МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Известия высших учебных заведений

РАДИОФИЗИКА

ежемесячный научно-технический журнал

Издаётся с апреля 1958 г.

Том XLIV № 11 Нижний Новгород 2001

Содержание

Мясников Е. Н., Муравьёва Н. В., Сергеев Е. Н., Фролов В. Л., Насыров А. М., Насыров И. А., Белей В. С., Колосков А. В., Ямпольский Ю. М., Гровс К. М. О форме пространственного спектра искусственных ионосферных неоднородностей, возбуждаемых мощным КВ радиоизлучением 903

Свердлов Б. А., Фурашов Н. И. Отражение коротких миллиметровых радиоволн от снежного покрова 918

Каневский М. Б., Караев В. Ю., Лубяко Л. В., Зуйкова Э. М., Титов В. И., Гольдблат В. Ю., Баландина Г. Н. Доплеровские спектры сантиметровых и миллиметровых радиоволн, рассеянных водной поверхностью под малыми углами скольжения 922

Долин Л. С., Сергеева Е. А. Модель распределения облучённости от направленного источника света в слабопоглощающей мутной среде 931

Власов С. Н., Копосова Е. В. Открытые резонаторы, возбуждаемые волновым пучком 940

Ширин С. В., Зобов Н. Ф., Савин В. А., Полянский О. Л. Методика автоматизированной идентификации экспериментальных колебательно-вращательных спектров молекул на основе вариационных расчётов 953

Егоров В. Н., Воловиков А. С. Измерение тензора диэлектрической проницаемости сапфира при температуре от 93 до 343 К 960

Белянцев А. М., Козырев А. Б. Прямое преобразование видеоимпульса в радиоимпульс в связанных линиях передачи с нормальной и аномальной дисперсией 967

Брюханов Ю. А. Динамика цифровой рекурсивной системы второго порядка с бинарным квантованием 976

Малахов А. Н., Музычук О. В. Релаксация вероятностных характеристик броуновского движения под действием не дельта-коррелированной случайной силы 984

УДК 533.951:537.868

О ФОРМЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО СПЕКТРА ИСКУССТВЕННЫХ ИОНОСФЕРНЫХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ, ВОЗБУЖДАЕМЫХ МОЩНЫМ КВ РАДИОИЗЛУЧЕНИЕМ

Е. Н. Мясников [1], *Н. В. Муравьёва* [1], *Е. Н. Сергеев* [1], *В. Л. Фролов* [1], *А. М. Насыров* [2], *И. А. Насыров* [2], *В. С. Белей* [3], *А. В. Колосков* [3], *Ю. М. Ямпольский* [3], *К. М. Гровс* [4]

Приводятся результаты измерений и формы пространственного спектра зависимости времени релаксации от поперечного к геомагнитному полю масштаба для искусственных ионосферных неоднородностей, возбуждаемых в верхней ионосфере при помощи мощного нагревного коротковолнового стенда «Сура». Диагностика неоднородностей осуществлялась при помощи радиопросвечивания возмущённой области сигналом квазигеостационарного солнечно-синхронного ИСЗ на частоте 243 МГц, принимавшимся в обсерватории Казанского госуниверситета, и методом ракурсного рассеяния радиоволн на частотах 15 и 20 МГц с использованием когерентного двухпозиционного коротковолнового радара на базе радиотелескопа УТР-2 (г. Харьков). Показано, что в интервале масштабов $30\div60 \lesssim l_\perp \lesssim 200\div400$ м развиваются неоднородности электронной концентрации, имеющие степенную форму двумерного спектра (пропорциональную $æ_\perp^{-p}$) в плоскости, ортогональной геомагнитному полю, с показателем $p \lesssim 2$. При этом имеет место возрастание относительных флуктуаций электронной концентрации $\sqrt{\langle\delta N^2\rangle}$ при уменьшении масштаба $l_\perp = 2\pi/æ_\perp$. Для масштабов неоднородностей $l_\perp \sim 30\div60$ м, при которых флуктуации максимальны, при мощности нагрева 150 МВт получены оценки величины $\sqrt{\langle\delta N^2\rangle} \lesssim 1\div1{,}5$ %. Измеренная зависимость времени релаксации искусственных неоднородностей, определявшегося по убыванию интенсивности мерцаний амплитуды в e раз, имела вид $\tau_р \propto l_\perp^\alpha$. При $l_\perp \lesssim 30\div60$ м показатель α был близок к 2, а эффективный коэффициент диффузии $D_\perp \simeq (2\div3)\cdot10^{-1}$ м^2/с соответствовал коэффициенту амбиполярной поперечной диффузии плазмы. Для масштабов $l_\perp \gtrsim 60\div100$ м время $\tau_р$ не зависело от $l_\perp$ и увеличивалось при меньшей скорости регулярного дрейфа плазмы. Наблюдаемое при приёме сигналов ракурсного рассеяния уширение доплеровских спектров $\sqrt{\langle\Delta\nu^2\rangle} \lesssim 0{,}6$ Гц может быть связано с хаотическим движением возмущений концентрации плазмы с дрейфовыми скоростями, для которых среднеквадратичные флуктуации вблизи масштаба $l_\perp \sim 20$ м резкого изменения показателя степенного спектра составляют $\sqrt{\langle\Delta v^2\rangle} \simeq 2\div3$ м/с.

ВВЕДЕНИЕ

Многочисленные экспериментальные данные свидетельствуют о том, что вблизи уровня отражения мощной радиоволны О-поляризации возбуждается искусственная ионосферная турбулентность (ИИТ), которая характеризуется генерацией неоднородностей электронной концентрации и низкочастотных электромагнитных полей, обладающих непрерывным пространственным спектром в диапазоне от 100 км, порядка горизонтального масштаба возмущённой области (ВО), до флуктуаций с масштабами порядка 1 см. Спектральные характеристики ИИТ исследовались ранее методами, основанными на радиопросвечивании ВО сигналами ИСЗ и дискретных космических источников, некогерентном и когерентном рассеянии радиоволн КВ и УКВ диапазонов и при помощи локальных (in situ) измерений с борта космических аппаратов и ракет [1–12].

Одна из задач при исследовании ИИТ связана с поиском возможных механизмов формирования пространственно-временного спектра низкочастотной турбулентности и процессов, определяющих перекачку энергии флуктуаций в различных диапазонах масштабов. В этой связи наиболее важными представляются исследования спектральных характеристик ИИТ в области поперечных к геомагнитному полю масштабов $l_\perp$ порядка длины волны накачки $\lambda_0 = c/f_0 \simeq 40\div60$ м, где в соответствии с теорией взаимодействия мощного электромагнитного излучения с плазмой развивается тепловая параметрическая (резонансная) неустойчивость [13, 14]. Предполагается, что неоднородности с масштабами, бóльшими нескольких сотен метров, возбуждаются вследствие самофокусировки мощных

электромагнитных волн [15, 16]. Среди возможных механизмов, определяющих формирование спектра ИИТ в области масштабов $l_\perp \gtrsim \lambda_0$, в настоящее время рассматриваются развитие самоосциллирующих структур [17] и дрейфовых МГД волн [18], причём последние могут приводить к генерации вращательно неинвариантной (гиротропной) турбулентности магнитоактивной плазмы.

В настоящей работе на основе данных, полученных в ходе экспериментальной кампании, проведённой в августе 1998 г. с использованием нагревного стенда «Сура», и предварительно опубликованных в [19], представлены результаты детальных исследований спектральных характеристик ИИТ при помощи одновременного радиопросвечивания ВО сигналом квазигеостационарного ИСЗ и приёма сигналов ракурсного рассеяния с использованием двухпозиционного когерентного КВ радара на базе фазированной антенной решётки (ФАР) УТР-2 (г. Харьков). Исследована форма пространственного спектра ИИТ в диапазоне поперечных к геомагнитному полю масштабов от 10 м до 1 км, получены зависимости характерных времён релаксации и развития искусственных неоднородностей от $l_\perp$, позволившие сделать оценки относительных флуктуаций электронной концентрации $\sqrt{\langle \delta N^2 \rangle}$ и абсолютных флуктуаций скорости $\sqrt{\langle \Delta v^2 \rangle}$ движения мелкомасштабных возмущений плотности плазмы.

1. ПОСТАНОВКА ЭКСПЕРИМЕНТА И МЕТОДИКА ПРОВЕДЕНИЯ ИЗМЕРЕНИЙ

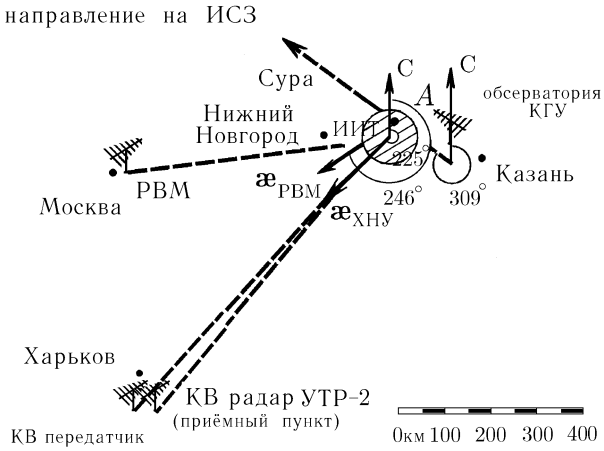

Рис. 1. Геометрия эксперимента по радиопросвечиванию области ИИТ сигналом ИСЗ на частоте 243 МГц и регистрации доплеровских спектров сигналов ракурсного рассеяния на частотах 14,996 МГц и 20,5 МГц. Точка A соответствует пересечению высоты 250 км радиолучом в направлении на ИСЗ; $æ_{РВМ}$ — вектор рассеяния для передатчика РВМ; $æ_{ХНУ}$ — вектор рассеяния для передатчика Харьковского национального университета; стрелка С указывает на географический север

Представленные в настоящей статье результаты были получены в ходе экспериментов, проведённых 17, 19 и 21 августа 1998 г. Одновременные наблюдения сигнала ИСЗ и ракурсного рассеяния коротковолнового излучения проводились с 22:00 по 01:00 московского летнего времени (MSK). Геометрия эксперимента представлена на рис. 1. Область ИИТ создавалась при помощи мощного КВ излучения нагревного стенда «Сура», расположенного вблизи р/п Васильсурск Нижегородской области (56,2° с. ш., 46,1° в. д.). Для радиопросвечивания области ИИТ использовался сигнал квазигеостационарного солнечно-синхронного ИСЗ, имевшего сильно вытянутую эллиптическую орбиту. Сигнал на частоте $f = 243$ МГц принимался в обсерватории Казанского госуниверситета (55,8° с. ш., 48,3° в. д.). Направление луча на ИСЗ в точке наблюдения составляло 309° по азимуту, отсчитываемому по часовой стрелке от географического севера, и 57° по углу места от горизонта. Точка пересечения радиолучом высоты 250 км находилась примерно в 60 км к северу от центра ВО. Для приёма сигнала ИСЗ использовалась антенна круговой поляризации с коэффициентом усиления около 17 дБ, которая состояла из цилиндрического полуоткрытого резонатора диаметром $2\lambda = 2{,}5$ м и излучателя «обратного отражения» в виде скрещённого полуволнового диполя. На выходе приёмного устройства сигнал на промежуточной частоте 200 кГц детектировался и регистрировался в полосе 1 кГц на многоканальном магнитографе. При дальнейшей обработке сигнал фильтровался низкочастотным RC-фильтром с частотой обрезания 5 Гц, оцифровывался при помощи 12-разрядного

аналогово-цифрового преобразователя с частотой опроса 8 Гц и далее обрабатывался в цифровом виде.

При радиопросвечивании ионосферы относительные флуктуации амплитуды сигнала характеризуются параметром

$$S_{\delta A^2} = \frac{\langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2}{\langle A\rangle^2} = \int \mathrm{d}\,\nu F_{\delta A}(\nu), \tag{1}$$

где A — амплитуда принимаемого сигнала, $F_{\delta A}(\nu)$ — частотный спектр мощности флуктуаций амплитуды. В случае слабого малоуглового рассеяния, при $S_{\delta A^2} \ll 1$, справедливо приближение тонкого фазового экрана (ФЭ), и спектр $F_{\delta A}(\nu)$ связан со спектром флуктуаций концентрации $F_{\delta N}(\boldsymbol{æ})$ соотношением (см. [20])

$$F_{\delta A}\Big(\nu = \frac{v_{\text{д}} æ_x}{2\pi}\Big) = \frac{2\pi^3 f_{\text{p}}^4}{f^2 c^2} \int \mathrm{d}æ_y \left(1 - \cos\frac{(æ_x^2 + æ_y^2)\,z}{k}\right) F_{\delta N}(æ_x, æ_y, æ_z = 0). \tag{2}$$

Здесь $f_{\text{p}} = \sqrt{e^2 N/(\pi m_{\text{e}})}$ — электронная плазменная частота, $æ_x, æ_y$ — волновые числа неоднородностей в плоскости ФЭ, $k = 2\pi f/c$ — волновое число сигнала ИСЗ, z — среднее расстояние в направлении распространения сигнала ИСЗ от точки приёма до слоя с неоднородностями; предполагается, что движение дифракционной картины происходит в направлении оси x со скоростью $v_{\text{д}}$. Если источник радиоизлучения неподвижен относительно поверхности Земли, частота ν мерцаний сигнала определяется проекцией скорости дрейфа $\mathbf{v}_{\text{д}}$ неоднородностей плазмы на плоскость ФЭ, ортогональную лучу зрения на ИСЗ. Если неоднородности плазмы сильно вытянуты вдоль геомагнитного поля, то эффективное движение дифракционной картины происходит в направлении, ортогональном проекции магнитного поля на ФЭ. В рассматриваемом эксперименте расстояние z составляло около 300 км, размер первой зоны Френеля $l_{\text{F}} = \sqrt{2\pi z/k} \simeq 0{,}6$ км. Максимальная скорость движения радиолуча относительно поверхности Земли в течение всего времени наблюдений не превышала 7 м/с, поэтому частота флуктуаций сигнала в точке приёма определялась в основном скоростью дрейфа неоднородностей $v_{\text{д}}$ в направлении, ортогональном радиолучу.

Приём сигналов ракурсного рассеяния проводился на базе двухпозиционного когерентного КВ радара, расположенного вблизи п. Граково Харьковской области (49,7° с. ш., 36,8° в. д.) [10]. Данный радар имеет по углу места и по азимуту разрешение около 1° в диапазоне 8÷30 МГц [21] и долговременную нестабильность частоты, не превышающую 0,01 Гц. Для диагностики искусственных неоднородностей использовались непрерывный сигнал на частоте 14,996 МГц станции точного времени (РВМ), расположенной вблизи г. Москвы, и непрерывный сигнал на частоте 20,5 МГц передатчика Харьковского национального университета (ХНУ), находившегося в п. Гайдары Харьковской области (49,6° с. ш., 36,5° в. д.).

В борновском приближении интенсивность сигнала, рассеянного областью ИИТ, пропорциональна спектральной плотности флуктуаций электронной концентрации $F_{\delta N}(\boldsymbol{æ})$, где направление волнового вектора $\boldsymbol{æ}$ определяется разностью между направлениями волновых векторов рассеянной $\mathbf{k}_{\text{s}}$ и падающей $\mathbf{k}$ на ВО волн, а его модуль — условием Брэгга:

$$æ = 2k\sin(\theta_{\text{s}}/2), \tag{3}$$

где $\theta_{\text{s}} = \widehat{\mathbf{k}_{\text{s}}\mathbf{k}}$ — угол рассеяния. Как показано в [20], в случае неоднородностей, сильно вытянутых вдоль магнитного поля ($l_{\parallel} \gg l_{\perp}$), энергия рассеянных волн сосредоточена на поверхности конуса ракурсного рассеяния, а интенсивность принимаемого сигнала пропорциональна

$$I_{\text{s}} \propto \int \mathrm{d}æ_{\parallel}\, F_{\delta N}(æ_{\perp}, æ_{\parallel}).$$

Здесь $æ_\perp = 2\pi/l_\perp$, $æ_\parallel = 2\pi/l_\parallel$ — проекции волнового числа неоднородностей на направления поперёк и вдоль геомагнитного поля соответственно.

Эксперименты по ракурсному рассеянию показывают, что рассеянный от области ИИТ сигнал обычно содержит регулярный доплеровский сдвиг $\langle\nu\rangle = 2\,(v_д)_{æ}\,f/c$, который зависит от проекции $(v_д)_{æ}$ скорости дрейфа неоднородностей на направление вектора рассеяния **æ**. Спектральное уширение в КВ диапазоне составляет $\sqrt{\langle\Delta\nu^2\rangle} \lesssim 1\div3$ Гц [7] и может определяться либо изменением проекции скорости регулярного дрейфа на направление вектора рассеяния внутри ВО, либо случайными вариациями скорости рассеивающих неоднородностей. Для вычисления регулярного частотного сдвига и уширения доплеровских спектров использовались следующие выражения:

$$\langle\nu\rangle = \frac{\int \mathrm{d}\nu\, \nu F_D(\nu)}{\int \mathrm{d}\nu\, F_D(\nu)}, \quad \sqrt{\langle\Delta\nu^2\rangle} = 2\left(\frac{\int \mathrm{d}\nu\, (\nu^2 - \langle\nu\rangle^2)\, F_D(\nu)}{\int \mathrm{d}\nu\, F_D(\nu)}\right)^{1/2}, \tag{4}$$

где $F_D(\nu)$ — спектральная плотность мощности частотных флуктуаций сигнала, рассеянного областью ИИТ.

В данном эксперименте для станции РВМ диагностировались неоднородности с поперечным масштабом $l_\perp \simeq 11$ м, азимут проекции вектора рассеяния на горизонтальную плоскость составлял $\varphi = 246°$; для радиопередатчика ХНУ резонансный масштаб и азимут были соответственно равны $l_\perp \simeq 7{,}3$ м; $\varphi \simeq 225°$. Углы между проекциями луча зрения на ИСЗ и векторами рассеяния для используемых станций на горизонтальную плоскость составляли соответственно 63° и 84°. Таким образом, в первом приближении мы могли считать, что за флуктуации сигнала ИСЗ и регулярный доплеровский сдвиг сигналов ракурсного рассеяния ответственны компоненты скорости неоднородностей, имеющие близкие друг к другу направления.

Нагрев ионосферы осуществлялся при помощи стенда «Сура» монохроматическим сигналом в диапазоне частот 4,8÷5,8 МГц радиоволнами О-поляризации. Использовались режимы работы стенда, при которых три передатчика работали синфазно и излучали электромагнитные волны вертикально или под углом приблизительно 8° от вертикали к северу. При синфазном режиме эффективная мощность нагрева составляла $P_{эфф} = 150$ МВт, а угловые размеры диаграммы направленности на частотах 4,8 и 5,8 МГц были соответственно равны 8° и 10°. В ряде сеансов нагрев ионосферы осуществлялся только одним передатчиком, при этом эффективная мощность излучения составляла $P_{эфф} = 20$ МВт, а угловой размер диаграммы направленности в меридиональной плоскости увеличивался приблизительно в три раза.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ

Данные, полученные при помощи радиопросвечивания ВО сигналом ИСЗ, обрабатывались по следующей методике. Предварительно из реализации сигнала ИСЗ отфильтровывались тренды, после чего амплитуда сигнала нормировалась в соответствии с выражением $\delta A = (A - \langle A\rangle)/\langle A\rangle$, в котором текущее среднее $\langle A\rangle$ вычислялось с помощью цифрового низкочастотного фильтра с частотой обрезания 0,0013 Гц. Далее нормированная амплитуда сигнала подвергалась спектральной обработке на временны́х интервалах $\Delta t = 2$ мин со сдвигом между соседними реализациями в $\Delta t = 1$ с. Результаты спектрального анализа, проведённого в течение цикла наблюдений в ночь с 19 на 20 августа, приведены на рис. 2. На рисунке по горизонтальной оси отложено время, чёрными отрезками отмечены интервалы работы нагревного стенда, по вертикальной оси отложена частота ν флуктуаций принимае-

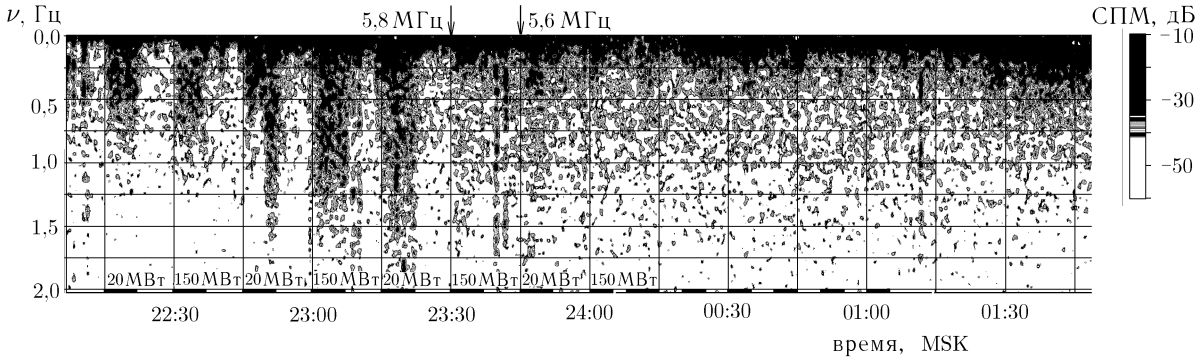

Рис. 2. Спектрограмма амплитудных мерцаний сигнала ИСЗ на частоте 243 МГц, полученная 19–20.08.98. Периоды включений стенда «Сура» $P_{\text{эфф}} = 20 \div 150$ МВт показаны чёрными отрезками на нижней горизонтальной оси, на верхней оси указаны критические частоты f_{0F2} слоя F_2

мого сигнала, спектральная плотность мощности (СПМ) флуктуаций соответствует степени затемнения. Нагрев ионосферы осуществлялся на частоте $f_0 = 5\,828$ кГц до 24:00 в режиме 7 мин — излучение, 8 мин — пауза, после 24:00 — в режиме 5 мин — излучение, 5 мин — пауза. Видно, что для первых пяти сеансов во время нагрева наблюдалось возрастание интенсивности флуктуаций сигнала в диапазоне частот мерцаний ν от 0,01 до 2 Гц. Для сеансов нагрева после 23:30 интенсивность мерцаний в диапазоне верхних частот $\nu \gtrsim 0{,}25$ Гц, отвечающих искусственным неоднородностям мелких масштабов, резко упала. Отметим, что в это время, как показано на рис. 2, критическая частота слоя F_2 стала меньше частоты волны накачки.

На рис. 3 приведены усреднённые спектры мощности флуктуаций для 7-минутного интервала во время работы стенда (толстые линии) и для такого же интервала во время паузы, спустя минуту после выключения нагрева (тонкие линии). Из представленных данных видно, что во время нагрева интенсивность флуктуаций увеличивалась, причём на частотах $0{,}01 \lesssim \nu \lesssim 0{,}1$ Гц показатель спектра $F_\nu \propto \nu^{-p}$, как правило, составлял $2 \lesssim p \lesssim 3$ и был одинаков во время нагрева и паузы. Как видно из данных, в интервале $0{,}1 \lesssim \nu \lesssim 0{,}5$ Гц показатель спектра p часто был близок к нулю или даже принимал положительные значения. На частотах, превышающих 0,5 Гц, наблюдалось достаточно резкое увеличение модуля показателя спектра, причём в ряде сеансов $p \gtrsim 3 \div 4$. Уровень -40 дБ являлся шумовым порогом обнаружения флуктуаций, при этом на частотах, где флуктуационный сигнал был ниже этого уровня, показатель спектра составлял $p \simeq 2$ и соответствовал шумовому сигналу, усреднённому с постоянной времени RC-фильтра.

Для перевода временны́х флуктуаций в пространственные использовались данные о скорости дрейфа мелкомасштабных искусственных неоднородностей, полученные методом ракурсного рассеяния. Оценки частотного смещения и уширения доплеровских спектров проводились на основе выражений (4). При этом мы предполагали, что регулярное смещение доплеровских спектров определяется проекцией скорости дрейфа плазмы в скрещённых электрическом и геомагнитном полях на направление вектора рассеяния. Сопоставление фазовой скорости мелкомасштабных искусственных неоднородностей, возбуждаемых нагревным стендом в Тромсё и диагностируемых методом ракурсного рассеяния в диапазоне частот $8 \div 20$ МГц, и скорости дрейфа плазмы, определяемого при помощи трёхпозиционного приёма сигнала некогерентного радара EISCAT, показали, что между этими скоростями существует хорошее соответствие [8].

На рис. 4 (кривая *1*) приведены измеренные значения скорости дрейфа мелкомасштабных искусственных неоднородностей и её флуктуационной составляющей (вертикальные отрезки), которая определялась по уширению доплеровских спектров. Первые четыре отсчёта, начиная с 22:00 MSK, были получены при обработке доплеровских спектров в течение 8-минутных циклов работы станции PBM

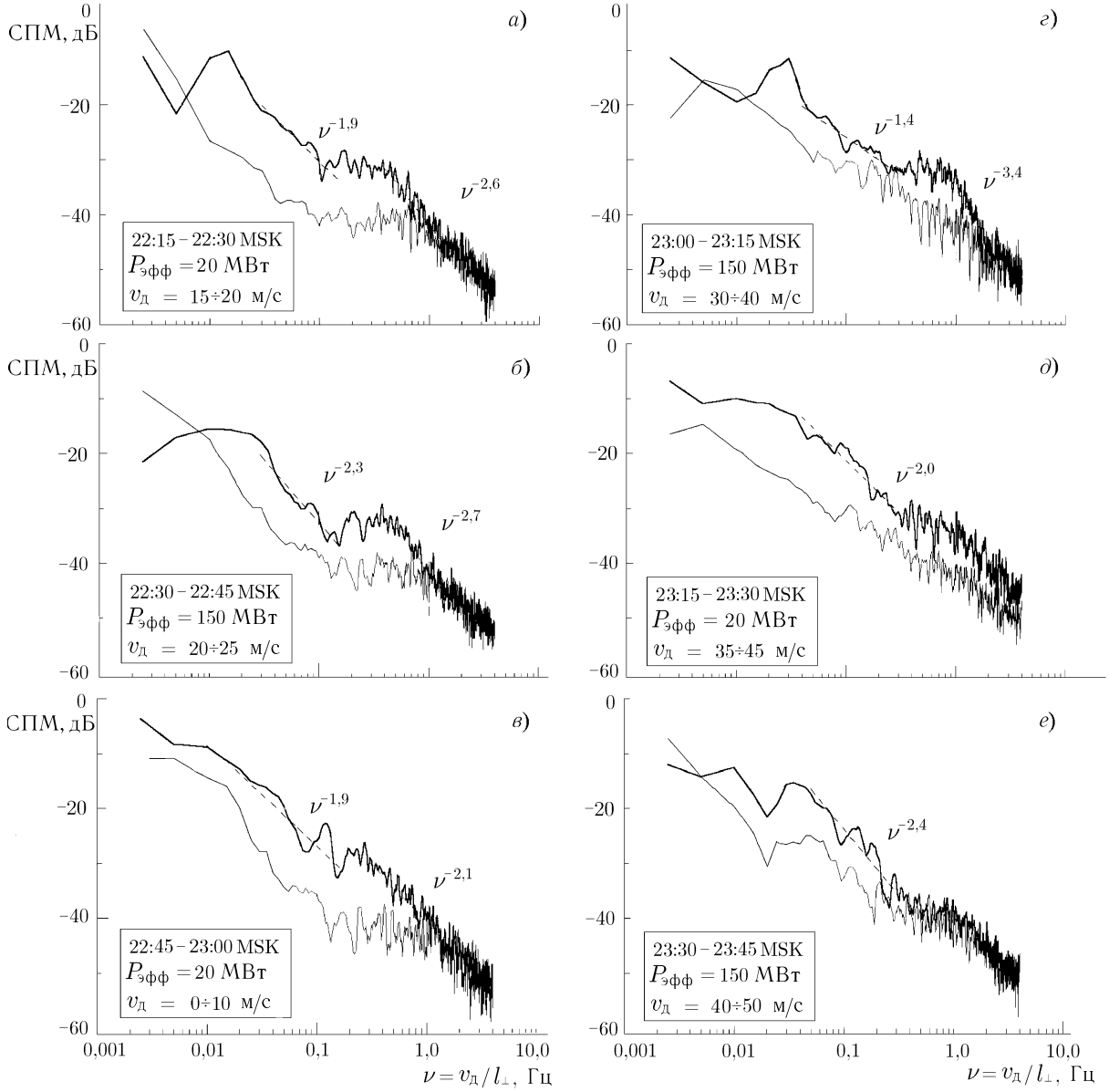

Рис. 3. Спектры мощности амплитудных мерцаний сигнала ИСЗ в периоды нагрева (толстые линии) и паузы в работе стенда «Сура» (тонкие линии) для сигнала 19–20.08.98. На рисунке приведены показатели спектра для различных интервалов масштабов $l_\perp = v_д/\nu$

в режиме несущей. Данные, соответствующие интервалам времени 23:45 и 00:15 MSK, были получены при обработке рассеянного сигнала от передатчика ХНУ. Из приведённых данных видно, что приблизительно в 22:50 MSK направление проекции скорости сменилось с северного на южное, после чего скорость $v_д$ монотонно росла до приблизительно 60 м/с. Отметим, что обращение в нуль и изменение знака проекции скорости на ось север—юг могло быть связано с поворотом направления регулярного дрейфа плазмы в горизонтальной плоскости. Примеры подобного изменения ориентации скорости дрейфа мелкомасштабных неоднородностей, полученные при помощи одновременного приёма сигналов ракурсного рассеяния с различных направлений, ранее приводились в работе [5].

Независимые оценки скорости дрейфа неоднородностей километровых масштабов были сделаны на основе данных о форме спектров амплитудных мерцаний сигнала ИСЗ. Они также приведены на

рис. 4 (кривая *2*). Указанная зависимость была получена посредством оценки эффективной скорости движения дифракционной картины по частоте первого френелевского минимума в спектрах амплитудных мерцаний. Правомерность такого подхода была ранее продемонстрирована в эксперименте [2], где для радиопросвечивания ВО использовались когерентные сигналы орбитальных ИСЗ серии NNSS «Транзит» на частотах 150 и 400 МГц. В указанном эксперименте сигнал ИСЗ принимался на полигоне «Зимёнки». Луч зрения на ИСЗ пересекал ВО в северо-южном направлении со скоростью около 2 км/с и был виден из точки наблюдения в направлении на восток под углом приблизительно 60° от горизонта. При этом спектры амплитудных и фазовых мерцаний содержали глубокие френелевские осцилляции, свидетельствовавшие о справедливости модели тонкого ФЭ при описании радиомерцаний. Отметим, что именно этой модели соответствует выражение (2), из которого следует, что первый френелевский минимум спектра флуктуаций интенсивности имеет место при условии $\nu = v_{\text{д}}/l_{\text{F}}$, где $l_{\text{F}} = \sqrt{\lambda z}$. В нашем эксперименте для получения сведений о скорости дрейфа неоднородностей с масштабом порядка $l_{\text{F}} \simeq 0{,}6$ км использовались усреднённые спектры мощности амплитудных мерцаний, вычислявшиеся в течение 7-минутных интервалов, в которых положение минимума определялось путём стягивания спектрального окна. Как видно из сравнения приведённых на рис. 4 зависимостей (кривые *1* и *2*), значения модуля проекции скорости, полученные разными методами, совпадали по порядку величины. Значения, полученные до 22:50 MSK, когда проекция скорости $\mathbf{v}_{\text{д}}$ мелкомасштабных неоднородностей на направление вектора рассеяния (см. рис. 4) была отрицательной, следует сравнивать только по модулю, поскольку по спектрам радиомерцаний мы не могли определять направление скорости дрейфа. Отметим, что в момент времени, соответствующий обращению проекции скорости дрейфа в нуль (22:50 MSK), по данным спектральной обработки радиомерцаний, приведённым на рис. 2, наблюдалось уменьшение частоты мерцаний, что свидетельствует об уменьшении проекции скорости дрейфа неоднородностей на плоскость, ортогональную радиолучу. Наилучшее соответствие значений скорости дрейфа, полученных разными методами, имело место между 23:00 и 24:00 MSK.

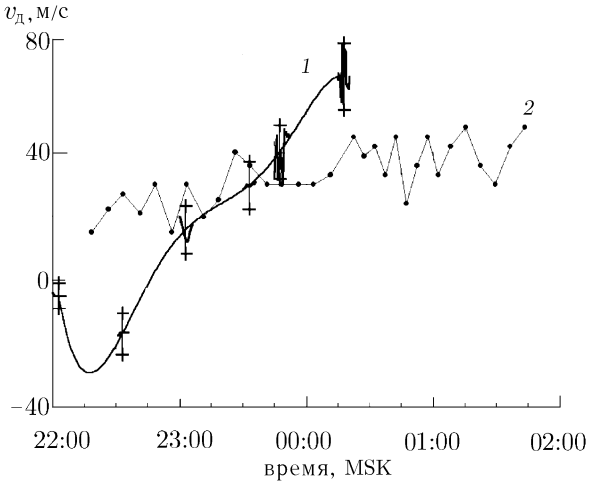

Рис. 4. Зависимость проекции $(v_{\text{д}})_{æ}$ скорости дрейфа неоднородностей с масштабами 7,3 и 11 м на направление вектора рассеяния, полученная по измерению на УТР-2 доплеровского сдвига сигналов ракурсного рассеяния; вертикальными отрезками указана ширина доплеровских спектров (кривая *1*). Оценка скорости дрейфа неоднородностей с масштабом около 0,6 км, полученная при обработке спектров мерцаний амплитуды сигнала ИСЗ на частоте 243 МГц (кривая *2*)

Таким образом, можно предположить, что наблюдавшееся на спектрограмме (см. рис. 2) увеличение частоты мерцаний было связано с увеличением скорости дрейфа неоднородностей, при этом спектр мощности флуктуаций амплитуды сдвигался в область более высоких частот. Минимальный измеряемый поперечный масштаб неоднородностей при этом составлял $l_{\perp} \simeq 10 \div 20$ м. Сравнивая усреднённые спектры мощности мерцаний, приведённые на рис. 3, и данные о скорости дрейфа неоднородностей, можно сделать вывод, что область спектра ИИТ с показателем степени $p \lesssim 2$ соответствует масштабам $l_x = v_{\text{д}}/\nu$ от 30÷60 м до 200÷400 м. Показатель спектра резко уменьшается в области меньших масштабов и составляет $p \gtrsim 3 \div 4$. С помощью частотной фильтрации исходных данных были получены значения индекса мерцаний амплитуды сигнала $S_{\delta A^2}$ в области широкополосного максимума, которые составили $(0{,}7 \div 2) \cdot 10^{-3}$, причём в интервале времени 22:15–23:30 MSK имел место рост индекса $S_{\delta A^2}$.

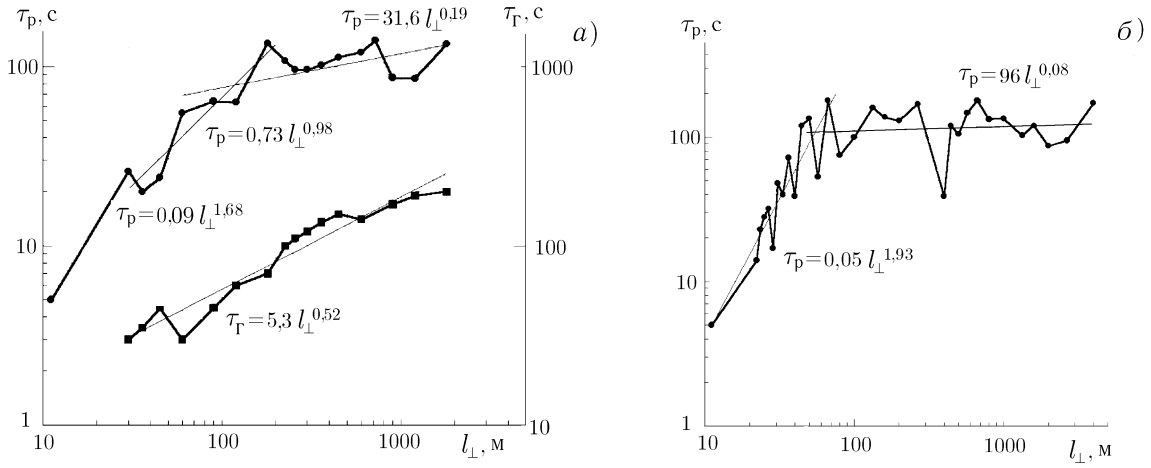

Рис. 5. Зависимости от масштаба $l_\perp$ времени развития $\tau_г$ и времени релаксации $\tau_р$ интенсивности амплитудных мерцаний сигнала ИСЗ для сеансов нагрева 22:15–22:22 MSK (панель *а*) и 23:22–23:30 MSK (панель *б*) 19–20.08.98. Прямые линии соответствуют аппроксимации зависимостей степенными функциями

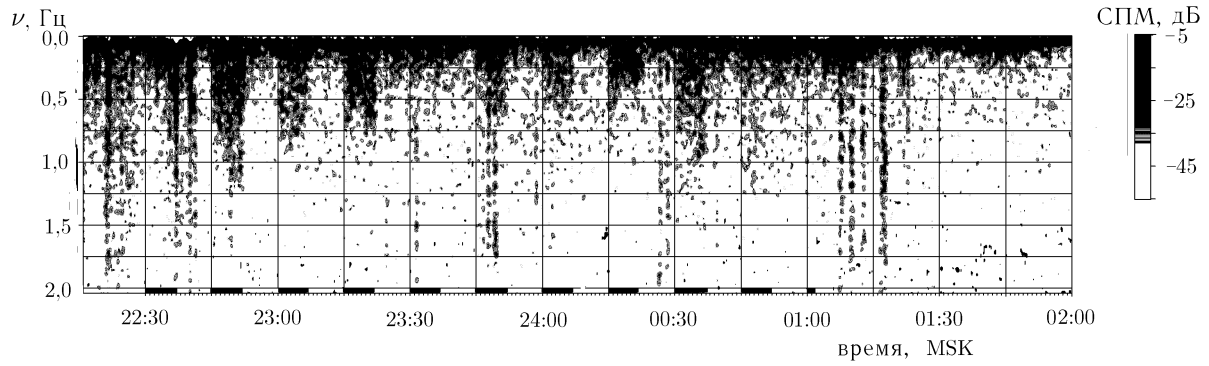

Рис. 6. Спектрограмма амплитудных мерцаний сигнала ИСЗ на частоте 243 МГц, полученная 21–22.08.98. Мощность излучения стенда «Сура» $P_{эфф} = 150$ МВт, $f_0 = 4\,785$ кГц, диаграмма направленности наклонена на 8° к северу от вертикали. Обозначения те же, что на рис. 2

Отметим, что в указанный период времени интенсивность сигнала ракурсного рассеяния от станции РВМ также возрастала.

Данные о скорости дрейфа неоднородностей были использованы для построения зависимостей времён релаксации и развития неоднородностей от их поперечного масштаба. При обработке была осуществлена частотная фильтрация исходного массива динамических спектров мерцаний амплитуды с целью получения информации о временнóй эволюции спектральных составляющих, отвечающих заданным масштабам неоднородностей. Время релаксации $\tau_р$ определялось по уменьшению в e раз интенсивности флуктуаций в каждом из спектральных интервалов. На рис. 5*а*, *б* приведены результаты измерений времени $\tau_р$ для различных масштабов $l_\perp$ для двух сеансов, соответствующих временам 22:22 и 23:30 MSK после выключения нагрева. Точка, отвечающая масштабу $l_\perp \sim 11$ м, была получена по измерению времени релаксации сигнала ракурсного рассеяния от станции РВМ.

Видно, что в диапазонах масштабов $l_\perp \lesssim 20 \div 30$ м для рис. 5*а* и $l_\perp \lesssim 50 \div 60$ м для рис. 5*б* имеет место приблизительно квадратичная зависимость $\tau_р$ от $l_\perp$. Для бóльших масштабов время $\tau_р$ слабо зависит от $l_\perp$ и составляет около 100 с. На этом же рисунке приведена зависимость характерного времени $\tau_г$

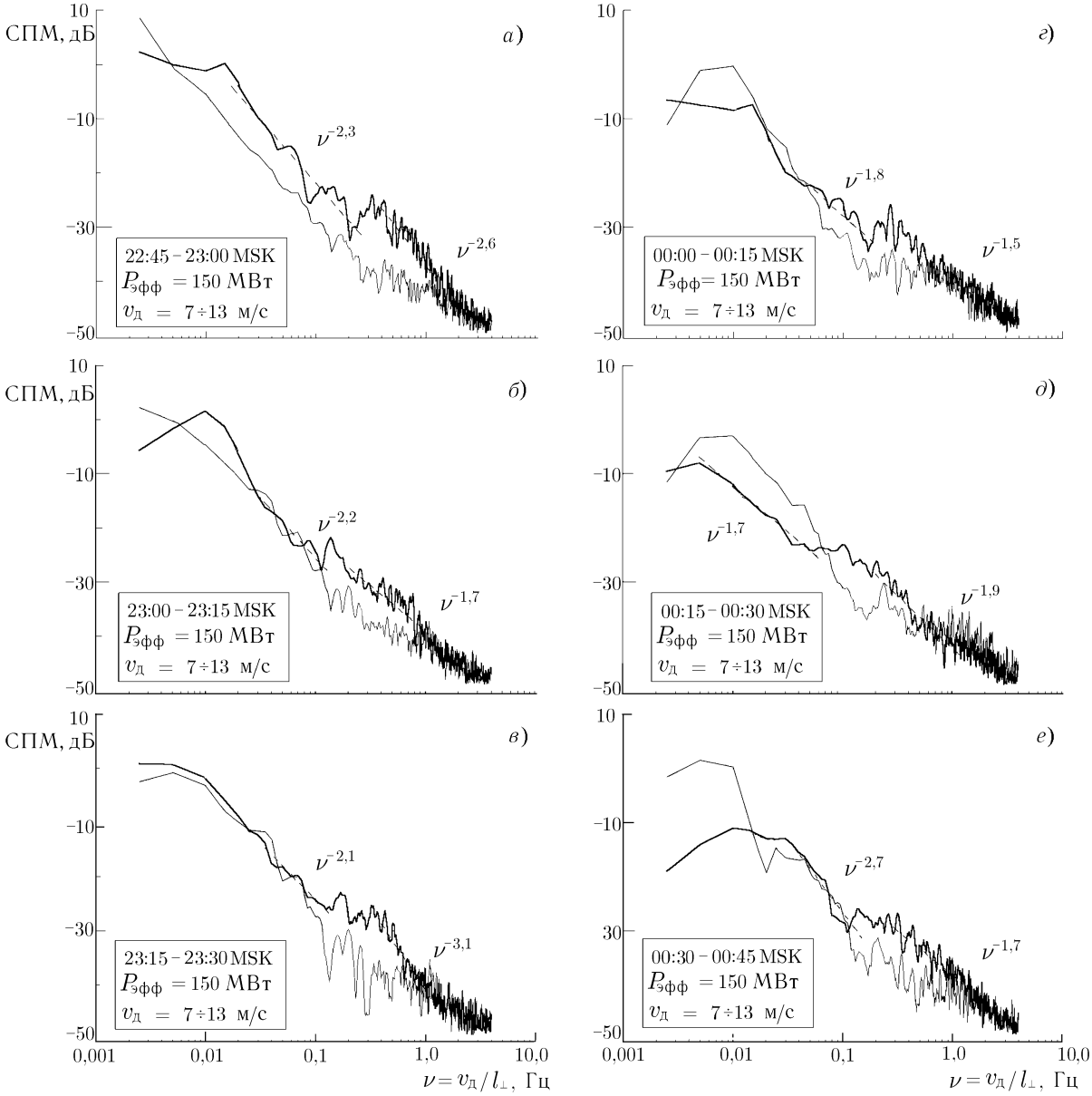

Рис. 7. Спектры мощности амплитудных мерцаний сигнала ИСЗ для измерений 21–22.08.98 Обозначения те же, что на рис. 3

развития искусственных неоднородностей, определяемого как характерное время роста интенсивности рассеянного сигнала I_s до стационарного значения I_{s0} в рамках модели $I_s = I_{s0}[1 - \exp(-t/\tau_г)]$. Из полученных результатов следует, что во всём диапазоне масштабов, от 30 м до 2 км, имеет место зависимость, близкая к $\tau_г \propto l_\perp^{0,5}$, что соответствует ранее полученным данным [1, 6].

Результаты аналогичной обработки измерений, проведённых в ночь с 21 на 22 августа, приведены на рис. 6–9. В этом цикле измерений диаграмма направленности нагревного стенда была наклонена к северу приблизительно на угол 8°, частота излучения стенда составляла 4 785 кГц. Во всех сеансах нагрева использовался синфазный режим работы трёх передатчиков, при этом излучаемая эффективная мощность была максимальна и составляла 150 МВт. Для диагностики сигналов ракурсного рас-

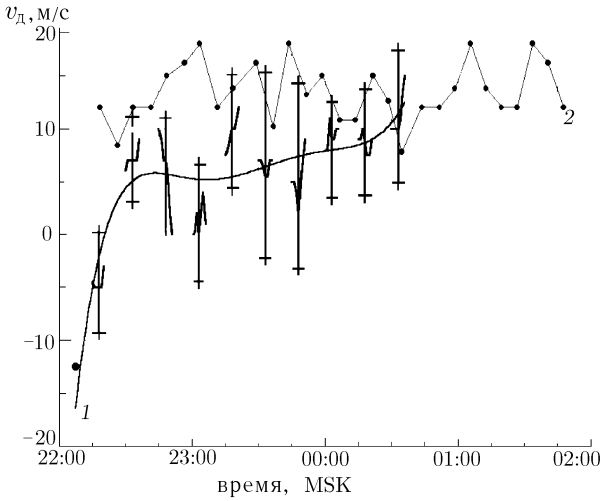

Рис. 8. То же, что на рис. 4, для 21—22.08.98

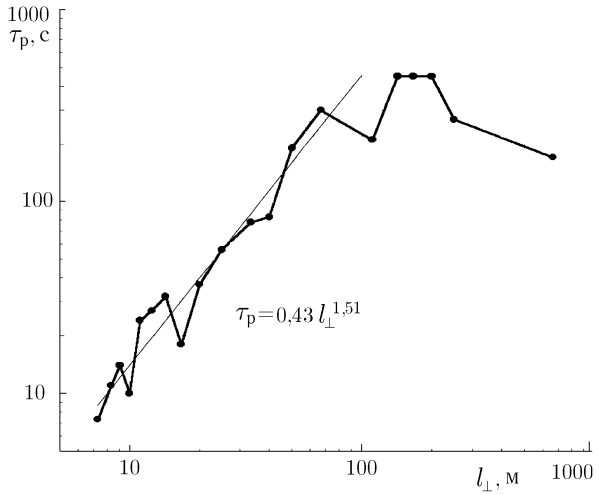

Рис. 9. Зависимость времени релаксации $\tau_р$ от масштаба $l_\perp$ для сеанса нагрева 22:52—23:00 MSK 21.08.98

сеяния использовался только радиопередатчик ХНУ, работавший на частоте 20,5 МГц. В отличие от данных, полученных с 19 на 20 августа, скорости дрейфа неоднородностей были существенно меньше и оставались примерно одинаковыми в течение длительного времени наблюдений (см. рис. 8). Абсолютная величина спектрального уширения также оставалась приблизительно постоянной и примерно соответствовала минимальным значениям, наблюдавшимся в предыдущем цикле измерений. Индекс мерцаний в области спектрального максимума был меньше, чем в предыдущем цикле, и составлял $S_{\delta A^2} \simeq (0{,}4 \div 1) \cdot 10^{-3}$. Из результатов спектральной обработки видно (см. рис. 7), что во всех циклах нагрева время релаксации крупномасштабной части спектра ИИТ было порядка или больше времени паузы (8 мин) в работе стенда. Зависимость времени релаксации от поперечного масштаба неоднородностей для интервала нагрева 22:52–23:00 MSK приведена на рис. 9. Видно, что в диапазоне масштабов $7 \lesssim l_\perp \lesssim 100$ м имела место степенная зависимость $\tau_р \propto l_\perp^\alpha$ с показателем $\alpha \simeq 1{,}5$. Изменение показателя степени наступало в области масштабов $l_\perp \gtrsim 100$ м, где характерное время релаксации $\tau_р \sim 200 \div 500$ с в несколько раз превышало значения $\tau_р$, полученные в предыдущем цикле измерений (см. рис. 5). Отметим, что благодаря использованной методике оценки времён релаксации отдельных спектральных составляющих в эксперименте удалось в значительной степени конкретизировать характер зависимости $\tau_р(l_\perp)$ в диапазоне масштабов $l_\perp \gtrsim 10 \div 100$ м, где столь детальные измерения ранее не проводились. В частности, показано, что в ряде случаев имела место зависимость $\tau_р(l_\perp)$, близкая к квадратичной вплоть до $l_\perp \sim 100$ м, причём при бóльших масштабах показатель степени α уменьшался до значений, близких к нулю.

3. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Полученные данные о времени релаксации искусственных неоднородностей позволяют определить эффективные коэффициенты поперечной и продольной диффузии в верхней ионосфере и оценить характерный масштаб неоднородностей концентрации в направлении геомагнитного поля. При вычислении поперечного коэффициента диффузии будем исходить из соотношения

$$D_\perp = \frac{1}{æ_\perp^2 \tau} = \frac{l_\perp^2}{(2\pi)^2 \tau}\,, \tag{5}$$

в котором $\tau = 2\tau_{\rm p}$, т. к. время $\tau_{\rm p}$ определялось по уменьшению интенсивности флуктуаций сигнала, а τ в выражении (5) соответствует уменьшению амплитуды возмущения в e раз. Подставляя в (5) $l_\perp \simeq 10$ м и $\tau \simeq 10$ с (см. рис. 4), получим $D_\perp \simeq (2\div3)\cdot 10^{-1}$ м^2/с, что хорошо согласуется с результатами, полученными ранее (см. [1]), и соответствует коэффициенту амбиполярной поперечной диффузии

$$D_{\rm a\perp} = \frac{\kappa\,(T_{\rm e}+T_{\rm i})\,\nu_{\rm e}}{m_{\rm e}\omega_{B{\rm e}}^2} \simeq 2\cdot 10^{-1}\ {\rm м}^2/{\rm с}.$$

Здесь κ — постоянная Больцмана, $T_{\rm e}$ и $T_{\rm i}$ — электронная и ионная температуры, выраженные в градусах Кельвина, $\nu_{\rm e}$ и $\omega_{B{\rm e}}$ — электронная частота соударений и гирочастота, $m_{\rm e}$ — масса электрона.

Будем предполагать, что в диапазоне масштабов, где $\tau_{\rm p} \simeq {\rm const}$, имеет место продольная амбиполярная диффузия с коэффициентом

$$D_{\rm a\parallel} = \frac{\kappa\,(T_{\rm e}+T_{\rm i})}{m_{\rm i}\nu_{\rm in}} \simeq (0{,}3\div1)\cdot 10^6\ {\rm м}^2/{\rm с},$$

где $\nu_{\rm in}$ и $m_{\rm i}$ — эффективная частота соударений ионов с нейтралами и масса иона. Из принятой в [1, 6] модели, согласно которой диффузия мелкомасштабных неоднородностей в верхней ионосфере происходит в так называемом двуполярном режиме (см. [22]) и определяется только коэффициентами амбиполярной поперечной и продольной диффузии, следует, что в области масштабов, где происходит смена режима диффузии с поперечного на продольный, степень вытянутости возмущений в направлении магнитного поля должна удовлетворять условию $\gamma = æ_\perp/æ_\parallel \lesssim \sqrt{D_{\rm a\parallel}/D_{\rm a\perp}} = \sqrt{\omega_{B{\rm e}}\omega_{B{\rm i}}/(\nu_{\rm e}\nu_{\rm in})} \sim 10^3$. Тогда для формы трёхмерного спектра флуктуаций концентрации вида

$$F_{\delta N}(æ_\perp, æ_\parallel) = F_{\perp\delta N}(æ_\perp)F_{\parallel\delta N}(æ_\parallel) = F_{\perp\delta N}(æ_\perp)\,\frac{\langle\delta N_\parallel^2\rangle\, l_{0\parallel}}{2\sqrt{\pi}}\,\exp\left(-æ_\parallel^2 l_{0\parallel}^2/4\right) \tag{6}$$

при $æ_\parallel \simeq 2/l_{0\parallel}$ получим

$$l_{0\parallel} \lesssim \sqrt{\frac{D_{\rm a\parallel}}{D_{\rm a\perp}}}\,\frac{l_\perp^*}{\pi} \simeq \frac{10^3 l_\perp^*}{\pi}\,, \tag{7}$$

где $l_\perp^*$ — поперечный масштаб, при котором показатель степени зависимости $\tau_{\rm p} \propto l_\perp^\alpha$ изменяется с $\alpha \simeq 2$ до $\alpha \simeq 0$. Подставляя в (7) значение $l_\perp^* \simeq 50\div100$ м, получим эффективный продольный масштаб $l_{0\parallel} \simeq 15\div30$ км. Отметим, что характерный масштаб $l_\perp^*$, при котором происходило уменьшение показателя α в зависимости $\tau_{\rm p}(l_\perp)$, в данном эксперименте был существенно больше, чем наблюдавшийся ранее в экспериментах по ракурсному рассеянию радиоволн [1, 6], где приводились значения $l_\perp^* \simeq 7\div10$ м. Последнее может быть вызвано увеличением степени вытянутости неоднородностей в направлении геомагнитного поля, что должно приводить к увеличению времени релаксации неоднородностей декаметровых масштабов; при этом влияние электронной амбиполярной диффузии на релаксацию возмущений концентрации оказывается определяющим для существенно бóльших масштабов $l_\perp$. Данные, полученные с 21 на 22 августа, свидетельствуют о том, что увеличение $\tau_{\rm p}$ для крупномасштабных неоднородностей имеет место при уменьшении скорости регулярного дрейфа плазмы. Если бы при релаксации возмущений имела место униполярная диффузия [23], то для протекания электронной поперечной диффузии была бы необходима существенно бóльшая степень вытянутости неоднородностей $\gamma \gtrsim \sqrt{D_{\rm e\parallel}/D_{\rm e\perp}} \sim 3\cdot 10^4$. Здесь $D_{\rm e\parallel} = \kappa T_{\rm e}/(m_{\rm e}\nu_{\rm e})$ — коэффициент продольной электронной диффузии, который в максимуме F-слоя примерно на девять порядков больше коэффициента поперечной электронной диффузии $D_{\rm e\perp}$. При этом для неоднородностей с масштабами $l_\perp \sim 100$ м для существования электронной поперечной диффузии продольный масштаб возмущений должен превышать характерную толщину F-слоя ионосферы, что, по-видимому, не реализуется на практике. Кроме того, при

меньшей степени вытянутости неоднородностей время $\tau_{\rm p}$ уменьшается вследствие влияния ионной поперечной диффузии, коэффициент которой $D_{\rm i\perp} = \kappa T_{\rm i}\nu_{\rm in}/(m_{\rm i}\omega_{B{\rm i}}^2)$ в условиях F-области ионосферы примерно на два порядка превышает коэффициент поперечной электронной диффузии $D_{\rm e\perp}$.

Для формы спектра (6) и углах между радиолучом и магнитным полем, превышающих параметр $l_\perp/(\pi l_{0\|})$ (последнее условие заведомо выполнялось при использованной геометрии наблюдений), в области масштабов, меньших размера первой зоны Френеля, имеет место соотношение $F_{\delta A}(æ_x) \propto \propto F_{\delta N}(æ_x)$ (см. [20]), поэтому интенсивность флуктуаций концентрации

$$\langle\delta N^2\rangle \propto \int\limits_0^{æ_\perp} {\rm d}æ_\perp\, æ_\perp F_{\delta N}(æ_\perp) \propto æ_\perp^{-p+2}. \tag{8}$$

Таким образом, в соответствии с (8) при $p \lesssim 2$ интенсивность флуктуаций концентрации $\langle\delta N^2\rangle(æ_\perp)$ должна возрастать с уменьшением масштаба $l_\perp$. Именно такая ситуация реализуется для ИИТ в интервале масштабов $30\div60 \lesssim l_\perp \lesssim 300\div400$ м.

Оценим интенсивность относительных флуктуаций концентрации $\sqrt{\langle\delta N^2\rangle}$ при $l_\perp \simeq 30$ м. Используя тот факт, что на масштабах $l_\perp \lesssim 30$ м наклон спектра флуктуаций амплитуды резко увеличивается (см. данные на рис. 3 и 7), представим спектр флуктуаций электронной концентрации в виде трёхмерной гауссовой формы:

$$F_{\delta N}(æ_\perp, æ_\|) = \frac{\langle\delta N^2\rangle\, l_{0\perp}^2 l_{0\|}}{8\pi^{3/2}}\, \exp\left(-\frac{æ_\perp^2 l_{0\perp}^2}{4}\right) \exp\left(-\frac{æ_\|^2 l_{0\|}^2}{4}\right). \tag{9}$$

Здесь предполагается, что флуктуации в каждом из направлений независимы, поэтому $\langle\delta N^2\rangle = = \langle\delta N_\perp^2\rangle\,\langle\delta N_\|^2\rangle$. Далее воспользуемся известным выражением для индекса мерцаний, полученным для гауссова спектра неоднородностей [20]:

$$S_{\delta A^2} = \langle s_0^2\rangle = \frac{\pi^{5/2} f_{\rm p}^4}{f^2 c^2}\, l_z\, \Delta z\, \langle\delta N^2\rangle, \tag{10}$$

где $\langle s_0^2\rangle$ — средний квадрат флуктуаций геометрооптической фазы сигнала, прошедшего область неоднородностей. Поскольку для геометрии эксперимента угол между направлением радиолуча и нормалью к магнитному полю составлял примерно 60°, будем считать, что характерный размер ВО в направлении радиолуча составляет $\Delta z \simeq 2l_{0\|}/\sin 60°$, а размер неоднородности в этом же направлении равен $l_z \simeq l_{0\perp}/\cos 60°$. Подставляя в (9) значения параметров $l_{0\|} \sim 30$ км, $l_{0\perp} \sim 20$ м, $f_{\rm p} \simeq 6$ МГц, получим $\sqrt{\langle\delta N^2\rangle} \simeq 0{,}3\sqrt{S_{\delta A^2}}$. В соответствии с приведёнными оценками для сеанса в 23:00–23:15 MSK 19 августа, отвечавшего максимальному значению индекса мерцаний $S_{\delta A^2} \sim 2\cdot10^{-3}$, относительные среднеквадратичные флуктуации электронной концентрации в области масштабов $l_\perp \simeq 30\div60$ м составили $\sqrt{\langle\delta N^2\rangle} \lesssim 1\div1{,}5$ %.

Данные о спектральных характеристиках искусственных неоднородностей, приведённые в настоящей работе, хорошо согласуются с результатами, полученными ранее. В работе [12] по измерению частотной зависимости ослабления пробных волн X-поляризации в диапазоне 5÷10 МГц был сделан вывод о существовании максимума в спектре ИИТ на масштабах $l_\perp$ порядка длины волны накачки. В [6] по данным о сечении рассеяния области ИИТ, возбуждаемой при помощи нагревного стенда «Сура», в диапазоне масштабов $l_\perp \sim 1\div30$ м был сделан вывод том, что изменение от $p = 1\div2$ до $p \approx 3$ показателя степени в зависимости спектральной плотности флуктуаций электронной концентрации от масштаба $l_\perp$ происходит на масштабе $l_\perp \simeq 10$ м. В [9] приведены результаты измерений формы спектра ИИТ с борта ракеты, выполненные для возмущённой области над Аресибо (18,5° с. ш., 66,7° з. д.), из

которых следует, что на масштабах $30 \lesssim l_\perp \lesssim 300$ м реализуется степенной спектр с показателем одномерного спектра n, близким к нулю. В области масштабов $l_\perp \lesssim 30$ м значение n резко увеличивалось до $n \gtrsim 4$. Отметим, что в отличие от метода радиопросвечивания при локальных измерениях трёхмерный спектр флуктуаций электронной концентрации усредняется в плоскости, ортогональной направлению движения ракеты, поэтому измеряемый показатель степенного спектра $\langle F_{\delta N}\rangle \propto æ_x^{-n}$ на единицу меньше, чем в случае радиопросвечивания: $n = p - 1$ (см. [20]). В эксперименте [4] по радиопросвечиванию сигналом квазигеостационарного ИСЗ области ИИТ, возбуждавшейся при помощи высокоширотного нагревного стенда, расположенного в Тромсё (69,6° с. ш., 19,2° в. д.), также наблюдался дополнительный максимум на частотах $\nu \sim 1\div10$ Гц, отвечавший масштабам $l_\perp \sim 10\div100$ м.

Рассмотрим данные об уширении доплеровских спектров сигналов ракурсного рассеяния. В соответствии с результатами выполненных ранее измерений [7], спектральное уширение доплеровских спектров в КВ диапазоне имеет две компоненты: узкополосную, для которой характерная ширина спектра составляет $\sqrt{\langle\Delta\nu^2\rangle} \simeq 0{,}3\div0{,}6$ Гц, и широкополосную, имеющую характерное уширение $\sqrt{\langle\Delta\nu^2\rangle} \simeq$ $\simeq 1\div3$ Гц и развивающуюся через некоторое время после появления узкополосной компоненты. Время релаксации широкополосной компоненты составляет примерно $1\div2$ с, тогда как характерное время релаксации центральной части доплеровского спектра, соответствующей узкополосной компоненте, по порядку величины совпадает с временем релаксации неоднородностей, ответственных за ракурсное рассеяние, и составляет $6\div10$ с. При этом уширение для обеих компонент не зависит от углового размера ВО в горизонтальной плоскости, приблизительно пропорционально частоте зондирующего сигнала и может сильно изменяться в течение суток. В [3] отмечается, что уширение доплеровского спектра сигнала на частоте 50 МГц при рассеянии на 3-метровых неоднородностях, возбуждаемых мощным радиопередатчиком над Аресибо, составляет $2\div3$ Гц и не зависит от скорости регулярного дрейфа плазмы.

Тот факт, что характерная величина уширения не зависит от углового размера ВО, позволяет сделать предположение о том, что уширение доплеровских спектров определяется случайными флуктуациями скорости мелкомасштабных неоднородностей плазмы, а не изменением проекции регулярной скорости дрейфа на направление вектора рассеяния внутри рассеивающего объёма. В последнем случае спектральное уширение было бы пропорционально угловому размеру ВО. В [24] предполагается, что уширение связано с генерацией в области нагрева низкочастотных дрейфовых МГД волн. Для возмущений данного типа фазовая скорость пространственной гармоники $æ_\perp$ в направлении, ортогональном магнитному полю, составляет

$$v_{æ_\perp} = \frac{\omega_{æ_\perp}}{æ_\perp} = \frac{cæ_\perp\kappa\,(T_\mathrm{e}+T_\mathrm{i})}{2eB_0}\,\delta N_{æ_\perp}, \tag{11}$$

где B_0 — индукция геомагнитного поля, e — элементарный заряд. Для гауссовой формы спектра (8) среднеквадратичная флуктуационная скорость в направлении вектора рассеяния определяется выражением

$$\sqrt{\langle\Delta v_x^2\rangle} = \frac{c\kappa\,(T_\mathrm{e}+T_\mathrm{i})}{2eB_0}\left(\int \mathrm{d}^3æ\; æ_x^2 F_{\delta N}(æ_\perp, æ_\parallel)\right)^{1/2} = \frac{\sqrt{2}\,c\kappa\,(T_\mathrm{e}+T_\mathrm{i})}{2eB_0}\,\frac{\sqrt{\langle\delta N^2\rangle}}{l_{0\perp}}. \tag{12}$$

В соответствии с (12) для частоты 15 МГц уширение доплеровского спектра $\sqrt{\langle\Delta\nu^2\rangle} \simeq 4\sqrt{\langle\Delta v_x^2\rangle}\,f/c \simeq$ $\simeq 0{,}4\div0{,}6$ Гц, что соответствует $\sqrt{\langle\Delta v_x^2\rangle} \simeq 2\div3$ м/с. Отметим, что из результатов измерений формы спектра ИИТ следует, что для масштабов $l_\perp \lesssim 10\div20$ м она не является гауссовой, а имеет степенной вид с показателем $p \gtrsim 3\div4$. В этом случае доплеровский спектр может иметь дополнительное уширение, обусловленное влиянием неоднородностей с масштабами порядка и меньше резонансного масштаба, определяемого условием Брэгга (3). Согласно [25] при резонансном рассеянии радиосигналов случайные флуктуации поля скоростей рассеивающих неоднородностей с масштабами, меньшими

брэгговской длины волны, приводят к появлению дополнительной широкополосной компоненты в доплеровском спектре, которая является менее интенсивной, чем его центральная (гауссова) часть, обусловленная крупномасштабными флуктуациями, и имеет степенной закон убывания в зависимости от частоты отстройки.

В заключение отметим, что наличие в области ИИТ хаотических движений со скоростями, определяемыми соотношением (11), может свидетельствовать о генерации структур, представляющих собой вращающиеся спиральные волны концентрации плазмы. Особенностью данных структур является то, что они возникают в результате отклонения идеальной плазмы от состояния равновесия, при котором градиент газокинетического давления уравновешен плотностью силы Ампера, возникающей при протекании в области возмущения квазистатического диамагнитного тока. Релаксация возмущений данного типа происходит в режиме двуполярной диффузии [24], при этом характерное время релаксации должно существенно превышать время униполярной диффузии [23]. Неустойчивость указанных волн по отношению к крупномасштабным возмущениям может приводить к развитию вращательно неинвариантной (гиротропной) турбулентности, при которой возможна инверсная перекачка энергии по спектру турбулентности от мелких масштабов к крупным.

В целом проблема поиска механизмов, определяющих как линейные, так и нелинейные процессы формирования спектра ИИТ в диапазоне поперечных масштабов порядка и больше длины волны накачки, в настоящее время остаётся нерешённой и требует дальнейших исследований.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (гранты № 99–02–16479, 01–05–65025, 01–02–16752), EOARD (грант F6170896 W0321) и проекта УНТЦ 827. Авторы благодарят С. Б. Кащеева (РИ НАНУ) и В. Г. Сомова (ХНУ) за участие в измерениях и О. Ф. Тырнова за поддержку измерительной кампании.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ерухимов Л. М., Метелёв С. А., Мясников Е. Н., Митяков Н. А., Фролов В. Л. // Изв. вузов. Радиофизика. 1987. Т. 30. С. 208.
2. Выборнов Ф. И., Ерухимов Л. М., Комраков Г. П. и др. // Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т. 29. С. 491.
3. Basu San., Basu S., Ganguly S. et al. // J. Geophys. Res. 1983. V. 88. P. 9 217.
4. Basu S., Costa E., Livingston R. C. et al. // J. Geophys. Res. 1997. V. 102. P. 7 469.
5. Беленов А. Ф. и др. // Изв. вузов. Радиофизика. 1977. Т. 20. С. 1 805.
6. Frolov V. L., Erukhimov L. M., Metelev S. A., Sergeev E. N. // J. Atm. Sol. Terr. Phys. 1997. V. 59. P. 2 317.
7. Авдеев В. Б., Белей В. С., Беленов А. Ф. и др. // Изв. вузов. Радиофизика. 1994. Т. 37. С. 479.
8. Eglitis P., Robinson T. R., Ritveld M. T. et al. // J. Geophys. Res. 1998. V. 103. P. 2 253.
9. Kelley M. C., Arce T. L., Salowey J. et al. // J. Geophys. Res. 1995. V. 100. P. 17 367.
10. Yampolski Yu. M., Beley V. S., Kascheev A. V. et al. // J. Geophys. Res. 1997. V. 102. P. 7 461.
11. Hysell D.L., Kelley M. C., Yampolski Yu. M. et al. // J. Geophys. Res. 1996. V. 101. P. 26 981.
12. Ерухимов Л. М., Комраков Г. П., Фролов В. Л. // Геомагнетизм и аэрономия. 1980. Т. 20. С. 112.
13. Грач С. М. и др. // Изв. вузов. Радиофизика. 1977. Т. 20. С. 1 827.
14. Васьков В. В., Гуревич А. В. // ЖЭТФ. 1977. Т. 73. С. 923.
15. Васьков В. В., Гуревич А. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1975. Т. 18. С. 1 261.
16. Васьков В. В., Гуревич А. В., Димант Я. С. // Геомагнетизм и аэрономия. 1981. Т. 21. С. 809.
17. Gurevich A., Hagfors T., Carlson H. et al. // Phys. Lett. A. 1998. V. 239. P. 385.
18. Мясников Е. Н. // Изв. вузов. Радиофизика. 1999. Т. 42. С. 691.

19. Frolov V. L., Chugurin V. V., Komrakov G. P. et al. // Изв. вузов. Радиофизика. 2000. Т. 43. С. 497.
20. Гершман Б. Н., Ерухимов Л. М., Яшин Ю. Я. Волновые явления в ионосфере и космической плазме. М.: Наука, 1984.
21. Брауде С. Я., Мень А. В., Содин Л. Г. // Антенны. Сб. статей. М.: Связь, 1978. С. 3.
22. Голант В. Е. // УФН. 1963. Т. 79. С. 377.
23. Гуревич А. В., Цедилина Е. Е. // УФН. 1967. Т. 91. С. 609.
24. Ерухимов Л. М., Мясников Е. Н. // Изв. вузов. Радиофизика. 1998. Т. 41. С. 194.
25. Горелик Г. С. // Радиотехника и электроника. 1956. Т. 1. С. 695.

[1] Научно-исследовательский радиофизический институт, г. Нижний Новгород, Россия,
[2] Казанский госуниверситет, г. Казань, Россия,
[3] Радиоастрономический институт НАН Украины, г. Харьков, Украина,
[4] Philips Laboratory, Massachusetts, USA

Поступила в редакцию
8 декабря 2000 г.

SPATIAL-SPECTRUM FORM OF ARTIFICIAL IONOSPHERIC IRREGULARITIES INDUCED BY POWERFUL HF RADIOWAVES

E. N. Myasnikov, N. V. Muravjeva, E. N. Sergeev, V. L. Frolov, A. M. Nasyrov, I. A. Nasyrov, V. S. Beley, A. V. Koloskov, Yu. M. Yampolsky, and K. M. Groves

We present measurement results and spatial-spectrum shape of the dependence of relaxation time on the scale across the geomagnetic field for artificial ionospheric irregularities (AIIs) created by the powerful HF heating facility SURA. The irregularity diagnostics was based on observing amplitude scintillations of a 243-MHz beacon signal from a quasi-geostationary, solar-synchronous satellite and measuring field-aligned scattering at frequencies 15 and 20 MHz. The satellite signal was received at the Kazan State University Observatory. The field-aligned scattered signals were received and analyzed by a bistatic HF radar based on the UTR-2 radio telescope located near Kharkov (Ukraine). It is shown that in a scale range of $30-60 \lesssim l_\perp \lesssim 200-400$ m, irregularities of the electron number density are developed whose two-dimensional spectrum in the plane perpendicular to the geomagnetic field is a power law $æ_\perp^{-p}$ with index $p \lesssim 2$. In this case, the relative fluctuations $\sqrt{\langle \delta N^2 \rangle}$ of the electron number density increase with decreasing scale $l_\perp = 2\pi/æ_\perp$. An estimate of $\sqrt{\langle \delta N^2 \rangle} \lesssim 1-1.5\%$ is obtained for a heating power of 150 MW and irregularity scales $l_\perp \sim 30-60$ m at which the fluctuations are maximum. The measured dependence of the AII relaxation time, defined as the e-folding time of the amplitude-scintillation intensity, has the form $\tau_\mathrm{p} \propto l_\perp^\alpha$. If $l_\perp \lesssim 30-60$ m, then the index α is close to 2 whereas the effective diffusion coefficient $D_\perp \simeq (2-3)\cdot 10^{-1}$ m^2/s corresponds to the ambipolar cross-field diffusion coefficient in a magnetized plasma. The time τ_p for scales $l_\perp \gtrsim 60-100$ m is independent of $l_\perp$ and increases with decreasing velocity of the regular drift of the plasma. The Doppler-spectrum broadening $\sqrt{\langle \Delta\nu^2 \rangle} \lesssim 0.6$ Hz observed when receiving field-aligned scattered signals can be related to chaotic motions of plasma-density disturbances with drift velocities for which r.m.s. fluctuations in the vicinity of the scale $l_\perp \sim 20$ m corresponding to a strong variation in the power-law index amount to $\sqrt{\langle \Delta v^2 \rangle} \simeq 2-3$ m/s.

УДК 621.371:621.3.029.65

ОТРАЖЕНИЕ КОРОТКИХ МИЛЛИМЕТРОВЫХ РАДИОВОЛН ОТ СНЕЖНОГО ПОКРОВА

Б. А. Свердлов, Н. И. Фурашов

Проведены измерения квазизеркального отражения радиоволн от естественного снежного покрова на частотах 138 и 247 ГГц. При угле скольжения 0,4° и горизонтальной поляризации излучения амплитудный коэффициент отражения на указанных частотах составил 0,22÷0,43 и 0,15÷0,18 соответственно. Обнаружены сильные флуктуации отражённого сигнала, обусловленные ветровым переносом частиц снега вблизи поверхности снежного покрова.

Для оценки некоторых характеристик радиосистем миллиметрового диапазона длин волн, работающих в условиях, когда существенны эффекты интерференции прямой волны с волной, отражённой от подстилающей поверхности, необходимо знание отражательных свойств этой поверхности. В случае, когда подстилающей поверхностью является снежный покров, теоретический расчёт электромагнитных полей отражённых от него волн, особенно коротких миллиметровых, в силу ряда причин (многообразие форм и размеров снежных кристаллов, образующих сложную дисперсную среду — снежный покров, шероховатость и неровность поверхности, изменчивость структуры и диэлектрических свойств снежного покрова и т. д.) затруднён, так что основным средством исследования отражательных свойств является эксперимент. Однако в настоящее время набор экспериментальных данных об отражательных свойствах снежного покрова в миллиметровом диапазоне длин волн довольно ограничен [1—3].

В данной работе приводятся результаты измерений коэффициента квазизеркального отражения радиоволн естественным снежным покровом на частотах 138 и 247 ГГц. В отличие от работ [1—3], в которых коэффициент отражения снежного покрова вычислялся по зарегистрированной интерференционной структуре поля, являющейся результатом суперпозиции прямой и отражённой волн, здесь коэффициент отражения измерялся непосредственно, т. е. путём последовательной регистрации прямого и отражённого сигналов.

Измерения проводились на территории загородной лаборатории НИРФИ «Зимёнки». Радиотрасса длиной 1 025 м проходила над ровной земной поверхностью со скошенной летом травой. Параболические антенны с диаметром 920 мм передающего и приёмного устройств располагались на высоте 5 и 2,5 м соответственно. Излучение к передающей антенне подводилось от одной из двух одновременно задействованных ламп обратной волны, генерировавших в разных частотных диапазонах. В качестве детекторов в приёмном устройстве и измерителе уровня излучаемой передатчиком мощности использовались неселективные оптико-акустические приёмники ОАП-7. Ширина диаграммы направленности передающей антенны в вертикальной плоскости (на уровне 0,5 по интенсивности) на частотах 138 и 247 ГГц составляла соответственно 10′ и 7′. Диаграмма направленности приёмной антенны на обеих частотах имела ширину около 35′. Эксперименты проводились при горизонтальной поляризации излучения. Более подробные сведения о приёмно-передающей аппаратуре содержатся в [4].

Процедура измерений сводилась к следующему. После установки нужной частоты излучения проводилось взаимное нацеливание передающей и приёмной антенн по максимуму сигнала, после чего регистрировался уровень прямого сигнала. Затем обе антенны устанавливались по углу места в положение, обеспечивающее приём излучения, квазизеркально отражённого от снежного покрова. Это положение находилось путём последовательных плавных подстроек передающей и приёмной антенн по углу места в окрестности их расчётной ориентации до достижения максимального уровня отражённого сигнала. Угол скольжения был равен примерно 0,4°.

Таблица 1

Частота, ГГц	Угол скольжения, град	Коэффициент отражения по амплитуде	Поляризация	Источник
138,0	0,4	0,22÷0,43	горизонтальная	настоящая работа
140,1	0,5÷2,0	0,34	вертикальная	[3]
150,0	2,1÷3,0	0,26÷0,73	вертикальная	[1]
	2,5÷3,1	0,55÷0,78	горизонтальная	[1]
	1,4÷2,2	0,04÷0,44	горизонтальная	[2]
247,0	0,4	0,15÷0,18	горизонтальная	настоящая работа
260,7	0,9÷2,0	0,16÷0,48	горизонтальная	[2]

Толщина снежного покрова при измерениях составляла 20÷40 см. Бóльшая часть сеансов измерений была проведена сразу после нескольких прошедших снегопадов. Температура воздуха за время измерений изменялась от +1 до −12° С. Полученные значения амплитудного коэффициента отражения снежного покрова приведены в табл. 1.

Случайная относительная ошибка измеренных коэффициентов отражения составляет 5÷10 %, возможная систематическая погрешность, связанная с попаданием на приёмник небольшой доли прямого сигнала при регистрации отражённого излучения, по оценкам, не превышает указанной случайной ошибки. Как видно из табл. 1, интервал полученных нами экспериментальных значений коэффициента отражения r снежного покрова на частоте 138 ГГц существенно шире, чем на частоте 247 ГГц. Следует заметить, однако, что на частоте 138 ГГц в большинстве случаев измеренные значения r не столь сильно отличались друг от друга. Так, в девяти проведённых сеансах измеренные значения коэффициента отражения лежали в интервале 0,34÷0,43, и лишь в одном сеансе получено «выпадающее» значение 0,22, определяющее нижнюю границу указанного в табл. 1 интервала. Коэффициент отражения на частоте 247 ГГц в этом же сеансе составил примерно 0,15, т. е. был наименьшим из измеренных на этой частоте. Причины значительного снижения отражательной способности снежного покрова на частоте 138 ГГц в упомянутом сеансе измерений точно нам не известны; можно лишь отметить, что измерения проводились после прошедшего накануне продолжительного снегопада при очень рыхлой структуре верхнего слоя снежного покрова.

В табл. 1 приведены также экспериментальные значения коэффициента отражения, полученные на близких частотах другими авторами. Видно, что в целом согласие данных вполне удовлетворительное. Отметим, однако, заметно бóльшие значения коэффициента отражения, полученные на частоте 150 ГГц в работе [1]. Возможно, это связано с тем, что в [1], в отличие от остальных работ, для отражения излучения использовалась специально выровненная площадка [5].

Остановимся на другом вопросе, связанном с отражением излучения от снежного покрова, а именно на флуктуациях интенсивности отражённого излучения. Было замечено, что отражённые сигналы, зарегистрированные в разные дни, по уровню флуктуаций могут существенно отличаться друг от друга. Наименьший уровень флуктуаций наблюдался в дни, когда скорость ветра на радиотрассе не превышала 2÷3 м/с. В такие дни глубина хаотической модуляции отражённого от снежного покрова сигнала на обеих частотах составляла 1÷2 %, что превышало глубину хаотической модуляции прямого сигнала не более чем в 1,5÷2 раза. Наиболее сильные флуктуации, имевшие характер замираний, были зарегистрированы в сеансах измерений, проводившихся при сильном порывистом ветре. В этих случаях относительная глубина замираний отражённого сигнала в отдельные моменты времени составляла

более 20 %.

Замирание отражённого сигнала может быть объяснено следующим образом. Как известно [6], при сильном ветре и температуре около $-2\,^\circ$ С и ниже, когда силы сцепления в свежевыпавшем снеге малы, наблюдается так называемый ветровой перенос снега, при котором снежные частицы отрываются от поверхности снежного покрова и движутся вдоль неё, образуя снежное облако. Толщина такого облака и концентрация частиц в нём зависят от скорости ветра и ряда других факторов. Обычно основная масса снега, переносимого ветром, сосредоточена в слое толщиной в несколько сантиметров, хотя небольшая часть снежных частиц может подниматься и на бóльшие высоты (до 1 м). При скользящем падении пучка излучения на снежную поверхность значительная часть его в зоне отражения проходит через облако, которое и вносит дополнительное меняющееся с изменением скорости ветра ослабление в отражённый сигнал. Не исключено, что ветровой перенос снега может вызывать и некоторую трансформацию отражающей поверхности, что также может приводить к изменению уровня отражённого сигнала. Подтверждением того, что наблюдавшиеся замирания отражённого сигнала связаны с ветровым переносом снега, могут служить записи отражённого сигнала [1] на частоте 138 ГГц, сделанные при одинаково сильном ветре ($7 \div 12$ м/с), но разных температурах воздуха: кривая *1* получена при температуре около $+1\,^\circ$ С, когда ветровой перенос снега отсутствовал, а кривая *2* — при температуре $-2{,}5\,^\circ$ С, когда он явственно наблюдался. Аналогичная картина флуктуаций отражённого сигнала наблюдалась и на частоте 247 ГГц, причём относительная глубина замираний сигнала, вызванных ветровым переносом снега, в этом случае была несколько больше (на $20 \div 40$ %), чем на частоте 138 ГГц. Что касается связи между глубиной замираний и скоростью ветра, то имеющиеся экспериментальные данные позволяют лишь утверждать, что с увеличением скорости ветра глубина замираний имеет тенденцию к росту. Для более детального изучения этого вопроса, как, впрочем, и других характеристик отражённого сигнала, необходимы систематические измерения с одновременным контролем общего состояния и физических параметров снежного покрова (особенно его верхнего слоя) в зоне отражения излучения.

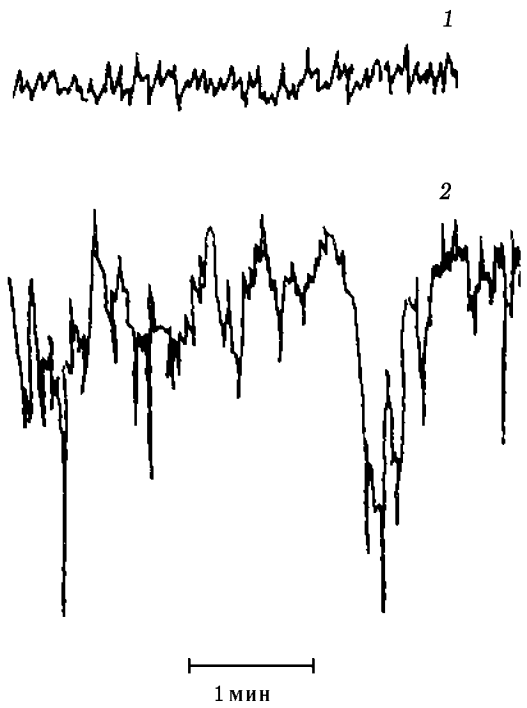

Рис. 1

На основании полученных данных следует ожидать, что при работе радиосистем миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов длин волн в условиях влияния подстилающей поверхности ветровой перенос снега может явиться источником дополнительных помех.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андреев Г. А., Мартынова З. А., Хохлов Г. И. // Радиотехника. 1979. Т. 34, № 8. С. 73.
2. Бабкин Ю. С., Исмаилов А. Т., Новиков С. С., Строганов Л. И. // Радиотехника и электроника. 1982. Т. 27, № 8. С. 1 641.

[1] Запись сигнала осуществлялась на самописце КСПП-4-014 при ширине полосы пропускания на выходе синхронного детектора приёмного устройства 1 Гц.

3. Lammers U. H. W., Hayes D. T., Marr R. A. // IEEE Trans. Geoscience and Remote Sensing. 1988. V. 26, No. 3.
4. Фурашов Н. И., Свердлов Б. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1999. Т. 42, № 2. С. 103.
5. Андреев Г. А., Хохлов Г. И., Черная Л. Ф. // Электромагнитные волны в атмосфере и космическом пространстве. М.: Наука, 1986. С. 65.
6. Снег. Справочник / Под ред. Д. М. Грея, Д. Х. Мэйла. Перевод с англ. под ред. чл.- кор. АН СССР В. М. Котлярова. Л.: Гидрометеоиздат, 1986. 751 с.

Научно-исследовательский радиофизический институт,
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию
20 апреля 2001 г.

REFLECTION OF SHORT MILLIMETER RADIOWAVES FROM A SNOWCOVER

B. A. Sverdlov, N. I. Furashov

Quasi-specular reflection of radiowaves from a natural snowcover was measured at frequencies of 138 and 247 GHz. The experimental values of the amplitude reflection coefficient lie inside intervals of 0.22—0.43 and 0.15—0.18 corresponding to the above-mentioned frequencies. These values were obtained for a grazing angle of 0.4° and for radiation with the horizontal polarization. Strong fluctuations of the reflected signal were discovered at both frequencies. This phenomenon is caused by the wind transfer of snow particles near the snowcover surface.

УДК 621.371.165:528.044.4

ДОПЛЕРОВСКИЕ СПЕКТРЫ САНТИМЕТРОВЫХ И МИЛЛИМЕТРОВЫХ РАДИОВОЛН, РАССЕЯННЫХ ВОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ ПОД МАЛЫМИ УГЛАМИ СКОЛЬЖЕНИЯ

М. Б. Каневский, В. Ю. Караев, Л. В. Лубяко, Э. М. Зуйкова, В. И. Титов, В. Ю. Гольдблат, Г. Н. Баландина

Излагаются результаты обработки доплеровских спектров радиолокационных сигналов сантиметрового и миллиметрового диапазонов длин волн, полученных в натурных экспериментах по обратному рассеянию электромагнитного излучения взволнованной водной поверхностью под малыми углами скольжения. Обработка проводилась методом разложения доплеровского спектра по трём базисным функциям (спектральным линиям), каждая из которых соответствует определённому механизму рассеяния. Получены сравнительные оценки энергетического вклада брэгговского (описываемого линией Гаусса) и двух небрэгговских механизмов, описываемых линиями Лоренца и Фойгта.

ВВЕДЕНИЕ

Рассеяние под малыми скользящими углами занимает особое место в проблеме взаимодействия электромагнитного СВЧ поля с взволнованной водной поверхностью. Такое рассеяние, помимо чисто прикладной значимости, привлекает к себе внимание тем, что при нём наблюдаются значительные расхождения между теорией брэгговского рассеяния и экспериментом.

При малых углах скольжения горизонтально поляризованный отражённый сигнал имеет характер всплесков и оказывается значительно более интенсивным, чем это следует из брэгговской теории, а его доплеровский спектр — сдвинутым в сторону высоких частот. Указанные особенности свидетельствуют о том, что обратное рассеяние горизонтально поляризованного излучения происходит на каких-то более быстрых, чем в случае сигнала с вертикальной поляризацией, рассеивателях, которые обычно связывают с обрушениями поверхностных волн.

Вообще при достаточно продолжительном ветре обрушения происходят по всему диапазону длин поверхностных волн (начиная от капиллярных) с частотой тем большей, чем короче соответствующая волна [1]. Обрушения имеют спорадический характер, причём пространственная структура обрушивающейся волны непрерывно меняется, образуя элементы с большой (и, скорее всего, различной для волн разной длины) кривизной и немалыми наклонами. В ряде работ рассматриваются модели таких элементов и дифракция электромагнитных волн на них: диэлектрический клин, моделирующий обострённый гребень волны перед обрушением [2], а также структуры, моделирующие поверхность непосредственно в момент обрушения и после него [3, 4]; отмечается также роль капельно-брызговой фракции [5]. Результаты этих работ свидетельствуют о том, что каждая из рассмотренных структур играет определённую роль в формировании рассеянного сигнала, однако цельная картина явления пока не получена.

Весьма полезным представляется предложенный в работе [6] метод анализа отражённого сигнала путём разложения его доплеровского спектра по трём базисным функциям, каждая из которых соответствует определённому механизму рассеяния. С помощью этого метода мы обработали данные нашего эксперимента и получили сравнительные оценки энергетического вклада различных механизмов в отражённый сигнал.

1. БАЗИСНЫЕ ФУНКЦИИ ДЛЯ РАЗЛОЖЕНИЯ ДОПЛЕРОВСКИХ СПЕКТРОВ

Система базисных функций, принятая в [6], состоит из спектральных линий Гаусса, Лоренца и Фойгта.

Линия Гаусса. В модели брэгговского рассеяния при нормальном распределении орбитальных скоростей на поверхности доплеровский спектр отражённого сигнала имеет гауссову форму [7]. Поэтому естественно предположить, что брэгговской компоненте рассеяния отвечает гауссова линия в доплеровском спектре отражённого сигнала:

$$f_{\mathrm{G}}(\nu) = \frac{1}{\Delta\nu_{\mathrm{G}}\sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{(\nu-\nu_{\mathrm{G}})^2}{(\Delta\nu_{\mathrm{G}})^2}\right], \tag{1}$$

где ν — текущая частота, ν_{G} — частота пика, $\Delta\nu_{\mathrm{G}}$ — полуширина линии. С помощью соотношения

$$\nu = \frac{2u}{\lambda}\cos\psi_0, \tag{2}$$

где λ — длина электромагнитной волны, ψ_0 — угол скольжения, введём новую переменную — скорость рассеивателя u, тогда

$$f_{\mathrm{G}}(u) = \frac{1}{\Delta u_{\mathrm{G}}\sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{(u-u_{\mathrm{G}})^2}{(\Delta u_{\mathrm{G}})^2}\right]. \tag{3}$$

Согласно теории брэгговского рассеяния положение пика определяется следующей формулой:

$$u_{\mathrm{G}}^{\text{Брэгг}} = u_{\text{ф}} + u_{\text{вс}} + u_{\text{Ст}}, \tag{4}$$

где $u_{\text{ф}}$ — фазовая скорость брэгговской компоненты спектра поверхностного волнения с длиной волны $\Lambda = \lambda/(2\cos\psi_0)$,

$$u_{\text{вс}} = (0{,}02 \div 0{,}03)\, u_{\text{в}} \tag{5}$$

— скорость ветрового сноса, $u_{\text{в}}$ — скорость ветра, $u_{\text{Ст}}$ — стоксова компонента скорости на поверхности.

Полуширина спектральной линии определяется как среднеквадратическое значение радиальной составляющей орбитальной скорости на освещённом участке поверхности. Если на этом участке одновременно или в разные моменты времени реализуются все значения орбитальной скорости, то

$$\Delta u_{\mathrm{G}} = u_{\text{орб}}\,(\cos\psi_0\cos\varphi_0 + \sin\varphi_0), \tag{6}$$

где $u_{\text{орб}} = \pi h/T$ — среднеквадратическое значение орбитальной скорости, φ_0 — азимутальный угол, который в дальнейшем предполагается равным нулю, h и T — высота и период характерной волны на поверхности.

Используя формулы из работы [8], стоксову скорость в случае глубокой воды представим в виде

$$u_{\text{Ст}} \approx \frac{2\pi u_{\text{орб}}}{gT}, \tag{7}$$

где g — ускорение свободного падения.

Линия Лоренца. Спектральная линия Лоренца отвечает случаю, когда излучатель (рассеиватель), движущийся с постоянной скоростью, существует конечное время («время жизни»). Вполне естественно связать эту линию с обрушениями волны (доминантной или близкой к ней), движущейся с определённой фазовой скоростью. Скорее всего, именно в процессе обрушения появляется, а затем

исчезает тот элемент волны, который обеспечивает преимущественное рассеяние горизонтально поляризованного излучения.

Используя соотношение (2), формулу для линии Лоренца запишем в виде

$$f_{\mathrm{L}}(u) = \frac{1}{\pi}\frac{\Delta u_{\mathrm{L}}}{(u-u_{\mathrm{L}})^2 + (\Delta u_{\mathrm{L}})^2}\,, \tag{8}$$

где u_{L} — положение пика линии, Δu_{L} — ширина линии на уровне 0,5. Время жизни рассеивателя, определённое как величина, обратная соответствующей частоте, даётся соотношением

$$t_{\mathrm{L}} = \lambda/(2\,\Delta u_{\mathrm{L}}\cos\psi_0). \tag{9}$$

Линия Фойгта. Эта линия, известная в астрофизике, представляет собой свёртку гауссовой и лоренцевой форм:

$$f_{\mathrm{V}}(u) = \frac{a}{\Delta u'_{\mathrm{G}}\,\pi^{3/2}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-y^2}\,\mathrm{d}y}{\left(\dfrac{u-u_{\mathrm{V}}}{\Delta u'_{\mathrm{G}}} - y\right)^2 + a^2}\,. \tag{10}$$

Величина u_{V} соответствует пику в спектре Фойгта, $\Delta u'_{\mathrm{G}}$ — полуширина гауссовой линии (на уровне e^{-1}), параметр Фойгта $a = \Delta u'_{\mathrm{L}}/\Delta u'_{\mathrm{G}}$ — отношение полуширин лоренцевой и гауссовой линий (здесь и в дальнейшем параметры лоренцевой и гауссовой линий, входящих в свёртку (10), присутствуют со штрихом в отличие от тех же параметров в (3) и (8)).

Физически форма линии Фойгта соответствует рассеивателям с конечным временем жизни и нормальным распределением скоростей. Очевидно, что Δu_{G} и $\Delta u'_{\mathrm{G}}$ — разные величины, поскольку они характеризуют распределение скоростей брэгговских и «быстрых» рассеивателей соответственно.

Линию Фойгта, по-видимому, следует связать с обрушениями континуума более мелких волн, обладающих различными скоростями (как собственными фазовыми, так и орбитальными в поле доминантной волны).

Доплеровский спектр $D(u)$ можно представить в виде разложения:

$$D(u) = \sum_{i=\mathrm{G,L,V}} C_i f_i(u), \tag{11}$$

при этом коэффициенты C_i характеризуют вклад каждого механизма в рассеянный сигнал.

Нестрогость данного подхода (используемый набор линий $f_i(u)$ не является полной системой ортогональных функций) компенсируется тем, что в эти функции априори заложены модели механизмов рассеяния, а поэтому возможная в принципе неоднозначность разложения сводится к минимуму. Об этом свидетельствует устойчивость общей структуры разложений (см. ниже).

2. АППАРАТУРА И УСЛОВИЯ ИЗМЕРЕНИЙ

Измерения обратного рассеяния проводились на Нижегородском водохранилище с помощью двух доплеровских скаттерометров на длинах волн $\lambda = 3{,}2$ и 0,8 см. Скаттерометры используют частотно-модулированное непрерывное излучение, в каждом из них приёмник и передатчик работают на одну антенну через направленный ответвитель. Опорный сигнал утечки и задержанный по времени сигнал, отражённый от водной поверхности, подаются на смеситель, в результате чего выделяется сигнал биений на 2-й и 3-й гармониках частоты модуляции. Этот принцип работы скаттерометров позволяет уменьшить размер облучаемой площадки водной поверхности не только за счёт диаграммы направленности антенны, но и за счёт выбора девиации частотной модуляции, что особенно важно при работе

на скользящих углах. Мощность передатчиков скаттерометров 30 мВт, коэффициент усиления антенн 36 дБ, чувствительность приёмников в частотной полосе 1 кГц не хуже 1 мкВ. Оба скаттерометра имеют симметричные антенны с диаграммой направленности шириной 3°.

Контроль состояния водной поверхности осуществлялся с помощью струнного волнографа и оптического спектроанализатора, позволяющего в реальном времени регистрировать пространственно-временные спектры поверхностного волнения [9].

Измерения проводились при скорости ветра 3,5 и 7 м/с. В первом случае характерная волна на поверхности имела длину $\Lambda_{\rm m} = 1{,}5$ м, период $T = 1$ с, высоту $h \approx 7$ см, а во втором $\Lambda_{\rm m} = 2{,}2$ м; $T = 1{,}2$ с; $h \approx 10$ см. Углы скольжения составляли $3^\circ \div 5^\circ$, зондирование осуществлялось навстречу движению волн.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ОБРАБОТКИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Прежде всего отметим, что помимо известных поляризационных эффектов, о которых говорилось во введении, наблюдались значительные различия характера сигнала на сантиметровых и миллиметровых волнах. На волне с длиной $\lambda = 3{,}2$ см при вертикальной поляризации сигнал имеет в основном шумоподобный характер с относительно слабыми всплесками, а с переходом к горизонтальной поляризации всплески сигнала становятся весьма интенсивными. На волне с длиной $\lambda = 0{,}8$ см всплески не столь интенсивны, и шумоподобный вид сигнала в основном характерен для обеих поляризаций.

В настоящей работе мы сосредоточим внимание на доплеровских спектрах, полученных по двухминутным реализациям сигнала и представленных в виде разложений по базисным функциям, описанным в предыдущем разделе. Соответствующие аппроксимации доплеровских спектров приведены на рис. 1–4, а численные параметры этих аппроксимаций в табл. 1, 2. Коэффициенты C_i, а также параметры спектральных линий находились путём подбора с последующим сравнением результатов по критерию наименьшего среднеквадратического отклонения экспериментальных точек от аппроксимирующего разложения.

Прежде всего обратимся к табл. 1, данные в которой относятся к вертикально поляризованному сигналу. Для каждой длины волны λ верхняя строка соответствует скорости ветра 3,5 м/с, нижняя — 7 м/с. В последнем столбце $E_{\rm G}$ и $E_{\rm V}$ обозначают выраженный в процентах энергетический вклад соответствующего механизма в отражённый сигнал (аналогично и в табл. 2). Отметим, что базисных спектров здесь всего два — Гаусса и Фойгта, поскольку коэффициент $C_{\rm L}$ оказался весьма малым. Как видно, вклад $E_{\rm G}$ гауссовой части рассеяния составляет около 70 %.

Для интерпретации гауссового спектра оценим слагаемые суммы (4), исходя из данных о поверхностном волнении: фазовая скорость брэгговской составляющей спектра волнения

$$u_{\text{ф}} = \begin{cases} 23 \text{ см/с}, & \lambda = 3{,}2 \text{ см}; \\ 34 \text{ см/с}, & \lambda = 0{,}8 \text{ см}, \end{cases}$$

скорость ветрового сноса

$$u_{\text{вс}} = \begin{cases} 7 \div 10{,}5 \text{ см/с}, & u_{\text{в}} = 3{,}5 \text{ м/с}; \\ 14 \div 21 \text{ см/с}, & u_{\text{в}} = \ \ 7 \text{ м/с}, \end{cases}$$

орбитальная скорость

$$u_{\text{орб}} = \begin{cases} 22 \text{ см/с}, & u_{\text{в}} = 3{,}5 \text{ м/с}; \\ 26 \text{ см/с}, & u_{\text{в}} = \ \ 7 \text{ м/с}, \end{cases}$$

стоксова скорость

$$u_{\text{Ст}} = \begin{cases} 3{,}1 \text{ см/с}, & u_{\text{в}} = 3{,}5 \text{ м/с}; \\ 3{,}5 \text{ см/с}, & u_{\text{в}} = \ \ 7 \text{ м/с}. \end{cases}$$

Таблица 1

Вертикальная поляризация.

λ, см	u_{G}, см/с	Δu_{G}, см/с	u_{V}, см/с	$\Delta u'_{\mathrm{G}}$, см/с	$\Delta u'_{\mathrm{L}}$, см/с	$C_{\mathrm{V}}/C_{\mathrm{G}}$	$E_{\mathrm{G}}/E_{\mathrm{V}}$
3,2	35	23	69	28	15	0,53	65/35
	43	22	82	23	17	0,46	68/32
0,8	67	19	102	20	22	0,65	61/39
	52	23	93	25	21	0,44	69/31

Таблица 2

Горизонтальная поляризация.

λ, см	u_{L}, см/с	Δu_{L}, см/с	u_{V}, см/с	$\Delta u'_{\mathrm{G}}$, см/с	$\Delta u'_{\mathrm{L}}$, см/с	$C_{\mathrm{L}}/C_{\mathrm{V}}$	$E_{\mathrm{L}}/E_{\mathrm{V}}$
3,2	92	15	67	28	15	2,86	74/26
	143	21	120	36	21	4,80	83/17
0,8	150	22	100	29	22	0,25	20/80
	181	21	110	25	21	0,05	5/95

Таблица 3

$u_{\text{в}}$, м/с	λ, см	$u_{\mathrm{G}}^{\text{Брэгг}}$, см/с	u_{G}, см/с
3,5	3,2	33,1÷36,6	35
	0,8	44,5÷48,0	67
7	3,2	40,5÷47,5	43
	0,8	51,5÷58,5	52

В табл. 3 эти оценки сведены с экспериментальными данными о положении максимума гауссовой линии в спектре вертикально поляризованного сигнала. Из табл. 3 видно, что экспериментальные значения u_{G} хорошо согласуются с $u_{\mathrm{G}}^{\text{Брэгг}}$, определёнными по формуле (4). Исключение составляет лишь один случай ($\lambda = 0{,}8$ см; $u_{\text{в}} = 3{,}5$ м/с), соответствующий предельно малому углу скольжения (меньше 1°), когда скаттерометр «видит» лишь верхушку поверхностной волны, где радиальная составляющая орбитальной скорости максимальна, т. е. $u_{\text{р}} \approx \approx u_{\text{орб}}$. Если значение $u_{\text{р}} = 20$ см/с добавить к $u_{\mathrm{G}}^{\text{Брэгг}}$ для этого случая (см. табл. 3), то расхождение устраняется.

Таким образом, параметры гауссовой составляющей доплеровского спектра вертикально поляризованного сигнала хорошо согласуются с брэгговской теорией рассеяния.

Что касается фойгтовой составляющей спектра, энергетический вклад которой составляет в этом случае около 30 %, то по параметру $\Delta u'_{\mathrm{L}}$ (см. табл. 1) можно оценить время жизни небрэгговского рассеивателя, которое для $\lambda = 3{,}2$ и 0,8 см составляет соответственно 10^{-1} и $2 \cdot 10^{-2}$ с.

Обратимся теперь к случаю горизонтально поляризованного сигнала. При взгляде на доплеровские спектры горизонтально поляризованных сигналов и табл. 2, помимо тех особенностей, о которых говорилось во введении, обращают на себя внимание следующие обстоятельства:

1) Все спектры горизонтально поляризованных сигналов при малых углах скольжения представлены линиями Лоренца и Фойгта, а гауссова составляющая практически отсутствует.

2) При длине волны $\lambda = 3{,}2$ см превалирует лоренцева составляющая, причём её вклад растёт с ростом скорости ветра (такая же тенденция проявляется в данных [6], полученных в океанических условиях с помощью радиоскаттерометров с высоким разрешением).

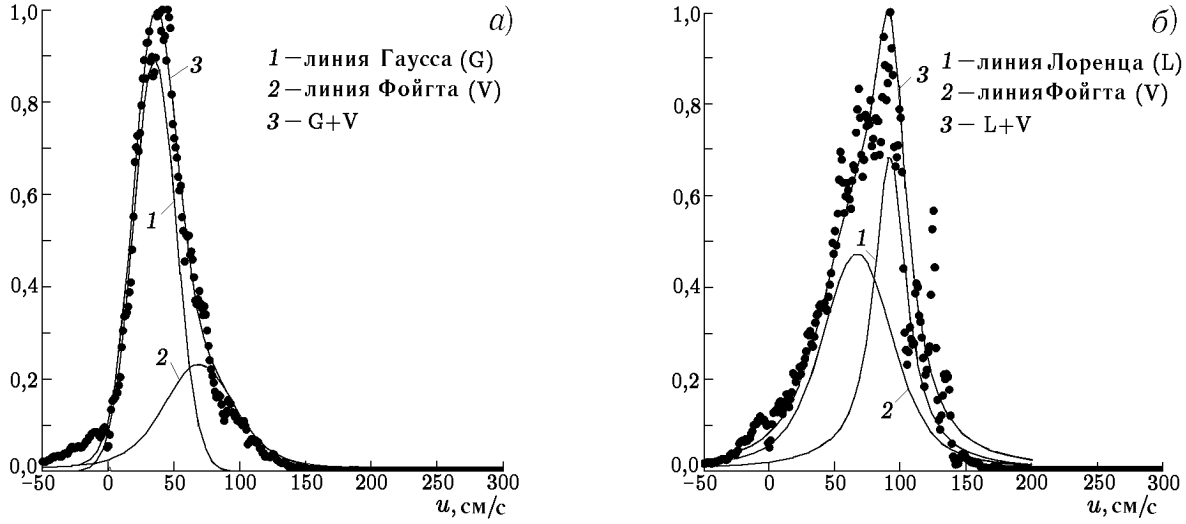

Рис. 1. Доплеровские спектры сигнала с вертикальной (*а*) и горизонтальной (*б*) поляризацией; длина волны $\lambda = 3{,}2$ см, скорость ветра $u_{\text{в}} = 3{,}5$ м/с

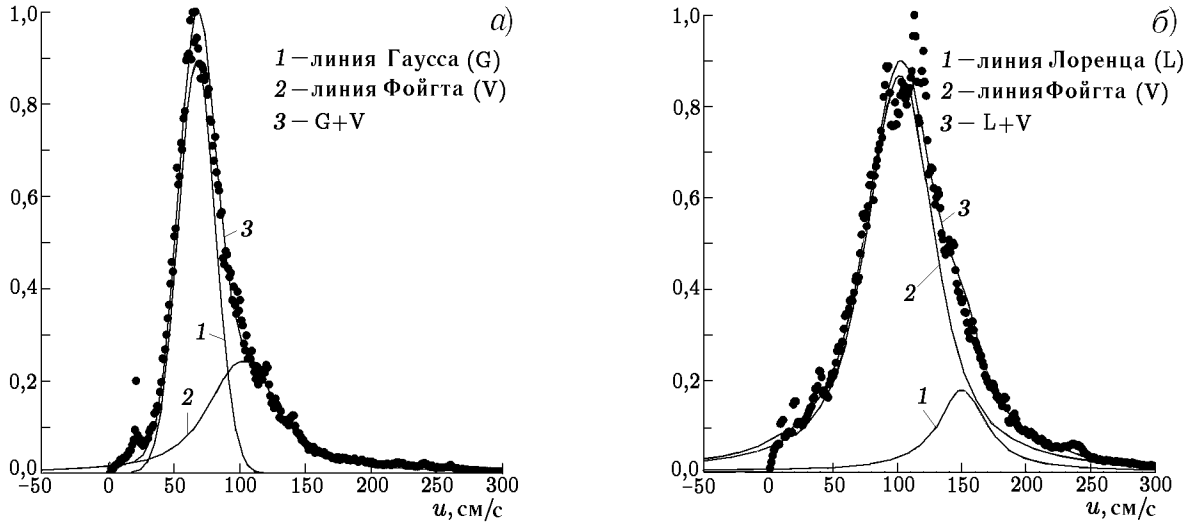

Рис. 2. Доплеровские спектры сигнала с вертикальной (*а*) и горизонтальной (*б*) поляризацией; длина волны $\lambda = 0{,}8$ см, скорость ветра $u_{\text{в}} = 3{,}5$ м/с

3) При длине волны $\lambda = 0{,}8$ см превалирует и растёт с ростом скорости ветра фойгтова часть доплеровского спектра.

Более детальный анализ даёт следующие результаты.

При длине волны $\lambda = 3{,}2$ см для обоих значений скорости ветра положение пика лоренцевой линии отвечает фазовой скорости поверхностной волны с длиной примерно $0{,}6\Lambda_{\text{m}}$, время жизни рассеивателей составляет примерно 10^{-1} с.

При длине волны $\lambda = 0{,}8$ см положение пика линии Фойгта практически одно и то же при обоих значениях скорости ветра, интервал скоростей рассеивателей $70 \div 130$ см/с, время жизни — около $2 \cdot 10^{-2}$ с.

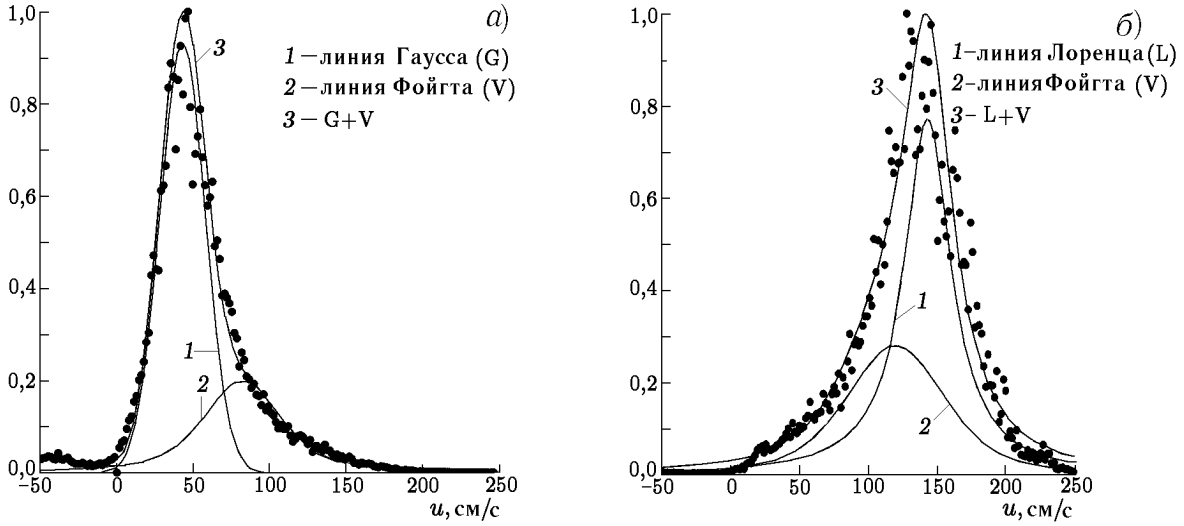

Рис. 3. Доплеровские спектры сигнала с вертикальной (*а*) и горизонтальной (*б*) поляризацией; длина волны $\lambda = 3{,}2$ см, скорость ветра $u_в = 7$ м/с

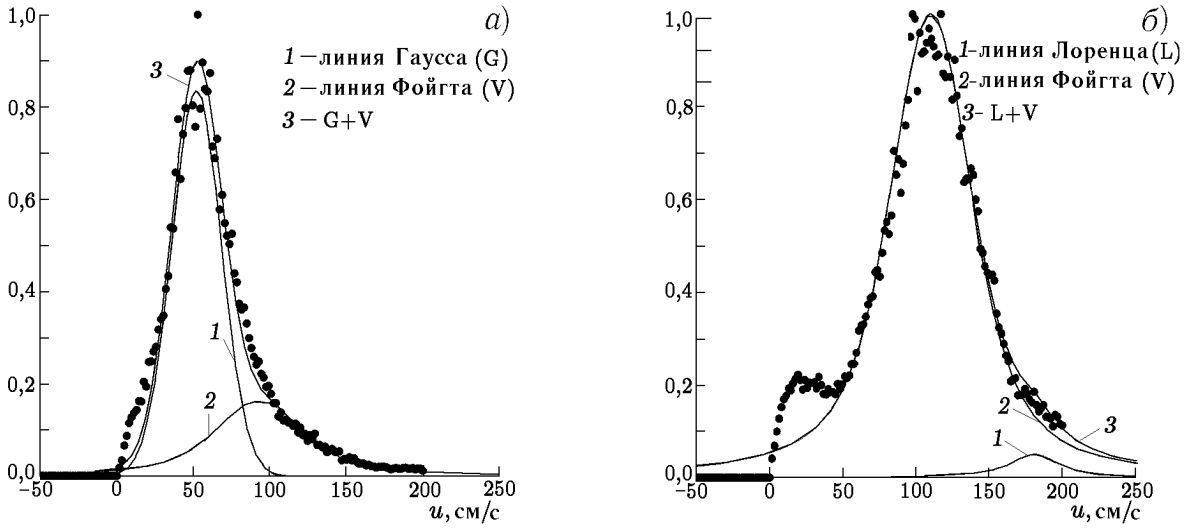

Рис. 4. Доплеровские спектры сигнала с вертикальной (*а*) и горизонтальной (*б*) поляризацией; длина волны $\lambda = 0{,}8$ см, скорость ветра $u_в = 7$ м/с

Таким образом, модели рассеяния горизонтально поляризованных сигналов на скользящих углах оказываются существенно различными для электромагнитного излучения сантиметрового и миллиметрового диапазонов длин волн.

На сантиметровых волнах с ростом скорости ветра рассеяние приобретает всё более выраженный лоренцев характер, т. е. описывается моделью, в которой рассеиватели имеют фиксированные (при данной скорости ветра) скорость и время жизни. Естественно связать это с рассеянием на структурах, которые образуются в процессе обрушения волн, близких к доминантной, и обеспечивают поляризационную зависимость отражённого поля.

В рассеянии миллиметровых волн принимает участие более широкий набор рассеивателей, т. е. рассеяние имеет континуальный характер и связано с более широкой областью спектра волнения, включающей дециметровые волны.

Сравнивая результаты настоящей работы с результатами [6], где приведены разложения доплеровских спектров сантиметровых радиоволн применительно к океаническим условиям, отметим их качественное совпадение. Как здесь, так и в [6] доплеровские спектры представлены в виде следующих сочетаний:

— линия Гаусса (левое (низкочастотное) крыло спектра) плюс линия Фойгта (правое крыло) для вертикально поляризованного сигнала;

— линия Лоренца (правое крыло) плюс линия Фойгта (левое крыло) для горизонтально поляризованного сигнала.

Это создаёт хорошую основу для построения модели доплеровского спектра сантиметровых радиоволн при малых углах скольжения. «Каркас» этой модели в виде указанных сочетаний базисных функций оказывается устойчивым, несмотря на не вполне строгое обоснование использованного метода обработки данных.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе изложены результаты обработки доплеровских спектров радиолокационных сигналов сантиметрового и миллиметрового диапазонов длин волн, полученных в натурных экспериментах по обратному рассеянию электромагнитного излучения взволнованной водной поверхностью под малыми углами скольжения. Обработка проводилась методом разложения доплеровского спектра по трём базисным функциям (спектральным линиям), каждая из которых соответствует определённому механизму рассеяния.

Оценки энергетического вклада различных механизмов показали, что в обоих диапазонах длин волн при вертикальной поляризации сигнала вклад брэгговского механизма при углах скольжения $3°\div5°$ составляет примерно 70 %, а остальные 30 % связаны, по-видимому, с обрушениями волн, принадлежащих сравнительно широкому интервалу спектра поверхностного волнения.

При горизонтальной поляризации картина существенным образом зависит от длины электромагнитной волны.

На сантиметровых волнах с ростом скорости ветра рассеяние приобретает всё более выраженный лоренцев характер, т. е. описывается моделью, в которой рассеиватели имеют фиксированные (при данной скорости ветра) скорость и время жизни. Естественно связать это с рассеянием на структурах, которые образуются в процессе обрушения волн, близких к доминантной.

В рассеянии миллиметровых волн принимает участие более широкий набор рассеивателей, т. е. в этом случае рассеяние имеет континуальный характер и связано с более широкой областью спектра волнения, включающей дециметровые волны.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 99–02–18388).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Philips O. M. // J. Phys. Oceanogr. 1988. V. 18. P. 1 065.
2. Lyzenga D. R., Maffett A. L., Shuchman R. A. // IEEE Trans. Geosci. and Remote Sens. 1983. V. 21, No. 4. P. 502.
3. Wetzel L. // Wave dynamics and radio probing / Ed. by O. M. Philips, H. Hasselmann. New York, London: Plenum Press, 1986. P. 273.
4. Кравцов Ю. А., Митягина М. И., Чурюмов А. Н. // Изв. вузов. Радиофизика. 1999. Т. 42, № 3. С. 240.

5. Черный И. В., Шарков Е. А. // Исслед. Земли из космоса. 1988. № 2. С. 17.
6. Lee P. H. Y., Barter J. D., Beach K. L., Caponi E. et al. // IEE Proc. Radar, Sonar, Navig. 1995. V. 147. P. 252.
7. Каневский М. Б., Караев В. Ю. // Изв. вузов. Радиофизика. 1993. Т. 36, № 1. С. 3.
8. Trizna D. B. // IEEE Journ. Oceanic Engrg. 1985. V. 10, No. 4. P. 368.
9. Зуйкова Э. М., Лучинин А. Г., Титов В. И. // Изв. АН СССР. ФАО. 1985. Т. 21, № 10. С. 1 095.

Институт прикладной физики РАН, г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию 28 февраля 2001 г.

DOPPLER SPECTRA OF CENTIMETER AND MILLIMETER MICROWAVES BACKSCATTERED FROM A ROUGH WATER SURFACE AT LOW GRAZING ANGLES

M. B. Kanevsky, V. Yu. Karaev, L. V. Lubyako, E. M. Zuikova, V. Yu. Gol'dblat, V. I. Titov, and G. N. Balandina

We present the results of processing X- and Ka-band radar signals backscattered from a rough water surface at low grazing angles. The processing has been made by the method of decomposing a Doppler spectrum into three basic line profiles. Each of these profiles corresponds to a certain scattering mechanism. The comparative evaluations of the contribution of the Bragg mechanism described by a Gaussian line profile and two non-Bragg ones described by Lorentz and Voight profiles, respectively, are obtained.

УДК 535.36

МОДЕЛЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОБЛУЧЁННОСТИ ОТ НАПРАВЛЕННОГО ИСТОЧНИКА СВЕТА В СЛАБОПОГЛОЩАЮЩЕЙ МУТНОЙ СРЕДЕ

Л. С. Долин, Е. А. Сергеева

Предложены простые модели распределения облучённости в безграничной слабопоглощающей мутной среде, освещаемой точечным мононаправленным источником, и в полубесконечной мутной среде, на границу которой наклонно падает узкий световой пучок. Модели оперируют только теми параметрами среды, которые входят в формулы диффузионного приближения теории переноса излучения. Вместе с тем область применимости предложенных моделей не ограничивается условием слабой анизотропии поля излучения.

ВВЕДЕНИЕ

Аналитические модели светового поля, создаваемого направленным источником излучения в мутной среде, широко используются при решении задач теории видения в мутных средах и оптической диагностики таких сред [1, 2]. Эти модели строятся на основе уравнения переноса излучения, упрощённого тем или иным способом с учётом особенностей оптических свойств среды или самого искомого поля. В частности, при условии слабой угловой анизотропии светового поля уравнение переноса приближённо сводится к уравнению объёмной диффузии пространственной облучённости [3–6]. Диффузионное приближение применяется для анализа характеристик светового поля на больших по сравнению с транспортной длиной l_{t} расстояниях от источника или от освещаемой извне границы среды. На глубинах порядка и меньше l_{t} световое поле наряду с «диффузной» (слабо анизотропной) содержит «направленную» (сильно анизотропную) компоненту — прямой свет источника и свет, рассеянный под малыми углами. В этом случае можно использовать двухэтапную процедуру расчёта светового поля: направленную компоненту найти из уравнения переноса излучения в «малоугловом» или «малоугловом диффузионном» приближении [1, 2], а расчёт диффузной компоненты свести к решению уравнения объёмной диффузии с источниками, которые выражаются через направленную составляющую облучённости [7]. К сожалению, после такого уточнения формулы диффузионного приближения лишаются своего основного достоинства — простоты. В настоящей работе предлагается простая аналитическая аппроксимация уточнённых выражений для диффузной составляющей облучённости в безграничной мутной среде, освещаемой точечным мононаправленным источником, и в полубесконечной среде, на границу которой наклонно падает узкий световой пучок. Модель светового поля в полубесконечной среде наряду с объёмным рассеянием учитывает многократное отражение света от границы раздела среда—вакуум.

1. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЛУЧЁННОСТИ ОТ ЭЛЕМЕНТАРНОГО ИСТОЧНИКА В БЕСКОНЕЧНО ПРОТЯЖЁННОЙ МУТНОЙ СРЕДЕ

Предположим, что точечный мононаправленный источник с мощностью P находится в безграничной мутной среде с пространственно однородными оптическими характеристиками: показателями рассеяния σ, поглощения æ, ослабления $\varepsilon = \sigma + æ$ и индикатрисой рассеяния $x(\gamma)$, удовлетворяющей условию нормировки:

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} x(\gamma)\sin\gamma\,\mathrm{d}\gamma = 1. \tag{1}$$

Степень анизотропии индикатрисы характеризуем средним косинусом угла рассеяния:

$$g = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} \cos\gamma\, x(\gamma)\sin\gamma\,\mathrm{d}\gamma. \tag{2}$$

Показатель поглощения æ считаем малым по сравнению с транспортным показателем рассеяния $\sigma_{\mathrm{t}} = (1-g)\,\sigma$.

Характеристики многократно рассеянного света слабо зависят от детальных особенностей индикатрисы рассеяния. Поэтому при расчёте световых полей в оптически толстых слоях мутных сред с сильно анизотропным рассеянием (таких, например, как вода, облака, биологические ткани) $x(\gamma)$ можно приближённо представить в виде комбинации «малоугловой» и изотропной индикатрис рассеяния:

$$x(\gamma) = g\, x_1(\gamma) + (1-g). \tag{3}$$

Весовые коэффициенты в (3) определяются из соотношений (1), (2) в предположении, что малоугловая индикатриса $x_1(\gamma)$ удовлетворяет условию нормировки (1), а соответствующий ей средний косинус угла рассеяния пренебрежимо мало отличается от 1.

Расчёт поля излучения заданных источников в мутной среде выполняется на основе уравнения переноса излучения

$$((\mathbf{n},\nabla)+\varepsilon)\,L(\mathbf{r},\mathbf{n}) = \frac{\sigma}{4\pi}\int\limits_{4\pi} L(\mathbf{r},\mathbf{n}')\,x(\gamma)\,\mathrm{d}\mathbf{n}' + Q, \tag{4}$$

где L — яркость света в точке $\mathbf{r}$ в направлении $\mathbf{n}$, $\gamma = \arccos(\mathbf{n},\mathbf{n}')$ — угол между единичными векторами $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}'$, $\mathrm{d}\mathbf{n}'$ — элемент телесного угла, Q — объёмная плотность источников. Если точечный мононаправленный источник располагается в точке $\mathbf{r}=0$ и светит в направлении оси z, то $Q = Q^{\text{ТМИ}} = P\delta(\mathbf{r})\,\delta(\mathbf{n}-\mathbf{z}_0)$, где $\mathbf{z}_0$ — орт оси z. Пространственная облучённость $E(\mathbf{r})$ находится путём интегрирования яркости по полному телесному углу:

$$E(\mathbf{r}) = \int\limits_{4\pi} L(\mathbf{r},\mathbf{n})\,\mathrm{d}\mathbf{n}.$$

Будем искать L в виде суммы направленной $L^{(\text{н})}$ и диффузной $L^{(\text{д})}$ составляющих, первая из которых описывается уравнением

$$((\mathbf{n}\nabla)+\varepsilon)\,L^{(\text{н})}(\mathbf{r},\mathbf{n}) = \frac{\sigma g}{4\pi}\int\limits_{4\pi} L^{(\text{н})}(\mathbf{r},\mathbf{n}')\,x_1(\gamma)\,\mathrm{d}\mathbf{n}' + Q^{\text{ТМИ}}. \tag{5}$$

Тогда $L^{(\text{д})}$ будет удовлетворять уравнению (4) с распределённым изотропным источником $Q^{(\text{д})} = \sigma_{\mathrm{t}}E^{(\text{н})}/(4\pi)$, плотность которого пропорциональна транспортному показателю рассеяния и облучённости $E^{(\text{н})}(\mathbf{r}) = \int L^{(\text{н})}(\mathbf{r},\mathbf{n})\,\mathrm{d}\mathbf{n}$ «направленным» светом источника. В диффузионном приближении $L^{(\text{д})}$ выражается через облучённость $E^{(\text{д})}(\mathbf{r}) = \int L^{(\text{д})}(\mathbf{r},\mathbf{n})\,\mathrm{d}\mathbf{n}$ в виде

$$L^{(\text{д})}(\mathbf{r},\mathbf{n}) = \frac{1}{4\pi}\left(1 - l_{\mathrm{t}}\,(\mathbf{n},\nabla)\right)E^{(\text{д})}(\mathbf{r}), \tag{6}$$

а для $E^{(\text{д})}$ из (4) получается уравнение

$$(\Delta-\alpha^2)\,E^{(\text{д})} = -12\pi\varepsilon_{\mathrm{t}}Q^{(\text{д})} = -3\varepsilon_{\mathrm{t}}\sigma_{\mathrm{t}}E^{(\text{н})}, \tag{7}$$

где $\varepsilon_{\rm t} = \sigma_{\rm t} + æ$ — транспортный показатель ослабления, $l_{\rm t} = 1/\varepsilon_{\rm t}$ — транспортная длина, $\alpha = \sqrt{3\varepsilon_{\rm t} æ}$ — показатель ослабления диффузно рассеянного света.

Заметим, что уравнение (5) описывает поле излучения точечного мононаправленного источника в фиктивной среде с показателем рассеяния $\sigma_1 = g\sigma$, показателем поглощения $æ_1 = \varepsilon_{\rm t}$ и узкой индикатрисой рассеяния x_1. Поэтому при условии сильной анизотропии поля $L^{(\text{н})}$ распределение $E^{(\text{н})}$ можно рассчитать на основе решения уравнения (5) в малоугловом приближении [2]. Однако при этом в правую часть (7) наряду с параметрами $\sigma_{\rm t}$ и æ (которые в рамках диффузионного приближения полностью описывают оптические свойства мутной среды) войдут характеристики малоугловой индикатрисы рассеяния. Чтобы избежать этого, воспользуемся выражением для $E^{(\text{н})}$ в малоугловом диффузионном приближении [1, 2]:

$$E^{(\text{н})}(r_\perp, z) = \frac{P}{\pi a^2} \exp\left[-\varepsilon_{\rm t} z - \frac{{r_\perp}^2}{a^2}\right], \tag{8а}$$

$$a^2(z) = \sigma\gamma_0^2 z^3/3, \tag{8б}$$

где $r_\perp$, z — цилиндрические координаты точки $\mathbf{r}$, $a(z)$ — эффективный радиус светового пучка на расстоянии z от источника, γ_0^2 — дисперсия индикатрисы $x_1(\gamma)$; величину γ_0^2 выразим через g с помощью соотношения $\gamma_0^2 \approx 0{,}3\,(1-g)$, которое выполняется для сред с индикатрисой рассеяния Хеньи—Гринстейна при $g \geq 0{,}7$ [8].

В результате вместо (8б) получим выражение

$$a^2 = 0{,}1\sigma_{\rm t} z^3, \tag{9}$$

которое в совокупности с формулой (8а) позволяет задать правую часть уравнения (7), оперируя только параметрами $\sigma_{\rm t}$ и æ.

Решение уравнения (7) можно построить методом функции Грина, представив его в виде трёхмерной свёртки распределения $Q^{(\text{д})}$ с функцией [3, 4]

$$E_1^{(\text{д})}(r) = \frac{3\varepsilon_{\rm t}}{4\pi r} \exp(-\alpha r), \tag{10}$$

которая является решением уравнения (7) с элементарным источником $Q_1^{(\text{д})} = \delta(\mathbf{r})/(4\pi)$. Здесь через r обозначено расстояние между источником и точкой наблюдения. Ниже мы воспользуемся другим способом решения.

Представим распределение облучённости в поперечном сечении светового пучка (плоскость $z = \text{const}$) в виде

$$E^{(\text{д})}(r_\perp, z) = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} F(\mathbf{k}, z) \exp(i\,(\mathbf{k}, \mathbf{r}_\perp))\, \mathrm{d}^2\mathbf{k}. \tag{11}$$

Тогда для пространственного спектра этого распределения из (7) получим обыкновенное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} - (k^2 + \alpha^2)\right] F(\mathbf{k}, z) = -\frac{3P}{4\pi^2}\, \sigma_{\rm t}\varepsilon_{\rm t} \exp\big[-\varepsilon_{\rm t} z - (ak/2)^2\big],$$

из которого следует

$$F(k, z) = \frac{3\sigma_{\rm t}\varepsilon_{\rm t} P}{8\pi^2 \sqrt{k^2 + \alpha^2}} \int\limits_0^\infty \exp\Big(-a^2(\xi)k^2/4 - \varepsilon_{\rm t}\xi - \sqrt{k^2 + \alpha^2}\,|z - \xi|\Big)\, \mathrm{d}\xi. \tag{12}$$

Искомое решение уравнения (7) находится подстановкой (12) в (11):

$$E^{(\text{д})}(\rho_\perp, \rho_z) = \frac{(3-\beta^2)\,\varepsilon_{\text{t}}^2 P}{4\pi} \int\limits_0^\infty \frac{J_0(k\rho_\perp)k}{\sqrt{k^2+\beta^2}}\,\mathrm{d}k \int\limits_0^\infty \exp\left[\frac{(3-\beta^2)\,\rho_z^3 k^2}{120} - \right.$$

$$\left. - \rho_z - \sqrt{k^2+\beta^2}\,|\rho_z - \xi|\right] \mathrm{d}\xi, \quad (13)$$

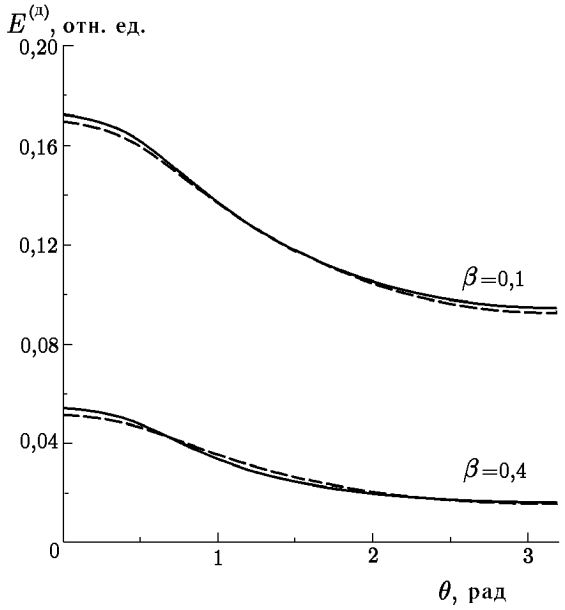

Рис. 1. Облучённость от точечного мононаправленного источника в поглощающей мутной среде на глубине $5l_{\text{t}}$ в зависимости от полярного угла точки наблюдения. Сплошные кривые соответствуют формуле (13), пунктир — формуле (14)

где $\rho_\perp = \varepsilon_{\text{t}} r_\perp$, $\rho_z = \varepsilon_{\text{t}} z$, $\beta = \alpha/\varepsilon_{\text{t}} = \sqrt{3æ/\varepsilon_{\text{t}}}$, $J_0(x)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка. Дальнейший анализ поля $E^{(\text{д})}$ проведём в сферической системе координат $\rho = \varepsilon_{\text{t}} r$, $\theta = \arccos(z/r)$, где $r = \sqrt{r_\perp^2 + z^2}$, ρ — расстояние от источника до точки наблюдения, выраженное в транспортных длинах, θ — полярный угол точки наблюдения, отсчитываемый от направления оси светового пучка. Для перехода к новым переменным в правую часть (13) нужно подставить $\rho_\perp = \rho\sin\theta$, $\rho_z = \rho\cos\theta$.

Выражение для $E^{(\text{д})}$ в виде двойного интеграла не очень удобно для практического использования, поэтому мы попытались найти простую аналитическую аппроксимацию этого выражения. Анализ результатов численного расчёта зависимости $E^{(\text{д})}$ от θ при $\beta = 0$ и различных значениях ρ показал, что при $\rho \geq 1$ эта зависимость хорошо описывается распределением Лоренца с тремя подгоночными параметрами. Последние были найдены из условия точного совпадения аппроксимирующей функции и распределения (13) при $\theta = 0$; $\pi/2$ и π. Фактор поглощения удалось учесть введением сомножителя (см. формулу (10)), описывающего экспоненциальное ослабление облучённости от точечного изотропного источника, расположенного в точке с координатами $r = l_{\text{t}}$, $\theta = 0$. В результате оказалось, что выражение (13) практически эквивалентно выражению

$$E^{(\text{д})}(\rho, \theta) = \frac{3\varepsilon_{\text{t}}^2}{4\pi}\left[c_1 + \frac{c_2}{1+(\theta/c_3)^2}\right] \exp\left[-\beta\sqrt{1-2\rho\cos\theta+\rho^2}\right], \quad (14)$$

где $c_1(\rho) = [0{,}7754 + 1{,}1386\rho]^{-1}$, $c_2(\rho) = [0{,}3438 + 0{,}3954\rho^2]^{-1}$, $c_3(\rho) = 0{,}5896 + 0{,}1278\rho$.

Хорошая точность найденной аппроксимации распределения (13) иллюстрируется кривыми на рис. 1 и 2, из которых видно, что при $\rho \geq 1$ погрешность аппроксимации не превышает 5 %. В непосредственной близости от источника погрешность начинает расти, однако в интервале $0{,}2 \leq \rho \leq 1$ она не выходит за пределы 20 %. Указанные кривые дают также представление об основных особенностях диффузной компоненты облучённости, таких как «вытянутость» диаграммы $E^{(\text{д})}(\theta)$ вдоль изначального направления подсветки на небольших глубинах, изотропизация этой диаграммы по мере удаления от источника и некоторое её сужение вследствие поглощения света в среде.

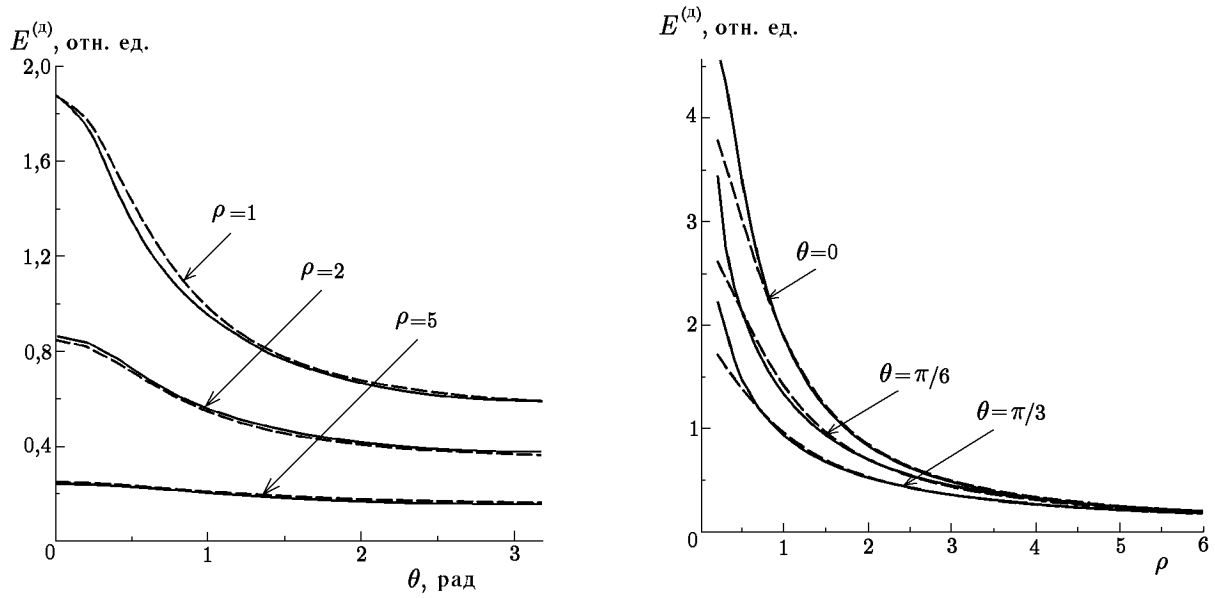

Рис. 2. Облучённость от точечного мононаправленного источника в непоглощающей среде. Сплошные кривые соответствуют формуле (13), пунктир — формуле (14)

Для расчёта полной облучённости

$$E(\rho,\theta) = E^{(н)} + E^{(д)} \tag{15}$$

следует использовать формулу (14) и выражение

$$E^{(н)}(\rho,\theta) = \frac{10\varepsilon_t^2 P}{\pi\Lambda_t\rho^3}\exp\left[-\rho - \frac{10\theta^2}{\Lambda_t\rho}\right], \tag{16}$$

где $\Lambda_t = \sigma_t/\varepsilon_t$, которое следует из (8), (9) после перехода к переменным ρ, θ в малоугловом приближении.

2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЛУЧЁННОСТИ В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ СРЕДЕ

Обобщим теперь полученные формулы на случай, когда мутная среда занимает полупространство $z > 0$ и освещается извне бесконечно узким пучком света, наклонно падающим на границу среды в плоскости $y = 0$ под углом χ_0 к оси z (см. рис. 3). Будем считать, что в общем случае показатель преломления n мутной среды отличен от 1, а в области $z < 0$ равен 1.

В рамках диффузионной теории влияние границы на поле излучения в среде учитывается граничным условием для пространственной облучённости, которое при $n = 1$ имеет вид

$$E^{(д)} + z_э\frac{\partial E^{(д)}}{\partial z} = 0, \tag{17}$$

где $E^{(д)}$ — диффузная составляющая облучённости внутри среды при $z \to +0$, $z_э = 0{,}71 l_t$ — экстраполированная длина в проблеме Милна [1]. Последняя определяет местоположение условной границы ($z = -z_э$), на которой можно ставить нулевое граничное условие для поля $E^{(д)}$, считая среду бесконечно протяжённой.

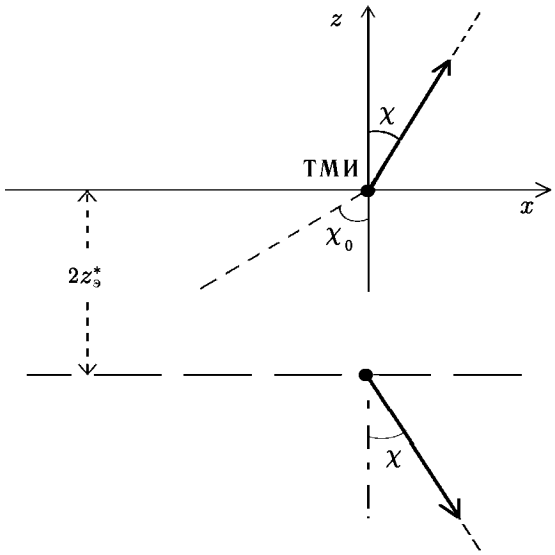

Рис. 3

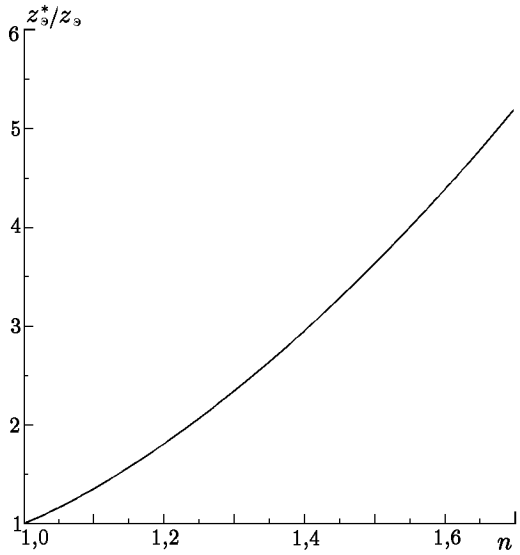

Рис. 4

Условие аналогичного типа выполняется и в случае, когда показатель преломления среды отличен от 1 [9]:

$$E^{(\text{д})} + z_{\text{э}}^{*}\frac{\partial E^{(\text{д})}}{\partial z} = 0, \qquad z_{\text{э}}^{*} = z_{\text{э}}\,\frac{C_1}{C_2}\,,$$

$$C_1 = 1 + 3\int\limits_0^{\pi/2} R_{\Phi}(\theta)\cos^2\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta, \quad C_2 = 1 - 2\int\limits_0^{\pi/2} R_{\Phi}(\theta)\cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta. \tag{18}$$

Здесь $R_{\Phi}(\theta)$ — коэффициент отражения Френеля (по мощности) для плоских волн, падающих на границу из среды под углом θ. В пренебрежении эффектами поляризации под величиной R_{Φ} следует понимать полусумму энергетических коэффициентов Френеля для горизонтально и вертикально поляризованных волн:

$$R_{\Phi}(\theta) = \begin{cases} \left[R_{\parallel}(\theta) + R_{\perp}(\theta)\right]/2 = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\mathrm{tg}^2(\theta-\theta_0)}{\mathrm{tg}^2(\theta+\theta_0)} + \dfrac{\sin^2(\theta-\theta_0)}{\sin^2(\theta+\theta_0)}\right], & \theta < \arcsin(1/n); \\ 1, & \theta > \arcsin(1/n), \end{cases}$$

где $\theta_0 = \arcsin(n\sin\theta)$.

Величина $z_{\text{э}}^{*}$ представляет собой экстраполированную длину $z_{\text{э}}$ для случая, когда показатель преломления мутной среды отличен от 1. Зависимость отношения $z_{\text{э}}^{*}/z_{\text{э}}$ от n представлена на рис. 4. Как видно из этого рисунка, при $n = 1$ величина $z_{\text{э}}^{*}$ равна $z_{\text{э}}$, а с ростом n отношение $z_{\text{э}}^{*}/z_{\text{э}}$ увеличивается.

Заметим, что искомое световое поле тождественно полю излучения точечного мононаправленного источника (ТМИ на рис. 3) с мощностью $P_0 = PT(\chi_0)$, помещённого на внутренней стороне границы среды и ориентированного в направлении преломленного луча под углом $\chi = \arcsin\left(n^{-1}\sin\chi_0\right)$ к нормали; здесь $T(\chi_0)$ — френелевский коэффициент пропускания границы для плоской волны, падающей под углом χ_0. Диффузная составляющая облучённости $E^{(\text{д})}$ от этого источника может быть представлена в виде разности облучённостей, создаваемых в безграничной мутной среде двумя точечными мононаправленными источниками — реальным и вспомогательным. Вспомогательным источником служит зеркальное «изображение» реального источника, расположенного в точке $\mathbf{r}_1$: $\mathbf{r}_2$ =

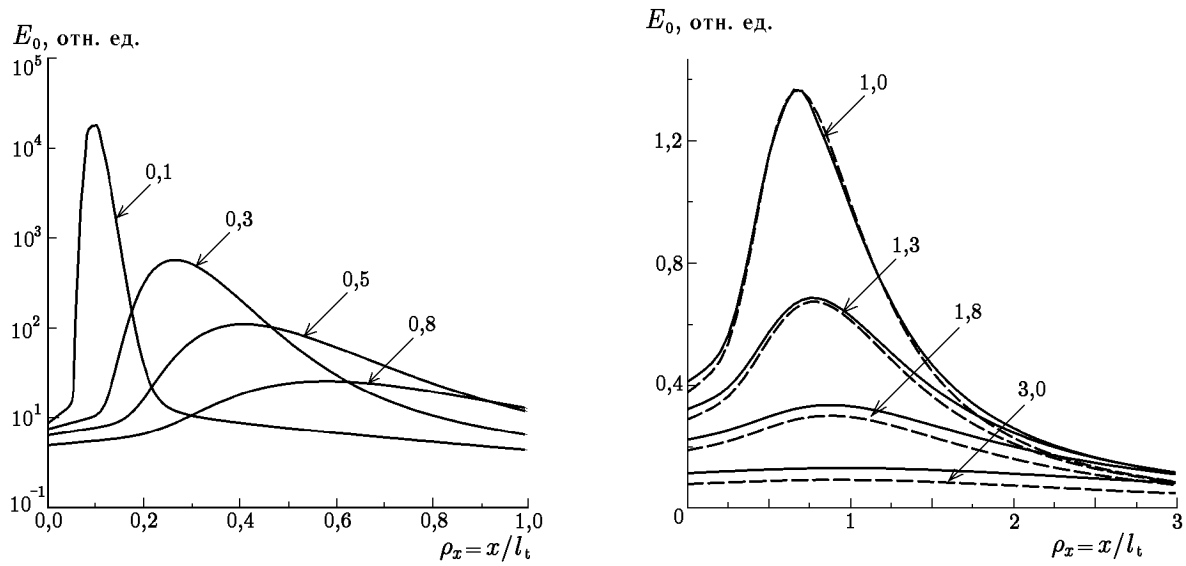

Рис. 5. Распределение облучённости в плоскости $y = 0$ на различных глубинах в полубесконечной мутной среде с показателем преломления $n = 1{,}33$. Сплошные кривые соответствуют $\beta = 0$; пунктир — $\beta = 0{,}3$, значения $\rho_z = z/l_t$ указаны на рисунке

$= \mathbf{r}_1 - 2\,(z_1 + z_э)\mathbf{z}_0$. Поэтому для расчёта облучённости от точечного мононаправленного источника в полубесконечной среде можно использовать формулу

$$E_0^{(д)}(\boldsymbol{\rho}_\perp, \rho_z) = E^{(д)}(\boldsymbol{\rho}_\perp, \rho_z) - E^{(д)}(\boldsymbol{\rho}_\perp, -\rho_z - 2z_э^*/l_t), \tag{19}$$

где $E^{(д)}(\boldsymbol{\rho}_\perp, \rho_z)$ — диффузная составляющая облучённости от точечного мононаправленного источника в безграничной мутной среде с показателем преломления n, $\boldsymbol{\rho}_\perp = \mathbf{r}_\perp/l_t$, $\rho_z = z/l_t$, $\mathbf{r}_\perp(x, y)$ — составляющая радиус-вектора точки наблюдения в плоскости $z = 0$.

Полная облучённость $E_0(\mathbf{r}_\perp, z)$ в полубесконечной среде складывается из направленной и диффузной составляющих:

$$E_0(\boldsymbol{\rho}_\perp, \rho_z) = E_0^{(н)}(\boldsymbol{\rho}_\perp, \rho_z) + E_0^{(д)}(\boldsymbol{\rho}_\perp, \rho_z). \tag{20}$$

Для их расчёта можно использовать формулы (14) и (16): направленная составляющая находится непосредственно из (16), а диффузная — путём подстановки выражения (14) в правую часть (19). Предварительно в (14), (16) нужно сделать замену $P \to P_0$ и записать распределения $E^{(н)}$, $E^{(д)}$ в «лабораторной» системе координат $\boldsymbol{\rho}_\perp, \rho_z$, т. е. подставить в (14), (16)

$$\rho = \sqrt{\rho_x^2 + \rho_y^2 + \rho_z^2}\,, \qquad \theta = \arccos\frac{\rho\sin\chi + \rho_z\cos\chi}{\sqrt{\rho_x^2 + \rho_y^2 + \rho_z^2}}\,.$$

На рис. 5 приведены примеры расчётов распределения E_0 в плоскости $y = 0$ по указанным выше формулам на разных глубинах в среде с показателем преломления $n = 1{,}33$, на границу которой падает узкий пучок света под углом $\chi_0 = 60°$. Из рис. 5 видно, что с увеличением глубины пучок уширяется и одновременно меняет направление распространения. При $\rho_z > 1{,}5$ положение максимума E_0 в плоскости $\rho_z = \mathrm{const}$ стабилизируется, а распределение E_0 становится подобным распределению облучённости в световом пучке, пересекающем границу среды в точке $\rho_x > 0$ под углом $\chi_0 = 0$.

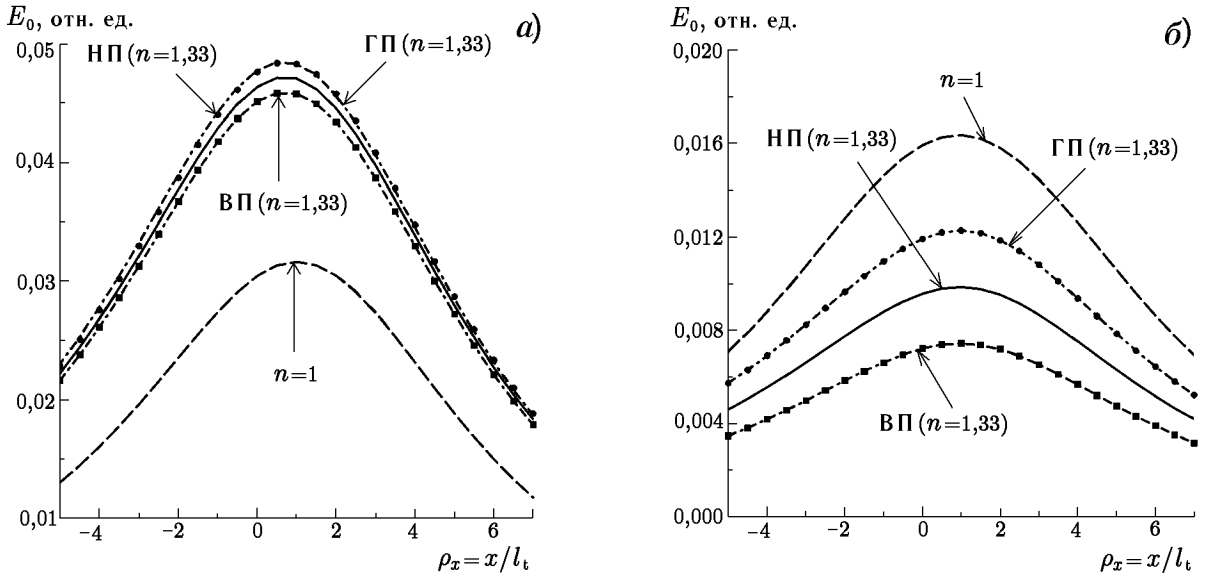

Рис. 6. Распределение облучённости на глубине $z = 6l_t$ при $\beta = 0$ и двух значениях показателя преломления n. Угол падения $\chi_0 = 0{,}8$ рад (*а*); 1,53 рад (*б*). НП — неполяризованный свет, ГП и ВП — горизонтально поляризованный и вертикально поляризованный свет соответственно

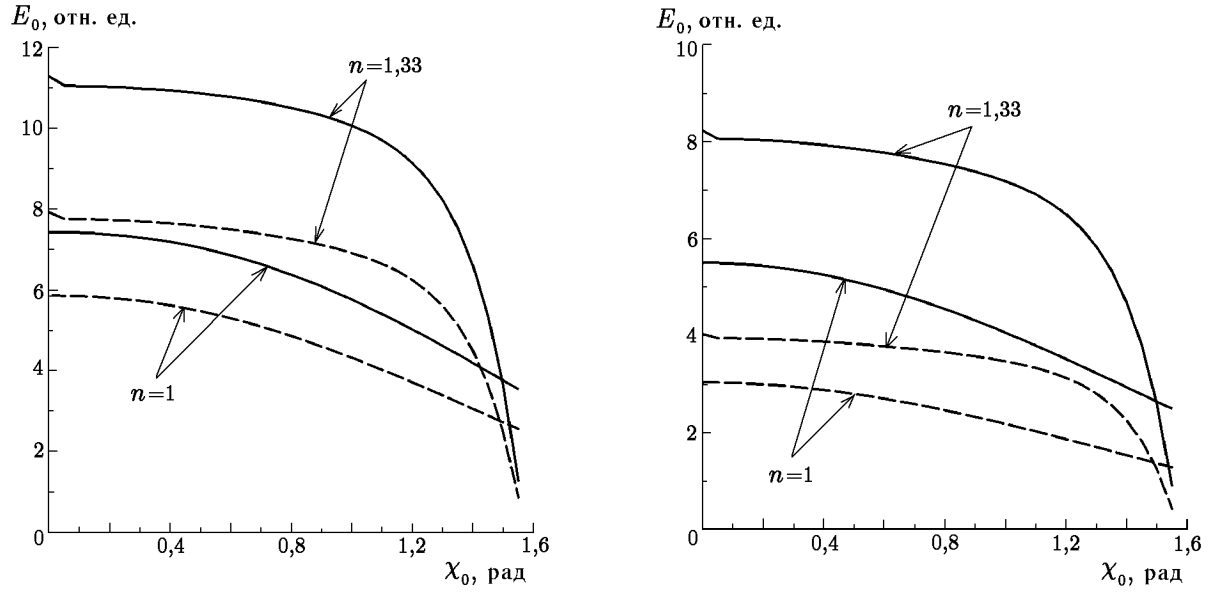

Рис. 7. Облучённость на глубине $z = 2l_t$ при освещении среды бесконечно широким пучком под углом χ_0. Сплошные кривые соответствуют $\beta = 0$, пунктир — $\beta = 0{,}2$

Результаты расчётов, представленные на рис. 6 и 7, показывают, что при $\chi_0 < 85°$ скачкообразное изменение показателя преломления на границе среда—вакуум приводит к увеличению облучённости среды благодаря полному внутреннему отражению света, падающего из среды на её границу под скользящими углами. Обратная ситуация имеет место только в случае $\chi_0 > 85°$, когда пучок подсветки очень сильно отражается границей среды. При выполнении расчётов диффузно рассеянный свет считался полностью деполяризованным, а эффекты поляризации учитывались путём соответствующего задания коэффициента пропускания границы в формуле $P_0 = PT(\chi_0)$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 98–02–17021) и Совета по государственной поддержке ведущих научных школ (грант № 96–15–96592).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зеге Э. П., Иванов А. П., Кацев И. Л. Перенос изображения в рассеивающей среде. Минск: Наука и техника, 1985. 328 с.
2. Долин Л. С., Левин И. М. Справочник по теории подводного видения. Л.: Гидрометеоиздат, 1991. 230 с.
3. Дэвисон Б. Теория переноса нейтронов. М.: Атомиздат, 1960. 520 с.
4. Марчук Г. И. Методы расчёта ядерных реакторов. М.: Госатомиздат, 1961. 667 с.
5. Исимару А. Распространение и рассеяние волн в случайно неоднородных средах. М.: Мир, 1981. 280 с.
6. Star W. M. Diffusion theory of light transport // Optical-Thermal Response of Laser-Irradiated Tissue / Ed. by A. J. Welch, J. C. van Germet. New York: Plenum Press, 1995.
7. Zege E. P., Katsev I. L., Polonsky I. N. // Appl. Opt. 1993. V. 32, No. 15. P. 2 803.
8. Долин Л. С. Теория оптической когерентной томографии: Препринт ИПФ РАН № 453. Нижний Новгород, 1997.
9. Haskell R. C., Svaasand L. O., Tsay T.-T. et al. // J. Opt. Soc. Am. A. 1994. V. 11, No. 10. P. 2 727.

Институт прикладной физики РАН, г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию 30 ноября 2000 г.

A MODEL OF IRRADIANCE DISTRIBUTION FOR A DIRECTED POINT SOURCE IN AN INFINITE WEAKLY-ABSORBING TURBID MEDIUM

L. S. Dolin and E. A. Sergeeva

We propose simple models describing irradiance distributions for a unidirectional point source in an infinite weakly-absorbing turbid medium and also for an oblique incidence of a narrow light beam on the boundary of a semi-infinite turbid medium. These models involve the same optical parameters of the medium as the formulas of the diffusion approximation of radiation-transfer theory. At the same time, the condition of weak anisotropy of the radiation field does not limit the applicability of our models.

УДК 621.372

ОТКРЫТЫЕ РЕЗОНАТОРЫ, ВОЗБУЖДАЕМЫЕ ВОЛНОВЫМ ПУЧКОМ

С. Н. Власов, Е. В. Копосова

В работе на основе теории рассеяния проведено исследование открытых резонаторов. В частности, построена теория открытого резонатора с диэлектрической пластиной, позволяющая определять собственные частоты такой системы и их зависимость от различных параметров. Найдена дисперсия, обусловленная диэлектрической пластиной. Развитая теория может служить обоснованием метода измерения чрезвычайно малых диэлектрических потерь в коротковолновой части миллиметрового диапазона длин волн. Исследованы также свойства двухзеркального резонатора как отражательного фильтра и сформулированы требования к качеству возбуждающего пучка.

ВВЕДЕНИЕ

Открытые резонаторы используются в различных устройствах миллиметрового, субмиллиметрового и оптического диапазонов длин волн [1–3]: генераторах, волномерах, фильтрах и т. д. Теория резонаторов строится обычно в приближении параболического уравнения. Согласно этой теории формулируется система однородных интегральных уравнений для полей на зеркалах. В результате решения этих интегральных уравнений находятся собственные частоты и добротности различных типов колебаний. Исследование таким методом оказывается эффективным в случае квазиэквидистантного спектра резонатора по одному из индексов, например по продольному индексу для двухзеркального резонатора.

Помещение внутрь резонатора диэлектрических тел даже простейшей формы, например пластин толщиной в несколько длин волн, приводит к тому, что спектр его становится неэквидистантным, частоты и потери мод начинают существенно зависеть от продольного индекса, т. е. становится существенной дисперсия, обусловленная диэлектрической пластиной. Метод параболического уравнения в том виде, в котором он использовался для анализа простейших резонаторов, оказывается в этом случае непригодным. Анализ таких резонаторов может быть проведён путём исследования рассеяния от резонатора, т. е. решения задачи о его возбуждении. В [2] рассеянные поля использовались для построения собственных функций открытых резонаторов. Однако ввиду сложности этот метод применялся только для исследования простейших диэлектрических резонаторов.

В настоящей работе исследование рассеянных от резонатора полей применяется для анализа практически используемых открытых резонаторов. В основе метода лежит определение отклика резонатора на возбуждение его пучком электромагнитных волн, который вводится с помощью тонкой плоскопараллельной диэлектрической пластины [4] — плёнки связи. Развитый метод позволяет учесть дифракционные потери и определить собственные частоты и добротности мод резонатора, обладающих различными продольными индексами. В первом разделе формулируется система интегральных уравнений и кратко излагается метод их решения. Во втором разделе излагаются результаты приложения развитой теории к двухзеркальному резонатору, который рассматривается с точки зрения использования его в качестве отражательного фильтра. В третьем разделе излагаются результаты численного анализа резонатора с диэлектрической кремниевой пластиной, определяются собственные частоты и добротности различных мод. Выбор параметров резонатора обусловлен применением его для измерения потерь в пластине из кремния — материала с чрезвычайно низкими омическими потерями в миллиметровом диапазоне длин волн [5, 6].

1. МЕТОД ОПИСАНИЯ РЕЗОНАТОРА С ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНОЙ

Рассмотрим резонатор, изображённый на рис. 1. Он образован непрозрачными металлическими зеркалами, расположенными на расстоянии L друг от друга. Зеркала имеют коэффициент отражения $R_{\rm om} \approx -1$ (отличие его модуля от единицы обусловлено омическими потерями), диаметр $2a_{\rm m}$ и радиус кривизны R_0. Резонатор содержит внутри себя элемент связи — плёнку из диэлектрика с коэффициентом отражения iR и коэффициентом прохождения T, расположенную под углом 45° к оси резонатора и разделяющую резонатор на два плеча с длинами L_1 и L_2 ($L_1 + L_2 = L$). В таком описании плёнка связи представляется восьмиполюсником с четырьмя входами (выходами). Входы (выходы) *1* и *2* направлены в сторону диэлектрической пластины и второго зеркала соответственно. Ввод излучения осуществляется через вход (выход) *3*, вывод через вход (выход) *3* (отражение от резонатора) и вход (выход) *4* (прохождение через резонатор).

Предполагается, что плёнка связи не имеет дисперсии и потерь: при действительных значениях R и T выполняется равенство

$$R^2 + T^2 = 1.$$

Расстояние от делительной пластины отсчитывается от её центра, проекция её поверхности на плоскость, перпендикулярную оси резонатора, представляет собой круг диаметром $2a_{\rm ex}$. Плечо *1* содержит плоскопараллельную диэлектрическую пластину диаметром $2a_{\rm pl}$, толщиной $L_{\rm pl}$, показателем преломления n и тангенсом потерь $\operatorname{tg}\delta$, расположенную на расстоянии L_6 от первого зеркала перпендикулярно оси резонатора и на расстоянии $L_{1,5}$ от делительной пластины ($L_{1,5} + L_{\rm pl} + L_6 = L_1$).

Для описания полей в резонаторе с пластиной воспользуемся методикой описания открытых систем, предложенной в [7, 8]. В этой методике поля с временной зависимостью вида $\exp(i\omega t)$, где ω — круговая частота, характеризуются поперечными к направлению распространения компонентами полей. Мы используем линейно поляризованные электрические поля, амплитуды которых обозначим через Ψ. Поля в каждом сечении, перпендикулярном оси резонатора, представим в виде двух встречных волновых пучков (см. рис. 1). На плёнку связи падает входной волновой пучок с амплитудой Ψ_3^+, возбуждающий резонатор. От плёнки связи из резонатора исходит выходной волновой пучок с амплитудой Ψ_3^-. Обозначим через $\Psi_{1,2}^-$ амплитуды пучков, отходящих от плёнки связи в сторону первого и второго зеркал резонатора соответственно, а через $\Psi_{1,2}^+$ — амплитуды пучков, приходящих к плёнке связи с этих направлений. Соотношения, связывающие амплитуды волновых пучков на делительной пластине, имеют вид

$$\Psi_1^- = T\Psi_2^+, \qquad \Psi_2^- = T\Psi_1^+ + iR\Psi_3^+, \qquad \Psi_3^- = iR\Psi_2^+.$$

При таком описании пренебрегается дифракцией пучков вблизи самой плёнки связи.

Изменение амплитуд пучков $\Psi(x, y, z)$ в зависимости от поперечных x, y и продольной z координат при распространении внутри резонатора описывается соотношением, следующим из представления поля в виде суперпозиции плоских волн. Это соотношение мы подробно выпишем для пучка, распространяющегося в сторону второго зеркала:

$$\Psi_{2\rm m}^+ = \widehat{S}_2\Psi_2^- = \widehat{\Phi}^{\rm r}(k_x, k_y)S_{L_2}\widehat{\Phi}^{\rm d}(x, y)\Psi_2^-, \tag{1}$$

где Ψ_{2m}^+ — амплитуда пучка, падающего на второе зеркало, $\widehat{S}_2$ — оператор распространения, $\widehat{\Phi}^{\rm d}(x, y)$ и $\widehat{\Phi}^{\rm r}(k_x, k_y)$ — операторы прямого и обратного двойного преобразования Фурье, $S_{L_2} = \exp(-ik_zL_2)$, k_zL_2 — набег фазы при распространении, k_z — продольное волновое число плоской волны:

$$k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}\ , \tag{2}$$

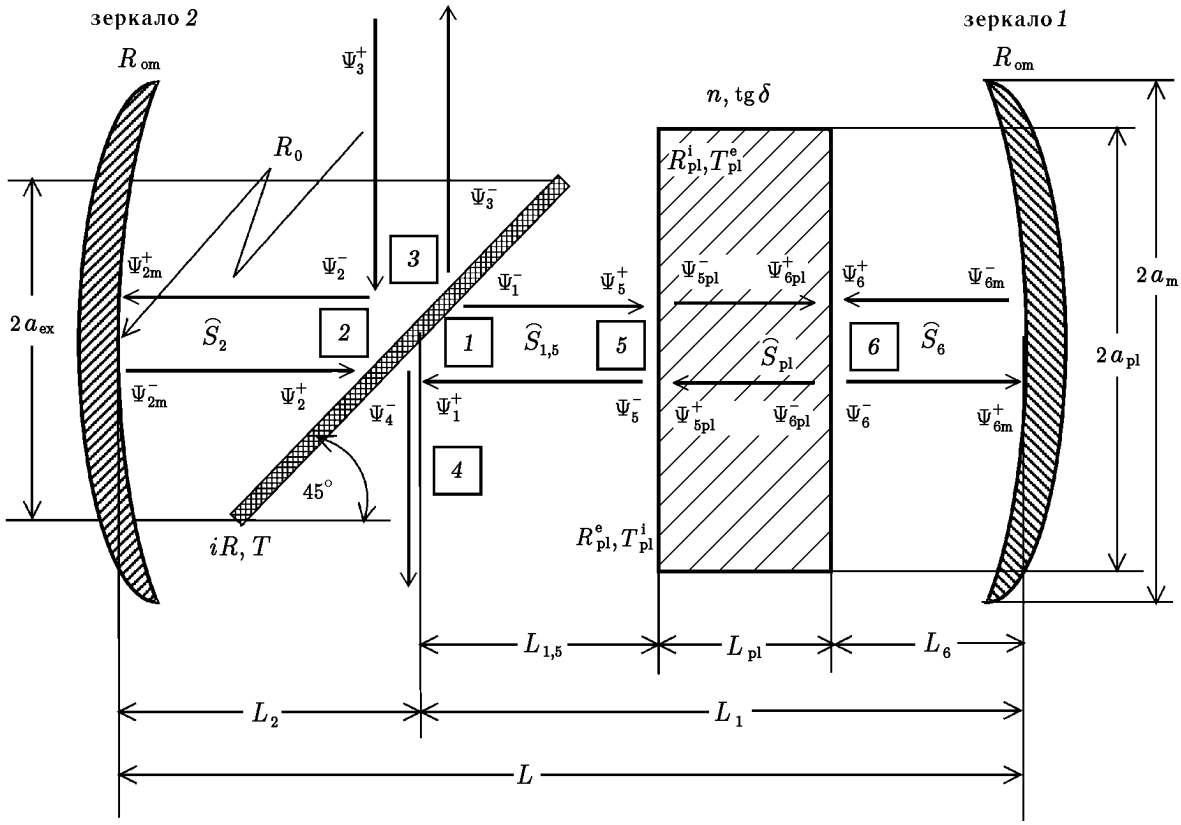

Рис. 1. Схема резонатора с плоскопараллельной диэлектрической пластиной

$k = \omega/c = 2\pi f/c$, c — скорость света, f — частота.

Зеркала резонатора опишем как фазовый корректор, так что амплитуда пучка, уходящего от второго зеркала Ψ_{2m}^-, связана с амплитудой пучка, падающего на это зеркало, следующим образом:

$$\Psi_{2m}^- = \widehat{M}_2 \Psi_{2m}^+ = R_{om} \exp\left\{ -2ik \left[R_0 \sqrt{1 - \frac{x^2+y^2}{R_0^2}} - R_0 \right] \right\} \Psi_{2m}^+. \tag{3}$$

В (3) положительное значение R_0 соответствует вогнутому зеркалу, через $\widehat{M}_2$ обозначен оператор преобразования пучка вторым зеркалом.

Соотношения, аналогичные (1), могут быть выписаны для амплитуд волновых пучков, распространяющихся в каждой секции резонатора. От делительной пластины до левой торцевой грани диэлектрической пластины изменение структуры пучка описывается оператором $\widehat{S}_{1,5}$:

$$\Psi_5^+ = \widehat{S}_{1,5} \Psi_1^- = \widehat{\Phi}^{\mathrm{r}}(k_x, k_y) S_{L_{1,5}} \widehat{\Phi}^{\mathrm{d}}(x, y) \Psi_1^-, \tag{4}$$

от левой торцевой грани диэлектрической пластины до правой её торцевой грани — оператором $\widehat{S}_{\mathrm{pl}}$:

$$\Psi_{6\mathrm{pl}}^+ = \widehat{S}_{\mathrm{pl}} \Psi_{5\mathrm{pl}}^- = \widehat{\Phi}^{\mathrm{r}}(k_x, k_y) S_{L_{\mathrm{pl}}} \widehat{\Phi}^{\mathrm{d}}(x, y) \Psi_{5\mathrm{pl}}^-, \tag{5}$$

причём диэлектрик внутри пластины имеет комплексный показатель преломления

$$\bar{n} = n \sqrt{1 - i \operatorname{tg} \delta}\,.$$

При таком показателе преломления внутри диэлектрика соотношение (2) заменяется следующим:

$$k_z = \sqrt{n^2\,(1 - i\,\mathrm{tg}\,\delta)\,k^2 - k_x^2 - k_y^2}\,.$$

От правой торцевой грани пластины до первого зеркала изменение структуры пучка описывается оператором $\widehat{S}_6$:

$$\Psi_{6\mathrm{m}}^{+} = \widehat{S}_6 \Psi_6^{-} = \widehat{\Phi}^{\mathrm{r}}(k_x, k_y) S_{L_6} \widehat{\Phi}^{\mathrm{d}}(x, y) \Psi_6^{-}. \tag{6}$$

Для пучка, падающего на первое зеркало и отходящего от него, имеет место соотношение, аналогичное (3).

На левой торцевой грани диэлектрической пластины амплитуды пучков, падающих слева Ψ_5^{+} и справа $\Psi_{5\mathrm{pl}}^{+}$, а также пучков, уходящих от левой грани пластины влево Ψ_5^{-} и вправо $\Psi_{5\mathrm{pl}}^{-}$, связаны посредством внешнего $R_{\mathrm{pl}}^{\mathrm{e}}$ и внутреннего $R_{\mathrm{pl}}^{\mathrm{i}}$ коэффициентов отражения от пластины:

$$R_{\mathrm{pl}}^{\mathrm{e}} = -R_{\mathrm{pl}}^{\mathrm{i}} = -\frac{n-1}{n+1}\,, \tag{7}$$

и соответствующих коэффициентов прохождения $T_{\mathrm{pl}}^{\mathrm{e}} = 2/(n+1)$, $T_{\mathrm{pl}}^{\mathrm{i}} = 2n/(n+1)$:

$$\Psi_{5\mathrm{pl}}^{-} = R_{\mathrm{pl}}^{\mathrm{i}} \Psi_{5\mathrm{pl}}^{+} + T_{\mathrm{pl}}^{\mathrm{e}} \Psi_5^{+}, \tag{8}$$

$$\Psi_5^{-} = R_{\mathrm{pl}}^{\mathrm{e}} \Psi_5^{+} + T_{\mathrm{pl}}^{\mathrm{i}} \Psi_{5\mathrm{pl}}^{+}. \tag{9}$$

На правой торцевой грани диэлектрической пластины амплитуды пучков, падающих слева $\Psi_{6\mathrm{pl}}^{+}$ и справа Ψ_6^{+}, а также пучков, уходящих от неё влево $\Psi_{6\mathrm{pl}}^{-}$ и вправо Ψ_6^{-}, связаны между собой соотношениями, аналогичными (8) и (9):

$$\Psi_{6\mathrm{pl}}^{-} = R_{\mathrm{pl}}^{\mathrm{i}} \Psi_{6\mathrm{pl}}^{+} + T_{\mathrm{pl}}^{\mathrm{e}} \Psi_6^{+}, \tag{10}$$

$$\Psi_6^{-} = R_{\mathrm{pl}}^{\mathrm{e}} \Psi_{6\mathrm{pl}}^{+} + T_{\mathrm{pl}}^{\mathrm{i}} \Psi_6^{+}. \tag{11}$$

В результате решения уравнений (1)–(11) должны быть найдены поля, рассеянные резонатором: амплитуды пучков Ψ_3^{-} и Ψ_4^{-}. Эти поля мы будем характеризовать двумя коэффициентами, являющимися функционалами от полей рассеяния резонатора: коэффициентом отражения от резонатора K_{r} и коэффициентом прохождения через резонатор K_{t}. Ввиду многомодовости системы K_{r} и K_{t} определяются неоднозначно. При рассмотрении этих коэффициентов можно выделить два случая.

Рассмотрим первый случай, который мы назовём одномодовым. Пусть приёмник поглощает энергию только определённой структуры из всего поля, попадающего на апертуру. [1] Коэффициент отражения (коэффициент передачи на отражение) или прохождения (коэффициент передачи на проход) в этом случае можно определить в виде

$$K_{\mathrm{r,t}}^{0} = \frac{P_{\mathrm{r,t}}^{0}}{P}\,,$$

где $P = \iint |\Psi_3^{+}|^2\,\mathrm{d}s$ — мощность пучка, возбуждающего резонатор, $P_{\mathrm{r,t}}^{0} = P_{\mathrm{r,t}} N_{\mathrm{r,t}}$, $P_{\mathrm{r}} = \iint |\Psi_3^{-}|^2\,\mathrm{d}s$ — мощность пучка, уходящего от резонатора навстречу падающему пучку, $P_{\mathrm{t}} = \iint |\Psi_4^{-}|^2\,\mathrm{d}s$ — мощность пучка, прошедшего через резонатор. Коэффициенты связи $N_{\mathrm{r,t}}$ мод пучка

[1] Примером такого устройства является рупор с поперечным сечением, много большим квадрата длины волны, постепенно переходящий в одномодовый волновод, в котором находится согласованный детектор. Такие устройства типичны для открытых резонаторов в миллиметровом и прилегающей части субмиллиметрового диапазона длин волн.

и приёмника характеризуют ту часть падающего на приёмник излучения, которая принимается последним, причём

$$N_{\mathrm{r}} = \frac{\int \Psi_3^- \Psi_{\mathrm{r,out}}^* \,\mathrm{d}s \int (\Psi_3^-)^* \Psi_{\mathrm{r,out}} \,\mathrm{d}s}{P_{\mathrm{r}} P_{\mathrm{r,n}}},$$

где функция $\Psi_{\mathrm{r,out}}$ описывает структуру поля рабочей моды приёмника на плёнке связи, $P_{\mathrm{r,n}} = \int |\Psi_{\mathrm{r,out}}|^2 \,\mathrm{d}s$ — мощность пучка с такой структурой поля;

$$N_{\mathrm{t}} = \frac{\int \Psi_4^- \Psi_{\mathrm{t,out}}^* \,\mathrm{d}s \int (\Psi_4^-)^* \Psi_{\mathrm{t,out}} \,\mathrm{d}s}{P_{\mathrm{t}} P_{\mathrm{t,n}}},$$

где $\Psi_{\mathrm{t,out}}$ — структура поля рабочей моды приёмника на плёнке связи, $P_{\mathrm{t,n}} = \int |\Psi_{\mathrm{t,out}}|^2 \,\mathrm{d}s$ — мощность пучка с такой структурой поля. Далее структуру пучка рабочей моды приёмника будем считать гауссовой: $\Psi_{\mathrm{r,out}} \sim \Psi_{\mathrm{t,out}} \sim \exp\left[-(x^2+y^2)/(2a_{\mathrm{r,t}}^2)\right]$, с шириной a_{r} у приёмника для измерения отражённой волны и a_{t} у приёмника для измерения проходящей волны.

В другом случае приёмник поглощает всю энергию, падающую на его апертуру, что характерно для оптического диапазона. Такой приём мы назовём интегральным. В этом случае коэффициенты отражения $K_{\mathrm{r}}^{\mathrm{i}}$ и прохождения $K_{\mathrm{t}}^{\mathrm{i}}$ можно записать в виде

$$K_{\mathrm{r,t}}^{\mathrm{i}} = P_{\mathrm{r,t}}/P.$$

Для численного исследования системы уравнений (1)–(11) удобно переписать её в виде трёх операторных уравнений для амплитуд волновых пучков, приходящих на делительную пластину справа Ψ_1^+, на левую внутреннюю сторону диэлектрической пластины $\Psi_{5\mathrm{pl}}^+$ и на правую внешнюю сторону диэлектрической пластины Ψ_6^+:

$$\Psi_1^+ = \widehat{S}_{1,5}\left[R_{\mathrm{pl}}^{\mathrm{e}} \widehat{S}_{1,5} \Psi_1^- + T_{\mathrm{pl}}^{\mathrm{i}} \Psi_{5\mathrm{pl}}^+\right], \tag{12}$$

$$\Psi_{5\mathrm{pl}}^+ = \widehat{S}_{\mathrm{pl}}\left[R_{\mathrm{pl}}^{\mathrm{i}} \widehat{S}_{\mathrm{pl}}\left(R_{\mathrm{pl}}^{\mathrm{i}} \Psi_{5\mathrm{pl}}^+ + T_{\mathrm{pl}}^{\mathrm{e}} \widehat{S}_{1,5} \Psi_1^-\right) + T_{\mathrm{pl}}^{\mathrm{e}} \Psi_6^+\right], \tag{13}$$

$$\Psi_6^+ = \widehat{S}_6 \widehat{M}_1 \widehat{S}_6\left[R_{\mathrm{pl}}^{\mathrm{e}} \Psi_6^+ + T_{\mathrm{pl}}^{\mathrm{i}} \widehat{S}_{\mathrm{pl}}\left(R_{\mathrm{pl}}^{\mathrm{i}} \Psi_{5\mathrm{pl}}^+ + T_{\mathrm{pl}}^{\mathrm{e}} \widehat{S}_{1,5} \Psi_1^-\right)\right], \tag{14}$$

$$\Psi_1^- = T \widehat{S}_2 \widehat{M}_2 \widehat{S}_2\left[T \Psi_1^+ + iR \Psi_3^+\right]. \tag{15}$$

Система (12)–(15) при заданной частоте решалась методом итераций, часто используемом для анализа открытых резонаторов. В качестве начального значения для функций Ψ_1^+, $\Psi_{5\mathrm{pl}}^+$ и Ψ_6^+, как правило, задавалась функция Ψ_3^+. Поперечное распределение исходного волнового пучка Ψ_3^+ полагалось гауссовым: $\Psi_3^+ \propto \exp\left[-(x^2+y^2)/(2a_{\mathrm{b}}^2)\right]$, где a_{b} характеризует ширину возбуждающего пучка. Амплитуды выходных волновых пучков (отражённого и проходящего) определялись соотношениями

$$\Psi_3^- = iR \widehat{S}_2 \widehat{M}_2 \widehat{S}_2\left[T \Psi_1^+ + iR \Psi_3^+\right],$$

$$\Psi_4^- = T \Psi_3^+ + iR \Psi_1^+,$$

в которые подставлялась найденная функция Ψ_1^+.

Для описания каждой функции в системе уравнений (12)–(15) использовалась матрица $N \times N$ комплексных величин с $N \sim 50$. В качестве критерия сходимости итераций и установления решения использовалась малость квадрата модуля отклонения Ψ_3^- для текущей итерации относительно предыдущей (достигалось отношение порядка $10^{-10} \div 10^{-8}$). Далее частота изменялась, и определялся отклик резонатора на изменённой частоте. На некоторых (резонансных) частотах коэффициент отражения увеличивался, а коэффициент прохождения уменьшался.

2. ИССЛЕДОВАНИЕ ПУСТОГО РЕЗОНАТОРА

Полагая $n = 1$; $\operatorname{tg}\delta = 0$, найдём, что $R^{\mathrm{e}}_{\mathrm{pl}} = -R^{\mathrm{i}}_{\mathrm{pl}} = 0$, $T^{\mathrm{e}}_{\mathrm{pl}} = T^{\mathrm{i}}_{\mathrm{pl}} = 1$. Предполагая диэлектрическую пластину неограниченной, из (12)–(15) получим следующую систему интегральных уравнений для пустого резонатора:

$$\Psi_1^+ = \widehat{S}_{1,5}\widehat{S}_{\mathrm{pl}}\widehat{S}_6\widehat{M}_1\widehat{S}_6\widehat{S}_{\mathrm{pl}}\widehat{S}_{1,5}\Psi_1^-, \tag{16}$$

$$\Psi_1^- = T\widehat{S}_2\widehat{M}_2\widehat{S}_2\left[T\Psi_1^+ + iR\Psi_3^+\right]. \tag{17}$$

Введём оператор $\widehat{K}_1 = \widehat{S}_{1,5}\widehat{S}_{\mathrm{pl}}\widehat{S}_6\widehat{M}_1\widehat{S}_6\widehat{S}_{\mathrm{pl}}\widehat{S}_{1,5}$, описывающий изменение структуры пучка при распространении его от плёнки связи в направлении первого зеркала, отражении от последнего и возвращении пучка к плёнке связи, и аналогичный ему оператор $\widehat{K}_2 = \widehat{S}_2\widehat{M}_2\widehat{S}_2$. После этого система уравнений (16), (17) может быть записана в компактном виде:

$$\Psi_1^+ = T^2\widehat{K}_1\widehat{K}_2\Psi_1^+ + iRT\widehat{K}_1\widehat{K}_2\Psi_3^+. \tag{18}$$

Выражение (18) представляет собой неоднородное интегральное уравнение. Исследование открытых резонаторов часто ведётся на основе однородного интегрального уравнения, которое получается из (18) отбрасыванием последнего слагаемого:

$$\Psi_1^+ = T^2\widehat{K}_1\widehat{K}_2\Psi_1^+. \tag{19}$$

Последнее уравнение совпадает с широко используемыми уравнениями открытых резонаторов при условии, что связь с подводящим трактом отсутствует ($T = 1$) и в операторах распространения пучка используется параксиальное приближение, т. е. продольное волновое число записывается в виде

$$k_z \approx k - \frac{k_x^2 + k_y^2}{2k}. \tag{20}$$

Для решения уравнения (19) может быть использована итерационная процедура по схеме

$$\Psi_1^{+(p)} = T^2\widehat{K}_1\widehat{K}_2\Psi_1^{+(p-1)}, \tag{21}$$

где p — номер итерации. В процессе расчёта можно ввести собственное значение

$$\Lambda_p = \Psi_1^{+(p)}(x,y)/\Psi_1^{+(p-1)}(x,y). \tag{22}$$

оператора (21), описывающего изменение пучка при обходе резонатора. Счёт прекращается, когда величина Λ_p с заданной точностью перестаёт зависеть от поперечных координат x и y, причём в квазиоптических открытых резонаторах её аргумент весьма сильно зависит от частоты: $\arg\Lambda_p \sim -k\,(L_1 + L_2)$, а модуль $|\Lambda_p|$ слабо зависит от частоты.

Действительную часть резонансной частоты $\operatorname{Re} k_{\mathrm{s}}$ можно найти из условия положительности Λ_p. Последнее соответствует резонансу в (18). Действительно, в приближении, когда поперечная структура пучка моды в резонаторе гауссова и совпадает со структурой возбуждающего пучка, коэффициент пропускания открытого резонатора по мощности выражается формулой

$$T_{\mathrm{s}} = T^2\frac{1 - 2\,|\Lambda_p/T^2|\cos(\arg\Lambda_p) + |\Lambda_p/T^2|^2}{1 + |\Lambda_p|^2 - 2\,|\Lambda_p|\cos(\arg\Lambda_p)}. \tag{23}$$

Коэффициент передачи минимален в случае резонанса ($\arg\Lambda_p = 0$).

Мнимая часть резонансной частоты может быть описана приближённым выражением

$$\operatorname{Im} k_{\mathrm{s}} \approx -\frac{\ln \Lambda_p}{2\,(L_1 + L_2)}\,.$$

Мы провели численный анализ резонатора, близкого по размерам к описанному в [6]: $a_{\mathrm{m}} = a_{\mathrm{ex}} = 60$ мм; $L = 400$ мм; $R_0 = 250$ мм, в диапазоне частот вблизи $f \approx 150$ ГГц. Этот резонатор имеет «традиционные» параметры [3]: $C = ka_{\mathrm{m}}^2/L \approx 30$, $g = 1 - L/R_0 = -0{,}6$; его основную, почти гауссову по поперечной структуре моду мы будем характеризовать шириной пучка a_{rez} и радиусом кривизны фазового фронта R_{rez} в месте расположения плёнки связи. Поскольку характер отклика резонатора зависит от ширин возбуждающего a_{b} и принимаемого a_{r} пучков, введём параметры $\mu_{\mathrm{e}} = a_{\mathrm{b}}/a_{\mathrm{rez}}$, $\mu_{\mathrm{r}} = a_{\mathrm{r}}/a_{\mathrm{rez}}$ и $\mu_{\mathrm{t}} = a_{\mathrm{t}}/a_{\mathrm{rez}}$. При этом при $\mu_{\mathrm{e}} = \mu_{\mathrm{r}} = \mu_{\mathrm{t}} = 1$ имеет место почти идеальное согласование структур возбуждающего и приёмного полей со структурой поля в резонаторе, если плёнка связи расположена в таком сечении резонатора, где $R_{\mathrm{rez}} = \infty$.

На рис. 2*а* приведена полученная в результате расчёта зависимость коэффициента отражения K_{r}^0 от частоты при одномодовом приёме при $T^2 = 0{,}999$; $\mu_{\mathrm{e}} = \mu_{\mathrm{r}} = \mu_{\mathrm{t}} = 1$ для различных аппроксимаций пересчёта поля внутри резонатора (используя формулу (2) (кривые *2, 3*) или заменяя её «параксиальной» формулой (20) (кривые *1*)) и отражения пучка от зеркала (используя формулу (3) (кривые *3*) или заменяя её «параболической» формулой $\widehat{R}_{1,2} = R_{\mathrm{om}} \exp\bigl\{ik\,(x^2 + y^2)/R_0\bigr\}$ (кривые *1, 2*)). Омическими потерями в одном случае пренебрегалось ($R_{\mathrm{om}}^2 = 1$), а в другом полагались близкими к реальным: $R_{\mathrm{om}}^2 = 0{,}999$. Плёнка связи была смещена от середины резонатора на четверть его длины. Диаметры зеркал были достаточно велики, так что «классические» дифракционные потери оказались существенно меньше омических потерь и учитываемых здесь потерь на связь. В предварительно проведённых расчётах диаметры зеркал также уменьшались до $a_{\mathrm{m}} \approx 30$ мм, когда дифракционные потери становились сравнимыми с омическими потерями и потерями на связь.

Известно [1–3], что резонаторы с параболическими зеркалами в параксиальном приближении имеют собственные частоты, определяемые для колебаний с гауссовой поперечной структурой следующей формулой [2]:

$$kL = \pi q + \arccos g, \tag{24}$$

где q — целое число, много большее единицы. Частота, вычисленная по (24), показана на рис. 2*а* вертикальным пунктиром. Её отличие от определённой в результате численного решения системы (12)–(15) без каких-либо приближений объясняется учётом непараксиальности (формула (2)), а также учётом отличия формы зеркала от параболической (формула (3)). При использовании в численном решении параксиальной аппроксимации для продольного волнового числа и зеркал с параболическим профилем частота, вычисленная по (24), и результаты решения (12)–(15) с точностью расчётов совпадают (рис. 2*а*).

Добротность этих колебаний

$$Q = \frac{f_{\mathrm{s}}}{\Delta f_{\mathrm{s}}} = \frac{k_{\mathrm{s}} L}{\delta_{\mathrm{s}} + \delta_{\mathrm{om}} + \delta_{\mathrm{d}}}\,, \tag{25}$$

где f_{s} — частота, Δf_{s} — ширина резонансной кривой по уровню 0,5 по мощности, $\delta_{\mathrm{s}} = 1 - T^2$ — потери на связь, $\delta_{\mathrm{om}} = 1 - R_{\mathrm{om}}^2$ — омические потери, δ_{d} — дифракционные потери. Добротность, вычисленная по формуле (25), совпадала с полученной в результате численного решения (12)–(15) с относительной точностью до $10^{-5} \div 10^{-4}$ и не изменялась при уменьшении диаметра зеркал в 1,5 раза. С дальнейшим уменьшением диаметра добротность Q начинала резко падать. Увеличение же диаметра зеркал по сравнению с исходным не приводило к коррекции характеристик резонатора. Отличие коэффициента отражения от единицы при нулевых омических потерях на зеркалах объясняется различием в фазовых фронтах между возбуждающим пучком и модой резонатора. При введении в возбуждающий

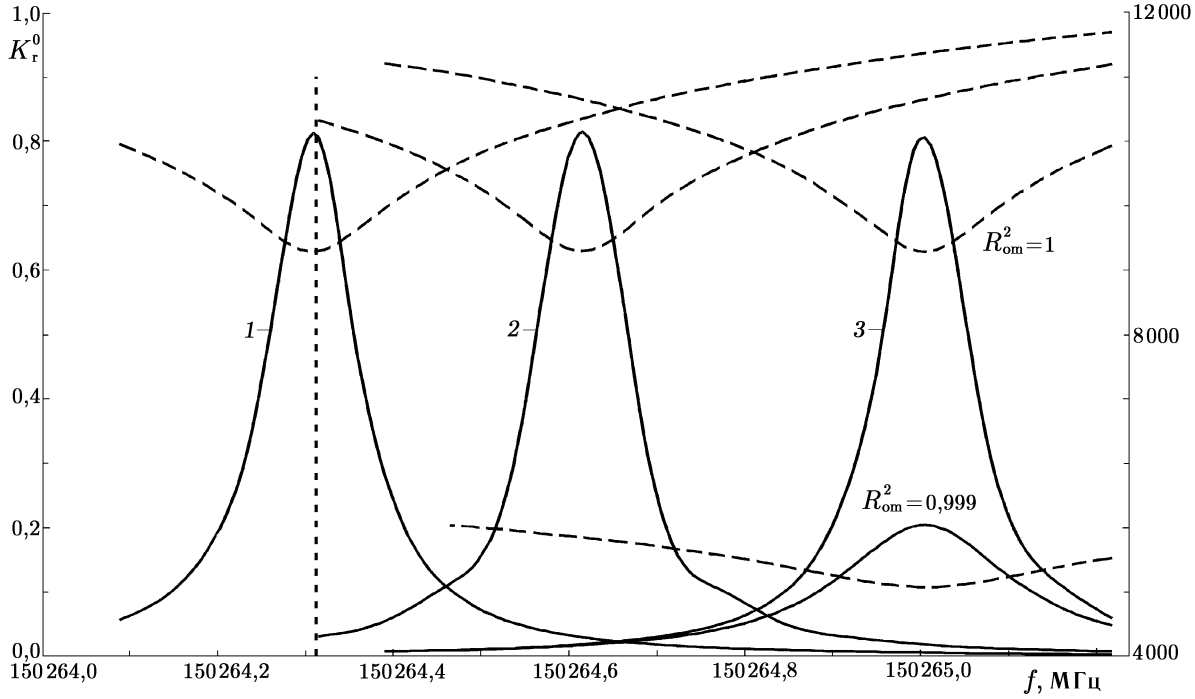

Рис. 2*а*. Влияние непараксиальности при распространении пучка, непараболичности зеркал и омических потерь на коэффициент отражения K_r^0 (сплошные кривые) и количество итераций M (штриховые кривые)

и приёмный пучки волновых фронтов с соответствующими радиусами кривизны коэффициент отражения приближался к единице с точностью до четвёртого знака после запятой.

На рис. 2*а* также представлено количество итераций M, необходимое для получения результатов с точностью 10^{-8}. Видно, что оно достаточно велико и при резонансе минимально. Большое число итераций в этом случае обусловлено практически полным отсутствием селекции типов колебаний в резонаторе — отсутствием дифракционных потерь для значительного числа мод. При уменьшении размеров зеркал — введения дифракционных потерь — число итераций уменьшалось до 10^2. Отметим, что при прочих равных условиях решение неоднородного уравнения (18) требует в несколько раз меньшего количества итераций по сравнению с решением уравнения (19).

При возбуждении резонатора пучком с шириной, равной ширине пучка собственного типа колебаний ($\mu_e = 1$), и срединном положении плёнки связи при интегральном приёме наблюдаются лишь основные типы колебаний с почти гауссовым пучком (рис. 2*б*). При возбуждении резонатора пучком с шириной, отличной от ширины пучка моды резонатора, имеются резонансы как на основных, так и на высших модах. Они отмечены стрелками на рис. 2*б* и имеют более сложную поперечную структуру. При одномодовом приёме амплитуда этих максимумов уменьшается (см. рис. 2*в*).

Смещение плёнки связи от центра резонатора при возбуждении коллимированным пучком и одномодовом приёме оказывает на картину отклика влияние, аналогичное влиянию рассогласования по ширине возбуждающего пучка ($\mu_e \neq 1$). В этом случае в резонаторе кроме аксиальных возбуждаются и высшие поперечные моды.

Отметим, что резонансная кривая основной моды при возбуждении пучком с $\mu_e \neq 1$ не является симметричной относительно частоты максимального отклика. Несимметрия тем больше, чем сильнее параметр μ_e отличается от единицы. При $L = 400$ мм; $g = -0{,}6$; $T^2 = 0{,}9$; $R_{om}^2 = 1$; $\mu_e = 0{,}5 \div 2$ отношение $\chi = \Delta f_l / \Delta f_r$, характеризующее несимметрию моды, где Δf_l и Δf_r — левая и правая

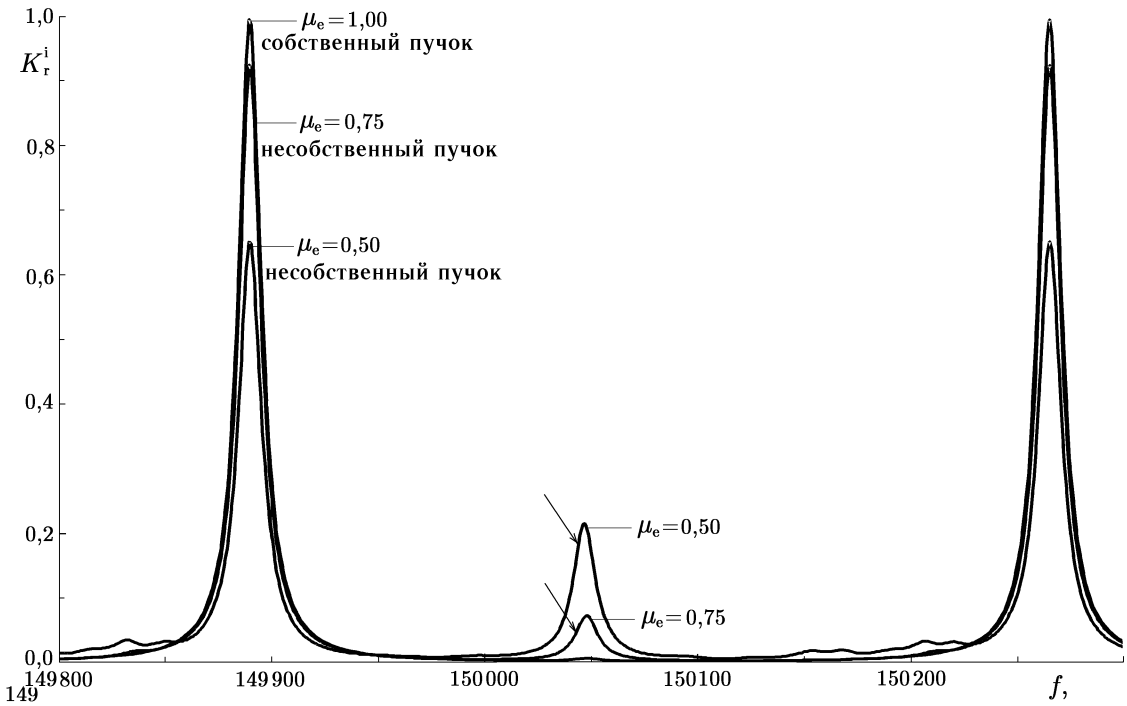

Рис. 2*б*. Влияние способа возбуждения резонатора на коэффициент отражения K_r^i при интегральном приёме

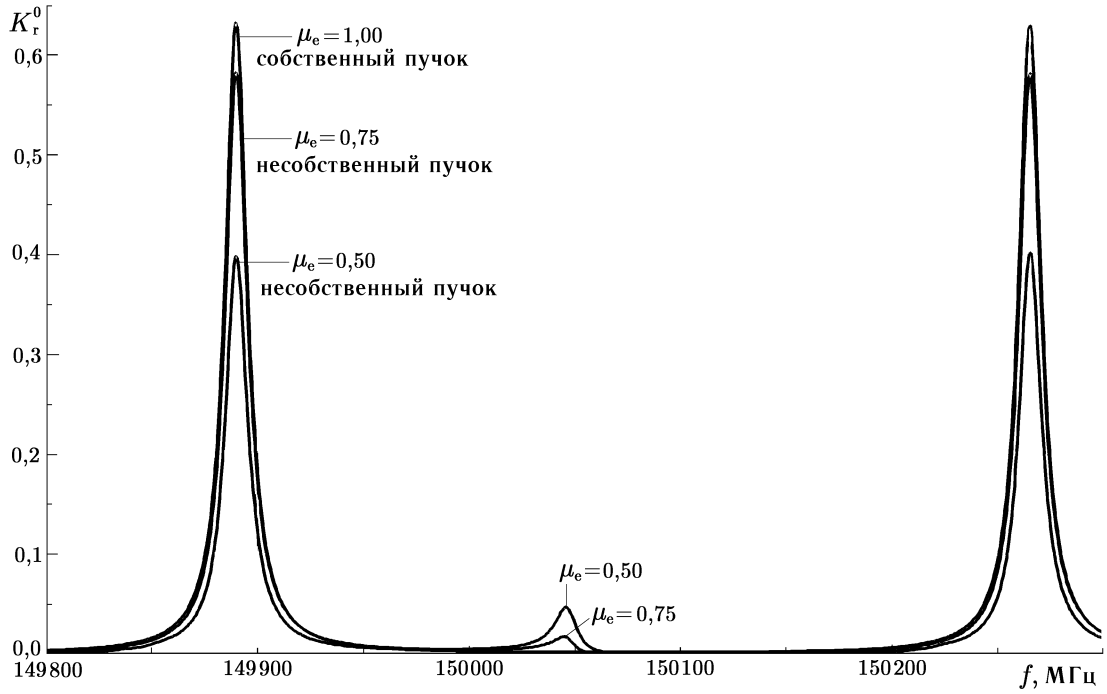

Рис. 2*в*. Влияние способа возбуждения резонатора на коэффициент отражения K_r^0 при одномодовом приёме

полуширины резонансной кривой по уровню 0,5 по мощности, приблизительно составляло $\chi = 1 \pm 0{,}01$. При одномодовом приёме пучка с шириной, равной ширине моды резонатора, разница между $\Delta f_{\rm l}$ и $\Delta f_{\rm r}$ несколько уменьшалась и исчезала при $\mu_{\rm e} = \mu_{\rm r} = \mu_{\rm t} = 1$. Следует заметить, что вследствие перекрытия «хвостов» резонансных кривых несимметрия уменьшается с уменьшением потерь в резонаторе, в частности с уменьшением степени прозрачности делительной пластинки.

Открытые резонаторы могут быть использованы как отражательные фильтры. В этом случае их характеристики существенно зависят от структур возбуждающего и принимаемого пучков. Развитая теория позволяет провести анализ этих эффектов.

На рис. 3 построен рассчитанный по (23) коэффициент прохождения по мощности $K_{\rm t}^0$ через резонатор при $T^2 = 0{,}9$; $R_{\rm om}^2 = 1$. Там же приведены аналогичные кривые, полученные в результате решения уравнения (18) для различных отношений ширин возбуждающего и приёмного пучков к ширине пучка собственной моды резонатора. Расчёт по (23) хорошо совпадает с результатами решения (18) при выполнении условия $\mu_{\rm e} = \mu_{\rm r} = 1$, т. е. при равенстве ширин возбуждающего и принимаемого пучков и пучка моды резонатора. Минимальный коэффициент пропускания при этом $T_{\rm s} \approx 0$. Отклонение величины $\mu_{\rm e}$ от единицы как в ту, так и в другую сторону приводит к появлению конечного минимального коэффициента прохождения, а также к провалам в коэффициенте пропускания на частотах возбуждения высших мод.

На рис. 4 построена зависимость отношения $T_{\rm s} = P_{\rm rez}/P_{\rm ant}$ мощности $P_{\rm rez}$, прошедшей через резонатор при резонансе, к мощности $P_{\rm ant}$, прошедшей при антирезонансе, в зависимости от ширины пучка при различной прозрачности делительной пластинки и близких к реальным омических потерях $R_{\rm om}^2 = 0{,}999$. Сравнение кривых показывает, насколько потери ухудшают параметры резонатора как фильтра. Для достижения подавления, соответствующего выражению (23), необходимо обеспечить отличие $\mu_{\rm e}$ от единицы меньше, чем на 0,1, или чистоту возбуждения на уровне $N_{\rm r} \geq 0{,}9$.

3. РЕЗОНАТОР С ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНОЙ

Результаты численного анализа системы уравнений (12)–(15) на примере резонатора с диэлектрической кремниевой пластиной показаны на рис. 5, 6. Резонатор имел следующие параметры: радиус кривизны зеркал $R_0 \approx 240$ мм, диаметр зеркал $2a_{\rm m} \approx 120$ мм, длина резонатора $L \approx 400$ мм; $L_2 \approx 100$ мм; $L_{1,5} \approx 100$ мм; $L_4 \approx 100$ мм, степень прозрачности плёнки $T^2 = 0{,}9$, коэффициент отражения от зеркал $R_{\rm om}^2 \approx 0{,}9984$ [6]. Кремниевая пластина имела толщину $L_{\rm pl} \approx 9{,}7$ мм, диаметр $D \approx 60$ мм, показатель преломления кремния $n \approx 3{,}42$.

Проведённые расчёты показали сложный характер спектра коэффициента отражения от резонатора. В зависимости от чистоты возбуждения и характера приёма (одномодового или интегрального) в нём содержатся как моды с низшими поперечными индексами, так и моды с индексами более высокого порядка. В отличие от пустого резонатора спектр резонатора с пластиной является неэквидистантным. При смещении пластины вдоль оси резонатора его добротность осциллирует, а частота резонанса смещается.

На рис. 5 показан фрагмент спектра коэффициента отражения от резонатора при интегральном приёме в окрестности квазирезонансной частоты ω^0 пластины для мод с низшими азимутальными индексами. Эта частота может быть приближённо оценена из соотношения

$$n\frac{\omega^0}{c}L_{\rm pl} \approx \pi m + \frac{\pi^2 c}{2\omega^0 n a_{\rm d}^2}\,,$$

где m — целое число, характеризующее количество полуволн, укладывающихся на толщине пластины, $a_{\rm d}$ — ширина пучка на пластине. Второе слагаемое в правой части в этом выражении возникает вследствие конечной ширины пучка на пластине. Параметры резонатора ($R_0 = 240{,}583$ мм; $L =$

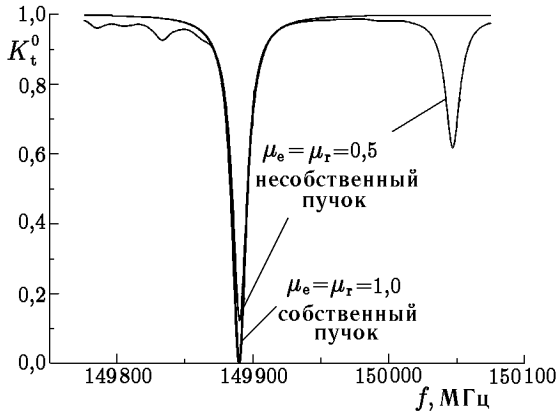

Рис. 3. Зависимость коэффициента прохождения K_t^0 через резонатор от частоты при возбуждении собственным и несобственным пучками

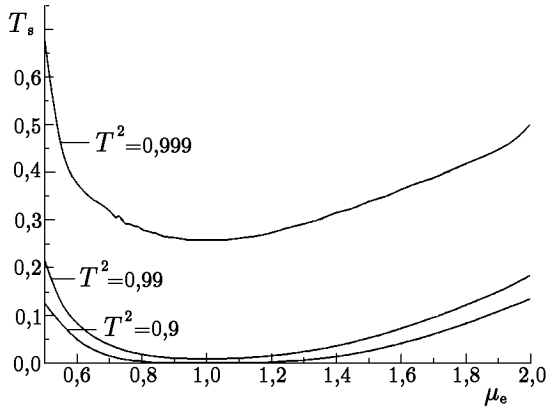

Рис. 4. Зависимость отношения минимума коэффициента пропускания резонатора к коэффициенту пропускания в антирезонансе от ширины возбуждающего пучка при различных степенях прозрачности делительной пластинки для одномодового приёма

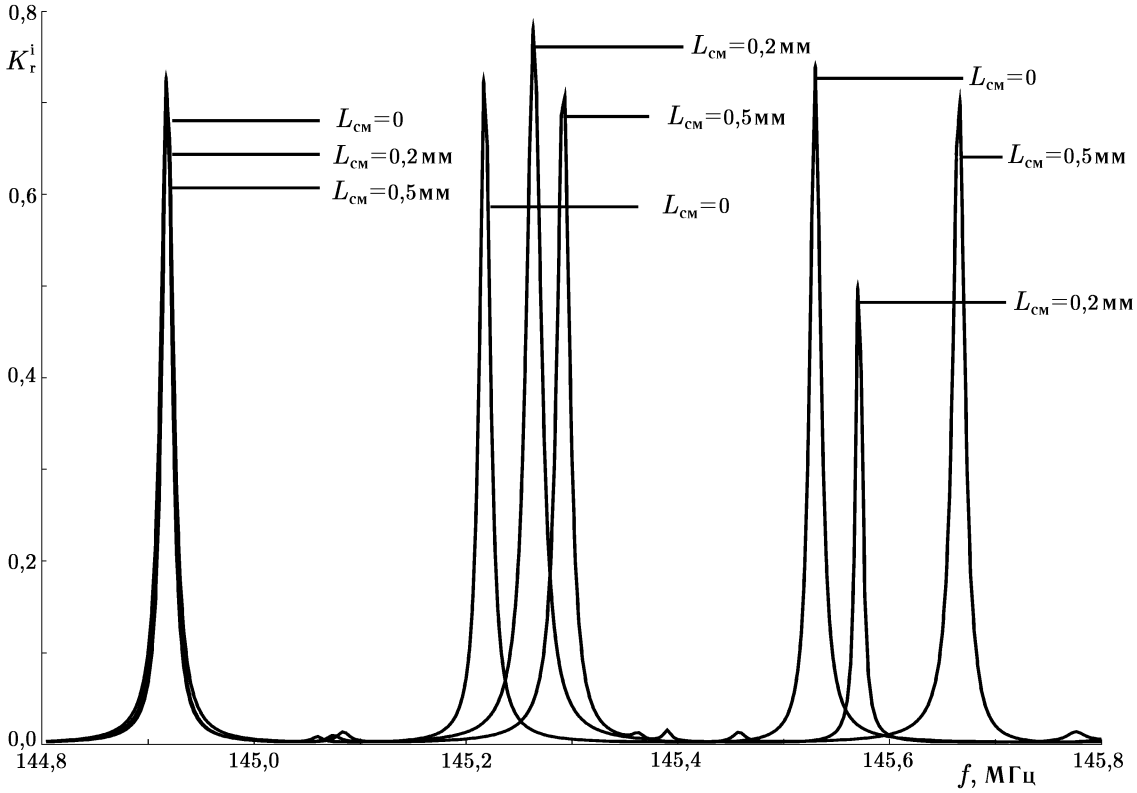

Рис. 5. Фрагмент спектра коэффициента отражения K_r^i для трёх соседних по продольному индексу мод резонатора с диэлектрической пластиной при различном её положении

$= 400{,}249$ мм; $L_{pl} = 9{,}6856$ мм; $T^2 = 0{,}9$; $R^2_{om} = 0{,}9984$; $n = 3{,}4168$; $\operatorname{tg}\delta = 0$), а особенно положение пластины внутри резонатора и длина последнего, выбраны таким образом, чтобы частота одной из мод резонатора была максимально близка к квазирезонансной частоте пластины. Будем характеризовать

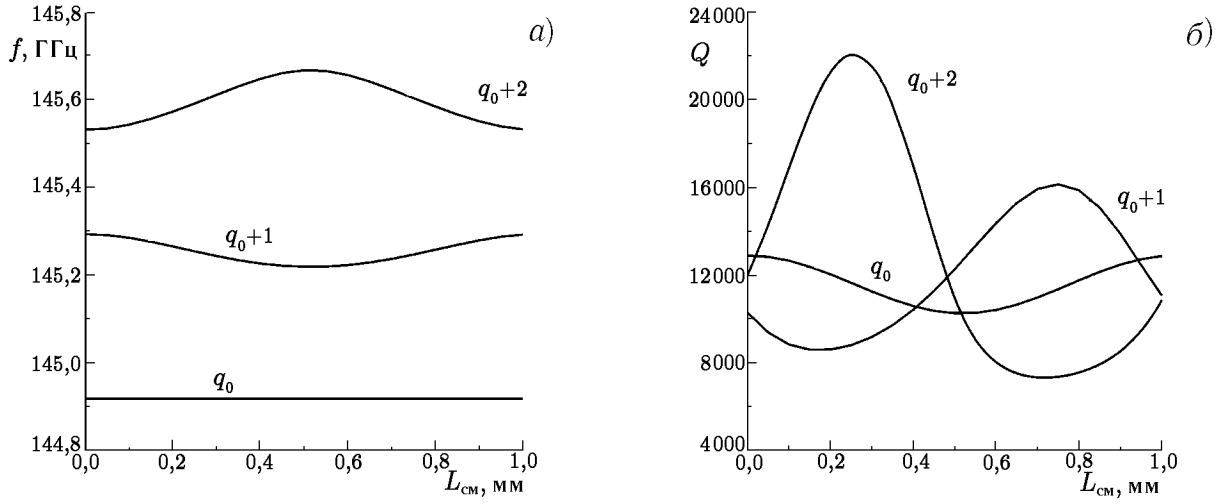

Рис. 6. Изменение центральной частоты f (a) и изменение добротности Q трёх ближайших мод спектра при смещении диэлектрической пластины относительно центра резонатора

эту моду продольным индексом q_0; двум соседним модам, расположенным выше по частоте, припишем индексы $q_0 + 1$ и $q_0 + 2$. Фрагмент спектра приведён для трёх положений диэлектрической пластины: в центре резонатора ($L_{см} = 0$), при смещении на $L_{см} = 0{,}5$ мм $\approx \lambda/4$ и при $L_{см} = 0{,}2$ мм.[2] Ширина возбуждающего пучка, а также его фаза практически совпадали с шириной и фазой пучка собственной моды резонатора на делительной пластинке (для их определения использовались квазиоптические оценки ширины и кривизны фазового фронта собственной моды эквивалентного пустого резонатора с оптической длиной исследуемого).

Неэквидистантность спектра проявляется в том, что в общем случае разность частот $\Delta_{q+2,q+1} = f_{q+2} - f_{q+1}$ мод с индексами $q_0 + 2$ и $q_0 + 1$ отличается от разности $\Delta_{q+1,q} = f_{q+1} - f_q$ частот мод с индексами $q_0 + 1$ и q_0. Рис. 6 демонстрирует изменение центральных частот и добротностей мод с индексами q_0, $q_0 + 1$ при перемещении пластины на расстояние $L_{см}$ от центра резонатора. Приведённые на рис. 6 зависимости являются квазипериодическими с периодом $\lambda/2$. Размах изменения частоты и добротности, а также несимметрия отклика больше на нерезонансных по отношению к пластине модах и тем больше, чем дальше мода отстоит от резонансной. Этот эффект обусловлен перераспределением энергии колебаний между частями резонатора, в одной из которых находится плёнка связи. При квазирезонансной толщине пластины смещение частоты резонанса минимально, что отмечено экспериментально в [4].

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе на основе теории рассеяния построена теория открытого резонатора с диэлектрической пластиной, позволяющая определять собственные частоты такой системы и их зависимость от различных параметров. В частности, найдена дисперсия, обусловленная диэлектрической пластиной. Построенная теория может служить обоснованием метода измерения чрезвычайно малых диэлектрических потерь в коротковолновой части миллиметрового диапазона длин волн. Теория может быть развита с учётом неровности поверхности пластин и векторности электромагнитного поля (замена формулы (3) более точной). Исследованы также свойства двухзеркального резонатора как отражательного фильтра и сформулированы требования к качеству возбуждающего пучка.

[2] Заметим, что спектр мод, расположенных ниже по частоте (с индексами $q_0 - 1$, $q_0 - 2$ и т. д.) практически симметричен спектру высокочастотных мод относительно частоты резонансной моды с индексом q_0.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 00–02–16423) и Совета по поддержке ведущих научных школ (грант № 00–15–96772).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ананьев Ю. А. Оптические резонаторы и проблема расходимости лазерного излучения. М.: Наука, 1979.
2. Вайнштейн Л. А. Открытые резонаторы и открытые волноводы. М.: Сов. радио, 1966.
3. Валитов Р. А., Дюбко С. Ф., Камышан В. В. и др. Техника субмиллиметровых волн. М.: Сов. радио, 1969.
4. Dryagin Yu. A., Parshin V. V. // Int. J. of Infrared and Millimeter Waves. 1992. V. 13, No. 7. P. 1 023.
5. Власов С. Н., Копосова Е. В., Мазур А. Б., Паршин В. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1996. Т. 39, № 5. С. 615.
6. Krupnov F., Markov V. N., Golubyatnikov G. Y. et al. // IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques. 1999. V. 47, No. 3. P. 284.
7. Бондаренко Н. Г., Таланов В. И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1964. Т. 7, № 2. С. 313.
8. Таланов В. И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1965. Т. 8, № 2. С. 260.

Институт прикладной физики РАН,
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию
22 декабря 2000 г.

OPEN RESONATORS EXCITED BY WAVE BEAMS

S. N. Vlasov and E. V. Koposova

Based on scattering theory, we study open resonators, in particular, develop a theory of an open resonator with a dielectric plate. Our theory makes it possible to find eigenfrequencies of such a system and their dependence on various parameters. In particular, we determined dispersion due to the dielectric plate. The theory developed can be used as a basis for a method of measuring extremely small dielectric losses in the short-wavelength part of the millimeter band. We also analyze the properties of a two-mirror resonator as a reflective filter and formulate the quality requirements for the exiting beam.

УДК 535.33/34

МЕТОДИКА АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНО-ВРАЩАТЕЛЬНЫХ СПЕКТРОВ МОЛЕКУЛ НА ОСНОВЕ ВАРИАЦИОННЫХ РАСЧЁТОВ

С. В. Ширин[1], *Н. Ф. Зобов*[1], *В. А. Савин*[2], *О. Л. Полянский*[1]

Описана методика автоматизированной идентификации экспериментальных колебательно-вращательных спектров молекул с использованием вариационных расчётов. С помощью предложенной методики проанализированы экспериментальные спектры трёхатомных молекул H_2O и HDO, при этом существенно ускорена обработка и анализ экспериментальных данных, значительно повышена точность и надёжность получаемых результатов. Обсуждается возможность применения предложенной методики для анализа спектров других многоатомных молекул.

ВВЕДЕНИЕ

Традиционные аналитические методы расчётов молекулярных спектров высокого разрешения основаны на разделении колебательного и вращательного движений молекулы. В нулевом приближении колебания считаются гармоническими, а вращение описывается в рамках модели жёсткого волчка. Нулевое приближение является основой для построения теории возмущений, которая была использована для расчёта спектров большого количества молекул. Однако хорошо известно, что теория возмущений для нежёстких трёхатомных молекул неприменима для описания даже относительно низко лежащих уровней [1]. За последнее десятилетие были разработаны методы расчёта спектров молекул, основанные на прямом решении уравнения Шрёдингера для движения ядер трёхатомных молекул с использованием вариационных расчётов [2]. При этом используются точные операторы кинетической энергии [3] движения ядер в приближении Борна—Оппенгеймера, записанные во внутренних координатах нелинейных трёхатомных молекул, и автоматически учитывается взаимодействие между колебательным и вращательным движением.

В работе [4] было показано, что вариационные вычисления обеспечивают лучшие экстраполяционные свойства, чем вычисления с использованием эффективных гамильтонианов. Кроме того, вариационные расчёты дают энергетические уровни сразу для всех колебательных состояний, автоматически решая проблему случайных резонансов между различными колебательными состояниями. Эти свойства вариационных вычислений делают их весьма эффективными при идентификации энергетических уровней высоковозбуждённых колебательно-вращательных состояний трёхатомных молекул.

В представленной работе описана методика автоматизированной идентификации экспериментальных колебательно-вращательных спектров молекул на основе вариационных расчётов. Предложенный способ автоматизированной идентификации спектров базируется на опыте «ручного» анализа, использованного нами в предшествующих работах. Методика реализована в виде набора программ, согласованных по входным и выходным данным, позволяет контролировать результаты на каждом этапе работы. Данная методика была разработана при анализе спектра молекулы H_2O в ближнем ультрафиолетовом, видимом и инфракрасном диапазонах, а затем была успешно применена для анализа спектра молекулы HDO. При этом удалось достичь значительного ускорения обработки и анализа экспериментальных данных за счёт применения современных вычислительных средств. Результаты идентификации экспериментальных спектров с помощью предложенного способа были опубликованы нами в [5, 6], а здесь приводится лишь методика идентификации, которая ранее не была описана.

1. ВАРИАЦИОННЫЕ РАСЧЁТЫ

При исследовании свойств молекул приходится рассматривать системы, состоящие из электронов и атомных ядер. Отношение массы ядра к массе электрона имеет порядок $10^3 \div 10^5$. В связи с этим

возникает возможность приближённого анализа динамики такой системы, если положить скорости движения ядер малыми по сравнению со скоростями электронов. В приближении Борна—Оппенгеймера [7] рассматривается движение электронов в поле фиксированных ядер. Затем используется энергия $V_0(\mathbf{X}_n)$ основного электронного состояния, зависящая от координат ядер $\mathbf{X}_n$ как от параметров, в качестве потенциальной поверхности в уравнении движения ядер $[T_n + V_0(\mathbf{X}_n)]\,\Psi_i(\mathbf{X}_n) = E_i\Psi_i(\mathbf{X}_n)$ [7], где T_n — оператор кинетической энергии ядер в приближении Борна—Оппенгеймера, Ψ_i — i-тая волновая функция, E_i — соответствующие энергетические уровни [3]. Это уравнение решается с помощью вариационных расчётов, т. е. путём диагонализации матрицы гамильтониана в специально выбранном базисе.

Существует два метода определения поверхности потенциальной энергии электронного движения: ab initio и полуэмпирический. Первый метод заключается в численном решении уравнения Шрёдингера для движения электронов в поле фиксированных ядер. Второй метод использует экспериментальные данные для определения потенциала. Данный подход заключается в задании поверхности потенциальной энергии в форме некоторой аналитической функции, параметры которой определяются из критерия наилучшего соответствия экспериментальным данным при вариационных расчётах. Полуэмпирический метод позволяет рассчитывать спектры молекул с лучшей точностью, но в ограниченном диапазоне, определяемом используемыми при расчёте экспериментальными данными. Экстраполяционные свойства этого метода ограничены, ab initio расчёты лишены этого недостатка.

Авторами данной работы совместно с группой учёных из Университетского колледжа Лондона были проведены вычисления спектра молекулы воды, используя высокоточные ab initio расчёты поверхности потенциальной энергии [8]. Диагональная поправка к приближению Борна—Оппенгеймера была включена в качестве добавки к ab initio поверхности потенциальной энергии [9]. Недиагональные поправки были частично учтены путём использования эффективных масс, равных среднему значению между ядерными и атомными массами [9]. Движение ядер вычислялось с использованием колебательных волновых функций в представлении дискретных переменных (DVR) и набора программ DVR3D [2]. Интенсивности переходов вычислялись, используя ab initio поверхность дипольного момента [10].

Использование рассчитанного спектра позволило провести идентификацию большого числа переходов горячей (выше 1 000 ° C) воды в спектре солнечных пятен и лабораторных спектрах [4, 11–13], что привело к определению нескольких тысяч новых экспериментальных уровней. Проведённые исследования показали необходимость перехода от анализа спектра лёгких молекул с помощью методов, основанных на теории возмущений, к вариационным расчётам. С помощью вариационных расчётов были также успешно проанализированы спектры холодной воды в инфракрасном и видимом диапазонах [5, 14, 15].

2. «РУЧНОЙ» СПОСОБ ИДЕНТИФИКАЦИИ

В предшествующих работах авторами применялся следующий способ идентификации экспериментальных спектров. Идентификация проводилась поэтапно, от частоты к частоте. Использовались последовательности переходов, т. е. переходы с квантовыми числами $K_a = J - n$ и $K_c = J - n$, где n постоянно для каждой последовательности, J — полный момент импульса.

Вариационные вычисления не совсем точны главным образом из-за ошибок в определении поверхности потенциальной энергии, но эти ошибки меняются систематически с изменением J для каждой данной последовательности. Обычно использование нашего ab initio списка линий (т. е. списка линий, полученного с помощью ab initio расчётов) позволяет предсказать следующую частоту в последовательности с точностью около 0,02 см$^{-1}$ (1 см$^{-1}$ соответствует частоте 29,97924562 ГГц). Таким образом, становится возможным, двигаясь последовательно, от частот с низкими J (эти частоты хорошо известны из экспериментов), предсказывать частоты неидентифицированных линий с большими J.

Анализ спектров проводился с использованием двух списков линий: ab initio [4] и полуэмпирического [8]. Оба эти списка были получены с использованием высокоточных вариационных вычислений колебательно-вращательных движений молекулы воды. Главным различием между двумя списками линий является то, что ab initio список базируется на ab initio вычислениях с адиабатической поправкой к приближению Борна—Оппенгеймера [9], в то время как полуэмпирический список вычислен с использованием поверхности потенциальной энергии, полученной из обработки экспериментальных спектроскопических данных.

Сравнение двух теоретических списков линий было проведено в ходе исследования спектра солнечных пятен [13]. Полуэмпирический список является более точным при оценке частот отдельных переходов, особенно с низкими J. Однако ошибки, получающиеся при использовании этого списка, часто ведут себя непредсказуемо. В противоположность этому, ошибки ab initio списка ведут себя более систематично, что позволяет делать точные предсказания частот следующих переходов в последовательностях линий, если известны частоты предыдущих переходов. Полуэмпирический список линий содержит полный набор колебательных и вращательных квантовых чисел для каждого энергетического уровня и, следовательно, для каждого перехода. Этот факт существенно помогает при анализе спектра, однако приписывание квантовых чисел энергетическим уровням становится всё более ненадёжным по мере роста энергии [15].

С помощью описанного выше способа были идентифицированы следующие спектры:

1) Лабораторный высокотемпературный вращательный спектр излучения воды в диапазоне 370÷930 см$^{-1}$ [11]. Идентифицированы 3 000 из 4 700 переходов.

2) Спектр молекулы воды в солнечных пятнах в диапазоне 750÷1 010 см$^{-1}$ [11]. Идентифицированы 1 687 переходов.

3) Спектр солнечных пятен в диапазоне K-окна прозрачности атмосферы (4 600÷5 100 см$^{-1}$) [13]. Идентифицированы 485 переходов в 10-ти колебательных полосах, лишь две из которых наблюдались ранее.

4) Спектр горячей воды в ν_2-диапазоне (933÷2 500 см$^{-1}$) [12]. Идентифицированы 6 810 из 8 959 переходов. Получено начало полосы для колебательного состояния (060) на частоте 8 870,54 см$^{-1}$.

5) Спектр водяного пара в ближнем инфракрасном диапазоне (13 200÷16 500 см$^{-1}$) [15]. Идентифицированы 663 из 795 переходов.

6) Спектр воды в ближнем инфракрасном, видимом и ближнем ультрафиолетовом диапазонах (13 098÷22 800 см$^{-1}$) [5, 14]. Идентифицированы 2 557 переходов, в том числе в 18-ти ранее не наблюдавшихся колебательных состояниях.

Необходимо отметить, что идентификация переходов в указанных выше работах проводилась в основном вручную с затратой большого количества времени. Приписывание квантовых чисел расчётным энергетическим уровням проводилось сравнением с полуэмпирическим списком линий [8]. Как было упомянуто выше, в нём содержатся все квантовые числа уровней, но не все приписывания этих квантовых чисел наблюдаемым линиям надёжны. Следовательно, в процессе идентификации могли возникать ошибки. Ручное вычисление комбинационных разностей также могло приводить к ошибкам.

3. АВТОМАТИЗИРОВАННАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ

Из-за всё большего внедрения вариационных расчётов, позволяющих получать теоретические спектры во всём заданном диапазоне (в отличие от расчётов с использованием эффективных гамильтонианов, позволяющих получать результаты лишь для отдельных колебательных состояний), возникла необходимость усовершенствования и автоматизации идентификации экспериментальных спектров. Эта проблема была успешно решена путём разработки и использования набора программ, которые

существенно ускоряют обработку экспериментальных спектров и позволяют контролировать анализ данных на каждом этапе исследования, что исключает появление случайных ошибок. Новая методика идентификации включает в себя следующие этапы:

1) Приписывание квантовых чисел рассчитанным уровням энергии.

2) Прямая идентификация (на основе известных экспериментальных уровней энергии).

3) Идентификация с помощью комбинационных разностей.

4) Идентификация сравнением с теоретическим списком линий.

Приведённые выше этапы идентификации реализованы в виде набора согласованных по входным и выходным информационным потокам программ. Ниже описаны основные принципы их работы.

3.1. Приписывание квантовых чисел рассчитанным уровням энергии

Вариационные вычисления [2] проводились с учётом полной симметрии нелинейных трёхатомных молекул. Таким образом, «хорошие» [16] квантовые числа (полного момента импульса J и симметрии колебательно-вращательных уровней) автоматически приписывались расчётным уровням энергии. Все уровни с данным J разбивались на четыре подгруппы в зависимости от типа симметрии. Остальные квантовые числа (ν_1, ν_2, ν_3, K_a, K_c), являющиеся приближёнными, остались неприписанными. Это затрудняет анализ новых экспериментальных данных, т. к. для идентификации линий необходимо знание всех квантовых чисел верхнего и нижнего энергетических уровней, участвующих в переходе.

Приписывание квантовых чисел расчётным энергетическим уровням проводилось с помощью методики [17], основанной на экстраполяции монотонной зависимости энергий уровней от квантовых чисел. Данная методика была подробно описана в [17], и здесь мы лишь кратко остановимся на ней.

Задача приписывания квантовых чисел теоретическим уровням энергии трёхатомных молекул решалась в два этапа. Вначале были приписаны колебательные квантовые числа расчётным уровням энергии с $J = 0$. При этом был использован тот факт, что вблизи минимума потенциальная поверхность может быть представлена в квадратичной форме. При переходе к нормальным координатам она может быть записана в виде потенциальной энергии трёхмерного гармонического осциллятора. Энергетические уровни гармонического осциллятора хорошо известны и определяются заданием фундаментальных частот. Хотя в потенциальной поверхности молекул присутствуют ангармонические члены, их влияние можно учесть. Приращение энергии уровней уменьшается, т. к. реальная поверхность потенциальной энергии шире поверхности потенциальной энергии гармонического осциллятора. Изменение приращения энергии между уровнями происходит плавно. Исходя из этого, можно попытаться предсказать последующие колебательные уровни, если известны предыдущие.

Первый этап процедуры реализован в виде интерактивной программы, позволяющей контролировать приписывание колебательных квантовых чисел на каждом шаге работы. Перебирались все возможные колебательные квантовые числа, начиная с основного состояния (000), путём изменения каждого квантового числа на единицу. Предполагаемая энергия очередного уровня ($n_1\, n_2\, n_3$) рассчитывалась из энергий уровней с квантовыми числами ($n_1 - 1\, n_2\, n_3$), ($n_1\, n_2 - 1\, n_3$), ($n_1\, n_2\, n_3 - 1$) с учётом плавного изменения разности энергий между соседними колебательными состояниями (см. табл. 1 в [17]). Из набора расчётных колебательных уровней выбиралось ближайшее значение к предполагаемой энергии с учётом симметрии состояний и известных экспериментальных данных. Данному уровню приписывались соответствующие квантовые числа. В результате квантовые числа приписаны всем расчётным колебательным уровням с $J = 0$ вплоть до определённой энергии (в нашем случае до 26 000 см$^{-1}$). В результате отдельные колебательные состояния получили квантовые числа, отличные от квантовых чисел, приписанных в работах [18, 19]. Это отличие связано с тем, что в нашей методике

приписывания не учитывается взаимодействие между отдельными колебательными состояниями в полиадах. При этом сумма $n_1 + n_3$ не изменяется, а именно она и существенна при определении колебательных квантовых чисел в обозначении локальных мод. Таким образом, в обозначении локальных мод наши приписывания полностью совпадают с предыдущими работами. Как показано в работах [14, 19], общепринятое приписывание колебательных квантовых чисел ($n_1\, n_2\, n_3$), основанное на модели гармонического осциллятора, может потерять своё физическое значение из-за сильного смешивания состояний, вызванного ангармоничностью потенциала, и более приемлемым является приписывание в обозначениях локальных мод [19].

Вторым этапом явилось приписывание вращательных и колебательных квантовых чисел уровням с определёнными значениями полного момента импульса $J \neq 0$. Полная энергия уровней равна сумме колебательной и вращательной энергий. Энергии уровней с одним и тем же набором вращательных квантовых чисел в различных колебательных состояниях сильно различаются. Однако вращательная энергия таких уровней в близких колебательных состояниях различается незначительно. Это позволяет предсказывать вращательную энергию последующих уровней по известным предыдущим. Далее рассчитывалась полная предполагаемая энергия уровня, и к ней в списке теоретических энергий уровней находилась ближайшая. Этому уровню приписывались соответствующие квантовые числа.

Параметрами теоретической линии, полученной с помощью набора программ DVR3D [2], являются частота, интенсивность, энергии уровней и квантовые числа полного момента импульса J состояний, участвующих в переходе. По энергиям уровней и моменту J находились соответствующие состояния в списке приписанных уровней, и эти квантовые числа верхнего и нижнего энергетических состояний заносились в теоретический список линий.

3.2. Прямая идентификация

Первым этапом анализа спектров была прямая идентификация, использующая известные экспериментальные уровни энергии (под экспериментальными мы понимаем уровни, рассчитанные из экспериментальных частот). В анализируемом спектре находились все частоты, совпадающие с рассчитанными из экспериментальных уровней энергии с учётом точности анализируемых частот и погрешности определения самих экспериментальных уровней. Этим экспериментальным переходам приписывались теоретические идентификации. В результате такой идентификации, как правило, определяется лишь часть экспериментального спектра.

3.3. Идентификация с помощью комбинационных разностей

Дальнейшая идентификация проводилась с помощью комбинационных разностей. Неизвестный уровень может встречаться в списке линий несколько раз. Разность между частотами, соответствующими переходам с данным верхним (нижним) уровнем, определяется разностью энергий нижних (верхних) уровней, участвующих в этих переходах: $w_1 = E_{\mathrm{u}} - E_{\mathrm{l}}^{(1)}$, $w_2 = E_{\mathrm{u}} - E_{\mathrm{l}}^{(2)}$, откуда $w_2 - w_1 = E_{\mathrm{l}}^{(1)} - E_{\mathrm{l}}^{(2)}$, либо $w_1 = E_{\mathrm{u}}^{(1)} - E_{\mathrm{l}}$, $w_2 = E_{\mathrm{u}}^{(2)} - E_{\mathrm{l}}$, откуда $w_2 - w_1 = E_{\mathrm{u}}^{(1)} - E_{\mathrm{u}}^{(2)}$, где w_1, w_2 — частоты переходов с данным уровнем, $E^{(1)}$, $E^{(2)}$ — энергии известных уровней.

Для идентификации использовались список экспериментальных уровней, теоретический список линий и список анализируемых линий. Наш способ идентификации с помощью комбинационных разностей заключается в определении энергии неизвестных уровней и, следовательно, новых частот переходов с этими уровнями.

Уровни определялись поэтапно. Выбирались некоторые значения ν_1, ν_2, ν_3, J и определялись все неизвестные уровни с данными квантовыми числами. Алгоритм определения неизвестного уровня следующий. В теоретическом списке линий находились все линии с определяемым уровнем. Для каждого перехода из теоретического списка линий находились экспериментальные частоты, совпадающие

с расчётной с учётом точности вычислений. По ним рассчитывались предполагаемые энергии искомого уровня. Таким образом, получался набор предполагаемых экспериментальных значений энергии искомого уровня. На основе этих значений рассчитывались остальные частоты и проводился их поиск среди экспериментальных данных с учётом экспериментальных и теоретических интенсивностей. В данном случае использовался более жёсткий критерий поиска экспериментальных частот, т. к. точность эксперимента значительно превышала точность расчётов. Можно рассматривать количество найденных линий с данной предполагаемой энергией уровня как его «вес». Подобная процедура проводилась с каждой линией с искомым уровнем. Затем по ранее определённым для данного J экспериментальным $E_{\text{эксп}}$ и теоретическим $E_{\text{теор}}$ значениям энергии мы предсказывали разность $E_{\text{эксп}} - E_{\text{теор}}$ для определяемого нами уровня. Так как нам известно теоретическое значение энергии уровня, мы легко получали предполагаемое экспериментальное значение. После этого из набора данных выбиралось ближайшее по энергии значение с наибольшим весом, и это значение энергии присваивалось искомому уровню. Таким образом, анализ всех частот переходов с неизвестным энергетическим уровнем позволял определить его энергию. Полученное экспериментальное значение энергии заносилось в список уровней, который участвовал в дальнейшем анализе.

Подобная процедура применялась для всех уровней с выбранными индексами ν_1, ν_2, ν_3, J, после чего проводилась прямая идентификация (пункт 3.2). Если на данном этапе при прямой идентификации возникала возможность различной идентификации линии, то проводилась выборка по интенсивности.

3.4. Идентификация сравнением с теоретическим списком линий

Если не удавалось определить уровень с помощью вычисления комбинационных разностей, определение проводилось сравнением с теоретическим списком линий. Неидентифицированная частота из анализируемого списка линий находилась в теоретическом списке с учётом разности между экспериментальными и расчётными энергиями вращательных уровней с тем же значением J. Оказалось, что для каждого колебательного состояния и заданного полного момента импульса разность между теоретическим и экспериментальным значениями при изменении вращательных квантовых чисел K_a, K_c меняется слабо (см. табл. 3 в [5]). Это обстоятельство и было использовано для идентификации по одной частоте. Если неизвестна экспериментальная энергия уровня, её можно предсказать по теоретической с использованием разности между теоретической и экспериментальной энергией определённых ранее уровней.

Описанный выше улучшенный способ идентификации был применён для анализа спектров трёхатомных молекул H_2O и HDO.

В результате анализа экспериментального спектра молекулы воды в диапазоне $2\,500 \div 6\,000$ см$^{-1}$ были идентифицированы 7 603 линии из 8 482 измеренных и определены 570 новых колебательно-вращательных уровней [6].

Была проведена идентификация спектра поглощения солнечных пятен в диапазонах L ($2\,497 \div 3\,195$ см$^{-1}$) и K ($4\,251 \div 4\,962$ см$^{-1}$) окон прозрачности атмосферы. В полосе L идентифицированы 1 207 новых линий, в полосе K — 508 линий. Получены новые начала полос для колебательных состояний (051) — 11 242,8 см$^{-1}$ — и (061) — 12 586 см$^{-1}$ [6].

Была проведена идентификация ближнего ультрафиолетового спектра молекула воды ($23\,800 \div 25\,232$ см$^{-1}$) [5]. Идентифицированы 63 линии и получены 2 новых колебательных состояния; определены 48 новых уровней.

Данный способ был применён и для анализа спектра молекулы HDO в диапазоне $380 \div 2\,190$ см$^{-1}$. Идентифицированы 6 430 линий и определены 1 536 новых энергетических уровней молекулы HDO.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 01–02–06411, 00–02–16604).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Polyansky O. L. // J. Mol. Spectr. 1985. V. 112. P. 79.
2. Tennyson J., Henderson J. R., Fulton N. G. // Comp. Phys. Comms. 1995. V. 86. P. 175.
3. Tennyson J., Miller S., Rurt Le Sueur C. // Comp. Phys. Comms. 1993. V. 75. P. 339.
4. Polyansky O. L., Zobov N. F., Tennyson J., Viti S., Bernath P. F., Wallace L. // Science. 1997. V. 277. P. 346.
5. Zobov N. F., Belmiloud D., Polyansky O. L., Tennyson J., Shirin S. V., Carleer M., Jenouvrier A., Vandaele A. C., Bernath P. F., Merienne M. F., Colin R. // J. Chem. Phys. 2000. V. 113. P. 1 546.
6. Zobov N. F., Polyansky O. L., Tennyson J., Shirin S. V., Nassar R., Hirao T., Imajo T., Bernath P. F., Wallace L. // Astrophys. J. 2000. V. 530. P. 994.
7. Браун П. А., Киселёв А. А. Введение в теорию молекулярных спектров. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1983. 232 с.
8. Partridge H., Schwenke D. W. // J. Chem. Phys. 1997. V. 106. P. 4 618.
9. Zobov N. F., Polyansky O. L., Le Sueur C. R., Tennyson J. // Chem. Phys. Letters. 1996. V. 260. P. 381.
10. Gabriel W., Reinsch E.-A., Rosmus P., Carter S., Handy N. C. // J. Chem. Phys. 1993. V. 99. P. 897.
11. Polyansky O. L., Zobov N. F., Viti S., Tennyson J., Bernath P. F., Wallace L. // J. Mol. Spectr. 1997. V. 186. P. 422.
12. Zobov N. F., Polyansky O. L., Tennyson J., Lotoski J. A., Colarusso P., Zhang K. Q., Bernath P. F. // J. Mol. Spectr. 1999. V. 193. P. 118.
13. Polyansky O. L., Zobov N. F., Tennyson J., Viti S., Bernath P. F., Wallace L. // Astrophys. J. Lett. 1997. V. 489. P. 205.
14. Carleer M., Jenouvrier A., Vandaele A.-C., Bernath P. F., Marienne M. F., Colin R., Zobov N. F., Polyansky O. L., Tennyson J., Savin V. A. // J. Chem. Phys. 1999. V. 111. P. 2 444.
15. Polyansky O. L., Zobov N. F., Viti S., Tennyson J. // J. Mol. Spectr. 1998. V. 189. P. 291.
16. Банкер Ф. Симметрия молекул и молекулярная спектроскопия. М., 1981. 456 с.
17. Зобов Н. Ф., Полянский О. Л., Савин В. А., Ширин С. В. // Оптика атмосферы и океана. 2000. Т. 13, №12. С. 1 107.
18. Flaud J.-M., Camy-Peyret C., Mandin J.-Y., Chevillard J.-P., Brault J. W., Ramsay D. A., Vervloet M., Chauville J. // J. Mol. Spectr. 1985. V. 113. P. 208.
19. Mandin J.-Y., Chevillard J.-P., Camy-Peyret C., Flaud J.-M., Brault J. W. // J. Mol. Spectr. 1986. V. 116. P. 167.

[1] Институт прикладной физики РАН,
[2] Нижегородский госуниверситет им. Н. И. Лобачевского,
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию
6 апреля 2001 г.

AUTOMATED TECHNIQUE FOR IDENTIFYING EXPERIMENTAL VIBRATIONAL–ROTATIONAL MOLECULAR SPECTRA BASED ON VARIATIONAL CALCULATIONS

S. V. Shirin, N. F. Zobov, V. A. Savin, and O. L. Polyansky

We describe a technique for automated identification of experimental vibrational–rotational molecular spectra, which is based on variational calculations. The proposed technique is used to analyze experimental spectra of triatomic molecules H_2O and HDO. Our technique allows one to accelerate significantly the processing and analysis of experimental data, as well as to improve drastically the accuracy and quality of the results obtained. The possibility of applying this technique for analyzing spectra of other polyatomic molecules is discussed.

УДК 621.317.361.029

ИЗМЕРЕНИЕ ТЕНЗОРА ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ САПФИРА ПРИ ТЕМПЕРАТУРЕ ОТ 93 ДО 343 К

В. Н. Егоров, А. С. Воловиков

Рассматривается метод измерения компонент тензора диэлектрической проницаемости одноосных анизотропных слабопоглощающих диэлектриков по спектру резонансных частот металлодиэлектрического резонатора в виде исследуемого продольно-анизотропного цилиндрического образца с торцевыми металлическими зеркалами. Измерение обеих компонент тензора проницаемости сапфира при температуре от 93 до 343 К проводится по спектру симметричных E-колебаний. Для исключения влияния остаточных зазоров между образцом и зеркалами торцевые поверхности образца металлизированы. Выполнены независимые измерения продольной и поперечной компонент проницаемости при комнатной температуре по спектрам азимутальных E-колебаний и симметричных H-колебаний. Приведены значения продольной и поперечной компонент тензора диэлектрической проницаемости сапфира в диапазоне $93 \div 343$ К с шагом 10 К.

ВВЕДЕНИЕ

Монокристаллический оксид алюминия Al_2O_3 — сапфир — широко используется в микроволновой технике в качестве материала для подложек интегральных СВЧ микросхем, высокодобротных диэлектрических резонаторов и окон вывода излучения мощных генераторов. Охлаждение сапфировых резонаторов позволяет повысить их добротность до уровня лучших сверхпроводящих, а охлаждение окон вывода мощного излучения — предотвратить их перегрев и разрушение. Криоэлектронные устройства на основе обычных и высокотемпературных сверхпроводников часто используют подложки из монокристалла Al_2O_3. Охлаждаемые объёмные резонаторы с различными сапфировыми элементами находят применение при измерении поверхностного импеданса высокотемпературных и обычных сверхпроводников.

Диэлектрические потери в сапфире изучались в ряде работ [1—3], и в настоящее время имеются данные в температурном интервале $1{,}5 \div 1\,500$ К, которые зависят от частоты, степени совершенства исследованных кристаллов и могут существенно изменяться от образца к образцу в области криогенных температур. Вещественные части $\varepsilon_{\|}$, $\varepsilon_{\perp}$ компонент тензора диэлектрической проницаемости сапфира практически не обладают частотной дисперсией в микроволновом диапазоне, а их значения по данным различных авторов [4—6] хорошо согласуются между собой и с полученными одним из наиболее точных методов [7]. Имеющиеся в литературе данные по $\varepsilon_{\|}$, $\varepsilon_{\perp}$ сапфира относятся в основном к области комнатных и повышенных температур. В работе [8] приведены зависимости $\varepsilon_{\|}$, $\varepsilon_{\perp}$ в диапазоне от криогенных до комнатных температур, которые не учитывают изменение размеров измеряемого образца с температурой и не исключают влияния зазоров между образцом и зеркалами стержневого металлодиэлектрического резонатора. Последние, по оценкам авторов, вносят основной вклад в неопределённость результатов: погрешность составляет 0,3 % для $\varepsilon_{\perp}$ и до 2 % для $\varepsilon_{\|}$. Используемое в работе графическое представление зависимостей $\varepsilon_{\|}$, $\varepsilon_{\perp}$ без табличных данных не позволяет получить числовые значения $\varepsilon_{\|}$, $\varepsilon_{\perp}$ с погрешностью менее $1 \div 2$ %.

Точность расчёта резонансных частот охлаждаемых диэлектрических резонаторов из сапфира в значительной мере ограничивается точностью данных по $\varepsilon_{\|}$, $\varepsilon_{\perp}$. Подгонка резонансной частоты криогенного сапфирового диэлектрического резонатора до нужного значения путём шлифовки оказывается

сложной и дорогой процедурой и может ухудшить его добротность. Возможности подстройки частоты только изменением температуры оказываются недостаточными в криогенной области.

1. МЕТОД ИЗМЕРЕНИЯ

Основные требования к методу измерения компонент $\varepsilon_{\parallel}$, $\varepsilon_{\perp}$ тензора диэлектрической проницаемости слабопоглощающих одноосных анизотропных диэлектриков в широком диапазоне температур можно сформулировать следующим образом. Для достижения высокой точности необходимо использовать резонансный метод измерения с высокой степенью концентрации полной электромагнитной энергии резонатора в исследуемом образце. Измерительный резонатор должен допускать строгий электродинамический анализ и изменение температуры в широком диапазоне без появления неконтролируемых механических напряжений или зазоров между металлическими стенками резонатора и образцом из-за различия их температурных коэффициентов линейного расширения. Желательно также иметь возможность одновременного измерения обеих компонент тензора диэлектрической проницаемости без переустановки образца. В наибольшей мере этим требованиям удовлетворяет металлодиэлектрический резонатор (МДР) в виде исследуемого цилиндрического образца с торцевыми металлическими зеркалами. Его теория и применение для диэлектрических измерений изотропных материалов рассматривались в ряде работ [9, 10]. Строгая теория такого МДР с продольно-анизотропным диэлектрическим цилиндром приведена в работе [11], а его применение для измерений тензора проницаемости анизотропных диэлектриков в [12]. Спектр резонансных частот МДР состоит из симметричных (H_{0mp} и E_{0mp}, где $\{m,p\} \geq 1$), гибридных (HE_{nmp} и EH_{nmp}, где $\{n,m,p\} \geq 1$) и азимутальных (E_{nm0}, где $m \geq 1$; $n \gg 1$) колебаний. Измерение диэлектрической проницаемости сводится к возбуждению колебаний определённых типов, измерению их резонансных частот, идентификации индексов колебаний $n = 0, 1, 2, \ldots$; $m = 1, 2, 3, \ldots$; $p = 0, 1, 2, \ldots$ и решению соответствующего дисперсионного уравнения. Для измерения обеих компонент тензора диэлектрической проницаемости необходимо измерить не менее двух резонансных частот. Использование большего числа резонансных частот позволяет повысить точность измерения. При этом встаёт задача селективного возбуждения определённых типов колебаний в заданном диапазоне частот и идентификации их индексов, которая проще решается для колебаний H_{0mp}, E_{0mp}, E_{nm0} с наиболее простой структурой поля. Спектры колебаний H_{0mp} и E_{nm0} в продольно-анизотропном МДР не зависят каждый соответственно от $\varepsilon_{\parallel}$ и $\varepsilon_{\perp}$ и могут быть использованы для независимого измерения $\varepsilon_{\parallel}$, $\varepsilon_{\perp}$ в отличие от частот колебаний E_{0mp}, зависящих от обеих компонент тензора. При измерениях в диапазоне частот с двух-четырёхкратным перекрытием сложно осуществить селективное и эффективное возбуждение колебаний H_{0mp} и E_{nm0}. Из-за «втягивания» поля в диэлектрик с ростом частоты возбуждение через цилиндрическую поверхность образца приводит к необходимости приближать устройства связи к образцу при переходе от низших резонансных частот к высшим. Конструкция резонатора для низкотемпературных измерений при использовании регулируемых устройств связи существенно усложняется.

Колебания E_{0mp} в цилиндрическом МДР могут селективно возбуждаться в диапазоне частот с помощью разомкнутых в плоскости торцевых зеркал и соосных с образцом коаксиальных линий, что делает эти колебания удобными для низкотемпературных измерений обеих компонент тензора проницаемости. Уравнение спектра резонансных частот колебаний E_{0mp} в МДР с продольно-анизотропным диэлектрическим цилиндром имеет вид

$$\frac{\varepsilon_{\parallel} J_1(x)}{x J_0(x)} + \frac{K_1(y)}{y K_0(y)} = 0, \tag{1}$$

где $x = a\,(\varepsilon_{\parallel}/\varepsilon_{\perp})^{1/2}\,[k_2^2\varepsilon_{\perp} - (p\pi/L)^2]^{1/2}$, $y = a\,[(p\pi/L)^2 - k_2^2]^{1/2}$, $a = D/2$, $k_2 = \omega\sqrt{\varepsilon_2}/c$, $\omega = 2\pi f$, f — резонансная частота, c — скорость света в вакууме, D — диаметр образца, L — высота образца,

ε_2 — относительная диэлектрическая проницаемость окружающей образец среды, $p = 1, 2, 3, \ldots$ — продольный индекс колебания, J_n и K_n — функции Бесселя и Макдональда n-го порядка ($n = 0; 1$).

Исходными данными для расчёта $\varepsilon_\perp$, $\varepsilon_\parallel$, из уравнения (1) являются: геометрические размеры D и L образца, относительная диэлектрическая проницаемость ε_2 окружающей среды и набор измеренных резонансных частот f колебаний E_{0mp} с идентифицированными индексами m, p. Для определения $\varepsilon_\perp$ и $\varepsilon_\parallel$ необходимо измерить не менее двух резонансных частот f_i, f_j. Каждая пара резонансных частот f_i, f_j колебаний E_{0mp} с индексами m_i, p_i и m_j, p_j после подстановки в (1) приводит к системе уравнений

$$\frac{b_i x_j^2 - b_j x_i^2}{a_j b_i - a_i b_j}\,\frac{J_1(x_i)}{x_i J_0(x_i)} + C_i = 0, \qquad \frac{b_i x_j^2 - b_j x_i^2}{a_j b_i - a_i b_j}\,\frac{J_1(x_j)}{x_j J_0(x_j)} + C_j = 0 \tag{2}$$

относительно неизвестных x_i, x_j. Здесь введены обозначения: $a_e = (\pi D)^2 (f_e/c)^2 \varepsilon_2$, $b_e = (\pi D)^2 [p_e/(2L)]^2$, $C_e = K_1(y_e)/[y_e K_0(y_e)]$, $y_e = (b_e - a_e)^{1/2}$, индекс e принимает значения i, j. Корни x_e системы (2) находятся в интервалах $\nu_{0m} \le x_e \le \nu_{1m}$, где ν_{0m}, ν_{1m} — m-ые корни функций $J_0(x), J_1(x)$.

Для набора из N резонансных частот получается $M = N(N-1)/2$ пар f_i, f_j и столько же пар значений $\varepsilon_{\parallel k}, \varepsilon_{\perp k}$:

$$\varepsilon_{\parallel k} = \frac{b_i x_j^2 - b_j x_i^2}{a_j b_i - a_i b_j}, \quad \varepsilon_{\perp k} = \frac{b_i x_j^2 - b_j x_i^2}{a_j x_i^2 - a_i x_j^2}, \quad k = 1, 2, \ldots, M. \tag{3}$$

Вследствие различной обусловленности системы уравнений (2) при разных комбинациях f_i, f_j и различного влияния погрешностей в исходных данных на значения $\varepsilon_{\parallel k}, \varepsilon_{\perp k}$ результаты (3) оказываются неравноточными. В качестве окончательного результата принимались средние взвешенные из (3) с весами, обратными квадрату числа обусловленности χ_k линеаризованной в окрестности $\varepsilon_{\parallel k}, \varepsilon_{\perp k}$ системы (2):

$$\varepsilon_{\parallel,\perp} = \sum_{k=1}^{M} \varepsilon_{\parallel,\perp k} \chi_k^{-2} \Bigg/ \sum_{k=1}^{M} \chi_k^{-2}. \tag{4}$$

Уравнение (1) при заданных D, L, f, ε_2 является неявной функцией $\varepsilon_\parallel(\varepsilon_\perp)$ вида

$$F\{\varepsilon_\parallel(\varepsilon_\perp), x[\varepsilon_\parallel(\varepsilon_\perp), \varepsilon_\perp]\} = 0, \tag{5}$$

где F — левая часть (1). Система (2) на плоскости $(\varepsilon_\perp, \varepsilon_\parallel)$ соответствует двум линиям $\varepsilon_{\parallel i}(\varepsilon_\perp), \varepsilon_{\parallel j}(\varepsilon_\perp)$, точка пересечения которых даёт решение $\varepsilon_{\parallel k}, \varepsilon_{\perp k}$. Число обусловленности имеет при этом простую геометрическую интерпретацию [13]: $\chi_k = \operatorname{ctg}(\psi_k/2)$, где ψ_k — угол между касательными к линиям $\varepsilon_{\parallel i}(\varepsilon_\perp), \varepsilon_{\parallel j}(\varepsilon_\perp)$ в точке их пересечения. Это число выражается через производные $d_e = \partial\varepsilon_{\parallel e}/\partial\varepsilon_\perp$, где $e = i, j$, как

$$\chi_k = \left[\frac{2 + d_i^2 + d_j^2 + \sqrt{4 + 8 d_i d_j + (d_i^2 + d_j^2)^2}}{2 + d_i^2 + d_j^2 - \sqrt{4 + 8 d_i d_j + (d_i^2 + d_j^2)^2}}\right]^{1/2}.$$

Легко видеть, что при $d_i = d_j$ (вырожденный случай, $\psi = 0$) число обусловленности $\chi_k \to \infty$. При $d_i d_j = -1$ (идеальная обусловленность, $\psi = \pi/2$) $\chi_k = 1$. Дифференцирование неявной функции (5) с учётом (1) и несложные преобразования приводят к аналитическому выражению для производных:

$$d_e = -\frac{\varepsilon_{\parallel k}}{\varepsilon_{\perp k}}\,\frac{b_e}{a_e \varepsilon_{\perp k} - b_e}\left[1 + \frac{2C_e}{C_e\,(a_e \varepsilon_{\perp k} - b_e)/\varepsilon_{\perp k} + \varepsilon_{\parallel k}}\right],$$

где $e = i, j$.

Обусловленность системы (2) оказывается наилучшей в парных комбинациях сильно- и слабозамедленных мод E_{0m} круглого продольно-анизотропного диэлектрического волновода, отрезком которого является измеряемый в МДР диэлектрический образец. Отношение продольной и поперечной компонент электрического поля E уменьшается с ростом коэффициента фазового замедления моды $U = pc/(2Lf\sqrt{\varepsilon_2})$. По этой причине достаточно сильная зависимость характеристик МДР от $\varepsilon_\parallel$ при колебаниях с $U = 1{,}2 \div 1{,}5$ ослабевает для колебаний с $U \to \sqrt{\varepsilon_\perp}$, характеристики которых зависят в основном от $\varepsilon_\perp$.

Значения компонент тензора относительно вакуума определяются как $\varepsilon_{1\parallel,\perp} = \varepsilon_{\parallel,\perp}\varepsilon_2$. В измеряемом образце сосредоточено не менее $80 \div 90$ % полной энергии резонатора, поэтому влияние окружающей атмосферы на его резонансные частоты незначительно. Отклонение ε_2 в рассматриваемом интервале температур от значения 1,00058 при нормальных условиях учитывается численным образом.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЯ

Из монокристалла Al_2O_3 был изготовлен цилиндрический образец с диаметром 29,998 мм, высотой 20,012 мм и отклонением кристаллографической оси от геометрической оси цилиндра менее 1°. Измерение размеров образца проводилось при температуре 293 К на инструментальном микроскопе с неопределённостью ± 3 мкм. Торцевые поверхности образца металлизировались напылением в вакууме слоя меди толщиной не менее 2 мкм. В центре торцевой поверхности имелся свободный от металлизации круг с диаметром 2 мм для возбуждения колебаний и вывода резонансного сигнала. Образец зажимался между двумя плоскими полированными латунными зеркалами с диаметром 90 мм, в центре которых имелись регулируемые коаксиальные возбудители симметричных колебаний E_{0mp}. С целью исключения неконтролируемых механических напряжений при измерениях в широком диапазоне температур зеркала выполнены «плавающими» и подпружинены.

Резонатор включался в коаксиальный тракт по проходной схеме и возбуждался в диапазоне частот $4{,}19 \div 13{,}6$ ГГц. Связь резонатора с трактом регулировалась при комнатной температуре и устанавливалась малой (коэффициент связи $\beta < 0{,}1$ для колебаний с наибольшей связью) за счёт образования участка закритического волновода между плоскостью зеркала и плоскостью обрыва центрального проводника возбуждающего коаксиала. В качестве индикатора резонанса использовался анализатор спектра С4-27. Резонатор помещался в термостат ТК-500 и охлаждался испаряемым из сосуда Дьюара жидким азотом, что исключало выпадение конденсата внутри термостата и резонатора. Измерение температуры резонатора осуществлялось двумя платиновыми термометрами сопротивления (по одному в каждом латунном зеркале). Измерения проводились при прямом и обратном ходе температуры после её установления в заданной точке. При определении $\varepsilon_\perp$, $\varepsilon_\parallel$ по (1)–(3) размеры образца пересчитывались по данным работ [14, 15] от размеров при 293 К для каждого значения температуры из исследуемого диапазона. Расчётное уменьшение размеров образца при охлаждении от 293 до 93 К составляет 0,014 мм по высоте и 0,018 мм по диаметру. В измерениях использовались 6 резонансных частот (15 пар) колебаний E_{0mp} с индексами $m \le 3$, $p \le 4$ во всём диапазоне температур за исключением точки 293 К, где для снижения случайной составляющей погрешности измерения проводились на 9-ти резонансных частотах (36 пар).

Основной вклад в систематическую погрешность результатов, и прежде всего в $\varepsilon_\parallel$, вносит зазор между торцевыми поверхностями образца и зеркалами, существующий из-за микронеровностей на поверхностях зеркал и образца, недостаточной толщины слоя металлизации и его отсутствия в области коаксиальных возбудителей. «Плавающая» конструкция подпружиненных зеркал МДР обеспечивала их самоустановку по измеряемому образцу с равномерным давлением на его торцевые поверхности и, тем самым, постоянство остаточных зазоров в исследуемом диапазоне температур. Относительная

невоспроизводимость резонансных частот колебаний E_{0mp} при разборке и сборке МДР в нормальных условиях не превышала 10^{-5}.

Чтобы снизить систематическую составляющую погрешности полученных по (1)–(3) данных, на этом же образце при комнатной температуре проводилось независимое измерение компонент $\varepsilon_\perp$, $\varepsilon_\parallel$. Такое измерение для $\varepsilon_\parallel$ проводилось по спектру азимутальных аксиально-симметричных колебаний E_{n10}, электрическое поле которых имеет только параллельную геометрической оси образца (и оси C кристалла) составляющую. Дисперсионное уравнение азимутальных колебаний E_{nm0} имеет вид [16]:

$$\frac{\sqrt{\varepsilon_\parallel}\, J_n'(k_2 a\sqrt{\varepsilon_\parallel})}{J_n(k_2 a\sqrt{\varepsilon_\parallel})} - \frac{H_n^{(2)\prime}(k_2 a)}{H_n^{(2)}(k_2 a)} = 0, \tag{6}$$

где J_n, $H_n^{(2)}$, J_n', $H_n^{(2)\prime}$ — функции Бесселя первого рода и Ханкеля второго рода n-го порядка и их производные по аргументу соответственно. Уравнение (6) имеет комплексные корни при вещественном $\varepsilon_\parallel$, что соответствует излучению части энергии колебаний. Для измерений $\varepsilon_\parallel$ использовались колебания E_{n10} с азимутальным индексом $n = 6, 7, \ldots 15$. Радиационная добротность этих колебаний составляла около $3 \cdot 10^3$ при $n = 6$ и повышалась до приблизительно 10^9 при $n = 15$. Резонатор включался в тракт как полосно-заграждающий фильтр. Колебания возбуждались через цилиндрическую поверхность образца с помощью микрополосковой линии со срезанным до одного края металлической полоски диэлектриком. На рис. 1 приведены результаты измерения $\varepsilon_{1\parallel} = \varepsilon_\parallel \varepsilon_2$ на резонансных частотах колебаний $E_{6,1,0} \div E_{15,1,0}$ в диапазоне $8{,}119 \div 17{,}611$ ГГц при температуре 293 К. Среднее значение $\varepsilon_{1\parallel} \pm 3\sigma = 11{,}577 \pm 0{,}001$ (кривая на рис. 1) хорошо совпадает с результатом [7] на частоте 166 ГГц и другими результатами [5, 6]. Отличие полученного значения на 0,08 % от данных [7] может быть объяснено различной температурой образцов при их измерении, а также слабым проявлением в микроволновом диапазоне эспериментально наблюдавшейся аномальной дисперсии сапфира в инфракрасной области [17].

Независимое измерение компоненты $\varepsilon_\perp$ проводилось по спектру симметричных колебаний H_{0mp}, не имеющих компоненты электрического поля вдоль оси C кристалла. Дисперсионное уравнение в этом случае имеет вид [12]

$$\frac{J_1(u)}{uJ_0(u)} + \frac{K_1(y)}{yK_0(y)} = 0, \tag{7}$$

где $u = a\sqrt{k_2^2\varepsilon_\perp - (p\pi/L)^2}$. На рис. 2 приведены результаты измерения $\varepsilon_{1\perp} = \varepsilon_\perp \varepsilon_2$ при температуре 293 К по резонансным частотам одиннадцати колебаний H_{0mp} с индексами $m \le 3$, $p \le 5$ в диапазоне $3{,}864 \div 13{,}953$ ГГц. Среднее значение $\varepsilon_{1\perp} \pm 3\sigma = 9{,}388 \pm 0{,}003$ (кривая на рис. 2) хорошо совпадает с результатами [7] и других работ [5, 6]. Отличие от данных $\varepsilon_{1\perp} = 9{,}3976$ на частоте 166,5 ГГц, $\varepsilon_{1\perp} = 9{,}3936$ на частоте 170,7 ГГц и $\varepsilon_{1\perp} = 9{,}3954$ на частоте 322, 4 ГГц [7] имеет примерно ту же, что и для $\varepsilon_{1\parallel}$, относительную величину и упомянутую выше возможную природу.

Результаты измерения $\varepsilon_{1\parallel}$ по спектру колебаний E_{0mp} оказались на 0,2 % ниже данных, полученных по спектру колебаний E_{n10}. Это подтверждает влияние неметаллизированных участков в центре торцевых поверхностей образца на характеристики колебаний E_{0mp}: поле колебаний E_{0mp} имеет вблизи оси резонатора максимум продольной электрической компоненты в отличие от колебаний E_{n10}, поле которых в центральной части резонатора мало.

Колебания H_{0mp} существенно менее чувствительны к торцевым зазорам, и влияние последних на измеряемое по спектру колебаний H_{0mp} значение $\varepsilon_{1\perp}$ имеет противоположный в сравнении с колебаниями E_{0mp} знак. Различие значений $\varepsilon_{1\perp}$, полученных по спектрам колебаний E_{0mp} и H_{0mp}, не превысило 0,1 %. Результаты независимого измерения $\varepsilon_{1\parallel}$, $\varepsilon_{1\perp}$ по спектру колебаний E_{n10} и H_{0mp} использовались в качестве данных в точке 293 К. В значения $\varepsilon_{1\parallel}$, $\varepsilon_{1\perp}$, полученные во всём диапазоне темпера-

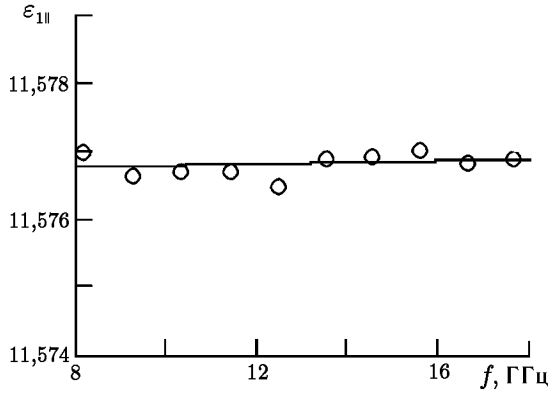

Рис. 1

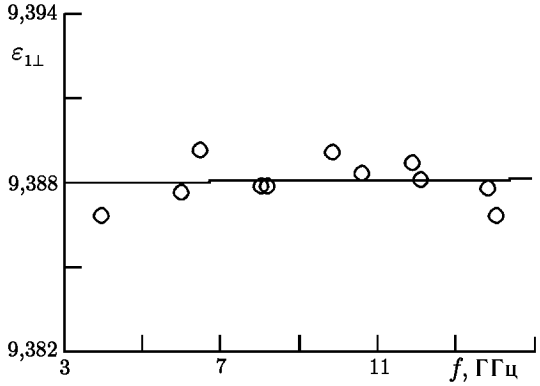

Рис. 2

тур по спектру колебаний E_{0mp}, вводились соответствующие поправки. В табл. 1 приведены результаты измерения компонент тензора относительной диэлектрической проницаемости монокристаллического сапфира в диапазоне температур $93 \div 343$ К.

Сравнение полученных данных с графическими результатами [8] показывает, что значения $\varepsilon_{1\parallel}$ из [8] на $1 \div 1{,}5$ % меньше во всём диапазоне температур. Это соответствует приведённой авторами [8] оценке влияния остаточных зазоров на неметаллизированных торцевых поверхностях использовавшегося образца. Значения $\varepsilon_{1\perp}$ из [8] совпадают с приведёнными выше с графической точностью. Основной вклад в неопределённость полученных результатов вносит неточность определения геометрических размеров образца, которая в области комнатных температур может быть приближённо оценена как $\delta\varepsilon_{1\perp} = |(\partial\varepsilon_{1\perp}/\partial L)\,(L/\varepsilon_{1\perp})\,\delta L + (\partial\varepsilon_{1\perp}/\partial D)\,(D/\varepsilon_{1\perp})\,\delta D| \le |2\,(\delta L + \delta D)| \approx 0{,}05$ % и $\delta\varepsilon_{1\parallel} = |(\partial\varepsilon_{1\parallel}/\partial D)\,(D/\varepsilon_{1\parallel})\,\delta D \approx |2\,\delta D| \approx 0{,}02$ %, где $\delta\varepsilon_{1\parallel,\perp}$, δD, δL — относительные неопределённости компонент проницаемости и размеров образца. Анализ других составляющих неопределённости, в частности в пересчёте размеров образца с изменением температуры, приводит к расширенной неопределённости [18] $\delta\varepsilon_{1\parallel} = 0{,}07$ % и $\delta\varepsilon_{1\perp} = 0{,}15$ % в исследованном интервале температур.

Таблица 1

T, К	$\varepsilon_{1\parallel}$	$\varepsilon_{1\perp}$
93	11,351	9,274
103	11,355	9,277
113	11,360	9,281
123	11,366	9,285
133	11,373	9,289
143	11,381	9,293
153	11,390	9,297
163	11,400	9,302
173	11,411	9,307
183	11,422	9,313
193	11,434	9,319
203	11,447	9,325
213	11,460	9,331
223	11,473	9,338
233	11,487	9,345
243	11,502	9,352
253	11,517	9,359
263	11,532	9,366
273	11,547	9,373
283	11,562	9,380
293	11,577	9,388
303	11,592	9,396
313	11,607	9,404
323	11,622	9,413
333	11,638	9,422
343	11,654	9,431

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Брагинский В. Б., Панов В. И., Тимашов А. В. // Докл. АН СССР. 1982. Т. 267, № 1. С. 74.
2. Afsar M. N. // IEEE Trans. on Microwave Theory and Techn. 1984. No. 12. P. 1 598.

3. Боева Т. В., Койков С. Н., Полонский Ю. А., Розова М. Н. // «Физика диэлектриков и перспективы её развития». Тез. докл. Всесоюзн. конф. Ленинград, 22–26 октября. 1973. Т. 2. С. 58.
4. Макеев Ю. Г., Коробкин В. А., Пятак Н. И. // Приборы и техника эксперимента. 1978. № 6. С. 104.
5. Kment U. // Sklar a keramik. 1979. V. 29, No. 1. P. 19.
6. Быстров В. Н., Гончаров Ю. Г., Козлов Г. В., Куприяненко А. Ф. // ЖТФ. 1986. Т. 56, вып. 10. С. 2016.
7. Власов С. Н., Копосова Е. В., Мазур А. Б., Паршин В. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1996. Т. 39, № 5. С. 615.
8. Krupka J., Geyer R. G., Kuhn M., Hinken J. H. // IEEE Trans. on Microwave Theory and Techn. 1994. V. 42, No. 10. P. 1886.
9. Hakki B. W., Coleman R. D. // IRE Trans. on Microwave Theory and Techn. 1960. No. 4. P. 402.
10. Kobayashi Y., Tanaka S. // Trans. of the Inst. of Electron. and Communic. Engineers of Japan. 1976. V. J39-B, No. 4. P. 223.
11. Егоров В. Н., Мальцева И. Н. // Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ. 1984. № 1. С. 3.
12. Егоров В. Н., Мальцева И. Н. // «Физика диэлектриков». Тез. докл. Всесоюзн. конф. 1982. Баку. Т. 1. С. 112.
13. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989.
14. Компан Т. А. и др. // Измерительная техника. 1999. № 8. С. 38.
15. Кожевников И. Г., Новицкий Л. А. Теплофизические свойства материалов при низких температурах. Справочник. М.: Машиностроение,1982.
16. Власов С. Н. // Радиотехника и электроника. 1967. № 3. С. 572.
17. Russell E. E., Bell E. E. // J. Opt. Soc. of America. 1967. № 4. P. 543.
18. Руководство по выражению неопределённости измерения. С.-Петербург: ВНИИМ, 1999.

Восточно-Сибирский НИИ физико-технических и радиотехнических измерений, г. Иркутск, Россия

Поступила в редакцию 18 января 2001 г.

MEASURING THE PERMITTIVITY TENSOR OF SAPPHIRE AT TEMPERATURES 93–343 K

V. N. Egorov and A. S. Volovikov

We consider a method for measuring the permittivity-tensor components of anisotropy uniaxial lowloss dielectric using the resonance-frequency spectrum of a “dielectric post resonator” in which the studied cylindrical sample with a longitudinal anisotropy is placed between the end metallic mirrors. Both components of the permittivity tensor of sapphire at temperatures 93–343 K are measured using the spectrum of symmetric E oscillations. The flat ends of the sample are covered by copper to exclude the “air-gap effect.” Independent measurements of longitudinal and transverse components of the permittivity at 293 K are performed using spectra of azimuthal E modes and symmetric H modes. Both components of the sapphire permittivity measured in the range 93–343 K are tabulated with a 10-K step.

УДК 621.372.2:621.372.8:621.373

ПРЯМОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВИДЕОИМПУЛЬСА В РАДИОИМПУЛЬС В СВЯЗАННЫХ ЛИНИЯХ ПЕРЕДАЧИ С НОРМАЛЬНОЙ И АНОМАЛЬНОЙ ДИСПЕРСИЕЙ

А. М. Белянцев, А. Б. Козырев

Рассмотрена генерация высокочастотных колебаний ударной электромагнитной волной при её синхронизме с обратной волной в связанных линиях передачи с нормальной и аномальной дисперсией и нелинейными элементами на основе ферритов. Показана возможность значительного уменьшения затухания генерируемых колебаний за счёт увеличения обусловленной высокочастотными колебаниями доли потока энергии в линии передачи с аномальной дисперсией, где высокочастотные потери относительно малы.

ВВЕДЕНИЕ

В работах [1—3] была показана возможность генерации высокочастотных (ВЧ) колебаний за фронтом ударной электромагнитной волны (УЭМВ), распространяющейся в нелинейной линии передачи (ЛП) с пространственной дисперсией, вследствие неустойчивости УЭМВ по отношению к синхронной с ней волне (возможность прямого эффективного преобразования видеоимпульса в радиоимпульс). Фронт УЭМВ можно рассматривать как перемещающийся источник излучения, оставляющий за собой след в виде бегущих за ним колебаний, отстающих от фронта со скоростью, равной разности фазовой и групповой скоростей. В ЛП с нелинейными элементами на ферритах при синхронном возбуждении фронтом УЭМВ прямых волн можно генерировать мощные (порядка сотни МВт) короткие (10÷15 осцилляций) радиоимпульсы с частотой заполнения в диапазоне 100÷1 000 МГц [2], а в ЛП на основе многослойных гетероструктур — радиоимпульсы с мощностью 0,5÷1 Вт и частотой заполнения в диапазоне 100 ГГц [1, 3]. При этом теоретический энергетический КПД преобразования видеоимпульса в радиоимпульс в обоих случаях весьма высок и может достигать 60÷80 %. Как отмечалось в этих работах, эффективная длительность генерируемого радиоимпульса, т. е. длительность радиоимпульса с близкими по амплитуде осцилляциями, в случае ЛП с ферритом обусловлена ВЧ диэлектрическими потерями в намагниченном до насыщения феррите [2], а в ЛП на основе многослойных гетероструктур — потерями из-за скин-эффекта [3]. В работах [4, 5] была показана возможность снижения влияния ВЧ потерь на затухание осцилляций в генерируемом УЭМВ радиоимпульсе за счёт быстрого оттока энергии высокочастотных колебаний от фронта УЭМВ при синхронном возбуждении обратных волн (обратных пространственных гармоник), а следовательно, и возможность генерации более длительных радиоимпульсов.

В том случае, когда основные ВЧ потери в ЛП происходят в насыщенной нелинейной среде (например в феррите) имеется, очевидно, и иная, дополнительная возможность снижения влияния ВЧ потерь на затухание осцилляций в генерируемом УЭМВ радиоимпульсе за счёт понижения доли потока энергии в области с ВЧ потерями. Эта возможность может быть реализована, в частности, в системе в виде связанных ЛП при синхронном возбуждении фронтом УЭМВ прямых либо обратных волн электродинамической системы. Ниже рассматриваются особенности преобразования видеоимпульса в радиоимпульс в электродинамической системе, состоящей из связанных ЛП с аномальной и нормальной дисперсией, при синхронном возбуждении в ней обратной волны. В этом случае происходит быстрый отток энергии высокочастотных колебаний от фронта УЭМВ, и значительная часть потока

энергии идёт в ЛП с низкими ВЧ потерями. Оценивается эффективная длительность генерируемого радиоимпульса при типичных для диапазона 0,5÷1 ГГц высокочастотных потерях в намагниченном феррите.

1. СВЯЗАННЫЕ ШТЫРЕВАЯ И КВАЗИКОАКСИАЛЬНАЯ ЛП. ЭКВИВАЛЕНТНАЯ СХЕМА И ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Очевидно, что основное требование к электродинамической системе при генерации фронтом УЭМВ обратной волны состоит в том, что она должна быть многомодовой, т. е. должна допускать формирование УЭМВ (иметь моду с нормальной дисперсией, существующую и в области низких частот) и распространение обратных волн за фронтом УЭМВ (иметь моду с аномальной дисперсией в некоторой полосе частот). Такая ситуация легко реализуется в случае двух связанных одномодовых ЛП. При этом в случае, когда нелинейной средой является феррит, в качестве ЛП с нормальной дисперсией может быть выбрана коаксиальная или квазикоаксиальная ЛП с широкой полосой пропускания ($0 \le \omega < \omega_c$), а в качестве ЛП с аномальной дисперсией — одна из периодических замедляющих систем с доминирующей нулевой обратной гармоникой [6], существующей в некоторой полосе частот ($\omega_1 < \omega < \omega_2$). Как нетрудно видеть, при $\omega_1 < \omega_c$ дисперсионные кривые таких ЛП пересекаются, и при любой связи между ними образующаяся электродинамическая система становится двухмодовой, т. е. имеет моды с нормальной и аномальной дисперсией.

Вариант связанных ЛП с аномальной и нормальной дисперсией (квазикоаксиальная ЛП, связанная со штыревой замедляющей системой лестничного типа), показан на рис. 1a. При связи через узкую щель в средней части штыревой системы (см. рис. 1a) взаимодействие полей двух ЛП происходит через x-компоненты электрического поля и носит чисто ёмкостной характер (магнитные поля в области щели ортогональны, поэтому взаимодействие через магнитное поле отсутствует).

Дисперсионные характеристики рассматриваемой линейной штыревой системы могут быть точно рассчитаны методом многопроводных линий [6]:

$$4\sin^2\frac{\varphi}{2} = \frac{\gamma_0^{(1)} - \gamma_0^{(2)}\,\mathrm{tg}^2\,\dfrac{kl_\mathrm{T}\sqrt{\varepsilon}}{4}}{\gamma_1^{(2)}\,\mathrm{tg}^2\,\dfrac{kl_\mathrm{T}\sqrt{\varepsilon}}{4} - \gamma_1^{(1)}}\,. \tag{1}$$

Здесь φ — сдвиг фазы, приходящийся на одну ячейку на частоте ω, d — период системы, ε — диэлектрическая проницаемость среды, заполняющей штыревую систему, а параметры $\gamma_0^{(1,2)}$, $\gamma_1^{(1,2)}$ определяются через геометрические размеры штырей (см. рис. 1a) соотношениями

$$\gamma_0^{(1)} = 4\pi\varepsilon\,(d - d_\mathrm{ld})\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b}\right), \quad \gamma_1^{(1)} = 4\pi\varepsilon\,\frac{p_\mathrm{ld}}{d_\mathrm{ld}}\,; \tag{2}$$

$$\gamma_0^{(2)} = 4\pi\varepsilon\,(d - d_\mathrm{ld})\left(\frac{1}{a_2} + \frac{1}{b}\right), \quad \gamma_1^{(2)} = 4\pi\varepsilon\,\frac{p_\mathrm{ld}}{d_\mathrm{ld}}\,. \tag{3}$$

Нетрудно показать, что такая дисперсионная характеристика в интересующей нас области частот при $\gamma_0^{(2)}/\gamma_0^{(1)} \ll 1$ легко может быть аппроксимирована дисперсионной характеристикой обычной CL-цепочки:

$$4\sin^2\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{\omega^2 C_{01} L_{01}}\,. \tag{4}$$

Квазикоаксиальная ЛП хорошо моделируется обычной LC-цепочкой. Так как связь штыревой и квазикоаксиальной ЛП осуществляется через электрическое поле, то в эквивалентной схеме естественно учесть её через взаимную ёмкость, или ёмкость связи, C_link между ЛП. Поэтому для описания дисперсионных характеристик связанных ЛП удобно пользоваться эквивалентной схемой с сосредоточенны-

ми параметрами, приведённой на рис. 1*б*. Дисперсионное уравнение такой системы имеет вид [6, 7]

$$\left\{4\sin^2\frac{\varphi}{2} - \omega^2 C_0 L_0\left(1+\frac{C_{\text{link}}}{C_0}\right) + j\omega\left(C_0 + C_{\text{link}}\right)R_1\right\}\times$$
$$\times\left\{4\sin^2\frac{\varphi}{2} + \frac{C_{\text{link}}}{C_0} - \frac{1}{\omega^2 C_{01}L_{01} - j\omega C_{01}R_2}\right\} = -\omega^2\frac{L_0 C_{\text{link}}^2}{C_{01}}\,. \quad (5)$$

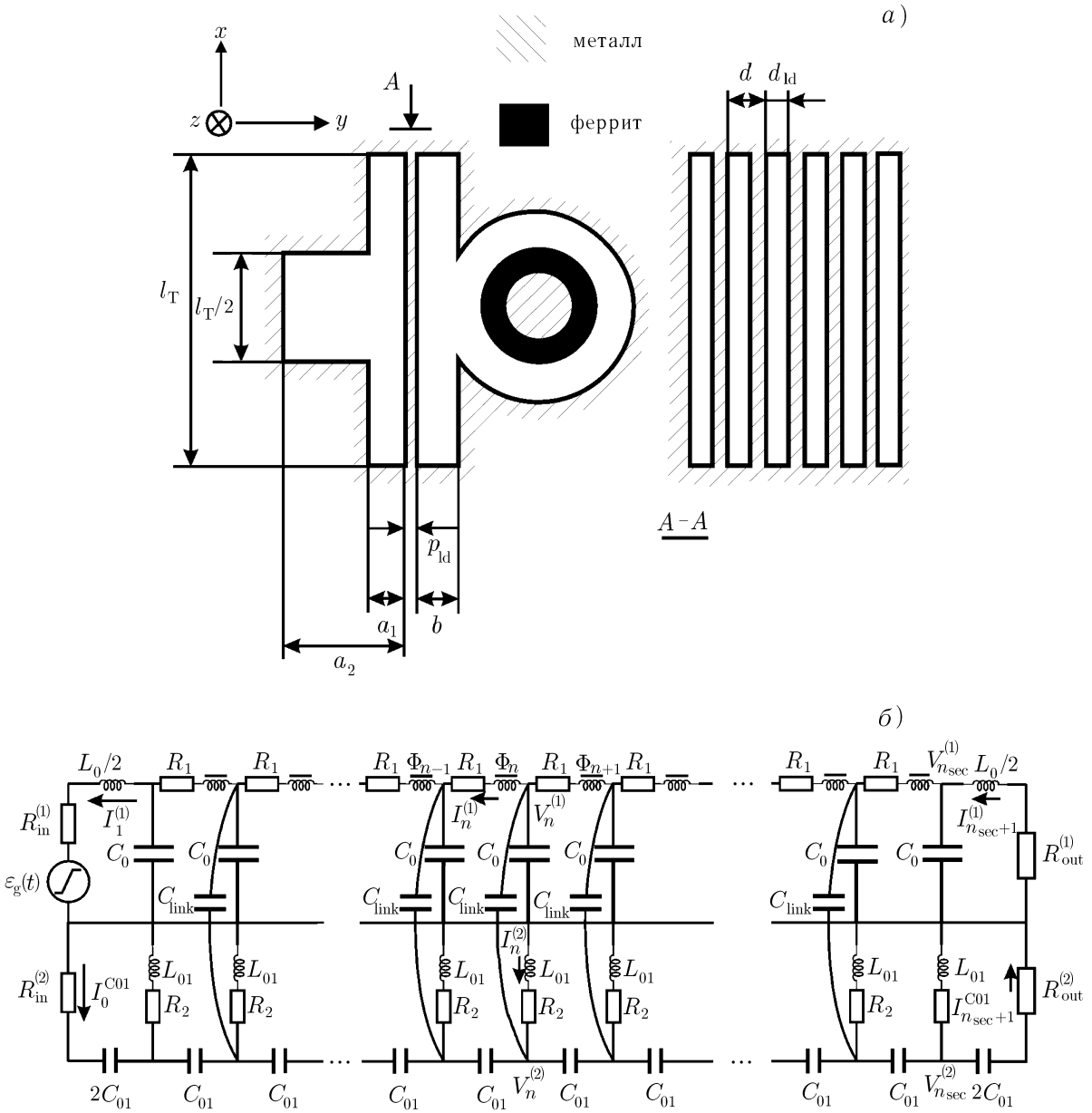

Рис. 1. Электродинамическая система, состоящая из связанных квазикоаксиальной ЛП и штыревой замедляющей системы лестничного типа (T-образный волновод с решёткой) (*а*), и её эквивалентная схема (*б*)

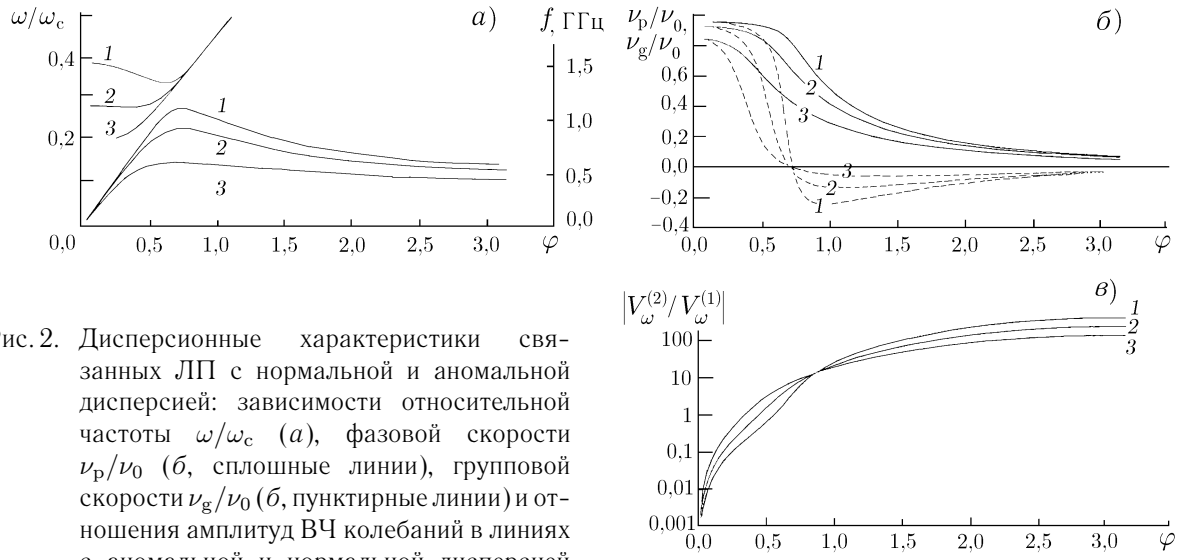

Рис. 2. Дисперсионные характеристики связанных ЛП с нормальной и аномальной дисперсией: зависимости относительной частоты ω/ω_c (*а*), фазовой скорости ν_p/ν_0 (*б*, сплошные линии), групповой скорости ν_g/ν_0 (*б*, пунктирные линии) и отношения амплитуд ВЧ колебаний в линиях с аномальной и нормальной дисперсией $V_\omega^{(2)}/V_\omega^{(1)}$ (*в*) от сдвига фазы φ для трёх значений ёмкости связи: $C_{\rm link}/C_0 = 0{,}08$ (кривые *1*); $C_{\rm link}/C_0 = 0{,}16$ (кривые *2*); $C_{\rm link}/C_0 = 0{,}4$ (кривые *3*). Параметры эквивалентной схемы: $\omega_c = 2/(L_0C_0)^{1/2} = 2{,}44\cdot 10^{10}$ Гц; $L_{01}/L_0 = 22{,}5$; $C_{01}/C_0 = 0{,}1$

Дисперсионные характеристики, рассчитанные с помощью уравнения (5), представлены на рис. 2. Зависимость частоты от сдвига фазы (рис. 2*а*) состоит из двух ветвей, низкочастотной и высокочастотной, разделённых полосой непрозрачности, ширина которой определяется коэффициентом связи $C_{\rm link}/C_0$. Так как относительная скорость УЭМВ ν_s/ν_0, где $\nu_0 = d/\sqrt{L_0C_0}$, всегда меньше единицы, то синхронизм УЭМВ с обратной волной ($\nu_s = \nu_p$, $\nu_p = d\omega/\varphi$ — фазовая скорость) возможен только на низкочастотной ветви дисперсионной кривой при любом коэффициенте связи $C_{\rm link}/C_0$. Групповая скорость обратной волны ($\nu_g = \partial\, d\omega/\partial\varphi$) на этой ветви (рис. 2*б*) имеет минимум, что важно для минимизации переходных процессов [8]. Групповая скорость в минимуме существенно зависит от коэффициента связи $C_{\rm link}/C_0$.

Система дифференциально-разностных уравнений, описывающая нелинейные процессы в цепочке связанных четырёхполюсников (рис. 1*б*), имеет вид

$$
\begin{aligned}
&C_0\frac{{\rm d}V_n^{(1)}}{{\rm d}t} = I_n^{(1)} - I_{n+1}^{(1)} - C_{\rm link}\frac{\rm d}{{\rm d}t}\left(V_n^{(1)} - V_n^{(2)}\right),\\
&\frac{{\rm d}\Phi_n}{{\rm d}t} = V_{n-1}^{(1)} - V_n^{(1)} + I_n^{(1)}R_1,\\
&\frac{{\rm d}m_n}{{\rm d}t} = \frac{\alpha\gamma}{1+\alpha^2}\left(1-m_n^2\right)pI_n^{(1)},\\
&L_{01}\frac{{\rm d}I_n^{(2)}}{{\rm d}t} = V_n^{(2)} - I_n^{(2)}R_2,\\
&I_n^{(2)} - C_{01}\frac{\rm d}{{\rm d}t}\left(V_{n-1}^{(2)} - 2V_n^{(2)} + V_{n+2}^{(2)}\right) - C_{\rm link}\frac{\rm d}{{\rm d}t}\left(V_n^{(1)} - V_n^{(2)}\right) = 0.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Здесь $V_n^{(1)}$, $I_n^{(1)}$, $V_n^{(2)}$ и $I_n^{(2)}$ — напряжения и токи в n-й ячейке линии с нормальной (индекс (1)) и аномальной (индекс (2)) дисперсией соответственно, $\Phi_n = L_0(I_n^{(1)} + 4\pi\eta M m_n/p)$ — магнитный поток в n-й ячейке ЛП, $m_n = M_{zn}/M$, M_{zn} — составляющая магнитного момента по направлению магнитного поля в феррите в n-й ячейке, M — намагниченность насыщения, p — коэффициент пропорцио-

нальности между магнитным полем и током, η — фактор заполнения квазикоаксиальной линии ферритом, α — коэффициент диссипации, γ — абсолютная величина гиромагнитного отношения. Сопротивлениями R_1 и R_2 учитываются потери в квазикоаксиале с ферритом и в штыревой системе. Система уравнений (6) решалась численным интегрированием методом Рунге—Кутты 4-го порядка.

2. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ГЕНЕРАЦИИ ВЧ КОЛЕБАНИЙ В СВЯЗАННЫХ ЛП

Результаты численного моделирования показали, что передний фронт подаваемого на вход ЛП с нормальной дисперсией видеоимпульса по мере распространения в ЛП трансформируется в фронт УЭМВ (скорость последней однозначно определяется амплитудой $\varepsilon_{\rm g}$ напряжения подаваемого на вход ЛР с нормальной дисперсией видеоимпульса и начальной намагниченностью феррита $m_0 = M_z(t = 0)/M$ [2]), за которым возникают колебания на частоте синхронной волны ($\nu_{\rm s} = \nu_{\rm p}(\omega)$). Число возникших колебаний растёт пропорционально пройденному фронтом расстоянию. Возникшие колебания бегут от фронта УЭМВ по направлению к входу ЛП и поглощаются согласованной нагрузкой $R_{\rm in}^{(2)}$ (см. рис. 1*б*). Нелинейность за фронтом УЭМВ насыщается, и распространение колебаний за фронтом происходит так же, как в линейной среде. Типичные осциллограммы напряжения в 100-й ячейке ЛП с нормальной дисперсией $V_{100}^{(1)}/V_{\rm s}$ и с аномальной дисперсией $V_{100}^{(2)}/V_{\rm s}$, нормированные на амплитуду УЭМВ $V_{\rm s}$, представлены на рис. 3. Здесь же приведены осциллограммы напряжения на согласованной нагрузке $R_{\rm in}^{(2)}$.

Структуру поля ВЧ волны, распространяющейся в связанных ЛП (а в конечном счёте и перекрытие полей УЭМВ и генерируемой ей ВЧ волны) удобно характеризовать отношением $V_\omega^{(2)}/V_\omega^{(1)}$, где $V_\omega^{(1)}$ и $V_\omega^{(2)}$ — амплитуды ВЧ колебаний в узлах эквивалентной схемы, представленной на рис. 1*б*. На рис. 2*в* приведена зависимость отношения $V_\omega^{(2)}/V_\omega^{(1)}$ от сдвига фазы φ, рассчитанная для низкочастотной ветви дисперсионной кривой при нескольких значениях коэффициента связи $C_{\rm link}/C_0$. Главная особенность осциллограмм напряжения в связанных ЛП состоит в том, что источник излучения бежит в одной линии передачи, а основной поток энергии генерируемой им волны — в другой. В осциллограммах напряжения в обеих линиях помимо колебаний на частоте синхронной обратной волны присутствуют незначительные колебания на более высокой частоте, поскольку имеется синхронизм с прямой волной высокочастотной ветви дисперсионной кривой. Следует отметить, что приведённые осциллограммы соответствуют случаю, когда диссипация отсутствует. Наличие потерь приведёт к тому, что амплитуда генерируемых колебаний будет экспоненциально затухать, причём ВЧ колебания будут затухать сильнее, и в спектре осциллограмм останется только одна частота.

Важными характеристиками, описывающими процесс генерации ВЧ колебаний в связанных ЛП, являются относительные амплитуды напряжения в линиях с нормальной и аномальной дисперсией, $V_\omega^{(1)}/V_{\rm s}$ и $V_\omega^{(2)}/V_{\rm s}$ соответственно (см. рис. 4*а*), и связанная с ними энергетическая эффективность генерации (рис. 4*б*), представляющая собой отношение доли мощности, идущей на генерацию ВЧ колебаний, к полной мощности, подводимой к фронту УЭМВ:

$$\eta_{\rm eff} = \frac{\varepsilon(\omega)\,(\nu_{\rm s} - \nu_{\rm g}(\omega))}{\varepsilon^+(0)\,(\tilde\nu_0 - \nu_{\rm s}) - \varepsilon^-(0)\,(\tilde\nu_0 + \nu_{\rm s})}\,, \tag{7}$$

где $\varepsilon^\pm(0)$ — средняя плотность энергии низкочастотных составляющих в набегающем и отражённом от фронта УЭМВ видеоимпульсах, $\varepsilon(\omega)$ — средняя плотность энергии в генерируемой ВЧ волне вблизи фронта УЭМВ, $\tilde\nu_0$ — фазовая скорость низкочастотных волн ($\omega \sim 0$), $\nu_{\rm s}$ — скорость стационарной УЭМВ, $\nu_{\rm g}(\omega)$ — групповая скорость генерируемой волны. Параметры связанных ЛП (см. рис. 3) выбраны так, что рабочий диапазон генерируемых частот лежит в диапазоне 0,5÷1 ГГц.

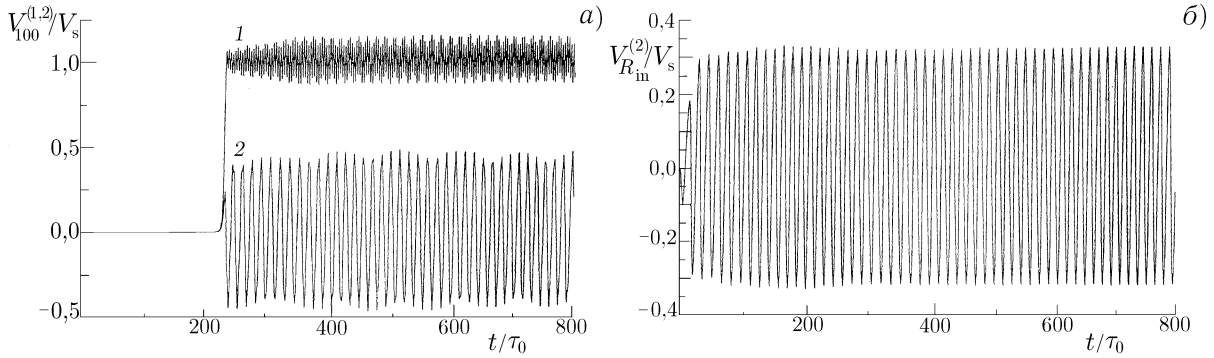

Рис. 3. Осциллограммы напряжения в 100-й ячейке линии передачи с нормальной (кривая *1*) и аномальной (кривая *2*) дисперсией, нормированные на амплитуду УЭМВ (*а*). Осциллограмма напряжения на согласованной нагрузке, включённой на входе линии с аномальной дисперсией, после фильтра низких частот, так что присутствует только низкая синхронная частота (*б*). Параметры эквивалентной схемы: $q_0 = \alpha\gamma\tau_0/(1+\alpha^2) = 0{,}256$; $\eta = 0{,}8$; $m_0 = -0{,}5$; $V_s p/(Z_0 M) = 8{,}63905$ ($Z_0 = \sqrt{L_0/C_0}$); $L_{01}/L_0 = 22{,}5$; $C_{01}/C_0 = 0{,}1$; $C_{\rm link}/C_0 = 0{,}16$

Относительная амплитуда ВЧ колебаний напряжения в ЛП с нормальной дисперсией $V_\omega^{(1)}/V_s$ максимальна в области малых φ и падает с ростом сдвига фазы. Качественно такую же зависимость имеет и энергетическая эффективность генерации. Относительная амплитуда напряжения в ЛП с аномальной дисперсией $V_\omega^{(2)}/V_s$ сначала растёт, а потом также падает. В случае связанных ЛП поведение зависимостей $V_\omega^{(1)}/V_s$ и $V_\omega^{(2)}/V_s$, а следовательно, и энергетической эффективности определяется не только скоростью перемагничивания феррита (как в обсуждавшейся ранее ЛП с перекрёстными связями через одно звено [5]), но и структурой полей генерируемой ВЧ волны и УЭМВ.

Скорость перемагничивания определяет, какая доля подводимой к фронту УЭМВ мощности идёт на перемагничивание феррита, а какая на возбуждение ВЧ волны. Энергетическая эффективность генерации тем выше, чем больше период синхронной волны по сравнению с длительностью фронта τ_f УЭМВ в среде без дисперсии [2, 5] (длительность фронта определяется параметрами нелинейности и величиной магнитного поля [9]). Именно этим обстоятельством объясняется отсутствие генерации колебаний при больших сдвигах фазы $\varphi \geq 1{,}8$ (см. рис. 4). Значение $\varphi = 1{,}8$ примерно соответствует ситуации, когда период T синхронной волны примерно равен длительности фронта τ_f УЭМВ в среде без дисперсии.

Распределение полей возбуждаемой ВЧ волны и УЭМВ определяет эффективность взаимодействия этих волн, которая тем выше, чем сильнее поле синхронной ВЧ волны проникает в линию с нормальной дисперсией. Именно этим объясняется падение эффективности преобразования с ростом φ, а также рост относительного напряжения ВЧ колебаний и энергетической эффективности генерации с увеличением коэффициента связи $C_{\rm link}/C_0$ (при фиксированном сдвиге фазы). С ростом φ ослабляется проникновение поля обратной волны в линию с нормальной дисперсией, и, следовательно, уменьшается эффективность генерации. Как показали численные расчёты, если параметры системы таковы, что в области обратной волны $V_\omega^{(2)}/V_\omega^{(1)} \sim 1 \div 10$, то выражение для энергетической эффективности генерации имеет вид

$$\eta_{\rm eff} \sim \frac{1-\tau_f/T}{1+V_\omega^{(2)}/V_\omega^{(1)}}\,. \qquad (8)$$

Проведённое численное моделирование показало, что энергетическая эффективность генерации обратной волны при синхронизме, соответствующем минимуму групповой скорости, составляет около 10 %, т. е. значительно ниже, чем в случае синхронизма с обратной пространственной гармони-

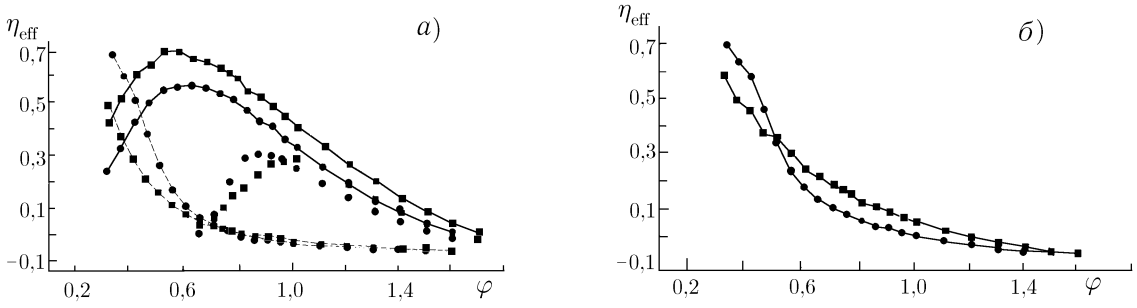

Рис. 4. Зависимость относительной амплитуды ВЧ колебаний напряжения в узлах ЛП с нормальной дисперсией $V_\omega^{(1)}/V_{\text{s}}$ (сплошные линии), аномальной дисперсией $V_\omega^{(2)}/V_{\text{s}}$ (пунктирные линии) и на согласованной нагрузке $V_{R_{\text{in}}^{(2)}}/V_{\text{s}}$ (точки) (*а*) и зависимость энергетической эффективности генерации η_{eff} (*б*) от сдвига фазы φ для связанных ЛП с параметрами, приведёнными в подписи к рис. 3. Символами ■ на обоих рисунках отмечены зависимости, соответствующие коэффициенту связи $C_{\text{link}}/C_0 = 0{,}4$, символами • — коэффициенту связи $C_{\text{link}}/C_0 = 0{,}16$

кой [5]. Однако синхронизм с обратной волной в связанных ЛП возможен при большей скорости УЭМВ, что позволяет поднять амплитуду УЭМВ и существенно увеличить мощность генерируемого радиоимпульса. Здесь следует отметить, что в отличие от случая синхронизма УЭМВ одновременно с несколькими волнами (пространственными гармониками) в нелинейной ЛП с нормальной дисперсией [4], когда интенсивность возбуждения убывает с частотой по закону $1 - \tau_{\text{f}}\omega/(2\pi)$ и эффективно генерируется только самая низкочастотная волна (см. также [10]), в случае связанных ЛП эффективность возбуждения определяется в том числе и структурой поля. При этом становится возможной ситуация, когда эффективность возбуждения второй (высокочастотной) волны оказывается сравнимой и даже может превосходить эффективность возбуждения более низкочастотной волны, что позволяет одинаково эффективно генерировать два радиоимпульса, синхронизованных фронтом УЭМВ.

На рис. 4*а* приведена зависимость напряжения на согласованной нагрузке $R_{\text{in}}^{(2)}$, включённой на входе ЛП с аномальной дисперсией, от сдвига фазы. Зависимость имеет ярко выраженный максимум. При уменьшении φ в области синхронизма с обратной волной начиная с некоторого значения относительное напряжение падает и обращается в нуль в точке, в которой $\nu_{\text{g}} = 0$. Это означает, что несмотря на рост мощности в каждой из линий суммарная мощность ВЧ волны, выделяемая на нагрузке, падает (средние потоки энергии P_1 и P_2 в линиях с нормальной и аномальной дисперсией направлены в противоположные стороны). Заметим, что оптимальным с точки зрения вывода ВЧ колебаний на нагрузку, включённую на входе ЛП с аномальной дисперсией, является случай, когда $P_2 \gg P_1$ ($P_{\text{tot}} = P_1 + P_2 \approx P_2$; именно такому случаю соответствуют приведённые на рис. 3*б* осциллограммы). Это условие выполняется тем лучше, чем больше φ (чем меньше $V_\omega^{(2)}/V_\omega^{(1)}$), однако с удалением от минимума ν_{g} в область больших φ эффективность генерации падает (см. рис. 3). Заметим, что максимальное напряжение на выходе $V_{R_{\text{in}}^{(2)}}/V_{\text{s}} = 0{,}35$ имеет место при $C_{\text{link}}/C_0 = 0{,}16$ и $\varphi = 0{,}82$. Здесь также следует отметить, что возможность пространственного разделения мощности возбуждающей УЭМВ и генерируемой ей обратной волны позволяет существенно упростить проблему вывода колебаний, т. к. удаётся развязать источник входного видеоимпульса (включённый на входе ЛП с нормальной дисперсией) и приёмник колебаний (резистивная нагрузка, включённая на входе ЛП с аномальной дисперсией).

В связанных ЛП, одна из которых заполнена ферритом, основное затухание ВЧ колебаний (волн) в диапазоне 0,5÷1 ГГц, очевидно, будет связано с ВЧ диэлектрическими потерями в намагниченном феррите. На это указывает быстрый рост с частотой тангенса диэлектрических потерь и относительно

небольшие в этом диапазоне ВЧ потери вследствие скин-эффекта в рассматриваемых замедляющих системах. Поэтому в первом приближении можно ограничиться учётом только ВЧ диэлектрических потерь в феррите в ЛП с нормальной дисперсией и считать, что $R_2 = 0$.

Затухание колебаний в структуре УЭМВ может быть найдено из численного решения нелинейной задачи. Однако, поскольку распространение генерируемых ВЧ колебаний происходит в линейной среде (насыщенный феррит), проще найти затухание из дисперсионного уравнения. С формальной точки зрения в этом случае частота ω заменяется на $\nu_{\rm s}\varphi/d$ и ищутся решения дисперсионного уравнения для φ, удовлетворяющие условию $\nu_{\rm p} = \nu_{\rm s} = \omega d/\varphi$ с действительной величиной $\nu_{\rm p}$.

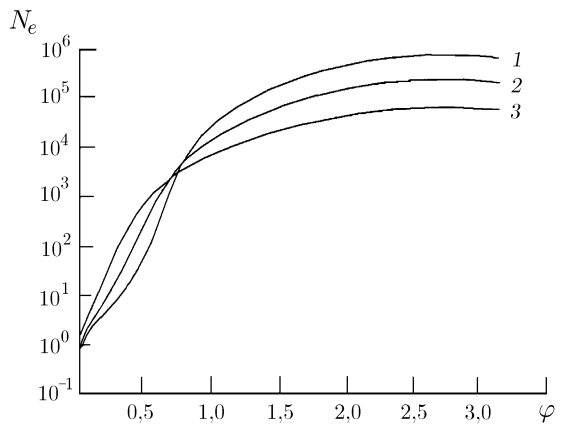

Рис. 5. Зависимость эффективной длительности генерируемого радиоимпульса N_e от сдвига фазы φ при $R_1/Z_0 = 0{,}0003$ для связанных ЛП с параметрами, приведёнными в подписи к рис. 3

На рис. 5 показана зависимость относительной длины затухания (число N_e ВЧ колебаний, при котором амплитуда затухает в e раз) от сдвига фазы в структуре УЭМВ, формируемой в связанных ЛП с нормальной и аномальной дисперсией. Сопротивление R_1 считалось постоянным, его относительная величина R_1/Z_0, как и в работе [5], полагалась равной $3 \cdot 10^{-4}$ ($Z_0 = = \sqrt{L_0/C_0}$). Как видно из рис. 5, при синхронизме с обратной волной вблизи минимума $\nu_{\rm g}$ ($\varphi \approx 0{,}94$) относительная длина затухания в генерируемом цуге колебаний составляет $2{,}7 \cdot 10^4$ колебаний (при $C_{\rm link}/C_0 = 0{,}08$; кривая *1*). С увеличением коэффициента связи $C_{\rm link}/C_0$ до 0,16 и 0,4 (кривые *2*, *3* соответственно) в точке, соответствующей минимуму групповой скорости, длина затухания уменьшается соответственно до $2{,}5 \cdot 10^4$ и $2{,}2 \cdot 10^4$ колебаний. При этом минимум групповой скорости смещается в область бóльших φ. Увеличение затухания обратной волны с ростом коэффициента связи чётко коррелирует с увеличением относительного поля обратной волны в ЛП с ферритом, т. е. с отношением $V_\omega^{(1)}/V_\omega^{(2)}$.

Из проведённых расчётов видна общая тенденция: при уменьшении затухания осцилляций (за счёт смещения точки синхронизма в область больших φ или уменьшения коэффициента связи) уменьшается и относительная амплитуда колебаний, а вместе с ней и энергетическая эффективность преобразования. Другими словами, при увеличении эффективной длительности генерируемого радиоимпульса приходится жертвовать эффективностью преобразования.

Следует отметить, что относительная длина затухания обратной волны в рассматриваемом случае связанных ЛП более чем на порядок больше, чем в случае синхронизма УЭМВ с обратной пространственной гармоникой нелинейной ЛП с перекрёстными связями, рассмотренном в [5]. Это связано с тем, что затухание колебаний в структуре УЭМВ при её синхронизме с обратной волной определяется не только скоростью оттока колебаний от фронта УЭМВ, как это было в случае обратных пространственных гармоник [3], но и тем, какая доля суммарной мощности ВЧ поля распространяется в линии с аномальной дисперсией, где потери малы.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Резюмируя, можно сказать, что при синхронизме фронта УЭМВ с обратной волной в связанных ЛП (лестничная система и квазикоаксиал), когда основной поток мощности генерируемой волны идёт вне области, заполненной ферритом, возможно значительное снижение затухания ВЧ колебаний по

сравнению с рассмотренными ранее случаями синхронизма УЭМВ с прямой волной [2] или обратной пространственной гармоникой [5]. Это обстоятельство делает рассмотренную с настоящей работе систему весьма перспективной для создания на её основе генератора мощных радиоимпульсов с длительностью порядка 10^3 осцилляций с частотой заполнения в диапазоне 0,5÷1 ГГц. При этом, как и в случае возбуждения фронтом УЭМВ синхронных прямых волн в ЛП с ферритом [2], сохраняется возможность широкой электронной перестройки частоты заполнения радиоимпульса.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 99–02–18046).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белянцев А. М., Климин С. Л. // Изв. вузов. Радиофизика. 1993. Т. 36, № 11. С. 1 011.
2. Белянцев А. М., Дубнев А. И., Климин С. Л., Кобелев Ю. А., Островский Л. А. // ЖТФ. 1995. Т. 65, № 8. С. 132.
3. Belyantsev A. M., Kozyrev A. B. // Int. J. Infrared and Millimeter Waves. 1997. V. 18, No. 6. P. 1 169.
4. Belyantsev A. M., Kozyrev A. B. // Int. J. Infrared and Millimeter Waves. 1998. V. 19, No. 11.
5. Белянцев А. М., Козырев А. Б. // ЖТФ. 2000. Т. 70, № 6. С. 78.
6. Силин Р. А., Сазонов В. П. Замедляющие системы. М.: Наука, 1966.
7. Белянцев А. М., Гапонов А. В. // Изв. вузов. Радиотехника и электроника. 1964. № 7. С. 1 188.
8. Белянцев А. М., Козырев А. Б. // ЖТФ. 1998. Т. 68, № 1. С. 89.
9. Белянцев А. М., Богатырёв Ю. К., Соловьёва Л. И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1963. Т. 6, № 3. С. 561.
10. Фрейдман Г. И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1963. Т. 6, № 3. С. 536.

Институт физики микроструктур РАН,
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию
15 февраля 2001 г.

DIRECT TRANSFORMATION OF A VIDEOPULSE INTO A RADIOPULSE IN COUPLED TRANSMISSION LINES WITH NORMAL AND ANOMALOUS DISPERSION

A. M. Belyantsev and A. B. Kozyrev

We consider generation of high-frequency oscillations by an electromagnetic shock wave propagating under synchronism with a backward wave in coupled transmission lines having normal and anomalous dispersion and a ferrite-based nonlinearity. It is shown that the amplitude attenuation of the generated oscillations can be significantly reduced due to an increase in the fraction of high-frequency energy flux in the anomalous-dispersion transmission line in which high-frequency losses are relatively low.

УДК 537.86: 530.182

ДИНАМИКА ЦИФРОВОЙ РЕКУРСИВНОЙ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА С БИНАРНЫМ КВАНТОВАНИЕМ

Ю. А. Брюханов

Исследованы свободные колебания, а также динамические режимы рекурсивной системы второго порядка при бинарных (постоянном и периодическом) внешних воздействиях. С помощью разработанной методики установлены области параметров системы с определёнными видами, периодами и аналитическими выражениями траекторий движения. Построены бифуркационные диаграммы.

ВВЕДЕНИЕ

Работа реальных цифровых устройств сопряжена с аппроксимацией результатов арифметических операций, обусловленной конечным числом разрядов в представлении чисел, которую принято называть квантованием. Вследствие этого устройства приобретают специфические нелинейные свойства, существенно влияющие на их динамику [1]. Эффекты квантования возрастают с уменьшением количества разрядов или, что эквивалентно, уровней квантования. Вместе с тем малое число разрядов вынужденно используется при обработке широкополосных сигналов в реальном времени, требующей высокого быстродействия цифровых устройств. Исследуем не рассматривавшиеся ранее динамические процессы в автономной и неавтономной рекурсивных системах второго порядка с минимальным числом уровней — в системах с бинарным квантованием.

Колебания в такой системе описываются разностным уравнением [2]

$$x(n+2) = f[ax(n+1) + bx(n) + u(n)], \tag{1}$$

где в данном случае

$$f(\phi) = \begin{cases} 1, & \phi \geq 0; \\ -1, & \phi < 0, \end{cases}$$

a и b — параметры цепи, $u(n)$ — внешнее воздействие. Это уравнение сводится к эквивалентному ему отображению

$$\begin{pmatrix} x(n+1) \\ y(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(n) \\ f[ay(n) + bx(n) + u(n)] \end{pmatrix}$$

на плоскости (x, y). Пары последовательных итераций $(x(n), y(n))$ определяют точки траектории движения системы на фазовой плоскости.

По аналогии с [3] разобьём фазовую плоскость на отдельные области в соответствии с видом нелинейности. В данном случае таких областей только две, и они характеризуются уравнениями движения:

$$x(n+2) = -1 \tag{2}$$

$$x(n+2) = 1 \tag{3}$$

в области D_{-1} и в области D_1. Граница между этими областями представляет собой прямую MG, описываемую уравнением

$$y = -\frac{bx}{a} - \frac{u(n)}{a}\,.$$

В качестве примера на рис. 1 показано разбиение фазовой плоскости при $u(n) = 0$; $a > 0$; $b > 0$. Заметим, что при бинарном квантовании все возможные состояния системы ограничены точками A, B, C, D фазовой плоскости.

Движения в системе в значительной мере зависят от соотношения между параметрами a и b и вида функции $u(n)$. Рассмотрим эти зависимости подробнее.

1. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ($u(n) = 0$)

Если соотношение между a и b таково, что

$$A \in D_1, B \in D_{-1}, C \in D_{-1}, D \in D_1 \tag{4}$$

(этот случай изображён на рис. 1), то, воспользовавшись (2), (3), получим, что при старте из точки A начиная с $n = 0$ (а при старте из точки D начиная с $n = 1$) в системе существует движение с периодом $T = 1$, а последовательность отображений (траектория движения) имеет вид $\rightarrow\ A\ \rightarrow$. Ниже такое движение обозначается $T = 1(+1)$. Движение с периодом $T = 1$ существует и при старте из точки C начиная с $n = 0$, и из точки B начиная с $n = 1$, его характеризует последовательность отображений $\rightarrow C \rightarrow$. Ниже такое движение обозначается $T = 1(-1)$. В общем случае движение с периодом $T = 1(\pm 1)$ (при этом $x(n) = \pm 1$) реализуется при следующем из уравнения (1) условии

$$(b < a) \cap (b > -a). \tag{5}$$

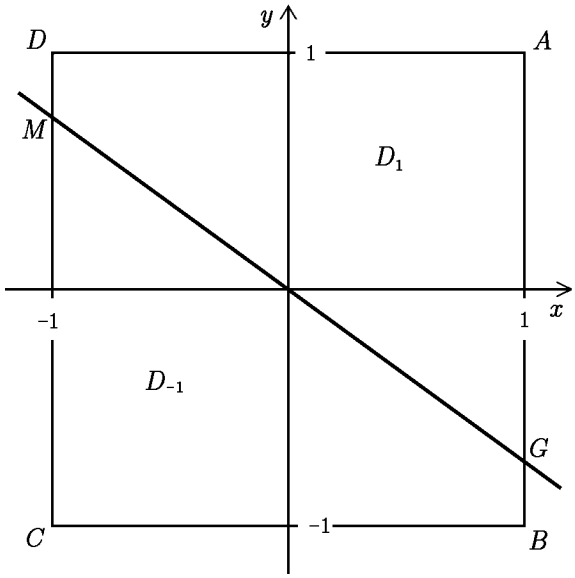

Рис. 1. Пример разбиения фазовой плоскости

Приведённые выше результаты занесены в табл. 1 как вариант 1. В эту же таблицу сведены все возможные варианты (их восемь) расположения точек A, B, C, D в областях фазовой плоскости и соответствующие им движения, определяемые с помощью вышеизложенной методики. Внутри одного варианта разные периоды движения соответствуют разным начальным условиям.

Следует особо отметить варианты 5–8. Они соответствуют критическим случаям, когда прямая MG пересекает противоположные углы квадрата $ABCD$, при этом соответствующие параметры лежат на равносторонней гиперболе $b = \pm 1/a$. Выражение для $x(n)$ в варианте 6 получено путём решения с помощью z-преобразований разностного уравнения $x(n+3) = x(n)$ с начальными условиями $x(0) = x(1) = 1$; $x(2) = -1$. В приведённой в табл. 1 формуле $\omega = 2\pi/3$; $\beta = \arg[\exp(j\omega) - 1]$.

Совокупность областей параметров, соответствующих вариантам 1–4, позволяет построить бифуркационную диаграмму (рис. 2). Здесь и далее цифры в кружочках обозначают периоды колебаний. Таким образом, рекурсивная система в отсутствие внешнего воздействия может использоваться для генерации бинарных колебаний с периодами $T = 1; 2; 3; 4$ (с учётом критических режимов).

Таблица 1

Свободные колебания

Вариант	Расположение точек				Область параметров	T	$x(n)$	Траектория
	A	B	C	D				
1	D_1	D_{-1}	D_{-1}	D_1	$(b<a)$ $\cap(b>-a)$	$1(\pm1)$	±1	$\to A\to$ $\to C\to$
2	D_{-1}	D_1	D_1	D_{-1}	$(b<-a)$ $\cap(b>a)$	2	$[(-1)^n]^*$	$\to B\to D\to$
3	D_1	D_1	D_{-1}	D_{-1}	$(b>-a)$ $\cap(b>a)$	$1(\pm1)$ 2	±1 $[(-1)^n]^*$	$\to A\to$ $\to C\to$ $\to B\to D\to$
4	D_{-1}	D_{-1}	D_1	D_1	$(b<-a)$ $\cap(b<a)$	4	$[\sqrt{2}\cos(\pi n/2+\pi/4)]^*$	$\to B\to C\to$ $\to D\to A\to$
5	D_1	D_1	D_{-1}	D_1	$(b=1/a)\cap$ $\cap(b>-a)$	$1(\pm1)$	±1	$\to A\to$ $\to C\to$
6	D_{-1}	D_1	D_1	D_1	$(b=1/a)\cap$ $\cap(b<-a)$	3	$\left[\dfrac{-4\sin[\omega n-\beta]}{\sqrt{3}\,\lvert\exp(j\omega)-1\rvert}+\dfrac{1}{3}\right]^{**}$	$\to A\to B\to$ $\to D\to$
7	D_1	D_{-1}	D_1	D_1	$(b=-1/a)\cap$ $\cap(b<a)$	$1(+1)$	$+1$	$\to A\to$
8	D_1	D_1	D_1	D_{-1}	$(b=-1/a)\cap$ $\cap(b>a)$	$1(+1)$ 2	$+1$ $[(-1)^n]^*$	$\to A\to$ $\to B\to D\to$

* — при старте из точки B; ** — при старте из точки A

2. ПОСТОЯННОЕ ВНЕШНЕЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ

Будем полагать, что входной сигнал также подвергается бинарному квантованию. При этом, если $u(n)=A$, то $A=\pm1$. Внешнее воздействие приводит к смещению прямой MG по вертикали на величину $-A/a$.

Пусть $A=1$. Если расположение MG таково, что выполняется (4), то движения такие же, как и при $u(n)=0$ с таким же расположением точек A,B,C,D, т. е. с периодом $T=1(\pm1)$ и последовательностями отображений $\to A\to$ или $\to C\to$. Соответствующая область параметров удовлетворяет условию

$$(b<a-1)\cap(b>-a-1)$$

и не совпадает с (5). Анализ показывает, что при таком внешнем воздействии рассмотренные ранее варианты 2–8 расположения точек A,B,C,D (см. табл. 1) характеризуются теми же периодами и траекториями движений и функциями $x(n)$, но другими областями параметров. Области параметров для указанных в табл. 1 вариантов расположения точек A,B,C,D при внешнем воздействии приведены в табл. 2. В табл. 2 также указана область параметров для нового, девятого возможного варианта, когда весь четырёхугольник $ABCD$ располагается в области D_1. При этом в установившемся режиме в системе существует движение с периодом $T=1(+1)$ и траекторией $\to A\to$.

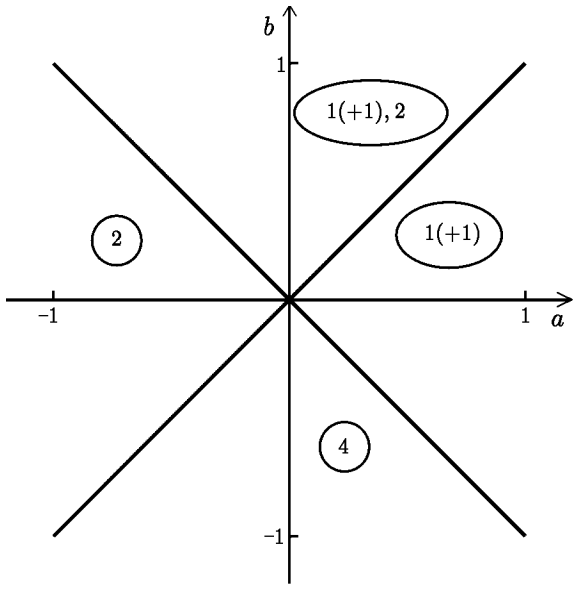

Рис. 2. Бифуркационная диаграмма системы при $u(n) = 0$

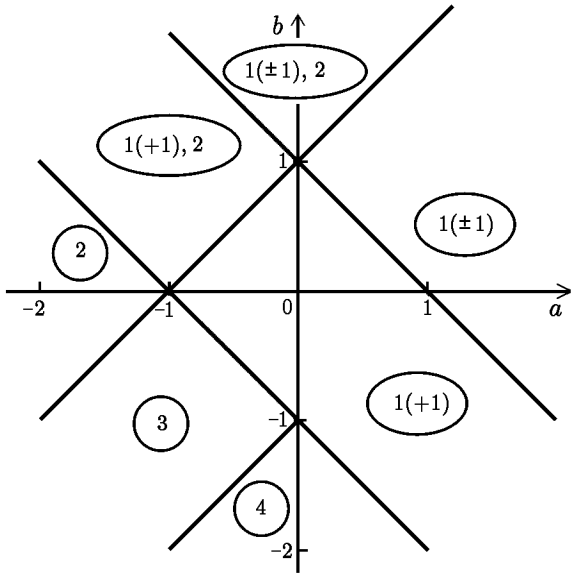

Рис. 3. Бифуркационная диаграмма системы при постоянном внешнем воздействии $A = 1$

Таблица 2

Области параметров при внешнем воздействии $A = 1$

Вариант	Область параметров
1	$(b < a - 1) \cap (b > -a + 1)$
2	$(b < -a - 1) \cap (b > a + 1)$
3	$(b > -a + 1) \cap (b > a + 1)$
4	$(b < -a - 1) \cap (b < a - 1)$
5	$(b \geq a - 1) \cap (b > -a + 1) \cap (b \leq a + 1)$
6	$(b < -a - 1) \cap (b \geq a - 1) \cap (b \leq a + 1)$
7	$(b \geq -a - 1) \cap (b < a - 1) \cap (b \leq -a + 1)$
8	$(b \geq -a - 1) \cap (b \leq -a + 1) \cap (b > a + 1)$
9	$(b \geq -a - 1) \cap (b \geq a - 1) \cap (b \leq -a + 1) \cap (b \leq a + 1)$

Совокупность областей параметров, соответствующих вариантам 1–9, позволяет построить бифуркационную диаграмму (рис. 3). Таким образом, при постоянном положительном внешнем воздействии $A = 1$ на выходе рекурсивной системы в зависимости от выбора её параметров и начальных условий могут существовать бинарные колебания с периодами $T = 1(+1); 1(-1); 2; 3$ и 4.

Пусть $A = -1$. Варианты 1–4 расположения точек A, B, C, D в областях D_1, D_{-1} характеризуются теми же периодами и траекториями движения и функциями $x(n)$, что и в случае $A = 1$, а соответствующие области параметров получаются из приведённых в табл. 2 заменой знаков $>$ на $\geq$, $<$ на $\leq$ и наоборот. В этом случае существуют и другие варианты расположения точек A, B, C, D, приведённые в табл. 3 под номерами 10–14. Нетрудно видеть, что области параметров отличаются от приведённых в табл. 2 вариантов 5–9 только вышеуказанной заменой знаков и сменой знака периода $T = 1$ в вариантах 12–14 по сравнению с вариантами 7–9 соответственно. Заметим, что приведённая в варианте 11 траектория с периодом $T = 3$ отличается от варианта 6. В данном случае она описывается функцией

Таблица 3

Колебания при внешнем воздействии $A = -1$

Вариант	Расположение точек				Область параметров	Траектория	T
	A	B	C	D			
10	D_1	D_{-1}	D_{-1}	D_{-1}	$(b \geq -a+1) \cap (b < a+1) \cap$ $\cap (b > a-1)$	$\to A \to$ $\to C \to$	$1(\pm 1)$
11	D_{-1}	D_{-1}	D_1	D_{-1}	$(b < a+1) \cap (b \leq -a-1) \cap$ $\cap (b > a-1)$	$\to B \to C \to D \to$	3
12	D_{-1}	D_{-1}	D_{-1}	D_1	$(b < -a+1) \cap (b > -a-1) \cap$ $\cap (b \leq a-1)$	$\to C \to$	$1(-1)$
13	D_{-1}	D_1	D_{-1}	D_{-1}	$(b < -a+1) \cap (b \geq a+1) \cap$ $\cap (b > -a-1)$	$\to C \to$ $\to B \to D \to$	$1(-1)$ 2
14	D_{-1}	D_{-1}	D_{-1}	D_{-1}	$(b < -a+1) \cap (b < a+1) \cap$ $\cap (b > -a-1) \cap (b > a-1)$	$\to C \to$	$1(-1)$

$$x(n) = -\frac{1}{3} + \frac{4\sin[\omega(n+2) - \beta]}{3\,|\exp(j\omega) - 1|}.$$

В итоге бифуркационная диаграмма при $A = -1$ имеет вид, приведённый на рис. 3 с заменой $1(+1)$ на $1(-1)$.

Таким образом, при постоянном внешнем воздействии $A = \pm 1$ в системе с параметрами в области $P_1 = \{a, b\colon (b > -a-1) \cup (b > a+1)\}$ в зависимости от начальных условий (а в некоторых подобластях и не зависимо от них) возможны движения с периодами $T \in \{+1; -1; 2\}$. При выборе параметров в области $P_2 = \{a, b\colon (b < a+1) \cap (b < -a-1) \cap (b > a-1)\}$ существуют колебания с периодами $T = 3$, а в области $P_3 = \{a, b\colon (b < a-1) \cap (b < -a-1)\}$ — с периодом $T = 4$.

3. ПЕРИОДИЧЕСКОЕ ВНЕШНЕЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ

Рассмотрим колебания в системе при внешнем периодическом воздействии вида

$$u(n) = \begin{cases} 1, & n \in [0, T/2-1]; \\ -1, & n \in [T/2, T-1], \end{cases} \tag{6}$$

где чётное число T — период воздействия. Эта функция удовлетворяет разностному уравнению $u(n + T) = u(n)$ с начальными условиями $u(0), u(1), \ldots, u(T-1)$. Решением его является функция

$$u(n) = \sum_{m=0}^{T-1} \frac{z_m^{T-1} \sum\limits_{k=0}^{T-1} u(k) z_m^{-k}}{\prod\limits_{i=0, i \neq m}^{T-1} (z_m - z_i)}\, z_m^n,$$

где $z_m = \exp(2\pi j m/T)$. Это выражение используется и для описания возникающих в системе периодических движений $x(n)$. Заметим, что при $T = 2$ имеем гармоническое воздействие $u(n) = \cos(\pi n)$.

Выше указывалось, что вариантам 1–4 расположения точек A, B, C, D в областях фазовой плоскости D_1, D_{-1} независимо от знака $u(n)$ соответствуют одинаковые движения (см. табл. 1). Эти закономерности сохраняются и для воздействия (6) при любом значении T (кстати, необязательно чётном).

Соответствующие этим вариантам области параметров получаются из приведённых в табл. 2 заменой знаков $\geq, \leq$ на $>, <$ соответственно.

Рассмотрим варианты 5 и 10. В этих вариантах точка $A \in D_1$, а точка $C \in D_{-1}$. Это обуславливает существование движений с периодом $T = 1(\pm 1)$ независимо от периода внешнего воздействия, а соответствующая область параметров является пересечением областей для этих вариантов, т. е.

$$(b > a - 1) \cap (b > -a + 1) \cap (b < a + 1).$$

Для вариантов 8 и 13 характерным является расположение точки $B \in D_1$ и точки $D \in D_{-1}$, что приводит к возникновению колебаний с периодом $T = 2$ при любом периоде внешнего воздействия. Соответствующая область параметров является пересечением областей для этих вариантов, т. е.

$$(b > -a - 1) \cap (b < -a + 1) \cap (b > a + 1).$$

Другим областям параметров системы соответствуют движения, период которых совпадает с периодом внешнего воздействия. Исключение составляют варианты 7 и 12, где при внешнем воздействии с периодом $T = 2$ в системе возникает движение с периодом $T = 6$. Траектория движения в этом случае определяется с помощью методики, изложенной в разделе 1, с использованием закономерностей, полученных в разделе 2 для $A = \pm 1$. Эти варианты расположения точек A, B, C, D в областях D_1, D_{-1} для $u(n) \in \{1; -1\}$ и соответствующие им периоды и траектории движения при внешнем воздействии с периодом $T \in \{2; 4; 6\}$ приведены в табл. 4. Области параметров системы получаются из приведённых в табл. 2 заменой знаков $\geq, \leq$ на $>, <$ соответственно.

На рис. 4 приведены бифуркационные диаграммы системы при внешнем воздействии с периодом $T \in \{2; 4; 6\}$. Анализ показывает, что бифуркационные диаграммы при чётных $T > 6$ получаются из рис. 4*в* простой заменой величины 6 (и 6^*) на соответствующее значение T (и T^*).

Следовательно, при периодическом (с чётным периодом) внешнем воздействии и выборе параметров в области P_2 в системе существуют движения с периодом, совпадающим с периодом T внешнего воздействия, но при $T > 4$ форма движения искажается по сравнению с формой внешнего воздействия. Если параметры системы выбраны в области P_3, то независимо от величины T, как и в разделе 2, имеет место движение с периодом 4. При выборе параметров в области $P_4 = \{a, b\colon (b < a + 1) \cap (b < -a+1) \cap (b > -a-1)\}$ периоды движения системы и внешнего воздействия совпадают. Исключение составляет лишь случай $T = 2$, когда в области $P_{41} = \{a, b\colon (b < a - 1) \cap (b < -a+1) \cap (b > -a-1)\}$ возникает движение с периодом 6. В системе с параметрами в области $P_5 = \{a, b\colon (b > -a + 1) \cap (b > a + 1)\}$ в зависимости от начальных условий (а в некоторых подобластях и независимо от них) возможны движения с периодами $T \in \{\pm 1; 2\}$.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработанная методика, основанная на разбиении фазовой плоскости (x, y) на области D_1, D_{-1} в соответствии с характеристиками бинарного квантователя, позволяет определить вид, период и выражения для траекторий движения автономной и неавтономной системы для любых её параметров. При этом внешнее детерминированное бинарное воздействие может иметь более сложный, чем рассмотренный в статье, характер.

Установлено, что автономная система может использоваться для генерации бинарных колебаний с периодами $T \in \{1; 2; 3; 4\}$ (с учётом критических режимов). При непериодических и периодических (с чётными периодами) внешних воздействиях в системе с параметрами в области P_3 имеет место дви-

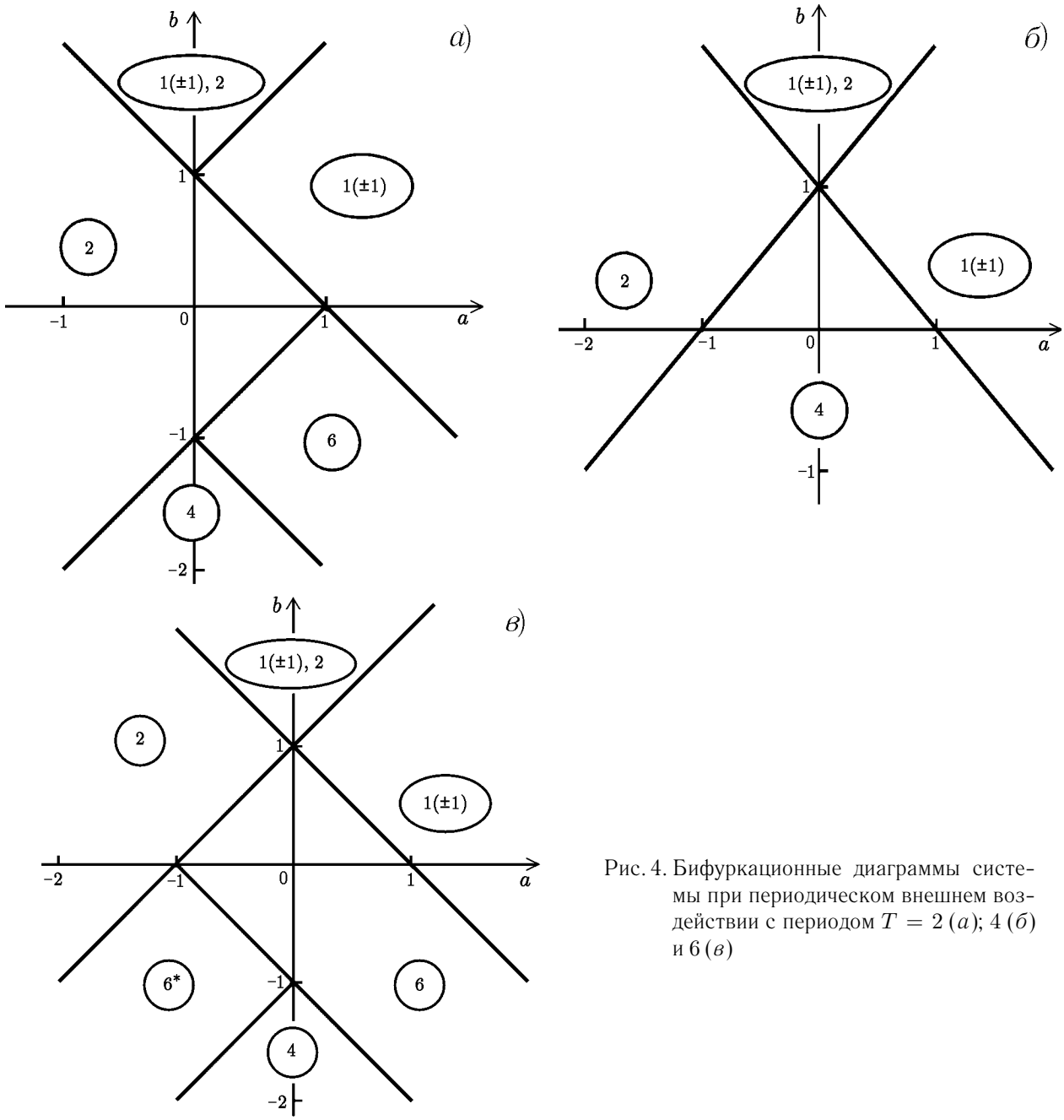

Рис. 4. Бифуркационные диаграммы системы при периодическом внешнем воздействии с периодом $T = 2$ (*а*); 4 (*б*) и 6 (*в*)

жение с периодом 4. При выборе параметров в области P_4 периоды движения системы и внешнего воздействия T совпадают. Исключение составляет лишь случай $T = 2$, когда в подобласти P_{41} возникает движение с периодом 6. В системе с параметрами в области P_5 в зависимости от начальных условий (а в некоторых подобластях и независимо от них) существуют движения с периодами $T \in \{\pm 1; 2\}$.

Предложенную методику можно использовать в случаях большего количества уровней квантования в цифровых рекурсивных системах второго порядка с произвольными детерминированными внешними воздействиями. Результаты работы могут использоваться для развития нелинейной теории колебаний электронных систем дискретного времени, а также при построении систем передачи информации с цифровой обработкой сигналов.

Таблица 4

Области параметров и периоды движения при периодическом внешнем воздействии

Вариант	Движение системы при периоде внешнего воздействия					
	2		4		6	
	T	Траектория	T	Траектория	T	Траектория
6, 11	2	$\to B \to D \to$	4	$\to D \to A \to$ $\to B \to C \to$	6 *	$\to B \to D \to$ $\to A \to B \to$ $\to C \to D \to$
7, 12	6	$\to A \to A \to$ $\to B \to C \to$ $\to C \to D \to$	4	$\to B \to C \to$ $\to D \to A \to$	6	$\to C \to D \to$ $\to A \to A \to$ $\to B \to C \to$
9, 14	2	$\to B \to D \to$	4	$\to C \to D \to$ $\to A \to B \to$	6	$\to C \to D \to$ $\to A \to A \to$ $\to B \to C \to$

* — форма движения искажена по сравнению с формой внешнего воздействия

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99–02–17939)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ogorzalek M. J. // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 1992. V. 2, No. 1. P. 11.
2. Брюханов Ю. А., Глызин С. Д. // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1996. Т. 3, № 4. С. 53.
3. Брюханов Ю. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1998. Т. 41, № 4. С. 534.

Ярославский госуниверситет, г. Ярославль, Россия

Поступила в редакцию
18 апреля 2000 г.

DYNAMICS OF A SECOND-ORDER DIGITAL RECURSIVE SYSTEM WITH A BINARY QUANTISATION

Yu. A. Bryukhanov

We analyze free oscillations and dynamical regimes of a second-order recursive system under constant or periodic binary forcing. Based on a the technique developed in this paper, we find the regions of system parameters corresponding to certain types, periods, and analytical expressions of motion trajectories. The bifurcation diagrams are constructed.

УДК 538.56:519.25

РЕЛАКСАЦИЯ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ НЕ ДЕЛЬТА-КОРРЕЛИРОВАННОЙ СЛУЧАЙНОЙ СИЛЫ

А. Н. Малахов [1], *О. В. Музычук* [2]

Рассмотрена релаксация моментов координат одномерного броуновского движения частиц в симметричном потенциальном профиле под действием гауссовой экспоненциально-коррелированной случайной силы. Использован аналитико-численный метод анализа, основанный на получении и численном решении цепочки дифференциальных уравнений для совместных кумулянтов некоторых функций координат частиц и случайной силы. При этом не налагаются априорные ограничения на интенсивность и время корреляции шума. Численная процедура контролируется путём сравнения с аналитическими результатами, которые можно найти в предельных случаях дельта-коррелированной и квазистатической случайной силы. Выяснена зависимость релаксации среднего значения и дисперсии от интенсивности и вида спектра случайной силы и характера начального распределения частиц. Установлено, в частности, наличие минимума дисперсии в процессе релаксации распределения. На основании релаксации моментов построена эволюция модельного вероятностного распределения координат частиц.

Изучение вероятностных характеристик броуновского движения нелинейных динамических систем представляет интерес для широкого круга задач статистической радиофизики, радиоэлектроники, физической химии и других приложений (см., например, [1, 2]). Соответствующим математическим аппаратом является теория марковских процессов и процессов диффузионного типа [3, 4]. Случайные силы, действующие на систему, обычно считают дельта-коррелированными гауссовыми случайными процессами. Ясно, однако, что возможны ситуации, когда масштабы корреляций таких воздействий не являются пренебрежимо малыми. Известно, что для некоторых моделей случайных сил с ненулевым временем корреляции возможно аналитическое, а чаще численное нахождение вероятностных характеристик нелинейных стохастических систем [4, 5], однако при этом речь идёт, как правило, лишь о соответствующих стационарных значениях.

Ясно, что исследовать процессы релаксации в таких системах можно, лишь комбинируя аналитические и численные методы. Заметим, что аналитических результатов для нестационарных характеристик «классического» броуновского движения также немного (см. [2, 6, 7] и библиографию в [7]).

1. Рассмотрим релаксацию одномерного движения броуновских частиц в симметричном потенциальном профиле $\Phi(x)$, который соответствует возвращающей силе $f(x) = -\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}x$. Уравнение Ланжевена при этом имеет вид

$$T\dot{x} - f(x) = \xi(t), \tag{1}$$

где T — заданная постоянная времени. Положим шум $\xi(t)$ гауссовым марковским процессом, функция корреляции которого имеет вид

$$\langle \xi(t)\,\xi(t-\tau)\rangle = B_\xi(\tau) = p\,\exp(-\Pi\,|\tau|\,), \quad p = \langle \xi^2\rangle. \tag{2}$$

Наибольший интерес представляет релаксация вероятностного распределения частиц $W(x;\,t)$, однако возможности аналитического рассмотрения здесь крайне ограничены.

Предположим, что существует аналитическое решение стохастического уравнения (1) в форме

$$x(t) = F(x_0, s, t), \tag{3}$$

где x_0 — начальное значение координаты (оно может быть случайным или детерминированным), а $s(t)$ — некоторый функционал случайной силы $\xi(t)$. Тогда плотность вероятности координат можно найти на основании представления

$$W(x;t) = \langle\langle \delta[x - F(x_0, s, t)]\rangle\rangle_{x_0,s}, \tag{4}$$

где статистическое усреднение дельта-функции осуществляется по вероятностному распределению процесса $s(t)$ и распределению начальных условий x_0.

В случае линейной системы ($f(x) = -x$) имеем

$$x(t) = x_0 \exp(-at) + s(t), \qquad s(t) = a \int\limits_0^t \xi(\tau) \exp[a\,(\tau - t)]\,\mathrm{d}\tau, \tag{5}$$

где $a = 1/T$. При этом для гауссова шума $\xi(t)$ процесс $s(t)$ также гауссов, и из (4) находим

$$W(x;\,t) = [2\pi D_s(t)]^{-1/2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\Big\{-[x - x_0 \exp(-at)]^2 \Big/ [2D_s(t)]\Big\}\, W_0(x_0)\,\mathrm{d}x_0, \tag{6}$$

где

$$D_s(t) = a \int\limits_0^t B_\xi(\tau) \left[e^{-a\tau} - e^{-a(2t-\tau)}\right] \mathrm{d}\tau \tag{7}$$

— дисперсия процесса $s(t)$. Для детерминированного

$$W_0(x_0) = \delta(x_0 - x_{00}) \tag{8а}$$

или гауссова

$$W_0(x_0) = (2\pi D_0)^{-1/2} \exp\Big[-(x_0 - \langle x_0\rangle)^2/(2D_0)\Big] \tag{8б}$$

начального распределения из (6) получаем гауссову нестационарную плотность вероятности координат частиц:

$$W(x;\,t) = [2\pi D_x(t)]^{-1/2} \exp\Big\{-[x - \langle x(t)\rangle]^2/[2D_x(t)]\Big\}, \tag{9}$$

где релаксация среднего значения и дисперсии имеет вид

$$\langle x(t)\rangle = \langle x_0\rangle \exp(-at), \quad D_x(t) = D_0 \exp(-2at) + D_s(t) \tag{10}$$

(для детерминированных начальных условий (8б) здесь следует положить $D_0 = 0$).

В случае экспоненциально-коррелированного шума (2) из формулы (7) находим

$$D_x(t) = D_0 \exp(-2at) + \frac{p}{1+\nu}\left[1 + \frac{1+\nu}{1-\nu}\,\exp(-2at) - \frac{2}{1-\nu}\,\exp\left(-(1+\nu)\,at\right)\right], \tag{11}$$

где $\nu = \Pi/a$ — относительная ширина спектра случайной силы. В предельных случаях дельта-коррелированного ($\nu \to \infty$, $p \to \infty$, $p/\nu = D = \mathrm{const}$) и квазистатического ($\nu \to 0$, $p = \mathrm{const}$) шума соответственно имеем

$$D_x(t) = D_0 \exp(-2at) + D\,[1 - \exp(-2at)],$$

$$D_x(t) = D_0 \exp(-2at) + p\,[1 - \exp(-at)]^2,$$

где p — мощность шума, а величина D пропорциональна его спектральной плотности в нуле.

Если система (1) нелинейна, изложенная выше процедура невозможна, хотя при достаточной медленной (квазистатической) случайной силе подобное статистическое описание можно осуществить численно. Положим, что $\xi(t)$ — медленно меняющийся процесс, и аппроксимируем его случайной величиной с заданным вероятностным распределением. Естественно, при этом имеется больше шансов найти аналитическое решение уравнения (1) в виде (3) (теперь $s = \xi$), а численно решить дифференциальное уравнение 1-го порядка очень просто. Соответствующее усреднение в (4) всегда можно выполнить численным образом.

2. Рассмотрим далее движение броуновской частицы в потенциальном профиле вида

$$\Phi(x) = x^2/2 + \beta x^4/4,$$

хотя использованный ниже метод позволяет, в принципе, рассмотреть любой равновесный профиль, описываемый полиномом небольшой степени. Марковскую совокупность случайных процессов $\{x, \xi\}$ зададим уравнениями

$$T\dot{x} + x + \beta x^3 = \xi(t), \qquad \Pi^{-1}\dot{\xi} + \xi = \eta(t), \tag{12}$$

где $\eta(t)$ — вспомогательный дельта-коррелированный шум:

$$\langle\eta\rangle = 0, \quad \langle\eta(t)\,\eta(t-\tau)\rangle = D_\eta\delta(\tau), \tag{13}$$

«включённый» до задания начальных условий на динамическую переменную $x(t)$. При этом $\xi(t)$ будет стационарным марковским процессом с функцией корреляции (2), где $p = D_\eta\Pi/2$. Ниже используем также безразмерные параметры

$$\tau = \nu^{-1} = 1/(\Pi T), \quad D = p\tau. \tag{14}$$

Нас интересует релаксация моментов $\langle x^n(t)\rangle$; но из-за нелинейности системы и отличного от нуля времени корреляции случайной силы уравнения для моментов $\langle x^n(t)\rangle$ оказываются «зацепленными» за уравнения для высших смешанных моментов. Как показывает анализ (см. также [5]), значительно удобнее использовать для статистического описания не совместные моменты, а совместные кумулянты вида

$$\langle n, m\rangle = \langle x^n, \underbrace{\xi, \ldots, \xi}_{m}\rangle = \langle x^n, \xi^{[m]}\rangle, \tag{15}$$

где $m = 1, 2, \ldots$. Они характеризуют статистические связи высших порядков между величиной $z = x^n$ и случайной силой $\xi(t)$, поэтому относительный вклад этих переменных в систему уравнений для момента $\langle x^n(t)\rangle$ уменьшается с ростом числа гауссовых компонент $\xi(t)$. [1]

На основании стохастических уравнений (12) можно получить следующую систему для релаксации совместных кумулянтов:

$$\tau\,\langle n, m\rangle' = -(m + n\tau)\,\langle n, m\rangle + n\tau\,\langle n-1, m+1\rangle - n\beta\tau\,\langle n+2, m\rangle + mnD\,\langle n-1, m-1\rangle, \tag{16}$$

где $m = 1, 2, \ldots$; $\langle n, 0\rangle = \langle x^n\rangle$; $\langle 0, m\rangle = 0$; $\langle 0, 0\rangle = 1$. Здесь и ниже штрих обозначает производную по безразмерному времени $\tilde{t} = t/T$.

[1] Здесь и ниже используем обозначения кумулянтных скобок и приёмы работы с ними из [8]. Заметим только, что кумулянтная скобка является линейной функцией аргументов, разделённых запятыми.

Нетрудно видеть, что зацепление уравнений в системе (16) можно свести к трёхчленному взаимодействию, введя соответствующим образом матричное описание. Для отыскания чётных моментов $\langle x^{2n}\rangle$ определим следующие векторы, основанные на совместных кумулянтах:

$$\mathbf{X}_1 = \{\langle x^2\rangle;\, \langle x,\xi\rangle\} = \{\langle 2,0\rangle;\, \langle 1,1\rangle\}, \quad \ldots, \quad \mathbf{X}_n = \{\langle 2n,0\rangle;\, \langle 2n-1,1\rangle;\, \ldots;\, \langle 1,2n-1\rangle\}, \tag{17}$$

и запишем (16) в матричной форме:

$$\mathbf{X}'_n = A_n\,\mathbf{X}_n + B_n\,\mathbf{X}_{n+1} - C_n\,\mathbf{X}_{n-1}, \tag{18}$$

где $n = 1, 2, \ldots$, $\mathbf{X}_0$ — единичный вектор. Размерность матриц A_n равна $2n$, размерность матриц B_n и C_n, фактически, такая же («лишние» элементы в B_n и недостающие в C_n являются нулевыми). Все матрицы квазидиагональны, а их элементы находятся на основании уравнения (16). Отличные от нуля матричные элементы имеют вид:

$$\begin{aligned} a_n(i,i) &= (2n-i+1)\,\tau + i - 1, \qquad & a_n(i,i+1) &= -(2n-i+1)\,\tau, \\ b_n(i,i) &= (2n-i+1)\,\beta\tau + i - 1, \qquad & c_n(i,i-1) &= D\,(i-1)\,(2n-i+1), \end{aligned} \tag{19}$$

где $i = 1, \ldots, 2n$; $n = 1, 2, \ldots$. Стационарные значения подобных систем определяются матричными цепными дробями [9]

$$\mathbf{X}_n = \cfrac{C_n\,\mathbf{X}_{n-1}}{A_n + \cfrac{B_n\,C_{n+1}}{A_{n+1} + \cfrac{B_{n+1}\,C_{n+2}}{\ldots}}}, \tag{20а}$$

где $n = 1, 2, \ldots$, а соответствующая вычислительная процедура реализуется численно.

Нетрудно видеть, что при предельном переходе к белому шуму ($\tau \to 0$, $D = \mathrm{const}$) формула (20а) превращается в обычную непрерывную дробь вида

$$\langle x^{2n}\rangle = \cfrac{(2n-1)\,D\,\langle x^{2n-2}\rangle}{1 + \cfrac{(2n+1)\,\varepsilon}{1 + \cfrac{(2n+3)\,\varepsilon}{1 + \ldots}}}, \tag{20б}$$

где $\varepsilon = \beta D$, $n = 1, 2, \ldots$. Эта дробь сходится при любых значениях параметра ε; сходимость матричной процедуры (20а) для нахождения стационарных значений исследована численно в [5]. В случае линейной системы ($\beta \to 0$) величина $x(t)$ становится гауссовой, и стационарные значения моментов принимают вид

$$\langle x^2\rangle = D/(1+\tau), \quad \langle x^{2n}\rangle = (2n-1)\,\langle x^{2n-2}\rangle\langle x^2\rangle.$$

Из уравнений (16) следует, что системы уравнений для чётных и нечётных моментов независимы. Очевидно также, что нечётные моменты релаксируют к нулю, и их рассмотрение необходимо только в случае несимметричного начального вероятностного распределения. Определим кумулянтные векторы для отыскания нечётных моментов следующим образом:

$$\mathbf{X}^1_1 = \langle x\rangle, \quad \mathbf{X}^1_2 = \{\langle 3,0\rangle;\, \langle 2,1\rangle;\, \langle 1,2\rangle\}, \quad \ldots,$$

$$\mathbf{X}^1_n = \{\langle 2n-1,0\rangle;\, \langle 2n-2,1\rangle; \ldots;\, \langle 1,2n-2\rangle\}. \tag{21}$$

Соответствующие матричные элементы нетрудно найти из уравнений (16). Размерности векторов $\mathbf{X}_n$ и $\mathbf{X}^1_n$ равны соответственно $2n$ и $2n-1$.

Начальные условия для совместных кумулянтов будем считать детерминированными, соответствующими дельта-распределению (8а), или гауссовыми, соответствующими распределению (8б). В первом случае

$$\langle x(0)\rangle = x_0, \quad \langle n,0\rangle = x_0^n, \tag{22а}$$

во втором

$$\langle x(0)\rangle = \langle x_0\rangle, \quad \langle n,0\rangle = \langle x_0\rangle\,\langle x_0^{n-1}\rangle + (n-1)\,D_0\,\langle x_0^{n-2}\rangle; \tag{22б}$$

в обоих случаях $\langle n,m\rangle = 0$ при $m > 0$.

Для размыкания цепочек уравнений релаксации на N-м шаге положим векторы $\mathbf{X}_{N+1}$ и $\mathbf{X}^1_{N+1}$ равными нулю (для стационарных величин это соответствует учёту первых N этажей в матричной цепной дроби (20а)). Такую систему уравнений релаксации назовём системой N-го приближения. Заметим, что при малых N предпочтительнее сохранять в отбрасываемых векторах $(N+1)$-го порядка моменты координат в форме гауссова разложения:

$$\langle x^{N+1}\rangle = \langle x\rangle\,\langle x^N\rangle + N(\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2)\,\langle x^{N-1}\rangle.$$

Как легко видеть, число уравнений системы N-го приближения равно $N\,(N+1)$.

Для численного решения уравнений релаксации нужно перейти от двумерных переменных $\langle n,m\rangle$ к одномерным массивам. Это нетрудно сделать с помощью (16)–(19). Заметим, что сумма индексов каждой компоненты вектора $\mathbf{X}_n$ равна $2n$ (для вектора $\mathbf{X}^1_n$ сумма индексов равна $2n-1$), а номера начальных переменных $\langle x^{2n}\rangle$ в одномерном представлении определяются формулой

$$j(n,0) = n^2 - n + 1,$$

где $n = 1, 2, \ldots, N$. Следовательно, если определить индекс

$$j = j(n,m) = n^2 - n + 1 - m, \tag{23}$$

где $m = 0, 1, \ldots, 2n-1$, и ввести соответствующие переменные

$$z_{j(n,m)} = \langle x^{2n-m},\, \xi^{[m]}\rangle = \begin{cases} \langle 2n-m, m\rangle, & m < 2n; \\ 0, & m \geq 2n, \end{cases} \tag{24}$$

то цепочку уравнений (16) можно записать в виде

$$z'_{j(n,m)} = -(k+m\nu)\,z_{j(n,m)} + kz_{j(n,m+1)} + kmpz_{j(n-1,m-1)} - k\beta z_{j(n+1,m)}, \tag{25}$$

где $k = 2n - m$.

Приведём, в частности, развёрнутую форму записи уравнений второго приближения для релаксации средней интенсивности. Обозначив для краткости

$$z_1 = \langle x^2\rangle, \quad z_2 = \langle x,\xi\rangle, \quad z_{i+3} = \langle x^{4-i}, \xi^{[i]}\rangle,$$

где $i = 0; 1; 2; 3$, имеем

$$\begin{aligned} &z'_1 = 2\,(-z_1 + z_2 - \beta z_3), \quad z'_2 = -(1+\nu)\,z_2 + z_3 + p - \beta z_4; \\ &z'_3 = 4\,(-z_3 + z_4), \quad z'_4 = 3\,[-(1+\nu/3)\,z_4 + z_5 + pz_1], \\ &z'_5 = 2\,[-(1+\nu)\,z_5 + z_6 + 2pz_2], \quad z'_6 = -(1+3\nu)\,z_6. \end{aligned} \tag{26}$$

Заметим, что на основании найденной численно релаксации моментов можно моделировать эволюцию вероятностного распределения $W(x;\,t)$. В качестве модели возьмём гауссову плотность вероятности, хотя, в принципе, можно строить и высшие модельные вероятностные распределения, основанные на ограниченном числе отличных от нуля кумулянтов [8, 10].

Важной характеристикой нестационарных процессов является время релаксации. Ниже мы будем определять его по равновеликому прямоугольнику:

$$T_s = \frac{1}{s(\infty) - s(0)} \int\limits_0^\infty [s(\infty) - s(t)]\,\mathrm{d}t,$$

полагая $s = \langle x(t)\rangle$ или $s = D_x(t)$. Соответствующие времена обозначим $T_{\langle x\rangle}$ и T_D.

3. В любой численной процедуре следует предусмотреть определённые средства контроля. Мы будем осуществлять контроль решения дифференциальных уравнений релаксации путём сравнения установившихся значений моментов со стационарными значениями, полученными на основе соответствующих вероятностных распределений. В предельных случаях дельта-коррелированной и квазистатической случайной силы стационарные вероятностные распределения координат находятся аналитически. В первом случае стационарная плотность вероятности $w(x) = W(x;\,\infty)$ представляет собой распределение Больцмана:

$$w_\delta(x) = C\exp\left[-\frac{x^2 + \beta x^4/2}{2D}\right]. \tag{27}$$

Для квазистатической случайной силы из стохастического уравнения (12) находим стационарную плотность вероятности

$$w_{\mathrm{st}}(x) = \frac{1 + 3\beta x^2}{\sqrt{2\pi p}}\,\exp\left[-\frac{x^2\left(1 + \beta x^2\right)^2}{2p}\right]. \tag{28}$$

Стационарные значения моментов (в частности, $\langle x^2\rangle$) можно найти с любой точностью численным интегрированием выражений (27), (28).

4. Обсудим основные результаты, полученные изложенным методом. На рис. 1*а*, 2*а* показана релаксация средних значений и дисперсий, а на рис. 1*б*, 2*б* — эволюция соответствующих модельных вероятностных распределений, построенных в моменты времени, показанные метками на оси $\tilde{t}$ на рис. 1*а*, 2*а*. Все эти результаты соответствуют детерминированным начальным условиям, или начальному распределению в виде дельта-функции. В табл. 1, 2 приведены стационарные значения дисперсии D_x и соответствующие «контрольные» результаты для предельных случаев дельта-коррелированной (D_{del}) и квазистатической (D_{st}) случайных сил, а также времена релаксации среднего значения $T_{\langle x\rangle}$ и дисперсии T_D.

Рис. 1 и табл. 1 соответствуют $D = \mathrm{const}$; параметрами кривых являются относительное время корреляции τ (или мощность шума $p = D/\tau$). Отметим уменьшение времени релаксации дисперсии с ростом мощности (или с уменьшением времени корреляции шума). Рис. 1*б* — эволюция модельного распределения при близкой к дельта-коррелированной случайной силе ($\tau = 0{,}25$).

Рис. 2 и табл. 2 показывают релаксацию вероятностных характеристик при фиксированной мощности шума p. Параметры кривых — относительное время корреляции τ (или $D = p\tau$). Зависимость времени релаксации T_D от τ здесь более слабая, а $T_{\langle x\rangle}$ практически не меняется. Таким образом, хотя основная характеристика шума, влияющая на время релаксации, — это его мощность, при $p = \mathrm{const}$ более медленная релаксация будет при низкочастотном шуме. На рис. 2*б* показана релаксация плотности вероятности для случая «розового» шума для $\tau = 2$ (кривые *1*, *2*); кривая *3* — квазистатическое

Таблица 1

D_x	$D_{\rm del}$	$D_{\rm st}$	$T_{\langle x\rangle}$	T_D
0,59	0,69	1,43	0,80	0,59
0,39		0,58	0,87	0,92
0,21		0,25	0,91	1,21

Таблица 2

D_x	$D_{\rm del}$	$D_{\rm st}$	$T_{\langle x\rangle}$	T_D
0,73	1,54	0,77	0,99	1,03
0,49	0,76		0,99	0,83
0,25	0,31		0,99	0,67

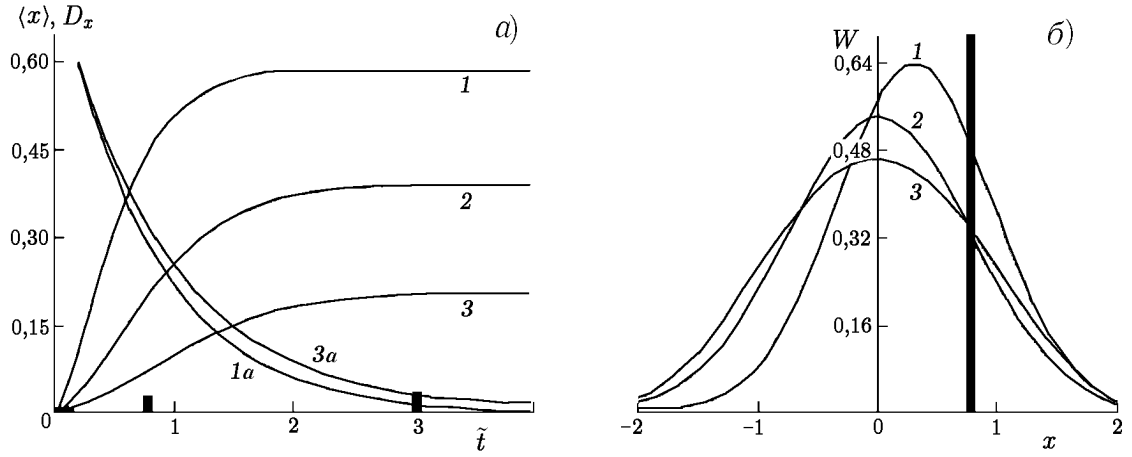

Рис. 1. Релаксация $\langle x(t)\rangle$, $D_x(t)$ и модельного вероятностного распределения ($x_0 = 0{,}75$; $D_0 = 0$) при $D = 1$; $\beta = 0{,}25$. Кривые *1–3* соответствуют зависимости $D_x(t)$, кривые *1a–3a* — зависимости $\langle x(t)\rangle$ для $\tau = 0{,}25; 1; 3$ соответственно (панель *а*). Кривые *1, 2* — распределение $W(x;\, t)$ для безразмерных времён $\tilde{t} = 0{,}75; 3$ соответственно для $\tau = 0{,}25$; кривая *3* — стационарное больцмановское распределение (27) (панель *б*)

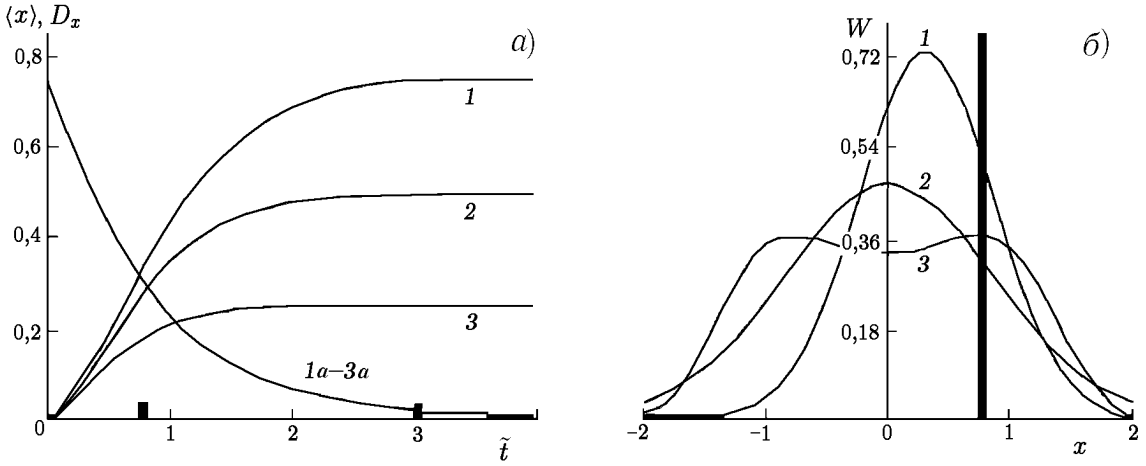

Рис. 2. Релаксация $\langle x(t)\rangle$, $D_x(t)$ и модельного вероятностного распределения ($x_0 = 0{,}75$; $D_0 = 0$) при $p = 1{,}5$; $\beta = 0{,}25$. Кривые *1–3* соответствуют зависимости $D_x(t)$, кривые *1a–3a* — зависимости $\langle x(t)\rangle$ для $\tau = 2; 0{,}75; 0{,}25$ соответственно (панель *а*). Кривые *1, 2* — распределение $W(x;\, t)$ для безразмерных времён $\tilde{t} = 0{,}75; 3$ соответственно для $\tau = 2$; кривая *3* — квазистатическое распределение (28) (панель *б*)

распределение (28) ($\tau = \infty$).

На рис. 3 показана релаксация дисперсии для случая начального гауссова вероятностного распределения частиц с начальной дисперсией D_0 и эволюция модельного распределения $W(x;\, t)$.Отметим наличие минимума дисперсии и соответствующую немонотонность эволюции распределения.

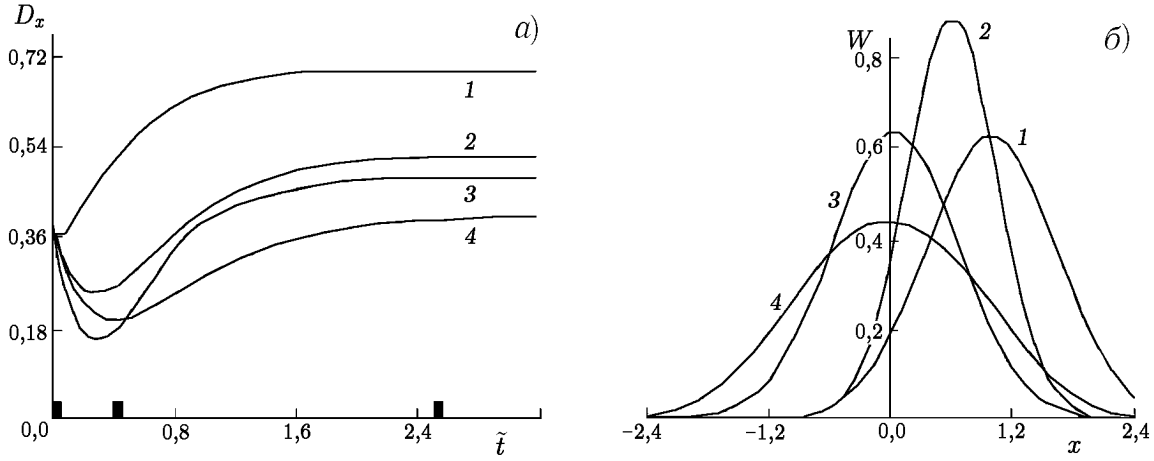

Рис. 3. Релаксация гауссова начального распределения ($\langle x_0 \rangle = 1$; $D_0 = 0{,}4$) при $D = 1$. Кривые *1–4* соответствуют зависимости $D_x(t)$: кривые *1, 2, 4* — для $\beta = 0{,}2$; $\tau = 0{,}05; 0{,}5; 1$ соответственно; кривая *3* — для $\beta = 0{,}5$; $\tau = 0{,}5$ (панель *а*). Релаксация модельного распределения для $\tau = 1$; $\beta = 0{,}2$: кривая *1* — начальное гауссово распределение (8б); кривая *2* — $W(x;\, t)$ для $\tilde{t} = 0{,}4$ (это соответствует минимуму дисперсии); кривая *3* — $W(x;\, t)$ для $\tilde{t} = 2{,}5$; кривая *4* — стационарное больцмановское распределение (27) (панель *б*)

Это обусловлено отличным от нуля временем корреляции случайной силы. Частицы сначала «кучно скатываются» со стенки потенциальной ямы, а затем их распределение устанавливается согласно потенциальному профилю. Этот эффект не является нелинейным (минимум дисперсии имеется и в выражении (11) при $D_0 \neq 0$), но наличие нелинейности его подчёркивает.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 99–02–17544, 00–15–96620) и Минвуза РФ (грант № Е00-3.5-216).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хорстхемке В., Лефевр Р. Индуцированные шумом переходы: теория и применение в физике, химии и биологии. М.: Мир, 1987.
2. Noise in Nonlinear Dynamical Systems / Ed. by F. Moss, P. V. E. McClintock. Cambridge, England: Cambridge University Press, 1989. Vols. 1–3.
3. Кляцкин В. И. Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами. М.: Наука, 1975.
4. Кляцкин В. И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. М.: Наука, 1980.
5. Мишанина М. Г., Музычук О. В. // ПММ. 1992. Т. 56, вып. 6. С. 1 039.
6. Malakhov A. N., Pankratov A. L. // Physica A. 1996. V. 229, No. 1. P. 109.
7. Malakhov A. N. // Chaos. 1997. V. 7, No. 3. P. 488.
8. Малахов А. Н. Кумулянтный анализ негауссовых случайных процессов и их преобразований. М.: Сов. радио, 1978.
9. Музычук О. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1989. Т. 32, № 2. С. 169.
10. Музычук О. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1999. Т. 42, № 9. С. 992.

[1] Нижегородский госуниверситет им. Н. И. Лобачевского,
[2] Нижегородский архитектурно-строительный университет,
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию
26 декабря 2000 г.

RELAXATION OF THE PROBABILITY CHARACTERISTICS OF A BROWNIAN MOTION UNDER THE ACTION OF A NON-DELTA-CORRELATED RANDOM FORCE

A. N. Malakhov and O. V. Muzychuk

We consider relaxation of the probability characteristics of a one-dimensional Brownian motion in a symmetric potential under the action of a Gaussian exponentially-correlated random force. The analysis is performed using an analytical—numerical method based on deriving and solving numerically a chain of differential equations for combined cumulants of certain functions of the random force and the coordinates of particles. In this case, no a priory constrains are imposed on the intensity and correlation scale of the noise. The numerical procedure is tested by comparing with analytical results which can be obtained in the limiting cases of delta-correlated and quasi-static random forces. We clarify the dependences of the mean value and variance of the random-force power and spectrum, as well as on the initial particle distribution. In particular, we find the minimum of variance in the course of the distribution relaxation. Based on relaxation of the moments, we determine the evolution of a model probability distribution of particle coordinates.