

Содержание

Калинин А. В., Беагон В. С., Кисляков Г. А., Мальцев В. П. Разработка радиоастрономического корреляционного метода измерения характеристик зеркальных антенн	279
Ким В. П., Пулинец С. А., Хегай В. В. Теоретическая модель возможных изменений в ночной среднеширотной D -области ионосферы над зоной подготовки сильного землетрясения.....	289
Орлов И. Я., Хрулёв А. Е. Направленные свойства сферической двухзеркальной системы с протяжённым инфракрасным приёмником	297
Будак В. П., Векленко Б. А., Векленко Б. Б. Точечный источник нестационарного поляризованного излучения в однородной флуктуирующей среде	309
Шепилко А. Е., Шепилко Е. В. Дифракция плоской электромагнитной волны на бесконечно протяжённом двугранном клине с вершиной в виде цилиндра, покрытого слоем магнитодиэлектрика	320
Эминов С. И. Уравнения с малым параметром для синтеза поверхностного тока.....	328
Шалашов А. Г. Генерация безындукционного тока в условиях электронного циклотронного резонанса при квазипоперечном вводе излучения	339
Дубинов А. Е., Сайков С. К., Селемир В. Д. К динамике метастабильных электронов в виртуальном катоде.....	349
Разин А. В. Излучение поверхностной и вытекающей волн на границе раздела твёрдое тело—газ	354
Жукова И. С., Саичев А. И. Вероятностные свойства сгустков пассивной примеси в двумерной турбулентной среде	361

УДК 621.396.67+523.164(024)

РАЗРАБОТКА РАДИОАСТРОНОМИЧЕСКОГО КОРРЕЛЯЦИОННОГО МЕТОДА ИЗМЕРЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК ЗЕРКАЛЬНЫХ АНТЕНН *

А. В. Калинин, В. С. Беагон, Г. А. Кисляков, В. П. Мальцев

Рассмотрены разработанные в НИРФИ методики и аппаратура для измерения характеристик зеркальных антенн корреляционным радиоастрономическим методом по сигналам внеземных радиоисточников и геостационарных ИСЗ. Приведены результаты измерения диаграммы направленности в широком динамическом диапазоне и восстановления амплитудно-фазового распределения на апертуре для нескольких крупногабаритных полноповоротных радиотелескопов.

ВВЕДЕНИЕ

Корреляционный метод, как и традиционный радиоастрономический, первоначально использовался для измерения характеристик излучения антенн в дальней зоне, в первую очередь диаграммы направленности (ДН) [1–6]. С развитием ЭВМ и благодаря автоматизации измерений данные о комплексной ДН, полученные корреляционным методом, стали использоваться для радиоголографии — восстановления распределения поля на апертуре. Распределение поля на апертуре даёт практически полную информацию о зеркальной и облучающей системах антенны: неровностях поверхности главного зеркала, смещении облучателя или контррефлектора, затенении зеркала облучателем и его опорами, уровне облучения края зеркала и т. д. По результатам измерений может быть выполнена соответствующая юстировка зеркал и облучателей, в том числе и регулировка отражающей поверхности главного рефлектора. Подобная юстировка особенно важна для улучшения характеристик больших зеркальных антенн, в частности, радиотелескопов, работающих в сантиметровом и миллиметровом диапазонах длин волн. Конструкции современных крупных зеркал, как правило, допускают такую возможность: они состоят из отдельных панелей (щитов) с площадью несколько квадратных метров, имеющих устройства для регулировки положения.

Благодаря своей высокой точности и информативности корреляционный способ применялся на ряде крупнейших зарубежных антенн [7–9] наряду с другими разновидностями радиоголографических измерений [10–13]. Разработка данного метода проводилась в НИРФИ в течение ряда лет [3–5, 14, 15]. В последние годы впервые в отечественной практике были выполнены измерения на нескольких крупных полноповоротных зеркальных антеннах. В данной работе рассматриваются особенности методики, аппаратура и некоторые результаты проведённых измерений.

1. КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ МЕТОД ИЗМЕРЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК АНТЕНН ПО СИГНАЛАМ ВНЕЗЕМНЫХ ИСТОЧНИКОВ РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ

Блок-схема корреляционного метода измерения характеристик антенн показана на рис. 1. Метод предусматривает использование вспомогательной (опорной) антенны и двухканального корреляционного радиометра. Очевидно, что такую схему сравнительно легко реализовать при исследовании характеристик антенн, входящих в состав интерферометров. При измерениях производится перемещение

* Статья подготовлена к юбилею НИРФИ.

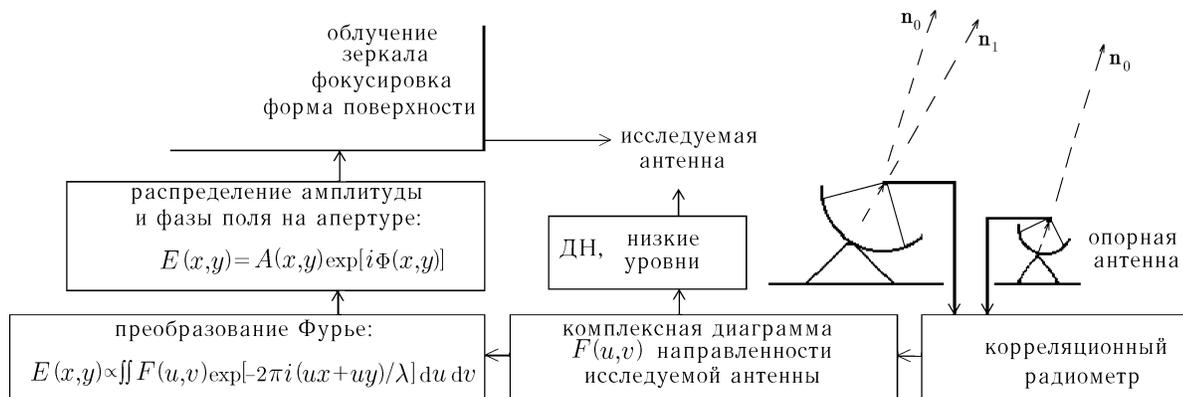


Рис. 1

(сканирование) ДН исследуемой антенны относительно выбранного радиоисточника, опорная антенна постоянно направлена на этот источник максимумом своей ДН. Опорной антенной может служить расположенная рядом антенна на собственном опорно-поворотном устройстве или небольшое зеркало, установленное на исследуемую антенну (в последнем случае угловой сектор измерений ограничен размерами главного лепестка ДН опорной антенны). В качестве источника сигнала используются дискретные радиоисточники, Солнце (для небольших антенн), а также квазишумовые сигналы каналов связи геостационарных ИСЗ.

Выходной сигнал изображённого на рис. 1 корреляционного интерферометра, принимающего излучение точечного радиоисточника, записывается в виде [1, 3, 4, 6]

$$w = g \sqrt{G_1 G_2} F_1(\mathbf{n}_0 - \mathbf{n}_1) F_2(\mathbf{n}_0) S_0 \Gamma(\tau - \mathbf{n}_0 \boldsymbol{\rho} / c) \exp[i(\omega \tau - k \mathbf{n}_0 \boldsymbol{\rho})], \quad (1)$$

где g — коэффициент усиления приёмника, G_1 и G_2 — максимальные коэффициенты усиления исследуемой и опорной антенн, $F_1(\mathbf{n})$ и $F_2(\mathbf{n})$ — ДН исследуемой и опорной антенн по амплитуде, S_0 — спектральная плотность потока излучения радиоисточника, $\Gamma(\tau) = \int \Pi(\omega) \exp(i\omega\tau) d\omega$ — временная корреляционная функция сигнала, $\Pi(\omega) = \Pi_1(\omega) \Pi_2^*(\omega)$, $\Pi_1(\omega)$ и $\Pi_2(\omega)$ — частотные характеристики приёмных каналов интерферометра (если они одинаковы ($\Pi_1(\omega) = \Pi_2(\omega)$) и равномерны в полосе $\omega = \omega_0 \pm \Delta\omega$, то $\Gamma(\tau) = \sin(\Delta\omega \tau) / (\Delta\omega \tau)$), $\boldsymbol{\rho}$ — база интерферометра, \mathbf{n}_0 — направление на радиоисточник, \mathbf{n}_1 — направление главного максимума ДН исследуемой антенны, $k = 2\pi/\lambda$, λ — длина волны излучения, c — скорость света.

Очевидно, что для получения максимального сигнала следует ввести в один из каналов приёмника временную задержку $\tau = \mathbf{n}_0 \boldsymbol{\rho} / c$. Если при измерениях источник перемещается относительно базовой линии интерферометра, необходимо компенсировать возможные изменения сигнала введением переменной задержки.

Из соотношения (1) видно, что выходной сигнал корреляционного интерферометра пропорционален диаграмме направленности исследуемой антенны по амплитуде. Модуль сигнала w определяет амплитудную ДН, а фаза — фазовую диаграмму. Обычно корреляционный приёмник регистрирует не амплитуду и фазу функции w , а её \sin - и \cos -составляющие. Для одновременной регистрации обоих квадратурных выходов в приёмнике используются два множителя.

Известно [16], что с точки зрения обнаружения минимального сигнала корреляционный интерферометр не даёт выигрыша по сравнению с одиночным радиотелескопом. Однако в антенных измерениях при одинаковом отношении сигнал/шум в максимуме ДН выигрыш в реализуемом динамическом диапазоне достигается за счёт того, что выходной сигнал корреляционного радиометра пропорционален ДН по амплитуде, а не по мощности. Так, например, в корреляционных измерениях уменьшение

выходного сигнала приёмника на 30 дБ соответствует изменению уровня ДН на 60 дБ, тогда как в традиционном радиоастрономическом методе — на 30 дБ.

При измерениях ДН с помощью естественных радиоисточников основные преимущества корреляционного метода по сравнению с обычным радиоастрономическим методом заключаются в следующем:

1) резко увеличивается динамический диапазон измерения ДН антенны, что позволяет исследовать дальние боковые лепестки. В настоящее время не существует другого метода антенных измерений, сравнимого в этом смысле с корреляционным;

2) существенно уменьшается влияние соседних источников радиоизлучения, попадающих при измерениях в ДН исследуемой антенны и искажающих результаты;

3) появляется возможность измерения характеристик антенны на отдельных поляризациях с помощью радиоисточника с хаотической поляризацией.

С помощью преобразования Фурье по измеренному двумерному распределению поля антенны в дальней зоне (её комплексной ДН) $F(u, v)$ можно восстановить распределение поля на апертуре:

$$E(x, y) \propto \iint F(u, v) \exp[-2\pi i(ux + vy)/\lambda] du dv, \quad (2)$$

где x, y — координаты в плоскости апертуры, $u = \sin \theta \sin \psi$, $v = \sin \theta \cos \psi$, θ и ψ — угловые координаты источника относительно зеркала.

Восстановленное распределение амплитуды $|E(x, y)|$ поля используется для анализа качества облучения зеркала. Отклонения распределения фазы $\varphi(x, y) = \arg E(x, y)$ поля от требуемого (как правило, равномерного) рассматриваются как дефекты юстировки зеркальной системы радиотелескопа. Крупномасштабные искажения фазы могут быть обусловлены ошибками установки облучателя либо контррефлектора, а также фазовой ДН облучателя. Локальные отклонения фазы, полученные после устранения из восстановленного фазового распределения крупномасштабных составляющих, обусловлены смещением соответствующих участков главного зеркала антенны и могут быть использованы для определения точности поверхности главного зеркала, построения карты смещений его щитов и, при необходимости, расчёта данных для коррекции их положений.

2. ОСОБЕННОСТИ МЕТОДИК ИЗМЕРЕНИЙ

Общие вопросы организации и методики корреляционных измерений рассмотрены в работах [3–6, 13, 17]. Отметим здесь лишь некоторые особенности методик, обусловленные большой продолжительностью измерений.

Продолжительность измерений зависит от объёма данных измерений, необходимого времени накопления сигнала, а также от скорости сканирования антенной требуемой траектории. При больших объёмах данных (до нескольких десятков тысяч комплексных отсчётов двумерного распределения ДН) продолжительность сеанса может составлять несколько часов и более, особенно при измерениях с помощью естественных радиоисточников. Очевидно, что длительность сеанса измерений следует минимизировать для уменьшения влияния на измеряемые характеристики антенны внешних возмущающих факторов, например температуры. Кроме того, при длительных измерениях с помощью радиоисточников их координаты могут существенно изменяться, что может привести к усреднению исследуемых характеристик антенны по диапазону углов места. Чтобы избежать этого, приходится разбивать сеанс измерений на несколько частей и выполнять их при близких углах места источника в течение нескольких суток.

При значительной продолжительности измерений медленные изменения (дрейф) параметров аппаратуры, трактов антенны и сигналов могут существенно повлиять на точность полученных характеристик антенны. Поэтому при проведении измерений значительное внимание уделялось организации

калибровок. Простейшая калибровка заключалась в периодическом наведении исследуемой антенны на источник и записи выходных сигналов приёмника. В корреляционных измерениях, как и в традиционных радиоастрономических, необходимо контролировать дрейф «нулевых» уровней выходных сигналов. Кроме того, необходим периодический контроль ортогональности выходных сигналов и идентичности коэффициентов усиления выходных каскадов приёмника. Такая калибровка реализуется при подаче на входы приёмника сигнала с постоянной амплитудой и линейно меняющейся разностью фаз.

При измерениях с помощью естественного радиоисточника с опорной антенной, установленной на отдельном опорно-поворотном устройстве, подобная калибровка осуществлялась при сопровождении источника обеими антеннами. Из-за постоянного смещения источника относительно базовой линии происходило изменение разности фаз принимаемых антеннами сигналов, которое на коротких временных отрезках считалось линейным. На рис. 2 показан пример записи выходных сигналов \sin - и \cos -каналов корреляционного приёмника при калибровках [14, 18]. Аппроксимация данных, измеренных на интервале, превышающем период изменения выходных сигналов приёмника, позволила надёжно контролировать дрейф нулевых уровней, неортогональность и отличие коэффициентов усиления \sin - и \cos -каналов корреляционного приёмника.

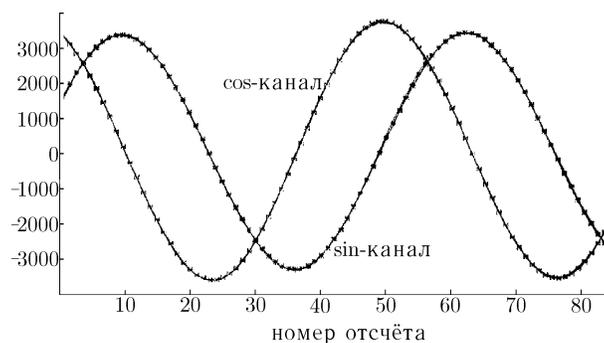


Рис. 2. Аппроксимация гармонической функцией отсчётов выходных сигналов коррелятора (в относительных единицах) при калибровке

Очевидно, что изменение разности фаз из-за перемещения источника происходит и во время сканирования матрицы ДН. При обработке данных эти изменения фазы, не обусловленные характеристиками ДН исследуемой антенны, исключались. Коррекция измеренной матрицы ДН выполнялась либо по результатам калибровок, аналогичных показанной на рис. 2, либо с использованием расчётной фазовой зависимости выходных сигналов интерферометра в случае, когда длина и ориентация линии базы были заранее известны. Разработанные методики калибровок обеспечивали компенсацию фазового хода, обусловленного смещением радиоисточника, с погрешностью в несколько градусов при продолжительности сеанса измерений 4–5 часов [14, 17].

При измерениях с помощью ИСЗ возникала дополнительная задача контроля изменения угловых координат спутника, обусловленных его суточным дрейфом. Поскольку параметры дрейфа заранее не были известны, измерения текущих координат ИСЗ также выполнялись при калибровках путём дополнительного сканирования ДН в узком угловом секторе [19, 20]. При измерениях с помощью ИСЗ из серий «Intelsat» и «Telecom» их суточный дрейф составлял до $\pm(2 \div 4)$ угловых минут по обеим координатам и тщательно контролировался.

3. АППАРАТУРА

В НИРФИ был разработан и создан мобильный автоматизированный комплекс для корреляционных измерений характеристик антенн с помощью естественных радиоисточников и ИСЗ на частотах в окрестности 4 и 11 ГГц. Блок-схема комплекса показана на рис. 3. В его состав входят сменные СВЧ конверторы, осуществляющие однополосное преобразование входных сигналов к промежуточной частоте (ПЧ) 48 МГц. Полоса входных частот преобразователей, равная 800 МГц, даёт возможность настройки на различные частотные каналы при измерениях с помощью ИСЗ. В качестве первого гетеродина используется перестраиваемый генератор. Двухканальный преобразователь сигналов ПЧ аналогичен используемому в системе апертурного синтеза (НИРФИ). Путём разветвления входного

сигнала и подачи его на один из смесителей второго гетеродина со сдвигом фазы на $\pi/2$ формируются квадратурные выходы. Для ослабления влияния дрейфов параметров низкочастотных трактов применена фазовая модуляция сигнала второго гетеродина. Развязка между каналами приёмника составляет не менее 70 дБ. Шестиразрядный коррелятор производит оцифровку, перемножение и накопление сигналов с тактовой частотой 10 МГц. Время накопления и величина задержки устанавливаются управляющей программой в зависимости от условий измерений. Минимальное время накопления коррелятора 26 мс, что позволяет реализовать высокий темп измерений.

Важнейшей частью измерительного комплекса является его программное обеспечение. Во время сеанса измерений ЭВМ управления наведением антенны осуществляет сканирование ДН по заданной траектории. Управляющая ЭВМ комплекса задаёт режимы работы, запуск и ввод показаний коррелятора, а также ввод текущих значений угловых координат антенны. Синхронизация работы коррелятора и систем управления наведением телескопа осуществляется с точностью до миллисекунд. Предусмотрен удобный режим отображения заданных параметров и текущих значений измеряемых величин.

Программы обработки обеспечивают анализ измеренных данных, обработку калибровок и коррекцию по ним матрицы ДН, расчёт распределения поля на апертуре, отображение результатов в виде отдельных сечений и двумерных распределений (цветных карт зеркала).

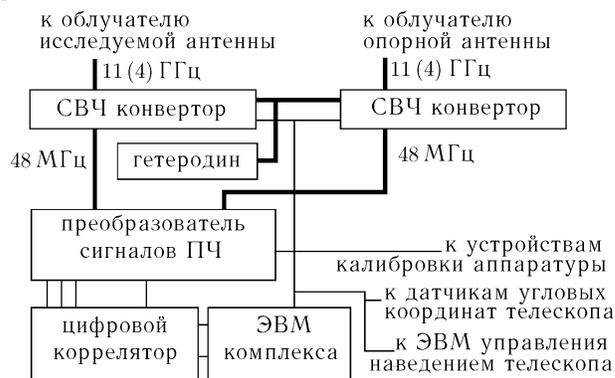


Рис. 3. Блок-схема измерительного комплекса НИРФИ

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ

Разработанные методики измерений использовались для исследования характеристик нескольких зеркальных антенн.

На рис. 4 приведён пример измерения центрального угломестного сечения ДН 25-метровой зеркальной антенны дециметрового диапазона длин волн по сигналу дискретного радиосточника Кассиопея А [14, 17]. Приращение антенной температуры при наведении антенны на источник составляло около 35 К. В качестве опорной использовалась точно такая же антенна, расположенная на расстоянии приблизительно 100 м от исследуемой. Чувствительность корреляционного радиометра¹ с выносными маломощными усилителями составляла около 0,1 К. Динамический диапазон измерения ДН, как видно на рис. 4, составил около 50 дБ, что соответствует ожидаемому значению. Измерение данного сечения ДН (более 1 700 точек в интервале от -15° до 15° угла места с шагом $1'$) заняло более 1,5 часов.

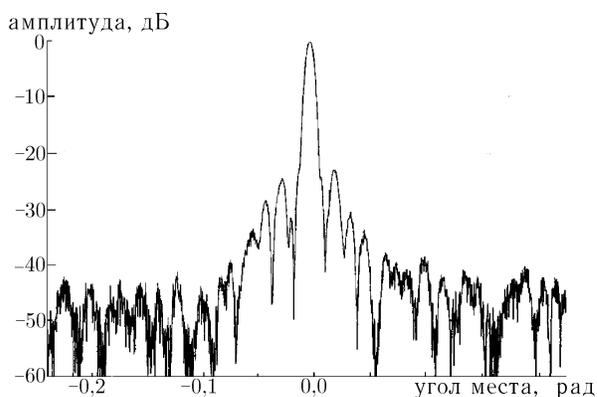


Рис. 4

¹ Использовался макет промышленного аналогового корреляционного приёмника, разработанного в НИИПИ [21]

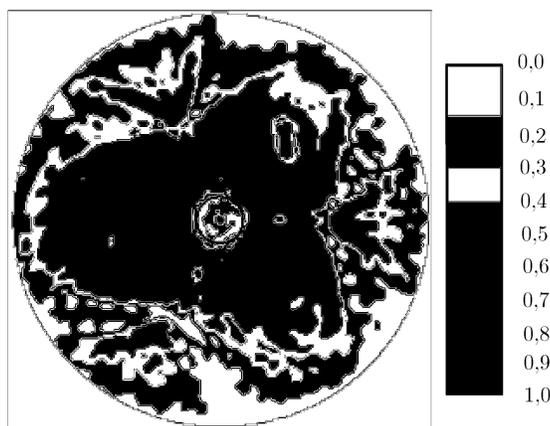


Рис. 5. Нормированное распределение амплитуды поля на апертуре 25-метровой антенны

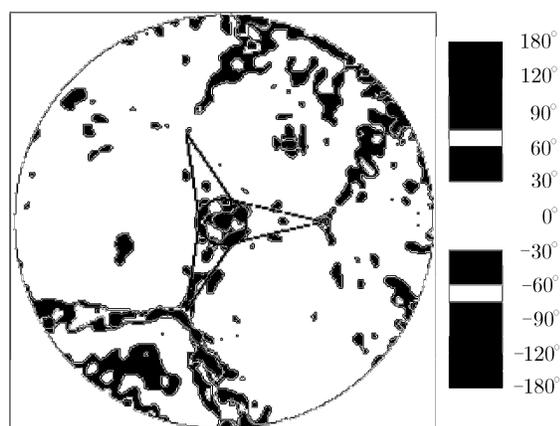


Рис. 6. Распределение фазы поля на апертуре 25-метровой антенны

Нужно заметить, что с использованием модуляционного радиометра на данной антенне удавалось измерить в лучшем случае уровень первого бокового лепестка. Теоретическое значение динамического диапазона практически было недостижимо из-за изменений уровня фонового излучения при сканировании, превышающих порог чувствительности радиометра.

На рис. 5 и 6 представлены распределения амплитуды и фазы поля на апертуре 25-метровой антенны, восстановленные по результатам корреляционных измерений, выполненных с помощью радиисточника Лебедь А. Приведённые результаты получены при сканировании матрицы ДН с размером 60 строк по 300 точек в двумерном угловом секторе от $-7,5^\circ$ до $7,5^\circ$ по часовому углу и углу места. При этом разрешение по апертуре составило около 50 см. Измерения проводились в течение трёх последовательных ночей при высоких углах места источника на интервале, симметричном относительно верхней кульминации. Общая продолжительность измерения матрицы ДН составила около 10 часов. На рис. 5 и 6 хорошо видны области затенения зеркала контррефлектором и его опорами. Полученные результаты позволили детально проанализировать качество облучения и отражающей поверхности зеркала данной антенны.

На радиоастрономической станции НИРФИ «Старая Пустынь» корреляционным методом проводились исследования формы зеркала 7-метровой антенны, входящей в состав системы апертурного синтеза [15]. Использовались сигналы геостационарных ИСЗ на частотах в окрестности 11 ГГц. Поле на апертуре антенны восстанавливалось с разрешением 10 см. На рис. 7 показано отличие двух форм поверхности 7-метрового зеркала, восстановленных по результатам измерений, которые были выполнены в ночное время с интервалом в несколько месяцев. В одном случае на зеркале была закреплена дополнительная металлическая пластина, хорошо заметная на рисунке.

Приведённый на рис. 7 результат демонстрирует хорошую повторяемость восстановления поля по всей апертуре. Наблюдаемые «возмущения» формы зеркала обусловлены рассеянием поля на контррефлекторе и трёх его опорах. Среднеквадратичная разность двух измерений формы поверхности зеркала составила 0,1 мм. Эта величина определяет случайную составляющую погрешности измерений.

На рис. 8 представлена такая же разность, но для измерений, выполненных в ночное и дневное время. Данный рисунок демонстрирует температурные деформации отражающей поверхности и каркаса зеркала, обусловленные дневным солнечным нагревом. На нём чётко виден каркас зеркала, представляющий собой 12 рёбер жёсткости и кольцо с радиусом 2,3 м, внутри которого установлено по одному, а снаружи — по два дополнительных ребра (см. рис. 9).

Разработанные методики и аппаратура были применены для измерений на одном из крупнейших

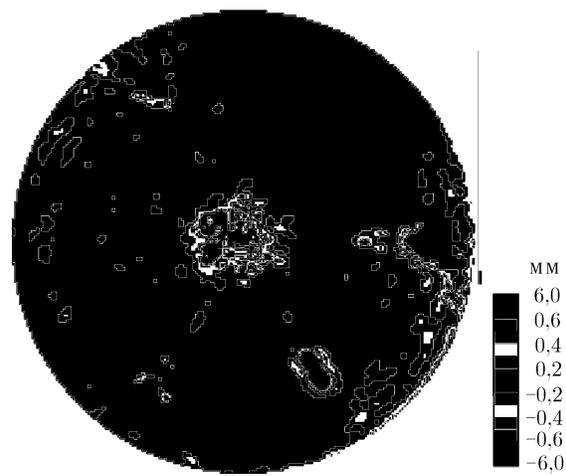


Рис. 7. Разность двух измерений формы поверхности 7-метрового зеркала

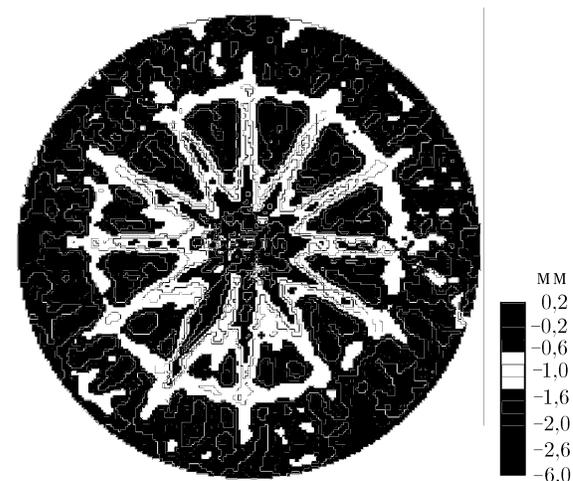


Рис. 8. Разность измерений формы 7-метрового зеркала в дневное и ночное время

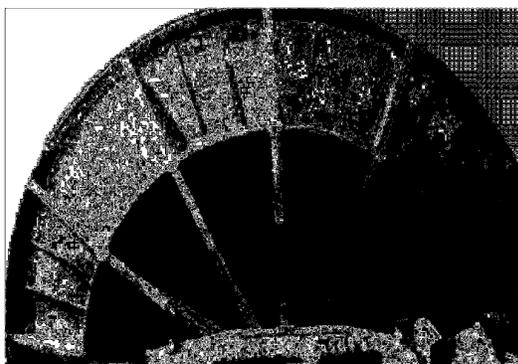


Рис. 9. Обратная сторона 7-метрового зеркала радиотелескопа НИРФИ

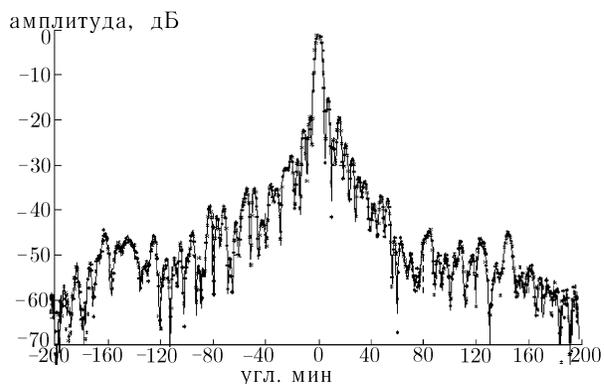


Рис. 10

отечественных полноповоротных радиотелескопов — 64-метровой зеркальной антенне ТНА-1500 в Медвежьих Озёрах (ОКБ МЭИ) [18, 19]. Главное зеркало этого телескопа состоит из 1 224 щитов с размерами порядка $1 \times 2 \text{ м}^2$. Щиты уложены на каркасе в 18 колец, каждый щит имеет по углам винты для регулировки положения. Измерения проводились по сигналам ИСЗ серий «Intelsat» и «Telecom» в окрестности 4 ГГц. Угол места указанных ИСЗ для данного телескопа составляет около 20° . Опорное 90-сантиметровое зеркало было установлено у основания опоры контррефлектора. Матрица ДН измерялась в угловом секторе с размером до $400 \times 400'$ при высокой скорости растрового сканирования антенны (до $10'$ в секунду). Продолжительность одного сеанса измерения ДН не превышала 2–3 часов.

На рис. 10 показано центральное угломестное сечение ДН 64-метровой антенны, измеренное корреляционным методом по сигналу ИСЗ. Сечение измерено дважды: при прямом (результат представлен сплошной линией) и обратном (данные показаны звёздочками) движении антенны со скоростью $10'/\text{с}$ и шаге записи данных 50 мс. Приведённый результат демонстрирует возможность использования разработанных методик и аппаратуры для измерения ДН антенны до уровня примерно -70 дБ при минимальном времени накопления сигнала.

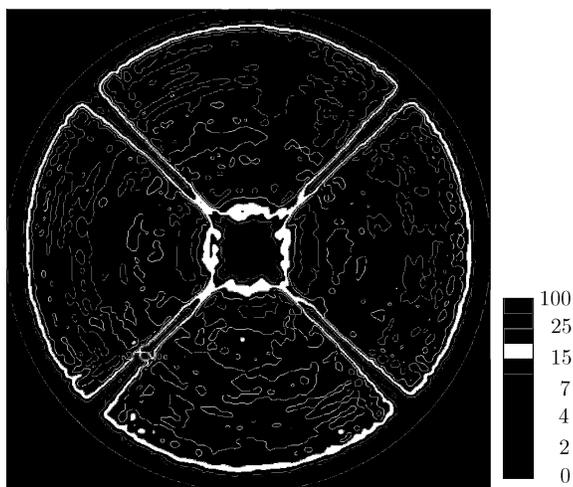


Рис. 11. Нормированное распределение амплитуды поля на апертуре антенны ТНА-1500

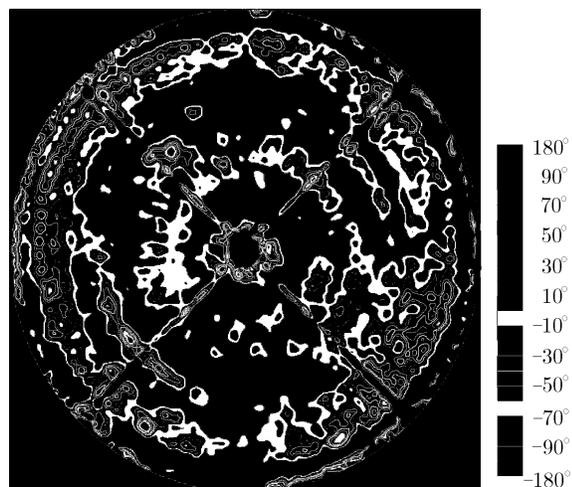


Рис. 12. Распределение фазы поля на апертуре антенны ТНА-1500

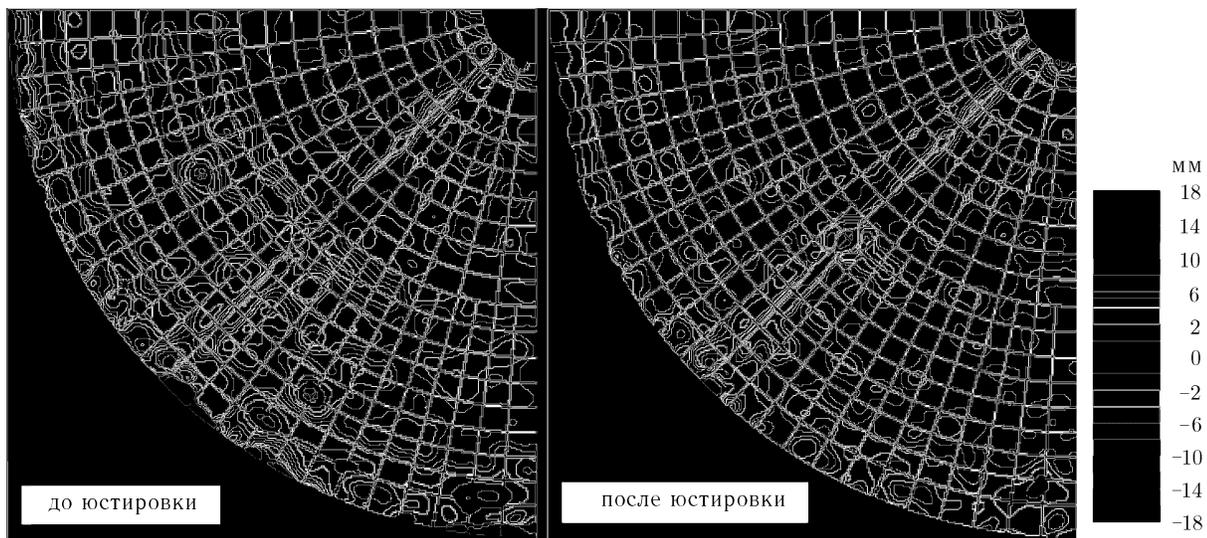


Рис. 13. Фрагменты карт поверхности главного зеркала антенны ТНА-1500 до и после частичной юстировки

На рис. 11 показано восстановленное распределение амплитуды поля на апертуре антенны, на рис. 12 — распределение фазы поля. На представленных распределениях видны тени от контррефлектора и четырёх опор и особенности облучения зеркала. На фазовом распределении заметны участки зеркала, лежащие выше или ниже требуемого уровня. Среднеквадратичная разность измерений формы зеркала, проведённых в одинаковых внешних условиях, дала оценку случайной составляющей погрешности $\delta \approx 0,1$ мм.

По результатам проведённых измерений на антенне ОКБ МЭИ впервые в отечественной практике была проведена частичная юстировка поверхности зеркала с регулировкой положения 400 щитов, отклонения которых превышали 1,9 мм [20]. На рис. 13 показаны фрагменты карт отклонений поверхности главного зеркала антенны ТНА-1500, восстановленных до и после частичной юстировки зеркала. Проведённые после этого контрольные измерения коэффициента усиления антенны в 5-сантиметровом диапазоне длин волн показали увеличение коэффициента использования поверхности

с 0,51 до 0,65.

На антенне ТНА-1500 с помощью корреляционного метода были начаты исследования температурных и гравитационных деформаций рефлектора [22]. Результаты измерений показали наличие крупномасштабных радиальных температурных искажений распределения поля на апертуре. Одновременно наблюдались мелкомасштабные тепловые деформации внутри отдельных щитов со смещениями порядка 0,5 мм в центре щитов. Среднеквадратичная разность карт поверхности зеркала, определённых в дневных и ночных сеансах измерений, составила 0,6 мм. Для исследования средне- и крупномасштабных весовых деформаций зеркальной системы проводились измерения ДН при различных углах места в пасмурную маловетренную погоду по сигналу радиостанции Лебедь А на частоте 4 ГГц. Результаты измерений при углах места 10° и 70° показали наличие характерных весовых деформаций зеркальной системы со среднеквадратичным отклонением $\delta = 2$ мм. Погрешность измерений формы зеркала с помощью радиостанции Лебедь А с использованием 90-сантиметровой опорной антенны при сеансах длительностью 3–4 часа составила $\delta \approx 0,5$ мм, разрешение на апертуре — около $4 \div 5$ м.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Smith P. // IEEE Trans. AP. 1966. V. 14, No. 1. P. 6.
2. Hartsuijker A. P., Baars J. W. M. et al. // IEEE Trans. AP. 1972. V. 20. P. 166.
3. Коротков В. С., Калинин А. В., Турчин В. И., Векслер Н. В., Беагон В. С. Корреляционный метод измерения диаграмм направленности антенн. Ч. 1: Препринт НИРФИ № 150. Нижний Новгород, 1982.
4. Коротков В. С., Калинин А. В., Турчин В. И., Векслер Н. В., Беагон В. С. Корреляционный метод измерения диаграмм направленности антенн. Ч. 2: Препринт НИРФИ № 151. Нижний Новгород, 1982.
5. Векслер Н. В., Калинин А. В., Коротков В. С., Турчин В. И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1984. Т. 27, № 3. С. 341.
6. Захарьев Л. Н., Леманский А. А., Турчин В. И., Цейтлин Н. М., Щеглов К. С. Методы измерения характеристик антенн СВЧ. М.: Радио и связь, 1985.
7. Rahmat-Samii Y., Gulkis S., Levy G. S., Seidel B. L. et al. // Proc. Astron. Soc. Australia. 1983. No. 5(2). P. 270.
8. Morris D., Baars J. W. M., Hein H. et al. // Astron. Astrophys. 1988. V. 203, No. 2. P. 399.
9. Курочкин А. П. // Антенны / Под ред. Л. Д. Бахраха. М.: ИПРЖР, 1997. Вып. 1(38). С. 5.
10. Pinchuk G. A., Sinyanskii V. I., Stotskii A. A., Khaikin V. B. // Proc. Intern. workshop «Holography testing of large radio telescopes», Nizhnij Arkhyz, September 10–13, 1990. Leningrad: Nauka, 1991.
11. Rochblatt D. J., Seidel B. L. // IEEE Trans. MTT. 1992. V. 40, No. 6. P. 1294.
12. Ukita N., Tsuboi M. A 45-meter telescope with a surface accuracy of 65 μ m: Nobeyama radio observatory report No. 346. 1994.
13. Калинин А. В. // Антенны / Под ред. Л. Д. Бахраха. М.: ИПРЖР, 1998. Вып. 2(41). С. 51.
14. Емельянов Д. Е., Калинин А. В., Кисляков Г. А. и др. // Пятая Всесоюз. конф. «Метрологическое обеспечение антенных измерений», ВКАИ-5: // Тез. докл. 1990. С. 67.
15. Калинин А. В., Беагон В. С., Кисляков Г. А. Исследование поверхности зеркала радиотелескопа НИРФИ радиоголографическим методом по сигналам ИСЗ: // Препринт НИРФИ № 371. Нижний Новгород, 1993. 24 с.
16. Христиансен У., Хегбом И. Радиотелескопы: Пер. с англ. / Под ред. А. А. Пистолькорса. М.: Мир, 1988.
17. Мальцев В. П., Щеглов К. С. // Антенны / Под ред. Л. Д. Бахраха. М.: ИПРЖР, 1997. Вып. 2(39). С. 57.

18. Kalinin A. V., Mal'tsev V. P., Beagon V. S., Kislyakov G. A. // Proc. of PIERS 1997, Cambridge, Ma, USA. P. 600.
19. Kalinin A. V., Poperechenko B. A. // Digest of IEEE Anten. and Prop. Soc. Int. Symp., 1997, Montreal, Canada. V. 1. P. 564.
20. Калинин А. В., Беагон В. С., Кисляков Г. А., Мальцев В. П., Попереченко Б. А., Горбатов Э. П., Коган Б. Л., Фатеев А. Н. // Тез. XXVII радиоастрономической конф. Санкт-Петербург, 1997. Т. 3. С. 22.
21. Горячев А. Ю., Кочетков А. П., Мальцев В. П. и др. // Пятая Всесоюз. конф. «Метрологическое обеспечение антенных измерений», ВКАИ-5: Тез. докл. 1990. С. 53.
22. Калинин А. В., Беагон В. С., Кисляков Г. А., Попереченко Б. А., Горбатов Э. П. // Тез. XXVII радиоастрономической конф. Санкт-Петербург, 1997. Т. 3. С. 98.

Научно-исследовательский радиофизический институт,
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию
2 ноября 2001 г.

DEVELOPMENT OF A RADIOASTRONOMICAL CORRELATION METHOD FOR MEASURING MIRROR-ANTENNA PARAMETERS

A. V. Kalinin, V. S. Beagon, G. A. Kislyakov, and V. P. Mal'tsev

We consider the techniques and instrumentation developed at the Radiophysical Research Institute (NIRFI) for measuring mirror-antenna parameters using signals of extra-terrestrial radio source and geostationary satellites. The results of measuring the angular patterns of several large-scale fully-rotatory radio telescopes in a wide dynamic range and retrieving the amplitude-phase distributions on their apertures are presented.

УДК 550.510.535

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВОЗМОЖНЫХ ИЗМЕНЕНИЙ В НОЧНОЙ СРЕДНЕШИРОТНОЙ D -ОБЛАСТИ ИОНОСФЕРЫ НАД ЗОНОЙ ПОДГОТОВКИ СИЛЬНОГО ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЯ

В. П. Ким, С. А. Пулинец, В. В. Хегай

Представлена теоретическая модель возможных изменений электронной концентрации в ночной среднеширотной D -области ионосферы, которые могут предшествовать сильным землетрясениям. Установлено, что перед сильным землетрясением концентрация электронов в ночной D -области над эпицентральной зоной землетрясения может существенно возрастать. Характерный горизонтальный размер возмущённой области составляет порядка 300 км. В том случае, когда вблизи эпицентральной зоны готовящегося землетрясения функционирует мощная ОНЧ радиостанция, на высотах ночной верхней мезосферы может сформироваться плотный ионизированный слой типа дневного D -слоя, что вызовет сильное поглощение высокочастотных радиоволн на трассах, проходящих над зоной подготовки землетрясения.

ВВЕДЕНИЕ

В [1] по данным измерений характеристик распространения ОНЧ радиоволн фазовой навигационной системы «Омега» на трассах, проходящих через сейсмоактивные зоны, выявлены возмущения фазы радиосигналов, которые имели бухтообразную форму и не были связаны с эффектами солнечно-магнитосферной активности. На основе статистического анализа показано, что эти возмущения фазы начинали проявляться в ночное время за $10 \div 20$ суток до землетрясений (всего было проанализировано 1300 землетрясений с магнитудами $M = 4,0 \div 7,0$). Доверительная вероятность связи выявленных возмущений фазы сигналов и землетрясений составила около 90 %. Особенно ярко возмущения фазы радиосигналов системы «Омега» проявлялись перед очень сильными землетрясениями: в Спитаке (Армения, $M = 7,1$, 1988 г.) [2], Рудбаре (Иран, $M = 7,5$, 1990 г.) [3] и Кобе (Япония, $M = 7,1$, 1995 г.) [4]. Такие возмущения фазы сигналов могли быть обусловлены заметным повышением электронной концентрации на высотах ночной D -области ионосферы, локализованным над очагами готовящихся землетрясений.

В связи с этим возникает вопрос о том, каким образом процессы, протекающие в очаге будущего землетрясения на заключительной стадии его подготовки, могут оказывать воздействие на электронную концентрацию в ночной D -области ионосферы. Авторы [4] предположили, что такое воздействие, возможно, объясняется генерацией долгопериодных гравитационных волн типа планетарных волн Россби в результате резонансного взаимодействия сейсмических процессов с нейтральной атмосферой. Однако это объяснение представляется малореалистичным, поскольку какие-либо значительные изменения в приповерхностном слое атмосферы над эпицентральной зоной готовящихся землетрясений до сих пор не наблюдались. А для возбуждения планетарных волн Россби, в том числе и с помощью всевозможных резонансных механизмов, необходимо обеспечить поступление в атмосферу значительной энергии и импульса. Кроме того, поскольку волны Россби имеют планетарный масштаб, возмущения фазы сигналов системы «Омега» наблюдались бы также на трассах, проходящих в тысячах километров от эпицентра землетрясения.

Эволюция концентрации заряженных компонент в D -области ионосферы достаточно жёстко определяется условиями ионизационно-рекомбинационного равновесия, поэтому наблюдаемые возмущения электронной концентрации N_e трудно объяснить простым перераспределением плазмы за счёт

дрейфа заряженных частиц, индуцированного электрическим полем, если, конечно, не принимать во внимание случаи экстремально высокой напряжённости электрического поля. В связи с этим в [5] для объяснения сейсмической природы возмущений электронной концентрации в D -области предложен гибридный механизм, согласно которому указанные возмущения концентрации N_e обусловлены вертикальным переносом в D -область заряженных частиц из вышележащего спорадического слоя E_s и изменением концентрации окиси азота за счёт совместного действия электрических полей и инфразвуковых волн, генерируемых в очаге назревающего землетрясения и проникающих на ионосферные высоты. При этом никакие количественные расчёты изменения N_e , подкрепляющие данную гипотезу, в [5] не были проведены.

В настоящей работе представлена теоретическая модель, которая объясняет и позволяет рассчитать возможные возмущения электронной концентрации в ночной D -области ионосферы перед сильными землетрясениями над их эпицентральной зоной. Данная модель является органическим продолжением теоретических исследований возможных ионосферных предвестников сильных землетрясений, проводимых авторами в рамках единого подхода на протяжении ряда лет. В основе подхода лежит предположение, что первичным источником ионосферных возмущений, предшествующих сильным землетрясениям, является возмущение вертикального электрического поля на поверхности Земли, инициируемое физико-химическими процессами в очаге землетрясения. Такие возмущения вертикального электрического поля действительно неоднократно наблюдались перед землетрясениями в их эпицентральных зонах [6–8]. В [9] проведён количественный расчёт проникновения электростатического поля сейсмогенного происхождения в ионосферу и показано, что при определённых условиях напряжённость этого поля в ионосфере может достигать существенной величины. Используя результаты работы [9], мы последовательно построили количественные модели предвестников сильных землетрясений на высотах E - и F -областей [10, 11], а также в верхней ионосфере [12] с учётом современного уровня теоретического моделирования ионосферы. Заметим, что непосредственным фактором, определявшим ионосферные возмущения в этих моделях, являлся дрейф заряженных частиц ионосферной плазмы, обусловленный электрическим полем сейсмического источника. Однако, как уже отмечалось, в D -области ионосферы электрический дрейф заряженных частиц не оказывает заметного воздействия на распределение их концентрации, поэтому здесь физический механизм, определяющий возмущение электронной концентрации перед землетрясением, имеет иную природу и будет детально рассмотрен ниже.

1. ФИЗИЧЕСКИЙ МЕХАНИЗМ

Как показано в [12], перед сильными землетрясениями под воздействием электрического поля сейсмического источника в плазмосфере в окрестности геомагнитной силовой линии, проходящей через эпицентр готовящегося землетрясения, образуется плазменная неоднородность, вытянутая вдоль геомагнитного поля из одного полушария в другое. Характерный размер неоднородности поперёк геомагнитного поля на высотах порядка 2 000 км составляет около 300 км. Такая плазменная неоднородность представляет собой дакт для низкочастотных электромагнитных волн как естественного, так и искусственного происхождения. Следует заметить, что аналогичные плазменные неоднородности, вытянутые вдоль геомагнитных силовых линий, могут образовываться и под воздействием электрических полей больших грозных облаков [13]. Когерентные ОНЧ радиоволны, излучаемые мощными наземными радиостанциями, включая и радиопередатчики навигационной системы «Омега», будут эффективно канализоваться в дакт и распространяться вдоль него внутри плазмосферы, проникая в область захваченных высокоэнергичных заряженных частиц радиационного пояса Земли. При распространении ОНЧ волны через популяцию высокоэнергичных электронов радиационного пояса между волной и энергичными электронами может происходить циклотронно-резонансное взаимодействие, кото-

рое вызывает питч-угловое рассеяние захваченных частиц, в результате чего часть энергичных электронов будет попадать в конус потерь и высыпаться в нижнюю атмосферу. Проблеме циклотронно-резонансного взаимодействия ОНЧ волн с энергичными заряженными частицами посвящена обширная литература (см., например, обзоры [14, 15]).

Естественное некогерентное широкополосное ОНЧ излучение, захваченное в дакт, будет вызывать хаотическое изменение питч-угла энергичных электронов. Такое питч-угловое рассеяние математически можно описывать как диффузию в пространстве питч-углов [15]. При этом в дакте может происходить эффективное усиление естественных ОНЧ волн, что, в свою очередь, будет приводить к более интенсивному питч-угловому рассеянию энергичных электронов и усилению их высыпания [16–18]. Когерентные ОНЧ радиоволны оказывают гораздо более эффективное воздействие на питч-угловое распределение энергичных заряженных частиц и их высыпание из радиационного пояса, поскольку изменение питч-угла при этом не являются случайными, а имеет регулярный характер на протяжении баунс-периода. Расчёты питч-углового рассеяния энергичных электронов при их взаимодействии с когерентными ОНЧ радиоволнами проведены для разных случаев в работах [19–21].

Высыпания энергичных электронов из радиационного пояса на средних и низких широтах многократно наблюдались различными методами [22–26]. В аспекте нашего исследования особо выделим работу [24], где приведены результаты наблюдений локализованного высыпания энергичных электронов, инициируемого излучением наземной ОНЧ радиостанции.

Таким образом, образование за счёт сейсмического электрического поля плазменного дакта приведёт к высыпанию энергичных электронов из радиационного пояса, в результате ударной ионизации которыми в ночной среднеширотной D -области ионосферы и будет возрастать электронная концентрация. Для большей наглядности общая схема физического механизма увеличения электронной концентрации в ночной среднеширотной D -области ионосферы перед сильными землетрясениями представлена на рис. 1.

Теперь обратимся к расчётам скорости ионообразования за счёт ударной ионизации нейтральных компонент D -области потоком высыпающихся энергичных электронов.

2. РАСЧЁТ СКОРОСТИ ИОНИЗАЦИИ

Скорость ударной ионизации нейтральных составляющих атмосферы высыпающимися энергичными электронами рассчитывалась в ряде работ [27–29]. Мы воспользуемся методикой расчёта скорости ионизации, развитой в [28], согласно которой скорость q образования ионных пар в единице объёма, нормированная на моноэнергичный поток F электронов с энергией E_0 определяется по формуле

$$q/F = q_e(E_0) = \frac{E_0}{r_0 \Delta E_{\text{ион}}} \lambda(z/R) \frac{n(M)_z}{n(M)_R}, \quad (1)$$

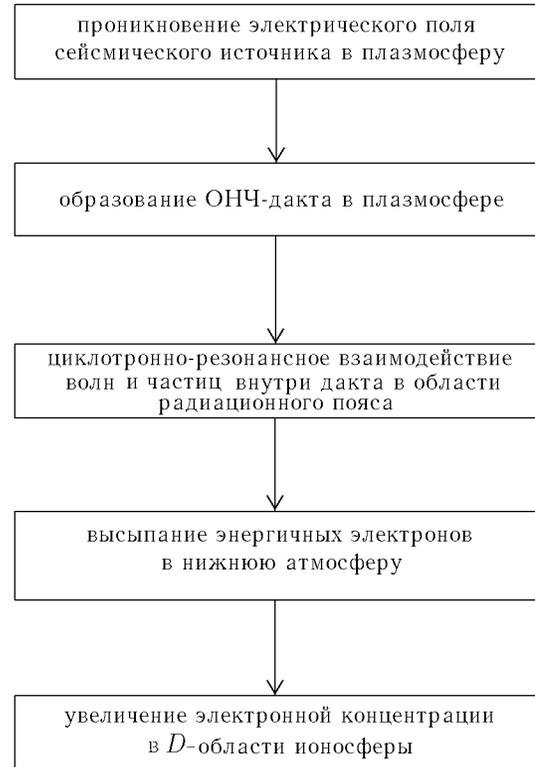


Рис. 1

где $\Delta E_{\text{ion}} = 0,035$ кэВ — энергия ионизации на одну ионную пару, $r_0 = R/\rho$, ρ — плотность воздуха на максимальной глубине проникновения R электронов с заданной энергией, $\lambda(z/R)$ — безразмерная функция распределения потерь энергии, $z = \int_h^{h_{\text{top}}} \rho dh'$, h — высота атмосферы, на которой производится расчёт скорости ионообразования, $h_{\text{top}} = 1000$ км — принятая нами высота верхней границы атмосферы, $n(M)_z$ и $n(M)_R$ — концентрации ионизуемых атомов и молекул на глубинах z и R соответственно. При этом в диапазоне энергий $0,4 \text{ кэВ} \leq E_0 \leq 500 \text{ кэВ}$ связь между максимальной глубиной проникновения в атмосферу и начальной энергией электрона на её верхней границе задаётся соотношением $R[\text{г} \cdot \text{см}^{-2}] = 4,57 \cdot 10^{-6} (E_0[\text{кэВ}])^{1,75}$.

В случае изотропного по верхней полусфере выпадающего потока электронов с произвольным дифференциальным энергетическим спектром электронов $g(E_0)$, заданным в диапазоне энергий от E_0^{min} до E_0^{max} , скорость ионизации Q в единице объёма с учётом (1) может быть представлена в виде

$$Q = \pi \int_{E_0^{\text{min}}}^{E_0^{\text{max}}} g(E_0) q_e(E_0) dE_0. \quad (2)$$

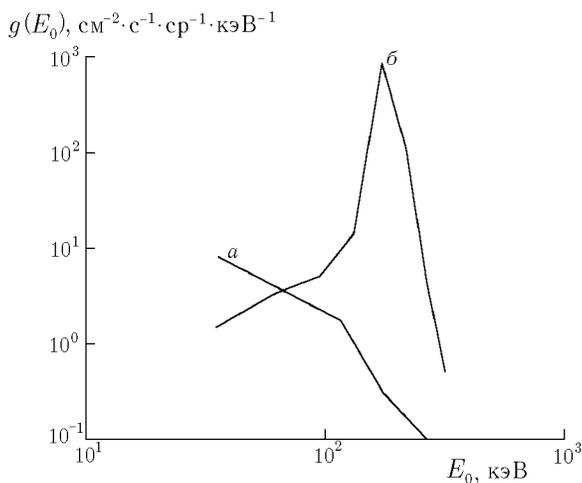


Рис. 2

Согласно [23, 25] в северном полушарии на средних и низких широтах существуют две глобальные зоны, в которых ночные выпадения энергичных электронов наблюдаются регулярно. Одна из них расположена на L -оболочке с индексом приблизительно 2,6, другая — на оболочке с $L \approx 1,4$. В южном полушарии помимо указанных зон существует ещё область южно-атлантической аномалии, где выпадение электронов отличается особой интенсивностью. В [24] наблюдалось сильное узко локализованное выпадение электронов над функционирующей ОНЧ радиостанцией большой мощности в окрестности оболочки с $L = 1,67$ в северном полушарии.

Для наших расчётов мы выберем спектры выпадающих энергичных электронов аналогичные тем, которые наблюдались в глобальной среднеширотной зоне ночных выпадений на спутнике «S3-2» вблизи оболочки с индексом $L = 2,6$ [25] и в области узко локализованного выпадения над мощной ОНЧ радиостанцией в окрестности оболочки с $L = 1,67$ на спутнике «OVI-14» [24]. Аппроксимации выбранных дифференциальных энергетических спектров выпадающих электронов показаны на рис. 2, где приведены спектр частиц, соответствующий глобальному фоновому выпадению на средних широтах (a), и спектр электронов, выпадающих над ОНЧ радиостанцией (b). Результаты расчётов скорости ионизации Q для модели нейтральной атмосферы MSIS-E-90 представлены в разделе 4.

3. РАСЧЁТ ЭЛЕКТРОННОЙ КОНЦЕНТРАЦИИ

D -область земной ионосферы наименее изучена вследствие как большого разнообразия протекающих в ней сложных химических процессов, так и её относительной недоступности для регулярных наблюдений, особенно в ночных условиях, когда типичная концентрация заряженных частиц падает ниже 10^3 см^{-3} . Различные аспекты изучения D -области обсуждаются в детальном обзоре [30]. Современные теоретические модели D -области включают в себя множество различных химических реакций и

основаны на решении системы взаимосвязанных уравнений химической кинетики (см., например, [31, 32]). Рассмотрение тех или иных конкретных вопросов моделирования D -области ионосферы выходит далеко за рамки настоящей работы, и здесь мы не будем их затрагивать. Нашей задачей является количественно показать принципиальную возможность образования локализованных возмущений электронной концентрации на высотах ночной D -области ионосферы перед сильными землетрясениями, а не детальный расчёт распределения N_e в какой-то конкретной ситуации. Для этого мы воспользуемся стационарным уравнением непрерывности для концентрации электронов N_e , которое можно записать в виде [33, 34]

$$\alpha N_e^2 + \ell N_e - q = 0, \quad (3)$$

где $\alpha = 6 \cdot 10^{-7} \text{ см}^3 \cdot \text{с}^{-1}$ — коэффициент квадратичной рекомбинации, $\ell = k_1 N^2(\text{O}_2) + k_2 N(\text{O}_2) \times N(\text{N}_2)$ — коэффициент линейной рекомбинации, $N(\text{O}_2)$ и $N(\text{N}_2)$ — концентрации молекул O_2 и N_2 соответственно, $k_1 = 1,4 \cdot 10^{-29} [300/T_n[K]] \exp[-600/T_n[K]] \text{ см}^6 \cdot \text{с}^{-1}$, $k_2 = 10^{-31} \text{ см}^6 \cdot \text{с}^{-1}$, T_n — температура нейтральной атмосферы, $q = Q + q_1$ — суммарная скорость ионообразования за счёт ударной ионизации высыпающимися энергичными электронами (Q) и рассеянного солнечного излучения в линии водорода L_α с длиной волны 1216 \AA (q_1). Скорость ионизации q_1 выбрана согласно [35]. В качестве модели нейтральной атмосферы (как и ранее, при расчётах Q) использована модель MSIS-E-90.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЁТОВ

На рис. 3 показано рассчитанное высотное распределение скорости ионообразования за счёт ударной ионизации высыпающимися энергичными электронами на высотах верхней мезосферы для двух случаев. Кривая 1 соответствует ситуации, которая может реализоваться на заключительной стадии подготовки крупного землетрясения, очаг которого расположен вдали от действующих искусственных источников ОНЧ радиоизлучения. Кривая 2 даёт возможную скорость ионизации над эпицентральной зоной будущего землетрясения, если вблизи неё функционирует мощная ОНЧ радиостанция. Из рис. 3 следует, что во втором случае скорость ионизации в D -области гораздо выше, чем в первом, причём эта разница существенно увеличивается с уменьшением высоты.

Высотные распределения скорости ионообразования 1 и 2 (рис. 3) были использованы для расчёта возмущения электронной концентрации в ночной D -области ионосферы перед сильным землетрясением. Соответствующие высотные профили N_e (кривые 1 и 2) показаны на рис. 4, где для сравнения приведён также фоновый высотный профиль электронной концентрации для случая, когда высыпаний энергичных электронов нет и ионизация обеспечивается только рассеянным излучением в линии водорода L_α (кривая 3). Видно, что перед сильным землетрясением электронная концентрация в ночной D -области ионосферы может существенно возрасти. Особенно значительно эффект увеличения N_e проявляется, если вблизи эпицентральной зоны готовящегося землетрясения функционирует мощная ОНЧ радиостанция. В этом случае в ночной верхней мезосфере формируется достаточно выраженный плотный ионизованный слой с максимальным значением электронной концентрации порядка $2 \cdot 10^4 \text{ см}^{-3}$, расположенный на высоте приблизительно 85 км, т. е. параметры образованного слоя близки к параметрам распределения N_e в дневной D -области для средних и низких широт. Возмущённая электронная концентрация превышает фоновые значения N_e в интервале высот $85 \div 90$ км больше чем на порядок величины, а на высотах 75 и 85 км это превышение составляет соответственно 2 и 3 порядка. При этом важно отметить, что при $h > 73$ км электронная концентрация превышает 10^3 см^{-3} . В регионах, удалённых от действующих ОНЧ радиостанций, предвестники землетрясений в ночной D -области ионосферы выражены не столь ярко, однако и здесь изменения N_e достаточно существенны. На высотах $80 \div 85$ км электронная концентрация возрастает по сравнению с фоновыми значениями

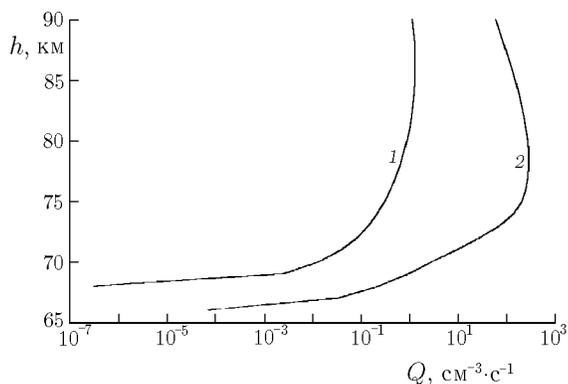


Рис. 3

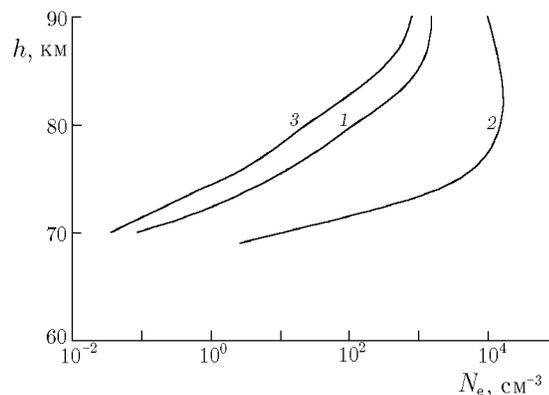


Рис. 4

приблизительно в восемь раз, а ниже 80 км относительное увеличение N_e превышает порядок величины. Хотя электронная концентрация достигает своего максимума на верхней границе D -области, на высоте около 87 км, где $N_e \sim 2,5 \cdot 10^3 \text{ см}^{-3}$, тем не менее вплоть до $h \approx 82 \text{ км}$ N_e превышает 10^3 см^{-3} .

Таким образом, перед сильными землетрясениями над их эпицентрными зонами в ночной среднеширотной D -области ионосферы может иметь место эффект значительного увеличения электронной концентрации, который будет проявляться особенно заметно в тех районах, где расположены действующие мощные источники ОНЧ радиоизлучения.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлена теоретическая модель, описывающая изменения электронной концентрации в ночной среднеширотной D -области ионосферы, которые могут быть предвестниками сильных землетрясений. Установлено, что перед сильным землетрясением электронная концентрация в ночной D -области ионосферы над его эпицентральной зоной может существенно возрасти. Согласно модели непосредственной причиной возмущения электронной концентрации является ударная ионизация выпадающими из радиационного пояса Земли энергичными электронами. Высыпание происходит вследствие их циклотронно-резонансного взаимодействия с когерентными и некогерентными электромагнитными ОНЧ волнами, захваченными в вытянутый вдоль геомагнитного поля (из одного полушария в другое) плазмосферный ОНЧ-дакт, который образуется в окрестности геомагнитной силовой линии, проходящей через эпицентр назревающего землетрясения, под воздействием сейсмогенного электрического поля.

Характерный горизонтальный размер возмущенной области составляет около 300 км. Степень увеличения электронной концентрации по сравнению с фоновыми значениями резко нарастает с уменьшением высоты и может достигать на высотах 75 ÷ 85 км 2–3 порядков величины. В том случае, когда вблизи эпицентральной зоны готовящегося землетрясения функционирует мощная ОНЧ радиостанция, на высотах ночной верхней мезосферы может образоваться плотный слой ионизации типа дневного D -слоя с электронной концентрацией в максимуме порядка $2 \cdot 10^4 \text{ см}^{-3}$. Вследствие образования такого слоя ВЧ радиоволны при распространении над зоной подготовки землетрясения будут испытывать сильное поглощение.

В регионах, удаленных от действующих ОНЧ радиостанций, эффект увеличения электронной концентрации в D -области над очагом готовящегося землетрясения выражен в меньшей степени, однако его абсолютная величина довольно значительна.

Естественно возникающий вопрос об однозначной идентификации сейсмогенных возмущений электронной концентрации в ночной D -области ионосферы среди возмущений, вызванных другими причинами, представляет собой сложную, но вполне разрешимую задачу, которая требует отдельного рассмотрения. Здесь только заметим, что для практического решения данного вопроса необходимо учитывать метеорологическую обстановку, уровень геомагнитной и солнечной активности, а также знать, насколько часто в региональной ночной D -области наблюдаются сильные локализованные увеличения электронной концентрации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гуфельд И. Л., Маренко В. Ф. // Доклады РАН. 1992. Т. 323, № 6. С. 1 064.
2. Воинов В. В., Гуфельд И. Л., Кругликов В. В. и др. // Изв. РАН. Физика Земли. 1992. № 3. С. 96.
3. Гуфельд И. Л., Рожной А. А., Тюменцев С. Н. и др. // Изв. РАН. Физика Земли. 1992. № 3. С. 102.
4. Molchanov O. A., Hayakawa M. // J. Geophys. Res. A. 1998. V. 103, No. 8. P. 17 489.
5. Гусев Г. А., Гуфельд И. Л., Похотелов О. А. // Доклады РАН. 1992. Т. 327, № 1. С. 65.
6. Бончковский В. Ф. // Труды Геофиз. инст. АН СССР. 1954. № 25(152). С. 192.
7. Kondo G. // Mem. Kakioka magnetic observatory. 1968. V. 13, No. 1. P. 11.
8. Нао J. // Acta seismol. Sin. 1988. V. 10, No. 2. P. 207.
9. Ким В. П., Хегай В. В., Иллич-Свитыч П. В. // Физика Земли. 1994. № 3. С. 37.
10. Ким В. П., Хегай В. В., Иллич-Свитыч П. В. // Геомагнетизм и аэрономия. 1993. Т. 33, № 5. С. 114.
11. Kim V. P., Hegai V. V. // Atmospheric and ionospheric electromagnetic phenomena associated with earthquakes / Ed. by M. Hayakawa. Tokyo: Terrapub, 1999. P. 619.
12. Kim V. P., Hegai V. V. // J. Earthquake Prediction Res. 1997. No. 6. P. 275.
13. Park C. G., Helliwell R. A. // Radio Sci. 1971. V. 6, No. 2. P. 299.
14. Dungey J. W. // Space Sci. Rev. 1964. V. 4, No. 1. P. 199.
15. Roberts C. S. // Rev. Geophys. Space Phys. 1969. V. 7, No. 1. P. 305.
16. Brice N. // J. Geophys. Res. 1964. V. 69, No. 21. P. 4 515.
17. Ashour-Abdalla M. // Planet. Space Sci. 1972. V. 20, No. 5. P. 639.
18. Nunn D. // Planet. Space Sci. 1971. V. 19, No. 9. P. 1 141.
19. Dysthe K. B. // J. Geophys. Res. 1971. V. 76, No. 28. P. 6 915.
20. Gendrin R. // Astrophys. Space Sci. 1974. V. 28, No. 1. P. 245.
21. Inan U. S., Bell T. F., Helliwell R. A. // J. Geophys. Res. A. 1978. V. 83, No. 7. P. 3 235.
22. Тулинов В. Ф. // Космич. исслед. 1967. Т. 5, № 2. С. 241.
23. Paulikas G. A. // Rev. Geophys. Space. Phys. 1975. V. 13, No. 5. P. 709.
24. Vampola A. L., Kuck G. A. // J. Geophys. Res. A. 1978. V. 83, No. 6. P. 2 543.
25. Vampola A. L., Gorney D. J. // J. Geophys. Res. A. 1983. V. 88, No. 8. P. 6 267.
26. Voss H. D., Smith L. G. // J. Atmos. Terr. Phys. 1980. V. 42, No. 3. P. 227.
27. Тулинов В. Ф., Яковлев С. Г. // Космич. исслед. 1969. Т. 7, № 1. С. 122.
28. Rees M. H. // Planet. Space Sci. 1963. V. 11, No. 10. P. 1 209.
29. Luhmann L. G. // J. Atmos. Terr. Phys. 1976. V. 38, No. 6. P. 605.
30. Данилов А. Д. // Изв. вузов. Радиофизика. 1981. Т. 24, № 10. С. 1 171.
31. Козлов С. И., Власков В. А., Смирнова Н. В. // Космич. исслед. 1988. Т. 26, № 5. С. 738.
32. Turunen E., Matveinen H., Tolvanen J., Ranta H. // Solar-Terrestrial energy program: Handbook of ionospheric models / Ed. by R. W. Schunk. 1996. P. 1.
33. Swider W., Narcisi R. S., Keneshea J., Ulwick J. C. // J. Geophys. Res. A. 1971. V. 76, No. 19. P. 4 691.

34. Swider W. // Pure Appl. Geophys. 1988. V. 127, No. 2–3. P. 403.
35. Ogawa T., Tohmatsu T. // Rep. Ionosph. Space Res. 1966. V. 20, No. 4. P. 395.

Институт земного магнетизма, ионосферы и распространения
радиоволн РАН,
г. Троицк, Россия

Поступила в редакцию
9 июня 2001 г.

**THEORETICAL MODEL OF POSSIBLE PERTURBATIONS IN THE NIGHTTIME MID-LATITUDE IONOSPHERIC
D REGION OVER AN AREA OF MAJOR-EARTHQUAKE PREPARATION**

V. P. Kim, S. A. Pulinets, and V. V. Hegai

We present a theoretical model of possible electron-density perturbations in the nighttime mid-latitude ionospheric *D* region, preceding major earthquakes. It is found that The electron density in the nighttime *D* region over an earthquake epicentral zone can considerably increase before severe earthquakes. The horizontal size of the area of perturbed electron density is about 300 km. The perturbation effect is expected to be more pronounced if a powerful VLF transmitter operates in the vicinity of an imminent earthquake epicentral zone. In this case, a very dense ionization layer of daytime *D*-layer type can be formed at altitudes of the upper nighttime mesosphere and give rise to the effect of strong absorption of HF radio waves propagating over the earthquake preparation area.

УДК 53.082.5:520.8

НАПРАВЛЕННЫЕ СВОЙСТВА СФЕРИЧЕСКОЙ ДВУХЗЕРКАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С ПРОТЯЖЁННЫМ ИНФРАКРАСНЫМ ПРИЁМНИКОМ

И. Я. Орлов, А. Е. Хрулёв

В работе рассмотрены характеристики оптических систем типа системы Кассегрена, состоящих из двух сферических зеркал. Путём моделирования в приближении геометрической оптики получены зависимости ширины главного лепестка углового распределения мощности оптической системы с протяжённым тепловым приёмником для широкого диапазона параметров, что позволяет по заданным требованиям к оптической системе найти её оптимальную конфигурацию. Найденные оптимальные (в смысле минимума ширины главного лепестка по заданному уровню и по заданному коэффициенту рассеяния) смещения малого зеркала относительно квазифокальной области большого.

ВВЕДЕНИЕ

В зеркальных антенных системах вместо параболического зеркала часто используется сферическое, несмотря на то, что при этом несколько ухудшаются направленные свойства антенны [1]. В последнее время появились публикации [2, 3], свидетельствующие о возросшем интересе к сферическим антеннам, который обусловлен рядом преимуществ таких антенн:

- 1) возможностью «качания» диаграммы направленности (ДН) без искажения её формы;
- 2) возможностью создания многолучевой ДН;
- 3) меньшими по сравнению с параболическим зеркалом внеосевыми аберрациями;
- 4) простотой изготовления и юстировки сферических антенн.

Исследование направленных свойств оптических систем (ОС), как правило, проводится в дальней зоне, т. е. в зоне сформированной ДН. Однако при решении ряда исследовательских и технологических задач возникает необходимость получения заданных направленных свойств ОС в ближней зоне. Такая ситуация имеет место при контроле (в инфракрасном (ИК) диапазоне) температурных режимов процессов термической обработки материалов, химических процессов в автоклавах и т. д. (см., например, [4]). В подобных случаях объекты измерения находятся на расстояниях, соответствующих ближней зоне ОС, когда справедливо приближение геометрической оптики (ГО).

В условиях применимости ГО перспективным является компьютерное моделирование методом трассировки лучей [5]. К достоинствам метода трассировки следует отнести адекватность математического описания физических процессов в ближней зоне, простоту использования принципа обратимости антенны, удобство рассмотрения свойств ОС для области параметров и т. д. Вообще говоря, вопрос о применимости метода трассировки лучей можно разделить на две составляющие: адекватность описания ОС и адекватность описания приёмного датчика.

У ИК радиометров, используемых при контроле технологических процессов (сварка, термоциклическая обработка, контроль расплавов и т. п.), радиус малого зеркала в двухзеркальной ОС составляет $R_2 \approx 10 \div 20$ мм, а рабочий диапазон длин волн $\lambda = 1 \div 25$ мкм. Условие применимости геометрического приближения

$$l \ll (2R_2)^2 / \lambda$$

для таких радиометров выполняется на расстояниях l от метров до десятков метров. Итак, вне зависимости от типа приёмного датчика метод трассировки применим для исследования направленных свойств ОС в ближней зоне.

В качестве чувствительного элемента в ИК радиометрах используются приёмники оптического излучения (пирозлектрики, термопары и т. п.). Как правило, линейные размеры таких приёмников много больше длины волны принимаемого излучения. Отклик оптического приёмника определяется суммарной мощностью поглощённого излучения, при этом по апертуре суммируется квадрат амплитуды падающего излучения без учёта фазы.

Принято говорить о диаграмме направленности антенны в дальней зоне, т. к. в ближней зоне ДН ещё не сформирована. Поэтому, рассматривая ближнюю зону, будем говорить об угловом распределении мощности, подразумевая, что это распределение зависит от расстояния. Для конкретной ОС расстояние (или диапазон расстояний), на котором ищется угловое распределение мощности, определяется удалённостью объектов измерения.

Угловое распределение мощности в ближней зоне оптического приёмника, представляющего собой пластину круговой формы, может быть найдено методом трассировки. Очевидно, такое распределение имеет «косинусный» вид и не зависит от длины волны.

В то же время при рассмотрении такого сложного излучателя, как совокупность строго синусоидальных синхронных элементарных излучателей, ДН зависит от длины волны [6, с. 315]. Такая система не может быть описана методом трассировки.

Таким образом, в работе рассматриваются направленные свойства двухзеркальной сферической оптической системы с протяжённым приёмником оптического излучения ИК диапазона в ближней зоне.

1. ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ КРИТЕРИИ КАЧЕСТВА

Рассмотрим оптическую систему, состоящую из двух сферических зеркал (см. рис. 1) и представляющую собой упрощённый вариант двухзеркальной системы Кассегрена, которая состоит из большого параболического и малого гиперболического зеркал. Здесь точка A — центр приёмника, O_1, O_2 — вершины отражающих поверхностей (сферических зеркал), B — квазифокальная область сферического зеркала (соответствующая фокусу параболического зеркала), C_2 — центр кривизны малого зеркала. Центр кривизны C_1 большого зеркала не показан. Система характеризуется следующими размерами:

L — радиус приёмника, $b = |AO_1|$, $d = |O_1O_2|$, R_1 и R_2 — радиусы большого и малого зеркал, r_1 и r_2 — радиусы кривизны большого и малого зеркал, ψ_0 — угол, под которым видны оба зеркала из точки B , $|O_1B| = r_1/2$.

Рассматриваемые оптические системы будем оценивать по следующим параметрам:

1) Ширина θ_a углового распределения мощности $F(\varphi, \theta)$ по некоторому уровню a .

2) Коэффициент использования (КИ) антенны

$$K = \sigma_{\text{эф}}/S, \quad (1)$$

где S — площадь большого зеркала, $\sigma_{\text{эф}}$ — эффективная площадь антенны (в оптическом смысле), определяемая как участок площади большого зеркала, формирующий на апертуре приёмника изображение бесконечно удалённой осевой точки.

3) Коэффициент рассеяния β_{Ω_i} , посредством которого [7] обозначаем долю мощности, принимаемую антенной вне телесного угла Ω_i :

$$\beta_{\Omega_i} = \frac{\int_{4\pi - \Omega_i} F d\Omega}{\int_{4\pi} F d\Omega}, \quad (2)$$

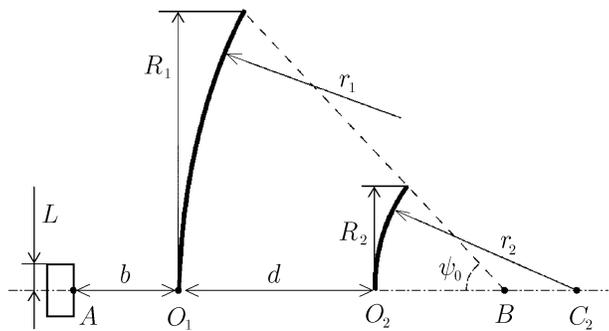


Рис. 1

где $F(\varphi, \theta)$ — угловое распределение мощности. Коэффициент рассеяния вне главного лепестка будем обозначать $\beta_{\text{гл}}$. В нашем случае коэффициент рассеяния определяется для заданного расстояния.

Пусть фон имеет температуру $T_{\text{ф}}$, а объект, полностью перекрывающий главный лепесток $\Omega_{\text{гл}}$ углового распределения мощности, имеет температуру T_0 . В этом случае измеренная яркостная температура будет равна

$$T_a = \int_{\Omega_{\text{гл}}} T_0 F \, d\Omega / \int_{4\pi} F \, d\Omega + \int_{4\pi - \Omega_{\text{гл}}} T_{\text{ф}} F \, d\Omega / \int_{4\pi} F \, d\Omega.$$

Отсюда с учётом (2) получаем

$$T_a = (1 - \beta_{\text{гл}}) T_0 + \beta_{\text{гл}} T_{\text{ф}}, \quad (3)$$

т. е. ошибка измерения, обусловленная приёмом излучения фона, определяется коэффициентом рассеяния антенны.

2. УСЛОВИЯ ПРИБЛИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ СФЕРИЧЕСКИХ ЗЕРКАЛ К СИСТЕМЕ КАССЕГРЕНА

Рассмотрим случай замены зеркала в форме сегмента параболоида вращения на зеркало в форме сегмента сферы с тем же радиусом кривизны, что и в окрестности вершины параболоида. Пусть вершина зеркала расположена в начале декартовой системы отсчёта x, y , ось y которой совпадает с оптической осью системы. Из разложения в ряд в окрестности точки $x = 0$ параболы

$$y_p = \frac{x^2}{2p}$$

и окружности

$$y_R = \frac{x^2}{2R} + \frac{x^4}{8R^3} + O(x^6), \quad R = p,$$

касающейся параболы при $x = 0$, видно, что отличие

$$\delta_p = -\frac{x^4}{8R^3} + O(x^6) \quad (4)$$

параболы от касательной окружности определяется четвёртой степенью расстояния от точки касания. Аналогично находится отличие гиперболы, заданной уравнением

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{c^2 - a^2} = 1,$$

от касательной к ней окружности:

$$\delta_h = -\left(\frac{1}{8R^3} + \frac{1}{8(c^2 - a^2)R}\right)x^4 + O(x^6),$$

где $R = (c^2 - a^2)/a$.

Таким образом, если для зеркал в виде сегментов сферы (см. рис. 1) выполняются условия

$$R_1/r_1 \rightarrow 0, \quad R_2/r_2 \rightarrow 0, \quad (5)$$

то при правильно выбранных радиусах кривизны r_1, r_2 такая система двух сферических зеркал эквивалентна системе Кассегрена. Учитывая, что фокус параболы совпадает с точкой B (рис. 1), а фокусы

гиперболы — с точками A и B , легко получить уравнение, связывающее параметры системы сферических зеркал:

$$r_2 = -2(d + b) \frac{(2d - r_1)}{(4d + 2b - r_1)}. \quad (6)$$

Удобнее рассматривать зависимость $d = d(r_2, b, r_1)$ вместо $r_2 = r_2(d, b, r_1)$, т. к. d — параметр, изменяемый в процессе юстировки оптики. Для области определения параметра d в системе Кассегрена (здесь рассматриваем случай, показанный на рис. 1, когда приёмник расположен за большим зеркалом и выпуклость малого зеркала направлена в сторону приёмника)

$$(r_1 - 2b)/4 \leq d < r_1/2$$

имеем

$$d(r_2, b, r_1) = \frac{r_1 - 2b - 2r_2}{4} + \frac{1}{4} \sqrt{(r_1 + 2b)^2 + 4r_2^2}. \quad (7)$$

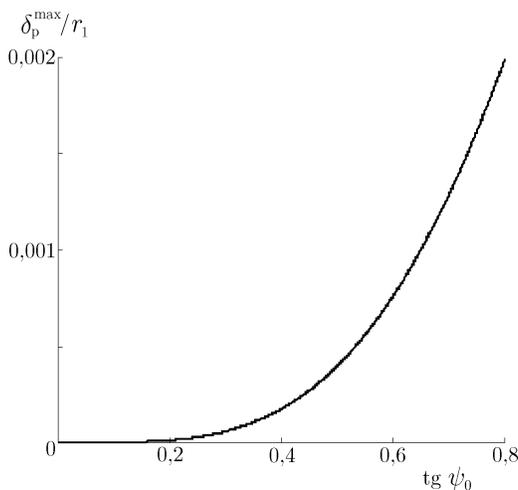


Рис. 2

Известно, что в случае однозеркальной сферической антенны небольшое смещение приёмника в сторону зеркала несколько улучшает направленные свойства антенны за счёт уменьшения фазовой ошибки на краях зеркала [3]. Выберем размеры системы двух сферических зеркал, удовлетворяющие (7), в качестве первого приближения и найдём поправки к ним, которые будут иметь место при переходе от бесконечно малых секторов сферы (5) к реальным размерам.

Степень приближения сферического зеркала к параболическому будем характеризовать тангенсом угла ψ_0 . При этом максимальное отклонение (4) сферы от параболоида (см. рис. 2) равно

$$\delta_p^{\max} = -\frac{x_{\max}^4}{8r_1^3} + O(x_{\max}^6),$$

где

$$x_{\max} = \frac{r_1 \operatorname{tg} \psi_0}{2(1 + \operatorname{tg}^2 \psi_0)} \left(\sqrt{4 + 3 \operatorname{tg}^2 \psi_0} - 1 \right).$$

3. НАПРАВЛЕННЫЕ СВОЙСТВА СИСТЕМЫ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ ДВУХ СФЕРИЧЕСКИХ ЗЕРКАЛ

Чтобы получить угловое распределение мощности, воспользуемся методом трассировки (построения хода) лучей [5], применяемым в компьютерном моделировании оптических систем в приближении ГО (см., например, [8]). В данном случае методика моделирования заключается в следующем. Для нахождения мощности, принимаемой антенной, разобьём весь падающий на антенну поток излучения объекта и фона на множество лучей. Далее будем трассировать каждый луч (т. е. находить его траекторию по законам ГО) до попадания в приёмник или до «вылета» из оптической системы. Мощность излучения, принимаемого антенной с некоторого направления, будет пропорциональна количеству лучей, пришедших с этого направления и попавших в приёмник. Подобное моделирование позволяет учесть влияние таких эффектов, как многократные переотражения и затенение частей зеркал.

Так как в геометрооптическом приближении направленные свойства системы не меняются при умножении всех размеров на константу, можно ввести безразмерные параметры:

$$R'_1 = R_1/r_1, \quad R'_2 = R_2/r_1, \quad r'_2 = r_2/r_1, \quad L' = L/r_1, \quad d' = d/r_1, \quad b' = b/r_1, \quad r'_1 \equiv 1. \quad (8)$$

Значение параметра b' не оказывает существенного влияния на характеристики системы и определяется, скорее, из конструктивных соображений. Ещё три параметра являются функциями других параметров:

$$d' = f_1(r'_2, b), \quad R'_1 = f_2(\psi_0), \quad R'_2 = f_3[\psi_0, d'(r'_2, b)].$$

Таким образом, остаются три независимых аргумента: ψ_0 , r'_2 , L' , на множестве которых будем рассматривать свойства оптической системы.

Для определённости рассмотрим результаты моделирования системы, состоящей из двух сферических зеркал, со следующими значениями угла ψ_0 : $\text{tg } \psi_0 = 0,4$; $\text{tg } \psi_0 = 0,6$; $\text{tg } \psi_0 = 0,8$. Как видно из рис. 2, выбранная область углов ψ_0 соответствует широкому диапазону возможных приближений сферы к параболоиду. Примем далее относительный размер приёмника L' фиксированным и равным 0,01. Параметр b' положим равным 0,1, а значение r'_2 варьируем в диапазоне $0,1 \div 1$.

Поскольку угловое распределение мощности антенны зависит от расстояния между антенной и точкой наблюдения, имеет смысл говорить о распределении мощности на каком-либо заданном расстоянии. Удобно рассматривать распределение мощности на максимальном расстоянии (оно ограничено областью применимости ГО), т. к. с увеличением расстояния распределение мощности асимптотически приближается к распределению на бесконечности. Полученные результаты будут применимы на расстояниях от границы зоны ГО до точки, ближе которой имеет место сильная зависимость распределения мощности от расстояния. Можно приближённо считать, что такая точка лежит в области, где линейный размер поперечного сечения главного лепестка равен апертуре антенны. Здесь и далее под угловым распределением мощности будем подразумевать распределение на границе области применимости ГО.

На рис. 3 приведены найденные относительные расстояния между зеркалами $d'_{\text{opt}}(r'_2)$, обеспечивающие минимум ширины углового распределения мощности по уровню 0,1. Пунктиром показана теоретическая зависимость $d'(r'_2)$ в приближении (7).

На рис. 4 приведены зависимости полуширины $\theta_{0,1}(r'_2)$ углового распределения мощности от радиуса малого зеркала при $d' = d'_{\text{opt}}$. Здесь выбрана ширина распределения по уровню 0,1 вместо общепринятых уровней 0,5 или 0,7, т. к. большинство получаемых нами диаграмм имеют узкий пик и широкое основание, и коэффициент рассеяния (2) вне главного лепестка, взятого по уровню 0,5, оказывается большим.

В качестве примера на рис. 5 приведены нормированные угловые распределения мощности P системы, состоящей из двух сферических зеркал с точечным приёмником и имеющей параметры

$$r'_2 = 0,42; \quad L' = 0; \quad b' = 0,1; \quad \text{tg } \psi_0 = 0,6.$$

Пунктирная кривая на рис. 5 соответствует случаю $d' = 0,375$ (из (7)), сплошной график — случаю $d'_{\text{opt}} = 0,349$ (см. рис. 3). Из рис. 5 видно, что $\theta_{0,5}$ не описывает реальной (в энергетическом смысле) ширины углового распределения, т. к. на сектор, ограниченный углом $\theta_{0,5}$, приходится лишь малая часть принимаемой энергии. Следует отметить, что угловые распределения мощности для случая протяжённого приёмника существенно отличаются от приведённых на рис. 5.

Для оценки эффективности оптической системы найдём коэффициент использования K антенны (1). Полученные зависимости $K(r'_2)$ приведены на рис. 6. Здесь верхний предел, к которому асимптотически приближаются графики с увеличением r'_2 , обусловлен затенением части большого зеркала (значение $K = 1$ недостижимо, т. к. в нашем случае осесимметричной двухзеркальной оптической системы

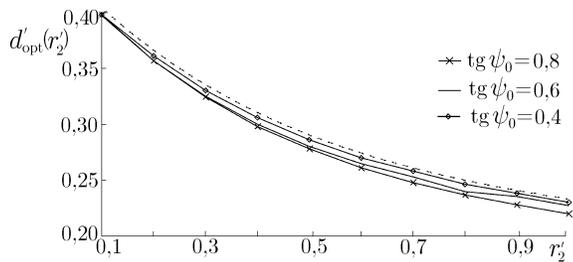


Рис. 3

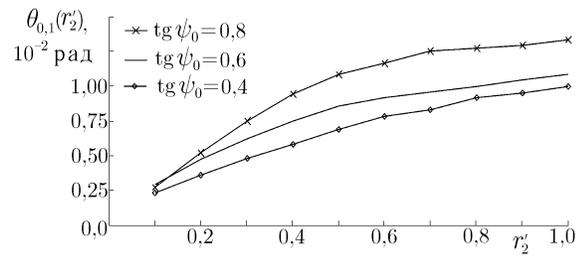


Рис. 4

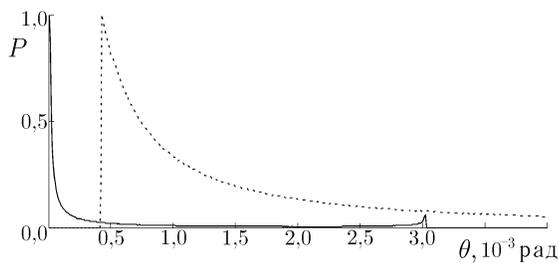


Рис. 5

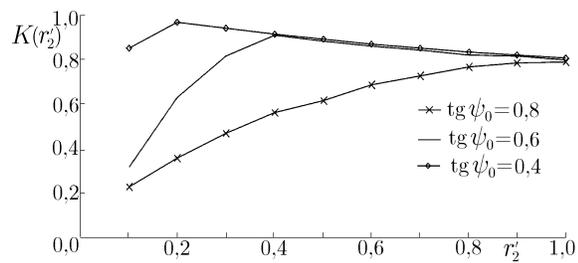


Рис. 6

на большом зеркале всегда есть область тени от малого зеркала). Следует учитывать, что в силу определения (1) КИ антенны зависит от площади приёмника, поэтому на рис. 5 показан частный случай, имеющий место при $L' = 0,01$. Как показало моделирование, КИ антенны возрастает с увеличением протяжённости L' приёмника.

Описанный выше метод моделирования позволяет получить исчерпывающую информацию о виде углового распределения мощности оптической системы вблизи главного лепестка. Точные же данные о коэффициенте рассеяния получить трудно, т. к. при трассировке в большом секторе углов θ снижается точность и увеличивается время работы программы. Между тем коэффициент рассеяния может достигать значительных величин. Например, если КИ антенны не достигает максимального значения (рис. 5), то через «неиспользуемые» области большого зеркала принимается излучение с направлений, не входящих в рассматриваемую область, т. е. рассеяние увеличивается.

4. ОПТИМИЗАЦИЯ ДВУХЗЕРКАЛЬНОЙ ОПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПО МИНИМУМУ КОЭФФИЦИЕНТА РАССЕЯНИЯ

Как показано выше, для ИК радиометра ширину главного лепестка углового распределения мощности желательно определять не по заданному уровню, а по заданному коэффициенту рассеяния относительно главного лепестка. Тогда полуширина распределения по допустимому коэффициенту рассеяния β_0 определяется как

$$\theta_{\beta=\beta_0} = \arccos \left[1 - \frac{1}{2\pi} \Omega \Big|_{\beta_{\Omega}=\beta_0} \right]. \quad (9)$$

Выражение (9) связывает телесный угол Ω , рассеяние вне которого определяется коэффициентом β_0 , и образующий его плоский угол, отсчитываемый от оси системы.

При этом, подставляя β_0 в (3), можно оценить ошибку, обусловленную фоновым излучением. На практике такой критерий для определения ширины распределения вызовет трудности, т. к. непосредственное измерение величины $\theta_{\beta=\beta_0}$ затруднительно, но для рассмотрения системы с целью оптимизации он вполне приемлем.

Для нахождения полуширины $\theta_{\beta=\beta_0}$ углового распределения мощности оптической системы на множестве параметров ψ_0, r'_2, L' проведём моделирование следующим методом.

1) Находим угловое распределение мощности оптической системы с точечным приёмником. (Для этого было получено аналитическое выражение для траектории лучей от приёмника до объекта. Однако оно настолько громоздко, что не допускает аналитического исследования, поэтому все дальнейшие расчёты делались численно).

2) Разбиваем площадь реального протяжённого приёмника на совокупность точечных и находим их суммарное угловое распределение мощности. При этом мы суммируем интенсивности, т. к. приёмники тепловые и нечувствительны к фазе сигнала. Для нахождения углового смещения распределений мощности отдельных точечных приёмников удобно (пренебрегая внесосевыми aberrациями) рассматривать двухзеркальную систему как одну преломляющую поверхность (см. рис. 7) с эффективным задним фокусным расстоянием f_3 , определяемым из соотношения

$$\frac{1}{f_3} = \frac{2}{r'_1} + \frac{2}{(-r'_2)} - \frac{4d'}{(-r'_2)r'_1}. \quad (10)$$

Здесь разные знаки кривизны зеркал учтены минусом перед r'_2 . Зная линейное смещение i -го точечного приёмника l_i , из рис. 6 легко найти угловое смещение его ДН θ_i .

3) Находим коэффициенты рассеяния для широкого диапазона углов θ и выбираем угол, удовлетворяющий условию (9), при этом коэффициент рассеяния β_0 для определённости задаём равным 0,05.

Для нахождения минимальных достижимых значений $\theta_{\beta=\beta_0}$ предварительно необходимо найти поправку к расстоянию (7) между зеркалами, минимизирующую коэффициент рассеяния. Поправки, следующие из графиков на рис. 3, не годятся, т. к. они минимизируют ширину углового распределения мощности по заданному уровню. По результатам моделирования найдена следующая эмпирическая формула, дающая значение d'_{opt} с достаточной точностью в рассматриваемом диапазоне параметров:

$$d'_{\text{opt}} = d' - \left(0,002 \operatorname{tg} \psi_0 + \frac{0,018 \operatorname{tg}^2 \psi_0}{0,42 + r'_2} \right), \quad (11)$$

где d' определяется зависимостью (7).

С учётом вышесказанного можно найти наилучшее значение $\theta_{\beta=\beta_0}$ при расстоянии (11) между зеркалами и параметрах

$$\operatorname{tg} \psi_0 = 0,4; 0,6; 0,8; \quad r'_2 = 0,1 \div 1; \quad L' = 0 \div 0,02.$$

Графики зависимостей $\theta_{\beta=0,05}(\psi_0, r'_2, L')$ при $b = 0,1$ приведены на рис. 8–10.

Рассмотрим некоторые следствия из полученных результатов. При этом для сравнения свойств оптической системы со сферическими зеркалами и системы Кассегрена можно приближённо считать, что рис. 10 соответствует системе Кассегрена; в частности, при точечном приёмнике ($L' = 0$) ширина углового распределения мощности на рис. 10 близка к нулю.

1) На рис. 8–10 при протяжённом приёмнике ($L' \neq 0$) заметна тенденция к уменьшению ширины углового распределения мощности при уменьшении r'_2 . Это обусловлено тем, что при меньшем r'_2 на приёмнике формируется более крупное (за счёт большего f_3 (10)) изображение объекта, т. е. приёмник «видит» меньшую его часть. Но вблизи $r'_2 = 0$ распределение снова расширяется, что является следствием неидеальности зеркал (под неидеальностью понимаем отличие сферических зеркал от формы зеркал системы Кассегрена).

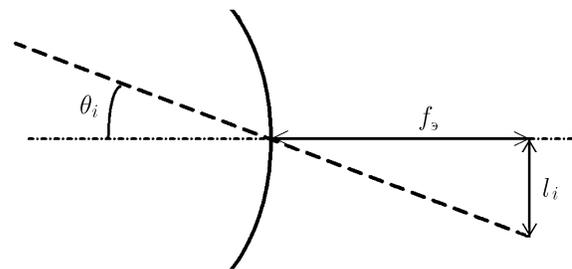


Рис. 7

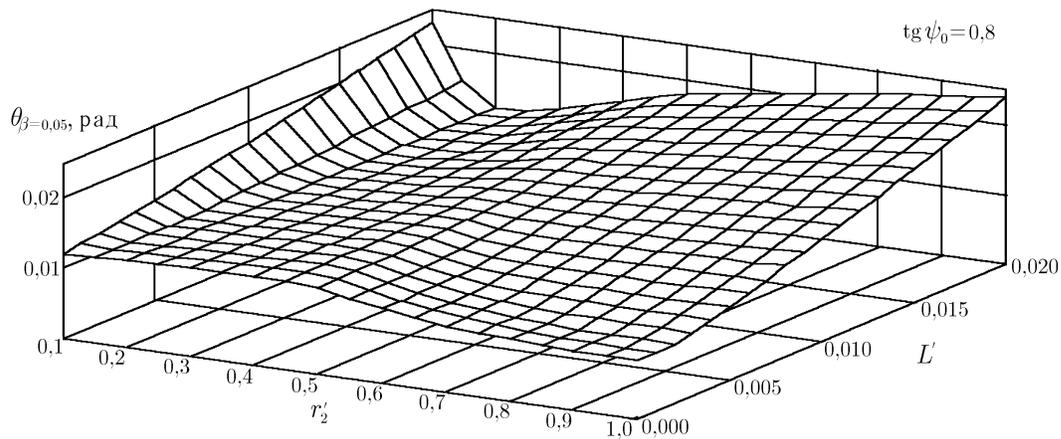


Рис. 8

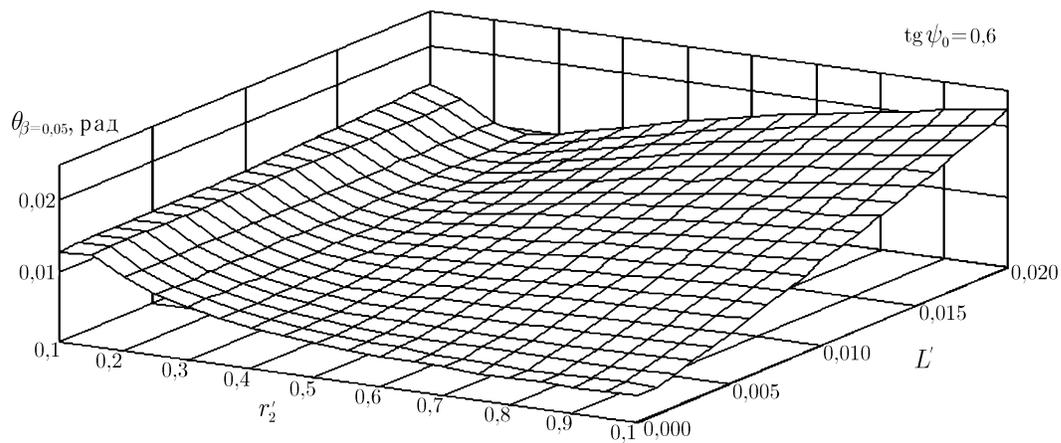


Рис. 9

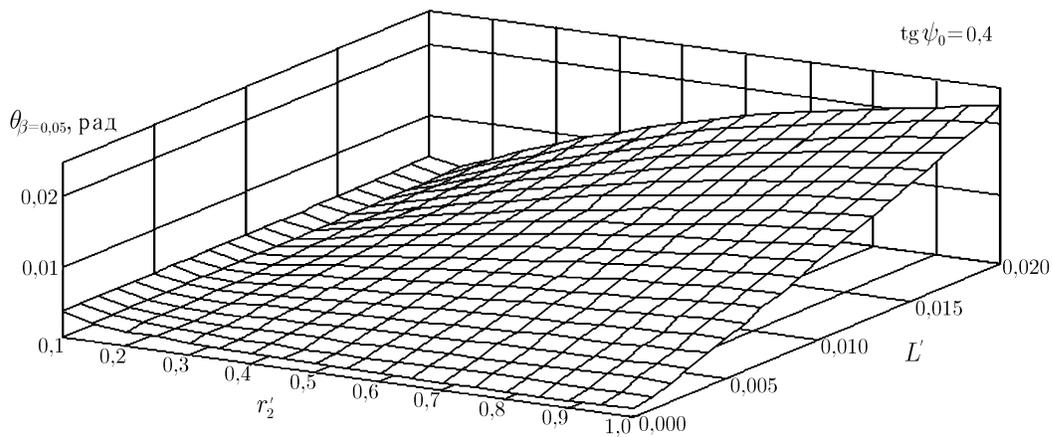


Рис. 10

Несмотря на то, что ширина углового распределения мощности минимальна при малых значениях r'_2 , работа при малом отношении радиусов кривизны зеркал нежелательна, т. к. при этом уменьшает-

ся используемый сектор обзора приёмника и ужесточаются требования к точности позиционирования малого зеркала.

2) Известно, что идеальная система Кассегрена с точечным приёмником в геометрическом приближении имеет ДН нулевой ширины. В нашем случае отличие ширины углового распределения мощности от нуля обусловлено двумя причинами: ненулевым размером приёмника и неидеальностью зеркал. На рис. 8–10 можно выделить две характерные области, в каждой из которых одна из указанных причин доминирует:

— при $r'_2 \approx 0,1 \div 0,4$ ширина углового распределения мощности слабо зависит от радиуса приёмника L' , т. е. уширение распределения обусловлено в основном сферической формой зеркал;

— при больших r'_2 , напротив, значение $\theta_{\beta=0,05}$ зависит в основном от L' , т. е. влияние ненулевого размера приёмника преобладает над влиянием неидеальности (сферичности) зеркал. В частности, при $r'_2 = 1$, $L' = 0,02$ ширина углового распределения мощности практически не зависит от ψ_0 , т. е. в этом случае сферическая оптика эквивалентна системе Кассегрена.

Следует отметить ещё одну особенность рассматриваемой системы. Известно, что, используя сферическое зеркало, можно строить антенны с качаемой ДН, т. к. любой участок сферического зеркала можно рассматривать как сферическое зеркало с тем же радиусом кривизны. При этом в двухзеркальной системе необходимо перемещать малое зеркало вместе с приёмником [9]. Система из двух сферических зеркал позволяет обеспечить качание ДН, перемещая только приёмник. Для этого необходимо, чтобы центры обеих сфер совпадали. При этом система будет локально симметрична относительно любой оси, проходящей через общий центр сфер. Это условие выполняется при $d' = r'_1 - r'_2$, откуда с учётом (6) получаем

$$r'_2 = 2r'_1 \frac{r'_1 + b}{3r'_1 + 2b}. \quad (12)$$

В частности, при $b' = 0,1$ имеем $r'_2 = 0,688$; $d' = 0,312$. При этом, однако, возникает ряд других проблем, например затенение большого зеркала неиспользуемой частью малого, невозможность качания ДН на большой угол и др.

5. ВЛИЯНИЕ ДИФРАКЦИИ НА КОЭФФИЦИЕНТ РАССЕЯНИЯ

Расчёт зеркальных антенных систем ИК диапазона длин волн удобно производить в приближении ГО, однако при этом никак не учитывается дифракция на элементах антенной системы. В приближении ГО при нахождении коэффициента рассеяния необходимо учитывать дифракционные поправки к рассеянию, т. к. при малом уровне геометрического рассеяния оно может быть сравнимо с рассеянием, обусловленным дифракцией.

В случае рассматриваемой оптической системы влияние дифракции на ширину главного лепестка углового распределения мощности будет незначительным, т. к. ширина главного лепестка много больше теоретического предела, обусловленного дифракцией.¹ Поэтому ограничимся рассмотрением дифракционных поправок к коэффициенту рассеяния.

В литературе встречаются примеры рассмотрения дифракции на зеркалах в двухзеркальных системах [10], однако в интересующем нас случае системы с ИК приёмником такой подход вряд ли оправдан. ИК приёмники, как правило, слабонаправлены, поэтому в двухзеркальной системе с таким приёмником (см. рис. 11; система осесимметрична относительно горизонтальной оси) имеется диафрагма D , которая затеняет для приёмника Q край малого зеркала M (диафрагмой может быть само

¹ Разобьём приёмник на множество точечных приёмников, нечувствительных к фазе. Тогда угловое распределение мощности оптической системы будет арифметической суммой диаграмм направленности элементарных приёмников. При этом дифракционная поправка к ширине углового распределения мощности, определённой в приближении ГО, будет порядка минимальной достижимой ширины углового распределения мощности системы с точечным приёмником.

отверстие в большом зеркале). Если край малого зеркала не затенён, то через зазор между зеркалами излучение из переднего полупространства будет попадать в приёмник, минуя зеркала.

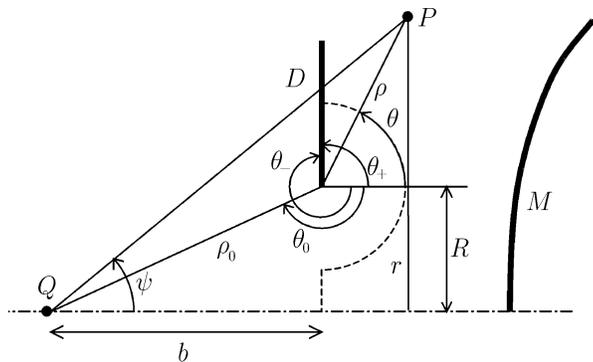


Рис. 11

В данном случае удобно рассматривать работу системы в качестве передатчика. На границе светень между диафрагмой и малым зеркалом образуется наиболее сильный разрыв геометрооптического поля. Возникающую при этом дифракцию на отверстии можно рассматривать методами геометрической теории дифракции [11]. После края малого зеркала имеет место вторичная дифракция (т. к. падающее поле — результат первичной дифракции), поэтому разрыв поля там более слабый.

Для оценки влияния дифракции на коэффициент рассеяния зеркальной антенны сравним суммарную мощность дифракционной волны, распространяющейся от края отверстия диафрагмы в переднее полупространство (направо от диафрагмы D на рис. 11) с мощностью геометрооптической волны, проходящей через отверстие в диафрагме. Дифракционная волна, распространяющаяся в заднее полупространство, поглощается стенками прибора, в котором находится оптическая система.

Исходящую из точки Q сферическую волну представляем в виде лучевого разложения

$$u = \sum_n A_n \exp(iks_n) = \frac{B}{r} \exp(ikr), \quad (13)$$

где s_n — эйконал n -й волны лучевого разложения, $B = \text{const}$, $A_0 = B/r$, $A_1 = A_2 = \dots = 0$, r — радиус в сферических координатах. Можно записать в общем виде лучевое разложение дифракционной волны, распространяющейся от одной кромки круглой диафрагмы для произвольной точки P [11]:

$$u_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{R}{r\rho}} \exp[ik(\rho + \rho_0)] \left(\frac{i}{k}\right)^{1/2} \left\{ f_0(\theta, \varphi) + \frac{i}{k} \left[f_1(\theta, \varphi) + \frac{D_1^\varphi f_0}{r \sin \theta} + \frac{D_1^\theta f_0}{\rho} \right] + O(k^{-2}) \right\}, \quad (14)$$

где

$$f_0 = A_0 V, \quad f_1 = A_1 V - \left[\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial A_0}{\partial \psi} - \frac{A_0 \cos \theta_0}{R} \right] \frac{\partial V}{\partial \theta_0} - \frac{A_0}{2\rho_0} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_0^2} - \frac{D_1^\varphi A_0 V}{R \sin \theta},$$

$$D_1^\varphi = -\frac{1}{2} \left(\frac{d^2}{d\varphi^2} + \frac{1}{4} \right), \quad D_1^\theta = -\frac{1}{2} \left(\frac{d^2}{d\theta^2} + \frac{1}{4} \right),$$

$$V = V_\pm(\theta - \theta_-, \theta_0 - \theta_-, \theta_+ - \theta_-), \quad V_\pm(\varphi, \varphi_0, \Phi) = H_\pm(\varphi - \pi, \varphi_0, \Phi) - H_\pm(\varphi + \pi, \varphi_0, \Phi),$$

$$H_\pm(\alpha, \beta, \Phi) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}\Phi} \left[\text{ctg} \frac{(\alpha - \beta)\pi}{2\Phi} \pm \text{ctg} \frac{(\alpha + \beta)\pi}{2\Phi} \right]. \quad (15)$$

В последних выражениях знак плюс берётся при граничном условии Неймана, знак минус — при граничном условии Дирихле.

При дифракции на отверстии в плоском экране

$$\theta_+ = \pi/2, \quad \theta_- = -3\pi/2. \quad (16)$$

Подставляя (13) и (16) в (15), а затем (15) в (14), получаем выражение для лучевого разложения дифракционной волны, которое здесь не приводится ввиду его громоздкости. Поскольку лучевое разложение падающей волны и геометрия задачи осесимметричны, итоговое выражение не зависит от азимутального угла φ . Отношение мощностей дифракционной и геометрооптической волн будет равно отношению потоков вектора Пойнтинга соответствующих волн в переднее полупространство:

$$N = \frac{\int_S \left[|u_{\text{кр}}^{\text{H}}|^2/2 + |u_{\text{кр}}^{\text{Д}}|^2/2 \right] (\mathbf{n}, \mathbf{r}_{\text{Д}}) dS}{\int_S |u|^2 (\mathbf{n}, \mathbf{r}_{\Gamma}) dS}. \quad (17)$$

Здесь $u_{\text{кр}}^{\text{H}}$, $u_{\text{кр}}^{\text{Д}}$ — выражения для краевой волны при граничных условиях Неймана и Дирихле соответственно, $\mathbf{r}_{\text{Д}}$, \mathbf{r}_{Γ} — направления распространения дифракционной и геометрооптической волн, S — поверхность интегрирования, \mathbf{n} — нормаль к поверхности интегрирования.

Лучевое разложение (14) не может быть использовано в окрестности каустики (оси симметрии системы). Чтобы обойти эту проблему, используем поверхность интегрирования S , сечение которой показано на рис. 11 пунктирной линией. При этом в области каустики $(\mathbf{n}, \mathbf{r}_{\text{Д}}) = 0$, поэтому выражение для краевой волны, применимое в каустической области, не требуется. Разложение (14) также неприменимо в окрестности разрыва геометрооптического поля (в области границы свет—тьень). Поэтому в окрестности разрыва геометрооптического поля вместо выражения (14) используем полутеневое разложение, которое выражается через интегралы Френеля.

Для верхней оценки дифракционной поправки считаем, что дифракционная волна не попадает в геометрооптическую диаграмму направленности. В таком случае отношение мощностей дифракционной и геометрооптической волн будет входить в коэффициент рассеяния аддитивно.

В результате численного интегрирования (17) получены следующие оценки. Пусть система имеет размеры $b = 10$ мм; $R = 2,5$ мм (см. рис. 11). Тогда в диапазоне длин волн от 2 до 20 мкм коэффициент рассеяния вне главного лепестка, обусловленный дифракцией на диафрагме, составляет соответственно от 0,015 до 0,04. При этом результаты, полученные в разделе 4, сохраняются с той лишь поправкой, что они получены для допустимого коэффициента рассеяния β_0 , лежащего в интервале от 0,065 до 0,09 соответственно (вместо $\beta_0 = 0,05$ в приближении ГО).

Полученные значения коэффициента рассеяния являются практически приемлемыми для ИК оптических систем. Проведённые расчёты также показывают, что рассматриваемые оптические системы могут быть адекватно описаны в приближении ГО.

Следует отметить, что приведённые оценки являются верхними оценками рассматриваемого эффекта, т. к. часть дифракционной волны (лучи, примыкающие к границе свет—тьень) попадает в главный лепесток углового распределения мощности.

ВЫВОДЫ

В данной работе рассмотрена двухзеркальная оптическая система с протяжённым приёмником оптического излучения. Можно сформулировать ряд выводов, следующих из данной работы.

1) При выборе уровня для определения ширины углового распределения мощности оптической системы необходимо учитывать допустимый коэффициент рассеяния вне главного лепестка этого распределения.

2) Практически приемлемым диапазоном углов полураскрыва ψ_0 системы можно считать область $\text{tg } \psi_0 = 0,3 \div 0,8$. При больших углах ψ_0 направленные свойства системы быстро ухудшаются, при меньших — увеличивается длина системы и используется малый сектор углового распределения мощности приёмника.

3) Если размер L' теплового приёмника больше определённого значения, то система, состоящая из двух сферических зеркал, в смысле ширины углового распределения мощности эквивалентна системе Кассегрена с таким же приёмником. Указанное пороговое значение L' обусловлено преимущественным влиянием протяжённости приёмника на уширение углового распределения мощности.

4) Применение системы, состоящей из двух сферических зеркал, оправдано в случае, когда к ширине углового распределения мощности предъявляются умеренные требования.

5) Используя несколько приёмников, можно создать многолучевую ДН в системе, состоящей из двух сферических зеркал. Если при этом центры сфер совпадают, то диаграммы направленности для этих приёмников будут иметь практически одинаковую форму и разные направления главного максимума.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hand-held digital temperature measuring instrument: Пат. № 4634294 США; Заявл. 06.01.87.
2. Федянович В. И., Дутиков М. Д. // Радиотехника и электроника. 1995. № 12. С. 1 822.
3. Кинбер Б. Е., Лобкова Л. М., Савочкин А. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1991. Т. 34, № 2. С. 173.
4. Афанасьев А. В., Лебедев В. С., Орлов И. Я., Хрулёв А. Е. // Приборы и техника эксперимента. 2001. № 2. С. 155.
5. Боресков А. В., Зайцев А. А., Шишкин Е. В. Начала компьютерной графики. М.: Диалог-МИФИ, 1993. 138 с.
6. Горелик Г. С. Колебания и волны. М.: Физматгиз, 1959.
7. Кисляков А. Г., Разин В. А., Цейтлин Н. М. Введение в радиоастрономию. Часть II. Техника радиоастрономии: Учебник для вузов. М.: Наука, 1996. С. 23.
8. Ramos-Izquierdo L., Buffon J. L., Hayes P. // Appl. Opt. 1994. V. 33, No. 3. P. 314.
9. Бахрах Л. Д., Вавилова И. В. // Радиотехника и электроника. 1961. № 7. С. 1 146.
10. Саломонович А. Е., Соболева Н. С. // Радиотехника и электроника. 1959. № 5. С. 799.
11. Боровиков В. А., Кинбер Б. Е. Геометрическая теория дифракции. М.: Связь, 1978.

Нижегородский госуниверситет
им. Н. И. Лобачевского,
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию
18 сентября 2000 г.

DIRECTIVITY OF A TWO-MIRROR SPHERICAL ANTENNA WITH AN EXTENDED INFRARED RECEIVER

I. Ya. Orlov and A. E. Khrulev

We consider the characteristics of two-mirror spherical optical systems of Cassegrain type. The relationship between the field-of-view (FOV) width of an optical system with an extended infrared receiver and the system geometry is found in the wide range of parameters by modeling the system in the geometrical-optics approximation. This allows one to determine the optimal design of the system for given performance requirements. We find the optimal displacement of the small mirror from the quasi-focal area of the main mirror, which minimizes the FOV width at a given level and for a given dissipation factor.

ТОЧЕЧНЫЙ ИСТОЧНИК НЕСТАЦИОНАРНОГО ПОЛЯРИЗОВАННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ОДНОРОДНОЙ ФЛУКТУИРУЮЩЕЙ СРЕДЕ

В. П. Буда́к, Б. А. Векленко, Б. Б. Векленко

Методом неприводимых представлений группы вращений в аналитическом виде найдена функция Грина уравнения переноса излучения с учётом поляризации света. Индикатриса рассеяния предполагается релеевской. Показано, что не все поляризационные характеристики излучения во флуктуирующей среде исчезают с течением времени. Часть из них при любых временах несёт информацию о свойствах излучателя и рассеивающей среды.

Интерес к взаимодействию света с веществом традиционно велик. Большинство реальных тел статистически неоднородны, что проявляется в характерных чертах их оптических свойств [1–3]. Кинетика электромагнитного поля в статистически неоднородных или флуктуирующих средах описывается уравнением переноса излучения [4–6]. В последние годы эта теория нашла применение в нестационарных, а точнее, в импульсных лазерных медицинских исследованиях как в целях диагностики, так и терапии. Показано [7, 8], что форма пикосекундного импульсного сигнала, отражённого от мускулов тела, позволяет восстановить длины свободного пробега фотона, связанные с поглощением (l_a) и диффузным рассеянием (l) света, что, в свою очередь, позволяет судить о насыщенности крови кислородом и обмене веществ. В работах [9, 10] в целях повышения точности томографических исследований и распознавания объектов в рассеивающих средах предложено использовать оптические сигналы с синусоидально модулированной во времени интенсивностью (frequency-domain optical method). Возникло новое направление оптики [11–13], связанное с исследованием волн интенсивности, обладающих своеобразной интерференцией, принципом суперпозиции, фазовой скоростью и т. д. За кадром остаются пока ещё неиспользованные возможности получения дополнительной информации из поляризационных свойств нестационарных диффузно рассеянных оптических сигналов. Вместе с тем уже сейчас исследование свойств поляризации даже в стационарных условиях даёт дополнительную информацию при исследовании таких сред, как газовый разряд и плазма [14, 15].

В целях изучения информации, которую несёт поляризация света во флуктуирующей среде, исследуем поляризационные характеристики нестационарного излучения точечного источника. Даже если исходное излучение не поляризовано, то поляризация появляется при распространении света в веществе и несёт определённую информацию об источнике излучения и рассеивающей среде. В работе рассчитывается функция Грина уравнения переноса излучения в однородной среде с учётом поляризации при релеевской форме индикатрисы рассеяния. Показано, что использование неприводимых представлений группы вращений позволяет записать ответ в аналитической форме, что всегда полезно при качественном анализе результатов и оценке погрешностей, связанных с приближёнными методами расчёта.

Функция Грина уравнения переноса излучения, или задача о точечном источнике стационарного излучения, в рассеивающей среде со сферической индикатрисой рассеяния впервые встречается в работе [16]. Метод исследования, предложенный в [16] и его развитие подытожены в монографии [17]. В работе [18] найдена функция Грина для нестационарного уравнения Бибермана—Холстейна [19, 20], а в работе [21] предложено обобщение, позволяющее найти функцию Грина для уравнения Дьяконова—Переля [22]. Эти уравнения, описывающие квантовую кинетику резонансного излучения в предположении бесконечной скорости света и конечного времени пленения фотона в каждом элементарном акте

рассеяния, математически родственны стандартному уравнению переноса, что позволяет ниже воспользоваться общими методами их исследования.

Схожесть указанных уравнений проявляется более очевидно, если уравнение переноса записать не в традиционной форме с помощью параметров Стокса [4, 6], а в тензорном виде. В работах [23, 24] указан наиболее общий тензорный вид уравнения переноса при любой индикатрисе рассеяния. Релевская индикатриса здесь оказывается простейшей из всех возможных. Уравнение переноса при этом принимает вид [24]

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{\Omega}\nabla_{\mathbf{R}}\right) N^{\nu\nu'}(\mathbf{\Omega}, \omega, \mathbf{R}, t) = - (l^{-1} + l_a^{-1}) N^{\nu\nu'} + \xi l^{-1} \sum_{\nu_1, \nu'_1=1,2} e_{\nu_1\nu'_1}^{\nu\nu'}(\mathbf{\Omega}) \int N^{\nu_1\nu'_1}(\mathbf{\Omega}', \omega, \mathbf{R}, t) d\mathbf{\Omega}' + f^{\nu\nu'}(\mathbf{\Omega}, \omega, \mathbf{R}, t). \quad (1)$$

Здесь

$$e_{\nu_1\nu'_1}^{\nu\nu'}(\mathbf{\Omega}) = \sum_{\lambda, \lambda'=1,2} e_{\mathbf{\Omega}\nu}^{\lambda} e_{\mathbf{\Omega}\nu'}^{\lambda'} e_{\mathbf{\Omega}\nu_1}^{\lambda} e_{\mathbf{\Omega}\nu'_1}^{\lambda'},$$

где $e_{\mathbf{\Omega}\nu}^{\lambda}$ — компоненты единичных векторов поляризации, нормальных ($\lambda = 1; 2$) и параллельного ($\lambda = 3$) единичному вектору $\mathbf{\Omega}$,

$$N^{\nu\nu'}(\mathbf{\Omega}, \omega, \mathbf{R}, t) = \sum_{\lambda, \lambda'=1,2} e_{\mathbf{\Omega}\nu}^{\lambda} e_{\mathbf{\Omega}\nu'}^{\lambda'} N^{\lambda\lambda'}(\mathbf{\Omega}, \omega, \mathbf{R}, t),$$

причём величина $\hbar\omega c N^{\lambda\lambda'}(\mathbf{\Omega}, \omega, \mathbf{R}, t) d\omega$, где c — скорость света, \hbar — постоянная Планка, описывает поток излучения с поляризацией λ в частотном интервале $d\omega$, проходящий через единичную площадку в точке \mathbf{R} , перпендикулярную $\mathbf{\Omega}$. Функция $f^{\nu\nu'}$ описывает существующие в среде сторонние источники излучения. Происхождение параметра $\xi = 3/(8\pi)$ будет пояснено ниже. Далее, как правило, при суммировании по повторяющимся индексам знак суммы будем опускать. Также в дальнейшем будем опускать у функций $N^{\nu\nu'}$ и $f^{\nu\nu'}$ аргумент ω , полагая, что несущая частота излучения в процессе диффузии остаётся неизменной.

Перепишем уравнение (1) в интегральной форме:

$$N^{\nu\nu'}(\mathbf{R}, t) = F^{\nu\nu'}(\mathbf{R}, t) + \xi l^{-1} \sum_{\nu_1, \nu'_1=1,2} \int e_{\nu_1\nu'_1}^{\nu\nu'}(\mathbf{\Omega}) \frac{\exp[-(l^{-1} + l_a^{-1})|\mathbf{R} - \mathbf{R}'|]}{|\mathbf{R} - \mathbf{R}'|^2} \times N^{\nu_1\nu'_1}(\mathbf{R}', t - |\mathbf{R} - \mathbf{R}'|/c) d\mathbf{R}', \quad (2)$$

где

$$N^{\nu\nu'}(\mathbf{R}, t) = \int N^{\nu\nu'}(\mathbf{\Omega}, \mathbf{R}, t) d\mathbf{\Omega},$$

$$F^{\nu\nu'}(\mathbf{R}, t) = \int \frac{\exp[-(l^{-1} + l_a^{-1})|\mathbf{R} - \mathbf{R}'|]}{|\mathbf{R} - \mathbf{R}'|^2} f^{\nu\nu'}(\mathbf{\Omega}, \mathbf{R}', t - |\mathbf{R} - \mathbf{R}'|/c) d\mathbf{R}'. \quad (3)$$

При этом необходимо иметь в виду, что в уравнении (2) $\mathbf{\Omega} = (\mathbf{R} - \mathbf{R}')/|\mathbf{R} - \mathbf{R}'|$.

В случае сложной геометрии среды решить уравнение (2) трудно. По этой причине в теории переноса излучения часто прибегают к так называемому диффузионному приближению. Этим приближением ограничиваются в подавляющем большинстве теоретических и экспериментальных исследований, считая его вполне достаточным. Диффузионное приближение возникает из (2) путём разложения

подынтегральной функции $N^{\nu\nu'}$ в ряд Тейлора в окрестности точки \mathbf{R} и учёта первых трёх членов ряда. В нашем случае вместо интегрального уравнения (2) возникает следующее дифференциальное уравнение:

$$\xi \frac{\partial N^{\nu\nu'}}{\partial t} = \frac{c(l^{-1} + l_a^{-1})^2}{l^{-1}} N^{\nu\nu'} + \xi c (l^{-1} + l_a^{-1}) \Omega^{\nu\nu'\nu_1\nu_1'} N^{\nu_1\nu_1'} + \frac{c\xi \Omega^{\nu\nu'\nu_1\nu_1'\mu\mu'}}{l^{-1} + l_a^{-1}} \frac{\partial^2 N^{\nu_1\nu_1'}}{\partial R_\mu \partial R_{\mu'}} + \frac{c(l^{-1} + l_a^{-1})^2}{l^{-1}} F^{\nu\nu'}, \quad (4)$$

где $\Omega^{\nu\nu'\nu_1\nu_1'} = \int e_{\nu_1\nu_1'}^{\nu\nu'}(\Omega) d\Omega$, $\Omega^{\nu\nu'\nu_1\nu_1'\mu\mu'} = \int e_{\nu_1\nu_1'}^{\nu\nu'}(\Omega) \Omega^\mu \Omega^{\mu'} d\Omega$.

Условием применимости уравнения (4) служит неравенство

$$\frac{|\nabla_{\mathbf{R}} N^{\nu\nu'}|}{l^{-1} + l_a^{-1}} \ll |N^{\nu\nu'}|.$$

Отсюда следует, что это уравнение неприменимо при исследовании светового поля в районе баллистического фронта [25] и в непосредственной близости от источника излучения. По этой же причине, если поглощение велико ($l_a \rightarrow 0$), диффузный режим может не успеть установиться.

Вернёмся к уравнению (2). Если диффузия излучения происходит в неограниченной среде, то после преобразования Фурье

$$N^{\nu\nu'}(\mathbf{p}, E) = \int N^{\nu\nu'}(\mathbf{R}, t) \exp[-i(\mathbf{p}\mathbf{R} - Et)] d\mathbf{R} dt$$

вместо интегрального уравнения (2) возникает следующая система алгебраических уравнений:

$$N^{\nu\nu'}(\mathbf{p}, E) = K^{\nu\nu'\nu_1\nu_1'} N^{\nu_1\nu_1'}(\mathbf{p}, E) + F^{\nu\nu'}(\mathbf{p}, E), \quad (5)$$

где

$$K^{\nu\nu'\nu_1\nu_1'} = \xi l^{-1} \int \frac{e_{\nu_1\nu_1'}^{\nu\nu'}(\Omega) d\Omega}{-iE/c + i\Omega\mathbf{p} + l_a^{-1} + l^{-1}}. \quad (6)$$

Свойства системы алгебраических уравнений (5) полностью определяются структурой тензора (6). Так как

$$\sum_{\lambda, \lambda'=1,2} e_{\Omega\nu}^\lambda e_{\Omega\nu'}^{\lambda'} = \delta_{\nu\nu'} - \Omega^\nu \Omega^{\nu'},$$

где $\delta_{\nu\nu'}$ — символ Кронекера, то тензор (6), очевидно, можно представить в виде четырёх слагаемых, для исследования свойств которых перейдём к ортам круговой (циркулярной) поляризации [26]:

$$\mathbf{e}^1 = -\frac{\mathbf{i} + i\mathbf{j}}{\sqrt{2}}, \quad \mathbf{e}^{-1} = \frac{\mathbf{i} - i\mathbf{j}}{\sqrt{2}}, \quad \mathbf{e}^0 = \mathbf{k}.$$

Здесь $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ — единичные векторы вдоль осей x, y и z декартовой системы координат. В базисе \mathbf{e}^α , где $\alpha = \pm 1; 0$, уравнение (5) принимает вид

$$N^{\alpha\alpha'}(\mathbf{p}, E) = K^{\alpha\alpha'\alpha_1\alpha_1'} N^{\alpha_1\alpha_1'}(\mathbf{p}, E) + F^{\alpha\alpha'}(\mathbf{p}, E),$$

где $N^{\alpha\alpha'} = e_\nu^{\alpha*} e_{\nu'}^{\alpha'} N^{\nu\nu'}$, где звёздочка означает комплексное сопряжение.

Все четыре слагаемых ядра $K^{\alpha\alpha'\alpha_1\alpha'_1} = \sum_{i=1}^4 K_i^{\alpha\alpha'\alpha_1\alpha'_1}$ выпишем теперь явно:

$$\begin{aligned} K_1^{\alpha\alpha'\alpha_1\alpha'_1} &= \frac{\xi}{l} \int \frac{\delta_{\alpha\alpha_1} \delta_{\alpha'\alpha'_1} d\Omega}{-iE/c + i\Omega\mathbf{p} + l^{-1} + l_a^{-1}}, & K_2^{\alpha\alpha'\alpha_1\alpha'_1} &= \frac{\xi}{l} \int \frac{\delta_{\alpha\alpha_1} \Omega^{\alpha'*} \Omega^{\alpha'_1} d\Omega}{-iE/c + i\Omega\mathbf{p} + l^{-1} + l_a^{-1}}, \\ K_3^{\alpha\alpha'\alpha_1\alpha'_1} &= \frac{\xi}{l} \int \frac{\Omega^\alpha \Omega^{\alpha_1*} \delta_{\alpha'\alpha'_1} d\Omega}{-iE/c + i\Omega\mathbf{p} + l^{-1} + l_a^{-1}}, & K_4^{\alpha\alpha'\alpha_1\alpha'_1} &= \frac{\xi}{l} \int \frac{\Omega^\alpha \Omega^{\alpha_1*} \Omega^{\alpha'*} \Omega^{\alpha'_1} d\Omega}{-iE/c + i\Omega\mathbf{p} + l^{-1} + l_a^{-1}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Видно, что

$$K^{\alpha\alpha'\alpha_1\alpha'_1} = K^{\alpha'_1\alpha_1\alpha'\alpha}. \quad (8)$$

Пусть направляющие углы вектора \mathbf{p} в декартовой системе координат равны ϑ и φ . Повернём систему координат так, чтобы ось z в её новом положении совпала с направлением вектора \mathbf{p} . Компоненты тензоров в повернутой системе координат обозначим с помощью тильды. Для циркулярных компонент вектора p^α в новой системе координат имеем [26]

$$\tilde{p}^\alpha = \sum_{\alpha'} p^{\alpha'} D_{\alpha'\alpha}^{(1)}(\varphi, \vartheta, 0).$$

В новой системе координат $d\tilde{\Omega}^\alpha = \sin \vartheta' d\vartheta' d\varphi'$; $\mathbf{p}\Omega = p \cos \vartheta'$, а вектор $\tilde{\Omega}^\alpha$ может быть выражен через сферическую функцию [26]:

$$\tilde{\Omega}^\alpha = e_\nu^{\alpha*} \tilde{\Omega}^\nu = 2 \sqrt{\pi/3} Y_{1\alpha}(\vartheta', \varphi').$$

Теперь в выражениях (7) интегралы по φ' вычисляются, и становятся очевидным, что

$$\tilde{K}^{\alpha\alpha'\alpha_1\alpha'_1} = \tilde{K}^{-\alpha-\alpha'-\alpha_1-\alpha'_1}. \quad (9)$$

Воспользуемся техникой неприводимых представлений группы вращений и осуществим преобразование [22]

$$\tilde{N}_\beta^\kappa = (T_\beta^\kappa)_{\alpha\alpha'} \tilde{N}^{\alpha\alpha'},$$

где

$$(T_\beta^\kappa)_{\alpha\alpha'} = (-1)^{\kappa+\alpha} \sqrt{2\kappa+1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \kappa \\ -\alpha & \alpha' & \beta \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Выражение в круглых скобках в правой части (10) представляет собой $3j$ -символ Вигнера. Для физической трактовки компонент N_β^κ полезно иметь в виду, что

$$\begin{aligned} N_0^0 &= -\frac{1}{\sqrt{3}} (N^{00} + N^{11} + N^{-1-1}), & N_0^1 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} (N^{11} - N^{-1-1}), \\ N_0^2 &= \frac{1}{\sqrt{6}} (2N^{00} - N^{11} - N^{-1-1}), & N_2^2 &= -N^{1-1}. \end{aligned} \quad (11)$$

В представлении (κ, β) ядро уравнения (5) оказывается равным

$$K_{\beta\beta'}^{\kappa\kappa'} = (T_\beta^{\kappa'})_{\alpha\alpha'} K^{\alpha\alpha'\alpha_1\alpha'_1} (T_{\beta'}^\kappa)_{\alpha_1\alpha'_1}.$$

Очевидно, что при вращении вокруг вектора \mathbf{p} или, что то же самое, вокруг оси z тензор $\tilde{K}_{\beta\beta'}^{\kappa\kappa'}$ не должен изменять свой вид. При таком преобразовании индексы κ и κ' , указывающие веса представлений, изменяться не могут, и $\tilde{K}_{\beta\beta'}^{\kappa\kappa'}$ преобразуется как тензор второго ранга. Единственный тензор второго ранга, остающийся инвариантным при указанном преобразовании, есть $\delta_{\beta\beta'}$. Но может

случиться так, что $\tilde{K}_{\beta\beta'}^{\kappa\kappa'}$ ведёт себя при вращении вокруг оси z как скаляр. Тогда он пропорционален произведению $\delta_{\beta 0}\delta_{\beta' 0}$. Обе возможности могут быть объединены в одну формулу:

$$\tilde{K}_{\beta\beta'}^{\kappa\kappa'} = \delta_{\beta\beta'} \tilde{K}^{\kappa\kappa'}(\beta), \quad \tilde{K}^{\kappa\kappa'}(\beta) = \tilde{K}^{\kappa\kappa'}(-\beta). \quad (12)$$

Другие свойства исследуемого ядра следуют из симметрии (9). В представлении (κ, β) из (9) следует

$$\tilde{K}_{\beta\beta'}^{\kappa\kappa'} = (-1)^{\kappa+\kappa'} \tilde{K}_{-\beta-\beta'}^{\kappa\kappa'},$$

что вместе с (12) свидетельствует о чётности суммы $\kappa + \kappa'$.

Так как вид тензора $\tilde{K}_{\beta\beta'}^{\kappa\kappa'}$ не инвариантен относительно трёхмерных вращений системы координат, этот тензор не диагонален по индексам κ и κ' . Но чётность суммы этих величин и ограничение их по модулю ($\{\kappa, \kappa'\} = 0; 1; 2$), что следует из (10), оставляют отличными от нуля лишь компоненты \tilde{K}_{00}^{00} , $\tilde{K}_{\beta\beta'}^{11}$, $\tilde{K}_{\beta\beta'}^{22}$, \tilde{K}_{00}^{02} . Условие $|\beta| \leq \kappa$ следует из свойств $3j$ -символов, равенство

$$\tilde{K}_{\beta\beta'}^{\kappa\kappa'} = \tilde{K}_{\beta'\beta}^{\kappa'\kappa}$$

следует из (8), (9) и свойств симметрии оператора $(T_{\beta}^{\kappa})_{\alpha\alpha'}$.

В целом система уравнений (5) выглядит так:

$$\begin{aligned} \tilde{N}_{\beta}^1 &= \tilde{K}_{\beta\beta}^{11}\tilde{N}_{\beta}^1 + \tilde{F}_{\beta}^1, & \tilde{N}_{\beta}^2 &= \tilde{K}_{\beta\beta}^{22}\tilde{N}_{\beta}^2 + \tilde{F}_{\beta}^2, \\ \tilde{N}_0^0 &= \tilde{K}_{00}^{00}\tilde{N}_0^0 + \tilde{K}_{00}^{02}\tilde{N}_0^2 + \tilde{F}_0^0, & \tilde{N}_0^2 &= \tilde{K}_{00}^{22}\tilde{N}_0^2 + \tilde{K}_{00}^{20}\tilde{N}_0^0 + \tilde{F}_0^2 \end{aligned} \quad (13)$$

при $\beta \neq 0$.

Достаточно громоздкие вычисления приводят к следующему явному виду ядра:

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{\beta\beta'}^{\kappa\kappa'} &= \frac{3l^{-1}}{32s} \left\{ g_1 \delta_{\kappa\kappa'} \delta_{\beta\beta'} + g_2 [(-1)^{\kappa} \delta_{\kappa\kappa'} \delta_{\beta\beta'} + 3\delta_{\kappa 0} \delta_{\kappa' 0} \delta_{\beta 0} \delta_{\beta' 0}] + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{(2\kappa+1)(2\kappa'+1)} \left[2g_3 \sum_{\alpha} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \kappa \\ -\alpha & 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \kappa' \\ -\alpha & 0 & \beta' \end{pmatrix} - \right. \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{3} g_4 \begin{pmatrix} 1 & 1 & \kappa \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} \delta_{\kappa' 0} \delta_{\beta' 0} - \sqrt{3} g_4 \begin{pmatrix} 1 & 1 & \kappa' \\ 0 & 0 & \beta' \end{pmatrix} \delta_{\kappa 0} \delta_{\beta 0} + 2g_4 \sum_{\alpha} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \kappa \\ \alpha & 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \kappa' \\ 0 & \alpha & \beta' \end{pmatrix} + \right. \\ &\quad \left. \left. + g_5 \begin{pmatrix} 1 & 1 & \kappa \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \kappa' \\ 0 & 0 & \beta' \end{pmatrix} \right] \right\}. \quad (14) \end{aligned}$$

Здесь

$$s = (l')^{-1} - iE/c, \quad (l')^{-1} = l^{-1} + l_a^{-1},$$

а коэффициенты g_i имеют следующий вид ($y = s/p$):

$$\begin{aligned} g_1 &= 2(y - 6y^3 + y^5) \operatorname{arctg} y + \frac{38y^2}{3} - 2y^4, & g_2 &= 2(y + 2y^3 + y^5) \operatorname{arctg} y - \frac{10y^2}{3} - 2y^4, \\ g_3 &= 2(3y + 6y^3 - 5y^5) \operatorname{arctg} y - \frac{46y^2}{3} + 10y^4, & g_4 &= 2(-y - 6y^3 - 5y^5) \operatorname{arctg} y + \frac{26y^2}{3} + 10y^4, \\ g_5 &= 2(3y + 30y^3 + 35y^5) \operatorname{arctg} y - \frac{110y^2}{3} - 70y^4. \end{aligned}$$

Ниже нам понадобятся первые члены разложения коэффициентов g_i по y^{-1} , что отвечает диффузионному приближению и дифференциальному уравнению (4):

$$g_1 = \frac{16}{15} \left(6 - \frac{22}{7y^2} \right), \quad g_2 = \frac{16}{15} \left(1 - \frac{1}{7y^2} \right), \quad g_3 = \frac{192}{105y^2}, \quad g_4 = -\frac{32}{105y^2}, \quad g_5 \approx 0.$$

Уравнения (13) без труда решаются:

$$\begin{aligned} \tilde{N}_\beta^1 &= \frac{\tilde{F}_\beta^1}{1 - \tilde{K}_{\beta\beta}^{11}}, \quad \tilde{N}_\beta^2 = \frac{\tilde{F}_\beta^2}{1 - \tilde{K}_{\beta\beta}^{22}} \quad \text{при } \beta \neq 0; \\ \tilde{N}_0^0 &= \frac{\tilde{K}_{00}^{02} \tilde{F}_0^2 + (1 - \tilde{K}_{00}^{22}) \tilde{F}_0^0}{(1 - \tilde{K}_{00}^{00})(1 - \tilde{K}_{00}^{22}) - |\tilde{K}_{00}^{02}|^2}, \quad \tilde{N}_0^2 = \frac{\tilde{K}_{00}^{20} \tilde{F}_0^0 + (1 - \tilde{K}_{00}^{00}) \tilde{F}_0^2}{(1 - \tilde{K}_{00}^{00})(1 - \tilde{K}_{00}^{22}) - |\tilde{K}_{00}^{02}|^2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Для вычисления $N_\beta^\kappa(\mathbf{R}, t)$ необходимо знать $N_\beta^\kappa(\mathbf{p}, E)$ при любых \mathbf{p} , а не только направленных по оси z . Для этого повернём систему координат на углы $-\vartheta, -\varphi$, возвращаясь, таким образом, к искомой системе отсчёта, используемой в уравнении (5):

$$N_\beta^\kappa(\mathbf{p}, E) = \sum_{\beta''} \tilde{N}_{\beta''}^\kappa D_{\beta''\beta}^\kappa(0, -\vartheta, -\varphi).$$

После такого преобразования обратное преобразование Фурье

$$N_\beta^\kappa(\mathbf{R}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \exp(i\mathbf{p}\mathbf{R} - iEt) N_\beta^\kappa(\mathbf{p}, E) d\mathbf{p} dE \quad (16)$$

полностью решает задачу. Согласно (15)

$$\tilde{N}_\beta^\kappa = \tilde{\Phi}_{\beta\beta}^{\kappa\kappa'} \tilde{F}_\beta^{\kappa'}, \quad (17)$$

где $\tilde{\Phi}_{\beta\beta}^{\kappa\kappa'}$ играет роль функции Грина. Знание $\tilde{\Phi}_{\beta\beta}^{\kappa\kappa'}$ достаточно для решения задачи при любом начальном распределении источников излучения.

В пространстве (\mathbf{R}, t) согласно (16), (17)

$$N_\beta^\kappa(\mathbf{R}, t) = \int \Phi_{\beta\beta'}^{\kappa\kappa'}(\mathbf{R} - \mathbf{R}', t - t') F_{\beta'}^{\kappa'}(\mathbf{R}', t') d\mathbf{R}' dt', \quad (18)$$

где

$$\Phi_{\beta\beta'}^{\kappa\kappa'}(\mathbf{R}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \exp(i\mathbf{p}\mathbf{R}) D_{\beta'\beta''}^{\kappa'}(\psi, \vartheta, 0) D_{\beta''\beta}^\kappa(0, -\vartheta, -\psi) \tilde{\Phi}_{\beta''}^{\kappa\kappa'}(\mathbf{p}, t) d\mathbf{p}, \quad (19)$$

а функция $F_{\beta'}^{\kappa'}$ определяется выражением (3) в первоначальной системе координат.

Из (18) следует, что функция $\Phi_{\beta\beta'}^{\kappa\kappa'}(\mathbf{R}, t)$ описывает распределение поля $N_\beta^\kappa(\mathbf{R}, t)$, создаваемое точечным источником излучения (при $F_{\beta'}^{\kappa'} = \delta_{\kappa'\kappa_0} \delta_{\beta'\beta_0} \delta(\mathbf{R}) \delta(t) I_{\beta_0}^{\kappa_0}$, где $I_{\beta_0}^{\kappa_0}$ — некоторые константы, характеризующие источник излучения и определяемые из (3)).

Для вычисления интеграла (19) воспользуемся формулой

$$\exp(i\mathbf{p}\mathbf{R}) = \sum_{l,m} g_l(pR) Y_{lm}^*(\mathbf{p}/p) Y_{lm}(\mathbf{R}/R), \quad (20)$$

где $g_l(pR) = (2\pi)^{3/2} i^l J_{l+1/2}(pR) / \sqrt{pR}$, $J_{l+1/2}$ — функция Бесселя полуцелого аргумента, Y_{lm} — сферическая функция. Учтём также [26], что

$$Y_{lm}^*(\vartheta, \psi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} D_{m0}^l(\psi, \vartheta, 0). \quad (21)$$

Подстановка (20), (21) в (19) приводит к интегралу

$$\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \int D_{m0}^l(\psi, \vartheta, 0) D_{\beta'\beta''}^{\kappa'}(\psi, \vartheta, 0) D_{\beta''\beta}^{\kappa}(0, -\vartheta, -\psi) d\Omega.$$

Интеграл по ψ легко вычисляется, что приводит к появлению символа Кронекера $\delta_{\beta m + \beta'}$. Используя соотношение [26]

$$D_{\beta''\beta}^{\kappa}(-\vartheta) = D_{\beta\beta''}^{\kappa}(\vartheta) = (-1)^{\beta+\beta''} D_{-\beta-\beta''}^{\kappa}(\vartheta),$$

можно переписать искомый интеграл в виде

$$\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \int D_{m0}^l(\psi, \vartheta, \gamma) D_{\beta'\beta''}^{\kappa'}(\psi, \vartheta, \gamma) (-1)^{\beta+\beta''} D_{-\beta-\beta''}^{\kappa}(\psi, \vartheta, \gamma) d\Omega \frac{d\gamma}{2\pi}.$$

Полученный интеграл выражается через $3j$ -символы Вигнера [26]. В итоге получаем

$$\begin{aligned} \Phi_{\beta\beta'}^{\kappa\kappa'}(\mathbf{R}, t) = \frac{1}{\pi} \sum_{m, l, \beta''} \sqrt{\frac{2l+1}{2}} Y_{lm}(\mathbf{R}/R) i^l (-1)^{\beta+\beta''} \begin{pmatrix} l & \kappa' & \kappa \\ m & \beta' & -\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l & \kappa' & \kappa \\ 0 & \beta'' & -\beta'' \end{pmatrix} \times \\ \times \int_0^\infty \frac{J_{l+1/2}(pR)}{\sqrt{pR}} p^2 \tilde{\Phi}_{\beta\beta'}^{\kappa\kappa'}(p, t) dp. \end{aligned}$$

Вид функций $\tilde{\Phi}_{\beta\beta'}^{\kappa\kappa'}$ определяется формулами (15) и (17).

Направим ось z в точку наблюдения, что ни в коей мере не ограничивает общности рассуждений. Такую систему координат будем называть собственной. Функция $\Phi_{\beta\beta'}^{\kappa\kappa'}$ в этой системе координат существенно упрощается, диагонализируясь по нижним индексам. Дело в том, что теперь угол $\vartheta = 0$, и отличными от нуля сферическими функциями оказываются лишь Y_{l0} . Положив, таким образом, $m = 0$, находим

$$\begin{aligned} \Phi_{\beta\beta'}^{\kappa\kappa'} = \frac{\delta_{\beta\beta'}}{\pi} \sum_{l\beta''} \sqrt{l + \frac{1}{2}} Y_{l0} i^l (-1)^{\beta+\beta''} \begin{pmatrix} l & \kappa' & \kappa \\ 0 & \beta' & -\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l & \kappa' & \kappa \\ 0 & \beta'' & -\beta'' \end{pmatrix} \times \\ \times \int_0^\infty \frac{J_{l+1/2}(pR)}{\sqrt{pR}} p^2 \tilde{\Phi}_{\beta\beta'}^{\kappa\kappa'}(p, t) dp. \quad (22) \end{aligned}$$

Итак, задача решена. Для анализа полученного решения воспользуемся диффузионным приближением. Для этого нам понадобятся первые члены разложения ядра $\tilde{K}_{\beta\beta'}^{\kappa\kappa'}$ по малому p . Прямое вычисление в соответствии с (14) даёт

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{00}^{00} = \frac{1}{sl} \left(1 - \frac{\xi^{(0)}}{y^2} \right), \quad \tilde{K}_{\beta\beta}^{11} = \frac{1}{sl} \left(\frac{1}{2} - \frac{\xi_{\beta}^{(1)}}{y^2} \right), \quad \tilde{K}_{\beta\beta}^{22} = \frac{1}{sl} \left(\frac{7}{10} - \frac{\xi_{\beta}^{(2)}}{y^2} \right), \quad \tilde{K}_{00}^{02} = \frac{\xi^{(3)}}{sl y^2}, \\ \xi^{(0)} = \frac{1}{3}, \quad \xi_0^{(1)} = \frac{3}{10}, \quad \xi_{\pm 1}^{(1)} = \frac{1}{10}, \quad \xi_0^{(2)} = \frac{29}{210}, \quad \xi_{\pm 1}^{(2)} = \frac{13}{70}, \quad \xi_{\pm 2}^{(2)} = \frac{23}{70}, \quad \xi^{(3)} = -\frac{1}{15\sqrt{2}}. \quad (23) \end{aligned}$$

В непоглощающей ($l_a = \infty$) однородной среде стационарное изотропное диффузное излучение сохраняется даже при отсутствии сторонних источников. В этих условиях $s = l^{-1}$, и согласно (15) необходимо, чтобы $\tilde{K}_{00}^{00} \rightarrow l^{-1}s^{-1}$ при $p \rightarrow 0$. Формулы (23) этому условию удовлетворяют, и именно это условие определяет параметр $\xi = 3/(8\pi)$. Чётность суммы $\kappa + \kappa'$, следующая из формулы (14), независимость $\tilde{\Phi}_{\beta}^{\kappa\kappa'}$ от знака параметра β и свойство [26]

$$\begin{pmatrix} l & \kappa' & \kappa \\ 0 & \beta'' & -\beta'' \end{pmatrix} = (-1)^{l+\kappa+\kappa'} \begin{pmatrix} l & \kappa' & \kappa \\ 0 & -\beta'' & \beta'' \end{pmatrix}$$

определяют чётность параметра l в (22). Но при чётных l функции $J_{l+1/2}$ обладают общей асимптотой

$$i^l J_{l+1/2}(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x \quad (24)$$

(при $l = 0$ формула (24) переходит в равенство). Учитывая, что при значительных R достаточно ограничиться асимптотикой (24), интегралы в (22) можно свести к виду

$$\int_0^{\infty} \frac{J_{l+1/2}(pR)}{\sqrt{pR}} p^2 \exp(-\varepsilon p^2) dp \approx \frac{(-i)^l}{(2\varepsilon)^{3/2}} \exp[-R^2/(4\varepsilon)]. \quad (25)$$

Рассмотрим в диффузионном приближении свечение точечного изотропного источника неполяризованного излучения. Другими словами, будем считать в (15) отличной от нуля только компоненту I_0^0 . Ограничиваясь в разложении $\tilde{K}_{\beta\beta'}^{\kappa\kappa'}$ по p членами с порядком не выше второго, получим

$$\begin{aligned} \tilde{N}_0^0(p, E) &= I_0^0 + \frac{l^{-1} [1 - (pl')^2 \xi^{(0)}] I_0^0}{s - l^{-1} + (pl')^2 \xi^{(0)} l^{-1}}, \\ \tilde{N}_0^2(p, E) &= \frac{s (pl')^2 \xi^{(3)} I_0^0}{l [s - l^{-1} + (pl')^2 \xi^{(0)} l^{-1}] [s - 7l^{-1}/10 + (pl')^2 \xi_0^{(2)} l^{-1}]}. \end{aligned}$$

В том же приближении после обратного преобразования Фурье по E находим

$$\tilde{N}_0^0(p, t) = I_0^0 \delta(t) + \vartheta(t) \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{c}{l'} \right) I_0^0 \exp \left[-\frac{ct}{l_a} - (pl')^2 \frac{c\xi^{(0)} t}{l} \right], \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \tilde{N}_0^2(p, t) &= \vartheta(t) \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{c}{l'} \right) \frac{10}{3} \xi^{(3)} (pl')^2 I_0^0 \exp(-ct/l_a) \times \\ &\times \left[\exp(-c(pl')^2 \xi^{(0)} t/l) - \exp[-c(pl')^2 \xi_0^{(2)} t/l - 3ct/(10l)] \right]. \quad (27) \end{aligned}$$

Теперь из (22) и (26) при $t \neq 0$ получаем

$$\Phi_{00}^{00}(\mathbf{R}, t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{c}{l'} \right) \frac{1}{(4\pi D^{(0)} ct)^{3/2}} \exp \left(-\frac{R^2}{4D^{(0)} ct} - \frac{ct}{l_a} \right), \quad (28)$$

где

$$D^{(0)} = \frac{(l')^2}{l} \xi^{(0)}.$$

Воспользовавшись тем, что $Y_{20}(0, \varphi) = \sqrt{5/(4\pi)}$ [26], из (22), (25) и (27) находим

$$\Phi_{00}^{02}(\mathbf{R}, t) = -\frac{10}{3} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{c}{l'} \right) \frac{d^2}{dR^2} (l')^2 \xi^{(3)} \exp(-ct/l_a) \times \\ \times \left[\frac{1}{(4\pi D^{(0)} ct)^{3/2}} \exp\left(-\frac{R^2}{4D^{(0)} ct}\right) - \frac{1}{(4\pi D_0^{(2)} ct)^{3/2}} \exp\left(-\frac{R^2}{4D_0^{(2)} ct} - \frac{t}{\tau_2}\right) \right], \quad (29)$$

где

$$\tau_2 = \frac{10l}{3c}, \quad D_0^{(2)} = \frac{(l')^2}{l} \xi_0^{(2)}.$$

Функция Φ_{00}^{02} в случае источника неполяризованного излучения определяет функцию N_0^2 . Последняя согласно (11) характеризует наведённую в процессе диффузии анизотропию поляризации, вызванную анизотропией излучения («продольное выстраивание» [27]). В окрестности точки $\mathbf{R} = 0$ функция $N_0^2(\mathbf{R}, t)$ обращается в нуль, свидетельствуя о том, что поляризация ведёт себя здесь подобно случаю термодинамически равновесного излучения. Согласно (28) и (29) при $t > \tau_2$ функция распределения анизотропии N_0^2 и функция распределения энергии излучения N_0^0 оказываются подобными, если под подобием понимать независимость от координат и времени отношения

$$\frac{N_0^2(\mathbf{R}, t)}{\frac{d^2}{dR^2} N_0^0(\mathbf{R}, t)} = \frac{\Phi_{00}^{02}(\mathbf{R}, t)}{\frac{d^2}{dR^2} \Phi_{00}^{00}(\mathbf{R}, t)}.$$

Пусть теперь в собственной системе координат источник неполяризованного излучения светит вдоль оси z . Согласно (11) при этом оказываются отличными от нуля компоненты I_0^0 и I_0^2 , причём $I_0^2/I_0^0 = 1/\sqrt{2}$. Если источник излучает под углом ϑ к оси z , то $I_0^2/I_0^0 = D_{00}^{(2)}(0, \vartheta, 0)/\sqrt{2}$.

Согласно (15), (18) и (22) при $t > \tau_2$ получаем

$$N_0^0 = \frac{1}{(4\pi D^{(0)} ct)^{3/2}} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{c}{l'} \right) \left[I_0^0 - \frac{10}{3} (l')^2 \xi^{(3)} \frac{d^2}{dR^2} I_0^2 \right] \exp\left(-\frac{ct}{l_a} - \frac{R^2}{4D^{(0)} ct}\right), \\ N_0^2 = -\frac{10 (l')^2 \xi^{(3)}}{3 (4\pi D^{(0)} ct)^{3/2}} I_0^0 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{c}{l'} \right) \frac{d^2}{dR^2} \exp\left(-\frac{ct}{l_a} - \frac{R^2}{4D^{(0)} ct}\right). \quad (30)$$

Отсюда следует, что

$$\frac{N_0^0(\mathbf{R}, t)}{N_0^2(\mathbf{R}, t)} + \frac{3}{10} \frac{\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{c}{l'} \right) \exp\left(-\frac{ct}{l_a} - \frac{R^2}{4D^{(0)} ct}\right)}{(l')^2 \xi^{(3)} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{c}{l'} \right) \frac{d^2}{dR^2} \exp\left(-\frac{ct}{l_a} - \frac{R^2}{4D^{(0)} ct}\right)} = \frac{I_0^2}{I_0^0}. \quad (31)$$

Очевидно, что левая часть (31) при $t > \tau_2$ не зависит ни от точки наблюдения \mathbf{R} , ни от времени t и определяет характеристику источника I_0^2/I_0^0 . Если это отношение равно $1/\sqrt{2}$, то источник излучает вдоль оси z , т. е. непосредственно в точку наблюдения. Если $I_0^2/I_0^0 \neq 1/\sqrt{2}$, то направление излучения не совпадает с осью z . При этом угол ϑ между направлением излучения и осью z можно рассчитать, подставив в (31) вместо правой части выражение $D_{00}^{(2)}(0, \vartheta, 0)/\sqrt{2}$.

Таким образом, излучение в любой точке бесконечной флуктуирующей среды несёт некоторую информацию о направлении свечения источника, и эта информация не исчезает с течением времени.

Пусть теперь в точке $\mathbf{R} = 0$ в момент $t = 0$ вдоль оси z в собственной системе координат светит источник линейно поляризованного излучения. Отличными от нуля компонентами в этом случае оказываются I_0^0 , I_0^2 и $I_{\pm 2}^2$. Соответственно, в системе координат, ось z которой совпадает с направлением излучения, отличны от нуля компоненты \tilde{I}_0^0 и \tilde{I}_β^2 . При этом

$$\tilde{N}_2^2(E, p) = \frac{\tilde{I}_2^2}{1 - \tilde{K}_{02}^{22}},$$

откуда следует

$$\tilde{N}_2^2(p, t) \propto \exp(-t/\tau_2).$$

Таким образом, при $t > \tau_2$ компоненты $\tilde{N}_\beta^2(p, t)$ при $\beta \neq 0$ исчезают, тем самым полностью исчезает информация о поляризации и компоненте I_2^2 излучения. При таких временах, как и в случае неполяризованного излучателя, сохраняются равенства (30), (31) со всеми вытекающими следствиями, т. е. всякое различие между изначально поляризованным и неполяризованным излучением стирается. Если же интересоваться временами $t < \tau_2$, то в этом случае излучение, разумеется, несёт в себе более богатую информацию. В частности, наряду с компонентами I_0^0 и I_0^2 оно определяется также компонентами $I_{\pm 2}^2$, если источник излучения обладает ими. Функция $N_\beta^2(\mathbf{R}, t)$ согласно (18) и (22) при $t < \tau_2$ описывается суммой трёх нормальных распределений ($\beta'' = 0; \pm 1; \pm 2$) с дисперсиями $D_{\beta''}^{(2)} ct$, где $D_{\beta''}^{(2)} = (l')^2 \xi_{\beta''}^{(2)} / l$.

Пусть теперь излучение источника поляризовано по кругу. При этом согласно (11) источник излучения характеризуется, в частности, компонентами I_β^1 . Согласно (15) и (23) временная зависимость

$$\tilde{N}_\beta^1(p, t) \propto \exp(-t/\tau_1),$$

где $\tau_1 = 2l/c$, свидетельствует о том, что при $t > \tau_1$ все компоненты \tilde{N}_β^1 исчезают, и стирается вся информация о наличии как круговой поляризации, так и компонент I_β^1 . Если к тому же $t > \tau_2$, то в данной ситуации остаются лишь компоненты излучения $N_0^0(\mathbf{R}, t)$ и $N_0^2(\mathbf{R}, t)$, определяемые выражениями (30). При этом вновь справедливо равенство (31), и поле излучения несёт лишь некоторую информацию о первоначальном направлении излучения. Эта информация в точности соответствует информации как в случае источника линейно поляризованного излучения, так и в случае источника направленного неполяризованного излучения.

При $t < \tau_1$ круговая поляризация сохраняется. Функция $N_\beta^1(\mathbf{R}, t)$ согласно (18) и (22) определяется суммой двух нормальных распределений ($\beta'' = 0; \pm 1$) с дисперсиями $D_{\beta''}^{(1)} ct$, где $D_{\beta''}^{(1)} = (l')^2 \xi_{\beta''}^{(1)} / l$. Эта функция несёт информацию о параметрах I_β^1 , если источник излучения обладает ими.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. John S. // Phys. Today. 1991. V. 44, No. 5. P. 32.
2. Feng S., Lee P. A. // Science. 1991. V. 251. P. 633.
3. Durian D. J., Weitz D. A., Pine D. J. // Science. 1991. V. 252. P. 686.
4. Чандрасекар С. Перенос лучистой энергии. М.: Изд-во иностр. лит., 1953.
5. Соболев В. В. Перенос лучистой энергии в атмосферах звёзд и планет. М.: Гостехтеоретиздат, 1956. 391 с.
6. Ishimaru A. Wave propagation and scattering in random media. N.-Y.: Academic Press, 1978.
7. Patterson M. S., Chance B., Wilson B. C. // Appl. Opt. 1989. V. 28, No. 12. P. 2331.
8. Yoo K. M., Alfano R. R. // Opt. Lett. 1990. V. 15, No. 5. P. 276.

9. Fiskin J. B., Gratton E., Vandeven M. J., Mantullin W. W. // Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng. 1991. V. 1 431. P. 122.
10. Hebten J. C., Kruger R. A. // Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng. 1991. V. 1 431. P. 225.
11. Fiskin J. B., Gratton E. // JOSAA. 1993. V. 10, No. 1. P. 127.
12. Trombery B. J., Svaasand L. O., Tsay T. T., Haskell R. C. // Appl. Opt. 1993. V. 32, No. 4. P. 607.
13. O'Leary M. A. // Phys. Rev. Lett. 1992. V. 69, No. 18. P. 2658.
14. Каллас Х. В., Чайка М. П. // Оптика и спектроскопия. 1969. Т. 27, № 4. С. 694.
15. Sharochkin M. V. // J. Moscow Phys. Soc. 1999. V. 9, No. 4. P. 361.
16. Амбарцумян В. А. // Бюллетень Ереванской астрономической обсерватории. 1945. № 6. С. 3.
17. Иванов В. В. Перенос излучения и спектры небесных тел. М.: Наука, 1969.
18. Векленко Б. А. // ЖЭТФ. 1959. Т. 36, № 1. С. 204.
19. Биберман Л. М. // ЖЭТФ. 1947. Т. 17, № 5. С. 416.
20. Holstein T. // Phys. Rev. 1947. V. 72, No. 12. P. 1212.
21. Афанасьев В. П., Векленко Б. А. // Изв. вузов. Физика. 1974. № 4. С. 53.
22. Дьяконов М. И., Перель В. И. // ЖЭТФ. 1964. Т. 47, № 4(10). С. 1483.
23. Апресян Л. А., Кравцов Ю. А. Теория переноса излучения: Статистические и волновые аспекты. М.: Наука, 1983.
24. Будаков В. П., Векленко Б. А. // Вестник МЭИ. 2000. № 1. С. 77.
25. Raasschens J. C. J. // Phys. Rev. E. 1997. V. 56, No. 1. P. 1135.
26. Эдмондс А. // Деформация атомных ядер. М.: Изд-во иностр. лит., 1958.
27. Александров Е. Б., Хвостенко Г. И., Чайка М. П. Интерференция атомных состояний. М.: Наука, 1991.

Московский энергетический институт,
г. Москва, Россия

Поступила в редакцию
14 июня 2001 г.

POINT SOURCE OF NONSTATIONARY POLARIZED RADIATION IN A HOMOGENEOUS FLUCTUATING MEDIUM

V. P. Budakov, B. A. Veklenko, and B. B. Veklenko

Based on the method of irreducible representations of the rotation group, we obtain an analytical expression for the source function of the radiative transport equation with allowance for polarization of light. The scattering indicatrix is assumed Rayleigh. It is shown that not all polarization characteristics of light in a fluctuating medium are lost in time. Some of them always carry information about the emitter and the scattering medium.

УДК 621.372.82.3

ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА БЕСКОНЕЧНО ПРОТЯЖЁННОМ ДВУГРАННОМ КЛИНЕ С ВЕРШИНОЙ В ВИДЕ ЦИЛИНДРА, ПОКРЫТОГО СЛОЕМ МАГНИТОДИЭЛЕКТРИКА

А. Е. Шепилко, Е. В. Шепилко

Приведена методика строгого решения задачи дифракции плоской электромагнитной волны на бесконечно протяжённом двугранном клине с вершиной в виде цилиндра, покрытого слоем магнитодиэлектрика. Решение получено в законченном виде, результаты точных вычислений дифракционного поля в дальней зоне представлены для случая E -поляризованной падающей волны в широких пределах изменения параметров структуры. В частности, показано, что, когда вершина клина нагружена только магнитодиэлектрическим цилиндром, на дифракционное поле при очень большой длине падающей волны не влияет ни диэлектрическая проницаемость цилиндра, ни угол падения волны, а определяющими являются только угол раскрытия клина, диаметр диэлектрического слоя относительно длины волны в свободном пространстве, магнитная проницаемость слоя и электрические свойства окружающей среды. Добавление к одиночному цилиндру полуплоскости или клиновидной части понижает коэффициент обратного рассеяния структуры, однако приводит к большему проявлению обнуженного резонансного изменения обратного рассеяния цилиндра в длинноволновой области.

Решение задач дифракции электромагнитных волн на различных препятствиях в строгой постановке представляет большой практический интерес, т. к. полученные результаты могут служить базой при исследовании рассеивающих свойств реальных объектов.

Исследуемая структура может играть роль базовой при моделировании реальных объектов в задачах дифракции электромагнитных волн на различных препятствиях (секторных областях с диэлектрической нагрузкой или секторных с цилиндрическим закруглением антеннах, покрытых защитной оболочкой; клиновидных опорах с диэлектрическими вершинами; полуплоскости с цилиндрически закруглённой кромкой, горном рельефе и других подобных объектах), поскольку строгое решение задачи даёт возможность проанализировать с достаточной полнотой влияние как диэлектрических покрытий [1–3], так и радиуса кривизны проводящей поверхности, покрытой диэлектриком [4], на дифракционные свойства подобных объектов.

Общий подход на основе леммы Лоренца или второй формулы Грина к решению задач возбуждения заданными источниками различных клиновидных структур изложен в [5], а на основе функции Грина – в [6]. Однако для использования результатов этих работ в случае падения плоской волны необходимо выполнить соответствующий предельный переход, который корректен только в случае возбуждения структуры элементарным диполем.

Исследование рассеяния поля линейного электрического тока на проводящем клине с диэлектрическим цилиндром на вершине проведено в работе [7]. Однако при строгом представлении рассеянного поля для его нахождения используются результаты геометрической теории дифракции на острой кромке [8, 9]. В работе [10] на основе методов геометрической теории дифракции уточняются результаты работы [11], в которой исследовалось влияние закруглённой кромки полуплоскости на рассеяние электромагнитных волн. Однако эти результаты можно распространить на длинноволновую область только качественно.

Целью настоящей работы является строгое решение задачи дифракции плоской электромагнитной волны на идеально проводящем бесконечно протяжённом двугранном клине с вершиной в виде цилиндра, покрытого магнитодиэлектрическим слоем, которое позволяет проанализировать дифракционные свойства структуры в широких пределах изменения характерных параметров.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Плоская электромагнитная волна с длиной λ падает перпендикулярно образующей цилиндра под произвольным углом β между линией отсчёта угла φ в цилиндрической системе координат (ρ, φ, z) и волновым вектором \mathbf{k}_1 ($k_1 = 2\pi \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} / \lambda$) падающей волны в окружающей среде с диэлектрической ε_1 и магнитной μ_1 проницаемостями. Поперечное сечение структуры показано на рис. 1. Ось z совпадает с осью цилиндра радиуса a , внешний радиус покрывающего слоя с диэлектрической и магнитной проницаемостями ε_2, μ_2 равен b . Угол $\pi\delta$ характеризует раскрыв клина. Зависимость полей от времени вида $\exp(-i\omega t)$ в дальнейшем опущена.

Поле в пространстве представим как суперпозицию падающего ($\mathbf{E}^{(0)}, \mathbf{H}^{(0)}$) и дифракционного ($\mathbf{E}^{(1)}, \mathbf{H}^{(1)}$) полей:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(0)} - \mathbf{E}^{(1)}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}^{(0)} - \mathbf{H}^{(1)}. \quad (1)$$

Рассмотрим случай E -поляризации (когда вектор электрического поля $\mathbf{E}^{(0)}$ параллелен оси z) и представим z -составляющую электрического поля падающей плоской волны единичной амплитуды

$$E_z^{(0)} = \exp[-ik_1 x \cos \beta - ik_1 y \sin \beta] = \exp[-ik_1 \rho \cos(\varphi - \beta)]$$

в виде разложения по цилиндрическим функциям Бесселя [12]:

$$E_z^{(0)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-i)^n J_n(k_1 \rho) \exp[in(\varphi - \beta)], \quad (2)$$

где $J_n(x)$ — функции Бесселя первого рода n -го порядка.

Дифракционное поле должно удовлетворять волновому уравнению в любой точке пространства, кроме проводящей поверхности, а для единственности решения задачи должны выполняться условия излучения и конечности энергии в замкнутом объёме. Поэтому будем искать решение в виде рядов Фурье по собственным функциям секторной области [13, 14] и представим составляющую $E_z^{(1)}$ в виде

$$E_z^{(1)} = \sum_{s=1}^{\infty} \alpha_s H_{s\nu}^{(1)}(k_1 \rho) \sin[s\nu(\varphi + \pi\delta)], \quad \rho \geq b, \quad |\varphi| \leq \pi\delta; \quad (3)$$

$$E_z^{(1)} = \sum_{s=1}^{\infty} B_s [N_{s\nu}(k_2 a) J_{s\nu}(k_2 \rho) - J_{s\nu}(k_2 a) N_{s\nu}(k_2 \rho)] \sin[s\nu(\varphi + \pi\delta)], \quad b \geq \rho \geq a, \quad |\varphi| \leq \pi\delta. \quad (4)$$

Здесь $H_{s\nu}^{(1)}(x)$ и $N_{s\nu}(x)$ — функции Ханкеля первого рода и Неймана соответственно, $\nu = 1/(2\delta)$, $0 < \delta \leq 1$, $k_2 = 2\pi \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} / \lambda$, α_s и B_s — неизвестные коэффициенты фурье-разложения.

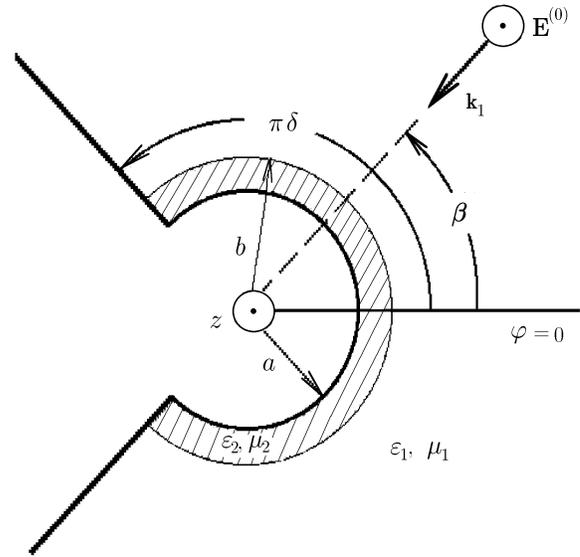


Рис. 1

На плоской и цилиндрической поверхностях клина граничное условие $E_z = 0$ удовлетворяется в соответствии с принятыми представлениями поля (3) и (4), поэтому, удовлетворяя условию непрерывности z -составляющей электрического и φ -составляющей магнитного полей на границе между магнитодиэлектрическим слоем и окружающей средой, получим

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-i)^n J_n(k_1 b) \exp[in(\varphi - \beta)] = \sum_{s=1}^{\infty} \alpha_s H_{s\nu}^{(1)}(k_1 b) \sin[s\nu(\varphi + \pi\delta)] + \\ + \sum_{s=1}^{\infty} B_s [N_{s\nu}(k_2 a) J_{s\nu}(k_2 b) - J_{s\nu}(k_2 a) N_{s\nu}(k_2 b)] \sin[s\nu(\varphi + \pi\delta)], \quad (5)$$

$$p_1 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-i)^n J'_n(k_1 a) \exp[in(\varphi - \beta)] = p_1 \sum_{s=1}^{\infty} \alpha_s H_{s\nu}^{(1)'}(k_1 a) \sin[s\nu(\varphi + \pi\delta)] + \\ + p_2 \sum_{s=1}^{\infty} B_s [N_{s\nu}(k_2 a) J'_{s\nu}(k_2 b) - J_{s\nu}(k_2 a) N'_{s\nu}(k_2 b)] \sin[s\nu(\varphi + \pi\delta)], \quad (6)$$

где $|\varphi| \leq \pi\delta$. Штрих обозначает дифференцирование по аргументу цилиндрической функции, $p_1 = \sqrt{\varepsilon_1/\mu_1}$; $p_2 = \sqrt{\varepsilon_2/\mu_2}$. Условия (5), (6) должны выполняться при любом угле φ из заданного интервала, поэтому, проинтегрировав по φ уравнения (5), (6) с учётом полноты функций $\sin[s\nu(\varphi + \pi\delta)]$ на интервале $-\pi\delta \leq \varphi \leq \pi\delta$, получим

$$\alpha_s H_{s\nu}^{(1)}(k_1 b) + B_s [N_{s\nu}(k_2 a) J_{s\nu}(k_2 b) - J_{s\nu}(k_2 a) N_{s\nu}(k_2 b)] = \\ = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-i)^n J_n(k_1 a) \exp(-in\beta) Q_{s\nu}^{(n)}, \quad (7)$$

$$\alpha_s H_{s\nu}^{(1)'}(k_1 a) + p_2 B_s [N_{s\nu}(k_2 a) J'_{s\nu}(k_2 b) - J_{s\nu}(k_2 a) N'_{s\nu}(k_2 b)] = \\ = p_1 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-i)^n J'_n(k_1 a) \exp(-in\beta) Q_{s\nu}^{(n)}, \quad (8)$$

где $s = 1, 2, 3, \dots$, коэффициенты $Q_{s\nu}^{(n)} = (\pi\delta)^{-1} \int_{-\pi\delta}^{\pi\delta} \exp(in\varphi) \sin[s\nu(\varphi + \pi\delta)] d\varphi$ легко выражаются в аналитическом виде вычислением определённого интеграла.

Подставляя найденные из (7), (8) при помощи алгебраических операций коэффициенты α_s или B_s в выражение (3) или (4), получим окончательное решение задачи. В частности, дифракционное поле в области $\rho \geq b$ будет определяться выражением

$$E_z^{(1)} = \sum_{s=1}^{\infty} A_s(k_1 a, k_2 b, \beta, \delta) H_{s\nu}^{(1)}(k_1 \rho) \sin[s\nu(\varphi + \pi\delta)], \quad (9)$$

где

$$A_s(k_1 a, k_2 b, \beta, \delta) = \frac{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-i)^n [p_2 B_{s\nu} J_n(k_1 b) - p_1 D_{s\nu} J'_n(k_1 b)] Q_{s\nu}^{(n)} \exp(-in\beta)}{p_2 H_{s\nu}^{(1)}(k_1 b) B_{s\nu} - p_1 H_{s\nu}^{(1)'}(k_1 b) D_{s\nu}}. \quad (10)$$

Здесь

$$B_{s\nu} = N_{s\nu}(k_2a)J'_{s\nu}(k_2b) - J_{s\nu}(k_2a)N'_{s\nu}(k_2b), \quad D_{s\nu} = N_{s\nu}(k_2a)J_{s\nu}(k_2b) - J_{s\nu}(k_2a)N_{s\nu}(k_2b).$$

Таким образом, решение задачи о дифракции плоской электромагнитной волны на исследуемой структуре сведено к суммированию ряда по цилиндрическим функциям, при этом не налагаются какие-либо ограничения на параметры структуры.

Выражение (10) допускает предельный переход $a \rightarrow 0$, представляя в этом случае решение задачи, когда вершина клина нагружена магнитоэлектрическим цилиндром радиуса b . Следует только учесть, что в указанном пределе $B_{s\nu} = J'_{s\nu}(k_2b)$ и $D_{s\nu} = J_{s\nu}(k_2b)$. Кроме того, при $b = a$ после соответствующих преобразований (10) даёт решение задачи дифракции поля плоской волны на проводящем клине с цилиндрически закруглённой кромкой. В этом случае

$$A_s(k_1a, \beta, \delta) = \frac{1}{H_{s\nu}^{(1)}(k_1a)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-i)^n J_n(k_1a) \exp(-in\beta) Q_{s\nu}^{(n)}. \quad (11)$$

2. АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ

Как следует из оценок функций Бесселя и Ханкеля [15] и коэффициентов $Q_{s\nu}^{(n)}$, при $k_2b \ll 1$ и $\delta \approx 1$

$$A_s \sim O \left[\sqrt{s\nu} \left(\frac{k_1b}{s\nu} \right)^{s\nu} \right]. \quad (12)$$

Поэтому при исследовании поля в дальней зоне ($k\rho \rightarrow \infty$) в сумме (9) с учётом асимптотического представления функций $H_{s\nu}^{(1)}(x)$ [15] можно ограничиться только коэффициентом A_1 , т. к. остальные быстро убывают, и представить z -составляющую рассеянного электрического поля как

$$\sqrt{\rho} |E_z^{(1)}| \approx C \frac{(k_1b)^\nu}{1 + \mu_2/\mu_1} \cos(\nu\varphi), \quad (13)$$

где C — некоторая константа. Очевидно, что в этом случае z -составляющая электрического поля, рассеянного структурой, не зависит ни от угла падения β , ни от диэлектрической проницаемости слоя и имеет вид кривой, подобной кардиоиде. Более того, следует отметить, что такая же оценка получается как при $b = a$, так и при $a = 0$, $b \neq 0$. Следовательно, рассеяние поля структурой при большой (по сравнению с радиусом цилиндра) длине волны не зависит от того, закруглена вершина клина или нет, и определяется только электромагнитными характеристиками окружающей среды, магнитной проницаемостью диэлектрического слоя, его диаметром относительно длины волны в вакууме и углом раскрытия клина.

Для анализа дифракции в оптическом диапазоне длин волн полученное решение не очень удобно, поскольку требуется учитывать большое число членов ряда (9). Однако в случае $b = a$ вид решения позволяет получить асимптотическое представление ряда благодаря использованию одной из методик и идей работ [6, 16–17]. Такой анализ не является целью настоящего исследования. Отметим только, что сумму

$$S = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-i)^n J_n(k_1a) \exp(-in\beta) Q_{s\nu}^{(n)} \quad (14)$$

можно рассматривать как поправочный множитель, учитывающий влияние клиновидной части и зависящий от относительного диаметра цилиндра и угла раскрытия клина, к асимптотическому выражению поля кругового цилиндра, приведённого, например, в [12].

3. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Анализ рассеивающих свойств структуры в дальней зоне при произвольных значениях параметров проведён путём вычисления с относительной ошибкой, не превышающей 1 %, коэффициента обратного рассеяния (КОР)

$$k_1 \sigma_0 = 4\delta \left| \sum_{s=1}^{\infty} A_s(k_1 a, k_2 b, \beta, \delta) \exp\left(-i \frac{s\nu\pi}{2}\right) \sin[s\nu(\beta + \pi\delta)] \right|^2 \quad (15)$$

и диаграммы направленности (ДН) дифракционного поля $E_z^{(1)}$ (по амплитуде), которая определялась выражением

$$S(\varphi) = \left| \sum_{s=1}^{\infty} A_s(k_1 a, k_2 b, \beta, \delta) \exp\left(-i \frac{s\nu\pi}{2}\right) \sin[s\nu(\varphi + \pi\delta)] \right|. \quad (16)$$

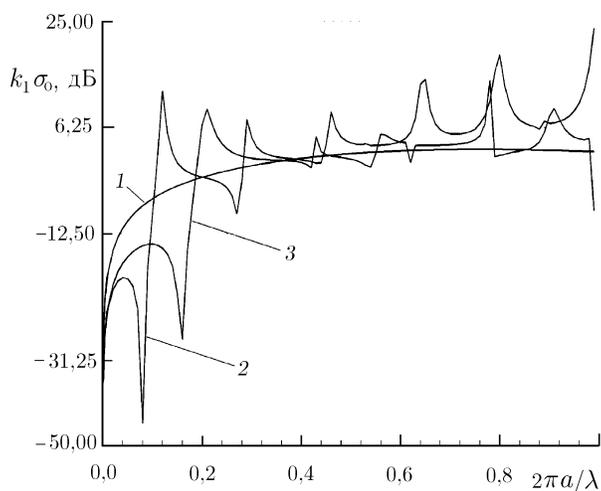


Рис. 2

Зависимости КОР структуры от относительного диаметра цилиндра $2\pi a/\lambda$ приведены на рис. 2, где кривая 1 соответствует случаю $b = a$, кривая 2 — случаю $b/a = 1,05$; $\epsilon_2 = 80$, а кривая 3 — случаю $\epsilon_2 = 80$ при $a = 0$ (при этом по оси абсцисс отложены значения относительного диаметра $2\pi b/\lambda$). Во всех случаях $\epsilon_1 = \mu_1 = \mu_2 = 1$; $\beta = 0$; $\delta = 3/4$. Из приведённых зависимостей видно, что в дальней зоне при рассеянии очень длинных волн ($2\pi b/\lambda \approx 0,01$) КОР не зависит ни от диэлектрической проницаемости слоя, ни от формы кромки клина. Однако при уменьшении длины падающей волны закругление кромки приводит к резонансному рассеянию, и при наличии диэлектрического слоя первый наблюдаемый глубокий минимум КОР заметно сдвигается в сторону больших длин волн. Следовательно, нанесением соответствующего диэлектрического покрытия можно значительно снизить КОР

структуры в дальней длинноволновой области.

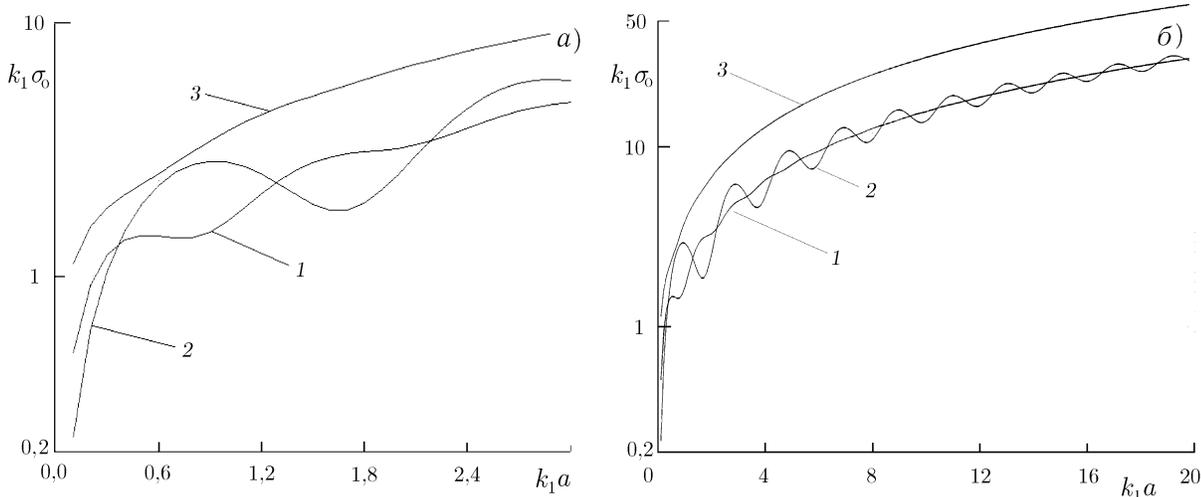


Рис. 3

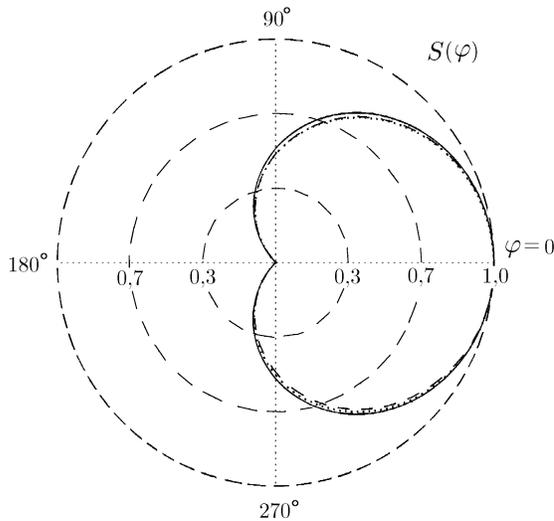


Рис. 4

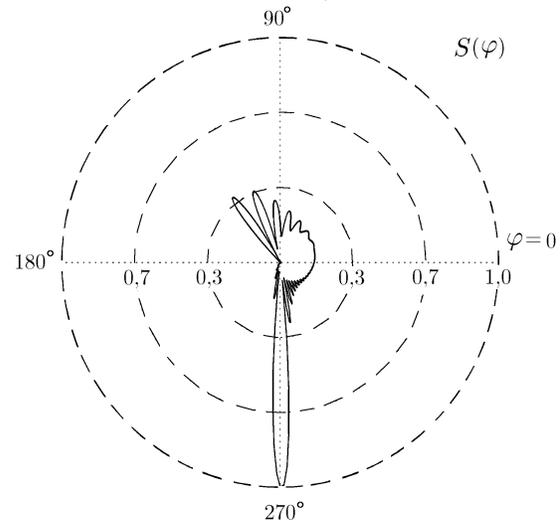


Рис. 5

На рис. 3 приведены зависимости КОР структуры от относительного диаметра цилиндра при $b = a$: кривая 1 соответствует углу раскрыва $\pi\delta = \pi$, кривая 2 — углу $\pi\delta = 2\pi/3$ при $\beta = 0$, $\varepsilon_1 = \mu_1 = \mu_2 = 1$ в обоих случаях; кривая 3 построена на основании строгого решения для случая одиночного цилиндра [12] и приведена для сравнения. Как видно из графиков, когда длина окружности одиночного цилиндра составляет приблизительно $0,25\lambda$ или $1,2\lambda$, наблюдаются относительные максимумы КОР (в последнем случае максимум выражен слабее), а при длине окружности $2\pi a \approx 0,6\lambda$ наблюдается относительный минимум. Возможно, этот факт отмечался другими авторами, однако в известных работах [18, 19] об этом не упоминается. Следовательно, можно заключить, что при использовании цилиндрических проводников в качестве приёмных или переизлучающих элементов следует учитывать обнаруженный характер зависимости обратного отражения от относительного диаметра цилиндра в указанной области.

Добавление к цилиндру полуплоскости вызывает увеличение амплитуды осцилляций коэффициента обратного рассеяния с одновременным сдвигом точек экстремумов в сторону больших значений относительных диаметров цилиндра (кривая 1), а при преобразовании полуплоскости в клин картина осцилляций КОР становится резко выраженной (кривая 2) и распространяется в область коротких длин волн.

На рис. 4 приведены нормированные ДН, построенные в полярных координатах при $b/a = 1,2$; $\delta = 3/4$; $\varepsilon_1 = \mu_1 = \mu_2 = 1$; $\beta = 90^\circ$ и $2\pi a/\lambda = 0,09$. Сплошная линия соответствует случаю $\varepsilon_2 = 80$, штриховая — случаю $\varepsilon_2 = 2,59$, а пунктирная — случаю $b = a$ (цилиндр без покрывающего слоя). Из рис. 4 видно, что форма диаграммы подобна кардиоиде и, как отмечалось на основании аналитического выражения (13) для поля, не зависит от угла падения. Увеличение ε_2 приводит к незначительному расширению кардиоиды, однако при увеличении длины падающей волны кривые совпадают.

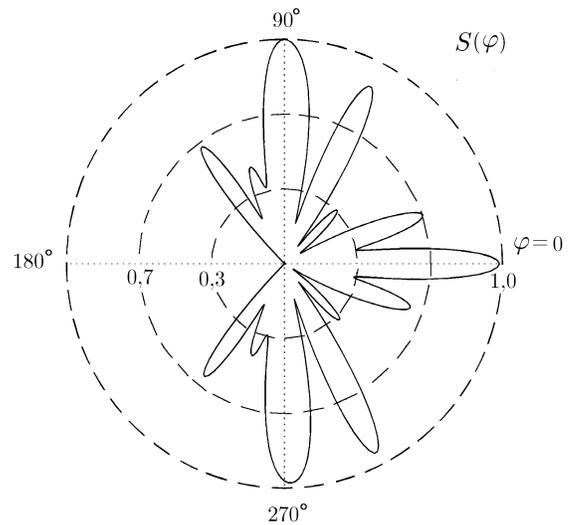


Рис. 6

Распределение поля при больших значениях относительного диаметра цилиндра для $\beta = 90^\circ$ и $\varepsilon_1 = \mu_1 = \mu_2 = 1$ иллюстрируют ДН, приведённые на рис. 5 ($b = a$, $2\pi a/\lambda = 30$; $\delta = 3/4$) и на рис. 6 ($b/a = 1,1$; $2\pi a/\lambda = 10$; $\delta = 3/4$; $\varepsilon_2 = 2,59$). Диаграммы имеют резко изрезанный глубокими минимумами вид. В случае цилиндра без диэлектрического слоя подтверждается вывод о том, что основной вклад в рассеяние поля в освещённой области дают лучи, отражённые только цилиндром и только гранью клина, и лучи, испытавшие многократное отражение [20]. В области глубокой тени (вблизи грани клина) распределение поля по углу φ соответствует кривой, подобной кардиоиде, что качественно подтверждает вывод работы [10].

В случае наличия диэлектрического покрытия следует обратить внимание на определённую симметрию ДН (см. рис. 6), несмотря на то, что максимум рассеянного излучения наблюдается в обратном падению волны направлении, а также на отсутствие области тени.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Анализ строгого решения, полученного с помощью приведённой методики, дал возможность установить, что при очень большой длине падающей волны на дифракционное поле структуры не влияют ни диэлектрическая проницаемость слоя, ни угол падения волны, а определяющими являются угол раскрытия клина, магнитная проницаемость и относительный диаметр слоя, а также электрические характеристики окружающей среды; при этом закруглённость кромки клина не является существенной. Нанесением диэлектрического покрытия можно существенно снизить КОР структуры в дальней длинноволновой области, а в коротковолновой — добиться исчезновения области тени. Полученное решение допускает анализ предельных случаев: $a = 0$; $b/a = 1$, а также $\delta = 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Михайлов Г. Д., Кутищев С. Н., Кирьянов О. Е. // Изв. вузов. Радиофизика. 1999. Т. 42, № 9. С. 879.
2. Нефёдов Е. И. Дифракция электромагнитных волн на диэлектрических структурах. М.: Наука, 1979. 272 с.
3. Замятин В. И., Сухаревский О. И. // Антенны. Вып.37. М.: Радио и связь, 1990. С. 78.
4. Moteith D. H., Olsen R. G. // IEEE Trans. AP. 1998. No. 8. P. 1 220.
5. Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны. М.: Радио и связь, 1988. 440 с.
6. Уэйт Д. Электромагнитное излучение из цилиндрических систем. М.: Сов. радио, 1963. 239 с.
7. Hamid M. A. K. // IEEE Trans. AP. 1973. No.5. P. 398.
8. Oberhettinder F. // J. Math. Phys. 1955. V. 34. P. 215.
9. Mors B. J. // J. Math. Phys. 1964. V. 5. P. 199.
10. Kouyoumjian R. G., Burnside W. D. // IEEE Trans. AP. 1970. No. 5. P. 424.
11. Keller J. B. // J. Appl. Phys. 1959. V. 30. P. 1 452.
12. Иванов Е. И. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техника, 1968. 584 с.
13. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 2. М.: Гостехтеоретиздат, 1957. 628 с.
14. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. Т. 1. М.: Мир, 1978. 551 с.
15. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 832 с.
16. Фок В. А. Дифракция радиоволн вокруг земной поверхности. М.: АН СССР, 1946. 80 с.
17. Горяинов А. С. // Радиотехника и электроника. 1958. Т. 3, № 5. С. 603.
18. Кинг Р., У Тай-Цзунь. Рассеяние и дифракция электромагнитных волн. М.: Изд-во иностр.лит., 1962. 196 с.

19. Хенл Х., Мауэ Л., Вестпфаль К. Теория дифракции. М.: Мир, 1964. 428 с.
20. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. Т. 2. М.: Мир, 1978. 559 с.

Харьковская государственная академия городского хозяйства,
г. Харьков, Украина

Поступила в редакцию
8 ноября 2000 г.

**DIFFRACTION OF A PLANE ELECTROMAGNETIC WAVE BY AN INFINITE DOUBLE-RIDGE WEDGE WITH A
CYLINDER AT THE CREST COVERED BY A CYLINDRICAL MAGNETIC-DIELECTRIC LAYER**

A. E. Shepilko and E. V. Shepilko

We present a boundary-value technique for obtaining the rigorous solution for the problem of diffraction of a plane electromagnetic wave by an infinite double-ridge wedge with a cylinder at the crest covered by a cylindrical magnetic-dielectric layer. In the case of an E -polarized incident wave, we obtain a closed-form solution of the problem, and the results of accurate calculations of a diffracted field in the far zone are given for a wide range of the structure parameters. It is shown that, in particular, if the wedge crest is loaded only by a magnetic-dielectric cylinder, then the diffracted field at the limit of very long wavelength of the incident wave is independent of the dielectric permittivity of the cylinder and the incidence angle of the plane wave. In this case, the diffracted field is determined by the wedge opening angle, the diameter of the dielectric layer with respect to the wavelength in free space, the magnetic permeability of the layer, and electric parameters of the surrounding space. If a half-plane or a wedge part are added to a cylinder, then the backscattering coefficient of the structure decreases, but the discovered resonance variation in the backscattering from the cylinder for long wavelengths becomes more pronounced.

УДК 621.396.67

УРАВНЕНИЯ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ ДЛЯ СИНТЕЗА ПОВЕРХНОСТНОГО ТОКА*С. И. Эминов*

В работе получены общие уравнения с малым параметром для синтеза поверхностного тока на незамкнутой поверхности, которая является частью координатной поверхности в ортогональной криволинейной системе координат по заданной диаграмме направленности. Эти уравнения однозначно разрешимы, и их решения, в отличие от ранее известных уравнений, удовлетворяют условию Мейкснера на ребре.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ РАБОТЫ

Задана идеально проводящая поверхность S (она совпадает с частью координатной поверхности в ортогональной криволинейной системе координат) и диаграмма направленности \mathbf{F} . Требуется найти поверхностный ток \mathbf{j} , реализующий эту диаграмму.

Связь между током \mathbf{j} и диаграммой направленности \mathbf{F} описывается операторным уравнением Фредгольма первого рода

$$\mathbf{K} \mathbf{j} = \mathbf{F}, \quad (1)$$

где оператор \mathbf{K} является вполне непрерывным в пространстве квадратично суммируемых функций. Обращение такого уравнения представляется проблемным. Поэтому в работах [1, 2] это уравнение заменяется уравнением Фредгольма второго рода с малым параметром:

$$\alpha \mathbf{j} + \mathbf{K}^* \mathbf{K} \mathbf{j} = \mathbf{K}^* \mathbf{F}, \quad (2)$$

где \mathbf{K}^* — сопряжённый оператор. Однако этот метод применим только для замкнутых поверхностей. Если поверхность является незамкнутой, то ток может не принадлежать пространству квадратично суммируемых функций. Кроме того, поверхностный ток, распределённый на незамкнутой поверхности, удовлетворяет определённым граничным условиям и условию Мейкснера на ребре. Решение же уравнения (2) может не удовлетворять указанным условиям.

В данной работе в качестве обобщения результатов работы [3] предлагается новое уравнение с малым параметром вида

$$\alpha \mathbf{A} \mathbf{j} + \mathbf{K}^* \mathbf{K} \mathbf{j} = \mathbf{K}^* \mathbf{F}, \quad (3)$$

где интегродифференциальный оператор \mathbf{A} определяется по формуле

$$\mathbf{A} \mathbf{j} = -\text{grad}_\tau \text{div} \iint_S \mathbf{j} \frac{\exp(-R)}{R} dS + \mathbf{t}_1 \iint_S j_1 \frac{\exp(-R)}{R} dS + \mathbf{t}_2 \iint_S j_2 \frac{\exp(-R)}{R} dS. \quad (4)$$

Здесь индекс τ обозначает тангенциальную составляющую, \mathbf{t}_1 и \mathbf{t}_2 — орты координатных линий на поверхности S , j_1 и j_2 — соответствующие компоненты тока \mathbf{j} , R — расстояние между двумя точками на поверхности S .

Оператор \mathbf{A} является симметричным и положительным. Ток \mathbf{j} при решении (3) ищется как элемент энергетического пространства оператора \mathbf{A} . Он удовлетворяет условию Мейкснера на ребре:

$$\mathbf{j} \mathbf{n} = O(\rho^{1/2}), \quad \mathbf{j} \mathbf{t} = O(\rho^{-1/2}),$$

где \mathbf{t} — единичный вектор, касательный к ребру, \mathbf{n} — нормальный к ребру вектор, лежащий на касательной плоскости, ρ — расстояние до ребра.

2. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ СИНТЕЗА АНТЕНН

Рассмотрим идеально проводящую поверхность S , которая совпадает с частью координатной поверхности в ортогональной криволинейной системе координат. Плотность поверхностного тока обозначим через

$$\mathbf{j}(q_1, q_2) = \mathbf{t}_1 j_1(q_1, q_2) + \mathbf{t}_2 j_2(q_1, q_2)$$

где q_1, q_2 — соответствующие криволинейные координаты.

Зная ток, можно найти поле во всём пространстве. В дальней зоне компоненты векторной диаграммы направленности \mathbf{F} определяются соотношениями [1]

$$F_\theta(\theta, \varphi) = \mathbf{i}_\theta \iint_S \mathbf{j} \exp(ik\rho \cos \gamma) dS, \quad (5)$$

$$F_\varphi(\theta, \varphi) = \mathbf{i}_\varphi \iint_S \mathbf{j} \exp(ik\rho \cos \gamma) dS, \quad (6)$$

где $\mathbf{i}_\theta, \mathbf{i}_\varphi$ — орты сферической системы координат (r, θ, φ) в точке наблюдения, ρ — расстояние между началом системы координат и точкой излучения на поверхности S , γ — угол между направлениями на точки наблюдения и излучения, построенными из начала координат, k — волновое число излучения.

Если известна диаграмма направленности, то соотношения (5) и (6) превращаются в интегральные уравнения относительно неизвестного тока. Такова сущность задачи синтеза. Запишем (5) и (6) как систему двух операторных уравнений:

$$K_{11}j_1 + K_{12}j_2 = F_\theta, \quad K_{21}j_1 + K_{22}j_2 = F_\varphi, \quad (7)$$

где

$$K_{11}j_1 = \iint_S j_1 \mathbf{i}_\theta \mathbf{t}_1 \exp(ik\rho \cos \gamma) dS, \quad K_{12}j_2 = \iint_S j_2 \mathbf{i}_\theta \mathbf{t}_2 \exp(ik\rho \cos \gamma) dS,$$

$$K_{21}j_1 = \iint_S j_1 \mathbf{i}_\varphi \mathbf{t}_1 \exp(ik\rho \cos \gamma) dS, \quad K_{22}j_2 = \iint_S j_2 \mathbf{i}_\varphi \mathbf{t}_2 \exp(ik\rho \cos \gamma) dS.$$

Оператор системы (7) является вполне непрерывным в пространстве квадратично суммируемых функций. Обращение такой системы представляется проблемным.

В данной работе предлагается новый подход для решения проблемы синтеза. Вначале выведем уравнения с малым параметром в абстрактных гильбертовых пространствах, затем выработаем критерий выбора пространства поверхностных токов и, наконец, построим общую теорию для конкретных поверхностей.

3. ПОСТАНОВКА ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

Вначале введём необходимые пространства. Векторная диаграмма направленности $\mathbf{F}(F_\theta, F_\varphi)$ принадлежит прямой сумме пространств L_2 :

$$\mathbf{F} \in L_2 \oplus L_2. \quad (8)$$

Скалярное произведение в этом пространстве определено по формуле

$$(\mathbf{F}, \mathbf{G}) = (F_\theta, G_\theta) + (F_\varphi, G_\varphi), \quad (9)$$

где круглые скобки в правой части обозначают скалярное произведение в пространстве L_2 . Полагаем, что компоненты поверхностного тока j_n , где $n = 1; 2$, принадлежат гильбертовым пространствам H_n . Плотность поверхностного тока \mathbf{j} принадлежит прямой сумме этих пространств:

$$\mathbf{j} \in H = H_1 \oplus H_2. \quad (10)$$

Также будем предполагать, что скалярное произведение и норма в пространстве H определяются с помощью положительного симметричного оператора A :

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = (A\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad [\mathbf{u}]^2 = [\mathbf{u}, \mathbf{u}] = (A\mathbf{u}, \mathbf{u}),$$

где квадратные скобки обозначают скалярное произведение в пространстве H , а круглые — скалярное произведение в пространстве $L_2 \oplus L_2$. Пространство H называется энергетическим пространством оператора A . Определение энергетического пространства H токов и оператора A является важной задачей, и её решение будет дано ниже.

С учётом введённых определений систему уравнений (7), или исходные уравнения синтеза, можно записать в виде одного операторного уравнения (1), в котором

$$K = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Не всякая диаграмма \mathbf{F} реализуема, поэтому рассмотрим постановки вариационных задач.

Задача 1. Для любого $\varepsilon > 0$ и произвольной диаграммы направленности \mathbf{F} в классе токов

$$[\mathbf{j}]^2 \leq \varepsilon$$

найти ток \mathbf{j}_0 , доставляющий минимум функционалу

$$P(\mathbf{j}) = (K\mathbf{j} - \mathbf{F}, K\mathbf{j} - \mathbf{F}),$$

т. е. создающий диаграмму, наиболее близкую к заданной.

Задача 2. Для любого $\varepsilon > 0$ и произвольной диаграммы направленности \mathbf{F} в классе токов, удовлетворяющих условию

$$P(\mathbf{j}) \leq \varepsilon$$

найти ток \mathbf{j}_0 с минимальной нормой.

Задача 3. Для заданного числа α и диаграммы направленности \mathbf{F} найти ток \mathbf{j}_0 , доставляющий минимум функционалу

$$N(\mathbf{j}) = \alpha [\mathbf{j}]^2 + (K\mathbf{j} - \mathbf{F}, K\mathbf{j} - \mathbf{F}), \quad (12)$$

где α — малый положительный параметр, круглые скобки обозначают скалярное произведение в пространстве $L_2 \oplus L_2$. Требуется осуществить наилучшее приближение к заданной диаграмме, не привлекая токи с большой нормой.

4. РЕШЕНИЕ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

Начнём решение с третьей, наиболее простой задачи. Докажем следующую теорему.

Теорема 1. Функционал $N(\mathbf{j})$ достигает минимума на решениях уравнения

$$\alpha A \mathbf{j} + K^* K \mathbf{j} = K^* \mathbf{F}, \quad (13)$$

где K^* — сопряжённый оператор, который определяется формулой

$$K^* = \begin{pmatrix} K_{11}^* & K_{21}^* \\ K_{12}^* & K_{22}^* \end{pmatrix}$$

и действует из пространства $L_2 \oplus L_2$ диаграмм в пространство H токов.

Доказательство. Пусть \mathbf{j} решение уравнения (13), а \mathbf{h} — произвольный элемент из пространства H . Рассмотрим разность

$$N(\mathbf{j} + \mathbf{h}) - N(\mathbf{j}) = \alpha [\mathbf{j} + \mathbf{h}, \mathbf{j} + \mathbf{h}] + (K \mathbf{j} + K \mathbf{h} - \mathbf{F}, K \mathbf{j} + K \mathbf{h} - \mathbf{F}) - \alpha [\mathbf{j}, \mathbf{j}] - (K \mathbf{j} - \mathbf{F}, K \mathbf{j} - \mathbf{F}) \quad (14)$$

и преобразуем её с учётом определения сопряжённого оператора:

$$N(\mathbf{j} + \mathbf{h}) - N(\mathbf{j}) = \alpha [\mathbf{h}, \mathbf{h}] + (K \mathbf{h}, K \mathbf{h}) + (\mathbf{h}, \alpha A \mathbf{j} + K^* K \mathbf{j} - K^* \mathbf{F}) + (\alpha A \mathbf{j} + K^* K \mathbf{j} - K^* \mathbf{F}, \mathbf{h}). \quad (15)$$

Учитывая, что ток удовлетворяет уравнению (13), из (15) получим

$$N(\mathbf{j} + \mathbf{h}) = N(\mathbf{j}) + \alpha [\mathbf{h}]^2 + (K \mathbf{h}, K \mathbf{h}). \quad (16)$$

Так как второе и третье слагаемые в правой части (16) неотрицательны, то функционал $N(\mathbf{j})$ достигает минимума на решении уравнения (13). Теорема доказана.

А теперь обратимся к уравнению (13). Это уравнение с малым параметром α заменяет исходное уравнение (1) синтеза антенн и играет существенную роль в теории антенн. Оператор A как положительный оператор имеет обратный оператор A^{-1} . Умножим обе части уравнения (13) на A^{-1} :

$$\alpha \mathbf{j} + A^{-1} K^* K \mathbf{j} = A^{-1} K^* \mathbf{F}. \quad (17)$$

Будем предполагать, что элемент $K^* \mathbf{F}$ пространства H принадлежит области определения оператора A^{-1} и оператор $A^{-1} K^* K$ является вполне непрерывным оператором в пространстве H . вполне непрерывность операторов типа $A^{-1} K^* K$ может быть получена из результатов работ [4, 5] для широкого круга задач.

При выполнении этих условий уравнение (17) будет уравнением Фредгольма второго рода с положительным оператором в силу соотношения

$$[A^{-1} K^* K \mathbf{j}, \mathbf{j}] = (A A^{-1} K^* K \mathbf{j}, \mathbf{j}) = (K^* K \mathbf{j}, \mathbf{j}) = (K \mathbf{j}, K \mathbf{j}).$$

Поэтому справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Для любой диаграммы направленности \mathbf{F} уравнения (13) и (17) имеют единственное решение \mathbf{j} , и это решение доставляет минимум функционалу $N(\mathbf{j})$.

Отметим, что теория уравнений Фредгольма второго рода с малым параметром развита достаточно полно. Результаты этой теории применимы к уравнениям (13) и (17). Приведём её основные положения [6]. С этой целью перепишем уравнение (17) в виде

$$(\alpha E + L) \mathbf{j} = \mathbf{g}, \quad (18)$$

где E — единичный оператор, $L = A^{-1}K^*K$, $\mathbf{g} = A^{-1}K^*\mathbf{F}$.

Так как оператор L является неотрицательным, то оператор-функции $T = (\alpha E + L)^{-1}$ и T^2 будут строго монотонно убывать. С учётом этого функция

$$\varphi(\alpha) = (T^2 \mathbf{g}, \mathbf{g}) = [\mathbf{j}_\alpha]^2$$

также монотонно убывает. Здесь \mathbf{j}_α — решение уравнения (18), а индекс α подчёркивает зависимость решения уравнения от этого параметра. Далее нам понадобится обозначение

$$\lim_{\alpha \rightarrow +0} \varphi(\alpha) = m_g, \quad 0 < m_g \leq \infty.$$

Теперь введём и исследуем функцию

$$\phi(\alpha) = P(\mathbf{j}_\alpha),$$

где

$$P(\mathbf{j}) = (K\mathbf{j} - \mathbf{F}, K\mathbf{j} - \mathbf{F}), \quad \mathbf{j}_\alpha = (\alpha E + L)^{-1} \mathbf{g}. \quad (19)$$

С учётом того, что \mathbf{j}_α есть решение уравнений (18), (19), и определения энергетической нормы из (19) имеем

$$\begin{aligned} P(\mathbf{j}_\alpha) &= (K\mathbf{j}_\alpha - \mathbf{F}, K\mathbf{j}_\alpha - \mathbf{F}) = (\mathbf{j}_\alpha, K^*K\mathbf{j}_\alpha - K^*\mathbf{F}) - (K^*\mathbf{F}, \mathbf{j}_\alpha) - (\mathbf{F}, \mathbf{F}) = \\ &= -\alpha (A\mathbf{j}_\alpha, \mathbf{j}_\alpha) - (\alpha A\mathbf{j}_\alpha + K^*K\mathbf{j}_\alpha, \mathbf{j}_\alpha) - (\mathbf{F}, \mathbf{F}) = -[(2\alpha E + L)\mathbf{j}_\alpha, \mathbf{j}_\alpha] - (\mathbf{F}, \mathbf{F}). \end{aligned} \quad (20)$$

Используя известное правило дифференцирования оператор-функции

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (\alpha E + L)^{-1} = -(\alpha E + L)^{-2},$$

из (20) найдём производную

$$\phi'(\alpha) = 2\alpha [(\alpha E + L)^{-1} \mathbf{j}_\alpha, \mathbf{j}_\alpha] > 0.$$

Таким образом, функция $\phi(\alpha)$ строго монотонно возрастает.

Из проведённого анализа свойств функций $\varphi(\alpha)$ и $\phi(\alpha)$ легко доказывается единственность решений 1 и 2. Полное доказательство этих утверждений легко получается из результатов работы [6].

Таким образом, к произвольной диаграмме направленности \mathbf{F} можно приблизиться с любой наперёд заданной точностью. Существует единственный ток с минимальной нормой, диаграмма излучения которого приближается к заданной, и этот ток находится из решения уравнения (13).

5. ПРОСТРАНСТВА ТОКОВ И УРАВНЕНИЕ АНАЛИЗА

Перейдём к вопросу определения пространства H токов. В работе [3] пространство токов определяется из условия ограниченности поля в ближней зоне, а в работе [4] пространство H определено как энергетическое пространство положительного симметричного оператора A , который возникает в задаче анализа. Под задачей анализа понимается задача нахождения токов, наводимых на поверхности заданной первичной волной. Оба подхода приводят к одному результату. В данной работе воспользуемся вторым методом, с этой целью приведём здесь векторное уравнение задачи анализа в нужной форме.

Пусть первичная электромагнитная волна падает на идеально проводящую поверхность S . В результате на обеих сторонах поверхности будет наведён поверхностный ток с плотностью \mathbf{j} . Этот ток является источником вторичного поля, которое находится по известной формуле

$$\mathbf{E}^{\text{BT}}(\mathbf{j}) = \frac{1}{i\omega\varepsilon} \left[\text{grad div} \iint_S \mathbf{j} \frac{\exp(-ikR)}{4\pi R} dS + k^2 \iint_S \mathbf{j} \frac{\exp(-ikR)}{4\pi R} dS \right]. \quad (21)$$

Здесь R — расстояние между точкой излучения Q и точкой наблюдения P , ω — круговая частота излучения, $k = \omega/c$ — волновое число, c — скорость света, ε — абсолютная диэлектрическая проницаемость среды. На идеально проводящей поверхности S касательная составляющая полного электрического поля должна равняться нулю, т. е.

$$[\mathbf{E}^{\text{BT}}(\mathbf{j}) + \mathbf{E}^0, \mathbf{n}] = 0, \quad (22)$$

где \mathbf{n} — нормаль к поверхности S , \mathbf{E}^0 — электрическое поле падающей волны. Подставив (21) в (22), получим векторное уравнение относительно плотности тока:

$$\left[\text{grad div} \iint_S \mathbf{j} \frac{\exp(-ikR)}{4\pi R} dS + k^2 \iint_S \mathbf{j} \frac{\exp(-ikR)}{4\pi R} dS, \mathbf{n} \right] = -i\omega\varepsilon [\mathbf{E}^0, \mathbf{n}]. \quad (23)$$

Продифференцируем уравнение (23) дважды в точке наблюдения P . Учтём соотношения

$$\text{div}_P \left\{ \mathbf{j} \frac{\exp(-ikR)}{4\pi R} \right\} = \left(\text{grad}_P \frac{\exp(-ikR)}{4\pi R}, \mathbf{j} \right) = - \left(\text{grad}_Q \frac{\exp(-ikR)}{4\pi R}, \mathbf{j} \right)$$

и получим окончательное уравнение в виде

$$\left[\text{grad}_P \iint_S \left(\text{grad}_Q \frac{\exp(-ikR)}{4\pi R}, \mathbf{j} \right) dS - k^2 \iint_S \mathbf{j} \frac{\exp(-ikR)}{4\pi R} dS, \mathbf{n} \right] = i\omega\varepsilon [\mathbf{E}^0, \mathbf{n}], \quad (24)$$

который благодаря симметрии оказывается весьма эффективным для анализа и численного решения.

5. УРАВНЕНИЕ СИНТЕЗА С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

Согласно работам [3–5] для пространства токов можно предложить оператор A в виде (4). При этом справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Оператор, определённый формулой (4), является симметричным и положительным.

Доказательство. Вначале докажем симметричность и положительность оператора, представленного вторым слагаемым в правой части (4),

$$A_1 j_1 = \iint_S j_1 \frac{\exp(-R)}{R} dS. \quad (25)$$

Для этого воспользуемся известным разложением функции Грина в интеграл Фурье:

$$\frac{\exp(-R)}{R} = \frac{1}{2\pi^2} \iiint_V \frac{\exp[-i\chi_1(x-x') - i\chi_2(y-y') - i\chi_3(z-z')]}{\chi_1^2 + \chi_2^2 + \chi_3^2 + 1} d\chi_1 d\chi_2 d\chi_3, \quad (26)$$

где $x(q_1, q_2), y(q_1, q_2), z(q_1, q_2)$ — точка наблюдения на поверхности S , а $x'(q'_1, q'_2), y'(q'_1, q'_2), z'(q'_1, q'_2)$ — точка излучения на поверхности S . Из (25) и (26) получим

$$(A_1 j_1, j_1) = \frac{1}{2\pi^2} \iiint_V \frac{|\tilde{j}_1|^2}{\chi_1^2 + \chi_2^2 + \chi_3^2 + 1} d\chi_1 d\chi_2 d\chi_3, \quad (27)$$

где

$$\tilde{j}_1 = \iint_S j_1 \exp(i\chi_1 x' + i\chi_2 y' + i\chi_3 z') dS,$$

а из (26) и (27) следует как положительность, так и симметричность исходного оператора A_1 . Положительность и симметричность оператора, представленного третьим слагаемым в правой части (4), доказывается аналогично.

Оператор, определяемый первым слагаемым в (4), вообще говоря, является неограниченным. Поэтому его нужно рассмотреть на плотном множестве функций, обращающихся в нуль на границе поверхности [4, 5], провести интегрирование по частям с учётом симметричной формы записи оператора в виде (24) и использовать представление функции Грина (26). Этим путём можно доказать симметричность и положительность указанного оператора, а следовательно, и всего оператора (4). Теорема доказана.

С учётом теоремы 3 в качестве оператора A можно взять оператор (4). Уравнение синтеза, как показано выше, имеет вид

$$\alpha A \mathbf{j} + K^* K \mathbf{j} = K^* \mathbf{F}. \quad (28)$$

Структура уравнения (28) такая же, как и у соответствующей задачи анализа, т. к. оператор $K^* K$ является интегральным оператором с бесконечно дифференцируемым ядром. Если решение задачи анализа удовлетворяет условию Мейкснера на ребре (это положение доказано для широкого круга задач [5, 7]), то решения предлагаемого уравнения также будут удовлетворять указанному условию.

Оператор A , введённый в (4), имеет весьма общий вид. В некоторых случаях его можно заменить более простым оператором, энергетическое пространство которого совпадает с энергетическим пространством оператора A . Продемонстрируем такую возможность на конкретных примерах.

7. ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО В ЗАДАЧЕ СИНТЕЗА АКСИАЛЬНЫХ ТОКОВ НА ПОВЕРХНОСТИ ОТРЕЗКА ЦИЛИНДРА

В качестве поверхности возьмём отрезок кругового цилиндра, описываемый в цилиндрических координатах соотношениями

$$r = a, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad -l \leq z \leq l.$$

Рассмотрим скалярную задачу синтеза аксиальных токов $j_z(z)$, текущих параллельно оси z и не зависящих от угла φ . Оператор A в этом случае имеет вид

$$A j_z = -\frac{d^2}{dz^2} \iint_S j_z \frac{\exp(-R)}{R} dS + \iint_S j_z \frac{\exp(-R)}{R} dS. \quad (29)$$

Используя известное разложение функции Грина

$$\frac{\exp(-R)}{R} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos[n(\varphi - \varphi')] \int_0^{\infty} \cos[\chi(z - z')] I_n(a \sqrt{\chi^2 + 1}) K_n(a \sqrt{\chi^2 + 1}) d\chi,$$

где $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_n = 2$ при $n > 0$, I_n — модифицированная функция Бесселя, K_n — функция Макдональда, из (29) получим

$$A j_z = 4a \int_0^{\infty} \int_{-l}^l j_z(z') \cos[\chi(z - z')] dz' (\chi^2 + 1) I_0(a\sqrt{\chi^2 + 1}) K_0(a\sqrt{\chi^2 + 1}) d\chi. \quad (30)$$

В этом представлении функции Бесселя и Макдональда заменим асимптотикой при $x \rightarrow \infty$:

$$I_0(x)K_0(x) = \frac{1}{2x} + \frac{1}{16x^3} + \dots,$$

и введём в рассмотрение оператор, имеющий более простую форму:

$$A_{11}u = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \chi \int_{-1}^1 \cos[\chi(\tau - t)] u(t) dt d\chi \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\chi| \int_{-1}^1 \exp[-i\chi(\tau - t)] u(t) dt d\chi. \quad (31)$$

Этот оператор определён на функциях, заданных на промежутке $t \in [-1, 1]$.

Энергетическое пространство оператора A_{11} совпадает с энергетическим пространством оператора A с учётом отображения отрезка $[-l, l]$ на отрезок $[-1, 1]$. Это утверждение можно легко доказать с помощью результатов работы [4]. В то же время оператор A_{11} имеет более простую форму.

Оператор A_{11} подробно изучен в работе [4]. Кратко перечислим его основные свойства: оператор A_{11} является симметричным, имеет плотную в $L_2([-1, 1])$ область определения $D(A_{11})$ и, наконец, является положительно определённым:

$$\forall u \in D(A_{11}) \quad (A_{11}u, u) \geq \gamma^2 (u, u), \quad \gamma^2 > 0.$$

Из положительной определённости следует, что энергетическое пространство оператора A_{11} совпадает с пространством Соболева $H_{1/2}([-1, 1])$, которое можно рассматривать как пополнение $C_0^{\infty}([-1, 1])$ — множества бесконечно дифференцируемых финитных функций с носителем в $[-1, 1]$ по норме

$$\|u\|_{1/2}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |\chi|) |\tilde{u}(\chi)|^2 d\chi,$$

где

$$\tilde{u}(\chi) = \int_{-1}^1 u(t) \exp(i\chi t) dt.$$

Таким образом, с помощью оператора A_{11} можно вести ещё одну эквивалентную норму в пространстве Соболева. Существенное преимущество введённой нормы заключается в том, что удаётся аналитически задать ортонормированный базис в виде

$$\varphi_n(\tau) = \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \sin[n \arccos(\tau)], \quad n = 1, 2, \dots, \quad (A_{11}\varphi_m, \varphi_n) = \begin{cases} 0, & m \neq n; \\ 1, & m = n. \end{cases} \quad (32)$$

С помощью базиса (32) можно эффективно решать уравнение (28). Разложим ток по этому базису:

$$j_z = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(\tau), \quad (33)$$

и сведём уравнение (28) к эквивалентной системе Фредгольма второго рода вида

$$c_n + \sum_{m=1}^{\infty} c_m K_{mn} = e_n, \quad (34)$$

где $1 \leq n < \infty$. Каждая базисная функция $\varphi_n(\tau)$ удовлетворяет условию Мейкснера на ребре. Анализируя асимптотику c_n [7], можно показать, что решение, представленное рядом (33), также удовлетворяет условию Мейкснера на ребре.

8. ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО В ЗАДАЧЕ СИНТЕЗА АЗИМУТАЛЬНЫХ ТОКОВ НА ПОВЕРХНОСТИ ОТРЕЗКА ЦИЛИНДРА

В качестве поверхности, как и в предыдущем разделе, возьмём отрезок кругового цилиндра, но рассмотрим скалярную задачу синтеза азимутальных токов $j_\varphi(z)$, текущих вдоль координатной линии φ . Оператор A в этом случае примет вид

$$A j_\varphi = \iint_S j_\varphi \frac{\exp(-R)}{R} dS. \quad (35)$$

Как и в предыдущем разделе, введём оператор с более простой формой:

$$A_{22} = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 u(t) \ln \frac{1}{|\tau - t|} dt, \quad (36)$$

энергетическое пространство которого совпадает с энергетическим пространством оператора A .

Для исследования оператора A_{22} нам потребуются весовые пространства L_{2q} , в которых скалярное произведение определяется по формуле

$$(u, v)_{2q} = \int_{-1}^1 u(t) \overline{v(t)} q(t) dt. \quad (37)$$

где черта над функцией означает комплексное сопряжение. Рассмотрим оператор A_{22} , действующий из весового пространства $L_{2\rho}$ в весовое пространство $L_{2\rho^{-1}}$, где функция $\rho(t) = \sqrt{1-t^2}$. Полиномы Чебышева первого рода $T_n(t) = \cos[(n-1) \arccos(t)]$, где $n = 1, 2, \dots$, образуют базис пространства $L_{2\rho^{-1}}$, а полиномы Чебышева с весом: $T_n(t)/\rho$, образуют базис пространства $L_{2\rho}$. Для оператора A_{22} справедливо соотношение [8]

$$A_{22} \frac{T_n(\tau)}{\rho(\tau)} = \begin{cases} \ln 2, & n = 1; \\ \frac{1}{n-1} T_n(\tau), & n \neq 1. \end{cases} \quad (38)$$

Пусть далее I обозначает единичный оператор, который действует из пространства $L_{2\rho^{-1}}$ в пространство $L_{2\rho}$ и ставит в соответствие функции $u(\tau)$ функцию $u(\tau)/\rho(\tau)$. Рассмотрим оператор

$$IA_{22} : L_{2\rho} \rightarrow L_{2\rho} \quad (39)$$

Он является положительным, как следует из соотношения (38). Заметим, что

$$(IA_{22}u, v)_{2\rho} = (A_{22}u, v).$$

Ортонормированный базис энергетического пространства оператора A_{22} согласно (38) имеет вид

$$\psi_n(\tau) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{\pi \ln 2}} \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}}, & n = 1; \\ \sqrt{\frac{2(n-1)}{\pi}} \frac{\cos[(n-1)\arccos(\tau)]}{\sqrt{1-\tau^2}}, & n > 1, \end{cases} \quad (A_{22}\psi_m, \psi_n) = \begin{cases} 0, & m \neq n; \\ 1, & m = n. \end{cases} \quad (40)$$

Можно показать, что энергетическое пространство оператора A_{22} совпадает с энергетическим пространством оператора A и с пространством Соболева $H_{-1/2}([-1, 1])$, которое определяется как пополнение $C_0^\infty([-1, 1])$ — множества бесконечно дифференцируемых финитных функций с носителем в $[-1, 1]$ — по норме

$$\|u\|_{-1/2}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\tilde{u}(\chi)|^2}{1+|\chi|} d\chi. \quad (41)$$

С помощью базиса (40) уравнение с малым параметром сводится к бесконечной системе Фредгольма второго рода.

Однако уравнения синтеза с малым параметром можно решать любыми другими численными методами, которые разработаны и применяются для решения задач анализа.

9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получены следующие основные результаты:

- 1) получены новые, общие уравнения синтеза антенн с малым параметром в абстрактных гильбертовых пространствах;
- 2) предложено описывать пространства токов с помощью определённых положительных операторов, которые возникают в задачах анализа и исчезают при определении поля в дальней зоне;
- 3) доказано, что уравнение синтеза имеет единственное решение и это решение обеспечивает наилучшее приближение к заданной диаграмме направленности;
- 4) приведены пространства токов для некоторых частных случаев.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахрах Л. Д., Кременецкий С. Д. Синтез излучающих систем (теория и методы расчёта). М.: Сов. радио, 1974.
2. Каценеленбаум Б. З. Проблема аппроксимируемости электромагнитного поля. М.: Наука, 1996.
3. Эминов С. И. // Письма в ЖТФ. 2000. Т. 26, вып. 14. С. 97.
4. Эминов С. И. // Радиотехника и электроника. 1993. Т. 38, вып. 12. С. 2160.
5. Смирнов Ю. Г. // Дифференциальные уравнения. 1992. Т. 28, № 1. С. 136.
6. Сахнович Л. А. // Успехи математических наук. 1980. Т. 35, вып. 4(214). С. 69.
7. Эминов С. И. Метод собственных функций сингулярных операторов в теории дифракции применительно к электродинамическому анализу вибраторных и щелевых антенн. 234 с. Деп. в ВИНТИ 07.04.95, № 960-В95.
8. Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974.

Новгородский госуниверситет, г. Великий Новгород, Россия

Поступила в редакцию
14 июня 2001 г.

EQUATIONS WITH A SMALL PARAMETER FOR THE SURFACE-CURRENT SYNTHESIS

S. I. Éminov

We obtain general equations with a small parameter, which allow one, using a given radiation pattern, to synthesize the corresponding surface current on a nonclosed surface being a part of the coordinate surface in an orthogonal curvilinear coordinate system. These equations are uniquely solvable and their solutions, in contrast to previously known solutions, satisfy the Meixner edge condition.

УДК 533.9.082.74+533.933

ГЕНЕРАЦИЯ БЕЗЫНДУКЦИОННОГО ТОКА В УСЛОВИЯХ ЭЛЕКТРОННОГО ЦИКЛОТРОННОГО РЕЗОНАНСА ПРИ КВАЗИПОПЕРЕЧНОМ ВВОДЕ ИЗЛУЧЕНИЯ

А. Г. Шалашов

Рассмотрен линейный механизм генерации тока увлечения в условиях электронного циклотронного резонанса, реализующийся при квазипоперечном вводе СВЧ излучения в плазму в тороидальной магнитной ловушке со стороны слабого магнитного поля. В этом специфическом случае энергия электромагнитного поля поглощается преимущественно тепловыми электронами при одновременном влиянии доплеровского сдвига и релятивистских поправок в условиях циклотронного резонанса, что может приводить к снижению эффективности генерации тока или даже к смене направления тока относительно направления ввода СВЧ излучения. Для анализа кинетического уравнения использован метод «сопряжённого» уравнения для тока, что позволило корректно учесть электрон-электронные соударения при любом значении эффективного заряда ионов.

ВВЕДЕНИЕ

Для современного эксперимента по удержанию плазмы в тороидальных системах управляемого термоядерного синтеза (УТС) всё большую актуальность приобретает задача генерации стационарного тока с повышенной точностью пространственной локализации. В значительной степени это относится, например, к проблеме стабилизации МГД неустойчивостей плазменного шнура путём создания дополнительных токов в плазме. Поставленной задаче хорошо отвечает механизм генерации тока увлечения в условиях электронного циклотронного (ЭЦ) резонанса, поскольку благодаря резонансному характеру ЭЦ поглощения область генерации тока легко локализуется в направлении изменения тороидального магнитного поля практически при любых направлениях распространения греющего СВЧ пучка. При этом профиль энерговклада локализуется наиболее эффективно, когда поглощение максимально, т. е. когда излучение вводится почти под прямым углом к тороидальному полю со стороны слабого магнитного поля (при строго поперечном распространении ток отсутствует, если не учитывать тороидальные эффекты).

В случае квазипоперечного ввода излучения со стороны слабого магнитного поля основная доля поглощаемой энергии СВЧ поля приходится на низкоэнергичные тепловые электроны. Эти частицы испытывают частые кулоновские соударения, поэтому циклотронное взаимодействие с электромагнитным полем приводит к существенно меньшей анизотропии их функции распределения по сравнению с «классическими» схемами ЭЦ генерации тока, когда энергия поглощается преимущественно надтепловыми электронами. Однако из-за большого удельного числа тепловых электронов даже слабая анизотропия их функции распределения может оказаться достаточной для формирования тока увлечения, сопоставимого с током надтепловых частиц. Таким образом, квазипоперечный ввод излучения представляется весьма интересным и в случае, когда необходимо получить большую плотность тороидального тока в некотором выделенном сечении плазменного шнура при заданной мощности СВЧ пучка, а эффективность генерации полного тока не является параметром оптимизации.

Заметим также, что поглощение энергии тепловыми электронами обладает дополнительным преимуществом, связанным с подавлением эффекта убегания электронов в результате совместного ускорения в высокочастотном поле и в постоянном продольном электрическом поле. В токамаке, особенно

на стадии «включения», этот процесс играет важную, но, как правило, негативную роль. Действительно, генерация быстрых электронов способствует уходу энергии из области электрического поля, что приводит к уменьшению эффективности трансформации вводимой в установку энергии СВЧ излучения в энергию полоидального поля [1]. В отличие от [1] в данной работе влияние продольного электрического поля на высокочастотную генерацию тока и эффекты его установления учитываться не будут (строго говоря, в плазме с конечной температурой любая частица может спонтанно перейти в режим убегания в электрическом поле, однако необходимое для этого время для тепловых частиц в токамаке оказывается экспоненциально большим; на меньших временах электрическое поле приводит к аддитивному вкладу в ток, описываемому спитцеровской проводимостью).

Интересный эффект, на который мы хотим обратить внимание, заключается в неоднозначности направления тороидального тока в системе, что связано с геометрией резонансной области при квазиперечном вводе электромагнитного излучения. Условие циклотронного резонанса в рассматриваемом случае определяется одновременно релятивистской зависимостью гирочастоты электрона от его энергии и доплеровским сдвигом частоты поля, который, собственно, и отвечает за асимметрию энерговклада в пространстве скоростей:

$$\omega - \omega N_{\parallel} v_{\parallel} / c = n \omega_c \sqrt{1 - v^2 / c^2}, \quad (1)$$

здесь ω — частота волны, с которой взаимодействует электрон, $N_{\parallel} = k_{\parallel} c / \omega$ — «продольный» показатель преломления, определяющий проекцию волнового вектора волны на направление внешнего магнитного поля, v_{\parallel} — компонента скорости электрона вдоль магнитного поля, c — скорость света в вакууме; в правой части (1) стоит релятивистская гирочастота электрона, умноженная на номер циклотронной гармоники n . В рассматриваемом случае $N_{\parallel} \rightarrow 0$, поэтому резонансные линии в пространстве переменных $(v_{\parallel}, v_{\perp})$ в первом приближении можно представить как семейство полуокружностей, центр которых смещён в точку $(N_{\parallel} c, 0)$. При такой геометрии резонансных линий эффективно прогреваются как частицы, имеющие сонаправленную с направлением распространения СВЧ излучения компоненту скорости, так и частицы,двигающиеся навстречу излучению. Поэтому возможен эффект обращения генерируемого тока по отношению к направлению ввода СВЧ излучения, в некотором смысле дополняющий тороидальные механизмы генерации бутстреп-тока и тока Окавы.

План работы следующий. В разделе 1 линеаризованное кинетическое уравнение Больцмана используется для получения общего выражения для плотности ЭЦ тока в случае квазиперечного распространения излучения с заданным спектром в однородной плазме. В разделе 2 полученные соотношения анализируются на примере генерации тока обыкновенной волной на первой циклотронной гармонике и необыкновенной волной на второй циклотронной гармонике. В разделе 3 рассматривается плазменный слой в линейно неоднородном магнитном поле для оценки эффективности генерации полного тока в тороидальной системе.

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим однородную плазму, помещённую в постоянное магнитное поле \mathbf{B}_0 и в заданное внешнее высокочастотное поле. Ионы будем предполагать бесконечно массивными, при этом они образуют стационарный фон, на котором рассеиваются электроны. Электроны взаимодействуют с высокочастотным полем в условиях циклотронного резонанса, однако на фоне кулоновских соударений это взаимодействие мало и приводит лишь к слабому возмущению функции распределения электронов $f(\mathbf{v})$ в пространстве скоростей относительно равновесного максвелловского распределения

$$f_M = n_e [m / (2\pi T_e)]^{3/2} \exp[-mv^2 / (2T_e)], \quad (2)$$

где n_e и T_e — концентрация и температура (в единицах энергии) электронов соответственно, m — масса электрона. Подставляя функцию распределения в виде $f = f_M + f_1$ в уравнение Больцмана и линеаризуя его относительно малого стационарного возмущения, получаем

$$C(f_1) \equiv C(f_1, f_M) + C(f_M, f_1) + C(f_1, f_i) = -Q(f_M) + \left(\frac{mv^2}{2T_e} - \frac{3}{2} \right) f_M(v) \frac{\partial}{\partial t} \ln T_e, \quad (3)$$

где $C(f_1, f_M) + C(f_M, f_1)$ обозначает линеаризованный интеграл электрон-электронных соударений (учтено, что $C(f_M, f_M) = 0$, поскольку равновесное распределение не изменяется за счёт соударений электронов между собой), $C(f_1, f_i)$ — оператор рассеяния электронной компоненты на неподвижных ионах, $Q(f_M)$ — оператор квазилинейной диффузии, индуцированной высокочастотным полем; величиной $Q(f_1)$ в линейном приближении мы пренебрегаем. Последний член в правой части уравнения (3), который описывает сток энергии, необходимый для существования стационарного решения, получается стандартным образом в рамках разложения Чэпмена—Коулинга [2, 3]. Заметим, что член потерь всегда можно выбрать так, чтобы плотности частиц и энергии целиком определялись фоновым распределением, т. е. $\int f_1 d^3\mathbf{v} = 0$ и $\int v^2 f_1 d^3\mathbf{v} = 0$.

После линеаризации анизотропная часть f_1 функции распределения электронов входит только в левую, столкновительную часть кинетического уравнения (3), а квазилинейный член выступает в качестве источника, заданного равновесным распределением электронов и известным спектром внешнего излучения. В такой постановке соответствующую функции распределения f_1 плотность тока можно найти, не решая двумерного кинетического уравнения (3) [1, 4, 5]. Допустим, что мы знаем решение $\tilde{\chi}(\mathbf{v})$ «сопряжённого» уравнения

$$C(f_M \tilde{\chi}) = ev_{\parallel} f_M, \quad (4)$$

где e — заряд электрона. Тогда плотность тока j вдоль магнитного поля можно выразить следующим образом:

$$j = \int ev_{\parallel} f_1 d^3\mathbf{v} = \int C(f_M \tilde{\chi}) (f_1/f_M) d^3\mathbf{v} = \int \tilde{\chi} C(f_1) d^3\mathbf{v}. \quad (5)$$

В последнем преобразовании была использована самосопряжённость линеаризованного интеграла соударений $\int \{\varphi C(f_M \psi) - \psi C(f_M \varphi)\} d^3\mathbf{v} = 0$. Подставляя оператор $C(f_1)$, найденный из кинетического уравнения (3), получаем выражение для плотности тока, которое по своей структуре совпадает с очевидным выражением для плотности мощности P поглощения СВЧ излучения:

$$j = - \int \tilde{\chi} Q(f_M) d^3\mathbf{v}, \quad P = \int \frac{mv^2}{2} Q(f_M) d^3\mathbf{v}, \quad (6)$$

член потерь не даёт вклада в интеграл для тока в силу нечётности функции $\tilde{\chi}(\mathbf{v})$.

Решение уравнения (4) для весовой функции $\tilde{\chi}$ хорошо известно: оно совпадает с решением задачи Спитцера и Харма [6] о возмущении функции распределения в постоянном электрическом поле $C(\tilde{\chi} f_M) = -(eE_{\parallel}/m) \partial f_M / \partial v_{\parallel}$, если положить формально $E_{\parallel} = -T_e$. Указанное решение состоит только из одной угловой гармоники: $\tilde{\chi}(\mathbf{v}) = \chi(\mathbf{v}) \mu$, где $\mu = v_{\parallel}/v$ — косинус питч-угла электрона. Поэтому уравнение (4) сводится к одномерному интегродифференциальному уравнению [7]:

$$\frac{1}{u^2} \frac{d}{du} \left(D_1(u) \frac{\exp(-u^2)}{2u} \frac{d\chi}{du} \right) + \left(D_2(u) \chi + \int_0^u D_3(w) \exp(-w^2) \chi(w) dw + D_3(u) \int_u^{\infty} \exp(-w^2) \chi(w) dw - u \right) \exp(-u^2) = 0, \quad (7)$$

$$D_1 = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^u w^2 \exp(-w^2) dw, \quad D_2 = -\frac{1}{u^3} \left[Z_{\text{eff}} + \left(1 - \frac{1}{2u}\right) \left(D_1(u) - \frac{4}{\sqrt{\pi}} u^3 \exp(-u^2) \right) \right],$$

$$D_3 = \frac{8}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2u^5}{5} - \frac{u^3}{3} \right). \quad (8)$$

Здесь $u = v/v_e$ — модуль скорости электрона, нормированный на тепловую скорость $v_e = \sqrt{2T_e/m}$, а под χ понимается некоторая безразмерная функция, зависящая только от u и эффективного зарядового числа ионов Z_{eff} . Чтобы перейти к размерной величине, необходимо умножить χ на коэффициент ν_e/v_e , где $\nu_e = 4\pi e^4 n_e \ln \Lambda_e / (m_e^2 v_e^3)$ — частота тепловых электрон-электронных соударений, $\ln \Lambda_e$ — кулоновский логарифм. Несмотря на то, что для величины $\chi(u, Z_{\text{eff}})$ известен ряд аппроксимаций, представляется более удобным вычислять эту функцию непосредственно из уравнения (7).¹

Оператор квазилинейной диффузии в случае циклотронного взаимодействия однородной плазмы с шумовым полем (см., например, [8]) в сферической системе координат можно представить в виде

$$Q(f_M) = \frac{1}{v^2} \left[\frac{\partial}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{\mu}{v} - \frac{N_{\parallel}}{c} \right) \right] \left[v^2 (1 - \mu^2) D_{\text{ql}}(v, \mu) \frac{df_M}{dv} \right]. \quad (9)$$

Релятивистскими эффектами в этом выражении мы пренебрегаем всюду, кроме входящего в коэффициент квазилинейной диффузии D_{ql} резонансного условия. Подставляя выражение для $Q(f_M)$ в соотношения (6) и избавляясь от старших производных интегрированием по частям, получаем замкнутые выражения для плотности тока и мощности поглощения СВЧ излучения:

$$j = \int \left\{ \mu v \frac{d(\chi/v)}{dv} + N_{\parallel} \frac{\chi}{c} \right\} (1 - \mu^2) D_{\text{ql}}(v, \mu) \frac{df_M}{dv} d^3 \mathbf{v}, \quad (10)$$

$$P = - \int m v (1 - \mu^2) D_{\text{ql}}(v, \mu) \frac{df_M}{dv} d^3 \mathbf{v}. \quad (11)$$

Первое слагаемое в фигурных скобках определяет ток, связанный с увеличением энергии циклотронного вращения резонансных электронов. Этот ток возникает из-за асимметричной модуляции частоты кулоновских соударений для частиц, движущихся в разных направлениях по отношению к магнитному полю [9]. Второе слагаемое, пропорциональное N_{\parallel} , учитывает наклон линий диффузии квазилинейного оператора при распространении греющего излучения под углом к магнитному полю и отвечает за прямую передачу части продольного импульса электромагнитной волны резонансной частице.

Поскольку коэффициент квазилинейной диффузии линейно зависит от интенсивности высокочастотного поля, отвечающий монохроматической ЭЦ волне ток j_{ω} имеет смысл функции Грина для отклика тока в случае волнового пучка с конечным спектром. Поэтому, хотя формально для монохроматического излучения в однородной плазме квазилинейное описание неприменимо, имеет смысл начинать анализ именно с этого случая. При квазипоперечном по отношению к магнитному полю распространении излучения эффекты конечного угла падения в первую очередь сказываются только в резонансном условии, и коэффициент квазилинейной диффузии можно представить в виде

$$D_{\text{ql}}(v, \mu) = \nu_{\text{ql}} v_e^2 \mathcal{D}(u, \mu) \delta \left(1 - \beta_e N_{\parallel} u \mu - Y \sqrt{1 - \beta_e^2 u^2} \right), \quad (12)$$

где ν_{ql} — некоторая характерная частота взаимодействия с высокочастотным полем, безразмерный коэффициент $\mathcal{D}(u, \mu)$ с точностью до членов порядка N_{\parallel}^2 совпадает со своим значением для строго поперечного распространения, поэтому будем считать $\mathcal{D}(u, \mu)$ чётной функцией по аргументу μ ; δ -функция

¹ Численное интегрирование уравнения (7) проводилось в области $0 < u < 5$ на сетке, содержащей 15 000 равномерно распределённых точек, с граничными условиями $\chi(0) = 0$ и $\chi''(5) = 0$. Для ускорения сходимости итерационного метода для неинтегральных членов использовалась неявная схема.

выражает релятивистское резонансное условие (1), $\beta_e = v_e/c$, $Y = n\omega_c/\omega$. После подстановки коэффициента (12) в выражение для полного тока (10) интегрирование по переменной v производится элементарно благодаря наличию δ -функции под знаком интеграла. В полученное выражение входит «резонансное» значение модуля скорости, определяемое из условия (1):

$$u_{\text{res}}(\mu) = u_0 + N_{\parallel}\mu/(\beta_e Y^2) + O(N_{\parallel}^2\mu^2), \quad u_0 = \sqrt{Y^2 - 1}/(\beta_e Y) \approx \sqrt{2(n\omega_c - \omega)/(\beta_e^2 n\omega_c)}, \quad (13)$$

где u_0 имеет смысл характерного радиуса резонансной полуокружности в пространстве $(u_{\parallel}, u_{\perp})$. Интегрирование по оставшейся в выражении для тока питч-угловой переменной легко провести, предполагая смещение резонансной полуокружности малым по сравнению с её радиусом, $N_{\parallel} \ll \beta_e Y^2 u_0$, и раскладывая подынтегральное выражение в ряд по степеням $N_{\parallel} \rightarrow 0$. Оставляя только линейные члены, получаем искомое выражение для плотности тока:

$$j_{\omega} = J_0 \left\{ -\frac{1}{u} \left[u^4 \exp(-u^2) \left(\frac{\chi}{u} \right)' \mathcal{D}_2 \right]' + \beta_e^2 Y^2 u^4 \exp(-u^2) \left(\frac{\chi}{u} \right)' \mathcal{D}_2 - \beta_e^2 Y^2 u^2 \exp(-u^2) \chi \mathcal{D}_0 \right\} \Big|_{u=u_0} + O(N_{\parallel}^2), \quad (14)$$

где $J_0 = (4/\sqrt{\pi})(en_e v_e/\nu_e) \nu_{\text{ql}} N_{\parallel}/(\beta_e^3 Y^4)$ — нормировочный коэффициент, пропорциональный N_{\parallel} , штрихом обозначены производные по u , зависимости \mathcal{D}_0 и \mathcal{D}_2 получаются в результате усреднения коэффициента диффузии по питч-углу:

$$\mathcal{D}_n(u) = \int_{-1}^{+1} \mu^n (1 - \mu^2) \mathcal{D}(u, \mu) d\mu. \quad (15)$$

В разложении учтено, что функции \mathcal{D}_n с нечётным индексом обращаются в нуль. Аналогичным образом для плотности мощности поглощения (11) можно получить

$$P_{\omega} = \nu_{\text{ql}} n_e m v_e^2 \frac{4}{\sqrt{\pi} \beta_e^2 Y^2} \left[u^3 \exp(-u^2) \mathcal{D}_0 \right] \Big|_{u=u_0} + O(N_{\parallel}^2). \quad (16)$$

Поясним смысл различных слагаемых в квадратных скобках в выражении (14). Первое слагаемое получается, если считать, что при циклотронном взаимодействии продольный импульс частицы не меняется, а резонансные линии аппроксимировать полуокружностями (что соответствует $\sqrt{1 - \beta_e^2 u^2} \approx 1 - \beta_e^2 u^2/2$ в формуле (12)). Второе слагаемое появляется за счёт производной аргумента δ -функции при учёте следующих релятивистских поправок в резонансном условии, а третье слагаемое — при учёте конечного наклона линий квазилинейной диффузии. Оба последних слагаемых дают малые поправки порядка β_e^2 , поэтому в дальнейшем учитываться не будут.

2. ГЕНЕРАЦИЯ ТОКА В ОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЕ

В качестве примера рассмотрим два наиболее важных для экспериментов по УТС случая: генерацию тока обыкновенной волной на первой циклотронной гармонике и необыкновенной волной на второй циклотронной гармонике. Рассматривая соответствующие коэффициенты квазилинейной диффузии [8] в дипольном приближении $v/c \ll 1$, можно получить, что усреднённые по питч-углу коэффициенты диффузии в обоих случаях отличаются только численными множителями в выражении $\mathcal{D}_n = \alpha_n u^2$: для обыкновенной волны $\alpha_0 = 4/15$, $\alpha_2 = 4/35$ ($\mathcal{D} = u_{\parallel}^2$); для необыкновенной волны

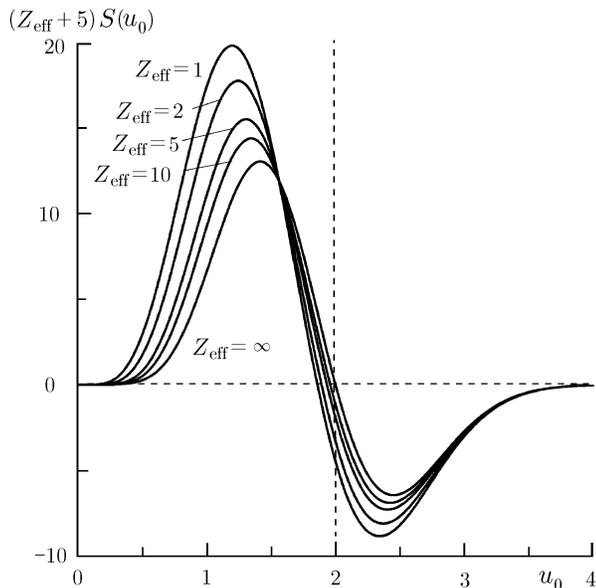


Рис. 1. Плотность тока, генерируемого монохроматической волной ($S = j_\omega/(\alpha_2 J_0)$), в зависимости от резонансной скорости

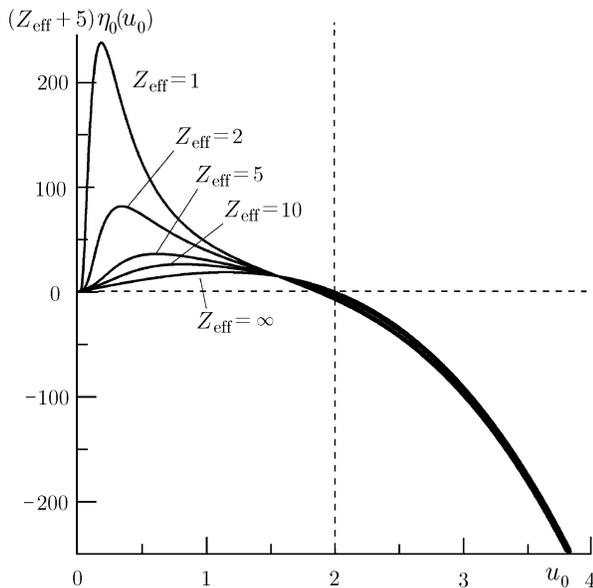


Рис. 2. Зависимость локальной эффективности генерации тока монохроматической волной от резонансной скорости

$\alpha_0 = 16/15$, $\alpha_2 = 16/105$ ($\mathcal{D} = u_\perp^2$). Пренебрегая слагаемыми порядка β_e^2 , выражение (14) можно представить в виде $j_\omega = \alpha_2 J_0 S(u_0)$, где функция S в явном виде выражает зависимость плотности тока от положения резонансной области:

$$S(u) = -\frac{1}{u} \left[u^6 \exp(-u^2) \left(\frac{\chi}{u} \right)' \right]' . \quad (17)$$

На рис. 1 функция $S(u_0)$ построена для различных значений эффективного зарядового числа ионов. При $u_0 \approx 2$ ток меняет знак, что связано с наличием резонансных частиц с разным знаком продольной компоненты скорости. Из условия циклотронного резонанса видно (см., например, (13)), что электроны с $v_{\parallel} N_{\parallel} > 0$ в среднем обладают несколько большей энергией, чем движущиеся им навстречу электроны с $v_{\parallel} N_{\parallel} < 0$. Из-за этого резонансные электроны из первой группы более эффективно взаимодействуют с высокочастотным полем и реже соударяются, чем электроны из второй группы, зато в последней содержится больше частиц. Поэтому возмущения функции распределения при $v_{\parallel} < 0$ и $v_{\parallel} > 0$ могут быть одного порядка, а их конкуренция и приводит к смене направления тока.

Напомним, что плотность тока пропорциональна функции S только в том случае, если разброс частот в спектре излучения достаточно узкий: $\delta u_0 \ll 1$, т.е. $\delta \omega \ll 2u_0 \beta_e^2 n \omega_c$. Если это неравенство выполнено, то имеет смысл ввести локальную эффективность генерации тока:

$$\eta_\omega \equiv \frac{j_\omega}{P_\omega} = \frac{e}{\nu_e m v_e} \frac{c N_{\parallel}}{v_e} \frac{\alpha_2}{\alpha_0} \eta_0(u_0). \quad (18)$$

Безразмерная функция $\eta_0(u_0)$, выражающая зависимость эффективности генерации тока от положения области энерговклада для разных значений эффективного заряда ионов, приведена на рис. 2.

Если скорость электрона велика по сравнению с тепловой, то уравнение (7) вырождается в более простое: $u\chi' + (Z_{\text{eff}} + 1)\chi = -u^4$. В пределе $u \rightarrow \infty$ это уравнение имеет решение $\chi^\infty(u) = -u^4/(Z_{\text{eff}} + 5)$. Заметим, что такое же решение (только без 5 в знаменателе) соответствует и другому предельному

случаю — модели соударений Лоренца ($Z_{\text{eff}} \gg 1$). Подставляя функцию χ^∞ в (17), получаем

$$S(u) \approx \frac{24a}{Z_{\text{eff}} + 5} u^m [1 - (u/b)^{8-m}] \exp(-u^2), \quad \eta_0(u) \approx \frac{24a}{Z_{\text{eff}} + 5} u^{m-5} [1 - (u/b)^{8-m}], \quad (19)$$

где $a = 1$; $b = 2$; $m = 6$ (равенство становится строгим при $Z_{\text{eff}} \rightarrow \infty$ или $u \rightarrow \infty$). Первая формула хорошо аппроксимирует функцию S при конечных значениях эффективного зарядового числа ионов Z_{eff} , если варьировать параметры a , b и m ; примеры наборов таких параметров представлены в табл. 1. При использовании приведённой в табл. 1 аппроксимации абсолютная ошибка мала при всех значениях u , но относительная ошибка становится большой при $u \lesssim 0,5$ (поэтому в этом диапазоне формула неприменима, например, для расчёта эффективности генерации тока).

Таблица 1.
Аппроксимация функции S при конечных значениях Z_{eff}

Z_{eff}	1	1	2	2	5	5	10	10
m	3,731	4	4,165	4	4,793	5	5,220	5
a	2,114	2,037	1,778	1,819	1,403	1,360	1,216	1,254
b	1,850	1,860	1,882	1,877	1,926	1,932	1,953	1,947

Рассмотрим случай, когда резонансная область в пространстве скоростей обладает конечной шириной, на примере волнового пучка с гауссовым частотным спектром. Чтобы найти ток, надо просуммировать с соответствующим весом вклады $S(u_0)$ для всех частот:

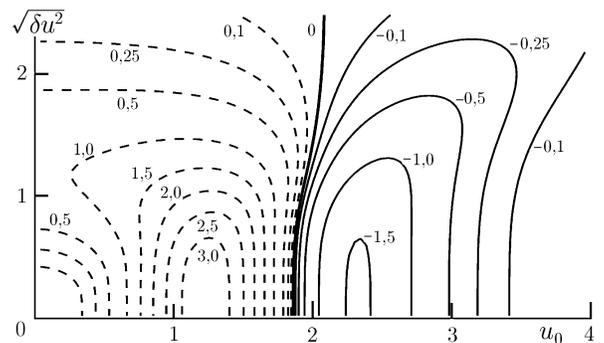
$$j = \int_{-\infty}^{+\infty} j_\omega \frac{1}{\sqrt{2\pi} \delta\omega} \exp\left[-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2(\delta\omega)^2}\right] d\omega = \alpha_2 J_0 \int_0^\infty S(u) \frac{1}{\sqrt{2\pi} \delta u^2} \exp\left[-\frac{(u^2 - u_0^2)^2}{2(\delta u^2)^2}\right] d(u^2). \quad (20)$$

Подставляя в (20) функцию S в виде аппроксимации (19), можно получить конечные выражения для этого интеграла; например, для $m = 4$ имеем

$$j = -\alpha_2 J_0 \frac{24a}{Z_{\text{eff}} + 5} \left\{ \frac{\tilde{u}_0^2 \delta u^2 [\tilde{u}_0^4 + 5(\delta u^2)^2 - b^4]}{\sqrt{\pi} b^4} \exp\left[-\frac{u_0^4}{2(\delta u^2)^2}\right] + \frac{\tilde{u}_0^8 + 6\tilde{u}_0^4(\delta u^2)^2 + 3(\delta u^2)^4 - b^4[\tilde{u}_0^4 + (\delta u^2)^2]}{2b^4} \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{\tilde{u}_0^2}{\sqrt{2}\delta u^2}\right)\right] \exp\left[-u_0^2 + \frac{(\delta u^2)^2}{2}\right] \right\}, \quad (21)$$

где $\tilde{u}_0^2 \equiv u_0^2 - \delta u^2$. На рис. 3 построены линии уровня этой функции в плоскости параметров u_0 и $\sqrt{\delta u^2}$, определяющих геометрию резонансной области, для случая $Z_{\text{eff}} = 1$ (т. е. $a = 2,037$; $b = 1,86$). На рис. 3 видно, как максимум и минимум плотности тока, чётко выраженные при малых δu^2 , расплываются при увеличении ширины резонансной области.

Рис. 3. Линии уровня плотности тока в плоскости параметров резонансной области u_0 и $\sqrt{\delta u^2}$. Приведены значения $j/(\alpha_2 J_0)$, соответствующие формуле (21) при $Z_{\text{eff}} = 1$



3. ОЦЕНКА ТОКА В ТОРОИДАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ

Стандартная локальная квазилинейная теория циклотронного поглощения может быть использована для моделирования ЭЦ нагрева плазмы монохроматическим излучением на выделенной магнитной поверхности тороидальной системы, если учесть эффективное уширение спектра греющего излучения, возникающее из-за вариации резонансной гирочастоты электронов на пересечении магнитной поверхности с квазиоптическим волновым пучком [10]. Чтобы выделить рассматриваемый механизм генерации тока в явном виде, тороидально запертые частицы и эффекты баунс-усреднения для пролётных частиц мы учитывать не будем, предполагая согласно [10], что на каждой магнитной поверхности квазилинейный оператор устроен так же, как и в однородной плазме. Эффективный частотный спектр излучения, в конечном счёте определяемый распределением электромагнитного поля в поперечном сечении волнового пучка, для современных установок можно считать достаточно узким. Поэтому для оценки плотности тока и мощности поглощения можно пользоваться формулами (14) и (16) для монохроматического отклика.

Для вычисления полного тока необходимо учесть пространственную неоднородность тороидального магнитного поля (остальными компонентами магнитного поля в системе пренебрегаем). В крупных установках в случае квазипоперечного распространения СВЧ пучка область циклотронного поглощения, как правило, является малой в масштабе поперечного сечения плазменного шнура. Поэтому допустим, что внешнее магнитное поле линейно возрастает в пространстве вдоль некоторой координаты z :

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 (1 + z/R), \quad \mathbf{H}_0 \perp \mathbf{z}_0, \quad (22)$$

где \mathbf{z}_0 — орт оси z , а остальные параметры плазмы однородны. Электромагнитное излучение распространяется вдоль координаты z почти ортогонально к направлению магнитного поля в положительном направлении оси z в случае ввода СВЧ пучка со стороны слабого магнитного поля. Резонансная энергия электронов меняется вдоль пространственной координаты одновременно с магнитным полем: из соотношений (13) и (22) следует, что $u_0^2 \approx 2z/(\beta_e^2 R)$, если в точке $z = 0$ частота излучения в точности равна рассматриваемой гармонике нерелятивистской гирочастоты электрона. Спектральная интенсивность греющего излучения I_ω также меняется в пространстве из-за поглощения высокочастотного поля плазмой:

$$\frac{dI_\omega}{dz} = -P_\omega(z) = -\mu_\omega(z)I_\omega, \quad (23)$$

где μ_ω обозначает коэффициент циклотронного поглощения, который легко может быть получен из формулы (16).

Эффективность генерации полного тока в неоднородной системе можно получить, если просуммировать вклад всех пространственных точек в ток и мощность поглощения с учётом решения уравнения переноса излучения (23):

$$\eta_{\text{tot}} \equiv \frac{J_{\text{tot}}}{P_{\text{tot}}} = \int j_\omega \exp(-\tau) dz / \int P_\omega \exp(-\tau) dz, \quad (24)$$

где τ — оптическая толщина плазменного слоя в точке z ; в случае ввода излучения со стороны слабого магнитного поля $\tau(z) = \int_0^z \mu_\omega dz$. Полная поглощаемая мощность связана с вводимой в установку мощностью P_{inp} простым соотношением $P_{\text{tot}} = P_{\text{inp}} [1 - \exp(-\tau_0)]$, где $\tau_0 = \int_0^\infty \mu_\omega dz$ — полная оптическая толщина слоя плазмы. Подставляя соотношения (14) и (16) в (24) и заменяя интегрирование по пространственной переменной интегрированием по резонансной скорости $u \sim \sqrt{z}$, получаем

$$\eta_{\text{tot}} = \frac{e}{\nu_e m v_e} \frac{c N_{\parallel}}{v_e} \frac{\alpha_2}{\alpha_0 (Z_{\text{eff}} + 5)} \eta^*. \quad (25)$$

Здесь η^* — численный фактор, зависящий только от оптической толщины τ_0 и эффективного заряда ионов. Для оптически толстых мод, рассмотренных в предыдущем разделе,

$$\eta^*(\tau_0) = \int_0^\infty u S(u) \exp[-\tau_0 \xi(u)] du / \int_0^\infty u^6 \exp[-u^2 - \tau_0 \xi(u)] du, \quad \xi(u) = \frac{16}{15\sqrt{\pi}} \int_0^u u^6 \exp(-u^2) du, \quad (26)$$

где ξ имеет смысл оптической толщины конечного плазменного слоя, нормированной на единицу. Приведённая формула для η^* верна для случая ввода излучения со стороны слабого магнитного поля; в случае ввода СВЧ пучка со стороны сильного поля надо заменить ξ на $1 - \xi$. При $\tau_0 \rightarrow 0$ рассматриваемое выражение для η^* также стремится к нулю (это следует из «дивергентного» вида функции S), поэтому полный ток в этом случае определяется квадратичными поправками порядка β_e^2 , которые мы не учитываем.

На рис. 4 построена функция $\eta^*(\tau_0)$ для различных значений эффективного заряда при вводе излучения со стороны слабого или сильного магнитного поля. Направление тока при фиксированном N_{\parallel} зависит от направления ввода излучения: при вводе со стороны слабого магнитного поля излучение поглощается низкоэнергичными электронами, поэтому ток имеет тот же знак, что и выражение eN_{\parallel} ; при вводе со стороны сильного магнитного поля знак тока противоположный, поскольку поглощение начинается с высокоэнергичных частиц. Заметим, что в последнем случае легко выйти за пределы применимости приведённой в работе теории, поскольку при расчёте циклотронного взаимодействия излучения с энергичными частицами необходимо учитывать возмущение их функции распределения в квазилинейном операторе, что приводит к деградации эффективности генерации тока уже при вполне умеренной мощности вводимого в установку СВЧ пучка [11].

Для сравнения приведём стандартное выражение, полученное Фишем и Бузером, для эффективности ЭЦ генерации тока в нерелятивистском случае [12]:

$$\eta_{\text{FB}} = \frac{e}{v_e m v_e} \frac{\langle v_{\parallel}^2 \rangle}{v_e^2} \frac{3}{Z_{\text{eff}} + 5}, \quad (27)$$

где $\langle v_{\parallel}^2 \rangle \approx c(1 - n\omega_c/\omega)/N_{\parallel}$ обозначает среднее значение продольной скорости в резонансной области. Если $cN_{\parallel}/(v_e \eta^*) \sim \langle v_{\parallel}^2 \rangle/v_e^2$, то эффективность генерации полного тока в случае квазипоперечного ввода сопоставима со «стандартной» эффективностью (27). В принципе, это возможно за счёт фактора η^* , принимающего в термоядерной плазме значения $\eta^* \sim 20 \div 40$. Отметим, что в «стандартном» случае оптическая толщина плазменного шнура существенно меньше оптической толщины при квазипоперечном вводе, что приводит к более широким профилям тока и к уменьшению полного тока за счёт поглощения только части вводимого в установку излучения ($P_{\text{tot}} < P_{\text{inp}}$). Таким образом, способ квазипоперечного ввода излучения в установку представляется весьма привлекательным для создания высокой плотности тока за счёт хорошего поглощения СВЧ излучения.

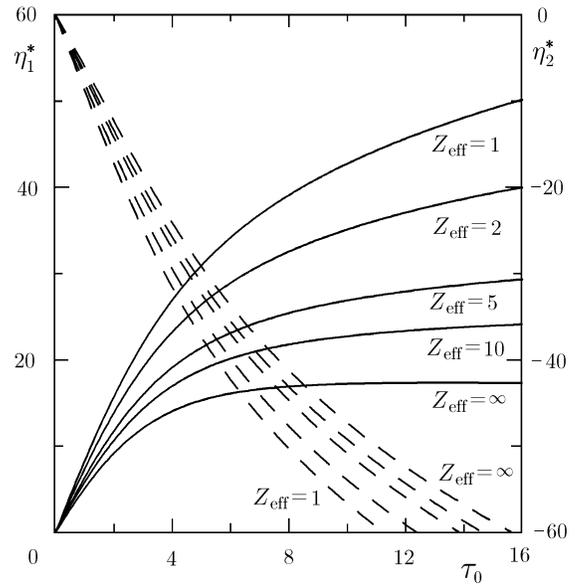


Рис. 4. Зависимость полного тока от оптической толщины плазменного слоя в линейно неоднородном магнитном поле; излучение вводится со стороны слабого (сплошные линии, $\eta_1^*(\tau_0)$) или сильного (пунктирные линии, $\eta_2^*(\tau_0)$) магнитного поля

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Возмущения функции распределения электронов, рассмотренные в настоящей работе, локализованы в области тепловых энергий. Указанное обстоятельство не позволяет построить простые решения двумерного кинетического уравнения, как это обычно удаётся сделать в случае оператора соударений в пределе энергий, много больших тепловой. Тем не менее, используя интегральные свойства линеаризованного оператора соударений, выражения для тока (как и для других моментов функции распределения) удаётся выразить через одномерную функцию χ , не зависящую от структуры квазилинейного оператора. С учётом этого обстоятельства тепловая область энергий оказалась даже более простой для анализа, поскольку в ней можно пренебречь квазилинейной деградацией эффективности генерации тока, которая играет весьма существенную роль при создании безындукционного тока энергичных частиц.

Автор выражает глубокую благодарность М. Д. Токману, дискуссии с которым фактически инициировали данную работу, и Е. В. Суворову за оказанную поддержку и ценные замечания.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 00–02–17200 и 99–02–16230).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Karney C. F. F., Fish N. J. // *Phys. Fluids*. 1986. V. 29. No 1. P. 180.
2. Chapman S., Cowling T. G. *The Mathematical Theory of Non-uniform Gases*: 3d edition. Cambridge: Cambridge University Press, 1970.
3. Брагинский С. И. // *Вопросы теории плазмы*. Вып. 1. М.: Госатомиздат, 1963.
4. Hirshman S. P. // *Phys. Fluids*. 1980. V. 23. P. 1 238.
5. Antonsen T. M. (Jr.), Chu K. R. // *Phys. Fluids*. 1982. V. 25. P. 1 295.
6. Spitzer L., Härm R. // *Phys. Rev.* 1953. V. 39, No 3. P. 977.
7. Karney C. F. F. // *Computer Physics Reports*. 1986. V. 4. P. 183.
8. Ахиезер А. И., Ахиезер И. А., Половин Р. В. и др. *Электродинамика плазмы*. М.: Наука, 1974.
9. Fish N. J., Boozer A. H. // *Phys. Rev. Lett.* 1980. V. 45, No 9. P. 720.
10. Suvorov E. V., Tokman M. D. // *Plasma Phys.* 1983. V. 25, No. 7. P. 723.
11. Kuyanov A. Yu., Skovoroda A. A., Tokman M. D. // *Plasma Phys. Control. Fus.* 1997. V. 39. P. 277.
12. Fish N. J. // *Rev. Mod. Phys.* 1987. V. 59. P. 175.

Институт прикладной физики РАН, г. Нижний Новгород,
Россия

Поступила в редакцию
28 мая 2001 г.

ELECTRON-CYCLOTRON CURRENT DRIVE UNDER QUASI-TRANSVERSE RF-BEAM LAUNCH

A. G. Shalashov

We consider a linear current-drive mechanism under conditions of the electron-cyclotron resonance in the case of quasi-transverse launch of microwave radiation in a toroidal plasma from the low-field side. In this specific scenario, the electromagnetic-field energy is absorbed mainly by low-energy thermal electrons under the combined influence of the Doppler shift and the relativistic mass dependence on the condition of electron-cyclotron resonance. This can lead to a degradation of the current-drive efficiency and even to current reversal with respect to the direction of microwave-beam launch. The kinetic equation is analyzed using the method of “adjoint” equation for the current, which permits accurate treatment of electron-electron collisions for an arbitrary effective charge of the ion component.

УДК 538.562+621.385.6

К ДИНАМИКЕ МЕТАСТАБИЛЬНЫХ ЭЛЕКТРОНОВ В ВИРТУАЛЬНОМ КАТОДЕ*А. Е. Дубинов, С. К. Сайков, В. Д. Селемир*

Предложена простая модель динамики ранее обнаруженных метастабильных электронов, осциллирующих близи виртуального катода. Найдена аналогия их поведения и динамики обращённого маятника с вибрирующим подвесом, исследованного П. Л. Капицей. Методом крупных частиц оценено количество метастабильных электронов.

Если в эквипотенциальную вакуумную полость инжектировать электронный пучок, то при большом значении тока пучка в полости формируется потенциальный барьер. Этот барьер будет препятствовать прохождению пучка и отражать электроны назад. Точка остановки и отражения электронов получила название виртуального катода.

Известно, что виртуальный катод движется так, что его положение в пространстве и электрический потенциал в минимуме меняются периодически. Поэтому он то пропускает электроны пучка вперёд, то отражает их назад, работая как периодический клапан. Электроны из первой группы называются пролётными, а из второй — отражёнными. Их количественный баланс определяется отношением тока пучка к предельному току, при котором образуется виртуальный катод.

При моделировании динамики пучка с виртуальным катодом электростатическим методом крупных частиц в одномерной постановке, когда крупные частицы представляли собой заряженные плоскости, в [1] была обнаружена ещё одна группа электронов, названных метастабильными. Эти электроны подлетают к виртуальному катоду и осциллируют вместе с ним в течение нескольких периодов изменения его параметров (зарегистрировано до 20 таких колебаний), после чего присоединяются либо к пролётным электронам, либо к отражённым (см. также [2]). Пример рассчитанных траекторий электронов на плоскости пространство—время (z, t) с выделенной траекторией метастабильного электрона, взятый из работ [1, 2], показан на рис. 1. Наличие таких электронов оказалось неожиданным сюрпризом, т. к. они находятся вблизи вершины профиля своей потенциальной энергии и их положение, в принципе, должно быть неустойчиво.

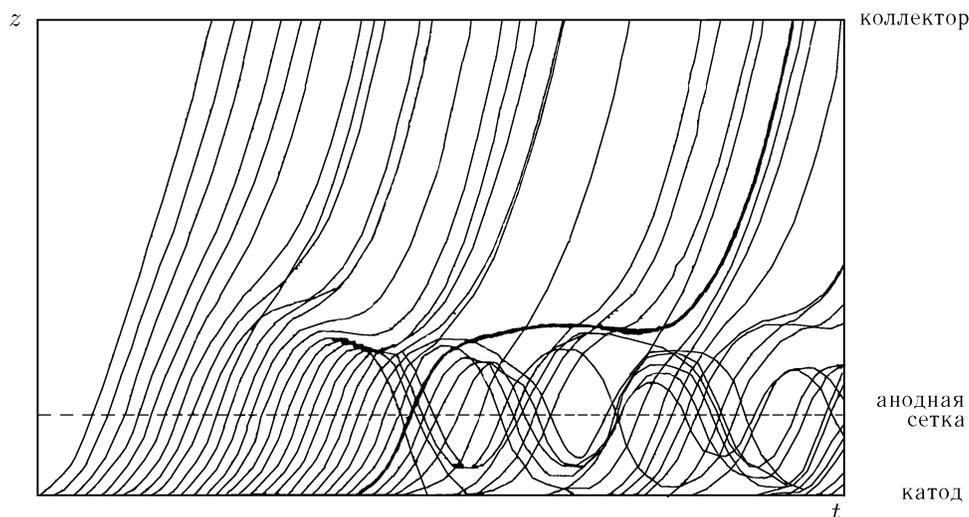


Рис. 1

В работах других авторов [3, 4], где электронный пучок с виртуальным катодом моделировался другим методом, также основанном на электростатическом уравнении, метастабильные электроны тоже были обнаружены. Было найдено, что с течением времени число метастабильных электронов у виртуального катода уменьшается.

Однако работы [1–4] только обнаружили новое явление, но не объяснили его. Целью данной работы является поиск ответов на следующие вопросы:

1) В чём причина устойчивости метастабильных электронов и каков механизм их удержания вблизи виртуального катода?

2) Является ли наличие метастабильных электронов эффектом численного счёта в рамках одномерного приближения, или они существуют в реальных многомерных конфигурациях?

3) Является ли наличие метастабильных электронов электростатическим эффектом, или они существуют в электромагнитных полях?

4) Каково относительное количество метастабильных электронов по сравнению с общим количеством электронов пучка?

Рассмотрим сначала вопрос о механизме устойчивости и удержания метастабильных электронов вблизи виртуального катода. Если бы виртуальный катод был неподвижен, то метастабильные электроны, очевидно, не наблюдались бы, т. к. минимум электростатического потенциала вблизи виртуального катода является для отрицательно заряженных электронов потенциальной вершиной. Осцилляции же виртуального катода в пространстве приводят к тому, что вершина профиля потенциальной энергии также осциллирует. И если при таких колебаниях вершина потенциального профиля перемещается быстрее, чем некоторые низкоэнергичные электроны, то при правильном выборе фазы электрона может оказаться, что осциллирующий виртуальный катод как бы образует локальную потенциальную яму для электронов с то попеременно появляющимися, то исчезающими стенками.

Устойчивость положения электронов вблизи потенциальной вершины аналогична устойчивости обращённого маятника с вибрирующим подвесом, исследованного П. Л. Капицей [5, 6] (см. также [7]), у которого верхнее, неустойчивое положение под действием вибраций приобретает устойчивость.

Так как виртуальный катод — фазовое электронное образование, то его инерция мала, и амплитуда скорости его колебаний может превышать скорость некоторых электронов. Это обстоятельство позволяет сконструировать простую модель удержания электрона осциллирующей потенциальной вершиной. Для простоты рассмотрим вершину гауссовского потенциального профиля, положение и высота которой осциллируют во времени с некоторой частотой ω :

$$U(z, t) = [a_0 - a_1 \sin \omega t] \exp[-\delta (z - \xi \cos \omega t)^2], \quad (1)$$

где a_0 , a_1 , δ , ξ — некоторые положительные константы. Выбор такого поведения вершины потенциального профиля согласуется с расчётами работы [8]. Уравнение движения электрона

$$\ddot{z} = -\partial U(z, t) / \partial z \quad (2)$$

решалось численно; график решения $z(t)$ при $\omega = 1$; $a_0 = 4$; $a_1 = 0,6$; $\delta = 0,1$; $\xi = 0,1$ и начальных условиях $z(0) = 0,02$; $\dot{z}(0) = 0,0197143964$ представлен на рис. 2. Там же показана и траектория дви-

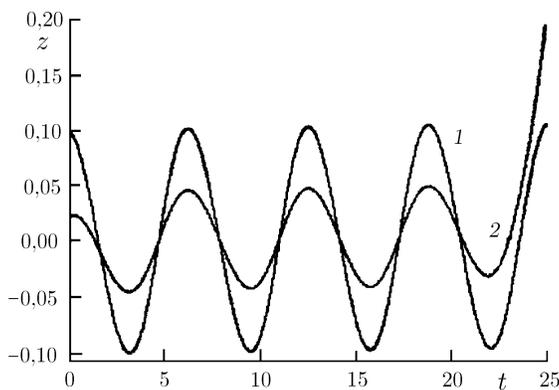


Рис. 2. Траектория движения виртуального катода (кривая 1) и график решения $z(t)$ уравнения (2) (кривая 2)

жения вершины потенциальной энергии. Такие решения с конечным числом осцилляций получались и при других параметрах задачи.

В процессе поиска подобных метастабильных решений выявились следующие закономерности:

- метастабильный электрон всегда движется в фазе с движением виртуального катода;
- амплитуда скорости и размах колебаний положения метастабильного электрона всегда меньше соответствующих значений для виртуального катода (это обстоятельство соответствует условию устойчивости обращённого маятника Капицы);

- движение метастабильного электрона тем устойчивее, чем положе профиль потенциала, т. е. чем меньше δ .

Для ответа на вопросы 2)–4) мы использовали полностью самосогласованный электромагнитный релятивистский PIC-код «КАРАТ» [9], модернизированный так, чтобы можно было обнаружить метастабильные электроны и рассчитать их количество. Для этого в пространстве вблизи виртуального катода выделялся некоторый объём и отслеживалось время нахождения каждой крупной частицы в этом объёме. После окончания расчёта строилась функция распределения электронов по времени нахождения. Один из типичных исследованных примеров представлен ниже.

Эквипотенциальная полость представляла собой круговой цилиндр радиусом $R = 2$ см и длиной $L = 15$ см, ограниченный проводящими торцами. Считалось, что на полость наложено однородное сильное магнитное поле $B = 30$ кГс. С левого торца (рис. 3а) в полость инжектировался моноэнергетический трубчатый электронный пучок с энергией электронов $E = 511$ кэВ (лоренц-фактор $\gamma = 2$), радиусом $r_b = 1$ см и толщиной трубки тока $\Delta r = 0,2$ см. Для оценки предельного тока при такой геометрии задачи удобно воспользоваться известной формулой из [10]:

$$I_{\text{lim}} = \frac{mc^3}{e} \frac{(\gamma^{2/3} - 1)^{3/2}}{\left(\frac{\Delta r}{r_b} + 2 \ln \frac{R}{r_b}\right) \left(1 - \text{ch}^{-1}\left(\frac{\mu_1 L}{2R}\right)\right)}, \quad (3)$$

где μ_1 — первый корень функции Бесселя нулевого порядка, m — масса покоя электрона, e — элементарный заряд, c — скорость света. Вычисление даёт $I_{\text{lim}} \approx 4,82$ кА.

Типичный мгновенный фазовый портрет пучка при токе выше предельного показан на рис. 3б. Видно, что в этом случае в полости существует виртуальный катод. Объём, время нахождения электронов в котором отслеживалось в течение 15 нс, показан на рис. 3а пунктиром.

Было обнаружено, что метастабильные электроны присутствуют в заметном количестве, когда ток пучка ненамного превышает предельный ток I_{lim} . Это видно на примере функции распределения электронов по времени их нахождения в выделенном объёме для тока пучка $I = 5,15$ кА (рис. 4а) и для тока $I = 10$ кА (рис. 4б). Двугорбая вершина функции распределения на рис. 4а, σ соответствует пролётным и отражённым электронам, а длинный хвост распределения на рис. 4а — метастабильным электронам. Количество последних составляет несколько десятых долей процента от общего количества электронов. Для случая, показанного на рис. 4б, метастабильные электроны не наблюдаются, хотя их наличие в небольшом количестве полностью не исключается. То обстоятельство, что доля метастабильных электронов падает с ростом тока пучка, по-видимому, связано с тем, что, во-первых, с ростом тока электромагнитные колебания в полости становятся более нерегулярными, и, во-вторых, с ростом тока пучка увеличивается количество всех электронов: если бы общее количество метастабильных электронов было всегда одинаковым, то их относительное число падало бы.

Таким образом, выявлен механизм появления вблизи виртуального катода метастабильных электронов, которые устойчиво осциллируют вместе с ним. На простой модели исследована динамика таких осцилляций и выявлены их закономерности. Двумерное полностью самосогласованное компьютерное моделирование подтвердило наличие таких электронов и позволило оценить их количество.

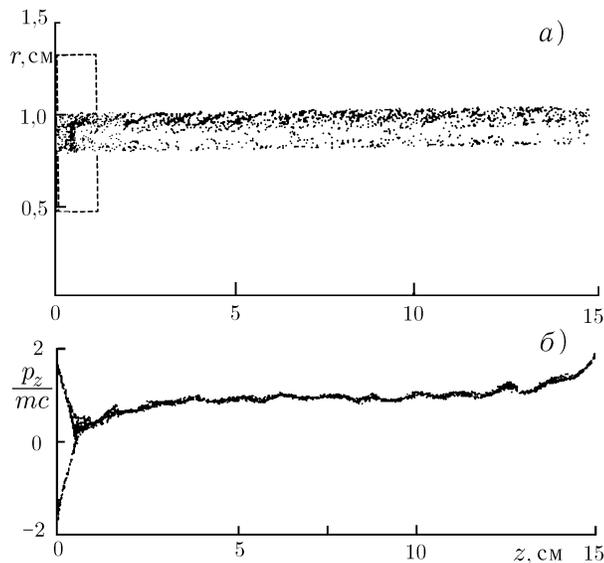


Рис. 3. Моделирование пучка с виртуальным катодом: (а) геометрия задачи с указанием размеров; вычислялась функция распределения электронов по времени нахождения в объёме, выделенном пунктиром; (б) мгновенный фазовый портрет пучка; p_z — продольная компонента импульса электрона

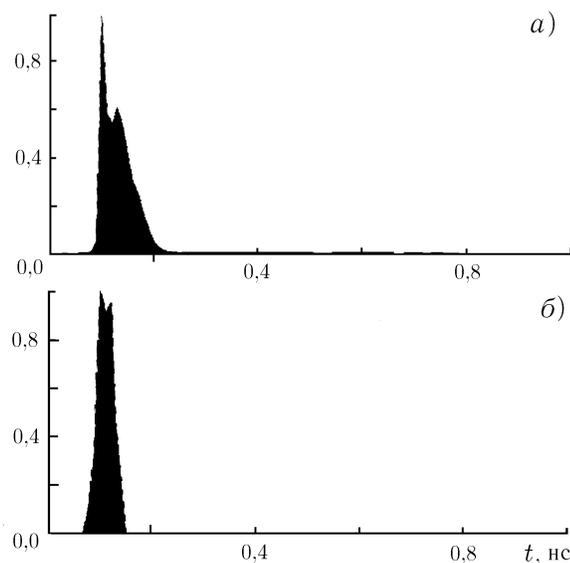


Рис. 4. Функция распределения электронов по времени нахождения в выделенном объёме для пучка с током 5,15 кА (а) и с током 10 кА (б)

Подчеркнём, что метастабильные электроны, двигаясь в фазе с виртуальным катодом, увеличивают дипольный момент системы виртуальный катод—его изображение на анодной сетке, поэтому увеличение числа таких электронов позволило бы повысить КПД СВЧ генераторов с виртуальным катодом, о чём кратко упомянуто в [1].

Авторы выражают благодарность В. П. Тараканову за консультации и помощь при работе с кодом «КАРАТ».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ватрунин В. Е., Дубинов А. Е., Селемир В. Д. Моделирование СВЧ приборов с виртуальным катодом в реальном масштабе времени: Препринт ВНИИЭФ № 31–93. Арзамас-16, 1993.
2. Alyokhin V. V., Dubinov A. E., Selemir V. D. et al. // IEEE Trans. Plasma Sci. 1994. V. 22, No 5. P. 945.
3. Кузнецов В. И., Эндер А. Я. // Труды конф. по физике низкотемпературной плазмы. Петрозаводск, 1995. Т. 2. С. 148.
4. Акимов П. В., Колински Х., Кузнецов В. И. и др. // Труды конф. по физике низкотемпературной плазмы. Петрозаводск, 1998, Т. 1, С. 513.
5. Капица П. Л. // ЖЭТФ. 1951. Т. 21, № 5. С. 588.
6. Капица П. Л. // УФН. 1951. Т. 44, № 1. С. 7.
7. Горяченко В. Д. Элементы теории колебаний. Красноярск: Изд-во КрГУ, 1995.
8. Bridges W. B., Birdsall C. K. // J. Appl. Phys. 1963. V. 34, No 10. P. 2946.
9. Tarakanov V. P. User's manual for code Karat. Springfield, VA: Berkley Research Associate Inc., 1992.
10. Альтеркоп Б. А., Сокулин А. Ю., Тараканов В. П. // Физика плазмы. 1989. Т. 15, № 8. С. 974.

Российский федеральный ядерный центр — ВНИИ
экспериментальной физики, г. Арзамас-16, Россия

Поступила в редакцию
18 января 2001 г.

DYNAMICS OF METASTABLE ELECTRONS IN A VIRTUAL CATHODE

A. E. Dubinov, S. K. Saikov, and V. D. Selemir

We propose a simple model of the dynamics of previously discovered metastable electrons oscillating near a virtual cathode. The analogy between the behavior of such electrons and the dynamics of an inverse pendulum with vibrating suspension, studied by P. L. Kapitsa, is revealed. The number of metastable electrons is estimated using the method of large particles.

УДК 534.232+550.834

ИЗЛУЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНОЙ И ВЫТЕКАЮЩЕЙ ВОЛН НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ТВЁРДОЕ ТЕЛО—ГАЗ *

А. В. Разин

Исследовано возбуждение объёмных, вытекающих и поверхностных волн при точечном воздействии гармонической силы, перпендикулярной границе раздела газ—твёрдое тело. Рассмотрен случай, когда скорость звука в газе меньше скорости рэлеевской волны на поверхности твёрдого тела. Получены выражения для средней за период волны мощности излучения продольной и поперечной сферических волн в твёрдом теле и поверхностной волны Стонели. Проанализировано излучение сферической акустической волны в газе и вытекающей псевдорэлеевской волны. Для области пространства, соответствующей зенитным углам, превышающим арксинус отношения скорости звука в газе к скорости поперечных волн в твёрдом теле, где происходит перекачка энергии вытекающей волны в акустическую волну, получено выражение для их суммарной излучаемой мощности.

Исследование систем, допускающих существование в них поверхностных и вытекающих волн, представляет интерес как для волновой теории, так и для различных приложений. Одним из примеров таких систем является плоская граница раздела твёрдого тела и жидкости (газа). В отличие от плоской границы твёрдое тело—вакуум, на которой существует поверхностная волна Рэлея, вдоль плоскости контакта упругой среды с газом распространяются две волны, одна из которых является поверхностной, а другая — вытекающей [1]. Обычно скорость упругих волн в твёрдых телах превышает скорость звука в газах и жидкостях, поэтому поверхностной является волна Стонели, а волна Рэлея, распространяясь вдоль поверхности твёрдого тела, постоянно излучает часть своей энергии в газ, в результате чего её амплитуда экспоненциально спадает вдоль границы. В [2] такая волна была названа псевдорэлеевской волной.

Хорошо известно [3], что при точечном воздействии на поверхность граничащего с вакуумом однородного изотропного твёрдого полупространства перпендикулярной к ней гармонической силы более половины всей излучаемой мощности приходится на долю поверхностной волны Рэлея (конкретное значение определяется соотношением скоростей продольной и поперечной волн). Данное обстоятельство позволяет использовать рэлеевские волны в многочисленных приложениях [4–6]. В связи с этим представляет интерес более детальное исследование возбуждения вытекающей псевдорэлеевской волны и акустической волны в системе газ—твёрдое тело, что и составляет цель настоящей работы.

Итак, пусть плоскость $z = 0$ цилиндрической системы координат (r, φ, z) совпадает с границей раздела однородного газа, имеющего плотность ρ_1 , скорость звука c_1 и заполняющего полупространство $z < 0$, и однородного изотропного твёрдого тела, занимающего полупространство $z > 0$ и характеризуемого плотностью ρ_2 и скоростями продольной и поперечной волн c_ℓ и c_t соответственно. На поверхность твёрдого тела по нормали к ней действует точечная гармоническая сила, т. е. при $z = 0$ выполняются следующие граничные условия для векторов смещений $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ и тензоров напряжений $\sigma_{ik1}, \sigma_{ik2}$ (индекс 1 относится к газу, 2 — к твёрдому телу):

$$u_{z1} = u_{z2}, \quad \sigma_{zr2} = 0, \quad \sigma_{zz1} - \sigma_{zz2} = p = f_0 \frac{\delta(r)}{2\pi r} \exp(-i\omega t), \quad (1)$$

выражающие соответственно равенство нормальных к границе смещений в обеих средах, отсутствие касательных напряжений на поверхности твёрдого тела и равенство разности вертикальных компонент

*Статья подготовлена к юбилею НИРФИ.

напряжений в газе и в твёрдом теле при $z = 0$ давлению p , создаваемому источником. В (1) f_0 — амплитуда приложенной силы, ω — частота, $\delta(r)$ — дельта-функция Дирака.

Смещения в твёрдом теле описываются уравнением Ламэ, а возмущения в газе — системой уравнений гидродинамики, которые для решения рассматриваемой задачи могут быть линеаризованы. В газе введём потенциал смещений ψ_1 , а в твёрдом теле — скалярный ψ_2 и векторный $\mathbf{A} = A \mathbf{e}_\varphi$ потенциалы, где \mathbf{e}_φ — орт оси φ . Смещения частиц \mathbf{u}_1 и давление p_1 в акустической волне и смещения \mathbf{u}_2 в упругих волнах связаны с потенциалами соотношениями

$$\mathbf{u}_1 = \text{grad } \psi_1, \quad p_1 = -\rho_1 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2}, \quad \mathbf{u}_2 = \text{grad } \psi_2 + \text{rot } \mathbf{A}, \quad \text{div } \mathbf{A} = 0. \quad (2)$$

Для потенциалов получаются следующие волновые уравнения:

$$\Delta \psi_1 - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} = 0, \quad \Delta \psi_2 - \frac{1}{c_\ell^2} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2} = 0, \quad \Delta A - \frac{1}{c_t^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0. \quad (3)$$

Решая уравнения (3) с граничными условиями (1) методом преобразований Фурье и учитывая цилиндрическую симметрию задачи, представим потенциалы в виде

$$\psi_1 = \int_0^\infty R_s(k) \exp(-i\kappa_1 z) J_0(kr) k dk, \quad (4)$$

$$\psi_2 = \int_0^\infty T_\ell(k) \exp(i\kappa_\ell z) J_0(kr) k dk, \quad (5)$$

$$A = \int_0^\infty T_t(k) \exp(i\kappa_t z) J_1(kr) k dk. \quad (6)$$

В (4)–(6) k — горизонтальное волновое число, J_0 и J_1 — функции Бесселя нулевого и первого порядка соответственно,

$$R_s = -\frac{f_0 \kappa_\ell k_t^2}{2\pi \rho_2 c_t^2 \kappa_1 S_0(k)}, \quad T_\ell = \frac{f_0 (k_t^2 - 2k^2)}{2\pi \rho_2 c_t^2 S_0(k)}, \quad T_t = \frac{i f_0 \kappa_\ell k}{\pi \rho_2 c_t^2 S_0(k)},$$

$S_0(k) = R_0(k) + \varepsilon k_t^4 \kappa_\ell / \kappa_1$, $R_0(k) = (k_t^2 - 2k^2)^2 + 4k^2 \kappa_\ell \kappa_t$, $\varepsilon = \rho_1 / \rho_2$, $\kappa_{1,\ell,t} = (k_{1,\ell,t}^2 - k^2)^{1/2}$, $k_{1,\ell,t} = \omega / c_{1,\ell,t}$ — волновые числа акустической волны в газе и продольной и поперечной волн в твёрдом теле.

Для сходимости интегралов (4)–(6) при $|z| \rightarrow \infty$ необходимо считать, что

$$(k_{1,\ell,t}^2 - k^2)^{1/2} = i |k^2 - k_{1,\ell,t}^2|^{1/2} \quad \text{при } k > k_{1,\ell,t}.$$

Расчёт мощности упругих волн проведём методом реакции излучения. Он позволяет избежать применения каких-либо приближений, поскольку для его использования достаточно знать выражения для смещений в виде интегралов Фурье. Для гармонического осесимметричного источника средняя за период волны излучаемая мощность даётся выражением

$$W = -\pi \text{Re} \left[i\omega \int_0^\infty p^* u_z(r, 0) r dr \right], \quad (7)$$

где звёздочка означает комплексное сопряжение. Подставим в (7) давление p^* и вертикальные смещения границы раздела $u_z(r, 0)$ в виде интегралов Фурье—Бесселя. Это позволит провести интегрирование по r и записать излучаемую мощность в виде интеграла по волновому числу k :

$$W = \frac{\omega^2 f_0^2}{4\pi\rho_2 c_t^4} \operatorname{Re} \int_0^\infty \frac{\varkappa_\ell}{S_0(k)} k dk. \quad (8)$$

Вклад в реальную часть интеграла (8) дают те участки пути интегрирования, где функция $\varkappa_\ell/S_0(k)$ действительна, а также полувычеты в лежащих на действительной оси полюсах подынтегрального выражения. Полюса определяются из решения уравнения $S_0(k) = 0$ и соответствуют волнам Рэлея и Стонели. Для вычисления полюсов следует задать соотношения между скоростью звука в газе и скоростями упругих волн в твёрдом теле. Будем считать, что $c_1 < c_R$, где c_R — скорость рэлеевской волны на границе твёрдое тело—вакуум. Соответствующее скорости c_R волновое число k_R определяется из уравнения Рэлея $R_0(k) = 0$.

При условии $c_1 < c_R$ уравнение $S_0(k) = 0$ имеет один действительный корень k_S , соответствующий поверхностной волне Стонели [1]. Второй корень этого уравнения является комплексным и соответствует вытекающей псевдорэлеевской волне, амплитуда которой экспоненциально спадает вдоль границы. Таким образом, интегрирование в (8) в пределах от нуля до $k = k_1$ (при $k > k_1$ функция $\varkappa_\ell/S_0(k)$ чисто мнимая) даёт суммарную мощность излучения сферической акустической волны в газе, сферических продольной и поперечной упругих волн и вытекающей волны (обозначим эту сумму W_Σ):

$$W_\Sigma = \frac{\omega^3 f_0^2}{4\pi\rho_2 c_t^4} \operatorname{Re} \int_0^{k_1} \frac{\varkappa_\ell}{S_0(k)} k dk. \quad (9)$$

Мощность излучения поверхностной волны Стонели W_S пропорциональна полувычету в полюсе $k = k_S$:

$$W_S = -\frac{\omega^3 f_0^2 k_S \sqrt{k_S^2 - k_\ell^2}}{4\rho_2 c_t^4 S'_0(k_S)}, \quad (10)$$

где

$$S'_0(k_S) = \left. \frac{dS_0(k)}{dk} \right|_{k=k_S} = 8k_S \left(2k_S^2 - k_t^2 - \sqrt{k_S^2 - k_\ell^2} \sqrt{k_S^2 - k_t^2} \right) + \\ + \frac{4k_S^3 (k_\ell^2 + k_t^2 - 2k_S^2)}{\sqrt{k_S^2 - k_\ell^2} \sqrt{k_S^2 - k_t^2}} - \varepsilon \frac{4k_t^4 k_S (k_1^2 - k_\ell^2)}{(k_S^2 - k_1^2)^{3/2} \sqrt{k_S^2 - k_\ell^2}}.$$

Выражение (10) было детально исследовано в [7] при различных соотношениях между плотностями сред и скоростями упругих волн.

Проанализируем выражение (9). Поскольку в рассматриваемом случае $k_t < k_1$, то, очевидно, интегрирование по k от k_t до k_1 не может описывать мощность излучения продольной и поперечной волн. Интегрирование по данному интервалу даёт вклад в мощность излучения акустической волны в газе и вытекающей псевдорэлеевской волны. Аналогично интегрирование по k от k_ℓ до k_t не может описывать мощность излучения продольной волны и даёт вклад в мощность излучения поперечной и акустической волн. Наконец, интегрирование по интервалу от $k = 0$ до $k = k_\ell$ даёт вклад в мощность излучения всех трёх объёмных волн.

Выделяя в интеграле (9) реальную часть, для интервала $k_t < k < k_1$ имеем

$$W_1(k_t, k_1) = \frac{\omega^3 f_0^2 \varepsilon k_t^4}{4\pi \rho_2 c_t^4} \int_{k_t}^{k_1} \frac{(k^2 - k_\ell^2) k dk}{|S_0(k)|^2 \sqrt{k_1^2 - k^2}}. \quad (11)$$

Аналогичный вид должны иметь выражения для мощности излучения акустической волны на участках интегрирования $k_\ell < k < k_t$ и $0 < k < k_\ell$.

Рассмотрим интервал интегрирования $k_\ell < k < k_t$. Выделяя в (9) конструкцию вида (11), получаем

$$W_1(k_\ell, k_t) = \frac{\omega^3 f_0^2 \varepsilon k_t^4}{4\pi \rho_2 c_t^4} \int_{k_\ell}^{k_t} \frac{(k^2 - k_\ell^2) k dk}{|S_0(k)|^2 \sqrt{k_1^2 - k^2}}, \quad (12)$$

$$W_t(k_\ell, k_t) = \frac{\omega^3 f_0^2}{\pi \rho_2 c_t^4} \int_{k_\ell}^{k_t} \frac{(k^2 - k_\ell^2) \sqrt{k_t^2 - k^2} k^3 dk}{|S_0(k)|^2}, \quad (13)$$

где выражение (13) описывает часть мощности излучения поперечной волны.

Наконец, рассмотрим участок интегрирования $0 < k < k_\ell$. На этом интервале для мощности излучения акустической волны необходимо выделить выражение, аналогичное (11), (12), а для мощности излучения поперечной волны — выражение типа (13). Оставшаяся часть мощности относится к продольной упругой волне. Выпишем соответствующие выражения:

$$W_\ell = \frac{\omega^3 f_0^2}{4\pi \rho_2 c_t^4} \int_0^{k_\ell} \frac{(k_t^2 - 2k^2)^2 \sqrt{k_\ell^2 - k^2} k dk}{S_0^2(k)}, \quad (14)$$

$$W_t(0, k_\ell) = \frac{\omega^3 f_0^2}{\pi \rho_2 c_t^4} \int_0^{k_\ell} \frac{(k_\ell^2 - k^2) \sqrt{k_t^2 - k^2} k^3 dk}{S_0^2(k)}, \quad (15)$$

$$W_1(0, k_\ell) = \frac{\omega^3 f_0^2 \varepsilon k_t^4}{4\pi \rho_2 c_t^4} \int_0^{k_\ell} \frac{(k_\ell^2 - k^2) k dk}{S_0^2(k) \sqrt{k_1^2 - k^2}}. \quad (16)$$

Выражение (14) полностью описывает мощность излучения продольной волны. Мощность излучения поперечной волны, как следует из (13), (15), описывается формулой

$$W_t = \frac{\omega^3 f_0^2}{\pi \rho_2 c_t^4} \int_0^{k_t} \frac{|k^2 - k_\ell^2| \sqrt{k_t^2 - k^2} k^3 dk}{|S_0(k)|^2}. \quad (17)$$

Выражения (11), (12) и (16) требуют дополнительного исследования.

Очевидно, что в предельном случае стремления плотности газа к нулю мощность излучения акустической волны также должна стремиться к нулю. Подынтегральные выражения в (12) и (16) не имеют особенностей, поэтому $W_1(0, k_\ell) \rightarrow 0$, $W_1(k_\ell, k_t) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Выражение для мощности излучения на участке интегрирования $k_t < k < k_1$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ приводится к виду:

$$W_1(k_t, k_1) = \frac{\omega^3 f_0^2}{4\pi \rho_2 c_t^4} \operatorname{Re} \left[i \int_{k_t}^{k_1} \frac{\sqrt{k^2 - k_\ell^2} k dk}{R_0(k)} \right], \quad (18)$$

и вклад в его реальную часть даёт только полувычет в полюсе $k = k_R$. Это выражение соответствует мощности излучения поверхностной волны Рэлея, возбуждаемой на границе твёрдое тело—вакуум [7]:

$$W_R = -\frac{\omega^3 f_0^2 k_R \sqrt{k_R^2 - k_\ell^2}}{4\rho_2 c_t^4 R_0'(k_R)}, \quad (19)$$

где

$$R_0'(k_R) = \left. \frac{dR_0(k)}{dk} \right|_{k=k_R} = 2 \frac{k_t^6 (4k_R^2 - k_t^2) - 8k_R^6 (k_t^2 - k_\ell^2)}{k_R (2k_R^2 - k_t^2)^2}.$$

Таким образом, можно сделать вывод, что выражение (11) описывает как некоторую часть мощности излучения акустической волны, так и мощность излучения вытекающей псевдорэлеевской волны. Разделить эти мощности не представляется возможным, поскольку распространяющаяся вдоль границы волна постоянно передаёт энергию акустической волне. При этом их суммарная мощность остаётся постоянной. Более подробно смысл выражений (11), (12) и (16) будет обсуждаться ниже.

Приведённые выше выражения для мощности излучения различных типов волн, распространяющихся вблизи границы раздела газ—твёрдое тело, были получены без использования каких-либо приближений. Аналогичные выражения можно получить путём вычисления потока энергии через поверхность сферы большего по сравнению с длиной волны радиуса, содержащей источник внутри себя. Для этого необходимо предварительно получить приближённые выражения для смещений в волновой зоне, для чего обычно используется метод перевала. Указанная процедура подробно описана в многочисленных работах (см., например, [3, 8]). Применим её здесь для вычисления мощности излучения акустической волны.

В интеграле (4) заменим функцию Бесселя на функцию Ханкеля, причём для последней воспользуемся асимптотикой при больших значениях аргумента. Переходя под интегралом к сферической системе координат $R = (r^2 + z^2)^{1/2}$, $\theta = \arccos(|z|/r)$ и применяя формально метод перевала, получим выражение для потенциала смещений в газе в волновой зоне:

$$\psi_1 = \frac{if_0 k_t^2 \sqrt{k_\ell^2 - k_1^2 \sin^2 \theta} \exp(ik_1 R)}{2\pi \rho_2 c_t^2 S_0(k_1 \sin \theta) R}. \quad (20)$$

Соответствующее потенциалу (20) выражение для мощности излучения имеет вид

$$W_1 = \frac{\omega^2 f_0^2 \varepsilon c_1^5}{4\pi \rho_2 c_t^8} \int_0^{\pi/2} \frac{|(c_1/c_\ell)^2 - \sin^2 \theta| \sin \theta d\theta}{|S_1(\theta)|^2}, \quad (21)$$

где

$$S_1(\theta) = \left(\frac{c_1^2}{c_t^2} - 2 \sin^2 \theta \right)^2 + 4 \sin^2 \theta \sqrt{\frac{c_1^2}{c_\ell^2} - \sin^2 \theta} \sqrt{\frac{c_1^2}{c_t^2} - \sin^2 \theta} + \varepsilon \left(\frac{c_1}{c_t} \right)^4 \frac{1}{\cos \theta} \sqrt{\frac{c_1^2}{c_\ell^2} - \sin^2 \theta}.$$

Выражение (21) было ранее получено в [9]. Отметим, что если объединить выражения (11), (12) и (16) и записать их сумму в виде

$$W_1 = \frac{\omega^3 f_0^2 \varepsilon k_t^4}{4\pi \rho_2 c_t^4} \int_0^{k_1} \frac{|k^2 - k_\ell^2| k dk}{|S_0(k)|^2 \sqrt{k_1^2 - k^2}}, \quad (22)$$

то заменой переменной интегрирования $k = k_1 \sin \theta$ формула (22) переводится в (21).

Проанализируем формулу (21). Интегрирование по зенитному углу θ в интервале от 0 до $\arcsin(c_1/c_\ell)$ соответствует выражению (16) и описывает мощность той части акустической волны в газе, которая излучается в указанном диапазоне углов. Аналогично интегрирование по θ от $\arcsin(c_1/c_\ell)$ до $\arcsin(c_1/c_t)$ соответствует выражению (12) и даёт мощность волны, излучённой в диапазоне углов $\arcsin(c_1/c_\ell) < \theta < \arcsin(c_1/c_t)$. Интегрирование по θ в интервале от $\arcsin(c_1/c_t)$ до $\pi/2$ соответствует выражению (11), которое, как показано выше, описывает как некоторую часть мощности излучения акустической волны, так и мощность излучения вытекающей псевдорэлеевской волны. В этой области углов происходит перекачка энергии вытекающей волны в акустическую волну, поэтому нельзя провести количественное разделение мощностей излучения акустической и вытекающей волн. Поле вытекающей волны экспоненциально спадает при движении вдоль границы за счёт передачи части энергии звуковой волне. Их суммарная мощность при этом остаётся постоянной.

Отметим, что в работе [9] ошибочно утверждалось, что в случае $c_1 < c_R$ формула (21) описывает только мощность излучения акустической волны в газе. Приведённая в [9] численная оценка интеграла (21) для указанного случая также является неверной.

Перейдём к количественным оценкам. При проведении численных расчётов удобно представить выражения для мощности излучения волн различных типов в виде

$$W_i = \frac{f_0^2 \omega^2}{4\pi \rho_2 c_\ell^3} \tilde{W}_i,$$

где \tilde{W}_i — безразмерные численные коэффициенты (индекс i принимает значения 1, ℓ , t и т. д. и обозначает тип волны).

Рассмотрим сначала случай, когда твёрдое тело граничит с вакуумом ($\rho_1 = 0$). Численные коэффициенты $\tilde{W}_\ell^{(0)}$, $\tilde{W}_t^{(0)}$ и \tilde{W}_R , относящиеся соответственно к продольной, поперечной и рэлеевской волнам на свободной поверхности упругого полупространства, имеют следующие значения (рассматривается случай равенства параметров Ламэ λ и μ , когда $c_\ell = \sqrt{3} c_t$):

$$\tilde{W}_\ell^{(0)} = 0,333; \quad \tilde{W}_t^{(0)} = 1,2455; \quad \tilde{W}_R = 3,2578.$$

При этом полная излучаемая мощность

$$\tilde{W}_{\text{tot}}^{(0)} = \tilde{W}_\ell^{(0)} + \tilde{W}_t^{(0)} + \tilde{W}_R = 4,8363.$$

Полученные численные значения совпадают с известными классическими результатами [3].

Отметим, что полученная здесь формула (19) для мощности рэлеевской волны значительно компактнее и проще, чем соответствующее выражение, приведённое в [3]. В работе [3] смещения в волне Рэлея были получены из интегральных выражений для смещений путём вычисления вычета в полюсе $k = k_R$, являющемся решением уравнения $R_0(k) = 0$. Аналогичная методика вычисления мощности излучения рэлеевской волны была использована в [8], где источник имел вид диска конечной площади.

Перейдём к рассмотрению случая, когда твёрдое тело граничит с газом. Пусть плотность твёрдого тела составляет $\rho_2 = 2000$ кг/м³, а скорости поперечных и продольных упругих волн равны соответственно $c_t = 1000$ м/с и $c_\ell = \sqrt{3} c_t \approx 1732$ м/с. Тогда при плотности газа $\rho_1 = 1,29$ кг/м³ ($\varepsilon = 6,45 \cdot 10^{-4}$) и скорости звука $c_1 = 340$ м/с для мощностей излучения продольной и поперечной волн получаем численные значения $\tilde{W}_\ell = 0,3329$; $\tilde{W}_t = 1,2455$. Эти значения почти не отличаются от величин $\tilde{W}_\ell^{(0)}$ и $\tilde{W}_t^{(0)}$. Мощность излучения поверхностной волны Стонели, вычисленная по формуле (10), оказывается весьма малой: $\tilde{W}_S = 1,5 \cdot 10^{-7}$.

Численные значения мощности излучения акустической волны в интервалах углов $0 \leq \theta < \arcsin(c_1/c_\ell)$ и $\arcsin(c_1/c_\ell) \leq \theta < \arcsin(c_1/c_t)$ равны соответственно $\tilde{W}_1(0, k_\ell) =$

$= 6,22 \cdot 10^{-5}$ и $\tilde{W}_1(k_\ell, k_t) = 1,94 \cdot 10^{-4}$. Как и следовало ожидать, эти мощности на несколько порядков меньше мощности излучения объёмных волн в твёрдом теле. Данные результаты могут быть использованы для оценок возмущений, возникающих в ионосфере вследствие воздействия акустической волны, возбуждаемой мощными наземными сейсмическими источниками.

При вычислении величины $\tilde{W}_1(k_t, k_1)$ необходимо учитывать, что подынтегральная функция в (11) имеет резкий максимум при $k \approx k_R$. Именно область этого максимума даёт определяющий вклад в результат интегрирования $\tilde{W}_1(k_t, k_1) = 3,2591$. Полученное значение очень близко к мощности излучения \tilde{W}_R поверхностной волны Рэлея на свободной границе упругого полупространства. Следовательно, основной вклад в величину $\tilde{W}_1(k_\ell, k_t)$ даёт вытекающая волна.

Таким образом, в работе без применения каких-либо приближений получены выражения для средних за период волны мощностей излучения продольной и поперечной сферических волн и поверхностной волны Стонели. Для углов, превышающих арксинус отношения скорости звука в газе и скорости поперечных волн в упругой среде, где происходит перекачка энергии вытекающей волны в акустическую, получено выражение для их суммарной мощности. Показано, что в данной области метод перевала приводит к некорректным результатам для поля акустической волны. Установлено, что мощность излучения вытекающей волны полностью описывается потенциалом смещений в газе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 343 с.
2. Roeber W. L., Vining T. F., Strick E. // Philos. Trans. Roy. Soc. London. 1959. V. 251, No. 1 000. P. 455.
3. Miller G. F., Pursey H. // Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1955. V. 233, No. 1 192. P. 55.
4. Викторов И. А. Звуковые поверхностные волны в твёрдых телах. М.: Наука, 1981. 288 с.
5. Поверхностные акустические волны: Пер. с англ. / Под ред. А. Олинера. М.: Мир, 1981. 390 с.
6. Бирюков С. В., Гуляев Ю. В., Крылов В. В., Плесский В. П. Поверхностные акустические волны в неоднородных средах. М.: Наука, 1991. 416 с.
7. Разин А. В. // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1991. № 12. С. 100.
8. Гущин В. В., Докучаев В. П., Заславский Ю. М., Конюхова И. Д. // Исследование Земли невзрывными сейсмическими источниками / Под ред. А. В. Николаева. М.: Наука, 1981. С. 113.
9. Заславский Ю. М. // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1982. № 9. С. 86.

Научно-исследовательский радиофизический институт,
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию
16 октября 2001 г.

EXCITATION OF SURFACE AND LEAKY WAVES AT A SOLID BODY – GAS INTERFACE

A. V. Razin

We analyze excitation of bulk, leaky, and surface waves by a point time-harmonic forcing that acts normally to a solid body – gas interface. The case where the sound speed in the gas is less than the Rayleigh-wave velocity on the solid surface is considered. Expressions for the radiation powers of longitudinal and transverse spherical waves in the solid body and of a Stoneley surface wave, averaged over their periods, are derived. Radiation of a spherical acoustic wave in the gas and a pseudo-Rayleigh leaky wave is analyzed. For the spatial region corresponding to zenith angles exceeding arcsine of the ratio of the sound speed in the gas and the transverse-wave velocity in the solid body, where the leaky-wave energy is transformed into the acoustic wave, we derive formulas describing their summed radiated power.

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ СВОЙСТВА СГУСТКОВ ПАССИВНОЙ ПРИМЕСИ В ДВУМЕРНОЙ ТУРБУЛЕНТНОЙ СРЕДЕ

И. С. Жукова, А. И. Саичев

Изучена эволюция сгустка пассивной примеси на поверхности турбулентной среды. Получены и исследованы стохастические уравнения для геометрических характеристик распределения плотности пассивной примеси. Показана возможность локализации сгустка, при которой составляющие сгусток частицы могут долгое время находиться близко друг к другу, не подчиняясь закону молекулярной диффузии. Найдены условия существования эффекта локализации при значительной анизотропии сгустка, а также вероятностные распределения геометрических характеристик сгустка.

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что при помещении пассивной примеси в потенциальное поле скорости образуются сгустки (кластеры) — области повышенной плотности примеси, окружённые обширными областями низкой плотности [1]. При этом может возникнуть эффект локализации сгустка, родственный известному эффекту локализации волн в случайных слоистых средах (см., например, [2]), заключающийся в том, что частицы сгустка могут долгое время находиться близко друг к другу, не подчиняясь закону молекулярной диффузии. Некоторые количественные и качественные аспекты подобных эффектов обсуждались ранее в работах [1, 3, 4]. Эффект локализации сгустков пассивной примеси в одномерном случае довольно подробно изучен в работах [4, 5]. Данная работа является развитием работы [6], в которой авторами была приведена методика решения уравнений, описывающих эволюцию плотности пассивной примеси в двумерной турбулентной среде. Физическим примером таких сред может служить движение плавучей примеси на взволнованной поверхности хаотически движущегося океана.

1. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СГУСТКА И ИХ ВЕРОЯТНОСТНЫЕ СВОЙСТВА

Обычно, например на поверхности океана, диффузия плавучей примеси сопровождается её движением вместе с жидкостью. Пренебрегая влиянием вертикальных движений, будем считать, что частицы движутся под воздействием двумерного поля скорости $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$. Пусть векторное поле скорости $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ гауссово, обладает нулевым средним, дельта-коррелировано во времени и статистически однородно в пространстве. Из теории случайных полей известно, что такое поле в общем случае можно представить в виде суммы статистически независимых составляющих:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}^P(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v}^S(\mathbf{x}, t).$$

Здесь $\mathbf{v}^P(\mathbf{x}, t)$ — потенциальное поле, $\mathbf{v}^S(\mathbf{x}, t)$ — вихревое (соленоидальное) поле. Известно также, что в двумерном случае компоненты каждой из перечисленных составляющих поля скорости выражаются через соответствующие потенциалы:

$$v_1^P = \frac{\partial \Pi}{\partial x_1}, \quad v_2^P = \frac{\partial \Pi}{\partial x_2}; \quad v_1^S = \frac{\partial \Omega}{\partial x_2}, \quad v_2^S = -\frac{\partial \Omega}{\partial x_1}.$$

Будем считать, что потенциалы статистически изотропны и обладают следующими корреляционными функциями:

$$\langle \Pi(\mathbf{x}, t) \Pi(\mathbf{x}', t') \rangle = 2F(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) \delta(t - t'), \quad \langle \Omega(\mathbf{x}, t) \Omega(\mathbf{x}', t') \rangle = 2G(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) \delta(t - t').$$

Здесь угловые скобки означают усреднение по случайному полю $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$. Будем в дальнейшем считать, что имеют место следующие разложения в ряд Тейлора:

$$F(l) = F - \frac{A^p}{2} l^2 + \frac{B^p}{24} l^4, \quad G(l) = G - \frac{A^s}{2} l^2 + \frac{B^s}{24} l^4,$$

где $l^2 = l_1^2 + l_2^2$, $l^4 = (l_1^2 + l_2^2)^2 = l_1^4 + 2l_1^2 l_2^2 + l_2^4$. Кроме того, нам в дальнейшем понадобится явный вид корреляционного тензора поля скорости, выраженный через функции F и G :

$$\langle v_i(\mathbf{x}, t) v_j(\mathbf{x}', t') \rangle = 2A_{ij}(\mathbf{l}) \delta(t - t'),$$

$$A_{ij}(\mathbf{l}) = -\delta_{ij} \Delta_2 G(l) + \frac{\partial^2}{\partial l_i \partial l_j} [G(l) - F(l)], \quad \mathbf{l} = \mathbf{x} - \mathbf{x}', \quad l = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|.$$

Здесь Δ_2 — двумерный лапласиан, δ_{ij} — символ Кронекера.

Мы будем исследовать относительную диффузию реальной частицы примеси и идеализированной частицы, не подверженной молекулярным столкновениям и движущейся вместе со сплошной средой [7]. Вектор взаимного расположения реальной и идеальной частиц равен

$$\mathbf{z}(t|\xi) = \mathbf{X}(t|\xi) - \mathbf{X}_0(t|\xi),$$

где $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t|\xi)$ — текущий радиус-вектор реальной частицы, находившейся в начальный момент в точке с координатами ξ , $\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}_0(t|\xi)$ — радиус-вектор идеальной частицы.

Пользуясь методикой, изложенной в работе [6], изучим временную эволюцию сгустка частиц, находящихся в момент времени $t = 0$ в точке $\mathbf{z} = 0$. При этом распределение плотности сгустка имеет гауссову форму:

$$\rho(\mathbf{z}, t) = \frac{1}{2\pi \sqrt{I}} \exp \left[-\frac{S_{22}z_1^2 + S_{11}z_2^2 - 2S_{12}z_1z_2}{2I} \right]. \quad (1)$$

В (1) входят компоненты корреляционной матрицы $S_{ij} = \overline{z_i(t|\xi)z_j(t|\xi)}$, а также параметр $I = S_{11}S_{22} - S_{12}^2$. Черта сверху означает усреднение по молекулярным столкновениям с коэффициентом молекулярной диффузии μ . Перед анализом статистических свойств сгустка обсудим геометрическую конфигурацию плотности (1). Линии равной плотности представляют собой эллипсы в плоскости z_1z_2 . В частности, эллипс на уровне $\exp(-1/2)$ задаётся уравнением

$$S_{22}z_1^2 + S_{11}z_2^2 - 2S_{12}z_1z_2 = I. \quad (2)$$

Назовём его характеристическим эллипсом. Ориентация характеристического эллипса на плоскости z_1z_2 произвольна и равновероятна. Иногда удобно использовать имеющие наглядный геометрический смысл собственные числа λ_1 и λ_2 корреляционной матрицы $|S_{ij}|$, для которых справедливы следующие соотношения:

$$Q = S_{11} + S_{22} = (\lambda_1 + \lambda_2)/2, \quad I = \lambda_1 \lambda_2.$$

На языке собственных чисел уравнение характеристического эллипса (2) в системе координат, приведённой к главным осям эллипса, имеет вид

$$\frac{z_1^2}{\lambda_1} + \frac{z_2^2}{\lambda_2} = 1, \quad (3)$$

а площадь характеристического эллипса, которую естественно принять за эффективную площадь сгустка, равна

$$S = \pi \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} = \pi \sqrt{I}. \quad (4)$$

Таким образом, собственные числа λ_1 и λ_2 равны квадратам полуосей характеристического эллипса и, следовательно, неотрицательны.

Уравнение для вероятностного распределения $W(q, i; t) = \langle \delta(Q(t) - Q) \delta(I(t) - I) \rangle$ имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \tau} + \ell^2 \frac{\partial W}{\partial Q} + 2\ell^2 Q \frac{\partial W}{\partial I} = 2\chi \frac{\partial}{\partial I} (IW) - \frac{\partial}{\partial Q} (QW) + 4\chi \frac{\partial}{\partial Q} \left[Q \frac{\partial}{\partial I} (IW) \right] + \\ + 4\chi \frac{\partial}{\partial I} \left[I \frac{\partial}{\partial I} (IW) \right] + \left(\chi + \frac{1}{2} \right) \frac{\partial^2}{\partial Q^2} (Q^2 W) - \frac{I}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial Q^2}, \quad (5) \end{aligned}$$

где τ — безразмерное время, ℓ — характерный масштаб, χ — параметр, характеризующий относительный вклад потенциальной компоненты в поле скорости:

$$\tau = 8t(B^p + B^s)/3, \quad \ell^2 = 3\mu/[4(B^p + B^s)], \quad \chi = B^p/(B^p + B^s).$$

Пользуясь уравнением (5), выпишем выражения для средних Q и I :

$$\langle Q \rangle = \ell^2 [\exp(\tau) - 1], \quad \langle I \rangle = 2\ell^4 \left[\frac{\exp(\tau) - \exp(2\chi\tau)}{1 - 2\chi} - \frac{\exp(2\chi\tau) - 1}{2\chi} \right].$$

Видно, что при больших τ приведённые выше средние экспоненциально растут, неадекватно отражая поведение вероятностной массы Q и I . Напротив, их асимптотика

$$\langle Q \rangle \approx \ell^2 \tau = 2\mu t, \quad \langle I \rangle \approx \ell^4 \tau^2 = 4\mu^2 t^2$$

при малых τ отвечает классическому броуновскому движению в неподвижной среде. При этом $\lambda_1 = \lambda_2 = 2\mu t$, т. е. характеристический эллипс (3) вырождается в круг, квадрат радиуса которого в соответствии с природой броуновского движения растёт по закону $2\mu t$.

Поскольку уравнение (5) для вероятностного распределения трудно поддаётся аналитическому решению и физической интерпретации, сделаем шаг назад: перейдём от него к стохастическим уравнениям, вероятностные распределения решений которых удовлетворяют уравнению (5). Подобные уравнения могут оказаться более очевидными и эвристически ценными. С помощью уравнения (5) нетрудно реконструировать стохастические уравнения, которым удовлетворяют процессы $Q(t)$ и $I(t)$:

$$\frac{dI}{d\tau} + 2\chi I = 2\ell^2 Q + 2\eta(\tau)I, \quad \frac{dQ}{d\tau} + \left(\chi - \frac{1}{2} \right) Q = \ell^2 + \eta(\tau)Q + \theta(\tau) \sqrt{Q^2 - I}. \quad (6)$$

Сюда входят статистически независимые гауссовы дельта-коррелированные процессы $\eta(t)$ и $\theta(t)$, обладающие следующими корреляционными функциями:

$$\langle \eta(\tau) \eta(\tau') \rangle = 2\chi \delta(\tau - \tau'), \quad \langle \theta(\tau) \theta(\tau') \rangle = \delta(\tau - \tau').$$

Последние слагаемые в левых частях уравнений (6) учитывают стабилизирующее влияние потенциальной компоненты поля скорости на поведение сгустка. Как и следовало ожидать, стабилизация величины I , пропорциональной квадрату площади характеристического эллипса, более эффективна, чем стабилизация величины Q . Это различие обусловлено тем, что вихревая компонента не изменяет эффективной площади сгустка. В то же время она стремится увеличить анизотропию (эксцентриситет) эллипса, что ведёт к росту Q .

Предположительный рост анизотропии сгустка, количественно выражающийся в сильном различии собственных чисел λ_1 и λ_2 , подсказывает путь приближённого решения уравнений (6). Пусть выполнено неравенство $Q^2 \gg I$, которое на языке собственных чисел можно записать в виде

$$\varepsilon^2 + \varepsilon^{-2} \gg 2,$$

где параметр $\varepsilon = \sqrt{\lambda_1/\lambda_2}$ равен отношению главных осей характеристического эллипса и количественно характеризует его сплюснутость (вытянутость). Тогда второе уравнение (6) запишется в виде

$$\frac{dQ}{d\tau} + \left(\chi - \frac{1}{2}\right)Q = \ell^2 + [\eta(\tau) + \theta(\tau)]Q, \quad Q(0) = 0. \quad (7)$$

Вероятностное распределение решений уравнения (7) подчиняется уравнению

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} + \ell^2 \frac{\partial W}{\partial Q} = \left(\chi - \frac{1}{2}\right) \frac{\partial}{\partial Q}(QW) + \frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial Q} \left[Q \frac{\partial}{\partial Q}(QW) \right],$$

которое имеет стационарное решение

$$W_\infty(Q) = \frac{(2\ell^2/3)^{(2\chi-1)/3}}{\Gamma[(2\chi-1)/3]Q^{2(2\chi+1)/3}} \exp\left(-\frac{2\ell^2}{3Q}\right),$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция. Видно, что это решение существует лишь при выполнении неравенства $\chi > 1/2$, которое является необходимым условием стабилизации сгустка.

2. СТОХАСТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ И ДРУГИЕ РОДСТВЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ

Характер стохастического поведения сгустка лучше понять, если перейти от уравнений (6) к более симметричным уравнениям для собственных чисел:

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_1}{d\tau} + \chi\lambda_1 - \frac{\lambda_1}{2} \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} &= \ell^2 + [\eta(\tau) + \theta(\tau)]\lambda_1, \\ \frac{d\lambda_2}{d\tau} + \chi\lambda_2 + \frac{\lambda_2}{2} \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} &= \ell^2 + [\eta(\tau) - \theta(\tau)]\lambda_2. \end{aligned}$$

Введём параметры

$$m = \operatorname{ch} \psi_-, \quad s = \exp \psi_+,$$

где $\psi_- = (\psi_1 - \psi_2)/2$, $\psi_+ = (\psi_1 + \psi_2)/2$, $\psi_1 = \ln(\lambda_1/\ell^2)$, $\psi_2 = \ln(\lambda_2/\ell^2)$.

Параметр m количественно выражает степень вытянутости характеристического эллипса (3) и следующим образом выражается через отношение его осей ε :

$$m = (\varepsilon + \varepsilon^{-1})/2.$$

При $m = 1$ характеристический эллипс вырождается в круг, а при увеличении m становится всё более вытянутым. На рис. 1 приведены характеристические эллипсы одинаковой площади при разных значениях m .

Параметр s равен безразмерной площади (4) характеристического эллипса, измеренной в единицах площади круга радиуса ℓ :

$$s = \frac{\pi \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}}{\pi \ell^2} = \frac{1}{\ell^2} \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}.$$

Уравнения для m и s имеют следующий вид:

$$\frac{ds}{d\tau} + \chi s = m + \eta s, \quad s(0) = 0; \quad \frac{dm}{d\tau} = \frac{m}{2} - \frac{m^2 - 1}{s} + \theta \sqrt{m^2 - 1}, \quad m(0) = 1.$$

Выпишем уравнение для совместного вероятностного распределения s и m :

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = \chi \frac{\partial}{\partial s^2} (s^2 W) - m \frac{\partial W}{\partial s} + \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial m} [(m^2 - 1) W] + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial m} \left[(m^2 - 1) \frac{\partial W}{\partial m} \right]. \quad (8)$$

Данное уравнение близко к уравнению Фоккера—Планка для вероятностного распределения коэффициента отражения в хаотических плоскостных средах.

Перейдём к анализу некоторых следствий уравнения (8). К сожалению, удаётся найти его стационарные решения лишь при граничном значении $\chi = 1/2$. В этом случае правая часть уравнения (8) обращается в нуль при подстановке

$$W_\infty(s, m) \propto s^{-2} \exp(-2m/s). \quad (9)$$

Хотя функция (9) не имеет нормировки, тем не менее даже из неё можно извлечь полезную информацию. Например, вычислить с её помощью вероятностное распределение s при условии, что m задано:

$$W_\infty(s|m) = W_\infty(s, m) / \int_0^\infty W_\infty(s, m) ds = 2ms^{-2} \exp(-2m/s), \quad (10)$$

Напомним, что m является мерой вытянутости характеристического эллипса, а параметр s пропорционален его площади. Поэтому (10) можно трактовать как вероятностное распределение площадей характеристических эллипсов заданной формы. В частности, вероятностное распределение площади характеристических кругов ($m = 1$) равно

$$W_\infty(s|1) = 2s^{-2} \exp(-2/s). \quad (11)$$

Это распределение, в принципе, можно получить экспериментально, если измерять площади только практически круглых сгустков. Хотя распределение (11) имеет медленно спадающие степенные хвосты, средний эффективный радиус практически круглых сгустков ограничен:

$$r_e = \ell \langle \sqrt{s} \rangle = \ell \sqrt{2\pi}.$$

Графики условных распределений (10) при разных m приведены на рис. 2.

Точно также можно найти распределение вытянутости m эллипса при заданной безразмерной площади s :

$$W_\infty(m|s) = 2s^{-1} \exp[-2(m-1)/s], \quad m > 1.$$

Из полученного выражения видно, что чем больше площадь характеристического эллипса, тем более вытянутые эллипсы преобладают в статистическом ансамбле.

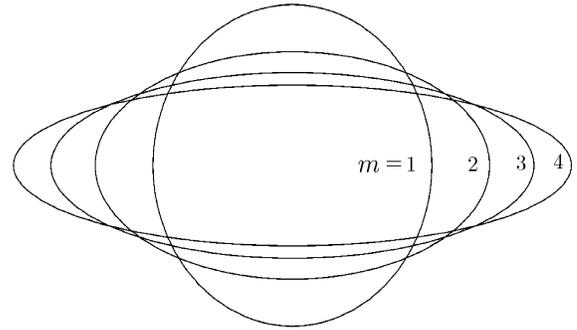


Рис. 1

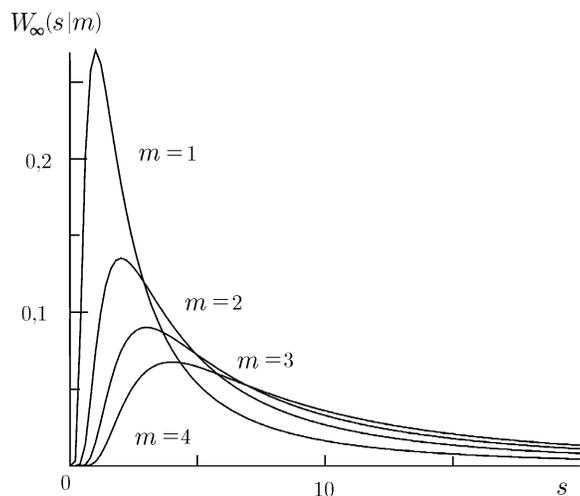


Рис. 2

$$R\left(\frac{r}{\ell}\right) = \ell^2 \rho(r) = \frac{1}{4\pi^2 s} \int_{-\pi}^{\pi} \exp\left[-\frac{r^2}{2\ell^2 s} \left(\varepsilon \cos^2 \varphi + \frac{1}{\varepsilon} \sin^2 \varphi\right)\right] d\varphi.$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 00–02–16167) и программы «Ведущие научные школы России» (грант № 00–15–96619).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кляцкин В. И., Саичев А. И. // ЖЭТФ. 1997. Т. 111, № 4. С. 1 297.
2. Кляцкин В. И., Саичев А. И. // Успехи физ. наук. 1992. Т. 162, № 3. С. 161.
3. Saichev A. I., Woyczynski W. A. // IMA Volumes in Mathematics and Its Applications. NY.: Springer, 1996. V. 85. Stochastic Models in Geosystems P. 359.
4. Saichev A. I., Zhukova I. S. // Lecture Notes in Physics. Berlin: Springer, 1998. V. 511. P. 353.
5. Жукова И. С., Саичев А. И. // ПММ. 2000. Т. 64, вып. 4. С. 624.
6. Жукова И. С., Кошелев В. Н., Саичев А. И. // Изв. вузов. Радиофизика. 2000. Т. 43, № 4. С. 357.
7. Грибова Е. З., Жукова И. С., Саичев А. И., Войчинский В. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 2000. Т. 43, № 5. С. 456.

Нижегородский госуниверситет им. Н. И. Лобачевского,
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию
4 июля 2001 г.

PROBABILITY CHARACTERISTICS OF PASSIVE-TRACER CLUSTERS IN A TWO-DIMENSIONAL TURBULENT MEDIUM

I. S. Zhukova and A. I. Saichev

We study the evolution of a passive-tracer cluster on the surface of a turbulent medium. Stochastic equations describing geometric characteristics of the density distribution of a passive tracer are derived and analyzed. It is shown that under certain conditions, a cluster can be localized in such a way that the behavior of cluster particles doesn't follow the law of molecular diffusion. The conditions for the cluster-localization effect and the probability distributions of cluster geometric characteristics are found.