

Содержание

Моисеев С. Н. Интервальный прогноз частоты экранирования и предельной частоты слоя E_g	301
Бубукин И. Т., Коган Л. П. Оценка флуктуаций электромагнитного поля над морской поверхностью при наличии пенообразований	307
Ростов В. В., Тотьменинов Е. М. Уточнённые соотношения подобия для высокочастотных приборов с длительной инерционной группировкой электронов	326
Завольский Н. А., Запевалов В. Е., Моисеев М. А. О достижении высокого КПД релятивистского гиротрона	345
Швырёв А. Н., Ярошук И. О. Статистическое моделирование в задаче о возбуждении полей случайными источниками на поверхности.....	353
Галлямов Р. Р., Гоц С. С., Бахтизин Р. З. Применение m -связных последовательностей для моделирования шумовых процессов.....	359
Малахов А. Н., Панкратов Е. Л. Время установления концентрации вещества в среде с произвольно меняющимися в пространстве коэффициентом диффузии и потенциалом	367

УДК 550.388.2

ИНТЕРВАЛЬНЫЙ ПРОГНОЗ ЧАСТОТЫ ЭКРАНИРОВАНИЯ И ПРЕДЕЛЬНОЙ ЧАСТОТЫ СЛОЯ E_s

С. Н. Моисеев

Получены формулы для точечного медианного байесовского прогноза при симметричных функциях потерь и для интервального прогноза частоты экранирования и предельной частоты среднеширотного слоя E_s при различной доступной информации об их текущих значениях. Прогнозы сопоставлены с данными станций вертикального зондирования.

ВВЕДЕНИЕ

Основная особенность среднеширотного слоя E_s ионосферы заключается в аномально большой максимальной электронной концентрации $N(t) = \max_z N(z, t)$, где z — высота над поверхностью Земли. Частота появления больших значений $N(t)$ относительно велика. В работе [1] было показано, что с учётом флуктуаций толщины слоя E_s из теории ветрового сдвига, физически объясняющей образование среднеширотного спорадического слоя, следует вероятностный закон распределения Коши для значений $N(t)$. Этот вывод нашёл своё экспериментальное подтверждение в работах [1–3]. Из-за тяжёлых хвостов распределение Коши не имеет конечных моментов, для него не выполняется центральная предельная теорема [3] и закон больших чисел. В частности, среднее арифметическое независимых одинаково распределённых случайных величин Коши в пределе не будет сходиться по вероятности к постоянной величине, а будет иметь такое же распределение, как и отдельное слагаемое в сумме [4]. Поэтому широко распространённый критерий построения оптимальных прогнозов — по минимуму среднего квадрата ошибки — не подходит для прогнозирования процесса $N(t)$ и связанных с ним частот экранирования $f_b(t)$ и предельной частоты $f_o(t)$ слоя E_s , т. к. прогнозы, построенные по этому критерию, не будут устойчивыми. Свойством устойчивости будут обладать прогнозы, построенные на основе не усреднённых, а квантильных вероятностных характеристик.

Настоящая работа посвящена построению статистических прогностических моделей процессов $f_b(t)$ и $f_o(t)$, способных давать как точечные, так и интервальные прогнозы, устойчивые к аномально большим выбросам электронной концентрации слоя E_s .

1. ВЫБОР СТАТИСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Частоты $f_b(t)$ и $f_o(t)$ (обозначим их $f_{b,o}(t)$) связаны с максимальной электронной концентрацией $N(t)$ слоя E_s следующим образом [5, 6]:

$$f_{b,o}(t) \propto N^{1/\alpha}(t),$$

где для $f_b(t)$ полагаем $\alpha = 2$, а для $f_o(t)$ — $2 \leq \alpha \leq 4$ [7]. В дальнейшем как для $f_b(t)$, так и для $f_o(t)$ будем полагать $\alpha = 2$. Медиана случайного процесса $N(t)$ зависит от времени суток из-за изменения зенитного угла Солнца и скорости ветра в течение суток на высотах образования слоя E_s . Для адекватного и физического описания медианы $N(t)$ достаточно четырёх гармоник ряда Фурье. Поэтому центрированный и нормированный процесс $N(t)$ можно представить в виде

$$n(t) = \frac{f_{b,o}^2(t) - m_{b,o}(t)}{b_{b,o}}, \quad (1)$$

где $m_{b,o}(t) = a_0/2 + \sum_{i=1}^4 [a_i \cos(2\pi t/T) + b_i \sin(2\pi t/T)]$ — медианы процессов $f_{b,o}^2(t)$; $b_{b,o} = [f_{(3/4)} - f_{(1/4)}]/2$ — срединное отклонение, $f_{(p)}$ — квантиль порядка p процессов $f_{b,o}^2(t) - m_{b,o}(t)$; $T = 24$ ч. Параметр $b_{b,o}$ в (1), вообще говоря, зависит от времени суток, но учёт этой зависимости практически не сказывается на точности прогнозов, и мы ею будем пренебрегать.

В работе [1] на основе физической теории образования слоя E_s — теории ветрового сдвига — было показано, что $n(t)$ — линейный марковский процесс Коши, для которого справедливо стохастическое дифференциальное уравнение следующего вида:

$$dn(t)/dt + n(t)/\beta = \xi(t), \quad (2)$$

где $\xi(t)$ — процесс с независимыми в разные моменты времени значениями и одномерной функцией распределения Коши

$$F_{\xi}(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}(\beta x), \quad -\infty < x < +\infty.$$

Решение уравнения (2) при начальном условии $n(0) = n_0$ имеет вид

$$n(t) = n_0 \exp(-t/\beta) + \exp(-t/\beta) \int_0^t \exp(\tau/\beta) d\xi(\tau). \quad (3)$$

Поскольку сумма независимых случайных величин Коши распределена также по закону Коши, то процесс $n(t)$ будет иметь распределение Коши [1].

Если отсчёты времени дискретны ($t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) с интервалом между соседними отсчётами Δ , то аналогом уравнения (2) будет разностное уравнение авторегрессии первого порядка:

$$n_t - \phi n_{t-1} = \xi_t, \quad (4)$$

где $\phi = \exp(-\Delta/\beta)$, ξ_t — процесс с независимыми значениями и одномерной функцией распределения Коши

$$F_{\xi}(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{1-|\phi|}\right).$$

2. ПРОГНОЗИРОВАНИЕ

Прогнозы процессов $f_{b,o}(t)$ можно выразить через прогнозы процесса $n(t)$ (1). Согласно модели (3) процесс $n(t)$ имеет бесконечную дисперсию. Поэтому критерий построения прогнозов по минимуму среднего квадрата ошибки использовать нельзя. Сформулируем критерий построения оптимальных прогнозов, исходя из теории статистических решений [8]. Зададим класс симметричных функций потерь следующего вида:

$$C_0[n(t+\tau), \hat{n}(t+\tau)] = C[n(t+\tau) - \hat{n}(t+\tau)], \quad (5)$$

где $C(x) = C(-x)$; $C(x_2) \geq C(x_1)$ при $x_2 \geq x_1 \geq 0$; $C(0) < C(\infty)$; $\hat{n}(t+\tau)$ — прогноз процесса $n(t)$, даваемый с текущего момента времени t на момент времени $t+\tau$, т. е. с упреждением τ . Функции (5) характеризуют потери в точности прогнозирования. Для марковского процесса $n(t)$ (процесса без последствия) при $t > t_1 > t_2 > \dots > t_k$ справедливо следующее соотношение:

$$W_n[n(t+\tau)|n(t), n(t_1), \dots, n(t_k)] = W_n[n(t+\tau)|n(t)], \quad (6)$$

где $W_n(x|y)$ — условная плотность вероятностей случайной величины x при фиксированной величине y . Усредняя потери по плотности (6), получаем выражение для апостериорного риска:

$$r_{ps}[\hat{n}(t+\tau)] = \int_{-\infty}^{+\infty} C[n(t+\tau) - \hat{n}(t+\tau)]W[n(t+\tau)|n(t)]dn(t+\tau). \quad (7)$$

Из свойств процесса $n(t)$ следует, что плотность (6) — симметричная плотность вероятностей Коши с медианой $n(t) \exp(-\tau/\beta)$ и средним отклонением $1 - \exp(-\tau/\beta)$. Легко показать, что в этом случае минимум апостериорного риска (7) достигается в точке медианы (моды) апостериорного распределения (6):

$$\hat{n}(t+\tau) = n(t) \exp(-\tau/\beta). \quad (8)$$

Прогноз (8) можно назвать байесовским прогнозом процесса $n(t)$ при симметричных функциях потерь (5).

Из формул (1), (8) следует выражение для прогнозов процессов $f_{b,o}(t)$ с упреждением τ :

$$\hat{f}_{b,o}(t+\tau) = [\exp(-\tau/\beta) (f_{b,o}^2(t) - m_{b,o}(t)) + m_{b,o}(t+\tau)]^{1/2}. \quad (9)$$

Нижнюю $\hat{f}_{b,o}^-(t+\tau)$ и верхнюю $\hat{f}_{b,o}^+(t+\tau)$ доверительные границы прогноза (9) можно рассчитать по формулам

$$\hat{f}_{b,o}^{\pm}(t+\tau) = \hat{f}_{b,o}(t+\tau) \pm V_{b,o}(p),$$

где $V_{b,o}(p) = E_{b,o} [1 - \exp(-\tau/\lambda_{b,o})] \operatorname{tg}(p\pi/2)$, $\lambda_{b,o}$ — параметр, пропорциональный времени корреляции, $E_{b,o}$ — среднее за сутки среднее отклонение процессов $f_{b,o}(t)$, p — вероятность попадания в интервал

$$\Delta_p(t+\tau) = [\hat{f}_{b,o}^-(t+\tau), \hat{f}_{b,o}^+(t+\tau)] \quad (10)$$

истинного значения $f_{b,o}(t+\tau)$:

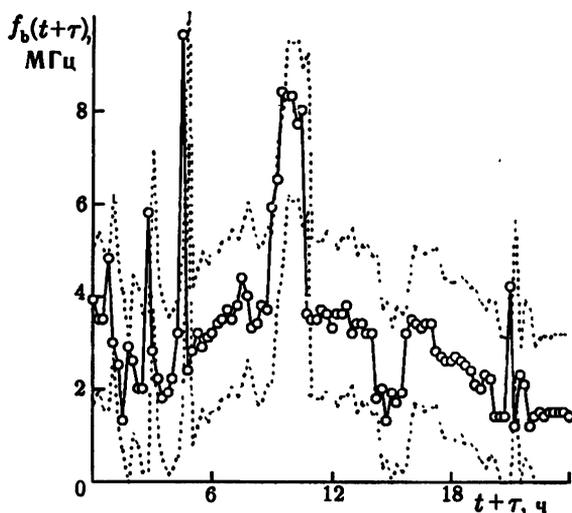
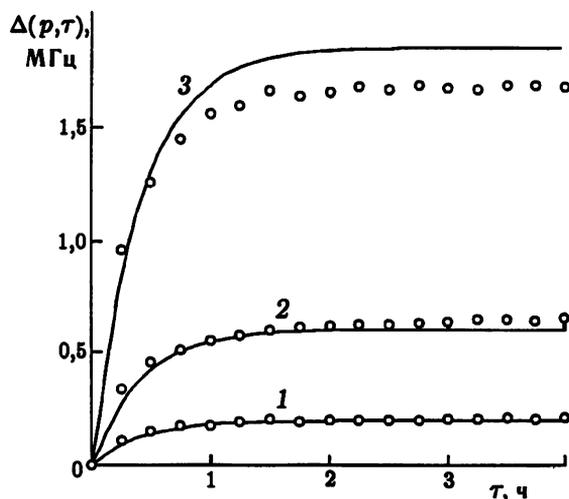
$$p = P\{f_{b,o}(t+\tau) \in \Delta_p(t+\tau)\}.$$

Интервал (10) можно рассматривать как интервальный прогноз значения $f_{b,o}(t+\tau)$. Из формул (9), (10) следует, что для прогноза значения $f_{b,o}(t+\tau)$ требуется знание текущего значения процесса $f_{b,o}(t)$. В случае, когда информация о значении $f_{b,o}(t)$ недоступна, в формулах (9), (10) следует $f_{b,o}^2(t)$ заменить на $m_{b,o}(t)$ и использовать простейший медианный прогноз процессов $f_{b,o}(t)$:

$$\hat{f}_{b,o}(t+\tau) = [m_{b,o}(t+\tau)]^{1/2}.$$

3. ПРОВЕРКА ПРОГНОЗОВ

Прогнозы $\hat{f}_{b,o}(t+\tau)$ были сопоставлены с данными $f_{b,o}(t)$ станций вертикального зондирования, расположенных в Москве (1976–1979 гг.), Киеве (1978–1979 гг.), Нижнем Новгороде (1979 г.) и Ростове-на-Дону (1978 г.), за июнь–июль. Были получены следующие оценки параметров моделей $f_{b,o}(t)$. Для частоты f_b : $a_0 = 9,5$ МГц; $a_1 = -7,2$ МГц; $a_2 = -0,38$ МГц; $a_3 = 0,72$ МГц; $a_4 = 0,41$ МГц; $b_1 = 0,33$ МГц; $b_2 = -1,2$ МГц; $b_3 = 0$; $b_4 = 0,43$ МГц; $b_b = 3,2$ МГц; $\lambda_b = 25$ мин; $E_b = 0,3$ МГц; для частоты f_o : $a_0 = 11$ МГц; $a_1 = -7,3$ МГц; $a_2 = -1,3$ МГц; $a_3 = 0,36$ МГц; $a_4 = 0,12$ МГц; $b_1 = 0,26$ МГц; $b_2 = -2,54$ МГц; $b_3 = -0,2$ МГц; $b_4 = 0,73$ МГц; $b_o = 4$ МГц; $\lambda_o = 50$ мин; $E_o = 0,53$ МГц. Для обеих частот $\beta = 96$ мин.

Рис. 1. Интервальный прогноз $f_b E_s$ Рис. 2. Интерквантильные широты ошибок прогнозов $f_b E_s$

Прогнозы показали хорошее согласие с экспериментальными данными. Для примера на рис. 1 кружками, соединёнными сплошными линиями, приведены значения $f_o(t + \tau)$ за 7 июня 1976 года, измеренные на ионосферной станции г. Москвы. Штриховыми линиями нанесён интервальный прогноз $\Delta_p(t + \tau)$ при $p = 0,95$, даваемый с упреждением $\tau = 15$ мин. Из рисунка видно как интервальный прогноз подстраивается в текущем режиме к аномально большим выбросам $f_b(t)$. Поскольку $p = 0,95$, то за границами интервального прогноза должно остаться примерно 5% отсчётов $f_b(t)$, что и наблюдается на рис. 1.

На рис. 2 кружками изображены средние за сутки интерквантильные ширины ошибок прогноза $\hat{f}_b(t + \tau)$ в зависимости от упреждения τ , рассчитанные по экспериментальным данным. Сплошными линиями нанесены соответствующие им теоретические ширины интервальных прогнозов $\Delta(p, \tau) = \hat{f}_b^+(t + \tau) - \hat{f}_b^-(t + \tau)$. Кривые 1 соответствуют вероятности $p = 0,2$, кривые 2 — $p = 0,5$, кривые 3 — $p = 0,8$. Можно отметить хорошее соответствие теоретических и эмпирических зависимостей. При $\tau \rightarrow \infty$ ширина ошибки прогноза стремится к соответствующей интерквантильной ширине процессов $f_{b,o}(t)$, а точечный прогноз (9) — к медиане процессов $f_{b,o}(t)$. Из рис. 2 хорошо видно, что при упреждениях $\tau > 2$ ч в качестве точечного прогноза можно использовать медиану, а в качестве интервального прогноза — интерквантильную ширину процессов $f_{b,o}(t)$.

4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Вероятностная модель процессов $f_{b,o}(t)$ (1), (2) учитывают в себя основные физические закономерности образования среднеширотного слоя E_s , кроме естественных ограничений [2]

$$n_E \leq n(t) \leq n_m, \quad (11)$$

где $n_E = [f_E^2(t) - m_{b,o}(t)]/b_{b,o}$, $n_m = [f_m^2(t) - m_{b,o}(t)]/b_{b,o}$, f_E — плазменная частота регулярного слоя E на высоте образования слоя E_s , f_m — предельно допустимая величина $f_{b,o}(t)$ в сложившихся ионосферных условиях. Оценки по экспериментальным данным дают $n_E = -2$; $n_m = 50$. Ограничение (11) никак не сказывается на точечных прогнозах (8) и (9). Для интервального же прогноза (10) условие (11) приведёт к ограничениям нижней границы значением $[n_E b_{b,o} + m_{b,o}(t)]^{1/2}$ и верхней границы значением $[n_m b_{b,o} + m_{b,o}(t)]^{1/2}$.

Статистическая обработка данных ионосферных станций показывает, что более точная модель процесса n_t по сравнению с (4) — это модель авторегрессии второго порядка:

$$n_t - (\phi + \phi_2)n_{t-1} + \phi\phi_2n_{t-2} = \xi_t.$$

Оценка параметра ϕ_2 даёт $\phi_2 = -0,2$ для отсчётов $f_b(t)$ при $\Delta_b = 15$ мин и отсчётов $f_o(t)$ при $\Delta_o = 1$ ч. Однако применение этой более сложной по сравнению с (4) модели приводит к увеличению точности точечных прогнозов менее чем на 1 %.

Аппроксимация $m_{b,o}(t)$ четырьмя членами ряда Фурье имеет своё физическое обоснование [9]. Наличие дневного максимума в поведении $m_{b,o}(t)$ объясняется зависимостью процесса $N(t)$ от зенитного угла Солнца, а за вечерний максимум отвечает зональная составляющая скорости ветра, которая состоит из четырёх гармоник с периодами $T, T/2, T/3, T/4$. Однако наиболее интенсивные из этих гармоник — суточная и полусуточная. Поэтому при аппроксимации $m_{b,o}(t)$ можно ограничиться двумя членами ряда Фурье. Сопоставление прогнозов с данными эксперимента показывает, что при этом потери в точности точечных прогнозов не превышают 5 %. В работе [10] для аппроксимации медианы $med_o(t)$ процесса $f_o(t)$ использовалось три члена ряда Фурье. В [10] получена также эмпирическая зависимость коэффициентов ряда Фурье от времени года, географической широты и 11-летнего солнечного цикла. Эту аппроксимацию медианы можно использовать в модели (1), (2) для процесса $f_o(t)$, учитывая, что между функциями $med_o(t)$ и $m_o(t)$ существует простая связь $m_o(t) = [med_o(t)]^2$.

ВЫВОДЫ

Полученные в данной работе вероятностные прогностические модели частоты экранирования и предельной частоты учитывают основные физические закономерности слоя E_s , подтверждённые статистической обработкой экспериментальных данных, устойчивы к аномально большим выбросам электронной концентрации слоя E_s и могут быть использованы для получения как точечных, так и интервальных прогнозов процессов $f_b(t)$ и $f_o(t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Моисеев С. Н. // Геомагнетизм и аэрономия. 1997. Т. 37, № 3. С. 107.
2. Моисеев С. Н. // Изв. вузов. Радиофизика. 1998. Т. 41, № 4. С. 438.
3. Моисеев С. Н. // Геомагнетизм и аэрономия. 1998. Т. 38, № 6. С. 181.
4. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и её приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984. 752 с.
5. Чавдаров С. С., Часовитин Ю. К., Чернышева С. П., Шефтель В. М. Среднеширотный спорадический слой E ионосферы. М.: Наука, 1975. 120 с.
6. Игнатъев Ю. А. // Геомагнетизм и аэрономия. 1978. Т. 18, № 4. С. 731.
7. Корсунова Л. П., Бакалдина В. Д. // Геомагнетизм и аэрономия. 1987. Т. 27, № 3. С. 497.
8. Репин В. Г., Тартаковский Г. П. Статистический синтез при априорной неопределённости и адаптация информационных систем. М.: Сов. радио, 1977. 432 с.
9. Моисеев С. Н. // Изв. вузов. Радиофизика. 1996. Т. 39, № 9. С. 1125.
10. Минуллин Р. Г. // Геомагнетизм и аэрономия. 1988. Т. 28, № 6. С. 969.

Воронежский госуниверситет,
г. Воронеж, Россия

Поступила в редакцию
10 ноября 2000 г.

INTERVAL PREDICTION OF THE SCREENING AND LIMITING FREQUENCIES OF THE E_s -LAYER*S. N. Moiseev*

We obtain formulas describing the point median Bayesian prediction with allowance for symmetric loss functions, as well as the interval prediction of the screening and limiting frequency of the E_s -layer in the case where various a priori information on their values is known. The predictions are compared to the experimental data obtained by vertical-sounding facilities.

УДК 531.86+621.371.391.2

ОЦЕНКА ФЛУКТУАЦИЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ НАД МОРСКОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ ПРИ НАЛИЧИИ ПЕНООБРАЗОВАНИЙ

И. Т. Бубукин, Л. П. Коган

Исследуется вопрос о дисперсии флуктуаций поля при распространении электромагнитных волн над ровной морской поверхностью с флуктуациями импеданса, обусловленными наличием пены. Задача решается аналитически с учётом многократного рассеяния при малом угле скольжения. В работе использовано представление поля в виде интеграла Лебега. Получено аналитическое выражение для дисперсии флуктуаций комплексного поля в случае больших дисперсий возмущения диэлектрических свойств границы раздела сред, а также найдены оценки квадрата стандартного отклонения модуля поля.

ВВЕДЕНИЕ

В этой статье исследуется дисперсия флуктуаций поля вертикального электрического диполя (ВЭД), расположенного в вакуумном полупространстве со случайно-неоднородным импедансом плоской границы. При этом изучается случай сильных флуктуаций, когда дисперсия возмущения импеданса соизмерима с его средним значением. Рассмотрение проводится на примере распространения электромагнитных волн над поверхностью моря при наличии существенного покрытия пеной.

Как известно, в случае распространения электромагнитных волн над морской поверхностью при скоростях ветра, больших примерно 6 м/с, существенную роль начинают играть пенообразования (см. [1–3]). Пена возникает в результате обрушения гребней волн и имеет пятнистую структуру. Наличие такой неоднородности сильно меняет диэлектрическую проницаемость водной поверхности, что существенно затрудняет расчёт её влияния на распространение радиоволн.

В [4] было получено выражение для эффективного импеданса среднего поля при больших дисперсиях возмущения диэлектрических свойств границы раздела двух сред при различных параметрах водного покрытия. Это позволяет оценить влияние пенообразований на среднее поле, создаваемое источником электромагнитного излучения. Однако результаты такого анализа будут неполными, если неизвестны флуктуационные характеристики электромагнитного излучения. Если передаваемая информация содержится в среднем уровне сигнала, то она может теряться в шумах, образующихся при распространении электромагнитных волн над морем. Поэтому наряду со средними необходимы флуктуационные характеристики сигнала, распространяющегося над покрытой пенообразованиями поверхностью. Решение этой проблемы позволяет анализировать задачу выделения сигнала на фоне шумов при наличии пенообразований и исследовать режим перекачки энергии из среднего во флуктуационную составляющую.

В статье вычисляется квадрат стандартного отклонения $\langle \Pi^2 \rangle - \langle \Pi \rangle^2$ вертикальной компоненты вектора Герца комплексного поля в случае распространения электромагнитных волн в полупространстве с плавным одномерным стохастическим возмущением импеданса границы. К сожалению, на данном этапе в силу определённых математических трудностей в случае сильных флуктуаций импеданса границы не удастся определить средний квадрат модуля $\langle \Pi \Pi^* \rangle$, хотя именно эта величина отвечает за энергетику процесса. Тем не менее на основе найденных результатов оказывается возможным сделать некоторые выводы о квадратичных характеристиках вида $\langle \Pi \Pi^* \rangle - \langle \Pi \rangle \langle \Pi^* \rangle$, определяющих энергетические параметры рассеянного поля.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим вакуумное полупространство $z \geq 0$ с границей $z = 0$. Пусть в точке с координатами $\mathbf{R}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ расположен источник в виде точечного вертикального электрического диполя, обладающего дипольным моментом $\mathbf{P}_0 = -4\pi z^0 \delta(x-x_0) \delta(y-y_0) \delta(z-z_0) e^{i\omega t}$, поле которого наблюдается в точке $\mathbf{R} = (x, y, z)$ (см. рис. 1). Здесь z^0 — орт оси z , $\delta(u)$ — дельта-функция.

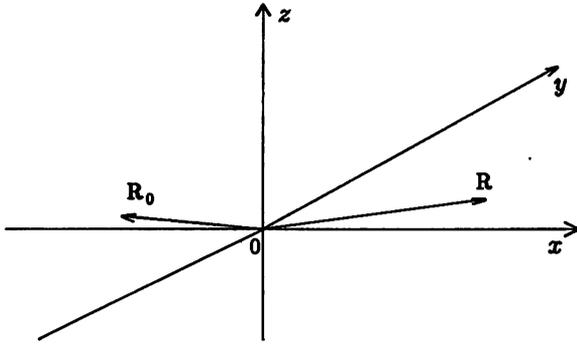


Рис. 1

Предположим, что импеданс границы является одномерно-неоднородным и задан в виде функции $\eta(x)$, представляющей собой реализацию случайного процесса. При этом считаем мнимую часть $\text{Im} \eta(x) = 0$, а также полагаем, что $\langle \eta \rangle = \eta_0 = \text{const}$, причём дисперсия $\sigma^2 = \langle \eta^2 \rangle - \eta_0^2$ может быть соизмерима с квадратом среднего значения: $\sigma^2 \lesssim \eta_0^2$. Будем также считать, что σ не мала по сравнению с η_0 . Кроме того, потребуем выполнения очевидного условия $\eta(x) \geq 0$.

При постановке задачи считаем, что пространственный масштаб l , определяемый радиусом корреляции процесса $\eta = \eta(x)$, удовлетворяет соотношению $l \gg \lambda$, где $\lambda = 2\pi c/\omega$ — длина волны, излучаемой диполем в свободном пространстве. Поэтому будем пренебрегать горизонтальными компонентами вектора Герца $\mathbf{\Pi}$. В итоге получаем интегральное соотношение для вертикальной составляющей $\mathbf{\Pi} = \Pi z^0$:

$$\Pi(\mathbf{R}_0, \mathbf{R}) = \Pi_0(\mathbf{R}_0, \mathbf{R}) + (ik_0) \int_{S_1} \Pi(\mathbf{R}_0, \mathbf{R}_1) \eta(\mathbf{R}_1) \Pi_0(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}) dS_1, \quad (1)$$

где Π_0 — вертикальная компонента потенциала Герца в случае идеальной границы раздела сред ($\eta = 0$):

$$\Pi_0(\mathbf{R}_0, \mathbf{R}) = \frac{e^{-ik_0|\mathbf{R}-\mathbf{R}_0|}}{|\mathbf{R}-\mathbf{R}_0|}, \quad (2)$$

$dS_1 = dx_1 dy_1$; интегрирование ведётся при $z = 0$. Далее полагаем

$$x_0 = y_0 = z_0 = y = z = 0. \quad (3)$$

2. ОЦЕНКА ЦЕНТРА ДОВЕРИТЕЛЬНОГО ИНТЕРВАЛА

Запишем потенциал $\Pi(1)$ в виде итерационного ряда:

$$\Pi(\mathbf{R}_0, \mathbf{R}) = \Pi_0(\mathbf{R}_0, \mathbf{R}) + \sum_{n=1}^{\infty} \Pi_n,$$

где

$$\Pi_n = (ik_0)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{D}_n \Theta_n dx_1 dy_1 \dots dx_m dy_m. \quad (4)$$

Здесь введено обозначение

$$\mathcal{D}_n(\mathbf{R}_0, \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_n, \mathbf{R}; 0, k_0) = \prod_{m=1}^n \Pi_0(\mathbf{R}_{m-1}, \mathbf{R}_m) \Pi_0(\mathbf{R}_n, \mathbf{R}), \quad (5)$$

причём два последних аргумента у \mathcal{D}_n суть импеданс подстилающей поверхности, в данном случае равный нулю, и волновое число волны; Θ_n есть случайная величина, определяемая выражением

$$\Theta_n = \prod_{m=1}^n \eta(\mathbf{R}_m),$$

x_m, y_m — горизонтальные координаты векторов \mathbf{R}_m .

Сделаем одно замечание. Будем считать, что размеры части подстилающей поверхности, существенной для вычисления поля в точке наблюдения, определяются длиной и шириной первой зоны Френеля. При этом исходим из следующих рассуждений. Уравнение (1) равносильно постановке граничной задачи для функции Π :

$$\Delta_{x,y,z} \Pi + k_0^2 \Pi = \delta(y) \tilde{q}, \quad (6)$$

$$\left. \frac{\partial \Pi}{\partial z} = ik_0 \eta(x) \Pi \right|_{z=0}. \quad (7)$$

Здесь $\Delta_{x,y,z}$ — оператор Лапласа в декартовой системе координат:

$$\Delta_{x,y,z} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (8)$$

а множитель \tilde{q} в правой части уравнения (6) записывается как $\tilde{q} = -4\pi \delta(x) \delta(z)$. Применим к соотношениям (6), (7) фурье-преобразование вида $F(m) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} F(y) e^{imy} dy$. Тогда для фурье-образа $\Pi_m(x, z) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(\mathbf{R}_0, \mathbf{R}) e^{imy} dy$ приходим к системе уравнений

$$\Delta_{x,z} \Pi_m + k_m^2 \Pi_m = \frac{\tilde{q}}{\sqrt{2\pi}}, \quad (9)$$

$$\left. \frac{\partial \Pi_m}{\partial z} = ik_m \left[\frac{k_0}{k_m} \eta(x) \right] \Pi_m \right|_{z=0}. \quad (10)$$

В данном случае $\Delta_{x,z} = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial z^2$, $k_m = \sqrt{k_0^2 - m^2}$. Таким образом, граничная задача для фурье-образа $\Pi_m(x, z)$ отличается от задачи для потенциала $\Pi(\mathbf{R}_0, \mathbf{R})$ заменой волнового числа k_0 на k_m , а также умножением импеданса на коэффициент k_0/k_m . Поскольку при таких значениях m , для которых справедливо неравенство $m^2 \ll k_0^2$, сохраняется условие плавности возмущения импеданса в масштабе длины волны, то решение задачи (9), (10) может быть записано в виде $\Pi_m(x, z) = \tilde{\Pi}_m(x, z) e^{-ik_m x}$, где $\tilde{\Pi}_m$ — функция, медленно меняющаяся на масштабе $1/k_m$, если $k_m \sim k_0$. Следовательно, при дополнительном условии $k_m x \gg 1$ скорость изменения Π_m определяется множителем $e^{-ik_m x}$. Поэтому при определении потенциала $\Pi(\mathbf{R}_0, \mathbf{R})$ с помощью обратного фурье-преобразования $\Pi(x, z) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\Pi}_m e^{-i\sqrt{k_0^2 - m^2} x} dm$ (здесь, в соответствии с принятым условием, координата y точки наблюдения равна нулю) приходим к выводу, что существенный для интегрирования по m интервал будет определяться из соотношения $|m| \leq \sqrt{k_0/x}$. Это означает, что поле в точке наблюдения в основном формируется волнами, распространяющимися по отношению к декартовой оси x под углами $\tilde{\vartheta} \leq 1/\sqrt{k_0 x}$.

В результате получаем, что поперечный размер области неоднородной границы полупространства, существенной для определения поля электромагнитных волн в точке наблюдения, в данном случае составляет порядка $2\sqrt{x/k_0}$, что совпадает с шириной первой зоны Френеля (продольный размер данной существенной области равен длине трассы вдоль оси x).

На основании проведённых рассуждений можем полагать правомерным пренебрежение при постановке задачи мнимой частью возмущённого импеданса подстилающей поверхности. Действительно, реальная часть импеданса больше мнимой и отвечает за поглощение, в то время как мнимая часть определяет изменение фазы поля при отражении. Следовательно, учёт мнимой части равносильно изменению длины трассы на величину, не превосходящую длину волны λ . Поскольку при введённых условиях выполняется соотношение $\lambda \ll l \ll x$, то при вычислении дисперсии комплексного поля влиянием такого изменения на среднее значение будем пренебрегать. В итоге будем считать, что в интегральных выражениях для Π_n в формуле (4) продольный размер области интегрирования S в плоскости переменных x_j, y_j определяется неравенством $0 \leq x_j \leq x$, а поперечный — соотношением $|y_j| \leq \sqrt{x/k_0}$.

Разобьём $2n$ -мерный объём интегрирования S^n , где $S = 2x\sqrt{x/k_0}$ — площадь участка двумерной поверхности интегрирования по $dx_m dy_m$, размеры которой определяются длиной и шириной первой зоны Френеля, на N малых участков $V_{n\alpha}$ с одинаковым объёмом V_n . Каждому такому объёму поставим в соответствие целочисленный индекс α , меняющийся в пределах $1 \leq \alpha \leq N$.

Представим интеграл (4) как сумму вкладов от отдельных указанных локальных областей V_n . Тогда

$$\operatorname{Re} \Pi_n = V_n \operatorname{Re} \left[(ik_0)^n \sum_{\alpha=1}^N \tilde{D}'_{n\alpha} \Theta'_{n\alpha} \right], \quad \operatorname{Im} \Pi_n = V_n \operatorname{Im} \left[(ik_0)^n \sum_{\alpha=1}^N \tilde{D}''_{n\alpha} \Theta''_{n\alpha} \right]. \quad (11)$$

В (11) введены обозначения $\tilde{D}'_{n\alpha}$ и $\Theta'_{n\alpha}$, равные D_n и Θ_n , взятым в некоторой точке внутри объёма $V_{n\alpha}$, и определяемые следующим образом. Для каждого малого объёма $V_{n\alpha}$ применим теорему о среднем значении:

$$\operatorname{Re} \left[(ik_0)^n \int_{V_{n\alpha}} D_n \Theta_n dx_1 dy_1 \dots dx_n dy_n \right] = V_n \operatorname{Re} \left[(ik_0)^n \tilde{D}'_{n\alpha} \Theta'_{n\alpha} \right],$$

$$\operatorname{Im} \left[(ik_0)^n \int_{V_{n\alpha}} D_n \Theta_n dx_1 dy_1 \dots dx_n dy_n \right] = V_n \operatorname{Im} \left[(ik_0)^n \tilde{D}''_{n\alpha} \Theta''_{n\alpha} \right].$$

Таким образом, $\tilde{D}'_{n\alpha}$ и $\Theta'_{n\alpha}$ суть не что иное, как сомножители, произведение которых равно среднему (в смысле теоремы о среднем) значению произведения реальной или мнимой части D_n на случайную величину Θ_n при интегрировании по интервалу разбиения с номером α .

Далее, разобьём область Ω_n значений случайной величины Θ_n (будем считать, что $0 \leq \Theta_n \leq 1$) на \hat{j} одинаковых интервалов δ_j (с центрами $\theta_n = W_j$) вида $W_j - \Delta W_j/2 \leq \Theta_{n\alpha} \leq W_j + \Delta W_j/2$, таких, что ΔW_j много меньше размера области Ω_n , но вместе с тем внутри любой области $V_{n\alpha}$ (за исключением, может быть, пренебрежимо малого по сравнению с N числа таких областей) содержится хотя бы одно указанное значение W_j .

Объём $V_{n\alpha}$ и величину ΔW_j (одну и ту же для всех интервалов δ_j) можем всегда подобрать таким образом, чтобы внутри $V_{n\alpha}$ находилась бы точка декартового пространства интегрирования, в которой $\theta_n = W_j$. Кроме того, с учётом осциллирующего характера D_n легко показать, что в формуле (4) при $n > 1$ на удалении не более чем $\lambda/2$ от указанной точки (также внутри данной области с индексом α) существует такое значение D'_{nj} , что $\tilde{D}'_{n\alpha} \Theta'_{n\alpha} = D'_{nj} W_j$. Здесь W_j — центр интервала разбиения с номером j , ближайшего к $\Theta'_{n\alpha}$.

Число N областей $V_{n\alpha}$ будем полагать достаточно большим, но конечным. Следовательно, исходя из проведённых рассуждений, можно переставить слагаемые в (11) таким образом, чтобы выполнялось равенство

$$(\operatorname{Re}, \operatorname{Im})(\Pi_n) = (\operatorname{Re}, \operatorname{Im}) \left[(ik_0)^n \sum_{j=1}^j \frac{\mathcal{D}_{nj}^{(1)} + \mathcal{D}_{nj}^{(2)} + \dots + \mathcal{D}_{nj}^{(M)}}{M(W_j)} W_j \frac{M(W_j)}{N} S^n \right]. \quad (12)$$

В (12) введены некоторые переобозначения индексов. Верхний индекс у $\mathcal{D}_{nj}^{(1,2,\dots,M)}$ теперь означает номер при перечислении по тем локальным участкам суммирования в пространстве декартовых переменных (имеющим, напомним, одинаковый объём V_n), для совокупности которых определённое с помощью описанной процедуры среднее значение W_j попадает в малый интервал с номером j , указанным в нижнем индексе. Иными словами, \mathcal{D}_{nj} есть значение реальной или мнимой части \mathcal{D}_n (полученное с помощью введённой процедуры), вычисленное в точке $2n$ -мерного декартова пространства интегрирования. Данная точка находится в окрестности радиусом $\lambda/2$ вблизи той точки $2n$ -мерного пространства декартовых переменных, в которой соответствующий сомножитель Θ_n принимает значение $\Theta_n' = W_j$ из интервала δ_j . Наконец, выражение под знаком суммы в правой части равенства (12) умножили и поделили на количество $M(W_j)$ слагаемых с сомножителем W_j , своё для каждого j , а объём V_n представили как S^n/N .

При больших значениях общего числа N малых объёмов $V_{n\alpha}$, на которые разбивается область интегрирования в декартовом пространстве, можно полагать, что $M(W_j)/N = f_n(W_j) \Delta W_j$. Здесь $f_n(W_j)$ — плотность вероятности случайной величины W_j при разбиении на малые интервалы ΔW_j . Если считать, что $\Delta W_j \ll \Theta_{n \max} - \Theta_{n \min}$, то, опуская всюду индекс j , от суммы дискретных слагаемых можем перейти к интегралу вида

$$(\operatorname{Re}, \operatorname{Im})(\Pi_n) = (\operatorname{Re}, \operatorname{Im}) \left[(ik_0)^n \int_{\Omega_n} \frac{\mathcal{D}_n^{(1)} + \mathcal{D}_n^{(2)} + \dots + \mathcal{D}_n^{(M)}}{M} S^n W f_n(W) dW \right]. \quad (13)$$

В данном случае значение $M = M(W)$ является целочисленной дискретной величиной, а интегрирование проводится по области Ω_n . В дальнейшем будем считать, что точки $2n$ -мерного декартова пространства, в которых величина \mathcal{D}_n (5) принимает значения $\mathcal{D}_n^{(1)}, \mathcal{D}_n^{(2)}, \dots, \mathcal{D}_n^{(M)}$, равномерно распределены по всему декартову объёму, существенному для интегрирования (допустимость этого предположения обсудим далее, после определения эффективного радиуса объёма V_n).

Чтобы исследовать свойства совокупности вещественных случайных величин $\operatorname{Re} \Pi_n$ и $\operatorname{Im} \Pi_n$, изучим статистические характеристики суммы комплексных случайных величин

$$\Pi_n = (ik_0)^n \int_{\Omega_n} \mathcal{A}_n S^n W f_n(W) dW. \quad (14)$$

Здесь введено обозначение

$$\mathcal{A}_n = S^n (ik_0)^n \frac{\mathcal{D}_n^{(1)} + \mathcal{D}_n^{(2)} + \dots + \mathcal{D}_n^{(M)}}{M}, \quad (15)$$

Кроме того, обозначим $\mathcal{A}_{nj} = S^n (ik_0)^n \frac{\mathcal{D}_{nj}^{(1)} + \mathcal{D}_{nj}^{(2)} + \dots + \mathcal{D}_{nj}^{(M)}}{M}$. Из проведённых рассуждений следует, что вне зависимости от конкретного вида рассматриваемой реализации $\eta(x)$ как функции горизонтальной координаты x , а также от свойств породившего её случайного процесса η , можно утверждать, что Π_n есть интегральная сумма независимых случайных величин \mathcal{A}_n с детерминированным сомножителем $f_n(W)W$.

Найдём среднее значение и дисперсию \mathcal{A}_n в рассматриваемом случае при усреднении по совокупности реализаций, считая, что относительное изменение $M = M(W)$ (и, следовательно, абсолютное изменение $1/M$) при замене одной реализации на другую является пренебрежимо малым (последнее возможно при принятом условии $l \ll x$). После этого несложно будет определить доверительный интервал для Π_n и Π .

Вначале отметим, что при $\eta = \text{const}$ согласно (4) для компоненты $\tilde{\Pi}(\mathbf{R}_0, \mathbf{R}, \eta, k_0)$ вектора Герца поля ВЭД, размещённого над плоскостью с постоянным импедансом η , справедливо разложение

$$\tilde{\Pi}(\mathbf{R}_0, \mathbf{R}, \eta, k_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \eta^n I_n, \quad (16)$$

где

$$I_n = (ik_0)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{D}_n(\mathbf{R}_0, \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_n, \mathbf{R}; 0, k_0) dx_1 \dots dx_n dy_1 \dots dy_n, \quad (17)$$

$$I_0 = \Pi_0(\mathbf{R}_0, \mathbf{R}, 0, k_0).$$

Здесь и далее для потенциала электромагнитного поля ВЭД, размещённого над поверхностью с импедансом $\eta = \text{const}$, наряду с введённой ранее записью $\Pi_0(\mathbf{R}_0, \mathbf{R})$, где первый аргумент есть координата источника, а второй — точки наблюдения, будет при необходимости использоваться обозначение $\Pi_0 = \Pi_0(\mathbf{R}_0, \mathbf{R}, \eta, k_0)$, где третий аргумент — постоянный импеданс подстилающей поверхности (в данном случае равный η), а четвёртый — волновое число волны.

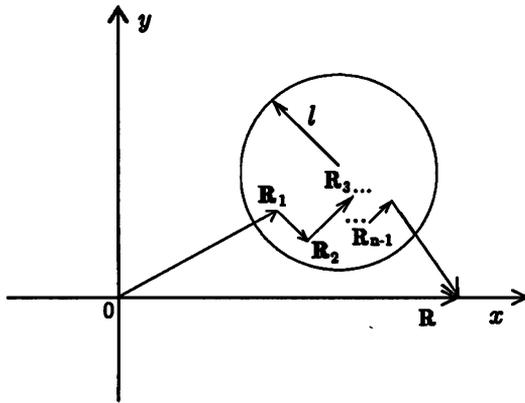


Рис. 2

получаем

$$\langle \mathcal{A}_n \rangle = I_n.$$

При условии, что в числителе выражения (15) отдельные слагаемые являются независимыми случайными величинами, правомерно утверждать, что для любого n случайная величина \mathcal{A}_n имеет гауссово распределение (со средним I_n).

Из сопоставления (15) и (17) следует, что случайная величина \mathcal{A}_n есть не что иное, как значение (17) интеграла I_n из разложения (16), приближённо вычисленное с применением метода Монте-Карло (в предположении, что распределение точек декартового пространства, в которых вычисляются слагаемые \mathcal{D}_n , является равномерным).

Проведём усреднение по всем случайным выборкам (каждая из которых соответствует отдельной реализации), включающим в себя M величин $\mathcal{D}_n^{(1)}, \mathcal{D}_n^{(2)}, \dots, \mathcal{D}_n^{(M)}$. Как и ранее, любая такая величина определяется случайным образом с помощью задания набора радиус-векторов $\mathbf{R}_1^j, \dots, \mathbf{R}_n^j, 1 \leq j \leq M$. Тогда

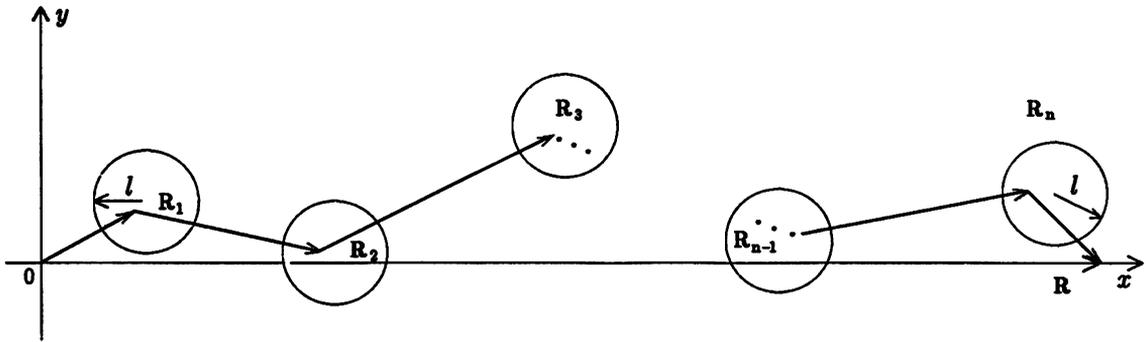


Рис. 3

Если вариационная трасса $\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_n$ расположена так, что все её звенья, кроме первого или последнего, укладываются в пределах одного пятна с радиусом l (см. рис. 2), то величина \mathcal{D}_n по модулю будет много больше, чем в случае вариационной трассы, изображённой на рис. 3. Термин «вариационная трасса» используется для обозначения последовательности расположения виртуальных источников, соответствующих векторам $\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_n$ (см. рис. 2 и 3), в то время как «трасса» означает участок поверхности между источником и приёмником, совпадающий с первой зоной Френеля и имеющий наибольший горизонтальный масштаб x .

Несмотря на то, что при условии $l \ll x$ относительное количество показанных на рис. 2 «сжатых» вариационных трасс много меньше, чем всех остальных «растянутых» вариационных трасс, вклады вариационных трасс «сжатого» и «растянутого» типов соизмеримы (см. также [5], где подчёркивается особая роль участков трассы, расположенных вблизи источника или точки наблюдения).

В дальнейшем будем полагать, что внутри одной и той же локальной области интегрирования объёма V_n импеданс $\eta(x)$ мало изменяется. При этом для «сжатых» вариационных трасс $\langle \eta(\mathbf{R}_1) \dots \eta(\mathbf{R}_n) \rangle = \langle \eta^n \rangle = \int_{\Omega_1} f_1(W) W^n dW$. Здесь $f_1(W)$ — плотность вероятности случайной величины $\eta(x)$. Следовательно, если бы поле в точке наблюдения определялось только «сжатыми» трассами, можно было считать, что значение случайной величины Π_n при введённых ограничениях будет находиться в круге комплексной плоскости с центром

$$\begin{aligned} \langle \Pi \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \langle \Pi_n \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} I_n \int_{\Omega_1} f_1(W) W^n dW = \int_{\Omega_1} f_1(W) \sum_{n=0}^{\infty} I_n W^n dW = \\ &= \int_{\Omega_1} f_1(W) \Pi_0(\mathbf{R}_0, \mathbf{R}, W, k_0) dW. \end{aligned} \quad (18)$$

В последнем равенстве из цепочки (18) учтено разложение (16), а также независимость случайных величин \mathcal{D}_n и Θ_n .

И наоборот, если при вычислениях рассматривать только «растянутые» трассы, то с учётом малости радиуса корреляции l по сравнению с длиной трассы x правомерно утверждение

$$\langle \eta(\mathbf{R}_1) \dots \eta(\mathbf{R}_n) \rangle = \langle \eta \rangle^n = \eta_0^n.$$

Таким образом, $\int_{\Omega_n} W f_n(W) dW = \eta_0^n$, и в итоге

$$\langle \Pi \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} I_n \int_{\Omega_n} W f_n(W) dW = \sum_{n=0}^{\infty} I_n \eta_0^n = \Pi_0(\mathbf{R}_0, \mathbf{R}, \eta_0, k_0). \quad (19)$$

Следовательно, истинное значение модуля среднего поля будет лежать между двумя приведёнными выше оценками (18) и (19) для $\langle \Pi \rangle$.

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАДИУСА ДОВЕРИТЕЛЬНОГО ИНТЕРВАЛА

Несложно показать, что для различных n случайные величины \mathcal{A}_n независимы. Поэтому радиус $\sigma_{\Pi} = \sqrt{\langle \Pi \Pi^* \rangle - \langle \Pi \rangle \langle \Pi^* \rangle}$ указанного круга с центром $\langle \Pi \rangle$ определяется суммой дисперсий:

$$\sigma_{\Pi}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^2,$$

где $\sigma_n^2 = \langle \Pi_n \Pi_n^* \rangle - \langle \Pi_n \rangle \langle \Pi_n^* \rangle$.

Как уже было отмечено, в силу некоторых математических трудностей при введённых условиях пока не удалось получить выражение для σ_{Π}^2 . Поэтому, чтобы получить некоторые оценки дисперсии σ_{Π}^2 , найдём значение квадратичного усреднения s вида

$$s^2 = \sum_{n=1}^{\infty} s_n^2,$$

где

$$s_n^2 = \langle \Pi_n^2 \rangle - \langle \Pi_n \rangle^2.$$

При этом будем вначале считать, что присутствуют только «растянутые» вариационные трассы (далее рассмотрим и обратный случай).

3.1. Предварительные оценки

Сделаем некоторые предварительные оценки.

1) Рассмотрим величины $\mathcal{D}_{nj} = \mathcal{D}_n(W_j)$ и $\mathcal{D}_{n\bar{j}} = \mathcal{D}_n(W_{\bar{j}})$. Будем считать, что эти два значения случайной величины \mathcal{D}_n вычислены в точках декартова пространства интегрирования, удалённых не более чем на $\lambda/4$ от точек, где случайная величина Θ_n равна соответственно W_j и $W_{\bar{j}}$ из интервалов δ_j и $\delta_{\bar{j}}$.

Необходимо изучить вопрос о коррелированности усреднённых сумм вида $\mathcal{A}_{nj} = \mathcal{A}_n(W_j)$ и $\mathcal{A}_{n\bar{j}} = \mathcal{A}_n(W_{\bar{j}})$ при разных индексах j и \bar{j} , что означает несовпадение интервалов δ_j и $\delta_{\bar{j}}$. Фазы случайных величин \mathcal{D}_{nj} и $\mathcal{D}_{n\bar{j}}$ полагаем всюду независимыми, т. к. их радиус корреляции (который может быть приближённо оценён как $\lambda/4$) много меньше любого другого масштаба задачи. Но амплитуды этих случайных величин могут считаться коррелированными при условии, что W_j и $W_{\bar{j}}$ — конкретные значения случайной величины Θ_n , расположенные в пределах одного и того же $2n$ -мерного пятна радиуса l . Вместе с тем можно утверждать, что всегда найдётся такая величина $\mathcal{D}_{nj}^{\text{cp}}$, что будет выполняться соотношение

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{nj}^{(1)} + \mathcal{D}_{nj}^{(2)} + \dots + \mathcal{D}_{nj}^{(M)} &= \left| \mathcal{D}_{nj}^{(1)} \right| \cos \Phi_{nj}^{(1)} + \left| \mathcal{D}_{nj}^{(2)} \right| \cos \Phi_{nj}^{(2)} + \dots + \left| \mathcal{D}_{nj}^{(M)} \right| \cos \Phi_{nj}^{(M(W_j))} = \\ &= \left| \mathcal{D}_{nj}^{\text{cp}} \right| \left(\cos \Phi_{nj}^{(1)} + \cos \Phi_{nj}^{(2)} + \dots + \cos \Phi_{nj}^{(M(W_j))} \right). \end{aligned}$$

Здесь $\Phi_{nj}^{(1,2,\dots,M)} = \arg \mathcal{D}_{nj}^{(1,2,\dots,M)}$, а $\left| \mathcal{D}_{nj}^{\text{cp}} \right|$ может считаться эффективным средним значением модуля $\left| \mathcal{D}_{nj}^{(1,2,\dots,M)} \right|$ для стоящей слева от последнего знака равенства суммы.

Пусть точки декартова пространства, в которых вычисляются фазы $\Phi_{nj}^{(L)}$ и $\Phi_{n\bar{j}}^{(L)}$, отстоят на расстояние порядка $\lambda/4$. Тогда при переходе от j к \bar{j} любой сомножитель $\cos \Phi_{nj}^{(L)}$, где $L = 1, 2, \dots, M$, может считаться независимым от $\cos \Phi_{n\bar{j}}^{(L)}$. Поскольку считаем, что $M(W_j) \gg 1$ и $M(W_{\bar{j}}) \gg 1$, очевидно, что в этом случае независимыми оказываются и $|\mathcal{D}_{nj}^{\text{cp}}|$ и $|\mathcal{D}_{n\bar{j}}^{\text{cp}}|$. Необходимо подчеркнуть, что такой вывод оказывается справедливым только при введённом условии $\sigma \sim \eta_0$ соизмеримости среднеквадратичного отклонения импеданса и его среднего значения и нарушается в случае $\sigma \ll \eta_0$.

Таким образом, приходим к выводу о том, что при заданных условиях \mathcal{A}_{nj} и $\mathcal{A}_{n\bar{j}}$ суть независимые случайные величины. В итоге получаем, что они некоррелированы, если все точки декартова пространства интегрирования, где Θ_n принимает значения W_j и $W_{\bar{j}}$, попарно отстоят друг от друга больше чем на $\lambda/4$.

2) Определим минимальный возможный радиус области V_n . Радиус корреляции l импеданса может считаться эффективным интервалом изменения функции $\eta(x)$. Так как $l \gg \lambda$, то наибольшая скорость изменения Θ_n в декартовых координатах составляет порядка σ/l . Поэтому наибольшее изменение ΔW_j величины Θ_{nj} как функции пространственных переменных в пределах $2n$ -мерного шара с радиусом порядка $\lambda/4$ (равным интервалу корреляции фазового сомножителя) составит примерно $\sigma\lambda/(2l)$, причём $\lambda/4$ фактически может рассматриваться как минимальный радиус многомерной декартовой области интегрирования, в границах которой Θ_n изменяется на ΔW_j (напомним, что при переходе к суммированию по W_j малый интервал суммирования вводился как $W_j - \Delta W_j/2 \leq \Theta_{nj} \leq W_j + \Delta W_j/2$). Далее интервал $\sigma\lambda/(2l)$ будем обозначать ΔW_{\min} и полагать минимальным интервалом разбиения при суммировании по значениям $W = \Theta_n$.

Но среднее значение W_j может приходиться как на участок с максимумом градиента Θ_n , где данная функция изменяется наиболее быстро, так и на область пространства интегрирования вблизи стационарной точки. В последнем случае Θ_n изменяется на ΔW_{\min} в пределах пространственного интервала с диаметром $2r$, причём в данном случае $\Delta W_{\min} = \sigma r^2/(2l^2)$. Следовательно, $\sigma\lambda/(2l) = \sigma r^2/(2l^2)$. В результате эффективный радиус r_{eff} области V_n может быть оценён как $r_{\text{eff}} = \sqrt{\lambda l}$. При этом, очевидно, $\lambda \ll r_{\text{eff}} \ll l$.

Несложно показать, что при разбиении на области меньшего радиуса отдельные слагаемые $\mathcal{D}_n(W_j)$ и $\mathcal{D}_n(W_{\bar{j}})$ в числителях выражений для $\mathcal{A}_n(W_j)$ и $\mathcal{A}_n(W_{\bar{j}})$ становятся взаимно коррелированными, в силу чего дисперсии $\mathcal{A}_n(W_j)$ и $\mathcal{A}_n(W_{\bar{j}})$ прекращают убывать с уменьшением объёма интегрирования (т. е. с увеличением $M(W_j)$ и $M(W_{\bar{j}})$ в знаменателях соответствующих дробей, см. (15)). Поэтому r_{eff} будем полагать наименьшим возможным радиусом при разбиении пространства интегрирования на малые области с объёмом V_n .

3) Поскольку любая область $V_{n,\alpha}$ имеет радиус r_{eff} , существенно превосходящий длину волны (т. к. $\sqrt{\lambda l} \gg \lambda$), то с учётом осциллирующего характера \mathcal{D}_n как функции декартовых переменных несложно показать, что при вычислении, например, реальной части Π_n фазовые множители $e^{i\Phi_n}$ величин $(-ik_0)^n \mathcal{D}_n = |(-ik_0)^n \mathcal{D}_n| e^{i\Phi_n}$ в формуле (13) должны удовлетворять соотношению

$$|\cos \Phi_n| \lesssim \left(\frac{\lambda}{2l}\right)^{n+1} \ll 1. \quad (20)$$

Это неравенство, очевидно, противоречит условию равномерности распределения точек $2n$ -мерного пространства интегрирования, в которых вычисляются \mathcal{D}_n . Чтобы снять противоречие, будем считать, что такие точки распределены равномерно, но при этом все расстояния $|\mathbf{R}_m - \mathbf{R}_{m-1}|$ увеличиваются в $2l/\lambda$ раз. В этом случае происходит именно такое уменьшение модуля $|\text{Re } \mathcal{D}_n|$, которое имело бы место при подборе \mathcal{D}_n в выражении (13) с учётом неравенства (20) (см. формулу (5)). Аналогичные рассуждения могут быть проведены и при вычислении среднеквадратичного отклонения мнимой части Π . Данное замечание учтём после вычисления s^2 , а до этого будем считать справедливым утверждение о

равномерности распределения декартовых координат точек, в которых вычисляется \mathcal{D}_n , по всему объёму интегрирования.

4) Теперь, считая выполненным неравенство $\Delta W_{\min} \ll \sigma$, полагаем $\mathcal{D}_{n,j}(W)$ и $\mathcal{D}_{n,\bar{j}}(W)$ дельта-коррелированными случайными величинами (при условии, что продольный размер трассы вдоль оси x много больше радиуса корреляции l).

Разобьём в (14) интервал интегрирования на \hat{j} промежутков длины ΔW_{\min} . Из проведённых рассуждений следует, что

$$\Pi_n \approx (ik_0)^n \sum_{j=1}^{\hat{j}} \mathcal{A}_n(W_j) f_n(W_j) W_j \Delta W_{\min} S^n.$$

Так как случайные величины $\mathcal{A}_n(W_j)$ и $\mathcal{A}_n(W_{\bar{j}})$ независимы при условии несовпадения аргументов (также, как и величины $\mathcal{D}_n(W_j)$ и $\mathcal{D}_n(W_{\bar{j}})$), то

$$s_n^2 = \langle \Pi_n^2 \rangle - \langle \Pi_n \rangle^2 = (ik_0)^{2n} \sum_{j=1}^{\hat{j}} \left(\langle \mathcal{A}_n^2(W_j) \rangle - \langle \mathcal{A}_n(W_j) \rangle^2 \right) f_n^2(W_j) W_j^2 (\Delta W_{\min})^2 S^{2n}. \quad (21)$$

Но $f_n(W_j) \Delta W_{\min} = P_{nj}(W_j)$ — вероятность попадания в интервал с номером j . В итоге, вновь переходя от суммы к интегралу по W , получаем

$$s_n^2 = s_{n1}^2 - s_{n2}^2.$$

В данном случае

$$s_{n1}^2 = \int_{\Omega_n} \tilde{s}_{n1}^2(W) P_n(W) f_n(W) W^2 dW, \quad s_{n2}^2 = \int_{\Omega_n} \tilde{s}_{n2}^2(W) P_n(W) f_n(W) W^2 dW,$$

где

$$\tilde{s}_{n1}^2(W) = S^{2n} (ik_0)^{2n} \frac{\langle (\mathcal{D}_n^{(1)})^2 \rangle + \langle (\mathcal{D}_n^{(2)})^2 \rangle + \dots + \langle (\mathcal{D}_n^{(M)})^2 \rangle}{M^2(W)},$$

$$\tilde{s}_{n2}^2(W) = S^{2n} (ik_0)^{2n} \frac{\langle \mathcal{D}_n^{(1)} \rangle^2 + \langle \mathcal{D}_n^{(2)} \rangle^2 + \dots + \langle \mathcal{D}_n^{(M)} \rangle^2}{M^2(W)}.$$

Следовательно, можно записать, что

$$s^2 = s_1^2 - s_2^2, \quad (22)$$

где $s_1^2 = \sum_{n=1}^{\infty} s_{n1}^2$, $s_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} s_{n2}^2$.

3.2. Вычисление s_1^2

Рассмотрим выражение для $\tilde{s}_{n1}^2(W)$. Согласно введённым обозначениям

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_n^{(j)})^2 &= \frac{\exp(-2ik_0 |\mathbf{R}_1^{(j)} - \mathbf{R}_0|)}{|\mathbf{R}_1^{(j)} - \mathbf{R}_0|^2} \frac{\exp(-2ik_0 |\mathbf{R}_2^{(j)} - \mathbf{R}_1^{(j)}|)}{|\mathbf{R}_2^{(j)} - \mathbf{R}_1^{(j)}|^2} \times \dots \\ &\dots \times \frac{\exp(-2ik_0 |\mathbf{R}_{m+1}^{(j)} - \mathbf{R}_m^{(j)}|)}{|\mathbf{R}_{m+1}^{(j)} - \mathbf{R}_m^{(j)}|^2} \times \dots \times \frac{\exp(-2ik_0 |\mathbf{R} - \mathbf{R}_n^{(j)}|)}{|\mathbf{R} - \mathbf{R}_n^{(j)}|^2}, \quad (23) \end{aligned}$$

где $1 \leq j \leq M$. Умножим и разделим каждый сомножитель в (23) на некоторую величину $b = 2ik_0\eta_g^2$, считая, что неизвестный импеданс $\eta_g = \text{const}$ удовлетворяет соотношению

$$2k_0|\eta_g|^2x \gg 1. \quad (24)$$

При этом получим

$$(ik_0)^{2n} \left(\mathcal{D}_n^{(j)}\right)^2 S^{2n} = S^n (ik_0)^{2n} b^{n+1} \frac{\exp\left(-i2k_0\left|\mathbf{R}_1^{(j)} - \mathbf{R}_0\right|\right) \exp\left(-2ik_0\left|\mathbf{R}_2^{(j)} - \mathbf{R}_1^{(j)}\right|\right)}{b\left|\mathbf{R}_1^{(j)} - \mathbf{R}_0\right|^2} \times \dots \\ \dots \times \frac{\exp\left(-2ik_0\left|\mathbf{R}_{m+1}^{(j)} - \mathbf{R}_m^{(j)}\right|\right)}{\left|\mathbf{R}_{m+1}^{(j)} - \mathbf{R}_m^{(j)}\right|^2} \times \dots \times \frac{\exp\left(-2ik_0\left|\mathbf{R} - \mathbf{R}_n^{(j)}\right|\right)}{b\left|\mathbf{R} - \mathbf{R}_n^{(j)}\right|^2} S^{2n}. \quad (25)$$

Но согласно [5] при любом индексе $m = 0, 1, \dots, n$ каждая дробь в (25) есть не что иное, как асимптотическое приближение:

$$\Pi_0\left(\mathbf{R}_{m+1}^{(j)}, \mathbf{R}_m^{(j)}, \eta_g, 2k_0\right) \approx \frac{\exp\left(-i2k_0\left|\mathbf{R}_{m+1}^{(j)} - \mathbf{R}_m^{(j)}\right|\right)}{b\left|\mathbf{R}_{m+1}^{(j)} - \mathbf{R}_m^{(j)}\right|^2}. \quad (26)$$

Данное приближение правомерно при описании поля ВЭД над плоскостью с импедансом η_g при расположении и источника, и точки наблюдения на границе раздела сред и выполнении условия (24), которое перепишем в виде $|bx| \gg 1$. При этом, в соответствии с введёнными обозначениями, третий аргумент в (26) есть импеданс подстилающей поверхности, а четвёртый — волновое число, которое в последнем выражении равно $2k_0$.

До сих пор с целью большей компактности записи формул использовалось обозначение $\mathcal{D}_{nj} = \mathcal{D}_n(\mathbf{R}_0, \mathbf{R}_1^{(j)}, \dots, \mathbf{R}_n^{(j)}, \mathbf{R}; 0, k_0)$. По аналогии введём в рассмотрение новую величину $\mathcal{D}_{nj} = \mathcal{D}_n(\mathbf{R}_0, \mathbf{R}_1^{(j)}, \dots, \mathbf{R}_n^{(j)}, \mathbf{R}; \eta_g, 2k_0)$, описывающую произведение сомножителей типа (5) при условии замены нулевого импеданса на импеданс η_g .

Как и ранее, используя метод Монте-Карло, приходим к выводу, что величина $\tilde{s}_{n1}^2(W)$ может быть записана в виде

$$\tilde{s}_{n1}^2(W) = (ik_0)^n b^{n+1} \frac{S^n}{M} \left\langle (ik_0)^n S^n \sum_{j=1}^M \mathcal{D}_{nj} / M \right\rangle = \\ = (ik_0)^{2n} b^{n+1} \frac{S^n}{M} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{D}_n(\mathbf{R}_0, \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_n, \mathbf{R}; \eta_g, 2k_0) dx_1 dy_1 \dots dx_n dy_n, \quad (27)$$

в котором последний сомножитель есть среднее значение от совокупности оценок по методу Монте-Карло интеграла, стоящего в правой части (27). По аналогии с (17) обозначим

$$I_n(\mathbf{R}_0, \mathbf{R}, \eta_g, 2k_0) = (2ik_0)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{D}_n(\mathbf{R}_0, \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_n, \mathbf{R}; \eta_g, 2k_0) dx_1 dy_1 \dots dx_n dy_n$$

(величина I_n была введена в (17) при несколько других аргументах). В результате получаем

$$\tilde{s}_{n1}^2(W) = \left(\frac{ik_0}{2}\right)^n b^{n+1} \frac{S^n}{M} I_n(\mathbf{R}_0, \mathbf{R}, \eta_g, 2k_0).$$

Таким образом,

$$s_{n1}^2 = \left(\frac{ik_0}{2}\right)^n b^{n+1} I_n(\mathbf{R}_0, \mathbf{R}, \eta_g, 2k_0) \int_{\Omega_n} \frac{S^n}{M(W)} P_n(W) f_n(W) W^2 dW. \quad (28)$$

Перейдём к вычислению интеграла в (28). В данном случае $P_n(W)/M = 1/N$, где учтено, что при разбиснии существенной области интегрирования в выражении (4) на N локальных объёмов $V_{n\alpha}$ (и, соответственно, области значений Ω_n на \hat{j} локальных участков со своим локальным средним значением W_j) вероятность попадания на участок, где $W = W_j$, равна $M(W)/N$.

До тех пор, пока N не превосходит N_{eff} — число $2n$ -мерных пятен с одномерным радиусом r_{eff} , точность вычислений растёт с ростом N . С другой стороны, из проведённых ранее рассуждений следует, что при $N > N_{\text{eff}}$ случайные величины $\mathcal{A}_n(W)$ и $\mathcal{A}_n(\bar{W})$ перестают быть независимыми, благодаря чему используемый метод вычисления дисперсии становится несправедливым, причём сама дисперсия флуктуаций комплексного поля перестаёт убывать с ростом N . Следовательно, максимум точности вычислений достигается при $N = N_{\text{eff}}$. Поэтому

$$\int_{\Omega_n} \frac{1}{M(W)} P_n(W) f_n(W) W^2 dW = \frac{1}{N_{\text{eff}}} \int_{\Omega_n} f_n(W) W^2 dW.$$

Кроме того, в случае «растянутых» трасс $\int_{\Omega_n} f_n(W) W^2 dW = D^{2n}$, где D^2 есть средний квадрат: $D^2 = \eta_0^2 + \sigma^2$. В итоге можно записать

$$\int_{\Omega_n} \frac{1}{M} P_n(W) f_n(W) W^2 dW = \frac{D^{2n}}{N_{\text{eff}}}.$$

Таким образом,

$$s_{n1}^2 = \left(\frac{ik_0 b D^2}{2}\right)^n \frac{b S^n I_n(\mathbf{R}_0, \mathbf{R}, \eta_g, 2k_0)}{N_{\text{eff}}}. \quad (29)$$

Согласно проведённым рассуждениям

$$S^n / N_{\text{eff}} = V_n,$$

где V_n — минимальный объём, который можно выделить в пространстве интегрирования S^n с тем, чтобы отдельные слагаемые в сумме (11) оставались некоррелированными случайными величинами. Объём V_n может быть определён как $2n$ -мерный куб с ребром $2r_{\text{eff}}$, т. е. область интегрирования, содержащая сферу радиуса r_{eff} . В этом случае $V_n = (2r_{\text{eff}})^{2n}$.

Также укажем, что всю существенную для интегрирования область выбираем в виде $2n$ -мерного прямоугольного параллелепипеда с проекцией на любую двумерную плоскость $x_m y_m$, где $1 \leq m \leq n$, в форме прямоугольника со сторонами x и $2\sqrt{x/k_0}$.

В итоге получаем, что $S^n = (2x\sqrt{x/k_0})^n$ и, кроме того,

$$S_n / V_n = C^{-n}, \quad (30)$$

где $C = \sqrt{4k_0 r_{\text{eff}}^4 / x^3}$. В результате

$$s_1^2 = \sum_{n=1}^{\infty} s_{n1}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (2ik_0 b D^2 r_{\text{eff}}^2)^n b I_n(\mathbf{R}_0, \mathbf{R}, \eta_g, 2k_0).$$

Перепишем s_1^2 в виде $s_1^2 = s_{11}^2 - s_{12}^2$. Здесь

$$s_{11}^2 = b \sum_{n=0}^{\infty} (2ik_0 b D^2 r_{\text{eff}}^2)^n I_n(\mathbf{R}_0, \mathbf{R}, \eta_g, 2k_0), \quad s_{12}^2 = b \Pi_0(\mathbf{R}_0, \mathbf{R}, \eta_g, 2k_0) \approx \frac{e^{-2ik_0 x}}{x^2}.$$

По аналогии с формулой (16) получаем

$$s_{11}^2 = b \Pi_0(\mathbf{R}_0, \mathbf{R}, \eta_g + \tilde{\eta} \eta_g^2, 2k_0) = \frac{b e^{-2ik_0 x}}{2ik_0 (\eta_g + \tilde{\eta} \eta_g^2)^2 x^2} = \frac{e^{-2ik_0 x}}{(1 + \tilde{\eta} \eta_g)^2 x^2},$$

где $\tilde{\eta} \eta_g^2 = 2ik_0 b D^2 r_{\text{eff}}^2 = -4k_0^2 D^2 r_{\text{eff}}^2 \eta_g^2$, так что $\tilde{\eta} = -4k_0^2 D^2 r_{\text{eff}}^2$. Выражения для потенциала Π верны при условии $2k_0 |\eta_g + \tilde{\eta} \eta_g^2| x \gg 1$ (смысл этого неравенства тот же, что и в (24)), а также соотношения $\text{Re}(\eta_g + \tilde{\eta} \eta_g^2) \geq 0$.

Здесь остаётся неопределённым только импеданс η_g , входящий в выражение для b и являющийся внутренним параметром задачи. Из (24) следует, что точность интерпретации формулы (25) как произведения $n + 1$ потенциалов Герца электромагнитного поля над плоскостью с постоянным импедансом η_g возрастает с ростом $|\eta_g|$ (см. [5]). При этом неявно использовалось соотношение $\eta_g \sim (\epsilon_g + 1)^{-1/2}$, связывающее диэлектрическую проницаемость ϵ_g среды в области $z(0$ и соответствующий импеданс η_g подстилающей поверхности (считаем также, что $|\epsilon_g| \gg 1$). Но такое соотношение правомерно при не слишком больших значениях η_g . Из [5] следует, что наибольшим значением $|\eta_g|$, при котором ещё приближённо верна указанная зависимость η_g и ϵ_g , является $|\eta_g| \sim 1/2$.

Из проведённых рассуждений следует, что $\tilde{\eta} < 0$ и $|\tilde{\eta}| \gg 1$. С другой стороны, необходимо одновременное выполнение неравенств $\text{Re} \eta_g \geq 0$ и $\text{Re}(\eta_g + \tilde{\eta} \eta_g^2) \geq 0$, причём минимум оценки для слагаемого $s_{1,1}$ наступает при максимуме модуля $|\eta_g + \tilde{\eta} \eta_g^2|$. На основе данных рассуждений полагаем импеданс η_g чисто мнимым: $\eta_g = i |\eta_g| = i/2$. В этом случае приближённо получаем

$$s_1^2 \approx -\frac{e^{-2ik_0 x}}{4 (k_0 r_{\text{eff}})^4 D^4 x^2} - \frac{e^{-2ik_0 x}}{x^2}. \quad (31)$$

В (31) учтено, что при $\eta_g = i/2$ справедливо соотношение $|\tilde{\eta} \eta_g| \approx k_0^2 D^2 r_{\text{eff}}^2 \gg 1$.

3.3. Вычисление s_2^2

Теперь перейдём к вычислению

$$s_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} s_{n2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega_n} \tilde{s}_{n2}^2(W) P_n(W) f_n(W) W^2 dW.$$

Очевидно, что $\langle \mathcal{D}_n^{(1)} \rangle^2 = \langle \mathcal{D}_n^{(2)} \rangle^2 = \dots = \langle \mathcal{D}_n^{(M)} \rangle^2$. Следовательно,

$$\tilde{s}_{n2}^2(W) = S^{2n} (ik_0)^{2n} \frac{M \langle \mathcal{D}_n^{(\bar{k})} \rangle^2}{M^2},$$

где индекс \tilde{k} — произвольная целочисленная величина, лежащая в интервале $1 \leq \tilde{k} \leq M(W)$. Запишем для \tilde{s}_{n2}^2 цепочку преобразований:

$$\begin{aligned} \tilde{s}_{n2}^2(W) &= \frac{S^{2n}}{M} (ik_0)^{2n} \frac{\langle M \mathcal{D}_n^{(\tilde{k})} \rangle^2}{M^2} = \frac{S^{2n}}{M} (ik_0)^{2n} \frac{(\langle \mathcal{D}_n^{(1)} \rangle + \langle \mathcal{D}_n^{(2)} \rangle + \dots + \langle \mathcal{D}_n^{(M)} \rangle)^2}{M^2} = \\ &= \frac{S^{2n}}{M} (ik_0)^{2n} \left(\frac{\langle \mathcal{D}_n^{(1)} \rangle + \langle \mathcal{D}_n^{(2)} \rangle + \dots + \langle \mathcal{D}_n^{(M)} \rangle}{M} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{M} \left(S^n (ik_0)^n \left\langle \frac{\mathcal{D}_n^{(1)} + \mathcal{D}_n^{(2)} + \dots + \mathcal{D}_n^{(M)}}{M} \right\rangle \right)^2 = \frac{I_n^2(\mathbf{R}_0, \mathbf{R}, 0, k_0)}{M} \end{aligned}$$

(см. (16)). Согласно проведённым ранее рассуждениям (см. (30)) правомерно полагать

$$\frac{f_n(W)}{M(W)} = \frac{1}{N_{\text{eff}}} = \frac{V_n}{S^n} = C^n.$$

Кроме того, I_n представляет собой интеграл типа свёртки. Поэтому

$$\begin{aligned} I_n &= (ik_0)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\prod_{m=1}^n \Pi_0(\mathbf{R}_{m-1}, \mathbf{R}_m, 0, k_0) \right] \Pi_0(\mathbf{R}_n, \mathbf{R}) dx_1 dy_1 \dots dx_n dy_n = \\ &= (ik_0)^n (2\pi)^n \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} L_0^{n+1}(p_1, p_2) e^{-ip_1 x} dp_1 dp_2. \quad (32) \end{aligned}$$

Здесь использовано известное свойство фурье-преобразования от свёртки. При этом

$$L_0(p_1, p_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_0(\mathbf{R}_0, \mathbf{R}, 0, k_0) e^{ip_1 x} e^{ip_2 y} dx dy = \frac{1}{ik_z}$$

— фурье-образ невозмущённого поля, $k_z = \sqrt{k_0^2 - p_1^2 - p_2^2}$.

В итоге приходим к следующей последовательности равенств:

$$\begin{aligned} s_2^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega_n} \tilde{s}_n^2(W) P_n(W) f_n(W) W^2 dW = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega_n} \frac{I_n^2(\mathbf{R}_0, \mathbf{R}, 0, k_0)}{M} P_n(W) f_n(W) W^2 dW = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_n^2(\mathbf{R}_0, \mathbf{R}, 0, k_0)}{N_{\text{eff}}} D^{2n} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{N_{\text{eff}}} (ik_0)^n (2\pi)^n \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} L_0^{n+1}(p_1, p_2) e^{-ip_1 x} dp_1 dp_2 I_n(\mathbf{R}_0, \mathbf{R}, 0, k_0) D^{2n} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} L_0(p_1, p_2) \left[\sum_{n=1}^{\infty} [2\pi ik_0 C L_0(p_1, p_2) D^2]^n I_n(\mathbf{R}_0, \mathbf{R}, 0, k_0) \right] e^{-ip_1 x} dp_1 dp_2. \quad (33) \end{aligned}$$

В данном случае в произведении $I_n^2 = I_n \cdot I_n$ первый сомножитель записан в виде обратного фурье-преобразования (32). Кроме того, учтено, что $N_{\text{eff}}^{-1} = V_n/S_n = C^n$ (см. (30)).

В результате под знаком интеграла опять стоит сумма вида (16). Как и ранее, перепишем s_2^2 в форме

$$s_2^2 = s_{21}^2 - s_{22}^2.$$

В этом выражении величины s_{21}^2 и s_{22}^2 могут быть записаны в виде

$$s_{21}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} L_0(p_1, p_2) \left[\sum_{n=0}^{\infty} [2\pi i k_0 C L_0(p_1, p_2) D^2]^n \right] I_n(\mathbf{R}_0, \mathbf{R}, 0, k_0) e^{-ip_1 x} dp_1 dp_2,$$

$$s_{22}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} L_0(p_1, p_2) I_0(\mathbf{R}_0, \mathbf{R}, 0, k_0) e^{-ip_1 x} dp_1 dp_2 = \Pi_0^2(\mathbf{R}_0, \mathbf{R}, 0, k_0) = \frac{e^{-2ik_0 x}}{x^2}.$$

В последних двух равенствах использовано обозначение $I_0(\mathbf{R}_0, \mathbf{R}, 0, k_0) = \Pi_0(\mathbf{R}_0, \mathbf{R}, 0, k_0)$ и учтено, что $(2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} L_0(p_1, p_2) e^{-ip_1 x} dp_1 dp_2 = \Pi_0(\mathbf{R}_0, \mathbf{R}, 0, k_0) = e^{-ik_0 x}/x$.

Согласно формуле (16), при $y = 0$ получаем

$$s_{21}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} L_0(p_1, p_2) \Pi_0(\mathbf{R}_0, \mathbf{R}, \eta_q/k_z, k_0) e^{-ip_1 x} dp_1 dp_2,$$

где $\eta_q = 2\pi k_0 C D^2$ и, соответственно,

$$\frac{\eta_q}{k_z} = 2\pi i k_0 C D^2 L_0(p_1, p_2) = 2\pi \frac{k_0}{k_z} C D^2. \quad (34)$$

В последней формуле η_q/k_z может рассматриваться как некоторый эффективный импеданс.

3.4. Вычисление s^2

Теперь можно перейти к вычислению дисперсии s^2 . Вначале рассмотрим ситуацию, когда

$$|\eta_q/k_z|^2 k_0 x \gg 1. \quad (35)$$

Нетрудно показать, что при $x \gg \lambda$ для p_1 и p_2 , лежащих в существенной для интегрирования области, выполняется соотношение $0 \leq k_z \leq \sqrt{2k_0/x}$. Поэтому неравенство (35) справедливо при

$$x \ll 8\pi^2 r_{\text{eff}} (k_0 r_{\text{eff}})^3 D^4.$$

В этом случае $\Pi_0(\mathbf{R}_0, \mathbf{R}, \eta_q/k_z, k_0) \sim e^{ik_0 x} k_z^2 / (ik_0 \eta_q^2 x^2)$. В результате получаем

$$s_{21}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ik_0 x}}{ik_0 (\eta_q/k_z)^2 x^2} L_0(p_1, p_2) e^{-ip_1 x} dp_1 dp_2 = \frac{e^{-ik_0 x}}{ik_0 \eta_q^2 x^2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{ik_z} k_z^2 e^{-ip_1 x} dp_1 dp_2.$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{ik_z} k_z^2 e^{-ip_1 x} dp_1 dp_2 &= -\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{ik_z} e^{-ip_1 x} e^{-ik_z z} dp_1 dp_2 \right) \Big|_{z=0} = \\ &= -\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\exp(-ik_0 \sqrt{x^2 + z^2})}{\sqrt{x^2 + z^2}} \right) \Big|_{z=0}, \end{aligned}$$

получаем

$$s_{21}^2 = \frac{e^{-2ik_0x}}{x^4} \left(\frac{1}{2\pi ik_0 CD^2} \right)^2 = -\frac{e^{-2ik_0x}}{16\pi^2 r_{\text{eff}} (k_0 r_{\text{eff}})^3 D^4 x}. \quad (36)$$

Подставляя (31) и (36) в (22), с учётом того, что $s_2^2 = s_{2,1}^2 - s_{2,2}^2$, получаем

$$\begin{aligned} s^2 = s_1^2 - s_2^2 &= \left(s_{11}^2 - \frac{e^{-2ik_0x}}{x^2} \right) - \left(s_{21}^2 - \frac{e^{-2ik_0x}}{x^2} \right) = s_{11}^2 - s_{21}^2 = \\ &= -\frac{e^{-2ik_0x}}{4(k_0 r_{\text{eff}})^4 D^4 x^2} - \frac{e^{-2ik_0x}}{16\pi^2 r_{\text{eff}} (k_0 r_{\text{eff}})^3 D^4 x}. \end{aligned} \quad (37)$$

Следовательно,

$$|s^2| = \frac{1}{4(k_0 r_{\text{eff}})^4 D^4 x^2} + \frac{1}{16\pi^2 r_{\text{eff}} (k_0 r_{\text{eff}})^3 D^4 x}. \quad (38)$$

Как уже отмечалось, все результаты получены при условии равномерного распределения точек декартового пространства, в которых вычисляются \mathcal{D}_n в (13). Поэтому в соответствии с замечанием 3 пункта 3.1 расстояние x между источником и точкой наблюдения необходимо умножить на $2l/\lambda$. В итоге средний квадрат флуктуаций запишется в виде

$$|s^2| = \left(\frac{\lambda}{2l} \right)^2 \frac{1}{4(k_0 r_{\text{eff}})^4 D^4 x^2} + \frac{\lambda}{2l} \frac{1}{16\pi^2 r_{\text{eff}} (k_0 r_{\text{eff}})^3 D^4 x}. \quad (39)$$

Будем считать, что выполняется условие

$$k_0 x \gg \lambda/(2l). \quad (40)$$

В противном случае получаем, что протяжённость x трассы не только много меньше радиуса корреляции l , но и мала по сравнению с длиной волны. На столь близком расстоянии от источника неверны использованные в работе приближения. В частности, при этом нарушалось бы само граничное условие $(\partial\Pi/\partial z)|_{z=0} = ik_0\eta(x)\Pi$, при помощи которого записано исходное интегральное уравнение (1) (на таких расстояниях от источника $\partial\Pi/\partial z|_{z=0} = 0$, см. работу [5]). При выполнении неравенства (40), как несложно увидеть, можно пренебречь в (39) первым слагаемым по сравнению со вторым. Следовательно, приходим к следующему выражению для дисперсии:

$$|s^2| \approx \frac{\lambda}{2l} \frac{1}{16\pi^2 r_{\text{eff}} (k_0 r_{\text{eff}})^3 D^4 x}. \quad (41)$$

С другой стороны, согласно (34) расстояние x может стать столь большим, что неравенство (35) перестанет выполняться, при этом будет справедливо противоположное соотношение

$$|\eta_q/k_z|^2 k_0 x \ll 1. \quad (42)$$

Правомерно полагать, что $2\pi k_z \geq \sqrt{2k_0/x}$. При этом существенная для интегрирования область уменьшается очень незначительно по сравнению со своей прежней длиной. Тогда из двух последних соотношений следует, что

$$x \gg X_b, \quad (43)$$

где $X_b = 32\pi^4 r_{\text{eff}} (k_0 r_{\text{eff}})^3 D^4$.

В таком случае по аналогии с формулой (36) получаем, что $\Pi_0(\mathbf{R}_0, \mathbf{R}, \eta_q/k_z, k_0) \approx e^{-ik_0x}/x$. Поэтому $s_{21}^2 \approx (\lambda/2l)^2 e^{-2ik_0x}/x^2$. При введённых ограничениях для λ, l, x, σ и η_0 получаем такое же выражение:

$$s^2 \approx \left(\frac{\lambda}{2l}\right)^2 \frac{e^{-2ik_0x}}{x^2}. \quad (44)$$

Если же речь идёт о переходной области, в которой неверны оба неравенства, (35) и (42), то там необходимо пользоваться интегральной функцией ослабления поля вертикального электрического диполя над границей раздела сред с импедансом подстилающей поверхности η_q/k_z (см. работу [5]). В итоге получаем квадрат стандартного отклонения

$$s^2 = \langle \Pi(\mathbf{R}_0, \mathbf{R})^2 \rangle - \langle \Pi(\mathbf{R}_0, \mathbf{R}) \rangle^2. \quad (45)$$

Величина $s^2(D^2)$ (45) определена при учёте только одних «растянутых» вариационных трасс. Если теперь повторить все проведённые рассуждения для «сжатых» вариационных трасс, то придём к выводу, что в последнем случае среднеквадратичное отклонение комплексного поля

$$|s_{\text{сж}}^2| = \int_{\Omega_1} |s^2(\mathbf{R}_0, \mathbf{R}, W^2)| f_1(W) dW. \quad (46)$$

Это следует из того, что в любом приближении порядка n величина D^{2n} заменяется на оператор $\int_{\Omega_n} W^{2n} f_1(W) \dots dW$ (см. (29) и (33)). Отметим, что в интеграле (46) участок интегрирования по переменной W , на котором $|s_{\text{сж}}^2| \sim 1/W^2$, ограничен областью выполнения неравенства $k_0xW^2 \gg 1$, тогда как при $k_0xW^2 \ll 1$ выполняется соотношение $|s_{\text{сж}}^2| \approx 1 + W \sqrt{k_0x}$ (см. [5]). Поэтому интеграл (46) заведомо сходится. Выражение (46) даёт для $|s_{\text{сж}}^2|$ несколько большее значение, чем формула (40) для $|s^2|$ (можно полагать, что $|s_{\text{сж}}^2|/|s^2| \approx (\eta_0^2 + \sigma^2)^2 / [2(\eta_0 - \sigma/2)^4]$), но данное приближённое равенство подлежит проверке (в соответствии с формулой (46)) для каждого конкретного профиля плотности вероятности $f_1(W)$ распределения случайной величины $\eta(x)$.

Истинное значение дисперсии s^2 лежит между двумя полученными оценками.

4. ОБСУЖДЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Как уже было указано, найденная величина s^2 содержит только косвенную информацию об энергетических характеристиках рассеянного поля. Тем не менее в рассматриваемом случае на основе полученных результатов удаётся сделать некоторые качественные выводы о соотношении регулярной и рассеянной компонент поля на различных участках трассы.

Ранее в работе [4] было оценено среднее поле над трассой с двумерно-неоднородным импедансом, дисперсия флуктуаций которого соизмерима со средним значением, а радиус корреляции много больше длины волны. При этом было получено выражение для вертикальной компоненты потенциала Герца среднего поля:

$$\Pi_{\text{ср}}(x) = -\frac{ie^{-ik_0x}}{k_0x^2\eta_{\text{эф}}^2(Q)}. \quad (47)$$

Здесь $Q = \sigma/\eta_0$, а эффективное (в смысле среднего поля) значение импеданса подстилающей поверхности $\eta_{\text{эф}}$ определено в виде

$$\eta_{\text{эф}}(Q) = \frac{\eta_0 Q \exp(Q^{-2})}{\sqrt{\pi} + 2 \operatorname{erfc}(Q^{-1})}. \quad (48)$$

Можно показать, что проведённые в [4] рассуждения правомерны и в рассматриваемом случае подстилающей поверхности с одномерно-неоднородным импедансом, если в точке наблюдения $|y|/x \ll 1$, т. е. трасса проходит почти перпендикулярно линиям уровня возмущения. Поэтому при $y = 0$ можно провести сравнение среднего поля и стандарта флуктуаций.

Введём соотношение

$$\Theta = |s^2/\Pi_{\text{cp}}^2(x)|. \quad (49)$$

При условии

$$\lambda/(k_0 l) \ll x \lesssim X_a, \quad (50)$$

где $X_a \sim \sqrt[3]{32\pi^2 D^4 r_{\text{эф}}^4 k_0 l / (\lambda \eta_{\text{эф}}^4)}$, модуль стандарта $|s|$ флуктуаций может быть вычислен согласно выражению (41). При этом выполняется неравенство

$$\Theta \lesssim 1. \quad (51)$$

Пусть, например, $\lambda/l \sim 0,1$. Тогда неравенство (51) означает, что в области (50), простирающейся от начала волновой зоны до расстояний порядка $(1 \div 2) \cdot 10^2 l$, квадрат среднего поля в точке наблюдения есть по модулю величина больше либо порядка $|s^2|$ (напомним, что все вычисления проводились при условии соизмеримости флуктуаций и среднего значения импеданса рассматриваемой поверхности).

Если же

$$(3 \div 4) X_a \lesssim x \ll X_b, \quad (52)$$

то с учётом формулы (44) получаем, что $\Theta \gg 1$. Поэтому на таком удалении от источника квадрат среднего поля становится по модулю много меньше, чем среднеквадратичное отклонение комплексного поля.

Но несложно показать, что дисперсия флуктуаций комплексного поля не превосходит дисперсию модуля поля: $|s^2| \leq \sigma_{\Pi}^2$ (где, напомним, $\sigma_{\Pi}^2 = \langle \Pi \Pi^* \rangle - \langle \Pi \rangle \langle \Pi^* \rangle$ — дисперсия модуля потенциала Герца). Поэтому начиная с расстояния X_a дисперсия σ_{Π}^2 становится существенно больше, чем квадрат среднего поля. То же самое происходит и в области $x \gg X_b$ (см. (43)). Отличие между зонами (52) и (43) состоит в том, что в пределах первой из них $s \sim 1/\sqrt{x}$ (см. (41)), в то время как во втором случае, при удалении от источника более чем на X_b , — пропорционально $1/x$. Это означает, что в области (43) отклонение s комплексного поля от среднего ведёт себя подобно полю ВЭД над идеальной границей (хотя и обладает малым сомножителем порядка $\lambda/(2l)$, см. (44)). Следовательно, в этой области $\sigma_{\Pi}^2 \geq \lambda/(2lx^2)$. Но в силу закона сохранения энергии при $x \rightarrow \infty$ квадрат стандартного отклонения σ_{Π}^2 не может убывать медленнее, чем $1/x^2$. Поэтому справедливо утверждать, что в области расстояний от источника $x \gtrsim X_b$ выполняется соотношение $\sigma_{\Pi}^2 = \Lambda/x^2$, где Λ — постоянный коэффициент пропорциональности, больший $\lambda/(2l)$. Среднее поле на таких расстояниях от источника оказывается пренебрежимо малым по сравнению с σ_{Π} .

В итоге можно сделать вывод, что при $x \gtrsim X_a$ основная часть энергии распространяющихся электромагнитных волн переходит в энергию рассеянного поля. Это означает эффективное уменьшение поглощения энергии, происходящего при проникновении поля через границу $z = 0$, что согласуется с результатами работы [6].

Наконец, с учётом осциллирующего характера поля отметим, что полученные для σ_{Π} оценки справедливы для дисперсий реальной и мнимой частей Π .

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты данной работы можно сформулировать следующим образом.

1) Получено представление для поля ВЭД, расположенного над плоской поверхностью с сильными флуктуациями импеданса, в виде суммы интегралов Лебега, в каждом из которых интегрирование проводится по произведениям случайно-неоднородного импеданса, взятых в несовпадающих точках подстилающей поверхности.

2) Получено выражение для среднего квадрата флуктуаций комплексного поля, справедливое в случае сильных флуктуаций импеданса границы вакуумного полупространства. При этом предложена методика вычислений, позволяющая провести линеаризацию задачи, т. е. свести квадраты потенциала поля к линейным величинам без использования разложения по какому бы то ни было малому параметру.

3) Знание среднего квадрата флуктуаций s^2 комплексного поля, к сожалению, не даёт возможности расчёта дисперсии σ_{Π}^2 модуля поля, определяющей энергетику рассеянного поля. Но поскольку $|s^2| \leq \sigma_{\Pi}^2$, то на основании результатов работы можно сделать вывод о расстоянии от источника, начиная с которого дисперсия флуктуаций поля по модулю становится существенно больше квадрата среднего значения поля.

4) Показано, что начиная с определённого удаления от источника и s^2 , и σ_{Π}^2 изменяются в зависимости от расстояния подобно квадрату поля ВЭД над плоской металлизированной границей.

Работа выполнена при поддержке Минобразования РФ (гранты № 95–22–2.2–24, 97–0–8.2–77), а также Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 98–02–16973).

ЛИТЕРАТУРА

1. Справочник по радиолокации. Т. 1. Основы радиолокации. / Под ред. М. Сколник. М.: Сов. радио, 1976.
2. Шутко А. М. СВЧ-радиометрия водной поверхности и почвогрунтов. М.: Наука, 1986.
3. Лобкова Л. М. Распространение радиоволн над морской поверхностью. М.: Радио и связь, 1991.
4. Бубукин И. Т., Коган Л. П. // Изв. вузов. Радиофизика. 1993. Т. 36, № 3–4. С. 240.
5. Альперт Я. Л., Гинзбург В. Л., Фейнберг Е. Л. Распространение радиоволн. М.: ГИИТЛ, 1953.
6. Фукс И. М. // Изв. вузов. Радиофизика. 1966. Т. 9, № 5. С. 876.

Научно-исследовательский радиофизический институт,
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию
13 августа 2000 г.

ESTIMATION OF FLUCTUATIONS OF THE ELECTROMAGNETIC FIELD ABOVE A FOAMY SEA SURFACE

I. T. Bubukin and L. P. Kogan

We analyze the variance of fluctuations of the electromagnetic field in the case where electromagnetic waves propagate over a smooth sea surface with allowance for impedance fluctuations caused by foaming. The problem is solved analytically taking into account multiple scattering at small grazing angles. The field is represented in the form of a Lebesgue integral. We obtain an analytical expression for the variance of the complex-field fluctuations in the case of a large variance of the disturbance of dielectric properties of the boundary. The square of the standard deviation of the absolute value of the field is estimated.

УТОЧНЁННЫЕ СООТНОШЕНИЯ ПОДОБИЯ ДЛЯ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ ПРИБОРОВ С ДЛИТЕЛЬНОЙ ИНЕРЦИОННОЙ ГРУППИРОВКОЙ ЭЛЕКТРОНОВ

В. В. Ростов, Е. М. Тотъменинов

На основе интеграла движения частиц уточнены известные соотношения подобия, которые в классическом представлении справедливы лишь при ограничениях на КПД приборов типа «О». В общем случае соотношения видоизменяются и уже не соответствуют условиям постоянства приведённого КПД и нормированных параметров на всей шкале начальных энергий частиц.

ВВЕДЕНИЕ

Для высокочастотных приборов с длительным распределённым взаимодействием частиц и электромагнитной волны при переходе в ультррелятивистский диапазон энергий выполняются принципы подобия, сформулированные в работах [1, 2]. Так, если известно решение задачи при какой-либо энергии частиц, соответствующей релятивистскому фактору γ_0 , его можно распространить и на случай любой другой энергии при выполнении для всех частиц условия $\gamma^2 \gg 1$, где γ — текущее значение релятивистского фактора. Для этого требуется подобрать длину, значение поля и расстройку синхронизма так, чтобы сохранялись соответствующие нормированные величины. При произвольных значениях γ_0 используется несколько вариантов записи уравнений движения частиц [3–7]. Отсутствие единообразия в выборе нормировки вызвано, с одной стороны, стремлением исключить начальную энергию из уравнений, а с другой — невозможностью это сделать в случае произвольных значений γ_0 на всей шкале от 1 до ∞ . Начальная энергия исключается из уравнений движения для приборов типа «О» при наличии малых параметров:

а) $\beta^2 \ll 1$ — в нерелятивистском случае ($\beta = (1 - \gamma^{-2})^{1/2}$);

б) $\gamma^{-2} \ll 1$ — в ультррелятивистском случае;

в) $(\gamma_0 - \gamma)^2 / (\gamma_0 - 1)^2 \ll 1$ — в так называемом асимптотическом приближении, когда можно ввести такую нормировку переменных и параметров, которой соответствуют универсальные соотношения подобия [3, 4], справедливые при ограничениях на максимальный КПД. Последнее обстоятельство сдерживало практическое применение соотношений подобия для черенковских генераторов с сильноточным электронным пучком и релятивистским фактором частиц, как правило, в диапазоне $\gamma_0 \approx 1,5 \div 3$.

В настоящей работе известные соотношения подобия уточняются на основе закона сохранения энергии и импульса в системе частица—фотон без ограничений на КПД приборов, в которых группировка частиц и торможение сгустков происходят в одной и той же достаточно протяжённой области пространства. Таким образом, область изменения параметров рассматриваемой задачи имеет ограничения, которые, как показано далее, не противоречат условиям высокого КПД при длительном взаимодействии частиц и волны:

1) Роль собственных полей пространственного заряда незначительна в сравнении с высокочастотными полями, что накладывает ограничение сверху на длину L прибора: $L \ll \Lambda_p$, где Λ_p — длина волны биений между быстрой и медленной волнами пространственного заряда в электронном пучке [4]. Разброс начальных скоростей частиц отсутствует.

2) Длина области взаимодействия частиц с высокочастотным полем ограничена снизу условием $L > L_{\min} \approx \gamma_0^2 \beta_0 \lambda / 2$, которое соответствует тому, что вблизи оптимального кинематического смещения частиц относительно волны расстройка синхронизма меньше некоторого значения при любой величине γ_0 . Здесь λ — длина волны.

3) Как и в реальных экспериментах, длина взаимодействия (или амплитуда волны) может отличаться от той, которая соответствует максимуму КПД для известной продольной структуры высокочастотного поля и заданного значения γ_0 . Предполагается, что в этом случае остальные два параметра — расстройка синхронизма и амплитуда волны (или длина взаимодействия) — могут быть выбраны оптимальными.

1. РАСШИРЕННАЯ ТРАКТОВКА СООТНОШЕНИЙ ПОДОБИЯ

1.1. Интеграл движения

Как известно (см., например, [8, 9]), в стационарной и одномерной гидродинамической модели уравнения движения электронов и начальные условия для моноэнергетического на входе в пространство взаимодействия пучка имеют вид

$$\frac{d\gamma}{dz} = -\frac{e}{mc^2} \operatorname{Re}(E_z e^{i\theta}), \quad \gamma(0) = \gamma_0; \quad (1)$$

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{k\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} - h_S, \quad \theta(0) = \theta_0 \in [0, 2\pi], \quad (2)$$

где $\theta = \omega t - h_S z$, $k = 2\pi/\lambda$, h_S — продольное волновое число синхронной волны или пространственной гармоники в периодической замедляющей системе, E_z — напряжённость поля, m и e — масса электрона и элементарный заряд. Доля кинетической энергии пучка, преобразуемая в излучение, определяет КПД:

$$\eta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\gamma_0 - \gamma(L, \theta_0)}{\gamma_0 - 1} d\theta_0. \quad (3)$$

Независимые переменные θ , γ в уравнениях (1), (2) не являются канонически сопряжёнными [10]. Вместе с тем уравнения движения для безразмерной координаты $z' = kz$ можно представить в канонической форме [5]:

$$\frac{d\gamma}{dz'} = -\frac{\partial H}{\partial \theta}, \quad \frac{d\theta}{dz'} = \frac{\partial H}{\partial \gamma}, \quad (4)$$

где H есть интеграл движения. В случае, когда отсутствует явная зависимость поля от координаты ($E_z = \text{const}$), имеем интеграл уравнений (1), (2):

$$H = (\gamma^2 - 1)^{1/2} - \frac{\gamma}{\beta_S} - \operatorname{Re} \left(\frac{ieE_z e^{i\theta}}{kmc^2} \right), \quad (5)$$

где $\beta_S = k/h_S$. В общем случае, если амплитуда волны является функцией координаты, интегралом движения становится сумма $H(z') + \Phi(z')$, полная производная d/dz' которой равна нулю:

$$(\gamma^2 - 1)^{1/2} - \frac{\gamma}{\beta_S} - \operatorname{Re} \left(\frac{ieE_z e^{i\theta}}{kmc^2} \right) + \operatorname{Re} \left(\frac{ie}{kmc^2} \int_0^{z'} \frac{dE_z}{dz'} e^{i\theta} dz' \right) = \text{const}. \quad (6)$$

В справедливости (6) нетрудно убедиться, проводя интегрирование по частям в последнем слагаемом выражения (функции $\Phi(z')$) и учитывая уравнения (1), (2).

Интеграл движения (6) выражает собой однозначную связь изменения кинетической энергии частиц и продольного импульса [11, 12] и с точностью до постоянного множителя $\gamma_S \beta_S$ соответствует гамильтониану в инерциальной системе отсчёта S , которая движется со скоростью, равной фазовой скорости волны. Действительно, на основании преобразований Лоренца для 4-импульса первые два члена в выражении (6) можно выразить через релятивистский фактор частицы Γ в системе отсчёта S [13]: $\Gamma = \gamma_S \gamma (1 - \beta_S \beta)$. Весьма примечательно, что в этой системе отсчёта фаза θ соответствует безразмерной текущей координате частицы, а её энергия с учётом синхронизма с волной оказывается нерелятивистской при любой относительно протяжённой длине прибора.

Интеграл движения носит универсальный характер для всех механизмов излучения частиц и может быть получен на основе квантово-механической формулировки закона сохранения энергии и импульса в системе частица—фотон [14]. Интеграл учитывается при составлении уравнений для описания циклотронных механизмов излучения и практически не используется для анализа процессов взаимодействия в приборах типа «О». Это обусловлено тем, что связь энергии частиц и экспоненциального множителя представляется в квадратурах, но трудности интегрирования по начальным фазам θ_0 оказываются непреодолимыми для решения задачи даже в случае $E_z = \text{const}$ [5].

Для вывода соотношений подобия используется приближение заданной продольной структуры высокочастотного поля. Это не означает, что класс рассматриваемых приборов ограничен генераторами с высокочастотными резонаторами: формально в случае нефиксированной структуры поля можно считать, что при различной начальной энергии частиц параметры генератора и ток пучка меняются так, что распределение компоненты E_z поля остаётся подобным. Для проверки корректности такого подхода ниже полученные соотношения сравниваются с результатами численной оптимизации нелинейной краевой задачи ЛОВ для различных начальных энергий частиц.

1.2. Универсальная нормировка переменных

При использовании асимптотического приближения в уравнение (2) для фазы подставляются первые два (или несколько) члена разложения в ряд функции $1/\beta$ по степеням малого параметра $|\gamma_0 - \gamma|/(\gamma_0 - 1) \ll 1$:

$$\frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} \approx \frac{1}{\beta_0} + \frac{1}{\gamma_0 \beta_0 (\gamma_0 + 1)} \frac{\gamma_0 - \gamma}{\gamma_0 - 1} + \dots$$

Можно исходить из достаточно очевидной посылки, что независимо от конечного КПД взаимодействия группировка частиц на некоторой начальной длине развивается по сценарию, который определяется первым, а затем первым и вторым (и так далее) порядком асимптотического приближения [15]. Так, известно, что в первом порядке приближения начальная энергия исключается из числа независимых параметров задачи (1), (2). Покажем, что аналогичный результат получается и во втором порядке за счёт использования переменной

$$w = \frac{\gamma_0}{\gamma_0 + 1} \frac{\gamma_0 - \gamma}{\gamma_0 - 1}. \quad (7)$$

Нормировка остальных переменных и параметров становится однозначной (с точностью до постоянного множителя), если обеспечить сшивку соответствующих параметров в двух крайних пределах — для ультрарелятивистской и нерелятивистской энергий частиц [2]:

$$F = \frac{2\gamma_0 e E_z}{\beta_0 k m c^2}, \quad \zeta = \frac{kz}{2\gamma_0^2 \beta_0}, \quad \delta = 2\gamma_0^2 \beta_0 \left(\frac{1}{\beta_S} - \frac{1}{\beta_0} \right). \quad (8)$$

Тогда для произвольной начальной энергии частиц система уравнений (1)–(3) без учёта поля пространственного заряда принимает вид

$$\frac{dw}{d\zeta} = \operatorname{Re}(Fe^{i\theta}), \quad w(0) = 0;$$

$$\frac{d\theta}{d\zeta} = Q(w, \gamma_0) - \delta, \quad \theta(0) = \theta_0 \in [0, 2\pi], \quad \eta = \frac{\gamma_0 + 1}{\gamma_0} \int_0^{2\pi} \frac{w d\theta_0}{2\pi}. \quad (9)$$

Здесь введена функция Q , для которой зависимость от параметра γ_0 исчезает в трёх случаях: $\gamma_0 \rightarrow 1$, $\gamma_0 \rightarrow \infty$ и $w^2/[\gamma_0(1-w)]^2 \ll 1$. Действительно, используя вспомогательное обозначение $u = w/(1-w)$, можно получить

$$Q = 2\gamma_0^2 \left(\frac{1 + u/\gamma_0^2}{\sqrt{1 - (u/\gamma_0)^2}} - 1 \right) = \begin{cases} 2(\sqrt{(1+u)/(1-u)} - 1), & \gamma_0 \rightarrow 1; \\ 2(u + u^2/2), & \gamma_0 \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (10)$$

Для произвольных значений γ_0 разложение в ряд по малой величине $u \ll 1$ даёт

$$Q = u + u^2 + u \left[1 + \frac{u^2}{\gamma_0^2} \left(1 + \frac{3u}{4} \right) + \dots + \frac{(2n-1)!}{2^{2n-2}(n-1)!n!} \left(\frac{u}{\gamma_0} \right)^{2n} \left(1 + \frac{2n+1}{2n+2}u \right) \right], \quad n \geq 2. \quad (11)$$

Ряд в квадратных скобках сходится для каждой из частиц при любой начальной энергии электронов и может быть относительно большой, но конечной величиной при выполнении условия гидродинамической модели: остановка частиц не происходит. Как видно, скорость изменения динамического смещения существенно зависит от начальной энергии лишь на последних стадиях нелинейного взаимодействия и только для группы частиц, испытывающих заметное торможение. На основании (9), (11) можно записать уравнение нелинейного осциллятора, сохраняя первый зависящий от начальной энергии член разложения:

$$\frac{d^2\theta}{d\zeta^2} = \frac{2}{(1-w)^3} \left(1 + \frac{3w^2}{2\gamma_0^2(1-w)^2} + \dots \right) \operatorname{Re}(Fe^{i\theta}). \quad (12)$$

Итак, картина фазовых траекторий частиц не зависит от начальной энергии в случае, когда задача описывается с точностью до второго порядка асимптотического приближения: $Q = 2u + u^2$. Приведённый КПД и параметры, определяемые нормировкой (8), неизменны ($\langle w(\zeta_k) \rangle = \text{const}$, $\zeta_k \equiv kL/(2\gamma_0^2\beta_0)$) лишь при ограничениях на максимальное приращение энергии электронов. Здесь угловые скобки обозначают усреднение по начальным фазам.

Вблизи оптимальных режимов взаимодействия частиц и волны необходимо отказаться от требования постоянства параметров прибора, определяемых нормировкой (8). Будем предполагать, что приведённый КПД может плавно изменяться на всей шкале начальных энергий ($1 < \gamma_0 < \infty$). Тогда задача сводится к поиску некоторых физически обоснованных аналитических процедур, которые, прежде всего, должны распространяться на случаи оптимальных режимов с достаточно высоким приведённым КПД. Формально определим искомые функции в виде

$$\delta_{\text{opt}}(\gamma_0) \equiv 2\gamma_0^2\beta_0 \left(\frac{1}{\beta_{\text{Sopt}}} - \frac{1}{\beta_0} \right) = \Psi_\delta(\gamma_0)\delta_{\text{opt}}(\infty), \quad (13a)$$

$$\zeta_{k \text{ opt}}(\gamma_0) \equiv \frac{kL_{\text{opt}}}{2\gamma_0^2\beta_0} = \Psi_\zeta(\gamma_0)\zeta_{k \text{ opt}}(\infty), \quad (13b)$$

$$F_{\text{opt}}(\gamma_0) \equiv \frac{2\gamma_0 e E_{z \text{ opt}}}{\beta_0 k m c^2} = \Psi_F(\gamma_0) F_{\text{opt}}(\infty), \quad (13\text{в})$$

$$\langle w \rangle_{\text{max}} \equiv \frac{\gamma_0 \eta_{\text{max}}(\gamma_0)}{\gamma_0 + 1} = \Psi_\eta(\gamma_0) \eta_{\text{max}}(\infty). \quad (13\text{г})$$

Термин «оптимальные параметры» применяется здесь в смысле пункта 3 введения: КПД может быть ниже абсолютного максимума для заданного распределения амплитуды волны. Очевидно, что функции $\Psi(\gamma_0)$ не могут быть универсальными для любой структуры поля. Забегая вперёд, следует отметить, что в качестве параметра в них входит расстройка синхронизма, поэтому универсальной становится лишь сама схема пересчёта.

1.3. Феноменологический подход к задаче

Остановимся на результатах численной оптимизации параметров генератора с однородной структурой поля ($F = F_0 = \text{const}$). Достаточно информативными оказываются результаты в случае варьирования амплитуды поля F_0 .

Алгоритм поиска максимального приведённого КПД $\langle w \rangle$ и соответствующих параметров поясняется на рис. 1. Штриховыми линиями отмечены положения оптимальных значений $F_{0 \text{ opt}}$ и δ_{opt} . Штрихпунктирная линия на рис. 1б обозначает границу, за которой взаимодействие сопровождается остановкой отдельных частиц. В случае ультрарелятивистского движения, как известно [5], остановка частиц не происходит (в одном из следующих разделов приводится доказательство этого утверждения). При снижении амплитуды волны относительно оптимума получаются близкие между собой — независимо от γ_0 — решения ($\langle w \rangle \propto F_0^{1/2}$, $\delta_{\text{opt}} \approx 2F_0^{1/2}$) уже при условии $F_0 < 0,05 \div 0,1$. Это означает, что соотношения подобия (13) упрощаются ($\Psi \rightarrow 1$) и совпадают с известными [4] в частном случае ограниченной амплитуды волны: $F_0 \ll F_{0 \text{ opt}}(\infty)$. В этом неравенстве предел $\gamma_0 \rightarrow \infty$ равнозначен условию $\gamma_0 > 6 \div 7$, когда ультрарелятивистские соотношения подобия выполняются с точностью не хуже нескольких процентов.

В соответствии с расчётами, для произвольной амплитуды волны соответствующие ей значения δ_{opt} и $\zeta_{k \text{ opt}}$ изменяются так, что их произведение, характеризующее кинематическое смещение частиц относительно волны, остаётся с большой точностью постоянным:

$$\zeta_{k \text{ opt}} \delta_{\text{opt}} \approx 3\pi/2. \quad (14\text{а})$$

При малой амплитуде поля кинематическое смещение не зависит от начальной энергии частиц и увеличивается с ростом γ_0 на $3 \div 4\%$ в области оптимальных значений $F_0(\gamma_0)$. В последнем случае ($F_0 \approx F_{0 \text{ opt}}$) результаты численного решения хорошо соответствуют известному положению, что электроны могут терять значительную часть своей первоначальной кинетической энергии ($eL_{\text{opt}} E_{z \text{ opt}} / (kmc^2) \approx \gamma_0 - 1$):

$$\zeta_{k \text{ opt}} F_{0 \text{ opt}} \approx \frac{\gamma_0}{\gamma_0 + 1}. \quad (14\text{б})$$

Отмеченные (здесь и в работе [7]) закономерности находят своё объяснение после сопоставления параметров движения частиц в лабораторной системе отсчёта и системе S , движущейся с фазовой скоростью синхронной волны. В частности, указанный масштаб изменения фазовых смещений связан с наличием слабого релятивистского эффекта в системе отсчёта S при больших энергиях в лабораторной системе. Выражения для релятивистского фактора Γ_0 и скорости частиц $V_0 = (1 - 1/\Gamma_0^2)^{1/2}$ в сопровождающей системе на основании преобразований Лоренца и определения расстройки (8) приводятся к виду

$$\Gamma_0 = \frac{1 + \delta/2}{\sqrt{1 + \delta + \delta^2/(2\gamma_0)^2}}, \quad V_0 = \frac{\delta\beta_0}{2 + \delta}. \quad (15)$$

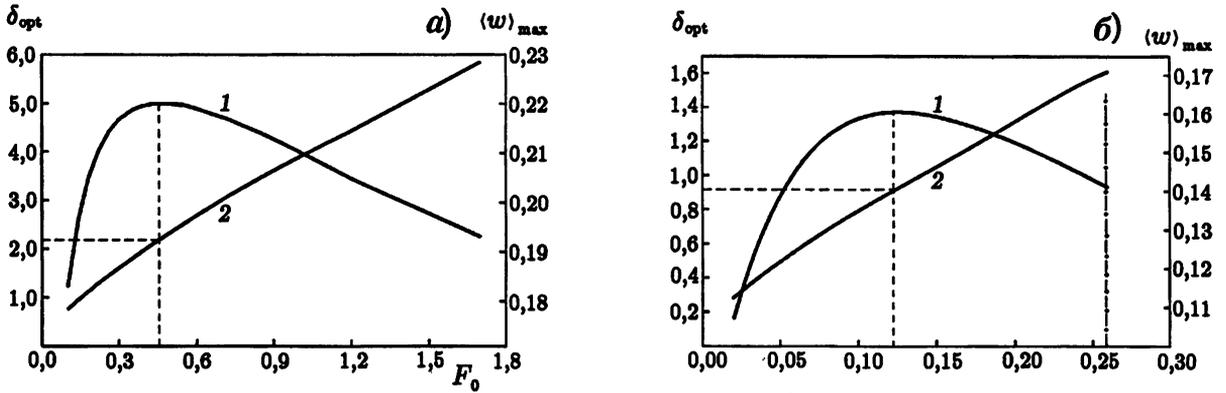


Рис. 1. Зависимости максимального приведённого КПД (кривая 1) и оптимальной расстройки (кривая 2) от амплитуды поля при $\gamma_0 \rightarrow \infty$ (а), $\gamma_0 \rightarrow 1$ (б)

Условия 2 и 3 введения с учётом соотношения (14а) ограничивают расстройку сверху ($\delta_{\max} \approx 3$) и приводят к тому, что начальная скорость движения частиц в системе отсчёта S является нерелятивистской: $V_0^2 \ll 1$. Подставляя оптимальную расстройку для случая однородной структуры поля ($\delta_{\infty} \approx 2,2$ при $\gamma_0 \rightarrow \infty$, см. рис. 1а), находим, что $\Gamma_{0\infty} \approx 1,18$. Из выражений (15) следует, что чем меньше расстройка (а значит, в силу (14а), (14б) меньше и величина F_0), тем ближе к единице значение $\Gamma_{0\infty}$. Данное условие ($\Gamma_0 \rightarrow 1$) является необходимым и достаточным для перехода к асимптотическому случаю, когда решение задачи (9) для приведённого КПД не зависит от начальной энергии частиц. Покажем, что принятых условий достаточно, чтобы и текущие значения максимальной безразмерной скорости V в сопровождающей системе оставались нерелятивистскими.

Воспользуемся интегралом движения (6), который, как уже отмечалось, можно интерпретировать как закон сохранения энергии в сопровождающей системе отсчёта. В общем случае произвольной структуры поля

$$\varepsilon \equiv \frac{\Gamma_0 - \Gamma}{\Gamma_0 - 1} = -A \operatorname{Im} \left(f(\zeta) e^{i\theta} - f(0) e^{i\theta_0} - \int_0^\zeta \frac{df}{d\zeta'} e^{i\theta} d\zeta' \right),$$

$$A \equiv \frac{eE_0 \gamma_S \beta_S}{kmc^2 (\Gamma_0 - 1)} = \frac{2(2 + \delta)(\Gamma_0 + 1) F_0}{2\delta^2 \Gamma_0}. \quad (16)$$

Здесь F_0 — действительная величина, характеризующая амплитуду волны: $F = F_0 f(\zeta)$. Выбор нормировки имеет значение при сравнении величин F_0 :

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx = 1, \quad \text{где } x = \zeta/\zeta_k. \quad (17)$$

В случае постоянной амплитуды волны потенциальная энергия частиц в системе отсчёта S не зависит явным образом от продольной координаты в лабораторной системе и равна $-A \cos \theta$. При этом $f(\zeta) = i$ и $\varepsilon = -A(\cos \theta - \cos \theta_0)$. Тогда потенциальная энергия является чётной функцией фазы и достигает минимума при $\theta = 0$. Таким образом, величина A характеризует глубину потенциальной ямы. Условия 2, 3 введения с учётом соотношения (14б) ограничивают сверху амплитуду волны ($F_{0\max} \approx 1$) и параметр A ($A_{\max} \approx 1$). Тогда в силу соотношений (16) $\Gamma_{\max} \approx \Gamma_0 + 2A(\Gamma_0 - 1)$, и вблизи оптимальных режимов выполняется неравенство $2A(\Gamma_0 - 1) \ll 1$.

1.4. Соотношения подобия в первом приближении

Преобразование Лоренца для скорости позволяет записать уравнение для фазы в виде

$$\left(\frac{B_0}{B} + \frac{B_0}{\beta_S}\right) d\theta = -2\gamma_0^2 \beta_0 B_0 (\beta_S^{-2} - 1) d\zeta = -\delta \left(1 + \frac{B_0}{\beta_S}\right) d\zeta. \quad (18)$$

Безразмерную скорость B в сопровождающей системе отсчёта выразим через ε :

$$B = \pm B_0 \left(1 - \frac{\Gamma_0 - 1}{\Gamma_0 + 1} \varepsilon\right)^{1/2} \left(1 - \frac{\Gamma_0 - 1}{\Gamma_0} \varepsilon\right)^{-1} (1 - \varepsilon)^{1/2}. \quad (19)$$

Здесь знак минус соответствует частицам, которые отражаются от потенциального барьера в системе отсчёта S . Условия разворота частиц в этой системе при постоянной амплитуде поля физически прозрачны. В этом случае на основании классических законов механики разворот реализуется для частиц, которые стартуют в определённом диапазоне начальных фаз, а также если потенциальная яма достаточно глубока:

$$-\arccos \frac{1-A}{A} < \theta_0 < \arccos \frac{1-A}{A}, \quad A > 1/2. \quad (20)$$

Границам указанного диапазона начальных фаз соответствуют сепаратрисы на фазовой плоскости $(d\theta/d\zeta, \theta)$ разделяющие траектории захваченных и пролётных частиц. Для захваченных частиц точкам остановки в системе S соответствуют такие фазы θ_S , в которых потенциальная энергия равна полной ($\varepsilon = \varepsilon_{\max} = 1$), т. е. выполняется условие $A \cos \theta_S = A \cos \theta_0 - 1$. В этих точках $d\theta/d\zeta = 0$ и, соответственно, $\beta = \beta_S$. Таким образом, задача (16), (18), (19) нахождения функции $\theta(\zeta, \theta_0)$ и фазового портрета полностью адекватна задаче описания движения частиц в лабораторной системе отсчёта. Учитывая нерелятивистский характер движения частиц в системе S , задачу можно решать методом последовательных приближений. В нулевом приближении (параметр Γ_0 постоянен при любой энергии и равен $\Gamma_{0\infty}$) приведённый КПД и все параметры взаимодействия остаются постоянными. Это легко видеть на примере расстройки, определение которой можно преобразовать к виду

$$\delta = -2 + 2\Gamma_0^2 (1 + K), \quad K \equiv B_0/\beta_S. \quad (21)$$

Изменение формы траекторий на фазовой плоскости будет мало, если коэффициенты в уравнении (18) для фазы и параметр A не меняются с точностью до величины порядка $(\Gamma_{0\infty} - \Gamma_0)/\Gamma_{0\infty}$:

$$\frac{B_0}{\beta_S} = \frac{\delta}{2 + \delta} \left(1 + \frac{\delta}{2\gamma_0^2}\right) \approx \text{const}, \quad \delta \left(1 + \frac{B_0}{\beta_S}\right) \zeta_k \approx \text{const}, \quad A = \frac{(2 + \delta)(\Gamma_0 + 1)F_0}{\delta^2 \Gamma_0} \approx \text{const}. \quad (22)$$

Подставляя в правые части уравнений (22) решения, соответствующие ультрарелятивистскому пределу, нетрудно найти в первом приближении три из четырёх функций Ψ :

$$\begin{aligned} \Psi_\delta^{(1)}(\gamma_0) &\approx \frac{2\gamma_0^2}{\delta_\infty (2 + \delta_\infty)} \left(\sqrt{1 + \frac{\delta_\infty (2 + \delta_\infty)}{\gamma_0^2}} - 1 \right), \\ \Psi_\zeta^{(1)}(\gamma_0) &\approx \frac{1}{\Psi_\delta^{(1)}(\gamma_0)}, \quad \Psi_F^{(1)}(\gamma_0) \approx \frac{(2 + \delta_\infty) \Psi_\delta^{(1)}(\gamma_0)}{2/\Psi_\delta^{(1)} + \delta_\infty}. \end{aligned} \quad (23)$$

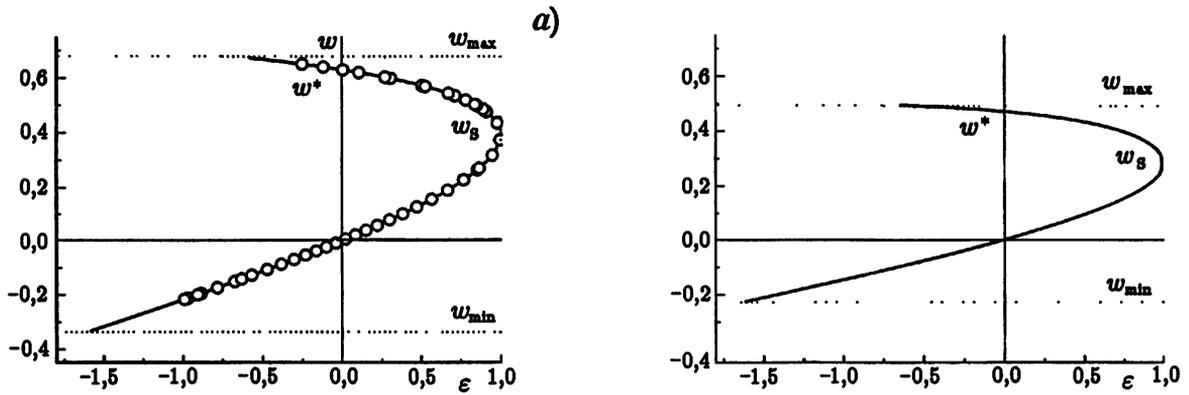


Рис. 2. Линии соответствия энергетических переменных w и ϵ , при $\gamma_0 \rightarrow \infty$ (панель а; $F_0 = 0,46$; $\delta = 2,24$), $\gamma_0 \rightarrow 1$ (панель б; $F_0 = 0,12$; $\delta = 0,91$)

Взаимосвязь энергетических переменных w и ϵ носит универсальный характер, поскольку следует из законов преобразования Лоренца. Опуская несложные выкладки, получаем зависимость, изображённую на рис. 2:

$$w = \frac{w^*}{2} \left\{ 1 + \frac{K\Gamma_0\epsilon}{\Gamma_0 + 1} \pm \left(1 - \frac{\Gamma_0 - 1}{\Gamma_0 + 1} \epsilon \right)^{1/2} (1 - \epsilon)^{1/2} \right\}. \quad (24)$$

Здесь $w^* = 4\delta\Gamma_0^2/(2 + \delta)^2$. Знак минус в (24) соответствует нижней ветви зависимости $w(\epsilon)$, когда $\beta \geq \beta_S$ и $\epsilon_{\min}^{(-)} = -2A$, а плюс соответствует верхней ветви ($\beta \leq \beta_S$ и $\epsilon_{\min}^{(+)} = 1 - 2A$). Значения w^* , получаемые подстановкой $\epsilon^{(+)} = 0$, реализуются для частиц, имеющих скорость $V = -V_0$, и которые на фазовой плоскости ($d\theta/d\zeta, \theta$) оказываются вблизи максимальных значений $d\theta/d\zeta$, удовлетворяя условию $\cos \theta = \cos \theta_0$. На рис. 2а кружками отмечено положение частиц (всего 50) по окончании взаимодействия в генераторе с однородной структурой поля. Как видно из структуры выражения (24), в первом приближении ($K \approx \text{const}$) w изменяется при различных значениях γ_0 пропорционально w^* . Тогда можно записать функцию $\Psi_\eta(\gamma_0)$ в виде

$$\Psi_\eta^{(1)}(\gamma_0) \approx \frac{(2 + \delta_\infty) \Psi_\delta^{(1)}(\gamma_0)}{2 + \delta_\infty \Psi_\delta^{(1)}(\gamma_0)}. \quad (25)$$

Для второй итерации метода последовательных приближений необходимо уточнить условия (22).

1.5. Обобщение результатов численных расчётов

Обращает на себя внимание возможность аппроксимации распределения частиц по начальным фазам по окончании взаимодействия Π -образной функцией (см. рис. 3). Наибольшее торможение испытывает группа частиц, отражающихся от потенциального барьера в системе S . У таких частиц приведённая энергия в конце прибора приблизительно равна w^* , а относительная доля таких частиц (назовём эту долю условно коэффициентом «захвата») в случае однородной структуры поля в силу условия (20) составляет $\pi^{-1} \arccos(A^{-1} - 1)$. Вблизи максимума КПД параметр A лежит в пределах $0,7 \div 0,9$ (см. табл. 1). В этих пределах коэффициент «захвата» с точностью не хуже 3 % равен $A/2$; точным решением уравнения $\pi^{-1} \arccos(A^{-1} - 1) = A/2$ является $A = 2/3$. Для других типов структуры поля, как показывают расчёты при использовании нормировки (17), сделанная оценка доли этих частиц (около $A/2$) остаётся в силе. Тогда можно записать приближённое выражение для приведённого КПД:

$$\langle w \rangle \approx D_w w^* \frac{A}{2}. \quad (26)$$

Здесь D_w — постоянный для выбранной структуры поля коэффициент порядка единицы, такой, что произведение $D_w w^*$ имеет смысл средней приведённой энергии в группе захваченных частиц. Оценка (26) для КПД справедлива при отсутствии начальной модуляции частиц. Для такого рода начальных условий можно ввести набор параметров, характеризующих режим максимального КПД. Они либо не зависят от начальной энергии частиц и определяются характером продольной структуры поля, либо меняются на шкале начальной энергии очень медленно и единообразно для различных структур.

Таблица 1

Значения некоторых параметров, полученные на основе численной максимизации приведённого КПД генератора с однородной структурой поля

γ_0	$\langle w \rangle_{\max}$	Γ_0	A	K	D_w
$\rightarrow 1,0$	0,161	1,000	0,860	0,453	0,83
1,5	0,182	1,041	0,828	0,468	0,83
2,0	0,194	1,072	0,803	0,489	0,83
3,0	0,206	1,111	0,763	0,503	0,83
$\rightarrow \infty$	0,220	1,178	0,734	0,528	0,83

Указанные в табл. 1 значения параметров могут служить ориентиром и для других случаев продольного распределения поля. По известным параметрам Γ_0 и A (или K и A) можно на качественном уровне судить о степени оптимальности режима взаимодействия частиц и волны. Например, в асимптотическом случае происходит снижение расстройки ($\Gamma_0 \rightarrow 1$ и $K \rightarrow 0$), а наибольший КПД при этом достигается с ростом глубины потенциальной ямы (A стремится приблизительно к единице) относительно случая оптимальной амплитуды волны. Чрезмерно высокая

амплитуда волны ($F_0 > F_{0\text{opt}}$), наоборот, приводит к снижению параметра A (при этом $A \rightarrow 1/2$) в условиях максимального для этого режима КПД из-за увеличения оптимальной расстройки. При этом уменьшается доля частиц, теряющих существенную часть начальной энергии.

2. ФОРМАЛИЗОВАННЫЙ ВЫВОД СООТНОШЕНИЙ ПОДОБИЯ

2.1. Дополнительная нормировка переменных

С учётом (18), (19) уравнения движения в канонической форме (4) можно записать в виде

$$\frac{d\theta}{d\zeta} = \frac{F_0}{A} \frac{\partial H'}{\partial w}, \quad \frac{dw}{d\zeta} = -\frac{F_0}{A} \frac{\partial H'}{\partial \theta}. \quad (27)$$

Здесь гамильтониан H' с точностью до постоянного множителя есть сумма кинетической и потенциальной энергии частицы в системе отсчёта S :

$$H' = [1 - \varepsilon(w)] + U(\zeta, \theta) = 1 + U(0, \theta_0),$$

$$U(\zeta, \theta) = -A \operatorname{Im} \left\{ f(\zeta) e^{i\theta} - \int_0^\zeta \frac{df}{d\zeta} \exp[i\theta(\zeta, \theta_0)] d\zeta \right\}. \quad (28)$$

Таким образом, в сопровождающей системе отсчёта переменные θ, w приобретают смысл координаты и импульса отдельной частицы. Задача состоит в том, чтобы найти такую нормировку переменных

$$\frac{dq}{d\zeta_N} = \frac{\partial H_N}{\partial p}, \quad \frac{dp}{d\zeta_N} = -\frac{\partial H_N}{\partial q}, \quad (29)$$

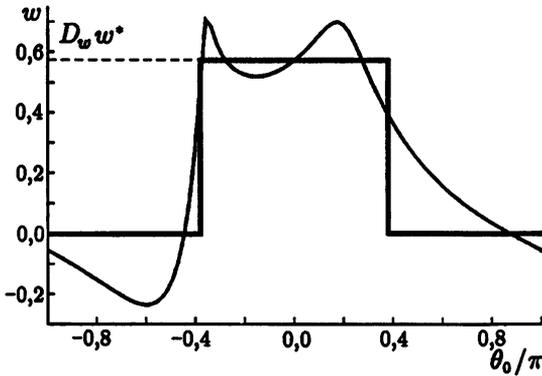


Рис. 3. Функция распределения частиц по начальным фазам $w(\zeta_k, \theta_0)$ в пределе $\gamma_0 \rightarrow \infty$ ($F_0 = 0,46$; $\delta = 2,24$) и её аппроксимация для процедуры усреднения

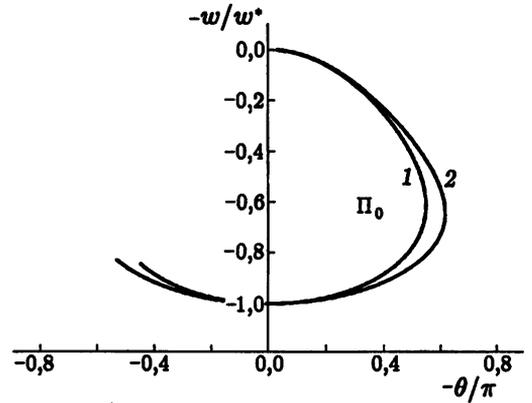


Рис. 4. Иллюстрация к определению интегрального инварианта при однородной структуре поля: кривая 1 соответствует $\gamma_0 \rightarrow 1$, кривая 2 — $\gamma_0 \rightarrow \infty$

которая бы обеспечивала инвариантность траекторий движения на фазовой плоскости (q, p) по отношению к изменению начальной энергии частиц $\Gamma_0 \rightarrow \Gamma'_0$. Более того, преобразование переменных $(q, p) \rightarrow (q', p')$ и Гамильтониана $H_N \rightarrow H'_N$ должно быть таким, чтобы соблюдалась инвариантность нормированной длины прибора: $\zeta_{Nk} = \text{const}$. Последнее условие является ключевым. Действительно, на основании доказываемого в классической механике интегрального инварианта Пуанкаре—Картана [16] (или принципа наименьшего действия [10]) требование $\zeta_{Nk} = \text{const}$ равносильно требованию инвариантности фазового объёма для траекторий финитного движения. В нашем случае траектории одномерного движения на фазовой плоскости являются незамкнутыми. Половина цикла колебаний соответствует прохождению частицами следующих положений: $w = 0, \varepsilon = 0$, затем $w = w_S, \varepsilon = 1$ и $w = w^*, \varepsilon = 0$ (см. рис. 2). Ограничимся рассмотрением условий постоянства именно этой площади для одной из траекторий, т. е. фиксированной начальной фазы. Инвариантность определяемого таким образом фазового объёма (с точностью до коэффициента это площадь Π_0 на плоскости $(\theta, w/w^*)$, см. рис. 4) следует понимать по отношению к случаям различной начальной энергии частиц. На примере однородной структуры найдём соответствующее такому инварианту условие для движения частицы, которая стартует на границе тормозящих (слева) и ускоряющих (справа) фаз поля, т. е. со дна потенциальной ямы. В этом случае $\theta_0 = 0$, а площадь Π_0 (см. рис. 4) является минимальной по сравнению с соответствующими инвариантами других траекторий (для начальных фаз $\theta_0 \neq 0$):

$$\Pi_0 = \frac{1}{w^*} \iint dw d\theta = \int_0^{q_S} \sqrt{(1-\varepsilon)(1-\alpha\varepsilon)} d\theta. \quad (30)$$

Здесь $\alpha = (\Gamma_0 - 1)/(\Gamma_0 + 1) \ll 1$, а $q_S = -\theta_S$ — координата остановки частицы в системе отсчёта S . В случае однородной структуры поля (q_S и $\varepsilon(\theta)$ определены в предыдущем разделе) выражение (30) можно представить в виде

$$\Pi_0 = \sqrt{\frac{2}{A}} I_\alpha, \quad I_\alpha = \int_0^1 \sqrt{\frac{(1-x^2)(1-\alpha x^2)}{1-x^2/(2A)}} dx. \quad (31)$$

Нетрудно убедиться, что инвариант в виде $\Pi_0/h = \text{const}$, где $h = 2\Gamma_0/(\Gamma_0 + 1)$, выполняется при условии

$$Ah^2 \approx \text{const}. \quad (32)$$

Действительно, вычисляя интеграл I_α , на основании (32) следует подставлять $A = A_1/(1 + \alpha)^2$. Здесь A_1 — константа, соответствующая параметру A в нерелятивистском пределе. Тогда интеграл, как функция параметров α и A , остаётся с высокой точностью постоянным: разность $I_\alpha(\alpha, A) - I_\alpha(0, A_1)$ пропорциональна α^2 . Интегрируя уравнение (18), найдём координату ζ^* той же частицы ($\theta_0 = 0$) в лабораторной системе отсчёта при прохождении точки $w = w^*$:

$$\delta(1 + K)\zeta^* = -2 \int_0^{qs} \frac{B_0}{B} d\theta = \frac{2^{3/2} I_\mu}{A^{1/2}}, \quad (33)$$

$$I_\mu = \int_0^{\pi/2} \frac{(1 - \mu \sin^2 \varphi) d\varphi}{(1 - (2A)^{-1} \sin^2 \varphi)^{1/2} (1 - \alpha \sin^2 \varphi)^{1/2}}, \quad \mu = \frac{\Gamma_0 - 1}{\Gamma_0}. \quad (34)$$

Несущественное изменение интеграла I_μ на шкале Γ_0 (менее 1 %) также обеспечивается условием (32). В пределе $\Gamma_0 \rightarrow 1$ он сводится к полному эллиптическому интегралу первого рода [17]: $I_\mu = K(1/(2A_1))$. Итак, если в первом порядке разложения по малому параметру $\alpha \ll 1$ нормировка переменных может быть выбрана в виде $(\theta, w, \zeta) \rightarrow (\theta, w/w^*, \delta\zeta)$, то во втором порядке в силу (32), (33) появляется дополнительный фактор $(1 + K)/h$. Этот же фактор должен присутствовать и в нормировке фазы, чтобы не деформировать траектории пролётных частиц. Тогда нормировка в (29) должна быть в виде

$$q = -\frac{1 + K}{h}\theta, \quad \zeta_N = \frac{\delta(1 + K)\zeta}{h}, \quad p = \frac{w_S - w}{(1 + K)w^*}, \quad H_N(p, q) = \frac{hH'}{4}, \quad (35)$$

где $w_S = w^*(1 + hK/2)/2$. Здесь не уточняется физический смысл нормированных текущих и начальных значений переменных, т. к. он в некотором смысле условен. В самом деле, появление коэффициента $(1 + K)/h$ можно расценивать как усреднённый за время движения частицы результат влияния её начальной энергии. Этот коэффициент в асимптотическом пределе приближается к единице.

Если теперь, наряду с (32), потребовать выполнение второго условия,

$$p(0) = \frac{1}{2(1 + K)} \left(1 + \frac{hK}{2} \right) \approx \text{const}, \quad (36)$$

то при изменении начальной энергии частиц имеем более точное по сравнению с первым приближением постоянство траекторий на фазовой плоскости (q, p) как для группы захваченных частиц, так и для каждой из пролётных.

Выражение (26) остаётся в силе и во втором приближении метода:

$$\frac{\langle w \rangle}{w^* A} \approx \text{const}. \quad (37)$$

Процедура усреднения по начальным фазам формально оказывается равносильной умножению усредняемой переменной на h^2 .

2.2. Запись гамильтониана как функции импульса

Кинетическую энергию частицы в сопровождающей системе отсчёта ($E_{\text{кин}} = h(1 - \varepsilon)/4$) запишем на основе преобразований Лоренца или выражения (24):

$$E_{\text{кин}} = \frac{1}{\nu} \left(M_{\text{эфф}}(p) - \sqrt{M_{\text{эфф}}^2(p) - \nu p^2} \right). \quad (38)$$

Здесь введён вспомогательный параметр

$$\nu = \frac{K^2 - (\Gamma_0^2 - 1)/\Gamma_0^2}{(1 + K)^2}$$

и эффективная масса нелинейного осциллятора, которая в любом случае положительна и линейно зависит от импульса:

$$M_{\text{эфф}}(p) = \frac{1}{2\Gamma_0(1 + K)^2} + \frac{Kp}{1 + K}.$$

Формальным поводом для введения эффективной нелинейной массы осциллятора служит тот факт, что параметр ν является малой величиной: $\nu \ll 1$. Наибольшее значение этого параметра реализуется в нерелятивистском пределе и относительно больших для этого случая расстройках $\delta_1 \approx 1$ ($\Gamma_0 \rightarrow 1$, $K_1 \approx \delta_1/2$): $\nu_{\text{max}} \approx \delta_1^2/(2 + \delta_1)^2 \ll 1$. Во всех остальных случаях этот параметр уменьшается и, в частности, стремится к нулю в ультрарелятивистском пределе, т. к. $\beta_S \rightarrow 1$ (по определению $K_\infty \equiv (1 - \Gamma_{0\infty}^{-2})^{1/2}$), и в асимптотическом случае. Поэтому выражение (38) может быть приведено к классическому виду:

$$E_{\text{кин}} \approx \frac{p^2}{2M_{\text{эфф}}}. \quad (39)$$

Подкоренное выражение в (38) стремится к нулю в случае сильного торможения и остановки частиц в лабораторной системе отсчёта, когда эффективная минимальная масса приближается к малой, но конечной величине $M_{\text{эфф min}} = \nu^{1/2}p_{\text{min}}$. В этом пределе выражение (39) также в целом соответствует зависимости $E_{\text{кин}}(p)$, но верно с точностью до двойки.

Границы области изменения переменной p находятся в соответствии с выражением (24) и комментариями к нему:

$$p_{\text{min}} = \frac{1}{2(1 + K)} \left[hKA - \sqrt{4A \left(\frac{1}{\Gamma_0 + 1} + A \frac{\Gamma_0 - 1}{\Gamma_0 + 1} \right)} \right],$$

$$p_{\text{max}} = \frac{1}{2(1 + K)} \left[\frac{h}{2}K(1 + 2A) + \sqrt{(1 + 2A) \left(1 + 2A \frac{\Gamma_0 - 1}{\Gamma_0 + 1} \right)} \right]. \quad (40)$$

Отвлекаясь от условия 2 введения, покажем, что подкоренное выражение в (38) не может быть отрицательной величиной, но больше нуля или равно нулю (в случае остановки частицы в покоящейся системе отсчёта). Оба корня уравнения $M_{\text{эфф}}^2(p) = \nu p^2$ располагаются в отрицательной области. Они равны между собой в ультрарелятивистском пределе:

$$p_{1\infty} = p_{2\infty} = -\frac{1}{2(1 + K_\infty)\sqrt{\Gamma_{0\infty}^2 - 1}} = -\frac{1}{2\sqrt{1 + \delta_\infty}}. \quad (41)$$

Остановка не происходит, если в общем случае область изменения параметров задачи удовлетворяет строгому неравенству

$$p_{\text{min}} > p_2 = -\frac{1}{2\Gamma_0(1 + K)[K + (1 + K)\nu^{1/2}]}, \quad (42)$$

где p_2 — наибольший корень рассматриваемого уравнения второй степени. Исходя из структуры выражения для p_{min} , легко показать, что неравенство (42) выполняется только в ультрарелятивистском пределе, т. к. сводится к виду

$$\frac{2\sqrt{A}}{\sqrt{A} + \sqrt{A + (\Gamma_{0\infty} - 1)^{-1}}} < 1. \quad (43)$$

В нерелятивистском случае неравенство (42) можно привести к виду

$$-\sqrt{2A_1} + \frac{\delta_1 A_1}{2} > -\frac{1}{\delta_1}, \quad \left(\delta_1 - \sqrt{\frac{2}{A_1}}\right)^2 > 0. \quad (44)$$

Таким образом, в этом пределе подкоренное выражение (38) также неотрицательно, но может быть равным нулю в точке $\delta_1 = (2/A_1)^{1/2}$. Это и есть условие остановки частиц в лабораторной системе отсчёта в нерелятивистском случае. Тогда можно записать ограничение на расстройку и амплитуду волны:

$$F_0 (2 + \delta_1) < 1. \quad (45)$$

Данное условие согласуется с результатами численных расчётов (см. рис. 1б).

При произвольной начальной энергии частиц доказательство неотрицательности подкоренного выражения (38) становится весьма громоздким, а условие типа (45) не удаётся получить в аналитическом виде.

Итак, дополнительная нормировка переменных позволила свести к минимуму эффект зависимости решений задачи от начальной энергии частиц. «Усреднённые» характеристики взаимодействия частиц и волны оказываются инвариантными с точностью до фактора $(\Gamma_{0\infty} - 1)^2$ при выполнении условий (32), (36).

2.3. Уточнённые соотношения подобия

Учтём, что выражение (36) для параметра K можно упростить без потери точности:

$$K + \frac{1}{2\Gamma_0} \approx \text{const}. \quad (46)$$

Пусть для какой-либо начальной энергии известен приведённый КПД, расстройка синхронизма, длина прибора и амплитуда поля. Для определённости по-прежнему рассмотрим ультрарелятивистский случай. Находим вначале величину $\Gamma_{0\infty} = (1 + \delta_{\infty}/2)/(1 + \delta_{\infty})^{1/2}$ и на основании (22) определяем расстройку в первом приближении для заданного значения γ_0 :

$$\delta^{(1)} = \frac{2\gamma_0^2}{2 + \delta_{\infty}} \left(\sqrt{1 + \frac{\delta_{\infty}(2 + \delta_{\infty})}{\gamma_0^2}} - 1 \right). \quad (47)$$

Теперь вычисляем два вспомогательных параметра — релятивистский масс-фактор в сопровождающей системе отсчёта (с помощью (15)):

$$\Gamma_0^{(1)} = \frac{1 + \delta^{(1)}/2}{\sqrt{1 + \delta^{(1)} + (\delta^{(1)}/(2\gamma_0))^2}}, \quad (48)$$

и в соответствии с (46) уточняем нормированную на β_S начальную скорость частиц в этой системе:

$$K = \frac{\delta_{\infty}}{2 + \delta_{\infty}} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Gamma_0^{(1)}} - \frac{1}{\Gamma_{0\infty}} \right). \quad (49)$$

Этого достаточно, чтобы на основании определения параметра K найти расстройку во втором приближении (здесь и далее для сокращения записи опускается верхний индекс, обозначающий номер приближения):

$$\delta = \gamma_0^2 (1 - K) \left[\sqrt{1 + \frac{4K}{\gamma_0^2 (1 - K)^2}} - 1 \right]. \quad (50)$$

Соотношение подобия для нормированной длины прибора следует из (32), (33):

$$\frac{\Gamma_0 + 1}{2\Gamma_0} (1 + K) \delta \zeta_k = \frac{\Gamma_0 + 1}{4\Gamma_0^3} (2 + \delta) \delta \zeta_k = \text{const.} \quad (51)$$

Из выражений (16), (32) получаем закон изменения амплитуды поля:

$$\frac{2 + \delta}{\delta^2} \frac{2\Gamma_0}{\Gamma_0 + 1} F_0 = \text{const.} \quad (52)$$

Наконец, КПД в силу (37) изменяется по закону

$$\frac{(2 + \delta)^2 \langle w \rangle}{\delta(1 + \Gamma_0)^2} = \frac{(2 + \delta)^2 \gamma_0 \eta}{\delta(1 + \Gamma_0)^2 (1 + \gamma_0)} = \text{const.} \quad (53)$$

В левые части выражений (51)–(53) необходимо подставлять уточнённую расстройку (50) и параметр $\Gamma_0^{(1)}$, вычисленный на основании (47), (48). Погрешность схемы пересчёта возрастает с уменьшением длины прибора. При увеличении длины, начиная с некоторой величины, из (51)–(53) вытекают соотношения подобия [4], соответствующие пониженным значениям КПД. Для оптимальных режимов полученные с помощью этих соотношений приведённый КПД и оптимальные параметры с удовлетворительной точностью (погрешность составляет не более 3–4 %, что соответствует величине $(\Gamma_{0\infty} - 1)^2$) совпадают с результатами численной оптимизации КПД (см. рис. 5).

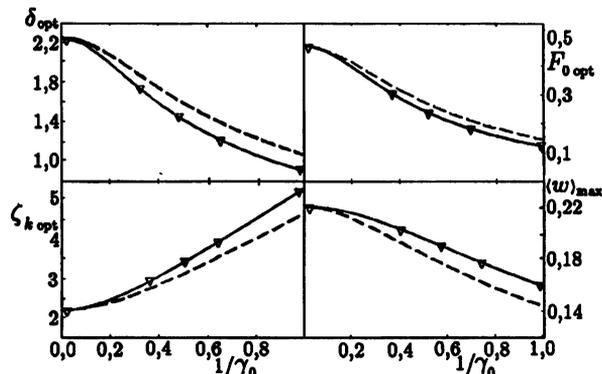


Рис. 5. Оптимальные параметры и приведённый КПД генератора с однородной структурой поля на шкале начальных энергий частиц. Треугольники — результаты численной оптимизации, пунктирные линии — первое приближение (23), (25), сплошные линии — формулы (50)–(53)

3. ПРОВЕРКА ПОЛУЧЕННЫХ СООТНОШЕНИЙ НА ПРИМЕРЕ ГЕНЕРАТОРОВ С НЕОДНОРОДНЫМ ПРОДОЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ АМПЛИТУДЫ ВОЛНЫ

3.1. Случай фиксированной структуры поля

В силу того, что вывод условия (32) инвариантности фазового объёма затруднителен в общем случае непостоянной амплитуды поля, представляет интерес проверка полученных соотношений. Приведём результаты численной оптимизации задачи (9) при различной начальной энергии частиц для нескольких типов неоднородной структуры поля.

Ограничимся здесь четырьмя типами распределения поля и численным решением (см. табл. 2) в двух предельных режимах — ультрарелятивистском и нерелятивистском. Кроме используемого для сравнения случая $f = \text{const}$, остальные три моделируют распределение поля синхронной волны в тех или иных генераторах черенковского типа. Например, функция типа $\sin(\pi\zeta/\zeta_k)$ моделирует структуру поля в оротроне и в генераторах с распределённым внутренним отражением волн [18]. Нарастающая амплитуда поля (типа $\sin[\pi\zeta/(2\zeta_k)]$) характерна для резонансной лампы бегущей волны.

Таблица 2

Оптимальные параметры и максимальный приведённый КПД для некоторых типов распределения поля в резонансных генераторах

$f(\zeta)$	$\gamma_0 \rightarrow$	δ_{opt}	$\zeta_{k,opt}$	$F_{0,opt}$	$\langle w \rangle_{max}$
1	∞	2,24	2,2	0,46	0,220
	1	0,91	5,2	0,12	0,161
$\sqrt{2} \sin[\pi\zeta/\zeta_k]$	∞	2,53	3,1	0,47	0,248
	1	0,97	7,4	0,11	0,175
$\sqrt{2} \sin[\pi\zeta/(2\zeta_k)]$	∞	2,36	3,3	0,54	0,314
	1	0,94	7,5	0,13	0,215
$\sqrt{2} \cos[\pi\zeta/(2\zeta_k)]$	∞	2,70	2,3	0,52	0,173
	1	0,99	5,8	0,12	0,126

Как и в случае однородной структуры поля, область начальных фаз, которая соответствует захваченным частицам, меньше в ультрарелятивистском случае: оптимальная глубина потенциальной ямы меньше, и здесь играет роль фактор h^2 . Если использовать представленные в табл. 2 решения, соответствующие ультрарелятивистскому пределу, и провести пересчёт по схеме (50)–(53) к слаборелятивистскому пределу, мы получим неплохое совпадение в пределах погрешности порядка $(\Gamma_{0\infty} - 1)^2$.

3.2. Применение соотношений подобия на примере ЛОВ в случае нефиксированной структуры поля

В приборах с нефиксированной структурой поля, как известно, амплитуда и продольное распределение поля волны находятся самосогласованным образом через первую гармонику высокочастотного тока с помощью уравнения возбуждения замедляющей системы [4, 5]. С учётом взаимосвязи между

амплитудой волны и усреднённой энергетической переменной (баланса энергии [5]) можно записать: $I \langle w \rangle / F_0^2 = 1/(4\pi)$, где I — параметр, пропорциональный току пучка. Тогда в соответствии с выражениями (52), (53) получаем соотношение подобия для приведённого параметра тока:

$$\frac{I \Gamma_0^2}{\delta^3} = \text{const.} \quad (54)$$

Это выражение можно преобразовать без потери точности к виду

$$I \zeta_k^3 \Gamma_0^{3/2} = \text{const.} \quad (55)$$

Результаты численного решения краевой задачи ЛОВ для различной начальной энергии частиц представлены на рис. 6 (треугольники). Точность

численной оптимизации при решении краевой задачи (около одного процента для КПД и несколько процентов для искомых параметров) хуже, чем в случае фиксированной структуры поля, из-за ограничений на объём вычислений. Как следует из рис. 6, по-видимому, погрешности расчёта и метода, лежащего в основе используемых соотношений подобия, соизмеримы.

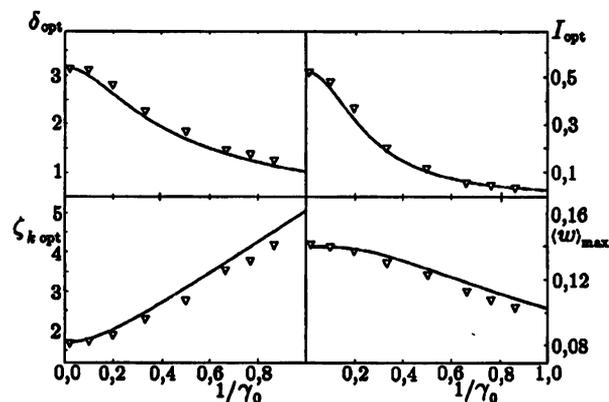


Рис. 6. Оптимальные параметры и максимальный приведённый КПД ЛОВ на шкале начальных энергий частиц. Сплошные линии соответствуют формулам (50), (51), (53), (55)

4. СООТНОШЕНИЯ ПОДОБИЯ ДЛЯ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ ЗАДАЧИ

4.1. Учёт поля пространственного заряда

Уравнение для энергетической переменной w с учётом высокочастотных гармоник поля пространственного заряда в пучке можно привести к виду

$$\frac{dw}{d\zeta} = \operatorname{Re} \left(F e^{i\theta} - i\pi \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n J_n e^{in\theta} \right), \quad (56)$$

где J_n — гармоники тока, а коэффициенты α_n характеризуют нормированные амплитуды соответствующих гармоник поля пространственного заряда. Для тонкостенного трубчатого пучка радиусом r_b в волноводе радиусом r_0 (см. [19, 20])

$$\alpha_n = \frac{4J_b n T_n}{\pi J_A \gamma_0 \beta_0^3}. \quad (57)$$

Здесь $T_n = [I_0(ngr_b)/I_0(ngr_0)][K_0(ngr_b)I_0(ngr_0) - K_0(ngr_0)I_0(ngr_b)]$, $g = (h_g^2 - k^2)^{1/2} \approx k/(\gamma_0\beta_0)$, $J_A = mc^3/e$ — ток Альфена, I_0 и K_0 — модифицированные функции Бесселя 1-го и 2-го рода нулевого порядка.

Основная проблема корректного учёта поля пространственного заряда, как известно, состоит в необходимости сохранения достаточно большого числа членов ряда в (56). В случаях компактной группировки частиц с ростом номера гармоники значения $|J_n|$ уменьшаются относительно медленно, и вкладом высоких гармоник ($n \gg 1$), строго говоря, нельзя пренебречь. Наиболее типична такая закономерность для ультрарелятивистского предела. Действительно, при $\gamma_0 \rightarrow \infty$ функции T_n стремятся к $\ln(r_0/r_b)$, и для бесконечно тонкого пучка α_n растут (см. выражение (57)) пропорционально n . Ограничителем такого роста может выступать одна или сразу несколько причин, которые отличают эксперимент от модели (позиционный и скоростной разброс в пучке, возможность поперечного движения и др.). В частности, учёт конечной толщины пучка приводит к появлению дополнительного фактора $H_{\Delta n}$ в виде сомножителя в (57):

$$H_{\Delta n} = \frac{2}{ngb(1 - a^2/b^2)} \left[\frac{I_1(ngb) - (a/b)I_1(nga)}{I_0(ngb)} \right]. \quad (58)$$

Здесь b и a — внешний и внутренний радиусы трубчатого пучка. Фактор $H_{\Delta n}$, как и следовало ожидать, меньше единицы при конечной толщине пучка $\Delta = b - a$. Для практических оценок достаточную точность обеспечивает аппроксимация, из которой хорошо виден характер уменьшения данного фактора с ростом номера гармоники:

$$H_{\Delta n} \approx \frac{1 - \exp(-ng\Delta)}{ng\Delta}. \quad (59)$$

Предположим, что сходимость ряда можно считать единообразной (по существу, это аналогично учёту только первой гармоники поля пространственного заряда). В комптоновском режиме взаимодействия частиц и волны должно выполняться условие, сформулированное, например, в работах [18, 20]:

$$\alpha_1^{1/2} \zeta_k \ll 1. \quad (60)$$

В таком приближении совокупный вклад всего ряда в правой части уравнения (56) не является определяющим ($\alpha_1 \ll F_0$) и остаётся неизменным, если выполнено условие $\alpha_1 A/F_0 \approx \text{const}$. Это условие можно привести к виду, содержащему безразмерную длину прибора. В первом приближении получаем

$$\alpha_1^{1/2} \zeta_k \approx \text{const}. \quad (61)$$

При выполнении обратного (60) неравенства вывод всех соотношений подобия должен быть предметом специального исследования.

4.2. Наличие предварительной модуляции электронного потока

Закономерно поставить вопрос о том, можно ли применять соотношения подобия (и в каком виде), если рассматривать случаи, когда на вход прибора поступает предварительно модулированный по энергии или уже по концентрации поток электронов. Для усилителей типа релятивистского клистрона или твистрона [21, 22] и для генераторов с аналогичными схемами [23, 24] вводится параметр группировки частиц X , характеризующий степень модуляции потока частиц по концентрации перед выходной секцией: $\theta(0) = \theta_0 + \theta_{\text{вх}} - X \sin \theta_0$ (здесь $\theta_{\text{вх}}$ — фаза первой гармоники тока по отношению к фазе волны на входе оконечной секции). Если протяжённость дрейфа $L_{\text{др}}$ мала в масштабе четверти длины плазменной волны, то по определению [25, 26] $X = kL_{\text{др}} \Delta\beta/\beta_0^2$, где $\Delta\beta$ — максимальное приращение скорости частиц в модуляторе. Для нормировки (8) можно записать $X = 2\zeta_{\text{др}}w_{\text{м}}^{\text{max}}$, где $\zeta_{\text{др}}$ — нормированная длина дрейфа. В модели $w_{\text{м}}^{\text{max}} \ll 1$, $\gamma_0 \rightarrow \infty$ максимальный КПД достигается в приближении короткой секции торможения частиц ($\eta_{\text{max}} \approx 0,58$; $X_{\text{opt}} \approx 1,84$). Этот случай ($\zeta_k \ll 1$) при выводе соотношений мы не рассматривали, т. к. исчезает физический смысл понятия расстройка синхронизма, и анализ движения частиц во всякой другой системе отсчёта, кроме лабораторной, становится непродуктивным. Вместе с тем аналогом соотношения подобия для амплитуды волны может выступать условие (14б) сильного торможения частиц. Важно, что непосредственно из выражений (14б) и (9) вытекает независимость КПД от начальной энергии частиц: $\eta(1) = \eta(\infty)$. Формально условие (14б) можно получить, используя произведение соотношений (51) и (52), т. к. оно приводится к виду $F_0\zeta_k/w^* = \text{const}$. В случае сильного торможения частиц $w^* \rightarrow \gamma_0/(\gamma_0 + 1)$. Таким образом, соотношения (50)–(53), полученные из условий инвариантности фазовых траекторий частиц, не могут напрямую использоваться для целого ряда приборов клистронного типа, в которых области группировки частиц и их торможения разнесены в пространстве.

Пусть приближение короткой секции торможения частиц не рассматривается, и амплитуда F_0 волны относительно невелика. В таком случае доля частиц, отражающихся от потенциального барьера в системе S , возрастает с ростом X примерно в два раза и в максимуме КПД становится приблизительно равной A . В соответствии с результатами численного анализа (в том числе на основании работ [21, 22]) оптимальный параметр группировки X_{opt} практически не зависит от начальной энергии γ_0 .

В релятивистской ЛОВ можно обеспечить начальную модуляцию частиц по энергии на участке, где происходит отражение встречной волны [27]. В этом случае начальные условия уравнений (1), (2) должны включать амплитуду встречной волны и рассматриваться согласованным образом. Следуя обозначениям работы [27], комплексный параметр модуляции α становится равным отношению интеграла от поля в модулирующей секции к полю F_0 на остальной части взаимодействия: $w_{\text{м}} = \text{Re}[\alpha F_0 \exp(i\theta_0)]$. По-видимому, к условиям отсутствия зависимости решения задачи от начальной энергии частиц следует добавить условие $w_{\text{м}}/w^* = \text{const}$, или

$$|\alpha|/\zeta_k = \text{const}. \quad (62)$$

Последнее выражение имеет достаточно простую физическую интерпретацию в случае модулирующего участка малой протяжённости ($\zeta_{\text{м}} \ll 1$). Так, если $F_{\text{м}}$ — поле в модуляторе, условие (62) соответствует инварианту $\zeta_{\text{м}}F_{\text{м}}/(\zeta_k F_0) = \text{const}$.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Нерелятивистский характер движения частиц в сопровождающей системе, которая движется со скоростью, равной фазовой скорости волны, послужил предпосылкой для уточнения соотношений подобия в первом приближении. Последующее уточнение во втором приближении потребовало рассмотрения условий инвариантности фазовых траекторий, соответствующих канонической форме уравнений движения.

Одним из наиболее важных выводов, который следует из рассмотрения задачи во втором приближении, является то обстоятельство, что оптимальная глубина потенциальной ямы в нерелятивистском случае возрастает. Более существенной причиной изменения приведённого КПД при различных γ_0 является различие в изменениях приведённой энергии частиц, отражаемых потенциальным барьером. Этот эффект связан с особенностями преобразований Лоренца для 4-импульса, в результате которых имеет место различие в зависимости параметра w^* (см. (24)) от расстройки:

$$w^* = \begin{cases} \frac{\delta}{(1 + \delta/2)^2}, & \gamma_0 \approx 1; \\ \frac{\delta}{1 + \delta}, & \gamma_0 \gg 1 \end{cases}.$$

Обусловленное только этим фактором отличие в КПД составляет около 30 % вблизи оптимальных режимов взаимодействия и исчезает в асимптотическом случае, когда расстройка становится меньше или много меньше единицы и инвариантной на шкале начальных энергий. Таким образом, основную роль в изменении КПД η играет фактор $(\gamma_0 + 1)/\gamma_0$ [3, 4], изменяющийся в два раза на всей шкале начальных энергий. С физической точки зрения наличие этого фактора обусловлено специфическим характером зависимости динамического смещения частиц от их начальной энергии. Эту зависимость можно исключить вплоть до квадратичных членов асимптотического разложения в ряд по энергетической переменной, если в качестве последней использовать w (см. (7)). В результате этого и появляется множитель $(\gamma_0 + 1)/\gamma_0$ в выражении для КПД. Предложенный и развитый подход позволяет на всей шкале начальных энергий частиц осуществить пересчёт параметров и КПД приборов типа «О» (за исключением клистронных с выделенной секцией торможения сгустков). В приборах с достаточно протяжённой областью группирования и торможения сгустков КПД может быть больше в нерелятивистском случае, чем в ультрарелятивистском пределе в два раза в асимптотическом приближении малой амплитуды волны и примерно в 1,4 раза в оптимальном режиме.

ЛИТЕРАТУРА

1. Петелин М. И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1970. Т. 13, № 10. С. 1586.
2. Петелин М. И. // Лекции по электронике СВЧ (3-я зимняя школа-семинар инженеров). Ч. 4. Саратов: СГУ, 1974. С. 179.
3. Ковалёв Н. Ф. // Радиотехника и электроника. 1981. Т. 26, № 6. С. 1337.
4. Ковалёв Н. Ф., Петелин М. И., Райзер М. Д., Сморгонский А. В. // Релятивистская высокочастотная электроника. Горький: ИПФ АН СССР, 1979. С. 76.
5. Ковалёв Н. Ф., Петрухина В. И., Сморгонский А. В. // Радиотехника и электроника. 1975. Т. 20, № 7. С. 1547.
6. Братман В. Л., Гинзбург Н. С., Ковалёв Н. Ф., Нусинович Г. С., Петелин М. И. // Релятивистская высокочастотная электроника. Горький: ИПФ АН СССР, 1979. С. 249.
7. Кротова З. Н., Чертков Ю. С. // Изв. вузов. Радиофизика. 1974. Т. 17, № 3. С. 413.
8. Юлпатов В. К. // Изв. вузов. Радиофизика. 1970. Т. 13, № 12. С. 1784.

9. Петелин М. И., Сморгонский А. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1973. Т. 16, № 2. С. 232.
10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 1. Механика. М.: Наука, 1988. 213 с.
11. Коломенский А. А., Лебедев А. Н. // ДАН СССР. 1962. Т. 145, № 6. С. 1259.
12. Давыдовский В. Я. // ЖЭТФ. 1962. Т. 43, № 3. С. 886.
13. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 2. Теория поля. М.: Наука, 1988. 509 с.
14. Братман В. Л., Гинзбург Н. С., Нусинович Г. С., Петелин М. И., Юлпатов В. К. // Релятивистская высокочастотная электроника. Горький: ИПФ АН СССР, 1979. С. 157.
15. Поляк В. Е., Филатов В. А. // Радиотехника и электроника. 1986. Т. 31, № 11. С. 2233.
16. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1979. 426 с.
17. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
18. Быков Н. М., Губанов В. П., Гунин А. В., Денисов Г. Г. и др. // Релятивистская высокочастотная электроника. Вып. 5. Горький: ИПФ АН СССР, 1988. С. 101.
19. Vrejzma V. N., Ryutov D. D. // Nuclear fusion. 1974. V. 14, No. 6. P. 1589.
20. Гинзбург Н. С., Новожилова Ю. В. // Радиотехника и электроника. 1984. Т. 29, № 12. С. 2419.
21. Ковалёв Н. Ф., Кольчугин Б. Д., Кротова З. Н. // Радиотехника и электроника. 1975. Т. 20, № 12. С. 2636.
22. Ковалёв Н. Ф., Кольчугин Б. Д., Кротова З. Н. // Радиотехника и электроника. 1975. Т. 20, № 6. С. 1309.
23. Ельчанинов А. С., Загулов Ф. Я., Коровин С. Д., Ростов В. В., Сморгонский А. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1982. Т. 25, № 8. С. 966.
24. Братман В. Л., Губанов В. П., Денисов Г. Г., Коровин С. Д., Полевин С. Д., Ростов В. В., Сморгонский А. В. // Письма в ЖТФ. 1988. Т. 9, № 1. С. 9.
25. Клеен В., Пешль К. Введение в электронику сверхвысоких частот: лампы с длительным взаимодействием. М.: Сов. радио, 1963. 271 с.
26. Клистроны / Пер. с англ; Под ред. Е. Д. Науменко. М.: Сов. радио, 1952. 327 с.
27. Коровин С. Д., Куркан И. К., Ростов В. В., Тотьменинов Е. М. // Изв. вузов. Радиофизика. 1999. Т. 42, № 12. С. 1189.

Институт сильноточной электроники
СО РАН, г. Томск, Россия

Поступила в редакцию
1 июня 2000 г.

IMPROVED SIMILARITY RELATIONS FOR HIGH-FREQUENCY DEVICES WITH A LONG-TERM INERTIAL BUNCHING OF ELECTRONS

V. V. Rostov and E. M. Tot'meninov

Using the particle integral of motion, we improve the well-known similarity relations which, according to the classical views, are only valid in the limited range of the efficiency of O-type devices. In the general case, these relations change their form and do not correspond to the conditions of constant reduced efficiency and constant normalized parameters over the entire range of the initial particle energy.

О ДОСТИЖЕНИИ ВЫСОКОГО КПД РЕЛЯТИВИСТСКОГО ГИРОТРОНА

Н. А. Завольский, В. Е. Запечалов, М. А. Моисеев

Проведено сравнение различных численных моделей релятивистских гиротронов. Рассмотрены возможности оптимизации параметров резонаторов. Получены зависимости КПД и оптимальных параметров от ускоряющего напряжения. Показана возможность достижения КПД 35÷45 % в сильнорелятивистском гиротроне без рекуперации и 60÷70 % с одноступенчатой рекуперацией энергии электронного пучка.

ВВЕДЕНИЕ

В качестве современных источников микроволнового излучения при мощности $P \geq 1$ МВт широко используются слабoreлятивистские гиротроны (с ускоряющим напряжением $U_0 \leq 80$ кВ). Они имеют высокий КПД, достигающий в расчётах 50÷70 % [1, 2] и 40÷45 % в реальных приборах без рекуперации, 65 % с рекуперацией [3]. Вместе с тем существуют значительные резервы дальнейшего увеличения мощности и КПД гиротронов. Наиболее действенный способ повышения мощности — рост ускоряющего напряжения, поскольку ресурсы наращивания тока электронного пучка ограничены эффектами пространственного заряда. Однако с увеличением ускоряющего напряжения до релятивистского уровня ($U_0 \geq 1$ МВ) КПД гиротрона снижается. Это обусловлено усилением зависимости циклотронной частоты ω_H от кинетической энергии электронов и, соответственно, более быстрым (при меньших относительных изменениях энергии) выходом электронов из полосы циклотронного резонанса ($\Delta\omega_H/\omega \ll 1$). Основные тенденции этого процесса качественно исследованы в упрощённых расчётных моделях релятивистских гиротронов, где КПД снижается в 1,5÷2 раза [4, 5]. Тем не менее представляется, что эти упрощённые модели недостаточны для количественного описания сложных распределённых динамических систем с сильной дисперсией нелинейности, какими являются сверхмощные гиротроны с низкодобротными резонаторами. Есть основания предполагать, что использование более точных расчётных моделей позволит существенно замедлить указанный процесс снижения КПД.

Одним из способов оптимизации гиротрона является использование спадающего вдоль оси прибора к выходному сечению резонатора статического магнитного поля B_0 [6, 7]. Спадающее поле компенсирует увеличение циклотронной частоты ω_H по мере отдачи энергии электронов высокочастотному полю и обеспечивает выполнение условия циклотронного резонанса ($\omega \approx \omega_H$) во всём пространстве взаимодействия. Возможности этого способа ограничены уменьшением энергии вращательного движения электронов при уменьшении B_0 (в отсутствие высокочастотного поля $v_{\perp}^2 \propto B_0$, где v_{\perp} — поперечная к магнитному полю компонента скорости электрона). Другим способом является оптимизация профиля резонатора аналогично слабoreлятивистским гиротронам [2]. Эффективным методом повышения КПД, широко используемым в слабoreлятивистских гиротронах, является также рекуперация остаточной энергии электронного пучка после взаимодействия (КПД увеличивается до 60÷70 % [8, 9]).

В настоящей работе рассматривается уточнённая модель релятивистского гиротрона при любых ускоряющих напряжениях. Проведено сравнение результатов расчётов по точной и упрощённым моделям, в том числе по аналитическим формулам. С целью уменьшения числа параметров оптимизация ограничивалась главным образом подбором длины регулярного участка резонатора. Статическое магнитное поле в резонаторе предполагалось однородным. Исследовалось влияние разброса скоростей

электронов, определялся КПД гиротрона с одноступенчатой рекуперацией энергии электронного пучка на коллекторе.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ГИРОТРОНА

При произвольном ускоряющем напряжении электронный КПД гиротрона определяется выражением [4, 5]

$$\eta_{el} = \frac{\gamma_0 - \bar{\gamma}}{\gamma_0 - 1}. \quad (1)$$

Здесь $\gamma = m_e/m_{e0}$ — отношение релятивистской массы к массе покоя электрона, $\gamma_0 = 1 + U_0/511$ — начальное значение γ , U_0 — ускоряющее напряжение в киловольтах («провисание» потенциала электронного пучка в резонаторе предполагается достаточно малым и не учитывается). Двойная черта в (1) означает усреднение по начальным фазам θ_0 вращательного движения и скоростям электронов (при наличии разброса скоростей). Значение γ определяется в результате интегрирования уравнений релятивистского гиротрона [2, 4, 10], которые можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{dp_{\perp}}{dz} &= \text{Re} \left[\left(\frac{iF}{\beta_z} + \frac{1}{k} \frac{dF}{dz} \right) \exp(-i\theta) \right] k_{\perp} J_1'(\xi) G_{mp}^{1/2} + \frac{p_{\perp}}{2B_0} \frac{dB_0}{dz}, \\ p_{\perp} \frac{d\theta}{dz} + \frac{p_{\perp}}{\beta_z} \left(k - \frac{\omega_{H0}}{c\gamma} \right) &= \text{Re} \left[\left(\frac{F(1 - \beta_{\perp}^2 \gamma / \gamma_0)}{\beta_z} - \frac{i}{k} \frac{dF}{dz} \right) \exp(-i\theta) \right] \frac{k_{\perp}}{\xi} J_1(\xi) G_{mp}^{1/2}, \\ \frac{dp_z}{dz} &= -\text{Re} \left[\frac{dF}{dz} \exp(-i\theta) \right] \frac{p_{\perp} k_{\perp}}{p_z k} J_1'(\xi) G_{mp}^{1/2} - \frac{p_z^2}{2p_z B_0} \frac{dB_0}{dz}, \\ \frac{d^2 F}{dz^2} + h^2 F &= 4,693 \cdot 10^{-4} I k \frac{p_{\perp}}{p_z} \exp(i\theta) k_{\perp} J_1'(\xi) G_{mp}^{1/2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь z — координата вдоль оси гиротрона, $p_{\perp} = \beta_{\perp} \gamma$ и $p_z = \beta_z \gamma$ — относительные вращательный и продольный импульсы электрона, $\beta_{\perp} = v_{\perp}/c$ и $\beta_z = v_z/c$ — отношения поперечной и продольной компонент скорости электрона к скорости света, $\gamma = (1 + p_{\perp}^2 + p_z^2)^{1/2}$, θ — фаза вращательного движения электрона, $F(z)$ — функция продольного распределения поля, $k = \omega/c$ — волновое число, $k_{\perp} = \rho_s/R$ — поперечное волновое число, ρ_s — корень уравнения $J_m'(\rho) = 0$, соответствующий рассматриваемой TE_{mp} моде резонатора с азимутальным m и радиальным p индексами, $J_m'(\rho)$ — производная функции Бесселя $J_m(\rho)$ по аргументу, $R = R(z)$ — зависимость радиуса резонатора и волноводных переходов от продольной координаты, $\xi = k_{\perp} a$, $a = p_{\perp} c / \omega_{H0}$ — радиус электронной орбиты, $\omega_{H0} = eB_0/m_{e0}$ — нерелятивистская циклотронная частота, e — элементарный заряд, $B_0(z)$ — распределение статического магнитного поля,

$$G_{mp} = \frac{J_{m-1}^2(k_{\perp} R_0)}{J_m^2(\rho_s) (\rho_s^2 - m^2)} \quad (3)$$

— структурный фактор, определяющий эффективность взаимодействия электронов с полем рабочей моды, R_0 — радиальная координата центров электронных орбит, h — продольное волновое число ($h^2 = k^2 - k_{\perp}^2$ без учёта омических потерь в стенке резонатора), I — ток электронного пучка в амперах.

Уравнения (2) получены в результате усреднения уравнений движения электронов в статическом магнитном поле B_0 и поле рабочей TE_{mp} моды резонатора по периоду $T = 2\pi/\omega$ высокочастотного поля. При выводе уравнений (2) предполагалось, что радиус электронного пучка R_0 близок к оптимальному, соответствующему максимуму G_{mp} , так что поперечный дрейф центров электронных орбит [10] можно не учитывать. Радиус волновода R изменяется вдоль оси z достаточно медленно, и переизлучение рабочей моды в волны с другими радиальными индексами [11] не учитывается. Влияние

высокочастотного пространственного заряда на КПД [2, 12] в оптимальных режимах малю (около 1%) и также не учитывается.

Уравнения (2) интегрируются с граничными условиями, соответствующими немодулированному электронному пучку и экспоненциальному спаду ВЧ поля во входном закритическом сечении резонатора z_H :

$$p_{\perp} = p_{\perp 0}, \quad p_z = p_{z0}, \quad \theta = \theta_0, \quad dF/dz = |h| F,$$

где $p_{\perp 0}, p_{z0}$ не зависят от θ_0 ($0 \leq \theta_0 \leq 2\pi$). В выходном сечении z_K должно выполняться условие излучения:

$$dF/dz = -i|h| F, \quad h > 0.$$

Для слабoreлятивистского гиротрона ($\gamma_0 \approx 1, B_0(z) \approx \text{const}, R \approx R_p, R_p$ — радиус резонатора) уравнения (1), (2) можно упростить и записать в безразмерном виде [4, 13]:

$$\eta_{el} = t_{\perp} \eta_{\perp}, \quad (4)$$

$$\frac{dp}{d\zeta} + ip(\Delta + |p|^2 - 1) = if, \quad (5)$$

$$\frac{d^2 f}{d\zeta^2} + \Gamma^2 f = I_0 \bar{p}.$$

Здесь $t_{\perp} = g^2/(1 + g^2)$, $g = p_{\perp 0}/p_{z0}$ — питч-фактор, $\eta_{\perp} = 1 - \overline{|p|^2}$ — поперечный электронный КПД, $p = (p_{\perp}/p_{\perp 0}) \exp(i\theta)$ — относительный импульс электрона с учётом фазы вращательного движения, $\Delta = 2(\omega - \omega_H)/(\beta_{\perp 0}^2 \omega)$ — параметр расстройки рабочей и циклотронной частот ($\omega_H = \omega_{H0}/\gamma_0$, $\beta_{\perp 0} = v_{\perp 0}/c$), $\zeta = \pi g \beta_{\perp 0} z/\lambda$ и $\Gamma = h\lambda/(\pi g \beta_{\perp 0})$ — безразмерные продольная координата и волновое число, $\lambda = 2\pi/k$ — длина волны,

$$I_0 = 9,387 \cdot 10^{-4} I \beta_{z0} \beta_{\perp 0}^{-6} \gamma_0^{-1} G_{mp} \quad (6)$$

— параметр, пропорциональный току электронного пучка I .

В слабoreлятивистском гиротроне может быть реализован высокий поперечный КПД. В модели гиротрона с фиксированной гауссовой продольной структурой ВЧ поля

$$f = f_{\max} \exp[-(2z/L)^2],$$

соответствующей высокочастотному резонатору бочкообразного профиля, КПД достигает значения $\eta_{\perp \max} \approx 72\%$ [1]. Оптимизация продольного распределения ВЧ поля и профиля резонатора повышает η_{\perp} до $88 \div 92\%$ [2].

Для сильнорелятивистского гиротрона ($\gamma_0 \gg 1$) уравнения (1), (2) можно упростить и записать в безразмерном виде, если использовать длинноприборную асимптотику [4]. При $L \gg \lambda$ электроны выходят из полосы циклотронного резонанса

$$0 \leq (\omega - \omega_H)/\omega \leq \beta_{z0} \lambda/L$$

при незначительном изменении γ :

$$(\gamma_0 - \gamma)/\gamma_0 \leq \beta_{z0} \lambda/L \ll 1,$$

и перестают эффективно взаимодействовать с ВЧ полем. В этом приближении, предполагая изменение γ малым: $(\gamma_0 - \gamma)/\gamma_0 \ll 1$, уравнения (2) можно записать в том же безразмерном виде (5), (6), но выражение для КПД будет иным [4]:

$$\eta_{el} = t_{\perp \text{rel}} \eta_{\perp}, \quad (7)$$

где $t_{\perp\text{rel}} = \beta_{\perp 0}^2 / [2(1 - \gamma_0^{-1})]$. Поперечный КПД η_{\perp} и в этом случае не зависит от γ_0 .

Используемое в (7) выражение для $t_{\perp\text{rel}}$ является приближённым, справедливым при относительно малых осцилляторных скоростях. Оно даёт заниженные значения КПД. На рис. 1 пунктирными кривыми *a* показаны зависимости η_{el} (7) от γ_0 при $\eta_{\perp} = 72\%$; 92% . При подстановке в (7) точного выражения

$$t_{\perp\text{rel}} = \left[1 - (1 - \beta_{\perp 0}^2)^{1/2} \right] / (1 - \gamma_0^{-1})$$

КПД существенно возрастает (пунктирные кривые *b* на рис. 1) и приближается к результатам расчётов с использованием точных уравнений (1), (2). При $\eta_{\perp} = 92\%$ расхождение с точными значениями η_{el} не превышает 4% . При $\gamma_0 \rightarrow 1$ величина $t_{\perp\text{rel}} \rightarrow t_{\perp}$. В пределе $\gamma_0 \rightarrow \infty$ точное и приближённое значения $t_{\perp\text{rel}}$ в $1,6 \div 2$ раза меньше t_{\perp} , т. е. КПД релятивистского гиротрона уменьшается в $1,6 \div 2$ раза по сравнению со слаборелятивистским.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ОПТИМИЗАЦИИ ДЛЯ МОНОСКОРОСТНОГО ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА

На рис. 1 сплошными кривыми показаны результаты расчётов КПД гиротрона с использованием точных уравнений (1), (2). На первом этапе электронный пучок предполагался моноскоростным ($\delta v_{\perp} = 0$). Сплошная кривая η_{el} , отмеченная точками, соответствует кусочно-линейному профилю резонатора с регулярным участком и конусными входным закритическим сужением и выходным волноводным переходом (профиль такого резонатора показан на рис. 2 сплошной линией). Снижение КПД при $\gamma_0 < 2$ связано с неоптимальностью конусных переходов (оптимизировалась только длина регулярного участка), вследствие чего продольная структура ВЧ поля приближается к синусоидальной и η_{\perp} уменьшается до 72% при $\gamma_0 \approx 1$.

Максимальный поперечный КПД 92% при $\gamma_0 \approx 1$ достигается для резонатора сглаженного профиля, образованного отрезком регулярного волновода с присоединёнными к нему входным закритическим сужением и выходным волноводным переходом с образующими в виде дуг окружностей [14]; профиль его приведён на рис. 2 пунктирной кривой. Зависимость η_{el} от γ_0 показана на рис. 1 сплошной кривой без меток.

Различия в КПД резонаторов сглаженного и кусочно-линейного профилей с ростом γ_0 уменьшается. При $\gamma_0 \geq 2$ оба резонатора имеют практически одинаковые (с точностью 1%) КПД. Преимуществом сглаженного профиля является существенно меньшая напряжённость ВЧ поля (рис. 2). Это уменьшает омическую нагрузку и опасность высокочастотного разряда в резонаторе. Добротности резонаторов обоих типов достаточно велики ($Q \sim 300$). Продольная структура ВЧ поля близка к фиксированной, соответствующей структуре поля собственного колебания «холодного» резонатора (без электронного пучка). Поэтому предварительный расчёт гиротрона можно делать и в приближении фиксированной структуры ВЧ поля [5, 10, 13].

Сплошной кривой *z* на рис. 1 показаны зависимости η_{el} от γ_0 , рассчитанные с помощью упрощённых уравнений, которые получаются из системы (2) в результате отбрасывания слагаемых, пропорциональных dF/dz (влияние ВЧ магнитного поля), $\beta_{\perp}^2 \gamma / \gamma_0$ (релятивистская поправка в линейной группировке электронов), dB_0/dz (влияние неоднородности магнитного поля), и замены функции Бесселя $J_1(\xi)$ на её асимптотическое значение $\xi/2$ при $\xi \rightarrow 0$. Магнитное поле в резонаторе однородно и спадает только в выходном переходе, поэтому влияние dB_0/dz пренебрежимо мало. Согласно расчётам отбрасывание релятивистских поправок уменьшает КПД на 3% при $\gamma_0 > 1,5$.

Пунктирной кривой *b* показана приближённая зависимость

$$\eta_{\text{el}} = \left[1 - (1 - \beta_{\perp 0}^2 \eta_{\perp})^{1/2} \right] / (1 - \gamma_0^{-1}) \quad (8)$$

от γ_0 , где $\eta_{\perp} = 0,92$ — максимальный расчётный поперечный КПД слаборелятивистского гиротрона. Это выражение получается из (1) при подстановке в выражение для γ значений $p_z = p_{z0}$, $p_{\perp}^2 =$

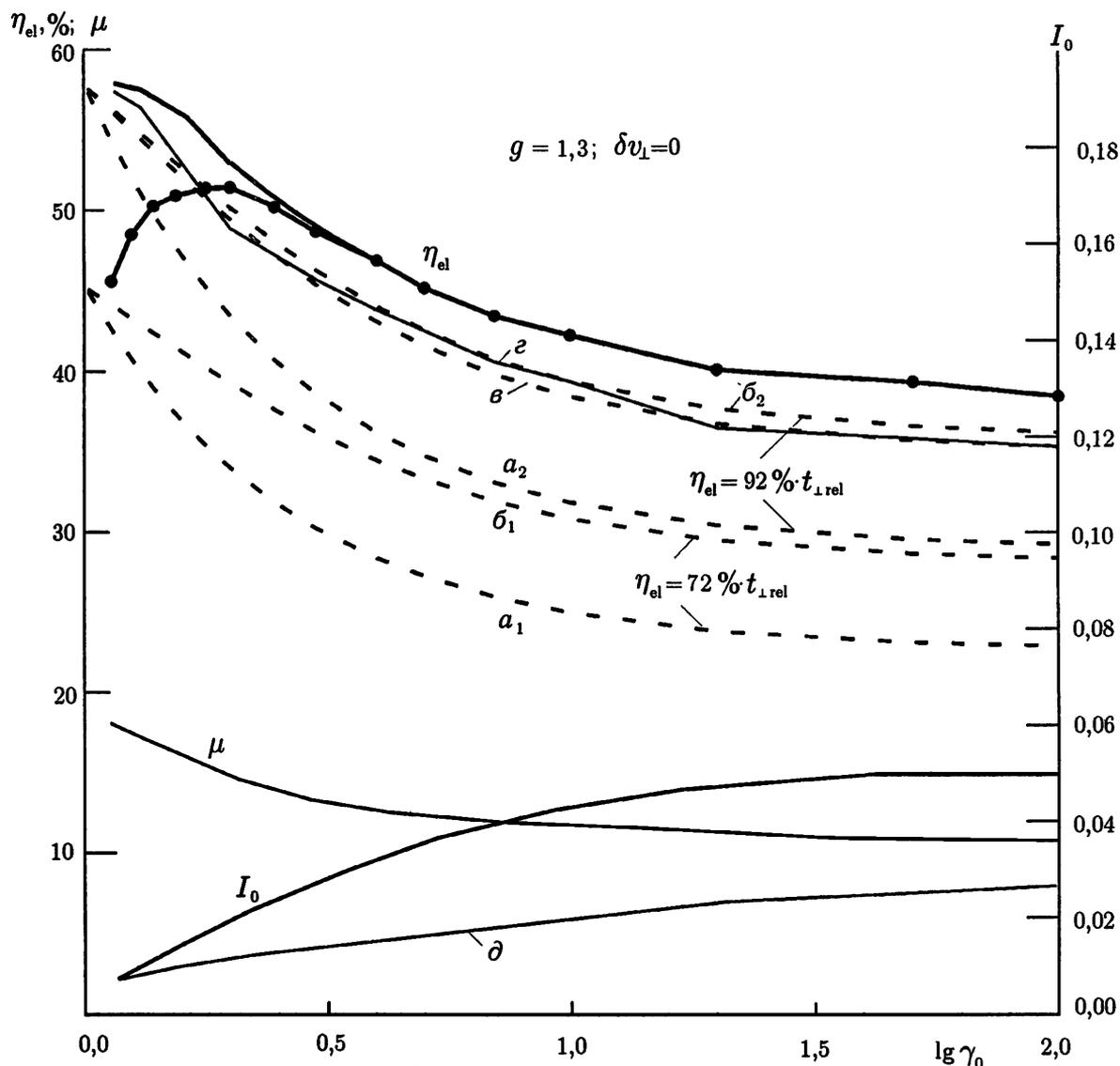


Рис. 1. Зависимости электронного КПД η_{el} и оптимальных параметров μ , I_0 от γ_0 . Сплошные кривые — результаты численного моделирования, пунктирные — результаты расчетов КПД по аналитическим формулам с использованием приближенных (кривые a) и точных (кривые b) значений $t_{\perp,rel}$, а также «одночастичного» КПД (кривая θ)

$= p_{\perp 0}^2 (1 - \eta_{\perp})$ и определяет так называемый «одночастичный» электронный КПД (с неусредненным по θ_0 значением поперечного η_{\perp}) [4]. Для реальных усредненных значений η_{el} , η_{\perp} оно является приближенным. Во всем интервале изменения γ_0 численная (z) и аналитические (b , θ) кривые совпадают с точностью 1 %. Расхождение с результатами расчетов по уравнениям (2) составляет 4 %. Это свидетельствует о достаточной точности выражений (7) при точном значении $t_{\perp,rel}$ и (8) и высокой эффективности отбора энергии вращательного движения электронов ($\eta_{\perp} \approx 92\%$) при любых γ_0 .

Сравнение сплошных и пунктирных кривых на рис. 1 показывает, что по мере упрощения расчетной модели релятивистского гиротрона его КПД уменьшается. Длинноприборная асимптотика (5)–(7) качественно правильно описывает зависимость η_{el} от γ_0 , но занижает КПД при $\gamma_0 \rightarrow \infty$.

Безразмерная относительная длина резонатора $\mu = \pi g \beta_{\perp 0} L / \lambda$ (рис. 1, кривая μ) при $\gamma_0 \approx 1$ близка к оптимальному значению $\mu_{opt} \approx 18$ для гиротрона с гауссовой структурой ВЧ поля [1]. С увеличением γ_0 значение μ_{opt} уменьшается до 11. Однако эффективная длина резонатора остается достаточно

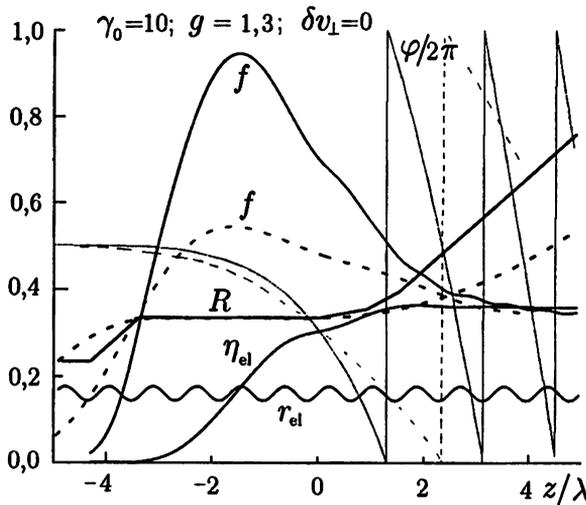


Рис. 2. Профиль резонатора $R = R(z)$, продольное распределение амплитуды f и фазы φ высокочастотного поля, эффективности энергообмена η_{el} , а также траектория движения электрона в отсутствие высокочастотного поля r_{el} . Сплошные кривые соответствуют резонатору кусочно-линейного профиля, пунктирные — сглаженного профиля

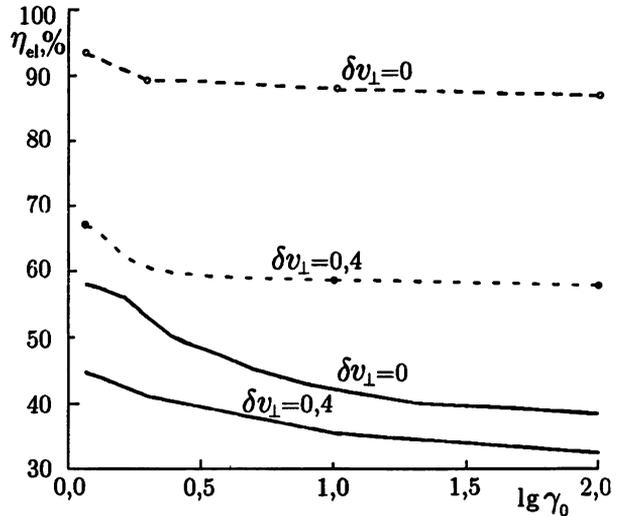


Рис. 3. Зависимости электронного КПД без рекуперации (сплошные кривые) и с одноступенчатой рекуперацией (пунктирные кривые) от γ_0 и разброса скоростей вращательного движения электронов δv_{\perp}

большой ($L_{eff} \geq 5\lambda$), как и число N_0 оборотов, совершаемых электронами в резонаторе ($N_0 \gg 1$, см. рис. 2). Это свидетельствует о корректности использования усреднённых уравнений движения электронов (2) при любых γ_0 .

Оптимальный токовый параметр I_0 (6) с ростом γ_0 несколько возрастает (кривая I_0 на рис. 1). Это связано с уменьшением μ и качественно соответствует зависимости $I_{0,opt}$, определяемой укороченными уравнениями (5) [1, 13]. В упрощённой модели гиротрона при $\gamma_0 > 2$ оптимальный параметр I_0 (кривая d) вдвое меньше, чем в точной.

3. ВЛИЯНИЕ РАЗБРОСА СКОРОСТЕЙ ЭЛЕКТРОНОВ

Чтобы учесть влияние разброса скоростей электронов на КПД, в расчётах использовалась модель электронного пучка с гауссовой функцией распределения по скоростям вращательного движения электронов:

$$f_e(v_{\perp}) = f_{e,max} \exp \left[-4(v_{\perp} - v_{\perp 0})^2 / (\Delta v_{\perp})^2 \right].$$

Электронный пучок представлялся в виде набора из N скоростных групп, равномерно расположенных в интервале Δv_{\perp} , где $f_e \geq e^{-1} f_{e,max}$. Для расчёта КПД с точностью 1 % обычно достаточно $N = 7 \div 11$. Такая модель достаточно хорошо аппроксимирует реальные функции распределения по скоростям в винтовых электронных пучках гиротронов [3, 15].

На рис. 3 сплошной кривой приведены результаты расчётов η_{el} при достаточно большом разбросе $\delta v_{\perp} = \Delta v_{\perp} / v_{\perp 0} = 0,4$. В гиротронах, как правило, реализуется $\delta v_{\perp} = 0,2 \div 0,35$ [3, 15]. Для сравнения на рис. 3 приведены значения η_{el} без разброса скоростей, взятые из рис. 1. Расчёты показывают, что влияние разброса скоростей на КПД незначительно и почти не зависит от γ_0 .

4. РЕКУПЕРАЦИЯ ЭНЕРГИИ ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА

Существенное увеличение КПД происходит при рекуперации энергии отработанного электронного пучка в изолированном коллекторе с тормозящим напряжением [8, 9]. Для гиротрона с одноступенчатой рекуперацией КПД определяется выражением

$$\eta_{el, rec} = \eta_{el} U_0 / (U_0 - U_r), \quad (9)$$

где η_{el} — КПД (1) без рекуперации, U_r — тормозящий потенциал коллектора. Допустимое значение eU_r равно минимальной энергии электронов на выходе из резонатора eU_{min} . При этом условии отсутствует отражение электронов от коллектора. В расчётах для более точного определения U_{min} электронный пучок представлялся в виде набора из большого числа скоростных групп ($N = 31$), расположенных в интервале $2\Delta v_{\perp}$, где $f_e \geq e^{-4} f_{e, max}$.

На рис. 3 пунктирными линиями показаны зависимости КПД гиротрона с рекуперацией при $\Delta v_{\perp} = 0,4$ и, для сравнения, при отсутствии скоростного разброса ($\delta v_{\perp} = 0$). КПД релятивистского гиротрона с разбросом скоростей почти не зависит от γ_0 и сохраняется на уровне 60 % при всех $\gamma_0 \geq 2$. Эффективность рекуперации возрастает с увеличением γ_0 . Высокий КПД при нулевом разбросе скоростей объясняется тем, что электроны практически отдают ВЧ полю только энергию вращательного движения. Энергия поступательного движения остаётся приблизительно постоянной. Минимальная энергия отработанного электронного пучка близка к энергии поступательного движения ($U_{min} \approx U_0 / (1 + g^2)$ в слабoreлятивистском случае и $U_{min} \approx U_0 / (1 + g^2)^{1/2}$ при $\gamma_0 \gg 1$). Следовательно, из (9), (4), (8) при $U_r = U_{min}$ получается $\eta_{el, rec} \approx \eta_{\perp} \approx 92$ %.

На эффективность рекуперации большое влияние оказывает разброс скоростей, приводящий к уменьшению U_{min} для медленных электронов (с малыми продольными энергиями), что связано с требованием оседания на коллекторе всего электронного пучка. Однако путём оптимизации тормозящего потенциала коллектора при $U_r > U_{min}$ с учётом многократного пролёта электронов через резонатор эффективность рекуперации может быть значительно увеличена.

ВЫВОДЫ

Тенденция снижения КПД с ростом ускоряющего напряжения может быть существенно замедлена при оптимизации профиля резонатора в более точной расчётной модели гиротрона.

Рекуперация остаточной энергии отработанного электронного пучка практически полностью (с точностью 10 %) ликвидирует зависимость КПД от ускоряющего напряжения.

Уменьшение разброса скоростей позволяет поднять электронный КПД релятивистского гиротрона с рекуперацией до уровня поперечного КПД лучших слабoreлятивистских гиротронов.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 00-05-96683, 99-02-17779).

Авторы признательны В. Л. Братману, А. Б. Павельеву и М. И. Петелину за полезное обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нусинович Г. С., Эрм Р. Э. // Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ. 1972. № 8. С. 55.
2. Кураев А. А., Ковалёв И. С., Колосов С. В. Численные методы оптимизации в задачах электроники СВЧ. Минск: Наука и техника, 1975.
3. Гольденберг А. Л., Денисов Г. Г., Запевалов В. Е., Литвак А. Г., Флягин В. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1996. Т. 39, № 6. С. 635.

4. Bratman V. L., Ginzburg N. S., Nusinovich G. S., Petelin M. I., Strelkov P. S. // *Int. J. Electronics*. 1981. V. 51, No. 4. P. 541.
5. Цимринг Ш. Е. Мазеры на циклотронном резонансе: Учебное пособие. Горький: Горьк. гос. ун-т, 1988.
6. Гинзбург Н. С. // *Изв. вузов. Радиофизика*. 1987. Т. 30, № 10. С. 1181.
7. Братман В. Л., Гинзбург Н. С., Савилов А. В. // *Релятивистская высокочастотная электроника*. Вып. 7. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 1992. С. 22.
8. Sakamoto K., Tsuneoka M., Kasugai A. et al. // *Phys. Rev. Letters*. 1994. V. 73, No. 26. P. 3532.
9. Glyavin M. Yu., Kuftin A. N., Venediktov N. P., Zapevalov V. E. // *Int. J. Infrared and MM Waves*. 1997. V. 18, No. 11. P. 2129.
10. Юлпатов В. К. // *Гиротрон*. Горький: ИПФ АН СССР, 1981. С. 26.
11. Цимринг Ш. Е., Павельсв В. Г. // *Радиотехника и электроника*. 1982. Т. 27, № 6. С. 1099.
12. Братман В. Л., Петелин М. И. // *Изв. вузов. Радиофизика*. 1975. Т. 18, № 10. С. 1538.
13. Братман В. Л., Моисеев М. А., Петелин М. И., Эрм Р. Э. // *Изв. вузов. Радиофизика*. 1973. Т. 16, № 4. С. 622.
14. Заруднева Г. И., Калынов Ю. К., Малыгин С. А. // *Изв. вузов. Радиофизика*. 1988. Т. 31, № 3. С. 343.
15. Kuftin A. N., Lygin V. K., Manuilov V. N., Postnikova A. S., Zapevalov V. E. // *Int. J. Infrared and MM Waves*. 1999. V. 20, No. 3. P. 361.

Институт прикладной физики РАН, г. Нижний Новгород,
Россия

Поступила в редакцию
24 июня 2000 г.

EFFICIENCY ENHANCEMENT OF THE RELATIVISTIC GYROTRON

N. A. Zavolsky, V. E. Zapevalov, and M. A. Moiseev

We compare different numerical models of a relativistic gyrotron and consider possible optimization of the resonator parameters. Dependences of the efficiency and optimal parameters on the accelerating voltage are found. It is shown that an efficiency of 35 to 45% can be achieved in a strongly relativistic gyrotron without energy recovery. In the case of a single-stage recovery of the electron-beam energy, the efficiency can amount to 60–70%.

СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЗАДАЧЕ О ВОЗБУЖДЕНИИ ПОЛЕЙ СЛУЧАЙНЫМИ ИСТОЧНИКАМИ НА ПОВЕРХНОСТИ

А. Н. Швырёв, И. О. Ярощук

Разработан метод статистического моделирования излучения шумовых полей источниками, расположенными на поверхности. Рассмотрена задача об излучении звуковых волн поверхностью океана. Построена модель распределения давления и колебательной скорости звукового поля в среде на основе равномизации спектральной плотности флуктуаций давления на поверхности. Получаемые при этом выборки являются точным решением волнового уравнения. Исследовано поведение некоторых статистических моментов моделируемого поля.

ВВЕДЕНИЕ

Задача о возбуждении полей случайными источниками (реальными или виртуальными) является классической проблемой статистической радиофизики [1]. Флуктуации поля, возбуждаемого случайными источниками, представляют как теоретический, так и прикладной интерес для самых различных областей физики.

На протяжении уже полувека задачи об излучении поверхностных шумов изучаются и в акустике океана [2]. Интерес к таким исследованиям особенно усилился с развитием нового способа измерений, при котором акустическое поле рассматривается как скалярно-векторное поле, т. е. одновременно измеряется давление и колебательная скорость [3].

Успех теоретических и экспериментальных исследований физических полей в значительной степени определяется тем, насколько удачно выбрана вероятностная модель сигналов и помех. В настоящее время, по-видимому, ещё не разработаны достаточно адекватные вероятностные модели скалярно-векторных гидроакустических полей (см., например, [4, 5]). Этим и определился интерес авторов к проблеме разработки таких моделей.

Одним из возможных подходов к разработке и исследованию вероятностных волновых моделей физических полей является использование различных методов имитационного моделирования, в частности статистического моделирования.

Настоящая статья отражает некоторые аспекты проводимых авторами исследований по разработке вероятностных моделей волновых полей на основе методов имитационного моделирования.

1. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ШУМЫ ОКЕАНА

Рассмотрим один из видов полей, излучаемых расположенными на поверхности источниками — поверхностные динамические шумы океана. Пусть на поверхности $z = 0$ (ось z направлена вниз) заданы флуктуации давления, описываемые функцией $q(t; \rho)$, где $\rho = \{x, y\}$ — вектор на плоской поверхности. Тогда поле акустического давления внутри среды $p(t; \rho, z)$ и колебательной скорости $\mathbf{v}(t; \rho, z)$ описываются соответствующими уравнениями линейной акустики [6].

Амплитуда временного спектра давления представляется в виде свёртки:

$$p(\omega; \rho, z) = \int d^2 \rho' q(\omega; \rho') G(\omega; \rho - \rho', z), \quad (1)$$

где интегрирование выполняется по всей плоскости xy , а G — функция Грина соответствующей задачи [7].

Если везде далее проекции колебательной скорости выражать в эквивалентных единицах звукового давления путём нормировки на волновую проводимость среды, то выражение для амплитуды временного спектра колебательной скорости примет следующий вид:

$$\mathbf{v}(\omega; \rho, z) = \frac{\nabla p(\omega; \rho, z)}{ik}, \quad (2)$$

где $k = \omega/c_0$, c_0 — скорость звука в воде.

Следующий этап формулирования условий задачи заключается в выборе модели поверхностных источников звука. Будем считать, что звук создаётся непосредственно воздействием ветра на воду. Для установившегося ветра и волнения полагаем, что флуктуации давления ветра на поверхности воды описываются стационарной по времени и однородной по поверхности гауссовой случайной функцией $q(t; \rho)$. Очевидно, что данному полю поверхностных источников будут соответствовать статистически однородные и стационарные поля давления и колебательной скорости. В соответствии с [8], где использована аналогия обтекания воздушными потоками твёрдых шероховатых границ и морской поверхности, будем рассматривать следующую модель пространственно-временного спектра флуктуаций давления на поверхности:

$$\Phi(\omega; \mathbf{x}) = \Phi_1(\omega)\Phi_2(\omega; \mathbf{x}), \quad \Phi_2(\omega; \mathbf{x}) = \frac{x_0 y_0}{2\pi} [1 + x_0^2(x_x - x_1^{-1})^2 + y_0^2 x_y^2]^{-3/2}. \quad (3)$$

Здесь $\Phi_1(\omega)$ — временной спектр флуктуаций давления. Все пространственные интервалы имеют порядок отношения скорости U ветра над поверхностью воды к частоте ω :

$$x_0 = AU/\omega, \quad y_0 = BU/\omega, \quad x_1 = CU/\omega,$$

где A , B и C — безразмерные константы.

Отметим, что даже для простейшей модели однородного полупространства аналитически удаётся вычислить лишь второй момент спектральной амплитуды давления [8]:

$$\langle p(\omega; \rho, z)p^*(\omega; \rho, z) \rangle \approx \Phi_1(\omega) \frac{AB\tilde{M}^2}{2[1 + (A/C)^2]^{3/2}} \left(1 + \frac{1}{2(kz)^2}\right), \quad (4)$$

где $\tilde{M} = U/c_0$ — число Маха для скорости ветра.

2. СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Для решения задач методом статистического моделирования необходимо численно строить реализации случайных процессов и полей. При этом иногда наиболее важно воспроизводить корреляционную функцию и одномерные распределения, тем более что в негауссовом случае зачастую нет удовлетворительной информации о многомерных распределениях. Поэтому в случае негауссовых полей необходимо иметь набор моделей случайных полей, дающий возможность проверять чувствительность изучаемых функционалов к изменению многомерных распределений при их сходимости к распределениям некоторого поля с подходящими, например непрерывными, реализациями.

В настоящей работе мы рассматриваем простейший случай гауссова поля флуктуаций давления на поверхности. Тогда случайное поле полностью описывается пространственно-временным спектром $\Phi(\omega; \mathbf{x})$. При этом многомерные распределения случайного поля простым образом связаны со спектральной функцией.

Для имитации случайного поля источников нами использовался метод рандомизации спектрально-го представления пространственно однородных случайных полей [9]. Главное достоинство этого метода — простота его реализации и экономное использование ресурсов компьютера.

В дальнейшем нас будут интересовать только относительные амплитуды временного спектра давления и колебательной скорости. Поэтому без потери общности результатов нормируем эти величины на функцию $\Phi_1^{1/2}(\omega)$. Тогда нормированное поле источников на поверхности будет иметь пространственно-временной спектр $\Phi_2(\omega; \mathbf{x})$.

Предположим теперь, что пространство волновых векторов $K \equiv \mathbb{R}^2 (\mathbf{x} \in K)$ разбито на M непересекающихся областей K_1, \dots, K_M ($K_i \cap K_m = \emptyset$ при $i \neq m$). Тогда произвольная случайная реализация поля поверхностных источников примет следующий вид

$$q(\omega; \rho) = \sum_{m=1}^M w_m^{1/2}(\omega) \mu_m \exp[i(\mathbf{x}_m, \rho)],$$

$$w_m(\omega) = \int_{K_m} d^2 \mathbf{x} \Phi_2(\omega; \mathbf{x}), \quad W_m(\omega; \mathbf{x}) = w_m^{-1}(\omega) \Phi_2(\omega; \mathbf{x}), \quad (5)$$

где случайные векторы \mathbf{x}_m распределены с плотностями вероятности W_m , а μ_m являются независимыми гауссовыми величинами с нулевым средним и единичной дисперсией. Полученное таким образом случайное поле (5) при любом ω является статистически однородным, и его пространственный спектр равен $\Phi_2(\omega; \mathbf{x})$.

Для вычисления случайных реализаций полей давления и колебательной скорости шумов поверхности внутри слоя подставим (5) в (1) и (2):

$$p(\omega; \rho, z) = 4\pi^2 \sum_{m=1}^M w_m^{1/2}(\omega) \mu_m \exp[i(\mathbf{x}_m, \rho)] \tilde{G}(\omega; \mathbf{x}_m^2, z),$$

$$\mathbf{v}_\perp(\omega; \rho, z) = \frac{4\pi^2}{k} \sum_{m=1}^M w_m^{1/2}(\omega) \mu_m \exp[i(\mathbf{x}_m, \rho)] \mathbf{x}_m \tilde{G}(\omega; \mathbf{x}_m^2, z),$$

$$v_z(\omega; \rho, z) = \frac{4\pi^2}{ik} \sum_{m=1}^M w_m^{1/2}(\omega) \mu_m \exp[i(\mathbf{x}_m, \rho)] \frac{\partial}{\partial z} \tilde{G}(\omega; \mathbf{x}_m^2, z), \quad (6)$$

где $\mathbf{v}_\perp = \{v_x, v_y\}$, а \tilde{G} — спектральная амплитуда функции Грина.

Формулы (5) и (6) представляют собой схему статистического моделирования. Отметим, что формулы (6) являются точным решением уравнений линейной акустики для источников вида (5).

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Для иллюстрации предложенной схемы статистического моделирования были выполнены расчёты для модели океана в виде однородного полупространства. Спектральная амплитуда функции Грина в этом случае имеет следующий вид:

$$\tilde{G}(\omega; \mathbf{x}^2, z) = \frac{\exp(i\xi z)}{4\pi^2}, \quad \xi = \sqrt{k^2 - \mathbf{x}^2}. \quad (7)$$

Ветровой поток над морем выбирался направленным вдоль оси x , его скорость $U = 6$ м/с, скорость звука $c_0 = 1500$ м/с. Рассматривались два случая спектра (3). Первый случай соответствовал слабо

анизотропному полю источников ($A = 1; B = 1; C = 1$), а второй — сильно анизотропному ($A = 100; B = 0,01; C = 100$). Отметим, что последние значения параметров спектра, вообще говоря, не имеют физического смысла. Такие значения были выбраны формально для того, чтобы изучить зависимость скалярно-векторных характеристик звукового поля от анизотропии шумов.

Пространство волновых чисел K разбивалось на две области: область источников однородных волн $K_H = \{|\mathbf{x}| \leq k\}$ и неоднородных волн $K_I = \{|\mathbf{x}| > k\}$. Каждая из областей K_H и K_I была разбита на непересекающиеся подобласти, представляющие собой концентрические кольца. Для получения статистических характеристик использовался ансамбль из 1 000 реализаций, который в большинстве случаев давал надёжную статистику.

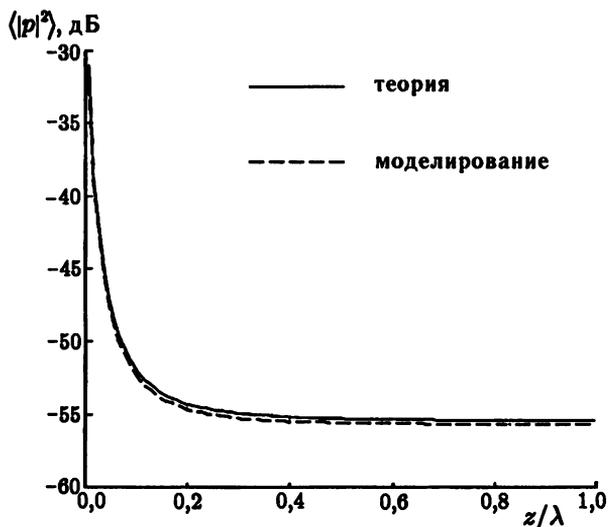


Рис. 1

Формула (4) является единственным аналитическим результатом, который удалось получить приближённо для характеристик давления в работе [8]. На рис. 1 показано изменение по глубине (в относительных единицах z/λ , где λ — длина волны) второго момента спектральной амплитуды давления, вычисленного по формуле (4) и полученного методом статистического моделирования в соответствии с формулами (5), (6). Из рис. 1 видно достаточно хорошее совпадение расчётов с аналитической оценкой.

В следующей серии расчётов рассматривалась нормированная корреляционная функция давления $\Psi_p(\omega; \rho, z) = \langle p(\omega; \rho', z)p^*(\omega; \rho' - \rho, z) \rangle$. На рис. 2 и 3 представлены типичные результаты для случаев слабой и сильной анизотропии источников шумов соответственно. Здесь $f = \omega/2\pi = 21$ Гц, глубина наблюдения $z = 0$ (корреляционная функция источников поля) — кривые 1 и 2, $z = 3\lambda$ — кривая 3. На рис. 2а и 3а кривые 1 — это аналитические значения Ψ_p , а кривые 2 на рис. 2б и 3б — статистическое моделирование. Кривые 3 на всех рисунках построены с помощью статистического моделирования. Для выбранного ансамбля реализаций кривые 1 и 2 на рис. 2а, б (аналогичное поведение функций и на рис. 3а, б) совпадают с достаточной точностью (несколько процентов) в области $|\rho| \leq 1/k$. Отметим, что если при моделировании источников по формуле (5) отбрасывать члены, соответствующие неоднородным волнам, то графики 1 и 3 будут в точности совпадать. Это очевидный результат, который следует из формулы (7); впервые это свойство переноса корреляционной функции по глубине было отмечено в работе [10]. Отметим, что методом статистического моделирования точно и просто получаются любые результаты из [10].

На рис. 4 и 5 представлены расчёты распределения по глубине плотности потенциальной (внутренней) энергии E_p и плотности кинетической энергии E_k (в дБ относительно значений на поверхности), а также их отношения E_p/E_k для частоты 1 Гц (кривая 1) и 5 Гц (кривая 2). Рис. 4 соответствует случаю слабой анизотропии поля шумов, рис. 5 — сильной анизотропии.

Плотности потенциальной и кинетической энергии в заданной точке вычислялись по следующим формулам:

$$E_p = \langle |p(\omega; \rho, z)|^2 \rangle / 2, \quad E_k = \langle |\mathbf{v}(\omega; \rho, z)|^2 \rangle / 2.$$

Данные величины имеют фундаментальное физическое значение, поскольку волновой процесс — это перенос энергии без переноса вещества. Полная энергия не всегда пропорциональна квадрату давления, как это часто предполагается в гидроакустике при различных энергетических оценках. Результаты, приведённые на рис. 4 и 5, иллюстрируют это утверждение. Из них видно, что в данном случае

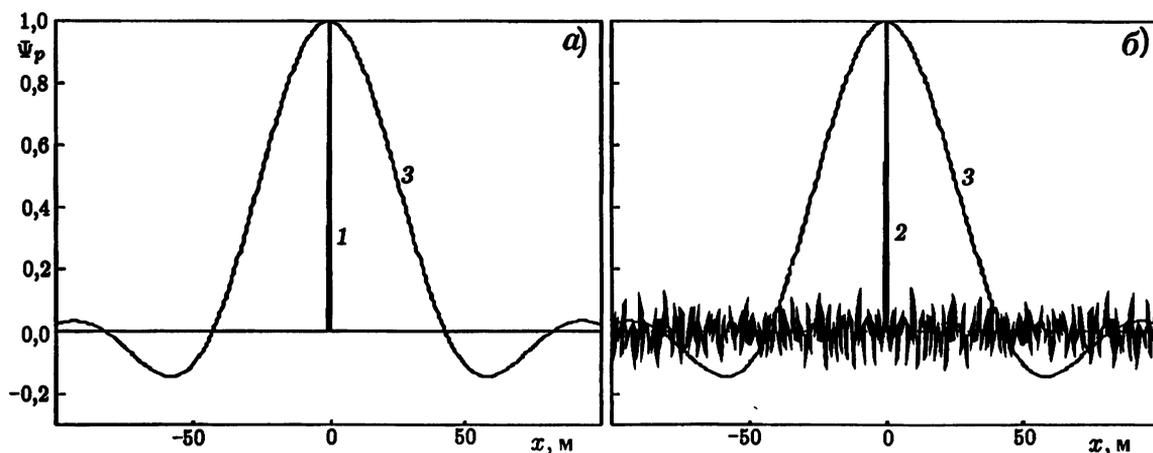


Рис. 2

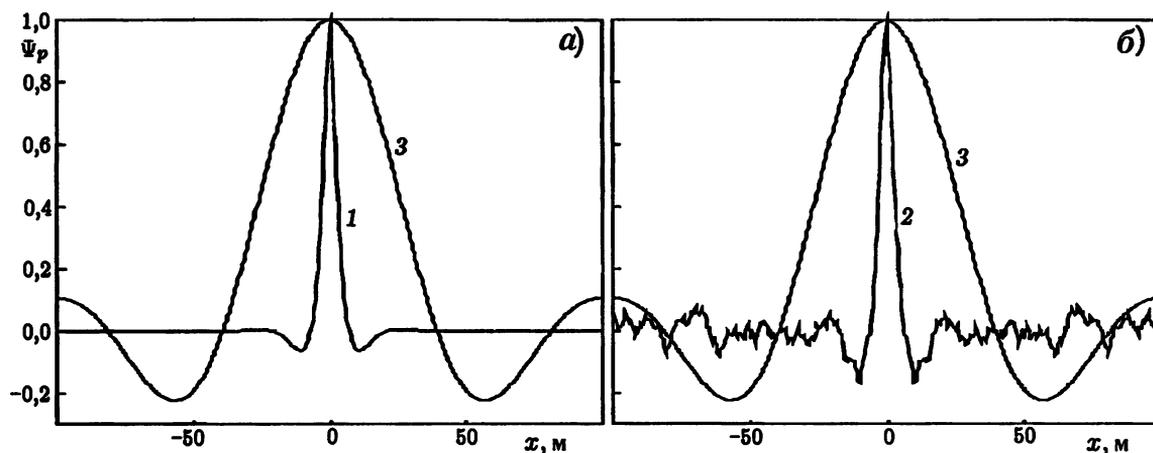


Рис. 3

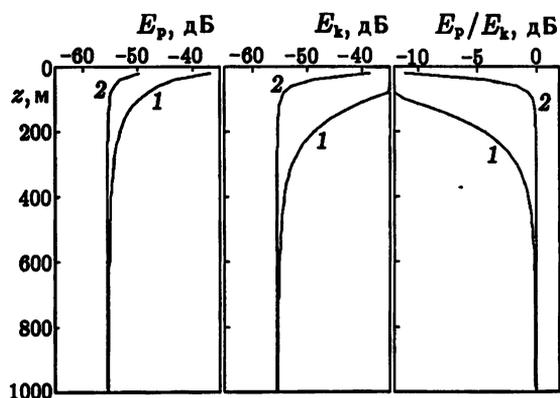


Рис. 4

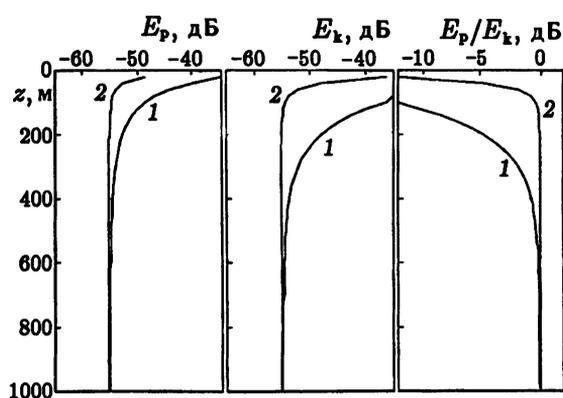


Рис. 5

различие между E_p и E_k определяется вкладом неоднородных волн, влияние которых ослабевает при увеличении либо частоты, либо глубины наблюдения.

В заключение отметим, что предлагаемые методы статистического моделирования обобщаются и на более реалистичные модели океана, а именно на конечный однородный и неоднородный слой с

различными условиями на границах. Кроме того, предложенная методика позволяет получать и временные реализации акустических полей посредством рандомизации временного спектра источников шумов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. Часть II. Случайные поля. М.: Наука, 1978. 464 с.
2. Курьянов Б. Ф. // Акустика океана: Сб. тр. школы-семинара акад. Л. М. Бреховских. М.: ГЕОС, 1998. С. 116.
3. Гордиенко В. А., Ильичёв В. И., Захаров Л. Н. Векторно-фазовые методы в акустике океана. М.: Наука, 1989. 223 с.
4. D'Spain G. L., Hodgkiss W. S., Edmonds G. L. // J. Acoust. Soc. Am. 1991. V. 89. P. 1134.
5. Гордиенко В. А., Гончаренко Б. И., Ильичёв В. И., Коропченко А. А. // Океаническая акустика: Сб. науч. тр. М.: Наука, 1993. С. 109.
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 736 с.
7. Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Т. 1. М.: Изд-во иностр. лит. 1958. 930 с.
8. Исакович М. А., Курьянов Б. Ф. // Акуст. ж. 1970. Т. 16, № 1. С. 62.
9. Михайлов Г. А. // Докл. АН СССР. 1978. Т. 238, № 4. С. 793.
10. Курьянов Б. Ф. // Акуст. ж. 1963. Т. 9, № 4. С. 441.

Тихоокеанский океанологический институт ДВО РАН,
г. Владивосток, Россия

Поступила в редакцию
14 декабря 1999 г.

STATISTICAL MODELING OF THE PROBLEM ON THE EXCITATION OF FIELDS BY RANDOM SOURCES ON A SURFACE

A. N. Shvyrev and I. O. Yaroshchuk

We develop a method for the statistical modeling of the emission of noise fields by sources located on a surface and consider the problem on acoustic-wave emission by ocean surface. The distributions of the pressure and particle velocity of the acoustic field in the medium are modeled by randomizing the spectral density of the pressure fluctuations on the surface. In this case, the obtained samples are exact solutions of the wave equation. The behavior of certain statistical momenta of the simulated field is studied.

УДК 621.391.822

ПРИМЕНЕНИЕ m -СВЯЗНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ШУМОВЫХ ПРОЦЕССОВ

Р. Р. Галлямов, С. С. Гоц, Р. З. Бахтизин

На основе алгоритма построения численных m -связных марковских последовательностей синтезированы временные ряды со статистическими, корреляционными и спектральными характеристиками, соответствующими трём типам широко распространённых флуктуационных процессов: дробовому шуму, генерационно-рекомбинационному шуму и $1/f^\gamma$ шуму. Предлагаемая модель может дать начало развитию единого подхода к рассмотрению флуктуационных процессов с различными свойствами. Подробно рассмотрен случай моделирования $1/f^\gamma$ шума, приведена эмпирическая зависимость коэффициента γ для фликкер-шума от параметров модели. Сравнение численных расчётов с экспериментальными результатами по ряду характеристик показывает хорошее соответствие между моделью и реальными шумовыми процессами.

ВВЕДЕНИЕ

Экспериментальные и теоретические исследования флуктуационных процессов, происходящих в различных природных системах, к настоящему времени привели к довольно жёсткой классификации шумов в соответствии с проявляемыми ими свойствами. В процессе анализа возможных механизмов, вызывающих возникновение того или иного шума, предложен ряд общепризнанных теорий, позволяющих аналитически описать происходящие в системе процессы и дать количественные оценки некоторых параметров шума.

Систематизация шумов позволила в ряде случаев объединить достижения различных теорий, вследствие чего были сформулированы обобщающие законы, пригодные для расчётов характеристик шумов различного вида. Примером может служить флуктуационно-диссипативная теорема [1], предложенная Калленом и Велтоном в 1951 году. Принципы, заложенные в формулировке этой теоремы, позволяют распространить термодинамическую теорию теплового шума на широкий ряд электронных систем. В частности, для описания флуктуационных процессов в линейных электрических цепях с реактивными компонентами активное сопротивление R должно быть заменено на активную компоненту импеданса $Z(f)$. Замена активного сопротивления на дифференциальное $R(U) = dU/dI$ позволяет использовать формулу Найквиста для определения спектральной плотности мощности (СПМ) в нелинейных системах, а также для оценки эквивалентной температуры дробового шума. К сожалению, термодинамический подход не позволяет описать с единой позиции шумы всех видов, например генерационно-рекомбинационный (ГР) или фликкер-шум.

Кроме термодинамического подхода можно привести и другие попытки универсального рассмотрения шумов различного вида. Стала уже классической идея использования теории генерационно-рекомбинационного шума для объяснения механизмов возникновения фликкер-шума. Согласно этой теории СПМ вида $1/f^\gamma$ можно рассматривать как суперпозицию спектральных плотностей мощности лоренцевского типа

$$S(f) = \frac{S_0}{1 + (2\pi f\tau)^2}, \quad (1)$$

характерных для процессов генерации и рекомбинации носителей заряда с определённой постоянной времени τ . Необходимым условием синтеза спектра вида $1/f^\gamma$ является наличие таких процессов в широком диапазоне значений τ .

Нами предлагается модель флуктуационных процессов, в основе которой лежит изменение активности источников элементарных флуктуаций (флуктуаторов) во времени в соответствии с определёнными, обоснованными с физической точки зрения особенностями той или иной системы. Данная модель на различных этапах реализации пригодна для описания дробового, генерационно-рекомбинационного и фликкер-шума.

Основное внимание в работе уделено универсальности модели для различных физических систем. В частности, предполагается, что она должна оставаться справедливой не только для дискретной, но и для непрерывной статистики вариации характеристик используемых в модели флуктуаторов. Приведём следующие примеры систем, в которых возможно использование предлагаемой модели:

1) полупроводниковые сопротивления. В качестве первичных источников элементарных флуктуаций тока в таких образцах выступают носители заряда в объёме образца. Активность флуктуаторов связана либо с флуктуациями числа носителей заряда, либо с флуктуациями их подвижности, либо совокупностью указанных факторов. Данная модель может быть адаптирована к рассмотрению любого из этих механизмов формирования шумовых процессов за счёт выбора соответствующей функции распределения характеристик флуктуаторов;

2) полевые эмиссионные приборы. Здесь наиболее близким соответствием рассматриваемой модели является модель центров эмиссии, предложенная в [2].

Выбор в качестве примеров именно вышеприведённых систем обусловлен тем, что в них наблюдаются все известные в настоящее время компоненты шума. Кроме того, в распоряжении авторов имеется богатый экспериментальный материал для этих систем, полученный как лично, так и из публикаций в этой области.

1. МОДЕЛЬ БЕЛОГО ГАУССОВОГО ШУМА

Моделируемый сигнал представлял собой последовательность значений, генерируемых ЭВМ в соответствии с рассмотренными в данной работе алгоритмами. Весь процесс синтеза модели можно разбить на несколько этапов.

В качестве исходного берётся предположение, что полный шумовой сигнал в системе формируется как сумма вкладов отдельных флуктуаторов. В численной модели роль таких флуктуаторов выполняет некоторая случайная переменная x , имеющая заданное распределение $F(x)$. Вид распределения выбирается из физических соображений и может варьироваться для различных систем. В частности, в системе с дискретными неразличимыми частицами, например электронами, такое распределение будет равновероятным, где величина x , нормированная на единицу заряда, может принимать значения 0 или 1.

Известно [3], что последовательность $\{a_i\}$, каждое из значений которой есть сумма достаточно большого числа n статистически независимых слагаемых x_{ij} с произвольной статистикой $F(x)$,

$$a_i = \sum_{j=1}^n x_{ij}, \quad (2)$$

имеет нормальное распределение. Обращаем внимание на то, что для получения каждого a_i используется свой индивидуальный набор n слагаемых x_{ij} с независимым от частоты спектром.

Расчёт спектральной зависимости процесса $\{a_i\}$ показал, что она подчиняется уравнению $S(f) = \text{const}$. Таким образом, можно утверждать, что формула (2) позволяет моделировать сигнал, представляющий собой белый гауссовский шум. Показательным примером может служить дробовой шум, СПМ и статистика которого полностью соответствуют характеристикам расчётного сигнала.

2. МОДЕЛЬ ГЕНЕРАЦИОННО-РЕКОМБИНАЦИОННОГО ШУМА

С целью обеспечения корреляции между отдельными значениями последовательности был применён специальный алгоритм, который позволяет получить m -связную марковскую последовательность. Чтобы обеспечить в последовательности $\{a_i\}$ необходимую длину связности m , для двух последовательных отсчётных значений a_i и a_{i+1} в соответствующих им суммах (2) должны совпадать m слагаемых из n ($m < n$). С физической точки зрения параметр m определяет время активности (или время жизни) τ_j каждого из слагаемых x_{ij} , на протяжении которого его значение не меняется. Таким образом, в моделируемом случайном процессе будет задаваться фиксированная корреляция во времени. Пусть слагаемые x_{ij} представляют собой нормированную случайную величину ξ_{ij} с произвольным распределением. Тогда алгоритм вычисления последовательности $\{a_i\}$ с учётом (2) можно представить формулой

$$a_{i+1} = a_i - \sum_{j=m+1}^n x_{ik} + \sum_{j=m+1}^n \xi_{ik}, \quad (3)$$

где второй индекс для x_{ik} , ξ_{ik} находится путём суммирования по модулю n исходных индексов i и j , т. е. $k = (i + j) \bmod n$. Здесь в каждом последующем отсчётном значении a_{i+1} заменяются $n - m$ слагаемых x_{ij} на новые значения ξ_{ij} . В частном случае $m = n - 1$ будет заменяться только одно значение x_{ij} :

$$a_{i+1} = a_i - x_{i i \bmod n} + \xi_{i i \bmod n}, \quad (3a)$$

Независимо от статистики x_{ij} случайные процессы (3) и (3a), как и процесс (2), сохраняют нормальное распределение при достаточно большом n и размере выборки $N_a \gg n$. Однако в отличие от (2) спектральная плотность этих сигналов будет иметь совершенно другой вид:

$$S(f) = S_0 \frac{\sin^2(2\pi f\tau)}{(2\pi f\tau)^2}, \quad (4)$$

Огибающая этой СПМ соответствует лоренцевской зависимости (см. рис. 1a). Наличие дискретных составляющих обусловлено определённой детерминированностью процесса, т. е. фиксированным значением m и последовательным выбором индексов заменяемых слагаемых. Вследствие этого в уравнениях (3) и (3a) каждое слагаемое x_{ij} заменяется на новое строго через m циклов.

Эти дискретные гармоники можно подавить переходом к случайному выбору величины m ($m < 2n$), т. е. преобразованием периодических компонент шума в хаотические. Таким образом, в формуле (3) параметр j должен выбираться произвольно: $j = \zeta$, где $\zeta \in [0, 2n[$ — случайная равновероятная целочисленная величина ($F(\zeta) = \text{const}$). При таких условиях среднее время активности слагаемых x_{ij} останется таким же, как для (3): $\langle j \rangle = m$, поэтому время корреляции не изменится. Последовательность $\{a_i\}$ будет характеризоваться спектральной плотностью мощности лоренцевского вида (рис. 1б), описываемой уравнением (1). Точка перегиба на СПМ (значение f_0) однозначно определяется связностью m процесса $\{a_i\}$.

Возможным физическим аналогом этой модели шума может являться генерационно-рекомбинационный шум в полупроводниках. Как уже упоминалось, первичными источниками флуктуаций здесь можно рассматривать как флуктуации числа носителей заряда, так и флуктуации их подвижности [4]. Изменение числа носителей обычно объясняют появлением и исчезновением свободных носителей заряда вследствие взаимодействия с центрами захвата. СПМ этого шума имеет лоренцевскую форму:

$$S(f) = 4 \overline{\Delta N^2} \frac{\tau}{1 + (2\pi f\tau)^2}, \quad \frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_e} + \frac{1}{\tau_c},$$

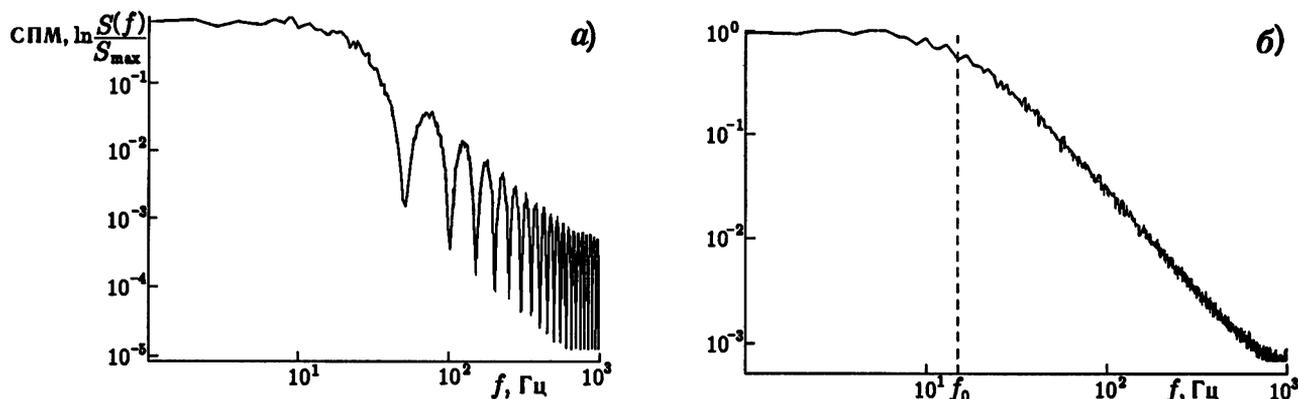


Рис. 1

где $\overline{\Delta N^2}$ — отклонение числа свободных носителей, τ — время жизни носителей, которое определяется постоянными времени захвата и эмиссии τ_c и τ_e соответственно. Если в веществе существуют ловушки только одного типа, среднее время жизни носителей будет величиной постоянной, что хорошо согласуется с предлагаемой нами моделью (3). Флуктуации подвижности связывают с процессами рассеяния в объёме полупроводника. В этом случае характерное время τ определяется временем свободного пробега носителей заряда.

3. МОДЕЛЬ $1/f^\gamma$ ШУМА

На следующем этапе моделирования был проведён поиск функции распределения по временам активности флуктуаторов $F(\zeta)$, которая могла бы обеспечить необходимые корреляционные свойства модельного сигнала, соответствующие шумовому сигналу со спектром вида $1/f^\gamma$. В силу определённых особенностей фликкер-шума искомая функция распределения должна быть инвариантной на различных диапазонах значений аргументов. Среди разнообразных функциональных зависимостей, рассмотренных нами, наиболее естественным является предположение о том, что функция распределения времён τ_j активности флуктуаторов имеет экспоненциальный вид [5]:

$$F(\zeta) = e^{-\zeta}. \quad (5)$$

Распределение (5) означает, что в системе, состоящей из некоторого числа флуктуаторов, вероятность изменения каждого из них не одинакова и существует часть долгоживущих флуктуаторов, число которых экспоненциально уменьшается с увеличением их времени жизни.

Полагая, что в каждый момент времени может изменяться только один активный флуктуатор, алгоритм вычисления последовательности $\{a_i\}$ с учётом (3а) запишем в виде

$$a_{i+1} = a_i - x_{i\zeta} + \xi_{i\zeta}, \quad \zeta = -\ln \xi', \quad \xi' \in]0,1[, \quad (6)$$

где ζ — время активности флуктуатора $x_{i\zeta}$ — есть случайная величина, подчиняющаяся статистике (5), интенсивность элементарной флуктуации $\xi_{i\zeta}$ — случайная величина с произвольным распределением, ξ' — случайная равновероятная величина, A и B — постоянные. Исследование спектральной характеристики такого процесса показало, что она подчиняется зависимости $1/f^\gamma$.

4. АНАЛИЗ МОДЕЛИ ФЛИККЕР-ШУМА

Исследуем применимость модели, полученной с помощью алгоритма (6), на примере полевого эмиттера. Для анализа нами использованы результаты, полученные при исследовании эмиттеров из кремния и вольфрама. Функцию элементарных флукуаторов выполняют центры эмиссии, т. е. области поверхности, совокупные условия в которых благоприятствуют эмиссионному процессу. Под такими условиями понимаются [6] следующие параметры системы: площадь эмитирующей поверхности, локальная напряжённость электрического поля вблизи поверхности, работа выхода данного участка поверхности эмиттера, прозрачность барьера. Эти параметры определяют ток из каждого эмиссионного центра, т. е. амплитуду элементарной флукуации. Наиболее вероятными центрами эмиссии считаются, например, островки примесей, адсорбированные на поверхности катода, работа выхода которых меньше работы выхода чистой поверхности, или области эмиттера, где напряжённость поля максимальна.

Применяемый нами метод зондирующего отверстия, который заключается в расположении между эмиттером и коллектором заземлённого анода-экрана с небольшим отверстием посередине, позволяет исследовать шумовой сигнал с локальных областей эмиттера, линейные размеры которого не превышают 100 \AA . Таким образом, количество центров эмиссии, участвующих в эмиссионном процессе, невелико. Оценить их число можно в соответствии с [2].

Использованные для сравнения с расчётным сигналом низкочастотные флукуации тока $i(t)$ левой эмиссии получены с различных граней вольфрамового эмиттера. Сопоставление расчётных и экспериментальных результатов производилось при исследовании спектральной плотности мощности сигналов, автокорреляционной функции (АКФ), одномерной и двумерной функций распределения.

На рис. 2а представлены СПМ экспериментально полученных реализаций фликкер-шума. Из рисунка видно, что СПМ реальных шумовых сигналов в зависимости от ряда параметров имеет различный индекс наклона γ , который лежит в пределах $\gamma \in]0,8; 1,5[$. Рассмотрим СПМ моделируемого сигнала. Если использовать для построения модели непосредственно формулу (6), мы получим зависимость спектральной плотности мощности, наклон которой будет фиксированным независимо от распределения величины ξ и равным $\gamma \approx 1$. Чтобы иметь возможность варьировать наклон СПМ в достаточно широких пределах, в уравнение (5) необходимо ввести дополнительный коэффициент β :

$$F(\zeta) = e^{-\zeta^{1/\beta}}. \quad (7)$$

Таким образом, уравнение (6) запишется в виде

$$a_{i+1} = a_i - x_{i\zeta} + \xi_{i\zeta}, \quad \zeta = -\ln^{\beta} \xi', \quad \xi' \in]0, 1[. \quad (8)$$

С физической точки зрения параметр β изменяет соотношение короткоживущих и долгоживущих флукуаторов: с ростом β увеличивается вероятность изменения долгоживущих флукуаторов. Распределение (7) при этом несколько уширяется.

Вид СПМ для модельного сигнала (6) с вычисленными по формуле (8) временами жизни флукуаторов приведён на рис. 2б для различных значений β .

При анализе модели удалось установить эмпирическую зависимость между параметрами γ и β :

$$\gamma(\beta) = A - B/\beta,$$

где A, B — некоторые постоянные. График этой зависимости в координатах $\gamma(1/\beta)$ приведён на рис. 3. Диапазон значений β , при которых удалось получить достаточно гладкие СПМ, лежит в пределах от 0,8 до 2,5. Если β становится меньше 0,8, количество флукуаторов, участвующих в формировании сигнала, становится чрезвычайно малым (меньше пяти), вследствие чего на СПМ начинают заметно проявляться локальные неоднородности. При $\beta > 2,5$ наклон СПМ существенно не меняется и приближается к постоянной величине.

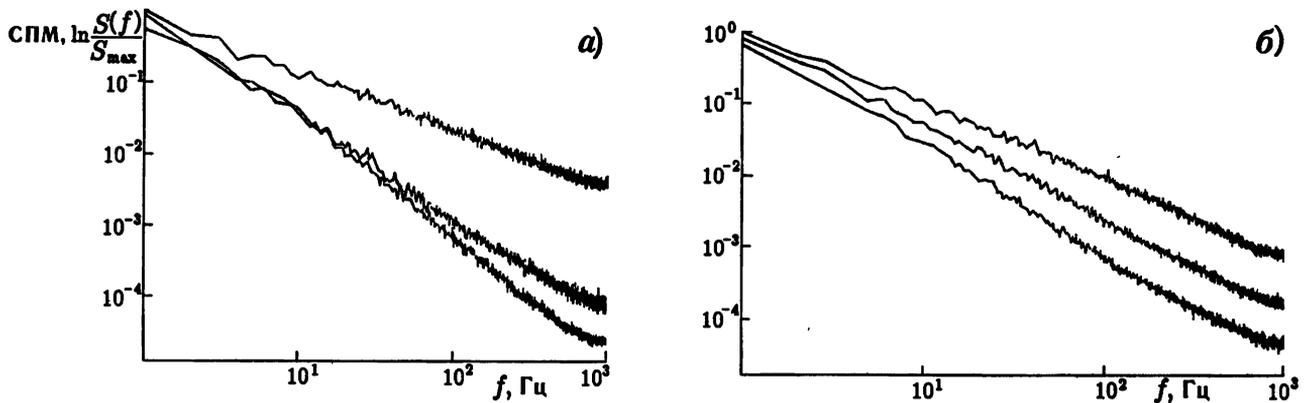


Рис. 2

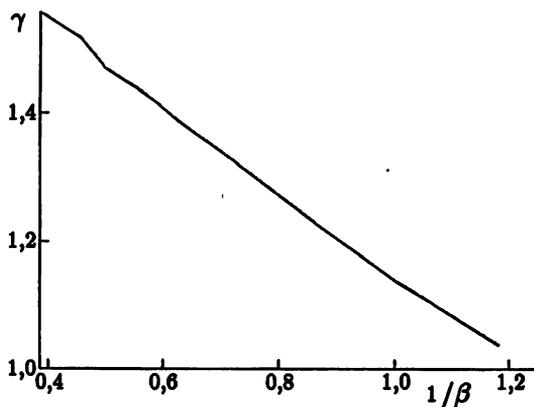


Рис. 3

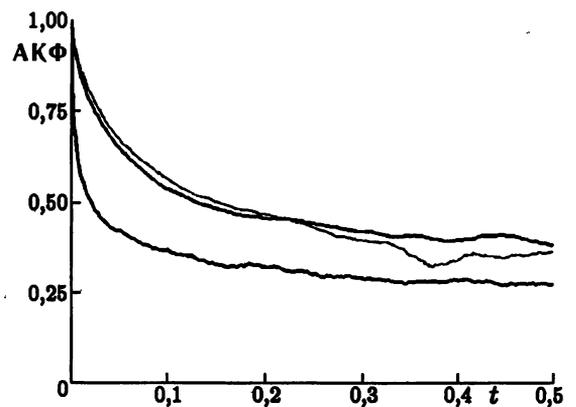


Рис. 4

На рис. 4 представлены нормированные АКФ реального шумового сигнала (тонкая линия) и модели при двух различных параметрах β (жирные линии). Следует упомянуть, что АКФ получены путём усреднения по $N > 100$ циклам. Как видно из рисунка, АКФ модели и реального шума достаточно хорошо соответствуют друг другу. Предлагаемая нами модель характеризуется большими временами корреляции сигнала, которые могут превышать длительность отдельных выборок. Чтобы исключить потерю части информации при вычислении АКФ, усреднение сигнала проводилось не в каждой отдельной выборке (2048 значений), а по всей реализации в целом (около $4 \cdot 10^5$ значений).

Статистические свойства сигнала исследовались с помощью измерения одномерной и двумерной функций распределения. Приведём сравнительный анализ модели и эксперимента только по двумерной функции распределения $W(i(t), i(t - \tau))$, поскольку при изучении коррелированных процессов одномерная функция распределения недостаточно полно описывает флуктуационный процесс. На рис. 5а и 5б представлены двумерные функции распределения реального сигнала и модели соответственно. Для идентификации формы распределения использовано специальное масштабирование по амплитуде. Видно, что как реальный шум, так и модель имеют нормальное распределение по амплитуде. Кроме того, вид двумерных функций распределения, сечения которых имеют форму эллипса, указывает на наличие долговременной корреляции сигналов.

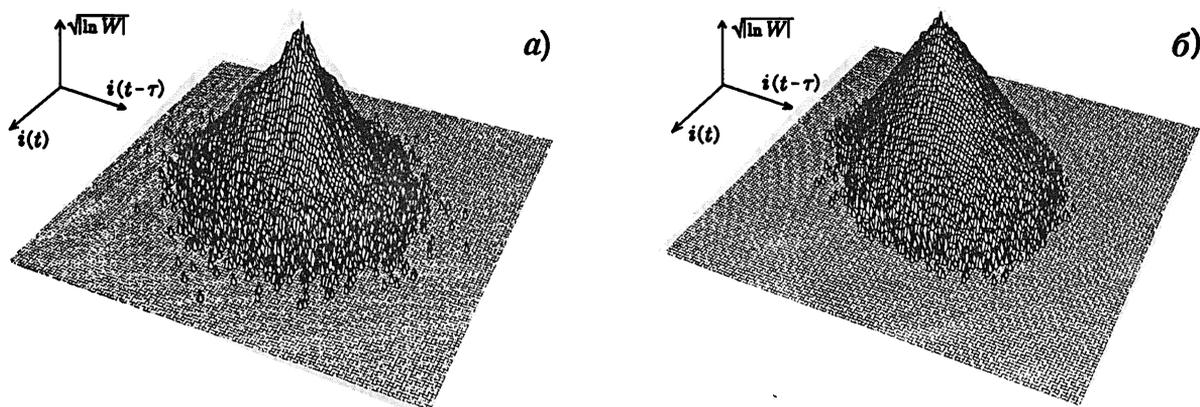


Рис. 5

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе рассмотрены модели нескольких видов шумовых сигналов в нанoeлектронных системах с небольшим количеством флукуаторов. Корреляционные и спектральные свойства шумовых сигналов в предлагаемых моделях могут в широких пределах варьироваться выбором функции распределения $F(\tau)$ флукуаторов по временам активности. В случае фликкер-шума установлена однозначная взаимосвязь параметров $F(\tau)$ и СПМ моделируемого сигнала.

Показано, что численные марковские последовательности на различных этапах своей реализации могут быть использованы для построения модели дробового, ГР и фликкер-шума.

Проведённый комплексный анализ модели шумового сигнала подтверждает её применимость для описания флукуаций тока полевой эмиссии. Наблюдаемые в реальном сигнале аномально большие времена корреляции также объясняются предлагаемым механизмом формирования фликкер-шума.

Большой интерес представляет адаптация данной модели к другим физическим системам.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Callen H. V., Welton T. A. // Phys. Rev. 1951. V. 83, No. 1. P. 34.
2. Бахтизин Р. З., Гоц С. С., Ильясов Р. Г. // Поверхность. 1984. № 4. С. 54.
3. Колемаев В. А., Староверов О. В., Турундаевский В. Б. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высшая школа, 1991. 400 с.
4. Hooge F. G. // Noise in Phys. Systems and $1/f$ Fluctuation. Palanga, Lithuania. 1995. P. 8.
5. Макаров С. В. и др. // Изв. вузов. Радиофизика. 1999. Т. 42, № 3. С. 278.
6. Модинос А. Авто-, термо- и вторично-электронная эмиссионная спектроскопия /Пер. с англ. под ред. Г. Н. Фурсея. М.: Наука, 1990. 320 с.

Башкирский госуниверситет
г. Уфа, Россия

Поступила в редакцию
17 июля 2000 г.

APPLICATION OF m -CONNECTED SEQUENCES FOR MODELING NOISE PROCESSES*R. R. Gallyamov, S. S. Ghots, and R. Z. Bakhtizin*

An algorithm for developing numerical m -connected Markov sequences is used as basis for synthesizing time series with statistical, correlation, and spectral characteristics corresponding to three types of widely used fluctuation processes: shot noise, generation–recombination noise, and $1/f^\gamma$ noise. The proposed model can initiate the development of a unified approach to considering fluctuation processes with different properties. The case of $1/f^\gamma$ noise simulation is considered in detail, and an empiric dependence of the γ coefficient for $1/f$ noise on the model parameters is described. Numerical results are compared with experimental data to yield good agreement between the model and actual noise processes with respect to some characteristics.

УДК 539.219.3:669

ВРЕМЯ УСТАНОВЛЕНИЯ КОНЦЕНТРАЦИИ ВЕЩЕСТВА В СРЕДЕ С ПРОИЗВОЛЬНО МЕНЯЮЩИМИСЯ В ПРОСТРАНСТВЕ КОЭФФИЦИЕНТОМ ДИФФУЗИИ И ПОТЕНЦИАЛОМ

А. Н. Малахов, Е. Л. Панкратов

Определены временные характеристики установления концентрации вещества в среде с произвольно изменяющимися в пространстве коэффициентом диффузии и потенциалом. Рассмотрены примеры.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть имеется ограниченная одномерная среда $0 \leq x \leq L$ с отражающими границами. Коэффициент диффузии среды $D(x)$ является произвольной функцией координаты, принимающей внутри среды конечные не равные нулю значения. Распределение потенциала $\varphi(x)$ внутри среды является безразмерной функцией координаты. Начальная концентрация вещества (примеси) $f(x)$ единичной массы — заданная функция координаты. С течением времени распределение концентрации примеси будет стремиться к своему равновесному значению $C(x, \infty)$. Требуется найти время установления равновесной концентрации в заданной точке $x = \ell$ внутри среды.

Концентрация вещества $C(x, t)$ удовлетворяет уравнению непрерывности

$$\frac{\partial C(x, t)}{\partial t} = \operatorname{div}\{D(x) [C(x, t) \operatorname{grad} \varphi(x) + \operatorname{grad} C(x, t)]\} = -\operatorname{div} G(x, t), \quad (1a)$$

где

$$G(x, t) = -D(x) [C(x, t) \operatorname{grad} \varphi(x) + \operatorname{grad} C(x, t)] \quad (16)$$

— поток вещества.

Уравнение диффузии дополняется граничными условиями $G(0, t) = G(L, t) = 0$. Начальная концентрация примеси задаётся в виде $C(x, 0) = f(x)$.

2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Определим время релаксации Θ аналогично времени выхода, введённому в [1], т. е. как интервал между $t = 0$ и моментом скачкообразного изменения функции, с минимальной ошибкой аппроксимирующей эволюцию концентрации $C(x, t)$ примеси. В качестве аппроксимирующей используем функцию вида $\phi(x, t, \Theta) = a_0(x) + a_1(x) [1(t) - 1(t - \Theta(x))]$, где $1(t)$ — единичная функция. В дальнейшем аргументы амплитуд a_0, a_1 аппроксимирующей функции и времени релаксации Θ будем опускать, подразумевая их зависимость от координаты. Оптимальные значения параметров такой аппроксимирующей функции удовлетворяют условию минимума функционала

$$U = \int_0^{t_N} [C(x, t) - \phi(x, t, \Theta)]^2 dt, \quad (2)$$

А. Н. Малахов, Е. Л. Панкратов

где t_N — время наблюдения за процессом. Как известно, необходимое условие экстремума по параметрам a_0 , a_1 и Θ имеет вид

$$\partial U / \partial a_0 = 0, \quad \partial U / \partial a_1 = 0, \quad \partial U / \partial \Theta = 0. \quad (3)$$

Из первого условия следует $\int_0^{t_N} [C(x, t) - a_0 - a_1(1(t) - 1(t - \Theta))] dt = 0$. Это условие преобразуем к виду

$$\int_0^{t_N} C(x, t) dt = a_0 t_N + a_1 \Theta. \quad (4a)$$

Условие минимума функционала U по Θ запишется в виде

$$C(x, \Theta) = a_0 + a_1/2, \quad (4б)$$

по a_1 — в виде

$$\int_0^{\Theta} C(x, t) dt = (a_0 + a_1) \Theta. \quad (4в)$$

Предложенная оценка является нелинейной, но это не приводит к значительным трудностям при обработке результатов физических или математических экспериментов. Увеличение времени наблюдения t_N позволяет уточнять оценки, при этом наблюдаются небольшие изменения амплитуд a_0 , a_1 и смещение момента Θ скачкообразного изменения аппроксимирующей функции.

При построении аналитических зависимостей заслуживают внимания асимптотически оптимальные оценки. Они предполагают неограниченную продолжительность наблюдаемого процесса ($t_N \rightarrow \infty$). В этих оценках налагается дополнительное условие на амплитуду скачка, которая принимается равной разности между асимптотическим и начальным значениями аппроксимируемой функции: $a_0 = C(x, \infty)$; $a_1 = C(x, 0) - C(x, \infty)$. Определению подлежит лишь момент скачкообразного изменения функции. При таком подходе искомая величина может быть вычислена в результате решения системы линейных уравнений и представляет собой линейную оценку параметра эволюции процесса.

Для получения аналитического решения системы уравнений (4) рассмотрим их при $t_N \rightarrow \infty$. При рассмотрении такой асимптотики надо учесть, что пределом a_0 при $t_N \rightarrow \infty$ является стационарная концентрация $C(x, \infty)$. В асимптотическом виде при $t_N \rightarrow \infty$ уравнение (4a) имеет вид

$$\Theta(\ell) = \frac{\int_0^{\infty} [C(\ell, \infty) - C(\ell, t)] dt}{C(\ell, \infty) - C(\ell, 0)}. \quad (5)$$

Таким образом, мы пришли к хорошо известной аппроксимации эволюции концентрации равновеликим по площади прямоугольником, которая, как следует из изложенного выше, является асимптотически оптимальной оценкой. Из соотношения (4б) следует другая хорошо известная асимптотически оптимальная оценка:

$$C(x, \Theta) = [C(x, 0) + C(x, \infty)]/2,$$

но такая оценка Θ заметно реже приводит к аналитическому решению, чем оценка в виде равновеликого по площади прямоугольника. Следует заметить, что асимптотически оптимальные оценки справедливы только для монотонных эволюций (см. рис. 1 и 2).

Для нахождения времени релаксации используем аппроксимацию эволюции концентрации равновеликим по площади прямоугольником и будем искать время релаксации методом, изложенным

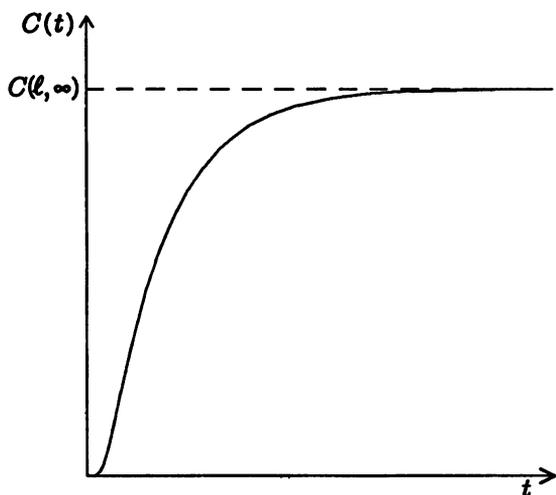


Рис. 1

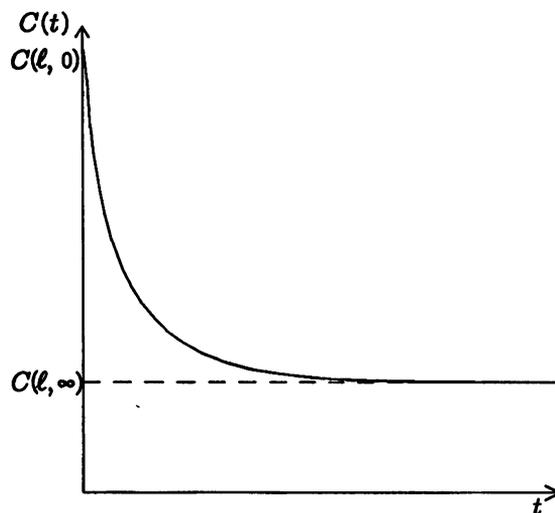


Рис. 2

в [2, 3]. Для нахождения времени релаксации введём преобразование Лапласа от концентрации и потока:

$$Y(x, s) = \int_0^{\infty} C(x, t) e^{-st} dt, \quad (6)$$

$$\hat{G}(x, s) = \int_0^{\infty} G(x, t) e^{-st} dt. \quad (7)$$

В терминах преобразования Лапласа соотношение (5) и уравнение непрерывности (1а) с учётом начального условия примут вид

$$\operatorname{div}[D(x) \operatorname{grad} Y(x, s)] - sY(x, s) = -f(x), \quad (8)$$

$$\Theta(\ell) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{C(\ell, \infty) - sY(\ell, s)}{s[C(\ell, \infty) - C(\ell, 0)]}. \quad (9)$$

Для нахождения времени релаксации (9) нет необходимости знать концентрацию $Y(x, s)$ и поток $\hat{G}(x, s)$ для всех значений лапласовского параметра s , а достаточно знать асимптотические значения при $s \rightarrow 0$.

Разложим функции $sY(x, s)$ и $s\hat{G}(x, s)$ в степенные ряды по аргументу s :

$$sY(x, s) = Z_0(x) + sZ_1(x) + s^2Z_2(x) + \dots, \quad s\hat{G}(x, s) = H_0(x) + sH_1(x) + s^2H_2(x) + \dots \quad (10)$$

Подставляя (10) в (8) и (9), получаем следующее выражение для времени релаксации:

$$\Theta(\ell) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{C(\ell, \infty) - Z_0(\ell) - sZ_1(\ell) - s^2Z_2(\ell) - \dots}{s[C(\ell, \infty) - C(\ell, 0)]}. \quad (11)$$

Предельные теоремы теории преобразования Лапласа [4] позволяют получить следующие соотношения:

$$\lim_{s \rightarrow 0} [sY(x, s)] = C(x, \infty) = Z_0(x), \quad \lim_{s \rightarrow 0} [s\hat{G}(x, s)] = G(x, \infty) = H_0(x). \quad (12)$$

Таким образом, установившиеся значения потока и концентрации вещества равны соответственно $H_0(x) = 0$ и $Z_0(x)$. С учётом соотношений (12) предел (11) имеет вид

$$\Theta(\ell) = \frac{Z_1(\ell)}{C(\ell, 0) - C(\ell, \infty)}. \quad (13)$$

Для нахождения времени релаксации необходимо отыскать функции $Z_0(x)$ и $Z_1(x)$. Подстановка (12) в (9) даёт общие уравнения для функций $Z_k(x)$ и $H_k(x)$:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \{D(x) [Z_0(x) \operatorname{grad} \varphi(x) + \operatorname{grad} Z_0(x)]\} &= 0, \\ \operatorname{div} \{D(x) [Z_1(x) \operatorname{grad} \varphi(x) + \operatorname{grad} Z_1(x)]\} &= Z_0(x) - f(x), \\ \operatorname{div} \{D(x) [Z_k(x) \operatorname{grad} \varphi(x) + \operatorname{grad} Z_k(x)]\} &= Z_{k-1}(x), \quad k \geq 2. \end{aligned} \quad (14)$$

При этом функции $Z_k(x)$ и $H_k(x)$ связаны следующим соотношением:

$$\frac{dZ_k(x)}{dx} + Z_k(x) \operatorname{grad} \varphi(x) = -\frac{H_k(x)}{D(x)}. \quad (15)$$

Найдём решение первого уравнения системы (14). Первый интеграл этого уравнения имеет вид

$$D(x) \left[\frac{d\varphi(x)}{dx} Z_0(x) + \frac{dZ_0(x)}{dx} \right] = c, \quad (16)$$

где c — постоянная интегрирования, согласно граничным условиям равная нулю. В окончательном виде первый интеграл первого уравнения системы (14) представляет собой следующее выражение:

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} Z_0(x) + \frac{dZ_0(x)}{dx} = 0. \quad (17)$$

Решением уравнения (17) является функция

$$Z_0(x) = c_1 e^{-\varphi(x)}. \quad (18)$$

Из граничных условий находим постоянную интегрирования c_1 и однозначно определяем стационарную концентрацию, учитывая нормировку:

$$Z_0(x) = e^{-\varphi(x)} / \rho(L), \quad (19)$$

где $\rho(L) = \int_0^L e^{-\varphi(v)} dv$.

Найдём решение второго уравнения системы (14). Первый интеграл этого уравнения определяется следующим соотношением:

$$D(x) \left[\frac{d\varphi}{dx} Z_1 + \frac{dZ_1}{dx} \right] = P(x) - \int_0^x f(v) dv + c_2 = -H_1(x), \quad (20)$$

где $P(x) = \rho(x)/\rho(L)$. Из граничных условий следует равенство нулю постоянной интегрирования c_2 .

Второй интеграл второго уравнения системы (14) имеет вид

$$Z_1(x) = e^{-\varphi(x)} \int_0^x \frac{e^{\varphi(y)} P(y)}{D(y)} dy - e^{-\varphi(x)} \int_0^x \frac{e^{\varphi(y)}}{D(y)} \int_0^y f(v) dv dy + c_3 e^{-\varphi(x)}. \quad (21)$$

Постоянную интегрирования c_3 находим из граничных условий и связи (15):

$$H_2(0) - H_2(L) = \int_0^L e^{-\varphi(x)} \int_0^x \frac{e^{\varphi(y)} P(y)}{D(y)} dy dx - \int_0^L e^{-\varphi(x)} \int_0^x \frac{e^{\varphi(y)}}{D(y)} \int_0^y f(v) dv dy dx + c_3 \rho(L) = 0,$$

откуда находим

$$c_3 = \int_0^L e^{-\varphi(x)} \int_0^x \frac{e^{\varphi(y)}}{\rho(L)D(y)} \int_0^y f(v) dv dy dx - \int_0^L e^{-\varphi(x)} \int_0^x \frac{e^{\varphi(y)} P(y)}{\rho(L)D(y)} dy dx,$$

или, меняя порядок интегрирования,

$$c_3 = \int_0^L \frac{e^{\varphi(y)}}{D(y)} [1 - P(y)] \int_0^y f(v) dv dy - \int_0^L \frac{e^{\varphi(y)}}{D(y)} P(y) [P(y) - 1] dy.$$

Теперь функция $Z_1(x)$ определена однозначно и выглядит следующим образом:

$$Z_1(x) = e^{-\varphi(x)} \left\{ \int_0^x \frac{e^{\varphi(y)}}{D(y)} \left[P(y) - \int_0^y f(v) dv \right] dy + \left[\int_0^L \frac{e^{\varphi(y)}}{D(y)} [1 - P(y)] \int_0^y f(v) dv dy \right] \right\} - e^{-\varphi(x)} \left\{ \int_0^L \frac{e^{\varphi(y)}}{D(y)} P(y) [P(y) - 1] dy \right\}.$$

После нахождения функций $Z_0(x)$ и $Z_1(x)$ появилась возможность записать время релаксации в виде (13):

$$\Theta(\ell) = \left\{ \int_0^{\ell} \frac{e^{\varphi(y)}}{D(y)} \left[P(y) - \int_0^y f(v) dv \right] dy + \left[\int_0^L \frac{e^{\varphi(y)}}{D(y)} \int_0^y f(v) dv [1 - P(y)] dy \right] - \int_0^L \frac{e^{\varphi(y)}}{D(y)} P(y) [P(y) - 1] dy \right\} \frac{1}{\rho(L)f(\ell)e^{\varphi(\ell)} - 1}. \quad (22)$$

Пример начального распределения. Пусть в начальный момент времени примесь находится в одной точке внутри среды: $f(x) = \delta(x - x_0)$. В этом случае из (22) следует

$$\Theta_{\delta}(\ell \geq x_0) = \int_0^L \frac{e^{\varphi(y)}}{D(y)} \left[P(y) \int_y^L e^{-\varphi(v)} dv \right] dy - \int_{\ell}^L \frac{e^{\varphi(y)}}{D(y)} \int_y^L e^{-\varphi(v)} dv dy - \int_0^{x_0} \frac{e^{\varphi(y)}}{D(y)} \rho(y) dy, \quad (23)$$

$$\Theta_{\delta}(\ell \leq x_0) = \int_0^L \frac{e^{\varphi(y)}}{D(y)} \left[P(y) \int_y^L e^{-\varphi(v)} dv \right] dy - \int_{x_0}^L \frac{e^{\varphi(y)}}{D(y)} \int_y^L e^{-\varphi(v)} dv dy - \int_0^{\ell} \frac{e^{\varphi(y)}}{D(y)} \rho(y) dy. \quad (24)$$

Максимальное время релаксации достигается при максимально разнесённых точках источника и наблюдения: $x_0 = 0, \ell = L$:

$$\Theta_{\max} = \int_0^L \frac{e^{\varphi(y)} P(y)}{D(y)} \int_y^L e^{-\varphi(v)} dv dy. \quad (25)$$

Сближение точек источника и наблюдения уменьшает время релаксации.

Примеры потенциалов. Если теперь при рассмотренном выше источнике потенциал положить постоянным, то соотношения (1а) и (1б) лишатся первых слагаемых в правых частях, а выражения (23)–(25) примут вид

$$\Theta_{\delta}(\ell \geq x_0) = \int_0^L \frac{(L-y)y}{LD(y)} dy - \int_{\ell}^L \frac{L-y}{D(y)} dy - \int_0^{x_0} \frac{y}{D(y)} dy, \quad (26)$$

$$\Theta_{\delta}(\ell \leq x_0) = \int_0^L \frac{(L-y)y}{LD(y)} dy - \int_{x_0}^L \frac{L-y}{D(y)} dy - \int_0^{\ell} \frac{y}{D(y)} dy. \quad (27)$$

$$\Theta_{\max} = \int_0^L \frac{(L-y)y}{LD(y)} dy. \quad (28)$$

Соотношения (26)–(28), как и следовало ожидать, совпадают с соотношениями (22), (23) и (25) в [2].

В случае простейшей модели постоянного коэффициента диффузии $D(x) = D_0 = \text{const}$ из (26) и (27) следует

$$\Theta_{\delta}(\ell \geq x_0) = \Theta_0 \left(\frac{\ell}{L} - \frac{1}{3} - \frac{\ell^2}{2L^2} - \frac{x_0^2}{2L^2} \right), \quad \Theta_{\delta}(\ell \leq x_0) = \Theta_0 \left(\frac{x_0}{L} - \frac{1}{3} - \frac{x_0^2}{2L^2} - \frac{\ell^2}{2L^2} \right),$$

где $\Theta_0 = \Theta_{\max} = L^2/(6D_0)$ — характерный масштаб времени релаксации в случае постоянных коэффициента диффузии и потенциала.

В качестве второго примера рассмотрим линейное распределение потенциала: $\varphi(x) = ax + b$. В этом случае вычисление времени релаксации приводит к следующему результату:

$$\Theta_{\delta}(\ell \geq x_0) = \int_0^L \frac{(e^{ax} - 1)(e^{-ax} - e^{-aL})}{aD(x)(1 - e^{-aL})} dx - \int_{\ell}^L \frac{1 - e^{a(x-L)}}{aD(x)} dx - \int_0^{x_0} \frac{e^{ax} - 1}{aD(x)} dx, \quad (29)$$

$$\Theta_{\delta}(\ell \leq x_0) = \int_0^L \frac{(e^{ax} - 1)(e^{-ax} - e^{-aL})}{aD(x)(1 - e^{-aL})} dx - \int_{x_0}^L \frac{1 - e^{a(x-L)}}{aD(x)} dx - \int_0^{\ell} \frac{e^{ax} - 1}{aD(x)} dx, \quad (30)$$

$$\Theta_{\max} = \int_0^L \frac{(e^{ax} - 1)(e^{-ax} - e^{-aL})}{aD(x)(1 - e^{-aL})} dx. \quad (31)$$

В простейшем случае — при постоянном коэффициенте диффузии $D(x) = D_0$ — из (29)–(31) следует

$$\Theta_{\delta}(\ell \geq x_0) = \frac{aL(1 + e^{-aL}) + 2(1 - e^{-aL})}{a^2 D_0 (1 - e^{-aL})} + \frac{1 - e^{-a(\ell-L)}}{a^2 D_0} - \frac{\ell + x_0 - L}{aD_0} + \frac{1 - e^{-ax_0}}{a^2 D_0}, \quad (32)$$

$$\Theta_{\delta}(\ell \leq x_0) = \frac{aL(1 + e^{-aL}) + 2(1 - e^{-aL})}{a^2 D_0 (1 - e^{-aL})} + \frac{1 - e^{-a(x_0-L)}}{a^2 D_0} - \frac{\ell + x_0 - L}{aD_0} + \frac{1 - e^{-a\ell}}{a^2 D_0}, \quad (33)$$

$$\Theta_{\max} = \frac{aL(1 + e^{-aL}) + 2(1 - e^{-aL})}{a^2 D_0 (1 - e^{-aL})}. \quad (34)$$

Если начальное распределение $f(x)$ произвольно, но отлично от дельта-функции, то в силу линейности уравнения диффузии время релаксации можно найти не подстановкой новой модели начального распределения в (22), а методом суперпозиции:

$$\Theta = \int_0^L \Theta_\delta(x_0) f(x_0) dx_0,$$

где $\Theta_\delta(x_0)$ — время релаксации, полученное при начальном распределении концентрации в виде дельта-функции.

Данная работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проекты № 99-02-17544 и 00-15-96620), а также Министерством высшего образования (проект № 992874).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Панкратов Е. Л. // Сб. научных трудов "Памяти А. Н. Малахова" / Под ред. А. И. Саичева. Н. Новгород: Талам, 2000. С. 109.
2. Малахов А. Н. // Изв. вузов. Радиофизика. 1997. Т. 40, № 7. С. 889.
3. Малахов А. Н. // Изв. вузов. Радиофизика. 1999. Т. 42, № 6. С. 581.
4. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1977.

Нижегородский госуниверситет,
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию
17 ноября 2000 г.

RELAXATION TIME OF THE DENSITY OF A SUBSTANCE IN A MEDIUM WITH ARBITRARY SPACE-VARYING DIFFUSION COEFFICIENT AND POTENTIAL PROFILE

A. N. Malakhov and E. L. Pankratov

We determine the temporal characteristics of substance relaxation in a medium with arbitrary space-varying diffusion coefficient and potential profiles. Some examples are analyzed.

ОПЕЧАТКА К № 10 ЗА 2000 г.

В журнале "Изв. вузов. Радиофизика" № 10 за 2000 г. была сделана следующая опечатка:

стр. 861, выражение $\Delta f_{e_i} = \Delta f_{e_i} - \Delta f_{e_{i-1}}$ следует заменить на $\Delta f_{e_i} = f_{e_i} - f_{e_{i-1}}$.