

Содержание

- Гавриленко В. Г., Липатов Б. Н., Нечаева М. Б.** Анализ отклика радиоинтерферометра со сверхдлинной базой на излучение радиосточника, прошедшее через околосолнечную плазму 459
- Данилкин Н. П., Котонаева Н. Г.** Особенности радиозондирования ионосферы с орбитального комплекса «Мир» 473
- Васьков В. В., Рябова Н. А.** Возбуждение добавочной области коротковолновых колебаний плазмы в экспериментах по нагреву ионосферы полем мощной радиоволны 482
- Беликович В. В., Бенедиктов Е. А.** Исследование сумеречной *D*-области ионосферы с помощью искусственных периодических неоднородностей 502
- Кузьмичёв И. К., Тищенко А. С., Шёнemann К.** О предельных возможностях уменьшения размеров зеркал открытых резонаторов 509
- Бисярин М. А., Молотков И. А.** Модовая структура и огибающая короткого импульса в градиентном световоде с продольной неоднородностью и пространственной кривизной 516
- Усанов Д. А., Вениг С. Б., Флешель Б. Л.** Особенности работы СВЧ генератора на диоде Ганна при смене знака нелинейной реактивной составляющей проводимости диода 527
- Беляков А. В., Якимов А. В.** Влияние аналого-цифрового преобразователя на вероятностные характеристики гауссова шума 533
- Трифонов А. П., Костылев В. И.** Энергетическое обнаружение узкополосных радиосигналов на фоне шума неизвестной интенсивности 538

УДК 523.62-726

АНАЛИЗ ОТКЛИКА РАДИОИНТЕРФЕРОМЕТРА СО СВЕРХДЛИННОЙ БАЗОЙ НА ИЗЛУЧЕНИЕ РАДИОИСТОЧНИКА, ПРОШЕДШЕЕ ЧЕРЕЗ ОКОЛОСОЛНЕЧНУЮ ПЛАЗМУ

В. Г. Гавриленко¹, Б. Н. Липатов², М. Б. Нечаева²

Работа посвящена исследованию неоднородностей солнечной короны и солнечного ветра методом радиопросвечивания с использованием радиоинтерферометра со сверхдлинной базой. Корональная плазма возмущает поле излучения, проходящего к приёмным пунктам радиоинтерферометра по разным трассам. Анализ выходного сигнала инструмента позволяет получить информацию о физических характеристиках среды распространения при наблюдении как монохроматических сигналов космических аппаратов, так и шумового излучения естественных радиоисточников. В работе впервые выполнен теоретический расчёт спектра мощности отклика интерферометра на проходящее через турбулентную среду радиоизлучение космического источника. Проведено сравнение результатов, полученных при описании флуктуаций поля методом геометрической оптики и методом плавных возмущений. Математическое моделирование экспериментов по зондированию корональной плазмы показало хорошее соответствие результатов реальных наблюдений и теоретических расчётов.

ВВЕДЕНИЕ

Важным вопросом физики солнечно-земных связей является исследование плазмы солнечной короны — определение физических параметров и пространственно-временной структуры неоднородностей электронной концентрации. Для исследования корональной плазмы и солнечного ветра широко используется метод радиопросвечивания, когда сигнал от радиоисточника (искусственного или естественного) проходит через турбулентную среду и принимается в одном или нескольких наземных приёмных пунктах. Неоднородные среды вызывают фазовые, амплитудные и частотные флуктуации принимаемого излучения и искажают выходной сигнал инструмента. С другой стороны, эти искажения дают информацию о среде распространения.

Перспективным направлением в подобных исследованиях является радиоинтерферометрический метод измерений, обладающий некоторыми преимуществами по сравнению с методом мерцаний [1] и радиоприёмом одиночной антенной сигналов монохроматических излучателей, установленных на борту космических аппаратов [2]. Радиоинтерферометр со сверхдлинной базой (РСДБ) позволяет исследовать неоднородности электронной концентрации по относительным фазовым, частотным и амплитудным флуктуациям, возникающим на трассах распространения излучения от источника до приёмных антенн интерферометра. При этом длина проекции базовой линии инструмента на фронт волны излучения определяет максимальный масштаб неоднородностей ($100 \div 10\,000$ км), к которым чувствителен данный РСДБ. Радиоинтерферометрическим методом данные могут быть получены как при приёме монохроматических сигналов космических аппаратов, так и широкополосного излучения естественных радиоисточников. Использование РСДБ с различными ориентациями и длинами проекций базовых линий позволяет делать заключения о структуре и анизотропии околосолнечной плазмы, а наблюдения источников на разных позиционных углах и элонгациях относительно Солнца дают возможность исследовать пространственную эволюцию неоднородностей.

В последние годы проводилось несколько серий экспериментов по исследованию корональной плазмы и солнечного ветра методом радиопросвечивания с использованием РСДБ. Данные были обработаны, некоторые результаты, касающиеся структуры среднемасштабных неоднородностей, опу-

бликованы [3–8]. В настоящее время появилась необходимость более точной интерпретации результатов с целью определения связи между данными эксперимента и физическими характеристиками среды. Цель настоящей работы — получить теоретические выражения, описывающие отклик радиоинтерферометра на радиоизлучение источника, проходящее через турбулентную среду, провести численное моделирование РСДБ-экспериментов по радиопросвечиванию солнечного ветра и сопоставить результаты расчётов с данными экспериментов.

1. ВЫХОДНОЙ СИГНАЛ РАДИОИНТЕРФЕРОМЕТРА В УСЛОВИЯХ НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ

Рассмотрим влияние турбулентной среды, находящейся на трассе распространения излучения, на выходной сигнал интерферометра. Для простоты анализа источник радиоизлучения будем считать точечным. Так как в РСДБ информация об амплитуде принимаемого излучения обычно не используется (перед регистрацией на магнитную ленту сигнал ограничивается, т. е. представляется в 1-битовой форме), при описании преобразования сигнала сначала учтём только фазовые флуктуации. Ниже (см. (20)) будет представлен расчёт выходного сигнала радиоинтерферометра, учитывающий и амплитудные, и фазовые флуктуации.

Принимаемое на разнесённых антеннах интерферометра излучение описывается следующим образом:

$$S_1(t) = S_{10}(t) \exp[-i\varphi_1(t)], \quad S_2(t) = S_{20}(t) \exp[-i\varphi_2(t + \tau_g)], \quad (1)$$

где $\exp[-i\varphi_1(t)]$ и $\exp[-i\varphi_2(t)]$ — флуктуации поля, вызванные турбулентной средой, $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ — случайные функции, описывающие флуктуации фазы. Невозмущённое поле источника $S_{10}(t)$, $S_{20}(t)$ принимаемое в полосе регистрации $\Delta\omega_0$, представим в виде интегралов Фурье:

$$S_{10}(t) \approx \int_{\omega_0 - \Delta\omega_0/2}^{\omega_0 + \Delta\omega_0/2} u(\omega) \exp(i\omega t) d\omega, \quad S_{20}(t) \approx \int_{\omega_0 - \Delta\omega_0/2}^{\omega_0 + \Delta\omega_0/2} u(\omega) \exp[i\omega(t + \tau_g)] d\omega, \quad (2)$$

где $u(\omega)$ — спектральная плотность мощности шумового сигнала (считаем, что это белый шум, спектр мощности которого равномерен в полосе приёма, т. е. не зависит от частоты), τ_g — время пространственной задержки между сигналами (геометрическое запаздывание), которая в течение времени наблюдения источника медленно меняется из-за вращения Земли; в простейшем случае задержка τ_g может быть представлена в виде линейной функции времени:

$$\tau_g = \tau_g^0 + \beta(t_0)(t - t_0), \quad (3)$$

где τ_g^0 — задержка в начальный момент времени t_0 , $\beta(t_0) = \partial\tau_g/\partial t|_{t=t_0}$ — скорость изменения задержки в этот же момент времени.

Высокочастотные сигналы переносятся в область видеочастот путём их смешения с сигналами гетеродина, частота которых ω_0 равна средней частоте полосы приёма. При этом в цепях антенн 1 и 2 получаем сигналы

$$U_1(t) = S_1(t) \exp(-i\omega_0 t) = \exp[-i\varphi_1(t)] \int_{-\Delta\omega_0/2}^{\Delta\omega_0/2} u(\Omega + \omega_0) \exp(i\Omega t) d\Omega,$$

$$U_2(t) = S_2(t) \exp(-i\omega_0 t) = \exp[-i\varphi_2(t + \tau_g)] \int_{-\Delta\omega_0/2}^{\Delta\omega_0/2} u(\Omega + \omega_0) \exp[i\Omega t + i(\Omega + \omega_0)\tau_g] d\Omega, \quad (4)$$

где $\Omega = \omega - \omega_0$. В таком виде сигналы в приёмных пунктах записываются на ленты магнитофонов, а магнитные записи затем транспортируются в пункт обработки.

В центре обработки производится корреляционная обработка записей. В корреляторе прежде всего выравниваются времена прохождения излучения от источника до приёмных антенн, т. е. компенсируется задержка τ_g введением расчётного временного сдвига τ_0 , а также компенсируется относительный фазовый дрейф, связанный с переменностью τ_g в течение времени наблюдения. Затем сигналы от антенн перемножаются между собой и усредняются в течение некоторого времени предварительного накопления T_1 , что позволяет подавить шумы исходных сигналов:

$$V(t, \tau_0) = \frac{1}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} U_1(t) U_2^*(t - \tau_0) dt. \quad (5)$$

Здесь звёздочка означает комплексное сопряжение.

Предварительное накопление позволяет существенно сжать количество информации на выходе коррелятора. Величина T_1 выбирается такой, чтобы при усреднении не интегрировалось интерференционное колебание на выходе коррелятора, т. е.

$$T_1 \ll 2\pi/\omega_n, \quad (6)$$

где

$$\omega_n = \beta\omega_0 \quad (7)$$

— частота интерференции. Однако при этом необходимо, чтобы время накопления было больше времени корреляции исходных шумовых сигналов:

$$T_1 \gg 2\pi/\Delta\omega_0 \approx \tau_{\text{кор}}. \quad (8)$$

Так как фазовые возмущения $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ — медленные функции времени, то предварительное накопление не должно на них сказываться. Полагая случайный процесс $u(\omega)$ эргодическим, усреднение во времени можно заменить статистическим усреднением по ансамблю реализаций (с относительной среднеквадратичной погрешностью $\sqrt{2\tau_{\text{кор}}/T_1} \ll 1$). Среднее статистическое произведение сигналов в корреляторе имеет вид

$$\begin{aligned} V(t, \tau_0) &= \exp[-i\varphi_1(t) + i\varphi_2(t + \tau_g - \tau_0)] \iint_{-\Delta\omega_0/2}^{\Delta\omega_0/2} \langle u(\Omega + \omega_0) u(\Omega' + \omega_0) \rangle \times \\ &\times \exp(i\Omega t) \exp[-i\Omega' (t - \tau_0) - i(\Omega' + \omega_0) \tau_g] d\Omega d\Omega' = \\ &= u^2 \exp(-i\omega_0 \tau_g) \exp[-i\varphi_1(t) + i\varphi_2(t + \tau_g - \tau_0)] K(\tau_g - \tau_0), \end{aligned} \quad (9)$$

где u^2 — мощность исходного сигнала,

$$K(\tau_g - \tau_0) = \frac{\sin[\Delta\omega_0 (\tau_g - \tau_0)/2]}{\Delta\omega_0 (\tau_g - \tau_0)/2} \quad (10)$$

— корреляционная огибающая, ширина которой по координате τ_0 определяется полосой приёма:

$$\Delta\tau = 2\pi/\Delta\omega_0 = \tau_{\text{кор}}. \quad (11)$$

Таким образом, выходной сигнал коррелятора в максимуме функции $K(\tau_g - \tau_0)$ при $\tau_g = \tau_0$ имеет вид синусоиды с частотой ω_n (7) и флуктуирующей фазой:

$$V_0(t) = u^2 \exp[-i\beta\omega_0(t - t_0)] \exp[-i\varphi_1(t) + i\varphi_2(t)] \exp(-i\omega_0\tau_g^0). \quad (12)$$

Дальнейшая обработка заключается в спектральном анализе интерференционного сигнала (12) с накоплением его энергии в течение времени когерентного накопления T :

$$W(t_0, \tau_0, \Omega_0) = \int_{t_0}^{t_0+T} V(t, \tau_0) \exp(-i\Omega_0 t) dt = u^2 K(\tau_g - \tau_0) \exp(-i\omega_0\tau_g^0) \times \\ \times \int_{t_0}^{t_0+T} \exp[-i\varphi_1(t) + i\varphi_2(t + \tau_g - \tau_0)] \exp[-i(\Omega_0 + \beta\omega_0)t - i\beta\omega_0 t_0] dt. \quad (13)$$

Для простоты положим, что в принятых сигналах геометрическая задержка полностью компенсирована: $\tau_g = \tau_0$; $\tau_g^0 = 0$; $\beta = 0$; $t_0 = 0$, тогда с точностью до постоянного коэффициента получим

$$W_0(\Omega_0) \approx \int_0^T \exp[-i\varphi_1(t) + i\varphi_2(t)] \exp(-i\Omega_0 t) dt. \quad (14)$$

Выражение (14) представляет собой частотный спектр реализации интерференционного сигнала (12) длительностью T с учётом фазовых возмущений, обусловленных средой, и является результатом интерферометрической обработки. Можно показать, что если исходные сигналы являются не шумовыми, а монохроматическими, то результат будет аналогичным.

Спектр мощности выходного сигнала инструмента при большой длительности реализации ($T \rightarrow \infty$) выражается через (14) следующим образом [9]:

$$Y(\Omega_0)\delta(\Omega_0 - \Omega'_0) = \langle W_0(\Omega_0)W_0^*(\Omega'_0) \rangle. \quad (15)$$

2. РАСЧЁТ СПЕКТРАЛЬНЫХ И КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРИНИМАЕМОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В УСЛОВИЯХ ПЛАВНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ

Чтобы определить связь экспериментальных данных с физическими характеристиками турбулентной среды, проанализируем вид функции $Y(\Omega_0)$. Эта задача сводится к теоретическому анализу автокорреляционной функции выходного сигнала $R(t, t')$, которая связана со спектром мощности $Y(\Omega_0)$ обратным фурье-преобразованием:

$$Y(\Omega_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^T R(\tau) \exp(-i\Omega_0\tau) d\tau, \quad (16)$$

где $\tau = t' - t$.

Предположим, что флуктуации разности фаз имеют нормальное распределение, тогда автокорреляционная функция примет вид [10]

$$R(t, t') = \langle \exp[-i\delta\varphi(t) + i\delta\varphi(t')] \rangle = \exp\left\{-\frac{\langle [\delta\varphi(t) - \delta\varphi(t')]^2 \rangle}{2}\right\} = \exp[D(t - t')], \quad (17)$$

где $\delta\varphi(t)$ — разность флуктуаций фаз сигналов, принятых в один и тот же момент времени на разных антеннах, D — структурная функция. Если предположить, что $\delta\varphi(t)$ — нестационарный процесс со стационарными приращениями, то структурная функция D (а значит, и R) не зависит от времени, а зависит только от разности $\tau = t' - t$:

$$D(\tau) = -\langle [\delta\varphi(t) - \delta\varphi(t + \tau)]^2 \rangle / 2, \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} \delta\varphi(t) &= \varphi_1(t) - \varphi_2(t) = \varphi(\mathbf{r}, t) - \varphi(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}, t), \\ \delta\varphi(t + \tau) &= \varphi_1(t + \tau) - \varphi_2(t + \tau) = \varphi(\mathbf{r}, t + \tau) - \varphi(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}, t + \tau), \end{aligned} \quad (19)$$

$\boldsymbol{\rho}$ — вектор базовой линии, \mathbf{r} — радиус-вектор точки, лежащей в слое неоднородностей.

Анализ (1)–(19) учитывает только фазовые возмущения принимаемого излучения. С учётом флуктуаций амплитуды, обусловленных турбулентной средой, при той же методике обработки результат преобразуется следующим образом. Выражение для автокорреляционной функций $R(\tau)$ запишем в виде

$$R(\tau) = \langle E(\mathbf{r}, t) E^*(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}, t) E(\mathbf{r}, t + \tau) E^*(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}, t + \tau) \rangle, \quad (20)$$

где

$$E(\mathbf{r}, t) = \exp[\Phi(\mathbf{r}, t)] = \exp[\chi(\mathbf{r}, t) + i\varphi(\mathbf{r}, t)], \quad (21)$$

Φ — комплексная функция, медленно меняющаяся во времени и учитывающая флуктуации фазы $\varphi(\mathbf{r}, t)$ и амплитуды:

$$\chi(\mathbf{r}, t) = \ln \frac{E(\mathbf{r}, t)}{E_0(\mathbf{r}, t)}. \quad (22)$$

Здесь E — амплитуда волны, прошедшей через слой неоднородностей, E_0 — амплитуда поля невозмущённой волны. Если учесть, что дисперсия флуктуаций амплитуды в рассматриваемых случаях много меньше дисперсии флуктуаций фазы и χ — медленная функция времени, то выражение для структурной функции в этом случае запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} D(\tau) &= -\frac{1}{2} \langle [\delta\varphi(t) - \delta\varphi(t + \tau)]^2 \rangle + \\ &+ i \langle [\delta\varphi(t) - \delta\varphi(t + \tau)] [\chi(\mathbf{r}, t) + \chi(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}, t) + \chi(\mathbf{r}, t + \tau) + \chi(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}, t + \tau)] \rangle. \end{aligned} \quad (23)$$

Рассмотрим случай рассеяния волн в турбулентной среде с крупными хаотическими неоднородностями, который характерен для межпланетной среды:

$$\Lambda \gg \lambda, \quad (24)$$

где Λ — характерный масштаб неоднородностей, λ — длина волны принимаемого излучения. При наложении дополнительного условия [11]

$$\sqrt{\lambda Z} \ll \Lambda, \quad (25)$$

где Z — расстояние, пройденное волной в неоднородной среде, и условия малости периода волны $T_0 = 2\pi/\omega_0$ по сравнению с характерным временем изменения параметров среды T' [12]:

$$\omega_0 T' \gg 1, \quad (26)$$

для описания флуктуаций поля применим метод геометрической оптики. В том случае, когда условие (25) нарушается, т. е. расстояние Z достаточно велико, используется метод плавных возмущений, учитывающий эффекты дифракции [6, 8].

В данной работе проведён расчёт флуктуаций поля с использованием обоих указанных методов, который показал хорошее соответствие результатов в случае, когда амплитудные флуктуации поля много меньше фазовых.

Решая волновое уравнение в приближении геометрической оптики, можно получить для комплексной фазы Φ [12, 13] следующие выражения:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = -A \int_0^z p(x, y, \xi, t') d\xi, \quad (27)$$

$$\chi(\mathbf{r}, t) = -\frac{cA}{2\omega_0 n_0} \int_0^z (z - \xi) \Delta_{\perp} p(x, y, \xi, t') d\xi, \quad (28)$$

где x , y и z — декартова система координат, выбранная таким образом, что направление распространения излучения от источника до антенны l совпадает с осью z ; $\Delta_{\perp} = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$. Предполагается, что флуктуации параметров волны при $z = 0$ отсутствуют. Интегралы в (27) и (28) берутся вдоль характеристики

$$t' = t - \frac{z - \xi}{u_0}, \quad (29)$$

где u_0 — групповая скорость невозмущённой волны. В (27), (28) ω_0 — частота исходной невозмущённой волны, c — скорость света, p — случайный параметр, характеризующий свойства среды (в нашем случае таким параметром выступает электронная концентрация N),

$$A = \frac{\omega}{u_0} \left[\frac{\partial(n_0\omega)}{\partial\omega} \right]^{-1} \frac{\partial n_0}{\partial p_0}, \quad (30)$$

p_0 — среднее значение p , $n_0 = \sqrt{1 - \omega_p^2/\omega^2}$ — показатель преломления, $\omega_p = \sqrt{4\pi e^2 N/m}$ — электронная плазменная частота, e и m — заряд и масса электрона соответственно.

Так как в дециметровом диапазоне длин волн $\omega_p \ll \omega_0$, то

$$\frac{\partial(n_0\omega)}{\partial\omega} \approx 1; \quad \frac{\partial n_0}{\partial p_0} = \frac{\partial n_0}{\partial N} \approx -\frac{2\pi e^2}{m\omega_0^2}.$$

В результате величина A запишется в виде

$$A = -\frac{\omega_p^2}{2N\omega_0 c}. \quad (31)$$

Дальнейший расчёт заключается в вычислении структурной функции (23) путём подстановки (27) и (28).

Введём корреляционную функцию параметров среды

$$B_p(\rho_x, \rho_y, \rho'_z, \tau') = \langle p(x_1, y_1, \xi_1, t_1) p(x_2, y_2, \xi_2, t_2) \rangle, \quad (32)$$

где $\rho_x = x_2 - x_1$; $\rho_y = y_2 - y_1$; $\rho'_z = \xi_2 - \xi_1$; $\tau' = t_2 - t_1$. Обычно для функции B_p используется спектральное представление:

$$B_p(\rho, \tau') = \iint_{-\infty}^{+\infty} \Phi_p(\boldsymbol{\kappa}, \Omega) \exp(i\Omega\tau' - i\boldsymbol{\kappa}\rho) d\boldsymbol{\kappa} d\Omega, \quad (33)$$

где Φ_p — спектральная плотность мощности случайных изменений параметров среды (электронной концентрации). Тогда при $Z \gg \Lambda$ выражение для $D(\tau)$ принимает следующий вид:

$$D(\tau) = -4\pi A^2 Z \iint_{-\infty}^{+\infty} \Phi_p(\boldsymbol{\kappa}_\perp, \Omega/u_0, \Omega) [1 - \cos(\Omega\tau)] [1 - \cos(\boldsymbol{\kappa}_\perp \boldsymbol{\rho}_\perp)] d\Omega d\boldsymbol{\kappa}_\perp + \\ + 2\pi i \frac{A^2 Z^2}{k} \iint_{-\infty}^{+\infty} \kappa_\perp^2 \Phi_p(\boldsymbol{\kappa}_\perp, \Omega/u_0, \Omega) \sin(\Omega\tau) \sin(\boldsymbol{\kappa}_\perp \boldsymbol{\rho}_\perp) d\Omega d\boldsymbol{\kappa}_\perp, \quad (34)$$

где $\boldsymbol{\kappa}_\perp = \{\kappa_x; \kappa_y\}$ — поперечное волновое число, $\boldsymbol{\rho}_\perp = \{\rho_x; \rho_y\}$ — проекция базовой линии на плоскость, перпендикулярную направлению распространения излучения, $k = \omega_0 n_0 / c$; $n_0 \approx 1$ — показатель преломления в солнечной короне, Z — толщина слоя неоднородностей.

Для упрощения дальнейших расчётов используется гипотеза замороженности: предполагается, что неоднородности межпланетной плазмы не изменяются во времени (см. (26)) и вся их совокупность движется как целое со скоростью солнечного ветра \mathbf{V} . В этом случае спектральная плотность мощности флуктуаций концентрации имеет вид

$$\Phi_p(\boldsymbol{\kappa}_\perp, \Omega/u_0, \Omega) = F\left(\sqrt{\kappa_\perp^2 + \Omega^2/u_0^2}\right) \delta[\Omega(1 - V_z/u_0) - \boldsymbol{\kappa}_\perp \mathbf{V}_\perp]. \quad (35)$$

Здесь $F(\kappa)$ — пространственный спектр неоднородностей, который описывается степенной функцией в некотором интервале волновых чисел $[\kappa_0, \kappa_m]$, где $\kappa_0 = 2\pi/\Lambda_0$; $\kappa_m = 2\pi/l_m$; Λ_0 и l_m — внешний и внутренний масштабы турбулентности соответственно. В области солнечной короны показатель γ спектра обычно принимается равным $11/3$ (спектр Колмогорова):

$$F(\kappa) = 0,033 C_N^2 (\kappa_0^2 + \kappa^2)^{-\gamma/2} \exp(-\kappa^2/\kappa_m^2), \quad (36)$$

где C_N^2 — структурный коэффициент, определяющий интенсивность флуктуаций.

С учётом того, что в солнечном ветре $|\mathbf{V}| \ll |\mathbf{u}_0|$, выражение для структурной функции записывается в виде

$$D(\tau) = -4\pi A^2 Z \int_{-\infty}^{+\infty} F(\boldsymbol{\kappa}_\perp) [1 - \cos(\boldsymbol{\kappa}_\perp \mathbf{V}_\perp \tau)] [1 - \cos(\boldsymbol{\kappa}_\perp \boldsymbol{\rho}_\perp)] d\boldsymbol{\kappa}_\perp + \\ + 2\pi i \frac{A^2 Z^2}{k} \iint_{-\infty}^{+\infty} \kappa_\perp^2 F(\boldsymbol{\kappa}_\perp) \sin(\boldsymbol{\kappa}_\perp \mathbf{V}_\perp \tau) \sin(\boldsymbol{\kappa}_\perp \boldsymbol{\rho}_\perp) d\boldsymbol{\kappa}_\perp. \quad (37)$$

Будем считать, что поперечная проекция $\boldsymbol{\rho}_\perp$ базовой линии совпадает с осью x , т. е.

$$\rho_y = 0, \quad (38)$$

и предположим, что скорость солнечного ветра направлена вдоль оси x , т. е.

$$V_y = 0, \quad V_z = 0. \quad (39)$$

После перехода к полярным координатам (κ, φ) интеграл в (37) преобразуется к однократному. В результате получаем общее выражение для корреляционной функции в приближении геометрической оптики:

$$R(\tau) = \exp[D(\tau)] = \exp\left\{-8\pi^2 A^2 Z \int_0^\infty \kappa F(\kappa) G_1(\kappa) d\kappa + i \frac{2\pi^2 A^2 Z^2}{k} \int_0^\infty \kappa^3 F(\kappa) G_2(\kappa) d\kappa\right\}, \quad (40)$$

где

$$G_1(\kappa) = 1 - J_0(\kappa\tau V_x) - J_0(\kappa\rho_x) + [J_0(\kappa\rho_x + \kappa\tau V_x) + J_0(\kappa\rho_x - \kappa\tau V_x)]/2,$$

$$G_2(\kappa) = J_0(\kappa\tau V_x - \kappa\rho_x) - J_0(\kappa\tau V_x + \kappa\rho_x).$$

Здесь J_0 — функция Бесселя первого рода нулевого порядка. После фурье-преобразования (16) получим искомым спектр мощности $Y(\Omega_0)$, являющийся функцией параметров среды распространения.

Интересно рассмотреть предельный случай сильных флуктуаций фазы, когда $\langle\varphi^2\rangle \gg 1$. При этом абсолютное значение структурной функции $D(\tau)$ быстро возрастает с увеличением τ , а автокорреляционная функция $R(\tau)$ быстро убывает. Следовательно, наибольший вклад в интеграл (16) даёт область малых τ . Разложим $D(\tau)$ в ряд по τ и упростим выражение (37):

$$D(\tau) \approx -4\pi A^2 Z \tau^2 \int_{-\infty}^{+\infty} F(\boldsymbol{\kappa}_\perp) (\boldsymbol{\kappa}_\perp \mathbf{V}_\perp)^2 [1 - \cos(\boldsymbol{\kappa}_\perp \boldsymbol{\rho}_\perp)] d\boldsymbol{\kappa}_\perp +$$

$$+ 2\pi i \frac{A^2 Z^2}{k} \tau \int_{-\infty}^{+\infty} \kappa_\perp^2 (\boldsymbol{\kappa}_\perp \mathbf{V}_\perp) F(\boldsymbol{\kappa}_\perp) \sin(\boldsymbol{\kappa}_\perp \boldsymbol{\rho}_\perp) d\boldsymbol{\kappa}_\perp. \quad (41)$$

После перехода к полярным координатам (κ, φ) интегралы по φ в (41) вычисляются аналитически. В предположении (38) корреляционную функцию $R(\tau)$ можно представить в виде

$$R(\tau) = \exp(-\langle\omega^2\rangle \tau^2/2 + i \Delta\omega \tau), \quad (42)$$

где

$$\langle\omega^2\rangle = 8\pi^2 A^2 Z \int_0^\infty \kappa^3 F(\kappa) \left\{ V_x^2 [1 - J_0(\kappa\rho_x)] + (V_y^2 - V_x^2) \left[\frac{1}{2} - \frac{J_1(\kappa\rho_x)}{\kappa\rho_x} \right] \right\} d\kappa, \quad (43)$$

$$\Delta\omega = \frac{4\pi^2}{k} A^2 Z^2 V_x \int_0^\infty \kappa^4 F(\kappa) J_1(\kappa\rho_x) d\kappa. \quad (44)$$

Из (16) получим спектр мощности выходного сигнала интерферометра:

$$Y(\Omega_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \langle\omega^2\rangle}} \exp\left[-\frac{(\Omega_0 - \Delta\omega)^2}{2 \langle\omega^2\rangle}\right]. \quad (45)$$

Полуширина спектральной линии $\sqrt{\langle\omega^2\rangle}$ представляет собой стандарт флуктуаций частоты интерференции [14] и определяется только фазовыми флуктуациями поля; сдвиг максимума спектра $\Delta\omega$ определяется корреляцией фазовых и амплитудных флуктуаций. Очевидно, что при сильных флуктуациях фазы $Y(\Omega_0)$ имеет вид гауссовой функции независимо от выбора вида пространственного спектра $F(\kappa)$.

Как указывалось выше, при нарушении условия (25) оказываются существенными дифракционные эффекты. С целью их более полного анализа был проведён расчёт спектра мощности сигнала интерферометра методом плавных возмущений.

Представим комплексную фазу Φ (см. (21)) и флуктуации параметра p среды через фурье-трансформанты:

$$\Phi(x, y, z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(\nu, \boldsymbol{\kappa}, z) \exp(-i\nu t + i\kappa_x x + i\kappa_y y) d\nu d\kappa_x d\kappa_y, \quad (46)$$

$$p(x, y, z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_1(\nu, \boldsymbol{\kappa}, z) \exp(-i\nu t + i\kappa_x x + i\kappa_y y) d\nu d\kappa_x d\kappa_y. \quad (47)$$

В первом приближении метода плавных возмущений волновое уравнение для функции Φ без учёта соударений электронов с нейтральными частицами запишется в виде [12, 15]

$$\left[\Delta_{\perp} + 2ik \frac{\partial}{\partial z} + 2i \frac{\omega_0}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right] \Phi = \frac{\omega_p^2 p}{c^2 p_0}, \quad (48)$$

где $\Delta_{\perp} = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$, p_0 — среднее значение электронной концентрации. Решение этого уравнения методом Фурье записывается в виде

$$\varphi_1(\nu, \boldsymbol{\kappa}, z) = A \int_0^z p_1(\nu, \boldsymbol{\kappa}, z') \exp[-ia(z - z')] dz', \quad (49)$$

где $a = \kappa^2/(2k) - \nu/u_0$. В результате выражение для комплексной фазы принимает вид

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, z, t) &= \\ &= A \int_0^z dz' \int_{-\infty}^{+\infty} p_1(\nu, \boldsymbol{\kappa}, z') \exp\{-i\nu t + i\kappa_x x + i\kappa_y y - i[\kappa^2/(2k) - \nu/u_0](z - z')\} d\nu d\kappa_x d\kappa_y. \end{aligned} \quad (50)$$

Для корреляционной функции (20) проводится анализ, подобный (32)–(40). В результате получаем выражение для корреляционной функции в приближении метода плавных возмущений:

$$R(\tau) = \exp \left\{ -8\pi^2 A^2 \int_0^{\infty} \kappa F(\kappa) H_1(\kappa) d\kappa + 4\pi^2 i k A^2 \int_0^{\infty} \frac{F(\kappa)}{\kappa} \left[1 - \cos\left(\frac{\kappa^2 Z}{k}\right) \right] H_2(\kappa) d\kappa \right\}, \quad (51)$$

где

$$\begin{aligned} H_1(\kappa) &= -Z J_0(\kappa \tau V_x) - Z J_0(\kappa \rho_x) + \frac{k}{2\kappa^2} \sin\left(\frac{\kappa^2 Z}{k}\right) [J_0(\kappa \tau V_x - \kappa \rho_x) + J_0(\kappa \tau V_x + \kappa \rho_x) + 2], \\ H_2(\kappa) &= J_0(\kappa \tau V_x - \kappa \rho_x) + J_0(\kappa \tau V_x + \kappa \rho_x). \end{aligned}$$

3. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РСДБ-ЭКСПЕРИМЕНТОВ ПО РАДИОЗОНДИРОВАНИЮ ОКОЛОСОЛНЕЧНОЙ ПЛАЗМЫ

Было проведено численное моделирование экспериментов по радиопросвечиванию короны Солнца. Параметры инструмента и положение источников выбирались в соответствии с проведёнными ранее наблюдениями. Характеристики солнечного ветра рассчитывались известными способами или брались из результатов различных экспериментов по исследованию солнечной короны.

Согласно данным, приведённым в [14], внешний масштаб турбулентности $\Lambda_0 = 10^5 \div 10^6$ км, внутренний масштаб турбулентности $l_m = a(r/R_0)^\alpha$, где $a = 1$ км; $\alpha = 1,2 \pm 0,2$; $R_0 = 6,9 \cdot 10^5$ км — радиус фотосферы, r — расстояние от источника до центра Солнца.

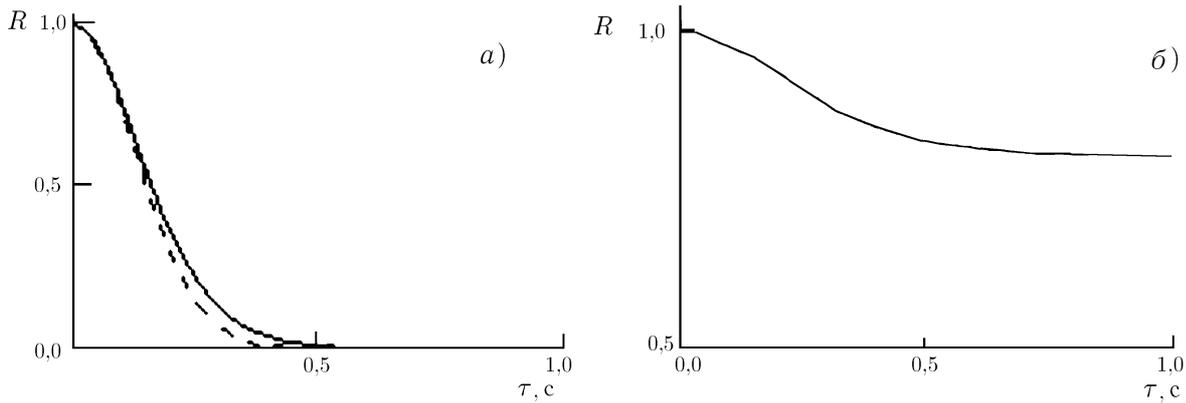


Рис. 1

Таблица 1

Частота приёма	$f = 327 \text{ МГц}$	$f = 1\,665 \text{ МГц}$
Угловое расстояние от источника до центра Солнца	$\theta = 13^\circ$	$\theta = 11^\circ$
Проекция базовой линии интерферометра	$\rho_x = 1\,020 \text{ км}$	$\rho_x = 117 \text{ км}$
Толщина слоя неоднородностей	$Z = 5,09 \cdot 10^7 \text{ км}$	$Z = 4,31 \cdot 10^7 \text{ км}$
Внешний масштаб турбулентности	$\Lambda_0 = 10^6 \text{ км}$	$\Lambda_0 = 10^6 \text{ км}$
Внутренний масштаб турбулентности	$l_m = 106 \text{ км}$	$l_m = 87 \text{ км}$
Скорость солнечного ветра	$V_x = 350 \text{ км/с}$	$V_x = 320 \text{ км/с}$
Электронная концентрация	$N = 208,4 \text{ см}^{-3}$	$N = 309,5 \text{ см}^{-3}$
Ширина корреляционных функций на уровне 0,5 по амплитуде, рассчитанная по формулам (40), (51), (42)	$\Delta\tau_{(40)} = 0,16 \text{ с}$ $\Delta\tau_{(51)} = 0,16 \text{ с}$ $\Delta\tau_{(42)} = 0,14 \text{ с}$	

Электронная концентрация рассчитывалась по эмпирической формуле [14]

$$N = A (R_0/r)^6 + B (R_0/r)^3 + C (R_0/r)^2, \tag{52}$$

где $A = 2,3 \cdot 10^8 \text{ см}^{-3}$; $B = 8,6 \cdot 10^6 \text{ см}^{-3}$; $C = 3,2 \cdot 10^5 \text{ см}^{-3}$. При определении коэффициента

$$C_N^2 = 1,9\sigma_N^2\Lambda_0^{-2/3} \tag{53}$$

дисперсия σ_N^2 флуктуаций электронной концентрации выбиралась из графика, представленного в [14].

Толщина слоя неоднородностей Z оценивалась способом, предложенным в работе [2], и предполагалась равной $1,5L_0$, где L_0 — прицельное расстояние (расстояние от центра Солнца до траектории просвечивания).

На рис. 1 показаны автокорреляционные функции, рассчитанные для наблюдений источников на рабочих частотах 327 МГц (рис. 1а) и 1 665 МГц (рис. 1б). Источники расположены на приблизительно равных угловых расстояниях от центра Солнца (13° и 11° соответственно). В табл. 1 приведены принятые при моделировании параметры инструмента и среды.

На рис. 1а представлены корреляционные функции в случае сильных флуктуаций фазы. Результаты вычислений, сделанных методами геометрической оптики (40) и плавных возмущений (51), в данном случае практически совпадают. Пунктирной линией показан результат расчётов по формуле (42). На рис. 1б показаны корреляционные функции при слабых флуктуациях фазы. Видно, что характер

кривых в этом случае существенно отличается от зависимостей, приведённых на рис. 1а. После фурье-преобразования представленных корреляционных функций получим спектры мощности выходного сигнала интерферометра в виде дельта-функции на фоне размытой линии (пьедестала). Результаты расчётов методами геометрической оптики и плавных возмущений и в случае слабых флуктуаций фазы совпадают. Амплитудные возмущения в обеих ситуациях много меньше фазовых.

Для определения степени влияния среды на выходной сигнал интерферометра была проанализирована зависимость ширины спектральной линии от некоторых параметров среды и инструмента. Все дальнейшие расчёты проводились для случая сильных флуктуаций фазы по формулам (42)–(45) при следующих условиях: угловое расстояние от источника до центра Солнца $\theta = 13^\circ$, толщина слоя неоднородностей $Z = 5,1 \cdot 10^7$ км, среднее значение электронной концентрации $N = 208,5 \text{ см}^{-3}$, внутренний масштаб турбулентности $l_m = 106$ км, внешний масштаб турбулентности $\Lambda_0 = 10^5$ км, частота приёма 327 МГц, длина проекции базы $\rho_x = 1\,017$ км. Система координат (x, y, z) выбрана таким образом, что ось x совпадает с направлением базы, ось z — с направлением распространения излучения от источника. Предполагалось, что вектор скорости солнечного ветра расположен в плоскости xy , т. к. $|\mathbf{V}| \ll |\mathbf{u}_0|$, и $|\mathbf{V}| = 350$ км/с.

На рис. 2 показана зависимость ширины Δf спектра от проекции ρ_x базы (величина Δf связана с $\langle \omega^2 \rangle$ (43) следующим образом: $\Delta f = \sqrt{\langle \omega^2 \rangle} / \pi$). На зависимости $\Delta f(\rho_x)$ можно выделить два характерных участка. На участке 1, когда проекция базы меньше внутреннего масштаба турбулентности l_m , ширина спектра мала, т. е. неоднородности на обеих трассах распространения вносят одинаковые возмущения, которые исключаются при корреляционной обработке. На участке 2 с ростом проекции ρ_x базы происходит плавное увеличение ширины спектра. При дальнейшем увеличении ρ_x ширина спектральной линии достигает определённого значения Δf_k и больше не растёт. Наблюдается ситуация, когда флуктуации, вносимые неоднородностями с размерами меньше длины базы, полностью некоррелированы. В этом случае результат интерферометрических наблюдений совпадает с результатом наблюдений в одном приёмном пункте. Расчёт вида выходного сигнала для однопунктовых наблюдений, проведённый в [13], показал, что такое совпадение вполне закономерно и наблюдается при использовании инструмента с большой базой.

На рис. 3 построены спектральные линии для случаев, когда скорость солнечного ветра направлена вдоль поперечной проекции базы ($V_x = 350$ км/с; $V_y = 0$; $V_z = 0$, сплошная линия) и перпендикулярно к ней ($V_x = 0$; $V_y = 350$ км/с; $V_z = 0$, пунктир). Как видно из рис. 3 изменение направления скорости солнечного ветра в данной ситуации практически не сказалось на результате.

Расчёты показывают, что ширина спектра существенно зависит от модуля скорости солнечного ветра, что подтверждают графики на рис. 4. На нём представлены спектры мощности выходного сигнала интерферометра, рассчитанные для различных значений V_x (при $V_y = 0$; $V_z = 0$): сплошная линия соответствует случаю $V_x = 100$ км/с, при этом ширина спектра $\Delta f = 7,96$ Гц, пунктир — случаю $V_x = 200$ км/с, при этом $\Delta f = 9,55$ Гц, штриховая линия — случаю $V_x = 300$ км/с, при этом $\Delta f = 11,14$ Гц.

Результаты численного моделирования хорошо согласуются с данными эксперимента по просвечиванию солнечной короны сигналами автоматической межпланетной станции «Венера-15», проведённого 27 июня 1984 года [16] на частоте 1 ГГц с использованием интерферометра с длиной базы 1 200 км. В момент наблюдений космический аппарат находился на угловом расстоянии от Солнца $\theta = 3^\circ$.

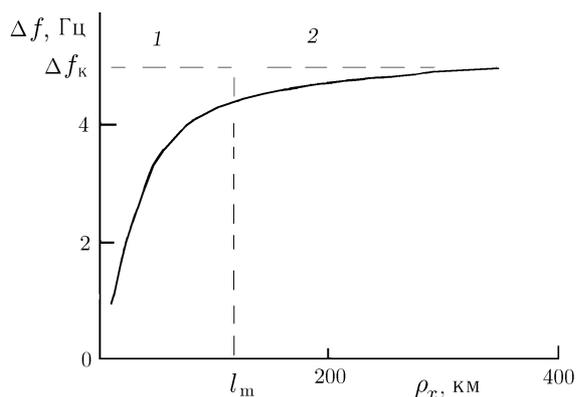


Рис. 2

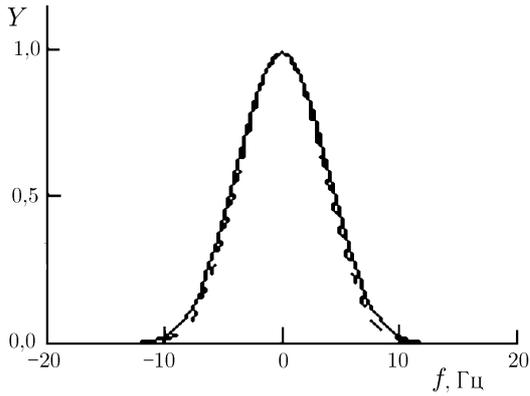


Рис. 3

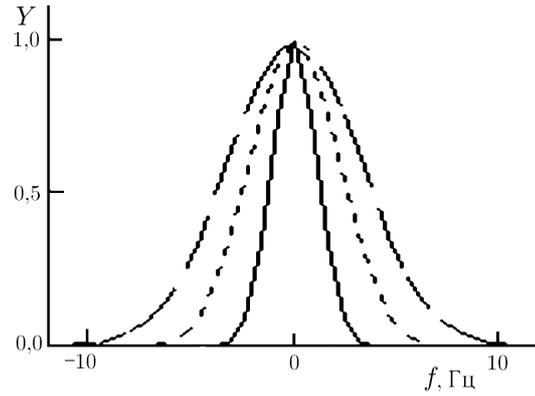


Рис. 4

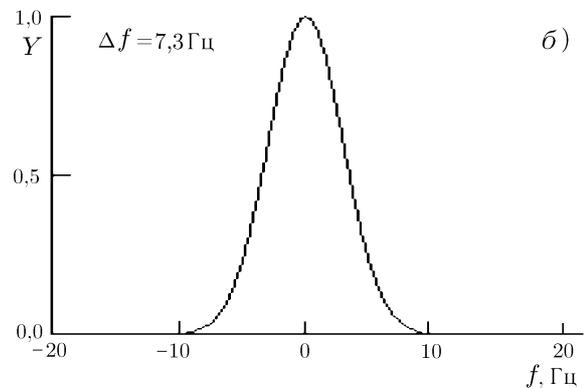
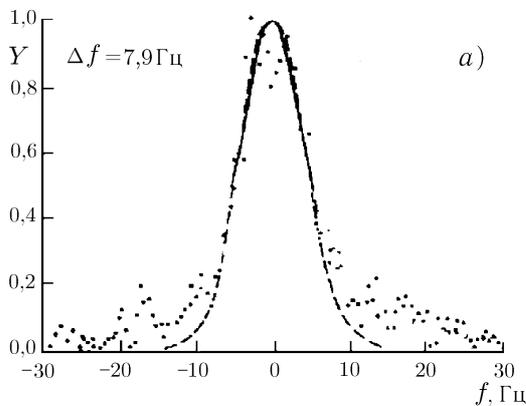


Рис. 5

Спектр мощности выходного сигнала интерферометра, построенный по результатам этих наблюдений, и его аппроксимация гауссовой функцией приведены на рис. 5а. На рис. 5б представлен спектр, полученный в результате расчётов. Ширина спектральной линии в разные моменты наблюдений по данным эксперимента составляла $7,9 \div 9,5$ Гц, что практически совпадает с теоретическим расчётом $\Delta f = 6 \div 8$ Гц (в зависимости от выбираемых условий эксперимента).

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе проведён теоретический расчёт спектрального отклика радиоинтерферометра на излучение космического радиоисточника, прошедшее через турбулентную корональную плазму. Получен вид автокорреляционной функции выходного сигнала инструмента для случаев, когда фазовые и амплитудные возмущения поля описываются методами геометрической оптики (40) и плавных возмущений (51). Использование гипотезы замороженности для описания временного изменения поля (35) и описание структуры неоднородностей пространственным спектром Колмогорова (36) позволили упростить расчёты и получить спектральную линию интерференционного сигнала в зависимости от параметров турбулентной среды. Результаты численного моделирования хорошо согласуются с результатами проведённых экспериментов. Выводы данной статьи могут быть основой для решения обратной задачи —

определения параметров среды распространения по виду выходного сигнала радиointерферометра со сверхдлинной базой.

Работа поддержана РФФИ (гранты № 99–02–16914, 01–02–06534).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лотова Н. А. // Радиоастрономические инструменты и исследования.: Труды ФИАН. М.: Наука, 1985. Т. 159. С. 76.
2. Яковлев О. И. Космическая радиофизика. М.: Наука, 1998. 432 с.
3. Нечаева М. Б., Алексеев В. А., Липатов Б. Н., Окмянский В. А. // Тезисы школы-семинара молодых радиоастрономов «Радиоастрономия в космосе», Пушкино, 1998. С. 31.
4. Netchaeva M. // Proc. XXXI Young European Radio Astronomers Conference, 14–18 August 1999, NRAL Jodrell Bank, United Kingdom. P. 25.
5. Нечаева М. Б. // Труды третьей научной конференции по радиофизике, 7 мая 1999 г., Нижний Новгород. С. 103.
6. Алтунин В. И., Дементьев А. Ф., Липатов Б. Н., Нечаева М. Б., Окмянский В. А., Снегирев С. Д., Тихомиров Ю. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 2000. Т. 43, № 3. С. 197.
7. Гирин И. А., Лихачёв С. Ф., Молотов И. Е., Чуприков А. А., Дементьев А. Ф., Липатов Б. Н., Снегирев С. Д., Нечаева М. Б., Тихомиров Ю. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1999. Т. 42, № 12. С. 1127.
8. Нечаева М. Б., Гавриленко В. Г., Липатов Б. Н. // Всероссийская астрономическая конф.: Тезисы докл. СПб.: НИИХ СПбГУ, 2001. С. 132.
9. Татарский В. И. Распространение волн в турбулентной атмосфере, М. 1967. 548 с.
10. Малахов А. Н. Флуктуации в автоколебательных системах, М. 1968. 660 с.
11. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. Ч. 2. Случайные поля. М., 1978. 464 с.
12. Гавриленко В. Г., Степанов Н. С. // Изв. вузов. Радиофизика. 1987. Т. 30, № 1. С. 3.
13. Гавриленко В. Г., Джандиери Г. В. Рассеяние и излучение волн в хаотических нестационарных средах. Тбилиси, Батуми: Изд-во «Интеллект», 1999.
14. Якубов В. П. Доплеровская сверхбольшебазовая интерферометрия. Томск: Изд-во «Водолей», 1997. 246 с.
15. Гавриленко В. Г., Петров С. С. // Изв. вузов. Радиофизика. 1984. Т. 27, № 3. С. 299.
16. Алексеев В. А., Алтунин В. И., Бирюков А. В., Липатов Б. Н. и др. // Письма в АЖ. 1986. Т. 12, № 6. С. 486.

¹ Нижегородский госуниверситет им. Н. И. Лобачевского;

² Научно-исследовательский радиофизический институт,
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию
5 октября 2001 г.

ANALYSIS OF THE VLBI-SYSTEM RESPONSE TO THE EMISSION FROM A RADIO SOURCE, PROPAGATED THROUGH THE CIRCUMSOLAR PLASMA

V. G. Gavrilenko, B. N. Lipatov, and M. B. Nechaeva

This paper is devoted to analysis of solar-corona and solar-wind irregularities by the method of radio sounding using a very-long-baseline interferometer. The coronal plasma disturbs the radiation field propagated from a source to the receiving stations along different paths. Analysis of the output signal of the radio interferometer allows one to get information on physical characteristics of the propagation medium in cases where monochromatic signals from spacecrafts or noise emission from natural radio sources are observed. In this paper, we calculate for the first time the theoretical power spectrum of interferometric response to the emission from a radio source propagated through a turbulent medium. The results obtained using the description of field fluctuations by the geometric-optical approach and the smooth-variation method are compared. Mathematical simulation of experiments on coronal-plasma sounding shows good agreement between real observations and theoretical calculations.

ОСОБЕННОСТИ РАДИОЗОНДИРОВАНИЯ ИОНОСФЕРЫ С ОРБИТАЛЬНОГО КОМПЛЕКСА «МИР»

Н. П. Данилкин, Н. Г. Котонаева

В статье приведены результаты численного моделирования параметров ионосферы, позволяющие объяснить появление дополнительных деталей на ионограммах, полученных в эксперименте на космической станции «Мир» в тот момент, когда станция находилась ниже высоты максимума концентрации электронов слоя F_2 . Показано, что появление «нижнего» следа на ионограммах может свидетельствовать о наличии горизонтальных градиентов параметров ионосферы.

ВВЕДЕНИЕ

С 12.08.98 по 25.06.99 на космической станции «Мир» проводились эксперименты по радиозондированию ионосферы [1]. Особенностью этих экспериментов являлось то, что орбита станции находилась на нетипичных для радиозондирования высотах порядка 350 км. С точки зрения исследования ионосферы эти высоты интересны тем, что они соответствуют примерному расположению максимума электронной концентрации слоя F_2 , и, следовательно, при движении станция находилась то выше, то ниже максимума слоя. Ионограммы, полученные во время эксперимента в тот момент, когда максимум слоя F_2 располагался ниже орбиты станции, принципиально не отличаются от известных ионограмм внешнего зондирования. В случае же, когда станция «Мир» находилась ниже максимума слоя, полученные ионограммы имеют существенные особенности. Основная из них — несовпадение низшей частоты отражения от Земли зондирующих радиоволн с критической частотой f_{oF_2} области F . Пример такой ионограммы приведён на рис. 1, где цифрами обозначены следующие детали: 1 — след отражения от ионосферы обыкновенной компоненты излучения, 2 — след отражения от ионосферы необыкновенной компоненты, 3 — плазменная частота на высоте станции «Мир», 4 — след отражения сигнала от поверхности Земли.

Однако на некоторых ионограммах того же типа появляются дополнительные детали в виде продолжения следа отражения от Земли, причём в большинстве случаев этот «нижний» след продолжался до частот, превышающих f_{oF_2} . На рис. 2 этот след обозначен звёздочкой. Если бы длительность этого следа ограничивалась только критической частотой обыкновенной (f_{oF_2}) или необыкновенной ($f_{x F_2}$) компоненты, его появление можно было объяснить последовательным отражением от ионосферных слоёв, лежащих выше станции «Мир» и последующего (или предыдущего) отражения от Земли. Однако при больших частотах такое объяснение невозможно.

На рис. 2 зафиксировано значительное, до 150 км, отличие действующих глубин отражения от Земли для «верхнего» и «нижнего» следов ионограммы, зарегистрированных на одной и той же частоте. Следовательно, траектории сигнала в этих двух случаях должны существенно различаться. Причём такое существенное удлинение траектории не может быть объяснено только наклонным распространением сигнала, т. к. в условиях стандартной сферически слоистой ионосферы любое отклонение от вертикали приводит к тому, что луч уходит в ионосфере далеко в сторону от орбитальной станции. В связи с этим в [2] была высказана гипотеза о наличии в зоне радиозондирования горизонтальных градиентов электронной концентрации и, как следствие, о существовании «возвратных» траекторий (на орбитальную станцию) после наклонного отражения от Земли.

Н. П. Данилкин, Н. Г. Котонаева

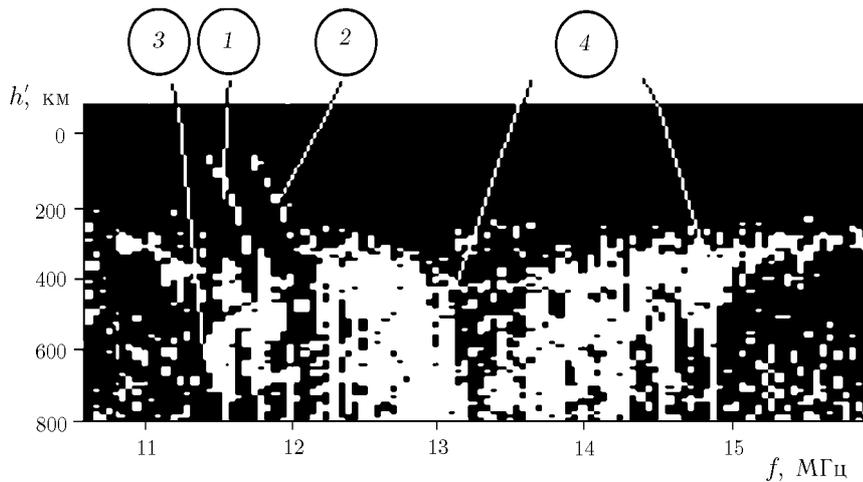


Рис. 1. Пример ионограммы радиозондирования ионосферы в случае, когда станция «Мир» находилась ниже максимума слоя F_2 ; f — частота зондирующего излучения, h' — действующая глубина отражения

Такое качественное объяснение наблюдаемого

эффекта требует численного обоснования. Следует создать такую математическую модель ионосферы с горизонтальной неоднородностью, в которой будут реализованы групповые задержки, зафиксированные в эксперименте.

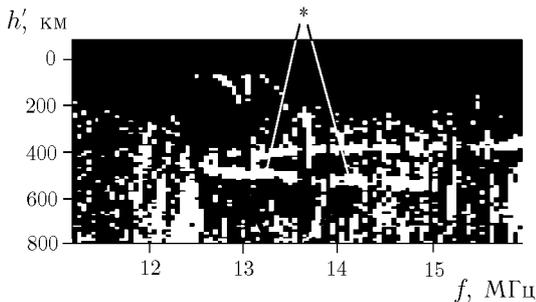


Рис. 2. Ионограмма, полученная на станции «Мир» 06.05.99 в 18:26:32 MSK. Координаты станции в этот момент времени $20,41^\circ$ с. ш., $117,71^\circ$ в. д., высота 353,71 км

Настоящая работа посвящена количественной проверке высказанной гипотезы о связи горизонтальных градиентов электронной концентрации с появлением дополнительных, так называемых «нижних», следов на ионограммах, полученных на орбитальном комплексе «Мир». В этой статье рассматривается случай неоднородности, имеющей характер уплотнения. Не исключено, что возможны иные механизмы образования «нижних» следов на ионограммах.

1. МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ТРАЕКТОРИИ

Для проведения численного эксперимента на первом этапе были выделены некоторые принципиальные моменты, которые позволили существенно упростить расчёты. Математическая модель явления основывалась на следующих ключевых предположениях:

- 1) Слоистость ионосферы. Пространство, где показатель преломления отличен от единицы, делится на слои так, что все параметры плазмы внутри слоя считаются одинаковыми, а соседние слои отличаются между собой так мало, что отражённой волной на границе раздела можно пренебречь.
- 2) Изотропность ионосферы. На первом этапе пренебрегается влиянием магнитного поля.
- 3) Траектория — плоская кривая. Волновая нормаль считается всегда параллельной плоскости падения и удовлетворяющей закону преломления

$$nr \sin \varphi = \text{const},$$

где φ — угол между волновой нормалью и нормалью к границе раздела, \mathbf{r} — радиус-вектор точки траектории, n — коэффициент преломления. Так как при переходе от слоя 1 к слою 2 радиус-вектор \mathbf{r} меняется мало, то

$$n_1 \sin \varphi_1 = n_2 \sin \varphi_2.$$

Для нахождения показателя преломления i -го слоя используется формула

$$n_i^2 = 1 - \frac{2\nu_i(1 - \nu_i)}{2(1 - \nu_i) - u^2a + \sqrt{u^4a^2 + 4(1 - \nu_i)^2 u^2b}},$$

где $u = f_h/f$; $\nu_i = f_i^2/f^2$; $a = \sin^2 \theta$; $b = \cos^2 \theta$; f_h — гирочастота, f — частота волны, f_i — плазменная частота слоя i , θ — магнитное наклонение. В случае изотропной ионосферы эта формула примет вид

$$n_i = \sqrt{1 - f_i^2/f^2}.$$

Необходимый для расчёта траекторий высотный профиль электронной концентрации вычисляется непосредственно по ионограмме по следам отражения от ионосферы и Земли [3].

При моделировании траекторию делят на два участка. Первый участок лежит от искусственного спутника до Земли. Наклонная траектория проходит в сферически слоистой ионосфере; в это время луч находится на значительном удалении от центра неоднородности, поэтому её влияние на траекторию сигнала незначительно. Второй участок — возвратная часть траектории от Земли до спутника после отражения от неоднородности или сильного преломления на ней. На этом участке слои ионосферы имеют уже несферическую форму.

Остановимся вначале на построении траектории от спутника до точки отражения от Земли [4]. Пусть \mathbf{X} — радиус-вектор спутника в декартовой системе координат, связанной с центром Земли, а \mathbf{x} — радиус-вектор точки прицеливания. Под точкой прицеливания понимают точку на поверхности Земли, в которую направлен вектор волновой нормали \mathbf{W} в первом слое:

$$\mathbf{W} = (\mathbf{x} - \mathbf{X})/|\mathbf{x} - \mathbf{X}|.$$

Координаты радиус-вектора \mathbf{X}_n точки, в которую попадает луч при распространении вдоль вектора \mathbf{W} (см. рис. 3а) до пересечения со следующим сферическим слоем, рассчитываются по формуле

$$\mathbf{X}_n = \mathbf{X} - \mathbf{W} \left[\mathbf{W}\mathbf{X} + \sqrt{(\mathbf{W}\mathbf{X})^2 - |\mathbf{X}|^2 + (|\mathbf{X}| - \Delta l)^2} \right], \quad (1)$$

где Δl — толщина соответствующего сферического слоя. Расстояние, пройденное лучом внутри одного слоя, вычисляется по формуле

$$d = -\mathbf{W}\mathbf{X} - \sqrt{(\mathbf{W}\mathbf{X})^2 - |\mathbf{X}|^2 + (|\mathbf{X}| - \Delta l)^2}. \quad (2)$$

При переходе через границу слоя луч меняет своё направление в соответствии с законом преломления. Однако при этом он остаётся в плоскости, в которой лежат предыдущая волновая нормаль и нормаль к границе раздела (последняя в случае слоистой атмосферы направлена по радиус-вектору точки траектории). Поэтому для нахождения нового направляющего вектора необходимо решить следующую задачу: найти единичный вектор \mathbf{W}_n , который линейно зависит от векторов \mathbf{X}_n и \mathbf{W} , расположенных под углом $\pi - \varphi_1$ друг к другу, причём угол между векторами \mathbf{W}_n и \mathbf{W} равен $|\varphi_1 - \varphi_2|$ (см. рис. 3б). В векторном виде эта задача выглядит так:

$$\mathbf{W}_n = k\mathbf{X}_n + m\mathbf{W}, \quad |\mathbf{W}_n| = 1, \quad \mathbf{W}_n\mathbf{W} = \cos(\varphi_1 - \varphi_2),$$

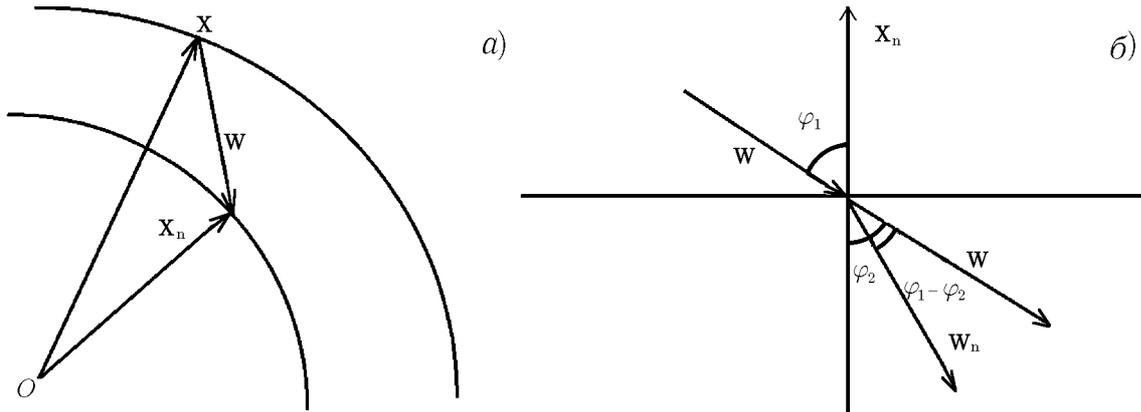


Рис. 3

где

$$\cos \varphi_1 = -\mathbf{W}_n \mathbf{X}_n, \quad \sin \varphi_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin \varphi_1.$$

Решая эту систему уравнений, получаем

$$\mathbf{W}_n = - \left(\frac{n_1}{n_2} \mathbf{W} \mathbf{X}_n + \sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2} \right)^2 [(\mathbf{W} \mathbf{X}_n)^2 - 1] + 1} \right) \mathbf{X}_n + \frac{n_1}{n_2} \mathbf{W}. \tag{3}$$

Здесь используется то обстоятельство, что \mathbf{X}_n не только радиус-вектор точки, но и, в случае сферически слоистой ионосферы, нормаль к поверхности слоя.

Последовательно рассчитывая координаты точки пересечения каждого слоя по формуле (1), получаем траекторию движения луча до выхода из ионосферы. При входе в неионизованные слои атмосферы, где $n = 1$, направляющий вектор \mathbf{W} не изменяется и принимается равным вектору волновой нормали в последнем слое. Тогда координаты радиус-вектора точки пересечения лучевой траектории с Землёй вычисляются по формуле, аналогичной (1):

$$\mathbf{X}_3 = \mathbf{X} - \mathbf{W} \left[\mathbf{W} \mathbf{X} + \sqrt{(\mathbf{W} \mathbf{X})^2 - |\mathbf{X}|^2 + a^2} \right],$$

где a — радиус Земли.

Длина траектории луча в неионизованной атмосфере находится по формуле, аналогичной (2):

$$d_3 = -\mathbf{W} \mathbf{X} - \sqrt{(\mathbf{W} \mathbf{X})^2 - |\mathbf{X}|^2 + a^2}.$$

Для вычисления вектора волновой нормали после отражения от Земли \mathbf{W}_3 используется равенство углов падения и отражения, поэтому

$$\mathbf{W}_3 = \mathbf{W} - 2\mathbf{X}_3 \frac{\mathbf{W} \mathbf{X}_3}{a^2}. \tag{4}$$

Для сравнения результатов численного эксперимента с ионограммой необходимо вычислить действующее расстояние вдоль траектории. Так как в предложенной модели распространения луча траектория кусочно-линейна, то

$$S = 2d_3 + \sum_i \frac{d_i}{n_i}, \tag{5}$$

где S — действующая длина траектории от спутника до Земли и от Земли до входа в ионосферу, d_i — расстояние, пройденное лучом внутри i -го слоя.

Описанные соотношения трансформируются известным способом [4] на случай анизотропной ионосферы и, соответственно, трёхмерных (не плоских) траекторий радиоволн. Однако в этом случае аналитические соотношения существенно усложняются, и мы их здесь не приводим.

2. МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ В ИОНОСФЕРЕ

Для расчёта второго участка лучевой траектории построим математическую модель ионосферы с учётом того, что сферическая симметрия последней из-за наличия неоднородностей нарушена.

К примеру, смоделируем ионосферу таким образом, чтобы плоские слои плавно переходили в слои, ограниченные гауссовыми кривыми. Коэффициент преломления внутри каждого слоя одинаков и соответствует экспериментальному, полученному при обработке ионограммы. Аналитически указанные кривые для i -го слоя записываются в виде

$$z_i(y) - z_b = A_i \exp\left[-\frac{(y - y_b)^2}{D_i}\right] + (i - k_b) \Delta h,$$

где (y_b, z_b) — координаты условного центра неоднородности, k_b — номер слоя от начала ионосферы, Δh — расстояние между соседними слоями по оси z , A_i и D_i — параметры кривых, вычисляемые по следующим формулам:

$$A_i = -A_m + (k_b - i) \frac{\Delta h}{2}$$

для слоёв, лежащих ниже центра неоднородности, и

$$A_i = A_m + (k_b - i + 1) \frac{\Delta h}{2}$$

для слоёв, лежащих выше центра неоднородности,

$$D_i = D_m |k_b - i|;$$

A_m и D_m — параметры неоднородности, подбираемые в результате численного эксперимента. Видно, что у симметричных относительно слоя k_b слоёв коэффициенты D_i одинаковы, а коэффициенты A_i равны по абсолютной величине и противоположны по знаку.

Внутри возмущения моделируются эллиптические слои с центром эллипса, совпадающим с центром неоднородности, и полуосями, вычисляемыми по формуле

$$a_j = a_m - (j - 1) \Delta h, \quad b_j = A_m - j \Delta h,$$

где j — номер эллиптического слоя, a_m — параметр неоднородности. Коэффициент преломления n_j внутри слоя с номером j одинаков и определяется либо специальным подбором в каждом эллиптическом слое, либо из соотношения $n_j/n_{j+1} = k = \text{const}$, где $j = 0$ — номер последнего неэллиптического слоя, $j = 1, 2, \dots, L$ — номера эллиптических слоёв. Параметры a_m , k , а также число эллиптических слоёв L подбираются в результате численного эксперимента.

В результате введения вышеописанной математической модели каждой точке пространства (y_0, z_0) ставится в соответствие два параметра: коэффициент преломления n , соответствующий номеру слоя, в котором находится указанная точка, и вектор нормали \mathbf{I}_n к его нижней границе, расположенный в плоскости yz . Координаты этого вектора вычисляются по формуле

$$\mathbf{I} = (-dz/dy; 1), \quad \mathbf{I}_n = \mathbf{I}/|\mathbf{I}|.$$

Здесь dz/dy — вычисленная в точке y_0 производная функции, задающей нижнюю границу слоя, в котором находится точка (y_0, z_0) .

После того, как луч отразится от Земли и, распространяясь с направляющим вектором \mathbf{W} , достигнет ионосферы в точке с радиус-вектором \mathbf{I} , траектория рассчитывается следующим образом:

- задаётся шаг δ расстояния, пройденного лучом в одном направлении (например, 5 км);
- определяются координаты радиус-вектора \mathbf{X}_n новой точки траектории по формуле $\mathbf{X}_n = \mathbf{I} + \delta \mathbf{W}$;
- определяется номер слоя, в котором находится получившаяся точка, и соответствующие коэффициент преломления и вектор нормали \mathbf{I}_n ;
- в соответствии с законом преломления вычисляются координаты новой волновой нормали \mathbf{W}_n по следующим формулам:

а) если происходит преломление и угол между векторами \mathbf{W} и \mathbf{I}_n тупой, то

$$\mathbf{W}_n = - \left(\frac{n_1}{n_2} \mathbf{W} \mathbf{I}_n + \sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2} \right)^2 [(\mathbf{W} \mathbf{I}_n)^2 - 1] + 1} \right) \mathbf{I}_n + \frac{n_1}{n_2} \mathbf{W};$$

б) если происходит преломление и угол между векторами \mathbf{W} и \mathbf{I}_n острый, то

$$\mathbf{W}_n = - \left(\frac{n_1}{n_2} \mathbf{W} \mathbf{I}_n - \sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2} \right)^2 [(\mathbf{W} \mathbf{I}_n)^2 - 1] + 1} \right) \mathbf{I}_n + \frac{n_1}{n_2} \mathbf{W};$$

в) если преломление невозможно и происходит отражение луча, то

$$\mathbf{W}_n = \mathbf{W} - 2\mathbf{I}_n (\mathbf{W} \mathbf{I}_n);$$

— определяются координаты радиус-вектора \mathbf{X}_n новой точки траектории по формуле $\mathbf{X}_n = \mathbf{X} + \delta \mathbf{W}_n$, где \mathbf{X} — радиус-вектор предыдущей точки и т. д.;

— для расчёта действующего расстояния при движении по траектории воспользуемся формулой, аналогичной (5):

$$h' = h'_1 + \sum_{k=1}^K \frac{\delta}{n_k},$$

где h'_1 — действующее расстояние, рассчитанное по формуле (5), K — число расчётных шагов, n_k — коэффициент преломления в том слое, в котором находится точка траектории на k -м шаге.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ ГРАДИЕНТОВ ЭЛЕКТРОННОЙ КОНЦЕНТРАЦИИ

Для численного подтверждения предложенной гипотезы были выбраны две ионограммы с весьма характерным «нижним» следом, находящимся в области больших плазменных частот. Последнее обстоятельство даёт возможность пренебречь влиянием анизотропии ионосферы. Первая из выбранных ионограмм изображена на рис. 4а, вторая на рис. 2.

Первым необходимым этапом численного эксперимента является предварительный расчёт высотного профиля электронной концентрации $N_e(h)$. Как указывалось выше, указанный профиль вычислялся непосредственно по ионограмме по обычным следам сигналов, отражённых от Земли [3]. Для

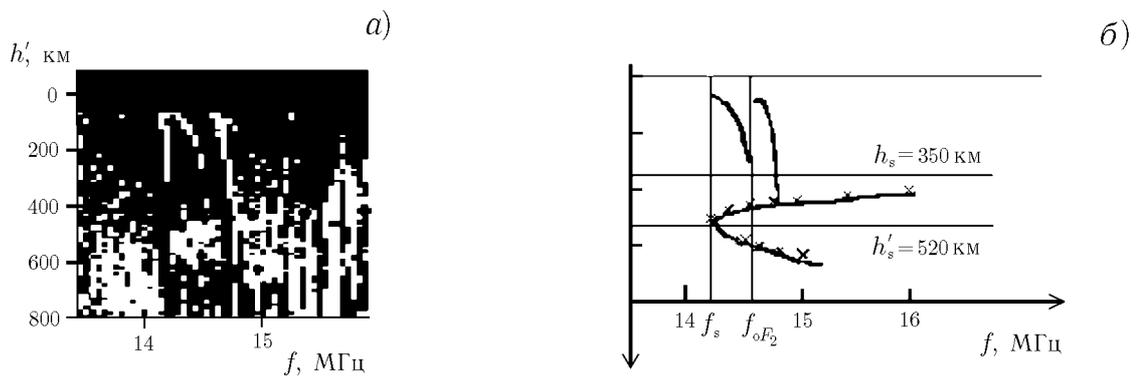


Рис. 4. Пример ионограммы с характерным «нижним» следом (а) и её модель (б); h_s — высота орбиты станции «Мир», h'_s — действующая глубина, соответствующая плазменной частоте $f_s = 14,2 \text{ МГц}$ на высоте расположения станции «Мир»; $f_{oF_2} = 14,6 \text{ МГц}$

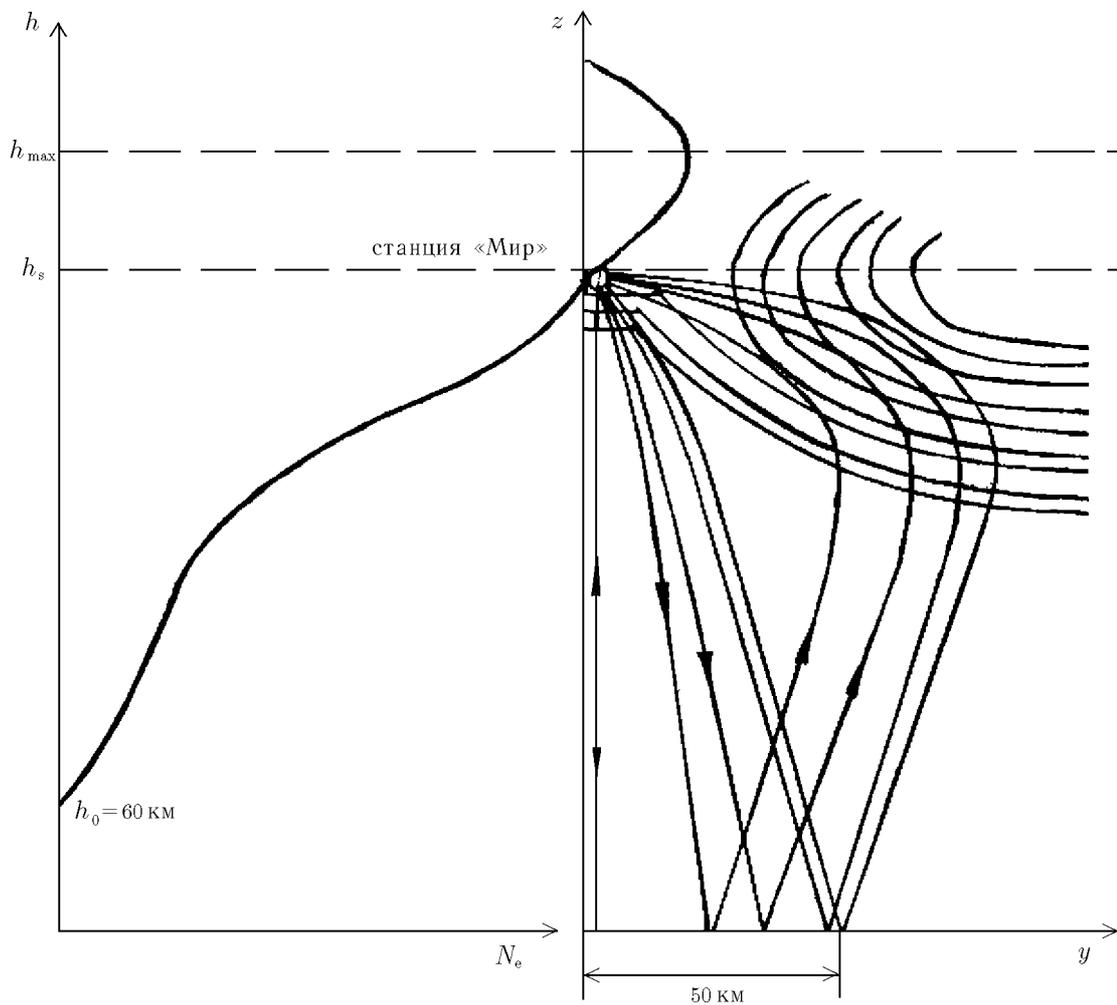


Рис. 5

этого проводились расчёты при вертикальном распространении сигнала с целью подбора такого профиля, чтобы расчётная действующая глубина при распространении луча до Земли совпадала с экспе-

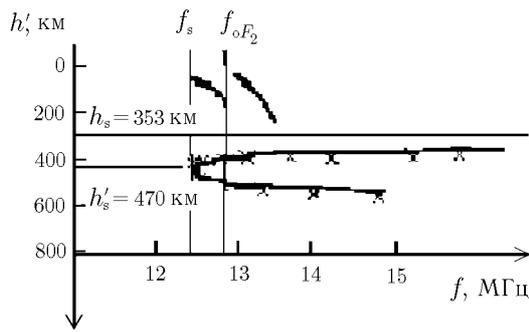


Рис. 6. Модель ионограммы, представленной на рис. 2; $f_s = 12,44$ МГц; $f_{oF_2} = 13$ МГц

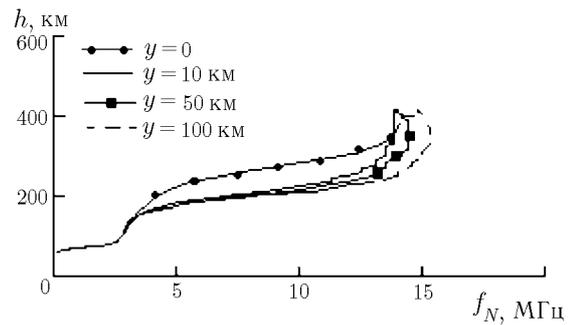


Рис. 7

риментальной действующей глубиной, полученной по следам сигналов, отражённых от Земли при различной частоте сигнала. Полученный таким образом профиль $N_e(h)$ от основания ионосферы до высоты h_{max} максимума области F использовался в расчётах траектории сигнала от орбитальной станции до Земли. Схематично этот профиль изображён на рис. 5.

Для иллюстрации точности полученных результатов на рис. 4 вместе с ионограммой приведена её модель, содержащая основные детали ионограммы, на которую нанесены результаты расчётов (см. рис. 4б). Аналогичная модель ионограммы с рис. 2 приведена на рис. 6.

На втором этапе численного эксперимента при фиксированной частоте сигнала, при которой наблюдался возвратный след, и, в общем, не фиксированном угле отклонения луча от вертикали проводился подбор описанных выше параметров неоднородности. Наличие неоднородности должно было привести не только к развороту лучевой траектории, но и к возврату её точно в точку нахождения орбитальной станции; при этом должны совпадать расчётные и экспериментальные действующие глубины. Совпадение последних можно наблюдать на рис. 4 и 6.

Результирующие лучевые траектории схематически представлены на рис. 5.

Исходный угол отклонения Φ «возвратного» зондирующего луча от вертикали зависит от частоты сигнала. Информация об этом для расчёта ионограммы с рис. 4 представлена в табл. 1.

Таблица 1

f , МГц	Φ , град
14,5	17,5
14,6	19,8
14,8	19,1
15,0	18,17
15,2	16,57

Отдельный интерес представляют рассмотренные выше параметры неоднородности. Их значения для ионограммы с рис. 4 представлены в табл. 2.

Зависимости электронной плазменной частоты f_N от высоты в модельной ионосфере будут отличаться от невозмущённого профиля. Для ионограммы с рис. 4 модельные профили представлены на рис. 7 при различных расстояниях y от станции. На рис. 7 $y = 0$ соответствует профилю сферически слоистой невозмущённой ионосферы, $y = 10$ км — началу возмущённой ионосферы, $y = 50$ км — возмущённой ионосфере вблизи эллиптических слоёв, $y = 100$ км — возмущённой ионосфере в центре неоднородности.

Следует также отметить, что из расчётов не следует обязательная замкнутость внутренних слоёв неоднородности, достаточно лишь изменения угла наклона поверхности.

Таблица 2

Δh , км	y_b , км	z_b , км	A_m , км	D_m , км ²	L	a_m , км	k	δ , км
10	120	348	100	9 450	7	90	1,095	5

ВЫВОДЫ

Проведённые расчёты подтверждают правильность качественного вывода работы [2] о причинах возникновения «нижнего» следа на ионограммах, полученных на орбитальном комплексе «Мир» и показывают, что при расположении ионозонда ниже высоты максимума F -слоя ионосферы возникает возможность определения параметров ионосферной неоднородности вдали от гравитационной вертикали спутника. Напомним, что традиционно при определении параметров ионосферы по ионограммам внешнего зондирования предполагалось, что траектория луча лежит на гравитационной вертикали.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Данилкин Н., Иванов А. // Новости космонавтики. 1999. № 8. С. 56.
2. Danilkin N. P. // Int. J. Geomagn. and Aeronomy. 2001. V. 2, No. 3. P. 173.
3. Данилкин Н. П., Котонаева Н. Г. // Изв. вузов. Радиофизика. 2002. Т. 45, № 5. С. 367.
4. Данилкин Н. П., Мальцева О. А. Ионосферные радиоволны. Теория, алгоритмы, программы. Изд-во РГУ, 1976.

Институт прикладной геофизики,
г. Москва, Россия

Поступила в редакцию
18 июля 2001 г.

THE FEATURES OF IONOSPHERIC RADIO SOUNDING PERFORMED USING THE «MIR» SPACE STATION

N. P. Danilkin and N. G. Kotonaeva

We present the results of numerical simulations of the ionospheric parameters, which permit to explain the occurrence of additional features in the ionograms obtained in the experiment onboard the «Mir» Space Station. During this experiment, the station flew below the electron-density maximum of the ionospheric F_2 layer. It is shown that the «lower» track of the ionogram can be evidence of the presence of a horizontal gradient in the ionospheric parameters.

УДК 550.388.2

ВОЗБУЖДЕНИЕ ДОБАВОЧНОЙ ОБЛАСТИ КОРОТКОВОЛНОВЫХ КОЛЕБАНИЙ ПЛАЗМЫ В ЭКСПЕРИМЕНТАХ ПО НАГРЕВУ ИОНОСФЕРЫ ПОЛЕМ МОЩНОЙ РАДИОВОЛНЫ

В. В. Васьков, Н. А. Рябова

Рассматривается процесс перекачки плазменных волн, возбуждаемых мощной радиоволной на искусственных неоднородностях, в добавочную область поляризованных почти ортогонально магнитному полю очень коротковолновых колебаний, которые образуются в замагниченной ионосферной плазме под влиянием сильной пространственной дисперсии. Учитывается диффузия плазменных волн по спектру в результате многократного рассеяния на неоднородностях и нелинейный процесс взаимодействия между волнами вследствие индуцированного рассеяния на ионах. При описании последнего процесса (ответственного за перекачку волн в добавочную область) используется дифференциальное приближение, справедливое в случае достаточно плавного изменения спектров плазменных волн. Численные расчёты спектров проведены для случая максвелловской плазмы при отсутствии сверхтепловых электронов. Показано, что в этом случае добавочная область плазменных волн возбуждается в диапазоне частот накачки, расположенном вблизи, но несколько ниже 4-й гирогармоники электронов, когда поглощение первичных возбуждаемых плазменных волн становится достаточно сильным. Обсуждается приложение проведённых расчётов к ионосферным экспериментам.

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что мощная радиоволна частоты ω_t эффективно возбуждает верхнегибридные плазменные волны в результате рассеяния на вытянутых вдоль магнитного поля искусственных неоднородностях малого радиуса. Такой процесс происходит в окрестности высоты верхнегибридного резонанса (ВГР) мощной радиоволны $\omega_{pe}^2 = \omega_t^2 - \omega_{Be}^2$, где $\omega_{pe} = \sqrt{4\pi e^2 N / m_e}$ — плазменная частота, $\omega_{Be} = eB / (m_e c)$ — гирочастота электронов в геомагнитном поле \mathbf{B} , N — концентрация электронов, m_e и e — масса электрона и элементарный заряд соответственно, c — скорость света. Далее плазменные волны расплываются по частоте и спектру волновых векторов в результате различных стрикционных процессов и многократного рассеяния на искусственных неоднородностях. Определение спектра плазменных волн, возбуждаемых мощным радиоизлучением, является важной задачей теории. Эта задача была решена в [1] для случая, когда изменение частоты $\omega \approx \omega_t$ плазменных волн происходит вследствие их индуцированного рассеяния на ионах.

Здесь следует иметь в виду, что в пространстве волновых векторов при ВГР существуют две области слабозатухающих верхнегибридных колебаний плазмы, принадлежащих одной дисперсионной кривой $\omega(k_\perp)$ [2, рис. 5.7.4], — основная I и добавочная II. Область I является замкнутой и содержит плазменные волны с малыми волновыми числами $k < \rho_{Be}^{-1}$, где $\rho_{Be} = \sqrt{T_e / m_e} / \omega_{Be}$ — ларморовский радиус электронов с температурой T_e . Добавочная область II возникает в замагниченной ионосферной плазме под влиянием сильной пространственной дисперсии. Она содержит плазменные волны с волновыми векторами, обладающими большой ортогональной полю \mathbf{B} компонентой $k_\perp \gtrsim \rho_{Be}^{-1}$ и малой продольной (параллельной \mathbf{B}) компонентой k_\parallel , обеспечивающей слабое циклотронное поглощение плазменных волн. Расчёт спектра плазменных волн проводился в [1] в области I, где они первоначально возбуждаются, без учёта области II. В то же время влияние возбуждения волн в области II в ряде экспериментов может оказаться существенным. Речь идёт об эффектах, наблюдающихся в окрестности кратных электронных гирогармоник $\omega_t \simeq n\omega_{Be}$, где $n = 1, 2 \dots$, асимметричных относительно

знака расстройки $\omega_t - n\omega_{Be}$. К ним относится ослабление искусственного радиоизлучения ионосферы (ИРИ) в некотором диапазоне частот ω_t , расположенном вблизи, но ниже электронных гирогармоник $n\omega_{Be}$ [3], а также возникновение дополнительной (искусственной) ионизации при возмущении ионосферы на частотах ниже электронных гирогармоник [4]. Как отмечалось в [5–7], возникновение таких асимметричных эффектов может быть связано с перекачкой возбуждаемых плазменных волн в область II, поскольку дисперсионные свойства плазменных волн в области I слабо зависят от знака расстройки $\omega - n\omega_{Be}$ при $n \geq 4$.

Возбуждение плазменных волн в добавочной области II рассматривалось в [5, 6] в предположении, что перекачка волн между областями I и II происходит благодаря индуцированному рассеянию на ионах, а диффузия волн по спектру волновых чисел внутри каждой из областей — в результате многократного рассеяния волн на вытянутых вдоль поля \mathbf{B} неоднородностях (последний процесс был впервые использован в [1, 8] и подробно исследовали в [9]). Недостаток такого подхода заключается в том, что в надпороговом случае он приводит к образованию в каждой из областей серии сателлитов по частоте, находящихся на равном расстоянии $\Delta f = 10 \div 30$ кГц друг от друга [6].

В настоящей работе в отличие от [5, 6] мы учитываем влияние индуцированного рассеяния на ионах не только на перекачку волн из области I в область II (и обратно), но и на взаимодействие плазменных волн внутри каждой из областей. Вычисления проводятся в дифференциальном приближении, предложенном в [10, 11] и использованном в [1].

В разделе 1 в окрестности электронных гирогармоник получено условие перекачки плазменных волн из области I в область II и найдены выражения для спектров волн в каждой из этих областей (как при наличии перекачки, так и при её отсутствии). В разделе 2 приведены результаты расчёта спектров волн в случае максвелловской плазмы при отсутствии сверхтепловых электронов. Показано, что в этом случае возбуждение добавочной области II происходит на частотах ниже 4-й электронной гирогармоники, т. е. в условиях, когда поглощение плазменных волн в области I становится значительным. В разделе 3 обсуждается приложение полученных результатов к упомянутым выше ионосферным экспериментам. В Приложении приводится вывод электронного отклика второго порядка, который используется при описании нелинейного взаимодействия коротковолновых плазменных волн в области II.

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим вертикальное падение мощной радиоволны на слабонеоднородную ионосферу. Будем считать для простоты, что геомагнитное поле \mathbf{B} направлено вдоль вертикальной оси h . Уравнение переноса для возбуждаемых плазменных волн в приближении случайных фаз в стационарном случае можно записать в виде

$$2\varepsilon''(\omega, \mathbf{k})\tilde{N}_{\omega, k_{\perp}}^{(i)} = - \sum_j \int d\omega' d^2k'_{\perp} \frac{8\pi}{k^2 k'^2} |\mu(\omega, \mathbf{k}; -\omega', -\mathbf{k}')|^2 \frac{\delta\varepsilon_1''(\omega_0, \mathbf{k}_0)}{k_0^2 |\varepsilon(\omega_0, \mathbf{k}_0)|^2} \tilde{N}_{\omega, k_{\perp}}^{(i)} \tilde{N}_{\omega', k'_{\perp}}^{(j)} - \frac{\partial}{\partial k_{\perp}^2} \frac{P_{\omega, k_{\perp}}^{(i)}}{\omega} + \frac{Q_0^{(i)}}{\pi\omega_t} \delta(k_{\perp}^2 - k_{\perp c}^2) \delta(\omega - \omega_t). \quad (1)$$

Здесь ω, \mathbf{k} и ω', \mathbf{k}' — частоты и волновые векторы взаимодействующих волн, $\omega_0 = \omega - \omega', \mathbf{k}_0 = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$ — частота и волновой вектор биений (предполагается, что $|\omega_0| \ll \omega, |\omega_0| \ll \omega'$), $\varepsilon''(\omega, \mathbf{k})$ — мнимая часть продольной диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon' + i\varepsilon''$, $\delta(x)$ — дельта-функция, $\tilde{N}_{\omega, k_{\perp}}^{(i)}$ — спектральная плотность интенсивности электрического поля плазменных волн с потенциалом φ и $k_{\parallel} = k_{\parallel}^{(i)}$:

$$\tilde{N}_{\omega, k_{\perp}}^{(i)} = \frac{k^2}{4\pi} \left\langle |\varphi^{(i)}|^2 \right\rangle_{\omega, k_{\perp}}, \quad (2)$$

где спектральная функция $\langle |\varphi^{(i)}|^2 \rangle_{\omega, k_{\perp}}$ определяется из соотношения

$$\langle \varphi(\omega, \mathbf{k}) \varphi^*(\omega', \mathbf{k}') \rangle = \left\langle |\varphi^{(i)}|^2 \right\rangle_{\omega, k_{\perp}} \delta(\omega - \omega') \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta(k_{\parallel} - k_{\parallel}^{(i)}). \quad (3)$$

Угловые скобки в левой части (3) обозначают операцию статистического усреднения, звёздочка — комплексное сопряжение. В качестве независимых переменных используется частота ω плазменной волны и ортогональная геомагнитному полю компонента k_{\perp} её волнового вектора \mathbf{k} . Продольная компонента $k_{\parallel} = k_{\parallel}^{(i)}$ ($k_{\parallel}' = k_{\parallel}^{(j)}$) находится из дисперсионного уравнения $\varepsilon'(\omega, \mathbf{k}) = 0$.¹ Верхние индексы i, j обозначают номер корней дисперсионного уравнения для продольных компонент волнового вектора $k_{\parallel}, k_{\parallel}'$ соответственно. Спектр плазменных волн, как и спектр мелкомасштабных неоднородностей (см. ниже), считается аксиально симметричным.

Первое слагаемое в правой части (1) описывает индуцированное рассеяние плазменных волн на ионах [12, 13]. Соответственно, $\delta\varepsilon_1''(\omega_0, \mathbf{k}_0)$ — вклад ионов в мнимую часть продольной диэлектрической проницаемости биений, $\mu(\omega, \mathbf{k}; -\omega', -\mathbf{k}')$ — электронный отклик второго порядка, определяющий квадратичную по полю плазменных волн плотность заряда ρ_{nl} в нелинейной теории [12]²:

$$4\pi\rho_{nl}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{1}{2} \int d\omega' d^3k' d\omega'' d^3k'' \delta(\omega - \omega' - \omega'') \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}' - \mathbf{k}'') \mu(\omega', \mathbf{k}'; \omega'', \mathbf{k}'') \varphi(\omega', \mathbf{k}') \varphi(\omega'', \mathbf{k}''). \quad (4)$$

При выводе (1) учтены свойства симметрии откликов второго порядка [12, 13]:

$$\begin{aligned} \mu(\omega, \mathbf{k}; -\omega', -\mathbf{k}') &= \mu(-\omega', -\mathbf{k}'; \omega, \mathbf{k}) = \mu^*(\omega', \mathbf{k}'; -\omega, -\mathbf{k}), \\ \mu(\omega_0, \mathbf{k}_0; \omega', \mathbf{k}') &= \mu^*(\omega, \mathbf{k}; -\omega', -\mathbf{k}'). \end{aligned} \quad (5)$$

Предполагается, что полувывехтами, описывающими взаимодействие собственных колебаний плазмы и их биений с резонансными электронами, можно пренебречь (взаимодействие биений на комбинационных частотах с электронами, как правило, оказывается малым вследствие большой тепловой скорости электронов; подробнее см. [14]). Отметим, что процесс индуцированного рассеяния волн не меняет полного числа «частиц» $\sum_i \int N_{\omega, k_{\perp}}^{(i)} d\omega d^2k_{\perp}$, где $N_{\omega, k_{\perp}}^{(i)} = (\partial\varepsilon'/\partial\omega) \tilde{N}_{\omega, k_{\perp}}^{(i)}$.

Второе слагаемое в (1) описывает в диффузионном приближении процесс многократного рассеяния плазменных волн на сильно вытянутых вдоль магнитного поля квазистационарных неоднородностях δN электронной концентрации. Входящий в это слагаемое поток энергии плазменных волн в пространстве волновых чисел $P_{\omega, k_{\perp}}^{(i)}$ выражается через среднеквадратичное возмущение электронной концентрации в неоднородностях $\langle |\delta N|^2 \rangle$ и спектральную плотность энергетических потерь $q_{\omega, k_{\perp}}^{(i)}$ [9]:

$$P_{\omega, k_{\perp}}^{(i)} = -\frac{\delta^2}{2} \left(\frac{\partial\varepsilon'}{\partial k_{\perp}^2} \right)^{-2} \left[\frac{\partial}{\partial k_{\perp}^2} q_{\omega, k_{\perp}}^{(i)} - q_{\omega, k_{\perp}}^{(i)} \frac{\partial}{\partial k_{\perp}^2} \ln \left(\frac{\varepsilon''}{\partial\varepsilon'/\partial k_{\parallel}^2} \right)^2 \right], \quad (6)$$

где $q_{\omega, k_{\perp}}^{(i)} = 2\omega\varepsilon''(\omega, \mathbf{k}) \tilde{N}_{\omega, k_{\perp}}^{(i)}$; $\delta^2 = \langle |\delta N|^2 \rangle / N_R^2 \ll 1$; $N_R = m_e(\omega_t^2 - \omega_{Be}^2) / (4\pi e^2)$ — концентрация электронов на уровне ВГР. Здесь мы пренебрегли зависимостью возмущений концентрации от возмущений температуры. Во втором слагаемом в скобках в правой части (6) частные производные $\partial/\partial k_{\perp}^2$,

¹ При этом каждой паре независимых переменных ω, k_{\perp} соответствует не менее одной пары значений $k_{\parallel}^{(i)}$, различающихся знаком.

² Отметим, что отклик второго порядка выражается через введённую в [13] свёртку трёхиндексного тензора \mathbf{S} с помощью соотношения $\mu(\omega', \mathbf{k}'; \omega'', \mathbf{k}'') = ikk'k'' \mathbf{S}(\omega, \mathbf{k}; \omega', \mathbf{k}')$.

$\partial/\partial k_{\parallel}^2$ вычисляются при постоянных k_{\parallel}^2 и k_{\perp}^2 соответственно. Интегро-дифференциальное уравнение (1) должно быть дополнено граничными условиями в точке слияния двух корней $k_{\parallel}^{(1)}$, $k_{\parallel}^{(2)}$ дисперсионного уравнения, в которой $\partial\varepsilon'/\partial k_{\parallel} = 0$:

$$q_{\omega, k_{\perp}}^{(2)} = q_{\omega, k_{\perp}}^{(1)}; \quad P_{\omega, k_{\perp}}^{(2)} = -P_{\omega, k_{\perp}}^{(1)} \quad (7)$$

при $k_{\parallel}^{(2)} = k_{\parallel}^{(1)}$, а также условием $P_{\omega, k_{\perp}}^{(i)} = 0$ на границе области существования плазменных волн.

Последний член в правой части (1) описывает источник, связанный с возбуждением плазменных волн на частоте ω_t в результате поляризации квазистационарных неоднородностей δN полем мощной радиоволны. Вследствие вытянутости неоднородностей этот процесс происходит вблизи уровня верхнегибридного резонанса (ВГР) мощной радиоволны (и плазменных волн с близкими частотами) при $\omega_{pe}^2 \approx \omega^2 - \omega_{Be}^2$ в точках пространственного синхронизма $k_{\parallel}^{(i)} = \pm k_t$, где $k_t = \sqrt{\omega_t \omega_{Be}}/c$ — волновое число падающей на ионосферу мощной радиоволны в области ВГР. Параметры $Q_0^{(i)}$, $k_{\perp c}$, характеризующие интенсивность и положение источника энергии плазменных волн, приведены в [5]. Спонтанный источник опущен.

Примем теперь во внимание, что в окрестности ВГР мощной радиоволны в фазовом пространстве волновых чисел существуют две области плазменных колебаний с одинаковой (или близкой) частотой. Первая из них содержит колебания с малыми волновыми числами $k_{\perp}^2 < 1/(12\rho_{Be}^2)$; $k_{\parallel}^2 < 1/(3\rho_{Be}^2)$. Дисперсионное уравнение для этих волн в высокочастотном пределе $\omega \gg \omega_{Be}$ (справедливом в окрестности электронных гирогармоник с номерами $n \geq 4$) вблизи уровня ВГР $\omega_{pe}^2 = \omega^2 - \omega_{Be}^2$ имеет вид [6] (см. также [1])

$$(x + y) \varepsilon'(\omega, \mathbf{k}) = [y - 3(x + y)^2] / \nu^2 = 0. \quad (8)$$

Здесь и ниже используются безразмерные переменные

$$\nu = \omega/\omega_{Be}; \quad x = (k_{\perp} \rho_{Be})^2; \quad y = (k_{\parallel} \rho_{Be})^2. \quad (9)$$

Согласно (8) функция $y(x)$ в области I двузначна:

$$y^{(1,2)} = [(1 - 6x) \mp \sqrt{1 - 12x}] / 6, \quad (10)$$

а производные от ε' записываются в виде

$$\frac{\partial \varepsilon'}{\partial x} = -\frac{6}{\nu^2}; \quad \frac{1}{\partial \varepsilon' / \partial y} \frac{\partial^2 \varepsilon'}{\partial y \partial x} = -\frac{1}{x + y}. \quad (11)$$

Мнимая часть диэлектрической проницаемости $\varepsilon'' = \varepsilon''(\omega, \mathbf{k})$ равна сумме двух слагаемых, обусловленных столкновениями (ε_s'') и циклотронным поглощением плазменных волн (ε_c''). Столкновительная часть ε'' в области I имеет вид $\varepsilon_{1s}'' = \nu_{ei}/\omega$ и пропорциональна частоте столкновений электронов с ионами

$$\nu_{ei} [\text{с}^{-1}] = 30 (\nu^2 - 1) [1 - 0,077 \lg(\nu^2 - 1)] \quad (12)$$

при $\omega_{pe}^2 = \omega^2 - \omega_{Be}^2$, $\omega_{Be} = 8,35 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$; $T_e = 0,1 \text{ эВ}$. Нижний индекс 1 используется для обозначения переменных в области I.

Циклотронное поглощение плазменных волн в окрестности гирогармоники с номером n хорошо описывается выражением

$$\varepsilon_{1c}'' = \varepsilon_{c,n}'' + \varepsilon_{c,n-1}'', \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_{c,n}'' &= \frac{x}{x+y} B_n(x) \sqrt{\pi} z_n \exp(-z_n^2), & B_n(x) &= \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{Be}^2} \frac{\nu}{|\nu-n|} \frac{A_n(x)}{x}, \\ z_n &= \frac{|\nu-n|}{\sqrt{2y}}, & A_n(x) &= \exp(-x) I_n(x) \approx \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n \text{ при } x \ll 1. \end{aligned} \tag{14}$$

Здесь $I_n(x)$ — функция Бесселя мнимого аргумента n -го порядка. Плазма считается максвелловской. Заметим, что второе слагаемое в правой части (13) становится существенным в окрестности 4-й giro-гармоники в области максимальных значений $x \simeq 1/12$ при $y \geq 1/12$. Дисперсионные свойства плазменных волн в области I слабо зависят от знака расстройки $\nu - n$. Поток энергии плазменных волн (6) в результате многократного рассеяния на мелкомасштабных неоднородностях в рассматриваемом случае (11) записывается в виде

$$P_{\omega, k_{1\perp}}^{(i)} = -\frac{G_1^2}{\rho_{Be}^2} \left[\frac{\partial}{\partial x} q_{\omega, k_{1\perp}}^{(i)} - \frac{2}{x+y} q_{\omega, k_{1\perp}}^{(i)} - \frac{2}{\varepsilon_1''} \frac{\partial \varepsilon_1''}{\partial x} q_{\omega, k_{1\perp}}^{(i)} \right], \tag{15}$$

где $G_1^2 = \delta^2 \nu^4 / 72$; $q_{\omega, k_{1\perp}}^{(i)} = 2\omega \varepsilon_1'' \tilde{N}_{\omega, k_{1\perp}}^{(i)}$; $\varepsilon_1'' = \varepsilon''(\omega, \mathbf{k}_1)$, а последнее слагаемое в скобках вычисляется с помощью (14).

Добавочная область II слабозатухающих плазменных волн образуется под влиянием сильной пространственной дисперсии в области больших x и малых $y \ll x$ на малом расстоянии от безразмерного волнового числа $x = x_m$, соответствующего $y = 0$. Величина x_m существенно зависит от расстройки $\nu - n$ и её знака. Она находится путём решения трансцендентного уравнения $\varepsilon_0(x_m) = \varepsilon'(x = x_m, y = 0) = 0$, где действительная часть продольной диэлектрической проницаемости $\varepsilon'(x, y)$ определяется общим выражением для бесстолкновительной плазмы, справедливым при $x > 1$:

$$\varepsilon'(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{Be}^2} \frac{1}{x+y} [1 + \Phi(x, y, \nu)], \quad \Phi(x, y, \nu) = -\nu \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{A_m(x)}{\nu-m} \varphi(z_m), \tag{16}$$

$$\varphi(z) = 2z \int_0^z \exp(t^2 - z^2) dt \approx 1 + \frac{1}{2z^2} + \frac{3}{4z^4} \text{ при } z \gg 1.$$

Плазма, как и ранее, считается максвелловской. Выражение для функции $\varepsilon_0(x) = \varepsilon'(x, y = 0)$, соответствующее пределу $y \rightarrow 0$, следует из (16) при $\varphi(z_m) = 1$. В окрестности электронных giroгармоник при $\nu \simeq n$ вблизи уровня ВГР общее выражение (16) упрощается: в нём достаточно сохранить лишь функцию $\varphi(z_n)$ в резонансном слагаемом, полагая $\varphi(z_m) = 1$ при $m \neq n$. В результате с учётом условия $y \ll x$ получаем (ср. [6])

$$\varepsilon'(\omega, \mathbf{k}) = \Delta x \left. \frac{\partial \varepsilon_0(x)}{\partial x} \right|_{x=x_m} \pm B_n(x_m) [\varphi(z_n) - 1], \tag{17}$$

где $\Delta x = x - x_m$, а знаки плюс и минус относятся к случаям $\nu < n$ и $\nu > n$ соответственно. Возможность разложения коэффициентов (17) по малому приращению Δx связана с малостью второго слагаемого в правой части (17). Выражение (17) определяет зависимость $y(\Delta x)$. Вводя переменные $p = y/(\nu - n)^2$; $t = K \Delta x$, где $K = (\partial \varepsilon_0 / \partial x) / B_n$ при $x = x_m$, приводим уравнение $\varepsilon'(\omega, \mathbf{k}) = 0$ к виду, аналогичному [6]:

$$\varphi\left(1/\sqrt{2p}\right) - 1 = \mp t. \tag{18}$$

Такая простая аппроксимация оказывается хорошим приближением при $|\nu - n| \leq 0,2$. Дисперсионные кривые $p(t)$ (18) показаны на рис. 1. Двухзначность функции $y(\Delta x)$ на некотором интервале приращений Δx связана с немонотонностью функции $\varphi(z)$, имеющей максимум $\varphi(z) \approx 1,285$ при $z \approx 1,502$. Отличие этих кривых от решения точного уравнения $\varepsilon'(x, y) = 0$ (16) иллюстрируется в [6]. Там же приведены параметр x_m и коэффициенты $K, B_n(x_m)$ в окрестности электронных giroгармоник, при $n - \nu = 0,01; 0,05; 0,1$ и $0,2$.

Циклотронное поглощение плазменных волн в области II при $\nu \simeq n$ определяется первым слагаемым в правой части (13): $\varepsilon''_{2c} = \varepsilon''_{c,n}$. Оно резко возрастает с увеличением y при удалении от границы области $y = 0$ (см. рис. 1). Столкновительное поглощение плазменных волн может быть найдено в приближении Батнагара—Гросса—Крука [15]. В пределе слабых столкновений $\nu_{ei} \ll |\omega - n\omega_{Be}|$ получаем [5]

$$\varepsilon''_{2s} = \frac{\nu_{ei} \omega_{pe}^2}{\omega_{Be} \omega_{Be}^2} \frac{1}{x} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \nu} - \frac{\Phi}{\nu} (1 + \Phi) \right]. \quad (19)$$

В окрестности электронной giroгармоники с номером n столкновительное поглощение оказывается значительно больше, чем в области I:

$$\varepsilon''_{2s} \simeq \frac{\nu_{ei} n}{\omega_{Be} \nu} \frac{B_n(x)}{|\nu - n|} \gg \varepsilon''_{1s} \simeq \frac{\nu_{ei}}{\omega}. \quad (20)$$

Здесь и далее нижним индексом 2 обозначены переменные, относящиеся к области II. Столкновительное поглощение плазменных волн в отличие от циклотронного сравнительно слабо зависит от Δx . Относительную величину циклотронного поглощения в окрестности электронных giroгармоник можно характеризовать с помощью параметра

$$\gamma = (\varepsilon''_{2c} / \varepsilon''_{2s}) \exp(z_n^2) / z_n \approx \sqrt{\pi} |\nu - n| \omega_{Be} / \nu_{ei}, \quad (21)$$

значения которого также приведены в [6].

Поток энергии плазменных волн (6) в области II вследствие больших значений $x \approx x_m$ и малых возмущений концентрации $\delta \ll 1$ принимает простой вид:

$$P_{\omega, k_{2\perp}}^{(i)} = -\frac{G_2^2}{\rho_{Be}^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(2\omega \varepsilon'' \tilde{N}_{\omega, k_{2\perp}}^{(i)} \right), \quad (22)$$

где

$$G_2^2 = \frac{\delta^2}{2} \left(\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial x} \right)^{-2} \Big|_{x_m}, \quad \varepsilon''_2 = \varepsilon''(\omega, \mathbf{k}_2).$$

Конкретизируем далее входящий в (1) электронный отклик $\mu(\omega, \mathbf{k}; -\omega', -\mathbf{k}')$ в различных случаях. Так, при взаимодействии двух волн из области I в случае близких частот ω, ω' (точнее, при $|\omega_0| \ll$

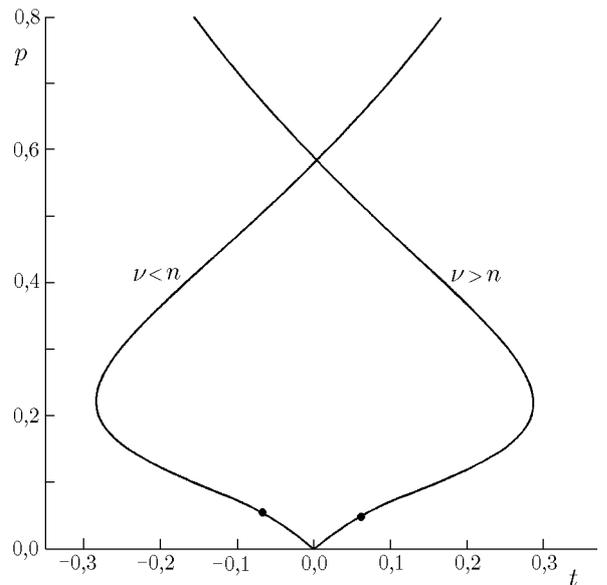


Рис. 1. Дисперсионные кривые $p(t)$ в области II в окрестности электронных giroгармоник $\nu \approx n$. Точками на кривых отмечена граница области $\varepsilon''_{2s} < \varepsilon''_{2c}$

$\ll k_{0\parallel} \sqrt{2T_e/m_e}$) получаем [13]

$$\mu(\omega, \mathbf{k}_1; -\omega', -\mathbf{k}'_1) = -\frac{e}{m_e} D_e^{-2} \left(\frac{k_{1\parallel} k'_{1\parallel}}{\omega^2} + \frac{\mathbf{k}_{1\perp} \mathbf{k}'_{1\perp}}{\omega^2 - \omega_{Be}^2} + i \frac{\omega_{Be}}{\omega} \frac{[\mathbf{k}'_{1\perp}, \mathbf{k}_{1\perp}]_h}{\omega^2 - \omega_{Be}^2} \right), \quad (23)$$

где $D_e = \sqrt{T_e/(4\pi e^2 N)}$ — дебаевский радиус электронов; ось h направлена вдоль поля \mathbf{B} . Учтено, что в области I выполняются условия $k_{1\perp}^2 \rho_{Be}^2 \ll 1$, $k_1^2 D_e^2 \ll 1$. Взаимодействие двух плазменных волн из разных областей приводит к отклику [13]

$$\begin{aligned} \mu(\omega, \mathbf{k}_1; -\omega', -\mathbf{k}'_2) &= \mu^*(\omega', \mathbf{k}'_2; -\omega, -\mathbf{k}_1) = \\ &= -\frac{e}{m_e} D_e^{-2} (1 + (k'_{2\perp})^2 D_e^2) \left(\frac{\mathbf{k}_{1\perp} \mathbf{k}'_{2\perp}}{\omega^2 - \omega_{Be}^2} + i \frac{\omega_{Be}}{\omega} \frac{[\mathbf{k}'_{2\perp}, \mathbf{k}_{1\perp}]_h}{\omega^2 - \omega_{Be}^2} \right). \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь учтены малость волнового числа k_1 и соотношения между компонентами волновых векторов: $k_{2\perp}^2 \approx x_m/\rho_{Be}^2 \gg k_{2\parallel}^2$, $k_{2\perp}^2 \gg k_1^2$. Наконец, взаимодействие двух плазменных волн с близкими частотами из области II в окрестности кратной электронной giroгармоники с номером n приводит к следующему отклику (см. Приложение):

$$\mu(\omega, \mathbf{k}_2; -\omega', -\mathbf{k}'_2) = \frac{e}{m_e} D_e^{-2} \frac{\exp(in\psi)}{(\omega - n\omega_{Be})(\omega' - n\omega_{Be})} R, \quad (25)$$

где

$$R = \int_0^\infty dt t \exp(-t^2/2) J_n(a) J_n(a') \{ i k_{2\perp} k'_{2\perp} \nu J_0(a_0) \sin \psi - n^2 k_{0\perp}^2 [J_0(a_0) + J_2(a_0)] / 2 \}, \quad (26)$$

$$a_0 = \frac{k_{0\perp} v_\perp}{\omega_{Be}} = (k_{0\perp} \rho_{Be}) t; \quad a = \frac{k_{2\perp} v_\perp}{\omega_{Be}} = (k_{2\perp} \rho_{Be}) t; \quad a' = \frac{k'_{2\perp} v_\perp}{\omega_{Be}} = (k'_{2\perp} \rho_{Be}) t;$$

$$k_{0\perp} = |\mathbf{k}_{2\perp} - \mathbf{k}'_{2\perp}|; \quad \psi = \psi_{\mathbf{k}_{2\perp}} - \psi_{\mathbf{k}'_{2\perp}}.$$

Здесь $J_m(x)$ — функция Бесселя первого рода m -го порядка, $\psi_{\mathbf{k}_{2\perp}}$ — угол, характеризующий направление вектора $\mathbf{k}_{2\perp}$ в азимутальной плоскости, и введена переменная интегрирования $t = v_\perp (T_e/m_e)^{-1/2}$. Рассматривается случай $\omega \simeq n\omega_{Be}$, $\omega' \simeq n\omega_{Be}$ в пределе малых продольных компонент $k_{2\parallel}$ и $k'_{2\parallel}$ волновых векторов.

Уравнение (1) совместно с выражениями (23)–(26) образуют полную систему, позволяющую описать возбуждение очень коротковолновых колебаний плазмы в добавочной области II с учётом индуцированного рассеяния волн на ионах и многократного рассеяния на мелкомасштабных неоднородностях. Решение этих уравнений существенно зависит от дальнейших приближений. Так, учитывая в первом (интегральном) слагаемом в правой части (1) только процессы перекачки плазменных волн из области I в область II (и обратно) вследствие индуцированного рассеяния на ионах, нетрудно перейти к сателлитному приближению [5, 6].³ Здесь мы также будем учитывать влияние индуцированного рассеяния на взаимодействие плазменных волн в каждой из областей, воспользовавшись для этого дифференциальным приближением, предложенным в [10, 11]. Это приближение справедливо при достаточно

³ При этом следует иметь в виду, что ядро (27) подынтегрального выражения (1) имеет резкие экстремумы при $z_i \simeq 1,3$. В обозначениях [5, 6] это ядро равно $(T_e/T_i) D_e^2 / F(z_i)$.

плавном изменении частотного спектра плазменных волн в сравнении с ядром подынтегрального выражения в (1)⁴

$$\frac{\delta \varepsilon_i''(\omega_0, \mathbf{k}_0)}{k_0^2 |\varepsilon(\omega_0, \mathbf{k}_0)|^2} = \frac{D_e^2}{(1 + k_0^2 D_e^2)^2} \tilde{F}, \quad (27)$$

где

$$\tilde{F}(k_0^2 D_e^2, T_e/T_i, z_i) = \frac{(1 + k_0^2 D_e^2)^2 (T_e/T_i) \sqrt{\pi} z_i \exp(-z_i^2)}{\{1 + k_0^2 D_e^2 + (T_e/T_i) [1 - \varphi(z_i)]\}^2 + \{(T_e/T_i) \sqrt{\pi} z_i \exp(-z_i^2)\}^2},$$

$z_i = \omega_0 / (k_0 \sqrt{2T_i/m_i})$; T_i и m_i — температура и масса ионов с максвелловским распределением по скоростям. В указанном приближении нечётное по частоте биений $\omega_0 = \omega - \omega'$ выражение (27) заменяется на соответствующим образом нормированную производную от дельта-функции $\delta(\omega - \omega')$:

$$\tilde{F}(k_0^2 D_e^2, T_e/T_i, z_i) = -\tilde{F}_1(2k_0^2 T_i/m_i) \frac{d}{d\omega} \delta(\omega - \omega'), \quad (28)$$

где нормировочный коэффициент

$$\tilde{F}_1(k_0^2 D_e^2, T_e/T_i) = 2 \int_0^\infty \tilde{F}(k_0^2 D_e^2, T_e/T_i, z_i) z_i dz_i = (T_e/T_i) \pi/2. \quad (29)$$

Здесь учтено, что коэффициент \tilde{F}_1 практически не зависит от параметра $k_0^2 D_e^2$ и поэтому может считаться равным своему предельному значению при $k_0^2 D_e^2 \rightarrow \infty$. Будем считать также, что спектр $\tilde{N}_{\omega, k_\perp}^{(i)}$ не зависит от знака компоненты $k_\parallel^{(i)}$,⁵ и перейдём к удвоенным значениям спектральной плотности интенсивности плазменных волн и энергетических потерь, полагая

$$2\tilde{N}_{\omega, k_\perp}^{(i)} \rightarrow \tilde{N}_{\omega, k_\perp}^{(i)}, \quad 2q_{\omega, k_\perp}^{(i)} \rightarrow q_{\omega, k_\perp}^{(i)} \quad (30)$$

и учитывая при суммировании по индексу i только положительные значения $k_\parallel^{(i)}$.

Подставляя (23)–(28) в (1) и учитывая (30), получаем систему двух уравнений для спектра плазменных волн в областях I и II соответственно⁶:

$$\begin{aligned} \tilde{N}_{\omega, k_{1\perp}}^{(i)} \left\{ 2\varepsilon_1'' - \varkappa \sum_j \int d^2 k'_{1\perp} \frac{k_1^2 + k_1'^2}{k_1^2 k_1'^2} \rho_{Be}^2 \left[2(k_{1\parallel} k'_{1\parallel})^2 \left(\frac{\nu^2 - 1}{\nu^2} \right)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + (k_{1\perp} k'_{1\perp})^2 \frac{\nu^2 + 1}{\nu^2} \right] \frac{\partial \tilde{N}_{\omega, k'_{1\perp}}^{(j)}}{\partial \omega} - \varkappa x_m \frac{k_{1\perp}^2}{k_1^2} \frac{\nu^2 + 1}{\nu^2} \frac{d\tilde{N}_{2,\omega}}{d\omega} \right\} + \\ + \frac{\partial}{\partial k_{1\perp}^2} \frac{P_{\omega, k_{1\perp}}^{(i)}}{\omega} = \frac{Q_0 \delta_{i1}}{\pi \omega_t} \delta(k_{1\perp}^2 - k_{1c}^2) \delta(\omega - \omega_t), \quad (31) \end{aligned}$$

⁴ Здесь учтено, что при описании взаимодействия высокочастотных плазменных волн ионы можно считать незамагниченными, а вклад электронов в продольную диэлектрическую проницаемость биений равен $\delta \varepsilon_e(\omega_0, \mathbf{k}_0) = (k_0 D_e)^{-2}$.

⁵ Такое приближение всегда выполняется в области II (а также в области I в рассматриваемом ниже случае сильной диффузии плазменных волн по спектру волновых векторов) в случае чётного по k_\parallel источника возбуждения плазменных волн $Q_0^{(i)}$ и вследствие малости компонент $k_\parallel^{(i)} = \pm k_t$ в области возбуждения плазменных волн на вытянутых вдоль магнитного поля неоднородностях.

⁶ При вычислениях удобно воспользоваться следующими соотношениями, справедливыми вблизи уровня ВГР: $(e/m_e)^2 D_e^{-2} / (\omega^2 - \omega_{Be}^2)^2 = (4\pi N_R T_e)^{-1}$; $D_e^2 = \rho_{Be}^2 / (\nu^2 - 1)$.

$$\tilde{N}_{\omega, k_{2\perp}}^{(i)} \left\{ 2\varepsilon_2'' - \alpha x_m \sum_j \int d^2 k'_{1\perp} \frac{k_{1\perp}'^2}{k_1'^2} \frac{\nu^2 + 1}{\nu^2} \frac{\partial \tilde{N}_{\omega, k'_{1\perp}}^{(j)}}{\partial \omega} - \alpha D_{22} \frac{d\tilde{N}_{2,\omega}}{d\omega} \right\} + \frac{\partial}{\partial k_{2\perp}^2} \frac{P_{\omega, k_{2\perp}}^{(i)}}{\omega} = 0, \quad (32)$$

где

$$\alpha = \frac{\tilde{F}_1}{N_R T_e} \left(\frac{2T_i}{m_i} \rho_{Be}^{-2} \right), \quad \delta_{i1} = \begin{cases} 1, & i = 1; \\ 0, & i = 2, \end{cases}$$

$$D_{22} = \frac{(\nu^2 - 1)^2}{(\nu - n)^4} \frac{\rho_{Be}^4}{x_m} \frac{4}{\pi} \int_0^\pi d\psi \frac{(1 - \cos \psi) |R(\psi, k_{2\perp} = k'_{2\perp} = \sqrt{x_m}/\rho_{Be})|^2}{[1 + 2x_m(1 - \cos \psi)/(\nu^2 - 1)]^2}, \quad (33)$$

$\tilde{N}_{2,\omega} = \sum_i \int \tilde{N}_{\omega, k_{2\perp}}^{(i)} d^2 k_{2\perp}$ — частотный спектр плазменных волн в области II. Входящий в (33) коэффициент R определён в (26). Спектр волн и неоднородностей в пространстве волновых векторов считается аксиально-симметричным, источник Q_0 в условиях (30) определяется как падающей, так и отражённой от ионосферы радиоволной. При выводе мы пренебрегли малым изменением волнового числа $k_{2\perp}$ в области II, полагая $k_{2\perp} = k'_{2\perp} = \sqrt{x_m}/\rho_{Be}$. Частотный спектр плазменных волн считается узким в сравнении с расстройкой $|\omega - n\omega_{Be}|$.

Дальнейшее упрощение уравнений (31), (32) происходит в случае сильной диффузии плазменных волн по спектру волновых чисел в области I в результате многократного рассеяния на неоднородностях. При этом форма спектра $\tilde{N}_{\omega, k_{1\perp}}^{(i)}$ в зависимости от $k_{1\perp}$ с точностью до постоянного множителя определяется путём решения однородного уравнения

$$P_{\omega, k_{1\perp}}^{(i)} = 0, \quad (34)$$

а уравнение для частотного спектра плазменных волн в области I $\tilde{N}_{1,\omega} = \sum_i \int \tilde{N}_{\omega, k_{1\perp}}^{(i)} d^2 k_{1\perp}$ (т. е. для неизвестной постоянной) может быть получено путём почленного интегрирования (31) по $k_{1\perp}$ и суммирования по верхнему индексу i , т. е. применения к (31) операции

$$\sum_i \int d^2 k_{1\perp}. \quad (35)$$

Здесь следует учитывать, что операция (35) с учётом граничных условий обращает в нуль производную от потока энергии $\partial P_{\omega, k_{1\perp}}^{(i)} / \partial k_{1\perp}^2$ в уравнении (31). Такой подход близок к использованному в [1].

При дальнейших расчётах удобно перейти от переменной k_{\perp} к новой независимой переменной $u \propto k_{\parallel}$:

$$u = \sqrt{12y} \equiv 1 \mp \sqrt{1 - 12x}; \quad u \in [0, 2], \quad (36)$$

связанной с безразмерными переменными x, y (9) соотношениями

$$x + y = u/6; \quad x = (u/6)(1 - u/2); \quad y = u^2/12. \quad (37)$$

Спектральная плотность плазменных волн $\tilde{N}_{\omega, k_{1\perp}}^{(i)}$ и поток энергии $P_{\omega, k_{1\perp}}^{(i)}$ выражаются через соответствующие величины в переменных ω, u с помощью соотношений

$$\tilde{N}_{\omega, k_{1\perp}}^{(i)} = \frac{1}{\pi} \left| \frac{dk_{1\perp}^2}{du} \right|^{-1} \tilde{N}_{\omega, u}, \quad \frac{dx}{du} = \frac{(1-u)}{6}; \quad P_{\omega, k_{1\perp}}^{(i)} = \begin{cases} P_{\omega, u}/\pi, & dx/dy > 0; \\ -P_{\omega, u}/\pi, & dx/dy < 0. \end{cases} \quad (38)$$

Отметим, что в новых переменных обозначения спектральной плотности и потока энергии плазменных волн не имеют верхнего индекса i , поскольку зависимость x от y в рассматриваемом случае однозначна. В случае достаточно узкого спектра плазменных волн можно считать, что все коэффициенты и

функции в уравнениях (15), (31) и (22), (32) не зависят от ω и определены при $\omega = \omega_t$; $\nu = \nu_t \equiv \omega_t/\omega_{Be}$. В этом случае спектральную функцию $\tilde{N}_{\omega,u}$ можно представить в виде произведения двух независимых множителей:

$$\tilde{N}_{\omega,u} = \tilde{N}_{1,\omega} \tilde{N}_u, \quad \int_0^2 \tilde{N}_u du = 1. \quad (39)$$

Первый множитель, $\tilde{N}_{1,\omega}$, описывает частотный спектр плазменных волн в области I, а второй, \tilde{N}_u , характеризует распределение плазменных волн в пространстве волновых векторов. Согласно (38) в условиях сильного рассеяния плазменных волн на неоднородностях \tilde{N}_u удовлетворяет уравнениям (15), (34) при замене функции $q_{\omega,k_{1\perp}}^{(i)}$ на $\tilde{N}_u \varepsilon_1'' |1-u|^{-1}$. Решение этих уравнений даёт

$$\tilde{N}_u = \frac{C}{\varepsilon_1''(u)} |1-u| u^2 \exp(-2u) \exp\left(\frac{1}{3} \int_0^u \frac{1-u'}{\varepsilon_1''} \frac{\partial \varepsilon_1''}{\partial x} du'\right), \quad (40)$$

где константа C находится из нормировочного условия в (39). Используя (38), (39) и выполняя в (31) усреднение (35), нетрудно получить уравнение для частотного спектра плазменных волн в области I⁷:

$$\tilde{N}_{1,\omega} \left\{ 2\overline{\varepsilon_1''} - \varkappa \left[D_{11} \frac{d\tilde{N}_{1,\omega}}{d\omega} + D_{12} \frac{d\tilde{N}_{2,\omega}}{d\omega} \right] \right\} = \frac{Q_0}{\omega_t} \delta(\omega - \omega_t), \quad (41)$$

где

$$\overline{\varepsilon_1''} = \int_0^2 \varepsilon_1'' \tilde{N}_u du, \quad D_{11} = d_{11}^{(1)} \left(\frac{\nu^2 - 1}{\nu^2} \right)^2 + d_{11}^{(2)} \frac{\nu^2 + 1}{\nu^2}, \quad D_{12} = d_{12} \frac{\nu^2 + 1}{\nu^2} x_m, \quad (42)$$

а коэффициенты d_{ij} выражаются через соответствующие величины, усреднённые по нормированному спектру плазменных волн \tilde{N}_u (40):

$$\begin{aligned} d_{11}^{(1)} &= \int_0^2 \int_0^2 du du' \tilde{N}_u \tilde{N}_{u'} \left[2\rho_{Be}^2 \frac{k_1^2 + k_1'^2}{k_1^2 k_1'^2} (k_{1\parallel} k_{1\parallel}')^2 \right] = \frac{J_1 J_2}{6}, \\ d_{11}^{(2)} &= \int_0^2 \int_0^2 du du' \tilde{N}_u \tilde{N}_{u'} \left[\rho_{Be}^2 \frac{k_1^2 + k_1'^2}{k_1^2 k_1'^2} (k_{1\perp} k_{1\perp}')^2 \right] = \frac{2J_1 - J_2 - J_1^2}{6} + \frac{d_{11}^{(1)}}{2}, \\ d_{12} &= \int_0^2 du \tilde{N}_u \frac{k_{1\perp}^2}{k_1^2} = 1 - \frac{J_1}{2}, \quad J_1 = \int_0^2 u \tilde{N}_u du, \quad J_2 = \int_0^2 u^2 \tilde{N}_u du. \end{aligned} \quad (43)$$

Уравнения (22), (32) с помощью подстановки (38), (39) можно привести к виду

$$2\varepsilon_2'' \tilde{N}_{\omega,k_{2\perp}}^{(i)} - 2\overline{\varepsilon_2''} \tilde{N}_{\omega,k_{2\perp}}^{(i)} - \frac{\partial}{\partial x} \left[G_2^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(2\varepsilon_2'' \tilde{N}_{\omega,k_{2\perp}}^{(i)} \right) \right] = 0, \quad (44)$$

⁷ Принятое дифференциальное приближение справедливо в случае достаточно плавного изменения частотного спектра плазменных волн на интервале $\Delta\omega = (2T_i/m_i)^{1/2} \rho_{Be}^{-1}$, который определяет «элементарный» шаг по частоте при индуцированном рассеянии волн на ионах. Это позволяет оценить пороговую интенсивность плазменных волн в области I, необходимую для их перекачки по частотному спектру: $\langle |\mathbf{E}_1|^2 \rangle \geq 4\pi \overline{\varepsilon_1''} N_R T_e / (\tilde{F}_1 D_{11})$, где $\overline{\varepsilon_1''} \sim \nu_{ei}/\omega$.

где

$$2\overline{\varepsilon_2''} = \varkappa \left[D_{21} \frac{d\tilde{N}_{1,\omega}}{d\omega} + D_{22} \frac{d\tilde{N}_{2,\omega}}{d\omega} \right]. \tag{45}$$

Здесь $\overline{\varepsilon_2''}$ — константа, равная усреднённому по спектру волновых векторов в области II значению $\varepsilon_2''(\omega, \mathbf{k}_2)$, $x = k_{2\perp}^2 \rho_{Be}^2$, а коэффициент $D_{21} = D_{12}$ (см. (42)). Согласно вышесказанному решение уравнения (44) должно удовлетворять условию $\partial(\varepsilon_2'' \tilde{N}_{\omega, k_{2\perp}}^{(1)}) / \partial x = 0$ на границе области II $x = x_m$, $y^{(1)} = 0$ и условию убывания функции $\varepsilon_2'' \tilde{N}_{\omega, k_{2\perp}}^{(i)}$ в области сильного циклотронного поглощения, т. е. при достаточно больших y . Решение однородного уравнения (44) с нулевыми граничными условиями в случае «не пустой» области II ($\tilde{N}_{\omega, k_{2\perp}}^{(i)} \neq 0$) позволяет с точностью до постоянного множителя рассчитать форму спектра плазменных волн в области II в зависимости от волнового числа $k_{2\perp}$ (или $k_{2\parallel}$), а также найти среднее значение $\overline{\varepsilon_2''}$. В случае узкого частотного спектра плазменных волн аналогично (39), (42) имеем

$$\tilde{N}_{\omega, k_{2\perp}}^{(i)} = \tilde{N}_{2,\omega} \tilde{N}_{k_{2\perp}}^{(i)}, \quad \sum_i \int \tilde{N}_{k_{2\perp}}^{(i)} d^2 k_{2\perp} = 1; \tag{46}$$

$$\overline{\varepsilon_2''} = \sum_i \int \varepsilon_2'' \tilde{N}_{k_{2\perp}}^{(i)} d^2 k_{2\perp}. \tag{47}$$

В этом случае уравнение (44) определяет спектр $\tilde{N}_{k_{2\perp}}^{(i)}$. В окрестности кратных электронных гирогармоник $\omega \simeq n\omega_{Be}$ в случае максвелловской плазмы решение этого уравнения рассматривалось в [6]. При этом в расчётах использовалась линейная аппроксимация функции $y(x)$, справедливая вблизи границы области II $x = x_m$, $y^{(1)} = 0$ (см. (17)), и учитывалось изменение параметра z_n , который определяет величину циклотронного поглощения плазменных волн $\varepsilon_{2c}'' = \varepsilon_{c,n}''$ (14). Все остальные коэффициенты и функции считались постоянными и определялись в точке $x = x_m$, $y = 0$. В указанном приближении уравнение (44) и граничные условия к нему приводятся к виду [6]

$$\left[1 - \frac{c_2}{1 + \gamma \sqrt{b/\eta} \exp(-b/\eta)} \right] \tilde{q} - \frac{d^2 \tilde{q}}{d\eta^2} = 0, \tag{48}$$

$$\left. \frac{d\tilde{q}}{d\eta} \right|_{\eta=0}; \quad \tilde{q} \xrightarrow{\eta \rightarrow \infty} 0,$$

где $\tilde{q}(\eta) = \beta \varepsilon_2'' \tilde{N}_{k_{2\perp}}$ — вспомогательная функция, пропорциональная спектральной плотности энергетических потерь в области II, $\tilde{N}_{k_{2\perp}}$ — нормированный спектр плазменных волн по переменной $k_{2\perp}$ в данном приближении, β — нормировочный коэффициент, и введены обозначения

$$c_2 = \overline{\varepsilon_2''} / \varepsilon_{2s}''; \quad b = B_n / (\sqrt{2} \delta); \quad \eta = \sqrt{2} (\partial \varepsilon_0 / \partial x) |\Delta x| / \delta \equiv b [2y / (\nu - n)^2]. \tag{49}$$

Входящие в (48), (49) параметры ε_{2s}'' , γ определены в (19)–(21). Сделанные упрощения связаны с резким ростом циклотронного поглощения

$$\varepsilon_{2c}''(\eta) = \varepsilon_{2s}'' \gamma \sqrt{b/\eta} \exp(-b/\eta) \tag{50}$$

при удалении от границы области II $\eta = 0$. Примеры расчётов спектральной функции $\tilde{q}(\eta)$ приведены на рис. 2. Величина $\overline{\varepsilon_2''}$ в использованном приближении пропорциональна коэффициенту c_2 , который также находится в результате решения уравнения (48):

$$\overline{\varepsilon_2''} = \varepsilon_{2s}''(x_m) c_2, \quad c_2 > 1. \tag{51}$$

Этот коэффициент имеет простой физический смысл. Он определяет относительную долю s_2 циклотронного поглощения в полном потоке энергии плазменных волн, поглощаемых в области II:

$$s_2 = (c_2 - 1)/c_2. \quad (52)$$

Зависимость коэффициента c_2 от параметра b для $\gamma = 150; 1\ 100; 3\ 000$ приведена в работе [6]. Аппроксимация c_2 в промежуточных точках может быть получена с помощью приближённого выражения

$$c_2 - 1 \approx \ln \gamma \quad (53)$$

или более грубой оценки $c_2 - 1 \approx (\ln \gamma)/b$. Отметим также полезное соотношение

$$2\overline{\varepsilon_1''} \tilde{N}_{1,\omega} + 2\overline{\varepsilon_2''} \tilde{N}_{2,\omega} - \frac{\varkappa}{2} \frac{d}{d\omega} \left[D_{11} \tilde{N}_{1,\omega}^2 + 2D_{12} \tilde{N}_{1,\omega} \tilde{N}_{2,\omega} + D_{22} \tilde{N}_{2,\omega}^2 \right] = \frac{Q_0}{\omega_t} \delta(\omega - \omega_t), \quad (54)$$

которое следует непосредственно из (41), (44), (45).

Таким образом, многократное рассеяние плазменных волн на вытянутых вдоль магнитного поля неоднородностях определяет спектры волн в пространстве волновых векторов $\tilde{N}_{k_{1\perp}}$ и $\tilde{N}_{k_{2\perp}}$, а индуцированное рассеяние на ионах — их частотные спектры $\tilde{N}_{1,\omega}$ и $\tilde{N}_{2,\omega}$. Последние описываются уравнениями (41), (45), в которых учитываются процессы перекачки плазменных волн из одной области в другую и внутри каждой из них. При этом коэффициенты D_{11} , D_{22} характеризуют скорость расплывания плазменных волн по частоте в областях I и II соответственно, а коэффициент $D_{12} = D_{21}$ — скорость перекачки волн из области I в область II и обратно. При отыскании частотных спектров $\tilde{N}_{1,\omega}$, $\tilde{N}_{2,\omega}$ следует учитывать, что индуцированное рассеяние приводит к понижению частоты плазменных волн. Поэтому при возбуждении волн на заданной частоте ω_t в области $\omega > \omega_t$ плазменные волны отсутствуют: $\tilde{N}_{1,\omega} = 0$, $\tilde{N}_{2,\omega} = 0$. В области $\omega < \omega_t$ решение уравнений (41), (44), (45) даёт

$$\varkappa \frac{d\tilde{N}_{1,\omega}}{d\omega} = X_1 \equiv \frac{2\overline{\varepsilon_1''} D_{22} - 2\overline{\varepsilon_2''} D_{12}}{D_{11} D_{22} - D_{12}^2}, \quad (55)$$

$$\varkappa \frac{d\tilde{N}_{2,\omega}}{d\omega} = X_2 \equiv \frac{2\overline{\varepsilon_2''} D_{11} - 2\overline{\varepsilon_1''} D_{12}}{D_{11} D_{22} - D_{12}^2} \quad (56)$$

в случае $\tilde{N}_{1,\omega} \neq 0$; $\tilde{N}_{2,\omega} \neq 0$;

$$\varkappa \frac{d\tilde{N}_{1,\omega}}{d\omega} = X_1^{(0)} \equiv 2\overline{\varepsilon_1''}/D_{11} \quad (57)$$

в случае $\tilde{N}_{2,\omega} = 0$; $X_2 > 0$;

$$\varkappa \frac{d\tilde{N}_{2,\omega}}{d\omega} = X_2^{(0)} \equiv 2\overline{\varepsilon_2''}/D_{22} \quad (58)$$

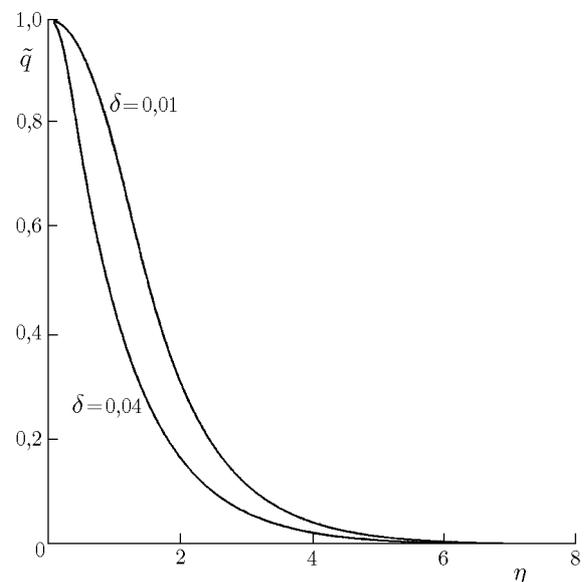


Рис. 2. Вид спектральной функции $\tilde{q}(\eta) = \beta \varepsilon_2'' \tilde{N}_{k_{2\perp}}$ в области II при $\nu = 3,9$; $\gamma = 2\ 860$; $b\delta = 0,118$. Нормировочный коэффициент β выбран из условия $\tilde{q}(\eta = 0) = 1$

в случае $\tilde{N}_{1,\omega} = 0; X_1 > 0$, где параметр \varkappa определён после (31), (32). В рассматриваемом случае узкого частотного спектра плазменных волн можно считать, что правые части выражений (55)–(58) не зависят от частоты: $\omega \approx \omega_t$. В этом случае формулы (55)–(58) описывают линейное изменение спектров $\tilde{N}_{1,\omega}$ и $\tilde{N}_{2,\omega}$ с увеличением расстройки $\omega_t - \omega$. При этом, по крайней мере, одна из производных X_1, X_2 (55), (56), а также величины $X_1^{(0)}, X_2^{(0)}$ положительны, что соответствует уменьшению $\tilde{N}_{1,\omega}, \tilde{N}_{2,\omega}$ с уменьшением частоты ω .

Граничные условия для уравнений (55)–(58) при $\omega = \omega_t$ имеют вид

$$\tilde{N}_{1,\omega_t} = \left[\frac{2}{\varkappa D_{11}} \frac{Q_0}{\omega_t} \right]^{1/2}, \quad \tilde{N}_{2,\omega_t} = 0. \tag{59}$$

Это означает, что плазменные волны первоначально возбуждаются мощной радиоволной в области I, а затем уже перекачиваются по спектру в соответствии с (55)–(58). При этом в зависимости от знака X_2 (56) могут реализоваться два случая.

В случае $X_2 > 0$ плазменные волны в области II не возбуждаются и релаксируют в области I в соответствии с (57). В противоположном случае $X_2 < 0$ ($X_1 > 0$) плазменные волны первоначально перекачиваются из области I в область II, а затем уже релаксируют в этой области в соответствии с (58), как это схематически иллюстрируется на рис. 3. Угол $\alpha_{2,ex}$ на этом рисунке характеризует наклон частотного спектра плазменных волн $\tilde{N}_{2,\omega}$ на стадии его возрастания (возбуждения), а угол $\alpha_{2,rel}$ — на стадии убывания (релаксации). Эти же индексы используются для обозначения соответствующих частотных интервалов $\Delta\omega$ (см. далее (63), (65)). Естественно, что в случае $X_2 < 0$ полная (интегральная) интенсивность плазменных волн в области I, равная $\tilde{N}_1 = \int \tilde{N}_{1,\omega} d\omega$, может оказаться существенно меньше, чем при $X_2 > 0$.

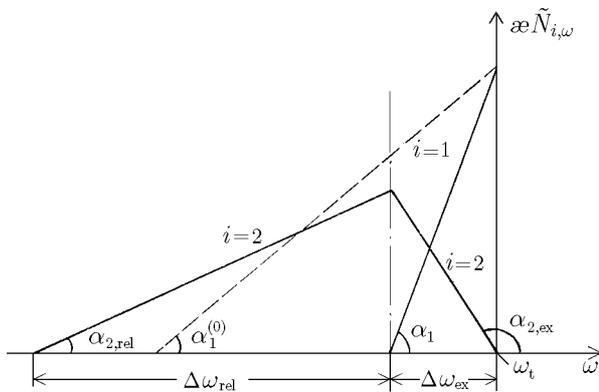


Рис. 3. Частотный спектр плазменных волн $\varkappa \tilde{N}_{i,\omega}$ ($i = 1; 2$) в областях I и II в случае возбуждения добавочной области (при $X_2 < 0$). Штрихом показан спектр $\varkappa \tilde{N}_{1,\omega}$ в области I в случае $\tilde{N}_{2,\omega} = 0$ (при $X_2 > 0$); $\text{tg } \alpha_1 = X_1$; $\text{tg } \alpha_{2,ex} = X_2$; $\text{tg } \alpha_{2,rel} = X_2^{(0)}$; $\text{tg } \alpha_1^{(0)} = X_1^{(0)}$

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЁТОВ

Расчёты показывают, что в случае максвелловской плазмы в окрестности электронных гирогармоник с номером $n \geq 5$ коротковолновые плазменные колебания в добавочной области II не возбуждаются. Чтобы убедиться в этом, следует учесть, что в высокочастотном случае $\nu \gtrsim 5$ циклотронное поглощение плазменных волн мало: $\varepsilon''_{1c} < \varepsilon''_{1s}$, а столкновительное поглощение $\varepsilon''_{1s} \approx \nu_{ei}/\omega$ можно считать постоянным во всей области I (см. (8), (10)). При $\varepsilon''_1 = \text{const}$ спектральное распределение плазменных колебаний в пространстве волновых векторов (38)–(40) принимает вид (см. [6])

$$\tilde{N}_u = \tilde{N}_u^{(0)} \equiv 13,08 |1 - u|^2 \exp(-2u). \tag{60}$$

Используя (60), нетрудно рассчитать коэффициенты (43): $d_{11}^{(1)} \approx 0,379$; $d_{11}^{(2)} \approx 0,0393$; $d_{12} \approx 0,385$, и найти коэффициенты (42), входящие в определение производной X_2 (56). С точностью до малых

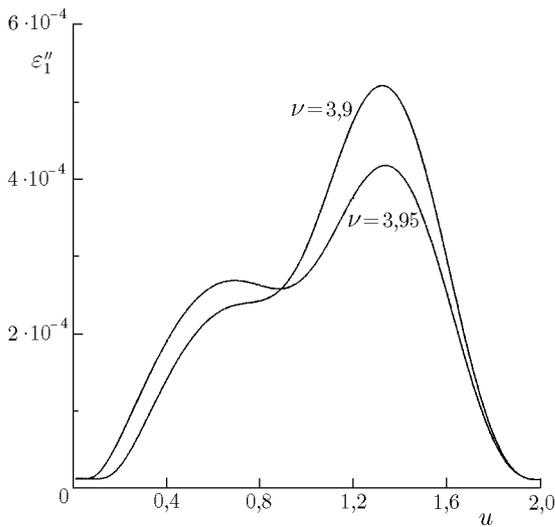


Рис. 4. Мнимая часть продольной диэлектрической проницаемости $\varepsilon_1''(u)$ в области I вблизи уровня ВГР

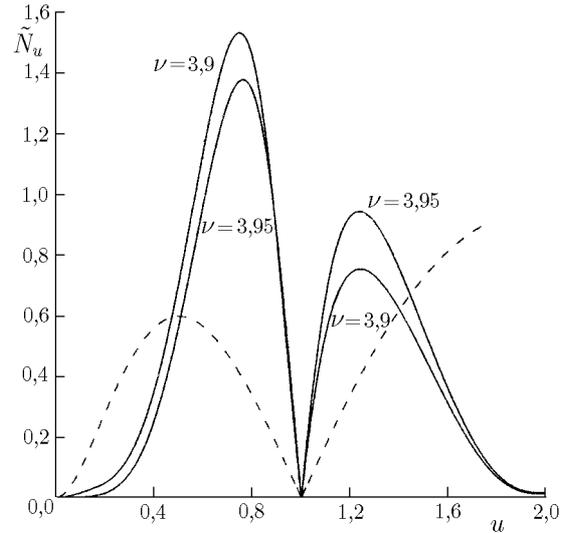


Рис. 5. Спектральная функция \tilde{N}_u в области I. Штриховой линией показан график функции $\tilde{N}_u^{(0)}$, соответствующей высокочастотному пределу $\varepsilon_1'' = \text{const}$

слагаемых порядка $1/\nu_t^2$ получаем

$$D_{11} = d_{11}^{(1)} + d_{11}^{(2)} \approx 0,418; \quad D_{12} = d_{12}x_m \approx 0,385x_m; \quad \overline{\varepsilon_1''} \approx \nu_{ei}/\omega. \quad (61)$$

Коэффициент D_{22} (26), (33), определяющий скорость расплывания плазменных волн по частоте в области II в окрестности электронных гирогармоник, как правило, является большим. Он возрастает с уменьшением расстройки $|\nu - n|$, резко растёт при изменении знака расстройки с отрицательного ($\nu < n$) на положительный ($\nu > n$) и увеличивается с ростом номера гирогармоники n (в частности, при $\nu = 4,9$ и $4,95$ коэффициент $D_{22} \approx 4,52$ и $6,81$ соответственно). Важно также, что согласно (20) в рассматриваемом случае ($\varepsilon_{1c}'' \ll \varepsilon_{1s}''; \nu \approx n$) мнимая часть продольной диэлектрической проницаемости в области II оказывается значительно больше, чем в области I: $\overline{\varepsilon_2''} \gg \overline{\varepsilon_1''}$. Учитывая эти свойства, нетрудно убедиться, что в области высоких частот ($\nu \approx \nu_t \gtrsim 5$) при $x_m \sim 1$ (см. [6]) как числитель, так и знаменатель выражения (56) оказываются положительными. Это доказывает сделанное утверждение об отсутствии возбуждения плазменных волн в области II вблизи электронных гирогармоник с высокими номерами. Однако в окрестности 4-й гирогармоники плазменные волны в области II могут возбуждаться.

Особенность 4-й гирогармоники заключается в том, что в её окрестности коэффициент D_{22} уменьшается (так, при $\nu = 3,9$ коэффициент $D_{22} \approx 0,53$), а циклотронное поглощение плазменных волн в области I растёт и становится гораздо больше столкновительного: $\varepsilon_{1c}'' \gg \varepsilon_{1s}''$. Зависимость мнимой части продольной диэлектрической проницаемости $\varepsilon_1'' = \varepsilon_{1s}'' + \varepsilon_{1c}''$ от переменной $u = \sqrt{12} k_{\parallel} \rho_{Be}$ в окрестности 4-й электронной гирогармоники (при $\nu = 3,9$ и $3,95$) показана на рис. 4. Расчёт ε_{1c}'' проводился согласно (13), (14) с учётом упрощения при $x \ll 1$. Оказалось, что величина ε_{1c}'' практически при всех u существенно превышает ε_{1s}'' , причём циклотронное поглощение при 3-м гирорезонансе в области максимума ε_{1c}'' оказывается значительно больше, чем при 4-м ($\varepsilon_{c,3}'' \gg \varepsilon_{c,4}''$).

Усиление циклотронного поглощения, в свою очередь, приводит к существенному перераспределению плазменных волн в пространстве волновых векторов, т. е. к изменению спектра \tilde{N}_u (40). Зависимость $\tilde{N}_u(u)$ показана на рис. 5 при $\nu = 3,9$ и $3,95$ (см. рис. 4), а также в пределе слабого циклотронного

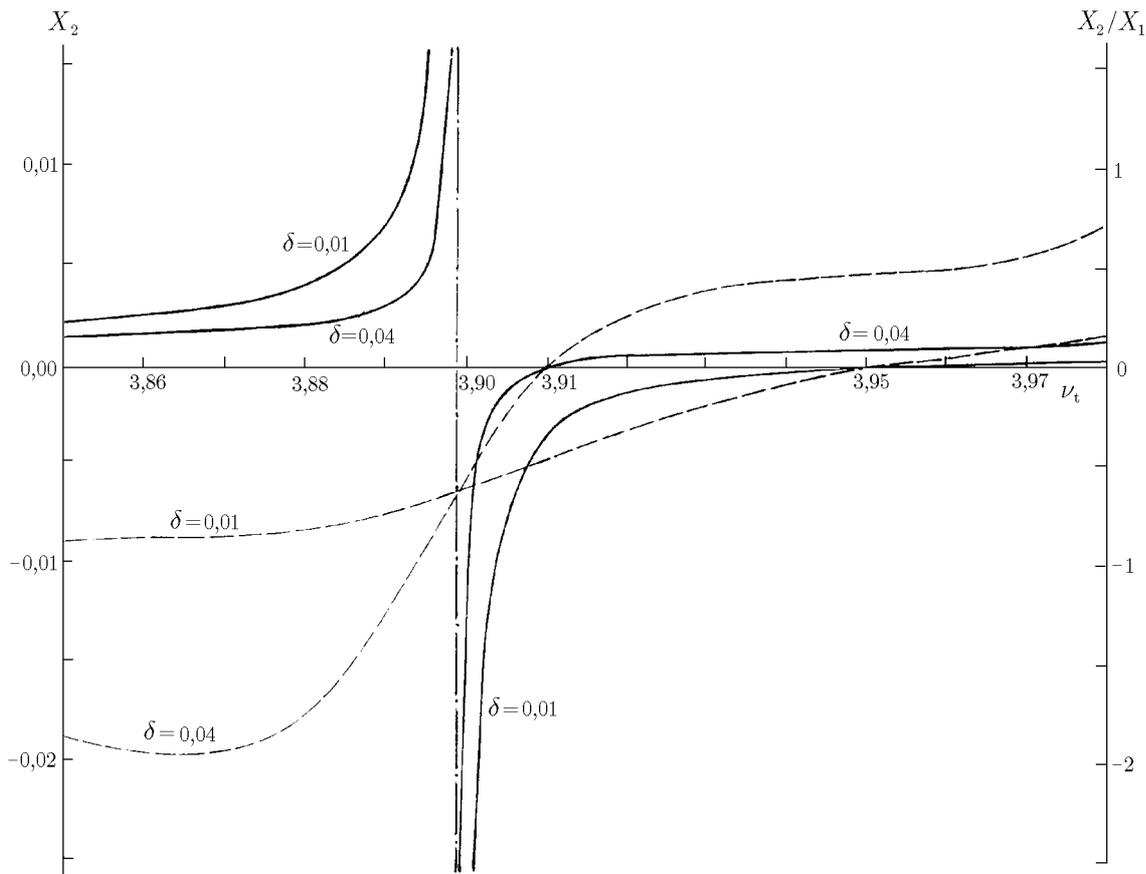


Рис. 6. Поведение параметра X_2 в интервале частот ν_t , расположенном вблизи, но ниже 4-й гирогармоники электронов. Штриховыми линиями показано отношение X_2/X_1 . Штрих-пунктиром отмечено положение полюсов X_1, X_2 при $\nu_t = 4 - \Delta_\infty \approx 3,9$

поглощения (60) (обращение в нуль спектральной функции \tilde{N}_u (40) в точке $u = 1$ связано с кинематическим фактором $dx/dy = 0$ в этой точке). Согласно рис. 5 в окрестности четвёртой гирогармоники спектр плазменных волн смещается в область малых u . Это приводит к уменьшению коэффициента D_{11} , описывающего взаимодействие волн в области I, и к некоторому увеличению коэффициента D_{12} , ответственного за перекачку волн из одной области в другую (при $\nu = 3,9$ имеем $D_{11} \approx 0,218$; $D_{12} \approx 0,570x_m \approx 0,336$).

Другим важным следствием роста циклотронного поглощения является значительное увеличение среднего значения $\overline{\varepsilon_1''}$ (42) в сравнении с высокочастотным случаем, когда $\overline{\varepsilon_1''} \approx \nu_{ei}/\omega$ (при $\nu = 3,9$; $\delta = 10^{-2}$ величина $2\overline{\varepsilon_1''} \approx 6,0 \cdot 10^{-4}$ превышает $2\overline{\varepsilon_2''} \approx 3,23 \cdot 10^{-4}$). Резкий рост ε_{1c}'' и уменьшение коэффициента D_{22} приводит к тому, что числитель и знаменатель выражения (56), монотонно убывая при удалении от 4-й гирогармоники (в сторону меньших частот), меняют знак (становятся отрицательными) при сравнительно малых отстройках от неё. Так, знаменатель (56) обращается в нуль в точке $\nu = 4 - \Delta_\infty$, где $\Delta_\infty \approx 0,1$. Точка обращения в нуль числителя (56) $\nu = 4 - \Delta_0$ зависит от амплитуды мелкомасштабных неоднородностей $\delta = \sqrt{\langle |\delta N|^2 \rangle} / N_R$, т. к. от этого параметра зависит среднее значение $\overline{\varepsilon_2''}$ (51). В частности, $\Delta_0 \approx 5 \cdot 10^{-2}$ при $\delta = 10^{-2}$ и $\Delta_0 \approx 9 \cdot 10^{-2}$ при $\delta = 4 \cdot 10^{-2}$. Это приводит к появлению области частот

$$4 - \Delta_\infty < \nu_t < 4 - \Delta_0 \quad (\text{при } \Delta_0 < \Delta_\infty), \tag{62}$$

в которой происходит перекачка плазменных волн из области I в область II, как это показано на рис. 3. Здесь учтено, что частота ω_t мощной радиоволны близка к частоте возбуждаемых плазменных волн.

Поведение параметра X_2 и отношения X_2/X_1 в некоторой области частот $\nu_t < 4$, включающей в себя интервал (62), показано на рис. 6. Параметры X_1 , X_2 (55), (56) определяют наклон частотных спектров плазменных волн в областях I и II на стадии нарастания спектральной плотности плазменных волн в области II (см. рис. 3). Согласно рис. 6 с приближением частоты накачки ν_t к точке $4 - \Delta_\infty$ наклон спектров $\tilde{N}_{1,\omega}$, $\tilde{N}_{2,\omega}$ увеличивается.⁸ Напротив, в точке $\nu_t = 4 - \Delta_0$ производная $d\tilde{N}_{2,\omega}/d\omega$ обращается в нуль, а производная $d\tilde{N}_{1,\omega}/d\omega = X_1^{(0)}/\alpha$.

Параметры $X_1^{(0)}$, $X_2^{(0)}$ (57), (58), характеризующие наклон спектров $\tilde{N}_{1,\omega}$ (в случае $\tilde{N}_{2,\omega} = 0$; $X_2 > 0$) и $\tilde{N}_{2,\omega}$ (в случае $\tilde{N}_{1,\omega} = 0$; $X_1 > 0$, см. рис. 3), приведены на рис. 7. Как правило, эти параметры оказываются существенно меньше, чем $|X_1|$, $|X_2|$. Поэтому в случае $X_2 < 0$ можно считать, что интервал частот

$$\Delta\omega_{\text{ex}} = \frac{\alpha\tilde{N}_{1,\omega_t}}{X_1}, \quad (63)$$

в котором спектр плазменных волн в области II нарастает от нуля до максимального значения

$$\max \tilde{N}_{2,\omega} = \frac{\tilde{N}_{1,\omega_t} |X_2|}{X_1}, \quad (64)$$

оказывается значительно меньше, чем интервал частот

$$\Delta\omega_{\text{rel}} = \frac{\Delta\omega_{\text{ex}} |X_2|}{X_2^{(0)}}, \quad (65)$$

в котором спектр $\tilde{N}_{2,\omega}$ вновь обращается в нуль (см. рис. 3).

Отметим, что на частотах выше 4-й электронной гирогармоники ($\nu_t > 4$), как и в области (62), параметр X_2 оказывается отрицательным, что соответствует перекачке волн из области I в область II. Однако вследствие большой величины коэффициента D_{22} ($D_{22} = 8,42 \cdot 10^3$; $x_m = 27,3$ при $\nu = 4,1$) возбуждение плазменных волн в области II при $\nu_t > 4$ происходит очень медленно и практически не влияет на релаксацию волн, возбуждаемых мощной радиоволной в области I.

3. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Сопоставим кратко результаты проведённых расчётов с ионосферными экспериментами. Расчёты показывают, что перекачка плазменных волн в область II с большими поперечными волновыми числами k_\perp происходит в диапазоне частот $\nu_t = \omega_t/\omega_{Be}$, расположенном несколько ниже 4-й гирогармоники электронов ($\nu_t < 4$). Вследствие большой величины $k_\perp \sim \rho_{Be}^{-1}$ такие волны в основном расходуют свою энергию на ускорение электронов (доля циклотронного поглощения плазменных волн в области II $s_2 = (c_2 - 1)/c_2$ достигает 75 % при $\delta = 4 \cdot 10^{-2}$). Поэтому полученные результаты хорошо согласуются

⁸ Отметим, что при больших абсолютных значениях производных $|dN_{1,\omega}/d\omega|$, $|dN_{2,\omega}/d\omega|$ условия применимости использованного дифференциального приближения нарушаются. Вблизи полюсов X_1 , X_2 соответствующее условие можно записать в виде (см. ниже (63) и сноску 7): $\Delta\omega_{\text{ex}} \gg \Delta\omega = (2T_i/m_i)^{1/2} \rho_{Be}^{-1}$.

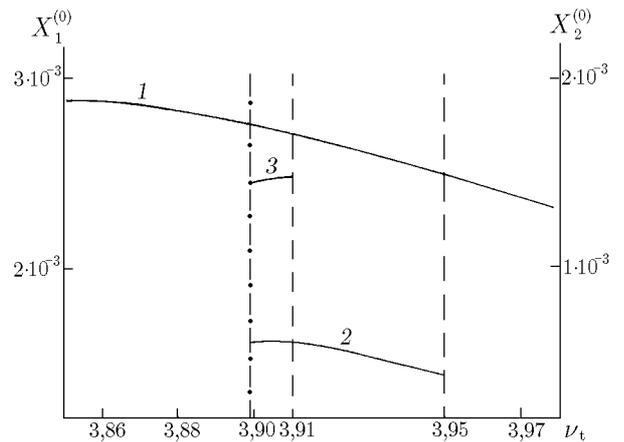


Рис. 7. Поведение параметров $X_1^{(0)}$ и $X_2^{(0)}$, характеризующих наклон спектров $\alpha\tilde{N}_{1,\omega}$ (при $\tilde{N}_{2,\omega} = 0$; $X_2 > 0$) и $\alpha\tilde{N}_{2,\omega}$ (при $\tilde{N}_{1,\omega} = 0$; $X_2 < 0$) соответственно. Кривая 1 соответствует зависимости $X_1^{(0)}(\nu_t)$; кривая 2 — зависимости $X_2^{(0)}(\nu_t)$ при $\delta = 10^{-2}$; кривая 3 — зависимости $X_2^{(0)}(\nu_t)$ при $\delta = 4 \cdot 10^{-2}$. Функция $X_2^{(0)}(\nu_t)$ приведена в области $X_2 < 0$

с появлением дополнительной ионизации ионосферы ускоренными электронами, которая возникала в основном в том же диапазоне частот [4]. Вместе с тем следует иметь в виду, что на частотах $\nu < 4$ плазменные волны в области I также испытывают сильное циклотронное поглощение, хотя дисперсионные свойства плазменных волн и характер ускорения электронов в областях I и II различаются. Поэтому вывод об усилении дополнительной ионизации в случае перекачки плазменных волн в область больших поперечных волновых чисел нуждается в дополнительном обосновании.

Другим важным следствием возбуждения плазменных волн в добавочной области II является, как уже отмечалось, ослабление ИРИ вследствие слабой трансформации очень коротковолновых плазменных волн в электромагнитные. Эффект ослабления ИРИ при возмущении ионосферы на частотах ниже 4-й гирогармоники электронов действительно наблюдался в экспериментах (см. [3]). Однако, как показано в [3], такое ослабление происходит также в некотором интервале частот ω_t ниже 5-й и 6-й гирогармоник, когда согласно нашим расчётам плазменные волны в добавочной области II не возбуждаются. Причина такого расхождения может быть связана с тем, что в проведённых расчётах не учитывалось влияние сверхтепловых электронов (плазма считалась максвелловской), которые могут привести к возбуждению плазменных волн в добавочной области в окрестности 5-й и 6-й электронных гирогармоник, т. к. они увеличивают циклотронное поглощение плазменных волн в области I (см. раздел 2). Как уже отмечалось, ускоренные электроны могут возникать в результате взаимодействия с искусственной плазменной турбулентностью, возбуждаемой мощной радиоволной. Различные аспекты этого процесса в условиях ионосферных экспериментов вблизи электронных гирогармоник рассматривались в [16, 17]. Влияние сверхтепловых электронов можно учесть в рамках общих уравнений, полученных в разделе 1. Однако проведение соответствующих расчётов выходит за рамки данной работы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Получим выражение для электронного отклика второго порядка, пригодное для описания нелинейного взаимодействия плазменных волн, обладающих сильной пространственной дисперсией, в добавочной области II. Используя метод интегрирования по невозмущённым траекториям частиц в переменных v_\perp и θ , где θ — азимутальный угол вектора скорости $\mathbf{v}_\perp \perp \mathbf{B}$, получаем в соответствии с общим определением (4)

$$\mu(\omega', \mathbf{k}'; \omega'', \mathbf{k}'') = 4\pi e \left(\frac{e}{m_e}\right)^2 \int d^3v \sum_{m,n} \frac{\exp(i\Psi)}{\tilde{\omega}} (L_1 \widehat{M}_1 + L_2 \widehat{M}_2) f^{(0)}(v_\parallel, v_\perp^2),$$

$$\Psi = m(\psi_{\mathbf{k}'_\perp} - \psi_{\mathbf{k}_\perp}) + n(\psi_{\mathbf{k}''_\perp} - \psi_{\mathbf{k}_\perp}), \quad (\text{П1})$$

где введены следующие обозначения:

$$L_1 = \tilde{J}_{m+n} \tilde{J}_m \tilde{J}_n, \quad \widehat{M}_1 = \widehat{U}_1 \frac{\widehat{U}_2}{\tilde{\omega}''} + \widehat{U}_2 \frac{\widehat{U}_1}{\tilde{\omega}'};$$

$$L_2 = \frac{i}{\omega_{Be}} [\mathbf{k}'_\perp, \mathbf{k}''_\perp]_h L_1 + \omega_{Be} \left[m \tilde{J}_m \frac{\partial \tilde{J}_n}{\partial (v_\perp^2/2)} - n \tilde{J}_n \frac{\partial \tilde{J}_m}{\partial (v_\perp^2/2)} \right] \tilde{J}_{m+n}, \quad \widehat{M}_2 = \frac{\widehat{U}_2}{\tilde{\omega}''} - \frac{\widehat{U}_1}{\tilde{\omega}'};$$

$$\widehat{U}_1 = k'_\parallel \frac{\partial}{\partial v_\parallel} + m \omega_{Be} \frac{\partial}{\partial (v_\perp^2/2)}, \quad \widehat{U}_2 = k''_\parallel \frac{\partial}{\partial v_\parallel} + n \omega_{Be} \frac{\partial}{\partial (v_\perp^2/2)}; \quad (\text{П2})$$

$$\tilde{\omega} = \omega - k_\parallel v_\parallel - (m+n) \omega_{Be}, \quad \tilde{\omega}' = \omega' - k'_\parallel v_\parallel - m \omega_{Be}, \quad \tilde{\omega}'' = \omega'' - k''_\parallel v_\parallel - n \omega_{Be};$$

$$a = k_{\perp} v_{\perp} / \omega_{Be}, \quad a' = k'_{\perp} v_{\perp} / \omega_{Be}, \quad a'' = k''_{\perp} v_{\perp} / \omega_{Be},$$

$$\tilde{J}_{m+n} = J_{m+n}(a), \quad \tilde{J}_m = J_m(a'), \quad \tilde{J}_n = J_n(a''). \quad (\text{П3})$$

Здесь $f^0(v_{\parallel}, v_{\perp}^2)$ — невозмущённая функция распределения электронов по скоростям \mathbf{v} , v_{\parallel} и v_{\perp} — параллельная и ортогональная магнитному полю \mathbf{B} компоненты скорости \mathbf{v} , $\psi_{\mathbf{k}_{\perp}}$ — азимутальный угол вектора \mathbf{k}_{\perp} , $\omega = \omega' + \omega''$ и $\mathbf{k} = \mathbf{k}' + \mathbf{k}''$ в соответствии с (4).

В рассматриваемом случае индуцированного рассеяния на ионах плазменных волн в области II комбинационную частоту ω и продольные компоненты k'_{\parallel} , k''_{\parallel} волновых векторов взаимодействующих волн можно считать малыми:

$$|k'_{\parallel} v_{\parallel}| \ll |\omega' - m\omega_{Be}|, \quad |k''_{\parallel} v_{\parallel}| \ll |\omega'' - n\omega_{Be}|;$$

$$\{|\omega|, |k_{\parallel} v_{\parallel}|\} \ll \{|\omega' - m\omega_{Be}|, |\omega'' - n\omega_{Be}|\}. \quad (\text{П4})$$

В этих условиях операторы \widehat{M}_1 и \widehat{M}_2 (П2) существенно упрощаются:

$$\frac{\widehat{M}_1 f^{(0)}}{\tilde{\omega}} = \frac{\omega_{Be}^2 mn}{\tilde{\omega}' \tilde{\omega}''} \frac{\partial}{\partial(v_{\perp}^2/2)} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial(v_{\perp}^2/2)}; \quad (\text{П5})$$

$$\frac{\widehat{M}_2 f^{(0)}}{\tilde{\omega}} = \frac{1}{2} \left[\frac{\omega'' - \omega'}{\tilde{\omega}' \tilde{\omega}''} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial(v_{\perp}^2/2)} - \delta_{m+n,0} \left(\frac{1}{\tilde{\omega}'} - \frac{1}{\tilde{\omega}''} \right) L_0 \right], \quad (\text{П6})$$

где

$$L_0 = \frac{k_{\parallel}}{\tilde{\omega}} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial v_{\parallel}} + \frac{\partial f^{(0)}}{\partial(v_{\perp}^2/2)}, \quad \delta_{\sigma,0} = \begin{cases} 1, & \sigma = 0; \\ 0, & \sigma \neq 0, \end{cases}$$

а общее выражение (П1) приводится к виду

$$\mu(\omega', \mathbf{k}'; \omega'', \mathbf{k}'') = 4\pi e \left(\frac{e}{m_e} \right)^2 \int d^3v \sum_{m,n} \exp(i\Psi) \left\{ \frac{i}{\omega_{Be}} [\mathbf{k}''_{\perp}, \mathbf{k}'_{\perp}]_h \tilde{J}_{m+n} \tilde{J}_m \tilde{J}_n \left[\frac{\widehat{M}_2 f^{(0)}}{\tilde{\omega}} \right] + \right.$$

$$+ \tilde{J}_{m+n} \left[\frac{m\omega_{Be}}{\tilde{\omega}'} \tilde{J}_m \frac{\partial \tilde{J}_n}{\partial(v_{\perp}^2/2)} + \frac{n\omega_{Be}}{\tilde{\omega}''} \tilde{J}_n \frac{\partial \tilde{J}_m}{\partial(v_{\perp}^2/2)} \right] \left[\frac{\partial f^{(0)}}{\partial(v_{\perp}^2/2)} - \delta_{m+n,0} L_0 \right] -$$

$$\left. - \frac{\omega_{Be}^2 mn}{\tilde{\omega}' \tilde{\omega}''} \frac{\partial \tilde{J}_{m+n}}{\partial(v_{\perp}^2/2)} \tilde{J}_m \tilde{J}_n \frac{\partial f^{(0)}}{\partial(v_{\perp}^2/2)} \right\}. \quad (\text{П7})$$

Здесь учтено, что в условиях (П4) величинами $k'_{\parallel} v_{\parallel}$, $k''_{\parallel} v_{\parallel}$ в определении $\tilde{\omega}'$, $\tilde{\omega}''$ (П3) можно пренебречь, полагая $\tilde{\omega}' = \omega' - m\omega_{Be}$; $\tilde{\omega}'' = \omega'' - n\omega_{Be}$ (при этом справедливы соотношения $\omega'/\tilde{\omega}' = 1 + m\omega_{Be}/\tilde{\omega}'$; $\omega''/\tilde{\omega}'' = 1 + n\omega_{Be}/\tilde{\omega}''$, использованные при выводе (П7)). Следует учитывать также, что в рассматриваемом случае малых ω (П4) частоту ω' в первом слагаемом правой части (П6) можно заменить на $-\omega''$, а отношение $-\delta_{m+n,0}/\tilde{\omega}'$ во втором слагаемом — на $\delta_{m+n,0}/\tilde{\omega}''$.

Переходя к обозначениям, использованным в разделе 1 при описании области II, произведём в (П7) замену переменных:

$$\omega \rightarrow \omega_0, \quad \omega' \rightarrow -\omega', \quad \omega'' \rightarrow \omega;$$

$$\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}_0, \quad \mathbf{k}' \rightarrow -\mathbf{k}'_2, \quad \mathbf{k}'' \rightarrow \mathbf{k}_2. \quad (\text{П8})$$

В результате для плазменных волн в окрестности электронной гирогармоники с номером n получаем, сохраняя в (П7) только главные, квадратичные по $(\omega - n\omega_{Be})^{-1}$ слагаемые, следующее выражение для электронного отклика второго порядка:

$$\mu(\omega, \mathbf{k}_2; -\omega', -\mathbf{k}'_2) = -4\pi e \left(\frac{e}{m_e}\right)^2 \frac{\exp(in\psi)}{(\omega - n\omega_{Be})(\omega' - n\omega_{Be})} \times \\ \times \int d^3v J_n(a) J_n(a') \left\{ ik_{2\perp} k'_{2\perp} \sin \psi \frac{\omega + \omega'}{2\omega_{Be}} J_0(a_0) + n^2 \omega_{Be}^2 \frac{\partial J_0(a_0)}{\partial (v_{\perp}^2/2)} \right\} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial (v_{\perp}^2/2)}. \quad (\text{П9})$$

Входящие в (П9) фаза ψ и переменные a_0 , a , a' определены в (26) (заметим, что эти определения несколько отличаются от (П3)). Используя свойства функций Бесселя, нетрудно убедиться, что в случае максвелловской функции распределения $f^0(v^2)$ выражение (П9) переходит в (25), (26).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Грач С. М. // Изв. вузов. Радиофизика. 1985. Т. 28, № 6. С. 684.
2. Ахиезер А. И., Ахиезер И. А., Половин Р. В. и др. Электродинамика плазмы. М.: Наука, 1974.
3. Leyser T. B., Thide B., Waldenvik M. et al. // J. Geophys. Res. A. 1993. V. 28, No. 10. P. 17 597.
4. Grach S. M., Komrakov G. P., Yurishckev M. A. et al. // Phys. Rev. Lett. 1997. V. 78, No. 5. P. 883.
5. Васьков В. В., Пулинец С. А., Рябова Н. А. // Геомагнетизм и аэрономия. 1999. Т. 39, № 4. С. 44.
6. Vas'kov V. V. // Adv. Space Res. 2002. V. 29, No. 9. P. 1 379.
7. Grach S. M., Schvarts M. M. // Vth International Suzdal URSI Symposium on the Modification of Ionosphere, Book of Abstracts, Moscow, August 26–29, 1998. М.: IZMIRAN, 1998. P. 39.
8. Грач С. М., Митяков Н. А., Рапопорт В. О., Трахтенгерц В. Ю. // Тепловые нелинейные явления в плазме: Сб. трудов. Горький: ИПФ АН СССР, 1979. С. 46.
9. Васьков В. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 2000. Т. 43, № 4. С. 310.
10. Пустовалов В. В., Силин В. П. // ЖЭТФ. 1970. Т. 59, вып. 12. С. 2 215.
11. DuBois D. F., Goldman M. V. // Phys. Rev. Lett. 1972. V. 28, No. 4. P. 218.
12. Галеев А. А., Карпман В. И., Сагдеев Р. З. // Ядерный синтез. 1965. Т. 5. С. 20.
13. Пустовалов В. В., Силин В. П. // Труды Физич. ин-та им. П. Н. Лебедева. 1972. Т. 61. С. 42.
14. Грач С. М. // Изв. вузов. Радиофизика. 1975. Т. 18, № 11. С. 1 627.
15. Гинзбург В. Л., Рухадзе А. А. Волны в магнитоактивной плазме. М.: Наука, 1975.
16. Грач С. М. // Изв. вузов. Радиофизика. 1999. Т. 42, № 7. С. 651.
17. Васьков В. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 2000. Т. 43, № 1. С. 3.

Институт земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн РАН, г. Троицк, Россия

Поступила в редакцию
27 ноября 2001 г.

EXCITATION OF AN ADDITIONAL REGION OF SHORT-WAVELENGTH PLASMA OSCILLATIONS IN IONOSPHERIC HEATING EXPERIMENTS*V. V. Vas'kov and N. A. Ryabova*

We discuss transfer of plasma waves, excited by a powerful radio wave due to its scattering on artificial ionospheric irregularities, into an additional region of very short plasma oscillations polarized almost perpendicular to the magnetic field. Such a region exists in the magnetized ionospheric plasma due to the strong spatial dispersion. We take into account the plasma-wave diffusion over the spectrum caused by multiple scattering on artificial irregularities, as well as the nonlinear process of plasma-wave interaction due to induced scattering by ions. The latter process leads to the transfer of primary plasma waves into the additional region). The induced scattering is considered in the differential approximation valid for sufficiently smooth plasma-wave spectra. The numerical calculations are performed for the Maxwellian plasma in which suprathermal electrons are absent. It is shown that in this case, the additional region of plasma waves is excited if the pump frequency is close to but somewhat less than the 4th electron gyroharmonic, so that the cyclotron absorption of primarily excited plasma waves becomes sufficiently strong. Application of our calculations to the results of ionospheric experiments is discussed.

УДК 551.510.535

ИССЛЕДОВАНИЕ СУМЕРЕЧНОЙ D -ОБЛАСТИ ИОНОСФЕРЫ С ПОМОЩЬЮ ИСКУССТВЕННЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ

В. В. Беликович, Е. А. Бенедиктов

Проанализировано поведение D -области ионосферы во время захода и восхода Солнца по результатам измерений, выполненных в августе 2000 г. на стенде «Сура» с помощью искусственных периодических неоднородностей. Экспериментально полученные высотные профили времени релаксации и амплитуды рассеянного сигнала интерпретируются на основе модели с одним отрицательным ионом O_2^- . Найдены изменения концентрации атомарного и возбуждённого молекулярного кислорода и высотного профиля электронной концентрации.

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, D -область до настоящего времени остаётся наименее изученной частью ионосферы. Поэтому исследования этой области высот, особенно выполненные новыми методами, вызывают постоянный интерес. В этой связи заслуживают внимания исследования нижней ионосферы с помощью искусственных периодических неоднородностей (ИПН), созданных полем мощной стоячей радиоволны. Напомним, что на высотах области D ионосферы ИПН образуются в результате локального нагрева электронного газа в пучностях мощной стоячей радиоволны. Нагрев увеличивает скорость прилипания электронов к молекулам кислорода, что приводит к снижению электронной концентрации и росту концентрации отрицательных ионов кислорода [1–3]. Экспериментальные профили времени релаксации и амплитуды сигналов, рассеянных ИПН, характеризуются плавным возрастанием до высоты приблизительно 77 км. Выше этого уровня наблюдается быстрое уменьшение указанных параметров, которое объясняется увеличением концентрации атомарного кислорода. Высокая концентрация атомарного кислорода в атмосфере приводит к увеличению суммарной скорости отлипания электронов от отрицательных ионов и, фактически, прекращает действие механизма образования ИПН, характерного для области D . В работах [1, 2] приведены экспериментальные высотные профили амплитуды и времени релаксации ИПН в дневной области D и дано их количественное объяснение на основе модели фотохимических процессов с одним отрицательным ионом O_2^- .

Известно, что D -область претерпевает сильные изменения на восходе и закате Солнца, поэтому её исследование в эти периоды представляет особый интерес. Впервые такие исследования с помощью ИПН были проведены в 1980 г. [4]. Однако техника того времени не позволяла получать достаточно подробные высотные профили рассеянных сигналов, и в работе [4] был сделан только качественный вывод о росте времени релаксации ИПН в сумеречное время. В связи с этим были проведены новые исследования области D в сумеречный период, результаты которых изложены в настоящей работе.

1. РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТА

16 и 17 августа 2000 года на стенде «Сура» (координаты $56,13^\circ$ с. ш., $46,1^\circ$ в. д.) был проведён эксперимент по исследованию нижней ионосферы в сумеречный период с помощью ИПН. Для создания неоднородностей использовались две секции стенда, которые излучали радиоволны на частоте 5,6 МГц с эффективной мощностью около 60 МВт и поляризацией, соответствующей необыкновенной компоненте. Воздействие на ионосферу проводилось периодически в течение трёх секунд с паузой

продолжительностью 17 с. Во время паузы излучались пробные волны с той же поляризацией на той же частоте в виде импульсов длительностью 30 мкс с частотой повторения 50 Гц. Рассеянные сигналы принимались антенной, имеющей 12 синфазных диполей на каждой из двух ортогональных линейных поляризаций и выделяющей необыкновенную компоненту. Усиление сигналов осуществлялось приёмником с полосой пропускания 35 кГц. Сигналы в виде двух квадратурных компонент регистрировались с высотным шагом 1,4 км в течение первых четырёх секунд после прекращения воздействия и кодировались 12-ти разрядным аналого-цифровым преобразователем. Работа проводилась с 20:00 до 23:00 московского летнего времени (MSK) 16.08.00 и с 03:50 до 06:30 MSK 17.08.00.

Следует отметить, что в вечерние часы сильно возрастает уровень помех от удалённых радиостанций, поэтому не все реализации рассеянного сигнала подвергались обработке. Из каждой трёх реализаций, полученных в течение минуты, выбиралась одна с максимальным отношением сигнал/шум. В результате из 1 000 реализаций для количественного анализа было отобрано только около 340. Дальнейшая обработка отобранных данных состояла в вычислении амплитуды и фазы сигнала на каждой высоте для каждого цикла нагрева. Временные зависимости логарифма амплитуды A и фазы ϕ рассеянного сигнала аппроксимировались линейными функциями вида

$$\ln A(t) = \ln A_0 - t/\tau, \quad \phi(t) = \phi_0 + bt.$$

Напомним, что τ характеризует время жизни неоднородностей после выключения мощного передатчика, а b определяет скорость их вертикального движения [5]. Параметры аппроксимации находились методом наименьших квадратов с весовой функцией $\exp(2t/\tau_0)$, которая позволяет минимизировать их дисперсию (здесь τ_0 — первое приближённое значение параметра). При этом также вычислялись дисперсии параметров τ и b , позволявшие судить о степени надёжности полученных данных. Поведение амплитуды и времени релаксации сигналов, рассеянных ИПН во время захода и восхода Солнца, представлены на рис. 1. Из рисунка видно, что на высотах области D уменьшение амплитуды сигнала происходит при изменении зенитного угла χ Солнца от 90° до 105° (рис. 1а). Увеличение сигнала происходит при уменьшении зенитного угла χ от 97° до 90° (рис. 1б). При этом хорошо заметна восходно-заходная асимметрия. В данном случае она выражается в том, что на заходе Солнца сигналы имеют большую амплитуду и занимают больший высотный интервал, чем на восходе. Кроме того, на заходе слабые сигналы в верхней части области D прослеживаются ещё около часа после того, как область полностью погружается в тень (после захода Солнца на этих высотах). Обращает на себя внимание также более широкий и глубокий минимум между D - и E -областями на восходе Солнца.

Следует отметить, что восходно-заходная асимметрия области D известна давно. В частности, она отмечена по измерениям поглощения в полярной шапке [6]. В этих же измерениях отмечено наличие «ступеньки» в сумеречном ходе поглощения при $\chi = 93^\circ \div 95^\circ$, более чётко выраженной на восходе [7]. В наших измерениях эта «ступенька» хорошо заметна в изменении нижней границы регистрируемого сигнала на восходе Солнца.

Из рис. 1 в и г хорошо видно увеличение времени релаксации сигналов, рассеянных ИПН, на заходе Солнца и уменьшение на восходе. Эти изменения более заметны на высотах $70 \div 75$ км, в то время как на высоте 60 км они только намечаются. Кроме увеличения τ на заходе и уменьшения на восходе на рис. 1в, г хорошо прослеживаются колебания с периодами $20 \div 30$ мин, характерные для внутренних гравитационных волн.

На высотах области E сигналы, рассеянные ИПН, наблюдаются в течение всей ночи, несколько ослабевая перед восходом Солнца. Их интенсивность свидетельствует о сохранении ночью на этих высотах электронной концентрации на уровне $(1 \div 2) \cdot 10^4 \text{ см}^{-3}$. Как свидетельствуют ионограммы вертикального зондирования, в это время регистрировались спорадические слои с критической частотой $f_b \sim 1 \text{ МГц}$.

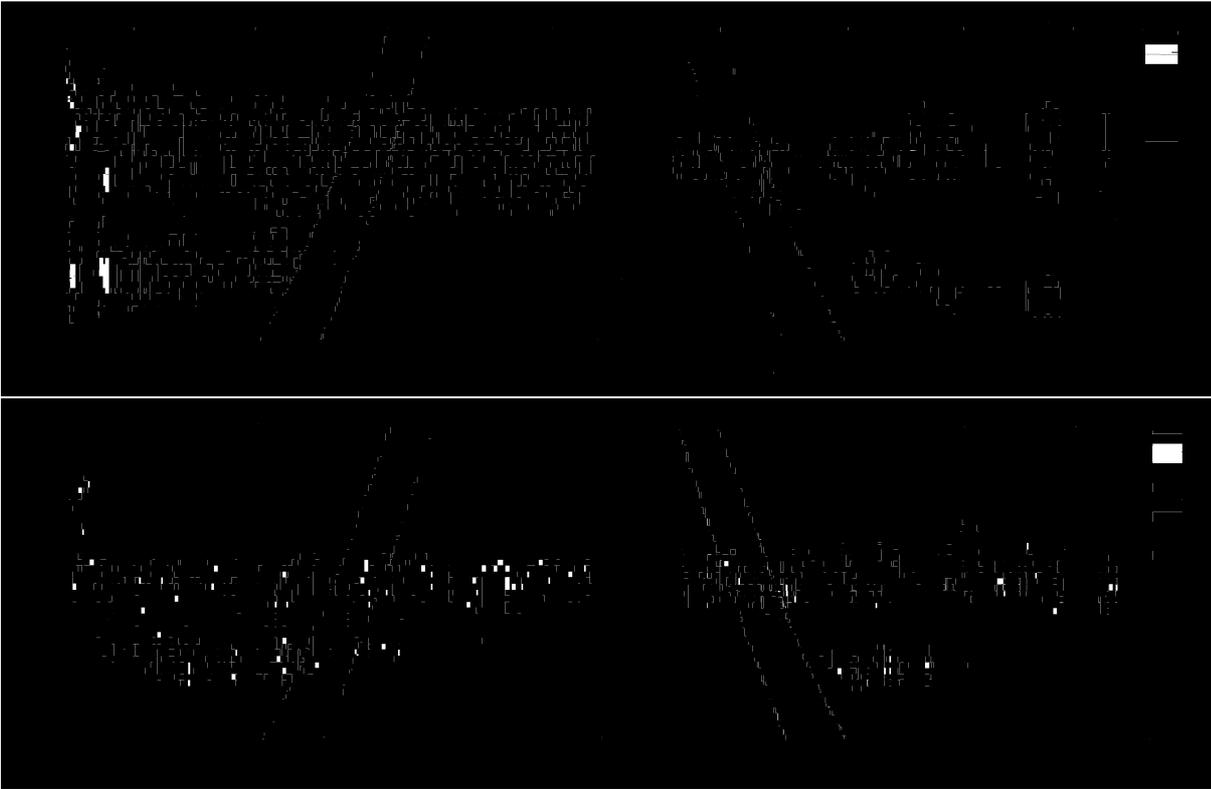


Рис. 1. Амплитуда A и время релаксации τ сигналов, рассеянных на ИПН, по наблюдениям на стенде «Сура» 16–17 августа 2000 г. На верхней шкале отложен зенитный угол Солнца. Сплошные линии — прохождение тени от поверхности Земли и озоносферы, высота последней принята равной 30 км

Наблюдаемое поведение ИПН качественно хорошо объясняется на основе существующих представлений об аэрономии нижней ионосферы. Напомним, что время релаксации ИПН в D -области $\tau = (\beta + \gamma)^{-1}$, где β и γ — скорости прилипания электронов к молекулам кислорода и отлипания электронов от отрицательных ионов кислорода соответственно. В частности, увеличение времени релаксации ИПН обусловлено уменьшением скорости отлипания электронов. Последнее вызвано как фотоотлипанием, так и изменением концентрации возбуждённого молекулярного кислорода. Из совпадения прохождения тени от озоносферы через D -область с появлением рассеянных сигналов на восходе (см. рис. 1б) можно сделать вывод, что фотоотлипание происходит под действием ультрафиолетовой части солнечного света, которая проникает на эти высоты после восхода Солнца над озоносферой. Запаздывание в появлении сигналов на высотах менее 65 км, вероятно, обусловлено задержкой роста концентрации возбуждённого молекулярного кислорода, играющего основную роль в процессах отлипания на этих высотах. С этой точки зрения упомянутая «ступенька», возможно, связана с проникновением на эти высоты солнечного излучения с длинами волн $\lambda = 220 \div 280$ нм, вызывающего появление молекул кислорода в состоянии ${}^1\Delta_g$.

Неожиданными, по нашему мнению, представляются две особенности. Первая — большой интервал высот между слоями D и E (85 ÷ 95 км), в котором на восходе сигнал отсутствует, причём этот интервал постепенно расширяется вниз с подъёмом Солнца. Сигналы могут отсутствовать только по двум причинам: или электронная концентрация очень мала, или не действует механизм образования периодических неоднородностей. Первая причина представляется невероятной, поскольку выше и ниже указанного интервала электронная концентрация значительна. Следовательно, какие-то факторы препятствуют образованию ИПН. Одним из этих факторов может быть турбулентность атмосферы [8]. Дей-

ствительно, турбулентность всегда присутствует на этих высотах и ослабляет амплитуду сигналов, рассеянных ИПН. Однако для почти полного подавления сигнала она должна быть очень сильной (характерная скорость турбулентных движений — десятки метров в секунду), что представляется маловероятным. Другим, более вероятным фактором может быть значительное увеличение скорости отлипания электронов, обусловленное повышением концентрации атомарного кислорода. Вторая особенность — длительное существование ИПН после захода Солнца в верхней части области D . С одной стороны, кажется, что это можно объяснить медленной рекомбинацией электронов. Действительно, время рекомбинации $1/(\alpha N) \sim 10^3$ с при эффективном коэффициенте рекомбинации $\alpha \sim 10^{-7}$ см³·с⁻¹ и концентрации электронов $N \sim 10^4$ см⁻³, что может объяснить наблюдаемый «хвост» ионизации. С другой стороны, при отсутствии процессов отлипания все электроны должны прилипнуть за характерное время $1/\beta \sim 1$ мин. Фактором, поддерживающим электронную концентрацию, может быть наличие достаточной концентрации атомарного кислорода, который обеспечивает отлипание за счёт реакции $O_2^- + O = O_3 + e$ [9]. В тёмной атмосфере атомарный кислород исчезает вследствие реакции $O + O_2 + M \rightarrow O_3 + M$ (здесь M — произвольная нейтральная молекула) и образует озон, концентрация которого возрастает в несколько раз. Время жизни озона при отсутствии фотодиссоциации велико, и он накапливается за ночь. После восхода Солнца за счёт фотодиссоциации озон превращается в атомарный и возбуждённый молекулярный кислород в результате реакций $O_3 + h\nu \rightarrow O_2(^1\Delta_g) + O(^1D)$ и $O_3 + h\nu \rightarrow O_2 + O(^3P)$, что обеспечивает быстрое отлипание электронов и тем самым препятствует образованию ИПН. Все эти качественные рассуждения подтверждаются количественными расчётами.

2. МОДЕЛЬНЫЕ РАСЧЁТЫ

В работах [1, 2] приведены формулы для расчёта времени релаксации ИПН и амплитуды рассеянного сигнала на основе модели аэрономических процессов с одним отрицательным ионом. Воспользуемся этими формулами для объяснения экспериментальных данных. Напомним, что в этом случае время релаксации ИПН $\tau(h)$ определяется формулой

$$\tau = (\beta + \gamma)^{-1}, \quad (1)$$

где β и γ — скорости прилипания и отлипания электронов соответственно. Скорость прилипания электронов к молекулам кислорода при тройных соударениях определяется выражением [9]

$$\beta(h, T_e) = (1,4 \cdot 10^{-29}[O_2]^2 + 7 \cdot 10^{-31}[O_2][N_2]) \frac{300}{T_e} \exp(-600/T_e), \quad (2)$$

где $[O_2]$ и $[N_2]$ — концентрации молекул кислорода и азота соответственно (здесь и далее концентрации газовых составляющих приведены в см⁻³). Для расчёта скорости отлипания электронов от отрицательных ионов O_2^- учтём фотоотлипание, реакции с возбуждёнными молекулами кислорода в состоянии ($^1\Delta_g$) и атомарным кислородом [10]. В результате получим

$$\gamma(h) = 0,38 + 2 \cdot 10^{-10}[O_2(^1\Delta_g)] + 2 \cdot 10^{-10}[O]. \quad (3)$$

Формулы (1)–(3) при подстановке в них концентраций соответствующих молекул из модели атмосферы решают задачу нахождения высотного профиля времени релаксации ИПН. Более подробно методика расчётов изложена в [2]. Здесь нами использована модель атмосферы CIRA-72 [11], концентрация возбуждённого молекулярного кислорода считалась пропорциональной плотности атмосферы. Высотная зависимость концентрации атомарного кислорода $[O]$ в D -области имела вид переходного слоя: $[O](h) = k_1/\{1 + \exp[(h_1 - h)/H_1]\}$, при этом параметры k_1 , h_1 , H_1 , подбирались для наилучшего совпадения модели с экспериментом.

Заметим, что время релаксации ИПН не зависит от электронной концентрации N . В силу этого высотный профиль амплитуды рассеянного сигнала можно использовать для нахождения зависимости $N(h)$. Разумеется, находить профиль $N(h)$ можно с точностью до постоянного множителя, поскольку абсолютная амплитуда сигнала, рассеянного ИПН, зависит от многих параметров, которые невозможно учесть достаточно точно. В нашей модели профиль $N(h)$ задавался двумя гладко сопряжёнными экспонентами: $N(h) = k_2 \exp[a_1(h - h_2)] / \{1 + \exp[(a_1 - a_2)(h - h_2)]\}$. Параметры a_1 , a_2 и h_2 также подбирались для наилучшего совпадения модели с экспериментом.

Результаты модельной аппроксимации высотных профилей времени релаксации ИПН и амплитуды рассеянного сигнала, усреднённых за 10 минут, представлены на рис. 2 для четырёх моментов времени, при зенитных углах Солнца 89° и 94° на заходе и восходе. На рис. 2. хорошо видна заходно-восходная асимметрия. Наиболее ярко она проявляется при зенитном угле $\chi = 89^\circ$. Основные параметры модели, подобранные для этих случаев, приведены в табл. 1. На рис. 3 показаны использованные

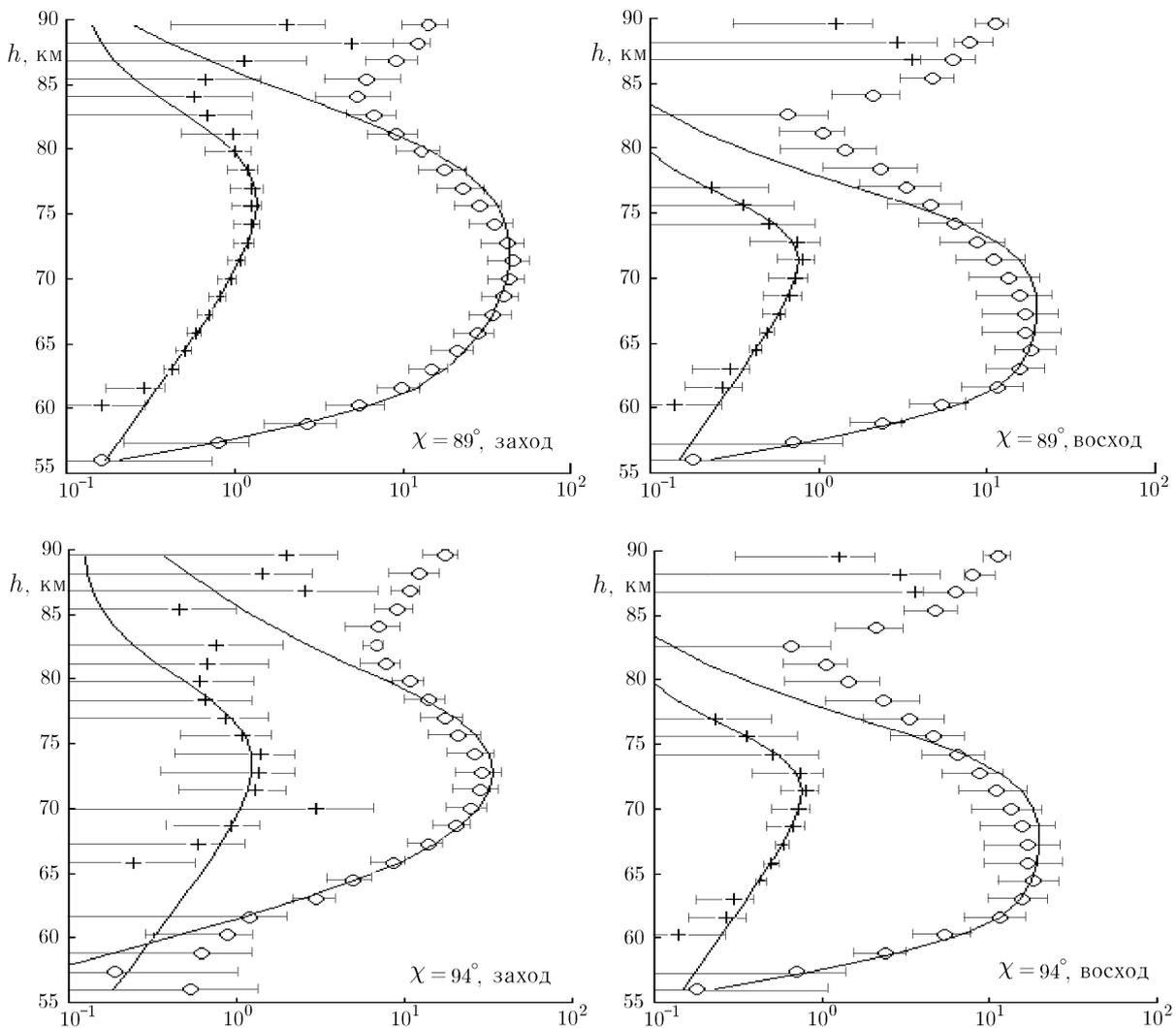


Рис. 2. Сопоставление модели с экспериментом для $\chi = 89^\circ$ и 94° на заходе и восходе Солнца. Измеренное относительное время релаксации отмечено крестиками, относительная амплитуда сигнала — кружками, отрезки соответствуют среднеквадратичному отклонению экспериментальных данных; сплошные линии — модельные расчёты. Параметры модельных расчётов приведены в табл. 1

Таблица 1

Параметры модели

Зенитный угол Солнца		Относительная концентрация $O_2(^1\Delta_g)$	Профиль концентрации атомарного кислорода			Профиль электронной концентрации		
			$k_1, \text{см}^{-3}$	$h_1, \text{км}$	$H_1, \text{км}$	$h_2, \text{км}$	$a_1, \text{км}^{-1}$	$a_2, \text{км}^{-1}$
заход	89°	$1,5 \cdot 10^{-6}$	$3 \cdot 10^{10}$	86	4,5	60	0,9	0,10
	94°	$1,0 \cdot 10^{-6}$	$4 \cdot 10^{10}$	83	4,5	66	0,6	0,17
восход	94°	$0,5 \cdot 10^{-6}$	$8 \cdot 10^{10}$	83	3,5	65	0,7	0,15
	89°	$2,0 \cdot 10^{-6}$	$8 \cdot 10^{10}$	79	3,5	60	0,9	0,05

при построении зависимостей на рис. 2 модельные профили концентрации атомарного кислорода в интервале высот $70 \div 80$ км, где он существенно влияет на время релаксации ИПН, и профили электронной концентрации. Модельные зависимости $N(h)$ характеризуются быстрым убыванием на высотах ниже 60 км и медленным ростом выше этого уровня при $\chi = 89^\circ$. При $\chi = 94^\circ$ профиль $N(h)$ смещается вверх на $5 \div 6$ км. Профили $[O](h)$ показывают возрастание концентрации атомарного кислорода на восходе в 2–3 раза, при этом профиль смещается вниз на $5 \div 7$ км. Более детально изменение параметров модели можно увидеть в табл. 1. Из таблицы также видно, что на заходе при $\chi = 94^\circ$ относительная концентрация возбуждённого молекулярного кислорода падает в полтора раза по сравнению с концентрацией при $\chi = 89^\circ$, а на восходе возрастает.

Заметим, что понижение области атомарного кислорода на восходе может быть связано не только с локальными фотохимическими процессами, но и с вертикальным переносом. В частности, предварительный анализ поведения фазы рассеянных сигналов в этот период показывает преобладающее движение вниз. В работе [12], где приведены результаты исследования ИПН на Аляске, также найдены колебания высотного интервала наблюдения ИПН в области D . Вполне возможно, что эти колебания обусловлены изменением концентрации атомарного кислорода в авральной зоне.

ВЫВОДЫ

Проведённое исследование показывает, что ИПН могут с успехом применяться для исследования D -области ионосферы не только в дневное время, но и на восходе и заходе Солнца. Получены новые данные о восходно-заходной асимметрии области D , подтверждено наличие «ступеньки» в росте электронной концентрации на восходе Солнца и локализован её высотный интервал (ниже 65 км). Наблюдаемые изменения параметров ИПН хорошо описываются моделью с одним отрицательным ионом O_2^- .

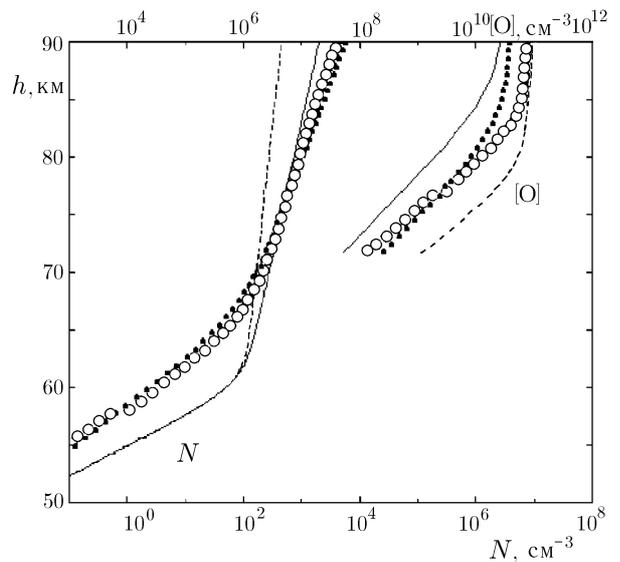


Рис. 3. Модельные профили $N(h)$ (кривые слева, нижняя шкала) и концентрации атомарного кислорода $[O](h)$ (кривые справа, верхняя шкала): сплошная линия и точки — на заходе, пунктир и кружки — на восходе, сплошная линия и пунктир — при $\chi = 89^\circ$, точки и кружки — при $\chi = 94^\circ$

Предложенная модель позволяет определять изменение концентрации атомарного кислорода и возбуждённых молекул кислорода в состоянии $^1\Delta_g$ и показывает значительное увеличение концентрации атомарного кислорода на восходе Солнца.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99–05–64464).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беликович В. В., Бенедиктов Е. А., Бубукина В. Н., Вяхирев В. Д. // Изв. вузов. Радиофизика. 1999. Т. 42, № 5. С. 431.
2. Беликович В. В., Бенедиктов Е. А., Трунов Д. В. // Геомагнетизм и аэрономия. 2000. Т. 40, № 6. С. 55.
3. Беликович В. В., Бенедиктов Е. А., Толмачёва А. В., Бахметьева Н. В. Исследование ионосферы с помощью искусственных периодических неоднородностей. Нижний Новгород: ИПФ РАН. 1999. 155 с.
4. Беликович В. В., Бенедиктов Е. А. // Геомагнетизм и аэрономия. 1986. Т. 26, № 5. С. 837.
5. Беликович В. В., Бенедиктов Е. А., Гончаров Н. П. // Геомагнетизм и аэрономия. 1991. Т. 31, № 2. С. 381.
6. Беликович В. В., Бенедиктов Е. А., Рапопорт З. Ц. // Геомагнетизм и аэрономия. 1969. Т. 9, № 4. С. 666.
7. Белобородова А. А., Беликович В. В., Бенедиктов Е. А., Гусев А. И., Лось Б. П., Шабанов Ю. А. // Геомагнетизм и аэрономия. 1972. Т. 12, № 4. С. 760.
8. Беликович В. В., Бенедиктов Е. А. // Геомагнетизм и аэрономия. 1995. Т. 35, № 2. С. 91.
9. Мак-Иван Н., Филлипс Л. Химия атмосферы. М.: Мир, 1978. 378 с.
10. Кошелев В. В., Климов Н. Н., Сутырин Н. А. Аэрономия мезосферы и нижней термосферы. М.: Наука, 1983. 183 с.
11. CIRA-1972. COSPAR International Reference Atmosphere. Berlin: Akademik-Verlag, 1972.
12. Djuth F. T., Groves K. M., Elder J. H. et al. // J. Geophys. Res. A. 1997. V. 102, No. 11. P. 24 023.

Научно-исследовательский радиофизический институт,
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию
7 сентября 2001 г.

STUDY OF THE TWILIGHT DREGION OF THE IONOSPHERE USING ARTIFICIAL PERIODIC INHOMOGENEITIES

V. V. Belikovich and E. A. Benediktov

We analyze the behavior of the ionospheric *D* region during sunset and sunrise using the results of measurements performed in August 2000. The measured altitude profiles of the relaxation time and the scattered-signal amplitude are interpreted within the framework of the model with one negative ion O_2^- . Variations in the number densities of atomic and excited molecular oxygen and the altitude profiles of the electron density are found.

УДК 621.372.413:621.372.8

О ПРЕДЕЛЬНЫХ ВОЗМОЖНОСТЯХ УМЕНЬШЕНИЯ РАЗМЕРОВ ЗЕРКАЛ ОТКРЫТЫХ РЕЗОНАТОРОВ

И. К. Кузьмичёв¹, А. С. Тищенко¹, К. Шёнеманн²

На основе представления поля квазиоптического пучка в виде углового спектра плоских волн получено выражение, определяющее предел уменьшения размеров зеркал открытого резонатора (ОР), в котором существует низший тип колебаний с малыми потерями энергии. С целью проверки полученного соотношения проведено экспериментальное изучение распределения поля в полусимметричном ОР методом пробного тела, при этом диаметр рассеивающего зонда выбирался на основе полученного в работе уравнения. Отличие измеренного и расчётного распределений поля составило не более 8 %. Показано, что в ОР невозможно получить диаметр пятна поля на зеркале меньше длины волны СВЧ генератора. Попытки сфокусировать гауссов пучок до размеров меньше длины волны приводят к увеличению диаметра пятна поля.

ВВЕДЕНИЕ

Открытые резонаторы (ОР) применяются в различных приборах и устройствах миллиметрового диапазона длин волн [1, 2]. Однако более широкому использованию таких электродинамических систем препятствуют их значительные геометрические размеры, удовлетворяющие соотношениям $ka \gg 10$ и $kR \gg 10$, где a и R — радиусы апертуры и кривизны зеркал ОР соответственно, $k = 2\pi/\lambda$, λ — длина волны в свободном пространстве. При этом одним из простых приёмов проектирования малоразмерных резонаторов является масштабное моделирование, при котором с уменьшением радиуса кривизны R зеркал уменьшаются их апертуры и расстояние L между ними. По всей видимости, свойства таких малоапертурных ОР должны существенно отличаться от традиционных длиннофокусных резонаторов, поскольку в этом случае в условии квазиоптического приближения [3] $a^2/(L\lambda) \ll (L/a)^2$ знак изменяется на противоположный. Аналогичная ситуация возникает и в длиннофокусных ОР при малых расстояниях между зеркалами. Тем не менее исследования [1, 4] показали, что при $ka \geq 10$, $kR \geq 10$ и расстоянии между зеркалами порядка 3λ в таких ОР возбуждаются высокодобротные колебания, распределение поля которых, как и в длиннофокусных ОР, описывается функциями Гаусса—Лагерра.

С другой стороны, поскольку ОР представляет собой электродинамическую систему, особенностью которой является локализация поля в приосевой области, то очевидно, что пределы уменьшения геометрических размеров зеркал резонатора однозначно определяются предельно достижимым диаметром пятна поля рабочего колебания на зеркалах ОР. В связи с этим как с научной, так и с прикладной точек зрения представляет интерес исследование предельных возможностей фокусировки гауссова пучка в ОР.

1. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГАУССОВА ПУЧКА В ВИДЕ УГЛОВОГО СПЕКТРА ПЛОСКИХ ВОЛН

Рассмотрим гауссов пучок нулевого порядка, горловина которого расположена на плоском зеркале полусимметричного ОР. Радиус пятна поля в горловине равен w_0 , радиусы апертур зеркал резонатора равны a , а радиус кривизны сферического зеркала — R . Исходное распределение поля в такой электродинамической системе записывается в виде [5]

$$E_0(c, x) = A \exp[-cx^2/(2a^2)] \left(1 - \frac{1}{4c} + \frac{x^2}{2a^2} - \frac{cx^4}{8a^4} \right), \quad (1)$$

И. К. Кузьмичёв и др.

509

где A — амплитудный множитель, $c = 2a^2/w_0^2$, x — декартова координата в плоскости зеркала. Выражение (1) отражает зависимость распределения поля от одной декартовой координаты x , поскольку вдоль оси y исходное распределение поля имеет аналогичный вид. Здесь необходимо отметить, что выражение (1) справедливо для ОР полуконфокальной геометрии. Поскольку рассматриваемый резонатор таковым не является, для расчётов введём эквивалентный полуконфокальный ОР с радиусом кривизны сферического зеркала $R_{\text{эКВ}} = kw_0^2$. Для такого резонатора, используя прямое преобразование Фурье, можно найти угловой спектр поля $G(u_1)$, который в нашем случае имеет вид

$$G(u_1) = \int_{-a}^a E_0(c, x) \exp(-ju_1x) dx. \quad (2)$$

Здесь $u_1 = k \sin \varphi$, φ — угол между осью пучка и направлением нормали к фазовому фронту соответствующей плоской волны в угловом спектре. Подставляя в это выражение функцию $E_0(c, x)$ из (1) и опуская громоздкие выкладки, запишем угловой спектр поля:

$$G(u_1) = \frac{w_0}{16a} \left[\left(\frac{4a^2}{w_0^2} - 2 - u_1^2 w_0^2 \right) \cos(u_1 a) - \left(\frac{4a^2}{w_0^2} + 2 - u_1^2 w_0^2 \right) \frac{u_1 w_0^2}{2a} \sin(u_1 a) \right] + \\ + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[2 - \exp(-ju_1 a) W^* \left(\frac{u_1 w_0}{2} + \frac{ja}{w_0} \right) - \exp(ju_1 a) W \left(\frac{u_1 w_0}{2} + \frac{ja}{w_0} \right) \right] \left[1 - \left(\frac{2w_0 - u_1^2 w_0^3}{8a} \right)^2 \right], \quad (3)$$

где $W(u_1 w_0/2 + ja/w_0)$ — интеграл вероятности комплексного аргумента; звёздочка означает комплексное сопряжение.

Определим угловой размер пятна поля как

$$G(u_1)/G(0) = 1/e. \quad (4)$$

Радиусы апертур зеркал полусимметричного ОР определяются размерами сферического зеркала, т. к. радиус w_1 пятна поля на этом зеркале всегда больше, чем на плоском: $w_1^2 = w_0^2/(1 - L/R)$ [6]. С другой стороны, условие малости дифракционных потерь для такой электродинамической системы имеет вид $a \approx 2w_1$ [7]. Если теперь положить $u_1 a = m$ и $1 - L/R = n$, то с учётом приведённых выше рассуждений выражение (4) может быть записано в окончательном виде:

$$\frac{\sqrt{n}}{32} \left[\left(\frac{16}{n} - 2 - \frac{m^2 n}{4} \right) \cos m - \left(\frac{16}{n} + 2 - \frac{m^2 n}{4} \right) \frac{mn}{8} \sin m \right] + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[1 - \left(\frac{8\sqrt{n} - m^2 n \sqrt{n}}{64} \right)^2 \right] \times \\ \times \left[2 - \exp(-jm) W^* \left(\frac{m\sqrt{n}}{4} + \frac{2j}{\sqrt{n}} \right) - \exp(jm) W \left(\frac{m\sqrt{n}}{4} + \frac{2j}{\sqrt{n}} \right) \right] = \\ = \frac{1}{e} \left\{ \frac{\sqrt{n}}{32} \left(\frac{16}{n} - 2 \right) + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[2 - W^* \left(\frac{2j}{\sqrt{n}} \right) + W \left(\frac{2j}{\sqrt{n}} \right) \right] \left(1 - \frac{n}{64} \right) \right\}. \quad (5)$$

Таким образом, мы получили трансцендентное уравнение относительно неизвестного $m = ka \sin \varphi$, решив которое, можно найти предел уменьшения размеров зеркал полусимметричного ОР, в котором возбуждается низший тип колебаний TEM_{00q} , где q — число полуволн между отражателями резонатора.

Известно, что вещественным углом φ соответствуют «быстрые» волны, энергия которых запасается в ОР, а комплексным φ — неоднородные плоские волны [8], распространяющиеся в поперечной

к оси резонатора плоскости и затухающие вдоль его оси. Эти волны не участвуют в процессе многократных переотражений в ОР, что приводит к своеобразным потерям за счёт перераспределения полной энергии пучка между запасаемой в объёме ОР и так называемой реактивной энергией, запасаемой вблизи горловины пучка. Следствием такого перераспределения является уменьшение коэффициента передачи резонатора. Поэтому для эффективной работы ОР необходимо, чтобы энергия поля резонатора переносилась распространяющимися пространственными гармониками при $|\sin \varphi| < 1$, когда угловой спектр определяется однородными плоскими волнами; такая ситуация характерна для длиннофокусных ОР. При дальнейшей фокусировке пучка, что имеет место в малоапертурных ОР, энергия спектра должна эффективно перераспределяться в область комплексных углов $|\sin \varphi| > 1$, что соответствует возбуждению неоднородных плоских волн. При этом ширина пространственного распределения поля не уменьшается, а начнётся интенсивный рост боковых лепестков в пятне поля ОР.

Результаты расчёта размера апертуры зеркал ОР a/λ в зависимости от расстояния между ними L/R , выполненные по формуле (5), приведены на рис. 1. Как видно из рис. 1, для существования в малоапертурных ОР низшего типа колебаний TEM_{00q} , энергия которого запасается в объёме резонатора, его геометрические размеры должны лежать в области параметров, ограниченной снизу расчётной кривой. Здесь же показаны экспериментальные точки, соответствующие двум типам колебаний, которые возбуждались в малоапертурном ОР, рассмотренном в разделе 3.

2. ВЫБОР ДИАМЕТРА ИЗМЕРИТЕЛЬНОГО ЗОНДА

Исследование распределения поля в малоапертурных резонаторах естественным образом сталкивается с проблемой выбора размеров рассеивающего зонда, представляющего собой металлическую сферу. Из результатов известных работ [9, 10] невозможно получить ответ на вопрос, каким должен быть диаметр зонда, чтобы измеренное с его помощью распределение поля исследуемого типа колебаний в ОР, имеющем характерное для малоапертурных ОР значение нагруженной добротности $Q_H \approx 1000$ [4], с удовлетворительной точностью соответствовало бы расчётному распределению. В этой ситуации оказалось совершенно необходимым провести дополнительные исследования с целью установления адекватных размеров измерительного зонда.

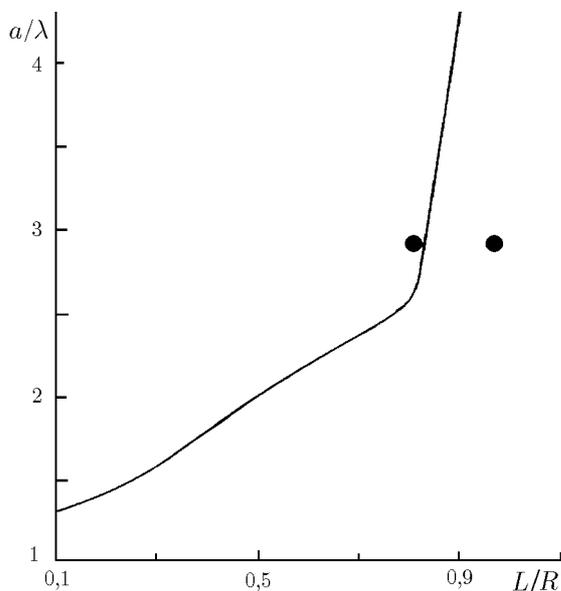


Рис. 1. Зависимость предельного размера зеркал ОР от расстояния между ними

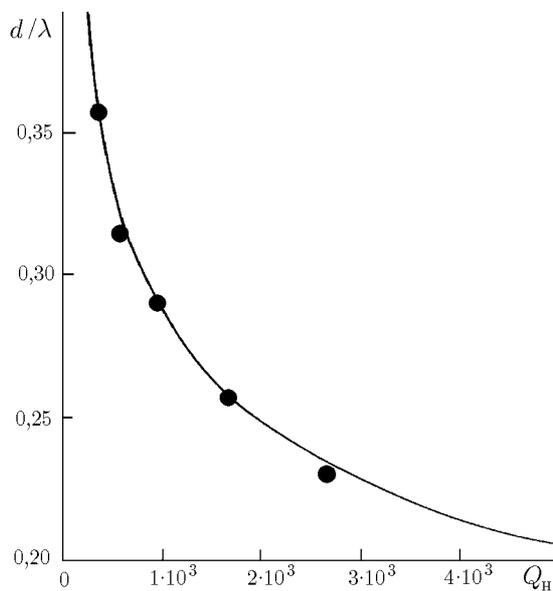


Рис. 2. Зависимость диаметра пробного тела от нагруженной добротности резонансной системы

Измерения выполнялись в четырёхмиллиметровом диапазоне длин волн. Исследуемый ОР образован плоским и сферическим зеркалами с радиусом апертур $a = 38$ мм и с таким же радиусом кривизны R сферического зеркала. Резонатор возбуждался с помощью генератора высокочастотных сигналов Г4-142 через апертурный элемент связи [11] с размерами $6,9 \times 9,6$ мм. Длина такого рупорного излучателя составляет 85 мм и выбирается из условия равномерного распределения фазы в его раскрыве: ошибка определения фазы в раскрыве меньше 10° . Для того, чтобы исключить глубокие провалы в измеренных распределениях полей, выбрано неосесимметричное возбуждение ОР. Эти провалы, возникающие при осесимметричном способе возбуждения резонансной системы, обусловлены интерференцией поля, излучённого элементом связи, и поля резонатора, рассеянного на пробном теле [9]. Сигнал из резонатора выводится через щель связи с размерами $3,6 \times 0,16$ мм в центре сферического зеркала. Прошедший через ОР сигнал поступает в приёмный тракт, состоящий из измерительного поляризационного аттенюатора, детектора, резонансного усилителя и осциллографа. Для контроля уровня подводимой мощности в схеме предусмотрен дополнительный канал, в состав которого входят: направленный ответвитель, развязывающий аттенюатор, детектор, резонансный усилитель и осциллограф. Настройка системы в резонанс осуществляется перемещением плоского зеркала вдоль оси резонатора. Расстояние между отражателями определяется с помощью измерительного проекционного устройства с точностью 1 мкм.

Измерения проведены для типа колебаний TE_{M012} ($L/R = 0,663$). При этом нагруженная добротность резонансной системы Q_n , измеренная по полуширине резонансной кривой [12], варьировалась в широких пределах от 295 до 2620 за счёт изменения периода l одномерной E -поляризованной дифракционной решётки, помещаемой в раскрыв апертурного элемента связи. Относительная погрешность измерения Q_n составила от 2 до 9 % [12]. Таким образом, было реализовано преимущество апертурного способа возбуждения ОР по сравнению с сосредоточенным способом (щель, отверстие) при проведении такого рода исследований, поскольку в этом случае для изменения нагруженной добротности резонансной системы нет необходимости в её перестройке на другие типы колебаний. В описываемом эксперименте использовались решётки, выполненные из вольфрамовой проволоки диаметром 0,02 мм и имеющие период $l = 0,1; 0,2; 0,4; 0,6$ и $0,78$ мм. Распределение поля исследуемого типа колебаний измерялось в первой от плоского зеркала пучности электрической компоненты поля стоячей волны в резонаторе (на расстоянии от зеркала $z \approx \lambda/4$). Пробные тела, выполненные в виде металлических сфер диаметром d от $0,17\lambda$ до $0,4\lambda$, закреплялись на капроновой нити диаметром менее 0,1 мм и протягивались через объём ОР перпендикулярно его оси в плоскости вектора \mathbf{H} магнитного поля волны H_{10} в подводящем волноводе. Измеренные распределения полей сравнивались с расчётными для каждого значения Q_n . Таким образом выбирался диаметр зонда, при котором измеренное распределение поля максимально приближается к расчётному. Экспериментальные значения d/λ при различной добротности Q_n отмечены точками на рис. 2. Используя известный метод получения эмпирических формул [13], получим в окончательном виде, опуская промежуточные выкладки, уравнение, описывающее экспериментальную зависимость d/λ от Q_n :

$$d/\lambda = 10^{0,062 - (\lg Q_n)/4,938} . \quad (6)$$

Эта зависимость показана на рис. 2 сплошной линией. Как видно, с приемлемой для практических целей точностью при заданных λ и Q_n можно выбрать диаметр рассеивающего зонда, обеспечивающий графическое совпадение измеренного и расчётного распределений поля исследуемого типа колебаний в рассматриваемой открытой электродинамической системе.

3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Блок-схема экспериментальной установки для исследования распределения поля в малоапертурных ОР аналогична той, которая использовалась при выборе диаметра измерительного зонда. Для ис-

следования выбран полусимметричный ОР с радиусом апертуры зеркал $a = 13$ мм и радиусом кривизны сферического зеркала $R = 15$ мм. Резонатор возбуждался через расположенный в центре плоского зеркала элемент связи в виде щели с размерами $3,6 \times 0,16$ мм. Щелевой способ возбуждения резонатора выбран потому, что использование рассмотренного выше неосесимметричного апертурного элемента связи при малых геометрических размерах ОР приведёт к большим дифракционным потерям. Сигнал из резонатора выводится с помощью круглого элемента связи с диаметром 1,3 мм, расположенного в центре сферического зеркала. Исследования проведены для двух типов колебаний: $ТЕМ_{006}$ ($L/R = 0,970$) и $ТЕМ_{005}$ ($L/R = 0,814$). Нагруженная добротность Q_H для обоих типов колебаний, измеренная по полуширине резонансной кривой, составила 325 и 488 соответственно. Относительная погрешность измерения Q_H не превышает 4 % [12]. Приведённые диаметры рассеивающих зондов d/λ , с помощью которых проводилось изучение распределения поля исследуемых колебаний, вычислялись из выражения (6) и оказались равными 0,358 при $Q_H = 325$ и 0,329 при $Q_H = 488$.

Результаты измерения распределения поля колебания $ТЕМ_{006}$, выполненные в плоскости вектора \mathbf{E} электрического поля (кривая 1) и в плоскости вектора \mathbf{H} магнитного поля (кривая 2) волны H_{10} в подводящем волноводе, представлены на рис. 3. Здесь же показана расчётная зависимость распределения амплитуды поля исследуемого колебания, полученная из выражения (1) (кривая 3). Распределение поля измерялось на расстоянии $z \approx \lambda/4$ от плоского зеркала резонатора. Прежде всего обращает на себя внимание то обстоятельство, что при расположении зонда на оси резонатора ($x = 0, y = 0$) на обеих экспериментальных кривых наблюдается провал, который обусловлен интерференцией поля, излучённого из элемента связи, и поля резонатора, рассеянного на зонде. Доказательством этого служит тот факт, что по мере удаления от плоского зеркала резонатора, т. е. при измерении амплитудного распределения поля во второй пучности электрической компоненты поля стоячей волны в ОР, глубина провала уменьшается. Согласно расчётам для типа колебаний $ТЕМ_{006}$ диаметр пятна поля на плоском зеркале должен быть меньше λ . Проведённый эксперимент показывает, что получить в полусимметричном ОР пятно поля с диаметром меньше λ невозможно (см. рис. 3). При попытке сфокусировать гауссов пучок до размеров меньше длины волны наблюдается рост боковых лепестков распределения, что помимо увеличения размеров пятна поля на плоском зеркале ОР приводит к росту реактивной энергии, запасённой вблизи горловины гауссова пучка [8].

На рис. 4 показано распределение поля колебания $ТЕМ_{005}$, измеренное в плоскости вектора \mathbf{E} электрического поля (кривая 1) и в плоскости вектора \mathbf{H} магнитного поля (кривая 2) волны H_{10} в подводящем волноводе. Как видно из рис. 4, в этом случае диаметр пятна поля на плоском зеркале ОР больше λ , поэтому не наблюдаются боковые лепестки в распределении поля, которые связаны с запасанием реактивной энергии вблизи плоского зеркала. В то же время отличие измеренного распределения поля исследуемого колебания от расчётного (кривая 3), определяемого выражением (1), не превышает 8 %. Это подтверждает правильность выражения (6) для диаметра рассеивающего зонда, с помощью которого измеряется распределение поля.

Экспериментальные точки, соответствующие геометрическим размерам ОР для обоих исследуемых типов колебаний, показаны на рис. 1. Как видно, случай возбуждения в резонаторе колебания $ТЕМ_{006}$ соответствует области геометрических параметров, ограниченной сверху расчётной кривой. В этом случае в ОР помимо однородных плоских волн должны возбуждаться неоднородные плоские волны, которые распространяются в поперечной к оси резонатора плоскости и не участвуют в переносе энергии. Проведённые экспериментальные исследования распределения поля колебания $ТЕМ_{006}$ в ОР подтверждают правильность этого вывода (см. рис. 3).

При возбуждении в ОР колебания $ТЕМ_{005}$ геометрические размеры резонансной системы соответствуют области параметров, ограниченной снизу расчётной кривой (см. рис. 1). При этом энергия поля резонатора переносится распространяющимися пространственными гармониками, а собственный тип колебаний ОР описывается выражением (1) (см. рис. 4).

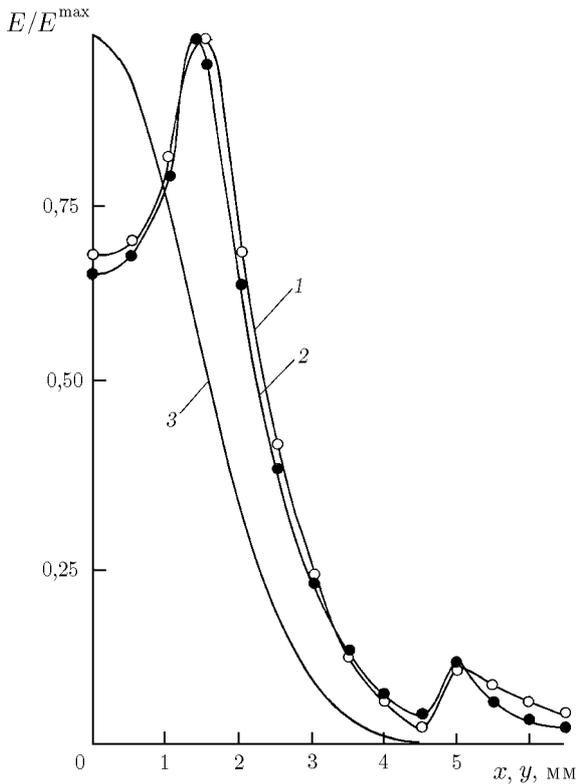


Рис. 3. Распределение поля колебания TEM_{006} в полусимметричном ОР

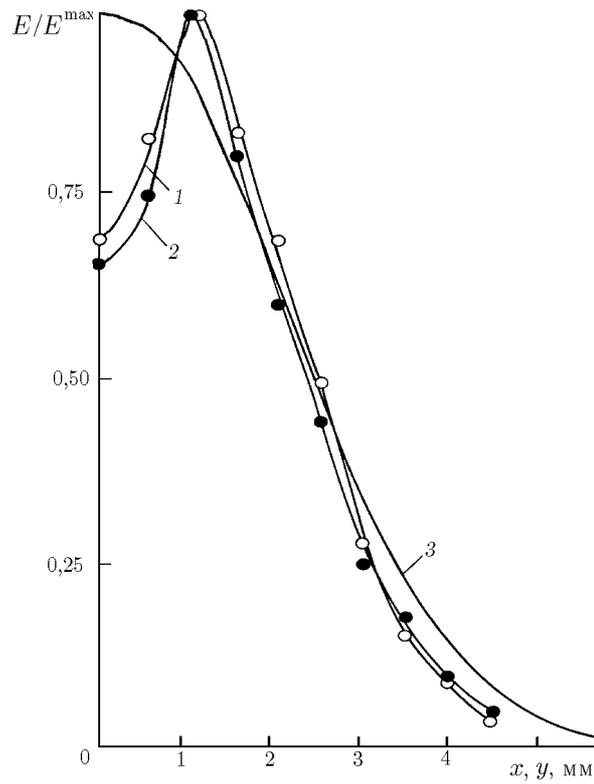


Рис. 4. Распределение поля колебания TEM_{005} в полусимметричном ОР

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, проведённые исследования позволяют сделать ряд важных практических выводов:

- 1) в малоапертурных ОР невозможно получить диаметр пятна поля на зеркалах меньше λ , что и определяет предел уменьшения размеров зеркал ОР;
- 2) попытки сфокусировать гауссов пучок в ОР до размеров меньше λ приводят к увеличению размера пятна поля за счёт аккумуляции части энергии пучка вблизи плоского отражателя в виде неоднородных плоских волн;
- 3) для того, чтобы в ОР существовал тип колебаний TEM_{00q} , распределение поля которого на плоском зеркале описывается выражением (1) и энергия которого запасается в резонансном объеме, геометрические размеры резонатора необходимо выбирать из области параметров, ограниченной снизу расчётной кривой на рис. 1;
- 4) на основании анализа экспериментальных данных получено уравнение, из которого, зная нагруженную добротность Q_n исследуемого колебания в малоапертурном ОР и длину волны λ , можно выбрать диаметр d рассеивающего зонда, обеспечивающего отличие измеренного и расчётного распределений поля не более 8 %.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шестопапов В. П. Физические основы миллиметровой и субмиллиметровой техники. В 2-х Т. Киев: Наукова думка, 1985.

2. Вертий А. А., Карнаухов И. М., Шестопапов В. П. Поляризация атомных ядер миллиметровыми волнами. Киев: Наукова думка, 1990. 232 с.
3. Техника субмиллиметровых волн / Под ред. Р. А. Валитова. М.: Сов. радио, 1969. 480 с.
4. Вертий А. А., Иванченко И. В., Попенко Н. А. и др. // Радиотехника и электроника. 1986. Т. 31, № 1. С. 126.
5. Хэртли Дж. // Квазиоптика / Под ред. Б. З. Каценеленбаума, В. В. Шевченко. М.: Мир, 1966. С. 245.
6. Тарасов Л. В. Физика процессов в генераторах когерентного оптического излучения. М.: Радио и связь, 1981. 440 с.
7. Глоге Д. // Квазиоптика / Под ред. Б. З. Каценеленбаума, В. В. Шевченко. М.: Мир, 1966. С. 280.
8. Sherman G. C. // Phys. Rev. Lett. 1968. V. 21, No. 11. P. 761.
9. Вертий А. А., Леонов Ю. И. // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1976. Т. 19, № 2. С. 105.
10. Попенко Н. А. // Радиотехника и электроника. 1975. Т. 20, № 4. С. 833.
11. Кузьмичёв И. К. // Изв. вузов. Радиофизика. 2000. Т. 43, № 4. С. 325.
12. Yang Z., Lin C., Zho Y. // 10 Int. Conf. Infrared and Millimeter Waves, Lake Buena Vista, Fla, Dec. 9–13, 1985: Conf. Dig. New York, 1985. P. 350.
13. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике. М.: Гостехтеоретиздат, 1954. 608 с.

¹ Институт радиофизики и электроники НАН Украины,
г. Харьков, Украина;

Поступила в редакцию
24 августа 2001 г.

² Institute for Microwave Engineering, Technical University
Hamburg—Harburg, Germany

ON THE LIMITING POSSIBILITIES OF MINIATURIZATION OF OPEN-RESONATOR REFLECTORS

I. K. Kuz'michev, A. S. Tishchenko, and K. Schuenemann

Based on presentation of a quasioptical beam field in the form of the angular spectrum of plane waves, we derive an expression determining the minimum possible size of reflectors in an open resonator (OR) in which the lower oscillation mode with a small power loss exists. The obtained expression is experimentally tested by studying the field distribution in a semisymmetric OR by the probe method. In this case, the diameter of the scattering probe is selected according to the derived equation. The difference between the measured and calculated oscillation-field distributions does not exceed 8%. It is shown that the field-spot diameter on the reflector cannot be less than the wavelength of the microwave oscillator. The attempts to focus the Gaussian beam to a size smaller than the wavelength lead to increasing the field-spot diameter.

УДК 537.877

МОДОВАЯ СТРУКТУРА И ОГИБАЮЩАЯ КОРОТКОГО ИМПУЛЬСА В ГРАДИЕНТНОМ СВЕТОВОДЕ С ПРОДОЛЬНОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ И ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КРИВИЗНОЙ

М. А. Бисярин¹, И. А. Молотков²

Рассмотрено распространение короткого оптического импульса в световоде, характеризующемся сильной зависимостью показателя преломления материала волокна от радиальной координаты и слабой зависимостью от продольной координаты, допускается также слабая пространственная искривлённость оси световода. Моделирующее процесс распространения трёхмерное нелинейное волновое уравнение решено асимптотически по малому параметру, задающему порядок величины амплитуды импульса. Установлена связь распространяющихся мод с собственными значениями и собственными функциями сингулярной задачи Штурма—Лиувилля. Показано, что процесс распространения импульса является трёхмасштабным: высокочастотное заполнение модулируется огибающей, эволюция которой двухмасштабна и описывается нелинейным уравнением Шрёдингера с коэффициентами, зависящими от продольной координаты. Для некоторых типов поперечной и продольной неоднородности материала волокна выражения для поперечного распределения поля импульса и для солитона огибающей получены в элементарных функциях. Показана возможность управления параметрами импульса путём варьирования поперечной и продольной неоднородности световода.

ВВЕДЕНИЕ

Оптические волокна являются уникальной средой для изучения и использования различных нелинейных процессов, обусловленных нелинейным преломлением и вынужденным неупругим рассеянием света: фазовой самомодуляции, фазовой кросс-модуляции, четырёхволнового взаимодействия, вынужденного комбинационного рассеяния и вынужденного рассеяния Мандельштама—Бриллюэна [1]. Порог возбуждения нелинейности невелик [2], и мощности лазерного излучения порядка 1 Вт оказываются достаточно для формирования стационарного импульса длительностью порядка 1 пс с огибающей солитонного типа в диапазоне аномальной дисперсии волокна [3].

Возможность передачи по волоконнооптическим линиям потока солитонных импульсов без серьёзных искажений обусловила широкое распространение солитонных линий связи. Необходимость повышения скорости передачи информации требует уменьшения длительности импульса и увеличения частоты повторения, однако этому препятствует дисперсионное расплывание импульса. Одним из методов управления дисперсионными характеристиками световода является создание специальной зависимости показателя преломления волокна от поперечной координаты. Эксперименты по радикальному снижению влияния дисперсии описаны в работах [4–6], а в [7] теоретически показано, что за счёт непрерывной зависимости показателя преломления от поперечной координаты солитонные импульсы могут распространяться даже в диапазоне нормальной дисперсии материала волокна.

Распространение волновых пучков в неоднородных средах исследовалось в [8] путём построения высокочастотных асимптотик решения линейного уравнения Гельмгольца. Обобщению этого подхода на случай нестационарных волновых процессов — пространственно-временному лучевому методу — посвящена монография [9]. Преобразования, отображающие поле широкого волнового пучка в вакууме в поле пучка в плавнонеоднородной среде, приведены в работе [10]. В [11] осуществлено решение двумерного уравнения Гельмгольца применительно к моделированию распространения в плавнонеоднородной среде волновых пучков, характерные поперечные размеры которых много больше длины

волны, но много меньше характерного масштаба неоднородности среды. Помимо линейных, в монографии [9] рассматривались и нелинейные задачи; в частности в ней показана применимость классической схемы лучевого метода к решению нелинейных задач, содержащих некоторый малый параметр, если решения этих задач известны при нулевом значении параметра.

Процесс распространения коротких — пико- и субпикосекундных — импульсов в градиентном световоде изучен в [12] на основе нелинейного волнового уравнения, в котором показатель преломления является квадратичной функцией искомого поля. Линейная часть показателя преломления предполагалась сильно зависящей от поперечной координаты и слабо зависящей от продольной координаты. Предполагалось также слабое искривление оси световода, однако, поскольку рассматривался двумерный случай, допускалось лишь искривление оси световода в плоскости. Решение же трёхмерного нелинейного волнового уравнения в окрестности пространственной кривой, характеризующейся кривизной и кручением, составляет предмет настоящей работы.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Распространение мощного короткого электромагнитного импульса в среде с различными масштабами неоднородности в продольном и поперечном (по отношению к направлению распространения) направлениях представляет собой пример локализованного нелинейного волнового процесса [12]. Его описание осуществляется путём сведения исходной физической системы уравнений к более простому модельному уравнению и нахождения такого решения этого уравнения, которое отлично от нуля лишь в ограниченной области пространства. В настоящей работе такой областью является окрестность пространственной кривой, и здесь необходимо задать систему координат. Прежде чем формулировать задачу, приведём необходимые сведения из дифференциальной геометрии.

1.1. Система координат в окрестности пространственной кривой

Гладкая кривая в трёхмерном пространстве характеризуется двумя параметрами: кривизной $k(s)$ и кручением $\kappa(s)$, где s — расстояние вдоль кривой, отсчитываемое от некоторой фиксированной точки. С произвольной точкой кривой связан ортонормированный базис $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\beta}$, где $\boldsymbol{\tau}$ — единичный вектор касательной к кривой, $\boldsymbol{\nu}$ — единичный вектор нормали, $\boldsymbol{\beta}$ — единичный вектор бинормали [13]. Для целей настоящей работы в поперечном сечении волновода, т. е. в плоскости, содержащей векторы $\boldsymbol{\nu}$ и $\boldsymbol{\beta}$, естественно ввести полярные координаты ρ и φ , причём азимутальный угол φ отсчитывать от направления вектора $\boldsymbol{\nu}(0)$ в начальной точке кривой:

$$\boldsymbol{\rho} = \int_0^s \boldsymbol{\tau}(s') ds' - \rho \cos\left(\varphi + \int_0^s \kappa(s') ds'\right) \boldsymbol{\nu} - \rho \sin\left(\varphi + \int_0^s \kappa(s') ds'\right) \boldsymbol{\beta}. \quad (1)$$

Учитывая связь базиса $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\beta}$ с кривизной и кручением, устанавливаемую формулами Френе, нетрудно получить выражения для коэффициентов Ламэ введённой таким образом криволинейной системы координат:

$$H_s = 1 + k\rho \cos \Omega, \quad H_\rho = 1, \quad H_\varphi = \rho.$$

Здесь введено обозначение $\Omega = \varphi + \int_0^s \kappa(s') ds'$. Заметим, что если кривизна k равна нулю, то из формул Френе следует равенство нулю и кручения κ , при этом получается обычная цилиндрическая система координат.

В завершение изложения необходимых сведений из дифференциальной геометрии приведём выражение для оператора Лапласа в выбранных криволинейных координатах s, ρ, φ :

$$\Delta f = \frac{1}{H_s H_\rho H_\varphi} \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{H_\rho H_\varphi}{H_s} \frac{\partial f}{\partial s} \right) + \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{H_s H_\varphi}{H_\rho} \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{H_s H_\rho}{H_\varphi} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) \right].$$

1.2. Модельное уравнение и характерные масштабы

Распространение интенсивного пучка электромагнитных волн в неоднородной среде с квадратичной по полю диэлектрической проницаемостью подробно исследовалось в [14]. Описание эффекта самовоздействия пучка осуществлено на базе параболического уравнения, записанного в системе координат, связанной с траекторией центрального луча; оценено отклонение траектории центра масс пучка от траектории центра масс в линейной среде. Однако предметом [14] является стационарный нелинейный процесс, кроме того, пренебрегалось кручением траектории центрального луча: по существу, рассматривалась плоская задача. В настоящей работе нестационарный волновой процесс исследуется на базе уравнения эллиптического типа, а искривлённость оси волновода предполагается трёхмерной: учитывается как кривизна, так и кручение осевой линии.

Электромагнитные явления в диэлектриках описываются системой векторных уравнений Максвелла. Возможность и методы сведения этой системы к скалярному уравнению в задачах о распространении мощного электромагнитного излучения по оптическим волокнам обсуждались в [15–17]. Установлено, что если нелинейность достаточно мала, так что взаимодействием поляризацій можно пренебречь, а также мала разность показателей преломления сердцевин и оболочки волокна, то распространение оптического излучения по световоду можно моделировать нелинейным волновым уравнением

$$\Delta f - \frac{n^2(\boldsymbol{\rho}; f)}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t_{\text{ph}}^2} = 0 \quad (2)$$

для компоненты f электромагнитного поля. Здесь t_{ph} — время, c — скорость распространения электромагнитного излучения в вакууме, n — показатель преломления среды, являющийся непрерывной функцией координаты (1) в окрестности оси световода и зависящий от искомой функции f . В настоящей работе принимается квадратичная по полю зависимость

$$n^2 = \beta^2(\boldsymbol{\rho}) + \frac{\alpha(\boldsymbol{\rho})}{2} \langle f^2 \rangle, \quad (3)$$

где β и α являются непрерывными функциями координат в окрестности оси волокна, $\langle f^2 \rangle$ означает средний за период колебаний квадрат поля [18]. Поскольку объектом исследования является электромагнитная волна, сосредоточенная в окрестности оси световода, ищется решение уравнения (2), удовлетворяющее граничному условию

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} f = 0. \quad (4)$$

Радиус оптического волокна сравним с длиной волны, и изменением поперечной структуры поля, обусловленным нелинейностью процесса распространения, можно пренебречь. В реальных условиях поле становится пренебрежимо малым при конечных значениях радиальной координаты.

В настоящей работе исследуется режим распространения оптического излучения без нелинейной самофокусировки. В работе [7] оценена пороговая плотность потока энергии, при которой самофокусировка начинает проявляться, и показано, что плотность потока энергии при распространении оптических импульсов в световодах на несколько порядков меньше. Математически это выражается в том,

что поле f полагается малой величиной, так что нелинейный член в формуле (3), а следовательно, и в уравнении (2) является малым по сравнению с линейным. Порядок величины поля f обозначим через $\delta \ll 1$; именно по этому малому параметру и будет строиться асимптотическое решение задачи (2)–(4). Сосредоточенность поля в окрестности оси световода обеспечивается зависимостью показателя преломления от радиальной координаты.

Перейдём от физических координат $s_{\text{ph}}, \rho_{\text{ph}}$ и времени t_{ph} к безразмерным переменным s, ρ, t . Исходной физической характеристикой процесса является частота излучения и связанная с ней длина волны в вакууме λ . В работе рассматривается градиентное оптическое волокно, характерной особенностью которого является непрерывная сильная зависимость показателя преломления от радиальной координаты. Продольная неоднородность предполагается слабой, т. е. показатель преломления вдоль оси волокна меняется значительно медленнее, чем в радиальном направлении. В настоящей работе предполагается, что отношение масштабов неоднородности $(\partial n / \partial s_{\text{ph}}) : (\partial n / \partial \rho_{\text{ph}})$ имеет порядок δ^2 . Формулы преобразования от физических переменных к безразмерным имеют вид

$$\rho = \frac{2\pi}{\lambda} \rho_{\text{ph}}, \quad s = \frac{2\pi\delta^2}{\lambda} s_{\text{ph}}, \quad t = \frac{2\pi c}{\lambda} t_{\text{ph}}; \quad (5)$$

множитель 2π введён для упрощения последующих выражений. Поскольку естественным параметром оси световода является переменная s , то кривизна и кручение оси в соответствии с их определением [13] являются функциями порядка δ^2 и представляются как

$$k_{\text{ph}}(s_{\text{ph}}) = \frac{2\pi\delta^2}{\lambda} k(s), \quad \kappa_{\text{ph}}(s_{\text{ph}}) = \frac{2\pi\delta^2}{\lambda} \kappa(s), \quad (6)$$

где $k(s)$ и $\kappa(s)$ — безразмерные функции порядка единицы. Заметим, что преобразования (5) и (6) не изменили выражение для $\Omega = \varphi + \int_0^s \kappa(s') ds'$ (в разделе 1.1 под κ и s понимались физические кручение и координата).

2. АНЗАТЦ

В безразмерных переменных (5) нелинейное волновое уравнение (2) записывается с учётом (3) как

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{\delta^2 k \cos \Omega}{1 + \delta^2 k \rho \cos \Omega} \frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{\delta^4}{(1 + \delta^2 k \rho \cos \Omega)^2} \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} - \delta^6 \frac{k' \rho \cos \Omega - k \kappa \rho \sin \Omega}{(1 + \delta^2 k \rho \cos \Omega)^3} \frac{\partial f}{\partial s} + \\ + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} - \frac{\delta^2 k \sin \Omega}{\rho (1 + \delta^2 k \rho \cos \Omega)} \frac{\partial f}{\partial \varphi} - \left(\beta^2(\rho, s, \varphi) + \frac{\alpha(\rho, s, \varphi)}{2} \langle f^2 \rangle \right) \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0. \quad (7) \end{aligned}$$

Как было показано в [12], высокочастотное заполнение и огибающая импульса эволюционируют с разными фазами, поэтому по аналогии с двумерной задачей отдельно вводим фазу огибающей

$$\theta = Q(s)/\delta - \delta t$$

и ищем решение уравнения (7) в виде

$$f = \delta F(\rho, \theta, s, \varphi) \exp[i(R(s)/\delta^2 - t)] + \delta \bar{F}(\rho, \theta, s, \varphi) \exp[-i(R(s)/\delta^2 - t)], \quad (8)$$

где черта сверху означает комплексное сопряжение. Анзатц (8) выписан здесь в упрощённом виде по сравнению с формулой (12.6) монографии [12], поскольку в рамках настоящей работы планируется изучить распространение только одной (основной) моды.

Подставляя анзатц (8) в выражение (3) и в уравнение (7), в результате несложных, но громоздких преобразований получаем уравнение для комплексной огибающей F :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + (\beta^2 - r^2) F - 2i\delta(\beta^2 - qr) \frac{\partial F}{\partial \theta} + \delta^2 k \cos \Omega \frac{\partial F}{\partial \rho} + \\ & + 2\delta^2 k \rho \cos \Omega r^2 F + i\delta^2 r' F + 2i\delta^2 r \frac{\partial F}{\partial s} - \delta^2 (\beta^2 - q^2) \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} - \delta^2 \frac{k \sin \Omega}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \varphi} + \\ & + \delta^2 \alpha |F|^2 F - 4i\delta^3 k \rho \cos \Omega qr \frac{\partial F}{\partial \theta} + 2\delta^3 q \frac{\partial^2 F}{\partial \theta \partial s} + \delta^3 q' \frac{\partial F}{\partial \theta} - 2i\delta^3 \alpha |F|^2 \frac{\partial F}{\partial \theta} = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

записанное с точностью до членов порядка δ^3 . В уравнении (9) $q(s) = Q'(s)$, $r(s) = R'(s)$, штрих обозначает производную по аргументу. Комплексная огибающая разлагается в ряд по степеням малого параметра δ :

$$F(\rho, \theta, s, \varphi) = \sum_{j=0}^{\infty} \delta^j F_j(\rho, \theta, s, \varphi). \quad (10)$$

Коэффициенты разложения F_0 и F_1 могут не зависеть от φ , однако даже в случае независимости β и α от φ зависимость от азимутального угла всё равно появляется в (10) начиная с коэффициента F_2 , что является следствием искривления оси волокна.

Из условия (4) следует, что $F \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow \infty$: комплексная амплитуда волнового процесса сконцентрирована в окрестности оси волокна.

3. ПОПЕРЕЧНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛЯ И ФАЗА ВЫСОКОЧАСТОТНОГО ЗАПОЛНЕНИЯ

Подставляя разложение (10) в уравнение (9) и приравнивая нулю члены одного порядка по δ , получаем серию граничных задач для дифференциальных уравнений второго порядка, которые совместно с условиями их разрешимости позволяют определить все элементы анзатца (8), (10).

В старшем (нулевом) порядке по δ получается уравнение

$$\frac{\partial^2 F_0}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_0}{\partial \rho} + [\beta^2(\rho, s, \varphi) - r^2(s)] F_0 + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 F_0}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (11)$$

Если линейная часть показателя преломления β азимутально симметрична, то в уравнении (11) переменные разделяются. Функция F_0 должна быть периодичной по φ с периодом 2π , поэтому $F_0 \propto \exp(im\varphi)$, $\partial^2 F_0 / \partial \varphi^2 = -m^2 F_0$, где m — целое число. Азимутально симметричное решение формально получается при $m = 0$. Как функция переменных ρ и s F_0 удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 F_0}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_0}{\partial \rho} + \left[\beta^2(\rho, s) - r^2(s) - \frac{m^2}{\rho^2} \right] F_0 = 0 \quad (12)$$

и граничным условиям

$$\left. \frac{\partial F_0}{\partial \rho} \right|_{\rho=0} = 0, \quad F_0|_{\rho \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \quad (13)$$

Задача (12), (13) представляет собой сингулярную задачу Штурма—Лиувилля, дополнительная сложность которой обусловлена тем, что не только интервал $\rho \in [0, \infty)$ полубесконечен, но и коэффициенты уравнения имеют неинтегрируемую особенность при $\rho = 0$. Изложенный в монографиях [19] и [20] метод исследования задачи Штурма—Лиувилля с регулярными коэффициентами на бесконечном интервале может быть видоизменён применительно к задаче (12), (13). Отсюда следует, что для

достаточно широкого и практически важного класса функций $\beta(\rho, s)$ задача (12), (13) имеет положительные собственные значения $r_j^2(s)$ и соответствующие им собственные функции F_{0j} . Из их числа и выбирается основная мода (8).

Из уравнения (12) следует, что

$$F_0(\rho, \theta, s, \varphi) = V(\rho, s)U(\theta, s) \exp(im\varphi), \quad (14)$$

где $V(\rho, s)$ — выбранная собственная функция задачи (12), (13), нормированная условием

$$\int_0^\infty \rho V^2(\rho, s) d\rho = 1, \quad (15)$$

а функция $U(\theta, s)$ описывает огибающую основной моды в главном приближении (в дальнейшем будем называть её огибающей импульса).

Задача (12), (13) имеет явные решения в случае квадратичной зависимости β^2 от радиальной координаты ρ :

$$\beta^2(\rho, s) = \beta_0^2(s) - \beta_2^2(s)\rho^2/4. \quad (16)$$

Непосредственной подстановкой нетрудно убедиться, что j -тое собственное значение имеет вид

$$\left[r_j^{(m)}(s) \right]^2 = \beta_0^2(s) - (2j + m + 1) \beta_2(s), \quad (17)$$

а нормированная в соответствии с условием (15) собственная функция представляется формулой

$$V_j^{(m)}(\rho, s) = \left(\frac{\beta_2(s)}{2} \right)^{(2m+1)/4} \rho^m \exp[-\beta_2(s)\rho^2/4] L_j^{(m)} \left(\frac{\beta_2(s)\rho^2}{2} \right), \quad (18)$$

где $L_j^{(m)}$ — обобщённый полином Лагерра:

$$L_j^{(m)}(z) = \exp(z) z^{-m} \frac{d^j}{dz^j} (\exp(-z) z^{j+m}).$$

Формулой (17) определяется полный набор мод, которые могут распространяться в градиентном световоде, а именно допустимы такие значения j и m , при которых $\beta_0^2(s) - (2j + m + 1) \beta_2(s) > 0$. Поперечное распределение волнового поля моды представляется формулой (14), в которой функция V имеет вид (18), а огибающая $U(\theta, s)$ определится на следующем шаге асимптотической процедуры.

4. ФАЗА ОГИБАЮЩЕЙ И ПОПРАВКА ПЕРВОГО ПОРЯДКА К КОМПЛЕКСНОЙ АМПЛИТУДЕ

Рассмотрим более подробно азимутально симметричный случай $m = 0$ (при этом β не зависит от φ). Приравняв нулю в уравнении (9) члены порядка δ , получаем уравнение, которому удовлетворяет поправка первого порядка F_1 в разложении (10) комплексной амплитуды:

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_1}{\partial \rho} + [\beta^2(\rho, s) - r^2(s)] F_1 = 2i [\beta^2(\rho, s) - q(s)r(s)] \frac{\partial F_0}{\partial \theta}.$$

Из выражения (14) следует, что поправочное слагаемое F_1 может быть представлено в виде

$$F_1(\rho, \theta, s) = 2iW(\rho, s) \frac{\partial U}{\partial \theta}, \quad (19)$$

где функция $W(\rho, s)$ является решением неоднородного уравнения

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial W}{\partial \rho} + [\beta^2(\rho, s) - r^2(s)] W = [\beta^2(\rho, s) - q(s)r(s)] V, \quad (20)$$

в правую часть которого входит неизвестная функция $q(s)$. Функция W должна удовлетворять граничным условиям, аналогичным (13). Условие разрешимости такой задачи имеет вид

$$\int_0^{\infty} \rho [\beta^2(\rho, s) - q(s)r(s)] V^2(\rho, s) d\rho = 0,$$

откуда получается формула для $q(s)$:

$$q(s) = r(s) + \frac{1}{r(s)} \int_0^{\infty} \rho \left(\frac{\partial V}{\partial \rho} \right)^2 d\rho. \quad (21)$$

После подстановки (21) в уравнение (20) его решение осуществляется стандартным методом [19].

В случае квадратичной зависимости (16) линейной части квадрата показателя преломления от радиальной координаты формулы для $q(s)$ и $W(\rho, s)$ получаются в явном виде. Приведём их для случая нулевой моды ($j = m = 0$):

$$q(s) = \frac{\beta_0^2(s) - \beta_2(s)/2}{\sqrt{\beta_0^2(s) - \beta_2(s)}}, \quad W(\rho, s) = \frac{\beta_2^{3/2}(s)}{8} \rho^2 \exp(-\beta_2(s)\rho^2/4).$$

Соотношение (21) означает, что в градиентном световоде высокочастотное заполнение и огибающая эволюционируют с разными фазами, причём разность между ними различна для различных мод пространства.

5. ОГИБАЮЩАЯ ИМПУЛЬСА

Для поправочного слагаемого второго порядка F_2 из (9) вытекает уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F_2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_2}{\partial \rho} + [\beta^2(\rho, s) - r^2(s)] F_2 = 2i [\beta^2(\rho, s) - q(s)r(s)] \frac{\partial F_1}{\partial \theta} - \\ - k \cos \Omega \frac{\partial F_0}{\partial \rho} - 2k\rho \cos \Omega r^2(s) F_0 - ir'(s) F_0 - 2ir(s) \frac{\partial F_0}{\partial s} + [\beta^2(\rho, s) - q^2(s)] \frac{\partial^2 F_0}{\partial \theta^2} + \\ + \frac{k \sin \Omega}{\rho} \frac{\partial F_0}{\partial \varphi} - \alpha(\rho, s) |F_0|^2 F_0. \quad (22) \end{aligned}$$

Функция F_2 также должна удовлетворять граничным условиям, аналогичным (13). Некоторые коэффициенты уравнения (22) зависят от кривизны и кручения оси световода, таким образом, пространственная искривлённость волокна проявляется в поправочном слагаемом порядка δ^2 .

Условие разрешимости уравнения (22) с требуемыми граничными условиями заключается в ортогональности с весом ρ правой части (22) и функции V — решения однородной задачи (12), (13). Учитывая представления F_0 и F_1 посредством формул (14) и (19), получаем уравнение для огибающей импульса:

$$2ir(s) \frac{\partial U}{\partial s} + g(s) \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + ir'(s) U + h(s) |U|^2 U = 0 \quad (23)$$

— нелинейное уравнение Шрёдингера с коэффициентами, зависящими от продольной координаты. Коэффициенты уравнения (23) выражаются формулами

$$g(s) = 4 \int_0^{\infty} \rho [\beta^2(\rho, s) - q(s)r(s)] V(\rho, s)W(\rho, s) d\rho - \int_0^{\infty} \rho [\beta^2(\rho, s) - q^2(s)] V^2(\rho, s) d\rho,$$

$$h(s) = \int_0^{\infty} \rho \alpha(\rho, s) V^4(\rho, s) d\rho.$$

Зависимость коэффициентов (23) от s отражает влияние продольной неоднородности световода на эволюцию огибающей импульса. В случае продольной неоднородности специального вида, а именно

$$2g(s)r(s) = p^2 h(s),$$

где $p = \text{const}$, солитонное решение уравнения (23) может быть выписано явно:

$$U(\theta, s) = \frac{p \exp(i\theta)}{\sqrt{r(s)} \text{ch}[\theta - \int_0^s [g(s')/r(s')] ds']}. \quad (24)$$

Выражение (24) в сочетании с (5) и (8) наглядно иллюстрирует трёхмасштабный характер процесса распространения импульса: высокочастотное заполнение модулируется огибающей, эволюция которой двухмасштабна, а именно промежуточная по скорости эволюция фазы огибающей сопровождается медленным изменением её амплитуды.

Существенным следствием продольной неоднородности световода является зависимость всех коэффициентов уравнения (23) для огибающей от продольной координаты s . Вводя новые искомым функцию

$$u(\theta, \sigma) = U(\theta, s) \sqrt{r(s)}$$

и независимую переменную

$$\sigma = \frac{1}{2} \int_0^s \frac{g(s')}{r(s')} ds',$$

из (23) получаем нелинейное уравнение Шрёдингера в форме

$$i \frac{\partial u}{\partial \sigma} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + H(\sigma) |u|^2 u = 0, \quad (25)$$

а посредством преобразования

$$u(\theta, \sigma) = U(\theta, s) \sqrt{r(s)}, \quad \sigma = \frac{1}{2} \int_0^s \frac{h(s')}{r^2(s')} ds'$$

нелинейное уравнение Шрёдингера приводится к виду с переменным коэффициентом при члене со второй производной:

$$i \frac{\partial u}{\partial \sigma} + G(\sigma) \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + |u|^2 u = 0. \quad (26)$$

В результате исследования локальной [21] и глобальной [22] разрешимости задачи Коши для уравнения (25) с начальными условиями из класса Шварца показано, что для достаточно широкого и физически

значимого класса функций $H(\sigma)$ существует интервал $[0, \sigma_0)$, на котором гарантировано сохранение солитонного характера импульса; в [12] содержатся некоторые оценки длины этого интервала для различных типов продольной неоднородности.

В связи с проблемами управления дисперсионными характеристиками световода нелинейное уравнение Шрёдингера (26) изучалось в [23], а при двух переменных коэффициентах — в работе [24]. Важные задачи, связанные с более сложными моделями дисперсионных и нелинейных характеристик среды, исследовались в [25–27].

Последовательный учёт членов порядка δ^3 в уравнении (9) позволяет дополнить уравнение (23) для огибающей возмущающими слагаемыми, например, описывающими дисперсию третьего порядка и самоукручение импульса. Некоторые результаты по асимптотическому решению возмущённого нелинейного уравнения Шрёдингера в различных режимах распространения импульса представлены в работе [28].

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основным содержанием настоящей работы является моделирование процесса распространения короткого оптического импульса в градиентном световоде с помощью нелинейного волнового уравнения и применение последовательной асимптотической процедуры для его решения. Предполагается, что показатель преломления волокна медленно меняется в продольном направлении, а ось световода может иметь слабую пространственную кривизну. Процесс распространения считается слабо нелинейным, что позволяет в рамках асимптотической процедуры естественным образом разделить задачи о распределении волнового поля в поперечном сечении световода и собственно о распространении импульса. Первая задача является линейной, сосредоточение волнового поля в окрестности оси световода обеспечивается зависимостью показателя преломления волокна от радиальной координаты. Множество всех мод, которые могут распространяться в градиентном световоде с заданным профилем показателя преломления, определяется множеством положительных собственных значений сингулярной задачи Штурма—Лиувилля (12), (13). В случае квадратичной зависимости (16) линейной части квадрата показателя преломления от радиальной координаты постоянная распространения и поперечное распределение поля выражаются в элементарных функциях (17), (18), в том числе и для мод, у которых распределение поля в поперечном сечении световода зависит от азимутального угла.

Само распространение импульса является нелинейным процессом, который, как показано, имеет трёхмасштабный характер. Быстрый процесс — распространение высокочастотного заполнения — модулируется огибающей, которая описывается нелинейным уравнением Шрёдингера (23) с коэффициентами, зависящими от продольной координаты. Эволюция огибающей двухмасштабна и включает эволюцию фазы огибающей и медленное изменение её амплитуды. Это проиллюстрировано для некоторого частного класса продольных неоднородностей, когда солитонное решение уравнения (23) выражается в явном виде (24). Отметим также, что фазы высокочастотного заполнения и огибающей не совпадают, их отношение не является постоянной величиной, а разность определяется формулой (21).

Преобразования (25) и (26) показывают, что широко обсуждаемая в литературе проблема управления дисперсионными характеристиками световода может исследоваться на базе уравнения (23) как частный случай. Обратное преобразование к физическим переменным не представляет принципиальной трудности. Установление связи коэффициентов уравнения для огибающей с параметрами поперечной и продольной неоднородностей градиентного световода позволяет обобщить задачу и переформулировать её как проблему управления параметрами передаваемого импульса посредством создания соответствующих поперечной и продольной неоднородностей оптического волокна. Решение этой задачи может осуществляться предложенным в настоящей работе методом.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 02–02–16046).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агравал Г. Нелинейная волоконная оптика: Пер. с англ. М.: Мир, 1996. 323 с.
2. Stolen R. H. // Proc. IEEE. 1980. V. 68, No. 10. P. 1 232.
3. Hasegawa A., Tappert F. // Appl. Phys. Lett. 1973. V. 23, No. 3. P. 142.
4. Gambling W. A., Matsumura H., Ragdale C. M. // Microwaves, Optics and Acoustics. 1979. V. 3, No. 6. P. 239.
5. Lin C., Tomita A., Tynes A. R., Glodis P. F., Philen D. L. // Electron. Lett. 1982. V. 18, No. 20. P. 882.
6. Cohen L. G., Mammel W. L., Jang S. J. // Electron. Lett. 1982. V. 18, No. 24. P. 1 023.
7. Jain M., Tzoar N. // J. Appl. Phys. 1978. V. 49, No. 9. P. 4 649.
8. Бабич В. М., Булдырев В. С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн: Метод эталонных задач. М.: Наука, 1972. 456 с.
9. Бабич В. М., Булдырев В. С., Молотков И. А. Пространственно-временной лучевой метод: Линеинные и нелинейные волны. Л.: Изд-во Ленинградского университета, 1985. 272 с.
10. Пермитин Г. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1973. Т. 16, № 2. С. 254.
11. Кондратьев И. Г., Пермитин Г. В., Смирнов А. И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1980. Т. 23, № 10. С. 1 195.
12. Молотков И. А., Вакуленко С. А., Бисярин М. А. Нелинейные локализованные волновые процессы. М.: Янус-К, 1999. 176 с.
13. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. Методы и приложения. М.: Наука, 1986. 760 с.
14. Власов С. Н., Гурбатов С. Н. // Изв. вузов. Радиофизика. 1976. Т. 19, № 8. С. 1 149.
15. Hasegawa A. // Optical Solitons – Theory and Experiment / Ed. by J. R. Taylor. Cambridge, New York, Port Chester, Melbourne, Sydney: Cambridge University Press, 1992. P. 1.
16. Сисакян И. Н., Шварцбург А. Б. // ДАН СССР. 1983. Т. 269, № 1. С. 105.
17. Ерохин Н. С., Сагдеев Р. З. // ЖЭТФ. 1982. Т. 83, № 1. С. 128.
18. Auston D. H. // Topics in Applied Physics. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1977. V. 18. Ultrashort Light Pulses. Picosecond Techniques and Applications / Ed. by S. L. Shapiro. P. 123.
19. Coddington E. A., Levinson N. Theory of ordinary differential equations. New York, Toronto, London: McGraw-Hill Book Company, 1955. 445 p.
20. Titchmarsh E. C. Eigenfunction expansions associated with second-order differential equations. Oxford: Clarendon Press, 1962. 212 p.
21. Бисярин М. А. // Вестник ЛГУ. Сер. физ.-хим. 1989. Вып. 2. С. 80.
22. Бисярин М. А. // Зап. науч. сем. ЛОМИ. 1988. Т. 173. С. 42.
23. Lakoba T. I., Agrawal G. P. // J. Opt. Soc. Am. Ser. B. 1999. V. 16, No. 9. P. 1 332.
24. Schäfer T., Mezentsev V., Spatschek K. H., Turitsyn S. K. // Proc. Roy. Soc. Lond. Ser. A. 2001. V. 457, No. 2 006. P. 273.
25. Rottwitt K., Hermann B., Povlsen J. H., Elgin J. N. // J. Opt. Soc. Am. Ser. B. 1995. V. 12, No. 7. P. 1 307.
26. Desyatnikov A., Maimistov A., Malomed B. // Phys. Rev. Ser. E. 2000. V. 61, No. 3. P. 3 107.
27. Громов Е. М., Таланов В. И. // ЖЭТФ. 1996. Т. 110, № 1. С. 137.
28. Бисярин М. А., Молотков И. А. // Изв. РАН. Сер. физ. 2001. Т. 65, № 6. С. 876.

¹ Научно-исследовательский институт радиофизики
Санкт-Петербургского государственного университета, г. Санкт-Петербург;

² Институт земного магнетизма, ионосферы и распространения
радиоволн РАН, Московская обл., г. Троицк, Россия

Поступила в редакцию
18 июля 2001 г.

**MODE STRUCTURE AND ENVELOPE OF A SHORT PULSE IN A GRADED-INDEX OPTICAL FIBER WITH
A LONGITUDINAL INHOMOGENEITY AND A SPATIAL BENDING***M. A. Bisyarin and I. A. Molotkov*

We consider propagation of a short optical pulse in an optical fiber whose refractive index is strongly dependent on the radial coordinate and weakly dependent on the longitudinal coordinate with allowance for a possible weak spatial bending of the fiber axis. The three-dimensional nonlinear wave equation modeling the pulse propagation is solved asymptotically with respect to a small parameter specifying the order of magnitude of the pulse amplitude. A relationship between the propagating modes and the eigenvalues and eigenfunctions of the singular Sturm—Liouville problem is elucidated. The pulse propagation is shown to have three scales: the high-frequency carrier is modulated by the envelope which evolves in a two-scale manner and is described by a nonlinear Schrödinger equation whose coefficients depend on the longitudinal coordinate. For several types of the transverse and longitudinal inhomogeneities, we obtain the transverse distribution of the wave field and the envelope soliton in terms of elementary functions. The possibility of controlling the pulse parameters by varying the transverse and longitudinal inhomogeneities of the light guide is pointed out.

УДК 621.373.072.9

ОСОБЕННОСТИ РАБОТЫ СВЧ ГЕНЕРАТОРА НА ДИОДЕ ГАННА ПРИ СМЕНЕ ЗНАКА НЕЛИНЕЙНОЙ РЕАКТИВНОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ ПРОВОДИМОСТИ ДИОДА

Д. А. Усанов, С. Б. Вениг, Б. Л. Флешель

Экспериментально показано, что нелинейная реактивная составляющая проводимости диода Ганна может изменять свой знак в зависимости от режима работы диода по постоянному току. Для синхронизированного генератора на диоде Ганна предложен способ определения коэффициента, характеризующего нелинейность реактанса диода.

Известно [1–3], что электрофизические параметры полупроводниковых СВЧ приборов существенно зависят от внешних излучений и полей. В частности, было экспериментально обнаружено, что стационарная вольт-амперная характеристика диода Ганна может изменяться в зависимости от режима его работы на сверхвысоких частотах [4], а нелинейная реактивная составляющая его импеданса может изменять знак [5]. Отметим, что до появления работы [5] общепринятой была точка зрения об уменьшении нелинейной реактивной составляющей проводимости диода Ганна с ростом амплитуды сигнала.

Теоретический и экспериментальный анализ характера нелинейной реактивной составляющей проводимости диода Ганна в зависимости от режима его работы по постоянному току ранее не проводился. Такие исследования и являются целью настоящей работы.

Для расчёта нелинейной составляющей проводимости диода Ганна можно воспользоваться известной моделью синхронизированного автогенератора [6–8]. Синхронизированный СВЧ генератор на диоде Ганна представляется в виде эквивалентной схемы, изображённой на рис. 1. Диод Ганна аппроксимируется нелинейным сопротивлением и нелинейной эквивалентной ёмкостью и описывается комплексной электронной проводимостью $Y_e = G_e + jB_e$, а электродинамическая система — параллельным контуром, включающим в себя проводимость G , ёмкость C_0 и индуктивность L_0 . Нагрузкой для синхронизированного автогенератора служит линия передачи с проводимостью Y_0 . На автогенератор через циркулятор подаётся сигнал с амплитудой E_0 и частотой ω от внешнего источника с внутренним сопротивлением $R_i = 1/Y_0$.

Если ввести следующие обозначения: $G_\Sigma = G + Y_0$, $\omega_0^2 = 1/(C_0L_0)$ — резонансная частота контура автогенератора, $Q_\Sigma = (\omega C_0)/Y_0$ и $Q_H = (\omega C_0)/G_\Sigma$ — внешняя и нагруженная добротности контура автогенератора соответственно на частоте ω , $h = 1 - \omega_0^2/\omega^2 \approx 2 \Delta\omega/\omega_0$ — относительная расстройка, $E = E_0 Y_0 / G_\Sigma$ — амплитуда напряжения синхросигнала на зажимах контура, и сделать замену переменной $\tau = \omega t$, то для напряжения U на зажимах контура автогенератора можно записать дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 U}{d\tau^2} + U = -\frac{1}{Q_H} \left[\frac{dU}{d\tau} - h Q_H U + \frac{1}{G_\Sigma} \frac{di}{d\tau} + E \sin \tau \right]. \quad (1)$$

Решение уравнения (1) в соответствии с методом медленно меняющихся амплитуд запишем в виде

$$U = A \cos \alpha, \quad \dot{U} \equiv dU/d\tau = -A \sin \alpha, \quad \tau = \alpha + \varphi.$$

При этом предполагается, что электронная проводимость диода Ганна определяется проводимостью

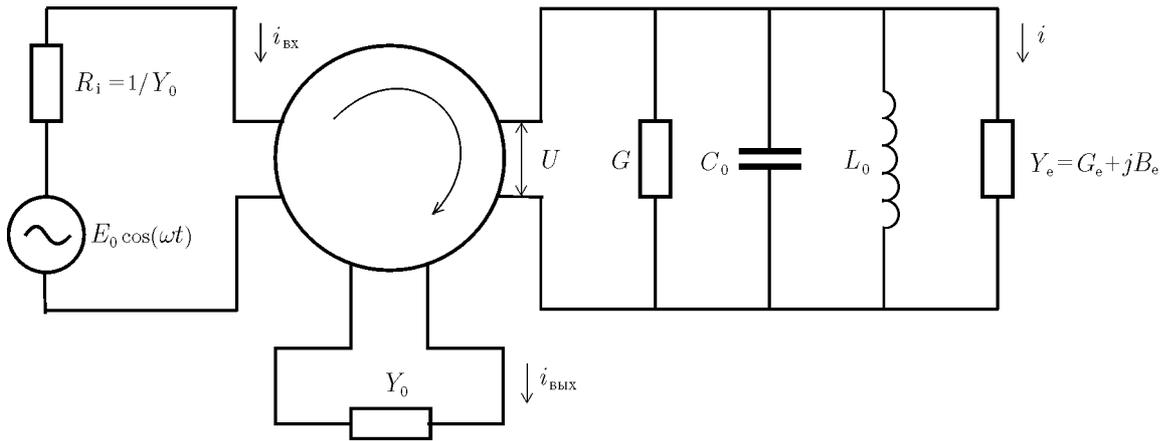


Рис. 1

на первой гармонике, при этом

$$G_e = \frac{i_{a1}}{A} = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} i \cos \alpha \, d\alpha, \quad B_e = \frac{i_{p1}}{A} = -\frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} i \sin \alpha \, d\alpha.$$

Подставив решения в таком виде в уравнение (1), получим систему «укороченных» уравнений:

$$\frac{dA}{d\tau} = \frac{1}{2Q_H} \left[-A \left(1 + \frac{G_e}{G_\Sigma} \right) + E \cos \varphi \right], \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{1}{2Q_H} \left[hQ_H + \frac{B_e}{G_\Sigma} - \frac{E}{A} \sin \varphi \right],$$

которая в стационарном режиме имеет вид

$$E \cos \varphi = A \left(1 + G_e/G_\Sigma \right), \quad E \sin \varphi = A \left(\varepsilon + B_e/G_\Sigma \right), \tag{2}$$

где $\varepsilon = hQ_H$.

В случае автономного режима работы автогенератора ($E = 0$), обозначив амплитуду напряжения A_0 , частоту генерации ω'_0 , а все величины, зависящие от них, дополнительным индексом 0, можно записать соотношения

$$G_{e0} = -G_\Sigma, \quad B_{e0} = -\varepsilon_0 G_\Sigma. \tag{3}$$

С учётом условий (3) из (2) можно получить уравнения для амплитуды и фазы напряжения на зажимах контура синхронизированного автогенератора:

$$A^2 \left[\left(1 - G_e/G_{e0} \right)^2 + \left(\varepsilon - B_e/G_{e0} \right)^2 \right] = E^2, \quad \text{tg } \varphi = \frac{\varepsilon - B_e/G_{e0}}{1 - G_e/G_{e0}}. \tag{4}$$

Для случая «мягкого» возбуждения колебаний в автогенераторе электронная проводимость нелинейного элемента хорошо аппроксимируется выражениями [8]

$$G_e = G'_{e0} (1 - \nu_g A^2), \quad B_e = \omega (C_j + \beta A^2), \tag{5}$$

где G'_{e0} — активная проводимость диода в отсутствие генерации, которую можно считать равной крутизне стационарной вольт-амперной характеристики в рабочей точке, C_j — ёмкость структуры, ν_g и β — коэффициенты, определяющие нелинейность проводимости. В дальнейшем можно пренебречь постоянной составляющей реактивной проводимости диода, т. к. её величина много меньше ёмкости

контура, и использовать для реактивной составляющей проводимости диода выражение $B_e = \omega\beta A^2$. Если подставить выражения для составляющих проводимости (5) в уравнение для амплитуды в системе (4) и ввести обозначения

$$y = \frac{A^2}{A_0^2}, \quad x = \frac{\varepsilon G_{e0}}{G'_{e0} \nu_g A_0^2}, \quad \gamma = \frac{\omega\beta}{G'_{e0} \nu_g}, \quad F = \left(\frac{E}{A_0} \frac{G_{e0}}{G'_{e0} \nu_g A_0^2} \right)^2,$$

получим безразмерное уравнение амплитудно-частотной характеристики синхронизированного автогенератора:

$$y [(1 - y)^2 + (x - \gamma y)^2] = F. \quad (6)$$

Для последующего анализа удобнее переписать уравнение (6) в виде

$$x = \gamma y \pm \sqrt{F/y - (1 - y)^2}. \quad (7)$$

Как и в [6–8], будем считать справедливыми выражения для мощности синхросигнала

$$P_c = A_{\text{пад}}^2 Y_0 / 2$$

и мощности, отдаваемой автогенератором во внешнюю цепь в режиме синхронизации

$$P = A_{\text{отр}}^2 Y_0 / 2 \quad (8)$$

и в автономном режиме

$$P_0 = A_0^2 Y_0 / 2,$$

где $1/Y_0$ — внутреннее сопротивление источника синхросигнала. Амплитуду напряжения падающей волны и мощность синхросигнала можно записать в виде [8]

$$A_{\text{пад}} = E_0 / 2, \quad P_c = E_0^2 Y_0 / 8.$$

Для напряжения на зажимах автогенератора справедливо соотношение

$$U = U_{\text{пад}} + U_{\text{отр}},$$

причём напряжения падающей и отражённой волн связаны через комплексный коэффициент отражения

$$\Gamma = U_{\text{отр}} / U_{\text{пад}},$$

который можно выразить через проводимости:

$$\Gamma = \frac{Y_0 - Y'}{Y_0 + Y'}. \quad (9)$$

Суммарная проводимость Y' автогенератора равна

$$Y' = G + j\omega C_0 + \frac{1}{j\omega L_0} + G_e + jB_e,$$

или

$$Y' = Y_0 (g - 1 + jb),$$

где

$$g = \frac{Q_B}{Q_H} \left(1 + \frac{G}{G_\Sigma} \right), \quad b = \frac{Q_B}{Q_H} \left(\varepsilon + \frac{B_e}{G_\Sigma} \right). \quad (10)$$

Подставляя выражение для Y' в (9), получим выражение для комплексного коэффициента отражения

$$\Gamma = \frac{2 - (g + jb)}{g + jb}$$

и соотношение, связывающее напряжение на зажимах автогенератора с напряжением отражённой волны:

$$U_{отр} = \frac{U\Gamma}{1 + \Gamma}. \tag{11}$$

Тогда для квадрата амплитуды отражённой волны можно записать соотношение

$$A_{отр}^2 = A^2 \left| \frac{\Gamma}{1 + \Gamma} \right|^2 = \frac{A^2}{4} [(2 - g)^2 + b^2].$$

Подставляя $A_{отр}^2$ в (8), получим выражение для мощности, которую отдаёт автогенератор во внешнюю цепь:

$$P = \frac{A^2 Y_0}{8} [(2 - g)^2 + b^2]. \tag{12}$$

Рассмотрим график зависимости (7), который представлен на рис. 2. Величина γ , характеризующая нелинейность реактивной проводимости диода, определяет наклон зависимости (7) в сторону положительных или отрицательных значений x и возможность существования гистерезиса. При максимальном значении y производная dx/dy обращается в бесконечность. Из выражения для производной

$$\frac{dx}{dy} = \gamma \pm \frac{-F/y^2 - 2(1 - y)}{2\sqrt{F/y - (1 - y)^2}}$$

следует, что dx/dy обращается в бесконечность, когда подкоренное выражение в знаменателе равно нулю, при этом из (7) получается $x_{max} = \gamma y_{max}$. В этом случае $\varepsilon + B_e/G_\Sigma = 0$, и выражение для мощности генерации (12) существенно упрощается:

$$P = P_{max} = \frac{A_{max}^2 Y_0}{8} (2 - g)^2. \tag{13}$$

Учитывая выражения (10), соотношения (3), (5) и считая, что $\omega_0 \approx \omega'_0$, получим выражение для максимальной мощности (13) в виде

$$P_{max} = -\frac{\Delta\omega_{max}}{\omega'_0\omega_{max}} \frac{Y_0^2 Q_B}{4\beta} \left[2 - \left(\frac{Q_B}{Q_H} + \frac{G'_{e0}}{Y_0} \right) \left(\frac{\Delta\omega_{max}}{\omega'_0\omega_{max}} \frac{Y_0^2 Q_B}{P_0\beta} + 1 \right) \right]^2. \tag{14}$$

Таким образом, если экспериментально определить в полосе синхронизации максимальную мощность P_{max} , которую СВЧ генератор отдаёт во внешнюю цепь, и соответствующую ей частоту ω_{max} , внешнюю Q_B и нагруженную Q_H добротности, крутизну вольт-амперной характеристики G'_{e0} и частоту ω'_0 автономной генерации, можно найти коэффициент β как решение уравнения (14).

Экспериментальные исследования были проведены в восьмимиллиметровом диапазоне длин волн с использованием диодов Ганна типа AA728. Для определения величины G'_{e0} была измерена стационарная вольт-амперная характеристика используемого диода Ганна. В выбранном для эксперимента

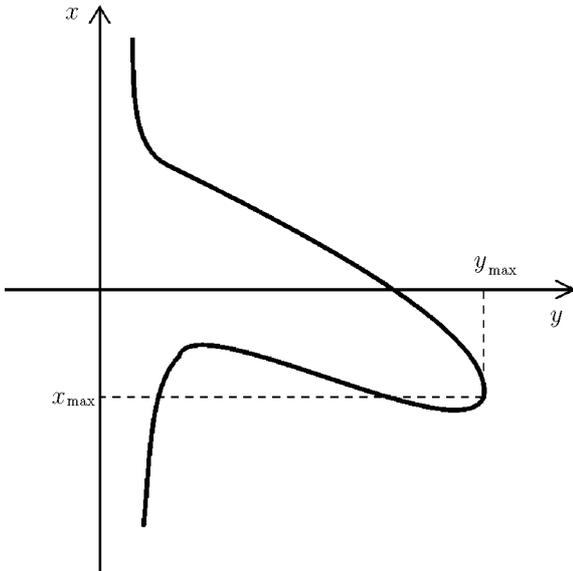


Рис. 2

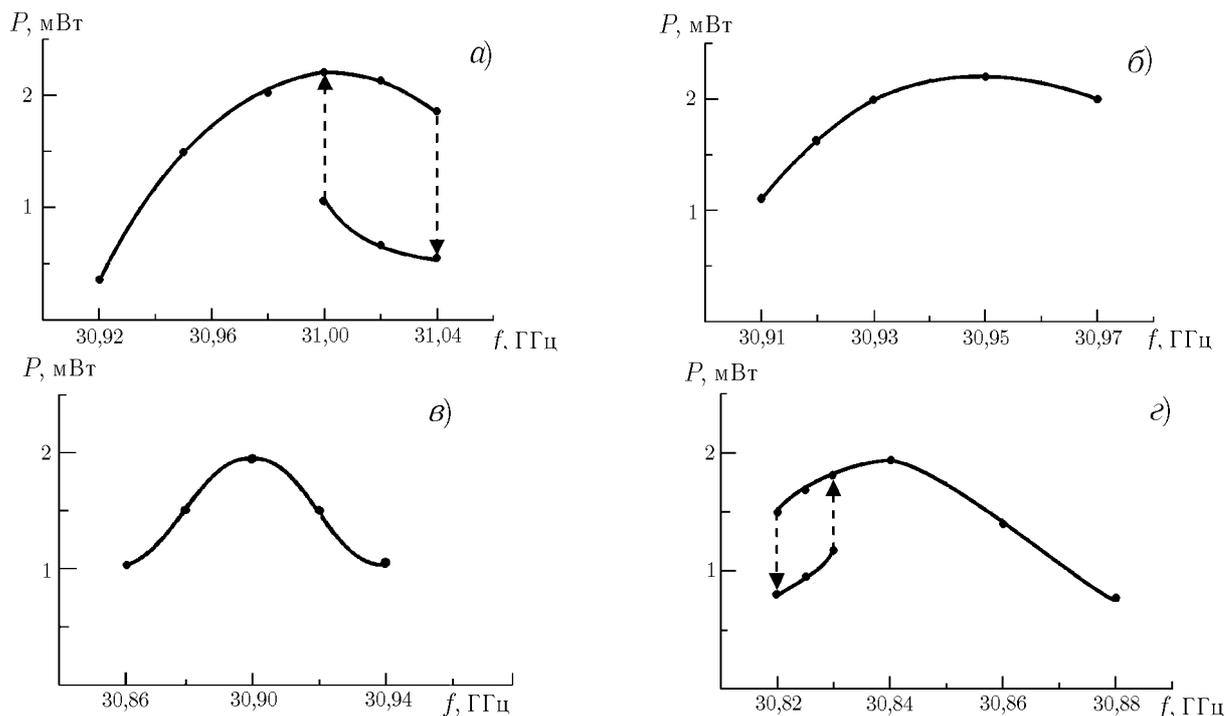


Рис. 3

диапазоне напряжений на диоде Ганна крутизна его вольт-амперной характеристики, равная отрицательной дифференциальной проводимости, составила $0,2 \text{ См}$ для напряжений $2,5 \div 2,7 \text{ В}$; $0,15 \text{ См}$ для напряжений $2,7 \div 3,0 \text{ В}$ и $0,1 \text{ См}$ для напряжений $3,0 \div 3,2 \text{ В}$.

Согласно [8] измерения внешней и нагруженной добротностей были проведены для конструкции СВЧ генератора, в которой был установлен корпус диода без полупроводниковой структуры. Измерения дали $Q_{\text{в}} = 70$ и $Q_{\text{н}} = 55$ для внешней и нагруженной добротностей соответственно.

На рис. 3 представлены экспериментальные зависимости мощности синхронизированного СВЧ генератора на диоде Ганна от частоты $f = \omega/(2\pi)$ внешнего сигнала для различных напряжений смещения V на диоде ($V = 2,5 \text{ В}$; $f'_0 = \omega'_0/(2\pi) = 30,98 \text{ ГГц}$ (а); $V = 2,7 \text{ В}$; $f'_0 = 30,94 \text{ ГГц}$ (б); $V = 2,8 \text{ В}$; $f'_0 = 30,9 \text{ ГГц}$ (в); $V = 3,2 \text{ В}$; $f'_0 = 30,83 \text{ ГГц}$ (г)). Как следует из представленных результатов, при напряжении смещения $2,5 \text{ В}$ график зависимости $P(f)$ (рис. 3а) имеет наклон в сторону положительных расстройок, и наблюдается гистерезис при входе и выходе из режима синхронизации. С ростом напряжения смещения наклон зависимости уменьшается, гистерезис исчезает и при напряжении $2,8 \text{ В}$ зависимость мощности от частоты становится симметричной относительно частоты автономной генерации (рис. 3в). Дальнейшее увеличение напряжения смещения приводит к возникновению наклона зависимости в сторону отрицательных расстройок и возникновению гистерезиса на нижнем краю полосы синхронизации (рис. 3г).

Следует отметить, что в случае относительно больших значений β разных знаков наблюдался различный знак электронной перестройки частоты.

С использованием экспериментальных данных было решено уравнение (14) и получены значения коэффициента нелинейности β реактивной составляющей проводимости диода Ганна, которые приведены в табл. 1.

Из результатов расчёта, приведённых в табл. 1, следует, что при низких напряжениях смещения нелинейная составляющая проводимости отрицательна, затем с ростом напряжения смещения коэф-

эффициент нелинейности растёт, меняет знак и становится положительным. В этом случае реактивная составляющая проводимости диода Ганна при увеличении амплитуды сигнала растёт.

Таблица 1

β , См · с/В	V , В
$-8,574 \cdot 10^{-14}$	2,5
$-4,096 \cdot 10^{-14}$	2,7
0	2,8
$7,884 \cdot 10^{-14}$	3,2

Полученные данные были сопоставлены с результатами определения аналогичных параметров с помощью предложенного в [8] метода, применимого для случая, когда нелинейность мала. В соответствии с этим методом зависимость, представленная на рис. 3б, строится в координатах $\Delta\omega/\omega_0$, $\Delta P/P_0$. Были определены параметры получившегося эллипса синхронизации и рассчитан коэффициент нелинейности реактивной составляющей проводимости. Рассчитанный по этой методике коэффициент β равен $-3,985 \cdot 10^{-14}$ См · с/В, что достаточно хорошо совпадает с полученным выше значением (см. табл. 1).

Таким образом, показано, что нелинейная реактивная составляющая проводимости диода Ганна изменяет свой знак в зависимости от режима его работы по постоянному току. Предложен способ определения нелинейной составляющей реактанса диода Ганна на основе использования полученных соотношений и измерения характеристик генератора, работающего в режиме синхронизации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зи С. Физика полупроводниковых приборов: В 2-х кн. М.: Мир, 1984.
2. Шур М. Физика полупроводниковых приборов: В 2-х кн. М.: Мир, 1992.
3. Усанов Д. А., Скрипаль А. В. Физика полупроводников (явления переноса в структурах с туннельно-тонкими полупроводниковыми слоями). Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1996. 236 с.
4. Усанов Д. А., Вениг С. Б., Горбатов С. С., Семёнов А. А. // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1994. Т. 2, № 5. С. 35.
5. Усанов Д. А., Вениг С. Б., Горбатов С. С., Семёнов А. А. // Письма в ЖТФ. 1994. Т. 20, вып. 21. С. 21.
6. Радиотехнические устройства СВЧ на синхронизированных генераторах / Н. Н. Фомин, В. С. Андреев, Э. С. Воробейчиков и др. М.: Радио и связь, 1991. 192 с.
7. Андреев В. С. // Радиотехника. 1975. Т. 30, № 2. С. 43.
8. Малышев В. А., Роздобудько В. В., Головкин А. С. // Радиотехника и электроника. 1979. Т. 24, № 6. С. 1110.

Саратовский госуниверситет,
г. Саратов, Россия

Поступила в редакцию
19 октября 1999 г.

OPERATION FEATURES OF A LOCKED GUNN-DIODE MICROWAVE OSCILLATOR DUE TO SIGN REVERSAL OF THE NONLINEAR REACTANCE OF THE DIODE

D. A. Usanov, S. B. Wenig, and B. L. Fleshel

It is shown experimentally that the nonlinear reactance of a Gunn diode can reverse its sign depending on the operation mode of the diode with respect to the direct current. We propose a method for determination of the factor describing the diode-reactance nonlinearity in the case of a locked Gunn-diode oscillator.

ВЛИЯНИЕ АНАЛОГО-ЦИФРОВОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ НА ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ГАУССОВА ШУМА

А. В. Беляков, А. В. Якимов

Исследуется влияние аналого-цифрового преобразователя (АЦП) на статистические характеристики стационарного гауссова шума. Учитываются два основных эффекта: во-первых, усечение «хвостов» вероятностного распределения, обусловленное ограниченностью диапазона значений процесса на выходе АЦП, и, во-вторых, дискретизация шума, т. е. трансформация непрерывного вероятностного распределения входного шума в набор вероятностей отсчётов на выходе АЦП. Указанные эффекты в литературе до сих пор, по-видимому, не анализировались. В качестве параметра выбрана эффективность использования АЦП, под которой понимается стандарт шума, нормированный на максимальную допустимую амплитуду входного напряжения АЦП. Этот параметр характеризует эффект усечения «хвостов» вероятностного распределения. Кроме того, варьируется разрядность АЦП, определяющая степень дискретизации шума. Приводятся рекомендации по выбору разрядности и эффективности использования АЦП.

ВВЕДЕНИЕ

Гауссовость является важным свойством шума, позволяющим, в частности, получить дополнительную информацию о его природе [1, 2]. В качестве простейшей контролируемой меры негауссовости шума иногда используется значение четвёртого кумулянта [1–5].

Многие современные исследования шумов и их происхождения связаны с использованием цифровой техники (см., например, [2]). Для преобразования исследуемых процессов из аналогового вида в дискретный используются аналого-цифровые преобразователи (АЦП). Очевидно, данные приборы увеличивают погрешность измерения характеристик шума, например его статистических моментов.

Воздействие АЦП на обрабатываемый шум обусловлено двумя основными эффектами. Во-первых, это усечение «хвостов» вероятностного распределения, обусловленное ограниченностью диапазона значений процесса на выходе АЦП. Максимальная допустимая амплитуда квантованного шума определяется разрядностью АЦП. Во-вторых, это дискретизация аналогового шума, т. е. трансформация вероятностного распределения входного шума в набор вероятностей отсчётов на выходе АЦП. Однако указанные эффекты в литературе до сих пор, по-видимому, не анализировались.

Цель настоящей работы — изучение влияния АЦП на статистические характеристики квантуемого стационарного гауссова шума. Степень искажения гауссова процесса определяется изменением первых двух и появлением ненулевых старших кумулянтов.

В качестве параметра выбрана эффективность K использования АЦП, под которой понимается стандарт шума, нормированный на максимальную допустимую амплитуду входного напряжения АЦП. Этот параметр характеризует эффект усечения «хвостов» распределения. Кроме того, варьируется разрядность m АЦП, определяющая степень дискретизации шума.

1. ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОЦИФРОВАННОГО ШУМА

Анализ проводится на примере стационарного гауссова шума с нулевым статистическим средним ($\langle x \rangle = 0$) и стандартом σ_x . Подчёркнём, что гауссов шум обладает нулевыми высшими кумулянтами: $\kappa_j = 0$ при $j > 2$.

При обработке в АЦП шум преобразуется из непрерывного $x(t)$ в последовательность $x(t_i)$, где t_i — моменты взятия отсчётов. Одновременно шум квантуется, в результате чего он превращается в последовательность целых чисел $n_i = [x(t_i)/\Delta x]$, где квадратные скобки означают взятие ближайшего к аргументу целого, Δx — шаг квантования входного процесса, соответствующий одному шагу АЦП.

Таким образом, распределение шума на выходе АЦП представляет собой набор вероятностей отсчётов $p(n)$, определяемых выражением

$$p(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\text{adc}}^2}} \int_{n-1/2}^{n+1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_{\text{adc}}^2}\right) dx, \quad (1)$$

где $n \in [-N_{\text{adc}}/2+1; N_{\text{adc}}/2-2]$ — дискретные значения отсчётов, $\sigma_{\text{adc}} = \sigma_x/\Delta x$ — стандарт входного шума, нормированный на шаг квантования, $N_{\text{adc}} = 2^m$ — полное число шагов АЦП.

Вероятности граничных отсчётов $p(-N_{\text{adc}}/2)$ и $p(N_{\text{adc}}/2 - 1)$ определяются площадью под «хвостами» функции плотности вероятности, которые соответствуют положительным и отрицательным выбросам за пределы допустимого для АЦП диапазона входных напряжений.

Таким образом, на выходе АЦП может существовать $N_{\text{adc}}/2$ положительных и столько же отрицательных отсчётов. Эти отсчёты смещены на один шаг в область отрицательных значений, т. к. здесь нуль считается положительным числом.

Моделировались шумы с различными стандартами, определяемыми параметром

$$K = 2\sigma_{\text{adc}}/N_{\text{adc}}, \quad (2)$$

который изменялся в диапазоне от $1/8$ до $1/2$. Также варьировалась разрядность m АЦП от 8 до 20. Такие разрядности характерны для большинства современных АЦП.

2. СТАТИСТИЧЕСКИЕ МОМЕНТЫ

Для оцифрованного шума статистический момент порядка s определяется следующим известным выражением:

$$\alpha_s = \sum_{n=-N_{\text{adc}}/2}^{N_{\text{adc}}/2-1} n^s p(n). \quad (3)$$

При вычислении среднего значения α_1 в силу симметрии аргументов исходных вероятностей в данной сумме остаются только три слагаемых, соответствующих вероятностям $p(-N_{\text{adc}}/2)$, $p(-N_{\text{adc}}/2 + 1)$ и $p(N_{\text{adc}}/2 - 2)$. Указанные слагаемые являются «непарными» и не уничтожаются взаимно в сумме при вычислении любых нечётных моментов.

Следует обратить внимание на первое слагаемое суммы (3), определяемое вероятностью

$$p(-N_{\text{adc}}/2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\text{adc}}^2}} \int_{-\infty}^{-N_{\text{adc}}/2+1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_{\text{adc}}^2}\right) dx = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\xi), \quad (4)$$

где $\operatorname{erfc}(\xi)$ — функция вероятности ошибок, $\xi = (1 - 1/N_{\text{adc}})/(\sqrt{2}K)$. Это слагаемое важно при вычислении нечётных моментов.

Заметим, что $N_{\text{adc}} = 2^m$, поэтому вероятность $p(-N_{\text{adc}}/2)$ практически не зависит от m при достаточно большой разрядности АЦП ($m \geq 6$), т. к. в этом случае $1/N_{\text{adc}} \ll 1$.

Отметим, что три «непарные» вероятности, входящие в соотношение (3), связаны следующим соотношением:

$$p(N_{\text{adc}}/2 - 1) = p(-N_{\text{adc}}/2) + p(-N_{\text{adc}}/2 + 1). \quad (5)$$

Отсюда, полагая в (3) $s = 1$, можно обнаружить, что среднее значение оцифрованного шума определяется только вероятностью минимально возможного отсчёта: $\alpha_1 = -p(-N_{\text{adc}}/2)$. Этот результат с учётом соотношения (4) объясняет слабую зависимость α_1 от разрядности АЦП при $m \geq 6$.

Используя соотношения (3), (4), можно показать, что третий статистический момент $\alpha_3 \approx -(3/8) \times \text{erfc}(\xi) N_{\text{adc}}^2$. В этом выражении видна сильная зависимость α_3 от разрядности m АЦП.

В общем случае для любого нечётного момента существует соотношение вида $\alpha_s \propto N_{\text{adc}}^{s-1}$, где $s = 1, 3, 5, 7, \dots$. Это выражение справедливо, как было отмечено выше, только при достаточно большой разрядности АЦП. Учитывая, что $m = \log_2 N_{\text{adc}}$, можно определить вид зависимости любого нечётного момента от разрядности АЦП.

При вычислении чётных статистических моментов необходимо учитывать все N_{adc} членов суммы (3). Таким образом, теоретическое вычисление чётных статистических моментов оцифрованного шума становится практически невозможным. Значения таких моментов и кумулянтов находятся численно.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА

Ниже приводятся результаты анализа искажения таких статистических характеристик выходного шума, как нормировочный коэффициент A , среднее значение α_1 , стандарт σ_n , коэффициенты асимметрии γ_3 и эксцесса γ_4 .

Основным критерием правильности вычисления вероятностного распределения на выходе АЦП является выполнение условия нормировки: сумма A всех вероятностей должна быть равна единице. В результате вычислений были получены значения $1 - A$ порядка 10^{-15} . Эта величина ограничивает точность представленных ниже результатов.

После проверки условия нормировки исследовалась зависимость среднего значения α_1 шума на выходе АЦП от эффективности K при различной разрядности m . Зависимости, соответствующие различным разрядностям АЦП, совпадают. В то же время с уменьшением эффективности K среднее значение быстро падает и уже при $K = 1/4$ составляет величину порядка 10^{-5} , а при $K = 1/8$ — меньше 10^{-13} . Заметим, что вероятность выхода реализации исследуемого шума за диапазон допустимых значений АЦП, определяемая функцией вероятности ошибок $\text{erfc}(\xi)$, не превышает $5 \cdot 10^{-5}$ при $K = 1/4$ и 10^{-15} при $K = 1/8$.

Затем проводилось сравнение стандарта σ_n шума на выходе АЦП с нормированным стандартом σ_{adc} входного шума. Определение стандарта шума на выходе АЦП требует суммирования всех N_{adc} слагаемых в (3), что необходимо для вычисления второго статистического момента. Для различных разрядностей m были получены одинаковые зависимости отношения стандартов $\sigma_{\text{adc}}/\sigma_n$ от эффективности K использования АЦП. Обнаружено, что при $K = 1/4$ отличие этого отношения от единицы составляет величину порядка 10^{-5} .

Для модуля коэффициента асимметрии γ_3 оцифрованного шума получены результаты, представленные на рис. 1. Здесь видна сильная зависимость абсолютной величины коэффициента асимметрии от разрядности m и эффективности K использования АЦП. С ростом m модуль коэффициента асимметрии уменьшается, но несколько медленнее, чем при уменьшении K . Для $m = 16$ при $K = 1/4$ модуль коэффициента асимметрии составил порядка 10^{-7} .

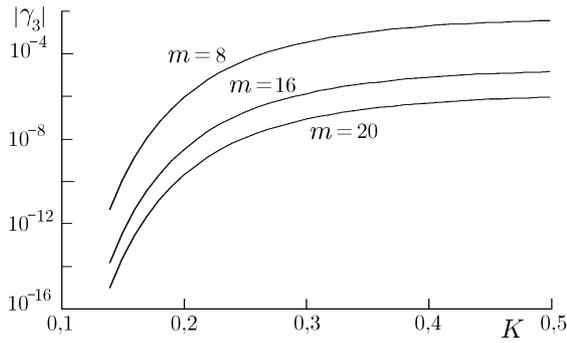


Рис. 1

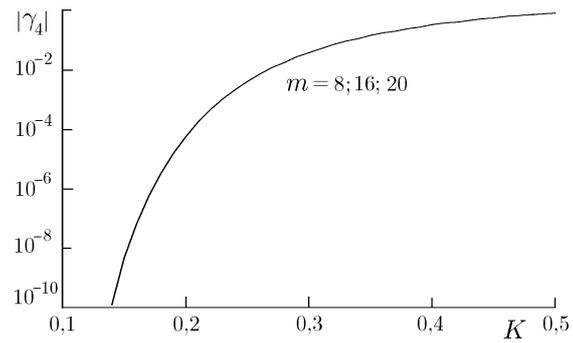


Рис. 2

Таким образом, среднее значение, дисперсия и коэффициент асимметрии шума на выходе АЦП мало отличаются от аналогичных статистических характеристик исходного шума уже при $K = 1/4$, т. е. когда максимальная допустимая амплитуда входного сигнала в 4 раза превышает стандарт входного шума.

Перейдём к анализу зависимости коэффициента эксцесса γ_4 от эффективности использования АЦП, представленной на рис. 2. Отметим, что при $K = 1/4$ абсолютное значение коэффициента эксцесса оцифрованного шума составляет приблизительно 10^{-3} . По сравнению с нулевым коэффициентом эксцесса входного гауссова шума это значительная величина. Модуль коэффициента асимметрии γ_3 при таком же значении K составляет примерно 10^{-7} для 16-ти разрядного и 10^{-8} для 20-ти разрядного АЦП. Отсюда видно, что АЦП вносит гораздо больший эксцесс, чем асимметрию.

Таким образом, для уменьшения абсолютной величины эксцесса, обусловленного цифровой обработкой шума, предпочтительнее ограничиться эффективностью использования АЦП $K = 1/8$, при которой модуль коэффициента эксцесса не превышает 10^{-10} . От разрядности АЦП коэффициент эксцесса зависит слабо.

ВЫВОДЫ

Исследовано влияние аналого-цифрового преобразователя на статистические характеристики гауссова шума. Получены следующие результаты.

1) При обработке шума в АЦП необходимо учитывать два эффекта: усечение «хвостов» вероятностного распределения и дискретизацию шума, причём первый эффект оказывает большее влияние на статистические характеристики процесса, чем второй.

2) Для стандарта и статистического среднего значения оцифрованного шума эффект дискретизации не существен, но хорошо заметен эффект усечения «хвостов», влияние которого на статистические характеристики шума быстро ослабевает с уменьшением эффективности K использования АЦП.

3) Оба указанных эффекта (дискретизация и усечение «хвостов») приводят к появлению ненулевого коэффициента асимметрии у оцифрованного шума.

4) Статистическое среднее, стандарт и коэффициент асимметрии оцифрованного шума с высокой точностью совпадают с аналогичными характеристиками шума на входе АЦП, если отношение K стандарта к максимальной допустимой амплитуде входного напряжения АЦП меньше или равно $1/4$. В этом случае можно пренебречь влиянием АЦП на указанные характеристики квантуемого шума.

5) С точки зрения коэффициента эксцесса влиянием АЦП на статистические характеристики оцифрованного шума можно, по-видимому, пренебречь только при $K \leq 1/8$.

Авторы благодарны А. П. Трифонову за ценные замечания по настоящей статье. Работа выполнена при поддержке Отделения науки НАТО «Наука для мира» (грант SiP-973799 Semiconductors), а также РФФИ (гранты № 00-15-96620 и 01-02-16666).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кузовлев Ю. Е., Бочков Г. Н. // Изв. вузов. Радиофизика. 1983. Т. 26, № 3. С. 310.
2. Weissman M. B. // Rev. Mod. Phys. 1988. V. 60, No. 2. P. 537.
3. Малахов А. Н. Кумулянтный анализ негауссовых случайных процессов и их преобразований. М.: Сов. радио, 1978. 376 с.
4. Макаров С. В., Медведев С. Ю., Якимов А. В., Феррантэ Г., Мичели В., Принчипато Ф. // Изв. вузов. Радиофизика. 1999. Т. 42, № 3. С. 278.
5. Yakimov A. V., Hooge F. N. // Physica B. 2000. V. 291. P. 97.

Нижегородский госуниверситет им. Н. И. Лобачевского,
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию
24 августа 2001 г.

THE INFLUENCE OF AN ANALOG-TO-DIGITAL CONVERTER ON THE PROBABILITY CHARACTERISTICS OF A GAUSSIAN NOISE

A. V. Belyakov and A. V. Yakimov

We analyze the influence of an analog-to-digital converter (ADC) on the statistical characteristics of a stationary Gaussian noise with allowance for two main effects. The first effect caused by the limited magnitude of the signal at the ADC output is the truncation of “tails” of the probability density function (PDF). The second effect is the noise quantization, i.e., the transformation of the continuous PDF of the input noise to the set of readout probabilities at the ADC output. To our knowledge, these effects were not analyzed earlier in the literature. The efficiency of ADC usage, i.e., the ratio of the noise standard to the maximum acceptable amplitude of the ADC input voltage, is chosen as the parameter describing the effect of truncation of PDF “tails.” In addition, we vary the ADC digit capacity which determines the effect of the noise quantization. Suggestions on the choice of ADC and the efficiency of its use are given.

УДК 537.86:519.2

ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ ОБНАРУЖЕНИЕ УЗКОПОЛОСНЫХ РАДИОСИГНАЛОВ НА ФОНЕ ШУМА НЕИЗВЕСТНОЙ ИНТЕНСИВНОСТИ

А. П. Трифонов, В. И. Костылев

Найдено распределение решающей статистики адаптивного энергетического обнаружителя с обучением. Получены выражения для вероятностей ложной тревоги и правильного обнаружения.

ВВЕДЕНИЕ

В статистической радиофизике широко используется модель узкополосного радиосигнала [1]

$$s(t) = \operatorname{Re}[S(t) \exp(j2\pi f_0 t)], \quad f_0 \gg \Delta f, \quad (1)$$

где $S(t) = AU(t) \exp(j\varphi)$ — комплексная огибающая сигнала (A — амплитуда сигнала, $U(t)$ — нормированная комплексная огибающая, φ — начальная фаза), f_0 — несущая частота, Δf — ширина спектра. Для обнаружения в белом шуме узкополосных радиосигналов с известной огибающей $S(t)$ широко применяется корреляционный приёмник. Для обнаружения узкополосного радиосигнала $s(t)$ неизвестной формы в классической работе [2] предложено использовать энергетический обнаружитель, состоящий из последовательно соединённых полосового фильтра, энергетического приёмника и порогового устройства.

Входной сигнал энергетического обнаружителя

$$x_{\text{in}}(t) = \theta s(t) + n_{\text{in}}(t), \quad (2)$$

где $\theta = 0; 1$, представляет собой при гипотезе H_1 смесь обнаруживаемого узкополосного радиосигнала $s(t)$ и белого шума $n_{\text{in}}(t)$, а при гипотезе H_0 — только белый шум $n_{\text{in}}(t)$. Входящий в (2) априори неизвестный бинарный параметр θ [1] принимает значения 0 или 1, совпадающие с индексом гипотезы.

Полосовой фильтр предназначен [2] для ограничения ширины спектра шума, поэтому центральная частота и ширина полосы пропускания фильтра совпадают с несущей f_0 и шириной спектра Δf обнаруживаемого сигнала (1). Предполагается [2], что искажение обнаруживаемого сигнала $s(t)$ фильтром незначительно и им можно пренебречь. При этом выходной сигнал полосового фильтра имеет вид

$$x(t) = \theta s(t) + n(t), \quad (3)$$

где $n(t)$ — профильтрованный шум. Сигнал (3) подаётся на вход энергетического приёмника, назначение которого — сформировать на своём выходе напряжение $u(t)$, пропорциональное энергии обрабатываемой реализации сигнала $x(t)$, т. е.

$$u(t) = 1(t - T) \Xi, \quad (4)$$

где

$$1(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

— единичная ступенчатая функция, T — длительность интервала $[0, T]$ времени обработки сигнала $x(t)$ в энергетическом приёмнике,

$$\Xi = 2E_T[x(t)]/N_0 \quad (5)$$

— негауссовская [3] статистика обнаружения (решающая статистика), $E_T[x(t)]$ — энергия части реализации сигнала $x(t)$, попадающей в интервал $[0, T]$ времени обработки, N_0 — односторонняя спектральная плотность мощности белого шума $n_{in}(t)$. Используя теорему Котельникова, энергию $E_T[x(t)]$ можно представить в виде

$$E_T[x(t)] = \frac{1}{2\Delta f} \sum_{k=0}^B \left| X\left(\frac{k}{\Delta f}\right) \right|^2, \quad (6)$$

где $B = T\Delta f$ — база обработки сигнала $x(t)$ (база обнаружения), $X(t)$ — комплексная огибающая узкополосного сигнала $x(t)$ на выходе полосового фильтра.

Выходной сигнал (4) энергетического приёмника подаётся на пороговое устройство, осуществляющее его сравнение с пороговым уровнем h . При $\Xi \geq h$ принимается решение о наличии сигнала, а при $\Xi < h$ — о его отсутствии.

1. ВЕРОЯТНОСТЬ ЛОЖНОЙ ТРЕВОГИ

Из (5) и (6) нетрудно получить, что в отсутствие на входе энергетического обнаружителя сигнала $s(t)$ решающая статистика Ξ имеет χ^2 -распределение [4, 5] с числом степеней свободы $\mu = 2(B + 1)$, т. е.

$$\Xi|H_0 = \chi_\mu^2, \quad (7)$$

где χ_a^2 — случайная величина, имеющая χ^2 -распределение с a степенями свободы.

Вероятность ложной тревоги $P_0 = \Pr\{\Xi \geq h|H_0\} = 1 - F_{\chi^2|\mu}(h)$ энергетического обнаружителя можно представить в виде

$$P_0 = \Gamma(B + 1, h/2)/B! = 1 - P(B + 1, h/2), \quad (8)$$

где $F_{\chi^2|a}(x)$ — функция χ^2 -распределения с a степенями свободы, $\Gamma(a, b) = \Gamma(a) - \gamma(a, b)$ — дополнительная неполная гамма-функция, $\Gamma(a)$ — гамма-функция, $\gamma(a, b)$ — неполная гамма-функция, $P(a, b) = \gamma(a, b)/\Gamma(a)$ — нормированная неполная гамма-функция [4]. Пороговый уровень h , необходимый для обеспечения требуемой вероятности ложной тревоги P_0 , может быть определён как

$$h = F_{\chi^2|\mu}^{-1}(1 - P_0). \quad (9)$$

Здесь $F_{\chi^2|a}^{-1}(P)$ — функция, обратная $F_{\chi^2|a}(x)$.

Выражения (7) и (8) неявно предполагают, что спектральная плотность мощности N_0 шума априори точно известна. Эта информация использовалась, в частности, при нормировке статистики обнаружения (5). Если величина N_0 априори неизвестна, то вместо истинного значения N_0 в (5) будем использовать некоторое прогнозируемое (ожидаемое) значение \tilde{N}_0 : $\tilde{\Xi} = 2E_T[x(t)]/\tilde{N}_0$. Если обозначить через $\delta N_0 = (\tilde{N}_0 - N_0)/N_0$ относительную погрешность, с которой известна спектральная плотность мощности шума, то, как нетрудно показать, выражение для вероятности ложной тревоги $\tilde{P}_0 = \Pr\{\tilde{\Xi} \geq h|H_0\}$ примет вид

$$\tilde{P}_0 = \Gamma(B + 1, (1 + \delta N_0)h/2)/B!. \quad (10)$$

Правая часть выражения (10) совпадает с правой частью (8) при $\delta N_0 \rightarrow 0$. На рис. 1 для $B = 100$ и нескольких пороговых уровней h , определённых по формуле (9) (пороговый уровень h_8 соответствует вероятности ложной тревоги $P_0 = 10^{-8}$, уровень h_6 — вероятности $P_0 = 10^{-6}$, а уровень h_4 — вероятности $P_0 = 10^{-4}$), приведены графики зависимости отношения \tilde{P}_0/P_0 от δN_0 , рассчитанные с использованием формул (8) и (10). Как следует из рис. 1, неточность знания спектральной плотности мощности шума существенно влияет на вероятность ложной тревоги: для принятых значений B и h погрешность δN_0 в $\pm 10\%$ может привести к изменению вероятности ложной тревоги на 3 порядка.

Неопределённость относительно N_0 не позволяет выбрать порог h , априорно обеспечивающий заданную вероятность ложной тревоги. Будем полагать, что в целях стабилизации вероятности ложной тревоги дисперсия $D = N_0 \Delta f/2$ шума $n(t)$ на выходе полосового фильтра измеряется заранее по известному правилу [6]

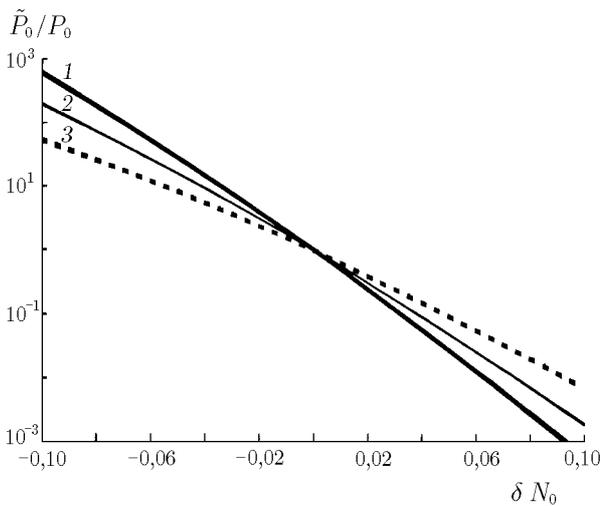


Рис. 1. Влияние погрешности, с которой известна спектральная плотность мощности шума, на вероятность ложной тревоги энергетического обнаружителя. Кривые 1–3 соответствуют $h = h_8; h_6; h_4$

$$\hat{D} = \frac{1}{2L} \sum_{k=0}^L \left| X \left(-\frac{k+1}{\Delta f} \right) \right|^2$$

в течение интервала времени $[-(L+1)/\Delta f, -1/\Delta f]$ длительностью $\tau = L/\Delta f$, где L — база обработки шума при обучении (база обучения), $\hat{D} = \hat{N}_0 \Delta f/2$ — оценка дисперсии D шума на выходе полосового фильтра, \hat{N}_0 — оценка спектральной плотности мощности входного белого шума. Описанная процедура соответствует задаче обнаружения при обучении с учителем, когда система до начала обнаружения сигнала настраивается на нужные значения параметра обстановки (в рассматриваемом случае — на интенсивность шума) [7]. При этом предполагается, что на интервале времени обучения обнаруживаемый сигнал отсутствует. Нетрудно убедиться, что

$$\hat{N}_0 = \frac{N_0}{\nu} \chi_\nu^2, \tag{11}$$

где $\nu = 2(L+1)$ — число степеней свободы.

Используя оценку \hat{N}_0 вместо истинного значения N_0 при нормировке, имеем следующее выражение для статистики обнаружения:

$$\hat{\Xi} = 2E_T[x(t)]/\hat{N}_0. \tag{12}$$

Из (7) и (11) можно получить

$$\hat{\Xi}|H_0 = \nu \chi_\mu^2 / \chi_\nu^2 = \mu \mathcal{F}_{(\mu, \nu)},$$

где $\mathcal{F}_{(a,b)}$ — случайная величина, имеющая распределение Фишера—Снедекора со степенями свободы a, b [4, 5]. Воспользовавшись формулой 26.6.11 из [4], нетрудно убедиться, что

$$\hat{\Xi}|H_0 \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \chi_\mu^2 = \Xi|H_0. \tag{13}$$

Таким образом, при отсутствии обнаруживаемого сигнала распределения решающих статистик адаптивного (с обучением) и традиционного энергетических обнаружителей асимптотически одинаковые.

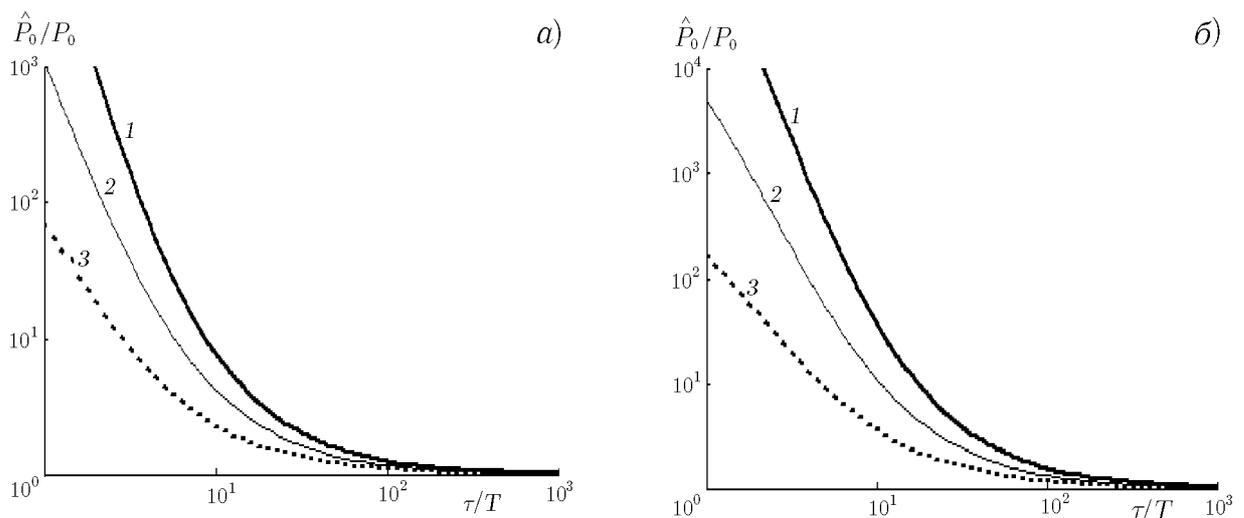


Рис. 2. Отношение вероятностей ложной тревоги адаптивного и традиционного энергетических обнаружителей при $B = 100$ (а) и $B = 10$ (б). Кривые 1–3 соответствуют $h = h_8; h_6; h_4$

Используя приведённые в [4] выражения для функции распределения Фишера—Снедекора, можно получить формулу для вероятности ложной тревоги энергетического обнаружителя с обучением в виде

$$\hat{P}_0 = \Pr\{\hat{\Xi} \geq h | H_0\} = I_{\frac{\nu}{\nu+h}}\left(\frac{\nu}{2}, \frac{\mu}{2}\right) = 1 - I_{\frac{h}{\nu+h}}\left(\frac{\mu}{2}, \frac{\nu}{2}\right), \quad (14)$$

где $I_z(a, b) = B_z(a, b)/B(a, b)$ — нормированная неполная бета-функция, $B_z(a, b)$ — неполная бета-функция, $B(a, b)$ — бета-функция [4]. Воспользовавшись равенством [4]

$$1 - I_z(a, b) = (1 - z)^{a+b-1} \sum_{k=0}^{a-1} C_{a+b-1}^k \left(\frac{z}{1-z}\right)^k,$$

где a и b — произвольные целые числа, C_m^k — биномиальный коэффициент (число сочетаний из m по k), выражение (14) можно преобразовать к виду

$$\hat{P}_0 = \left(\frac{\nu}{\nu+h}\right)^{B+\nu/2} \sum_{k=0}^B C_{B+\nu/2}^k \left(\frac{h}{\nu}\right)^k. \quad (15)$$

Поскольку $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \{\nu/(\nu+h)\}^{B+\nu/2} = \exp(-h/2)$ вследствие второго замечательного предела и $\lim_{\nu \rightarrow \infty} C_{B+\nu/2}^k / \nu^k = 2^{-k}/k!$ при любых конечных B и k , из (15) получаем

$$\hat{P}_0 \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \exp\left(-\frac{h}{2}\right) \sum_{k=0}^B \frac{(h/2)^k}{k!} = \frac{\Gamma(B+1, h/2)}{B!} = P_0. \quad (16)$$

В (16) учтена возможность представления дополнительной неполной гамма-функции с целым первым параметром в виде произведения факториала, экспоненты и полинома [4]:

$$\Gamma(m, a) = (m-1)! \exp(-a) \sum_{l=0}^{m-1} \frac{a^l}{l!}. \quad (17)$$

Правая часть (16) подтверждает формулу (13): с точки зрения вероятности ложной тревоги энергетическое обнаружение с обучением асимптотически эквивалентно энергетическому обнаружению при априорно известной спектральной плотности мощности шума.

На рис. 2 в зависимости от отношения τ/T времён обучения и обнаружения приведены рассчитанные с использованием формул (14) и (8) графики отношения \hat{P}_0/P_0 вероятностей ложной тревоги адаптивного и традиционного энергетических обнаружителей для тех же значений параметра h , что и на рис. 1. Рис. 2а построен для $B = 100$, а рис. 2б — для $B = 10$. На рис. 3 для той же, что на рис. 1 и 2а, базы обработки сигнала приведена зависимость относительной разности $\delta h = (\hat{h} - h)/h$ порога \hat{h} (необходимого для обеспечения требуемой вероятности ложной тревоги \hat{P}_0 адаптивного энергетического обнаружителя) и порога h (необходимого для обеспечения такой же вероятности ложной тревоги $P_0 = \hat{P}_0$ традиционного энергетического обнаружителя, использующего априорную информацию о спектральной плотности мощности шума) от отношения τ/T времён обучения и обнаружения. Как видно из хода кривых на рис. 2 и 3, различие вероятностей ложной тревоги \hat{P}_0 и P_0 и порогов \hat{h} и h убывает с ростом времени обучения τ . Однако для обеспечения близких значений \hat{P}_0 и P_0 (\hat{h} и h) необходимо время адаптации τ , превосходящее время обнаружения T почти в 100 раз. При этом с ростом базы обнаружения B необходимое относительное время адаптации τ/T несколько уменьшается.

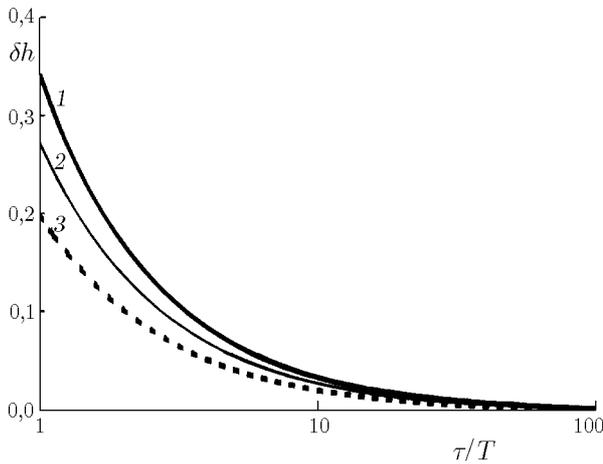


Рис. 3. Относительная разность пороговых уровней, обеспечивающих одинаковую вероятность ложной тревоги адаптивного и традиционного энергетических обнаружителей при $B = 100$. Кривые 1–3 соответствуют $P_0 = \hat{P}_0 = 10^{-8}$; 10^{-6} ; 10^{-4}

2. ОБНАРУЖЕНИЕ РАДИОСИГНАЛА С ДЕТЕРМИНИРОВАННОЙ АМПЛИТУДОЙ

Если на входе энергетического обнаружителя наряду с шумом $n_{in}(t)$ существует детерминированный обнаруживаемый сигнал $s(t)$ (т. е. $\theta = 1$ в формуле (2)) и спектральная плотность мощности шума N_0 известна, то нетрудно показать, что

$$\Xi|H_1 = \chi_{\mu, d_T^2}^2, \tag{18}$$

где $\chi_{a, \lambda}^2$ — случайная величина, имеющая нецентральное χ^2 -распределение с a степенями свободы и параметром нецентральности λ ,

$$d_T^2 = 2E_T[s(t)]/N_0 \tag{19}$$

— энергетическое отношение сигнал/шум (сигнальная составляющая статистики обнаружения Ξ). Из (18) следует, что при гипотезе H_1 и детерминированных амплитуде A и начальной фазе φ обнаруживаемого радиосигнала характеристическая функция статистики обнаружения Ξ имеет вид

$$\Theta_{\Xi|H_1}(j\eta; \mu, Aq_T) = (1 - 2j\eta)^{-\mu/2} \exp\left(\frac{j\eta A^2 q_T^2}{1 - 2j\eta}\right), \tag{20}$$

где $q_T^2 = N_0^{-1} \int_0^T |U(t)|^2 dt$. При случайных параметрах A и φ выражение (20) можно трактовать как условную характеристическую функцию статистики обнаружения Ξ . Найти безусловную характери-

стическую функцию статистики Ξ можно посредством усреднения характеристической функции (20) по случайным параметрам.

Рассмотрим вначале случай обнаружения радиосигнала с детерминированной амплитудой A , но случайной начальной фазой φ , распределённой по произвольному закону. Поскольку правая часть (20) не зависит от φ , усреднение характеристической функции в этом случае не требуется, и формула (18) остаётся верной для случайной фазы. Вероятность правильного энергетического обнаружения $P_1 = \Pr\{\Xi \geq h|H_1\}$ радиосигнала с детерминированной амплитудой и случайной начальной фазой может быть представлена в виде ряда:

$$P_1 = \exp\left(-\frac{d_T^2}{2}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{d_T^{2m} \Gamma(m+B+1, h/2)}{2^m m! (m+B)!}. \quad (21)$$

Как нетрудно убедиться, при малых значениях энергетического отношения сигнал/шум ($d_T^2 \approx 0$) вероятность правильного обнаружения мало отличается от вероятности ложной тревоги ($P_1 \approx P_0$), а при $h \approx 0$ вероятность правильного обнаружения близка к единице.

Если спектральная плотность мощности шума N_0 неизвестна и применяется обучение, так что статистика энергетического обнаружения имеет вид (12), то с учётом (11) и (18) можно получить

$$\hat{\Xi}|H_1 = \nu \chi_{\mu, d_T^2}^2 / \chi_{\nu}^2 = \mu \mathcal{F}_{(\mu, \nu), d_T^2}, \quad (22)$$

где $\mathcal{F}_{(a, b), \lambda}$ — случайная величина, имеющая нецентральное распределение Фишера—Снедекора [4, 5] со степенями свободы a, b и параметром нецентральности λ . Воспользовавшись формулой 26.6.23 из [4], нетрудно убедиться, что

$$\hat{\Xi}|H_1 \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \chi_{\mu, d_T^2}^2 = \Xi|H_1. \quad (23)$$

Из (13) и (23) очевидно, что потери в эффективности адаптивного энергетического обнаружения радиосигнала со случайной начальной фазой, обусловленные априорной неопределённостью спектральной плотности мощности шума, асимптотически убывают с увеличением базы обучения L .

Приведённое в [4] выражение 26.6.21 позволяет записать формулу для вероятности правильного адаптивного энергетического обнаружения узкополосного радиосигнала с детерминированной амплитудой и случайной начальной фазой в виде

$$\hat{P}_1 = 1 - \Gamma(B-L) \frac{\nu^B h^L}{(\nu+h)^{B+L}} \exp\left(-\frac{d_T^2}{2}\right) \times \\ \times \sum_{k=0}^L \frac{(1+\nu/h)^k}{(B+k+1)!(L-k)!} {}_1F_1\left(B+L+2; B+k+2; d_T^2 \frac{L+1}{\nu+h}\right), \quad (24)$$

обобщающем формулу (21) и переходящем в последнюю при $L \rightarrow \infty$. Здесь ${}_1F_1(a; b; z)$ вырожденная (конфлюэнтная) гипергеометрическая функция (функция Куммера) [4, 8].

При целочисленных значениях первых двух параметров функцию Куммера можно выразить через полиномы и экспоненту [8]:

$${}_1F_1(k; m; z) = \frac{(m-2)!(1-m)_k}{(k-1)!} z^{1-m} \left[\sum_{l=0}^{m-k-1} \frac{(1+k-m)_l}{l!(2-m)_l} z^l - \exp(z) \sum_{l=0}^{k-1} \frac{(1-k)_l}{l!(2-m)_l} (-z)^l \right],$$

где $(a)_k$ — символ Похгаммера [4]. Поскольку как база обнаружения B , так и база обучения L целые по определению, формулу (24) нетрудно преобразовать к виду

$$\hat{P}_1 = 1 - (B - L - 1)! \frac{\nu^B h^L}{(\nu + h)^{B+L}} \exp\left(-\frac{d_T^2}{2}\right) \sum_{k=0}^L \frac{(1 + \nu/h)^k (B + L)!}{[(B + k + 1)!]^2 (L - k)!} \times$$

$$\times (-1 - B - k)_{B+L+2} \left(d_T^2 \frac{L + 1}{\nu + h}\right)^{-1-B-L} \left[\sum_{l=0}^{k-L-1} \frac{(1 + L - k)_l}{l! (-B - k)_l} \left(d_T^2 \frac{L + 1}{\nu + h}\right)^l - \right.$$

$$\left. - \exp\left(d_T^2 \frac{L + 1}{\nu + h}\right) \sum_{l=0}^{B+L+1} \frac{(-1 - B - L)_l}{l! (-B - k)_l} \left(-d_T^2 \frac{L + 1}{\nu + h}\right)^l \right].$$

3. ОБНАРУЖЕНИЕ ЗАМИРАЮЩЕГО РАДИОСИГНАЛА

Рассмотрим теперь обнаружение замирающего радиосигнала $s(t)$, имеющего не только случайную начальную фазу φ , но и случайную амплитуду A . От амплитуды обнаруживаемого сигнала $s(t)$ зависит его энергия $E_T[s(t)]$ и, следовательно, энергетическое отношение сигнал/шум d_T^2 , определённое в (19). Обе эти величины при обнаружении замирающего радиосигнала случайны. Очевидно также, что если амплитуда A обнаруживаемого радиосигнала случайна, то закон распределения решающей статистики Ξ традиционного энергетического обнаружителя будет отличаться от нецентрального χ^2 -распределения, а закон распределения решающей статистики $\hat{\Xi}$ адаптивного энергетического обнаружителя — от нецентрального распределения Фишера—Снедекора. Следовательно, если обнаруживаемый по энергии сигнал имеет случайную амплитуду, формулы (18) и (22) использовать нельзя.

Предположим вначале, что спектральная плотность мощности шума N_0 известна. В этом случае найти безусловную характеристическую функцию статистики энергетического обнаружения можно, усредняя характеристическую функцию (20) по случайной амплитуде A :

$$\Theta_{\Xi|H_1}(j\eta; \mu, q_T^2, \Omega) = (1 - 2j\eta)^{-\mu/2} \int_0^{+\infty} \exp\left(\frac{j\eta A^2 q_T^2}{1 - 2j\eta}\right) W(A; \Omega) dA, \tag{25}$$

где $W(A; \Omega)$ — плотность вероятности случайной амплитуды A , Ω — вектор параметров, характеризующих закон распределения случайной амплитуды. В частности, если амплитуда A распределена по закону Рэлея, то, вычисляя интеграл в (25), можно получить

$$\Theta_{\Xi|H_1}(j\eta; B, d_{Tm}^2) = [1 - 2(d_{Tm}^2 + 1)j\eta]^{-1} (1 - 2j\eta)^{-B}, \tag{26}$$

где $d_{Tm}^2 = \overline{E_T[s(t)]}/N_0 = \overline{A^2} q_T^2/2$.

Правая часть (26) представляет собой произведение характеристических функций экспоненциального и χ^2 -распределений. Следовательно, при энергетическом обнаружении замирающего радиосигнала решающая статистика может быть представлена в виде

$$\Xi|H_1 = e_{2(d_{Tm}^2 + 1)} + \chi_{2B}^2, \tag{27}$$

где e_a — случайная величина, распределённая по экспоненциальному закону с параметром a , и слагаемые в правой части (27) статистически независимы. Формула, аналогичная (27), была получена другим способом в [9] для частного случая, а именно в предположении, что обнаруживаемый сигнал имеет равномерно распределённую случайную начальную фазу. В настоящей работе показано, что эта формула

верна при любой начальной фазе, как детерминированной, так и случайной с произвольным законом распределения.

Воспользовавшись результатами [10], можно получить выражение для вероятности правильного энергетического обнаружения замирающего радиосигнала со случайной рэлеевской амплитудой и произвольной начальной фазой на фоне шума известной интенсивности:

$$P_1 = P_0 + \left(\frac{d_{Tm}^2 + 1}{d_{Tm}^2} \right)^B \exp \left[-\frac{h}{2(d_{Tm}^2 + 1)} \right] P \left(B + 1, \frac{d_{Tm}^2 h}{2(d_{Tm}^2 + 1)} \right). \quad (28)$$

Здесь, как и в (8), $P(a, b)$ — нормированная неполная гамма-функция. Если воспользоваться формулой (17), выражение (28) можно преобразовать к виду

$$P_1 = P_0 + \left(\frac{d_{Tm}^2 + 1}{d_{Tm}^2} \right)^B \left\{ \exp \left[-\frac{h}{2(d_{Tm}^2 + 1)} \right] - \exp \left(-\frac{h}{2} \right) \sum_{k=0}^B \frac{1}{k!} \left[\frac{d_{Tm}^2 h}{2(d_{Tm}^2 + 1)} \right]^k \right\}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда спектральная плотность мощности шума неизвестна и используется процедура обучения. Из (27) и (11) находим

$$\hat{\Xi} | H_1 = \nu \frac{e_{2(d_{Tm}^2 + 1)} + \chi_{2B}^2}{\chi_{\nu}^2} = 2 \left[(d_{Tm}^2 + 1) \mathcal{F}_{(2, \nu)} + B \mathcal{F}_{(2B, \nu)} \right],$$

т. е. при гипотезе H_1 решающая статистика $\hat{\Xi}$ представляет собой взвешенную сумму двух независимых случайных величин, каждая из которых имеет распределение Фишера—Снедекора. Функция распределения $F(x|H_1)$ статистики $\hat{\Xi}$ в этом случае запишется как

$$F(x|H_1) = \Pr \left\{ \nu \frac{e_{2(d_{Tm}^2 + 1)} + \chi_{2B}^2}{\chi_{\nu}^2} < x \right\} = \Pr \left\{ e_{2(d_{Tm}^2 + 1)} + \chi_{2B}^2 - \frac{x \chi_{\nu}^2}{\nu} < 0 \right\}. \quad (29)$$

Вычисляя стоящую в правой части (29) вероятность, после громоздких преобразований получаем

$$F(x|H_1) = \frac{(B+L)!}{L! B!} \left(\frac{x}{\nu} \right)^B \left\{ {}_2F_1 \left(B; B+L+1; B+1; -\frac{x}{\nu} \right) - \left(\frac{d_{Tm}^2 + 1}{d_{Tm}^2 + 1 + x/\nu} \right)^{B+L+1} {}_2F_1 \left(B; B+L+1; B+1; -\frac{x d_{Tm}^2}{\nu(d_{Tm}^2 + 1) + x} \right) \right\},$$

где ${}_2F_1(a, b; c; z)$ — гипергеометрическая функция (функция Гаусса) [4, 8]. Выражение для вероятности правильного адаптивного энергетического обнаружения радиосигнала со случайной рэлеевской амплитудой можно представить в виде

$$\hat{P}_1 = \frac{(B+L+1)!}{(L+1)! B!} \frac{(d_{Tm}^2 + 1)^{B+L+1}}{R^{L+1}} F_2 \left(B+L+2, B, L+1; B+1, L+2; -d_{Tm}^2, -\frac{d_{Tm}^2 + 1}{R} \right), \quad (30)$$

где $R = h/\nu$ — нормированный пороговый уровень, $F_2(a, b, b'; c, c'; y, z)$ — функция Аппеля второго порядка [11]. С учётом целочисленности B и L выражение (30) удаётся преобразовать к более удобной для компьютерных расчётов форме:

$$\hat{P}_1 = \left(\frac{d_{Tm}^2 + 1}{d_{Tm}^2} \right)^B \left(\frac{d_{Tm}^2 + 1}{d_{Tm}^2 + R + 1} \right)^{\nu/2} + \frac{1}{(R+1)^{\nu/2}} \sum_{k=0}^{B-1} \frac{(\nu/2)_k}{k!} \left(\frac{R}{R+1} \right)^k \left[1 - \left(\frac{d_{Tm}^2 + 1}{d_{Tm}^2} \right)^{B+k} \right]. \quad (31)$$

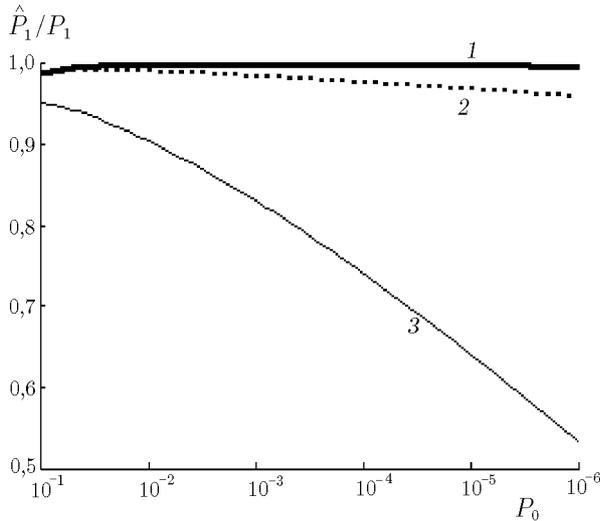


Рис. 4. Отношение вероятности правильного адаптивного энергетического обнаружения сигнала с рэлеевской амплитудой на фоне шума неизвестной интенсивности и вероятности правильного традиционного энергетического обнаружения того же сигнала на фоне шума известной интенсивности при $B = 10$. Кривые 1–3 соответствуют $\tau/T = 100; 10; 1$

На рис. 4 приведена рассчитанная с использованием формул (28) и (31) зависимость отношения \hat{P}_1/P_1 вероятностей правильного адаптивного (\hat{P}_1) и традиционного (P_1) энергетического обнаружения радиосигнала со случайной рэлеевской амплитудой и произвольной начальной фазой на фоне шума неизвестной интенсивности в зависимости от одинаковой вероятности ложной тревоги $P_0 = \hat{P}_0$ традиционного (P_0) и адаптивного (\hat{P}_0) энергетических обнаружителей. Кривые рассчитаны для $B = 10$, $d_{Tm} = 10$ и нескольких значений отношения τ/T длительностей интервалов обучения и обнаружения. Из хода кривых следует, что, как и в случае обнаружения радиосигнала с детерминированной амплитудой, различие эффективности адаптивного и традиционного энергетического обнаружения радиосигнала с рэлеевской амплитудой убывает с ростом длительности обучения. При этом необходимое относительное время обучения τ/T возрастает по мере уменьшения требуемого уровня ложных тревог.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Априорная неопределённость интенсивности шума может быть преодолена при энергетическом обнаружении узкополосных радиосигналов посредством предварительного обучения (адаптации). Характеристики адаптивного энергетического обнаружения узкополосных радиосигналов могут быть выражены через специальные функции, такие как неполная бета-функция, гипергеометрические функции (Куммера и Гаусса) и функция Аппеля. Различие характеристик адаптивного и традиционного энергетических обнаружителей может быть значительным, хотя асимптотически исчезает с увеличением длительности обучения.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов В. И. Оптимальный приём сигналов. М.: Радио и связь, 1983.
2. Урковиц Г. // ТИИЭР. 1967. Т. 55, № 4. С. 50.
3. Малахов А. Н. Кумулянтный анализ негауссовских случайных процессов и их преобразований. М.: Советское радио, 1978.
4. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Наука, 1979.
5. Королюк В. С., Портенко Н. И., Скороход А. В., Турбин А. Ф. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. М.: Наука, 1985.
6. Куликов Е. И. Методы измерения случайных процессов. М.: Радио и связь, 1986.

7. Репин В. Г., Тартаковский Г. П. Статистический синтез при априорной неопределённости и адаптация информационных систем. М.: Советское радио, 1977.
8. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Дополнительные главы. М.: Наука, 1986.
9. Костылев В. И. // Изв. вузов. Радиофизика. 2000. Т. 43, № 10. С. 926.
10. Костылев В. И. // Радиотехника и электроника. 2001. Т. 46, № 5. С. 530.
11. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983.

Воронежский госуниверситет,
г. Воронеж, Россия

Поступила в редакцию
2 августа 2001 г.

ENERGY DETECTION OF NARROW-BAND RADIO SIGNALS ON THE BACKGROUND OF A NOISE OF UNKNOWN INTENSITY

A. P. Trifonov and V. I. Kostylev

The distribution of deciding statistics of an adaptive energy detector with training is found. The expressions for the probabilities of false alarm and exact detection are obtained.