0-\Lambda_1)}}\right) \times\right.$$
$$\left.\times\exp\left[\frac{u\xi}{\lambda_0}\right]-\Phi\left(c\sqrt{\frac{\lambda_0-\Lambda_1}{\lambda_0\Lambda_1}}-\xi\sqrt{\frac{\Lambda_1}{\lambda_0\,(\lambda_0-\Lambda_1)}}\right)\exp\left[-\frac{u\xi}{\lambda_0}\right]\right\}\mathrm{d}\xi. \quad (21)$$

Аналогично (17) вероятность пропуска (21) сигнала (1) с неизвестной длительностью не зависит от вида функции $f(t)$, описывающей форму сигнала, и от вида функции $Q(\tau)$, представляющей собой ОСШ. Вероятность пропуска полностью определяется минимальным Λ_1, максимальным Λ_2 и истинным $\lambda_0 = Q(\tau_0)$ значениями ОСШ. Для определения порога обнаружения c (4) можно использовать критерий минимума средней вероятности ошибки (5) [1, 3]. Получаемый таким образом порог $c^* = \arg\inf P_{\mathrm{e}}(c)$ будет зависеть от p_0, Λ_1, Λ_2 и плотности вероятности $W(\tau)$. Алгоритм обнаружения (4) при оптимальном пороге c^* будем называть МП обнаружителем с оптимизированным порогом.

В качестве примера рассмотрим обнаружение прямоугольного импульса со скошенной вершиной [7]:

$$f(t) = A\,[1 + (d-1)\,t/T_2]\,\sqrt{3/(d^2+d+1)}\,. \tag{22}$$

Здесь A характеризует амплитуду импульса, $d = f(T_2)/f(0)$ — наклон его скошенной вершины. Множитель $\sqrt{3/(d^2+d+1)}$ в выражении (22) обеспечивает неизменность полной энергии сигнала при различном наклоне вершины, что позволяет сравнивать эффективность обнаружения сигналов с разными наклонами и неизменной энергией.

Длину априорного интервала длительности импульса будем характеризовать величиной $\eta_1 = T_1/T_2$. Тогда

$$\lambda = \frac{3z_{\mathrm{r}}^2\eta}{d^2+d+1}\left[1 + (d-1)\,\eta + (d-1)^2\,\eta^2/3\right],$$

где $\eta = \tau/T_2$,

$$z_{\mathrm{r}}^2 = 2A^2T_2/N_0. \tag{23}$$

На рис. 2 представлены зависимости средней вероятности ошибки P_{e} (5) от ОСШ z_{r} (23) для $\eta_1 = 0{,}1$, равномерной априорной плотности вероятности неизвестной длительности импульса:

$$W(\tau) = \frac{1}{T_2 - T_1} \times \begin{cases} 1, & T_1 \le \tau \le T_2; \\ 0, & \tau < T_1,\ \tau > T_2, \end{cases} \tag{24}$$

при различном наклоне вершины импульса d. При построении кривых на рис. 2*а* предполагалось $p_0 = 0{,}1$, на рис. 2*б* — $p_0 = 0{,}7$. Сплошные линии на рис. 2 соответствуют оптимизированному порогу обнаружения $c = c^*$, штриховые линии — порогу $c = 0$. Кривые *1* построены для $d = 0{,}5$, кривые *2* — для $d = 1$, кривые *3* — для $d = 2$. Сопоставление сплошных и штриховых кривых на рис. 2 показывает, что использование МП обнаружителя с оптимизированным порогом приводит к заметному уменьшению вероятности ошибки. Кривые *2* на рис. 2 соответствуют прямоугольному импульсу [3]. Сопоставление кривых *2* с кривыми *1* и *3* свидетельствует о существенном влиянии отклонения формы импульса от прямоугольной на эффективность обнаружения сигнала с неизвестной длительностью.

Хорошо известно [1, 2], что при байесовском подходе оптимальным правилом обнаружения сигнала является правило, обеспечивающее минимум риска. Рассмотрим возможность применения байесовского подхода для обнаружения сигнала (1) с неизвестной длительностью.

Для синтеза байесовского алгоритма используем простую матрицу потерь, у которой стоимости правильных решений принимаются нулевыми, а стоимости ошибок первого и второго рода [1, 2] одинаковыми, что соответствует критерию идеального наблюдателя. Тогда байесовский алгоритм обнаружения сигнала (1) при априорной плотности вероятности длительности импульса $W(\tau)$ заключается в формировании величины

$$I = \int\limits_{T_1}^{T_2} \exp[L(\tau)]W(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{25}$$

и сравнении её с порогом p_0/p_1.

Структурная схема байесовского обнаружителя (БО) (25) приведена на рис. 1, из которого необходимо исключить блок *2*. Блок *4* обозначает нелинейный элемент с экспоненциальной характеристикой, блок *5* — интегратор на интервале $[T_1, T_2]$. Пороговое устройство *3* осуществляет сравнение выходного сигнала интегратора *5* с порогом p_0/p_1 и выносит решение о наличии сигнала, если порог превышен, и о его отсутствии в противном случае. Из рис. 1 следует, что схема БО является одноканальной, однако она несколько сложнее схемы МП обнаружителя.

Отметим, что исследование БО (25) затруднительно, и найти аналитически его характеристики не удаётся.

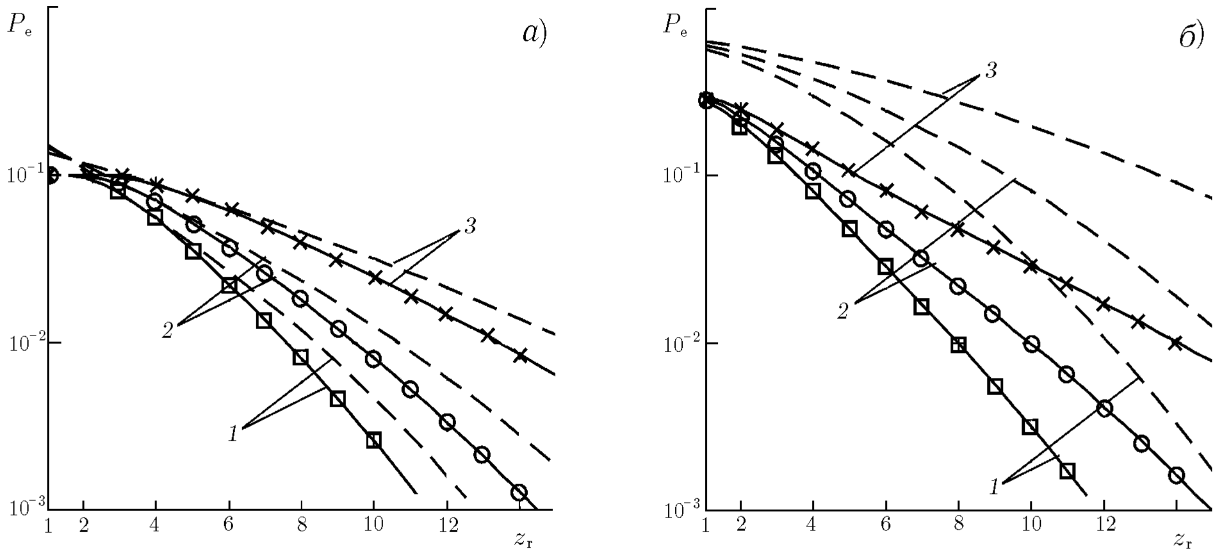

Рис. 2

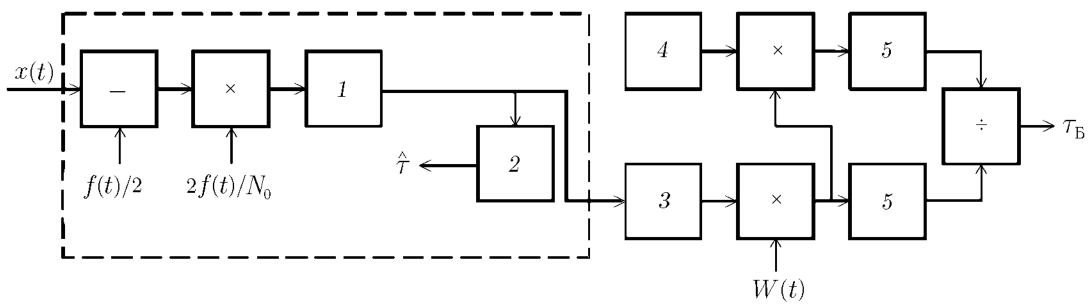

Рис. 3

2. ОЦЕНКА ДЛИТЕЛЬНОСТИ СИГНАЛА

Рассмотрим теперь задачу оценки длительности импульса (1), полагая, что сигнал присутствует в принятой реализации с вероятностью $p_1 = 1$. Алгоритм МП оценки длительности [2, 8] состоит в отыскании положения абсолютного максимума функционала $L(\tau)$ (3):

$$\hat{\tau} = \arg\sup L_1(\tau), \qquad \tau \in [T_1; T_2]. \tag{26}$$

Следовательно, структура МП алгоритма оценивания не зависит от априорной плотности вероятности параметра τ.

Структурная схема МП измерителя длительности выделена на рис. 3 штриховой линией, где *1* обозначает интегратор на интервале времени $[0, t]$, *2* — устройство поиска положения абсолютного максимума сигнала на интервале $[T_1, T_2]$, которое является МП оценкой $\hat{\tau}$.

Точность оценки аналогично [3] будем характеризовать безусловным рассеянием (средним квадратом ошибки) оценки длительности

$$V(\hat{\tau}) = \int\limits_{T_1}^{T_2} V(\hat{\tau}\,|\,\tau) W(\tau)\, \mathrm{d}\tau, \tag{27}$$

где

$$V(\hat{\tau}\,|\,\tau_0)=\int\limits_{T_1}^{T_2}(\tau-\tau_0)^2\,W_\tau(\tau\,|\,\tau_0)\,\mathrm{d}\tau \tag{28}$$

— условное рассеяние МП оценки длительности сигнала (1), $W_\tau(\tau\,|\,\tau_0)$ — условная плотность вероятности оценки $\hat{\tau}$.

Согласно (11) случайная величина

$$\hat{\lambda}=\arg\sup\mu_1(\lambda), \tag{29}$$

где $\lambda\in[\Lambda_1;\Lambda_2]$, связана с оценкой длительности $\hat{\tau}$ (26) взаимно-однозначным преобразованием. Следовательно, плотность вероятности $W_\tau(\tau\,|\,\tau_0)$ можно выразить через плотность вероятности $W_\lambda(\lambda\,|\,\lambda_0)$ случайной величины 29). Для плотности вероятности $W_\lambda(\lambda\,|\,\lambda_0)$ согласно [2] запишем

$$W_\lambda(\lambda\,|\,\lambda_0)=\frac{\partial}{\partial\lambda}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left.\frac{\partial F_{21}(u,v,\lambda)}{\partial u}\right|_{v=u}\mathrm{d}u, \tag{30}$$

где $F_{21}(u,v,\lambda)$ определяется из (20). Подставляя выражение (20) в формулу (30), получаем точное выражение для условной плотности вероятности случайной величины (29):

$$W_\lambda(\lambda\,|\,\lambda_0)=\frac{1}{2}\times\begin{cases}\Psi\left(\dfrac{\lambda_0-\lambda}{2},\dfrac{\lambda_0-\Lambda_1}{}2,\dfrac{\Lambda_2-\lambda_0}{2}\right), & \Lambda_1\le\lambda\le\lambda_0;\\[2ex] \Psi\left(\dfrac{\lambda-\lambda_0}{2},\dfrac{\Lambda_2-\lambda_0}{2},\dfrac{\lambda_0-\Lambda_1}{2}\right), & \lambda_0<\lambda\le\Lambda_2,\end{cases} \tag{31}$$

где

$$\Psi(y,y_1,y_2)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}\,y^{3/2}}\left[\frac{\exp[-(y_1-y)/4]}{\sqrt{\pi\,(y_1-y)}}+\Phi\left(\sqrt{\frac{y_1-y}{2}}\right)\right]\times$$
$$\times\int\limits_0^\infty x\exp\left[-\frac{(x+y)^2}{4y}\right]\left[\Phi\left(\frac{y_2+x}{\sqrt{2y_2}}\right)-\exp(-x)\Phi\left(\frac{y_2-x}{\sqrt{2y_2}}\right)\right]\mathrm{d}x.$$

Поскольку $\lambda=Q(\tau)$, то из (26) и (29) имеем

$$W_\tau(\tau\,|\,\tau_0)=W_\lambda(Q(\tau)\,|\,Q(\tau_0))Q'(\tau).$$

На основе этого выражения, а также используя (31), запишем выражение для условного рассеяния (28) оценки длительности (26):

$$V(\hat{\tau}\,|\,\tau_0)=\int\limits_{T_1}^{T_2}(\tau-\tau_0)^2\,W_\lambda(Q(\tau)\,|\,Q(\tau_0))Q'(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{32}$$

Точные выражения (31), (32) для характеристик МП оценки длительности довольно громоздки, и расчёт по ним возможен только численными методами. Поэтому рассмотрим асимптотическое поведение этих характеристик при увеличении ОСШ $z^2=Q(\tau_0)$ для принятого сигнала. Обозначим

$q_{\min} = Q(T_1)/Q(\tau_0) < 1$, $q_{\max} = Q(T_2)/Q(\tau_0) > 1$ при $\tau_0 \in (T_1, T_2)$. Перейдём в (31) к новой переменной

$$\kappa = [Q(\tau) - Q(\tau_0)]/2, \tag{33}$$

причём

$$-\frac{(1-q_{\min})\, z^2}{2} < \kappa < \frac{(q_{\max}-1)\, z^2}{2}\,.$$

Плотность вероятности для переменной (33) запишется в виде

$$W_z(\kappa) = \begin{cases} \Psi\bigl[-\kappa, (1-q_{\min})\, z^2/2, (q_{\max}-1)\, z^2/2\bigr], & -(1-q_{\min})\, z^2/2 < \kappa \le 0; \\ \Psi\bigl[\kappa, (q_{\max}-1)\, z^2/2, (1-q_{\min})\, z^2/2\bigr], & 0 < \kappa < (q_{\max}-1)\, z^2/2. \end{cases} \tag{34}$$

Полагая в (34) $z \to \infty$, находим предельную плотность вероятности для переменной (33):

$$W_0(\kappa) = 3\exp(2\,|\,\kappa|)\, \Bigl[1 - \Phi\Bigl(3\sqrt{|\kappa|/2}\Bigr)\Bigr] + \Phi\Bigl(\sqrt{|\kappa|/2}\Bigr) - 1, \tag{35}$$

где $\kappa \in (-\infty, +\infty)$. По мере роста ОСШ z^2 для принятого сигнала МП оценка длительности $\hat\tau$ (26) сходится к истинному значению длительности τ_0 в среднеквадратическом смысле [8]. Поэтому при достаточно больших z допустима аппроксимация переменной (33) выражением

$$\kappa \approx (\tau - \tau_0)\, Q'(\tau_0)/2.$$

Следовательно, при $z \to \infty$ плотность вероятности нормированной ошибки МП оценки длительности сигнала

$$\hat\kappa = (\hat\tau - \tau_0)\, Q'(\tau_0)/2 \tag{36}$$

сходится к $W_0(\kappa)$ (35).

Впервые плотность вероятности (35) была получена, по-видимому, в [9], а её свойства изучены и описаны в [10]. Плотность вероятности (35) существенно отличается от гауссовской, имеет нулевые математическое ожидание и коэффициент асимметрии, обладает дисперсией 13/2 и коэффициентом эксцесса $1779/169 \approx 10{,}53$. Используя (35) и (36), для асимптотического значения условного рассеяния (28) МП оценки длительности можно записать

$$V_0(\hat\tau\,|\,\tau_0) = 26\bigl[Q'(\tau_0)\bigr]^{-2}, \tag{37}$$

или с учётом (11)

$$V_0(\hat\tau\,|\,\tau_0) = 13 N_0^2/[2 f^4(\tau_0)]\,. \tag{38}$$

Формула (38) непосредственно следует из результатов [8], если МП оценку длительности сигнала интерпретировать как оценку момента скачкообразного изменения сигнала, наблюдаемого на фоне белого шума. Согласно (38) предельная (при $z \to \infty$) точность МП оценки длительности не зависит от вида функции $f(t)$, описывающей форму сигнала, а определяется лишь величиной скачка сигнала в момент его исчезновения.

На основе предельной плотности вероятности (35) можно получить более точное, чем (37), выражение для условного рассеяния МП оценки длительности. Для этого аппроксимируем плотность вероятности оценки на ограниченном интервале $[T_1, T_2]$ выражением

$$W_{\mathrm{a}}(\tau\,|\,\tau_0) = \frac{Q'(\tau) W_0[(Q(\tau) - Q(\tau_0))/2]}{\displaystyle\int_{T_1}^{T_2} Q'(\tau) W_0[(Q(\tau) - Q(\tau_0))/2]\; \mathrm{d}\tau}\,.$$

Соответственно, более простое, чем (32), но более точное, чем (37), выражение для условного рассеяния МП оценки длительности получаем в виде

$$V_{\mathrm{a}}(\hat{\tau}\,|\,\tau_0) = \frac{\displaystyle\int_{T_1}^{T_2} (\tau-\tau_0)^2\, f^2(\tau) W_0[(Q(\tau)-Q(\tau_0))/2]\; \mathrm{d}\tau}{\displaystyle\int_{T_1}^{T_2} f^2(\tau) W_0[(Q(\tau)-Q(\tau_0))/2]\; \mathrm{d}\tau}\,. \tag{39}$$

Таким образом, точность МП оценки длительности сигнала произвольной формы можно охарактеризовать величиной безусловного рассеяния (27), где $V(\hat{\tau}\,|\,\tau_0)$ определяется из (32), (37) или (39).

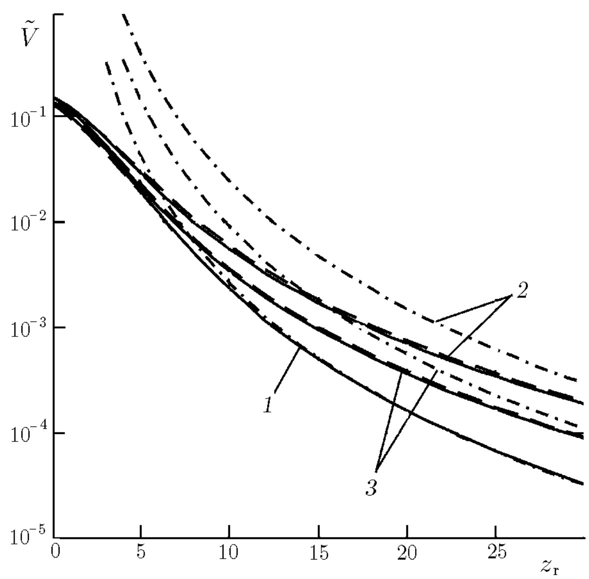

Рис. 4

В качестве примера на рис. 4 приведены зависимости нормированного безусловного рассеяния $\tilde{V} = V(\hat{\tau})/T_2^2$ МП оценки длительности прямоугольного импульса со скошенной вершиной (22) от ОСШ z_{r} при равномерной априорной плотности вероятности (24) длительности импульса и $\eta_1 = 0{,}1$. Сплошными линиями изображены точные зависимости рассеяния, рассчитанные с использованием выражений (27), (32), штрих-пунктирными — асимптотические зависимости рассеяния, рассчитанные с использованием (37). Штриховыми линиями показаны асимптотические зависимости нормированного безусловного рассеяния, рассчитанные с помощью выражения (39). Кривые *1* на рис. 4 соответствуют наклону вершины импульса $d = 1$, кривые *2* — $d = 0{,}2$, кривые *3* — $d = 5$.

Как следует из рис. 4, выражение (39) для рассеяния оценки длительности удовлетворительно аппроксимирует точные выражения (27), (32) при любых ОСШ. Точность аппроксимации рассеяния выражением (37) зависит от формы сигнала. Так, для сигнала прямоугольной формы ($d = 1$) выражение (37) удовлетворительно аппроксимирует точные формулы при $z_{\mathrm{r}} \geq 10$, а для сигналов с наклонной вершиной ($d = 0{,}2;\ 5$) — при $z_{\mathrm{r}} \geq 50$. Заметим также, что отклонение формы сигнала от прямоугольной приводит к снижению точности МП оценки длительности.

Как известно [11, 12], байесовский алгоритм оценивания при квадратичной функции потерь минимизирует средний квадрат ошибки (рассеяние) оценки. Байесовская оценка длительности в рассматриваемых условиях определяется как [11]

$$\tau_{\text{Б}} = \int\limits_{T_1}^{T_2} \tau W(\tau)\exp[L(\tau)]\,\mathrm{d}\tau \bigg/ \int\limits_{T_1}^{T_2} W(\tau)\exp[L(\tau)]\,\mathrm{d}\tau. \tag{40}$$

Структурная схема байесовского алгоритма оценивания изображена на рис. 3, из которого следует исключить блок *2*. Блок *3* обозначает нелинейный элемент с экспоненциальной характеристикой, *4* — генератор линейно изменяющегося напряжения, *5* — интеграторы на интервале времени $[T_1, T_2]$.

Очевидно, аппаратурная реализация байесовского измерителя длительности несколько сложнее, чем у МП измерителя. Тем не менее она является одноканальной по оцениваемому параметру.

Теоретический анализ байесовской оценки (40) наталкивается на существенные трудности. Однако, используя результаты [8], можно записать приближённое выражение для условного рассеяния байесовской оценки, справедливое при больших ОСШ:

$$V_0(\hat\tau_Б \,|\, \tau_0) \approx 19{,}5\big[Q'(\tau_0)\big]^{-2} = 4{,}88 N_0^2/f^4(\tau_0). \tag{41}$$

Используя (41), получаем асимптотическое значение безусловного рассеяния байесовской оценки длительности:

$$V_0(\hat\tau_Б) \approx 19{,}5 \int\limits_{T_1}^{T_2} W(\tau)\big[Q'(\tau)\big]^{-2}\, \mathrm{d}\tau. \tag{42}$$

3. РЕЗУЛЬТАТЫ СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Исследование работоспособности байесовских алгоритмов обнаружения и оценки длительности сигнала на примере прямоугольного импульса со скошенной вершиной (22) было выполнено методами статистического моделирования на ЭВМ.

Логарифм ФОП $L(\tau)$ (3) представлялся в виде $L(\eta) = S(\eta,\eta_0) + N(\eta)$, где $\eta = \tau/T_2$, $\eta_0 = \tau_0/T_2$,

$$S(\eta,\eta_0) = z_{\mathrm{r}}^2 \gamma_0 \min(\eta,\eta_0) \frac{1 + b\min(\eta,\eta_0) + b^2 \min^2(\eta,\eta_0)/3}{1+b+b^2/3} - \frac{z_{\mathrm{r}}^2 \eta}{2}\, \frac{1 + b\eta + b^2\eta^2/3}{1+b+b^2/3}\,,$$

$$b = d-1, \qquad N(\eta) = \frac{z_{\mathrm{r}}\sqrt{2/(N_0 T_2)}}{\sqrt{1+b+b^2/3}} \int\limits_0^{\eta} n(T_2 x)\,(1+bx)\,T_2\,\mathrm{d}x$$

— гауссовский случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией

$$\langle N(\eta_1) N(\eta_2)\rangle = z_{\mathrm{r}}^2 \min(\eta_1,\eta_2)\left\{1 + b\min(\eta_1,\eta_2) + b^2\min^2(\eta_1,\eta_2)/3\right\}/(1+b+b^2/3).$$

При моделировании с шагом $\Delta\eta$ вырабатывались отсчёты функции $N(\eta)$, на основе которых реализация логарифма ФОП (3) аппроксимировалась ступенчатой функцией с максимальной относительной среднеквадратической погрешностью $\varepsilon = 0{,}1$. Согласно [13] дискретные отсчёты логарифма ФОП можно представить в виде

$$L(n\,\Delta\eta) = S(n\,\Delta\eta, n_0\,\Delta\eta) + z_{\mathrm{r}}\varepsilon\sqrt{\eta_1}\sum_{k=1}^{n}(1 + bk\Delta\eta)\,X[k]/\sqrt{1+b+b^2/3}\,, \tag{43}$$

где $X[k]$ — гауссовские независимые случайные величины с нулевым средним значением и единичной дисперсией, $n = n_1, n_1+1, \ldots, n_2$; $n_1 = \mathrm{ent}(1/\varepsilon^2)$; $n_2 = \mathrm{ent}[1/(\eta_1\varepsilon^2)]$; $n_0 = \mathrm{ent}[\eta_0/(\eta_1\varepsilon^2)]$; $\mathrm{ent}(x)$ — целая часть числа x; $\Delta\eta = \eta_1\varepsilon^2$.

Для моделирования байесовского алгоритма обнаружения сигнала на основе отсчётов (43) вырабатывалась величина (25)

$$I = \frac{\eta_1\varepsilon^2}{1-\eta_1}\sum_{n=n_1}^{n_2}\exp[L(n\Delta\eta)]$$

при $\gamma_0 = 0$, $\gamma_0 = 1$ и сравнивалась с порогом p_0/p_1. Если при $\gamma_0 = 0$ порог был превышен, то фиксировалась ошибка пропуска сигнала. В качестве оценок вероятностей ложной тревоги и пропуска использовались относительные частоты появления соответствующих ошибок.

Для моделирования байесовского алгоритма оценивания длительности сигнала формировалась величина (40)

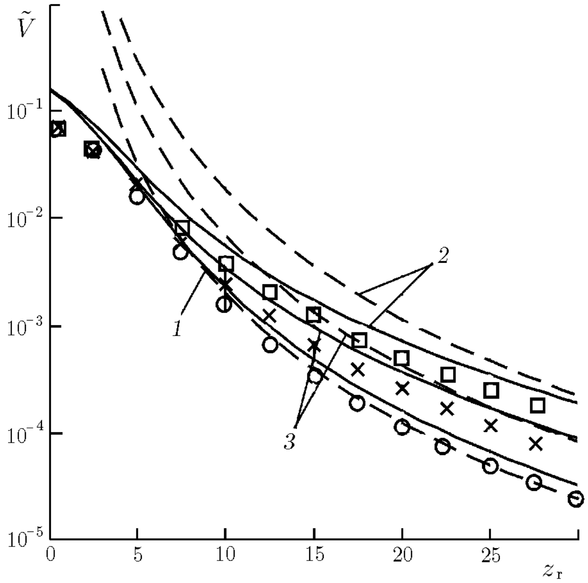

Рис. 5

$$\eta_{\rm Б} = \frac{\tau_{\rm Б}}{T_2} = \varepsilon^2 \eta_1 \frac{\sum\limits_{n=n_1}^{n_2} n \exp[L(n\,\Delta\eta)]}{\sum\limits_{n=n_1}^{n_2} \exp[L(n\,\Delta\eta)]},$$

которая является нормированной байесовской оценкой длительности импульса (22). При наличии сигнала ($\gamma_0 = 1$) истинное значение нормированной длительности выбиралось случайным, распределённым равномерно на интервале $[\eta_1, 1]$. В процессе моделирования было реализовано 10^5 циклов испытаний для каждого $z_{\rm r}$. Следовательно, с вероятностью 0,9 границы доверительных интервалов отклоняются от экспериментальных значений средней вероятности ошибки $P_{\rm e}$ и безусловного рассеяния не более чем на 15 % при $P_{\rm e} > 10^{-3}$ и $V(\tau_{\rm Б})/T_2^2 > 10^{-3}$.

Результаты моделирования приведены на рис. 2 и 5. На рис. 2 кружочками (для $d = 1$), квадратиками ($d = 0{,}5$) и крестиками ($d = 2$) нанесены экспериментальные значения безусловной средней вероятности ошибки байесовского обнаружителя при $\eta_1 = 0{,}1$ и априорной плотности вероятности (24). Сопоставление экспериментальных значений со сплошными кривыми на рис. 2 свидетельствует о практически полном совпадении характеристик байесовского обнаружителя и МП обнаружителя с оптимизированным порогом. Это позволяет рекомендовать выражения (5), (17) и (21) для расчёта средней вероятности ошибки при использовании байесовского обнаружителя: $P_{\rm eБ} \approx \inf P_{\rm e}(c)$.

На рис. 5 кружочками (для $d = 1$), квадратиками ($d = 0{,}2$) и крестиками ($d = 5$) нанесены экспериментальные значения нормированного безусловного рассеяния байесовской оценки длительности $\tilde{V} = V(\tau_{\rm Б})/T_2^2$. Штриховыми линиями показана асимптотическая теоретическая зависимость нормированного безусловного рассеяния байесовской оценки $\tilde{V} = V_0(\tau_{\rm Б})/T_2^2$ (42) от ОСШ $z_{\rm r}$, которая верна лишь при больших $z_{\rm r}$. Для сравнения на рис. 5 сплошными линиями нанесена точная теоретическая зависимость нормированного безусловного рассеяния МП оценки $\tilde{V} = V(\hat{\tau})/T_2^2$ от ОСШ $z_{\rm r}$, рассчитанная по формулам (27), (31), (32). Кривые *1* на рис. 5 соответствуют значению $d = 1$ в (22), кривые *2* — $d = 0{,}2$, кривые *3* — $d = 5$. Анализ рис. 5 свидетельствует о том, что возможность аппроксимации экспериментальных значений рассеяния выражением (42) существенно зависит от наклона скошенной вершины импульса. Так, например, для импульса прямоугольной формы выражение (42) удовлетворительно аппроксимирует экспериментальные данные при $z_{\rm r} \geq 10$. Для сигналов с наклонами $d = 0{,}2$ и 5 удовлетворительная аппроксимация экспериментальных данных наблюдается при очень больших ОСШ $z_{\rm r} \geq 50$. Как и следовало ожидать, экспериментальное безусловное рассеяние байесовской оценки длительности сигнала меньше рассеяния МП оценки при всех значениях ОСШ. В частности, $\chi_{\max} = V(\tau_{\rm Б})/V(\hat{\tau}) \approx 0{,}7$ при $z_{\rm r} \gg 1$, что также следует из формул (27), (37) и (42). Анализ рис. 5 позволяет предложить выражение для грубого приближения безусловного рассеяния байесовской оценки: $V(\tau_{\rm Б}) \approx \min[gV(\hat{\tau}), V_0(\tau_{\rm Б})]$, где $g \approx 0{,}5$ при $z_{\rm r} \leq 2 \div 3$ и $g \approx 0{,}7$ при $z_{\rm r} \geq 4 \div 5$.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Точные выражения для условных вероятностей ложной тревоги и пропуска сигнала не зависят от формы сигнала. Вероятности ошибок обнаружения полностью определяются минимальным и максимальным значениями отношения сигнал/шум, а также отношением сигнал/шум для принятого сигнала. Для одинакового объёма априорной информации и равномерного распределения случайной длительности сигнала характеристики байесовского алгоритма и максимально правдоподобного алгоритма обнаружения с оптимизированным порогом практически совпадают.

При оценке длительности сигнала, если не требуется очень высокая точность оценки, возможно применение максимально правдоподобного измерителя, который более просто реализуется аппаратурно. Если же необходимо обеспечить предельную достижимую точность оценки, то целесообразно использовать байесовский измеритель. Точные характеристики эффективности максимально правдоподобного алгоритма оценивания длительности зависят от формы сигнала, однако асимптотические (при больших отношениях сигнал/шум) условные характеристики максимально правдоподобной и байесовской оценок определяются только величиной скачка сигнала в момент его исчезновения.

Приведённые результаты получены при поддержке CRDF и Минобразования РФ (проекты VZ-010-0 и E00-3.5-5).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акимов П. С., Бакут П. А., Богданович В. А. и др. Теория обнаружения сигналов / Под ред. П. А. Бакута. М.: Радио и связь, 1984.
2. Трифонов А. П., Шинаков Ю. С. Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. М.: Радио и связь, 1986.
3. Трифонов А. П., Парфёнов В. И., Мишин Д. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1997. Т. 40, № 12. С. 1 531.
4. Трифонов А. П. // Сборник «Памяти А. Н. Малахова». Нижний Новгород: ТАЛАМ, 2000. С. 65.
5. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника. М.: Радио и связь, 1982.
6. Тихонов В. И., Миронов М. А. Марковские процессы. М.: Радио и связь, 1977.
7. Грязнов М. И., Гуревич М. А., Рябинин М. А. Измерение параметров импульсов. М.: Радио и связь, 1991.
8. Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З. Асимптотическая теория оценивания. М.: Наука, 1979.
9. Терентьев А. С. // Радиотехника и электроника. 1968. Т. 13, № 4. С. 652.
10. Трифонов А. П. // Прикладная теория случайных процессов и полей. Ульяновск: УлГТУ, 1995. С. 164
11. Куликов Е. И., Трифонов А. П. Оценка параметров сигналов на фоне помех. М.: Сов. радио, 1978.
12. Ванжа А. В., Силаев А. М. // Изв. вузов. Радиофизика. 1995. Т. 38, № 12. С. 1 257.
13. Быков В. В. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике. М.: Сов. радио, 1971.

Воронежский госуниверситет,
г. Воронеж, Россия

Поступила в редакцию
28 августа 2001 г.

RECEIVING A SIGNAL WITH UNKNOWN DURATION

A. P. Trifonov and Yu. É. Korchagin

he maximum likely and optimal (Bayesian) algorithms for detecting and measuring the duration of an arbitrary-shaped signal observed against a background of white Gaussian noise are synthesized. Exact expressions for the characteristics of maximum likely algorithms are found. The characteristics of the Bayesian algorithms are obtained from computer simulations.