МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Известия высших учебных заведений

РАДИОФИЗИКА

ежемесячный научно-технический журнал

Издаётся с апреля 1958 г.

Том XLV № 1 **Нижний Новгород** **2002**

Содержание

УДК 537.874.31:621.371.24

ВРАЩАТЕЛЬНАЯ ЧАСТЬ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ ВОДЯНОГО ПАРА ПРИ РАЗЛИЧНОЙ ФОРМЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЛИНИЙ

М. Б. Зиничева, А. П. Наумов

Выполнены оценки возможного влияния формы спектральных линий Лоренца, Ван Флека—Вайскопфа и линии, полученной из решения кинетического уравнения, на вращательную часть диэлектрической проницаемости мономеров водяного пара как в предельных (статическом и оптическом) случаях, так и вблизи резонансов с различной интенсивностью. Исследованные эффекты сравниваются с аналогичным влиянием форм-структурных факторов на коэффициент поглощения водяного пара.

Одна из основных проблем описания вращательного спектра поглощения водяного пара, перекрывающего обширную область от инфракрасного окна прозрачности атмосферы (длины волн $10\div12$ мкм) до сантиметровых радиоволн, состоит в отличии теоретических и экспериментальных значений в соответствующих окнах прозрачности. В настоящее время считается, что линейная (по влажности) часть этого отличия связана с неточным описанием поглощения в крыльях спектральных линий, на формирование которых существенное влияние оказывают соударения молекул с малыми прицельными расстояниями (так называемые близкие соударения) [1]. К тому же в микроволновом диапазоне преобладающая роль в радиационных процессах принадлежит диабатическим соударениям в отличие от оптического участка электромагнитного спектра, где аналогичную роль играют адиабатические соударения. Отмеченная неточность в описании поглощающих свойств водяного пара в крыльях спектральных линий присуща (хотя и в разной степени) всем широко использующимся в настоящее время формам линий — Лоренца [2], Ван Флека—Вайскопфа [3] и форме линии, полученной из решения кинетического уравнения [4–6] [1].

Дискуссия о степени адекватности форм линий [2–6] ведётся в литературе более полувека, порой прерываясь на определённых этапах и возобновляясь по мере накопления новых экспериментальных данных или при появлении тех или иных теоретических соображений. Важно, однако, заметить, что все выводы о предпочтительности конкретных форм линий до сих пор делались на основе исследования характеристик молекулярного поглощения и сопоставления их теоретических значений с измеренными величинами, а также анализа предпосылок и допущений, которые использовались при выводе теоретических выражений. При этом совершенно не использовались сведения о действительной части ε диэлектрической проницаемости водяного пара и было не ясно, могут ли (и если могут, то в какой степени) прояснить ситуацию в обсуждаемой проблеме теоретические выражения для вращательной части диэлектрической проницаемости в различных моделях молекулярных соударений [2–6]. В принципе, подобное влияние не исключается, например, в рамках соотношений Крамерса—Кронига. Физические аспекты квантовых расчётов диэлектрической проницаемости водяного пара рассматривались в [8–11]. Цель настоящей статьи заключается в выяснении возможного влияния формы спектральных линий на вращательную часть диэлектрической проницаемости мономерных молекул водяного пара, содержащихся в земной атмосфере.

[1] Замечания по поводу развиваемого в последнее время описания вращательного спектра водяного пара на основе модели J-диффузии и аппарата функций памяти изложены в [7].

1. РАСЧЁТНЫЕ ФОРМУЛЫ

Классические выражения для действительной части ε вращательной компоненты диэлектрической проницаемости полярного газа в модельных предположениях Лоренца и Ван Флека—Вайскопфа приведены в оригинальных работах [2, 3] (см. также монографию [12]). Переход от классических выражений для ε к квантовым выражениям осуществляется по принципу соответствия с заменой частоты вращения ν_0, числа молекул в единице объёма $N_{\text{М}}$ и времени между соударениями Δt на квантовые аналоги — резонансную частоту перехода ν_{ij}, число молекул N_{ij}, совершающих указанный квантовый переход и выражение $(2\pi\,\Delta\nu_{ij})^{-1}$ (для формы линии, полученной из решения кинетического уравнения, осуществляется замена $\Delta t \to (4\pi\,\Delta\nu_{ij})^{-1}$), отношение e_{o}^2/m заменяется на $4\pi\nu_{ij}\,|\mu_{ij}|^2/(3\hbar)$. Здесь $\Delta\nu_{ij}$ — полуширина спектральной линии газа, e_{o} и m — заряд и масса гармонического осциллятора, которым моделируется поглощающая молекула в [2–6], $|\mu_{ij}|^2$ — квадрат матричного элемента дипольного момента для перехода $i \to j$, $\hbar$ — постоянная Планка. Под индексами i, j понимается совокупность квантовых чисел, описывающих энергетические состояния данного типа молекул.

В полученной таким образом квантовой формуле для вращательной части ε диэлектрической проницаемости необходимо выполнить суммирование по всем квантовым переходам вращательного спектра. Изложенная процедура аналогична процедуре, которая использовалась при получении выражения для коэффициента поглощения водяного пара в микроволновом диапазоне (подробности см. в [13]).

В результате указанных и других стандартных преобразований получаются следующие выражения для вращательной части диэлектрической проницаемости водяного пара:

$$
\begin{aligned}
(\varepsilon-1)_{\text{Л}} = \frac{0{,}1451\rho}{T^{3/2}} \sum_{i,j} \frac{1/\lambda_{ij}}{1/\lambda_{ij}^2 - 1/\lambda^2}\,\beta_{ij}\left|\exp[-E_i/(kT)] - \exp[-E_j/(kT)]\right| \times \\
\times \left\{1 - \frac{[(\Delta\nu_{ij}/c)^0\,(P/760)\,(T/300)^{-n_{ij}}]^2\,[0{,}5 + 0{,}5\lambda_{ij}/\lambda]}{(1/\lambda - 1/\lambda_{ij})^2 + [(\Delta\nu_{ij}/c)^0\,(P/760)\,(T/300)^{-n_{ij}}]^2} - \right. \\
\left. - \frac{[(\Delta\nu_{ij}/c)^0\,(P/760)\,(T/300)^{-n_{ij}}]^2\,[0{,}5 - 0{,}5\lambda_{ij}/\lambda]}{(1/\lambda + 1/\lambda_{ij})^2 + [(\Delta\nu_{ij}/c)^0\,(P/760)\,(T/300)^{-n_{ij}}]^2}\right\}
\end{aligned} \qquad (1)
$$

— при форме линии Лоренца,

$$
\begin{aligned}
(\varepsilon-1)_{\text{ВФ–В}} = \frac{0{,}1451\rho}{T^{3/2}} \sum_{i,j} \frac{1/\lambda_{ij}}{1/\lambda_{ij}^2 - 1/\lambda^2}\,\beta_{ij}\left|\exp[-E_i/(kT)] - \exp[-E_j/(kT)]\right| \times \\
\times \left\{1 - \frac{[(\Delta\nu_{ij}/c)^0\,(P/760)\,(T/300)^{-n_{ij}}]^2\,[0{,}5\lambda_{ij}/\lambda + 0{,}5\,(\lambda_{ij}/\lambda)^2]}{(1/\lambda - 1/\lambda_{ij})^2 + [(\Delta\nu_{ij}/c)^0\,(P/760)\,(T/300)^{-n_{ij}}]^2} + \right. \\
\left. + \frac{[(\Delta\nu_{ij}/c)^0\,(P/760)\,(T/300)^{-n_{ij}}]^2\,[0{,}5\lambda_{ij}/\lambda - 0{,}5\,(\lambda_{ij}/\lambda)^2]}{(1/\lambda + 1/\lambda_{ij})^2 + [(\Delta\nu_{ij}/c)^0\,(P/760)\,(T/300)^{-n_{ij}}]^2}\right\}
\end{aligned} \qquad (2)
$$

— при форме линии Ван Флека—Вайскопфа. Соответствующая формула для ε с формой линии, полученной из кинетического уравнения, приведена в [9, 10]:

$$
\begin{aligned}
(\varepsilon-1)_{\text{КУ}} = \frac{0{,}1451\rho}{T^{3/2}} \sum_{i,j} \frac{1}{\lambda_{ij}}\,\beta_{ij}\left|\exp[-E_i/(kT)] - \exp[-E_j/(kT)]\right| \times \\
\times \frac{1/\lambda_{ij}^2 - 1/\lambda^2}{[1/\lambda_{ij}^2 - 1/\lambda^2]^2 + 4\,[(\Delta\nu_{ij}/c)^0\,(P/760)\,(T/300)^{-n_{ij}}]^2/\lambda^2}\,.
\end{aligned} \qquad (3)
$$

В выражениях (1)–(3) λ — длина волны электромагнитного излучения (в см), λ_{ij} — резонансная длина волны водяного пара, E_i и E_j — энергии нижнего и верхнего квантовых состояний соответственно, β_{ij} — матричный элемент направляющих косинусов с учётом ядерного спина молекулы H_2O, $(\Delta\nu_{ij}/c)^0$ — полуширина спектральной линии (в см$^{-1}$) при стандартных атмосферных условиях на уровне моря, n_{ij} — температурный коэффициент полуширины спектральной линии, k — постоянная Больцмана, c — скорость света, ρ – абсолютная влажность атмосферы (в г/м^3), P — атмосферное давление (в мм рт. ст.), T — абсолютная температура. В этих соотношениях учтено также, что вращательная статистическая функция водяного пара

$$G(T) = \sum_{J=0}^{\infty} \sum_{\tau=-J}^{J} (2J+1)\Big[2 - (-1)^{|\tau|}\Big] \exp[-E_{J\tau}/(kT)] = 0{,}034264T^{3/2}. \tag{4}$$

Здесь J — квантовое число полного момента количества движения молекулы, $\tau = -J, -J+1, \ldots, \ldots, J-1, J$.

Параметры $1/\lambda_{ij}$, β_{ij}, E_i, E_j, $(\Delta\nu_{ij}/c)^0$, n_{ij} приведены в атласе вращательных линий водяного пара, который содержит описание 871 наиболее интенсивной вращательной линии ($J \le 12$). В работе использовался созданный в НИРФИ [13] атлас вращательных линий H_2O, который в настоящее время представлен в электронном виде. Приведённые в указанном атласе значения скорректированы с использованием имеющихся экспериментальных данных по резонансной частоте, интенсивности и полуширине спектральных линий.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЁТОВ

Прежде всего целесообразно проанализировать предельные выражения для вращательной части диэлектрической проницаемости водяного пара при различной форме спектральных линий. Длинноволновые (статические) приближения $(\varepsilon - 1)^{\text{пр}}$ получаются из формул (1)–(3) при $1/\lambda \to 0$:

$$(\varepsilon - 1)^{\text{пр}}_{\text{Л}} = \frac{0{,}1451\rho}{T^{3/2}} \sum_{i,j} \beta_{ij} \left|\exp[-E_i/(kT)] - \exp[-E_j/(kT)]\right| \times \\ \times \frac{1/\lambda_{ij}}{1/\lambda_{ij}^2 + [(\Delta\nu_{ij}/c)^0\,(P/760)\,(T/300)^{-n_{ij}}]^2}\,,$$

$$(\varepsilon - 1)^{\text{пр}}_{\text{ВФ–В}} = (\varepsilon - 1)^{\text{пр}}_{\text{КУ}} = \frac{0{,}1451\rho}{T^{3/2}} \sum_{i,j} \lambda_{ij}\beta_{ij} \left|\exp[-E_i/(kT)] - \exp[-E_j/(kT)]\right|. \tag{5}$$

Статическое приближение выражения (3), как можно видеть, совпадает с аналогичным приближением (2). Соответствующее приближение (5), полученное из точного выражения при форме линии Лоренца, отличается от (6) незначительно (в знаменателе (5) присутствует слагаемое порядка квадрата полуширины спектральной линии). Расчёты показали, что указанное различие составляет доли процента. Высокочастотные (оптические) предельные выражения (при $1/\lambda \to \infty$) для вращательной части диэлектрической проницаемости водяного пара во всех рассмотренных случаях проявляют одинаковую тенденцию: $(\varepsilon - 1)^{\text{пр}} \to 0$.

Имеет смысл рассмотреть результаты расчётов вращательной части диэлектрической проницаемости водяного пара вблизи резонансных областей как отдельных спектральных линий с различной интенсивностью, так и всего вращательного спектра H_2O в целом, т. е. с учётом «коллективных эффектов», обусловленных суммарным вкладом линий. Для этой цели выделим три типа резонансных областей: области малого, среднего и сильного поглощения. В качестве примеров подобных областей в статье приведены результаты расчётов ε для спектральных линий 5_{-1}—6_{-5}, 3_1—4_{-3}, 1_{-1}—1_1, резонансные волновые числа и частоты которых равняются 0,7412 см$^{-1}$ ($\nu_{ij} = 22235{,}07985$ МГц); 12,6732 см$^{-1}$

(ν_{ij} = 380197,372 МГц) и 18,5645 см$^{-1}$ (ν_{ij} = 556936,002 МГц) соответственно [14]. Коэффициент поглощения γ для указанных линий при стандартных условиях на уровне моря (ρ = 7,5 г/м^3; P = = 760 мм рт. ст.; T = 300 К) составляет приблизительно 0,2 дБ/км для первой линии, 70 дБ/км — для второй, а для третьей достигает $1{,}1 \cdot 10^4$ дБ/км.

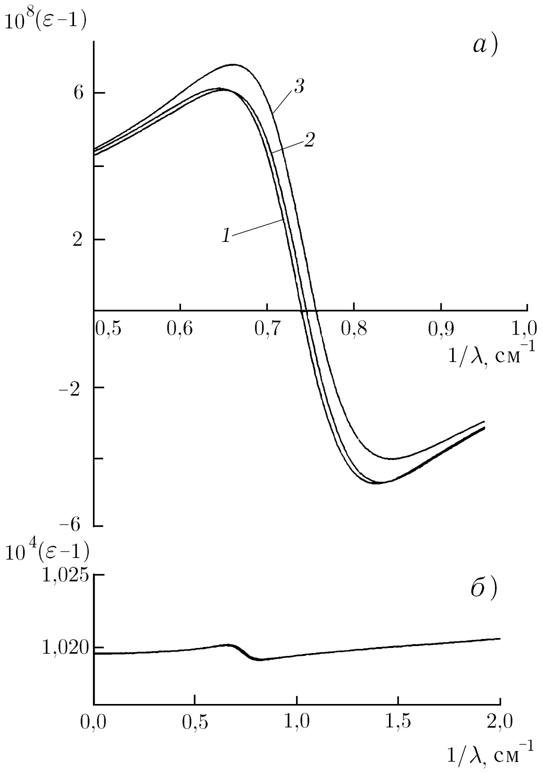

Рис. 1

На рис. 1*а* приведены результаты расчёта вращательной части диэлектрической проницаемости водяного пара для отдельной спектральной линии, центрированной к длине волны λ = 1,35 см (резонансное волновое число $1/\lambda_{ij}$ = 0,7412 см$^{-1}$) при стандартных атмосферных условиях для трёх форм спектральной линии: кривая *1* соответствует форме линии Лоренца, *2* — форме линии, полученной из решения кинетического уравнения, *3* — форме линии Ван Флека—Вайскопфа. Из рис. 1*а* видно, что дисперсионные кривые *1*—*3* различаются между собой: они обращаются в нуль при разных волновых числах $1/\lambda$, местоположения и величины их максимумов несколько различаются. Однако $|\varepsilon - 1|$ в максимуме достигает лишь порядка 10^{-8}, и, как следствие, крылья других линий вращательного спектра водяного пара, которые в длинноволновом приближении не обладают частотной зависимостью (см. соотношения (5)), существенно сглаживают дисперсию, обусловленную отдельной линией (см. рис. 1*б*). Именно это обстоятельство является физическим обоснованием применимости классического (дебаевского) аналога описания диэлектрической проницаемости водяного пара в длинноволновой области микроволнового диапазона: $\varepsilon - 1 = K_3' e_{\text{п}}/T^2$, где $e_{\text{п}}$ — парциальное давление водяного пара [15].

Насколько существенна ошибка, вносимая дисперсией диэлектрической проницаемости вблизи λ = 1,35 см в описание преломляющих свойств атмосферы при использовании дебаевского приближения, можно оценить путём сравнения результатов расчёта показателя преломления n (индекса рефракции N) атмосферы по двум формулам

$$N = 10^6\,(n-1) = K_1\,\frac{P_{\text{с}}}{T} + K_2\,\frac{e_{\text{п}}}{T} + 10^6\,\frac{\varepsilon - 1}{2}\,, \qquad (6)$$

$$N = K_1 \frac{P_{\text{с}}}{T} + K_2 \frac{e_{\text{п}}}{T} + K_3 \frac{e_{\text{п}}}{T^2}. \qquad (7)$$

Формула (6) учитывает исследуемую дисперсию [9, 10], а формула (7) представляет собой классическое приближение для показателя преломления [15], где $K_3 = 10^6 K_3'/2$. В (6), (7) $P_{\text{с}}$ — давление сухих атмосферных газов (без учёта CO_2). Оценки, выполненные с использованием данных рис. 1*б* и количественных значений коэффициентов K_i ($i = 1, 2, 3$), показали, что максимальная разница значений N в области λ = 1,35 см составляет около 0,03, тогда как точность формулы (7) оценивается в 0,5 % [15], т. е. ошибка в расчётах N по (7) достигает 1,5 ед. N. При этом относительный вклад вращательной части диэлектрической проницаемости водяного пара в микроволновом диапазоне и в окнах прозрачности субмиллиметрового диапазона составляет при стандартных атмосферных условиях приблизительно 20 %. Вблизи достаточно интенсивных резонансов вращательного спектра молекулы воды (в частности в окрестности линии 1_{-1}—1_1) этот вклад возрастает до 50 %, а в окрестности очень сильных резонансов (например вблизи переходов 2_{-1}—2_1 ($1/\lambda_{ij} = 55{,}43$ см$^{-1}$) и 1_{-1}—2_1 ($1/\lambda_{ij} = 55{,}69$ см$^{-1}$)) относительный вклад ε может превышать «сухую» часть показателя преломления в 1,2 раза и более.

Вблизи интенсивных резонансов вращательного спектра водяного пара (типа перехода 1_{-1}—1_1 ($1/\lambda_{ij} = 18{,}5645$ см$^{-1}$)), приходящихся на промежуточный между сверхвысокочастотным и инфракрасным диапазонами участок спектра, разница в значениях ε при описании диэлектрической проницаемости с использованием различных форм спектральных линий возрастает и может достигать нескольких процентов (2÷8 %). Об этом свидетельствуют данные, приведённые в табл. 1.

Таблица 1

Вращательная часть диэлектрической проницаемости водяного пара $10^4\,(\varepsilon - 1)$ в области резонанса 1_{-1}—1_1 при стандартных атмосферных условиях на уровне моря для форм линий Лоренца (Л), Ван Флека—Вайскопфа (ВФ—В) и для формы линии, полученной из решения кинетического уравнения (КУ)

$1/\lambda$, см$^{-1}$	$10^4\,(\varepsilon - 1)$ для формы линии		
	Л	ВФ—В	КУ
18,00	1,4862	1,4867	1,4865
18,40	2,0931	2,0969	2,0940
18,45	2,2013	2,2071	2,2018
18,47	2,2154	2,2224	2,2154
18,50	2,1564	2,1655	2,1550
18,60	0,6692	0,6826	0,6630
18,65	0,03534	0,04517	0,03321
18,70	−0,07305	−0,06671	−0,07282
19,00	0,5077	0,5086	0,5081

Общий вид спектральной зависимости вращательной части диэлектрической проницаемости водяного пара, полученной с использованием найденной из решения кинетического уравнения формой линии в рассматриваемой спектральной области при стандартных атмосферных условиях, приведён на рис. 2. Влияние формы спектральных линий в большей степени проявляется в численном значении коэффициента поглощения γ водяного пара [1, 11]. Так, отличие поглощения при использовании формы линии Лоренца и формы линии, полученной из решения кинетического уравнения, и при использовании формы линии Ван Флека—Вайскопфа составляет 1,2÷2 раза в длинноволновых окнах прозрачности ($\lambda \geq 60$ мкм) и достигает почти 40 раз в коротковолновой области вращательного спектра молекулы H_2O — инфракрасном окне прозрачности, центрированном к длине волны $\lambda \approx 10$ мкм. Вблизи резонансов поглощения расчёты с использованием всех перечисленных форм спектральных линий приводят к близким значениям γ. Столь же

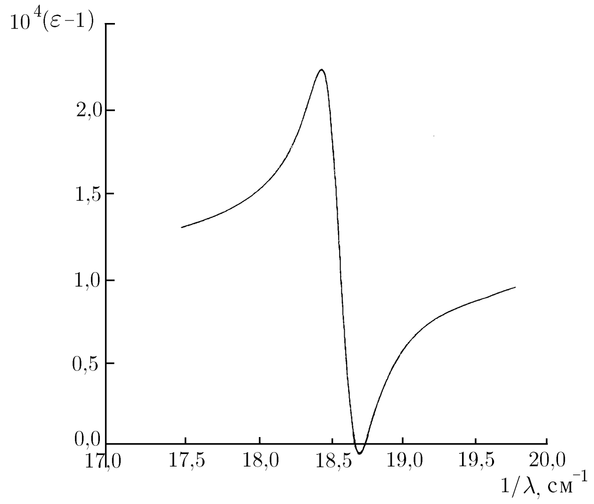

Рис. 2

малая разница в значениях γ проявляется в центральной части вращательного спектра, где линии водяного пара расположены весьма близко друг к другу. В отличие от коэффициента поглощения предельные (статические и оптические) выражения для вращательной части диэлектрической проницаемости водяного пара являются близкими при различной форме спектральных линий, а соответствующие значения в окрестности интенсивных резонансов могут отличаться. Диспропорция различий коэффициентов поглощения и преломления водяного пара, которая наблюдается при описании этих величин с использованием различных форм линий как в предельных случаях, так и в некоторых локальных диапазонах длин волн, в целом не противоречит соотношениям Крамерса—Кронига в силу интегрального (по спектру) характера последних.

Подводя итог обсуждению полученных результатов, можно констатировать, что привлечение данных о действительной части диэлектрической проницаемости водяного пара для решения вопроса о предпочтительности той или иной формы спектральных линий сопряжено со значительными трудностями ввиду весьма сильного поглощения ($10^3 \div 10^4$ дБ/км) в тех спектральных областях, в которых расхождение между теоретическими значениями вращательной части диэлектрической проницаемости водяного пара при различной форме линий в атмосферном спектре является сколько-нибудь значимой. Таким образом, основными критериями адекватности той или иной формы спектральных линий водяного пара продолжают оставаться вышеперечисленные критерии, которые уже используются в настоящее время, хотя они и не устраняют всех физических противоречий, существующих на данном этапе исследований.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 00–05–64527).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Наумов А. П. // Труды 1-й Всесоюзной школы-симпозиума по распространению миллиметровых и субмиллиметровых волн в атмосфере. М.: ИРЭ АН СССР, 1983. С. 21.
2. Lorentz H. A. // Proc. Amsterd. Acad. Sci. 1906. V. 8. P. 591.
3. Van Vleck J. H., Weisskopf V. F. // Rev. Modern Physics. 1945. V. 17, No. 2–3. P. 227.
4. Gross E. P. // Phys. Rev. 1955. V. 97, No. 2. P. 19.
5. Uhlenbeck G. E., Wang Chang C. S. // Proc. Intern. Symposium on Transport Processes in Statistical Mechanics. New York: Intersci. Publ., 1958. P. 161.
6. Жевакин С. А., Стрелков Г. М. // Материалы XV Всесоюзного совещания по спектроскопии. М.: ВИНИТИ, 1965. Т. 3. С. 39.
7. Зиничева М. Б., Наумов А. П. // Изв. вузов. Радиофизика. 1997. Т. 40, № 12. С. 1 463.
8. Жевакин С. А., Наумов А. П. // Радиотехника и электроника. 1967. Т. 12, № 6. С. 955.
9. Жевакин С. А., Наумов А. П. // Радиотехника и электроника. 1967. Т. 12, № 7. С. 1 147.
10. Жевакин С. А., Наумов А. П. // Радиотехника и электроника. 1968. Т. 13, № 6. С. 1 092.
11. Hill R. J., Lawrence R. S., Priestley J. T. // Radio Science. 1982. V. 17, No. 5. P. 1 251.
12. Таунс Ч., Шавлов В. Радиоспектроскопия. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. 756 с.
13. Жевакин С. А., Наумов А. П. // Изв. вузов. Радиофизика. 1963. Т. 6, № 4. С. 674.
14. Messer J. K., De Lucia F. C., Helminger P. // Intern. J. of Infrared and Millimeter Waves. 1983. V. 4, No. 4. P. 505.
15. Бин Б. Р., Даттон Е. Дж. Радиометеорология. Л.: Гидрометеоиздат, 1971. 363 с.

Научно-исследовательский радиофизический институт,
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию
26 июля 2000 г.

ROTATION PART OF THE DIELECTRIC PERMITTIVITY OF WATER VAPOR FOR DIFFERENT SPECTRAL LINE PROFILES

M. B. Zinicheva and A. P. Naumov

We estimate the possible influence of spectral line profile (Lorentz profile, Van Vleck—Weisskopf profile, and profile obtained by solving kinetic equation) on the rotation part of the dielectric permittivity of water-vapor monomers. Spectral regions corresponding to long-wavelength (static) and high-frequency (optical) limiting cases as well as regions in close proximity of resonances of various intensities are considered. The studied effects are compared with the corresponding effects on water-vapor absorption coefficient, which are related to factors determining the line-shape structure.

УДК 621.371:615.47

БЛИЖНЕЕ ТЕПЛОВОЕ ПОЛЕ И ВОЗМОЖНОСТИ ЕГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ДЛЯ ГЛУБИННОЙ ТЕМПЕРАТУРНОЙ ДИАГНОСТИКИ СРЕД

В. Л. Вакс, К. П. Гайкович, А. Н. Резник

Экспериментально обнаружен эффект ближнего теплового электромагнитного поля поглощающей среды. Эффект ближнего поля проявляется в том, что эффективная толщина $d_{\rm eff}$ слоя формирования регистрируемого сигнала оказывается меньше глубины $d_{\rm sk}$ скин-слоя и зависит от размера D приёмной антенны и её высоты h над поверхностью среды. Зависимость $d_{\rm eff}(D,h)$ получена из измерений излучения водной среды с температурной стратификацией на длине волны 31 см с использованием специально разработанной антенны малых электрических размеров. Приводятся результаты экспериментальных исследований радиофизических характеристик антенны. Предлагается использовать измерения зависимости интенсивности принимаемого сигнала от D и h как новый источник информации о глубинном распределении температуры. Развиты методы решения соответствующих обратных задач и получены первые результаты восстановления подповерхностного температурного профиля водной среды.

ВВЕДЕНИЕ

Радиометрические измерения теплового излучения давно применяются для определения разнообразных характеристик поглощающих сред, в частности для их глубинной температурной диагностики, поскольку яркостная температура $T_{\rm b}$ теплового излучения пропорциональна некоторой средней по глубине температуре среды. Эффективная толщина слоя, в котором формируется излучение, определяется поглощением среды и зависит от длины волны, что позволяет восстанавливать глубинный температурный профиль. В этом отношении радиометрические методы определения температуры практически не имеют конкурентов среди других дистанционных методов зондирования. Впервые радиометрический метод был использован в радиоастрономии [1] для восстановления суточной динамики подповерхностного профиля температуры лунного грунта по измерениям динамики радиояркостной температуры.

Позднее идеи подповерхностной радиотермометрии нашли применение в задачах диагностики биологических тканей в медицинских приложениях [2–14]. Этим исследованиям способствовал переход от дистанционной радиометрии к контактной, когда приёмная антенна находится в плотном контакте с поверхностью исследуемой среды либо на небольшом удалении от неё (в ближней зоне). Созданные с этой целью антенны позволили решить две проблемы абсолютных измерений теплового радиоизлучения: достичь достаточно высокого разрешения по поверхности и учесть коэффициент отражения поверхности. Развитие данных исследований стимулировало практический интерес к возможности использования радиотермометрии в диагностике опухолей и для контроля степени разогрева тканей при их лечении с помощью нагрева микроволновым излучением (СВЧ гипертермия). Методы восстановления подповерхностного профиля температуры были основаны, как правило, на частотной зависимости толщины $d_{\rm sk}$ скин-слоя в среде, что подразумевало использование измерений на ряде длин волн. Вместе с тем трудности многочастотных методов связаны с необходимостью использовать несколько радиометров одновременно, что порождает проблему совместной абсолютной калибровки каналов для достижения необходимой точности измерений (около 0,1 К согласно [15]), а также серьёзно увеличивает стоимость радиометрической системы. В результате такие системы пока не получили широкого распространения в медико-биологических приложениях.

Несколько позже методы подповерхностной радиотермометрии были применены для зондирования водной среды [16–18] и грунта [17, 19, 20]. Возможность проведения измерений над достаточно большой поверхностью позволила использовать для многочастотных измерений обычные рупорные антенны. В этих работах для компенсации влияния отражения от поверхности и вариаций фонового излучения впервые была применена методика измерений под плоским металлическим экраном. Калибровка по излучению самой исследуемой среды, однородно нагретой до двух различных температур, позволила добиться точности абсолютных измерений, сравнимой с флуктуационной чувствительностью радиометров. С помощью указанного радиометрического метода было найдено распределение температуры в поверхностных термических плёнках в водной среде, восстановлена динамика профиля температуры во внутренних волнах, генерируемых в воде с сильной стратификацией температуры, восстановлена суточная динамика температуры в грунте (как текущий профиль, так и его предыстория по наблюдаемому в данный момент спектру теплового излучения). Были также разработаны и проверены экспериментально радиометрические методы определения глубины промерзания грунта. Однако и эти работы не вышли за рамки научных исследований, поскольку не были устранены упомянутые выше трудности многочастотных измерений.

Восстановление глубинного профиля температуры $T(z)$ основано на обращении интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода, что представляет собой некорректную обратную задачу. Решение этой задачи требует применения различных методов регуляризации, которые сужают класс функций, на котором ищется решение, с учётом дополнительной априорной информации об искомом профиле температуры. Решение задачи искалось в виде простых модельных профилей с небольшим числом неизвестных параметров [11], равным числу длин волн. Применялись также методы статистической регуляризации [8] и разложения по собственным векторам [10]. Однако наиболее эффективным оказался подход, основанный на теории некорректных задач Тихонова. С использованием этого подхода была решена задача восстановления подповерхностного профиля температуры многослойной среды с учётом эффектов интерференции, а разработанный алгоритм был успешно применён к данным многочастотных радиометрических измерений для восстановления температурных аномалий в опухоли и для контроля степени нагрева тканей при лечении опухолей методом СВЧ гипертермии [15]. Подобный подход использован также в задачах температурной диагностики водной среды и грунта [16–20].

Отметим также, что для случая нестационарного температурного распределения был разработан метод, основанный на совместном решении уравнений переноса излучения и теплопроводности [21], обобщающий подход [1] для произвольных граничных условий. Полученное с использованием такой дополнительной информации точное решение позволило определить динамику глубинного профиля температуры сред по временно́й зависимости теплового радиоизлучения на фиксированной длине волны. В этом методе, в отличие от многочастотного метода, предельная глубина восстановления профиля не ограничена и определяется лишь временем наблюдений. Полученные результаты были успешно применены для мониторинга теплового состояния водной среды, динамика которого связана с теплообменом с атмосферой и испарением, и для восстановления суточного изменения температуры и теплового потока в грунте [21–23]. Применение такого метода предполагает, что известны теплофизические параметры среды.

В большинстве упомянутых выше работ рассматривались возможности измерения и интерпретации лишь волновой компоненты электромагнитного поля, что при контактных радиометрических измерениях не всегда оправдано. Как было показано С. М. Рытовым ещё в 50-е годы, вблизи поверхности нагретой среды наряду с волновым существует также квазистационарное (ближнее) тепловое поле [24]. Корректный учёт ближнего поля при радиометрических измерениях был выполнен в работах [25–27], где показано, что принципиальную роль в формировании измеряемого контактной антенной сигнала играют передаточные свойства приёмной антенны. Так, в работе [25] был предложен метод восстановления профиля температуры $T(z)$ плоскослоистой среды путём выделения различных мод, возбуждаемых в волноводе, находящемся в контакте со средой. В работе [26] на основе точного решения электродинамической задачи с учётом квазистационарной компоненты поля рассматривалась возможность восстановления профиля неоднородности температуры в цилиндре по данным сканирования антенной по поверхности. В [27] было получено соотношение для вычисления эффективной яркостной температуры ближнего теплового поля среды с температурной стратификацией. Здесь измерения квазистационарной компоненты поля предложено использовать как новый источник информации о профиле $T(z)$ в среде.

Важно отметить, что сформулированная С. М. Рытовым в [24] (см. также последующие монографии [28, 29]) задача обнаружения квазистационарного флуктуационного поля вблизи поверхности поглощающей среды до настоящего времени не была решена экспериментально. Как показано в работе [27], ближнее поле оказывает существенное влияние на регистрируемый радиометром сигнал только в том случае, если приёмная антенна имеет малые электрические размеры $D \ll \lambda$, где D — линейный размер апертуры антенны, λ — длина волны излучения, и расположена на малой высоте $h \ll \lambda$ над поверхностью исследуемой среды. В этом случае эффективная толщина $d_{\rm eff}$ слоя, в котором формируется измеряемое тепловое поле, в значительной мере определяется величинами D и h, а не только толщиной $d_{\rm sk}$ скин-слоя, как это имеет место для волновой компоненты поля. Расчёт зависимости $d_{\rm eff}(D, h)$ для среды с однородной диэлектрической проницаемостью выполнен в [27], где показано, что функция $d_{\rm eff}(D, h)$ монотонно возрастает в области $\{D, h\} \ll \lambda$, причём при плотном контакте антенны с поверхностью величина $d_{\rm eff}$ стремится к нулю при уменьшении D, т. е. $d_{\rm eff}(D \to 0, h = 0) \to 0$. В другом предельном случае ($D \gg \lambda$ либо $h \gg \lambda$), когда волновая компонента доминирует над квазистационарной, $d_{\rm eff}$ стремится к толщине скин-слоя ($d_{\rm eff} \to d_{\rm sk}$). Именно эти эффекты ближнего поля могут быть реально обнаружены, что и составило одну из задач данной работы.

Из вышеизложенного следует, что эффекты ближнего поля могут быть обнаружены с помощью антенн с малыми электрическими размерами ($D \ll \lambda$), причём согласно расчётам [27] необходимо иметь антенну с апертурой $D < 0{,}1\lambda$, т. е. значительно меньшую, чем применявшиеся ранее в контактной радиометрии. Заметим, что радиофизические характеристики электрически малых антенн достаточно хорошо изучены только для антенны в свободном пространстве [30]. В контакте же с проводящей средой столь малые антенны ранее не применялись и не исследовались. Общим свойством подобных антенн являются специфические проблемы согласования с подводящим волноводом, вследствие чего КПД антенны оказывается низким. Такие свойства антенны снижают чувствительность радиометра к излучению исследуемой среды, поэтому ближнее тепловое поле до сих пор не было зарегистрировано в экспериментах. Специально для решения задач данной работы нами была разработана и изготовлена высокоэффективная миниатюрная антенна, результаты экспериментальных исследований которой приведены ниже.

Результаты работы [27] указывают также на возможность постановки нового класса обратных задач температурной диагностики сред. Отмеченная изменчивость эффективной глубины зондирования в пределах $0 < d_{\rm eff} < d_{\rm sk}$ при варьировании величин D и h позволяет осуществить сканирование по глубине на фиксированной частоте за счёт изменения размера антенны и её высоты над поверхностью. Это позволяет восстановить профиль $T(z)$, проводя измерения теплового поля среды несколькими антеннами различных размеров, находящимися вблизи поверхности, либо применяя одну перемещаемую по высоте антенну с $D \ll \lambda$, либо комбинируя обе эти возможности. Как уже отмечалось, ранее сканирование по глубине достигалось путём многочастотных измерений за счёт использования зависимости $d_{\rm sk}(\lambda)$. Теоретические оценки возможностей новых методов температурной диагностики, основанные на результатах численного моделирования прямой и обратной задач в биологической среде, указывали на перспективность их применения [31, 32]. Последовавшие экспериментальные исследования [33–35] позволили впервые зарегистрировать эффект ближнего теплового поля в регистрируемом радиосигнале. В данной работе приводятся результаты исследований эффекта ближнего теплового поля и восстановления глубинных профилей температуры в водной среде по данным измерений зависимости интенсивности сигнала, регистрируемого в ближней зоне антенны, от её размера.

1. ЭФФЕКТ БЛИЖНЕГО ТЕПЛОВОГО ПОЛЯ

Регистрация теплового поля проводилась с помощью радиометра с рабочей частотой $f \approx 950$ МГц, шириной частотного диапазона $\Delta\nu \approx 200$ МГц и флуктуационным порогом чувствительности $\delta T \approx \approx 0{,}05$ К при постоянной интегрирования $\tau = 1$ с. Очевидными преимуществами дециметровых волн по сравнению с более короткими радио- и инфракрасными волнами являются существенно менее жёсткие требования к размерам антенны и её высоте над поверхностью, поскольку эти параметры определяются в масштабе длины волны и лежат в диапазоне $\{D/\lambda, h/\lambda\} < 0{,}1$ [27].

В качестве исследуемой среды была выбрана вода, т. к. её комплексная диэлектрическая проницаемость $\varepsilon = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$, а следовательно, и глубина скин-слоя $d_{\rm sk} = 1/\gamma$, где $\gamma = (4\pi/\lambda)\,{\rm Im}\sqrt{\varepsilon}$ — коэффициент поглощения, могут быть вычислены с высокой точностью, например, по данным работы [36], если известны температура T и солёность S. Сильная зависимость толщины скин-слоя от солёности позволяет проводить эксперименты, выбирая величину $d_{\rm sk}$ в пределах от 1 мм до 10 см и моделируя тем самым условия в разных средах. Кроме того, в жидкости могут быть сравнительно легко выполнены контактные измерения глубинного профиля температуры $T(z)$.

1.1. Ближнепольная антенна

Ключевым элементом приёмной системы являлась антенна малых электрических размеров, показанная на рис. 1. Излучателями служили два синфазных коротких диполя длиной $D = 1$ см ($D/\lambda \approx \approx 0{,}03$). Диполи подключены к концам симметричной полосковой линии, игравшей роль согласующего резонатора. В качестве разделяющего диэлектрика был использован ФЛАН-10. Согласование системы с подводящим коаксиальным кабелем достигалось за счёт переходного коаксиально-полоскового элемента и диэлектрической пластины тонкой настройки, помещённой поверх одного из плеч резонатора. Прототип этой антенны исследован в работе [37], где приводится обоснование конструкции и методика расчёта радиофизических характеристик, а также описаны способы согласования. Отметим, что указанная работа [37] относится к антенне, излучающей в свободное пространство, поэтому полученные в [37] результаты можно рассматривать лишь как базовые принципы, положенные в основу конструкции антенны, находящейся в контакте с поглощающей средой. Принципиальная особенность контактной антенны заключается в том, что действительная и мнимая части входного импеданса диполя зависят от его высоты h над поверхностью. Вследствие этого при неизменной конфигурации элементов наилучшего согласования можно достичь только при одном определённом значении h.

В данной работе антенна была согласована с входом радиометра при её плотном контакте с поверхностью исследуемой среды (т. е. при $h = 0$), так что средний по частотному диапазону радиометра коэффициент отражения не превышал 0,03. Спектры коэффициента отражения антенны, определённые с помощью панорамного измерителя коэффициента стоячей волны (КСВ) для различных значений h, представлены на рис. 2. На рис. 3 приведена зависимость среднего по частотному диапазону радиометра коэффициента отражения $\langle R\rangle$ от h. Из рис. 2, 3 видно, что до высоты $h = 0{,}5$ мм отражение в диапазоне радиометра весьма мало (не более 0,1), а затем происходит резкое рассогласование антенны, которое приводит к почти скачкообразному увеличению коэффициента отражения до $\langle R\rangle \approx 0{,}4$.

Для проведения радиометрических измерений температуры и калибровки приёмника важно, чтобы величина $\langle R\rangle$ была как можно менее чувствительна к вариациям диэлектрической проницаемости $\varepsilon = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$ исследуемой среды. В случае водной среды значения ε_1, ε_2 определяются температурой T и солёностью S воды. При естественных вариациях T и S параметры $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ изменяются в широких пределах. Данные измерений спектра коэффициента отражения антенны, находящейся в контакте с поверхностью воды ($h = 0$), при различных значениях T и S приведены на рис. 4, 5. Можно видеть, что в пределах частотного диапазона радиометра коэффициент R достаточно слабо реагирует на вариации T, S, так что изменения $\langle R\rangle$ не превышают 0,01. При этом погрешность радиометрических измерений температуры составит не более 0,1 К, если перепад температур калибровочных эталонов, в качестве которых использовалась однородно нагретая вода, составляет приблизительно 10 К. Следует отметить, что вне диапазона согласования зависимости R от T и S становятся более существенными, особенно в районе максимума R при $\nu \approx 820$ МГц (см. рис. 4, 5). Это позволяет использовать соответствующие измерения для определения температуры и солёности, а также зависящей от них комплексной диэлектрической проницаемости воды.

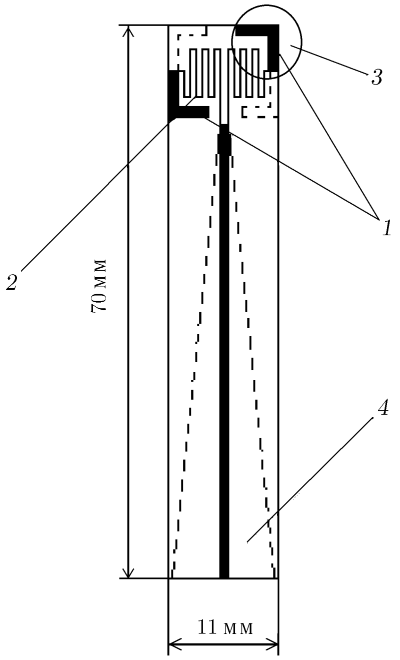

Рис. 1. Схема ближнепольной антенны: *1* — электрически короткие диполи, *2* — согласующий резонатор, *3* — диэлектрическая пластина тонкой настройки, *4* — коаксиально-полосковый переход

На рис. 4 показан также частотный спектр коэффициента отражения R для живой биологической ткани (участок бедра). Согласование разработанной антенны с биологической средой в частотном диапазоне радиометра оказалось достаточно хорошим ($R \sim 0{,}05$), хотя минимум R реализуется в данном случае на более высоких частотах. Таким образом, данная радиометрическая система может быть использована для зондирования биологической среды без дополнительной перестройки антенны, при этом вода может применяться для калибровки радиометра.

Для радиометрических измерений очень важен вопрос об эффективности (КПД) η приёмной антенны. Действительно, измеряемая антенная температура $T_{\rm a}$ выражается соотношением

$$T_{\rm a} = (1 - \langle R\rangle)\,[\eta T_{\rm b} + (1-\eta)\,T_{\rm m}] + \langle R\rangle\,T_{\rm n}, \qquad (1)$$

где $T_{\rm b}$ — эффективная яркостная температура регистрируемого теплового поля среды, $T_{\rm m}$ — температура материала антенны, $T_{\rm n}$ — эквивалентная температура шумов на входе радиометра. Принятое определение $T_{\rm b}$ подразумевает, что для однородно нагретой до температуры T среды $T_{\rm b} = T$. Из формулы (1) видно, что как рассогласование ($\langle R\rangle \neq 0$), так и падение КПД ($\eta < 1$) антенны уменьшают чувствительность приёмника при измерении $T_{\rm b}$. Формула (1) использована для определения высотной зависимости КПД антенны $\eta(h)$ по данным радиометрических измерений. С этой целью введём чувствительность $\delta T_{\rm b}$ радиометрической системы с подключённой антенной, определяемую по отклику сигнала $\Delta n = n_2 - n_1$ регистрирующего прибора на приращение яркостной температуры теплового поля однородно нагретой водной среды при изменении температуры среды от T_1 до T_2:

$$\delta T_{\rm b} = \frac{T_2 - T_1}{\Delta n}\,\sigma_{\rm n}, \qquad (2)$$

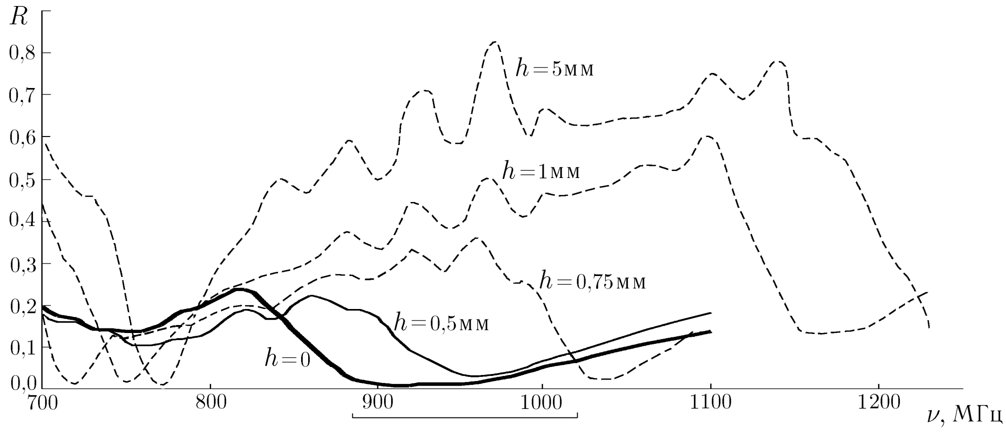

Рис. 2. Частотная зависимость коэффициента отражения антенны для различных высот её расположения над поверхностью воды. Скобкой под осью абсцисс отмечен частотный диапазон радиометра

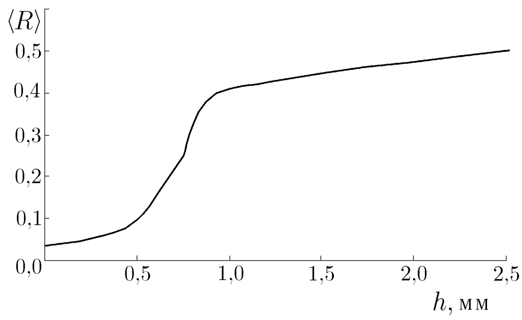

Рис. 3. Зависимость среднего по частотному диапазону радиометра коэффициента отражения $\langle R\rangle$ от высоты антенны над поверхностью

где σ_n — среднеквадратичное отклонение шумовой дорожки в регистрирующем приборе. В соответствии с (1) чувствительность $\delta T_{\rm b}$ связана с флуктуационным порогом чувствительности δT радиометра, определённым по излучению согласованной нагрузки, подключённой вместо антенны ($\langle R\rangle = 0$, $\eta = 1$), соотношением $\delta T_{\rm b}(h) = \eta(h)\,(1-\langle R(h)\rangle)\,\delta T$. Тогда КПД антенны η определяется как

$$\eta(h) = \frac{\delta T_{\rm b}(h)/\delta T}{1-\langle R(h)\rangle}\,. \qquad (3)$$

Поскольку функция $\langle R(h)\rangle$ была измерена независимо (см. рис. 3), формула (3) позволяет определить зависимость $\eta(h)$, которая приведена на рис. 6. Там же показана и зависимость $\delta T_{\rm b}(h)$, определённая из (2).

Падение η с ростом h объясняется в рамках следующей модели электромагнитных процессов в антенне. КПД можно представить как

$$\eta = \frac{R_{\rm a}}{R_{\rm a}+R_{\rm d}}\,, \qquad (4)$$

где $R_{\rm a}$ — сопротивление излучения, $R_{\rm d}$ — эквивалентное сопротивление, определяемое диссипацией в материале антенны. Сопротивление излучения $R_{\rm a} = R_{\rm nf} + R_\Sigma$ определяется, во-первых, поглощением окружающего антенну ближнего поля в проводящей среде ($R_{\rm nf}$) и, во-вторых, уходящим радиационным полем (R_Σ). При $h = 0$ выполняются соотношения $R_{\rm nf} \gg R_\Sigma$, $R_{\rm a} > R_{\rm d}$, вследствие чего при плотном контакте антенны с поверхностью КПД достаточно высок ($\eta \approx 0{,}85$ согласно рис. 6). С ростом высоты h уменьшается эффективность проникновения ближнего поля в поглощающую среду, поскольку оно сосредоточено вблизи диполей, в результате чего уменьшается $R_{\rm nf}$. Таким образом, при достаточно больших h имеют место обратные соотношения $R_{\rm nf} < R_\Sigma$, $R_{\rm a} \ll R_{\rm d}$, и мы приходим к типичной для излучающих в свободное пространство электрически малых антенн ситуации $\eta \ll 1$ (см., например, [30]). Влиянием ближнего поля объясняется и показанная на рис. 3 зависимость $\langle R(h)\rangle$. С изменением высоты h меняется входной импеданс антенны, а значит, и условия её согласования с входом приёмника. Следовательно, идеальное согласование при фиксированной настройке антенны

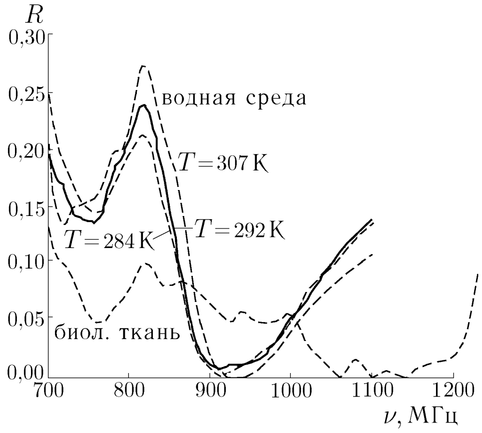

Рис. 4. Частотная зависимость коэффициента отражения антенны, находящейся в контакте с дистиллированной водой, при различной температуре воды, а также при контакте с биологической средой

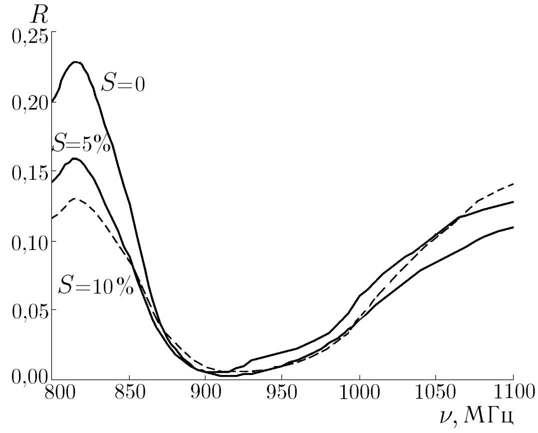

Рис. 5. Частотная зависимость коэффициента отражения антенны, находящейся в контакте с водной средой, при различной солёности воды

может быть достигнуто только при одном определённом h, что и видно из рис. 3, где величина $\langle R\rangle$ минимальна при $h = 0$.

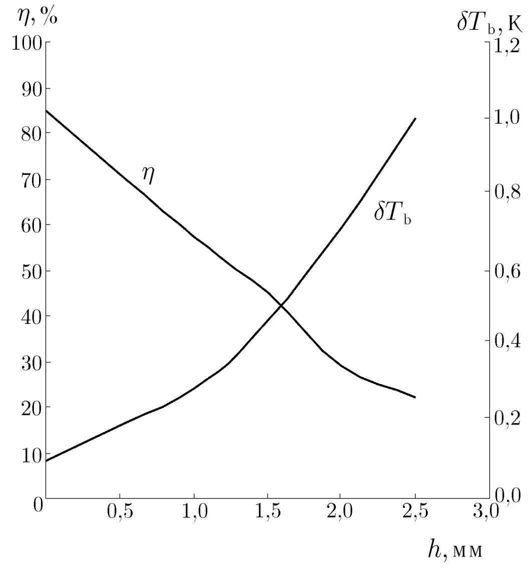

Рис. 6. Зависимости КПД η антенны и чувствительности δT_{b} радиометрических измерений от высоты антенны над поверхностью

Из рис. 3 можно видеть, что при изменении высоты антенны над поверхностью до $h = h_{\max} \approx$ $\approx 2{,}5$ мм порог чувствительности системы к вариациям температуры исследуемой среды увеличивается от 0,06 К (при $h = 0$) до 1 К (при $h = h_{\max}$). Дальнейшее ухудшение чувствительности сделало невозможным проведение радиометрических измерений на высотах $h > h_{\max}$. Как следует из сказанного выше, падение чувствительности с ростом h обусловлено, с одной стороны, рассогласованием антенны, а с другой — уменьшением её КПД. Согласование антенны на каждой высоте h не является принципиальной проблемой и может быть достигнуто перестройкой согласующего резонатора. Вместе с тем падение КПД с уменьшением размеров является общим свойством всех электрически малых антенн и обусловлено главным образом омическими потерями в проводниках согласующих элементов. Повышение КПД может быть достигнуто за счёт применения материалов с экстремально низким поверхностным сопротивлением, например высокотемпературных сверхпроводников. Возможности повышения η за счёт применения таких материалов в конструкциях антенн, излучающих в свободном пространстве, исследованы в работах [37–39]. Как показали наши предварительные расчёты [33, 34], для сверхпроводящей антенны, находящейся в контакте с водной средой, величина η превышает 0,8 при $D \geq 3$ мм при длине волны $\lambda = 30$ см. Применение таких антенн позволит варьировать глубину зондирования сред d_{eff} от примерно $0{,}2 d_{\mathrm{sk}}$ до d_{sk}, что вполне достаточно для восстановления профиля $T(z)$ в пределах толщины скин-слоя.

Таким образом, наличие согласованной высокоэффективной антенны является принципиальным требованием к ближнепольной радиометрической системе в отличие от аналогичных систем активной локации, обычно называемых ближнепольными микроскопами [40, 41].

Кроме вышеописанной антенны, для измерений также использовалась стандартная контактная антенна с апертурой $D = 4$ см, разработанная для медико-биологических радиометрических исследований [4, 5].

1.2. Радиометрические измерения

Для измерений была разработана специальная установка, схема которой показана на рис. 7. В воде вдоль вертикальной оси z создавался устойчивый близкий к линейному профиль температуры $T(z)$ с помощью кольцевого проволочного нагревателя вблизи поверхности и холодильника у дна цилиндрического сосуда. Градиент температуры в установившемся стационарном состоянии достигал $\mathrm{d}T/\mathrm{d}z \approx \approx 2{,}5$ К/см (см. рис. 8). Устройство, показанное на рис. 7, использовалось как для описанных выше антенных исследований, так и для радиометрических измерений. В первом случае сигнал от антенны подавался на панорамный измеритель КСВ, во втором — на радиометр.

С помощью радиометра измерялась эффективная яркостная температура теплового поля исследуемой среды, расположенной в полупространстве $z \le 0$:

$$T_{\mathrm{b}}(h, D) = \int\limits_{-\infty}^{0} T(z) K(z, D, h)\, \mathrm{d}z, \tag{5}$$

т. е. T_{b} является средневзвешенной температурой среды в некотором слое, толщина которого определяется видом ядра K. Ядро интегрального уравнения (5) нормировано и включает в себя две компоненты:

$$K(z, D, h) = \frac{K_1(z, D) + K_2(z, h, D)}{\displaystyle\int_{-\infty}^{0} [K_1(z, D) + K_2(z, h, D)]\, \mathrm{d}z}\,, \tag{6}$$

где K_1 определяет вклад волновой, а K_2 — квазистационарной компонент поля. Эти компоненты могут быть вычислены для однородной по глубине диэлектрической проницаемости среды $\varepsilon(z) = \varepsilon = \mathrm{const}$ на основе соотношений, полученных в [27]:

$$K_1 = \int\limits_{0}^{\pi/2} \sin\theta\,(1 + \cos^2\theta) \left(1 - \frac{|R_{\mathrm{E}}(\theta)|^2 + |R_{\mathrm{H}}(\theta)|^2}{2}\right) \gamma_1(\theta) \exp(\gamma_1 z) \left|E_{\mathrm{s}}^{(1)}(\theta)\right|^2 \mathrm{d}\theta,$$

$$K_2 = \int\limits_{0}^{\infty} \operatorname{sh}\theta \operatorname{ch}^3\theta\, [A(\theta) + B(\theta)] \exp\!\left[\gamma_2(\theta) z - 2k_0 h \sqrt{\operatorname{ch}^2\theta - 1}\right] \left|E_{\mathrm{s}}^{(2)}(\theta)\right|^2 \mathrm{d}\theta, \tag{7}$$

где

$$\gamma_1 = 2k_0 \operatorname{Im}\sqrt{\varepsilon - \sin^2\theta}\,, \qquad \gamma_2 = 2k_0 \operatorname{Im}\sqrt{\varepsilon - \operatorname{ch}^2\theta}\,,$$

$$R_E = \frac{\cos\theta - \sqrt{\varepsilon - \sin^2\theta}}{\cos\theta + \sqrt{\varepsilon - \sin^2\theta}}\,, \qquad R_H = \frac{\sqrt{\varepsilon - \sin^2\theta} - \varepsilon\cos\theta}{\sqrt{\varepsilon - \sin^2\theta} + \varepsilon\cos\theta}\,,$$

$$A = \frac{4}{\left|i\operatorname{sh}\theta + \sqrt{\varepsilon - \operatorname{ch}^2\theta}\right|^2}\,, \qquad B = \frac{4\left(\operatorname{ch}^2\theta + \left|\sqrt{\varepsilon - \operatorname{ch}^2\theta}\right|^2\right)}{\left|i\,\varepsilon\operatorname{sh}\theta + \sqrt{\varepsilon - \operatorname{ch}^2\theta}\right|^2}\,,$$

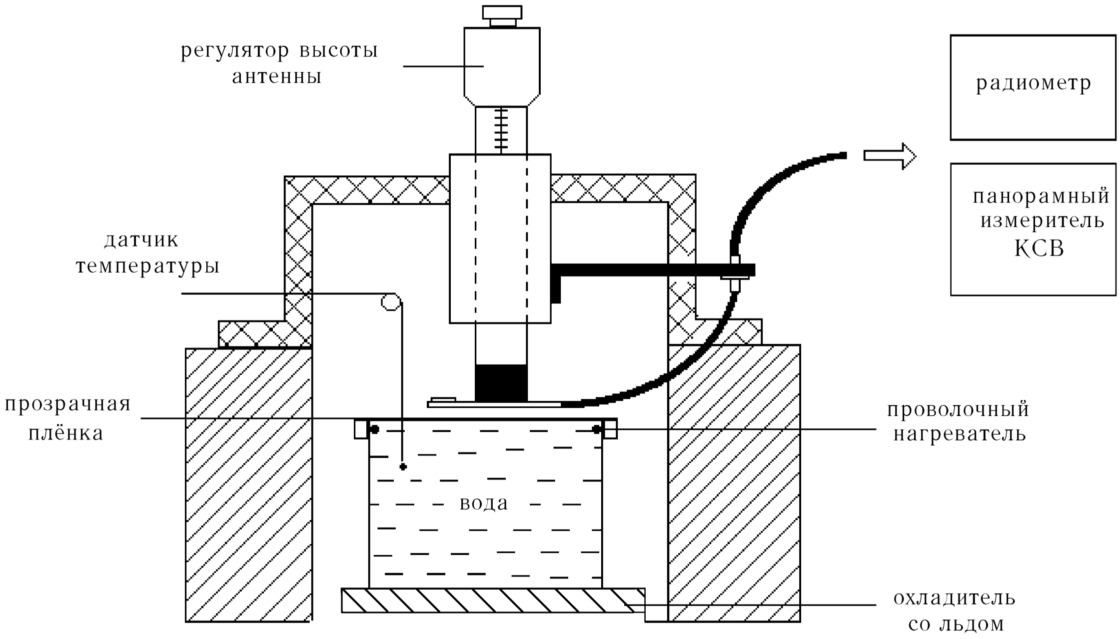

Рис. 7. Схема измерительной установки

$k_0 = 2\pi/\lambda$. Распределение поля по апертуре антенны аппроксимировалось гауссовой функцией: $E_\mathrm{s}(r) = \exp(-4r^2/D^2)$, тогда в формулах (7)

$$E_\mathrm{s}^{(1)} = \exp\left[-1/(4k_0 D\sin\theta)^2\right], \qquad E_\mathrm{s}^{(2)} = \exp\left[-1/(4k_0 D\,\mathrm{ch}\,\theta)^2\right].$$

Для однородно нагретой среды ($T(z) = T_0 = \mathrm{const}$) в соответствии с (5), (6) независимо от вида ядра K имеем $T_\mathrm{b} = T_0$. Если же распределение $T(z)$ неоднородно по глубине, то значение T_b определяется эффективной толщиной d_eff слоя, формирующего регистрируемое поле, которая выражается через K следующим образом:

$$d_\mathrm{eff} = \int\limits_{-\infty}^{0} zK(z,D,h)\,\mathrm{d}z. \tag{8}$$

Волновая компонента поля в свободном пространстве формируется плоскими неоднородными волнами, направления распространения которых лежит в некотором конусе с осью вдоль оси z под поверхностью поглощающей среды. Если ε удовлетворяет условию $|\varepsilon| \gg 1$ (как в рассматриваемом случае водной среды), то этот конус имеет малый угол при вершине. Тогда для волновой компоненты поля имеем $d_\mathrm{eff} \approx d_\mathrm{sk}$. Волны, направления распространения которых в поглощающей среде лежат вне этого конуса, в свободном пространстве дают вклад только в квазистационарную компоненту регистрируемого поля, поэтому для этой компоненты $d_\mathrm{eff} < d_\mathrm{sk}$. Таким образом, для обеих компонент поля также будет выполнено соотношение $d_\mathrm{eff} < d_\mathrm{sk}$, и эффективная толщина будет функцией высоты и размера антенны, т. е. $d_\mathrm{eff} = d_\mathrm{eff}(h,D)$. В том случае, когда вклад ближнего поля в регистрируемый сигнал становится пренебрежимо малым, т. е. с ростом высоты или размера антенны, ядро $K(z,h,D)$ уравнения (5) стремится к своему предельному виду $K = \gamma\exp(z/d_\mathrm{sk})$, не зависящему от h и D, и $d_\mathrm{eff} \to d_\mathrm{sk}$. Для линейного профиля $T(z)$ в соответствии с принятым определением (8) из (5) следует простое точное выражение, которое и использовалось для определения d_{eff} по данным измерений T_{b}:

$$T_{\text{b}} = T(z = -d_{\text{eff}}). \tag{9}$$

Поэтому для регистрации эффектов ближнего поля в исследуемой водной среде создавался именно линейный профиль температуры, показанный на рис. 8, а измеренные величины T_{b}, отложенные по оси ординат на рис. 8, в проекции на ось абсцисс сразу же давали значения d_{eff}.

Яркостная температура T_{b} для каждой высоты h и размера D антенны измерялась с помощью двух калибровок по тепловому излучению идентичных сосудов с водой, однородно нагретой до температур T_1 и T_2. При этом

$$T_{\text{b}} = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{n_2 - n_1}\,(n_{\text{b}} - n_1), \tag{10}$$

где n_{b} и n_1, n_2 — отклики регистрирующего прибора радиометра, соответствующие основному и калибровочным измерениям.

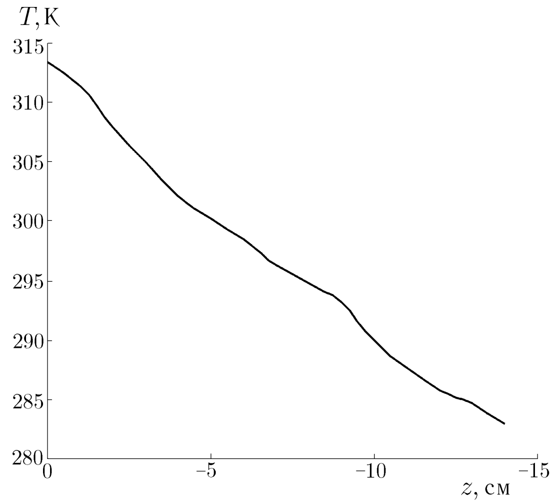

Рис. 8. Линейный профиль температуры, созданный в водной среде измерительной установки (см. рис. 7)

Эксперименты проводились при трёх различных значениях солёности воды $S = 0; 1{,}8; 5{,}0$ г/дм^3. При $S = 1{,}8$ г/дм^3 диэлектрическая проницаемость воды практически не зависит от температуры, что позволяет рассматривать среду с температурной стратификацией как диэлектрически однородную. Данное значение солёности характерно тем, что из-за возрастания проводимости, связанной с ионами раствора NaCl, зависимость $\varepsilon_2(T)$ переходит от убывающей (характерной для диэлектриков) к возрастающей (характерной для проводников). В свою очередь, зависимость ε_1 от T при всех значениях S несущественна и может в расчёт не приниматься.

Результаты измерений T_{b} для $S = 0$ (деионизованная вода) и $S = 1{,}8$ г/дм^3 представлены на рис. 9, 10, где также показаны результаты теоретических расчётов по формулам (5)–(7). Наилучшее соответствие теории и эксперимента наблюдалось для случая $S = 1{,}8$ г/дм^3 (рис. 10). Это можно объяснить указанной выше диэлектрической однородностью воды при этом значении S, поскольку формулы (5)–(7) получены именно для случая $\varepsilon = \text{const}$. Вместе с тем, если в случае диэлектрически однородной среды полагать $\varepsilon = \varepsilon(T = T_{\text{b}})$, соответствие теории с экспериментом оказывается вполне удовлетворительным и при других значениях S (см. пример на рис. 9).

На рис. 11 показаны результаты вычислений d_{eff} из соотношения (9) по данным измерений T_{b}, приведённым на рис. 10, а также по формулам (6)–(8). Зависимости на рис. 11 представляют собой экспериментальное подтверждение предсказанных теорией зависимостей d_{eff} от размера антенны и её высоты над поверхностью. На рис. 12 представлены теоретическая и экспериментальная зависимости d_{eff} от солёности воды для измерений антенной с $D = 1$ см при $h = 0$. Здесь также можно видеть хорошее соответствие теории и эксперимента. Наблюдаемое на рис. 11, 12 различие между d_{eff} и d_{sk} (примерно в 2 раза) наглядно демонстрирует эффект ближнего поля, поскольку, как уже отмечалось, для волновой компоненты поля $d_{\text{eff}} \approx d_{\text{sk}}$. Погрешность определения яркостной температуры с учётом всех факторов (флуктуационной чувствительности, времени усреднения и ошибок измерения температуры эталонов) составляла от 0,2 K при $h = 0$ до 0,5 K при $h = 2{,}5$ мм. При температурном градиенте 2,5 K/см соответствующая погрешность определения d_{eff} менялась в указанном интервале высот примерно от 1 до 2 мм. Таким образом, несмотря на то, что падение эффективности и рассогласование антенны с ростом

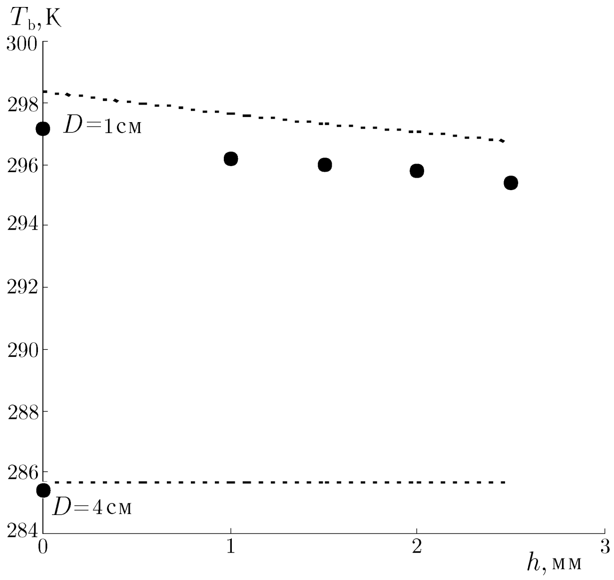

Рис. 9. Зависимости эффективной яркостной температуры от высоты антенны над поверхностью дистиллированной воды ($S = 0$) для размеров апертуры $D = 1$ и 4 см. Пунктирные линии соответствуют теоретическим расчётам, кружки — результатам измерений

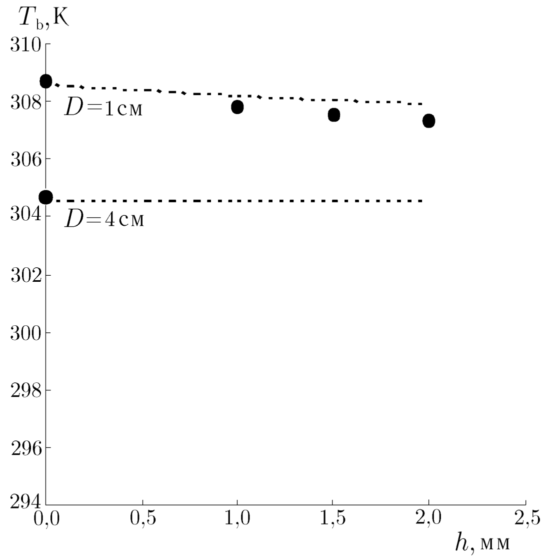

Рис. 10. То же, что на рис. 9, для солёности $S = 1{,}8$ г/дм^3

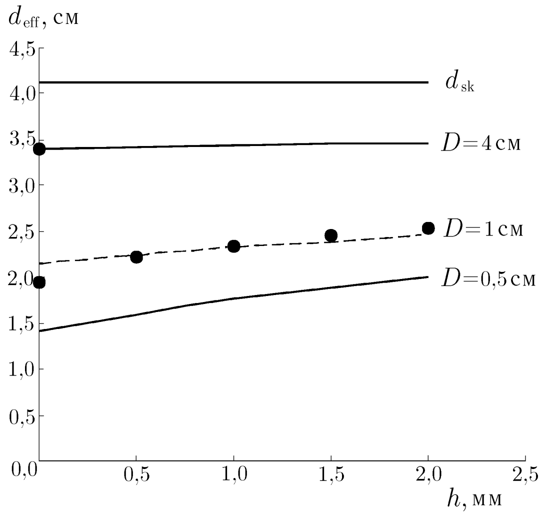

Рис. 11. Эффективная толщина слоя формирования регистрируемого поля как функция высоты антенны над поверхностью для различных размеров апертуры. Кружки соответствуют результатам измерений, сплошные линии — расчётам. Солёность воды $S = 1{,}8$ г/дм^3

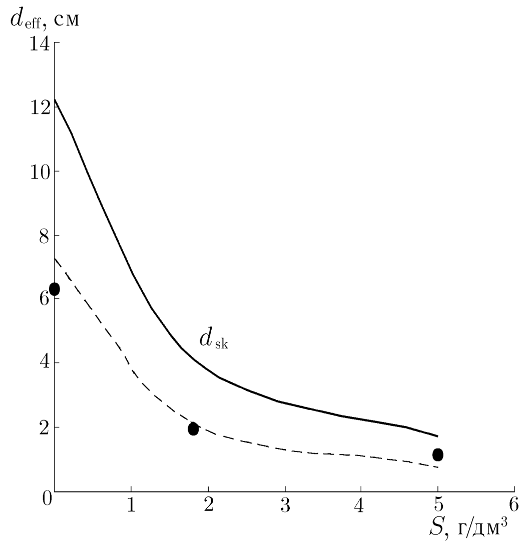

Рис. 12. Экспериментальная (кружки) и теоретическая (пунктир) зависимости эффективной толщины слоя формирования регистрируемого поля от солёности воды при контактных измерениях с антенной размером 1 см. Сплошная кривая — вычисленная зависимость толщины скин-слоя

h не позволили выполнить измерение зависимости $d_{\text{eff}}(h)$ в достаточно большом интервале высот, имеющихся возможностей эксперимента хватило, чтобы эту зависимость зарегистрировать (см. рис. 11). Отметим также, что и при размере апертуры $D = 4$ см, используемом обычно в медицинских приложениях, влияние ближнего поля нельзя считать пренебрежимо малым (см. рис. 11).

Таким образом, результаты, представленные на рис. 9–12, позволяют считать ближнее поле источника теплового радиоизлучения экспериментально обнаруженным (см. также [35]).

2. ВОССТАНОВЛЕНИЕ ГЛУБИННОГО ПРОФИЛЯ ТЕМПЕРАТУРЫ ПО ДАННЫМ БЛИЖНЕПОЛЬНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Зависимость измеряемой яркостной температуры T_{b} от размера D антенны или от высоты h антенны над поверхностью среды можно использовать как новый источник информации о глубинном температурном профиле $T(z)$. Восстановление этого профиля возможно путём решения интегрального уравнения (5) как уравнения типа Фредгольма 1-го рода. С физической точки зрения использование таких измерений вполне аналогично использованию зависимости T_{b} от длины волны λ в многочастотных методах [15–20]. Информация содержится в зависимости T_{b} от эффективной толщины слоя, в котором формируется регистрируемое поле. При измерениях квазистационарной компоненты поля используется зависимость d_{eff} от D, h, а при измерениях волновой компоненты — зависимость d_{eff} от λ. В принципе, можно использовать любую комбинацию этих измерений, рассматривая правую часть уравнения (5) как зависимость $T_{\text{b}}(d_{\text{eff}})$. Предельная глубина восстановления определяется толщиной скин-слоя d_{sk} (в многочастотных методах — для максимальной длины волны). По этой причине методы решения задачи, требования к точности и дискретизации измерений, а также выводы о достижимой точности восстановления для ближнепольных и многочастотных методов оказываются во многом близкими.

С математической точки зрения такие задачи являются некорректными, и для их решения необходимо использовать дополнительную априорную информацию о точном решении. Специфика априорной информации определяет тот или иной метод регуляризации. Для решения задачи на классе интегрируемых с квадратом функций, имеющих интегрируемую с квадратом производную, в [15–20] успешно использовался метод обобщённой невязки Тихонова [42]. Характерной особенностью рассматриваемой задачи является медленная сходимость решения при уменьшении погрешности данных и сильная зависимость точности восстановления от степени сложности искомого решения. Существенным достоинством метода Тихонова по сравнению с другими известными методами (наименьших квадратов, статистической регуляризации или с сингулярным анализом) является равномерная сходимость решения к точному при стремлении погрешности данных к нулю в среднеквадратичной метрике. Выводы о погрешности восстановления можно делать только на основе численных экспериментов для типичных и экстремальных распределений из класса физически допустимых. Для температурных профилей в рассматриваемых сплошных средах характерны достаточно простые распределения, поскольку теплопроводность всегда стремится выровнять или, по крайней мере, сгладить температурные неоднородности. Поэтому, например, стационарный профиль $T(z)$ с глубинной инверсией и одним максимумом можно в данном случае считать экстремально сложным распределением температуры, предполагающим наличие внутреннего источника тепла.

2.1. Численные эксперименты

Рассмотрим для примера восстановление профиля $T(z)$ в диэлектрически однородной поглощающей среде с толщиной скин-слоя $d_{\text{eff}} = 2{,}35$ см при $\lambda = 30$ см, характерной для мышечной ткани ($\varepsilon =$

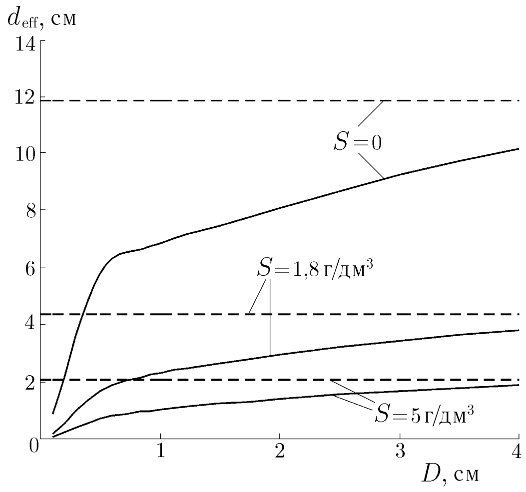

Рис. 13. Зависимость $d_{\rm eff}$ от размера антенны при контактных ($h = 0$) измерениях теплового поля воды различной солёности в сравнении с толщиной скин-слоя $d_{\rm sk}$ (пунктирные линии)

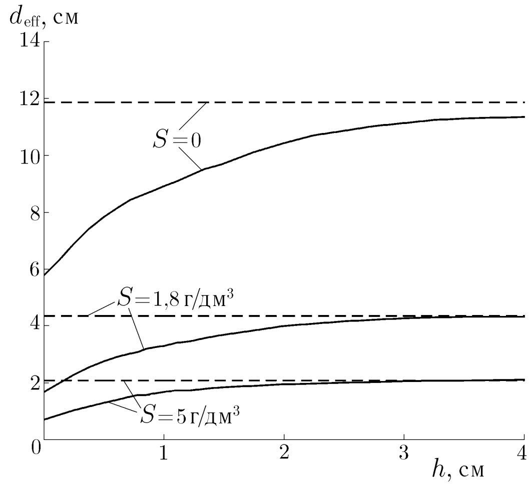

Рис. 14. Зависимость $d_{\rm eff}$ от высоты антенны над поверхностью при измерениях теплового поля воды различной солёности в сравнении с толщиной скин-слоя $d_{\rm sk}$ (пунктирные линии). Размер апертуры антенны $D = 0{,}5$ см

$= 40 + i13$). Пусть измеряется зависимость яркостной температуры от высоты антенны над поверхностью $T_{\rm b}(h)$ при фиксированном размере апертуры D или зависимость антенной температуры от размера апертуры $T_{\rm b}(D)$ при фиксированной высоте h. По заданному температурному профилю $T(z)$ с глубинной инверсией из (5) рассчитывались зависимости $T_{\rm b}(h)$ или $T_{\rm b}(D)$, к которым далее добавлялась случайная нормально распределённая погрешность с заданным стандартным отклонением $\delta T_{\rm b}$, моделирующая ошибку измерений. Полученные таким образом «данные измерений» использовались в алгоритме решения обратной задачи, и восстановленный профиль $T(z)$ сравнивался с исходным.

Результаты моделирования показали сходимость решения к точному при стремлении ошибки измерений к нулю и слабую чувствительность погрешности восстановления к радиусу корреляции моделируемой ошибки. Последнее свойство вытекает из того, что, как отмечалось выше, сходимость имеет место при стремлении ошибки к нулю в интегральной метрике. Точность восстановления и требования к числу информативных каналов (дискретизации «данных измерений») сильно зависят от сложности восстанавливаемого профиля (см. также [15–20]). Для достаточно точного восстановления необходимо, чтобы интервал изменения $d_{\rm eff}$ в зависимости от h или D в основном перекрывал по глубине область, где восстанавливается профиль температуры, а дискретизация измерений по высоте должна быть достаточно частой, чтобы сохранить информацию об имеющихся вариациях температурного профиля.

На рис. 13, 14 представлены результаты расчётов толщины $d_{\rm sk}$ скин-слоя и зависимости эффективной глубины $d_{\rm eff}$ от размера и высоты антенны при различной солёности воды, на основе которых можно правильно выбрать интервал параметров для решения обратной задачи для сред с различным поглощением. На рис. 14 можно также видеть, что при относительно малом поглощении для дистиллированной воды ($S = 0$) величина $d_{\rm eff}$ с ростом h стремится к несколько меньшему значению, чем толщина скин-слоя $d_{\rm sk}$. Это проявление «диаграммного» эффекта, связанного с увеличением угла раскрыва конуса в водной среде, из которого выходит излучение. Для более прозрачных сред, таких как жировая ткань, этот эффект ещё более заметен.

На рис. 15 приведены результаты численного моделирования восстановления температурного профиля гауссовой формы с максимумом на глубине $z = -3$ см и такой же (3 см) полушириной по пред-

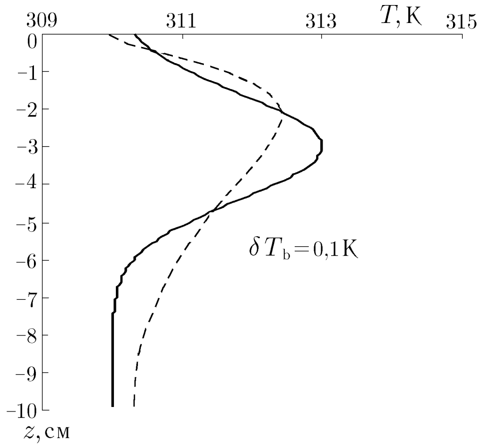

Рис. 15. Исходный профиль $T(z)$ (сплошная линия) и восстановленный по «данным» рис. 16 (пунктир)

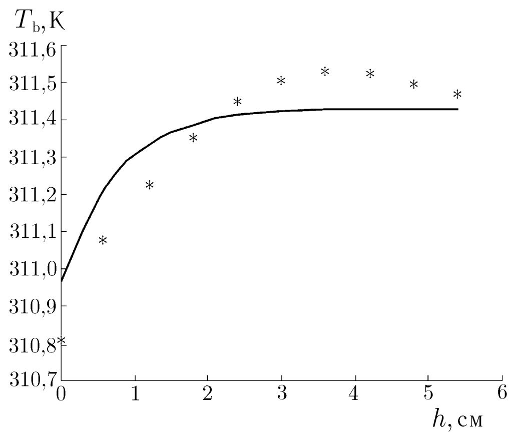

Рис. 16. Зависимость $T_{\rm b}(h)$, рассчитанная по исходному профилю $T(z)$ на рис. 15 (сплошная линия) и «данные измерений» со случайной погрешностью $\delta T_{\rm b} = 0{,}1$ К (звёздочки)

ставленным на рис. 16 «данным измерений» $T_{\rm b}(h)$ при фиксированном размере антенны $D = 1$ см. Отметим, что вклад среды, лежащей в области $z < -d_{\rm sk}$, в яркостную температуру $T_{\rm b}$ экспоненциально спадает с глубиной в соответствии с поведением ядра $K(z)$ в уравнении (5). Тем не менее приведённый на рис. 15 пример показывает возможность достаточно качественного восстановления $T(z)$ до глубин $z \sim (2 \div 3)\, d_{\rm sk}$.

На рис. 17, 18 приведены результаты восстановления аналогичного рис. 15 профиля $T(z)$ по «данным измерений» зависимости $T_{\rm b}(D)$ при фиксированной высоте $h = 0{,}1$ см. Видно хорошее качество восстановления $T(z)$, близкое к результатам на рис. 15, даже при меньшем числе «экспериментальных точек». Интересно, что инверсия $T(z)$ уверенно восстанавливается, несмотря на то что она не проявилась в зависимости $T_{\rm b}(D)$.

Хорошее восстановление более простых (монотонных и плавных в масштабе скин-слоя) профилей оказалось возможным и при использовании всего трёх «экспериментальных» точек в зависимостях $T_{\rm b}(h)$, $T_{\rm b}(D)$. Эти точки нужно выбирать так, чтобы соответствующие значения $d_{\rm eff}$ равномерно перекрывали интервал восстановления температуры по глубине.

Таким образом, результаты численного эксперимента подтвердили перспективность использования данных ближнепольных радиометрических измерений для восстановления глубинного профиля температуры. Отметим, что для восстановления нестационарного подповерхностного профиля температуры можно использовать и подход [21], основанный на совместном решении уравнений формирования излучения и теплопроводности, что в ряде случаев может позволить восстановить динамику профиля температуры по ближнепольным измерениям при фиксированном размере антенны.

2.2. Восстановление динамики профиля температуры водной среды

С целью экспериментальной проверки возможностей ближнепольных радиометрических методов наблюдался процесс нагрева воды ($S = 1{,}8$ г/дм^3) с помощью проволочного нагревателя в установке, изображённой на рис. 7, от исходного (в момент включения нагревателя) однородного температурного распределения. Радиометрические измерения выполнялись антеннами с размером апертуры $D = 1$ и 4 см при $h = 0$. Результаты измерений динамики яркостной температуры $T_{\rm b}(t)$ представлены на рис. 19

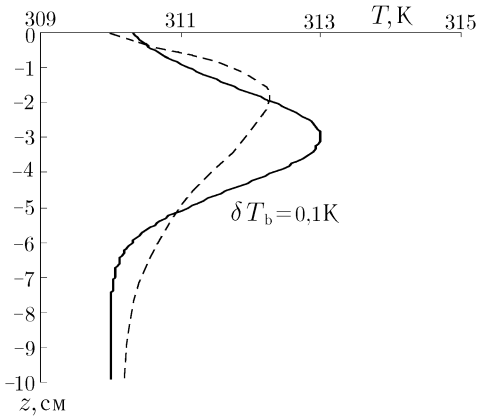

Рис. 17. Исходный профиль $T(z)$ (сплошная линия) и восстановленный по «данным» рис. 18 (пунктир)

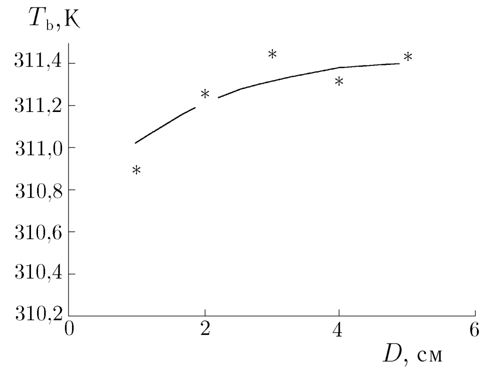

Рис. 18. Зависимость $T_b(D)$, рассчитанная по исходному профилю $T(z)$ на рис. 17 (сплошная линия) и «данные измерений» со случайной погрешностью $\delta T_b = 0{,}1$ К (звёздочки)

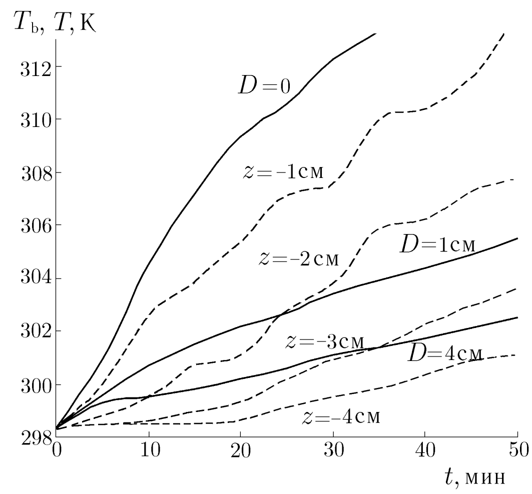

Рис. 19. Динамика яркостной температуры T_b для $D = 0$; 1; 4 см (сплошные линии) и измеренное изменение температуры на различных глубинах (пунктир)

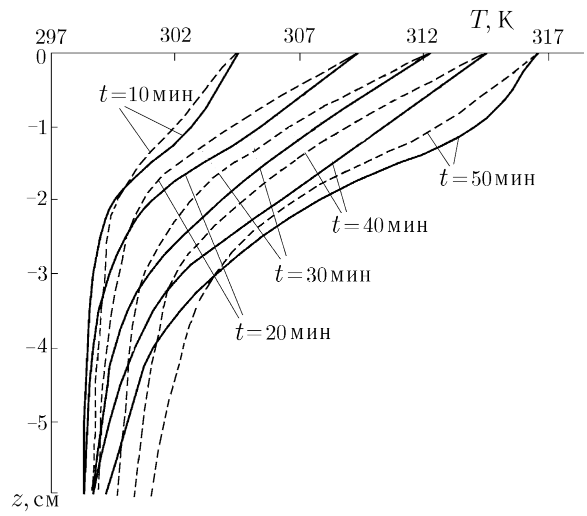

Рис. 20. Профили температур, восстановленные с интервалом 10 минут по данным измерений $T_b(D)$ на рис. 19 (пунктир) и результаты контактных измерений (сплошные линии)

совместно с данными прямых измерений профиля $T(z,t)$ на различных глубинах z с интервалом 1 см.

Для восстановления профиля $T(z,t)$ данные антенных измерений T_b были дополнены измерениями поверхностной температуры, которые соответствуют условной антенне нулевого размера, поскольку $T_b(D=0) = T(h=0)$. Таким образом, был получен минимальный набор экспериментальных данных при $D = 0$; 1; 4 см, необходимый для обращения интегрального уравнения (5). Восстановленные профили температуры с интервалом в 10 минут показаны на рис. 20 вместе с данными прямых измерений температуры. Можно видеть, что, при далеко не оптимальном наборе размеров антенн (интервал восстановления перекрыт значениями $d_{\rm eff}$ очень редко и неравномерно), качество восстановления на глубинах $|z| \leq d_{\rm eff}|_{D=4\text{ см}}$ оказалось весьма приемлемым, что позволяет надеяться на хорошие перспективы дальнейшего развития метода ближнепольного глубинного зондирования температуры.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе впервые экспериментально исследовано квазистационарное (ближнее) тепловое поле поглощающей среды. Эффект ближнего поля проявился:

1) в двукратном уменьшении эффективной толщины $d_{\rm eff}$ слоя формирования собственного теплового поля среды относительно глубины скин-слоя при измерениях антенной с относительным размером $D/\lambda = 0{,}03$ в контакте со средой ($h = 0$);

2) в обнаруженной зависимости эффективной толщины $d_{\rm eff}(D, h)$ от размера антенны и её высоты над поверхностью среды, хорошо соответствовавшей результатам расчётов.

Развиты новые методы ближнепольной радиометрической диагностики сред, использующие зависимость $d_{\rm eff}(D, h)$ и получены первые результаты восстановления подповерхностного профиля температуры водной среды. Дальнейшие перспективы этих методов связаны с совершенствованием антенной техники. Решение проблем согласования и КПД электрически малых антенн позволит реализовать измерения при $D/\lambda \ge 0{,}01$; $0 \le h/\lambda \le 0{,}1$. В этом случае методы ближнепольной радиометрии имеют перспективы стать не только более простыми и дешёвыми в реализации, но и более эффективными по сравнению с многочастотными методами.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 01–02–16432) и государственной научно-технической программы «Физика конденсированных сред» (гос. контракт № 107–3 (00-П)).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонова Т. В., Троицкий В. С. // Изв. вузов. Радиофизика. 1970. Т. 13, № 9. С. 1 273.
2. Eldrich L., Hardee P. C. // IEE Proc. 1974. No. 10. P. 1 391.
3. Barret A., Myers P., Sadowsky N. // Rad. Sci. 1977. No. 12. P. 1 675.
4. Cetas T. C., Connor W. B., Manning M. R. // Ann. NY Academy of Science. 1980. V. 335. P. 281.
5. Троицкий В. С., Белов И. Ф., Горбачёв В. П. и др. // УФН. 1981. Т. 134, вып. 1. С. 155.
6. Троицкий В. С., Абрамов В. И., Белов И. Ф. и др. // Изв. вузов. Радиофизика. 1981. Т. 24, № 1. С. 118.
7. Троицкий В. С. // Изв. вузов. Радиофизика. 1981. Т. 24, № 9. С. 1 054.
8. Bardaty F., Solimini D. // Radio Sci. 1983. V. 18, No. 6. P. 1 393.
9. Chieve M., Plancot M., Leroy Y. // Abstracts of the 18th Microwave Power Symposium (Philadelphia, USA, 1983). P. 42.
10. Павлова П. С., Поляков В. М. // Труды Всесоюзн. конф. «Методические вопросы определения температуры биологических объектов радиофизическими методами». М.: ИРЭ АН СССР, 1985. С. 8.
11. Троицкий В. С., Аранжереев В. А., Густов А. В. и др. // Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т. 29, № 1. С. 62.
12. Bardati F., Mongiardo M., Solimini D. // IEEE Trans. MTT. 1986. V. 34, No. 5. P. 579.
13. Рахлин В. Л., Зубов М. М., Куприянова Т. С., Гетманцева И. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1989. Т. 32, № 5. С. 557.
14. Bocquet B., Van de Velde J. C., Mamanni A. et. al. // IEEE Trans. MTT. 1990. V. 38, No. 6. P. 791.
15. Гайкович К. П., Сумин М. И., Троицкий Р. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1988. Т. 31, № 9. С. 1 104.
16. Гайкович К. П., Резник А. Н., Сумин М. И., Троицкий Р. В. // Изв. АН СССР. ФАО. 1987. Т. 23, № 7. С. 761.

17. Gaikovich K. P., Reznik A. N., Troitskii R. V. // 11th Annual Int. Symp. on Geosci. and Remote Sensing (IGARSS-91), Helsinki, University of Technology, Espoo, Finland. 1991. V. 3. P. 1 195.
18. Гайкович К. П., Резник А. Н., Троицкий Р. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1993. Т. 36, № 3–4. С. 216.
19. Гайкович К. П., Резник А. Н., Троицкий Р. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1989. Т. 33, № 12. С. 1 467.
20. Гайкович К. П., Резник А. Н. // Изв. вузов. Радиофизика. 1989. Т. 33, № 11. С. 1 343.
21. Gaikovich K. P. // IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing. 1994. V. 32, No. 4. P. 885.
22. Gaikovich K. P., Troitsky R. V. // IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing. 1998. V. 36, No. 1. P. 341.
23. Гайкович К. П. // Изв. вузов. Радиофизика. 2000. Т. 43, № 6. С. 520.
24. Рытов С. М. Теория электрических флуктуаций и теплового излучения. М.: Изд-во АН СССР, 1953. 232 с.
25. Шмаленюк А. С. О возможности диагностики параметров неоднородных сред по модовым характеристикам их тепловых шумов: Препринт № 2(357) ИРЭ АН СССР. М., 1983.
26. Cottis P. G., Uzunoglu N. K., Papakonstantinou P. S. // J. Electromagnetic Waves and Applications. 1988. V. 2, No. 7. P. 621.
27. Резник А. Н. // Изв. вузов. Радиофизика. 1991. Т. 34, № 5. С. 512.
28. Левин М. А., Рытов С. М. Теория равновесных тепловых флуктуаций в электродинамике. М.: Наука, 1967. 308 с.
29. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. М.: Наука, 1978. Т. 2. 464 с.
30. Марков Г. Т., Сазонов Д. М. Антенны. М.: Энергия, 1975.
31. Gaikovich K. P., Reznik A. N. // 8th International Conf. "Microwave and Telecommunication Technology" (Crimea, Ukraine, September 14–17, 1998, Sevastopol). Sevastopol: Veber Co. V. 2. P. 629.
32. Гайкович К. П., Резник А. Н. // III Всероссийская научн. конф. «Применение дистанционных радиофизических методов в исследованиях природной среды» (Муром, 17–18 июня 1999 г.). Муром: филиал ВлГУ «Муромский институт». С. 128.
33. Yurasova N. V., Gaikovich K. P., Reznik A. N., Vaks V. L. // Proceedings of 2000 Inernational Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory MMET*2000 (Kharkov, Ukraine, 12–15 September, 2000). V. 1. P. 241.
34. Gaikovich K. P., Reznik A. N., Vaks V. L. // Proceedings of 2000 International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory MMET*2000 (Kharkov, Ukraine, 12–15 September, 2000). V. 2. P. 592.
35. Гайкович К. П., Резник А. Н. // Письма в ЖЭТФ. 2000. Т. 72, вып. 11. С. 792.
36. Klein L. A., Swift T. C. // IEEE AP. 1977. V. 25, No. 1. P. 104.
37. Абрамов В. И., Резник А. Н. // Изв. вузов. Радиофизика. 1999. Т. 42, № 2. С. 158.
38. Климов А. Ю., Красильник З. Ф., Резник А. Н., Абрамов В. И., Белов И. Ф., Тагунов Б. Б. // Сверхпроводимость: Физ., Хим., Техн. 1993. Т. 6, № 11–12. С. 2 150.
39. Абрамов В. И., Климов А. Ю., Резник А. Н., Тагунов Б. Б. // Письма в ЖТФ. 1994. Т. 20, № 19. С. 60.
40. Anlage S. M., Vlahacos C. P., Dutta S., Wellstood F. C. // IEEE Trans. Appl. Supercond. 1997. V. 7, No. 2. P. 3 686.
41. Takeuchi I., Wei T., Duewer F. et al. // Appl. Phys. Lett. 1997. V. 71, No. 14. P. 2 026.
42. Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. М.: Наука, 1983. 200 с.

Институт физики микроструктур РАН, г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию 14 декабря 2000 г.

NEAR THERMAL FIELD AND THE POSSIBILITIES OF ITS USE FOR IN-DEPTH TEMPERATURE DIAGNOSTICS OF MEDIA

V. L. Vaks, K. P. Gaikovich, and A. N. Reznik

We discover experimentally the effect of the near thermal electromagnetic field of a lossy media. The effect consists in the fact that the effective depth d_{eff} of the layer, in which the received signal is formed, is found to be less than the skin-layer depth d_{sk} and to be a function of the size D of receiving antenna and its height h above the medium surface. The dependence $d_{\mathrm{eff}}(D, h)$ is obtained from measurements of the emission from a temperature-stratified water medium at a wavelength of 31 cm using a specially developed, electrically small antenna. The results of experimental studies of radiophysical parameters of the antenna are presented. We propose to use measurements of the dependence of the received emission on D and h as a new source of information about in-depth temperature distribution. Methods for solving the corresponding inverse problems are developed and the first results of retrieval of the subsurface temperature profile of a water medium are obtained.

УДК 621.372.82.3

ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА БЕСКОНЕЧНО ПРОТЯЖЁННОМ ДВУГРЕБНЕВОМ КЛИНЕ С ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ЦИЛИНДРОМ НА ВЕРШИНЕ

Е. В. Шепилко

Задача сведена к решению матричного уравнения II-го рода относительно неизвестных коэффициентов разложения дифракционного поля в ряд Фурье—Бесселя. Указанное разложение было получено путём наложения граничных условий на дифракционное поле с последующим применением метода переразложения функции поля по базисным функциям на данном интервале. Коэффициенты разложения определены численно с высокой точностью путём решения полученного матричного уравнения методом редукции, а также аналитически для случая, когда электрический диаметр цилиндра меньше единицы. Получены выражения для диаграммы направленности рассеянного структурой поля в дальней зоне и для сечения обратного рассеяния, приведены точные численные результаты для случая E-поляризации падающей волны.

При решении практических задач радиофизики и акустики часто используется теоретический анализ различных базовых моделей, наиболее точно характеризующих реальные объекты. Рассматриваемая в настоящей работе структура, в частности, может быть использована для моделирования гористого рельефа.

В уже ставших классическими работах [1—7] исследовалась задача рассеяния на одногребневом клине. В работах [8—10] на основе анализа решения приближёнными методами отмечалось, что значительное влияние на диаграмму направленности рассеянного полуплоскостью поля оказывает диэлектрическая насадка или диэлектрическое дополнение идеально проводящей полуплоскости определённой толщины до полной плоскости. В отличие от указанных работ [1—10] в настоящей работе в математически строгой постановке получено и исследовано решение задачи рассеяния для двугребневого клина с диэлектрическим цилиндром на вершине в окружающем диэлектрическом пространстве.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим двугребневый идеально проводящий бесконечно длинный клин с диэлектрическим цилиндром на вершине, расположенный в диэлектрической среде. Плоская электромагнитная волна падает перпендикулярно образующей цилиндра под произвольным углом γ между волновым вектором $\mathbf{k}_1$ падающей волны и линией отсчёта угла φ в цилиндрической системе координат ρ, φ, z (см. рис. 1). Ось z совпадает с осью цилиндра радиуса a. Угол $\pi\delta$, где $0 < \delta < 1$, характеризует раскрыв идеально проводящего клина. Зависимость поля от времени имеет вид $\exp(-i\omega t)$, $k_1 = k_0 \sqrt{\varepsilon_1\mu_1}$, $k_0 = \omega/c$, где c — скорость света в вакууме, ε_1 и μ_1 — диэлектрическая и магнитная проницаемости окружающего пространства.

Поле в окружающем пространстве представим как суперпозицию падающего $(\mathbf{E}^{(0)}, \mathbf{H}^{(0)})$ и дифракционного $(\mathbf{E}^{(1)}, \mathbf{H}^{(1)})$ полей:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(0)} - \mathbf{E}^{(1)}, \qquad \mathbf{H} = \mathbf{H}^{(0)} - \mathbf{H}^{(1)}. \tag{1}$$

Рассмотрим случай E-поляризации (когда вектор электрического поля $\mathbf{E}^{(0)}$ параллелен оси z). Тогда z-составляющая электрического поля падающей плоской волны с учётом разложения по цилиндрическим функциям [11] может быть представлена в виде

$$E_z^{(0)} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-i)^m \, J_m(k_1\rho) \exp[im\,(\varphi-\gamma)], \quad (2)$$

где $J_m(x)$ — функции Бесселя I-го рода m-го порядка. При этом $E_\varphi^{(0)} = 0$, $E_\rho^{(0)} = 0$, $H_z^{(0)} = 0$.

Дифракционное поле должно удовлетворять однородному волновому уравнению в любой точке пространства, кроме поверхности клина, условию излучения и обладать конечной энергией в замкнутом объёме. Эти требования выполнимы, если искать решение в виде рядов Фурье по цилиндрическим функциям, при этом z-составляющая дифракционного электрического поля

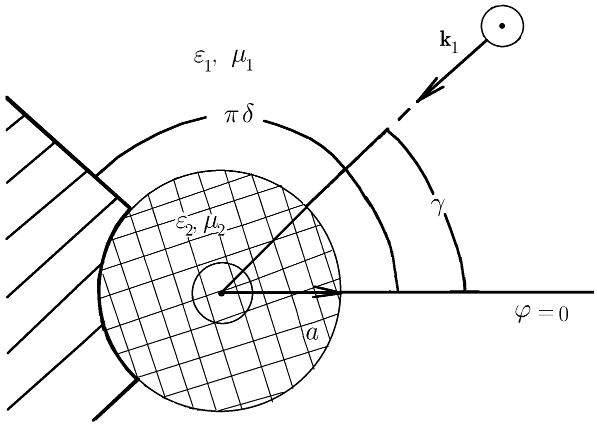

Рис. 1

$$E_z^{(1)} = \begin{cases} \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \beta_n^{\mathrm{e}} J_n(k_2\rho) \exp(in\varphi), & 0 \le \rho \le a; \\ \sum\limits_{s=1}^{\infty} \alpha_s^{\mathrm{e}} H_{s\nu}^{(1)}(k_1\rho) \sin[s\nu\,(\varphi+\pi\delta)], & \rho \ge a, \end{cases} \quad (3)$$

остальные составляющие электромагнитного поля находятся из уравнений Максвелла. В (3) $k_2 = k_0\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}$, $\nu = 1/(2\delta)$, ε_2 и μ_2 — диэлектрическая и магнитная проницаемости материала цилиндра, $H_m^{(1)}(x)$ — функции Ханкеля I-рода, а α_s^{e}, β_n^{e} — неизвестные коэффициенты фурье-разложения дифракционного поля в случае E-поляризации.

С учётом граничных условий для электромагнитного поля на поверхности металла и условия непрерывности компонент поля вне металлической поверхности находим, что функция поля $\Psi(\rho,\varphi)$, совпадающая с продольной компонентой электрического поля, задана во всей области изменения аргумента φ следующим образом:

$$\Psi(a,\varphi) = \begin{cases} \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \beta_n^{\mathrm{e}} J_n(k_2 a) \exp[in\varphi] = 0, & \pi\delta \le |\varphi| \le \pi; \\ \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \beta_n^{\mathrm{e}} J_n(k_2 a) \exp[in\varphi] = & \\ = \sum\limits_{m=-\infty}^{+\infty} (-i)^m \, J_m(k_1 a) \exp[im\,(\varphi-\gamma)] - \sum\limits_{s=1}^{\infty} \alpha_s^{\mathrm{e}} H_{s\nu}^{(1)}(k_1 a) \sin[s\nu\,(\varphi+\pi\delta)], & |\varphi| \le \pi\delta, \end{cases}$$

при этом существует дополнительное условие

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \beta_n^{\mathrm{e}} J_n'(k_2 a) \exp[in\varphi] = \\ = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-i)^m \, J_m'(k_1 a) \exp[im\,(\varphi-\gamma)] - \sum_{s=1}^{\infty} \alpha_s^{\mathrm{e}} H_{s\nu}^{(1)\prime}(k_1 a) \sin[s\nu\,(\varphi+\pi\delta)]$$

при $|\varphi| \le \pi\delta$. Здесь штрих обозначает дифференцирование по аргументу цилиндрической функции, а магнитные проницаемости μ_1 и μ_2 без ограничения общности задачи приняты равными единице.

Применив к функции $\Psi(\rho,\varphi)$ метод переразложения по базисным функциям на интервалах $[0,2\pi]$ и $[-\pi\delta,\pi\delta]$ изменения φ [12], получим следующие системы линейных алгебраических уравнений II-го рода относительно неизвестных коэффициентов $\alpha_s^{\mathrm{e}}, \beta_n^{\mathrm{e}}$:

$$X_s^{\mathrm{e}} = \sum_{q=1}^{\infty} X_q^{\mathrm{e}} \Phi_{sq}^{\mathrm{e}\alpha} + F_s^{\mathrm{e}\alpha}, \tag{4}$$

$$Y_m^{\mathrm{e}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Y_n^{\mathrm{e}} \Phi_{mn}^{\mathrm{e}\beta} + F_m^{\mathrm{e}\beta}. \tag{5}$$

Здесь $s = 1,2,3,\ldots$, $m = 0,\pm1,\pm2,\ldots$,

$$X_s^{\mathrm{e}} = \alpha_s^{\mathrm{e}} H_{s\nu}^{(1)'}(k_1 a), \quad Y_m^{\mathrm{e}} = \beta_m^{\mathrm{e}} J_m(k_2 a);$$

$$\Phi_{sq}^{\mathrm{e}\alpha} = \frac{H_{q\nu}^{(1)}(k_1 a)}{H_{q\nu}^{(1)'}(k_1 a)} \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{J'_m(k_2 a)}{J_m(k_2 a)} V_{q\nu}^{\mathrm{e}m} C_{s\nu}^{\mathrm{e}m}, \quad \Phi_{mn}^{\mathrm{e}\beta} = \frac{J'_n(k_2 a)}{J_n(k_2 a)} \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{H_{s\nu}^{(1)}(k_1 a)}{H_{s\nu}^{(1)'}(k_1 a)} V_{s\nu}^{\mathrm{e}n} C_{s\nu}^{\mathrm{e}m};$$

$$F_s^{\mathrm{e}\alpha} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-i)^n J'_n(k_1 a) \exp(-in\gamma) C_{s\nu}^{\mathrm{e}n} - {}$$
$$- \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{J'_m(k_2 a)}{J_m(k_2 a)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-i)^n J_n(k_1 a) \exp(-in\gamma) V_n^{\mathrm{e}m} C_{s\nu}^{\mathrm{e}m},$$

$$F_m^{\mathrm{e}\beta} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-i)^n J_n(k_1 a) \exp(-in\gamma) V_n^{\mathrm{e}m} - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{H_{s\nu}^{(1)}(k_1 a)}{H_{s\nu}^{(1)'}(k_1 a)} V_{s\nu}^{\mathrm{e}m} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-i)^n J'_n(k_1 a) \exp(-in\gamma) C_{s\nu}^{\mathrm{e}n}.$$

Коэффициенты $V_n^{\mathrm{e}m}$, $V_{s\nu}^{\mathrm{e}m}$, $C_{s\nu}^{\mathrm{e}n}$ являются функциями угла раскрыва и имеют следующий вид:

$$C_{s\nu}^{\mathrm{e}\,\pm n} = \begin{cases} \dfrac{s}{\pi\delta^2} \exp[\mp i\pi\,(s-1)/2] \, \dfrac{\sin[(n-s\nu)\,\pi\delta]}{[n^2-(s\nu)^2]}, & n \neq 0, \quad n \neq s\nu; \\ 4/(\pi s), & n = 0, \quad s/2 \in \mathbb{Z}; \\ 0, & n = 0, \quad (s+1)/2 \in \mathbb{Z}; \\ \exp[\mp i\pi\,(s-1)/2], & \pm n = s\nu; \end{cases}$$

$$V_n^{\mathrm{e}0} = V_{-n}^{\mathrm{e}0} = V_0^{\mathrm{e}n} = V_0^{\mathrm{e}\,-n} = \frac{\sin(n\pi\delta)}{\pi n}, \quad n \neq 0; \quad V_m^{\mathrm{e}m} = V_{-m}^{\mathrm{e}\,-m} = V_0^{\mathrm{e}0} = \delta;$$

$$V_n^{\mathrm{e}m} = V_{-n}^{\mathrm{e}\,-m} = \frac{\sin[(n-m)\,\pi\delta]}{\pi\,(n-m)}, \quad n \neq m; \quad V_n^{\mathrm{e}\,-m} = V_{-n}^{\mathrm{e}m} = \frac{\sin[(n+m)\,\pi\delta]}{\pi\,(n+m)}, \quad n \neq 0, m \neq 0;$$

$$V_{q\nu}^{\mathrm{e}\,\pm m} = \begin{cases} \dfrac{q}{2\pi\delta} \exp[\pm i\pi\,(q-1)/2] \, \dfrac{\sin[(m-q\nu)\,\pi\delta]}{[m^2-(q\nu)^2]}, & m \neq 0, \quad m \neq q\nu; \\ 2\delta/(\pi q), & m = 0, \quad (q+1)/2 \in \mathbb{Z}; \\ 0, & m = 0, \quad q/2 \in \mathbb{Z}; \\ \dfrac{\delta}{2} \exp[\pm i\pi\,(q-1)/2], & \pm n = q\nu, \end{cases}$$

где $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел.

Таким образом, исследование задачи о дифракции электромагнитного поля на рассматриваемой структуре сведено к решению бесконечных систем линейных алгебраических уравнений II-го рода.

Система уравнений (4) позволяет исследовать внешнюю задачу — рассеяние волны структурой, а система уравнений (5) — внутреннюю, т. е. найти распределение поля в диэлектрическом цилиндре.

2. АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ

Проведём исследование внешней задачи. При всех значениях параметра k_2a, отличных от корней функции Бесселя $J_m(k_2a)$, где $m = 0, 1, 2, \ldots$, решение бесконечной системы уравнений (4) можно получить методом редукции. Это следует из того, что имеют место соотношения

$$\sum_{s,q} \left|\Phi_{sq}^{\mathrm{e}\alpha}\right|^2 < \infty; \quad \sum_{s} |F_s^{\mathrm{e}\alpha}|^2 < \infty.$$

Однако и в случае, когда параметр k_2a равен одному из корней функции Бесселя $J_m(x)$, после определённых преобразований в каждом конкретном случае можно решить вновь полученную систему алгебраических уравнений методом редукции.

При $k_2a < 1$ задачу рассеяния плоской электромагнитной волны рассматриваемой структурой можно исследовать аналитически, воспользовавшись методом последовательных приближений для решения системы алгебраических уравнений (4). В этом случае, используя асимптотические представления функций $J_m(x)$ и $H_m^{(1)}(x)$, получим, что в первом приближении

$$\alpha_s^{\mathrm{e}} \approx \frac{C\,(k_1a)^{s\nu+1}}{(s\nu)^{s\nu+1}\,k_2a\delta^2}\,, \tag{6}$$

где константа C зависит только от параметров структуры и не зависит от s.

Определим диаграмму направленности рассеянного поля (по амплитуде) в дальней зоне выражением

$$A^{\mathrm{e}}(\varphi) = \sqrt{2/(\pi k_1)}\,\exp(-i\pi/4)\,F(\varphi),$$

где

$$F(\varphi) = \left|\sum_{s=1}^{\infty} \alpha_s^{\mathrm{e}} \exp(-is\nu\pi/2)\sin[(\varphi + \pi\delta)\,s\nu]\right|. \tag{7}$$

Учтём, что с ростом s при $\delta \approx 1$ коэффициенты α_s^{e} быстро убывают, как следует из выражения (6), и ограничимся поэтому в сумме (7) только первым членом. Тогда диаграмма направленности поля, рассеянного клином, будет определяться выражением

$$A^{\mathrm{e}}(\varphi) \approx C\,(k_1a)^{1/(2\delta)}\cos[\varphi/(2\delta)], \tag{8}$$

которое в интервале углов $|\varphi| \le \pi\delta$ при $\delta \approx 1$ представляет собой кривую, подобную кардиоиде.

3. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Для того, чтобы проанализировать рассеивающие свойства исследуемой структуры, на основе решения системы уравнений (4) методом редукции был вычислен коэффициент обратного рассеяния

$$k_1\sigma_{\mathrm{B}}^{\mathrm{e}} = 4\left|\sum_{s=1}^{\infty} \alpha_s^{\mathrm{e}} \exp(-is\nu\pi/2)\,\sin[(\gamma + \pi\delta)\,s\nu]\right|^2 \tag{9}$$

и множитель $F(\varphi)$ по формуле (7) при относительной ошибке вычислений, не превышающей 10 %.

На рис. 2 приведены зависимости коэффициента обратного рассеяния $\sigma_{\mathrm{B}}^{\mathrm{e}}$ от параметра k_1a. Кривая *1* соответствует параметрам $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 = 1$; $\gamma = 0$; кривая *2* — $\varepsilon_2 = 2{,}08$; $\varepsilon_1 = 1$; $\gamma = 0$; кривая *3* — $\varepsilon_2 = 2{,}08$; $\varepsilon_1 = 1$; $\gamma = 2\pi/3$; для кривых *1–3* величина $\pi\delta = 179^\circ$. Кривая *4* соответствует только диэлектрическому цилиндру с $\varepsilon_2 = 2{,}08$ и приведена для сравнения. Вычисления коэффициента обратного рассеяния и диаграммы направленности рассеянного поля для одного диэлектрического цилиндра проведены на основе известных решений (см., например, [13]).

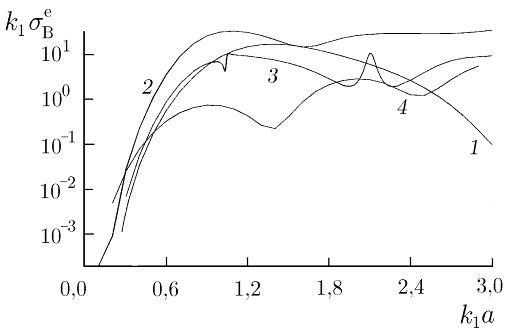

Рис. 2

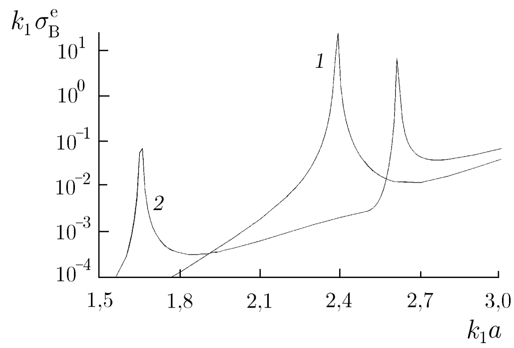

Рис. 3

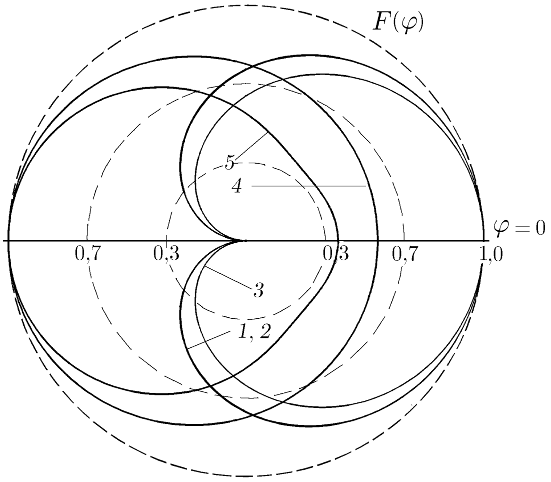

Рис. 4

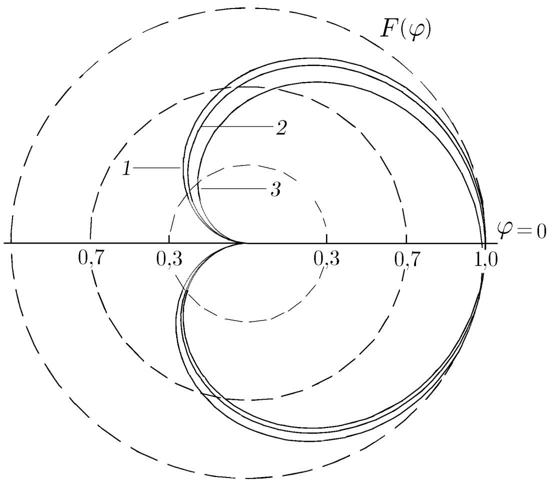

Рис. 5

Как видно из приведённых на рис. 2 зависимостей, наличие диэлектрического цилиндра на вершине двугребневого клина в общем приводит к увеличению коэффициента обратного рассеяния. В то же время можно наблюдать появление резонансного увеличения или уменьшения коэффициента $k_1\sigma_B^e$ в зависимости от угла падения волны.

На рис. 3 приведены зависимости коэффициента обратного рассеяния от параметра k_1a для секторальной области, когда $\pi\delta = 15°$. Кривая *1* соответствует параметрам $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 = 1$; $\gamma = 0$; кривая *2* — $\varepsilon_2 = 2{,}08$; $\varepsilon_1 = 1$; $\gamma = 0$. Вид зависимости в этом случае имеет ярко выраженный резонансный характер. Коэффициент обратного рассеяния резко возрастает (кривая *1*), когда параметр k_1a приближается к первому корню уравнения $J_m(k_1a) = 0$, т. е. когда частота падающей волны приближается к критической частоте волны в цилиндрическом круглом волноводе, а наличие диэлектрической среды смещает резонансные значения k_1a в длинноволновую область (кривая *2*). Интервал изменения параметра k_1a ограничен снизу величиной 1,5, т. к. при меньших значениях коэффициент обратного рассеяния меньше 10^{-4}.

На рис. 4 приведены диаграммы направленности рассеянного поля, полученные для клина с раскрывом $\pi\delta = 179°$ при $k_1a = 0{,}97$; $\varepsilon_1 = 1$; $\gamma = 0$. Форма диаграмм *1, 2, 3* подобна кардиоиде. Диэлектрический цилиндр с $\varepsilon_2 \leq 2{,}08$ не оказывает существенного влияния на вид кривой (кривые *1* ($\varepsilon_2 = 1$) и *2* ($\varepsilon_2 = 2{,}08$) практически совпадают). Увеличение диэлектрической проницаемости цилиндра до $\varepsilon_2 = 4$ приводит к сжатию диаграммы, т. е. к уменьшению радиуса кардиоиды (кривая *3*). Для сравнения на этом же рисунке приведены диаграммы направленности поля, рассеянного одним диэлектрическим цилиндром. Плоская волна падает под углом $\gamma = 0$, $k_1a = 0{,}97$, кривая *4* соответствует $\varepsilon_2 = 2{,}08$, кривая *5* — $\varepsilon_2 = 4$.

На рис. 5 приведены диаграммы направленности поля, рассеянного клином с раскрывом $\pi\delta = 179°$ при $k_1a = 0{,}97$; $\varepsilon_1 = 1$; $\gamma = 2\pi/3$. Кривая *1* соответствует $\varepsilon_2 = 1$, кривая *2* — $\varepsilon_2 = 2{,}08$, кривая *3* — $\varepsilon_2 = 4$. При $\varepsilon_2 < 4$ положение максимума диаграммы слабо зависит от угла падения плоской волны, а при $\varepsilon_2 = 1$ не зависит вовсе.

Для секторальной области ($\delta < 1/2$) диаграммы направленности рассеянного поля приведены на рис. 6. Кривая *1* построена для $k_1a = 2{,}6$; $\varepsilon_2 = 2{,}08$, $\pi\delta = 15°$ и $\gamma = \pi/15$, кривая *2* — для $k_1a = 2{,}59$; $\varepsilon_2 = 2{,}08$; $\pi\delta = 75°$ и $\gamma = 0$, кривая *3* — для $k_1a = 2{,}59$; $\varepsilon_2 = 2{,}08$; $\pi\delta = 75°$ и $\gamma = \pi/6$. Во всех этих случаях $\varepsilon_1 = 1$.

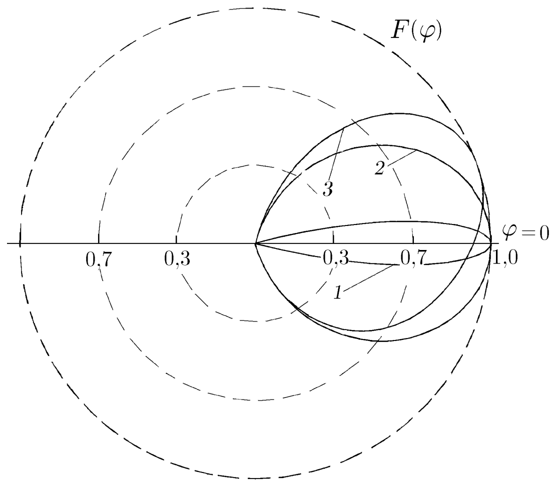

Рис. 6

Следует отметить, что данные результаты являются более общими по сравнению с результатами работы [14].

Автор выражает благодарность Васильеву И. М. и Трутень В. И. за помощь, значительно облегчившую выполнение расчётов и построение графических зависимостей на ЭВМ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зоммерфельд А. Оптика. М.: Изд-во иностр. лит., 1953. 487 с.
2. Гринберг Г. А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. М., Л.: АН СССР, 1948. 727 с.
3. Потехин А. И. Некоторые задачи дифракции электромагнитных волн. М.: Сов. радио, 1948. 136 с.
4. Малюжинец Г. Д. Некоторые обобщения метода отражений в теории дифракции синусоидальных волн. Дисс. ... д-р. ф.-м. н. М.: ФИАН СССР, 1951.
5. Марков Г. Т. // Труды МЭИ. Радиотехника. Вып. 21. Госэнергоиздат, 1956.
6. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. Т. 2. М.: Мир, 1978. 555 с.
7. Бобровников М. С., Фисанов В. В. Дифракция волн в угловых областях. Томск: Томский ун-т, 1988.
8. Нефёдов Е. И. Дифракция электромагнитных волн на диэлектрических структурах. М.: Наука, 1979. 272 с.
9. Hamid M. A. K. // IEEE Trans. AP. 1973. V. 21, No. 3. P. 398.
10. Васильев Е. Н., Охматовский В. И. // Радиотехника и электроника. 1996. Т. 41, № 9. С. 1033.
11. Иванов Е. И. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техника, 1968. 584 с.
12. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 2. М.: ГИТТЛ, 1957. 628 с.
13. Tang C. C.-H. // J. Appl. Phys. 1957. V. 28. P. 628.
14. Shepilko Ye. V. // Proc. VIIth Intern. Conf. MMET'98, Kharkov, Ukraine, June 2–5, 1998. P. 511.

Харьковская государственная академия городского хозяйства,
г. Харьков, Украина

Поступила в редакцию
2 июля 1999 г.

DIFFRACTION OF A PLANE ELECTROMAGNETIC WAVE BY AN INFINITE DOUBLE-RIDGE WEDGE WITH A DIELECTRIC CYLINDER AT THE CREST

E. V. Shepilko

We reduce the considered problem to solving a matrix equation of the second kind for unknown coefficients of the expansion of a diffracted field into a Fourier–Bessel series. This expansion was obtained by imposing boundary conditions on the diffracted field with the subsequent re-expansion of the field function over basis functions in a given interval. The expansion coefficients were determined analytically in the case where the electric diameter of the cylinder is less than unity as well as numerically with a high accuracy by solving the obtained matrix equation using the reduction method. We derived expressions for the pattern of the far-zone field scattered by the studied structure and the backscattering cross section and give exact numerical results for the case of an E-polarized incident wave.

УДК 537.531+538.3

К ДВУХПУЧКОВОЙ СХЕМЕ УСКОРЕНИЯ В БИЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ

А. С. Варданян

Обсуждается проблема уменьшения поляризационных потерь в двухпучковой схеме ускорения заряженных частиц, основанной на эффекте черенковского излучения в бицилиндрическом волноводе, когда в среде, заполняющей волновод, прорезаны два канала вдоль обеих осей структуры для ускоряющего и ускоряемого пучков. Предлагается экстраполяционная формула определения резонансных размеров поперечного сечения структуры в зависимости от радиусов прорезанных каналов, при которых устанавливается одномодовый режим с высокой напряжённостью ускоряющего поля.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Схема двухпучкового ускорения заряженных частиц становится особенно перспективной, если она реализуется в системе с разнесёнными траекториями ускоряемого и ускоряющего пучков. Примером такой системы является бицилиндрический волновод. В работе [1] была развита теория бицилиндрического волновода (резонатора) и разработан численный алгоритм определения собственных частот и собственных функций этого волновода. Используя результаты этой работы, в [2] была предложена схема двухпучкового ускорения в бицилиндрическом волноводе, заполненном диэлектриком, когда ускорение пучка, движущегося вдоль одной из осей такого волновода, осуществляется в поле черенковского излучения ускоряющего пучка, движущегося вдоль другой оси системы.

Для уменьшения поляризационных (боровских) потерь, обусловленных взаимодействием пучка со средой и приводящих к его быстрому торможению [3, 4], необходимо наличие каналов в среде вдоль траекторий пучков. При этом нарушается однородность поперечного сечения волновода, что делает невозможным применение разработанного в [1] алгоритма определения собственных частот и собственных функций волновода. С другой стороны, известно [5], что канал с радиусом, малым по сравнению с длиной излучаемой черенковской волны, практически не влияет на картину поля излучения. Следовательно, для оценок напряжённости полей можно ограничиться рассмотрением волновода со сплошным заполнением. При черенковском излучении пучка, представляющего собой периодическую последовательность сгустков, можно добиться одномодового режима на частоте следования сгустков, при этом в волноводе будет распространяться квазимонохроматическая волна (мода) большой интенсивности [6]. Указанная мода определяется выбором соответствующих поперечных размеров волновода, названных нами «резонансными» [7]. Напряжённость ускоряющего поля при этом может достигать от нескольких десятков до сотни МВ/м в зависимости от величины ускоряющего тока.

В настоящей работе предлагается алгоритм определения резонансных поперечных размеров волновода, обеспечивающих установление одномодового режима при черенковском излучении периодической последовательности сгустков на второй бицилиндрической моде в бицилиндрическом волноводе с равными радиусами обоих цилиндров.

2. АЛГОРИТМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ РЕЗОНАНСНЫХ ПОПЕРЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ

Алгоритм определения резонансных поперечных размеров бицилиндрического волновода с равными радиусами обоих цилиндров и каналами, прорезанными вдоль обеих осей, основывается на том факте, что распределение поля второй бицилиндрической моды (рассчитанное согласно методике, разработанной в [1]) в каждом из цилиндров очень близко к распределению поля первой моды в круглом цилиндрическом волноводе.

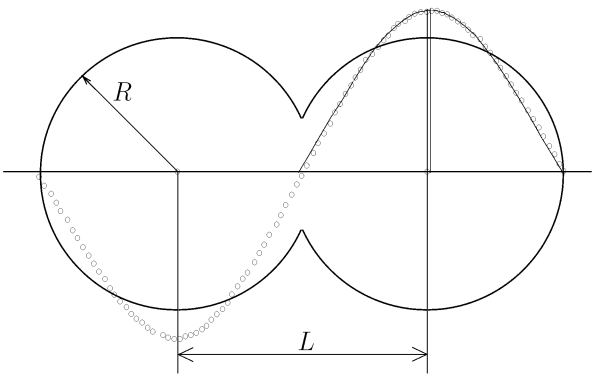

Рис. 1. Распределение поля в поперечном сечении бицилиндрического волновода (кружки) и обычного круглого волновода (сплошная линия)

На рис. 1 точками показано распределение продольной компоненты E_z электрического поля второй бицилиндрической моды для случая, когда расстояние между центрами цилиндров $L = 1{,}8R$, где R — радиус каждого из цилиндров. Сплошной линией показано распределение компоненты E_z поля первой моды обычного цилиндрического волновода (правый цилиндр). Наблюдается незначительное смещение максимума распределения поля второй бицилиндрической моды наружу от центра на расстояние приблизительно $0{,}0125R$ (см. рис. 1). Как видно, оба распределения достаточно близки и будут тем больше похожи друг на друга, чем ближе расстояние L к $2R$ (касающиеся цилиндры).

Задача для круглого цилиндрического волновода решается методом разложения токов и потенциалов в интегралы Фурье по частоте с последующим учётом граничных условий.

Рассмотрим круглый цилиндрический волновод с радиусом a, заполненный средой с диэлектрической и магнитной проницаемостями ε и μ соответственно. Внутри волновода прорезан пустой канал с радиусом b. Оси канала и волновода совпадают с осью z цилиндрической системы координат (r,φ,z). По оси канала со скоростью $v=\beta c$, где c — скорость света в вакууме, движется последовательность N идентичных цилиндрических сгустков с радиусом $r_0<b$, зарядом q и расстоянием d между центрами сгустков.

Выпишем выражения для продольной компоненты поля излучения в среде $(b\le r\le a)$ [6]:

$$E_{z1}(r,z-vt) = -\frac{2q\sqrt{1-\beta^2}}{v^2 b}\sum_\lambda \sqrt{\varepsilon\mu\beta^2-1}\,\frac{\omega\Psi_1(a,b)}{\mathrm{d}D/\mathrm{d}\omega}\,\frac{I_0(kr)}{I_0(kb)}\,\frac{2I_1(kr_0)}{kr_0}F\Big(\frac{\omega}{v}\Big)\ , \tag{1а}$$

и в канале $(0\le r\le b)$:

$$E_{z2}(r,z-vt) = -\frac{2q\sqrt{1-\beta^2}}{v^2 b}\sum_\lambda \sqrt{\varepsilon\mu\beta^2-1}\,\frac{\omega\Psi_1(a,r)}{\mathrm{d}D/\mathrm{d}\omega}\,\frac{2I_1(kr_0)}{kr_0}F\Big(\frac{\omega}{v}\Big)\,, \tag{1б}$$

где

$$D(\omega,a,b)=sI_1(kb)\Psi_1(a,b)-\varepsilon kI_0(kb)\Psi_0(a,b);\quad \Psi_0(a,b)=J_1(sb)N_0(sa)-J_0(sa)N_1(sb);$$
$$\Psi_1(a,r)=J_0(sr)N_0(sa)-J_0(sa)N_0(sr);\quad k=\frac{\omega}{v}\sqrt{1-\beta^2},\qquad s=\frac{\omega}{v}\sqrt{\beta^2\varepsilon\mu-1}, \tag{2}$$

I_0, I_1 — модифицированные функции Бесселя, Ψ_0, Ψ_1 — функции Абеля, выражающиеся через обычные функции Бесселя J_0, J_1 и Неймана N_0, N_1. В (1) суммирование ведётся по номерам собственных мод с частотами ω_λ, но индекс λ у частоты для краткости опущен. Функция $F(\omega/v)$ для последовательности гауссовских сгустков со среднеквадратичной длиной $\sqrt{\overline{\xi^2}}$ имеет вид

$$F\Big(\frac{\omega}{v}\Big)=\exp\Big(-\frac{\omega^2}{4v^2}\overline{\xi^2}\Big)\,\frac{\sin[N\omega d/(2v)]}{\sin[\omega d/(2v)]}\cos\Big[\frac{\omega}{v}\,[z-vt-(N-1)\,d/2]\Big]\,.$$

Частотный спектр определяется из дисперсионного уравнения

$$D(\omega_\lambda, a, b) = 0. \tag{3а}$$

Пусть дисперсионное уравнение (3а) удовлетворяется при некоторых значениях χ_λ и χ'_λ аргументов Ψ_0 и Ψ_1, т. е. при

$$\frac{\omega_\lambda}{v}\sqrt{\varepsilon\mu\beta^2 - 1} = \frac{\chi_\lambda}{a} = \frac{\chi'_\lambda}{b}\,, \tag{3б}$$

где частоты ω_λ определены из уравнения (3а). Соотношения (3б) позволяют определить резонансный радиус волновода, обеспечивающий одномодовый режим, задаваясь радиусом канала и частотой, кратной частоте следования сгустков:

$$\omega_\lambda = \frac{2\pi v l}{d}\,, \tag{4}$$

где $l = 1, 2, \ldots$. При $l = 1$ одномодовый режим устанавливается на основной моде.

Численные расчёты по формулам (1) с учётом (2)–(4) были выполнены для заполняющей среды с $\mu = 1$ и диэлектрической проницаемостью ε, которая описывается экстраполяционной формулой Дебая [7]:

$$\varepsilon = 1 + \frac{\varepsilon_0 - 1}{1 + (\omega\tau)^2}\,, \tag{5}$$

где ε_0 — статическая (при $\omega = 0$) диэлектрическая проницаемость. Для тефлона ($\tau = 7{,}22\cdot 10^{-13}$ с) на частоте следования сгустков (приблизительно 3 ГГц) ε приближается к 2,1.

На рис. 2 приведены распределения продольной компоненты E_z электрического поля в поперечном сечении круглого волновода при различных радиусах канала и соответствующих резонансных радиусах волновода, причём каждый раз возбуждается первая цилиндрическая мода на частоте следования сгустков в линейном ускорителе-инжекторе синхротрона ЕрФИ (2,7972 ГГц). При не очень больших радиусах канала поле внутри канала квазиравномерное и обладает достаточно высокой напряжённостью, которая слабо растёт при приближении к границе среды. С увеличением радиуса канала напряжённость поля несколько уменьшается, однако остаётся достаточной для обеспечения значительного ускорения в практически однородном поле. Такая картина вполне может быть объяснена тем обстоятельством, что длина волны рассматриваемой моды (приблизительно 10 см) значительно превышает размеры канала. Рис. 2 иллюстрирует также тот факт, что резонансные размеры волновода увеличиваются с ростом радиуса канала, что приводит к необходимости определения взаимосвязи указанных величин. Напряжённости поля, указанные на рис. 2, соответствуют параметрам пучка линейного ускорителя «Линус-20» ЕрФИ ($3\cdot 10^9$ частиц в сгустке, 3 000 сгустков в импульсе, $\bar{\xi} = 0{,}5$ см, $d = 10$ см).

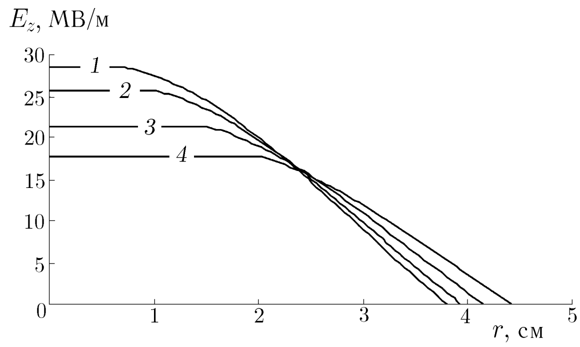

Рис. 2. Радиальное распределение E_z при различных радиусах канала и волновода: кривая *1* соответствует $b = 0{,}7$ см, $a = 3{,}802$ см; кривая *2* — $b = 1$ см, $a = 3{,}909$ см; кривая *3* — $b = 1{,}5$ см, $a = 4{,}138$ см; кривая *4* — $b = 2$ см, $a = 4{,}412$ см

3. ЭКСТРАПОЛЯЦИОННАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ РЕЗОНАНСНЫХ ПОПЕРЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ БИЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ВОЛНОВОДА

Исследуем зависимость резонансного радиуса волновода от радиуса канала, задаваясь частотой выбранной моды (в данном случае первой), равной частоте следования сгустков (2,7972 ГГц). Вычисления, проведённые по формулам (1)–(4), показали, что при варьировании радиуса канала отношение площади поперечного сечения канала к площади поперечного сечения резонансного волновода остаётся постоянным с высокой степенью точности, т. е. обнаруживается квазилинейная связь между резонансными размерами волновода без канала и с каналом. Запишем эту связь в виде

$$S_1 = S_0 + f(S_{\text{кан}}), \tag{6}$$

где S_1 — площадь поперечного сечения резонансного волновода при наличии канала, S_0 — в отсутствие канала. Функция $f(S_{\text{кан}})$, где $S_{\text{кан}}$ — площадь поперечного сечения канала, может быть аппроксимирована по результатам расчётов, выполненных по формулам (1)–(4) для различных радиусов канала и при заданной резонансной частоте. Указанная зависимость оказывается линейной (с точностью до 1 %) при радиусе канала, не превышающем $0{,}5R$.

Экстраполируем соотношение (6) на случай бицилиндрического волновода. Напомним (см. рис. 1), что распределение поля в каждом из поперечных сечений одинаковых квазицилиндров бицилиндрического волновода, возбуждённого на второй моде, очень близко к распределению поля в поперечном сечении обычного круглого волновода, возбуждённого на первой моде, при частоте мод, равной частоте следования сгустков. Изложенные соображения позволяют предложить формулу для определения площади S поперечного сечения резонансного бицилиндрического волновода, вдоль осей которого прорезаны два идентичных канала:

$$S = S_0 + (2 - \delta^{\nu})\, f(S_{\text{кан}}), \tag{7}$$

где $S_{\text{кан}}$ — площадь поперечного сечения одного цилиндрического канала, S_0 — площадь поперечного сечения волновода без каналов, δ — отношение площади перекрытия двух кругов (см. рис. 1) к площади S_0, которое фактически представляет собой критерий близости L к $2R$; показатель степени ν для равных радиусов цилиндров бицилиндрического волновода близок к единице. Предлагаемая экстраполяционная формула (7) в обоих предельных случаях бицилиндрического волновода ($L = 2R$; $L = 0$) переходит в формулу для круглого волновода (6).

С использованием формулы (7) определение резонансных размеров бицилиндрического волновода $L_{\text{рез}}$ и $R_{\text{рез}}$ сводится к простому умножению:

$$L_{\text{рез}} = \eta L, \quad R_{\text{рез}} = \eta R, \tag{8}$$

где $\eta = \sqrt{S/S_0}$.

Таким образом, алгоритм учёта влияния каналов сводится к следующему:

1) напряжённость поля при наличии каналов в бицилиндрическом волноводе следует определять, пользуясь формулой для сплошного (без каналов) заполнения. При этом необходимо иметь в виду, что реальная напряжённость поля будет несколько ниже, что не является определяющим из-за ожидаемых больших значений E_z.

2) для обеспечения одномодового режима на выбранной моде следует подобрать поперечные размеры бицилиндрического волновода и радиус каналов, пользуясь соотношениями (7) и (8).

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В случае периодической последовательности излучающих сгустков в волноводе распространяется лишь одна мода, частота которой совпадает с частотой следования сгустков, т. е. в бицилиндрическом волноводе устанавливается одномодовый режим. Последний обеспечивается соответствующим выбором поперечных размеров структуры, определяющих частоту выбранной моды. Эти размеры называются резонансными. Остальные моды, подвергаясь деструктивной интерференции, затухают.

Уменьшение поляризационных потерь, возникающих вследствие взаимодействия пучка со средой, достигается созданием каналов для ускоряющего и ускоряемого пучков вдоль обеих осей бицилиндрической структуры. Радиус и расположение каналов определяются собственными функциями структуры: пучки должны проходить через области максимумов распределения компоненты E_z поля (см. рис. 1).

Наличие каналов делает невозможным применение разработанных алгоритмов определения собственных значений и собственных функций бицилиндрического волновода. Однако если размеры каналов намного меньше длины излучаемой черенковской волны, соответствующей частоте следования сгустков, то влиянием каналов на напряжённость ускоряющего поля можно пренебречь и воспользоваться результатами для случая сплошного заполнения. Влияние каналов существенно сказывается на резонансных размерах поперечного сечения, обеспечивающих одномодовый режим в волноводе с каналами.

Для определения резонансных поперечных размеров бицилиндрической структуры предложена экстраполяционная формула, базирующаяся на строгих аналитических выражениях (1)–(4), которые получены для круглого цилиндрического волновода. Обоснованность и точность экстраполяционной формулы определяются:

— малостью радиуса канала по сравнению с длиной волны излучения в рассмотренном одномодовом режиме (длина волны в несколько раз превышает радиус канала);

— близостью распределений полей второй бицилиндрической моды в бицилиндрическом волноводе и основной моды в обычном круглом волноводе, для которого проводилась аппроксимация этого распределения.

В заключение считаю своим приятным долгом выразить благодарность Э. Д. Газазяну, руководившему этой работой при поддержке МНТЦ (грант № A-087), и А. Д. Тер-Погосян за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванян М. И. // Радиотехника и электроника. 1999. Т. 44, № 4. С. 401.
2. Gazazyan E. D., Ivanyan M. I., Ter-Pogossyan A. D., Vardanyan A.S. // EPAC-2000, Vienna, June 26–July 2, 2000. P. 468.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.
4. Болотовский Б. М. // УФН. 1961. Т. 75, вып. 2. С. 295.
5. Гинзбург В. Л., Франк И. М. // ДАН СССР. 1947. Т. 56. С. 699.
6. Варданян А. С., Газазян Э. Д., Тер-Погосян А. Д. // Изв. НАН РА. Физика. 1999. Т. 34. С. 195.
7. Варданян А. С., Газазян Э. Д., Тер-Погосян А. Д. // Изв. НАН РА. Физика. 1999. Т. 34. С. 35.

Ереванский физический институт
НАН РА, г. Ереван, Армения

Поступила в редакцию
17 июля 2000 г.

TWO-BEAM ACCELERATION SCHEME IN A BICYLINDRICAL WAVEGUIDE

A. S. Vardanyan

We discuss the problem of reducing polarization losses in a two-beam scheme of charged-particle acceleration. This scheme is based on the effect of Čerenkov radiation in a bicylindrical waveguide where two channels for the accelerating and accelerated beams are made in the medium filling the waveguide along both axes of the structure. We propose an extrapolating formula for determination of the resonance sizes of the structure cross section for given channel radii, at which the one-mode regime with a high intensity of the accelerating field is realized.

УДК 621.383.2

ПОВЫШЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ОДНОПОЛОСНОГО ПРИЁМА МИЛЛИМЕТРОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ПУТЁМ ВОЗВРАТА СИГНАЛА, ПРЕОБРАЗОВАННОГО В ЗЕРКАЛЬНЫЙ КАНАЛ

В. Г. Божков [1], *В. А. Геннеберг* [1], *Ю. А. Дрягин* [2], *Л. М. Кукин* [2], *Л. И. Федосеев* [2], *А. А. Швецов* [2]

Описываются методика, аппаратура и результаты исследования возможности одноканального супергетеродинного приёма миллиметрового излучения с минимизацией потерь, связанных с преобразованием в зеркальный канал. В 1,5- и 3-миллиметровом диапазонах длин волн реализовано уменьшение однополосной шумовой температуры приёмника в 1,4÷1,9 раза.

ВВЕДЕНИЕ

Супергетеродинные приёмники обладают возможностью одновременного приёма излучения по прямому и зеркальному каналам, частоты которых выше и ниже частоты гетеродина $f_{\text{г}}$ на промежуточную частоту F. Это широко используется, например, в радиометрии при работе в континууме. При приёме же монохроматического или квазимонохроматического излучения (связь, радиолокация, радиоастрономическая и атмосферная спектроскопия и т. п.) наличие зеркального канала помимо очевидного ухудшения помехоустойчивости приводит к неоднозначности результатов измерений, связанной как с отсутствием уверенности в полной идентичности упомянутых каналов, так и с возможными ошибками оценки вклада излучения, поступающего в каждый из приёмных каналов. Во избежание этого проще всего воспользоваться фильтром, пропускающим к смесителю сигнал частоты $f_{\text{с}}$, но не пропускающим зеркальную составляющую частоты $f_{\text{з}}$.

Под действием излучения гетеродина и сигнала, поступившего в смеситель через фильтр, настроенный на пропускание, например, частоты $f_{\text{с}} = f_{\text{г}} + F$, в нелинейном элементе смесителя возникает целый ряд гармоник и комбинационных частот. Среди них особое место занимают промежуточная частота F и зеркальная составляющая $f_{\text{з}} = f_{\text{г}} - F$. Более высокочастотные составляющие обычно закорачиваются или рассеиваются тем или иным образом. Сигнал промежуточной частоты выделяется на выходной нагрузке смесителя и подаётся на усилитель промежуточной частоты (УПЧ). Что касается зеркальной компоненты, на возбуждение которой, как правило [1], затрачивается столько же мощности принимаемого излучения, сколько и на возбуждение полезного сигнала с промежуточной частотой F, то она обычно излучается от нелинейного элемента смесителя в сторону фильтра, где в большинстве случаев и поглощается, вызывая увеличение потерь преобразования L на 3 дБ.

Между тем имеется возможность если и не избежать этих потерь, то, по крайней мере, их уменьшить [2, 3]. Для этого нужно отразить от фильтра паразитную зеркальную составляющую сигнала и в соответствующей фазе возвратить её на нелинейный элемент [3]. В коротковолновой части миллиметрового диапазона попытка осуществления такого приёма была предпринята ещё в работе [4]. При этом был продемонстрирован полезный эффект — улучшение чувствительности на 10 %, но большие шумы аппаратуры и, главное, соизмеримость времени корреляции возникающей зеркальной составляющей с временем задержки последней в тракте возврата в смеситель не позволили авторам детально разобраться в ситуации.

Потребности совершенствования радиометрических анализаторов спектра для атмосферных и астрономических измерений заставили вновь вернуться к исследованию и использованию вышеописанного способа повышения чувствительности однополосных приёмников.

Ниже кратко описываются одноканальные приёмные устройства (полутораммиллиметрового и трёхмиллиметрового диапазонов длин волн), в которых реализован вышеописанный способ [5, 6] повышения чувствительности путём дополнения обычных двухканальных, так называемых широкополосных [1], супергетеродинов [7, 8] специальными преселекторами — устройствами, позволяющими не только разделять основную и зеркальную компоненты идущего от антенны к приёмнику излучения, но и возвращать в нужной фазе к смесителю паразитную зеркальную составляющую; описываются также методика и аппаратура, с помощью которых выполнено исследование характеристик одноканальных приёмников, обсуждаются полученные результаты.

1. УСТРОЙСТВО ПРЕСЕЛЕКТОРА

Очевидно, что преселектор должен обеспечивать:

1) развязку прямого и зеркального каналов в соответствии с назначением однополосного приёмника (как правило, не хуже $10\div15$ дБ);

2) возможность перестройки при необходимости работы в некотором диапазоне частот;

3) близкий к 100 % коэффициент отражения излучения в сторону смесителя на частоте зеркального канала;

4) возможность подбора необходимой задержки τ возвращающейся к смесителю зеркальной составляющей сигнала.

При этом полная задержка τ (от смесителя до отражателя преселектора и обратно) должна быть заметно меньше времени корреляции сигнала в полосе зеркального канала ΔF. Однопроходные же потери l в преселекторе и в трактах, соединяющих его с антенной и со смесителем, должны быть минимальными, т. к. обратному восстановлению из зеркального канала в прямой может быть подвергнута не половина мощности сигнала, подошедшего к смесителю, а только её часть, равная $1/l^{m-1}$, где m — полное число проходов излучения через преселектор.

Изготовить преселектор, отвечающий вышеперечисленным требованиям, в коротковолновой части миллиметрового диапазона длин волн проще всего на базе интерференционных схем и сверхразмерных волноводов. Так, ещё в [4] для этой цели была использована схема интерферометра Цендера—Маха (ИЦМ), а в [5, 6] — схема интерферометра Майкельсона (ИМ). Устройство и принцип действия такого рода преселекторов показаны на рис. 1*а* и *б* соответственно.

Вход *1* интерферометра подключается к антенне, а выход *2* — к смесителю. Если разность хода лучей в интерферометре

$$\Delta = \Lambda/4, \tag{1}$$

где Λ — длина волны колебаний промежуточной частоты, то в идеальном случае излучение сигнала $\mathrm{f_c}$ в полосе основного приёмного канала практически полностью передаётся от антенны к смесителю. Зеркальная же компонента $\mathrm{f_з}$ в случае ИЦМ поступает на его выход *4*, где и поглощается «чёрным телом» (ч. т.), а в случае ИМ отражается обратно в антенну. Что касается возникшей в смесителе паразитной зеркальной составляющей (на рис. 1 она обозначена как $\mathrm{f}'_з$), то в случае ИЦМ она с подсоединённого к смесителю выхода *2* поступает на вход *3* этого интерферометра, откуда с помощью дополнительного подвижного плоского отражателя О отражается назад к смесителю с фазой, зависящей от положения отражателя. В случае же ИМ зеркальная составляющая $\mathrm{f}'_з$ просто отражается от интерферометра обратно к смесителю, а подстройка фазы отражённой волны осуществляется согласованным движением обоих плоских зеркал $З_1$ и $З_2$ так, чтобы не изменять предварительно выставленную раз-

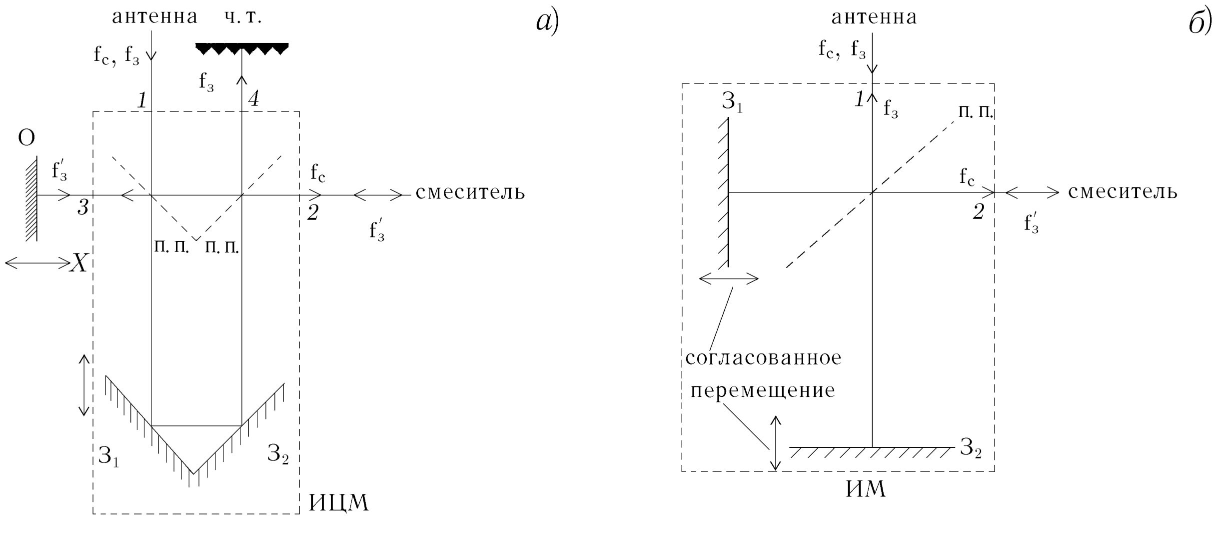

Рис. 1

ность хода, равную четверти длины волны колебаний промежуточной частоты.

Интерферометры, как уже отмечалось, были изготовлены на базе сверхразмерных волноводов: ИЦМ (на базе волновода с сечением 23×10 мм) использовался преимущественно в 3-миллиметровом диапазоне длин волн, ИМ (на базе волновода с сечением $11 \times 5{,}5$ мм) — в 1,5-миллиметровом диапазоне. Полупрозрачные делительные пластины интерферометров (п. п.) были сделаны из слюды. С помощью пирамидальных переходов к волноводам основного сечения интерферометры подсоединялись к входам балансных смесителей приёмников [5–8].

2. МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЙ. АППАРАТУРА

В основу методики измерений было положено исследование отклика квадратичного детектора приёмника в зависимости от фазы возвращающегося к смесителю от преселектора излучения в полосе зеркального канала. Изменение фазы осуществлялось изменением положения X дополнительного отражателя О в случае ИЦМ (см. рис. 1*а*) или согласованного смещения обоих зеркал ИМ (см. рис. 1*б*).

Измерения проводились с использованием двух согласованных нагрузок с разной температурой T_0 и T_1 (комнатной и соответствующей температуре жидкого азота), поочерёдно подключавшихся к входу преселектора. Им соответствовали отклики $V_0(X)$ и $V_1(X)$ квадратичного детектора приёмника, связанные с параметрами приёмника следующими выражениями:

$$V_0 = \frac{\gamma G}{L(X)} \left[T_0 + T_{\text{пр}}^{\text{SSB}}(X)\right], \qquad V_1 = \frac{\gamma G}{L(X)} \left[T_1 + T_{\text{пр}}^{\text{SSB}}(X)\right], \tag{2}$$

где γ — вольт-ваттная чувствительность детектора, подключённого к выходу УПЧ, G — коэффициент усиления УПЧ, $L(X)$ — потери преобразования смесителя, $T_{\text{пр}}^{\text{SSB}}(X)$ — однополосная шумовая температура приёмника.

Из выражений (2) следует, что $T_{\text{пр}}^{\text{SSB}}(X)$ и $L(X)$ могут быть вычислены по следующим формулам:

$$T_{\text{пр}}^{\text{SSB}}(X) = \frac{T_0 V_1(X) - T_1 V_0(X)}{V_0(X) - V_1(X)}, \tag{3}$$

$$L(X) = \frac{(T_0 - T_1)\,\gamma G}{V_0(X) - V_1(X)}\,. \qquad (4)$$

Отметим, что в случае модульного исполнения приёмника (см., например, [8]) отдельно измерить γ и G часто не представляется возможным. Однако интересующий нас относительный ход зависимости потерь преобразования от X можно легко получить простой нормировкой на $L(X_0)$, где X_0 — выделенное по тем или иным мотивам положение отражателя.

Первые опыты по обратному восстановлению сигнала из зеркального канала в прямой были выполнены ещё при исследовании параметров монолитных балансных смесителей 1,5-миллиметрового диапазона длин волн [7], результаты этих опытов сразу же нашли своё отражение в [5]. С такими смесителями при использовании лампы обратной волны ОВ-24 в качестве гетеродина, а также УПЧ с шумовой температурой 125 К и полосой пропускания 400 МГц на ряде частот диапазона 170÷240 ГГц было обнаружено, что однополосная шумовая температура приёмника путём согласованного перемещения зеркал преселектора на ИМ изменяется почти в полтора раза, а минимальные её значения примерно на 20 % меньше удвоенной двухполосной шумовой температуры.

Дальнейшие эксперименты проводились на базе радиометрического анализатора спектра 1,5-миллиметрового диапазона [6] и 3-миллиметрового преобразовательно-усилительного модуля [8]. В каждом из этих приборов, как и в только что упомянутом случае, использовались подробно описанные в [7, 8] двухвходовые балансные смесители с однотипными монолитными интегральными схемами. Гетеродином приёмника анализатора спектра 1,5-миллиметрового диапазона [6] является лампа обратной волны ОВ-24 с системой фазовой стабилизации частоты, а 3-миллиметровый модуль [8] с этой же целью был дополнен генератором сигналов РГ4-14, подключаемым через прецизионный аттенюатор к гетеродинному входу модуля. Ширина полосы УПЧ этого модуля с помощью установленного перед детектором фильтра была уменьшена до 100 МГц (средняя частота настройки фильтра 780 МГц). В радиометрическом анализаторе спектра 1,5-миллиметрового диапазона [7] УПЧ с шумовой температурой 28 К должен был пропускать более широкую полосу частот (от 1 350 до 1 750 МГц), в связи с чем потребовалось уменьшить задержку в преселекторе. Это было достигнуто практически без увеличения потерь благодаря применению в качестве преселектора интерферометра Майкельсона на базе сверхразмерного волновода уменьшенного сечения ($11 \times 5{,}5$ мм) с соответствующими переходами (как и в вышеописанных первых опытах).

Так как частота гетеродина приёмника 3-миллиметрового диапазона длин волн не была стабилизирована, то для настройки приёмника и периодического контроля частоты использовался опорный сигнал, генерируемый умножителем частоты, который, в свою очередь, возбуждался синтезатором частот РЧ6-02. Этот опорный сигнал и эталонное излучение от согласованных нагрузок, находящихся при комнатной температуре и температуре жидкого азота, поочерёдно подавались через сверхразмерный крановый переключатель и переходы от сверхразмерного волновода к волноводу основного сечения на вход преобразовательно-усилительного модуля [8]. Преселектор анализатора спектра 1,5-миллиметрового диапазона также настраивался с использованием только что упомянутого опорного сигнала.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ

Преселектор на ИЦМ является экспериментально более гибким по сравнению с преселектором на ИМ, т. к. позволяет без исключения его из входного тракта проводить измерения и в режиме обратного восстановления из зеркального канала в прямой, и в обычном одноканальном режиме (при замене отражателя «чёрным телом»). Поэтому большинство измерений было выполнено с использованием ИЦМ и 3-миллиметрового модуля [8]. Измерения проводились вблизи резонансных частот молекулярных линий поглощения озона (110,836 ГГц) и окиси углерода (115,271 ГГц). Обработка полученных данных велась по формулам (3) и (4).

На рис. 2 показан ход однополосной шумовой температуры $T_{\text{пр}}^{\text{SSB}}(X)$ и нормированных потерь преобразования $L(X)/L(X = 0{,}7\ \text{мм})$ в зависимости от положения отражателя X при настройке низкочастотного приёмного канала на указанную линию озона. Как видно из рис. 2, области минимумов $T_{\text{пр}}^{\text{SSB}}$ и L приходятся на одни и те же значения X, при которых и происходит обратное восстановление сигнала, преобразованного в зеркальный канал. Минимумы следуют по X с шагом примерно в половину длины волны принимаемого излучения. При этом достигается минимальное значение однополосной шумовой температуры приёмника:

$$T_{\uparrow\downarrow}^{\text{SSB}}(110{,}8\ \text{ГГц}) = 1\,100 \pm 50\ \text{К}, \qquad (5)$$

что примерно в 1,4 раза меньше, чем в «безвозвратном» случае, когда отражатель O был замещён поглощающей нагрузкой:

$$T_{\text{б.в.}}^{\text{SSB}}(110{,}8\ \text{ГГц}) = 1\,490 \pm 70\ \text{К}. \qquad (6)$$

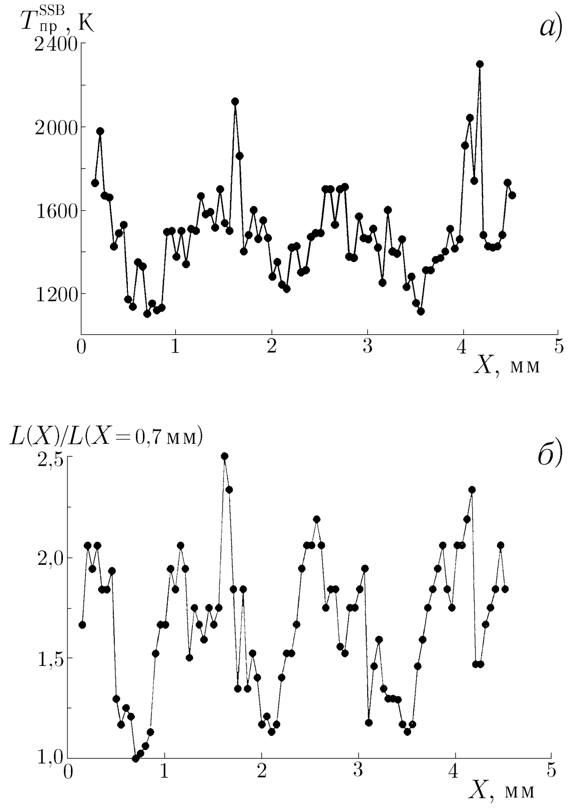

Рис. 2

Аналогичные измерения были выполнены на частоте 115,3 ГГц, но при различной мощности гетеродина. Результаты измерений приведены на рис. 3, из которого видно, что относительные потери преобразования практически при всех положениях отражателя убывают с ростом уровня мощности, подаваемой на гетеродинный вход модуля. При этом вне минимума потерь преобразования $L(X)$ большей мощности гетеродина соответствуют бóльшие значения однополосной шумовой температуры. В области минимума ситуация меняется на обратную, и достигаются следующие минимальные значения $T_{\uparrow\downarrow}^{\text{SSB}}$ (уровни мощности указаны в скобках):

$$T_{\uparrow\downarrow}^{\text{SSB}}(6\ \text{дБм}) = 1\,040\ \text{К}; \quad T_{\uparrow\downarrow}^{\text{SSB}}(9\ \text{дБм}) = 925\ \text{К}; \quad T_{\uparrow\downarrow}^{\text{SSB}}(14\ \text{дБм}) = 775\ \text{К}. \qquad (7)$$

В «безвозвратном» случае указанным уровням мощности соответствуют следующие значения шумовой температуры:

$$T_{\text{б.в.}}^{\text{SSB}}(6\ \text{дБм}) = 1\,470\ \text{К}; \quad T_{\text{б.в.}}^{\text{SSB}}(9\ \text{дБм}) = 1\,390\ \text{К}; \quad T_{\text{б.в.}}^{\text{SSB}}(14\ \text{дБм}) = 1\,450\ \text{К} \qquad (8)$$

(точность измерений составляет примерно ± 50 К). Таким образом, благодаря возврату сигнала, преобразованного в зеркальный канал, в данном случае удалось в $1{,}4 \div 1{,}9$ раза улучшить главный параметр приёмника — уменьшить его однополосную шумовую температуру.

Что касается приёмника 1,5-миллиметрового диапазона, то из-за вынужденного использования в качестве преселектора интерферометра Майкельсона исключалась возможность прямых измерений шумовой температуры этого прибора в режиме без возврата сигнала, преобразованного в зеркальный канал. Поэтому в табл. 1 проводится сравнение измеренной шумовой температуры $T_{\uparrow\downarrow}^{\mathrm{SSB}}$ с рассчитанными значениями $T_{\text{б.в.}}^{\mathrm{SSB}}$, которые имели бы место в случае использования в том же приёмнике преселектора, работающего в «безвозвратном» режиме, но с тем же ослаблением $l = 1{,}35$ дБ, как и в реальном ИМ. Вычисления проводились по формуле

$$T_{\text{б.в.}}^{\mathrm{SSB}} = (l-1)\,T_0 + l\,[(L\,t-1)\,T_0 + LT_{\text{УПЧ}}]. \tag{9}$$

При этом полагалось, что согласно [9] шумовое отношение t близко к единице. Потери преобразования L в безвозвратном режиме были измерены по методике [7] и приведены в табл. 1, как и шумовая температура УПЧ $T_{\text{УПЧ}}$.

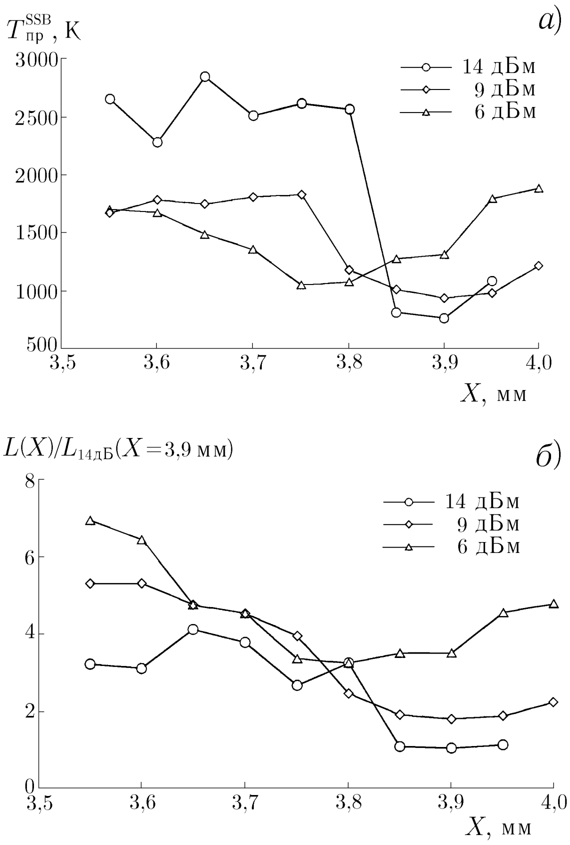

Рис. 3

Из последнего столбца табл. 1 следует, что при прочих равных условиях реализованные с помощью правильно настроенного преселектора на ИМ значения однополосной температуры приёмников примерно в $1{,}6 \div 1{,}8$ раза ниже, чем соответствующие шумовые температуры, которые могли быть получены с обычными преселекторами без возврата зеркальной составляющей сигнала.

Полученное уменьшение однополосной шумовой температуры приёмника в 1,5-миллиметровом и в 3-миллиметровом диапазонах длин волн, в принципе, может быть отчасти связано как с изменением степени согласования смесителя с входным трактом, так и с изменением уровня мощности сигнала гетеродина, поступающей в смеситель в зависимости от положения отражателя преселектора. Однако оба эти вклада не являются определяющими, т. к. согласно [7, 10] коэффициент стоячей волны (по напряжению) сигнального входа использованных смесителей не превышает 2,8 в 1,5-миллиметровом диапазоне длин волн и 2,0 в 3-миллиметровом, а развязка сигнального и гетеродинного входов смесителя в упомянутых диапазонах превышает 23 и 32 дБ соответственно. Основное улучшение достигнуто, скорее всего, за счёт уменьшения потерь преобразования при возврате сигнала из зеркального канала.

Отметим также следующее. В книге [11] обсуждаются, в частности, особенности работы схемы с режекторным фильтром зеркального канала и подбираемой длиной пути от фильтра до смесителя, т. е. схемы, аналогичной предложенной в [4] и использованной в настоящей работе. При этом подчёркивается, что в случае идеального резистивного смесителя улучшение может достигать 3 дБ, хотя реализовать его довольно трудно из-за возникающего рассогласования по выходу смесителя. Если же ещё имеет место и заметная модуляция ёмкости, то выигрыш может быть и больше в связи с тем, что так называемое «обратное преобразование» (из промежуточной частоты в зеркальную), в принципе, может осуществляться с параметрическим усилением [11].

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведённые экспериментальные исследования ещё раз продемонстрировали, что установка фильтра зеркального канала на вход широкополосного (двухполосного) супергетеродина может привести к тому, что шумовая температура скомпонованного таким образом приёмника (однополосная!) и потери преобразования в его смесителе будут значительно отличаться от удвоенной двухполосной температуры исходного широкополосного супергетеродина и потерь преобразования в его смесителе. Указанный эффект проявляется наиболее ярко, если имеет место заметное отражение излучения в полосе зеркального канала от выхода фильтра в сторону смесителя, а потери в фильтре малы. В таком случае возможно либо улучшение, либо ухудшение вешеупомянутых параметров, что, в свою очередь, определяется тем, в какой фазе возвращается обратно в смеситель возникшее в нём под действием принимаемого сигнала и гетеродина паразитное излучение зеркального канала. Подбором соответствующей фазы этого сознательно возвращаемого излучения в 1,5- и 3-миллиметровом диапазонах длин волн достигнуто уменьшение однополосной шумовой температуры приёмника в $1{,}4\div1{,}9$ раза по сравнению с «безвозвратным» случаем.

Авторы признательны Межотраслевой научно-технической программе России «Физика микроволн» (проекты 2.11 и 3.12) и Российскому фонду фундаментальных исследований (проект № 99–02–16241) за финансовую поддержку работы.

Таблица 1

$f_\text{с}$, ГГц	$T_{\uparrow\downarrow}^\text{SSB}$, К	$T_\text{УПЧ}$, К	L, дБ	$T_\text{б.в.}^\text{SSB}$, К	$T_\text{б.в.}^\text{SSB}/T_{\uparrow\downarrow}^\text{SSB}$
174,0	2 340	125	9,0	4 237	1,81
223,0	3 200	125	10,3	5 831	1,82
210,5	1 500	28	8,0	2 472	1,65

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кристаллические детекторы: Пер. с англ. / Под ред. Е. Я. Пумпера. М.: Сов. радио, 1950. Т. 1.
2. Лосс М. // Электроника. 1965. № 14. С. 22.
3. Дрягин Ю. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1998. Т. 41, № 11. С. 1 378.
4. Дрягин Ю. А., Лубяко Л. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1977. Т. 20, № 4. С. 650.
5. Буров А. Б., Лубяко Л. В., Скалыга Н. К., Федосеев Л. И., Швецов А. А. // Проблемы современной радиоастрономии. XXVII Радиоастрономическая конф., 10–14 ноября 1997 г. Т. 3. Санкт-Петербург, 1997. С. 876.
6. Буров А. Б., Лубяко Л. В., Носов В. И., Серов Н. В., Скалыга Н. К., Федосеев Л. И., Шанин В. Н., Швецов А. А., Шкаев А. П. // 10-я Международная крымская конференция «СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии» (CriMiCo-2000). Севастополь, 11–15 сентября 2000 г. С. 529.
7. Божков В. Г., Геннеберг В. А., Романовская В. Н., Федосеев Л. И., Фригер А. Д., Швецов А. А. // Радиотехника и электроника. 1996. Т. 41, № 7. С. 876.
8. Божков В. Г., Геннеберг В. А., Кукин Л. М., Федосеев Л. И. // Изв. вузов. Радиофизика. 2000. Т. 43, № 8. С. 732.
9. Божков В. Г., Вдовин В. Ф., Воронов В. Н., Геннеберг В. А., Дрягин Ю. А., Кузнецов И. В., Кукин Л. М., Куркан К. И., Федосеев Л. И. // Радиотехника и электроника. 1992. Т. 37, № 4. С. 736.
10. Божков В. Г., Геннеберг В. А., Фригер А. Д. // Физика микроволн: Сб. отчётов по научным проектам МНТП России «Физика микроволн». Т. 2. Нижний Новгород, 1996. С. 237.
11. Maas S. A. Microwave mixers. Dedham: Artech House, 1986.

[1] ФГУП НИИ полупроводниковых приборов, г. Томск,
[2] Институт прикладной физики РАН, г. Нижний Новгород,
Россия

Поступила в редакцию
2 февраля 2001 г.

IMPROVING THE EFFICIENCY OF SINGLE-SIDEBAND MILLIMETER-WAVE RECEPTION BY RETURNING THE SIGNAL CONVERTED INTO IMAGE

V. G. Bozhkov, V. A. Genneberg, Yu. A. Dryagin, L. M. Kukin, L. I. Fedoseev, and A. A. Shvetsov

We describe the technique, hardware, and the results of studies of the possibility of millimeter-wave single-sideband reception with minimum-loss conversion into image. The single-sideband noise temperature of the receivers is improved by a factor of 1.4–1.9 in the N and Y bands.

Примечание при корректуре. Вышеописанный метод повышения эффективности однополосного приёма был опробован и в субмиллиметровом диапазоне длин волн. При использовании в качестве преселектора интерферометра Цендера—Маха с дополнительным плоским отражателем в окрестности частоты 345 ГГц было получено уменьшение однополосной шумовой температуры приёмника в $1{,}2 \div 1{,}6$ раза.

УДК 621.391.244

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПОЛЮСНЫХ МОДЕЛЕЙ СИГНАЛОВ ДЛЯ ОЦЕНКИ ИМПУЛЬСНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СВЕРХШИРОКОПОЛОСНЫХ СИСТЕМ

В. И. Кошелев, В. Т. Сарычев, С. Э. Шипилов

Для оценки импульсных характеристик сверхширокополосных систем предлагается подход, основанный на аппроксимации сигналов во временно́й области экспоненциально затухающими колебаниями, моменты появления которых определяются плотностью распределения. Приводится математический аппарат для оценки параметров предложенной модели. Разработанный подход апробируется с помощью экспериментальных данных о распространении электромагнитных импульсов в коаксиальных кабелях и рассеянии их на металлических объектах.

ВВЕДЕНИЕ

Активные методы исследования объектов предполагают воздействие на них импульсами различной формы с последующим приёмом и обработкой прошедшего или отражённого сигнала. В работе рассматриваются линейные системы, у которых связь входного и выходного сигналов определяется соотношением типа свёртки: $Y(t) = h(t) \otimes X(t)$, где $Y(t)$ — выходной сигнал, $h(t)$ — импульсная характеристика объекта исследования, $X(t)$ — зондирующий импульс. Импульсная характеристика полностью отражает присущие данному объекту свойства в области частот зондирующего импульса и, в частности, может быть использована для распознавания объекта [1, 2].

Проблемы, возникающие при оценивании импульсной характеристики, связаны в основном с двумя обстоятельствами. Во-первых, на практике исследователь обладает набором данных в ограниченном как по времени, так и по частоте интервале наблюдений. Во-вторых, любое наблюдение предполагает наличие шума. Следствием ограниченности набора исходных данных в лучшем случае является ухудшение точности оценки неизвестной функции, а в худшем — неустойчивость решения, и, следовательно, отсутствие гарантий его верности.

Неустойчивость оценки импульсной характеристики определяется наличием нулей в оценках комплексных спектров, полученных на основе ограниченных наборов исходных данных. Один из способов устранения нулей — всевозможные виды регуляризации [3], однако этот математический приём не затрагивает причин их возникновения. Причиной же появления нулей в спектре является предположение, что за пределами окна наблюдения сигнал обращается в нуль. Это предположение может быть снято выбором аппроксимации, соответствующей исходным данным в пределах окна наблюдения и позволяющей продолжить сигнал за пределы окна наблюдения. Наиболее обоснованной как с математической, так и с физической точек зрения следует считать аппроксимацию сигналов во временно́й области экспоненциально затухающими колебаниями. Этому представлению в спектральной области соответствуют функции, содержащие полюса первого порядка. Впервые подобная аппроксимация была предложена Прони [4]. Такая же аппроксимация является основой метода сингулярных разложений, предложенного для исследования нестационарных сверхширокополосных (СШП) сигналов [5]. Как показано в [5], в комплексных спектрах сигналов, отражённых от металлических объектов, имеются характерные для этих объектов наборы полюсов. Это обстоятельство использовалось для решения задачи распознавания объектов, зондируемых импульсами с пространственной длительностью, сравнимой с размерами объектов [5]. Такую модель сигнала будем в дальнейшем называть полюсной моделью, а функции, аппроксимирующие сигнал, полюсными. Однако все существующие на настоящий момент времени методы цифровой обработки сигналов, в той или иной форме использующие полюсную модель, предполагают отсутствие временно́й задержки между функциями, описывающими сигналы. Это обстоятельство приводит к привлечению большого числа полюсных функций для аппроксимации сигналов, что может приводить к несогласованию рассчитанных полюсов с истинными полюсами, характеризующими объект, и уменьшению устойчивости решения задачи оценивания импульсной характеристики в целом.

Когда колебания начинаются в различные моменты времени, для аппроксимации комплексного спектра соответствующих сигналов предлагается использовать следующее выражение:

$$S(\omega) = \sum_{m=1}^{M} \int_{-\infty}^{+\infty} P_m(\tau) Q_m(\omega) \exp(i\omega\tau)\,\mathrm{d}\tau, \quad Q_m(\omega) = \frac{C_m^*}{\omega + q_m^*} - \frac{C_m}{\omega - q_m}, \quad q_m = \omega_m + i\gamma_m. \qquad (1)$$

Здесь $P_m(\tau)$ — плотность распределения задержек полюсных функций $Q_m(\omega)$. Каждая полюсная функция с комплексной амплитудой C_m содержит полюс q_m с соответствующими значениями частоты ω_m и декремента затухания γ_m, символ * означает комплексное сопряжение. Такое представление позволяет уменьшить число параметров для описания сигналов и повысить устойчивость оценки импульсной характеристики. При этом положение полюсов импульсной характеристики на комплексной плоскости и вид функций $P_m(\tau)$ являются идентификационными признаками исследуемого объекта и могут быть использованы для его распознавания.

Целью данной работы является иллюстрация возможностей предложенной обобщённой полюсной модели для оценки импульсных характеристик СШП систем, включающих каналы распространения импульсов и рассеивающие объекты. В дальнейшем импульсная характеристика может быть использована в задаче распознавания объектов, которая является предметом отдельного исследования и здесь не рассматривается.

1. ПОЛЮСНАЯ МОДЕЛЬ

В данной работе используются три формы представления сигнала: временна́я $S(t)$, спектральная $S(\omega)$ и полюсная $S(q)$. Полюсная форма представления сигнала предполагает задание множества комплексных значений $\{q_m, C_m\}$, где $m = 1, 2, \ldots, M$, и множества вещественных функций плотности распределения $\{P_m(\tau)\}$. Полюсная форма представления сигнала однозначно преобразуется во временну́ю и частотную.

Обобщённому методу Прони соответствует полюсная модель, для которой $P_m(\tau) = \delta(\tau)$, где $\delta(\tau)$ — δ-функция Дирака, $m = 1, 2, \ldots, M$. При неодновременном включении затухающих колебаний функции $P_m(\tau)$ подлежат оценке. Один из возможных способов оценки $P_m(\tau)$ может заключаться в аппроксимации этих функций тригонометрическими полиномами. Однако этот путь сопряжён с разработкой сложных алгоритмов, требующих обоснования выбора числа полюсов и порядка тригонометрического полинома. В некоторых случаях функции $P_m(\tau)$ могут быть выбраны в достаточно простом виде. В данной работе предлагается использовать равновероятное распределение начальных моментов включения затухающих колебаний $P_m(\tau)$ в некотором ограниченном интервале времени, т. е.

$$P_m(\tau) = \begin{cases} 1/T_m, & \tau \in [\tau_m, T_m + \tau_m]; \\ 0, & \tau \notin [\tau_m, T_m + \tau_m]. \end{cases} \qquad (2)$$

Согласно (1) комплексный спектр сигнала, соответствующего подобному распределению, имеет вид

$$S(\omega) = \sum_{m=1}^{M} Q_m(\omega)\, \exp(i\omega\tau_m)\, [\exp(i\omega T_m) - 1]/(i\omega T_m). \qquad (3)$$

Для оценки импульсных характеристик СШП систем предлагается использовать зондирующие импульсы $X(t)$, комплексный спектр которых $X(\omega)$ может быть представлен выражением (3). Комплексный спектр $\tilde{h}(\omega)$ импульсной характеристики ищется в аналогичном виде.

Процедура оценки импульсной характеристики состоит из следующих этапов.

1) Для известной временной последовательности зондирующего импульса ($X(t_i)$, где $i = 1, 2, \ldots, N$) отыскивается полюсная модель $\tilde{X}(q)$, которая минимизирует квадратичную невязку

$$\Phi_x = \sum_{i=1}^{N} \left| X(t_i) - \tilde{X}(t_i) \right|^2 \Bigg/ \sum_{i=1}^{N} |X(t_i)|^2 , \tag{4}$$

где $\tilde{X}(t_i)$ — временно́е представление полюсной модели $\tilde{X}(q)$, полученное вычислением интеграла Фурье с помощью теоремы о вычетах. Параметры $\{q_m, T_m, \tau_m\}$ полюсной модели $\tilde{X}(q)$, обеспечивающие минимум невязки Φ_x, ищутся методом покоординатного спуска. Соответствующие полюсам комплексные амплитуды C_m вычисляются путём решения линейной системы алгебраических уравнений, следующей из условия $\delta\Phi_x/\delta C_m = 0$.

2) Для известной временно́й последовательности выходного сигнала ($Y(t_i)$, $i = 1, 2, \ldots, M$) отыскивается полюсная модель $\tilde{h}(q)$, которая минимизирует квадратичную невязку

$$\Phi_y = \sum_{i=1}^{M} \left| Y(t_i) - \tilde{Y}(t_i) \right|^2 \Bigg/ \sum_{i=1}^{M} |Y(t_i)|^2 , \tag{5}$$

где $\tilde{Y}(t_i)$ — временно́е представление выходного сигнала, полученное вычислением интеграла Фурье для комплексного спектра $\tilde{Y}(\omega) = \tilde{h}(\omega)\tilde{X}(\omega)$ с помощью теоремы о вычетах.

Поиск параметров модели $\tilde{h}(q)$ производится подобно поиску параметров модели $\tilde{X}(q)$ с незначительными отличиями: в выражении для $\tilde{Y}(\omega)$ параметры комплексного спектра $\tilde{X}(\omega)$ фиксированы, а оценке подлежат лишь параметры спектра $\tilde{h}(\omega)$.

Как уже отмечалось выше, переход от частотного представления (1) к временно́му осуществляется с использованием интегрального преобразования Фурье на основе теоремы о вычетах. При этом выражение для модельных представлений $\tilde{X}(t)$ и $\tilde{h}(t)$ будет иметь вид

$$S(t) = \sum_{m=1}^{M} \int_0^t P_m(t-\tau) \left[C_m \exp(-iq_m\tau) - C_m^* \exp(iq_m^*\tau) \right] \mathrm{d}\tau. \tag{6}$$

Модельная функция $\tilde{Y}(t)$ получается из аналитических выражений для $\tilde{h}(t)$ и $\tilde{X}(t)$ в результате свёртки:

$$\tilde{Y}(t) = \tilde{h}(t) \otimes \tilde{X}(t). \tag{7}$$

В качестве критерия точности оценивания импульсной характеристики используется условие минимума невязки функционала (5). При этом для описания модели ищется минимальное число полюсов, обеспечивающее пороговую невязку, которая определяется уровнем шумов в сигналах. В случае, когда уровень шумов априорно неизвестен, число N_p полюсов определяется из условия

$$\Phi_y(N_\mathrm{p}) - \Phi_y(N_\mathrm{p}+1) \ll \Phi_y(N_\mathrm{p}-1) - \Phi_y(N_\mathrm{p}).$$

Это условие означает, что дальнейшее увеличение числа полюсов приводит к незначительному уменьшению невязки.

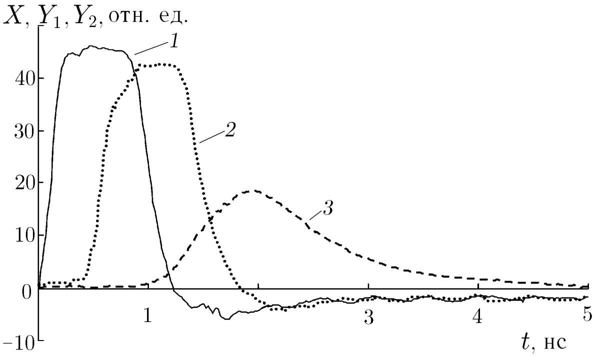

Рис. 1

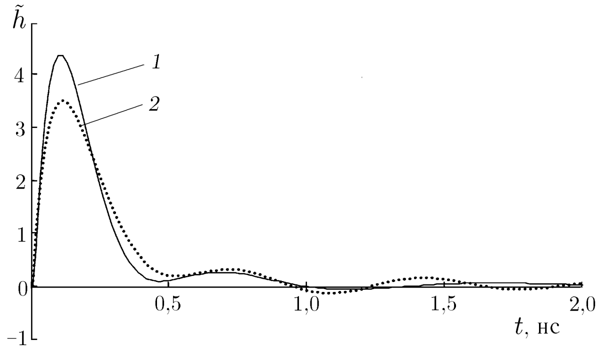

Рис. 2

Качество полученных оценок импульсных характеристик определялось наличием смещения в оценках полюсов и значениями доверительных интервалов. Эти величины оценивались путём статистического моделирования.

Дополнительным критерием качества оценки импульсных характеристик служило решение обратной задачи восстановления зондирующего импульса по найденной импульсной характеристике и выходному сигналу.

2. ПРИМЕНЕНИЕ ПОЛЮСНЫХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ КАБЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Для проверки работоспособности предложенного подхода были использованы экспериментальные данные о прохождении СШП импульсов по коаксиальным кабелям РК 50-4-11 длиной 8 м (кабель № 1) и РК 50-2-11 длиной 20 м (кабель № 2). Подробное описание экспериментальной установки для получения временны́х реализаций СШП импульсов приведено в [6].

На рис. 1 представлены монополярные импульсы: $X(t)$ от генератора (кривая *1*), $Y_1(t)$ после прохождения через кабель № 1 (кривая *2*) и $Y_2(t)$ после прохождения через кабель № 2 (кривая *3*). Кроме того, в эксперименте использовался биполярный импульс, полученный из двух монополярных импульсов разной полярности длительностью 1 нс, смещённых друг относительно друга на 1 нс. Выбор для эксперимента двух различных зондирующих импульсов позволяет продемонстрировать устойчивость предложенного подхода восстановления импульсной характеристики по отношению к их форме.

Поиск полюсов импульсной характеристики $\tilde{h}(t)$ проводился методом покоординатного спуска с использованием выражений (5), (7). Импульсы от генератора с высокой точностью аппроксимировались набором из пяти полюсных функций, поиск параметров которых осуществлялся также методом покоординатного спуска. В данном случае плотности распределения моментов включения полюсных функций $P_m^x(\tau)$ характеризовались следующими значениями параметров: $\tau_m^x = 0$; $T_1^x = 0{,}91$ нс; $T_2^x = T_3^x = T_4^x = T_5^x = \Delta t = 0{,}016$ нс, где Δt — шаг дискретизации сигнала $X(t)$, $m = 1, 2, \ldots, 5$.

На рис. 2 представлены рассчитанные импульсные характеристики кабеля № 1 по трём полюсным функциям. Кривая *1* соответствует импульсной характеристике, вычисленной при прохождении монополярного импульса, кривая *2* — при прохождении биполярного импульса. Аналогично были рассчитаны импульсные характеристики кабеля № 2 по двум полюсным функциям. В обоих случаях параметры функций $P_k^h(\tau)$ имели значения $\tau_k^h = 0$; $T_k^h = \Delta t$.

При сравнении представленных на рис. 2 импульсных характеристик следует отметить более высокую амплитуду и более быстрое затухание функции $\tilde{h}(t)$ при зондировании монополярным импульсом (это справедливо и для кабеля № 2). Такое различие можно объяснить тем, что биполярный импульс имеет более узкий спектр, чем монополярный.

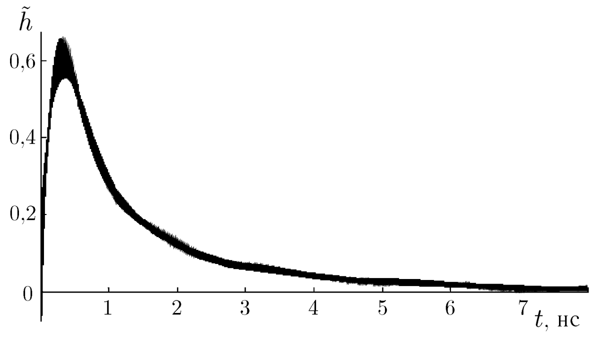

Рис. 3

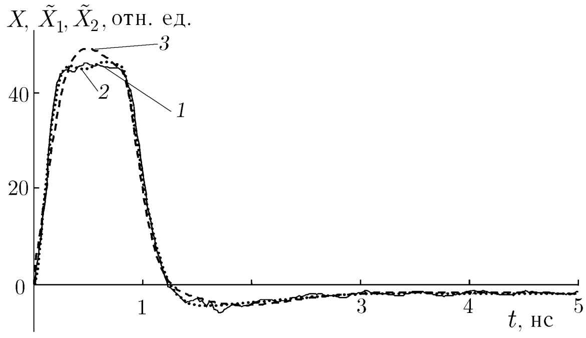

Рис. 4

Для проверки устойчивости работы алгоритма к внешним шумам был проведён численный эксперимент, в котором была рассчитана импульсная характеристика кабеля № 2 при 50 реализациях $Y(t)$. Каждая реализация $Y(t)$ представляла собой экспериментальный сигнал и наложенный на него шум с дисперсией 5 % от максимума сигнала (здесь и далее под дисперсией понимается среднеквадратичное отклонение). Для каждой реализации были рассчитаны полюса с фиксированными $P_k^h(\tau)$. Эксперимент показал, что среднее положение полюсов при наличии шума $\bar{q}_1^h = 0{,}025 - i\,1{,}003$; $\bar{q}_2^h = 0{,}586 - i\,2{,}59$ оказалось смещённым относительно полюсов в отсутствие шума $q_1^h = 0{,}015 - i\,0{,}781$; $q_2^h = 0{,}34 - i\,3{,}06$ на величину, вдвое превосходящую ошибку оценки среднего. Несмотря на это, вид импульсной характеристики во временно́й области устойчив к воздействию внешних шумов. Все 50 реализаций импульсных характеристик приведены на рис. 3.

Как уже отмечалось выше, предложенная полюсная модель позволяет решать задачу восстановления зондирующего импульса по известным выходному сигналу и полюсной модели импульсной характеристики, используя тот же подход, что и для восстановления самой импульсной характеристики. Эта операция служит дополнительной проверкой правильности восстановления импульсной характеристики и имеет самостоятельное значение для оценки формы импульса на входе системы, когда импульсная характеристика системы известна. На рис. 4 представлены результаты восстановления формы зондирующего монополярного импульса по выходным сигналам с кабелей № 1, 2 с помощью вычисленных ранее импульсных характеристик. Здесь кривая *1* (сплошная линия) соответствует импульсу $X(t)$ от генератора, кривая *2* (пунктирная линия) — восстановленный сигнал $\tilde{X}_1(t)$ для кабеля № 1, кривая *3* (штриховая линия) — восстановленный сигнал $\tilde{X}_2(t)$ для кабеля № 2. При восстановлении импульса $\tilde{X}_1(t)$ был получен набор из пяти полюсных функций и распределений $P_m^x(\tau)$, параметры которых были близки к параметрам соответствующих функций, аппроксимирующих $X(t)$. При этом невязка, рассчитанная по (4), составила 0,2 % При восстановлении импульса $\tilde{X}_2(t)$ оказалось достаточно четырёх полюсных функций со своими распределениями $P_m^x(\tau)$. Пятая полюсная функция, существующая в аппроксимации исходного импульса $X(t)$ и соответствующая высокочастотному полюсу, отсутствует в аппроксимации $\tilde{X}_2(t)$. Это связано с уменьшением амплитуды высокочастотных составляющих комплексного спектра импульса при прохождении через кабель, следствием чего явилось сглаживание фронтов восстановленного импульса $\tilde{X}_2(t)$. Невязка, рассчитанная по (4), составила 0,8 %.

Проведённые эксперименты позволяют отметить следующие основные особенности кабельных систем распространения СШП импульсов. Для восстановления импульсных характеристик предпочтительнее использовать монополярные импульсы, имеющие в своём спектре низкие частоты. Кроме того, необходимо обеспечить максимально возможное окно наблюдения импульсов для получения правильных оценок низкочастотных полюсов импульсных характеристик.

Полученная импульсная характеристика может служить для определения декремента затухания исследуемого кабеля в полосе частот зондирующего импульса.

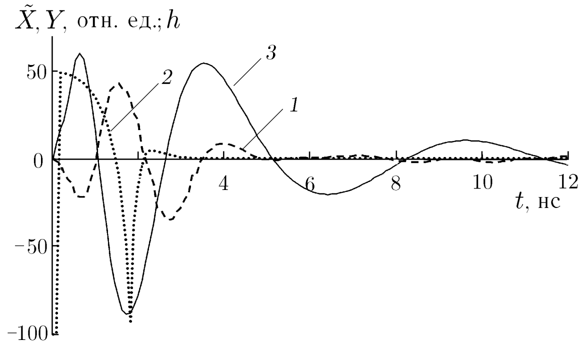

Рис. 5

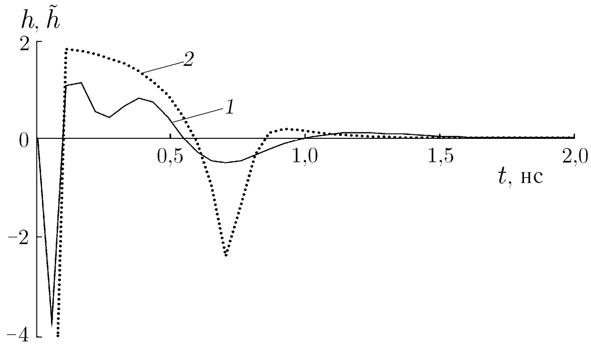

Рис. 6

3. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПОЛЮСНЫХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ИМПУЛЬСНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ОБЪЕКТОВ

Другим приложением полюсных моделей является их использование для расчёта импульсных характеристик объектов при зондировании СШП импульсами. В качестве экспериментальных результатов были использованы данные, опубликованные в [7]. Измерения рассеянного излучения от различных объектов проводились в безэховой камере. Для излучения и приёма импульсов использовались рупорные антенны.

Используя форму импульса $Y(t)$, рассеянного металлической сферой с радиусом $R = 10$ см (рис. 5, кривая *1*), и её импульсную характеристику, рассчитанную с использованием полюсной модели на основе данных, приведённых в [8] (рис. 5, кривая *2*), была восстановлена форма зондирующего импульса $\tilde{X}(t)$ (рис. 5, кривая *3*) с учётом искажений, вносимых приёмным трактом, по пяти полюсным функциям с распределениями $P_m^x(\tau)$, для которых $\tau_m^x = 0$, $T_m^x = 0{,}09$ нс, где $m = 1, 2, \ldots, 5$. Далее, используя рассчитанный зондирующий импульс, была рассчитана импульсная характеристика металлической сферы с радиусом $R = 4$ см (рис. 6, кривая *1*) по пяти полюсным функциям и распределениям $P_k^h(\tau)$ с $\tau_k^h = 0$; $T_k^h = 0{,}09$ нс, где $k = 1, 2, \ldots, 5$. Для сравнения там же (рис. 6, кривая *2*) приведена импульсная характеристика сферы, вычисленная с использованием [8]. Критерием точности восстановления служила рассчитанная по (5) невязка между измеренным рассеянным указанной сферой сигналом $Y(t)$ (сплошная линия на рис. 7) и сигналом $\tilde{Y}(t)$, полученным с помощью свёртки зондирующего импульса $\tilde{X}(t)$ с восстановленной импульсной характеристикой сферы (пунктирная линия на рис. 7). В данном случае невязка составила 2,8 %. Искажения формы восстановленной импульсной характеристики (см. рис. 6) связаны с ошибками, накопившимися при последовательном расчёте формы зондирующего импульса и импульсной характеристики сферы, а также с отсутствием высоких частот в комплексном спектре зондирующего импульса.

Следует заметить, что положение второго минимума в импульсной характеристике сферы, связанного с ползущей волной, характеризует её радиус. Кроме того, с увеличением радиуса сферы относительно пространственной длины зондирующего импульса доля энергии, приходящаяся на ползущую волну, уменьшается. Было проведено имитационное моделирование для выявления зависимости погрешности η определения радиуса R сферы по положению второго глобального минимума в восстановленной импульсной характеристике при различных размерах сферы и неизменной пространственной длительности зондирующего импульса $\tau_{\text{р}} c$, где c — скорость света, $\tau_{\text{р}}$ — длительность импульса. Импульсная характеристика аппроксимировалась пятью полюсными функциями с фиксированными распределениями $P_k^h(\tau)$ с параметрами $\tau_k^h = 0$; $T_k^h = 0{,}09$ нс, где $k = 1, 2, \ldots, 5$. На рис. 8 показаны результаты такого моделирования: кривая *1* соответствует случаю, когда шум в от-

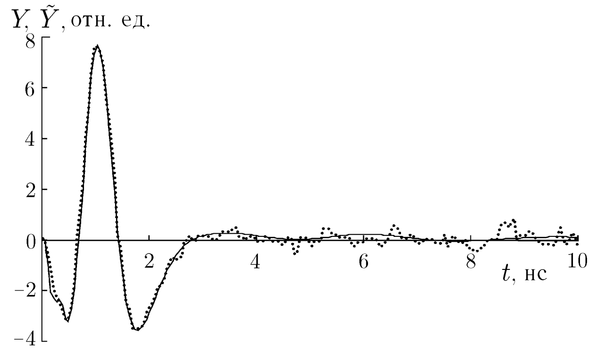

Рис. 7

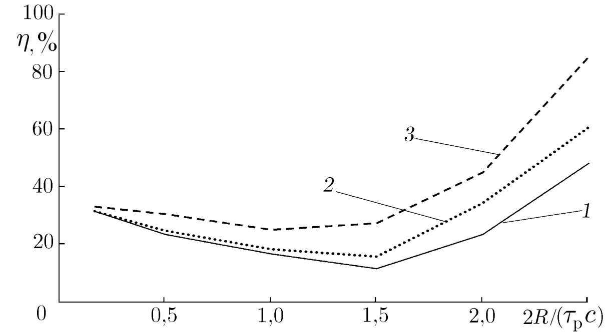

Рис. 8

ражённом сигнале отсутствует, кривые *2* и *3* — когда дисперсия шума составляет 5 % и 10 % от максимума сигнала в приёмной системе соответственно. Погрешность определения радиуса сферы имеет минимум $\eta = 11{,}5$ % в отсутствие шума при отношении диаметра сферы к пространственной длительности импульса равном, 1,5, и возрастает с увеличением уровня шума. Увеличение погрешности с ростом параметра $2R/(\tau_{\rm p}c)$ относительно оптимального значения связано с уменьшением вклада ползущей волны в отражённый сигнал. Увеличение погрешности с уменьшением $2R/(\tau_{\rm p}c)$ относительно оптимального значения обусловлено уменьшением разрешающей способности зондирующего импульса.

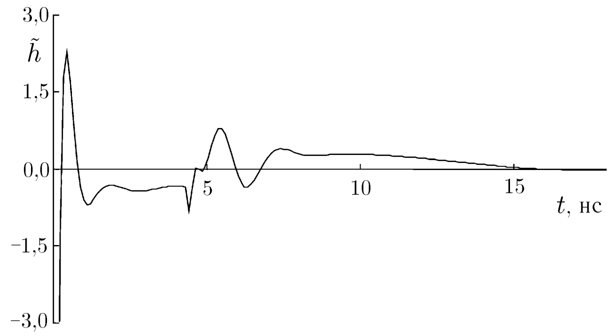

Рис. 9

Зондирующий импульс $\tilde{X}(t)$ (рис. 5, кривая *3*) был также использован для восстановления импульсной характеристики металлического цилиндра с длиной 62 см и диаметром 25 см. Падающая волна распространялась вдоль оси цилиндра. Цилиндр представлялся как сложный объект, распределения $P_k^h(\tau)$ которого характеризовались двумя моментами τ_k^h появления полюсных функций и интервалами $T_k^h = 0{,}09$ нс. Первый момент определялся положением ближайшего торца цилиндра, второй выбирался исходя из минимума невязки измеренного и модельного рассеянных сигналов. Каждому моменту включения соответствовали 3 полюсные функции, параметры полюсов которых искались методом покоординатного спуска. Зависимость невязки от положения второго момента включения полюсных функций имела ярко выраженный минимум, соответствующий расстоянию 63 см, что близко к длине цилиндра. Таким образом, используя полюсную модель, можно определить длину цилиндра по данным измерений зондирующего и рассеянного СШП импульсов. На рис. 9 представлена рассчитанная импульсная характеристика цилиндра с распределением $P_k^h(\tau)$, содержащим два момента включения полюсных функций. Для данной импульсной характеристики невязка, рассчитанная по (5), составила 2,6 %.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенный подход позволяет получать устойчивые оценки импульсных характеристик объектов и каналов распространения сверхширокополосных электромагнитных импульсов.

Аппроксимация сигналов и импульсных характеристик в рамках полюсной модели с использованием равновероятной плотности распределения $P(\tau)$ временно́й задержки полюсных функций в некотором интервале τ существенно сокращает необходимое для описания число параметров по сравнению с традиционными методами.

На примере расчёта импульсных характеристик металлических сферы и цилиндра показана возможность определения размеров этих тел.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Астанин Л. Ю., Костылев А. А. Основы сверхширокополосных радиолокационных измерений. М.: Радио и связь, 1989. 192 с.
2. Небабин В. Г., Сергеев В. В. Методы и техника радиолокационного распознавания. М.: Радио и связь, 1984. 152 с.
3. Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г. Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990. 232 с.
4. Марпл-мл. С. Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1990. 584 с.
5. Baum C. E., Rothwell E. J., Chen K., Nyquist D. P. // Proc. IEEE. 1991. V. 79, No. 10. P. 1 481.
6. Кошелев В. И., Сарычев В. Т., Шипилов С. Э. // Изв. вузов. Радиофизика. 2000. Т. 43, № 5. С. 433.
7. Le Goff M., Pouliguen P., Chevalier Y. et al. // Ultra-Wideband, Short-Pulse Electromagnetics 4. 1999. P. 195.
8. Кенно Е. М, Моффат Д. Л. // ТИИЭР. 1965. Т. 53, № 8. С. 1 025.

Институт сильноточной электроники СО РАН,
г. Томск, Россия

Поступила в редакцию
23 апреля 2001 г.

USING THE POLE MODELS OF SIGNALS FOR ESTIMATION OF THE IMPULSE RESPONSES OF ULTRA-WIDEBAND SYSTEMS

V. I. Koshelev, V. T. Sarychev, and S. É. Shipilov

To estimate the impulse responses of ultra-wideband systems, we propose an approach based on the approximation of signals in the time domain by exponentially damping oscillations whose appearance times are determined by a distribution density. We present mathematical tools for estimating parameters of the proposed model. The developed approach is tested using experimental data on propagation of electromagnetic pulses in coaxial cables and scattering of pulses by metal objects.

УДК 517.33:621.373

АНАЛИЗ ПОГРЕШНОСТИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ НЕЛИНЕЙНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ ПО ЗАШУМЛЁННЫМ ХАОТИЧЕСКИМ ВРЕМЕННЫМ РЯДАМ

О. Я. Бутковский [1], *Ю. А. Кравцов* [2], *М. Ю. Логунов* [1]

Рассмотрены вопросы о точности восстановления нелинейного отображения по зашумлённым данным и о качестве предсказания на основе восстановленных малоразмерных моделей. Показано, что существует оптимальная длина выборки, обеспечивающая наименьшую погрешность реконструкции отображения и, тем самым, наибольшее время предсказания. Общие выводы проиллюстрированы на примере восстановления отображения в виде полинома четвёртой степени на основе «точной», усечённой и избыточной моделей.

ВВЕДЕНИЕ

Проблеме восстановления динамических уравнений хаотической системы по эмпирическим данным, т. е. решению обратной задачи хаотической динамики, посвящено значительное число работ. Первые успешные попытки восстановления динамических уравнений из незашумлённых хаотических временны́х рядов были предприняты Кремерсом и Хублером [1], Кратчфильдом и Макнамарой [2], Бриденом и Хублером [3], Гусбэ [4], Брашем и Кадтке [5].

В последующих работах, в частности в публикациях [6–9], восстановление уравнений проводилось уже с учётом шумов. Различные подходы к проблеме восстановления динамических уравнений и некоторые частные результаты освещены в работах [10, 11] из коллективной монографии [12], посвящённой предсказуемости сложных динамических систем. Проблеме восстановления динамических закономерностей сердечных ритмов посвящены работы [13–17]. Общая характеристика методов восстановления дана в работах [18, 19], а также в недавно вышедшей монографии [20] и в обзоре [21].

В основе всех современных попыток восстановления динамических уравнений лежит подход, предложенный Колмогоровым и Габором в 50-х годах и состоящий в «подгонке» модельных дифференциальных или разностных уравнений к экспериментальным данным. Современное изложение этого подхода дано в работах [22–24]. Одним из условий, определяющих качество восстановления, является стационарность временного ряда в статистическом смысле [24]. Наблюдаемый в настоящее время взрыв интереса к методам решения обратных задач был инициирован работой Рюэля и Такенса [25], а также теоремой Такенса, суть которой [26] состоит в том, что по одномерному временному ряду можно реконструировать компоненты многомерной хаотической системы. Теорема Такенса частично снимала очень болезненный вопрос о возможности восстановления динамических уравнений системы в условиях априорной неопределённости, поставленный ещё Колмогоровым и Габором.

Особенность хаотических систем, которые стали предметом всеобщего интереса в 80–90-х годах, состоит в их исключительно высокой чувствительности к малым шумовым воздействиям. Малые возмущения в хаотических системах нарастают по экспоненциальному закону и довольно быстро достигают размера аттрактора. Эта особенность хаотических систем получила название локальной неустойчивости [20, 27].

Наличие локальной неустойчивости всё же допускает решение обратной задачи для хаотических систем на основе подхода, предложенного ранее Колмогоровым и Габором для нехаотических динамических систем. Разумеется, свойство локальной неустойчивости не может не отразиться на качестве восстановления динамического уравнения. В частности, эта особенность хаотических систем резко ограничивает время предсказуемости, т. е. интервал времени, на котором восстановленное уравнение обеспечивает удовлетворительное предсказание поведения наблюдаемой системы [19, 21, 28, 29], как это и должно быть для конечномерных детерминированных систем.

Несмотря на значительное внимание к проблеме, вопрос о потенциальной точности восстановления уравнений хаотической динамики и о максимальном достижимом времени предсказуемости остаётся открытым. В данной работе вопрос о точности восстановления динамических уравнений системы и о качестве предсказания рассматривается на примере одномерного отображения, допускающего хаотический режим. Обсуждаемый вопрос имеет два аспекта: точность восстановления динамических уравнений и точность восстановления фазовой траектории (последняя зависит не только от вида уравнений, но и от начальных условий). В данной работе мы рассмотрим лишь первый аспект, второй — точность восстановления фазовой траектории — будет предметом отдельной статьи.

Прежде всего (раздел 1) мы определим исследуемую модель и способы введения «внутренних» и «внешних» шумов. В разделе 2 проанализируем процедуру реконструкции отображения методом наименьших квадратов для дальнейшего анализа погрешностей, который будет проведён в разделе 3. Используя введённый в [18] коэффициент детерминированности, в разделе 4 будет оценено максимальное время предсказуемости, а также будет показано, что в хаотических системах, как и в обычных локально устойчивых системах, существует оптимальная длина выборки N_{opt}, обеспечивающая наименьшую погрешность восстановления коэффициентов в рамках заданной модели при заданном уровне шумов. В разделе 5 полученные в предыдущих разделах аналитические результаты мы проиллюстрируем на примере отображения четвёртой степени, а в разделе 6 оценим характер роста функционала погрешности. Будет показано, что экспоненциальный рост возмущений препятствует сколько-нибудь ощутимому увеличению времени предсказуемости за счёт увеличения длины анализируемой выборки. Этим хаотические системы принципиально отличаются от обычных, нехаотических систем, где увеличение длины выборки обычно приводит к улучшению качества реконструкции модели.

1. ОСНОВНЫЕ ИСТОЧНИКИ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Рассмотрим хаотическую последовательность x_n, удовлетворяющую «зашумлённому» отображению

$$x_{n+1} = F(x_n) + f_n, \tag{1}$$

где f_n — аддитивный шум, неизбежно присутствующий в любой физической системе (если последовательность x_n генерируется при помощи компьютера, то роль f_n могут играть ошибки округления). Аддитивный шум f_n мы будем называть внутренним, хотя внешние факторы тоже могут воздействовать на исследуемую систему.

Пусть первичный процесс x_n регистрируется измерительным прибором (приёмником, датчиком). Сигнал на выходе измерительного прибора y_n отличается от первичного процесса x_n вследствие наличия нелинейных искажений и измерительных (инструментальных) шумов ν_n. Пренебрегая нелинейными искажениями, представим измеряемую величину y_n в виде

$$y_n = x_n + \nu_n.$$

Обратная задача хаотической динамики, т. е. задача восстановления динамических уравнений по наблюдаемым значениям y_n, в данном случае сводится к определению функции $F(x, \mathbf{b})$ по зашумлённым значениям y_n, которые подвержены воздействию как внутренних (f_n), так и измерительных (ν_n) шумов. Вектор $\mathbf{b}$ в $F(x, \mathbf{b})$ есть искомый вектор коэффициентов модели.

Обратные задачи нелинейной динамики обычно решаются на основе тех или иных модельных представлений [22–24], т. е. на основе априорной информации о процессе. В данном случае речь идёт о модельном представлении функции $F(x)$ и о последующем восстановлении параметров этого модельного представления. Наиболее распространённой и универсальной является полиномиальная модель, которая предназначена для аппроксимации гладких функций $F(x)$, допускающих разложение в ряд Тэйлора. Представим функцию $F(x)$ в виде суммы двух частей:

$$F(x, \mathbf{b}) = G(x, \mathbf{b}) + g(x, \mathbf{B}) \tag{2}$$

где

$$G(x, \mathbf{b}) = \sum_{q=0}^{Q} b_q x^q \tag{3}$$

— моделируемая (реконструируемая) часть, содержащая степени x не выше Q, а

$$g(x, \mathbf{B}) = \sum_{q=Q+1}^{k} B_q x^q$$

— «внемодельная», нереконструируемая часть, которую мы будем именовать также дефектом модели.

Введём модельную переменную z, подчиняющуюся модельному отображению

$$z_{n+1} = G(z_n, \mathbf{a}) = \sum_{q=0}^{Q} a_q z_n^q, \tag{4}$$

которое в отличие от исходного отображения (1) не включает в себя ни флуктуации f_n, ни дефект модели $g(x, \mathbf{B})$. Наша главная задача состоит в определении коэффициентов a_q модельного отображения (4) по измеренным значениям наблюдаемой переменной y_n и в оценке погрешностей этих коэффициентов относительно истинных значений b_q.

2. ПРОЦЕДУРА ВОССТАНОВЛЕНИЯ МОДЕЛЬНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ ПО МЕТОДУ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Для определения коэффициентов a_q реконструируемого отображения (4) воспользуемся методом наименьших квадратов (МНК) в форме, близкой к описанной в [22]. В монографии [22], как, впрочем, и в родственных публикациях [23, 24], МНК применялся для восстановления незашумлённых и нехаотических (т. е. локально устойчивых) динамических систем. Новый элемент нашего рассмотрения состоит в явном учёте внутренних шумов f_n и в допустимости локальной неустойчивости (хаотичности) анализируемой системы. Действие именно этих двух факторов решительным образом ограничивает предсказуемость хаотических систем по сравнению с обычными, нехаотическими системами.

В методе наименьших квадратов коэффициенты a_q аппроксимирующего полинома (4) находятся из условия минимизации квадратичного функционала погрешности управляющего уравнения:

$$\Phi_N(a_q) = \sum_{n=0}^{N} \left[z_{n+1} - \sum_{q=0}^{Q} a_q z_n^q \right]^2 \Bigg|_{z_n = y_n}. \tag{5}$$

Минимизация Φ_N производится на массиве эмпирических данных, т. е. в качестве значений модельной переменной z_n в (5) следует брать эмпирические значения y_n.

При указанных условиях коэффициенты a_q находятся из системы уравнений

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial \Phi_N}{\partial a_p} = \sum_{n=0}^{N} y_n^p \left[y_{n+1} - \sum_{q=0}^{Q} a_q y_n^q \right] = 0, \tag{6}$$

где $p = 0, 1, 2, \ldots, Q$, которая получается путём дифференцирования функционала (5) по параметрам a_q. Суммирование в (5) производится по выборке, содержащей $N + 1$ отсчётов $y_0, \ldots, y_N$. Предполагается, что длина выборки $N + 1$ не может быть меньше $Q + 1$, иначе система (6) окажется недоопределённой.

3. АНАЛИЗ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Преобразуем систему уравнений (6) к виду, удобному для анализа погрешностей

$$\alpha_q = a_q - b_q,$$

представляющих собой разность восстанавливаемых (a_q) и истинных (b_q) коэффициентов. Для этого заменим y_{n+1} в квадратных скобках в (6) суммой $x_{n+1} + \nu_{n+1}$ и в соответствии с (1) и (2) представим x_{n+1} в виде

$$x_{n+1} = \sum_{q=0}^{Q} b_q x_n^q + g(x_n, \mathbf{B}) + f_n. \tag{7}$$

Под знаком суммы в (7) вернёмся к наблюдаемым переменным y_n, положив $x_n = y_n - \nu_n$, и разложим величины $(y_n - \nu_n)^q$ в ряд Тэйлора по малым флуктуациям ν_n, ограничившись членами первого и второго порядка малости. Тогда система уравнений (6) примет вид

$$\sum_{n=0}^{N} y_n^p \left[\nu_{n+1} - \sum_{q=0}^{Q} \alpha_q y_n^q + g(x_n) + f_n - S_n \nu_n + P_n \nu_n^2 \right] = 0, \tag{8}$$

где

$$S_n = \sum_{q=1}^{Q} q b_q y_n^{q-1}, \quad P_n = \frac{1}{2} \sum_{q=2}^{Q} q\,(q-1)\, b_q y_n^{q-2}.$$

При оценке этих сумм истинные коэффициенты b_q можно заменить их оценками a_q, определяемыми из уравнений (6).

Система уравнений (8) позволяет выразить погрешности α_q через внутренние шумы f_n, флуктуационные слагаемые, содержащие ν_{n+1}, ν_n и ν_n^2, а также через дефект модели $g_n = g(x_n, \mathbf{B})$. С этой целью удобно записать систему уравнений (8) в виде

$$\sum_{q=0}^{Q} A_{pq} \alpha_q = B_p + C_p + D_p + E_p \equiv H_p, \tag{9}$$

где $p = 0, 1, 2, \ldots, Q$,

$$A_{pq} = \sum_{n=0}^{N} y_n^{p+q}, \quad B_p = \sum_{n=0}^{N} y_n^p f_n, \quad C_p = \sum_{n=0}^{N} y_n^p\,(\nu_{n+1} - S_n \nu_n),$$
$$D_p = \sum_{n=0}^{N} y_n^p P_n \nu_n^2, \quad E_p = \sum_{n=0}^{N} y_n^p g_n. \tag{10}$$

При оценке величин, входящих в систему уравнений (9), будем ориентироваться на функции $F(x)$, для которых переменные x_n в большинстве своём сравнимы с единицей. Типичным примером функций такого класса являются логистическое отображение $x_{n+1} = r_n x_n\,(1 - x_n)$ в «рабочем» интервале

$0 < x_n < r/4$ и квадратичное отображение $x_{n+1} = \mu - x_n^2$ в интервале $0 < x_n < \mu^{1/2}$. При $x_n \sim 1$ и при не очень высоких степенях q (скажем, при $q \leq 4\div5$) величины x_n^q и x_n^p, а также близкие к ним (в силу предполагаемой малости шумов ν_n и f_n) значения y_n^q и y_n^p тоже будут сравнимы с единицей. То же справедливо и для коэффициентов S_n и P_n. Указанные простые соотношения позволяют провести качественный анализ системы уравнений (9).

Величины B_p и C_p в правой части системы уравнений (9) описывают линейные (по флуктуациям ν_n и f_n) возмущения, D_p — квадратичные возмущения, а E_p — возмущения, связанные с дефектом модели g_n.

Решение системы уравнений (9) запишем в виде

$$\alpha_q = \Gamma_{qp} H_p, \tag{11}$$

где Γ_{qp} — матрица, обратная матрице A_{pq}. Все элементы этой матрицы пропорциональны $1/N$: $\Gamma_{qp} \sim \sim 1/N$, т. к. каждый элемент исходной матрицы A_{pq} в среднем, т. е. по всем реализациям y_n, пропорционален N (см. формулы (10)).

Выделим из H_p флуктуационную (с нулевым средним значением) часть $\tilde{H}_p$ и среднюю компоненту $\overline{H}_p$. Тогда (11) можно переписать в виде

$$\alpha_q = \tilde{\alpha}_q + \overline{\alpha}_q, \quad \tilde{\alpha}_q = \Gamma_{qp}\tilde{H}_p, \quad \overline{\alpha}_q = \Gamma_{qp}\overline{H}_p.$$

Среднее значение флуктуационной компоненты $\tilde{\alpha}_q$ равно нулю. Величина $\bar{\alpha}_p$ характеризует смещение оценки, связанное с квадратичным по шумам слагаемым D_p и усреднённым действием дефекта модели g_n. Оценим дисперсию флуктуационной части $\sigma_\alpha^2 = \langle\tilde{\alpha}_q^2\rangle$, среднее значение $\overline{\alpha}_q$ и средний квадрат погрешности $\langle\alpha_q^2\rangle = \sigma_\alpha^2 + \overline{\alpha}_q^2$.

Примем обычные для рассматриваемого класса задач допущения, а именно предположим, что случайные величины f_n и ν_n имеют нулевые средние значения, некоррелированы друг с другом и с соседними значениями f_m и ν_m, $m \neq n$. Дисперсии этих величин обозначим соответственно σ_f^2 и σ_ν^2. Дефект модели g_n также можно уподобить случайной величине, из которой можно выделить среднюю ($\overline{g}$) и флуктуационную ($\tilde{g}_n$) компоненты. Дисперсию величины $\tilde{g}$ обозначим σ_g^2.

Используя эти обозначения, для дисперсии σ_α^2 получим оценку $\sigma_\alpha^2 \approx \sigma_H^2/N^2$, где $\sigma_H^2 = \langle\tilde{H}_p^2\rangle$ — дисперсия величины $\tilde{H}_p$. Дисперсия σ_H^2 пропорциональна длине выборки: $\sigma_H^2 \sim \sigma_1^2 N$, где $\sigma_1^2 = \max\{\sigma_\nu^2, \sigma_f^2, \sigma_g^2\}$. В итоге

$$\sigma_\alpha^2 \approx \frac{\sigma_H^2}{N^2} \approx \frac{\sigma_1^2}{N}\,.$$

Среднее значение $\overline{H}_p$ тоже пропорционально N: $\overline{H}_p \approx \overline{h}N$, так что

$$\overline{\alpha}_p \sim \Gamma_{pq}\overline{H}_p \sim \overline{h}.$$

Среднее значение $\overline{h}$ обусловлено квадратичным по ν_n слагаемым D_p и усреднённым дефектом модели $\overline{g}$, так что $\overline{h}$ порядка σ_ν^2 или $\overline{g}$ в зависимости от того, какая из этих величин больше по модулю. В итоге средний квадрат ошибки $\langle\alpha_q^2\rangle$ можно оценить как

$$\langle\alpha_q^2\rangle = \sigma_\alpha^2 + \overline{\alpha}_q^2 \approx \frac{\sigma_H^2}{N^2} + \frac{\overline{H}^2}{N^2} \approx \frac{\sigma_1^2}{N} + \overline{h}^2. \tag{12}$$

Первое слагаемое в (12) уменьшается с ростом длины выборки N (наклонная штриховая линия на рис. 1), тогда как второе слагаемое не зависит от N (горизонтальная штриховая линия на том же рисунке). В результате средний квадрат ошибки $\langle\alpha_q^2\rangle$ сначала уменьшается, а затем достигает насыщения на уровне $\overline{h}^2$. Переход от убывания к насыщению происходит при критической длине выборки

$$N_{\rm c} \sim \sigma_1^2/\overline{h}^2. \tag{13}$$

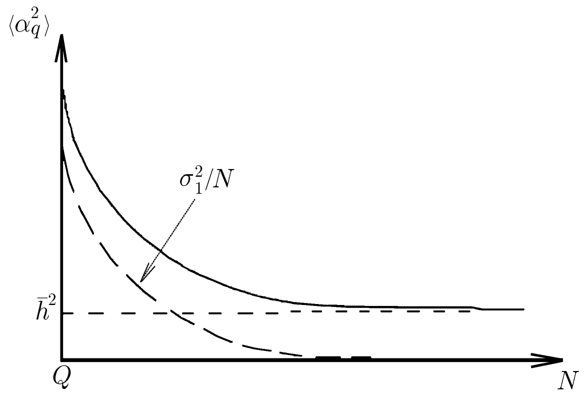

Рис. 1

Увеличение длины выборки N сверх $N_{\rm c}$ не способно привести к уточнению коэффициентов a_q.

Отметим, что если основную роль играет измерительный шум ν_n, то $\sigma_1^2 \sim \sigma_\nu^2$ и $\overline{h} \sim \sigma_\nu^2$, так что

$$N_{\rm c} \sim \frac{\sigma_\nu^2}{\sigma_\nu^4} \sim \sigma_\nu^{-2}. \tag{14}$$

Согласно (14) десятипроцентный по амплитуде шум ($\sigma_\nu = 0{,}1$) ограничивает длину выборки значением $N_{\rm c} = 100$. Однако, если тот же шум ($\sigma_H \sim \sigma_\nu = 0{,}1$) имеет место в сочетании со смещением $\overline{g} = 0{,}1$, обусловленным дефектом модели, то $N_{\rm c} \sim 1$. В этом случае никакое увеличение длины выборки не даёт положительного эффекта.

4. ОПТИМАЛЬНАЯ ДЛИНА ВЫБОРКИ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ УВЕЛИЧЕНИЯ ВРЕМЕНИ ПРЕДСКАЗУЕМОСТИ

Обратимся к вопросу об оптимальной длине выборки N, приняв в качестве критерия оптимальности достижение максимального времени предсказуемости $m_{\rm pred}$.

Пусть временной ряд y_n принимает к концу выборки длиной N значение y_N. Взяв это значение в качестве отправной величины для модельной (прогностической) последовательности z_n, т. е. положив $z_N = y_N$, можно оценить время предсказуемости $m_{\rm pred}$ из условия

$$D(m) = \frac{\langle \tilde{y}_{N+m} \tilde{z}_{N+m}\rangle}{\sqrt{\langle \tilde{y}_{N+m}^2\rangle \langle \tilde{z}_{N+m}^2\rangle}} = \mu, \tag{15}$$

где $\tilde{y}_n = y_n - \langle y\rangle$ и $\tilde{z}_n = z_n - \langle z\rangle$ — отклонения величин y_n и z_n от своих средних значений $\langle y\rangle$ и $\langle z\rangle$, $D(m)$ — степень предсказуемости наблюдаемого процесса z_n [28, 29], m — время (число шагов), отсчитываемое после начала прогноза $n = N$, μ — допустимый уровень спадания степени предсказуемости (скажем, $\mu = 1/2$ или $\mu = 3/4$).

Рассмотрим средний квадрат ошибки прогноза $\langle(\tilde{y}_{N+m} - \tilde{z}_{N+m})^2\rangle$, который в хаотических системах экспоненциально нарастает со временем m, прошедшим с начала прогноза:

$$\langle(\tilde{y}_{N+m} - \tilde{z}_{N+m})^2\rangle \approx \left(\sigma_f^2 + \sigma_\nu^2 + \sigma_{\rm mod}^2\right) \exp(2\lambda m), \tag{16}$$

где λ — ляпуновский показатель системы. Слагаемое σ_f^2, характеризующее здесь уровень шумов f_n в исходной физической системе (1), и слагаемое σ_ν^2, представляющее собой интенсивность измерительных шумов ν_n, де-факто не зависят от длительности выборки N и поэтому не подлежат оптимизации в отличие от слагаемого $\sigma_{\rm mod}^2$, которое соответствует погрешности принятой модели и поэтому зависит от N.

Выразив коррелятор $\langle \tilde{y}_{N+m} \tilde{z}_{N+m}\rangle$ через средний квадрат погрешности (16) и полагая приближённо, что $\langle \tilde{z}_{N+m}^2\rangle \sim \langle \tilde{y}_{N+m}^2\rangle \sim A^2$, где A — среднеквадратичный размах колебаний, из (15) получаем оценку времени предсказуемости, отвечающего спаданию степени предсказуемости (15) до уровня μ:

$$m_{\rm pred}^{(\mu)} = \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{2\,(1-\mu)\,A^2}{\sigma_f^2 + \sigma_\nu^2 + \sigma_{\rm mod}^2}\,.$$

В частном случае $\mu = 1/2$ получаем оценку

$$m_{\rm pred}^{(1/2)} = \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{A^2}{\sigma_f^2 + \sigma_\nu^2 + \sigma_{\rm mod}^2}\,,$$

использованную в работах [28, 29]. Более удобным для практических расчётов является значение $\mu = 3/4$ [30], которым мы и воспользуемся в последующих оценках:

$$m_{\rm pred}^{(3/4)} = \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{A^2/2}{\sigma_f^2 + \sigma_\nu^2 + \sigma_{\rm mod}^2}\,. \qquad (17)$$

В данной задаче погрешность модели $\sigma_{\rm mod}^2$ описывается разностями $\alpha_q = a_q - b_q$ между истинными (b_q) и восстановленными (a_q) коэффициентами в отображениях (3) и (4) соответственно, так что $\sigma_{\rm mod}^2 \approx \langle \alpha_q^2 \rangle$. Согласно результатам разделов 2 и 3 средний квадрат погрешности $\langle \alpha_q^2 \rangle$ содержит два слагаемых, одно из которых определяется шумами, а второе — смещением оценки. С увеличением длины выборки средний квадрат погрешности $\langle \alpha_q^2 \rangle$ сначала уменьшается, а затем насыщается на уровне $\overline{h}^2$ (см. рис. 1).

В случае преобладающего влияния шумового фактора, т. е. при $\sigma_\nu^2 > \sigma_g^2$, дисперсия погрешности σ_α^2 убывает как σ_ν^2/N и достигает минимального значения

$$\min(\sigma_{\rm mod}^2) \approx \sigma_\nu^4$$

при $N_{\rm c} \sim \sigma_\nu^{-2}$, так что оптимальное время выборки сопоставимо с $N_{\rm c}$: $N_{\rm opt} \sim N_{\rm c}$.

Если учесть, что $\sigma_\nu^2 \ll 1$, максимальное достижимое время предсказуемости (17) даётся выражением

$$\max(m_{\rm pred}) = \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{A^2/2}{\sigma_\nu^2\,(1 + \sigma_\nu^2)} \approx \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{A^2/2}{\sigma_\nu^2}\,. \qquad (18)$$

В другом частном случае, когда преобладает вклад дефектов модели ($\sigma_1^2 \approx \sigma_g^2$; $\overline{\alpha} \approx \overline{g}$) и $N_{\rm c} \sim \sim \sigma_g^2/\overline{g}^2$, минимальная погрешность модели составляет $\min(\sigma_{\rm mod}^2) \approx \sigma_g^2/N_{\rm c} \approx \overline{g}^2$, чему соответствует максимальное время предсказуемости:

$$\max(m_{\rm pred}) = \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{A^2/2}{\sigma_\nu^2 + \overline{g}^2}\,.$$

При $\overline{g}^{\,2} \ll \sigma_\nu^2$ это время может сравняться с (18). Дальнейшее увеличение длины выборки N сверх $N_{\rm c}$ не приводит к росту времени предсказуемости, так что и в этом случае $N_{\rm opt} \sim N_{\rm c}$.

5. ИЛЛЮСТРАЦИИ

5.1. Исследуемая малоразмерная система

Для иллюстрации оценок, полученных в предыдущих разделах, рассмотрим отображение четвёртой степени:

$$x_{n+1} = F(x, \mathbf{b}) + f_n = b_0 + b_1 x_n + b_2 x_n^2 + b_3 x_n^3 + b_4 x_n^4 + f_n, \qquad (19)$$

близкое логистическому отображению с коэффициентами $b_0 = 0$; $b_1 = -b_2 = 3{,}82$; $b_3 = b_4 = 0{,}01$. При $b_3 = b_4 = 0$ уравнение (19) переходит в одну из форм логистического отображения $x_{n+1} = = 3{,}82 x_n\,(1 - x_n)$.

В качестве модели $G(x, \mathbf{a})$ примем полином

$$G(x, \mathbf{a}) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_Q x^Q,$$

степень Q которого может быть как больше четырёх (избыточная модель, $Q > 4$), так и меньше четырёх (недостаточная, или усечённая модель, $Q < 4$). При $Q = 4$ мы будем условно говорить о «точной» модели. В этом случае дефект модели g обращается в нуль, как, впрочем, и в случае избыточной модели с $Q > 4$. Напротив, для усечённой модели с $Q < 4$ дефект g отличен от нуля. Например, при $Q = 2$, когда $G(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, дефект модели равен $g(x) = b_3 x^3 + b_4 x^4$.

При численном моделировании с помощью «зашумлённого» отображения (19) генерировалось $K = 200$ последовательностей $x_n^{(k)}$, где $k = 1, 2, \ldots, 200$, различающихся своими начальными значениями $x_0^{(k)}$. Последние были распределены по аттрактору случайным образом с равномерной плотностью вероятности. К рассчитанным таким образом значениям $x_n^{(k)}$ добавлялись измерительные шумы $\nu_n^{(k)}$, в результате получались K последовательностей наблюдаемого процесса $y_n^{(k)} = x_n^{(k)} + \nu_n^{(k)}$. Как для внутренних ($f_n^{(k)}$), так и для измерительных ($\nu_n^{(k)}$) шумов принимались гауссовские распределения вероятности с δ-коррелированными значениями и нулевыми средними: $\langle f_n\rangle = \langle \nu_n\rangle = 0$. Среднеквадратичная амплитуда внутренних шумов σ_f всегда принималась равной 10^{-5}, тогда как стандартный уровень инструментальных шумов σ_ν менялся от 10^{-10} до 10^{-1}. Длительность N каждой реализации менялась от $N_{\min} = Q$ до значений, превышающих критическое значение N_{c}. Последнее в типичных условиях составляло несколько десятков.

Для каждой реализации $y_n^{(k)}$ длиной $N \geq Q$ методом наименьших квадратов определялись коэффициенты модельного отображения $a_q^{(k)}(N)$, где $q = 0, 1, \ldots, Q$; $k = 1, 2, \ldots, 200$, и соответствующие погрешности $\alpha_q^{(k)}(N) = a_q^{(k)}(N) - b_q$. Затем находились средние значения коэффициентов a_q и погрешностей $\alpha_q = a_q - b_q$

$$\langle a_q(N)\rangle = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} a_q^{(k)}(N), \quad \langle \alpha_q(N)\rangle = \langle a_q(N)\rangle - b_q,$$

а также дисперсии и средние квадраты ошибок:

$$\langle \alpha_q^2(N)\rangle = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}\left[\alpha_q^{(k)}(N)\right]^2, \quad \sigma_\alpha^2(N) = \langle \alpha_q(N)^2\rangle - \langle \alpha_q(N)\rangle^2.$$

Ниже излагаются результаты вычислений для «точной», усечённой и избыточной моделей.

5.2. «Точная» модель

При $Q = 4$ дефект модели равен нулю, а средние значения $\langle \alpha_q\rangle$, характеризующие смещение оценок a_q, определяются только квадратичными слагаемыми относительно ν_n: $\langle \alpha_q\rangle \sim \sigma_\nu^2$ (см. (12)). С ростом N средние квадраты погрешностей $\langle \alpha_q^2(N)\rangle = \sigma_q^2(N) + \langle \alpha_q\rangle^2$ сначала убывают по закону $1/N$ (см. рис. 2, где показаны средние квадраты погрешностей всех пяти коэффициентов «точной» модели

$$G(x, \mathbf{a}) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$$

при $\sigma_\nu = 10^{-8}$), а затем, при достижении критического значения $N_{\mathrm{c}} \approx 20 \div 25$ (см. оценку (13)), погрешности достигают насыщения на уровне от 10^{-8} до 10^{-5} в зависимости от номера коэффициента. Это означает, что в данном случае увеличение длины выборки N сверх $N_{\mathrm{c}} \approx 25$ нецелесообразно.

5.3. Усечённая модель

Для усечённой модели с $Q = 2$ смещение оценок $\langle \alpha_q\rangle$ определяется преимущественно дефектом модели: $\langle \alpha_q\rangle \approx \overline{g}$. В данном случае $\overline{g} \approx 10^{-5} > \sigma_\nu = 10^{-8}$, так что критическое значение

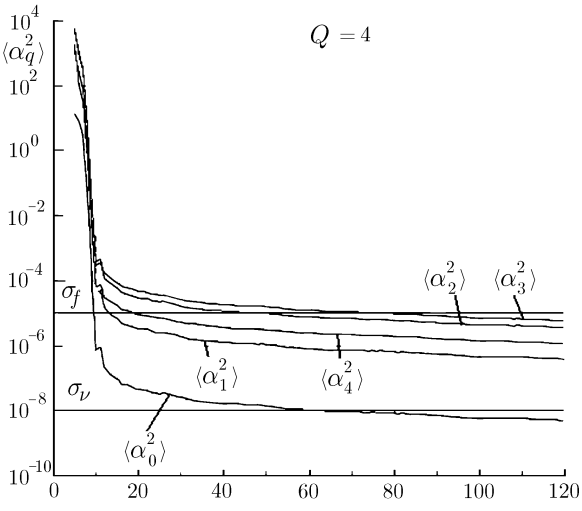

Рис. 2

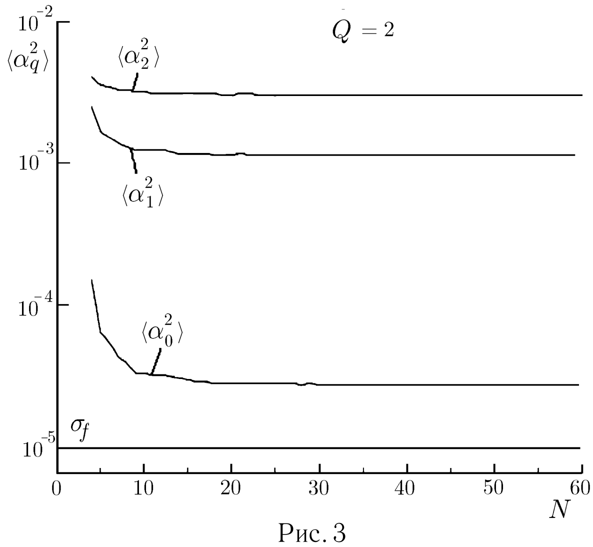

Рис. 3

$N_{\text{c}} \approx 8 \div 10$ оказывается меньше, а насыщение погрешности достигается при меньших N, чем в случае «точной» модели. Эта тенденция видна на рис. 3, где показаны средние квадраты погрешностей коэффициентов a_0, a_1 и a_2. Видно, что насыщение погрешностей коэффициентов a_0, a_1 и a_2 наступает на уровне $10^{-5} \div 10^{-3}$, гораздо более высоком, чем уровень $\sigma_\nu \sim 10^{-8}$ в случае «точной» модели. Таким образом, уровень погрешности восстановления коэффициентов для усечённой модели примерно в 10^3 раз выше, чем для «точной» модели.

5.4. Избыточная модель

При небольшой избыточности, скажем, при $Q = 6$, когда $\Delta Q = Q - 4 = 2$, статистические характеристики погрешностей α_q остаются примерно такими же, как и для «точной» модели. Однако при увеличении ΔQ погрешности α_q заметно возрастают из-за того, что система уравнений (6) становится плохо обусловленной. Влияние значительной избыточности на качество предсказания системы анализируется в следующем разделе.

5.5. Зависимость времени предсказуемости от степени Q модельного полинома

Зависимость времени предсказуемости $m_{\text{pred}}^{(3/4)}$ от степени Q модельного полинома и уровня инструментальных шумов σ_ν была вычислена на основе уравнения (15) при $\mu = 3/4$ и показана на рис. 4 для принятого ранее уровня внутреннего шума $\sigma_f = 10^{-5}$. Согласно рис. 4 при переходе от усечённых моделей с $Q < 4$ к «точной» модели время предсказуемости увеличивается, достигая максимума при $Q = 4$ или при несколько бóльших значениях $Q \approx 5 \div 7$. Переход же к сильно избыточным значениям $Q > 7$ приводит к достаточно быстрому уменьшению времени предсказуемости. Этот результат отражает общую закономерность: наилучшие результаты обеспечивают модели, сложность которых сопоставима со сложностью анализируемой системы.

6. ПОВЕДЕНИЕ КВАДРАТИЧНОГО ФУНКЦИОНАЛА ПОГРЕШНОСТИ

На основании простых соображений, приведённых в разделе 3, можно оценить также характер роста функционала погрешности (5) с увеличением длины выборки N. Если коэффициенты a_q удовлетворяют системе (6), то при $N = Q$ функционал Φ_N строго обращается в нуль. Это не означает, разумеется, что погрешности $\alpha_q = a_q - b_q$ также обращаются в нуль: в силу (9) они подвержены влиянию как шумовых слагаемых f_n и ν_n, так и дефекта модели. Можно ожидать, что при $N > Q$ функционал Φ_N будет сначала расти пропорционально эффективному шуму $\sigma_1^2 = \max\{\sigma_\nu^2, \sigma_f^2, \sigma_g^2\}$ и «избыточ-

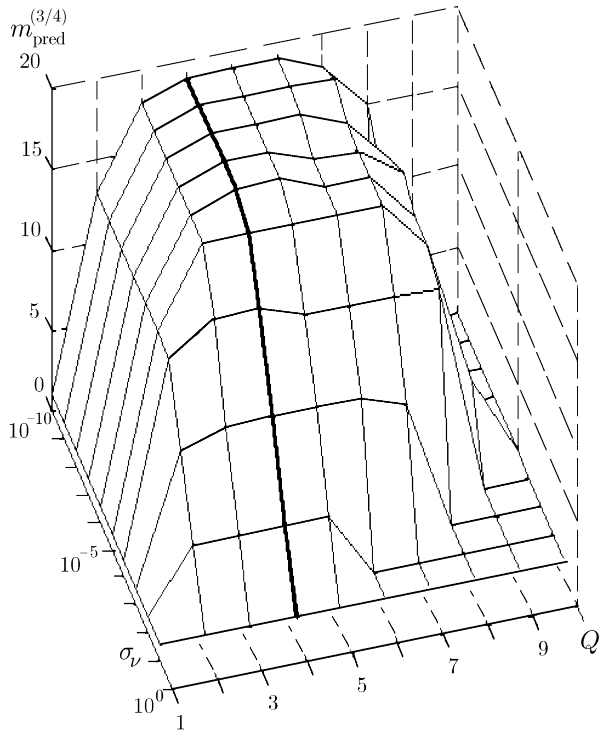

Рис. 4

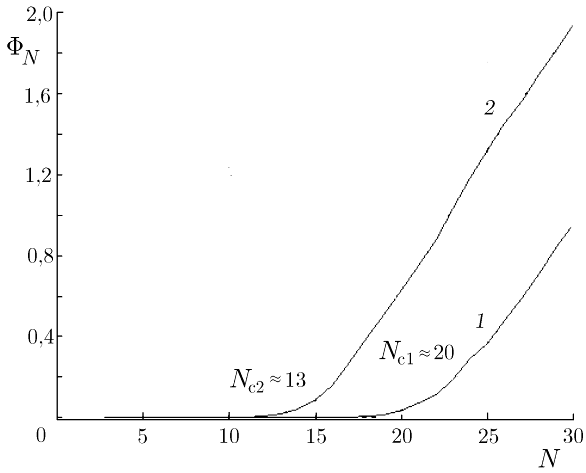

Рис. 5

ной» длительности выборки $\tilde N = N - Q$:

$$\Phi_N \sim \tilde N \sigma_1^2, \tag{20}$$

так что зависимость Φ_N от N, по существу, начинается от значения $N = Q$.

По наклону начального (линейного) участка зависимости Φ_N от N можно судить об уровне эффективных шумов σ_1^2. В дальнейшем, при $N \gtrsim N_{\rm c}$, с учётом (13) можно предположить, что линейный рост (20) сменяется квадратичным законом:

$$\Phi_N \approx \overline{h}^2 N \tilde N \sim \overline{h}^2 N^2. \tag{21}$$

Смена характера возрастания погрешностей (переход от линейного закона (20) к квадратичному закону (21)) может быть использована для оценки критического значения $N_{\rm c}$ и тем самым для оценки оптимальной длины выборки $N_{\rm opt} \sim N_{\rm c}$.

В качестве примера на рис. 5 показан характер роста функционала погрешности Φ_N с увеличением длины выборки для двух моделей: «точной» ($Q = 4$, кривая *1*) и усечённой ($Q = 2$, кривая *2*).

Мера погрешности $\Phi(N)$ сначала линейно растёт с увеличением N (на рис. 5 этого не видно, т. к. в масштабе рисунка линейное слагаемое достаточно мало). Затем слабый линейный рост сменяется заметным ростом по квадратичному закону. Моменты начала интенсивного роста кривых сравнимы с соответствующими критическими значениями $N_{\rm c1}$ и $N_{\rm c2}$, определёнными из рис. 2 и 3.

Таким образом, анализ меры погрешности Φ_N позволяет оценить оптимальную длину выборки $N_{\rm opt} \sim N_{\rm c}$, превышение которой уже не даёт выигрыш ни в точности определения коэффициентов, ни во времени предсказуемости.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведённый в данной работе анализ показал, что увеличение длины выборки N приводит к уточнению параметров исследуемого отображения только до определённого предела $N_{\rm opt} \sim N_{\rm c}$. В случае «точной» модели критическая длина выборки N_c определяется преимущественно шумовыми характеристиками, тогда как в случае усечённой модели основную роль играет дефект модели, при этом критическое значение N_c заметно снижается. Дальнейшее увеличение длины выборки N сверх N_c не приводит ни к уточнению коэффициентов восстановленного уравнения, ни к увеличению времени предсказуемости.

В заключение следует отметить, что в данной работе при анализе погрешностей методом наименьших квадратов принималось допущение о гауссовском распределении погрешностей, т. е. не учитывалась деформация функции распределения шума, которая неизбежно существует при любом нелинейном преобразовании. Нас интересовали верхние оценки погрешностей реконструкции в зависимости от длины наблюдаемого временнóго ряда.

Естественно, что применение более сложных методов оценивания (см., например, [18, 22, 24, 31–33]), учитывающих отклонение закона распределения шума от нормального, приведёт к уточнению реконструируемых коэффициентов. Но, как показывает практика, такие алгоритмы требуют большого объёма данных и применения таких трудоёмких методов оценивания, как, например, метод Монте-Карло [32], что далеко не всегда осуществимо на практике.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант № 99–02–16625) и ФПЦ «Интеграция» (проект A0030).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Cremers J., Hubler A. // Z. Naturforschung A. 1987. V. 42, No. 4. P. 897.
2. Grutchfield J. P., McNamara B. S. // Complex Systems. 1987. V. 1, No. 2. P. 417.
3. Breedon J., Hubler A. // Phys. Rev. A. 1990. V. 42, No. 10. P. 5817.
4. Gouesbet G. // Phys. Rev. A. 1991. V. 43, No. 10. P. 5321.
5. Brush J. S., Kadtke J. B. // Proc. ICASSP-92, San-Francisco. 1992. P. 321.
6. Грибков Д. А., Грибкова В. В., Кравцов Ю. А., Кузнецов Ю. И., Ржанов А. Г. // Радиотехника и электроника. 1994. Т. 39, № 2. С. 241.
7. Грибков Д. А., Грибкова В. В., Кравцов Ю. А., Кузнецов Ю. И., Ржанов А. Г. // ЖТФ. 1994. Т. 64, № 3. С. 1.
8. Gribkov D. A., Gribkova V. V., Kravtsov Yu. A., Kuznetsov Yu. I., Rzhanov A. G., Anosov O. L., Butkovskii O. Ya. // Dynamical Systems and Chaos: Proc. Intern. Conf., Tokyo, May 23–27, 1994. V. 2. Singapore: World Scientitfic, 1995. P. 378.
9. Anosov O. L., Butkovskii O. Ya., Kravtsov Yu. A., Surovyatkina E. D. // AIP Conf. Proc. V. 375. Chaotic, Fractal and Nonlinear Signal Processing. P. 71.
10. Mees A. I., Judd K. // Predictability of Complex Dynamical Systems. Berlin, Heidelberg: Springer Verlag, 1996. P. 123.
11. Anosov O. L., Butkovskii O. Ya., Kravtsov Yu. A. // Predictability of Complex Dynamical Systems. Berlin, Heidelberg: Springer Verlag, 1996. P. 105.
12. Predictability of Complex Dynamical Systems. / Ed. by Kravtsov Yu. A., Kadtke J. B. Berlin, Heidelberg: Springer Verlag, 1996.
13. Janson N. B., Anishchenko V. S. // AIP Conf. Proc. V. 375. Chaotic, Fractal and Nonlinear Signal Processing. P. 688.
14. Янсон Н. Б., Анищенко В. С. // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1995. Т. 3, № 3. С. 112.
15. Павлов А. Н., Янсон Н. Б. // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1997. Т. 5, № 1. С. 93.
16. Anosov O. L., Butkovskii O. Ya., Kadtke J. B., Kravtsov Yu. A., Protopopescu V. V. // Intern. Conf. on Applied Nonlinear Dynamics near the Millenium (ANDM'97), San Diego, USA, July 7–11, 1997.

17. Янсон Н. Б., Павлов А. Н., Баланов А. Г., Анищенко В. С. // Письма в ЖТФ. 1996. Т. 22, № 16. С. 57.
18. Anishchenko V. S., Smirnova N. B. // SPIE. 1993. V. 2 098. P. 137.
19. Бутковский О. Я., Кравцов Ю. А. Обратные задачи хаотической динамики и проблема предсказуемости хаоса: Труды семинара «Время, хаос и математические проблемы». Вып. 1. М.: Книжный дом «Университет», 1999. С. 165.
20. Анищенко В. С., Вадивасова Т. Е., Астахова В. В. Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. Саратов: Изд-во Саратовского университета, 1999. 368 с.
21. Аносов О. Л., Бутковский О. Я., Кравцов Ю. А. // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2000. Т. 8, № 1. С. 29.
22. Льюнг Л. Идентификация систем. Теория для пользователя: Пер. с англ. / Под ред. Я. З. Цыпкина. М: Наука, 1991. 432 с.
23. Ивахненко А. Г. Долгосрочное прогнозирование и управление сложными системами. Киев: Техника, 1995. 312 с.
24. Современные методы идентификации систем / Под ред. П. Эйкхоффа. М.: Мир, 1983.
25. Ruelle D., Takens F. // Commun. Math. Phys. 1971. V. 20. P. 167.
26. Takens F. // Lect. Notes in Math. 1980. V. 898. Dynamical Systems and Turbulence. P. 230.
27. Шустер Г. Детерминированный хаос. Введение: Пер с англ. М.: Мир, 1988. 240 с.
28. Кравцов Ю. А. // УФН. 1989. Т. 158, № 1. С. 93.
29. Кравцов Ю. А. // Пределы предсказуемости / Под ред. Ю. А. Кравцова. М.: Центроком, 1997. С. 170.
30. Anosov O. L., Butkovskii O. Ya., Kravtsov Yu. A. // Physics of Vibrations. 1999. V. 7. P. 61.
31. Smith L. A. // Physica D. 1992. V. 58. P. 50.
32. McSharry P. E., Smith L. A. // Phys. Rev. Lett. 1999. V. 83. P. 4 285.
33. Meyer R., Christensen N. // Phys. Rev. E. 2000. V. 62. P. 3 535.

[1] Владимирский госуниверситет, г. Владимир,
[2] Институт космических исследований РАН, г. Москва, Россия;
Институт космических исследований ПАН, Варшава, Польша

Поступила в редакцию 21 мая 2001 г.

ANALYSIS OF THE INACCURACY OF NONLINEAR-MAP PARAMETER RECONSTRUCTION FROM NOISY CHAOTIC TIME SERIES

O. Ya. Butkovsky, Yu. A. Kravtsov, and M. Yu. Logunov

We consider the problem on the accuracy of reconstruction of the nonlinear-map parameters from noisy chaotic time series and the problem on the quality of prediction based on the reconstructed low-dimensional models. It is shown that there exists an optimal length of sample, which minimizes the inaccuracy of the reconstructed map parameters and, thus, maximizes the time of prediction. Theoretical results are illustrated by an example of reconstruction of a nonlinear map in the form of a fourth-order polynomial on the basis of «exact», truncated and excess models.

УДК 621.372.82.3

ВЛИЯНИЕ ШУМА НА СМЕНУ РЕЖИМОВ В СИСТЕМЕ ВАН-ДЕР-ПОЛЯ

О. С. Сергеев

В данной работе исследуется аддитивное влияние белого шума на изменение положения бифуркационных кривых на плоскости параметров системы Ван-дер-Поля.

ВВЕДЕНИЕ

Исследование любой реальной системы включает в себя не только создание и анализ её идеальной математической модели, но и моделирование возмущений, которые могут влиять на динамику системы. Исследования показывают, что возмущение, внесённое в систему, может привести к изменению характеристик не только грубых состояний системы, но и негрубых состояний, в частности к смещению бифуркационных границ, разделяющих динамические режимы в пространстве параметров.

Данная работа посвящена исследованию влияния аддитивного воздействия белого шума на разбиение пространства параметров системы Ван-дер-Поля. Подход к решению задачи сходен с применённым в работах [1–3].

1. МОДЕЛЬ

В данном разделе рассматривается система Ван-дер-Поля в отсутствие возмущения. Автономная система Ван-дер-Поля описывается уравнением

$$\ddot{x} + x = \mu F(x, \dot{x}), \tag{1}$$

где $0 < \mu \ll 1$, $F(x, \dot{x})$ — полином по x и $\dot{x}$ конечной степени N.

Согласно [4] заменой

$$x = a\cos t + b\sin t, \quad \dot{x} = -a\sin t + b\cos t \tag{2}$$

систему (1) можно привести к виду

$$\dot{a} = -\mu F(a\cos t + b\sin t, -a\sin t + b\cos t)\ \sin t, \quad \dot{b} = \mu F(a\cos t + b\sin t, -a\sin t + b\cos t)\ \cos t.$$

Далее, используя тригонометрические преобразования можно прийти к системе уравнений

$$\dot{a} = \mu\left[f_a(a,b) + \sum_{n=1}^{N} C_{an}(a,b)\cos(nt) + S_{an}(a,b)\sin(nt)\right],$$
$$\dot{b} = \mu\left[f_b(a,b) + \sum_{n=1}^{N} C_{bn}(a,b)\cos(nt) + S_{bn}(a,b)\sin(nt)\right],$$

где $f_a(a,b)$, $f_b(a,b)$, $C_{an}(a,b)$, $C_{bn}(a,b)$, $S_{an}(a,b)$, $S_{bn}(a,b)$ — некоторые полиномы по a и b степени не выше N.

Укороченная система

$$\dot{a} = \mu f_a(a,b), \qquad \dot{b} = \mu f_b(a,b),$$

сводящаяся заменой

$$a = \rho\cos\Theta, \quad b = -\rho\sin\Theta \tag{3}$$

к виду

$$\dot\rho = \mu\Phi(\rho), \quad \rho\dot\Theta = \mu\Psi(\rho), \tag{4}$$

где

$$\Phi(\rho) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} F(\rho\cos\xi, -\rho\sin\xi)\,\sin\xi\,\mathrm{d}\xi, \quad \Psi(\rho) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} F(\rho\cos\xi, -\rho\sin\xi)\,\cos\xi\,\mathrm{d}\xi, \tag{5}$$

аппроксимирует точную систему (1).

2. СИСТЕМА ВАН-ДЕР-ПОЛЯ, ВОЗМУЩЁННАЯ БЕЛЫМ ШУМОМ

Далее будет рассматриваться аддитивно возмущённая стационарным гауссовским белым шумом $\xi(t)$ система Ван-дер-Поля:

$$\ddot x + x = \mu F(x, \dot x) + \sqrt{\mu}\,\sigma\xi(t), \tag{6}$$

причём

$$\langle\xi(t)\rangle = 0, \quad \langle\xi(t)\xi(t+\tau)\rangle = \delta(\tau).$$

Здесь угловые скобки означают усреднение по времени, $\delta(\tau)$ — дельта-функция Дирака.

Аналогично невозмущённому случаю, с помощью замен (2) и (3) можно перейти к точным уравнениям для переменных ρ и Θ, которые здесь являются марковскими случайными процессами. Согласно [5] марковские процессы $\bar\rho, \bar\Theta$ описываются системой

$$\dot{\bar\rho} = \mu\Phi(\bar\rho) + \sqrt{\mu}\,\frac{\sigma}{\sqrt2}\,\xi(t), \qquad \bar\rho\dot{\bar\Theta} = \mu\Psi(\bar\rho) + \sqrt{\mu}\,\frac{\sigma}{\sqrt2}\,\xi(t), \tag{7}$$

где функции Φ и Ψ вычисляются по формулам (5), слабо сходятся к марковским процессам ρ, Θ. В дальнейшем основное внимание будет уделено исследованию системы (7), которая представляет собой возмущённый аналог укороченной системы (4).

Нелинейность, моделирующая реальный невозмущённый генератор Ван-дер-Поля, реализованный, например, на электронной лампе, имеет вид

$$F(x, \dot x) = \dot x\,\frac{\mathrm{d}Q(x)}{\mathrm{d}x}\,,$$

где $Q(x)$ — полином степени N (безразмерная анодно-сеточная характеристика лампы), содержащий лишь нечётные степени. В этом случае из (5) можно получить, что $\Psi(\bar\rho) \equiv 0$, а полином $\Phi(\bar\rho)$ будет содержать, как и $Q(x)$, лишь нечётные степени аргумента. Как видно, $\bar\Theta$ не входит в первое уравнение системы (7), поэтому данное уравнение можно рассматривать отдельно как возмущённую одномерную систему.

В качестве примера рассмотрим модель генератора Ван-дер-Поля с мягким режимом возбуждения. В этом случае

$$F(x, \dot x) = \dot x\,(\alpha - x^2),$$

откуда

$$\Phi(\bar\rho) = -\frac{\bar\rho^3}{8} + \frac{\alpha\bar\rho}{2}\,,$$

Используя кумулянтный анализ [6] и ограничиваясь гауссовским приближением, можно записать уравнения для кумулянтов марковского процесса $\bar{\rho}$:

$$\dot{\bar{m}} = \frac{\mu}{8}\left(4\alpha\bar{m} - 3\bar{D}\bar{m} - \bar{m}^3\right), \qquad \dot{\bar{D}} = \frac{\mu}{4}\left(2\sigma^2 + 4\alpha\bar{D} - 3\bar{D}^2 - 3\bar{m}^2\right),$$

где $\bar{m}$ и $\bar{D}$ — среднее и дисперсия процесса соответственно. Заменой

$$\bar{m}^2 = \bar{A}$$

уравнения для кумулянтов можно свести к виду

$$\dot{\bar{A}} = \frac{\mu\bar{A}}{4}\left(4\alpha - 3\bar{D} - \bar{A}\right), \qquad \dot{\bar{D}} = \frac{\mu}{4}\left[2\sigma^2 + \bar{D}\left(4\alpha - 3\bar{D} - 3\bar{A}\right)\right]. \tag{8}$$

Если система (6) не возмущена ($\sigma = 0$), то устойчивый предельный цикл рождается при $\alpha = 0$, причём квадрат амплитуды цикла

$$A_0 = 4\alpha.$$

Этот же результат следует также из системы (8), динамика которой определяется движением по интегральной прямой $\bar{D} = 0$.

Если $\sigma \neq 0$, то смещение точки бифуркации можно отследить приближённо, положив в первом уравнении системы (8) дисперсию некоторой конечной постоянной величиной D_0 (не принимая во внимание второго уравнения). Данное предположение соответствует тому, что точка бифуркации Андронова—Хопфа сместится в положительном направлении оси α на величину $3D_0/4$. На рис. 1 приведены зависимости квадрата амплитуды цикла в невозмущённой системе (линия L) и в возмущённой системе с постоянной дисперсией (линия C_{D}).

Формальное исследование системы (8) приводит к выводу, что имеет место седло-узловая бифуркация при

$$\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\sigma,$$

которая соответствует рождению устойчивого и неустойчивого циклов в исходной системе (бифуркация двукратного предельного цикла). Квадрат стационарной средней амплитуды определяется формулой

$$\bar{A}_0 = 2\alpha \pm \sqrt{4\alpha^2 - 3\sigma^2},$$

где знак плюс соответствует устойчивому циклу.

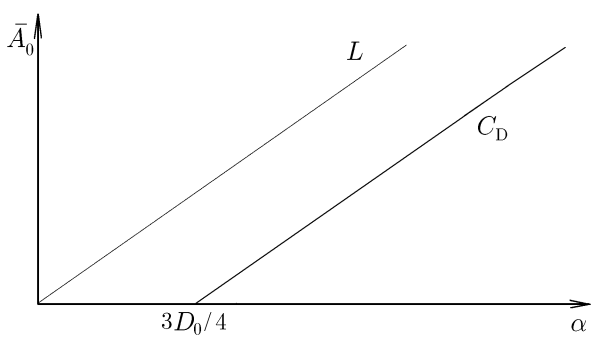

Рис. 1. Зависимость квадрата средней амплитуды цикла от параметра α: L — в невозмущённой системе, $\mathrm{C_D}$ — в возмущённой системе при постоянной дисперсии

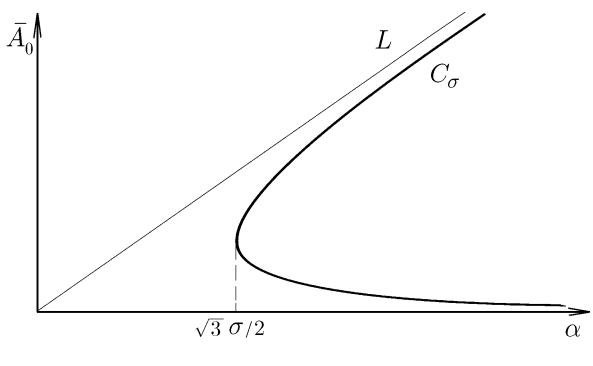

Рис. 2. Зависимость квадрата средней амплитуды цикла от параметра α: L — в невозмущённой системе, C_σ — в возмущённой системе

На рис. 2 приведены зависимости квадрата амплитуды цикла невозмущённой системы (линия L) и квадрата стационарной средней амплитуды цикла в возмущённой системе (кривая C_σ). Кривая C_σ имеет две ветви: устойчивую, стремящуюся при больших α к линии L, и неустойчивую, стремящуюся при больших α к прямой $\bar{A}_0 = 0$. Как видно, точка бифуркации рождения устойчивого предельного цикла смещается в положительном направлении оси α на величину $\sqrt{3}\sigma/2$. При этом возникает область параметров, внутри которой из-за шума невозможно различить предельный цикл и состояние равновесия.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе представлен один из способов исследования влияния белого шума на смену режимов в системе Ван-дер-Поля. Установлено, что в модели, описывающей генератор Ван-дер-Поля с мягким режимом возбуждения, аддитивное воздействие стационарного гауссовского белого шума смещает точку бифуркации рождения устойчивого предельного цикла в сторону существования данного цикла в невозмущённой системе, т. е. появляется область параметров, внутри которой из-за шума невозможно различить предельный цикл и состояние равновесия. Шумовое воздействие приводит к тому, что система не замечает появления предельного цикла в окрестности состояния равновесия, пока параметр, определяющий амплитуду цикла в невозмущённой системе, меньше некоторого критического.

Автор выражает благодарность В. Д. Шалфееву и А. Н. Малахову за ценные дискуссии, обсуждение результатов и помощь в написании работы.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99–02–17742, 00–15–96582).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бочков Г. Н., Цветов М. А., Шалфеев В. Д. // Динамика систем. Фазовая синхронизация / Под ред. Ю. И. Неймарка. Горький: Изд-во ГГУ, 1976. С. 68.
2. Сергеев О. С. // Вестник ННГУ. Сер. Радиофизика. 1998. № 1. С. 151.
3. Sergeev O. S., Shalfeev V. D., Forti G. L. Bistable dynamical system with external white noise and dynamical chaos influence: Preprint No. 5. Univ. of Milano, Dept. of Mathematics. 2000.
4. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М.: Наука, 1981.
5. Митропольский Ю. А. Метод усреднения в нелинейной механике. Киев: Наукова думка, 1971.
6. Малахов А. Н. Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований. М.: Сов. радио, 1978.

Нижегородский госуниверситет им. Н. И. Лобачевского,
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию
11 апреля 2001 г.

INFLUENCE OF NOISE ON MODE CHANGE IN A VAN DER POL SYSTEM

O. S. Sergeev

In this paper we study the additive influence of white noise on the position of bifurcation curves in the parameter plane of a Van der Pol system.

УДК 535.36:621.371

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ИМПУЛЬСОВ В НЕОДНОРОДНОЙ РАССЕИВАЮЩЕЙ ПОГЛОЩАЮЩЕЙ СРЕДЕ: ИНВАРИАНТНЫЕ ВРЕМЕННЫЕ СВОЙСТВА

А. А. Галуза, А. С. Мазманишвили

В работе представлены аналитические решения параболического уравнения Исимару для функции когерентности электромагнитного поля, описывающего временны́е свойства импульса на выходе неоднородной диссипативной рассеивающей среды. Найдено явное выражение для функции Грина задачи. Показано, что временна́я часть функции Грина имеет инвариантную лагерровскую форму. Приведены также численные расчёты формы исследуемых временны́х импульсов на выходе пролётного участка среды. Предложены временны́е масштабы, характеризующие форму лагерровских выходных импульсов, проанализировано влияние параметров среды на свойства результирующих импульсов.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе рассмотрены временны́е свойства огибающей монохроматических электромагнитных импульсов, регистрируемых после прохождения сквозь плоский слой неоднородной рассеивающей среды (принципиальная схема таких наблюдений приведена на рис. 1). При этом особое внимание обращено на такие свойства, которые можно назвать инвариантными, т. е. на свойства, характерные для всех рассматриваемых сред. Благодаря информации об инвариантных свойствах становится возможной дополнительная проверка соответствия опытных данных и их интерпретации, не связанная с конкретными параметрами среды распространения. Такие свойства передаточной функции, как положительная определённость, обращение в нуль в начале импульса и на его периферии, единственность максимума и наличие лишь двух точек перегиба, являются качественными признаками и легко идентифицируются. В работе в качестве исходного использован электромагнитный импульс в виде δ-функции относительно направления распространения. Таким образом, речь идёт, по существу, о функции Грина рассматриваемой задачи. Импульсы проходят сквозь слой толщины L, содержащий рассеивающие центры с произвольным профилем концентрации $\rho(z)$ вдоль оси распространения z, при этом само рассеяние считается малоугловым [1, 2].

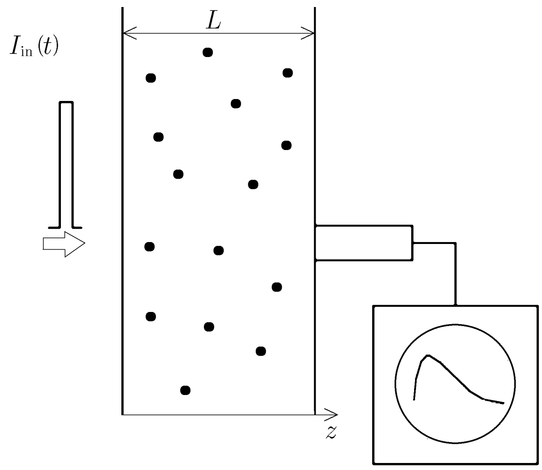

Рис. 1. Схема эксперимента. Точками указаны рассеивающие центры

Задачу о функции Грина среды, содержащей рассеивающие центры, можно отнести к классическим. Различные физические и вычислительные аспекты этой проблемы уже давно обсуждаются в научных изданиях (см., например, [1–12]). Подходы к её решению можно условно разбить на два основных типа: 1) построение и анализ аналитических моделей [1, 3–10]; 2) моделирование методом Монте-Карло [2, 11].

Подходы, основанные на методе Монте-Карло, имеют известные достоинства и недостатки, на которых здесь не будем останавливаться, поскольку в настоящей работе решение ищется с помощью подхода первого типа. Остановимся на нём подробнее.

Уравнения, которые описывают распространение импульсов, весьма сложны, поэтому получение достаточно полных аналитических решений поставленной задачи является вопросом будущего. Как правило, в публикациях приводятся точные (в рамках выбранной модели) выражения для нескольких первых статистических моментов огибающей импульса (центр тяжести, среднеквадратическая ширина и т. д.) [1, 7, 8] или некоторые выражения, справедливые в рамках выбранных приближений [1, 3, 10]. Имеющиеся же точные аналитические выражения представлены в основном в виде континуальных интегралов [4, 6] и/или разложений в бесконечные ряды [1, 3, 10] и мало пригодны для вычислений. Для решения исходных уравнений часто используются разнообразные численные методы [5]. В тех работах, где приведено аналитическое решение задачи в явном виде, оно, как правило, относится к упрощённым моделям. Так, в аналогичной постановке для случая однородной и/или непоглощающей среды рассматриваемая задача была исследована в работах [1, 13, 14].

В настоящей работе предпринята попытка учесть совместное влияние диссипации энергии и неоднородности среды на форму результирующего импульса. Для решения поставленной задачи потребовалось преодолеть две трудности, а именно вычислить возникающий континуальный интеграл в пространстве диффузионных траекторий и построить спектр соответствующего интегрального оператора. Это дало возможность получить явное выражение для функции Грина задачи и построить вычислительный алгоритм, на базе которого проведён ряд численных экспериментов.

Таким образом, цель работы состоит в изучении инвариантных временны́х свойств огибающей монохроматических электромагнитных импульсов, регистрируемых после прохождения сквозь плоский слой рассеивающей неоднородной среды, т. е. свойств, которые остаются неизменными при вариации параметров среды, в частности распределения концентрации рассеивающих центров. Особое внимание уделено продольным (временны́м) размерам результирующего импульса, определяющим его разрешающие свойства.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

В линейном приближении монохроматический импульс $I_{\mathrm{out}}(t)$ на выходе заданного пролётного участка рассеивающей среды связан с импульсом $I_{\mathrm{in}}(t)$, поступившим на вход участка (см. рис. 1), с помощью функции Грина $G(t)$:

$$I_{\mathrm{out}}(t) = \int G(t-t') I_{\mathrm{in}}(t')\,\mathrm{d}t'. \tag{1}$$

Проблема нахождения функции Грина эквивалентна задаче определения связанной с ней двухчастотной функции когерентности $\Gamma(\eta)$:

$$G(t) = \frac{1}{2\pi i} \int \Gamma(\eta) \exp(\eta t)\,\mathrm{d}\eta. \tag{2}$$

Рассмотрим временны́е свойства электромагнитного импульса, излучаемого в плоскости $z = 0$ и регистрируемого в плоскости $z = L$, и свойства связанной с ним двухчастотной функции когерентности. Такая задача для случая однородной рассеивающей среды была исследована в [1] в малоугловом приближении без учёта диссипации излучения, характеризуемой декрементом ν. Ниже описана попытка построить аналог этой модели Исимару [1], учитывающий как энергетические потери при распространении монохроматического электромагнитного импульса, так и неоднородность концентрации рассеивающих центров среды. При этом учёт потерь при распространении импульса привёл к необходимости использовать диссипативный процесс Орнштейна—Уленбека, в отличие от модели [1], основанной на процессе Винера.

Рассмотрим следующий аналог параболического уравнения Исимару для двухчастотной функции когерентности:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\nu}{2}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\mathbf{r} + a_\eta \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} + b(z)\mathbf{r}^2\right)\Gamma(z,\mathbf{r};\eta) = 0, \tag{3}$$

где $a_\eta = \eta/(2ck^2)$, $b(z) = \rho(z)\sigma_{\rm p}k^2/(4\alpha_{\rm p})$, k — волновое число электромагнитного излучения, c — скорость света, $\rho(z)$ — объёмная концентрация рассеивающих центров среды, $\sigma_{\rm p}$ — сечение однократного рассеяния, $\alpha_{\rm p}$ — угловой параметр рассеяния, приближённо равный отношению диаметра рассеивающего центра к длине волны электромагнитного излучения [1, 10], $\mathbf{r}$ — поперечная к направлению распространения координаты.

Второе слагаемое в уравнении (3) связано с затуханием излучения и отсутствует в исходном уравнении Исимару. Наличие этого слагаемого приводит к появлению множителя вида $\exp(-\nu z)$ в выражении для энергии электромагнитного импульса (закон Бугера). Последнее слагаемое произвольным (но физически реализуемым) образом зависит от продольной координаты z, отражая изменяющуюся вдоль оси z концентрацию $\rho(z)$ рассеивающих центров среды.

В качестве начального условия выберем плоскую монохроматическую электромагнитную волну, двухчастотная функция когерентности которой нормально распределена в плоскости $z = 0$ с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ_0^2:

$$\Gamma(0,\mathbf{r}_0;\eta) = \frac{1}{2\pi\sigma_0^2}\exp\left(-\frac{\mathbf{r}_0^2}{2\sigma_0^2}\right), \tag{4}$$

где $\mathbf{r}_0$ — поперечная координата в плоскости $z = 0$.

В рамках модели случайных траекторий результирующий импульс на выходе пролётного участка рассеивающей поглощающей среды можно представить как суперпозицию множества импульсов, вследствие рассеяния пришедших в место регистрации по разным траекториям. В этом случае распространение электромагнитных импульсов в неоднородной среде можно рассматривать как диффузионный процесс. Такой процесс является стационарным диссипативным стохастическим процессом Орнштейна—Уленбека и описывается уравнением Ланжевена

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathbf{r}(z) = \nu\mathbf{r}(z) + \mathbf{u}(z) \tag{5}$$

с декрементом ν и порождающим процессом $\mathbf{u}(z)$ типа белого шума [3, 10], у которого обе компоненты статистически независимы. Искомая функция $\Gamma(\eta) \equiv \Gamma(L;\eta)$ является математическим ожиданием относительно множества всех траекторий, начинающихся в точках $\mathbf{r}_0$ плоскости $z = 0$ с весом $\Gamma(0,\mathbf{r}_0;\eta)$ и заканчивающихся в точках $\mathbf{r}_L$ плоскости детектирования $z = L$. Функцию $\Gamma(\eta)$ можно выразить в терминах следующего континуального интеграла [15] по всем возможным указанным траекториям:

$$\Gamma(\eta) = \int \mathrm{d}^2\mathbf{r}_0\,\frac{1}{\pi\sigma_0^2}\exp\left(-\frac{\mathbf{r}_0^2}{2\sigma_0^2}\right)\int \mathrm{d}^2\mathbf{r}_L\left\langle \mathbf{r}_0\left|\exp\left(-\int_0^L b(z)\mathbf{r}^2(z)\,\mathrm{d}z\right)\right|\mathbf{r}_L\right\rangle. \tag{6}$$

Далее угловые скобки обозначают интегрирование в пространстве указанных траекторий $\{\mathbf{r}(z)\}$.

Интегралы типа (6) можно вычислить аналитически в конечном виде благодаря наличию в подынтегральном выражении сомножителя с гауссовской зависимостью от координаты $\mathbf{r}$ [15]. Здесь отметим, что вычислить пропагатор $\langle\mathbf{r}_0|\exp(\ldots)|\mathbf{r}_L\rangle$ в (6) аналитически оказалось невозможным. Это связано с тем, что возникающее при этом уравнение Фоккера—Планка относится к классу уравнений Хилла, поскольку оно имеет потенциал $U(\mathbf{r}, z) = b(z)\mathbf{r}^2(z)$, зависящий от продольной координаты z. Вместе с тем для безусловного среднего (6) удаётся построить конструктивное замкнутое выражение.

Приведём (6) к более удобному виду, а именно выразим его в терминах континуального интеграла Фурье во вспомогательном пространстве функций $\{\mathbf{q}(z)\}$:

$$\Gamma(\eta) = \frac{1}{C} \int \mathrm{D}^2\mathbf{q}(z) \exp\biggl(-\int_0^L |\mathbf{q}(z)|^2 \, \mathrm{d}z\biggr) \bigl\langle \exp(2iY) \bigr\rangle_{(0,L)}, \tag{7}$$

где C — нормировочная константа, угловые скобки $\langle \ldots \rangle_{(0,L)}$ обозначают операцию безусловного усреднения на интервале $(0, L)$ согласно (6),

$$Y = \int\limits_0^L \sqrt{b(z)}\, \mathbf{q}(z)\mathbf{r}(z) \, \mathrm{d}z, \tag{8}$$

символ $\mathrm{D}^2\mathbf{q}(z)$ обозначает «дифференциал» в пространстве $\{\mathbf{q}(z)\}$. Поскольку процесс $\mathbf{r}(z)$ является нормальным, случайная величина Y также нормальна, а благодаря статистической независимости компонент порождающего процесса $\mathbf{u}(z)$ имеем

$$\bigl\langle \exp(2iY) \bigr\rangle_{(0,L)} = \exp\biggl[-\int_0^L \mathrm{d}z \int_0^L \mathrm{d}z' \, \mathbf{q}(z) K_\eta(z, z') \mathbf{q}(z')\biggr] \tag{9}$$

с коррелятором

$$K_\eta(z, z') = \langle \mathbf{r}(z)\mathbf{r}(z') \rangle = (a_\eta/\nu) \sqrt{b(z)b(z')} \, \exp\bigl(-\nu\, |z - z'|\bigr) \, . \tag{10}$$

Объединяя (7) и (9), получим

$$\Gamma(\eta) = \frac{1}{C} \int \mathrm{D}^2\mathbf{q}(z) \exp\biggl[-\int_0^L |\mathbf{q}(z)|^2 \, \mathrm{d}z - \int_0^L \mathrm{d}z \int_0^L \mathrm{d}z' \, \mathbf{q}(z) K_\eta(z, z') \mathbf{q}(z')\biggr] . \tag{11}$$

Поскольку

$$C = \int \mathrm{D}^2\mathbf{q}(z) \exp\biggl[-\int_0^L |\mathbf{q}(z)|^2 \, \mathrm{d}z\biggr] , \tag{12}$$

то, вычисляя континуальный интеграл (11), приходим к выражению

$$\Gamma(\eta) = [\det(E + K_\eta)]^{-1}, \tag{13}$$

где E — единичный оператор, т. е. получаем искомый результат в терминах функционального определителя.

2. ФУНКЦИЯ ГРИНА ЗАДАЧИ

Для вычисления функционального определителя (13) используем метод Карунена—Лоэва [3, 10], в рамках которого перейдём в пространство собственных функций, связанных с коррелятором K_η. Рассмотрим теперь интегральное уравнение для некоторой собственной функции $\mathbf{f}(z)$ с параметром λ:

$$\mathbf{f}(z) = \lambda\, (K_\eta, \mathbf{f})(z) = \lambda\, (a_\eta/\nu) \int\limits_0^L \sqrt{b(z)b(z')} \, \exp\bigl(-\nu\, |z - z'|\bigr)\, \mathbf{f}(z') \, \mathrm{d}z'. \tag{14}$$

Если уравнение (14) имеет набор решений $\{\mathbf{f}_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ с отвечающим ему набором собственных чисел $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$, то такой набор решений является полным [10]. Переходя к полному набору функций $\{\mathbf{f}_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ в (11) как к новым переменным функционального интегрирования, можно записать (13) в виде

$$\Gamma(\eta) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + \eta/\lambda_n)^{-1}. \tag{15}$$

Таким образом, функция Грина $\Gamma(\eta)$ будет определена, если будет найден набор собственных чисел $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ или построено конструктивное правило их определения. Другими словами, необходимо построить дисперсионное уравнение вида $\Phi(\eta) = 0$, решениями (нулями) которого они будут являться. В терминах дисперсионной функции имеем

$$\Gamma(\eta) = \Phi(0)/\Phi(\eta). \tag{16}$$

С целью построения искомой дисперсионной функции $\Phi(\eta)$ выполним замену $\mathbf{p}_1(z) = \mathbf{f}(z)/\sqrt{b(z)}$ в интегральном уравнении (14), тогда получим уравнение

$$\mathbf{p}_1(z) = \lambda\,(a_\eta/\nu) \int\limits_0^L b(z) \exp\bigl(-\nu\,|z - z'|\bigr)\,\mathbf{p}_1(z')\,\mathrm{d}z'. \tag{17}$$

Это интегральное уравнение в результате двухкратного дифференцирования по z приводится к эквивалентной системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathbf{p}_1(z) - r(z)\mathbf{p}_2(z) = 0, \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathbf{p}_2(z) - r(z)\mathbf{p}_1(z) = 0 \end{cases} \tag{18}$$

со следующим структурным фактором:

$$r^2(z) = \nu^2 + 2\,(a_\eta/\nu)\,b(z) = \nu^2 + \frac{\eta\sigma_{\mathrm{p}}}{4c\nu\alpha_{\mathrm{p}}}\rho(z), \tag{19}$$

связанным с распределением центров рассеяния $\rho(z)$, и граничными условиями

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathbf{p}_1(z) - \nu\mathbf{p}_1(z)\right)_{z=0} = 0, \qquad \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathbf{p}_1(z) + \nu\mathbf{p}_1(z)\right)_{z=L} = 0. \tag{20}$$

Для построения искомого дисперсионного уравнения перейдём в конечномерное пространство размерности N, в котором заменим уравнения (18) их разностными аналогами. В этом пространстве построим дисперсионное уравнение, после чего перейдём к пределу $N \to \infty$. Такой подход часто используется при вычислении безусловных континуальных средних [15–17]. В конечномерном пространстве разобьём пролётный интервал $(0, L)$ на совокупность N одинаковых подынтервалов длиной $\Delta = L/N$, на каждом из которых заменим структурную функцию $r(z)$ кусочно-постоянным аналогом, таким, что на каждом n-м интервале $r(z_n) = \sqrt{\nu^2 + 2\,(a_\eta/\nu)\,b(z_n)} = \mathrm{const}$, где $z_n = n\Delta$, $n = 1, 2, \ldots, N$. Подобная процедура замены функции её кусочно-постоянным аналогом применяется, например, при построении численных алгоритмов нахождения решений дифференциальных уравнений традиционными методами Эйлера или Рунге—Кутты. Аналогично этим методам заменим систему уравнений (18) на совокупность последовательных систем такого же типа для каждого n-го участка, где $n = 1, 2, \ldots, N$.

Начальными условиями для каждого очередного участка будет служить решение на предыдущем интервале.

Записывая совокупность N согласованных решений, представим приближённое решение системы (18) в виде

$$\mathbf{p}_1(z_n) \approx \mathbf{G}_1 \operatorname{sh}\left(\Delta \sum_{m=1}^{z_n/\Delta} \sqrt{\nu^2 + 2\,(a_\eta/\nu)\, b(z_m)}\right) + \mathbf{G}_2 \operatorname{ch}\left(\Delta \sum_{m=1}^{z_n/\Delta} \sqrt{\nu^2 + 2\,(a_\eta/\nu) b(z_m)}\right) \qquad (21)$$

с некоторыми постоянными суммирования $\mathbf{G}_1$ и $\mathbf{G}_2$. Рассматривая N решений и переходя к пределу $N \to \infty$, запишем

$$\mathbf{p}_1(z) = \mathbf{C}_1 \exp\left(\int_0^z \sqrt{\nu^2 + 2\,(a_\eta/\nu)\, b(z')}\,\mathrm{d}z'\right) + \mathbf{C}_2 \exp\left(-\int_0^z \sqrt{\nu^2 + 2\,(a_\eta/\nu)\, b(z')}\,\mathrm{d}z'\right) \qquad (22)$$

с некоторыми постоянными интегрирования $\mathbf{C}_1$ и $\mathbf{C}_2$, которые найдём из граничных условий (20). В силу однородности этих условий при $z = 0; L$ и требования существования нетривиального решения системы (20) получим для дисперсионной функции следующее выражение:

$$\Phi(\eta) = (r_0 + \nu)\,(r_L + \nu) \exp\bigl(R_{(0,L)}\bigr) + (r_0 - \nu)\,(r_L - \nu) \exp\bigl(-R_{(0,L)}\bigr)\,, \qquad (23)$$

где

$$r_0 = \sqrt{\nu^2 + 2\eta\nu g(0)}\,, \qquad r_L = \sqrt{\nu^2 + 2\eta\nu g(L)}\,, \qquad R_{(0,L)} = \int\limits_0^L \sqrt{\nu^2 + 2\eta\nu g(z)}\,\mathrm{d}z. \qquad (24)$$

Здесь введена функция

$$g(z) = \frac{\sigma_\mathrm{p}}{8c\nu\alpha_\mathrm{p}}\rho(z), \qquad (25)$$

связанная с пространственным распределением центров рассеяния.

Для получения из дисперсионной функции (23) искомой функции Грина необходимо учесть нормировку $\Gamma(0) = \exp(-\nu L)$, связанную с потерями энергии на поглощение при распространении электромагнитного импульса (закон Бугера). Кроме того, функция $\Phi(\eta)$ содержит лишний нуль, возникающий, если $r(z) = 0$ на интервале $(0, L)$. После его исключения и перенормировки из (16) окончательно получим

$$\Gamma(\eta) = \frac{2\nu\,(r_0 + r_L) \exp\bigl(-R_{(0,L)}\bigr)}{(r_0 + \nu)\,(r_L + \nu) - (r_0 - \nu)\,(r_L - \nu) \exp\bigl(-2R_{(0,L)}\bigr)}\,. \qquad (26)$$

Выражения (1) и (26) дают общее решение поставленной задачи.

3. АНАЛИЗ СВОЙСТВ ФУНКЦИИ ГРИНА

Перейдём к рассмотрению свойств найденной функции Грина.

3.1. Диссипативная однородная среда

При постоянной концентрации рассеивающих центров среды ($\rho = \mathrm{const}$) имеем $b(z) = \mathrm{const}$, а значит, и $g(z) = g = \mathrm{const}$. Тогда из выражения (26) получим [14]

$$\Gamma(\eta) = \frac{4\nu r}{(r+\nu)^2 \exp(rL) - (r-\nu)^2 \exp(-rL)}\,, \qquad r = \sqrt{\nu^2 + 2\eta\nu g} \qquad (27)$$

— выражение, известное (с точностью до декрементного множителя $\exp(-\nu L)$), например, в теории связи и детектирования [17].

3.2. Недиссипативная однородная среда

В частном случае недиссипативной однородной среды ($\nu \to 0$; $\rho = \mathrm{const}$) из (27) можно прийти к известному результату, приведённому в [1]. Отметим, что для его получения нужно вместо стационарного процесса Орнштейна—Уленбека (5) использовать процесс Винера, при этом в (4) необходимо положить $\sigma_0 \to 0$.

3.3. Недиссипативная неоднородная среда

В случае недиссипативной неоднородной среды [14] аналогично находим

$$\Gamma(z,0;\eta) = \mathrm{sech}\left(\int\limits_0^z \sqrt{\eta\frac{\sigma_\mathrm{p}}{4c\alpha_\mathrm{p}}\rho(z')}\,\mathrm{d}z'\right)^{1/2}. \tag{28}$$

3.4. Общие свойства решения

Анализ результата (26) проведём, опираясь на изложенный в [15, 16] аппарат квадратичных интегральных функционалов, основанных на решениях стохастических дифференциальных уравнений. Из теории подобных функционалов следует, что

1) все полюса функции (26) простые (простота каждого из нулей знаменателя в (26)–(28) легко устанавливается);

2) функция $G(t)$ тождественно равна нулю при $t = 0$ (флуктуационная область);

3) функция $G(t)$ имеет один максимум и две точки перегиба (основная область);

4) функция $G(t)$ имеет экспоненциальную асимптотику при $t \to \infty$ (периферийная область).

Из перечисленных фактов следует наличие инвариантных временны́х свойств результирующих импульсов. Совокупность таких инвариантов в дальнейшем будем называть лагерровским свойством.

Количественно указанные закономерности можно также описать в терминах моментов функции Грина $G(t)$.

Нулевой момент отражает закон сохранения энергии:

$$\langle 1\rangle_L = \exp(-\nu L). \tag{29}$$

Центр импульса (первый момент)

$$\langle t\rangle_L = \left(\int_{L/c}^{\infty} G(t)\,\mathrm{d}t\right)^{-1}\int\limits_{L/c}^{\infty} tG(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^L g(z)\,\mathrm{d}z. \tag{30}$$

Первый и второй ($\langle t^2\rangle_L$) моменты отсчитываем от момента времени L/c и нормируем на функцию $G(t)$.

Продольный размер импульса $c\sigma_L$ характеризуется его среднеквадратичным отклонением (СКО). Используя (26) и (30), для среднеквадратичного отклонения длительности импульса во времени находим

$$\sigma_L^2 = \langle t^2\rangle_L - \langle t\rangle_L^2 = \frac{1}{\nu}\int\limits_0^L g^2(z)\,\mathrm{d}z - \frac{g(0)g(L)}{2\nu^2}\left[1-\exp(-2\nu L)\right]. \tag{31}$$

Если длительность исходного импульса равна $\Delta_{\rm in}$, то длительность результирующего импульса составит $\Delta_{\rm out} = \left(\Delta_{\rm in}^2 + \sigma_L^2\right)^{1/2}$. В целом же форма импульса будет характеризоваться инвариантным лагерровским свойством. На основании (1) и (26) для результирующего импульса $I_{\rm out}(t)$ в случае неоднородной рассеивающей диссипативной среды можно записать:

$$I_{\rm out}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int {\rm d}t' \int {\rm d}\eta\, \frac{2\nu\,(r_0 + r_L)\exp(\eta t - \eta t')I_{\rm in}(t')}{(r_0+\nu)\,(r_L+\nu)\exp\bigl(R_{(0,L)}\bigr) - (r_0-\nu)\,(r_L-\nu)\exp\bigl(-R_{(0,L)}\bigr)}\,. \tag{32}$$

3.5. Асимптотика функции Грина

Явный вид формы видеоимпульса $I_{\rm out}(t)$ следует из интегрального выражения (32). Оценим приближённо этот интеграл для случая, когда $I_{\rm in}(t) = \delta(t)$, т. е. найдём функцию Грина $G(t)$. Используя метод перевала, запишем

$$G(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \exp\bigl[t\eta - R_{(0,L)}\bigr]\,\xi(\eta)\,{\rm d}\eta, \tag{33}$$

где

$$\xi(\eta) = \frac{2\nu\,(r_0+r_L)}{(r_0+\nu)\,(r_L+\nu) - (r_0-\nu)\,(r_L-\nu)\exp(-2R_{(0,L)})}\,. \tag{34}$$

Основной вклад в интеграл (33) обусловлен экспоненциальным ядром $\exp[t\eta - R_{(0,L)}]$. Пусть для некоторого r_η выполняется соотношение $R_{(0,L)} = Lr_\eta$. Тогда, используя r_η в качестве новой переменной интегрирования и формируя в показателе экспоненты полный квадрат относительно r_η, приближённо получим

$$G(t) \approx \sqrt{\frac{\nu L\,\langle t\rangle}{2\pi t^3}}\,\exp\left[-\frac{\nu L}{2}\left(\frac{t}{\langle t\rangle} + \frac{\langle t\rangle}{t}\right)\right]\xi'(r_\eta), \tag{35}$$

где $\xi'(r_\eta)$ — значение функции $\xi(\eta)$ в новых переменных, $t \ge L/c$.

В рамках используемого приближённого интегрирования оценки для r_0 и r_L составляют $r_0(r_\eta) \approx \approx \nu$ и $r_L(r_\eta) \approx \nu$, что приводит к $\xi'(r_\eta) \approx 1$. С учётом этого находим окончательное выражение для искомого приближения функции Грина:

$$G(t) = \sqrt{\frac{\nu L\,\langle t\rangle}{2\pi t^3}}\,\exp\left[-\nu L\frac{t^2 + \langle t\rangle^2}{2t\,\langle t\rangle}\right], \tag{36}$$

где $t \ge L/c$, вид которого отвечает лагерровскому свойству.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Приведём полученные численно зависимости, иллюстрирующие аналитические результаты.

Для проверки найденных свойств видеоимпульсов были выполнены численные модельные эксперименты, в ходе которых были использованы два типа распределения концентрации рассеивателей $\rho(z)$, входящей в функцию $g(z)$: однородное распределение $\rho_1(z) = {\rm const}$, и гауссовское распределение $\rho_2(z)$. На рис. 2 и 3 приведены результаты расчёта $I_{\rm out}(t)$ согласно (1) и (32); параметры расчёта выбраны с целью качественной иллюстрации зависимостей, а все кривые отложены в относительных единицах.

Кривые на рис. 2 показывают равномерное уширение видеоимпульса с увеличением пролётной базы L (параметры расчёта: $\nu = 10^{-3}$ м$^{-1}$; $\sigma_{\rm p} = 3\cdot 10^{-10}$ м^2; $\alpha_{\rm p} = 3\cdot 10^{-2}$; $\rho_1 = 10^4$ м$^{-3}$).

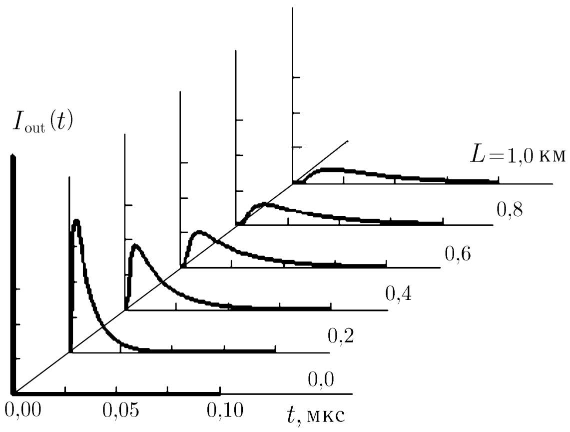

Рис. 2. Форма видеоимпульса $I_{\rm out}(t)$ на выходе пролётного участка длиной L (однородная концентрация рассеивателей)

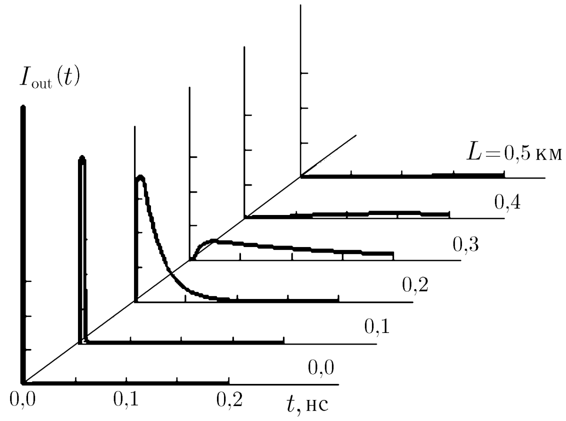

Рис. 3. Форма видеоимпульса $I_{\rm out}(t)$ на выходе пролётного участка длиной L (гауссовское распределение концентрации рассеивателей)

Зависимости, показанные на рис. 3, получены для гауссовской концентрации рассеивателей при $\nu = 10^{-6}$ м$^{-1}$; максимум профиля $\rho_2(z)$ выбран в точке с координатой $z = 0{,}375$ км, СКО профиля концентрации равно 0,05 км. Из рис. 3 видно, что форма видеоимпульса $I_{\rm out}(t)$ отслеживает выбранные значения параметров распределения концентрации $\rho_2(z)$. В частности, до прохождения рассеивающих центров импульс сохраняет δ-образную форму. Заметное уширение видеоимпульса начинается в начале области рассеивателей. Эффект уширения сопровождается уменьшением энергии импульса. Подобные численные эксперименты были проведены для широкого набора параметров, влияющих на форму видеоимпульса. Все полученные при этом профили результирующих импульсов обладают свойствами, характерными для кривых лагерровского типа.

Поскольку разрешающая способность импульсов определяется в основном их шириной, было выполнено исследование зависимости среднеквадратичного размера импульса на выходе среды от различных параметров. На рис. 4 изображены три профиля концентрации рассеивателей, использованных для анализа ширины импульсов: СКО гауссовских профилей $\sigma_{\rm g} = 60$; 250 м соответственно, однородная концентрация и средняя (для гауссовских распределений) на интервале длиной $L = 1\,000$ м составляет $\rho_{\rm av} = 10^7$ м$^{-3}$. Из зависимостей на рис. 5 видно, что для всех показанных на рис. 4 профилей $\rho(z)$ результирующие временные импульсы $I_{\rm out}(t)$ также имеют форму огибающей лагерровского типа (параметры расчёта: $\nu = 10^{-3}$ м$^{-1}$; $\alpha_{\rm p} = 3\cdot 10^{-2}$; $\sigma_{\rm p} = 3\cdot 10^{-10}$ м^2, длина пролётного участка $L = 1\,000$ м; эти же значения параметров по умолчанию использованы при расчётах зависимостей на рис. 6–8).

На рис. 6 и 7 показаны зависимости длительности результирующего импульса $I_{\rm out}(t)$ от параметров гауссовского (вдоль оси распространения) распределения концентрации рассеивателей, а именно от его СКО. Графические зависимости построены для различных значений средней концентрации $\rho_{\rm av}$ (рис. 6) и декремента затухания ν (рис. 7) для гауссовской концентрации рассеивателей с максимумом в точке $z = 500$ м и $\rho_{\rm av} = 10^{-3}$ м$^{-3}$. Из рис. 6, 7 видно, что с ростом СКО профиля концентрации рассеивателей длительность результирующих импульсов сначала быстро растёт, а затем начинает плавно спадать и асимптотически стремится к значению, отвечающему постоянной концентрации. Эта закономерность имеет место для любых значений $\rho_{\rm av}$ и ν, при вариации которых меняется лишь масштаб длительности импульса.

На рис. 8 проиллюстрировано изменение длительности импульса $I_{\rm out}(t)$ при прохождении пролётного участка среды в зависимости от расстояния до источника при разном декременте затухания ν

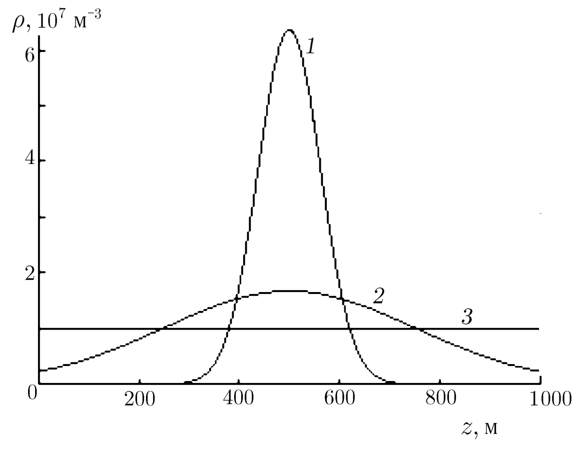

Рис. 4. Распределения концентрации $\rho(z)$ рассеивающих центров: кривые *1, 2* соответствуют гауссовским распределениям, кривая *3* — равномерное распределение

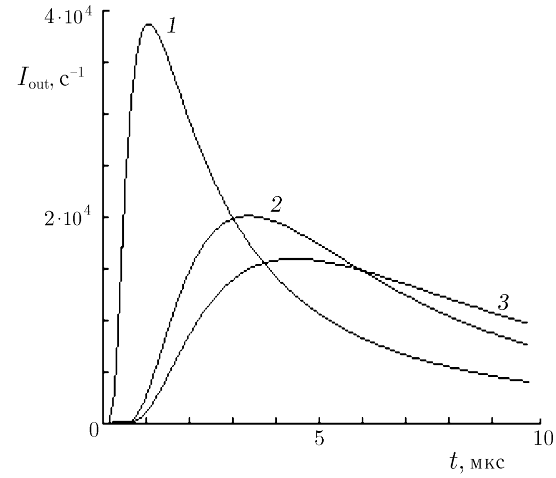

Рис. 5. Результирующие импульсы $I_{\rm out}(t)$ на выходе пролётного участка для концентраций рассеивателей *1–3*, приведённых на рис. 4, соответственно

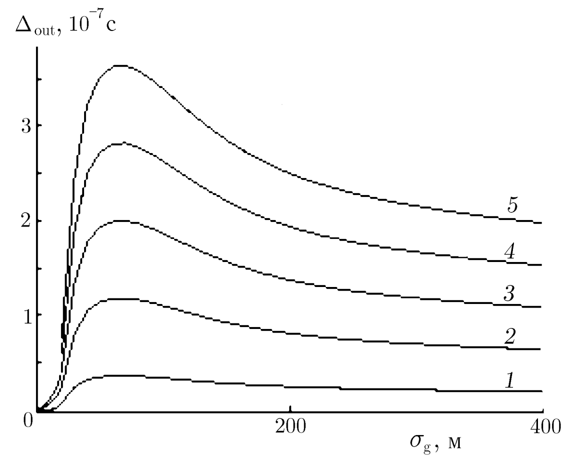

Рис. 6. Зависимости длительности $\Delta_{\rm out}$ результирующего импульса $I_{\rm out}(t)$ на выходе пролётного участка от СКО $\sigma_{\rm g}$ профиля концентрации рассеивателей при различной средней концентрации $\rho_{\rm av}$: кривая *1* соответствует $\rho_{\rm av} = 10^6$ м$^{-3}$, *2* — $\rho_{\rm av} = 2\cdot10^6$ м$^{-3}$, *3* — $\rho_{\rm av} = 4\cdot10^6$ м$^{-3}$, *4* — $\rho_{\rm av} = 6\cdot10^6$ м$^{-3}$, *5* — $\rho_{\rm av} = 8\cdot10^6$ м$^{-3}$

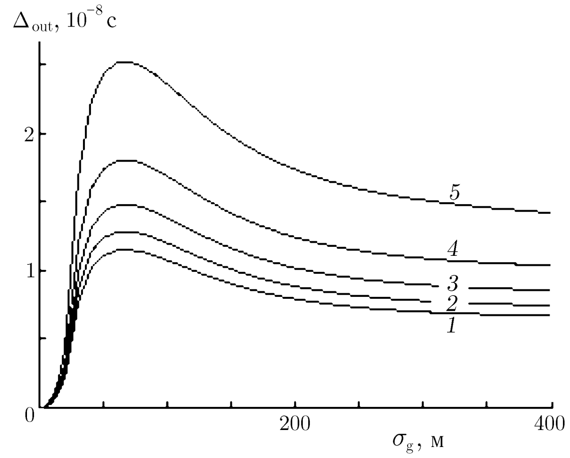

Рис. 7. Зависимости длительности $\Delta_{\rm out}$ результирующего импульса $I_{\rm out}(t)$ от СКО $\sigma_{\rm g}$ профиля концентрации рассеивателей при различном декременте затухания ν: кривая *1* соответствует $\nu = 10^{-2}$ м$^{-1}$, *2* — $\nu = 5\cdot10^{-3}$ м$^{-1}$, *3* — $\nu = 10^{-3}$ м$^{-1}$, *4* — $\nu = 5\cdot10^{-4}$ м$^{-1}$, *5* — $\nu = 10^{-4}$ м$^{-1}$

(максимум гауссовской концентрации рассеивателей расположен в точке $z = 500$ м, СКО профиля концентрации $\sigma_{\rm g} = 200$ м, $\rho_{\rm av} = 10^{-3}$ м$^{-3}$). Видно, что ширина импульса монотонно растёт с удалением от источника, причём наиболее быстрый рост наблюдается в области, отвечающей наибольшей концентрации рассеивателей. Качественный ход кривых сохраняется при любом декременте ν, однако для бóльших ν длительность результирующего импульса растёт медленнее, что связано с бóльшим затуханием импульсов, пришедших по более длинным траекториям.

Из приведённых зависимостей видно, что во всех рассмотренных случаях результирующий импульс $I_{\rm out}(t)$ обладает свойствами, характерными для лагерровских импульсов.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в работе показано, что подход, использованный в модели Исимару для описания временнóй эволюции огибающей монохроматического электромагнитного импульса в однородных недиссипативных рассеивающих средах, может быть развит для использования в неоднородных диссипативных средах. В отличие от модели Исимару, основанной на стохастическом процессе Винера, новый подход использует стохастический диссипативный процесс Орнштейна—Уленбека. Показано, что временнáя часть функции Грина задачи имеет инвариантную лагерровскую форму. Приведены численные расчёты формы временны́х импульсов на выходе пролётного участка среды. Предложены временны́е масштабы, характеризующие форму лагерровских выходных импульсов, проанализировано влияние параметров среды на свойства результирующих импульсов. Отметим, что хотя вполне возможны и другие методы исследования (в т. ч. и численные) эффектов, связанных с прохождением электромагнитного излучения через поглощающие неоднородные среды (см., например, [2, 5, 11, 12]), теоретический анализ позволяет выявить закономерности в наиболее общем виде.

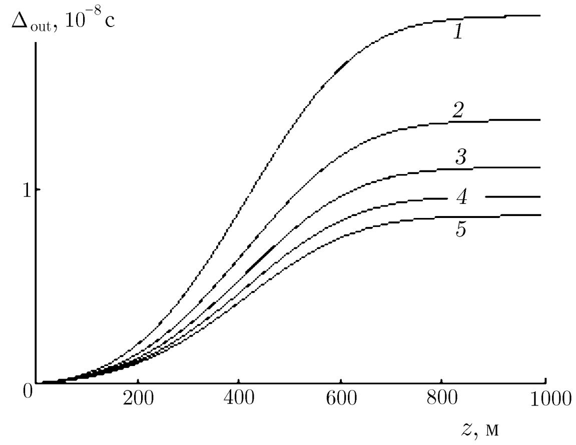

Рис. 8. Зависимости длительности $\Delta_{\rm out}$ результирующего импульса $I_{\rm out}(t)$ от пролётного расстояния до источника при различном декременте затухания ν (обозначения кривых те же, что на рис. 7)

С теоретико-вероятностных позиций можно сказать, что время пролёта электромагнитного импульса связано с длинами траекторий, вносящими вклад в его образование, которые, в свою очередь, являются результатом случайного блуждания на плоскости с рассеивающими центрами. В случае среды с достаточно большим декрементом затухания ν выражение (26) можно приближённо записать в виде

$$\Gamma(\eta) \approx \exp\left(- \int_0^L \sqrt{\nu^2 + \frac{\eta \sigma_{\rm p}}{4c\alpha_{\rm p}} \rho(z)}\, {\rm d}z \right). \tag{37}$$

Видно, что в (37) зависимость концентрации рассеивателей $\rho(z)$ от продольной переменной отражена в форме неприводимого выражения под радикалом. Функции Грина такого вида можно поставить в соответствие диффузионный закон распределения [18], который часто называют распределением Вальда [19].

С аналитической точки зрения отметим, что хотя найти явное представление для пропагатора уравнения Фоккера—Планка (3) не представляется возможным ввиду зависимости потенциала от продольной координаты, оказалось возможным определить результат безусловного усреднения, каковым является искомая функция Грина.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Исимару А. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах: В 2-х т. М.: Мир, 1981. Т. 1. 280 с, Т. 2. 317 с.
2. Jaffe J. S. // Appl. Opt. 1995. No. 34. P. 5 413.
3. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. М.: Наука, 1978. 290 с.
4. Dashen R. // J. Math. Phys. 1979. No. 20. P. 171.
5. Dockery G. D., Kuttler J. R. // IEEE Trans. Anten. Propag. 1996. V. 44, No. 12. P. 1 592.
6. Constantinou C. C., Ong C. C. // IEEE Trans. Anten. Propag. 1998. V. 46, No. 2. P. 211.
7. Lutomirski R. F., Ciervo A. P., Hala G. J. // Appl. Opt. 1995. No. 34. P. 7 125.
8. Arridge S. R., Schweiger M. // Appl. Opt. 1995. No. 34. P. 2 683.
9. Furutsu K. // J. Opt. Soc. Am. 1980. No. 70. P. 360.
10. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. М.: Сов. радио, 1969. 752 с.
11. Словецкий С. Д. // Радиотехника. 1994. No. 7. С. 73.
12. Шварцбург А. Б. // УФН. 2000. Т. 170, № 12. С. 1 297.
13. Галуза А. А., Мазманишвили А. С. // Радиофизика и радиоастрономия. 1997. Т. 2, № 2. С. 211.
14. Галуза А. А., Мазманишвили А. С. // Радиофизика и радиоастрономия. 1997. Т. 2, № 3. С. 353.
15. Мазманишвили А. С. Континуальное интегрирование как метод решения физических задач. К.: Наукова думка, 1987. 224 с.
16. Вирченко Ю. П., Мазманишвили А. С. Плотность распределения вероятностей энергетического функционала от траекторий стохастического процесса Орнштейна—Уленбека: Препринт ХФТИ АН УССР. М.: ЦНИИАтоминформ, 1987. 26 с.
17. Хелстром К. Квантовая теория проверки гипотез и оценивания. М.: Мир, 1979. 344 с.
18. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и её приложения. Т. 1. М.: Мир, 1984. 640 с.
19. Королюк В. С., Портенко Н. И., Скороход А. В., Турбин А. Ф. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. М.: Наука, 1985. 640 с.

Национальный технический университет «ХПИ», г. Харьков, Украина

Поступила в редакцию 17 мая 2001 г.

PROPAGATION OF ELECTROMAGNETIC PULSES IN AN INHOMOGENEOUS SCATTERING LOSSY MEDIUM. INVARIANT TEMPORAL CHARACTERISTICS

A. A. Galuza and A. S. Mazmanishvili

In this paper we present analytical solutions of the Ishimaru parabolic equation for the coherence function of electromagnetic field. This equation describes temporal characteristics of a pulse propagated through an inhomogeneous lossy scattering media. An explicit expressions for the Green function of the problem is found. It is shown that the temporal part of the Green function has an invariant Laguerre form. Numerical results describing the shapes of the studied pulses outgoing the pass interval of the medium are also presented. Time scales characterizing the Laguerre shapes of the output pulses are proposed. The influence of the medium parameters on time characteristics of the resulting pulses is analyzed.