МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Известия высших учебных заведений

РАДИОФИЗИКА

ежемесячный научно-технический журнал

Издаётся с апреля 1958 г.

Том XLVI № 7 Нижний Новгород 2001

Содержание

Алимов В. А., Токарев Ю. В. Эффекты ионосферного рассеяния радиоволн в декаметровой интерферометрии 555

Анисимов С. В., Мареев Е. А., Шихова Н. М., Дмитриев Э. М. Механизмы формирования спектра пульсаций электрического поля приземной атмосферы 562

Шорохова Е. А., Яшнов В. А. Особенности излучения электромагнитных волн тонкой электрической антенной в плоском волноводе с неоднородным заполнением 577

Докучаев В. П. Синхротронное излучение внутри круглого металлического волновода 587

Семенихина Д. В. Возбуждение решётки нелинейных нагрузок на идеально проводящем экране, покрытом диэлектриком 592

Кузьмичёв И. К. Междутиповое взаимодействие колебаний в полусимметричном открытом резонаторе 600

Белокопытов Г. В., Журавлёв М. В. Электротепловая колебательная неустойчивость в сферических сегнетоэлектрических резонаторах. Трёхмодовый режим 606

Бровко А. В., Рожнев А. Г., Маненков А. Б. Конечноэлементная модель волоконно-оптического поляризатора 615

Кожеватов И. Е., Руденчик Е. А., Черагин Н. П., Куликова Е. Х. Абсолютное тестирование профилей плоских оптических поверхностей больших размеров 623

Громов Е. М., Коробов А. С., Тютин В. В. Короткие солитоны огибающей в неконсервативных средах 631

Зверев В. А. Помехоустойчивость процедуры сжатия узкополосного сигнала 636

УДК 533.951, 537.868

ЭФФЕКТЫ ИОНОСФЕРНОГО РАССЕЯНИЯ РАДИОВОЛН В ДЕКАМЕТРОВОЙ ИНТЕРФЕРОМЕТРИИ

В. А. Алимов, Ю. В. Токарев

Рассмотрены некоторые теоретические аспекты дифракции радиоволн в случайно-неоднородной ионосфере в приложении к задачам длинноволновой интерферометрии космических обьектов. Исследованы статистические характеристики флуктуаций интенсивности декаметрового излучения дискретных радиоисточников при наземных наблюдениях на двухэлементных интерферометрах со сверхдлинной и малой базами. Получены аналитические выражения для автокорреляционной функции интенсивности излучения и спектра мерцаний точечного источника в предельных случаях больших и малых фазовых набегов в неоднородной ионосферной плазме. Установлено, что при интерферометрическом приёме спектр мерцаний, отвечающий наблюдениям источника на одиночной антенне, переносится из области нулевых спектральных частот в область доплеровской частоты интерферометра. Показано, что декаметровые радиоинтерферометры наземно-космического базирования могут быть использованы для исследования углового распределения радиояркости космических источников в условиях как спокойной, так и возмущённой ионосферы.

ВВЕДЕНИЕ

Диапазон радиоволн вблизи и ниже частот прозрачности земной ионосферы остаётся последним мало освоенным участком электромагнитного спектра в радиоастрономии. Несмотря на ряд трудностей технического и экспериментального характера, исследования длинноволнового радиоизлучения, несущего уникальную информацию о физических условиях в различных космических обьектах, привлекают всё более пристальное внимание [1, 2].

В наземной радиоастрономии низкочастотный предел наблюдений космического радиоизлучения в периоды минимума солнечной активности может опускаться до 1,5÷2 МГц [3]. Вместе с тем заметное влияние ионосферы на характеристики принимаемого радиоизлучения прослеживается, как правило, до более высоких частот, охватывая весь декаметровый и, при определённых геофизических условиях, часть метрового диапазона радиоволн [4–8].

Наиболее специфическим образом ионосферные эффекты (рефракция, поглощение и рассеяние радиоволн) проявляются в интерферометрических наблюдениях, дающих в области длинных волн практически единственный способ изучения угловой структуры внеземных объектов [9–12]. Серьёзную проблему, в частности, представляет нарушение когерентности принимаемых элементами интерферометра сигналов при прохождении волнового фронта через движущиеся ионосферные возмущения с широким спектром масштабов неоднородностей электронной концентрации. Хотя теоретические и экспериментальные аспекты распространения радиоволн в случайно-неоднородной ионосферной плазме изучены достаточно глубоко (см. [13–15] и цитированную там литературу), ощущается явный дефицит методических работ в этой области.

Настоящая работа посвящена анализу статистических характеристик декаметрового радиоизлучения космических объектов при наземных интерферометрических наблюдениях. С целью поиска путей повышения функциональных возможностей наземных инструментов в разделе 1 исследуется вопрос о флуктуациях функции когерентности двухэлементного коротковолнового интерферометра при дифракции космического излучения на ионосферных неоднородностях. Представлен вывод аналитических выражений для автокорреляционной функции интенсивности и спектра мерцаний точечного

источника в наиболее распространённых интерферометрических схемах, анализируется форма спектральной «линии» интерферометра в модели фазового экрана. В разделе 2 кратко обсуждаются возможности декаметровой интерферометрии радиоастрономических объектов с использованием систем наземно-космического базирования.

1. СПЕКТРАЛЬНЫЕ РАДИОИНТЕРФЕРОМЕТРИЧЕСКИЕ ИЗМЕРЕНИЯ

Рассмотрим следующую модельную задачу. Коротковолновое излучение от удалённого точечного источника проходит ионосферный слой с неоднородностями электронной концентрации и принимается двухэлементным аддитивным интерферометром с базой d в плоскости, расположенной на некотором расстоянии z от ионосферного слоя. Мы будем интересоваться спектром $W_I(\Omega)$ флуктуаций интенсивности $I(t)$ принимаемого излучения:

$$W_I(\Omega) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \Gamma_I(\tau)\cos(\Omega\tau)\,\mathrm{d}\tau, \tag{1}$$

где

$$\Gamma_I(\tau) = \langle\overline{\Delta I(t)\,\Delta I(t+\tau)}\rangle \tag{2}$$

— корреляционная функция флуктуаций интенсивности, $\Delta I(t) = I(t) - \langle\overline{I(t)}\rangle$, $\langle\overline{I(t)}\rangle$ — среднее значение интенсивности, $\Omega = 2\pi\nu$ — круговая частота. Здесь применяется двойное усреднение случайных флуктуаций сначала по ансамблю неоднородностей, а затем по периоду нестационарного временного процесса на выходе интерферометра [13].

Текущее значение интенсивности принимаемого излучения $I(t) = E(t)E^*(t)$, где $E(t)$ — комплексное поле принимаемого сигнала, в нашем случае можно записать в виде (ср. [13, 16])

$$I(t) = \left[E_1(t)e^{-i(\Omega_\mathrm{g}/2)t} + E_2(t)e^{+i(\Omega_\mathrm{g}/2)t}\right]\left[E_1^*(t)e^{+i(\Omega_\mathrm{g}/2)t} + E_2^*(t)e^{-i(\Omega_\mathrm{g}/2)t}\right], \tag{3}$$

где $E_{1,2}(t)$ — комплексные поля сигналов в приёмных пунктах 1 и 2 интерферометра, Ω_g — доплеровское смещение частот сигналов в пунктах 1 и 2, обусловленное разнесением принимаемых частот, вращением Земли, движением источника излучения и т. п.

Подставляя выражение (3) в (2) и проводя необходимые преобразования, находим

$$\Gamma_I(\tau) = \Gamma_I'(\tau) + \Gamma_I''(\tau), \tag{4}$$

где $\Gamma_I'(\tau) = \Gamma_{I_1}(\tau) + \Gamma_{I_2}(\tau) + 2\,[\overline{I_1(t)I_2(t+\tau)} - \bar{I}_1\bar{I}_2]$,

$$\Gamma_I''(\tau) = 2\cos(\Omega_\mathrm{g}\tau)\,[\overline{E_1(t)E_1^*(t+\tau)E_2^*(t)E_2(t+\tau)} - \overline{E_1(t)E_2^*(t)}\;\overline{E_2(t+\tau)E_1^*(t+\tau)}].$$

Здесь $\Gamma_{I_{1,2}}(\tau)$ — корреляционные функции флуктуаций интенсивности в приёмных пунктах 1 и 2 соответственно.

Если база d интерферометра много больше внешнего масштаба l флуктуаций принимаемого излучения, $d \gg l$ (величина l не превышает внешнего масштаба плазменной турбулентности в ионосфере l_0, $l \lesssim l_0$), то мы имеем дело с предельным случаем — декаметровым радиоинтерферометром со сверхдлинной базой, для которого флуктуации комплексных полей E_1 и E_2 статистически независимы. В этом случае из соотношения (4) получаем следующее выражение:

$$\Gamma_I(\tau) = \Gamma_{I_1}(\tau) + \Gamma_{I_2}(\tau) + 2\cos(\Omega_\mathrm{g}\tau)\left[\Gamma_{E_1E_1^*}(\tau)\Gamma_{E_2E_2^*}(\tau) - |\bar{E}_1|^2\,|\bar{E}_2|^2\right]. \tag{5}$$

Здесь $\Gamma_{E_{1,2}E^*_{1,2}}(\tau)$ и $|\bar{E}_{1,2}|$ — корреляционные функции и модули средних значений комплексных полей излучения в пунктах 1 и 2 соответственно.

В режиме насыщенных флуктуаций из соотношения (5) для функции корреляции флуктуаций интенсивности сигнала на выходе интерферометра со сверхдлинной базой с учётом [17], имеем

$$\Gamma_I(\tau) = \left|\Gamma_{E_1E^*_1}(\tau)\right|^2 + \left|\Gamma_{E_2E^*_2}(\tau)\right|^2 + 2\Gamma_{E_1E^*_1}(\tau)\Gamma_{E_2E^*_2}(\tau)\cos(\Omega_{\mathrm{g}}\tau). \tag{6}$$

Формула (6) — статистический аналог общеизвестной формулы для интенсивности двух интерферирующих сигналов.

В другом предельном случае, когда база интерферометра много меньше характерного пространственного масштаба флуктуаций принимаемого излучения ($d \ll l$) и флуктуации слабые, из соотношения (4), используя стандартную процедуру метода возмущений [13, 14], находим

$$\Gamma_I(\tau) \approx \Gamma_{I_1}(\tau) + \Gamma_{I_2}(\tau) + 2\Gamma_{I_1I_2}(\tau) + 2\cos(\Omega_{\mathrm{g}}\tau)\left\{\Gamma_{e_1e^*_1}(\tau)\,|\bar{E}_2|^2 + \right.$$
$$\left. + \Gamma_{e_2e^*_2}(\tau)\,|\bar{E}_1|^2 + [\Gamma_{e_1e_2}(\tau) + \Gamma_{e_2e_1}(\tau)]\,|\bar{E}_1|\,|\bar{E}_2|\right\}, \tag{7}$$

где $\Gamma_{e_1e^*_1}(\tau)$, $\Gamma_{e_2e^*_2}(\tau)$, $\Gamma_{e_1e_2}(\tau)$ и $\Gamma_{e_2e_1}(\tau)$ — соответствующие функции флуктуационных комплексных полей $e_{1,2} = E_{1,2} - \bar{E}_{1,2}$ [13, 14].

Далее мы будем интересоваться одномерным спектром флуктуаций интенсивности принимаемого излучения, соответствующим реальным радиоастрономическим наблюдениям космического источника. В этом случае общее выражение для спектра флуктуаций интенсивности с учётом сканирования диаграммы направленности интерферометра вдоль оси x, можно записать в виде (см. также [15])

$$W_I(\Omega) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\Gamma_I(\tau)\cos(\Omega\tau)\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{V_x}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F_I(\Omega/V_x, æ_y)\,\mathrm{d}æ_y =$$
$$= \frac{1}{V_x}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left\{F'_I(\Omega/V_x, æ_y) + \frac{1}{2}\left[F''_I((\Omega-\Omega_x)/V_x, æ_y) + F''_I((\Omega+\Omega_x)/V_x, æ_y)\right]\right\}\mathrm{d}æ_y. \tag{8}$$

Здесь $F'^{,''}_I(æ_x = \Omega/V_x,\ æ_y)$ — двумерные спектры флуктуаций, соответствующие корреляционным функциям $\Gamma'^{,''}_I(\tau)$ (см. соотношения (4)), которые вычисляются по известным формулам [15] в рамках модели «вмороженного» дрейфа со скоростью $\mathbf{V}(V_x, 0)$ неоднородностей среды, вызывающих флуктуации интенсивности проходящего через неё излучения.

При вычислениях функций $F_I(æ_x, æ_y)$ мы будем пользоваться моделью неоднородного слоя ионосферы в форме фазового экрана. В этом случае функции корреляции флуктуаций комплексных полей сигналов в плоскости наблюдения в пунктах 1, 2 равны [15]

$$\Gamma_{E_{1,2}E^*_{1,2}}(\boldsymbol{\rho}_\perp) = \bar{I}_{1,2}\exp\left\{-\overline{s^2_{1,2}}\,[1 - \rho_{s_{1,2}}(\boldsymbol{\rho}_\perp)]\right\}, \tag{9}$$

где $\overline{s^2_{1,2}}$ — средние квадраты флуктуаций фаз коротких радиоволн в ионосфере «над» пунктами 1 и 2, $\rho_{s_{1,2}}(\boldsymbol{\rho}_\perp)$ — коэффициенты пространственной корреляции флуктуаций фаз коротких радиоволн в пунктах 1 и 2 соответственно при локальном разнесении $\boldsymbol{\rho}_\perp$ в ионосферном слое.

В случае сильных флуктуаций коротких радиоволн в ионосфере из соотношений (9) следует (см. также [17])

$$\Gamma_{E_{1,2}E^*_{1,2}}(\boldsymbol{\rho}_\perp) \simeq \bar{I}_{1,2}\exp(-\rho^2_\perp/l^2_{E_{1,2}}), \tag{10}$$

где $l_{E_{1,2}} = l_{0(1,2)} \Big/ \sqrt{\overline{s^2_{1,2}}}$ — характерный пространственный масштаб корреляции поля сигнала в плоскости наблюдения в пунктах 1 и 2, $l_{0(1,2)}$ — внешние масштабы плазменной турбулентности в ионосфере «над» пунктами 1, 2.

В случае слабых флуктуаций коротких радиоволн в ионосфере, как известно, справедливо равенство [15]

$$F_I(æ_x, æ_y) \simeq 4F_{\rm s}(æ_x, æ_y)\sin^2\left(\frac{æ_x^2 + æ_y^2}{2æ_{\rm фр}^2}\right), \tag{11}$$

где $æ_{\rm фр} = \sqrt{k/z}$ — френелевское волновое число.

Далее при конкретных расчётах спектров флуктуаций $W_I(\Omega)$ принимаемого излучения мы будем предполагать, что двумерный спектр флуктуаций фазы радиоволны в ионосфере $F_{\rm s}(æ_x, æ_y)$ имеет вид, близкий к колмогоровскому (показатель спектра $p = 4$) [15, 17]:

$$F_{\rm s}(æ_x, æ_y) = l_0^2\left[1 + (æ_x^2 + æ_y^2)\, l_0^2\right]^{-2}/\pi. \tag{12}$$

Кроме того, без ограничения общности для дальнейшего упрощения расчётов будем полагать статистические свойства ионосферы «над» пунктами 1 и 2 идентичными.

Тогда, используя соотношения (4)–(12), легко получить выражения для спектра флуктуаций отклика мультипликативного радиоинтерферометра в отдельных частных случаях:

1) Малая база ($d \ll l$), слабые флуктуации радиоволн ($\overline{s^2} \ll 1$):

$$W_I''(\Omega) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \Gamma_I''(\tau)\cos(\Omega\tau)\,{\rm d}\tau = \frac{\bar{I}^2\overline{s^2}\tau_0}{\left[1 + (\Omega - \Omega_{\rm g})^2\,\tau_0^2\right]^{3/2}}\left\{1 + 2\sin^2[(\Omega - \Omega_{\rm g})\tau_{\rm др}/2]\right\}, \tag{13}$$

где $\tau_0 = l_0/V_x$, $\tau_{\rm др} = d/V_{\rm d}$ — характерные времена быстрых флуктуаций принимаемого излучения и квазипериодических осцилляций в спектре принимаемого излучения соответственно; $\bar{I}$ — среднее значение интенсивности принимаемого излучения; $V_{\rm d}$ — скорость дрейфа неоднородностей вдоль оси интерферометра.

2) Сверхдлинная база ($d \gg l$), слабые флуктуации радиоволн ($\overline{s^2} \ll 1$):

$$W_I''(\Omega) = \frac{\bar{I}_1\bar{I}_2\overline{s^2}\tau_0}{\left[1 + (\Omega - \Omega_{\rm g})^2\,\tau_0^2\right]^{3/2}}, \tag{14}$$

где $\bar{I}_{1,2}$ — средние значения интенсивностей принимаемого излучения в пунктах 1 и 2 интерферометра.

3) Малая или сверхдлинная база $d \ll l_E$; $d \gg l_E$, сильные флуктуации радиоволн ($\overline{s^2} \gg 1$):

$$W_I''(\Omega) = \frac{\bar{I}_1\bar{I}_2\tau_0}{2\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(\Omega - \Omega_{\rm g})^2\,\tau_0^2}{8}\right], \tag{15}$$

где $\tau_0 = l_E/V_x$ — характерный временной интервал флуктуаций принимаемого излучения.

При выводе соотношений (13)–(15) учтено, что, как правило, $\tau_0\Omega_{\rm g} \gg 1$ (см. ниже), поэтому в результирующем спектре $W_I''(\Omega)$ принимаемого излучения компонентой с частотой $\Omega + \Omega_{\rm g}$ можно пренебречь.

Из соотношений (13) и (14), в частности, следует, что при наблюдениях на декаметровом интерферометре со сверхдлинной базой периодические осцилляции в спектре отсутствуют. В то же время для принимаемых сигналов на интерферометрах с малым частотно-пространственным разнесением они присутствуют, и их характерный частотный интервал в спектре (при $d = 100$ м; $V_{\rm d} = 0{,}02$ км/с)

равен $\Delta\nu_{\text{др}} \approx 1/(\sqrt{2\pi}\,\tau_{\text{др}}) \approx 0{,}05$ Гц. Характерный масштаб быстрых мелкомасштабных флуктуаций принимаемого излучения (при $l_{0\text{м}} \approx 0{,}3$ км; $V_{x\text{м}} \approx 0{,}1$ км/с) составляет $\tau_0 \approx l_0/V_x \approx 3$ с, ширина спектральной линии (см. (13), (14)) $\Delta\nu \approx 1/(\pi\tau_0) \approx 0{,}1$ Гц. Форма спектральной линии описывается соотношением $[1 + (\Omega - \Omega_{\text{g}})^2\tau_0^2]^{-3/2}$ и при $(\Omega - \Omega_{\text{g}})\tau_0 > 1$ спектр принимаемого излучения $W_I''(\Omega) \propto (\Omega - \Omega_{\text{g}})^{-3}$.

В условиях сильных флуктуаций (при $l_0 = 30$ км, $\overline{s^2} = 10^4$ [10]) характерный параметр $l_E \simeq \simeq l_0/\sqrt{\overline{s^2}} \simeq 0{,}3$ км. Соответственно при $V_x \simeq 0{,}3$ км/с имеем $\tau_0 \simeq 1$ с. Ширина спектральной линии (см. (15)) $\Delta\nu \simeq 1/(\sqrt{2}\,\pi\tau_0) \simeq 0{,}2$ Гц, а сама линия имеет гауссову форму: $W_I''(\Omega) \propto \propto \exp[-(\Omega - \Omega_{\text{g}})^2\tau_0^2/8]$.

Приведённый выше анализ спектра флуктуаций интенсивности принимаемого интерферометром декаметрового радиоизлучения от точечного источника позволяет сделать вывод о том, что сложный частотный спектр принимаемого сигнала из области нулевых спектральных частот (что имеет место при приёме излучения на одиночную антенну) переносится в область спектральных частот в районе доплеровской частоты ν_{g}. Применительно к предложенному в [18] модифицированному методу мерцаний это означает, что использование этого метода в сочетании с интерферометрическим приёмом радиоизлучения от протяжённого источника позволит выделять полезный сигнал на фоне помехового радиофона в области частот в несколько герц в отличие от области в десятые доли герца при приёме на одиночную антенну. При этом естественно ожидать, что из-за значительного ослабления спектральных компонент ионосферных мерцаний в области спектральных частот в несколько герц полезный сигнал должен выделяться более рельефно.

2. ИНТЕРФЕРОМЕТРИЯ НАЗЕМНО-КОСМИЧЕСКОГО БАЗИРОВАНИЯ

Рассмотрим теперь следующую задачу. Излучение от удалённого космического радиоисточника одновременно принимается двумя разнесёнными в пространстве коротковолновыми антеннами 1 и 2, расположенными на круговой орбите Земли в верхней ионосфере (на высотах $h \simeq 1\,000$ км) и антенной 3, расположенной на земной поверхности между точками, соответствующими положению космических антенн. Расстояние между космическими антеннами d, а расстояния d_1 и d_2 между ними и наземной антенной (вдоль поверхности Земли) меняются с течением времени (в основном из-за движения космических антенн) так, что $d_1(t) + d_2(t) = d$.

Такая система антенн может рассматриваться как простейшая система апертурного синтеза (см., например, [19]). Интерферометры 1–3 и 3–2 измеряют пространственные гармоники $d_1(t)/\lambda$ и $d_2(t)/\lambda$ (λ — длина волны) в спектре принимаемого радиоизлучения от протяжённого дискретного радиоисточника, причём измеряемые комплексные амплитуды этих спектральных компонент с учётом [19] равны

$$F_{\text{изм}}(d_{1,2}/\lambda) \simeq \exp(-\overline{s_3^2}(t)/2) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} J_0(\theta') \exp\big[\mp ik\,(h \mp d_{1,2}\theta')\big]\,\mathrm{d}\theta', \tag{16}$$

где $\overline{s_3^2}(t)$ — средний квадрат фазовых флуктуаций радиоизлучения при его распространении в ионосфере «над» наземным пунктом приёма, который определяется на интервале T быстрых флуктуаций принимаемого радиоизлучения; $J_0(\theta)$ — угловое распределение радиояркости источника.

Учитывая соотношение (16) и то обстоятельство, что $\overline{s_3^2}(t)$ меняется с течением времени, для заданной конфигурации антенн с одинаковыми расстояниями d_1 и d_2 между космическими и наземной антеннами на разнесённых во времени интервалах наблюдений T_1 и T_2 существуют две пары измеренных амплитуд спектральных компонент $F_{\text{изм}}(d_{1,2}/\lambda)$ с двумя разными неизвестными амплитудными

коэффициентами (когерентными составляющими рассеянных коротковолновых сигналов в ионосфере) $\bar{E}_{1,2} = \exp(-\overline{s^2_{3(1,2)}}/2)$ и двумя различными значениями квадратурных компонент

$$F_{\text{ист}}(d_{1,2}/\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} J_0(\theta') \left\{ \begin{array}{c} \cos(kd_{1,2}\theta') \\ \sin(kd_{1,2}\theta') \end{array} \right\} \mathrm{d}\theta'$$

истинных амплитуд спектрального представления неизвестного распределения радиояркости, отвечающих спектральным гармоникам d_1/λ и d_2/λ. Поэтому в такой простейшей системе апертурного синтеза наземно-космического базирования искомые текущие значения спектральных амплитуд $F_{\text{ист}}(d_{1,2}(t)/\lambda)$ могут быть определены, и, таким образом, будет восстановлено истинное распределение радиояркости источника в декаметровом диапазоне длин волн.

Другими словами, простейшие системы декаметровой радиоинтерферометрии наземно-космического базирования могут быть использованы для определения координат точечного источника (или верхней границы углового размера протяжённого источника) и для исследования распределения радиояркости протяжённого космического объекта в условиях как спокойной, так и возмущённой ионосферы.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выше были рассмотрены некоторые аспекты интерферометрических наблюдений дискретных космических радиоисточников в декаметровом диапазоне длин волн с учётом ионосферного рассеяния радиоволн.

Получены общие выражения для автокорреляционной функции интенсивности и спектра мерцаний точечного источника в схеме аддитивного двухэлементного наземного интерферометра с малой и сверхдлинной базами.

Показано, что в наземных интерферометрических наблюдениях космических объектов спектр флуктуаций интенсивности коротковолнового сигнала, регистрируемого отдельными элементами интерферометра, переносится из области нулевых спектральных частот в окрестность доплеровской частоты (обычно порядка $1 \div 2$ Гц), где спектральные компоненты ионосферных мерцаний существенно подавлены. При этом выигрыш в отношении сигнал—шум по сравнению со случаем приёма на одиночную антенну в условиях развитых ионосферных мерцаний может достигать десятков децибел. Учёт этого обстоятельства открывает возможность для эффективного применения модифицированного метода мерцаний [18] в интерферометрических исследованиях угловой структуры низкочастотного радиоизлучения внеземных радиоисточников.

Установлено, что декаметровые радиоинтерферометрические системы наземно-космического базирования могут быть успешно использованы для исследования распределения радиояркости протяжённых космических объектов как в спокойных, так и в возмущённых геофизических условиях.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 99–02–17285) и ИНТАС (проект № 97–1964).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Low Frequency Astrophysics from Space. / Ed. by N. E. Kassim, K. W. Weiler. Berlin: Springer Verlag, 1990. 280 p.

2. The Universe at Low Radio Frequencies. IAU Symposium 199. Nov. 30-Dec. 4, 1999. Pune, India. Book of Abstracts.
3. Ellis G. R. A., Mendillo M. // Austr. J. Phys. 1987. V. 40. P. 705.
4. Konovalenko A. A. // Radio Recombination Lines: 25 Years of Investigations. / Ed. by M. A. Gordon, R. L. Sorochenko. Dordrecht: Kluwer, 1990. P. 175.
5. Токарев Ю. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1996. Т. 39, № 8. С. 945.
6. Braude S. Ya. et al. // Astrophys. Sci. 1994. V. 213. P. 1.
7. Lecacheux A. et al. // Astron. Astrophys. 1991. V. 251. P. 339.
8. Erickson W. C. et al. // Radio Sci. 1988. V. 23, No. 3. P. 273.
9. Алексеев В. А., Антонец М. А., Виняйкин Е. Н. и др. // Изв. вузов. Радиофизика. 1973. Т. 16, № 9. С. 1307.
10. Алексеев В. А., Антонец М. А., Брауде С. Я. и др. // Изв. вузов. Радиофизика. 1973. Т. 16, № 9. С. 1318.
11. Bovkoon V. P., Braude S. Ya., Megn A. V. // Astrophys. Space Sci. 1982. V. 81. P. 221.
12. Megn A. V. et al. // Astrophys. Sci. 1993. V. 201. P. 79.
13. Рытов С. М. Введение в статистическую радиофизику. Ч. I. М.: Наука, 1976.
14. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. Н. Введение в статистическую радиофизику. Ч. II. М.: Наука, 1978.
15. Гершман Б. Н., Ерухимов Л. М., Яшин Ю. Я. Волновые явления в ионосфере и космической плазме. М.: Наука, 1984.
16. Афраймович Э. Л. Интерференционные методы радиозондирования ионосферы. М.: Наука, 1982.
17. Алимов В. А., Рахлин А. В., Выборнов Ф. Н. // Изв. вузов. Радиофизика. 1997. Т. 40, № 11. С. 1 323.
18. Алимов В. А., Рахлин А. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 2000. Т. 43, № 2. С. 95.
19. Кисляков А. Г., Разин В. А., Цейтлин Н. М. Введение в радиоастрономию. Ч. II. М.: Наука, 1996.

Научно-исследовательский
радиофизический институт,
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию
18 апреля 2000 г.

EFFECTS OF IONOSPHERIC RADIOWAVE SCATTERING IN THE DECAMETER INTERFEROMETRY

V. A. Alimov and Yu. V. Tokarev

We consider some theoretical issues concerning the diffraction of radio waves in a randomly irregular ionosphere with application to the problems of long-wavelength interferometry of cosmic objects. The statistical characteristics of intensity fluctuations of the decameter radio emission from discrete sources in the case of ground-based observations by two-element interferometers with very long and small baselines are analyzed. The analytical expressions are obtained for the autocorrelation function of the radiation intensity and for the scintillation spectrum of a point source in the limiting cases of large and small phase increments in the irregular ionospheric plasma. We find that in the case of the radio interferometric reception, the scintillation spectrum corresponding to observations of a source by single antenna is transferred from the zero-frequency region to the region of the Doppler frequency of the interferometer. It is shown that decameter ground-based and space-borne radio interferometers can be used to study the angular distribution of the radio brightness of cosmic sources under the conditions of both quiet and disturbed ionosphere.

УДК 533.9

МЕХАНИЗМЫ ФОРМИРОВАНИЯ СПЕКТРА ПУЛЬСАЦИЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ ПРИЗЕМНОЙ АТМОСФЕРЫ

С. В. Анисимов [1], *Е. А. Мареев* [2], *Н. М. Шихова* [1], *Э. М. Дмитриев* [1]

Приведены результаты детальных измерений спектра короткопериодных ($f \simeq 0{,}001 \div 1$ Гц) пульсаций электрического поля приземной атмосферы в условиях хорошей погоды и в тумане. Показано, что пульсации электрического поля в диапазоне частот $10^{-2} \div 10^{-1}$ Гц имеют степенной спектр как в условиях хорошей погоды, так и в условиях тумана. Показатель спектра меняется от $-1{,}23$ до $-3{,}36$ в зависимости от условий эксперимента, однако наиболее вероятные значения показателя находятся в интервале от $-2{,}25$ до $-3{,}0$. Спектр имеет больший наклон для длительных (порядка нескольких часов) временных интервалов. Изучена взаимосвязь спектральных характеристик с формированием аэроэлектрических структур (АЭЛС). Полученное для структурированных спектров распределение является бимодальным: оно имеет два максимума — при показателях от $-2{,}75$ до $-3{,}0$ и от $-2{,}25$ до $-2{,}5$. Распределение неструктурированных спектров является асимметричным с явно выраженным максимумом, лежащим в области жёстких спектров с показателями от $-2{,}5$ до $-3{,}3$. В тумане интенсивность пульсаций электрического поля увеличивается более чем на порядок, при этом показатели спектра в большинстве наблюдаемых событий существенно не отличаются от соответствующих показателей в условиях хорошей погоды. Дан анализ механизмов формирования спектров пульсаций электрического поля в их связи со спектрами пульсаций плотности электрического заряда с учётом турбулентности нейтрального газа и наличия АЭЛС. Указана принципиальная роль нелокальности связи напряжённости электрического поля и плотности объёмного заряда в условиях пространственно-неоднородной турбулентности. Решены модельные задачи о спектре флуктуаций электрического поля, генерируемых однородной и «структурированной» турбулентностью при наличии флуктуаций плотности заряда, рассматриваемых как пассивная примесь.

ВВЕДЕНИЕ

Атмосфера приземного слоя представляет собой слабоионизованную турбулентную среду в квазистационарном электрическом поле Земли. Известно, что в условиях хорошей погоды динамика электрического состояния приземного слоя проявляется в пульсациях электрического поля и тока с характерными временами, не превышающими постоянную времени приземной атмосферы. Обычно их называют короткопериодными, подчёркивая тем самым отличие от суточных, сезонных и других более медленных вариаций атмосферных электрических параметров [1]. Изучение короткопериодных ($f \simeq 0{,}001 \div 1$ Гц) пульсаций электрического поля стало к настоящему времени важным разделом электродинамики атмосферы. Интерес к короткопериодным пульсациям обусловлен, с одной стороны, изучением электрических свойств атмосферы как слабопроводящей среды при различных метеорологических, естественных геофизических и антропогенных условиях, а с другой — поиском взаимосвязи глобальных и локальных явлений атмосферного электричества [2].

Одной из ключевых задач изучения аэроэлектрических пульсаций является анализ их спектральных характеристик. Экспериментальные исследования короткопериодных пульсаций электрического поля, плотности заряда и тока, выполненные в работах [2–12], и соответствующие теоретические оценки [7,10–12] указывали на их связь с турбулентным перемешиванием заряженных частиц и дрейфом объёмных зарядов в приземном слое. С другой стороны, экспериментально установлено, что в ряде случаев флуктуации тока обусловлены током смещения, т. е. существует однозначная связь между спектрами поля и тока в области достаточно больших масштабов (т. е. низких частот), описываемая соотношением $j_z \propto \partial E/\partial t$ [9]. Всё это обусловило поиск универсальных закономерностей поведения

спектров флуктуаций поля, тока и плотности заряда, подобных колмогоровским спектрам флуктуаций температуры и скорости ветра в турбулентной атмосфере.

К настоящему времени опубликованы результаты ряда экспериментальных работ по этому вопросу, причём наибольшее внимание уделялось определению показателей спектров флуктуаций электрического поля и их возможной связи с подвижностью зарядов в атмосфере. Так, в работе [6] указывалось, что спектр флуктуаций вертикальной компоненты поля в диапазоне частот 0,004÷0,06 Гц спадает как $f^{-2,2}$ (в отдельных экспериментах показатель спектра изменялся от $-2,4$ до $-2,0$). В работе [8] приведены спектры флуктуаций плотности электрического заряда, которые варьировались от $-7/3$ до $-5/3$ при наземных измерениях и от $-9/3$ до $-8/3$ при измерениях над морем при очень низких концентрациях ядер Айткена (наличие последних приводит к уменьшению концентрации лёгких ионов и проводимости воздуха). В недавней работе [13] утверждается, что показатель спектра флуктуаций в диапазоне от 0,016 до 0,3 Гц меняется от $-1,1$ (для условий, характеризующихся высоким содержанием аэрозолей) до $-2,3$ (в случае низкого содержания аэрозолей) без детального рассмотрения методики эксперимента и упоминания о длительности анализируемых временных реализаций.

Однако следует подчеркнуть, что приводимые в литературе результаты для показателей спектров флуктуаций электрического поля основаны на эпизодических измерениях и носят весьма фрагментарный характер. Так, интервал времени наблюдений в работе [8] составлял всего несколько часов (с продолжительностью каждой реализации 30 минут), что является крайне недостаточным для получения статистически обоснованных выводов. В работе [6] приводятся данные двенадцати часовых реализаций. В работах [10, 11] приведены спектры, полученные с помощью длительных реализаций — от 4 до 14 часов [10] и около суток [11]. Показано, что средний показатель спектра близок к $-10/3$.

Отмеченная выше вариабельность спектров электрического поля при отсутствии чёткой привязки к метеорологическим условиям и длительности реализаций не давала возможности установить универсальные законы поведения спектра электрического поля и сделать обоснованные выводы относительно механизмов его формирования в тех или иных условиях. Кроме того, установленный в работах [11, 14, 15] факт формирования аэроэлектрических структур (АЭЛС), обычно сопровождающих периоды наиболее интенсивной турбулентности в атмосфере (генерирующей, в свою очередь, короткопериодные пульсации электрического поля), указывает на необходимость изучения взаимосвязи спектральных характеристик электрического поля и АЭЛС.

В настоящей работе приведены результаты детальных измерений спектра пульсаций электрического поля в условиях хорошей погоды и в тумане. Дан развёрнутый анализ механизмов формирования спектров пульсаций электрического поля и их связи со спектрами пульсаций плотности электрического заряда с учётом турбулентности нейтрального газа и наличия АЭЛС. Рассмотрены модельные задачи о роли плотности заряда как пассивной примеси в однородной турбулентности и о спектре флуктуаций поля, порождаемых «структурированной» турбулентностью.

1. МЕТОДИКА И РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТА

Электрическое поле атмосферы является чрезвычайно изменчивым параметром. При средних значениях у поверхности Земли $100 \div 150$ В/м напряжённость вертикальной компоненты аэроэлектрического поля достигает нескольких киловольт на метр при осадках, позёмках, грозовой облачности и туманах. Поэтому при экспериментальных исследованиях атмосферного электричества вводится понятие условий хорошей погоды, соответствующих следующим критериям: отсутствие грозы и всякого рода осадков, инея, тумана, измороси, сильной и умеренной дымки (видимость более 4 км), нижней облачности; верхняя облачность не более 0,3 неба; скорость ветра не более 6 м/с. Вертикальный градиент потенциала положителен и не превышает 500 В/м. В условиях хорошей погоды изменения

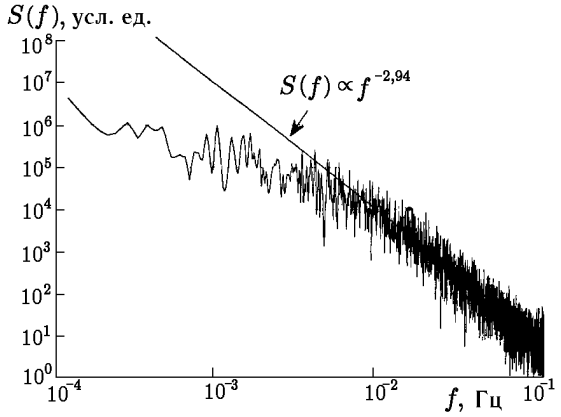

Рис. 1. Спектр пульсаций электрического поля приземной атмосферы по данным обсерватории «Борок» от 22 июля 1999 г., 10:02–21:50 LT

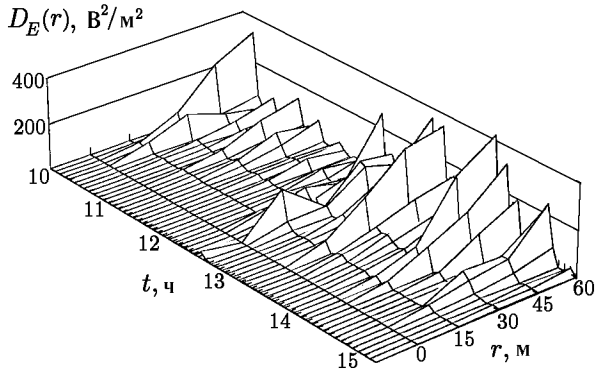

Рис. 2. Аэроэлектрические структуры приземной атмосферы, наблюдавшиеся в обсерватории «Борок» от 27 июля 1999 г. Расстояние между датчиками в линии составляет 15 м

электрического поля относительно среднего значения могут составлять от 1 до 50 % в зависимости от частоты. К примеру, унитарная вариация электрического поля, наблюдаемая в глобальном масштабе, обычно сопровождается ростом постоянной составляющей напряжённости поля на 20 % около 20:00 UT. Существенная часть описываемых ниже экспериментальных результатов соответствует условиям хорошей погоды, причём отбор данных для дальнейшей статистической обработки удовлетворял жёсткому ограничению $V < 2$ м/с на скорость ветра.

Атмосферные электрические наблюдения проводились в Геофизической обсерватории «Борок» [58,03° С. Ш.; 38,97° В. Д.] в условиях, характеризующихся отсутствием промышленных загрязнений и низким уровнем электромагнитных помех. Время проведения эксперимента — май–сентябрь 1999 г. Эксперимент заключался в синхронном измерении аэроэлектрического поля в пяти точках, расположенных вдоль оси север—юг через равные расстояния в 15 м. На втором этапе эксперимента на отрезке длиной 450 м было установлено 9 датчиков. Высота установки датчиков составляла 1,5 м во всех опытах. В качестве датчика градиента потенциала использовался электростатический флюксметр типа “field mill", специально разработанный для проведения длительных прецизионных измерений в полевых условиях натурного эксперимента. Методика эксперимента позволяла проводить регулярные поверки измерительного канала и получать цифровые амплитудно-временные реализации, калиброванные измеряемым параметром. Пороговая чувствительность датчика составляла 0,1 В/м. В эксперименте регистрировались как постоянная составляющая, так и короткопериодные пульсации атмосферного электрического поля. Полоса измеряемых частот составляла $f = 0 \div 5$ Гц. Каждый измерительный канал содержал фильтры низких частот с идентичными амплитудными и фазовыми характеристиками. Тактовая частота цифровой регистрации составляла 10 Гц.

Обработка результатов эксперимента включала вычисление спектров пульсаций электрического поля по временны́м реализациям длительностью от десятков минут до суток. Характерный пример спектра аэроэлектрических пульсаций, вычисленный за длительный временной промежуток, приведён на рис. 1. В диапазоне частот $10^{-2} \div 10^{-1}$ Гц спектральная плотность с высокой точностью аппроксимируется степенной функцией $S(f) \propto f^{-2,94}$. В области частот $10^{-4} \div 10^{-2}$ Гц спектр характеризуется наличием низкочастотных вариаций, приводящих в различных реализациях к изменению показателя, отклонению от степенного закона спадания и насыщению спектра. Анализ указанных особенностей

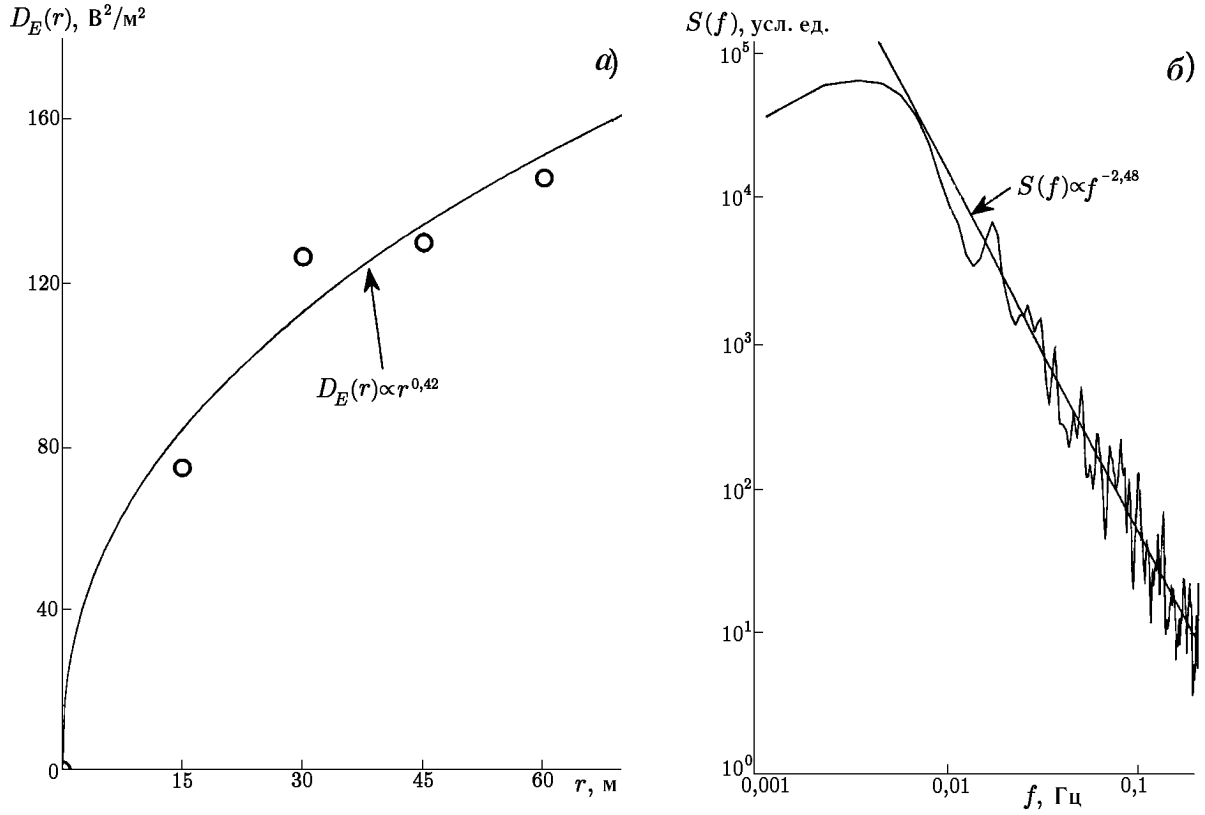

Рис. 3. Структурная функция (*а*) и соответствующий спектр пульсаций электрического поля (*б*) приземной атмосферы для структурированных пульсаций по данным обсерватории «Борок» от 26 июля 1999 г. 19:23–19:38 LT

даёт богатую информацию о длиннопериодных аэроэлектрических процессах и их взаимосвязи с состоянием среды. Исследованию закономерностей низкочастотной части спектра будет посвящена отдельная работа.

Одной из задач эксперимента являлось изучение взаимосвязи спектральных характеристик с формированием АЭЛС. Для этого находилась последовательность структурных функций $D_E(r)$, где r — расстояние вдоль линии датчиков, вычисляемых за пятиминутные интервалы в течение каждой суточной реализации (рис. 2), т. е. применялся метод структурно-временного анализа, предложенный в работе [16]. Всего на первом этапе обработки было проанализировано около четырёх месяцев амплитудно-временных реализаций пульсаций электрического поля с июня по сентябрь 1999 г. Методика обработки включала выделение временных интервалов пульсаций, длительность которых определялась временем существования АЭЛС и составляла от 15 до 20 минут (рис. 2). Аэроэлектрические пульсации, сопровождающие АЭЛС, и соответствующие им спектры будем называть в дальнейшем структурированными.

Анализ поведения структурно-временных профилей показывает, что наличие АЭЛС перемежается временными интервалами неструктурированных пульсаций, амплитуды которых и, следовательно, их энергия, сравнительно малы. Спектры таких пульсаций будем называть (несколько условно) неструктурированными. На рис. 3 приведён характерный пример структурной функции (рис. 3*а*) и соответствующего ей структурированного спектра (рис. 3*б*). На рис. 4 показан характерный пример неструктурированного спектра.

Для выявления статистических закономерностей поведения показателей структурированных и неструктурированных спектров было проанализировано более 60 реализаций. На рис. 5 приведе-

ны границы аппроксимаций и типичные примеры структурированных (рис. 5*а*) и неструктурированных (рис. 5*б*) спектров. Для АЭЛС показатели спектра лежат в интервале от −3,36 до −2,03. Для неструктурированного спектра интервал показателей составляет от −2,89 до −1,23. Полученные результаты дают возможность построить статистически значимые распределения числа реализаций по показателям спектра для структурированных (рис. 6*а*) и неструктурированных (рис. 6*б*) пульсаций. Распределения построены для 33 структурированных и 25 неструктурированных реализаций. Полученное для структурированных спектров распределение является бимодальным: оно имеет два максимума — в области показателей от −3,0 до −2,75 и в области от −2,5 до −2,25. Распределение неструктурированных спектров является асимметричным с явно выраженным максимумом, относящимся к интервалу жёстких спектров с показателями от −3,0 до −2,5.

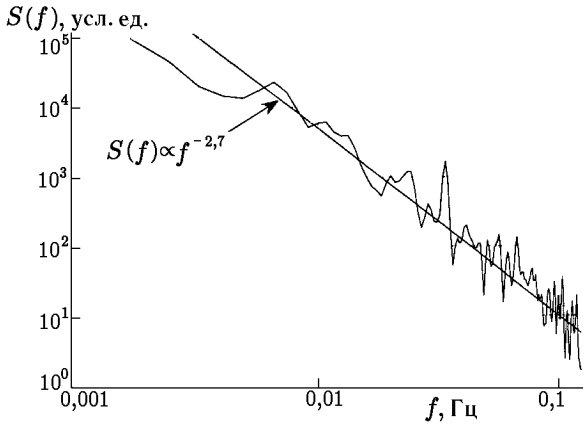

Рис. 4. Спектр неструктурированных пульсаций атмосферного электрического поля по данным обсерватории «Борок» от 27 июля 1999 г., 11:50–12:10 LT

При анализе средних показателей структурированного ($\bar{x} = -2{,}64 \pm 0{,}06$) и неструктурированного ($\bar{x} = -2{,}44 \pm 0{,}09$) спектров выявлено, что они не различаются при уровне значимости $p < 0{,}1$. Однако изменчивость показателя неструктурированного спектра выше, чем структурированного. Размах колебаний (модуль разности наибольшего и наименьшего значения) показателя степени неструктурированного спектра (1,66) несколько превосходит аналогичную величину для структурированных спектров (1,33). Для относительных индексов изменчивости это соотношение более существенно: коэффициенты вариации показателей степени спектра в структурах и на неструктурированных участках равны соответственно $12{,}3 \pm 1{,}5$ % и $17{,}4 \pm 2{,}5$ %. Эти величины достоверно различаются при уровне значимости $p < 0{,}05$.

Приведённые выше экспериментальные данные относятся к условиям хорошей погоды, т. е. получены в отсутствие осадков, низкой облачности и тумана. Известно, что средние значения электрических параметров нижней атмосферы существенно изменяются в условиях «нарушенной» погоды. Представляет интерес изучение динамики аэроэлектрического состояния при подобных изменениях. Прекрасной естественной лабораторией для такого изучения является туман.

На рис. 7 приведён пример структурно-временного профиля динамики электрического поля в условиях тумана. Приведённый профиль получен как временная последовательность структурных функций, вычисляемых усреднением на пятиминутных интервалах. Вычисления выполнялись по результатам синхронных наблюдений электрического поля в девяти точках, разнесённых на расстояния от 15 до 450 метров. Видно, что энергия аэроэлектрических пульсаций в условиях тумана более чем на порядок превышает энергию пульсаций электрического поля хорошей погоды. На рис. 8 показан спектр пульсаций поля, полученный усреднением за весь временной интервал, приведённый на рис. 7. Спектр пульсаций в области частот $5 \cdot 10^{-3} \div 10^{-1}$ Гц носит степенной характер с показателем −2,68. Статистический анализ спектров пульсаций в условиях тумана, однако, выходит за рамки настоящей работы. Отметим, что на рис. 7 точки на оси r соответствуют расположению датчиков электрического поля. Начиная с расстояния 92 м масштаб оси r уменьшается.

Суммируя полученные экспериментальные результаты, можно сделать следующие основные выводы:

1) Пульсации электрического поля приземной атмосферы в диапазоне частот $10^{-2} \div 10^{-1}$ Гц имеют степенные спектры как в условиях хорошей погоды, так и в условиях тумана. Показатель степени на-

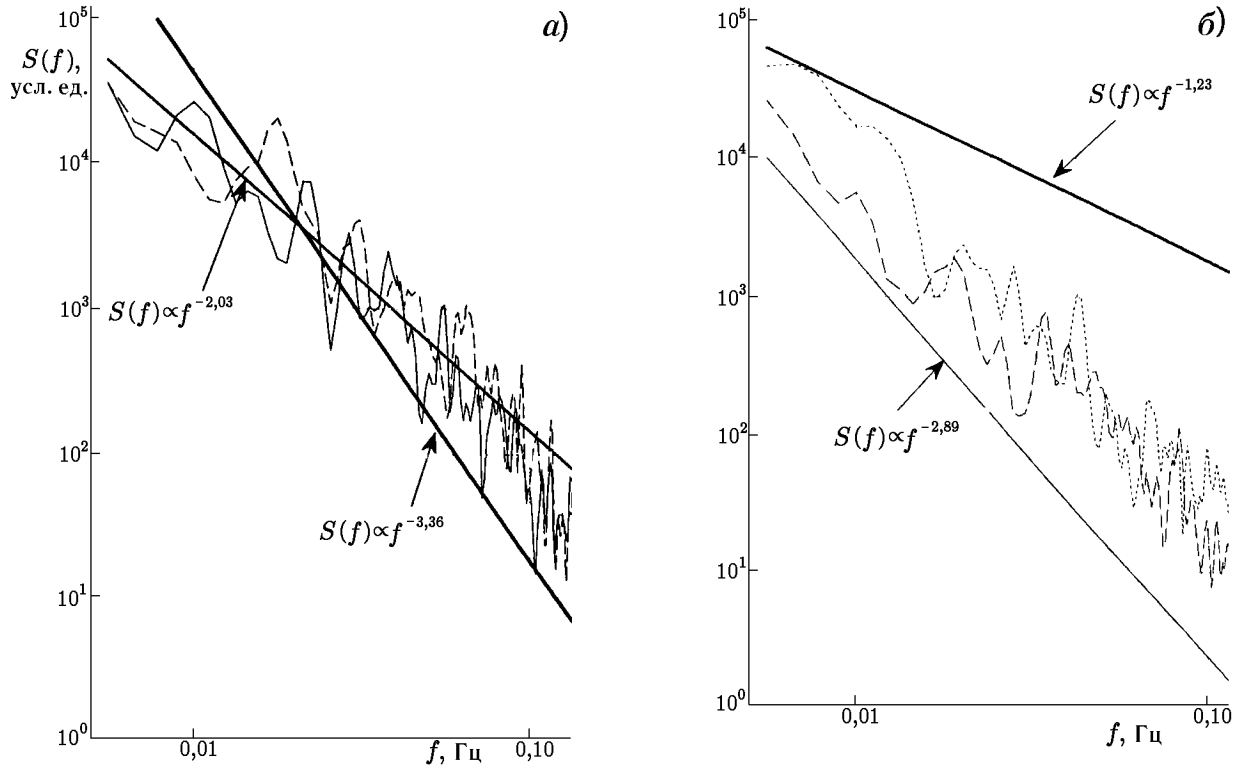

Рис. 5. Границы аппроксимаций спектров для структурированных (*а*) и неструктурированных (*б*) пульсаций электрического поля приземной атмосферы

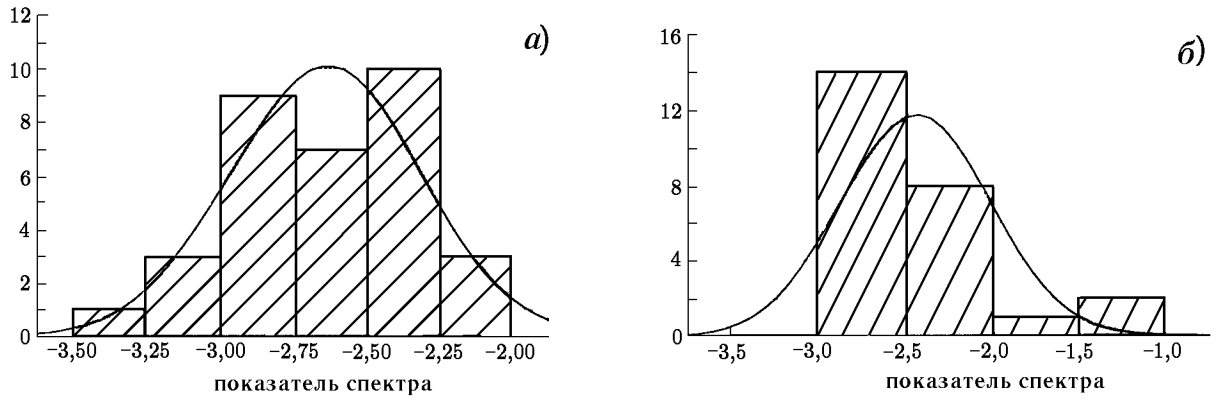

Рис. 6. Распределения показателей спектров структурированных (*а*) и неструктурированных (*б*) пульсаций электрического поля приземной атмосферы. Обозначенная на рисунках кривая соответствует нормальному распределению

клона спектра меняется от −3,36 до −1,23 в зависимости от условий эксперимента, однако наиболее вероятные значения показателя находятся в интервале от −3,0 до −2,25. Спектр имеет больший наклон для длительных (порядка нескольких часов) временных интервалов.

2) Полученное для структурированных спектров распределение является бимодальным: оно имеет два максимума — в области показателей от −3,0 до −2,75 и в области от −2,5 до −2,25. Распределение неструктурированных спектров является асимметричным с явно выраженным максимумом, относящимся к интервалу жёстких спектров с показателями наклона от −3,0 до −2,5.

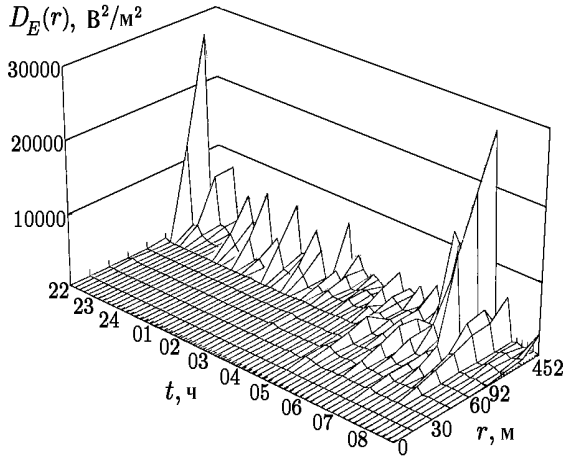

Рис. 7. Аэроэлектрические структуры электрического поля приземной атмосферы в условиях тумана по данным обсерватории «Борок» от 18–19 сентября 1999 г.

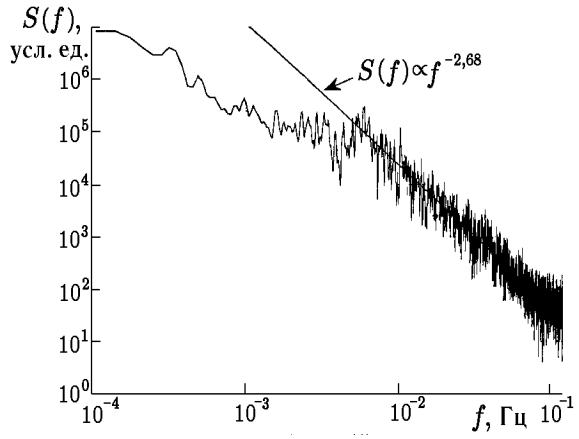

Рис. 8. Спектр пульсаций электрического поля аэроэлектрических структур, изображённых на рис. 7

3) В условиях тумана интенсивность пульсаций электрического поля увеличивается более чем на порядок. При этом показатели спектра в большинстве наблюдаемых событий не существенно отличаются от соответствующих показателей в условиях хорошей погоды.

2. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Обобщая результаты последних экспериментальных исследований и разработанных на их основе теоретических моделей, можно охарактеризовать динамику приземного слоя атмосферы в условиях отсутствия антропогенных загрязнений следующим образом. Электрическое состояние приземного слоя формируется электрическими ионами разных знаков, образованными вследствие ионизации атмосферы космическими лучами и естественной радиоактивностью Земли. Заметим, что приземный слой является тонким пограничным участком атмосферы, в котором существуют вертикальное электрическое поле и ток глобальной цепи. Ранее неоднократно отмечалось существование АЭЛС, природа которых тесно связана с атмосферной турбулентностью [11, 14, 15]. При этом установлено, что время жизни таких структур превышает постоянную времени свободной приземной атмосферы. АЭЛС, состоящие из набора турбулентных вихрей с захваченными электрическими зарядами, имеют горизонтальные размеры от сотен метров до километров (рис. 9). Вертикальный размер таких структур определяется обычно высотой приземного слоя, а также масштабами изменения электродинамических параметров. Изначально сформированные за счёт захвата положительных и отрицательных ионов (и аэрозолей) мелкомасштабной механической турбулентностью, АЭЛС перемещаются вдоль земной поверхности под действием ветра. Появление вертикальных конвективных потоков приводит к вертикальному перемещению и выносу АЭЛС за пределы приземного электрического слоя. В силу достаточно большого времени жизни удалённая на некоторую высоту АЭЛС является источником пульсаций электрического поля, наблюдаемых на поверхности Земли. Наряду с приземными и удалёнными по высоте относительно точки наблюдения структурами (рис. 9) перенос положительных и отрицательных объёмных зарядов также формирует соответствующий отклик в вариациях электрического поля, фиксируемых прибором на поверхности Земли. В результате, как видно из результатов предыдущего раздела, пульсации электрического поля в приземном слое атмосферы характеризуются колмогоровскими степенными спектрами.

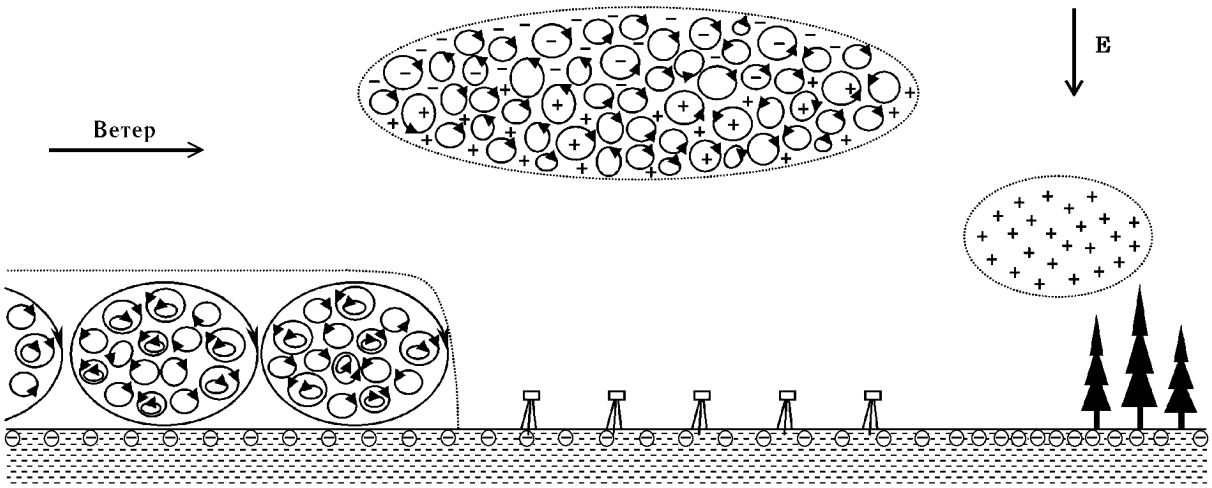

Рис. 9. Турбулентность и аэроэлектрические структуры приземной атмосферы

Говоря о предпринятых ранее попытках теоретического рассмотрения спектров пульсаций поля, следует отметить прежде всего работу Андерсона [7], где указано, что в случае, когда заряд сосредоточен на массивных частицах с малой подвижностью (ядра Айткена, аэрозоли), плотность заряда ρ является пассивной консервативной примесью, и её одномерный спектр в инерционном интервале (для изотропной турбулентности) $S_\rho \sim k^{-5/3}$, где k — волновое число. В случае «замороженной» турбулентности это соответствует частотному спектру $S_\rho(\omega) \sim \omega^{-5/3}$. В другом предельном случае, когда заряд переносится только лёгкими ионами, спектр плотности заряда, согласно [7], спадает значительно быстрее: $S_\rho \sim k^{-11/3}$. Последний вывод сделан на основе приведённого в работе [7] нелинейного уравнения Бюргерса для электрического поля и представляется некорректным [17]. Фактически, Андерсон связывал подавление мелкомасштабных гармоник с «формированием пилообразных волновых форм» электрического поля, что вряд ли реализуется при наблюдаемых полях в условиях хорошей погоды.

В работе [12] задача о спектре флуктуаций ρ и E рассмотрена по аналогии с вычислением спектра флуктуаций температуры в гидродинамике, исходя из уравнения непрерывности для ρ и уравнения Пуассона, причём движение газа считалось несжимаемым. Был получен одномерный колмогоровский спектр для плотности заряда: $S_\rho \sim k^{-5/3} \exp[3/(2\gamma_1 (kL_\lambda)^{5/3})]$, где γ_1 — безразмерный коэффициент, $L_\lambda = \bar{\varepsilon}^{-1/2} (4\pi\sigma)^{-3/2}$ — характерный масштаб, связанный с диссипацией заряда, $\bar{\varepsilon}$ — поток энергии в инерционном интервале, σ — проводимость атмосферы. Таким образом, в [12] впервые подчёркнуто существование экспоненциального множителя в спектре пульсаций поля, обусловленных релаксацией заряда. При этом спектр флуктуаций напряжённости электрического поля спадает более быстро в соответствии с уравнением Пуассона: $S_E(k) \sim k^{-2} S_\rho(k)$. Следует заметить, однако, что развитая в [12] модель основывается на уравнениях одножидкостной электрогидродинамики, что принципиально не позволяет учесть различия в динамике поведения положительных и отрицательных носителей заряда. Поэтому полученные в [12] спектры описывают просто дробление масштабов неоднородностей плотности заряда, источник которых считается заданным в энергонесущей области масштабов.

В работах [10, 11] детально развит наиболее последовательный подход к вычислению спектров и структурных функций измеряемых флуктуирующих величин на фоне заданной газодинамической турбулентности. Кроме двухжидкостной природы носителей заряда и тока, в этих расчётах учитываются точные выражения для корреляторов аэродинамических полей, что (с использованием гипотезы локально замороженной турбулентности) позволяет не только определить законы спадания спектров и роста структурных функций в инерционном интервале, но и оценить средние амплитуды возмущений [10]. Полученные здесь уравнения флуктуации концентрации ионов включают в качестве источни-

ков не только пульсации температуры (влияющие и на подвижность ионов, и на другие кинетические коэффициенты, в том числе на коэффициент рекомбинации), но и пульсации скорости среды, приводящие при наличии крупномасштабного неоднородного поля к перемешиванию электрических зарядов, т. е. к мелкомасштабным пульсациям. Показано, в частности, что при наличии только лёгких ионов турбулентные флуктуации температуры газа, обуславливая флуктуации подвижности ионов, приводят во внешнем электрическом поле к флуктуациям плотности заряда и электрического поля. В данной модели одномерный спектр флуктуирующей вертикальной компоненты электрического поля оказывается пропорциональным $\omega^{-8/3}$. Указанный эффект формирования колмогоровского спектра заряда и поля имеет место и при равной нулю невозмущённой плотности заряда, т. е. пульсации заряда генерируются аэродинамической турбулентностью во всём инерционном интервале.

Для интерпретации представленных в настоящей работе результатов необходимо подчеркнуть, что в отличие от обсуждаемых в традиционных теориях атмосферной турбулентности пульсаций скорости и температуры газа напряжённость электрического поля является нелокальной величиной, формируемой (в квазистатике) неоднородным распределением объёмных зарядов по области, окружающей точку наблюдения. Поэтому использование соотношения $S_E = 16\pi^2 k^{-2} S_\rho$, следующего из уравнения Пуассона в приближении однородности турбулентности, является в общем случае некорректным. Вышеприведённый анализ структурированных и неструктурированных спектров ярко демонстрирует неоднородность пространственного распределения объёмных зарядов и турбулентности. Естественно предположить, что структурированные пульсации обусловлены прижатыми к земле (рис. 9) или пролетающими на относительно небольшой высоте (меньше или порядка пространственного масштаба АЭЛС) структурами.

Для объяснения экспериментальных результатов ниже будет развита теоретическая модель, учитывающая вклад турбулентного перемешивания заряженных частиц в потоке воздуха и наличия АЭЛС в пограничном слое атмосферы. Основное внимание обращено на обоснование не обсуждавшегося ранее факта отличия спектров поля однородной и удалённой от точки наблюдения (захваченной структурой) турбулентности при совпадающих спектрах флуктуаций плотности заряда. Последняя для простоты считается пассивной примесью, что, по оценкам, должно всегда выполняться для тумана и, как правило, для условий хорошей погоды при измерениях над поверхностью Земли.

3. МОДЕЛИ ФОРМИРОВАНИЯ СПЕКТРОВ

Для количественной оценки представленных выше эффектов рассмотрим следующую модельную задачу. Пусть заданы поток турбулентного газа, движущегося со скоростью V_0 в приземном слое, а также структура, движущаяся на высоте z_0 со скоростью V (см. рис. 9). Структура описывается в общем случае характерным размером $a < z_0$, монопольным зарядом Q, двумя компонентами дипольного момента (горизонтальной P_x и вертикальной P_z) и заполнена турбулентным газом. Вертикальная компонента электрического поля в точке $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ есть сумма полей E_{z1} структуры и E_{z0} флуктуаций заряда, порождаемых квазиоднородной турбулентностью в приземном слое:

$$E_z = E_{z0} + E_{z1}.$$

Процесс $E_{z0}(\tau)$ можно рассматривать как стационарный, $E_{z1}(\tau)$ — в общем случае как нестационарный (учитывая условия эксперимента и методику статистической обработки). Будем считать, что эти процессы не коррелируют между собой: $\langle E_{z0}(\tau) E_{z1}^*(\tau)\rangle = 0$, т. е. нужно найти спектры того и другого процессов.

3.1. Плотность заряда как пассивная примесь в однородной турбулентности

В простейшем случае для E_{z0} можно считать, что плотность заряда является пассивной примесью. Тогда в инерционном интервале частот структурная функция возмущений плотности заряда

$$D_\rho(r) = 2\sigma_\rho^2 \left(\frac{r}{L_0}\right)^{2/3} = C_\rho^2 r^{2/3}, \qquad l_0 \ll r \ll L_0,$$

где L_0 и l_0 — внешний и внутренний масштабы турбулентности, σ_ρ^2 — дисперсия флуктуаций плотности заряда. Для спектра возмущений плотности заряда имеем

$$S_\rho(\mathbf{k},\omega) = \Phi_\rho(\mathbf{k})\delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{V}_0),$$

где пространственная корреляционная функция имеет обычный вид: $\Phi_\rho(\mathbf{k}) = 0{,}033C_\rho^2\,(k^2+k_0^2)^{-11/6}\times$ $\times\exp(-k^2/k_{\rm m}^2)$, и турбулентность считается «замороженной». Здесь $k_0 = 2\pi/L_0$, $k_{\rm m} = 2\pi/l_0$. Спектр возмущений поля записывается в виде

$$S_E(\mathbf{k},\omega) = \left\langle |E_z|^2 \right\rangle = \frac{16\pi^2 k_z^2}{k^4}\left\langle |\rho_k|^2 \right\rangle,$$

откуда с учётом уравнения Пуассона $\mathbf{k}\mathbf{E} = 4\pi\rho_k$ получим

$$S_E(\omega) = \int S_E(\mathbf{k},\omega)\,{\rm d}\mathbf{k} = 16\pi^2 \int \frac{k_z^2\Phi_\rho(\mathbf{k})}{k^4}\delta(\omega - k_x V_0)\,{\rm d}\mathbf{k} =$$
$$= \frac{16\cdot 0{,}033\pi^3 C_\rho^2}{V_0}\int \frac{k_\perp^3\,{\rm d}k_\perp}{\left(k_\perp^2+\omega^2/V_0^2\right)^2\left(k_\perp^2+\omega^2/V_0^2+k_0^2\right)^{11/6}}\,.$$

Можно заменить ω^2/V_0^2 на $k_{\rm s}^2 = k_0^2+\omega^2/V_0^2$ в множителе $(k_\perp^2+\omega^2/V_0^2)^2$ (далее мы будем рассматривать случай $\omega \gg k_0V_0$). Кроме того, из-за эффекта отражения от идеально проводящей поверхности поле удваивается, откуда

$$S_E(\omega) = \frac{32\cdot 0{,}033\pi^3 C_\rho^2}{V_0}\int\limits_0^\infty \frac{x\,{\rm d}x}{(x+k_{\rm s}^2)^{23/6}}\,.$$

Пользуясь формулой

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}\,{\rm d}x}{(x+z)^\beta} = z^{\alpha-\beta}{\rm B}(\alpha,\beta-\alpha),$$

где ${\rm B}(\alpha,\beta)$ — бета-функция, частотный спектр возмущений поля запишем следующим образом:

$$S_E(\omega) = \frac{64\cdot 0{,}033\pi^3\sigma_\rho^2}{V_0 L_0^{2/3}}{\rm B}(2,\,11/6)\,k_{\rm s}^{-11/3}.$$

Из последней формулы очевидно, что в инерционном интервале $S_E(\omega)\propto\omega^{-11/3}$. В экспериментах близкие к указанному показатели наблюдаются как для структурированных, так и для неструктурированных спектров. Хотя случай однородной турбулентности в атмосфере встречается весьма редко [18, 19], он служит хорошим приближением для пульсаций, генерируемых приземными структурами. Как видно, данное приближение хорошо работает и при оценке показателей спектра для больших временных реализаций. По-видимому, это свидетельствует о том, что основная энергия короткопериодных пульсаций поля сосредоточена в приземных аэроэлектрических структурах.

3.2. Спектр флуктуаций поля, порождаемых структурированной турбулентностью

Исследуем теперь спектр флуктуаций поля, порождаемых структурами, которые заполнены турбулентным газом. Данный случай представляет большой практический интерес, т. к. экспериментальные данные о турбулентности пограничного слоя свидетельствуют о том, что она, как правило, является структурированной, т. е. сосредоточенной в конвективных струях, термиках и т. д. [18, 19]. С теоретической же точки зрения рассматриваемая ниже модель представляется полезной для объединения двух более частных случаев — однородной турбулентности и потока пробных структур, т. е. неоднородностей слабоионизованного газа.

Представим плотность электрического заряда АЭЛС, перемещающейся вдоль оси x со скоростью V, в виде $\rho(\mathbf{r},t)=\rho(x-Vt,y,z)$. Спектр поля, фиксируемого в точке $\mathbf{r}=0$, есть

$$\Psi_E(\tau)=\left\langle E_z(0,t+\tau)E_z^*(0,t)\right\rangle=\left\langle 4\int\frac{z_1\rho_1(\mathbf{r}_1-\mathbf{V}\,(t+\tau))}{|\mathbf{r}_1|^{3/2}}\,\mathrm{d}\mathbf{r}_1\int\frac{z_2\rho_2^*(\mathbf{r}_2-\mathbf{V}t)}{|\mathbf{r}_2|^{3/2}}\,\mathrm{d}\mathbf{r}_2\right\rangle.$$

Вводя «медленную» $\mathbf{R}=(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2)/2$ и «быструю» $\Delta\mathbf{r}=\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2$ пространственные переменные стандартным для теории атмосферной турбулентности способом [20], корреляционную функцию возмущений плотности заряда запишем как $C_\rho^2[\mathbf{R}-\mathbf{V}\,(t+\tau/2)]\Psi_\rho(\Delta\mathbf{r}-\mathbf{V}\tau)$, где множитель C_ρ^2 характеризует амплитуду возмущений и может считаться зависящим лишь от медленной переменной, фиксирующей положение АЭЛС относительно точки измерения (связь C_ρ^2 с параметрами Q, P_x, P_z определяется конкретными механизмами трансформации механической энергии турбулентности в электрическую энергию и здесь не рассматривается). В результате корреляционная функция принимает вид

$$\Psi_E(\tau)=4\iint\frac{C_\rho^2(\mathbf{R}')\Psi_\rho(\Delta\mathbf{r}-\mathbf{V}\tau)z_1z_2\,\mathrm{d}(\Delta\mathbf{r})\,\mathrm{d}\mathbf{R}'}{|\mathbf{R}'+\Delta\mathbf{r}/2+\mathbf{V}\,(t+\tau/2)|^3\,|\mathbf{R}'-\Delta\mathbf{r}/2+\mathbf{V}\,(t+\tau/2)|^3},$$

где $\mathbf{R}'=\mathbf{R}-\mathbf{V}\,(t+\tau/2)$.

Подынтегральные функции $F(\mathbf{R}',\tau)$ и $\Psi_\rho(\Delta\mathbf{r}-\mathbf{V}\tau)$, зависящие только от медленной и быстрой переменных соответственно, могут быть представлены в виде интегралов Фурье:

$$F(\mathbf{R}',\tau)=\int F(\mathbf{R}',\omega')e^{-i\omega'\tau}\,\mathrm{d}\omega',\quad \Psi_\rho(\Delta\mathbf{r}-\mathbf{V}\tau)=\iint\Phi_\rho(\mathbf{k})u(\omega''-\mathbf{kV})e^{i(\boldsymbol{\kappa},\Delta\mathbf{r})-\omega''\tau}\,\mathrm{d}\omega''\,\mathrm{d}\mathbf{k},$$

где Ψ_ρ — пространственная корреляционная функция мелкомасштабных возмущений плотности заряда внутри структуры, u — «размазанная» δ-функция для простейшего случая замороженной турбулентности. Спектр функции $\Psi_E(\tau)$ в результате принимает вид свёртки:

$$\Psi_E(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int\Psi_E(\tau)e^{i\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau=4\int F(\mathbf{R}',\omega-\Omega)\Phi_\rho(\mathbf{k})u(\Omega-\mathbf{kV})e^{i(\mathbf{k},\Delta\mathbf{r})}\,\mathrm{d}\mathbf{R}'\,\mathrm{d}\mathbf{k}\,\mathrm{d}(\Delta\mathbf{r})\,\mathrm{d}\Omega.$$

Конкретизируем вид функции $F(\mathbf{R}',\omega-\Omega)$. С учётом неравенства $|\Delta\mathbf{r}|\ll|\mathbf{R}'|$ можно написать

$$F(\mathbf{R}',\tau)\approx\frac{C_\rho^2(\mathbf{R}')z'^2}{|\mathbf{R}'+\mathbf{V}\,(t+\tau/2)|^6}=\frac{C_\rho^2(z')z'^2}{\left((x'+Vt+V\tau/2)^2+y'^2+z'^2\right)^3}.$$

Тогда для фурье-образа функции F получаем

$$F(\mathbf{R}',\omega)=\frac{C_\rho^2z'^2e^{-2i\omega(t+x'/V)}}{16Vr_\perp^5}e^{-2|\omega|r_\perp/V}\left(3+3\left|\frac{2\omega r_\perp}{V}\right|+\left|\frac{2\omega r_\perp}{V}\right|^2\right),$$

где $r_\perp = (y'^2 + z'^2)^{1/2}$.

Теперь подставим это выражение в формулу для спектра. Интегрирование по $\mathbf{R}'$ в простейшем случае можно выполнить, взяв $\mathbf{R}' = \mathbf{R}'_0(x' = 0, y' = 0, z' = z_0)$ в момент времени $t = 0$:

$$\Psi_E(\omega) \approx \frac{4C_\rho^2(z_0)z_0^2V_{\rm str}}{16Vz_0^5}\int 8\pi^3\delta_V(\mathbf{k})\Phi_\rho(\mathbf{k})u(\Omega - \mathbf{kV})F(|\omega - \Omega|\, z_0/V)\,\mathrm{d}\mathbf{k}\,\mathrm{d}\Omega.$$

Здесь

$$\delta_V(\mathbf{k}) = \frac{1}{8\pi^3}\int\limits_{V_{\rm str}} e^{i(\mathbf{k},\Delta\mathbf{r})}\,\mathrm{d}(\Delta\mathbf{r}), \quad F = e^{-2|\omega-\Omega|z_0/V}\left(3 + \frac{6z_0}{V}\,|\omega - \Omega| + \frac{4z_0^2}{V^2}\,|\omega - \Omega|^2\right),$$

$V_{\rm str}$ — объём структуры. Заметим, что $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta_V(\mathbf{k})\,\mathrm{d}\mathbf{k} = 1$, т. к. δ-функция отлична от нуля лишь в области T пространства волновых чисел с объёмом порядка $8\pi^3/V_{\rm str}$, сосредоточенной вблизи $\mathbf{k} = 0$, u — тоже «размазанная» δ-функция:

$$u(\Omega - k_xV) = \sqrt{\frac{2\pi k^2\sigma_V^2}{3}}\exp\left(-\frac{3\,(\Omega - k_xV)^2}{2k^2\sigma_V^2}\right),$$

где дисперсия скорости газа $\sigma_V \ll V_0$. В простейшем случае $u(\Omega - k_xV) = \delta(\Omega - k_xV)$ можно легко провести интегрирование по k_x:

$$\Psi_E(\omega) = \frac{2\pi^3C_\rho^2z_0^2V_{\rm str}}{V^2z_0^5}\int \delta_V(k_x = \Omega/V, k_\perp)\,\Phi_\rho(k_x = \Omega/V, k_\perp)\;\mathrm{d}k_y\,\mathrm{d}k_z\,\mathrm{d}\Omega.$$

Подчеркнём, что мы ищем спектр одной пробной структуры, т. е. описываемый процесс является нестационарным. Более общая задача о спектре потока структур, заполненных турбулентностью, будет рассмотрена отдельно.

Для Φ_ρ в случае, когда ρ — пассивная примесь, имеем

$$\Phi_\rho(\mathbf{k}) = 0{,}033\,(k^2 + k_0^2)^{-11/16}\exp(-k^2/k_{\rm m}^2).$$

Обычно $k_{\rm m} \gg k_0$, и $C_\rho^2 = 2\sigma_\rho^2L_0^{-2/3} \approx 2\sigma_\rho^2z_0^{-2/3}$. Тогда

$$\Psi_E(\omega) = \frac{4\pi^3\sigma_\rho^2V_{\rm str}}{V^2z_0^{11/3}}\int 0{,}033\delta_V(\Omega/V, k_\perp)\,(\Omega^2/V^2 + k_0^2 + k_\perp^2)^{-11/6}\,\mathrm{d}k_\perp\,\mathrm{d}\Omega.$$

Если взять для оценки $\delta_V(0) = V_{\rm str}/(8\pi^3)$, получим

$$\Psi_E(\omega) = \frac{0{,}033\sigma_\rho^2V_{\rm str}^2}{2z_0^3L_0^{2/3}V^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{k_\perp\,\mathrm{d}k_\perp}{(k_0^2 + k_\perp^2 + \Omega^2/V^2)^{11/6}}F(2\,|\omega - \Omega|\,z_0/V)\;\mathrm{d}\Omega.$$

Выполняя интегрирование по $k_\perp$, окончательно получаем

$$\Psi_E(\omega) = \frac{\sigma_\rho^2V_{\rm str}^2}{200z_0^3L_0^{2/3}V^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{F(2\,|\omega - \Omega|\,z_0/V)}{(k_0^2 + \Omega^2/V^2)^{5/6}}\,\mathrm{d}\Omega.$$

Таким образом, спектр флуктуаций поля, порождаемый АЭЛС с турбулентностью, представляет собой свёртку спектров мелкомасштабной однородной турбулентности $\Phi_\rho(\Omega/V, k_\perp)$ и единичной структуры $F(|\omega|\, z_0/V)$. Отсюда легко получить в качестве предельного случая $z_0 \gg k_0^{-1}$ спектр однородной турбулентности, захваченной отдельной структурой. Он оказывается пропорциональным $(k_0^2 + \omega^2/V^2)^{-5/6}$, т. е. в инерционном интервале спектр пропорционален $\omega^{-5/3}$ в соответствии с изложенной выше качественной картиной проявления удалённой АЭЛС.

Сравнивая полученный результат с экспериментальными данными, заметим, что рассмотренный случай удалённых АЭЛС при наблюдении на поверхности Земли не вносит существенного вклада в энергетику процесса, проявляясь в немногих неструктурированных спектрах. Однако указанные структуры, по-видимому, определяют дисперсию показателей спектров пульсаций.

Что касается флуктуаций электрического поля в условиях тумана, то этот вопрос заслуживает отдельного детального обсуждения. Здесь заметим только, что, как показывают оценки, в типичных условиях тумана присутствуют капли с достаточно широким спектром распределения по зарядам и средним зарядом $|q| \gg e$. С точки зрения генерации флуктуаций электрического поля это означает, что турбулентное перемешивание частиц с такими зарядами должно привести к существенному росту амплитуды мелкомасштабных флуктуаций. Дополнительным фактором является зависимость заряда q от высоты, которая посредством вертикальных флуктуаций скорости газа также даёт вклад в генерацию флуктуаций заряда и поля. В результате в условиях тумана вклад и АЭЛС, и мелкомасштабных турбулентных флуктуаций (как внутри структур, так и вне их) в пульсации поля возрастает (в некотором смысле область, заполненная туманом, представляет собой единую неоднородную в пространстве структуру). Поэтому существенного изменения наклона спектра (по сравнению с условиями хорошей погоды) в общем случае не происходит. Основным эффектом оказывается рост амплитуды пульсаций. В отдельных случаях, разумеется, вклад АЭЛС превалирует и определяет поведение спектра поля, по крайней мере, в области низких частот.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные экспериментальные результаты позволяют сделать следующие основные выводы.

1) Короткопериодные пульсации электрического поля приземной атмосферы в диапазоне частот $10^{-2} \div 10^{-1}$ Гц имеют степенные спектры как в условиях хорошей погоды, так и в условиях тумана. Измеренные показатели спектра меняются от $-3{,}36$ до $-1{,}23$ в зависимости от условий эксперимента. Спектр оказывается более жёстким для длительных (порядка нескольких часов) интервалов наблюдения.

2) Полученное для структурированных спектров распределение является бимодальным: оно имеет два максимума — в области показателей от $-3{,}0$ до $-2{,}75$ и в области от $-2{,}5$ до $-2{,}25$. Распределение неструктурированных спектров является асимметричным с явно выраженным максимумом, относящимся к интервалу жёстких спектров с показателями от $-3{,}0$ до $-2{,}5$.

3) В условиях тумана интенсивность пульсаций электрического поля увеличивается более чем на порядок. При этом показатели спектра в большинстве наблюдаемых событий существенно не отличаются от соответствующих показателей в условиях хорошей погоды.

Развита теоретическая модель, учитывающая турбулентное перемешивание заряженных частиц в потоке воздуха и наличие АЭЛС в пограничном слое атмосферы. Указана принципиальная роль нелокальности связи напряжённости электрического поля и объёмной плотности заряда в условиях пространственно-неоднородной турбулентности. Показано, что в инерционном интервале для однородной турбулентности с плотностью заряда как пассивной примесью спектр флуктуаций поля $S_E(\omega) \propto \omega^{-11/3}$. Близкие к указанному показатели наблюдаются как для структурированных, так и для неструктурированных спектров. Хотя случай однородной турбулентности в атмосфере встречается весь-

ма редко, он служит хорошим приближением для пульсаций, генерируемых приземными структурами. Данное приближение хорошо работает при оценке показателя спектра для больших временных реализаций. Это свидетельствует о том, что основная энергия короткопериодных пульсаций поля сосредоточена в приземных аэроэлектрических структурах. Спектр, генерируемый турбулентностью удалённой АЭЛС, оказывается пропорциональным $\omega^{-5/3}$. Сравнение с результатами экспериментов показывает, что удалённые АЭЛС при наблюдении на поверхности Земли не вносят существенного вклада в энергетику процесса, проявляясь в немногих неструктурированных спектрах. Однако указанные структуры определяют дисперсию показателей спектров пульсаций.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 00–02–17758 и 00–05–65246).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чалмерс Дж. Атмосферное электричество. Л.: Гидрометеоиздат, 1974. 420 с.
2. Whitlock W. S., Chalmers J. A. // Q. J. R. Meteorol. Soc. 1956. V. 82(353). P. 325.
3. Israel H. // Q. J. R. Meteorol. Soc. 1959. V. 89. P. 91.
4. Ogden T. L., Hutchinson W. C. A. // J. Atmos. Terr. Phys. 1970. V. 32. P. 1131.
5. Israel H. // Atmospheric Electricity. 1973. V. 2. P. 408.
6. Yerg D. G., Johnson K. R. // J. Geophys. Res. 1974. V. 79. P. 2177.
7. Anderson R. V. // Electrical processes in atmospheres / Ed. by H. Dolezalek, R. Reiter. Darmstadt: Steinkopff Verlag, 1977. P. 87.
8. Anderson R. V. // J. Geophys. Res. 1982. V. 87. P. 1216.
9. Anisimov S. V. // Proceedings of the 8th International Conference on Atmospheric Electricity, Uppsala, Sweden, 1988 / Ed. by S. Lundquist. P. 130.
10. Anisimov S. V., Mareev E. A., Trakhtengerts V. Yu. // Res. Lett. Atmos. Electr. 1990. V. 10. P. 1.
11. Anisimov S. V., Bakastov S. S., Mareev E. A. // J. Geophys. Res. 1994. V. 99. P. 10 603.
12. Морозов В. Н. // Атмосферное электричество и магнитосферные возмущения. М.: ИЗМИРАН, 1983. С. 27.
13. Barlow J. F., Harrison R. G. // Proceedings of the 11th International Conference on Atmospheric Electricity, Guntersville, Alabama, USA, 1999. / Ed. by H. J. Christian. P. 575.
14. Anisimov S. V., Mareev E. A., Bakastov S. S. // J. Geophys. Res. 1999. V. 104. P. 14 359.
15. Анисимов С. В., Мареев Е. А. // ДАН. 2000. Т. 371. С. 101.
16. Anisimov S. V., Bakastov S. S., Mareev E. A., Borovkov Yu. E. // Proceedings of the 10th International Conference on Atmospheric Electricity, Osaka, Japan, 1996. P. 544.
17. Мареев Е. А., Мареева О. В. // Геомагнетизм и аэрономия. 1999. № 6. С. 74.
18. Атмосферная турбулентность и моделирование распространения примесей / Под ред. Ф. Ньистадта, Х. Ван-Допа. Л.: Гидрометеоиздат, 1985. 352 с.
19. Винниченко Н. К., Пинус Н. З., Шметер С. М., Шур Г. Н. Турбулентность в свободной атмосфере. Л.: Гидрометеоиздат, 1976. 288 с.
20. Татарский В. И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. М.: Наука, 1967. 548 с.

[1] Геофизическая обсерватория «Борок» ОИФЗ РАН,
[2] Институт прикладной физики РАН, г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию 2 марта 2001 г.

MECHANISMS FOR THE FORMATION OF ELECTRIC-FIELD PULSATION SPECTRA IN THE NEAR-SURFACE ATMOSPHERE

S. V. Anisimov, E. A. Mareev, N. M. Shikhova, and E. M. Dmitriev

We present the results of detailed measurements of the spectrum of short-term ($f \simeq 0.001$–1 Hz) pulsations of the electric field of the near-surface atmosphere under the fair-weather and fog conditions. It is shown that the electric-field pulsations at frequencies 10^{-2}–10^{-1} Hz have a power-law spectrum under both fair-weather and fog conditions. The spectral index varies in the range from -1.23 to -3.36 depending on the experimental conditions, but the most probable values of the index fall in the range from -2.25 to -3.0. The spectra corresponding to long time intervals of about a few hours are more steep. The relation of the spectral characteristics to the formation of aero-electric structures (AESs) is studied. The distribution obtained for the structured spectra is bimodal, i.e., it exhibits two maxima in the ranges of the spectral index from -2.75 to -3.0 and from -2.25 to -2.5. The nonstructured-spectrum distribution is asymmetric with a pronounced maximum corresponding to hard spectra with indexes from -2.5 to -3.3. The intensity of the electric-field pulsations under fog conditions increases by about an order of magnitude compared to the case of fair-weather conditions. The mechanisms of the formation of spectra of the electric-field pulsations and their relations to the pulsation spectra of the electric-charge density with allowance for the neutral-gas turbulence and the presence of the AESs are analyzed. We point out the key role of the nonlocal relation between the electric-field intensity and space-charge density under the conditions of spatially inhomogeneous turbulence. Model problems on the spectrum of electric-field fluctuations generated by a homogeneous and "structured" turbulence in the presence of charge-density fluctuations, considered as a passive tracer, are solved.

УДК 621.396.67

ОСОБЕННОСТИ ИЗЛУЧЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ТОНКОЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ АНТЕННОЙ В ПЛОСКОМ ВОЛНОВОДЕ С НЕОДНОРОДНЫМ ЗАПОЛНЕНИЕМ

Е. А. Шорохова, В. А. Яшнов

Рассмотрена задача излучения электромагнитных волн тонкой электрической антенной, расположенной в плоском волноводе с идеально проводящими стенками, заполненном неоднородным диэлектриком. Проанализированы случаи возбуждения антенны гармонической э. д. с. и импульсным сигналом колоколообразной формы. Выполнены численные расчёты распределения тока в антенне, её входного адмитанса, продольной компоненты напряжённости электрического поля и полной комплексной мощности антенны. Проведено сравнение характеристик антенны для волноводов с однородным и неоднородным заполнением.

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время большое внимание уделяется теоретическим и экспериментальным исследованиям особенностей излучения и распространения несинусоидальных сигналов в различных средах и направляющих структурах. Так, например, импульсные сигналы широко используются в радиолокационных системах для подповерхностного зондирования земных недр [1], для радиосвязи с подземными и подводными объектами [2], для диагностики среды радиофизическими методами [3]. В связи с этим не ослабевает интерес к проблеме излучения волн антеннами и антенными системами, расположенными в плоских волноводах [4–6].

В качестве источников импульсного излучения обычно используют такие излучающие структуры, как элементарные электрический и магнитный диполи, коаксиальные апертуры, цилиндрические и кольцевые антенны [7]. Отметим, что при проведении расчётов характеристик антенн широко используется модель тонкой цилиндрической антенны, в рамках которой удаётся аналитически получить распределения тока в случае, например, антенны в коаксиальной линии, соединённой с идеально проводящей плоскостью [8], антенны, расположенной вблизи идеально проводящей поверхности [9], а также линейной антенны с неотражающим покрытием, возбуждаемой импульсами прямоугольной и гауссовой формы [10]. Отклик антенны при её импульсном возбуждении обычно рассчитывают с использованием либо пребразования Фурье [8–10], либо, как в работе [11], метода разложения сингулярности.

В данной работе рассмотрена задача об излучении электромагнитных волн тонким электрическим вибратором, расположенным в плоском волноводе с неоднородным заполнением, с учётом конечной проводимости металла, из которого изготовлена антенна. Такая задача для идеально проводящей антенны и однородного заполнения плоского волновода рассмотрена в работе [6]. Влияние омических потерь на характеристики антенны, расположенной в плоском волноводе с однородным заполнением, исследовано в [12].

В первом разделе работы проанализирован случай возбуждения антенны гармоническим напряжением и приведено решение краевой задачи для векторного потенциала. Во втором разделе получены выражения для распределения тока вдоль электрического вибратора, его входного адмитанса, продольной компоненты напряжённости электрического поля, а также для полной комплексной мощности антенны. Возбуждение антенны импульсным сигналом колоколообразной формы рассмотрено в третьем разделе. В заключении работы сформулированы основные полученные результаты.

1. РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВЕКТОРНОГО ПОТЕНЦИАЛА

Будем рассматривать антенну, представляющую собой тонкий электрический вибратор, изготовленный из металла с конечной проводимостью. Концы вибратора замкнуты на идеально проводящие стенки плоского волновода. Геометрия задачи показана на рис. 1. Здесь L — расстояние между стенками волновода, h — длина одного из плеч антенны, a — радиус цилиндрических проводников антенны, d — ширина зазора, к которому прикладывается питающее напряжение. Такая модель имеет очень важное преимущество: собственные функции волновода с идеально проводящими стенками одновременно являются собственными функциями задачи о возбуждении электромагнитных полей ТМ-типа. Это позволяет получить достаточно простые выражения для распределения тока вдоль антенны, рассчитать напряжённость электромагнитного поля, излучаемую мощность и другие характеристики антенны. Будем также считать, что волновод заполнен неоднородной средой, диэлектрическая проницаемость которой зависит от расстояния до точки наблюдения r следующим образом:

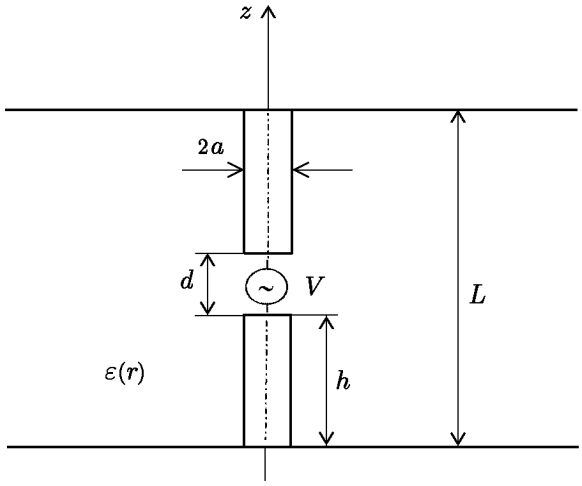

Рис. 1

$$\varepsilon(r) = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\,\frac{a^2}{r^2} + \varepsilon_2, \tag{1}$$

где ε_1 и ε_2 — некоторые постоянные величины. Магнитную проницаемость среды будем считать равной единице.

Вначале предположим, что антенна запитывается сторонней э. д. с. V, изменяющейся во времени по гармоническому закону:

$$V(\omega) = V_0 \exp(i\omega t), \tag{2}$$

где V_0 и ω — амплитуда и частота приложенного напряжения. Выберем цилиндрическую систему координат (r, φ, z), ось z которой направлена вдоль оси антенны, как показано на рис. 1. Следует отметить, что вследствие цилиндрической симметрии задачи электромагнитные поля не зависят от азимутального угла и определяются только продольной по отношению к оси антенны компонентной векторного потенциала A_z [6]:

$$E_r = -\frac{i}{\omega\varepsilon_0\varepsilon}\,\frac{\partial^2 A_z}{\partial r \partial z}, \quad E_\varphi = 0, \quad E_z = -\frac{i}{\omega\varepsilon_0\varepsilon}\left[\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} + k^2(r) A_z\right],$$

$$H_r = H_z = 0, \qquad H_\varphi = -\frac{\partial A_z}{\partial r}\,. \tag{3}$$

Здесь $k(r)$ — волновое число в среде, заполняющей волновод:

$$k(r) = k_0\sqrt{\varepsilon(r)}\,, \tag{4}$$

где $\varepsilon(r)$ определяется формулой (1), $k_0 = \omega\,\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ — волновое число в вакууме, ε_0 и μ_0 — электрическая и магнитная постоянные вакуума соответственно.

Уравнение для компоненты A_z векторного потенциала в цилиндрической системе координат имеет вид [6]

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} + k^2(r) A_z = 0. \tag{5}$$

Граничные условия для уравнения (5) находятся из равенства нулю радиальной компоненты E_r напряжённости электрического поля на стенках волновода, что приводит к условию

$$\left.\frac{\partial A_z}{\partial z}\right|_{z=0,L} = 0. \tag{6}$$

Будем предполагать, что на поверхности цилиндрической антенны (при $r = a$) выполняется граничное условие импедансного типа [12]:

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} + 2\pi i k_1 a \frac{Z_{\rm i}}{Z_1}\frac{\partial A_z}{\partial r} + k_1^2 A_z = -\frac{ik_1}{Z_1}E_0(z), \tag{7}$$

где $k_1 = k_0\sqrt{\varepsilon_1}$ — волновое число при $r = a$, $Z_1 = \sqrt{\mu_0/(\varepsilon_0\varepsilon_1)}$ — характеристический импеданс среды, заполняющей волновод, при $r = a$; $Z_{\rm i} = sJ_0(s)/[2\pi a^2\sigma J_1(s)]$ — внутренний погонный импеданс цилиндрического проводника, σ — удельная проводимость металла, из которого изготовлены элементы антенны, $J_0(s)$ и $J_1(s)$ — функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядка, $s = (1-i)\,a/d_{\rm s}$, $d_{\rm s} = \sqrt{2/(\sigma\omega\mu_{\rm m}\mu_0)}$ — толщина скин-слоя, $\mu_{\rm m}$ — относительная магнитная проницаемость металла. Функция $E_0(z)$ в правой части уравнения (7) — амплитуда стороннего поля на поверхности антенны, которое считается известной функцией z и может быть представлено в виде ряда Фурье [6]:

$$E_0(z,\omega) = \frac{V(\omega)}{L}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_n \cos\Bigl(\frac{n\pi z}{L}\Bigr). \tag{8}$$

Здесь

$$g_n = \frac{\sin y}{y}\cos\Bigl[\frac{n\pi}{L}\Bigl(h+\frac{d}{2}\Bigr)\Bigr], \quad y = \frac{n\pi d}{2L}.$$

Воспользовавшись собственными функциями для плоского волновода с идеально проводящими стенками, решение уравнения (5) с граничными условиями (6) и (7) будем искать в виде ряда [6]:

$$A_z(r,z,\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n(r,\omega)\cos\Bigl(\frac{n\pi z}{L}\Bigr). \tag{9}$$

Подставляя (9) в (5), получим следующее дифференциальное уравнение для коэффициентов $A_n(r,\omega)$:

$$\frac{{\rm d}^2 A_n}{{\rm d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{{\rm d}A_n}{{\rm d}r} + \Bigl[\kappa_{2n}^2 + \frac{\nu^2}{r^2}\Bigr]A_n = 0, \tag{10}$$

где

$$\kappa_{2n}^2 = k_2^2 - (n\pi/L)^2, \quad k_2 = k_0\sqrt{\varepsilon_2}, \quad \nu = ik_0 a\sqrt{\varepsilon_1-\varepsilon_2}.$$

С учётом условия излучения на бесконечности решение уравнения (10) выберем в виде

$$A_n(r,\omega) = Q_n(\omega)H_\nu^{(2)}(\kappa_{2n}r), \tag{11}$$

где Q_n — произвольные постоянные, $H_\nu^{(2)}(x)$ — функция Ханкеля второго рода порядка ν. Коэффициенты Q_n определяются из граничного условия на поверхности антенны (7):

$$Q_n = -\frac{ik_1}{Z_1}\frac{V(\omega)}{L}\frac{g_n}{D_n(\nu)}, \tag{12}$$

где

$$D_n(\nu) = \kappa_{1n}^2 H_\nu^{(2)}(\kappa_{2n}a) + 2\pi i k_1 a \left(Z_{\rm i}/Z_1\right) \kappa_{2n} \dot{H}_\nu^{(2)}(\kappa_{2n}a),$$

$\kappa_{1n}^2 = k_1^2 - (n\pi/L)^2$, $\dot{H}_\nu^{(2)}(x)$ — производная функции Ханкеля второго рода порядка ν по аргументу.

В итоге решение краевой задачи для z-компоненты векторного потенциала записывается в виде

$$A_z(r,z,\omega) = -\frac{ik_1 V(\omega)}{Z_1 L} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{g_n H_\nu^{(2)}(\kappa_{2n}r)\cos(n\pi z/L)}{D_n(\nu)}\,. \tag{13}$$

Отметим, что появление второго слагаемого в выражении для $D_n(\nu)$ является следствием учёта конечной проводимости металла проводников антенны.

2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТОКА, ВХОДНОЙ ИМПЕДАНС И ПОЛНАЯ КОМПЛЕКСНАЯ МОЩНОСТЬ ТОНКОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ВИБРАТОРА В ПЛОСКОМ ВОЛНОВОДЕ С НЕОДНОРОДНЫМ ЗАПОЛНЕНИЕМ

Основной характеристикой вибраторных антенн является распределение тока вдоль проводников вибратора, которое определяется соотношением [13]

$$I(z,\omega) = 2\pi a H_\varphi(r,z,\omega) = -2\pi a \frac{\partial A_z(r,z,\omega)}{\partial r}\bigg|_{r=a}. \tag{14}$$

Здесь a — радиус проводника, $H_\varphi(a,z,\omega)$ — азимутальная компонента напряжённости магнитного поля на поверхности антенны.

Подставляя выражение (13) для векторного потенциала в (14), получаем

$$I(z,\omega) = 2\pi i\,\frac{k_1 a}{L}\,\frac{V(\omega)}{Z_1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\kappa_{2n} g_n \dot{H}_\nu^{(2)}(\kappa_{2n}a)\cos(n\pi z/L)}{D_n(\nu)}\,. \tag{15}$$

Используя приближение тонкой антенны [6], т. е. полагая

$$\max(a,d) \ll L, \quad ka \ll 1, \quad kd \ll 1, \tag{16}$$

разложим функции Ханкеля и их производные, входящие в выражение (15), в ряд Тейлора вблизи точки $\nu = 0$ [14]. Ограничиваясь первыми двумя членами разложения, получим

$$H_\nu^{(2)}(\kappa_{2n}a) \approx \left(1 + \frac{i\pi\nu}{2}\right) H_0^{(2)}(\kappa_{2n}a), \quad \dot{H}_\nu^{(2)}(\kappa_{2n}a) \approx -\left(1 + \frac{i\pi\nu}{2}\right) H_1^{(2)}(\kappa_{2n}a). \tag{17}$$

В этом приближении выражение для распределения тока вдоль вибратора можно записать в виде

$$I(z,\omega) = -2\pi i k_1 \alpha\,\frac{V(\omega)}{Z_1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\kappa_{2n} g_n H_1^{(2)}(\kappa_{2n}a)\cos(n\pi z/L)}{D_n(0)}\,, \tag{18}$$

где $\alpha = a/L$.

Определим входной адмитанс антенны как отношение тока к напряжению в точке, в которой к антенне прикладывается питающее напряжение (см. [13]):

$$Y_{\rm a} = \frac{I(h)}{V(\omega)} = -\frac{2\pi i k_1 \alpha}{Z_1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\kappa_{2n} g_n H_1^{(2)}(\kappa_{2n}a)\cos(n\pi h/L)}{D_n(0)}\,. \tag{19}$$

Для сравнения приведём выражение для входного адмитанса антенны, расположенной в однородной среде:

$$Y_{\mathrm{a}} = -\frac{2\pi ik\alpha}{Z} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{g_n H_1^{(2)}(\kappa_n a)\cos(n\pi h/L)}{\kappa_n H_0^{(2)}(\kappa_n a) - \pi ik\alpha s\rho\,[J_0(s)/J_1(s)]\,H_1^{(2)}(\kappa_n a)}\,,$$

где $\kappa_n^2 = k^2 - (n\pi/L)^2$, $\rho = R/Z_1$, $R = L/(\pi a^2\sigma)$ — омическое сопротивление антенного провода, k и Z — волновое число и характеристический импеданс однородной среды соответственно.

С использованием выражения (19) были выполнены численные расчёты реальной (сопротивления излучения) и мнимой (реактанса) частей импеданса симметричной и несимметричной антенн. В расчётах использовались следующие значения безразмерных параметров: $\rho = 0{,}1$; $\alpha = 10^{-3}$; $\delta = d/L = 10^{-2}$; $\gamma = h/L = 0{,}495$ (для симметричной антенны) и $\gamma = 0$ (для несимметричной антенны). Зависимости нормированных на характеристический импеданс Z_0 свободного пространства реальной и мнимой частей входного импеданса антенны от параметра k_0L приведены на рис. 2, 3 (для симметричной антенны) и рис. 4, 5 (для несимметричного вибратора). Сплошная линия соответствует случаю неоднородного заполнения волновода с $\varepsilon_1 = 5$ и $\varepsilon_2 = 2$. Для сравнения там же приведены кривые для волновода, заполненного однородной средой с $\varepsilon = 5$ (пунктирная линия) и $\varepsilon = 2$ (штрих-пунктирная линия). Заметим, что такие же параметры и обозначения будут использоваться нами и в дальнейшем при расчётах других характеристик антенны. Из сравнения сплошной и штрих-пунктирной кривых видно, что частоты резонансов и антирезонансов антенны в однородной (при $\varepsilon = 2$) и неоднородной средах практически совпадают. Отличие наблюдается лишь в значениях реальной и мнимой частей входного импеданса в окрестности резонансных частот. Расчёты показывают, что в рассматриваемых условиях наличие неоднородности среды вблизи излучателя приводит к уменьшению реальной и мнимой частей входного импеданса, а следовательно, к увеличению тока в антенне в области резонансных частот. Можно говорить о том, что неоднородность среды вблизи антенны приводит к улучшению согласования антенны с окружающей средой.

Распределение тока позволяет также определить полную комплексную мощность P антенны, для расчёта которой воспользуемся методом наводимых ЭДС [13]:

$$P = -\frac{1}{2}\int_0^L I^*(z,\omega)E_z(a,z,\omega)\,\mathrm{d}z = -\pi a\int_0^L H_\varphi^*(a,z,\omega)E_z(a,z,\omega)\,\mathrm{d}z, \tag{20}$$

где $I(z,\omega)$, $E_z(a,z,\omega)$ и $H_\varphi(a,z,\omega)$ — распределения вдоль вибратора силы тока, продольной составляющей напряжённости электрического поля и азимутальной компоненты напряжённости магнитного поля соответственно; символ $*$ обозначает комплексное сопряжение.

Используя соотношения (3) и (13), запишем распределения полей $E_z(r,z,\omega)$ и $H_\varphi(r,z,\omega)$ в приближении тонкой антенны:

$$E_z(r,z,\omega) = -\frac{k_1V(\omega)}{\omega\varepsilon_0\varepsilon(r)Z_1L}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{\kappa_n^2 g_n H_0^{(2)}(\kappa_{2n}r)\cos(n\pi z/L)}{D_n(0)}\,, \tag{21}$$

$$H_\varphi(r,z,\omega) = -\frac{ik_1V(\omega)}{Z_1L}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{\kappa_{2n} g_n H_1^{(2)}(\kappa_{2n}r)\cos(n\pi z/L)}{D_n(0)}\,, \tag{22}$$

где

$$\kappa_n^2 = k^2(r) - (n\pi/L)^2,$$

$k(r)$ определяется формулой (4), а $\varepsilon(r)$ в неоднородной среде — формулой (1).

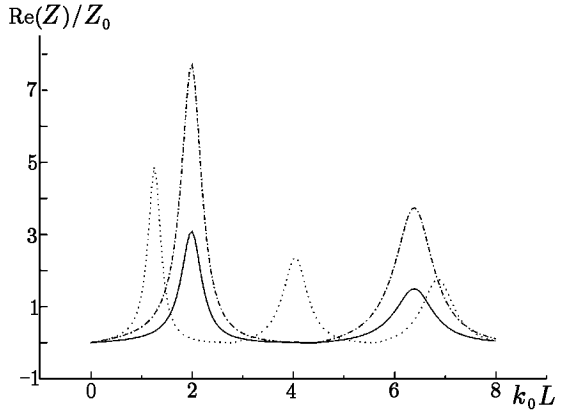

Рис. 2

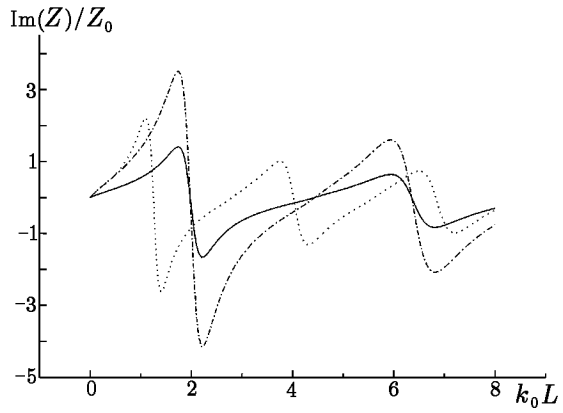

Рис. 3

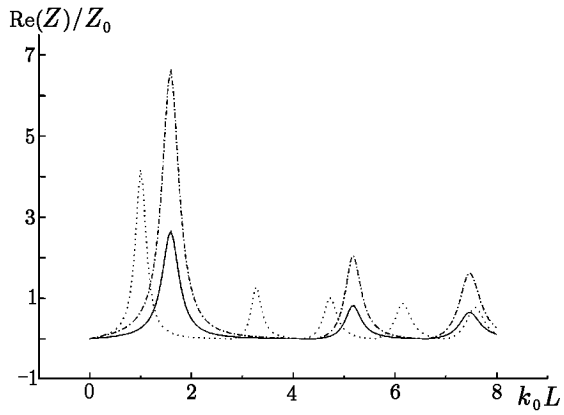

Рис. 4

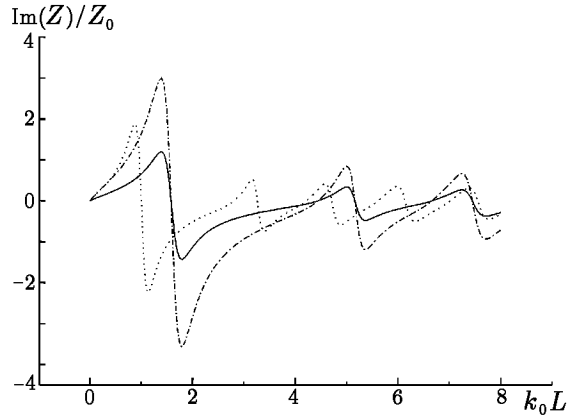

Рис. 5

В результате полная комплексная мощность с учётом (21) и (22) может быть записана в следующем виде:

$$P = \mathrm{Re}\left[\frac{\pi i k_1 \alpha V^2}{Z_1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\kappa_{1n}^2 g_n^2 H_0^{(2)}(\kappa_{2n} a)\left[\kappa_{2n} H_1^{(2)}(\kappa_{2n} a)\right]^*}{D_n(0)\, D_n^*(0)}\right]. \tag{23}$$

В соответствии с методом Фельда, разработанным для щелевых антенн [13], через комплексную мощность можно определить входной импеданс электрического вибратора $Z_\mathrm{a} = R_\Sigma + iX$, где R_Σ — сопротивление излучения, X — реактанс антенны:

$$P = \frac{V^2}{2Z_\mathrm{a}} = \frac{V^2 Y_\mathrm{a}}{2}. \tag{24}$$

Следовательно, приравнивая правые части соотношений (23) и (24), можно найти выражение для входного импеданса (адмитанса) антенны, совпадающее с (19).

3. ВОЗБУЖДЕНИЕ АНТЕННЫ ИМПУЛЬСНЫМ НАПРЯЖЕНИЕМ

Рассмотрим возбуждение антенны импульсным напряжением колоколообразной формы:

$$V(t) = \begin{cases} V_0 \cos^2[\pi\,(t/\tau - 1/2)], & 0 \le t \le \tau; \\ 0, & t < 0; \quad t > \tau, \end{cases} \tag{25}$$

где V_0 и τ — амплитуда и длительность импульса. Спектр такого напряжения имеет вид

$$V(\omega) = \frac{\pi\tau V_0}{4}\,\frac{\sin(w)\exp(-iw)}{w\,(\pi^2 - w^2)}\,, \quad w = \frac{\omega\tau}{2}\,. \tag{26}$$

Используя преобразование Фурье, распределение тока вдоль антенны можно представить в виде

$$I(z,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} I(z,\omega)\exp(i\omega t)\,\mathrm{d}\omega. \tag{27}$$

Подставляя выражения (18) и (26) в (27), получаем

$$I(z,t) = \frac{2\pi^2\alpha V_0}{Z_1}\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin(w)}{w\,(\pi^2 - w^2)}Q(z,w,t)\,\mathrm{d}w, \tag{28}$$

где

$$Q(z,w,t) = \mathrm{Re}\left\{\left(q_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} q_n\right)\exp[iw\,(2t/\tau - 1) - i\pi/2]\right\},$$

$$q_0 = H_1^{(2)}(x_2\alpha)/S_0, \quad q_n = g_n\beta_{2n}\cos(n\pi z/L)H_1^{(2)}(\beta_{2n}x_2\alpha)/S_n,$$

$$S_n = \sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon_2}\,\beta_{1n}^2 H_0^{(2)}(\beta_{2n}x_2\alpha) - \pi i\alpha s\rho\,[J_0(s)/J_1(s)]\,\beta_{2n}H_1^{(2)}(\beta_{2n}x_2\alpha),$$

$$s = (1-i)\sqrt{x_1/(2\pi\rho)}\,, \quad \beta_{1n,2n} = \sqrt{1 - \left(\frac{n\pi}{x_{1,2}}\right)^2} = -i\sqrt{\left(\frac{n\pi}{x_{1,2}}\right)^2 - 1}\,,$$

$x_{1,2} = wl\sqrt{\varepsilon_{1,2}}$, $l = 2L/(c\tau)$, c — скорость света в вакууме, $n = 0, 1, \ldots$; относительная магнитная проницаемость $\mu_m = 1$.

С помощью выражений (27) и (28) был исследован отклик антенны на приложенное к ней импульсное напряжение. В частности, рассчитаны зависимости тока при $z = 0$, нормированного на $I_0 = V_0/Z_0$, от параметра t/τ (см. рис. 6 и 7). Зависимости тока построены для различных значений параметра l, характеризующего длительность импульса: рис. 6 соответствует длинному импульсу ($l = 0{,}5$), а рис. 7 — короткому ($l = 2$). Расчёты тока проведены для симметричного вибратора. Из вида полученных кривых следует, что для длинных импульсов характерно медленное спадание амплитуды тока со временем, т. е. растягивание заднего фронта импульса (рис. 6). С уменьшением длительности импульса в зависимости тока от времени появляются осцилляции, амплитуда которых растёт с уменьшением τ. Для короткого импульса ($l = 2$) зависимость силы тока от времени уже представляет собой последовательность отражённых от стенок волновода импульсов (рис. 7).

В задачах радиосвязи и зондирования окружающей среды представляет интерес расчёт продольной (по отношению к оси антенны) компоненты $E_z(r,z)$ напряжённости электрического поля. Применяя преобразование Фурье, получим

$$E_z(r,z,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} E_z(r,z,\omega)\exp(i\omega t)\,\mathrm{d}\omega. \tag{29}$$

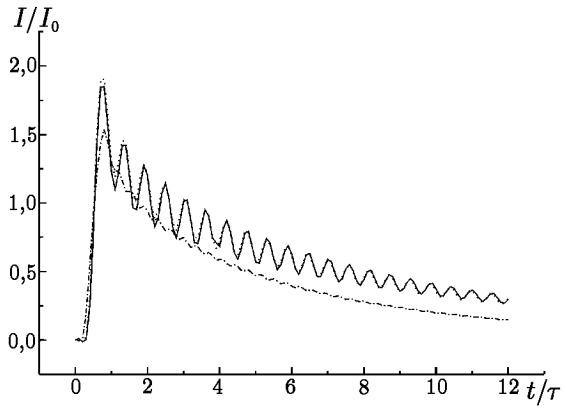

Рис. 6

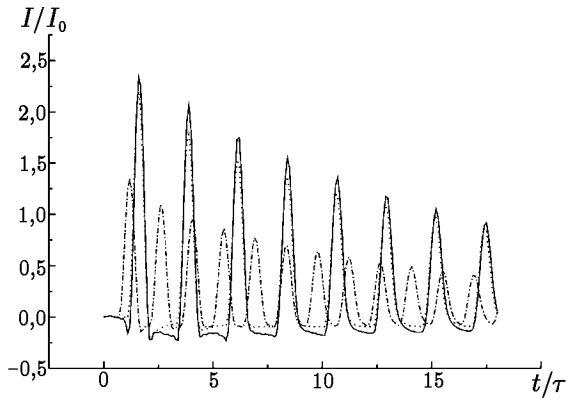

Рис. 7

Используя выражение (21) и переходя к нормированным величинам, можно записать

$$E_z(r,z,t) = -\frac{\pi V_0}{L}\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\int\limits_0^\infty \frac{\sin(w)}{w\left(\pi^2 - w^2\right)} F(r,z,w,t)\,\mathrm{d}w. \tag{30}$$

Здесь

$$F(r,z,w,t) = \mathrm{Re}\left\{\left(f_0 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} f_n\right)\exp[iw\,(2t/\tau - 1)]\right\},$$

$$f_0 = H_0^{(2)}(x_2 r/L)/S_0\,, \quad f_n = g_n\beta_n^2\cos(n\pi z/L)H_0^{(2)}(\beta_{2n}x_2 r/L)/S_n,$$

$$\beta_n = \sqrt{1 - \left(\frac{n\pi}{x}\right)^2} = -i\sqrt{\left(\frac{n\pi}{x}\right)^2 - 1}\,, \quad x = wl\,\sqrt{\varepsilon(r)}\,.$$

С использованием выражений (29) и (30) были получены зависимости продольной компоненты напряжённости электрического поля от времени, которые представлены на рис. 8–11. Расчёты проводились для симметричной антенны на различных от неё расстояниях: $r/L = 1$ (рис. 8 и 10) и $r/L = 5$ (рис. 9 и 11). Анализ полученных зависимостей показывает, что при достаточно большой длительности импульса ($l = 0{,}5$) его передний фронт искажается незначительно, а задний удлиняется (см. рис. 8 и 9). При возбуждении антенны коротким импульсом ($l = 2$) форма излучённого сигнала существенно отличается от формы приложенной э. д. с. (см. рис. 10 и 11), что, как отмечалось выше, является следствием суперпозиции отражённых от стенок волновода сигналов. Заметим также, что наличие неоднородности среды вблизи антенны приводит к уменьшению искажения формы излучаемого сигнала по сравнению со случаем волновода с однородным заполнением.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведённый анализ излучения тонкой вибраторной антенны в плоском волноводе с идеально проводящими стенками показал, что неоднородность среды, заполняющей волновод, вблизи вибратора существенно влияет на характеристики излучателя. В частности, наличие достаточно тонкого переходного слоя может в некоторых случаях приводить к улучшению согласования антенны с окружающей средой. Это проявляется в уменьшении входного импеданса антенны в области резонансных частот и, следовательно, в увеличении тока в антенне по сравнению со случаем вибратора, расположенного

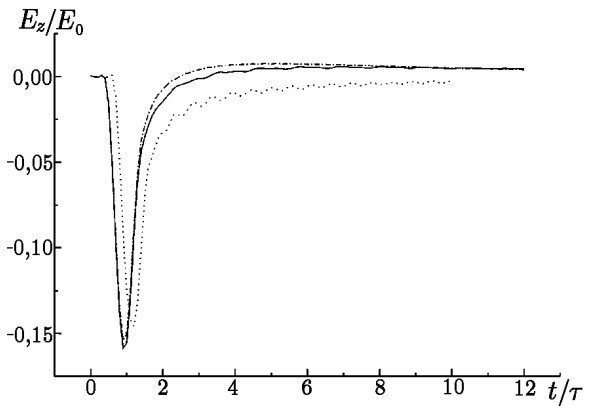

Рис. 8

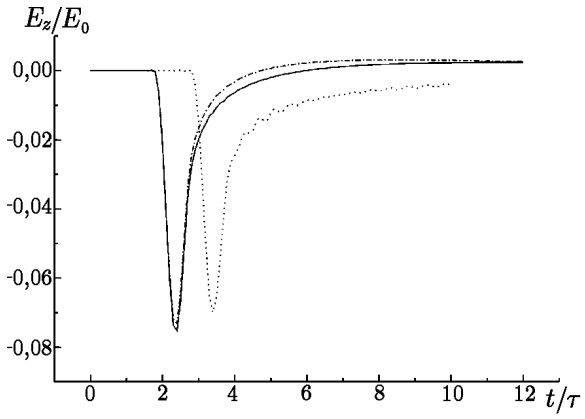

Рис. 9

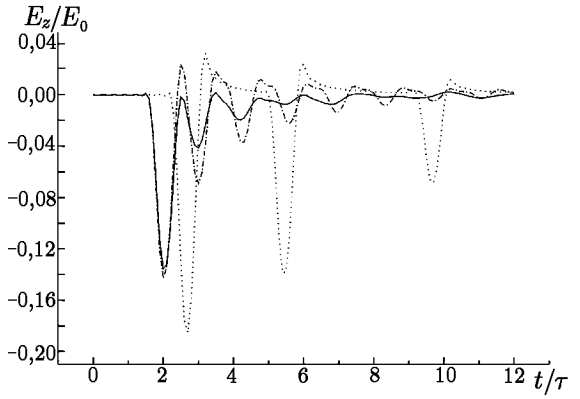

Рис. 10

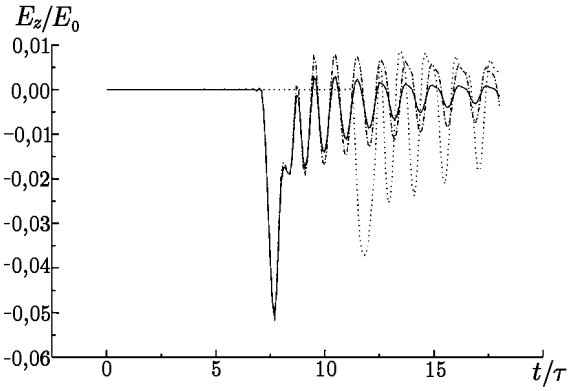

Рис. 11

в волноводе с однородным заполнением. Наличие неоднородности среды вблизи антенны приводит к уменьшению искажений импульсных сигналов, что особенно ярко проявляется при возбуждении антенны короткими импульсами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Финкельштейн М. И., Кутаев В. А., Злотарёв В. П. Применение радиолокационного подповерхностного зондирования в инженерной геологии. М.: Недра, 1986. 128 с.
2. Хармут Х. Ф. Несинусоидальные волны в радиолокации и радиосвязи. М.: Радио и связь, 1985. 376 с.
3. Чжань Л. Ч., Моффэтт Д. Л., Питерс Л. мл. // ТИИЭР. 1979. Т. 67, № 7. С. 18.
4. King R. W. P. The theory of linear antennas. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press, 1956. 943 p.
5. Докучаев В. П. // Теория и техника антенн. М.: АО «Радиофизика», 1994. С. 296.
6. Докучаев В. П., Яшнов В. А. // Радиотехника и электроника. 1996. Т. 41, № 7. С. 791.
7. Franceschetti G., Papas C. H. // IEEE Trans. Antennas Propagat. 1974. V. 22, No. 5. P. 651.
8. Schmitt H. J., Harrison C. W., Williams C. S. // IEEE Trans. Antennas Propagat. 1966. V. 14, No. 9. P. 120.
9. Tesche F. M. // IEEE Trans. Antennas Propagat. 1974. V. 22, No. 2. P. 352.

10. Liu Y. P, Sengupta D. L. // IEEE Trans. Antennas Propagat. 1974. V. 22, No. 2. P. 212.
11. Tesche F. M. // IEEE Trans. Antennas Propagat. 1973. V. 21, No. 1. P. 53.
12. Докучаев В. П., Шорохова Е. А., Яшнов В. А. // IV Международная научно-техническая конференция. Радиолокация, навигация и связь. Воронеж, 1998. С. 1 749.
13. Марков Г. Т., Сазонов Д. М. Антенны. М.: Энергия, 1975.
14. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Наука, 1979.

Нижегородский госуниверситет
им. Н. И. Лобачевского,
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию
15 мая 2000 г.

FEATURES OF RADIATION OF ELECTROMAGNETIC WAVES BY A THIN ELECTRIC ANTENNA IN A PLANAR WAVEGUIDE WITH AN INHOMOGENEOUS FILLING

E. A. Shorokhova and V. A. Yashnov

We consider the problem on radiation of electromagnetic waves by a thin electric antenna located in a planar waveguide with perfectly conducting walls filled with an inhomogeneous dielectric. The cases where the antenna is fed by a periodic e.m.f. and by a bell-shaped impulse signal are analysed. The current distribution along the antenna, its input impedance, the longitudional component of the electric-field intensity, and the total complex power of the antenna are calculated numerically. The antenna characteristics are compared for waveguides with inhomogeneous and homogeneous filling.

УДК 538.561

СИНХРОТРОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ВНУТРИ КРУГЛОГО МЕТАЛЛИЧЕСКОГО ВОЛНОВОДА

В. П. Докучаев

Проведено теоретическое исследование влияния круглого металлического волновода с продольным внешним магнитным полем на магнитотормозное излучение точечного электрического заряда, движущегося по винтовой линии, ось которой совпадает с осью волновода. Основное внимание уделено анализу энергетических характеристик излучения двух семейств E- и H-волн. Получены формулы для мощности излучения E- и H-волн. Показано, что медленно движущиеся электрические заряды при определённом условии не возбуждают эти волны внутри волновода.

Теория магнитотормозного излучения электромагнитных волн зарядами, движущимися по винтовым линиям в магнитном поле, находит всё более широкое применение в астрофизике при объяснении излучения различных космических объектов [1, 2], в физике и технике различных лабораторных циклических ускорителей заряженных частиц [3, 4]. В настоящее время синхротронное излучение в этих ускорителях и родственных им установках — накопительных кольцах — используется в технологиях получения некоторых полимеров, в радиационной биологии и медицине [3]. Некоторые из полученных здесь результатов могут оказаться полезными при анализе работы генераторов, используемых в электронике больших мощностей, в которой рассматривается излучение потоков заряженных частиц в мазерах на циклотронном резонансе с учётом нелинейной автофокусировки [5–7].

Здесь рассмотрена задача о магнитотормозном излучении электромагнитных волн точечным электрическим зарядом q, движущимся по винтовой линии в однородном магнитном поле с индукцией $\mathbf{B}_0$ внутри круглого металлического волновода радиуса b. Предполагается, что ось винтовой линии совпадает с осью волновода и с направлением магнитного поля $\mathbf{B}_0$. На рис. 1 схематически изображена винтовая траектория точечного электрического заряда внутри цилиндрической металлической трубы с радиусом поперечного сечения b. В этом случае распределение плотности электрических зарядов ρ и токов $\mathbf{j}$ удобно записать в цилиндрической системе координат r, z, φ (см. рис. 1*б*) в виде

$$\rho = q\frac{\delta(r-a)}{\sqrt{ra}}\delta(\varphi-\omega_B t)\delta(z-Vt), \tag{1}$$

$$\mathbf{j} = q\left(\omega_B a\boldsymbol{\varphi}_0 + V\mathbf{z}_0\right)\frac{\delta(r-a)}{\sqrt{ra}}\delta(\varphi-\omega_B t)\delta(z-Vt). \tag{2}$$

Здесь δ — символ функции Дирака, $\boldsymbol{\varphi}_0$ и $\mathbf{z}_0$ — единичные векторы координат φ и z, V — скорость движения заряда вдоль оси волновода, гирочастота ω_B и ларморовский радиус a определяются хорошо известными формулами:

$$\omega_B = \frac{qB_0}{m_0 c}\sqrt{1-\beta^2} = \omega_{B_0}\sqrt{1-\beta^2}\,, \tag{3}$$

$$a = \frac{V_\varphi}{\omega_B} = \frac{c\beta_\perp}{\omega_{B_0}\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta^2 = \beta_\parallel^2 + \beta_\perp^2 = \frac{V^2}{c^2} + \frac{V_\varphi^2}{c^2}\,, \tag{4}$$

где m_0 — масса покоя заряженной частицы, c — скорость света в вакууме.

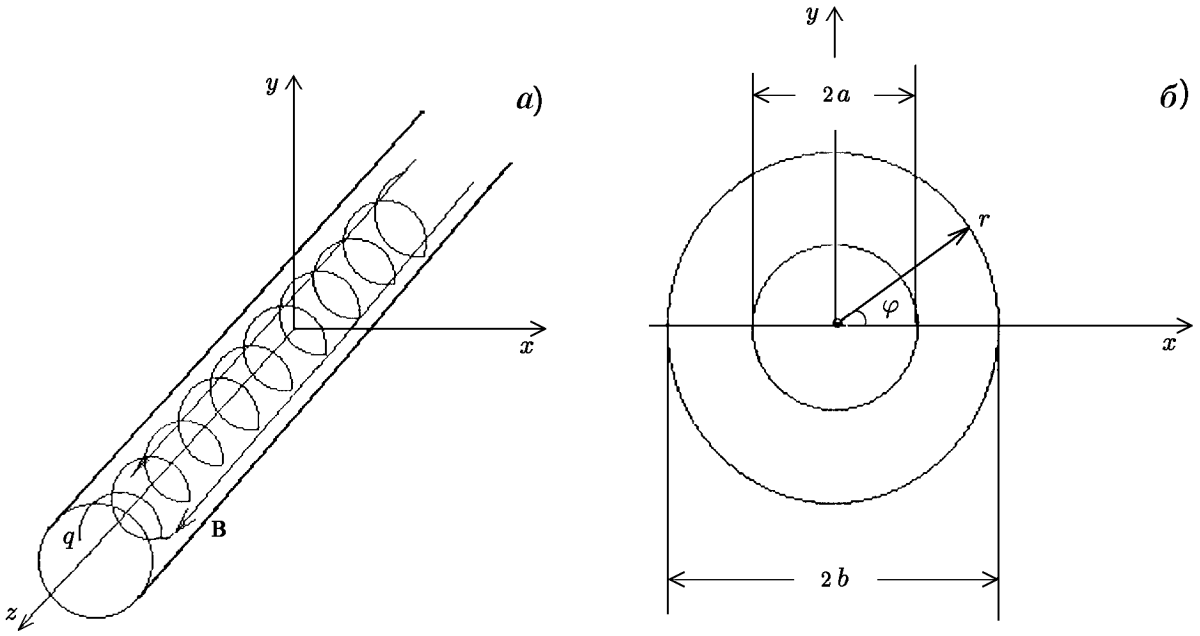

Рис. 1

Из уравнений Максвелла удобно получить уравнения для напряжённостей электрического и магнитного полей:

$$\Delta\mathbf{E} - \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial\mathbf{j}}{\partial t}\,, \tag{5}$$

$$\Delta\mathbf{H} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\operatorname{rot}\mathbf{j}, \tag{6}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0. \tag{7}$$

На поверхности идеально проводящего металлического цилиндра при $r = b \geq a$ должны выполняться граничные условия

$$E_z = E_\varphi = H_r = 0.$$

Поставленная здесь граничная задача для уравнений (5)–(7) с источниками (1), (2) имеет точное решение. Оно получается хорошо известными методами интегральных преобразований с использованием разложения источников и создаваемых ими электромагнитных полей по собственным функциям граничной задачи для круглого волновода с идеально проводящими стенками [8]. Заметим, что поперечные электрические токи возбуждают в цилиндрических волноводах оба семейства нормальных волн: электрические E-волны и магнитные (H-волны).

Для электрических волн находим следующее выражение для продольной компоненты напряжённости электрического поля:

$$E_z = \frac{2q}{b^2}\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{J_n(\alpha_{nm}\,a/b)J_n(\alpha_{nm}\,r/b)}{\dot{J}_n^2(\alpha_{nm})}\times$$
$$\times\exp\left[i\,n(\varphi-\omega_B t) + \frac{in\omega_B\beta_\parallel\,(z-Vt) + i\sqrt{n^2\omega_B^2 - (1-\beta_\parallel^2)\,\omega_{nm}^2}\,|z-Vt|}{c\,(1-\beta_\parallel^2)}\right]. \tag{8}$$

Здесь $J_n(x)$ и $\dot{J}_n(x)$ — функция Бесселя первого рода порядка n и её производная, α_{nm} — корни функции Бесселя n-го порядка, ω_{nm} — критические частоты круглого волновода для E-волн [9]:

$$J_n(\alpha_{nm}) = 0, \qquad \omega_{nm} = \alpha_{nm} c/b. \tag{9}$$

Совершенно аналогично можно найти продольную компоненту напряжённости магнитного поля в волноводе:

$$H_z = \frac{2iq\omega_B a}{b^3} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\gamma_{nm}^3}{\gamma_{nm}^2 - n^2} \frac{\dot{J}_n(\gamma_{nm}\, a/b) J_n(\gamma_{nm}\, r/b)}{J_n^2(\gamma_{nm}) \sqrt{n^2\omega_B^2 - (1-\beta_\parallel^2)\,\Omega_{nm}^2}} \times$$
$$\times \exp\left[in(\varphi - \omega_B t) + \frac{in\omega_B\beta_\parallel\,(z - Vt) + i\sqrt{n^2\omega_B^2 - (1-\beta_\parallel^2)\,\Omega_{nm}^2}\,|z - Vt|}{c\,(1-\beta_\parallel^2)} \right], \tag{10}$$

где γ_{nm} — корни производной функции Бесселя n-го порядка, Ω_{nm} — критические частоты круглого волновода для H-волн:

$$\dot{J}_n(\gamma_{nm}) = 0, \qquad \Omega_{nm} = \gamma_{nm} c/b. \tag{11}$$

Соотношения (8) и (10) можно использовать для нахождения всех остальных компонент напряжённостей электромагнитного поля. Однако каждая из этих компонент содержит составляющие, соответствующие обеим типам волн, и выражения для них довольно громоздки. В формулах (8) и (10) отброшены квазистатические симметричные поля, соответствующие случаю $n = 0$, т. к. в дальнейшем нас будут интересовать только волновые поля. Источники (1), (2) не возбуждают симметричных волн в волноводе.

Так как ларморовский радиус a должен быть меньше радиуса волновода b, то в соответствии с (3) и (4) на параметры $\beta_\parallel$ и $\beta_\perp$, в свою очередь, налагается условие

$$\frac{\beta_\perp}{\sqrt{1-\beta^2}} \le \frac{\omega_{B_0} b}{c}. \tag{12}$$

Дисперсионные свойства циркулярно поляризованных волн в (8) и (10) с учётом доплеровского сдвига по частоте, анализ фазовых и групповых скоростей E- и H-волн содержатся в работах [6, 7].

Условия излучения E- и H-волн внутри волновода в соответствии с (8) и (10) имеют вид

$$n\omega_B > \omega_{nm}\sqrt{1-\beta_\parallel^2}, \qquad n\omega_B > \Omega_{nm}\sqrt{1-\beta_\parallel^2}. \tag{13}$$

Излучаемую мощность найдём с помощью метода сил реакции излучения [1]:

$$W = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} (\mathbf{j}, \mathbf{E}^*)\,\mathrm{d}^3R\right] = W_E + W_H, \tag{14}$$

где символы Re и * означают соответственно действительную часть интеграла и комплексно-сопряжённую величину, $\mathrm{d}^3R = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z$ — элемент объёма, W_E и W_H — мощности излучения E- и H-волн. После нахождения E_φ компоненты электрического поля, из (14) окончательно получим

$$W_E = \frac{q^2\omega_B}{c}\,\mathrm{Re}\left[\sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{n^2\omega_B^2 - (1-\beta_\parallel^2)\,\omega_{nm}^2}}{\alpha_{nm}^2} \frac{J_n^2(\alpha_{nm}\, a/b)}{\dot{J}_n^2(\alpha_{nm})}\right], \tag{15}$$

$$W_H = \frac{q^2\omega_B c\beta_\perp^2}{b^2\,(1-\beta_\parallel^2)}\,\mathrm{Re}\left[\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{n\gamma_{nm}^2}{(\gamma_{nm}^2-n^2)\sqrt{n^2\omega_B^2-(1-\beta_\parallel^2)\,\Omega_{nm}^2}}\,\frac{\dot{J}_n^2(\gamma_{nm}\,a/b)}{J_n^2(\gamma_{nm})}\right]. \qquad (16)$$

Укажем, что частный случай движения заряда по окружности внутри волновода и формулы для излучаемой мощности приведены в [10]. Отметим также, что при $a = b$ излучение отсутствует в силу соотношений (9), (11), а при $a \le b$ можно показать, что излучаемая мощность W соответствует излучению волн элементарным радиальным электрическим диполем, движущимся по винтовой линии в свободном пространстве [11]. Диполь образован зарядом и его отображением в металлической стенке волновода.

При анализе условий излучения (13), которые проявляются в (15), (16) как реальные части радикалов, воспользуемся некоторыми известными неравенствами и асимптотическими соотношениями для корней α_{nm} и γ_{nm} (нули функций Бесселя и их производных). С этой целью перепишем соотношения (13) с учётом (9) и (11) в следующем виде:

$$\frac{\omega_{B_0}b}{c}\sqrt{\frac{1-\beta^2}{1-\beta^2\cos^2\theta}} > \frac{\alpha_{nm}}{n}, \quad \frac{\omega_{B_0}b}{c}\sqrt{\frac{1-\beta^2}{1-\beta^2\cos^2\theta}} > \frac{\gamma_{nm}}{n}, \qquad (17)$$

где θ — угол между векторами $\mathbf{B}$ и $\mathbf{V} = V\mathbf{z}_0 + V\varphi\boldsymbol{\varphi}_0$.

При любом конечном фиксированном n корни α_{nm} и γ_{nm} растут с увеличением m и всегда $\alpha_{nm} > \gamma_{nm}$. Для наименьших корней (при $n > 0$) выполняются неравенства [12, 13]:

$$\sqrt{1+\frac{2}{n}} < \frac{\alpha_{n1}}{n} < \sqrt{2\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)}, \quad \sqrt{1+\frac{2}{n}} < \frac{\gamma_{n1}}{n} < \sqrt{2\left(1+\frac{1}{n}\right)}. \qquad (18)$$

Из соотношений (15)–(18) находим, что излучение как E-, так и H-волн в волноводе полностью отсутствует, если выполнено условие

$$\frac{\omega_{B_0}b}{c}\sqrt{\frac{1-\beta^2}{1-\beta^2\cos^2\theta}} < 1. \qquad (19)$$

Заметим, что в соотношениях (12), (13), (17) и (19) присутствует линейная скорость $\omega_B b$ движения наведённых на стенке волновода электрических зарядов и токов, т. е. скорость «зайчика» [1]. Соотношения (15), (16) могут быть полезны при исследовании силы реакции излучения, действующей на заряд, движущийся внутри волновода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гинзбург В. Л. Теоретическая физика и астрофизика. М.: Наука, 1975. 416 с.
2. Железняков В. В. Излучение в астрофизической плазме. М.: Янус-К, 1997. 528 с.
3. Алферов Д. Ф., Беловинцев К. А., Келдыш Л. В., Михайлин В. В., Тамм Е. И., Черенков П. А. // Труды ФИАН им. П. Н. Лебедева. Т. 80. М.: Наука, 1975. С. 125.
4. Тернов И. М., Михайлин В. В., Халилов В. Р. Синхротронное излучение и его применение. М.: Изд-во МГУ, 1980. 278 с.
5. Гапонов-Грехов А. В., Петелин М. И. // Вестник АН СССР. 1979. № 4. С. 11.
6. Bratman V. L., Ginsburg N. S., Nusinovich G. S., Petelin M. I., Strelkov P. S. // Int. J. Electronics. 1981. V. 51, No. 4. P. 541.

7. McDermott D. B., Luhmann N. C., Kupiszevski A., Jory H. R. // Phys. Fluids. 1983. V. 26, No. 7. P. 1936.
8. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. М.: Мир, 1978. Т. 1. 548 с.
9. Никольский В. В., Никольская Т. И. Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Наука, 1989. 543 с.
10. Докучаев В. П. Труды 3 конференции по радиофизике. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 1999. С. 84.
11. Докучаев В. П. // Изв. вузов. Радиофизика. 1971. Т. 14, № 1. С. 60.
12. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Мир, 1979. 832 с.
13. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. М.: ИЛ, 1949.

Нижегородский госуниверситет
им. Н. И. Лобачевского,
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию
6 сентября 1999 г.

SYNCHROTRON RADIATION IN A CIRCULAR METALLIC WAVEGUIDE

V. P. Dokuchaev

We study theoretically the influence of a circular metallic waveguide with a longitudinal magnetic field on the synchrotron radiation of a point electric charge moving along a helical trajectory coaxial with the waveguide axis. The main attention is focused on the analysis of the energy characteristics of radiation of electromagnetic E and H waves. We derive the formulas for the radiation powers of E and H waves. It is shown that, under certain conditions, slowly moving electric charges do not radiate any of these electromagnetic waves in the circular waveguide.

УДК 621.396.67

ВОЗБУЖДЕНИЕ РЕШЁТКИ НЕЛИНЕЙНЫХ НАГРУЗОК НА ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕМ ЭКРАНЕ, ПОКРЫТОМ ДИЭЛЕКТРИКОМ

Д. В. Семенихина

Методом интегральных уравнений решена задача возбуждения решётки нелинейных нагрузок на экране, покрытом слоем однородного диэлектрика, периодической решёткой источников. Численно исследовано влияние параметров диэлектрика на поле излучения представленной модели нелинейной фазированной антенной решётки при размещении решётки нитей стороннего магнитного тока на экране и на поверхности слоя.

ВВЕДЕНИЕ

Применение антенн с нелинейными нагрузками (АНН), работающих одновременно на нескольких кратных частотах, ограничивается обычно случаями, когда расстояние до приёмной системы невелико, поскольку применяемые на практике нелинейные нагрузки обеспечивают малую напряжённость поля, излучаемого АНН на частотах гармоник, по сравнению с полем на основной частоте. Как следует из проведённых нами ранее исследований (см., например, [1—3]), для увеличения уровня гармоник поля, излучаемого АНН, требуется либо увеличение амплитуды возбуждающих источников, либо поиск параметров нелинейных нагрузок, дающих наилучшее преобразование энергии источника с основной частоты на частоту гармоники.

Однако известно [4], что ряд электродинамических структур обладает на некоторых частотах пространственными резонансными свойствами (резонансом поля на некоторой пространственной гармонике). К таким структурам относятся плоскость, покрытая слоем диэлектрика, а также периодические решётки. В связи с этим возникает вопрос о возможности использования пространственного резонанса для увеличения уровня излучения АНН на кратных частотах.

С целью исследования этой проблемы ниже рассмотрим модель нелинейной фазированной антенной решётки — решётку нелинейных нагрузок на идеально проводящем бесконечном экране, покрытом слоем диэлектрика, возбуждаемую решёткой сторонних источников, и изучим влияние параметров диэлектрика на характеристики её излучения.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим однопериодическую (с периодом d по координате y) решётку нелинейных нагрузок, расположенных на идеально проводящей плоскости (рассматриваем двумерную задачу, все параметры которой не зависят от координаты x). Нагрузки представляют собой узкие нелинейные щели шириной Δy (см. рис. 1). Соотношение между током $i^{э}$, текущим поперёк щели, и напряжением u на кромках щели представляет собой вольт-амперную характеристику (ВАХ) нелинейной нагрузки и задаётся в виде [1]

$$i^{э} = \sum_{\nu=1}^{P} \left(a_\nu u^\nu + b_\mu \frac{\mathrm{d}u^\nu}{\mathrm{d}t} \right),$$

где P — степень полинома, a_ν и b_ν — коэффициенты, определяемые электрофизическими свойствами нагрузки. Плоскость покрыта слоем диэлектрика толщиной b с однородными диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_{\mathrm{a}2}$, магнитной проницаемостью $\mu_{\mathrm{a}2}$, проводимостью $\sigma^{э}$. Структура возбуждается решёткой

(с периодом d) сторонних источников, расположенной внутри слоя, параметры которой не зависят от координаты x. Источники являются гармоническими с частотой ω. При возбуждении нелинейных нагрузок спектр вторичного поля обогащается всеми гармониками основной частоты. Определим полное поле в полупространстве $z > 0$, заполненном средой с параметрами $\varepsilon_{\text{a}1}$, $\mu_{\text{a}1}$ (обозначим его как область V_1).

Решение этой задачи методом интегральных уравнений аналогично подробно изложенному в [5] решению задачи рассеяния плоской волны решёткой нелинейных нагрузок на идеально проводящей плоскости, покрытой слоем диэлектрика. Для построения системы интегральных уравнений относительно амплитуд гармоник плотности магнитного тока на поверхностях $z = 0$ и $z = -b$ запишем интегральные соотношения для магнитного поля в областях V_1 и V_2 на частотах $n\omega$ (V_2 — область, ограниченная плоскостями $z = 0$ и $z = -b$, $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$). В качестве вспомогательных выберем поля $\mathbf{E}_n^{\text{м}1}$, $\mathbf{H}_n^{\text{м}1}$ и $\mathbf{E}_n^{\text{м}2}$, $\mathbf{H}_n^{\text{м}2}$, возбуждаемые нитями синфазного магнитного тока, параллельными оси x и расположенными в точках $p_{1,2}(y, z)$ областей V_1 и V_2 соответственно; $\mathbf{E}_n^{\text{м}1}$, $\mathbf{H}_n^{\text{м}1}$ — поле, удовлетворяющее граничному условию $E_{ny}^{\text{м}1} = 0$ при $z = 0$; $\mathbf{E}_n^{\text{м}2}$, $\mathbf{H}_n^{\text{м}2}$ — поле, удовлетворяющее граничному условию $E_{ny}^{\text{м}2} = 0$ при $z = 0$; $-b$ ($z = -b$ — плоскость экрана), т. е. это поле в бесконечном плоскопараллельном волноводе. Совместив точки наблюдения $p_{1,2}$ на поверхности $z = 0$ (перемещая их из областей V_1 и V_2), получим

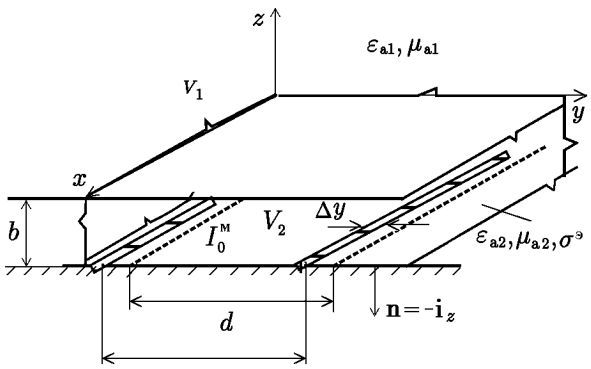

Рис. 1

$$\int\limits_y J_{n12x}^{\text{м}} \left(H_{nx}^{\text{м}1}(z' = 0) + H_{nx}^{\text{м}2}(z' = 0)\right) \mathrm{d}y' - \int\limits_y J_{nx}^{\text{м}} H_{nx}^{\text{м}2}(z' = -b)\, \mathrm{d}y' =$$

$$= -\int\limits_{S_{j2}} \left[(\mathbf{j}_{n2}^{\text{э ст}}, \mathbf{E}_n^{\text{м}2}) - (\mathbf{j}_{n2}^{\text{м ст}}, \mathbf{H}_n^{\text{м}2})\right] \mathrm{d}S', \quad (1)$$

где $\mathbf{j}_{n2}^{\text{э ст}}$ и $\mathbf{j}_{n2}^{\text{м ст}}$ — объёмные плотности электрического и магнитного токов сторонних источников, $J_{n12x}^{\text{м}} = J_{nx}^{\text{м}1} = -J_{nx}^{\text{м}2}$, $J_{nx}^{\text{м}1}$ и $J_{nx}^{\text{м}2}$ — плотности магнитных токов, текущих по поверхностям $z = \pm 0$; $J_{nx}^{\text{м}}$ — плотность магнитного тока на поверхности $z = -b$, S_{j2} — область источников, $S_{j2} \in V_2$.

Учитывая, что магнитные токи при $z = -b$ существуют только в пределах нелинейных нагрузок, второе слагаемое в левой части (1) можно записать как

$$\sum_{N=-\infty}^{+\infty} \int\limits_{y_N - \Delta y/2}^{y_N + \Delta y/2} J_{nNx}^{\text{м}} H_{nx}^{\text{м}2}\, \mathrm{d}y',$$

где y_N и $J_{nNx}^{\text{м}}$ — координата середины нагрузки на N-м периоде и плотность магнитного тока в её пределах. Граничные условия на каждой m-й нагрузке представляют собой нелинейное соотношение между гармониками компонент векторов электрического и магнитного поверхностных токов (последние получаются на основе вышеприведённой ВАХ нагрузки [1]). С учётом того, что параметры нелинейной нагрузки не зависят от координаты x, граничные условия имеют вид [6] (при $P = 3$)

$$J_{nmy}^{\text{э}} = \Delta y\, A_n J_{nmx}^{\text{м}} + (\Delta y)^2 B_n \sum_{s=-\infty}^{+\infty} J_{smx}^{\text{м}} J_{(n-s)mx}^{\text{м}} + (\Delta y)^3 C_n \sum_{q=-\infty}^{+\infty} J_{(n-q)mx}^{\text{м}} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} J_{(q-s)mx}^{\text{м}} J_{smx}^{\text{м}}, \quad (2)$$

где $J^{\text{э}}_{nmy}$ — компонента электрического поверхностного тока на m-й нагрузке, $A_n = a_1 + in\omega b_1$, $B_n = a_2 + in\omega b_2$, $C_n = a_3 + in\omega b_3$. Помещая точку наблюдения в интегральных соотношениях для полей в области V_2 на поверхность m-й нелинейной нагрузки и применяя граничное условие (2), получим нелинейные интегральные уравнения вида

$$\Delta y\, A_n J^{\text{м}}_{nmx} + (\Delta y)^2 B_n \sum_{s=-\infty}^{+\infty} J^{\text{м}}_{smx} J^{\text{м}}_{(n-s)mx} + (\Delta y)^3 C_n \sum_{q=-\infty}^{+\infty} J^{\text{м}}_{(n-q)mx} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} J^{\text{м}}_{(q-s)mx} J^{\text{м}}_{smx} =$$
$$= -\int\limits_{S_{j2}} [(\mathbf{j}^{\text{э ст}}_{n2}, \mathbf{E}^{\text{м}2}_n) - (\mathbf{j}^{\text{м ст}}_{n2}, \mathbf{H}^{\text{м}2}_n)]\, \mathrm{d}S' - \int\limits_{y} J^{\text{м}}_{n12x} H^{\text{м}2}_{nx}(z'=0)\, \mathrm{d}y' +$$
$$+ \sum_{N=-\infty}^{+\infty} \int\limits_{y_N-\Delta y/2}^{y_N+\Delta y/2} J^{\text{м}}_{nNx} H^{\text{м}2}_{nx}(z'=-b)\, \mathrm{d}y', \quad (3)$$

где $m, n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$.

Уравнения (1) и (3) представляют собой бесконечную систему нелинейных интегральных уравнений данной задачи.

2. АЛГОРИТМИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ

Для определённости будем считать, что возбуждение нелинейных нагрузок осуществляется периодической решёткой нитей магнитных токов, т. е.

$$\mathbf{j}^{\text{э ст}}_{n2} = 0, \quad \mathbf{j}^{\text{м ст}}_{n2} = \mathbf{i}_x\,(\delta^1_n + \delta^{-1}_n) \sum_{N=-\infty}^{+\infty} I^{\text{м}}_0 e^{-iNt_n} \delta(y - y_0 - Nd)\delta(z - z_0),$$

где δ^m_n — символ Кронекера, t_n — сдвиг фаз между соседними токами, $\mathbf{i}_x$ — орт оси x. Поскольку возбуждение решётки удовлетворяет условию $\mathbf{j}^{\text{м ст}}_{n2}(y+d) = \mathbf{j}^{\text{м ст}}_{n2}(y)e^{-it_n}$, а структура антенной решётки является периодически симметричной, то для неё выполняется теорема Флоке [7]. Следовательно, достаточно определить поверхностные токи на нулевом периоде решётки, поскольку решение задачи в этом случае должно быть периодическим, т. е. $J^{\text{м}}_{n12x}(y+Nd) = J^{\text{м}}_{n12x}(y)e^{-iNt_n}$.

Действительно, можно показать, что решение системы уравнений (1), (3) сводится к определению поверхностных токов на нулевом периоде решётки. Преобразование интегралов при $z' = 0$ совпадает с приведённым в [5]. Например, первое слагаемое в левой части уравнения (1) принимает вид

$$\int\limits_{y} J^{\text{м}}_{n12x} H^{\text{м}1}_{nx}(z'=0)\, \mathrm{d}y' = \frac{k_{n1}}{2\pi i W_{n1}} \sum_{N=-\infty}^{+\infty} \int\limits_0^d J^{\text{м}}_{n12x}(y') e^{-iNt_n} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\chi_1(y'-y_{\text{b}})} e^{-i\chi_1 Nd}}{\sqrt{\chi_1^2 - k_{n1}^2}}\, \mathrm{d}\chi_1\, \mathrm{d}y' =$$
$$= \frac{k_{n1}}{2\pi i W_{n1}} \int\limits_0^d J^{\text{м}}_{n12x}(y') \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sum_{N=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\chi_1(y'-y_{\text{b}})} e^{-i(\chi_1 + t_n/d)Nd}}{\sqrt{\chi_1^2 - k_{n1}^2}}\, \mathrm{d}\chi_1\, \mathrm{d}y'.$$

Применяя в подынтегральном выражении формулу суммирования Пуассона [7], получаем

$$\int\limits_{y} J^{\text{м}}_{n12x} H^{\text{м}1}_{nx}(z'=0)\, \mathrm{d}y' = \frac{k_{n1}}{iW_{n1}d} \int\limits_0^d J^{\text{м}}_{n12x}(y') \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i(2\pi l - t_n)(y'-y_{\text{b}})/d}}{\sqrt{(2\pi l - t_n)^2/d^2 - k_{n1}^2}}\, \mathrm{d}y',$$

где k_{n1} и W_{n1} — коэффициент распространения и характеристическое сопротивление среды в области V_1, y_{b} — координата вспомогательного источника.

Аналогично интегралы при $z' = -b$ в (1) и (3) с учётом выражения для функции Грина плоскопараллельного волновода [8] приводятся к виду

$$\sum_{N=-\infty}^{+\infty} \int\limits_{y_N-\Delta y/2}^{y_N+\Delta y/2} J^{\text{м}}_{nNx} H^{\text{м}2}_{nx}\,\mathrm{d}y' = \frac{k_{n2}}{2\pi i W_{n2}} \sum_{N=-\infty}^{+\infty} \int\limits_0^d J^{\text{м}}_{n0x} e^{-iNt_n} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\chi_2(y'-y_{\text{b}})} e^{-i\chi_2 N d}}{\gamma_{n2}\,\mathrm{sh}(\gamma_{n2} b)}\,\mathrm{d}\chi_2\,\mathrm{d}y',$$

где k_{n2} и W_{n2} — коэффициент распространения и характеристическое сопротивление среды в области V_2; $\gamma_{n2} = \sqrt{\chi_2^2 - k_{n2}^2}$. Внося сумму под знак интеграла и просуммировав по формуле Пуассона, получаем

$$\sum_{N=-\infty}^{+\infty} \int\limits_{y_N-\Delta y/2}^{y_N+\Delta y/2} J^{\text{м}}_{nNx} H^{\text{м}2}_{nx}\,\mathrm{d}y' = \frac{k_{n2}}{iW_{n2} d} \int\limits_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} J^{\text{м}}_{n0x} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i(2\pi l - t_n)(y'-y_{\text{b}})/d}}{\gamma_{n2l}\,\mathrm{sh}(\gamma_{n2l} b)}\,\mathrm{d}y',$$

где $\gamma_{n2l} = \sqrt{(2\pi l - t_n)^2/d^2 - k_{n2}^2}$.

После этих преобразований для решения системы нелинейных интегральных уравнений (1), (3) применим метод моментов. В качестве базисных функций для неизвестных токов выберем кусочно-постоянные функции, причём ток в пределах нелинейной нагрузки будем считать постоянным ($\Delta y < \lambda/30$, где λ — длина волны излучения источника), а на поверхности $z = 0$ примем

$$J^{\text{м}}_{n12x}(y) = \begin{cases} J^{\text{м}}_{n12x}(y_\eta) = J^{\text{м}}_{n12\eta x}, & y \in [y_\eta - \Delta y/2, \quad y_\eta + \Delta y/2]; \\ 0, & y \notin [y_\eta - \Delta y/2, \quad y_\eta + \Delta y/2], \end{cases} \tag{4}$$

где $\Delta y \le \lambda/30$, y_η — середина η-го участка разбиения $\eta = 1, 2, \ldots, N_1$.

В качестве пробных выбираем δ-функции. Тогда система интегральных уравнений (1), (3) сводится к системе нелинейных алгебраических уравнений вида

$$\sum_{\upsilon=1}^{N_1} J^{\text{м}}_{n12\upsilon x} \rho^{00}_{n\upsilon\eta} - J^{\text{м}}_{n0x} \rho^{(-b)0}_{n\eta} = -F_{n\eta},$$

$$\Delta y\, J^{\text{м}}_{n0x} A_n + (\Delta y)^2 B_n \sum_{s=-\infty}^{+\infty} J^{\text{м}}_{s0x} J^{\text{м}}_{(n-s)0x} + (\Delta y)^3 C_n \sum_{q=-\infty}^{+\infty} J^{\text{м}}_{(n-q)0x} \times$$
$$\times \sum_{s=-\infty}^{+\infty} J^{\text{м}}_{(q-s)0x} J^{\text{м}}_{s0x} - J^{\text{м}}_{n0x} \rho^{(-b)(-b)}_{n0} + \sum_{\upsilon=1}^{N_1} J^{\text{м}}_{n12\upsilon x} \rho^{0(-b)}_{n\upsilon 0} = -F_{n0}, \tag{5}$$

в которой

$$F_{n\binom{\eta}{0}} = -\int\limits_{S_{j2}} (\mathbf{j}^{\text{м ст}}_{n2}, \mathbf{H}^{\text{м}2}_n)\,\mathrm{d}S' = -\frac{(\delta_n^1 + \delta_n^{-1})\, k_{n2} I^{\text{м}}_0}{2iW_{n2} d} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\Lambda_{nl}(y_0 - y_{\text{b}})}}{\gamma_{n2l}\,\mathrm{sh}(\gamma_{n2l} b)} \times$$
$$\times \begin{cases} \mathrm{ch}(\gamma_{n2l} z_{\text{b}})\,\mathrm{ch}[\gamma_{n2l}(b + z_0)], & z_{\text{b}} > z_0; \\ \mathrm{ch}(\gamma_{n2l} z_0)\,\mathrm{ch}[\gamma_{n2l}(b + z_{\text{b}})], & z_{\text{b}} < z_0, \end{cases}$$

где $\eta = 1, 2, \ldots, N_1$, $y_{\text{b}} = y_\eta$, $z_{\text{b}} = 0$ для $F_{n\eta}$ и $y_{\text{b}} = 0$, $z_{\text{b}} = -b$ для F_{n0}; $\Lambda_{nl} = (2\pi l - t_n)/d$. Выражения для коэффициентов ρ приведены в [5].

3. ПОЛЕ ИЗЛУЧЕНИЯ РЕШЁТКИ

Определим поле излучения решётки в области V_1 по теореме эквивалентных поверхностных токов [4]. Выберем в качестве вспомогательного поле, возбуждаемое нитью магнитного тока в верхнем полупространстве с идеально проводящей границей, тогда

$$H_{nx}(y,z) = \int\limits_y J^{\text{м}}_{n12x} H^{\text{м}1}_{nx}\,\mathrm{d}y' = \frac{k_{n1}\,\Delta y}{iW_{n1}d}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\frac{\exp(i\Lambda_{nl}y)\exp\left(-i\sqrt{k_{n1}^2-\Lambda_{nl}^2}\,z\right)}{\sqrt{\Lambda_{nl}^2-k_{n1}^2}}\times$$
$$\times\sum_{\eta=1}^{N} J^{\text{м}}_{n12\eta x}\,\mathrm{sinc}(\Lambda_{nl}\,\Delta y/2)\exp(-i\Lambda_{nl}y_\eta) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} H_{nlx}. \quad (6)$$

В это выражение подставляются значения $J^{\text{м}}_{n12\eta x}$, вычисленные из решения системы (5). Поле в этом случае уже представлено в виде пространственного спектра волн Флоке. Амплитуды распространяющихся гармоник Флоке находим из выражения (6):

$$|H_{nlx}| = \frac{\omega_n\,|\varepsilon_{\text{a}1}|\,\Delta y}{d\sqrt{\Lambda_{nl}^2-k_{n1}^2}}\left|\sum_{\eta=1}^{N} J^{\text{м}}_{n12\eta x}\,\mathrm{sinc}(\Lambda_{nl}\,\Delta y/2)\exp(-i\Lambda_{nl}y_\eta)\right|.$$

4. АНАЛИЗ ХАРАКТЕРИСТИК ИЗЛУЧЕНИЯ

Рассмотрим характеристики поля одномодовой (излучающей на первой и третьей частотных гармониках) решётки при различных параметрах покрытия ($b/\lambda, \varepsilon = \varepsilon_{\text{a}2}/\varepsilon_0, \sigma^{\text{э}}$, ε_0 — диэлектрическая постоянная), решётки (d/λ) и сторонних источников (сдвига фаз сторонних токов или, что аналогично, при различных углах излучения поля) при размещении решётки нитей стороннего магнитного тока на экране и на поверхности слоя.

Характер зависимости $|H_{1x}(\varepsilon)|$ на основной частоте определяется положением решётки сторонних источников относительно решётки нагрузок, поскольку на основной частоте, по сути, имеется либо двухэлементная (при $z_0 = -b$), либо двухслойная (при $z_0 \neq -b$) решётка, и поле излучения H_{1x} определяется наложением полей решёток сторонних и вторичных токов. При этом частотные свойства поля решётки вторичных токов зависят от параметров решётки сторонних токов. Если решётка сторонних источников лежит в плоскости экрана (источники и нагрузки расположены на малом расстоянии, равном 10^{-5} м, друг от друга), то зависимости $|H_{1x}(\varepsilon)|$ гладкие (рис. 2*а*); в некотором интервале значений ε, ширина которого зависит от b/λ и d/λ, поле решётки на основной частоте больше, чем при отсутствии покрытия. Если решётка источников лежит на слое диэлектрика, то зависимости $|H_{1x}(\varepsilon)|$ имеют ярко выраженные минимумы (рис. 3*а*), в которых поле покрытой диэлектриком решётки нагрузок приблизительно на 40 дБ меньше, чем в случае без покрытия. Можно считать, что для таких параметров покрытия решётка ослепляется, т. е. поле уменьшается более чем на 30 дБ. Положение минимума смещается в сторону бóльших ε при возрастании сдвига фаз токов соседних сторонних источников, что эквивалентно увеличению угла излучения θ нулевой моды Флоке (см. рис. 3*а*). Зависимости $|H_{3x}(\varepsilon)|$ носят резонансный характер при любом положении источников, число и положение резонансов определяется толщиной слоя и периодом решётки (как, например, на рис. 2*б*, 3*б*). Смещение решётки сторонних токов относительно решётки нагрузок как в плоскости решётки (по координате y), так и в перпендикулярном направлении (по координате z) не приводит к изменению характера зависимостей $|H_{3x}(\varepsilon)|$. Причиной экстремумов, по-видимому, является изменение структуры поля из-за пространственных резонансов внутри диэлектрического слоя, поскольку при наличии электрических

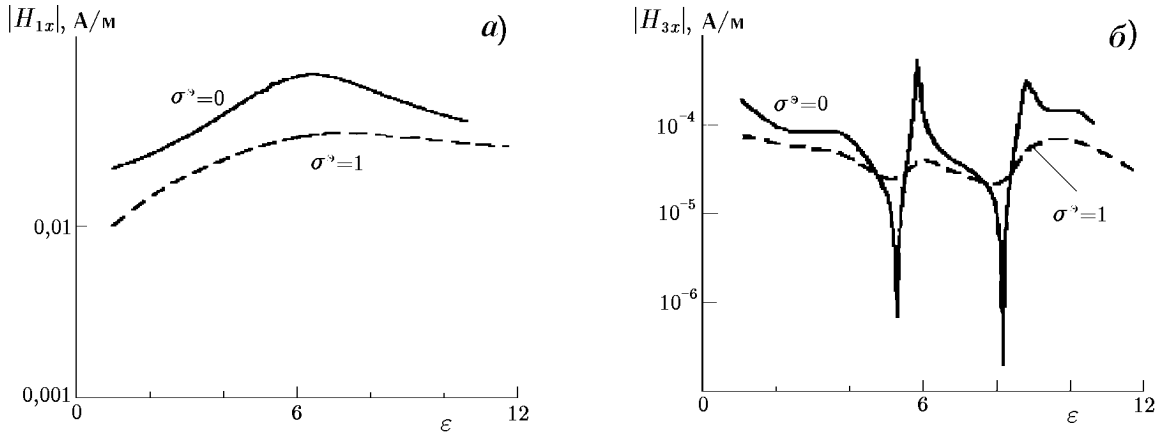

Рис. 2

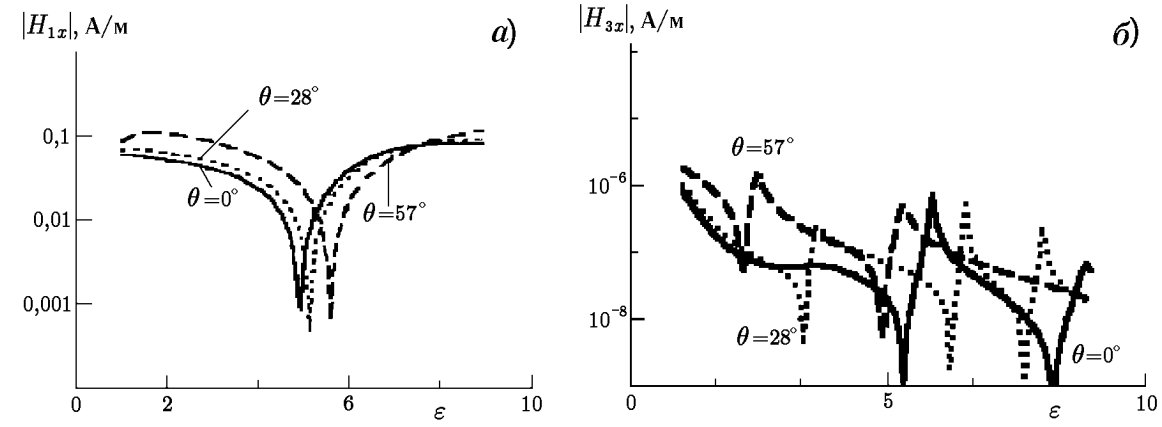

Рис. 3

потерь в слое ($\sigma^э \neq 0$) экстремумы сглаживаются (см. рис. 2*б*). Отметим, что при некоторых ε, соответствующих максимумам $|H_{3x}(\varepsilon)|$, амплитуда третьей гармоники поля может превышать амплитуду поля решётки без диэлектрического покрытия на величину от нескольких до 20 дБ (рис. 2*б*), а в точках минимумов поле решётки с покрытием на несколько десятков децибел меньше, чем при $\varepsilon = 1$ (рис. 2*б*, 3*б*).

Таким образом, значения ε, соответствующие максимумам зависимостей $|H_{3x}(\varepsilon)|$ на рис. 2*б*, могут быть рекомендованы для увеличения излучения решётки на частоте третьей гармоники, а значения, соответствующие минимумам зависимостей $|H_{1x}(\varepsilon)|$ на рис. 3*а* — для реализации двухчастотного режима работы фазированной антенной решётки.

Зависимости амплитуд гармоник излучаемого решёткой поля от толщины диэлектрического слоя имеют вид, аналогичный показанному на рис. 2, 3. Значения b/λ, при которых наблюдаются экстремумы функций $|H_{1,3x}(b/\lambda)|$, зависят от сдвига фаз сторонних токов. Число экстремумов при одинаковой толщине слоя определяется также сдвигом фаз t_n и относительной диэлектрической проницаемостью ε.

Кроме того, сдвиг фаз t_n определяет и амплитуду излучаемого поля. На рис. 4 показаны зависимости амплитуд гармоник нулевой моды Флоке от угла излучения θ ($\sin\theta_n = t_n/(k_{n1}d)$). Анализ численных результатов показал, что при выбранном периоде решётки d/λ отличие графика $|H_{1x}(\theta)|$ от соот-

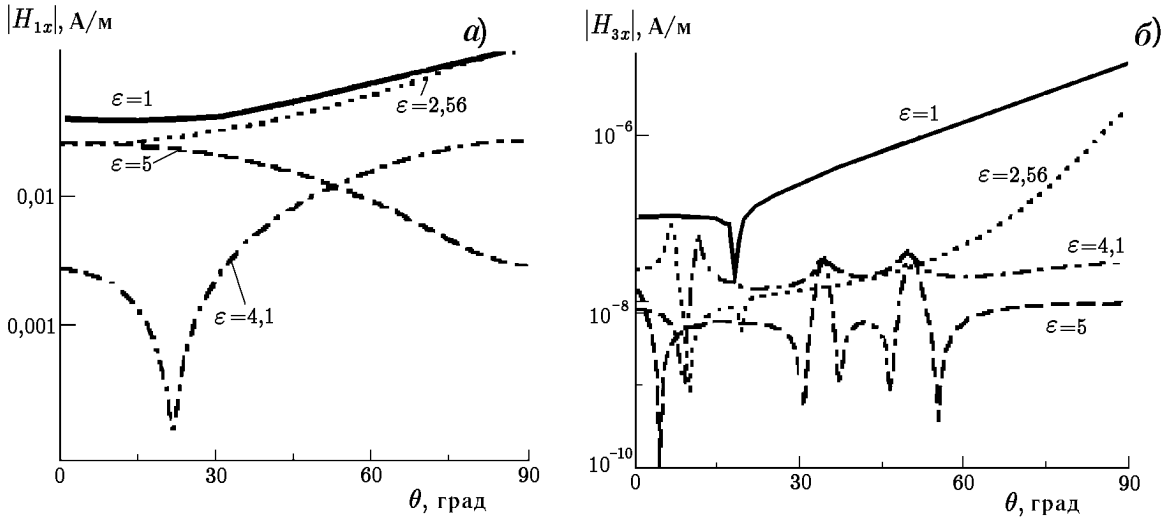

Рис. 4

ветствующей характеристики решётки без покрытия определяется сочетанием параметров слоя $(b/\lambda, \varepsilon)$. Если при большинстве указанных параметров слой несущественно изменяет амплитуду излучаемого поля на основной частоте, то для некоторых $b/\lambda, \varepsilon$ (например при $d/\lambda = 0{,}25$; $b/\lambda = 0{,}14$; $\varepsilon = 4{,}1$) наблюдается значительное отличие характеристик $|H_{1x}(\theta)|$ (явление пространственного резонанса; см. рис. 4*а*). Для таких параметров покрытия в некоторых угловых секторах (зависящих от d/λ, b/λ и ε) амплитуда излучаемого на основной частоте поля может быть меньше, чем поле решётки без покрытия, примерно на 40 дБ.

Угловые зависимости поля третьей гармоники носят более сложный характер. Можно отметить следующие общие закономерности. Амплитуды $|H_{3x}|$ возрастают в области скользящих ($\theta \sim 90°$) углов излучения (рис. 4*б*). Графики зависимостей $|H_{3x}(\theta)|$ имеют тем больше экстремумов, чем больше ε, b/λ и период решётки.

Таким образом, при осуществлении сканирования ослепление решётки на частоте гармоники наблюдается в большем количестве угловых секторов при бóльших d/λ, b/λ и ε (под ослеплением здесь подразумевается уменьшение амплитуды излучаемого на частоте гармоники поля более чем на 10 дБ). В то же время при заданных размерах решётки, исходя из характеристик $|H_{nx}(\theta)|$, может быть подобрано покрытие, обеспечивающее равномерность амплитуды поля, излучаемого на частоте гармоники и на основной частоте, в необходимом угловом секторе или подавление излучения в заданных секторах. Отметим также, что при тех параметрах b/λ, ε, для которых излучение решётки на основной частоте на $30 \div 40$ дБ меньше, чем в случае решётки без покрытия, поле на частоте гармоники может мало отличаться от поля при $\varepsilon = 1$ (см. рис. 4). Такие параметры слоя обеспечивают уменьшение отличия амплитуд поля на основной частоте и на частоте гармоники для заданных углов излучения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Петров Б. М., Семенихина Д. В., Панычев А. И. Эффект нелинейного рассеяния. Таганрог: ТРТУ, 1997.
2. Петров Б. М., Семенихина Д. В. // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1990. Т. 33, № 5. С.81.
3. Petrov B. M., Semenikhina D. V., Panichev A. I. // 11 Intern. Wroclaw Symp. Electromag. Compat. Part 1. 1992. P. 45.
4. Марков Г. Т., Чаплин А. Ф. Возбуждение электромагнитных волн. М.: Радио и связь, 1983.

5. Семенихина Д. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 2000. Т. 43, № 6. С. 545.
6. Семенихина Д. В. // Рассеяние электромагнитных волн. Вып. 8. Таганрог, 1991. С. 14.
7. Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. М.: Изд-во иностр. лит., 1958.
8. Марков Г. Т., Васильев Е. Н. Математические методы прикладной электродинамики. М.: Сов. радио, 1970.

Таганрогский радиотехнический
университет, г. Таганрог, Россия

Поступила в редакцию
3 ноября 2000 г.

**EXCITATION OF A NONLINEAR LOAD ARRAY
ON A PERFECTLY CONDUCTING SHIELD COVERED BY A DIELECTRIC LAYER**

D. V. Semenikhina

The problem of excitation of a nonlinear load array on a perfectly conducting shield covered by a homogeneous dielectric layer is solved by the integral equation method in the case where this array is excited by a periodic source array. The influence of the coating parameters on the radiation field of the presented model of a nonlinear phased antenna array is studied numerically in the cases where the array of external filament magnetic currents are located on the screen and on the dielectric surface.

УДК 537.872:621.385.632.19

МЕЖДУТИПОВОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ КОЛЕБАНИЙ В ПОЛУСИММЕТРИЧНОМ ОТКРЫТОМ РЕЗОНАТОРЕ

И. К. Кузьмичёв

Рассмотрено взаимодействие колебаний в полусимметричном открытом резонаторе в окрестности морсовской критической точки и точки вырождения. Проанализировано поведение резонансных коэффициентов передачи, нагруженных добротностей и дисперсий исследуемых колебаний вблизи указанных точек.

Междутиповое взаимодействие колебаний впервые экспериментально обнаружено в цилиндрических объёмных резонаторах [1]. Подробное исследование этого явления для такого класса резонаторов выполнено в работе [2]. Что касается открытых резонаторов (ОР), то для них принципиальное значение приобретают дифракционные потери. Как показано в работах [3, 4], в открытых электродинамических системах взаимодействие колебаний возникает за счёт малых возмущений, которые неизбежны при наличии элементов связи на зеркалах и искажении формы границы раздела. При этом собственные частоты двух различных колебаний совпадают, а взаимодействие происходит вблизи точки вырождения (ТВ). Рассчитать такое взаимодействие можно с помощью асимптотической теории [5], которая определяет лишь часть спектра собственных колебаний, соответствующих коротковолновым колебаниям типа «прыгающий мячик» или «шепчущая галерея».

Для исследования собственных колебаний в ОР построена строгая спектральная теория [6], которая полностью объясняет явление междутипового взаимодействия колебаний. В этом случае характеристический определитель ОР как линейной колебательной системы имеет изолированную морсовскую критическую точку (МКТ), расположенную вблизи множества собственных частот.

Представляет практический интерес анализ взаимодействия колебаний вблизи МКТ и ТВ. Экспериментальному изучению этого вопроса и посвящена данная работа.

Блок-схема экспериментальной установки, с помощью которой проведены исследования взаимодействия колебаний в ОР, представлена на рис. 1. Резонатор образован плоским зеркалом с апертурой 60 мм и сферическим фокусирующим зеркалом СФЗ с радиусом кривизны $R = 60$ мм и такой же апертурой. В центре плоского зеркала расположена отражательная дифракционная решётка шириной (вдоль канавок) 10 мм и длиной 30 мм, основные параметры которой следующие: период $l = 0{,}4$ мм, ширина канавки $d = 0{,}14$ мм, глубина канавки $h = 0{,}86$ мм. При исследовании взаимодействия колебаний в пустом ОР дифракционная решётка заменяется гладкой вставкой с такими же размерами. Здесь необходимо отметить, что наличие дифракционной решётки в центре плоского зеркала ОР и элементов связи на зеркалах приводит к геометрической и электрической асимметрии резонатора. В связи с этим аксиально-симметричные типы колебаний в такой электродинамической системе распадаются на несколько мод с более сложной конфигурацией поля [7]. Поэтому, для устранения неоднозначности при проведении исследований, нами использовано усечённое плоское зеркало, длина которого вдоль образующей дифракционной решётки равна 30 мм. В этом случае в ОР будут возбуждаться колебания у которых распределение полей на зеркалах резонатора характерно для генератора дифракционного излучения [8].

Возбуждается резонатор через щель связи с размерами $3{,}6\times0{,}16$ мм в центре сферического зеркала модулированным с частотой 1 кГц СВЧ сигналом от генератора Г4-142. Для развязки в тракт включён установочный аттенюатор АТ1 (см. рис. 1). Измерения выполнены в четырёхмиллиметровом диапазо-

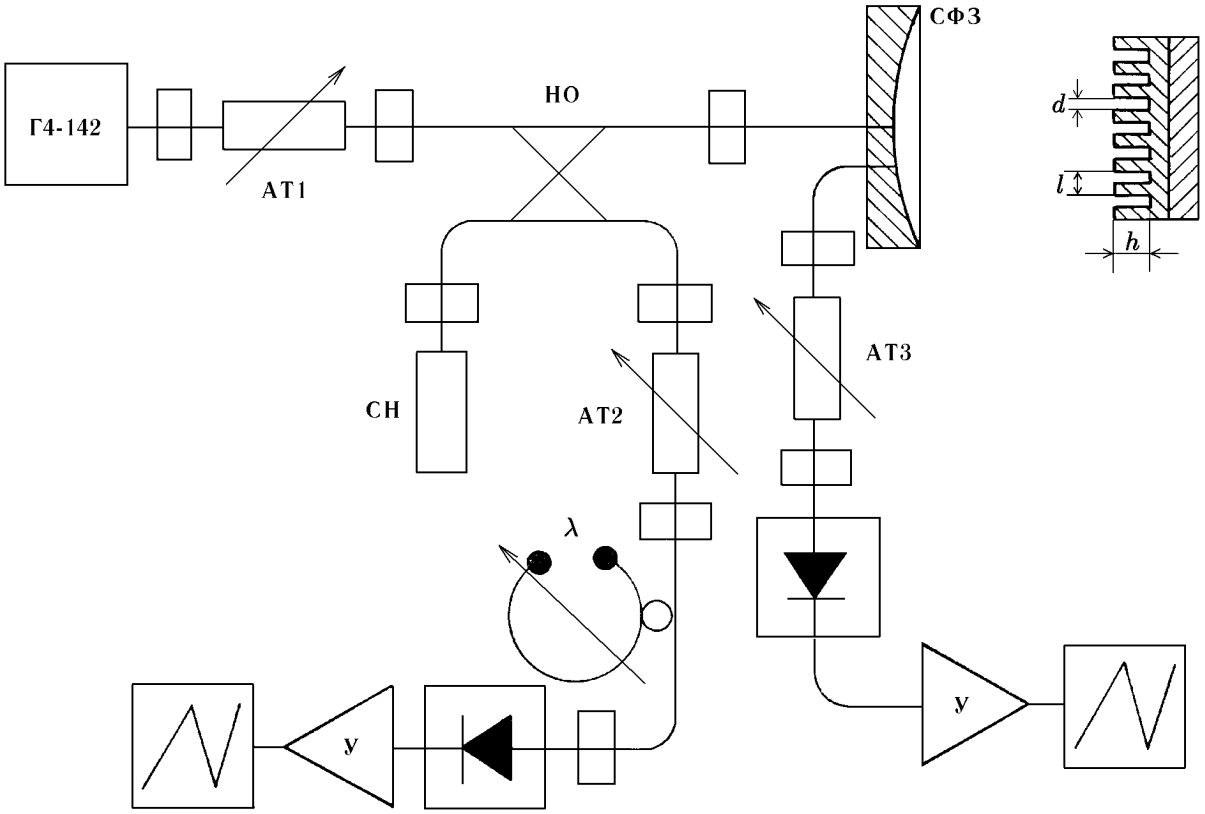

Рис. 1. Блок-схема экспериментальной установки

не длин волн. Настройка системы в резонанс осуществляется перемещением плоского зеркала вдоль оси резонатора. Расстояние между отражателями определяется с помощью измерительного проекционного устройства ИЗВ-23 с точностью 1 мкм. Подводящий волновод ориентирован таким образом, что вектор **E** электрического поля основной волны в волноводе перпендикулярен канавкам отражательной дифракционной решётки. Сигнал из резонатора выводится с помощью второго щелевого элемента связи, также расположенного на сферическом зеркале и имеющего такие же геометрические размеры, как и первый, но отстоящего от него на 7 мм.

Прошедший через исследуемый ОР сигнал поступает в приёмный тракт, состоящий из измерительного поляризационного аттенюатора АТ3, детектора, резонансного усилителя и осциллографа.

Для контроля частоты и уровня подводимой мощности в схеме предусмотрен дополнительный приёмный тракт, в состав которого входят направленный ответвитель НО, развязывающий аттенюатор АТ2, резонансный волномер, детектор, резонансный усилитель и осциллограф. Для компенсации отражённого от ОР сигнала в схему включена согласованная нагрузка СН.

Результаты измерения резонансных коэффициентов передачи $K_{\text{р}}$ в зависимости от изменения нормированного расстояния между зеркалами L/R для двух типов колебаний в ОР с отражательной дифракционной решёткой, квази-$\text{ТЕМ}_{40(q-1)}$ (кривая *1*, q — число полуволн между зеркалами резонатора) и квази-ТЕМ_{20q} (кривая *2*), представлены на рис. 2*а*. Измерения резонансных коэффициентов передачи проведены на фиксированной частоте $f_0 = 74{,}195$ ГГц. При этом идентификация каждого из исследуемых колебаний по мере уменьшения расстояния между отражателями ОР производилась с помощью пробного тела, представляющего собой металлическую сферу диаметром 1 мм, закреплён-

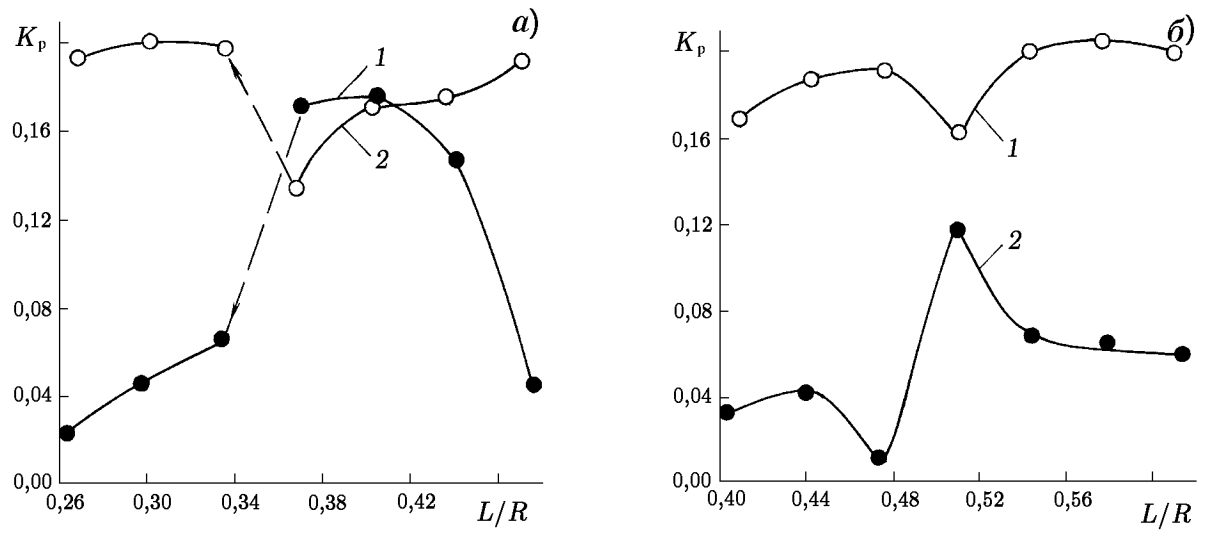

Рис. 2. Поведение резонансных коэффициентов передачи исследуемых типов колебаний вблизи МКТ (*а*) и ТВ (*б*)

ную на капроновой нити толщиной 0,1 мм и протягиваемую через объём резонатора перпендикулярно его оси вблизи плоского зеркала. Как видно из рис. 2*а*, наблюдается резкое изменение $K_р$ исследуемых колебаний в окрестности точки $L/R \approx 0{,}35$, которую в дальнейшем будем называть точкой совпадения. При приближении к этой точке со стороны бóльших расстояний между отражателями доминирующим является колебание квази-$ТЕМ_{40(q-1)}$, которое характеризуется более высоким коэффициентом передачи $K_р$, а следовательно, и более высокой нагруженной добротностью $Q_н$. После перехода через точку совпадения происходит взаимное преобразование колебаний: колебание квази-$ТЕМ_{40(q-1)}$ резко затухает, в то время как колебание квази-$ТЕМ_{20q}$ становится более добротным. При этом необходимо подчеркнуть, что колебание квази-$ТЕМ_{20q}$ является основным, поскольку колебание $ТЕМ_{00q}$ в такой электродинамической системе при малых расстояниях между зеркалами не возбуждается [9].

Для сравнения на рис. 2*б* показано поведение резонансных коэффициентов передачи $K_р$ двух типов колебаний, $ТЕМ_{00q}$ (кривая *1*) и $ТЕМ_{40(q-1)}$ (кривая *2*) при изменении нормированного расстояния L/R между зеркалами резонатора, в котором дифракционная решётка заменена гладкой вставкой. В окрестности точки совпадения ($L/R \approx 0{,}51$) также наблюдается резкое изменение резонансных коэффициентов передачи исследуемых колебаний: $K_р$ более добротного колебания $ТЕМ_{00q}$ падает, в то время как для низкодобротного колебания $ТЕМ_{40(q-1)}$ коэффициент передачи возрастает. После перехода через эту точку общий ход зависимостей $K_р$ от L/R для обоих типов колебаний сохраняется, чего нельзя сказать о поведении $K_р$ колебаний в ОР с дифракционной решёткой. Такое поведение резонансных коэффициентов передачи рассматриваемых типов колебаний при уменьшении L/R (рис. 2*а*), как показано в работе [9], характерно при взаимодействии колебаний вблизи МКТ. В то же время общий ход зависимостей $K_р$ от L/R на рис. 2*б* соответствует случаю взаимодействия колебаний вблизи ТВ [10].

Для более полного понимания физической природы явления взаимодействия колебаний в полусимметричном ОР представляет практический интерес изучение поведения нагруженной добротности $Q_н$ исследуемых колебаний, которая является мерой потерь в электродинамической системе, при изменении L/R.

На рис. 3*а* представлены зависимости логарифма нагруженной добротности от нормированного расстояния между зеркалами ОР с дифракционной решёткой для колебаний квази-$ТЕМ_{40(q-1)}$ (кривая *1*) и квази-$ТЕМ_{20q}$ (кривая *2*). Измерение $Q_н$ для каждого индекса q исследуемых колебаний про-

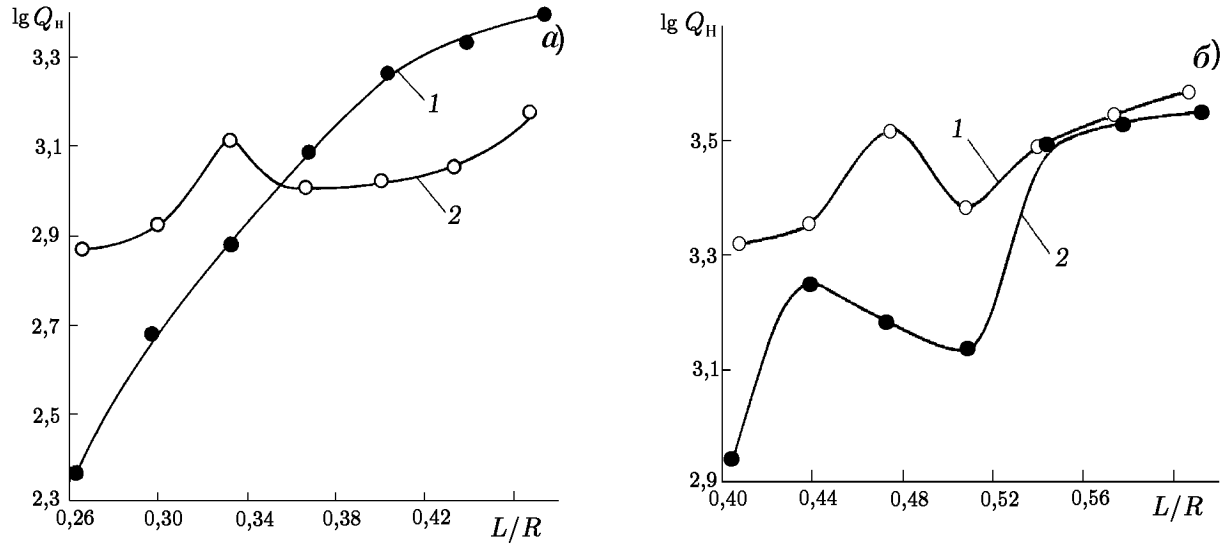

Рис. 3. Изменение нагруженных добротностей исследуемых типов колебаний при перестройке резонатора вблизи МКТ (*а*) и ТВ (*б*)

изводится по полуширине резонансной кривой [11, 12]. Относительная среднеквадратичная погрешность измерения нагруженной добротности не превышает 8 % [12]. Как видно, нагруженная добротность $Q_н$ исследуемых колебаний имеет резко выраженную зависимость от L/R. По мере уменьшения расстояния между зеркалами ОР нагруженные добротности обоих исследуемых колебаний падают. При этом колебание квази-ТЕМ$_{40(q-1)}$ является более добротным по сравнению с квази-ТЕМ$_{20q}$. В окрестности точки совпадения ($L/R = 0{,}352$) добротности обоих колебаний становятся сравнимы, а при дальнейшем уменьшении расстояния между зеркалами $Q_н$ колебания квази-ТЕМ$_{20q}$ возрастает примерно в 1,3 раза, в то время как добротность колебания квази-ТЕМ$_{40(q-1)}$ продолжает падать, что хорошо коррелирует с экспериментальными зависимостями на рис. 2*а*.

Совсем по-иному ведут себя зависимости логарифма нагруженной добротности исследуемых типов колебаний при изменении расстояния между зеркалами ОР без дифракционной решётки, которые представлены на рис. 3*б*. Здесь показаны зависимости $Q_н$ от L/R для колебаний ТЕМ$_{00q}$ (кривая *1*) и ТЕМ$_{40(q-1)}$ (кривая *2*). По мере уменьшения L/R добротности исследуемых колебаний падают. В окрестности точки совпадения ($L/R = 0{,}509$) наблюдается резкое падение $Q_н$ обоих колебаний, что связано с возрастанием дифракционных потерь в такой электродинамической системе в связи с образованием сложного гибридного колебания. При дальнейшем уменьшении L/R добротности обоих исследуемых колебаний возрастают.

Представляет также интерес анализ поведения исследуемых типов колебаний при изменении частоты.

Дисперсионные кривые колебаний квази-ТЕМ$_{20q}$ и квази-ТЕМ$_{40(q-1)}$, возбуждаемых в ОР с отражательной дифракционной решёткой, представлены на рис. 4*а*. Методика получения этих зависимостей состоит в следующем. При выполнении предыдущих исследований измерения проводились на фиксированной частоте f_0. В этом случае оба типа колебаний, квази-ТЕМ$_{20q}$ и квази-ТЕМ$_{40(q-1)}$, для каждого q характеризуются своими резонансными расстояниями между зеркалами ОР, разность между которыми по мере приближения к МКТ уменьшается. Поэтому при проведении эксперимента устанавливаем такое расстояние между зеркалами резонатора, чтобы для конкретного q нормированное резонансное расстояние L/R для колебания квази-ТЕМ$_{20q}$ было меньше, а для колебания квази-ТЕМ$_{40(q-1)}$ — больше выбранного. Теперь перестраиваем генератор высокочастотных сигналов Г4-142 таким образом, чтобы в резонаторе возбудились поочерёдно оба колебания. Для более точного

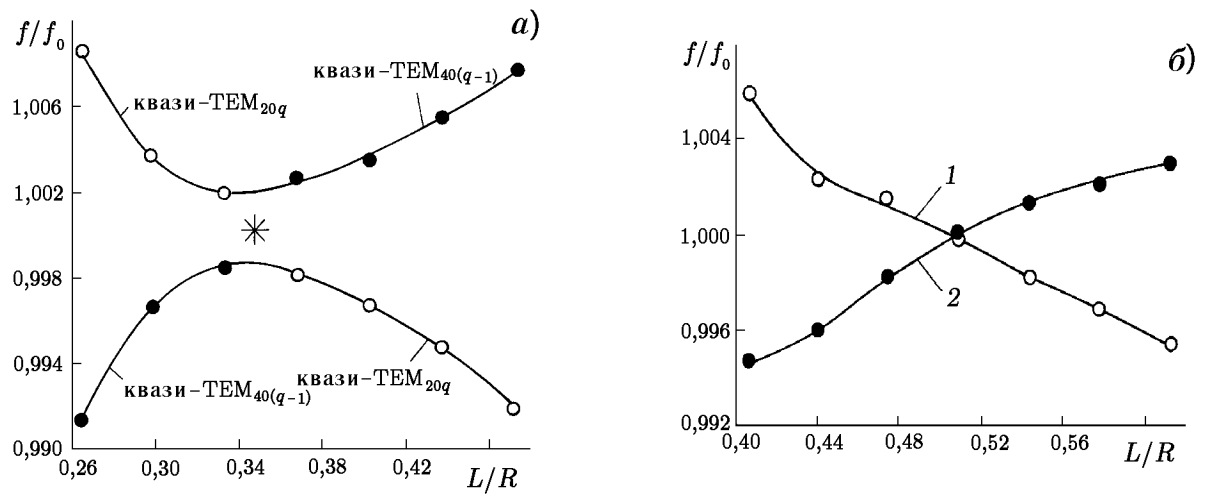

Рис. 4. Зависимости относительного изменения частоты исследуемых типов колебаний от расстояния между зеркалами ОР в окрестностях МКТ (*а*) и ТВ (*б*)

измерения частоты исследуемых колебаний используем резонансный волномер. Процедуру измерений повторяем для колебаний с меньшими индексами q. Здесь необходимо заметить, что относительная среднеквадратичная погрешность измерения частоты с помощью резонансного волномера в миллиметровом диапазоне длин волн не превышает 5 % [10].

При $L/R = 0{,}352$ модуль разности собственных частот исследуемых колебаний минимален. В этом случае нагруженные добротности колебаний квази-ТЕМ$_{20q}$ и квази-ТЕМ$_{40(q-1)}$ равны (см. рис. 3*а*). В момент перехода через МКТ исследуемые колебания взаимопреобразуются и обмениваются энергиями. При дальнейшем уменьшении L/R ветви дисперсионных характеристик, которым соответствуют указанные колебания, резко расходятся.

Измеренные аналогичным образом дисперсионные характеристики колебаний ТЕМ$_{00q}$ (кривая *1*) и ТЕМ$_{40(q-1)}$ (кривая *2*), возбуждаемых в ОР без дифракционной решётки, показаны на рис. 4*б*. Как видно, по мере уменьшения L/R, как и в предыдущем эксперименте, разность резонансных расстояний между зеркалами ОР, соответствующих исследуемым колебаниям, уменьшается. При $L/R = 0{,}509$ резонансные частоты обоих колебаний практически совпадают, т. е. при данной геометрии ОР в нём возбуждаются одновременно два колебания, которые уже можно рассматривать как одно гибридное колебание, характеризующееся более высокими дифракционными потерями и низкой нагруженной добротностью. При дальнейшем уменьшении L/R общая тенденция поведения дисперсионных характеристик обоих колебаний сохраняется, однако в этом случае дисперсионные кривые, соответствующие исследуемым колебаниям, расходятся не так резко, как в предыдущем случае.

Таким образом, в результате проведённых исследований было проанализировано взаимодействие колебаний вблизи МКТ и ТВ в полусимметричном ОР. Измерены резонансные коэффициенты передачи, нагруженные добротности и дисперсионные характеристики исследуемых колебаний вблизи указанных особых точек спектра. Необходимо отметить, что взаимодействие колебаний вблизи ТВ в открытых резонансных системах с круговой симметрией было исследовано многими авторами [4, 7, 10]. Взаимодействие же колебаний вблизи МКТ удалось изучить благодаря тому, что была обнаружена открытая электродинамическая система (ОР с дифракционной решёткой), в которой такое взаимодействие колебаний имеет место [9]. Отражательная дифракционная решётка, расположенная на одном из зеркал резонатора, вносит существенные изменения в спектральные характеристики исследуемой открытой электродинамической системы. Благодаря этому удалось снять ограничения, связанные с неприемлемой малостью геометрических размеров простейшего конфокального ОР [6], используемо-

го для экспериментального изучения МКТ в миллиметровом диапазоне длин волн.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bleaney B., Lobser J., Penroze R. // Proc. Phys. Soc. 1947. V. 59, No. 332. P. 185.
2. Штейншлейгер В. Б. Явление взаимодействия волн в электромагнитных резонаторах. М.: Гостехтеоретиздат, 1955. 114 с.
3. Дюбко С. Ф., Камышан В. В., Шейко В. П. // Журн. техн. физики. 1965. Т. 35, № 10. С. 1806.
4. Богомолов Г. Д., Маненков А. Б. // Изв. вузов. Радиофизика. 1971. Т. 14, № 5. С. 748.
5. Вайнштейн Л. А. Открытые резонаторы и открытые волноводы. М.: Сов. радио, 1966. 476 с.
6. Шестопалов В. П. Спектральная теория и возбуждение открытых структур. Киев: Наукова думка, 1987. 288 с.
7. Вертий А. А., Деркач В. Н., Красюк В. Б., Шестопалов В. П. // Изв. вузов. Радиофизика. 1981. Т. 24, № 1. С. 76.
8. Шестопалов В. П. Физические основы миллиметровой и субмиллиметровой техники: В 2-х т. Киев: Наукова думка, 1985. Т. 2. 256 с.
9. Кузьмичёв И. К., Шестопалов В. П. // Доп. НАН України. 1996. Вып. 12. С. 90.
10. Техника субмиллиметровых волн / Под ред. Р. А. Валитова. М.: Сов. радио, 1969. 480 с.
11. Гинзтон Э. Л. Измерения на сантиметровых волнах: Пер. с англ. / Под ред. Г. А. Ремеза. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1960. 620 с.
12. Zhonghai Y., Chongwen L., Yingwei Z. // 10 Int. Conf. “Infrared and Millimeter Waves", Zake Bnena Vista, Fla, Dec. 9—13, 1985. Conf. Digest. New York, 1985. P. 350.

Институт радиофизики и электроники
НАН Украины, г. Харьков, Украина

Поступила в редакцию
11 февраля 2000 г.

INTERMODE INTERACTION IN A SEMISYMMETRIC OPEN RESONATOR

I. K. Kuz'michev

We consider the interaction between the oscillations in a semisymmetric open resonator (OR) near the Morse critical point (MCP) and the degeneration point (DP). The behavior of the resonant transmission gains, the loaded Q-factors, and the dispersion of the considered oscillations near MCP and DP are analyzed.

УДК 537.868:536.3

ЭЛЕКТРОТЕПЛОВАЯ КОЛЕБАТЕЛЬНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ В СФЕРИЧЕСКИХ СЕГНЕТОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ РЕЗОНАТОРАХ. ТРЁХМОДОВЫЙ РЕЖИМ

Г. В. Белокопытов,[1] *М. В. Журавлёв*[2]

Рассмотрены уравнения взаимодействия колебаний электромагнитного поля и температуры в нелинейном диэлектрическом резонаторе. Исследована динамика колебательной неустойчивости в системе. Рассчитаны пороговые условия электротеплового возбуждения (мощность, частота автомодуляции) в СВЧ резонаторах из танталата калия для трёхмодового варианта взаимодействия. Установлено, что условия наблюдения электротеплового возбуждения в трёхмодовом режиме весьма благоприятны, пороговая мощность возбуждения температурных колебаний меньше, чем в двухмодовом режиме, и может составлять несколько мкВт.

ВВЕДЕНИЕ

Отличительной особенностью сегнетоэлектриков является сильная зависимость диэлектрической проницаемости от температуры. Рассеяние мощности электромагнитных колебаний в сегнетоэлектрическом СВЧ резонаторе ведёт к его нагреву. При нестационарном нагреве собственная частота резонатора оказывается зависящей от времени, а вынужденные электромагнитные колебания возбуждаются не только на частоте внешнего генератора $\omega_{\text{н}}$, но и на других частотах, в частности на частоте $\omega_{\text{к}}$, близкой к собственной частоте высокодобротной моды. При этом в спектре мощности электромагнитных потерь (а значит, и в спектре колебаний температуры) возникает разностная частота $\Omega = \omega_{\text{н}} - \omega_{\text{к}}$. В свою очередь, воздействие колебаний накачки на резонатор, собственная частота которого изменяется по закону $\omega = \omega_0 + m\cos(\Omega t)$, может при определённых условиях сопровождаться ростом амплитуды комбинационной составляющей, имеющей частоту $\omega_{\text{к}}$ в спектре вынужденных колебаний.

Совместное возбуждение колебаний температуры и автомодуляции электромагнитных колебаний одночастотной накачкой в температурно-чувствительной системе было названо электротепловым возбуждением (ЭТВ) [1, 2]. Как и другие параметрические эффекты, ЭТВ может наблюдаться при условии, что мощность накачки превышает порог, определяемый настройкой колебательной системы, материальными параметрами диэлектрика и распределением электромагнитного поля и температуры в объёме резонатора. В [1] был произведён расчёт порога ЭТВ в сферических диэлектрических резонаторах для случая двухмодового взаимодействия, когда колебания с частотами $\omega_{\text{н}}$ и $\omega_{\text{н}} \pm \Omega$ возбуждались на одной электромагнитной моде, а колебания температуры на другой, релаксационной моде системы.

В настоящей работе исследуются пороговые условия для трёхмодового варианта электротеплового взаимодействия. Он реализуется, если возбуждение колебаний с частотами $\omega_{\text{н}}$ и $\omega_{\text{н}} - \Omega$ происходит на различных электромагнитных модах. При этом по аналогии с другим параметрическим эффектом, стрикционным параметрическим возбуждением [3], где также возможны двух- и трёхмодовые варианты взаимодействия, можно ожидать, что для ряда комбинаций мод порог ЭТВ при трёхмодовом взаимодействии окажется существенно ниже, чем для двухмодового варианта.

Раскладывая электромагнитные и температурные поля по собственным модам резонатора, можно представить электротепловые процессы как взаимодействие совокупности нелинейно связанных осцилляторов и релаксационных звеньев. Цепочки уравнений, описывающие это взаимодействие, были получены в [1]. Далее мы будем использовать результаты и обозначения [1] без подробных пояснений.

1. СТАЦИОНАРНЫЕ ЭЛЕКТРОТЕПЛОВЫЕ КОЛЕБАНИЯ В ТРЁХМОДОВОМ РЕЖИМЕ

Рассмотрим связанные электромагнитные и температурные колебания в условиях, когда вблизи порога электротепловой неустойчивости при резонансной накачке имеют значительную амплитуду и эффективно участвуют в нелинейном взаимодействии лишь колебания, соответствующие двум электромагнитным модам с собственными частотами ω_1 и ω_2 ($\omega_1 > \omega_2$) и одной моде температурной релаксации. Поскольку $\Omega \ll \omega_2$, трёхмодовое взаимодействие возможно лишь в резонаторах, где имеются электромагнитные моды, близкие к вырождению. Именно такая ситуация реализуется в сферических диэлектрических резонаторах, где моды E_{mnl} и H_{mnl} являются $(2n+1)$-кратно вырожденными. Помещая вблизи такого резонатора возмущающий элемент, например металлический штырь, можно снять вырождение и управлять спектром собственных частот.

Исследование нелинейного взаимодействия двух мод электромагнитных колебаний (обобщённые координаты x_1 и x_2, собственные частоты ω_1 и ω_2) и одной моды температурной релаксации (обобщённая координата η и частота релаксации λ_s) проведём на основе уравнений

$$\ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 = F_1 \cos(\omega t - \varphi_1) - R_1 \dot{x}_1 - H_1 \eta x_2, \tag{1}$$

$$\ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_1 = F_2 \cos(\omega t - \varphi_2) - R_2 \dot{x}_2 - H_2 \eta x_1, \tag{2}$$

$$\dot{\eta} = -\lambda_s \eta + K_s \; x_1 x_2, \tag{3}$$

которые являются следствием общей цепочки уравнений [1]. Здесь F_1 и F_2 — эффективные амплитуды сторонних возмущающих источников, а φ_1 и φ_2 — их фазы. По сравнению с [1] упрощены обозначения интегральных коэффициентов электротеплового взаимодействия: $H_1{=}H_{12s}$, $H_2{=}H_{21s}$, $K_s{=}K_{s12}$, и коэффициентов затухания: $R_1 = R_{11}$, $R_2 = R_{22}$. Их конкретный вид для трёхмодового взаимодействия в сферических резонаторах будет рассмотрен в разделе 2.

При исследовании трёхмодового режима ЭТВ основной интерес представляют ситуации, когда мощность накачки мала по сравнению с двухмодовым случаем. При этом в общих уравнениях [1] можно пренебречь слагаемым $H_{11s}\eta x_1$ по сравнению с $H_{12s}\eta x_2$, $H_{22s}\eta x_2$ по сравнению с $H_{21s}\eta x_1$, а также $K_{s11}x_1^2$ по сравнению с $K_{s12}x_1x_2$, что и осуществлено в (1)–(3). Кроме того, в (1)–(3) не учтено влияние диэлектрической нелинейности, весьма заметное в двухмодовом режиме. Основанием для такого упрощения является то, что ожидаемое снижение мощности накачки при переходе от двухмодового режима ЭТВ к трёхмодовому должно сопровождаться пропорциональным уменьшением нелинейных расстроек.

Пренебрежение в (1)–(3) некоторыми членами, ответственными за электротепловое взаимодействие, физически эквивалентно предположению о том, что колебания на обеих электромагнитных модах можно считать одночастотными. Для этого требуется, чтобы резонансы ω_1 и ω_2 были узкими и хорошо разделёнными, так что

$$\omega_1/Q_1 \ll \Omega, \qquad \omega_2/Q_2 \ll \Omega,$$

где Q_1 и Q_2 — добротности соответствующих мод. Последние неравенства позволяют считать, что накачка производится на одной моде, т. е. либо $F_1 \neq 0$, $F_2 = 0$, либо $F_1 = 0$, $F_2 \neq 0$. Первый случай будем называть высокочастотной (ВЧ) накачкой, а второй — низкочастотной (НЧ) накачкой (хотя в обоих случаях $\omega_1 \approx \omega_2$).

Считая стационарные колебания x_1, x_2 и η при трёхмодовом ЭТВ гармоническими, положим в случае ВЧ накачки

$$x_1 = X_1 \cos(\omega t), \quad x_2 = X_2 \cos(\omega_{\rm s} t), \quad \eta = \Theta \cos(\Omega t + \Psi), \tag{4}$$

где $\omega_{\rm s} = \omega - \Omega$. В случае НЧ накачки будем полагать

$$x_1 = X_1 \cos(\omega t), \quad x_2 = X_2 \cos(\omega_{\rm a} t), \quad \eta = \Theta \cos(\Omega t + \Psi), \tag{5}$$

где $\omega_{\rm a} = \omega + \Omega$.

Подставив (4) или (5) в систему (1)–(3), получим уравнения для стационарных амплитуд X_1, X_2, η и Θ, фаз φ и Ψ и частоты Ω. Решая их, находим (как для ВЧ, так и для НЧ накачки)

$$\operatorname{tg}\Psi = -1/\delta, \tag{6}$$

где $\delta > 0$ — отношение частоты колебаний температуры к частоте релаксации:

$$\delta = \Omega/\lambda_s. \tag{7}$$

В случае ВЧ накачки расстройка $\xi_2 = 1 - \omega_2^2/\omega_{\rm s}^2$ оказывается отрицательной:

$$\xi_2 Q_2 = -\delta, \tag{8}$$

а при НЧ накачке расстройка $\xi_1 = 1 - \omega_1^2/\omega_{\rm a}^2$ положительна:

$$\xi_1 Q_1 = \delta. \tag{9}$$

Амплитуда колебаний на моде ВЧ накачки составляет

$$X_1^2 = -\frac{4\omega_{\rm s}^2\lambda_s}{K_s H_2 Q_2}\,\frac{1+\delta^2}{\delta}\,, \tag{10}$$

а в случае НЧ накачки

$$X_2^2 = -\frac{4\omega_{\rm a}^2\lambda_s}{K_s H_1 Q_1}\,\frac{1+\delta^2}{\delta}\,. \tag{11}$$

Формулы (10) и (11) имеют физический смысл, когда $X_1^2 > 0$ и $X_2^2 > 0$, т. е. при $H_2 K_s < 0$ и $H_1 K_s > 0$ соответственно. Учитывая определение интегральных коэффициентов $H_{1,2}$, приходим к выводу, что для трёхмодового режима ЭТВ при ВЧ накачке необходимо, чтобы диэлектрическая проницаемость возрастала с температурой, а трёхмодовое ЭТВ при НЧ накачке имеет место, если диэлектрическая проницаемость падает с температурой.

При ВЧ накачке для амплитуд колебаний на других модах справедливы выражения

$$\Theta^2 = \frac{4\omega^2\omega_{\rm s}^2 z_{\rm B}}{H_1 H_2 Q_1 Q_2}\,, \qquad X_2^2 = -\frac{4\omega_{\rm s}^2\Omega z_{\rm B}}{K_s H_1 Q_1}\,, \tag{12}$$

где

$$z_{\rm B} = -(1 + d_{\rm B}\delta) \pm \left[(F/F_{\rm B})^2 - (d_{\rm B} - \delta)^2\right]^{1/2}, \quad F_{\rm B}^2 = -\frac{4\omega^4\omega_{\rm s}^2\lambda_s}{K_s H_2 Q_1^2 Q_2}\,, \quad d_{\rm B} = \xi_1 Q_1. \tag{13}$$

При НЧ накачке аналогичным образом имеем

$$\Theta^2 = \frac{4\omega^2\omega_{\rm a}^2 z_{\rm H}}{H_1 H_2 Q_1 Q_2}\,, \qquad X_1^2 = -\frac{4\omega_{\rm a}^2\Omega z_{\rm H}}{K_s H_1 Q_1}\,, \tag{14}$$

$$z_{\rm H} = -(1 - d_{\rm H}\delta) \pm \left[(F/F_{\rm H})^2 - (d_{\rm H} + \delta)^2\right]^{1/2}, \quad F_{\rm H}^2 = \frac{4\omega^4\omega_{\rm a}^2\lambda_s}{K_s H_2 Q_2^2 Q_1}\,, \quad d_{\rm H} = \xi_2 Q_2. \tag{15}$$

Физический смысл имеют лишь положительные значения $z_{\rm B}$ и $z_{\rm H}$. При этом знак $\pm$ в (13) и (15) указывает на то, что при некоторых условиях уравнениям электротепловых колебаний удовлетворяет два набора стационарных амплитуд Θ и X_2 (или Θ и X_1).

Нетрудно установить, что при ВЧ накачке двойной набор стационарных амплитуд имеет место, если

$$d_{\mathrm{H}}\delta < -1, \qquad (d_{\mathrm{B}} - \delta)^2 < (F/F_{\mathrm{B}})^2 < (1+\delta^2)\,(1+d_{\mathrm{B}}^2), \tag{16}$$

а при НЧ накачке условия двузначности стационарного режима имеют вид

$$d_{\mathrm{H}}\delta > 1, \qquad (d_{\mathrm{H}} - \delta)^2 < (F/F_{\mathrm{H}})^2 < (1+\delta^2)\,(1+d_{\mathrm{H}}^2). \tag{17}$$

Аналогичная двузначность имеет место в трёхконтурных параметрических генераторах при жёстком возбуждении, причём известно, что устойчивым колебаниям соответствует лишь больший корень z_{B} (или z_{H}) [4]. Фазы φ_1 и φ_2 могут быть найдены из соотношений

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{\delta^2 + 1 + z_{\mathrm{B}}}{d_{\mathrm{B}}\,(\delta^2+1) + \delta z_{\mathrm{B}}}\,, \tag{18}$$

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{\delta^2 + 1 + z_{\mathrm{H}}}{d_{\mathrm{H}}\,(\delta^2+1) - \delta z_{\mathrm{H}}}\,. \tag{19}$$

В эксперименте частота накачки ω является заданной, а частота Ω колебаний температуры и комбинационные частоты ω_{s} и ω_{a} устанавливаются в зависимости от настройки колебательной системы. Поскольку в трёхмодовом режиме ЭТВ условия настройки более сложны, чем в двухмодовом, рассмотрим этот вопрос более детально. В случае ВЧ накачки для нахождения Ω и ω_{s} имеем уравнения

$$\Omega - \omega_{\mathrm{s}} = \omega, \qquad Q_2\,(\omega_{\mathrm{s}}^2 - \omega_2^2) = -\frac{\lambda_s}{\Omega}\omega_{\mathrm{s}}^2\,. \tag{20}$$

Аналогично в случае НЧ накачки Ω и ω_{a} удовлетворяют уравнениям

$$\Omega - \omega = \omega_{\mathrm{a}}, \qquad Q_1\,(\omega_{\mathrm{a}}^2 - \omega_1^2) = -\frac{\lambda_s}{\Omega}\omega_{\mathrm{a}}^2\,. \tag{21}$$

Исключим из (20) и (21) Ω и обозначим

$$\omega_{\mathrm{s}}/\omega_2 = 1 + \eta_2, \qquad \omega/\omega_2 = 1 + \zeta_2, \qquad \lambda_s/(Q_2\omega_2) = \varepsilon_2;$$

$$\omega_{\mathrm{a}}/\omega_1 = 1 + \eta_1, \qquad \omega/\omega_1 = 1 + \zeta_1, \qquad \lambda_s/(Q_1\omega_1) = \varepsilon_1.$$

Тогда для η_1 и η_2 имеют место одинаковые уравнения:

$$\eta_{1,2}^3 + (2 - \zeta_{1,2} - \varepsilon_{1,2})\,\eta_{1,2}^2 - 2\eta_{1,2}\,(\zeta_{1,2} + \varepsilon_{1,2}) - \varepsilon_{1,2} = 0. \tag{22}$$

Оценки величин, входящих в (22), показывают, что слагаемым η^3 в первом приближении можно пренебречь, так что

$$\eta_{1,2} = \frac{(\zeta_{1,2} + \varepsilon_{1,2}) \pm (\zeta_{1,2}^2 + \varepsilon_{1,2}\zeta_{1,2} + 2\varepsilon_{1,2})^{1/2}}{2 - \zeta_{1,2} - \varepsilon_{1,2}}\,. \tag{23}$$

Знак перед корнем следует выбирать с учётом условий существования стационарных колебаний. Из (8) следует, что $\eta_2 < 0$ при $\omega_2 > \omega_{\mathrm{s}}$; аналогично из (9) следует $\eta_1 < 0$ при $\omega_1 > \omega_{\mathrm{a}}$. Значит, для обоих случаев в (23) следует брать знак минус. Заметим, что $\eta_1 \approx \zeta_1/2$, $\eta_2 \approx \zeta_2/2$ с относительной погрешностью порядка ξ. Частота колебаний температуры

$$\Omega = \omega_{1,2}\,(\zeta_{1,2} - \eta_{1,2}). \tag{24}$$

В случае стационарного электротеплового возбуждения в резонаторе должна рассеиваться мощность накачки, достаточная для поддержания колебаний с амплитудой $X_{1,2}$, т. е. $P_{\text{пор}}=\omega X_{1,2}^2/(8\pi Q_{1,2})$. Минимум мощности накачки достигается при такой настройке, когда $\delta = 1$ (т. е. при $\Omega = \lambda_s$). В низкотемпературном сегнетоэлектрике $KTaO_3$ вплоть до гелиевых температур $\mathrm{d}\varepsilon/\mathrm{d}T < 0$, поэтому реализуется режим НЧ накачки. Для этого случая, в частности, имеем

$$P_{\text{пор}}^{(3)} = \frac{\omega^3}{2\pi Q_1 Q_2} \frac{\lambda_s F(\delta)}{K_{sab} H_{sab}}\,, \tag{25}$$

где $F(\delta) = (1+\delta^2)/\delta$.

Частотные зависимости Ω и $P_{\text{пор}}$ от частоты накачки, рассчитанные для ряда типичных значений параметров, приведены на рис. 1. Несмотря на наличие в колебательной системе двух контуров, обладающих высокой добротностью, фактор расстройки $F(\delta)$ при трёхмодовом ЭТВ может быть небольшим, если частотный интервал между модами резонатора приближённо равен λ_s.

2. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ И ПРАВИЛА ОТБОРА

Интенсивность электротеплового взаимодействия пропорциональна входящим в (1)–(3) интегральным коэффициентам K_{sab} и H_{sab}, где коэффициенты a и b принимают значения 1 или 2. С учётом результатов [1] их можно представить в виде:

$$K_{sab} = \frac{\sigma S_{sab}^{(v)}}{\chi_0}\,, \qquad H_{sab} = \frac{a_\varepsilon \omega^2 S_{sab}^{(v)}}{\chi_0} + \frac{a_\varepsilon c^2 S_{sab}^{(s)}}{\mu}\,, \tag{26}$$

где

$$S_{sab}^{(v)} = \int\limits_V T_s\,(\mathbf{E}_a, \mathbf{E}_b)\,\mathrm{d}V, \qquad S_{sab}^{(s)} = \oint\limits_C \Big(\big[\mathbf{E}_b, [\mathrm{grad}\,T_s, \mathbf{E}_a]\big], \mathbf{n}\Big)\mathrm{d}S. \tag{27}$$

Первый интеграл берётся по объёму диэлектрического резонатора, а второй — по его поверхности. В (26), (27) $\mathbf{E}_a(\mathbf{r})$, $\mathbf{E}_b(\mathbf{r})$ — поля a-й и b-й электромагнитных мод, T_s — поле s-й моды температурной релаксации, $\chi_0 = \varepsilon^{-1}$ — обратная диэлектрическая проницаемость, $a_\varepsilon = \chi^{-1}\,\mathrm{d}\chi/\mathrm{d}T$ — температурный коэффициент, $\sigma = \omega\varepsilon\,\mathrm{tg}\,\delta/(4\pi)$, $\mathrm{tg}\,\delta$ — тангенс угла диэлектрических потерь.

Электротепловое взаимодействие реализуется только для таких комбинаций мод, для которых

$$K_{sab} \neq 0, \qquad H_{sab} \neq 0. \tag{28}$$

Требования (28) налагают ограничения на сочетания индексов (m_a, n_a, p_a), (m_b, n_b, p_b), (m_s, n_s, p_s), определяющих распределение полей по угловым координатам и по радиусу. Для сферических резонаторов ограничения на комбинации индексов n и m могут быть найдены аналогично тому, как это делается в квантовой теории углового момента ([5]; см. также [6]). В частности, необходимым условием для (28) является требование

$$m_s \pm m_a \pm m_b = 0, \tag{29}$$

которое должно выполняться хотя бы для одной комбинации знаков. Условие (29) нетрудно получить, зная аналитический вид распределения полей для мод a, b и s.

Другие правила отбора, следующие из симметрии волновых полей, в задаче об электротепловом взаимодействии интерес не представляют. Дело в том, что поскольку частота колебаний температуры

на несколько порядков ниже собственных частот электромагнитных мод, то в трёхмодовом взаимодействии обязаны участвовать две электромагнитные моды, близкие к вырождению. В сферических резонаторах с высокой диэлектрической проницаемостью для этого имеются две возможности [7]. Первая — моды a и b принадлежат к одному семейству (E или H), причём у них совпадают номер и порядок моды:

$$n_a = n_b, \qquad p_a = p_b, \tag{30}$$

и различаются лишь азимутальные индексы m_a и m_b. Вторая возможность — во взаимодействии участвует пара мод $E_{m_a n_a p_a}$ и $H_{m_b(n_a+1)p_b}$. Из соображений симметрии очевидно также, что при выполнении условий (30) ЭТВ осуществимо только с участием таких температурных мод, для которых

$$n_s = 2l, \tag{31}$$

где l — целое.

Нами был произведён расчёт интегральных коэффициентов электротеплового взаимодействия для ряда комбинаций с участием электромагнитных мод H-типа, удовлетворяющих условиям (30), (31). Как известно [7], отличительной особенностью H-мод сферического резонатора при $\varepsilon \gg 1$ является то, что тангенциальная компонента поля обращается в нуль вблизи поверхности диэлектрика. Благодаря этому вклад интеграла по поверхности в H_{sab} (см. (26)) оказывается пренебрежимо малым. Остальные детали вычислительной процедуры были аналогичны [1]. Результаты расчётов представлены в табл. 1 и будут обсуждены ниже.

3. ПОРОГОВАЯ МОЩНОСТЬ ЭТВ. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Для удобства оценок пороговой мощности формулу (25) целесообразно преобразовать, воспользовавшись следующим тождеством для обратного времени релаксации температуры:

$$\lambda_s = \tau_s^{-1} = k/(\rho C_p)\left(\mu_k^{(n+1/2)}\Big/R\right)^2, \tag{32}$$

где ρ и C_p — плотность и удельная теплоёмкость материала, k — коэффициент теплопроводности материала, R — радиус резонатора, $\mu_k^{(n+1/2)}$ — корень трансцендентного уравнения

$$\mu_k^{(n+1/2)} J'_{n+1/2}\left(\mu_k^{(n+1/2)}\right) + (Rh - 1/2)\, J_{n+1/2}\left(\mu_k^{(n+1/2)}\right) = 0, \tag{33}$$

где $J_{n+1/2}$ — функция Бесселя первого рода порядка $n+1/2$. Последнее уравнение представляет собой запись граничного условия третьего рода для потока тепла с поверхности сферического резонатора:

$$\frac{\partial T}{\partial r} + hT\Big|_{r=R} = 0,$$

где h — параметр, характеризующий эффективность теплоотвода и имеющий размерность, обратную единице длины

Подставив в (25) выражения (32), (26) и (27) и приняв во внимание, что $\operatorname{tg}\delta \approx Q_1^{-1} \approx Q_2^{-1} = Q^{-1}$, а вклад $S_{sab}^{(s)}$ в H_{sab} пренебрежимо мал, получим окончательно

$$P_{\text{пор}}^{(3)} = \frac{2kF(\delta)}{\varepsilon Q a_\varepsilon \left(S_{s12}^{(v)}\right)^2}\left(\frac{\mu_k^{(n+1/2)}}{R}\right)^2. \tag{34}$$

Сравнивая полученную формулу с выражением для порога ЭТВ при двухмодовом режиме (см. [1], (32)), нетрудно установить условия, при которых они дают подобные результаты. Так, если

$$Q\lambda_s/\omega \gg 1, \tag{35}$$

то отношение пороговых мощностей в трёх- и двухмодовом режимах определяется лишь отношением интегральных коэффициентов:

$$P_{\text{пор}}^{(3)}\Big/P_{\text{пор}}^{(2)} = S_{s11}^{(v)}\Big/S_{s12}^{(v)}.$$

Если же неравенство (35) не выполняется, то трёхмодовый режим ЭТВ становится энергетически более выгодным. Заметим, что $Q\lambda_s/\omega = \tau_{\text{e}}/\tau_{\text{t}}$ — отношение времён релаксации электромагнитных колебаний и температуры.

В табл. 1 приведены результаты расчёта пороговой мощности $P_{\text{пор}}$ для диэлектрического резонатора из KTaO_3. Как и ранее в [1], мы принимали для оценок $\varepsilon = 4{,}3 \cdot 10^3$, $Q = 10^4$, $a_\varepsilon = 5 \cdot 10^{-3}$ К$^{-1}$, $C_p/T^3 = 1{,}48 \cdot 10^{-3}$ Дж/(г·К^4), $k = 10$ мВт/(см · К), $\rho = 6{,}97$ г/см^3, $T = 4{,}2$ К. Большинство расчётов производилось при условии идеального теплоотвода с поверхности резонатора (в (33) $h \to \infty$).

Таблица 1

Характеристики трёхмодового ЭТВ

Типы взаимодействующих мод ($T_{m_s n_s 1_s}$, $H_{m_a n_a 1}$, $H_{m_b n_b 1}$)	Частота автомодуляции $\Omega = \lambda_s$, МГц	Циклическая частота моды накачки $\omega_{\text{н}}$, ГГц	Интегральный коэффициент $S_{sab}^{(v)}$	Пороговая мощность $P_{\text{пор}}$, Вт
$T_{441}H_{221}H'_{221}$	0,348	40,9	123,21	$2{,}18 \cdot 10^{-4}$
$T_{221}H_{121}H'_{121}$	0,173	40,9	97,26	$6{,}95 \cdot 10^{-4}$
$T_{121}H_{121}H_{221}$	0,173	40,9	89,78	$8{,}15 \cdot 10^{-4}$
$T_{241}H_{021}H_{221}$	0,348	40,9	– 111,77	$3{,}18 \cdot 10^{-3}$
$T_{121}H_{331}H_{231}$	0,173	52,2	150,68	$1{,}74 \cdot 10^{-5}$
$T_{221}H_{131}H_{331}$	0,173	52,2	– 100,12	$4{,}36 \cdot 10^{-5}$
$T_{441}H_{231}H'_{231}$	0,348	52,2	101,52	$7{,}75 \cdot 10^{-5}$
$T_{221}H_{031}H_{231}$	0,173	52,2	– 301,36	$2{,}61 \cdot 10^{-4}$
$T_{331}H_{441}H'_{441}$	0,851	63,7	160,83	$2{,}65 \cdot 10^{-7}$
$T_{341}H_{141}H_{441}$	0,348	63,7	–1627,89	$2{,}13 \cdot 10^{-6}$
$T_{441}H_{141}H_{341}$	0,348	63,7	– 949,65	$6{,}27 \cdot 10^{-6}$
$T_{441}H_{041}H_{341}$	0,348	63,7	729,9	$1{,}06 \cdot 10^{-5}$
$T_{341}H_{041}H_{341}$	0,348	63,7	– 704,3	$3{,}79 \cdot 10^{-5}$
$T_{441}H_{241}H'_{241}$	0,348	63,7	86,63	$4{,}19 \cdot 10^{-5}$
$T_{341}H_{141}H_{341}$	0,348	63,7	133,72	$3{,}16 \cdot 10^{-4}$
$T_{241}H_{041}H_{241}$	0,348	63,7	– 170,92	$1{,}93 \cdot 10^{-3}$

Поскольку в KTaO_3 $a_\varepsilon > 0$, то возбуждение электротепловых колебаний следует ожидать при НЧ накачке. Приведённые в табл. 1 значения $P_{\text{пор}}$ и Ω соответствуют условиям оптимальной настройки ($\Omega = \lambda_s$, $F(\delta) = 2$). Для расчётов выбраны относительно низкочастотные моды с $p_a = p_b = p_s = 1$, при этом в таблице собраны как результаты для мод с $m_a \neq m_b$, так и для мод с $m_a = m_b$. Хотя азимутальные индексы последних одинаковы, они различаются поляризацией, так что азимутальные зависимости компонент полей пропорциональны $\sin(m_a\varphi)$ и $\cos(m_b\varphi)$ соответственно [8]. Вырожденные электромагнитные моды, различающиеся только поляризацией, отмечены штрихом. Как видно из

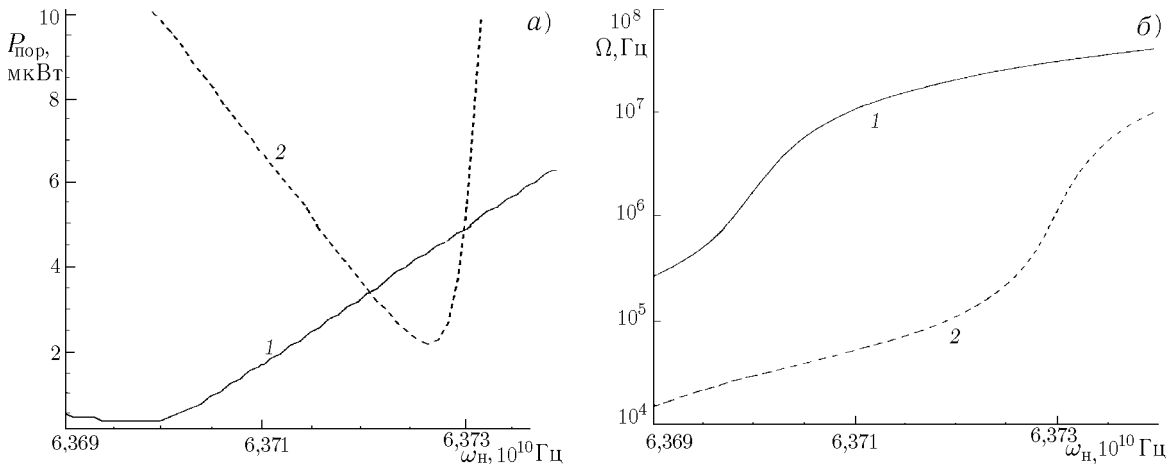

Рис. 1. Зависимости пороговой мощности ЭТВ (*а*) и частоты колебаний температуры (*б*) от частоты накачки для возмущённого сферического резонатора. Накачка настроена в резонанс с модой H_{441}; комбинационные колебания возбуждаются на модах H_{441} и T_{881} (кривая *1*) и H_{141} и T_{841} (кривая *2*). Разность $\omega_{H_{141}} - \omega_{H_{441}} = 30$ МГц

расчётов, имеется довольно много сочетаний мод, для которых интегральные коэффициенты ЭТВ достаточно велики, а $P_{пор}$ составляют порядка 10^{-4} Вт и менее. При этом нелинейные расстройки, обусловленные кубической диэлектрической нелинейностью, по крайней мере, на порядок меньше, чем тепловые расстройки. Это делает оправданными допущения, использованные нами при исследовании динамики трёхмодового ЭТВ.

Для трёхмодового электротеплового возбуждения при оптимальных условиях настройки уровень $P_{пор}$ значительно понижается по сравнению с двухмодовым случаем и тогда, когда соответствующие интегральные коэффициенты равны. При этом в трёхмодовом режиме оптимальным условиям ЭТВ соответствует более низкая частота колебаний температуры.

Перестраивая накачку вблизи собственной частоты диэлектрического резонатора, можно реализовать ЭТВ с участием целого ряда комбинаций мод, для которых пороговая мощность достаточно мала. При этом при некоторых условиях настройки предпочтительным оказывается возбуждение тех мод, у которых оптимальное значение $P_{пор}$ не является наименьшим в данном семействе H_{mnl} ($m = 0, 1, \ldots, n$). Пример такой ситуации представлен на рис. 1*а*. Расчёт зависимостей $P_{пор}$ от частоты накачки проводился при тех же параметрах резонатора, которые использовались в табл. 1. Кроме того, предполагалось, что колебания накачки возбуждаются на моде H_{441}, а комбинационная частота на моде H'_{441} (сплошная кривая), либо на моде H_{141} (штриховая кривая). Расщепление собственных частот вследствие снятия вырождения составляло

$$\omega_{H_{141}} - \omega_{H_{441}} = 30\,\text{МГц}.$$

Из рис. 1*б* видно также, что частоты колебаний температуры меняются при перестройке частоты накачки в широких пределах (более чем на порядок).

Таким образом, проведённые выше расчёты демонстрируют возможность создания в диэлектрических СВЧ резонаторах из $KTaO_3$ условий частотного синхронизма и пространственного перекрытия, позволяющих осуществить электротепловое колебательное возбуждение. При этом трёхмодовый вариант ЭТВ оказывается более благоприятным для экспериментальной реализации, чем двухмодовый.

Ранее отмечалось [1], что экспериментальная реализация ЭТВ представляет интерес для определения теплофизических характеристик виртуальных сегнетоэлектриков при низких температурах. С другой стороны, в условиях, близких к порогу возбуждения колебательной электротепловой неустойчиво-

сти, в резонаторе должна иметь место регенерация колебаний температуры, что может найти применение для повышения чувствительности тепловых приёмников излучения — резонансных болометров [9]. Следует, однако, иметь в виду, что если возбуждение электротепловой неустойчивости является жёстким, то реализация эффекта усиления колебаний температуры может оказаться весьма затруднительной. Это будет налагать дополнительные условия на настройку резонансных болометров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белокопытов Г. В., Журавлёв М. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 2000. Т. 43, № 2. С. 162.
2. Белокопытов Г. В. // Вестн. МГУ. Сер. 3. Физика, астрономия. 1997. Т. 38, № 3. С. 11.
3. Белокопытов Г. В., Иванов И. В., Семененко В. Н. // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1990. Т. 54, № 4. С. 621.
4. Белокопытов Г. В. Параметрическое взаимодействие электромагнитных колебаний в сегнетоэлектрических резонаторах: Дисс. ... к. ф.-м. н. Москва: МГУ, 1978.
5. Варшалович Д. А., Моисеев А. Н., Херсонский В. К. Квантовая теория углового момента. Л, 1975.
6. Cantrell C. D. // JOSA B. 1991. V. 8, No. 10. P. 2158.
7. Бурсиан Э. В. Нелинейный кристалл титанат бария. М.: Наука, 1974. 295 с.
8. Стрэттон Д. А. Теория электромагнетизма. М., Л.: ОГИЗ, 1948. 539 с.
9. Белокопытов Г. В., Красюк Т. В. // Вестн. МГУ. Сер. 3. Физика, астрономия. 1993. Т. 34, № 4. С. 32.

[1] Физический факультет
МГУ им. М. В. Ломоносова,
[2] ГНЦ Физико-химический институт
им. Л. Я. Карпова, г. Москва, Россия

Поступила в редакцию
14 января 2000 г.

ELECTROTHERMAL OSCILLATORY INSTABILITY IN FERROELECTRIC RESONATORS. THREE-MODE CASE

G. V. Belokopytov and M. V. Zhuravlyov

We consider the equations of interaction between electromagnetic oscillations and the temperature in a nonlinear dielectric resonator and study the dynamics of the oscillatory instability in the system. The threshold conditions (power and automodulation frequency) of electrothermal excitation are calculated for microwave potassium-tantalate resonators for the case of three-mode interaction. The conditionds for observation of the electrothermal excitation in the three-mode case are found to be quite feasible. The threshold power of excitation of the temperature oscillations in this case is less than that in the two-mode case and can amount to a few microwatts.

УДК 621.372

КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНАЯ МОДЕЛЬ ВОЛОКОННО-ОПТИЧЕСКОГО ПОЛЯРИЗАТОРА

А. В. Бровко [1], *А. Г. Рожнев* [1], *А. Б. Маненков* [2]

Методом конечных элементов проведён численный анализ векторных мод волоконно-оптического поляризатора. Результаты расчётов сравниваются с данными, полученными с помощью планарной модели.

ВВЕДЕНИЕ

Волоконно-оптические поляризаторы (ВОП), позволяющие выделить моду с одной поляризацией, являются важными конструктивными элементами различных измерительных приборов и систем связи оптического диапазона. Они используются, например, в интерферометрических датчиках различных физических величин, прецизионных волоконно-оптических гироскопах и т. д. Среди разнообразных конструкций ВОП особо следует выделить поляризатор в виде участка волоконного световода с оболочкой, сошлифованной до сердцевины, и оптически непрозрачной металлической плёнкой (подложкой), нанесённой на поверхность диэлектрического буферного слоя [1] (рис. 1*а*). Такие поляризаторы способны обеспечить высокий коэффициент экстинкции при малых потерях рабочей моды и обладают меньшей восприимчивостью к изменению температуры окружающей среды, чем, например, ВОП с двулучепреломляющим кристаллом [2]. Кроме того, поляризаторы этого типа проще с точки зрения технологии их изготовления, чем, например, поляризаторы с оптически тонкой металлической плёнкой [3, 4].

Принцип работы поляризатора основан на различии коэффициентов затухания двух ортогонально поляризованных мод основного типа HE_{11} круглого волоконного световода на сошлифованном участке с металлической плёнкой. Далее будем обозначать основные моды ВОП, поляризованные соответственно вдоль осей x и y (рис. 1*а*), через $\mathrm{HE}_{11}^{(x)}$ и $\mathrm{HE}_{11}^{(y)}$. Мода $\mathrm{HE}_{11}^{(y)}$ эффективно взаимодействует с поверхностной волной в металле, которая имеет большие потери, и её коэффициент затухания также велик; другая мода, $\mathrm{HE}_{11}^{(x)}$, с параллельной поверхности металла плоскостью поляризации, распространяется вдоль ВОП с весьма малыми потерями. Различие потерь этих мод можно также объяснить, используя соображения геометрической оптики, с учётом хорошо известных формул Френеля для коэффициентов отражения лучей от плоской границы диэлектрик—металл. Коэффициент затухания моды $\mathrm{HE}_{11}^{(y)}$ существенно зависит от параметров — толщины d и показателя преломления n_d промежуточного (буферного) диэлектрического слоя, причём эта зависимость имеет резонансный характер, т. е. наибольший коэффициент затухания обеспечивается в достаточно узких интервалах параметров.

При проектировании таких ВОП основная задача заключается в расчёте оптимальных толщины и показателя преломления промежуточного диэлектрического слоя, которые обеспечивали бы максимально возможное отношение коэффициентов затухания мод $\mathrm{HE}_{11}^{(y)}$ и $\mathrm{HE}_{11}^{(x)}$. В работах [5, 6] такая оптимизация ВОП была проведена с помощью плоскослоистой модели, в которой круглый диэлектрический стержень заменялся плоским, бесконечным вдоль оси x диэлектрическим слоем (рис. 1*б*). В случае планарной геометрии легко записать дисперсионное уравнение и, решая его численно, получить требуемые зависимости. Однако сопоставление полученных коэффициентов затухания с экспериментальными данными [6, 7] показало значительное (более чем в два раза) расхождение результатов.

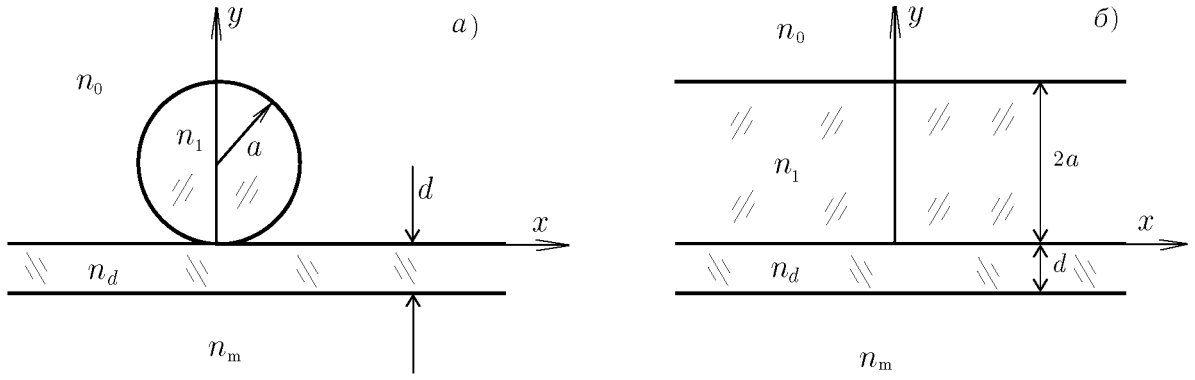

Рис. 1. Поперечное сечение ВОП с круглым световодом (*а*) и его планарная модель (*б*); n_0, n_1, n_d и $n_{\rm m}$ — показатели преломления оболочки световода, сердцевины, буферного слоя и металлической плёнки

В числе факторов, которыми можно объяснить подобное расхождение, авторы работ [6, 7] называют различие между круглым волноводом и заменяющей его планарной диэлектрической пластиной. В то же время существуют и другие факторы, которые также могут объяснить различие модельной теории и эксперимента, поэтому представляется интересным рассчитать параметры ВОП с круглым волноводом одним из достаточно точных численных методов и, сопоставив результаты такого расчёта с решением дисперсионного уравнения для четырёхслойной планарной структуры, оценить точность плоскослоистой модели. В настоящей работе указанный вопрос проанализирован методом конечных элементов (МКЭ) [8].

Следует заметить, что, несмотря на кажущуюся простоту геометрии ВОП, рассматриваемая задача достаточно сложна для численного анализа. В первую очередь эта сложность обусловлена тем, что характерные размеры элементов ВОП имеют разные порядки величины: толщина буферного слоя и глубина проникновения поля в металлическую подложку (рис. 1) на один-два порядка меньше диаметра волоконного световода. В то же время именно процессы на границе раздела диэлектрик—металл определяют коэффициенты затухания рассматриваемых мод с различной поляризацией; поэтому для проведения достаточно точных расчётов при использовании ЭВМ со стандартными ресурсами пришлось использовать алгоритмы построения сильно нерегулярных конечно-элементных сеток [8]. Заметим также, что характеристики среды в ВОП комплексны, поэтому сведение исходной задачи к алгебраическим уравнениям приводит к проблеме собственных значений с комплексными матрицами, решение которой, как известно, сложнее, чем решение аналогичной проблемы с вещественными матрицами (особенно в случае, когда порядок матриц велик).

1. МЕТОД РАСЧЁТА

Имея в виду различные модификации рассматриваемой геометрии ВОП, кратко опишем применяемую методику на примере более общей структуры — однородной в направлении оси z линии передачи с неоднородным в поперечном сечении анизотропным заполнением. Далее будем рассматривать закрытый волновод, т. е. считать, что его поперечное сечение — ограниченная область Ω на плоскости xy. Предполагаем, что граница этой области Γ состоит из двух частей: $\Gamma = \Gamma_{\rm e} \cup \Gamma_{\rm m}$, где $\Gamma_{\rm e}$ и $\Gamma_{\rm m}$ — части границы, на которых заданы граничные условия типа электрической и магнитной стенок соответственно. Будем считать, что тензоры комплексных диэлектрической и магнитной проницаемостей среды внутри волновода имеют вид

$$\hat{\varepsilon}(x,y) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mu}(x,y) = \begin{bmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & 0 \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{zz} \end{bmatrix}. \qquad (1)$$

В общем случае компоненты этих тензоров могут претерпевать разрывы на линиях $\Gamma_{\rm b}$ внутри области Ω. Описываемый ниже вариант метода конечных элементов, в принципе, пригоден и для тензоров $\hat{\varepsilon}$ и $\hat{\mu}$ общего вида, однако возникающее при этом алгебраическое уравнение для собственных значений оказывается квадратичным по продольному волновому числу [9], что сильно усложняет численное решение задачи, поэтому ограничимся приведённым выше видом этих тензоров.

Все последующие соотношения можно записать как для электрического $\boldsymbol{\mathcal{E}}$, так и для магнитного $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ полей; ниже для определённости рассмотрим случай, когда в качестве неизвестного выступает вектор магнитного поля $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ (т. е. опишем магнитную формулировку МКЭ). Аналогичные формулы справедливы для напряжённости электрического поля, если сделать формальную замену $\boldsymbol{\mathcal{H}} \leftrightarrow \boldsymbol{\mathcal{E}}$, $\hat{\varepsilon} \leftrightarrow \hat{\mu}$, $\Gamma_{\rm e} \leftrightarrow \Gamma_{\rm m}$.

Представим вектор магнитного поля в виде

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}(\mathbf{r},t) = \mathrm{Re}[\mathbf{H}(x,y)\,\exp(j\omega t - j\beta z)], \tag{2}$$

где $\mathbf{H}(x,y)$ — комплексная амплитуда поля, и рассмотрим билинейный функционал

$$F(\mathbf{H}^{(\rm a)},\mathbf{H}) = \int\limits_{\Omega} \Big(\mathrm{rot}_{(-\beta)}\,\mathbf{H}^{(\rm a)}\Big)\,\hat{\nu}\Big(\mathrm{rot}_{(\beta)}\,\mathbf{H}\Big)\mathrm{d}S - k^2\int\limits_{\Omega}\mathbf{H}^{(\rm a)}\hat{\mu}\mathbf{H}\,\mathrm{d}S, \tag{3}$$

где $\mathrm{d}S = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, $\hat{\nu} = \hat{\varepsilon}^{-1}$, $k = \omega/c$, нижний индекс у оператора rot указывает на его зависимость от продольного волнового числа β (или $-\beta$) как от параметра. Функции $\mathbf{H}^{(\rm a)}(x,y)$ и $\mathbf{H}(x,y)$ принадлежат пространству векторных функций $Z(\Omega)$:

$$Z(\Omega) = \{\mathbf{A}(x,y)\,|\,\mathbf{A}\in L_2(\Omega),\quad \mathrm{rot}_{(\beta)}\,\mathbf{A}\in L_2(\Omega);\quad \mathbf{A}_\tau = 0,\quad A_z = 0 \text{ на } \Gamma_{\rm m}\}. \tag{4}$$

Здесь $\boldsymbol{\tau}$ — вектор, касательный в плоскости xy к соответствующей части границы. [1]

Условие стационарности функционала (3) приводит к следующей краевой задаче для функции $\mathbf{H}$:

$$\begin{gathered}\mathrm{rot}_{(\beta)}(\hat{\nu}\,\mathrm{rot}_{(\beta)}\,\mathbf{H}) - k^2\hat{\mu}\mathbf{H} = 0,\quad \mathbf{H}_\tau = 0,\quad H_z = 0\quad \text{на } \Gamma_{\rm m};\\ (\hat{\nu}\,\mathrm{rot}_{(\beta)}\,\mathbf{H})_\tau = 0\,,\quad (\hat{\nu}\,\mathrm{rot}_{(\beta)}\,\mathbf{H})_z = 0\quad \text{на } \Gamma_{\rm e};\\ (\hat{\nu}\,\mathrm{rot}_{(\beta)}\,\mathbf{H})_\tau^{(+)} = (\hat{\nu}\,\mathrm{rot}_{(\beta)}\,\mathbf{H})_\tau^{(-)},\quad (\hat{\nu}\,\mathrm{rot}_{(\beta)}\,\mathbf{H})_z^{(+)} = (\hat{\nu}\,\mathrm{rot}_{(\beta)},\mathbf{H})_z^{(-)}\quad \text{на } \Gamma_{\rm b},\end{gathered} \tag{5}$$

где верхние индексы (+) и (−) соответствуют значениям функции на разных сторонах границы $\Gamma_{\rm b}$. Краевая задача для сопряжённого поля $\mathbf{H}^{(\rm a)}$ отличается от задачи (5) сменой знака у β и заменой матриц $\hat{\nu}$ и $\hat{\mu}$ на транспонированные матрицы $\hat{\nu}^{\rm T}$ и $\hat{\mu}^{\rm T}$. Соотношения (5) совпадают с уравнениями, которые получаются при исключении комплексной амплитуды $\mathbf{E}$ электрического поля из уравнений Максвелла. Таким образом, задача расчёта полей линии передачи эквивалентна нахождению стационарной точки функционала (3).

Для поиска стационарной точки применим вариант МКЭ, использующий смешанный базис. Область Ω разбиваем на треугольные элементы и в пределах каждого из них компоненты полей $\mathbf{H}$ и $\mathbf{H}^{(\rm a)}$ аппроксимируем следующими разложениями:

$$H_z = j\beta\sum_{i=1}^{3}c_iN_i,\quad H_z^{(\rm a)} = -j\beta\sum_{i=1}^{3}c_i^{(\rm a)}N_i,\quad \mathbf{H}_\perp = \sum_{i=4}^{6}c_i\mathbf{w}_i,\quad \mathbf{H}_\perp^{(\rm a)} = \sum_{i=4}^{6}c_i^{(\rm a)}\mathbf{w}_i, \tag{6}$$

[1] Поля рассматриваемых мод в точке касания границы сердцевины волоконного световода и буферного слоя могут быть сингулярны, однако возможные сингулярности при условии $n_1 \approx n_0$ весьма слабы, поэтому этот эффект можно не учитывать.

где $\mathbf{H}_\perp$ и $\mathbf{H}_\perp^{(\mathrm{a})}$ — поперечные компоненты полей, N_i $(i = 1, 2, 3)$ — узловые линейные конечные элементы, определяемые в вершинах треугольника, $\mathbf{w}_i$ $(i = 4, 5, 6)$ — рёберные («edge») элементы [10, 11], определяемые на серединах его сторон, c_i и $c_i^{(\mathrm{a})}$ — неизвестные коэффициенты. Схематически структура одного элемента показана на рис. 2*а*. Для $i = 1, 2, 3$ коэффициенты c_i равны z-компонентам поля $\mathbf{H}$ в вершинах треугольного элемента, а для $i = 4, 5, 6$ они имеют смысл компонент поля $\mathbf{H}$, касательных к соответствующему ребру треугольника. Таким образом, продольная составляющая поля разлагается по обычному конечноэлементному базису, а поперечное к оси волновода поле — по рёберным элементам. На рис. 2*б* для примера показано распределение векторного поля для элемента $\mathbf{w}_4$.

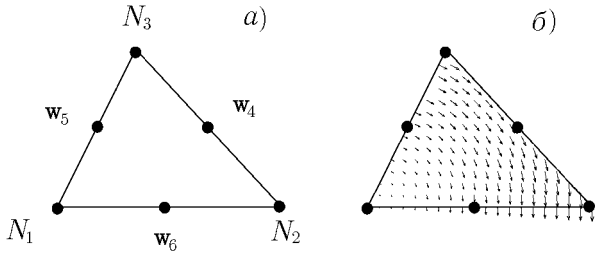

Рис. 2. Расположение узлов на границе элемента (*а*) и структура базисной функции $\mathbf{w}_4$ (*б*)

Отметим, что применение смешанного базиса имеет ряд преимуществ перед обычным подходом, когда обычные узловые конечные элементы используются для аппроксимации всех трёх компонент поля. В частности, такой базис весьма удобен при постановке граничных условий на металлических поверхностях и границах раздела сред, он более адекватно описывает структуру полей вблизи острых металлических рёбер и позволяет привести задачу к обобщённой проблеме собственных значений, имеющей стандартную форму. Кроме того, в получаемых уравнениях можно легко отделить нефизические («spurious») решения и т. д. [10, 11].

Подставим аппроксимации (6) в (3) и просуммируем по всем треугольникам сетки; в результате получим приближённое значение функционала, зависящее от коэффициентов c_i и $c_i^{(\mathrm{a})}$. Дифференцируя это выражение по всем $c_i^{(\mathrm{a})}$, получим систему линейных алгебраических уравнений вида

$$\beta^2 \hat{T}_1 \mathbf{X} + \hat{T}_2 \mathbf{X} = k^2 \beta^2 \hat{T}_3 \mathbf{X} + k^2 \hat{T}_4 \mathbf{X}. \tag{7}$$

Здесь $\mathbf{X}$ — вектор столбец, составленный из неизвестных коэффициентов c_i, а $\hat{T}_i$ $(i = 1, \ldots, 4)$ — квадратные разреженные комплексные матрицы, элементы которых зависят только от геометрии сетки и распределения диэлектрической и магнитной проницаемостей по поперечному сечению системы. Вдобавок, если тензоры $\hat{\varepsilon}$ и $\hat{\mu}$ симметричны, то симметричны также и матрицы $\hat{T}_i$.

Если считать частоту заданной, то уравнение (7) приводится к обобщённой алгебраической проблеме собственных значений

$$\hat{A}\mathbf{X} = \Lambda \hat{B}\mathbf{X}, \tag{8}$$

в которой матрицы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ представляют собой линейные комбинации матриц $\hat{T}_i$, а в качестве собственного значения Λ выступает β^2. Если же считать заданным продольное волновое число β^2 и искать k^2, то вновь получаем алгебраическую проблему собственных значений, подобную (8), но с другими матрицами $\hat{A}$ и $\hat{B}$ и собственным числом, равным k^2. В большинстве случаев первый вариант уравнения для собственных значений более удобен. Особенно отчётливо эти преимущества видны при расчёте волн с комплексными β (например, для систем с большими потерями или при исследовании комплексных мод), поэтому он и будет использован ниже.

При использовании указанного подхода граничные условия необходимо учитывать только на части границы Γ_{m}, поскольку на остальной границе для функционала (3) они являются естественными и найденное решение будет удовлетворять им автоматически. Главные граничные условия учитываются следующим образом: если ребро, на котором определён рёберный элемент с номером i, лежит на границе Γ_{m}, коэффициент c_i равен нулю, следовательно, строки и столбцы матриц $\hat{T}_i$ с этим номером в уравнении (7) можно вычеркнуть. Аналогично поступаем с узловыми элементами N_i, определёнными в вершинах треугольной сетки, лежащих на границе Γ_{m}.

Приведённые выше соотношения были получены для экранированного (закрытого) волновода, тогда как исходный ВОП (см. рис. 1) является открытой структурой, в которой поля занимают всё поперечное сечение. Однако в области средних замедлений (см. ниже) при типичных параметрах задачи поле рабочей моды локализовано в области с размером ($3 \div 4\,a$) вблизи сердцевины волновода. В этом случае можно экранировать волновод и тем самым ограничить его поперечное сечение конечной областью [8]. В наших расчётах использовался идеально проводящий экран, который располагался на расстоянии $5a$ от сердцевины волновода. Изменение граничных условий на фиктивном экране и увеличение его радиального размера практически не влияли на результаты расчётов характеристик мод $\mathrm{HE}_{11}^{(x)}$ и $\mathrm{HE}_{11}^{(y)}$.

Обобщённая алгебраическая задача на собственные значения решалась с использованием алгоритма Арнольди [12]. В программе используется свойство разреженности матриц с конечным числом элементов, что позволяет на ЭВМ с объёмом оперативной памяти 16 Мб обрабатывать матрицы, порядок которых достигает 12 000, и получать высокую точность результатов при сравнительно скромных затратах вычислительных ресурсов.

Расчёт ВОП осложнялся тем, что в рассматриваемой системе постоянные распространения мод $\mathrm{HE}_{11}^{(x,y)}$ оказывались близки к постоянным распространения других мод, например мод фиктивного экрана, поверхностных мод металлической подложки и высших мод диэлектрического стержня. Идентификация побочных решений может быть проведена различными способами [8]. В частности, моды экрана можно идентифицировать, используя сильную зависимость их характеристик от поперечных размеров фиктивного экрана. При практических расчётах выделение интересующей нас моды проводилось на основе визуальной оценки картины распределения поля в поперечном сечении волновода.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЁТОВ

Приведённые в работе результаты получены для геометрии ВОП, представленной на рис. 1a при рабочей длине волны $\lambda = 0{,}85$ мкм, диаметре сердцевины круглого волокна $2a = 5$ мкм и показателях преломления сердцевины волоконного световода $n_1 = 1{,}457$ и оболочки $n_0 = 1{,}453$. В этом случае безразмерный параметр частоты $V = 2\pi a\,\sqrt{n_1^2 - n_0^2}/\lambda \simeq 2$, т. е. рассматривался так называемый режим средних замедлений, обычно используемый на практике. Для простоты считалось, что диэлектрические потери в сердцевине и оболочке волоконного световода, а также в буферном слое отсутствуют. Потери в металлической плёнке учитывались заданием её комплексной диэлектрической проницаемости; для рассмотренных ниже примеров $n_{\mathrm{m}} = 2{,}08 - 7{,}15\,i$ (алюминий).

Результаты расчётов вместе с кривыми, полученными при решении дисперсионного уравнения для основных мод плоскослоистой модели, представлены на рис. 3 и 4. На рис. 3 показаны зависимости коэффициентов затухания основных мод $\alpha = -\mathrm{Im}\,\beta$ от толщины промежуточного слоя d. Кривые построены для двух показателей преломления буферного слоя: $n_d = 1{,}32$ (соответствующие кривые помечены цифрой *1*) и $n_d = 1{,}38$ (кривые помечены цифрой *2*). Сплошные кривые рассчитаны для мод $\mathrm{HE}_{11}^{(x)}$ и $\mathrm{HE}_{11}^{(y)}$, распространяющихся в ВОП с круглым волоконным световодом (рис. 1a), а штриховые кривые построены для мод TE_0 и TM_0 модельной плоскослоистой структуры (рис. 1$б$); здесь и ниже обозначения мод соответствуют [13]. На рис. 4 приведены аналогичные зависимости для тех же мод от показателя преломления промежуточного слоя n_d при фиксированном значении толщины слоя $d = 0{,}2$ мкм. Как и предполагалось, в обоих случаях зависимости для моды $\mathrm{HE}_{11}^{(y)}$ имеют резонансный характер.

Из графиков видно, что в рассмотренных диапазонах изменения толщины и показателя преломления промежуточного слоя различие значений α для мод $\mathrm{HE}_{11}^{(y)}$ и TM_0, поляризованных перпендикуляр-

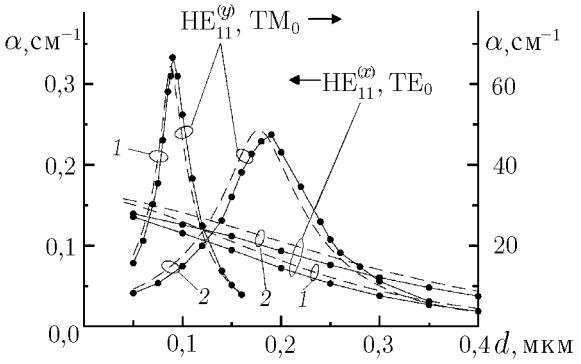

Рис. 3. Зависимости коэффициентов затухания основных мод от толщины слоя d при $n_d = 1{,}32$ (*1*) и при $n_d = 1{,}38$ (*2*). Сплошные кривые — расчёт ВОП с круглым световодом, штриховые линии — данные для планарной модели

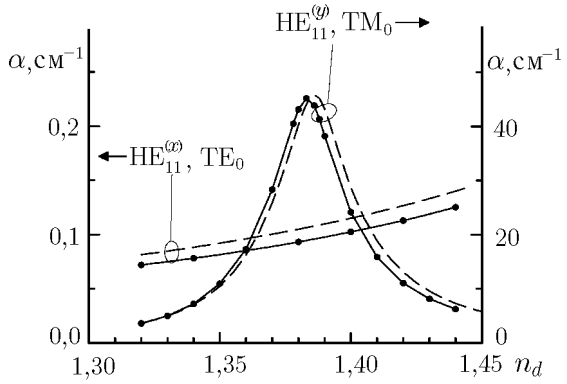

Рис. 4. Зависимости коэффициентов затухания основных мод от показателя преломления буферного слоя n_d при $d = 0{,}2$ мкм. Сплошные кривые — расчёт ВОП с круглым световодом, штриховые линии — данные для планарной модели

но металлу, не превышает 5 %. Для мод $\mathrm{HE}_{11}^{(x)}$ и TE_0 различие несколько больше (порядка 10÷15 %), но оно не имеет принципиального значения, т. к. как эти моды имеют малые потери. Приведённые результаты доказывают хорошую точность плоскослоистой модели (рис. 1*б*). Качественно объяснить указанный факт можно, рассматривая обе геометрии (рис. 1) как два связанных волновода; для рис. 1*а* парциальными системами являются круглый волоконный световод и буферный слой, лежащий на металлической подложке, а для рис. 1*б* — «верхний» планарный волновод и такой же слой на металле. Указанное разбиение на парциальные линии становится яснее, если рассмотреть более общую геометрию ВОП, в которой оболочка круглого волоконного световода сошлифована не до сердцевины, а оставлен так называемый остаточный слой [7]. Используя эти модели, совпадение результатов на рис. 3 и 4 можно объяснить тем, что круглый волоконный световод работает в условиях слабой волноводности, поскольку показатели преломления сердцевины n_1 и оболочки n_0 близки. В этом случае структура силовых линий поля основных мод HE_{11} в поперечном сечении волновода близка к полю плоской поперечной ТЕМ-волны в свободном пространстве, как и поле соответствующих мод TE_0 и TM_0 модельной плоскослоистой системы. Вследствие одинаковой структуры поля в буферном слое и у границы металла в обеих системах обеспечивается одинаковое взаимодействие волноводной моды с поверхностной модой в металле как в плоскослоистой модели, так и в реальной структуре с круглым волоконным световодом. Резонансный характер зависимости коэффициента затухания от параметров слоя объясняется тем, что эффективная перекачка энергии между связанными волноводами возможна только тогда, когда их моды синфазны, т. е. имеют близкие действительные части постоянной распространения. Для подстройки постоянной распространения поверхностной моды в металле и служит промежуточный диэлектрический слой.

Как и для всякой структуры с сильной связью, описание ВОП как системы двух связанных волноводов является в основном качественным. Тем не менее эта модель позволяет сделать некоторые количественные оценки, в частности, определить приближённо параметры буферного слоя. При отсутствии буферного слоя (т. е. при $d = 0$) поверхностная мода, направляемая металлической подложкой (нижней парциальной системой на рис. 1), является так называемой волной Ценнека [14]. При условиях $\mathrm{Im}\, n_{\mathrm{m}} > \mathrm{Re}\, n_{\mathrm{m}}$, $|n_{\mathrm{m}}| \gg n_0$ постоянная распространения этой волны приближённо равна

$$\beta_{\mathrm{m}} = kn_0\,[1 - n_0^2/(2n_{\mathrm{m}}^2)]. \tag{9}$$

Из (9) следует, что продольное волновое число волны Ценнека больше волнового числа β_{HE} моды HE_{11} круглого волоконного световода, которая удовлетворяет неравенствам $kn_0 < \beta_{\mathrm{HE}} < kn_1$. Для

подстройки фазовых скоростей упомянутых мод (т. е. для уменьшения $\mathrm{Re}\,\beta_{\mathrm{m}}$) вводится промежуточный слой, у которого показатель преломления n_d должен быть меньше n_0. Оценить толщину буферного слоя можно методом возмущений. Если толщина d слоя мала, т. е. $|p_{\mathrm{m}}d| \ll 1$, где $p_{\mathrm{m}} = -ikn_0/n_{\mathrm{m}}$ — поперечное волновое число волны Ценнека, то условие синхронизма рассматриваемых мод даёт $kd\times$ $\times(n_0 - n_d) \approx n_0/(4\,|n_{\mathrm{m}}|)$. В другом предельном случае, когда $|p_{\mathrm{m}}d| \gg 1$, фазовые постоянные волны Ценнека и мод HE_{11} близки при условии $1 - \exp(-2\,|p_{\mathrm{m}}d|) \approx n_d^3/(2\,(n_0 - n_d)\,|n_{\mathrm{m}}|^2)$. При $|p_{\mathrm{m}}d| \sim 1$ из приведённых выше формул получаются близкие результаты. При выводе соотношений (10), (11) не учитывалась связь мод, поэтому они дают только оценку необходимых значений d. Например, для ВОП с параметрами, приведёнными выше, получаем $d \approx 0{,}1$ мкм при $n_d = 1{,}32$, и $d \approx 0{,}05$ мкм при $n_d = 1{,}38$; эти значения в два раза меньше тех, которые получаются из строгих расчётов.

Интересно отметить, что при указанных выше параметрах металлическая подложка не может направлять моды с поляризацией, параллельной оси x, т. е. ТЕ-моды в металле не существуют. Затухание моды $\mathrm{HE}_{11}^{(x)}$, распространяющейся в ВОП, обусловлено не взаимодействием волн, а омическими потерями, которые связаны с токами (в основном поперечными), текущими в металлической подложке и возбуждаемыми «хвостами» распределения полей. Буферный слой, для которого $n_d < n_0$, обеспечивает дополнительное уменьшение полей снаружи волокна, так что указанные потери оказываются малыми.

В приведённом выше качественном анализе есть несколько моментов, которые требуют дополнительных пояснений. Прежде всего отметим, что в системе, изображённой на рис. 1*а* моды круглого волоконного световода взаимодействуют не с одной модой, а с континуумом мод, направляемых металлической подложкой и лежащим на нём буферным слоем. Однако ширина волновых полей мод волоконного световода в направлении оси x велика, пространственный спектр этих мод очень узок, поэтому в первом приближении его можно считать δ-образным.

Далее следует отметить, что в открытых волноводах сильная связь мод может привести к изменению их типа; например, из поверхностных они могут трансформироваться в вытекающие [15]. Для геометрий ВОП, изображённых на рис. 1, такой эффект возможен, в частности, если диэлектрические потери всех сред малы (т. е. $\mathrm{Re}\,n \gg \mathrm{Im}\,n$) и $|n_d| > |n_{\mathrm{m}}| > |n_1|$. В этом случае энергия мод $\mathrm{HE}_{11}^{(x,y)}$ будет «вытекать» через подложку. При тех параметрах, которые были использованы выше (в частности, при большой мнимой части n_{m}), изменение типов волн связанных волноводов не происходит, т. е. они остаются поверхностными. Следует отметить, что указанный вопрос достаточно важен, т. к. для адекватного описания вытекающих мод может потребоваться учёт поля излучения вдали от оси волновода.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведённые нами расчёты методом конечных элементов доказывают работоспособность плоскослоистой модели ВОП в области средних замедлений. Дисперсионное уравнение для планарной геометрии существенно проще, чем уравнение для реальной структуры, анализ которой требует привлечения достаточно сложных методов, поэтому для многих поисковых исследований можно (по крайней мере, на первом этапе) использовать модельную систему.

Приведённые выше результаты показывают, что различие теоретических и экспериментальных значений потерь в ВОП с круглым волоконным световодом нельзя объяснить погрешностью замены реальной геометрии системы плоскослоистой. Однако существует ряд других факторов [5, 7], которые позволяют это сделать. Например, указанное различие может быть вызвано неоднородностью буферного или остаточного слоёв вдоль ВОП, влиянием шероховатостей металлической подложки (или её окислением), а также связью мод с различной поляризацией.

Отметим, что область применения рассмотренной выше структуры (рис. 1*а*) не исчерпывается только ВОП. Очевидно, что такая система может быть использована в измерителях характеристик оптических плёнок, поверхностных импедансов металлов или поглощающих жидкостей. Для таких применений важное значение имеет обратная задача, которая заключается в расчёте характеристик сред по измеренным коэффициентам затухания. Эта задача, по-видимому, может быть решена с помощью описанного выше подхода, хотя, конечно, он может потребовать модификации (особенно в тех случаях, когда необходимо учесть открытость ВОП, в частности, в области малых замедлений). Для таких задач, вероятно, можно использовать метод, основанный на введении импедансных граничных условий на вспомогательном экране [16].

Авторы благодарны С. Н. Власову и В. М. Геликонову, которые обратили наше внимание на рассмотренные проблемы. Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 00–02–17500).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gruchman D. G., Petermann K., Staudigel L., Weidel E. // Proc. 9-th Europ. Conf. Opt. Comm. ECOC-83. North Holland, 1983. P. 305.
2. Bergh R. A., Lefevre H. C., Shaw H. J. // Optics Lett. 1980. V. 5. P. 479.
3. Johnstone W., Stewart G., Culshaw B., Hart H. // Electron. Lett. 1988. V. 24, No. 14. P. 866.
4. Zervas M. N., Giles I. P. // Electron. Lett. 1989. V. 25, No. 5. P. 321.
5. Геликонов В. М. и др. // Квантовая электроника. 1990. Т. 17, № 1. С. 87.
6. Hosaka T., Okamoto K., Noda J. // IEEE J. Quantum Electron. 1982. V. QE-18. P. 1569.
7. Геликонов В. Н. и др. // Оптика и спектроскопия. 1991. Т. 71, № 4. С. 688.
8. Клеев А. И., Маненков А. Б., Рожнев А. Г. // Радиотехника и электроника. 1993. Т. 38. С. 1938.
9. Valor L., Zapata J. // IEEE Trans. MTT. 1995. V. 43, No. 10. P. 2452.
10. Lee J. F., Sun D. K., Cendes Z. J. // IEEE Trans. MTT. 1991. V. 39, No. 8. P. 1262.
11. Koshiba M., Maruyama S., Hirayama K. // J. Lightwave Technology. 1994. V. 12, No. 3. P. 495.
12. Sorensen D. C. // SIAM J. Matrix Analysis and Applications. 1992. V. 13, No. 1. P. 357.
13. Адамс М. Введение в теорию оптических волноводов. М.: Мир, 1984.
14. Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны. М.: Радио и связь, 1988.
15. Вайнштейн Л. А., Маненков А. Б. // Лекции по электронике СВЧ и радиофизике. К. 1. Саратов: СГУ, 1986. С. 141.
16. Рожнев А. Г., Маненков А. Б. // Радиотехника и электроника. 1997. Т. 42, № 7. С. 785.

[1] Саратовский государственный университет, г. Саратов,
[2] Институт физических проблем им. П. Л. Капицы РАН, г. Москва, Россия

Поступила в редакцию 15 декабря 2000 г.

FINITE-ELEMENT MODEL OF AN OPTICAL FIBER POLARIZER

A. V. Brovko, A. G. Rozhnev, and A. B. Manenkov

Based of the finite-element method, we analyze numerically the vector modes of an optical fiber polarizer. The calculation results are compared with the data obtained within the framework of the planar model.

УДК 531.717.8

АБСОЛЮТНОЕ ТЕСТИРОВАНИЕ ПРОФИЛЕЙ ПЛОСКИХ ОПТИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ БОЛЬШИХ РАЗМЕРОВ

И. Е. Кожеватов, Е. А. Руденчик, Н. П. Черагин, Е. Х. Куликова

Приводятся результаты измерений профилей поверхностей различных оптических элементов при помощи широкоапертурного интерферометра белого света. Разработанный авторами метод измерений устраняет принципиальные ограничения на размер и массу исследуемых образцов. Использование метода в сочетании с интерференцией белого света высоких порядков и проведённая оригинальная калибровка эталонной пластины интерферометра позволяют проводить тестирование профилей поверхностей с абсолютной точностью до 1 Å в реальном времени и широком технологическом поле.

Проблема измерения отклонений от заданной формы поверхности высокоточных плоских оптических элементов больших размеров остаётся по-прежнему актуальной. Применяемые на производственных линиях средства контроля позволяют определять высотный профиль крупномасштабных неоднородностей с точностью не более $(0{,}05\div0{,}1)\lambda$, где λ — длина волны зондирующего излучения. Разработанные в настоящее время прецизионные методы и устройства контроля с точностью до единиц ангстрем либо реализуют точечный способ измерений профилей [1–3], либо обеспечивают одновременное измерение профилей на участках поверхностей, не превышающих несколько миллиметров [4–6].

Потенциальными возможностями для измерений профилей поверхностей с чувствительностью порядка 1 Å в широком диапазоне размеров обладают интерферометрические фазомодулирующие методы [6–10]. Но проблема получения собственного профиля исследуемого образца этими методами осложняется тем, что сам принцип интерферометрических измерений предполагает наличие эталонной поверхности, относительно которой проводятся измерения. Для восстановления профиля поверхности с соответствующей абсолютной точностью требуется либо абсолютно плоская эталонная поверхность, либо информация о её профиле.

Настоящая статья посвящена абсолютным измерениям высотных профилей крупномасштабных (с горизонтальными размерами от 0,1 мм и больше) неоднородностей оптических поверхностей больших размеров в реальном времени. В первом разделе приводятся основные принципы метода и описание оптической схемы интерферометра. Во втором разделе описана методика абсолютной калибровки устройства. Результаты тестирований различных высокоточных оптических элементов даны в третьем разделе.

1. МЕТОД ИЗМЕРЕНИЯ ПРОФИЛЕЙ ПОВЕРХНОСТЕЙ

1.1. Основные положения

Интерферометрические фазомодулирующие методы измерения профиля поверхности основаны на принципе измерения фазы интерферирующих лучей, отражённых от исследуемого образца и эталонной пластины, составляющих интерферометр. Интенсивность в каждой точке плоскости интерферограммы может быть представлена как произведение амплитудного $A_{x,y}$ и фазового $\Psi_{x,y}$ сомножителей:

$$I(x,y) = A_{x,y}\cos[\Psi_{x,y}(d)], \tag{1}$$

где $\Psi_{x,y}(d) = 2\pi d(x,y)/\lambda$, x и y — пространственные координаты, d — расстояние между поверхностями эталонной пластины и образца.

Как видно из (1), распределение фазы интерферограммы линейно связано с оптическим промежутком d. Получению точных значений фазы непосредственно из интенсивности интерферограммы мешает пространственная неоднородность освещённости. Это препятствие устраняется технически путём введения искусственной модуляции фазы по известному временному закону и её последующего синхронного детектирования. Из формулы (1) видно, что модуляция фазы может быть выполнена либо путём модуляции оптического промежутка измерительного интерферометра, либо с помощью модуляции длины волны зондирующего излучения.

Основное отличие развиваемого метода от других фазомодулирующих методов заключается в том, что мы используем модуляцию длины волны зондирующего излучения вместо модуляции оптического промежутка между образцом и эталонной пластиной [9, 10]. Это приводит к важному следствию: отпадает необходимость в механических перемещениях элементов измерительного интерферометра, связанных с модуляцией фазы. Образец и эталонная пластина остаются неподвижными в течение измерений. В результате снимаются ограничения на геометрические размеры и массы исследуемых объектов, что позволяет осуществлять контроль профилей поверхностей в широком диапазоне размеров.

Использование при этом широкополосного источника излучения (источника белого света) взамен монохроматического или лазерного позволяет избавиться от спекловой неоднородности интерференционных картин, которая особенно ярко проявляется при использовании лазерного излучения. Отметим, что применение широкополосных источников излучения всё чаще имеет место в практике создания методов и устройств для прецизионного контроля отклонений от заданной формы поверхности [6–8].

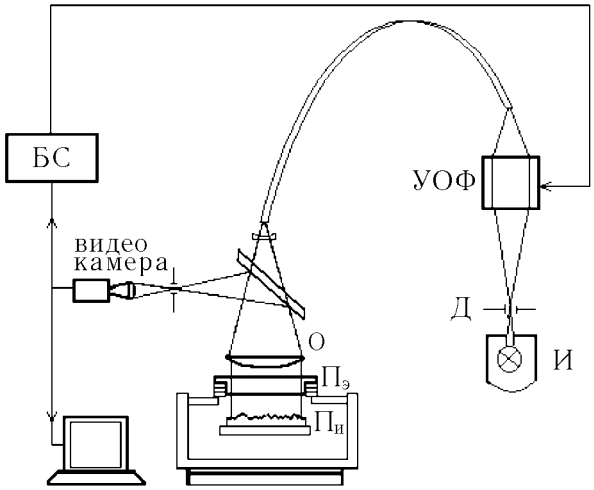

Рис. 1. Функциональная схема интерферометра белого света высоких порядков: И — источник белого света, Д — диафрагма, УОФ — управляемый оптический фильтр, О — объектив, $П_э$ и $П_и$ — эталонная и исследуемая пластины, БС — блок синхронизации

В отличие от методов, предполагающих применение интерферометров Майкельсона или Тваймана—Грина с нулевой разностью хода при работе с белым светом, в наших схемах используются интерферометры высоких порядков — интерферометры Физо или Фабри—Перо. Это позволило реализовать дополнительные возможности метода:

— уменьшить влияние вторичных переотражений лучей;

— использовать нечувствительность к отражениям от других поверхностей, например от противоположной поверхности образца.

1.2. Оптико-механическая схема

На рис. 1 представлена функциональная схема установки для измерений профиля поверхности. Излучение источника белого света после диафрагмы Д проходит управляемый оптический фильтр УОФ и направляется на объектив О. Параллельный пучок света от объектива освещает эталонную $П_э$ и исследуемую $П_и$ поверхности и, отразившись от них, фокусируется тем же объективом. Поворотная пластина направляет излучение на матричный фотоприёмник. Мы используем CCD-камеру фирмы «Mintron» с соотношением сигнал/шум не менее 50 дБ; матрица камеры содержит 400×512 пикселей. Изображение каждого кадра считывается в темпе 25 кадров в секунду при помощи фрайм-грабера, соединённого с PCI-шиной компьютера.

Для модуляции фазы используется 4-ступенчатый фазо-смещающий алгоритм. Блок синхронизации в соответствии с номером кадра в серии (номером фазовой ступеньки) формирует напряжение смещения и подаёт его на пьезоэлектрические элементы управляемого оптического фильтра. В каждом кадре производится измерение распределения интенсивности в интерференционных картинах. Когда значения фазовых ступенек известны, расстояния между образцом и эталонной пластиной однозначно вычисляются.

Управление интерферометром осуществляется при помощи специально разработанной компьютерной программы, которая определяет истинные значения каждой фазовой ступеньки, вычисляет профиль исследуемого образца и представляет данные в виде цветных изолиний высот профиля поверхности. При этом программа учитывает постоянные и наклонные составляющие, выполняет статистическую обработку измерений и производит диагностику шумовых и систематических ошибок.

2. КАЛИБРОВКА ИНТЕРФЕРОМЕТРА

Калибровка эталонной плоскости интерферометров — одна из самых сложных, трудоёмких задач в интерферометрических методах контроля поверхностей. Существует несколько разных методов калибровки эталонной пластины [8, 11–13]. Суть методов сводится к использованию трёх идентичных пластин с различными парными комбинациями их взаимного положения. Для реализации вращения и смещения пластин применяются различные способы. Расстояния между парами пластин, измеренные при различных комбинациях, определяют системы линейных уравнений, при помощи которых восстанавливается абсолютный профиль эталонной пластины.

Основные трудности процедуры калибровки связаны с выбором оптимальной комбинации измерений, которые бы сочетали высокую точность и устойчивость восстановления профилей с разумным объёмом вычислительного времени. Задача осложняется ещё и тем, что перебор комбинаций невозможен без внесения в данные измерений постоянной и наклонной составляющих (клин), изменяющихся в каждом эксперименте при повороте, смещении или перестановке пластин. Кроме того, при измерении профилей при горизонтальном положении пластины, как в нашем интерферометре, возникают деформации поверхности, связанные с прогибом пластины под собственным весом и со способом крепления пластины в интерферометре.

Нами был разработан собственный метод абсолютной калибровки эталонных пластин, подробно описанный в работе [14]. Метод основан на решении обратной задачи восстановления профиля поверхности по данным относительных измерений трёх пластин путём минимизации целевой функции методом сопряжённых градиентов. На каждой пластине калибровке подвергались прямоугольные области одинакового размера. В этих областях были введены квадратные сетки с шагом, одинаковым для всех пластин. Размер области и шаг сетки определялся размером CCD-матрицы, регистрирующей интерференционную картину, размером пикселя и оптическим увеличением.

Профиль поверхности определялся высотами в узлах сетки. При каждом измерении расстояния между пластинами d находились из следующего выражения:

$$d_{ij}^{(p)} = h_{ij}^{(k_{\text{В}}p)} + g_{ij}^{(k_{\text{В}}p)} + h_{nm}^{(k_{\text{Н}}p)} - g_{nm}^{(k_{\text{Н}}p)} + c_0^{(p)} + c_1^{(p)} i + c_2^{(p)} j. \qquad (2)$$

Здесь $k_{\text{В}}$, $k_{\text{Н}}$ — номера верхней и нижней пластины, (i, j) и (m, n) — номера узлов верхней и нижней пластин соответственно, $h_{ij}^{(kp)}$ и $g_{ij}^{(kp)}$ — собственная высота и прогиб поверхности k-й пластины в p-м эксперименте (учтено, что при перевороте пластины гравитационный прогиб меняет знак), $c_0^{(p)}$, $c_1^{(p)}$ и $c_2^{(p)}$ — параметры линейной функции, характеризующей клин.

Профили и прогибы пластин находились в результате поиска минимума целевой функции

$$\varphi = \frac{1}{2}\sum_{p}\sum_{i,j}\left(h_{ij}^{(k_{\text{В}}p)} + g_{ij}^{(k_{\text{В}}p)} + h_{nm}^{(k_{\text{Н}}p)} - g_{nm}^{(k_{\text{Н}}p)} + c_0^{(p)} + c_1^{(p)}i + c_2^{(p)}j - d_{ij}^{(p)}\right)^2. \qquad (3)$$

Здесь $h_{ij}^{(kp)}$, $g_{ij}^{(kp)}$, $c_0^{(p)}$, $c_1^{(p)}$, $c_2^{(p)}$ — независимые переменные — аргументы целевой функции φ. Целевая функция является квадратичной относительно своих аргументов. Это позволяет рассчитывать значения функции и её градиента, что даёт возможность проводить эффективную минимизацию методом сопряжённых градиентов.

Как показали численные эксперименты, для получения результатов, устойчивых к ошибкам измерений при минимальном времени счета, могут быть использованы данные измерений одиннадцати комбинаций пластин *1, 2, 3*:

— шесть базовых комбинаций разных пар пластин (*1-2*, *2-1*; *1-3*, *3-1*; *2-3*, *3-2*);

— три комбинации для разных пар пластин со смещением нижней пластины на четверть длины калибруемой области;

— две комбинации с поворотом нижней пластины на 90° и 180° для любой пары пластин.

Средняя ошибка экспериментов, оценённая как $\sqrt{2\varphi/N}$, где φ — значение целевой функции, N — полное число комбинаций, составляла приблизительно $6 \cdot 10^{-4}\,\lambda$, где $\lambda = 6\,328$Å. Информация о высотном профиле эталонной пластины интерферометра, полученном в результате калибровки с абсолютной точностью 1 Å, была введена в память компьютера. В последующем при восстановлении собственных профилей исследуемых образцов эта информация учитывалась на этапе обработки данных.

3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

3.1. Тестирование кварцевых пластин

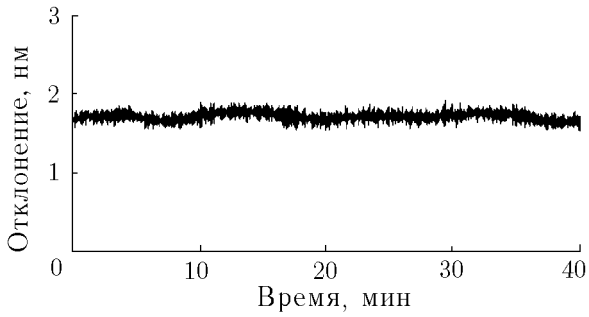

Рис. 2. Временная стабильность интерферометра

В качестве исследуемых образцов были выбраны две кварцевые пластины диаметром 120 и толщиной 25 мм.

Пример записи показаний прибора в одной точке исследуемой поверхности представлен на рис. 2. Одно большое деление равно 1 нм, что соответствует примерно $\lambda/600$, где $\lambda = 6\,328$ Å. Среднеквадратичное отклонение шумовой составляющей сигнала на рис. 1 при постоянной времени $\tau = 0{,}1$ с составляет 0,64 Å, что соответствует приблизительно $\lambda/10\,000$. Как показали исследования, повторяемость результатов от измерения к измерению не хуже $\lambda/6\,000$.

Профиль тестируемого образца определялся в серии из трёх измерений с различными наклонами образца, результаты которых затем сравнивались с целью определения шумовой и систематических ошибок. Время, затрачиваемое на измерительный цикл, не превышает 1 мин. Время, необходимое на обработку полученных результатов и представление данных, во многом зависит от быстродействия компьютера. В нашем случае оно составляет не более 5 мин. Пластины располагались на измерительном столе произвольным образом. Определение координат меток позволило определить смещения и углы поворотов пластин, необходимые для перевода результатов измерений в единую систему координат.

Сравнение результатов показало, что среднеквадратичное отклонение σ между разными измерениями не превышает $\lambda/1\,000$, что соответствует приблизительно 6 Å. При этом суммарная площадь областей, где ошибка превышает 3σ, составляет около 0,5 % от измеряемой площади пластин. Неполное совпадение этой составляющей с шумовой связано с наличием ошибок в определении координат меток при повторных установках образцов и влиянием на данные измерений светотехнических характеристик камеры. Устранение влияния этих эффектов является предметом последующих доработок прибора.

На рис. 3 приведены собственные профили поверхностей кварцевых пластин в виде изолиний высот. Цифры *1* и *8* определяют изолинии, соответствующие максимальной и минимальной высотам. Шаг между изолиниями равен 20 и 50 Å для первой и второй пластин соответственно, разрешение по поверхности приблизительно 0,1 мм.

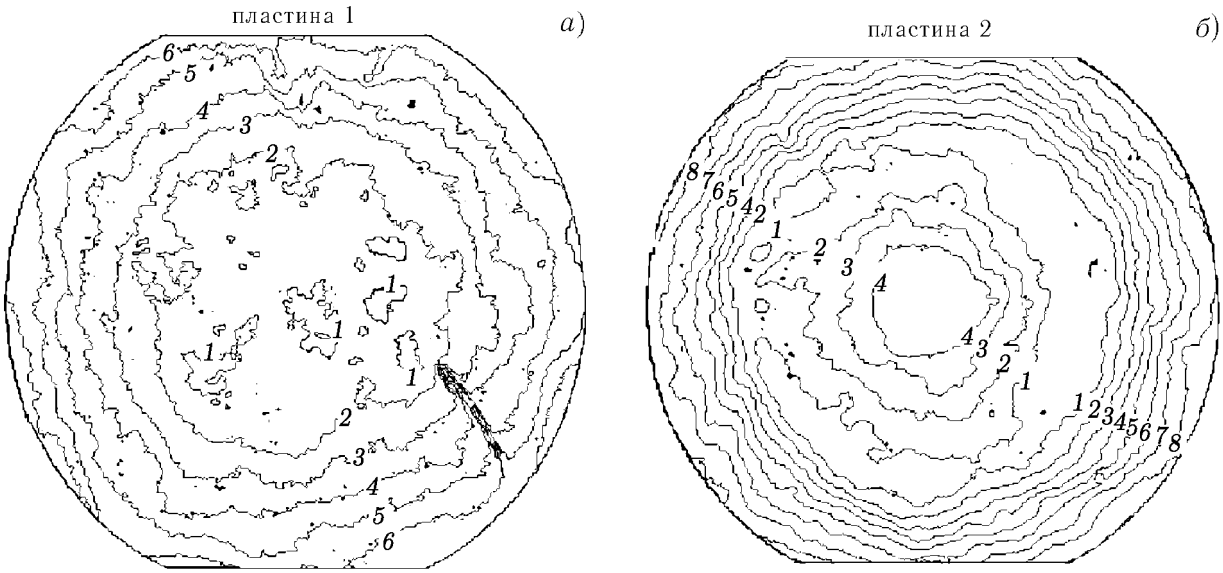

Рис. 3. Профили поверхностей кварцевых пластин в виде изолиний высот

Для первой пластины максимальная $h_{\max}$ и минимальная $h_{\min}$ высоты профиля составили $h_{\max} = 0{,}0177\,\lambda$ и $h_{\min} = -0{,}0083\,\lambda$ соответственно. Разность $h_{\max} - h_{\min}$ составляет $0{,}026\,\lambda$, что приблизительно равно 165 Å. Особенность профиля в правом нижнем углу связана с дефектом на поверхности пластины. Из рис. 3*а* видно, что практически по всей поверхности плоскостность первой пластины составляет примерно $\lambda/60$.

Максимальная высота профиля второй пластины $h_{\max} = 0{,}0289\lambda$, минимальная $h_{\min} = -0{,}0246\lambda$. Разность $h_{\max} - h_{\min}$ составляет $0{,}0535\lambda$, или примерно 338 Å. Средняя плоскостность поверхности второй пластины составляет приблизительно $\lambda/20$.

3.2. Определение гравитационного прогиба

Установка исследуемых пластин в горизонтальное положение ведёт к их провисанию, обусловленному гравитационными силами. Величина прогиба есть функция физических особенностей образцов, включая их диаметр, толщину и материал, из которого они изготовлены, а также способа крепления пластин в интерферометре.

Были проведены эксперименты по измерению гравитационного прогиба. Отметим, что при гравитационном прогибе происходит суммирование функций, описывающих собственный профиль поверх-

ности и профиль прогиба. При переворачивании пластины относительно горизонтальной оси её собственный профиль остаётся неизменным, а функция, описывающая гравитационный прогиб, только меняет знак. Чтобы отделить гравитационный прогиб от собственных неровностей поверхности пластины, измерения проводились при двух положениях пластины — плоскостью вверх и плоскостью вниз. Результаты измерений затем вычитались.

На рис. 4 представлена картина экспериментально зафиксированного гравитационного прогиба кварцевой пластины, установленной на три точки опоры, расположенные на угловых расстояниях 120° относительно друг друга по её периметру. Чёрный цвет соответствует уровню $0{,}001\lambda$ (выпуклость), белый — уровню $0{,}002\lambda$ (впадина). Зависимость между цветом и уровнем линейна. Шаг между уровнями $0{,}005\lambda$, что соответствует примерно 3 Å.

На рисунке ясно видно, что цветовые уровни сходятся к трём точкам и обрисовывают прогиб в центре пластины, соответствующий приблизительно $\lambda/1\,000$. Такая картина прогиба характерна для трёхточечного закрепления пластины.

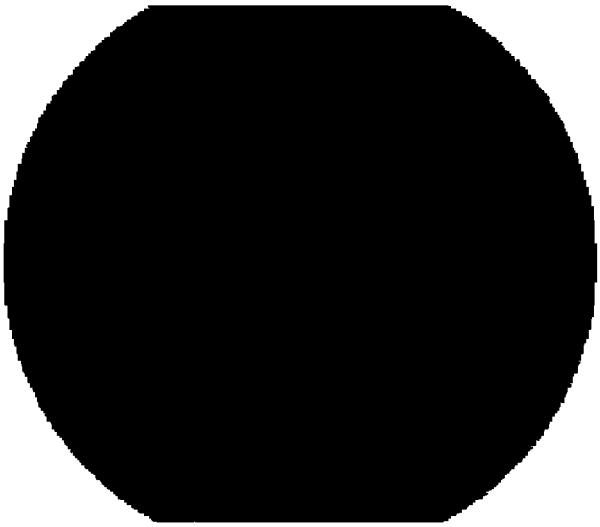

Рис. 4. Экспериментально полученный гравитационный прогиб кварцевой пластины (диаметр 120 мм, толщина 25 мм), закреплённой в трёх точках по её периметру

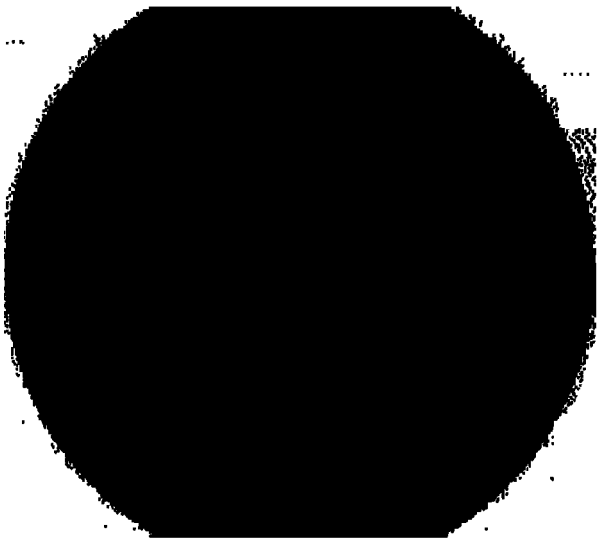

Рис. 5. Гравитационный прогиб пластины аналогичных размеров, теоретически рассчитанный в приближении тонкой пластины. Шкала цветов та же, что и на рис. 4

Для проверки экспериментальных результатов были выполнены теоретические расчёты формы прогиба пластины с размерами, соответствующими экспериментальному образцу, закреплённой в трёх точках [10]. Расчёты проводились в приближении тонкой пластины. Теоретически рассчитанный прогиб под действием силы тяжести также оказался порядка $\lambda/1\,000$. Результаты расчётов приведены на рис. 5, шкала цветов та же, что и на рис. 4. Сравнение экспериментальной и теоретической картин гравитационного прогиба показывает их качественное и количественное совпадение.

3.3. Тестирование астрономической оптики

В мае–июне 1998 г. во Флоридском университете (г. Гейнсвил, штат Флорида, США) на данной установке были проведены измерения профилей поверхности зеркал лазерных детекторов гравитационных волн, предназначенных для выполнения проекта LIGO (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory). В начале работ выяснилось наличие значительного фона вибраций в здании, в котором выполнялись измерения. Вероятнее всего, эти вибрации связаны с работой установок непрерывного

кондиционирования. Для уменьшения фона вибраций основание прибора было установлено на платформу с виброгасящими опорами.

На рис. 6 представлены изолинии профиля 80-мм центральной части плоского зеркала (диаметр всего зеркала 250 мм) с покрытием для полного отражения на длине волны $\lambda_н = 1\,064$ нм. Шаг между изолиниями соответствует 10 Å. Цифры *1* и *4* определяют изолинии, соответствующие максимальной и минимальной высотам. Как видно из рисунка, качество обработки поверхности зеркала очень высокое. Практически по всей исследуемой поверхности высота неровностей не превышает $\lambda_н/300$.

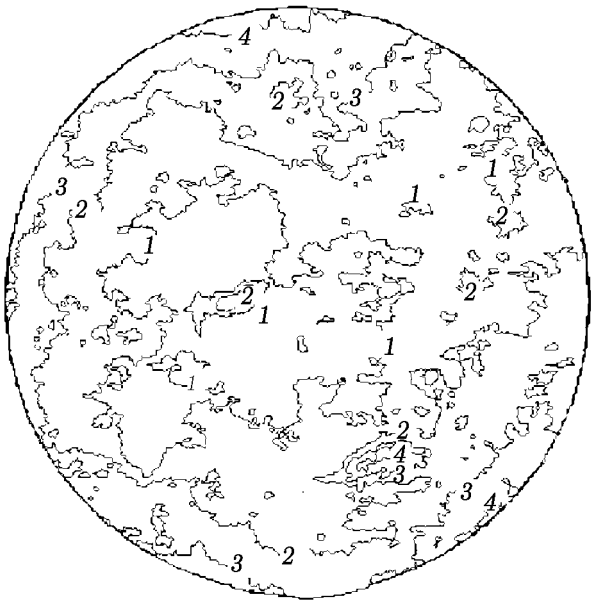

Рис. 6. Изолинии профиля плоского зеркала с покрытием для полного отражения на длине волны $\lambda_н = 1\,064$ нм

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработанный метод абсолютных прецизионных измерений отклонений поверхности от заданной формы позволяет снять ограничения на геометрические размеры и массы исследуемых образцов. Время, затрачиваемое на полный цикл измерений, обработки и представления результатов не превышает 10 мин. Это даёт возможность осуществить в реальном времени контроль профилей поверхностей оптических элементов с абсолютной точностью до 1 Å в широком диапазоне размеров. В настоящее время ведётся создание устройства для исследования образцов диаметром до 300 мм.

Предложенный метод применим не только для тестирования плоских поверхностей. С соответствующими модификациями он может быть использован и для контроля отклонений от сферических и цилиндрических поверхностей различных размеров и радиусов кривизны.

Использование в устройстве широкополосного источника излучения (источника белого света) в перспективе даёт возможность осуществлять контроль поверхностей многослойных объектов.

Работа выполнена при частичной поддержке Национального научного фонда США (грант NSF USA PHY–9900786) и Федеральной научно-технической программы «Астрономия» (разд. 1.5.4.5, 1.5.5.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Vigoureux J. M, Girard C., Courjon D. // Optics Lett. 1989. V. 14. P. 1039.
2. Schmitt. D.-R., Ringel. G., Kratz. F. // Proc. SPIE. 1994. V. 2004. P. 164.
3. Bennett J. // Appl. Optics. 1995. V. 34. P. 213.
4. Kohno T., Ozawa N., Miyamoto K., Musha T. // Appl. Optics. 1988. V. 27. P. 103.
5. Adachi M., Miki H., Nakai Y., Kawaguchi I. // Optics Lett. 1987. V. 12, No. 10. P. 792.
6. Marshall R. H., Ning. Y. N., Jiang X. Q., Palmer A. W., Meggitt B. T., Grattan K. T. // Proc. SPIE. 1996. V. 2594. P. 159.
7. Schwider J. // Appl. Optics. 1997. V. 36, No. 7. P. 1433.

8. Sasaki O., Takebayashi Y., Wang X., Suzuki T. // Optical Engineering. 1995. V. 34, No. 10. P. 2957.
9. Кожеватов И. Е., Куликова Е. Х., Черагин Н. П. // Опт. и спектроскоп. 1996. Т. 80, № 6. С. 1011.
10. Кожеватов И. Е., Куликова Е. Х., Черагин Н. П. // Опт. журнал. 1997. Т. 64, № 9. С. 49.
11. Ai C., Wyant J. C. // Appl. Optics. 1993. V. 32. P. 4698.
12. Elssner K.-E., Viogel A., Grzanna J., Schultz G. // Appl. Optics. 1994. V. 33, No. 13. P. 2437.
13. Powell I., Goulet E. // Appl. Optics. 1998. V. 37, No. 13. P. 2579.
14. Руденчик Е. А, Кожеватов И. Е., Черагин Н. П., Куликова Е. Х., Безрукова Е. Г. // Опт. и спектроскоп. 2001. Т. 90, № 1. С. 127.

Научно-исследовательский
радиофизический институт, г. Нижний
Новгород, Россия

Поступила в редакцию
10 октября 2000 г.

ABSOLUTE TESTING OF PROFILES OF PLANAR OPTICAL SURFACES OF LARGE DIMENSIONS

I. E. Kozhevatov, E. A. Rudenchik, N. P. Cheragin, and E. Kh. Kulikova

We present the results of measurements of surface profiles of various optical elements using a wide-aperture white-light interferometer. The measurement method proposed by the authors eliminates principal constraints on the size and mass of the tested sample. This method used in combination with the high-order white-light interferometry and an original calibration of the reference plate of the interferometer allows one to perform real-time testing of optical-surface profiles with an accuracy of about 1 Å in a wide technological field.

УДК 537.87

КОРОТКИЕ СОЛИТОНЫ ОГИБАЮЩЕЙ В НЕКОНСЕРВАТИВНЫХ СРЕДАХ

Е. М. Громов, А. С. Коробов, В. В. Тютин

Рассматривается динамика коротких солитонов огибающей в рамках нелинейного уравнения Шрёдингера третьего порядка, учитывающего как линейные потери, так и накачку в виде внешнего волнового поля. Получено уравнение для изменения амплитуды солитона. Найдено стационарное значение амплитуды.

Динамика интенсивных высокочастотных волновых пакетов $\psi(x,t)\exp(i\omega_0 t - ik_0 x)$ с малой временной и пространственной протяжённостью в диспергирующей среде может описываться в третьем приближении теории дисперсии нелинейных волн [1, 2]. Для консервативной среды в этом приближении огибающая пакета $\psi(x,t)$ в сопровождающей системе отсчёта, движущейся с линейной групповой скоростью $V_{\mathrm{g}}^{\mathrm{L}}$, описывается нелинейным уравнением Шрёдингера третьего порядка:

$$2i\left(\frac{\partial\psi}{\partial t} + \beta\left|\psi\right|^2\frac{\partial\psi}{\partial\xi} + \mu\psi\frac{\partial\left|\psi\right|^2}{\partial\xi}\right) + q\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2} + 2\alpha\left|\psi\right|^2\psi + i\gamma\frac{\partial^3\psi}{\partial\xi^3} = 0, \tag{1}$$

где $\xi = x - V_{\mathrm{g}}^{\mathrm{L}}t$, $V_{\mathrm{g}}^{\mathrm{L}}$ — групповая скорость линейных волн с волновым числом k и частотой ω, удовлетворяющими нелинейному дисперсионному соотношению $\omega = \omega\bigl(k, |\psi|^2\bigr)$, $q = -\partial^2\omega/\partial k^2$ — параметр линейной дисперсии второго порядка, $\alpha = \partial\omega/\partial\left|\psi\right|^2$ — параметр кубичной нелинейности, $\gamma = -(1/3)\partial^3\omega/\partial k^3$ — параметр линейной дисперсии третьего порядка (линейная аберрация). Последние два члена в скобках в уравнении (1) (с параметрами β и μ) соответствуют зависимости локальной групповой скорости пакета от интенсивности $\left|\psi\right|^2$ (нелинейная дисперсия).

К настоящему времени проведено несколько исследований стационарных волн в рамках уравнения (1). Так, в работах [3, 4] стационарные волны исследовались численно без учёта линейной дисперсии второго порядка и нелинейной дисперсии: $q = 0$, $\beta = \mu = 0$. При определённых соотношениях между параметрами уравнения (1) методом обратной задачи рассеяния (см., например, [5, 6]) найдены N-солитонные решения. Ряд работ посвящён описанию односолитонных решений уравнения (1) при $\gamma = 0$, $\beta = \mu$ [7]; при $\gamma = \mu = 0$ [8]; при $q = 0$ [9]. Также ранее были найдены нелокализованные стационарные волны — солитоны на подложке [10, 11].

Как было показано в [12], у уравнения (1) существует класс решений в виде коротких солитонов огибающей:

$$\psi\left(\xi,t\right) = \frac{A_0\exp(i\Omega t + iK\xi)}{\mathrm{ch}[(\xi - Vt)\,A_0\varepsilon]}\,, \tag{2}$$

$$K = \frac{q\Theta - 3\alpha\gamma}{6\mu\gamma}\,,\quad V = Kq - \frac{3\gamma K^2}{2} + \frac{\Theta A_0^2}{6}\,,\quad \Omega = \frac{\Theta A_0^2}{6\gamma}\left(q - 3K\gamma\right) + \frac{K^2}{2}\left(K\gamma - q\right),$$

где $\varepsilon = \sqrt{\Theta/(3\gamma)}$, $\Theta = \beta + 2\mu$ — результирующий параметр нелинейной дисперсии. Солитонное решение (2) существует в средах с одинаковым знаком линейной дисперсии третьего порядка и результирующего параметра нелинейной дисперсии ($\gamma\Theta > 0$), когда эффект самоукручения, обусловленный нелинейной дисперсией, компенсируется эффектом линейной аберрации, обусловленной линейной дисперсией третьего порядка. Солитоны с ненулевым сдвигом волнового числа ($K \neq 0$) существуют при условии $\mu\gamma \neq 0$, когда имеют место как эффекты нелинейной дисперсии, так и линейной аберрации.

В работе [13] показано, что короткие солитоны (2) являются единственным устойчивым классом решений уравнения (1): произвольный импульс в рамках уравнения (1) при условии $\gamma\Theta > 0$ эволюционирует к системе солитонов (2) и линейной квазипериодической волне. Однако поведение солитонов (2) в неконсервативной среде до настоящего времени не рассматривалось.

В данной работе мы рассматриваем в адиабатическом приближении динамику короткого солитона огибающей в рамках неконсервативного нелинейного уравнения Шрёдингера третьего порядка, учитывающего линейные потери и внешнее воздействие в виде монохроматического волнового поля с постоянной амплитудой:

$$2i\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}+\beta\left|\psi\right|^2\frac{\partial\psi}{\partial\xi}+\mu\psi\frac{\partial\left|\psi\right|^2}{\partial\xi}\right)+q\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}+2\alpha\left|\psi\right|^2\psi+i\gamma\frac{\partial^3\psi}{\partial\xi^3}= \\ =-i\nu\psi+\Phi\exp[i\left(\varphi_0+\omega t-k\xi\right)], \quad (3)$$

где $\nu > 0$ — коэффициент потерь, Φ, ω, k и φ_0 — амплитуда, частота, волновое число и фаза внешнего поля соответственно. Уравнение такого вида можно применять для описания электромагнитных волновых пакетов в оптических волоконных линиях связи, на которые волновое поле Φ падает на просвет извне. Другая область применения данного уравнения — описание волновых пакетов в активных средах.

Домножая (3) на ψ^*, складывая полученное уравнение с комплексно-сопряжённым и интегрируя полученное выражение при нулевых условиях на бесконечности, $\psi(\xi,t)\big|_{\xi\to\pm\infty}\to 0$, получаем закон изменения энергии солитона:

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=-\nu N+\Phi\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{Im}\left\{\psi^*\exp[i\left(\varphi_0+\omega t-k\xi\right)]\right\}\mathrm{d}\xi, \quad N=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|\psi\right|^2\mathrm{d}\xi. \quad (4)$$

Представляя решение уравнения (4) в виде адиабатически меняющегося короткого солитона

$$\psi\left(\xi,t\right)=\frac{A_0\left(t\right)}{\mathrm{ch}\left[A_0(t)\varepsilon\left(\xi-\int_0^t V\left(\tilde{t}\right)\mathrm{d}\tilde{t}\right)\right]}\exp\left[i\int_0^t\Omega\left(\tilde{t}\right)\mathrm{d}\tilde{t}+iK\xi\right],$$

где

$$\Omega=b_1A_0^2+b_2, \quad b_1=\frac{\Theta}{6\gamma}\left(q-3K\gamma\right), \quad b_2=\frac{K^2}{2}\left(K\gamma-q\right),$$

получаем уравнение изменения амплитуды солитона $A_0(t)$:

$$\frac{\mathrm{d}A_0}{\mathrm{d}t}=-\nu A_0+\frac{\pi\Phi\sin\left[\varphi_0-\int_0^t\left(\Omega\left(\tilde{t}\right)-\omega\right)\mathrm{d}\tilde{t}\right]}{2\,\mathrm{ch}[\pi(K-k)/A_0]}. \quad (5)$$

При введении новой переменной $y(t)=\int_0^t A_0^2(\tilde{t})\,\mathrm{d}\tilde{t}$, учитывая, что $\dot{y}=A_0^2(t)\geq 0$, уравнение (5) принимает вид

$$\ddot{y}+2\nu\dot{y}-\pi\Phi\sqrt{\dot{y}}\,\frac{\sin[\varphi_0-b_1y+(\omega-b_2)\,t]}{\mathrm{ch}\left[\sigma/\sqrt{\dot{y}}\,\right]}=0, \quad \sigma=\pi\left(K-k\right). \quad (6)$$

Начальные условия для уравнения (6) $y|_{t=0}=0$, $\dot{y}|_{t=0}=\dot{y}_0$. Представляя решение уравнения (6) в виде $y=at+\eta(t)$, где $a=(\omega-b_2)/b_1$, приходим к автономному уравнению

$$\ddot{\eta}+2\nu\left(a+\dot{\eta}\right)-\pi\Phi\sqrt{a+\dot{\eta}}\,\frac{\sin(\varphi_0-b_1\eta)}{\mathrm{ch}\left(\sigma/\sqrt{a+\dot{\eta}}\right)}=0, \quad \eta\big|_{t=0}=0, \quad \dot{\eta}\big|_{t=0}=\dot{\eta}_0. \quad (7)$$

Величина a равна квадрату амплитуды солитона A_c^2, при которой частота солитона $\Omega(a)$ совпадает с частотой внешнего поля $\omega : \Omega(a) = \omega$.

Проанализируем фазовый портрет уравнения (7). Здесь все фазовые траектории располагаются в области $\dot{\eta} \geq -a$ (траектория $\dot{\eta} = -a$ является устойчивой). Фазовый портрет периодичен по η, что даёт возможность рассматривать фазовые траектории этого уравнения только на интервале длиной $2\pi/b_1$. Также нужно отметить, что реализуются только траектории, пересекающие прямую $\eta = 0$. Координаты стационарных точек системы, определяемые условием $\ddot{\eta} = \dot{\eta} = 0$, находятся из соотношения

$$\sin(\varphi_0 - b_1\eta_{\rm st}) = \frac{2\nu\sqrt{a}}{\pi\Phi}\,{\rm ch}\big(\sigma/\sqrt{a}\big) = H \geq 0. \tag{8}$$

При $H < 1$ уравнение (8) имеет два корня $\eta_{\rm st}^{(1,2)}$, соответствующие двум стационарным точкам: $I(\dot{\eta} = 0, \eta = \eta_{\rm st}^{(1)})$ и $II(\dot{\eta} = 0, \eta = \eta_{\rm st}^{(2)})$. Тип стационарных точек I и II определяется корнями $\lambda_{1,2}(I, II)$ характеристического уравнения:

$$\lambda_{1,2}\,(I, II) = -\frac{\nu\Delta}{2} \pm \sqrt{\frac{\nu^2\Delta^2}{4} + B(I, II)}\,, \tag{9}$$

где

$$\Delta = 1 - \frac{\sigma}{\sqrt{a}}\,{\rm th}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{a}}\right), \quad B\,(I) = -B\,(II) = 2a\nu\left|b_1\cos\left(\varphi_0 - b_1\eta_{\rm st}^{(1,2)}\right)\right| > 0.$$

Стационарная точка I является седлом, а тип точки II определяется величиной $B(II)$: при $|B(II)| > \nu^2\Delta^2/4$ стационарная точка II — фокус, а при $|B(II)| \leq \nu^2\Delta^2/4$ — узел. Устойчивость точки II определяется знаком Δ: при $\Delta > 0$ это устойчивое состояние, а при $\Delta < 0$ — неустойчивое.

При малых значениях $\sigma/\sqrt{a}\,(\sigma/\sqrt{a} < 1{,}05)$ на фазовой плоскости уравнения (7) все траектории, лежащие между сепаратрисами s_1 и s_2 седла I, приходят в фокус II, а остальные траектории уходят к линии $\dot{\eta} = -a$ (рис. 1*а*). Таким образом при начальных условиях из штрихованного интервала амплитуда солитона после нескольких осцилляций выходит на стационарное значение $A_c = \sqrt{a}$. При начальных условиях, лежащих вне штрихованного интервала, амплитуда солитона уменьшается до нуля.

При увеличении параметра $\sigma/\sqrt{a}$ приблизительно до 1,05 сепаратрисы s_1 и s_2 седла замыкаются и образуется петля сепаратрис. Фокус при этом остаётся устойчивым (рис. 1*б*; штрихованный интервал на рисунке — область начальных значений, траектории из которой захватываются устойчивым фокусом).

При дальнейшем увеличении параметра $\sigma/\sqrt{a}$ петля сепаратрис размыкается и от неё отделяется неустойчивый предельный цикл (замкнутая пунктирная линия на рис. 1*в*). Интервал начальных условий, при которых солитон эволюционирует к стационарному импульсу с ненулевой амплитудой A_c, находится внутри этого предельного цикла (на рисунке — заштрихованный интервал).

При достижении параметром $\sigma/\sqrt{a}$ значения приблизительно 1,2, определяемого условием $\Delta = 0$, неустойчивый предельный цикл влипает в фокус II, при этом последний теряет устойчивость. При значениях параметра $\sigma/\sqrt{a} \geq 1{,}2\,(\Delta < 0)$ на фазовой плоскости уравнения (7) не существует устойчивых состояний равновесия, и все траектории уходят на линию $\dot{\eta} = -a$ (рис. 1*г*). Другими словами, не существует начальных условий, при которых реализуется стационарный солитон с ненулевой амплитудой. На рис. 1 приведена зависимость параметров неустойчивого предельного цикла от $\sigma/\sqrt{a}$ при $\varphi_0 = 0,\ b_1 = 1,\ a = 1$ (размах цикла по η — кривая *1*, и по $\dot{\eta}$ — кривая *2*).

Приведённые рисунки были построены при следующих значениях параметров: $\nu = 0{,}3$; $a = 1$; $\pi\Phi = 0{,}5$; $\varphi_0 = 0$; $b_1 = 1$. При других значениях этих параметров вид фазовой плоскости уравнения (7) остаётся прежним, изменяется лишь значение величины $\sigma/\sqrt{a}$, при котором происходит влипание неустойчивого предельного цикла в фокус II и смена устойчивости фокуса.

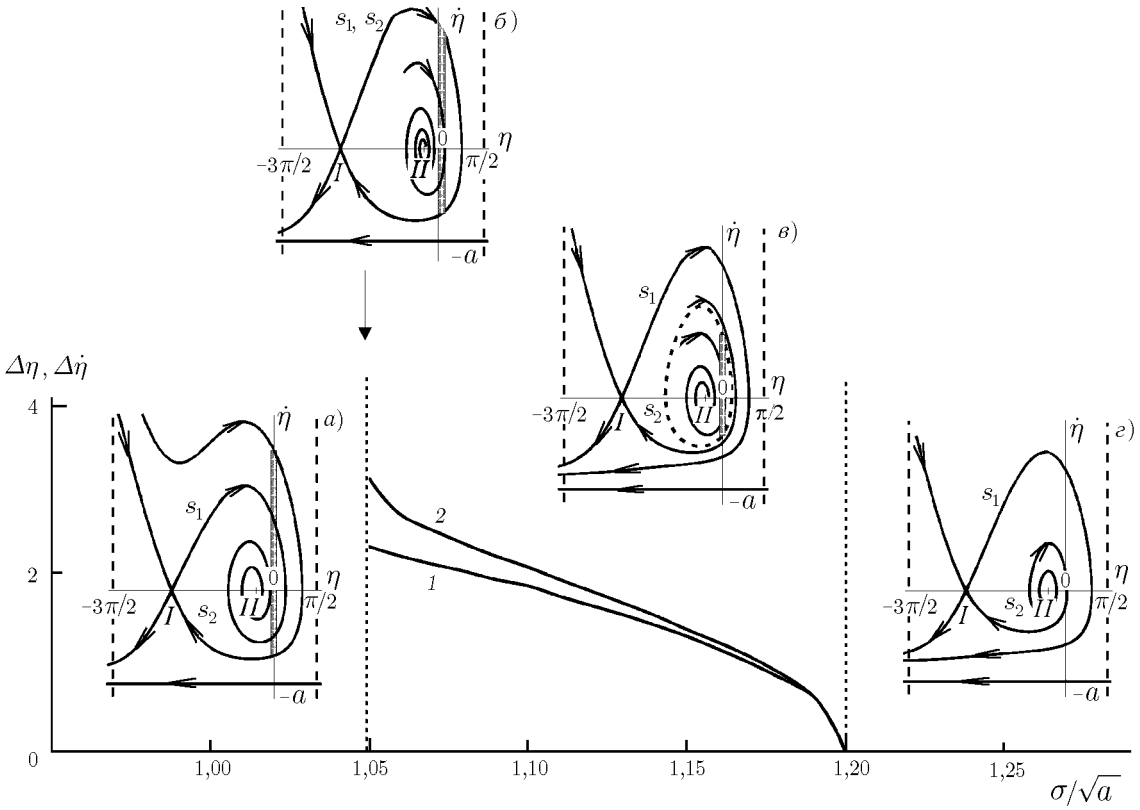

Рис. 1. Размах неустойчивого предельного цикла по η (кривая *1*) и по $\dot\eta$ (кривая *2*) в зависимости от величины параметра $\sigma/\sqrt{a}$. При $\sigma/\sqrt{a} \approx 1{,}05$ — рождение предельного цикла из петли сепаратрис. При $\sigma/\sqrt{a} \approx 1{,}2$ — влипание предельного цикла в фокус

При $H = 1$ на фазовой плоскости уравнения (7) два состояния равновесия сливаются в одно, образуя седлоузел. Соотношение (9) в этом случае сводится к виду $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -\nu\Delta$. При $\Delta > 0$ существует область, лежащая между сепаратрисами седлоузла, все траектории из которой приходят в состояние равновесия. При $\Delta < 0$ устойчивой является только линия $\dot\eta = -a$.

При $H > 1$ на фазовой плоскости $(\dot\eta, \eta)$ уравнения (7) не существует стационарных точек, и все траектории уходят на линию $\dot\eta = -a$.

Таким образом, в данной работе рассмотрены короткие солитоны огибающей в нелинейной диспергирующей среде при наличии диссипации и накачки, описываемые уравнением (3). При исследовании фазовой плоскости уравнения (7), описывающего эволюцию амплитуды солитона, показана возможность существования стационарного солитона (2) с ненулевой амплитудой $A_c = \sqrt{a}$, при которой добавочная частота солитона Ω совпадает с частотой внешнего поля ω. Этот солитон существует при условиях

$$\frac{2\nu\sqrt{a}}{\pi\Phi}\,\mathrm{ch}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{a}}\right) = H < 1, \qquad \sigma/\sqrt{a} < 1{,}2.$$

Показано, что этот солитон устойчив по отношению к малым возмущениям, т. е. солитон с амплитудой, слабо отличающейся от $A_c = \sqrt{a}$, эволюционирует к стационарному солитону с амплитудой $A_c = \sqrt{a}$. При этом область устойчивости по начальным амплитудам (соответствует заштрихованным областям на рис.1*а–в*) определяется параметрами среды (α, q, β, μ, γ), нелинейности (ν) и внешнего поля (Φ, k, ω, φ_0). Любой солитон с амплитудой, не попадающей в область устойчивости, или при невыполнении условий существования стационарного солитона диссипирует, т. е. его амплитуда уменьшается до нуля.

Данная работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 00–02–16596 и 00–15–96772).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Agraval G. P. // Nonlinear Fiber Optics. Orlando: Academic, 1989.
2. Hasegava A. // Optical Solitons in Fibers. Berlin: Springer-Verlag, 1989.
3. Wai P. K. A., Menyuk C. R., Chen H. H., Lee Y. C. // Opt. Lett. 1987. V. 12. P. 628.
4. Мезенцев В. К., Турицын С. К. // Квантовая электроника. 1991. Т. 18, №. 5. С. 610.
5. Hirota R. // J. Math. Phys. 1973. V. 14. P. 805.
6. Sasa N., Satsuma J. // J. Phys. Soc. Jap. 1991. V. 60. P. 409.
7. Kaup D. J., Newell A. C. // J. Math. Phys. 1978. V. 19. P. 798.
8. Chen H. H., Lee Y. C., Liu C. S. // Physica Scripta. 1979. V. 20. P. 490.
9. Frantzeskakis D. J., Hizanidis K., Tombas G. S., Belia I. // IEEE J. Quantum Electron. 1995. V. 1995. P. 183.
10. Gromov E. M., Tyutin V. V. // Wave Motion. 1998. V. 28, No. 1. P. 13.
11. Li Z., Li L., Tian H., Zhou G. // Phys. Rev. Lett. 2000. V. 84, No. 18. P. 4 096.
12. Громов Е. М., Таланов В. И. // ЖЭТФ. 1996. Т. 110. С. 137.
13. Gromov E. M., Piskunova L. V., Tyutin V. V. // Phys. Lett. A. 1999. V. 256. P. 153.

Институт прикладной физики РАН,
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию
23 июня 2000 г.

SHORT ENVELOPE SOLITONS IN NONCONSERVATIVE MEDIA

E. M. Gromov, A. S. Korobov, and V. V. Tyutin

We consider the dynamics of short envelope solitons within the framework of the third-order nonlinear Schrödinger equation with allowance for both linear dissipation and pumping in the form of an external wave field. An equation for the soliton amplitude is derived in the adiabatic approximation. The stationary value of the soliton amplitude is found.

УДК 621.3/.535.2

ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТЬ ПРОЦЕДУРЫ СЖАТИЯ УЗКОПОЛОСНОГО СИГНАЛА

В. А. Зверев

Рассмотрена помехоустойчивость процедуры сжатия узкополосного сигнала [1]. Под помехоустойчивостью понимается отношение максимальной амплитуды сжатого сигнала к мощности шума. Показано, что это отношение при сжатии узкополосного сигнала возрастает, если шум представляет собой реверберационную помеху, остаётся неизменным, если шум подаётся на широкополосный входной тракт локатора, и убывает, если входной тракт локатора узкополосный. Приведены результаты расчётов и численного моделирования.

В [1] рассмотрено сжатие во времени узкополосного сигнала типа затухающей синусоиды или прямоугольного импульса с синусоидальным заполнением. Эффект сжатия достигается благодаря выравниванию спектра сигнала по всей его ширине вплоть до частоты временнóго квантования. При этом длительность сжатого сигнала составляет один интервал временнóго квантования, в то время как длительность первоначального сигнала может составлять сотни и тысячи таких интервалов. При таком «выпрямлении» спектра малые спектральные составляющие, которые присутствуют в большинстве своём в спектрах рассматриваемых узкополосных сигналов, приходится умножать на относительно большие величины. Эта операция происходит при наличии шумов, которые тоже умножаются на те же величины. Возникает вопрос о степени помехоустойчивости такой процедуры. В работе [1], где подробно обсуждался вопрос о процедурах, обеспечивающих высокое сжатие узкополосных сигналов, вопросы помехоустойчивости практически не рассматривались. Задачей настоящей статьи является анализ помехоустойчивости процедуры сжатия сигналов, рассмотренной в [1].

Начнём с уточнения того, что мы будем понимать под помехоустойчивостью. Целесообразно дать специальное определение помехоустойчивости для целей локации. Определение отношения сигнала к шуму оперирует со статистическими характеристиками как сигнала, так и шума. Основной статистической характеристикой является так называемое стандартное отклонение, определяемое как

$$S = \frac{1}{N}\sqrt{\sum_i (x_i - a)^2}\,, \tag{1}$$

где x_i — совокупность N значений сигнала или шума, a — среднее значение этой совокупности значений. В рассматриваемых нами случаях $a = 0$, так что S приобретает смысл квадратного корня от мощности рассматриваемого процесса. Введя стандартные отклонения для сигнала $S_{\rm s}$ и шума $S_{\rm n}$, отношение сигнала к шуму запишем в виде

$$A = S_{\rm s}/S_{\rm n}. \tag{2}$$

Выражение (2) определяет обычное отношение сигнала к шуму. В локации отношение (2) много меньше единицы, т. к. узкий импульс, применяемый в локации, содержит очень мало энергии. Однако в этом случае сигнал отчётливо виден на экране локатора, если в наблюдаемом нами импульсе его максимальное значение $S_{\max}$ много больше шума. При этом для нас не имеет значения, каково в этом случае отношение (2). Локационное отношение сигнала к шуму запишем в виде

$$B = S_{\max}/S_{\rm n}. \tag{3}$$

Отношение (3) положим в основу наших расчётов. Результат расчёта, в первую очередь, зависит от того, на каком этапе обработки сигнала поступает шум и какой из этих этапов берётся для сравнения. Есть зависимость результата и от формы импульса. Для начала рассмотрим случай, когда шум

подаётся таким же путём, как и сигнал от объекта локации. На практике это соответствует так называемой реверберационной помехе, которая образуется вследствие рассеяния зондирующего импульса на случайных неоднородностях среды (каплях дождя, кустах, облаке пассивных помех и т. п.). Такой тип помехи является преобладающим в низкочастотной гидроакустике. В этом предположении спектр принимаемого локатором шума имеет тот же вид, что и спектр принимаемого сигнала. Такой шум можно получить, пропустив шум, обладающий равномерным спектром, через фильтр, имеющий частотную характеристику $z(\omega)$, форма которой совпадает со спектром зондирующего импульса локатора.

Процедура обработки сигнала с целью его сжатия заключается в том, что каждая мгновенная реализация комплексного фурье-спектра принятого сигнала вместе со спектром шума делится на комплексный спектр зондирующего сигнала $z(\omega)$, после чего выполняется обратное преобразование Фурье [1]. Эта цепочка преобразований обратима. Соотношение максимальных амплитуд в начальном и сжатом импульсах не зависит от того, сжимаем ли мы импульс путём деления его спектра на $z(\omega)$ или, наоборот, растягиваем его путём умножения спектра предельно короткого импульса на $z(\omega)$. Однако рассуждать проще и привычнее именно в последнем случае, что мы, пользуясь обратимостью преобразования, и будем делать.

Пусть форма зондирующего импульса до сжатия, как и в [1], будет иметь вид затухающей косинусоиды. Такую форму принимает отклик колебательного контура на короткий импульс. Для нас существенно, что максимум отклика контура не будет изменяться в зависимости от добротности контура или от скорости затухания в нём свободных колебаний. Под действием короткого возбуждения контур будет совершать колебания с начальной амплитудой, достигнутой за время толчка [2]. Шум при сделанном нами предположении также представляет собой толчки столь же малой длительности, но следующие хаотично один за другим. Примем, что средняя амплитуда одного толчка шума равна амплитуде толчка $S_{\max}$, которым на контур действует сигнал. Это равносильно предположению, что отношение B, определяемое выражением (3), в результате сжатия сигнала становится равным единице. Толчки от шума суммируются контуром в течение его отклика длительностью T. Условимся измерять T числом интервалов временного квантования до спада амплитуды зондирующего сигнала на 2 дБ. Интервал T, измеренный в точках отсчёта, будет соответствовать и величине сжатия узкополосного сигнала, поскольку он сжимается до одной точки отсчёта.

Стандартное отклонение колебаний в контуре под действием случайных толчков (см. [2]) запишется следующим образом:

$$S_{\mathrm{n}} = S_{\max}\sqrt{T}\,. \tag{4}$$

Из (4) следует, что если локационное отношение сигнала к шуму после сжатия сигнала равно единице, то на начальном этапе (до сжатия сигнала) оно будет равно $\sqrt{T}$. Следовательно, переход к конечному этапу со сжатием длительности сигнала в T раз должен сопровождаться увеличением помехоустойчивости на $10\lg T$ дБ.

На рис. 1 представлен результат теоретического расчёта и численного моделирования при зондирующем импульсе в форме затухающего косинусоидального сигнала. По горизонтальной оси отложено сжатие сигнала T в логарифмическом масштабе, а по вертикальной — увеличение отношения сигнала к шуму B, определяемое (3), которое произошло в результате сжатия сигнала до одного интервала временного квантования. Линиями показаны результаты аппроксимации, выполненной в соответствии с расчётами, а точками отмечены результаты численного моделирования задачи при различных условиях.

Рассмотренный выше случай показан на рис. 1 точками в виде косых крестиков. Аппроксимирующая прямая (пунктир) проведена по закону $10\lg T$, что согласуется с (4). Точками в виде прямых

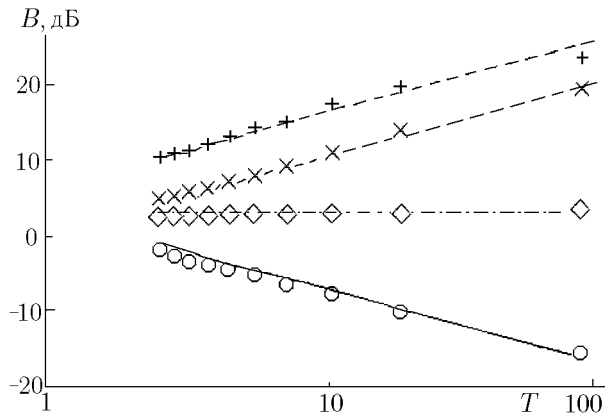

Рис. 1

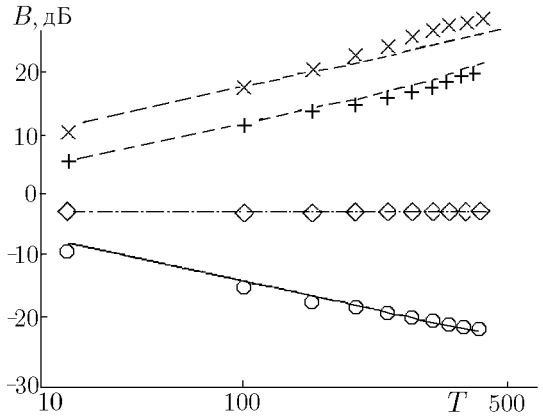

Рис. 2

крестиков показан выигрыш, полученный в результате сжатия импульса после двукратного прохождения через фильтр с частотной характеристикой колебательного контура. В этом случае выигрыш возрастает на 6 дБ. Увеличение выигрыша произошло в результате изменения формы отклика на одиночный начальный импульс: отклик приобретает форму, при которой отношение максимума отклика к его стандартному отклонению убывает на 6 дБ.

В [1] рассмотрен случай, когда шум, имеющий равномерный спектр, поступает в приёмный тракт локатора вместе с отражёнными сигналами от целей. Этот случай отличается от рассмотренного выше. Если приёмный тракт локатора широкополосный, то, как отмечено в [1], в процессе обработки сигнала с целью его сжатия принятый сигнал и шум делятся на одну общую для них функцию $z(\omega)$. Эта функция почти для всего спектра убывает как $1/\omega$, в результате отношение сигнала к шуму практически не зависит от сжатия сигнала и близко к единице. Соответствующий график показан на рис. 1. Точки, соответствующие вышеописанной схеме подачи шума, показаны ромбами. Штрих-пунктирная линия проведена на уровне 3 дБ.

Однако приёмный тракт локатора ни к чему делать широкополосным. Различие формы спектров сигнала и шума можно использовать для увеличения отношения сигнала к шуму, пропустив принятый локатором сигнал через фильтр с частотной характеристикой $z(\omega)$. Тогда в этом сигнале соотношение сигнала к шуму возрастёт приблизительно на $10\lg T$ дБ, в то время как соотношение сигнала к шуму в сжатом сигнале остаётся прежним. В соответствии с этим выигрыш, получаемый при сжатии сигнала, уменьшается, превращаясь в проигрыш. На рис. 1 точки, показывающие результат численного моделирования этого случая, отмечены кружочками. Сплошной линией показана зависимость $-10\lg T+3$.

На рис. 2 показан выигрыш в отношении сигнала к шуму для тех же случаев, что и на рис. 1, которые помечены точно также, для прямоугольного импульса. Теперь линия, помеченная прямыми крестиками, проведённая для случая двукратного прохождения сигнала через фильтр, лежит ниже линии, показанной прямыми крестиками. Это объясняется тем, что для прямоугольного импульса, превращающегося в треугольный, отношение максимума к стандартному отклонению не убывает, а возрастает примерно на 5 дБ. Аппроксимирующие прямые на рис. 2 проведены следующим образом (сверху вниз): $10\lg T$; $10\lg T-6$; -3; $-10\lg T+3$.

Особого пояснения требует график, помеченный ромбами. Он приобретает вид, показанный на рис. 2, только в том случае, если форма зондирующего сигнала не совсем прямоугольная. Для этого случая импульс сформирован так, что не обращается в нуль сразу по истечении его длительности, а имеет крутой экспоненциальный спад. Если же оставить форму импульса в точности прямоугольной, то этот график приобретает форму, показанную на рис. 3. На этом рисунке по горизонтали отложена длительность импульса в точках отсчёта в линейном масштабе, по вертикали отложен

выигрыш, получаемый при сжатии прямоугольного сигнала до одной отсчётной точки. Получающаяся на графике зависимость выигрыша от длительности импульса обусловлена только преобразованием шума, сигнал сжимается без каких-либо особенностей. Причудливая регулярная зависимость выигрыша сжатия от длительности импульса объясняется тем, что в спектре импульса появляются нули, которые попадают (или не попадают) на дискретные точки отсчёта спектра. Отметим, что это обстоятельство сказывается только на одной зависимости. Все остальные получены при идеально прямоугольной форме импульса.

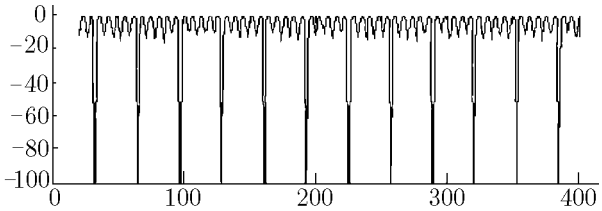

Рис. 3

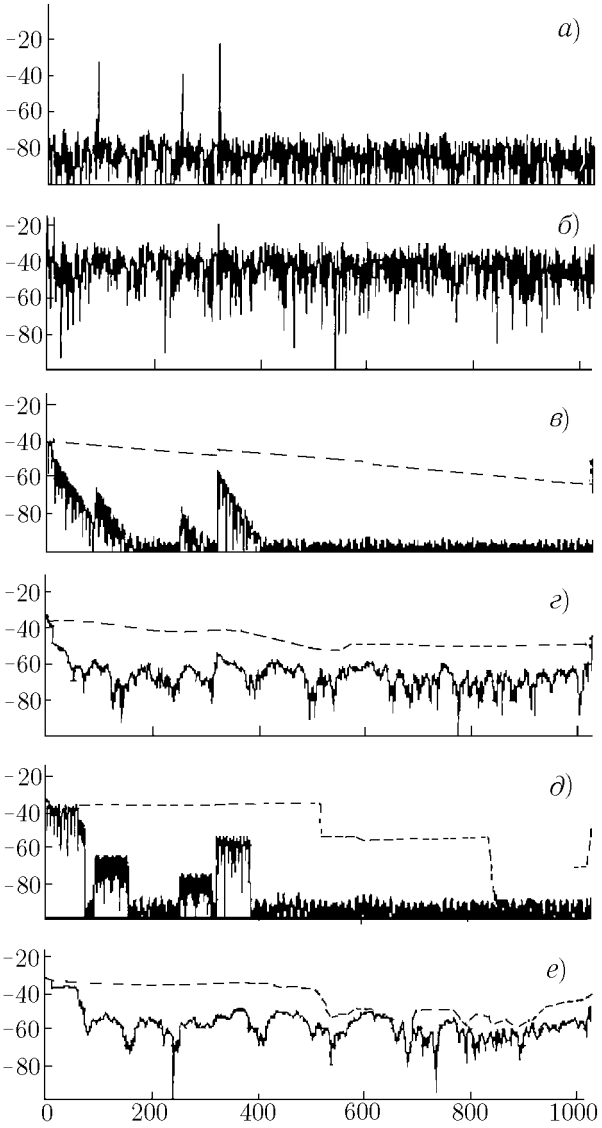

Рис. 4

Процедуру сжатия узкополосного сигнала целесообразно использовать не только в том случае, когда получается выигрыш в отношении сигнала к шуму. Для локации несравненно более существенным оказывается выигрыш в разрешающей способности. Иллюстрацией этого обстоятельства является рис. 4. На этом рисунке приведены примеры картин на экране локатора, наблюдавшихся при численном моделировании. По горизонтали отложено время в точках отсчёта, а по вертикали — отклик локатора на сигнал и шум в дБ относительно максимального уровня сигнала локатора. На этом рисунке и следующем рис. 4*б* показаны отклики сигнала после сжатия при большом (рис. 4*а*) и малом (рис. 4*б*) отношениях сигнала к шуму. На рис. 4*в, г* показаны отклики локатора до сжатия для импульса в виде затухающей косинусоиды при большой (несколько сотен точек) длительности (пунктир) и малой (15 точек) длительности (сплошная линия). На рис. 4*в* отношение сигнала к шуму такое, как и на рис. 1. На рис. 4*г* отношение сигнала к шуму такое, как на рис. 2. На рис. 4*д*, *е* показано то же, что и на рис. 4*в*, *г*, но для импульса, который до сжатия имел прямоугольную форму. Из рис. 4 наглядно видно, что процедура сжатия качественно изменяет наблюдаемую локационную картину. В этом состоит главное преимущество рассматриваемой процедуры обработки локационных сигналов, которое трудно адекватно охарактеризовать количественно. Что касается отношения сигнала к шуму, то его, если это требуется для компенсации проигрыша, можно увеличить, сделав более интенсивным зондирующий сигнал. Отметим, что в том случае, когда рассматриваемая процедура приводит к выигрышу в отношении сигнала к шуму, увеличить этот выигрыш за счёт роста интенсивности зондирующего сигнала, как правило, нельзя, т. к. в этом случае помеха носит характер реверберации, уровень которой по отношению к сигналу не зависит от уровня зондирующего сигнала. Это обстоятельство делает получаемый в этом

случае выигрыш особо привлекательным.

Заметим, что принятый локационный сигнал может быть обработан так, что применение рассмотренной процедуры сжатия будет крайне неэффективным. Например, можно с целью выравнивания формы спектров сигнала и шума применить фильтр, полностью обрезающий (превращающий в нуль) спектр в большой части частотного диапазона. Такая процедура возможна, она увеличит обычное наблюдаемое отношение сигнала к шуму примерно также, как и рассмотренное выше умножение спектра на $z(\omega)$. Однако процедура, зануляющая часть спектра, делает невозможной эффективное (во всей полосе частот) сжатие спектра.

Обсуждаемая методика сжатия узкополосного сигнала успешно применена в акустическом эксперименте [3]. Акустический импульс с первоначальной длиной почти три метра, излучённый громкоговорителем, был при обработке сжат до нескольких сантиметров, что позволило разделить прямой и рассеянный сигналы при локации на просвет.

Автор весьма признателен В. И. Таланову за сделанные им замечания, учёт которых улучшил статью. Работа поддержана РФФИ (проекты № 00–15–96741 и 99–02–16401).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зверев В. А. // Известия вузов. Радиофизика. 2000. Т. 43, № 5. С. 406.
2. Горелик Г. С. Колебания и волны. М.: Физматгиз, 1959.
3. Зверев В. А., Коротин П. И., Циберев А. В. Интерференционная локация высокого разрешения // Акустический журнал. 2001. Т. 47, № 4, С. 468.

Институт прикладной физики РАН,
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию
15 декабря 2000 г.

NOISE IMMUNITY OF THE COMPRESSION PROCEDURE FOR A NARROW-BAND SIGNAL

V. A. Zverev

We consider the noise immunity of the procedure [1] of compression of a narrow-band signal, i.e., the ratio of the maximum amplitude of the compressed signal to the noise power. It is shown that in the case of the compression of a wideband signal, this ratio increases if the noise is a reverberation interference, remains constant if the noise is fed to a wideband input channel of the locator, and decreases if the input channel is narrow-band. The results of calculations and numerical simulations are presented.