

Содержание

<b>Михайлов С. Я.</b> Моделирование отклика анализатора спектров вертикального ЛЧМ-ионозонда и восстановление передаточной функции в области полупрозрачности <i>E</i> -слоя ионосферы .....	641
<b>Жидко Ю. М., Иванова Г. К.</b> Ветровые шумы в радиолокационном сигнале трёхсантиметровых радиоволн, отражённом от морской поверхности .....	653
<b>Вебер В. Л.</b> Наблюдение неоднородностей показателя рассеяния в стратифицированной среде методом отражательной конфокальной микроскопии .....	659
<b>Бичуцкая Т. И., Макаров Г. И.</b> Излучение точечного источника из анизотропного плазменного цилиндра .....	669
<b>Остинский О. А., Разиньков С. Н.</b> Исследование влияния рассеяния электромагнитных волн кольцевой решёткой несимметричных вибраторов с ёмкостными нагрузками на точность и разрешающую способность фазового радиопеленгатора .....	680
<b>Неганов В. А., Осипов О. В.</b> Собственные волны плоского двухслойного кирально-ферритового волновода .....	686
<b>Балякин А. А., Рыскин Н. М.</b> Хаотические колебания в нелинейной радиотехнической линии передачи .....	691
<b>Саичев А. И., Лапинова С. А.</b> Суперсингулярные функции и их применение в механике .....	700
<b>Захаров К. А., Мейланов Р. П.</b> О дискретизации сигнала с фрактальной структурой .....	709
<b>Вилков Е. А., Шавров В. Г., Шевяхов Н. С.</b> Сдвиговая поверхностная волна на движущейся блоховской стенке .....	712
<b>Вязовский М. В., Сыродоев Г. А.</b> Ток увлечения при внутризонном многофотонном поглощении электромагнитной волны в сверхрешётке .....	725

УДК 621.371; 550.388.2

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ОТКЛИКА АНАЛИЗАТОРА СПЕКТРОВ ВЕРТИКАЛЬНОГО ЛЧМ-ИОНОЗОНДА И ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ В ОБЛАСТИ ПОЛУПРОЗРАЧНОСТИ $E$ -СЛОЯ ИОНОСФЕРЫ

С. Я. Михайлов

Предложена краткая схема теоретического описания регистрируемых спектров при зондировании ионосферы ЛЧМ сигналом и обработке принимаемого отклика методом сжатия по частоте. Выполнено численное моделирование спектров вертикального ЛЧМ-зондирования в области прикритических частот  $E$ -слоя с использованием аналитического выражения для коэффициента отражения радиоволн от многослойной изотропной ионосферы в качестве передаточной функции канала. Предложен и опробован с применением быстрого преобразования Фурье метод восстановления передаточной функции канала по спектрам ЛЧМ-зондирования, зарегистрированным для ряда моментов времени.

### ВВЕДЕНИЕ

Интерес к детальному изучению особенностей отражения радиоволн в области полупрозрачности  $E$ -слоя возникает в связи с решением проблемы диагностики межслоевой долины. Как известно, регистрация частотных зависимостей действующих высот отражения  $E$ - и  $F$ -мод не позволяет однозначно решить эту проблему. Для её однозначного решения необходимо регистрировать полную характеристику канала связи. Такой характеристикой является передаточная функция канала. Уникальные возможности для измерения передаточной функции предоставляются при зондировании ионосферы ЛЧМ сигналом.

Определённое развитие теория ЛЧМ-зондирования получила в работах [1–3]. Подход, развиваемый авторами [1], объясняет качественную сторону работы ЛЧМ-ионозонда, содержит много количественных оценок, но не преследует цель строгого количественного описания формы регистрируемых спектров. Предлагаемые на этой основе методы измерения передаточной функции [4, 5] убедительно демонстрируют возможности ЛЧМ-ионозонда, но носят всё же оценочный характер, т. к. основываются на аппроксимации модуля и фазы передаточной функции отрезками ряда Тейлора.

В данной работе на основе развития результатов работы [6] предлагается краткая схема теоретического описания регистрируемых спектров при зондировании ионосферы ЛЧМ сигналом и обработке принимаемого отклика методом сжатия по частоте. Выполняется расчёт отклика спектроанализатора при вертикальном ЛЧМ-зондировании в области прикритических частот  $E$ -слоя с использованием аналитического выражения для коэффициента отражения радиоволн от многослойной изотропной ионосферы [7] в качестве передаточной функции канала связи. Предлагается и проверяется с помощью быстрого преобразования Фурье (БПФ) метод восстановления передаточной функции канала по спектрам ЛЧМ-зондирования, зарегистрированным для ряда центральных временных (частотных) отсчётов.

### 1. ПРЯМАЯ ЗАДАЧА ЛЧМ-ЗОНДИРОВАНИЯ

За исключением небольших отступлений, здесь принимается предложенная в [6] схема описания прохождения ЛЧМ сигнала по каналу связи и в приёмном устройстве. Отвлекаясь от краевых эффектов, связанных с включением и выключением передатчика, можно считать, что на входе канала связи

формируется непрерывный зондирующий сигнал  $u(t)$  с линейной модуляцией частоты:

$$u(t) = \cos \varphi(t), \quad \varphi(t) = \omega_n t + \beta t^2/2, \quad (1)$$

где  $t$  — время, отсчитываемое от момента включения передатчика,  $\omega_n$  — начальная циклическая частота,  $\beta$  — скорость нарастания циклической частоты.

Канал связи, включающий в себя приёмно-передающие антенно-фидерные тракты и волновод Земля—ионосфера, описывается импульсной характеристикой  $h(t)$ . Тогда сигнал на входе приёмного устройства согласно [8] представляется в виде

$$u_{\text{вх}}(t) = \int_0^{\infty} h(\tau') u(t - \tau') d\tau' = \int_0^{\infty} h(\tau') \cos \varphi(t - \tau') d\tau'. \quad (2)$$

При этом нижний предел интегрирования в (2) можно заменить и на  $-\infty$ , поскольку  $h(\tau') = 0$  при  $\tau' < 0$  в силу принципа причинности. Ниже будет использоваться представление (2) с нижним пределом, равным  $-\infty$ .

В приёмном устройстве при обработке отклика канала связи методом сжатия по частоте  $u_{\text{вх}}(t)$  перемножается с сигналом гетеродина

$$u_r(t) = \cos \varphi_r(t), \quad \varphi_r(t) = (\omega_{\text{пр}} + \omega_n) t + \beta t^2/2, \quad (3)$$

где  $\omega_{\text{пр}}$  — промежуточная циклическая частота. Высокочастотная часть получающегося в результате сигнала отсекается фильтром усилителя промежуточной частоты. Поэтому на промежуточной частоте усиливается сигнал разностной частоты

$$u_{\text{пр}}(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau') \cos[\varphi_r(t) - \varphi(t - \tau')] d\tau', \quad \varphi_r(t) - \varphi(t - \tau') = \omega_{\text{пр}} t + \omega_n \tau' + \beta \tau' t - \beta \tau'^2/2. \quad (4)$$

Представление (4) справедливо при фильтрации идеальным полосовым фильтром (искажения сигнала в приёмном устройстве здесь не рассматриваются). В противном случае необходимо использовать представление  $u_{\text{пр}}(t)$  с учётом конкретной импульсной характеристики фильтра [6].

Не ограничивая общности, коэффициент усиления усилителя промежуточной частоты можно считать равным единице, т. к. он может быть учтён на любом этапе обработки. Далее из сигнала  $u_{\text{пр}}(t)$  выделяются две квадратурные составляющие умножением  $u_{\text{пр}}(t)$  на  $\cos(\omega_{\text{пр}} t)$  в одном канале и на  $\sin(\omega_{\text{пр}} t)$  в другом с последующей низкочастотной фильтрацией результатов перемножения в каждом канале. Возможны и другие способы выделения квадратурных компонент. Для квадратурных составляющих следуют выражения

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau') \cos[\omega_n \tau' + \beta \tau' t - \beta \tau'^2/2] d\tau', \\ b(t) &= -\frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau') \sin[\omega_n \tau' + \beta \tau' t - \beta \tau'^2/2] d\tau'. \end{aligned} \quad (5)$$

Обычно при ЛЧМ-зондировании выделяется и обрабатывается одна из квадратурных компонент. Однако, как будет ясно из дальнейшего, для того, чтобы иметь возможность восстанавливать передаточную функцию канала связи, необходимо обрабатывать комплексную огибающую ЛЧМ-сигнала

$$q(t) = a(t) + ib(t) = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau') \exp[i(\beta \tau'^2/2 - \omega_n \tau' - \beta \tau' t)] d\tau'. \quad (6)$$

Ниже функции (5) и (6) будем называть реализациями.

Спектром, регистрируемым в момент времени  $t_k$ , является спектр отрезка реализации, вырезанного временным окном  $W(t - t_k)$ . Используя преобразование Фурье в виде

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad u(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) e^{i\omega t} dt,$$

для регистрируемого спектра, образуемого комплексной реализацией  $q(t)$  (6), можно записать выражение

$$S^+(t_k, \Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} W(t - t_k) q(t) e^{i\Omega t} dt. \quad (7)$$

Спектр  $S^+$  в основном сосредоточен в области положительных частот  $\Omega$ , спектр  $S^-$ , образуемый комплексно-сопряжённой реализацией  $q^*(t)$ , — в основном в области отрицательных частот. Для  $S^+$  и  $S^-$  нетрудно получить соотношение

$$S^{+*}(t_k, -\Omega) = S^-(t_k, \Omega), \quad (8)$$

вытекающее из (7) с учётом вещественности функции окна  $W$ . Спектры  $S^a$  и  $S^b$ , образуемые реализациями  $a(t)$  и  $b(t)$  соответственно, связаны с  $S^+$  и  $S^-$  очевидными соотношениями

$$\begin{aligned} S^a(t_k, \Omega) &= [S^+(t_k, \Omega) + S^-(t_k, \Omega)]/2, \\ S^b(t_k, \Omega) &= [S^+(t_k, \Omega) - S^-(t_k, \Omega)]/(2i). \end{aligned} \quad (9)$$

Соотношения (8) и (9) полезны при анализе свойств регистрируемых спектров и совершенствовании способов обработки принимаемых реализаций.

Ионограммой ЛЧМ-зондирования в данном случае является серия спектров (7), зарегистрированных для ряда моментов времени  $t_k$ . Ионogramмы принято изображать в зависимости от групповых задержек  $\tau_0 = \Omega/\beta$  (или действующих высот отражения  $h' = \tau_0 c/2$ , где  $c$  — скорость света) и текущих значений циклической частоты передатчика  $\omega_k = \omega_n + \beta t_k$  (или частоты  $f_k = \omega_k/(2\pi)$ ). Для представления  $S^+$  в переменных  $\omega_k$  и  $\tau_0$  подставим в (7)  $\Omega = \beta\tau_0$ ,  $t_k = (\omega_k - \omega_n)/\beta$  и перейдём к переменной интегрирования  $\omega' = -\beta(t - t_k)$ . В результате (7) перепишется в виде

$$S^+(\omega_k, \tau_0) = \frac{e^{i(\omega_k - \omega_n)\tau_0}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{W(-\omega'/\beta)}{\beta} q((\omega_k - \omega_n - \omega')/\beta) e^{-i\omega'\tau_0} d\omega'. \quad (10)$$

Далее (10) можно существенно упростить. Для этого представим функцию окна через её фурье-образ  $g(\omega)$ :  $W(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$ . Тогда

$$\frac{W(-\omega'/\beta)}{\beta} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\beta\tau) e^{-i\omega'\tau} d\tau, \quad \tau = \omega/\beta. \quad (11)$$

Воспользуемся явным выражением для комплексной реализации (6) в новых переменных:

$$q((\omega_k - \omega_n - \omega')/\beta) = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau') \exp[i\beta\tau'^2/2 + i(\omega' - \omega_k)\tau'] d\tau'. \quad (12)$$

Подставляя (11) и (12) в (10), получим выражение для  $S^+$  в виде тройного интеграла. Выполним в нём циклическую перестановку порядка интегрирования так, чтобы интеграл по  $\omega'$  стал внутренним. Тогда интегрирование по  $\omega'$  даст функцию Дирака  $\delta(\tau - \tau_0 - \tau')$ , после чего интегрирование по  $\tau'$  легко выполняется, и выражение для  $S^+$  приобретает вид

$$S^+(\omega_k, \tau_0) = e^{i(\omega_k - \omega_n)\tau_0} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau_0 - \tau) \frac{g(\beta\tau)}{4} \exp[i\beta(\tau_0 - \tau)^2/2 - i\omega_k(\tau_0 - \tau)] d\tau. \quad (13)$$

Таким образом, при выбранном способе обработки регистрируется отклик канала связи на зондирующий сигнал с огибающей спектра временного окна и ЛЧМ заполнением, зависящим от точки шкалы групповых задержек  $\tau_0$ . Выражение (13) удобно для моделирования отклика спектроанализатора, если известна импульсная характеристика канала связи. Однако чаще известна его передаточная функция. Поэтому выполним в (13) дополнительные преобразования.

Выразим импульсную характеристику через передаточную функцию канала связи  $H(\omega)$ :

$$h(\tau_0 - \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega) e^{-i\omega(\tau_0 - \tau)} d\omega. \quad (14)$$

После подстановки (14) в (13) поменяем в полученном двойном интеграле порядок интегрирования. При интегрировании по  $\omega$  перейдём к новой переменной интегрирования  $\omega' = \omega + \omega_k$  и воспользуемся свойством передаточной функции  $H^*(-\omega) = H(\omega)$ , вытекающим из вещественности импульсной характеристики. Тогда придём к следующему результату:

$$S^+(\omega_k, \tau_0) = \exp[i(\omega_k - \omega_n)\tau_0 + i\beta\tau_0^2/2] \int_{-\infty}^{+\infty} H^*(\omega_k - \omega') G(\omega' - \beta\tau_0) e^{-i\omega'\tau_0} d\omega',$$

$$G(\omega' - \beta\tau_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}(\beta\tau) \exp[i\beta\tau^2/2 + i(\omega' - \beta\tau_0)\tau] d\tau, \quad (15)$$

$$\tilde{g}(\beta\tau) = \pi g(\beta\tau)/2, \quad g(\beta\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} W(t) e^{i\beta\tau t} dt.$$

Из всех произвольных функций временного окна  $W'(t)$  целесообразнее применять нормированные:  $W(t) = AW'(t)$ , где константа  $A = 4 / \int_{-\infty}^{+\infty} W'(t) dt$  выбирается из условия  $\tilde{g}(0) = 1$ . Здесь четвёрка компенсирует энергетические потери сигнала, связанные с двукратным гетеродинированием, а интеграл компенсирует потери, связанные с формой окна. При этом  $\tilde{g}(\beta\tau) = g'(\beta\tau)/g'(0)$ , где  $g'$  — фурье-образ произвольной функции окна  $W'$ , и условие нормировки выполняется автоматически.

Соотношения (15) определяют краткую схему моделирования отклика спектроанализатора при заданной передаточной функции канала связи. По форме записи это есть отклик канала связи на сигнал со спектром  $G$ , образуемым бегущим по оси частот со скоростью  $\beta$  спектром комплексного сигнала  $\tilde{g}(\beta\tau) \exp[i\beta\tau^2/2]$ . Схема вычисления (15) отличается от предложенной в [6] тем, что здесь используется полный спектр  $G$  эффективного зондирующего сигнала, а в [6] — текущий спектр. Переход в (15) к текущим спектрам  $G(\omega' - \beta\tau_0, \tau_0)$  можно выполнить введением в качестве  $\tilde{g}$  функции

$$\tilde{g}(\beta\tau) = \begin{cases} \pi g(\beta\tau)/2, & \tau \leq \tau_0; \\ 0, & \tau > \tau_0. \end{cases}$$

Текущие спектры  $G(\omega' - \beta\tau_0, \tau_0)$  существенно отличаются от полного спектра, но результаты вычисления отклика спектроанализатора по обеим схемам тождественны, что является следствием равенства нулю импульсной характеристики канала связи при отрицательных значениях аргумента.

## 2. ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ

Теперь изменим задачу. Считая  $S^+(\omega_k, \tau_0)$  известной непрерывной функцией своих аргументов, найдём передаточную функцию канала связи. Для этого воспользуемся первым равенством из (15) и рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} \exp[-i(\omega_k - \omega_n)\tau_0 + i\beta\tau_0^2/2]S^+(\omega_k + \beta\tau_0, \tau_0) &= e^{i\beta\tau_0^2} \int_{-\infty}^{+\infty} H^*(\omega_k - \omega' + \beta\tau_0)G(\omega' - \beta\tau_0) e^{-i\omega'\tau_0} d\omega' = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} H^*(\omega_k - \omega'')G(\omega'')e^{-i\omega''\tau_0} d\omega''. \end{aligned} \quad (16)$$

Последнее равенство получается после перехода к новой переменной интегрирования  $\omega'' = \omega' - \beta\tau_0$ . Из (16) следует, что  $H^*(\omega_k - \omega'')G(\omega'')$  вычисляется прямым преобразованием Фурье от рассматриваемой функции. Поэтому восстановление передаточной функции следует выполнять на основе следующего выражения:

$$\begin{aligned} H^*(\omega_k - \omega) &= \frac{1}{2\pi G(\omega)} \int_{-\infty}^{+\infty} S^+(\omega_k + \beta\tau_0, \tau_0) \exp[i\beta\tau_0^2/2 + i(\omega + \omega_n - \omega_k)\tau_0] d\tau_0, \\ G(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}(\beta\tau) \exp[i\beta\tau^2/2 + i\omega\tau] d\tau. \end{aligned} \quad (17)$$

Восстановление возможно там, где модуль  $|G(\omega)|$  существенно отличен от нуля, т. е. в полосе частот  $\omega \in [-\Delta\omega_T, \Delta\omega_T]$ , зависящей от длительности временного окна. Однако для повышения точности полосы частот, в которой восстанавливается передаточная функция, целесообразнее сузить условием  $|G(\Delta\omega_T)| = p|G(0)|$ , где численный параметр  $p \in ]0; 1[$  выбирается с учётом шумовых свойств реальных спектров  $S^+$  и точности численных методов вычисления интегралов.

## 3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ОТКЛИКА СПЕКТРОАНАЛИЗАТОРА

Полученные выше формулы (15) применялись для моделирования ионограмм вертикального зондирования в области полупрозрачности  $E$ -слоя изотропной ионосферы. При этом исследовалось прохождение сигналом трассы Земля—ионосфера—Земля, поэтому передаточные функции антенно-фидерных трактов считались равными единице. На практике исключение влияния этих устройств достигается их калибровкой с последующей корректировкой результатов измерений. После принятия вышеуказанных предположений передаточная функция канала связи  $H(\omega) = V(\omega)$ , где  $V(\omega)$  — коэф-

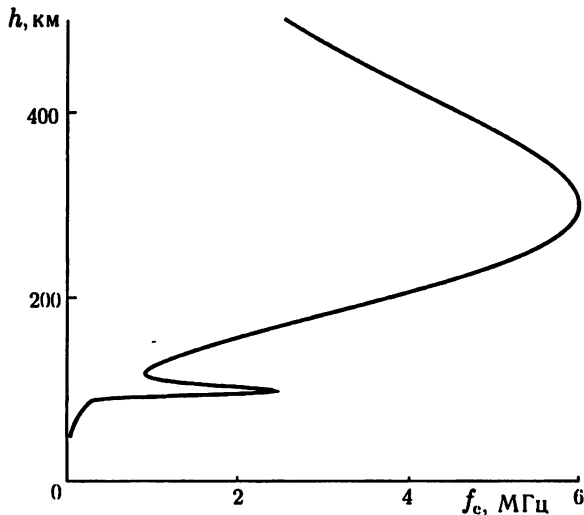


Рис. 1

оцифровки по шкале групповых задержек  $\Delta\tau_0 = \Delta\tau = 1/(N \Delta f)$  равен 12,2 мкс. Форма временного окна длительности  $T$  задавалась функцией  $W'(t) = \cos^2(\pi t/T)$ , где  $t \in [-T/2, T/2]$ . При такой форме окна фурье-образ  $g'(\omega)$  легко вычисляется аналитически, и для  $\tilde{g}$  получается выражение

$$\tilde{g}(\beta\tau) = \frac{\sin x}{x} \frac{\pi^2}{\pi^2 - x^2}, \quad x = \beta\tau T/2, \quad (18)$$

которое приводится здесь лишь для обоснования последующих оценок. Спектр окна в основном сосредоточен в полосе частот, ограниченной условием  $|x| \leq 2\pi$ . Это значит, что длительность эффективного зондирующего сигнала  $\tau_T = 8\pi/(\beta T)$ , или, в шкале действующих высот,  $h_T = c\tau_T/2 = 4\pi c/(\beta T)$ . Подставляя численные значения, получим  $h_T[\text{км}] = 6/T[\text{с}]$ . Моделирование выполнялось при  $T = 0,1; 0,01$  с, что соответствует длительности эффективного зондирующего сигнала  $h_T$ , равной 60 и 600 км.

На рис. 3 представлены огибающие спектров  $|S^+|$  в области прикритических частот  $E$ -слоя как функции частоты  $f_k - f_{0E}$  и действующей высоты отражения  $h' = c\tau_0/2$  при длительности временного

фициент отражения радиоволн. Входными данными при моделировании являлись массивы значений модуля и фазы коэффициента отражения  $V(\omega_k)$ , рассчитанного с шагом  $\Delta f = (\omega_{k+1} - \omega_k)/(2\pi) = 10$  Гц в области полупрозрачности  $E$ -слоя двухслойной поглощающей изотропной ионосферы [7]. Профиль плазменной частоты  $f_e$  выбранной модели ионосферы представлен на рис. 1. Модуль и половина фазы коэффициента отражения представлены на рис. 2а, б как функции частоты  $f_k - f_{0E}$  ( $f_{0E}$  — критическая частота  $E$ -слоя). Скорость нарастания циклической частоты  $\beta$  задавалась равной  $2\pi \cdot 10^5$  с<sup>-2</sup>. Это означает, что шаг оцифровки реализаций  $\Delta t = 2\pi \Delta f/\beta$  равен 100 мкс. Вычисление интегралов в (15) осуществлялось на основе БПФ [9, 10] при числе отсчётов  $N = 8192$ . Тогда шаг

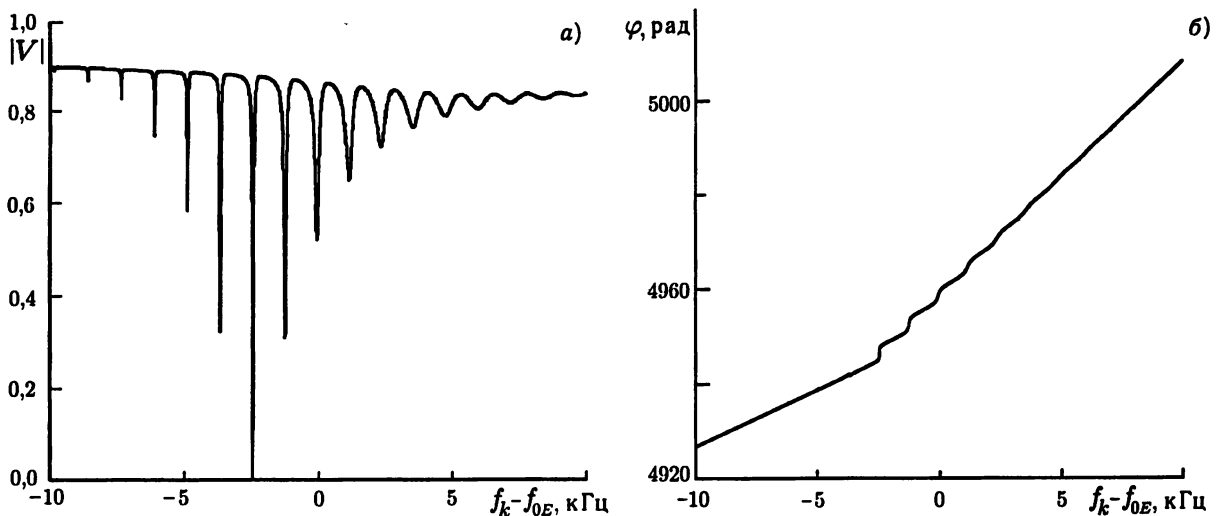


Рис. 2

окна  $T = 0,1$  с. Выбранные условия обработки ЛЧМ сигнала соответствуют зондированию импульсным сигналом длительностью 400 мкс [11]. Визуально результаты моделирования огибающих сравниваемых откликов отличаются слабо. Интерпретация представленного на рис. 3 результата полностью согласуется с предложенной в [11]. Первый по высоте импульс соответствует сигналу, отражённому от  $E$ -слоя. Последующие импульсы представляют собой сигналы, однократно прошедшие в прямом и обратном направлениях  $E$ -слой и  $j$ -кратно прошедшие  $EF$ -долину  $j = 1, 2, \dots$ . Такая интерпретация отклика спектроанализатора согласуется с представлением коэффициента отражения  $V(\omega)$  в виде ряда по кратности прохождения долины [7], в котором первое слагаемое является коэффициентом отражения от  $E$ -слоя, второе слагаемое — произведением квадрата коэффициента прохождения  $E$ -слоя на коэффициент отражения от  $F$ -слоя и т. д. Отдельный импульс отклика (см. рис. 3) можно смоделировать, задав передаточную функцию в виде соответствующего ему слагаемого ряда по кратности прохождения долины [7].

При импульсном зондировании в случае, когда длительность излучённого импульса превышает разность задержек отражённых сигналов, наблюдается интерференционная картина последних [11]. Для достижения этой цели необходимо менять условия эксперимента. Зондирование ЛЧМ сигналом в этом случае даёт важное преимущество. Для наблюдения интерференционной картины необходимо лишь поменять условия обработки принимаемых реализаций. Огибающие спектров  $|S^+|$  при длительности временного окна  $T = 0,01$  с представлены на рис. 4 как функции частоты  $f_k - f_{0E}$  и действующей

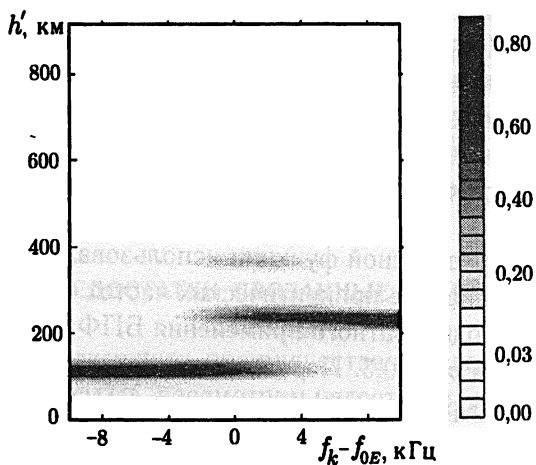
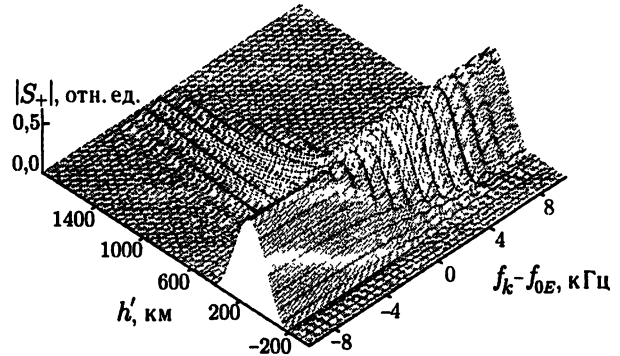
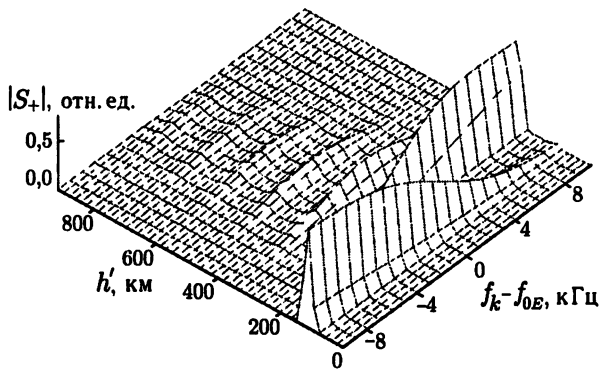


Рис. 3

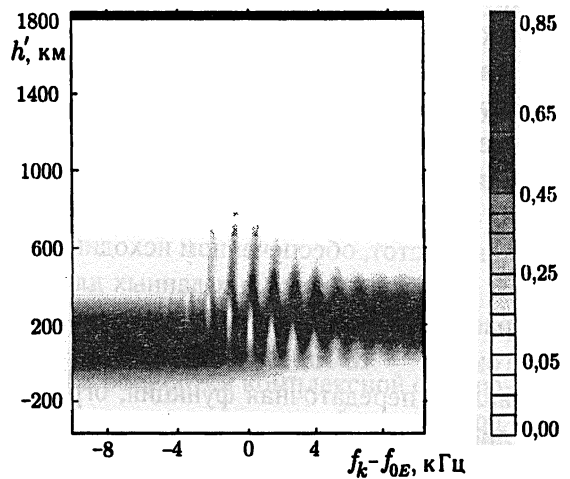


Рис. 4



щей высоты  $h'$ . Условия обработки ЛЧМ сигнала соответствуют зондированию импульсным сигналом длительностью 4 мс. В отличие от [11] ионограмма зондирования ЛЧМ сигналом имеет характерный наклон. При изображении ионограмм в переменных  $f_k$  и  $\tau_0$  тангенс угла наклона равен  $2\pi/\beta$ , а при изображении в переменных  $f_k$  и  $h'$  составляет  $\pi c/\beta$ . Причина заключается в том, что спектр эффективного зондирующего сигнала зависит от времени (см. (15)). С учётом этого факта интерпретация полученного результата (рис. 4) согласуется с [11]. На резонансных частотах полный пространственный набег фазы, приобретаемый сигналом в долине, кратен  $2\pi$  [7]. В результате сигналы с различной кратностью  $j > 0$  прохождения  $EF$ -долины складываются в фазе и формируют характерное затягивание отклика. На частотах, максимально удалённых от резонансных, полный пространственный набег фазы, приобретаемый сигналом в долине за однократное прохождение, равен  $n\pi$ , где  $n$  — нечётное число [7]. Поэтому сигналы с различной кратностью  $j > 0$  прохождения долины гасят друг друга, формируя существенно ослабленный сигнал, синфазно складывающийся с сигналом, отражённым от  $E$ -слоя ( $j = 0$ ). В результате отклик уширяется на действующую высоту долины (на величину задержки в долине).

#### 4. АЛГОРИТМ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ

Вычисляемые спектры обеспечивают полный аналог информации, регистрируемой при ЛЧМ-зондировании, и далее используются в качестве входных данных для восстановления передаточной функции канала связи. Спектры получаются заданными на сетке  $\omega_k = \omega_n + 2\pi \Delta f(k-1)$ , где  $k = 1, 2, \dots, k_{\max}$ , и  $\tau_{0l} = \Delta\tau_0(l-1)$ , где  $l = -N/2+1, -N/2+2, \dots, N/2$ . При восстановлении же передаточной функции с применением БПФ в соответствии с (17) возникает необходимость оперировать спектрами  $S^+(\omega_k + \beta\tau_0, \tau_0)$  на сетке  $\omega_k + \beta\tau_{0l}$ ,  $l = -N/2+1, -N/2+2, \dots, N/2$ . Другими словами, прямые  $\omega = \omega_k + \beta\tau_0$ , вдоль которых требуется задание спектров, не проходят через точки сетки опорных значений. В этих условиях приходится пользоваться методами аппроксимации исходных данных.

Шаг частотной сетки исходных данных  $\Delta\omega = 2\pi \Delta f$  определяется шагом оцифровки реализаций  $\Delta t$  ( $\Delta\omega = \beta \Delta t$ ). Шаг  $\Delta t$  в  $m$  раз больше  $\Delta\tau_0$  ( $m = \Delta t/\Delta\tau_0 = 2\pi(\Delta f)^2 N/\beta = 8,192$ ). При восстановлении передаточной функции в окрестности  $\omega_k$ , необходимо определить  $S^+(\omega_k + \beta\tau_0, \tau_0)$  в диапазоне  $\tau_0 \in [-N\Delta\tau_0/2, (N/2-1)\Delta\tau_0]$ . Для этого используются спектры  $S^+(\omega_i, \tau_0)$  в диапазоне опорных частот  $\omega_i = \omega_k + i\Delta\omega$ , где  $i = i_{\min}, \dots, i_{\max}$ ;  $i_{\min} = -\text{int}[N/(2m)]$ ;  $i_{\max} = \text{int}[(N/2-1)/m]$ , и при каждой частоте  $\omega_i$  выбираются опорные значения  $S^+(\omega_i, \tau_{0l})$  в точках  $\tau_{0l}$ , где  $l = l_0-3, \dots, l_0+3$ ,  $l_0 = \text{int}[mi]$ , для аппроксимации  $B$ -сплайнами [12]. По аппроксимации вычисляются значения спектров  $S^+(\omega_i, \tau_{0i})$  в точках  $\tau_{0i} = mi\Delta\tau_0 = i\Delta t$ , которые служат опорными значениями для аппроксимации спектров  $S^+(\omega_k + \beta\tau_0, \tau_0)$  [12]. После этого функция  $S^+(\omega_k + \beta\tau_0, \tau_0)$  рассчитывается в точках  $\tau_{0l}$ , и восстановление передаточной функции выполняется на основе БПФ в соответствии с (17). Передаточная функция при этом восстанавливается на сетке частот, фиксируемой моментами времени оцифровки реализаций  $t_k$ . Многократное применение вышеизложенной процедуры для  $\omega_k = \omega_{k_i}$ , где  $k_i = i \text{int}[2\Delta\omega_T/\Delta\omega] + |i_{\min}|$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ , позволяет восстановить передаточную функцию в диапазоне частот, обеспеченном исходными данными.

В качестве входных данных для восстановления передаточной функции использовались спектры, рассчитанные при длительности окна  $T = 0,03$  с в диапазоне критических частот  $E$ -слоя с шагом  $\Delta f = 10$  Гц. Полоса частот, в которой с помощью однократного применения БПФ восстанавливалась передаточная функция, ограничивалась уровнем  $p = 0,3$ . Передаточная функция восстанавливалась в диапазоне частот, получающемся после четырёхкратного применения БПФ. Вычисления проводились на разрядной сетке в 16 десятичных знаков. Результаты сравнения исходной (пунктирные кривые) и восстановленной (сплошные кривые) передаточных функций представлены на рис. 5. С графической точностью сплошные и пунктирные кривые совпадают. На рис. 5а показаны модули

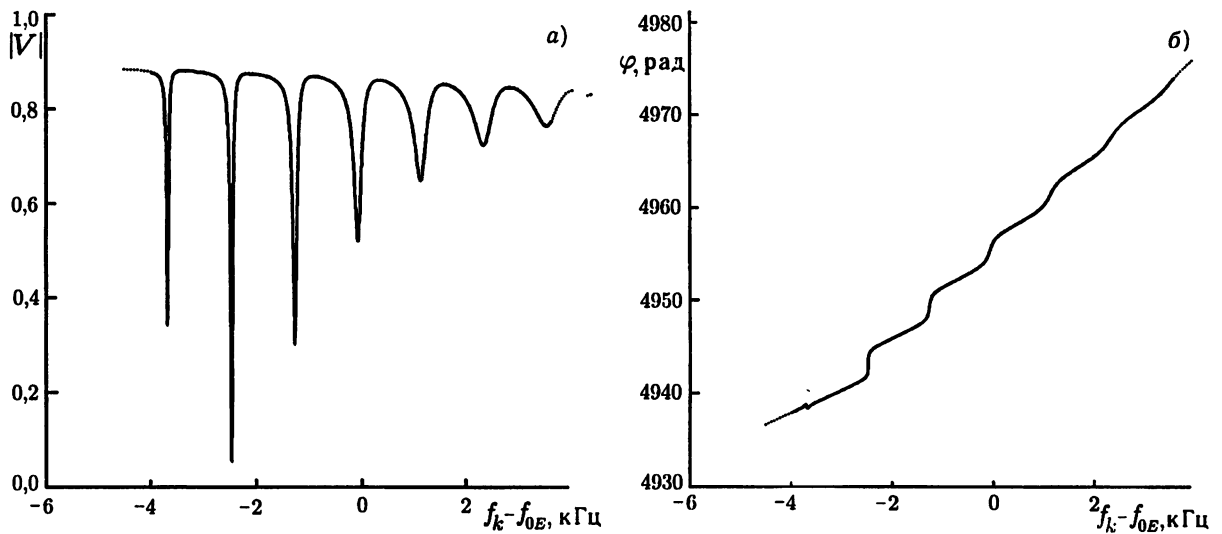


Рис. 5

передаточных функций, а на рис. 5б — половины их фаз. Фаза передаточной функции восстанавливается с точностью до константы, кратной  $2\pi$ . При сравнении фаз эта константа вычислялась как разность между исходной и восстановленной фазами в первой точке сетки опорных частот. После прибавления этой константы к восстановленной фазе отличие последней от фазы исходной передаточной функции не превышало  $10^{-4}$ , что свидетельствует о надёжном восстановлении производных фазы по частоте. Ошибки восстановления модуля передаточной функции не превышали  $2 \cdot 10^{-3}$ , т. е. составляли около 0,1%. Разность между модулями исходной  $|V_{и}|$  и восстановленной  $|V_{в}|$  передаточных функций представлена на рис. 6. Максимальные ошибки наблюдаются на концах интервала частот, ограниченного однократным применением БПФ. Причина заключается в том, что БПФ, вообще говоря, не является точным численным методом решения обсуждаемых здесь задач, т. к. не существует функций временного окна, финитных во времени и обладающих финитным спектром. Несмотря на это точность восстановления передаточной функции, достигнутая здесь, вполне удовлетворительна для того, чтобы рекомендовать алгоритм к практическому применению.

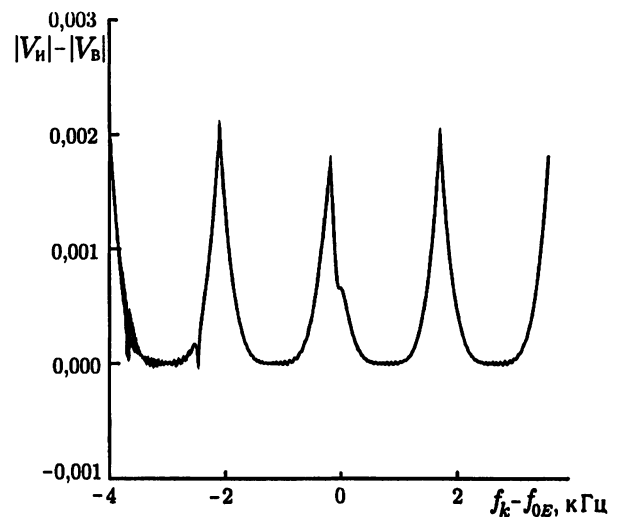


Рис. 6

## 5. НЕДОСТАТКИ, СВЯЗАННЫЕ С ОБРАБОТКОЙ ОДНОЙ КВАДРАТУРНОЙ КОМПОНЕНТЫ

Чтобы подчеркнуть преимущества предложенного выше способа обработки комплексной огибающей ЛЧМ сигнала, рассмотрим недостатки, возникающие при регистрации спектров, образуемых одной квадратурной составляющей. Первый недостаток возникает при малой длительности временного окна, когда спектры  $S^+$  и  $S^-$  перекрываются, и регистрируемый спектр  $S^a$  (или  $S^b$ ) (9) является результатом их интерференции. В этом случае невозможно выделить из спектра  $S^a$  (или  $S^b$ ) спектр  $S^+$

(или  $S^-$ ) и, следовательно, восстановить передаточную функцию канала связи. Вторым недостатком возникает в связи с использованием задержки включения гетеродина на время  $t_0$ , применяемой обычно при наклонном зондировании ионосферы. Фаза сигнала гетеродина (3) в этом случае равна

$$\varphi_r(t - t_0) = \Psi_0 + (\omega_{np} + \omega_n - \beta t_0)t + \beta t^2/2, \quad \Psi_0 = -(\omega_{np} + \omega_n)t_0 + \beta t_0^2/2.$$

Фаза сигнала, усиливаемого на промежуточной частоте (4), определяется выражением

$$\varphi_r(t - t_0) - \varphi(t - \tau') = \omega_{np}t + \omega_n\tau' + \beta(\tau' - t_0)t - \beta\tau'^2/2 + \Psi_0. \quad (19)$$

Непосредственным сопоставлением (19), (4) и (6) нетрудно установить, что в этом случае комплексная огибающая ЛЧМ сигнала  $\tilde{q}(t)$  связана с (6) соотношением

$$\tilde{q}(t) = e^{-i\Psi_0} e^{i\beta t_0 t} q(t).$$

Тогда для спектра  $\tilde{S}^+$ , образуемого комплексной огибающей  $\tilde{q}$ , следует выражение

$$\tilde{S}^+(\omega_k, \tau_0) = e^{-i\Psi_0} S^+(\omega_k, \tau_0 + t_0). \quad (20)$$

Спектр  $\tilde{S}^-$ , образуемый комплексно-сопряжённой огибающей  $\tilde{q}^*$ , связан с  $\tilde{S}^+$  равенством, аналогичным (8):

$$\tilde{S}^-(\omega_k, \tau_0) = e^{i\Psi_0} S^{+*}(\omega_k, -\tau_0 + t_0) = e^{i\Psi_0} S^-(\omega_k, \tau_0 - t_0). \quad (21)$$

Для спектров  $S^{\tilde{a}}$  и  $S^{\tilde{b}}$ , образуемых квадратурными компонентами  $\tilde{a}$  и  $\tilde{b}$ , справедливы равенства, аналогичные (9). Поэтому, если регистрируется спектр  $S^{\tilde{a}}$ , то с учётом (20), (21) он определяется выражением

$$2S^{\tilde{a}}(\omega_k, \tau_0) = e^{-i\Psi_0} S^+(\omega_k, \tau_0 + t_0) + e^{i\Psi_0} S^-(\omega_k, \tau_0 - t_0). \quad (22)$$

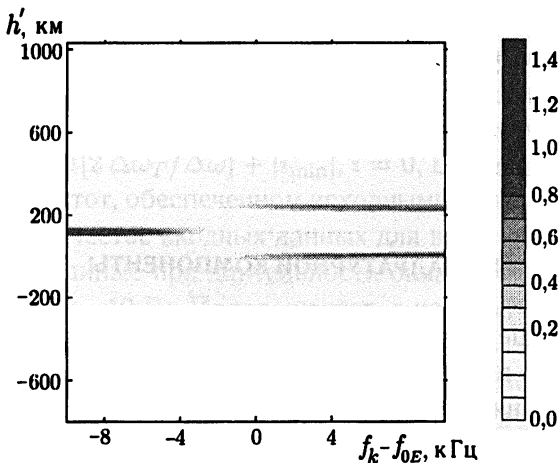
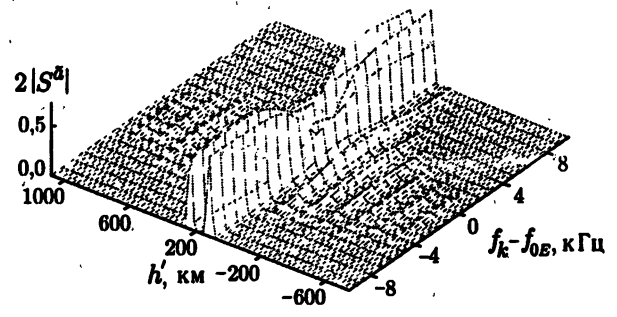
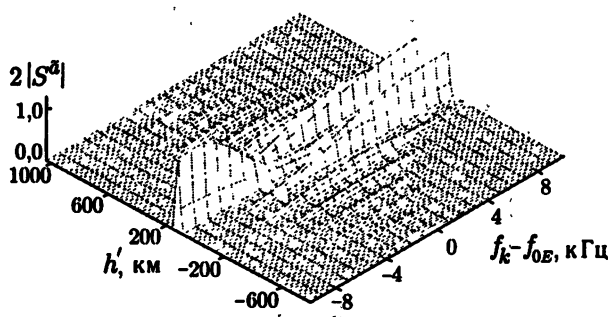


Рис. 7

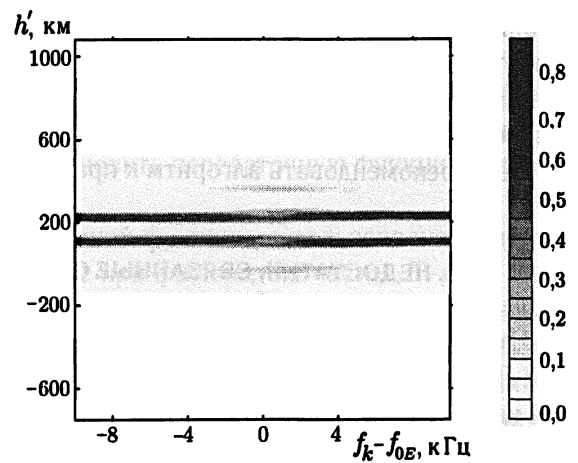


Рис. 8

Непосредственно из (22) следует, что при любой длительности окна спектры  $S^+$  и  $S^-$  начинают существенно перекрываться, если задержка включения гетеродина превышает групповую задержку первой моды отклика. В этом случае невозможно выделить  $S^+$  из  $S^{\bar{a}}$ .

На рис. 7 и 8 представлены огибающие откликов  $2|S^{\bar{a}}|$  (22) при длительности временного окна  $T = 0,1$  с в области полупрозрачности  $E$ -слоя в случаях позднего включения гетеродина (соответственно 120 и 170 км по шкале действующих высот  $h' = (\tau_0 + t_0) c/2$ ). В представленных случаях невозможны как восстановление передаточной функции канала связи, так и правильная интерпретация самих ионограмм. Указанные недостатки полностью устраняются при обработке комплексных огибающих ЛЧМ сигнала, т. е. при регистрации спектров  $S^+$  даже с использованием задержки включения гетеродина.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные здесь результаты демонстрируют лишь малую часть информационных возможностей метода зондирования ЛЧМ сигналом. Однако на их основе уже можно сделать полезные выводы. Обработка записей комплексной огибающей ЛЧМ сигнала с варьированием длительности временного окна позволяет менять разрешающую способность ионозонда по задержке и по частоте во взаимно обратных направлениях, не меняя физических условий эксперимента. Применение длительностей окна  $T \approx 0,01$  с, соответствующих высокой разрешающей способности по частоте и низкой по задержке, позволяет регистрировать интерференционную картину отражённых сигналов. По отклику спектроанализатора в этом случае можно восстановить полную передаточную функцию канала связи. Применение длительностей окна  $T \approx 0,1$  с и более, соответствующих высокой разрешающей способности по задержке и низкой по частоте, позволяет выполнять разложение полного отклика на моды различной кратности прохождения  $EF$ -долины. По отдельным модам отклика спектроанализатора можно восстановить передаточные функции подканалов связи, которые связаны с полной передаточной функцией разложением коэффициента отражения радиоволн в ряд по кратности прохождения долины [7]. Аналитические выражения для коэффициента отражения и отдельных элементов ряда [7] образуют систему уравнений с неизвестными профилями плазменной частоты, частоты соударений электронов и невозстановленными константами фаз передаточных функций. Эта система уравнений вполне может обеспечить однозначное решение задачи диагностики межслоевой долины при её заданной форме, что является предметом дальнейших исследований.

Автор выражает искреннюю признательность В. В. Хахинову за предоставленные отдельные номера цитируемой литературы и полезные обсуждения результатов работы [6], а также В. Е. Носову и С. М. Матюшонку за уточнения конкретных технических характеристик ЛЧМ-ионозонда.

Работа выполнена при поддержке Совета по государственной поддержке ведущих научных школ (грант № 00–15–98509).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Филипп Н. Д., Блаунштайн Н. Ш., Ерухимов Л. Д. и др. Современные методы исследования динамических процессов в ионосфере. Кишинёв: Штиинца, 1991. 288 с.
2. Барабашов Б. Г., Вертоградов Г. Г. // Изв. вузов. Северокавказский регион. Естественные науки. 1994. № 3. С. 39.
3. Барабашов Б. Г., Вертоградов Г. Г. // Изв. вузов. Северокавказский регион. Естественные науки. 1995, № 4. С. 25.

4. Иванов В. А., Колчев А. А., Шумаев В. В. // Проблемы распространения и дифракции электромагнитных волн. М.: МФТИ, 1995. С. 122.
5. Иванов В. А., Колчев А. А., Шумаев В. В. // Проблемы распространения и дифракции электромагнитных волн. М.: МФТИ, 1995. С. 103.
6. Ильин Н. В., Куркин В. И., Носов В. Е., Орлов И. И., Пономарчук С. Н., Хахинов В. В. // Исследования по геомагнетизму, аэронауке и физике Солнца. Новосибирск: Наука, 1995. Вып. 103. С. 149.
7. Михайлов С. Я. // Исследования по геомагнетизму, аэронауке и физике Солнца. Изд.-во СО РАН, 1998. Вып. 109. С. 196.
8. Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Сов. радио, 1977. 606 с.
9. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. М.: Наука, 1987. 598 с.
10. Марпл-мл. С. Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1990. 584 с.
11. Михайлов С. Я., Ротовский К. Г., Медведев А. В. // Исследования по геомагнетизму, аэронауке и физике Солнца. Изд.-во СО РАН, 1998. Вып. 109. С. 203.
12. Коноплин В. Н., Орлов А. И. // Исследования по геомагнетизму, аэронауке и физике Солнца. М.: Наука, 1981. Вып. 57. С. 101.

Институт солнечно-земной физики СО  
РАН,  
г. Иркутск, Россия

Поступила в редакцию  
17 июля 2000 г.

**SIMULATING THE RESPONSE OF A VERTICAL CHIRP-IONOSONDE SPECTRUM ANALYZER  
AND RECONSTRUCTING THE TRANSFER FUNCTION  
IN THE TRANSLUCENT REGION OF THE IONOSPHERIC *E*-LAYER**

*S. Ya. Mikhailov*

We propose a brief scheme for theoretical description of the spectra recorded during ionospheric sounding with a chirp signal and processing the received response using the frequency-compression method. Numerical simulation of vertical-incidence chirp-sounding spectra in the region of near-critical frequencies of the *E*-layer is carried out by using the analytical expression for the reflectance of radio waves from a multilayer isotropic ionosphere as a transfer function of the channel. A technique for reconstructing the transfer function of the channel using the chirp-sounding spectra recorded for a number of times is proposed and tested using the fast Fourier transform.

УДК 555.463

## ВЕТРОВЫЕ ШУМЫ В РАДИОЛОКАЦИОННОМ СИГНАЛЕ ТРЁХСАНТИМЕТРОВЫХ РАДИОВОЛН, ОТРАЖЁННОМ ОТ МОРСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

*Ю. М. Жидко, Г. К. Иванова*

Рассчитаны и проанализированы функции корреляции изменений радиолокационного сигнала при обзоре морской поверхности с изменениями скорости и направления приповерхностного ветра. Расчёты выполнены по данным натурных измерений с борта судна, усреднённых цифровым фильтром с постоянной времени 30 с. Коэффициент корреляции радиолокационного сигнала со скоростью ветра, измеренной на борту судна, достигает 0,86 при дальности до отражающей площадки 270 м. Это даёт возможность использовать данные измерений вариаций скорости ветра на борту судна для подавления ветровых шумов в радиолокационном сигнале при зондировании поверхности, по крайней мере, на расстояниях от судна, не превышающих несколько сот метров. Подавление ветровых шумов может быть использовано при обнаружении слабоконтрастных образований на морской поверхности, в частности сликов и проявлений слабых внутренних волн.

При радиолокационном (РЛ) зондировании морской поверхности в сантиметровом диапазоне длин волн с целью изучения характеристик волнения и обнаружения на ней слабоконтрастных целей, а также сликов, вызванных течениями, внутренними волнами, разливами нефти и т. д., мешающим фактором является ветровой шум [1]. Он создаётся пространственно-временными флуктуациями ветра, которые «отпечатываются» на морской поверхности в виде пятен сантиметровой ряби различной интенсивности и переносятся в РЛ сигнал.

Впервые экспериментальные исследования ветровых шумов в РЛ сигнале трёхсантиметрового диапазона длин волн проведены в работе [2]. По данным этих измерений коэффициент взаимной корреляции РЛ сигнала и модуля скорости ветра, измеренного на судне, имел величину  $K = 0,78$ . Применение простейшей корреляционной обработки — вычитания из сигнала части, коррелированной с вариациями модуля скорости — позволило существенно снизить уровень шумов. Зондирование поверхности в работе [2] осуществлялось в режиме кругового обзора (КО), а РЛ сигнал усреднялся за время, кратное периоду вращения антенны. Такой способ обзора обеспечивает усреднение сигнала по всем направлениям зондирования в горизонтальной плоскости относительно направления ветра. В случае бокового обзора, который довольно часто используется при дистанционном исследовании поверхности океана, угол между направлениями зондирования и ветра (угол зондирования  $\varphi$ ) фиксирован. Поэтому при боковом и секторном (СО) обзорах поверхности коэффициент взаимной корреляции сигнала и скорости ветра может, в принципе, отличаться от найденного в [2]. Учитывая результаты работы [3] следует также ожидать, что существенный вклад в ветровой шум дают вариации не только скорости ветра, но и его направления. В связи с этим в настоящей работе анализируются функции корреляции РЛ сигнала с вариациями как скорости, так и направления ветра.

Анализ проводится на основе данных зондирования морской поверхности в режиме кругового обзора с помощью радиолокационной станции (РЛС) трёхсантиметрового диапазона, установленной на борту судна, двигавшегося со скоростью  $v = 6,5$  м/с. Частота повторения импульсов 1 000 Гц. Антенна вертикальной поляризации и измеритель скорости ветра располагались на высоте 20 м над уровнем моря. Частота вращения антенны 0,5 Гц. Сигнал, пропорциональный амплитуде волны, отражённой площадкой  $30 \times 30$  м на морской поверхности в 270 м от антенны, и вектор скорости ветра записывались на магнитную ленту.

Из данных кругового обзора формировались каналы секторного обзора. Все сигналы перед обработкой сглаживались цифровым фильтром с постоянной времени  $T \sim 30$  с. При таком сглажи-

вании происходит не только временная, но и пространственная фильтрация радиоизображения морской поверхности. Фильтруются пространственные частоты, превышающие  $2\pi/(vT)$  м<sup>-1</sup> в режиме СО и  $\pi/270$  м<sup>-1</sup> в режиме КО.

При выборе ширины сектора мы исходили из двух противоречивых пожеланий. С одной стороны, она должна быть достаточно малой, чтобы изменения коэффициента корреляции сигнала с ветром не менялись существенно в пределах сектора. С другой стороны, ширина сектора должна быть достаточно большой, чтобы уменьшить шумы в сигнале, обусловленные малым количеством импульсов, отражённых от поверхности в секторе обзора.

Результаты численных расчётов показывают, что с расширением сектора обзора коэффициент взаимной корреляции сигнала со скоростью ветра при зондировании навстречу ветру вначале растёт, достигая максимума при ширине приблизительно 30°, затем медленно убывает. Расширение сектора сопровождается уменьшением крутизны функции корреляции вблизи максимума (см. рис. 1). При ширине сектора 20° коэффициент корреляции практически такой же, как и при 30°, однако крутизна зависимости вблизи максимума заметно больше. В связи с этим вся дальнейшая обработка выполнялась при ширине сектора 20°. Центральные направления секторов (углы зондирования  $\varphi$ ) выбирались в направлениях 0°, -20°, -40°, -50°, -70° и -90° по отношению к среднему направлению максимума диаграммы обратного рассеяния. Среднее находилось за время, равное длительности анализируемого участка сигнала. В пределах точности измерений средние значения направлений ветра и максимума диаграммы обратного рассеяния совпадали. Точность абсолютных измерений направления ветра составила  $\pm 10^\circ$ , точность измерений вариаций ветра  $\pm 2^\circ$ .

Для анализа были использованы данные двух интервалов наблюдений: первый интервал длительностью 91 мин, второй — 26 мин. В табл. 1 приведены средние значения, дисперсии (в дальнейшем под

Таблица 1

	Сигнал КО	Сигнал СО при $\varphi$ , равном						Скорость	Направление ветра
		0°	-20°	-40°	-50°	-70°	-90°		
Среднее 1	0,45	1,00	1,04	0,94	0,87	0,66	0,56	12,1 м/с	0,0°
Среднее 2	—	1,00	—	—	0,81	—	—	9,85 м/с	0,0°
Дисперсия 1	—	—	—	—	—	—	—	1,22 м/с	4,9°
Дисперсия 2	—	—	—	—	—	—	—	0,68 м/с	7,6°
Коэффициент вариации 1	0,61	0,60	0,59	0,61	0,78	0,97	0,95	0,10	—
Коэффициент вариации 2	—	0,05	—	—	0,07	—	—	0,07	—

дисперсией понимается корень квадратный из среднеквадратичного отклонения) и коэффициенты вариации (отношение дисперсии к среднему значению) сглаженных сигналов. Абсолютная калибровка радиосигналов не производилась. Их средние значения, приведённые в табл. 1, нормированы на величину сигнала в канале секторного обзора для угла зондирования 0°. Каждый РЛ сигнал даёт радиоизображение разреза морской поверхности вдоль направления движения судна. В режиме СО разрез проходит по прямой линии на расстоянии  $270 \sin \alpha$  м от борта судна, где  $\alpha$  — угол между осью судна и направлением зондирования, ширина обзора примерно 30 м. В режиме КО разрез поверхности осуществляется в полосе шириной 540 м.

Как видно из табл. 1, РЛ сигнал при зондировании навстречу ветру ( $\varphi = 0^\circ$ ) оказался меньше, чем при  $\varphi = -20^\circ$ . Это обусловлено затенением антенны РЛС мачтой на носу судна, в результа-

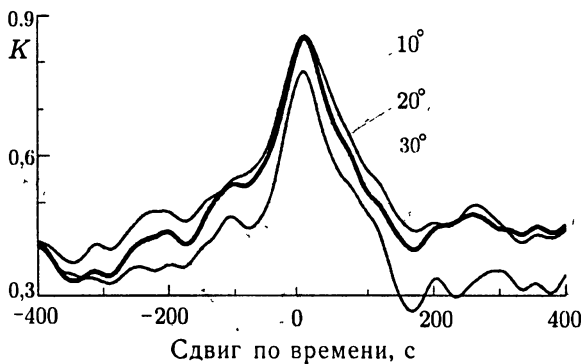


Рис. 1. Функции взаимной корреляции сигналов секторного обзора со скоростью ветра при зондировании навстречу ветру для трёх значений ширины сектора:  $10^\circ$ ,  $20^\circ$  и  $30^\circ$ .

те чего нормированная диаграмма обратного рассеяния морской поверхности, приведённая на рис. 2, имеет провал в районе  $\varphi \approx 2^\circ$ . К сожалению, полностью затенённым оказался большой сектор в направлении по ветру, частично затенён правый склон основного максимума диаграммы обратного рассеяния. Всё это заставило нас ограничиться анализом сектора углов от  $0^\circ$  до  $-90^\circ$ .

На рис. 3 представлены вариации ветра (скорости и направления) и РЛ сигналов (в режимах КО и СО при зондировании навстречу ветру) относительно их средних значений для первого интервала наблюдений. Все кривые для удобства нормированы на их дисперсии. Визуальное сравнение кривых позволяет сделать вывод о большой корреляции РЛ сигналов со скоростью ветра и малой — с его направлением. Это подтверждается и расчётами функций взаимной корреляции РЛ сигналов со скоростью (рис. 4) и направлением (рис. 5) ветра для указанного интервала. По оси абсцисс отложен временной сдвиг РЛ сигнала относительно записи параметров ветра.

Наибольший коэффициент корреляции РЛ сигнала со скоростью ветра (0,86) достигается при зондировании навстречу ветру ( $\varphi = 0^\circ$ ). Максимумы коэффициентов корреляции располагаются при сдвигах по времени, близких к нулю. С увеличением угла зондирования коэффициент корреляции вначале резко падает (при  $\varphi = -20^\circ$  он равен 0,63, а при  $\varphi = -70^\circ$  лишь 0,36), затем возрастает до 0,65 при  $\varphi = -90^\circ$ . Качественно такой ход зависимости коэффициента взаимной корреляции от угла зондирования можно объяснить воздействием ветровых шумов в РЛ сигнале, вызванных изменениями (флуктуациями) направления ветра. Дело в том, что рост этих шумов, как нетрудно видеть, приводит к уменьшению коэффициента взаимной корреляции сигнала и скорости ветра. Согласно же оценкам,

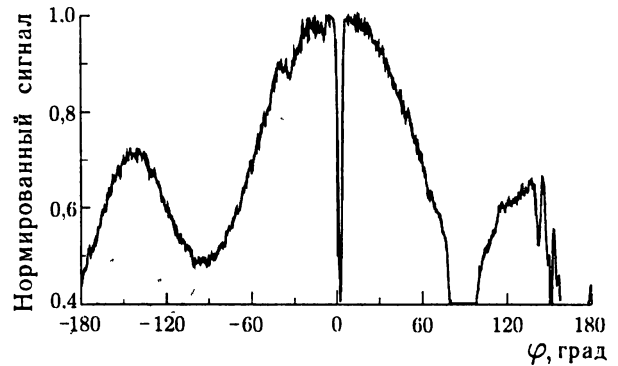


Рис. 2. Диаграмма обратного рассеяния морской поверхности

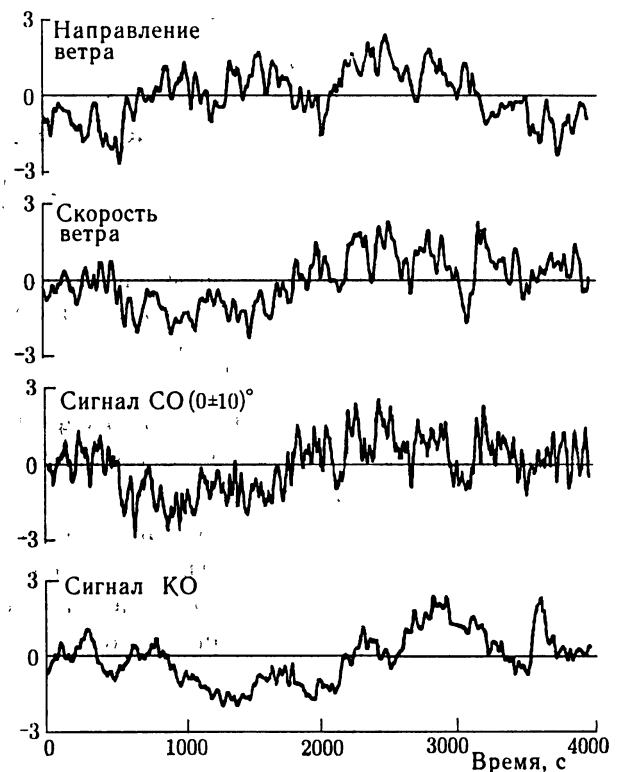


Рис. 3. Зависимости от времени нормированных величин: направления ветра, скорости ветра, отражённых сигналов при секторном обзоре в секторе углов  $(0 \pm 10^\circ)$  и круговом обзоре



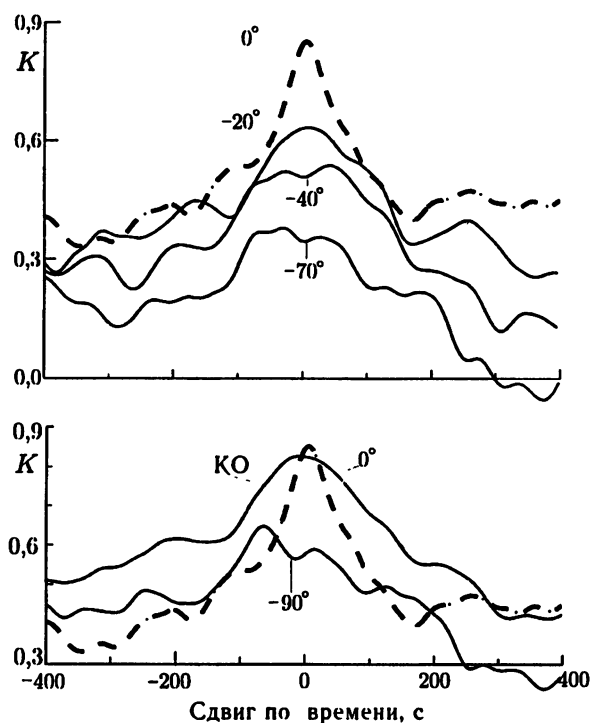


Рис. 4. Функции взаимной корреляции скорости ветра с сигналами кругового обзора и секторного обзора с центрами секторов  $0^\circ$ ,  $-20^\circ$ ,  $-40^\circ$ ,  $-70^\circ$  и  $-90^\circ$

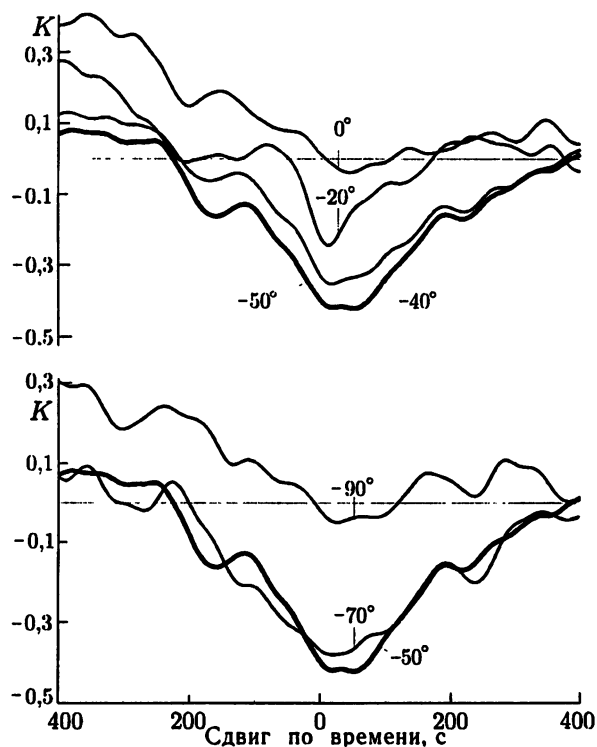


Рис. 5. Функции взаимной корреляции направления ветра с сигналами секторного обзора с центрами секторов  $0^\circ$ ,  $-20^\circ$ ,  $-40^\circ$ ,  $-50^\circ$ ,  $-70^\circ$  и  $-90^\circ$

сделанным в работе [3], шумы, вызванные флуктуациями направления ветра, равны нулю при  $\varphi = 0^\circ$  и имеют максимум при  $\varphi \approx 70^\circ$ . С увеличением угла зондирования уменьшается крутизна функции корреляции вблизи максимума.

На основании результатов работы [3] можно ожидать, что коэффициент корреляции РЛ сигнала с вариациями направления ветра равен нулю при  $\varphi = 0^\circ$ , модуль его достигает максимума при  $\varphi \approx \pm 70^\circ$ , а при переходе через  $\varphi = 0^\circ$  коэффициент корреляции меняет знак. Эти предположения подтверждаются результатами расчётов, приведёнными на рис. 5 и 6. Максимальный коэффициент корреляции сигнала с направлением ветра (0,4) достигается при  $\varphi = 50^\circ$ , и он существенно меньше коэффициента корреляции со скоростью ветра при зондировании навстречу ветру (0,86). Однако вполне возможно, что в действительности он несколько выше расчётного, поскольку вычисления проводились на основе данных измерителя ветра с довольно высоким уровнем собственных шумов. Приведённые выше цифры относятся к полуторачасовому интервалу наблюдений, на котором дисперсия направления ветра составляла  $4,9^\circ$  (см. табл. 1). По данным для другого интервала наблюдений, выполненных при более изменчивом направлении ветра (дисперсия направления  $7,6^\circ$ ), коэффициент корреляции был равен 0,65.

Для подавления ветровых шумов в РЛ сигнале можно воспользоваться процедурой, предложенной в [2]. Результаты её применения представлены на рис. 7 для зондирования навстречу ветру. Верхняя кривая — исходный нормированный РЛ сигнал (с вычтенным средним значением и делённый на дисперсию), нижняя — результат вычитания из верхней кривой нормированной аналогичным образом скорости ветра (см. рис. 3), умноженной на коэффициент взаимной корреляции РЛ сигнала и скорости ветра. После обработки сигнал стал более «гладким»: исчезли почти все крупномасштабные вариации,

заметно понизилась амплитуда и мелкомасштабных вариаций, включая и изменения с характерными временами порядка минуты.

Эффективность описанной процедуры подавления ветровых шумов зависит от точности измерений параметров ветра, поскольку собственные шумы измерителя снижают коэффициент взаимной корреляции РЛ сигнала с изменениями параметров ветра. К аналогичным последствиям приводят и шумы в РЛ сигнале, вызванные малым количеством импульсов РЛС при формировании сигнала узкого сектора по данным кругового обзора (см. рис. 3).

В заключение кратко сформулируем основные результаты и выводы.

Анализ экспериментальных данных зондирования морской поверхности с борта судна выявил высокую корреляцию РЛ сигнала с изменениями параметров ветра при дальности до зондируемого участка поверхности 270 м. При зондировании навстречу ветру коэффициент взаимной корреляции РЛ сигнала со скоростью ветра равен 0,85. Это даёт возможность использовать данные измерений вариаций скорости ветра на борту судна для подавления ветровых шумов в РЛ сигнале при зондировании поверхности вблизи борта. С увеличением угла зондирования коэффициент корреляции РЛ сигнала со скоростью ветра резко падает, крутизна функции взаимной корреляции вблизи максимума уменьшается. Это можно объяснить влиянием двух факторов: уменьшением корреляции между скоростью ветра на судне и над отражающей площадкой и ростом влияния на сигнал вариаций направления ветра.

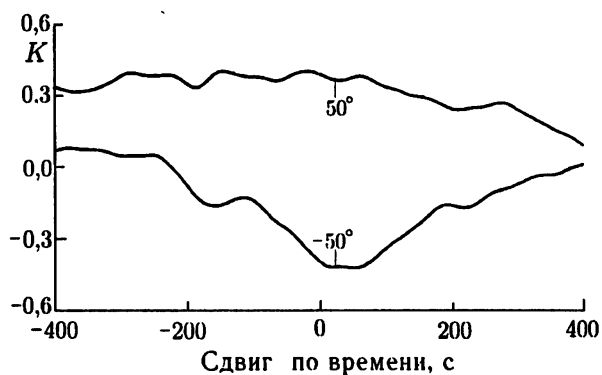


Рис. 6. Функции взаимной корреляции направления ветра с РЛ сигналами при зондировании под углами  $50^\circ$  и  $-50^\circ$

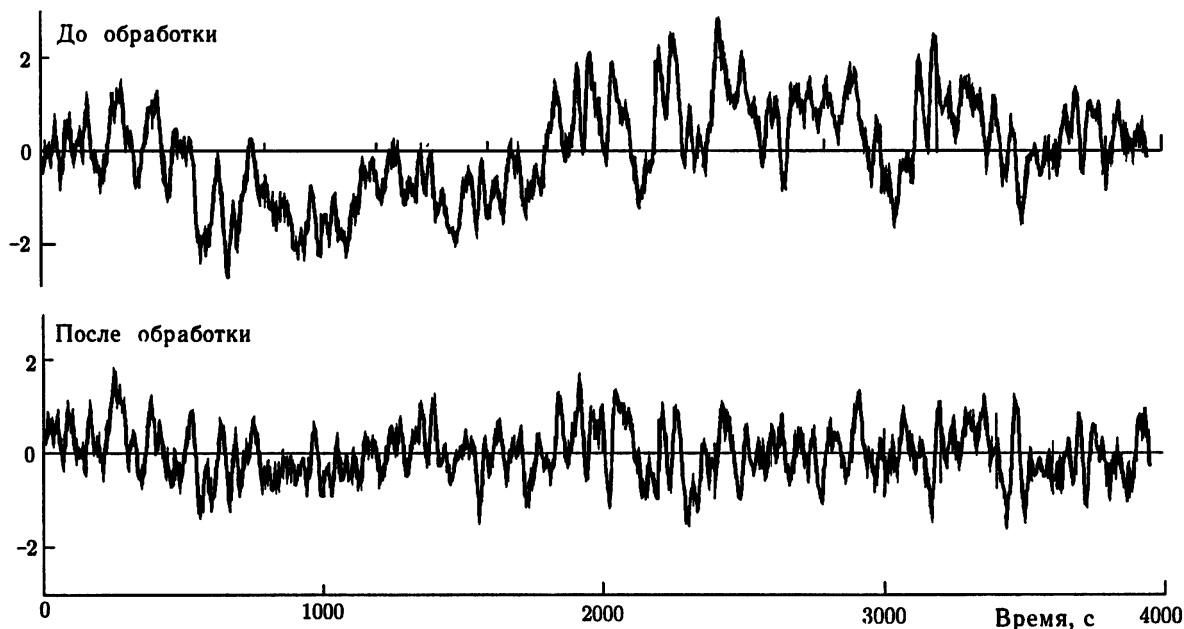


Рис. 7. Зависимости нормированных сигналов от времени: отражённого от поверхности моря при обзоре в секторе  $(0 \pm 10^\circ)$  и этого же сигнала после устранения ветровых шумов путём корреляционной обработки

Коэффициент корреляции РЛ сигнала с направлением ветра равен нулю при зондировании навстречу ветру. С увеличением модуля угла зондирования  $\varphi$  он вначале растёт, достигая максимума при  $|\varphi| \sim 50^\circ$  ( $K \approx 0,4$  для первого интервала и  $K \approx 0,65$  для второго), а затем уменьшается до нуля при  $|\varphi| = 90^\circ$ .

Результаты работы указывают на целесообразность использования корреляционной обработки РЛ сигналов при обнаружении с борта судна слабоконтрастных сликов и других возмущений на морской поверхности. Большой коэффициент взаимной корреляции РЛ сигнала и скорости ветра в направлении навстречу ветру делает это направление предпочтительным в связи с возможностью значительного подавления ветровых шумов путём корреляционной обработки. К тому же РЛ сигнал в этом направлении наименее зашумлен: коэффициент вариации сигнала здесь минимален.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 97–02–17538).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Долин Л. С., Родин В. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1980. Т. 23, № 1. С. 79.
2. Жидко Ю. М., Каневский М. Б., Родин В. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1983. Т. 26, № 3. С. 328.
3. Жидко Ю. М., Иванова Г. К. // Изв. вузов. Радиофизика. 1999. Т. 42, № 6. С. 535.

Институт прикладной физики РАН,  
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию  
5 января 2001 г.

#### WIND NOISE IN A RADAR SIGNAL OF 3-CM RADIO WAVES REFLECTED FROM A SEA SURFACE

*Yu. M. Zhidko and G. K. Ivanova*

We calculate and analyze the correlation functions of a sea-surface radar signal with the speed and direction of near-surface wind. The calculations are based on full-scale on-board measurements averaged using a digital filter with time constant 30 sec. The coefficient of correlation between the signal and wind speed measured on board a ship reaches 0.86 if the distance to the reflecting site equals 270 m. This makes it possible to use on-board measurements of the wind speed for suppression of wind noise in the radar signal during sea-surface sounding, at least at distances not greater than several hundred meters from the ship. The suppression of wind noise can be used for detecting weak-contrast formations on a sea surface, in particular, slicks and surface manifestations of weak internal waves.

УДК 535.361

## НАБЛЮДЕНИЕ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ ПОКАЗАТЕЛЯ РАССЕЯНИЯ В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ СРЕДЕ МЕТОДОМ ОТРАЖАТЕЛЬНОЙ КОНФОКАЛЬНОЙ МИКРОСКОПИИ

*В. Л. Вебер*

На основе теории видения в рассеивающих средах разработана модель обнаружения и визуализации плоскостных неоднородностей показателя рассеяния в биологических тканях методом отражательной конфокальной микроскопии. Выведены общие формулы для расчёта сигнала обратного рассеяния в схемах с непрерывной и импульсной подсветкой. Проведён анализ влияния параметров системы наблюдения на предельную глубину обнаружения неоднородностей для нескольких характерных типов стратификации оптических характеристик биоткани.

### ВВЕДЕНИЕ

В последние годы в мировой науке отмечается большой интерес к проблеме исследования возможностей оптического наблюдения внутренней структуры тканей и органов человеческого тела в терапевтическом «окне» прозрачности (длины волн  $0,6 \div 1,2$  мкм). Одними из перспективных оптических методов обнаружения патологий в слоях ткани являются различные варианты методов конфокальной микроскопии [1–5].

Теоретические модели видения локальных неоднородностей (объектов), находящихся в рассеивающей среде, с помощью методов отражательной и просветной конфокальной микроскопии рассмотрены в работах [6, 7]. В этих работах предполагалось, что среда имеет однородное распределение показателя рассеяния. Однако биологическая ткань представляет собой среду с крупномасштабными неоднородностями оптических характеристик (прежде всего показателя рассеяния). Проблема обнаружения и визуализации неоднородностей оптических характеристик рассеивающей среды является весьма важной в плане решения задач медицинской диагностики патологий в тканях человеческого организма. Решение этой проблемы ещё далеко от завершения. Наиболее интересными к настоящему времени являются результаты работы [8], в которой рассмотрены вопросы обнаружения поглощающих неоднородностей, и работы [9], посвящённой разработке теоретических основ оптической когерентной томографии рассеивающих неоднородностей в сильно мутных средах.

Цель данной работы — создание физической модели формирования оптического изображения макронеоднородностей показателя рассеяния в плоскостистой среде на основе использования методов отражательной конфокальной микроскопии.

### 1. ФОРМУЛА ПЕРЕНОСА ИЗОБРАЖЕНИЯ

Рассмотрим схему наблюдения, приведённую на рис. 1. Система наблюдения (СН), содержащая линзу диаметром  $d_s$  с фокусным расстоянием  $f$ , а также расположенные на расстоянии  $H$  от неё источник и приёмник (совмещённые и сдвинутые относительно оптической оси СН на расстояние  $r_0$ ) диаметром  $d_1$  и  $d_2$  соответственно, освещает и визирует плоскостистую рассеивающую среду с коэффициентом рассеяния  $\sigma(h)$ , где  $h$  — текущая глубина зондирования. Наблюдение неоднородностей

осуществляется посредством регистрации отражённого средой светового излучения при вертикальном перемещении СН (вдоль оптической оси  $z$  системы).

Мощность светового излучения, попадающего в фотоприёмник СН от рассеивающего слоя толщиной  $dh$  с глубины  $h$ , описывается выражением

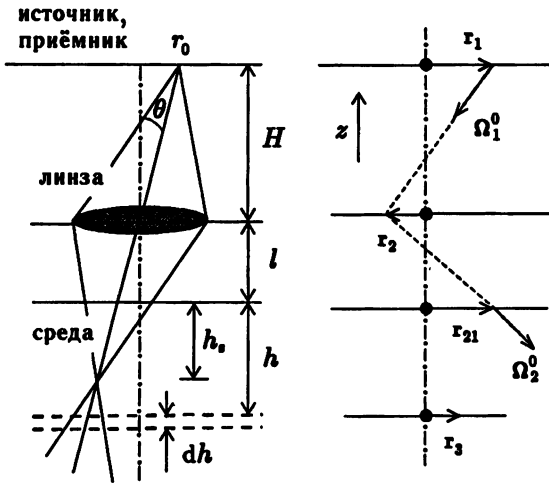


Рис. 1. Схема наблюдения

$$p_{bs}(h) = \frac{B_0}{\pi} \rho_w \iint_{-\infty}^{+\infty} E_1(\mathbf{r}_3, h) E_2(\mathbf{r}_3, H) d\mathbf{r}_3, \quad (1)$$

где  $B_0$  — яркость источника,  $E_{1(2)}$  — распределение освещённости, создаваемое источником (приёмником) на глубине  $h$ ,  $\rho_w = \sigma(\pi, h) dh/4$ ,  $\sigma(\pi, h)$  — коэффициент обратного (при угле  $180^\circ$ ) рассеяния среды на глубине  $h$ .

Соотношение (1) можно записать в более удобной «частотной» форме:

$$p_{bs}(h) = \frac{B_0 \rho_w}{\pi} \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} F_{E_1}(\mathbf{k}, h) F_{E_2}(-\mathbf{k}, h) d\mathbf{k}, \quad (2)$$

где  $F_{E_{1(2)}}$  — фурье-образ функции  $E_{1(2)}$ .

Последующие рассуждения аналогичны изложенным в работе [6].

Распределение яркости светового поля, создаваемое источником непосредственно за линзой, описывается формулой

$$B(\mathbf{r}_2, \Omega_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} D_1(\mathbf{r}_1, \Omega_1) G_a(\mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{r}_2, \Omega_1) S(\mathbf{r}_2) G_s(\Omega_1 \rightarrow \Omega_2, \mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_1 d\Omega_1, \quad (3)$$

где  $G_a = \delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 - H\Omega_1/\gamma)$  — функция Грина воздушного слоя между источником и линзой,  $\gamma = \cos \theta$ ,  $\theta = \arctg(r_0/H)$ ,  $S$  — функция амплитудного пропускания линзы,  $D_1$  — апертурная функция источника,  $G_s$  — функция Грина линзы, описывающая изменение направления луча в результате преломления на линзе; в пренебрежении дифракционными эффектами эта функция имеет вид

$$G_s = \delta(\Omega_2 - \Omega_1 + r_2\gamma/f);$$

при учёте дифракции на оправе линзы  $\delta$ -функция заменяется на функцию, ширина которой зависит от размера линзы;  $\Omega_i$  — проекции единичных векторов  $\Omega_i^0$  на плоскость  $z = \text{const}$ .

Распределение яркости светового поля на границе рассеивающей среды

$$B(\mathbf{r}_{21}, \Omega_2) = \iint_{-\infty}^{+\infty} B(\mathbf{r}_2, \Omega_2) \delta(\mathbf{r}_{21} - \mathbf{r}_2 - \Omega_2 l/\gamma) d\mathbf{r}_2, \quad (4)$$

Распределение освещённости на глубине  $h$  имеет вид

$$E_1(\mathbf{r}_3) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} B(\mathbf{r}_{21}, \Omega_2) e_c(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_{21} - \Omega_2 h/\gamma, h/\gamma) d\mathbf{r}_{21} d\Omega_2, \quad (5)$$

где  $e_c$  — распределение освещённости от точечного мононаправленного источника в рассеивающей среде, находящегося в точке  $\mathbf{r}_{21}$  и излучающего в направлении  $\Omega_2^0$ , на расстоянии  $h$  от него.

Объединяя формулы (3)–(5) и применяя преобразование Фурье к  $E_1(\mathbf{r}_3)$ , получим выражение для пространственного спектра освещённости:

$$F_{E_1}(\mathbf{k}, h) = F_1^0(\mathbf{k}) F_d(\mathbf{k}z/\gamma) F_c(\mathbf{k}, h/\gamma), \quad (6)$$

где

$$F_1^0(\mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_1[\omega, (\mathbf{k}z + \omega H)/\gamma] F_s(\omega + \beta\mathbf{k}) d\omega, \quad (7)$$

$\beta = z/f - 1$ ,  $z = h + l$ ,  $F_{1,s,c,d}$  — фурье-образы функций  $D_1$ ,  $S$ ,  $e_c$ ,  $G_d$  соответственно. Здесь  $G_d$  — функция Грина линзы с учётом дифракции на апертуре линзы.

Полученные выражения аналогичны соответствующим выражениям работы [6] и отличаются от последних наличием параметра  $\gamma$ , характеризующего угол наблюдения.

Выражение (7) упрощается в предположении изотропности диаграмм направленности источника и приёмника системы наблюдения: полагая  $F_1(\mathbf{k}, \mathbf{p}) = (2\pi)^2 F_1(\mathbf{k})\delta(\mathbf{p})$ , получим

$$F_1^0(\mathbf{k}) = (\gamma/H)^2 F_1(\alpha\mathbf{k}) F_s[\mathbf{k}(\beta - \alpha)], \quad (8)$$

где  $\alpha = z/H$ . Чтобы определить пространственный спектр освещённости, создаваемый приёмником на глубине  $h$ , в соотношениях (6)–(8) следует заменить индекс 1 на 2.

## 2. МОДЕЛИ ИСТОЧНИКА, ПРИЁМНИКА, ЛИНЗЫ И СРЕДЫ

В качестве оптических передаточных функций источника и приёмника воспользуемся гауссовыми функциями

$$F_{1(2)}(\mathbf{k}) = \Sigma_{1(2)} \exp[-\Sigma_{1(2)} k^2 / (4\pi)], \quad (9)$$

где  $\Sigma_{1(2)}$  — площадь апертуры источника (приёмника). Для описания пространственного спектра функции пропускания линзы также используем гауссову функцию

$$F_s(\mathbf{k}) = \Sigma_s \exp[-\Sigma_s k^2 / (4\pi)], \quad (10)$$

где  $\Sigma_s$  — площадь линзы.

Подставляя (9), (10) в (8), получаем выражение для функции  $F_1^0$  в виде

$$F_1^0(\mathbf{k}) = \Sigma_1 \Sigma_s (\gamma/H)^2 \exp\{-k^2 \Sigma_s [\alpha^2 \sigma_1 + (\beta - \alpha)^2] / (4\pi)\}, \quad (11)$$

где  $\sigma_1 = \Sigma_1 / \Sigma_s$  — относительная площадь апертуры источника.

В качестве оптической передаточной функции рассеивающей толщи среды используем фурье-образ автомодельного решения уравнения переноса излучения для распределения освещённости в стратифицированной среде с анизотропным рассеянием [10]:

$$F_c(\mathbf{k}, h) = \exp(-\kappa h) \sum_{i=1}^2 C_i(h) \exp[-g_i(h) k^2 / (4\pi)], \quad (12)$$

где  $C_{1,2}$  — амплитуды нерассеянной и рассеянной компонент излучения:

$$C_1(h) = \exp[-\tau_\sigma(h)], \quad \tau_\sigma(h) = \int_0^h \sigma(x) dx, \quad C_2(h) = 1 - C_1(h);$$

$g_1 = 0$ ,  $g_2(h) = \pi \langle \gamma^2 \rangle \int_0^h \sigma(x) (h-x)^2 dx$  — характерная площадь рассеяния узкого пучка света на расстоянии  $h$  от источника,  $\langle \gamma^2 \rangle$  — дисперсия индикатрисы рассеяния, которую здесь полагаем постоянной, как и показатель поглощения  $\kappa$ .

Заметим, что при зондировании среды по наклонной трассе ( $\gamma \neq 1$ ) в интегралах, содержащихся в выражениях для  $\tau_\sigma$  и  $g_2$ , изменяются не только пределы интегрирования, но и характерные масштабы изменения функции  $\sigma(x)$ .

Оптическая передаточная функция, описывающая дифракционные эффекты на апертуре линзы, определяется выражением

$$F_d(\mathbf{k}z) = \exp[-\sigma_d \Sigma_s k^2 / (4\pi)], \quad (13)$$

где  $\sigma_d = (\lambda z / d_s^2)^2$ ,  $\lambda$  — длина волны излучения.

### 3. СТРУКТУРА ИЗОБРАЖЕНИЯ ПЛОСКОСЛОИСТОЙ СРЕДЫ

Подставляя формулы (11)–(13) в (6), получим выражение для пространственного спектра освещённости от источника:

$$F_{E_1}(\mathbf{k}, h) = \Sigma_1 \Sigma_s (\gamma/H)^2 \exp(-\kappa h) \sum_{i=1}^2 C_i \exp[-k^2 \Sigma_s A_i / (4\pi)],$$

где

$$A_i = \eta_1 + g_i / \Sigma_s + \sigma_d, \quad \eta_1 = \alpha^2 \sigma_1 + (\alpha - \beta)^2.$$

Аналогичным образом записывается выражение для спектра освещённости  $F_{E_2}$  от приёмника (с заменой индексов 1 на 2 и  $i$  на  $j$ ).

Подставляя выражения для спектров освещённости в (2), получим в итоге выражение для мощности сигнала обратного рассеяния (COP):

$$P_{bs}(h) = P_0 \frac{\Delta_2}{\pi} \rho_w \exp(-2\kappa h) \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{C_i C_j}{A_i + A_j}, \quad (14)$$

где  $P_0 = B_0 \Sigma_1 \Delta_s$  — мощность излучения источника,  $\Delta_{2,s} = \Sigma_{2,s} / (H/\gamma)^2$ .

Поскольку выражение (14) описывает мощность сигнала, обратно рассеянного с глубины  $h$  элементарным слоем среды толщиной  $dh$ , в дальнейшем мы будем называть этот сигнал дифференциальным COP. Физически такой сигнал формируется в системе наблюдения с импульсным подсветом и стробируемым во времени приёмом. Отметим, что такого рода СН эквивалентна интерферометрической системе наблюдения с использованием фемтокоррелированного излучения [11].

Как известно, в обычном конфокальном микроскопе используется непрерывная подсветка. Для СН с непрерывным излучением выражение для мощности COP может быть получено интегрированием (14) по глубине:

$$P_{bs} = P_0 \frac{\Delta_2}{4\pi} \int_0^{h_0} \sigma(\pi, h) \exp(-2\kappa h) \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{C_i C_j}{A_i + A_j} dh, \quad (15)$$

где  $h_0$  — толщина образца биоткани.

Для сравнения приведём здесь также формулы для мощности COP в схеме, использующей обычный микроскоп с равномерной подсветкой образца биоткани. Полагая в (2)  $F_{E_1}(\mathbf{k}, h) = E_0 (2\pi)^2 \delta(\mathbf{k})$ ,

где  $E_0$  — освещённость в среде, получим в результате интегрирования

$$P_{bs} = E_0 \Sigma_s \frac{\Delta_2}{4\pi} \int_0^{h_0} \sigma(\pi, h) \exp(-2\kappa h) dh.$$

Отсюда следует ожидаемый, в принципе, вывод о невозможности обнаружения неоднородностей показателя рассеяния с помощью методов обычной микроскопии.

Выражения (14) и (15) описывают мощность дифференциального и интегрального СОР в отражательном конфокальном микроскопе. Величины  $p_{bs}$  и  $P_{bs}$  являются функциями глубины расположения зоны фокусной перетяжки объектива конфокального микроскопа  $h_s$ . Для краткости в дальнейшем будем называть  $h_s$  глубиной скана. Эта глубина определяется из соотношения  $z = h + L - h_s$ , где  $L = Hf/(H - f)$ .

При перемещении микроскопа относительно среды вдоль оси  $z$  получается зависимость СОР от глубины скана. Таким образом, зависимости  $p_{bs}(h, h_s)$  и  $P_{bs}(h_s)$  определяют структуру изображения плоскостной среды. Насколько эти изображения позволяют судить о пространственном распределении неоднородностей показателя рассеяния среды, нам предстоит выяснить ниже.

#### 4. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Полученные в предыдущих разделах соотношения позволяют провести анализ зависимости мощности СОР от параметров задачи. Ниже излагаются результаты численных расчётов контраста изображения для следующих параметров: длина волны излучения  $\lambda = 600$  нм, диаметры источника и приёмника  $d_{1,2} = 4$  мкм, диаметр линзы  $d_s = 4$  мм, фокусное расстояние линзы  $f = 4$  мм, высота размещения источника и приёмника  $H = 160$  мм, коэффициент поглощения среды  $\kappa = 0,02$  мм<sup>-1</sup>, дисперсия индикатрисы рассеяния  $\langle \gamma^2 \rangle = 0,04$ , толщина образца биоткани  $h_0 = 1$  мм.

Перейдём к обсуждению полученных результатов. Рассмотрим в качестве базовой систему наблюдения с непрерывной подсветкой и  $\gamma = 1$ . Положим также, что коэффициент обратного рассеяния не зависит от глубины:  $\sigma(\pi, h) = 0,8$  мм<sup>-1</sup>. На рис. 2 приведены рассчитанные по формуле (15) зависимости мощности СОР (здесь и далее мощность СОР и производные от неё величины приведены в относительных единицах) от глубины скана  $h_s$  для трёх видов стратификации показателя рассеяния: 1) однородная среда:  $\sigma = 20$  мм<sup>-1</sup>; 2) уступ:  $\sigma_{(1)} = \sigma$ ,  $\sigma_{(2)} = \sigma/2$ ; глубина скачка коэффициента рассеяния  $h_1 = 0,2$  мм; 3) уступ предыдущего типа, но  $\sigma_{(2)} = 2\sigma$ . Мощности СОР, соответствующие этим типам среды, обозначим как  $P_{bs}^{(0)}$ ,  $P_{bs}^{(1)}$ ,  $P_{bs}^{(2)}$ .

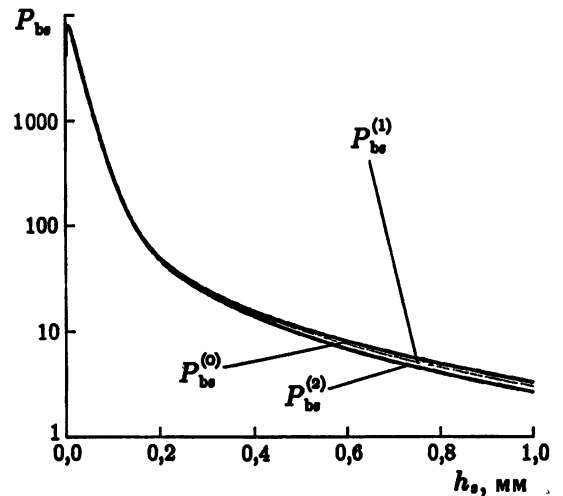


Рис. 2. Мощность интегрального СОР для однородной среды и двух моделей уступа;  $\sigma(\pi) = \text{const}$



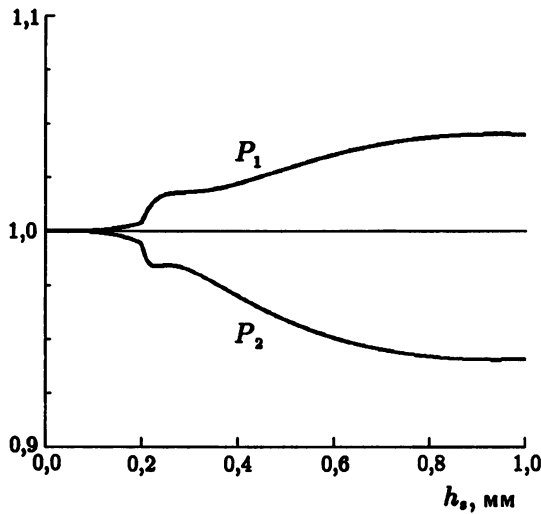


Рис. 3

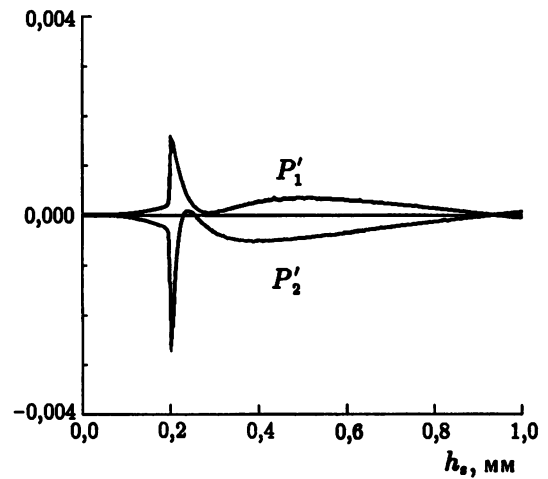


Рис. 4

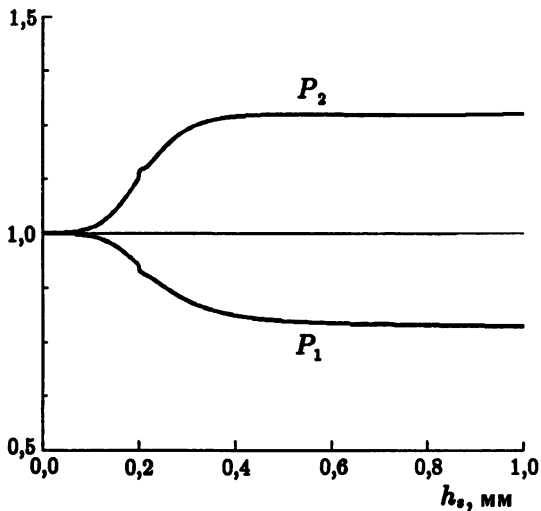


Рис. 5

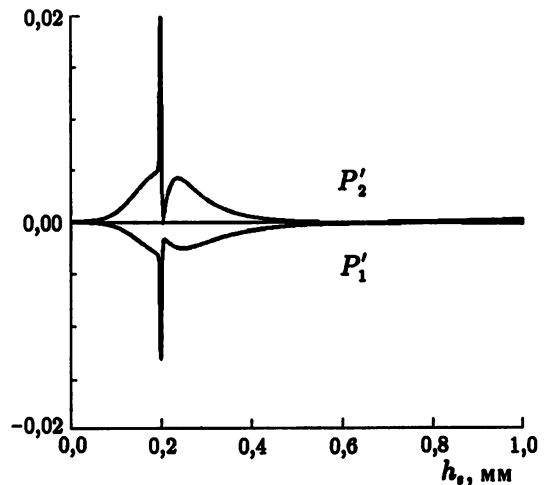


Рис. 6

Все полученные зависимости имеют монотонно спадающий характер. Как видно из рис. 2, СОР имеет большой динамический диапазон, вследствие чего различить сигналы, соответствующие разным типам стратификации, практически невозможно. Для выявления этих различий следует использовать дополнительные приёмы обработки СОР. Мы поступим следующим образом. Во-первых, уменьшим динамический диапазон всех полученных сигналов, извлекая из них квадратный корень. Во-вторых, произведём нормировку сигналов от стратифицированной среды  $\sqrt{P_{bs}^{(1)}}$ ,  $\sqrt{P_{bs}^{(2)}}$  на сигнал от однородной среды  $\sqrt{P_{bs}^{(0)}}$ . Введём обозначения  $P_{1,2} = \sqrt{P_{bs}^{(1,2)}/P_{bs}^{(0)}}$ . Зависимости нормированных СОР от глубины скана приведены на рис. 3. Очевидно, что тип стратификации достаточно уверенно обнаруживается уже на данном этапе обработки сигнала. Продифференцируем полученные нормированные зависимости СОР по глубине скана и обозначим  $P'_{1,2} = dP_{1,2}/dh_s$ . Зависимости производных от глубины скана приведены на рис. 4. Различия СОР для разных типов стратификации теперь проявляются весьма ясно: из зависимостей рис. 4, в частности, легко определяется глубина, на которой показатель рассеяния скачком изменяет своё значение:  $h_1 = 0,2$  мм. На рис. 5, 6 приведены зависимости нормированных СОР и их производных для случая  $\sigma(\pi, h) = \sigma(h)x(\pi)$ , где  $x(\pi) = 0,04$  — индикатриса рассеяния при угле  $180^\circ$ . Из сравнения рис. 3, 4 и 5, 6 видно, что более уверенное наблюдение скачка

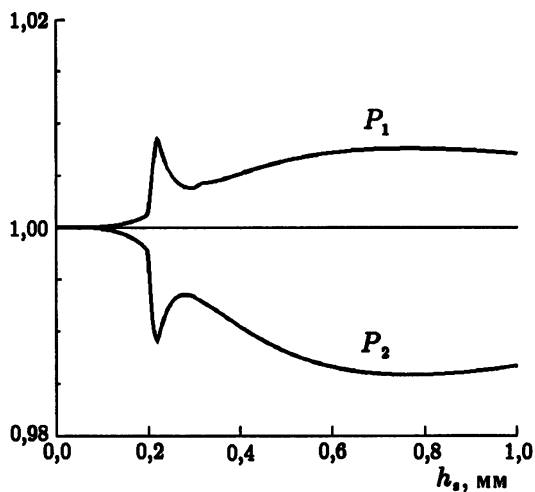


Рис. 7

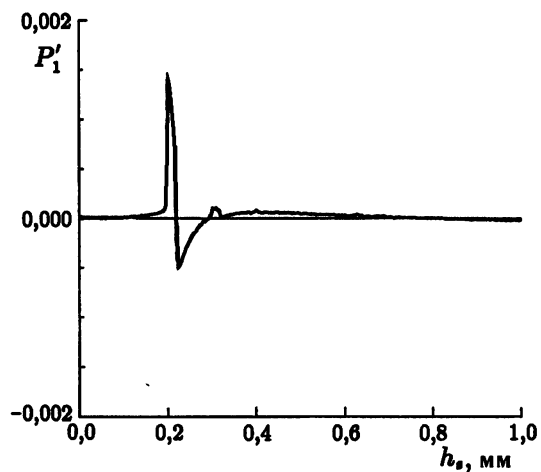


Рис. 8

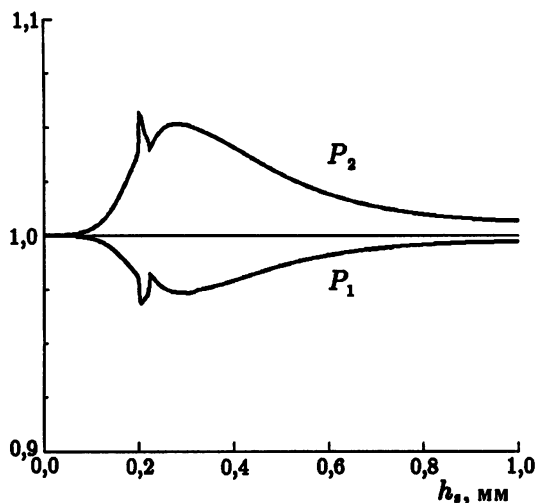


Рис. 9

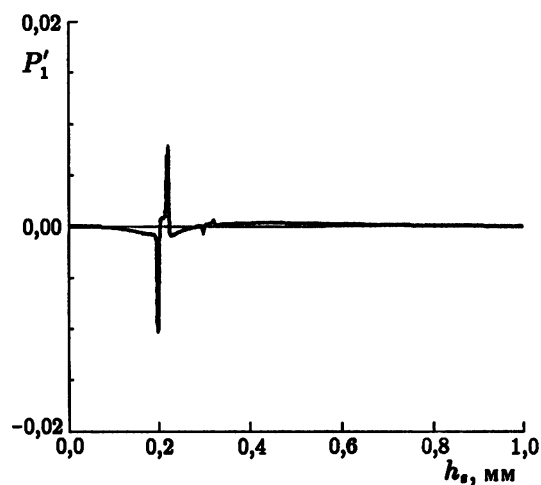


Рис. 10

показателя рассеяния осуществляется для модели среды с зависящим от  $\sigma$  показателем обратного рассеяния  $\sigma(\pi)$ . На рис. 7, 8 приведены зависимости нормированных сигналов и их производных от глубины скана для модели стратификации с двумя рассеивающими слоями  $\sigma(\pi) = \text{const}$ , расположенными на глубине 0,2 и 0,3 мм и имеющими толщину 0,02 мм. Здесь  $P_1$  соответствует случаю, когда показатель рассеяния указанных слоёв равен  $2\sigma$ ,  $P_2$  — случаю  $\sigma/2$ , где  $\sigma$  — показатель рассеяния окружающей среды. Аналогичные графики для модели с зависящим от  $\sigma$  показателем обратного рассеяния приведены на рис. 9, 10. Из приведённых зависимостей можно сделать вывод о возможности обнаружения и определения глубины расположения рассеивающих слоёв как с пониженным, так и с повышенным коэффициентом рассеяния вплоть до оптических толщин  $\tau = \sigma h \approx 6$ .

На рис. 11, 12 приведены зависимости нормированных сигналов для синусоидального типа стратификации (коэффициент модуляции 0,5, длина волны модуляции 0,05 мм). Рис. 11 соответствует случаю  $\sigma(\pi) = \text{const}$ , рис. 12 — случаю изменяющейся  $\sigma(\pi)$ . Здесь также достаточно уверенно прослеживается структура неоднородности показателя рассеяния до глубин порядка 0,3 мм. Напомним, что все полученные выше результаты относятся к случаю, когда толщина образца биоткани  $h_0$  составляет 1 мм. Расчёты для больших значений  $h_0$  (вплоть до  $h_0 = 100$  мм) показали, что толщина образца весьма слабо влияет на структуру изображения плоскостратифицированной среды — контраст изображения остаётся неизменным в большом диапазоне изменения  $h_0$ .

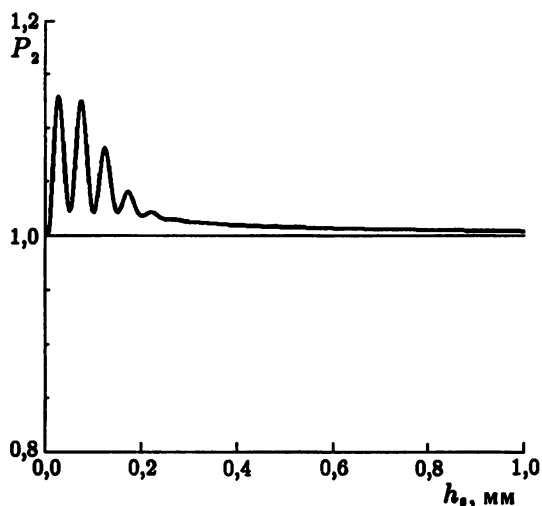


Рис. 11

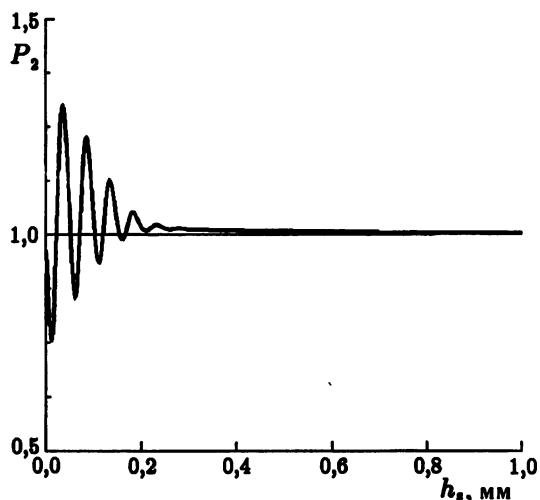


Рис. 12

Физически данное обстоятельство объясняется тем, что в конфокальном микроскопе основной вклад в принимаемый световой сигнал вносят слои рассеивающей среды, находящиеся вблизи зоны фокусной перетяжки объектива системы наблюдения. При этом слои, расположенные глубже этой зоны, принимают тем менее заметное участие в формировании сигнала, чем дальше от фокуса они находятся (этот вопрос подробно обсуждался, в частности в работе [6]).

Для выделения слабых вариаций мощности сигнала обратного рассеяния, обусловленных наличием на трассе зондирования неоднородностей показателя рассеяния, выше использован довольно искусственный приём нормировки СОР на сигнал от гипотетической однородной среды. Этот приём удобен для демонстрации возможностей конфокальной схемы при обнаружении макронеоднородностей в биоткани. Заметим, однако, что он не является единственно возможным. В качестве доказательства на рис. 13, 14 приведём зависимости отношения  $P = P_1(\gamma = 1)/P_1(\gamma = 0,8)$  двух сигналов (и их производных), полученных при различной геометрии зондирования — при  $\gamma = 1$  (случай нормального к границе среды зондирования) и при  $\gamma = 0,8$  (наклонное зондирование) — среды с двумя рассеивающими слоями ( $\sigma(\pi) = \text{const}$ ). Из зависимостей на рис. 13, 14 следует, что обнаружение стратифицированных слоёв здесь также возможно до глубин 0,3 мм (ср. с рис. 7, 8). В качестве ещё одного способа обработки сигнала обратного рассеяния может быть использован приём взаимной нормировки сигналов, полученных с помощью систем наблюдения с отличающимися размерами апертур источника света (или фотоприёмника). Мы не приводим здесь соответствующих результатов, чтобы избежать перегруженности статьи; скажем лишь, что при нормировке сигнала в системе наблюдения с диаметром апертуры источника 4 мкм на сигнал в СН с  $d_1 = 50$  мкм удаётся обнаруживать слои неоднородности показателя рассеяния среды на глубине до 0,25 мм.

В заключение приведём несколько результатов, относящихся к системе наблюдения с импульсным подсветом и временным стробированием фотоприёмника. На рис. 15–18 приведены зависимости мощности дифференциального СОР (или его производной) от глубины скана  $h_s$ , рассчитанные по формуле (14) для моделей среды с двумя рассеивающими слоями (рис. 15, 17) и синусоидальной стратификации (рис. 16, 18). Рис. 15, 16 относятся к случаю  $\sigma(\pi) = \text{const}$ , рис. 17, 18 — к случаю изменяющейся  $\sigma(\pi)$ . Все эти зависимости получены при соблюдении условия  $h = h_s$ ; это означает, что дифференциальный СОР принимается из области фокусной перетяжки объектива системы наблюдения. Из полученных зависимостей следует, что возможности обнаружения неоднородностей показателя рассеяния в биоткани в схеме с использованием импульсной конфокальной микроскопии весьма велики и существенно превосходят возможности аналогичной схемы с непрерывным подсветом.

Разработанная в настоящей работе модель видения плоскостойких неоднородностей показателя

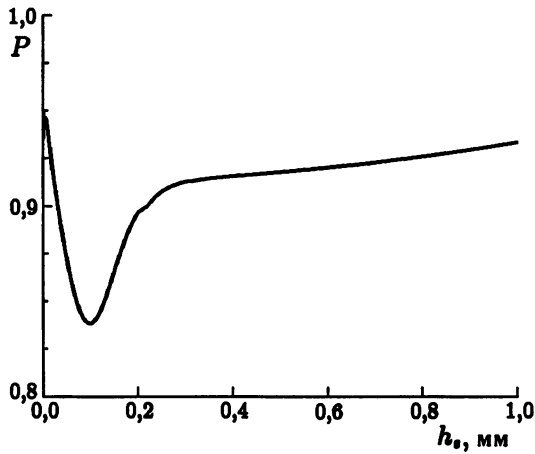


Рис. 13

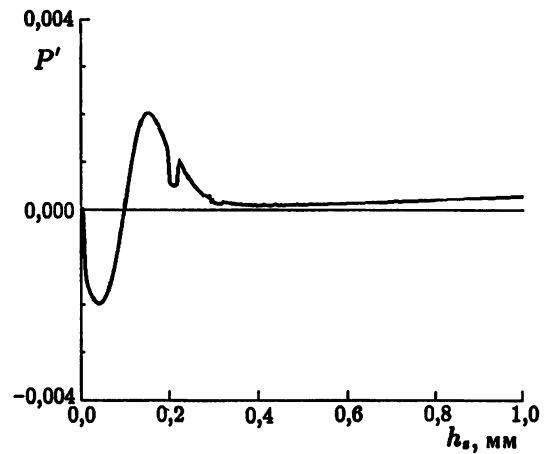


Рис. 14

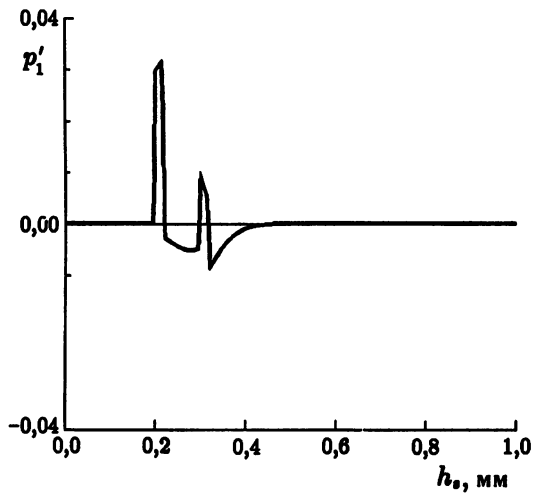


Рис. 15

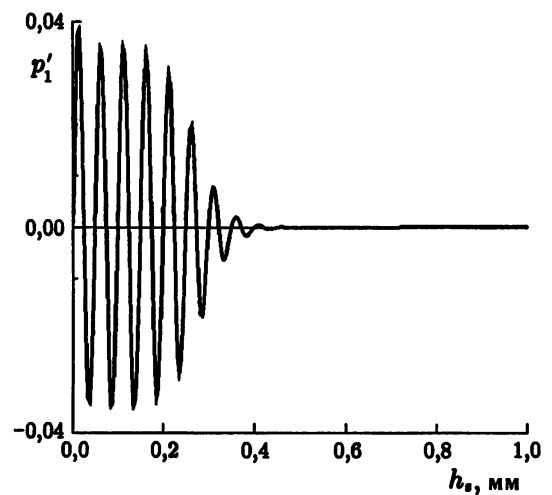


Рис. 16

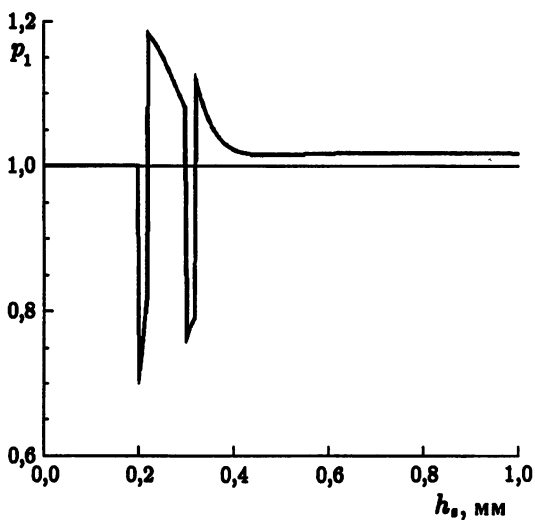


Рис. 17

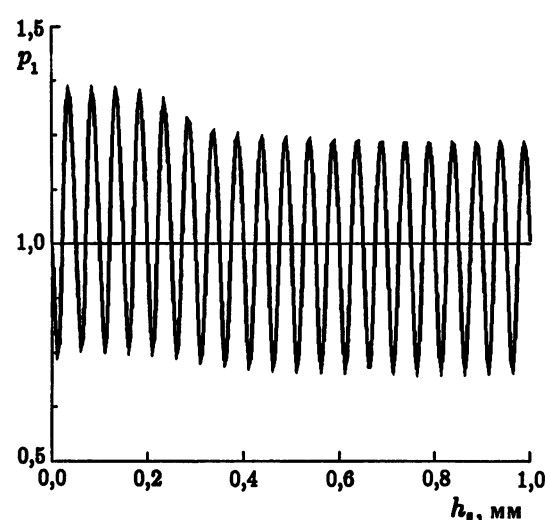


Рис. 18

рассеяния в биоткани относится к системам наблюдения с большим временем наблюдения. Для такого рода систем вполне достаточным является использование в качестве критерия качества одного

параметра — контраста изображения неоднородностей. В условиях дефицита времени наблюдения в изображении всегда существуют шумы, в частности дробовые шумы фотоприёмника. В этом случае необходимо исследование ещё одного критерия качества изображения — отношения сигнал—шум. Эта задача, однако, достаточно специфична и выходит за рамки настоящей работы.

Автор благодарен Л. С. Долину за обсуждение результатов работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 98–02–17021).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Carlsson K., Aslund N. // Appl. Opt. 1987. V. 26. P. 3 232.
2. Amos W. B., White J. G., Fordham M. // Appl. Opt. 1987. V. 26. P. 3 238.
3. Massig J. H., Preissler M., Wegener A. R., Gaida G. // Appl. Opt. 1994. V. 33, No. 4. P. 690.
4. Бонч-Бруевич А. М., Николаев С. Д., Старобогатов И. О., Васильев В. И. // Письма в ЖЭТФ. 1994. Т. 20, № 11. С. 42.
5. Sheppard C. J. R., Connolly T. J., Lee J., Cogswell C. J. // Appl. Opt. 1994. V. 33, No. 4. P. 631.
6. Вебер В. Л. // Изв. вузов. Радиофизика. 1996. Т. 39, № 7. С. 925.
7. Вебер В. Л. // Изв. вузов. Радиофизика. 1998. Т. 41, № 5. С. 625.
8. Долин Л. С. // Изв. вузов. Радиофизика. 1997. Т. 40, № 10. С. 1 191.
9. Долин Л. С. // Изв. вузов. Радиофизика. 1998. Т. 41, № 10. С. 1 258.
10. Долин Л. С., Савельев В. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1979. Т. 22, № 11. С. 1 310.
11. Геликонов В. М., Геликонов Г. В., Гладкова Н. Д., Куранов Р. В., Никулин Н. К., Петрова Г. А., Починко В. В., Правденко К. И., Сергеев А. М., Фельдштейн Ф. И., Ханин Я. И., Шабанов Д. В. // Письма в ЖЭТФ. 1995. Т. 61, № 2. С. 149.

Институт прикладной физики РАН,  
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию  
22 ноября 2000 г.

#### OBSERVATION OF IRREGULARITIES OF THE SCATTERING COEFFICIENT IN PLANE-STRATIFIED MEDIA USING THE METHOD OF REFLECTING CONFOCAL MICROSCOPY

*W. L. Weber*

Based on the of the vision theory for turbid media, we develop a model of the detection and visualization of plane-stratified irregularities of scattering coefficient in biological tissues using the method of reflecting confocal microscopy. General formulas for calculating the backscattering signal are presented for the continuous and impulse illumination. The influence of the observation-system parameters on the maximum vision depth of irregularities is analyzed for several stratification types of optical characteristics of biological tissues.

УДК 537.876

## ИЗЛУЧЕНИЕ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА ИЗ АНИЗОТРОПНОГО ПЛАЗМЕННОГО ЦИЛИНДРА

*Т. И. Бичуцкая, Г. И. Макаров*

Построено и исследовано аналитическое решение задачи излучения электромагнитного поля точечным электрическим диполем из анизотропного плазменного цилиндра в вакуум. Рассмотрены два случая ориентации электрического диполя: вдоль и поперёк горизонтального магнитного поля, направление которого не совпадает с осями цилиндрической системы координат. Изучены условия и характеристики резонансного воздействия анизотропного плазменного цилиндра в зависимости от величины и направления магнитного поля по отношению к дипольному моменту источника. Проведён сравнительный анализ резонансного воздействия плазменного цилиндра с горизонтальным и аксиальным внешним магнитным полем.

Вопросам усиления излучения коротких антенн, окружённых некоторым ограниченным объёмом плазмы с осевой или центральной симметрией, при неизменном подводимом токе посвящён ряд работ [1–6]. Наиболее полное аналитическое исследование для случая изотропного плазменного окружения проведено в [7] для сферической плазменной оболочки и в [8] — для цилиндрической. В [7] было показано, что усиление излучения имеет место при условии малого размера плазменной сферы  $k_{pl}r_s \ll 1$ , где  $r_s$  — радиус сферы,  $k_{pl} = \omega_{pl}/c$ ,  $\omega_{pl}$  — плазменная частота,  $c$  — скорость света. В [8] к условию малости поперечного размера плазменного цилиндра добавлено условие нарушения азимутальной симметрии излучения. Влияние анизотропии исследовано в [9] для плазменного цилиндра с аксиальным внешним магнитным полем, где показано, что в отличие от изотропного случая для излучения из анизотропного плазменного окружения характерна не одна, а две резонансные частоты, положение которых и характеристики резонанса существенно зависят от величины магнитного поля.

Настоящая работа направлена на исследование влияния ориентации магнитного поля, наряду с его величиной, на усиление излучения антенн, окружённых плазменной оболочкой с осевой симметрией. Рассматривается более сложный случай влияния анизотропного плазменного цилиндра на электромагнитное поле точечного источника при ориентации внешнего магнитного поля, не совпадающей с направлениями осей цилиндрической системы координат. Считается, что вектор магнитного поля расположен в плоскости поперечного сечения цилиндра. Для уточнения влияния на электромагнитное поле взаимной ориентации источника и внешнего магнитного поля рассматриваются два случая расположения электрического диполя: вдоль ( $\Gamma\mathcal{E}D_x$ ) и поперёк ( $\Gamma\mathcal{E}D_y$ ) магнитного поля.

Решение задачи будем строить в цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$ , начало которой совместим с источником, а ось  $z$  направим вдоль оси цилиндра радиуса  $r_c$ . Вектор постоянного магнитного поля направим перпендикулярно оси цилиндра, вдоль оси  $x$ . Тогда тензор диэлектрической проницаемости плазмы, включающий ионную компоненту, будет зависеть от координаты  $\varphi$  следующим образом:

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon_{00}\hat{I} + \hat{\varepsilon}^{(I)}, \quad \hat{\varepsilon}^{(I)} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \cos^2 \varphi & -\varepsilon_{11} \sin \varphi \cos \varphi & -\varepsilon_{22} \sin \varphi \\ -\varepsilon_{11} \sin \varphi \cos \varphi & \varepsilon_{11} \sin^2 \varphi & -\varepsilon_{22} \cos \varphi \\ \varepsilon_{22} \sin \varphi & \varepsilon_{22} \cos \varphi & 0 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где  $\hat{I}$  — единичная диагональная матрица,

$$\varepsilon_{00} = 1 - \frac{X(U - \tilde{Y}Y)}{(U - \tilde{Y}Y)^2 - (\tilde{Y} - Y)^2}, \quad \varepsilon_{11} = \frac{XY}{U} \frac{Y + \tilde{Y}(U - \tilde{Y}Y)}{(U - \tilde{Y}Y)^2 - (\tilde{Y} - Y)^2},$$

$$\epsilon_{22} = \frac{iXY}{(U - \tilde{Y}Y)^2 - (\tilde{Y} - Y)^2},$$

$$X = \frac{\omega_{pl}^2}{\omega^2}, \quad U = 1 + \frac{i\nu}{\omega}, \quad Y = \frac{\omega_H}{\omega}, \quad \tilde{Y} = \frac{\Omega_H}{\omega}, \quad \omega_H = \frac{|e|\mu_0 H}{m}, \quad \omega_{pl}^2 = \frac{e^2 N_e}{m\epsilon_0},$$

$\epsilon_0$  и  $\mu_0$  — диэлектрическая и магнитная проницаемости вакуума,  $e$  и  $m$  — заряд и масса электрона,  $N_e$  — концентрация электронов,  $\omega_{pl}$  — электронная плазменная частота,  $\omega$  — частота излучателя,  $\omega_H$  и  $\Omega_H$  — гирочастоты электронов и ионов соответственно,  $\nu$  — эффективная частота соударений электронов. Условимся наряду с размерными использовать безразмерные геометрические переменные, которые будем отмечать чертой сверху:  $\bar{r} = kr$ ,  $\bar{z} = kz$ .

Воспользуемся в уравнениях Максвелла для компонент электромагнитного поля преобразованием Фурье по координатам  $\bar{z}$  и  $\varphi$  с помощью системы функций  $\exp(i\lambda\bar{z})$ ,  $\exp(im\varphi)$ . Отметим, что из-за наличия зависимости тензора диэлектрической проницаемости от азимутальной координаты система уравнений оказывается связанной по  $\varphi$ , и построение аналитического решения такой системы не представляется возможным.

Ограничимся рассмотрением азимутальных волн с индексами  $m = \pm 1$ . Это единственные волны, которые возбуждаются горизонтальным электрическим диполем, помещённым в начало цилиндрической системы координат, как в изотропном цилиндре, так и в анизотропном при аксиальном магнитном поле и с которыми в дальнейшем проводится сравнение полученных результатов. Предварительная оценка последовательного учёта следующей азимутальной волны с  $m = 2$  показывает, что её коэффициент возбуждения связан множителем  $kr_c$  с соответствующей величиной для азимутальной волны  $m = 1$  и оказывается малым при малых поперечных размерах цилиндра.

В приближении одной азимутальной волны ( $m = \pm 1$ ) система связанных дифференциальных уравнений для восьмикомпонентного вектора электромагнитного поля

$$\mathbf{W} = (i\bar{r}H_\varphi^+, E_z^+, i\bar{r}E_\varphi^+, H_z^+, i\bar{r}H_\varphi^-, E_z^-, i\bar{r}E_\varphi^-, H_z^-)^T_{m\lambda},$$

где верхние знаки плюс и минус означают, что указанные компоненты относятся к волнам с азимутальными индексами  $m = +1$  и  $m = -1$  соответственно, а индекс T означает транспонирование, после преобразований, исключающих радиальные компоненты поля, принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{W}} &= \hat{\mathbf{B}}\mathbf{W} + \mathbf{f}_i, \quad \hat{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{B}}_{11} & \hat{\mathbf{B}}_{12} \\ \hat{\mathbf{B}}_{21} & \hat{\mathbf{B}}_{22} \end{pmatrix}, \\ \hat{\mathbf{B}}_{11} &= \begin{pmatrix} 0 & \bar{r}(\epsilon_{00} - 1/\bar{r}^2) & -i\lambda/\bar{r} & 0 \\ -(1 - \lambda^2\bar{a})/\bar{r} & 0 & -\lambda b\bar{b}/\bar{r} & -i\lambda\bar{a}/\bar{r} \\ i\lambda\bar{a}/\bar{r} & 0 & b\bar{b}/\bar{r} & -\bar{r}(1 - \bar{a}/\bar{r}^2) \\ -i\lambda b\bar{b}/\bar{r} & i\lambda/\bar{r} & (a - \lambda^2 - \bar{a}b^2)/\bar{r} & -b\bar{b}/\bar{r} \end{pmatrix}, \\ \hat{\mathbf{B}}_{12} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda^2\bar{b}/\bar{r} & 0 & i\lambda b\bar{a}/\bar{r} & i\lambda\bar{b}/\bar{r} \\ i\lambda\bar{b}/\bar{r} & 0 & -b\bar{a}/\bar{r} & -\bar{b}/\bar{r} \\ -i\lambda b\bar{a}/\bar{r} & 0 & (b + \bar{b}b^2)/\bar{r} & b\bar{a}/\bar{r} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_i = \frac{Z_0}{ik} (\mathbf{f}_{i1}, \mathbf{f}_{i2}), \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\mathbf{f}_{i1} = (0, i\lambda (aj_{er}^+ + bj_{er}^-), -(aj_{er}^+ + bj_{er}^-), b(bj_{er}^+ + aj_{er}^-))^T,$$

$$\mathbf{f}_{i2} = (0, i\lambda (bj_{er}^+ + aj_{er}^-), (bj_{er}^+ + aj_{er}^-), -b(aj_{er}^+ + bj_{er}^-))^T,$$

$$j_{er} = \frac{Ih_d}{4\pi^2\Delta} \frac{\delta(r)}{r}, \quad a = \epsilon_{00} - 2b, \quad b = -\epsilon_{11}/4, \quad \Delta = a^2 - b^2, \quad \bar{a} = a/\Delta, \quad \bar{b} = b/\Delta,$$

$Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = 120\pi$  Ом,  $h_d$  — действующая длина вибратора,  $I$  — ток на зажимах антенны; матрицы  $\hat{\mathbf{B}}_{22}$ ,  $\hat{\mathbf{B}}_{21}$  определяются выражениями для  $\hat{\mathbf{B}}_{11}$ ,  $\hat{\mathbf{B}}_{12}$  соответственно с изменёнными знаками при  $i$ . Отметим, что для источника ГЭД<sub>x</sub>  $j_{er}^+ = j_{er}^- = j_{er}$ . Для ортогонального ему ГЭД<sub>y</sub> компоненты вектора, связанного с источником, имеют вид

$$\mathbf{f}_{i1} = (0, 0, 0, ij_{e\varphi})^T, \quad \mathbf{f}_{i2} = (0, 0, 0, ij_{e\varphi})^T,$$

где  $j_{e\varphi} = j_{er}$ . Радиальные компоненты поля определяются следующими выражениями:

$$aE_r^+ - bE_r^- = -\frac{H_z^+}{\bar{r}} + \lambda H_\varphi^+ + ibE_\varphi^- + \frac{Z_0 j_{er}^+}{ik}, \quad H_r^+ = \frac{E_z^+}{\bar{r}} - \lambda E_\varphi^+,$$

$$aE_r^- - bE_r^+ = \frac{H_z^-}{\bar{r}} + \lambda H_\varphi^- - ibE_\varphi^+ + \frac{Z_0 j_{er}^-}{ik}, \quad H_r^- = -\frac{E_z^-}{\bar{r}} - \lambda E_\varphi^-.$$

Решение системы связанных уравнений (2) может быть построено с помощью степенных рядов. Для этого представим матрицу  $\hat{\mathbf{B}}$  в правой части уравнения (2) в виде разложения:

$$\hat{\mathbf{B}} = \bar{r}^{-1}\hat{\mathbf{B}}_{-1} + \bar{r}\hat{\mathbf{B}}_1,$$

тогда решение построим в виде

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}^{(0)}\bar{r}^S + \mathbf{W}^{(1)}\bar{r}^{S+2} + \dots, \quad (3)$$

где  $S$  и  $\mathbf{W}^{(0)}$  — собственные числа и собственные векторы матрицы  $\hat{\mathbf{B}}_{-1}$ .

Ограничимся в дальнейшем учётом лишь квадратичной поправки к собственным векторам, и тем самым построим решение для «тонкого» цилиндра (при условии  $\bar{r}^2 \ll 1/\max|\epsilon_{00,11}|$ ). Отметим, что проведённые ранее оценки решения для «толстого» цилиндра [9] показали отсутствие усиления поля, что соответствует генезису эффекта, относящемуся к электростатике [9], и подчёркивает определяющую роль плазменных образований малых размеров для усиления поля.

Собственные числа, собственные векторы и поправки  $\mathbf{W}^{(1)}$  к последним определяются после подстановки решения (3) в (2) с помощью уравнений

$$(S - \hat{\mathbf{B}}_{-1})\mathbf{W}^{(0)} = 0, \quad (S + 2 - \hat{\mathbf{B}}_{-1})\mathbf{W}^{(1)} = \hat{\mathbf{B}}_1\mathbf{W}^{(0)}. \quad (4)$$

Собственные числа  $S$  в (4) оказываются целыми:  $S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = m$ ,  $S_5 = S_6 = S_7 = S_8 = -m$ , а собственные векторы, расположенные в том же порядке, что и собственные числа, имеют вид

$$\hat{\mathbf{E}} = \begin{pmatrix} a/\bar{a} & -i\lambda/\bar{a} & 0 & 0 & -(1 - \lambda^2\bar{a}) & i\lambda\bar{a} & 2\lambda^2\bar{b} & -2i\lambda\bar{b} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -i\lambda/\bar{a} & -1/\bar{a} & 0 & 0 & i\lambda\bar{a} & -\bar{a} & 2i\lambda\bar{b} & 2\bar{b} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a/\bar{a} & i\lambda/\bar{a} & 2\lambda^2\bar{b} & 2i\lambda\bar{b} & -(1 - \lambda^2\bar{a}) & -i\lambda\bar{a} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i\lambda/\bar{a} & -1/\bar{a} & -2i\lambda\bar{b} & 2\bar{b} & -i\lambda\bar{a} & -\bar{a} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где

$$\bar{a} = \bar{a}/\bar{\Delta}, \quad \bar{b} = b/\bar{\Delta}, \quad \bar{\Delta} = 4b^2 - \bar{a}^2, \quad \bar{a} = a - \lambda^2.$$



Из полученных собственных векторов (5) сконструируем матричную функцию Грина  $\hat{K}(r, x)$ , диагональные элементы которой при  $r = x$  терпят разрыв:

$$\hat{K}(r + 0, r) - \hat{K}(r - 0, r) = \hat{E}, \quad (6)$$

и определим падающее поле (решение с особенностью вида  $1/r$  при  $r \rightarrow 0$ )

$$\mathbf{W}_{m\lambda}^{\text{пад}} = \int_0^{\infty} \hat{K}(r, x) \mathbf{f}_i(x) dx. \quad (7)$$

Каждый столбец  $\mathbf{K}_i$  функции Грина строится из собственных векторов  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_8$  согласно определению

$$\mathbf{K}_i = \begin{cases} \sum_{n=1}^4 C_n \mathcal{E}_n, & r > x; \\ \sum_{n=5}^8 C_n \mathcal{E}_n, & r < x. \end{cases}$$

Для вычисления коэффициентов  $C_i$  из уравнения (6) на границе  $r = x$  нам потребуется определитель матрицы (5), который равен  $-16\Delta/(\tilde{a}^2\tilde{\Delta})$ , где  $\Delta = a^2 - b^2$ . В результате получим, что матричная функция Грина, каждый элемент которой является результатом вычисления определителя  $8 \times 8$ , имеет вид

$$\hat{K} = \frac{x}{2r} \begin{pmatrix} 0 & 1 & i\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i\lambda b^2/\Delta & i\lambda a/\Delta & 0 & 0 & -i\lambda ab/\Delta & -i\lambda b/\Delta \\ 0 & 0 & 1 - b^2/\Delta & -a/\Delta & 0 & 0 & ab/\Delta & b/\Delta \\ 0 & -i\lambda & -\tilde{a} + ab^2/\Delta & a^2/\Delta & 0 & 0 & -a^2b/\Delta & -ab/\Delta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -i\lambda & 0 \\ 0 & 0 & i\lambda ab/\Delta & i\lambda b/\Delta & 0 & 1 & -i\lambda b^2/\Delta & -i\lambda a/\Delta \\ 0 & 0 & ab/\Delta & b/\Delta & 0 & 0 & 1 - b^2/\Delta & -a/\Delta \\ 0 & 0 & -a^2b/\Delta & -ab/\Delta & 0 & i\lambda & -\tilde{a} + ab^2/\Delta & a^2/\Delta \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Элементы первого и пятого столбцов в  $\hat{K}$  заменены условными нулями, поскольку связанный с источником вектор, стоящий в правой части системы дифференциальных уравнений (2), имеет нулевые элементы в первой и пятой строках. Найденное с помощью (8) в результате вычисления интеграла (7) падающее поле в нулевом приближении по малому параметру  $k_{p1}r_c$  для  $\Gamma\mathcal{E}D_x$  имеет вид

$$\mathbf{W}_{m\lambda}^{\text{пад}} = Ih_d \frac{iZ_0}{8\pi^2\tilde{r}} \frac{a+b}{\Delta} (0, -i\lambda, 1, -a, 0, -i\lambda, -1, a)^T. \quad (9)$$

Для ортогонального источника  $\Gamma\mathcal{E}D_y$  аналогично находим

$$\mathbf{W}_{m\lambda}^{\text{пад}} = -Ih_d \frac{Z_0}{8\pi^2\tilde{r}} \frac{a-b}{\Delta} (0, -i\lambda, 1, -a, 0, i\lambda, 1, -a)^T. \quad (10)$$

Отражённое поле представляется с помощью собственных векторов  $\mathcal{E}_5, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8$ , (5), умноженных на коэффициенты отражения  $R_{\parallel}^+, R_{\perp}^+, R_{\parallel}^-, R_{\perp}^-$  соответственно. Проходящее поле во внешней среде с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_2$  записывается в виде

$$\begin{aligned} E_z^{m\lambda} &= \pi \sqrt{\epsilon_2} D_{\parallel} H_m^{(1)}(\tilde{r}\sqrt{\epsilon_2}), & H_{\varphi}^{m\lambda} &= \frac{\pi\epsilon_2}{i\tilde{r}\sqrt{\epsilon_2}} \left[ -\tilde{r}\sqrt{\epsilon_2} D_{\parallel} \dot{H}_m^{(1)}(\tilde{r}\sqrt{\epsilon_2}) - \frac{i\pi\lambda}{\epsilon_2} D_{\perp} H_m^{(1)}(\tilde{r}\sqrt{\epsilon_2}) \right], \\ H_z^{m\lambda} &= \pi \sqrt{\epsilon_2} D_{\perp} H_m^{(1)}(\tilde{r}\sqrt{\epsilon_2}), & E_{\varphi}^{m\lambda} &= \frac{\pi}{i\tilde{r}\sqrt{\epsilon_2}} \left[ \tilde{r}\sqrt{\epsilon_2} D_{\perp} \dot{H}_m^{(1)}(\tilde{r}\sqrt{\epsilon_2}) - i\pi\lambda D_{\parallel} H_m^{(1)}(\tilde{r}\sqrt{\epsilon_2}) \right], \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\bar{\varepsilon}_2 = \varepsilon_2 - \lambda^2$ ,  $\text{Im} \sqrt{\bar{\varepsilon}_2} \geq 0$ ;  $H_m^{(1)}(z)$  и  $\dot{H}_m^{(1)}(z)$  — функция Ханкеля первого рода порядка  $m$  и её производная по аргументу,  $D_{\parallel}$  и  $D_{\perp}$  — коэффициенты прохождения волн ТМ- и ТЕ-поляризации с азимутальным индексом  $m$ , которые в дальнейшем будут обозначаться  $D_{\parallel}^{\pm}$  и  $D_{\perp}^{\pm}$  в соответствии со значениями  $m = \pm 1$ .

Подставим полученные выражения для падающего (9), (10), отражённого и проходящего (11) полей в граничные условия непрерывности тангенциальных компонент электромагнитного поля на поверхности цилиндра и получим следующую систему линейных уравнений для определения коэффициентов отражения и прохождения через стенки анизотропного цилиндра:

$$\begin{aligned} \frac{Z^+ \bar{r}_c}{\bar{\varepsilon}_2} \tilde{D}_{\parallel}^+ H_1^{(1)} - i\lambda \frac{\bar{r}_c}{\bar{\varepsilon}_2} \tilde{D}_{\perp}^+ H_1^{(1)} - R_{\parallel}^+ (1 - \lambda^2 \bar{a}) + R_{\perp}^+ i\lambda \bar{a} + 2R_{\parallel}^- \bar{b} \lambda^2 - 2R_{\perp}^- i\lambda \bar{b} &= 0, \\ -i\lambda \frac{\bar{r}_c}{\bar{\varepsilon}_2} \tilde{D}_{\parallel}^+ H_1^{(1)} + \frac{Z^+ \bar{r}_c}{\bar{\varepsilon}_2} \tilde{D}_{\perp}^+ H_1^{(1)} + R_{\parallel}^+ i\lambda \bar{a} - R_{\perp}^+ \bar{a} + 2R_{\parallel}^- \bar{b} i\lambda + 2R_{\perp}^- \bar{b} &= 1^*, \\ \tilde{D}_{\parallel}^+ \bar{r}_c H_1^{(1)} + R_{\parallel}^+ &= -i\lambda^*, \quad \tilde{D}_{\perp}^+ \bar{r}_c H_1^{(1)} + R_{\perp}^+ = -a^*, \\ -\frac{Z^- \bar{r}_c}{\bar{\varepsilon}_2} \tilde{D}_{\parallel}^- H_{-1}^{(1)} + i\lambda \frac{\bar{r}_c}{\bar{\varepsilon}_2} \tilde{D}_{\perp}^- H_{-1}^{(1)} + 2R_{\parallel}^+ \lambda^2 \bar{b} + 2R_{\perp}^+ i\lambda \bar{b} - R_{\parallel}^- (1 - \bar{a} \lambda^2) - R_{\perp}^- i\lambda \bar{a} &= 0, \\ i\lambda \frac{\bar{r}_c}{\bar{\varepsilon}_2} \tilde{D}_{\parallel}^- H_{-1}^{(1)} + \frac{Z^- \bar{r}_c}{\bar{\varepsilon}_2} \tilde{D}_{\perp}^- H_{-1}^{(1)} - 2R_{\parallel}^+ i\lambda \bar{b} + 2R_{\perp}^+ \bar{b} - R_{\parallel}^- i\lambda \bar{a} - R_{\perp}^- \bar{a} &= -1^*, \\ \tilde{D}_{\parallel}^- \bar{r}_c H_{-1}^{(1)} + R_{\parallel}^- &= -i\lambda^*, \quad \tilde{D}_{\perp}^- \bar{r}_c H_{-1}^{(1)} + R_{\perp}^- = a^*, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $Z^{\pm} = \bar{r}_c \sqrt{\bar{\varepsilon}_2} \dot{H}_1^{(1)}/H_1^{(1)}$ ,  $\tilde{D}_{\parallel, \perp}^{\pm} = \pi \sqrt{\bar{\varepsilon}_2} D_{\parallel, \perp}^{\pm}$ ; звёздочка у элементов правых частей означает, что эти величины должны быть умножены на  $i(a+b)/\Delta$  для  $\Gamma\mathcal{E}D_x$  и на  $(a-b)/\Delta$  для  $\Gamma\mathcal{E}D_y$  (множитель  $Ih_d Z_0/(8\pi^2)$  мы временно опускаем, полагая его равным единице). Используя первый член степенного разложения функций Ханкеля, решение системы уравнений (12), определитель которой равен

$$-\frac{\pi^4}{4\bar{\varepsilon}_2^4 \Delta} (a+1-2b)(a+1+2b),$$

приводит к следующим выражениям для коэффициентов прохождения:

$$D_{\parallel}^{\pm} = \pm i\lambda \frac{a+1+2b}{(a+1)^2 - (2b)^2}, \quad D_{\perp}^{\pm} = \frac{a+1+2b}{(a+1)^2 - (2b)^2}$$

для  $\Gamma\mathcal{E}D_x$  и

$$D_{\parallel}^{\pm} = \lambda \frac{a+1-2b}{(a+1)^2 - (2b)^2}, \quad D_{\perp}^{\pm} = \mp i \frac{a+1-2b}{(a+1)^2 - (2b)^2}$$

для  $\Gamma\mathcal{E}D_y$ . Как и в изотропном случае, для коэффициентов прохождения выполняются соотношения  $D_{\parallel}^+ = -D_{\parallel}^-$ ,  $D_{\perp}^+ = D_{\perp}^-$  (для  $\Gamma\mathcal{E}D_x$ ) и  $D_{\parallel}^+ = D_{\parallel}^-$ ,  $D_{\perp}^+ = -D_{\perp}^-$  (для  $\Gamma\mathcal{E}D_y$ ), которые совпадают с соответствующими выражениями в [9] при  $Y = 0$ . Подставим полученные выражения для коэффициентов прохождения в выражения для компонент электромагнитного поля во внешней среде и вычислим интегралы по  $\lambda$  в дальней зоне ( $|\bar{r} \sqrt{\bar{\varepsilon}_2}| \gg 1$ ) методом наискорейшего спуска в седловой точке  $\lambda = \cos \theta$ , где  $\theta$  — угол между осью  $z$  и направлением из источника в точку наблюдения. В результате получим следующие выражения для компонент прошедшего электромагнитного поля:

$$\begin{aligned} E_z &= -2k \frac{e^{ikR}}{R} \cos \theta \sin \theta \cos \varphi D_{\parallel}^m, & H_z &= -2k \frac{e^{ikR}}{R} i \sin \theta \sin \varphi D_{\perp}^p; \\ E_r &= 2k \frac{e^{ikR}}{R} \cos^2 \theta \cos \varphi D_{\parallel}^m, & H_r &= 2k \frac{e^{ikR}}{R} i \cos \theta \sin \varphi D_{\perp}^p; \\ H_{\varphi} &= 2k \frac{e^{ikR}}{R} \cos \theta \cos \varphi D_{\parallel}^m, & E_{\varphi} &= -2k \frac{e^{ikR}}{R} i \sin \varphi D_{\perp}^p. \end{aligned} \quad (13a)$$

для  $\Gamma\mathcal{E}D_x$  и

$$\begin{aligned} E_z &= -2k \frac{e^{ikR}}{R} i \cos \theta \sin \theta \sin \varphi D_{\parallel}^p, & H_z &= -2k \frac{e^{ikR}}{R} \sin \theta \cos \varphi D_{\perp}^m; \\ E_r &= 2k \frac{e^{ikR}}{R} i \cos^2 \theta \sin \varphi D_{\parallel}^p, & H_r &= 2k \frac{e^{ikR}}{R} \cos \theta \cos \varphi D_{\perp}^m; \\ H_{\varphi} &= 2k \frac{e^{ikR}}{R} i \cos \theta \sin \varphi D_{\parallel}^p, & E_{\varphi} &= -2k \frac{e^{ikR}}{R} \cos \varphi D_{\perp}^m \end{aligned} \quad (136)$$

для  $\Gamma\mathcal{E}D_y$ . Здесь  $k = \omega/c$  — волновое число в вакууме,  $R = \sqrt{r^2 + z^2}$ . В (13) введены следующие обозначения для суммарных и разностных коэффициентов прохождения:  $\cos \theta D_{\parallel}^{p,m} = D_{\parallel}^+ \pm D_{\parallel}^-$ ,  $D_{\perp}^{p,m} = D_{\perp}^+ \pm D_{\perp}^-$ . Выражения для коэффициентов прохождения ТМ- и ТЕ-волн  $D_{\parallel}^{m(p)}$  и  $iD_{\perp}^{p(m)}$  одинаковы, поэтому будем их обозначать  $D_{x(y)}$ .

Как следует из (13), для вектора магнитного поля, расположенного в плоскости поперечного сечения цилиндра, компоненты электромагнитного поля выглядят подобно найденным для случая изотропного плазменного цилиндра [8], в отличие от аксиального магнитного поля [9], воздействие которого приводит к появлению дополнительного излучения от эквивалентного горизонтального электрического диполя, ортогонального исходному.

С учётом вклада в (12) квадратичной поправки, содержащей малый поперечный размер цилиндра, для коэффициентов прохождения полей  $\Gamma\mathcal{E}D_x$  и  $\Gamma\mathcal{E}D_y$  получаем

$$D_x = \frac{2i}{1 + a - 2b + d(a - 2b)}, \quad D_y = \frac{2}{1 + a + 2b + d(a + 2b)}, \quad (14)$$

где  $d = (kr_c)^2 [C]/2$ ,  $[C] = 2C - i\pi + 2 \ln[(\bar{r}_c \sqrt{\epsilon_2})/2]$ ,  $C$  — постоянная Эйлера. В случае отсутствия магнитного поля ( $Y = 0$ ) оба выражения (14) переходят в известные коэффициенты прохождения [8] для изотропного плазменного цилиндра.

Исследуем полученные выражения (14) в зависимости от частоты, предварительно представив их через исходные параметры задачи согласно (2) и (1)

$$a - 2b = 1 - \frac{X(U - \mu Y^2)}{(U - \mu Y^2)^2 - Y^2} + \frac{XY^2}{U[(U - \mu Y^2)^2 - Y^2]}, \quad a + 2b = 1 - \frac{X(U - \mu Y^2)}{(U - \mu Y^2)^2 - Y^2},$$

где  $\mu = \bar{Y}/Y$ . В результате получим

$$D_x = \frac{i\tilde{\Delta}_1}{\Delta_{1x} + i\tilde{\nu}_{pl}\Delta_{2x}/\sqrt{\tilde{X}} + i\delta\Delta_{ax}/2}, \quad D_y = \frac{\tilde{\Delta}_1}{\Delta_{1y} + i\tilde{\nu}_{pl}\Delta_{2y}/\sqrt{\tilde{X}} + i\delta\Delta_{ay}/2}, \quad (15)$$

где

$$\tilde{\Delta}_1 = (\tilde{X} - \mu v)^2 - \tilde{X}v,$$

$$\Delta_{1x} = \tilde{\Delta}_1 - (\tilde{X} - \mu v)/2 + v/2, \quad \Delta_{2x} = \tilde{\Delta}_1 - (2\tilde{X} - \mu v)/2 + 2\tilde{X}(\tilde{X} - \mu v),$$

$$\Delta_{ax} = \tilde{\Delta}_1 - (\tilde{X} - \mu v) + v, \quad \Delta_{ay} = \tilde{\Delta}_1 - (\tilde{X} - \mu v),$$

$$\Delta_{1y} = \tilde{\Delta}_1 - (\tilde{X} - \mu v)/2, \quad \Delta_{2y} = -\tilde{X}/2 + 2\tilde{X}(\tilde{X} - \mu v),$$

$\tilde{X} = \omega^2/\omega_{pl}^2$ ,  $v = \omega_H^2/\omega_{pl}^2$ ,  $\tilde{\nu}_{pl} = \nu/\omega_{pl}$ ,  $\delta = -\pi\tilde{X}\tilde{a}_{pl}^2/2$ ,  $\tilde{a}_{pl} = \omega_{pl}r_c/c$ . Отметим, что знаменатель коэффициентов прохождения (15) состоит из трёх слагаемых, первое из которых не зависит от потерь, второе определяется столкновительными (тепловыми) потерями, а третье — потерями на излучение.

Таким образом, коэффициенты прохождения (15) записаны в виде, подготовленном для последовательного анализа влияния потерь на  $D_x, D_y$ .

В отсутствие потерь коэффициенты прохождения (15) принимают максимальное значение на частоте, для которой  $\Delta_{1x,1y} = 0$ :

$$(\tilde{X} - \mu v)^2 - \tilde{X}(v + 1/2) + v(1 + \mu)/2 = 0, \quad (\tilde{X} - \mu v)^2 - \tilde{X}(v + 1/2) + v\mu/2 = 0. \quad (16)$$

Условия резонанса (16) при  $v = 0$  переходят в известное условие [8] в изотропном случае:  $\tilde{X} = 1/2$ , т. е.  $\omega = \omega_{pl}/\sqrt{2}$ . Каждое из уравнений (16) имеет два корня, которые мы проанализируем в зависимости от величины магнитного поля. Для слабого магнитного поля ( $v \ll 1$ ), когда гирочастота электронов намного меньше плазменной, оба корня имеют вид

$$\begin{aligned} (\omega_{1x}^{(0)})^2 &= \omega_{pl}^2(1 - 2v)/2, & (\omega_{2x}^{(0)})^2 &= \omega_H^2(1 - 4\mu v); \\ (\omega_{1y}^{(0)})^2 &= \omega_{pl}^2(1 + 2v)/2, & (\omega_{2y}^{(0)})^2 &= \omega_H \Omega_H(1 - 2v). \end{aligned} \quad (17)$$

Как следует из (17), для слабого магнитного поля высокочастотный резонанс для обоих излучателей находится вблизи значения, найденного для изотропного случая, смещаясь от него в разные стороны в зависимости от ориентации электрического диполя. Положение низкочастотного резонанса зависит от взаимной ориентации источника и вектора магнитного поля и находится вблизи гирочастоты электронов для ГЭД<sub>x</sub> и вблизи гибридной гирочастоты для ГЭД<sub>y</sub>.

В случае сильного магнитного поля, когда гирочастота электронов много больше плазменной частоты ( $1 \ll v \ll 1/\mu$ ), корни выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} (\omega_{1x}^{(0)})^2 &= \omega_H^2(1 - 1/(2v)), & (\omega_{2x}^{(0)})^2 &= \omega_{pl}^2(1 - 2\mu)/2; \\ (\omega_{1y}^{(0)})^2 &= \omega_H^2(1 + 1/(2v)), & (\omega_{2y}^{(0)})^2 &= \mu\omega_{pl}^2(1 - 1/(2v))/2. \end{aligned} \quad (18)$$

Из (18) следует, что в случае сильного магнитного поля высокочастотный резонанс для обоих излучателей находится вблизи гирочастоты электронов, а положение низкочастотного резонанса зависит от ориентации источника по отношению к магнитному полю: для ГЭД<sub>x</sub> низкочастотный резонанс находится вблизи изотропной резонансной частоты, а для ГЭД<sub>y</sub> почти на два порядка меньше её.

Таким образом, как и для аксиального магнитного поля [9], высокочастотный резонанс с ростом магнитного поля перемещается от изотропного значения до гирочастоты электронов, так что высокочастотная ветвь резонанса слабо зависит от взаимной ориентации источника и направления магнитного поля. Напротив, положение ветви низкочастотного резонанса полностью определяется взаимной ориентацией излучателя и вектора магнитного поля.

Коэффициенты прохождения, вычисленные на резонансных частотах, имеют вид

$$\begin{aligned} |D_{1x}| &= \frac{1}{\sqrt{2}\tilde{\nu}_{pl}(1 - 3v) + \pi\tilde{a}_{pl}^2(1 + 2v)/8}, & |D_{2x}| &= \frac{v}{\tilde{\nu}_{pl}/(2\mu\sqrt{v}) + \pi\tilde{a}_{pl}^2v/8}; \\ |D_{1y}| &= \frac{1}{\sqrt{2}\tilde{\nu}_{pl}(1 + 3v) + \pi\tilde{a}_{pl}^2(1 + 2v)/8}, & |D_{2y}| &= \frac{v\sqrt{v}}{\tilde{\nu}_{pl}/(2\sqrt{\mu}) + \pi\tilde{a}_{pl}^2v^2\sqrt{v}/8} \end{aligned} \quad (19)$$

для слабого магнитного поля и

$$\begin{aligned} |D_{1x}| &= \frac{1}{4\tilde{\nu}_{pl}\sqrt{v} + \pi\tilde{a}_{pl}^2v/4}, & |D_{2x}| &= \frac{1}{\sqrt{2}\tilde{\nu}_{pl}(1 + \mu) + \pi\tilde{a}_{pl}^2(1 + 2\mu)/8}; \\ |D_{1y}| &= \frac{1}{4\tilde{\nu}_{pl}\sqrt{v} + \pi\tilde{a}_{pl}^2v/4}, & |D_{2y}| &= \frac{1}{\tilde{\nu}_{pl}/(v\sqrt{2\mu}) + \mu\pi\tilde{a}_{pl}^2(1 - 1/(2v))/8} \end{aligned} \quad (20)$$

— для сильного.

В случае слабого магнитного поля и высокочастотного резонанса коэффициенты прохождения  $|D_{1x,1y}|$  (19) находятся вблизи резонансного значения для изотропного плазменного цилиндра [8], которое достигает нескольких порядков для малых потерь в плазме ( $\tilde{\nu}_{pl} \ll 1$ ,  $\tilde{a}_{pl}^2 \ll 1$ ). Для низкочастотного резонанса коэффициенты прохождения  $|D_{2x,2y}|$  с ростом слабого магнитного поля нарастают от нуля до значения, не превосходящего коэффициент прохождения в случае изотропной плазмы.

В случае сильного магнитного поля и высокочастотного резонанса коэффициенты прохождения (20) и соответствующие коэффициенты в [9] слабо зависят от взаимной ориентации источника и магнитного поля и остаются меньше резонансного значения для изотропного плазменного цилиндра. Для низкочастотного резонанса и ориентации горизонтального электрического диполя по нормали к вектору магнитного поля значение  $|D_{2y}|$  (20) значительно превышает коэффициент прохождения для изотропной плазмы, оставаясь меньше соответствующего значения для аксиального магнитного поля [9] на своей резонансной частоте.

С учётом малых потерь резонансная частота оказывается комплексной и определяется, например, для  $\omega_{1x}$  согласно [8] и (14) следующим образом:

$$\omega_{1x}^{(1)} = \omega_{1x}^{(0)} - \Delta_{11} / \left( \frac{\partial \Delta_{1x}}{\partial \omega} \right) \Big|_{\omega^{(0)}}, \quad \Delta_{11} = \frac{i\tilde{\nu}_{pl}}{\sqrt{X}} \Delta_{2x} + \frac{i\delta}{2} \Delta_{ax}. \quad (21)$$

Полоса пропускания (определённая при модуле коэффициента прохождения, составляющем  $1/\sqrt{2}$  от максимального) совпадает [7] с мнимой частью резонансной частоты (21). Так что относительная полоса пропускания на двух резонансных частотах имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\text{Im} \omega_{1x}^{(1)}}{\omega_{1x}^{(0)}} &= \frac{\tilde{\nu}_{pl}}{\sqrt{2}} (1 - \nu) + \frac{\pi \tilde{a}_{pl}^2}{16} (1 + 4\nu), & \frac{\text{Im} \omega_{2x}^{(1)}}{\omega_{2x}^{(0)}} &= \frac{\tilde{\nu}_{pl}}{\sqrt{\nu}} + \frac{\pi \tilde{a}_{pl}^2}{4} \mu \nu; \\ \frac{\text{Im} \omega_{1y}^{(1)}}{\omega_{1y}^{(0)}} &= \frac{\tilde{\nu}_{pl}}{\sqrt{2}} (1 + \nu) + \frac{\pi \tilde{a}_{pl}^2}{16} (1 + 2\nu), & \frac{\text{Im} \omega_{2y}^{(1)}}{\omega_{2y}^{(0)}} &= \frac{\tilde{\nu}_{pl}}{2\sqrt{\mu\nu}} + \frac{\pi \tilde{a}_{pl}^2}{4} \mu \nu^2 \end{aligned}$$

для слабого поля и

$$\begin{aligned} \frac{\text{Im} \omega_{1x}^{(1)}}{\omega_{1x}^{(0)}} &= \frac{\tilde{\nu}_{pl}}{\sqrt{\nu}} + \frac{\pi \tilde{a}_{pl}^2}{16} \left( 1 + \frac{1}{2\nu} \right), & \frac{\text{Im} \omega_{2x}^{(1)}}{\omega_{2x}^{(0)}} &= \frac{\tilde{\nu}_{pl}}{\sqrt{2}} (1 + \mu) + \frac{\pi \tilde{a}_{pl}^2}{16} (1 + 2\mu); \\ \frac{\text{Im} \omega_{1y}^{(1)}}{\omega_{1y}^{(0)}} &= \frac{\tilde{\nu}_{pl}}{\sqrt{\nu}} + \frac{\pi \tilde{a}_{pl}^2}{16} \left( 1 - \frac{1}{2\nu} \right), & \frac{\text{Im} \omega_{2y}^{(1)}}{\omega_{2y}^{(0)}} &= \frac{\tilde{\nu}_{pl}}{2\nu\sqrt{2\mu}} + \mu \frac{\pi \tilde{a}_{pl}^2}{16} \end{aligned}$$

для сильного.

Как следует из приведённых выше выражений, влияние слабого магнитного поля на полосу пропускания для высокочастотного резонанса имеет вид малой поправки для обеих ориентаций электрического диполя. Для низкочастотного резонанса полоса существенно зависит от магнитного поля, и для ГЭД<sub>y</sub> может быть значительно шире полосы для изотропной плазменной оболочки (в последнем случае ширина полосы на несколько порядков меньше резонансной частоты) за счёт возрастающего вклада тепловых потерь.

Для сильного магнитного поля для обоих излучателей ширина полосы высокочастотного резонанса примерно одинакова и может быть меньше полосы в случае изотропной плазмы за счёт уменьшающегося вклада тепловых потерь. Для более низкочастотного резонанса для излучателя ГЭД<sub>y</sub> полоса становится существенно меньше, чем в случае изотропной плазменной оболочки, оставаясь при этом

шире, чем полоса низкочастотного резонанса для такого же по величине аксиального магнитного поля [9].

Плотность потока мощности рассматриваемого вибратора, окружённого анизотропной плазмой, имеет вид

$$\begin{aligned} S_{Rx} &= \left( \frac{Ih_d}{\omega} \right)^2 \frac{\omega k^3}{32\pi^2 \varepsilon_0 R^2} |D_x|^2 (\cos^2 \theta \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi), \\ S_{Ry} &= \left( \frac{Ih_d}{\omega} \right)^2 \frac{\omega k^3}{32\pi^2 \varepsilon_0 R^2} |D_y|^2 (\cos^2 \theta \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi). \end{aligned} \quad (22)$$

Как следует из (22), диаграмма направленности горизонтального вибратора, окружённого плазменным цилиндром с горизонтальным магнитным полем, имеет вид тора, как и в вакууме, тогда как для аксиального магнитного поля [9] с ростом его величины диаграмма может меняться от тора до эллипсоида.

Полная излучаемая мощность горизонтального электрического диполя, полученная в результате интегрирования (22) по поверхности сферы большого радиуса  $R$  (за исключением шаровых сегментов, вырезанных из сферы цилиндром, вклад потока через которые чрезвычайно мал в силу малости радиуса цилиндра), оказывается равной  $(P_{pl})_{x,y} = |D_{x,y}|^2 P_{\text{вак}}$ , где  $P_{\text{вак}}$  — полная мощность, излучаемая электрическим диполем в свободном пространстве при том же подводимом токе. Это выражение показывает также, во сколько раз при том же токе по сравнению с вакуумом меняется сопротивление излучения  $\Gamma_{\text{ЭД}}_{x,y}$ , покрытого замагниченной плазменной оболочкой. Как следует из (19), (20), в данном случае, как и для аксиального магнитного поля, существенный рост сопротивления излучения (по сравнению со случаем изотропной плазменной оболочки этот рост достигает нескольких порядков по сравнению с излучением в вакууме при том же подводимом токе) наблюдается для низкочастотного резонанса ( $\omega = \omega_{pl} \sqrt{\mu/2}$ ) в сильном магнитном поле для излучателя, ориентированного ортогонально магнитному полю.

Оценим добавку к реактансу излучателя при наличии границы плазменного объёма. Отметим, что входной импеданс  $Z$  излучателя, окружённого изотропной плазменной сферой малого радиуса  $r_s$  с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$ , как следует из приведённой в [10] формулы

$$Z \sim -Z_{pl} + \left( \frac{3}{2 + \varepsilon} \right)^2 + \frac{3i(\varepsilon - 1)}{k^3 r_s^3 \varepsilon (2 + \varepsilon)},$$

где  $Z_{pl}$  — входной импеданс в отсутствие границы, в случае резонанса, при  $\varepsilon = -2 + i \text{Im } \varepsilon$  ( $\text{Im } \varepsilon \ll 1$ ),

$$Z \sim -Z_{pl} - \frac{9}{(\text{Im } \varepsilon)^2} + \frac{9}{2k^3 r_s^3 \text{Im } \varepsilon} - \frac{3i}{2k^3 r_s^3}.$$

Видно, что мнимая часть поправочного слагаемого на порядок меньше вещественной. Более точное выражение для  $Z$  в резонансе, учитывающее квадратичную поправку по параметру  $kr_s$ , имеет вид

$$Z \sim -Z_{pl} + \frac{9\sigma}{2k^3 r_s^3 (\sigma^2 + 144k^4 r_s^4 / 25)} + \frac{3i}{2k^3 r_s^3} \frac{36k^2 r_s^2 / 5 - \sigma^2}{\sigma^2 + 144k^4 r_s^4 / 25}, \quad \sigma = 2k^3 r_s^3 + \text{Im } \varepsilon$$

и показывает, что реактивная часть может быть скомпенсирована выбором соответствующего размера плазменной оболочки, что облегчает согласование генератора с нагрузкой.

В случае цилиндрической оболочки соответствующая поправка в  $Z$  имеет аналогичный вид:

$$Z \sim -Z_{pl} + \left( \frac{2}{1 + \varepsilon} \right)^2 + \frac{4i}{\pi k^2 r_s^2} \frac{(\varepsilon - 1)}{\varepsilon (1 + \varepsilon)}.$$

В резонансе, при  $\epsilon = -1 + i \operatorname{Im} \epsilon$ , поправку можно представить как

$$Z \sim -Z_{\text{pl}} - \frac{4}{(\operatorname{Im} \epsilon)^2} + \frac{8}{\pi k^2 r_s^2 \operatorname{Im} \epsilon} - \frac{3i}{\pi k^2 r_s^2}.$$

Для последнего выражения справедливы те же рассуждения, которые были проведены в случае сферической оболочки. Так что для обеих форм плазменной оболочки резонансное излучение становится возможным и для генератора напряжения, что подтверждается экспериментальными работами [3, 4].

Излучение источника, окружённого анизотропным плазменным цилиндром, обладает следующими свойствами. Усиление излучения при неизменном подводимом токе, как и для изотропного случая, имеет место для малых радиусов цилиндра ( $k_{\text{pl}} r_c \ll 1$ ) и при нарушении азимутальной симметрии излучения. Для каждого значения внешнего магнитного поля коэффициенты прохождения в отличие от изотропного случая имеют две резонансные частоты, которые зависят как от направления, так и от величины внешнего магнитного поля. Взаимная ориентация излучателя и вектора внешнего магнитного поля слабо влияет на положение ветви высокочастотного резонанса и его характеристики и сильно на характеристики низкочастотного резонанса. При низкочастотном резонансе в сильном горизонтальном магнитном поле сопротивление излучения ГЭД<sub>y</sub>, оставаясь меньше, чем в аксиальном магнитном поле, существенно превосходит сопротивление излучения в случае изотропной плазменной оболочки. Диаграмма направленности горизонтального электрического диполя в аксиальном магнитном поле с ростом величины последнего меняется от тора до эллипсоида, а в горизонтальном поле не отличается от случая изотропной плазменной оболочки и имеет вид тора, как и в вакууме.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 01-02-17084).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пистолькорс А. А., Зими́на В. И. // Вопросы радиоэлектроники. Сер. общ.-техн. 1964. Т. 12, вып. 1. С. 3.
2. Акиндинов В. В., Ерёмин С. М., Киселёв С. И. и др. // Радиотехника и электроника. 1978. Т. 23, № 9. С. 1 807.
3. Messiaen A. M., Vanderplas P. E. // Electron. Lett. 1967. V. 3, No. 1. P. 26.
4. Костров А. В., Пахотин В. А. // Физика плазмы. 1995. Т. 21, № 5. С. 772.
5. Lin C. C., Chen K. M. // Proc. IEE. 1971. V. 118, No. 1. P. 36.
6. Махат G., Chen K. M. // Radio Sci. 1972. V. 7, No. 10. P. 979.
7. Новиков В. В., Соловьёв В. Ю. // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 4: Физика, химия. 1996. Вып. 4, № 25. С. 27.
8. Бичуцкая Т. И., Макаров Г. И. // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 4: Физика, химия. 1999. Вып. 2, № 11. С. 71.
9. Бичуцкая Т. И., Макаров Г. И. // Радиотехника и электроника (в печати).
10. Ковнер М. С., Лупанов Г. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1971. Т. 14, № 8. С. 1 294.

Санкт-Петербургский госуниверситет,  
г. Санкт-Петербург, Россия

Поступила в редакцию  
3 августа 2000 г.

**RADIATION FROM A POINT SOURCE IN AN ANISOTROPIC PLASMA CYLINDER***T. I. Bichoutskaia and G. I. Makarov*

We obtain and analyze an analytical solution for the problem of radiation of electromagnetic field by a point dipole in an anisotropic plasma cylinder located in vacuum. Two cases are considered, where the electric dipole moment is parallel or orthogonal to the magnetic field vector whose direction does not coincide with the axes of cylindrical coordinate system. The conditions and characteristics of resonant effects of the anisotropic plasma cylinder and their dependence on the magnetic field are studied. We also compare the resonance effects of a plasma cylinder with horizontal and axial magnetic field.



УДК 621.396.677.49

## ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ РАССЕЯНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН КОЛЬЦЕВОЙ РЕШЁТКОЙ НЕСИММЕТРИЧНЫХ ВИБРАТОРОВ С ЁМКОСТНЫМИ НАГРУЗКАМИ НА ТОЧНОСТЬ И РАЗРЕШАЮЩУЮ СПОСОБНОСТЬ ФАЗОВОГО РАДИОПЕЛЕНГАТОРА

*О. А. Остинский, С. Н. Разиньков*

На основе решения задачи рассеяния электромагнитных волн кольцевой решёткой несимметричных вибраторов с ёмкостными нагрузками в виде тонких металлических дисков, расположенной вблизи бесконечной идеально проводящей плоскости, исследовано влияние переотражения поля в антенной системе на точность и разрешающую способность фазового радиопеленгатора. Сформулированы предложения по выбору числа антенных элементов и радиуса решётки, обеспечивающих достижение потенциальной точности и разрешающей способности пеленгатора в метровом диапазоне длин волн.

Рассеяние радиоволн антенной решёткой фазового пеленгатора и поверхностью объекта, на котором она располагается, приводит к появлению систематической ошибки измерения разности фаз сигналов, принимаемых пеленгационными парами антенн, вследствие искажения пространственной структуры поля в раскрыве антенной системы. Ошибки измерения фазовых задержек сигналов ухудшают потенциальную точность и разрешающую способность пеленгатора. Повышение точности пеленгования за счёт увеличения пеленгационной базы может приводить к неоднозначности измерения угловых координат источника радиоизлучения [1]. Для обеспечения требуемой точности и разрешающей способности пеленгатора с учётом рассеяния поля антенной системой расстояние между антеннами необходимо определять на основе решения задачи дифракции поля на решётке и её носителе. Характеристикой точности и однозначности пеленгования является функция неопределённости, представляющая собой отклик оптимального приёмника на воздействие пеленгуемого сигнала. Потенциальная точность пеленгатора может быть оценена по ширине главного лепестка функции неопределённости сигнала, разрешающая способность — по уровню боковых лепестков [1].

В предлагаемой работе исследованы зависимость точности и разрешающей способности квазидоплеровского пеленгатора метрового диапазона длин волн с эквидистантной кольцевой решёткой несимметричных вибраторов с ёмкостными нагрузками от структуры и радиуса  $R_0$  решётки, а также количества антенных элементов  $N_0$ . Вид антенной системы представлен на рис. 1. Ёмкостные нагрузки выполнены в виде тонких металлических дисков в вершинах вибраторов. Решётка расположена вблизи идеально проводящей бесконечной плоскости, имитирующей поверхность корпуса носителя. Рассмотрены два варианта построения антенной решётки, различающиеся наличием или отсутствием центрального антенного элемента. Фазовые задержки пеленгуемых радиосигналов  $\varphi_n$  ( $n = 1, 2, \dots, N_0$ ) измеряются относительно центрального элемента антенной решётки или одного из вибраторов, расположенных на окружности, если центральный антенный элемент отсутствует.

Функция неопределённости сигнала, пеленгуемого кольцевой антенной решёткой, имеет вид [1]

$$\chi(\theta, \beta) = \frac{1}{N_0} \left| \sum_{n=1}^{N_0} \exp \left\{ j \left[ \frac{2\pi R_0}{\lambda} \cos \left( \frac{2\pi n}{N_0} \right) - \varphi_n \right] \right\} \right|, \quad (1)$$

где  $\lambda$  — длина падающей волны. Без учёта рассеяния поля решёткой и её носителем фазовые задержки электромагнитных волн  $\varphi_n$  вычисляются по закону изменения фазы квазидоплеровского пеленгатора;

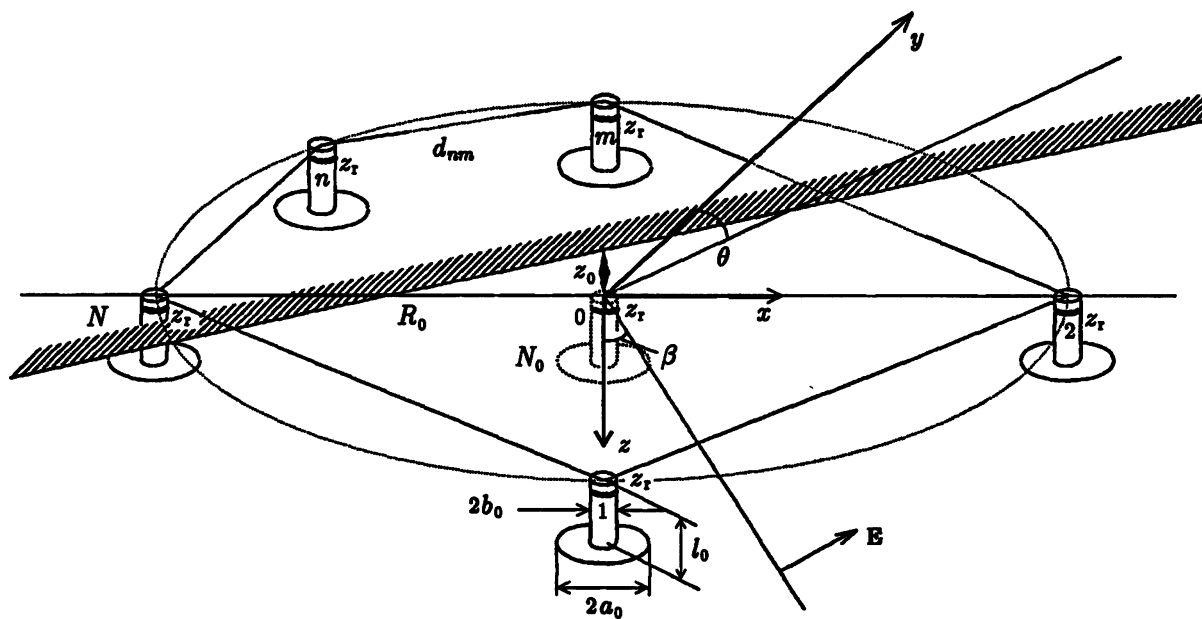


Рис. 1

взаимосвязь  $R_0$  и  $N_0$ , обеспечивающих в заданном диапазоне длин волн потенциальную разрешающую способность антенной системы, определяется выражением [1]

$$\frac{R_0}{\lambda_0} = \frac{1}{4 \sin^s(\pi/N)}, \quad (2)$$

где  $\lambda_0$  — минимальная длина волны в диапазоне ( $\lambda_0 = 1$  м);  $N = N_0$ ,  $s = 2$  для решётки без центрального вибратора;  $N = N_0 - 1$ ,  $s = 1$  для решётки с центральным вибратором.

Цель работы — найти радиус и число элементов антенной решётки, при которых её точность и разрешающая способность достигают потенциальных значений с учётом рассеяния поля антенной системой и её носителем.

При решении задачи дифракции радиоволн на системе вибраторов вблизи идеально проводящей плоскости будем полагать, что длина вибратора  $l_0 = 0,17$  м, радиус его поперечного сечения  $b_0 = 0,01$  м, радиус диска  $a_0 = 0,075$  м, расстояние между плоскостью и решёткой  $z_0 = 0,02$  м. Выбранные размеры антенн обеспечивают хорошее согласование с приёмным устройством в широком диапазоне длин волн из-за малой реактивной части входного сопротивления; в метровом диапазоне абсолютная величина реактивной части входного сопротивления, вычисленного при возбуждении вибратора через бесконечно малый разрыв осевого проводника [2], не превышает 100 Ом. Антенная система облучается плоской монохроматической волной с комплексной амплитудой  $E = \exp[-jk(x \sin \beta \cos \theta + y \sin \beta \sin \theta + z \cos \beta)]$ , где  $k = 2\pi/\lambda_0$  — волновое число,  $\theta$  и  $\beta$  — азимут и угол места источника радиоизлучения  $x$ ,  $y$  и  $z$  — декартовы координаты (см рис. 1). Разность фаз электромагнитных волн, принимаемых вибраторами, определяется как разность аргументов комплексных значений токов в вибраторах в точках  $z_r$  подключения антенных нагрузок.

Поскольку радиус поперечного сечения вибратора значительно меньше его длины и длины падающей волны, вибраторы можно заменить системой бесконечно тонких нитей вспомогательного тока [3], имеющего только продольную составляющую. Расчёт плотности тока на поверхностях дисков  $I_{dn}(r)$  и

вибраторов  $I_{vn}(z)$  осуществляется с помощью системы интегральных уравнений

$$\sum_{n=1}^{N_0} \left[ \int_0^{l_0} I_{vn}(z') G_{nm}(z - z') dz' + A_{nm}(z) \right] = \frac{2\pi j}{W_0} [S_m(z) + I_m(z) W_r \sin(k|z - z_r|)],$$

$$\frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^{N_0} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \int_0^{l_0} I_{vn}(z') K_{nm}(z - z') dz' \Big|_{z=l_0} + B_{nm}(r) \right\} = 0, \quad (3)$$

где

$$G_{nm}(z - z') = \frac{\exp(jkR_{nm})}{4\pi R_{nm}} \left[ (kb_{nm}R_{nm})^2 + (1 - jkR_{nm})(2R_{nm}^2 - 3b_{nm}^2) \right] + C_{nm}(R_{nm}; z - z');$$

$$A_{nm}(z) = \int_0^{\infty} \xi^2 J_0(b_{nm}\xi) \cos(\sqrt{k^2 - \xi^2} z) \exp(j\sqrt{k^2 - \xi^2} z) d\xi; \quad S_m(z) = \int_0^{l_0} E_m(z') \sin(k|z - z'|) dz';$$

$$B_{nm}(r) = \int_0^{\infty} \xi J_1(r_{nm}\xi) \sqrt{k^2 - \xi^2} \sin(\sqrt{k^2 - \xi^2} l_0) \exp(j\sqrt{k^2 - \xi^2} l_0) d\xi;$$

$$K_{nm}(z - z') = \frac{\exp(jk\sqrt{(z-z')^2 + r_{nm}^2})}{4\pi \sqrt{(z-z')^2 + r_{nm}^2}} + C_{nm}(r_{nm}; z - z');$$

$$C_{nm} \left( \left\{ \begin{matrix} R_{nm} \\ r_{nm} \end{matrix} \right\}; z - z' \right) = \int_0^{\infty} \xi J_0 \left( \left\{ \begin{matrix} R_{nm} \\ r_{nm} \end{matrix} \right\} \xi \right) \frac{\exp[-\sqrt{\xi^2 - k^2}(z-z')]}{\sqrt{\xi^2 - k^2}} d\xi;$$

$$\left\{ \begin{matrix} R_{nm} \\ r_{nm} \end{matrix} \right\} = \sqrt{(z-z')^2 + \left\{ \begin{matrix} b_{nm} \\ r + \gamma_{nm} d_{nm} \end{matrix} \right\}^2}; \quad \left\{ \begin{matrix} a_{nm} \\ b_{nm} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} a_0 \\ b_0 \end{matrix} \right\} + \gamma_{nm} d_{nm}; \quad \gamma_{nm} = 1 - \delta_{nm};$$

$E_m(z)$  — комплексная амплитуда облучающей волны в месте расположения  $m$ -го вибратора,  $I_m$  — ток на поверхности  $m$ -го вибратора,  $d_{nm}$  — расстояния между вибраторами ( $n, m = 1, 2, \dots, N_0$ ),  $W_r$  — импеданс антенной нагрузки, равный комплексно-сопряжённому входному сопротивлению вибратора,  $W_0$  — импеданс свободного пространства,  $J_{0,1}$  — функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядков,  $\delta_{nm}$  — символ Кронекера,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . При расчёте разности фаз сигналов, принимаемых элементами антенной решётки, без учёта рассеяния поля идеально проводящей плоскостью в качестве  $G_{nm}(z - z')$  и  $K_{nm}(z - z')$  необходимо использовать функцию Грина для системы параллельных электрических вибраторов в свободном пространстве [3].

В соответствии с методом моментов система интегральных уравнений (3) сводится к системе линейных алгебраических уравнений с матричным оператором фредгольмового типа [4] и неизвестными коэффициентами разложения  $I_{dn}(r)$  и  $I_{vn}(z)$  по системе базисных функций. Согласно рекомендациям [2] в качестве базисных функций тока на поверхностях вибраторов использованы кусочно-постоянные функции, в качестве весовых —  $\delta$ -функции. Базисные и весовые функции поверхностной плотности тока на дисках имеют вид

$$f_0(r_{nm}) = \frac{\sqrt{(a_0 + d_{nm})^2 - r_{nm}^2}}{2\pi (a_0 + d_{nm}) r_{nm}},$$

$$f_i(r_{nm}) = \frac{\sqrt{8i+2}}{a_0 + d_{nm}} \frac{\Gamma(i+1)\Gamma(2i)}{\Gamma(i+\frac{1}{2})\Gamma(2i+2)} P_{2i}^1 \left( \sqrt{1 - r_{nm}^2 / (a_0 + d_{nm})^2} \right),$$

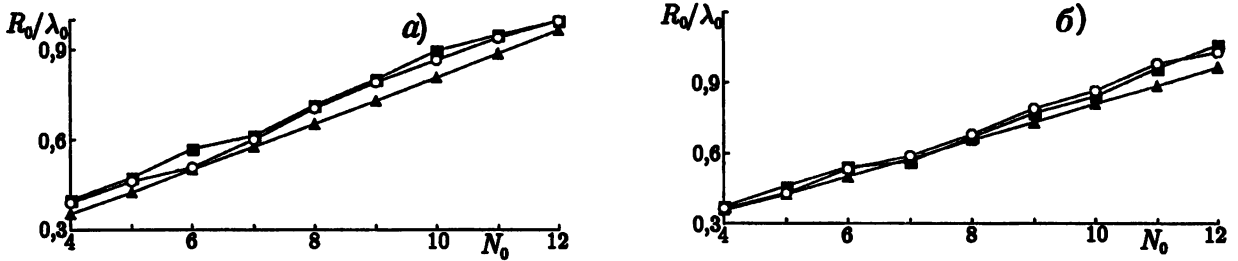


Рис. 2

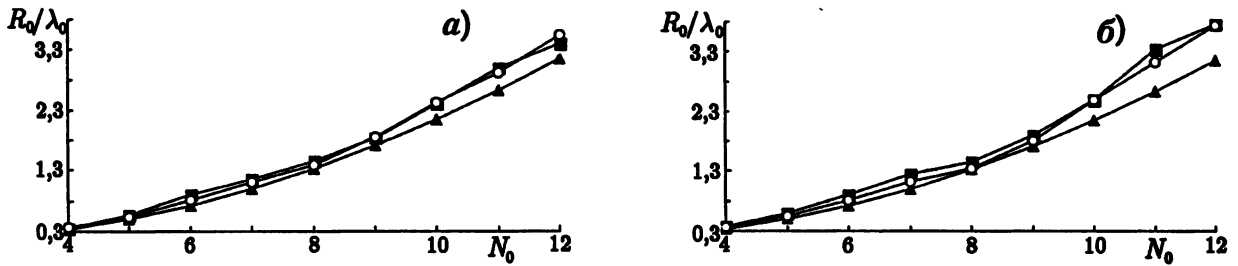


Рис. 3

где  $i = 1, 2, \dots, \Gamma$  — гамма-функция,  $P_{2i}^1$  — присоединённые функции Лежандра первого рода [4]. Разложение  $I_{dn}(r)$  по системе  $f_i(r_{nm})$  обеспечивает возможность частичного обращения оператора краевой задачи о возбуждении диска, расположенного над идеально проводящей плоскостью. Решение системы (3) является строгим решением задачи возбуждения диска нитью вспомогательного тока. Коэффициенты аппроксимации токов в вибраторах позволяют вычислить фазовые набеги радиоволн, принимаемых элементами антенной решётки. По рассчитанным значениям  $\varphi_n$  с использованием (1) находится функция неопределённости пеленгуемого сигнала.

Был проведён расчёт  $\chi(\theta, \beta)$  для  $N_0 = 4 \div 12$ ; значения  $R_0/\lambda_0$  определялись из решения трансцендентного уравнения, полученного путём приравнивания функции неопределённости пространственного сигнала решётки и функции неопределённости сигнала, принимаемого антенной системой с непрерывным раскрытием [1]. Считалось, что разрешающая способность решётки достигает потенциального значения, если при фиксированных  $R_0/\lambda_0$  и  $N_0$  уровень боковых лепестков функции неопределённости не превышает  $-10$  дБ относительно главного лепестка и возрастание  $N_0$  при неизменном  $R_0/\lambda_0$  не приводит к увеличению боковых лепестков и существенному расширению главного лепестка  $\chi(\theta, \beta)$ .

Потенциальная точность пеленгования с учётом влияния рассеяния поля вибраторами и идеально проводящей плоскостью достигалась в том случае, когда ширина главного лепестка функции неопределённости сигнала в плоскости азимута и угла места, вычисленной путём решения задачи дифракции радиоволн на антенной системе, равна ширине главного лепестка функции неопределённости, рассчитанной при отсутствии вторичного излучения поля антеннами. На рис. 2 представлены максимальные значения  $R_0/\lambda_0$ , обеспечивающие при заданном  $N_0$  потенциальную разрешающую способность эквидистантной кольцевой решётки с центральным элементом по азимуту (рис. 2а) и углу места (рис. 2б). Значения  $R_0/\lambda_0$ , рассчитанные с использованием (2), отмечены знаками  $\blacktriangle$ ; значения  $R_0/\lambda_0$ , вычисленные путём решения задачи рассеяния поля антенной решёткой, а также решёткой и плоскостью, отмечены знаками  $\blacksquare$  и  $\circ$  соответственно. Линии соединяют точки, соответствующие структурам решёток с предельными значениями пеленгационных баз, равными  $\lambda_0/2$ . На рис. 3 приведены максимальные значения  $R_0/\lambda_0$ , обеспечивающие при соответствующих  $N_0$  потенциальную разрешающую способность кольцевой решётки без центрального элемента по азимуту (рис. 3а) и углу места (рис. 3б).

Таблица 1

$N_0$	$\Delta\theta/\Delta\beta$ , град	$R_0/\lambda$	
		без учёта рассеяния поля плоскостью	с учётом рассеяния поля плоскостью и решёткой
4	63,1/62,4	0,437/0,435	0,432/0,432
5	52,2/56,4	0,523/0,531	0,531/0,527
6	44,7/51,7	0,589/0,581	0,581/0,582
7	33,6/48,3	0,635/0,631	0,629/0,627
8	31,8/44,7	0,771/0,743	0,772/0,742
9	29,4/42,3	0,995/0,997	1,008/1,002
10	27,2/40,1	1,121/1,209	1,120/1,201
11	24,7/38,4	1,183/1,154	1,179/1,156
12	22,7/36,5	1,192/1,192	1,189/1,189

Таблица 2

$N_0$	$\Delta\theta/\Delta\beta$ , град	$R_0/\lambda$	
		без учёта рассеяния поля плоскостью	с учётом рассеяния поля плоскостью и решёткой
4	69,3/64,8	0,363/0,361	0,358/0,363
5	44,7/52,3	0,571/0,572	0,578/0,567
6	30,5/42,5	1,925/1,932	1,929/1,928
7	21,9/35,9	1,259/1,262	1,260/1,263
8	16,5/31,0	1,523/1,521	1,513/1,518
9	12,8/27,3	1,860/1,857	1,852/1,851
10	10,2/24,3	2,391/2,393	2,379/2,378
11	8,3/21,9	2,827/2,831	2,828/2,827
12	6,9/20,7	3,351/3,351	3,352/3,352

Как следует из рис. 2 и 3, для уменьшения влияния переотражения радиоволн решёткой и корпусом её носителя на разрешающую способность пеленгатора радиус антенной решётки  $R_0$  необходимо увеличить в среднем на 15÷30 % относительно его значения, вычисленного с использованием (2). Дополнительный разнос вибраторов возрастает пропорционально увеличению их числа.

При оценке точности измерений азимута и угла места источника радиоизлучения без учёта систематической погрешности измерения фазовых задержек сигналов, обусловленной рассеянием поля решёткой и плоскостью, значение  $R_0$  выбиралось равным радиусу антенной решётки, при котором наблюдается её наилучшая разрешающая способность для заданных  $N_0$  и  $\lambda_0$ . В табл. 1 и 2 приведены погрешности измерения угловых координат направления прихода облучающей волны в горизонтальной ( $\Delta\theta$ ) и вертикальной ( $\Delta\beta$ ) плоскостях и значения  $R_0/\lambda_0$ , при которых эти погрешности равны систематическим ошибкам пеленгования источника радиоизлучения по азимуту и углу места с учётом рассеяния поля антенной системой. Согласно табл. 1 и 2, повышение точности пеленгования наблюдается при дополнительном увеличении  $R_0$  на 10÷15 % за счёт уменьшения переотражения поля в антенной системе и возрастания фазовых задержек радиоволн при распространении к антеннам пеленгационных пар. Пеленгование источников радиоизлучения в азимутальной плоскости с точностью 2° осуществляется при  $R_0/\lambda_0 = 5,54$  для 12-элементной решётки с центральным вибратором и  $R_0/\lambda_0 = 9,73$  — для решётки без центрального элемента, находящихся вблизи металлической плоскости; уровень боковых лепестков функции неопределённости при этом составляет -2,4 дБ. Для уменьшения радиуса

решётки, рассчитанного в результате решения системы уравнений (3), на 10 % при сохранении точности и разрешающей способности антенной системы необходимо уменьшить длину вибратора на 30 % или радиус диска на 40 %. Однако при этом реактивная часть входного сопротивления увеличивается в 1,67 и 2,41 раза соответственно, ухудшая согласование антенны с приёмным устройством. При рассеянии поля корпусом носителя систематическая погрешность измерения фазовых задержек пеленгуемых сигналов возрастает не более чем на 10 %, если размеры корпуса значительно превосходят длину облучающей волны. С увеличением отношения радиуса решётки к длине облучающей волны наблюдается повышение точности пеленгования при ухудшении разрешающей способности антенной решётки [1].

Таким образом, на основе решения задачи дифракции электромагнитных волн на эквидистантной кольцевой решётке несимметричных вибраторов с тонкими металлическими дисками в вершинах, расположенной вблизи идеально проводящей плоскости, исследовано влияние рассеяния поля антеннами и плоскостью на точность и разрешающую способность радиопеленгатора; сформулированы предложения по выбору радиуса решётки и числа вибраторов, обеспечивающих потенциальную точность и разрешающую способность пеленгатора.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Саидов А. С., Тагилаев А. Р., Алиев Н. М., Асланов Г. К. Проектирование фазовых автоматических радиопеленгаторов. М.: Радио и связь, 1997. 160 с.
2. Гридин А. А., Кочин В. Н., Нечаев Ю. Б., Просвирин С. Л. // Радиотехника и электроника. 1994. Т. 39, № 8–9. С. 1285.
3. Бриккер А. М., Зернов Н. В., Мартынова Т. Е. // Радиотехника. 1999. № 3. С. 18.
4. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 724 с.

5 Центральный  
научно-исследовательский  
испытательный институт МО РФ,  
г. Воронеж, Россия

Поступила в редакцию  
19 июня 2000 г.

#### ESTIMATION OF THE INFLUENCE OF ELECTROMAGNETIC-WAVE SCATTERING BY A CIRCULAR ARRAY OF NONSYMMETRIC DIPOLES WITH CAPACITIVE LOADS ON THE ACCURACY AND RESOLUTION OF THE PHASE DIRECTION FINDER

*O. A. Ostin'sky and S. N. Razin'kov*

The influence of the field reflection in an antenna system on the accuracy and resolution of the phase direction finder is studied on the basis of solving the problem of electromagnetic-wave scattering by a circular array of nonsymmetric dipoles with capacitive loads in the form of thin metal discs located near an infinite perfectly conducting plane. We formulate proposals on the choice of the antenna elements number and array radius, which ensure potential accuracy and resolution of the direction finder for meter wavelengths.

УДК 621.372

## СОБСТВЕННЫЕ ВОЛНЫ ПЛОСКОГО ДВУХСЛОЙНОГО КИРАЛЬНО-ФЕРРИТОВОГО ВОЛНОВОДА

*В. А. Неганов, О. В. Осипов*

Получено дисперсионное уравнение для собственных волн металлизированного двухслойного волновода с киральным и ферритовым слоями. Проведён анализ дисперсионных характеристик исследуемой структуры.

### ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время в широком спектре электродинамических задач не последнее место занимает изучение процессов взаимодействия электромагнитных волн с искусственными средами, обладающими пространственной дисперсией. К последним относятся и так называемые киральные среды, состоящие из зеркально-несимметричных элементов, размещённых в изотропной среде. Подобные среды обладают пространственной дисперсией в диапазонах СВЧ и КВЧ. В качестве киральных элементов используются металлические или керамические спирали, цилиндры с проводимостью вдоль винтовых линий, сферы со спиральной проводимостью и др. На настоящий момент построена электродинамическая теория взаимодействия электромагнитных волн с киральными средами [1–4]. В рамках данной теории подробно изучены отражающие свойства киральных слоёв, исследованы дифракционные явления на киральных телах, а также собственные волны некоторых волноведущих структур, заполненных такого рода средами (например плоских и круглых волноводов с идеально проводящими стенками [5, 6]). Большой интерес представляет изучение свойств структур, в частности волноведущих, состоящих из сред как с пространственной, так и с частотной дисперсией. В качестве таковой может выступать двухслойная кирально-ферритовая структура. В представленной статье проводится электродинамический анализ плоского двухслойного кирально-ферритового волновода с проводящими стенками.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ В КИРАЛЬНОМ СЛОЕ

Рассмотрим плоскую волноведущую структуру следующего вида: киральный и ферритовый слой (на рис. 1 они обозначены цифрами 1 и 2 соответственно) расположены между двумя идеально проводящими, бесконечно-тонкими плоскостями. Толщину кирального слоя обозначим через  $y_1$ , толщину волновода — через  $y_2$ . Будем полагать, что волновые процессы в линии передачи не имеют вариаций вдоль оси  $x$  ( $\partial/\partial x = 0$ ). Зависимость от координаты  $z$  предполагается в виде  $\exp(-i\gamma z)$ , где  $\gamma$  — постоянная распространения одной из собственных волн.

Материальные уравнения для киральной среды в режиме гармонического сигнала (с зависимостью от времени  $\exp(i\omega t)$ ) имеют вид<sup>1</sup> [7]:

$$\mathbf{D}^{(1)} = \epsilon_c \mathbf{E}^{(1)} - i\xi_1 \mu_1 \mathbf{H}^{(1)}, \quad \mathbf{B}^{(1)} = \mu_1 \mathbf{H}^{(1)} + i\xi_1 \mu_1 \mathbf{E}^{(1)}, \quad (1)$$

где  $\epsilon_{c1} = \epsilon_1 + \mu_1 \xi_1^2$ ,  $\epsilon_1$  и  $\mu_1$  — соответственно относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости киральной среды,  $\xi_1$  — параметр киральности (случай  $\xi_1 = 0$  соответствует диэлектрической среде).

<sup>1</sup> Все соотношения записаны в гауссовой системе единиц.

Записывая уравнения Максвелла для электромагнитного поля в киральном слое, несложно получить относительно касательных составляющих поля  $E_x^{(1)}$  и  $H_x^{(1)}$  следующие связанные дифференциальные уравнения второго порядка:

$$\begin{aligned} (\nabla_{y,z}^2 + k_{c1}^2) E_x^{(1)} + i\xi_1 \eta_{c1}^2 (\nabla_{y,z}^2 - k_{c1}^2) H_x^{(1)} &= 0, \\ (\nabla_{y,z}^2 + k_{c1}^2) H_x^{(1)} - i\xi_1 (\nabla_{y,z}^2 - k_{c1}^2) E_x^{(1)} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\nabla_{y,z}$  — оператор Гамильтона по координатам  $y$  и  $z$ ,  $k_{c1} = k \sqrt{\epsilon_1 \mu_1}$  — волновое число для первого слоя,  $\eta_{c1} = \sqrt{\mu_1 / \epsilon_{c1}}$  — волновое сопротивление киральной среды,  $k = \omega / c$  — волновое число для вакуума; верхние и нижние индексы 1 относятся к киральному слою.

Уравнения (2) сводятся к дифференциальным уравнениям четвёртого порядка относительно функций  $E_x^{(1)}$  и  $H_x^{(1)}$ , решение которых находится в виде суперпозиции полей двух волн  $E_R$  и  $E_L$  [1, 3]:

$$\begin{aligned} E_x^{(1)} &= E_R(y) + E_L(y), \\ H_x^{(1)} &= i\eta_{c1}^{-1} [E_R(y) - E_L(y)], \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} E_R(y) &= A_1 \cos(h_R y) + A_2 \sin(h_R y), \\ E_L(y) &= A_3 \cos(h_L y) + A_4 \sin(h_L y), \end{aligned} \quad (4)$$

$h_{R,L}^2 = k_{R,L}^2 - \gamma^2$ ,  $k_{R,L}^2 = k^2 (\sqrt{\epsilon_{c1} \mu_1} \pm \xi_1 \mu_1)$  — постоянные распространения двух волн с правой (R) и левой (L) круговыми поляризациями в безграничной киральной среде.

С учётом граничных условий при  $y = 0$ :

$$E_x^{(1)} \Big|_{y=0} = 0, \quad \frac{dH_x^{(1)}}{dy} \Big|_{y=0} - i\xi_1 \frac{dE_x^{(1)}}{dy} \Big|_{y=0} = 0, \quad (5)$$

приходим к следующим выражениям для составляющих электромагнитного поля в киральном слое:

$$\begin{aligned} E_x^{(1)}(y) &= \zeta_c^-(y) C_1 + \zeta_s^+(y) D_1, & H_x^{(1)}(y) &= \zeta_c^+(y) C_1 + \zeta_s^-(y) D_1, \\ E_z^{(1)}(y) &= \frac{\nu_s(y) C_1 - \nu_c(y) D_1}{k\epsilon_1}, & H_z^{(1)}(y) &= \frac{\eta_s(y) C_1 - \eta_c(y) D_1}{ik\epsilon_1 \mu_1}, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \zeta_c^+(y) &= \cos(h_R y) + \cos(h_L y), & \zeta_c^-(y) &= \eta_{c1}^{-1} [\cos(h_R y) - \cos(h_L y)], \\ \zeta_s^+(y) &= \eta_{c1}^{-1} [\sin(h_R y) + \chi \sin(h_L y)], & \zeta_s^-(y) &= \sin(h_R y) - \chi \sin(h_L y), \\ \nu_c(y) &= p_c^-(y) - \xi_1 p_c^+(y), & \nu_s(y) &= p_s^+(y) - \xi_1 p_s^-(y), \\ \eta_c(y) &= \epsilon_{c1} p_c^+(y) - \xi_1 \mu_1 p_c^-(y), & \eta_s(y) &= \epsilon_{c1} p_s^-(y) - \xi_1 \mu_1 p_s^+(y), \\ p_s^+(y) &= h_R \sin(h_R y) + h_L \sin(h_L y), & p_s^-(y) &= \eta_{c1}^{-1} [h_R \sin(h_R y) - h_L \sin(h_L y)], \\ p_c^+(y) &= \eta_{c1}^{-1} [h_R \cos(h_R y) + \chi h_L \cos(h_L y)], & p_c^-(y) &= h_R \cos(h_R y) - \chi h_L \cos(h_L y), \end{aligned} \quad (7)$$

$\chi = \sqrt{(1 - \gamma^2 / k_R^2) / (1 - \gamma^2 / k_L^2)}$ ,  $C_1$  и  $D_1$  — неизвестные постоянные, которые определяются из граничных условий при  $y = y_1$ .

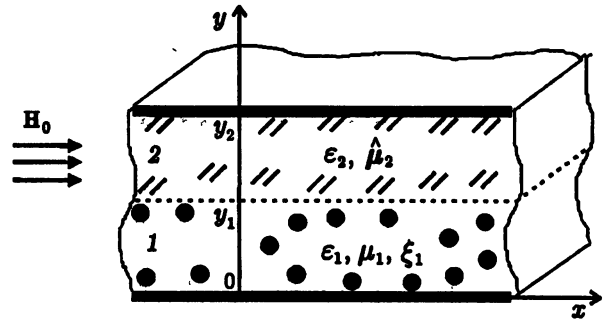


Рис. 1



## 2. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ В НАМАГНИЧЕННОМ ФЕРРИТОВОМ СЛОЕ

Будем считать, что подмагничивание ферритовой среды производится в направлении единичного вектора  $\mathbf{e}_x$  внешним постоянным полем  $\mathbf{H}_0$ , т. е.  $\mathbf{H}_0 = \mathbf{e}_x H_0$ . В этом случае тензор магнитной проницаемости для слоя 2 без учёта потерь в феррите имеет вид [8]

$$\hat{\mu}_2 = \begin{pmatrix} \mu_{\parallel 2} & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & i\mu_{a2} \\ 0 & -i\mu_{a2} & \mu_2 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где  $\mu_2 = 1 - A\alpha/(1 - \alpha^2)$ ,  $\mu_{a2} = A/(1 - \alpha^2)$ ,  $\mu_{\parallel 2} = 1$ ,  $A = k^{-1}k_m$ ,  $\alpha = k^{-1}k_0$ ,  $k_0 = \Gamma H_0/c$ ,  $k_m = 4\pi\Gamma M_0/c$ ,  $4\pi M_0$  — намагниченность насыщения феррита,  $\Gamma$  — гиромагнитная постоянная. Параметры  $A$  и  $\alpha$  зависят от частоты электромагнитного поля.

Уравнения Максвелла для ферритовой среды записываются следующим образом:

$$[\nabla, \mathbf{H}^{(2)}] = ik\epsilon_2 \mathbf{E}^{(2)}, \quad [\nabla, \mathbf{E}^{(2)}] = -ik\hat{\mu}_2 \mathbf{H}^{(2)}, \quad (9)$$

где  $\epsilon_2$  — диэлектрическая проницаемость феррита.

Для составляющих электромагнитного поля  $E_x^{(2)}$ ,  $H_x^{(2)}$  в ферритовом слое имеют место следующие дифференциальные уравнения второго порядка:

$$\left[ \nabla_{y,z}^2 + k^2 \epsilon_2 \begin{Bmatrix} \mu_{\perp 2} \\ \mu_{\parallel 2} \end{Bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} E_x^{(2)} \\ H_x^{(2)} \end{Bmatrix} = 0, \quad (10)$$

где  $\mu_{\perp 2} = \mu_2 (1 - \mu_{a2}^2/\mu_2^2)$ .

Используя граничные условия при  $y = y_2$ , получаем выражения для электромагнитного поля в ферритовом слое:

$$E_x^{(2)} = \tilde{A} f_{\perp}(y), \quad H_x^{(2)} = \tilde{B} \psi_{\parallel}(y), \quad E_z^{(2)} = -\frac{\tilde{B} \lambda_{\parallel} f_{\parallel}(y)}{k\epsilon_2},$$

$$H_z^{(2)} = \frac{\tilde{A}}{k\mu_2\mu_{\perp 2}} [\gamma\mu_{a2} f_{\perp}(y) + \lambda_{\perp} \mu_2 \psi_{\perp}(y)], \quad (11)$$

где

$$f_{\perp, \parallel}(y) = \sin[\lambda_{\perp, \parallel}(y_2 - y)], \quad \psi_{\perp, \parallel}(y) = \cos[\lambda_{\perp, \parallel}(y_2 - y)], \quad \lambda_{\perp, \parallel} = \sqrt{k^2 \epsilon_2 \mu_{(\perp, \parallel)2} - \gamma^2}, \quad (12)$$

$\tilde{A}$  и  $\tilde{B}$  — неизвестные постоянные, определяемые из граничных условий при  $y = y_1$ , на границе раздела феррит—киральная среда.

## 3. ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ

Воспользовавшись граничными условиями

$$\mathbf{E}_r^{(1)} = \mathbf{E}_r^{(2)}, \quad \mathbf{H}_r^{(1)} = \mathbf{H}_r^{(2)} \quad (13)$$

для тангенциальных компонент полей при  $y = y_1$ , приходим к дисперсионному уравнению для рассматриваемой структуры:

$$\left( \psi_{\parallel} \nu_c - \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \lambda_{\parallel} f_{\parallel} \zeta_c^- \right) \left( f_{\perp} \mu_{\perp 2} \eta_s - \epsilon_1 \frac{\mu_1}{\mu_2} \phi_{\perp} \zeta_c^- \right) -$$

$$- \left( \psi_{\parallel} \nu_s + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \lambda_{\parallel} f_{\parallel} \zeta_c^+ \right) \left( f_{\perp} \mu_{\perp 2} \eta_c + \epsilon_1 \frac{\mu_1}{\mu_2} \phi_{\perp} \zeta_c^+ \right) = 0, \quad (14)$$

где  $\phi_{\perp} = \gamma\mu_{a2}f_{\perp}(y_1) + \lambda_{\perp}\mu_2\psi_{\perp}(y_1)$ .

Из уравнения (14) нетрудно, в частности, получить и дисперсионные соотношения для плоского металлизированного однородно заполненного ферритового волновода. В этом случае необходимо в (14) положить  $y_1 = 0$ ,  $y_2 = a$ , где  $a$  — толщина волновода, в результате чего оно распадается на два известных соотношения [8]:

$$\gamma_{\parallel,\perp} = \sqrt{k^2\epsilon_2\mu_{(\parallel,\perp)2} - (\pi m/a)^2}, \quad (15)$$

где  $m = 0, 1, 2, \dots$

При  $y_2 - y_1 = 0$ ,  $y_2 = a$  имеем известное дисперсионное уравнение для плоского металлизированного кирального волновода:

$$2 - 2\cos(h_R a)\cos(h_L a) + (\chi + 1/\chi)\sin(h_R a)\sin(h_L a) = 0. \quad (16)$$

#### 4. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

При анализе собственных волн плоского кирально-ферритового волновода основное внимание было уделено исследованию дисперсионных характеристик данной структуры. Так, указанные характеристики были получены для случаев прямого (вдоль оси  $x$ ,  $\mu_{a2} > 0$ ; см. рис. 2) и обратного ( $\mu_{a2} < 0$ ; см. рис. 3) подмагничивания внешним полем  $H_0$ . На данных рисунках представлены зависимости нормированных постоянных распространения  $(\gamma/k)^2$  от нормированных волновых чисел  $ky_1$ . При расчётах использовались следующие параметры:  $\xi_1 = 0,3$ ;  $\epsilon_1 = 3,5$ ;  $\mu_1 = 2,2$ ;  $\epsilon_2 = 11$ ;  $\mu_{\parallel 2} = 1$ ;  $ky_2 = 2$ ;  $k_m y_1 = 0,25$ ;  $k_0 y_1 = 0,5$ .

В рассматриваемой структуре можно выделить два класса собственных волн, обусловленных соответственно киральным и ферритовым слоями. Эти волны практически не оказывают влияния друг на друга. В частности, кривые 3 и 4 (рис. 2) соответствуют собственным волнам плоского однородно заполненного кирального волновода (4 — волна с правой круговой поляризацией, 3 — волна с левой круговой поляризацией), обладающим одинаковой частотой отсечки  $k_{от}$ . Кроме этого, в рассматриваемой волноведущей структуре из-за наличия проводящих стенок могут распространяться две бездисперсионные волны с постоянными распространения  $k_R$  и  $k_L$ , соответствующие волнам в безграничной киральной среде. Они не имеют частоты отсечки (кривые 1 и 2). Можно отметить, что изменение направления подмагничивающего поля, как, впрочем, и изменение его величины, не влияет на распространение собственных волн, связанных с наличием кирального слоя (ср. кривые 1–4 на рис. 2 и 3).

Кривые 7 и 8 описывают распространение волн, соответствующих волнам однородно заполненного ферритового волновода. Они существуют до частоты магнитостатического резонанса  $k_0$ . Кривые 5, 6 и 9 соответствуют магнитостатическим волнам, т. е. «медленным» волнам с очень малыми (по сравнению с волнами, имеющими электромагнитную природу) длинами [9]. Кривая 5 описывает магнитостатическую волну с левым направлением вращения вектора поля, распространяющуюся на частоте  $k_0$ ; 6 и 9 — магнитостатические волны с правым направлением вращения, распространяющиеся на частотах  $k_0 + k_m$  и  $\sqrt{k_0(k_0 + k_m)}$ . Можно заметить, что волна 9 начинает резко затухать при достижении частоты отсечки киральной моды. Это объясняется интенсивным взаимодействием между волнами с круговыми поляризациями — магнитостатической и электромагнитной, имеющей киральную природу на частотах  $k > k_{от}$ . Отсюда следует вывод, что в рассматриваемой волноведущей структуре взаимодействуют волны с круговыми поляризациями независимо от того, какую природу они имеют — киральную или ферритовую. При изменении направления подмагничивающего поля на обратное общая картина распространения собственных волн не меняется (рис. 3), однако магнитостатическая волна с правым направлением вращения (кривая 9) распространяется с меньшей фазовой скоростью, чем в случае прямого подмагничивания. В то же время интенсивность взаимодействия этой волны с волнами 3 и 4 не меняется, и при  $ky_1 \sim 1,5$  волна 9 перестаёт распространяться.

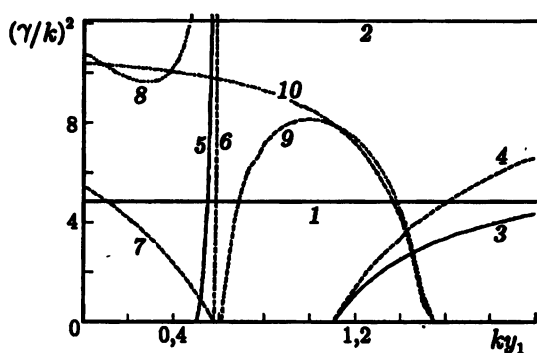


Рис. 2

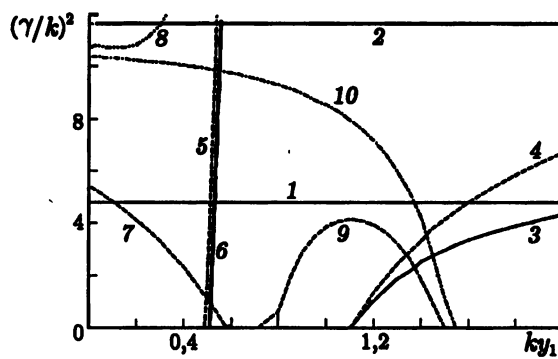


Рис. 3

Основным выводом из проведённого электродинамического анализа плоского кирально-ферритового волновода является то, что киральные свойства рассматриваемая структура проявляет только на частотах, больших частоты отсечки дуплетной моды (волны 3 и 4). При  $k < k_{от}$  волновод ведёт себя как однородный ферритовый. Возможно, это обусловлено тем, что хотя два слоя обладают различными типами дисперсии — пространственной и частотной, преобладающую роль играет дисперсия, связанная с ограничением пространства распространения в волноводе. Вторым выводом является наличие взаимодействия в структуре магнитоэлектрических и киральных волн на частотах  $k > k_{от}$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lindell I. V., Sihvola A. H., Tretyakov S. A., Viitanen A. J. *Electromagnetic waves in chiral and bi-isotropic media*. London: Artech House, 1994. 291 p.
2. Каценеленбаум Б. З., Коршунова Е. Н., Сивов А. Н., Шатров А. Д. // УФН. 1997. Т. 167, № 11. С. 1201.
3. Lakhtakia A., Varadan V. K., Varadan V. V. *Lecture notes in physics. Time-harmonic electromagnetic fields in chiral media*. Berlin: Springer-Verlag, 1989. 121 p.
4. Bassiri S. // *Recent Advances in Electromagnetic Theory* / Ed. by H. N. Kritikos, D. L. Jaggard. New York: Springer-Verlag, 1990. 164 p.
5. Varadan V. K., Varadan V. V., Lakhtakia A. // *J. Wave-Material Interaction*. 1988. V. 3, No. 3. P. 267.
6. Cory H., Rosenhouse I. // *IEEE Proc. H*. 1991. V. 138, No. 1. P. 51.
7. Федоренко А. И. // *Радиотехника и электроника*. 1995. Т. 40, No. 3. С. 381.
8. Гуревич А. Г. *Ферриты на сверхвысоких частотах*. М.: Физматгиз, 1960. 407 с.
9. Неганов В. А., Раевский С. Б., Яровой Г. П. / Под ред. В. А. Неганова. *Линейная макроскопическая электродинамика*. Т. 1. М.: Радио и связь, 2000. 512 с.

Поволжская государственная академия  
телекоммуникаций и информатики,  
г. Самара, Россия

Поступила в редакцию  
15 августа 2000 г.

#### EIGENWAVES OF A PLANE TWO-LAYER CHIRAL-FERRITE WAVEGUIDE

*V. A. Neganov and O. V. Osipov*

We obtain a dispersion relation for eigenwaves of a metallized two-layer waveguide with chiral and ferrite layers and analyze the dispersion characteristics of this structure.

УДК 537.86/87:530.182

## ХАОТИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ В НЕЛИНЕЙНОЙ РАДИОТЕХНИЧЕСКОЙ ЛИНИИ ПЕРЕДАЧИ

А. А. Балякин, Н. М. Рыскин

Представлены результаты численного моделирования сложной динамики нелинейной радиотехнической линии передачи с отражениями на границах, возбуждаемой внешним гармоническим сигналом. Показано, что по мере увеличения амплитуды входного сигнала периодические колебания на частоте внешнего воздействия становятся неустойчивыми и сменяются более сложными режимами, которые могут быть как квазипериодическими, так и хаотическими. Исследованы основные сценарии перехода к хаосу. Обсуждается влияние модуляционной неустойчивости и образования солитонов на сложную динамику.

В последнее время значительное внимание привлекает исследование детерминированного хаоса в распределённых системах, т. е. в системах с бесконечным числом степеней свободы [1, 2]. Важность подобных исследований обусловлена их очевидной связью с такой фундаментальной проблемой, как возникновение турбулентности. В частности, представляет интерес задача о хаотизации вынужденных колебаний распределённого резонатора, образованного отрезком нелинейной среды с отражениями на границах. Поскольку нелинейный осциллятор под внешним воздействием давно является одной из эталонных моделей нелинейной динамики систем с конечным числом степеней свободы [1–3], можно ожидать, что рассматриваемая задача будет играть такую же роль для распределённых систем.

Для изучения нелинейных волновых явлений в радиофизике широко используются модельные среды — радиотехнические линии передачи, содержащие нелинейные элементы. С их помощью можно осуществить моделирование процессов в средах с различными типами нелинейности, дисперсии, диссипации [2, 4, 5]. Кроме того, они легко допускают экспериментальную реализацию. В частности, возбуждение детерминированных (т. е. обусловленных собственной сложной динамикой системы, а не усилением флуктуаций) хаотических колебаний в подобных системах экспериментально наблюдалось в работах [6–8].

В настоящей работе рассматривается нелинейная динамика простейшей радиотехнической цепочки, составленной из индуктивностей  $L_0$  и нелинейных ёмкостей с квадратичной зависимостью заряда  $Q$  от приложенного напряжения  $V$ :

$$Q(V) = C_0 V - C_2 V^2. \quad (1)$$

С одного конца цепочка возбуждается гармоническим сигналом постоянной амплитуды  $A$ , а с другого нагружена на активное сопротивление  $R$  (рис. 1). Принципиальная возможность перехода к хаосу в данной системе по мере увеличения амплитуды сигнала была показана ранее в работе [9]. Отметим также, что в работе [6] были проведены теоретические и экспериментальные исследования хаотических колебаний при параметрическом возбуждении, когда внешний сигнал вводился в каждую ячейку цепочки.

Динамика цепочки, изображённой на рис. 1, описывается системой нелинейных дифференциально-разностных уравнений

$$L_0 \dot{I}_n = V_{n-1} - V_n, \quad \dot{Q}_n = I_n - I_{n+1}, \quad \dots \quad (2)$$

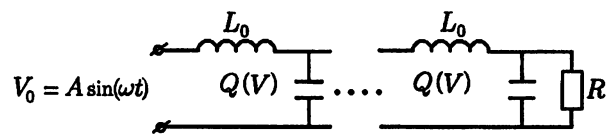


Рис. 1. Эквивалентная схема нелинейной линии передачи

где  $n = 1, 2, \dots, N - 1$ , с граничными условиями

$$V_0 = A \sin(\omega t), \quad V_N = I_{N-1} R. \quad (3)$$

Здесь  $V_n$  — напряжение на  $n$ -м элементе цепочки,  $I_n$  — ток, втекающий в  $n$ -й узел; точка означает дифференцирование по времени  $t$ . Удобно перейти к безразмерным переменным

$$t' = \omega_0 t, \quad R' = R/Z_0, \quad I' = \frac{2C_2 Z_0}{C_0} I, \quad V' = \frac{2C_2}{C_0} V,$$

где

$$\omega_0 = 1/\sqrt{L_0 C_0}, \quad Z_0 = \sqrt{L_0/C_0}.$$

Тогда уравнения (1), (2) примут вид (штрихи у безразмерных величин опускаем)

$$\dot{I}_n = V_{n-1} - V_n, \quad (1 - V_n) \dot{V}_n = I_n - I_{n+1}. \quad (4)$$

Для линейной цепочки нетрудно рассчитать комплексный коэффициент отражения  $\Gamma = \rho \exp(i\Psi)$  (подробнее см. [9]), где

$$\rho = \frac{\sqrt{1 + R^4 - 2R^2 \cos \varphi}}{1 + R^2 + 2R \cos \varphi}, \quad (5)$$

$$\Psi = -2N\varphi - \operatorname{arctg} \left( \frac{R^2 \sin \varphi}{1 - R^2 \cos \varphi} \right). \quad (6)$$

Здесь  $\varphi$  — сдвиг фазы волны, приходящийся на одну ячейку, который связан с частотой  $\omega$  дисперсионным соотношением

$$\omega^2 = 4 \sin^2(\varphi/2). \quad (7)$$

Можно также найти комплексную передаточную характеристику

$$G(\omega) = \frac{\exp \left[ i \operatorname{arctg} \left( \frac{\rho \sin \Psi}{1 + \rho \cos \Psi} \right) \right]}{1 + \rho^2 + 2\rho \cos \Psi}. \quad (8)$$

Частоты, соответствующие максимумам амплитудно-частотной характеристики (АЧХ)  $|G(\omega)|$ , можно интерпретировать как частоты собственных мод распределённого резонатора. Они, очевидно, находятся из условия  $\cos \Psi = -1$ , что даёт

$$-2N\varphi - \operatorname{arctg} \left( \frac{R^2 \sin \varphi}{1 - R^2 \cos \varphi} \right) = 2\pi n + \pi.$$

Далее из дисперсионного соотношения (7) можно найти резонансные частоты. В частности, в случае  $R = 1$ , когда линия согласована в области низких частот, получим

$$\omega_n^2 = 4 \sin^2 \left[ \frac{\pi}{2} \frac{4n - 1}{4N - 1} \right].$$

При  $R = 0$  (короткозамкнутая линия) спектр собственных частот имеет вид

$$\omega_n^2 = 4 \sin^2 \left[ \frac{\pi}{2} \frac{2n + 1}{2N} \right].$$

Из этих соотношений видно, что число собственных мод равно числу звеньев цепочки, т. е. анализируемая система имеет конечное, хотя и достаточно большое, число степеней свободы.<sup>1</sup> Спектр в низкочастотной области оказывается почти эквидистантным. С ростом частоты усиливается дисперсия, что проявляется в сгущении резонансных частот по мере приближения к частоте отсечки.

В данной работе рассматриваются два случая:  $R = 1$ , что соответствует линии, согласованной в области низких частот, и  $R = 0,1$  (сильно рассогласованная линия). Зависимости  $\rho(\omega)$  и АЧХ  $|G(\omega)|$  для обоих случаев для цепочки из 32 ячеек представлены на рис. 2 и 3 соответственно. Видно, что при  $R = 1$  в низкочастотной области модуль коэффициента отражения мал, вследствие чего резонансы практически отсутствуют. При приближении к частоте отсечки (которая в используемых безразмерных переменных равна двум)  $\rho(\omega)$  стремится к единице. Соответственно, в этой области резонансы выражены наиболее ярко (рис. 2б). При  $R = 0,1$  коэффициент отражения меняется слабо и близок к единице (рис. 3а), поэтому резонансный характер зависимости  $|G(\omega)|$  сохраняется во всём диапазоне частот. Действительно, в пределе  $R \rightarrow 0$  коэффициент отражения стремится к единице и не зависит от частоты (см. (5)).

Нелинейная динамика цепочки при различных амплитудах и частотах входного сигнала исследовалась путём численного моделирования. Число звеньев цепочки выбиралось достаточно боль-

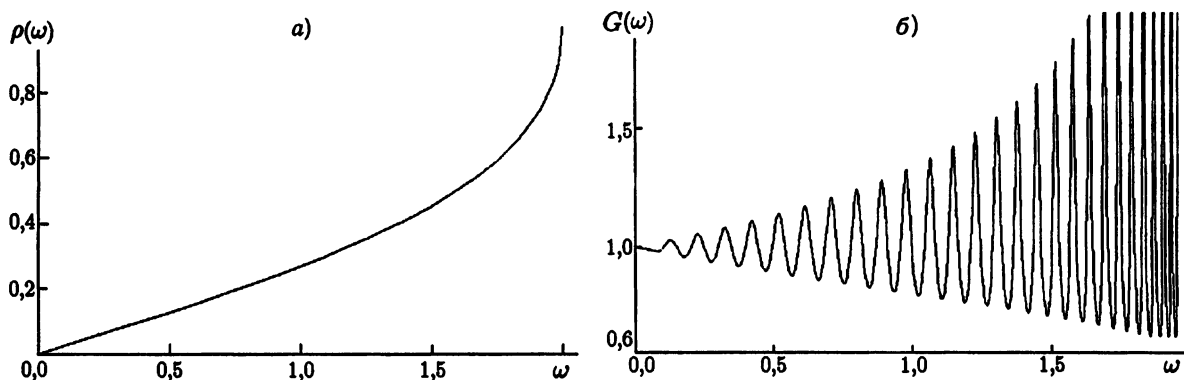


Рис. 2. Зависимость коэффициента отражения от частоты (а) и амплитудно-частотная характеристика (б) при  $R = 1$

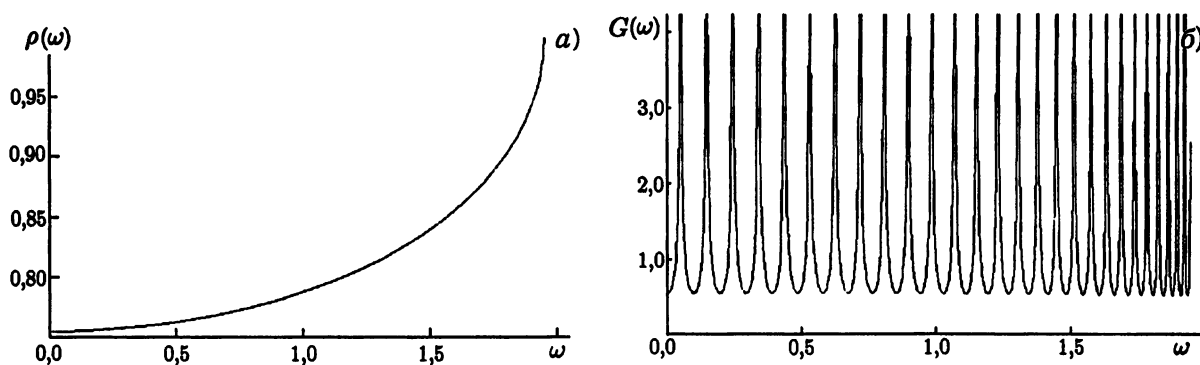


Рис. 3. Зависимость коэффициента отражения от частоты (а) и амплитудно-частотная характеристика (б) при  $R = 0,1$

<sup>1</sup> Впрочем, необходимо заметить, что даже при исследовании распределённых систем, описываемых уравнениями в частных производных, использование при численном моделировании конечно-разностной аппроксимации фактически означает переход к конечномерной динамической системе.

шим ( $N = 32 \div 64$ ). Для удобства численного моделирования предполагалось, что нелинейность является достаточно слабой, так что можно положить

$$\frac{1}{1 - V_n} \approx 1 + V_n.$$

Тогда уравнения (4) можно переписать в виде

$$\dot{I}_n = V_{n-1} - V_n, \quad \dot{V}_n = (1 + V_n)(I_n - I_{n+1}). \quad (9)$$

Уравнения (9) с граничными условиями (3) интегрировались численно при помощи метода Рунге—Кутты 4-го порядка.

Вначале опишем результаты численного моделирования для линии, согласованной в области низких частот ( $R = 1$ ). По мере распространения вдоль цепочки наблюдается укрупнение фронта возмущения и его трансформация в последовательность солитоноподобных уединённых волн. Подобное поведение типично для процессов распространения нелинейных волн в диспергирующих средах [2, 5]. На рис. 4 приведены примеры распределений  $V_n$  вдоль цепочки в некоторый момент времени. При достаточно сильной нелинейности образующиеся уединённые волны имеют большую амплитуду и малую ширину, так что могут быть локализованы в пределах всего лишь нескольких ячеек. Число солитонов, на которые распадается первоначальное возмущение, зависит от частоты входного сигнала и уменьшается с ростом последней (ср. рис. 4а, б).

При достаточно небольшой амплитуде  $A$  входного сигнала переходный процесс завершается установлением режима стационарных периодических колебаний. Спектр колебаний содержит частоту внешнего воздействия и большое количество высших гармонических составляющих. Однако когда  $A$  превышает некоторое критическое значение периодический режим становится неустойчивым и сменяется квазипериодическими или хаотическими колебаниями. Сценарии перехода к хаосу иллюстрирует рис. 5, где представлены бифуркационные диаграммы для различных  $\omega$ , на которых отложены положения максимумов  $V_{\max}$  выходного сигнала по мере увеличения  $A$  (для определённости все представленные ниже численные результаты соответствуют цепочке из 32 элементов).

В низкочастотной области переход к хаосу происходит жёстко. Это хорошо видно на рис. 5а, б, а также на рис. 6, где приведены фазовые портреты, восстановленные по методике Паккарда—Такенса, и спектры для  $\omega = 0,1534$  и двух различных значений  $A$ . Здесь  $S$  — спектр мощности сигнала  $V(t)$ , задержка  $\tau$  выбирается таким образом, чтобы обеспечить наиболее наглядное представление фазового портрета. Ещё одним подтверждением жёсткого характера перехода к хаосу является наличие гистерезиса при уменьшении и увеличении параметра  $A$ . Поскольку временная реализация выход-

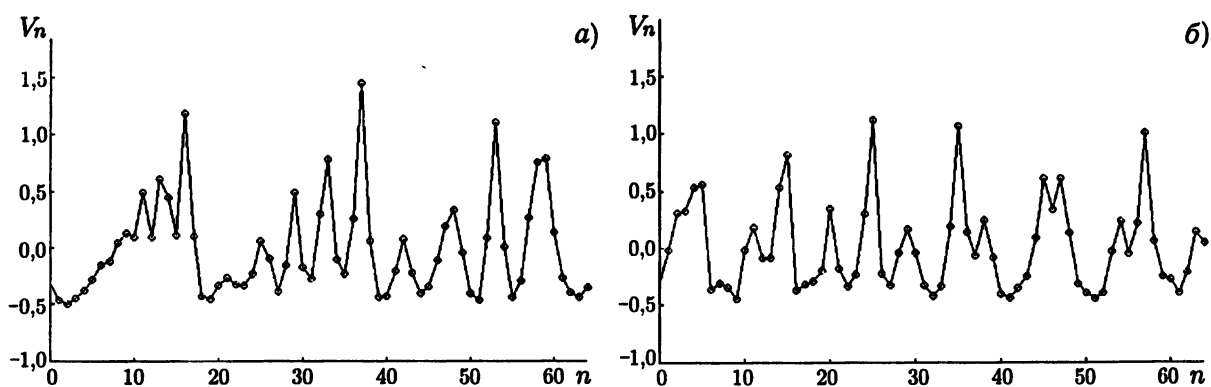


Рис. 4. Распределения напряжения на  $n$ -м элементе в некоторый момент времени ( $A = 0,5$ ;  $N = 64$ ;  $\omega = 0,3068$  (а);  $\omega = 0,6136$  (б))

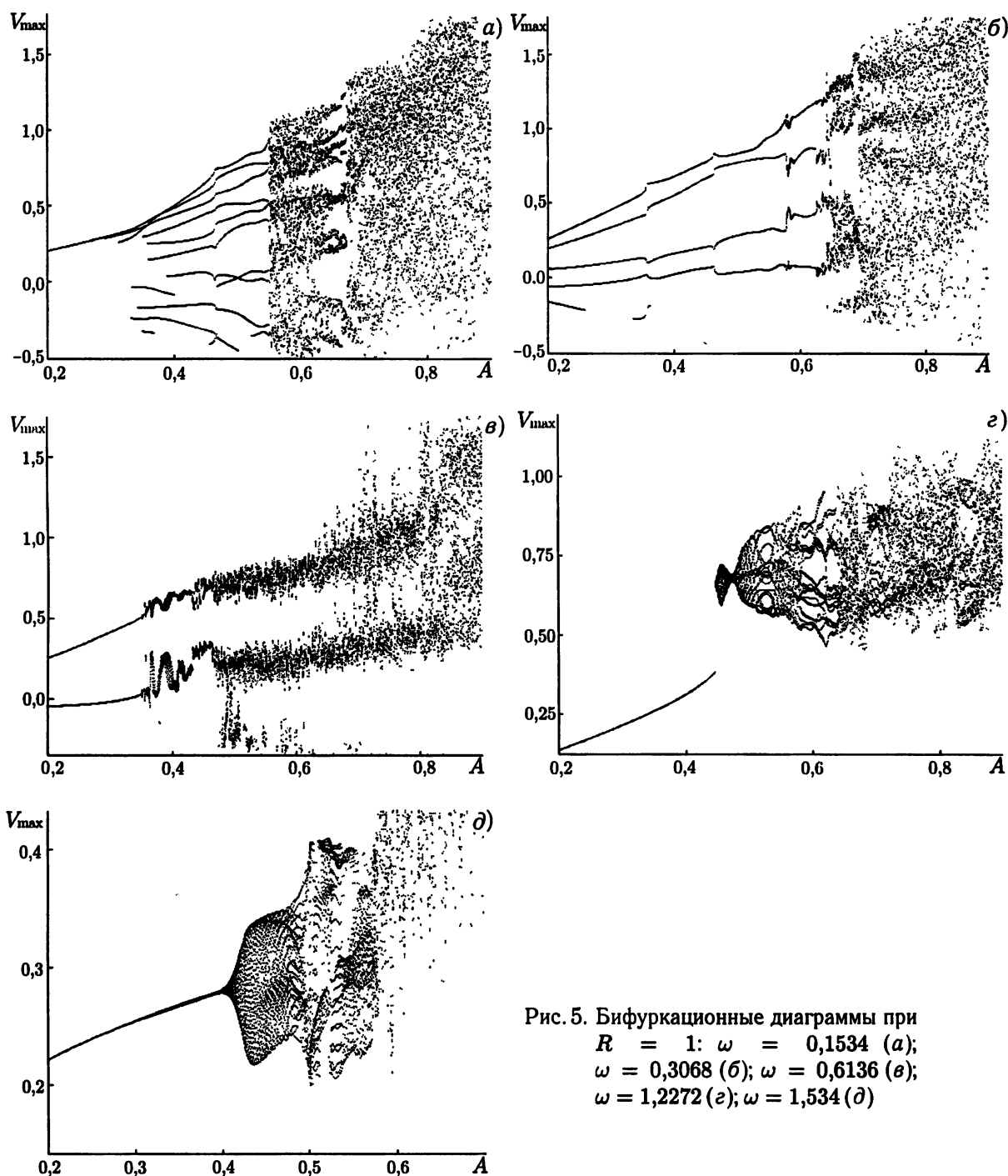


Рис. 5. Бифуркационные диаграммы при  $R = 1$ :  $\omega = 0,1534$  (а);  $\omega = 0,3068$  (б);  $\omega = 0,6136$  (в);  $\omega = 1,2272$  (г);  $\omega = 1,534$  (д)

ного сигнала  $V_N(t)$  фактически представляет собой цуг из достаточно большого числа уединённых волн, каждая из них оставляет свой след на бифуркационной диаграмме в области периодических колебаний (см. рис. 5а, б). При этом в фазовом пространстве существует сложный предельный цикл с большим числом петель, каждая из которых соответствует одной из уединённых волн (рис. 6а). Изломы на бифуркационных диаграммах объясняются жёсткими переходами между циклами различной формы. При этом основная частота в спектре не меняется и остаётся равной частоте внешнего сигнала, однако изменяются амплитуды различных гармоник. После перехода к хаосу (рис. 6б) в спектре по-прежнему



отчётливо видны дискретные пики на основной частоте и её гармониках, а уровень шума невысок. По мере увеличения амплитуды воздействия происходит постепенное расплывание дискретных пиков и увеличение «шумового пьедестала». На фазовом портрете рис. 6б видно, что хаотический аттрактор возникает на базе потерявшего устойчивость предельного цикла.

С ростом частоты  $\omega$  число образующихся солитонов уменьшается. Соответственно уменьшается число следов на бифуркационной диаграмме (рис. 5б, в). При  $\omega = 0,3068$  по мере увеличения амплитуды периодические колебания сменяются квазипериодическими. В спектре появляются пары спутников, расположенных вблизи основной частоты и её гармоник. Однако переход к хаосу по-прежнему происходит жёстко при  $A \approx 0,65$ .

При достаточно больших  $\omega$  можно наблюдать переход к хаосу через разрушение квазипериоди-

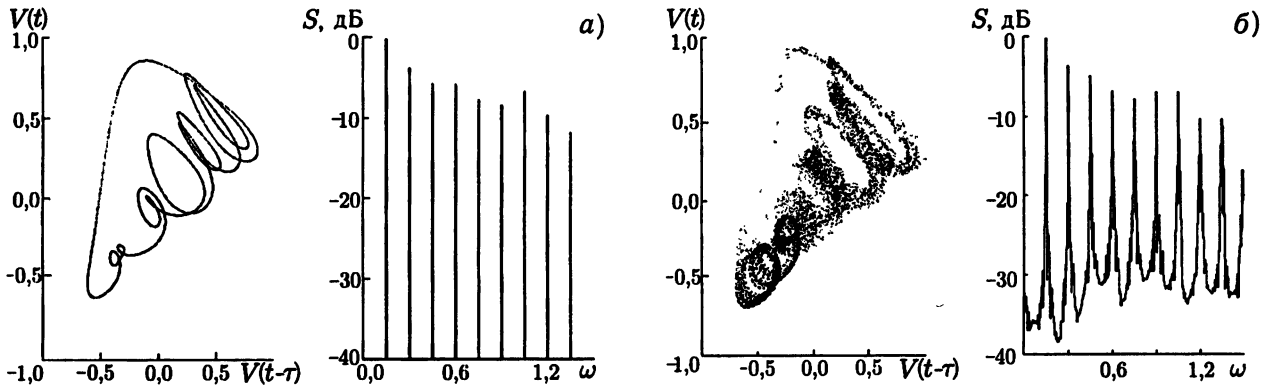


Рис. 6. Спектры и фазовые портреты, иллюстрирующие жёсткий переход к хаосу ( $R = 1$ ;  $\omega = 0,1534$ ;  $A = 0,54$  (а);  $A = 0,55$  (б))

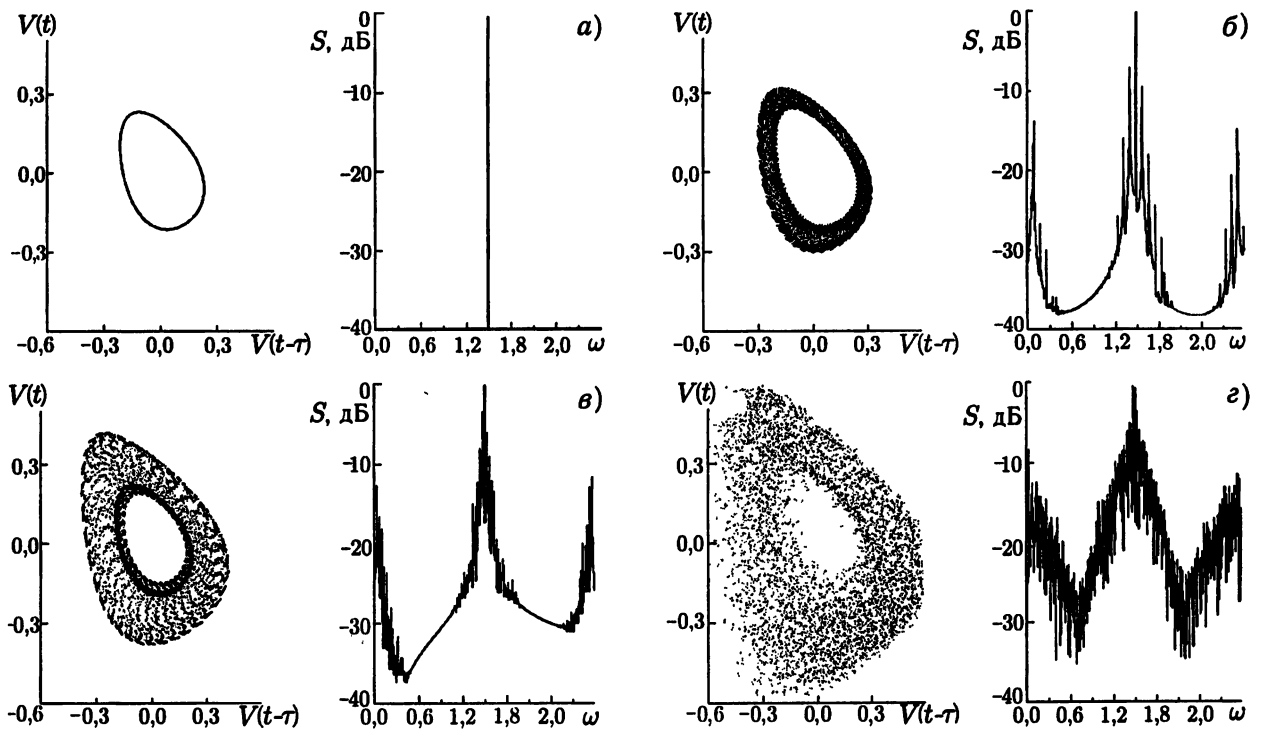


Рис. 7. Спектры и фазовые портреты, иллюстрирующие переход к хаосу через разрушение квазипериодического движения ( $R = 1$ ;  $\omega = 1,534$ ;  $A = 0,25$  (а);  $A = 0,42$  (б);  $A = 0,5$  (в);  $A = 0,6$  (г))

ческого движения. Соответствующие спектры и фазовые портреты приведены на рис. 7. С увеличением амплитуды входного сигнала периодический режим сменяется квазипериодическим: около частоты входного сигнала и её гармоник появляются симметрично расположенные сателлиты с частотами  $n\omega \pm \Delta\omega$ . Возбуждение сателлитов происходит мягко. Таким образом, выходной сигнал становится модулированным по амплитуде, т. е. это явление можно интерпретировать как модуляционную неустойчивость. При этом аттрактором в фазовом пространстве служит тор (рис. 7б). По мере дальнейшего роста  $A$  амплитуды спектральных составляющих на основной частоте и её гармониках уменьшаются, а амплитуда сателлитов растёт. Появляются всё новые и новые составляющие с частотами  $n\omega \pm m\Delta\omega$ , где  $m = 1, 2, \dots$ , т. е. происходит расширение модуляционного спектра (рис. 7в). Далее колебания становятся хаотическими (рис. 7г). Конечно, в спектре содержится большое число гармоник. На рис. 7 показаны лишь его участки в окрестности первой гармоники.

На бифуркационных диаграммах (рис. 5г, д) видны обширные области квазипериодических, а также несколько зон периодических движений, которые соответствуют резонансным циклам на торе.

Отметим, что при некоторых значениях параметров могут наблюдаться жёсткие переходы между квазипериодическими режимами с разными частотами модуляции, причём всегда осуществляется переход к режиму с меньшей частотой модуляции. После таких переходов амплитуда на основной частоте в спектре заметно увеличивается, а амплитуды сателлитов и их количество уменьшаются. В небольшой переходной области между двумя различными режимами возможно их сосуществование, т. е. реализуются квазипериодические колебания с тремя независимыми частотами.

Наконец, на частотах, близких к частоте отсечки линейной системы ( $\omega = 2,0$ ), переход к хаосу вообще не наблюдается, хотя имеются небольшие области квазипериодических движений.

Кроме того, было проведено численное моделирование для случая  $R = 0,1$ , что соответствует сильно рассогласованной цепочке. В этом случае практически при всех частотах входного сигнала доминирует сценарий разрушения квазипериодического движения. В качестве примера на рис. 8 приведены фазовые портреты и спектры, иллюстрирующие переход к хаосу, а также бифуркационная диаграмма для случая  $\omega = 0,3068$  (ср. с рис. 5б). Отметим, что переход к хаосу происходит при существенно меньшей амплитуде воздействия, чем в предыдущем случае.

На наш взгляд, полученные результаты объясняются следующим образом. В случае линии, согласованной в области низких частот, при малых  $\omega$  в полосу пропускания цепочки укладывается большое число гармоник частоты сигнала. Некоторые из них попадают в резонанс с высшими собственными модами (напомним, что резонансы наиболее ярко выражены вблизи частоты отсечки, см. рис. 2). Поэтому переход к хаосу вызван жёстким возбуждением большого числа мод. На высоких частотах механизмом перехода к хаосу является модуляционная неустойчивость, которая, как известно, относится к числу наиболее важных и распространённых нелинейных волновых неустойчивостей [2, 5]. В результате развития неустойчивости происходит возбуждение сателлитов, переход к хаосу происходит через разрушение квазипериодического движения. В промежуточной области наблюдается конкуренция этих сценариев.

Для возбуждения сателлитов необходимо также, чтобы коэффициент отражения был достаточно большим. Действительно, условие возбуждения можно представить в виде  $K\Gamma = 1$ , где  $K$  — коэффициент усиления возмущения за счёт модуляционной неустойчивости при прохождении вдоль цепочки,  $\Gamma$  — коэффициент отражения (т. е. усиление должно компенсировать потери). Следовательно, при  $R = 1,0$  сателлиты появляются только в случае, если несущая частота достаточно велика. При  $R = 0,1$  коэффициент отражения существенно отличается от нуля во всём частотном диапазоне (рис. 3а), поэтому переход к хаосу через разрушение квазипериодического движения доминирует.

Полученные результаты позволяют расширить представления о механизмах возникновения хаотического поведения в распределённых системах. Можно ожидать, что описанная картина будет харак-

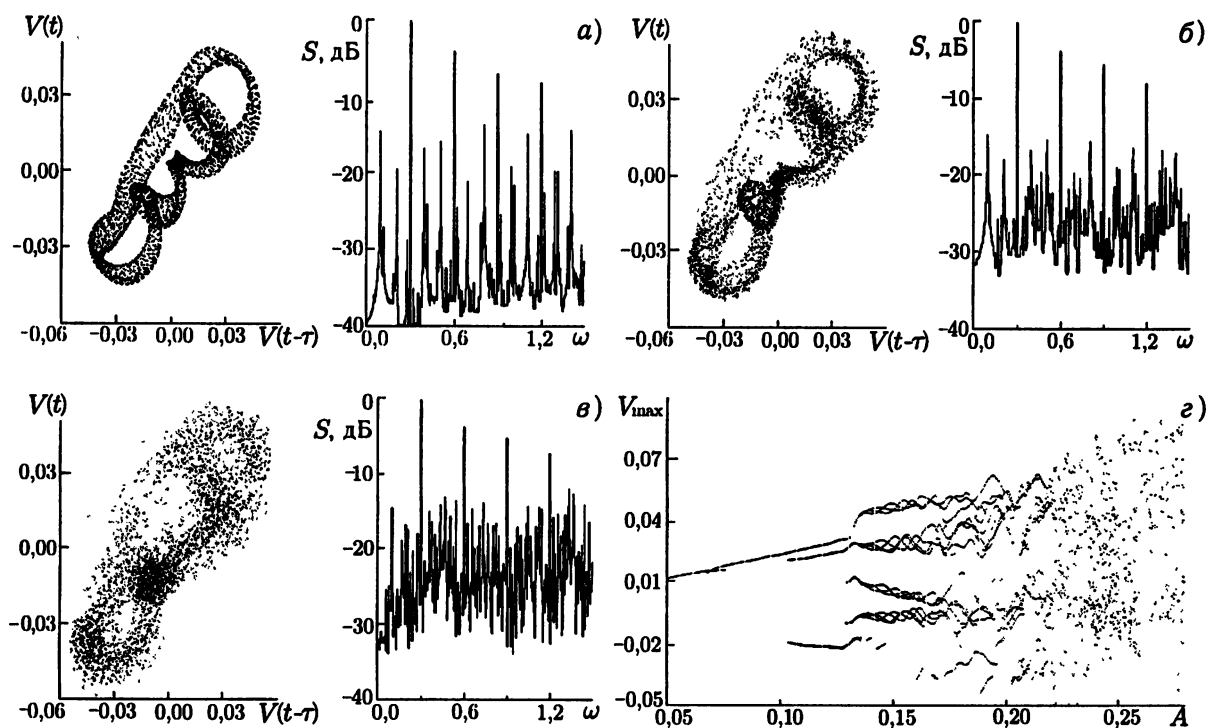


Рис. 8. Переход к хаосу через разрушение квазипериодического движения при  $R = 0,1$ ;  $\omega = 0,3068$ : спектры и фазовые портреты для  $A = 0,15$  (а);  $A = 0,17$  (б);  $A = 0,18$  (в) и бифуркационная диаграмма (г)

терна и для других систем различной физической природы, которые можно рассматривать как распределённые нелинейные резонаторы под внешним воздействием. Представляется интересным исследовать процессы перехода к хаосу в средах с другими типами дисперсии и нелинейности, а также выяснить, имеются ли принципиальные отличия в поведении квазинепрерывных систем (цепочек из достаточно большого количества элементов) и действительно распределённых систем, описываемых уравнениями в частных производных.

Работа выполнена при финансовой поддержке USA Civilian Research and Development Foundation for the Independent States of the Former Soviet Union (грант No. REC-006), а также Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 99-02-16016).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ланда П. С. Нелинейные колебания и волны. М.: Наука, 1997.
2. Рабинович М. И., Трубецков Д. И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1992.
3. Мун Ф. Хаотические колебания. М.: Мир, 1990.
4. Скотт Э. Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике. М.: Сов. радио, 1977.
5. Рыскин Н. М., Трубецков Д. И. Нелинейные волны. М.: Наука, 2000.
6. Езерский А. Б., Рабинович М. И., Степанянц Ю. А., Шапиро М. Ф. // ЖЭТФ. 1979. Т. 76, № 3. С. 991.
7. Акулов Ю. Г., Муллер Я. Н. // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1973. Т. 16, № 10. С. 50.
8. Usher A., Jefferies D. J. // Phys. Lett: A. 1983. V. 98, No. 8, 9. P. 396.
9. Балякин А. А., Рыскин Н. М. // Изв. РАН. Сер. физическая. 2000. Т. 64, № 12. С. 2392.

Саратовский госуниверситет  
им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов,  
Россия

Поступила в редакцию  
25 декабря 2000 г.

**CHAOTIC OSCILLATIONS IN A NONLINEAR RADIO-TECHNICAL LINE**

*A. A. Balykin and N. M. Ryskin*

We present the results of numerical simulation of the complex dynamics of a nonlinear radio-technical line with reflecting boundaries, which is excited by an external harmonic signal. It is shown that, with increase in the amplitude of the input signal, periodic oscillations at the external-forcing frequency become unstable and are changed to more complex modes, which can be both quasiperiodic and chaotic. The main scenarios of transition to chaos are studied. The influence of the modulation instability and soliton formation on the complex dynamics is discussed.

УДК 517.9

## СУПЕРСИНГУЛЯРНЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В МЕХАНИКЕ

А. И. Саичев, С. А. Лапинова

Вводится понятие суперсингулярных функций. Иллюстрируется их применение при отыскании обобщённых решений уравнения непрерывности для плотности вещества, движущегося в бюргерсовом поле скорости.

## ВВЕДЕНИЕ

Важным инструментом анализа полей газовой динамики служат обобщённые (разрывные или сингулярные) решения соответствующих уравнений, имеющие ясный физический и строгий математический смысл и тогда, когда не существуют в классическом смысле входящие в уравнения производные (см., например, [1–3]). Иногда, однако, при отыскании подобных решений оказывается недостаточно сингулярных обобщённых функций — непрерывных линейных функционалов на подходящем множестве пробных функций. Поэтому полезно ввести новый класс суперсингулярных функций, расширяющий возможности анализа обобщённых решений газодинамических уравнений. В данной работе понятие суперсингулярных функций и их возможное применение иллюстрируется на примере обобщённого решения уравнения непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\nabla, \mathbf{v}\rho) = \nu \Delta \rho, \quad \rho(\mathbf{x}, t = 0) = \rho_0(\mathbf{x}) \quad (1)$$

для плотности  $\rho(\mathbf{x}, t)$  в случае, когда поле скорости  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  подчиняется многомерному уравнению Бюргерса

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} = \mu \Delta \mathbf{v}, \quad \mathbf{v}(\mathbf{x}, t = 0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}). \quad (2)$$

Напомним, что одномерный вариант уравнения (2) был предложен Бюргерсом как модельное уравнение теории сильной турбулентности. Далее, в [4–7] было показано, что потенциальные решения

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = -\nabla S(\mathbf{x}, t)$$

уравнения Бюргерса адекватно описывают эволюцию крупномасштабного распределения вещества во Вселенной. В последнем случае важно не столько решение самого уравнения (2), сколько уравнения (1) для плотности  $\rho(\mathbf{x}, t)$  вещества, скорость движения которого  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  удовлетворяет уравнению (2). Диффузионный член в уравнении (1) учитывает молекулярную диффузию [8]. Коэффициент вязкости  $\mu$  в (2) и диффузии  $\nu$ , вообще говоря, различны. Однако ниже для упрощения анализа будем считать их одинаковыми:  $\nu = \mu$ .

В космологических приложениях обычно интересуются решениями уравнений (1), (2) в пределе  $\mu \rightarrow +0$ . Такие предельные решения перечисленных уравнений назовём обобщёнными решениями уравнения

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} = 0$$

и уравнения непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\nabla, \mathbf{v}\rho) = 0. \quad (3)$$

Главной целью данной статьи является построение обобщённого решения уравнения непрерывности (3) в случае, когда поле скорости удовлетворяет уравнению Бюргера при  $\mu \rightarrow +0$ , и обсуждение возникающего при этом понятия суперсингулярных функций.

## 1. СВЯЗЬ ЛАГРАНЖЕВЫХ И ЭЙЛЕРОВЫХ КООРДИНАТ

Прежде чем привести обобщённые решения уравнения непрерывности (3), напомним точное решение уравнения Бюргера в  $n$ -мерном пространстве:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}(\mathbf{x}, t)}{t}, \quad (4)$$

где

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}, t) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{y} \exp[\Phi(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t)/(2\mu t)] d^n \mathbf{y}}{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp[\Phi(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t)/(2\mu t)] d^n \mathbf{y}}, \quad (5)$$

$$\Phi(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t) = \varphi(\mathbf{y}, t) + (\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \varphi(\mathbf{y}, t) = S_0(\mathbf{y})t - \mathbf{y}^2/2, \quad S_0(\mathbf{y}) = S(\mathbf{y}, t = 0). \quad (6)$$

Вектор  $\mathbf{y}$ , при котором функция  $\Phi(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t)$  достигает максимума, и есть входящая в правую часть (4) функция  $\mathbf{y}(\mathbf{x}, t)$  при  $\mu = +0$ .

Отметим геометрический смысл векторного поля  $\mathbf{y}(\mathbf{x}, t)$ . Непосредственной подстановкой можно показать [9], что поле  $\mathbf{y}(\mathbf{x}, t)$  (5) является точным решением уравнения

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{y} = \mu \Delta \mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(\mathbf{x}, t = 0) = \mathbf{x},$$

совпадающего при  $\mu = +0$  с уравнением лагранжевых координат. Таким образом, поле  $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x}, t)$  задаёт отображение эйлеровых координат в лагранжевы в пределе  $\mu \rightarrow +0$ .

При конструировании обобщённого решения уравнения непрерывности (3) нам понадобится обратное к  $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x}, t)$  отображение  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{y}, t)$  лагранжевых координат в эйлеровы. Как известно (см., например, [10]),

$$\mathbf{x}(\mathbf{y}, t) = -\nabla \bar{\varphi}(\mathbf{y}, t), \quad (7)$$

где  $\bar{\varphi}(\mathbf{y}, t)$  — выпуклая оболочка функции  $\varphi(\mathbf{y}, t)$  (6).

## 2. ОБОБЩЁННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ НЕПРЕРЫВНОСТИ

В многомерном случае точное решение уравнения (1) пока неизвестно. Однако несложно указать решение одномерного уравнения

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = \mu \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}$$

для плотности. Как показано в [3], его точное решение имеет вид

$$\rho(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} M_0(y) \exp[\Phi(y, x, t)/(2\mu)] dy}{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp[\Phi(y, x, t)] dy}. \quad (8)$$

Здесь введена начальная масса слева от точки  $x$ :

$$M_0(x) = \int_{-\infty}^x \rho_0(y) dy,$$

и одномерный аналог функции (6)

$$\Phi(y, x, t) = \varphi(y, t) + xy, \quad \varphi(y, t) = S_0(y)t - y^2/2.$$

Укажем вытекающую из (8) обобщённую плотность при  $\mu = +0$ :

$$\rho(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} M_0[y(x, t)].$$

Будем пока считать  $y = y(x, t)$  диффеоморфизмом. Тогда всюду существует гладкая строго монотонная обратная функция  $x(y, t)$ , а последнее равенство можно записать в виде

$$\rho(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} M_0(y) \frac{\partial}{\partial x} \delta(y(x, t) - y) dy.$$

Воспользовавшись тождеством [9]

$$\frac{\partial}{\partial x} \delta(y(x, t) - y) + \frac{\partial}{\partial y} \delta(x(y, t) - x) \equiv 0$$

и интегрируя по частям, получим

$$\rho(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_0(y) \delta(x(y, t) - x) dy. \quad (9)$$

Последнее выражение имеет ясный физический смысл: это решение одномерного уравнения непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (v\rho) = 0,$$

равное суперпозиции сингулярных плотностей  $\delta(x(y, t) - x)$  отдельных частиц, движущихся в поле скорости  $v(x, t)$ . Подчёркнём универсальность выражения (9), справедливого для произвольной одномерной среды. Очевидно, аналогичное универсальное соотношение

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_0(\mathbf{y}) \delta(\mathbf{x}(\mathbf{y}, t) - \mathbf{x}) d\mathbf{y}, \quad (10)$$

где отображение  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{y}, t)$  определяется равенством (7), задаёт обобщённое решение многомерного уравнения непрерывности (3).

К сожалению, как уже отмечалось, выражения типа (10) имеют в рамках теории обобщённых функций строгий смысл, только если отображение  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{y}, t)$  лагранжевых координат в эйлеровы диффеоморфно. Легко показать, что даже при гладком начальном поле скорости  $\mathbf{v}_0(\mathbf{x})$  отображение диффеоморфно лишь в интервале  $t \in ]0, t^*[$ , где  $t^* < \infty$ , физически соответствующем всюду однопоточковому

движению невзаимодействующих частиц [3]. При этом  $\varphi(\mathbf{y}, t)$  совпадает со своей выпуклой оболочкой  $\bar{\varphi}(\mathbf{y}, t)$ , а отображение (7) имеет вид

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{v}_0(\mathbf{y}) t. \quad (11)$$

При  $t > t^*$  функция  $\mathbf{y}(\mathbf{x}, t)$  становится разрывной, а обратная к ней функция  $\mathbf{x}(\mathbf{y}, t)$  в некоторых областях пространства  $\mathbf{y}$  постоянной. Соответственно выражение

$$\delta(\mathbf{x}(\mathbf{y}, t) - \mathbf{x})$$

в правой части равенства (10) в рамках стандартной теории обобщённых функций теряет смысл. Однако и в этом случае, используя вводимое ниже понятие суперсингулярной функции, легко указать следствия подобных выражений и детально изучить сингулярные распределения вещества.

### 3. СУПЕРСИНГУЛЯРНЫЕ ФУНКЦИИ

Пусть  $T(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  — зависящая от параметра  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  обобщённая функция аргумента  $\mathbf{x}$ , линейно и непрерывно отображающая на числовую ось множество гладких финитных функций  $\{\beta(\mathbf{x})\}$  ( $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ):

$$T(\mathbf{x}, \mathbf{y})[\beta(\mathbf{x})] = G_\beta(\mathbf{y}).$$

Такое зависящее от  $\mathbf{y}$  отображение порождает некоторую функцию  $G_\beta(\mathbf{y})$ . Будем считать её локально интегрируемой. Часто  $T(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  является также обобщённой функцией аргумента  $\mathbf{y}$  на множестве аналогичных пробных функций  $\{\alpha(\mathbf{y})\}$  ( $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ ):

$$T(\mathbf{x}, \mathbf{y})[\alpha(\mathbf{y})] = Q_\alpha(\mathbf{x}), \quad (12)$$

результат действия которой на пробную функцию  $\alpha(\mathbf{y})$  зависит от  $\mathbf{x}$  как от параметра. Однако иногда такая симметрия не имеет места, и отображение (12) не определяет (в обычном смысле) обобщённую функцию  $T(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ . В подобных случаях будем говорить, что отображение (12) задаёт суперсингулярную функцию аргумента  $\mathbf{y}$ . Чтобы указать алгоритм, по которому суперсингулярная функция  $T(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  отображает пробную функцию  $\alpha(\mathbf{y})$ , рассмотрим двойное отображение

$$(T(\mathbf{x}, \mathbf{y})[\beta(\mathbf{x})]) [\alpha(\mathbf{y})] = \int_{-\infty}^{+\infty} G_\beta(\mathbf{y}) \alpha(\mathbf{y}) d^n \mathbf{y}.$$

Используя результат теоремы Фубини, которая в данном контексте разрешает менять местами порядок отображения, будем считать, что последнее равенство определяет повторное отображение:

$$(T(\mathbf{x}, \mathbf{y})[\alpha(\mathbf{y})]) [\beta(\mathbf{x})] \equiv Q_\alpha(\mathbf{x})[\beta(\mathbf{x})] = \int_{-\infty}^{+\infty} G_\beta(\mathbf{y}) \alpha(\mathbf{y}) d^n \mathbf{y}.$$

Интеграл справа линейно и непрерывно отображает пробную функцию  $\beta(\mathbf{x})$ , т. е. задаёт стандартную обобщённую функцию  $Q_\alpha(\mathbf{x})$ . Следовательно, при условии локальной интегрируемости функции  $G_\beta(\mathbf{x})$  результатом действия суперсингулярной функции  $T(\mathbf{x}, \mathbf{y})[\alpha(\mathbf{y})]$  на пробную функцию  $\alpha(\mathbf{x})$  является стандартная обобщённая функция  $Q_\alpha(\mathbf{x})$ .

**Пример 1.** Типичным примером суперсингулярной функции одномерного аргумента  $y$  служит дельта-функция:

$$T(x, y) = \delta(\chi_A(y) - x), \quad (13)$$



где

$$\chi_A(y) = \begin{cases} 1, & y \in A, \\ 0, & y \notin A. \end{cases}$$

Здесь  $A$  — некоторое множество точек на оси  $y$ . Поскольку  $\chi_A(y)$  не строго монотонна и разрывна, то и (13) не является стандартной сингулярной обобщённой функцией. Тем не менее (13) задаёт суперсингулярную функцию. Действительно,  $T(x, y)$  как функция  $x$  — обычная дельта-функция, такая, что

$$\delta(\chi_A(y) - x) [\beta(x)] = \beta(\chi_A(y)) = G_\beta(y)$$

— локально интегрируемая функция. Соответственно, согласно упомянутому выше постулату Фубини двойное отображение задаётся здесь равенством

$$(\delta(\chi_A(y) - x) [\alpha(y)]) [\beta(x)] = Q_\alpha(x) [\beta(x)] = \beta(1) \int_A \alpha(y) dy + \beta(0) \int_{\bar{A}} \alpha(y) dy,$$

где  $\bar{A} = \mathbb{R} \setminus A$ . Тот же результат в правой части получим, приняв, что суперсингулярная функция (13), действуя на пробную функцию  $\alpha(y)$ , порождает сингулярную обобщённую функцию:

$$\delta(\chi_A(y) - x) [\alpha(y)] = Q_\alpha(x) = \delta(x - 1) \int_A \alpha(y) dy + \delta(x) \int_{\bar{A}} \alpha(y) dy. \quad (14)$$

Отметим, что суперсингулярная дельта-функция (13) теряет присущее обычным дельта-функциям выкалывающее свойство. В самом деле, как видно из (14), результат её действия зависит от значения  $\alpha(y)$  не в одной точке, а на всей оси  $\mathbb{R}$ . В частности, если  $A$  — множество точек с рациональными координатами ( $\chi_A(y)$  — функция Дирихле), то интегралы в правой части (14) определены в смысле Лебега, и

$$\delta(\chi_A(y) - x) [\alpha(y)] = \delta(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(y) dy.$$

**Пример 2.** В качестве следующего примера найдём поле плотности одномерного потока слипающихся частиц. Типичный график отображения  $x = x(y, t)$  лагранжевых координат в эйлеровы в этом случае изображён на рис. 1. Постоянный участок отображения, между точками с лагранжевыми координатами  $y^-$  и  $y^+$ , соответствует интервалу, в котором первоначально находились слипшиеся в текущий момент времени  $t$  частицы. Здесь же (слева) показан график сингулярного поля плотности  $\rho(x, t)$ . Стрелкой символически изображена дельта-образная компонента поля плотности.

Подробнее обсудим сингулярную плотность потока в ситуации, приведённой на рис. 1. В этом случае входящая в (9) дельта-функция  $\delta(x(y, t) - x)$  как функция аргумента  $y$  суперсингулярна из-за наличия интервала  $]y^-, y^+[$ , внутри которого отображение  $x = x(y, t)$  постоянно и равно  $x^*$ . Однако по аргументу  $x$  это обычная сингулярная функция, результат действия которой на пробную функцию  $\beta(x)$  равен

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x(y, t) - x) \beta(x) dx = \beta(x(y, t)).$$

Домножив обе части равенства на начальную плотность  $\rho_0(y)$ , играющую в данном случае роль пробной функции  $\alpha(y)$ , получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \beta(x) \rho(x, t) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_0(y) \beta(x(y, t)) dy. \quad (15)$$

Подробнее проанализируем правую часть последнего равенства применительно к отображению  $x(y, t)$ , график которого изображён на рис. 1. В этом случае интеграл в (15) распадается на три части:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \beta(x) \rho(x, t) dx = \beta(x^*) m^* + \int_{-\infty}^{y^-} \beta(x(y, t)) \rho_0(y) dy + \int_{y^+}^{+\infty} \beta(x(y, t)) \rho_0(y) dy,$$

где  $m^*$  — масса образовавшейся при слипании макрочастицы, равная

$$m^* = \int_{y^-}^{y^+} \rho_0(y) dy.$$

Перейдём в оставшихся интегралах к интегрированию по  $x$ , пользуясь гладкостью и строгой монотонностью функции  $x = x(y, t)$  в обоих интервалах интегрирования  $]-\infty, y^-[$  и  $]y^+, +\infty[$ . Очевидно, после замены переменной оба интеграла можно объединить в один, по всей оси  $x$ , что даёт

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \beta(x) \rho(x, t) dx = \beta(x^*) m^* + \int_{-\infty}^{+\infty} \beta(x) \rho_0(y(x, t)) \left\{ \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right\} dx. \quad (16)$$

Здесь  $y = y(x, t)$  — отображение, обратное отображению  $x = x(y, t)$ . Фигурные скобки справа означают, что следует брать значения заключённой в неё производной всюду, за исключением точки  $x^*$ , где производную доопределяют любой конечной величиной, не влияющей на значение интеграла.

Из равенства (16) следует, что обобщённая функция, плотность потока слипающихся частиц, равна

$$\rho(x, t) = m^* \delta(x - x^*) + \rho_0(y(x, t)) \left\{ \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right\}.$$

**Пример 3.** Обсудим суперсингулярную дельта-функцию, входящую в решение (10) уравнения непрерывности. Имеет место равенство

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}(y, t)) [\beta(\mathbf{x})] = \beta(\mathbf{x}(y, t)).$$

Домножив его на  $\rho_0(y)$ , интегрируя по всем  $y$  и применив постулат Фубини, получим

$$\rho(\mathbf{x}, t) [\beta(\mathbf{x})] = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_0(y) \beta(\mathbf{x}(y, t)) d^2 y.$$

Здесь мы для наглядности ограничились 2-мерным случаем:  $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \in \mathbb{R}^2$ . Кроме того, не ограничивая общности рассуждений, будем считать ниже начальную плотность постоянной:  $\rho_0(y) \equiv \rho_0 = \text{const}$ . Характерный фрагмент поверхности  $\varphi(y, t)$  (6) с тремя ярко выраженными пиками изображён на рис. 2. В данном случае в качестве наглядной модели выпуклой оболочки  $\bar{\varphi}(y, t)$ , входящей

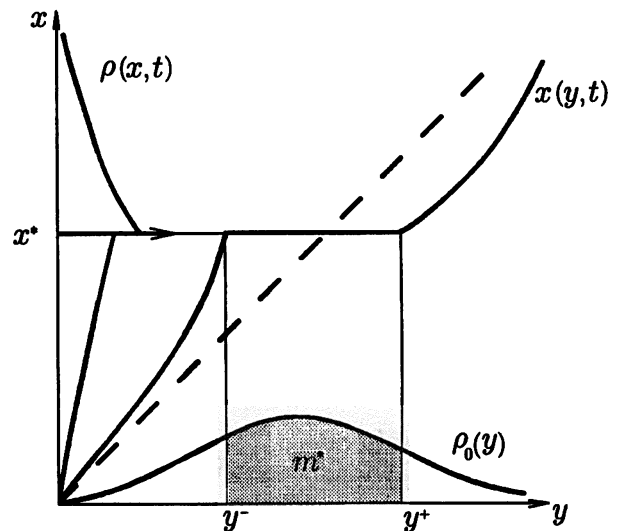


Рис. 1.

в (7), можно рассматривать резиновую плёнку, натянутую на поверхность  $\varphi(\mathbf{y}, t)$ . Поверхность натянутой плёнки и есть выпуклая оболочка.

Геометрически построение отображения (7) сводится к отысканию плоскости, касающейся выпуклой оболочки  $\bar{\varphi}(\mathbf{y}, t)$  в точке с координатами  $\mathbf{y}$ . Существует три грубых (не исчезающих при малом возмущении поверхности) типа касания плоскости и выпуклой оболочки, определяющих качественно различные типы отображения (7). Соответственно им лагранжева  $\mathbf{y}$  и эйлерова  $\mathbf{x}$  плоскости разбиваются на три типа областей. Перечислим типы касания и укажем их механический смысл:

1. Плоскость касается выпуклой оболочки в одной точке. Все такие точки принадлежат как выпуклой оболочке  $\bar{\varphi}(\mathbf{y}, t)$ , так и исходной поверхности  $\varphi(\mathbf{y}, t)$ . Проекция данных точек на плоскость  $\mathbf{y}$  есть лагранжевы координаты ещё не слипшихся частиц потока, а их эйлеровы координаты  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{y}, t)$  задаются отображением (11) для невзаимодействующих частиц.

2. Плоскость касается исходной поверхности  $\varphi(\mathbf{y}, t)$  в двух точках. Тогда весь отрезок  $\ell$ , соединяющий указанные точки, принадлежит выпуклой оболочке  $\bar{\varphi}(\mathbf{y}, t)$ . Это значит, что все точки проекции  $\ell_{\mathbf{y}}$  отрезка  $\ell$  на лагранжеву плоскость  $\mathbf{y}$  отображаются в одну точку с одинаковыми эйлеровыми координатами  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{y}, t)$ . Скользя касательной плоскостью по поверхности  $\varphi(\mathbf{y}, t)$  и стараясь, чтобы плоскость касалась поверхности сразу в двух точках, очертим на последней замкнутую область  $G$ . Все точки её проекции  $G_{\mathbf{y}}$  на плоскость  $\mathbf{y}$  проектируются на кривую

$$\mathcal{L} = \{\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{y}, t): \mathbf{y} \in G_{\mathbf{y}}\}$$

в эйлеровой плоскости  $\mathbf{x}$ , где в текущий момент времени  $t$  сосредотачивается всё вещество, первоначально находившееся в области  $\mathbf{y} \in G$ .

3. Плоскость касается поверхности в трёх точках. Соединив их отрезками, получим треугольник  $T$ , все точки проекции которого  $T_{\mathbf{y}}$  на лагранжеву плоскость  $\mathbf{y}$  отображаются в одну точку

$$\mathbf{x}^* = \{\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{y}, t): \mathbf{y} \in T_{\mathbf{y}}\}.$$

Графики, поясняющие разбиение лагранжевой плоскости  $\mathbf{y}$  на три указанных выше типа областей и особенности их отображения на эйлерову плоскость  $\mathbf{x}$ , приведены на рис. 2. Отмеченные три типа отображений определяют структуру обобщённого поля плотности:

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \hat{\rho}(\mathbf{x}, t) + \sum_i \rho_i \delta_{\mathcal{L}_i} + \sum_j m_j^* \delta(\mathbf{x}_j^* - \mathbf{x}). \quad (17)$$

Первое слагаемое

$$\hat{\rho}(\mathbf{x}, t) = \left\{ \frac{\rho_0}{J(\mathbf{y}(\mathbf{x}, t), t)} \right\}$$

в (17) описывает регулярную плотность частиц, равномерно движущихся до текущего момента  $t$ . В него входит якобиан  $J(\mathbf{y}, t)$  отображения лагранжевых координат в эйлеровы (11), а также обратное ему отображение  $\mathbf{y}(\mathbf{x}, t)$ . Области второго и третьего типов имеют в эйлеровой плоскости меру нуль, поэтому здесь можно доопределить выражение в фигурных скобках любыми ограниченными функциями.

Последнее слагаемое в (17) даёт сингулярную составляющую плотности с носителями в точках третьего типа  $\mathbf{x}^*$ , куда собирается вещество из треугольных областей  $T_{\mathbf{y}}$  лагранжевой плоскости. Коэффициенты при входящих в последнюю сумму двумерных дельта-функциях равны массам вещества, изначально находившегося в треугольниках  $T_{\mathbf{y}}$ . Если, как мы полагаем, начальная плотность рассматриваемого двумерного потока всюду одинакова и равна  $\rho_0$ , то

$$m^* = \rho_0 S_T,$$

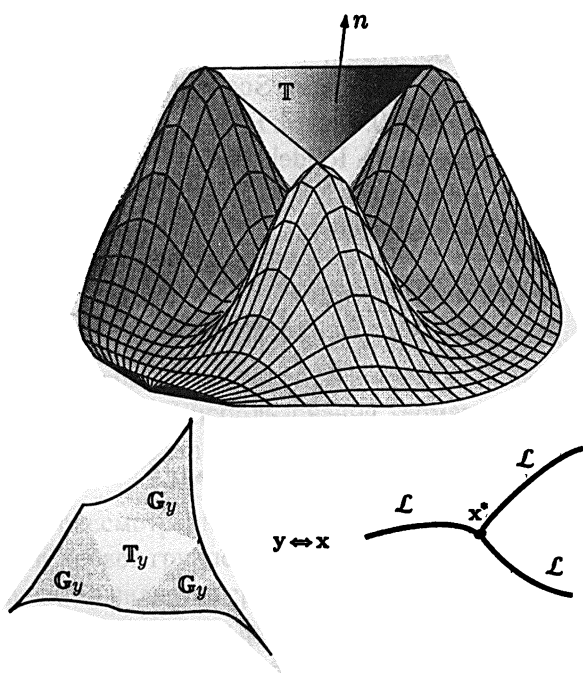


Рис. 2.

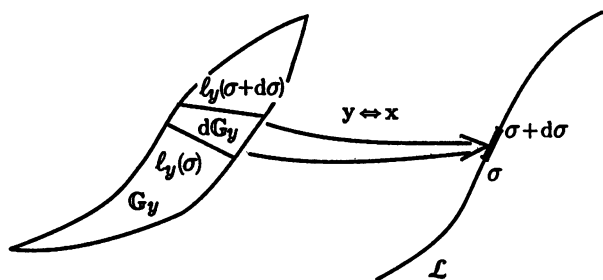


Рис. 3.

где  $S_T$  — площадь соответствующего треугольника  $T_y$ .

Отдельно остановимся на втором слагаемом в правой части (17). Оно равно сумме линейных дельта-функций, отвечающих областям второго типа ( $G_y$ ). Фигурирующая здесь линейная дельта-функция следующим образом действует на пробную функцию  $\beta(x)$ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \beta(x) \rho \delta_L d^2x = \int_L \rho(\sigma, t) \beta(x(\sigma, t)) d\sigma.$$

Иначе говоря, линейная дельта-функция  $\delta_L$  выкалывает из двойного интеграла криволинейный интеграл 1-го типа вдоль кривой  $L$ . Интеграл берётся от произведения линейной плотности  $\rho$  материальной линии  $L$  и пробной функции  $\beta(x)$ . При записи интеграла использовано параметрическое уравнение  $x = x(\sigma, t)$  кривой  $L$ . Здесь  $\sigma$  — естественный параметр, равный длине кривой, отсчитываемой от некоторой её начальной точки.

Чтобы найти линейную плотность  $\rho(\sigma, t)$ , возьмём на кривой  $L$  бесконечно малый отрезок  $[\sigma, \sigma + d\sigma]$ . На него отображается подобласть  $dG_y$  области  $G_y$ , стягивающаяся в кривую  $L$  эйлеровой плоскости. Подобласть  $dG_y$  ограничена отрезками  $l_y(\sigma, t)$  и  $l_y(\sigma + d\sigma, t)$ , отображающимися в концы отрезка  $[\sigma, \sigma + d\sigma]$ . При этом искомая линейная плотность равна

$$\rho(\sigma, t) = \lim_{d\sigma \rightarrow 0} \frac{dm(\sigma)}{d\sigma},$$

где  $dm(\sigma)$  — масса вещества, первоначально сосредоточенного в подобласти  $dG_y$ . График, иллюстрирующий вычисление линейной плотности  $\rho(\sigma, t)$ , приведён на рис. 3.

Авторы благодарны О. В. Руденко и А. В. Шанину за ценные замечания, способствовавшие существенному улучшению изложения статьи.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 00-02-16167), Совета по государственной поддержке ведущих научных школ (грант № 00-15-96619), а также INTAS (грант № 97-11134).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука, 1978.
2. Hopf E. // Comm. Pure Appl. Math. 1950. V. 3. P. 201.

3. Gurbatov S. N., Malakhov A. N., Saichev A. I. Nonlinear random waves and turbulence in nondispersive media: waves, rays and particles. Manchester Univ. Press, 1991.
4. Shandarin S. F., Zeldovich Ya. B. // Review Modern Phys. 1992. V. 148. P. 623.
5. Гурбатов С. Н., Саичев А. И., Шандарин С. Ф. // ДАН. 1985. Т. 285, вып. 2. С. 323.
6. Gurbatov S. N., Saichev A. I., Shandarin S. F. // Mon. Not. Royal Astron. Soc. 1989. V. 236. P. 385.
7. Weinberg D. H., Gunn J. E. // Mon. Not. Royal Astron. Soc. 1990. V. 247. P. 260.
8. Csanady G. T. Turbulent diffusion in the environment. Dordrecht: D. Reidel, 1985.
9. Saichev A. I., Woyczynski W. A. // SIAM J. Appl. Math. 1996. V. 56, No. 4. P. 31.
10. Vergassola M., Dubrulle B., Frisch U., Noullez A. // Astron. Astrophys. 1994. V. 284. P. 325.

Нижегородский госуниверситет  
им. Н. И. Лобачевского,  
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию  
7 марта 2000 г.

### **SUPERSINGULAR DISTRIBUTIONS AND THEIR APPLICATION IN MECHANICS**

*A. I. Saichev and S. A. Lapinova*

We introduce a notion of supersingular distributions and show their application to finding generalized solutions of the continuity equation for the density of matter moving in the Burgers velocity field.

УДК 517.987-550.388

## О ДИСКРЕТИЗАЦИИ СИГНАЛА С ФРАКТАЛЬНОЙ СТРУКТУРОЙ

К. А. Захаров<sup>1</sup>, Р. П. Мейланов<sup>2</sup>

Рассматривается дискретизация масштабно-инвариантной фрактальной функции Вейерштрасса—Мандельброта. Предлагается обобщение теоремы Котельникова для функции Вейерштрасса—Мандельброта, используя специальную функцию Миттаг—Леффлера.

В последние 10–15 лет растут популярность и успехи применения концепции фрактала. Понятие фрактала, первоначально введённое Мандельбротом [1] для описания сложных геометрических объектов, требующих использования геометрии дробной размерности (мера Хаусдорфа—Безиковича), в дальнейшем нашло широкое применение в различных разделах теоретической и прикладной физики [2–10].

При рассмотрении волновых полей в рамках концепции фрактала [6] можно выделить две группы задач. К первой группе относятся исследования распространения волн во фрактальных структурах, когда фрактал является средой распространения. Вторая группа задач относится к исследованию рассеяния и излучения волн фрактальными структурами, когда волна распространяется в однородной среде с погружёнными в неё фрактальными неоднородностями. Например, в работе [11] проведён фрактальный анализ коротковолновых сигналов, рассеянных мелкомасштабными неоднородностями, и показано, что в отличие от традиционных методов спектрального анализа фрактальный анализ позволяет диагностировать тип (естественный, искусственный) мелкомасштабной ионосферной турбулентности. В обоих рассмотренных выше случаях в конечном итоге мы имеем волновое поле с фрактальной структурой.

Волновые поля с фрактальной структурой представляют особый интерес для теории информации и математической теории связи. В рамках концепции фрактала развиваются эффективные алгоритмы архивации. Благодаря самоподобию сигнала с фрактальной структурой появляется возможность детальной идентификации структуры шума и передачи информации практически при любом его уровне.

Общий анализ произвольного волнового поля с фрактальной структурой в настоящее время отсутствует. В целом для описания свойств систем с фрактальной структурой требуется широкий класс функций, включающий наряду с регулярными функциями, суммируемыми с некоторой степенью, непрерывные, но нигде не дифференцируемые функции и класс обобщённых функций.

В настоящей работе на примере конкретной функции Вейерштрасса—Мандельброта [2], описывающей сигнал с фрактальной структурой, даётся обобщение первой теоремы Котельникова [12].

Функция Вейерштрасса—Мандельброта имеет вид

$$W(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \exp(ib^n t)}{b^{(2-D)n}} \exp(i\varphi_n),$$

где  $D$  — размерность фрактала ( $1 < D < 2$ ),  $\varphi_n$  — произвольная фаза,  $b$  — параметр подобия.

Функция Вейерштрасса—Мандельброта непрерывна, но нигде не дифференцируема. Для дальнейшего анализа положим  $\varphi_n = 0$  и рассмотрим функцию

$$C(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{b^{(2-D)n}} - \operatorname{Re} W(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(b^n t)}{b^{(2-D)n}}. \quad (1)$$

Для  $D$ , близких к 1, функция (1) гладкая, для  $D$ , близких к 2, начинает сильно флуктуировать и напоминает шум в электронных цепях [2]. Рассмотрим вопрос о возможности дискретизации функции (1). Функцию  $\cos(b^n t)$  можно представить в виде

$$\cos(b^n t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} D_{kn} \frac{\sin[\omega_n (t - \pi k/\omega_n)]}{t - \pi k/\omega_n},$$

где

$$\omega_n = cb^n, \quad c > 1, \quad D_{kn} = \frac{1}{\omega_n} \cos\left(\frac{\pi k b^n}{\omega_n}\right).$$

Здесь  $t$  и  $\omega_n$  — безразмерные время и частота, которые связаны с реальным временем  $\tau$  и частотой  $\Omega_n$  соотношениями  $t = \tau/t_0$ ,  $\omega_n = \Omega_n/\omega_0$ , где  $t_0$  и  $\omega_0$  — некоторые характерные время и частота, выбираемые исходя из характерных времён и частот изучаемого процесса и требуемой точности дискретизации сигнала. Таким образом, для (1) имеет место разложение

$$C(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{D_{kn}}{b^{(2-D)n}} \frac{\sin[\omega_n (t - \pi k/\omega_n)]}{t - \pi k/\omega_n}. \quad (2)$$

Каждое слагаемое в выражении (2) аналогично разложению функции в соответствии с первой теоремой Котельникова [12]. Однако имеется следующее принципиальное отличие, связанное с особенностями функции Вейерштрасса—Мандельброта. Функция (1) самоподобна (вернее, самоаффинна [2]):  $C(b^n t) = b^{(2-D)n} C(t)$ . Выражение (2) для функции  $C(t)$  также самоподобно. На практике при анализе сигнала ограничиваются некоторым предельным значением частоты. Рассмотрим ограниченный по  $n$  ряд

$$C_{-N}^M(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-N}^M \frac{D_{kn}}{b^{(2-D)n}} \frac{\sin[\omega_n (t - \pi k/\omega_n)]}{t - \pi k/\omega_n}. \quad (3)$$

Для разложения (3) также имеет место модифицированное соотношение самоподобия:

$$C_{-N}^M(b^n t) = b^{(2-D)n} C_{-N+n}^{M+n}(t). \quad (4)$$

С помощью (4) можно определить выражение для фрактальной размерности  $\gamma = 2 - D$ ,  $0 < \gamma \leq 1$ :

$$\gamma = \frac{1}{n} \log_b \left[ \frac{C_{-N}^M(b^n t)}{C_{-N+n}^{M+n}(t)} \right].$$

Функцию Вейерштрасса—Мандельброта можно использовать для получения случайных фрактальных кривых, полагая параметры  $D$  и  $b$  функциями времени. Как следует из (4), свойство самоподобия позволяет с помощью замены  $t \rightarrow b^n t$  дискретизировать тонкую структуру функции, лежащую за пределами чувствительности приборов. Отметим, что рассмотренные особенности дискретизации функции с фрактальной структурой могут лежать в основе различных процедур сжатия информации.

В заключение приведём одно обобщение выражения (2) для функции Вейерштрасса—Мандельброта с помощью специальной функции Миттаг—Леффлера [13]:

$$E_{\alpha, \beta}(-z^\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{\alpha n}}{\Gamma(\alpha n + \beta)},$$

где  $\Gamma(x)$  — гамма-функция Эйлера. Заметив, что  $E_{2,1}(-z^2) = \cos(z)$ ,  $E_{2,2}(-z^2) = \sin(z)/z$ , можно осуществить обобщение выражения (2):

$$C(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{b^{(2-D)n}} E_{\alpha, \alpha-1}[-(\pi k b^n / \omega^n)^\alpha] E_{\alpha, \alpha}[-(\omega_n (t - \pi k b^n / \omega^n))^\alpha]. \quad (5)$$

Выражение (5) переходит в (2) при  $\alpha = 2$  ( $1 < \alpha \leq 2$ ). Для остальных  $\alpha$  мы имеем нетривиальное обобщение соотношения (2), когда разложение осуществляется не только по периодическим, но и по непериодическим функциям. В результате удаётся получить аналог вейвлет-разложения с последующим использованием средств вейвлет-анализа.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mandelbrot. The fractal geometry of nature. New York, 1982.
2. Федер Е. Фракталы. М.: Мир, 1991. 254 с.
3. Нигматуллин Р. Р. // ТМФ. 1992. Т. 90, № 3. С. 354.
4. Кубарев Ю. Г. // Изв. АН. Сер. физ. 1993. Т. 57, № 3. С. 129.
5. Олемской А. И., Флат А. Я. // УФН. 1993. Т. 163, № 12. С. 1.
6. Зосимов В. В., Лямшев Л. М. // УФН. 1995. Т. 165, № 4. С. 361.
7. Чукбар К. В. // ЖЭТФ. 1995. Т. 108, № 5. С. 1875.
8. Мейланов Р. П. // Письма в ЖТФ. 1996. Т. 22, № 23. С. 40.
9. Мейланов Р. П., Садыков С. А. // ЖТФ. 1999. Т. 69, № 5. С. 128.
10. Мейланов Р. П. // ИФЖ. 2001. Т. 74, № 2. С. 1.
11. Булгаков С. А., Пономаренко П. В., Ямпольский Ю. М. // Изв. вузов. Радиофизика. 1995. Т. 38, № 6. С. 557.
12. Котельников В. А. О пропускной способности «эфира» и проволоки в электросвязи. Издание Ред. Упр. связи РККА, 1933.
13. Джарбашян М. М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966. 672 с.

<sup>1</sup> ООО «Дагестанская сотовая связь»  
г. Махачкала,

<sup>2</sup> Институт проблем геотермии  
Дагестанского НЦ РАН,  
г. Махачкала, Россия

Поступила в редакцию  
19 июня 2000 г.

#### SAMPLING A FRACTAL SIGNAL

*K. A. Zakharov, R. P. Meilanov*

We consider sampling of a scaled-invariant fractal Weierstrass–Mandelbrot function and propose a generalization of the Kotelnikov theorem for the Weierstrass—Mandelbrot function using the higher transcendental Mittag—Leffler function.



УДК 537.36:538.221

## СДВИГОВАЯ ПОВЕРХНОСТНАЯ ВОЛНА НА ДВИЖУЩЕЙСЯ БЛОХОВСКОЙ СТЕНКЕ

*Е. А. Вилков<sup>1</sup>, В. Г. Шавров<sup>2</sup>, Н. С. Шевяхов<sup>1</sup>*

С использованием преобразования Галилея для перехода в систему покоя блоховской стенки в безобменном магнитоэлектродинамическом приближении получено дисперсионное соотношение для сдвиговой поверхностной волны, удерживаемой движущейся 180-градусной доменной границей ферромагнитного кристалла. Установлено, что движение доменной границы оказывает ориентирующее действие на волновую нормаль сдвиговой поверхностной волны и заметно изменяет спектр волн прямого распространения в полосе частот, примыкающей снизу к частоте ферромагнитного резонанса на полях рассеяния.

### ВВЕДЕНИЕ

Магнитоупругие поверхностные волны на статичных (неподвижных) границах кристаллов-магнетиков рассматривались неоднократно (см. обзор [1]). Напротив, их поведение на движущихся границах в статичной среде специально не исследовалось. Между тем оценка способности магнитоупругих поверхностных волн направляться движущимися границами важна для разработки нетрадиционных способов передачи и преобразования сигнала. Подобного рода эффекты захвата («пленения») излучения бегущими импульсами накачки обсуждались в радиофизике [2], но касались напрямую параметрического взаимодействия, а не распространения собственных мод колебаний.

В магнитоупорядочивающихся средах динамическое поведение обнаруживают, как известно [3], доменные границы (ДГ). Движение последних, включая вопросы структурной устойчивости с учётом магнитоэлектродинамики, является предметом многочисленных публикаций [3, 4], только косвенно затрагивающим обсуждаемую тему. Это связано с тем, что ДГ — объект принципиально нелинейный [3–5] и для самосогласованного описания требует представления магнитоупругих полей не отдельной модой, а набором волн, не обязательно проявляющих свойство поверхностной (граничной) локализации [6–8]. Значение магнитодинамики состоит, однако, в том, что в силу обычно показываемого ею порогового характера эффектов [3, 8, 9] удаётся выделить условия, при которых распространение магнитоупругих волн вдоль ДГ не сказывается на режиме движения последней. В таком случае движение ДГ может рассматриваться как заданное. Необходимые «докритические режимы» движения ДГ позволяют приписывать ей, по меньшей мере, в малосигнальном приближении роль управляемого и устойчивого канала передачи информации. Таким образом, в рамках интересов линейной спин-волновой электроники и СВЧ магнитоакустики можно ограничиться анализом влияния движения ДГ на структуру и дисперсионные свойства удерживаемой магнитоупругой поверхностной волны, абстрагируясь от структурной чувствительности самой ДГ к управляющим внешним воздействиям.

В рамках указанного подхода рассмотрим вопрос о существовании сдвиговой поверхностной волны (СПВ) на 180-градусной (с антипараллельной ориентацией спонтанных намагниченностей в соседних доменах) ДГ типа блоховской стенки, движущейся с заданной скоростью  $V_D = \text{const}$  в кристалле кубического ферромагнетика. Аналогичного рода СПВ уже рассматривались на статичных границах раздела ферромагнетик—вакуум [10–12], ферромагнетик—диэлектрик [13, 14] и ферромагнетик—ферромагнетик [15]. При изменении знака магнитных параметров в плоскости границы последняя комбинация материалов эквивалентна статичной (при  $V_D = 0$ ) стенке Блоха. Однако, как будет показано,

в этом частном случае результаты работы [15] неприменимы, т. к. получены без учёта определяющего вклада полей магнитной анизотропии в формирование внутренних магнитных полей в доменах.

## 1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ФОРМУЛИРОВКА ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ В ЛАБОРАТОРНОЙ СИСТЕМЕ ОТСЧЁТА

При рассмотрении кубического ферромагнетика с уединённой геометрически тонкой и бесструктурной блоховской ДГ в лабораторной системе отсчёта  $(x, y, z)$  ограничимся случаем  $k_t \Delta \ll 1$ , где  $k_t$  — волновое число сдвиговых волн в монодоменном кристалле,  $\Delta$  — толщина блоховской стенки. Это позволит использовать безобменное магнитостатическое приближение вплоть до ближайшей окрестности нижней границы запрещённой частотной щели спектра магнитоупругих волн [1, 10, 13]. Примем также, что, перемещаясь вдоль оси  $y$ , ДГ не претерпевает сколь-либо существенных структурных изменений. Для массивных (неплёночных) образцов ферромагнетиков типа железиттриевого граната (ЖИГ) это справедливо при  $V_D < c_t$ , где  $c_t$  — скорость сдвиговых волн в отсутствие магнитоупругого взаимодействия [3], если исключить возможную высокую структурную чувствительность ДГ к внешним воздействиям в области фазового перехода [16].

В отличие от [10–15] геометрия задачи диктуется выбором оси лёгкого намагничивания, в конечном итоге — магнитной анизотропией кристалла. Для определённости примем, что ферромагнетик характеризуется положительной константой магнитной анизотропии  $K_1 > 0$ . Тогда, считая ось лёгкого намагничивания совпадающей с одним из кристаллографических направлений, например с осью  $[001] \parallel Oz$ , можно условиться, что ДГ имеет текущую координату  $y = y_D$ ,  $y_D = V_D t$ , где  $t$  — время, а сдвиговые волны распространяются в плоскости  $(001)$ , и смещения в них  $\mathbf{u}_j \parallel Oz$  коллинеарны спонтанным намагниченностям  $\mathbf{M}_0^{(j)}$  в доменах  $(\mathbf{M}_0^{(1)} \uparrow \downarrow \mathbf{M}_0^{(2)} \parallel [001]; j = 1, 2$  — номер домена). Связывая происхождение внутренних магнитных полей доменов  $\mathbf{H}_i^{(j)} \parallel Oz$  с действием магнитной анизотропии, им и спонтанным намагниченностям придадим значения

$$M_0^{(j)} = (-1)^{j+1} M_0, \quad H_i^{(j)} = (-1)^{j+1} H_a, \quad (1)$$

где  $M_0 > 0$ ,  $H_a = 2K_1/M_0$  — внутреннее поле магнитокристаллической анизотропии [17],  $j = 1$  при  $y > y_D$ ,  $j = 2$  при  $y < y_D$ . В такой трактовке блоховская стенка предстаёт как бесконечно тонкая межфазная граница магнитного бикристалла с антипараллельной ориентацией спинов по отношению к оси  $z$ .

Поскольку  $c_t \ll c$ , где  $c$  — скорость света, то для производимых сдвиговыми волнами возмущений магнитного поля в доменах из уравнений Максвелла имеем

$$(\nabla, \mathbf{b}_j) = 0, \quad \mathbf{b}_j = \mathbf{h}_j + 4\pi \mathbf{m}_j, \quad \mathbf{h}_j = -\nabla \varphi_j. \quad (2)$$

Здесь  $\mathbf{b}_j$ ,  $\mathbf{h}_j$ ,  $\mathbf{m}_j$  и  $\varphi_j$  — соответственно индукция, напряжённость, магнитный момент и потенциал динамической части магнитного поля. Взаимная ортогональность векторов  $\mathbf{b}_j$ ,  $\mathbf{h}_j$  и  $\mathbf{m}_j$  вектору  $\mathbf{u}_j$  и учёт магнитоупругой связи позволяет в силу условий  $m_j \ll M_0$ ,  $h_j \ll H_a$  после линеаризации привести уравнение для магнитного момента к виду

$$\frac{\partial \mathbf{m}_j}{\partial t} = -\gamma (\beta [\nabla, \mathbf{u}_j] + [\mathbf{m}_j, \mathbf{H}_i^{(j)}] - [\mathbf{h}_j, \mathbf{M}_0^{(j)}]), \quad (3)$$

где  $\gamma$  — гиромагнитное отношение,  $\beta$  — магнитоупругий коэффициент. К уравнениям (2), (3) необходимо добавить уравнение для сдвиговых волн с учётом магнитострикции, следующее из теории упругости [1, 10, 13]:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}_j}{\partial t^2} = \lambda \nabla^2 \mathbf{u}_j + \frac{\beta}{M_0^{(j)}} (\nabla, \mathbf{m}_j), \quad (4)$$

где  $\rho$  — плотность кристалла,  $\lambda$  — модуль сдвига,  $\nabla$  — оператор Гамильтона в плоскости  $xy$ . С учётом (1) можно показать эквивалентность уравнений (2)–(4) уравнениям

$$\rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} = \lambda \nabla^2 u_j + \frac{(-1)^{j+1} \beta}{4\pi M_0} \nabla^2 \varphi_j, \quad \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_k^2 \right) \nabla^2 \varphi_j = -4\pi\gamma\beta\omega_0 (-1)^{j+1} \nabla^2 u_j, \quad (5)$$

рассматриваемых далее в качестве основных. В (5) обозначено:  $\omega_0 = \gamma H_a$  — частота однородной прецессии в поле магнитокристаллической анизотропии,  $\omega_k = [\omega_0(\omega_0 + \omega_M)]^{1/2}$  — частота магнитоакустического резонанса,  $\omega_M = 4\pi\gamma M_0$ .

Ввиду того, что  $V_D < c_t$ ,  $c_t \ll c$ , релятивистские поправки в электродинамических граничных условиях не больше отброшенных при записи (2) поправок, связанных с запаздыванием магнитного поля. Поэтому решение уравнений (5) можно рассматривать при стандартных граничных условиях магнитоакустики ферритов [1, 10, 13], выражающих непрерывность на ДГ потенциалов, сдвиговых смещений и напряжений  $T_{yz}^{(j)}$ , а также компонент индукций  $b_y^{(j)}$ :

$$\begin{aligned} \varphi_1|_{y=y_D} = \varphi_2|_{y=y_D}, \quad u_1|_{y=y_D} = u_2|_{y=y_D}, \\ \left( \lambda \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\beta}{M_0} m_y^{(1)} \right) \Big|_{y=y_D} = \left( \lambda \frac{\partial u_2}{\partial y} - \frac{\beta}{M_0} m_y^{(2)} \right) \Big|_{y=y_D}, \\ \left( 4\pi m_y^{(1)} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right) \Big|_{y=y_D} = \left( 4\pi m_y^{(2)} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right) \Big|_{y=y_D}. \end{aligned} \quad (6)$$

## 2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СДВИГОВОЙ ПОВЕРХНОСТНОЙ ВОЛНЫ В СИСТЕМЕ ПОКОЯ ДОМЕННОЙ ГРАНИЦЫ

Для описания сдвиговой поверхностной волны перейдём в систему покоя ДГ  $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ , связанную с лабораторной системой отсчёта преобразованием Галилея:  $\tilde{x} = x$ ,  $\tilde{y} = y - V_D t$ ,  $\tilde{z} = z$ ,  $\tilde{t} = t$ . Указанный переход реализуется в (5), (6) формальной заменой дифференциальных операторов  $\partial/\partial x \rightarrow \partial/\partial \tilde{x}$ ,  $\partial/\partial y \rightarrow \partial/\partial \tilde{y}$ ,  $\partial/\partial t \rightarrow \partial/\partial \tilde{t} - V_D \partial/\partial \tilde{y}$ . Вместо (5) получаем

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} - V_D \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \right)^2 u_j = \lambda \tilde{\nabla}^2 u_j + \frac{(-1)^{j+1} \beta}{4\pi M_0} \tilde{\nabla}^2 \varphi_j, \\ \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} - V_D \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \right)^2 + \omega_k^2 \right] \tilde{\nabla}^2 \varphi_j = -4\pi\gamma\beta\omega_0 (-1)^{j+1} \tilde{\nabla}^2 u_j, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\tilde{\nabla}^2 = \partial^2/\partial \tilde{x}^2 + \partial^2/\partial \tilde{y}^2$ . Вид граничных условий (6) формально не изменится. Однако следует помнить, что в них содержится подлежащая ещё выражению через  $u_j$ ,  $\varphi_j$  величина  $m_y^{(j)}$ , а сами условия переносятся на плоскость  $\tilde{y} = 0$ .

Физически очевидно, что подобно известным решениям для СПВ на статичных границах [1, 10–15] выражения для потенциалов  $\varphi_j$  в доменах включают слагаемые, пропорциональные  $u_j$ , и потенциалы  $\Phi_j$  полей рассеяния магнитных полюсов, индуцируемых на ДГ распространяющейся СПВ. Принимая во внимание, что  $\tilde{\nabla}^2 \Phi_j = 0$ , в качестве решения уравнений (7) вида  $\{u_j, \varphi_j\} \propto \exp[i(k\tilde{x} - \Omega\tilde{t})]$ , где  $k$  — продольная компонента волнового вектора,  $\Omega$  — частота СПВ в системе покоя ДГ, имеем

$$\begin{aligned} \varphi_j = \Phi_j - 4\pi\gamma\beta\omega_0 (-1)^{j+1} \sum_{\alpha} \frac{u_j^{(\alpha)}}{\omega_k^2 + (i\Omega + V_D q_j^{(\alpha)})^2}, \\ u_j = \sum_{\alpha} u_j^{(\alpha)}, \quad u_j^{(\alpha)} = U_j^{(\alpha)} \exp[i(k\tilde{x} - \Omega\tilde{t})] \exp(q_j^{(\alpha)} \tilde{y}), \\ \Phi_j = F_j \exp[i(k\tilde{x} - \Omega\tilde{t})] \exp[(-1)^j |k| \tilde{y}]. \end{aligned} \quad (8)$$

При записи  $\Phi_j$  в (8) обычное требование ограниченности полей рассеяния учтено таким образом, чтобы иметь возможность рассматривать как прямые ( $k > 0$ ), так и обратные ( $k < 0$ ) СПВ.

Аналогичное условие локализации на ДГ сдвиговых смещений и соответствующих им частей потенциалов

$$(-1)^j \operatorname{Re} q_j^{(\alpha)} > 0 \quad (9)$$

кладётся в основу отбора корней  $q_j^{(\alpha)}$ , где  $\alpha = 1, \dots, 4$ , характеристического уравнения

$$[\omega_k^2 + (i\Omega + V_D q_j)^2] [c_t^2 (k^2 - q_j^2) + (i\Omega + V_D q_j)^2] = \chi \omega_0^2 c_t^2 (k^2 - q_j^2) \quad (10)$$

системы обыкновенных дифференциальных уравнений, образующихся из (7). Предваряя эту процедуру, необходимо формально учитывать в (8) вклады всех возможных корней  $q_j^{(\alpha)}$ .

Уравнение (10), в котором  $\chi = \gamma\beta^2 (\lambda M_0 \omega_0)^{-1}$  — безразмерная константа магнитоупругой связи ферромагнетика, определяет при  $V_D \neq 0$  одинаковые наборы комплексных корней  $q_j^{(\alpha)} = s_j^{(\alpha)} + ip_j^{(\alpha)}$  в обоих доменах. При этом (10) ставит в соответствие каждой ветви спектра сдвиговых магнитоупругих волн в ферромагнетике — высокочастотной (квазиспиновой) и низкочастотной (квазиакустической) [1, 18] — по паре таких корней, которые обеспечивают активацию ветви при заданном гармоническом изменении полей на движущейся ДГ. Требования безобменного приближения  $k < k_m$ ,  $H_{\text{ex}} \ll H_a$ ,  $k_m = (H_{\text{ex}}/D)^{1/2}$ , где  $H_{\text{ex}}$  — обменное поле,  $D$  — константа обменного взаимодействия, на заданной частоте  $\Omega$  не выполняются для обеих ветвей спектра [18]. Поэтому ограничимся диапазоном частот  $\Omega < \omega_k$  для низкочастотной ветви.

Соответствующую ей пару корней  $q_j^{(\alpha)}$ , где  $\alpha = 1, 2$ , проще всего выделить в (10), если, основываясь на малости величины  $\chi \ll 1$  и рассматривая  $V_D$  как поправку, прибегнуть к методу возмущений. Для этого в первом сомножителе левой части равенства (10) достаточно положить  $V_D = 0$ . В результате получим

$$q_j^{(\alpha)} = ip + (-1)^\alpha s, \quad (11)$$

$$p \approx 2k_t(\Omega) \frac{M^*}{1 - M^{*2}}, \quad s \approx \frac{1}{1 - M^{*2}} \sqrt{k^2(1 - M^{*2}) - k_t^2(\Omega)}. \quad (12)$$

Здесь  $M^* = V_D/c_t^*$  — число Маха движущейся ДГ,  $c_t^* = \Omega/k_t(\Omega)$  — скорость сдвиговых волн с учётом магнитоупругой связи,

$$k_t(\Omega) = \Omega / \left( c_t \left[ 1 - \frac{\chi \omega_0^2}{\omega_k^2 - \Omega^2} \right]^{1/2} \right) \quad (13)$$

— закон дисперсии сдвиговых магнитоупругих волн в ферромагнетике для низкочастотной ветви спектра в безобменном приближении,  $c_t = (\lambda/\rho)^{1/2}$ .

Формулы (12) имеют качественный характер, но приводят к правильным заключениям о свойствах характеристических корней низкочастотной ветви: в соответствии с (9) всегда имеется по единственному корню (11) уравнения (10)

$$q_j = ip + (-1)^j s \quad (14)$$

в каждом из доменов, причём критерием отбора значений  $p$  и  $s$  могут служить условия

$$\operatorname{sign} p = \operatorname{sign} V_D, \quad s > 0. \quad (15)$$

Таким образом, каждая из сумм формального описания полей в (8) сохранит только по одному члену, и для  $\varphi$ ,  $u_j$  получим выражения

$$\begin{aligned} \varphi_j &= \Phi_j - \frac{4\pi\gamma\beta\omega_0 (-1)^{j+1}}{\omega_k^2 + [i(\Omega + pV_D) + s(-1)^j V_D]^2} u_j, \\ u_j &= U_j \exp[i(k\bar{x} + p\bar{y})] \exp(-i\Omega\bar{t}) \exp[(-1)^j s\bar{y}]. \end{aligned} \quad (16)$$

Оставшиеся без изменения в (8) потенциалы  $\Phi_j$  полей рассеяния вместе с (16) дают общее представление СПВ в системе покоя ДГ.

Выражения (16) показывают, что  $p$  и  $s$  имеют смысл поперечной компоненты волнового вектора и коэффициента амплитудного спада СПВ. Схематически картина волновых фронтов и распределения вдоль них сдвиговых смещений (16) для СПВ на движущейся ДГ показана на рис. 1. Как следует из формулы (12) для  $s$ , движение блоховской стенки способствует, во-первых, делокализации колебаний СПВ. Во-вторых, оно оказывает ориентирующее действие на волновую нормаль СПВ, отклоняемую в сторону вектора  $\mathbf{V}_D$  на острый угол  $\theta = \arctg(p/k)$ . Такого рода «флюгерный» эффект позволяет говорить о неколлинеарности волнового вектора СПВ  $\mathbf{K} = \mathbf{k} + \mathbf{p}$ , где  $\mathbf{p} \parallel \mathbf{V}_D$ ,  $pV_D > 0$ , направляющей границе и классифицировать СПВ на движущейся ДГ как новую разновидность граничных волн — неколлинеарную граничную волну.

Для волн на статичных границах подобное качество, присущее оттекающим или псевдоповерхностным акустическим волнам [19], радиационным поляритонным состояниям [20] и пр., всегда свидетельствовало о потерях энергии волной вследствие излучения в подстилающее полупространство или прилегающую внешнюю среду. В данном случае по формальным признакам СПВ может ассоциироваться с затухающей волной утечки только по одну сторону ДГ, при  $\tilde{y} > 0$ . По другую сторону границы, при  $\tilde{y} < 0$ , СПВ демонстрирует нехарактерную для известных типов поверхностных или граничных волн способность подтекать к границе. В ней, таким образом, присутствует однонаправленный, непрерывный поток энергии, как бы пронизывающий ДГ, что исключает роль последней в качестве источника или стока энергии. Распространение СПВ вдоль движущейся ДГ совершается поэтому стационарно, т. е. без затухания или усиления:  $\text{Im } k = 0$ ,  $\Omega > 0$ . Неоднородная по координате  $\tilde{y}$  поперечная компонента потока энергии выражает здесь трансляционное действие движущейся ДГ: перенос сцепленной с ней магнитными полюсами (изображены на рис. 1 жирными точками) СПВ, тогда как продольная компонента характеризует перенос энергии вдоль ДГ самой волной.

### 3. ДИСПЕРСИОННОЕ СООТНОШЕНИЕ ДЛЯ СДВИГОВОЙ ПОВЕРХНОСТНОЙ ВОЛНЫ НА ДВИЖУЩЕЙСЯ ДОМЕННОЙ ГРАНИЦЕ

Определение спектральных характеристик СПВ,  $s$ ,  $p$  и  $\Omega$ , при заданном  $k$  предполагает знание закона дисперсии  $\Omega = \Omega(k)$  сдвиговой поверхностной волны. Если пользоваться лабораторной системой отсчёта, то стандартная процедура его вывода состоит в замене координат в выражениях (16) и (8) для  $\Phi_j$ , подстановке полученных представлений полей СПВ в граничные условия (6) и приравнении нулю детерминанта образующейся системы однородных алгебраических уравнений. При этом место  $\Omega$  займёт частота  $\omega$  СПВ в лабораторной системе отсчёта:

$$\omega = \Omega + (\mathbf{K}, \mathbf{V}_D) = \Omega + pV_D, \quad (17)$$

а само дисперсионное соотношение примет вид  $\omega = \omega(k)$ .

Следуя данным рекомендациям, предварительно полезно указать вытекающее из (3) в силу гармоничности колебаний и соотношений (1), (14) представление содержащихся в (6) величин  $m_y^{(j)}$  в лабораторной системе отсчёта:

$$m_y^{(j)} = \frac{\gamma\beta}{\Omega_j^2 - \omega_k^2} \left[ i\Omega_j \frac{\partial u_j}{\partial x} + (-1)^{j+1} \omega_0 \frac{\partial u_j}{\partial y} \right] + \frac{\omega_M}{4\pi(\Omega_j^2 - \omega_0^2)} \left[ \omega_0 \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} + (-1)^{j+1} i\Omega_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} \right], \quad (18)$$

где  $\Omega_j = \omega + (-1)^{j+1} isV_D$  — эффективная частота колебаний полей  $u_j$ ,  $\varphi_j$  СПВ, регистрируемая приёмником в точке наблюдения (произвольной точке кристалла). Выбор последней не сказывается на разнице  $\omega = \text{Re } \Omega_j$  и  $\Omega$ , которая согласно (15) и (17) всегда положительна. Данное обстоятельство

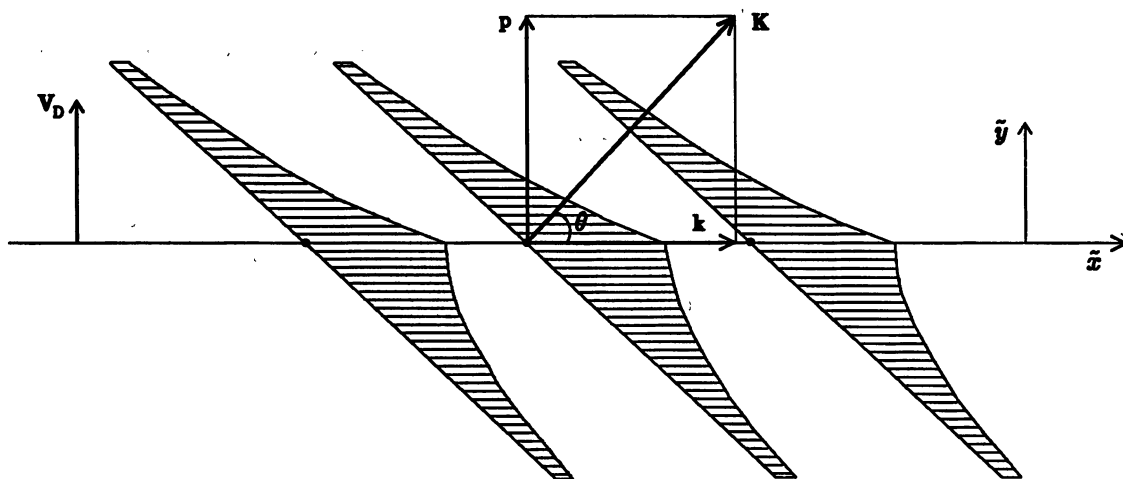


Рис. 1. Схематическая картина сдвиговой поверхностной волны на движущейся блоховской стенке

можно расценить как проявление доплеровского сдвига частоты, если под движущимся «источником» колебаний понимать не ДГ<sup>1</sup>, а всю СПВ в целом, распределённую по обоим доменам. Напротив, отражая тот факт, что СПВ локализуется движущейся ДГ, величина  $\text{Im } \Omega_j = (-1)^{j+1} sV_D$  в зависимости от выбора точки наблюдения по отношению к ДГ выступает в представлениях полей  $u_j$ ,  $\varphi_j$  коэффициентом усиления ( $j = 1$ ,  $y > y_D$ ) или ослабления ( $j = 2$ ,  $y < y_D$ ) колебаний по мере того, как ДГ приближается или удаляется от точки наблюдения.

Найденное вышеописанным способом с привлечением (18), дисперсионное соотношение для СПВ на движущейся ДГ запишется в виде

$$(q_1 \lambda_1^* - q_2 \lambda_2^*) - \chi \lambda |k| \sum_{j=1}^2 \frac{D(\Omega_j, \sigma)}{\Omega_j^2 - \omega_k^2} = 0. \quad (19)$$

Здесь  $\lambda_j^* = \lambda + \gamma \beta^2 \omega_0 [M_0 (\Omega_j^2 - \omega_k^2)]^{-1}$ , а функции  $D(\Omega_j, \sigma)$  заданы выражениями

$$D(\Omega_j, \sigma) = \omega_0 \left( \sigma \Omega_j - \omega_0 \omega_M \frac{\omega_0 + \sigma \Omega_2}{\Omega_2^2 - \omega_0^2} \right) + \omega_0 \omega_M \left[ (-1)^j \sigma \Omega_j + \omega_0 \left( 1 - \omega_M \frac{\omega_0 + \sigma \Omega_2}{\Omega_2^2 - \omega_0^2} \right) \right] A(\Omega_1, \Omega_2), \quad (20)$$

$$A(\Omega_1, \Omega_2) = \left( 2 - \omega_M \sum_{j=1}^2 \frac{\omega_0 + \sigma \Omega_j}{\Omega_j^2 - \omega_0^2} \right)^{-1} \sum_{j=1}^2 (-1)^j \frac{\omega_0 + \sigma \Omega_j}{\Omega_j^2 - \omega_0^2}.$$

Величина  $\sigma = \text{sign } k$  в (19), (20) — знаковая константа, вводимая, как это принято в теории магнитоупругих поверхностных волн [1, 10–15], для явного описания невзаимных эффектов. Заметим, что в полном соответствии с правилами перехода от прямых СПВ ( $k > 0$ ) к обратным ( $k < 0$ ) взаимное обращение функций  $D(\Omega_j, 1) \leftrightarrow D(\Omega_j, -1)$  достигается инверсией знака магнитных параметров ( $M_0 \leftrightarrow -M_0$ ,  $\omega_0 \leftrightarrow -\omega_0$ ,  $\omega_M \leftrightarrow -\omega_M$ ), либо заменой  $\omega \leftrightarrow -\omega$ .

<sup>1</sup> В задачах на собственное волновое движение источник колебаний не описывается явным образом, и его роль, если и может быть отведена, то не ДГ, а самой СПВ; противное означало бы, что источник колебаний лежит в плоскости  $y = y_D$ .

Исследование дисперсионного соотношения (19) осложняется комплексностью  $q_j$  и  $\Omega_j$ . Можно, однако, показать, что как  $q_1 \lambda_1^*$  —  $q_2 \lambda_2^*$ , так и второе слагаемое в (19) являются вещественными. В результате преобразований получим более удобную для анализа форму дисперсионного соотношения для СПВ на движущейся ДГ:

$$s + \chi \omega_0 \sigma \frac{G(\omega, V_D)}{1 + \chi \omega_0^2 F(\omega, V_D)} |k| = 0. \quad (21)$$

В уравнении (21)

$$F(\omega, V_D) = \frac{(\omega^2 - s^2 V_D^2 - \omega_k^2) - 2p V_D \omega}{(\omega^2 - s^2 V_D^2 - \omega_k^2)^2 + 4s^2 V_D^2 \omega^2}, \quad (22)$$

$$G(\omega, V_D) = \frac{\omega^2 - s^2 V_D^2 - \omega_k^2}{(\omega^2 - s^2 V_D^2 - \omega_k^2)^2 + 4s^2 V_D^2 \omega^2} \left[ \omega - \frac{\omega_0 \omega_M (\omega - \sigma \omega_0)}{(\omega - \sigma \omega_0)^2 + s^2 V_D^2} + \frac{\sigma \omega_M s^2 V_D^2}{(\omega - \sigma \omega_0)^2 + s^2 V_D^2} \frac{(\omega - \sigma \omega_0)^2 + s^2 V_D^2 + \omega_0 \omega_M}{(\omega - \sigma \omega_0)^2 + s^2 V_D^2 - \sigma \omega_M (\omega - \sigma \omega_0)} \right] + \frac{2s^2 V_D^2 \omega}{(\omega^2 - s^2 V_D^2 - \omega_k^2)^2 + 4s^2 V_D^2 \omega^2} \frac{(\omega - \sigma \omega_0)^2 + s^2 V_D^2 + \omega_0 \omega_M - 2\sigma \omega_M \omega}{(\omega - \sigma \omega_0)^2 + s^2 V_D^2 - \sigma \omega_M (\omega - \sigma \omega_0)}. \quad (23)$$

При  $V_D = 0$  согласно (12) имеем  $p = 0$  (СПВ оказывается обычной коллинеарной граничной волной), а из (22), (23) вытекает

$$F(\omega, 0) = (\omega^2 - \omega_k^2)^{-1}, \quad G(\omega, 0) = F(\omega, 0) [\omega - \omega_0 \omega_M (\omega - \sigma \omega_0)^{-1}].$$

С учётом этих выражений вместо (21) приходим к равенству

$$s + |k| \sigma \frac{\chi \omega_0}{(\omega^2 - \omega_k^2) + \chi \omega_0^2} \left( \omega - \frac{\omega_0 \omega_M}{\omega - \sigma \omega_0} \right) = 0, \quad (24)$$

которое представляет дисперсионное соотношение для СПВ на статичной ДГ. Рассмотрим соответствие (24) известным результатам.

Если принять  $k = k_t(\omega) \sin \theta$ , где  $k_t(\omega)$  определяется по формуле (13), то в силу равенств  $\lambda_1^* = \lambda_2^* \equiv \lambda^*$  и следующего из (12) выражения  $s = -i k_t(\omega) \cos \theta$  на основании (24) имеем формулу

$$1 + i \operatorname{tg} \theta \frac{\gamma \beta^2}{\lambda^* M_0 (\omega^2 - \omega_k^2)} \left( \omega - \frac{\omega_0 \omega_M}{\omega - \sigma \omega_0} \right) = 0.$$

Она, как и следовало ожидать, задаёт координаты точки полюса коэффициента отражения  $R$  плоской монохроматической сдвиговой волны, падающей в ферромагнетике под углом  $\theta$  на 180-градусную статичную ДГ [22]. При  $\omega_0 = 0$  имеем  $\omega_k = 0$ ,  $\chi \omega_0 = \gamma \beta^2 / (\lambda M_0)$ , и уравнение (24) преобразуется к виду

$$s \lambda + k \frac{\gamma \beta^2}{M_0 \omega} = 0. \quad (25)$$

В это же уравнение преобразуется дисперсионное соотношение работы [15], если в дополнение к равенству акустических параметров граничащих ферромагнетиков и антипараллельности их намагниченностей (см. первую формулу (1)) принять ещё и отсутствие внешнего магнитного поля. О соответствии

<sup>2</sup> Знак мнимой величины  $s$  выбран в соответствии с принципом излучения [21]: поля сдвиговых смещений (16) в условиях объёмного распространения обязаны иметь вид плоских волн, прованзаимодействовавших с ДГ и поэтому удаляющихся от неё.

результатов настоящей статьи и работы [15] следует, конечно, говорить только формально: нами в отличие от [15] не учитывалось внешнее подмагничивание, а в [15], наоборот, отбрасывалось поле магнитокристаллической анизотропии. Стыковка результатов в виде соотношения (25) возможна поэтому лишь при исключении указанных факторов, т. е. происходит в физически неадекватной ситуации исчезающе малых внутренних магнитных полей. Последнее, например, сопряжено с нарушением основного ограничительного условия  $\Omega < \omega_k$  на частоту, что делает бессмысленным получение из уравнения (25) каких-либо следствий.

#### 4. ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЁТ СПЕКТРА СДВИГОВОЙ ПОВЕРХНОСТНОЙ ВОЛНЫ И ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

При расчёте спектра СПВ на движущейся ДГ дополнительно к (21) учтём связи величин  $p$ ,  $s$ ,  $k$  и  $\omega$ , вытекающие из характеристического уравнения (10). Примером служат формулы (12), представляющие, однако, результат только первого шага итерационной процедуры поиска корней  $q_j$ . Ввиду сильной спектральной чувствительности указанной процедуры, формулы (12) в случае применения к расчёту спектра оказываются источником заметной погрешности даже в наиболее благоприятных условиях  $\chi \ll 1$ ,  $V_D \ll c_t$ .

Подставляя  $q_j$  вида (14) в (10), после разделения вещественных и мнимых частей можно получить точные равенства

$$p = \frac{V_D}{c_t} \frac{\omega}{c_t} \frac{\omega_k^2 - 2\omega^2 - s^2 c_t^2 (1 - 2V_D^2/c_t^2) + K^2 c_t^2}{\omega_L^2 - \omega^2 + s^2 V_D^2}, \quad (26)$$

$$K^2 = (\omega_L^2 - \omega^2 + s^2 V_D^2) \frac{(\omega_k^2 - \omega^2 + s^2 V_D^2) [\omega^2/c_t^2 + s^2 (1 - V_D^2/c_t^2)] - \chi \omega_0^2 s^2}{(\omega_L^2 - \omega^2 + s^2 V_D^2)^2 + 4s^2 \omega^2 V_D^2} + 4s^2 \omega^2 \frac{V_D^2}{c_t^2} \frac{\omega^2 - \chi \omega_0^2 + s^2 c_t^2 (1 - V_D^2/c_t^2)}{(\omega_L^2 - \omega^2 + s^2 V_D^2)^2 + 4s^2 \omega^2 V_D^2}, \quad (27)$$

где  $K^2 = p^2 + k^2$ ,  $\omega_L^2 = \omega_k^2 - \chi \omega_0^2$ . Если в (21) положить

$$|k| = \sqrt{K^2 - p^2}, \quad (28)$$

то с учётом (26), (27) нетрудно привести дисперсионное соотношение для СПВ к виду  $\mathcal{F}(\omega, s) = 0$ , удобному для применения численных методов решения одномерных нелинейных уравнений [23, 24].

Схема расчёта спектра СПВ выглядит следующим образом. Величины  $\omega > 0$  полагаются заданными — варьируются в пределах  $0 < \omega < \omega_L$ , налагаемых безобменным магнитостатическим приближением, а  $s$  определяется методом половинного деления как соответствующий корень уравнения  $\mathcal{F}(\omega, s) = 0$ . Остальные характеристики СПВ вычисляются далее по формулам (26)–(28) с проверкой условий (15) и ограничений  $K^2 \geq p^2 > 0$ .

Приступая к обсуждению численных результатов, имеет смысл напомнить, что резонансные свойства магнитной подсистемы проявятся в спектре СПВ не только возбуждением связанной с ней фонной подсистемы (магнитоакустический резонанс и перестройка дисперсионных ветвей спиновых и акустических волн объёмного распространения [18]), но и напрямую, как самосогласованная реакция (отклик) магнитной подсистемы на генерируемые магнитостатические поля рассеяния (8) — ферромагнитный резонанс (ФМР) на полях рассеяния. Данная специфика всех поверхностных (граничных) магнитоупругих волн в кристаллах магнетиков [1, 10–15] проявляется, прежде всего, в невзаимности распространения:  $\omega(\mathbf{k}) \neq \omega(-\mathbf{k})$ .



Признаком ФМР на полях рассеяния в случае сдвиговой поверхностной волны на движущейся доменной границе служат полюса функции  $G(\omega, V_D)$ , которые согласно (23) устанавливаются равенством

$$\omega = \sigma\omega_0 + \frac{\sigma\omega_M \pm \sqrt{\omega_M^2 - 4s^2V_D^2}}{2}. \quad (29)$$

Видно, что соотношение (29) выполняется только для прямых волн и при  $V_D = 0$  определяет две возможные резонансные частоты  $\omega = \omega_0$  и  $\omega = \omega_0 + \omega_M$ . Последние, как известно [25], представляют частотный дуплет спектра магнитостатических поверхностных волн, существующих на статичной блокховской стенке в условиях распространения под прямым углом к направлениям спонтанных намагниченностей и внутренних магнитных полей в доменах.

Магнитоупругая связь, разумеется, исключает полное сходство в проявлениях ФМР на полях рассеяния для СПВ и магнитостатических поверхностных волн. Так, в спектре (24) прямых СПВ на статичной ДГ частота  $\omega_0$  дуплета ФМР магнитостатических поверхностных волн в соответствии с требованием  $s > 0$  из (15) модифицируется в более низкую частоту  $\omega_0(1 - \chi)$  — коротковолновую асимптотическую границу спектра: при  $\omega \rightarrow \omega_0(1 - \chi)$  имеем  $k \rightarrow \infty$ . С другой стороны, при  $V_D \neq 0$  уравнение (29) переходит в дисперсионное соотношение для магнитостатических поверхностных волн на движущейся ДГ [26], если к условию  $\chi \rightarrow 0$  перехода от магнитоупругих поверхностных волн к магнитостатическим, т. е. при  $U_j \equiv 0$ ,  $\varphi_j \equiv \Phi_j$  в (16), принять дополнительно  $s = |k|$ ,  $\omega = \Omega$ . Первое из этих равенств непосредственно вытекает из выражения (8) для  $\Phi_j$ , а второе — следствие инвариантности уравнения Лапласа для потенциалов полей рассеяния по отношению к преобразованию Галилея.

Для обратных СПВ характерно наличие не полюса, а нуля функции  $G(\omega, V_D)$ , т. е. имеет место антирезонансный отклик магнитной подсистемы посредством полей рассеяния. При этом спектр обратных волн в исследуемом диапазоне  $\omega < \omega_L$  будет обрезан сверху на частоте  $\omega^* = \omega_0 [(1 + 4\omega_M/\omega_0)^{1/2} - 1]/2$ , когда  $s \rightarrow 0$ . Поскольку обычно  $\omega_M/\omega_0 \gtrsim 1$ , частота  $\omega^*$  лежит заметно ниже порогового уровня  $\omega_L$ , и спектр обратных СПВ целиком помещается на квазиакустическом (линейном) участке. Отсюда вытекает, что возможные преобразования спектра обратных волн под влиянием движения ДГ будут заведомо слабыми (нерезонансными) и выразятся главным образом в относительном взаимном изменении составных частей полного волнового вектора  $\mathbf{K}$ . Далее ограничимся изучением спектров только прямых СПВ.

Характерный фрагмент спектра прямых СПВ на доменной границе, движущихся с различными скоростями в ферромагнетике типа иттрий-галлиевого феррограната или феррограната системы  $\text{Bi-Sa-V}$ , которые обладают низкой намагниченностью насыщения при обычном уровне магнитной анизотропии, показан на рис. 2 в приведённых спектральных переменных  $\xi = \omega/\omega_0$ ,  $\eta = Kc_t/\omega_0$ . Штриховые горизонтальная линия I и кривая II представляют здесь для статичной ДГ соответственно линию ФМР  $\xi = 1$  ( $\omega = \omega_0$ ) и выходящую в пределе  $\eta \rightarrow \infty$  на уровень  $\xi = 1 - \chi$  спектральную ветвь прямой СПВ. Почти вертикальная штриховая линия III является соответствующим участком спектра объёмных сдвиговых волн  $k_t = k_t(\omega)$  в обращённом представлении.

Кривые спектра СПВ при  $V_D \neq 0$  выглядят на рис. 2 как изгибы квазилинейного спектра объёмных сдвиговых волн, вытянутых в полосу частот  $1 - \chi < \xi < 1$  в коротковолновую сторону тем сильнее, чем меньше  $V_D$ . Такое их поведение можно рассматривать как типичный результат двухкратного локального вырождения мод I, II [27] под влиянием движения ДГ. Аналогичное вырождение линейчатого спектра ФМР  $\omega = \omega_0$ ,  $\omega = \omega_0 + \omega_M$ , отмеченное недавно в [26] для поверхностных магнитостатических волн на движущейся ДГ, описывается, по сути дела, формулой (29).

С физической точки зрения, непрерывное топологическое преобразование спектра СПВ на статичной ДГ в отсекаемый линией ФМР квазилинейный спектр объёмных сдвиговых волн, осуществляемое параметрически по мере роста  $V_D$ , как раз и означает, что движение ДГ не только ориентирует волновую нормаль СПВ, но и снижает граничную локализацию её колебаний. Фазовая скорость СПВ при

этом повышается, устремляясь к пределу  $v = \omega/k_t(\omega)$  — фазовой скорости объёмных сдвиговых волн. Тенденция общего (по спектру в целом) преобразования СПВ в объёмную сдвиговую волну истолковывается следующим образом: в процессе вовлечения вместе с ДГ в движение по оси  $y$  над СПВ как составной частью системы волна—граница производится работа, что повышает энергию СПВ и, как следствие, вызывает изменение её характеристик — повышение частоты (согласно (17)), снижение коэффициента граничной локализации колебаний и увеличение фазовой скорости.<sup>3</sup> Топологическая инвариантность предельной точки спектра СПВ  $\xi = 1$ ,  $\eta \approx 1$ , в которую сходятся кривые 1–5 на рис. 2, с этих позиций предстаёт следствием неизменности энергии волны по мере движения ДГ ввиду уже наступивших полной делокализации колебаний ( $s = 0$ ) и достижения фазовой скоростью СПВ порогового уровня  $v = v(\omega)$  именно на резонансной частоте  $\omega = \omega_0$ , по определению наиболее оптимальной для увеличения энергии волны.

Условие  $\omega_M/\omega_0 > 1$  увеличит разность резонансных частот  $\omega_k$ ,  $\omega_0$  по сравнению с вышеописанным случаем. При этом картина спектра СПВ на движущейся ДГ не претерпит качественных изменений. Заслуживает внимания противоположная ситуация, когда  $\omega_M/\omega_0 \ll 1$ ,  $\omega_M/\omega_0 \sim \chi$ . Этот нехарактерный для реальных ферромагнетиков случай интересен тем, что из-за близкого взаимного расположения частот  $\omega_k$  и  $\omega_0$  понижаемая магнитоупругостью пороговая частота  $\omega_L$  может оказаться в зоне проявления ФМР:  $\omega_L < \omega_0 < \omega_k$ , когда преобразование спектра СПВ движением ДГ протекает на фоне комбинированного действия как ферромагнитного, так и магнитоакустического резонансов.

Как показывают результаты расчёта на рис. 3, при  $\omega_M/\omega_0 \ll 1$  ограничительная функция линии ФМР в спектре СПВ блокируется более низко расположенным спектром объёмных сдвиговых волн (штриховая кривая I), выходящим при  $\eta \rightarrow \infty$  на асимптотическую отметку  $\omega = \omega_L$ . Штриховая кривая II рис. 3 имеет тот же смысл, что и на рис. 2. Необходимо заметить, что точное положение верхней ограничительной кривой спектра СПВ на движущейся ДГ, определяемое условием  $s = 0$ , находится несколько выше кривой I, соответствующей приближённому представлению  $s$  формулой типа (12):  $s \approx [K^2 - k_t^2(\omega)]^{1/2}$ . По этой причине кривая 1 на рис. 3 оканчивается над кривой I, а кривые 4 и 5, имеющие вид практически вертикальных отрезков, оказываются с левой стороны от кривой I. Помимо того, что  $s = 0$ , в помеченных звёздочками предельных точках кривых 4, 5 на рис. 3 выполняется ещё и равенство  $k = 0$ . Волновой фронт такой сдвиговой объёмной волны лежит в плоскости ДГ, что исключает возникновение на ней магнитных полюсов. Достижение предельной ( $\theta = \pi/2$  при  $k = 0$ ) ориентации волновой нормали СПВ под влиянием достаточно быстрого движения ДГ оборачивается в итоге полным расщеплением волны с ДГ.

Роль магнитоупругой связи в совместном проявлении магнитоакустического резонанса и ФМР в спектре СПВ на движущейся ДГ иллюстрирует рис. 4 для случая увеличенной на порядок величины  $\chi$ .

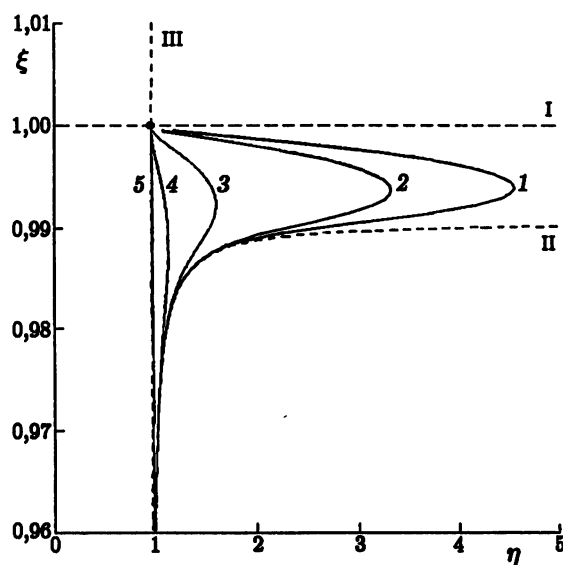


Рис. 2. Фрагмент спектра прямых СПВ на движущейся ДГ в случае  $\omega_M/\omega_0 = 0,5$ ;  $\chi = 0,01$ : кривая 1 соответствует  $V_D/c_t = 0,0007$ ; кривая 2 —  $V_D/c_t = 0,001$ ; кривая 3 —  $V_D/c_t = 0,003$ ; кривая 4 —  $V_D/c_t = 0,01$ ; кривая 5 —  $V_D/c_t = 0,1$

<sup>3</sup> Рост частоты и делокализация колебаний СПВ повышают среднюю за период плотность энергии волны, что вместе с увеличением её скорости обеспечивает рост интенсивности.

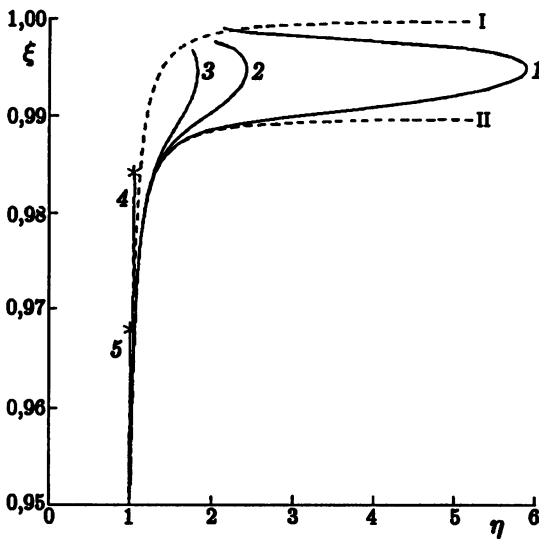


Рис. 3. Фрагмент спектра прямых СПВ на движущейся ДГ в случае  $\omega_M/\omega_0 = 0,01$ ,  $\chi = 0,01$ : кривая 1 соответствует  $V_D/c_t = 0,001$ ; кривая 2 —  $V_D/c_t = 0,003$ ; кривая 3 —  $V_D/c_t = 0,005$ ; кривая 4 —  $V_D/c_t = 0,1$ ; кривая 5 —  $V_D/c_t = 0,3$

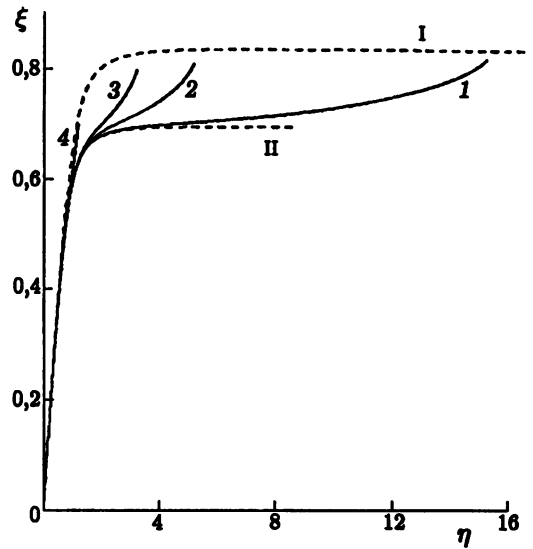


Рис. 4. Спектр прямых СПВ на движущейся ДГ в случае  $\omega_M/\omega_0 = 0,01$ ;  $\chi = 0,3$ : кривая 1 соответствует  $V_D/c_t = 0,01$ ; кривая 2 —  $V_D/c_t = 0,03$ ; кривая 3 —  $V_D/c_t = 0,05$ ; кривая 4 —  $V_D/c_t = 0,2$

Последнее обстоятельство способствует существенному расширению частотного диапазона вырождения линии ФМР и спектра СПВ на статичной ДГ (штриховая кривая II) под влиянием движения ДГ. Однако наряду с этим происходит настолько заметное снижение кривой I спектра объёмных сдвиговых волн (в замене ею линии ФМР, собственно говоря, и заключается роль магнитоакустического резонанса), что в отличие от рис. 3 спектральные кривые СПВ 1–4 не успевают достичь точки вырождения мод и совершить характерный петлеобразный поворот.

Ранее полагалось, что ферромагнетик имеет положительную константу магнитной анизотропии. Результаты настоящей статьи допускают обобщение и на противоположный случай  $K_1 < 0$ . Следует только иметь в виду, что при этом ДГ будет блоховской стенкой с ориентацией  $(111)$  [17]. В соответствующем образом повернутой системе координат  $(x', y', z')$ , где  $x' \parallel [1\bar{1}1]$ ,  $y' \parallel [11\bar{1}]$ ,  $z' \parallel [111]$  с осью  $z'$  в качестве оси лёгкого намагничивания, исходные уравнения (5) и граничные условия (6), сохраняя свой вид (см. [28]), будут содержать в качестве модуля сдвига и магнитоупругого коэффициента величины

$$\lambda = \frac{1}{3}(\lambda_{11} - \lambda_{12} + \lambda_{44}), \quad \beta = \frac{2}{3}(b_{11} - b_{12} + b_{44})M_0^2,$$

где  $\lambda_{ik}$  и  $b_{ik}$  — модули упругости и магнитоупругие модули кубического ферромагнетика в кристаллографической установке. Поле же магнитной анизотропии выразится равенством  $H_a = -4K_1/(3M_0)$  [17].

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследовано влияние заданного равномерного движения ДГ на удерживаемую СПВ. Результаты показывают, что указанное влияние во многом обусловлено проявлением ФМР на полях рассеяния при прямом распространении волны. В частности, преобразование спектра СПВ движением ДГ в ближайшей окрестности линии ФМР на полях рассеяния можно рассматривать как результат вырождения последней со спектром СПВ на статичной ДГ. Из-за ограниченности объёма статьи мы

не затрагивали изменений частотных зависимостей коэффициента граничной локализации в результате движения ДГ, равно как и особенностей спектрального поведения фазовых и групповых скоростей СПВ. Для справки ограничимся указанием, что величина  $\alpha$  обычно невелика и ещё более уменьшается с приведением ДГ в движение; исключение представляет ближайшая окрестность точки вырождения мод, в которой групповая скорость претерпевает разрыв и меняет знак, а глубина локализации СПВ оказывается порядка длины волны.

Важно заметить, что наряду с количественными изменениями спектральных параметров имеет место и качественное изменение структуры СПВ: движение ДГ оказывает ориентирующее действие на её волновую нормаль. В этой связи СПВ на движущейся ДГ предложено относить к особому подклассу граничных волн — неколлинеарным граничным волнам.

Работа выполнена в рамках проекта А0066 Федеральной целевой программы «Интеграция».

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гуляев Ю. В., Дикштейн И. Е., Шавров В. Г. // УФН. 1997. Т. 167, № 7. С. 735.
2. Сущик М. М., Фортус В. М., Фрейдман Г. И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1969. Т. 12, № 2. С. 293.
3. Барьяхтар В. Г., Иванов Б. А., Четкин М. В. // УФН. 1985. Т. 146, № 3. С. 417.
4. Kolchanov F. V., Turov E. A. // J. Magn. Magnet. Mater. 1995. V. 140–144. P. 1 831.
5. Косевич А. М. // ФММ. 1982. Т. 53, № 3. С. 420.
6. Басс Ф. Г., Насонов И. Н., Науменко О. В. // ЖТФ. 1988. Т. 58, № 7. С. 1 248.
7. Туров Е. А., Луговой А. А. // Письма в ЖЭТФ. 1980. Т. 31, № 5. С. 308.
8. Потемина Л. Г. // ЖЭТФ. 1986. Т. 90, № 3. С. 964.
9. Turov E. A., Lugovoi A. A. // Acta Phys. Polon. A. 1985. V. 68, No. 1. P. 61.
10. Parekh J. P. // Electron. Lett. 1969. V. 5, No. 14. P. 322.
11. Parekh J. P. // Electron. Lett. 1969. V. 5, No. 21. P. 540.
12. Parekh J. P. // Electron. Lett. 1970. V. 6, No. 2. P. 47.
13. Кайбичев И. А., Шавров В. Г. // Акуст. ж. 1990. Т. 36, № 4. С. 676.
14. Филиппов В. В. // Акуст. ж. 1992. Т. 38, № 3. С. 531.
15. Camley R. E., Maradudin A. A. // Appl. Phys. Lett. 1981. V. 38, No. 8. P. 610.
16. Горнаков В. С., Дедух Л. М., Кабанов Ю. П. // ФТТ. 1984. Т. 26, № 3. С. 648.
17. Гуревич А. Г. Магнитный резонанс в ферритах и антиферромагнетиках. М.: Наука, 1973. 592 с.
18. Ахиезер А. И., Барьяхтар В. Г., Пелетминский С. В. Спиновые волны. М.: Наука, 1967. 368 с.
19. Бирюков С. В., Гуляев Ю. В., Крылов В. В., Плесский В. П. Поверхностные акустические волны в неоднородных средах. М.: Наука, 1991. 415 с.
20. Поверхностные поляритоны / Под ред. В. М. Аграновича, Д. А. Миллса. М.: Наука, 1985. 384 с.
21. Мандельштам Л. И. Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике. М.: Наука, 1972. 439 с.
22. Шевяхов Н. С. // Акуст. ж. 1990. Т. 36, № 4. С. 760.
23. Загускин В. Л. Справочник по численным методам решения уравнений. М.: Физматлит, 1960. 216 с.
24. Дэннис Дж., Шнабель Р. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. М.: Мир, 1988. 440 с.
25. Гилинский И. А., Минц Р. Г. // ЖЭТФ. 1970. Т. 59, № 10. С. 1 230.
26. Вилков Е. А. // Письма в ЖТФ. 2000. Т. 26, № 20. С. 28.
27. Шевченко В. В. // Радиотехника и электроника. 2000. Т. 45, № 10. С. 1 157.
28. Штраус В. // Физическая акустика. Т. 4, Ч. Б / Под ред. У. Мэзона. М.: Мир, 1970. С. 247.

<sup>1</sup> Ульяновское отделение Института  
радиотехники и электроники РАН,  
г. Ульяновск,

<sup>2</sup> Институт радиотехники и электроники  
РАН, г. Москва, Россия

Поступила в редакцию  
25 января 1999 г.

#### SHEAR SURFACE WAVE AT A MOVING BLOCH WALL

*E. A. Vilkov, V. G. Shavrov, N. S. Shevyakhov*

Using the Galilean transformation for the transition to the frame comoving to a Bloch wall, we derive, within the framework of the magnetostatic exchange-free approach, a dispersion relation for shear surface waves guided by a moving 180-degree domain wall of ferromagnetic crystal. It is shown that the motion of a domain wall produces the directive action on the wave normal of the shear surface wave and changes significantly its spectrum in the case of direct wave propagation in the frequency band below the ferromagnetic resonance corresponding to the scattering field.

УДК 538.9:539.219.1

## ТОК УВЛЕЧЕНИЯ ПРИ ВНУТРИЗОННОМ МНОГОФОТОННОМ ПОГЛОЩЕНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ В СВЕРХРЕШЁТКЕ

*М. В. Вязовский, Г. А. Сыродоев*

Рассмотрен эффект увлечения электронов фотонами в полупроводниковой сверхрешётке при внутризонном поглощении электромагнитной волны. Показано, что при выполнении условия  $eEd \geq \hbar\omega$  необходимо учитывать многофотонное поглощение. С ростом поля ток осциллирует. Квазиклассическое приближение в этом случае приводит к насыщению тока увлечения с ростом амплитуды электрического поля, тогда как квантовый подход даёт вначале увеличение тока, а затем его уменьшение.

Эффект увлечения электронов фотонами в квантовых ямах (КЯ) и сверхрешётках (СР) активно исследуется в последнее время как теоретически [1–7], так и экспериментально [8–12]. Этот эффект может быть использован для уточнения параметров КЯ и СР, кинетики передачи импульса фотонами, а также для разрешения временной структуры последовательности ультракоротких электромагнитных импульсов. При нахождении тока увлечения в СР в большинстве работ используется квазиклассическое приближение, которое становится неправомерным, если либо энергия фотона  $\hbar\omega$ , либо энергия  $\hbar\Omega_{st} = eEd$ , где  $\Omega_{st}$  — штарковская частота,  $d$  — постоянная СР,  $E$  — амплитуда электрического поля электромагнитной волны,  $e$  — элементарный заряд, становится сравнимой с шириной минизоны проводимости. В этом случае необходим квантовый подход [13]. Двухфотонный эффект увлечения при переходе между подзонами тяжёлых и лёгких дырок в  $p$ -Ge впервые рассматривался в [14], многофотонное увлечение в этом же случае — в [15], там же было объяснено наблюдаемое на опыте изменение направления тока увлечения в  $p$ -Ge с ростом интенсивности электромагнитной волны. В настоящей работе мы рассмотрим многофотонный эффект увлечения при внутризонном поглощении электромагнитной волны в полупроводниковой СР. Как будет показано ниже, эффект многофотонного увлечения в СР необходимо учитывать при выполнении условия

$$\frac{eEd}{\hbar\omega} \geq 1. \quad (1)$$

Если  $\hbar\omega < \Delta_g$ ,  $\hbar\nu \ll \Delta$ , где  $\Delta_g$  — ширина запрещённой минизоны,  $\Delta$  — ширина минизоны проводимости,  $\nu^{-1}$  — время релаксации электронов, то можно решать задачу в приближении одной минизоны. Эффективный гамильтониан взаимодействия электромагнитной волны с электроном в минизоне проводимости для одномерной СР запишем в виде

$$\hat{H}_1 = \varepsilon(\hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A}(t)/c) - \varepsilon(\hat{\mathbf{p}}), \quad (2)$$

где

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \frac{p_{\perp}^2}{2m} + \frac{\Delta}{2} \left[ 1 - \cos\left(\frac{p_z d}{\hbar}\right) \right]$$

— энергия электрона в этой зоне,  $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$  — квазиимпульс электрона,  $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla$ ,  $\mathbf{A}(t)$  — вектор-потенциал электромагнитной волны,  $c$  — скорость света; ось  $z$  направлена вдоль оси СР. Гамильтониан взаимодействия электрона с акустическими колебаниями решётки возьмём в виде

$$\hat{H}_2 = i \sum_{\mathbf{q}, \alpha} \{ B_{\mathbf{q}\alpha} \exp[i(\mathbf{q}, \mathbf{r}) - i\omega_{\mathbf{q}t}] b_{\mathbf{q}\alpha} - B_{\mathbf{q}\alpha}^* \exp[-i(\mathbf{q}, \mathbf{r}) + i\omega_{\mathbf{q}t}] b_{\mathbf{q}\alpha}^+ \}, \quad (3)$$

где  $b_{q\alpha}$  и  $(b_{q\alpha}^+)$  — операторы уничтожения и рождения фононов,  $q$  — волновой вектор фонона,  $r$  — радиус-вектор,  $B_{q\alpha} = [\hbar/(2\rho\omega_q V)]^{1/2} q \Xi_\alpha$ ,  $\Xi_\alpha$  — константа деформационного потенциала,  $\alpha$  — номер ветви колебаний решётки,  $\rho$  — плотность кристалла,  $V$  — объём кристалла (здесь мы пренебрегаем анизотропией CP).

Пусть плоская монохроматическая электромагнитная волна распространяется перпендикулярно оси CP:

$$A_z = A \cos(\omega t - \tau x). \quad (4)$$

Тогда из (2) и (3) находим

$$\hat{H}_1 = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left( J_{2m}(a) \exp[2mi\varphi] \hat{C}_{2m} + J_{2m+1}(a) \exp[-(2m+1)i\varphi] \hat{C}_{2m+1} \right), \quad (5)$$

где

$$\hat{C}_{2m} = \frac{\Delta}{2} \left( \frac{\delta_{02m}}{J_0(a)} - (-1)^m \right) \cos\left(\frac{\hat{p}_z d}{\hbar}\right), \quad \hat{C}_{2m+1} = \frac{\Delta}{2} (-1)^m \sin\left(\frac{\hat{p}_z d}{\hbar}\right),$$

$J_m(a)$  — функция Бесселя порядка  $m$ ,  $\varphi = \omega t - \tau x$ ,  $\delta_{02m}$  — символ Кронекера,

$$a = \frac{eAd}{c\hbar} = \frac{eEd}{\hbar\omega}. \quad (6)$$

Во втором порядке теории возмущений для вероятности электронного перехода в зоне проводимости из состояния  $k$  в состояние  $k'$  с поглощением фотонов и поглощением (испусканием) фонона находим

$$\begin{aligned} w_{k'k} = & \frac{2\pi B_q^2}{\hbar^4} N_k (1 - N_{k'}) \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ C_m^2(k_z + q_z) \frac{\delta_{k'k+q+m\tau}}{(\omega_{k+qk} - \omega_q)^2} n_q \delta(\omega_{k'k} - m\omega - \omega_q) + \right. \\ & + C_m^2(k_z - q_z) \frac{\delta_{k'k-q+m\tau}}{(\omega_{k-qk} + \omega_q)^2} (n_q + 1) \delta(\omega_{k'k} - m\omega + \omega_q) + \\ & + C_m^2(k_z) \frac{\delta_{k'k+q+m\tau}}{(\omega_{k-m\tau k} - m\omega)^2} n_q \delta(\omega_{k'k} - m\omega - \omega_q) + \\ & \left. + C_m^2(k_z) \frac{\delta_{k'k-q+m\tau}}{(\omega_{k-m\tau k} + m\omega)^2} (n_q + 1) \delta(\omega_{k'k} - m\omega + \omega_q) \right\}, \quad (7) \end{aligned}$$

где  $\omega_{kk'} = (\varepsilon_k - \varepsilon_{k'})/\hbar$ ,

$$C_{2m+1}(k_z) = (-1)^m \frac{\Delta}{2} J_{2m+1}(a) \sin(k_z d), \quad C_{2m}(k_z) = \frac{\Delta}{2} \left\{ [\delta_{02m}/J_0(a)] - (-1)^m \right\} J_{2m}(a) \cos(k_z d),$$

$n_q$  и  $N_k$  — числа заполнения фононов и электронов, символы Кронекера и  $\delta$ -функции выражают законы сохранения квазиимпульса и энергии при переходах. Как видно из выражения (7) для вероятности  $w_{k'k}$ , в нём учтены многофотонные переходы.

Ток увлечения находим так же, как в работе [15], но в приближении постоянного времени релаксации:

$$j_x = -\frac{e\hbar\nu^{-1}}{\mu V} \sum_{k',k,q} k'_x w_{k'k}, \quad (8)$$

где  $\nu^{-1}$  — постоянное время релаксации,  $\mu$  — эффективная масса электрона в направлении распространения электромагнитной волны. Здесь мы не учитываем вынужденное испускание фотонов, полагая, что при  $\hbar\omega > k_0 T$  вероятность таких переходов в  $\exp[-\hbar\omega/(k_0 T)]$  раз меньше вероятности переходов с поглощением фотонов. Здесь  $k_0$  — постоянная Больцмана,  $T$  — температура кристалла. В случае

высокой температуры ( $k_0T \gg \hbar\omega_q$ ), учитывая, что  $n_q = k_0T/(\hbar\omega_q)$ ,  $N_k = (1/Z) \exp[-\varepsilon(k)/(k_0T)]$ , где  $Z$  — статистическая сумма, при выполнении неравенства  $\omega \gg \omega_q$  получим

$$j_x = g \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \int [C_m^2(\xi_z) + C_m^2(k_z)] \exp\left\{ \frac{\Delta}{2k_0T} \left[ \cos(k_z d) - \frac{2}{\Delta} \eta \Theta(\eta) \right] \right\} dk_z d\xi_z, \quad (9)$$

где  $\eta = (\Delta/2) [\cos(k_z d) - \cos(\xi_z d)] - m\hbar\omega$ ,  $\xi = \mathbf{k} \pm \mathbf{q}$ ,  $g = j_0 V \mu k_0 T d / (2\pi^3 \hbar^2 \Delta^2 Z)$ ,  $h = 2\pi\hbar$ ,

$$\Theta(\eta) = \begin{cases} 0, & \eta < 0; \\ 1, & \eta \geq 0. \end{cases}$$

Знак плюс в выражении для  $\xi$  соответствует поглощению фонона, минус — испусканию. В случае  $\hbar\omega > \Delta$  находим

$$\frac{j_x}{j_0} = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_m^2(a)}{m} + \frac{I_1(b)}{bI_0(b)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_{2m+1}^2(a)}{2m+1} + \left(1 - \frac{I_1(b)}{bI_0(b)}\right) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_{2m}^2(a)}{2m}, \quad (10)$$

где  $j_0 = -e\nu^{-1} \tau k_0 T \Xi^2 n_0 \Delta^2 / (4\hbar^4 \rho \omega^2 v_s^2 d)$ ,  $n_0$  — концентрация электронов в зоне проводимости,  $I_s(b)$  — функция Бесселя порядка  $s$  от мнимого аргумента,  $v_s$  — скорость звука,  $b = \Delta/(2k_0T)$ .

На рис. 1 приведены графики зависимости  $j_x/j_0$  от параметра  $a = eEd/(\hbar\omega)$  при  $T = 300$  К. Осцилляции тока увлечения с ростом  $a$  вызваны неквадратичной зависимостью энергии электрона от квазиимпульса и узостью минизоны (у электронов, находящихся у потолка минизоны, составляющая скорости  $v_z$  обращается в нуль).

При  $a \geq 1$  поглощение электромагнитной волны носит многофотонный характер. В нашем случае ( $d = 10^{-6}$  см,  $\hbar\omega = 10^{-2}$  эВ) многофотонность нужно учитывать уже при  $E \geq 10^4$  В/см. При небольших амплитудах ( $a \ll 1$ ) при  $b \ll 1$  получим  $j_x = j_0 [ed/(2\hbar\omega)]^2 E^2$ : ток увлечения линейно зависит от интенсивности электромагнитной волны.

Это известный результат классической теории светозлектрического эффекта [1]. Если мы учтём и оптическую ветвь колебаний, то для взаимодействия с неполярными колебаниями (и в пренебрежении дисперсией) при тех же условиях (при высоких температурах), мы получим выражение для тока, отличающееся от (10) численным коэффициентом и постоянной деформационного потенциала. Оценивая максимальную величину тока увлечения при  $\Delta = 0,01$  эВ,  $\hbar\omega = 0,02$  эВ,  $\Xi = 10$  эВ,  $\tau = 2000$  см $^{-1}$ ,  $\nu^{-1} = 10^{-11}$  с,  $n_0 = 10^{16}$  см $^{-3}$ ,  $v_s = 5 \cdot 10^5$  см/с, получим  $j_x = 4$  А/см $^2$ . Как видно из рис. 1, ток увлечения, уменьшаясь по величине, осциллирует.

В квазиклассическом приближении эта же задача была решена в работе [1], из которой следует, что ток увлечения с ростом интенсивности волны увеличивается, приближаясь к максимальному предельному значению. Это различие объясняется тем, что в квантовом случае вероятность поглощения убывает с ростом интенсивности электромагнитной волны. В квазиклассическом же приближении с увеличением поля  $E$  электроны почти равномерно распределяются в пределах минизоны, что и объясняет стремление тока при его увеличении к насыщению. Выводы квантовой теории должны быть приняты во внимание при использовании СР для детектирования электромагнитных импульсов.

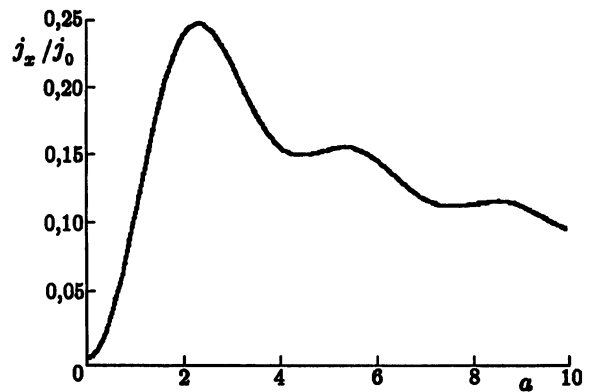


Рис. 1



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Игнатов А. А. // ФТТ. 1980. Т. 22, № 11. С. 3319.
2. Эпштейн Э. М. // Изв. вузов. Радиофизика. 1981. Т. 24, № 4. С. 514.
3. Васько Ф. Т. // ФТП. 1985. Т. 19, № 7. С. 1319.
4. Vasko F. T. // Phys. Rev. B. 1996. V. 53, No. 15. P. 9576.
5. Расулов Р. Я., Саленко Ю. Е., Эски Т. // ФТТ. 1998. Т. 40, № 9. С. 1710.
6. Вязовский М. В., Сыродоев Г. А. // ФТП. 1996. Т. 30. С. 1324.
7. Вязовский М. В., Сыродоев Г. А. // ФТП. 1999. Т. 33, № 12. С. 1443.
8. Дмитриев А. П., Емельянов С. А. // Письма в ЖЭТФ. 1991. Т. 54, № 8. С. 460.
9. Luryi S. // Phys. Rev. Lett. 1987. V. 58. P. 2269.
10. Grinberg A. A., Luryi S. // Phys. Rev. B. 1988. V. 38. P. 87.
11. Xin Chen // Phys. Stat. Sol. B. 1998. V. 209. P. 205.
12. Koch J., Wieck A. D. // Superlattices and microstructures. 1999. V. 25, No. 1–2
13. Басс Ф. Г., Булгаков А. А., Тетервов А. П. Высоочастотные свойства полупроводников со сверхрешётками. М.: Наука, 1989. 287 с.
14. Брынских Н. А., Сагдуллаева С. А. // ФТП. 1978. Т. 12, № 4. С. 798.
15. Ганичев С. Д., Емельянов С. А., Ивченко Е. Л., Перлин Е. Ю., Терентьев Я. В., Фёдоров А. В., Ярошецкий И. Д. // ЖЭТФ. 1986. Т. 91, № 4. С. 1233.

Волгоградский государственный  
педагогический университет,  
г. Волгоград, Россия

Поступила в редакцию  
29 мая 2000 г.

**DRAG CURRENT DUE TO THE MULTIPHOTON INTRABAND ABSORPTION  
OF AN ELECTROMAGNETIC WAVE IN A SUPERLATTICE**

*M. V. Vyazozsky and G. A. Syrodov*

We consider the effect of electron drag by photons due to intraband absorption of an electromagnetic wave in a semiconductor superlattice. It is shown that the multiphoton absorption must be taken into account if the condition  $eEd \geq \hbar\omega$  is valid. As the field increases, the current oscillates. In this case, the quasi-classical approximation results in saturation of the drag current with increasing amplitude of the electric field, while within the framework of the quantum approach, the increase in current is replaced by its decrease.