

Содержание

Железняков В. В. Авторам и читателям журнала «Известия вузов. Радиофизика»	1
Белянин А. А., Деришев Е. В., Кочаровский В. В., Кочаровский Вл. В. О влиянии свободных нейтронов на динамику и излучение астрофизической плазмы	3
Белянин А. А., Кочаровский В. В., Кочаровский Вл. В. Формирование аннигиляционно-циклотронных линий в сильном магнитном поле вблизи нейтронных звёзд	17
Сербер А. В., Ямпольский Н. А. Модель фотосферы магнитного белого карлика	27
Зайцев В. В., Кисляков А. Г., Степанов А. В., Урпо С., Шкелёв Е. И. Низкочастотные пульсации корональных магнитных петель	38
Злотник Е. Я. О преобладании обыкновенной волны в микроволновом излучении активных областей на Солнце	57
Шапошников В. Е. Новые возможности радиоастрономической диагностики магнитосфery Юпитера по наблюдаемой поляризации декаметрового радиоизлучения	66
Губченко В. М., Бирнат Х. К., Гуссенс М. О квазибестоковом приближении в электродинамике горячей токонесущей бесстолкновительной плазмы	77
Беспалов П. А., Мизонова В. Г. Формирование потоков надтепловых частиц в сильно турбулентной космической плазме	90
Демехов А. Г., Трахтенгерц В. Ю. Теория генерации дискретных КНЧ-ОНЧ излучений в магнитосфере Земли	111
Пасманик Д. Л., Трахтенгерц В. Ю. Циклотронное взаимодействие свистовых волн и частиц в плазменном волноводе	127
Ерухимова Т. Л., Суворов Е. В. Восстановление профилей концентрации озона и температуры атмосферы по спектрам микроволнового поглощения в двух линиях вращательных переходов озона	140
Мареев Е. А., Сорокин А. Е. Автоволновые режимы электризации грозового облака	148
Чугунов Ю. В. Приёмная антенна в магнитоактивной плазме в резонансной полосе частот	163

Кочаровский В. В., Кочаровский Вл. В., Кукушкин В. А. Спонтанная поляризация газа двухуровневых молекул и распределение Гиббса по квазиэнергиям.....	174
Ерухимова М. А., Токман М. Д. К теории «безынверсного» мазера на свободных электронах.....	190
Белянин А. А., Кочаровский В. В., Кочаровский Вл. В., Пестов Д. С. Особенности сверхизлучения при непрерывной накачке в гетеролазере на циклотронных квантовых точках.....	199
Алёшин В. Я., Андronов А. А. Линейное взаимодействие (трансформация) волн де-Броиля Г- и Х-долин и внутризонные оптические переходы в гетероструктурах GaAs/AlAs с квантовыми ямами в латеральном электрическом поле	212

АВТОРАМ И ЧИТАТЕЛЯМ ЖУРНАЛА «ИЗВЕСТИЯ ВУЗОВ. РАДИОФИЗИКА»

Перед вами — первый выпуск нашего журнала в новом веке. Им мы открываем серию специальных выпусков 2001 года: в мае появится номер, посвящённый 100-летию одного из основателей радиофизики в СССР академика А. А. Андронова, в июле–августе — выпуск, где будут помещены избранные статьи по радиоастрономии и плазменной астрофизике, написанные на основе докладов на Международной конференции «Солнце в максимуме активности и солнечно-звездные аналогии» (ГАО РАН, Пулково, сентябрь 2000 г). Все специальные выпуски составлены из заказных статей. Это дало возможность привлечь в журнал наиболее известных и квалифицированных специалистов по радиофизике и смежным дисциплинам и тем самым повысить научный уровень журнала.

В последние годы тираж журнала остаётся практически неизменным. Это связано прежде всего с той ролью, которую он играет в российской научной периодике как основной радиофизический журнал. Не последней причиной является и низкая цена на журнал. Редакция будет прилагать все усилия, чтобы эта ситуация сохранилась и в будущем.

В соответствии с новыми веяниями читатели смогут встретить наш журнал в Интернете. Одним из первых среди российских журналов «Известия вузов. Радиофизика» вошли в состав Электронной библиотеки РФФИ. Поэтому с содержанием статей за 1998–1999 гг. читатели могут ознакомиться, обратившись по адресу http://www.elibrary.ru/issue_main.asp?id=1108. В настоящее время решается вопрос о процедуре доступа к статьям, помещённым в более поздних выпусках. Кроме того, оглавления всех выпусков журнала за последнее время можно найти в службе ИНФОМАГ по адресу <http://www.ripn.net:8080/infomag/journals/j152r/>.

Как известно, журнал «Известия вузов. Радиофизика» издаётся также на английском языке издательством Kluwer Academic / Plenum Publishers под названием “Radiophysics and Quantum Electronics”. Начиная с первого номера 2001 года английская версия будет публиковаться и в электронной форме (адрес в Интернете <http://www.wkap.nl/journalhome.htm/0033-8443>) — с доступом по специальной подписке, принимаемой этим издательством.

Редколлегия и редакция журнала надеются, что в новом столетии, как и раньше, нашему журналу будут обеспечены поддержка авторов и внимание читателей.

Главный редактор



академик В. В. Железняков

УДК 52.726

О ВЛИЯНИИ СВОБОДНЫХ НЕЙТРОНОВ НА ДИНАМИКУ И ИЗЛУЧЕНИЕ АСТРОФИЗИЧЕСКОЙ ПЛАЗМЫ

А. А. Белянин, Е. В. Деришев, В. В. Кочаровский, Вл. В. Кочаровский

В статье приведены аргументы в пользу существования свободных нейтронов в плазме, создаваемой компактными астрофизическими объектами, а также выяснены условия появления и сохранения нейтронной компоненты. Явления, обусловленные нейтронами, весьма многообразны и включают как динамические (переменность источников, переход релятивистского ветра в двухпотоковый режим), так и кинетические (расщепление ядер гелия нейтронами, электромагнитный каскад, излучение в анигиляционной и ядерных линиях, нейтрипные потери). Изложенная в статье теория применима к внутренним областям аккреционных дисков, джетам в микреквазарах и релятивистскому ветру в источниках гамма-всплесков.

ВВЕДЕНИЕ

Время жизни свободного нейтрона мало по астрофизическим меркам — всего около 900 секунд. Поэтому заметное воздействие нейтронов на динамику и кинетику плазмы можно ожидать лишь в тех объектах, в которых спад свободных нейтронов возмещается за счёт процессов их накопления. По существу, таких процессов два: либо диссоциация ядер гелия или более тяжёлых элементов, либо превращение протонов в нейтроны, обусловленное слабым (а при очень высоких энергиях — и электромагнитным) взаимодействием. Разумеется, мы не берём в расчёту особый случай сверхплотного вещества внутри нейтронных звёзд, где нейтроны фактически стабильны, а их роль является определяющей во многих отношениях.

До последнего времени роли свободных нейтронов в динамике и излучении невырожденной астрофизической плазмы уделялось незначительное внимание. Отчасти это происходило из-за широко распространённого убеждения, что нестабильные частицы не могут существенно повлиять на большинство происходящих в плазме процессов, за исключением быстро протекающих ядерных реакций. Здесь следует особо отметить образование первичного гелия в ранней Вселенной, где роль свободных нейтронов принципиальна, но слабо затрагивает проблемы физики плазмы как таковой. Так же дело обстоит и с нуклеосинтезом внутри обычных звёзд.

К числу немногих исключений из этой традиции можно отнести следующие. Рядом авторов (например, [1]) нейтроны, возникающие в результате неупругого взаимодействия фотонов с протонами ($p + \gamma \rightarrow n + \pi^+$), рассматривались в качестве не подверженного влиянию магнитного поля переносчика энергии в активных ядрах галактик. Характерные энергии частиц при этом превышают 10^{15} эВ, т. е. задачи такого типа относятся скорее к физике космических лучей с вытекающими отсюда неопределённостями в их постановке и используемых моделях.

В качестве другого класса источников, где могли бы появиться свободные нейтроны, предлагались аккреционные диски с преобладанием адвекции (ADAF), где температура ионов очень велика [2, 3]. В этом случае нейтроны появляются при диссоциации ядер гелия в горячей неизотермической плазме [4, 5]. Роль нейтронов в цитируемых работах обсуждалась в основном применительно к генерации линейчатого излучения после захвата нейтронов ядрами тяжёлых элементов и генерации тормозного излучения в протон-нейтронных столкновениях [4], хотя рассматривалось и влияние нейтронной компоненты на вязкость плазмы [6].

В настоящей статье рассмотрен более широкий круг явлений, связанных с наличием свободных нейтронов в плазме, создаваемой компактными объектами. Мы покажем, что список источников, в которых нейтроны появляются естественным образом, должен быть расширен, с тем чтобы включить также релятивистские джеты в микроквазарах [7] и гамма-всплески. С другой стороны, условия появления нейтронной компоненты оказываются значительно менее жёсткими, чем считалось ранее.

Напомним читателю основные свойства гамма-всплесков (см. также обзоры [8, 9]). Источники всплесков изотропно распределены по небесной сфере, имеют угловую протяжённость меньше разрешающей способности современной аппаратуры и дают вспышки (по-видимому, неповторяющиеся) длительностью $0,1 \div 100$ с. Максимум спектра излучения лежит в гамма-диапазоне (около 200 кэВ), откуда и пошло название этого явления. Недавние наблюдения оптических компонент гамма-всплесков [10–12] показали, что они расположены на расстояниях, сравнимых с размером Вселенной. Общее энерговыделение типичного источника составляет $10^{51} \div 10^{52}$ эрг. Как следствие, наблюдаемое излучение должно генерироваться в ультрарелятивистском потоке вещества, движущемся с лоренц-фактором $\Gamma > 100$ [13], чтобы избежать сильного двухфотонного поглощения.

Обсуждая физику двухкомпонентного релятивистского ветра, мы будем уделять основное внимание тем вопросам, которые не рассматривались подробно в наших предыдущих статьях [14, 15]. В частности, это относится к эффекту вторичной диссоциации гелия, влиянию магнитного поля на нейтринные потери и спектру надтеплового излучения фотосферы в широком диапазоне энергий.

Для простоты изложения мы считаем релятивистский ветер изотропным, однако все изложенные результаты остаются справедливыми и для джетов с углом раствора и лоренц-фактором, удовлетворяющими соотношению $\theta > 1/\Gamma$. Под светимостью источника, темпом потери массы и т. д. в случае джетов мы понимаем настоящие значения этих величин, отнесённые к единичному телесному углу и умноженные на 4π .

1. НЕЙТРОНЫ В АККРЕЦИОННЫХ ДИСКАХ

Основной источник нейтронов в аккреционных дисках — диссоциация ядер гелия в результате неупругих столкновений с высокоэнергичными ионами, находящимися в диске, или с нейтронами, проходящими сквозь него. Обычно предполагается, что образовавшиеся нейтроны увлекаются движением плазмы к центральному компактному объекту¹ со скоростью, равной скорости радиального движения диска [4, 5]. Однако если плазма в аккреционном диске достаточно разрежена, то происходит динамическое расцепление нейтронной и ионной компонент диска, приводящее к накоплению нейтронов. Под расцеплением мы подразумеваем появление конечной разности гидродинамических скоростей двух компонент.

1.1. Накопление свободных нейтронов в диске

Рассмотрим радиальное движение нейтронов (в гидродинамическом смысле), которое обусловлено потерей момента импульса в нейtron-ионных (преимущественно нейtron-протонных) столкновениях внутри аккреционного диска. Прямое вычисление даёт

$$V_n^{(r)} = -\frac{d}{dt} \left(\frac{R_g c^2}{2V_n^2} \right) = \frac{R_g c^2}{V_n^3} \frac{dV_n}{dt} = -\frac{R_g c^2}{2V_n^3} \nu_{pn} (V_n - V_d), \quad (1)$$

где V_n и $V_n^{(r)}$ — орбитальная и радиальная скорости нейтронной компоненты, R_g — шварцшильдовский радиус чёрной дыры, c — скорость света. В окончательном выражении производная по времени

¹Нейтронной звезде или чёрной дыре; далее для определённости, будем говорить о чёрной дыре.

от V_n была заменена на $-\nu_{pn}(V_n - V_d)/2$, где ν_{pn} — частота нейтрон-протонных столкновений, V_d — орбитальная скорость диска.

Орбитальная скорость у нейтронной компоненты больше, чем у диска, так что избыточная центробежная сила должна уравновешиваться силой трения, возникающей из-за разницы радиальных скоростей:

$$\frac{V_n^2 - V_d^2}{R} = \frac{\nu_{pn}}{2} (V_n^{(r)} - V_d^{(r)}). \quad (2)$$

Здесь $V_d^{(r)}$ — радиальная скорость диска, R — текущий радиус. Полагая $V_n \approx V_d \approx V_0$, где V_0 — кеплеровская скорость, получаем следующее выражение:

$$V_n^{(r)} = -\frac{1}{4} \left(\frac{\nu_{pn} R}{V_0} \right)^2 (V_n^{(r)} - V_d^{(r)}). \quad (3)$$

Величина $\nu_{pn} R / V_0$ равна делённому на 2π числу столкновений, которые претерпевает нейтрон за время одного оборота по орбите.

Частоту столкновений ν_{pn} можно выразить через оптическую толщину для нейтронов τ_d , которая равна среднему числу столкновений, испытываемых нейтроном, пролетающим со скоростью порядка кеплеровской сквозь аккреционный диск перпендикулярно плоскости диска. Зная толщину ионного и нейтронного «дисков», h_d и h_n , и полагая сечение нейтрон-протонных столкновений обратно пропорциональным их относительной скорости, получаем $\nu_{pn} = \langle \sigma V \rangle_{pn} n_p (h_d/h_n) = = (V_0/h_n) (\langle \sigma V \rangle_{pn} / V_0) n_p h_d = \tau_d V_0 / (2h_n)$. Здесь n_p и n_n — концентрации протонов и нейтронов, $\langle \sigma V \rangle_{pn}$ — усреднённое по распределению произведение сечения протон-нейтронных столкновений на их относительную скорость. Наконец, выражение для радиальной скорости нейтронов принимает следующий вид:

$$V_n^{(r)} = \frac{[R/(2h_n)]^2 \tau_d^2}{4 + [R/(2h_n)]^2 \tau_d^2} V_d^{(r)}. \quad (4)$$

Накопление нейтронов и образование нейтронного гало во внутренних частях аккреционного диска начинается тогда, когда $V_n^{(r)}$ становится существенно меньше, чем $V_d^{(r)}$, т. е. когда $\tau_d \lesssim 4h_n/R$. Соответственно, темп акреции не должен превышать

$$\dot{M}_{\max} = \frac{8\pi V_d^{(r)} V_0 h_n m_p}{\langle \sigma V \rangle_{pn}} = \frac{4\pi \alpha R_g c^2}{\langle \sigma V \rangle_{pn}} \left(\frac{h_d}{R} \right)^2 \left(\frac{h_n}{R} \right) m_p, \quad (5)$$

где m_p — масса протона. Здесь использовано обычное для моделей α -дисков соотношение $V_d^{(r)} = = \alpha (h_d/R)^2 V_0$, а величина h_d/R выступает в роли параметра модели. Когда $\alpha = 0,1$ и $h_d \approx R$, предельный темп акреции \dot{M}_{\max} приблизительно соответствует эддингтоновской светимости.

С уменьшением темпа акреции роль эффекта накопления нейтронов растёт вплоть до того, что концентрация нейтронов превосходит протонную, и начинает сказываться собственная вязкость нейтронной компоненты. При дальнейшем уменьшении темпа акреции, в зависимости от используемой модели диска, возможна как стабилизация отношения $V_n^{(r)}/V_d^{(r)}$, так и смена знака $V_n^{(r)}$ с последующим стремлением к нулю её абсолютного значения.

1.2. Виреализация нейтронов в гало

Орбита, по которой движется нейтрон, подвержена прецессии под действием гравимагнитной силы со стороны вращающейся чёрной дыры. Прецессия служит эффективным механизмом дополнительного разогрева нейтронов и в конечном счёте может привести к полной виреализации нейтронного гало,

возможной в том случае, когда угловая скорость прецессии превосходит половину частоты нейтрон-протонных столкновений, т. е.

$$\frac{ac}{2\pi R_g} \left(\frac{R_g}{R} \right)^3 \gtrsim \frac{\nu_{pn}}{2}, \quad (6)$$

где a — момент импульса чёрной дыры в единицах $M R_g c / 2$. Подстановкой выражение для ν_{pn} , где концентрация протонов n_p выражена через \dot{M} и R , легко получить условие на темп акреции:

$$\dot{M} \lesssim \frac{a}{\sqrt{2}\pi} \left(\frac{R_g}{R} \right)^{3/2} \dot{M}_{max}. \quad (7)$$

Видно, что даже для быстро вращающихся чёрных дыр ($a \rightarrow 1$) рассматриваемый механизм едва ли может обеспечить виреализацию вблизи внешнего края нейтронного гало. Тем не менее, виреализация возможна во внутренней части гало на расстоянии

$$R \lesssim \left(\frac{a \dot{M}_{max}}{\sqrt{2}\pi \dot{M}} \right)^{2/3} R_g. \quad (8)$$

1.3. Долгопериодическая переменность

Виреализация нейтронного гало вблизи чёрной дыры приводит к появлению почти изотропного ветра, который уносит около половины нейтронов, образовавшихся при диссоциации гелия в акционном диске, и движется со скоростью, сравнимой со скоростью света. Нейтроны ветра оказывают на акрецируемое вещество динамическое давление посредством протонов, образующихся при их распаде. На расстоянии меньше $t_n V_n$, где V_n — скорость ветра, а t_n — время жизни нейтрона, это давление равно

$$P_w \approx \frac{\eta_{He} \dot{M}}{16\pi R t_n}, \quad (9)$$

где η_{He} — массовая доля гелия. В случае квазисферической акреции (например, из звёздного ветра от массивной звезды-компаньона) нейтронный ветер может остановить падение вещества на чёрную дыру, если P_w превосходит динамическое давление падающего вещества в звуковой точке $R_c \approx \approx (c/V_\infty)^2 R_g$, где V_∞ — скорость звёздного ветра на большом удалении от чёрной дыры. Соответствующее условие можно представить в виде

$$\frac{\dot{M} V_\infty}{4\pi R_c^2} \lesssim P_w \Rightarrow \frac{V_\infty}{c} \lesssim \left(\frac{\eta_{He} R_g}{4ct_n} \right)^{1/3}. \quad (10)$$

Как только условие (10) выполняется, акреция останавливается, но источник остаётся действующим благодаря накопленному в диске веществу. Оно будет вычерпано за время, приблизительно равное характерному времени переноса момента импульса в области внешнего края диска. После этого источник выключается, что приводит к началу следующего цикла акреции из звёздного ветра. Период низкой активности источника продолжается до тех пор, пока вещество с внешнего края диска не достигнет области формирования нейтронного гало, т. е. примерно такое же время, что и активный период. Описанная последовательность событий приводит к долговременной переменности с периодом, очень чувствительным к внешнему размеру диска, т. е. к величине удельного момента импульса акрецируемого вещества. В отдельных случаях период может достигать сотен или тысяч лет.

1.4. Жёсткое гамма-излучение нейтронного гало

В случае виреализации нейтронного гало нейтрон-протонные и нейтрон-нейтронные столкновения на расстоянии $R \sim 3R_g$ приводят к рождению пионов. Предположим, что средняя скорость реакций образования пионов $\xi_\pi = \langle \sigma_\pi V \rangle$, усреднённая с учётом распределения нуклонов по скоростям, однаакова для обоих типов столкновений, тогда полная «пионная светимость» равна

$$L_\pi \sim \xi_\pi \left(\frac{n_n^2}{2} + \frac{h_d}{h_n} n_n n_p \right) R_\pi^3 E_\pi, \quad (11)$$

где R_π — расстояние, на котором становится возможным рождение пионов, а $E_\pi \approx 140$ МэВ — энергия пиона. Если ядра гелия диссоциируют полностью, то концентрацию нейтронов можно найти из условия баланса

$$\frac{\eta_{\text{He}} \dot{M}}{2m_p} = \xi_{\text{loss}} \frac{n_n^2}{2} R_\pi^3, \quad (12)$$

где темп потери нейтронов ξ_{loss} определяется главным образом их рассеянием в чёрную дыру. Выразив n_n из уравнения (12) и n_p из уравнения непрерывности, а также положив $h_n = R$, получаем «пионные светимости» нейтрон-нейтронных и протон-нейтронных столкновений:

$$L_{nn} = \frac{\xi_\pi}{\xi_{\text{loss}}} \frac{\eta_{\text{He}} \dot{M} E_\pi}{2m_p}, \quad (13)$$

$$L_{pn} = \frac{E_\pi}{2\pi\alpha} \frac{\xi_\pi}{\xi_{\text{loss}}} \left(\frac{R}{h_d} \right)^2 \left(\frac{\eta_{\text{He}} \xi_{\text{loss}} \dot{M}^3}{R_g c^2 m_p^3} \right)^{1/2}. \quad (14)$$

Предельные значения светимостей можно получить, полагая $\dot{M} = \dot{M}_{\text{max}}$, что даёт

$$L_{nn}^{\text{max}} \approx 7 \cdot 10^{38} \alpha \eta_{\text{He}} M_{10} \left(\frac{h_d}{R} \right)^2 \text{ эрг/с}, \quad (15)$$

$$L_{pn}^{\text{max}} \approx 10^{38} M_{10} \sqrt{\alpha \eta_{\text{He}}} \left(\frac{h_d}{R} \right) \text{ эрг/с}, \quad (16)$$

где M_{10} — масса чёрной дыры в единицах $10M_\odot$, где M_\odot — масса Солнца. Приблизительно половина энергии пионов расходуется на излучение γ -квантов и электрон-позитронных (e^-e^+) пар. Эта часть энергии перерабатывается в результате комптонизации мягкого рентгеновского излучения и электромагнитного каскада.

В поле рентгеновского излучения от диска релятивистские электроны и позитроны быстро охлаждаются, так что равновесное распределение e^-e^+ пар характеризуется средней энергией в пределах $50 \div 500$ кэВ. Спектр фотонов с энергиями выше нескольких десятков кэВ (т. е. там, где обрывается спектр теплового излучения от диска) имеет характерный комптонизационный вид. Электромагнитный каскад (при условии, что он развивается) приводит к появлению у спектра жёсткого степенного «хвоста», спадающего с показателем около 2 (имеется в виду число фотонов на единичный интервал энергий). И та, и другая спектральные особенности часто наблюдаются в жёстком состоянии аккрецирующих источников — кандидатов в чёрные дыры. Кроме того, следует ожидать жёсткое излучение с энергиями фотонов вплоть до 70 МэВ, которое, однако, трудно наблюдать, поскольку оно переносит гораздо меньше энергии, чем жёсткое рентгеновское излучение.

Нейтронное гало может также оказаться эффективным источником излучения в линии дейтерия $E_d \approx 2,2$ МэВ, появляющегося в результате испарения нейтронов из гало и их последующего радиационного захвата протонами в холодном внешнем диске. Полная светимость в линии равна

$\beta \eta_{\text{He}} \dot{M} E_d / (2m_p)$, где β — доля нейтронов, попадающих во внешний диск. Эта доля сильно зависит от распределения нейтронов по скоростям и размера гало.

2. НЕЙТРОНЫ В РЕЛЯТИВИСТСКОМ ВЕТРЕ

В этом разделе обсуждаются свойства нейтронной компоненты в релятивистских (и сверхэддингтоновских) потоках плазмы от компактных объектов. Условием компактности является малость характерного динамического времени, приближённо равного $3R_g/c$, по сравнению с временем жизни нейтронов. Такое условие исключает из рассмотрения сверхмассивные чёрные дыры в активных ядрах галактик, если их масса превышает $3 \cdot 10^7 M_\odot$. Кроме того, если речь идёт об источниках с умеренной плотностью и температурой в основании ветра, например о микроквазарах, то необходимы также затравочные нейтроны, источником которых может служить нейтронное гало.

2.1. Условия появления и сохранения нейтронной компоненты

Источники гамма-всплесков дают, пожалуй, единственный пример реализации физических условий, необходимых для самостоятельного появления нейтронов в релятивистском ветре. При типичной для гамма-всплесков плотности нуклонного вещества в основании ветра $10^4 \div 10^6 \text{ г/см}^3$ температура диссоциации ядер гелия около $0,7 \text{ МэВ}$, а для других ядер — ещё меньше. Реально же температура T_0 в источнике почти на порядок больше и достигает $3 \div 10 \text{ МэВ}$. Согласно общепринятой точке зрения ультрарелятивистские потоки плазмы, порождающие гамма-всплески, возникают либо при катастрофических событиях в эволюции нейтронных звёзд, либо при коллапсе центральных частей сверх массивных звёзд [16–20]. Таким образом, вещество в основании ветра с самого начала обогащено нейтронами, и даже простая диссоциация ядер входящих в его состав элементов приводит к отношению концентраций нейтронов и протонов $n_n/n_p \gtrsim 1$.

В источниках гамма-всплесков действует ещё один механизм образования свободных нейтронов — взаимное превращение нуклонов друг в друга, вызванное реакциями слабого взаимодействия: $p + \bar{\nu}_e \rightarrow n + e^+$ и $p + e^- \rightarrow n + \nu_e$. За время порядка [21]

$$t_w \sim \frac{60\pi^3 \hbar^7 c^6}{Q^5 G_F^2 (1 + 3g_A^2)} \approx 3 \cdot 10^{-2} \left(\frac{Q}{10 \text{ МэВ}} \right)^{-5} \text{ с} \quad (17)$$

успевает установиться тепловое равновесие, соответствующее примерному равенству концентраций протонов и нейтронов. Здесь $G_F \approx 10^{-49} \text{ эрг} \cdot \text{см}^3$ — константа Ферми, Q — характерная энергия взаимодействующих частиц ($Q \approx 3T_0$ для тепловой функции распределения), $g_A \approx 1,25$. В процессе ускорения ветра температура падает обратно пропорционально радиусу, и время установления равновесия резко возрастает. Довольно скоро, при температуре всё ещё значительно выше ($m_n - m_p$) c^2 , отношение концентраций перестаёт определяться ходом температуры и устанавливается на уровне $\eta \equiv n_n/n_p \approx 1$ — происходит так называемая закалка.

Когда температура плазмы опускается до примерно 70 кэВ , становится возможной рекомбинация протонов и нейтронов. Процесс идёт в две стадии: сначала протон и нейtron соединяются в дейтрон в реакции $p + n \rightarrow d + \gamma$, затем цепочка превращений разветвляется, разными путями приводя к образованию гелия в суммарной реакции $3d \rightarrow {}^4\text{He} + p + n$. Скорость рекомбинации определяется главным образом темпом образования дейтерия. Рекомбинацией можно пренебречь, если выполнено условие $\tau_r = 2 \langle \sigma v \rangle_d n_p / 3 < c / (R_r \Gamma_r)$, где $\langle \sigma v \rangle_d \approx 5 \cdot 10^{-20} \text{ см}^3/\text{с}$ — усреднённая по максвелловскому распределению константа скорости реакции образования дейтерия, R_r — расстояние от источника, отвечающее началу рекомбинации, а Γ_r — лоренц-фактор на этом расстоянии.

Лоренц-фактор релятивистского ветра растёт с расстоянием приблизительно по линейному закону, $\Gamma \approx R/R_0$, прежде чем достигнуть максимального значения $\Gamma_\ell = L/(\dot{M}c^2)$, определяемого светимостью источника L и темпом потери барионной массы \dot{M} . Радиус R_0 в основании ветра мы полагаем порядка $3R_g$. Для вычисления темпа рекомбинации протонов и нейтронов воспользуемся законом сохранения потока частиц, задающим зависимость концентрации протонов n_p от радиуса:

$$n_p = \frac{L}{4\pi R^2 (1 + \eta) \Gamma \Gamma_\ell m c^3}, \quad (18)$$

где m — масса нуклона. Поскольку в источниках гамма-всплесков температура 70 кэВ достигается на этапе ускорения, то, как нетрудно показать, рекомбинация становится существенной при выполнении условия

$$\tau_r \approx \left(\frac{R_0}{1 \text{ км}} \right) \left(\frac{T_0}{1,5 \text{ МэВ}} \right) \frac{1}{(1 + \eta) \Gamma_\ell} > 1. \quad (19)$$

Если $\eta \approx 1$, то доля избежавших рекомбинации нейтронов составляет $(\tau_r + 1)^{-1}$ пока $\tau_r + 1 < \eta/|1 - \eta|$, а при больших значениях τ_r либо становится экспоненциально малой (когда $\eta < 1$), либо постоянна (когда $\eta > 1$).

2.2. Расцепление протонной и нейтронной компонент

Говоря о нейтронной компоненте в релятивистском ветре, мы имеем в виду такую ситуацию, когда в основании ветра нейтроны сталкиваются с протонами достаточно часто, чтобы оказаться увлечёнными общим потоком. Фактически это означает, что время свободного пробега нейтронов меньше времени ускорения $R/(c\Gamma)$, т. е.

$$\sigma_{np} v n_p R > c\Gamma \Rightarrow L \gtrsim 12(1 + \eta) \Gamma_\ell \frac{\sigma_T}{\sigma_{np}} L_{edd}. \quad (20)$$

Выражение справа вычислено в основании ветра, где $\Gamma \approx 1$ и $R \approx 3R_g$. Также принято во внимание, что на пороге увлечения относительная скорость протонов и нейтронов и сечение их столкновений равны $v \sim c/2$ и $\sigma_{np} \approx 6 \cdot 10^{-26} \text{ см}^2$. В полученном выражении светимость сопоставлена с эддингтоновским пределом $L_{edd} = 2\pi mc^3 R_g/\sigma_T \approx 1,3 \cdot 10^{38} M/M_\odot$ эрг/с, где $\sigma_T \approx 6,6 \cdot 10^{-25} \text{ см}^2$ — томсоновское сечение рассеяния. Напомним, что здесь и далее величина L не обязана совпадать с настоящей светимостью объекта и может существенно её превосходить.

Видно, что когда светимость L существенно превосходит эддингтоновскую, нейтроны действительно увлекаются плазменным ветром, формируя нейтральную компоненту. Однако при ускорении и расширении ветра частота нейtron-протонных² столкновений падает гораздо быстрее, чем увеличивается временной масштаб ускорения, так что, начиная с некоторого расстояния, нейтроны разлетаются практически свободно. Если разгон ветра к этому моменту ещё не завершился, то протонная компонента приобретает больший лоренц-фактор, чем нейтронная, т. е. происходит расцепление. Условие расцепления полностью аналогично выражению (20), вычисленному на расстоянии $R_s \sim \Gamma_\ell R_0$ от источника, где завершается ускорение релятивистского ветра (если предполагать сохранение однопотокового режима). Полученное условие нагляднее представить в виде

$$\Gamma_\ell \gtrsim \Gamma_* = T_0/T_*, \quad T_* \approx 5 \text{ кэВ}, \quad (21)$$

где T_0 — температура в основании ветра.

²Для единобразия изложения мы продолжаем говорить «протонных», хотя здесь и ещё в нескольких случаях в дальнейшем следует, конечно, говорить «ионных», имея в виду образование гелия в ходе рекомбинации.

При заданной светимости и по мере уменьшения \dot{M} расстояние, на котором происходит расцепление, становится меньше. Это означает, что конечное значение лоренц-фактора нейтронной компоненты Γ_n , рассматриваемое как функция Γ_ℓ , имеет максимум. Максимальное значение приблизительно равно Γ_* и достигается при $\Gamma_\ell \approx \Gamma_*$; затем Γ_n спадает как $\Gamma_\ell^{-1/3}$. Предельный лоренц-фактор протонной компоненты Γ_p является монотонно растущей функцией Γ_ℓ и в пренебрежении потерями на излучение нейтрино (см. ниже) может быть вычислен исходя из закона сохранения энергии: $\Gamma_p = \Gamma_\ell + \eta(\Gamma_\ell - \Gamma_n)$. Приближённо Γ_n можно вычислить по формуле

$$\Gamma_n \approx \frac{\Gamma_p \Gamma_*^{4/3}}{\left(\Gamma_*^4 + 2,37 \Gamma_p^4\right)^{1/3}}. \quad (22)$$

Типичное значение параметра расцепления Γ_p/Γ_n для гамма-всплесков лежит в интервале от 1 до 10, что значительно меньше предельного лоренц-фактора протонного потока. Напротив, для джетов в микроквазарах параметр расцепления почти равен Γ_p , и нейтроны остаются слаборелятивистскими.

2.3. Вторичная диссоциация гелия

Рассмотрим случай, когда одновременно выполнены условия эффективной рекомбинации нейтронов и перехода релятивистского ветра в двухпотоковый режим. Тогда, незадолго до расцепления протонной и нейтронной компонент, оказывается возможной вторичная диссоциация гелия. В ускоренной системе отсчёта, связанной с релятивистским ветром, на нейtron действует сила инерции, равная $mc^2 d\Gamma/dR$ и направленная против радиуса. Под действием этой силы нейтроны приобретают некоторую направленную скорость, что в результате столкновений с протонами и ядрами гелия приводит к разогреву нейтронной компоненты.

Пусть ν_{np} и $\nu_{n\alpha}$ — частоты упругих столкновений нейтронов с протонами и альфа-частицами соответственно. Кулоновские столкновения с электронами быстро охлаждают ионы до энергии порядка температуры фотонного газа T , так что по сравнению с нейтронами их можно считать неподвижными. Таким образом, установившиеся значения упорядоченной v и среднеквадратичной \tilde{v} скоростей нейтронов удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\left(\frac{\nu_{np}}{2} + \frac{4\nu_{n\alpha}}{5}\right)v = c^2 \frac{d\Gamma}{dR}, \quad \left(\frac{\nu_{np}}{2} + \frac{4\nu_{n\alpha}}{25}\right)\tilde{v}^2 \approx 2vc^2 \frac{d\Gamma}{dR}. \quad (23)$$

Непосредственно перед столкновением радиальная скорость типичного нейтрона составляет $v + \delta v/2$, где $\delta v = c^2(d\Gamma/dR)/(\nu_{np} + \nu_{n\alpha})$ — приращение скорости между столкновениями. Теперь легко вычислить среднюю энергию столкновений нейтронов с ядрами гелия, которая составляет

$$\begin{aligned} E_{n\alpha} &= \frac{2m}{5} \left(\tilde{v}^2 + v \delta v + \frac{(\delta v)^2}{4} \right) \approx \\ &\approx \frac{2}{5} \left(\frac{2(\nu_{np} + \nu_{n\alpha})^2}{\left(\frac{\nu_{np}}{2} + \frac{4\nu_{n\alpha}}{5}\right)\left(\frac{\nu_{np}}{2} + \frac{4\nu_{n\alpha}}{25}\right)} + \frac{\nu_{np} + \nu_{n\alpha}}{\frac{\nu_{np}}{2} + \frac{4\nu_{n\alpha}}{5}} + \frac{1}{4} \right) m (\delta v)^2. \end{aligned} \quad (24)$$

В предельных случаях водородной и гелиевой плазмы коэффициент перед $m(\delta v)^2$ равен 4,1 и 6,85 соответственно.

Когда значение $E_{n\alpha}$ превышает порог реакции $n + {}^4\text{He} \rightarrow d + {}^3\text{H}$ (около 18 МэВ), становится возможным размножение нейтронов в результате диссоциации гелия³. При этом количество нейтронов увеличивается в 3^N раз, где N — число неупругих столкновений в расчёте на один нейtron, происходящих за время расширения ветра $R/(c\Gamma)$. Величину N можно оценить, заметив, что полное число столкновений за то же время равно $N_t = c/(\delta v)$ и $N = \nu_{\text{diss}} N_t / (\nu_{\text{np}} + \nu_{n\alpha}) \ll N_t$.

Рассмотрим случай, когда $\eta > 1$, а рекомбинация прошла почти полностью, т. е. к началу вторичной диссоциации в релятивистском ветре присутствуют только нейтроны и ядра гелия. Тогда $N_t \approx 18$, а частота ведущих к диссоциации столкновений равна $\nu_{\text{diss}} \approx 0,1\nu_{n\alpha}$, так что количество нейтронов увеличивается почти в 10 раз. Разумеется, точный расчёт должен учитывать то обстоятельство, что в результате диссоциации появляются протоны, и отношение N/N_t , равно как и само значение N_t , не остаются постоянными (оба уменьшаются). Появление протонов в результате вторичной диссоциации приводит к тому, что примерно половина всех нейтронов, претерпевших рекомбинацию, так и остаётся в составе ядер гелия. Если же η заметно меньше единицы, но по-прежнему $\tau_r \gg 1$, то вторичная диссоциация оказывается практически невозможной.

Эффект вторичной диссоциации оказывается существенным для релятивистского ветра в источниках гамма-всплесков, но его влияние на джеты в микроквазарах пренебрежимо мало из-за того, что там в составе плазмы преобладает водород. Отдельного упоминания заслуживают так называемые SGR (Soft Gamma Repeaters) — нейтронные звёзды, дающие время от времени вспышки мягкого гамма-излучения с длительностью около 0,1 с и энергией $10^{38} \div 10^{43}$ эрг. Удовлетворительной теории этого явления до сих пор не существует, однако SGR часто рассматривают как уменьшенный аналог источников гамма-всплесков. Температура в основании ветра у таких объектов слишком низкая, чтобы вызвать диссоциацию гелия, однако малое содержание водорода должно приводить к эффективной вторичной диссоциации. Таким образом, формирование нейтронной компоненты в SGR полностью зависит от мощности нетепловых процессов, являющихся источником затравочных нейтронов, и не исключено, что свободные нейтроны играют немаловажную роль и в SGR.

2.4. Радиационные процессы, обусловленные расцеплением

Столкновения двух нуклонов могут быть неупругими, когда их кинетическая энергия превосходит порог рождения пионов (около 140 МэВ). Расцепление оставляет протонную (ионную) компоненту холодной, тогда как нейтронная разогревается до субрелятивистской температуры. Скорость относительного движения протонов и нейтронов также становится релятивистской. Если к моменту расцепления в составе нуклонного вещества преобладают нейтроны, то происходит выравнивание их концентрации с протонной, поскольку неупругое столкновение двух нейтронов приводит с вероятностью, близкой к единице, к превращению одного из них в протон.

С ростом энергии столкновения суммарное сечение неупругих процессов быстро вырастает до значений, сравнимых с сечением упругого рассеяния, откуда следует, что в среднем на один нуклон приходится приблизительно по одному неупрочному столкновению (случай $\eta \gg 1$ исключается в силу упомянутых выше причин). В протон-нейтронных столкновениях с близкой вероятностью рождаются как нейтральные, так и заряженные пионы⁴. Распад заряженных пионов $\pi^+(\pi^-) \rightarrow \mu^+(\mu^-) + \nu_\mu + \bar{\nu}_\mu \rightarrow e^+(e^-) + \nu_e + \bar{\nu}_e$ приводит к появлению трёх нейтрино и позитрона (электрона), причём каж-

³На самом деле диссоциация проходит до конца, ${}^4\text{He} \rightarrow 2n + 2p$, поскольку все последующие реакции имеют меньший энергетический порог и большее сечение.

⁴В числе прочих неупругих реакций идут процессы с образованием дейтерия, например $p + n \rightarrow d + \pi^0$. Получившиеся дейтероны имеют неплохие шансы избежать новых столкновений, а следовательно, и диссоциации. В итоге релятивистский ветер становится эффективным источником дейтерия — в него превращается до 20 % от всего выбрасываемого нуклонного вещества.

дая частица уносит примерно одинаковую энергию, около 35 МэВ. Нейтральные пионы распадаются на два гамма-кванта с энергией около 70 МэВ.

Таким образом, в результате расцепления возникает нейтринное излучение, идущее в основном из области вблизи радиуса насыщения R_s , и жёсткое гамма-излучение, появляющееся в результате электромагнитного каскада и покидающее фотосферу. Расстояние от источника до фотосферы, положение которой различно для фотонов разных энергий, в целом гораздо больше радиуса насыщения, так что в сравнении с нейтринным излучением электромагнитное слабее. Тем не менее, вследствие относительной простоты регистрации наблюдать электромагнитный сигнал намного легче. Регистрация же нейтрино даже от таких мощных источников, как гамма-всплески, представляется почти неразрешимой задачей.

Излучение энергичных частиц при распаде пионов приводит к развитию электромагнитного каскада в плазме релятивистского ветра [15]. Применительно к описанию каскада нейтральные и заряженные пионы можно рассматривать единым образом: различие между ними сводится только к количеству выделившейся энергии после того, как фотоны, появившиеся в результате распада нейтрального пиона, поглощаются, рождая две пары e^-e^+ . В среднем энергия поровну разделяется между частицами, так что каждая из них практически неотличима от тех электронов и позитронов, которые появляются при распаде заряженных пионов.

В случае гамма-всплесков задача дополнительно облегчается тем обстоятельством, что вблизи фотосфера каскад развивается в одношаговом режиме. Это значит, что после рассеяния (комптонизации) на исходных ультрарелятивистских электронах и позитронах тепловые фотоны приобретают энергию, достаточную для рождения вторичных пар, а те уже не могут сообщить фотонам энергию, необходимую для рождения новых пар, и каскад прекращается.

Судьба фотона после комптонизации определяется его энергией. Если она превосходит порог каскада ϵ_t , то фотон поглощается другим, менее энергичным фотоном, рождая e^-e^+ пару. В противном случае преобладает рассеяние на тепловых электронах с постепенным уменьшением энергии фотона. В приближении одношагового каскада величина ϵ_t универсальна и составляет около 3 МэВ. Прежде чем вновь рождённые электроны и позитроны аннигилируют, они успевают затормозиться практически до тепловых скоростей. Вся их энергия в конечном счёте передаётся термостату, роль которого выполняет фоновое чернотельное излучение, чья теплоёмкость в релятивистском ветре всегда значительно выше теплоёмкости плазмы.

2.5. Нейтринные потери

Излучение нейтрино интересно в первую очередь тем, что на него может расходоваться значительная доля энергии релятивистского ветра. Нейтринные потери возрастают, если пионы до своего распада успевают частично или полностью изменить свой начальный импульс, например, из-за взаимодействия с магнитным полем. Время распада пиона, приблизительно равное $2,6 \cdot 10^{-8}$ с, становится больше обратной гирочастоты, когда магнитное поле больше 600 Гс, причём плотность энергии такого поля на много порядков меньше плотности тепловой энергии плазмы в области расцепления. Поскольку требования к однородности магнитного поля при этом невысоки, будем считать, что эффект присутствует всегда, а в качестве параметра, характеризующего влияние поля, возьмём угол θ между его силовыми линиями и радиусом. Для разных моделей источников гамма-всплесков и джетов угол θ меняется от 0 до $\pi/2$.

Оценим нейтринные потери в случае больших параметров расцепления. Когда $\Gamma \gg \Gamma_n$, все три разновидности пионов рождаются с одинаковой вероятностью и их суммарная энергия в системе центра масс сталкивающихся нуклонов приблизительно равна $mc^2 \sqrt{\Gamma/\Gamma_n}$. С учётом влияния магнитного

поля, в лабораторной системе отсчёта нейтрино уносят энергию

$$\epsilon_\nu \approx mc^2 \Gamma^2 \Gamma_n^{-1} \frac{(1 - \sqrt{1 - 4\Gamma_n/\Gamma} \cos^2 \theta)}{4}.$$

В расчёте на один протон суммарная энергия излучённых нейтрино составляет

$$E_\nu \approx \int_{R_d}^{\infty} \epsilon_\nu \sigma_c n_n \frac{dR}{\Gamma}, \quad (25)$$

где $\sigma_c \approx 2 \cdot 10^{-26} \text{ см}^2$ — сечение неупругих протон-нейтронных столкновений. Область интегрирования разделим на три части: I — от радиуса расцепления R_d до той точки, где $\sin \theta = \sqrt{2\Gamma_n/\Gamma}$; II — далее до радиуса насыщения $R_s = \Gamma_p R_d / \Gamma_d$; III — от R_s до бесконечности. С достаточной для оценки точностью примем $n_n = \eta m_p \Gamma^2 / (2\Gamma_n^2)$, $\Gamma = (R/R_d) \Gamma_d$ в областях I и II и $\Gamma = \Gamma_p$ в области III. Если $\sin \theta < \sqrt{2\Gamma_n/\Gamma_p}$, то везде справедливо выражение $\epsilon_\nu \approx mc^2 \Gamma / 2$. В противном случае в областях II и III $\epsilon_\nu \approx (mc^2 \Gamma^2 \Gamma_n^{-1} \sin^2 \theta) / 4$.

Результат интегрирования, отнесённый к конечной энергии протона $\Gamma_p mc^2$, показывает, насколько велики нейтринные потери по сравнению с энергией, затраченной на разгон релятивистского ветра:

$$\delta E_\nu \approx 0,15 \left(\frac{\Gamma_d}{\Gamma_n} \right)^3 \eta \tau_n \times \begin{cases} \frac{\Gamma_n}{\Gamma_p} \left(\ln \frac{\Gamma_p}{\Gamma_n} + 0,7 \right), & \sin \theta < \sqrt{2\Gamma_n/\Gamma_p}; \\ \sin^2 \theta + \frac{\Gamma_n}{\Gamma_p} \left(\ln \frac{2}{\sin^2 \theta} - 0,7 \right), & \sin \theta > \sqrt{2\Gamma_n/\Gamma_p}. \end{cases} \quad (26)$$

Здесь $\tau_n \approx 4$ — оптическая толщина области расцепления для нейтронов, а множитель $(\Gamma_d/\Gamma_n)^3$ равен не $3^{3/2}$, как в точке расцепления, а приблизительно 2,5 — из-за того, что после расцепления нейтронный поток ещё немного разгоняется. В силу использованных приближений выражение (26) применимо только при условии $\Gamma_p/\Gamma_n \gtrsim 4$. Отметим, что в случае, когда $\eta \approx 1$, а магнитное поле перпендикулярно радиусу, более половины мощности источника теряется на излучение нейтрино. Это обстоятельство необходимо учитывать в расчётах. Типичная энергия нейтрино (для $\Gamma_p \sim 10^3$ и $\Gamma_p/\Gamma_n \sim 4$) составляет около 30 ГэВ в пределе малого угла θ и около $200 \sin^2 \theta$ ГэВ — в противоположном случае.

2.6. Спектр электромагнитного каскада

Вблизи фотосферы комптонизация теплового излучения происходит в классическом режиме. Если отвлечься от рассеяния фотонов в плазме, то спектральная плотность потока комптонизированных фотонов имеет степенной вид:

$$F_e \approx 0,2 \dot{N}_e m_e c^2 T^{-1/2} \epsilon^{-3/2}, \quad (27)$$

обрываясь на энергии $\epsilon_{\max} \sim 4\gamma_1^2 T$. Здесь \dot{N}_e — темп инжекции первичных электронов и позитронов⁵, γ_1 — их лоренц-фактор, m_e — масса электрона. Из-за рассеяния на тепловой плазме исходный спектр эффективно обрезается при энергиях больше $m_e c^2 / \tau$, где $\tau = \sigma_T n_e R / \Gamma$ — томсоновская оптическая толщина на данном радиусе, а $n_e \approx 0,4 (\Gamma_p / \Gamma_n) [m_e c^2 / (2T)]^{1/4} n_p$ — суммарная концентрация электронов и позитронов, определяемая равновесием между размножением $e^- e^+$ пар и их аннигиляцией. Строго говоря, если $\tau < \epsilon_t / (2m_e c^2)$, то выживают и более энергичные фотоны, попадающие в узкое окно прозрачности с нижней границей в окрестности ϵ_t / τ , однако они не играют роли при определении спектра каскада в области энергий, меньших $m_e c^2$.

⁵Вклад от вторичных $e^- e^+$ пар становится существенным при энергиях меньше $(\epsilon_t / m_e c^2) T$.

В низкоэнергичной ($\epsilon \ll m_e c^2$) части спектра электромагнитного каскада определяющим является вклад излучения, рожденного на наибольшей (для заданной энергии фотона) оптической глубине. Такие электроны дополнительно теряют энергию за счет адиабатического расширения плазмы. При этом верхняя граница спектра (как и температура фонового излучения) сдвигается вниз по энергии в $(R_T/R)^{2/3}$ раз, а спектральная плотность потока фотонов уменьшается в $(R_T/R)^{1/3}$ раз, где R_T — радиус томсоновской фотосферы. Таким образом, для энергии $\epsilon \ll m_e c^2$ в излучении преобладает вклад от слоя, лежащего на уровне $R \sim [\epsilon/(m_e c^2)]^{2/3} R_T$. Этот вклад в $(R_T/R)^{1/3} = (m_e c^2/\epsilon)^{2/9}$ раз больше, чем спектральная плотность потока фотонов, рожденных на уровне томсоновской фотосферы. Этот результат соответствует спектру $F_\epsilon \propto \epsilon^q$ с показателем $q = -31/18$.

Наблюдаемый на удалении от источника спектр в области энергий выше $m_e c^2$ определяется локальным излучением от электромагнитного каскада на уровне фотосферы, положение которой зависит от энергии фотонов. Следует выделить три диапазона энергий. От $m_e c^2$ до ϵ_t непрозрачность определяется рассеянием на электронах и позитронах в клейн-нишиновском режиме, и радиус фотосферы равен $R_{ph} \approx (m_e c^2/\epsilon)^{6/5} R_T$. Учитывая, что в выражении (27) $\dot{N}_e \propto R_{ph}^{-1}$, получаем показатель спектра $q = -7/10$. Начиная с энергии фотона $\epsilon \approx \epsilon_t$ преобладает двухфотонное поглощение, и с ростом ϵ фотосфера отодвигается от источника по закону $R_{ph} \approx (m_e c^2/\epsilon_t)(\epsilon/\epsilon_t)^{13/18} R_T$; где показатель степени отвечает спектральному индексу в области $\epsilon < m_e c^2$. Для $1 < \epsilon/\epsilon_t < (\epsilon_t/m_e c^2)^{18/13} \approx 10$ фотосфера находится ближе к источнику, чем R_T , и необходимо учитывать изменение температуры с радиусом, тогда как при еще больших энергиях фотона $R_{ph} > R_T$ и $T = \text{const}$. Соответственно, показатель спектра равен $q = -107/54 \approx -2$ в первом случае и $q = -20/9$ во втором.

Полученные результаты можно суммировать следующим образом:

$$F_\epsilon \propto \epsilon^q, \quad \begin{cases} q = -31/18, & \epsilon < m_e c^2; \\ q = -7/10, & m_e c^2 < \epsilon < \epsilon_t; \\ q = -107/54, & \epsilon_t < \epsilon < \min\{10 \epsilon_t, \epsilon_{\max}\}; \\ q = -20/9, & \min\{10 \epsilon_t, \epsilon_{\max}\} < \epsilon < \epsilon_{\max}. \end{cases} \quad (28)$$

Основной энергонесущей частью спектра (28) является область между ϵ_t и $\epsilon_{up} = \min\{10 \epsilon_t, \epsilon_{\max}\}$. Преобразование в лабораторную систему координат (умножением на Γ_p) даёт диапазон энергий от 2 до 50 ГэВ.

Воспользуемся тем же методом, который привёл к выражению (26), и вычислим долю энергии δE_{cas} , приходящуюся на излучение электромагнитного каскада. При этом интегрирование ведётся от R_T до бесконечности, эффективное значение $\sin^2 \theta$ равно 1, а полученный результат умножается на отношение суммарной энергии фотонов в рассматриваемом диапазоне к энергии инжектированных (на расстоянии R_T) электронов и позитронов, которое составляет примерно $\ln(\epsilon_{up}/\epsilon_t) \sqrt{\epsilon_{up}/\epsilon_{\max}}$. Для больших параметров расцепления $\epsilon_{\max} > 10 \epsilon_t$, что приводит к следующему результату:

$$\delta E_{cas} \approx 0,3 \left(\frac{\Gamma_d}{\Gamma_n} \right)^3 \left(\frac{R_s}{R_T} \right) \sqrt{\frac{\epsilon_t}{T}} \frac{\eta \tau_n}{\gamma_i}. \quad (29)$$

Эффективная площадь гамма-телескопа на спутнике GLAST позволит наблюдать излучение электромагнитного каскада от гамма-всплесков с красным смещением $z \sim 0,1$, если энергия всплеска составляет 10^{52} эрг.

Часть энергии излучается в виде непереработанных квантов от распада нейтральных пионов; в лабораторной системе отсчета эти электроны попадают в диапазон 100 ГэВ. Приведём без вывода (подробности можно найти в [15]) выражение для доли энергии, переносимой таким излучением:

$$\delta E_\gamma \approx \frac{2 \epsilon_i \sigma_{\pi 0} \Gamma_p \eta n_p \epsilon_t}{m \sigma_T \Gamma_n n_e m_e} \left(\frac{\epsilon_t}{\epsilon_i} \right)^{0,72} \sim (1 \div 2) \cdot 10^{-3} \eta \left(\frac{\Gamma_p}{\Gamma_*} \right)^{7/30}. \quad (30)$$

Здесь ε_i — средняя энергия гамма-квантов, рождающихся при распаде нейтральных пионов, вычисленная в системе отсчёта релятивистского ветра. В своей буквенной части эта формула скорректирована в соответствии с более детальной моделью спектра электромагнитного каскада, которая была разработана выше. Однако конкретный вид спектра каскада почти не сказывается на численном значении δE_γ , которое по сравнению с упрощённой моделью изменилось менее чем в 1,3 раза. Регистрация непереработанных фотонов от распада π_0 с помощью наземных черенковских телескопов станет возможной уже в ближайшем будущем, после окончания строительства таких установок, как MAGIC или ARGO.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выше было показано, что в ряде случаев появление свободных нейтронов в астрофизических источниках рентгеновского и гамма-излучения неизбежно, прежде всего в результате диссоциации ядер гелия. Необходимая для этого процесса температура 0,7 МэВ либо существует в источнике изначально (космические гамма-всплески, внутренние области аккреционных дисков в моделях с преобладанием адвекции), либо достигается за счёт большой относительной скорости затравочных нейтронов и ионов (например, джеты в микроквазарах и SGR).

Нейтронное гало во внутренней области аккреционного диска обязано своим происхождением эффекту накопления нейтронов: радиальная скорость нейтронной компоненты, как правило, значительно меньше, чем у электрон-ионной плазмы, а температура достаточна для расщепления ядер гелия нейтронным ударом. Столкновения нейтронов между собой порождают нейтронный ветер, который обладает достаточным динамическим давлением, чтобы остановить аккрецию, если она происходит из ветра от звезды-компаньона. После остановки аккреции нейтронный ветер затухает, приводя к возобновлению аккреции, и весь цикл автомодуляции темпа аккреции повторяется. Часть нейтронов из ветра перехватывается холодным внешним диском, где они обеспечивают формирование ядерных линий, в первую очередь дейтериевой линии 2,2 МэВ. В непосредственной близости от центрального объекта нейтроны сталкиваются неупруго с рождением пионов и последующей инициацией электромагнитного каскада. Его конечными продуктами являются комптонизированное излучение с жёстким степенным спектром и линия 511 кэВ, возникающая при аннигиляции позитронов.

При ускорении плазменного потока, содержащего нейтроны, последние разгоняются лишь посредством их столкновений с протонами. Как только время свободного пробега становится больше характерного времени ускорения ветра, разгон нейтронов прекращается. Таким образом, в релятивистском ветре может возникнуть существенное различие лоренц-факторов протонной и нейтронной компонент. Подобное расщепление ведёт к диссоциации ядер гелия (если они присутствуют в потоке) за счёт взаимодействия с затравочными нейтронами и экспоненциальному накоплению последних. Кроме того, расщепление приводит к неупругим межнуклонным столкновениям, в которых на каждый нейtron рождается примерно по одному пиону. Около половины энергии пионов теряется на излучение нейтрино, что существенно сказывается на энергетическом балансе источника. Распад пионов вызывает электромагнитный каскад, который ведёт к рождению значительного количества электрон-позитронной плазмы, раздуванию фотосферы ветра и появлению жёсткого гамма-излучения. Наблюдение особенностей спектра электромагнитного каскада позволит определить параметры плазмы и может служить косвенным свидетельством существования нейтронов в исходном ветре.

Перечисленные эффекты возможны и в отсутствие расщепления для сильно неоднородного (время переменности источника порядка R_g/c) или сильно анизотропного (с масштабом примерно $1/\Gamma$) ветра, если его лоренц-фактор превосходит $\Gamma_*^{4/5}$. При этом нейтринные потери падают, а спектр электромагнитного каскада остаётся практически неизменным.

Наконец, поскольку нейтроны несут существенную долю энергии релятивистского ветра, которая переходит в излучение только после их распада, они могут значительно влиять на кривые блеска импульсных источников, включая появление вторичного максимума и бимодального распределения по длительностям [14, 15].

Настоящая работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 99–02–18244) и гранта РАН для молодых учёных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Contopoulos J., Kazanas D. // *Astrophys. J.* 1995. V. 441. P. 521.
2. Shapiro S. L., Lightman A. P., Eardley D. M. // *Astrophys. J.* 1976. V. 204. P. 187.
3. Narayan R., McClintock J., Yi I. // *Astrophys. J.* 1996. V. 457. P. 821.
4. Aharonyan F. A., Sunyaev R. A. // *MNRAS*. 1984. V. 210. P. 257.
5. Guessoum N., Kazanas D. // *Astrophys. J.* 1989. V. 345. P. 356.
6. Guessoum N., Kazanas D. // *Astrophys. J.* 1990. V. 358. P. 525.
7. Mirabel I. F., Rodriguez L. F. // *Nature*. 1998. V. 392. P. 673.
8. Постнов К. А. // УФН. 1999. Т. 169. С. 545.
9. Piran T. // *Phys. Rep.* 1999. V. 314. P. 575.
10. Metzger M. R., Djorgovski S. G., Kulkarni S. R. et al. // *Nature*. 1997. V. 387. P. 878.
11. Halpern J. P., Thorstensen J. R., Helfand D. J., Costa E. // *Nature*. 1998. V. 393. P. 41.
12. Kulkarni S. R., Djorgovski S. G., Odewahn S. C. et al. // *Nature*. 1999. V. 398. P. 389.
13. Baring M. G., Harding A. K. // *Adv. Space Res.* 1995. V. 15, No 5. P. 153.
14. Derishev E. V., Kocharovskiy V. V., Kocharovskiy Vl. V. // *Astron. Astrophys.* 1999. V. 345. P. L51.
15. Derishev E. V., Kocharovskiy V. V., Kocharovskiy Vl. V. // *Astrophys. J.* 1999. V. 521. P. 640.
16. Woosley S. E. // *Astrophys. J.* 1993. V. 405. P. 273.
17. Paczyński B. // *Astrophys. J.* 1998. V. 494. P. L45.
18. Деришев Е. В., Кочаровский В. В., Кочаровский Вл. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1998. Т. 41. С. 13
19. Derishev E. V., Kocharovskiy V. V., Kocharovskiy Vl. V. // Письма в ЖЭТФ. 1999. Т. 70. С. 642.
20. Paczyński B. // *Astrophys. J.* 1990. V. 363. P. 218.
21. Шапиро С. Л., Тьюколски С. А. Чёрные дыры, белые карлики и нейтронные звёзды. М.: Мир, 1985. 656 с.

Институт прикладной физики РАН,
г. Н. Новгород, Россия

Поступила в редакцию
14 декабря 2000 г.

THE INFLUENCE OF FREE NEUTRONS ON DYNAMICS AND RADIATION OF ASTROPHYSICAL PLASMAS

A. A. Belyanin, E. V. Derishev, V. V. Kocharovskiy, and Vl. V. Kocharovskiy

We present arguments in favor of the presence of free neutrons in plasmas generated by compact astrophysical objects and find the conditions necessary for the formation of neutron component. The broad range of phenomena caused by neutrons includes both dynamical (sources' variability, transition of fireballs to two-flow regime) and kinetic (fission of helium nuclei by neutrons, electromagnetic cascade, emission in annihilation and nuclear lines, neutrino losses) effects. The presented theory can be applied to internal regions of accretion disks, jets in microquasars, and gamma-ray burst fireballs.

УДК 530.145;535.14

ФОРМИРОВАНИЕ АННИГИЛЯЦИОННО-ЦИКЛОТРОННЫХ ЛИНИЙ В СИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ ВБЛИЗИ НЕЙТРОННЫХ ЗВЁЗД

А. А. Белянин, В. В. Кочаровский, Вл. В. Кочаровский

Исследованы циклотронные и поляризационные спектральные особенности поглощения излучения в намагниченном вакууме в области частот однофотонного аннигиляционного резонанса для субкритических магнитных полей. На этой основе предложен новый способ определения величины магнитного поля нейтронных звёзд. В модели дипольного магнитного поля показано, что обнаружение аннигиляционной линии в поглощении и дополняющей её линии в излучении в диапазоне энергий порядка МэВ может свидетельствовать в пользу существования на поверхности нейтронных звёзд магнитного поля в пределах $(2,8 \div 3,6) \cdot 10^{12}$ Гс.

ВВЕДЕНИЕ

Достоверное определение величины магнитного поля B вблизи поверхности нейтронных звёзд является одной из актуальных проблем современной астрофизики. Используемые в настоящее время методы, основанные на простейших моделях электродинамического замедления вращения нейтронных звёзд и формирования их излучения (от радио- до гамма-диапазона), применимы далеко не всегда и в лучшем случае позволяют лишь оценить порядок величины указанного магнитного поля.

Как известно, для многих нейтронных звёзд поля оцениваются в пределах от сотых до десятых долей критического магнитного поля $B_c = m^2 c^3 / (e\hbar) \simeq 4,4 \cdot 10^{13}$ Гс, в котором квант энергии циклотронного вращения электрона или позитрона $\hbar\omega_B = \hbar e B / (mc)$ равен их энергии покоя $mc^2 = 511$ кэВ (здесь m и e — масса и заряд электрона, c — скорость света). Для нескольких медленно вращающихся пульсаров подобные оценки приводят даже к значениям $B \sim 10^{15}$ Гс, превышающим критическое поле (гипотеза магнетаров).

Непосредственную информацию о величине магнитного поля нейтронных звёзд дают, пожалуй, только наблюдения циклотронных особенностей спектра их излучения, проведённые на ряде спутников, в основном в диапазоне десятков кэВ. Впрочем, достоверность регистрации этих спектральных особенностей и обоснованность их циклотронной интерпретации зачастую вызывают сомнения. Во всяком случае, здесь требуются новые независимые подтверждения и детальное теоретическое обоснование.

В настоящей работе мы рассматриваем другую возможность прямого определения магнитного поля, которая основана на регистрации аннигиляционно-циклотронных особенностей спектра излучения, формируемых намагниченным вакуумом в диапазоне энергий чуть выше 1 МэВ. Конкретно, речь пойдёт о спектральных деталях, сдвинутых на величину меньше или порядка гирочастоты электрона вверх

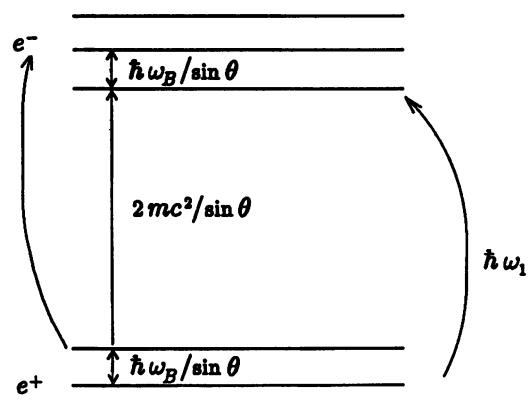


Рис. 1. Основной аннигиляционный и первый аннигиляционно-циклотронный резонансные переходы между уровнями Ландау электронов (e^-) и позитронов (e^+)

по отношению к частоте однофотонного аннигиляционного резонанса 1,02 МэВ (см. рис. 1). Исходная идея проста: измерив частоты основного и первого резонансов поглощения, можно определить гиростроту, а следовательно, и магнитное поле. Как показывает проведённый анализ условий формирования соответствующих резонансных линий намагниченного вакуума, можно сделать ряд и более определённых предсказаний.

Спектральное разрешение (достигающее 10 кэВ и менее) и чувствительность современной аппаратуры в данном диапазоне позволяют надеяться на возможность скорой реализации предложенного метода. Что касается самого излучения в диапазоне энергий порядка МэВ, то оно не является чем-то особым для нейтронных звёзд; целый ряд гамма-пульсаров был зарегистрирован ещё обсерваторией CGRO-EGRET в начале 90-х годов. Отметим, что плотная (и не слишком горячая) электрон-позитронная плазма, в принципе, может формировать аналогичные аннигиляционно-циклотронные особенности, что неоднократно обсуждалось рядом авторов, к числу первых из которых следует отнести В. В. Железнякова [1]. Однако последний вариант труднее поддаётся анализу и здесь не рассматривается, поскольку требует существенной дополнительной информации о свойствах излучающей плазмы.

Ниже мы ограничимся анализом простейшего случая излучения с поверхности нейтронной звезды, находящейся в вакууме и окружённой дипольным магнитным полем с максимальной напряжённостью на поверхности, точнее, на краю гамма-источника, равной B_0 . Учёт влияния разреженной магнитосферной плазмы не представляет принципиальных трудностей, но для простоты мы будем им пренебречь, считая, в частности, что томсоновское рассеяние невелико, т. е. средняя концентрация электронов и позитронов в магнитосферной плазме не превышает 10^{18} см^{-3} . В такой постановке задача разбивается на три части:

- 1) нахождение дисперсии и поглощения нормальных (необыкновенной и обычной) волн вблизи аннигиляционно-циклотронных резонансов в однородно намагниченном вакууме;
- 2) вычисление оптических толщин поглощения и неоднородного уширения аннигиляционно-циклотронных линий в дипольном магнитном поле;
- 3) анализ зависимости получающихся спектральных и поляризационных особенностей от величины магнитного поля.

1. ИСТОРИЯ ПРОБЛЕМЫ

Однофотонное рождение электрон-позитронных (e^-e^+) пар и поглощение фотонов в сильном магнитном поле исследуется уже в течение полувека, фактически начиная с работ Толла [2] и Клепикова [3]. В этих и последующих работах (см. особенно [4, 5]) уже не использовалось условие малости квантовых поправок к классическим формулам, однако основное внимание уделялось коэффициенту поглощения и сечению рождения пар для фотонов с энергиями значительно выше пороговой

$$\hbar\omega_0 = 2mc^2 / \sin \theta \quad (1)$$

(см., например, [6, 7] и цитированную там литературу). Здесь θ — угол между магнитным полем и направлением распространения фотона.

В работах [8, 9] было замечено, что соответствующие асимптотические формулы дают завышенные во много раз коэффициент поглощения и сечение рождения пар фотоном вблизи указанного порога, т. е. при образовании электронов и позитронов на низких уровнях Ландау. Последовавшие отсюда выводы и феноменологически исправленный коэффициент поглощения (16) использовались в основном лишь в теории образования магнитосфер пульсаров (см., например, [7]), но возможность наблюдения аннигиляционно-циклотронных резонансов детально до сих пор не исследовалась.

Особенности дисперсии и поглощения (или усиления) фотонов вблизи аннигиляционно-циклотронных резонансов в однородно намагниченному вакууме и e^-e^+ плазме, в том числе вырожденной, изучались в [10–16] и последующих работах этих и других авторов. На рис. 2 представлены известные результаты для основного аннигиляционного резонанса, имеющего место для необыкновенной волны, у которой вектор электрического поля лежит в плоскости, содержащей вектор магнитного поля и волновой вектор фотона. Дисперсия и поглощение фотонов вблизи аннигиляционно-циклотронных резонансов устроены аналогично, причём имеют место также и для обыкновенной волны, у которой вектор электрического поля ортогонален указанной плоскости.

В дальнейшем, фактически, потребуются лишь свойства первого аннигиляционно-циклотронного резонанса (раздел 2), которые мы получили, следуя работам [17, 18]. Подчеркнём, что анализ непосредственной окрестности резонанса выходит за рамки обычной теории возмущений на основе балансных уравнений квантовой электродинамики и требует последовательного решения дисперсионного уравнения, следующего из уравнений Максвелла и тензора диэлектрической проницаемости намагниченного вакуума. При этом учитывается коллективное влияние виртуальных e^-e^+ пар на распространение и поглощение фотонов (о возможной роли позитрониевого резонанса и проявлениях свето-позитрония см. [19]).

2. КОЛЛЕКТИВНЫЕ ЭФФЕКТЫ В КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ НАМАГНИЧЕННОГО ВАКУУМА

Рассмотрим подробнее дисперсию и декременты плоских необыкновенной (\parallel) и обыкновенной (\perp) волн, поле которых пропорционально $\exp(i\omega t - ik\mathbf{r})$, с действительным волновым вектором \mathbf{k} вблизи первого аннигиляционно-циклотронного резонанса, формально (кинематически) отвечающего частоте

$$\omega_1 = mc^2 [1 + (1 + 2B/B_c)^{1/2}] / (\hbar \sin \theta) \simeq \omega_0 + \omega_B / \sin \theta \quad (2)$$

и волновому числу $k_1 = \omega_1/c$. Во второй части формулы (2) мы использовали неравенство $B \ll B_c$, поскольку, как будет ясно из дальнейшего, только этот случай и представляет интерес для целей, указанных во введении. Нормируем магнитное поле на критическое значение, $b = B/B_c$, волновой вектор — на комптоновское значение, $\kappa = \hbar k/(mc) \equiv k\lambda_c$, и введём следующие обозначения, имея в виду область частот $|\omega - \omega_{0,1}| \ll \omega_{0,1}$:

$$R_0 = \sin^2 \theta (k - k_0)/k_0, \quad R_{1\parallel} = R_{1\perp} = \sin^2 \theta (k - k_1)/k_1, \quad (3)$$

$$Q_0 = \frac{\alpha b \sin^3 \theta}{8\sqrt{2}} \exp \left[-\frac{2}{b} \left(\frac{\kappa \sin \theta}{2} \right)^2 \right], \quad Q_{1\parallel} = \frac{4Q_0}{b(1+2b)^{1/4}}, \quad Q_{1\perp} = \frac{8Q_0}{(1+2b)^{1/4}(1+\sqrt{1+2b})^2}, \quad (4)$$

где $\alpha = e^2/(\hbar c)$ — постоянная тонкой структуры. Тогда действительные ω' и мнимые ω'' части частот волн вблизи основного аннигиляционного и первого аннигиляционно-циклотронного резонансов находятся из одного и того же приведённого кубического уравнения с соответствующими коэффициентами R и Q [17, 18]. Внутри резонансной области $|k - k_{0,1}|/k_{0,1} \lesssim Q_{0,1}^{2/3}/\sin^2 \theta \ll 1$ приближённо имеем¹

$$\omega'(k) \simeq \omega_{0,1} \sin^2 \theta + ck \left[\cos^2 \theta + \frac{Q_{0,1}^{2/3}}{2} \left(1 + \frac{4R_{0,1}}{3Q_{0,1}^{2/3}} \right) \right], \quad (5)$$

$$\omega''(k) \simeq \omega_{0,1} \frac{\sqrt{3} Q_{0,1}^{2/3}}{2} \left[1 - \left(\frac{R_{0,1}}{3Q_{0,1}^{2/3}} \right)^2 \right]. \quad (6)$$

¹ Для простоты мы пренебрегаем слабыми сдвигами резонансов из-за пространственной дисперсии намагниченного вакуума, малыми по сравнению с их максимальными декрементами.

Вне указанной резонансной области, т. е. при $(k - k_{0,1})/k_{0,1} \gg Q_{0,1}^{2/3}/\sin^2 \theta$, приходим к стандартному балансному приближению для коэффициента пространственного затухания интенсивности плоских волн:

$$\sigma_{0,1} \equiv 2\omega''/c \simeq 2k_{0,1}Q_{0,1} / \sqrt{R_{0,1}}. \quad (7)$$

Легко видеть, что коэффициенты затухания всех волн пропорциональны $\sin^2 \theta$.

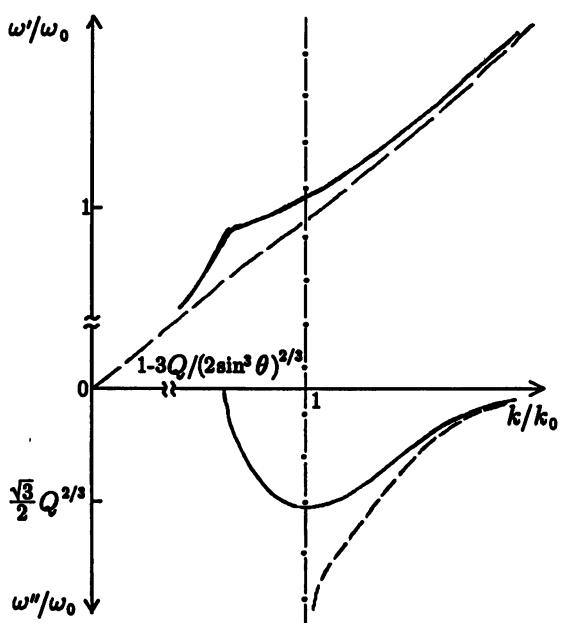


Рис. 2. Дисперсия необыкновенной волны $\omega(k) = \omega' + i\omega''$ вблизи порога однофотонного поглощения $k_0 = 2mc/(\hbar \sin \theta)$; параметр $Q = \alpha B \sin^3 \theta / (8\sqrt{2} B_c) \exp(-2B_c/B)$. Пунктиром показано известное балансное приближение, заведомо нарушающееся при $c(k - k_0) \gtrsim 2 \max[\omega''(k)]/\sin \theta$

эффект группового запаздывания гамма-импульсов в намагниченном вакууме.

Относительные ширины основного аннигиляционного и первого (необыкновенного и обыкновенного) аннигиляционно-циклotronного резонансов примерно вдвое превышают их соответствующие максимальные относительные декременты и относятся как

$$\frac{\Delta k_0}{k_0} : \frac{\Delta k_{1\parallel}}{k_{1\parallel}} : \frac{\Delta k_{1\perp}}{k_{1\perp}} = \frac{\max \omega''_0}{\omega_0} : \frac{\max \omega''_{1\parallel}}{\omega_{1\parallel}} : \frac{\max \omega''_{1\perp}}{\omega_{1\perp}} = 1 : \left(\frac{2}{b}\right)^{2/3} : \left(\frac{2}{e^2}\right)^{2/3}. \quad (9)$$

Благодаря частотной зависимости параметров (4) с учётом различия порогов аннигиляционно-циклotronных резонансов оказывается, что коэффициент затухания необыкновенной волны, связанный с основным аннигиляционным резонансом, много меньше коэффициента затухания обыкновенной волны в области частот между первым и вторым аннигиляционно-циклotronными резонансами, $k_1 < k < k_2$:

$$\frac{\sigma_0(k)}{\sigma_{1\perp}(k)} \simeq \frac{(1+2b)^{1/4}}{1+\sqrt{1+2b}} \left(\frac{\kappa^2 \sin^2 \theta - (1+\sqrt{1+2b})^2}{\kappa^2 \sin^2 \theta - 4} \right)^{1/2} \ll 1; \quad b < 1. \quad (10)$$

Можно показать, что для высших аннигиляционно-циклotronных резонансов максимальный коэффициент затухания обыкновенной волны на каждом резонансе с точностью до множителя порядка 2 совпадает с максимальным коэффициентом затухания необыкновенной волны на предшествующем резонансе (соответствующие численные расчёты см. в работах [6, 7, 9]). Так, согласно (4) и (6) $\max \sigma_{1\perp} \simeq (2/e^2)^{2/3} \max \sigma_0$, т. е. обыкновенная волна на первом аннигиляционно-циклotronном резонансе затухает в два с небольшим раза слабее, чем необыкновенная на основном аннигиляционном резонансе. При этом отношение коэффициентов затухания необыкновенной и обыкновенной волн на одном и том же резонансе велико при $b \ll 1$:

$$\sigma_{1\parallel}/\sigma_{1\perp} \simeq (2/b)^{2/3}. \quad (8)$$

Заметим, что фазовая скорость волн хотя и больше скорости света c , но очень близка к ней. В то же время, согласно (5) и рис. 2, групповая скорость волн $d\omega'/dk$ формально может быть как больше, так и меньше скорости света, причём в узкой спектральной части резонансной линии отличие может быть достаточно большим, вплоть до $(c/3) \sin^2 \theta$. Впрочем, сильное спектрально неоднородное затухание практически сводит на нет возможный эффект

3. НЕОДНОРОДНОЕ УШИРЕНИЕ АННИГИЛЯЦИОННО-ЦИКЛОТРОННЫХ РЕЗОНАСОВ И ИХ ОПТИЧЕСКАЯ ТОЛЩИНА В ДИПОЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В неоднородном магнитном поле нейтронных звёзд все аннигиляционно-циклотронные резонансы испытывают неоднородное уширение, и их оптическая толщина значительно уменьшается по сравнению с максимальным значением в аналогичном слое однородно намагниченного вакуума. Более того, если в поглощающем слое масштаб неоднородности угла θ между направлением магнитного поля и траекторией фотонов превышает масштаб неоднородности магнитного поля, то оптическая толщина низших аннигиляционно-циклотронных резонансов может оказаться гораздо меньше оптической толщины основного аннигиляционного резонанса, частота которого не зависит от магнитного поля.² Представление об этом эффекте дают расчёты оптических толщин в дипольном магнитном поле нейтронной звезды, для определённости проведённые вблизи экваториальной плоскости при $\sin \theta \sim 1$ и заданном магнитном поле $b_0 \ll 1$ на поверхности (точнее, имеется в виду поле на внешней границе источника гамма-излучения, предположительно находящегося на расстоянии $r_0 \sim 10 \div 30$ км от центра нейтронной звезды).

Согласно (4) и (6) максимальная оптическая толщина для фотонов в области основного аннигиляционного резонанса в дипольно неоднородном поле при данном угле θ равна (без учёта магнитосферной плазмы, которая может уширить и этот резонанс)

$$\max \tau_0 \simeq \frac{3^{1/2} \alpha^{2/3} b_0^{5/3} r_0 \sin \theta}{2^{1/3} 16 \lambda_c} \exp\left(-\frac{4}{3b_0}\right). \quad (11)$$

Из условия $\max \tau_0 = 1$ находится минимальное магнитное поле, в котором может возникать существенная линия в поглощении на частоте однофотонной аннигиляции ω_0 с поляризацией необыкновенной волны:

$$\tilde{b}_\parallel = \frac{4}{3} \ln \frac{3^{1/2} \alpha^{2/3} \tilde{b}_\parallel^{5/3} r_0}{2^{1/3} 16 \lambda_c} \simeq 0,05, \quad \tilde{B}_\parallel \simeq 2,2 \cdot 10^{12} \text{ Гс}. \quad (12)$$

Оптическая толщина (11) набирается в узком слое высотой порядка $r_0 b_0 / 4$, в котором магнитное поле меняется на малую величину порядка $0,75 b_0^2$. Этого изменения, однако, достаточно для того, чтобы смещение аннигиляционно-циклотронных резонансов (см. (2)) по частоте намного превысило их естественные ширины, которые задаются формулами

$$\Delta k_{1\parallel}/k_1 \simeq (2/b_0)^{2/3} \Delta k_{1\perp}/k_1 \simeq 3(\alpha/2)^{2/3} \exp\left[-\frac{4}{3}\left(1 + \frac{1}{b_0}\right)\right]. \quad (13)$$

Поэтому на основе соотношения (7) приходим к следующей максимальной оптической толщине для необыкновенной волны в окрестности первого аннигиляционно-циклотронного резонанса:

$$\max \tau_{1\parallel} \simeq \frac{4\alpha r_0 \sin \theta}{3\lambda_c} \exp\left(-2 - \frac{2}{b_0}\right), \quad (14)$$

которая достигается при $\kappa^2 \sin^2 \theta - 4 - 4b_0 \simeq b_0^2$ и отвечает следующему минимальному магнитному полю, обеспечивающему появление первой аннигиляционно-циклотронной линии в поглощении:

$$b_{1\parallel} = 2/\ln[4\alpha r_0 \sin \theta/(3e^2 \lambda_c)] \simeq 0,062, \quad B_{1\parallel} \simeq 2,7 \cdot 10^{12} \text{ Гс}. \quad (15)$$

²Частоты этого и остальных резонансов одинаково зависят от угла θ , а именно $\omega_{0,1} \propto 1/\sin \theta$, но при указанном условии неоднородность угла θ существенна только для основного аннигиляционного резонанса (см. раздел 4).

Для обыкновенной волны на первом аннигиляционно-циклотронном резонансе оптическая толщина меньше лишь на фактор $b_0/2$ (см. (4)), так что соответствующее пороговое поле для ортогональной поляризации отличается от (15) лишь на $1/8$ часть: $b_{1\perp} \approx 0,07$, т. е. $B_{1\perp} \approx 3 \cdot 10^{12}$ Гс.

Разумеется [6, 7, 9], и в меньших по сравнению с (15), (12) полях на достаточно высоких аннигиляционно-циклотронных резонансах реализуется сильное поглощение излучения; однако оно не несёт непосредственной информации о величине магнитного поля и поэтому не представляет сейчас для нас интерес. Дело в том, что в условиях сильной экспоненциальной зависимости коэффициентов поглощения (7) от магнитного поля отдельные пики аннигиляционно-циклотронных резонансов практически очень трудно различить. Более того, в полях, превышающих значение (15) всего на несколько процентов, оптические толщины на всех частотах между первым и вторым, а также между всеми высшими аннигиляционно-циклотронными резонансами в обеих поляризациях становятся больше единицы (именно поэтому выше мы ограничились вычислением параметров основного и первого резонансов). При этом полуэмпирическая формула для коэффициента поглощения, усреднённого по поляризациям и по соседним резонансам, имеет вид [9]

$$\bar{\sigma} \approx 0,23\alpha\lambda_c^{-1}b\sin\theta\exp[-4f/(3\chi)], \quad (16)$$

$$f = 1 + \frac{0,42}{[\hbar\omega/(2mc^2)]^{2,7}(b\sin\theta)^{0,0038}}, \quad \chi = \frac{\hbar\omega b\sin\theta}{2mc^2} \ll 1.$$

Отсюда, вычисляя оптическую толщину $\bar{\tau} = \int_{r_0}^{\infty} \bar{\sigma} dr$ в дипольном магнитном поле, находим, например, что при $b_0 = \tilde{b}_{\parallel}$ (см. (12)) и $\sin\theta \sim 1$ граница частот поглощаемых фотонов, задаваемая условием $\bar{\tau} = 1$, примерно в полтора раза превышает частоту аннигиляционного резонанса (1). При $b_0 \approx (b_{1\parallel} + b_{1\perp})/2$ эта граница доходит до первого аннигиляционно-циклотронного резонанса (2), и формула (16) оказывается бесполезной для анализа поглощения в больших полях, которые согласно следующему разделу как раз и представляют основной интерес. Грубо говоря, новый эффект, о котором сейчас пойдёт речь, состоит в том, что указанная спектральная граница однофотонного поглощения в определённом интервале магнитных полей нейтронных звёзд содержит обособленную линию поглощения (и дополнительную к ней линию излучения), а не сводится к плавному переходу оптической толщины $\bar{\tau}$ через единицу с ростом частоты при $\omega > \omega_0$.

4. О ВОЗМОЖНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ПО АННИГИЛЯЦИОННОЙ ЛИНИИ В ПОГЛОЩЕНИИ (ИЗЛУЧЕНИИ)

Казалось бы, условия наблюдения основного аннигиляционного резонанса (в необыкновенной поляризации) предпочтительнее всего для магнитных полей в интервале между \tilde{b}_{\parallel} и $b_{1\parallel}$, когда он отделён от высокочастотного края поглощения на аннигиляционно-циклотронных резонансах полосой частот, превышающей гироизацию $\omega_{B1\parallel}$, отвечающую полю $b_{1\parallel}$. Однако в этих условиях при фиксированном угле θ ширина основного резонанса крайне мала и составляет примерно $3(Q_0/\sin^3\theta)^{2/3}\hbar\omega_0 \sim \alpha^{2/3}b^{2/3}\hbar\omega_0 \exp[-4/(3b)]$, т. е. не превышает несколько микроэлектронвольт. Поэтому любая реальная неоднородность угла θ приводит к неоднородному уширению основного резонанса и многократно уменьшает его оптическую толщину. Последняя в этом случае определяется балансной формулой (7), справедливой вне пика аннигиляционного резонанса (см. рис. 2). Соответствующая оптическая толщина в дипольном поле при фиксированном θ равна

$$\begin{aligned} \tau_0 &\approx \frac{\alpha b_0^2 r_0 \sin\theta}{6\lambda_c \sqrt{\kappa^2 \sin^2\theta - 4}} \exp\left[-\frac{(\kappa \sin\theta)^2}{2b_0}\right], \\ \alpha^{2/3}b_0^{2/3} \exp[-4/(3b_0)] &\ll \kappa \sin\theta - 2 \lesssim b_0 \end{aligned} \quad (17)$$

(при $\kappa \sin \theta - 2 > b_0$ надо учитывать другие аннигиляционно-циклотронные резонансы, дающие больший вклад). Отсюда легко найти ширину линии поглощения при заданном угле θ в поле $b_0 > b_{\parallel}$

$$\Delta\omega \equiv c \Delta\kappa / \lambda_c = \frac{c}{\lambda_c} \left(\frac{\alpha b_0^2 r_0 \sqrt{\sin \theta}}{12 \lambda_c} \right)^2 \exp[-4(1 + \Delta\kappa \sin \theta)/b_0] \quad (18)$$

и установить условие её существования

$$b_0 < b_m = 2 \sqrt{\ln \left(\frac{\alpha b_m^{3/2} r_0 \sin \theta}{36 e^2 \lambda_c} \right)} \simeq 0,08, \quad B_0 < B_m \simeq 3,6 \cdot 10^{12} \text{ Гс}. \quad (19)$$

Это условие гарантирует, что где-то между основным и первым резонансами (при $\kappa \sin \theta - 2 \lesssim b_0$) поглощение будет еще не слишком сильным ($\tau_0 \lesssim 3$).³

В процессе вычисления τ_0 (17) легко установить, что неоднородность магнитного поля сказывается только из-за его присутствия в показателе экспоненты. Вместе с тем неоднородность угла θ там почти не важна и проявляется главным образом благодаря резонансному знаменателю. Учитывая, что оптическая толщина порядка единицы набирается в тонком слое высотой порядка $r_0 b_0 / 6 \sim 0,2$ км, нетрудно найти допустимые изменения угла θ в этом слое, ещё не исключающие формирование основной аннигиляционной линии:

$$\Delta\theta \lesssim [\hbar\omega_B/(2mc^2)] \operatorname{tg} \theta. \quad (20)$$

При нарушении данного условия изменение аннигиляционной частоты (1) в указанном слое существенно превышает расстояние $\hbar\omega_B / \sin \theta$ между основным и первым резонансами. В дипольном слое типичное значение $\Delta\theta \sim b_0/6$, так что условие (20) легко выполняется, особенно вблизи экваториальной плоскости, где $\sin \theta \gtrsim \cos \theta \gtrsim \Delta\theta$. Задавшись характерной величиной $\Delta\theta \sim b_m/6 \simeq 1,3 \cdot 10^{-2}$ и минимальным значением $\cos \theta \sim \Delta\theta$ (при $\sin \theta \sim 1$), нетрудно найти ограничение на магнитное поле, в котором ещё возможно формирование линии поглощения на основном аннигиляционном резонансе с минимальной относительной шириной $\kappa/2 - 1 / \sin \theta \simeq \Delta\theta \cos \theta / \sin^2 \theta \sim (\Delta\theta)^2$ и оптической толщиной $\tau_0 \sim 1/3$:

$$b_0 > b_{\parallel} = 2 \sqrt{\ln \left(\frac{\alpha b_{\parallel}^2 r_0}{4 \sqrt{2} \lambda_c \Delta\theta} \right)} \simeq 0,065, \quad B_0 > B_{\parallel} \simeq 2,8 \cdot 10^{12} \text{ Гс}. \quad (21)$$

В зависимости от расположения гамма-источника вблизи нейтронной звезды, в определённых случаях $\Delta\theta$ может быть меньше указанных величин и составлять малые доли градуса; тогда пороговое значение (21) немножко уменьшится. Однако в любом случае оно близко к величине $b_{1\parallel}$, характеризующей появление существенного поглощения на первом аннигиляционно-циклотронном резонансе. Отметим, что порог (21) лишь на 20÷30 % меньше порога (19) исчезновения линии поглощения.

5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Таким образом, единственной узкой спектральной деталью однофотонного поглощения в намагниченному вакууме нейтронной звезды может быть аннигиляционная линия вблизи основной частоты (1) поглощения необыкновенной волны, появляющаяся в интервале полей $0,065 < b_0 < 0,08$, т. е.

³Строго говоря, для мощного источника излучения и достаточно большой оптической толщины поглощающего вакуума необходимо учитывать влияние аннигиляционного излучения e^-e^+ пар, порождаемых поглощаемыми γ -квантами, на формирование рассматриваемых аннигиляционно-циклотронных особенностей. Эта задача требует специального анализа, который здесь не проводится.

$2,8 \cdot 10^{12}$ Гс $< B_0 < 3,6 \cdot 10^{12}$ Гс. В меньших полях её нет, как нет и заметного поглощения на первом аннигиляционно-циклотронном резонансе, а в больших полях окно прозрачности между этими резонансами пропадает. Иными словами, в указанном интервале полей возможно появление узкой линии в излучении на необыкновенной волне между основным аннигиляционным и первым аннигиляционно-циклотронным резонансами. Ширина этой линии меньше или порядка гирочастоты ω_{B_m} , отвечающей энергии 40 кэВ.

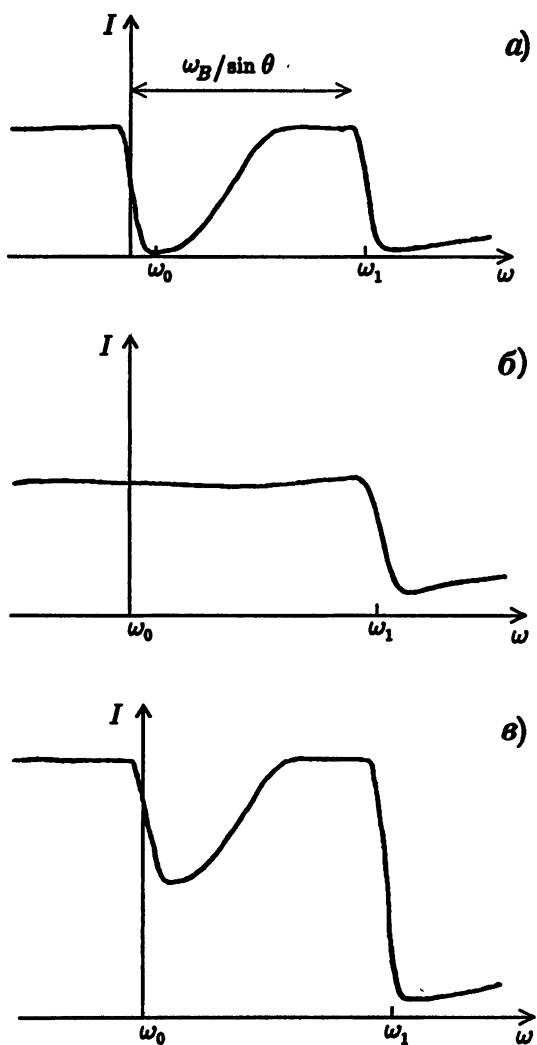


Рис. 3. Качественный вид спектра гамма-излучения I , испытавшего однофотонное поглощение в намагниченному вакууме нейтронной звезды с $B \sim 3 \cdot 10^{12}$ Гс, отдельно для необыкновенной (а) и обычновенной (б) волн и в сумме по обеим поляризациям (в)

ляционной линии однофотонного поглощения вблизи энергии $1,02 \text{ МэВ} / \sin \theta$, отделённой столь же узкой линией излучения от континуума поглощения в остальных аннигиляционно-циклотронных резонансах. В этом случае можно было бы утверждать, что магнитное поле на «излучающей» поверхности (в модели диполя) составляет $(2,8 \div 3,6) \cdot 10^{12}$ Гс / $\sin \theta$, причём сделанное утверждение даже не зависит

Линия в поглощении (и в излучении) пропадает при нарушении условия (19). Тогда выделение гирочастоты $\omega_B > \omega_{B_m}$ в спектре излучения, прошедшего через намагниченный вакуум, возможно только путём разделения двух ортогональных поляризаций и определения различия их порогов однофотонного поглощения (см. (1) и (2)). Подобные поляризационные наблюдения на энергиях выше 1,06 МэВ могли бы дать и информацию о полях $B_0 < B_{\parallel} \simeq B_{1\parallel}$, однако технически такие измерения вряд ли будут реализованы в ближайшем будущем. Если же при наблюдении прошедшее излучение суммируется по поляризациям, то при исходном неполяризованном излучении в условиях (19), (21) провал в линии поглощения на основном аннигиляционном резонансе может составлять до 50 %, а на первом аннигиляционно-циклотронном резонансе он будет близок к 100 % (см. рис. 3). При достаточной чувствительности гамма-детекторов можно измерить расстояние между этими провалами и тем самым приблизённо определить гирочастоту, точнее, величину порядка $\omega_{B_m} / \sin \theta$.

Что касается конкурирующего эффекта распада фотона в намагниченному вакууме нейтронных звёзд, то согласно работе [21] он существенен только в более сильных полях $B \gtrsim 6 \cdot 10^{12}$ Гс и приводит к формированию значительно более широкой спектральной особенности (как правило, в диапазоне энергий меньше 1 МэВ) с дефицитом обычновенных и избытком необыкновенных квантов. Иными словами, эффекты распада фотона и однофотонного поглощения вполне отделены друг от друга.

Из изложенного следует, что наиболее существенным результатом использования аннигиляционно-циклотронных резонансов для определения магнитного поля нейтронных звёзд было бы обнаружение узкой (ширина не более 50 кэВ) аннигиляционной линии однофотонного поглощения вблизи энергии $1,02 \text{ МэВ} / \sin \theta$, отделённой столь же узкой линией излучения от континуума поглощения в остальных аннигиляционно-циклотронных резонансах. В этом случае можно было бы утверждать, что магнитное поле на «излучающей» поверхности (в модели диполя) составляет $(2,8 \div 3,6) \cdot 10^{12}$ Гс / $\sin \theta$, причём сделанное утверждение даже не зависит

от измеренной ширины спектральной линии. Подчеркнём, что указанные пределы слабо (логарифмически) чувствительны к модели магнитного поля или масштабу его неоднородности и при использовании любой недипольной, но реалистической модели, по-видимому, могут измениться только во втором знаке.

Наконец, следует иметь в виду, что наблюдение указанной аннигиляционной особенности в спектре излучения в диапазоне энергий порядка МэВ возможно далеко не для всех нейтронных звёзд, поскольку оно требует существования вблизи звезды вполне определённого широкополосного источника, излучающего гамма-кванты преимущественно поперёк магнитного поля и граничащего с намагниченным вакуумом в области с магнитным полем $B \sim 3 \cdot 10^{12}$ Гс. В частности, изгибное излучение, возникающее в приполярном вакуумном зазоре, может служить подобным источником только после рассеяния (комптонизации) фотонов на большой угол $\theta \sim \pi/2$. Вопрос о подходящих источниках излучения в диапазоне энергий порядка МэВ и о структуре границы между источником и намагниченным вакуумом, в том числе с учётом однофотонного рождения e^-e^+ пар, требует специального анализа и будет рассмотрен в другом месте.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zheleznyakov V. V. // *Astrophys. Space Sci.* 1982. V. 83. P. 117; Zheleznyakov V. V., Litvinchuk A. A. // *Astrophys. Space Sci.* 1984. V. 105. P. 73.
2. Toll J. S. Ph. D. Thesis, Princeton Univ., (1952).
3. Клепиков Н. П. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. НИИ физики МГУ, 1952.
4. Клепиков Н. П. // ЖЭТФ. 1954. Т. 26. С. 19.
5. Соколов А. А., Тернов И. М. Релятивистский электрон. М.: Наука, 1974.
6. Mikhalev V. L. // Sov. J. Nucl. Phys. 1986. V. 43. P. 773.
7. Baring M. G. // MNRAS. 1988. V. 235. P. 51.
8. Бескин В. С. // Астрофизика. 1982. Т. 18. С. 439.
9. Daugherty J. K., Harding A. K. // *Astrophys. J.* 1983. V. 273. P. 761.
10. Shabad A. E. // Ann. Phys. 1975. V. 90. P. 166.
11. Peres R. H., Shabad A. E. // Ann. Phys. 1982. V. 138. P. 1.
12. Melrose D. B., Stoneham R. J. // Nuovo Cim. A. 1976. V. 32. P. 435.
13. Melrose D. B., Stoneham R. J. // J. Phys. A. 1977. V. 10. P. 1211.
14. Melrose D. B. // Plasma Phys. 1974. V. 16. P. 845.
15. Belyanin A. A., Kocharovskiy V. V., Kocharovskiy Vl. V. // Phys. Lett. A. 1990. V. 149. P. 258.
16. Белянин А. А., Кочаровский В. В., Кочаровский Вл. В. // ЖЭТФ. 1991. Т. 99. С. 127.
17. Шабад А. Е. // Труды ФИАН. 1988. Т. 192. С. 5.
18. Belyanin A. A., Kocharovskiy V. V., Kocharovskiy Vl. V. // Quant. Semiclass. Opt. 1997. V. 9. P. 1.
19. Усов В. В., Шабад А. Е. // Письма в ЖЭТФ. 1985. Т. 45. С. 17.
20. Shabad A. E., Usov V. V. // *Astrophys. Space Sci.* 1986. V. 128. P. 377.
21. Деришев Е. В., Кочаровский В. В., Кочаровский Вл. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1997. Т. 40. С. 146.

Институт прикладной физики РАН,
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию
25 декабря 2000 г.

FORMATION OF ANNIHILATION–CYCLOTRON LINES IN STRONG MAGNETIC FIELDS NEAR NEUTRON STARS*A. A. Belyanin, V. V. Kocharovskiy, and Vl. V. Kocharovskiy*

We study cyclotron and polarization spectral features in magnetized vacuum at frequencies near the one-photon annihilation resonance in a subcritical magnetic field. On the basis of this study, we propose a new method for determination of neutron-star magnetic field. Using the dipole-field model, we show that detection of the annihilation line in absorption and additional line in emission at MeV energies can evidence for the existence of a magnetic field $(2.8–3.6) \cdot 10^{12}$ G on the surface of a neutron star.

УДК 524.3-6+524.31.084

МОДЕЛЬ ФОТОСФЕРЫ МАГНИТНОГО БЕЛОГО КАРЛИКА

A. B. Сербер, Н. А. Ямпольский

Рассмотрена самосогласованная модель изотермической фотосферы магнитного белого карлика, учитывающая влияние силы давления циклотронного излучения на распределение плазмы. Определены значение магнитного поля и температура звезды, при которых характерный масштаб изменения концентрации плазмы в верхних слоях фотосферы сравнивается с толщиной гирорезонансного слоя в дипольном магнитном поле звезды и возникают условия для выметания фотосферной плазмы в магнитосферу.

ВВЕДЕНИЕ

Давление излучения на среду является важным фактором, без учёта которого невозможно построить реалистичную модель звёздной атмосферы. Из-за наличия сильных магнитных полей на белых карликах ($B \sim 10^7 \div 10^9$ Гс) и нейтронных звёздах ($B \sim 10^{12} \div 10^{13}$ Гс) возникает эффективное взаимодействие излучения с веществом на частотах, близких к циклотронной частоте $\omega_B = eB/(mc)$, где m и e — масса и модуль заряда электрона, c — скорость света. В работах [1–4] показано, что на белых карликах сила давления излучения может превышать силу тяжести и обеспечивать истечение вещества с поверхности звезды. На основе этого была предложена модель радиационного дискона [5, 6] — горячей магнитной звезды с протяжённой плазменной оболочкой, которая формируется и поддерживается давлением циклотронного излучения. Источником вещества такой оболочки является горячая фотосфера звезды, из которой под действием радиационного давления вымется плазма. Расчёты силы радиационного давления в фотосфере дискона и определение параметров звезды, при которых может возникнуть порождаемое излучением истечение фотосферной плазмы [3, 7], проводились в предположении, что вещество вблизи поверхности звезды имеет такое же распределение, как и в отсутствие давления излучения. Ясно, однако, что радиационное давление приводит к пространственному перераспределению плазмы, что, в свою очередь, оказывает влияние на перенос излучения. В данной работе рассмотрена самосогласованная модель фотосферы белого карлика, учитывающая влияние давления циклотронного излучения на распределение вещества.

1. ПОСТАНОВКА И АНАЛИЗ ЗАДАЧИ

Рассмотрим полностью ионизованную водородную изотермическую фотосферу, температура которой в глубине равна $T = \text{const}$,¹ излучение изотропно, а его интенсивность, приходящаяся на одну поляризацию, равна чернотельной:

$$B_\omega(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{8\pi^3 c^2} \left[\exp\left(\frac{\hbar\omega}{\kappa T}\right) - 1 \right]^{-1},$$

¹ Следует отметить, что распределение электронов по скоростям является изотропным максвелловским с температурой T лишь в глубоких слоях фотосферы, где излучение термализовано. В более высоких областях распределение становится анизотропным: величина T соответствует продольной (по отношению к направлению магнитного поля) температуре $T_{||}$, тогда как распределение по поперечным импульсам (по уровням Ландау в магнитном поле) определяется совместным действием излучения на первой циклотронной гармонике и межчастичных столкновений [8, 9].

где κ — постоянная Больцмана.

Если радиационное давление не учитывается или пренебрежимо мало, то концентрация плазмы убывает с высотой по барометрическому закону $N \propto \exp(-z/H)$, где

$$H = \frac{2\kappa T}{m_p g} \simeq 1,65 \cdot 10^4 \left(\frac{T}{10^4 \text{ К}} \right) \left(\frac{g}{10^8 \text{ см}/\text{с}^2} \right)^{-1} \text{ см} \quad (1)$$

— приведённая высота, g — ускорение свободного падения на поверхности звезды, m_p — масса протона; ось z направлена от звезды. На белых карликах с $T \sim 10^4 \div 10^5$ К и радиусом $R_* \sim 10^9$ см ускорение $g \sim 10^8$ см/с², при этом $H \ll R_*$. С другой стороны, приведённая высота меньше толщины гирорезонансного слоя [10]

$$l_B \simeq 2\sqrt{2}\beta_T L_B \simeq 6,1 \cdot 10^5 \left(\frac{T}{10^4 \text{ К}} \right)^{1/2} \left(\frac{R_*}{10^9 \text{ см}} \right) \text{ см}, \quad (2)$$

где $\beta_T = [\kappa T/(mc^2)]^{1/2}$, L_B — характерный масштаб неоднородности магнитного поля (в случае дипольного поля $L_B \simeq R_*/3$). Таким образом, магнитное поле и силу тяжести можно считать однородными и использовать для описания фотосферы плоскопараллельную модель, в рамках которой мы будем искать гидростатическое распределение плазмы в случае, когда сила давления излучения не является пренебрежимо малой по сравнению с силой тяжести.

В условиях белых карликов сила радиационного давления, связанная с нерезонансным (томсоновским) рассеянием и тормозным поглощением излучения вне циклотронной линии, значительно меньше силы, обусловленной резонансным взаимодействием излучения с плазмой на первой циклотронной гармонике [2, 3, 7]. Поэтому в данной работе учитывается только последняя сила, которая в расчёте на одну частицу описывается выражением (ср. [2])

$$f_B = \frac{4\pi^3 e^2}{mc^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\xi) d\xi \int_{-1}^1 \cos \alpha (1 + \cos^2 \alpha) I_{11}(\xi, \alpha) d(\cos \alpha), \quad (3)$$

где $I_{11}(\xi, \alpha)$ — спектральная интенсивность необыкновенного излучения на первой циклотронной гармонике, $\xi = p_{||}/(\sqrt{2}mc\beta_{T||})$ — безразмерная переменная, описывающая частоту фотона относительно центра циклотронной линии, $p_{||} = mc(\omega - \omega_B)/(\omega \cos \alpha)$ — продольный импульс электронов, с которыми взаимодействуют фотоны частоты ω , распространяющиеся под углом α к магнитному полю, функция $\phi(\xi) = \pi^{-1/2}e^{-\xi^2}$ описывает доплеровский профиль циклотронной линии. В дальнейшем для простоты будем предполагать, что магнитное поле направлено вдоль оси z , т. е. будем рассматривать фотосферу вблизи магнитного полюса звезды. В формуле (3) учтено, что в условиях белых карликов выполняются условия

$$\frac{e^2}{45\pi\hbar c} \left(\frac{B}{B_c} \right)^2 \ll \frac{\omega_p^2}{\beta_T \omega_B^2} \ll 1, \quad (4)$$

где ω_p — электронная плазменная частота, $B_c = m^2 c^3 / (\hbar e) = 4,4 \cdot 10^{13}$ Гс. В этом случае плазма является разреженной, эффект депрессии циклотронного излучения на первой гармонике гирочастоты отсутствует, а поляризация нормальных волн определяется плазмой [10]. При этом влиянием обыкновенной моды на первой гармонике и обеих мод на высших гармониках на перенос циклотронного излучения и на силу f_B можно пренебречь.

Уравнение гидростатического равновесия изотермической плоскопараллельной фотосферы с учётом радиационной силы (3) имеет вид

$$\frac{2\kappa T}{N} \frac{dN}{dz} = -m_p g + f_B. \quad (5)$$

Интенсивность I_{11} , от которой зависит f_B , должна быть рассчитана путём решения соответствующего уравнения переноса. В условиях, когда выполнен критерий (4), оно имеет следующий вид [9]:

$$\cos \alpha \frac{\partial I_{11}(z, \xi, \alpha)}{\partial z} = -\chi_{11}(z, \xi, \alpha) [I_{11}(z, \xi, \alpha) - S_1(z, \xi)], \quad (6)$$

где

$$\chi_{11} = \frac{2\pi^2 e^2}{mc} \frac{\phi(\xi)}{\sqrt{2}\beta_{T_{||}}\omega_B} \frac{1 + \cos^2 \alpha}{|\cos \alpha|} N$$

— коэффициент циклотронного поглощения необыкновенного излучения на первой гармонике,

$$S_1 = \frac{1}{1 + \varepsilon} \int_{-1}^1 \frac{3}{8} (1 + \cos^2 \alpha) I_{11}(\xi, \alpha) d(\cos \alpha) + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} B_\omega(\omega_B) \quad (7)$$

— функция источников, $\varepsilon = \nu_{\text{eff}} t_c \propto N$ — отношение времени t_c циклотронных потерь поперечной энергии электрона к времени ν_{eff}^{-1} между столкновениями [11–13]. Уравнение переноса (6) учитывает резонансное рассеяние необыкновенного излучения на первой циклотронной гармонике, а также истинное поглощение и излучение, обусловленные рождением и гибелю фотонов за счёт столкновительного возбуждения и девозбуждения уровней Ландау.

Введём оптическую глубину в центре циклотронной линии:

$$\tau(z) = \sigma_{11} \int_z^\infty N dz,$$

где $\sigma_{11} = 4\sqrt{2}\pi e^2/(mc\beta_{T_{||}}\omega_B)$ — эффективное сечение циклотронного рассеяния. Тогда система уравнений (5), (6) принимает следующий вид:

$$\sigma_{11} H \frac{dN}{d\tau} = 1 - \Gamma_B \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-1}^1 \frac{4I_{11}(\tau, \xi, \alpha)}{3B_\omega(\omega_B)} \phi(\xi) (1 + \cos^2 \alpha) \cos \alpha d(\cos \alpha) d\xi, \quad (8)$$

$$\cos \alpha \frac{\partial I_{11}}{\partial \tau} = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{1 + \cos^2 \alpha}{|\cos \alpha|} \phi(\xi) [I_{11} - S_1]. \quad (9)$$

Здесь

$$\Gamma_B = \frac{3\pi^3 e^2 B_\omega(\omega_B)}{mc^2 m_p g} \simeq 4 \left(\frac{B}{10^8 \text{ Гц}} \right)^3 \left(\frac{g}{10^8 \text{ см}/\text{с}^2} \right)^{-1} [e^b - 1]^{-1}$$

— отношение силы давления излучения к силе тяжести в случае, когда $I_{11}(\cos \alpha > 0) = B_\omega(\omega_B)$ и $I_{11}(\cos \alpha < 0) = 0$; $b = \hbar\omega_B/(\kappa T) = 1,34(B/10^8 \text{ Гц})(T/10^4 \text{ К})^{-1}$. Систему уравнений (8), (9) необходимо дополнить граничными условиями. Будем считать, что вдалеке от звезды ($z \rightarrow \infty, \tau \rightarrow 0$) концентрация плазмы равна нулю:

$$N|_{\tau=0} = 0. \quad (10)$$

Кроме того, предположим, что извне на звезду излучение не падает, а в глубине фотосферы (за счёт термализации) интенсивность излучения ограничена:

$$I_{11} \Big|_{\substack{\tau=0, \\ \cos \alpha < 0}} = 0, \quad I_{11} \Big|_{\tau \rightarrow \infty} < \infty. \quad (11)$$

Система уравнений (8), (9) с граничными условиями (10), (11) описывает самосогласованное распределение плазмы и необыкновенного излучения на первой циклотронной гармонике. Градиент концентрации плазмы в некоторой точке фотосферы зависит от локального распределения интенсивности циклотронного излучения по углам и частотам; в свою очередь, это распределение зависит от оптической толщины τ в рассматриваемой точке, т. е. от распределения плазмы в вышележащих слоях фотосферы. В системе уравнений (8), (9) существует первый интеграл — аналог интеграла Бернуlli. Чтобы получить его, умножим уравнение переноса на $|\cos \alpha| \cos \alpha$ и проинтегрируем по $\cos \alpha$ и ξ :

$$\frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{d\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-1}^1 I_{11}(\tau, \xi, \alpha) |\cos \alpha| \cos^2 \alpha d(\cos \alpha) d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-1}^1 I_{11}(\tau, \xi, \alpha) \phi(\xi) (1 + \cos^2 \alpha) \cos \alpha d(\cos \alpha) d\xi.$$

Используя полученное соотношение, представим уравнение гидростатики в следующем виде:

$$\sigma_{11} H \frac{dN}{d\tau} = 1 - \Gamma_B \frac{d}{d\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-1}^1 \frac{16}{3\sqrt{\pi}} \frac{I_{11}(\tau, \xi, \alpha)}{B_\omega(\omega_B)} |\cos \alpha| \cos^2 \alpha d(\cos \alpha) d\xi.$$

Следовательно, искомый первый интеграл имеет вид

$$\sigma_{11} H N(\tau) = \tau - \Gamma_B \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-1}^1 \frac{16}{3\sqrt{\pi}} \frac{I_{11}(\tau, \xi, \alpha) - I_{11}(0, \xi, \alpha)}{B_\omega(\omega_B)} |\cos \alpha| \cos^2 \alpha d(\cos \alpha) d\xi, \quad (12)$$

где $I_{11}(0, \xi, \alpha)$ — интенсивность излучения, выходящего из фотосферы. При интегрировании по τ были учтены граничные условия (10) и (11). Отметим, что полученное соотношение позволяет понизить порядок исходной системы (8), (9). Подстановка (12) в (7) и (9) приводит к нелинейному уравнению переноса, решение которого может быть получено только численно.

Дальнейший упрощённый анализ задачи проведём в приближении Шварцшильда—Шустера для угловой зависимости интенсивности излучения. Умножим (9) почленно на $|\cos \alpha|$ и проинтегрируем по $\cos \alpha$ от 0 до 1. Вынесем из-под интеграла в левой части (9) $1/3$ — среднее значение $\cos \alpha |\cos \alpha|$ на верхней полусфере, а в правой части $4/3$ — среднее значение $1 + \cos^2 \alpha$. Затем проинтегрируем (9) по $\cos \alpha$ от -1 до 0 , вынося из-под интегралов $-1/3$ и $4/3$ соответственно. Тогда (9) переходит в систему двух уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \frac{\partial I^{(1)}}{\partial \tau} &= \frac{\sqrt{\pi}}{3} \phi(\xi) \left[I^{(1)} - \frac{1}{1+\varepsilon} \frac{I^{(1)} + I^{(2)}}{2} - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} B_\omega(\omega_B) \right], \\ -\frac{1}{3} \frac{\partial I^{(2)}}{\partial \tau} &= \frac{\sqrt{\pi}}{3} \phi(\xi) \left[I^{(2)} - \frac{1}{1+\varepsilon} \frac{I^{(1)} + I^{(2)}}{2} - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} B_\omega(\omega_B) \right] \end{aligned}$$

для усреднённых по углам интенсивностей

$$I^{(1)}(\tau, \xi) = \int_0^1 I_\omega(\tau, \xi, \alpha) d(\cos \alpha), \quad I^{(2)}(\tau, \xi) = \int_{-1}^0 I_\omega(\tau, \xi, \alpha) d(\cos \alpha).$$

Вычисляя далее интеграл по углам в выражении для f_B в приближении Шварцшильда—Шустера, находим

$$\int_{-1}^1 I_{11}(\tau, \xi, \alpha) (1 + \cos^2 \alpha) \cos \alpha d(\cos \alpha) = \frac{3}{4} (I^{(1)} - I^{(2)}). \quad (13)$$

В результате исходную систему (8), (9) представим в следующем виде:

$$\frac{\partial I^{(+)}}{\partial \tau} = \sqrt{\pi} \phi(\xi) I^{(-)}, \quad (14)$$

$$\frac{\partial I^{(-)}}{\partial \tau} = \sqrt{\pi} \phi(\xi) \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} [I^{(+)} - 2B_\omega(\omega_B)], \quad (15)$$

$$\sigma_{11} H \frac{dN}{d\tau} = 1 - \Gamma_B \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\xi) \frac{I^{(-)}}{B_\omega(\omega_B)} d\xi. \quad (16)$$

Здесь введены суммарная и разностная интенсивности $I^{(\pm)} = I_1 \pm I_2$.

Чтобы ещё более упростить анализ задачи, используем приближение прямоугольного профиля циклотронной линии, полагая

$$\phi(\xi) = \begin{cases} 1/\sqrt{\pi}, & |\xi| \leq \sqrt{\pi}/2; \\ 0, & |\xi| > \sqrt{\pi}/2. \end{cases}$$

В этом приближении интенсивность излучения в циклотронной линии не зависит от ξ . Наконец, учтём, что в условиях магнитных белых карликов $\varepsilon \ll 1$. В результате система уравнений рассматриваемой модели фотосферы принимает следующий вид:

$$\frac{dI^{(+)}}{d\tau} = I^{(-)}, \quad (17)$$

$$\frac{dI^{(-)}}{d\tau} = M_B \sigma_{11} H N [I^{(+)} - 2B_\omega(\omega_B)], \quad (18)$$

$$\sigma_{11} H \frac{dN}{d\tau} = 1 - \frac{\Gamma_B I^{(-)}}{B_\omega(\omega_B)}. \quad (19)$$

Здесь введён безразмерный параметр [3, 13]

$$M_B = \frac{\varepsilon}{\sigma_{11} H N} = \begin{cases} 3,7 \cdot 10^{-6} \left(\frac{g}{10^8 \text{ см/с}^2} \right) \left(\frac{B}{10^8 \text{ Гц}} \right)^{-7/3}, & B > 6,3 T^{3/2}; \\ 2,0 \cdot 10^{-3} \left(\frac{g}{10^8 \text{ см/с}^2} \right) \left(\frac{B}{10^8 \text{ Гц}} \right)^{-1} \left(\frac{T}{10^4 \text{ К}} \right)^{-2} L, & B \leq 6,3 T^{3/2}, \end{cases}$$

где

$$L = \begin{cases} \ln(7,3 \cdot 10^3 B^{-1} T), & T > 3 \cdot 10^5 \text{ К}; \\ \ln(13,2 B^{-1} T^{3/2}), & T < 3 \cdot 10^5 \text{ К} \end{cases} \quad (20)$$

— кулоновский логарифм.

Границные условия для интенсивности излучения

$$I^{(2)}|_{\tau=0} = 0, \quad I^{(1),(2)}|_{\tau \rightarrow \infty} < \infty, \quad (21)$$

или эквивалентные им

$$I^{(+)}|_{\tau=0} = I^{(-)}|_{\tau=0}, \quad I^{(+)}|_{\tau \rightarrow \infty} < \infty, \quad (22)$$

следуют из (11).

Представим теперь систему (17)–(19) и граничные условия (10), (22) в безразмерном виде. Введём оптическую толщину

$$t = M_B^{1/3} \tau, \quad 0 \leq t < \infty,$$

безразмерную концентрацию

$$n(t) = M_B^{1/3} \sigma_{11} H N,$$

а также безразмерные величины

$$u(t) = M_B^{1/3} \Gamma_B \left[\frac{I^{(+)}}{B_\omega(\omega_B)} - 2 \right], \quad v(t) = \frac{\Gamma_B I^{(-)}}{B_\omega(\omega_B)},$$

описывающие поле излучения. В рассматриваемом приближении u и v пропорциональны отклонению средней интенсивности от чернотельной и потоку излучения соответственно. С учётом введённых обозначений система уравнений (17)–(19) и граничные условия (10), (22) принимают следующий вид:

$$\dot{u} = v, \quad (23)$$

$$\dot{v} = n u, \quad (24)$$

$$\dot{n} = 1 - v, \quad (25)$$

$$n(0) = 0, \quad (26)$$

$$u|_{t \rightarrow \infty} < \infty, \quad (27)$$

$$u_0 = M_B^{1/3} (v_0 - 2\Gamma_B). \quad (28)$$

Здесь $u_0 = u(0)$, $v_0 = v(0)$, а точкой обозначено дифференцирование по переменной t . Так как $I^{(1),(2)}$ и n — неотрицательные величины, то

$$0 < v_0 < 1 \quad (29)$$

в силу (21), (25) и (26). Отметим, что правое неравенство эквивалентно условию $f_B|_{\tau=0} < m_p g$. Решение рассматриваемой задачи зависит от безразмерных величин M_B и Γ_B , которые входят в (28) и определяются параметрами задачи B , T и g .

Укажем некоторые общие свойства полученной системы уравнений. Прежде всего, запишем очевидный первый интеграл — аналог соотношения (12):

$$n + u = t + u_0. \quad (30)$$

Из этого соотношения и граничного условия (27) следует, что $n(t)$ неограниченно возрастает при $t \rightarrow \infty$. Дифференцируя (23) и учитывая (24), получаем уравнение второго порядка

$$\ddot{u} = n u. \quad (31)$$

Рассмотрим это уравнение при таком заданном профиле концентрации $n(t) \geq 0$, что $n|_{t \rightarrow \infty} \rightarrow \infty$. Согласно [14] нетривиальные решения линейного уравнения (31) имеют не более одного нуля и, кроме того, существуют два линейно независимых решения, $u_1(t)$ и $u_2(t)$, для которых $\{u_1, \dot{u}_1\} \rightarrow 0$ и $\{u_2, \dot{u}_2\} \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$. Условие ограниченности $u(t)$ позволяет отбросить одно из этих решений. Таким образом, из граничного условия (27) следует

$$u|_{t \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad v|_{t \rightarrow \infty} \rightarrow 0 \quad (32)$$

и

$$n|_{t \rightarrow \infty} \rightarrow t + u_0. \quad (33)$$

Иными словами, излучение в глубине фотосферы становится изотропным, его интенсивность стремится к $B_\omega(\omega)$, а поток излучения и сила радиационного давления — к нулю. Поэтому профиль концентрации становится барометрическим: $N(z) \propto e^{-z/H}$ (последний вывод формально следует из (33) и определения оптической толщины).

Докажем от противного, что ограниченное нетривиальное решение $u(t)$ уравнения (31) в области $t \geq 0$ не имеет нулей для любой неотрицательной функции $n(t)$, удовлетворяющей условиям (26) и (33). Предположим, что $u(t) = 0$ в некоторой точке $t = t_0 > 0$. В этой точке $\dot{u}(t_0) \neq 0$, в противном случае $u(t) \equiv 0$. Пусть $\dot{u}(t_0) = v(t_0) > 0$, тогда $u|_{t>t_0} > 0$ и $u|_{t<t_0} < 0$. В этом случае из (24) следует, что $\dot{v}|_{t>t_0} > 0$, т. е. $v(t)$ монотонно возрастает при $t \geq t_0$. В силу (32) это возможно лишь при $v|_{t \geq t_0} < 0$, что противоречит исходному предположению. Аналогично при $v(t_0) < 0$ имеем $u|_{t>t_0} < 0$ и $u|_{t<t_0} > 0$, следовательно, $v(t)$ монотонно убывает при $t \geq t_0$. Вместе с (32) это даёт $v|_{t \geq t_0} > 0$, что противоречит исходному предположению. Итак, искомая функция $u(t)$ является знакопределённой. Если $u(t) > 0$ при всех $t \geq 0$, то рассуждения, аналогичные приведённым выше, показывают, что $v_0 < 0$, что невозможно (см. (29)).

Таким образом, функция $u(t) < 0$ монотонно возрастает и стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$, а функция $v(t) > 0$ монотонно убывает и стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$. Тогда из уравнения (25) и соотношения (30) следует, что искомая функция $n(t)$, описывающая самосогласованное распределение плазмы под действием силы тяжести и давления циклотронного излучения, монотонно возрастает при $t \geq 0$, а её производная $\dot{n}(t)$ также монотонно возрастает от $\dot{n}(0) = 1 - v_0$ до 1. Отметим, что в верхних слоях фотосферы (при $t \ll 1$) функция $n(t) \approx (1 - v_0)t$, так что профиль концентрации плазмы также является барометрическим: $N(z) \propto e^{-z/H_0}$, а приведённая высота $H_0 = 2\kappa T/(m_p g - f_B|_{\tau=0})$ определяется суммарной силой, действующей на частицы плазмы в верхних слоях фотосферы.

Подставим теперь (30) в (31) и получим нелинейное уравнение, описывающее поле излучения:

$$\ddot{u} = (t + u_0 - u) u, \quad (34)$$

граничными условиями для которого являются (28) и (32). Это уравнение является гамильтоновым, его гамильтониан

$$\mathcal{H} = \frac{\dot{u}^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{(t + u_0) u^2}{2}$$

явно зависит от оптической толщины:

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{u^2}{2}.$$

Начальное и конечное значения \mathcal{H} можно найти из граничных условий

$$\mathcal{H}(0) = \frac{v_0^2}{2} - \frac{u_0^3}{6}, \quad \mathcal{H}(\infty) = 0.$$

Интегрируя $d\mathcal{H}/dt$ по всем t , получаем интегральное соотношение

$$\int_0^\infty u^2 dt = v_0^2 - \frac{u_0^3}{3}. \quad (35)$$

Дифференцируя (25) и учитывая (24) и (30), получим уравнение второго порядка для распределения концентраций:

$$\ddot{n} = (n - t - u_0) n. \quad (36)$$

Граничными условиями для этого уравнения служат (26) и (33). Таким образом, искомое распределение концентрации плазмы $n(t; u_0)$, устанавливающееся в фотосфере магнитного белого карлика под действием гравитации и давления циклотронного излучения, зависит от величины u_0 , которая характеризует среднюю интенсивность циклотронного излучения на выходе из фотосферы. Если известно решение $n(t; u_0)$ при произвольном u_0 , то этот параметр можно найти, решив трансцендентное уравнение

$$u_0 = -M_B^{1/3} [\dot{n}(0; u_0) + 2\Gamma_B - 1], \quad (37)$$

которое является следствием (25) и (28). Провести описанную процедуру аналитически невозможно, поэтому, предваряя неизбежные численные расчёты, мы рассмотрим ниже свойства искомого решения в некоторых частных случаях.

Прежде всего найдём профиль концентрации плазмы в случае, когда в любой точке фотосферы сила давления излучения мала по сравнению с силой тяжести. В этом случае $n(t) - t \ll t$, и можно действовать методом последовательных приближений: сначала решить уравнение переноса излучения (31) с граничными условиями (27) и (28) при заданном профиле $n(t) = t$, а затем подставить полученное решение в (30) и найти искомое распределение концентрации. Решение уравнения для поля излучения имеет следующий вид (ср. [3]):

$$u(t) = -\frac{2M_B^{1/3}\Gamma_B \text{Ai}(t)}{\text{Ai}(0) - M_B^{1/3}\text{Ai}'(0)}, \quad (38)$$

где $\text{Ai}(t)$ и $\text{Ai}'(t)$ — функция Эйри и её производная. Следовательно,

$$n(t) = t - 2M_B^{1/3}\Gamma_B \frac{\text{Ai}(0) - \text{Ai}(t)}{\text{Ai}(0) - M_B^{1/3}\text{Ai}'(0)}. \quad (39)$$

Учёт силы давления излучения приводит к отличию распределения плазмы от барометрического. Наиболее сильно это отличие проявляется в верхних слоях фотосферы ($t \rightarrow 0$), где

$$\dot{n}(0) = 1 + \frac{2M_B^{1/3}\Gamma_B \text{Ai}'(0)}{\text{Ai}(0) - M_B^{1/3}\text{Ai}'(0)}, \quad H_0 = H/\dot{n}(0) = H \left[1 + \frac{2M_B^{1/3}\Gamma_B \text{Ai}'(0)}{\text{Ai}(0) - M_B^{1/3}\text{Ai}'(0)} \right]^{-1}.$$

Обратимся теперь к случаю $|u_0| \gtrsim 1$. Так как $u(t)$ стремится к нулю с ростом t , то при достаточно больших t выполняется условие $t + u_0 \gg |u|$. В этом случае, пренебрегая третьим слагаемым в скобках в правой части уравнения (34), находим асимптотику

$$u(t) = t + u_0 - n(t) \sim \text{Ai}(t + u_0),$$

которая имеет место при $t + u_0 \gg 1$ и удовлетворяет граничному условию (33). С другой стороны, при достаточно малых t выполняется условие $n(t) \ll -t - u_0$ (напомним, что $u_0 \leq 0$). В этом случае можно пренебречь первым слагаемым в уравнении (36) и найти приближённое решение

$$n_1(t) = c_1 \left[\text{Ai}(-t - u_0) - \frac{\text{Ai}(-u_0)}{\text{Bi}(-u_0)} \text{Bi}(-t - u_0) \right] \quad (40)$$

для концентрации плазмы, удовлетворяющее граничному условию (26). Здесь $\text{Bi}(t)$ — функция Эйри, c_1 — константа интегрирования.

Сказанное позволяет построить приближённое решение рассматриваемой задачи следующим образом. Будем считать, что выражение (40) справедливо в области $0 \leq t \leq -u_0$, а при $t > -u_0$ решение имеет вид

$$n_2(t) = t + u_0 + c_2 \text{Ai}(t + u_0), \quad (41)$$

где c_2 — константа интегрирования. Константы c_1 и c_2 найдём из условия непрерывности функции $n(t)$ и её производной в точке $t = -u_0$:

$$n_1(-u_0) = n_2(-u_0), \quad \dot{n}_1(-u_0) = \dot{n}_2(-u_0).$$

Вычисления приводят к следующему результату:

$$c_1 = [-2\text{Ai}'(0)]^{-1} = 3^{1/3}\Gamma(1/3)/2, \quad c_2 = c_1 \left[1 - \frac{\sqrt{3}\text{Ai}(-u_0)}{\text{Bi}(-u_0)} \right],$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция, $\text{Bi}(x)$ — функция Эйри. Зная константу c_1 , найдём производную

$$\dot{n}_1(0; u_0) = [-2\pi\text{Ai}'(0)\text{Bi}(-u_0)]^{-1}. \quad (42)$$

Подставляя это выражение в (37), получаем уравнение для u_0 :

$$-u_0 + \frac{M_B^{1/3}}{2\pi\text{Ai}'(0)\text{Bi}(-u_0)} = M_B^{1/3} (2\Gamma_B - 1). \quad (43)$$

Если $-u_0 \gg 1$, то $\text{Bi}(-u_0) \gg 1$. Тогда, учитывая что $M_B^{1/3} \ll 1$, можно пренебречь вторым слагаемым в левой части этого уравнения и получить простую оценку

$$-u_0 \simeq M_B^{1/3} (2\Gamma_B - 1),$$

которая справедлива, если $\dot{n}(0; u_0) \equiv 1 - v_0 \ll 1$, то есть сила давления в верхних слоях фотосферы близка к силе тяжести: $1 - f_B|_{r=0}/m_p g \ll 1$.

2. ОБСУЖДЕНИЕ

Обратимся теперь к результатам численного расчёта профиля концентрации фотосферной плазмы. На рис. 1 приведены зависимости $n(t)$ при различных значениях $u_0 = M_B^{1/3}\Gamma_B[(I^{(+)}|_{r=0}/B_\omega(\omega_B)) - 2]$, которые указаны около соответствующих кривых. Прямая $n = t$ соответствует барометрическому распределению плазмы в гравитационном поле без учёта силы радиационного давления ($u_0 = 0$). С ростом t каждый из приведённых графиков $n(t)$ выходит на асимптоту $n = t + u_0$, которая пересекает ось t в точке $-u_0$ и соответствует барометрическому распределению плазмы в глубине фотосферы, где поле излучения изотропно и сила давления излучения равна нулю. Для иллюстрации на рис. 1 штриховыми линиями показаны асимптоты $n = t + 1$ и $n = t + 6$. Как показывают расчёты, влияние давления циклотронного излучения на плазму в глубине фотосферы становится пренебрежимо мало, если оптическая толщина $t \gtrsim 1 - u_0$ (при этом $n \gtrsim 1$). С другой стороны, с ростом абсолютной величины параметра u_0 производная $\dot{n}(0)$ быстро убывает. Это означает, что характерный масштаб концентрации плазмы в верхних слоях фотосферы $H_0 = H\dot{n}^{-1}(0)$ быстро возрастает, а следовательно, сила давления циклотронного излучения становится близка по величине к силе тяжести.

Используя уравнение (43), можно приближённо указать, каким параметрам белых карликов соответствует та или иная кривая на рис. 1. Приведённые на рис. 2 штриховые кривые на плоскости «магнитное поле — температура» для белого карлика с $g = 10^8 \text{ см}/\text{с}^2$ соответствуют различным значениями параметра u_0 . С ростом температуры фотосферы T возрастают абсолютная величина u_0 , сила радиационного давления в верхних слоях фотосферы и характерный масштаб концентрации плазмы. Оценим H_0 в случае $-u_0 \gg 1$ с помощью формулы (42):

$$H_0 = \frac{H}{\dot{n}(0; u_0)} = -2\pi H\text{Ai}'(0)\text{Bi}(-u_0) \sim (-u_0)^{-1/4} \exp[(2/3)(-u_0)^{3/2}]H.$$

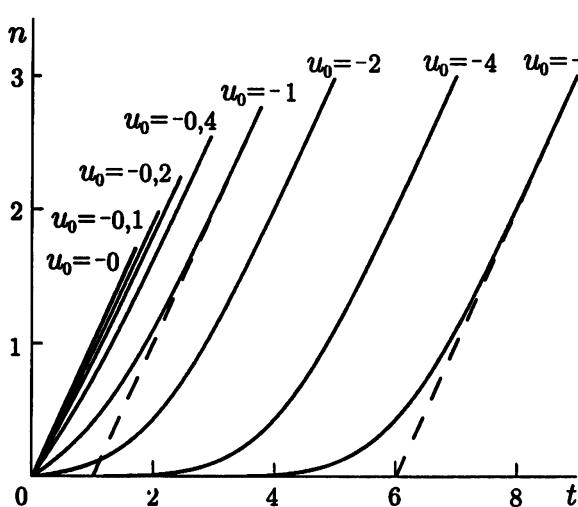


Рис. 1.

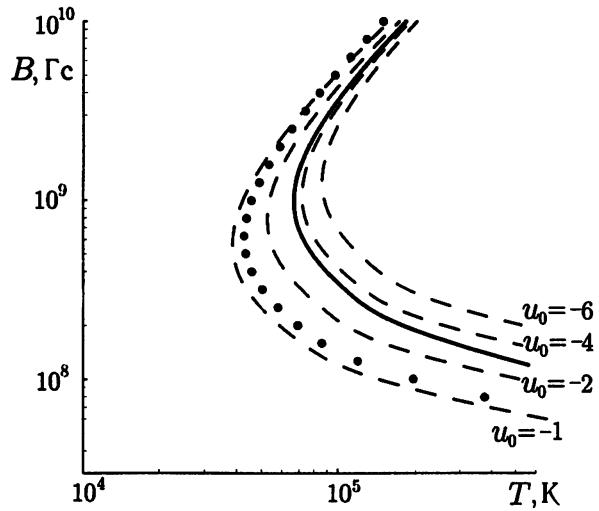


Рис. 2.

Как отмечалось в [4], на расстояниях порядка толщины гирорезонансного слоя (2) изменение гиро-частоты из-за неоднородности магнитного поля сравнивается с шириной аборбционной циклотронной линии, формирующейся в фотосфере. На больших расстояниях электроны плазмы попадают в резонанс с неослабленным чернотельным излучением фотосферы, так что давление циклотронного излучения может резко возрасти. Кроме того, если характерный масштаб неоднородности плазмы сравним с толщиной гирорезонансного слоя l_B или превышает её, анализ влияния циклотронного излучения на распределение фотосферной плазмы следует проводить с учётом неоднородности магнитного поля. Такой анализ выходит за рамки данной работы. Здесь мы лишь укажем условие, при котором $H_0 \gtrsim l_B$:

$$-2\pi Ai'(0)Bi(-u_0) \gtrsim l_B/H.$$

Вместе с уравнением (43) это условие определяет область параметров фотосферы, при которых можно ожидать выметание плазмы с поверхности звезды. Указанная область расположена на рис. 2 справа от сплошной кривой. Для сравнения точками на этом же рисунке показана кривая, полученная в работе [4] в результате численного решения уравнения переноса циклотронного излучения (9) в фотосфере с барометрическим распределением плазмы ($N \propto e^{-z/H}$, $n = t$). Справа от этой кривой сила давления циклотронного излучения превышает силу тяжести на поверхности звезды. Как видим, критерий существования циклотронного ветра из фотосферы белого карлика, полученный в данной работе при анализе самосогласованной модели, в которой учитывается пространственное перераспределение фотосферной плазмы под действием давления циклотронного излучения, оказывается более жёстким, чем условие, полученное без учёта влияния давления излучения на распределение плазмы. Этот факт можно пояснить следующим образом. Если на некоторой высоте в фотосфере магнитного белого карлика сила давления циклотронного излучения сравнивается с силой тяжести, то плазма из нижележащих слоёв поднимается вверх, и характерный пространственный масштаб её распределения увеличивается. При этом оптическая толщина в рассматриваемой точке фотосферы увеличивается, а поток излучения и сила радиационного давления уменьшаются. Поэтому увеличение $B_\omega(\omega_B)$ — интенсивности излучения вблизи гиро-частоты в глубоких слоях фотосферы — сопровождается увеличением геометрических размеров фотосферы, расширением её как целого.

В заключение заметим, что в данной статье не рассматривались вопросы устойчивости распределения фотосферной плазмы, формируемого под действием циклотронного излучения и гравитационного поля звезды. Если окажется, что полученное стационарное распределение плазмы гидродинамически

неустойчиво, то в фотосфере могут развиваться крупномасштабные движения, способствующие возникновению циклотронного ветра с поверхности магнитных белых карликов. Указанные вопросы выходят за рамки данной работы и будут обсуждаться в других публикациях.

Авторы признательны С. А. Корягину за внимание к работе и полезные обсуждения. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 99–02–18244), Совета по государственной поддержке ведущих научных школ (грант № 00–15–96674) и Комиссии по работе с молодежью РАН (проект «Взаимодействие мощного электромагнитного и нейтринного излучения с плазмой в сверхсильных магнитных и гравитационных полях компактных космических объектов: белых карликов, нейтронных звезд и чёрных дыр»).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Митрофанов И. Г., Павлов Г. Г. // Астрон. журн. 1981. Т. 58. С. 309.
2. Железняков В. В., Литвинчук А. А. // Астрон. журн. 1987. Т. 64. С. 306.
3. Железняков В. В., Сербер А. В. // Письма в Астрон. журн. 1991. Т. 17. С. 419.
4. Железняков В. В., Корягин С. А., Сербер А. В. // Письма в Астрон. журн. 1999. Т. 25. С. 513.
5. Беспалов П. А., Железняков В. В. // Письма в Астрон. журн. 1990. Т. 16. С. 539.
6. Zheleznyakov V. V., Serber A. V. // Space Sci. Rev. 1994. V. 68. P. 275.
7. Zheleznyakov V. V., Serber A. V. // Astrophys. J. Suppl. 1994. V. 90. P. 783.
8. Zheleznyakov V. V., Litvinchuk A. A. // Astrophys. Space Sci. 1984. V. 105. P. 73.
9. Сербер А. В. // Астрон. журн. 1990. Т. 67. С. 582.
10. Железняков В. В. // Итоги науки и техники. Астрономия. Т. 22. М.: ВИНИТИ, 1983. С. 135.
11. Zheleznyakov V. V. // Astrophys. Space Sci. 1983. V. 97. P. 229.
12. Железняков В. В. Излучение в астрофизической плазме. М.: Янус-К, 1997. 528 с.
13. Железняков В. В., Корягин С. А., Сербер А. В. // Письма в Астрон. журн. 1999. Т. 25. С. 522.
14. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1965.

Институт прикладной физики РАН,
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию
29 декабря 2000 г.

MODEL PHOTOSPHERE OF A MAGNETIC WHITE DWARF

A. V. Serber and N. A. Yampol'sky

We consider a self-consistent model of an isothermal photosphere of a magnetic white dwarf, in which the effect of the cyclotron radiation pressure on the plasma distribution is taken into account. We determine the values of the magnetic field and temperature of the star at which the scale height of the plasma density in the upper photosphere becomes comparable to the size of gyroresonance layer, and thus the conditions favoring the photospheric-plasma outflow into the magnetosphere are realized.

УДК 523.9

НИЗКОЧАСТОТНЫЕ ПУЛЬСАЦИИ КОРОНАЛЬНЫХ МАГНИТНЫХ ПЕТЕЛЬ

B. B. Зайцев¹, A. Г. Кисляков^{1,2}, A. В. Степанов³, С. Урпо⁴, Е. И. Шкелёв²

Проведён анализ низкочастотных флуктуаций интенсивности микроволнового излучения солнечных вспышек на частотах 22 и 37 ГГц. Исследованы три микроволновых всплеска длительностью около 1 часа каждый, зарегистрированные в обсерватории Метсахови (Финляндия) с временным разрешением 0,1 и 0,05 с. Для получения спектрально-временных характеристик низкочастотных флуктуаций был использован метод Вигнера—Виля, представляющий собой преобразование Фурье по сдвиговому времени от «локальной» автокорреляционной функции аналитического сигнала. В результате впервые получены динамические спектры низкочастотных флуктуаций, идентифицированные как собственные МГД колебания корональных магнитных петель. Характер динамических спектров свидетельствует о том, что во время солнечных вспышек в корональных магнитных петлях возбуждается несколько типов низкочастотных пульсаций: 1) быстрые и медленные магнитозвуковые колебания с периодами соответственно $1 \div 1,5$ с и $200 \div 280$ с. Быстрые магнитозвуковые колебания появляются в виде цугов длительностью $100 \div 200$ с, показывая при этом положительный частотный дрейф $d\nu/dt \approx 0,125$ Гц/мин и частотное расщепление $\Delta\nu \approx 0,05$ Гц; 2) собственные колебания корональной магнитной петли как эквивалентного электрического контура. Эти колебания имеют период около 1 с на начальной стадии микроволнового всплеска и затем постепенно увеличивают период до 4 с на стадии затухания радиоизлучения; 3) модуляция интенсивности микроволнового излучения периодической последовательностью импульсов с периодом около 1 с в начале и примерно 2 с в конце всплеска. Параметры динамических спектров и идентификация МГД пульсаций позволили получить информацию о характеристиках магнитных петель, таких как отношение радиуса петли к её длине ($r/L \approx 0,1$), отношение газового давления в петле к давлению магнитного поля ($\beta \approx 3 \cdot 10^{-3}$), отношение плотностей плазмы вне и внутри петли ($\rho_e/\rho_i \leq 2 \cdot 10^{-2}$), электрический ток в корональной петле ($I \approx 1,5 \cdot 10^{12}$ А).

ВВЕДЕНИЕ

Наблюдения солнечных и звёздных вспышек в широком диапазоне длин волн от радио- до жёсткого рентгеновского излучения показывают нам многочисленные примеры появления на временных профилях вспышек пульсирующих структур с периодами от миллисекунд до десятков секунд и минут. Первые исследования пульсаций солнечного радиоизлучения были выполнены в метровом диапазоне длин волн [1–6]. Такие пульсации часто появляются во время вспышек в так называемых солнечных радиовсплесках IV-го типа. Они представляют собой последовательность регулярно повторяющихся кратковременных широкополосных всплесков с относительно глубокой модуляцией интенсивности, периодом $0,3 \div 10$ с и общей продолжительностью $1 \div 5$ мин. Радиоизлучение вспышек в сантиметровом диапазоне длин волн, кроме пульсаций с периодами порядка секунды [7], обнаруживает также квазипериодическую модуляцию на миллисекундной шкале [8–10]. Пульсации с периодами от нескольких секунд до десятков секунд обнаружены также в рентгеновском излучении солнечных вспышек [11–13], а также в оптическом и микроволновом излучении вспышек на звёздах типа красных карликов [14–16].

Миллисекундные пульсации в излучении солнечных вспышек обычно интерпретируются как пульсирующие режимы генерации плазменных волн, которые, в свою очередь, модулируют количество быстрых частиц в источнике радиоизлучения [17]. Что касается секундных пульсаций, то общепринятой является точка зрения, согласно которой эти пульсации возникают в результате возбуждения магнитогидродинамических колебаний в источнике [17–19].

В случае солнечных вспышек источниками микроволнового и рентгеновского излучения являются, как правило, корональные магнитные петли, которые имеют характерную длину $L \simeq (3 \div 10) \cdot 10^9$ см,

радиус $r \simeq (1 \div 5) \cdot 10^8$ см, температуру $T \simeq 10^6 \div 10^7$ К, концентрацию плазмы $n \simeq 10^{10} \div 10^{11}$ см⁻³ и магнитное поле в несколько сот гаусс [20]. Такие петли являются хорошими резонаторами для альфевеновых и магнитозвуковых волн. Возбуждение этих резонаторов может происходить, например, при вспышечном энерговыделении внутри петли, приводящем к радиальному расширению последней [21], при испарении хромосферной плазмы, вызывающей вытягивание петли [22], либо при захвате в петлю быстрых частиц и выполнении условий баунс-резонанса [19]. Возникающие при этом МГД пульсации модулируют пробочное отношение $\sigma = B_{\max}/B_{\min}$ магнитной петли и, следовательно, количество энергичных частиц, захваченных в ловушку, влияя тем самым на временные характеристики возникающего излучения.

Кроме того, имеется ещё один источник модуляции. Основания корональных магнитных петель находятся обычно в узлах нескольких ячеек супергрануляции, куда сходящиеся потоки фотосферной плазмы «сгребают» фоновое магнитное поле. Фотосферная конвекция, взаимодействуя с магнитным полем петли, приводит к генерации больших (до 10^{12} А [7]) электрических токов, текущих от одного основания петли через её корональную часть к другому основанию и замыкающихся в фотосфере. Магнитная петля с током представляет собой, таким образом, эквивалентный *LCR*-контур, собственные колебания которого имеют период порядка нескольких секунд, весьма высокую добротность ($Q \geq 10^3$, см. [7]) и также могут модулировать выходящее из петли излучение.

Исследование квазипериодических осцилляций излучения вспышек является эффективным способом диагностики активной области [7, 14, 21–26], поскольку период, добротность и глубина модуляции в магнитогидродинамических и *LCR*-пульсациях зависят от параметров плазмы и масштабов области энерговыделения. При этом применяются различные методы, в частности фурье-анализ временных профилей [7, 27–29], статистический анализ интервалов между импульсами [30, 31], автокорреляционные методы [32], исследование размерностей странного аттрактора [33–38], wavelet-анализ [37, 38], методы символьической динамики [39].

Классическое преобразование Фурье позволяет осуществить разложение исследуемого сигнала на отдельные частотные компоненты и установить относительную мощность каждой из них. Однако энергетический спектр ничего не говорит нам о том, когда появляются эти компоненты. Этот метод можно усовершенствовать, проводя спектральный анализ сигнала в некотором интервале длительностью Δt (так называемом «окне») и затем сдвигая этот интервал вдоль оси времени. Описанный метод «скользящего спектра» в настоящее время является стандартным методом исследования нестационарных сигналов. Дальнейшим обобщением этого метода является wavelet-анализ, когда вместо временного окна выбирается некоторая материнская волна, на основе которой строятся wavelet-функции, обеспечивающие одинаковую добротность для различных спектральных компонент. Wavelet-преобразование даёт информацию о распределении мощности в различных временных интервалах в различные моменты времени и особенно удобно для анализа последовательностей импульсных сигналов. Применение аналогов странного аттрактора к исследуемым сигналам и определение соответствующей размерности аттрактора позволяет сделать некоторые выводы о соотношении динамических и статистических закономерностей во временной эволюции исследуемой системы.

Целью настоящей работы является применение метода Вигнера—Виля [40] для анализа низкочастотных пульсаций, модулирующих микроволновое излучение солнечных вспышек. Этот метод позволяет получить динамический спектр низкочастотных пульсаций, т. е. совместную функцию частоты и времени, характеризующую интенсивность низкочастотной модуляции одновременно на единичном частотном и временном интервалах. Полученная нами информация о характере изменения спектра низкочастотных пульсаций для нескольких вспышек позволила в ряде случаев отождествить тип МГД колебаний, возбуждаемых в активной области, определить их добротность и другие динамические характеристики, что чрезвычайно важно для диагностики параметров источника излучения. Метод Вигнера—Виля оказывается особенно эффективным для анализа ситуаций, когда происходит мо-

дуляция интенсивности излучения синусоидальными сигналами с постепенно изменяющейся частотой (случай, достаточно распространённый в астрономии). В такой ситуации wavelet-анализ, приспособленный в основном для исследования импульсной модуляции, теряет информацию о низкочастотном сигнале. Заметим, что метод Вигнера—Виля не использовался ранее в радиоастрономии, хотя нашёл широкое применение в геофизической разведке [41], океанологии [42], при проектировании акустических приборов [43] и т. д.

План статьи следующий. В разделе 1 кратко изложен метод Вигнера—Виля; в разделе 2 приведены динамические спектры некоторых тестовых сигналов; в разделе 3 проанализированы временные профили микроволнового излучения трёх солнечных вспышек и получены динамические спектры низкочастотных пульсаций, модулирующих это излучение; раздел 4 посвящён обсуждению полученных результатов, диагностике параметров источников микроволнового излучения и изложению кратких выводов.

1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВИГНЕРА—ВИЛЯ

Как отмечалось во введении, во время пульсаций солнечного радиоизлучения возникают периодические модуляции его интенсивности с изменяющейся во времени частотой, что приводит к необходимости получения динамических спектров. В свою очередь, понятие динамического спектра, как распределения энергии сигнала на частотно-временной плоскости, связано с введением мгновенной частоты ω_m . В теории сигналов мгновенная частота определяется из соотношения

$$\omega_m = \frac{d\Psi(t)}{dt} = \frac{\dot{s}(t)s_r(t) - s(t)\dot{s}_r(t)}{s^2(t) + s_r^2(t)}, \quad (1)$$

где $\Psi(t)$ — мгновенная фаза аналитического сигнала $z(t)$ [44], а $s^2(t) + s_r^2(t) = U^2(t)$ — квадрат его модуля (огибающей), т. е.

$$z(t) = U(t) e^{j\Psi(t)} = s(t) + j s_r(t), \quad (2)$$

где $s(t)$ — исследуемая реализация вещественного сигнала, а $s_r(t)$ — сопряжённая ей по Гильберту.

Следующий шаг в исследовании нестационарных процессов заключается в использовании корреляционного анализа функции $z(t)$, что было сделано Ф. Вудвордом в теории приёма радиолокационных сигналов [45]. Ф. Вудворд ввёл функцию неопределённости как фурье-образ локальной функции автокорреляции аналитического сигнала:

$$\chi(\theta, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} z^*(t - \tau) z(t) e^{j\theta t} dt, \quad (3)$$

или в симметризованной форме

$$\chi_c(\theta, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} z^*(t - \tau/2) e^{j\theta t} z(t + \tau/2) dt. \quad (4)$$

Здесь * означает комплексное сопряжение. Очевидно, что при $\theta = 0$ соотношения (3), (4) представляют собой корреляционную функцию аналитического сигнала. В общем случае функция неопределённости комплексна, т. к. $\chi(\theta, \tau) \neq \chi(-\theta, -\tau)$, и это затрудняет её использование в качестве меры энергии сигнала.

Преобразование Вигнера—Виля [46, 47] аналогично (4), но интегрирование в нём производится по сдвиговому времени, т. е.

$$P(\omega, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} z^*(t - \tau/2) e^{j\omega\tau} z(t + \tau/2) d\tau, \quad (5)$$

где $P(\omega, t)$ — частотно-временное распределение энергии сигнала $s(t)$. Отметим, что в отличие от (3), (4) выражение (5) даёт вещественные значения энергии. Кроме того, выполняются соотношения

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} P(\omega, t) d\omega = |s(t)|^2, \quad (6)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(\omega, t) dt = |s(\omega)|^2. \quad (7)$$

Более подробно о связи функции неопределенности Φ . Вудворда с частотно-временными распределениями изложено в обзоре [40] и цитированной в нём литературе.

Необходимо иметь в виду, что преобразование Вигнера—Виля является нелокальным, т. е. учитывает прошлое и будущее сигнала и в любой момент времени отражает свойства, которыми сигнал обладал в другие моменты времени. Это обстоятельство приводит к тому, что если шум присутствует на некотором малом интервале длительности сигнала, то он будет проявляться в распределении (5) и в другие моменты времени. Другой особенностью преобразования Вигнера—Виля является его нелинейность, приводящая к появлению комбинационных частот, что необходимо учитывать при анализе реальных сигналов.

2. ТЕСТОВЫЕ СИГНАЛЫ

Проиллюстрируем метод Вигнера—Виля на ряде конкретных примеров, которые помогут нам в дальнейшем при интерпретации наблюдательных данных.

Предположим, что амплитуда излучения модулируется синусоидой, частота которой линейно изменяется со временем (так называемый ЛЧМ сигнал):

$$S_1(t) = \sin(\omega_0 t + \beta t^2/2). \quad (8)$$

В этом случае преобразование Вигнера—Виля имеет вид

$$P(\omega, t) = \delta(\omega - \beta t - \omega_0). \quad (9)$$

Энергия сигнала концентрируется вдоль линии $\omega = \omega_0 + \beta t$, которая представляет собой производную по времени фазы исходного сигнала (8). Динамический спектр такого ЛЧМ сигнала имеет вид прямой линии, наклон которой (скорость частотного дрейфа $d\omega/dt$) определяется параметром β .

Рассмотрим теперь модуляцию синусоидальным сигналом с кусочно-линейным изменением частоты. Пусть амплитуда сигнала изменяется во времени следующим образом:

$$S_2(t) = \begin{cases} \sin(2\pi t), & 0 \leq t \leq 10; \\ \sin[2\pi t(1 + 0,05(t - 10))], & 10 \leq t \leq 20; \\ \sin(4\pi t), & 20 \leq t \leq 40. \end{cases} \quad (10)$$

До момента $t = 10$ амплитуда модулируется синусоидальным сигналом с постоянной частотой $\omega_1 = 2\pi$, в интервале времени $10 \leq t \leq 20$ частота модулирующего сигнала линейно растёт со временем, и

при $t > 20$ частота модуляции снова становится постоянной ($\omega_2 = 4\pi$). Динамический спектр такой амплитудной модуляции представлен на рис. 1а.

Рассмотрим случай, когда амплитуда сигнала модулируется суммой двух функций типа (10), сдвинутых друг относительно друга по времени на $\Delta t = 10$ (суммой двух ЛЧМ сигналов):

$$S_3(t) = S_2(t) - S_2(t - 10). \quad (11)$$

График функции $S_3(t)$ показан на рис. 1б, а соответствующий ей динамический спектр, вычисленный с помощью преобразования Вигнера—Виля, представлен на рис. 1в.

Рассмотрим, наконец, случай, когда амплитуда сигнала модулируется периодической последовательностью импульсов с частотой повторения ω . Преобразование Вигнера—Виля для такой модуляции будет давать систему полос, параллельных оси времени и отстоящих друг от друга по частоте на $\omega/2$, что связано с нелинейностью преобразования. Соответствующий пример показан на рис. 2 для модуляции вида

$$S_4(t) = \begin{cases} \sin^{16}(\pi t), & 0 \leq t \leq 40; \\ 0, & t < 0, \quad t > 40. \end{cases} \quad (12)$$

Количество полос будет зависеть от амплитуды импульсов, возрастая с ростом амплитуды. В формулах (10)–(12) t — безразмерное время, нормированное на 1 с.

3. НИЗКОЧАСТОТНАЯ МОДУЛЯЦИЯ МИКРОВОЛНОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ СОЛНЕЧНЫХ ВСПЫШЕК

Для анализа низкочастотной модуляции микроволнового радиоизлучения солнечных вспышек мы использовали цифровые данные о временных профилях радиоизлучения на частотах 22 и 37 ГГц, полученные в радиоастрономической обсерватории Метсахови (Финляндия). Ширина диаграммы направленности радиотелескопа на указанных частотах составляла соответственно 4,0 и 2,4 минут дуги, временнное разрешение варьировалось в пределах $0,05 \div 0,1$ с в зависимости от режима записи, чувствительность приёмников была не хуже 0,1 SFU (одна единица солнечного потока $1 \text{ SFU} = 10^{-22} \text{ Вт} \times \text{м}^{-2} \cdot \text{Гц}^{-1}$), что соответствует температурному разрешению около 100 К. Численные данные о потоке радиоизлучения были использованы нами для компьютерного моделирования динамических спектров низкочастотной модуляции микроволнового излучения на основе распределения Вигнера—Виля (5) для аналитического сигнала (2).

Мы исследовали временные профили 4-х радиовсплесков: 1) 19.05.90 (частота 37 ГГц, временнное разрешение 10 отсчётов в секунду, интервал записи 12:44–14:46 UT); 2) 24.03.91 (частота 37 ГГц, временнное разрешение 20 отсчётов в секунду, интервал записи 13:41–15:11 UT); 3) 10.06.93 (частота 22 ГГц, временнное разрешение 20 отсчётов в секунду, интервал записи 05:43–07:10 UT); 4) часть всплеска 27.06.93 (частота 37 ГГц, временнное разрешение 20 отсчётов в секунду, интервал около 11:11 UT). Были обнаружены несколько типов низкочастотных пульсаций в диапазоне частот $\nu \leq 1$ Гц, модулирующих микроволновое излучение, в частности быстрые и медленные магнитозвуковые волны, ЛЧМ сигналы и периодические последовательности импульсов. Последние были обнаружены нами также в ряде других микроволновых всплесков. Кроме того, была обнаружена многообразная активность на частотах $\nu \leq 0,1$ Гц, которая, однако, требует специального исследования вследствие сильной зашумлённости этого диапазона.

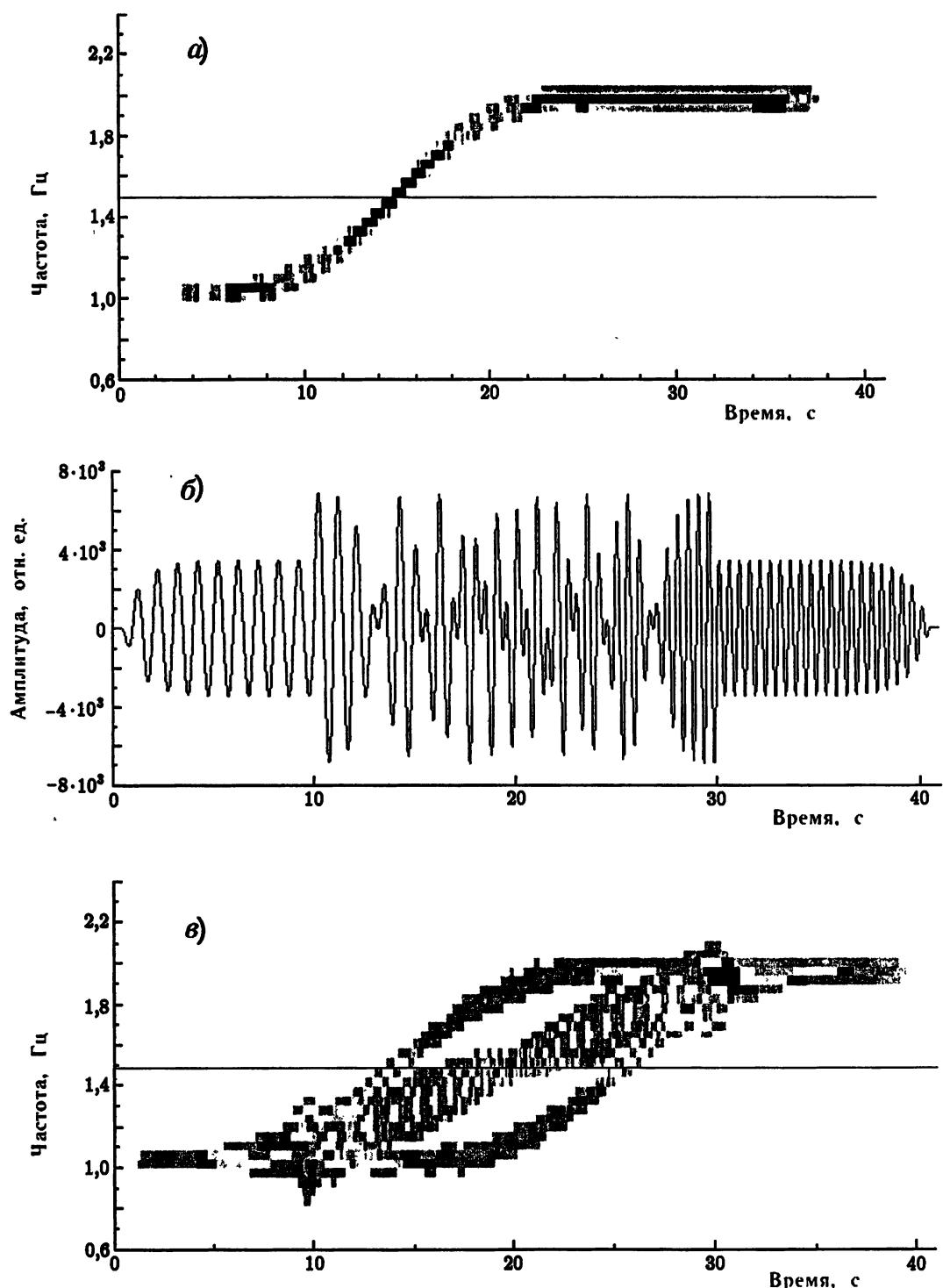


Рис. 1. Динамический спектр, полученный с помощью преобразования Вигнера—Виля для сигнала с кусочно-линейным изменением частоты (а); амплитудная модуляция в виде суммы двух ЛЧМ сигналов типа изображённых на рис. 1а, сдвинутых относительно друг друга по времени на 10 с (б); динамический спектр суммы двух ЛЧМ сигналов, изображённых на рис. 1б (в). Интенсивность дана в относительных единицах. Краевые эффекты, присущие в формуле (10), при построении рис. 1а—в слажены

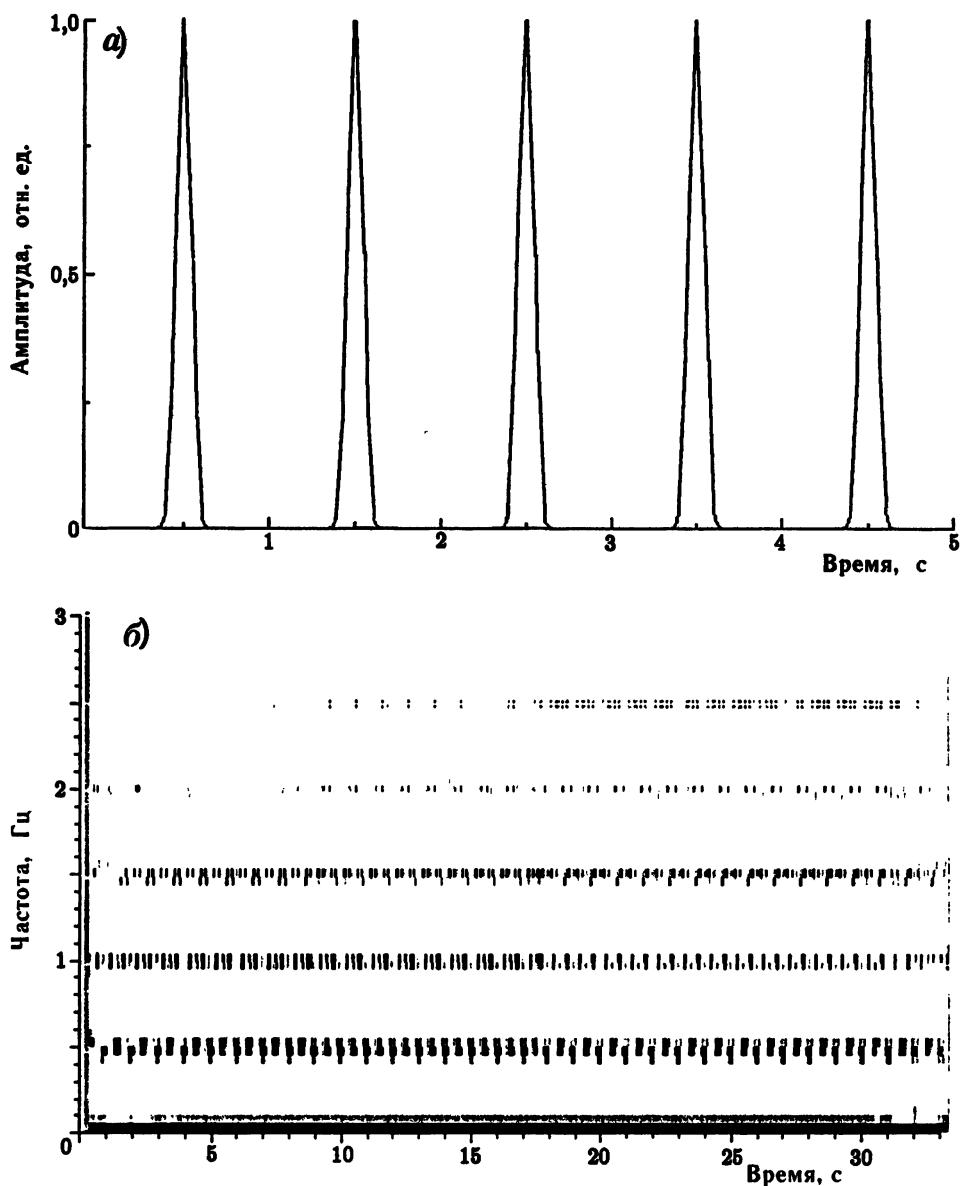


Рис. 2. Амплитудная модуляция в виде периодической последовательности импульсов (а); динамический спектр сигнала, представленного на рис. 2а (б). Частотное расстояние между полосами равно половине частоты следования импульсов, что связано с нелинейностью преобразования Вигнера—Виля

3.1. Событие 19.05.90

Всплеск микроволнового излучения, зарегистрированный 19 мая 1990 г., изображён на рис. 3а. Он имеет форму постепенного нарастания и спада и характеризуется относительно небольшой интенсивностью: поток в максимуме всплеска составляет порядка 10 SFU. Временной профиль всплеска показывает небольшие (порядка нескольких процентов) флюктуации интенсивности, по характеру которых, однако, ничего нельзя сказать об их происхождении. Динамический спектр низкочастотных пульсаций для указанного всплеска, полученный с помощью преобразования Вигнера—Виля, показывает нали-

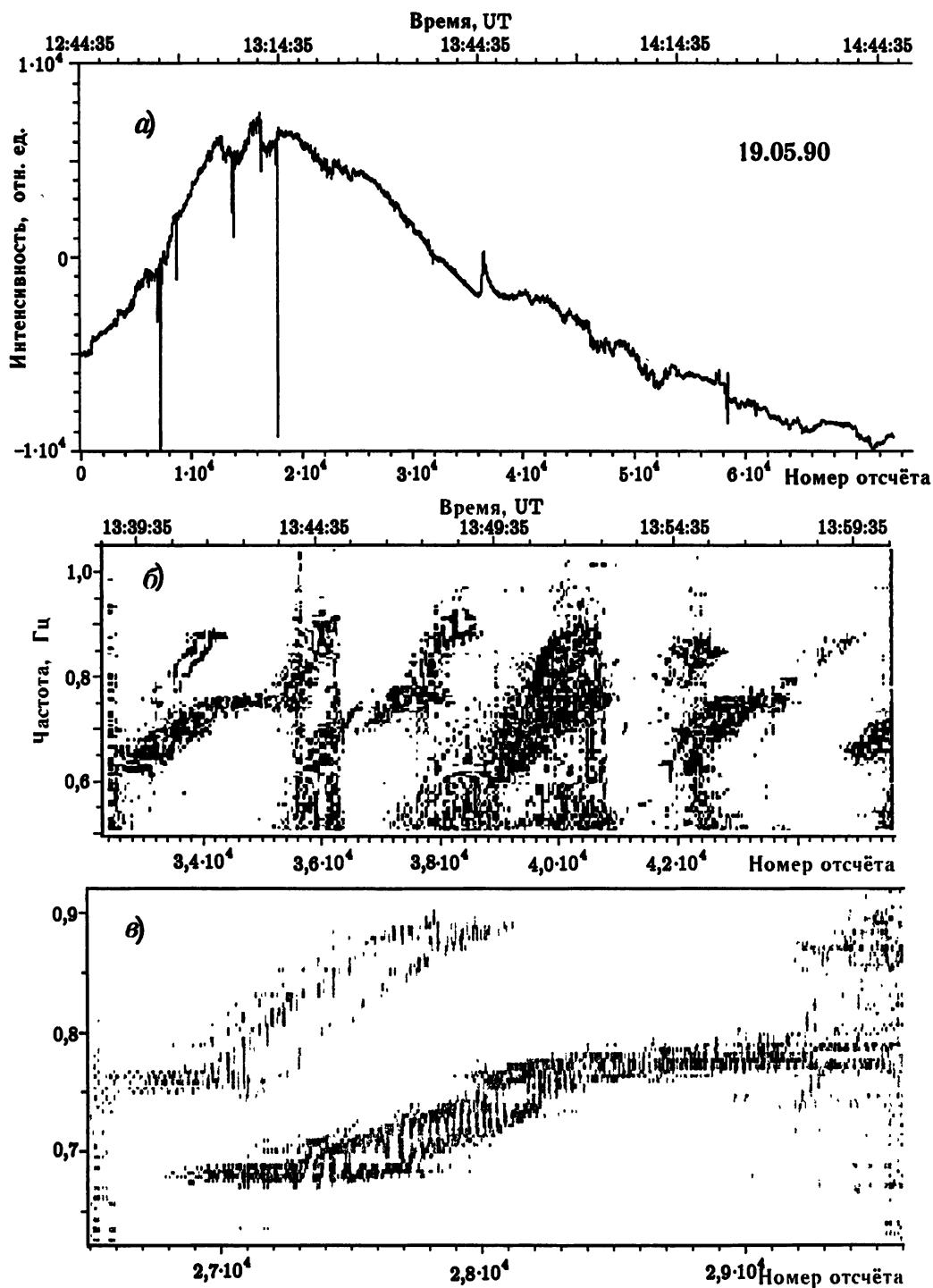


Рис. 3. Всплеск микроволнового излучения, зарегистрированный 19.05.90 на частоте 37 ГГц. Заметны небольшие низкочастотные флуктуации интенсивности (а). Фрагмент динамического спектра низкочастотных флуктуаций длительностью около 25 мин. Видны цуги низкочастотных пульсаций, дрейфующих в двух интервалах частот: $0,60 \div 0,75$ Гц и $0,75 \div 0,90$ Гц (б). Динамический спектр отдельного цуга, показывающий положительный частотный дрейф со скоростью $0,125$ Гц/мин и частотное расщепление, максимальное значение которого составляет $0,05$ Гц (в)

чие дрейфующих по частоте периодических цугов колебаний в диапазоне частот $0,6 \div 0,9$ Гц, которые появляются в течение всего времени жизни микроволнового всплеска (более одного часа). Фрагмент динамического спектра длительностью около 25 минут показан на рис. 3б. В течение всего всплеска цуги низкочастотных пульсаций появлялись в двух равных по величине частотных интервалах $0,60 \div 0,75$ Гц и $0,75 \div 0,90$ Гц. Большинство цугов в каждом частотном интервале дрейфовало от низких частот к высоким и имело частотное расщепление. Динамические спектры отдельных цугов приведены на рис. 3в, а их статистические параметры даны в табл. 1.

Таблица 1

Статистические параметры цугов низкочастотных пульсаций

Диапазон частот	$0,60 \div 0,75$ Гц	$0,75 \div 0,90$ Гц
Количество цугов	20	28
Период повторения	287 ± 7 с	205 ± 6 с
Средняя длительность цуга	210 ± 6 с	110 ± 4 с
Средняя девиация частоты	$0,16 \pm 0,01$ Гц	$0,15 \pm 0,008$ Гц
Скорость частотного дрейфа	$+0,125 \pm 0,005$ Гц/мин	$+0,125 \pm 0,005$ Гц/мин
Максимальное частотное расщепление	0,05 Гц	0,05 Гц

Как следует из табл. 1, период следования цугов низкочастотных пульсаций и их средняя длительность в интервале $0,60 \div 0,75$ Гц соответственно в 1,4 и 2,6 раза больше, чем в интервале $0,75 \div 0,90$ Гц, тогда как девиация частоты, скорость частотного дрейфа и частотное расщепление одинаковы в обоих частотных интервалах. Обращает на себя внимание тот факт, что форма динамического спектра отдельного цуга весьма напоминает динамический спектр суммы двух ЛЧМ сигналов, изображённый на рис. 1в.

3.2. Событие 24.03.91

На рис. 4а показан процесс развития микроволнового всплеска 24 марта 1991 г. на частоте 37 ГГц. Всплеск произошёл в активной области с координатами S25W03. Он имеет форму двух импульсов длительностью около 2–3 минут каждый, за которыми следует постепенный спад интенсивности длительностью около 15 минут. Максимальный поток на импульсной фазе всплеска составляет 700 SFU. На рис. 4б приведён фрагмент динамического спектра низкочастотных пульсаций, модулирующих интенсивность данного микроволнового всплеска. Он представляет собой узкополосный ($\Delta\nu/\nu \approx \approx 3 \cdot 10^{-2}$) ЛЧМ сигнал с постепенно уменьшающейся частотой, который появляется примерно за полчаса до начала импульсной фазы всплеска и присутствует в течение всей его продолжительности. Скорость частотного дрейфа остаётся приблизительно постоянной в течение всплеска и составляет $d\nu/dt = -1,54 \cdot 10^{-2}$ Гц/мин. При этом частота модуляции микроволнового излучения уменьшается от 0,95 до 0,25 Гц за время порядка 45 минут.

3.3. Событие 10.06.93

Микроволновый всплеск 10 июня 1993 г. на частоте 22 ГГц, показанный на рис. 5а, имеет вид кратковременного импульса длительностью около 1,5 мин и максимальным потоком порядка 100 SFU, за которым следует второй подъём и плавный спад интенсивности общей длительностью около 70 мин. Импульсной фазе всплеска предшествует небольшое увеличение интенсивности (предвестник) длительностью около 9 мин. Координаты всплеска по данным обсерватории Метсахови соответствуют

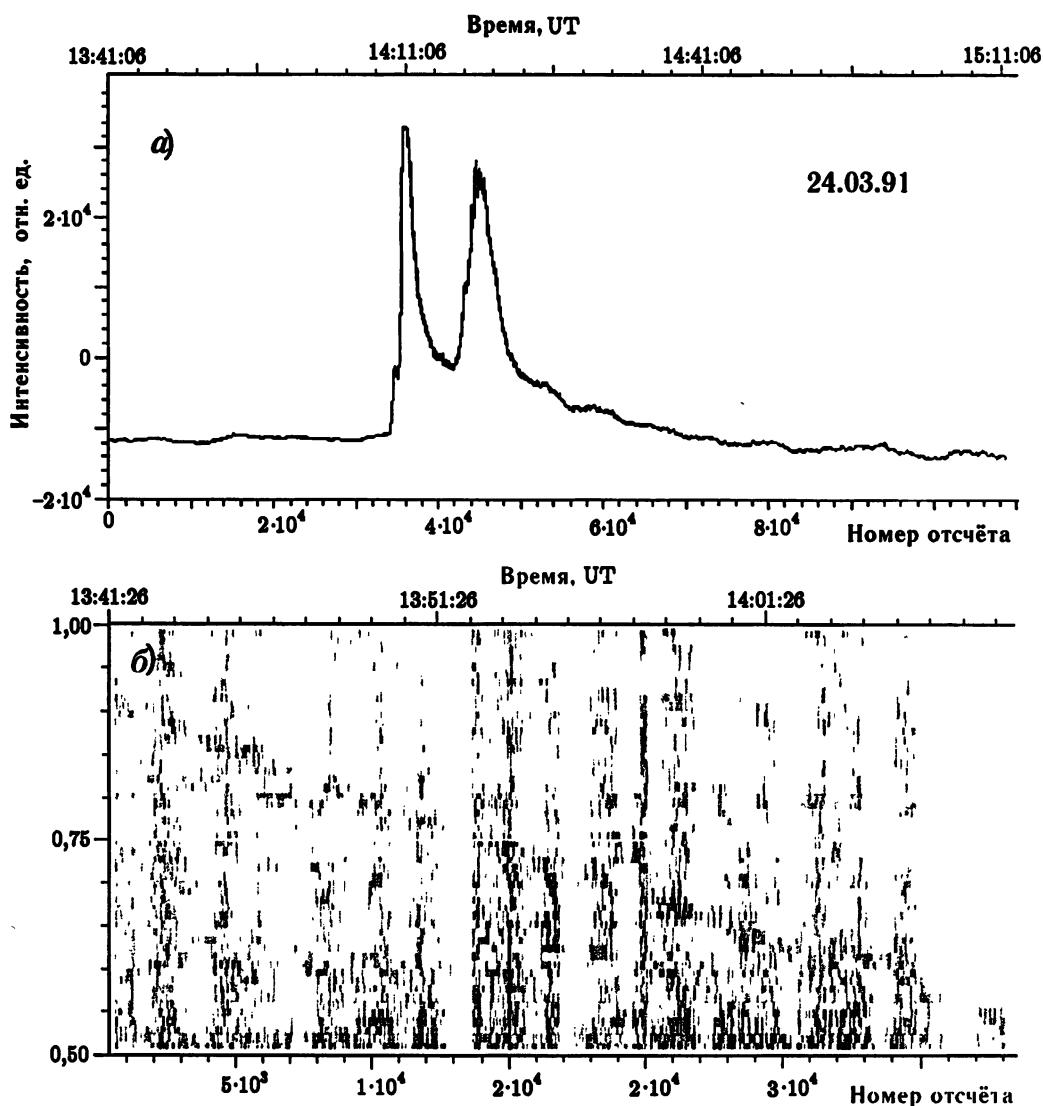


Рис. 4. Всплеск микроволнового излучения, зарегистрированный 24.03.91. Временной профиль всплеска на частоте 37 ГГц (а). Фрагмент динамического спектра низкочастотных пульсаций, модулирующих интенсивность микроволнового всплеска (б). Виден отчётливый ЛЧМ сигнал на частоте порядка 1 Гц, имеющий отрицательный частотный дрейф $d\nu/dt \simeq -1,54 \cdot 10^{-2}$ Гц/мин. За время всплеска частота ЛЧМ сигнала уменьшается от 0,95 до 0,25 Гц

S11W85 и проецируются на лимбовый источник арочной структуры [48]. На фазе предвестника и в течение плавного нарастания и спада интенсивности прослеживаются устойчивые флюктуации потока с относительной амплитудой порядка нескольких процентов. Рис. 5б представляет динамический спектр этих флюктуаций. Мы видим систему эквидистантных полос, параллельных осям времени, которые соответствуют модуляции интенсивности микроволнового излучения периодической последовательностью импульсов (см. раздел 2). Частота модуляции при этом соответствует удвоенному частотному интервалу между полосами и в данном событии составляет $\nu \simeq 1$ Гц на стадии предвестника импульсного всплеска. Указанный характер динамического спектра сохраняется в течение всего события, однако в конце всплеска частота модуляции уменьшается приблизительно вдвое, составляя примерно 0,5 Гц. Ситуация аналогична предыдущему событию, когда в течение всплеска частота модуляции также уменьшалась, хотя характер модуляции был иным.

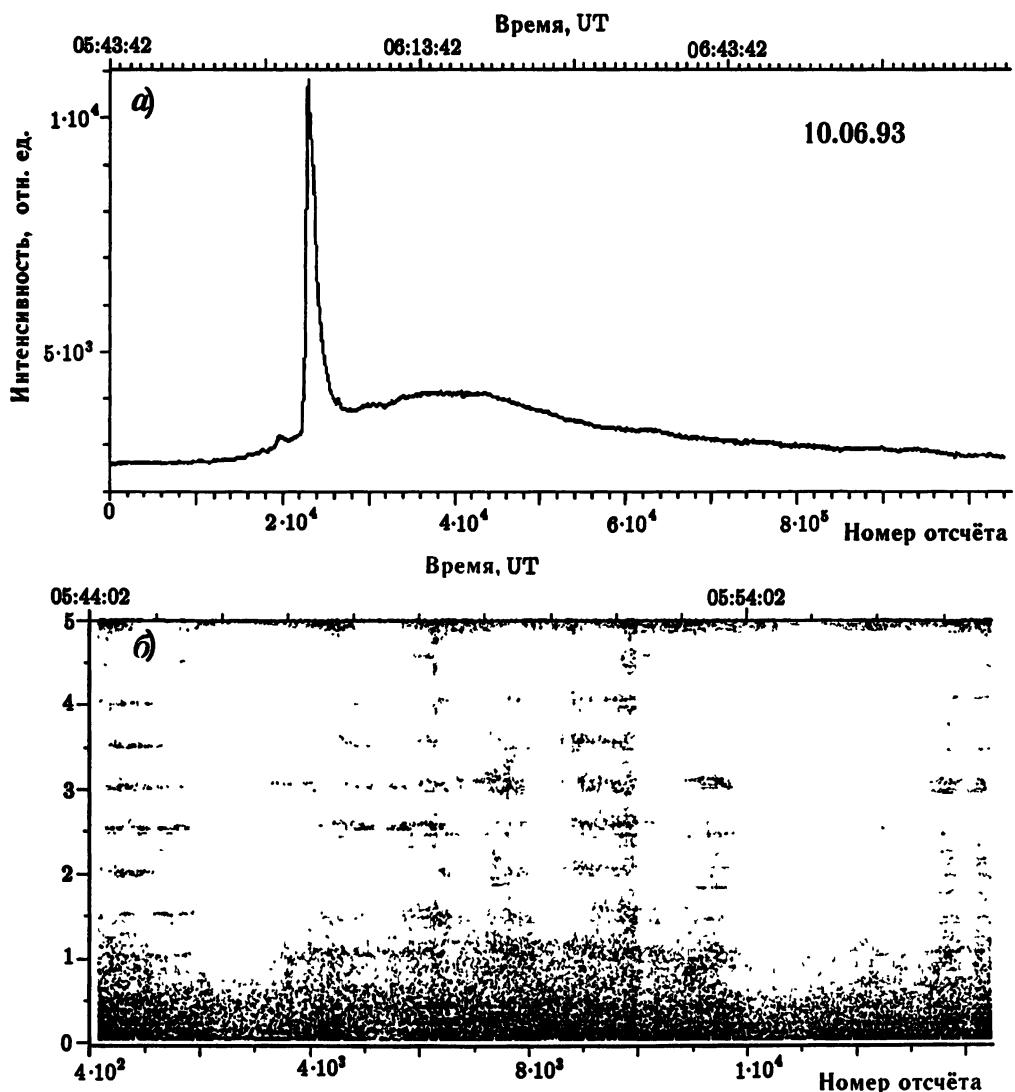


Рис. 5. Всплеск микроволнового излучения, зарегистрированный 10.06.93. Временной профиль всплеска на частоте 22 Гц (а). Динамический спектр низкочастотных пульсаций в виде системы эквидистантных полос, параллельных оси времени, указывающих на модуляцию интенсивности радиоизлучения периодической системой импульсов (б). Частота модуляции составляет 1 Гц на начальной стадии всплеска и уменьшается примерно до 0,5 Гц в конце всплеска

3.4. Спектральные линии на частотах 2,5 и 5 Гц

Довольно часто на динамических спектрах низкочастотных пульсаций можно было наблюдать спектральные линии на частотах вблизи 2,5 и 5 Гц. При этом частота первой линии обычно несколько выше 2,5 Гц, а частота второй линии обычно несколько ниже 5 Гц. Линии могли иметь сложную частотно-временную структуру, как это показано, например, на рис. 6, где изображены общий шумовой фон в диапазоне 0÷2 Гц и линии вблизи 2,5 и 5 Гц во время микроволнового всплеска 27.06.93. В настоящее время нет полной ясности в вопросе о том, имеют ли указанные линии солнечное происхождение или это аппаратурный эффект, связанный с особенностями наблюдений в Метсахови. Тем

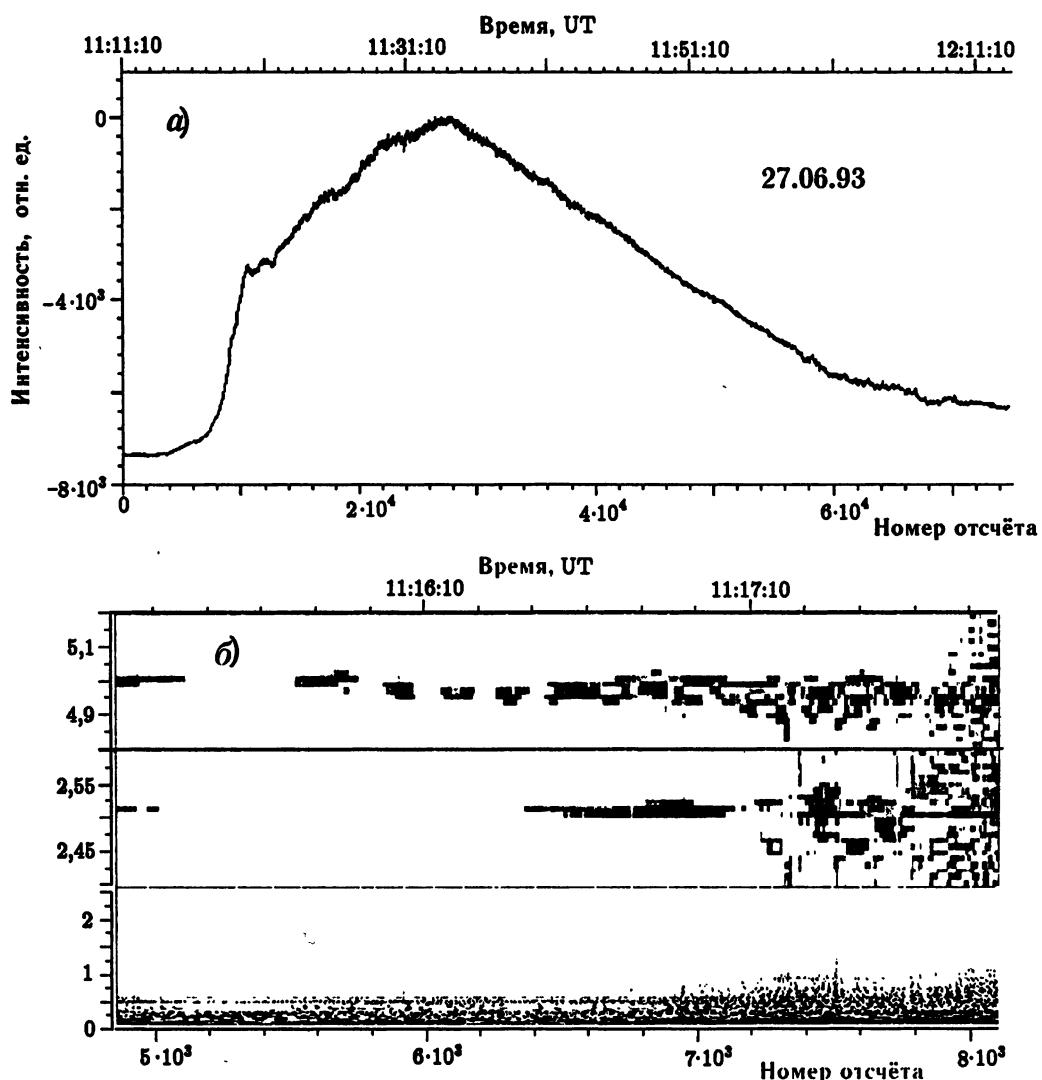


Рис. 6. Всплеск микроволнового излучения 27.06.93 (а) со спектральными линиями вблизи 2,5 и 5 Гц (б). Линии имеют сложную частотную структуру и меняющуюся интенсивность. Отношение средних частот линий меньше 2 и в фазе максимальной интенсивности составляет $\nu_5 / \nu_{2,5} \approx 1,96$

не менее, следует отметить, что при исследовании квазипериодических флюктуаций в микроволновом излучении активных областей, предпринятом в Крымской астрофизической обсерватории несколько лет назад (другой радиотелескоп и другие методики наблюдений и обработки данных), в спектре флюктуаций также была обнаружена отчётливая и очень мощная линия в полосе частот $4,7 \div 5,2$ Гц [49], которая не наблюдалась ни на краю солнечного диска, ни в радиоизлучении от участков невозмущённого Солнца.

4. ОБСУЖДЕНИЕ

С помощью метода Вигнера—Виля мы получили динамические спектры низкочастотной модуляции микроволнового радиоизлучения солнечных вспышек и обнаружили следующие её разновидности на частотах $0,5 \div 1,0$ Гц:

1) Дрейфующие по частоте со скоростью порядка 0,1 Гц/мин цуги низкочастотных волн длительностью от 100 до 200 с, периодически повторяющиеся в течение всего микроволнового всплеска (событие 19.05.90).

2) Узкополосные ЛЧМ сигналы с постоянно уменьшающейся частотой. За время жизни частота модуляции уменьшилась в несколько раз, при этом скорость частотного дрейфа $d\nu/dt = -1,5 \cdot 10^{-2}$ Гц/мин (событие 24.03.91).

3) Модуляция периодически повторяющейся последовательностью импульсов с частотой повторения, постепенно уменьшающейся по мере развития микроволнового всплеска (событие 10.06.93).

4) Спектральные линии вблизи частот 2,5 и 5 Гц, имеющие сложную частотно-временную структуру.

Особенности динамических спектров (регулярный дрейф, частотное расщепление, периодическая повторяемость цугов) в исследованных событиях вряд ли свидетельствуют о существенном влиянии флюктуаций поглощения атмосферы (см. в связи с этим [49, 50]).

Мы наблюдали также значительную модуляцию потока радиоизлучения на частотах $\nu < 0,1 \div 0,3$ Гц. Этот диапазон, однако, нуждается в специальном исследовании для идентификации характера динамических спектров.

Мы предполагаем, что одной из причин низкочастотной модуляции микроволнового излучения солнечных вспышек в диапазоне $0,5 \div 1,0$ Гц являются магнитогидродинамические колебания корональных магнитных петель, в которых это излучение возникает. В пользу этого свидетельствует высокая доброкачество наблюдаемых колебаний. Для исследованных нами событий она варьировалась от 200 до 4 000, что естественно для корональных магнитных петель как МГД резонаторов. Об этом же свидетельствуют и координаты всплеска 10.06.93, проецирующиеся на лимбовый локальный источник арочной структуры.

4.1. Собственные колебания корональных магнитных петель

Собственные колебания корональных магнитных петель можно в первом приближении исследовать на примере однородного плазменного цилиндра радиуса r и длины L , торцы которого вмороожены в плазму, что отражает вморооженность оснований корональных магнитных петель в фотосферу. Приближение однородного цилиндра справедливо в том случае, когда высота петли меньше характерного масштаба высоты солнечной атмосферы. Это приближение обычно выполняется для вспышечных магнитных петель.

Будем считать, что плазма внутри цилиндра характеризуется плотностью ρ_i , температурой T_i и магнитным полем B_i , направленным вдоль оси цилиндра. Вне цилиндра соответствующие параметры обозначим ρ_e , T_e и B_e . Тогда дисперсионное уравнение, связывающее частоту ω собственных колебаний цилиндра с компонентами волнового вектора k_{\parallel} и k_{\perp} соответственно вдоль и поперек оси цилиндра, имеет следующий вид [51]:

$$\frac{J'_m(\alpha_i r)}{J_m(\alpha_i r)} = \alpha \frac{H_m^{(1)\prime}(\alpha_e r)}{H_m^{(1)}(\alpha_e r)}. \quad (13)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\alpha^2 = \frac{\omega^4}{\omega^2(c_s^2 + c_A^2) - k_{\parallel}^2 c_s^2 c_A^2} - k_{\parallel}^2, \quad (14)$$

$$\alpha = \frac{\alpha_i \rho_i (\omega^2 - k_{\parallel}^2 c_{Ai}^2)}{\alpha_e \rho_e (\omega^2 - k_{\parallel}^2 c_{Ae}^2)}, \quad (15)$$

$c_s = (\gamma p / \rho)^{1/2}$ — скорость звука, p — давление плазмы, γ — показатель адиабаты, $c_A = B / \sqrt{4\pi\rho}$ — альфеновская скорость, J_m и $H_m^{(1)}$ — функции Бесселя и Ханкеля первого рода, штрих означает производную по аргументу. Продольное волновое число принимает дискретные значения

$$k_{\parallel} = s\pi/L, \quad (16)$$

где $s = 1, 2, 3, \dots$, что связано с вмороженностью торцов плазменного цилиндра.

В простейшем случае тонкого ($r/L \ll 1$) и достаточно плотного ($\rho_e/\rho_i \ll 1$) цилиндра для $m = 0$ (симметричные по азимутальному углу колебания) из дисперсионного уравнения (13) находим частоту быстрых и медленных магнитозвуковых колебаний:

$$\omega_+ = (k_{\perp}^2 + k_{\parallel}^2)^{1/2} (c_{si}^2 + c_{Ai}^2)^{1/2}, \quad (17)$$

$$\omega_- = \frac{k_{\parallel} c_{si} c_{Ai}}{(c_{si}^2 + c_{Ai}^2)^{1/2}}. \quad (18)$$

Поперечное волновое число даётся выражением $k_{\perp} = \lambda_i/r$, где коэффициенты λ_i являются нулями функции Бесселя: $J_0(\lambda_i) = 0$. Кроме того, в случае $m = 0$ существует альфеновская ветвь колебаний

$$\omega_A = k_{\parallel} c_A. \quad (19)$$

Быстрые магнитозвуковые колебания плазменного цилиндра могут испытывать заметное затухание, связанное с излучением волн в окружающую плазму. Декремент такого затухания равен [19]

$$\gamma_+ = \frac{\pi\omega_+}{2} \left(\frac{\rho_e}{\rho_i} - \frac{k_{\parallel}^2}{k_{\perp}^2} \right), \quad \frac{\rho_e}{\rho_i} > \frac{k_{\parallel}^2}{k_{\perp}^2}. \quad (20)$$

Затухание исчезает при $\rho_e/\rho_i < k_{\parallel}^2/k_{\perp}^2$. В этом случае имеет место полное внутреннее отражение, и плазменный цилиндр становится идеальным резонатором для быстрых магнитозвуковых волн.

Если $m \neq 0$, возникают изгибные колебания плазменного цилиндра (kink-мода). В простейшем случае $m = 1$ частота изгибных колебаний определяется формулой [52]

$$\omega_k = k_{\parallel} \left(\frac{\rho_i c_{Ai}^2 + \rho_e c_{Ae}^2}{\rho_i + \rho_e} \right)^{1/2}, \quad (21)$$

которая при $\rho_i \gg \rho_e$, $B_i \gtrsim B_e$ практически совпадает с частотой альфеновских колебаний (19). Декремент радиационного затухания изгибных волн в случае $\rho_i \gg \rho_e$ равен [52]

$$\gamma_k = \frac{\pi k_{\parallel}^2 r^2 \omega_k B_e^2}{2(B_e^2 + B_i^2)}. \quad (22)$$

Кроме того, корональная магнитная петля обладает свойствами глобального электрического контура [7]. Протекающий по ней ток $I = I_0 + I_{\sim}$ (переменная компонента тока мала по сравнению со стационарной, $|I_0| \gg |I_{\sim}|$) подчиняется уравнению

$$\frac{\bar{L}}{c^2} \frac{d^2 I_{\sim}}{dt^2} + \bar{R}(I_0) \frac{dI_{\sim}}{dt} + \frac{I_{\sim}}{\bar{C}(I_0)} = 0. \quad (23)$$

Здесь \bar{L} — индуктивность петли, связанная с её длиной L и радиусом r формулой [53]

$$\bar{L} = 4L \left(\ln \frac{8L}{\pi r} - \frac{7}{4} \right), \quad r \ll L, \quad (24)$$

$\bar{R}(I_0)$ — сопротивление петли, c — скорость света. Зависимость ёмкости петли $\bar{C}(I_0)$ от тока I_0 обусловлена тем, что в самосогласованной модели петли ёмкость зависит от альфвеновской скорости в петле и, следовательно, от магнитного поля, которое, в свою очередь, определяется величиной тока. Для условий солнечной короны

$$\frac{1}{\bar{C}} = \frac{I_0^2 L}{\pi c^4 r^4 \rho_i} \left[1 + \frac{B_z^2(r)}{B_\phi^2(r)} \right], \quad (25)$$

где $B_z(r)$ и $B_\phi(r)$ — продольная и азимутальная компоненты магнитного поля на поверхности петли. При $B_z(r) \approx B_\phi(r)$ получаем следующую частоту колебаний магнитной петли как эквивалентного электрического контура:

$$\omega_{LCR} = \frac{\sqrt{2} I_0}{(\ln 8L/\pi r - 7/4)^{1/2} \sqrt{4\pi \rho_i} cr^2}. \quad (26)$$

Эта частота уменьшается с уменьшением тока, текущего вдоль петли. По порядку величины ω_{LCR} совпадает с частотой быстрых магнитозвуковых колебаний, поскольку $I_0/(cr) \sim B_\phi$ и, следовательно, $\omega_{LCR} \sim c_{Ai}/r \sim \omega_+$. Осцилляции магнитной петли как эквивалентного LCR -контура отличаются весьма высокой добротностью $Q = 1/(c\bar{R})(\bar{C}/\bar{L})^{1/2}$, т. е. отношением времени затухания осцилляций к периоду. В условиях солнечной вспышки сопротивление контура $\bar{R} \approx 10^{-3} \div 10^{-4}$ Ом, поэтому $Q \approx 10^3 \div 10^4$ [7].

4.2. Анализ данных

Для идентификации наблюдаемых низкочастотных пульсаций зададимся средними параметрами вспышечных петель [20]. Примем для оценок концентрацию плазмы в петле $n \approx 5 \cdot 10^{10}$ см⁻³, температуру $T \approx 5 \cdot 10^6$ К, магнитное поле $B \approx 500$ Гс, длину и радиус петли $L \approx 5 \cdot 10^9$ см $r \approx 2 \cdot 10^8$ см. В результате получим следующие периоды низкочастотных пульсаций: период быстрых магнитозвуковых волн

$$T_+ = \frac{2\pi}{\omega_+} \approx 2,6 \frac{r}{c_{Ai}} \approx 2 \text{ с},$$

период LCR -моды

$$T_{LCR} = \frac{2\pi}{\omega_{LCR}} \approx T_+ \approx 2 \text{ с},$$

период альфвеновской и изгибной волн

$$T_A \approx T_k \approx \frac{2L}{\omega_A} \approx 20 \text{ с},$$

период медленных магнитозвуковых волн

$$T_- = \frac{2\pi}{\omega_-} = \frac{2L}{c_{si}} \approx 270 \text{ с}.$$

Из сравнения этих периодов с наблюдаемыми характеристиками низкочастотных пульсаций можно сделать следующие выводы.

В событии 19.05.90 цуги низкочастотных пульсаций с периодами $1,1 \div 1,6$ с и добротностью порядка 10^2 лучше всего соответствуют возбуждению в корональной магнитной петле быстрых магнитозвуковых колебаний. LCR -мода, имеющая приблизительно такие же периоды, характеризуется существенно большей добротностью (порядка $10^3 \div 10^4$), поэтому должна быть в данном случае исключена из рассмотрения. Одновременное возбуждение цугов быстрых магнитозвуковых волн в двух полосах

частот $0,6 \div 0,75$ Гц и $0,75 \div 0,90$ Гц может свидетельствовать о том, что данный вспышечный процесс развивался в двух взаимодействующих корональных магнитных петлях с близкими параметрами. Периодическая повторяемость цугов быстрых магнитозвуковых волн с периодами 287 и 205 с (соответственно в первом и втором частотном интервалах) соответствует модуляции медленными магнитозвуковыми волнами, которые, по-видимому, возбуждаются в корональных магнитных петлях одновременно с быстрыми магнитозвуковыми волнами.

Наблюдаемое в цугах волн частотное расщепление естественным образом объясняется возбуждением быстрых магнитозвуковых волн с двумя продольными волновыми числами, $k_{\parallel} = \pi/L$ и $k_{\parallel} = 2\pi/L$. Тогда из формулы (17) для частоты быстрых магнитозвуковых колебаний следует, что частотное расщепление определяется отношением радиуса петли к её длине:

$$\frac{\omega_+}{\omega_-} = \frac{3}{2} \left(\frac{\pi}{2,4} \right)^2 \left(\frac{r}{L} \right)^2. \quad (27)$$

Из формулы (27) для средней величины частотного расщепления $\delta\nu_+ \simeq 0,03$ Гц получаем $r/L \simeq 0,12$ и $r/L \simeq 0,11$ для частотных интервалов $0,6 \div 0,75$ Гц и $0,75 \div 0,90$ Гц соответственно.

Важную информацию об отношении β газокинетического давления к давлению магнитного поля в петле ($\beta = 8\pi n e_B T / B^2$, где e_B — постоянная Больцмана) можно получить, сопоставляя частоты медленных и быстрых магнитозвуковых колебаний в наблюдаемом событии. Действительно, из формул (17), (18) следует

$$\frac{\omega_-}{\omega_+} = \frac{\pi}{2,4} \sqrt{\frac{5}{3}} \frac{r\beta^{1/2}}{L}, \quad (28)$$

откуда $\beta \simeq 0,7 \cdot 10^{-3}$ для полосы частот $0,6 \div 0,75$ Гц и $\beta \simeq 10^{-3}$ для полосы $0,75 \div 0,90$ Гц. В обоих случаях отношение β достаточно мало, что свидетельствует о сильном магнитном поле внутри петель для данного события. Кстати, для усреднённых параметров вспышечной магнитной петли получаем достаточно близкое по порядку величины значение $\beta \simeq 3,4 \cdot 10^{-3}$.

Наконец, отсутствие сильного радиационного затухания быстрых магнитозвуковых колебаний в течение всего микроволнового всплеска даёт нам ограничение на отношение плотности плазмы вне и внутри магнитной трубы (см. формулу (20) для декремента):

$$\frac{\rho_e}{\rho_i} < \frac{k_{\parallel}^2}{k_{\perp}^2} = \left(\frac{\pi}{2,4} \right) \frac{r^2}{L^2}. \quad (29)$$

Это даёт оценку $\rho_e/\rho_i \lesssim 2,5 \cdot 10^{-2}$ для диапазона $0,6 \div 0,75$ Гц и $\rho_e/\rho_i \lesssim 2 \cdot 10^{-2}$ для диапазона $0,75 \div 0,90$ Гц. Плазма внутри корональных петель является существенно более плотной по сравнению с окружающей плазмой. Полученный результат вписывается в общее представление о том, что корональные магнитные петли содержат в себе значительную часть вещества короны.

Таким образом, в случае события 19.05.90 динамические спектры низкочастотных пульсаций, модулирующих микроволновое излучение вспышек, позволяют сделать ряд важных выводов о свойствах вспышечных корональных петель.

В событии 24.03.91 мы, по-видимому, впервые наблюдали предсказанные в работе [7] собственные колебания корональной магнитной петли как эквивалентного электрического контура. Эти колебания имеют частоту порядка 1 Гц, высокую добротность порядка 10^3 и характеризуются постепенным уменьшением частоты по мере развития вспышечного процесса, что в рамках формулы (26) естественно объясняется диссициацией электрического тока в магнитной петле во время вспышки. Формула (26) позволяет оценить электрический ток, текущий вдоль вспышечной магнитной петли. Полагая $n \simeq 5 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$ и $r \simeq 2 \cdot 10^8 \text{ см}$, из (26) получаем значение периода модуляции $T_{LCR} = 2\pi/\omega_{LCR} \simeq 30/I_{11}$, где $I_{11} = 10^{-11} I_0 \text{ А}$. Принимая в качестве среднего значения периода модуляции

в событии 24.03.91 $T_{LCR} \simeq 2$ с, получим ток $I_0 = 1,5 \cdot 10^{12}$ А. В работе [54] А. Б. Северный, используя данные магнитографа, определил ток в активной области на уровне фотосферы также в пределах $10^{11} \div 10^{12}$ А.

Событие 24.03.91 показывает, что во время вспышки ток в петле уменьшается приблизительно в 4 раза. При этом выделяется запасённая в контуре энергия $\mathcal{E} = \bar{L}I_0^2/(2c^2) \simeq 6 \cdot 10^{31}$ эрг электрического тока, сравнимая с энергией крупной вспышки, что является дополнительным аргументом в пользу интерпретации ЛЧМ сигнала, наблюдавшегося во время всплеска 24.03.91, как LCR -колебаний корональной магнитной петли с током.

В событии 10.06.93, показывающем модуляцию интенсивности микроволнового излучения периодической последовательностью импульсов с периодом 1 с, как и в событии 24.03.91, наблюдается постепенное уменьшение частоты модуляции по мере развития вспышки. Мы считаем, что в данном случае происходит периодическое ускорение электронов в корональной магнитной петле с периодом, определяемым LCR -колебаниями эквивалентного электрического контура и постепенно возрастающим по мере диссиpации тока в магнитной петле. При гиросинхротронном механизме радиоизлучения, характерном для микроволновых всплесков, периодическое впрыскивание быстрых электронов в излучающий объём эквивалентно модуляции периодической системой импульсов. Один из возможных механизмов ускорения электронов в магнитной петле, связанный с колебаниями эквивалентного LCR -контура, был рассмотрен в работе [55].

4.3. Выводы

1. Применение преобразования Вигнера—Виля для спектрально-временного анализа низкочастотных флуктуаций микроволнового излучения солнечных вспышек позволило впервые получить динамические спектры флуктуаций и идентифицировать их как собственные МГД колебания корональных магнитных петель.

2. Характер динамических спектров свидетельствует о том, что во время солнечных вспышек в корональных магнитных петлях возбуждаются быстрые и медленные магнитозвуковые колебания с периодами $1 \div 1,5$ с и $200 \div 280$ с соответственно, а также собственные колебания корональной магнитной петли как эквивалентного электрического контура (с характерным периодом порядка 1 с). Кроме того, обнаружена модуляция интенсивности микроволнового излучения вспышек периодическими последовательностями импульсов с периодами $1 \div 2$ с, что может свидетельствовать о периодическом ускорении электронов во время солнечных вспышек.

3. Параметры динамических спектров позволили получить важную информацию о параметрах вспышечных магнитных петель, в частности об отношении радиуса петли к её длине ($r/L \simeq 0,1$), отношении давления плазмы к давлению магнитного поля ($\beta \simeq (3 \div 4) \cdot 10^{-3}$), отношении плотностей плазмы вне и внутри петли ($\rho_e/\rho_i \lesssim 2 \cdot 10^{-2}$), а также об электрическом токе, протекающем вдоль магнитной петли ($I_0 \simeq 10^{11} \div 10^{12}$ А).

Работа была поддержана грантом РФФИ, проект № 99–02–18244 (В.В.З.), а также грантом CRDF RPO-841 (А.Г.К.). Авторы выражают благодарность Ю. П. Лебедеву, создавшему первый вариант программы частотно-временного анализа по методу Вигнера—Виля, и В. Е. Шапошникову за обсуждение и помощь при выполнении работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hagues M. P., Harkness R. L. // *Astrophys. J.* 1963. V. 138. P. 239.
2. de Groot T., van Nieuwkoop J. // *Solar Physics*. 1968. V. 4. P. 322.

3. Philip K. W. // Astron. J. 1968. V. 73. P. S197.
4. Wild J. P. // Proceedings of Conf. on Plasma Instabilities in Astrophysics. California, Oct. 1968. P. 119.
5. McLean D. J., Sheridan K. W., Stewart R. T. // Nature. 1971. V. 234. P. 140.
6. McLean D. J., Sheridan K. W. // Solar Physics. 1973. V. 32. P. 485.
7. Zaitsev V. V., Stepanov A. V., Urpo S., Pohjolainen S. // Astron. Astrophys. 1998. V. 337. P. 887.
8. Slottje C. // Nature. 1978. V. 275. P. 520.
9. Kaufmann P., Strauss F. M., Opher R., Laporte // Astron. Astrophys. 1980. V. 87. P. 58.
10. Zhao R. [Chao Jen-yang] // Solar Maximum Year. COSPAR Symp. No. 7, Ottawa, May 1982. Adv. Space Res. 1983. No 11. P. 177.
11. van Beek H. F., de Feiter L. D., de Jager C. // Space Res. 1974. V. 14. P. 447.
12. Hoyng P., Brown J. C., van Beek H. F. // Solar Physics. 1976. V. 48. P. 197.
13. Hoyng P., Mochado M. E., Duijvenan A. // Astrophys. J. Lett. 1981. V. 244. P. 153.
14. Mullan D. J., Herr R. B., Bhattachayya S. // Astrophys. J. 1982. V. 391. P. 265.
15. Bastian T. S., Bookbinder J., Dulk G., Davis M. // Astrophys. J. 1990. V. 353. P. 265.
16. Bastian T. S. // Solar Physics. 1990. V. 130. P. 265.
17. Zaitsev V. V., Stepanov F. V., Sterlin A. M. // Sov. Astron. Lett. 1985. V. 11, No 3. P. 192.
18. Rosenberg H. // Astron. Astrophys. 1970. V. 9. P. 159.
19. Meerson B. I., Sasorov P. V., Stepanov A. V. // Solar Physics. 1978. V. 58. P. 165.
20. Bray R. J., Gram L. E., Durrant C. J., Longhead R. E. // Plasma loops in the solar corona. Cambridge Univ. Press, 1991.
21. Zaitsev V. V., Stepanov A. V. // Sov. Astron. Lett. 1982. V. 8, No 2. P. 132.
22. Зайцев В. В., Степанов А. В. // Письма в Астрон. журн. 1983. Т. 15, № 2. С. 154.
23. Розенкраух Ю. М., Степанов А. В. // Астрон. журн. 1993. Т. 65. С. 300.
24. Степанов А. В., Цап Ю. П. // Астрон. журн. 1998. Т. 70. С. 895.
25. Chungsheng L., Zhihai Q., Qijnn F. // IAU Coll. 141. Beijing. China. 1992. P. 99.
26. Stepanov A. V., Urpo S., Zaitsev V. V. // Solar Physics. 1992. V. 140. P. 139.
27. Cliver E. W., Hurst M. D., Welfer F. L., Bleiweiss M. P. // Solar Physics. 1976. V. 48. P. 307.
28. Mongeney A., Pick M. // Astron. Astrophys. 1989. V. 224. P. 242.
29. Zhao R. Y., Mongeney A., Pick M. // Astron. Astrophys. 1991. V. 241. P. 183.
30. Trottets G., Kerdraon A., Benz A. O., Treumann R. // Astron. Astrophys. 1981. V. 93. P. 129.
31. Aschwanden M. J., Benz A. O., Montello M. // Astrophys. J. 1994. V. 431. P. 432.
32. Aschwanden M. J., Benz A. O., Dennis B. R., Kundu M. R. // Astrophys. J. Suppl. 1994. V. 90. P. 631.
33. Kurths J., Herzel H. // Solar Physics. 1986. V. 107. P. 39.
34. Kurths J., Karlicky M. // Solar Physics. 1989. V. 119. P. 399.
35. Kurths J., Benz A. O., Aschwanden M. J. // Astron. Astrophys. 1991. V. 248. P. 270.
36. Isliker H., Bentz A. O. // Astron. Astrophys. 1994. V. 285. P. 663.
37. Kurths J., Schwarz U., Witt A. // Lecture Notes in Physics. 1995. V. 444. P. 159.
38. Schwarz U., Kurths J., Kliem B., Krüger, Urpo S. // Astrophys. J. Suppl. 1998. V. 127. P. 309.
39. Schwarz U., Benz A. O., Kurths J., Witt A. // Astron. Astrophys. 1993. V. 277. P. 215.
40. Коэн Л. // ТИИЭР. 1989. Т. 77. С. 72.
41. Bouachahche B. // Soc. Nat. ELE Aquitaine. Pan. France. Publ. Recherches, 1978. P. 373.
42. Imberger J., Bcashash // J. Phys. Oceanology. 1986. V. 16. P. 1997.
43. Mazinovic N. M., Smith W. A. // Proc. 1986 IEEE Int. Symp. Circuits and System. 1986. P. 50.
44. Gabor D. // Theory of communication. J. IEE. London, 1946, V. 93. P. 429.
45. Вудворд Ф. М. Теория вероятностей и теория информации с применениемами в радиолокации. М.: Сов. Радио, 1955.

46. Ville J. // Cables and Transmission. 1948. V. 2A. P. 61.
47. Wigner E. P. // Phys. Rev. 1932. V. 40. P. 749.
48. Urpo S., Pohjolainen S., Teräsranta H. // Solar Observations at Metsähovi in 1993. Helsinki Univ. of Technology, 1994. Series A. Report 16. P. 46.
49. Кисляков А. Г., Носов В. Н., Цветков Л. И. // Кинематика и физика небесных тел. 1990. Т. 6. С. 36.
50. Зинченко И. И., Кисляков А. Г. // Труды I Всесоюзной школы-симпозиума по распространению миллиметровых волн в атмосфере. М.: Наука, 1983. С. 310.
51. Зайцев В. В., Степанов А. В. // Исследования по геомагнитизму, аэрономии и физике Солнца. 1975. Вып. 37. С. 3.
52. Копылова Ю. Г., Цап Ю. Г. // Астрон. журн. (в печати).
53. Alfven H., Carlqvist P. // Solar Physics. 1967. V. 1. P. 120.
54. Severny A. B. // Space Sci. Rev. 1965. P. 451.
55. Zaitsev V. V. // Proc. VII Russian-Finnish Symp. on Radioastronomy. St. Petersburg, 1999. P. 59.

¹ Институт прикладной физики РАН, г. Н. Новгород, Россия

Поступила в редакцию

14 июня 2000 г.

² Нижегородский госуниверситет, г. Н. Новгород, Россия

³ Главная астрономическая обсерватория РАН,

г. С.-Петербург, Россия

⁴ Радиоастрономическая обсерватория Метсахови, Финляндия

LOW-FREQUENCY PULSATIONS OF CORONAL MAGNETIC LOOPS

V. V. Zaitsev, A. G. Kislyakov, A. V. Stepanov, S. Urpo, and E. I. Shkelev

We analyze low-frequency intensity fluctuations of the microwave emission from solar flares at frequencies 22 and 37 GHz. The three microwave bursts of durations of about 1 h, observed at the Metsähovi Radio Observatory (Finland) with the time resolution of 0.1 and 0.05 s, are studied. To obtain spectral-temporal characteristics of the low-frequency fluctuations, we apply the Wigner–Ville method, i.e., the time-lag Fourier transformation of the “local” autocorrelation function of an analytical signal. As a result, we obtain for the first time the dynamical spectra of the low-frequency fluctuations, which are identified as MHD eigenoscillations of coronal magnetic loops. The features of the dynamical spectra evidence for the fact that several types of low-frequency pulsations are excited in coronal magnetic loops during solar flares: 1) Fast and slow magnetosonic oscillations with periods of 1–1.5 s and 200÷280 s, respectively. Fast magnetosonic oscillations appear as pulse trains of a duration of 100–200 s and have the positive frequency drift $d\nu/dt \approx 0.125$ Hz/min and the frequency splitting $\delta\nu \approx 0.05$ Hz; 2) The eigenoscillations of a coronal magnetic loop as an equivalent electric circuit. The period of these oscillations is about 1 s during the initial stage of a microwave burst and increases gradually up to 4 s during the decay stage of the radio emission; and 3) Intensity modulation of the microwave radiation by a periodic pulse sequence of a period of about 1 s at the burst onset and about 2 s at its end. The parameters of the dynamical spectra and identification of the MHD pulsations allow us to obtain information on the loop parameters, such as the ratio of the loop radius to its length ($r/L \approx 0.1$), the ratio of the gas pressure to the magnetic-field pressure inside the loop ($\beta \approx 3 \cdot 10^{-3}$), the ratio of plasma densities outside and inside the loop, and the electric current in the coronal loop ($I \approx 1.5 \cdot 10^{12}$ A).

УДК 523.9

О ПРЕОБЛАДАНИИ ОБЫКНОВЕННОЙ ВОЛНЫ В МИКРОВОЛНОВОМ ИЗЛУЧЕНИИ АКТИВНЫХ ОБЛАСТЕЙ НА СОЛНЦЕ

Е. Я. Злотник

Предложена интерпретация наблюдений микроволнового излучения активных областей (z -компоненты) на Солнце, поляризованного с соответствующим обыкновенной волне знаком. Как правило, в излучении областей, связанных с солнечными пятнами, преобладает необыкновенная волна, что полностью объясняется общепринятой теорией происхождения z -компоненты, основанной на циклотронном и тормозном механизмах излучения тепловых электронов в неоднородной плазме в атмосфере над солнечным пятном, где магнитное поле уменьшается, а кинетическая температура увеличивается с высотой. В настоящей работе показано, что наиболее вероятной причиной появления поляризации, соответствующей обыкновенной волне, является наличие в атмосфере над пятном области с отрицательным градиентом температуры. Рассмотрена качественная зависимость яркостной температуры и поляризации излучения от частоты для областей, содержащих горячие или холодные (по сравнению с окружающей плазмой) волокна, и возможные причины инверсии знака поляризации на некоторой частоте. Особое внимание удалено активной области NOAA 4741 с униполярным пятном, описанным в работах [1, 2]. Обсуждаются критерии, позволяющие судить о том, какой из двух эффектов — линейное взаимодействие волн в квазипоперечном магнитном поле или наличие области с отрицательным градиентом температуры — отвечает за инверсию знака поляризации z -компоненты.

1. Как известно, радиоизлучение локальных источников, связанных с солнечными пятнами, имеет круговую поляризацию в сантиметровом диапазоне длин волн, причём знак поляризации соответствует необыкновенной волне, и не поляризовано при длинах волн больше $10 \div 15$ см (см., например, [3–5]). Это легко объяснить в рамках общепринятого циклотронного (или тормозного) механизма излучения тепловых электронов, действующего в магнитоактивной плазме в атмосфере над пятном, где магнитное поле спадает с высотой, а кинетическая температура нарастает от хромосферных до корональных значений. При этом микроволновое излучение на частоте f возникает в тонких гирорезонансных слоях, в которых выполняется условие $f = sf_B$ ($f_B = eB/(2\pi mc)$ — электронная гирочастота, B — величина магнитного поля, e и m — модуль заряда и масса электрона, c — скорость света, s — номер гармоники) [6].

Согласно качественным представлениям, которые хорошо подтверждаются многочисленными модельными расчётами [7–13], необыкновенная волна генерируется в основном в оптически толстом слое $z = 3$, а обыкновенная — на оптически толстом уровне $z = 2$. Это связано с тем, что оптическая толщина гирорезонансных слоёв, во-первых, уменьшается с ростом z и, во-вторых, при равных условиях она больше для необыкновенной волны, чем для обыкновенной. Отсюда легко получить качественный частотный спектр излучения стандартного источника z -компоненты (см. рис. 1): на низких частотах, соответствующих слабым магнитным полям, гирорезонансные уровни располагаются в короне, и яркостная температура обеих мод равна корональной; с увеличением частоты излучающие уровни опускаются в более холодную плазму переходного слоя, при этом уровень $z = 3$, ответственный за необыкновенную волну, расположен выше в атмосфере, чем слой $z = 2$, излучающий обыкновенную моду, что при положительном градиенте температуры приводит к поляризации со знаком необыкновенной волны в интервале частот $2f_{B_0} < f < 3f_{B_0}$, где f_{B_0} — гирочастота, соответствующая магнитному полю в основании короны. Отметим, что преобладание необыкновенной волны сохраняется и в том случае, если излучающий слой является оптически тонким.

2. Из вышеизложенного следует, что в стандартных условиях в атмосфере над пятнами трудно ожидать в микроволновом излучении локальных источников поляризацию со знаком обыкновенной волны. Тем не менее в ряде случаев она была зарегистрирована, и ниже рассмотрены возможные причины

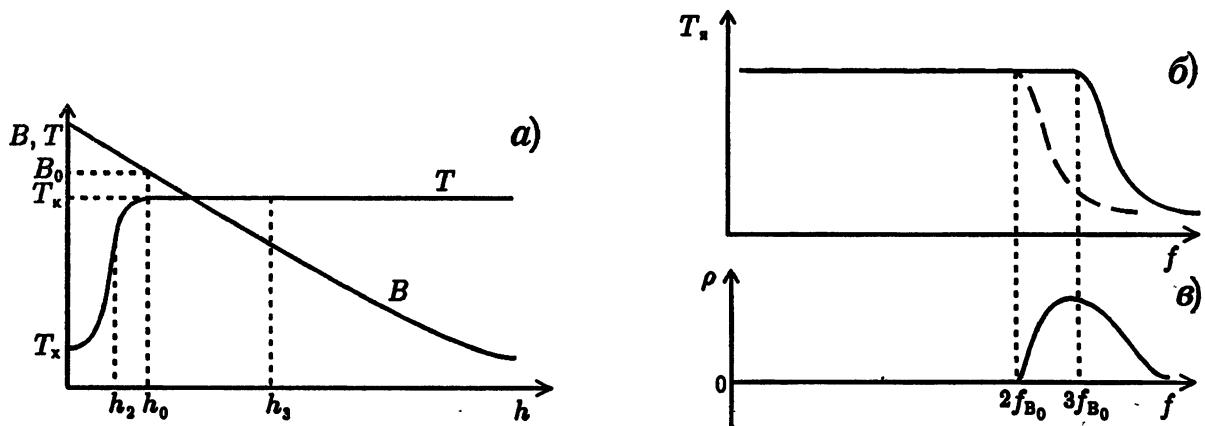


Рис. 1. Модель стандартного источника z -компоненты: а — изменение магнитного поля B и кинетической температуры T с высотой h от температуры T_x хромосферы до коронального значения T_k (h_0 — нижняя граница короны, B_0 — магнитное поле на этом уровне; h_2 и h_3 — высоты, на которых расположены гирорезонансные уровни $s = 2$ и $s = 3$ соответственно); б — зависимость яркостной температуры T_b излучения от частоты f ; сплошная линия — необыкновенная волна, пунктир — обыкновенная волна; в — зависимость степени круговой поляризации ρ от частоты f (здесь и ниже $\rho > 0$ и $\rho < 0$ соответствуют поляризации со знаком необыкновенной и обыкновенной волн)

преобладания обыкновенной волны в источниках микроволнового излучения над солнечными пятнами [14–16].

Необходимо оговориться, что установить тип моды из наблюдений не всегда просто. Обычно это делается, исходя из полярности соответствующего пятна на фотосфере. Однако структура групп пятен бывает довольно сложной и часто не допускает однозначного соответствия с направлением круговой поляризации радиоизлучения. Кроме того, поляризация излучения в источнике и поляризация, регистрируемая на Земле, могут не совпадать из-за изменения её на трассе распространения в солнечной короне вследствие хорошо известного эффекта линейного взаимодействия волн в областях нарушения приближения геометрической оптики, например, в поперечном магнитном поле. Эти трудности хорошо известны наблюдателям, тем не менее в литературе описаны несколько случаев надёжной регистрации поляризации, соответствующей обычной волне в источнике излучения. Один из таких примеров — наблюдения Кунду и Алиссандракиса [17], которые на двумерной карте активной области, полученной при наблюдениях на радиотелескопе WSRT на длине волны 6 см, обнаружили «острова» поляризации со знаком обычной волны. Второй пример, который мы обсудим более подробно, описан в работах [1, 2].

Авторы [1, 2] получили одномерные распределения радиояркости по источнику в двух противоположных поляризациях при наблюдениях на 10-ти разных длинах волн микроволнового диапазона, используя antennную систему OVRO (см. рис. 2). Источник располагался над изолированным униполярным пятном, расположенным почти в центре солнечного диска, поэтому идентифицировать тип волны было нетрудно. Из сопоставления с полярностью пятна на фотосфере был сделан вывод о том, что на высоких частотах преобладает необыкновенное излучение, а на низких частотах в центре источника просматривается обыкновенная волна.

3. Возвращаясь к стандартному источнику z -компоненты, приведённому на рис. 1, повторим ещё раз, что в рамках рассмотренной выше модели распределения физических параметров вряд ли можно объяснить преобладание обыкновенной моды в излучении. Но допустим, что где-то в атмосфере температура короны начинает уменьшаться с высотой (рис. 3). Тогда в области отрицательного градиента кинетическая температура на уровне $s = 2$ будет выше, чем на уровне $s = 3$, и обыкновенная волна на частотах, соответствующих магнитному полю на этих высотах, будет превалировать. Следовательно,

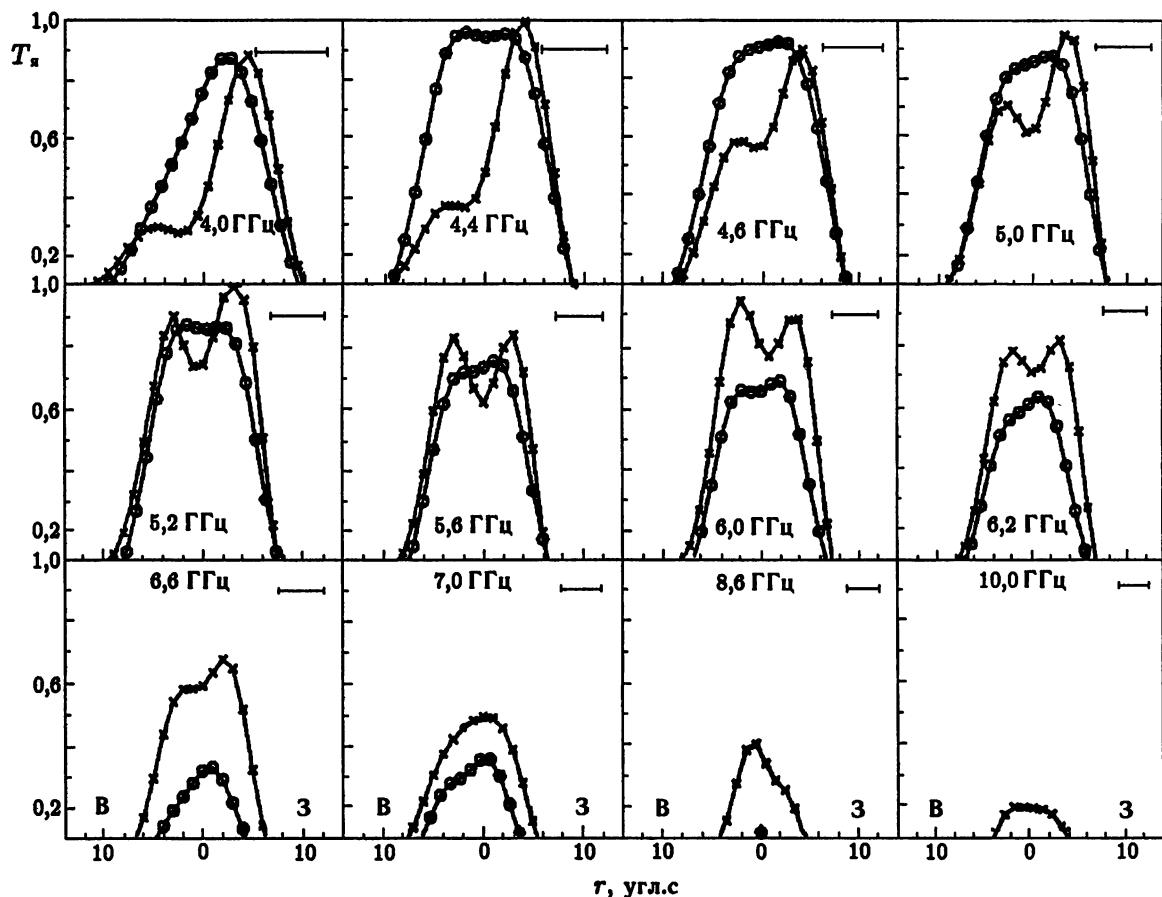


Рис. 2. Одномерные распределения радиояркости по источнику NOAA 4741, полученные Ли, Харфордом и Гэри 2 августа 1986 г. на 10 частотах [1]. Яркостная температура T_y нормализована на максимальное значение $1,2 \cdot 10^6$ К, r — угловое расстояние от центра пятна в восточно-западном направлении, крестики и кружки соответствуют левой (необыкновенной) и правой (обыкновенной) поляризациям. Ширина лепестка диаграммы направленности антенны показана в правом верхнем углу для каждой частоты

в этом случае низкочастотная часть спектра поляризована со знаком обычной волны, а на высоких частотах преобладает необыкновенное излучение. Таким образом, наличие области с отрицательным градиентом температуры вполне объясняет появление поляризации со знаком обычной волны.

Поскольку яркостные температуры обычной и необыкновенной волн (и, соответственно, поляризация радиоизлучения) определяются относительным изменением магнитного поля и кинетической температуры, на первый взгляд может показаться, что преобладание обычной волны может иметь место и в том случае, когда кинетическая температура, как в стандартном источнике, растёт с высотой, а магнитное поле в группе пятен сложной конфигурации увеличивается в некотором интервале высот (рис. 4). Действительно, в магнитном поле, нарастающем с высотой, гирорезонансный уровень $s = 3$, ответственный за необыкновенную волну, расположен на меньших высотах h_3 , чем уровень h_2 , в окрестности которого генерируется обыкновенная мода. При положительном градиенте кинетической температуры по высоте это означает превалирование обычного излучения на выходе из слоя с возрастающим магнитным полем. Однако выше в короне магнитное поле неизбежно начнёт уменьшаться с высотой, т. е. на луче зрения ещё раз встретятся гирорезонансные уровни $s = 2, 3$. При усло-

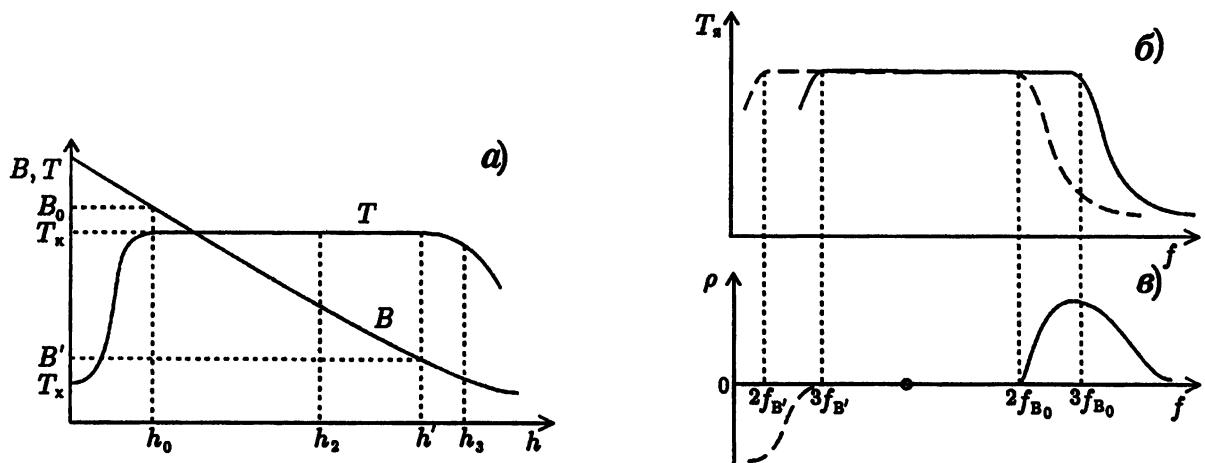


Рис. 3. Модель источника s -компоненты с кинетической температурой, уменьшающейся с высотой; обозначения те же, что на рис. 1. С высоты h' температура короны начинает уменьшаться

вии, что они являются оптически толстыми, падающее на них снизу излучение, поляризованное со знаком обычной волны, полностью поглотится, а результирующее излучение, покидающее корону, будет, как в стандартном источнике, поляризовано со знаком необыкновенной волны или не поляризовано ($T(h_3) \geq T(h_2)$).

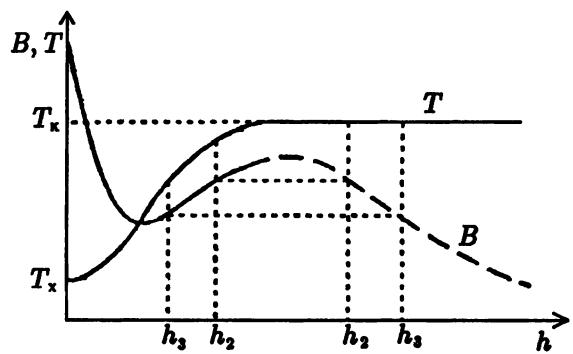


Рис. 4. Модель источника с магнитным полем, распространяющимся в некотором интервале высот

Следовательно, наличие участка с возрастающим магнитным полем не может привести к преобладанию обычной волны в результирующем излучении активной области, и, таким образом, наиболее вероятной причиной появления поляризации, соответствующей преимущественной генерации в источнике обычной волны, является существование на луче зрения области с отрицательным градиентом температуры.

Допустим теперь, что на луче зрения встречается горячее волокно или корональная петля (рис. 5). Если область повышенной по сравнению с окружающей корональной плазмой температуры занимает достаточно узкий интервал высот, так что изменение

гироскорости в ней мало по сравнению с самой гироскоростью ($\Delta f_B \ll f_{B_t}$, где B_t — магнитное поле в петле), то в результирующем спектре можно ожидать появления узких циклотронных линий, которые подробно обсуждались в работах [18–20]. В зависимости от параметров петли и условий распространения радиоволн (главным образом, от угла между магнитным полем и направлением распространения волны) излучение в линиях, соответствующих разным гармоникам, может быть по-разному поляризованным. Например, в [19] рассмотрен случай, когда частотный спектр наблюдаемого излучения из корональной петли содержит циклотронные линии $2f_{B_t}, 3f_{B_t}$, причем вторая линия поляризована как обычная волна. Это соответствует таким параметрам петли, когда оба излучающих гирорезонансных слоя являются оптически толстыми при высокой температуре внутри петли. Излучение на гармонике $s = 3$ свободно проходит через корону без заметного поглощения в вышележащих слоях (поэтому излучение в ней неполяризовано или слабо поляризовано со знаком необыкновенной волны). То же самое справедливо и для обычной компоненты на второй гармонике, поскольку ее поглощение в слоях $f = 3f_B$, лежащих выше горячей петли, несущественно. Однако необыкновенное

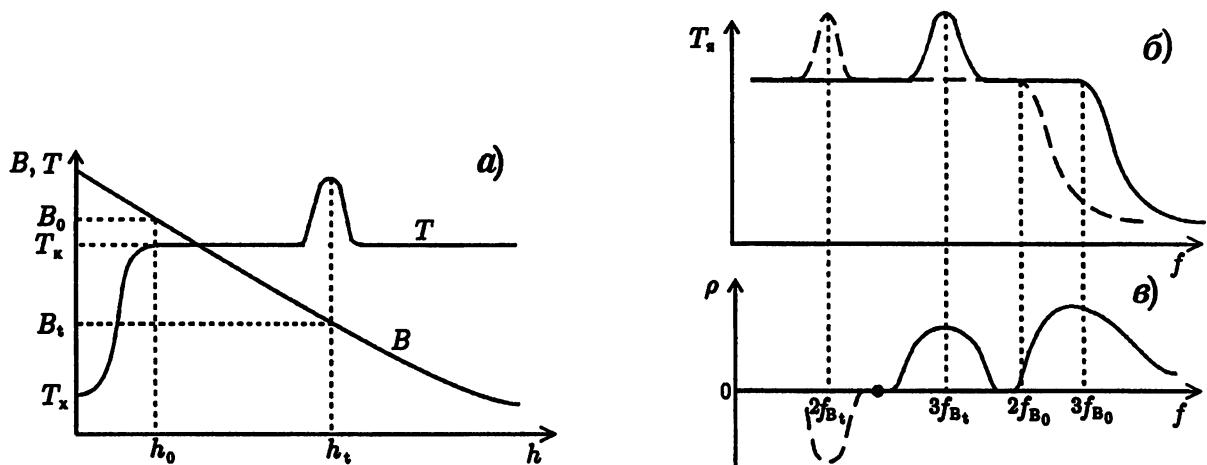


Рис. 5. Модель источника с горячей корональной петлёй на луче зрения: а — изменение магнитного поля и кинетической температуры с высотой (B_t — магнитное поле на уровне h_t петли); б — частотный спектр излучения (сплошная линия — необыкновенная волна, пунктир — обыкновенная волна); в — зависимость поляризации от частоты

излучение в линии $f = 2f_{B_t}$ не выходит из короны из-за эффективного поглощения на уровне $f = 2f_B$, расположенном над корональной петлёй, поэтому в результирующем излучении, наблюдаемом на Земле, должна регистрироваться поляризация, соответствующая обыкновенной волне.

В случае толстого волокна, когда $\Delta f_B > f_{B_t}$, отдельные циклотронные линии могут перекрываться, однако в частотной зависимости степени поляризации будут аналогичные показанным на рис. 5 смены знака поляризации.

Отметим ещё раз, что рассматриваемая поляризационная картина в зависимости от параметров петли, окружающей плазму и угла между направлением магнитного поля и распространения волны может быть различной [20]. В частности, если температуры на уровнях, с которых выходит обыкновенное и необыкновенное излучение, одинаковы, а сами уровни являются оптически толстыми, то излучение будет неполяризованным. Именно такой случай был зарегистрирован в наблюдениях на радиотелескопе РАТАН-600 [21]: циклотронная линия, соответствующая третьей гармонике гирочастоты, содержала неполяризованное излучение.

В случае, если на луче зрения расположено холодное волокно (с понижением температуры по сравнению с окружающей плазмой), то в противоположность рис. 5 преобладание обыкновенной и необыкновенной волн будет на высоких и низких частотах соответственно, поэтому инверсия поляризации будет иметь место на двух частотах — при переходе от второй гармоники к третьей и при переходе к частотам, соответствующим переходному от хромосферы к короне слою. Указанный эффект (наряду с зависимостью яркостной температуры от частоты) может служить индикатором наличия холодного волокна на луче зрения.

Подчеркнём ещё раз, что соответствующая обыкновенной волне поляризация в излучении источника, содержащего горячее или холодное волокно, обязана своим происхождением тому факту, что луч зрения пересекает область с отрицательным градиентом кинетической температуры.

4. Вернёмся теперь к спектрам статьи [1, 2], авторы которой обратили внимание на существование структуры с провалом яркостной температуры в центре источника и привели два возможных объяснения этого явления. Первое из них основано на эффекте повышенной прозрачности гирорезонансных слоёв при распространении радиоволн почти вдоль магнитного поля (напомним, что оптическая толщина гирорезонансного слоя с номером s зависит от угла α между магнитным полем и направлением распространения волны приблизительно как $\tau_s \propto \sin^{2s-2} \alpha (1 \pm \cos \alpha)^2$, где верхний и нижний знаки

соответствуют необыкновенной и обычновенной волнам [3]). Этот эффект приводит к возникновению кольцеобразной или подковообразной структуры униполярного источника [7, 8, 22]. В пользу такого объяснения свидетельствует исчезновение минимума в центре при перемещении источника к лимбу.

Вторым объяснением наблюдаемой структуры может служить существование над пятном холодной материи, которая вызывает понижение яркостной температуры. Авторы [1, 2] не отдали предпочтения ни одному из этих механизмов, утверждая, что на основании одних только радионаблюдений невозможно сделать правильный выбор. Однако если кольцеобразная структура обусловлена только понижением коэффициента циклотронного излучения при $\alpha \rightarrow 0$, то в «окне прозрачности» поляризация не может соответствовать обычновенной волне. С другой стороны, представим себе, что на некоторой высоте температура короны начинает по каким-то причинам уменьшаться. Тогда кинетическая температура на уровне слоя $z = 2$ будет выше, чем в области третьего гирорезонансного уровня, и, соответственно, обычновенная волна будет превалировать. Следовательно, в этом случае излучение в низкочастотной части спектра может быть поляризовано со знаком обычновенной волны, а на высоких частотах может преобладать необыкновенное излучение. Именно преобладание обычновенного излучения на некоторых профилях рис. 2 указывает на то, что наблюданная структура не может быть объяснена эффектом прозрачности гирорезонансных уровней при распространении вдоль магнитного поля, и полученные распределения поляризованного излучения с большой вероятностью свидетельствуют о существовании холодного волокна над пятном.

На рис. 6 схематически изображено строение источника, объясняющее наблюдаемые профили яркостной температуры. Магнитное поле моделируется, следя [1, 2], вертикальным диполем, погружённым под фотосферу на 11 000 км с напряжённостью поля на уровне фотосферы 2 400 Гс. Ниже 2 000 км температура достаточно низка, затем она возрастает. В центре на высоте 5 000 км расположен холодный элемент, так что начиная с этого уровня температура уменьшается с высотой. Соответственно, на высокой частоте $f = 8,6$ ГГц, для которой третий уровень $z = 3$ находится в горячей области, а второй расположен ещё в переходной области, наблюдается только необыкновенное излучение с одним максимумом (см. соответствующее распределение на рис. 6). С уменьшением частоты гирорезонансные уровни перемещаются выше, и если уменьшение температуры начинается с высоты 5 000 км, то верхушка уровня $z = 3$ на частоте 6 ГГц попадает в более холодные слои. Поэтому в необыкновенном излучении наблюдается провал в центре источника, а обычновенное излучение имеет обычное одногорбое распределение по источнику. Далее с уменьшением частоты депрессия в центре источника необыкновенной моды увеличивается ещё больше, и на частотах ниже 5,5 ГГц появляется излучение с преобладанием обычновенной моды. На частоте $f = 4$ ГГц обычновенная волна также обнаруживает кольцевую структуру, поскольку и уровень $z = 2$ на этой частоте находится внутри холодного элемента. Наблюдения [1, 2] позволили проследить изменение структуры источника при его перемещении от центра солнечного диска к лимбу. Как оказалось, преобладание обычновенной моды имеет место только для источника, расположенного достаточно близко к плоскости центрального меридiana. Исчезновение депрессии в центре при приближении к лимбу согласуется с обеими возможными причинами появления кольцеобразной структуры — эффектом прозрачности и существованием холодной материи над пятном. Однако преобладание обычновенного излучения в центре источника, несомненно, свидетельствует об отрицательном градиенте температуры и, следовательно, наличии холодного элемента над пятном.

5. В заключение отметим, что до недавнего времени инверсия знака поляризации на некоторой частоте в солнечном радиоизлучении связывалась главным образом с изменением знака проекции магнитного поля на луч зрения на трассе распространения радиоволн в короне, нарушением приближения геометрической оптики в этих областях и эффектом линейного взаимодействия радиоволн [3, 4]. Однако изменение знака круговой поляризации может быть вызвано не только условиями распространения, но и различной интенсивностью генерации обычновенных и необыкновенных волн в источнике излу-

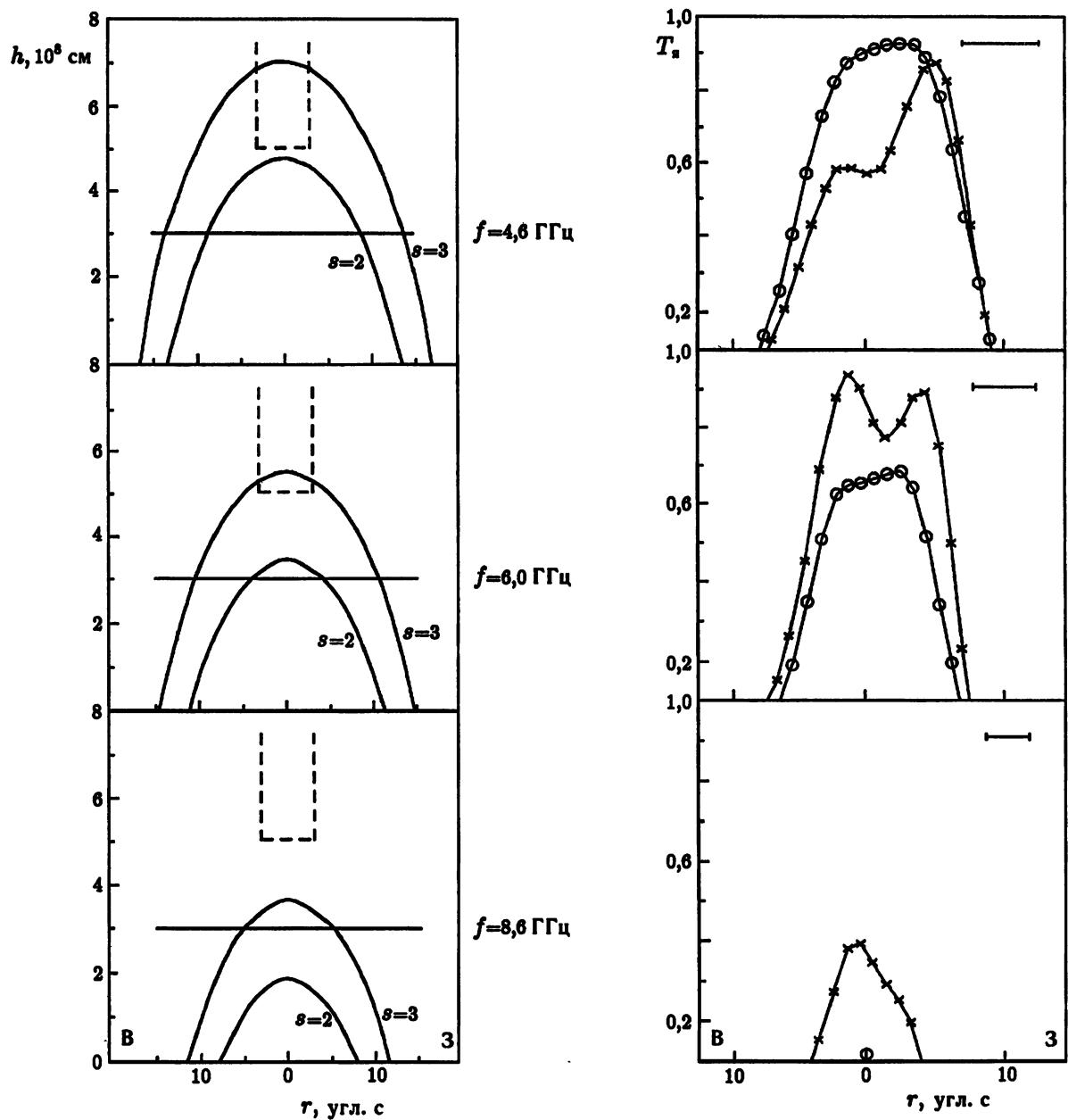


Рис. 6. Схематическое строение источника, описанного на рис. 2. Слева — относительное положение гирорезонансных уровней, границы между хромосферой и короной и границы холодного волокна (показана пунктиром), наличие которого необходимо для объяснения преобладания обыкновенной волны в излучении центральной части источника на частотах меньше 6 ГГц; справа показаны наблюдаемые профили на соответствующих частотах. Нормировка яркостной температуры T_x и обозначения те же, что и на рис. 2

чения. В частности, как показано выше, если гирорезонансные уровни, ответственные за циклотронное излучение на фиксированной частоте, расположены в области отрицательного градиента температуры, то на такой частоте ожидаемая яркостная температура необыкновенного излучения окажется ниже соответствующих значений для обыкновенной волны. Таким образом, в некоторой частотной полосе, соответствующей интервалу высот с отрицательным градиентом температуры, знак поляризации будет

противоположным тому, который ожидается вне этого интервала, что и приводит к явлению инверсии поляризации, аналогично результату линейного взаимодействия волн в поперечном магнитном поле.

На первый взгляд, две приведённые выше причины инверсии поляризации — преимущественная генерация разного типа волн на разных частотах в источнике или изменение соотношения между ними в процессе распространения радиоволн в неоднородном магнитном поле короны — трудно различимы по результатам наблюдений. Однако при достаточно полном наборе наблюдательных данных существуют признаки, по которым можно отличить указанные эффекты.

Первый из них состоит в том, что область в короне, где температура вдоль луча зрения спадает по высоте, занимает ограниченный интервал высот, поэтому инверсия поляризации должна происходить, по крайней мере, два раза (или чётное число раз, если на луче зрения встречается несколько петель): на высоких и низких частотах, соответствующих росту температуры с высотой в короне, преобладает необыкновенная волна, а в центральной части интервала, соответствующей отрицательному градиенту температуры, поляризация соответствует обыкновенной волне. В то же время линейное взаимодействие волн в поперечном магнитном поле приводит, вероятнее всего, к однократной смене знака поляризации на некоторой частоте, поскольку из геометрических соображений многократное пересечение магнитного поля под прямым углом маловероятно.

Второе различие связано с тем, что при инверсии, обусловленной эффектом распространения, полная степень поляризации при распространении волны сохраняется, и в интервале в окрестности частоты, где степень круговой поляризации стремится к нулю и меняет знак, возникает линейно поляризованное излучение, поскольку две противоположно вращающиеся компоненты при этом когерентны. Если же разные знаки вращения на различных частотах обусловлены самим источником микроволнового излучения, то на частотах, близких к частоте инверсии, излучение изначально неполяризовано. Отметим, что регистрация линейной поляризации солнечного микроволнового излучения сталкивается со значительными трудностями, хотя отдельные случаи описаны в литературе [23].

Наконец, важным фактором, позволяющим сделать правильный вывод о причинах инверсии поляризации, является геометрия источника с учётом магнитных полей на уровне фотосферы и изменения поляризационных характеристик радиоисточника при его перемещении по гелиографической долготе. В частности, в биполярном источнике z -компоненты, зарегистрированном радиотелескопом РАТАН-600 12–20 мая 1996 г. [24], у которого поляризация меняла знак в обеих компонентах биполярной группы на одинаковой частоте (причём эта частота инверсии не менялась в течение нескольких дней наблюдений), именно геометрический фактор и постоянство частоты инверсии при изменении гелиографической долготы свидетельствуют о том, что наиболее вероятной причиной происхождения инверсии поляризации является существование области с отрицательным градиентом температуры в атмосфере над наблюданной активной областью [20]. Что касается источника, изображённого на рис. 2 и 6 [1, 2], который был расположен над униполярным симметричным пятном, то преобладание обыкновенного излучения в центральной его части с большой степенью достоверности свидетельствует о том, что причиной инверсии поляризации является наличие холодной плазмы в атмосфере над пятном.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 01–02–17252).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lee J. W., Hurford G. J., Gary D. E. // Solar Phys. 1993. V. 144. P. 45.
2. Lee J. W., Hurford G. J., Gary D. E. // Solar Phys. 1993. V. 144. P. 349.
3. Железняков В. В. Радиоизлучение Солнца и планет. М.: Наука, 1964.
4. Железняков В. В. Излучение в астрофизической плазме. М.: Янус-К, 1977.
5. Крюгер А. Солнечная радиоастрономия и радиофизика. М.: Мир, 1984.
6. Железняков В. В. // Астрон. ж. 1962. Т. 39. С. 5.

7. Злотник Е. Я. // Астрон. ж. 1968. Т. 45. С. 310.
8. Злотник Е. Я. // Астрон. ж. 1968. Т. 45. С. 585.
9. Lantos P. // Ann. Astrophys. 1968. V. 31. P. 105.
10. Лившиц М. А., Обридко В. Н., Пикельнер С. Б. // Астрон. ж. 1966. Т. 43. С. 1135.
11. Strong K. T., Alissandrakis C. E., Kundu M. R. // Astrophys. J. 1984. V. 277. P. 865.
12. Krüger A., Hildebrandt J., Fürstenberg F. // Astron. Astrophys. 1985. V. 143. P. 72.
13. Злотник Е. Я., Кунду М. Р., Уайт С. М. // Изв. вузов. Радиофизика. 1996. Т. 39. С. 372.
14. Zlotnik E. Ya. // Abstracts of CESRA Workshop "Coronal Magnetic Energy Releases", 1994, Caputh—Potsdam. P. 84.
15. Zlotnik E. Ya., Kundu M. R., White S. M. // Abstracts of 2nd "Advances in Solar Physics" Euroconference, 1997, Preveza, Greece. P. 15.
16. Злотник Е. Я. // Труды Международной конференции «Солнце в максимуме активности и солнечно-звездные аналогии», 2000, ГАО, Санкт-Петербург. С. 121.
17. Kundu M. R., Alissandrakis C. E. // Solar Phys. 1984. V. 94. P. 249.
18. Zheleznyakov V. V., Zlotnik E. Ya. // Radio Physics of the Sun (IAU Symp. No. 86). /Eds. Kundu and Gergely. Dordrecht: Reidel Publ. Comp. P. 87.
19. Железняков В. В., Злотник Е. Я. // Астрон. ж. 1980. Т. 57. С. 778.
20. Zlotnik E. Ya. // Proc. 9th European Meeting on Solar Physics "Magnetic Fields and Solar Processes", 1999, Florence, ESA SP-448. P. 1239.
21. Богод В. М., Гарaimов В. И., Железняков В. В., Злотник Е. Я. // Астрон. ж. 2000. Т. 77. С. 313.
22. Гельфрейх Г. Б., Лубышев Б. И. // Астрон. ж. 1979. Т. 56. С. 562.
23. Alissandrakis C. E., Chiuderi-Drago F. // Astrophys. J. Lett. 1994. V. 428. P. L73.
24. Alissandrakis C. E., Gizani N., Bogod V., Garaimov V., Gelfreikh G., Zheleznyakov V., Zlotnik E. // Proc. 9th European Meeting on Solar Physics "Magnetic Fields and Solar Processes", 1999, Florence, ESA SP-448. P. 1225.

Институт прикладной физики РАН,
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию
5 февраля 2001 г.

PREVALENCE OF THE ORDINARY MODE IN MICROWAVE RADIO EMISSION FROM SOLAR ACTIVE REGIONS

E. Ya. Zlotnik

We propose an interpretation of some observations of the ordinary (o) mode in microwave emission of slowly-varying (s) radio sources related to active regions in the solar atmosphere. As a rule, the extraordinary (e) mode dominates in the s-component, which is fully explained by the generally accepted theory of its origin. This theory is based on the thermal cyclotron and bremsstrahlung mechanisms of radiation of thermal electrons in an inhomogeneous plasma of the solar atmosphere above sunspots, where the magnetic field decreases and the kinetic temperature increases with height. It is shown in this work that the prevalence of the ordinary mode is due most probably to the presence of a region with a negative gradient of kinetic temperature in the atmosphere above the sunspot. We analyze the qualitative frequency dependences of the brightness temperature and polarization of the radiation of a hot and cold (compared to the ambient plasma) filament in the s-component source, as well as the possible reasons for the polarization inversion at a certain frequency. The special attention is paid to the active region NOAA 4741 with the unipolar sunspot described in [1, 2]. Criteria permitting to judge which of two effects (linear wave coupling or presence of a region with a negative temperature gradient) is responsible for the o-mode in the s-component are discussed.

УДК 523.45-77:52-64

НОВЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ РАДИОАСТРОНОМИЧЕСКОЙ ДИАГНОСТИКИ МАГНИТОСФЕРЫ ЮПИТЕРА ПО НАБЛЮДАЕМОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ ДЕКАМЕТРОВОГО РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ

B. E. Шапошников

Обсуждаются возможности диагностики магнитосферы Юпитера по результатам измерений поляризационных характеристик декаметрового радиоизлучения. Показано, что существенно эллиптический характер поляризации излучения и генерация этого излучения на частотах, близких к локальной электронной гирочастоте, открывают новые возможности для радиоастрономической диагностики магнитосферы Юпитера. Оказывается возможным исследование распределения плазмы не только вдоль трассы распространения излучения, но и по-перёк к ней, в широтном направлении. Кроме того, определённая стабильность относительного расположения источника и наблюдателя в течение декаметровой шумовой бури и вращение планеты дают возможность осуществить томографию магнитосферы — её диагностику на разных долготах. Приведены примеры диагностики разных участков магнитосферы Юпитера: источников декаметрового радиоизлучения, т. е. участков нижней магнитосферы, находящихся на расстоянии примерно $(1,5 \div 2) R_J$ от центра планеты, и плазменного тора Ио, находящегося на расстоянии около $6 R_J$ от центра планеты. Установлено, что вблизи источников декаметрового излучения концентрация магнитосферной плазмы вне магнитной трубы Ио мала (на высоте гирорезонансного уровня $f_{Be} \approx 30$ МГц концентрация $n \lesssim 1 \text{ см}^{-3}$), а в самой трубке концентрация плазмы выше: на высоте, соответствующей указанному гирорезонансному уровню, концентрация $n \gtrsim 3 \text{ см}^{-3}$. Даны оценка изменения концентрации плазмы вдоль магнитной трубы Ио: $n \propto B'$, $\nu \approx 1 \div 1,8$. В плазменном торе Ио найдена скорость изменения интегральной концентрации плазмы в широтном направлении $d(\int n dz)/dh \approx 2 \cdot 10^3 \text{ см}^{-3}$ и средняя концентрация плазмы в области пересечения тора Ио излучением $\langle n \rangle \approx 2 \cdot 10^3 \text{ см}^{-3}$.

ВВЕДЕНИЕ

Решение проблемы формирования поляризационных характеристик принимаемого излучения космических объектов является одним из основных факторов, необходимых для понимания происходящих на них процессов. Эти характеристики формируются как в самом источнике, так и в процессе распространения излучения от источника к наблюдателю.

Наблюданное декаметровое радиоизлучение Юпитера почти полностью поляризовано. В абсолютном большинстве случаев это излучение имеет большую степень линейной поляризации $\rho_L \approx 0,50 \div 0,87$ во всей полосе частот $10 \div 38$ МГц, измеряемую наземными станциями [1]. Согласно современным представлениям (см, например, [2, 3]) декаметровое излучение генерируется в нижней магнитосфере Юпитера в виде электромагнитных волн, соответствующих необыкновенной моде на частотах f , близких к локальной электронной гирочастоте f_{Be} , $\sqrt{u} = f_{Be}/f \approx 1$. Поэтому в неоднородном магнитном поле Юпитера высота источника над поверхностью планеты и положение соответствующей этому источнику траектории распространения излучения оказываются напрямую связанными с частотой излучения.

Факт наблюдения эллиптически поляризованного излучения указывает на то, что декаметровое радиоизлучение генерируется почти перпендикулярно силовым линиям магнитного поля планеты, и вблизи источника, где поляризация геометрооптических мод ещё близка к линейной, приближение геометрической оптики нарушается и имеет место линейное взаимодействие мод. В этой области концентрация магнитосферной плазмы n достаточно низка, $v = f_{Pe}^2/f^2 \ll 1$, где f_{Pe} — плазменная частота электронов, и взаимодействие реализуется как переход от геометрооптического описания распространения излучения к вакуумному в условиях достаточно сильной анизотропии ($\sqrt{u} \sim 1$). Последнее означает,

что линейное взаимодействие электромагнитных волн проявляется как эффект предельной поляризации во внутренней магнитосфере Юпитера [4].

Линейному взаимодействию электромагнитных мод в неоднородной магнитоактивной плазме посвящено большое количество работ. Существенный вклад в создание теории линейного взаимодействия был сделан В. В. Железняковым и его коллегами (см. [5, 6] и цитированную там литературу). В этих работах, в частности, было показано, что количественной характеристикой эффективности линейного взаимодействия и степени эллиптичности поляризации излучения, прошедшего через область взаимодействия, является отношение G_0 скорости изменения разности фаз между необыкновенной и обыкновенной модами к скорости изменения поляризации этих мод в некоторой точке Q_0 переходной области (ПО). Переходная область представляет собой часть пути распространения излучения с частотой f , где параметры среды удовлетворяют условию $|\sqrt{u} \sin^2 \theta / [2(1 - v) \cos \theta]| \sim 1$ (здесь θ — угол между магнитным полем и направлением распространения излучения). Существенную информацию об условиях в области линейного взаимодействия можно получить из анализа частотной зависимости эллипса поляризации излучения. Так, например, в [6] было показано, что в разреженной ($v = f_{Pe}^2/f^2 \ll 1$) и слабо анизотропной ($\sqrt{u} = f_{Be}/f \ll 1$) плазме при распространении излучения почти поперёк магнитного поля ($\theta \approx \pi/2$) параметр G_0 и, следовательно, эллиптичность поляризации излучения меняются с частотой как f^{-4} , в то время как при распространении под углами, отличными от $\pi/2$, поляризация не зависит от частоты. Существенным моментом в развитой теории является то обстоятельство, что излучение на разных частотах распространяется вдоль одной и той же траектории (точнее, в одинаковых условиях). Поэтому характер частотной зависимости эллиптичности поляризации излучения определяется только значениями параметров среды f_{Pe} , f_{Be} и θ в одной точке Q_0 . Особенность генерации декаметрового радиоизлучения, а именно связь между частотой излучения и локальной гирочастотой в области генерации, приводит к тому, что вариация эллиптичности поляризации излучения с частотой зависит здесь ещё от изменения f_{Pe} , f_{Be} и θ в направлении, почти ортогональном направлению распространения излучения [4, 7].

Отмеченная здесь особенность генерации и распространения декаметрового радиоизлучения в магнитосфере Юпитера накладывает свой отпечаток на характер зависимости наблюдаемого позиционного угла эллипса поляризации от частоты. Дело в том, что вакуумное описание распространения декаметрового радиоизлучения в магнитосфере Юпитера, которое справедливо за областью линейного взаимодействия, сменяется вновь геометрооптическим описанием. Это происходит при пересечении излучением плазменного тора Ио, находящегося от источника на расстоянии примерно $6R_J$, где R_J — радиус Юпитера, и характеризующегося повышенной концентрацией плазмы [8]. В плазменном торе Ио согласно законам геометрической оптики эллиптически поляризованное декаметровое радиоизлучение можно представить в виде суперпозиции когерентных между собой, но независимо распространяющихся (каждая со своим показателем преломления) необыкновенных и обыкновенных волн. Изменение сдвига фаз между этими волнами вдоль направления распространения приводит к изменению результирующего эллипса поляризации. За исключением очень небольшого интервала углов, близких к $\pi/2$, при пересечении тора Ио реализуются условия квазипродольного распространения. При квазипродольном распространении изменение сдвига фаз между обыкновенной и необыкновенной волнами сводится к хорошо известному, можно сказать классическому, эффекту Фарадея — вращению эллипса поляризации в процессе распространения. Согласно теории эффекта Фарадея [6] при квазипродольном (QL) распространении в разреженной ($v = f_{Pe}^2/f^2 \ll 1$) и слабо анизотропной ($\sqrt{u} = f_{Be}/f \ll 1$) плазме изменение ориентации эллипса обратно пропорционально квадрату частоты излучения: $\Omega \simeq C/f^2$. Здесь Ω — угол поворота эллипса поляризации, коэффициент пропорциональности C не зависит от частоты и является интегральной характеристикой параметров плазмы f_{Pe} , f_{Be} и θ вдоль трассы распространения излучения. Изменение высоты источника и соответствующего ему пути распространения декаметрового излучения приводит к появлению зависимости коэффициента C

от частоты f . Причём изменение C с частотой отражает изменение параметров плазмы в направлении, ортогональном к трассе распространения излучения [8].

Диагностика параметров магнитосферной плазмы Юпитера по данным наблюдений поляризационных характеристик его декаметрового радиоизлучения имеет давнюю историю. Ещё в 1964 году была опубликована работа [9], в которой приводятся результаты измерений фарадеевского вращения эллипса поляризации декаметрового радиоизлучения Юпитера, полученных в обсерватории Боулдер (Boulder). По результатам этих измерений было установлено, что средняя концентрация электронов вдоль пути распространения излучения в магнитосфере Юпитера меньше 10 см^{-3} . Оценки концентрации плазмы в магнитосфере Юпитера по результатам измерений фарадеевского вращения эллипса поляризации декаметрового излучения проводились в дальнейшем и в других работах (см., например, [8, 10–12]). Основная трудность при такой оценке концентрации плазмы вдоль пути распространения излучения заключается в разделении вклада земной ионосферы и магнитосферы Юпитера в наблюдаемое наземными станциями вращение эллипса поляризации. Дело в том, что основной вклад в поворот эллипса поляризации даёт фарадеевское вращение в ионосфере Земли. Оценки концентрации плазмы в магнитосфере Юпитера по измерениям формы эллипса поляризации декаметрового излучения, основанные на теории линейного взаимодействия, были сделаны, например, в работах [4, 7, 13–15]. Было найдено, что концентрация плазмы в нижней магнитосфере Юпитера вдоль пути распространения излучения $n \simeq 1 \div 5 \text{ см}^{-3}$.

В следующем разделе мы более детально рассмотрим влияние особенности генерации и распространения декаметрового радиоизлучения в юпитерианской магнитосфере на формирование его поляризационных характеристик и обсудим те новые возможности, которые открываются благодаря этому для радиоастрономической диагностики магнитосферы Юпитера. Мы покажем, что измерение поляризационных характеристик декаметрового радиоизлучения даёт возможность исследовать плазму не только вдоль пути распространения, но и в направлении, ортогональном этому пути.

1. ГЕНЕРАЦИЯ И РАСПРОСТРАНЕНИЕ ДЕКАМЕТРОВОГО РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ В МАГНИТОСФЕРЕ ЮПИТЕРА

Для изучения условий генерации и распространения декаметрового радиоизлучения выделим в магнитосфере области, которые существенны для формирования его поляризационных характеристик. На рис. 1 схематически выделены три такие области вдоль пути распространения излучения в магнитосфере Юпитера: 1) область, в которой генерируется излучение данной шумовой бури, т. е. область источников (И). Эта область располагается в нижней магнитосфере на расстоянии примерно $(1,2 \div 1,5) R_J$ от центра планеты; 2) область, в которой нарушаются условия приближения геометрической оптики (НГО) и происходит формирование наблюдаемого эллипса поляризации излучения, т. е. область линейного взаимодействия (ЛВ) излучения данной шумовой бури. Вообще говоря, область нарушения геометрической оптики может включать в себя и область источников; 3) плазменный тор Ио, где вновь выполняется приближение геометрической оптики (ГО) и происходит вращение эллипса поляризации, вызванное эффектом Фарадея (ФВ). Эта область располагается на расстоянии примерно $6R_J$ от центра планеты. Между областью линейного взаимодействия и плазменным тором Ио излучение распространяется без изменения поляризации, подчиняясь законам вакуумного приближения (ВП).

1.1. Генерация декаметрового радиоизлучения

В настоящее время считается общепринятым, что декаметровое радиоизлучение Юпитера генерируется почти поперёк магнитного поля (выполнены условия квазиперечного (QT) распространения)

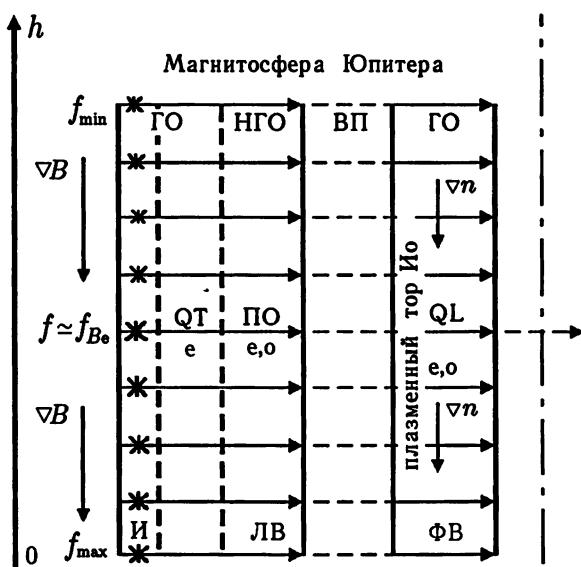


Рис. 1. Схематическое представление областей магнитосферы Юпитера, существенных для формирования поляризационных характеристик декаметрового радиоизлучения; *e* и *o* — соответственно необыкновенная и обыкновенная моды

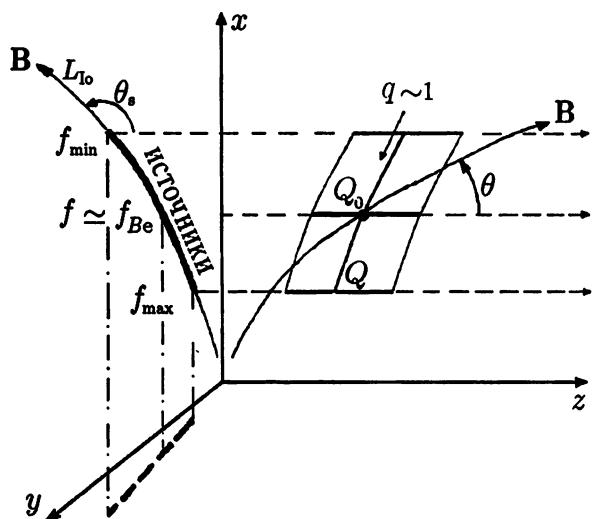


Рис. 2. Схематическое представление расположения источников и соответствующих им переходных областей в дипольном магнитном поле; *L_{Io}* — магнитная оболочка, проходящая через спутник Ио; ось *z* направлена вдоль лучевой траектории

источниками, лежащими на магнитных оболочках, проходящих через спутник Ио. Излучение генерируется на частотах, близких к локальной электронной гирочастоте, $f \approx f_{Be}$. Это приводит к тому, что в неоднородном магнитном поле высота источника над поверхностью планеты связана с частотой излучения (см. рис. 2). Шумовая буря декаметрового радиоизлучения, длительность которой может достигать нескольких часов, одновременно может наблюдаться в широком интервале частот. Иногда это весь диапазон (приблизительно 10–38 МГц), измеряемый наземными станциями. Более того, благодаря наблюдениям на спутнике «Wind» для некоторых всплесков удалось показать, что их частотный интервал может простираться вплоть до 3–4 МГц [16, 17]. На рис. 3 приведён пример динамического спектра декаметрового радиоизлучения от источника Ио-А, наблюдавшийся 2 ноября 1988 года [18]. Поскольку источники излучения, на различных частотах f располагаются вдоль магнитных силовых линий на высотах, соответствующих гирорезонансным уровням $f_{Be} \approx f$, то широкий частотный спектр декаметрового всплеска, например 10–38 МГц, означает, что область генерации имеет большие размеры по высоте (в данном случае это почти $0,5R_J$).

1.2. Линейное взаимодействие декаметрового радиоизлучения

Значительная эллиптичность поляризации декаметрового радиоизлучения указывает на то, что вблизи источника или даже в самом источнике приближение геометрической оптики нарушается и имеет место линейное взаимодействие электромагнитных волн. Вблизи источника это нарушение происходит благодаря малости параметра $v = f_{Pe}^2/f^2$, и за областью линейного взаимодействия волны распространяются как в вакууме. В этих условиях изменение поляризации вдоль пути распространения излучения описывается уравнением [5, 6]:

$$\frac{dP(\eta)}{d\eta} = i(P^2 - 1) + 2iG(\eta)P(\eta), \quad (1)$$

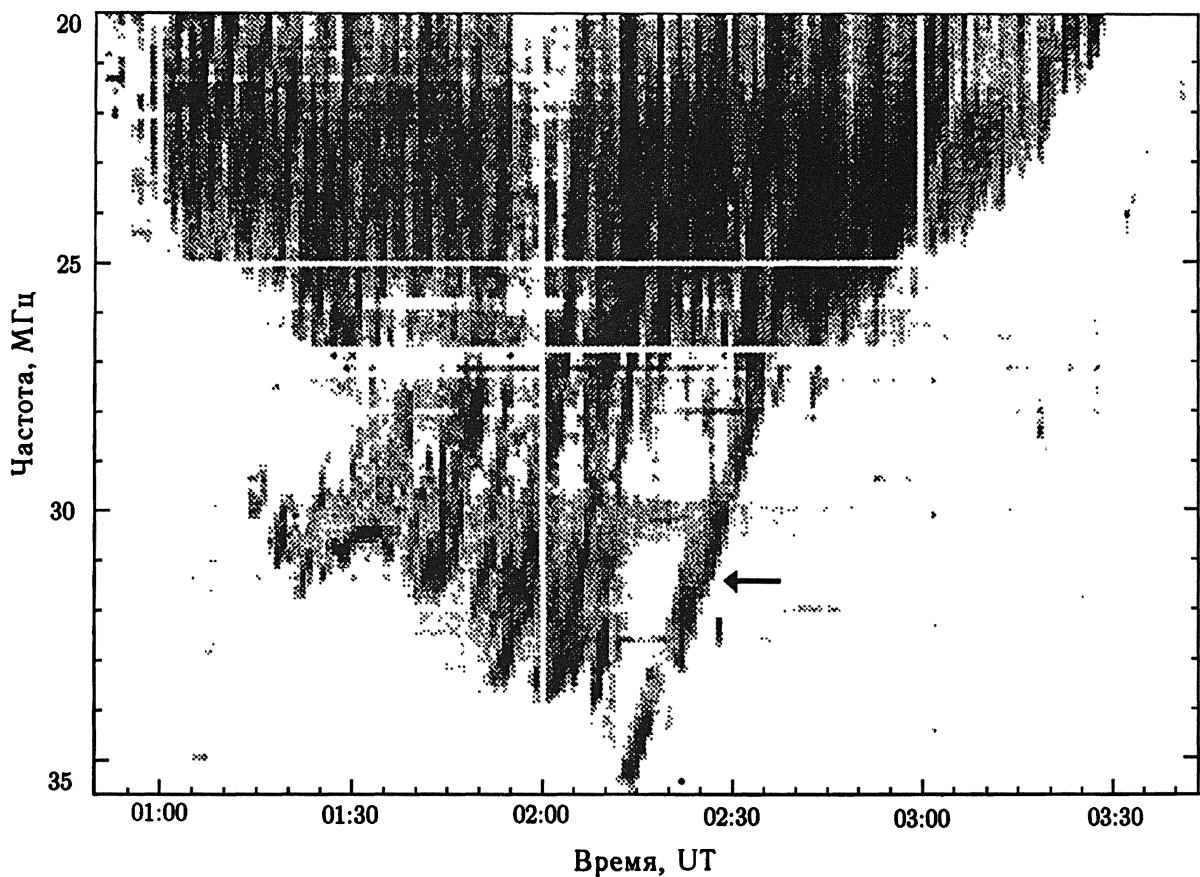


Рис. 3. Динамический спектр декаметрового излучения от источника Ио-А, полученный 2 ноября 1988 г.
Стрелкой показана тонкая структура всплеска типа «гигантской арки»

где $P(\eta)$ — функция, связанная с эллиптичностью T — отношением осей эллипса поляризации — соотношением

$$T = \frac{P - i \left(\sqrt{1 + q^2} - q \right)}{i + P \left(\sqrt{1 + q^2} - q \right)}, \quad (2)$$

функция $G(\eta)$ представляет собой отношение скорости изменения разности фаз между необыкновенной и обычновенной модами к скорости изменения поляризации этих мод:

$$G = \frac{2\pi f (n_e - n_o) (1 + q^2)}{c dq/dz}, \quad (3)$$

η — координата, связанная с координатой z вдоль пути распространения излучения соотношением

$$\eta = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} q, \quad (4)$$

$n_{e,o}$ — коэффициенты преломления необыкновенной (е) и обычновенной (о) мод, c — скорость света в вакууме, параметр q определяется соотношением

$$q = \frac{\sqrt{u} \sin^2 \theta}{2(1-v) \cos \theta}. \quad (5)$$

Из уравнения (1) нетрудно видеть, что поляризация наблюдаемого излучения полностью определяется начальными условиями (поляризацией в точке генерации) и изменением функции G вдоль пути распространения излучения. Однако согласно теории линейного взаимодействия [6] определяющее влияние на формирование наблюданной поляризации оказывают значения функции G из так называемой переходной области (ПО), положение которой на луче определяется условием $|q| \sim 1$. Поляризация нормальных волн в этой области эллиптическая. Согласно [6], если изменения функции G внутри ПО меньше самой функции или сравнимы с ней, то эффективность трансформации и параметры эллипса поляризации полностью определяются параметром взаимодействия G_0 , который является значением функции G в некоторой фиксированной точке ПО. Поскольку эта область обязательно включает в себя точку Q_0 , в которой $|q| = 1$, то G_0 определяют как

$$G_0 = |G| \Big|_{|q|=1}. \quad (6)$$

Из определения параметра взаимодействия G_0 видно, что он является некоторой функцией концентрации n магнитосферной плазмы, планетарного магнитного поля B и угла θ , взятых в точке Q_0 : $n = n(Q_0)$, $B = B(Q_0)$, $\theta = \theta(Q_0)$, а также частоты излучения f . Детальные расчёты, проведённые в работе [15] показали, что зависимостью от угла θ в выражении для параметра взаимодействия G_0 можно пренебречь, за исключением частного случая, когда переходная область включает в себя и сам источник излучения. Поскольку высота источника излучения на частоте f над поверхностью планеты и соответствующему ему луча определяется этой частотой, то координаты точки Q_0 также оказываются функцией частоты f (см. рис. 2). Таким образом, в каждый фиксированный момент времени точки Q_0 образуют в магнитосфере Юпитера кривую (кривая Q на рис. 2), а изменение поляризации излучения с частотой отражает вариацию величины магнитного поля и концентрации плазмы вдоль этой кривой. Эта особенность поляризации декаметрового радиоизлучения открывает возможность радиоастрономической томографии нижней магнитосферы Юпитера. Действительно, зависимость n и B в выражении для параметра взаимодействия от частоты f позволяет представить G_0 как функцию либо только двух параметров n и B , либо частоты f :

$$G_0 = \Phi(n, B) = \Psi(f). \quad (7)$$

Знание зависимости поляризации наблюдаемого излучения от частоты в фиксированный момент времени даёт возможность установить связь между магнитным полем B и концентрацией магнитосферной плазмы n в определённой области магнитосферы. Вращение планеты приводит к тому, что декаметровое излучение «просвечивает» различные области магнитосферы, и временные вариации поляризации излучения отражают зависимость параметров магнитосферы от долготы. Магнитное поле Юпитера на высотах порядка $1,5R_J$, соответствующих локализации переходных областей для декаметровых шумовых бурь, изучено достаточно хорошо. Современные модели магнитного поля, например О4 или О6 [19], дают хорошее описание магнитного поля на этих и больших высотах. Распределение плазмы здесь известно намного хуже. Таким образом, как видно из (7), наблюдение поляризации декаметрового радиоизлучения и его временных и частотных вариаций позволит провести диагностику плазмы нижней магнитосферы Юпитера.

1.3. Фарадеевское вращение эллипса поляризации излучения в плазменном торе Ио

На расстоянии порядка $5R_J$ от источника декаметровое радиоизлучение встречает на своём пути плазменный тор Ио. Плазменный тор характеризуется значительно более высокой концентрацией плазмы, чем окружающие его области магнитосферы: в максимуме концентрация плазмы может достигать $2 \cdot 10^4 \text{ см}^{-3}$ [20]. Значительное увеличение концентрации плазмы обуславливает справедливость

приближения геометрической оптики при описании распространения декаметрового излучения через тор. Поскольку на этих расстояниях $q \ll 1$, то эллиптически поляризованное декаметровое радиоизлучение здесь распространяется в виде двух когерентных циркулярно поляризованных волн. Изменение сдвига фаз между этими волнами в процессе распространения приводит к вращению результирующего эллипса поляризации — к эффекту Фарадея.

В условиях разреженной ($v \ll 1$) и слабо анизотропной ($u \ll 1$) плазмы, которые выполняются в торе Ио, фарадеевское вращение эллипса поляризации на длине L вдоль пути распространения обычно рассчитывают по формуле [6]

$$\Omega(f) \simeq \frac{\pi f}{c} \int_L (n_o - n_e) dz \simeq \frac{K}{f^2} \int_L n(z) B(z) \cos \theta(z) dz = \frac{K RM}{f^2}, \quad (8)$$

где K — константа, определяемая системой единиц, в которой измеряются входящие в (8) параметры магнитосферной плазмы (в системе СГС $K \simeq 2,4 \cdot 10^4$ [6]), RM — мера вращения, определяемая параметрами магнитосферы вдоль пути распространения:

$$RM = \int_L n(z) B(z) \cos \theta(z) dz. \quad (9)$$

Как уже отмечалось в предыдущем разделе, распространение декаметрового радиоизлучения на разных частотах происходит вдоль различных лучей. Благодаря широтной неоднородности плазменного тора (см. рис. 1), смещение положения луча с изменением частоты излучения проявляется в частотной зависимости величин n , B и θ в выражении для меры вращения (9). В результате зависимость $\Omega(f)$ угла поворота эллипса поляризации от частоты отличается от f^{-2} , причём отклонение зависит от степени неоднородности плазменного тора Ио поперёк направления распространения излучения. Таким образом, выражение для угла поворота эллипса поляризации декаметрового радиоизлучения в торе Ио принимает вид

$$\Omega(f) \simeq \frac{K RM(f)}{f^2}, \quad (10)$$

где

$$RM(f) = \int_L n(z, f) B(z, f) \cos \theta(z, f) dz. \quad (11)$$

Уравнение (10) можно переписать в виде, более удобном для исследования плазмы в торе Ио. Обычно интервал высот, занимаемый областью генерации наблюдаемого декаметрового радиоизлучения (определяется по минимальной f_{\min} и максимальной f_{\max} частотам спектра излучения в момент наблюдения) много меньше характерного масштаба неоднородности тора (порядка R_J). Поэтому можно разложить меру вращения RM в ряд по степеням частоты f . Ограничивааясь первыми двумя членами разложения, получаем достаточно простую формулу для вычисления угла поворота эллипса поляризации:

$$\Omega(f) \simeq \frac{C_1}{f} + \frac{C_2}{f^2}, \quad (12)$$

где

$$C_1 = -K \left(\frac{\partial RM}{\partial f} \right)_{f=f_0}, \quad (13)$$

$$C_2 = K \left(RM + \frac{\partial RM}{\partial f} f \right)_{f=f_0} \quad (14)$$

с частотой f_0 из интервала $f_{\min} \div f_{\max}$.

Таким образом, особенности генерации и распространения декаметрового радиоизлучения Юпитера приводят к изменению ставшей уже классической формулы для вычисления угла фараадеевского вращения эллипса поляризации излучения в процессе его распространения от источника к наблюдателю. Учёт конечных размеров источника привёл к появлению в формуле для $\Omega(f)$ аддитивного члена, обратно пропорционального частоте, с коэффициентом пропорциональности, характеризующим неоднородность плазменного тора Ио поперёк (в широтном направлении) трассы распространения излучения. Как уже отмечалось в предыдущем разделе, вращение планеты приводит к тому, что в течение шумовой бури декаметровое радиоизлучение на пути от источника к наблюдателю просвечивает различные области магнитосферы. Это позволяет исследовать широтную неоднородность плазменного тора на разных долготах по временным вариациям угла поворота эллипса поляризации.

2. ПРИМЕРЫ ДИАГНОСТИКИ МАГНИТОСФЕРНОЙ ПЛАЗМЫ ПО ДАННЫМ ПОЛЯРИЗАЦИОННЫХ НАБЛЮДЕНИЙ ДЕКАМЕТРОВОГО РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ

Примером такой диагностики может служить оценка концентрации магнитосферной плазмы в магнитной трубке, проходящей через спутник Ио, проведённая в работе [15]. На динамическом спектре на рис. 3 видна спектральная особенность (показана стрелкой), представляющая собой часть всплеска излучения типа «гигантской арки». Это излучение генерируется источниками, расположенными вдоль магнитной трубы Ио (доказательство этого факта можно найти в работах [15, 21, 22]). Характерной особенностью излучения, принадлежащего этой спектральной особенности, является его поляризация. Дело в том, что поляризация этого излучения почти круговая, степень линейной поляризации $\rho_l \lesssim 0,2$, в то время как поляризация излучения остальной части динамического спектра в большей степени линейная, $\rho_l \simeq 0,66$. В работе [15] было показано, что в момент наблюдения излучения в «гигантской арке» расположение источника и наблюдателя было таково, что переходная область включала в себя и область генерации, т. е. в источнике параметр $q = q_s \sim 1$, а для остальной части спектра область генерации излучения и переходная область были разнесены в пространстве. На рис. 4 приведены результаты наших вычислений степени линейной поляризации излучения, наблюдавшегося на фиксированной частоте (для определённости была взята частота $f = 30$ МГц) и излучаемого под разными углами θ_s к магнитному полю в зависимости от концентрации магнитосферной плазмы в переходной области. В качестве модели магнитного поля планеты была выбрана модель O4 [19]. Разные углы θ_s моделируют вращение планеты и изменение относительного расположения источника и наблюдателя. Из рис. 4 видно, что на высоте гирорезонансного уровня $f_{Be} = 30$ МГц концентрация плазмы в магнитной трубке Ио немного больше 3 см^{-3} и убывает до примерно 1 см^{-3} по мере удаления от трубы Ио. Наблюдения показывают, что вдоль арки поляризация практически остаётся постоянной [18]. Следуя работе [7], находим, что концентрация плазмы вдоль трубы Ио на высотах, соответствующих гирорезонансным уровням $27 \div 35$ МГц, меняется по закону $n \propto B^\nu$, где $\nu \simeq 1 \div 1,8$.

Пример диагностики неоднородности магнитосферной плазмы по наблюдениям угла фараадеевского вращения эллипса поляризации декаметрового радиоизлучения можно найти в [8]. На рис. 5 (рис. 3 в [8]) приведены результаты измерений угла фараадеевского вращения эллипса поляризации декаметрового радиоизлучения и аппроксимирующая эти данные кривая

$$\Omega(f) \simeq C_0 + \frac{C_1}{f} + \frac{C_2}{f^2}. \quad (15)$$

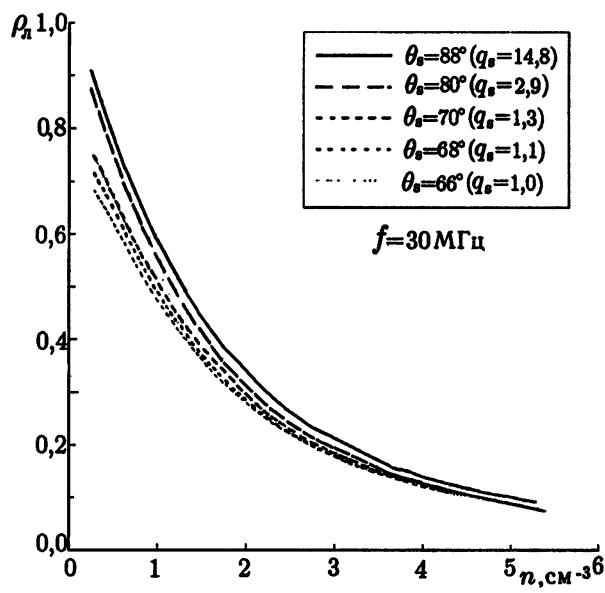


Рис. 4. Степень линейной поляризации ρ_l как функция концентрации плазмы в переходной области для $\partial RM / \partial f$. В результате, различных углов θ_s . Графики построены для источника, локализованного в гирорезонансном уровне $f_{Be} \simeq f = 30$ МГц, q_s — параметр q в области излучения

В (15) добавлена константа C_0 , характеризующая угол наклона эллипса поляризации в источнике излучения. Из согласования теоретической кривой с экспериментальными данными находим $C_1 \approx -4,1 \cdot 10^{-8}$ и из (13)

$$\left(\frac{\partial RM}{\partial f} \right)_{f=f_0} \simeq 1,6 \cdot 10^4 \text{ Гс} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{Гц}^{-1}. \quad (16)$$

В той части тора, через которую проходит излучение данной шумовой бури, пространственное распределение плазмы меняется значительно быстрее, чем магнитное поле. В этом случае выражение $B \cos \theta \simeq 0,04$ Гс характерное для тора Ио в области пересечения его декаметровым излучением, можно вынести из-под знака интеграла и производной в выражении (9) полагая частоту f_0 равной максимальной частоте шумовой бури, получаем следующую оценку для скорости изменения интегральной концентрации плазмы в широтном направлении: $d(\int n dz)/dh \simeq 2 \cdot 10^3 \text{ см}^{-3}$, где z — координата вдоль пути распространения излучения, h — координата вдоль магнитного поля в торе Ио. Полагая характерный размер тора вдоль этих направлений примерно одинаковым, получим оценку средней концентрации плазмы $\langle n \rangle$ в той части тора, через которую проходит излучение: $\langle n \rangle \simeq 2 \cdot 10^3 \text{ см}^{-3}$.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, генерация декаметрового радиоизлучения на частоте f в соответствующих гирорезонансных уровнях и существенно эллиптический характер поляризации излучения открывают новые возможности для радиоастрономической диагностики магнитосферы Юпитера, позволяя исследовать распределение плазмы в магнитосфере по широте. При этом оказываются доступными для исследования области нижней магнитосферы, где непосредственные измерения параметров плазмы с помощью космических аппаратов не проводились и вряд ли будут проведены в обозримом будущем. Кроме того,

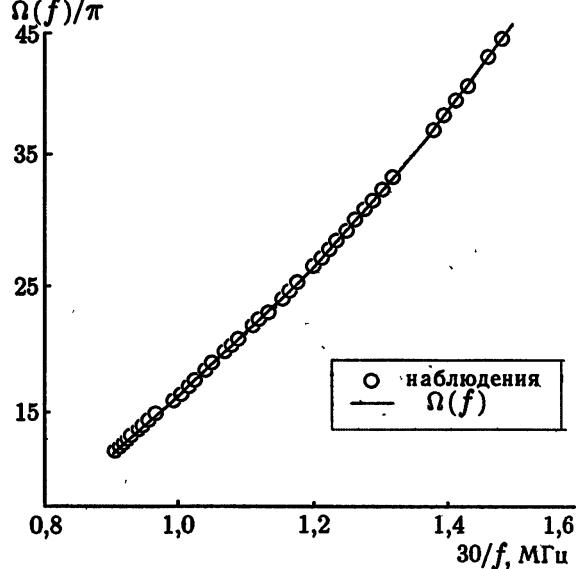


Рис. 5. Данные измерений фараадеевского вращения и аппроксимирующая их кривая $\Omega(f)$

определенная стабильность относительного расположения источника и наблюдателя в течение шумовой бури и вращение планеты дают возможность осуществить томографию магнитосферы — диагностику магнитосферы на разных долготах. В приведенных примерах показана возможность диагностики разных участков магнитосферы Юпитера: источников декаметрового радиоизлучения, т. е. участков нижней магнитосферы, находящихся на расстоянии примерно $(1,5 \div 2) R_J$ от центра планеты; плазменного тора Ио, находящегося на расстоянии около $6R_J$ от центра планеты и имеющего толщину $\sim_{Io} 2R_J$. Установлено, что вблизи источников декаметрового излучения концентрация магнитосферной плазмы вне магнитной трубы Ио мала и на высоте гирорезонансного уровня $f_{Be} \simeq 30$ МГц составляет $n \lesssim 1 \text{ см}^{-3}$. В самой трубке концентрация плазмы выше: на высотах, соответствующих указанному гирорезонансному уровню, концентрация $n \gtrsim 3 \text{ см}^{-3}$. Более того, найдено распределение плазмы вдоль магнитной трубы Ио: $n \propto B^\nu$, где $\nu \simeq 1 \div 1,8$. В плазменном торе Ио определена скорость изменения интегральной концентрации плазмы в широтном направлении (вдоль магнитных силовых линий): $d(\int n dz)/dh \approx 2 \cdot 10^3 \text{ см}^{-3}$, и средняя концентрация плазмы в области пересечения тора Ио излучением изучаемой шумовой бури: $\langle n \rangle \simeq 2 \cdot 10^3 \text{ см}^{-3}$. Последняя оценка показывает возможность диагностики концентрации плазмы в торе Ио по результатам измерений угла фараадеевского вращения, полученным на наземных станциях.

Автор выражает благодарность В. В. Зайцеву за внимание к работе и полезные обсуждения.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (гранты № 98–0216238, 99–02–18244) и Американским фондом гражданских исследований и развития (грант № RP1–2107).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Dulk G. A., Leblance Y., Lecacheux A. // Astron. Astrophys. 1994. V. 286. P. 683.
2. Shaposhnikov V. E., Zaitsev V. V. // Astron. Astrophys. 1996. V. 305. P. 352.
3. Zarka P. // J. Geophys. Res. 1998. V. 103. P. 20 159.
4. Шапошников В. Е., Кочаровский Вл. В., Кочаровский В. В., Ладрайтер Х. П., Рукер Х. О., Зайцев В. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1998. Т. 41. С. 177.
5. Железняков В. В., Кочаровский В. В., Кочаровский Вл. В. // УФН. 1983. Т. 141. С. 257.
6. Железняков В. В. Излучение в астрофизической плазме. М.: Янус-К, 1997. 528 с.
7. Shaposhnikov V. E., Kocharovskiy Vl. V., Kocharovskiy V. V., Ladreiter H. P., Rucker H. O. // Astron. Astrophys. 1997. V. 326. P. 386.
8. Shaposhnikov V. E., Boudjada M. Y., Rucker H. O., Zaitsev V. V., Aubier M. // Astron. Astrophys. 1999. V. 344. P. 709.
9. Warwick J. W., Dulk G. A. // Science. 1964. V. 145. P. 380.
10. Parker G. D., Dulk G. A., Warwick J. W. // Astrophys. J. 1969. V. 157. P. 439.
11. Phillips J. A., Ferree T. C., Wang J. // J. Geophys. Res. 1989. V. 94. P. 5457.
12. Ladreiter H. P., Litvinenko G. V., Boudjada M. Y., Rucker H. O. // Space Sci. 1995. V. 43. P. 1595.
13. Lecacheux A. // Planetary radio emission II: Proceedings of the 2nd International workshop, 7–9 September 1987 / Ed. by H. O. Rucker, S. J. Bauer, B. M. Pedersen. 1988. P. 311.
14. Melrose D. B., Dulk G. A. // Astron. Astrophys. 1991. V. 249. P. 250.
15. Shaposhnikov V. E., Rucker H. O., Zaitsev V. V. // Astron. Astrophys. 2000. V. 355. P. 804.
16. Aubier A., Boudjada M. Y., Moreau Ph., Galopeau P. H. M., Lecacheux A., Rucker H. O. // Astron. Astrophys. 2000. V. 354. P. 1101.
17. Lecacheux A., Boudjada M. Y., Rucker H. O., Bougeret J. I., Manning R., Kaiser M. L. // Astron. Astrophys. 1998. V. 329. P. 776.
18. Lecacheux A., Boischot A., Boudjada M. Y., Dulk G. A. // Astron. Astrophys. 1991. V. 251. P. 339.

19. Connerney J. E. P. // Planetary radio emission III: Proceedings of the 3rd International workshop, 2–4 September 1991 / Ed. by H. O. Rucker, S. J. Bauer, M. L. Kaiser. 1992 P. 13.
20. Belcher J. W. // Physics of the Jovian magnetosphere / Ed. by A. J. Dessler. Cambridge University Press, 1983. P. 68.
21. Riddle A. C. // J. Geophys. Res. 1983. V. 88. P. 455.
22. Genova F., Aubier M. G. // Astron. Astrophys. 1985. V. 150. P. 139.

Институт прикладной физики РАН,
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию
27 октября 2000 г.

NEW POSSIBILITIES OF RADIOASTRONOMICAL DIAGNOSTICS OF THE JOVIAN MAGNETOSPHERE USING THE OBSERVED POLARIZATION OF DECAMETER RADIO EMISSION

V. E. Shaposhnikov

We discuss the possibilities of diagnostics of the Jovian magnetosphere based on the results of measurements of the polarization characteristics of the decameter radio emission. It is shown that the essentially elliptical polarization of that radiation and its generation at frequencies near the local electron gyrofrequency opens new possibilities of radioastronomical diagnostics of the Jovian magnetosphere. The plasma distribution can be studied not only along the radiation path but also in the transverse direction, i.e., over latitudes. Moreover, since the relative position of the source and observer during a decameter noise storm is rather stable, it is possible to perform tomography of the magnetosphere (its diagnostics at different longitudes) using the planet rotation. We present the examples of diagnostics of different regions in the Jovian magnetosphere, such as sources of decameter radio emission, i.e., lower-magnetosphere regions located at a distance of about $(1.5 - 2)R_J$ from the center of the planet, and the Io plasma torus located at a distance of about $6R_J$ from the center of the planet. It is pointed out that the number density of the magnetospheric plasma outside the Io magnetic loop is small ($n \lesssim 1 \text{ cm}^{-3}$ at the height of the gyroresonance level $f_{Be} \approx 30 \text{ MHz}$) while it is higher inside this loop at the same height: $n \gtrsim 3 \text{ cm}^{-3}$. We estimate the variations in the number density of the plasma along the Io magnetic loop ($n \propto B^\nu$, $\nu \approx 1 - 1.8$), determine the rate at which the integral plasma density varies over latitudes ($d(\int n dz)/dh \approx 2 \cdot 10^3 \text{ cm}^{-3}$), and find the average number density of the plasma in the region where the radiation crosses the Io torus ($\langle n \rangle \approx 2 \cdot 10^3 \text{ cm}^{-3}$).

УДК 550.388.2:551.594.6

О КВАЗИБЕСТОКОВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ ГОРЯЧЕЙ ТОКОНЕСУЩЕЙ БЕССТОЛКОВИТЕЛЬНОЙ ПЛАЗМЫ

В. М. Губченко¹, Х. К. Бирнат², М. Гуссенс³

Для рассмотрения медленных электромагнитных процессов индукционного типа в горячей бесстолкновительной токонесущей незамагниченной плазме вблизи областей магнитного пересоединения в плазме высокого давления, где требуется самосогласованное описание влияния вихревых электрических токов на магнитные конфигурации, развито кинетическое описание в квазибестоковом приближении, включающее в себя квазинейтральное приближение. Данное приближение справедливо для крупномасштабных нестационарных процессов, когда масштаб пространственной неоднородности полей превышает масштабы диамагнитной токовой экранировки и аномального сканирования в плазме, а также масштаб поляризационной экранировки. В этой ситуации происходит компенсация диамагнитных токов токами проводимости. Для ускоряемых частиц с узкими функциями распределения уравнения квазибестокового приближения формулируются как уравнения магнитной гидродинамики. Для иллюстрации метода рассмотрена одномерная задача о магнитной аннигиляции, решение которой описывает в автомодельных переменных релаксацию токовой системы, характерной для хвоста магнитосферы и солнечных стримеров.

ВВЕДЕНИЕ

При описании крупномасштабной разреженной горячей плазмы определяющим во многих случаях является наличие в ней токов. При этом в поведении плазмы на характерном масштабе её неоднородности $r \sim k^{-1}$ выделяются достаточно медленные по отношению к тепловым скоростям в плазме $v_\alpha^2 = T_\alpha/m_\alpha$, где T_α и m_α — температура и масса частиц сорта α , электромагнитные индукционные или квазистационарные процессы с характерным временем $t' \sim \omega^{-1}$ и скоростью движений v' , при этом $r/v_\alpha \ll t'; v' \ll v_\alpha; \omega \ll kv_\alpha$. Давление магнитного поля $p_m = B^2/(8\pi)$ сопоставимо с тепловым давлением в плазме p , т. е. $\beta = p/p_m \sim 1$, и структура магнитного поля и создающих его токов плазмы требует определения. В токонесущей плазме развиваются процессы магнитного пересоединения, индукционные по своей природе, при этом происходит преобразование энергии магнитного поля и энергии диамагнитных движений плазмы в кинетическую энергию ускоренных частиц. Это проявляется как бесстолкновительная диссиpация в плазме. В этих условиях актуальной является задача адекватного описания динамики плазмы с током на основе кинетического уравнения Власова.

Примером токонесущей плазмы является медленно расширяющаяся солнечная корона с $v' \ll v_\alpha$ в области формирования гелиосферного токового диска, которая переходит в низкоскоростной солнечный ветер. Другим примером является земная магнитосфера в области геомагнитного хвоста и в лобовой области магнитопаузы, где v' много меньше скорости электронов v_e и где происходит формирование и эволюция токовых систем. В лабораторной плазме указанные условия возможны в сильно-точных пинчах или на установках с большими объёмами горячей токонесущей плазмы.

В МГД приближении процессы магнитного пересоединения достаточно изучены [1], но многие важные для динамики плазмы параметры, например диссипативные, вводятся феноменологически, поэтому структура диссипативных областей и токи в них не определены. В рассматриваемой нами бесстолкновительной горячей плазме диссиpация связана с инерцией некоторой группы ускоряемых частиц, дающих существенный вклад в общий ток в плазме. Нелинейное описание индукционных процессов при релаксации магнитных полей с учётом инерции частиц позволяет решить самосогласованно и проблему

формирования спектра ускоренных частиц, возникающих в виде узких энергичных пучков. Кроме того, в горячей бесстолкновительной плазме по сравнению с МГД плазмой проявляет себя пространственная дисперсия как нелокальность связи между плотностью тока j и электрическим полем E , поэтому требуется более детальное исследование материальных связей, выражаемых законом Ома.

В нестационарной горячей токонесущей плазме возникают индукционные электромагнитные поля E и B , которые по-разному воздействуют силой F на заряженные частицы в зависимости от соотношения между поперечной к B компонентой v_{\perp} скорости частицы и характерной скоростью $r/t' = v'$ в плазме. Сила $F = F_q + F_1$ образована кулоновской F_q и лоренцевской F_1 компонентами. При этом воздействии форма функции распределения $f_{\alpha}(v_{\perp}, v_{\parallel})$ частиц меняется, возникают ускоренные частицы ($v_{\perp} < v'$), для которых $F_q \gg F_1$, и диамагнитные частицы ($v_{\perp} > v'$), для которых $F_q \ll F_1$. Обе группы частиц влияют создаваемыми токами на динамику плазмы и структуру электромагнитного поля и возникают в горячей плазме, где выполнено условие $v' \ll v_{\alpha}$. Для описания электродинамики таких процессов методы магнитной гидродинамики неадекватны, требуется развитие методов на основе кинетического уравнения Власова.

Помимо магнитной гидродинамики для анализа динамики токонесущей плазмы в кинетических подходах использовалось приближение слабой турбулентности [2], были построены также гибридные решения, основанные на представлении о регулярном движении отдельной частицы в электромагнитном поле заданной конфигурации внутри токового слоя с последующей сшивкой получаемых полей от пробных частиц с полями внешних МГД течений [3, 4]. Развиваются и численные самосогласованные подходы [5], результаты которых показывают существование тонкой структуры токовых систем.

В данной работе построено самосогласованное кинетическое приближение для определения электромагнитного поля, токов и движения плазмы в условиях как диамагнитного, так и диссилативного её поведения, когда это движение остаётся ламинарным. При этом ставится задача описания динамики области слабой замагниченности, где формируются X- и O-точки, токовые слои, происходит аннигиляция магнитных полей и где давление плазмы велико ($\beta \gtrsim 1$).

Отметим, что в динамике токонесущей плазмы из-за эффектов изменения магнитного потока вихревое электрическое и магнитное поля становятся определяющими, а влияние амбиополярных эффектов несущественно. Кинетическое приближение квазинейтральности (QN) [6, 7] удобно для описания крупномасштабных движений, в которых определяющую роль играет электростатическое поле разделения зарядов. Обычно используемое дрейфовое кинетическое приближение, основанное на представлении о замагниченности частиц плазмы, не находит своего применения в силу слабой замагниченности частиц. Это значит, что необходимо иное упрощение кинетических уравнений.

В данном рассмотрении мы обращаем внимание на эту возможность. Горячая токонесущая плазма в отличие от бесстоковой плазмы характеризуется дополнительными масштабами пространственной дисперсии. Это позволяет ввести новый безразмерный параметр для характеристики плазмы и построить упрощённое кинетическое описание крупномасштабных электромагнитных процессов.

Плазму характеризуют концентрацией n_{α} , температурой T_{α} частиц сорта α и, соответственно, плазменной частотой $\omega_{p\alpha}$ и тепловой скоростью частиц $v_{\alpha}^2 = T_{\alpha}/m_{\alpha}$. При изучении квазистационарных процессов, где возбуждаются электростатические поля, масштабом пространственной дисперсии является радиус Дебая $r_{DE} = (\sum_{\alpha} \omega_{p\alpha}^2/v_{\alpha}^2)^{-1/2}$, который характеризует поляризацию плазмы и экранировку потенциальных полей плазмой [6].

В токонесущей плазме имеется дополнительный параметр, определяющий протекание электрического тока: это относительные скорости u_{α} поступательного дрейфа электронов и ионов в задачах эволюции слоя плазмы или динамики Z-пинча [8]; для Θ-пинча задаётся относительное угловое вращение компонент плазмы с частотой Ω_{α} [9]. На основе этих параметров определяется масштаб пространственной дисперсии $r_{DM} = [(\pi/2)^{1/2} \sum_{\alpha} (\omega_{p\alpha}/c^2) (u_{\alpha}/v_{\alpha})^2]^{-1/2}$, который характеризует диамагнит-

ную экранировку вихревых полей в плазме. Мы назовём его (по аналогии с радиусом Дебая) магнитным масштабом Дебая, более известным как масштаб Харриса [8].

Кроме того, в плазме возможна диссипативная экранировка источников электромагнитных полей за счёт возбуждения резистивных токов частиц, резонансных с вихревым электрическим полем $\mathbf{E} = -c^{-1} \partial \mathbf{A} / \partial t$. Этот эффект обуславливает появление масштаба r_s аномального скинирования, который в большой степени зависит от деталей функции распределения частиц, взаимодействующих с полем и отбирающих (диссирирующих) его энергию, и характера движения плазмы, определяемых скоростью v' источника поля относительно плазмы и частотой ω' источника поля. Соответствующий этому масштабу безразмерный параметр есть магнитное число Рейнольдса $Re_m = r/r_s$, где r — характерный масштаб изменения полей. В частности, в бесстоковой плазме ($\mathbf{u}_\alpha = 0$), движущейся со скоростью v' , $r_s = r_G = [\sum_\alpha \pi^{1/2} (\omega_{p\alpha}^2/c^2) (v'/v_\alpha)]^{-1/2}$ [10], а при работе гармонического источника на частоте ω' в покоящейся ($v' = 0$) и бесстоковой плазме $r_s = r_a \sim [\sum_\alpha \omega_{p\alpha}^2 \omega'/(c^2 v_\alpha)]^{-1/3}$ [6]. В токонесущей плазме масштабы скинирования переопределются в соответствии с изменением дисперсионных свойств плазмы, при этом в зависимости от условий сочетаются диамагнитные и аномальные эффекты в экранировке поля.

Наличие двух вышеупомянутых масштабов пространственной дисперсии свидетельствует о сложной материальной связи между плотностью тока j и компонентами электромагнитного поля $\mathbf{E} = -\nabla\varphi - c^{-1} \partial \mathbf{A} / \partial t$ и $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ в бесстолкновительной плазме и сложной структуре возбуждаемых полей.

Плазму мы можем характеризовать числом Дебая $D_E = r/r_{DE}$ и числом $D_M = r/r_{DM}$, где r — характерный пространственный масштаб плазмы. В лабораторной плазме обычно $D_E \gg 1$, $D_M \ll 1$, что позволяет говорить о квазинейтральности плазмы. В этих условиях влияние диамагнитных токов в плазме на структуру магнитных полей можно не учитывать. Конфигурация магнитного поля определяется резистивными токами, если $Re_m \gg 1$. В крупномасштабной токонесущей космической плазме и, возможно, в сверхпроводниках и плотных пинчах мы имеем возможность исследовать плазму, где выполняются условия $D_E \gg 1$, $D_M \gg 1$, т. е. диамагнитные токи плазмы могут влиять на структуру магнитных полей. На отдельных участках в такой токонесущей плазме возможно появление разрывов или целых областей, где локально могут реализоваться условия $D_E \ll 1$, $D_M \sim 1$ и $D_M \ll 1$, $D_E \sim 1$. В этом случае тонкая структура полей в указанных областях определяется масштабами пространственной дисперсии.

Токи в плазме, создающие магнитное поле, приводят к появлению масштаба дисперсии $r_{H\alpha}$ — гирорадиуса тепловой частицы. Замагнченность плазмы в условиях $r_{H\alpha} \ll r$ меняет динамические свойства плазмы на периферии области слабой замагнченности, что соответствует появлению у этой области «оболочки» с иными динамическими свойствами [6]. В окрестностях X- и O-точек и в слоях плазмы со слабой замагнченностью при больших β выполняется условие $r_{DM} \ll r_{H\alpha}$, т. к. $\beta (u_\alpha/v_\alpha)^2 \gg 1$, и в некоторой окрестности области $B = 0$ замагнченности нет, однако динамика токонесущей плазмы здесь определяется квазистационарными электромагнитными процессами.

В первой части работы дано линейное рассмотрение свойств токонесущей плазмы и указано на возможность её квазибесстокового поведения. Во второй части работы предложены нелинейные кинетические уравнения для описания плазмы в квазибесстоковом приближении и рассмотрена задача магнитной аннигиляции в квазимагнитогидродинамическом рассмотрении.

1. КВАЗИБЕССТОКОВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ В ЛИНЕЙНОМ РАССМОТРЕНИИ

Особенности динамики горячей токонесущей бесстолкновительной плазмы в пределе медленных движений ($\omega/(kv_\alpha) \ll 1$), классификация возможных ситуаций в динамике магнитного поля и обоснование используемого далее приближения квазибесстокости (QCF) следуют из рассмотрения диэлектрических свойств однородной плазмы.

При изучении токонесущей плазмы необходимо учитывать анизотропию плазмы, связанную с протеканием тока $j_0 = e n_0 (u_i - u_e)$. При этом стационарная функция распределения, учитывающая проекцию тока, имеет вид

$$f_{0\alpha} = \frac{n_0}{(2\pi v_\alpha^2)^{3/2}} \exp\left[-\frac{(v - u_\alpha)^2}{2v_\alpha^2}\right]. \quad (1)$$

Плазма с током близка по своим дисперсионным свойствам к плазме с температурной анизотропией, характеризуемой бимаксвелловской функцией распределения с осью анизотропии $n_{||}$ ($u_\alpha \parallel n_{||}$), движение частиц вдоль которой характеризуется температурой $T_{||}$, и температурой $T_{\perp} \neq T_{||}$. Анизотропия задаётся параметром $\kappa_\alpha = (T_{||}/T_{\perp})_\alpha - 1$ и может иметь разный знак. В токонесущей плазме с осью анизотропии $n_{||}$, направленной вдоль u_α , и в системе отсчёта, в которой $u_e/T_e = -u_i/T_i$, мы получим, что $\kappa_\alpha = u_\alpha^2/v_\alpha^2 > 0$.

Тензор диэлектрической проницаемости $\hat{\epsilon}$ имеет, как известно, вид

$$\hat{\epsilon}(\omega, k) = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & 0 & \epsilon_{13} \\ 0 & \epsilon_{22} & 0 \\ \epsilon_{31} & 0 & \epsilon_{33} \end{pmatrix} \quad (2)$$

в системе координат, где ось анизотропии $n_{||}$ лежит в плоскости xz , а волновой вектор $k = k z_0$ лежит на оси z и направлен под углом θ к оси анизотропии. Дисперсионные уравнения в этом случае записываются в виде $k^2 - \epsilon_{22}\omega^2/c^2 = 0$ и $(k^2 - \epsilon_{11}\omega^2/c^2)\epsilon_{33} + \epsilon_{13}^2\omega^2/c^2 = 0$. Первое описывает чисто поперечную моду ТЕ, где $E_1 \perp k$, а другое — продольно-поперечную моду ТМ, где $B_1 \perp k$. ТМ-мода имеет проекцию вектора E_1 на волновой вектор k (см. рис. 1). На появление ТЕ- и ТМ-мод в задачах магнитного пересоединения мы указали в работе [11]. Исследуемые нами моды в пределе $|\omega/(kv_\alpha)| \ll 1$ соответствуют нераспространяющимся вихревым возмущениям с $\omega_r/k = 0$, $\omega_i \neq 0$, где $\omega = \omega_r + i\omega_i$.

При дальнейшем анализе динамики токонесущей плазмы мы рассматриваем возмущения с $k \perp n_{||}$ ($\theta = \pi/2$). Такого типа возмущения позволяют рассмотреть двумерные задачи динамики плазмы, которыми часто ограничиваются при анализе магнитного пересоединения. В этом случае тензор $\hat{\epsilon}$ вырождается к диагональному виду ($\epsilon_{31} = \epsilon_{13} = 0$):

$$\hat{\epsilon}(\omega, k) = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

При диагональном виде тензора продольные и поперечные колебания плазмы линейно независимы, и в плазме существуют три линейно независимые моды: поперечные моды TEM₁ и TEM₂ с взаимно ортогональными поляризациями и продольная L-мода. Диагональные компоненты тензора разные по величине, что отражает анизотропию плазмы и отличие динамики мод TEM₁ и TEM₂.

Компоненты тензора для случая $\theta = \pi/2$ ($n_{||} = x_0$) при векторе $k = k_z z_0$, перпендикулярном оси цилиндрической симметрии u_α , имеют следующий вид:

$$\epsilon_{11} = \epsilon_{t1} = 1 + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2} \left[\kappa_\alpha + i\pi^{1/2} (\kappa_\alpha + 1) \xi_\alpha w(\xi_\alpha) \right], \quad (4)$$

$$\epsilon_{22} = \epsilon_{t2} = 1 + i\pi^{1/2} \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2} \xi_\alpha w(\xi_\alpha), \quad (5)$$

$$\epsilon_{33} = \epsilon_1 = 1 + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k^2 v_\alpha^2} [1 + i\pi^{1/2} \xi_\alpha w(\xi_\alpha)]. \quad (6)$$

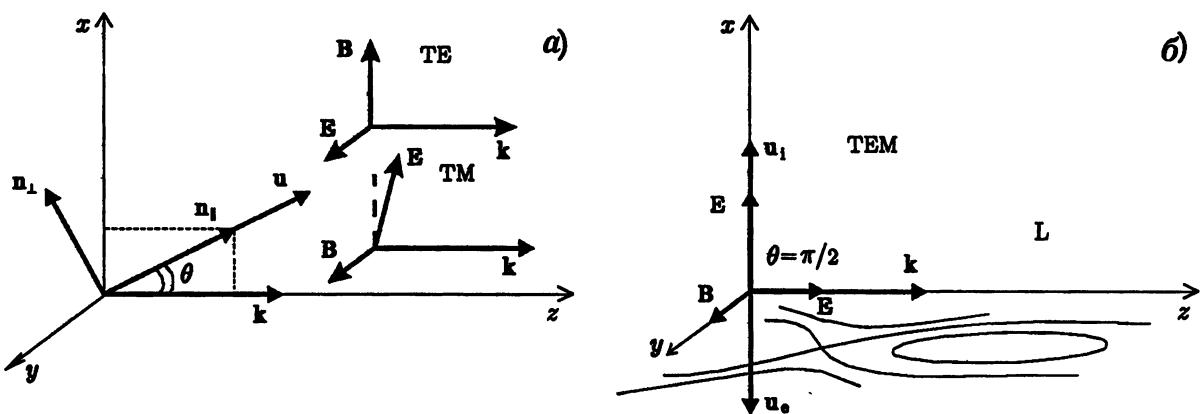


Рис. 1. Моды ТЕ и ТМ токонесущей плазмы (а). ТЕМ-мода и L-мода в вырожденном случае $\theta = \pi/2$, где на плоскости yz показаны силовые линии магнитного поля, которое описывается ТЕМ-модой в квазистационарном пределе (б)

В приведенных выражениях используется дисперсионная функция $w(\xi)$ с аргументом $\xi = \omega/(\sqrt{2}|k|v_\alpha)$. Медленным крупномасштабным процессам с $\omega/(kv_\alpha) \ll 1$ соответствует асимптотика функции $w(\xi) = 1 + 2i\xi/\pi^{1/2} + \dots$

В случае $\theta = \pi/2$ имеют место следующие дисперсионные уравнения. Для L-моды с $E_1 = E_{1z}y_0$:

$$D_L = \epsilon_1(\omega, k) = 0; \quad (7)$$

для ТЕМ₁-моды с $E_{1t} = E_{1x}x_0$, $B_1 = B_{1y}y_0$, $A_1 = A_{1x}x_0$:

$$D_{T1} = 1 - \frac{\omega^2 \epsilon_{t1}(\omega, k)}{c^2 k^2} = 0; \quad (8)$$

для ТЕМ₂-моды с $E_{1t} = E_{1y}y_0$, $B_1 = B_{1x}x_0$, $A_1 = A_{1y}y_0$:

$$D_{T2} = 1 - \frac{\omega^2 \epsilon_{t2}(\omega, k)}{c^2 k^2} = 0. \quad (9)$$

При рассмотрении крупномасштабной медленной динамики плазмы (при $|\omega/(kv_\alpha)| \ll 1$)

$$D_{T1} = 1 - \frac{1}{k^2 \lambda^2} - \frac{1}{k^2 r_{DM}^2} - \frac{i\pi^{1/2}}{2^{1/2}} \sum_{\alpha} \frac{(\kappa_\alpha + 1) \omega_{p\alpha}^2 \omega}{c^2 v_\alpha |k|^3} + \dots = 0, \quad (10)$$

где $\lambda = c/\omega$, $r_{DM}^2 = 1 / (\sum_{\alpha} \omega_{p\alpha}^2 \kappa_{\alpha} / c^2)$ — масштаб пространственной дисперсии, характеризующий диамагнитную экранировку вихревых полей.

Единица в выражении для D_{T1} обусловлена оператором $\Delta \mathbf{A}$ в уравнении Максвелла, который определяет пространственную дисперсию в плазме. Слагаемое $1/(k\lambda)^2$, обусловленное током смещения $c^{-2} \partial^2 \mathbf{A} / \partial t^2$, мало и в дальнейшем не учитывается. Оставшиеся слагаемые обусловлены вихревым диамагнитным j_a и резистивным j_r токами, для которых выполнено условие $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$. Резистивный ток определяется в основном электронами, как более легкими частицами, это позволяет в дальнейшем рассмотрении учитывать только вклад электронов в его формирование.

Выражение для D_T подобно по своему виду выражению для D_L в изотропной плазме. Это означает, что поведение полей A_x и φ , которые связаны с разными типами мод, также подобно, и это основа для обобщения квазинейтрального приближения для описания динамики электромагнитных полей. Однако это подобие в поведении потенциалов \mathbf{A} и φ выражено только в двумерном случае, когда двумерная

структура поля раскладывается по возмущениям с векторами \mathbf{k} , направленными перпендикулярно оси анизотропии \mathbf{n}_{\parallel} . Одномерный случай в этом приближении позволяет рассмотреть задачу об аннигиляции (релаксации) магнитного поля со встречечно-параллельными силовыми линиями.

Для магнитостатического случая ($\omega = 0$) получим $D_T = -1/(k^2 r_{DM}^2)$, что описывает диамагнитную экранировку магнитного поля прямолинейного провода с током. Экранировка тока подобна электростатической экранировке заряженной нити в плазме с $D_L = 1/(k^2 r_{DE}^2)$. Масштаб r_{DM} может меняться в зависимости от величины и знака анизотропии κ_{α} . При положительном κ_{α} распределение поля вблизи источника тока гармоническое, а при отрицательном κ_{α} происходит экспоненциальное спадание поля при удалении от источника. Это позволяет назвать r_{DM} магнитным масштабом Дебая. При анализе динамики плазмы ($\omega \neq 0$) согласно виду D_T имеют место три предельных случая в зависимости от значения магнитного числа Дебая $D_M = (kr_{DM})^{-1}$ (рис. 2).

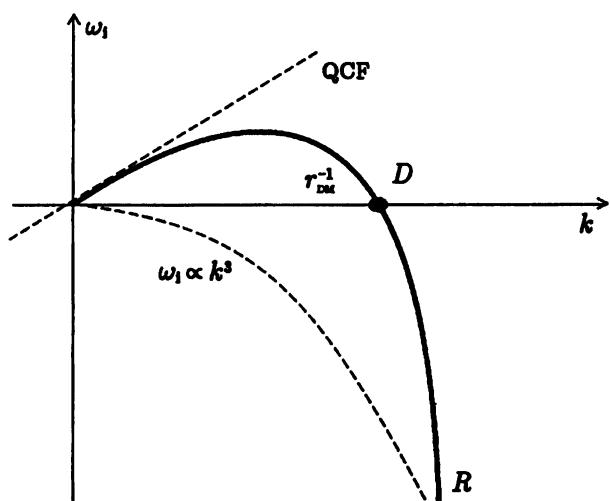


Рис. 2. Поведение декремента $\omega_i(k)$ моды TEM_1 в токонесущей плазме в квазистационарном пределе $\omega/(kv_{\alpha}) \ll 1$. На участке $k \ll r_{DM}^{-1}$ выполнено квазибестоковое приближение (пунктирная прямая), где ток диамагнитных частиц j_a скомпенсирован резистивным током ускоряемых частиц j_r . В области $D \gg j_r$, в области $R \gg j_a$. Пунктиром в нижней полуплоскости показана дисперсионная кривая бестоковой изотропной плазмы

магнитный поток в плазме изначально существовал. Условия QCF и QCC могут выполняться как для динамических ситуаций ($\omega \neq 0$), так и для стационарных течений плазмы, где $\omega = (\mathbf{k}, \mathbf{v}')$.

Квазибестоковый случай является наиболее простым, позволяя упростить исходные кинетические уравнения при рассмотрении медленных крупномасштабных движений, сопровождаемых возбуждением электромагнитных полей \mathbf{A} , в пределе $|\xi_{\alpha}| \ll 1$. Данное упрощение подобно упрощениям кинетических уравнений, связанных с представлением о квазинейтральности при исследовании потенциальных полей φ .

Решение дисперсионного уравнения $D_T(\omega_r + i\omega_i, k) = 0$ имеет вид

$$\omega_r = 0, \quad \omega_i = -\omega' r_a^3 |k|^3 (1 - (kr_{DM})^{-2}), \quad (11)$$

где $\omega' r_a^3 = \sqrt{2/\pi} / (\sum_{\alpha} (\kappa_{\alpha} + 1) \omega_{pa}^2 / (c^2 v_{\alpha}))$.

Кубическая зависимость декремента ω_i от волнового числа k в пределе $kr_{DM} \gg 1$ соответствует затуханию магнитного поля. При $0 < kr_{DM} < 1$ имеет место электромагнитная неустойчивость, при чём выделяется область линейного поведения инкремента при $0 < kr_{DM} \ll 1$, что свидетельствует об отсутствии дисперсии. Последнее обстоятельство позволяет в пределе $0 < kr_{DM} \ll 1$ в квазистационарном приближении решить нелинейную задачу о формировании магнитных структур в автомодельном приближении.

2. КВАЗИБЕСТОКОВОЕ ОПИСАНИЕ В НЕЛИНЕЙНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Обнаруженное в линейном приближении квазистационарное поведение моды ТЕМ₁ в токонесущей плазме является основой для обобщения полученных результатов на нелинейный случай.

2.1. Уравнения для частиц

Кинетическое уравнение Власова в силу своей линейности по f_{α} позволяет использовать подстановку $f_{\alpha} = f_{a\alpha} + f_{r\alpha}$, отражающую возможность разбиения частиц токонесущей плазмы в фазовом пространстве на две группы: «диамагнитные» и ускоряемые. Группы взаимодействуют между собой посредством электромагнитных полей.

Такое разделение очевидно из линейного рассмотрения, где возмущение функции распределения $f_{1\alpha} = f_{a1\alpha} + f_{r1\alpha}$ после преобразования Фурье—Лапласа имеет следующий вид:

$$f_{a1\alpha} = \frac{e_{\alpha}}{v_{\alpha}^2 m_{\alpha} c} f_{0\alpha}((\mathbf{A}_1, \mathbf{u}_{\alpha}) - c\varphi_1), \quad f_{r1\alpha} = \frac{e_{\alpha}}{v_{\alpha}^2 m_{\alpha} c} f_{0\alpha}(\omega - (\mathbf{k}, \mathbf{u}_{\alpha})) D_{\alpha}, \quad (12)$$

где $D_{\alpha} = ((\mathbf{A}_1, \mathbf{v}) - c\varphi_1) \zeta_0$, $\zeta_0 = (\omega - (\mathbf{k}, \mathbf{v}))^{-1}$. При этом частота ω характеризует время динамических процессов t' , а волновой вектор \mathbf{k} — их характерный масштаб r .

Слагаемое $f_{a1\alpha}$ связано с диамагнитными и поляризационными возмущениями: диамагнитная часть пропорциональна \mathbf{u}_{α} , другая его часть описывает поляризационный отклик плазмы на электростатическое поле φ . Слагаемое $f_{r1\alpha}$ в пределе $\omega/(|k| v_{\alpha}) \ll 1$ обусловлено вкладом от полюса $(\mathbf{k}, \mathbf{v}) = 0$ и характеризует плазму как диссипативную проводящую среду.

Таким образом, функция f_a подчиняется квазистационарному уравнению Власова, в котором $\partial f_a / \partial t \ll (\mathbf{v}, \partial f_a / \partial \mathbf{x})$, и влияние вихревого поля на эти частицы не учитывается ($-c^{-1} \partial \mathbf{A} / \partial t \ll \ll c^{-1} [\mathbf{v}, \text{rot } \mathbf{A}]$):

$$\left(\mathbf{v}_{\perp}, \frac{\partial f_{a\alpha}}{\partial \mathbf{r}_{\perp}} \right) + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}_{\perp}} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_{\perp}, \text{rot } \mathbf{A}], \frac{\partial f_{a\alpha}}{\partial \mathbf{v}_{\perp}} \right) = 0. \quad (13)$$

При «электромагнитном разлёте» в отличие от «амбиполярного разлёта» с тепловой скоростью смещается элемент тока \mathbf{j}_a , что изменяет магнитный поток в плазме. В результате появляется вихревое электрическое поле $\mathbf{E} = -c^{-1} \partial \mathbf{A} / \partial t$, которое возбуждает резистивные токи \mathbf{j}_r , определяемые моментом от f_r . В результате структура магнитного поля $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ меняется и к новому значению \mathbf{A} квазистационарным образом подстраивается распределение f_a .

Далее предполагается, что ускоряемыми частицами являются электроны, как более лёгкие по сравнению с ионами частицы. Вклад ускоренных ионов в динамику плазмы, как видно из линейного рассмотрения, существенно меньше.

При подстановке суммы $f = f_a + f_r$ в силу $d f_{a\alpha} / dt \sim 0$ в уравнении Власова мы получим кинетическое уравнение Власова для f_r :

$$\frac{\partial f_{re}}{\partial t} + \left(\mathbf{v}_{\perp}, \frac{\partial f_{re}}{\partial \mathbf{r}_{\perp}} \right) - \frac{e}{m_e} \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}_{\perp}} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \text{rot } \mathbf{A}], \frac{\partial f_{re}}{\partial \mathbf{v}_{\perp}} \right) = 0, \quad (14)$$

где $\mathbf{v}_\perp = v_x \mathbf{x}_0 + v_z \mathbf{z}_0$.

В принятом приближении ускоряемая и диамагнитная электрон-ионные жидкости взаимодействуют посредством электромагнитного поля и не обмениваются частицами. Соотношение f_a и f_r определяется из уравнений Максвелла условиями квазистационарности и квазинейтральности и будет рассмотрено ниже.

Рассмотрим нелинейное решение уравнения для функции распределения диамагнитных частиц $f_{a\alpha}$, описывающее бездиссиликативное ($(\mathbf{j}, \mathbf{E}) = 0$) квазистационарное состояние плазмы с возбуждённым в ней диамагнитным током j_a и зарядом ρ_a [8]. Предположим, что функция $f_{a\alpha}$ имеет максвелловскую форму и характеризуется параметрами $n_{0\alpha}$, T_α и скоростью дрейфа u_α , а также зависит от интегралов движения частиц: энергии частицы $H_\alpha = m_\alpha v^2/2 + q_\alpha \varphi$ и обобщённого импульса частицы $P_{y\alpha} = m_\alpha v_y + q_\alpha A_y(x, z)/c$:

$$f_{a\alpha} = \frac{n_{0\alpha}}{(2\pi v_\alpha^2)^{3/2}} \exp \left[-\frac{v_\perp^2}{2v_\alpha^2} - \frac{(v_y - u_\alpha)^2}{2v_\alpha^2} + \frac{q_\alpha u_\alpha}{cT_\alpha} A(x, z) - \frac{q_\alpha}{T_\alpha} \varphi(x, z) \right]. \quad (15)$$

В этом выражении $v_\alpha^2 = T_\alpha/m_\alpha$ — тепловая скорость частиц; для определённости полагаем $u_e < 0$. Система координат и поляризация моды TEM₁ выбраны так, что $\mathbf{u}_\alpha = u_\alpha \mathbf{y}_0$, $\mathbf{A} = A \mathbf{y}_0$.

Моменты функции распределения $f_{a\alpha}$ дают распределение заряда ρ_a и тока j_a . В случае $n_0 = n_{0i} = n_{0e}$ в точке, где $\varphi = 0$, $\mathbf{A} = 0$, $T = T_i = T_e$, и в системе отсчёта, где $u = u_i = -u_e$, получим

$$\frac{\rho_a}{\rho_0} = \exp \left(\frac{eu}{cT} A - \frac{e}{T} \varphi \right) - \exp \left(\frac{eu}{cT} A + \frac{e}{T} \varphi \right), \quad \frac{j_a}{j_0} = \exp \left(\frac{eu}{cT} A - \frac{e}{T} \varphi \right) + \exp \left(\frac{eu}{cT} A + \frac{e}{T} \varphi \right). \quad (16)$$

При подстановке выражений (16) в уравнения Максвелла мы получим стационарные решения ($\omega = 0$), описывающие нейтральный слой Харриса в плоской геометрии [8], что соответствует приближению $k r_{DM} \sim 1$ в линейной задаче или конфигурации типа Θ -пинча в цилиндрической геометрии [9].

При $e\varphi/T \ll 1$, $euA/(cT) \ll 1$, разлагая (16) в ряд, получим линейную связь для полей и зарядов в материальных уравнениях:

$$\rho_a = -\frac{2\varphi}{4\pi r_{DE}^2} + \dots, \quad j_a = 2n_0 eu + \frac{2cA}{4\pi r_{DM}^2} + \dots, \quad (17)$$

где $j_0 = n_0 eu$, $\rho_0 = n_0 e$.

Из приведённых выше формул можно получить выражения для полей \mathbf{A} , φ через локальную плотность поляризационного заряда ρ_a и локальную плотность диамагнитного тока j_a в плазме:

$$A = \frac{cT}{2eu} \ln \left[\frac{1}{4} \left(\frac{\rho_a}{\rho_0} + \frac{j_a}{j_0} \right) \left(-\frac{\rho_a}{\rho_0} + \frac{j_a}{j_0} \right) \right], \quad \varphi = \frac{T}{2e} \ln \left[\left(-\frac{\rho_a}{\rho_0} + \frac{j_a}{j_0} \right) / \left(\frac{\rho_a}{\rho_0} + \frac{j_a}{j_0} \right) \right]. \quad (18)$$

Данные выражения после дифференцирования становятся алгебраическими, что более удобно для проведения дальнейшего анализа.

2.2. Уравнения для полей

Рассмотрим уравнения Максвелла для TEM-поля:

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho(\mathbf{A}, \varphi), \quad \Delta\mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_t(\mathbf{A}, \varphi). \quad (19)$$

В этих уравнениях $\rho = \rho_r + \rho_a = \sum_\alpha q_\alpha \int f_\alpha d^3v$ — заряд плазмы, а $\mathbf{j} = \mathbf{j}_l + \mathbf{j}_t = \sum_\alpha q_\alpha \int \mathbf{v} f_\alpha d^3v = \mathbf{j}_{re} + \mathbf{j}_a$ — ток в плазме.

Ток в плазме мы разделили на компоненты двумя способами: на компоненту $j_{\perp} \perp \mathbf{B}$, которая связана с накоплением заряда ($\partial\rho/\partial t$), и вихревую компоненту $j_t = j_y y_0$, для которой $\operatorname{div} \mathbf{j}_t = 0$. Ток также может быть разделён на ток ускоренных частиц j_r , обуславливающих диссипацию, и ток диамагнитных частиц j_a .

В динамическом режиме ($j_r \neq 0$) характерный масштаб r плазмы и ТЕМ-поля становится много больше масштабов пространственной дисперсии r_{DE} , r_{DM} . В этом случае, следя [7], заметим, что в уравнении Пуассона член $\Delta\varphi$, отвечающий за пространственную дисперсию электростатической части поля, мал:

$$\frac{\Delta\varphi}{4\pi\rho_a} \sim \frac{\rho_a + \rho_r}{\rho_a} \sim \frac{r_{DE}^2}{r^2} \ll 1. \quad (20)$$

Это условие квазинейтральности плазмы: $\rho(\mathbf{A}, \varphi) = \rho_a + \rho_r = 0$.

Для ТЕМ-моды, характеризуемой потенциалом \mathbf{A} , следя методу введения квазинейтрального приближения [7], пренебрегаем членом $\Delta\mathbf{A}$. При рассмотрении токонесущей плазмы имеют место отмеченные ранее два случая. В первом случае в плазме поддерживается квазистационарный ток $j = 2n_0eu$. Такая динамика свойственна ранее сформировавшейся токовой системе, в которой поддерживается магнитный поток $\Phi \propto A$ и потенциал $A = 4\pi n_0 e u r^2/c$. Во втором случае имеет место релаксационная динамика плазмы в условиях, близких к $j = 0$, когда магнитный поток изначально не существовал ($\Phi \sim 0$). В процессе возбуждения и эволюции вихревого электрического поля масштаб неоднородности поля r увеличивается по сравнению с масштабом r_{DM} в статическом случае:

$$\frac{A}{r^2} \sim \Delta A = \frac{4\pi}{c} (j_{tre} + j_a) = \frac{4\pi}{c} \left(2n_0eu + \frac{c}{4\pi r_{DM}^2} \frac{2A}{r^2} + \dots + j_{tre} \right), \quad (21)$$

где $j_{tre} = -e \int v_y f_{re} d^3v$. Таким образом, в режиме $r \gg r_{DM}$ можно пренебречь членом с пространственной дисперсией и получить либо условие квазистационарности тока $j_t(A, \varphi) = j_{tre} + j_a = 2en_0u$, либо условие квазистоковости $j_t(A, \varphi) = j_{tre} + j_a = 0$.

В условиях квазинейтральности и квазистоковости имеем укороченную систему кинетических уравнений для описания крупномасштабной и медленной динамики горячей бесстолкновительной плазмы без учёта эффектов пространственной дисперсии:

$$\frac{\partial f_{re}}{\partial t} + \left(\mathbf{v}_{\perp}, \frac{\partial f_{re}}{\partial \mathbf{r}} \right) - \frac{e}{m_e} \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}_{\perp}} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \operatorname{rot} \mathbf{A}], \frac{\partial f_{re}}{\partial \mathbf{v}} \right) = 0, \quad (22)$$

$$\mathbf{A} = Ay_0 = y_0 \frac{cT}{2eu} \ln \left[\frac{1}{4} \left(\frac{\rho_r}{\rho_0} + \frac{j_r}{j_0} \right) \left(-\frac{\rho_r}{\rho_0} + \frac{j_r}{j_0} \right) \right], \quad (23)$$

$$\varphi = \frac{T}{2e} \ln \left[\frac{1}{4} \left(-\frac{\rho_r}{\rho_0} + \frac{j_r}{j_0} \right) \Big/ \left(-\frac{\rho_r}{\rho_0} + \frac{j_r}{j_0} \right) \right]. \quad (24)$$

Здесь $j_0 = en_0u$, $\rho_0 = en_0$.

2.3. МГД описание ускоряемых электронов

Методом упрощения укороченной системы кинетических уравнений является переход к квазимагнитогидродинамическому описанию ускоряемых электронов. МГД описание наиболее простое, когда мы считаем ускоряемые частицы холдинными ($T_r = 0$) и рассматриваем моноскоростной пучок: $f_{re} = n(\mathbf{r}_{\perp}, t)\delta[\mathbf{v} - \mathbf{V}(\mathbf{r}_{\perp}, t)]$ [7]. Здесь $n = n(\mathbf{r}_{\perp}, t)$ — концентрация электронов в пучке, $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbf{r}_{\perp}, t) = \mathbf{V}_{\perp} + \mathbf{V}_{\parallel}$ — скорость пучка вдоль и поперёк магнитного поля, $\delta(\mathbf{x})$ — дельта-функция.

Представление о пучке энергичных частиц с функцией распределения f_r на фоне частиц основной плазмы (с распределением f_a), является традиционным в физике плазмы. В приближении холодной плазмы мы пренебрегаем изменением формы функции распределения f_{re} , а значит, и эволюцией спектра частиц под действием ТЕМ-поля, и полагаем, что разброс скоростей частиц пучка достаточно мал. В этом случае получаем замкнутую систему связанных МГД уравнений, при этом начальная функция распределения пучка остаётся моноскоростной. Моноскоростная модель пучка должна быть заменена на более сложную, если ставится вопрос о формировании спектра ускоряемых частиц.

После усреднения кинетических уравнений (22)–(24) для f_{re} по скорости v , в предположении $\nabla = \partial/\partial r_\perp$ получим МГД уравнения:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla(n(r_\perp, t), V(r_\perp)) = 0, \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} V(r_\perp, t) + (V(r_\perp, t), \nabla) V(r_\perp, t) + \\ + \frac{e}{m_e c} \left\{ -c \nabla \varphi - \frac{\partial}{\partial t} A(r_\perp, t) y_0 + [V(r_\perp, t), \text{rot}(A(r_\perp, t) y_0)] \right\} = 0, \end{aligned} \quad (26)$$

$$A = \frac{cT}{2eu} \ln \left[\frac{1}{4} \left(\frac{n(r_\perp, t)}{n_0} + \frac{n(r_\perp, t)V_y(r_\perp, t)}{n_0 u} \right) \left(-\frac{n(r_\perp, t)}{n_0} + \frac{n(r_\perp, t)V_y(r_\perp, t)}{n_0 u} \right) \right], \quad (27)$$

$$\varphi = \frac{T}{2e} \ln \left[\left(\frac{n(r_\perp, t)}{n_0} - \frac{n(r_\perp, t)V_y(r_\perp, t)}{n_0 u} \right) \Big/ \left(\frac{n(r_\perp, t)}{n_0} + \frac{n(r_\perp, t)V_y(r_\perp, t)}{n_0 u} \right) \right]. \quad (28)$$

В этих МГД уравнениях $j_{tre} = -en(r_\perp, t)V_y(r_\perp, t)$, $j_0 = en_0 u$, $\rho = en_0$. Для адиабатических частиц функция распределения определяется выражением (15).

Таким образом, от исходной кинетической модели плазмы мы перешли к квазимагнитогидродинамике, где МГД описание распространяется только на ускоряемые электроны, а диамагнитные частицы, обуславливающие также поляризацию плазмы, описываются кинетически и характеризуются квазистационарными заданными функциями распределения. Соотношение групп частиц, участвующих в этих двух процессах, определяется условиями квазинейтральности и квазибестоковости.

Как видим из полученных уравнений, что при $V_y \gg u$ электростатические поля φ , связанные с разделением зарядов, не влияют на динамику токонесущей плазмы, которая в основном определяется электромагнитными индукционными процессами.

В качестве примера рассмотрим в автомодельных переменных одномерную задачу об эволюции ТЕМ-полей в токонесущей плазме.

Введём переменную $\tau = x/t$, а также безразмерные переменные $A^* = Ae/(cT_e) = Ae/(m_e c \mu)$, $\varphi^* = \varphi e/(m_e c \mu)$, $Y = V_y/\mu > 0$, $Y_0 = u/\mu = u^2/v_e^2 = \varepsilon^2 \ll 1$, $X = V_x/\mu$, $C = c/\mu$, $T = \tau/\mu$, $\mu = T_e/(ut_e) = v_e^2/u > 0$. В результате из уравнений (25)–(28) следует

$$(X - T) \frac{dX}{dT} + Y \frac{dA^*}{dT} - C \frac{d\varphi^*}{dT} = 0, \quad (X - T) \left(\frac{dY}{dT} - \frac{dA^*}{dT} \right) = 0, \quad (29)$$

$$\frac{d}{dT} \ln \left(\frac{n}{n_0} \right) + \frac{1}{(X - T)} \frac{dX}{dT} = 0, \quad (30)$$

$$\frac{dA^*}{dT} = \frac{d}{dT} \ln \left(\frac{n}{n_0} \right) + \frac{1}{2} \frac{d}{dT} \ln \left[\left(\frac{Y}{Y_0} + 1 \right) \left(\frac{Y}{Y_0} - 1 \right) \right], \quad (31)$$

$$\frac{d\varphi^*}{dT} = \frac{Y_0}{2C} \frac{d}{dT} \ln \left[\left(\frac{Y}{Y_0} + 1 \right) / \left(\frac{Y}{Y_0} - 1 \right) \right]. \quad (32)$$

Видно, что в рассматриваемых условиях Y_0 является малым параметром, и влияние электростатического поля на динамику плазмы в случае $Y \gg Y_0$ минимально. Для удобства вычислений уравнения для полей A^* и φ^* приведены к алгебраическому виду.

Выберем решение $dY/dT - dA^*/dT = 0$. Последовательно исключая n , A^* и φ^* , получим систему нелинейных уравнений для скоростей $X \propto V_x$ и $Y \propto V_y$ пучка:

$$[(X - T)^2 - Y] \frac{dX}{dT} + (X - T) \frac{Y^2 + Y_0^2}{Y^2 - Y_0^2} \frac{dY}{dT} = 0, \quad (X - T) \frac{dX}{dT} + \left[Y + \frac{Y_0}{Y^2 - Y_0^2} \right] \frac{dY}{dT} = 0. \quad (33)$$

Для существования нетривиального решения необходимо выполнение условия

$$(X - T)^2 = f^2(Y, Y_0) = \frac{Y^3 - Y_0^2 Y + Y_0^2}{Y^2 - Y - Y_0^2} = \frac{Y^2}{Y - 1} + \dots, \quad (34)$$

или $X_{1,2} = T \pm f = T \pm Y/(Y - 1)^{1/2} + \dots$. Асимптотика (34) дана для предела $Y/Y_0 \gg 1$. Автомодельное решение существует только в случае $f^2 > 0$. Из уравнения (34) видно, что на динамику плазмы влияет главным образом вихревое электрическое и магнитное поля, что обусловлено зависимостью X от Y (при разлёте в квазинейтральном приближении зависимости X от Y нет). Электростатическое поле оказывается в случае $Y/Y_0 \sim 1$. При $Y/Y_0 \gg 1$ динамика определяется электромагнитным полем **A**.

Решение с начальным условием $C_0 = \text{const}$ имеет вид

$$T = \mp \left[C_0 + f + \int \frac{Y^3 - Y_0^2 Y + Y_0^2}{Y^2 - Y_0^2} f dY \right] \xrightarrow{Y/Y_0 \gg 1} \mp \left[C_0 + \frac{2Y^2 - Y + 2}{3(Y - 1)^{1/2}} + \dots \right] \quad (35)$$

и существует при $Y > 1$. Это решение определяет поведение скорости пучка или функцию $Y = Y_{1,2}(T, C_0, Y_0)$. Таким образом, для данного C_0 существуют две двузначные кривые $Y_{1,2}(T, C_0, Y_0)$, симметричные относительно оси $T = 0$.

Когда $C_0 < C_1 = -5\sqrt{2}/3$, эти кривые не пересекают ось $T = 0$; когда $C_0 > C_1$ (рис. 3), кривые пересекаются с осью $T = 0$ и друг с другом. Это даёт возможность построить симметричные решения, описывающие магнитную аннигиляцию в токовых системах и релаксацию магнитного поля при $t > 0$. Это же решение описывает аккумуляцию магнитной энергии в плазме и генерацию тока при анализе решений для времён $t < 0$. Когда $C_0 = C_1$, возможен переход из одного симметричного решения в другое. Несимметричные решения, характеризуемые кривой Y_1 или Y_2 , описывают расширение токонесущей плазмы в открытое полупространство с самосогласованной генерацией вихревого тока и магнитного поля.

Для безразмерной скорости X , магнитного поля B и плазменной концентрации n имеем

$$X = \mp C_0 + \left[\int dY \frac{Y^3 - Y_0^2 Y + Y_0^2}{(Y^2 - Y_0^2) f} \right] \xrightarrow{Y/Y_0 \gg 1} \mp \left[C_0 + (2/3)(Y - 1)^{3/2} + \dots \right], \quad (36)$$

$$B = \frac{cm_e}{et} \frac{dA^*}{dT} = \frac{cm_e}{et} \frac{2(Y - 1)^{3/2}}{Y(2Y - 3)} + \dots, \quad (37)$$

$$\frac{d}{dT} \ln \left(\frac{n}{n_0} \right) = \mp \frac{(Y^3 - Y + Y_0^3)f^{-1}}{Y^3 - YY_0 + Y_0^2 f' f (Y^2 - Y_0^2)} \xrightarrow{Y/Y_0 \gg 1} \mp \frac{2(Y - 1)^{5/2}}{Y^2(2Y - 3)} + \dots. \quad (38)$$

Характерные случаи, описываемые приведёнными формулами, представлены на рис. 3.

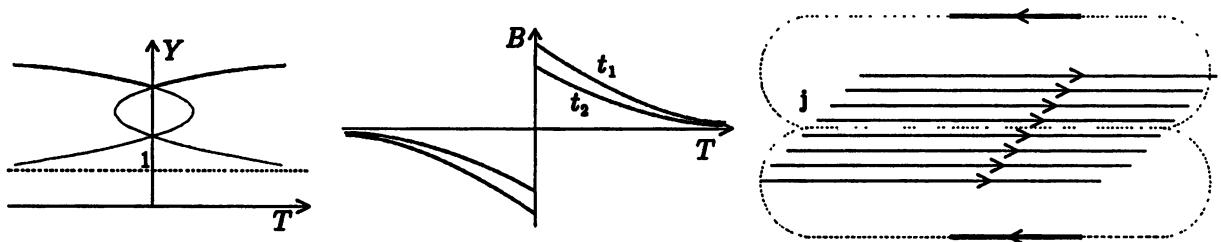


Рис. 3. Графики зависимости скорости ускоряемых электронов $V_y \propto Y$ и магнитного поля B от автомодельной переменной T в процессе эволюции токовой системы (графики слева и в центре); $t_2 > t_1$. Справа показана Θ -конфигурация полученной токовой системы в одномерном случае

Аннигиляционные симметричные решения описывают релаксацию магнитного поля в одномерном слое токонесущей плазмы, что моделирует геомагнитный хвост с Θ -конфигурацией линий тока, состоящей из двух встречных вихрей тока с $\text{div } \mathbf{j} = 0$. При этом разрыв магнитного поля в месте соприкосновения вихрей при $T = 0$ содержит нейтральный токовый слой. Тонкая структура этого нейтрального токового слоя определяется масштабами пространственной дисперсии r_{DM} , r_s и в используемом нами квазистационарном приближении ($D_M \gg 1$) не может быть получена. Крупномасштабные токи вихрей вне разрыва при $T \neq 0$ противоположны направлению тока нейтрального токового слоя.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе предложено упрощённое нелинейное кинетическое описание медленной крупномасштабной динамики горячей токонесущей бесстолкновительной плазмы в случае квазистационарного распределения диамагнитных частиц. В процессе эволюции плазмы возбуждаются вихревые электрические поля, которые ускоряют частицы и создают токи, соизмеримые с токами диамагнитных частиц по величине и противоположно направленные. В результате нестационарные процессы в плазме происходят в квазистационарном режиме. Возможность существования такого режима обнаружена в линейной теории неустойчивости однородной токонесущей плазмы. В нелинейном рассмотрении для ускоренных частиц с узкими функциями распределения возможно сформулировать МГД уравнения со специальными материальными связями и получить их автомодельные решения. Данные решения описывают процессы взрывного типа при формировании и исчезновении токовых систем в плазме. Развитое приближение является обобщением известного квазинейтрального приближения для электростатического поля на токонесущую плазму, в которой существенны самосогласованные электромагнитные процессы. Вопросы анализа двумерных решений, изучения спектра ускоренных электронов и структуры полей в области разрывов требуют дальнейшего развития модели и её детализации.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 01-02-17012 и 99-02-18244), INTAS-ESA (грант № 99-01277), Fonds zur Förderung der Wissenschaftlichen Forschung (грант № P13804-TPH), Onderzoeksfonds K. U. Leuven, UK Royal Society, SERC. В. М. Г. благодарит В. В. Зайцева за поддержку в работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Priest E. R. // Reports on Progress in Physics. 1985. V. 48. P. 955.
- Галеев А. А., Сагдеев Р. З. // Вопросы теории плазмы / Под ред. М. А. Леоновича. Атомиздат, 1973: Т. 7. С. 82.
- Speiser T. W. // J. Geophys. Res. 1965. V. 70, No. 17. P. 4219.
- Vekstein G. E., Priest E. R. // Phys. Plasmas. 1995. V. 2, No. 8. P. 3169.

5. Burkhardt G. R. // J. Geophys. Res. 1992. V. 97, No. A9. P. 13 799.
6. Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Физическая кинетика. М.: Наука, 1979.
7. Gurevich A. V., Pitaevskii L. P. // Rev. Plasma Phys. 1986. V. 10. P. 5.
8. Harris E. G. // Nuovo Cimento. 1962. V. 23, No. 1. P. 115.
9. Pfirsch D. // Z. Naturforsch. 1962. V. 17a. P. 861.
10. Gubchenko V. M. // Sov. J. Plasma Phys. 1988. V. 14, No. 3. P. 186.
11. Губченко В. М., Ходаченко М. Л. // Изв. вузов. Радиофизика. 1996. Т. 39, № 2. С. 133.

¹ Институт прикладной физики РАН,
г. Нижний Новгород, Россия

² Институт космических исследований
Австрийской академии наук,
г. Грац, Австрия

³ Католический Университет Лувена,
г. Лувен, Бельгия

Поступила в редакцию
14 декабря 2000 г.

QUASI-CURRENT-FREE DESCRIPTION OF ELECTRODYNAMICS OF A HOT CURRENT-CARRYING COLLISIONLESS PLASMA

V. M. Gubchenko, H. K. Biernat, and M. Goossens

To study slow electromagnetic processes of induction type in a hot collisionless nonmagnetized high-beta plasma near magnetic-reconnection regions, where the influence of eddy electric currents on magnetic-field configuration should be described selfconsistently, we develop a kinetic description in the quasi-current-free (QCF) approximation, which includes the quasi-neutral approximation. The QCF approximation is valid for large-scale nonstationary processes in the case where the scale of spatial inhomogeneity of the fields exceeds the scale of diamagnetic current screening, the anomalous skin scale, and the polarization-screening scale. In this case, diamagnetic currents are compensated by conductivity currents. The equations of the QCF approximation for accelerated particles with narrow distribution functions are formulated as MHD equations. To illustrate the method, we consider the one-dimensional problem on magnetic annihilation. The selfsimilar solution of this problem describes the relaxation of the current system typical for solar streamers and the tail of the Earth's magnetosphere.

УДК 550.386

ФОРМИРОВАНИЕ ПОТОКОВ НАДТЕПЛОВЫХ ЧАСТИЦ В СИЛЬНО ТУРБУЛЕНТНОЙ КОСМИЧЕСКОЙ ПЛАЗМЕ

П. А. Беспалов¹, В. Г. Мизонова²

Рассмотрен вопрос о формировании потоков надтепловых частиц электростатическими структурами сильно турбулентной космической плазмы. Показано, что области с сильной плазменной турбулентностью могут играть роль гигантского ускорителя заряженных частиц. Приведены решения стационарного кинетического уравнения в турбулентном слое для различных режимов ускорения. Оценена эффективность диффузии по продольной и поперечной по отношению к магнитному полю скоростям частиц. Поперечная (в пространстве скоростей) диффузия более эффективна для ионов и приводит к сильной изотропизации ионных потоков. Электронные потоки распространяются практически вдоль магнитного поля. Выяснены условия влияния регулярной силы неоднородного магнитного поля на процесс стохастического ускорения. Сделаны оценки средней энергии продольного движения частиц и потоков частиц на больших расстояниях от области инжекции. Ионые и электронные потоки могут ускоряться до сравнимых энергий. Проанализированы особенности распространения релятивистских потоков. Показано, что сильная плазменная турбулентность может формировать пучки частиц с выделенными энергиями. Предложенный механизм полезен для объяснения свойств потоков энергичных частиц в космической плазме с токами вдоль магнитного поля: в высокоширотных областях планетных магнитосфер, в бессиловых конфигурациях солнечной короны, в солнечном ветре.

ВВЕДЕНИЕ

Вопрос о формировании надтепловых потоков заряженных частиц плазменной турбулентностью занимает важное место в физике космической плазмы. Взаимодействие частиц со слабой плазменной турбулентностью имеет характер диффузии в пространстве скоростей и описывается в квазилинейной теории [1]. При определенных условиях в плазме достигается достаточно высокий уровень турбулентности, и формируются электростатические структуры со сравнительно низкой плотностью частиц и интенсивным электрическим полем. Изучение вопроса о формировании потоков заряженных частиц такими структурами является целью настоящей работы.

Общепринятой теории сильной плазменной турбулентности в настоящее время не существует. Тем не менее результаты интенсивных экспериментальных и теоретических исследований дают возможность получить общее представление о её свойствах. Благоприятные условия для возбуждения сильной ленгмюровской турбулентности реализуются в зоне электрических токов, текущих вдоль магнитного поля. Такие токи характерны для областей с «открытой» геометрией магнитного поля. Хорошо известны продольные биркеландовские токи, типичные для ночного сектора земной магнитосферы [2, 3]. Продольные токи образуются при нетвердотельном вращении плазменных оболочек звёзд и планет [4]. Бессиловые конфигурации с направленными вдоль магнитного поля токами широко обсуждаются в моделях коронарных магнитных полей [5].

Стационарные потоки электронов, связанные с продольными токами, неустойчивы по отношению к возбуждению плазменных колебаний. Накопление энергии колебаний до уровня, сравнимого с тепловой энергией, может приводить к развитию модуляционной неустойчивости и формированию электростатических структур с пониженной концентрацией частиц и сравнительно интенсивными электрическими полями [6]. Такого типа образования наблюдаются в высокоширотных областях земной магнитосферы [7, 8], в плазме солнечного ветра [9], где первоисточником плазменных колебаний служат потоки электронов, ответственные за всплески солнечного радиоизлучения третьего типа [10]. Возможность существования подобных структур подтверждается численными расчётами [11, 12]. Возможно,

что структуры такого же типа могут возникать на нелинейной стадии других неустойчивостей, обусловленных, например, неоднородностью исходного квазистационарного потока частиц в поперечном к магнитному полю направлении.

Важным свойством турбулентных электростатических структур является локализация волновой энергии в области малых волновых чисел и, следовательно, больших скоростей резонансно взаимодействующих с волнами частиц. При этом возможно ускорение частиц до энергий, значительно превышающих энергию электронов исходного потока. Отметим, что подобный эффект не наблюдается в случае слабой ленгмюровской турбулентности. С этой точки зрения изучение вопроса взаимодействия частиц с сильной плазменной турбулентностью важно для объяснения происхождения ускоренных электронных и ионных потоков в космической плазме. Вопрос об ускорении заряженных частиц интенсивно изучается в литературе, и в настоящее время известно много моделей ускорения в ауроральной магнитосфере: ускорение в окрестности магнитной X-точки в удалённой области магнитосферы [13], ускорение электростатическим полем на малых высотах [14], центробежное и индукционное ускорение в комбинации с конвекцией [15], ускорение кониками [16], ускорение при аномальном джоулевом нагреве [17], ускорение частиц слабой плазменной турбулентностью [18]. Применительно к условиям магнитосферы Юпитера обсуждается рециркуляционная модель [19].

Однако экспериментальные исследования магнитосферных потоков, проводимые на спутниках S3-3, «Viking», FAST и др., свидетельствуют о существовании иных механизмов ускорения, связанных с ростом продольных токов и возбуждением сильной плазменной турбулентности [7, 20, 21]. О действии дополнительного и более мощного по сравнению с рециркуляционной моделью [19] механизма ускорения электронов в высоких широтах магнитосферы Юпитера свидетельствуют результаты эксперимента COSPIN, выполненного на космическом аппарате ULYSSES [22].

Для изучения вопроса о формировании потоков заряженных частиц в сильно турбулентной плазме в работах [23, 24] использовалась модель осциллирующих на электронной плазменной частоте электрических конденсаторов. В настоящей работе рассматривается более общая модель уединённых электростатических структур со случайными фазами колебаний электрического поля. Продольная и поперечная по отношению к магнитным силовым линиям компоненты электрического поля структуры предполагаются симметричными или антисимметричными функциями продольной координаты. О таком свойстве полей турбулентных структур свидетельствуют результаты спутниковых наблюдений [7, 8] и численные расчёты [11, 12]. Для принятых моделей вычислены коэффициенты диффузии по продольной скорости и поперечному адиабатическому инварианту частиц в уравнении Фоккера—Планка, получены решения кинетического уравнения для функции распределения частиц в турбулентном слое, оценены длины диффузии, средняя энергия продольного движения частиц и потоки частиц, выявлены условия влияния регулярной продольной силы, обусловленной неоднородностью магнитного поля, на процесс стохастического ускорения, исследованы закономерности формирования пучков частиц с выделенными энергиями, проанализированы особенности ускорения потоков релятивистских частиц.

1. МОДЕЛЬ СИЛЬНОЙ ПЛАЗМЕННОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Рассмотрим одномерный в координатном пространстве поток заряженных частиц, движущихся в магнитном поле \mathbf{B} и электрическом поле \mathbf{E} системы уединённых электростатических электронейтральных структур:

$$\mathbf{E} = \sum_n \mathbf{E}_n(\mathbf{r}) \cos(\Omega t + \varphi_n), \quad (1)$$

где $\mathbf{E}_n(\mathbf{r})$ характеризует пространственное распределение поля n -й структуры, Ω — частота осцилляций поля, φ_n — случайная фаза колебаний поля n -й структуры, равномерно распределённая на интервале $[0, 2\pi]$. Характерный продольный размер d_n n -й структуры много меньше расстояния l_n между

n -й и $(n+1)$ -й структурами. Электрическое поле структуры характеризуется определённой симметрией относительно её центра. Направления поперечных составляющих $\mathbf{E}_{n\perp}$ полей отдельных структур равновероятны и статистически независимы. Отметим, что частота осцилляций Ω на нелинейной стадии развития модуляционной неустойчивости равна электронной плазменной частоте ω_{pe} [6], на нелинейной стадии развития неустойчивости потока с шириной скорости [25] — ионной циклотронной частоте ω_{Bi} . Слабую неоднородность магнитного поля учтём в виде линейной зависимости

$$B_z = B_0 \left(1 - \frac{z}{a}\right), \quad (2)$$

где a — масштаб неоднородности поля.

Действие поля (1) на заряженную частицу можно рассматривать как последовательность случайных толчков, изменяющих её скорость. Вычислим изменение скорости при взаимодействии заряженной частицы с электрическим полем $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ отдельной n -й структуры. Запишем уравнения движения частицы, пренебрегая неоднородностью магнитного поля на расстояниях порядка d_n и поперечным изменением электрического поля на расстояниях порядка гирорадиуса частицы:

$$\frac{dz}{dt} = v_{||}, \quad (3a)$$

$$\frac{dv_{||}}{dt} = q_m E_{||}(z, t), \quad (3b)$$

$$\frac{d^2\mathbf{v}_{\perp}}{dt^2} + \omega_B^2 \mathbf{v}_{\perp} = q_m \left(\frac{d\mathbf{E}_{\perp}(z, t)}{dt} + \omega_B \left[\mathbf{E}_{\perp}(z, t), \frac{\mathbf{B}}{B} \right] \right), \quad (3c)$$

где q_m — удельный заряд частицы, ω_B — её гирочастота, индексы $||$ и \perp соответствуют продольному и поперечному по отношению к магнитному полю направлениям. Решением этих уравнений являются функции

$$\begin{aligned} v_{||}(t) &= v_{||0} + q_m \int_0^t E_{||}(z(t'), t') dt', \\ \mathbf{v}_{\perp}(t) &= \text{Re} \left\{ \left(\mathbf{v}_{\perp 0} - i \left[\mathbf{v}_{\perp 0}, \frac{\mathbf{B}}{B} \right] \right) e^{i\omega_B t} + \right. \\ &\quad \left. + q_m \int_0^t \left(\mathbf{E}_{\perp}(z(t'), t') - i \left[\mathbf{E}_{\perp}(z(t'), t'), \frac{\mathbf{B}}{B} \right] \right) e^{i\omega_B(t-t')} dt' \right\}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $v_{||0}$ и $\mathbf{v}_{\perp 0}$ — продольная и поперечная компоненты скорости в момент времени $t = 0$.

Рассмотрим подробнее случай энергичных частиц, скорость которых при взаимодействии с отдельной структурой меняется незначительно:

$$\Delta v_{||} \sim |q_m E_{||} d_n|^{1/2} \ll v_{||}, \quad \Delta v_{\perp} \sim |q_m E_{\perp} d_n|^{1/2} \ll v_{\perp}. \quad (5)$$

В этом случае изменение скорости частицы за время её взаимодействия со структурой можно раскладывать в ряд по степеням флуктуационного поля [26]. Первый член ряда вычисляется по невозмущённой траектории частицы

$$\Delta v_{||} = \frac{q_m}{v_{||}} \int_0^{d_n} E_{||} \Big|_{v_{||} t = z'} dz', \quad (6a)$$

$$\Delta\mu = \frac{q_m \sqrt{\mu}}{v_{\parallel} \sqrt{B}} \int_0^{d_n} E_{\perp} \Big|_{v_{\parallel} z=z'} \cos\left(\omega_B \frac{z'}{v_{\parallel}} - \alpha\right) dz', \quad (66)$$

где $\mu = v_{\perp}^2/B$ — поперечный адиабатический инвариант, α — угол между векторами $v_{\perp 0}$ и E_{\perp} . Квадратичные по полю поправки к (6) равны

$$\Delta v_{\parallel}^{(2)} = -\Delta v_{\parallel} \frac{\partial \Delta v_{\parallel}}{\partial v_{\parallel}}, \quad \Delta\mu^{(2)} = -\Delta v_{\parallel} \frac{\partial \Delta\mu}{\partial v_{\parallel}}. \quad (7)$$

Используем выражения (6), (7) для описания динамики потока заряженных частиц.

2. УРАВНЕНИЕ ФОККЕРА—ПЛАНКА ДЛЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ С СИЛЬНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТЬЮ

Взаимодействие достаточно энергичных частиц (см. (5)) с полем уединённых турбулентных структур имеет характер слабых случайных толчков и может описываться в рамках марковского процесса. Уравнение Фоккера—Планка для функции распределения частиц $f(t, z, v_{\parallel}, \mu)$ с учётом соотношений (7) имеет следующий вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_{\parallel} \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\mu B_0}{2a} \frac{\partial f}{\partial v_{\parallel}} = \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} \left(D_{v_{\parallel}} \frac{\partial f}{\partial v_{\parallel}} \right) + \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} \left(D_{v_{\parallel}\mu} \frac{\partial f}{\partial \mu} \right) + \frac{\partial}{\partial \mu} \left(D_{\mu v_{\parallel}} \frac{\partial f}{\partial v_{\parallel}} \right) + \frac{\partial}{\partial \mu} \left(D_{\mu} \frac{\partial f}{\partial \mu} \right). \quad (8)$$

Здесь введены коэффициенты диффузии

$$D_{v_{\parallel}} = \frac{\langle \Delta v_{\parallel} \Delta v_{\parallel} \rangle}{2\tau}, \quad (9a)$$

$$D_{v_{\parallel}\mu} = D_{\mu v_{\parallel}} = \frac{\langle \Delta v_{\parallel} \Delta \mu \rangle}{2\tau}, \quad (9b)$$

$$D_{\mu} = \frac{\langle \Delta \mu \Delta \mu \rangle}{2\tau}, \quad (9c)$$

где τ — время усреднения. В уравнении (8) учтена регулярная сила $\mu B_0/(2a)$, связанная с неоднородностью магнитного поля.

Предположим, что колебания соседних структур статистически независимы. Подставляя выражения (6) в коэффициенты диффузии (9) и усредняя по случайной фазе колебаний φ_n и случайному углу α_n , получаем

$$D_{v_{\parallel}} = \frac{q_m^2}{4l |v_{\parallel}|} \left\langle \left| \int_{-\infty}^{+\infty} E_{n\parallel} e^{i\Omega z'/v_{\parallel}} dz' \right|^2 \right\rangle, \quad (10a)$$

$$D_{v_{\parallel}\mu} = D_{\mu v_{\parallel}} = 0, \quad (10b)$$

$$D_{\mu} = \frac{q_m^2 \mu}{4Bl |v_{\parallel}|} \left\langle \sum_{s=-1,+1} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} E_{n\perp} e^{i(\Omega + s\omega_B) z'/v_{\parallel}} dz' \right|^2 \right\rangle, \quad (10c)$$

где среднее расстояние между структурами $l = \langle l_n \rangle$. Здесь и далее угловые скобки означают усреднение по системе турбулентных структур.

2.1. Коэффициенты диффузии частиц по продольной скорости

Исследуем более детально свойства коэффициента диффузии частиц по продольной скорости. При больших скоростях

$$|v_{\parallel}| \gg d\Omega \quad (11)$$

где $d = \langle d_n \rangle$, функция $D_{v_{\parallel}}$ (10а) имеет универсальную, не зависящую от конкретной пространственной структуры электрического поля степенную асимптотику и спадает как $|v_{\parallel}|^{-1}$ при чётной координатной зависимости поля E_{\parallel} :

$$D_{v_{\parallel}}^{\text{even}} = \frac{q_m^2}{4l|v_{\parallel}|} \left\langle \left(\int_{-\infty}^{+\infty} E_{n\parallel} dz' \right)^2 \right\rangle, \quad (12a)$$

и как $|v_{\parallel}|^{-3}$ при нечётной координатной зависимости поля E_{\parallel} :

$$D_{v_{\parallel}}^{\text{odd}} = \frac{(q_m \Omega)^2}{4l|v_{\parallel}|^3} \left\langle \left(\int_{-\infty}^{+\infty} E_{n\parallel} z' dz' \right)^2 \right\rangle. \quad (12b)$$

При $|v_{\parallel}| \simeq d\Omega$ функция $D_{v_{\parallel}}$ может иметь локальные минимумы или обращаться в нуль, если при некоторых $k = k_*$ в нуль обращается спектр продольного электрического поля структуры. Отметим, что такое свойство спектра может приводить к формированию пучков заряженных частиц с выделенными энергиями. Подробнее этот вопрос будет рассмотрен ниже.

В качестве примера приведём выражения для коэффициента диффузии по продольной скорости при следующих чётной

$$E_{n\parallel}^{\text{even}} = \hat{E}_{n\parallel} [\Theta(z + d_n) - \Theta(z - d_n)] \quad (13a)$$

и нечётной

$$E_{n\parallel}^{\text{odd}} = \hat{E}_{n\parallel} [\Theta(z + d_n) + \Theta(z - d_n) - 2\Theta(z)] \quad (13b)$$

координатных зависимостях продольной компоненты пространственной части поля турбулентной структуры, где $\Theta(z)$ — единичная функция, продольный размер структуры d_n равномерно распределён в интервале $[d - \delta, d + \delta]$. При этом

$$D_{v_{\parallel}}^{\text{even,odd}} = \frac{q_m^2 |v_{\parallel}|}{l} \left\langle \hat{E}_{n\parallel}^2 \right\rangle R^{\text{even,odd}}. \quad (14)$$

Здесь

$$R^{\text{even}} = \Omega^{-2} \left[\frac{\sin \lambda}{\lambda} \sin^2 \left(\lambda \frac{d}{\delta} \right) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sin \lambda}{\lambda} \right) \right],$$

$$R^{\text{odd}} = \Omega^{-2} \left[\frac{\sin(2\lambda)}{2\lambda} \sin^4 \left(\lambda \frac{d}{\delta} \right) + 2 \left(\frac{\sin \lambda}{\lambda} - \frac{\sin(2\lambda)}{2\lambda} \right) \sin^2 \left(\lambda \frac{d}{\delta} \right) + \frac{1}{2} \left(3 - \frac{\sin(2\lambda)}{2\lambda} - \frac{2 \sin \lambda}{\lambda} \right) \right],$$

где $\lambda = \Omega \delta / (2v_{\parallel})$. В рассматриваемом случае коэффициенты диффузии $D_{v_{\parallel}}^{\text{even,odd}}$ могут быть аппроксимированы линейной функцией v_{\parallel} в интервале скоростей

$$\left(|q_m| \hat{E}_{\parallel} d \right)^{1/2} \ll |v_{\parallel}| \leq \delta \Omega. \quad (15)$$

Локальные минимумы функция $D_{v_{\parallel}}$ имеет при

$$v_{\parallel} = \frac{d\Omega}{2\pi s}, \quad (16)$$

где $s = \pm 1, \pm 2, \dots$. При условии (11) коэффициенты диффузии $D_{v_{\parallel}}^{\text{even,odd}}$ изменяются по степенно-му закону (12). В качестве примера на рис. 1 представлена зависимость функции $D_{v_{\parallel}}^{\text{odd}}$ от продольной скорости при $\delta = 0,22d$. Отметим, что линейный и осцилляторный характер поведения коэффициентов диффузии $D_{v_{\parallel}}^{\text{even,odd}}$ может проявляться, если отношение амплитуды продольных колебаний частицы в электрическом поле структуры к продольному размеру структуры много меньше единицы:

$$\zeta_{\parallel} = \frac{q_m \hat{E}_{\parallel}}{\Omega^2 d} \ll 1. \quad (17)$$

При увеличении параметра ζ_{\parallel} область применимости диффузационного приближения соответствует спадающему степенному участку функции $D_{v_{\parallel}}^{\text{even,odd}}$. Исключением здесь является случай диффузии частиц на структурах с нечётной координатной зависимостью продольного электрического поля. Действительно, при

$$\zeta_{\parallel} \gg 1 \quad (18)$$

границы применимости уравнения Фоккера—Планка расширяются и определяются неравенством (ср. с (5))

$$\frac{q_m \hat{E}_{\parallel} d}{\sqrt{\zeta_{\parallel}}} \ll v_{\parallel}^2. \quad (19)$$

Траектории частиц со скоростями $|q_m| \hat{E}_{\parallel} d / \sqrt{\zeta_{\parallel}} \ll v_{\parallel}^2 \leq |q_m| \hat{E}_{\parallel} d$ могут сильно возмущаться электрическим полем структуры, и традиционный метод «прямых траекторий» [26] оказывается неприменимым. Воспользуемся для вычисления приращения скорости частицы следующим из (18) неравенством $\Omega \tau_1 \ll 1$, где τ_1 — время взаимодействия частицы со структурой, и разложим временной множитель электрического поля (1) в ряд по степеням $\Omega \tau_1$. Используя, для примера, функцию пространственной части поля структуры (13б) и интегрируя выражения (4), получаем

$$\Delta \epsilon_{\parallel} = \frac{2\sqrt{2}\epsilon_{\parallel} \sin \varphi}{\sqrt{\beta \zeta_{\parallel} \cos^2 \varphi}} \left[(2 + \beta \cos \varphi) \sqrt{1 + \beta \cos \varphi} - 2 - 2\beta \cos \varphi \right], \quad (20)$$

где $\epsilon_{\parallel} = mv_{\parallel}^2/2$, $\beta = |q| \hat{E}_{n\parallel} d / \epsilon_{\parallel}$, q и m — заряд и масса частицы. После усреднения по случайной фазе φ_n в коэффициенте диффузии (9а) с учётом (20) получаем

$$D_{v_{\parallel}} = \frac{(2\epsilon_{\parallel}/m)^{3/2}}{3\pi\beta\zeta_{\parallel} l} \left[3\beta^2 + \frac{34\beta^2 + 8}{\sqrt{1+\beta}} K(x) + \right. \\ \left. + (42\beta^2 - 8) \sqrt{1+\beta} E(x) - \frac{(48 - 6\beta^2)\beta}{\sqrt{1+\beta}} \Pi(2, x) - 27\pi\beta^2 \right], \quad (21)$$

где $x = \sqrt{2\beta/(1+\beta)}$; $K(x)$, $E(x)$ и $\Pi(2, x)$ — эллиптические интегралы первого, второго и третьего рода [27]. При энергии ϵ_{\parallel} , удовлетворяющей неравенству $|q| \hat{E}_{\parallel} d \ll \epsilon_{\parallel}$, коэффициент диффузии (21) является степенной функцией вида (12б).

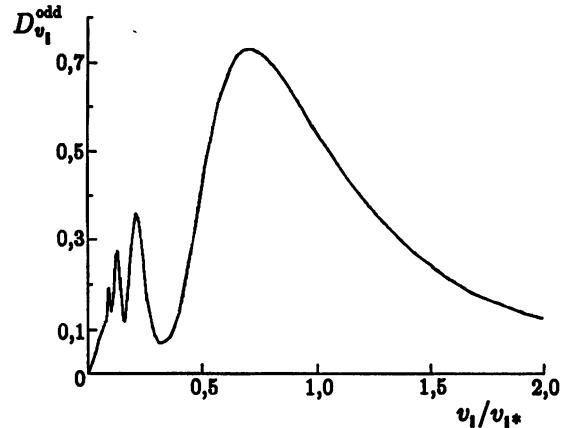


Рис. 1. Коэффициент диффузии по продольной скорости при нечётной координатной зависимости продольного поля структуры ($v_{\parallel*} = \Omega d$; $D_* = q_m^2 \langle \hat{E}_{n\parallel}^2 \rangle d / (l\Omega)$; $\delta = 0,22d$)

Выясним, как влияет на процесс диффузии частиц статистическая зависимость фаз колебаний соседних структур. Предположим, что подсистема из N последовательных, периодически расположенных ($l_n = l$) структур имеет общую фазу колебаний электрического поля, т. е. $\varphi_n = \varphi$. Пусть, например, продольное поле структуры — чётная функция координаты вида (13а) с $\hat{E}_{n\parallel} = \hat{E}_{\parallel}$, $d_n = d$, $\delta = 0$. Подставляя выражение (6а) для приращения продольной скорости частицы в коэффициент диффузии (9а) и усредняя по случайным фазам колебаний подсистем, получаем

$$D_{v\parallel} = \frac{q_m^2 \hat{E}_{\parallel}^2 |v_{\parallel}|}{4\Omega^2 l} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^{n-1} \cos(\psi_n - \psi_m) \right] \sin^2 \frac{\Omega d}{2v_{\parallel}}, \quad (22)$$

где

$$\psi_n = \frac{\Omega a v_{\parallel}}{\mu B_0} \sqrt{1 + \frac{l \mu B_0 n}{a v_{\parallel}^2}}.$$

Выражение (22) показывает, что влияние неоднородности магнитного поля на процесс диффузии может быть существенным, если выполнено условие $\mu B_0 l^2 \Omega / (a v_{\parallel}^3) \geq 1$, т. е. если разница времён пролёта частицей расстояния между структурами, вычисленных с учётом и без учёта регулярной магнитной силы, сравнима с периодом осцилляций поля. При выполнении обратного неравенства ($\mu B_0 l^2 \Omega / (a v_{\parallel}^3) \ll \ll 1$) коэффициент диффузии (22) имеет вид

$$D_{v\parallel} = \frac{\left(q_m \hat{E}_{\parallel} \right)^2 |v_{\parallel}|}{N \Omega^2 l} \left[\frac{\sin(N\lambda')}{\sin \lambda'} \sin \left(\lambda' \frac{d}{l} \right) \right]^2, \quad (23)$$

где $\lambda' = \Omega l / (2v_{\parallel})$ и отличается от аналогичного результата с некоррелированными фазами (см. (14) при $\delta = 0$) множителем $\sin^2(N\lambda') / (N \sin^2 \lambda')$. Как следует из выражения (23), система наиболее эффективно воздействует на частицы со скоростями $|v_{\parallel}| \geq N\Omega l$ и $v_{\parallel} \cong \Omega l / (2\pi s)$, где s — целое число. Такие частицы при пролёте отдельных структур попадают в одну и ту же фазу колебаний, в результате чего действие на частицу одной структуры многократно усиливается. Подобный резонансный эффект наиболее ярко выражен при $N \gg 1$, когда

$$D_{v\parallel} = \frac{\left(q_m \int_{-\infty}^{+\infty} E_{\parallel} dz' \right)^2 N}{4l |v_{\parallel}|} \left\{ \Theta(|v_{\parallel}| - Nv^*) + \sum_{s \neq 0} \left[\Theta \left(|v_{\parallel}| - \frac{v^*}{s} - \frac{v^*}{s^2 N} \right) - \Theta \left(|v_{\parallel}| - \frac{v^*}{s} + \frac{v^*}{s^2 N} \right) \right] \right\}. \quad (24)$$

Здесь $v^* = \Omega l / \pi$. Сравнение выражений (14) при $\delta = 0$ и (24) показывает, что коэффициент диффузии по продольной скорости для достаточно энергичных частиц пропорционален длине корреляции случайной фазы колебаний.

Отметим, что при случайных расстояниях d_n и l_n коррелированность фаз колебаний не оказывается на характере диффузии частиц.

2.2. Коэффициент диффузии по поперечному адиабатическому инварианту

Используя выражения, аналогичные (13), для пространственной части поперечного электрического поля структуры, вычислим коэффициент диффузии (10в) по поперечному адиабатическому инварианту:

$$D_{\mu}^{\text{even,odd}} = \frac{q_m^2 |v_{\parallel}| \mu}{Bl} \langle \hat{E}_{n\perp}^2 \rangle (R_+^{\text{even,odd}} + R_-^{\text{even,odd}}). \quad (25)$$

Здесь

$$R_{\pm}^{\text{even}} = (\Omega \pm \omega_B)^{-2} \left[\frac{\sin \lambda_{\pm}}{\lambda_{\pm}} \sin^2 \left(\lambda_{\pm} \frac{d}{\delta} \right) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sin \lambda_{\pm}}{\lambda_{\pm}} \right) \right],$$

$$R_{\pm}^{\text{odd}} = (\Omega \pm \omega_B)^{-2} \left[\frac{\sin(2\lambda_{\pm})}{2\lambda_{\pm}} \sin^4 \left(\lambda_{\pm} \frac{d}{\delta} \right) + 2 \left(\frac{\sin \lambda_{\pm}}{\lambda_{\pm}} - \frac{\sin(2\lambda_{\pm})}{2\lambda_{\pm}} \right) \sin^2 \left(\lambda_{\pm} \frac{d}{\delta} \right) + \frac{1}{2} \left(3 - \frac{\sin(2\lambda_{\pm})}{2\lambda_{\pm}} - \frac{2 \sin \lambda_{\pm}}{\lambda_{\pm}} \right) \right],$$

где $\lambda_{\pm} = (\Omega \pm \omega_B) \delta / (2v_{\parallel})$. В области малых скоростей $|v_{\parallel}| \leq (\Omega + |\omega_B|) \delta$ функция D_{μ} меняется пропорционально продольной скорости частицы. При больших скоростях $(\Omega + |\omega_B|)d \ll |v_{\parallel}|$ коэффициент диффузии аппроксимируется степенной функцией продольной скорости вида

$$D_{\mu}^{\text{even}} = \frac{q_m^2 \mu}{4Bl |v_{\parallel}|} \left\langle \left(\int_{-\infty}^{+\infty} E_{n\perp} dz' \right)^2 \right\rangle, \quad (26)$$

если $E_{n\perp}$ — чётная функция z , и

$$D_{\mu}^{\text{odd}} = \frac{q_m^2 (\omega_B^2 + \Omega^2) \mu}{4Bl |v_{\parallel}|^3} \left\langle \left(\int_{-\infty}^{+\infty} E_{n\perp} z' dz' \right)^2 \right\rangle, \quad (27)$$

если $E_{n\perp}$ — нечётная функция z . В качестве примера на рис. 2 представлена зависимость от продольной скорости функции D_{μ}^{even} при $\omega_B = 8\Omega$, $\delta = 0,22d$. Отметим, что статистическая зависимость фаз колебаний соседних структур не оказывается на коэффициенте диффузии D_{μ} , если статистически независимы направления полей соседних структур.

3. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ПОТОКОВ ЧАСТИЦ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ С СИЛЬНОЙ ПЛАЗМЕННОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТЬЮ

Предположим, что на границу $z = 0$ турбулентного слоя падает поток заряженных частиц с функцией распределения f_0 . Для описания стационарной эволюции функции распределения частиц вглубь турбулентного слоя используем уравнение Фоккера—Планка (8) с вычисленными в предыдущих пунктах коэффициентами диффузии:

$$\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\mu B_0 m}{2a} \frac{\partial f}{\partial \epsilon_{\parallel}} = \frac{\partial}{\partial \epsilon_{\parallel}} \left(\bar{D}_{\epsilon_{\parallel}} \frac{\partial f}{\partial \epsilon_{\parallel}} \right) + \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\bar{D}_{\mu} \frac{\partial f}{\partial \mu} \right). \quad (28)$$

Здесь

$$\bar{D}_{\epsilon_{\parallel}} = D_{v_{\parallel}} m^2 v_{\parallel}, \quad \bar{D}_{\mu} = D_{\mu} / v_{\parallel}. \quad (29)$$

Поведение коэффициентов диффузии и, следовательно, свойства потоков частиц, формируемых сильной плазменной турбулентностью, зависят от продольной энергии частиц. Рассмотрим наиболее характерные диапазоны энергий. Введём обозначения

$$\epsilon_1 = (\Omega d)^2 m, \quad \epsilon_2 = (\omega_B d)^2 m \quad (30)$$

и для диапазонов энергий

$$\epsilon_{\parallel} \ll \{\epsilon_1, \epsilon_2\}, \quad (31a)$$

$$\epsilon_1 \ll \epsilon_{\parallel} \ll \epsilon_2, \quad \text{если } \epsilon_1 \ll \epsilon_2, \quad (31b)$$

$$\epsilon_2 \ll \epsilon_{\parallel} \ll \epsilon_1, \quad \text{если } \epsilon_2 \ll \epsilon_1, \quad (31c)$$

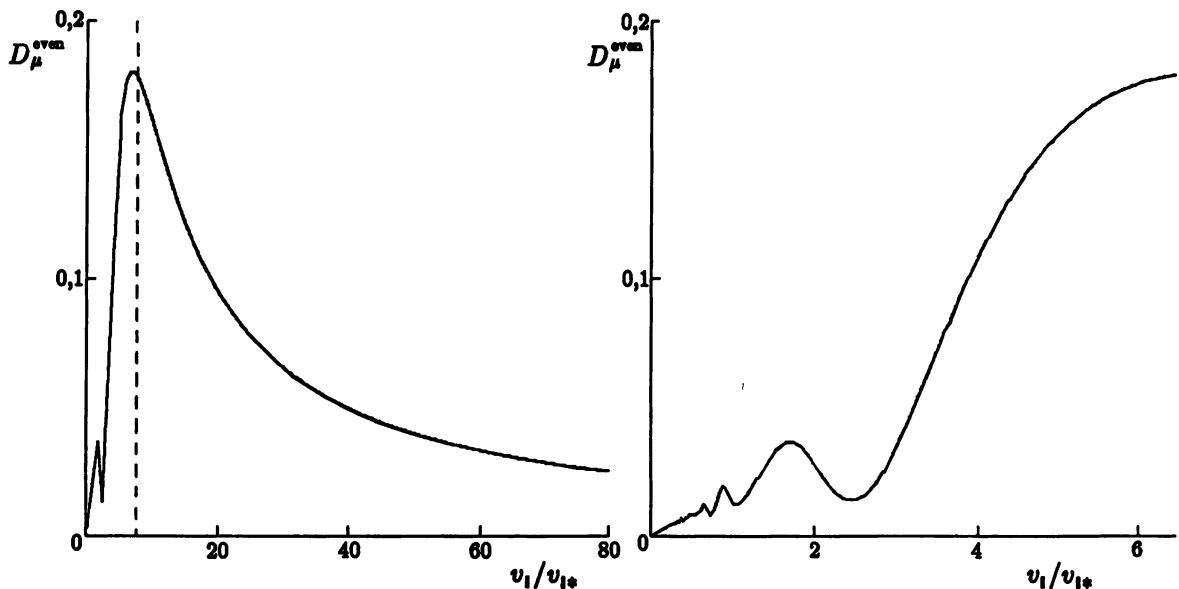


Рис. 2. Коеффициент диффузии по поперечному адиабатическому инварианту при чётной координатной зависимости поперечного поля структуры ($v_{l*} = \Omega d$; $D_* = q_m^2 \langle \hat{E}_{n\perp}^2 \rangle d / (l\omega_B)$; $\omega_B = 8\Omega$; $\delta = 0,22d$)

$$\varepsilon_{\parallel} \gg \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} \quad (31\Gamma)$$

сравним эффективность диффузии по продольной энергии и поперечному адиабатическому инварианту в уравнении (28). Для этого оценим длину диффузии L — характерное расстояние, на котором диффузия существенна. Оценки длин диффузии и соответствующие коэффициенты диффузии представлены в табл. 1 (для продольной диффузии) и табл. 2 (для поперечной диффузии). В табл. 1, 2 использованы следующие обозначения:

$$G_1 = \frac{(q\hat{E}_{\parallel}d)^2}{l\varepsilon_1}, \quad G_2 = \frac{(q\hat{E}_{\parallel}d)^2}{l}, \quad G_3 = \frac{(q\hat{E}_{\parallel}d)^2 \varepsilon_1}{8l},$$

$$Q_1 = \frac{(q\hat{E}_{\perp}d)^2}{mBl\varepsilon_2}, \quad Q_2 = \frac{(q\hat{E}_{\perp}d)^2}{2mBl}, \quad Q_3 = \frac{(q\hat{E}_{\perp}d)^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{16mBl}, \quad \varepsilon_{\perp} = \frac{mv_{\perp}^2}{2}. \quad (32)$$

Считая, что энергии продольного и поперечного движения частицы, параметры ζ_{\parallel} и $\zeta_{\perp} = \zeta_{\parallel} (\hat{E}_{\perp}/\hat{E}_{\parallel})$, продольная и поперечная компоненты поля \mathbf{E} соответственно — величины одного порядка, сравним длины диффузии $L_{\varepsilon_{\parallel}}$ и L_{μ} в следующих случаях: 1) E_{\parallel} — чётная, а E_{\perp} — нечётная функции z ; 2) E_{\parallel} — нечётная, а E_{\perp} — чётная функции z (поле \mathbf{E} симметрично относительно плоскости, перпендикулярной магнитному полю и проходящей через центр структуры). В первом случае при любых энергиях выполняется условие $L_{\varepsilon_{\parallel}} \ll L_{\mu}$, т. е. определяющей является диффузия частиц по продольной энергии. Исключение может составлять диапазон малых энергий частиц (31а) при $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$, в котором диффузии по ε_{\parallel} и μ сравнимы. Отметим, что при больших энергиях ($\varepsilon_{\parallel} \gg \varepsilon_1$) длина диффузии $L_{\varepsilon_{\parallel}}$ не зависит от массы частицы, что свидетельствует о равной эффективности воздействия сильной плазменной турбулентности на электронные и ионные потоки. Вывод об одинаковой эффективности турбулентного ускорения частиц с разными знаками заряда подтверждается экспериментальными наблюдениями в авроральной магнитосфере Земли [7].

Таблица 1
Коэффициенты диффузии и длины диффузии частиц
по продольной скорости

Энергия	Параметры			
	$D_{\epsilon\parallel}^{\text{even}}$	$L_{\epsilon\parallel}^{\text{even}}/l$	$D_{\epsilon\parallel}^{\text{odd}}$	$L_{\epsilon\parallel}^{\text{odd}}/l$
$\epsilon_1 > \epsilon_{\parallel}$	$G_1 \epsilon_{\parallel}$	$\epsilon_1 \epsilon_{\parallel} / (q \hat{E}_{\parallel} d)^2$	$3G_1 \epsilon_{\parallel}$	$\epsilon_1 \epsilon_{\parallel} / (q \hat{E}_{\parallel} d)^2$
$\epsilon_1 \ll \epsilon_{\parallel}$	G_2	$\epsilon_{\parallel}^2 / (q \hat{E}_{\parallel} d)^2$	$G_3 / \epsilon_{\parallel}$	$\epsilon_{\parallel}^3 / \epsilon_1 (q \hat{E}_{\parallel} d)^2$

Таблица 2
Коэффициенты диффузии и длины диффузии частиц
по поперечному адиабатическому инварианту

Энергия	Параметры			
	D_{μ}^{even}	L_{μ}^{even}/l	D_{μ}^{odd}	L_{μ}^{odd}/l
$\epsilon_2 > \epsilon_{\parallel}$	$Q_1 \mu$	$\epsilon_2 \epsilon_{\perp} / (q \hat{E}_{\perp} d)^2$	$3Q_1 \mu$	$\epsilon_2 \epsilon_{\perp} / (q \hat{E}_{\perp} d)^2$
$\epsilon_2 \ll \epsilon_{\parallel}$	$Q_2 \mu / \epsilon_{\parallel}$	$\epsilon_{\perp} \epsilon_{\parallel} / (q \hat{E}_{\perp} d)^2$	$Q_3 \mu / \epsilon_{\parallel}^2$	$\epsilon_{\parallel}^2 \epsilon_{\perp} / (q \hat{E}_{\perp} d)^2 (\epsilon_1 + \epsilon_2)$

Во втором случае (нечётная продольная и чётная поперечная составляющие поля структуры) при малых энергиях частиц преобладает диффузия по продольной энергии, если выполнено неравенство $\epsilon_1 \ll \epsilon_2$. Начиная с энергий $\epsilon_{\parallel} \sim \sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2}$, более эффективной в этом случае становится диффузия по поперечному адиабатическому инварианту. Если выполнено обратное неравенство $\epsilon_2 \leq \epsilon_1$, диффузии по продольной энергии и поперечному адиабатическому инварианту при малых энергиях могут быть одинаково эффективны. При продольных энергиях, превышающих ϵ_2 , преобладает диффузия по μ . Отметим, что пороговая энергия частицы, при которой определяющей становится диффузия по μ , существенно больше для частиц с меньшей массой. Это обстоятельство, вероятно, объясняет тот факт, что реально наблюдаемые электронные потоки движутся практически вдоль магнитного поля, а ионные потоки сильно изотропизованы [7].

Получим аналитическое решение уравнения Фоккера—Планка (28) для энергетических диапазонов (31).

4. ФОРМИРОВАНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ ПОТОКОВ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ТУРБУЛЕНТНОМ СЛОЕ

В области сравнительно малых продольных энергий (31а) регулярная сила, обусловленная неоднородностью магнитного поля, несущественна, и уравнение (28) сводится к виду

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \gamma_{\epsilon\parallel} G_1 \frac{\partial}{\partial \epsilon_{\parallel}} \left(\epsilon_{\parallel} \frac{\partial f}{\partial \epsilon_{\parallel}} \right) + \gamma_{\mu} Q_1 \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\mu \frac{\partial f}{\partial \mu} \right), \quad (33)$$

где $\gamma_{\epsilon\parallel, \mu}$ — численные факторы, принимающие значение 1 или 3 при чётной (13а) или нечётной (13б) координатных зависимостях поля. Решением уравнения (33) является функция

$$f(z, \epsilon_{\parallel}, \mu) = \frac{1}{\gamma_{\epsilon\parallel} \gamma_{\mu} G_1 Q_1 z^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f_0(\epsilon'_{\parallel} \mu') \times \\ \times \exp \left[-\frac{(\epsilon_{\parallel} + \epsilon'_{\parallel})}{\gamma_{\epsilon\parallel} G_1 z} - \frac{(\mu + \mu')}{\gamma_{\mu} Q_1 z} \right] I_0 \left(\frac{2 \sqrt{\epsilon_{\parallel} \epsilon'_{\parallel}}}{\gamma_{\epsilon\parallel} G_1 z} \right) I_0 \left(\frac{2 \sqrt{\mu \mu'}}{\gamma_{\mu} Q_1 z} \right) d\epsilon'_{\parallel} d\mu', \quad (34)$$

где $I_0(x)$ — модифицированная функция Бесселя.

При $\epsilon_{\parallel} > \epsilon_1$ вид коэффициентов диффузии в уравнении (28) определяется пространственной зависимостью поля структуры. Пусть продольная компонента поля структуры — чётная, а поперечная компонента поля — нечётная функции z . В этом случае преобладающей является диффузия по продольной энергии, и уравнение (28) имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} + \nu \frac{\partial f}{\partial \epsilon_{\parallel}} = \frac{\partial^2 f}{\partial \epsilon_{\parallel}^2}, \quad (35)$$

где использованы переменные ϵ_{\parallel} , $\xi = G_2 z$, $\nu = \mu B_0 m / (2aG_2)$, величина G_2 определена в (32). Если параметр ζ_{\parallel} (17) много меньше единицы, отражения частиц полями структур можно не учитывать, и решение уравнения (35) имеет вид

$$f(\xi, \epsilon_{\parallel}) = \int_0^{\infty} \frac{f_0(\epsilon'_{\parallel})}{\sqrt{\pi \xi}} \left\{ \exp \left[-\frac{(\epsilon_{\parallel} - \epsilon'_{\parallel} - 2\nu\xi)^2}{4\xi} \right] + \exp \left[-\frac{(\epsilon_{\parallel} + \epsilon'_{\parallel} - 2\nu\xi)^2}{4\xi} \right] \right\} d\epsilon'_{\parallel}. \quad (36)$$

Если параметр ζ_{\parallel} больше или порядка единицы, могут быть существенны многократные переотражения частиц полями структур. Запишем отдельно уравнение (35) для частиц, летящих в положительном (f^+) и отрицательном (f^-) направлениях оси z :

$$\frac{\partial f^{\pm}}{\partial z} + \nu \frac{\partial f^{\pm}}{\partial \epsilon_{\parallel}} = \pm \frac{\partial^2 f^{\pm}}{\partial \epsilon_{\parallel}^2}, \quad (37)$$

и дополним систему (37) условиями непрерывности функции распределения и потоков при $\epsilon_{\parallel} = 0$:

$$(f^+ - f^-) \Big|_{\epsilon_{\parallel}=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial f^+}{\partial \epsilon_{\parallel}} + \frac{\partial f^-}{\partial \epsilon_{\parallel}} \right) \Big|_{\epsilon_{\parallel}=0} = 0. \quad (38)$$

Получим решение уравнений (37) с условиями непрерывности (38) при $\nu = 0$. Для этого представим функции распределения частиц f^+ и f^- в виде

$$f^+ = \int_0^{\infty} \frac{f_0(\epsilon'_{\parallel})}{\sqrt{\pi \xi}} \exp \left[-\frac{(\epsilon_{\parallel} - \epsilon'_{\parallel})^2}{4\xi} \right] d\epsilon'_{\parallel} + \int_0^{\infty} \frac{g^+(\epsilon'_{\parallel})}{\sqrt{\pi \xi}} \exp \left[-\frac{(\epsilon_{\parallel} + \epsilon'_{\parallel})^2}{4\xi} \right] d\epsilon'_{\parallel},$$

$$f^- = \int_0^{\infty} \frac{g^-(\epsilon'_{\parallel})}{\sqrt{\pi(h-\xi)}} \exp \left[-\frac{(\epsilon_{\parallel} + \epsilon'_{\parallel})^2}{4(h-\xi)} \right] d\epsilon'_{\parallel}, \quad (39)$$

где h — толщина слоя по координате ξ . Подставляя выражения (39) в условия непрерывности (38) и решая полученную систему уравнений относительно функций g^+ и g^- , получаем

$$g^+(\epsilon_{\parallel}) = \int_0^{\infty} \frac{2\sqrt{\epsilon_{\parallel}\epsilon'_{\parallel}} f_0(\epsilon'_{\parallel})}{\pi (\epsilon'^2_{\parallel} - \epsilon^2_{\parallel})} \exp \left[\frac{(\epsilon_{\parallel} - \epsilon'_{\parallel})^2}{4h} \right] d\epsilon'_{\parallel},$$

$$g^-(\epsilon_{\parallel}) = \int_0^{\infty} \frac{4f_0(\epsilon'_{\parallel})}{\sqrt{\pi h}} \exp \left[\frac{\epsilon^2_{\parallel} - \epsilon'^2_{\parallel}}{4h} \right] \left[\cos \left(\frac{\epsilon_{\parallel}\epsilon'_{\parallel}}{2h} \right) C \left(\sqrt{\frac{\epsilon_{\parallel}\epsilon'_{\parallel}}{2h}} \right) + \sin \left(\frac{\epsilon_{\parallel}\epsilon'_{\parallel}}{2h} \right) S \left(\sqrt{\frac{\epsilon_{\parallel}\epsilon'_{\parallel}}{2h}} \right) \right] d\epsilon'_{\parallel}, \quad (40)$$

где $S(x)$ и $C(x)$ — интегральные синус и косинус. Приведём выражения для функций распределения частиц, прошедших слой и отражённых от него:

$$f_t = f^+ \Big|_{\xi=h} = \frac{1}{\sqrt{2h}} \int_0^\infty f_0(\varepsilon'_{||}) \sqrt{\varepsilon_{||}\varepsilon'_{||}} \exp\left[-\frac{\varepsilon_{||}^2 + \varepsilon'^2_{||}}{4h}\right] \Phi\left(1, \frac{3}{2}, -\frac{\varepsilon_{||}\varepsilon'_{||}}{2h}\right) d\varepsilon'_{||}, \quad (41)$$

$$f_r = f^- \Big|_{\xi=0} = \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \int_0^\infty \frac{f_0(\varepsilon'_{||}) \sqrt{\varepsilon_{||}\varepsilon'_{||}}}{\varepsilon_{||}^2 + \varepsilon'^2_{||}} \exp\left[-\frac{\varepsilon_{||}^2 + \varepsilon'^2_{||}}{4h}\right] d\varepsilon'_{||},$$

где $\Phi(1, 3/2, x)$ — вырожденная гипергеометрическая функция. Функция распределения отражённых от слоя частиц имеет степенной характер на интервале $\varepsilon_{||0} < \varepsilon_{||} < h$.

При достаточно больших значениях параметра $\zeta_{||}$ может быть существенным эффективный выход энергичных частиц из процесса ускорения, связанный, например, с пространственной неоднородностью высокочастотного поля структур. Дело в том, что в поле высокочастотных колебаний с пространственно неоднородным распределением на частицы действует пондеромоторная сила [28]

$$F = -\frac{q^2}{4m\Omega^2} \frac{\partial |E|^2}{\partial z}, \quad (42)$$

выталкивающая их из областей с более сильным полем. Если эта сила превышает амплитуду электрической силы $qE_{||}$, частицы с малыми скоростями оказываются запертными между соседними структурами и выпадают из процесса ускорения, вливаясь в фоновую плазму. Решением кинетического уравнения (35) в этом случае является функция, отвечающая условию $f|_{\varepsilon_{||}=0} = 0$:

$$f_{loss}(\xi, \varepsilon_{||}) = \int_0^\infty \frac{f_0(\varepsilon'_{||})}{\sqrt{\pi\xi}} \exp\left[-\nu^2\xi + \nu(\varepsilon_{||} - \varepsilon'_{||})\right] \exp\left[-\frac{(\varepsilon_{||} - \varepsilon'_{||})^2}{4\xi}\right] - \exp\left[-\frac{(\varepsilon_{||} + \varepsilon'_{||})^2}{4\xi}\right] d\varepsilon'_{||}. \quad (43)$$

Отметим, что система уравнений (37) имеет частные экспоненциальные по $\varepsilon_{||}$ и ξ решения, которые существуют в тормозящем магнитном поле (при отрицательных a):

$$f^+ = (c_1^+ e^{\lambda_1 \varepsilon_{||}} - c_2^+ e^{\lambda_2 \varepsilon_{||}}) e^{-\alpha(\alpha-2\nu)\xi}, \quad f^- = c^- e^{-\alpha\varepsilon - \alpha(\alpha-2\nu)\xi}, \quad (44)$$

где $\lambda_{1,2} = \nu \pm \sqrt{\nu^2 - \alpha(\alpha-2\nu)}$, $0 < \alpha < (\sqrt{2}-1)|\nu|$. Связь между коэффициентами $c_{1,2}^\pm, c^-$ зависит от режима ускорения. Если переотражения частиц полем структур несущественны ($\zeta_{||} \ll 1$), то

$$c_1^+ = c_2^+, \quad c^- = 0. \quad (45)$$

При учёте многократных переотражений частиц полем структур для коэффициентов $c_{1,2}^\pm$ и c^- получаем соотношение

$$c_{1,2}^+ = \frac{\alpha - \lambda_{2,1}}{\lambda_1 - \lambda_2} c^- . \quad (46)$$

В случае эффективного выхода частиц из процесса ускорения

$$\lambda_1 c_1^+ = \lambda_2 c_2^+, \quad c^- = 0. \quad (47)$$

Характерной особенностью решений (44) является сохранение средней продольной кинетической энергии, приходящейся на одну частицу потока, т. е. устанавливается равновесие между набором энергии в электрическом поле структур и потерями продольной энергии под действием регулярной силы, обусловленной неоднородностью магнитного поля.

Пусть теперь продольная компонента электрического поля структуры нечётная функция z , а поперечная компонента — чётная. Для частиц с энергиями (31б) получаем уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial z} = G_3 \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{||}} \left(\frac{1}{\varepsilon_{||}} \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{||}} \right) + Q_1 \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\mu \frac{\partial f}{\partial \mu} \right), \quad (48)$$

решение которого без учёта переотражений частиц ($\zeta_{||} \ll 1$) имеет вид

$$f(z, \varepsilon_{||}, \mu) = \frac{1}{3G_3 Q_1 z^2} \int_0^\infty \int_0^\infty f_0(\varepsilon'_{||} \mu') \varepsilon'_{||} \varepsilon_{||} \times \\ \times \exp \left(-\frac{\varepsilon_{||}^3 + \varepsilon'^3_{||}}{3G_3 z} - \frac{\mu + \mu'}{Q_1 z} \right) I_{-2/3} \left(\frac{2(\varepsilon_{||} \varepsilon'_{||})^{3/2}}{9G_3 z} \right) I_0 \left(\frac{2(\mu \mu')^{1/2}}{Q_1 z} \right) d\varepsilon'_{||} d\mu'. \quad (49)$$

Эволюция функции распределения частиц с энергиями (31в) описывается уравнением

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 3G_1 \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{||}} \left(\varepsilon_{||} \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{||}} \right) + \frac{Q_2}{\varepsilon_{||}} \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\mu \frac{\partial f}{\partial \mu} \right), \quad (50)$$

решением которого является функция

$$f(z, \varepsilon_{||}, \mu) = \frac{6\sqrt{2}G_1}{\sqrt{\pi} Q_2^2 z^2} \int_0^\infty d\mu' \int_{\mu'}^\infty d\mu'' \int_0^\infty d\varepsilon'_{||} f_0(\varepsilon'_{||} \mu'') \times \\ \times J_0 \left(\frac{6G_1 \sqrt{\mu \mu''}}{Q_2} \right) I_{-\sqrt{3\mu'' G_1 / Q_2}} \left(\frac{2\sqrt{\varepsilon_{||} \varepsilon'_{||}}}{G_1 z} \right) \exp \left(-\frac{\varepsilon_{||} + \varepsilon'_{||}}{3G_1 z} \right), \quad (51)$$

где $J_0(x)$ — функция Бесселя. Величины $G_{1,3}$ и $Q_{1,2}$, используемые в выражениях (48)–(51), определены в формулах (32).

Эволюция потоков частиц с более высокими энергиями (32г) определяется в основном диффузией по поперечному адиабатическому инварианту. Функция распределения частиц при этом имеет вид

$$f(z, \mu) = \int_0^\infty \frac{f_0(\mu')}{\bar{D}_\mu z} \exp \left(-\frac{\mu + \mu'}{\bar{D}_\mu z} \right) I_0 \left(\frac{2\sqrt{\mu \mu'}}{\bar{D}_\mu z} \right) d\mu', \quad (52)$$

где величина \bar{D}_μ определена в (29).

5. СРЕДНЯЯ ЭНЕРГИЯ И ПОТОКИ ЧАСТИЦ, УСКОРЯЕМЫХ СИЛЬНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТЬЮ

Оценим среднюю продольную кинетическую энергию $\bar{\varepsilon}_{||}^+$, приходящуюся на одну частицу движущегося в направлении оси z потока:

$$\bar{\varepsilon}_{||}^+(z) = \frac{\int \varepsilon_{||} f^+ d\mathbf{v}}{\int f^+ d\mathbf{v}}, \quad (53)$$

и поток S частиц с энергиями, превышающими $\varepsilon_{||}$ (эта величина обычно регистрируется в космических экспериментах), на больших расстояниях от области инжекции ($\bar{\varepsilon}_{||}^+ \gg \bar{\varepsilon}_{||0}$):

$$S(z, \varepsilon_{||}) = \frac{2\pi B}{m} \int_0^\infty d\mu \int_{\varepsilon_{||}}^\infty f d\varepsilon'_{||}. \quad (54)$$

При малых продольных энергиях частиц $\varepsilon_{\parallel} < \varepsilon_1$ средняя энергия (53) и поток (54) изменяются как

$$\bar{\varepsilon}_{\parallel}^+ \approx \frac{18\gamma_{\varepsilon_{\parallel}}(q\hat{E}_{\parallel})^2 z}{\Omega^2 l m}, \quad S \approx S_0 \exp\left(-\frac{\varepsilon_{\parallel}}{\gamma_{\varepsilon_{\parallel}} G_1 z}\right), \quad (55)$$

где S_0 — полный поток частиц на границе $z = 0$, численный фактор $\gamma_{\varepsilon_{\parallel}}$ порядка единицы и определяется пространственной зависимостью поля структуры. Пусть характерная энергия частиц потока превышает ε_1 . Если продольная составляющая поля структуры — чётная функция z , средняя энергия и поток частиц, взаимодействующих с сильной турбулентностью, определяются выражениями

$$\bar{\varepsilon}_{\parallel}^+ \approx \gamma' |q| \hat{E}_{\parallel} d \sqrt{z/l}, \quad (56)$$

$$S \approx [1 - \operatorname{erf}(-\varepsilon_{\parallel}/\bar{\varepsilon}_{\parallel}^+)] S_0, \quad (57)$$

где $\operatorname{erf}(x)$ — интеграл ошибок, $\gamma' = 2,98$ при учёте эффективных потерь частиц из процесса ускорения и $\gamma' = 1,34$, если потери и переотражения частиц несущественны. В случае периодической системы структур с коррелированными фазами колебаний энергия (56) увеличивается в N раз, где N — характерное число последовательных структур с синфазными колебаниями. Отметим, что средняя энергия (56) не зависит от массы частицы, что свидетельствует об одинаковой эффективности турбулентного ускорения для электронов и ионов.

Если продольное электрическое поле структуры является нечётной функцией координаты, оценочные выражения для средней продольной энергии и потока частиц имеют вид

$$\bar{\varepsilon}_{\parallel}^+ \approx 5,7 (q\Omega \hat{E}_{\parallel} d^2)^{2/3} \left(\frac{mz}{l}\right)^{1/3}, \quad S \approx 4,9 S_0 \frac{\Gamma(1/3, \varepsilon_{\parallel}^3/(G_3 z))}{\Gamma(1/3)}, \quad (58)$$

где $\Gamma(1/3, x)$ — неполная гамма-функция, $\Gamma(x)$ — гамма-функция.

Оценки средней энергии и потока частиц показывают, что сильная плазменная турбулентность может эффективно ускорять частицы с разными знаками заряда. Регулярная сила, связанная со слабой неоднородностью магнитного поля, приводит к дополнительному продольному ускорению частиц. Эффект такого дополнительного ускорения проявляется на достаточно больших расстояниях от области инжекции частиц. В качестве примера приведём выражение для линейной по величине регулярной силы поправке к средней энергии (56) при учёте эффективных потерь частиц из процесса ускорения:

$$\Delta\bar{\varepsilon}_{\parallel}^+ \approx 4,5 \frac{\mu B_0 mz}{a}, \quad (59)$$

и в случае, когда потери и переотражения частиц структурами несущественны:

$$\Delta\bar{\varepsilon}_{\parallel}^+ \approx 1,12 \frac{\mu B_0 mz}{a}. \quad (60)$$

6. МНОГОПУЧКОВЫЙ РЕЖИМ В СИЛЬНО ТУРБУЛЕНТНОЙ ПЛАЗМЕ

Характерной особенностью сильной плазменной турбулентности является возможность формирования пучков заряженных частиц с выделенными энергиями. Эта возможность связана с существованием наиболее вероятных и, следовательно, относительно «заполненных» траекторий частиц в фазовом пространстве.

Запишем рекуррентное соотношение, связывающее скорости быстрой частицы до и после её взаимодействия с n -й структурой:

$$v_{n+1\parallel} = v_{n\parallel} + \frac{q_m}{v_{n\parallel}} \tilde{E}_{n\parallel}(k) \Big|_{kv_{n\parallel}=\Omega}, \quad (61)$$

где $\tilde{E}_{n\parallel}(k)$ — фурье-образ функции $E_{n\parallel}(z)$. Предположим, что функции $\tilde{E}_{n\parallel}(k)$ обращаются в нуль при некоторых $k = k_s$, не зависящих от номера структуры n . При условии

$$k_s v_{\parallel} = \Omega \quad (62)$$

изменение скорости частицы в результате взаимодействия со структурой минимально, и соответствующие траектории частиц в фазовом пространстве оказываются наиболее вероятными (при этом не исключены возможные переходы частиц между соседними выделенными фазовыми траекториями). В результате частицы накапливаются в фазовом пространстве вблизи выделенных значений $v_{\parallel}/\Omega/k_s$. Отметим, что при этом условие $|\Delta v_{\parallel} \partial f / \partial v_{\parallel}| \ll f$ применимости уравнения Фоккера—Планка может нарушаться.

В качестве примера для продольного электрического поля структуры используем функцию (136) с равновероятным распределением d_n в интервале $[d - \delta, d + \delta]$. При этом рекуррентное соотношение (61) имеет вид

$$v_{n+1\parallel} = v_{n\parallel} + \hat{v}_{n\parallel} \cos \varphi_n \sin^2 \left(\frac{\Omega d_n}{v_{\parallel}} \right), \quad \hat{v}_{n\parallel} = \frac{q_m \hat{E}_{n\parallel}}{\Omega}. \quad (63)$$

Условие (62), определяющее выделенные скорости частицы, выполняется при $\delta = 0$ и $\zeta_{\parallel} \ll 1$ (см. (17)) и даёт

$$v_{\parallel} \approx \frac{d\Omega}{\pi s}, \quad (64)$$

где s — целое число (см. также (16)). Результаты численного моделирования процессов, описываемых соотношением (63), представлены на рис. 3 (примеры траекторий частиц на фазовой плоскости nv_{\parallel}) и рис. 4 (эволюция стационарной функции распределения).

На некоторых расстояниях от плоскости инжекции ($n = 0$) частицы накапливаются вблизи выделенных скоростей (64). Анализ фазовых траекторий при различных отношениях $v_{\parallel}/\hat{v}_{\parallel}$ показывает, что характерная длина установления многопучкового режима пропорциональна $(v_{\parallel}/\hat{v}_{\parallel})^2$, что подтверждает диффузионный характер движения частиц вне узких зон накопления.

Многопучковый режим может реализовываться также при малом разбросе значений d_n . Примеры фазовых траекторий и стационарная функция распределения при различных n в случае $\delta = 0,03d$ изображены на рис. 5, 6.

7. ЗАКОНОМЕРНОСТИ ФОРМИРОВАНИЯ ПОТОКОВ РЕЛЯТИВИСТИЧЕСКИХ ЧАСТИЦ

Для релятивистских частиц время их взаимодействия со структурой мало по сравнению с периодами осцилляций поля и гировращения, поэтому ненулевой вклад в изменение энергии частицы может

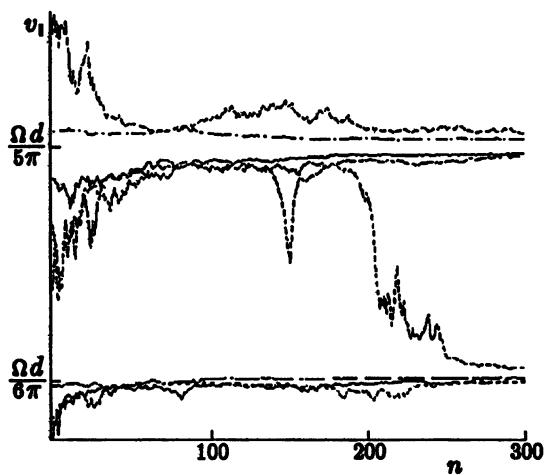


Рис. 3. Примеры фазовых траекторий частиц, взаимодействующих с электростатическими структурами ($\delta = 0$; $\hat{v}_\parallel = 1,27 \cdot 10^{-3} \Omega d$)

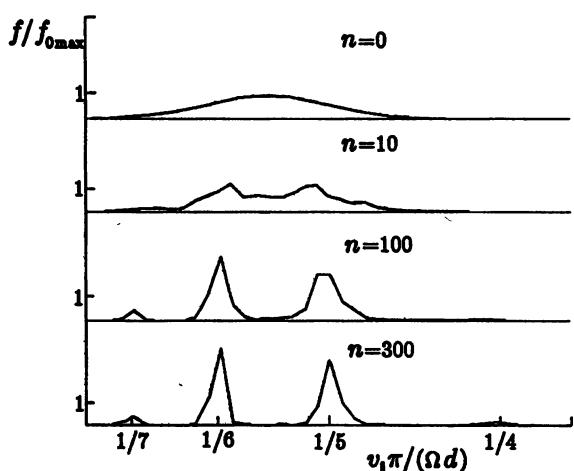


Рис. 4. Эволюция стационарной функции распределения частиц, взаимодействующих с электростатическими структурами ($\delta = 0$; $\hat{v}_\parallel = 1,27 \cdot 10^{-3} \Omega d$); $f_{0\max}$ — максимальное значение функции распределения частиц на входе в турбулентный слой

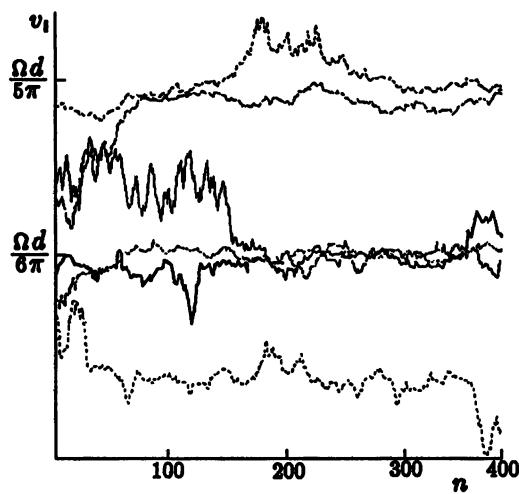


Рис. 5. Примеры фазовых траекторий частиц, взаимодействующих с электростатическими структурами ($\delta = 0,03d$; $\hat{v}_\parallel = 1,27 \cdot 10^{-3} \Omega d$)

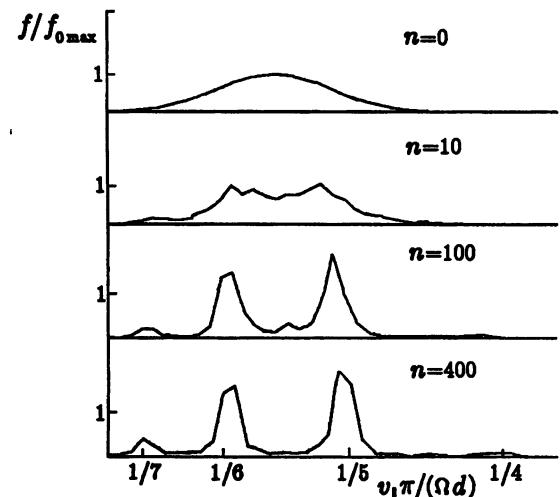


Рис. 6. Эволюция стационарной функции распределения частиц, взаимодействующих с электростатическими структурами ($\delta = 0,03d$; $\hat{v}_\parallel = 1,27 \cdot 10^{-3} \Omega d$); обозначения те же, что и на рис. 4

дать только действие чётных по z компонент электрического поля. В качестве примера рассмотрим случай чётной продольной и нечётной поперечной компонент поля структуры. При этом уравнение Фоккера—Планка в переменных p_\parallel (продольный импульс) и $\mu = p_\perp^2 / (m_0^2 B)$ имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{p_\parallel}{m} \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\mu B_0 m_0^2}{2am} \frac{\partial f}{\partial p_\parallel} = \frac{\partial}{\partial p_\parallel} \left(D_{p_\parallel} \frac{\partial f}{\partial p_\parallel} \right). \quad (65)$$

Здесь

$$D_{p\parallel} = \frac{\langle \Delta p_{\parallel} \Delta p_{\parallel} \rangle}{2\tau}, \quad (66)$$

$$m = \frac{1}{c} \sqrt{m_0^2 c^2 + p_{\parallel}^2 + p_{\perp}^2},$$

где m_0 — масса покоя частицы, c — скорость света. В соответствии с уравнением движения релятивистской частицы в поле структуры

$$\frac{dp}{dt} = q \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{B}] \right) \quad (67)$$

для коэффициента диффузии (66) получаем следующие выражения:

$$D_{p\parallel} = \frac{q^2 m \left\langle \left(\int_{-\infty}^{+\infty} E_{n\parallel} dz' \right)^2 \right\rangle}{l |p_{\parallel}|} \quad (68)$$

при статистически независимых фазах колебаний отдельных структур и

$$D_{p\parallel} = \frac{(qEd)^2 m N}{l |p_{\parallel}|} \quad (69)$$

при статистически независимых фазах колебаний отдельных подсистем из N последовательных структур.

В ультрарелятивистском пределе ($p_{\parallel} \gg m_0 c$) коэффициенты диффузии, а также скорость сноса практически не зависят от импульса частицы, и соответствующее уравнение для функции распределения имеет наиболее простой вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\mu B_0 m_0^2}{2am} \frac{\partial f}{\partial p_{\parallel}} = D_{p\parallel}^{ur} \frac{\partial^2 f}{\partial p_{\parallel}^2}. \quad (70)$$

Здесь коэффициент диффузии $D_{p\parallel}^{ur}$ определяется выражением

$$D_{p\parallel}^{ur} = \frac{q^2 \left\langle \left(\int_{-\infty}^{+\infty} E_{n\parallel} dz' \right)^2 \right\rangle}{lc} \quad (71)$$

или

$$D_{p\parallel}^{ur} = \frac{(qEd)^2 N}{lc} \quad (72)$$

в случаях статистически независимых фаз колебаний отдельных структур или отдельных подсистем соответственно. Решением уравнения (70) в стационарном случае является функция

$$f(Z, p_{\parallel}) = \frac{p_{\parallel}^{-\alpha/2}}{(1-\alpha) Z} \int_0^{\infty} f_0(p'_{\parallel}) p'_{\parallel}^{-3\alpha/2} \exp \left[-\frac{p_{\parallel}^{1-2\alpha} + p'_{\parallel}^{1-2\alpha}}{(1-\alpha)^2 Z} \right] I_{\frac{\alpha}{1-2\alpha}} \left[\frac{2(p_{\parallel} p'_{\parallel})^{(1-2\alpha)/2}}{(1-\alpha)^2 Z} \right] dp'_{\parallel}, \quad (73)$$

где $Z = D_{p\parallel}^{ur} z / c$, $\alpha = \mu B_0 m_0^2 / (2am D_{p\parallel}^{ur})$. Отметим, что при релятивистских энергиях переотражения частиц полями структур, эффективный выход частиц из процесса ускорения и реализация многопучкового режима маловероятны.

8. ОБСУЖДЕНИЕ

Рассмотрен вопрос о формировании потоков заряженных частиц в сильно турбулентной космической плазме с линейно неоднородным магнитным полем. Использована модель уединённых электростатических электронейтральных структур со случайными фазами колебаний электрического поля. Взаимодействие достаточно энергичных частиц с полем структур аналогично броуновскому движению, и для его описания использовано уравнение Фоккера—Планка. В уравнении Фоккера—Планка вычислены коэффициенты диффузии по продольной скорости и поперечному адиабатическому инварианту частиц. При больших скоростях коэффициенты диффузии имеют универсальную степенную зависимость от продольной скорости. Проанализировано влияние на коэффициенты диффузии статистической зависимости фаз колебаний соседних структур. При определённых условиях коэффициент диффузии по продольной скорости оказывается пропорциональным длине корреляции случайной фазы колебаний. Выявлены условия влияния неоднородности магнитного поля на процесс турбулентной диффузии. Это влияние может быть существенно, если разница времён пролёта частицей расстояния между структурами, вычисленных с учётом и без учёта регулярной магнитной силы, сравнима с периодом осцилляций электрического поля. Определены условия применимости фоккер-планковского описания взаимодействия частиц с электростатическими структурами. При нечётной координатной зависимости продольного поля структуры границы применимости уравнения Фоккера—Планка расширяются.

Сделаны оценки длин диффузии и проанализирована эффективность диффузии по продольной скорости и поперечному адиабатическому инварианту для наиболее характерных энергетических диапазонов заряженных частиц. В области малых энергий эффективности этих процессов могут быть сравнимы. При более высоких энергиях $\epsilon_{||} > \epsilon_1$ определяющей является диффузия по продольной скорости, если продольная составляющая поля структуры — чётная функция координаты z . В случае нечётной продольной и чётной поперечной составляющих поля структуры диффузия по поперечному адиабатическому инварианту более существенна для частиц с энергиями $\epsilon_{||} > \min(\Omega, \omega_B) \omega_B d^2 m$. В реальных условиях земной магнитосферы этот энергетический порог существенно выше для электронов, поэтому обычно наблюдаемые электронные потоки распространяются почти вдоль магнитного поля, тогда как ионные распределения сильно расширяются по поперечной скорости.

Получено решение стационарного уравнения Фоккера—Планка для различных диапазонов энергий частиц. В определённых условиях возможно эффективное отражение частиц полями структур. В отражённом от турбулентного слоя потоке могут формироваться степенные энергетические спектры функции распределения. Исследованы закономерности формирования релятивистских потоков.

Отметим, что предложенное в работе описание взаимодействия заряженных частиц с сильной плазменной турбулентностью в определённом смысле близко к квазилинейным уравнениям. Однако имеется ряд существенных отличий:

- сильную плазменную турбулентность удобнее характеризовать пространственно-временными параметрами полей структур, тогда как квазилинейные коэффициенты диффузии выражаются через спектральные характеристики поля;
- при рассеянии частиц сильной плазменной турбулентностью в коэффициенты диффузии входит флуктуационное поле отдельной структуры, при квазилинейной диффузии — флуктуационное поле всего плазменного объёма;
- нелинейный характер образующих турбулентную структуру волн может проявляться в независимости продольной и поперечной диффузий частиц;
- при взаимодействии с полем турбулентных структур возможно многократное переотражение частиц;
- максимум спектра волновой энергии при формировании электростатической турбулентной

структуры смещается в область малых волновых чисел, что соответствует более высоким энергиям резонансно взаимодействующих с волнами частиц и более эффективному ускорению их потоков;

- средняя энергия частиц, ускоряемых сильной плазменной турбулентностью, определяется усреднённой работой поля структуры над частицами и может иметь один порядок для электронов и ионов;

- предложенный метод применим для конечных времён корреляции фаз колебаний и в этом смысле близок к методу ренормализованных уравнений Балеску [29, 30];

- сильная плазменная турбулентность может формировать пучки частиц с выделенными энергиями.

Исследованы закономерности формирования пучков частиц с выделенными энергиями. Отметим следующие свойства многопучкового режима:

- многопучковый режим может реализовываться только при достаточно высоких скоростях частиц;

- отношение амплитуды продольных колебаний частицы в электрическом поле структуры к продольному размеру структуры (параметр ζ_{\parallel}) должно быть много меньше единицы;

- уравнение $\tilde{E}_{n\parallel} = 0$, где $\tilde{E}_{n\parallel}$ — спектр пространственного множителя поля структуры, должно иметь действительные корни;

- спектр выделенных энергий зависит от продольного поля структуры;

- выделенные энергии пропорциональны массе частицы и существенно различны для электронов и ионов;

- поперечный адиабатический инвариант частиц с выделенными энергиями сохраняется;

- в окрестности выделенных энергий диффузионное приближение кинетического уравнения нарушается;

- увеличение разброса продольных размеров структур препятствует установлению многопучкового режима.

ВЫВОДЫ

Рассмотрена задача о формировании потоков заряженных частиц электростатическими структурами в сильно турбулентной космической плазме.

1) Показано, что сильная плазменная турбулентность может эффективно ускорять заряженные частицы с разными знаками заряда.

2) Вычислены коэффициенты диффузии по продольной скорости и поперечному адиабатическому инварианту частицы.

3) Определены условия применимости фоккер-планковского описания взаимодействия частиц с сильной плазменной турбулентностью.

4) Сделаны оценки длин диффузии для наиболее характерных энергетических диапазонов частиц. Поперечная (в пространстве скоростей) диффузия более эффективна для ионов и приводит к сильной изотропизации ионных потоков. Функция распределения электронов близка к одномерной вдоль магнитного поля.

5) Получено решение уравнения Фоккера—Планка в турбулентном слое для различных режимов ускорения. В отражённом от слоя потоке могут формироваться степенные энергетические спектры функции распределения.

6) Сделаны оценки средней продольной кинетической энергии и потока частиц на больших расстояниях от области инжекции. Электронные и ионные потоки могут ускоряться до сравнимых энергий.

7) Отмечено, что сильная плазменная турбулентность может формировать пучки частиц с выделенными энергиями.

Авторы признательны В. Ю. Трахтенгерцу за обсуждение результатов работы.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 99–02–16175, 00–05–65051) и ИНТАС (грант № 99–01006).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Веденов А. А. Введение в теорию слаботурбулентной плазмы // Вопросы теории плазмы / Под ред. М. А. Леоновича. М.: Атомиздат, 1963. С. 203.
2. Zmuda A. J., Armstrong J. C. // J. Geophys. Res. 1974. V. 79. P. 4611.
3. Bostrom R. // Physics of the hot plasma in the magnetosphere / Ed. by B. Hultqvist, L. Stenflo. 1975. P. 341.
4. Bespalov P. A., Chugunov Yu. V. // Planetary and Space Sci. 1984. V. 32. P. 365.
5. Wheatland M. S., Sturrock P. A., Roumeliotis G. // Astrophys. J. 2000. V. 540, No. 2. P. 1150.
6. Кадомцев Б. Б. Нелинейные явления в плазме. М.: Наука, 1976. 238 с.
7. McFadden J. P. // Auroral Particle Acceleration. Abstracts, Stockholm, Sweden, 1999. P. 19.
8. Carlson C. W., McFadden J. P., Ergun R. E., Temerin M., Peria W., Mozer F. S., Klumpar, Shelley E. G., Peterson W. K., Moebius E., Elphic R., Strangeway R., Cattel C., Phatf R. // Geophys. Res. Lett. 1998. V. 25. P. 2017.
9. Thejappa G., Goldstein M. L., MacDowall R. J., Papadopoulos K., Stone R. G. // J. Geophys. Res. A. 1999. V. 104, No. 12. P. 28279.
10. Железняков В. В. Радиоизлучение Солнца и планет. М.: Наука, 1964.
11. Mjølhus E. // J. Plasma Phys. 1997. V. 58. P. 747.
12. Volosevich A. V., Galperin Yu. I. // Phys. Chem. Earth C. 2000. V. 25, No. 1–2. P. 85.
13. Akasofu S. I., Chapman S. // Royal Soc. Phil. Trans. A. 1961. V. 253. P. 355.
14. Evans D. S. // Physics of the hot plasma in the magnetosphere / Ed. by B. Hultqvist, L. Stenflo. 1975. P. 319.
15. Wing H. C., Horwitz J. L., Moore T. E. // Geophys. Res. Lett. 1994. V. 21. P. 2459.
16. Queau D. Le, Roux A., Bosqued J. M., Berthelier J. J. // J. Geophys. Res. 1993. V. 98. P. 13347.
17. Shaposhnikov V. E., Zaitsev V. V. // Planet. and Space Sci. 1993. V. 41, No. 5. P. 341.
18. Galeev A. A. // Physics of the hot plasma in the magnetosphere / Ed. by B. Hultqvist, L. Stenflo. 1975. P. 251.
19. Nishida A. // J. Geophys. Res. 1981. V. 81. P. 8413.
20. Nagasuma T., Fukunishi H., Mukai T. // J. Geophys. Res. 1995. V. 100. P. 1625.
21. Shiokawa K., Yumoto K. // J. Geophys. Res. 1993. V. 98. P. 1359.
22. Simpson J. A., Smith D. A., Zhang M., Balogh A. // J. Geophys. Res. 1993. V. 98. P. 21129.
23. Беспалов П. А., Мизонова В. Г. // Геомагнетизм и аэрономия. 1998. Т. 38, № 4. С. 148.
24. Беспалов П. А., Мизонова В. Г. // Геомагнетизм и аэрономия. 2000. Т. 40, № 1. С. 19.
25. Ganguli G. I., Guzdar P. N., Gavriishchaka V. V., Krueger W. A., Blanchard P. E. // J. Geophys. Res. A. 1999. V. 104, No. 3. P. 4297.
26. Ишимару С. Основные принципы физики плазмы. М.: Атомиздат, 1975. 288 с.
27. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. И. Абрамовича, И. Стиган М.: Наука, 1979. С. 401.
28. Арцимович Л. А., Сагдеев Р. З. Физика плазмы для физиков. М.: Атомиздат, 1979. 318 с.
29. Balescu R., Misguich J. H. // J. Plasma Phys. 1975. V. 13, No. 1. P. 33.
30. Balescu R., Misguich J. H. // J. Plasma Phys. 1975. V. 13, No. 1. P. 53.

¹ Институт прикладной физики РАН,
г. Нижний Новгород, Россия

² Нижегородский государственный
технический университет,
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию
15 ноября 2000 г.

FORMATION OF SUPRATHERMAL PARTICLE FLUXES IN STRONGLY TURBULENT SPACE PLASMA

P. A. Bespalov and V. G. Mizonova

We consider the problem of the formation of suprothermal-particle fluxes by electrostatic structures in strongly turbulent space plasma. It is shown that regions of strong plasma turbulence can play the role of gigantic accelerators of charged particles. Solutions of the stationary kinetic equation for a turbulent layer are found for the main typical regimes of particle acceleration. The efficiency of particle diffusion over the longitudinal and transverse velocities with respect to the magnetic field is estimated. The transverse diffusion in velocity space is more efficient for ions and leads to strong isotropization of ion fluxes. Electrons move almost along the magnetic field. We reveal the conditions under which the regular force of a nonuniform magnetic field influences the stochastic-acceleration process. The average energy of the longitudinal motion of single particles and particle fluxes at large distances from the injection region is estimated. Ion and electron fluxes can be accelerated to comparable energies. The features of relativistic-beam propagation are analyzed. It is shown that the strong plasma turbulence can form particle beams with certain energies. The proposed mechanism is useful to explain the characteristics of high-energy particle fluxes in space plasmas with magnetic-field-aligned currents, such as high-latitude regions of planetary magnetospheres, force-free fields of the solar corona, or the solar wind.

УДК 551.510;533.9

ТЕОРИЯ ГЕНЕРАЦИИ ДИСКРЕТНЫХ КНЧ-ОНЧ ИЗЛУЧЕНИЙ В МАГНИТОСФЕРЕ ЗЕМЛИ

А. Г. Демехов, В. Ю. Трахтенгерц

Излагается современное состояние проблемы генерации дискретных излучений КНЧ-ОНЧ диапазона в земной магнитосфере и обсуждаются полученные в последнее время теоретические результаты.

ВВЕДЕНИЕ

КНЧ-ОНЧ излучения (диапазон частот от 300 Гц до приблизительно 30 кГц) являются одним из наиболее распространённых типов электромагнитных излучений, наблюдаемых как на поверхности Земли, так и на спутниках. Значительная часть этих излучений генерируется в магнитосфере при взаимодействии эллиптически поляризованных свистовых волн с энергичными электронами радиационных поясов Земли. История исследования этого взаимодействия составляет уже свыше 40 лет, однако до сих пор остаются открытыми ряд принципиальных вопросов, касающихся, в частности, теории так называемых дискретных КНЧ-ОНЧ излучений. Среди этих излучений выделяются два основных типа сигналов: триггерные ОНЧ излучения и так называемые КНЧ-ОНЧ хоры. Для обоих типов сигналов характерна дискретная структура частотного динамического спектра, однако если для триггерных сигналов источник известен (это квазимохроматический внешний волновой пакет), то хоры часто возникают спонтанно в условиях повышенной геомагнитной активности и делятся от нескольких минут до нескольких часов. Детальные сведения об этих излучениях можно найти в монографии Хелливелла [1], а также в обзорах [2–4].

Большую роль в исследовании триггерных ОНЧ излучений сыграли эксперименты по инжекции в магнитосферу квазимохроматических и шумовых пакетов волн с помощью научно-исследовательского ОНЧ передатчика «Сайлл» [4, 5]. Классический пример триггерных сигналов, полученных на этом передатчике, показан на рис. 1 [5], где представлены наиболее типичные триггерные сигналы с повышающейся (райзеры) и понижающейся (фолеры) во времени частотой, хотя встречаются и более сложные динамические спектры.

Типичный пример хоровых излучений представлен на рис. 2. Как в наземных, так и в спутниковых экспериментах хоры наблюдаются в виде последовательности дискретных элементов с повышающейся во времени частотой. Свойства как триггерных, так и хоровых излучений будут обсуждаться более детально ниже при анализе механизмов их генерации.

Оба типа рассматриваемых излучений обусловлены, по-видимому, циклотронным взаимодействием энергичных электронов радиационных поясов с электромагнитными волнами типа свистов (вистлеров) [7]. Общим является и механизм формирования динамических спектров. Принципиальным для генерации обоих типов излучений является, с нашей точки зрения, появление ступеньки на функции распределения электронов по продольной относительно внешнего магнитного поля компоненте скорости («ударная волна» в фазовом пространстве скоростей). Универсальным механизмом формирования такой ступеньки служит квазилинейная релаксация циклотронной неустойчивости под действием шумовых излучений. Ниже мы постараемся показать, что существует пороговая плотность энергичных электронов, ниже которой радиационный пояс в условиях развитой циклотронной неустойчивости выступает как нелинейный усилитель внешних сигналов, приводящий к появлению триггерных излучений.

А. Г. Демехов, В. Ю. Трахтенгерц

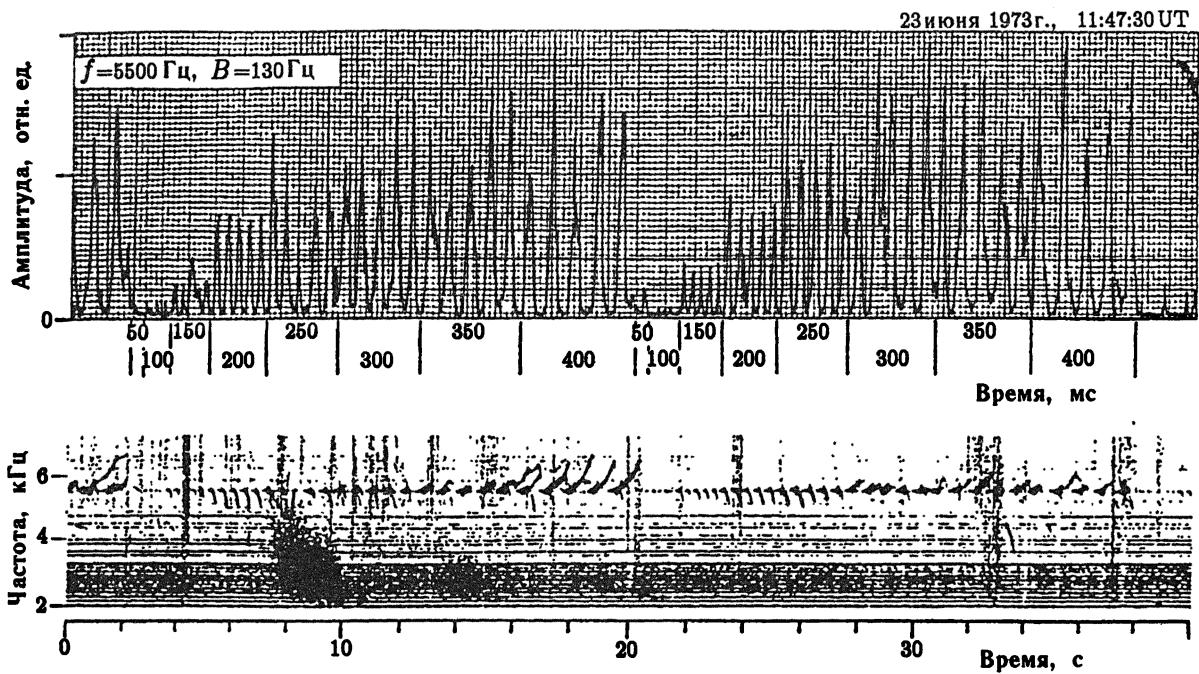


Рис. 1. Пример триггерных излучений [5], порождённых двумя идентичными последовательностями квазимонохроматических импульсов, длительность которых возрастала от 50 до 400 мс, как показано на оси под верхним графиком. На верхнем графике показана в относительных единицах амплитуда сигнала, принятого на Земле в полосе 130 Гц около центральной частоты 5 500 Гц

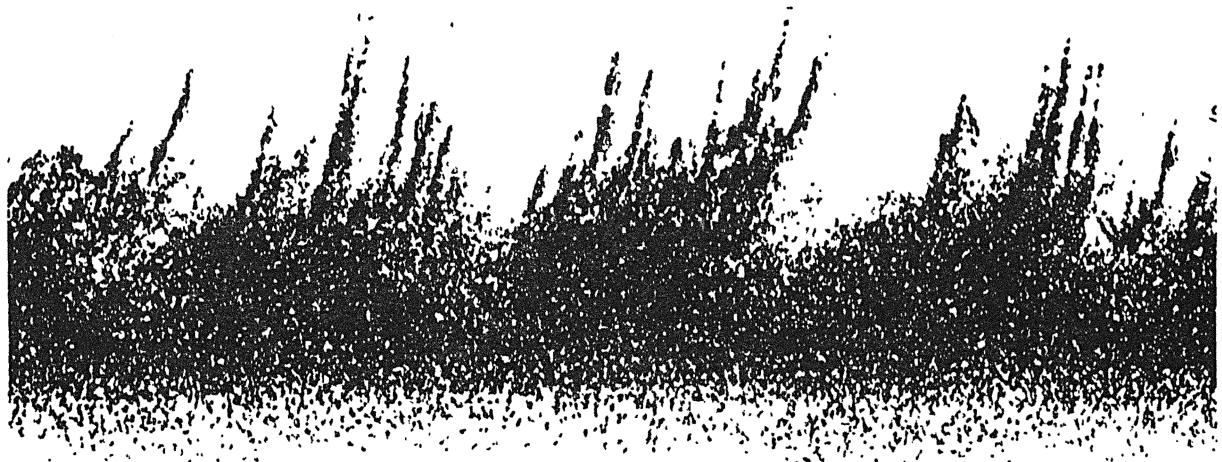


Рис. 2. Пример динамического спектра хоровых излучений. Длительность записи (горизонтальная ось) около 14 с, масштаб вертикальной оси частот около 2 кГц. Запись сделана в Пороярви, Финляндия, в январе 1993 г. [6]

Выше этого порога существование указанной особенности распределения электронов приводит к развитию абсолютной неустойчивости — так называемого режима лампы обратной волны (ЛОВ), который и служит источником хоровых излучений.

1. ТРИГГЕРНЫЕ ОНЧ ИЗЛУЧЕНИЯ

В первых экспериментах триггерные ОНЧ сигналы наблюдались при работе мощных наземных сверхдлинноволновых передатчиков [1]. Впоследствии обнаружилось, что и изначально слабые квазимохроматические сигналы могут служить источником триггерных излучений. Наиболее существенная информация по эффектам триггирования была получена с помощью уже упоминавшегося передатчика «Сайлл». Отсылая за подробностями к обзору Хелливелла [4], отметим лишь наиболее характерные черты этого процесса. Прежде чем вызвать триггерный процесс, исходная квазимохроматическая волна усиливается на одном проходе магнитной силовой трубы до амплитуды $1 \div 10$ нТл. Инкремент на этой стадии достигает $\gamma \sim 30 \div 50$ дБ/с, а полное усиление составляет $\Gamma \sim 30 \div 40$ дБ. Такие большие значения трудно объяснить, принимая во внимание наблюдаемые потоки энергичных электронов. Скорее всего, это свидетельствует о появлении на функции распределения энергичных электронов особенности в виде ступеньки, приводящей к резкому росту инкремента в узкой полосе частот. Более подробно этот вопрос будет рассмотрен в следующем разделе. Триггерный сигнал начинается в непосредственной близости от заднего фронта исходного пакета с частотным смещением $30 \div 150$ Гц, причём для того, чтобы начался триггерный процесс, длительность пакета должна превышать некоторое критическое значение ($\tau_{\min} \sim 0,1$ с). Характер динамического спектра триггерного сигнала, по-видимому, зависит от длительности исходного сигнала. Согласно [5] короткие сигналы ($\tau < 350$ мс) возбуждали триггеры с уменьшающейся частотой (фолеры), а при $\tau > 350$ мс фолеры сменялись райзерами. Амплитуда триггерных сигналов была сравнима с исходным (усиленным) сигналом.

Не благоприятными для возбуждения триггерных сигналов оказались и слишком длинные исходные пакеты.

В настоящее время опубликовано достаточно большое количество работ, посвящённых теоретическим аспектам триггерного излучения. Здесь, в первую очередь, следует отметить пионерские работы Нанна [8–10], Карпмана и др. [11], Истомина и др. [12, 13], не потерявшие актуальность до настоящего времени, а также прекрасный обзор Омуры и др. [2]. Значительные достижения имеются в численном моделировании триггерных излучений [14, 15]. Ниже мы сосредоточимся на аналитических моделях, где в последнее время достигнут существенный прогресс [16–20], позволяющий дать количественную интерпретацию отмеченных выше свойств триггерного излучения.

1.1. Качественная картина генерации

Общепринятая в настоящее время схема генерации триггерного излучения показана на рис. 3. Достаточно интенсивный исходный волновой пакет с частотой ω и волновым вектором $\mathbf{k} \parallel \mathbf{B}$, где \mathbf{B} — вектор геомагнитного поля, ускоряет электроны, которые находятся с ним в циклотронном резонансе:

$$\omega - \omega_B = kV_{\parallel}. \quad (1)$$

Здесь ω_B — гирочастота электронов, V_{\parallel} — продольная по отношению к геомагнитному полю компонента скорости электрона. Эти электроны, двигаясь навстречу пакету, захватываются волной и транспортируются вместе с пакетом вдоль силовой линии с резонансной скоростью $V_R = (\omega - \omega_B)/k$, которая изменяется в соответствии с изменением ω_B и k . Процесс ускорения электронов рассмотрен в работах [12, 17]. Согласно [17] для эффективного ускорения амплитуда магнитного поля волны должна превышать $B_{\sim} > 1$ нТл, а модуль резонансной скорости на выходе из пакета $|V_R^{\text{exit}}|$ должен быть меньше, чем на входе. При этом на выходе из пакета появляется ускоренный (по полной энергии) пучок электронов с $V_{\parallel} = V_R^{\text{exit}}$ и малым разбросом по продольной скорости

$$\delta V_{\parallel} \sim \Omega_{\text{tr}}/k, \quad \Omega_{\text{tr}} = (kV_{\perp}\omega_B h)^{1/2}, \quad (2)$$

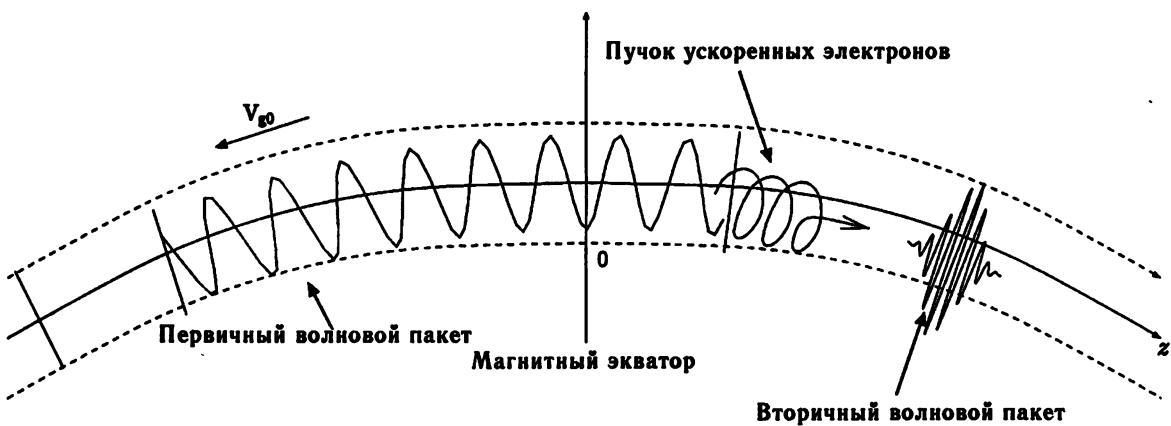


Рис. 3. Схема генерации триггерного излучения. Здесь V_{g0} — групповая скорость исходного пакета

где Ω_{tr} — частота осцилляций электронов, захваченных потенциалом волны, $h = B_\sim/B$ — относительная амплитуда магнитного поля волны. Плотность пучка таких ускоренных электронов $n_{tr} \leq (\delta V_\parallel/V_\parallel) n_h$, где n_h — полная концентрация энергичных электронов.

Вторичное излучение этих электронов после выхода из первоначального волнового пакета и является источником триггерных сигналов. Принципиальную роль здесь играют два эффекта. Во-первых, это фазовая модуляция пучка ускоренных частиц на выходе из исходного пакета, которая порождает начальный уровень триггерного излучения подобно антенне бегущей волны (антенный эффект [13]). Далее этот относительно слабый сигнал усиливается тем же потоком электронов-осцилляторов посредством циклотронной неустойчивости. На второй стадии важную роль играет так называемый циклотронный резонанс второго порядка [16, 18–21], который формирует частотный динамический спектр триггерных сигналов. Суть этого эффекта состоит в том, что максимальное усиление триггерного сигнала в условиях неоднородного магнитного поля достигается при специальной пространственно-временной зависимости частоты излучения, компенсирующей рассогласование циклотронного резонанса, обусловленное изменением гирочастоты и скорости пучка. Ниже в данном разделе даётся количественное рассмотрение указанных эффектов.

1.2. Функция распределения энергичных электронов

Исходным для описания эффектов циклотронного взаимодействия свистовых волн ($c \parallel B$) с резонансными электронами является уравнение переноса для комплексной амплитуды магнитного поля волны B_\sim :

$$\frac{\partial B_\sim}{\partial t} - V_g \frac{\partial B_\sim}{\partial z} = \frac{2\pi V_g}{c} J_R, \quad (3)$$

где V_g — групповая скорость волн, c — скорость света, а резонансный ток J_R в правой части (3) определяется выражением

$$J_R = e \int V_\perp \exp(-i\psi) F d^3V. \quad (4)$$

Здесь $V_\perp = u \exp(i\varphi)$ — компонента скорости поперёк геомагнитного поля, e — заряд электрона, φ — фаза гировращения электрона, ψ — фаза волны, обусловленная холодной компонентой плазмы: $d\psi/dt = -\omega$, $d\psi/dz = k$. Функция распределения F в (4) должна находиться из бесстолкновительного кинетического уравнения с учётом волны накачки и триггерного сигнала, что эквивалентно решению

нелинейного уравнения движения для электронов. Можно разделить эффекты, обусловленные волной накачки и вторичными волнами, представляя функцию распределения F в виде ряда Тейлора:

$$F = F_0 + (\partial F / \partial V_{\parallel}) \Delta V_{\parallel} + (\partial F / \partial V_{\perp}) \Delta V_{\perp}, \quad (5)$$

где F_0 — функция распределения ускоренных исходной волной электронов после выхода из пакета волны накачки; остальные члены в правой части (5) обусловлены триггерным сигналом, ΔV_{\parallel} и ΔV_{\perp} — приращения скорости под действием этого сигнала. Функция F_0 содержит связанную с исходной волной фазовую модуляцию, которая, однако, быстро разрушается по мере движения пучка, поэтому не учитывается в первом порядке разложения Тейлора (5). По существу, первый член в (5) отвечает за сторонний ток, который определяет начальный уровень вторичных волн (антенный эффект), а два других члена обеспечивают циклотронное усиление этих волн.

Далее мы учтём, что согласно экспериментальным данным возбуждение триггерного сигнала происходит на стадии насыщения исходной волны, когда устанавливается так называемая эргодическая функция распределения захваченных волной электронов [11], которую мы и выберем в качестве F_0 на выходе из исходного пакета, при $z = z_{\phi}$:

$$F_0(\xi, \xi', z = z_{\phi}) = \begin{cases} F_{\text{erg}} = C(V_{\perp}), & \Omega_{\text{tr}}^{-2} \xi'^2 + \sin^2 \xi \leq 1; \\ 0, & \Omega_{\text{tr}}^{-2} \xi'^2 + \sin^2 \xi > 1, \end{cases} \quad (6)$$

где $2\xi = \psi_0 + \varphi - 3\pi/2 = \int k_0 dz - \omega_0 t + \varphi - 3\pi/2$, $\xi \in [-\pi/2, \pi/2]$; $2\xi' = k_0 (V_{\parallel} - V_{R0})$, k_0 и ω_0 — волновой вектор и частота волны накачки, $V_{R0} = (\omega_0 - \omega_B)/k_0$, константа C определяется условием нормировки:

$$\int F_0 d^3V = \frac{4}{k_0} \int C(V_{\perp}) V_{\perp} dV_{\perp} d\xi d\xi' = n_{\text{tr}}. \quad (7)$$

Функцию распределения F_0 в произвольной точке z нетрудно найти с помощью теоремы Лиувилля, используя траектории свободного разлёта электронов в неоднородном геомагнитном поле и выражение (6).

В этом разделе мы будем предполагать, что разброс продольных скоростей в пучке, $\delta V_{\parallel} \sim \Omega_{\text{tr}}/k$, достаточно большой, так что имеет место кинетическая стадия неустойчивости:

$$\gamma_0 < k \delta V_{\parallel} \sim \Omega_{\text{tr}}, \quad (8)$$

а сам пучок при расчёте инкремента γ_0 циклотронной неустойчивости, определяемого вторым и третьим членами в правой части (5), аппроксимировать экспоненциальной функцией:

$$F_0 \approx C(V_{\perp}) \exp[-(V - V_{R0})^2 / (\delta V_{\parallel})^2], \quad (9)$$

где $\delta V_{\parallel} \sim \Omega_{\text{tr}}/k$. Соотношения (4)–(6) и (9) составляют основу количественного рассмотрения триггерных эффектов.

1.3. Антенный эффект и циклотронный резонанс второго порядка

Перейдём от уравнения (3) для комплексной амплитуды триггерного сигнала к уравнению переноса энергии волн

$$\partial \mathcal{E} / \partial t + \partial(V_g \mathcal{E}) / \partial z = (\mathbf{J}_R \mathbf{E}^*), \quad (10)$$

где $\mathcal{E} = B_\infty B^*/[16\pi(1 - \omega/\omega_B)]$ — плотность энергии свистовых волн, E — амплитуда электрического поля триггерного сигнала. Выражение для работы резонансного тока ($J_R E^*$) в (10) находится подстановкой (5) в (4) с учётом (6) и (9) и может быть представлено в соответствии с (5) в виде

$$(J_R E^*) = (J_0 E^*) + (J E^*), \quad (11)$$

где ток J_0 связан с антенным эффектом, а J — самосогласованный ток, обусловленный взаимодействием с генерируемой вторичной волной.

В уравнении (10) удобно перейти к новым переменным (z_ϕ, η) , которые связаны с переменными (z, t) следующими соотношениями:

$$\eta = \int_{z_0}^z \frac{dz'}{V_g(z')} - t, \quad \int_{z_0}^{z_\phi} \frac{dz'}{V_{g0}(z')} - \int_{z_\phi}^z \frac{dz'}{|V_B(z')|} - t = 0, \quad (12)$$

где $V_B(z) = \sqrt{V_{R0}^2(z_\phi) - I[B(z) - B(z_\phi)]}$ — продольная скорость электронов, покинувших первичный волновой пакет со скоростью $V_{R0}(z_\phi)$, $I = V_\perp^2/B(z)$ — первый адиабатический инвариант. Переменная z_ϕ постоянна вдоль невозмущённой траектории электронов, резонансных с первичным пакетом в точке выхода из него, и имеет смысл координаты точки выхода для электронов, находящихся в точке z в момент времени t .

Используя новые переменные, можно записать решение интегродифференциальной системы уравнений (3), (4) в виде

$$B_\infty(z_\phi, \eta) = \pi \int_{z_{\phi0}(\eta)}^{z_\phi} \frac{J_0(z'_\phi, \eta)}{(V_g + V_B)} \exp \left[\int_{z'_\phi}^{z_\phi} \frac{\gamma_0(z''_\phi, \eta)}{V_g + V_B} dz''_\phi \right] dz'_\phi, \quad (13)$$

где $z_{\phi0}(\eta)$ — минимальная из координат точек выхода электронов, дающих вклад во вторичное волновое поле в точке η . Инкремент γ_0 , используя аппроксимацию (9) для невозмущённой функции распределения, можно оценить по «кинетической» формуле

$$\gamma_0 = \sqrt{\pi} \frac{n_{tr}}{n_c} \frac{(\omega_B - \omega)^2}{\omega_B} \frac{V_0^2}{(\delta V_\parallel)^2} \frac{V_B - V_{R0}}{\delta V_\parallel} \exp \left[- \frac{(V_B - V_{R0})^2}{(\delta V_\parallel)^2} \right]. \quad (14)$$

Здесь n_c — концентрация фоновой плазмы.

Количественная оценка антенного эффекта может быть получена из (10) при учёте только слагаемого, пропорционального J_0 , что эквивалентно пренебрежению экспоненциальным множителем, ответственным за усиление, в (13). Величина J_0 определяется подстановкой в (4) функции распределения (6), в которой вместо текущих значений переменных ξ и ξ' надо подставить значения в точке выхода:

$$\begin{aligned} 2\xi &\rightarrow 2u = \int_{z_0}^{z_\phi} k_0 dz' - \omega_0 t_\phi + \varphi(z_\phi) - 3\pi/2 \\ 2\xi' &\rightarrow 2u' = k_0(z_\phi) [V_\parallel(z_\phi) - V_{R0}(z_\phi)], \end{aligned} \quad (15)$$

где t_ϕ — момент выхода электронов из первичного пакета. Легко убедиться, что

$$u = \xi - \int_z^{z_\phi} k_0 \frac{V_\parallel - V_{R0}}{|V_\parallel|} dz'. \quad (16)$$

Обозримое аналитическое выражение для J_0 удаётся получить, если учесть, что начальная фазовая группировка резонансных электронов сохраняется только на небольшом расстоянии от точки выхода из исходного волнового пакета. При этом можно разложить интеграл в (16) в ряд по $(z - z_\phi)$. Оставляя детальное изложение дальнейших вычислений для отдельной статьи, обсудим качественные особенности антенного эффекта и оценим его величину.

Эргодическая функция распределения (6) соответствует насыщению первичной волны, т. е. электроны, выходящие из первичного волнового пакета, не обмениваются с ним энергией. С другой стороны, эффект группировки электронов вне первичного волнового пакета разрушается за счёт разброса по продольным скоростям на расстоянии порядка

$$l_\psi \sim \frac{\lambda V_B}{2 \delta V_{\parallel}}. \quad (17)$$

Поэтому резонансный ток J_0 равен нулю как на выходе из первичного волнового пакета, так и на расстояниях, существенно превышающих l_ψ . Антенный эффект максимален, когда точка циклотронного резонанса вторичной волны с пучком находится на расстоянии порядка l_ψ от заднего фронта первичного волнового пакета, т. е. при конечном частотном сдвиге между первичной и вторичной волнами. Отсюда имеем оценку частотного сдвига:

$$\Delta\omega \sim \omega_B \frac{l_\psi}{a}, \quad (18)$$

где a — характерный масштаб неоднородности магнитного поля вблизи экватора, который для дипольного поля выражается через радиус Земли R_0 как

$$a = \sqrt{2} R_0 / 3. \quad (19)$$

Количественная оценка максимальной величины антенного эффекта, достигаемой при выполнении условия (18), может быть записана в виде выражения для амплитуды вторичной волны без учёта усиления:

$$B_* \simeq \pi e n_{tr} \frac{V_{R0}}{c} l_\psi. \quad (20)$$

Из соотношения (13) следует, что при достаточно малой концентрации n_{tr} пучка ускоренных электронов логарифмическое усиление Γ вторичной волны можно записать в виде

$$\Gamma \simeq \int_{z_{\phi 0}}^{z_\phi} \frac{\gamma_0(z'_\phi, \eta)}{V_g + V_B} dz'_\phi. \quad (21)$$

Если для вторичной волны выполнено только обычное условие циклотронного резонанса, то усиление можно оценить как

$$\Gamma = \Gamma_1 \simeq \frac{\gamma_m}{V_g + V_B} \Delta z_1, \quad (22)$$

где

$$\Delta z_1 \sim a \frac{\delta V_{\parallel}}{V_B}, \quad \gamma_m = \frac{n_{tr}}{n_c} \frac{(\omega_{BL} - \omega)^2}{\omega_{BL}} \frac{V_{\perp 0}^2}{(\delta V_{\parallel})^2},$$

ω_{BL} — гирочастота в экваториальном сечении геомагнитной ловушки. Условие циклотронного резонанса второго порядка соответствует равенству $\partial(V_B - V_R)/\partial z_\phi = 0$. В этом случае эффективная длина циклотронного усиления значительно возрастает [16, 19]:

$$\Gamma = \Gamma_2 \simeq \frac{\gamma_0}{V_g + V_B} \Delta z_2, \quad \Delta z_2 \sim a \left(\frac{\delta V_{\parallel}}{V_B} \right)^{1/2} \gg \Delta z_1. \quad (23)$$

Конечная амплитуда вторичного волнового пакета для оптимальных условий оценивается как

$$B_{\text{trig}} \simeq B_* \exp(\Gamma_2), \quad (24)$$

где B_* даётся выражением (20).

Для количественных оценок положим параметр геомагнитной оболочки $L = 4$; $\omega/\omega_{BL} = 0,5$; $V_{R0}/V_{\perp 0} \sim 0,3$; $k_0 = 1 \text{ км}^{-1}$; тогда $a \sim 10^4 \text{ км}$ и $V_g \sim \omega_0/k_0 \sim 8 \cdot 10^4 \text{ км/с}$. В итоге получим $l_\phi \sim 10^2 \text{ км}$ и $\Delta f \equiv \Delta\omega/(2\pi) \sim 120 \text{ Гц}$. Эта оценка находится в согласии с экспериментальными данными ($\Delta f \sim 30 \div 150 \text{ Гц}$, см. [22]).

Амплитуда вторичного волнового пакета определяется уравнениями (20), (23), (24) и зависит от разброса пучка по скоростям δV_{\parallel} и его плотности n_{tr} . В соответствии с (2) оценим эти параметры для начальной амплитуды первичной волны $B_{\text{in}} \sim 10 \text{ нТл}$. Концентрация электронов в пучке определяется соотношением

$$n_{\text{tr}} \sim \frac{\delta V_{\parallel} \Delta V_{\perp}}{V_B V_{\perp 0}} n_h, \quad (25)$$

где ΔV_{\perp} — интервал значений V_{\perp} в окрестности $V_{\perp 0}$, в котором выполняются условия захвата и ускорения электронов полем первичной волны [17]. Для $L = 4$; $V_{R0}/V_{\perp 0} \sim 0,3$ и $\Delta V_{\perp}/V_{\perp 0} \sim 0,1$ находим

$$\frac{\delta V_{\parallel}}{V_B} \sim 10^{-2} \quad \text{и} \quad n_{\text{tr}} \sim 10^{-3} n_h.$$

При $n_h = 5 \cdot 10^{-3} \text{ см}^{-3}$ (это соответствует потоку $S \sim n_h V \sim 4 \cdot 10^7 \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$) и $n_c \sim 10^2 \text{ см}^{-3}$, получаем

$$B_* \sim 1 \text{ нТл}, \quad \gamma_0 \sim 10^2 \text{ с}^{-1}, \quad \Gamma_2 \sim 2, \quad \Delta z_2 \sim 1200 \text{ км.}$$

Тогда конечная амплитуда вторичного пакета $B_{\text{trig}} \sim 8 \text{ нТл}$.

2. ГЕНЕРАЦИЯ ХОРОВЫХ ИЗЛУЧЕНИЙ

Хоровые сигналы (см. рис. 2) являются наиболее многочисленной группой дискретных электромагнитных КНЧ-ОНЧ излучений в магнитосфере Земли. Эти излучения возникают, как правило, на восстановительной фазе магнитной бури и свидетельствуют об инжекции в геомагнитную ловушку интенсивных потоков электронов средних энергий в диапазоне $10 \div 100 \text{ кэВ}$. Наряду с индивидуальными особенностями в каждом конкретном событии, имеется целый ряд общих черт, которые отличают хоровые излучения от других типов дискретных излучений [3]. Продолжительность хоровых излучений составляет от нескольких минут до нескольких часов: дискретные сигналы в виде отдельных узкополосных элементов следуют друг за другом с периодом $T \sim 0,1 \div 1 \text{ с}$, который часто много меньше периода осцилляций энергичных электронов между зеркальными точками в геомагнитной ловушке [23]. Частота f внутри каждого элемента повышается со скоростью $df/dt \sim 1 \div 10 \text{ кГц/с}$ [2]. Согласно спутниковым измерениям [24] хоры в магнитосфере возбуждаются вблизи экватора в виде свистовых волн с волновым вектором \mathbf{k} , направленным почти вдоль геомагнитного поля, и следуют пачками длительностью около 10 с. В наземных измерениях такая прерывистая генерация проявляется в виде дополнительной модуляции интенсивности хоров с тем же периодом порядка 10 с. Важная особенность хоровых излучений — их связь с шумовыми излучениями, часто служащими низкочастотной «подставкой», из которой вырастают хоровые элементы (см. рис. 2).

Ниже излагается сценарий формирования хоровых излучений, на основе которого проводятся оценки, позволяющие качественно, а порой и количественно объяснить многие их особенности.

Основу этого сценария составляет формирование в пространстве скоростей особенности в виде движущейся ступеньки при развитии циклотронной неустойчивости. Эта ступенька представляет собой, по существу, ударную волну в фазовом пространстве скоростей. При определенных условиях эта ударная волна может порождать дискретные излучения, близкие по своим свойствам к хоровым излучениям.

2.1. Ступенчатая деформация функции распределения электронов как источник дискретных электромагнитных излучений

По опыту исследований лабораторных мазеров на циклотронном резонансе дискретные электромагнитные излучения являются, в первую очередь, следствием распределения излучающих электронов-осцилляторов с малым разбросом по импульсам (по существу, распределения в виде дельта-функции). В естественные радиационные пояса Земли инжектируются потоки энергичных электронов с достаточно большим разбросом по скоростям, $\Delta V \sim V$. Поперечная анизотропия этих потоков приводит к развитию циклотронной неустойчивости и генерации шумовых излучений (хиссов, или шипений) на частотах $\omega < \omega_{BL}$. Об этом свидетельствуют как эксперимент, так и теоретические оценки. Согласно этим оценкам циклотронное усиление Γ свистовых волн при однократном прохождении радиационного пояса мало ($\Gamma \leq 1$) и не может объяснить наблюдаемое усиление исходной свистовой волны в случае триггерного излучения. Тем более трудно объяснить генерацию дискретных сигналов типа хоров.

Возможным выходом из этого противоречия, как уже отмечалось в разделе 1, может служить формирование деформации в виде ступеньки функции распределения энергичных электронов по продольной компоненте скорости под действием шумовых излучений, генерируемых на предварительной (квазилинейной) стадии развития циклотронной неустойчивости. Такая возможность была количественно проанализирована в работах [25–27] на основе самосогласованного решения квазилинейной системы уравнений, описывающих эволюцию циклотронной неустойчивости в условиях геомагнитной ловушки. Физическая причина формирования ступеньки очень проста. Согласно линейной теории циклотронной неустойчивости [7], при конечной анизотропии функции распределения энергичных электронов $A = \langle W_{\perp} \rangle / \langle W_{\parallel} \rangle$, определяющей отношение средних энергий движения электронов поперёк ($\langle W_{\perp} \rangle$) и вдоль ($\langle W_{\parallel} \rangle$) магнитного поля, максимальная частота в спектре возбуждаемых волн определяется соотношением

$$\omega_m = \omega_B (1 - A^{-1}). \quad (26)$$

Если подставить соотношение (26) в условие циклотронного резонанса на экваторе $\omega_m - \omega_{BL} = k(\omega_m)V_{\parallel L}$, можно найти минимальную энергию продольного движения электронов $W_{min} = m(\omega_m - \omega_{BL})^2/(2k^2)$, взаимодействующих с циклотронными волнами; здесь m — масса электрона. Электроны с $W_{\parallel} > W_{min}$ испытывают питч-угловое рассеяние на волнах и высыпаются из геомагнитной ловушки через конус потерь, частицы с $W_{\parallel} < W_{min}$ не принимают участия в резонанском взаимодействии, что и определяет появление ступеньки при $W_{\parallel} = W_{min}$.

На рис. 4 приведены результаты численного моделирования эволюции циклотронной неустойчивости в рамках самосогласованной системы квазилинейных уравнений: рост усиления Γ и интенсивности \mathcal{E} циклотронных (свистовых) волн (рис. 4a), а также эволюция функции распределения энергичных электронов Φ и коэффициента питч-угловой диффузии D (рис. 4б). Ясно видно формирование ступеньки на функции распределения электронов, причём крутизна ступеньки в ходе эволюции неустойчивости непрерывно растёт. В то же время растут усиление Γ_{step} и инкремент γ_{step} циклотронной неустойчивости волн, которые находятся в резонансе со ступенькой. По мере развития неустойчивости ступенька медленно (по сравнению с временем её укручивания) движется в сторону меньших продольных скоростей, а следовательно, спектр волн обогащается более высокими частотами. Следует заметить, что

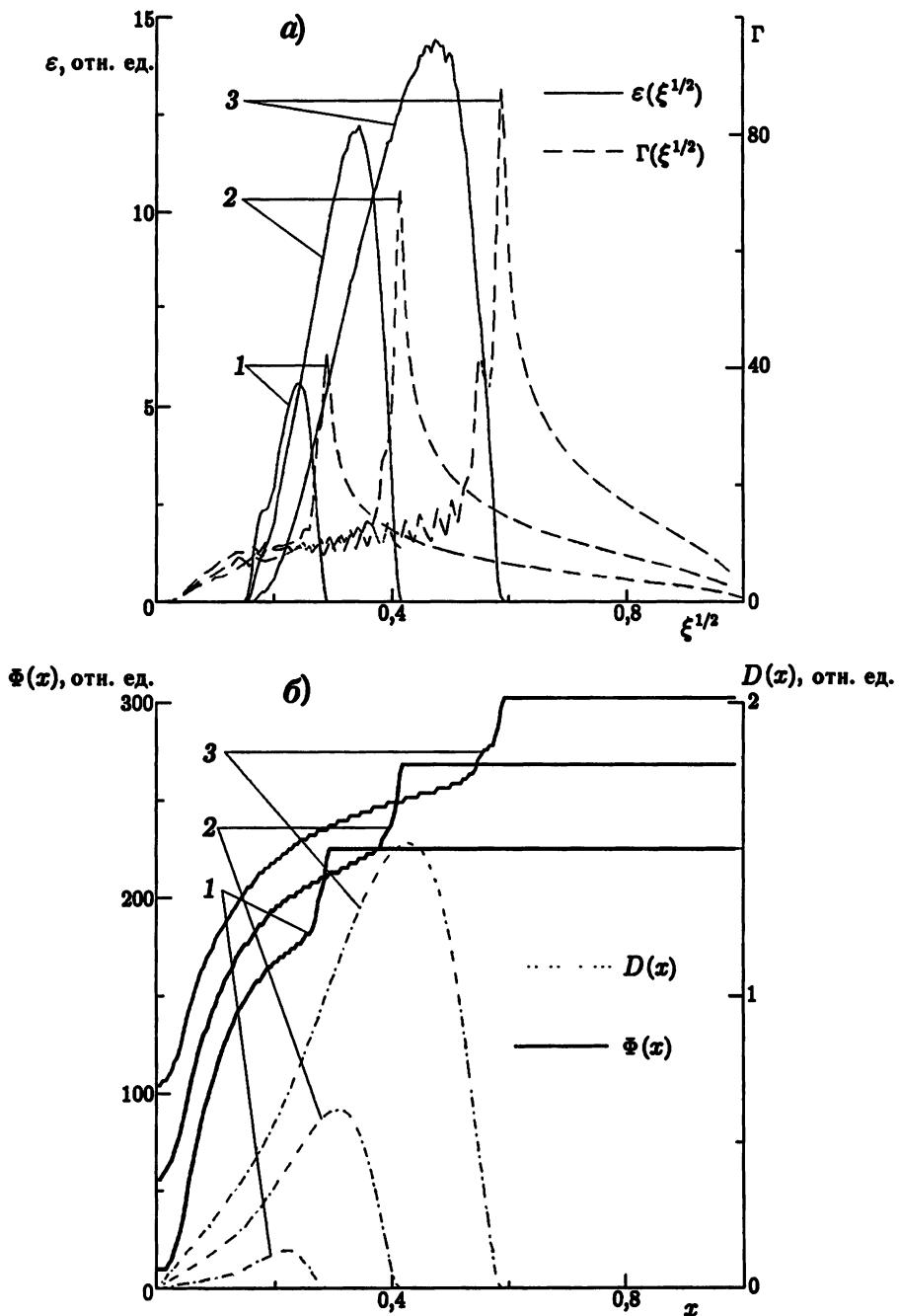


Рис. 4. Результаты численного решения самосогласованных квазилинейных уравнений, иллюстрирующие развитие ступеньки на функции распределения [26]. Здесь $\xi = 1 - \omega_0/\omega$, где $\omega_0 = \omega_{BL}/\beta_*$, $\beta_* = (\omega_{pL}^2/\omega_{BL}^2) V^2/c^2$, ω_{pL} — электронная плазменная частота в экваториальном сечении геомагнитной ловушки; $x = \sin \vartheta_L$, где ϑ_L — питч-угол в экваториальной плоскости. Кривые 1–3 соответствуют последовательным моментам времени $t_1 < t_2 < t_3$

в реальных условиях эта эволюция зависит от целого ряда факторов. В частности, квазилинейная стадия циклотронной неустойчивости с шумовым спектром волн в условиях магнитосферы во многом зависит от наличия вытянутых вдоль магнитного поля волноводов для свистовых волн с малыми потерями на торцах (ионосферах). Такие волноводы обеспечивают усиление волн при многократном пе-

рассечении волновым пакетом экваториальной плоскости. В то же время волноводы, благоприятные для развития циклотронной неустойчивости, существуют лишь на частотах $\omega < \omega_B/2$. Кроме того, важную роль могут играть «косые» свистовые волны с $k \parallel B$. Оба эти обстоятельства стабилизируют положение ступеньки в фазовом пространстве. Радиационный пояс при этом может находиться в метастабильном состоянии, причём внешний квазимонохроматический волновой пакет, попадая в циклотронный резонанс со ступенькой, будет усиливаться с коэффициентом усиления $\Gamma_{\text{step}} \gg 1$ [16, 26]. Таким образом удается объяснить большое усиление исходной волны, наблюдавшееся в триггерных излучениях (раздел 1).

2.2. Режим генерации обратной волны

Характер циклотронной неустойчивости принципиально меняется, когда инкремент $\gamma_{\text{step}} > k \Delta V_{\text{step}}$, где ΔV_{step} — ширина ступеньки на функции распределения по продольной скорости. Этот критерий характеризует переход от кинетической к гидродинамической стадии неустойчивости, когда принципиальными становятся фазовые эффекты. Эту стадию неустойчивости можно рассмотреть, опираясь на соотношения (3), (4), которые мы использовали при анализе триггерного излучения. Применимтельно к хоровым излучениям резонансный ток J_R в правой части уравнения (3) включает только самосогласованную компоненту J , и вторичные волны на сформированной шумовым излучением ступеньке растут от спонтанного уровня. По сравнению с проведённым в разделе 1 анализом триггерных излучений на базе уравнений (3), (4) здесь мы рассмотрим более общий случай без ограничений на плотность пучка энергичных электронов, когда соотношение (21), вообще говоря, не справедливо. Учитывая вид невозмущённой функции распределения в виде ступеньки, из интегродифференциальной системы уравнений (3), (4) и кинетического уравнения для F можно получить систему двух дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial B_\sim}{\partial t} + V_g \frac{\partial B_\sim}{\partial z} = \frac{2\pi V_g}{c} J_R, \quad (27)$$

$$\frac{\partial J_R}{\partial t} - V_B \frac{\partial J_R}{\partial z} = \alpha B_\sim - i\Delta J_R, \quad (28)$$

где B_\sim — амплитуда магнитного поля в волне, $\Delta = \omega - \omega_B + |kV_\parallel|$ — частотная расстройка, J_R — резонансный ток электронов, $\alpha \simeq e^2 n_h (V_{\perp 0}/V_{\text{step}})^2 (\omega_B/\omega - 1)$.

Решение системы (27), (28) в случае неоднородного магнитного поля, когда Δ зависит от z , довольно сложное и в настоящее время отсутствует. Следуя работе [28], мы рассмотрим упрощённую ограниченную в пространстве однородную модель. Длина l такой эквивалентной системы вдоль магнитного поля определяется из условия достаточно малого фазового рассогласования циклотронного резонанса на экваторе:

$$\int_{-l/2}^{l/2} |\Delta| dz \equiv \int_{-l/2}^{l/2} \frac{\omega_B - \omega - kV_{\text{step}}}{V_{\text{step}}} dz \leq \frac{\pi}{2}, \quad (29)$$

где V_{step} — продольная компонента скорости, соответствующая ступеньке, т. е. на экваторе ($z = 0$) $\omega_B - \omega = kV_{\text{step}}$. В случае дипольной аппроксимации магнитного поля из (29) получаем [21, 28]

$$l = (R_0^2 L^2/k)^{1/3}, \quad (30)$$

где, как и раньше, R_0 — радиус Земли, L — параметр геомагнитной оболочки. Заметим, что в условиях земной магнитосферы $l \ll R_0$.

В такой формулировке мы, фактически, имеем дело с генератором типа лампы обратной волны (ЛОВ) длиной l , в которой фазовая (групповая) скорость волн направлена против скорости электронов. Разница между классической лабораторной ЛОВ [29] и магнитосферным генератором типа ЛОВ заключена в функции распределения электронов по скоростям: если в лабораторных приборах это дельта-функция, то в магнитосферной ЛОВ мы имеем дело со ступенькой. В последнем случае для описания линейной стадии генерации волн в ЛОВ можно использовать систему дифференциальных уравнений (27), (28), где $\Delta = \text{const}$ и область взаимодействия $\Delta z \leq l$ (см. рис. 5).

Систему уравнений нужно дополнить следующими граничными условиями:

$$\text{при } z = l/2 : B = B_{\text{exit}}, \quad J_R = 0, \quad R = 0; \quad (31)$$

$$\text{при } z = -l/2 : B = B_{\text{ent}}, \quad R = 0.$$

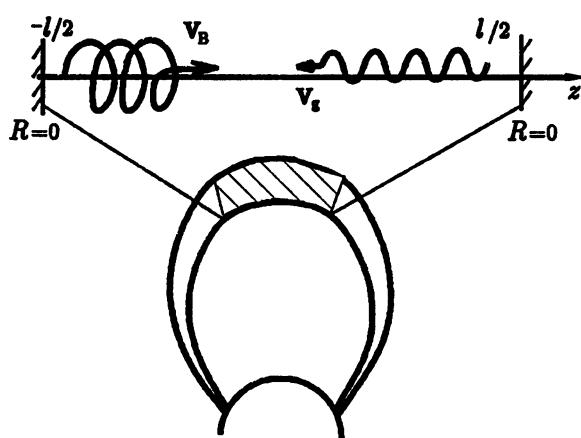


Рис. 5. Область, в которой реализуется магнитосферная лампа обратной волны

Здесь $B_{\text{ent}}(\text{exit})$ — амплитуда волны на входе (выходе) ЛОВ, R — коэффициент отражения волны от торцов генератора. Порог генерации волн в ЛОВ соответствует переходу системы (27), (28), (31) в режим абсолютной неустойчивости, когда переходная функция $\Pi = B_{\text{exit}}/B_{\text{ent}}$ стремится к бесконечности. Полагая в (27), (28) $\{B_\sim, J\} \sim \exp(i\Omega t)$ и решая граничную задачу с учётом (31), нетрудно найти пороговую плотность энергичных электронов и инкремент абсолютной неустойчивости углов, характеризующий скорость роста волн в ЛОВ на начальной стадии. В оптимальных условиях, когда $\Delta = 0$, получаем

$$\gamma_{\text{ЛОВ}} \equiv \text{Im } \Omega = \frac{ql}{4} \left(\frac{1}{V_g} + \frac{1}{V_B} \right)^{-1} \left(1 - \frac{q_{\text{thr}}}{q} \right), \quad (32)$$

где $q = b\omega_{BL}\gamma_0/(V_g V_{\text{step}})$, b — относительная высота ступеньки на функции распределения, $(q_{\text{thr}})^{1/2} = \pi/(2l)$, $\gamma_0 \approx 0,2\omega_{BL}n_{hL}/n_{cL}$ — инкремент неустойчивости для плавной функции распределения с анизотропией температур $A = 2$, n_{hL} и n_{cL} — концентрации энергичных электронов и фоновой плазмы в экваториальном сечении геомагнитной ловушки. В случае $(q_{\text{thr}}/q)^{1/2} = 0,5$ из (32) следует

$$\frac{\gamma_{\text{ЛОВ}}}{\gamma_0} \sim \frac{3b\omega_{BL}l}{16(V_B + V_g)}. \quad (33)$$

В качестве иллюстрации приведём некоторые численные оценки. Полагая $L = 4$, $n_{cL} = 2 \cdot 10^2 \text{ см}^{-3}$ и $f = \omega/2\pi = 2 \text{ кГц}$, получаем $k \approx 1 \text{ км}^{-1}$ и масштаб области взаимодействия $l \approx 10^3 \text{ км}$. В рассматриваемом случае $\omega \ll \omega_{BL}$, поэтому $V_g \simeq 2\omega/k$, $V_{\text{step}} \simeq \omega_{BL}/k$ и $q \approx (bk^2/\omega)\gamma_0$. Полагая $b = 0,3$ и $\gamma_0 = 0,1 \text{ с}^{-1}$, находим $q^{1/2} \approx 1,7 \cdot 10^{-3} \text{ км}^{-1}$. С другой стороны, $q_{\text{thr}} = \pi/(2l) \approx 1,57 \cdot 10^{-3} \text{ км}^{-1}$, т. е. порог генерации достигается уже при $\gamma_0 \sim 0,1 \text{ с}^{-1}$, что соответствует плотности потока энергичных электронов $S_L \sim 2 \cdot 10^7 \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$. Эксперимент [30] даёт значения $S_L \sim 2 \cdot 10^7 \div 10^8 \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$. Таким образом, переход к режиму ЛОВ в условиях земной магнитосферы вполне реален.

2.3. Формирование хоровых излучений

Рассмотрим теперь некоторые качественные эффекты, которые вытекают из подобия физических процессов в лабораторных и магнитосферных ЛОВ. Согласно результатам экспериментальных и теоретических исследований лабораторных ЛОВ [29] режим генерации волн в ЛОВ становится периодическим, когда параметр q достигает бифуркационного значения $q_p \approx 4q_{thr}$. Можно ожидать подобной бифуркации и в случае магнитосферной ЛОВ. Периодический режим означает, что генерация волн происходит в виде последовательности отдельных импульсов с периодом следования, равным [23, 29]

$$T_M \approx 1,5l \left(\frac{1}{V_g} + \frac{1}{V_B} \right), \quad (34)$$

где l определяется соотношением (29). Амплитуду магнитного поля генерируемых волн можно оценить из соотношения, которое следует из анализа эффектов насыщения при развитии абсолютной неустойчивости [31]:

$$\frac{\Omega_{tr}}{\gamma_{lov}} \approx \frac{32}{3\pi}, \quad (35)$$

где γ_{lov} определяется из соотношения (32) при $q/q_{thr} = 4$, а Ω_{tr} даётся формулой (2). Из (35) следует амплитуда волн:

$$B_\sim \approx 4\pi^2 \left(\frac{V_g V_B}{V_g + V_B} \right)^2 \frac{(kR_0 L)^{2/3}}{(R_0 L)^2 k V_\perp \omega_{BL}} B_L, \quad (36)$$

где B_L — геомагнитное поле на экваторе. Период (34) и значение (36) мы связываем с периодом следования и амплитудой хоровых элементов.

Форма динамического спектра отдельного хорового сигнала во многом определяется неоднородностью геомагнитного поля и уже не может быть найдена по аналогии с лабораторной ЛОВ. Здесь мы воспользуемся результатами, полученными в теории триггерного излучения (раздел 1). Фактически, после перехода к периодическому режиму генерации, при рассмотрении отдельного хорового элемента мы имеем дело с инжеекцией квазимохроматической волны на экваторе. При этом согласно [23, 32] возбуждаются триггерные сигналы — хоры — с растущей частотой. Динамический спектр этих сигналов может быть найден из условия нелинейного циклотронного резонанса второго порядка [2, 32]:

$$|S| = \frac{1}{2\Omega_{tr}^2} \left| \left(3V_R - \frac{kV_\perp^2}{\omega_B} \right) \frac{\partial \omega_B}{\partial z} - \frac{2\omega + \omega_B}{\omega} \frac{d\omega_B}{dt} \right| \sim 0,2 \div 0,8. \quad (37)$$

Это условие обеспечивает максимально эффективное взаимодействие волны и частиц в случае, когда доминирует нелинейное изменение скорости частиц под действием волнового поля. Оно получено из анализа движения отдельной частицы в заданном поле волны в неоднородном магнитном поле. Подставляя в (37) амплитуду (36) и полагая в $|S| \sim 0,5$, находим

$$\frac{df}{dt} \approx 1,5 \frac{\omega \gamma_{lov}^2}{\omega_B + 2\omega} (1 + S_0), \quad (38)$$

где $S_0 = (V_{step} \gamma_{lov}^{-2}/3) \partial \omega_B / \partial z$.

Используем результаты (34)–(38) для количественных оценок. Для предыдущего примера с $L = 4$ и $V_g \approx 2 \cdot 10^4$ км/с из (34) найдём $T_M \sim 0,1$ с. Этот период существенно меньше периода осцилляций энергичных электронов и пакетов волн между точками отражения, что часто наблюдается в эксперименте. Амплитуду хоров можно оценить с помощью соотношений (34) и (36). Для $\omega/\omega_{BL} = 0,3$; $q/q_{thr} = 4$ (порог периодического режима генерации) и $\gamma_0 \sim 0,1$ из (34) имеем $\gamma_{lov} \sim 50$ с⁻¹ и

$B_{\sim} \sim 2$ нТл. Из соотношения (38) получаем $df/dt \sim 1$ кГц/с. Все эти значения находятся в удовлетворительном согласии с экспериментом.

Подводя итог вышесказанному, модель генерации хоров можно суммировать следующим образом. Энергичные электроны, ускоряясь в период магнитной активности во внешней магнитосфере, дрейфуют вследствие электрического и магнитного дрейфов в область генерации с благоприятными условиями для циклотронной неустойчивости. Такими областями являются плазмопауза, а также волокна с повышенной плотностью холодной плазмы. На предварительной стадии развития циклотронной неустойчивости, которая согласно теоретическим оценкам [23] длится порядка 10 с, происходит формирование ступеньки на функции распределения энергичных электронов. Эта стадия, возможно, проявляется в эксперименте в виде супермодуляции интенсивности хоров с периодом $T_{SM} \sim 10$ с [3]. После того, как ступенька сформировалась, начинается быстрая стадия генерации хоровых элементов с общей длительностью в локальной магнитной силовой трубке $\Delta t \sim T_B$, периода осцилляций электронов между магнитными пробками. Возможно, прерывистая генерация хоров, которая видна в спутниковых наблюдениях, обусловлена именно этой причиной. Следует отметить, что хоровые излучения, наблюдаемые на спутниках в различных временных секторах магнитосферы, обладают целым рядом отличительных черт [33], которые в данной работе не рассматриваются.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Многочисленность и воспроизводимость экспериментальных данных, а также многообразие и надёжность диагностических средств делают КНЧ-ОНЧ излучения важным тестом общих закономерностей резонансного взаимодействия волн и частиц в космической плазме, проливающим свет на происхождение различных типов излучений и форм их частотных спектров в магнитосфере Земли и других планет. В первую очередь это касается дискретных типов излучений. Здесь следует отметить два принципиальных и достаточно универсальных момента. Первый из них связан с появлением особенностей на плавных функциях распределения излучающих частиц по скоростям при их взаимодействии с квазишумовыми излучениями. Простейший вариант — это формирование ступеньки на границе между резонансными с волнами и нерезонансными частицами. Такое состояние плазмы сопровождается возбуждением квазимохроматических волновых мод, для которых важную роль играют когерентные (фазовые) эффекты. Как показано выше, именно эти эффекты могут вести к абсолютной неустойчивости в пространственно ограниченной плазме даже в отсутствие отражений волн от торцов ловушки и генерации дискретных КНЧ-ОНЧ излучений типа хоров в магнитосфере Земли.

Триггерные ОНЧ излучения демонстрируют ещё одну принципиальную особенность общего характера — принципиальную роль циклотронного резонанса второго порядка. Этот эффект проявляется в неоднородной среде и особенно важен в активных областях магнитосферы, где происходит ускорение заряженных частиц и появляются пучки электронов с относительно быстро меняющейся в пространстве и во времени скоростью. Примером таких пучков могут служить рассмотренные выше, в разделе 1, электроны, которые ускоряются волной накачки и на выходе из пакета возбуждают триггерные сигналы. Процессы ускорения с появлением таких пучков имеют место в авроральной магнитосфере. Как показывают расчёты (см. раздел 1), резонансное взаимодействие таких пучков с волнами происходит наиболее эффективно, если уже на линейной стадии развития неустойчивости частота волны меняется в пространстве и во времени специальным образом, чтобы свести к минимуму рассогласование циклотронного резонанса с волной. Естественно, такая же ситуация будет и в случае других (черенковского и т. п.) резонансов.

Рассмотренные проблемы ставят ряд новых задач перед спутниковым экспериментом. Необходимы измерения функции распределения электронов с высоким временным и пространственным разрешением. Характерными масштабами здесь являются обратная частота осцилляций электронов в потенци-

але волны (порядка 0,01 с) и ширина ступеньки функции распределения по продольным скоростям, при которой проявляются фазовые эффекты ($\Delta V/V \sim \gamma_{\text{step}}/(kV) < 0,01$). Было бы интересно со-поставить особенности различных типов дискретных излучений, например КНЧ-ОНЧ и авроральное километровое излучение в магнитосфере Земли, авроральное километровое излучение и радиоизлучение Юпитера и т. п.

Авторы выражают благодарность Российскому фонду фундаментальных исследований (грант № 99–02–16175), и INTAS (грант № 99–0502) за финансовую поддержку данной работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Helliwell R. A. *Whistlers and Related Ionospheric Phenomena*. Palo Alto: Stanford Univ. Press, 1965.
2. Omura Y., Nunn D., Matsumoto H., Rycroft M. J. // *J. Atmos. Terr. Phys.* 1991. V. 53, No 5. P. 351.
3. Sazhin S. S., Hayakawa M. // *Planet. Space Sci.* 1992. V. 40, No 5. P. 681.
4. Helliwell R. A. // *Mod. Radio Sci.* 1993. P. 189.
5. Helliwell R. A., Katsurakis J. P. // *J. Geophys. Res.* 1974. V. 79. P. 2511.
6. Manninen J., Turunen T., Nunn D., Trakhtengerts V. Yu., Titova E. E. *Atlas of VLF emissions observed at Porojärvi, Finland: Technical report*. Sodankylä Geophysical Observatory, 1996.
7. Беспалов П. А., Трахтенгерц В. Ю. Альфвеновские мазеры. Горький: ИПФ АН СССР, 1986.
8. Nunn D. // *J. Plasma Phys.* 1974. V. 11. P. 189.
9. Nunn D. // *Planet. Space Sci.* 1986. V. 34, No 5. P. 429.
10. Nunn D. // *Planet. Space Sci.* 1984. V. 32, No 3. P. 325.
11. Карапан В. И., Истомин Я. Н., Шкляр Д. Р. // *Plasma Phys.* 1974. V. 16. No 8. P. 685.
12. Истомин Я. Н., Карапан В. И., Шкляр Д. Р. // *Геомагнетизм и аэрономия*. 1976. Т. 16, № 1. С. 116.
13. Истомин Я. Н. // *Геомагнетизм и аэрономия*. 1977. Т. 17. С. 359.
14. Nunn D., Omura Y., Matsumoto H., Nagano I., Yagitani S. // *J. Geophys. Res.* 1997. V. 102, No 12. P. 27 083.
15. Nunn D., Smith A. J. // *J. Geophys. Res.* 1996. V. 101, No 3. P. 5261.
16. Trakhtengerts V. Yu., Hobara Y., Demekhov A. G., Hayakawa M. // *Phys. Plasmas*. 1999. V. 6, No 3. P. 692.
17. Hobara Y., Trakhtengerts V. Yu., Demekhov A. G., Hayakawa M. // *J. Atmos. Solar-Terr. Phys.* 2000. V. 62, No 7. P. 541.
18. Demekhov A. G., Trakhtengerts V. Yu., Hobara Y., Hayakawa M. // *Изв. вузов. Радиофизика*. 1999. Т. 42, № 8. С. 713.
19. Demekhov A. G., Trakhtengerts V. Yu., Hobara Y., Hayakawa M. // *Phys. Plasmas*. 2000. V. 7, No 12. P. 5153.
20. Trakhtengerts V. Yu., Hobara Y., Demekhov A. G., Hayakawa M. // *J. Geophys. Res.* 2000. (in press).
21. Helliwell R. A. // *J. Geophys. Res.* 1967. V. 72. P. 4773.
22. Helliwell R. A. // *Geophys. Res. Lett.* 2000. V. 27, No 10. P. 1455.
23. Trakhtengerts V. Yu. // *Ann. Geophys.* 1999. V. 17, No 1. P. 95.
24. Hattori K., Hayakawa M., Lagoutte D., Parrot M., Lefevre F. // *Planet. Space Sci.* 1991. V. 39. P. 1465.
25. Demekhov A. G., Trakhtengerts V. Yu. // *J. Geophys. Res.* 1994. V. 99, No 4. P. 5831.
26. Trakhtengerts V. Yu., Rycroft M. J., Demekhov A. G. // *J. Geophys. Res. A.* 1996. V. 101, No 6. P. 13 293.
27. Трахтенгерц В. Ю., Тагиров В. Р., Черноус С. А. // *Геомагнетизм и аэрономия*. 1986. Т. 26, № 1. С. 99.

28. Trakhtengerts V. Yu. // J. Geophys. Res. 1995. V. 100, No 9. P. 17205.
29. Гинзбург Н. С., Кузнецов С. П. // Релятивистская высокочастотная электроника. Горький: ИПФ АН СССР, 1981. С. 101.
30. Лайонс Л., Уильямс Д. Физика магнитосферы. М.: Мир, 1984.
31. Трахтенгерц В. Ю. // Основы физики плазмы. Т. 2. . Под ред. А. А. Галеева, Р. Судана. М.: Энергоатомиздат, 1984. С. 498.
32. Vomvoridis J. L., Crystal T. L., Denavit J. // J. Geophys. Res. A. 1982. V. 87, No 3. P. 1473.
33. Hayakawa M. // Proc. NIPR Symp. on Upper Atmosphere Physics, 1993. V. 6. P. 33.

Институт прикладной физики РАН,
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию
3 января 2001 г.

THEORY OF GENERATION OF DISCRETE ELF/VLF EMISSIONS IN THE EARTH'S MAGNETOSPHERE

A. G. Demekhov and V. Yu. Trakhtengerts

We review the current state of studies related to the origin of discrete ELF/VLF emissions in the Earth's magnetosphere and discuss recent theoretical results concerning this problem.

УДК 533.951

ЦИКЛОТРОННОЕ ВЗАЙМОДЕЙСТВИЕ СВИСТОВЫХ ВОЛН И ЧАСТИЦ В ПЛАЗМЕННОМ ВОЛНОВОДЕ

Д. Л. Пасманик, В. Ю. Трахтенгерц

Рассмотрена проблема циклотронного взаимодействия свистовых волн и энергичных электронов в плазменных волноводах, обусловленных неоднородным распределением холодной плазмы. Такие волноводы могут быть образованы в магнитосфере Земли, например, плазмопаузой или дактом с повышенной концентрацией фоновой плазмы.

В работе исследован случай цилиндрически симметричного дакта с повышенной плотностью холодной компоненты плазмы, находящегося в однородном магнитном поле, направленном вдоль оси дакта. Для данной конфигурации найдены собственные моды волновода. Получена система самосогласованных уравнений квазилинейной теории циклотронной неустойчивости с учётом структуры мод волновода, являющаяся обобщением известной самосогласованной системы уравнений квазилинейной теории магнитосферного циклотронного мазера.

ВВЕДЕНИЕ

Взаимодействие энергичных заряженных частиц с электромагнитными волнами в магнитосфере Земли играет большую роль в формировании структуры радиационных поясов и генерации низкочастотного излучения. Одной из достаточно интересных и актуальных на данный момент проблем является циклотронное взаимодействие волн и частиц в областях с повышенной концентрацией холодной плазмы, служащих ещё и волноводом для генерируемых волн. При этом в области, заполненной плотной плазмой, условие циклотронного резонанса выполнено для большего числа энергичных частиц, а в результате канализования происходит уменьшение утечки энергии волн из области генерации. Следовательно, в подобных областях может весьма эффективно развиваться циклотронная неустойчивость.

В роли таких канализующих структур могут выступать так называемые дакты плотности, представляющие собой заполненную плотной холодной плазмой магнитную силовую трубку, или волновод, образованный границей плазмосферы, плазмопаузой (моды шепчущей галереи).

Следует отметить, что проблема взаимодействия волн и частиц в таких структурах, а также задача о распространении низкочастотных электромагнитных волн в плазменных волноводах были исследованы в ряде работ.

Так, в работе [1] была предложена модель проточного циклотронного мазера для объяснения механизма формирования пульсирующих полярных сияний. Основанная на самосогласованной квазилинейной теории циклотронной неустойчивости, данная модель позволяет объяснить некоторые экспериментальные данные, а именно наблюдаемую динамику спектра генерируемого излучения и потока высывающихся в ионосферу энергичных частиц. Однако при этом авторами была использована весьма упрощённая модель распространения волн в магнитосферном дакте, фактически не учитывающая реальное пространственное распределение интенсивности волн поперёк волновода.

С другой стороны, рядом авторов [2] было проведено весьма детальное исследование проблемы распространения и генерации волн низкочастотного диапазона в плазменно-волноводных структурах, однако ими не был рассмотрен случай, когда в качестве источника энергии волн выступает циклотронное взаимодействие.

Д. Л. Пасманик, В. Ю. Трахтенгерц

Целью данной работы является построение более точной модели циклотронного взаимодействия свистовых волн и энергичных электронов в магнитосферных плазменных волноводах (дактах), являющейся, в частности, обобщением модели, предложенной в работе [1].

Результаты анализа структуры собственных мод цилиндрического плазменного волновода, однородного вдоль своей оси, изложены в первом разделе работы. Во втором разделе представлен вывод уравнений квазилинейной теории циклотронного взаимодействия в таком волноводе. В третьем разделе полученные уравнения обобщены на случай плавно неоднородного волновода. В заключении обсуждены основные результаты.

1. СОБСТВЕННЫЕ МОДЫ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ПЛАЗМЕННОГО ВОЛНОВОДА

В качестве модели магнитосферного дакта рассмотрим цилиндрически симметричный столб, заполненный холодной плазмой с некоторым неоднородным распределением концентрации по радиальной координате и помещённый во внешнее однородное магнитное поле B_0 , направленное вдоль оси дакта.

В системе координат с осью z , направленной вдоль магнитного поля, для электромагнитных волн с временной зависимостью вида $e^{i\omega t}$ тензор диэлектрической проницаемости плазмы в области частот $\omega_{lh} \ll \omega < \omega_B \ll \omega_p$ записывается как

$$\hat{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon & ig & 0 \\ -ig & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где $\epsilon = 1 - \omega_p^2 / (\omega^2 - \omega_B^2)$, $g = -\omega_p^2 \omega_B / [\omega (\omega^2 - \omega_B^2)]$, $\eta = 1 - \omega_p^2 / \omega^2$, ω_p и ω_B — электронные плазменная и циклотронная частоты соответственно, ω_{lh} — нижнегибридная частота.

Будем искать собственные моды данной системы в виде волн, распространяющихся вдоль дакта и имеющих некоторую поперечную структуру:

$$\mathbf{E} = \Phi(r) e^{i\omega t - ik_0 p z}, \quad \mathbf{H} = i\Psi(r) e^{i\omega t - ik_0 p z}, \quad (2)$$

где $k_0 p = k_{||}$ — компонента волнового вектора вдоль оси дакта, $k_0 = \omega/c$, c — скорость света. Отметим, что в данной работе рассмотрены только аксиально-симметричные моды, однако полученные результаты могут быть обобщены и на случай мод с ненулевым азимутальным индексом.

Подставляя данные выражения в уравнения Максвелла, получаем следующие уравнения для компонент электрического и магнитного полей волны в цилиндрической системе координат (r, φ, z) :

$$\begin{aligned} \Psi_r &= ip\Phi_\varphi, \quad \Psi_\varphi = \frac{1}{k_0(\epsilon - p^2)} \left(k_0 p g \Phi_\varphi + \epsilon \frac{d\Phi_z}{dr} \right), \quad \Psi_z = \frac{1}{k_0 r} \frac{d(r\Phi_\varphi)}{dr}, \\ \Phi_r &= \frac{i}{p^2 - \epsilon} \left(g\Phi_\varphi + \frac{p}{k_0} \frac{d\Phi_z}{dr} \right), \\ \Delta_\perp \Phi_\varphi - \frac{\Phi_\varphi}{r^2} + k_0^2 \left(\frac{g^2}{p^2 - \epsilon} - p^2 + \epsilon \right) \Phi_\varphi &= \frac{k_0 g p}{p^2 - \epsilon} \frac{d\Phi_z}{dr}, \\ \Delta_\perp \Phi_z + \frac{p^2}{p^2 - \epsilon} \frac{\epsilon' d\Phi_z}{\epsilon dr} - k_0^2 \frac{\eta}{\epsilon} (p^2 - \epsilon) \Phi_z &= \frac{k_0 p}{\epsilon} (p^2 - \epsilon) \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \frac{rg\Phi_\varphi}{p^2 - \epsilon}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\epsilon' \equiv d\epsilon/dr$.

Из анализа данной системы следует [2], что её точное аналитическое решение в явном виде может быть найдено только в случае однородного (или кусочно-однородного) распределения концентрации

холодной плазмы. Таким образом, можно найти аналитические выражения для собственных мод дакта с кусочно-однородным распределением плазмы (рис. 1). Однако наличие у дакта резкой границы приводит к тому, что любая собственная мода такой системы состоит из двух волн — свистовой и мелкомасштабной электростатической. При этом свистовая волна распространяется внутри волновода, образованного дактом, и экспоненциально затухает вне его, а электростатическая волна распространяется во всём пространстве и приводит к утечке энергии из волновода.

В случае однородного распределения плазмы свистовая и электростатическая волны являются независимыми решениями. Однако в рассматриваемом случае мы имеем резкую границу, на которой происходит трансформация свистовой волны в электростатическую, и данные волны уже не будут независимыми. Таким образом, даже при наличии в системе источника, эффективно возбуждающего только свистовую волну, будет происходить перекачка энергии в электростатическую компоненту и, следовательно, утечка энергии из дакта. Анализ добротности мод такой системы показал, что потери могут быть весьма существенными.

Эффективность указанной трансформации волн определяется соотношением характерного масштаба неоднородности и длины электростатической волны, и при достаточно плавных неоднородностях такая трансформация практически не происходит [3].

В реальных магнитосферных условиях резких границ нет. Следовательно, рассмотренная выше модель дакта для нас неприемлема, и необходимо рассматривать гладкий профиль концентрации холодной плазмы. Так как точное аналитическое решение в явном виде для таких распределений плазмы отсутствует, в настоящей работе было использовано приближённое решение системы (3).

Пусть концентрация холодной плазмы имеет достаточно плавный профиль ($\epsilon'/\epsilon \ll k_0 q$, где $k_0 q = k_\perp$ — поперечная к магнитному полю компонента волнового вектора); будем также рассматривать волны из низкочастотной части спектра ($\omega \ll \omega_B \ll \omega_p$), распространяющиеся под не слишком большим углом к магнитному полю ($q \lesssim p$).

Учтём, что в данном диапазоне частот имеют место следующие соотношения для компонент волнового вектора: $p^2 \sim g$, $q_w \lesssim p$ и $q_{el} \gg p$, (индексы w и el соответствуют свистовой и электростатической модам), т. е. электростатическая волна не удовлетворяет условиям выбранного приближения. Также используем, что в области низких частот $\epsilon \ll g \ll \eta$ и, следовательно, $p^2 \gg \epsilon$.

Используя приведённые выше соотношения, можно оценить члены в уравнениях (3) (см. Приложение 1). Пренебрегая малыми слагаемыми, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \Psi_r = ip\Phi_\varphi, \quad \Psi_\varphi = \frac{g\Phi_\varphi}{p}, \quad \Psi_z = \frac{1}{k_0 r} \frac{d(r\Phi_\varphi)}{dr}, \quad \Phi_r = \frac{ig\Phi_\varphi}{p^2}, \quad \Phi_z = -\frac{1}{k_0 p \eta r} \frac{d(rg\Phi_\varphi)}{dr}, \\ \Delta_\perp \Phi_\varphi - \frac{\Phi_\varphi}{r^2} + k_0^2 \left(\frac{g^2}{p^2} - p^2 \right) \Phi_\varphi = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Аналитическое решение этой системы может быть найдено для следующего профиля концентрации холодной плазмы (см. рис. 2):

$$N_c^2 = \begin{cases} N_d^2, & r \leq a; \\ \Delta(N^2) \frac{a^2}{r^2} + N_\infty^2, & r > a, \end{cases} \quad (5)$$

где N_d и N_∞ — концентрация плазмы внутри и вне дакта, $\Delta(N^2) = N_d^2 - N_\infty^2$, a — характерный радиус дакта. Решение уравнения (4) для Φ_φ для такого распределения холодной плазмы представляет собой набор собственных мод

$$\Phi_{k\varphi}(r) = \begin{cases} B_k J_1(k_0 q_k r), & r \leq a; \\ C_k K_{\nu_k}(k_0 s_k r), & r > a, \end{cases} \quad (6)$$

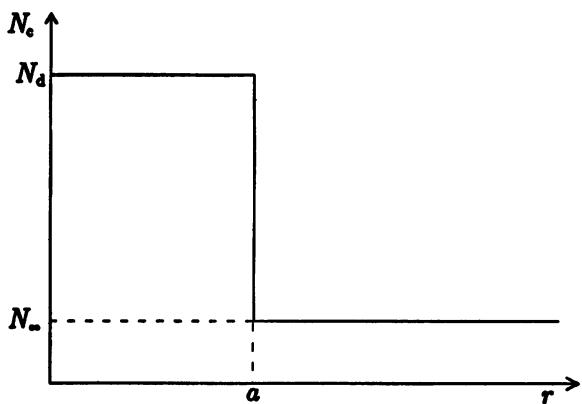


Рис. 1. Дакт с кусочно-однородным распределением фоновой плазмы

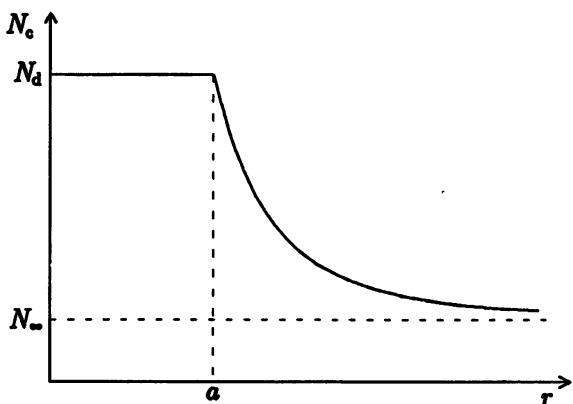


Рис. 2. Дакт с плавной границей

где J и K — функции Бесселя и Макдональда, $q_k^2 = g_d^2/p_k^2 - p_k^2$, $s_k^2 = p_k^2 - g_\infty^2/p_k^2$, $\nu_k^2 = 1 - k_0^2 a^2 \Delta(g^2)/p_k^2$, $g_\alpha = g(N_\alpha)$, $\Delta(g^2) = g^2(N_d) - g^2(N_\infty)$, k — индекс моды. Из граничных условий при $r = a$ получаем следующие соотношения для p_k , q_k , s_k , ν_k , C_k/B_k :

$$\frac{J_1(k_0 q_k a)}{(r J_1(k_0 q_k r))'_{r=a}} = \frac{K_{\nu_k}(k_0 s_k a)}{(r K_{\nu_k}(k_0 s_k r))'_{r=a}}, \quad \frac{C_k}{B_k} = \frac{J_1(k_0 q_k a)}{K_{\nu_k}(k_0 s_k a)}. \quad (7)$$

Отметим, что собственные моды волновода удовлетворяют следующим условиям ортогональности:

$$\int_0^\infty \frac{cr dr}{4\pi} ([\Phi_k, \Psi_{k'}^*]_z + [\Phi_{k'}, \Psi_k^*]_z) = \delta_{k,k'}, \quad (8)$$

$$\int_0^\infty \frac{r dr}{4\pi} \left(\left(\frac{\partial(\omega \hat{\epsilon})}{\partial \omega} \Phi_k, \Phi_{k'}^* \right) + (\Psi_k, \Psi_{k'}^*) \right) = W_k \delta_{k,k'}. \quad (9)$$

Здесь $\delta_{k,k'}$ — символ Кронекера, звёздочкой обозначено комплексное сопряжение. В (8), (9) использовано нормировочное условие

$$\int_0^\infty r dr ([\Phi_k, \Psi_{k'}^*]_z + [\Phi_{k'}, \Psi_k^*]_z) = \frac{4\pi}{c}. \quad (10)$$

2. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЛН И ЧАСТИЦ

2.1. Уравнение переноса энергии волн

Рассмотрим теперь задачу о возбуждении собственных мод данного волновода. Так как в магнитосферных условиях концентрация горячей компоненты плазмы много меньше концентрации холодной компоненты, можно считать, что распространение волн определяется только свойствами холодной плазмы, а циклотронное взаимодействие с энергичными частицами является источником энергии волн.

В таком случае можно искать решение методом медленно меняющихся амплитуд. Представим поле волны в виде набора волновых пакетов:

$$\mathbf{E} = \sum_{n,k} A_{nk}(z, t) \mathbf{E}_{nk} = \sum_{n,k} A_{nk}(z, t) \Phi_{nk}(r) e^{i\omega_n t - ik_0 p_{nk} z}, \quad (11)$$

где ω_n — заданный набор (несущих) частот, значения продольных волновых векторов p_{nk} и поперечные структуры пакетов $\Phi_{nk}(r)$ есть собственные моды волновода на частоте ω_n , найденные в предыдущем разделе; A_{nk} — медленная функция своих аргументов:

$$\left| \frac{1}{A} \frac{\partial A_{nk}}{\partial t} \right| \ll \omega^{-1}, \quad \left| \frac{1}{A} \frac{\partial A_{nk}}{\partial z} \right| \ll (k_0 p_{nk})^{-1}.$$

Подставляя это выражение в уравнения Максвелла с источником в виде тока резонансных частиц \mathbf{J}_R , получим уравнение (П2.15) (см. Приложение 2), в котором $\mathbf{E}_{nk}(z, t, r) \equiv A_{nk}(z, t) \Phi_{nk}(r)$.

Следуя стандартному выводу уравнений квазилинейной теории [4], будем предполагать, что фазы ϑ_n ($A_{nk} = |A_{nk}|e^{i\vartheta_n}$) волн с различными частотами независимы и случайны. Из этого предположения следует

$$\langle A_{nk} \rangle = 0, \quad \langle A_{nk} A_{n'k'}^* \rangle = I_{nkk'} \delta_{n,n'},$$

где угловые скобки означают усреднение по фазам ϑ_n ; $I_{nkk'}$ в соответствии с выбранной нормировкой (10) имеет смысл спектральной плотности потока энергии.

Тогда, проводя усреднение по фазам в уравнении (П2.15) и интегрируя по поперечному сечению дакта с учётом условий ортогональности (8), (9), получаем следующее уравнение:

$$W_{nk} \frac{\partial I_{nk}}{\partial t} + \frac{\partial I_{nk}}{\partial z} = - \int r dr d\varphi \langle (\mathbf{J}_R, A_{nk}^* \mathbf{E}_{nk}^*) \rangle, \quad (12)$$

где $I_{nk} \equiv I_{nkk}$, а величина $I_{nk} W_{nk}$ имеет смысл плотности энергии в моде:

$$W_{nk} = \int \frac{r dr d\varphi}{4\pi} \left(\left(\frac{\partial(\omega\hat{\epsilon})}{\partial\omega} \Phi_{nk}, \Phi_{nk}^* \right) + (\Psi_{nk}, \Psi_{nk}^*) \right). \quad (13)$$

2.2. Движение электрона в поле собственной моды дакта

Рассмотрим движение электрона в поле собственной моды (2) дакта. Уравнение движения электрона имеет вид

$$\dot{\mathbf{V}} = -\frac{e}{m} \mathbf{E}_{nk} + [\omega_B, \mathbf{V}] + \frac{e}{mc} [\mathbf{H}_{nk}, \mathbf{V}], \quad (14)$$

где \mathbf{E}_{nk} и \mathbf{H}_{nk} определяются выражениями (2), (4) и (6), e и m — элементарный заряд и масса электрона. Распишем это уравнение:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -\frac{e}{m} \operatorname{Re} \left[\left(E_{\perp nk} + \frac{iV_z}{c} H_{\perp nk} \right) e^{-i\phi} + \frac{iu}{c} H_{znk} \right], \\ \dot{\phi} &= \omega_B - \frac{e}{mu} \operatorname{Im} \left[\left(E_{\perp nk} + \frac{iV_z}{c} H_{\perp nk} \right) e^{-i\phi} \right], \\ \dot{V}_z &= -\frac{e}{m} \operatorname{Re} \left[E_{znk} - \frac{iu}{c} H_{\perp nk} e^{-i\phi} \right], \end{aligned} \quad (15)$$

где $ue^{i\phi} = V_r + iV_\varphi$, $E_{\perp nk} = E_{rnk} + iE_{\varphi nk}$, $H_{\perp nk} = H_{rnk} + iH_{\varphi nk}$.

В линейном приближении данная система может быть записана в следующем виде:

$$\begin{aligned}\dot{u} &= -\frac{e}{m} A_{nk} \operatorname{Re} \left\{ \left[\mathcal{F}_{\perp nk}(r_0) + \mathcal{F}'_{\perp nk}(r_0) \rho_B \cos(\omega_B t + \phi_0) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{u}{c} [\Phi_{znk}(r_0) + \Phi'_{znk}(r_0) \rho_B \cos(\omega_B t + \phi_0)] e^{i\omega_B t + i\phi_0} \right] e^{i\theta_{nk}} \right\}, \\ \dot{V}_z &= -\frac{e}{m} A_{nk} \operatorname{Re} \left\{ \left[[\Phi_{znk}(r_0) + \Phi'_{znk}(r_0) \rho_B \cos(\omega_B t + \phi_0)] e^{i\omega_B t + i\phi_0} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{u}{c} [\Psi_{\perp nk}(r_0) + \Psi'_{\perp nk}(r_0) \rho_B \cos(\omega_B t + \phi_0)] \right] e^{i\theta_{nk}} \right\}, \\ \dot{\phi} &= \omega_B - \frac{eA_{nk}}{mu} \operatorname{Im} \left\{ [\mathcal{F}_{\perp nk}(r_0) + \mathcal{F}'_{\perp nk}(r_0) \rho_B \cos(\omega_B t + \phi_0)] e^{i\theta_{nk}} \right\},\end{aligned}\quad (16)$$

где ρ_B — радиус гировращения электрона, $\mathcal{F}_{\perp nk} = \Phi_{\perp nk} - \Psi_{\perp nk} V_z/c$, $\theta_{nk} = \omega_n t - k_0 p_{nk} (z_0 + V_z t) - \omega_B t - \phi_0$; использованы также следующие выражения для невозмущённой траектории электрона:

$$z = z_0 + V_z t, \quad r = [r_0^2 + \rho_B^2 + 2r_0 \rho_B \cos(\omega_B t + \phi_0)]^{1/2}.$$

Здесь z_0 и ϕ_0 — координата частицы и фаза гировращения при $t = 0$, r_0 — кордината центра ларморовской окружности электрона. Полагая $\rho_B \ll r_0$, можно записать $r \approx r_0 + \rho_B \cos(\omega_B t + \phi_0)$, тогда $f(r) \approx f(r_0) + f'(r_0) \rho_B \cos(\omega_B t + \phi_0)$. Следуя стандартному способу решения данной системы в линейном приближении (см., например, [5]) и используя тот факт, что $\Phi_z \ll \Psi_\perp$ (из уравнений (4) $\Phi_z \sim q_k g \Psi_\perp / (p_k^2 \eta)$), проинтегрируем уравнения (16) и пренебрежём в полученных выражениях малыми членами порядка $\rho_B f'/f \sim \rho_B k_0 q$

$$\begin{aligned}\Delta u &\equiv u - u_0 = -\frac{e}{m} A \operatorname{Re} \left(\frac{\mathcal{F}_\perp(r)}{\Delta_{-1}} e^{i\omega t - ik_0 p z - i\phi} \right), \\ \Delta V_z &\equiv V_z - V_{z0} = -\frac{eu}{mc} A \operatorname{Re} \left(\frac{\Psi_\perp(r)}{\Delta_{-1}} e^{i\omega t - ik_0 p z - i\phi} \right), \\ \phi &= \omega_B t + \phi_0,\end{aligned}\quad (17)$$

где $\Delta_{-1} = \omega - \omega_B - k_0 p V_z$, u_0 и V_{z0} — начальные значения соответствующих переменных.

2.3. Ток резонансных частиц

Используя полученные выражения, найдём ток резонансных частиц J_R , который определяется как

$$J_R = -e \int \mathbf{V} \Delta F d^3 V, \quad (18)$$

где ΔF — возмущение функции распределения энергичных электронов $F(r, V, t)$ под действием волн:

$$\Delta F = \sum_{n,k} \Delta F_{nk} = \sum_{n,k} \left(\frac{\partial F}{\partial u} \Delta u_{nk} + \frac{\partial F}{\partial V_z} \Delta V_{znk} \right). \quad (19)$$

Рассмотрим величину $\operatorname{Re}(J_R, A_{nk}^* E_{nk}^*)$, имеющую смысл работы тока резонансных частиц над данной модой. С учётом рассматриваемого приближения

$$(J_R, A_{nk}^* E_{nk}^*) \approx -e \int \Delta F A_{nk}^* E_{nk\perp}^* e^{i\phi} u^2 du dV_z d\phi. \quad (20)$$

Подставим сюда выражения для ΔF и $E_{nk\perp}$ и используем формулу Племеля

$$\frac{1}{\Delta_{-1_{nk}}} = P\left(\frac{1}{\Delta_{-1_{nk}}}\right) + i\pi\delta(\Delta_{-1_{nk}}), \quad (21)$$

где $\Delta_{-1_{nk}} = \omega_n - \omega_B - k_0 p_{nk} V_z$, P означает, что при интегрировании следует брать главное значение, $\delta(x)$ — дельта-функция. После усреднения получаем следующее выражение:

$$\langle (J_R, A_{nk}^* E_{nk}^*) \rangle = -\frac{\pi^2 e^2}{m} I_{nk} \int u^2 du dV_z \delta(\Delta_{-1_{nk}}) \left(\frac{\partial F}{\partial u} \mathcal{F}_{\perp nk} \Phi_{\perp nk} + \frac{\partial F}{\partial V_z} \frac{u}{c} \Psi_{\perp nk} \Phi_{\perp nk} \right). \quad (22)$$

2.4. Уравнение для функции распределения электронов

Запишем кинетическое уравнение для функции распределения энергичных электронов:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \left(\mathbf{v}, \frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}} \right) + \left(\dot{\mathbf{v}}, \frac{\partial F}{\partial \mathbf{V}} \right) = 0. \quad (23)$$

Представим функцию распределения как сумму медленно меняющейся компоненты и быстро осциллирующей составляющей, связанной с возмущением исходной функции распределения волнами:

$$F = F_0 + f_1, \quad f_1 = \sum_{n,k} \Delta F_{nk}. \quad (24)$$

Подставляя данное выражение в кинетическое уравнение и усредняя по случайным фазам волн и быстрым осцилляциям, получим

$$\frac{\partial F_0}{\partial t} + V_z \frac{\partial F_0}{\partial z} + \left(\mathbf{v}_{D\perp}, \frac{\partial F_0}{\partial \mathbf{r}_\perp} \right) = - \left\langle \left(\dot{\mathbf{v}}, \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{V}} \right) \right\rangle, \quad (25)$$

где $\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_{D\perp} + V_z z_0$ — медленно меняющаяся компонента скорости электронов, т. е. скорость ведущего центра в дрейфовой теории движения заряженных частиц, \mathbf{r}_\perp — координата поперёк магнитных силовых линий.

Используя (19) и выражения (16), (17), получаем

$$\begin{aligned} \left\langle \left(\dot{\mathbf{v}}, \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{V}} \right) \right\rangle &= \left\langle \sum_{n,k} \sum_{n',k'} \left(\dot{u}_{nk} \frac{\partial}{\partial u} + \dot{V}_{znk} \frac{\partial}{\partial V_z} + \dot{\phi}_{nk} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \left(\Delta u_{n'k'} \frac{\partial}{\partial u} + \Delta V_{zn'k'} \frac{\partial}{\partial V_z} \right) F_0 \right\rangle = \\ &= \frac{\pi e^2}{2m^2} \sum_{n,k} I_{nk} \left(\mathcal{F}_{\perp nk} \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{u} \right) + \frac{u}{c} \Psi_{\perp nk} \frac{\partial}{\partial V_z} \right) \delta(\Delta_{-1_{nk}}) \left(\mathcal{F}_{\perp nk} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{u}{c} \Psi_{\perp nk} \frac{\partial}{\partial V_z} \right) F_0. \end{aligned} \quad (26)$$

Суммируя полученные в данном разделе результаты, можно записать следующую систему самосогласованных уравнений для медленно меняющейся компоненты функции распределения энергичных электронов F и спектральной плотности потока энергии I_{nk} (индекс 0 в дальнейшем опускаем):

$$\frac{\partial F}{\partial t} + V_z \frac{\partial F}{\partial z} + \left(\mathbf{v}_{D\perp}, \frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}_\perp} \right) = \hat{D}F, \quad (27)$$

$$\frac{\partial I_{nk}}{\partial t} + V_{Gnk} \frac{\partial I_{nk}}{\partial z} = \gamma_{nk} I_{nk}, \quad (28)$$

где

$$\hat{D} = \frac{\pi e^2}{2m^2} \sum_{n,k} I_{nk} \hat{\Lambda}_{nk} u^2 \delta(\omega_n - \omega_B - k_0 p_{nk} V_z) \hat{\Lambda}_{nk}, \quad (29)$$

$$\gamma_{nk} = \frac{\pi^2 e^2}{m W_{nk}} \int r dr \int u^3 du dV_z \delta(\omega_n - \omega_B - k_0 p_{nk} V_z) \hat{\Lambda}_{nk} \Phi_{\perp nk} F, \quad (30)$$

$$\hat{\Lambda}_{nk} = \frac{\mathcal{F}_{\perp nk}}{u} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\Psi_{\perp nk}}{c} \frac{\partial}{\partial V_z}, \quad (31)$$

$V_{Gnk} = 1/W_{nk}$ — групповая скорость соответствующего волнового пакета.

Данная система уравнений, по сути, является обобщением системы квазилинейных уравнений при учёте пространственной структуры возбуждаемых электромагнитных волн.

3. ДАКТ В НЕОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Обобщим полученную систему уравнений (27)–(31) для описания процесса циклотронного взаимодействия волн и частиц в магнитосферных дактах.

Для этого следует учесть, что параметры, характеризующие дакт (внешнее магнитное поле B_0 , концентрация холодной компоненты плазмы N_c , радиус дакта a) являются функциями координаты z . Однако данные зависимости являются весьма плавными, с масштабом, много большим характерных длин волн, распространяющихся в дакте. Следовательно, задача о распространении волн в таком дакте может быть решена методом поперечных сечений [6]. Тогда собственные моды дакта примут следующий вид:

$$E_{nk} = \Phi_{nk}(r, z) \exp(i\omega_n t - ik_0 \int p_{nk} dz), \quad H_{nk} = i\Psi_{nk}(r, z) \exp(i\omega_n t - ik_0 \int p_{nk} dz), \quad (32)$$

где $\Phi_{nk}(r, z)$, $\Psi_{nk}(r, z)$ и $p_{nk}(z)$ — получено выше решение (6), (7) для параметров дакта в данном сечении z , при этом с учётом введённой нормировки (10) для мод дакта величина I_{nk} является адиабатическим инвариантом при отсутствии источников. Отметим также, что в соответствии с методом поперечных сечений в окрестности любого сечения $z = z_0$ собственные моды могут быть записаны в виде (2), где под p понимается величина $p_{nk}(z_0)$. Следовательно, результаты, полученные в предыдущем разделе, остаются верными и для собственных мод вида (32) при выполнении условия плавности изменения параметров дакта.

В системе уравнений (27)–(31) удобно перейти к новым переменным $\mu = \sin^2 \theta_L \equiv (B_L/B) \sin^2 \theta$, где θ — питч-угол, индекс L соответствует экваториальному сечению, и $v = \sqrt{u^2 + V_z^2}$, являющимся адиабатическими инвариантами движения частиц при отсутствии взаимодействия с волнами. В новых переменных коэффициент диффузии \hat{D} и инкремент γ_{nk} примут следующий вид:

$$\hat{D} = \frac{\pi e^2}{2m^2} \sum_{n,k} I_{nk} \Phi_{\perp nk}^2 \frac{\omega_B}{\omega_{BL}} \hat{\Lambda}_{nk} v^2 \mu \delta(\omega_n - \omega_B - k_0 p_{nk} V_z) \hat{\Lambda}_{nk}, \quad (33)$$

$$\gamma_{nk} = \frac{\pi^2 e^2}{m W_{nk}} \int_0^\infty r dr \int_0^\infty v^4 dv \int_0^{B_L/B} \frac{\mu d\mu}{\sqrt{1 - \mu \omega_B / \omega_{BL}}} \frac{\omega_B^2}{\omega_{BL}^2} \delta(\omega_n - \omega_B - k_0 p_{nk} V_z) \Phi_{\perp nk}^2 \hat{\Lambda}_{nk} F, \quad (34)$$

$$\hat{\Lambda}_{nk} = \hat{\Lambda} = \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial v} + \frac{2}{v^2} \left(\frac{\omega_{BL}}{\omega_B} - \mu \right) \frac{\partial}{\partial \mu}. \quad (35)$$

Следя [7], усредним уравнения (27) и (28) по периодам баунс-осцилляций электронов между магнитными зеркалами и осцилляций волновых пакетов между сопряжёнными ионосферами соответственно. Данная процедура, фактически, сводится к действию оператора $T_b^{-1} \oint dz/V_z$ на уравнение

для функции распределения (27) и оператора $T_{Gnk}^{-1} \oint dz/V_{Gnk}$ на уравнение (28) для амплитуды k -й гармоники. Здесь $T_b = \oint dz/V_z$ — период баунс-осцилляций, $T_{Gnk} = \oint dz/V_{Gnk}$ и V_{Gnk} — период осцилляций и групповая скорость волнового пакета соответственно.

В результате получим уравнения, аналогичные (27) и (28), в которых, однако, под F и I_k следует понимать усреднённые значения этих величин:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \left(\mathbf{V}_{D_\perp}, \frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}_\perp} \right) = \hat{DF}, \quad (36)$$

$$\frac{\partial I_{nk}}{\partial t} = \gamma_{nk} I_{nk}, \quad (37)$$

где

$$\hat{D} = \frac{\pi e^2}{2m^2 T_b} \sum_{n,k} I_{nk} \Phi_{\perp nk}^2 \hat{\Lambda} v^2 \mu \frac{l_{nk}^{\text{eff}} k_0 p_{nk}^{\text{res}}}{\omega_B^{\text{res}} \omega_{BL}} \hat{\Lambda}, \quad (38)$$

$$\gamma_{nk} = \frac{\pi^2 e^2}{m W_{nk} T_{Gnk}} \int_0^\infty r dr \int_{\frac{\omega_{BL}-\omega_n}{k_0 p_{nkL}}}^\infty v^5 dv \int_0^{1-\left(\frac{\omega_{BL}-\omega_n}{k_0 p_{nkL} v}\right)^2} \mu d\mu \frac{l_{nk}^{\text{eff}} k_0 p_{nk}^{\text{res}}}{V_{Gnk} \omega_{BL}^2} \Phi_{\perp nk}^2 \hat{\Lambda} F, \quad (39)$$

$$l_{nk}^{\text{eff}} = \left| (\omega_B - \omega_n) \omega_B^{-2} \frac{\partial}{\partial z} (k_0 p_{nk} V_z + \omega_B) \right|_{z=z_{\text{res}}}^{-1} \quad (40)$$

— эффективная длина взаимодействия; индекс res означает, что соответствующие величины берутся в точке, где выполнено условие циклотронного резонанса

$$\omega_n - \omega_B(z_{\text{res}}) = k_0 p_{nk}(z_{\text{res}}) v \sqrt{1 - \mu \frac{\omega_B(z_{\text{res}})}{\omega_{BL}}}.$$

В случае плотной холодной плазмы, когда $\beta_* = \omega_{pL}^2 v_0^2 / (\omega_{BL}^2 c^2) \gg 1$, где $mv_0^2/2$ — характерная энергия распределения энергичных частиц, генерация волн происходит в основном в области низких частот $\omega \sim \omega_{BL}/\beta_* \ll \omega_{BL}$. Используя данное соотношение, можно упростить полученные уравнения:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \left(\mathbf{V}_{D_\perp}, \frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}_\perp} \right) = \frac{1}{T_b} \frac{\partial}{\partial \mu} \left(D \frac{\partial F}{\partial \mu} \right) - \delta F + J, \quad (41)$$

$$\frac{\partial I_{nk}}{\partial t} = (\gamma_{nk} - \nu_{nk}) I_{nk}, \quad (42)$$

где

$$D = \frac{\pi e^2}{2m^2 v^2} \sum_{n,k} I_{nk} \Phi_{\perp nk}^2 \frac{l_{nk}^{\text{eff}} k_0 p_{nk}^{\text{res}} \omega_{BL}}{\omega_B^{\text{res}}}, \quad (43)$$

$$\gamma_{nk} = \frac{\pi^2 e^2}{m c T_{Gnk}} \frac{p_{nk}^{\text{res}}}{W_{nk}} \int_0^\infty r dr \int_{\frac{\omega_{BL}}{k_0 p_{nkL}}}^\infty v^3 dv \int_0^{1-\left(\frac{\omega_{BL}}{k_0 p_{nkL} v}\right)^2} \mu d\mu \frac{l_{nk}^{\text{eff}}}{V_{Gnk} \omega_{BL}} \Phi_{\perp nk}^2 \frac{\partial F}{\partial \mu}. \quad (44)$$

В уравнение для функции распределения добавлены источник энергичных электронов J и слагаемое δF , описывающее уход частиц в конус потерь, где

$$\delta = \begin{cases} 0, & \mu \geq \mu_c; \\ \delta_0 = v/l, & 0 \leq \mu \leq \mu_c. \end{cases} \quad (45)$$

Здесь $\mu_c = L^{-3} (4 - 3L^{-1})^{-1/2}$ — граница конуса потерь в приближении дипольного магнитного поля, l — длина силовой трубы между сопряжёнными ионосферами. В уравнении для амплитуд волн учтены потери энергии волн (член $\nu_{nk} I_{nk}$) вследствие неидеального отражения от ионосферы.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате проведённого анализа получена система уравнений (36)–(39), которая обобщает известную систему уравнений квазилинейной теории магнитосферного циклотронного мазера на случай циклотронного взаимодействия электронов со свистовыми волнами в цилиндрических плазменных волноводах.

Данные результаты, в частности, могут быть использованы для обобщения модели проточного циклотронного мазера и более точного описания формирования пульсирующих полярных сияний. Такое обобщение должно помочь при объяснении динамики пространственной структуры высыпаний энергичных частиц и оптических образов полярных сияний.

Исходя из системы уравнений (41)–(44), качественно можно ожидать следующую картину развития циклотронной неустойчивости в дакте. Так как эффективность возбуждения различных мод (30) зависит от пространственного распределения энергичных частиц в дакте, то в каждый момент времени будет эффективно возбуждаться одна мода. Однако в результате циклотронного взаимодействия происходит перераспределение энергичных частиц и их высыпание из магнитной ловушки. При этом высыпание происходит более эффективно в тех областях дакта, где поле волны максимально. Таким образом, при не слишком сильном источнике частиц формируется провал в распределении энергичных частиц поперёк дакта, захваченных в геомагнитную ловушку, а пространственная структура потоков высыпающихся электронов качественно повторяет распределение амплитуды возбуждённой волноводной моды поперёк волновода. Это, в свою очередь, приводит к уменьшению эффективности возбуждения данной моды (см. (30)), и далее более эффективно будет возбуждаться другая мода. Следовательно, можно ожидать, что в системе будет происходить конкуренция мод, сопровождаемая динамической сменой спектра волн, пространственного распределения энергичных частиц в дакте и пространственного распределения высыпаний.

В качестве дальнейшего развития рассмотренной модели циклотронного взаимодействия волн и частиц в плазменном волноводе следует провести обобщение на случай возбуждения и распространения в нём мод с отличным от нуля азимутальным индексом. Также необходимо исследовать взаимодействие собственных мод и частиц на различных циклотронных гармониках ($\omega_n - k_z V_z - \omega_B = 0$, где $m = 0, \pm 1, \dots$). Ещё одним важным вопросом является пространственная структура и возбуждение волноводных мод вблизи верхней частотной границы отсечки, соответствующей частоте $\omega = \omega_B/2$ [8].

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 99–02–16175), а также научной программы НАТО (грант ESR.CLG 975144).

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Оценим члены в последних двух уравнениях (3) при выполнении условий

$$p^2 \sim g, \quad q \lesssim p, \quad \epsilon \ll g \ll \eta, \quad p^2 \gg \epsilon, \quad \epsilon'/\epsilon \ll k_0 q$$

и используя оценку $d/dr \sim k_0 q$.

В последнем уравнении (3)

$$\Delta_{\perp} \Phi_z \sim k_0^2 q^2 \Phi_z, \quad \frac{p^2}{p^2 - \epsilon} \frac{\epsilon'}{\epsilon} \frac{d\Phi_z}{dr} \approx \frac{\epsilon'}{\epsilon} \frac{d\Phi_z}{dr} \sim k_0 q \frac{\epsilon'}{\epsilon} \Phi_z \ll k_0^2 q^2 \Phi_z,$$

$$k_0^2 \frac{\eta}{\epsilon} (p^2 - \epsilon) \Phi_z \approx k_0^2 \frac{\eta}{\epsilon} p^2 \Phi_z \gg k_0^2 q^2 \Phi_z, \quad \frac{k_0 p}{\epsilon} (p^2 - \epsilon) \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \frac{rg\Phi_{\varphi}}{p^2 - \epsilon} \approx \frac{k_0 p}{\epsilon r} \frac{d(rg\Phi_{\varphi})}{dr} \sim k_0^2 qp \frac{g}{\epsilon},$$

откуда получаем следующую оценку для продольной компоненты электрического поля волны:

$$\Phi_z \sim \frac{qg}{pq} \Phi_{\varphi} \ll \Phi_{\varphi}.$$

Члены в левой части предпоследнего уравнения (3) порядка $k_0^2 q^2 \Phi_{\varphi}$, в правой части

$$\frac{k_0 gp}{p^2 - \epsilon} \frac{d\Phi_z}{dr} \approx \frac{k_0 g}{p} \frac{d\Phi_z}{dr} \sim k_0^2 g \frac{q}{p} \Phi_z \sim k_0^2 \frac{g}{\eta} \frac{q^2}{p^2} \Phi_{\varphi} \ll k_0^2 q^2 \Phi_{\varphi}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Рассмотрим уравнения Максвелла для двух электромагнитных полей:

$$\text{rot } \mathbf{H}_1 = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_1 + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_R, \quad (\text{П2.1})$$

$$\text{rot } \mathbf{E}_1 = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial t}, \quad (\text{П2.2})$$

$$\text{rot } \mathbf{H}_2^* = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}_2^*}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_2^*, \quad (\text{П2.3})$$

$$\text{rot } \mathbf{E}_2^* = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}_2^*}{\partial t}, \quad (\text{П2.4})$$

где плотности тока $\mathbf{J}_{1,2}$ в пренебрежении пространственной дисперсией определяются как

$$\mathbf{J}_{1,2} = \int_{-\infty}^t dt' \hat{\sigma}(t-t', r) \mathbf{E}_{1,2}(t', r), \quad (\text{П2.5})$$

$\hat{\sigma}$ — тензор комплексной проводимости [5], \mathbf{J}_R — сторонний ток (ток резонансных частиц).

Домножая данные уравнения на \mathbf{H}_2^* , $-\mathbf{E}_2^*$, \mathbf{H}_1 и $-\mathbf{E}_1$ соответственно и складывая, получим

$$\begin{aligned} \text{div}([\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_2^*] + [\mathbf{E}_2^*, \mathbf{H}_1]) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} [(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2^*) + (\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2^*)] + \frac{4\pi}{c} [(\mathbf{J}_1, \mathbf{E}_2^*) + (\mathbf{J}_2^*, \mathbf{E}_1)] = \\ = -\frac{4\pi}{c} (\mathbf{J}_R, \mathbf{E}_2^*). \quad (\text{П2.6}) \end{aligned}$$

В качестве полей \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 рассмотрим наборы квазимохроматических волн:

$$\mathbf{E}_1 = \sum_n e^{i\omega_n t} \sum_k e^{-ik_{nk} z} \mathbf{E}_{nk}(t, z, r), \quad \mathbf{E}_2 = e^{i\omega_{n'} t} e^{-ik_{n'k'} z} \mathbf{E}_{n'k'}(t, z, r), \quad (\text{П2.7})$$

где $\mathbf{E}_{nk}(t, z, r)$ — медленная функция t и z . Тогда

$$\mathbf{J}_1 = \sum_{n,k} e^{i\omega_n t - ik_{nk} z} \int_{-\infty}^t dt' \hat{\sigma}(t-t', r) \mathbf{E}_{nk}(t', z, r) e^{i\omega_n(t'-t) - ik_{nk}(z'-z)}. \quad (\text{П2.8})$$

Учитывая плавность $\mathbf{E}_{nk}(t')$ разложим её в ряд по $t - t'$:

$$\mathbf{E}_{nk}(t') = \mathbf{E}_{nk}(t) + \frac{\partial \mathbf{E}_{nk}}{\partial t} (t' - t) + \dots \quad (\text{П2.9})$$

Подставляя данное разложение в уравнение для тока (П2.8) и пользуясь определением комплексного тензора проводимости $\hat{\sigma}$ [5], получим

$$\mathbf{J}_1 = \sum_{n,k} e^{i\omega_n t - ik_{nk} z} \left(\hat{\sigma}(\omega_n, r) \mathbf{E}_{nk} - i \frac{\partial \hat{\sigma}(\omega_n, r)}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{E}_{nk}}{\partial t} \right) \quad (\text{П2.10})$$

и аналогично

$$\mathbf{J}_2 = e^{i\omega_{n'} t - ik_{n'k'} z} \left(\hat{\sigma}(\omega_{n'}, r) \mathbf{E}_{n'k'} - i \frac{\partial \hat{\sigma}(\omega_{n'}, r)}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{E}_{n'k'}}{\partial t} \right). \quad (\text{П2.11})$$

Тогда имеем

$$(\mathbf{J}_1, \mathbf{E}_2^*) + (\mathbf{J}_2^*, \mathbf{E}_1) = \sum_{n,k} e^{i(\omega_n - \omega_{n'}) t - i(k_{nk} - k_{n'k'}) z} \times \\ \times \left((\hat{\sigma}_n \mathbf{E}_{nk}, \mathbf{E}_{n'k'}^*) + (\hat{\sigma}_{n'}^* \mathbf{E}_{n'k'}, \mathbf{E}_{nk}) - i \left(\frac{\partial \hat{\sigma}_n}{\partial \omega} \frac{\partial \mathbf{E}_{nk}}{\partial t}, \mathbf{E}_{n'k'}^* \right) + i \left(\frac{\partial \hat{\sigma}_{n'}}{\partial \omega} \frac{\partial \mathbf{E}_{n'k'}^*}{\partial t}, \mathbf{E}_{nk} \right) \right), \quad (\text{П2.12})$$

где $\hat{\sigma}_{nn'} = \hat{\sigma}(\omega_{nn'}, r)$.

Используя связь тензоров $\hat{\sigma}$ и $\hat{\epsilon}$:

$$-i\hat{\sigma} = \frac{\omega}{4\pi} (\hat{\epsilon} - \hat{\delta}), \quad (\text{П2.13})$$

где $\hat{\delta}$ — единичный тензор, и эрмитовость тензора $\hat{\epsilon}$ (и, следовательно, антиэрмитовость $\hat{\sigma}$), получим

$$(\mathbf{J}_1, \mathbf{E}_2^*) + (\mathbf{J}_2^*, \mathbf{E}_1) = \sum_{n,k} e^{i(\omega_n - \omega_{n'}) t - i(k_{nk} - k_{n'k'}) z} \times \\ \times \left(((\hat{\sigma}_n - \hat{\sigma}_{n'}) \mathbf{E}_{nk}, \mathbf{E}_{n'k'}^*) + \frac{1}{4\pi} \left(\left(\frac{\partial(\omega\hat{\epsilon})}{\partial \omega} \right)_{\omega=\omega_n} \frac{\partial \mathbf{E}_{nk}}{\partial t}, \mathbf{E}_{n'k'}^* \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{4\pi} \left(\left(\frac{\partial(\omega\hat{\epsilon})}{\partial \omega} \right)_{\omega=\omega_{n'}}, \mathbf{E}_{nk}, \frac{\partial \mathbf{E}_{n'k'}^*}{\partial t} \right) \right). \quad (\text{П2.14})$$

Подставляя выражения (П2.7) и (П2.14) в уравнение (П2.6), а также используя соотношения, справедливые для произвольного вектора \mathbf{A} :

$$\operatorname{div}(\mathbf{A} e^{-ikz}) = \left(-ikA_z + \frac{\partial A_z}{\partial z} + \operatorname{div}_\perp \mathbf{A} \right) e^{-ikz}, \quad \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{A} e^{-i\omega t}) = \left(-i\omega \mathbf{A} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) e^{-i\omega t},$$

получим

$$\sum_{n,k} e^{i(\omega_n - \omega_{n'}) t - i(k_{nk} - k_{n'k'}) z} \left\{ \left(-i(k_{nk} - k_{n'k'}) z_0 + \frac{\partial}{\partial z} z_0 + \operatorname{div}_\perp \right) ([\mathbf{E}_{nk}, \mathbf{H}_{n'k'}^*] + [\mathbf{E}_{n'k'}^*, \mathbf{H}_{nk}]) + \right. \\ \left. + \frac{4\pi}{c} ((\hat{\sigma}_n - \hat{\sigma}_{n'}) \mathbf{E}_{nk} \mathbf{E}_{n'k'}^*) + \frac{i}{2c} (\omega_n - \omega_{n'}) ([\mathbf{E}_{nk} \mathbf{E}_{n'k'}^*] + [\mathbf{H}_{nk} \mathbf{H}_{n'k'}^*]) + \right. \\ \left. + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{H}_{nk}, \mathbf{H}_{n'k'}^*) + \frac{1}{c} \left(\left(\frac{\partial(\omega\hat{\epsilon})}{\partial \omega} \right)_{\omega=\omega_n} \frac{\partial \mathbf{E}_{nk}}{\partial t}, \mathbf{E}_{n'k'}^* \right) + \left(\left(\frac{\partial(\omega\hat{\epsilon})}{\partial \omega} \right)_{\omega=\omega_{n'}}, \mathbf{E}_{nk}, \frac{\partial \mathbf{E}_{n'k'}^*}{\partial t} \right) \right\} = \\ = -\frac{4\pi}{c} (\mathbf{J}_R, \mathbf{E}_{n'k'}^*) e^{-i\omega_{n'} t + ik_{n'k'} z}. \quad (\text{П2.15})$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Demekhov A. G., Trakhtengerts V. Yu. // J. Geophys. Res. 1994. V. 99, No. 4 P. 5831.
2. Kondratyev I. G., Kudrin A. V., Zaboronkova T. M. // Physica Scripta. 1996. V. 54. P. 96.
3. Bell T. F., Ngo H. D. // J. Geophys. Res. 1990. V. 95. P. 149.
4. Ахиезер А. И., Ахиезер И. А., Половин Р. В., Ситенко А. Г., Степанов К. Н. Электродинамика плазмы. М.: Наука, 1974.
5. Шафранов В. Д. Электромагнитные волны в плазме // Вопросы теории плазмы / Под ред. М. А. Леоновича. М.: Госатомиздат, 1963. Вып. 3. С 3.
6. Каценеленбаум Б. З. Теория нерегулярных волноводов с медленно меняющимися параметрами. М.: Изд. АН СССР, 1961.
7. Беспалов П. А., Трахтенгерц В. Ю. Альфвеновские мазеры. Горький: ИПФ АН, 1986.
8. Karpman V. I., Kaufman R. N. // J. Plasma Phys. 1982. V. 27. P. 225.

Институт прикладной физики РАН,
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию
13 сентября 2000 г.

CYCLOTRON WAVE-PARTICLE INTERACTION IN A WHISTLER WAVEGUIDE

D. L. Pasmanik and V. Yu. Trakhtengerts

We study the cyclotron interaction of energetic electrons and whistler waves in the case of ducted wave propagation, which can be realized in the Earth magnetosphere where the waveguide for whistler waves is formed by the plasmapause (whispering gallery propagation) or by ducts of enhanced background plasma density.

In this paper, the case of a cylindrically symmetric duct of enhanced background plasma density located in the external homogeneous magnetic field is considered. The spatial structure of the eigenmodes in such a waveguide is determined. The selfconsistent system of equations of the quasi-linear theory of the cyclotron instability is obtained taking the waveguide-mode structure into account. The obtained system is a generalization of the known selfconsistent system of equations of the quasi-linear theory of cyclotron maser.

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПРОФИЛЕЙ КОНЦЕНТРАЦИИ ОЗОНА И ТЕМПЕРАТУРЫ АТМОСФЕРЫ ПО СПЕКТРАМ МИКРОВОЛНОВОГО ПОГЛОЩЕНИЯ В ДВУХ ЛИНИЯХ ВРАЩАТЕЛЬНЫХ ПЕРЕХОДОВ ОЗОНА

Т. Л. Ерухимова, Е. В. Суворов

Показана возможность восстановления профилей концентрации озона и температуры атмосферы по измерениям спектров поглощения озона в двух линиях с различной зависимостью от температуры. При точности измерений линии поглощения озона, в принципе, достижимой в современном эксперименте, можно восстановить несколько точек на профилях температуры и концентрации озона с обычным для микроволнового зондирования вертикальным разрешением порядка 6 км.

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы, в связи с наблюдаемым сезонным дефицитом озона над Антарктидой и отдельными областями Арктики, актуальность и конкурентоспособность метода пассивного дистанционного зондирования в миллиметровом диапазоне длин волн среди традиционных методов измерения озона значительно возросла. Это связано с тем, что данный метод позволяет проводить непрерывный мониторинг озона в труднодоступной области высот 20–70 км в условиях полярной зимы вне зависимости от наличия ярких радиоисточников на небе. Достоинствами этого метода является также слабая зависимость от погодных условий и наличия аэрозоля в атмосфере. К числу недостатков радиометрических измерений относится, в первую очередь, низкое разрешение по высоте, а также необходимость знания профилей температуры и давления атмосферы для получения информации о вертикальном распределении газовых составляющих.

Суть радиометрических измерений озона состоит в регистрации излучения (поглощения) стрatosферного озона в резонансных линиях вращательного спектра молекул O_3 , приходящихся на миллиметровый диапазон длин волн [1]. Наземные наблюдения проводятся либо путём регистрации внеатмосферного радиоизлучения, прошедшего через атмосферу, либо путём измерения собственного излучения атмосферы. Ниже пойдёт речь о радиометрических наблюдениях собственного излучения атмосферного озона.

В принимаемую линию даёт вклад излучение атмосферы, приходящее с разных высот, на которых различны температура, давление и концентрация озона. Поэтому получение информации о вертикальном распределении озона по радиометрическим измерениям представляет собой типичную некорректную обратную задачу. Разработанные гетеродинные спектрометры миллиметрового диапазона длин волн позволяют измерять линии излучения (поглощения) малых газовых составляющих атмосферы с высокой точностью, достаточной для восстановления вертикальных профилей (см., например, [2–4]). Однако при наблюдении в одной спектральной линии для получения информации о вертикальном распределении, например, озона необходимо знание профилей температуры и давления. Для получения информации о распределении температуры и давления обычно используют данные спутниковых или ракетных измерений. Это позволяет вполне надёжно восстанавливать вертикальный профиль озона в периоды спокойного состояния верхней атмосферы. Однако наибольший интерес представляют моменты сильных возмущений, когда происходят значительные изменения атмосферных параметров (в первую очередь температуры). Такие события, например стратосферные потепления, особенно характерны для полярных широт, где непрерывный мониторинг озона радиометрическим методом особенно информативен. Если бы удалось модернизировать микроволновые измерения так, чтобы одновременно восстанавливать и распределение озона, и распределение температуры в интервале

высот 20÷70 км, возможности ранней диагностики труднопредсказуемой перестройки верхней стратосферы значительно повысились бы. Таким образом, актуальной становится задача об измерении и профиля температуры, особенно на стратосферных высотах.

В последнее время появились предложения по восстановлению профиля температуры в стратосфере из наземных измерений в разрешающихся резонансах мощной полосы поглощения молекулярного кислорода $\lambda = 5$ мм [5, 6]. В настоящей работе мы предлагаем альтернативный вариант, основанный на одновременных измерениях в двух линиях поглощения озона, что, в принципе, позволяет восстанавливать сразу оба профиля — концентрации озона и температуры.

1. ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПРОФИЛЕЙ КОНЦЕНТРАЦИИ ОЗОНА И ТЕМПЕРАТУРЫ

Пусть в эксперименте измеряется оптическая толщина $\tau(f)$ в некоторой линии поглощения озона. Она связана с профилем концентрации озона $N(z)$ интегральным соотношением

$$\tau(f) = \int_0^\infty N(z)W(z, f) dz, \quad (1)$$

где f — частота, z — высота, W — сечение поглощения молекулы озона (см., например, [7]):

$$W(z, f) = 2,745 \cdot 10^{-30} T^{-2,5}(z) f_{lm}^2 S_{lm} \exp\left(-\frac{E_l}{kT}\right) \frac{\nu(z)}{F^2 + \nu^2(z)}. \quad (2)$$

Здесь T — температура атмосферы, f_{lm} — резонансная частота перехода, S_{lm} — сила данного вращательного перехода, E_l — энергия верхнего уровня, $F = f - f_{lm}$ — отстройка по частоте от центра линии, k — постоянная Больцмана. До высоты порядка 75 км зависимость уширения линии поглощения озона от высоты может быть представлена в виде [8] ν [МГц]= $3,45P$ [мм рт. ст.]/(T [К]/292)^{0,65}, где P — атмосферное давление на соответствующей высоте. Ядро $W(z, f)$ интегрального уравнения (1), зависящее от формы линии, профилей давления и температуры, считается известным, в то время как концентрация озона в зависимости от высоты должна быть найдена.

Введём в (1) новую переменную интегрирования $\xi = \ln[\nu(0)/\nu(z)]$, связь которой с высотой определяется главным образом профилем давления (до тех высот, где уширение линий излучения обусловлено соударениями). Нормировочный коэффициент $\nu(0)$ — это, например, уширение линии на уровне земной поверхности. Введём также новую восстанавливаемую функцию $K(\xi)$, которая представляет собой некоторую комбинацию профилей концентрации озона, температуры и давления:

$$K(\xi) = c(\xi) f_{lm}^2 S_{lm} \exp\left(-\frac{E_l}{kT(\xi)}\right), \quad \tau = \int_0^\infty K(\xi) \frac{\nu(\xi)}{F^2 + \nu^2(\xi)} d\xi. \quad (3)$$

Функция $C(\xi)$ в (3) не зависит от характеристик выбранного вращательного перехода:

$$C(\xi) = 2,745 \cdot 10^{-30} T^{-2,5}(\xi) N(\xi) \nu(\xi) \frac{\partial z(\xi)}{\partial \nu}.$$

Заметим теперь, что, если восстанавливать функции $K(\xi)$ по измерениям спектров поглощения озона в двух линиях вращательных переходов молекулы O_3 с достаточно сильно различающейся зависимостью от температуры, можно получить независимую информацию о профилях температуры и концентрации озона в зависимости от давления атмосферы. Действительно, обозначив индексами 1 и 2

параметры двух измеряемых линий, из (3) легко получим выражение для температуры как функции переменной ξ :

$$T(\xi) = \frac{(E_2 - E_1)/k}{\ln[K_1(\xi)f_2^2S_2/(K_2(\xi)f_1^2S_1)]}. \quad (4)$$

Существуют различные методы решения некорректной обратной задачи (1) (см., например, [9–15]). Для демонстрации возможности получения информации о распределении концентрации озона и температуры по радиометрическим измерениям мы воспользуемся методом Рандеггера [13]. В основе этого метода лежит итерационный алгоритм Шахина [12] с дискретизацией по частоте и высоте.

1.1. Восстановление комбинации профилей концентрации и температуры как функции давления по измерениям одной спектральной линии озона

Последовательные итерации при нахождении восстанавливаемой функции $K(\xi)$ согласно процедуре Рандеггера—Шахина связаны соотношением

$$K^{(n+1)}(\xi_i) = K^{(n)}(\xi_i) \frac{\partial \tau^e(\xi_i)/\partial F - \partial A(\xi_i)/\partial F}{\partial \tau^{(n)}(\xi_i)/\partial F - \partial A(\xi_i)/\partial F}, \quad (5)$$

где F — отстройка по частоте от центра линии, τ^e — экспериментально измеренная оптическая толщина, $\tau^{(n)}$ — оптическая толщина, найденная в результате решения прямой задачи по n -й итерации $K(\xi)$:

$$\frac{\partial \tau^{(n)}}{\partial F} = \int_0^\infty K^{(n)}(\xi) \frac{2\nu F}{(F^2 + \nu^2)^2} d\xi. \quad (6)$$

Наконец, в (5) имеется фиксированная «подставка» A , которая определяется интегралом (6) в интервале высот, недоступном для микроволнового зондирования. Частоты для итерационной процедуры выбирались из соображений минимального перекрытия весовых функций, полуширины которых составляют порядка 6 км. Как правило, выбирались 4–5 каналов, центральные частоты которых образовывали геометрическую прогрессию, перекрывающих диапазон от 1,5 до 90 МГц. Значения ξ , в которых восстанавливалась функция $K(\xi)$, соответствовали максимуму производной весовой функции по частоте $\partial W/\partial F = 2\nu F/(F^2 + \nu^2)^2$.

Изложенная процедура восстановления была проверена в численном эксперименте. В качестве модельного был выбран профиль концентрации озона из среднеширотной модели Крюгера—Минзнера [16]. По данному профилю была вычислена линия поглощения озона с резонансной частотой 101 ГГц на частотах спектроанализатора, используемого в экспедиционном комплексе ИПФ РАН [3, 17]. Данные для температуры и давления были взяты из стандартной модели атмосферы СМА СССР-64 [18]. Для учёта влияния погрешности измерений на «измеренную» линию поглощения озона был наложен шум с нормальным распределением и дисперсией, которая считалась одинаковой во всех каналах и равной 10^{-4} Нп. По рассчитанной линии поглощения проводилось восстановление функции $K(\xi)$.

На рис. 1 приведена зависимость восстановленной функции $K(\xi)$ от логарифма обратного уширения линии. Ошибка восстановления составила 30,5; 7,8; 2,6; 2,4 и 5 % при $\xi = 3,28; 4,28; 5,28; 6,43$ и 7,43 соответственно.

Особый интерес представляет ситуация, когда во время микроволновых измерений спектра озона происходят значительные возмущения профиля температуры. Для иллюстрации мы восстановили высотный профиль озона по спектру поглощения молекулы O_3 на частоте 101 ГГц, измеренному 20.02.89 на о. Хейса во время стрatosферного потепления [3]. Ошибка при восстановлении функции $K(\xi)$ составила 52,6; 24,2; 15,9; 19; 34 % для $\xi = 3,28; 4,28; 5,28; 6,43; 7,43$ соответственно (см. рис. 2).

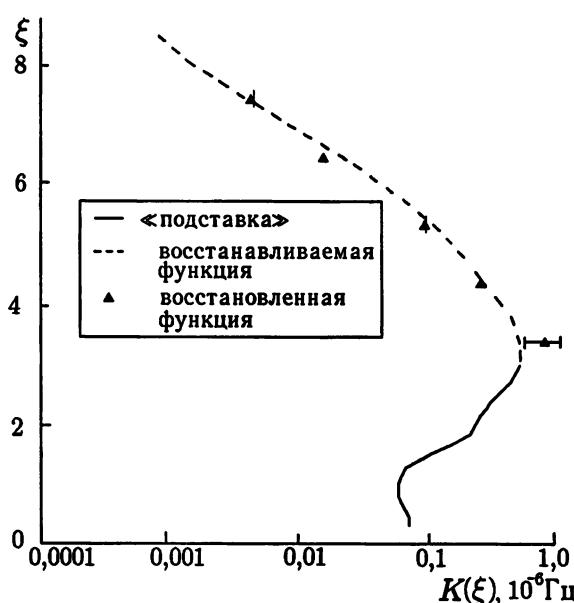


Рис. 1

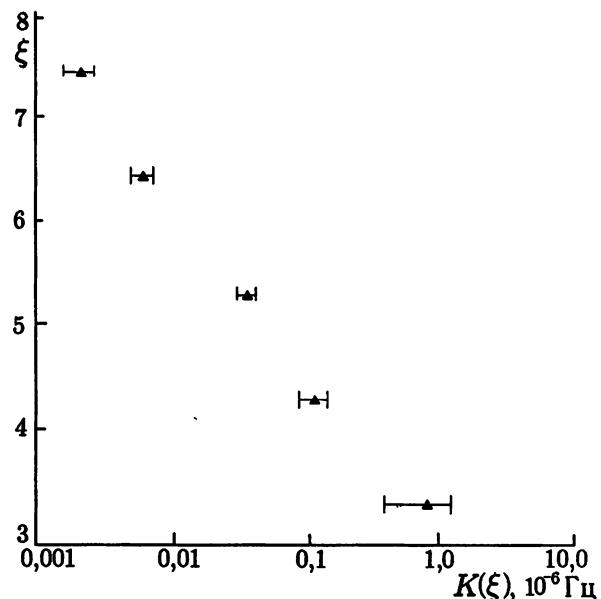


Рис. 2

На рис. 3 приведены восстановленные зависимости концентрации от высоты при различных профилях температуры и давления. Восстановленная концентрация озона при использовании зональных профилей $T(z)$ и $P(z)$ для 80° с. ш. для февраля [19] отличается от восстановленной концентрации с реально измеренными 20.02.89 с помощью метеоракеты профилями температуры и давления [20] примерно на 35 % на высоте 37 км и на 40 % на высоте 45 км. При точности «измерений» $2 \cdot 10^{-4}$ Нп подстановка изотермического профиля температуры и барометрического профиля давления вместо реально измеренного не влияет на восстановленные значения концентрации.

Таким образом, приведённая процедура позволяет восстанавливать функцию $K(\xi)$ от обратного логарифма уширения линии ξ , определяемого главным образом зависимостью давления от высоты, не делая априорных предположений о распределении температуры и давления. При подстановке в восстановленную функцию $K(\xi)$ различных профилей температуры и давления (измеренных, если таковые есть, либо модельных зависимостей $T(z)$ и $P(z)$) можно получить различные профили концентрации озона от высоты и определить адекватность используемых моделей при данной точности измерений.

1.2. Восстановление профилей концентрации озона и температуры атмосферы по спектрам микроволнового излучения в двух спектральных линиях озона

Оценим точность измерений, необходимую для восстановления профилей и температуры, и концентрации озона во время значительного изменения температуры в стратосфере при одновременных наблюдениях в двух линиях поглощения озона.¹ Так как зависимость функции $K(\xi)$ от температуры экспоненциальная (см. (2)), то очевидно, что для поставленной задачи надо выбирать линии с наиболее отличающимися показателями экспоненты. Другим ограничением на выбор измеряемых линий является тот факт, что линия, во-первых, должна быть достаточно интенсивной и, во-вторых, должно быть максимальным отношение поглощения в линии озона к фоновому поглощению на данной частоте.

¹ В качестве значительно изменённого мы будем использовать профиль температуры, измеренный на о. Хейса во время сильного стратосферного потепления [20], и его отличие от среднеширотного профиля (стандартная модель атмосферы СМА СССР-64 [16]) и среднезонального профиля для 80° с. ш. для февраля [19].

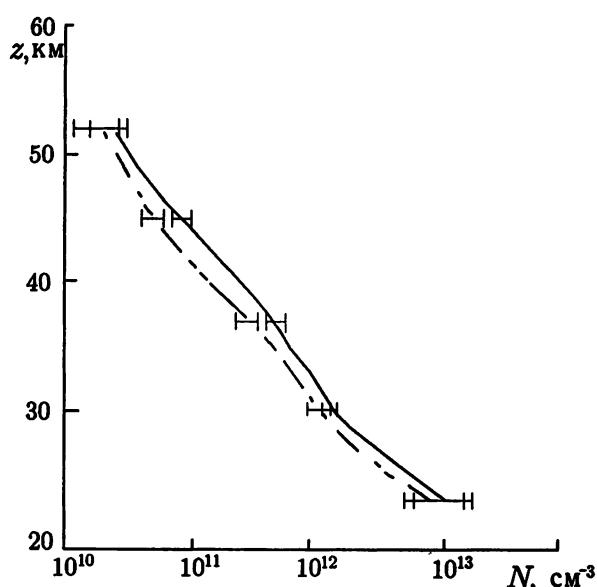


Рис. 3. Восстановленные зависимости концентрации озона от высоты с использованием реальных профилей P и T , измеренных 20.02.89 на о. Хейса (сплошная линия) и зональных профилей (пунктир)

В табл. 1 приведены резонансные частоты выбранных нами пяти вращательных переходов, зависимость интенсивности излучения каждого перехода от температуры и сила линий [21]. В наших численных расчётах моделировались измерения линий поглощения на разных парах частот из табл. 1.

Таблица 1

Резонансная частота, ГГц	$\exp[-(E/k)/T]$	Сила линии
101	$\exp(-12/T)$	0,0672
142	$\exp(-66/T)$	0,1493
235	$\exp(-173/T)$	0,27
239	$\exp(-216/T)$	0,2723
276	$\exp(-185/T)$	0,0505

клонением от 10^{-4} до 10^{-5} Нп. По этим линиям поглощения проводилось восстановление функции $K(\xi)$ в соответствии с процедурой, описанной в предыдущем разделе; далее по восстановленным профилям $K(\xi)$ для различных пар переходов определялся профиль температуры (см. (4)).

Ошибка восстановления профиля температуры находилась из выражения

$$\sigma_T = \frac{(E_2 - E_1)/k}{\ln^2[K_1 f_2^2 S_2 / (K_2 f_1^2 S_1)]} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{K_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{K_2^2}},$$

где σ_1 и σ_2 — характерные ошибки измерений на частотах f_1 и f_2 .

На рис. 4 показаны восстановленные значения температуры при использовании пар частот вращательных переходов 142 и 235 ГГц, 142 и 239 ГГц, 142 и 276 ГГц при точности «измерений» 10^{-4} Нп. На этом же рисунке изображён исходный среднеширотный профиль температуры [18] (сплошная линия), а также для сравнения приведены профиль температуры, измеренный 20.02.89 на о. Хейса во время

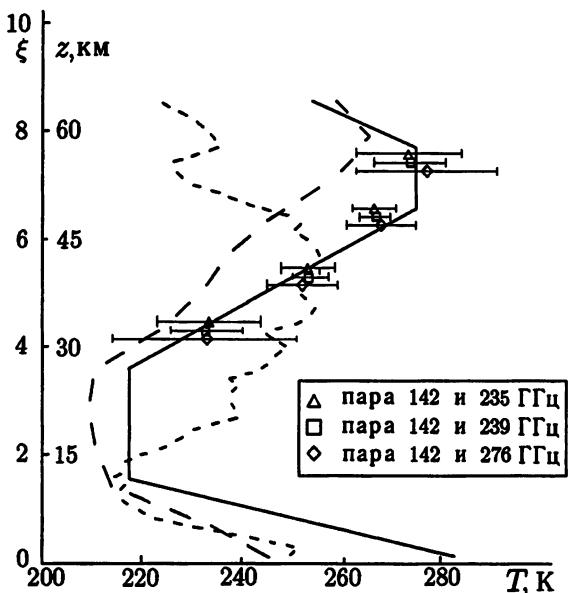


Рис. 4

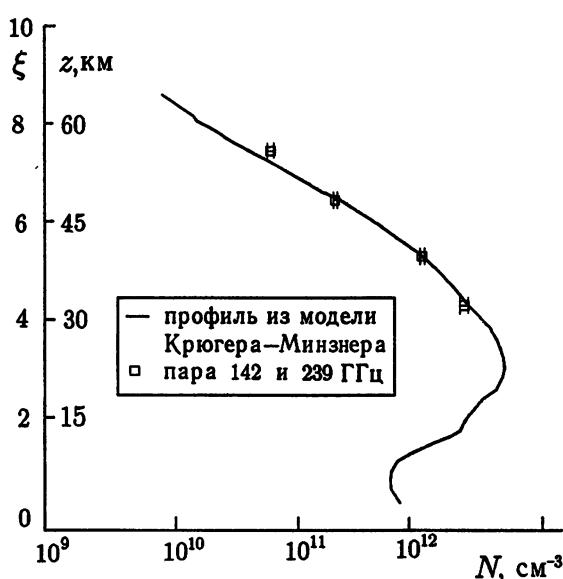


Рис. 5

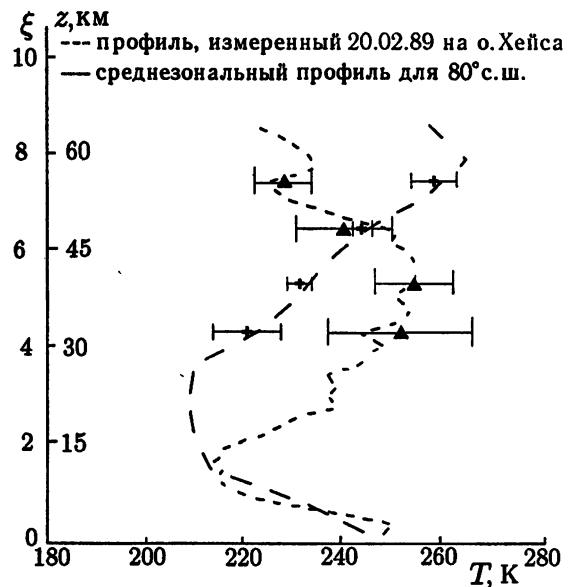


Рис. 6

сильного стратосферного потепления (короткий пунктир) [20] и среднезональный профиль для 80° с. ш. для февраля (длинный пунктир) [19]. Ошибка восстановления температуры является минимальной для пары частот 142 и 239 ГГц и составляет 3,26; 1,48; 1,24 и 2,66 % при обратном логарифме уширения линии $\xi = 4,28; 5,28; 6,42$ и $7,42$, что примерно соответствует высотам 30, 37, 45 и 52 км. Важно отметить, что ошибка при восстановлении четырёх точек на профиле температуры (нижняя точка имеет очень большую дисперсию из-за сшивки восстанавливаемой функции с «подставкой») позволяет говорить, с одной стороны, о хорошем воспроизведении исходного профиля температуры, а с другой стороны, позволяет надёжно различить, например, исходный среднеширотный профиль температуры от двух других, изображённых на рис. 4. Результат восстановления профиля озона (см. (3)) представлен на рис. 5 для пары частот вращательных переходов молекулы O_3 142 и 239 ГГц.

Далее приведены ещё два примера, в которых для пары линий 142 и 239 ГГц проведено восстановление двух других профилей температуры, представленных на рис. 4. Для температурного профиля, измеренного 20.02.89 на о. Хейса во время сильного стратосферного потепления, моделировались измерения оптических толщин с профилем концентрации озона, измеренным с помощью хемилюминесцентного датчика в этот же день (данные были любезно предоставлены С. П. Перовым). Профиль давления был взят из данных, полученных с помощью метеоракеты [20]. Для среднезонального профиля температуры (80° с. ш. для февраля) оптическая толщина рассчитывалась на основе профиля концентрации озона из модели Крюгера—Миннера и среднезонального профиля давления для 80° с. ш. Ошибки «измерений» опять полагались равными 10^{-4} Нп. Результаты восстановления этих двух профилей приведены на рис. 6. Как видно из рисунка, предложенная методика восстановления позволяет различить два профиля температуры, соответствующие существенно разным состояниям верхней стратосферы.

Требования к точности измерений существенно возрастают, если в качестве опорной линии выбрать спектр поглощения на частоте $f_1 = 101$ ГГц.³ Здесь для обеспечения аналогичной погрешности восстановления температурного профиля необходима точность измерений порядка 10^{-5} Нп на часто-

² Приведённые на рис. 4 точки, относящиеся к одним и тем же высотам, слегка разнесены по вертикальной координате, чтобы можно было различить ошибки восстановления, связанные с использованием разных частот.

³ Это обусловлено слабостью линии; заметим, что выбранная абсолютная точность соответствует примерно той же относительной точности, что и при работе с линией 239 ГГц.

те 101 ГГц и порядка $3 \cdot 10^{-5}$ Нп на любой из частот (142, 235, 239 и 276 ГГц), которая образует пару с частотой 101 ГГц.

2. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Показано, что по измерениям микроволнового поглощения в двух линиях вращательных переходов озона с различной зависимостью от температуры при достаточно высокой точности измерений можно одновременно восстановить несколько точек на профилях температуры и концентрации озона с обычным для микроволнового зондирования вертикальным разрешением порядка 6 км. Наиболее перспективной с точки зрения восстановления профилей температуры и концентрации озона представляется пара линий на частотах 142 и 239 ГГц. При точности измерений оптической толщины порядка 10^{-4} Нп удается достаточно надежно восстановить несколько точек на профиле температуры. Использование нами грубой, имеющей оценочный характер процедуры восстановления Рандеггера [13], возможно, заывает требования к точности эксперимента. Заметим, что необходимая точность определения оптической толщины вряд ли может быть достигнута с использованием методики измерений, разработанной в [1], поскольку в самой процедуре заложена неизбежность систематических ошибок, обусловленных неизотермичностью атмосферы (подробнее см. [22]). В принципе, эта методика может быть использована при измерениях в слабых линиях излучения, когда можно пренебречь реабсорбцией в самом озоновом слое, однако при этом ужесточаются и требования к точности измерений. Возможно, для этой цели более перспективной является постановка активных экспериментов с использованием отражателей (или даже генераторов), установленных на космических аппаратах.

Возможность восстановления профилей озона и температуры по результатам измерений в линиях поглощения вращательного спектра молекулы озона значительно повысила бы возможности микроволнового эксперимента. Во время существенных и труднопредсказуемых изменений параметров верхней стратосферы этот метод определения температуры мог бы служить хорошим дополнением к другим методам, позволяя мобильно отслеживать изменения профилей озона и температуры в труднодоступной области высот 20–70 км.

По поводу сравнения двух способов восстановления профиля температуры на стратосферных высотах можно заметить, что оба они (по двум линиям озона и по резонансам в полосе кислорода $\lambda = 5$ мм) требуют довольно высокой точности измерений и достаточно сложны для экспериментальной реализации. И хотя при одинаковой точности измерений точность восстановления температуры по резонансам в полосе поглощения кислорода несколько лучше, экспериментальный комплекс для одновременных измерений в двух линиях озона также имеет право на реализацию, поскольку помимо одновременного измерения профилей озона и температуры он позволит решать ряд дополнительных задач радиометрии стратосферного озона.

Авторы благодарны Л. И. Федосееву и А. А. Швецову за плодотворные дискуссии и полезные замечания.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99–05–65467).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кисляков А. Г., Куликов Ю. Ю., Рыскин В. Г. // Спектральные исследования космического и атмосферного излучения. Горький: ИПФ АН СССР, 1979. С. 84.
2. Connior B. J., Barrett J. W., Parrish A. et al. // J. Geophys. Res. 1987. V. 92, No. D11. P. 13 221.
3. Kulikov Y. Y., Kuznetsov I. V., Andriyanov A. F. et al. // J. Geophys. Res. 1994. V. 94, No. D10. P. 21 109.

4. Solomonov S. V., Kropotkina E. P., Lukin A. N. et al. // J. Atmos. Terr. Phys. 1994. V. 56, No. 1. P. 9.
5. Маркина Н. Н. // Радиотехника и электроника. 1996. Т. 41, № 2. С. 175.
6. Наумов А. П., Ошарина Н. Н., Троицкий А. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1999. Т. 42, № 8. С. 45.
7. Таунс Ч., Шавлов А. Радиоспектроскопия. М.: Изд-во ин. лит., 1959. 756 с.
8. Colmont J. M., Monnanteuil N. // Handbook for MAP. 1985. V. 16. P. 47.
9. Rodgers C. D. // J. Geophys. Res. 1990. V. 95, No. D5. P. 5587.
10. Brillet J. // J. Geophys. Res. 1989. V. 94, No. D10. P. 12833.
11. Kuntz M., Kopp G., Berg H., Hochschild G., Krupa R. // J. Geophys. Res. 1994. V. 104, No. D11. P. 13981.
12. Chahine M. T. // J. Atmos. Sci. 1972. V. 29, No. 5. P. 741.
13. Randegger A. K. // Pure Appl. Geophys. 1980. V. 118. P. 1052. .
14. Гайкович К. П., Кропоткина Е. П., Соломонов С. В. // Изв. АН. Физика атмосферы и океана. 1999. Т. 35, № 1. С. 86.
15. Куликов Ю. Ю., Маркина Н. И., Наумов А. П., Рыскин В. Г., Сумин М. И. // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1988. Т. 24, № 12. С. 1282.
16. Krueger A. J., Minzner R. A. // J. Geophys. Res. 1976. V. 81. P. 4477.
17. Борисов О. Н., Демкин В. М., Куликов Ю. Ю. и др. // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1989. Т. 25, № 10. С. 1033.
18. Глаголев Ю. А. Справочник по физическим параметрам атмосферы. Л., 1970. 358 с.
19. Barnett J. J., Corney M. // Handbook for MAP. 1985. V. 81. P. 47.
20. Бугаева И. В., Бутко А. И., Тарасенко Д. А. // Метеорология и гидрология. 1990. № 5.
21. Depannemaeker M. J. C., Duterage B., Bellet M. J. // J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer. 1977. V. 17. P. 519.
22. Моченёва О. С., Ерухимова Т. Л., Суворов Е. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1995. Т. 38, № 8. С. 751.

Институт прикладной физики РАН,
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию
28 сентября 2000 г.

RECONSTRUCTION OF OZONE-DENSITY AND ATMOSPHERIC-TEMPERATURE PROFILES USING THE SPECTRA OF MICROWAVE ABSORPTION IN TWO ROTATIONAL OZONE LINES

T. L. Erukhimova and E. V. Suvorov

We show the possibility of reconstruction of ozone-density and atmospheric-temperature profiles using measurements of the ozone absorption spectra in two lines with different temperature dependences. It is possible to find a few points in such profiles with a vertical resolution of about 6 km, which is usual for the microwave sounding, using the measurements of ozone absorption line with an accuracy that, in principle, can be achieved in modern experiments.

УДК 533.9

АВТОВОЛНОВЫЕ РЕЖИМЫ ЭЛЕКТРИЗАЦИИ ГРОЗОВОГО ОБЛАКА

E. A. Мареев, A. E. Сорокин

Рассмотрена проблема эволюции электрического поля и заряда в распределённой одномерной электро-гидродинамической (ЭГД) системе, служащей простой моделью грозового облака. Предложено диффузионное уравнение для электрического поля, которое при разумных предположениях о нелинейной зависимости тока диссипации от амплитуды поля (обусловленной коронированием аэрозольных частиц в сильных полях) имеет автоволновые решения, описывающие динамику пространственно разделённых областей электрического заряда в облаке. Нелинейная система уравнений, описывающая динамику электрического поля в ансамбле сталкивающихся аэрозолей и лёгких ионов, редуцирована к достаточно простой базовой модели, имеющей решения в виде бегущих фронтов и бегущих импульсов. Найдены асимптотические значения скорости и толщины фронта пространственного заряда, определяемые диффузией и параметрами токов сепарации и проводимости, и на их основе выполнены оценки скорости роста электростатической энергии грозовой ячейки на стадии её интенсивной электризации. Указано на возможность формирования бегущего импульса поля и проводимости в подобной ЭГД системе при учёте индукционного и безиндукционного механизмов зарядки аэрозольных частиц.

ВВЕДЕНИЕ

Грозовое облако представляет собой активную многофазную систему, далёкую от термодинамического равновесия и характеризуемую распределённым в пространстве источником энергии (разделение заряда при столкновениях аэрозольных частиц) и диссипацией [1]. Как известно, в таких системах, в результате потери устойчивости однородного состояния, возможно возникновение волн или пространственно неоднородных структур, устойчивых относительно малых возмущений [2, 3]. Обычно такие процессы называют автоволновыми. В настоящей работе рассмотрена нелинейная распределённая система уравнений, описывающая динамику электрического поля в ансамбле сталкивающихся аэрозолей и лёгких ионов, которая редуцируется к достаточно простой базовой модели, имеющей автоволновые решения в виде бегущих фронтов и бегущих импульсов. Найденные аналитические решения и выполненные численные расчёты позволяют описать элементы эволюции грозовой ячейки в условиях её активной электризации, что необходимо для изучения фундаментальной проблемы грозового электричества [4] — механизмов и динамики роста крупномасштабного электрического поля на стадии, предшествующей пробою.

К настоящему времени опубликовано несколько моделей, описывающих электродинамику грозовой ячейки при различных предположениях о механизмах зарядки аэрозольных частиц, распределении аэродинамических переменных в облаке и т. д. (см. [4–6] и цитированную там литературу). Дальнейшее развитие подобного моделирования многие авторы связывают с усложнением параметризации описываемых процессов и как можно более детальным учётом разнообразных процессов, сопровождающих электризацию. Между тем реальная картина развития грозовой ячейки (не говоря уже о таких объектах, как мезомасштабные конвективные системы, привлекающие сейчас особый интерес исследователей) столь сложна, что даже приблизительный учёт всех основных особенностей сталкивается с огромными вычислительными трудностями. При этом остаются открытыми многие физические вопросы, особенно в области высоких полей, когда динамика поля, имеющая сугубо нелинейный характер, усложняется эффектами коронирования и обратным влиянием поля на скорость аэрозолей. В настоящей работе намечен иной подход, связанный с исследованием коллективных процессов (в том числе

коллективной зарядки аэрозольных частиц) в облаке [7] и попыткой построения нелинейных автоволновых моделей. Соответствующие уравнения, хотя и достаточно сложные, оказываются вполне обозримыми с точки зрения нелинейной динамики.

План статьи следующий. В первом разделе на основе феноменологического подхода записано диффузионное уравнение для электрического поля в распределённой электротермодинамической системе и получены его простые динамические решения в виде бегущего фронта. Феноменологический подход обладает тем преимуществом, что, отвлекаясь от деталей взаимодействия частиц в системе, он позволяет грубо учсть некоторые эффекты, которые играют ключевую роль в формировании автоволновых решений. Во втором разделе строго выведена система уравнений, описывающих в одномерном приближении самосогласованное распределение напряжённости электрического поля, плотности заряда и проводимости в среде с лёгкими ионами и аэрозольными частицами, которые обмениваются зарядами при столкновениях. При некоторых предположениях полученная система редуцируется к простой базовой системе для электрического поля и проводимости ионов в среде. В третьем разделе базовая система уравнений анализируется численно применительно к характерным условиям грозового облака. Указаны основные типы поведения решений, соответствующие простым физическим моделям динамики электрического поля в облаке.

1. ДИФФУЗИОННОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ В РАСПРЕДЕЛЁННОЙ ЭГД СИСТЕМЕ

В реальных условиях грозового облака и других распределённых ЭГД систем электризация аэрозольных частиц происходит в ограниченной области пространства (её можно рассматривать как своеобразный плоский конденсатор), покидая которую, заряженные частицы могут либо попадать в зону рекомбинации, где нейтрализуются, либо накапливаться на границе области взаимодействия [8]. Поэтому мы рассмотрим упрощённую одномерную модель динамики электрического поля в грозовой ячейке. Будем считать, что в области взаимодействия, заполненной турбулентным газом, присутствуют аэрозольные частицы двух сортов с массами M, m , зарядами Q, q , концентрациями N, n и скоростями u, v соответственно (рис. 1), движущиеся под действием силы тяжести и, вообще говоря, электрического поля. В отличие от рассматривавшихся во многих работах сосредоточенных моделей [6] мы будем исследовать распределённую модель, учитывая диффузию плотности электрического заряда, т. е. диффузионный ток $j_{\text{dif}} = -D_c \nabla \rho$, где коэффициент диффузии заряда $D_c \approx VL$ определяется скоростью V и масштабом L турбулентного перемешивания частиц.

С учётом тока диффузии и уравнения Пуассона уравнение для вертикальной компоненты электрического поля запишется следующим образом:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = 4\pi (j_{\text{sep}} - j_{\text{dis}}) + D_c \frac{\partial^2 E}{\partial z^2}. \quad (1)$$

В этом уравнении ток зарядки j_{sep} описывает рост поля вследствие разделения заряда на аэрозольных частицах; ток диссипации j_{dis} обусловлен в основном проводимостью лёгких ионов. Впервые уравнение диффузии для электрического поля в форме (1) было записано в работе [9] при рассмотрении проблемы турбулентного электрического динамо.

Заметим, что в однородной задаче (соответствующей одномерному приближению простой модели плоского конденсатора) есть возможность учсть упоминавшийся выше эффект выхода зарядов в зону рекомбинации, снижающий эффективность его накопления, вводя в ток зарядки $j_{\text{sep}} = \beta (QN u + qnv)$

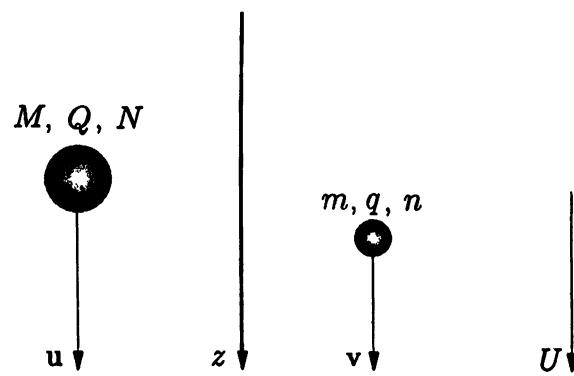


Рис. 1

коэффициент $0 \leq \beta \leq 1$, который определяется структурой аэродинамического потока в системе. В реальных условиях одномерной системы лишь часть заряда, покидающего область взаимодействия, ведёт к росту поля, что и отвечает условию $\beta < 1$.

На стадии интенсивного роста грозовой ячейки ток зарядки превалирует. Однако в достаточно сильном поле начинается резкий рост проводимости, обусловленный коронированием аэрозольных частиц, и, как следствие, возрастание тока диссипации и ограничение напряжённости электрического поля. Для учёта этого эффекта в простейшем случае можно воспользоваться соответствующей эмпирической зависимостью $j_{\text{dis}}(E)$ [10]:

$$j_{\text{dis}} = 10^{-3} [\exp(0,2E) - 1]. \quad (2)$$

Здесь все величины записаны в системе СГС. В обобщённом виде эта зависимость имеет вид

$$j_{\text{dis}} = \sigma_0 E_c [\exp(E/E_c) - 1], \quad (3)$$

где σ_0 — невозмущённая проводимость среды, E_c — критическое поле.

Чтобы развить количественную модель динамики поля, мы должны выбрать адекватную параметризацию выражения для тока зарядки. В литературе рассматривается множество механизмов разделения заряда, обладающих специфической микрофизикой. Они зависят от большого числа факторов, в частности от распределения температуры, фазового состава и спектра размеров аэрозольных частиц в облаке. Мы, однако, не будем интересоваться деталями микрофизики данного процесса, поскольку основное значение для данной задачи имеет зависимость передаваемого за одно соударение заряда δq от электрического поля. По этому параметру принято подразделять все механизмы разделения заряда на индукционные и безындукционные [11].

Для первого класса механизмов величина $\delta q = \delta q_i$ зависит от величины и направления внешнего электрического поля \mathbf{E} и связана с поляризацией взаимодействующих частиц. В случае сферических частиц с размерами $D \gg d$, где D и d — соответственно диаметры крупных и мелких частиц, для δq_i обычно используется следующее выражение [8, 11]:

$$\delta q_i = \frac{\eta \pi^2 d^2}{8|U|} (\mathbf{U}, \mathbf{E}), \quad (4)$$

где относительная скорость $\mathbf{U} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$ определяется разностью скоростей тяжёлых и лёгких аэрозольных частиц, параметр η определяется углом контакта частиц и согласно [6] равен $\eta \approx 0,2 \div 2$. Заметим, что фактор $(\mathbf{E}, \mathbf{U})/|\mathbf{U}|$ в формуле (4) для рассматриваемой одномерной задачи зависит только от знака скорости.

Безындукционная зарядка, вообще говоря, возникает за счёт разности химических потенциалов и массообмена между сталкивающимися аэрозолями. Так, заряд $\delta q = \delta q_s$, передаваемый ледяному кристаллу за единичное соударение с более массивной градиной, согласно [5] можно представить в виде

$$\delta q_s = \left(\frac{|U|}{U_0} \right)^p A_s(d, D, T), \quad (5)$$

где $p \approx 2 \div 3$, $U_0 \simeq 3$ м/с, $A_s(d, D, T)$ — эмпирическая функция, отражающая зависимость δq_s от характерных размеров градин, льдинок и температуры воздуха, причём существует некоторая критическая температура T_r (зависящая от концентрации водяного пара; обычно T_r расположена между -15 и -20 °C), ниже которой градины заряжаются отрицательно, льдинки — положительно, и наоборот. Такое разделение механизмов зарядки на индукционные и безындукционные, хотя и основано на разной физической природе процессов, становится при больших внешних электрических полях несколько условным, поскольку относительная скорость частиц, несущих заряды, сама начинает зависеть от электрического поля.

ливы только в случае столкновений нейтральных частиц, т. е. когда до акта соударения $q = Q = 0$. При столкновении заряженных частиц передаваемый заряд ограничивается ёмкостными эффектами. Учитывая также конечное время контакта аэрозольных частиц, выражение для заряда, передаваемого более лёгкой частицей при единичном соударении, можно записать в виде [4, 12]

$$\delta q = \xi [\delta q_0 - a_1 q + (1 - a_1) Q], \quad \delta q_0 = \delta q_i + \delta q_s, \quad (6)$$

где $a_1 < 1$ и в случае $d \ll D$ определяется выражением

$$a_1 = \left(1 + \frac{\pi^2 d^2}{6 D^2} \right)^{-1}, \quad (7)$$

а величина ξ определяется временем контакта t_c и соответствующим временем релаксации τ_c , связанным с проводимостью частиц: $\xi \sim 1 - \exp(-t_c/\tau_c)$. В общем случае ξ зависит не только от химического состава частиц, но также от их механических свойств и относительной скорости движения, и может изменяться в широком диапазоне: $\xi \sim 0,01 \div 1$. Например, при соударении твёрдых ледяных частиц ξ , как правило, много меньше, чем в случае соударения капель [4, 6].

Обратимся к изучению крупномасштабной динамики электрического поля и заряда в области взаимодействия, заполненной турбулентным газом и аэрозольными частицами двух сортов, при каждом столкновении которых разделяется заряд δq в соответствии с вышеприведённой формулой (6). В квазигидродинамическом приближении эволюция заряда на тяжёлых или лёгких аэрозольных частицах в общем случае описывается достаточно сложными уравнениями [7], однако задача упрощается в случае интенсивной зарядки, когда характерный масштаб изменения скорости турбулентного газа в пространстве и времени велик по сравнению с масштабами установления стационарных значений заряда $Q = -\delta q_0 \xi S U n / \nu_r$ и $q = \delta q_0 \xi S U N / \nu_r$, где $S = \pi (d + D)^2 / 4$ — сечение столкновения аэрозольных частиц, $\nu_r = \nu_i + \nu_1 + \nu_2$, $\nu_1 = \xi S N U a_1$, $\nu_2 = \xi S U n (1 - a_1)$, $\nu_i = 4\pi\sigma_0$.

Рассматривая индукционную зарядку, с учётом (4) можно положить $j_{sep} = \gamma_s E_0$, где

$$\gamma_s = \xi \eta \pi^2 \frac{S U^2 d^2 n N}{4 \nu_1 + 4 S U \xi [N a_1 + (1 - a_1) n]}. \quad (8)$$

Если поле достаточно мало, так что зависимость $U(E)$ несущественна, ток зарядки является линейной функцией напряжённости поля. С учётом зависимости $j_{dis}(E)$, определяемой уравнением (3), легко показать, что тривиальное состояние равновесия уравнения (1) $E = 0$ устойчиво относительно крупномасштабных возмущений и является единственным при условии $\gamma_s < 4\pi\sigma_0$ (рис. 2). В противоположном случае это состояние равновесия становится неустойчивым, но появляются два устойчивых

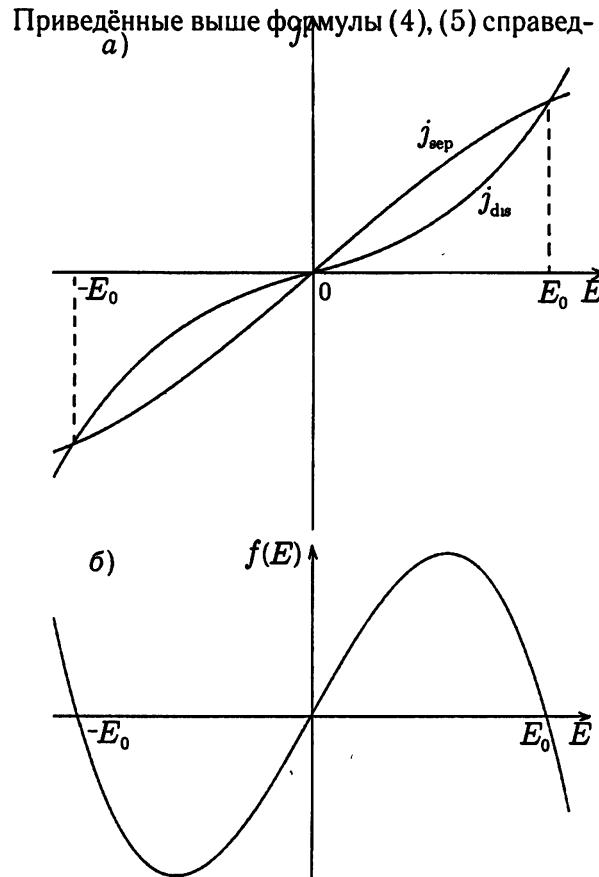


Рис. 2. Качественные зависимости токов зарядки и диссипации (а), а также полного тока (б) от напряжённости электрического поля

состояния равновесия, $+E_0$ и $-E_0$, определяемые соотношением $f(E) = 4\pi(j_{\text{sep}} - j_{\text{dis}}) = 0$. Функция $f(E)$ при $\gamma_s > 4\pi\sigma_0$ имеет вид, типичный для теории автоволн в бистабильных возбудимых средах, где нелинейное диффузионное уравнение вида (1) детально изучалось (см., например, [3] и цитируемую там литературу). Как известно, основным типом структуры, характерным для бистабильных сред, описываемых уравнением (1), является волна переключения $E(z-V_f t)$ из одного устойчивого состояния E_1 в другое E_2 . В простейшем случае симметричной кривой $f(E)$ (см. рис. 2) скорость распространения фронта волны, определяемая равенством $V_f = \int_{E_1}^{E_2} f(E) dE = \int_{-E_0}^{E_0} f dE$, обращается в нуль, однако учёт безындукционной зарядки приводит к нарушению симметрии.

Особый интерес представляет решение в виде бегущего фронта, разделяющего устойчивое и неустойчивое (тривиальное) состояния равновесия. Асимптотически устойчивая скорость фронта легко оценивается на основе классических результатов Колмогорова, Петровского и Пискунова [3] для псевдоволны «заселённости»: $V_f \simeq 2\sqrt{f'(0)D_c} = 4\sqrt{\pi(\gamma_s - \sigma_0)} D_c$, т. е. скорость зависит от коэффициента диффузии. Характерная ширина фронта при этом равна $L_f \simeq \sqrt{D_c/f'(0)}$. Комбинируя (в одномерной постановке) две такие волны, бегущие в разные стороны, мы получаем решение в виде ограниченной области, занятой полем напряжённости E_0 и расширяющейся в обе стороны со скоростью, определяемой диффузией и интенсивностью процессов зарядки (см. раздел 3). Это решение может описывать рост грозовой ячейки на определённых этапах развития последней. Мы не будем здесь проводить более детальный анализ соответствия указанных автоволновых решений процессам в реальном грозовом облаке, отложив его до раздела 3.

2. ВЫВОД БАЗОВОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Основную систему уравнений удобно записать в виде [7]

$$\hat{A}_1 \rho_q = J + \nu_2 \rho_Q - (\nu_- \beta_{q-} - \nu_+ \beta_{q+}) \rho_q, \quad (9)$$

$$\hat{A}_2 \rho_Q = -J + \nu_1 \rho_q - (\nu_- \beta_{Q-} - \nu_+ \beta_{Q+}) \rho_Q, \quad (10)$$

$$\partial_z j_+ + \partial_t \rho_+ = I(E) - 4\pi B_+ \rho_+ (\rho_Q \beta_{Q+} + \rho_q \beta_{q+}) + \frac{\alpha}{e} \rho_+ \rho_-, \quad (11)$$

$$\partial_z j_- + \partial_t \rho_- = -I(E) + 4\pi B_- \rho_- (\rho_Q \beta_{Q-} + \rho_q \beta_{q-}) - \frac{\alpha}{e} \rho_+ \rho_-, \quad (12)$$

$$\partial_z E = 4\pi (\rho_+ + \rho_- + \rho_q + \rho_Q), \quad (13)$$

где $J = nNSU\xi \delta q_0$ — объёмный ток зарядки в системе, $\rho_q = qn$, $\rho_Q = QN$ — плотности заряда частиц, $\rho_{\pm} = \pm en_{\pm}$ — плотности заряда ионов, $\nu_{\pm} = 4\pi e |B_{\pm}| n_{\pm}$ — частота, характеризующая скорость диссипации заряда в невозмущённой слабоионизованной плазме, B_{\pm} — подвижности ионов, $B_+ > 0$, $B_- < 0$, α — коэффициент рекомбинации ионов, I — объёмный ток ионов; операторы \hat{A}_1 , \hat{A}_2 и токи j_{\pm} определяются как

$$\hat{A}_1 = v \partial_z + \partial_t + \nu_1, \quad (14)$$

$$\hat{A}_2 = u \partial_z + \partial_t + \nu_2, \quad (15)$$

$$j_{\pm} = (B_{\pm} E - D_c \partial_z) \rho_{\pm}. \quad (16)$$

Подчеркнём, что система (9)–(13) записана для случая $\{u, v, N, n\} = \text{const}$, соответствующего слабым электрическим полям $\{|Eq/m|, |EQ/M|\} \ll g$, где g — ускорение свободного падения (обобщение системы на случай сильных полей, используемое в численных расчётах, обсуждается ниже). Знак тока $J(E)$ определяет знак заряда на частицах аэрозоля в однородном пределе, т. е. если

$J(E) > 0$, то $q(t) > 0$, $Q(t) < 0$ при любых t . Коэффициенты $\beta_{q\pm}$ описывают эффективность прилипания ионов к аэрозолям и в общем случае зависят от многих параметров: внешнего электрического поля, заряда частицы, её скорости относительно газа, подвижности ионов. Например, в случае быстрых ионов $|EB_{\pm}| > \max\{|u|, |v|\}$ можно записать

$$\beta_{q+} = \frac{(1 - \bar{q})^2}{4\bar{q}}, \quad \beta_{q-} = \frac{(1 + \bar{q})^2}{4\bar{q}}, \quad \bar{q} = \frac{4q}{3|E|d^2}, \quad |\bar{q}| < 1. \quad (17)$$

Легко видеть, что знаки $\beta_{q\pm}$ совпадают со знаком заряда аэрозоля:

$$\beta_{q\pm} \Big|_{q<0} < 0; \quad \beta_{q\pm} \Big|_{q>0} > 0. \quad (18)$$

Соотношения (17) применимы, естественно, и для крупных частиц с заменой $q \rightarrow Q$, $d \rightarrow D$. В данной работе мы будем рассматривать случай, когда заряд на частицах достаточно большой ($|\bar{q}| \geq 1$, $|\bar{Q}| \geq 1$), тогда коэффициенты $\beta_{q\pm}$, $\beta_{Q\pm}$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} \beta_{q-} &\approx 1, \quad \beta_{q+} \approx 0, \quad q > 0; \\ \beta_{q-} &\approx 0, \quad \beta_{q+} \approx -1, \quad q < 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Очевидно, что для нахождения коэффициентов $\beta_{Q\pm}$ достаточно заменить q на Q в формулах (19). Ниже мы будем пользоваться упрощёнными соотношениями (19), считая $|\bar{q}| \geq 1$, $|\bar{Q}| \geq 1$.

Следствием системы (9)–(13) является эволюционное уравнение для электрического поля:

$$\partial_t E = -4\pi(j_+ + j_- + u\rho_Q + v\rho_q). \quad (20)$$

В дальнейших расчётах будем пользоваться следующими обозначениями для суммарных и разностных токов:

$$j_i = j_+ + j_-, \quad j'_i = j_+ - j_-, \quad j_A = v\rho_q + u\rho_Q, \quad j'_A = v\rho_q - u\rho_Q, \quad (21)$$

и аналогично для плотности заряда ионов и аэрозолей

$$\rho_i = \rho_+ + \rho_-, \quad \varrho_i = \rho_+ - \rho_-, \quad \rho_A = \rho_q + \rho_Q, \quad \varrho_A = \rho_q - \rho_Q. \quad (22)$$

Перед тем, как применить данные соотношения к исходной системе (9)–(13), перепишем уравнения зарядки (9), (10) с учётом подстановки нелинейных членов $\rho_{\pm}\rho_{Q,q}$ из уравнений баланса ионов (11), (12). В результате получим систему, содержащую производные от ионного тока и плотности заряда:

$$\partial_z j_- + \partial_t \rho_- + \hat{A}_1 \rho_q = \tilde{J} + \nu_2 \rho_Q - \frac{\alpha}{e} \rho_+ \rho_-, \quad (23)$$

$$\partial_z j_+ + \partial_t \rho_+ + \hat{A}_2 \rho_Q = -\tilde{J} + \nu_2 \rho_q + \frac{\alpha}{e} \rho_+ \rho_-, \quad (24)$$

где $\tilde{J} = J - I(E)$. Разрешая уравнения (23), (24) относительно ρ_q , ρ_Q , получаем

$$\hat{G} \rho_q = (\partial_t + u\partial_z)(\tilde{J} - \partial_z j_- - \partial_t \rho_-) - \nu_2(\partial_z j_+ + \partial_t \rho_+) - \frac{\alpha}{e}(\hat{A}_2 - \nu_2)\rho_+ \rho_-, \quad (25)$$

$$\hat{G} \rho_Q = -(\partial_t + v\partial_z)(\tilde{J} + \partial_z j_+ + \partial_t \rho_+) - \nu_1(\partial_z j_- + \partial_t \rho_-) + \frac{\alpha}{e}(\hat{A}_1 - \nu_2)\rho_+ \rho_-, \quad (26)$$

где $\widehat{G} = \widehat{A}_1 \widehat{A}_2 - \nu_1 \nu_2$. Теперь, складывая уравнения (25), (26) и произведения уравнений (25), (26) на скорости v, u , получим уравнения, описывающие эволюцию плотности заряда аэрозолей ρ_A и ток $j_A = v\rho_q + u\rho_Q$:

$$\widehat{G}\rho_A = U \partial_z \left\{ \tilde{J} + \frac{1}{2} (\partial_z j'_i + \partial_t \varrho_i) - \frac{\alpha}{e} \rho_+ \rho_- \right\} + \widehat{L}_1 (\partial_z j_i + \partial_t \rho_i), \quad (27)$$

$$\widehat{G}j_A = -U \partial_t \left\{ \tilde{J} + \frac{1}{2} (\partial_z j'_i + \partial_t \varrho_i) - \frac{\alpha}{e} \rho_+ \rho_- \right\} - \widehat{L}_2 (\partial_z j_i + \partial_t \rho_i), \quad (28)$$

где операторы первого порядка $\widehat{L}_1, \widehat{L}_2$ имеют вид

$$\widehat{L}_1 = \nu_1 + \nu_2 + \partial_t + \frac{u+v}{2} \partial_z, \quad \widehat{L}_2 = uu_1 + vv_2 + \frac{u+v}{2} \partial_t + uv \partial_z, \quad (29)$$

причём выполняется тождество $\partial_z \widehat{L}_2 + \partial_t \widehat{L}_1 = \widehat{G}$. Уравнения баланса ионов удобно переписать для величин ϱ_i, ϱ_A :

$$\widehat{D}\varrho_i = 2\pi B (\varrho_i \rho_A - \rho_i \varrho_A) - B \partial_z (E \varrho_i), \quad (30)$$

$$\widehat{D}\varrho_A = 2I + \frac{\alpha}{2e} (\rho_i^2 - \varrho_A^2) + 2\pi B (\rho_i \rho_A - \varrho_i \varrho_A) - B \partial_z (E \rho_i), \quad (31)$$

где $\widehat{D} = \partial_t - D \partial_z^2$ — диффузионный оператор. Также мы положили $B_+ = -B_- = B$. В дальнейших расчётах мы будем предполагать, что относительные отклонения от квазинейтрального состояния для аэрозолей и ионов малы:

$$\rho_i^2 \ll \varrho_i^2, \quad \rho_i \rho_A \ll \varrho_i \varrho_A. \quad (32)$$

Данное предположение позволяет существенно упростить второе уравнение в системе (30), (31), записав его в виде

$$\widehat{D}\varrho_i = 2I - \frac{\alpha}{2e} \varrho_i^2 - 2\pi B \varrho_i \varrho_A - B \partial_z (E \varrho_i). \quad (33)$$

Найдём связь между переменными ρ_A и ϱ_A . Для этого подставим величину $\partial_z j'_i + \partial_t \varrho_i$ из последнего уравнения в (27). В результате с учётом (16), (21) получим

$$\widehat{G}\rho_A = U \partial_z \{ J - \pi B \varrho_i \varrho_A \} + \widehat{L}_1 (\partial_z j_i + \partial_t \rho_i). \quad (34)$$

Для вычисления последнего слагаемого используем закон сохранения заряда

$$\partial_z j_i + \partial_t \rho_i = -\partial_z j_A - \partial_t \rho_A, \quad (35)$$

а также более подробное выражение для тока аэрозолей:

$$j_A = v\rho_q + u\rho_Q = \frac{u+v}{2} \rho_A - \frac{U}{2} \varrho_A. \quad (36)$$

Уравнение для ρ_A перепишется в виде

$$\widehat{G}\rho_A = U \partial_z \{ J - \pi B \varrho_i \varrho_A \} + \widehat{L}_1 \left(\partial_t \rho_A + \frac{u+v}{2} \partial_z \rho_A - \frac{U}{2} \partial_z \varrho_A \right). \quad (37)$$

Как следует из вида уравнения (37), а также из структуры оператора \widehat{G} , можно упростить линейные операторы, перейдя в систему отсчёта, движущуюся со скоростью $(u+v)/2$ вдоль оси z . Таким образом, после замены $\partial_t \rightarrow \partial_t - \partial_z (u+v)/2$, произведя интегрирование (37) по z и разделив полученное уравнение на $U/2$, мы придём к уравнению

$$\left(\nu_1 - \nu_2 - \frac{U}{2} \partial_z \right) \rho_A + (\nu_1 + \nu_2 + \partial_t) \varrho_A = 2 (J - \pi B \varrho_i \varrho_A). \quad (38)$$

Необходимо подчеркнуть, что операторы \widehat{G} , \widehat{L}_1 и \widehat{D} , введённые выше, в новой системе отсчёта будут иметь следующий вид:

$$\widehat{G}' = \partial_t^2 - \frac{U^2}{4} \partial_z^2 + (\nu_1 + \nu_2) \partial_t + (\nu_1 - \nu_2), \quad \widehat{L}'_1 = \nu_1 + \nu_2 + \partial_t, \quad \widehat{D}' = \partial_t - \frac{u+v}{2} \partial_z - D \partial_z^2. \quad (39)$$

Для полноты системы (20), (33), (38) необходимо ещё одно уравнение, связывающее ϱ_i , ϱ_A , ρ_A и E . Очевидно, это уравнение (30), и его можно привести к уравнению первого порядка:

$$\partial_t \rho_A + 2\pi B (\varrho_i + \varrho_A) \rho_A = \frac{U}{2} \partial_z \varrho_A + \frac{B}{2} \varrho_A \partial_z E, \quad (40)$$

где мы использовали закон сохранения заряда и уравнение Пуассона, исключив из (30) ток j_i и плотность заряда ρ_i . В правой части полученного уравнения стоят источники, связанные с пространственной неоднородностью параметров, а характерное время релаксации плотности заряда аэрозолей ρ_A оказывается равным $1/[2\pi B (\varrho_i + \varrho_A)]$. Эволюционное уравнение для поля (20) удобно переписать в виде

$$\widehat{D}' E = -4\pi \left\{ BE \varrho_i + \left(\frac{u+v}{2} + D \partial_z \right) \rho_A \right\} + 2\pi U \varrho_A. \quad (41)$$

Как видим, уже для весьма простой исходной композиционной модели среды система уравнений для описания её электродинамики оказывается очень сложной.

Чтобы рассмотреть предельно простой случай, положим

$$|\rho_A| \ll |\varrho_A|, \quad |U \partial_z \rho_A| \ll |\partial_t \varrho_A|, \quad D |\partial_z \rho_A| \ll |U \varrho_A|, \quad |\partial_z (E \varrho_i)| \ll |\varrho_A \varrho_i|, \quad (42)$$

тогда динамика электрического поля не зависит от плотности ρ_A в силу малости последней. В результате уравнение (40) оказывается независимым уравнением, нужным лишь для определения ρ_A , а система, описывающая распределение поля, записывается в виде

$$\widehat{D}' E = -4\pi B E \varrho_i + 2\pi U \varrho_A, \quad (43)$$

$$\widehat{D}' \varrho_i = 2I - \frac{\alpha}{2e} \varrho_i^2 - 2\pi B \varrho_i \varrho_A, \quad (44)$$

$$\partial_t \varrho_A = 2J - (\nu_1 + \nu_2 + 2\pi B \varrho_i) \varrho_A. \quad (45)$$

Система уравнений (43)–(45) будет проанализирована в следующем разделе применительно к условиям типичного грозового облака.

Отправной точкой для нахождения $I(E)$ послужит эмпирическая зависимость тока ионной проводимости от поля, приведённая в работе [10] и уже использованная в первом разделе:

$$j_{\text{dis}} = j_0 [\exp(E/E_c) - 1], \quad (46)$$

где E_c — экспоненциальный порог роста коронного тока. В статье [10] приведено значение $E_c = 5$ ед. СГС, j_0 определяется через E_c и n_0 — концентрацию ионов без учёта коронирования и взаимодействия с аэрозолями:

$$j_0 = 2eBn_0E_c, \quad n_0^2 = I_0/\alpha. \quad (47)$$

В (47) ионные подвижности полагаются равными: $B_+ = -B_- = B$, I_0 — скорость генерации ионов, обусловленная внешним источником ионизации. Аналогично можно представить ток диссипации:

$$j_{\text{dis}} = 2eBn_iE. \quad (48)$$

Теперь, подставив (47), (48) в (46), получим

$$n_i = n_0 \frac{E_c}{E} [\exp(E/E_c) - 1]. \quad (49)$$

Очевидно, что в случае слабых полей ($E \ll E_c$) данное выражение даёт $n_i = n_0$. Теперь, используя уравнение $n_i^2 = I(E)/\alpha$, легко получить, что

$$I(E) = I_0 (E_c/E)^2 [\exp(E/E_c) - 1]^2. \quad (50)$$

Предположим, что при наличии взаимодействия между аэрозольными частицами справедливость (50) сохранится. Тогда для определения стационарных значений ϱ_i , ϱ_A достаточно решить систему

$$2I(E) = \frac{\alpha}{2e} \varrho_i^2 + 2\pi B \varrho_i \varrho_A, \quad (51)$$

$$2J = (\nu_1 + \nu_2 + 2\pi B \varrho_i) \varrho_A, \quad (52)$$

подставив $I(E)$ в виде (50).

Сделаем также некоторые обобщения, необходимые, в частности, для проведения численных расчётов. Для нахождения плотностей $\varrho_i \approx 2n_i e$ и $\varrho_A \approx 2nq = -2NQ$ нужно учесть зависимость скорости частиц от их заряда и электрического поля. При численном решении системы (51), (52) для определения u , v мы будем пользоваться следующим уравнением (см. [13]):

$$\frac{1}{\alpha} \left| \frac{qE}{m} + g \right| = |v| (1 + \alpha_2 |v|^s), \quad \alpha = \frac{18\nu\rho_{air}}{\rho_m d^2}, \quad \alpha_2 = 0,15 (d/\nu)^s, \quad s = 0,687, \quad (53)$$

где ρ_{air} , ρ_m — плотность воздуха и частиц соответственно, ν — кинематическая вязкость воздуха, а знак скорости v определяется знаком ускорения $g + Eq/m$. Для оценок мы будем брать $\rho_{air} \sim \sim 10^{-3}$ г/см³, $\rho_m \sim 1$ г/см³, $\nu \sim 0,15$ см²/с. Уравнение (53) применимо до значений числа Рейнольдса $Re_d \leq 1000$, максимальная погрешность вычисления скорости составляет не более 2 %.

3. АВТОВОЛНОВЫЕ РЕШЕНИЯ

Для анализа системы уравнений (43)–(45) заметим, что характерные времена установления распределений E , ϱ_i и ϱ_A могут существенно различаться. Если концентрация ионов не слишком велика и контролируется процессами прилипания к аэрозолям ($4\pi eB\varrho_A \gg \alpha\varrho_i$), а зарядка аэрозолей ограничивается, в первую очередь, ёмкостными эффектами ($\nu_1 + \nu_2 \gg 2\pi B\varrho_i$), то время установления концентрации ионов $\tau_{\varrho_i} \simeq (2\pi B\varrho_A)^{-1}$ можно считать большим по сравнению с временем установления концентрации аэрозолей $\tau_{\varrho_A} \simeq (\nu_1 + \nu_2)^{-1}$. В свою очередь, время установления электрического поля τ_E , определяемое как процессами прилипания ионов, так и зависимостью тока зарядки от E , мало по сравнению с временем установления концентрации ионов. В этом случае можно считать, что ϱ_A равно своему стационарному значению, обращающему в нуль правую часть уравнения (45), и система принимает вид

$$\hat{D}'E = -4\pi BE\varrho_i + 4\pi UJ(\nu_1 + \nu_2)^{-1}, \quad (54)$$

$$\hat{D}'\varrho_i = 2I - 4\pi BJ\varrho_i(\nu_1 + \nu_2)^{-1}. \quad (55)$$

Система уравнений (54), (55) является типичной при описании автоволновых процессов в неравновесных средах [2, 3]. Базисными решениями такой системы, наиболее часто наблюдаемыми в экспериментах, являются решения в виде бегущих фронтов или бегущих импульсов.

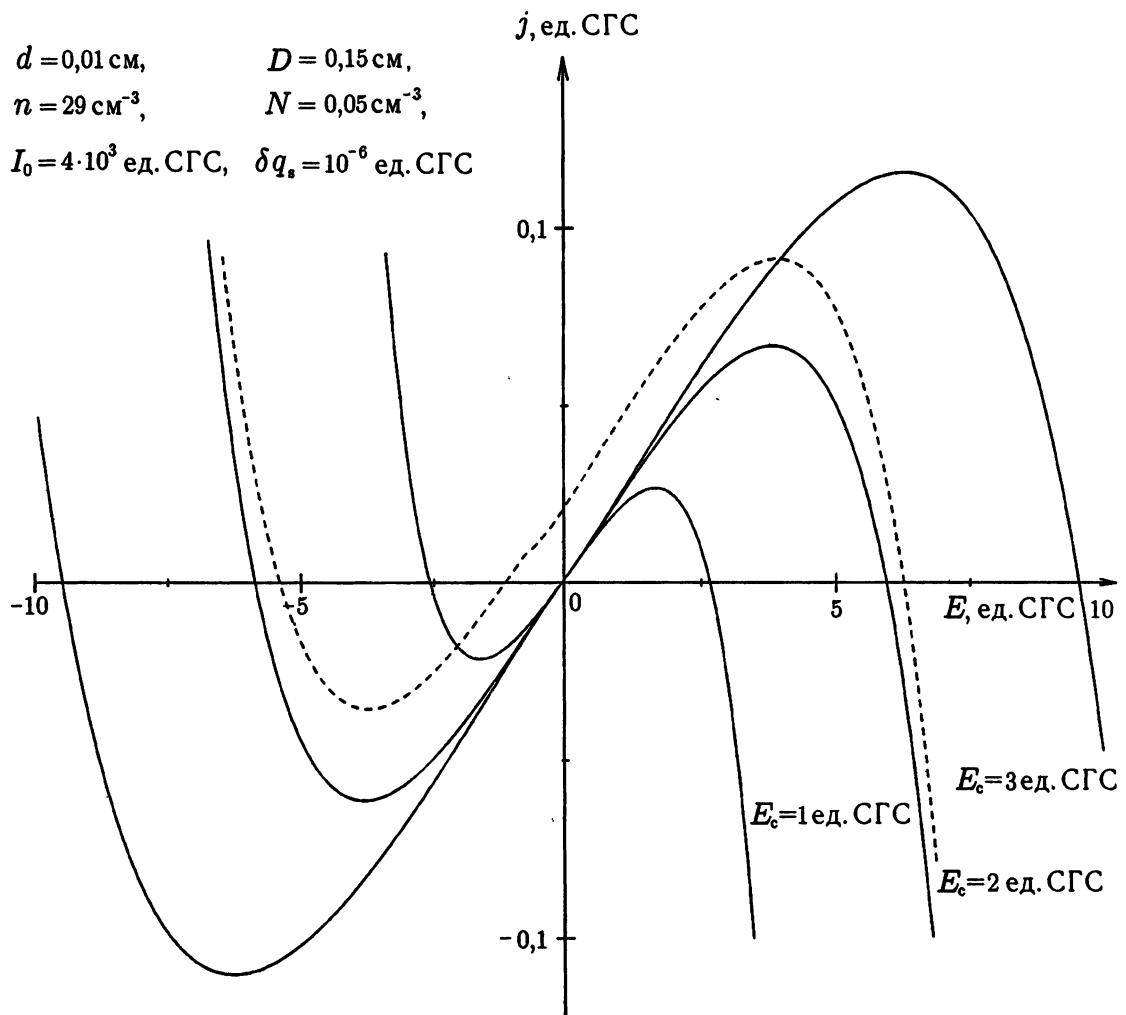


Рис. 3. Зависимость полного тока от напряжённости электрического поля для различных критических полей E_c . Сплошные линии отвечают данным, приведённым на рисунке. Пунктир отвечает случаю $\delta q_s = 10^{-5}$ ед. СГС

Достаточно простой анализ уравнений (54), (55) возможен в случае $\tau_E \ll \tau_{\varrho_i}$, когда применим качественный метод разделения движений на быстрые и медленные [2]. На этапе быстрого движения переменную ϱ_i можно считать равной своему квазистационарному значению, так что поведение поля описывается диффузионным уравнением, совпадающим (для данной модели) с уравнением (1), полученным в разделе 1 феноменологически. Как уже отмечалось, нетривиальные решения этого уравнения возможны при наличии N-образной зависимости тока от напряжённости электрического поля.

На рис. 3 изображены зависимости полного тока от напряжённости электрического поля в грозовой ячейке для различных критических полей E_c . Сплошные линии отвечают данным, приведённым на рисунке. Пунктир отвечает случаю $\delta q_s = 10^{-5}$. Здесь и в дальнейшем, если это не оговорено особо, все единицы записаны в системе СГС.

Мы видим, что при $\delta q_s \neq 0$ (когда существенна безындукционная зарядка) график $j(E)$ теряет симметричность, и в случае $\delta q_s > 0$ неустойчивая точка $E = 0$ смещается в область отрицательного электрического поля. В обратном случае $\delta q_s < 0$, очевидно, произойдет смещение в область положительных полей.

Решение в виде бегущего фронта, разделяющего устойчивое и неустойчивое (тривиальное) состоя-

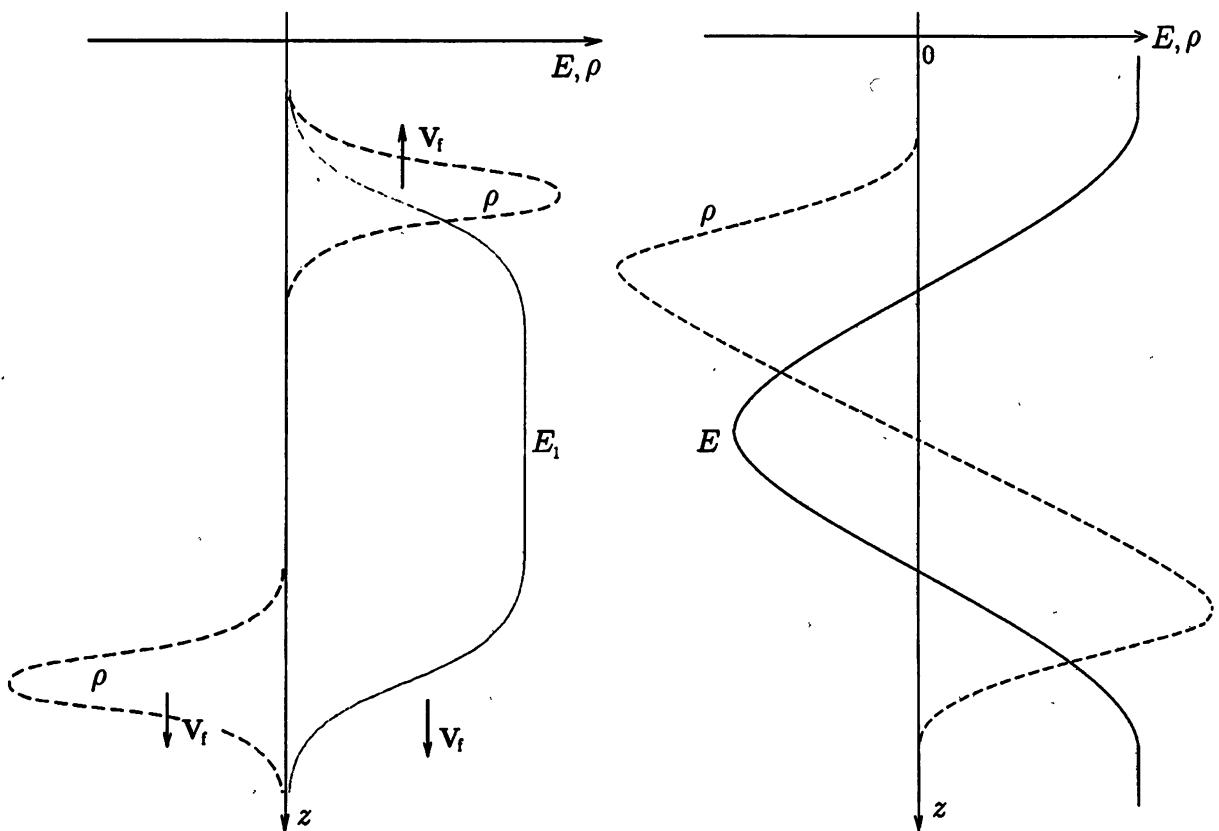


Рис. 4. Решение в виде пары бегущих фронтов (а); решение, соответствующее переходу из одного устойчивого состояния в другое (б)

ния равновесия, уже было кратко описано в разделе 1. Теперь, имея результаты численных расчётов для реальных условий облака, мы можем оценить скорость фронта волны «заселённости» $V_f = 4\sqrt{\pi(\gamma_s - \sigma_0)} D_c$. Полагая на основании рис. 3 $f'(0) = \gamma_s - \sigma_0 \simeq 2 \cdot 10^{-2} \text{ с}^{-1}$, $D_c = VL \simeq 4 \text{ м}^2/\text{с}$, получим для скорости фронта $V_f \simeq 2 \text{ м/с}$ и для его характерной толщины $L_f = \sqrt{D_c/f'(0)} \simeq 14 \text{ м}$. Комбинируя (в одномерной постановке) две такие волны, бегущие в разные стороны, мы получаем решение в виде ограниченной области, занятой полем напряжённости E_1 и расширяющейся в обе стороны со скоростью V_f (представлено схематично на рис. 4а). Это решение описывает рост грозовой ячейки на этапе её интенсивной электризации. Легко сделать оценку скорости роста электростатической энергии грозовой ячейки на основе вышеприведённых скоростей фронта и электрического поля в состоянии равновесия: $P = 2V_f S_c E_1^2 / (8\pi)$, где S_c — площадь области взаимодействия (грозовой ячейки). Полагая $E_1 \simeq 5 \text{ ед. СГС}$ и $S_c \simeq 5 \text{ км}^2$, находим $P = 2V_f S_c E_1^2 / (8\pi) \simeq 2 \text{ МВт}$. Для процесса электризации длительностью порядка 10 минут получаем значение запасаемой энергии (освобождаемой затем в процессе вспышки молнии) порядка 1 ГДж. Приведённые оценки, в принципе, удовлетворительно соответствуют характерным значениям энергии, освобождаемой во время вспышки [14].

Решение в случае симметричной кривой $j(E)$, соответствующее переходу из одного устойчивого состояния в другое, что отвечает нулевой скорости в рассматриваемой системе отсчета и схематично описывает дипольное («главное») распределение заряда в грозовой ячейке, схематично изображено на рис. 4б.

На рис. 5 показаны рассчитанные численно ионная частота релаксации (с точностью до коэффициента совпадающая с концентрацией ионов n_i) в зависимости от электрического поля (сплошные линии)

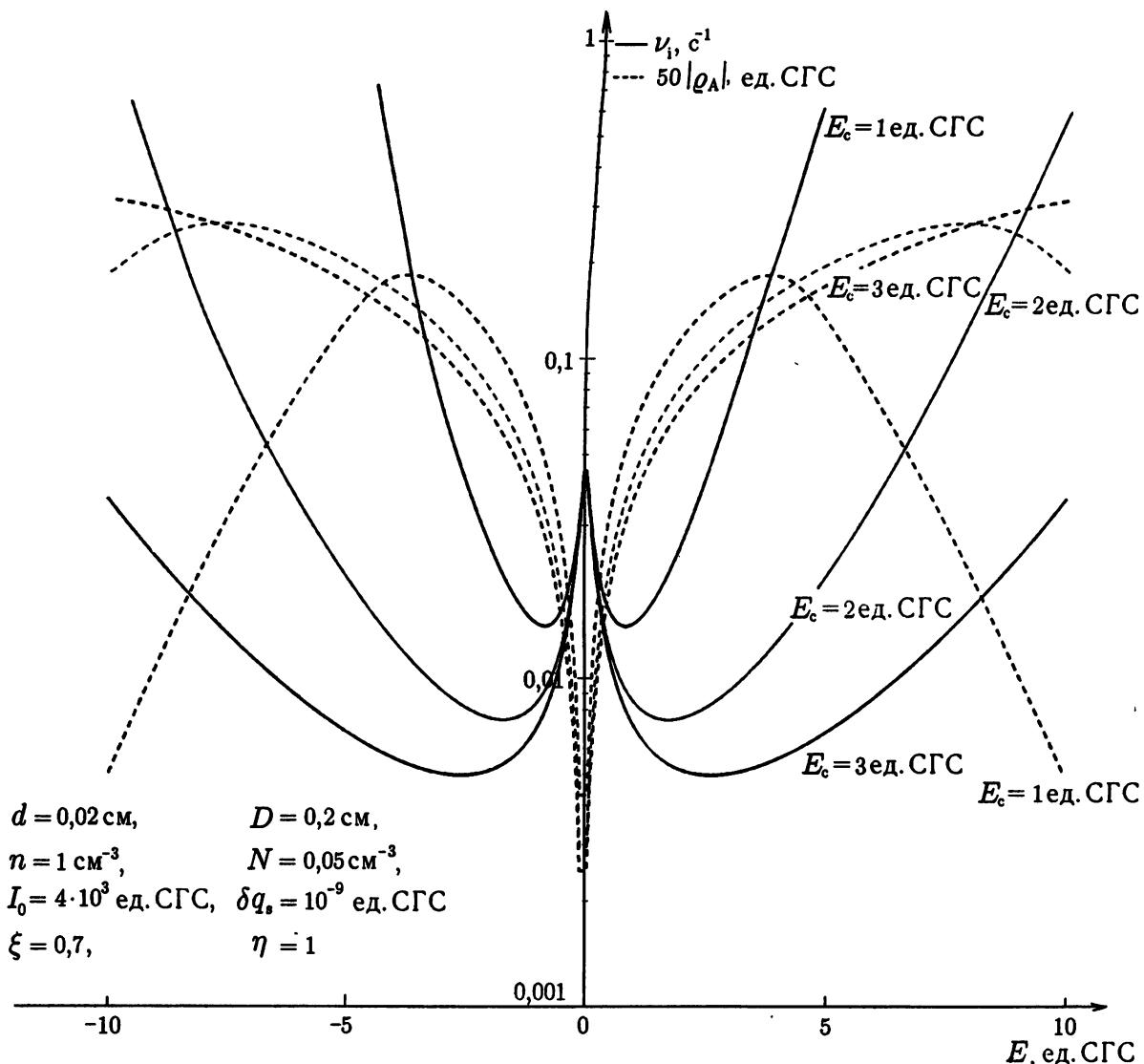


Рис. 5. Сплошные линии — ионная частота релаксации ν_i (с точностью до коэффициента совпадающая с концентрацией ионов n_i), пунктир — зарядовая плотность аэрозольных частиц ρ_A .

и зарядовая плотность аэрозольных частиц $\rho_A(E)$ (пунктир). Зависимости приведены для разных значений критического поля. Быстрое уменьшение $\nu_i(E)$ при малых полях связано с прилипанием ионов к аэрозолям, т. е. обеднением ионной компоненты среды. Минимум и дальнейший рост зависимостей обусловлены дополнительным притоком ионов обоих знаков вследствие коронирования аэрозольных частиц. Первоначальный рост зарядовой плотности аэрозольных частиц $\rho_A(E)$ связан с преобладанием индукционного тока зарядки (последний в простейшем случае линейно растёт с ростом поля), тогда как в сильном поле проявляется «заяв», обусловленный ростом тока диссипации (в общем случае уменьшение дифференциальной скорости U в сильном поле также способствует уменьшению ρ_A).

Как мы уже упоминали, в достаточно сильных полях начинает сказываться зависимость дифференциальной скорости U от напряжённости поля, приводящая к падению эффективности зарядки.

Для иллюстрации этого эффекта при соответствующих параметрах компонент грозового облака

на рис. 6 построены зависимости токов сепарации и диссипации от напряжённости электрического поля в облаке. На рисунке виден характерный эффект уменьшения тока сепарации за счёт уменьшения дифференциальной скорости U в сильном поле. Эффект резкого роста $j_{\text{dis}}(E)$ обусловлен пороговой (экспоненциальной) зависимостью тока коронирования от поля (см. формулу (3)). Когда поле достаточно велико, для выполнения условия "компенсации" $j_{\text{sep}} = j_{\text{dis}}$ при большем ξ требуется большее количество ионов, что хорошо видно на рис. 6. По существу, кривые j_{sep} и j_{dis} представляют собой нуль-изоклины системы уравнений (54), (55). Они показывают, что описываемая система обычно находится в триггерном режиме. Однако в случае большого тока безындукционной зарядки система может перейти в ждущий режим.

Для последнего случая на рис. 7 показан фазовый портрет точечной системы (54), (55), схематично иллюстрирующий возможность формирования бегущего импульса в соответствующей распределённой ЭГД системе. Точка A отвечает устойчивому состоянию равновесия, где система находится в ждущем режиме. Если система каким-либо образом выводится из состояния равновесия так, что изображающая точка O оказывается слева от кривой неустойчивых состояний BC , она по горизонтальной траектории быстро переходит в точку D , что соответствует формированию переднего фронта импульса, а затем эволюционирует в соответствии с уравнением медленного движения (52). При этом ток в системе плавно уменьшается, а поле плавно растёт. В точке C происходит «срыв» медленного движения, и система быстро пере-

ходит на правую ветвь изоклины (в точку G). При этом формируется задний фронт импульса, который движется в ту же сторону, что и передний при условии, что точка A лежит выше точки H , соответствующей критическому значению тока, когда скорость фронта обращается в нуль. В итоге система медленно возвращается в исходное состояние равновесия A . Для аналогичной системы уравнений Фитц—Хью—Нагумо, как известно [2], подобное решение в виде бегущего импульса является устойчивым (неустойчивое решение отвечает возврату изображающей точки в состояние равновесия при её незначительном отклонении от состояния равновесия, когда система находится справа от ветви BC).

Разумеется, динамика поля в грозовой ячейке приобретает качественно новые черты (по сравнению с вышеприведённой картиной) в случае достижения полем пробойного значения (когда, например, пробойное поле оказывается меньше равновесного значения E_1 , определяемого процессами коронирования). В этом случае развивается вспышка молнии (внутриоблачный искровой разряд или разряд облако—Земля), который приводит к мгновенному (в масштабе рассматриваемых выше характерных

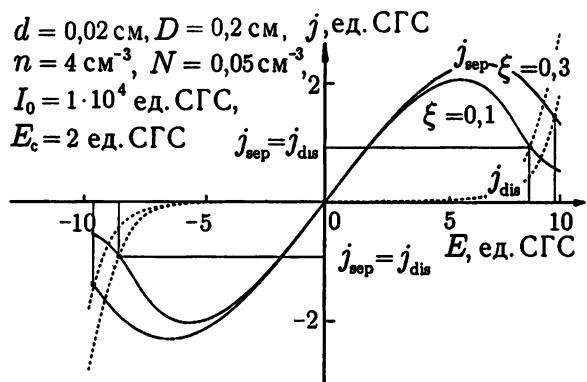


Рис. 6. Зависимости токов сепарации и диссипации от напряжённости электрического поля в облаке

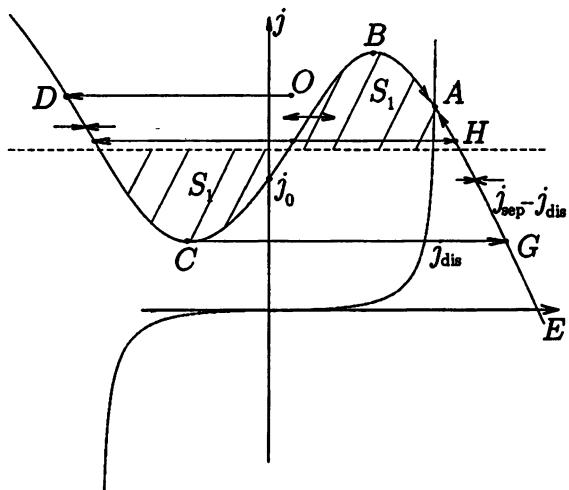


Рис. 7. Фазовый портрет точечной системы (54), (55), схематично иллюстрирующий возможность формирования бегущего импульса в соответствующей распределённой ЭГД системе

промежутков времени) переходу системы в состояние, близкое к исходному неустойчивому состоянию. Далее снова начинается процесс крупномасштабной зарядки, т. е. динамика системы соответствует автоколебательному режиму до тех пор, пока существенно не изменяются внешние условия (снижение интенсивности конвективного воздушного потока, падение концентрации аэрозолей и т. д.). Подобные режимы нетрудно идентифицировать на записях напряжённости электрического поля при баллонных измерениях в грозовых облаках (см., например, [4]), однако их анализ выходит за рамки настоящей статьи.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе рассмотрена одномерная нелинейная система уравнений, описывающая динамику электрического поля в ансамбле сталкивающихся аэрозолей и лёгких ионов, которая редуцируется к достаточно простой базовой модели, имеющей автоволновые решения в виде бегущих фронтов и бегущих импульсов. Найденные аналитические решения и выполненные численные расчёты позволяют описать элементы динамики грозовой ячейки в условиях её активной электризации, что необходимо для изучения фундаментальной проблемы грозового электричества — динамики роста крупномасштабного электрического поля на стадии, предшествующей пробою, с учётом различных механизмов зарядки аэрозольных частиц. Показано принципиальное значение совместного учёта как индукционных, так и безындукционных механизмов зарядки аэрозолей в процессе электризации облака. Несмотря на простоту рассмотренной модели, она позволяет выявить нетривиальные особенности эволюции поля, связанные с учётом процессов коронирования и турбулентной диффузии заряда. В качестве отдельных структурных элементов полученные выше уравнения и найденные решения могут быть использованы в более детальных трёхмерных численных моделях эволюции грозовых облаков, построение которых — дело ближайшего будущего.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 00–02–17758) и Совета по грантам Президента РФ (грант № 00–15–99306).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Трахтенгерц В. Ю., Мареев Е. А., Сорокин А. Е. // Изв. вузов. Радиофизика. 1997. Т. 40, № 1–2. С. 123.
2. Васильев В. А., Романовский Ю. М., Яхно В. Г. Автоволновые процессы. М: Наука, 1987. 240 с.
3. Лоскутов Л. Д., Михайлов Е. М. Введение в синергетику. М: Наука, 1990. 312 с.
4. MacGorman D. R., Rust W. D. The electrical nature of storms. Oxford University Press: New-York—Oxford, 1998. 421 p.
5. Norville K., Baker M. B., Latham J. // J. Geophys. Res. D. 1991. V. 96, No. 4. P. 7463.
6. Levin Z., Tzur I. // The Earth's Electrical Environment / Ed. by E. P. Krider and R. G. Roble. Washington, D.C.: National Academy Press, 1986. P. 131.
7. Мареев Е. А., Сорокин А. Е., Трахтенгерц В. Ю. // Физика плазмы. 1999. Т. 25, № 3. С. 289.
8. Mason J. // Proc. of the Royal Society of London. 1988. V. 415, No. 1829. P. 303.
9. Mareev E. A. // Proc. 11th Int. Conf. on Atmospheric Electricity, Huntsville, USA, June 1999. P. 272.
10. Beesley G., Illingworth A. J., Latham J. // Electrical Processes in Atmospheres / Ed. by H. Dolezalek. Verlag: Darmstadt, 1977. P. 279.
11. Beard W. A., Oks R. V. // The Earth's Electrical Environment / Ed. by E. P. Krider and R. G. Roble. Washington, D.C.: National Academy Press, 1986. P. 114.
12. Мучник В. М., Фишман Б. Е. Электризация грубодисперсных аэрозолей. Л.: Гидрометеоиздат, 1971.

13. Cliff R., Gouvin W. H. // Canad. J. Chem. Eng. 1971. V. 49. P. 439.
14. Чалмерс Дж. А. Атмосферное электричество. Л.: Гидрометеоиздат, 1974. 422 с.

Институт прикладной физики РАН,
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию
2 февраля 2001 г.

AUTOWAVE REGIMES OF THUNDERSTORM CLOUD ELECTRIFICATION .

E. A. Mareev and A. E. Sorokin

We consider the evolution of electric field and space charge in a one-dimensional electrohydrodynamical (EHD) system which serves as a simple model of a thunderstorm cloud. The diffusion equation for the electric field is proposed, which, under reasonable assumptions on the nonlinear dependence of the dissipation current on the electric-field amplitude (caused by the corona effect around aerosol particles in a strong external field), has autowave solutions describing the dynamics of spatially separated electric-charge regions inside the cloud. The nonlinear set of equations, which describes the electric-field dynamics in the ensemble of light ions and colliding aerosols, is reduced to a sufficiently simple base model having running-front and running-pulse solutions. We find the asymptotic values for the velocity and thickness of the space-charge front, which are determined by the diffusion and the parameters of separation and dissipation currents. Using these values, we estimate the electrostatic-energy growth rate for a thunderstorm cell at the stage of its intense development. The possibility of a running-pulse formation in a similar EHD system with allowance for both inductive and non-inductive mechanisms of aerosol-particle charging is pointed out.

УДК 533.9

ПРИЁМНАЯ АНТЕННА В МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ В РЕЗОНАНСНОЙ ПОЛОСЕ ЧАСТОТ

Ю. В. Чугунов

Найдено среднеквадратичное напряжение на приёмной дипольной антенне, находящейся в электромагнитном поле пакета квазипотенциальных волн в магнитоактивной плазме в резонансной полосе частот. Показано, что это напряжение можно определить как произведение амплитуды электрического поля в падающей волне на эффективную длину приёмной антенны L_{eff} , которая для короткого диполя (длина которого много меньше длины электромагнитной волны) пропорциональна произведению эффективной длины диполя в вакууме на коэффициент возбуждения квазиэлектростатических волн (или ненормированную диаграмму направленности дипольного излучателя по электрическому полю). При расположении приёмной антенны вблизи резонансного конуса в области света этот коэффициент возбуждения много больше единицы, поэтому найденное напряжение существенно отличается от распространённой оценки, выполненной по формулам, справедливым для антенн в вакууме. Вычисления сделаны с помощью теоремы взаимности и флукуационно-диссипативной теоремы, применённой к регулярному электромагнитному полю и приёмной антенне как частному случаю неравновесной системы, в которой устанавливается равновесие (стационарное состояние) между падающим полем излучения и переизлученным антенной электромагнитным полем. Отмечается универсальность использованной процедуры вычислений, справедливой для любых антенн и материальных сред.

ВВЕДЕНИЕ

Как известно [1], для короткого диполя ($L \ll \lambda$) в вакууме среднеквадратичное значение напряжения на приёмной антенне, возникающего под действием электромагнитной волны, равно

$$V = E(L/2) F(\Theta_0, \Phi_0), \quad (1)$$

где E — амплитуда электрического поля падающей электромагнитной волны, L — длина антенны, $F(\Theta_0, \Phi_0)$ — диаграмма направленности приёмной антенны по электрическому полю в направлении приёма (ненормированная), λ — длина электромагнитной волны, Θ_0 и Φ_0 — полярный и азимутальный углы, характеризующие направление из точки приёма в точку излучения. Эту формулу удобно переписать в виде произведения амплитуды электрического поля падающей волны на эффективную (или действующую) длину приёмной антенны L_{eff} , которая в общем случае может быть записана в виде $L_{\text{eff}} = L(\mathbf{e}, \mathbf{l}) \Theta(\Theta_0, \Phi_0)$, который отражает линейную зависимость среднеквадратичного напряжения (1) от длины приёмной антенны, пропорциональность этого напряжения диаграмме направленности, а также пропорциональность его геометрическому фактору, связанному с векторностью рассматриваемых полей. Последнее обстоятельство есть зависимость коэффициента возбуждения тока в приёмной антенне от взаимной ориентации вектора электрического поля и единичного вектора, направленного вдоль приёмной антенны. Для линейных антенн это скалярное произведение единичных векторов \mathbf{e} вдоль электрического поля и \mathbf{l} вдоль оси диполя. В вакууме для короткого диполя произведение $(\mathbf{e}, \mathbf{l}) \tilde{F}(\Theta_0, \Phi_0) = F(\Theta_0, \Phi_0)/2$. В среде с пространственной и временной дисперсией, каковой является магнитоактивная плазма в резонансных частотных интервалах, расчёт напряжения на приёмной антенне является сложной электродинамической задачей даже для короткого диполя. Отчасти это следует из анализа полей излучения дипольных антенн в магнитоактивной плазме в резонансных частотных интервалах, т. е. в полосе частот, где выполнено условие $\epsilon_1(\omega)\epsilon_3(\omega) < 0$. Здесь $\epsilon_1(\omega)$ и

Ю. В. Чугунов

$\epsilon_3(\omega)$ — диагональные компоненты тензора диэлектрической проницаемости $\epsilon_{\alpha\beta}$ ($\epsilon_1(\omega)$ соответствует диэлектрической проницаемости поперёк, а $\epsilon_3(\omega)$ — вдоль внешнего магнитного поля) однородной плазмы, $\omega = 2\pi f$, f — частота излучения [2, 3]. В этих частотных интервалах поверхность волновых векторов не является замкнутой и имеет гиперболический вид вблизи резонансного угла $\vartheta_{res} = \operatorname{ctg} \mu$, где $\mu = |\epsilon_1/\epsilon_3|^{1/2}$, при котором модуль волнового числа $k \rightarrow \infty$. В окрестности резонансного угла существуют сильно замедленные электромагнитные волны, в которых электрическое поле много больше магнитного. Источник (антенна) эффективно возбуждает эти собственные колебания плазмы, распространяющиеся в виде пространственного пакета плоских квазистатических волн, если характерный размер антенны L мал по сравнению с характерной длиной электромагнитной волны λ . При этом амплитуда электрического поля антенны вблизи резонансного конуса резко возрастает, а в импедансе антенны возрастает действительная часть, связанная с возбуждением этих волн. Соответствующие условия (резонансная частота, $L \ll \lambda$) будем называть в дальнейшем резонансными. Величина λ в конкретном диапазоне частот легко определяется из вида волновой поверхности. Так, в сильно замагниченной плазме при $\omega \ll \omega_{pe}$, где ω_{pe} — электронная плазменная частота, $\lambda = 2\pi c/\omega_{pe}$ — длина волны необыкновенной поляризации, распространяющейся вдоль внешнего магнитного поля.

Как следует из аналитических и численных расчётов, структура возбуждаемого пространственного пакета квазипотенциальных волн имеет достаточно сложный характер [2]. В частности, резко меняется диаграмма направленности, соотношения между фазовой и групповой скоростями и т. д. по сравнению с вакуумным случаем. Понятно в этой связи, что получение аналога соотношения (1) для магнитоактивной плазмы в резонансных условиях нужно проводить посредством расчёта полной линии передачи излучатель — приёмник. Единственный относительно простой путь такого расчёта для определения напряжения на приёмной антенне — использование теоремы взаимности.

1. РАСЧЁТ СПЕКТРАЛЬНОЙ МОЩНОСТИ ИЗЛУЧЕНИЯ, РЕГИСТРИРУЕМОГО ПРИЁМНОЙ АНТЕННОЙ В МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ В РЕЗОНАНСНЫХ УСЛОВИЯХ

Будем считать, что дипольная антenna, размеры которой много меньше длины электромагнитной волны ($L \ll \lambda$), находится в поле пакета квазипотенциальных волн, излучённого другим дипольным излучателем, расположенным на некотором расстоянии r от приёмной антенны. Как следует из введения, геометрически приёмная антenna расположена вблизи резонансной поверхности (резонансного конуса), где этот пакет локализован. Из-за резонансного возбуждения квазипотенциальных волн поле излучения удобно характеризовать возмущениями плотности заряда плазмы и потенциалом электрического поля $\varphi(\mathbf{r})$, т. е. использовать квазистатическое описание. Процедура расчёта напряжения на приёмной антenne с использованием теоремы взаимности хорошо развита для шумовых полей. Она состоит из двух этапов: 1) расчёт сигнала, наводимого на антенну флюктуацией заряда в плазме; 2) усреднение полученного выражения по соответствующей функции распределения зарядов и использование флюктуационно-диссипативной теоремы. На первом этапе удобно воспользоваться теоремой взаимности, которая справедлива и для гиротропных сред, и для сред с пространственной дисперсией¹ [3, 4]. Так как нас интересует возбуждение и приём квазипотенциальных волн в резонансных условиях, можно ограничиться рамками квазиэлектростатики. Будем также считать, что приёмник представляет собой квадратичный детектор (вольтметр) с бесконечным внутренним сопротивлением.²

¹ Вообще говоря, выражение для наведённого потенциала $\varphi(\mathbf{r})$ должно быть найдено в транспонированной плазме, т. е. в плазме с обращённым магнитным полем ($\mathbf{H}_0 \rightarrow -\mathbf{H}_0$), скоростью движения плазмы ($\mathbf{v}_0 \rightarrow -\mathbf{v}_0$) и волновым вектором ($\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$). Однако в случае квазистационарных полей (когда, например, движение плазмы определяет только доплеровский сдвиг частоты $\omega - (\mathbf{k}, \mathbf{v}_0)$) теорема взаимности не претерпевает каких-либо изменений.

² Это предположение не принципиально. Для приёмника с конечным внутренним сопротивлением искомое напряжение можно получить путём умножения напряжения, полученного при бесконечном сопротивлении приёмника, на $|Z_{rec}/(Z_{rec} + Z_{an})|$, где Z_{rec} — импеданс приёмника, Z_{an} — входной импеданс антennы.

Тогда теорему взаимности можно записать в электростатическом виде:

$$\int \rho \varphi_0 \, d\mathbf{r} = \int \rho_0 \varphi \, d\mathbf{r} = \varphi_s \int \rho_0 \, d\mathbf{r} = \Delta \varphi_s Q, \quad (2)$$

где $\rho(\mathbf{r})$ — флуктуация плотности заряда в плазме, который наводит искомый потенциал φ на поверхности антенны. С учётом идеальной проводимости антенны принято, что $\varphi(\mathbf{r}) = \text{const} = \varphi_s$, $\Delta \varphi_s = \varphi_{s1} - \varphi_{s2}$ — разность потенциалов между антennыми проводами. Далее, ρ_0 — распределение плотности заряда на антenne с амплитудой $Q = 1$, который создаёт в плазме потенциал $\varphi_0(\mathbf{r})$ (пробное поле). Напомним, что речь идёт о комплексных амплитудах всех указанных величин.

Определяя квадрат спектральной плотности шумовой ЭДС соотношением $\mathcal{E}_\omega^2 = 2 \langle \Delta \varphi_s \Delta \varphi_s^* \rangle$ (имеется в виду разложение по положительным частотам), из теоремы взаимности получим

$$\mathcal{E}_\omega^2 = \iint \varphi_0(\mathbf{r}_1) \varphi_0^*(\mathbf{r}_2) \langle \rho \rho^* \rangle_\omega \, d\mathbf{r}_1 \, d\mathbf{r}_2, \quad (3)$$

где $\langle \rho \rho^* \rangle_\omega$ — функция корреляции возмущений плотности микрозарядов плазмы в поле излучения. Распределение потенциала, или пробного поля, $\varphi_0(\mathbf{r})$ должно быть найдено с учётом электродинамических характеристик плазмы как сплошной среды. Задача несколько упрощается в однородной среде. Здесь функция корреляции зависит только от $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, и с помощью преобразования Фурье сразу получаем

$$\mathcal{E}_\omega^2 = 2(2\pi)^6 \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_0(\omega, \mathbf{k})|^2 \langle \rho \rho^* \rangle_{\omega, \mathbf{k}} \, dk. \quad (4)$$

Выражая фурье-компоненту пробного поля через фурье-компоненту плотности заряда на антenne $\rho_0(\mathbf{k})$, найдём

$$\mathcal{E}_\omega^2 = 8(2\pi)^8 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\rho_0(\mathbf{k})|^2 \langle \rho \rho^* \rangle_{\omega, \mathbf{k}} \, dk}{|k_\alpha \epsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}) k_\beta|^2}. \quad (5)$$

Процедура вычислений замыкается при помощи флюктуационно-диссипативной теоремы [4]. В равновесной плазме эта теорема устанавливает, что фурье-компоненты корреляционной функции микротоков $G_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k})$ и корреляционная функция микрозарядов $\langle \rho \rho^* \rangle_{\omega, \mathbf{k}} = k_\alpha G_{\alpha\beta} k_\beta / \omega^2$ выражаются через мнимую часть продольной диэлектрической проницаемости и температуру плазмы:

$$\langle \rho \rho^* \rangle_{\omega, \mathbf{k}} = \frac{T k_\alpha \text{Im} [\epsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k})] k_\beta}{(2\pi)^5 \omega} = \frac{T k^2 \text{Im} \epsilon_{||}(\omega, \mathbf{k})}{(2\pi)^5 \omega}. \quad (6)$$

Если температура плазмы $T = \text{const}$, то, подставляя последнее выражение в (5), приходим к формуле Найквиста.

$$\mathcal{E}_\omega^2 = \frac{2R_\Sigma(\omega)T}{\pi}, \quad (7)$$

где $R_\Sigma(\omega)$ — реальная часть импеданса антенны (сопротивление излучения), обусловленная излучением квазипотенциальных волн.

Обобщение формул (5), (6) на случай неравновесной системы, которой является приёмная антenna в электромагнитном поле излучения любой природы, в какой-то мере очевидно.³ Оно сводится к формальной замене температуры на эффективную температуру неравновесного излучения $T_{\text{eff}}(\omega, \mathbf{k})$.

³Вообще говоря, неравновесной является уже система, состоящая из антенн в поле равновесного излучения с температурой T . Однако никого не удивляет результат в виде формулы Найквиста, полученной с помощью рассматриваемой процедуры вычислений. Достаточно большой набор примеров подобного типа содержится в книге [4].

которая определяется через спектральную плотность энергии электромагнитного поля вокруг приёмной антенны $W_k^{\text{in}}(\omega, \mathbf{k}) = k^2 T_{\text{eff}}(\omega, \mathbf{k})/(2\pi)^3$ [5]. Флуктуационно-диссипативная теорема просто формулирует принцип детального равновесия, который в данном случае есть равновесие (стационарное состояние) между полем излучения, падающим на приёмную antennу, и полем рассеяния (радиационными потерями) падающего поля на этой антенне. С учётом сделанных замечаний выражение для \mathcal{E}_ω^2 представим в виде

$$\mathcal{E}_\omega^2 = \frac{8(2\pi)^6}{\omega} \int W_k^{\text{in}}(\omega, \mathbf{k}) \frac{|(\mathbf{k}, \mathbf{j}_0(\mathbf{k}))|^2}{k^4} \frac{\text{Im } \epsilon_{||}}{|\epsilon_{||}|^2} d\mathbf{k} = \frac{2}{\pi} \int \frac{(2\pi)^3 W_k^{\text{in}}}{k^2} dR_k. \quad (8)$$

Здесь dR_k — дифференциальные (в пространстве волновых чисел) потери на излучение квазипотенциальных волн,

$$dR_k = \frac{(2\pi)^5}{\omega} |(\mathbf{k}, \mathbf{j}_0(\mathbf{k}))|^2 \delta(\epsilon_{||}) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi dk,$$

$\epsilon_{||} = (k_\alpha \epsilon_{\alpha\beta} k_\beta)/k^2 + (k_0^2/k^2) \Xi^2 = 0$ — дисперсионное уравнение для квазипродольных волн вблизи резонансной поверхности, $\mathbf{j}_0(\mathbf{k})$ — фурье-компоненты распределения плотности тока единичной амплитуды на приёмной антенне, $\delta(\epsilon_{||})$ — дельта-функция, $\Xi^2 = |\epsilon_1 \epsilon_3| + g^2 |\epsilon_3|/(|\epsilon_1| + |\epsilon_3|)$, $\epsilon_1 = 1 - \omega_{pe}^2/(\omega^2 - \omega_{he}^2)$, $\epsilon_3 = 1 - \omega_{pe}^2/\omega^2$, $g = \omega_{pe}^2 \omega_{he}/[(\omega^2 - \omega_{he}^2) \omega]$, ω_{he} — гирочастота электронов, $k_0 = \omega/c$ — волновое число в вакууме, c — скорость света.

Формула (8) справедлива для любого вида «неравновесного» излучения, характеризуемого плотностью энергии $W_k^{\text{in}}(\omega, \mathbf{k})$ электромагнитного поля, окружающего приёмную antennу. Эта формула может быть использована и для расчёта среднеквадратичного напряжения, наводимого на antennе при падении на неё регулярного поля квазиплоской электромагнитной волны (частный случай неравновесного излучения). Из структуры этой формулы видно, что падающее поле на данной пространственной гармонике играет роль коэффициента возбуждения рассеянного поля (по мощности излучения), а дельта-функция отбирает те пространственные гармоники, которые дают вклад в переизлучение падающего поля.

2. РАСЧЁТ СРЕДНЕКВАДРАТИЧНОГО НАПРЯЖЕНИЯ НА ПРИЁМНОЙ АНТЕННЕ

Интегрирование в (8) необходимо проводить с учётом конкретной геометрии приёмно-передающей системы. Сделаем некоторые вводные замечания.

1) Как уже отмечалось, будем интересоваться возбуждением и приёмом квазипотенциальных волн, т. е. линия передачи излучатель—приёмник реализуется в угловом интервале вблизи резонансного конуса, определяемого в пространстве волновых векторов соотношением $\epsilon_1(\omega) \sin^2 \vartheta + \epsilon_3(\omega) \cos^2 \vartheta = 0$, где ϑ — угол между вектором \mathbf{k} и внешним магнитным полем. При этом дисперсионное соотношение для квазипотенциальных волн имеет вид

$$\epsilon_1(\omega) \sin^2 \vartheta + \epsilon_3(\omega) \cos^2 \vartheta = \frac{k_0^2}{k^2} \Xi^2. \quad (9)$$

Здесь и в дальнейшем для определённости считается, что $\epsilon_1 > 0$, $\epsilon_3 < 0$. Переход в другой частотный интервал очевиден.

2) Если волновой вектор возбуждаемых волн близок к резонансной поверхности или в координатном пространстве угол между направлением групповой скорости и магнитным полем близок к углу θ_0 между магнитным полем (направление которого совпадает с осью z системы координат с началом в точке нахождения передатчика) и радиус-вектором, соединяющим точки передатчика и приёмника,

то пространственный спектр возбуждаемых волн, которые регистрирует приёмная антenna, состоит из квазипотенциальных волн, в которых электрическое поле много больше магнитного. Более того, если размеры излучающей и приёмной антенн меньше характерной длины волны, определяемой из соотношения (9) при $\vartheta = 0$ или $\vartheta = \pi/2$ (в зависимости от положения областей света и тени в различных частотных диапазонах), то, как уже отмечалось, осуществляется «резонансное» возбуждение (и приём) таких волн. Это означает, что коэффициенты возбуждения этих волн значительно превышают аналогичные коэффициенты возбуждения других мод в указанном угловом интервале.

При выполнении этих условий для линии передачи излучатель—приёмник можно отметить следующее:

1) Для дипольных источников, если расстояние r от передатчика до приёмника достаточно велико ($r \gg \lambda$, λ — длина электромагнитной волны), поле излучения представляет собой квазиплоскую волну с электрическим полем $E = (0, E_{\theta_0}, 0)$ и магнитным полем $H = (0, 0, H_{\phi_0})$ в сферической системе координат (r, θ_0, ϕ_0) с центром в точке нахождения передатчика и углом, отсчитываемым от направления внешнего магнитного поля (см. рис. 1). При этом групповая скорость (или вектор Пойнтинга) направлена по радиус-вектору от точки излучения в точку приёма, а направление вектора k близко к направлению электрического поля.

2) Для резонансного возбуждения квазипотенциальных волн дипольными источниками ($k_* L \leq 1$, где k_* — характерные волновые числа возбуждаемых квазипотенциальных волн) на тех же расстояниях от излучателя спектр возбуждаемых волн при $k_*/k_0 = N_*(\vartheta) \gg 1$ ($N_*(\vartheta)$ — показатель преломления) слабо зависит от азимутального угла. Формально это следует из матрицы сопротивления излучения дипольного источника в магнитоактивной плазме [4]: при $N_*(\vartheta) \gg 1$ диагональные компоненты этой матрицы пропорциональны $\int N_*^5(\vartheta) d\vartheta$, а гиротропные компоненты — $\int N_*^3(\vartheta) d\vartheta$, и, следовательно, для возбуждённых волн вблизи резонансного конуса можно пренебречь поправками, связанными с гиротропией, и считать излучённое поле в точке приёма аксиально симметричным. Другими словами, при резонанском возбуждении и приёме квазипотенциальных волн вблизи резонансного конуса для дипольного излучения можно ограничиться рассмотрением излучения и приёма в односной среде, описываемой вышеприведённым дисперсионным уравнением, в которой волновое поле аксиально-симметрично. Это говорит о том, что в координатном пространстве вклад в интеграл (8) дают плоские волны, излучённые вблизи направления (θ_0, ϕ_0) из точки излучения в точку приёма или, соответственно, принятые в направлении $(\pi + \theta_0, \phi_0)$ из точки приёма в точку излучения. Тогда, в силу отмеченной аксиальной симметрии в пространстве волновых векторов, можно работать в системе координат с осью k_z , направленной вдоль внешнего магнитного поля, и углом φ , отсчитываемым от плоскости, в которой лежат векторы E и r . В этой же плоскости лежит и волновой вектор k_* плоской волны из совокупности плоских волн, дающих вклад в регистрируемый сигнал на конечной апертуре приёмной антенны (см. рис. 1). Будем считать, что волновые векторы этих волн соответствуют интервалам $k_* \pm \Delta k_*$, $\vartheta_* \pm \Delta \vartheta_*$, $\varphi_* \pm \Delta \varphi_*$. При этом для линейных антенн скалярное произведение $|(\mathbf{k}, \mathbf{j}_0(\mathbf{k}))|$ в формуле (8) правильно, с точностью до членов следующего порядка по малому параметру k_0/k_* , описывает зависимость наведённого напряжения от ориентации приёмной антенны. Угол φ_* при указанной симметрии совпадает с углом φ между проекцией оси диполя на плоскость, перпендикулярную направлению внешнего магнитного поля H_0 , и плоскостью, в которой лежат векторы E и r , а скалярное произведение $|(\mathbf{k}, \mathbf{l})| = |k (\sin \vartheta_* \sin \alpha \cos \varphi_* - \cos \vartheta_* \cos \alpha)|$, где \mathbf{l} — единичный вектор вдоль направления диполя, α — угол между векторами H_0 и \mathbf{l} .

После этих замечаний и определений можно перейти в (8) к интегрированию по \mathbf{k} . При интегрировании по ϑ можно пренебречь поправкой k_0/k_* в дисперсионном соотношении в аргументе дельта-функции. Тогда получаем

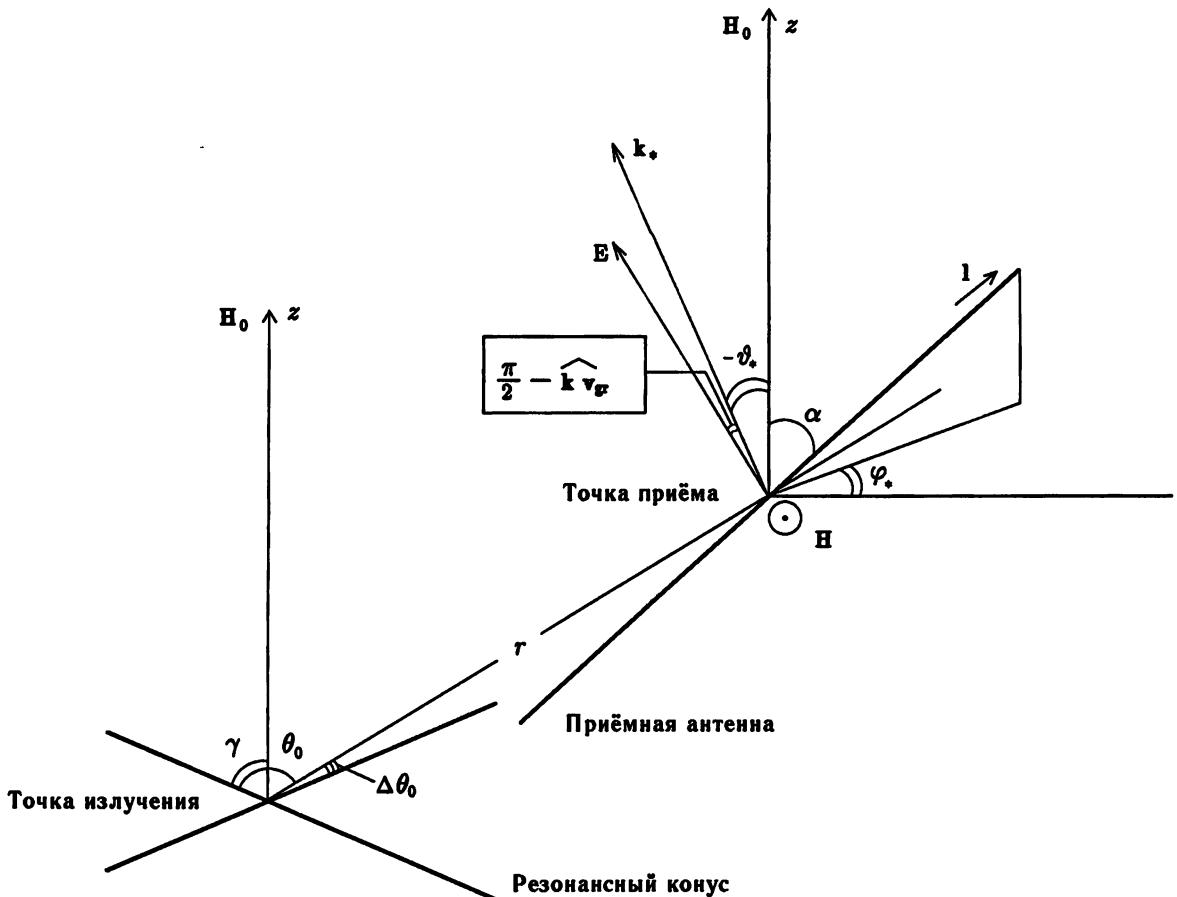


Рис. 1. Геометрия приёмно-передающей системы

$$\mathcal{E}_\omega^2 = \frac{(2\pi)^8}{\pi\omega} \int W_k^{\text{in}}(k, \vartheta_*) \frac{|(k, j_0(k, \vartheta_*))|^2 dk d\varphi}{\sqrt{|\epsilon_1|(|\epsilon_1| + |\epsilon_3|)} k^2}.$$

При интегрировании по модулю волнового вектора следует учесть поправки в дисперсионном соотношении. Действительно, при фиксированном ϑ_* дисперсионное уравнение выделяет волновой вектор

$$k_* = \frac{k_0 \Xi}{(|\epsilon_3| \cos^2 \vartheta_* - |\epsilon_1| \sin^2 \vartheta_*)^{1/2}}.$$

Если теперь подсчитать приращение модуля волновых векторов, дающих вклад в электромагнитный сигнал на приёмной антенне, то оно выразится согласно дисперсионному уравнению через приращение углов $\pm \Delta\vartheta_*$:

$$\Delta k_* = \frac{k_0 \Xi (|\epsilon_1| + |\epsilon_3|) \sin \vartheta_* \cos \vartheta_*}{(|\epsilon_3| \cos^2 \vartheta_* - |\epsilon_1| \sin^2 \vartheta_*)^{3/2}} \Delta \vartheta_*.$$

Это позволяет записать интеграл по модулю волнового вектора в следующем виде:

$$\mathcal{E}_\omega^2 = \frac{(2\pi)^8}{\pi\omega} \int d\varphi \int_{k_* - \Delta k_*}^{k_* + \Delta k_*} W_k^{\text{in}}(k, \vartheta_*) \frac{|(k, j_0(k, \vartheta_*))|^2 dk}{\sqrt{|\epsilon_1|(|\epsilon_1| + |\epsilon_3|)} k^2}.$$

Интегрирование элементарно, если относительное приращение волновых векторов $\Delta k_*/k_* \ll 1$. Нетрудно убедиться в том, что это неравенство выполняется в широком интервале углов ϑ_* , если расстояние от точки излучения до точки приёма достаточно велико. В общем случае это расстояние должно быть больше френелевского параметра λ^2/L , где $\lambda = 2\pi |\varepsilon_3|/(k_0 \Xi)$. Действительно,

$$\frac{\Delta k_*}{k_*} = \frac{(|\varepsilon_1| + |\varepsilon_3|) \sin \vartheta_* \cos \vartheta_*}{(|\varepsilon_3| \cos^2 \vartheta_* - |\varepsilon_1| \sin^2 \vartheta_*)} \Delta \vartheta_* \approx \frac{\mu \lambda^2}{|\varepsilon_3| L^2} \Delta \vartheta_* \approx \frac{\mu \lambda^2}{|\varepsilon_3| L r},$$

если характерные значения волнового вектора, дающие вклад в излучение (приём), $k_* \approx 2\pi/L$, а $\Delta \vartheta_* \approx \approx L/r$ есть угол, под которым приёмная антenna видна из точки излучения. При выполнении этих условий интегрирование по k_* , φ_* приводит к следующему результату:

$$\mathcal{E}_\omega^2 = \frac{2(2\pi)^8 W_k^{\text{in}}(k_*, \vartheta_*, \varphi_*) |(\mathbf{k}_*, \mathbf{j}_0(k_*, \vartheta_*, \varphi_*))|^2 \sin \vartheta_* \Delta \vartheta_* \Delta \varphi_*}{\pi \omega k_* (|\varepsilon_3| \cos^2 \vartheta_* - |\varepsilon_1| \sin^2 \vartheta_*)}.$$

Полученная формула даёт возможность определить средний квадрат напряжения на приёмной антенне, если умножить выражение для \mathcal{E}_ω^2 на полосу приёма $\Delta \omega$:

$$\mathcal{E}_\omega^2 \Delta \omega = V_\omega^2 = \frac{2(2\pi)^8 |(\mathbf{k}_*, \mathbf{j}_0(k_*, \vartheta_*, \varphi_*))|^2}{\pi \omega k_* (|\varepsilon_3| \cos^2 \vartheta_* - |\varepsilon_1| \sin^2 \vartheta_*)} W_k^{\text{in}}(k_*, \vartheta_*, \varphi_*) \Delta \omega \Delta \Omega_*.$$

Здесь $\Delta \Omega_* = \sin \vartheta_* \Delta \vartheta_* \Delta \varphi_*$ — телесный угол в направлении приёма излучения в пространстве волновых векторов. Дальнейшие преобразования связаны с переходом из пространства волновых векторов в координатное пространство. Для реализации такого преобразования отметим, что поток энергии электромагнитного поля через единичную площадку в направлении \mathbf{k}_* в телесном угле $\Delta \Omega_*$

$$\frac{\Delta P}{\Delta S_k} = W_k^{\text{in}}(k_*, \vartheta_*, \varphi_*) \frac{\Delta \omega}{\Delta k_*} \Delta k_* \Delta \Omega_*, \quad (10)$$

т. к. $W_k^{\text{in}}(k_*, \vartheta_*, \varphi_*) \Delta k_* \Delta \Omega_*$ — плотность энергии электромагнитного поля в падающей волне, а $\Delta \omega / \Delta k_*$ — проекция групповой скорости волны на направление \mathbf{k}_* . Здесь ΔS_k — площадка в пространстве волновых векторов, перпендикулярная направлению волнового вектора \mathbf{k}_* . Тогда, если ввести поток энергии через единичную площадку в направлении групповой скорости \mathbf{v}_{gr} в телесном угле $\Delta \Omega_{\text{gr}}$, или проекцию вектора Пойнтинга падающей волны $\Pi_{\text{gr}}^{\text{in}}$ на направление \mathbf{v}_{gr} , он выразится через $\Delta P / \Delta S_k$ посредством преобразования телесных углов и единичных площадок в виде соотношения

$$\frac{\Delta P}{\Delta S_k} \frac{\cos(\widehat{\mathbf{k}\mathbf{v}_{\text{gr}}}) \Delta \Omega_{\text{gr}} \Delta S_k}{\Delta S_{\text{gr}} \Delta \Omega_*} = \Pi_{\text{gr}}^{\text{in}}. \quad (11)$$

Здесь ΔS_{gr} — площадка в пространстве групповых скоростей, перпендикулярная направлению групповой скорости \mathbf{v}_{gr} . Понятно, что из-за сохранения потока $\Delta S_{\text{gr}} / \Delta S_k = 1 / \cos(\widehat{\mathbf{k}\mathbf{v}_{\text{gr}}})$, поэтому из соотношений (10) и (11) имеем

$$W_k^{\text{in}}(k_*, \vartheta_*, \varphi_*) \Delta \omega \Delta \Omega_* = \frac{\Pi_{\text{gr}}^{\text{in}} \Delta \Omega_*}{\Delta \Omega_{\text{gr}} \cos^2(\widehat{\mathbf{k}\mathbf{v}_{\text{gr}}})}.$$

Для квазиплоской волны вектор Пойнтинга равен

$$\Pi^{\text{in}} = \frac{c^2}{8\pi\omega} \left\{ \mathbf{k} E^2 - \frac{(\mathbf{k}, \mathbf{E}) \mathbf{E}^* + (\mathbf{k}, \mathbf{E}^*) \mathbf{E}}{2} \right\} - \omega \frac{\partial \epsilon_{\alpha\beta}}{\partial \mathbf{k}} \frac{E_\alpha^* E_\beta}{16\pi}.$$

Здесь E — амплитуда электрического поля в падающей волне. В рассматриваемом приближении компоненты тензора диэлектрической проницаемости не зависят от \mathbf{k} , поэтому проекция вектора Пойнгтинга на направление групповой скорости (или радиальная компонента этого вектора) равна

$$\Pi_{\text{gr}}^{\text{in}} = \frac{\omega k_* E^2}{8\pi k_0^2} \cos(\widehat{\mathbf{k}\mathbf{v}_{\text{gr}}}),$$

и, следовательно,

$$W_k^{\text{in}}(k_*, \vartheta_*, \varphi_*) \Delta\omega \Delta\Omega_* = \frac{\omega k_* E^2}{8\pi k_0^2} \frac{\Delta\Omega_*}{\Delta\Omega_{\text{gr}} \cos(\widehat{\mathbf{k}\mathbf{v}_{\text{gr}}})}.$$

В итоге квадрат напряжения на зажимах приёмной антенны можно записать в следующем виде:

$$V_\omega^2 = (2\pi)^6 \frac{E^2}{k_0^2} \frac{|(\mathbf{k}_*, \mathbf{j}_0(k_*, \vartheta_*, \varphi_*))|^2}{(|\epsilon_3| \cos^2 \vartheta_* - |\epsilon_1| \sin^2 \vartheta_*)} \frac{\Delta\Omega_*}{\Delta\Omega_{\text{gr}} \cos(\widehat{\mathbf{k}\mathbf{v}_{\text{gr}}})}. \quad (12)$$

В резонансных условиях $\cos(\widehat{\mathbf{k}\mathbf{v}_{\text{gr}}}) = \Xi^2 / (\sqrt{|\epsilon_3 \epsilon_1|} N_*^2)$, $\Delta\Omega_* / \Delta\Omega_{\text{gr}} \simeq \operatorname{tg} \vartheta_* \simeq \sqrt{|\epsilon_3| / |\epsilon_1|}$, $N_*^2 = k_*^2 / k_0^2 = \Xi^2 / (|\epsilon_3| \cos^2 \vartheta_* - |\epsilon_1| \sin^2 \vartheta_*)$.

Полученная формула для квадрата напряжения на приёмной антенне в резонансных условиях справедлива для произвольных коротких ($L \ll \lambda$) линейных антенн с заданным на ней распределением тока единичной амплитуды.

3. ОБСУЖДЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Выражение (12) удобно записать в форме, предложенной во введении, т. е. представить напряжение на приёмной антенне как произведение амплитуды электрического поля падающей волны на эффективную длину приёмной антенны. Нетрудно убедиться в том, что эту запись можно представить в виде

$$V_\omega = EL_{\text{eff}} = EL \left[(2\pi)^3 |(\mathbf{e}_*, \mathbf{l})| \left| \frac{f_0(k_*, \vartheta_*, \varphi_*)}{L} \right| \right] \frac{\Xi \sqrt{|\epsilon_3|}}{(|\epsilon_3| \cos^2 \vartheta_* - |\epsilon_1| \sin^2 \vartheta_*)^{3/2}}. \quad (13)$$

Здесь \mathbf{e}_* — единичный вектор в направлении электрического поля падающей электромагнитной волны с волновым вектором \mathbf{k}_* , \mathbf{l} — единичный вектор вдоль приёмной антенны, L — длина «уса» ди-поля. Выражение в квадратных скобках есть геометрический фактор, отражающий зависимость коэффициента возбуждения тока в приёмной антенне от взаимной ориентации вектора электрического поля и единичного вектора, направленного вдоль приёмной антенны. Для коротких антенн он слабо зависит от поляризационных свойств среды и определяется лишь геометрией взаимного расположения приёмной антенны по отношению к вектору электрического поля в волне и направлению внешнего магнитного поля (в вакууме это дипольная диаграмма направленности). И, наконец, множитель $\Xi \sqrt{|\epsilon_3|} / (|\epsilon_3| \cos^2 \vartheta_* - |\epsilon_1| \sin^2 \vartheta_*)^{3/2}$ отражает вклад резонансного возбуждения квазипотенциальных волн при расположении приёмной антенны вблизи резонансного конуса, опирающегося на точку излучения. По существу, это есть коэффициент возбуждения квазипотенциальных волн, или ненормированная диаграмма направленности дипольного излучения вблизи резонансного конуса по электрическому полю. Для дипольных излучателей такое выражение приведено в книге [4], а для одноосного кристалла (плазма в сильном магнитном поле) в книге [6]. С другой стороны, в работе [7] показано, что в гиротропной среде электродинамические характеристики (диаграмма направленности и импеданс) передающей и приёмной антенн совпадают. Для изотропных сред это утверждение было известно давно

(см., например, [1, 8]). Таким образом, полученный результат достаточно очевиден. Он обобщает известное выражение (1) для V_ω на случай «сложной» среды, каковой является магнитоактивная плазма в резонансных областях частот.

Проанализируем теперь выражение (13) в случае дипольной антенны длины $2L$ с «треугольным» распределением тока на ней:

$$|(\mathbf{k}_*, \mathbf{j}_0(k_*, \vartheta_*, \varphi_*))|^2 = \frac{4 \sin^4(k_* L_*)}{(2\pi)^6 k_*^2 L_*^2}, \quad (14)$$

где $L_* = (\sin \vartheta_* \sin \alpha \cos \varphi_* - \cos \vartheta_* \cos \alpha) L / 2$. При этом напряжение на приёмной антенне равно

$$V_\omega = \frac{E}{k_0^2} \frac{2 \sin^2(k_* L_*)}{L_* (|\epsilon_3| \cos^2 \vartheta_* - |\epsilon_1| \sin^2 \vartheta_*)^{1/2}} \frac{\sqrt{|\epsilon_3|}}{\Xi}.$$

Важным частным случаем в этом примере является дипольное приближение, когда выполнено условие малости длины антенны по сравнению с характерной длиной волны квазиэлектростатической моды, соответствующей направлению излучения (или приёма) ϑ_* ($k_* L_* \ll 1$). Последнее неравенство соответствует условию достаточного отличия угла приёма ϑ_* от ϑ_{res} :

$$(|\epsilon_3| \cos^2 \vartheta_* - |\epsilon_1| \sin^2 \vartheta_*)^{1/2} \gg k_0 L_* \Xi.$$

Тогда в этом приближении

$$V_\omega = \frac{2 E L_* \Xi \sqrt{|\epsilon_3|}}{(|\epsilon_3| \cos^2 \vartheta_* - |\epsilon_1| \sin^2 \vartheta_*)^{3/2}}. \quad (15)$$

Дальнейшее упрощение формулы (15) можно сделать, учитывая близость оси приёмной антенны к резонансной поверхности. Будем считать поэтому, что $\vartheta_* = \vartheta_{\text{res}} - \Delta \vartheta_* \simeq \frac{\pi}{2} - \gamma + \Delta \theta_0$, $\theta_0 = \gamma + \Delta \theta_0$, а угол $\Delta \theta_0$ отсчитывается от резонансной поверхности (см. рис. 1). Тогда $|\epsilon_3| \cos^2 \vartheta_* - |\epsilon_1| \sin^2 \vartheta_* \approx \approx 2 \sqrt{|\epsilon_1| + |\epsilon_3|} (-\Delta \theta_0)$, и для напряжения на приёмной антенне получаем

$$V_\omega \approx \frac{E L_* \Xi \sqrt{|\epsilon_3|}}{\sqrt{2} (|\epsilon_1| + |\epsilon_3|)^{3/4}} \frac{1}{(-\Delta \theta_0)^{3/2}}. \quad (16)$$

Для оценок в формуле (16) можно приближённо положить $-\Delta \theta_0 \approx L/r$, т. е. приближённо считать угол $\Delta \theta_0$ равным углу, под которым видна приёмная антenna из точки излучения. Считается также, что приёмная антenna целиком находится в «освещённой» области пространства.

Из последней формулы видна сильная зависимость напряжения на приёмной антenne от угла $\Delta \theta_0$ и поляризационных свойств среды. Очевидно, что в данных условиях напряжение на антenne существенным образом отличается от обычно используемой для коротких антенн оценки $V_\omega \approx E L_*$ (см., например, [9]). Отметим ещё раз, что это связано с резонансным переизлучением коротким диполем падающего на него пакета квазиэлектростатических волн. Следует также подчеркнуть следующие важные особенности вышеприведённых формул:

1) Формально из формул (13)–(15) следует, что при нахождении точки приёма в области тени (где $|\epsilon_3| \cos^2 \vartheta_* - |\epsilon_1| \sin^2 \vartheta_* < 0$ или, в приложении к выражению (16), $\Delta \theta_0 > 0$) напряжение на приёмной антenne равно нулю. Однако следует понимать, что это результат используемого приближения. В действительности ситуация немного сложнее. Имеется переизлучение в другую электромагнитную моду (если она существует в рассматриваемом диапазоне частот), дифракционное «затекание» волнового поля в область тени. Однако регистрируемый сигнал здесь значительно слабее, чем сигнал в области «света», а в рассматриваемом приближении он просто равен нулю.

2) При конечном размере антенны может оказаться, что часть этой антенны находится в области «света», а часть — в области тени. Строго говоря, вышеприведённые выражения (14)–(16) для напряжения на приёмной антенне справедливы при условии $k_* L_* \ll 1$, т. е. когда размеры антенны меньше характерной длины волны $\lambda_* = 2\pi/k_*$ квазиэлектростатической моды. Однако для грубой оценки напряжения в этом случае можно по-прежнему пользоваться формулой (13), заменяя в ней длину антенны на длину антенны в освещённой области. Формально это следует из выражения (14), если считать, что оно справедливо и при $k_* L_* \gg 1$. Тогда из (14) имеем

$$V_\omega \sim \frac{EL_*}{(k_* L_*)^2} \frac{\Xi \sqrt{|\epsilon_3|}}{(|\epsilon_3| \cos^2 \vartheta_* - |\epsilon_1| \sin^2 \vartheta_*)^{3/2}}.$$

Из последней формулы видно, что в весовом отношении вклад элемента dL антенны, находящегося очень близко к резонансной поверхности, в суммарное напряжение уменьшается. Кроме этого, можно указать, что для углов ϑ_* , асимптотически приближающихся к резонансному углу, уменьшается длина квазипотенциальной волны и, следовательно, всё лучше и лучше выполняется приближение геометрической оптики. При этом роль дифракционных эффектов уменьшается, и резкая граница света и тени выделяет ту часть антенны, которая находится в освещённой области. Однако здесь могут быть существенные эффекты, связанные с пространственной дисперсией, которые проявляются в виде возбуждения плазменных волн и вследствие этого дополнительной диссипации энергии электромагнитного поля. Всё это говорит о том, что в данном случае необходимо дополнительное рассмотрение.

В заключение необходимо отметить, что приведённая выше процедура расчёта среднеквадратичного напряжения на приёмной антенне — теорема взаимности, вычисление момента второго порядка и использование флюктуационно-диссипативной теоремы справедлива, вообще говоря, для любых сред и любых антенн.⁴ Поэтому структура формулы (13) сохраняет свой вид в общем случае коротких ($L \ll \lambda$) линейных антенн в произвольной среде, в том числе и в вакууме.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект № 99-02-17745) и грантом NATO (Linkage Grant «Antennas in Plasmas»).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Справочник по радиоэлектронике. Т.1. / Под ред. А. А. Куликовского. М.: Энергия, 1967. Раздел 7.
2. Мареев Е. А., Чугунов Ю. В. Антенны в плазме. Н. Новгород, 1991. 220 с.
3. Андронов А. А., Чугунов Ю. В. // УФН. 1975. Т. 16, вып.1. С. 79.
4. Левин М. Л., Рытов С. М. Теория равновесных тепловых флюктуаций в электродинамике. М.: Наука, 1967.
5. Железняков В. В. Излучение в астрофизической плазме. М.: Янус-К, 1997.
6. Фелсон Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. Т. 2. М.: Мир, 1978.
7. Оболенский Л. М., Чугунов Ю. В., Яшин Ю. Я. Изв. вузов. Радиофизика. 1969. Т. 12, № 12. С. 1776.
8. Антенны сантиметровых волн. Т. 2. / Под ред. Я. Н. Фельда. М.: Советское Радио, 1950.
9. James H. G. // Adv. Space Res. 1999. V. 24, No. 8. P. 1073.

Институт прикладной физики РАН,
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию
30 ноября 2000 г.

⁴Следует только помнить о замечаниях, которые приводятся в сноске 1 настоящей статьи.

RECEIVING ANTENNA IN A MAGNETOPLASMA IN THE RESONANCE FREQUENCY BAND

Yu. V. Chugunov

We find the r.m.s. voltage on a receiving dipole antenna in the electromagnetic field of a packet of quasi-potential waves in a magnetoplasma in the resonance frequency band. It is shown that this voltage can be determined as the product of the electric-field amplitude of the incident wave and the effective length L_{eff} of the receiving antenna. The effective length a short dipole of length much less than the electromagnetic wave length is proportional to the product of the effective dipole length in vacuum and the excitation coefficient of quasi-electrostatic waves (or the non-normalized electric-field pattern of a dipole). If the receiving antenna is located in the illuminated zone near the resonance cone, this coefficient is much larger than unity, so that the obtained voltage differs significantly from the conventional estimate based on the formulas valid for an antenna in free space. Our calculations are performed using the reciprocity theorem and the fluctuation-dissipation theorem applied to a regular electromagnetic field and a receiving antenna comprising the particular case of a nonequilibrium system in which an equilibrium (steady state) between the incident radiation field and the electromagnetic field re-emitted by the antenna is established. It is pointed out that the applied calculation technique is universal and can be used for any antennas and media.

УДК 536.758, 537.226

СПОНТАННАЯ ПОЛЯРИЗАЦИЯ ГАЗА ДВУХУРОВНЕВЫХ МОЛЕКУЛ И РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ГИББСА ПО КВАЗИЭНЕРГИЯМ

B. B. Кочаровский^{1, 2}, Вл. В. Кочаровский¹, В. А. Кукушкин¹

Исследована возможность спонтанного формирования поляризационной структуры в термодинамически равновесном газе дипольно взаимодействующих двухуровневых молекул. С использованием уравнений Максвелла—Блоха в рамках теории среднего поля проанализирован антисегнетоэлектрический фазовый переход в газе со слабой релаксацией поляризации и установлено, что он всегда является переходом второго рода. В пренебрежении релаксацией показано, что при квазиклассическом рассмотрении поступательного движения молекул в волне поляризации энергетические уровни отдельной молекулы совпадают с её квазиэнергиями, хорошо известными в квантовой оптике. На этом основании для изучения статистических свойств антисегнетоэлектрической фазы использовано обобщённое распределение Гиббса по квазиэнергетическим состояниям молекул. В результате найдены характерные особенности и возможные параметры антисегнетоэлектрического состояния газа. Обнаружено, в частности, что благодаря доплеровскому резонансу части молекул с волной поляризации свойства газовых антисегнетоэлектриков за точкой фазового перехода могут качественно отличаться от свойств обычных сегнетоэлектриков в теории Гинзбурга—Ландау. Для случая сегнетоэлектрического перехода в газе изучено также влияние флуктуаций поляризации.

ВВЕДЕНИЕ. МИФ О «СВЕРХИЗЛУЧАТЕЛЬНОМ» ФАЗОВОМ ПЕРЕХОДЕ

Фазовый переход в изотропной термодинамически равновесной системе, образованной двухуровневыми молекулами (или атомами) и взаимодействующими с ними фотонами, обсуждается с начала 70-х годов. В работах [1, 2] было замечено, что при помещении этой системы в резонатор с температурой стенок T , меньшей определённой величины T_c , среднее число заполнения резонансной фотонной моды отличается от планковского, и его максимальное значение, достигаемое при $T = 0$, оказывается пропорциональным квадрату числа молекул (бозе-конденсация фотонов). По аналогии со сверхизлучением Дика подобный фазовый переход был назван «сверхизлучательным». Однако частота сконденсированных фотонов в [1, 2] не находилась: тогда считалось, что она не сильно отличается от частоты рассматриваемого молекулярного перехода.

Вопрос о несущей частоте фотонного бозе-конденсата впервые был проанализирован в работе [3]. В ней обсуждалась система двухуровневых молекул с дипольно разрешённым переходом без учёта их теплового (поступательного и вращательного) движения и релаксации поляризации и разности населённостей уровней. Учитывалось, что действующее на молекулы электрическое поле отличается от среднего макроскопического на величину, пропорциональную поляризации вещества (поправка Лоренца). Было показано, что при $T < T_c$ система оказывается неустойчивой к возникновению макроскопической однородной поляризации на нулевой частоте. Это означает, что в действительности частота сконденсированных фотонов равна нулю, т. е. должен происходить не «сверхизлучательный», а сегнетоэлектрический фазовый переход. Таким образом, в [3] была указана возможность существования аморфных сегнетоэлектриков.

В работе [4] на основе оптических уравнений Блоха была рассмотрена более реалистичная модель газа двухуровневых молекул с учётом их теплового поступательного движения, т. е. пространственной дисперсии, и релаксации поляризации и разности населённостей уровней молекул. В результате было установлено, что в спектре коллективных возбуждений системы может возникать мода с $\text{Re}\omega = 0$.

(мягкая мода), частота которой при не слишком сильной столкновительной релаксации обращается в нуль при определённой температуре $T = T_c$ и конечном волновом векторе $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0$. При этих же значениях T и k становится бесконечной статическая диэлектрическая проницаемость газа $\varepsilon(\omega = 0, \mathbf{k} = \mathbf{k}_0)$. При $T < T_c$ мягкая мода оказывается неустойчивой, и в системе должна формироваться многодоменная структура статических поперечных волн поляризации, характеризующихся конечным периодом, близким к $\lambda_0 = 2\pi/k_0$. Таким образом, в [4] был предсказан антисегнетоэлектрический фазовый переход в газах. Иными словами, был приведён нетривиальный пример газового кристалла, где статическая самосогласованная поляризационная структура существует несмотря на отсутствие пространственного и ориентационного упорядочения хаотически движущихся молекул (название дано по аналогии с жидкими кристаллами).

Целью настоящей статьи является исследование условий существования и свойств антисегнетоэлектрического фазового перехода в модели равновесного газа дипольно взаимодействующих двухуровневых молекул. Полагая температуру T не очень близкой к порогу перехода T_c , мы пользуемся методом среднего поля, т. е. теорией Ландау, считая, что при равном нулю макроскопическом электрическом поле \mathbf{E} взаимодействие молекул определяется локальной поляризацией среды и сводится к пропорциональному поляризации отличию действующего на них поля от \mathbf{E} . В 1-м разделе на основе уравнений Блоха с учётом релаксации обсуждены особенности поляризационной катастрофы и неустойчивости мягкой моды в газе. Во 2-м разделе найдены стационарные состояния отдельных молекул, движущихся в волне поляризации. На основе распределения Гиббса по указанным состояниям, справедливом при слабой релаксации, в разделе 3 выведено уравнение самосогласования для амплитуды волны поляризации и вычислены статистическая сумма и свободная энергия газа со спонтанной поляризационной структурой. Равновесная амплитуда волны поляризации и изменения в термодинамических функциях поляризованного газа, вызванные как резонансным, так и нерезонансным взаимодействием молекул с волной поляризации, найдены в разделе 4. Раздел 5 посвящён флуктуациям и границам применимости используемой нами теории фазовых переходов Гинзбурга—Ландау в случае сегнетоэлектрического перехода в газе. В 6-м разделе проведены оценки и рассмотрены проблемы экспериментального наблюдения антисегнетоэлектрического фазового перехода в газообразных системах.

1. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА—БЛОХА И ПОЛЯРИЗАЦИОННАЯ КАТАСТРОФА В ГАЗЕ ДВУХУРОВНЕВЫХ МОЛЕКУЛ

Рассмотрим термодинамически равновесный однородный газ, состоящий из свободно движущихся молекул (или атомов) с двумя невырожденными энергетическими уровнями: основным $-\hbar\omega_0/2$ и термически возбуждённым $+\hbar\omega_0/2$. Полученные ниже результаты не зависят от природы этих уровней, необходимо лишь наличие достаточно большого дипольного момента перехода \mathbf{d} между ними, тогда как постоянный дипольный момент может быть и нулевым. Для простоты будем считать, что все дипольные моменты направлены вдоль оси z ; в противном случае вычисления в следующих разделах становятся более громоздкими, однако основные выводы не меняются: антисегнетоэлектричество возможно и при изотропной ориентации двухуровневых молекул в газе. Для определённости, можно иметь в виду переход между нулевым (полный момент импульса молекулы $K = 0$) и первым ($K = 1$) вращательными подуровнями одного и того же электронно-колебательного уровня в двухатомной молекуле. В указанном случае удобно выбрать ось квантования z вдоль направления действующего на молекулу электрического поля и обозначить через M проекцию на неё момента импульса \mathbf{K} (в единицах \hbar). Тогда, согласно правилам отбора [5], лишь переход $K = 0 \rightarrow K = 1$, $M = 0$ характеризуется дипольным моментом с ненулевой проекцией $d_z = d_0/\sqrt{3}$, где d_0 — величина статического дипольного момента двухатомной молекулы, направленного вдоль её оси. Для такого перехода проекции \mathbf{d} на две другие

оси (x и y) тождественно равны нулю, и его можно рассматривать в качестве рабочего, для простоты вычислений отвлекаясь от вырождения верхнего уровня; учёт последнего обстоятельства приводит к не более чем двухкратному увеличению критической концентрации газа (необходимой для наблюдения фазового перехода) по сравнению с величиной, найденной ниже.

Для описания взаимодействия такого газа с достаточно сильным (и поэтому рассматриваемым классически) электромагнитным полем, имеющим пространственный масштаб много больше размера молекулы, естественно использовать известные оптические уравнения Максвелла—Блоха [4, 6]. При этом квантование поступательного движения молекул не проводится, так что каждая из них в любой момент времени характеризуется определёнными радиус-вектором $\mathbf{r}(t)$ и скоростью $\mathbf{v}(t)$. Исходные кинетические уравнения для функций распределения плотности дипольного момента молекул и плотности разности населённостей молекулярных уровней по скоростям имеют вид

$$(\partial/\partial t + \mathbf{v}\nabla)^2 \mathbf{P}(\mathbf{v}) + 2\gamma (\partial/\partial t + \mathbf{v}\nabla) \mathbf{P}(\mathbf{v}) + (\omega_0^2 + \gamma^2) \mathbf{P}(\mathbf{v}) = -2\omega_0 (\mathbf{d}, \mathbf{E}_1) \mathbf{d} n(\mathbf{v})/\hbar, \quad (1)$$

$$(\partial/\partial t + \mathbf{v}\nabla) n(\mathbf{v}) = -[n(\mathbf{v}) - n_e(\mathbf{v})]/T_1 + \frac{2\mathbf{E}_1}{\hbar\omega_0} (\partial/\partial t + \mathbf{v}\nabla) \mathbf{P}(\mathbf{v}). \quad (2)$$

Здесь \mathbf{E}_1 — действующее на молекулу электрическое поле, $\mathbf{P}(\mathbf{v}) d^3v$ и $n d^3v$ — соответственно поляризация и плотность разности населённостей энергетических уровней молекул из интервала скоростей d^3v , $n_e(\mathbf{v}) = -f_M N \operatorname{th}[\hbar\omega_0/(2T)]$ — термодинамически равновесное значение $n(\mathbf{v})$ в отсутствие поля, $f_M = \pi^{-3/2} v_T^{-3} \exp(-v^2/v_T^2)$ — функция распределения Максвелла, $v_T = \sqrt{2T/m}$ — тепловая скорость молекул, m — их масса, $\gamma = 1/T_2$ и $1/T_1$ — феноменологические скорости релаксации функций распределения поляризации и плотности разности населённостей. В интересующих нас условиях первая примерно равна эффективной частоте столкновений, $\gamma \sim \sqrt{2\pi} r_W^2 N v_T$, и определяется сечением Вайскопфа для сбоя фазы колебаний дипольного момента молекулы $\pi r_W^2 = 2\pi\xi d^2/(\hbar v_T)$, где N — концентрация газа, ξ — численный параметр ($\xi \lesssim 1$) [7, 8]; вторая скорость близка к частоте газокинетических столкновений и, как правило, меньше первой. Отметим, что уравнение (1) корректно описывает релаксацию функции распределения поляризации молекул, лишь если её скорость достаточно мала: $\gamma \ll \omega_0$. В случае же сильной релаксации ($\gamma \sim \omega_0$) оно даёт лишь качественные результаты. Принципиальным для дальнейшего является учёт отличия действующего на молекулы газа электрического поля \mathbf{E}_1 от среднего макроскопического поля \mathbf{E} (поправка Лоренца, см., например, [9]): $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}/3$. Здесь \mathbf{P} — макроскопическая поляризация газа: $\mathbf{P} \equiv \int \mathbf{P}(\mathbf{v}) d^3v$.

При расчёте линейной (для процессов, пропорциональных $\exp(-iwt + ikr)$) диэлектрической проницаемости с помощью уравнения (1) в нём достаточно положить $n(\mathbf{v}) = n_e(\mathbf{v})$. Согласно [4] получающаяся диэлектрическая проницаемость газа $\epsilon(\omega, k)$ зависит не только от частоты волны ω , но и от её волнового числа k , что связано с пространственной дисперсией среды, обусловленной тепловым движением молекул:

$$\epsilon(\omega, k) = \frac{1 + 2\theta}{1 - \theta}, \quad (3)$$

$$\theta = \frac{i\sqrt{\pi}\omega_c^2}{6\omega_0 k v_T} \left[w\left(\frac{\omega + i\gamma - \omega_0}{kv_T}\right) - w\left(\frac{\omega + i\gamma + \omega_0}{kv_T}\right) \right]. \quad (4)$$

Здесь $\omega_c^2 = 8\pi d^2 \omega_0 N \operatorname{th}[\hbar\omega_0/(2T)]/\hbar$ — квадрат кооперативной частоты газа, $w(z) = \exp(-z^2)[1 + (2i/\sqrt{\pi}) \int_0^z \exp(s^2) ds]$ — функция Крампа [10]. В результате сильного сдвига частоты коллективных колебаний поляризации за счёт поправки Лоренца статическая диэлектрическая проницаемость $\epsilon(0, k)$ становится отрицательной при $\theta(0, k) > 1$. Для заданной концентрации N , превышающей, по крайней мере, величину $N_{\min} = \hbar\omega_0/(2\sqrt{3}\pi d^2)$, это происходит при $T < T_k$, а для заданной температуры — при $N > N_k$. Пороговое значение T_k (или N_k) определяется из условия $\theta(0, k) = 1$:

$$\frac{\sqrt{\pi}\omega_c^2}{3\omega_0 k v_T} \operatorname{Im} w(z) = 1; \quad z = \frac{\omega_0 + i\gamma}{kv_T}. \quad (5)$$

В точке $T = T_k$ (или $N = N_k$) происходит смена знака $\varepsilon(0, k)$: статическая диэлектрическая проницаемость изменяется с $+\infty$ на $-\infty$; эта поляризационная катастрофа, как известно, свидетельствует о фазовом переходе.

Решение обычного дисперсионного уравнения $\omega^2 \varepsilon(\omega, k) = c^2 k^2$ для поперечной электромагнитной волны при температуре T вблизи T_k (или N вблизи N_k) и $k \neq 0$ имеет вид

$$\omega \simeq \frac{3i(kv_T)^2 \omega_0 [\theta(0, k) - 1]}{2\sqrt{\pi} \omega_c^2 \operatorname{Re}[zw(z)]}. \quad (6)$$

Из него видно, что частота волны ω оказывается чисто мнимой, и при $T < T_k$ (или $N > N_k$) в определённом интервале действительных величин волнового вектора становится возможным апериодический рост поляризации и поля по экспоненциальному закону (неустойчивость мягкой моды). Указанные явления давно и хорошо известны для кристаллических и жидкокристаллических сегнето- и антисегнетоэлектриков, однако их существование в бесструктурных, аморфных средах было предсказано лишь в [3, 4].

Анализ уравнения (5) показывает, что при заданной безразмерной скорости релаксации $\bar{\gamma} \equiv \gamma/\omega_0$ обращение в бесконечность статической диэлектрической проницаемости возможно лишь при достаточно малом параметре ξ , а именно при $\xi \leq (2\sqrt{2}\bar{\gamma}/3) \max[\sqrt{\pi} \operatorname{Re} z \operatorname{Im} w(z)]$, где максимум берётся по k и достигается при некотором значении $k = k_0$. Легко видеть, что $k = k_0$ является и точкой максимума критической температуры, $\max T_k = T_{k_0} \equiv T_c(N)$, и точкой минимума критической концентрации, $\min N_k = N_{k_0} \equiv N_c(T)$. Формула (5), если положить в ней $\gamma = 0$ и $k = 0$, соответствует порогу неустойчивости мягкой моды, полученному в работе [3].

При относительно слабой релаксации, когда $\bar{\gamma} < 1/\sqrt{3}$, максимальное значение T_k (или минимальное значение N_k) достигается при конечном положительном волновом числе $k_0 \leq 2\omega_0/(3v_T)$ [4], причём наибольшее значение k_0 равно $2\omega_0/(3v_T)$ и реализуется в случае $\bar{\gamma} = 0$. Таким образом, для $\bar{\gamma} < 1/\sqrt{3}$ при понижении температуры (или увеличении концентрации) неустойчивой раньше всего становится периодически неоднородная структура поля и поляризации (антисегнетоэлектричество). При достаточно сильной релаксации, когда $\bar{\gamma} > 1/\sqrt{3}$, максимальное значение T_k (или минимальное значение N_k) достигается при $k_0 = 0$ [4], т. е. при понижении температуры (или увеличении концентрации) условие неустойчивости в рассматриваемой модели газа впервые выполняется для однородного распределения поля и поляризации (сегнетоэлектричество).

Наличие в спектре коллективных возбуждений газа при $T < T_c$ (или $N > N_c$) неустойчивой мягкой моды означает, что он должен спонтанно переходить в состояние с определённой стационарной поляризационной структурой. При $k_0 \neq 0$ и необходимом для справедливости дипольного приближения условии $\lambda_0 \equiv 2\pi/k_0 \gg r_m$, где r_m — радиус молекулы, естественно считать, что такая структура имеет вид поперечной волны поляризации с волновым числом k_0 , т. е. газ переходит в антисегнетоэлектрическое состояние¹. В случае же $k_0 = 0$ очевидно, что в газе должна устанавливаться однородная поляризация, т. е. он будет переходить в сегнетоэлектрическое состояние. Для простоты здесь и ниже мы отвлекаемся от возможной многодоменности [11—14].

Свойства антисегнетоэлектрического фазового перехода вблизи T_c исследовались на основе уравнений Максвелла—Блоха в [15, 16], где было установлено, что при $T < T_c$ имеется нелинейное стационарное решение в виде поперечной волны поляризации с амплитудой

$$P_0 = \frac{3\hbar\omega_0}{4\pi d} \sqrt{\frac{A_B - 1}{2C_B}} \simeq \frac{3\hbar\omega_0}{4\pi d} \sqrt{\left| \frac{\partial A_B}{\partial T} \right|_{T=T_c} \frac{T_c - T}{2C_B}}. \quad (7)$$

¹ Можно показать, что при $k_0 \neq 0$ и $\lambda_0 \ll r_m$ возможен только сегнетоэлектрический переход.

Здесь коэффициенты A_B и C_B выражаются следующими формулами:

$$A_B = \frac{4\pi}{3} \int \chi d^3v \equiv \theta(0, k_0), \quad (8)$$

$$C_B = \frac{4\pi}{3} \int \frac{(\mathbf{k}_0, \mathbf{v}) \hbar \omega_0}{4d^2 n_e(\mathbf{v})} \left(2T_1 \chi \operatorname{Im} \chi - \frac{i\chi^2}{2i(\mathbf{k}_0, \mathbf{v}) + 1/T_1} \right) d^3v > 0. \quad (9)$$

Величина

$$\chi = -\frac{2\omega_0 d^2 n_e(\mathbf{v})}{\hbar [(\omega_0^2 + \gamma^2) - (\mathbf{k}_0, \mathbf{v})^2 + 2i\gamma(\mathbf{k}_0, \mathbf{v})]} \quad (10)$$

есть делённая на d^3v линейная восприимчивость двухуровневых молекул со скоростями из интервала d^3v . Из решения (7) видно, что амплитуда волны поляризации с понижением температуры T растёт непрерывно, начиная с нулевого значения при $T = T_c$. Это соответствует фазовому переходу второго рода. Характерная корневая зависимость амплитуды волны поляризации от температуры отвечает результату, получаемому при описании таких явлений в рамках теории Гинзбурга—Ландау [17].

Формально решение (7) справедливо при $P_0 \lesssim 3\hbar/(4\pi d\sqrt{T_1 T_2})$. Однако проведённый в уравнениях (1), (2) феноменологический учёт релаксации поляризации и разности населённостей уровней молекул при их столкновениях становится некорректным уже при поляризации, значительно меньшей указанного граничного значения. Дело в том, что когда частота Раби [6] $4\pi P_0 d/(3\hbar)$, определяемая локальным полем, оказывается много больше характерного обратного времени наиболее медленных релаксационных процессов в газе ($1/T_1$), локальное поле успевает существенно изменить внутреннее состояние значительной части молекул за время их свободного пробега и поэтому неизбежно модифицирует релаксационные слагаемые в уравнениях Блоха (1), (2).

2. КВАЗИКЛАССИЧЕСКИЕ УРОВНИ И КВАЗИЭНЕРГИИ МОЛЕКУЛЫ, ДВИЖУЩЕЙСЯ В ВОЛНЕ ПОЛЯРИЗАЦИИ

Таким образом, выяснение свойств поляризованного газа достаточно далеко от точки фазового перехода в рамках стандартных уравнений Максвелла—Блоха становится невозможным и требует либо пересмотра уравнений, либо привлечения методов статистической физики, из которых следует, что в указанной области все характеризующие молекулы величины стремятся релаксировать к значениям, по-прежнему определяемыми распределением Гиббса, но теперь уже не по их стационарным состояниям в неполяризованном газе, а по новым состояниям, найденным с учётом волны поляризации. Определить последние оказывается достаточно просто для слабонеидеального газа с малой скоростью вайскопфовской релаксации $\tilde{\gamma} \ll 1$, который и будет рассматриваться далее. В таком случае при $\lambda_0 \gg r_m$ газ может переходить лишь в антисегнетоэлектрическое состояние с волной поляризации, длина которой $\lambda_0 \sim v_T/\omega_0$ оказывается значительно меньше длины свободного пробега молекул v_T/γ . В разделе 6 будет показано, что в условиях, наиболее благоприятных для экспериментального наблюдения антисегнетоэлектрического фазового перехода, длина волны поляризации значительно превышает тепловую длину волны де Броиля молекул $\lambda_B = 2\pi\hbar/(mv_T)$. В этом случае поступательное движение молекул в волне поляризации описывается в квазиклассическом приближении, и можно показать [18], что их стационарные состояния $|\psi_{j,p}\rangle$ ($j = 1, 2$; p — квазимпульс молекулы) совпадают с квазиэнергетическими состояниями (КЭС), а соответствующие им энергии $e_{j,p}$ — с квазиэнергиями (КЭ). КЭС и КЭ хорошо известны в квантовой оптике [6] и определяются в результате решения нестационарного уравнения Шредингера в сопутствующей молекуле системе отсчета, в которой она подвергается периодическому внешнему воздействию, обусловленному поперечной волной поляризации $\mathbf{P} = \mathbf{P}_0 \cos(k_0 x)$.

Введём безразмерную частоту Раби $\eta = (\mathbf{d}, \mathbf{E}_{10})/(\hbar\omega_0)$, где $\mathbf{E}_{10} = 4\pi\mathbf{P}_0/3$, и будем рассматривать область параметров, лежащую не слишком далеко от порога антисегнетоэлектрического фазового перехода, полагая $|\eta| \ll 1$. Это позволяет применить развитую в [19] теорию возмущений. Проводя вычисления по указанной там схеме, дающей корректное описание эффектов как вдали, так и вблизи резонансов $p_x = \pm\hbar\omega_0/k_0$ (сведение особого случая к неособым по терминологии [19]), получим следующий ответ:

$$e_{jp} \simeq \frac{p^2}{2m} + (-1)^j \frac{\hbar\omega_0}{2} \left(|\bar{p}| + (1 - |\bar{p}|) \sqrt{1 + \frac{4\eta^2(1 + |\bar{p}|)^2 - \eta^4}{2(1 - \bar{p}^2)^2(1 + |\bar{p}|)}} \right), \quad (11)$$

где введена безразмерная переменная $\bar{p} = k_0 p_x / (\hbar\omega_0)$. Квазиэнергии (11) как функции \bar{p} непрерывны всюду, за исключением доплеровского резонанса $\bar{p} = \pm 1$, где они испытывают скачок на величину $(\mathbf{d}, \mathbf{E}_{10}) = 4\pi(\mathbf{d}, \mathbf{P}_0)/3$. Отметим, что формула (11) получена без использования приближения «вращающейся волны» [6], обычно применяемого для нахождения КЭ и справедливого только в окрестности доплеровских резонансов. Это позволяет правильно учесть вклад в вычисляемые ниже термодинамические величины как от резонансных молекул с $||\bar{p}| - 1| < |\eta|$, так и от нерезонансных частиц с $||\bar{p}| - 1| > |\eta|$.

Обозначим через $\langle jp|\hat{d}|jp\rangle$ плотность дипольного момента молекулы в стационарном состоянии, являющуюся результатом усреднения оператора дипольного момента молекулы \hat{d} только по её внутренним степеням свободы и поэтому зависящую от \mathbf{r} . Тогда $\langle\psi_{jp}|\hat{d}|\psi_{jp}\rangle = \int \langle jp|\hat{d}|jp\rangle d^3r$. Величина $\langle jp|\hat{d}|jp\rangle$ не зависит от координат y и z (ортогональных оси x) и в соответствии с теоремой Флоке—Ляпунова [19] является периодической функцией координаты x с периодом λ_0 . Это означает, что плотность дипольного момента молекулы в стационарном состоянии может быть представлена в виде ряда Фурье, причём при $|\eta| \ll 1$ наибольшую величину в указанном разложении будет иметь первая гармоника, так что $\langle jp|\hat{d}|jp\rangle \simeq \langle jp|\hat{d}|jp\rangle_0 \cos(k_0 x)$. Её амплитуду проще всего вычислить, воспользовавшись известной формулой [5]

$$\langle\psi_{jp}|\partial\hat{h}/\partial\zeta|\psi_{jp}\rangle = \partial e_{jp}/\partial\zeta, \quad (12)$$

где ζ — любой параметр гамильтониана молекулы в волне поляризации \hat{h} . При $\zeta = \mathbf{E}_{10}$ очевидно, что $\partial\hat{h}/\partial\mathbf{E}_{10} = -\hat{d} \cos(k_0 x)$, так что амплитуда дипольного момента равна

$$\langle jp|\hat{d}|jp\rangle_0 = -2V^{-1} \partial e_{jp}/\partial\mathbf{E}_{10}, \quad (13)$$

где V — объём газа. Отсюда видно, что величины $\langle jp|\hat{d}|jp\rangle_0$ вдали от резонансов пропорциональны η , т. е. являются малыми, но в их окрестности достигают конечных значений порядка $\pm d$, а в точках резонанса $\bar{p} = \pm 1$ меняют знак.

3. УРАВНЕНИЕ САМОСОГЛАСОВАНИЯ И СВОБОДНАЯ ЭНЕРГИЯ ГАЗА С НЕОДНОРОДНОЙ ПОЛЯРИЗАЦИОННОЙ СТРУКТУРОЙ

Напомним, что ниже мы будем использовать так называемое приближение среднего (молекулярного) поля, т. е. иметь в виду случай достаточно сильной поляризации газа, когда энергия коллективного взаимодействия молекул, связанная с самосогласованным локальным полем, значительно превышает энергию их флуктуационного парного (дипольного) взаимодействия. В непосредственной близости от порога фазового перехода флуктуационные эффекты, как известно, могут играть ведущую роль [11–14, 17], и в случае сегнетоэлектрического фазового перехода они подробно анализируются в разделе 6.

В теории среднего поля равновесная матрица плотности отдельной молекулы в базисе стационарных состояний $|\psi_{jp}\rangle$ диагональна, и её ненулевые элементы определяются распределением Гиббса

с температурой T по квазиэнергиям e_{jp} (11). Поэтому амплитуда волны поляризации в монодоменном образце газа задаётся уравнением самосогласования

$$P_0 = 2TN \partial \ln(Z) / \partial E_{10},$$

$$Z = \int \sum_{j=1,2} \exp(-e_{jp}/T) V d^3p / (2\pi\hbar)^3, \quad (14)$$

которое является непосредственным следствием определения среднего значения оператора дипольного момента молекулы. Выше для амплитуды дипольного момента в КЭС использована формула (13), Z — статистическая сумма по энергиям одной частицы, величина $V d^3p / (2\pi\hbar)^3$ определяет (в кванкласическом приближении) число состояний для поступательного движения молекул в объёме V и в интервале квазимпульсов d^3p .

В формуле (14) неявно подразумевается, что поляризационная структура в газе представляется только одной гармоникой с волновым вектором \mathbf{k}_0 . Строго говоря, как ясно уже из уравнений Максвелла—Блоха, в антисегнетоэлектрическом состоянии наряду с первой гармоникой поляризации всегда присутствуют и другие её гармоники с волновыми векторами, кратными \mathbf{k}_0 . Тем не менее не слишком далеко от порога фазового перехода, когда поляризация достаточно мала, основную роль играет её первая гармоника, амплитуда которой значительно превышает амплитуды всех остальных гармоник. Тогда можно считать, что поляризация газа $\mathbf{P} \simeq P_0 \cos(k_0 x)$.

Интегрирование по p_y и p_z в (14) тривиально, а по $p_x = \bar{p}t\omega_0/k_0$ выполняется следующим образом. Благодаря симметрии энергетических уровней молекулы относительно замены $\bar{p} \rightarrow -\bar{p}$ положительные и отрицательные полуоси квазимпульса p_x дают в интеграл одинаковый вклад. Разложим правую часть уравнения самосогласования (14) по степеням $e_{jp} - p^2/(2m) - (-1)^j \hbar\omega_0/2$. Выделим на луче $\bar{p} \geq 0$ резонансный интервал $|\bar{p} - 1| \leq \alpha |\eta|$, где α — произвольное положительное число порядка 1. Вследствие малости указанной области при интегрировании по ней величина $\exp[-p_x^2/(2mT)]$ может быть разложена в ряд по степеням $\bar{p} - 1$. Это позволяет вычислить интеграл по рассматриваемому интервалу в элементарных функциях с точностью до η^4 включительно. На оставшейся части луча $\bar{p} \geq 0$ выражения (11) разложим в ряд по степеням η с точностью до четвёртого порядка включительно. К интегралу по оставшейся части луча добавим и вычтем интеграл по полуокружности с радиусом $\alpha |\eta|$, охватывающей в комплексной плоскости \bar{p} точку $\bar{p} = 1$ снизу. Интеграл по указанной полуокружности вычислим с точностью до η^4 включительно, а его сумму с интегралом по части луча $\bar{p} \geq 0$, оставшейся после отбрасывания резонансного интервала $|\bar{p} - 1| \leq \alpha |\eta|$, выразим через функцию Крампа w и её производные. Складывая получающееся выражение с интегралом по резонансному интервалу и удваивая результат из-за наличия луча $\bar{p} \leq 0$, окончательно получаем следующую запись уравнения самосогласования (14) с точностью до $|\eta|^3$ включительно:

$$|\eta| \simeq A |\eta| - 3B |\eta|^2/2 - 2C |\eta|^3, \quad (15)$$

где

$$A = \left[\omega_c^2 / (\sqrt{3} \omega_0)^2 \right] \sqrt{\pi} \bar{\lambda}_0 \operatorname{Im} w(\bar{\lambda}_0) \simeq \theta(0, k_0), \quad (16)$$

$$B = \left[\omega_c^2 / (\sqrt{3} \omega_0)^2 \right] \pi^{-1/2} \bar{\lambda}_0 \exp(-\bar{\lambda}_0^2) \left\{ 1 + 8\bar{\lambda}_0^2/3 - 4/[3\bar{T} \operatorname{th}(1/\bar{T})] \right\}, \quad (17)$$

$$C = \left[\omega_c^2 / (2\sqrt{3} \omega_0)^2 \right] \bar{\lambda}_0 \left[\sqrt{\pi} \operatorname{Im} w(\bar{\lambda}_0) (2\bar{\lambda}_0^4 + \bar{\lambda}_0^2 + 1) - 2\bar{\lambda}_0 (\bar{\lambda}_0^2 + 1) - (\sqrt{\pi} \operatorname{Im} w(\bar{\lambda}_0) (1 + 2\bar{\lambda}_0^2) - 2\bar{\lambda}_0) / [\bar{T} \operatorname{th}(1/\bar{T})] + 2\pi\bar{\lambda}_0 \operatorname{th}(1/\bar{T}) \operatorname{Im}^2 w(\bar{\lambda}_0) / \bar{T} \right], \quad (18)$$

где $\bar{\lambda}_0 = \omega_0 / (k_0 v_T)$, $\bar{T} = 2T / (\hbar\omega_0)$; в последнем равенстве в формуле (16) учтено, что $\bar{\gamma} \ll 1$. Отметим, что в выражении для коэффициента B не выписаны слагаемые, зависящие от параметра α .

Однако можно показать, что они компенсируются в результате интегрирования по указанной выше полуокружности высших членов разложения КЭ e_{jp} по степеням η^2 . Таким образом, как и должно быть, все коэффициенты не зависят от произвольного параметра α . Резонансные молекулы полностью определяют коэффициент B и существенно влияют на коэффициент C (доплеровская аномалия). Проведённое нами численное нахождение интеграла (14) подтверждает разложение (15)–(18).

Свободная энергия монодоменного образца газа с волной поляризации равна

$$F = E_{10}P_0V/4 - NVT \ln[eZ/(NV)], \quad (19)$$

где в качестве η нужно взять решение уравнения (15). Поскольку поляризация создаётся самими же молекулами, то при буквальном суммировании энергии взаимодействия с локальным полем $-dE_l$ по всем частицам мы учитывали бы каждую пару молекул дважды. Для компенсации этого обстоятельства в (19) добавлен член $E_{10}P_0V/4$, получающийся интегрированием величины $(E_l, P)/2$ по объёму газа. Пользуясь соотношениями (14) и (15) и замечая, что энергетические уровни (11), входящие в формулу (14), определяются только величиной $|P_0|$, находим разложение свободной энергии по степеням $|P_0|$:

$$F = F_0 + [3(\hbar\omega_0)^2 V/(16\pi d^2)] [(1 - A)|\eta|^2 + B|\eta|^3 + C|\eta|^4], \quad (20)$$

содержащее независящий от $|P_0|$ член F_0 и, наряду с чётными степенями $|P_0|$, кубическое слагаемое $|P_0|^3$. Последнее определяется вкладом резонансных молекул и отсутствует в теории обычных фазовых переходов второго рода и слабых переходов первого рода в кристаллах [9, 11–14, 17]. Отметим, что появление указанного слагаемого в данном случае антисегнетоэлектричества не противоречит инвариантности свободной энергии газа относительно изменения знака P_0 .

4. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ГАЗООБРАЗНОГО АНТИСЕГНЕТОЭЛЕКТРИКА И ДОПЛЕРОВСКАЯ АНОМАЛИЯ

Анализ условий антисегнетоэлектрического фазового перехода показывает, что для его наблюдения оптимальной является область $\bar{T}_c \sim 1$. При таких критических температурах оба коэффициента, B и C , положительны, и исследование уравнения самосогласования (15) значительно упрощается: оно имеет единственное ненулевое решение

$$\eta_{af} = \frac{-3B/2 + \sqrt{(3B/2)^2 - 8(1 - A)C}}{4C}, \quad (21)$$

появляющееся при $A > 1$, т. е. как раз тогда, когда согласно разделу 1 в газе появляется неустойчивая мягкая мода. Легко убедиться, что решение (21) соответствует меньшей, чем для неполяризованного газа, свободной энергии (20). Таким образом, при $A > 1$ (т. е. при $T < T_c$ или $N > N_c$) в газе устанавливается равновесная волна поляризации с амплитудой $P_0 \propto \eta_{af}$. Для $0 < A - 1 \lesssim B^2/(8C)$ указанное решение имеет вид

$$\eta_{af} \simeq 2(A - 1)/(3B). \quad (22)$$

В области применимости формулы (22) амплитуда волны поляризации пропорциональна $\eta_{af} \propto T_c - T$ и сравнительно мала, т. к. $\eta_{af} \lesssim 0,1B/C$. При $A - 1 \gtrsim B^2/(2C)$, т. е. при $T_c - T \gtrsim -B^2/(2aC)$, где $a = (\partial A / \partial T)|_{T=T_c} = -\hbar\omega_0 / (T_c^2 \sinh(2/\bar{T}_c))$, решение (21) принимает стандартный вид

$$\eta_{af} \simeq \sqrt{(A - 1)/(2C)}, \quad (T_c - T)/T_c \gtrsim 0,4, \quad (23)$$

где число в правой части неравенства указано для случая $\bar{\lambda}_0 = 3/2$ и $\bar{T}_c = 1$. В этой области, т. е. достаточно далеко от точки фазового перехода, амплитуда волны поляризации пропорциональна $\sqrt{T_c - T}$,

а $\eta_{\text{af}} > 0,5B/C$. Переход от «аномального» решения (22) к обычному решению (23) происходит при $A - 1 \sim B^2/(4C)$ и отвечает сравнительно небольшому отклонению от точки фазового перехода $(T_c - T)/T_c \sim 0,2$ (при $\bar{\lambda}_0 = 3/2$ и $\bar{T}_c = 1$).

В целом равновесное значение η_{af} при понижении температуры растет непрерывно от нулевого значения при $A = 1$ (т. е. при $T = T_c$), и поэтому рассматриваемый фазовый переход относится ко второму роду. Аномальная зависимость (22) малых значений амплитуды волны поляризации от $T_c - T$ (линейная вместо корневой, характерной для фазовых переходов второго рода) объясняется влиянием резонансных молекул, приводящим к появлению квадратичного члена с $B \neq 0$ в разложении (15), тогда как обычно он отсутствует. Обратим внимание на то, что флуктуационные эффекты могут видоизменить приведённый результат теории среднего поля, поскольку она не применима для очень малых значений параметра порядка [11–14, 17]. При достаточно большой поляризации рост частоты Раби, определяющей динамику молекул, приводит к ослаблению их резонансного взаимодействия с волной, и зависимость её амплитуды от $T_c - T$ становится корневой в соответствии с теорией обычных (сегнетоэлектрических) фазовых переходов.

Свободная энергия газа (19) (и близкое к ней разложение (20)) является непрерывной функцией температуры и благодаря доплеровской аномалии при $A > 1$ уменьшается на величину

$$F(\eta = \eta_{\text{af}}) - F(\eta = 0) \simeq (\hbar\omega_0)^2 V (1 - A)^3 / (36\pi d^2 B^2) < 0 \quad (24)$$

(с точностью до $(1 - A)^3$ включительно) по сравнению с её значением для газа без поляриционной структуры при тех же температуре и концентрации. Энтропия, давление и химический потенциал газа на пороге перехода $T = T_c$ (или $N = N_c$) также остаются непрерывными, а при дальнейшем понижении температуры (или увеличении концентрации) добавки к ним, связанные с поляризацией газа, отрицательны и пропорциональны $(1 - A)^2$. Так, добавка к давлению оказывается равной $-(\hbar\omega_0)^2 A (1 - A)^2 / (12\pi d^2 B^2)$. Теплоёмкость газа при постоянном объёме C_V также остаётся непрерывной при $A = 1$, а при $A > 1$ связанная с поляризацией добавка к ней положительна и равна

$$C_V(\eta = \eta_{\text{af}}) - C_V(\eta = 0) = (\hbar\omega_0)^2 TV [\partial^2(A - 1)^3 / \partial T^2] / (36\pi d^2 B^2) \quad (25)$$

(с точностью до $A - 1$ включительно). Согласно (23) вдали от точки фазового перехода

$$C_V(\eta = \eta_{\text{af}}) - C_V(\eta = 0) \simeq 3VT(\hbar\omega_0)^2 a^2 / (32\pi d^2 C). \quad (26)$$

Статическая диэлектрическая проницаемость поляризованного газа вычисляется с помощью уравнения самосогласования (15) с помощью замены $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P} + 3\mathbf{E}/(4\pi)$ в его правой части. В итоге получаем, что за порогом перехода $\epsilon(0, k_0)$ по-прежнему определяется формулой вида (3), где, однако, функция $\theta(0, k_0)$ должна быть теперь заменена на новую функцию $\theta_a(0, k_0)$, вычисленную с учётом волны поляризации:

$$\theta_a(0, k_0) = 2 - A. \quad (27)$$

Очевидно, что $\theta_a(0, k_0) < 1$, поэтому диэлектрическая постоянная $\epsilon(0, k_0)$ оказывается всегда положительной и обращается в бесконечность в точке перехода:

$$\epsilon(0, k_0) \simeq 3/|1 - A|. \quad (28)$$

Выше предполагается, что $|1 - A| \lesssim B^2/(8C)$. Если это неравенство нарушено (далеко за порогом фазового перехода), то согласно (23) справедлива стандартная формула

$$\epsilon(0, k_0) \simeq 3/[2(A - 1)]. \quad (29)$$

Вычисление низкочастотной диэлектрической проницаемости в случае фазового перехода второго рода значительно упрощается благодаря малости амплитуды волны поляризации непосредственно за его порогом. В результате допустимо не учитывать влияние последней на частотную зависимость величины $\theta_a(\omega, k_0)$, так что за порогом перехода коэффициент перед ω в её разложении по степеням частоты поля останется таким же, как и в формуле (4) (при $\bar{\gamma} = 0$). Следовательно, в газе с волной поляризации частота мягкой моды по-прежнему определяется выражением (6), где, однако, необходимо заменить $\theta(0, k_0)$ на $\theta_a(0, k_0)$ из (27). В итоге и при $A > 1$ вследствие неравенства $\theta_a(0, k_0) < 1$ мягкая мода оказывается экспоненциально затухающей, т. е. является устойчивой.

Подчеркнём ещё раз, что отсутствие скачка теплоёмкости в точке перехода и дополнительного множителя $1/2$ при $A > 1$ у статической диэлектрической проницаемости по сравнению с её значением при $A < 1$ не является характерным для фазовых переходов второго рода [17] (ср. (25), (28) и (26), (29)). Эта доплеровская аномалия обусловлена резонансным взаимодействием между самосогласованной волной поляризации и молекулами с $|(\mathbf{v}, \mathbf{k}_0)| \sim \omega_0$. Последнее приводит к появлению в уравнении самосогласования (15) ненулевого коэффициента B (тогда как для типичных фазовых переходов второго рода $B = 0$), что соответствует наличию кубического члена в разложении свободной энергии (19) по степеням параметра порядка $|\eta|$. Переход термодинамических величин к типичному поведению происходит при $A - 1 \sim B^2/(2C)$ (см. асимптотику (23)), но вопрос о том, при каких условиях этот переход попадает в область применимости теории среднего поля, требует специального анализа и здесь не рассматривается.

5. ФЛУКТУАЦИИ И ГРАНИЦЫ ПРИМЕНИМОСТИ ТЕОРИИ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ ЛАНДАУ В ГАЗАХ И АМОРФНЫХ ТЕЛАХ

Переходя к роли флюктуаций, ограничимся для простоты случаем сегнетоэлектрического перехода, когда можно сравнительно просто оценить область справедливости (по разности $T - T_c$) использованной нами теории фазовых переходов Ландау. В этой теории не учитываются флюктуации параметра порядка (которым в рассматриваемом случае является поляризация), поэтому область её применимости можно определить из условия малости вклада флюктуаций поляризации в теплоёмкость газа по сравнению со скачком теплоёмкости ΔC_V , вычисленным по теории среднего поля [17]. Для определённости рассмотрим случай достаточно сильной релаксации, когда длина свободного пробега молекул меньше характерного масштаба изменения поляризации при флюктуации. Такое предположение оправдывается тем, что, как известно [17], вблизи порога перехода основную роль играют крупномасштабные флюктуации. Тогда можно перейти к локальному описанию среды с заданной температурой и рассматривать статистические свойства малых (но макроскопических) объёмов газа ΔV с размерами, меньшими характерного масштаба изменения поляризации, но большими длины свободного пробега. Действующее на молекулы локальное поле в таком объёме практически однородно и поэтому не может влиять на их поступательное движение. Вследствие этого средняя матрица плотности отдельной молекулы $\hat{\rho}$ в базисе основных функций $|\psi_{Jp}\rangle = \exp(i\mathbf{pr}/\hbar)|J\rangle/\sqrt{\Delta V}$ должна быть прямым произведением матриц $\hat{\rho}_a$ и $\hat{\rho}_b$ соответственно в базисах $\exp(i\mathbf{pr}/\hbar)/\sqrt{\Delta V}$ и $|J\rangle$, так что $\rho_{pJp'j'} = \rho_a p p' \rho_b j j'$. Здесь функции $\exp(i\mathbf{pr}/\hbar)/\sqrt{\Delta V}$ отвечают свободному движению молекулы в объёме ΔV с импульсом \mathbf{p} , а функции $|J\rangle$ ($J = I, II$) — невозмущённые внутренние стационарные состояния молекулы с энергиами $\mp \hbar\omega_0/2$ соответственно и дипольным моментом перехода \mathbf{d} (для простоты опять считаем, что для всех молекул векторы \mathbf{d} направлены в одну сторону — вдоль оси z). Средняя матрица $\hat{\rho}_a$ должна быть диагональной, а её ненулевые элементы — определяться распределением Гиббса с температурой T по уровням поступательной энергии молекулы.

В результате связанная с внутренними степенями свободы молекул часть неравновесной свободной

энергии газа в объёме ΔV вычисляется по стандартной формуле [17]

$$\delta f \equiv \delta e - T \delta s = \Delta V [-(\mathbf{P}, \mathbf{E}_l)/2 + N \text{Sp}(\hat{h}_0 \hat{\rho}_b + T \hat{\rho}_b \ln \hat{\rho}_b)]. \quad (30)$$

Здесь \hat{h}_0 — гамильтониан молекулы в отсутствие внешнего поля, поляризация газа определяется по матрице плотности отдельной молекулы: $\mathbf{P} = N \text{Sp}(\hat{\mathbf{d}}\hat{\rho}) \equiv N \text{Sp}(\hat{\mathbf{d}}\hat{\rho}_b)$, член $-\Delta(V\mathbf{P}, \mathbf{E}_l)/2$ учитывает энергию диполь–дипольного взаимодействия молекул. Считаем, что внешние источники отсутствуют, так что поле \mathbf{E}_l создаётся самими же молекулами газа. Тогда при нахождении зависящей от локального поля части полной неравновесной свободной энергии $\delta F = \int_V (\delta f / \Delta V) d^3 r$ мы учили бы энергию диполь–дипольного взаимодействия каждой пары молекул дважды. Именно поэтому слагаемое $-(\mathbf{P}, \mathbf{E}_l)/2$ в формуле (30) содержит множитель 1/2.

Для нахождения теплоёмкости газа с учётом флуктуаций поляризации необходимо вычислить его равновесную свободную энергию как функцию температуры T , объёма $V = L_x L_y L_z$ (пусть в виде параллелепипеда) и полного числа молекул NV . Представим локальную поляризацию $P_z(\mathbf{r})$ или, точнее, безразмерную частоту Раби $\eta = 4\pi dP_z/(3\hbar\omega_0)$ в виде разложения Фурье:

$$\eta = \sum_{\mathbf{k}} \eta_{\mathbf{k}} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}), \quad \eta_{\mathbf{k}} = \eta'_{\mathbf{k}} + i\eta''_{\mathbf{k}}, \quad (31)$$

где компоненты волнового вектора \mathbf{k} пробегают соответствующие периодическим граничным условиям значения $2\pi q_{x,y,z}/L_{x,y,z}$ ($q_{x,y,z}$ — целые числа), $\eta_{\mathbf{k}} = 4\pi (\mathbf{d}, \mathbf{P}_{\mathbf{k}})/(3\hbar\omega_0)$ и вследствие действительности η выполняется равенство $\eta_{-\mathbf{k}} = \eta_{\mathbf{k}}^*$. Согласно [11, 17] связанная с внутренними степенями свободы молекул часть равновесной свободной энергии, определяющая теплоёмкость в окрестности точки перехода, даётся формулой

$$\Delta F = -T \ln \int \exp \left[- \int_V (\delta f_{\min} / \Delta V) d^3 r / T \right] \prod_{\mathbf{k}} d\eta'_{\mathbf{k}} d\eta''_{\mathbf{k}}, \quad (32)$$

где бесконечное произведение, определяющее интеграл, берётся по всем \mathbf{k} , лежащим в полусфере, скажем, $k_z > 0$, а величина δf_{\min} равна минимальному значению δf при заданной поляризации $\mathbf{P} = N \text{Sp}(\hat{\mathbf{d}}\hat{\rho}_b)$. Легко показать, что у соответствующей δf_{\min} матрицы плотности $\hat{\rho}_{b\min}$ недиагональные элементы действительны и равны $P_z/(dN)$, а разность её диагональных элементов $r_{yy} - r_x$ с точностью до η включительно равна $-\text{th}[\hbar\omega_0/(2T)]$. В результате с точностью до квадратичных по η членов включительно имеем

$$\frac{\delta f_{\min}}{\Delta V} = -\frac{(\mathbf{P}, \mathbf{E}_l)}{2} - NT \ln \left(2 \text{ch} \frac{\hbar\omega_0}{2T} \right) + \frac{9(\hbar\omega_0)^3 \eta^2}{64\pi^2 d^4 N \text{th}[\hbar\omega_0/(2T)]}. \quad (33)$$

Для вычисления ΔF согласно формуле (32) необходимо знать явное выражение для локального поля \mathbf{E}_l при заданной поляризации $\mathbf{P}(\mathbf{r})$. Как указывалось выше, поле \mathbf{E}_l равно сумме макроскопического поля \mathbf{E} и связанной с поляризацией поправки, которая при неоднородной поляризации уже не равна определяемой формулой Лоренца величине $4\pi\mathbf{P}/3$ [13]. Для вычисления поля \mathbf{E}_l окружим произвольную молекулу газа сферой с радиусом R , много большим среднего межмолекулярного расстояния, но много меньшим характерного масштаба изменения поляризации. Действующее на молекулу поле можно представить в виде $\mathbf{E}_l = \mathbf{E}_{in} + \mathbf{E}_{ext}$, где поле \mathbf{E}_{in} создаётся только молекулами, лежащими внутри сферы, а поле \mathbf{E}_{ext} — молекулами, находящимися вне сферы. Поле \mathbf{E}_{in} является суперпозицией полей, создаваемых отдельными молекулами:

$$\mathbf{E}_{in} = \sum_i \frac{3(\mathbf{d}_i \mathbf{r}_i) \mathbf{r}_i - r_i^2 \mathbf{d}_i}{r_i^5}, \quad (34)$$

где суммирование ведётся по всем молекулам внутри сферы, а \mathbf{d}_i есть средний дипольный момент i -й молекулы. Вследствие хаотичности расположения молекул в газе от суммирования по молекулам можно перейти к интегрированию по объёму, заменив \mathbf{d}_i на $\mathbf{P} d^3r$:

$$\mathbf{E}_{in} = \int \frac{3(\mathbf{P}, \mathbf{r}) \mathbf{r} - r^2 \mathbf{P}}{r^5} r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr. \quad (35)$$

Здесь θ и ϕ — углы в сферической системе координат с полярной осью вдоль z и началом в центре рассматриваемой молекулы. Интегрирование по углам ведётся в обычных пределах, а интегрирование по r осуществляется от удвоенного радиуса молекулы $2r_m$ до R . Последнее связано с тем, что центр соседней молекулы относительно центра данной может располагаться лишь на расстояниях, больших $2r_m$ (модель абсолютно твёрдых шаров). Вводя декартову систему координат с ортогональными z осями x и y и раскладывая \mathbf{P} в формуле (35) в ряд Маклорена в окрестности начала координат, находим

$$\mathbf{E}_{in} \simeq (2\pi/15) (4r_m^2 - R^2) (\Delta \mathbf{P} - 3 \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{P}). \quad (36)$$

Здесь опущены все члены с производными от \mathbf{P} выше второго порядка, поскольку они дают лишь, по крайней мере, кубичные по $R |\operatorname{grad} \mathbf{P}| / P \ll 1$ поправки к правой части (36). При однородной поляризации имеем $\mathbf{E}_{in} = 0$. Отметим также, что хотя выше при выводе и предполагалось, что поляризация во всех точках среды направлена вдоль одной и той же оси, формула (36) справедлива и при изменении направления \mathbf{P} в пространстве. Сказанное следует просто из линейности правой части (36) по поляризации.

Зайдёмся теперь вычислением поля \mathbf{E}_{ext} в центре сферы. Вследствие того, что радиус сферы значительно превышает среднее межмолекулярное расстояние, при нахождении \mathbf{E}_{ext} в центре сферы газ за её пределами можно рассматривать как непрерывную среду. Это означает, что

$$\mathbf{E}_{ext} = \mathbf{E}_{ext1} + \mathbf{E}_{ext2}, \quad (37)$$

где \mathbf{E}_{ext1} — поле в центре сферы от зарядов, распределённых по ней с поверхностной плотностью $-(\mathbf{P}, \mathbf{n})$ (\mathbf{n} — внешняя нормаль к сфере), а \mathbf{E}_{ext2} — поле в центре сферы от зарядов, распределённых за её пределами с объёмной плотностью $-\operatorname{div} \mathbf{P}$ (а также от поляризационных поверхностных зарядов на границе образца). Теперь добавим и вычтем из правой части формулы для \mathbf{E}_{ext} поле \mathbf{E}' , которое создавалось бы в центре сферы зарядами, непрерывно распределёнными внутри неё с объёмной плотностью $-\operatorname{div} \mathbf{P}$. Сумма $\mathbf{E}_{ext2} + \mathbf{E}'$ есть поле, которое создавалось бы в центре сферы, если как вне неё, так и внутри газ можно было рассматривать как непрерывную среду. Поэтому очевидно, что

$$\mathbf{E}_{ext2} + \mathbf{E}' = \mathbf{E}, \quad (38)$$

где макроскопическое поле \mathbf{E} при заданной стационарной поляризации \mathbf{P} является решением уравнений Максвелла $\operatorname{div} \mathbf{E} = -4\pi \operatorname{div} \mathbf{P}$ и $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$, имеющим на поверхности образца непрерывную тангенциальную компоненту и скачок нормальной компоненты, определяемый поверхностной плотностью поляризационного заряда.

Таким образом, вычисление \mathbf{E}_{ext} в центре сферы сводится к нахождению в этой точке полей \mathbf{E}_{ext1} и \mathbf{E}' . Поскольку распределение зарядов, создающих эти поля, определяется заданной функцией $\mathbf{P}(r)$, то указанная задача может быть решена обычными методами электростатики. Для этого разложим соответствующие полям \mathbf{E}_{ext1} и \mathbf{E}' потенциалы по сферическим функциям и определим коэффициенты разложения в результате решения стандартным методом [20] уравнений Пуассона с очевидными граничными условиями. После простых, но несколько громоздких вычислений с точностью (как и в формуле (36)) до вторых производных от поляризации по координатам получим, что в центре сферы

$$\mathbf{E}_{ext1} = 4\pi \mathbf{P}/3 + (2\pi/15) R^2 (\Delta \mathbf{P} + 2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{P}), \quad \mathbf{E}' = (2\pi/3) R^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{P}. \quad (39)$$

Две последние формулы (как и выражение (36)) выведены в предположении, что поляризация во всех точках среды направлена вдоль одной и той же оси, однако вследствие линейности их правых частей по поляризации они справедливы и при изменении направления вектора \mathbf{P} в пространстве.

Складывая найденные поля \mathbf{E}_{in} и \mathbf{E}_{ext} , окончательно получаем действующее поле

$$\mathbf{E}_l = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}/3 + (8\pi r_m^2/15)(\Delta\mathbf{P} - 3\text{grad div } \mathbf{P}). \quad (40)$$

Отметим, что поле \mathbf{E}_l , как и должно быть, не зависит от радиуса сферы R , игравшей при его вычислении вспомогательную роль. При однородной поляризации (40) переходит в формулу Лоренца [9] $\mathbf{E}_l = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}/3$. Макроскопическое поле $\mathbf{E} = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{E}_{\mathbf{k}} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$ создаётся связанными зарядами, распределёнными по объёму образца с плотностью $-\text{div } \mathbf{P}$ и по его поверхности с плотностью, равной нормальной компоненте поляризации \mathbf{P} . Легко показать [11], что для макроскопического образца $\mathbf{E}_{\mathbf{k}} \simeq -4\pi \mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{P}_{\mathbf{k}})/k^2$.

Вычислим теперь необходимый для определения ΔF интеграл $-\int (\mathbf{P}, \mathbf{E}_l) d^3r/2$. Учитывая, что вектор \mathbf{P} во всех точках пространства имеет одинаковое направление, и переходя к фурье-компонентам и безразмерной переменной η , приходим к формуле

$$-\int (\mathbf{P}, \mathbf{E}_l) d^3r/2 = 9\hbar^2\omega_0^2 V/(8\pi d^2) \sum_{\mathbf{k}} [(k_z/k)^2 - 1/3 + (2r_m^2/15)(k_x^2 + k_y^2 - 2k_z^2)] \eta_{\mathbf{k}} \eta_{-\mathbf{k}}. \quad (41)$$

Поскольку поляризация не может меняться на расстояниях порядка размера молекулы, то максимальное значение k в разложении (31), по крайней мере, не может превышать $1/r_m$. Поэтому первое слагаемое в квадратных скобках в (41) всегда значительно больше величины $(2r_m^2/15)2k_z^2$. В результате фактически без потери точности последнее слагаемое в квадратных скобках в правой части (41) можно заменить на $(2r_m^2/15)k^2$.

Подставляя теперь полученные результаты в (33), находим, что

$$\int \frac{\delta f_{\min}}{\Delta V} d^3r \simeq -NVT \ln \left(2 \operatorname{ch} \frac{\hbar\omega_0}{2T} \right) + V \frac{9\hbar^2\omega_0^2}{8\pi d^2} \sum_{\mathbf{k}} \left[\left(\frac{k_z}{k} \right)^2 + \frac{\omega_0^2}{\omega_c^2} - \frac{1}{3} + \frac{2r_m^2}{15} k^2 \right] \eta_{\mathbf{k}} \eta_{-\mathbf{k}}. \quad (42)$$

Вблизи порога сегнетоэлектрического перехода, определяемого из условия равенства нулю суммы независящих от \mathbf{k} слагаемых в квадратных скобках в (42), имеем

$$\frac{\hbar\omega_0}{8\pi d^2 N \operatorname{th}[\hbar\omega_0/(2T)]} - \frac{1}{3} \simeq \frac{\hbar\omega_0(T - T_c)}{3T_c^2 \operatorname{sh}(\hbar\omega_0/T)}. \quad (43)$$

Для определённости будем рассматривать допороговую область температур, когда $T > T_c$ и среднее значение η в любой точке газа равно нулю. В этом случае ход дальнейших вычислений вполне аналогичен изложенному в [11]. Подставляя (42) в (32), находим часть равновесной свободной энергии ΔF , связанную с внутренними степенями свободы молекул и определяющую поведение теплоёмкости газа в окрестности точки перехода. Далее, пользуясь стандартными термодинамическими формулами, по ΔF вычисляем часть теплоёмкости газа C_V , обусловленную флуктуациями поляризации:

$$C_{Vf} = \frac{5\sqrt{10}(\hbar\omega_0)^2 V}{2^9 \sqrt{3} \pi T_c^2 \operatorname{sh}^2(\hbar\omega_0/T_c) r_m^3} \ln \frac{T_c}{T - T_c}. \quad (44)$$

Согласно [11, 17] не учитывающая флуктуации поляризации теория Гинзбурга—Ландау применима в достаточно далёкой от точки перехода области температур, когда обусловленная флуктуациями теплоёмкость C_{Vf} много меньше вычисленного в пренебрежении флуктуациями скачка ΔC_V . В итоге

из неравенства $\Delta C_V \gg C_{Vf}$ получаем критерий справедливости теории Ландау в случае сегнетоэлектрического перехода в газе:

$$\frac{T - T_c}{T_c} \gg \exp \left[-\frac{2^6 3 \sqrt{3} \hbar \omega_0 r_m^3}{5 \sqrt{10} d^2 \bar{T}_c (1 - 2/[\bar{T}_c \operatorname{sh}(2\bar{T}_c)])} \right]. \quad (45)$$

Как будет показано ниже, за возможную спонтанную поляризацию газов, скорее всего, отвечают наиболее низкочастотные вращательные переходы в пределах одного колебательного уровня молекулы, для которых $\omega_0 \sim 3 \cdot 10^{12} \text{ с}^{-1}$. Принимая также, что d и r_m равны характерным для молекул значениям 1 \AA и $1,5 \text{ \AA}$ соответственно, окончательно получим, что для $\bar{T}_c \sim 1$ теория среднего поля справедлива при $(T - T_c)/T_c \gg 0,6$. Отметим, что, вследствие экспоненциального вида правой части формулы (45), даже при небольшом (в несколько раз) отклонении \bar{T}_c от единицы в меньшую или большую стороны указанная высокотемпературная граница применимости теории Гинзбурга—Ландау для газа быстро приближается к критической температуре. В соответствии с [17] низкотемпературная граница применимости теории Гинзбурга—Ландау (в послепороговой области температур) ведёт себя подобным образом и задаётся неравенством, отличающимся от (45) на фактор $1/2$ перед экспонентой (без учёта флюктуаций плотности). Анализ области применимости теории среднего поля в случае антисегнетоэлектрического газа является значительно более сложным и выходит за рамки настоящей статьи.

6. УСЛОВИЯ, НЕОБХОДИМЫЕ ДЛЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО НАБЛЮДЕНИЯ АНТИСЕГНЕТОЭЛЕКТРИЧЕСТВА В ГАЗАХ

Из условия антисегнетоэлектрического фазового перехода (5) видно, что минимальная концентрация газа, необходимая для его осуществления, отвечает пределу $T_c \rightarrow 0$ и равна $N_{\min} = \hbar \omega_0 / (2\sqrt{3} \pi d^2)$. Таким образом, спонтанная поляризация газов с $N < N_{\min}$ невозможна ни при каких условиях (в приближении двухуровневых молекул). Из формулы (5) также следует, что чем меньше величина ω_0 , тем больше критическая температура перехода T_c (при фиксированной концентрации N) и тем меньше критическая концентрация N_c (при фиксированной T). В итоге заключаем, что для оценок экспериментального получения поляризованного состояния целесообразно ориентироваться на наиболее низкочастотный вращательный переход в пределах одного колебательного уровня молекулы. Для таких переходов $\omega_0 \sim 3 \cdot 10^{12} \text{ с}^{-1}$. Очевидно также, что подобный фазовый переход для данного вещества может произойти, только если критическая температура T_c окажется больше температуры его сжижения при концентрации $N > N_{\min}$.

Для применимости распределения Гиббса по квазиэнергиям необходимо, чтобы длина свободного пробега молекулы v_T/γ значительно превышала характерную длину волны поляризации порядка v_T/ω_0 , т. е. чтобы выполнялось неравенство $\gamma \ll \omega_0$. В силу условия $N > N_{\min}$ и с учётом выражения для скорости вайскопфовской релаксации γ это означает, что введённый в первом разделе параметр ξ должен быть достаточно мал, а именно $\xi \ll 1/\sqrt{6}$. В противном случае полученные выше результаты могут использоваться только качественно, для предварительных оценок ожидаемых свойств поляризованного газа.

Для типичных параметров модели $m \sim 2 \cdot 10^{-23} \text{ г}$ и $d \sim 1 \text{ \AA}$ в случае слабой релаксации $\gamma \ll \omega_0$ и при $\omega_0 r_m / (2\pi v_T) \ll 1$, когда согласно сказанному выше единственным является антисегнетоэлектрический переход, имеем $N_{\min} \simeq 2,5 \cdot 10^{20} \text{ см}^{-3}$, и для $N = 4N_{\min} \simeq 10^{21} \text{ см}^{-3}$ из (5) получаем $T_c/k_B \simeq 45 \text{ K}$, где k_B — постоянная Больцмана. Согласно разделу 5 из формулы (15) в этом случае находим $P_0 \sim 300 (A - 1) \text{ кВ/см}$.

Оправдывая дипольное приближение, отметим, что длина установившейся в результате антисегнетоэлектрического перехода волны поляризации $\lambda_0 \simeq 3\pi v_T/\omega_0$ превышает характерный размер молекул $r_m \sim 3 \text{ \AA}$ только для газа сравнительно лёгких молекул с $m \lesssim 2 \cdot 10^{-23} \text{ г}$. При этом для $T > \hbar\omega_0/3$ она существенно превосходит и среднюю длину волны де Бройля молекул $\lambda_B = 2\pi\hbar/(mv_T) \lesssim 1 \text{ \AA}$ (для $T \sim 10 \div 100 \text{ К}$), что позволяет использовать (см. раздел 2) квазиклассическое приближение для описания их поступательного движения. Вместе с тем малость указанной длины волны λ_0 , составляющей около 10 \AA даже в случае наиболее благоприятных газов, состоящих из лёгких молекул с низкой частотой вращательного перехода, несомненно, является препятствием на пути получения и идентификации антисегнетоэлектрического состояния газов.

Интересные возможности для наблюдения сегнето- и антисегнетоэлектрических явлений в газах открывают интенсивно проводимые в последние годы исследования по получению бозе-конденсата атомов водорода. Атомарный водород, по-видимому, единственный элемент, который при охлаждении до температур порядка 10 мК остаётся в газообразном состоянии, сохраняя высокую концентрацию (вплоть до $5 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$ по данным работы [21]). Поэтому он является весьма подходящим кандидатом для экспериментального получения когерентного газового кристалла. Рекомбинация атомов с образованием молекул в таком газе может быть подавлена в результате поляризации магнитных моментов атомов во внешнем магнитном поле. По отношению к антисегнетоэлектричеству в указанной системе нас интересует дипольно разрешённый переход между двумя подуровнями ($2p_{1/2}, j_z = 1/2$ и $2s_{1/2}, j_z = 1/2$) возбуждённого состояния, имеющий частоту $\omega_0 \simeq 6 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}$ (лэмбовский сдвиг [22]), превышающую частоту зеемановского расщепления (в магнитном поле меньшем 100 Гс). Выше j_z — собственное значение (в единицах \hbar) проекции полного момента атома на направленную против магнитного поля ось z . При необходимых для получения газового кристалла низких температурах заселение нижнего подуровня $2p_{1/2}, j_z = 1/2$ может быть обеспечено лазерной накачкой с основного уровня $1s_{1/2}, j_z = 1/2$. Вследствие очень низкой частоты рассматриваемого (лэмбовского) перехода требуемая концентрация газа получается порядка 10^{18} см^{-3} , т. е. значительно ниже приведённой ранее величины 10^{21} см^{-3} . При данной концентрации, однако, критическая температура фазового перехода оказывается аномально низкой ($T_c/k_B \sim 0,1 \text{ К}$) и для освоенной в настоящее время плотности атомарного водорода ещё недостижимой [21]. Вместе с тем ожидаемая длина волны антисегнетоэлектрического состояния атомарного водорода в указанных условиях составляет вполне доступную для измерений величину $\lambda_0 \sim 500 \text{ \AA}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нерль К., Либ Е. Н. // Ann. Phys. 1973. V. 76. P. 360.
2. Ванг Я. К., Хиоэ Ф. Т. // Phys. Rev. A. 1973. V. 7. P. 831.
3. Емельянов В. И., Климонтович Ю. Л. // Квантовая электроника. 1976. Т. 3. С. 848.
4. Железняков В. В., Кочаровский В. В., Кочаровский Вл. В. // УФН. 1989. Т. 159. С. 193.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Наука, 1989. §11, 87.
6. Аллен Л., Эберли Дж. Оптический резонанс и двухуровневые атомы. М.: Мир, 1978. Гл. 2.
7. Крайнов В. П., Смирнов Б. М. Излучательные процессы в атомной физике. М.: Высшая школа, 1983. Гл. 2.
8. Яковленко С. И. Радиационно-столкновительные явления. М.: Энергоатомиздат, 1984. Гл. 3.
9. Киттель Ч. Введение в физику твёрдого тела. М.: Наука, 1978. Гл. 9, 13, 14.
10. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979. Гл. 7.

11. Струков Б. А., Леванюк А. П. Физические основы сегнетоэлектрических явлений в кристаллах. М.: Наука, 1995. Гл. 2, 6.
12. Паташинский А. З., Покровский В. Л. Флуктуационная теория фазовых переходов. М.: Наука, 1982.
13. Климонтович Ю. Л. Кинетическая теория электромагнитных процессов. М.: Наука, 1980. Гл. 5.
14. Климонтович Ю. Л. Статистическая теория открытых систем. Т. 2. М.: Янус-К, 1999. Гл. 18–22.
15. Kukushkin V. A., Kocharovskiy V. V., Kocharovskiy Vl. V. // SPIE Proc. 1996. V. 2798. P. 310.
16. Kocharovskiy V. V., Kocharovskiy Vl. V., Kukushkin V. A. // J. Tech. Phys. 1997. V. 38. P. 239.
17. Ландау Л. Д., Лицшиц Е. М. Статистическая физика. Ч. 1. М.: Наука. Гл. 1, 2, 4, 12, 14.
18. Кочаровский В. В., Кочаровский Вл. В., Кукушкин В. А. // Избр. труды открытого конкурса молодых учёных. Н. Новгород: ИПФ РАН, 1999. С. 41.
19. Якубович В. А., Старжинский В. М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами. М.: Наука, 1972. Гл. 2, 4.
20. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. Доп. 2.
21. Fried D. G., Killian T. C., Willmann L. et. al. // Phys. Rev. Lett. 1998. V. 81. P. 3811.
22. Берестецкий В. Б., Лицшиц Е. М., Питаевский Л. П. Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1989. §123.

¹ Институт прикладной физики РАН,
г. Нижний Новгород, Россия

² Department of Physics, Texas A&M
University, College Station, USA

Поступила в редакцию
23 ноября 2000 г.

SPONTANEOUS POLARIZATION OF A TWO-LEVEL MOLECULE GAS AND THE GIBBS QUASI-ENERGY DISTRIBUTION

V. V. Kocharovskiy, Vl. V. Kocharovskiy, and V. A. Kukushkin

We study the possibility of spontaneous formation of a polarization structure in a thermodynamically equilibrium gas of two-level molecules with dipole interaction. Using the Maxwell–Bloch equations within the framework of the mean-field theory, we found that the antisegnetolectric phase transition in a gas with a weak relaxation of the polarization is always a second-order transition. It is shown that if relaxation is neglected, then in the quasi-classical consideration of the reciprocal motion of molecules in the polarization wave, the energy levels of a separate molecule coincide with its quasi-energies that are well known in quantum optics. Thus, to study the statistical properties of the antisegnetoelectric phase, we used the generalized Gibbs distribution over quasi-energy states of the molecules. As a result, we determined the characteristic features and the possible parameters of the antisegnetoelectric state of the gas. In particular, it was found that, owing to the Doppler resonance of a group of the molecules with the polarization wave, the properties of the gaseous antisegnetoelectrics behind the phase-transition point may radically differ from the properties of the conventional segnetoelectrics in the Ginzburg–Landau theory. We also studied the influence of polarization fluctuations for the case of the segnetoelectric transition in a gas.

УДК 621.039

К ТЕОРИИ «БЕЗЫНВЕРСНОГО» МАЗЕРА НА СВОБОДНЫХ ЭЛЕКТРОНАХ

М. А. Ерухимова, М. Д. Токман

Развита линейная теория циклотронной параметрической неустойчивости в системах, являющихся классическими аналогами квантовых лазеров без инверсии. Рассматривается взаимодействие бихроматического излучения с ансамблем классических электронов-осцилляторов с промодулированной функцией распределения при одновременном выполнении условий циклотронного резонанса для каждой из спектральных компонент (на высоких гармониках) и для их биений. Показано, что баллистическая перегруппировка модулированной фракции электронов приводит к стабилизации неустойчивости. При этом реализуется своеобразный невзаимный режим параметрического взаимодействия поля с частицами, когда высокочастотная волна эволюционирует независимо от низкочастотной моды, но тем не менее влияет на поведение последней.

ВВЕДЕНИЕ

В последнее десятилетие в квантовой электронике и оптике значительное внимание уделялось исследованию процессов взаимодействия многочастотного (чаще всего — бихроматического) когерентного электромагнитного излучения с ансамблем многоуровневых квантовых систем. Одним из наиболее интересных эффектов, реализующихся в таких системах, является усиление электромагнитного излучения в отсутствие инверсии населённостей на рабочих атомных переходах (см. обзор [1]). Это явление, обусловленное интерференцией атомных переходов в условиях возбуждённой квантовой когерентности, вызвало огромный интерес своей кажущейся парадоксальностью и перспективой освоения новых частотных диапазонов для генераторов и усилителей когерентного излучения.

Стремление к более глубокому пониманию физики когерентных радиационных процессов и, в частности, механизма безынверсного усиления, а также стремление проанализировать возможности переноса новых идей квантовой электроники в классическую электронику СВЧ и физику плазмы вызвало в последнее время заметный интерес к поиску классических аналогов квантовых систем, в которых реализуется эффект усиления без инверсии. В частности, в ряде работ последних лет [2–5] теоретически исследовалась возможность усиления когерентного излучения «безынверсным» ансамблем классических электронов. В работе [4] впервые был предложен прямой классический аналог простейшего безынверсного лазера (действующего по принципу так называемой квантовой Л-схемы [1]) — «безынверсный» мазер на циклотронном резонансе. Получены условия, при которых имеет место усиление бихроматического излучения на двух высоких гармониках циклотронной частоты за счёт параметрического взаимодействия спектральных компонент в ансамбле электронов с модулированной функцией распределения резонансных частиц. При этом постоянная (немодулированная) компонента функции распределения устойчива по отношению к генерации данного циклотронного излучения; в этом смысле система «безынверсна».

Отметим, что для классической электроники СВЧ исследование аналогов квантовых безынверсных систем является актуальным по следующей причине. По мере роста частоты излучения неоднородное уширение черенковских и доплеровских резонансов для реальных электронных потоков в конце концов превысит характерное обратное время пролёта электронами пространства взаимодействия или расстояния, равного обратному пространственному инкременту. Энергообмен волн с частицами при этом неизбежно перейдёт в кинетический режим, который критичен к градиенту функции распределения вдоль некоторого направления в пространстве импульсов — классическому аналогу инверсии

квантовых систем (см. [6]). При наличии тех или иных (определеных конкретным источником электронов) ограничений на свойства электронного пучка модуляция функции распределения с последующей «безынверсной» генерацией может оказаться более оптимальным режимом по сравнению с реализацией стандартной кинетической неустойчивости; по крайней мере, эту возможность имеет смысл исследовать. Принципиальные вопросы «безынверсной» генерации классических систем (макроскопическая трактовка эффекта и его микроскопический механизм) для циклотронного излучения были рассмотрены в работах [4, 5].

Эффект циклотронной параметрической генерации, теория которого представлена в работах [4, 5] в рамках достаточно упрощенных моделей, требует дальнейших, более детальных исследований. Одно из направлений таких исследований — это развитие теории «безынверсной» неустойчивости, учитывающей эволюцию низкочастотной модуляции функции распределения электронов в результате так называемой баллистической релаксации, которая уже на линейной стадии генерации создает ограничение на достижимую мощность усиливаемого излучения. Отметим, что этот эффект обусловлен непрерывностью спектра энергетических состояний классической системы и отсутствует, естественно, в квантовой системе с дискретными энергетическими уровнями. Исследованию этой специфики классической системы с «безынверсным» усилением излучения и посвящена эта работа.

План статьи следующий. В разделе 1 кратко излагается методика построения линейной теории «безынверсной» параметрической генерации циклотронного излучения. В следующем разделе получено и проанализировано достаточно общее решение, описывающее режимы как слабой, так и существенной баллистической релаксации; обнаружен интересный эффект невзаимной связи мод усиливаемого излучения в условиях сильной баллистической релаксации. В заключении обсуждаются результаты проведенного анализа и область его применимости.

1. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ТЕОРИИ ЦИКЛОТРОННОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ГЕНЕРАЦИИ

Рассмотрим простейшую схему «безынверсной» генерации, предложенную в работе [4]. В данной модели две волны с частотами ω_j и волновыми векторами \mathbf{k}_j распространяются поперек постоянного магнитного поля $\mathbf{B} = z_0 B$:

$$\mathbf{E} = \mathbf{y}_0 \sum_{j=1}^2 \operatorname{Re}[E_j \exp(ik_j x - i\omega_j t - i\pi/2)], \quad (1)$$

где E_j — комплексная амплитуда волн. Предполагается, что эти волны резонансы электронам с энергией $\gamma_0 mc^2$ на гармониках N_1 и N_2 циклотронной частоты:

$$\omega_j = N_j \omega_B / \gamma_0, \quad (2)$$

где $\omega_B = eB/(mc)$, m и e — масса покоя и модуль заряда электрона, c — скорость света, γ_0 — релятивистский гамма-фактор частиц. Рассматривается взаимодействие этого бихроматического поля с ансамблем электронов, имеющим разброс по энергиям вблизи резонансного значения. Этот ансамбль можно описать функцией распределения $f(w, \theta, X, t)$ по усредненным переменным, где w характеризует отстройку энергии частицы от резонанса: $w = \gamma - \gamma_0$, θ — фаза циклотронного вращения, X — поперечная координата центра ларморовской окружности частицы. Описывая движение частиц в рамках приближения нелинейного маятника [7–9], можно использовать следующую форму уравнения Лиувилля:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \omega_H \frac{\partial f}{\partial \theta} + \sum_{j=1}^2 F_j \frac{\partial f}{\partial w} = 0. \quad (3)$$

Здесь $\omega_H = \omega_B (1 - w/\gamma_0) / \gamma_0$; $F_j = G_j \operatorname{Re}[\alpha_j \exp(iN_j\theta + ik_jX - i\omega_jt)]$ — эффективная «сила», действующая со стороны j -й волны на частицу; $G_j = (\rho_\perp^0 / \gamma_0) J'_{N_j}(k_j r_H)$; $r_H = c\rho_\perp^0 / \omega_B$ — гирорадиус резонансных частиц; ρ_\perp^0 — нормированное на mc резонансное значение поперечного импульса; J'_{N_j} — производная функции Бесселя по соответствующей переменной; $\alpha_j = eE_j/(mc)$ — нормированная амплитуда волны.

Для нормализованных комплексных амплитуд волн используются укороченные уравнения возбуждения (см., например, [7, 10]):

$$\frac{\partial \alpha_j}{\partial t} = -\frac{2\pi e I_j}{mc}, \quad (4)$$

где амплитуды резонансных гармоник тока I_j выражаются через функцию распределения следующим образом:

$$I_j = ecG_j \left\langle f(w, \theta, X, t) \exp(-iN_j\theta - ik_jX + i\omega_jt) dw d\theta \right\rangle_{X,t}. \quad (5)$$

Здесь угловые скобки означают усреднение по соответствующим быстро меняющимся переменным.

Параметрическая связь рассматриваемых волн обеспечивается модуляцией функции распределения по времени с частотой

$$\Omega = \omega_1 - \omega_2, \quad (6)$$

по поперечной координате с разностным волновым вектором

$$\kappa = k_1 - k_2 \quad (7)$$

и по фазе циклотронного вращения с азимутальным числом

$$L = N_1 - N_2. \quad (8)$$

В соответствии с предложенной в работе [4] схемой рассмотрим режим с предварительной модуляцией функции распределения.¹ Предположим, что в начальный момент времени задана функция распределения, промодулированная по углу θ и координате X :

$$f_{in}(t=0) = f_0(w) + f_L(w) \cos(\varphi_0 + L\theta + \kappa X). \quad (9)$$

Далее мы воспользуемся распространённым при исследовании резонансных радиационных процессов приближением (см. [11]), в рамках которого кинетическое уравнение (3) решается в приближении заданного поля, а затем соответствующее решение используется в уравнении (4) для комплексных амплитуд волн.

2. АНАЛИЗ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ГЕНЕРАЦИИ С УЧЁТОМ БАЛЛИСТИЧЕСКОЙ РЕЛАКСАЦИИ МОДУЛИРОВАННОЙ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

В отсутствие высокочастотного поля функция распределения f_{in} в последующие моменты времени определяется из (9) заменой $\theta \rightarrow \theta - \omega_H t$:

$$f_{in}(t) = f_0(w) + f_L(w) \cos(\varphi_0 + L\theta + \kappa X - L\omega_H t). \quad (10)$$

¹ Модели такой предварительной модуляции обсуждаются в работах [4, 5]; задача с постоянно действующей низкочастотной пакеткой требует самостоятельного исследования, не укладывающегося, по-видимому, в рамки используемого в [4, 5] и в настоящей работе метода возмущений.

В линейном приближении по полю решим кинетическое уравнение (3), которое с учётом производной по w от фазы модуляции функции распределения (10) принимает вид

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} + \omega_H \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta} = - \sum_{j=1}^2 F_j \left[\frac{\partial f_0}{\partial w} + \frac{\partial f_L}{\partial w} \cos(\varphi_0 + L\theta + \kappa X - L\omega_H t) + \right. \\ \left. + t L f_L \frac{\partial \omega_H}{\partial w} \sin(\varphi_0 + L\theta + \kappa X - L\omega_H t) \right]. \quad (11)$$

Применяя для решения данного линейного уравнения первого порядка в частных производных стандартный метод интегрирования по траекториям (см., например, [6]), получим следующее выражение для резонансного высокочастотному полю возмущения функции распределения:

$$\tilde{f} = \sum_{j=1}^2 b_j(t, w) \exp(ik_j X + iN_j \theta - iw_j t), \quad (12)$$

$$b_1(t, w) = -\frac{\partial f_0}{\partial w} G_1 \alpha_1 \hat{\xi}(\Delta_1, t) - \frac{1}{2} \frac{\partial f_L}{\partial w} G_2 \alpha_2 e^{i\varphi_0 + i\Delta_L t} \hat{\xi}(\Delta_2, t) - \frac{1}{2} L f_L \frac{\partial \omega_H}{\partial w} G_2 \alpha_2 e^{i\varphi_0 + i\Delta_L t} \hat{\chi}(\Delta_2, t),$$

$$b_2(t, w) = -\frac{\partial f_0}{\partial w} G_2 \alpha_2 \hat{\xi}(\Delta_2, t) - \frac{1}{2} \frac{\partial f_L}{\partial w} G_1 \alpha_1 e^{-i\varphi_0 - i\Delta_L t} \hat{\xi}(\Delta_1, t) + \frac{1}{2} L f_L \frac{\partial \omega_H}{\partial w} G_1 \alpha_1 e^{-i\varphi_0 - i\Delta_L t} \hat{\chi}(\Delta_1, t).$$

Здесь

$$\Delta_j = \omega_j - N_j \omega_H \quad (13)$$

— отстройка циклотронного синхронизма с j -й волной; операторы $\hat{\xi}$ и $\hat{\chi}$ задаются соотношениями

$$\hat{\xi}(\Delta, t) = \frac{i[1 - \exp(i\Delta t)]}{\Delta} = \frac{i[1 - \cos(\Delta t)]}{\Delta} + \frac{\sin(\Delta t)}{\Delta}, \quad \hat{\chi}(\Delta, t) = \frac{t - i/\Delta}{\Delta} + \frac{i \exp(i\Delta t)}{\Delta^2}, \quad (14)$$

$$\Delta_L = \Omega - L\omega_H = \frac{\Omega w}{\gamma_0}. \quad (15)$$

В результате для резонансных гармоник тока, выражаемых через функцию распределения посредством связи (5), получим формулы, которые после ряда несложных (хотя, местами, и громоздких) преобразований можно представить в виде

$$I_1(t) = ecG_1^2 \alpha_1 \int f_0(w) \frac{\partial}{\partial w} \hat{\xi}(\Delta_1, t) dw + \frac{1}{2} ecG_1 G_2 \frac{N_1}{N_2} \alpha_2 \int f_L(w) e^{i\varphi_0 + i\Delta_L t} \frac{\partial}{\partial w} \hat{\xi}(\Delta_2, t) dw, \\ I_2(z) = ecG_2^2 \alpha_2 \int f_0(w) \frac{\partial}{\partial w} \hat{\xi}(\Delta_2, t) dw + \frac{1}{2} ecG_1 G_2 \alpha_1 \frac{N_2}{N_1} \int f_L(w) e^{-i\varphi_0 - i\Delta_L t} \frac{\partial}{\partial w} \hat{\xi}(\Delta_1, t) dw, \quad (16)$$

где $\Delta_L t$ — баллистический фазовый набег, нарушающий временной синхронизм биений высокочастотных полей с модуляцией. Отметим, что этим фазовым набегом можно пренебречь на временах $t \ll t_B$, где характерное время

$$t_B = \frac{\gamma_0^2}{L\omega_B \langle \Delta w \rangle} \quad (17)$$

естественно назвать временем баллистической релаксации.

Далее удобно воспользоваться тем обстоятельством, что оператор $\hat{\xi}(\Delta, t)$ на временах

$$\frac{\omega_j \langle \Delta w \rangle t}{\gamma_0} \gg 1, \quad \frac{\omega_j \langle \Delta w \rangle_0 t}{\gamma_0} \gg 1 \quad (18)$$

переходит в стандартный оператор Ландау (см., например, [11, 12]):

$$\hat{\xi}(\Delta, \tau) \Big|_{\tau \rightarrow \infty} = \frac{iP}{\Delta} + \pi\delta(\Delta). \quad (19)$$

Здесь $\langle \Delta w \rangle_0$ — масштаб изменения стационарного распределения $f_0(w)$; $\langle \Delta w \rangle$ — характерный разброс модулированной составляющей начального распределения по энергиям; P — символ интеграла в смысле главного значения, $\delta(\Delta)$ — дельта-функция. Если частоты полей много больше частоты модуляции функции распределения, т. е. $L/N_j \ll 1$, то асимптотическое решение, отвечающее правилу обхода Ландау, успевает сформироваться на временах, много меньших времени баллистической релаксации низкочастотной модуляции t_B . В этом случае уравнения возбуждения волн имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_1}{dt} + (\gamma_1 + i\delta_1)\alpha_1 &= -\exp(i\varphi_0)[\gamma_{12}(t) + i\delta_{12}(t)]\alpha_2, \\ \frac{d\alpha_2}{dt} + (\gamma_2 + i\delta_2)\alpha_2 &= -\exp(-i\varphi_0)[\gamma_{21}(t) + i\delta_{21}(t)]\alpha_1. \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь коэффициенты γ_j и δ_j определяют линейное затухание и линейную дисперсию парциальных мод:

$$\gamma_1 = \frac{G_1^2 N_2}{G_2^2 N_1} \gamma_2 = -\frac{2\pi^2 e^2 G_1^2 \gamma_0}{m\omega_1} \frac{df_0}{dw} \Big|_{w=0}, \quad \delta_1 = \frac{G_1^2 N_2}{G_2^2 N_1} \delta_2 = -\frac{2\pi e^2 G_1^2 \gamma_0}{m\omega_1} \int \frac{P df_0/dw}{w} dw. \quad (21)$$

Медленная (с характерным временным масштабом t_B) эволюция коэффициентов параметрической связи описывается следующими выражениями:

$$\begin{aligned} \gamma_{21} &= \frac{N_2}{N_1} \frac{\pi e^2 G_1 G_2 \gamma_0}{m\omega_1} [I_\gamma - J_\gamma(t)], & \gamma_{12} &= \frac{N_1}{N_2} \frac{\pi e^2 G_1 G_2 \gamma_0}{m\omega_2} [I_\gamma + J_\gamma(t)], \\ \delta_{21} &= \frac{N_2}{N_1} \frac{\pi e^2 G_1 G_2 \gamma_0}{m\omega_1} [I_\delta(t) - J_\delta(t)], & \delta_{12} &= \frac{N_1}{N_2} \frac{\pi e^2 G_1 G_2 \gamma_0}{m\omega_2} [I_\delta(t) + J_\delta(t)]. \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь

$$\begin{aligned} I_\gamma &= -\pi \int \frac{\partial}{\partial w} [f_L \cos(\Delta_L t)] \delta(w) dw = -\pi \int \frac{df_L}{dw} \delta(w) dw, & J_\gamma &= \int \frac{\partial}{\partial w} [f_L \sin(\Delta_L t)] \frac{P}{w} dw, \\ I_\delta &= -\int \frac{\partial}{\partial w} [f_L \cos(\Delta_L t)] \frac{P}{w} dw, & J_\delta &= -\pi \int \frac{\partial}{\partial w} [f_L \sin(\Delta_L t)] \delta(w) dw = -\frac{\pi t \Omega}{\gamma_0} \int f_L \delta(w) dw. \end{aligned} \quad (23)$$

Как следует из полученных формул, медленное изменение коэффициентов параметрической связи мод $\gamma_{12}(t) + i\delta_{12}(t)$ и $\gamma_{21}(t) + i\delta_{21}(t)$ происходит по-разному («невзаимно»), что является формальным следствием того, что в соответствии с формулами (16) баллистический фазовый сдвиг $\Delta_L t$ входит с разными знаками в отклики на первое и второе высокочастотные поля.² Рассмотрим выражения для коэффициентов параметрической связи в двух предельных случаях.

При $t \ll t_B$, когда в формулах (22) значимыми являются только первые слагаемые, пропорциональные интегралам I_γ и I_δ , коэффициенты параметрической связи примут вид, с точностью до коэффициента $N_1/N_2 \approx 1$ совпадающий с соответствующими выражениями работы [4], где с самого начала было использовано приближение малых времён ($\Delta_L t \rightarrow 0$):

$$\gamma_{21} = \frac{N_2^3}{N_1^3} \gamma_{12} = -\frac{N_2}{N_1} \frac{\pi^2 e^2 G_1 G_2 \gamma_0}{m\omega_1} \frac{df_L}{dw} \Big|_{w=0}, \quad \delta_{21} = \frac{N_2^3}{N_1^3} \delta_{12} = -\frac{N_2}{N_1} \frac{\pi e^2 G_1 G_2 \gamma_0}{m\omega_1} \int \frac{P}{w} \frac{df_L}{dw} dw. \quad (24)$$

² Это формальное различие получит в дальнейшем более физичное толкование.

Этот режим является прямым аналогом безынверсной генерации квантовых систем (см. [4]): даже если среда электронов устойчива — «безынверсна» — по отношению к генерации каждой из волн по отдельности, т. е. $(\partial f / \partial w)_{w=0} < 0$, за счёт параметрической связи волн в системе возможно усиление. В простейшем случае, когда $\delta_j = \delta_{ij} = 0$, экспоненциальное решение $\alpha_j \propto \exp(\mu t)$ системы (20) неустойчиво при условии $\gamma_{12}\gamma_{21} > \gamma_1\gamma_2$, которое можно записать в виде

$$\frac{1}{2} \left| \frac{\partial f_L}{\partial w} \right|_{w=0} > - \left(\frac{\partial f_0}{\partial w} \right)_{w=0}. \quad (25)$$

При этом неустойчивому решению соответствует определённая оптимальная синхронизация между биениями высокочастотных колебаний и низкочастотной модуляцией системы, при которой узлы и пучности биений эффективной силы $F(\theta, X, t) = F_1 + F_2$ приходятся соответственно на точки с отрицательной и положительной производной по w от модулированной функции распределения. Подчеркнём ещё раз, что для монохроматического излучения функция распределения (10) является устойчивой.

В противоположном случае достаточно больших времён $t \gg t_B$ становятся существенными дополнительные члены в (22), пропорциональные интегралам J_γ и J_δ . При этом в соответствии с несложным преобразованием

$$J_\gamma = \int \frac{\partial f_L}{\partial w} \frac{\sin(\Delta_L t)}{w} dw + \frac{t\Omega}{\gamma_0} \int \frac{P f_L}{w} \cos(\Delta_L t) dw. \quad (26)$$

С учётом стремления к нулю второго члена в выражении (26) интеграл J_γ принимает следующее асимптотическое значение:

$$J_\gamma = \pi \int \frac{\partial f_L}{\partial w} \delta(w) dw. \quad (27)$$

Аналогично получаем предельное выражение для интеграла I_δ :

$$I_\delta = \frac{\pi t\Omega}{\gamma_0} \int f_L \delta(w) dw. \quad (28)$$

С учётом (27), (28) коэффициенты параметрической связи будут определяться следующими асимптотическими формулами:

$$\begin{aligned} \gamma_{21} &\rightarrow - \frac{N_2}{N_1} \frac{2\pi^2 e^2 G_1 G_2 \gamma_0}{m \omega_1} \left. \frac{df_L}{dw} \right|_{w=0}, \quad \gamma_{12} \rightarrow 0, \\ \delta_{21} &\rightarrow - \frac{N_2}{N_1^2} \frac{2\pi^2 e^2 G_1 G_2}{m} L t f_L \Big|_{w=0}, \quad \delta_{12} \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Видно, что баллистическая релаксация модулированной функции распределения приводит к исчезновению только одного коэффициента параметрической связи, в то время как реальная часть второго удваивается по сравнению с первоначальным значением, а мнимая растёт линейно со временем. Таким образом, система становится невзаимной в том смысле, что первая волна эволюционирует независимо от второй, в то время как вторая волна «управляется» первой.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Анализируя полученные выше результаты, напомним, что при «безынверсной» параметрической генерации резонансное взаимодействие частиц с высокочастотным полем происходит при одновременном выполнении условий циклотронного синхронизма для парциальных волн (соотношение (2)) и для биений ($\omega_1 - \omega_2 = (N_1 - N_2) \omega_B / \gamma_0$).

В рамках линейного приближения³ в парциальных резонансах и резонансе с биениями участвуют частицы, энергии которых удовлетворяют соотношениям

$$w < \frac{\pi\gamma_0}{\omega_j t} \quad (30)$$

и

$$w < \frac{\pi\gamma_0}{(\omega_1 - \omega_2) t} \quad (31)$$

соответственно. Здесь t — время взаимодействия. Неравенства (30), (31) ограничивают релятивистский набег фазы гировращения частиц относительно фазы высокочастотной волны или биений волн. В случае близких частот волн, когда $\omega_1 - \omega_2 = \Omega \ll \omega_{1,2}$, парциальным синхронизмам всегда соответствуют существенно более узкие энергетические интервалы, чем синхронизму с биениями; имея в виду это обстоятельство, мы будем в дальнейшем различать частицы, резонансные волнам и резонансные биениям.

На временах $t \ll t_B$ параметрической генерации соответствует такой режим взаимодействия волн и электронов, при котором резонансная волнам группа частиц составляет малую часть модулированного ансамбля электронов, тогда как с точки зрения биений волн все частицы из модулированной фракции вращаются синхронно (фазовый набег $\Delta_L t \ll 1$). При этом существенно, что параметрические компоненты высокочастотного тока резонансных и нерезонансных волнам частиц находятся в квадратуре относительно друг друга, точно так же, как и линейные токи в изначально непромодулированном электронном ансамбле.

На временах, сравнимых с временем баллистической релаксации t_B (когда фазовый набег $\Delta_L t$ значителен), в ходе баллистической перегруппировки модулированной фракции частиц относительно биений волн появится компонента параметрического тока, создаваемого нерезонансными волнам частицами, в фазе с током резонансных волнам электронов. Формальный анализ формул (22) и (23) показывает, что вклад резонансных волнам частиц в коэффициенты γ_{12} и γ_{21} (интеграл I_γ) остаётся неизменным, тогда как вклад нерезонансных частиц (интеграл J_γ) зависит от $\Delta_L t$ и меняется во времени. При $t \gg t_B$ параметрические компоненты тока формируются из частиц с энергией из интервала (31), узкого по сравнению с разбросом электронов в модулированном пучке. При этом параметрические токи резонансных и нерезонансных волнам частиц равны по модулю, но на частоте ω_1 они складываются в противофазе, а на частоте ω_2 — в фазе. Таким образом, при $t \gg t_B$ коэффициент параметрической связи γ_{12} стремится к нулю, а коэффициент γ_{21} удваивается по сравнению со случаем $t \ll t_B$.

Важно отметить, что участие нерезонансных волнам частиц в энергообмене с полем при $t \geq t_B$ обусловлено их резонансом с биениями. С этой точки зрения обсуждаемую здесь эволюцию параметрической связи мод можно интерпретировать как суперпозицию «безынверсного» мазерного эффекта, усиливающего обе моды, и обычного рассеяния, которое в отсутствие инверсии стремится «перекачать» высокочастотную моду в низкочастотную.

Полезно сопоставить рассмотренные здесь различные режимы параметрического взаимодействия волн в ансамбле классических осцилляторов с соответствующими режимами, реализующимися в квантовой системе. Для этого обсудим представленную в [4] модельную квантовую трёхуровневую систему (см. рис. 1) с дискретными нижними уровнями ϵ_1 и ϵ_2 и уширенным верхним уровнем.⁴ В такой системе в парциальные резонансы на переходах $|3\rangle - |1\rangle$ и $|3\rangle - |2\rangle$ вовлекается лишь относительно малая часть состояний на уровне $|3\rangle$, тогда как в резонансное взаимодействие с биениями волн на частоте $\omega_1 - \omega_2$ вовлечены все состояния уровней $|2\rangle$ и $|1\rangle$. Этот режим соответствует поведению классической системы на временах $t \ll t_B$, когда в резонанс с биениями вовлечены все частицы из

³ Т. е. в отсутствие эффектов захвата (см., например, [7]).

⁴ Напомним, что на переходе $|2\rangle - |1\rangle$ при этом задана возбуждённая сторонним источником когерентность.

модулированной фракции функции распределения. Режим сильной баллистической релаксации на временах $t \gg t_B$ в квантовой системе может быть реализован, очевидно, при соответствующем неоднородном уширении уровней $|2\rangle$ и $|1\rangle$, согласованном с уширением верхнего уровня.

Получив представление о временной зависимости коэффициентов в уравнениях возбуждения волн вследствие баллистической релаксации и найдя для них асимптотические выражения, можно сделать следующие выводы о характере генерации высокочастотных полей в релаксирующей таким образом системе.

Во-первых, с точки зрения параметрической генерации бихроматического поля баллистическая релаксация модулированной компоненты функции распределения, очевидно, создаёт ограничение для достижимого усиления волн. Баллистическая релаксация приводит к тому, что усиливаемая на начальной стадии бихроматическая мода при $t \gg t_B$ в конце концов затухнет в соответствии с асимптотическими уравнениями

$$\frac{d\alpha_1}{dt} + (\gamma_1 + i\delta_1) \alpha_1 = 0, \quad \frac{d\alpha_2}{dt} + (\gamma_2 + i\delta_2) \alpha_2 = -\exp(-i\varphi_0) (\gamma_{21} + i\delta_{21}) \alpha_1. \quad (32)$$

При этом максимальный коэффициент усиления бихроматического излучения значителен, если

$$\mu t_B \gg 1, \quad (33)$$

где μ — экспоненциальный показатель роста (инкремент) на начальной стадии.

С другой стороны, интересна чёткая асимметрия асимптотических уравнений (32), при которой только один из коэффициентов параметрической связи полей стремится к нулю. При такой невзаимной связи мод, как уже отмечалось, поле с частотой ω_2 в определённом смысле управляет полем с частотой ω_1 , в то время как последнее эволюционирует независимо.

Говоря о модификации процесса параметрического взаимодействия полей вследствие баллистической релаксации, особенно существенной на временах $t \gg t_B$, стоит упомянуть о роли нелинейных эффектов, таких как захват частиц в мощном поле, нелинейный сдвиг частот и волновых векторов высокочастотных мод, особенно при значительном начальном усилении полей. Если обсуждать эффект захвата⁵, то, очевидно, нужно сравнить время баллистической релаксации t_B с периодом колебаний захваченных частиц $T_j = 2\pi \sqrt{\gamma_0 / (\omega_j G_j \alpha_j)}$ в поле волны конечной амплитуды. При условии

$$\frac{\Omega}{\omega_j} \frac{\langle \Delta w \rangle}{A_j} \gg 1, \quad (34)$$

где $A_j = \sqrt{G_j \alpha_j \gamma_0 / \omega_j}$ — размер области захвата в поле волны конечной амплитуды, имеет смысл анализировать влияние баллистической релаксации на параметрическую генерацию в линейном приближении по полю, в противоположном случае более важными представляются эффекты нелинейного энергообмена.

Авторы благодарны А. В. Савилову за ряд стимулирующих дискуссий.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 99–02–16230).

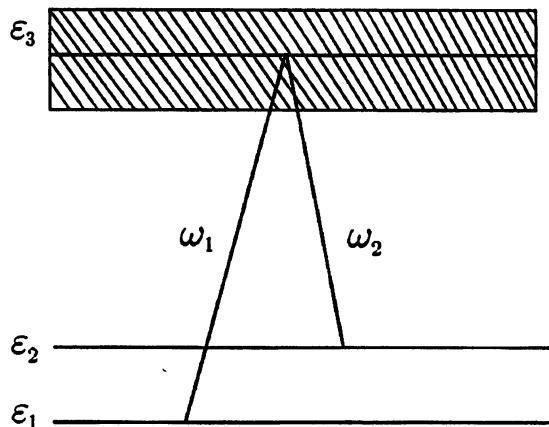


Рис. I

⁵ Именно этот эффект определяет электронный КПД большинства мазеров на свободных электронах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kocharovskaya O. // Phys. Rep. 1992. V. 219. P. 175.
2. Sherman B., Kurizki G., Nikonov D. E., Scully M. O. // Phys. Rev. Lett. 1995. V. 75. P. 4602.
3. Nikonov D. E., Sherman B., Kurizki G., Scully M. O. // Opt. Commun. 1996. V. 123. P. 363.
4. Гапонов-Грехов А. В., Токман М. Д. // ЖЭТФ. 1997. Т. 112, № 4(10). С. 1176.
5. Ерухимова М. А., Токман М. Д. // ЖЭТФ. 2000. Т. 118, № 2(8). С. 1.
6. Железняков В. В. Излучение в астрофизической плазме. М.: Янус-К, 1997.
7. Братман В. Л., Гинзбург Н. С., Нусинович Г. С. и др. // Релятивистская высокочастотная электроника / Под ред. А. В. Гапонова-Грехова. Горький: ИПФ АН СССР, 1979. С. 157.
8. Киценко А. Б., Панкратов И. М., Степанов К. Н. // ЖТФ. 1975. Т. 45. С. 912.
9. Litvak A. G., Sergeev A. M., Suvorov E. V. et al. // Phys. Fluids B. 1993. V. 5. P. 4347.
10. Гинзбург Н. С. // ЖТФ. 1986. Т. 56. С. 1433.
11. O'Neil T. // Phys. Fluids. 1965. V. 8. P. 2255.
12. Файн В. М. Фотоны и нелинейные среды. М.: Советское радио, 1972.

Институт прикладной физики РАН,
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию
22 ноября 2000 г.

ON THE THEORY OF AN “INVERSIONLESS”FREE-ELECTRON MASER

M. A. Erukhimova and M. D. Tokman

We develop a linear theory of the cyclotron parametric instability in systems being classical analogs to quantum inversionless lasers. Interaction of a bichromatic radiation with an ensemble of classical electron oscillators having a modulated distribution function is considered with allowance for the cyclotron-resonance conditions to be valid both for each of the two spectral components at high harmonics and for their beat wave. It is shown that the ballistic restructuring of the modulated fraction of the electrons leads to stabilization of the instability. In this case, the peculiar nonreciprocal regime of parametric particle-field interaction is realized in which the evolution of the high-frequency wave is independent of the low-frequency mode, though the former wave affects the behavior of the latter one.

УДК 530.145

ОСОБЕННОСТИ СВЕРХИЗЛУЧЕНИЯ ПРИ НЕПРЕРЫВНОЙ НАКАЧКЕ В ГЕТЕРОЛАЗЕРЕ НА ЦИКЛОТРОННЫХ КВАНТОВЫХ ТОЧКАХ

А. А. Белянин, В. В. Кочаровский, Вл. В. Кочаровский, Д. С. Пестов

Исследована генерация фемтосекундных импульсов сверхизлучения при постоянной накачке, возникающая за счёт коллективной рекомбинации электрон-дырочных (eh) пар в квантовых ямах, которые помещены в сильное магнитное поле, ориентированное перпендикулярно плоскости ям. Подобный сверхизлучающий полупроводниковый лазер может работать даже при комнатной температуре благодаря полному квантованию движения частиц, максимально большой спектральной плотности состояний носителей, высокой объёмной плотности эффективных циклотронных квантовых точек и частичному подавлению внутризонного рассеяния. В многослойной лазерной гетероструктуре, обладающей фактором оптического ограничения порядка 0,2 и находящейся в магнитном поле $10\div50$ Тл, ожидается генерация квазипериодической либо хаотической последовательности когерентных импульсов с пиковой мощностью около 1 Вт, длительностью приблизительно 100 фс и скважностью порядка 10. Показано, что в достаточно широком диапазоне мощностей накачки возможна двухцветная сверхизлучательная генерация пары мод, резонансных двум соседним переходам между соответствующими электронными и дырочными уровнями Ландау. Проведено численное и аналитическое исследование порогов одно- и двухцветного сверхизлучения, в том числе с учётом их модификации вследствие неоднородного уширения из-за флуктуаций толщины квантовых ям и барьера в реальных гетероструктурах.

ВВЕДЕНИЕ

Переход к режиму сверхизлучения (СИ) открывает широкие перспективы для генерации предельно коротких импульсов в лазерах, т. к. уже в рамках двухуровневой модели обеспечивает, в отличие от балансного лазерного режима, максимально возможную для данной активной среды скорость вынужденных излучательных переходов, которая превышает скорости некогерентных процессов релаксации в среде [1, 2]. (Для простоты мы не берём в расчёт возможность использования быстрых релаксационных процессов, не связанных непосредственно с резонансным переходом между рабочими уровнями.)

В применении к полупроводниковым лазерам [3, 4] сказанное означает, что сверхизлучательная, когерентная рекомбинация eh пар происходит быстрее, чем некогерентные процессы безызлучательной рекомбинации и внутризонного рассеяния носителей [2]. Эта особенность СИ позволяет рассчитывать на получение фемтосекундных импульсов в специальных гетероструктурах на основе стандартных для оптоэлектроники материалов типа GaAs [5–7], а также на достижение лазерной генерации в материалах с низкой эффективностью излучательной рекомбинации, например в широкозонных и даже в непрямозонных полупроводниковых структурах, таких как GeSi/Ge-гетероструктуры с квантовыми ямами или квантовыми точками [8, 9].

Основной трудностью на пути реализации режима СИ является быстрая безызлучательная релаксация оптической поляризации, которая связана с внутризонным рассеянием и в объёмных полупроводниках происходит за время $T_2 \sim 0,1$ пс. Естественный способ решения проблемы состоит в использовании низкоразмерных структур, в которых скорость межзонных излучательных переходов возрастает благодаря увеличению спектральной плотности состояний носителей вблизи краев запрещённой зоны, в то время как внутризонное рассеяние может быть подавлено. Идеальным кандидатом на роль активной среды для сверхизлучающего полупроводникового лазера были бы плотные массивы одинаковых квантовых точек, т. к. в них спектральная плотность состояний близка к дельта-функции, а время релаксации поляризации увеличивается до $T_2 \sim 10\div100$ пс. Динамика СИ в подобных структурах

подробно изучена в [5, 9]. Однако существующие лазерные гетероструктуры с самоорганизующимися слоями квантовых точек (например, на основе (In, Ga)As) имеют довольно низкую поверхностную концентрацию квантовых точек, не более $2 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-2}$, а также большой разброс их размеров, приводящий к сильному неоднородному уширению рекомбинационной спектральной линии, составляющему несколько десятков мэВ [4].

Указанные недостатки не позволяют подобным структурам конкурировать с многослойными структурами циклотронных квантовых точек, которые образуются при наложении на гетероструктуру с квантовыми ямами квантующего магнитного поля, направленного перпендикулярно плоскости квантовых ям [10–12]. В таких системах движение носителей является полностью квантованным, но сохраняются преимущества квантовых ям, а перечисленные выше недостатки квантовых точек отсутствуют. Конечно, платой за предельные поверхностную концентрацию и спектральную плотность циклотронных квантовых точек на уровнях Ландау является необходимость использования сильного однородного магнитного поля, которое, впрочем, может быть импульсным.

План дальнейшего изложения следующий. Раздел 1 посвящён основам описания предложенной системы циклотронных квантовых точек. В разделе 2 сформулированы условия реализации режима СИ в начальной задаче и при постоянной накачке. Анализ влияния неоднородного уширения на пороги стационарной и импульсной генерации проведён в разделе 3. В разделе 4 исследовано двухцветное СИ при каскадной накачке двух соседних рекомбинационных переходов между соответствующими парами электронных и дырочных уровней Ландау. Обсуждение полученных результатов содержится в заключительном разделе.

1. ЦИКЛОТРОННЫЕ КВАНТОВЫЕ ТОЧКИ

Для определённости рассмотрим структуру на основе AlGaAs/GaAs-квантовых ям с эффективными массами носителей $m_h \approx 10m_e \approx 0,7m_0$, где m_0 — масса свободного электрона. В квантовой яме толщиной $L_z = L_0$ с внешним поперечным магнитным полем $\mathbf{B} = B\mathbf{z}^0$ энергия электронов внутри n -й подзоны размерного квантования расщепляется на дискретные уровни Ландау:

$$E_e = E_g + E_n + (l + 1/2) \hbar\omega_{Be}, \quad (1)$$

где $l = 0, 1, 2, \dots$. Здесь энергия отсчитывается от верхнего края валентной зоны, E_g — ширина запрещённой зоны в GaAs, $E_n = \hbar^2 k_n^2 / (2m_e)$ — нижние края подзон размерного квантования, k_n — квантованная z -компоненты квазимпульса электрона, $n = 1, 2, \dots$, гирочастота равна $\omega_{Be} = eB/(m_e c) \approx \approx 1,5B$ мэВ; здесь и ниже величина магнитного поля B выражена в Тл. Аналогичное (1) выражение можно записать и для дырок.

Формула (1) справедлива при $\hbar\omega_{Be} \ll E_g$, т. е. при $B \ll 10^3$ Тл. Эффекты квантования в магнитном поле существенны, если $\hbar\omega_{Be} > \{\hbar/T_2, \hbar/T_2^*\}$, где $\hbar/T_2^* \sim 3 \div 10$ мэВ — неоднородное уширение уровней (1). Последнее связано в основном с химическим и кристаллическим несовершенством квантовых ям (раздел 3), с тепловым и фермиевским разбросом энергий электронов и дырок и с их кулоновским взаимодействием (частично экранированным в условиях большой плотности eh пар), а в сверхрешётках — с шириной минизон (см., например, [3, 10–16]). Отметим, что если квант циклотронного излучения $\hbar\omega_{Be}$ превышает энергию оптического фонона, то можно ожидать подавления внутризонной релаксации. Совокупность указанных условий даёт оптимальные значения магнитного поля $10 \div 50$ Тл.

Уравнения Максвелла—Блоха, описывающие взаимодействие eh пар с излучением, имеют следующий вид (в полуклассическом приближении и приближении среднего поля для медленно меняющихся амплитуд электрического поля $E(t)$ и поляризации $P(t)$) [1–3]:

$$\frac{dE}{dt} + \frac{E}{T_E} = \frac{2\pi i \Omega \Gamma P}{\mu^2}, \quad (2)$$

$$\frac{dP}{dt} + [1/T_2 + i(\omega_0 - \Omega)] P = -\frac{id^2 \Delta N_l E}{2\hbar}, \quad (3)$$

$$\frac{d\Delta N_l}{dt} + \frac{\Delta N_l - \Delta N_l^P}{T_1} = \frac{\text{Im}(E^* P)}{\hbar}. \quad (4)$$

Здесь Ω и μ — частота и показатель преломления данной продольной моды резонатора; звёздочка у символов поля (и поляризации) означает комплексное сопряжение. Для простоты пока пренебрежём неоднородным уширением и рассмотрим лишь переходы на частоте ω_0 между электронными и дырочными уровнями Ландау с одинаковым номером l и заданным поперечным квазимпульсом k_n . Для других пар уровней СИ происходит аналогично (в отсутствие резонансов между переходами). Считаем, что возбуждается только основная поперечная мода лазерного волновода с $\mu \approx 3,5$ и фактором оптического ограничения $\Gamma \sim 0,1 \div 0,3$ в структуре из $10 \div 30$ квантовых ям. Время T_E затухания поля в резонаторе длиной L в случае только излучательных потерь равно $4\mu L/|c \ln(R_1 R_2)|$, где c — скорость света в вакууме, $R_{1,2}$ — коэффициенты отражения на торцах резонатора; обычно $R_{1,2} \sim 1/3$.

В уравнениях (2)–(4) введена объёмная плотность инверсии $\Delta N_l(t)$ для данного межзонного перехода с дипольным моментом d (около 30 Д для GaAs). Величина ΔN_l^P есть равновесное значение ΔN_l , поддерживаемое накачкой (в отсутствие генерации). Время T_1 релаксации инверсии определяется как скоростью накачки, так и временем ухода носителей из Γ -долины в результате спонтанной излучательной и безызлучательной рекомбинации. В реальных условиях генерации СИ время T_1 , по-видимому, порядка нескольких T_2 , т. е. $T_1 \sim 1$ пс.

Инверсия достигается при заполнении более половины электронно-дырочных состояний на данном уровне Ландау, т. е. когда концентрация N всех пар в квантовых ямах превышает величину

$$N_l = \omega_{Be} m_e k_n (2l + 1) / (4\pi^2 \hbar) \approx 2 \cdot 10^{16} (2l + 1) B \text{ см}^{-3}. \quad (5)$$

Здесь для оценки мы полагаем $L_z = 5$ нм, а также предполагаем, что $k_B T \geq \hbar/T_2^*$ и выполнено необходимое условие вырождения электронов (и дырок), определяемое положением уровня Ферми

$$E_F = \pi^2 \hbar^2 N / (m_e k_n) \geq k_B T \rightarrow N \geq k_B T m_e k_n / (\pi^2 \hbar^2) \approx 4 \cdot 10^{15} T [K] \text{ см}^{-3}. \quad (6)$$

Здесь k_B — постоянная Больцмана. При температуре $T > \hbar \omega_{Be} (2l+1) / (4k_B) \approx 5B (2l+1)$ условие (6) сильнее, чем (5).

2. ОДНОЦВЕТНОЕ СВЕРХИЗЛУЧЕНИЕ

Критерий СИ обычно формулируется в рамках начальной задачи [1, 2] в виде требования, чтобы инкремент ω'' малых самосогласованных колебаний поля и поляризации в инвертированной среде превышал все скорости некогерентной релаксации:

$$\omega'' > \{1/T_1, 1/T_2\}. \quad (7)$$

Сосредоточимся для определённости на наиболее типичном случае $1/T_2 \geq 1/T_2^*$, отвечающем, по существу, СИ фемтосекундных импульсов в замагниченном гетеролазере. Тогда в условиях резонанса $\Omega \approx \omega_0$ согласно [1, 2] инкремент ω'' равен $\omega_c^2 T_E / 4$ при $1/T_E \gg \omega_c/2$, а в оптимальном случае $1/T_E \leq \omega_c/2 \leq \omega_{Be}$ достигает максимального значения порядка половины так называемой кооперативной частоты ансамбля eh пар:

$$\omega_c = [4\pi d^2 \Gamma \Delta N_l \omega_0 / (\hbar \mu^2)]^{1/2}; \quad \Delta N_l \leq 2 \Delta N_{l=0} \leq 4N_0 = \omega_{Be} m_e k_n / (\pi^2 \hbar) \quad (8)$$

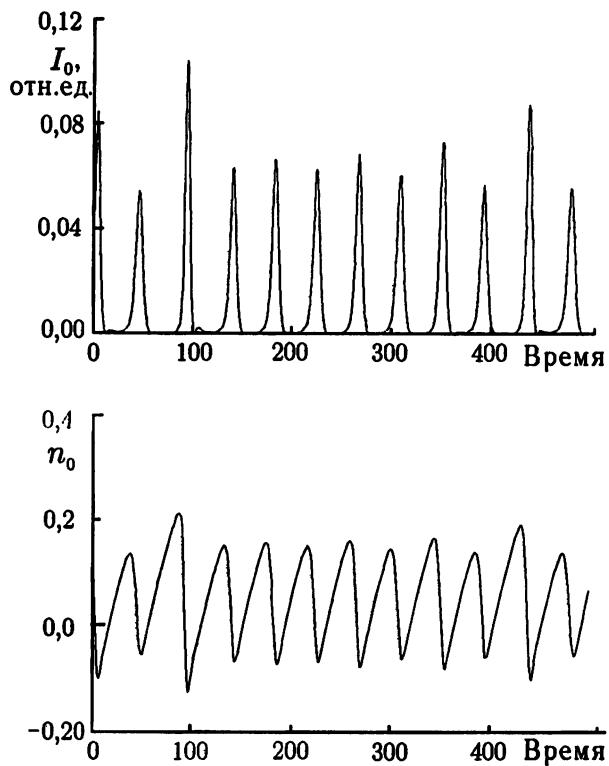


Рис. 1. Пример СИ при постоянной накачке нулевых уровней Ландау электронов и дырок. Приведены зависимости интенсивности излучения I_0 и разности населённостей n_0 от времени при $\tau_E = 3$; $\tau_1 = 90$; $\tau_2 = 9$; $2\omega_0/\omega_c = 100$; $\omega_0 = \Omega$; $n_0^P \equiv \Delta N_0^P/(2N_0) = 0,8$. Инверсия $n_0 = \Delta N_0/(2N_0)$ нормирована на единицу, релаксационные времена — на $2/\omega_c$, где частота ω_c (8) взята при $\Delta N_l = 2N_0$: $\tau = \omega_c t/2$

же, если учесть, что квантование движения носителей обеспечивает движение носителей в магнитном поле подавляет внутризонную релаксацию, причём для СИ дискретных мод указанное уменьшение порога имеет место и при переходе к случаю доминирующего неоднородного уширения $1/T_2^* > 1/T_2$.

Выигрыш в концентрации инжектируемых пар особенно важен для получения сверхизлучательной генерации в GeSi/Ge-квантовых ямах, в которых СИ может развиваться на прямых переходах в Г-долине Ge, и основной проблемой является её эффективная накачка [8, 9]. Что касается самой динамики СИ на прямых переходах в центре зоны Бриллюэна в случае GeSi/Ge-квантовых ям, то качественно она та же, что и в случае AlGaAs/GaAs-квантовых ям.

Приведённые выше соображения неявно подразумевают наличие в начальный момент времени инвертированного распределения носителей с заданной концентрацией и ничего не говорят о возможности реализации импульсного режима СИ при непрерывной накачке. Анализ устойчивости состояния равновесия уравнений (2)–(4), отвечающего стационарной лазерной генерации, показывает [5, 9, 20], что для возникновения режима незатухающих пульсаций необходимо выполнение неравенств $\omega_c^2 \Delta N_l^P > 36/(T_2 T_E)$ и $1/T_E > 1/T_1 + 1/T_2$, т. е. чтобы скорость накачки превышала некоторое пороговое значение (второй порог) и лазерный резонатор был крайне низкодобротным. Требуемая

(см. формулу (5) при $l = 0$). В этом случае при характерной плотности инверсии пар на l -м уровне Ландау $\Delta N_l = 2N_0$ процесс СИ становится много-модовым, и условие (7) $\omega_c/2 > 1/T_2$ будет выполнено, если магнитное поле удовлетворяет неравенству

$$B > 25 (T_2/0,1 \text{ пс})^{-2} (\Gamma/0,2)^{-1} \text{ Тл.} \quad (9)$$

В современных системах квантовых ям без магнитного поля реальное (модовое) СИ может осуществляться, по-видимому, только при $1/T_2 \ll 1/T_2^*$ [5, 6]. При этом инверсия ΔN (и скорость накачки), необходимая для достижения реализующимся в данной системе инкрементом ω_{qw}'' заданного порога $1/T_2$ в условиях вырождения, оказывается выше, чем величина ΔN_l , задаваемая условием $\omega_c/2 > 1/T_2$ и необходимая для СИ в системе циклотронных квантовых точек, если $\omega_{Be} > \omega_c/2$. Последнее условие, являющееся следствием неравенства $\omega_c/2 > \omega_{qw}''$ и связи двух предельных инкрементов $\omega_c/2 = (\omega_{qw}'' \omega_{Be})^{1/2}$ при заданной инверсии $\Delta N > 2N_0 + N_l$, выполняется начиная с $B \sim 4$ Тл, когда $\omega_c/2 = \omega_{qw}'' = \omega_{Be} \sim 10^{13} \text{ с}^{-1}$ (при $\Gamma = 0,2$ и $L_z = 5 \text{ нм}$). Условие $\omega_{Be} > \omega_c/2$ на величину магнитного поля, обеспечивающего преимущества циклотронных квантовых точек, справедливо для всех уровней Ландау, кроме нулевого, для которого следует всюду в этом абзаце заменить ω_{Be} на $\omega_{Be}/2$ [17–19].

Пороговое значение объёмной плотности инверсии ΔN_l^P , определяемой накачкой, для СИ циклотронных квантовых точек может оказаться ещё ниже, если учесть, что квантование движения носителей в магнитном поле подавляет внутризонную релаксацию, причём для СИ дискретных мод указанное уменьшение порога имеет место и при переходе к случаю доминирующего неоднородного уширения $1/T_2^* > 1/T_2$.

длина резонатора линейно зависит от времени релаксации поляризации и для $T_2 = 0,2$ пс оказывается порядка $10 \div 20$ мкм, а необходимое магнитное поле обратно пропорционально Γ , так что для $\Gamma = 0,2$ оно составляет примерно 50 Тл (и уменьшается пропорционально $1/T_2^2$).

Соответствующий пример численного решения системы (2)–(4) в условиях сверхизлучательной генерации на переходе между нулевыми уровнями Ландау электронов и дырок приведён на рис. 1. Получающаяся квазипериодическая последовательность состоит из импульсов СИ длительностью порядка $100 \div 300$ фс с периодом повторения $1 \div 5$ пс и пиковой мощностью около 1 Вт. Необходимая плотность тока накачки оказывается не менее 10^5 А/см², что, как нетрудно показать, ещё не приводит к чрезмерному перегреву образца при наносекундных импульсах тока. Подчеркнём, что инверсия населённостей уровней Ландау пропадает после каждого импульса СИ, и за время её восстановления мощной накачкой интенсивность поля в резонаторе ослабляется на несколько порядков. Именно поэтому каждый отдельный импульс данного пичкового режима качественно не отличается от стандартного импульса СИ Дике [1], отвечающего решению начальной задачи с малой затравочной амплитудой поля и/или поляризации.

3. ВЛИЯНИЕ НЕОДНОРОДНОГО УШИРЕНИЯ НА ПОРОГИ СТАЦИОНАРНОЙ И ИМПУЛЬСНОЙ ГЕНЕРАЦИИ

Неоднородное уширение уровней Ландау может привести к существенному изменению порогов генерации. Обычно уширение уровней увеличивает порог стационарной лазерной генерации (первый порог), но может значительно понизить второй порог, имеющий место при условии $1/T_E > 1/T_1 + 1/T_2$ и соответствующий минимальной накачке, необходимой для неустойчивости стационарной генерации [20]. Последнее связано с существованием неоднородного спектрального профиля инверсии $e\hbar$ пар в условиях стационарной одномодовой генерации, обеспечивающего большую эффективность возбуждения спонтанных когерентных колебаний поля и поляризации активной среды.

Для упрощения задачи мы ограничимся одним межзонным переходом, отвечающим частоте ω_0 (например, между нулевыми уровнями Ландау электронов и дырок нижнего уровня размерного квантования идеальной квантовой ямы толщиной $L_0 = \pi/k_1$), и предположим, что он находится в резонансе с модой излучения, т. е. $\omega_0 = \Omega$. Будем считать, что неоднородное уширение определяется дискретными флюктуациями толщины квантовой ямы (или барьера), кратными толщине атомного слоя a , неизбежно существующими в современных гетероструктурах:

$$L_z = L_0 + ja, \quad j = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm M. \quad (10)$$

В такой «дискретной» модели рабочий переход расщепляется на $2M + 1$ спектральных компонент, отвечающих подуровням электронов и дырок на данном уровне Ландау l . Соседние спектральные компоненты разнесены на величину $\Delta\omega$, которая является параметром задачи и обычно составляет несколько мэВ. Предположим также простейшую функцию распределения флюктуаций: отношение площадей квантовых ям, имеющих разные толщины (соответствующие различным спектральным компонентам), описывается симметричным законом геометрической прогрессии с показателем $\alpha < 1$:

$$S_j/S_0 = \alpha^{|j|} = \text{const}, \quad j = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm M. \quad (11)$$

Более того, будем полагать, что носители инжектируются равномерно вдоль плоскости квантовых ям, так что распределение накачки ΔN_l^P между различными компонентами j , ΔN_j^P , определяется тем же законом (см. рис. 2), а скорость некогерентной релаксации населённостей и однородное уширение

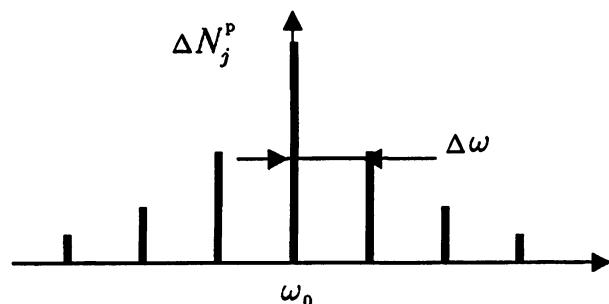


Рис. 2. Модель дискретного неоднородного уширения циклотронных переходов из-за флюктуаций числа атомных слоёв в квантовых ямах

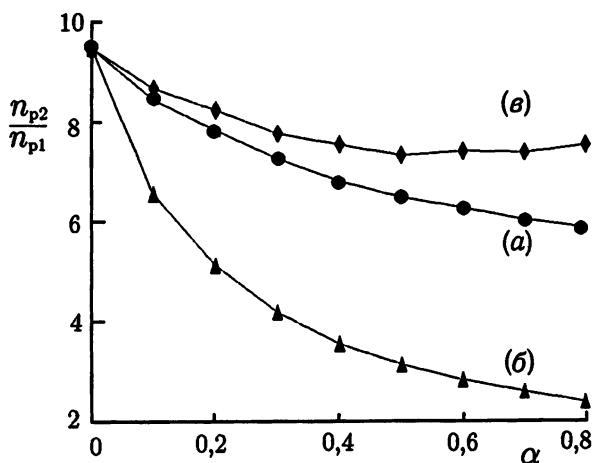
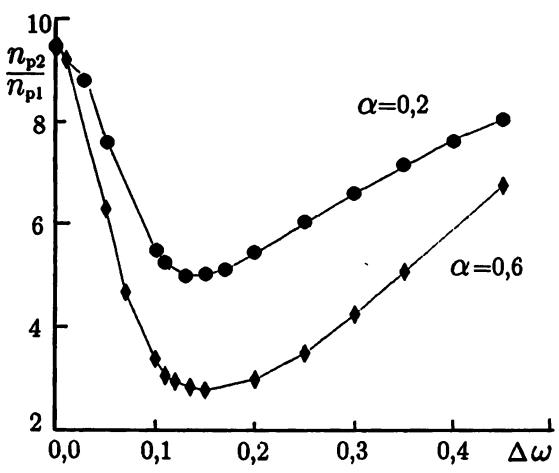
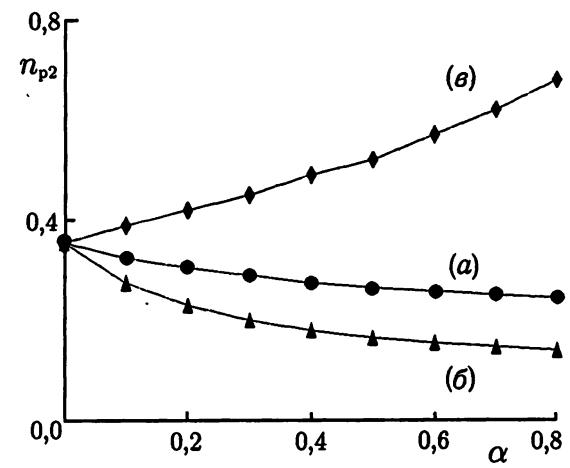
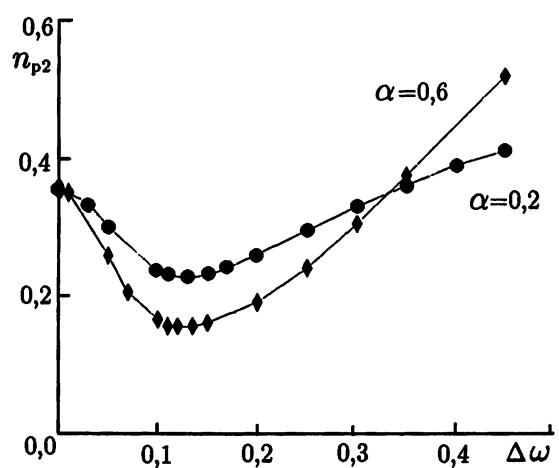
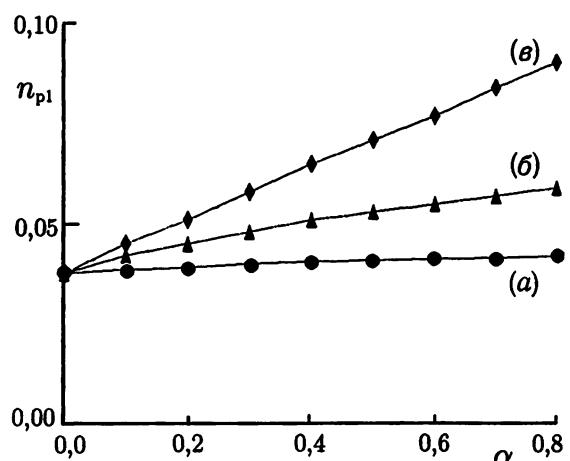
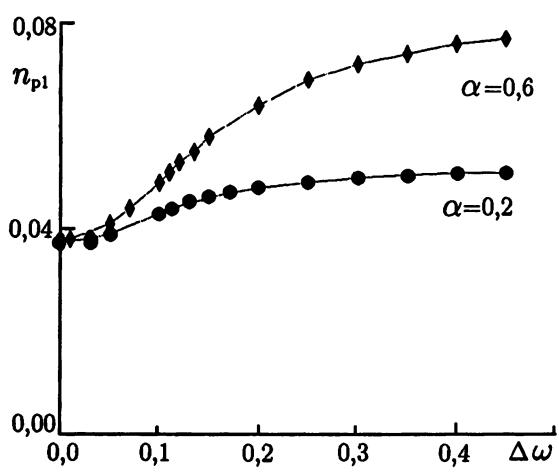


Рис. 3. Зависимость первого и второго порогов генерации, а также их отношения от расщепления $\Delta\omega$ подуровней (в единицах $\omega_c/2$) при $\alpha = 0,2; 0,6$

Рис. 4. Зависимость первого и второго порогов генерации, а также их отношения от показателя α при $2\Delta\omega/\omega_c = 0,05$ (а); $0,135$ (б); $0,5$ (в)

подуровней не зависят от их номера:

$$\Delta N_j^p / \Delta N_0^p = \alpha^{|j|}; \quad T_{1j} = T_1, \quad T_{2j} = T_2. \quad (12)$$

Динамика поляризации P_j и инверсии ΔN_j в каждой дополнительной компоненте описывается уравнениями Блоха (3), (4), где следует заменить l на j и ω_0 на $\omega_0 + j\Delta\omega$. При этом и исходная (P_l) и дополнительные (P_j) компоненты дают вклад в полную поляризацию $P = P_l + \sum_j P_j$, определяющую электрическое поле E моды.

В общем случае качественный анализ и численное моделирование показывают, что сверхизлучательная генерация при наличии неоднородного уширения характеризуется импульсами большей длительности с меньшими мощностью и скважностью по сравнению с импульсами, которые генерируются в случае однородного уширения (при прочих равных условиях). Существенно, что спектральная ширина импульсов СИ, определяемая инкрементом коллективной рекомбинации eh пар, уменьшается с ростом неоднородного уширения, т. е. с расширением спектра возбуждающей силы в осцилляторе поля (2). Результаты численного анализа первого ΔN_{p1} и второго ΔN_{p2} порогов генерации на переходе между нулевыми уровнями Ландау электронов и дырок представлены на рис. 3 и 4 для типичного набора релаксационных времён $T_1 = 10T_2 = 30T_E = 180/\omega_c$ при $M = 1$ (три подуровня). Там же показаны зависимости отношения этих порогов от расщепления подуровней $\Delta\omega$ (α фиксировано) и от показателя α ($\Delta\omega$ фиксировано). Как и следовало ожидать, при заданной накачке с увеличением $\Delta\omega$ и α первый порог $n_{p1} = \Delta N_{p1}/(2N_0)$ (порог возникновения лазерной генерации) монотонно растёт, т. к. эффективность возбуждения моды резонатора уменьшается из-за оттока накачки в «боковые» компоненты, отстроенные от резонанса с излучаемой модой. Этот канал потерь становится весьма существенным при $\Delta\omega \sim 1/T_E$ и $\alpha \sim 1/2$, когда «боковые» компоненты выходят из полосы усиления моды, а доля накачки, которая расходуется на них, достаточно велика. При $\Delta\omega > 1/T_E$ первый порог насыщается и уже не зависит от расщепления подуровней $\Delta\omega$.

Что касается второго порога $n_{p2} = \Delta N_{p2}/(2N_0)$, непосредственно предшествующего появлению СИ, то он существенно понижается с ростом неоднородного уширения (с ростом $\Delta\omega$ и α), если последнее меньше однородного, т. е. если $\Delta\omega < 1/T_2$ при $\alpha \sim 1/2$ (ср. рис. 3, 4 и [5]). При большем неоднородном уширении, когда $1/T_2 > \Delta\omega > 1/T_E$ и $\alpha \sim 1/2$, второй порог начинает расти с ростом расщепления подуровней $\Delta\omega$ из-за ослабления взаимодействия между различными спектральными компонентами поляризации, поскольку эффективное время расфазировки определяется величиной $1/\Delta\omega$, а не равно T_2 . Таким образом, минимум отношения порогов $n_{p2}/n_{p1} \equiv \Delta N_{p2}/\Delta N_{p1}$ достигается при $\Delta\omega \sim 1/T_2$ и $\alpha \rightarrow 1$. При $\Delta\omega > 1/T_E$ боковые компоненты не дают вклад в генерацию (их накачка тратится на спонтанное излучение и безызлучательную релаксацию), а отношение первого и второго порогов генерации возвращается к максимальному значению, типичному для однородного уширения и приблизительно равному 9.

4. ДВУХЦВЕТНОЕ СВЕРХИЗЛУЧЕНИЕ В УСЛОВИЯХ КАСКАДНОЙ НАКАЧКИ

Обычная инжекционная или оптическая накачка многослойной гетероструктуры на замагниченных квантовых ямах создаёт носители с энергиями, значительно превышающими энергию нижних уровней размерного квантования и подуровней Ландау основного уровня размерного квантования. В подобной ситуации внутризонное рассеяние обеспечивает каскадную прокачку соседних рекомбинационных переходов, что может привести, в принципе, к одновременной генерации соответствующих (резонансных) мод. При этом верхний электронный (дырочный) лазерный уровень накачивается непосредственно, а населённость нижних электронных (дырочных) уровней определяется конкуренцией внутризонного рассеяния и излучения на различных eh -переходах. Одновременная квазистационарная генерация на рекомбинационных переходах с двух соседних уровнях размерного квантования в гетеролазерах наблюдалась неоднократно [21, 22].

Имея в виду гетеролазер на замагниченных квантовых ямах, проанализируем сверхизлучательную генерацию двух продольных мод, резонансных двум переходам между парами соседних уровней Ландау (например, между нулевыми и первыми уровнями Ландау электронов и дырок). Согласно указанной выше каскадной схеме, накачка извне идёт только на верхний уровень (рис. 5), а скорость внутризонной релаксации с верхнего электронного (дырочного) уровня на нижний определяется феноменологически введённым временем безызлучательного циклотронного перехода T_{01} . Поскольку лазерные моды разнесены по частоте на большую величину, равную сумме электронной и дырочной гирочастот $\omega_{Be} + \omega_{Bh}$, в уравнениях для амплитуд поля (2) и поляризации (3) одной моды другой моде можно не учитывать. Таким образом, модифицируются только уравнения для инверсии обоих переходов $l = 0, 1$ с соответствующими временами релаксации $T_1^{(l)}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dn_0}{d\tau} + \frac{1+n_0}{\tau_1^{(0)}} - \frac{(1+n_1)(1-n_0)}{4\tau_{01}} = -q_0, \\ \frac{dn_1}{d\tau} + \frac{n_1-n_1^p}{\tau_1^{(1)}} + \frac{(1+n_1)(1-n_0)}{8\tau_{01}} = -q_1. \end{array} \right. \quad (13)$$

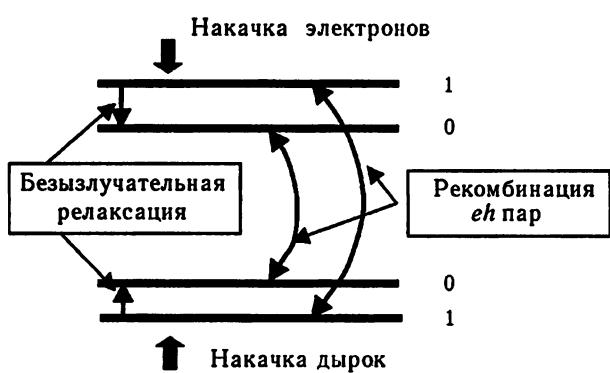


Рис. 5. Каскадная накачка уровней Ландау в гетероструктуре на замагниченных квантовых ямах

Здесь инверсия каждого перехода $n_{0,1}$ нормирована на единицу, время — на половину кооперативной частоты, взятой при $\Delta N_l = 2N_0$, т. е. $\tau = \omega_c t / 2$; τ_{01} — время кросс-релаксации и

$$q_l = \frac{\text{Im}(E_l P_l^*)}{\hbar \omega_c N_0}. \quad (14)$$

Используя отсутствие непосредственной когерентной связи между поляризацией eh пар на соседних переходах и между полями соответствующих мод, с определённой степенью условности набор возможных состояний (режимов генерации) полной системы можно представить как совокупность всех

парных комбинаций состояний подсистем. Следует помнить, однако, что СИ на одном из переходов приводит к осцилляции инверсии и разрушению стационарной генерации на другом. Пользуясь известными выражениями для первого и второго порогов в случае изолированного перехода [20], нетрудно получить аналитические оценки пороговых накачек в полной системе в терминах эффективной накачки \tilde{n}^p и эффективного времени релаксации $\tilde{\tau}_1$ инверсии отдельных переходов. Подобный подход применим и при учёте неоднородного уширения, которое согласно разделу 3 может существенно влиять на пороги генерации. Фактически, каждый порог для системы двух связанных переходов соответствует минимальной накачке, необходимой для выведения из состояния равновесия одной из подсистем при фиксированном значении инверсии, равном её среднему уровню, в другой. Если на одном из переходов уже реализован режим сверхизлучательной генерации, то для указанной оценки среднее значение инверсии на нём в грубом приближении можно положить равным нулю.

Ниже мы ограничимся случаем одновременной двухцветной сверхизлучательной генерации, ранее не изучавшимся (о последовательном СИ в трёхуровневых системах см. [23] и указанную там литературу). В данном случае описанный выше алгоритм даёт два возможных начальных состояния и, соответственно, два порога СИ:

1) СИ на нулевом переходе, квазистационарная генерация на первом переходе:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1/\tau_E^{(1)} > 1/\tilde{\tau}_1^{(1)} + 1/\tau_2^{(1)} = 1/\tau_1^{(1)} + 1/(8\tau_{01}) + 1/\tau_2^{(1)}, \\ n_1^p > \frac{1}{8\tau_{01}} + \frac{[1/\tau_1^{(1)} + 1/(8\tau_{01})][1/\tau_E^{(1)} + 1/\tau_1^{(1)} + 3/\tau_2^{(1)} + 1/(8\tau_{01})]}{\left(\tau_E^{(1)}\right)^2 [1/\tau_E^{(1)} - 1/\tau_1^{(1)} - 1/\tau_2^{(1)} - 1/(8\tau_{01})]}, \end{array} \right. \quad (15)$$

2) квазистационарная генерация на нулевом переходе, СИ на первом переходе:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1/\tau_E^{(0)} > 1/\tilde{\tau}_1^{(0)} + 1/\tau_2^{(0)} = 1/\tau_1^{(0)} + 1/\tau_2^{(0)} + 1/(4\tau_{01}), \\ \tilde{n}_0^p = \frac{1/(4\tau_{01}) - 1/\tau_1^{(0)}}{1/(4\tau_{01}) + 1/\tau_1^{(0)}} > \frac{1/\tau_E^{(0)} + 1/\tau_1^{(0)} + 3/\tau_2^{(0)} + 1/(4\tau_{01})}{\left(\tau_E^{(0)}\right)^2 [1/\tau_E^{(0)} - 1/\tau_1^{(0)} - 1/\tau_2^{(0)} - 1/(4\tau_{01})]}. \end{array} \right. \quad (16)$$

Численный анализ системы уравнений (2), (3), дополненных модифицированными уравнениями (13), для каждой подсистемы хорошо согласуется с приведёнными выше порогами и подтверждает возможность двухцветного СИ при непрерывной накачке. Этот режим сохраняется при значительном варьировании характеристик системы и накачки (по крайней мере, при изменении параметров на десятки процентов). Наиболее важным условием устойчивого существования сверхизлучательной генерации на соседних рекомбинационных переходах является достаточная близость порогов нестационарной генерации в соответствующих лазерных модах и примерное равенство коэффициентов усиления поля в них (с точностью до десятков процентов).

На рис. 6 приведён пример квазистационарной генерации на пульсющем переходе при сверхизлучательной генерации на первом. Заметим, что пульсации интенсивности поля и инверсии на нулевом переходе индуцированы пульсациями инверсии на первом, где реализуется чётко выраженный пичковый режим СИ.

Если, не меняя параметров системы, немного увеличить накачку (см. рис. 7), то возникает режим двухцветного СИ, в котором импульсы разного цвета не когерентны друг с другом. В этом режиме последовательности импульсов, генерируемые на соседних переходах, могут существенно отличаться друг от друга (по скважности, мощности и длительности), но в любом случае каждый генерируемый импульс сопровождается сменой знака инверсии на соответствующем переходе, что нетипично для стандартной лазерной генерации при отсутствии СИ.

Генерация СИ на нулевом переходе возможна также при отсутствии СИ и/или квазистационарной генерации на первом переходе. Подобная ситуация возникает в условиях достаточно сильной внутризонной релаксации, когда, как показано на рис. 8, генерация на первом переходе заметно подавляется (при заданной накачке) и принимает форму нерегулярных пульсаций.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе в рамках полуклассического приближения и приближения среднего поля для оптических уравнений Максвелла—Блоха исследованы условия реализации и особенности протекания фемтосекундной сверхизлучательной генерации в полупроводниковых лазерах, помещённых в квантующее магнитное поле. Указаны преимущества получающейся системы циклотронных квантовых точек по сравнению с обычными системами квантовых ям и квантовых точек, позволяющие рассматривать её в качестве наиболее перспективной для создания сверхизлучающего лазера. Оценены ожидаемые характеристики импульсов СИ и требуемые параметры лазерных гетероструктур; в частности, показано, что внешнее поле порядка $10 \div 50$ Тл значительно облегчает получение ультракоротких мощных импульсов СИ в многослойных гетероструктурах с квантовыми ямами.

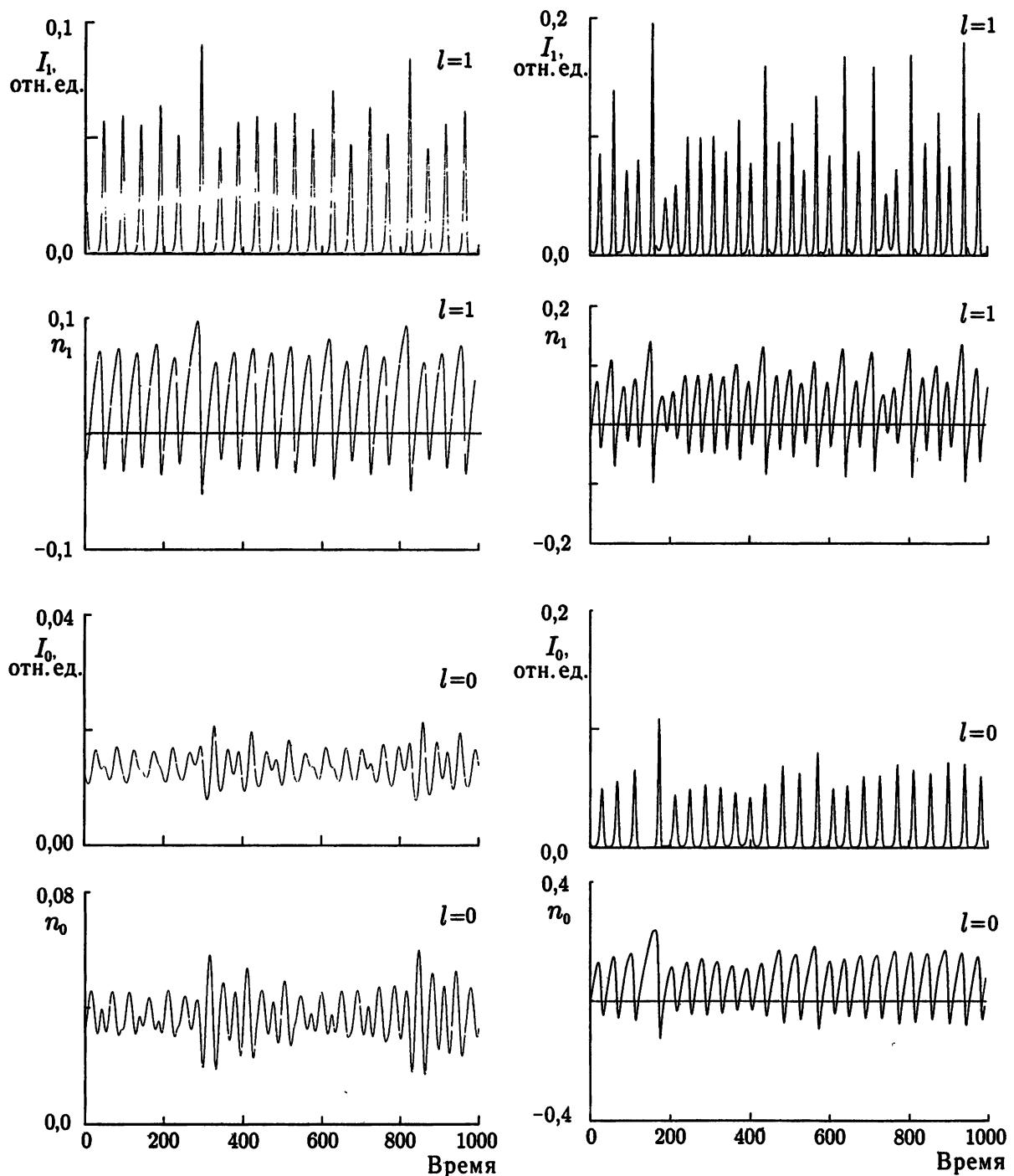


Рис. 6. Пример сосуществования квазистационарной генерации на нулевом переходе и сверхизлучательной на первом. Приведены зависимости интенсивности излучения I и разности населённостей n от времени для нулевого и первого уровней Ландау при $\tau_E = 3; \tau_1 = 90; \tau_2 = 9; \tau_{01} = 12; 2\omega_0/\omega_c = 100; 2\omega_1/\omega_c = 105; n_1^P = 1,25$. Нормировка времени на рис. 6–8 та же, что и на рис. 1

Рис. 7. Пример двухцветного СИ. Приведены зависимости интенсивности излучения I и разности населённостей n от времени для нулевого и первого уровней Ландау. Параметры те же, что и на рис. 6, но накачка немножко сильнее: $n_1^P = 1,55$

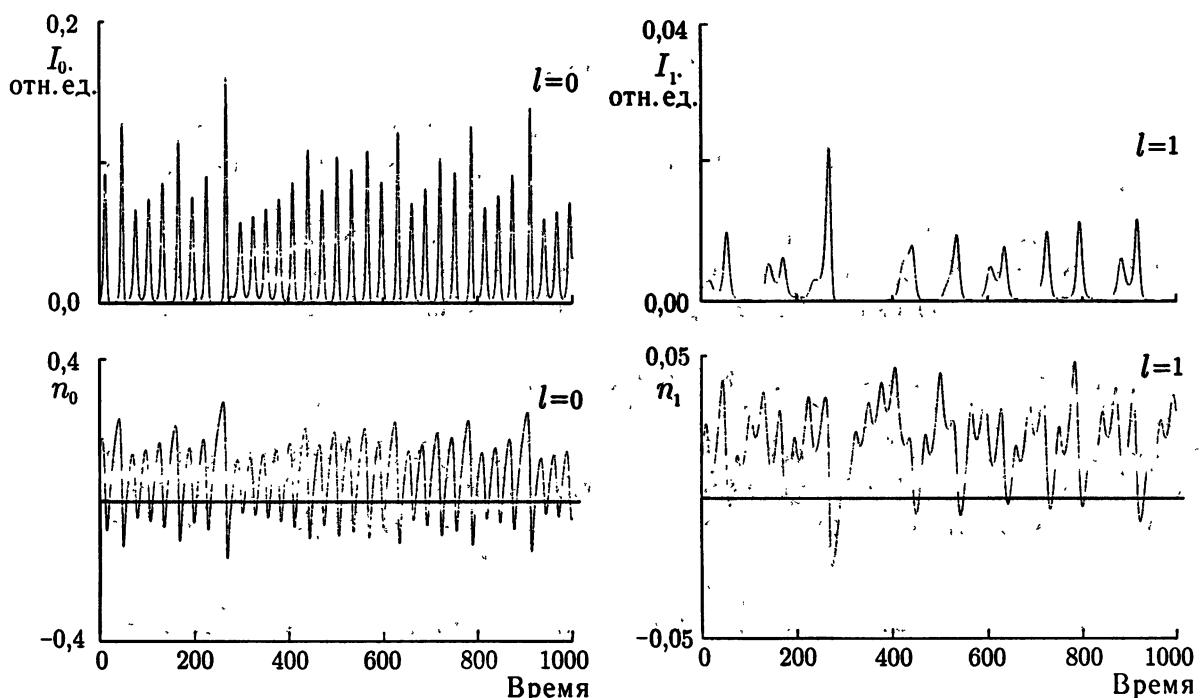


Рис. 8. Пример квазипериодической сверхизлучательной генерации на нулевом переходе и нерегулярных пульсаций на первом. Приведены зависимости интенсивности излучения I и разности населённостей n от времени для нулевого и первого уровней Ландау. Параметры те же, что и на рис. 6, но скорость кросс-релаксации выше: $\tau_{01} = 9$

Изучено также влияние неоднородного уширения рекомбинационного $e\hbar$ -перехода, связанного с дискретными атомными флуктуациями толщины квантовых ям и барьера, на условия реализации СИ при постоянной накачке. В рамках построенной модели установлено, что неоднородное уширение, меньшее однородного, благоприятствует развитию сверхизлучательной генерации и может приводить к существенному понижению второго порога. Вместе с тем развитие сверхизлучательной генерации значительно затрудняется, если неоднородное уширение становится много больше однородного.

Наконец, продемонстрирована возможность двухцветного СИ при постоянной каскадной накачке электронных и дырочных уровней Ландау и приведены оценки порогов перехода к этому режиму генерации. В общем случае динамика системы двух связанных (по накачке) переходов весьма сложна, и при умеренной накачке существуют переходные режимы с осцилляциями, которые по своей природе не являются чисто сверхизлучательными. Например, в ряде случаев наблюдается спонтанный переход от СИ к квазистационарной генерации, не обладающей импульсным характером. В то же время достаточно мощная накачка циклотронных квантовых точек, помещённых в низкодобротный резонатор, приводит к двухцветному СИ с хорошо развитыми фемтосекундными импульсами. Численные расчёты показали также, что для промежуточных значений мощности накачки сверхизлучательная генерация на одном $e\hbar$ -переходе может сопровождаться квазистационарной генерацией либо подавленными осцилляциями поля на другом. Разумеется, лазерная динамика ансамбля циклотронных квантовых точек не исчерпывается проведёнными оценками порогов различных режимов и рассмотренными примерами двухцветного СИ. Однако более детальный анализ данной проблемы, по-видимому, будет актуален только после экспериментальной реализации соответствующего сверхизлучательного гетеролазера.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Железняков В. В., Кочаровский В. В., Кочаровский Вл. В. // УФН. 1989. Т. 159. С. 193.
2. Belyanin A. A., Kocharovsky V. V., Kocharovsky Vi. V. // Quant. Semiclass. Optics (JEOS, Part B). 1997. V. 9, No. 1. P. 1.
3. Chow W. W., Koch S. W. Semiconductor-laser fundamentals. Berlin: Springer, 1999.
4. Kapon E. Semiconductor lasers: optics and photonics. London: Academic Press, 1999.
5. Белянин А. А., Кочаровский В. В., Кочаровский Вл. В. // Изв. РАН: Сер. физическая. 1998. Т. 62, № 2. С. 372.
6. Belyanin A. A., Kocharovsky V. V., Kocharovsky Vi. V. // Quant. Semiclass. Optics. 1998. V. 10. P. L13.
7. Kalugin N. G., Belyanin A. A., Kocharovsky V. V., Kocharovsky Vi. V., Deveaund B. // Proc. CLEO / Europe – IQEC 2000 (Nice, 10–15 September 2000). (in press).
8. Белянин А. А., Калугин Н. Г., Кочаровский В. В., Кочаровский Вл. В. // Изв. РАН. Сер. физическая. 1999. Т. 63, № 2. С. 369.
9. Belyanin A. A., Kocharovsky V. V., Kocharovsky Vi. V. // Phys. Rev. A. (in press).
10. Stahl E., Weiss D., Weimann G., v. Klitzing K., Ploog K. // J. Phys. C. 1985. V. 18. P. L783.
11. Butov L. V., Kulakovskii V. D. // Phys. Rev. B. 1991. V. 44, No. 19. P. 10680.
12. Bayer M., Dremin A., Faller F., Forchel A., Kulakovskii V. D. // Phys. Rev. B. 1994. V. 50, No. 23. P. 17085.
13. Basu P. K. Theory of optical processes in semiconductors: Bulk and microstructures // Oxford: Clarendon, 1997.
14. Ando T., Murayama Y. // J. Phys. Soc. Japan. 1985. V. 53. P. 693.
15. Ryan J. F. // Physica B. 1985. V. 134. P. 403.
16. Hollering R. W., Berendschot T. T., Bluysen H. J., Reinen H. A., Wyder P. // Proc. 18th Int. Conf. Physics of Semiconductors, Stockholm.
17. Белянин А. А., Кочаровский В. В., Кочаровский Вл. В. // Изв. РАН. Сер. физическая. 2000. Т. 64, № 2. С. 270.
18. Belyanin A. A., Kocharovsky V. V., Kocharovsky Vi. V., Pestov D. S. // J. Univ. Comp. Sci. 2000. (in press).
19. Belyanin A. A., Kocharovsky V. V., Kocharovsky Vi. V., Pestov D. S. // Abstr. 18th General Conf. Condensed Matter Division of the European Phys. Soc. (Montreux, Switzerland, 13–17 March 2000). P. 176.
20. Ханин Я. И. Основы динамики лазеров. М.: Наука, 1999.
21. Tokida Y., Tsukada N., Fujiwara K. et al. // Appl. Phys. Lett. 1986. V. 49. P. 1629.
22. Chen T. R., Zhuang Y., Xu Y. J. et al. // Appl. Phys. Lett. 1992. V. 60. P. 2954.
23. Железняков В. В., Кочаровский В. В., Кочаровский Вл. В. // Изв. АН. Сер. физическая. 1992. Т. 56, № 9. С. 1321.

Институт прикладной физики РАН,
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию
22 ноября 2000 г.

**FEATURES OF SUPERRADIANCE IN CYCLOTRON QUANTUM-DOT HETEROLASER
UNDER CONTINUOUS PUMPING***A. A. Belyanin, V. V. Kocharovskiy, Vl. V. Kocharovskiy, and D. S. Pestov*

We study generation of femtosecond superradiance pulses under continuous pumping, which arises due to collective recombination of electron-hole (*eh*) pairs in quantum wells placed in a strong magnetic field orientated perpendicular to the well plane. Such a superradiant semiconductor laser can operate even at room temperature due to complete quantization of particle motion, maximum possible spectral density of states, high volume density of the effective cyclotron quantum dots, and partial suppression of the intraband scattering. In a multilayer laser heterostructure with an optical confinement factor of about 0.2 placed in a magnetic field 10–50 T, generation of a quasiperiodic or chaotic sequence of coherent pulses with a peak power of about 1 W, duration of the order of 100 fs, and THz repetition rate is expected. It is shown that, in a rather wide range of the pumping power, two-colour superradiant generation of a couple of modes resonant to two neighbouring transitions between electron and hole Landau levels is possible. Thresholds of one- and two-colour superradiance as well as their modification caused by the inhomogeneous broadening due to fluctuations of quantum-well (and barrier) thickness in real heterostructures are studied analytically and numerically.

УДК 539.216.22:535

ЛИНЕЙНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ (ТРАНСФОРМАЦИЯ) ВОЛН ДЕ-БРОЙЛЯ Г- И Х-ДОЛИН И ВНУТРИЗОННЫЕ ОПТИЧЕСКИЕ ПЕРЕХОДЫ В ГЕТЕРОСТРУКТУРАХ GaAs/AlAs С КВАНТОВЫМИ ЯМАМИ В ЛАТЕРАЛЬНОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

В. Я. Алёшкин, А. А. Андронов

Обсуждается линейное взаимодействие волн де-Бройля разных долин в гетероструктуре при наличии постоянного электрического поля, направленного вдоль гетерограниц структуры (латеральное поле). Вычислены вероятности бесфононных и дипольных оптических переходов электронов между Г- и Х-подзонами в гетероструктуре GaAs/AlAs с квантовыми ямами при наличии латерального электрического поля. Показано, что поле существенно влияет на вероятности как бесфононного, так и прямого дипольного Г-Х-переходов. Кроме того, электрическое поле изменяет спектральную зависимость коэффициента межподзонного поглощения света на Г-Х-переходах, т. е. фактически имеет место межподзонный аналог эффекта Франца—Келдыша. Рассмотренный случай линейного взаимодействия волн де-Бройля сопоставлен с известными случаями линейного взаимодействия волн в плазме, с пробоем Зинера и эффектом Франца—Келдыша в твёрдых телах.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе рассматривается один случай линейного взаимодействия (трансформации) волн де-Бройля в квантовых ямах в пределах одной энергетической (электронной) зоны, который представляет интерес для исследований по созданию лазеров на внутризонных переходах в квантовых ямах за счёт разогрева носителей заряда. С одной стороны, рассмотренный пример продолжает исследования (линейной) трансформации волн де-Бройля в твёрдом теле и связанных с ней эффектов, к которым относятся явления в полупроводниковых гетероструктурах с изменяющейся в пространстве шириной запрещённой зоны, явления в однородных полупроводниках в постоянном электрическом поле (пробой Зинера, эффект Франца—Келдыша и эффекты взаимодействия дырочных подзон в электрическом поле). С другой стороны, рассмотренный пример является собой и одну из специфических реализаций линейного взаимодействия волн вообще и поэтому представляет и более широкий интерес. Мы начнём обсуждение с краткого напоминания основных положений теории линейной трансформации волн на примере волн в магнитоактивной плазме и с указанных выше примеров взаимодействия волн де-Бройля.

Линейное взаимодействие (трансформация) волн разных поляризаций или разных типов, возникающее при изменении параметров системы (среды) и вызванное пересечением дисперсионных кривых (т. е. кривых, описывающих зависимость частоты или фазовой скорости от волнового числа) при некотором специфическом значении параметров, впервые, по-видимому, подробно исследовалось в физике ионосферы при анализе отражения коротких радиоволн от ионосферных плазменных слоёв, находящихся в геомагнитном поле (см., например, [1]). С другой стороны, в общем плане эти эффекты принадлежат к явлениям вырождения (совпадения) собственных значений («пересечению термов») разнообразных механических, электрических, квантовых и других систем, исследование которых, несомненно, было начато ещё на заре математической физики.¹ В физике плазмы и физике ионосферы

¹ Нам не известно о существовании работ, выполненных до работ по физике ионосферы, посвящённых линейному взаимодействию каких-либо волн. В то же время вполне возможно, что аналогичные явления могли быть исследованы ещё в 19 веке, скажем, при анализе упругих волн в стержнях с переменным сечением. С другой стороны, перекачка энергии колебаний из одного из двух слабо связанных одинаковых маятников в другой и обратно может рассматриваться как явление подобного рода.

эти эффекты ответственны, в частности, за так называемое «утраивание» отражённых от ионосферы сигналов, на примере которого проще всего представить линейное взаимодействие волн для последующего обсуждения. С указанными вопросами линейного взаимодействия волн в плазме один из авторов настоящей работы (А. А.) познакомился, общаясь с В. Л. Гинзбургом и В. В. Железняковым, которым принадлежат многочисленные исследования подобных явлений в применении к физике ионосферной, солнечной и космической плазмы (см., например, [1–3]).

В плазме с магнитным полем на частотах, меньших электронной циклотронной частоты, в пренебрежении движением ионов зависимость показателя преломления n волн от концентрации плазмы N имеет вид, показанный на рис. 1. Пунктир соответствует распространению электромагнитных волн вдоль постоянного магнитного поля (продольному распространению), а сплошные линии — распространению под углом к магнитному полю [1]. При продольном распространении имеются три волны с тремя независимыми поляризациями электрического поля: две поперечные волны с противоположными круговыми поляризациями и одна продольная («плазменная») волна с поляризацией вдоль магнитного поля. При распространении под углом происходит «запутывание» поляризаций, и при любом N остаются две «нормальные» волны, каждая из которых имеет все три компоненты поля. В результате при распространении под углом к магнитному полю в окрестности точки пересечения ветвей дисперсионной характеристики при продольном распространении происходит трансформация дисперсионных кривых, состоящая в «расталкивании» ветвей при пересечении, как показано сплошными кривыми на рис. 1. Если слой плазмы неоднороден, например, концентрация плазмы N возрастает по линейному закону от нуля координаты z : $N \propto z/L$, где L — характерный масштаб, то при слабой неоднородности плазмы $L \gg \lambda$, где λ — характерный масштаб изменения электромагнитного поля в плазме, в качестве которого может выступать длина падающей на такой слой волны, длина волны, вычисленная из разности показателей преломления нормальных волн и др. (подробнее см. [1, 2]), электромагнитная волна (или электромагнитный импульс, состоящий из таких волн), падающая на слой, разбивается в начале слоя на две (нормальные) волны, которые распространяются в слое в условиях применимости приближения геометрической оптики вдоль непрерывных дисперсионных ветвей 1 и 2, как показано на рис. 1. Доходя до точек отражения ($n = 0$), волны (импульсы) двигаются назад, приводя (в случае импульсов) к появлению двух отражённых от слоя импульсов, поскольку время движения импульсов до точки отражения и обратно различно для двух ветвей.

С другой стороны, если параметр неоднородности слоя L и угол между направлением распространения волны и постоянным магнитным полем не очень велики, в окрестности точки z , в которой происходит пересечение ветвей дисперсионной характеристики при продольном распространении, приближение геометрической оптики нарушается, и должна иметь место трансформация волны ветви 2 в волну ветви 3. Для нас естественно назвать этот процесс туннелированием с одной ветви на другую, т. к. он происходит «подбарьерно», через недоступную в рамках геометрической оптики область. Протуннелировав в ветвь 3, импульс двигается до 3-ей точки отражения, отражается, достигает области

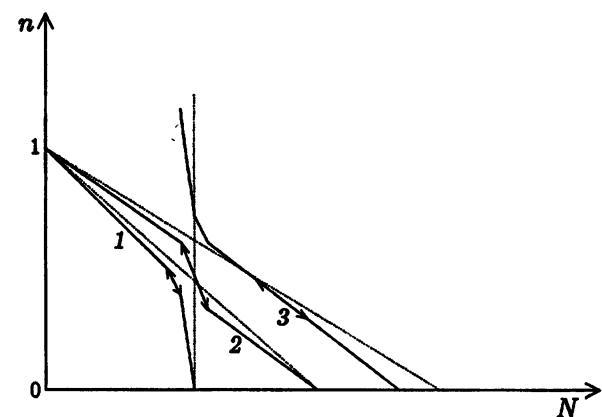


Рис. 1. Зависимость показателя преломления $n = kc/\omega$ от концентрации плазмы N при продольном (пунктир) и наклонном (квазипротяжном) распространении электромагнитных волн в «холодной» плазме с магнитным полем. Стрелки — движение по ветвям в неоднородной плазме

«расталкивания» ветвей при пересечении, как показано сплошными кривыми на рис. 1. Если слой плазмы неоднороден, например, концентрация плазмы N возрастает по линейному закону от нуля координаты z : $N \propto z/L$, где L — характерный масштаб, то при слабой неоднородности плазмы $L \gg \lambda$, где λ — характерный масштаб изменения электромагнитного поля в плазме, в качестве которого может выступать длина падающей на такой слой волны, длина волны, вычисленная из разности показателей преломления нормальных волн и др. (подробнее см. [1, 2]), электромагнитная волна (или электромагнитный импульс, состоящий из таких волн), падающая на слой, разбивается в начале слоя на две (нормальные) волны, которые распространяются в слое в условиях применимости приближения геометрической оптики вдоль непрерывных дисперсионных ветвей 1 и 2, как показано на рис. 1. Доходя до точек отражения ($n = 0$), волны (импульсы) двигаются назад, приводя (в случае импульсов) к появлению двух отражённых от слоя импульсов, поскольку время движения импульсов до точки отражения и обратно различно для двух ветвей.

С другой стороны, если параметр неоднородности слоя L и угол между направлением распространения волны и постоянным магнитным полем не очень велики, в окрестности точки z , в которой происходит пересечение ветвей дисперсионной характеристики при продольном распространении, приближение геометрической оптики нарушается, и должна иметь место трансформация волны ветви 2 в волну ветви 3. Для нас естественно назвать этот процесс туннелированием с одной ветви на другую, т. к. он происходит «подбарьерно», через недоступную в рамках геометрической оптики область. Протуннелировав в ветвь 3, импульс двигается до 3-ей точки отражения, отражается, достигает области

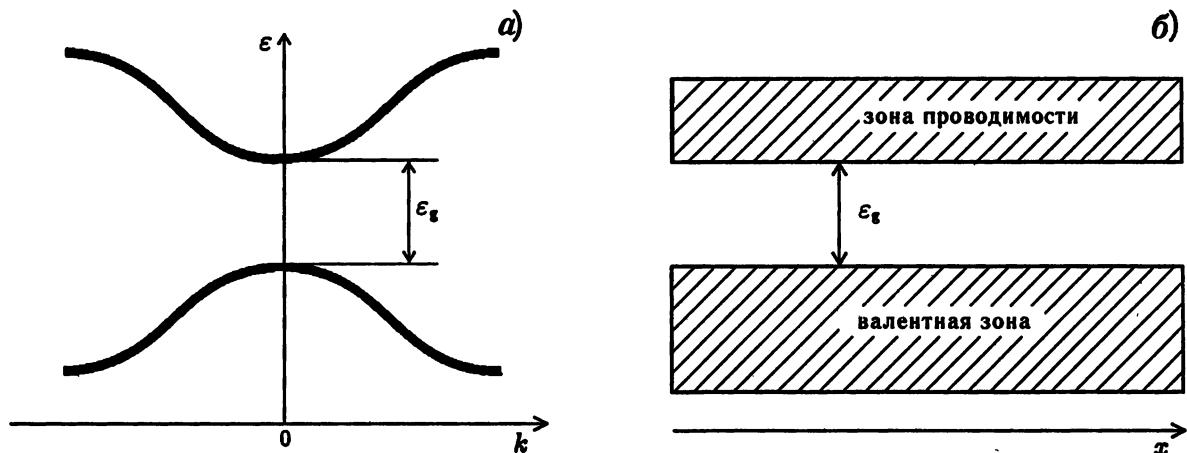


Рис. 2. Две зоны в энергетическом спектре кристаллов как функции волнового числа k в пределах первой зоны Бриллюэна (а) и пространственное положение зон (б); ϵ_g — ширина запрещённой зоны

туннелирования, туннелирует в ветвь 2 и достигает границы слоя, приводя к появлению третьего отражённого импульса. Это и есть эффект утраивания.

Аналогичные (и более сложные) явления линейного взаимодействия электромагнитных волн рассматривались в связи с исследованиями ионосферы Земли, Солнца и планет, межзвёздной среды и т. п. (см. [1–3]).

В квантовой физике аналогичные явления для волн де-Бройля начали рассматриваться тогда, когда стало ясно, что возможно существование нескольких мод де-Бройля. Такая ситуация имеет место в кристаллических твёрдых телах, в которых согласно работе Блоха волны де-Бройля могут принадлежать к разным ветвям (зонам) (см. рис. 2). Системой, аналогичной рассмотренной выше неоднородной плазме могло бы быть твёрдое тело с меняющимися в пространстве параметрами (постоянной решётки или массами атомов):² и здесь при изменении координаты могло бы возникнуть пересечение зон и соответствующая взаимная трансформация волн де-Бройля, относящихся к разным зонам. Такая ситуация имеет место в полупроводниковых гетероструктурах [4], изготовленных из твёрдых растворов элементов (например твёрдых растворов $Ga_xAl_{1-x}As$), где изменение состава (доли x) меняет ширину запрещённой зоны в пространстве (graded gap system) и, следовательно, взаимное положение энергетических зон и их ветвей в пространстве волновых чисел (см. рис. 3а). В настоящее время большее распространение получили системы, состоящие из слоёв разных полупроводников с близкими постоянными решётками (например из слоёв $GaAs$ и $AlAs$). В результате возникает система с резким изменением ширины запрещённой зоны в пространстве, с ямами для электронов и дырок (с квантовыми ямами, если размер слоя с узкой запрещённой зоной порядка минимальной длины волны де-Бройля дырок или электронов; см. рис. 3б). На существующей здесь резкой (гетеро-) границе между слоями и происходит взаимная трансформация волн (мод) де-Бройля, относящихся к разным зонам.

С другой стороны, в кристаллах существует и другой способ (механизм) взаимодействия (и трансформации) мод де-Бройля разных зон, не связанный с изменением ширины запрещённой зоны в пространстве, который начал изучаться практически с самого возникновения представлений зонной тео-

² В кристаллах обычно трудно создать заметную неоднородность, приводящую, скажем, к вращению оптических осей кристалла, что может обеспечить рассматриваемое линейное взаимодействие нормальных волн в кристаллах. В то же время в жидкокристаллических кристаллах поворот оптических осей достигается простыми средствами, что используется в дисплеях на жидкокристаллических кристаллах. Анализ этих явлений на основе линейного взаимодействия волн дан в работе [2].

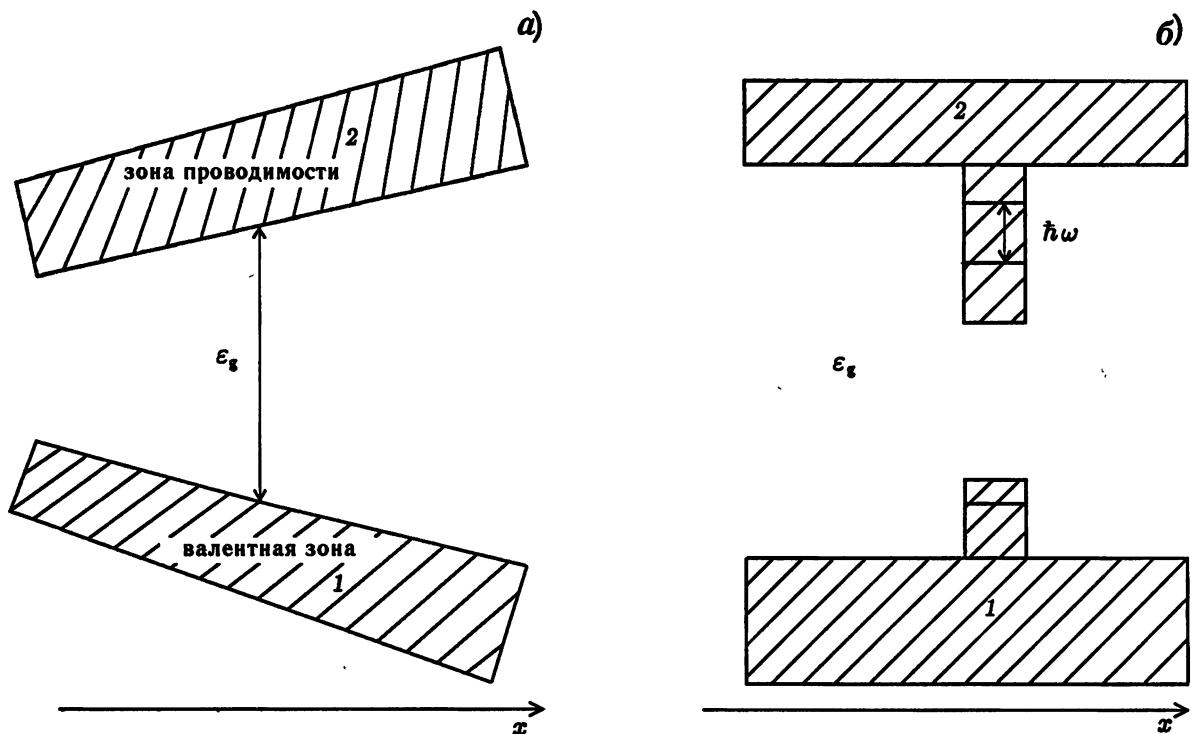


Рис. 3. Твёрдое тело с меняющейся в пространстве шириной запрещённой зоны: плавный гетеропереход (*а*) и гетероструктура с квантовой ямой (*б*); показаны энергетические уровни в яме и внутризонный переход между ними

рии кристаллов. Речь идёт о влиянии внешних полей (прежде всего электрического) на распространение и трансформацию волн де-Броиля (или пакетов таких волн) в кристалле. Действительно, в самых первых исследованиях не только была рассмотрена зонная структура кристаллов, но и было установлено, что будет с волнами де-Броиля (точнее, с пакетами этих волн, движение которых соответствует движению классической частицы) при наличии слабого электрического поля \mathbf{E} (см., например, [5]). Оказалось, что, как и для свободного электрона, движение пакета-частицы подчиняется уравнению Ньютона

$$\frac{dp}{dt} = e\mathbf{E}, \quad p = \hbar\mathbf{k}, \quad (1)$$

где p и e — импульс и заряд электрона, \mathbf{k} — волновое число, \hbar — постоянная Планка, так что электрон непрерывно увеличивает волновое число \mathbf{k} , двигаясь в пределах одной зоны и совершая так называемые блоховские колебания (см. рис. 4а) [5]. Такое движение вполне аналогично движению волнового пакета по координате в неоднородной плазме (см. рис. 1). Движение электрона в пространстве при блоховских колебаниях в пределах одной зоны оказывается ограниченным, поскольку скорость электрона $v = de/dp$ зависит от волнового вектора периодически (в обратном пространстве) в заданной зоне (ветви). Это можно проиллюстрировать, рассмотрев пространственную картину зон и движение электронов в электрическом поле (рис. 4б). Вскоре после работы Блоха Зинер отметил (см., например, [5]), что если выйти за рамки квазиклассического приближения (которое соответствует приближению геометрической оптики), электроны уже не будут оставаться в пределах выделенной зоны, т. к. возникает конечная вероятность перехода (туннелирования, трансформации) из одной зоны в другую. Такой

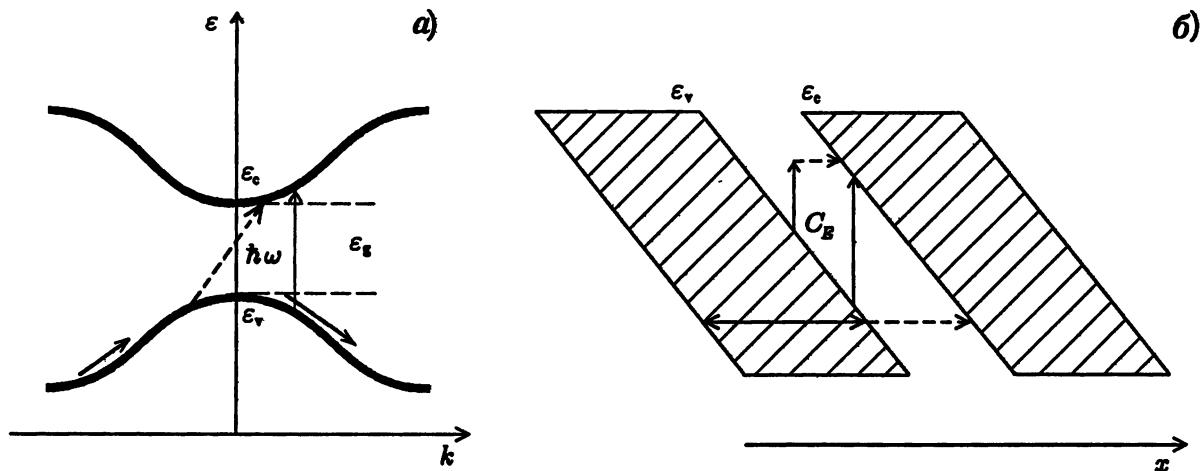


Рис. 4. Движение электрона в кристалле под действием электрического поля и оптические переходы: картина в зоне Бриллюэна (а) и пространственная картина (б); показаны переходы в верхнюю зону в электрическом поле (пробой Зинера) и прямые оптические переходы

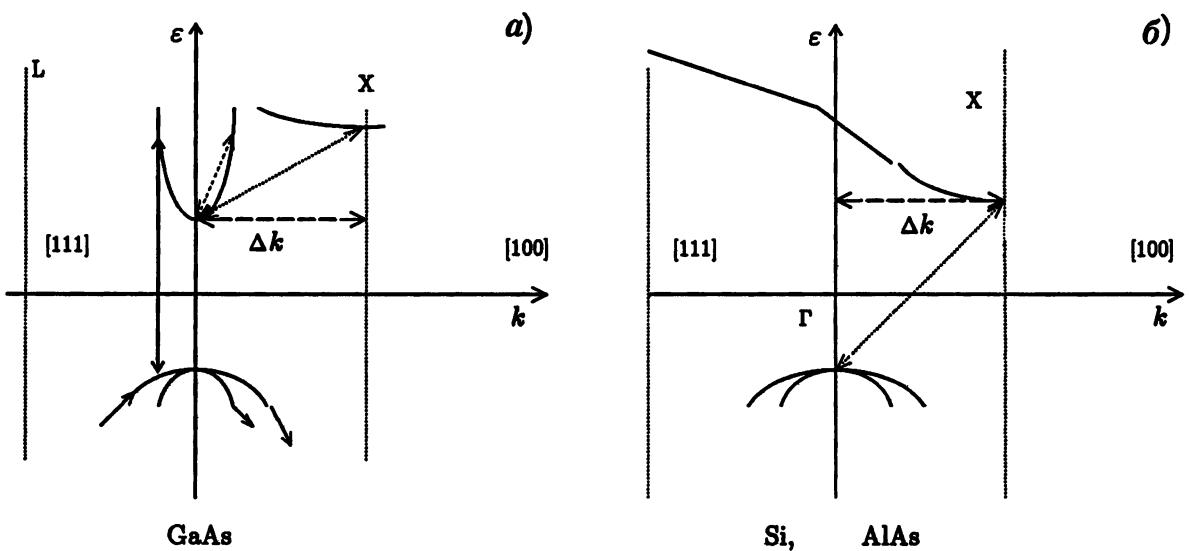


Рис. 5. Схема зонной структуры полупроводников GaAs (а) и Si, AlAs (б) для разных направлений в зоне Бриллюэна; для дырок в GaAs показано движение и переходы в электрическом поле; показаны также прямые (сплошные стрелки) и непрямые (пунктирные) оптические переходы

процесс, так называемый (межзонный) пробой Зинера, идёт (как и трансформация волн при утраивании, обсуждавшаяся выше) в области максимального сближения зон (мод). В результате этого пробоя электрон, стартовавший в электрическом поле, скажем, в нижней зоне, имеет после прохождения области сближения зон конечную вероятность находиться и в верхней зоне (см. рис. 4а).³

Для энергетических зон в кристалле представляют интерес не только обсуждавшиеся непосредственные переходы между зонами, но и переходы под влиянием внешних воздействий, прежде всего переходы, вызванные падающей на кристалл электромагнитной волной. Эти переходы происходят при

³ Интересно отметить, что аналогичное явление в квантовой электродинамике (рождение электрон-позитронных пар в электрическом поле) было рассмотрено ещё до работы Зинера (см., например, [6]).

сохранении суммарной энергии электрона и фотона и при сохранении импульса электрона (рис. 4), поскольку в этом случае импульсом фотона можно пренебречь. Эти переходы возникают при энергии кванта $\hbar\omega$, большей ширины запрещённой зоны ϵ_g . Электрическое поле, приводящее к взаимодействию зон и существованию пробоя Зинера, оказывает влияние и на эти переходы, приводя к возможности туннелирования и при $\hbar\omega < \epsilon_g$ (в принципе, при сколь угодно малой энергии кванта), как это ясно из рис. 4б (процесс С_E). Действительно, стартующий с нижней зоны электрон, поглощая квант света с любой энергией, меньшей ϵ_g , достигает верхней зоны, добирая необходимую энергию в постоянном электрическом поле, смещаясь по координате. Это и есть эффект Франца—Келдыша (см., например, [7]). Конечно, как сама вероятность межзонного туннелирования, так и вероятность оптического перехода под влиянием кванта с энергией, меньшей ширины запрещённой зоны ($\hbar\omega \ll \epsilon_g$), зависят от электрического поля и в слабом поле экспоненциально малы.

Специфические эффекты взаимодействия мод де-Бройля в электрическом поле возникают в случае вырожденной (валентной) зоны, состоящей из подзон лёгких и тяжёлых дырок (рис. 5а) [8]. В вырожденной зоне дырка, стартуя, скажем, в подзоне тяжёлых дырок, имеет конечную вероятность после прохождения области взаимодействия ($k = 0$) оказаться в подзоне лёгких дырок (рис. 5а).

Если сжать полупроводник вдоль одной из осей кристалла, то вырождение валентных подзон при $p = 0$ снимается, но возникает их пересечение при $p_z \neq 0, p_x = 0, p_y = 0$ (см. рис. 6; ось z направлена вдоль направления сжатия). При $p_x \neq 0$ или $p_y \neq 0$ происходит расщепление пересечения, которое вполне аналогично расщеплению волн в плазме, обсуждавшемуся выше (см. рис. 1). При наложении электрического поля вдоль направления сжатия (вдоль z) дырки двигаются вдоль расщеплённых кривых в слабом поле и туннелируют через область расщепления (в сильном поле) [9] подобно тому, как это имеет место при межзонном туннелировании. Аналогичная картина дисперсионных кривых возникает и для электронов в связанных квантовых ямах, где квантовая яма с более высоким расположенным уровнем обладает и большей массой (вставка на рис. 6), так что при некотором значении латерального импульса электронов p_z (вдоль ям) происходит пересечение дисперсионных кривых [10, 11].

Все эти исследования дырок и электронов в связанных квантовых ямах относились к трансформации мод в окрестности одной точки зоны Бриллюэна (точки $p = 0$).

В настоящей работе мы рассматриваем взаимодействие волн де-Бройля, принадлежащих к разным точкам зоны Бриллюэна кристалла, для гетероструктуры с квантовыми ямами при наличии постоянного латерального электрического поля. Хотя во многом здесь явления аналогичны обсуждавшимся выше, имеется всё-таки определённая специфика. В частности, здесь задействованы оба из указанных выше механизмов взаимодействия волн де-Бройля: влияние гетерограницы и электрического поля. Кроме того, мы рассматриваем не только вза-

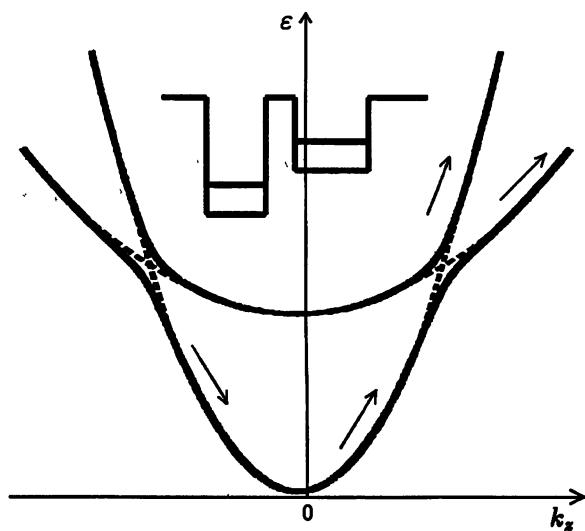


Рис. 6. Зависимость энергии дырок в деформированном германии от волнового числа вдоль направления сжатия при равном нулю (пунктир) и при малом поперечном волновом числе (сплошные кривые); показано также движение дырки в электрическом поле до и после туннелирования через область пересечения. На вставке показана структура со связанными квантовыми ямами, в которой зависимость энергии от волнового числа подобна показанной на рисунке

имную трансформацию мод, но и оптические переходы при такой трансформации.

Прежде чем переходить к обсуждению, рассмотрим мотивацию, истоки этой задачи.

1. ПРЯМЫЕ И НЕПРЯМЫЕ ОПТИЧЕСКИЕ ПЕРЕХОДЫ В ПОЛУПРОВОДНИКАХ И РОЛЬ ГЕТЕРОГРАНИЦ В ГЕТЕРОСТРУКТУРАХ

Как было отмечено выше, межзонные процессы поглощения (излучения) электромагнитных волн в кристаллах идут при сохранении суммарной энергии электрона и фотона и при сохранении импульса электрона ввиду того, что импульс фотона $\hbar q$, где q — его волновое число, мал в масштабе импульсов электрона в зоне. Таким образом, эти переходы оказываются прямыми, вертикальными — их так и называют. Оказывается, что прямые переходы возможны лишь между минимумами зон, расположенными в одной точке зоны Бриллюэна (скажем, в центре зоны Бриллюэна, при $p = 0$, в Г-точке; см. рис. 5). Межзонные переходы между минимумами, расположенными в разных точках зоны Бриллюэна, также как и внутризонные переходы — внутридолинные и междолинные (см. рис. 5) — являются непрямыми и возникают лишь при наличии «третьего тела», которое уносит (отдаёт) импульс $\Delta p = \hbar \Delta k$, поэтому их вероятность существенно ниже, чем вероятность прямых переходов. Роль третьего тела в полупроводнике могут играть примеси, дефекты или фононы. В гетероструктурах третьим телом может служить гетерограница между полупроводниками с разной шириной запрещённой зоны, взаимодействие (столкновение) с которой приводит к обмену импульсом и возникновению перехода. Например, для внутризонных переходов в окрестности $k = 0$ (в Г-точке, см. рис. 5) при наличии двух гетерограниц, создающих квантовую яму, благодаря взаимодействию с гетерограницей возникают дискретные уровни (подзоны) и становятся разрешёнными внутризонные переходы между этими уровнями в яме (рис. 3б). Такие переходы интенсивно изучались в последнее время; созданы лазеры на таких переходах (каскадные [12] и фонтанные [13]).

Особый интерес представляет возникновение в квантовых ямах переходов между минимумами (долинами), расположенными в разных точках зоны Бриллюэна. Прежде всего, если бы удалось создать эффективный оптический переход в квантовых ямах на основе кремния между самой низкой боковой (X) электронной долиной (расположенной на границе зоны Бриллюэна в так называемой X-точке⁴) и дырками в центре зоны (рис. 5б), можно было бы создать межзонный лазер на кремнии, что позволило бы интегрировать оптоэлектронику в кремниевые интегральные схемы. Работы в этом направлении ведутся уже много лет, но без особого успеха.

С другой стороны, как было отмечено нами недавно [14] (см. также [15, 16]), если найти условия, при которых в квантовых ямах на основе GaAs и GaAlAs возникнет эффективный внутризонный электронный переход между состояниями в центре зоны (Г-долина) и боковой (X) долиной, то можно было бы использовать накопление электронов в боковой долине, возникающее в сильном электрическом поле подобно тому, как это имеет место при эффекте Ганна, для создания внутризонного лазера на разогреве электронов на таких переходах. По сравнению с эффектами взаимодействия долин при межзонных переходах в кремнии, упомянутыми выше, в случае внутризонных эффектов взаимодействия долин в гетеросистеме на основе GaAs ситуация оказывается более интересной и разнообразной, прежде всего потому, что здесь может существовать резонанс (совпадение энергий и волновых чисел) между состояниями Г- и X-долин, который приводит к более эффективной трансформации волновых функций этих долин и (в электрическом поле, направленном вдоль гетерограницы) к разнообразным эффектам взаимодействия состояний долин, а также к эффектам в оптических переходах. Рассмотрению этих явлений и посвящена настоящая статья. А именно, она посвящена обсуждению и вычислению

⁴ Фактически в кремнии минимальную энергию электронов имеет не X-долина, а так называемая Δ-долина, расположенная на расстоянии 0,85 (в единицах расстояния до границы зоны Бриллюэна) от X-точки.

вероятностей бесфононного Г-Х-перехода и оптического дипольного Г-Х-перехода в гетероструктуре GaAs/AlAs с квантовыми ямами в присутствии сильного латерального (направленного вдоль слоёв ям) электрического поля. Показано, что электрическое поле существенно влияет на вероятности как бесфононного, так и дипольного Г-Х-переходов. Кроме того, электрическое поле изменяет спектральную зависимость коэффициента межподзонного поглощения света, т. е. фактически имеется межподзонтный аналог эффекта Франца—Келдыша.

2. БЕСФОНОННЫЕ ПЕРЕХОДЫ В ГЕТЕРОСТРУКТУРЕ GaAs/AlAs В ЛАТЕРАЛЬНОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Рассмотрим периодическую гетероструктуру, состоящую из тонких чередующихся слоёв GaAs и AlAs, выращенную на плоскости (001). GaAs является прямозонным материалом с минимумами зоны проводимости в центре зоны Бриллюэна (Г-долина) и в боковых L- и X-долинах, расположенных выше по энергии на границе зоны Бриллюэна в направлениях [111] и [100] соответственно (рис. 5а). AlAs является непрямозонным материалом с минимумом зоны проводимости на границе зоны Бриллюэна в направлении X (рис. 5б). Выберем ось z вдоль направления роста. В такой гетероструктуре слои GaAs являются потенциальными ямами для электронов Г-долины и барьерами для электронов X-долины, а слои AlAs — потенциальными ямами для электронов X-долины и барьерами для электронов Г-долины (рис. 7а). Прозрачность барьера для электронов Г- и X-долин мала, так что электрон несколько раз рассеивается, прежде чем протуннелирует. Поэтому отсутствует когерентность волновых функций электронов, находящихся в разных слоях GaAs (AlAs). Это означает, что гетероструктуру можно рассматривать как совокупность независимых квантовых ям для электронов X- и Г-долин.

При столкновении электрона с гетерограницей, перпендикулярной направлению роста (ось z), изменяется лишь компонента квазимпульса, направленная по нормали к ней, т. е. z-компоненты импульса. Поэтому электроны Г-долины на гетерогранице могут непосредственно (т. е. без взаимодействия с фононами и дефектами) переходить лишь в электроны тех X-долин, которые смешены от центра зоны Бриллюэна в направлении оси z (будем обозначать эти долины X_z, см. рис. 7в). Это взаимодействие приводит к появлению бесфононных переходов электронов между соседними слоями GaAs и AlAs [17, 18]. В результате такого перехода электрон, находящийся в Г-долине GaAs, может оказаться в X_z-долине соседних слоёв AlAs, если совпадают их энергии. Конечно, возможен и обратный процесс. По существу, такие процессы есть линейная трансформация волн X_z-долины в волны Г-долины (или наоборот) при резком изменении свойств на гетерогранице.

Если вероятность перехода невелика (а именно такая ситуация реально имеет место, её и будем рассматривать), то из-за отсутствия фазовой когерентности волновых функций в различных слоях AlAs можно считать, что бесфононные переходы в два ближайших соседних слоя происходят независимо друг от друга. Поэтому для описания бесфононных переходов можно рассматривать Г-Х-взаимодействие на одной гетерогранице, т. е. переходы в один ближайший слой. Для описания этого взаимодействия мы будем использовать гамильтониан, предложенный в работе [17]:

$$\hat{H}_{\text{int}} = \begin{pmatrix} \hat{H}_G & \alpha\delta(z - z_0) \\ \alpha\delta(z - z_0) & \hat{H}_X \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где \hat{H}_G , \hat{H}_X — гамильтонианы, описывающие движение электрона в Г- и X_z-долинах, $\alpha \approx 0,155$ эВ × $\times \text{Å}$ — постоянная связи Г- и X-долин в гетероструктуре GaAs/AlAs [17], z_0 — координата z гетерограницы. Этот гамильтониан (точнее, постоянная α) получен на основе сопоставления экспериментальных данных по вероятности Г-Х-трансформации на гетерогранице из результатов измерения туннельного тока и в известном смысле является феноменологическим. Вообще говоря, связь между долинами зависит от конкретного вида границы и ямы (точнее, от чётного или нечётного числа атомов

в яме; см., например, [19]). По-видимому, полученная константа связи учитывает реальную структуру границы.

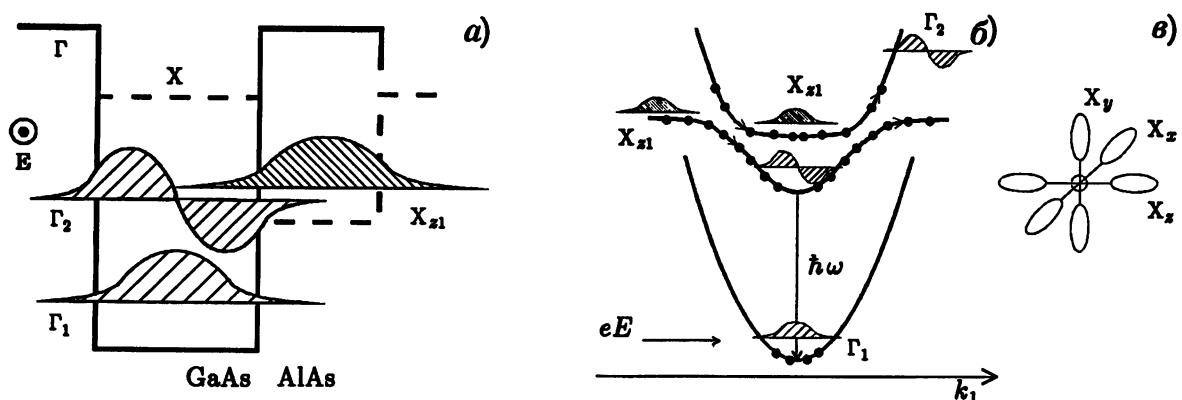


Рис. 7. Один период периодической структуры GaAs/AlAs и вид волновых функций нижних уровней в долинах (а), движение электронов в слабом латеральном электрическом поле через точку пересечения X_{z1}- и Г₂-уровней долин в k-пространстве (б) и разные типы электронных долин в зоне Бриллюэна в GaAs и AlAs (в)

Рассмотрим движение электрона вдоль квантовой ямы под действием латерального электрического поля. В этом случае и возникает вторая из указанных выше трансформаций волн долин. Под действием этого поля компонента квазимпульса электрона и его волнового вектора k в плоскости гетерограницы и вдоль поля линейно увеличивается со временем. Из-за трансляционной инвариантности гамильтониана Г-Х-взаимодействия в плоскости гетерограницы бесфононные переходы происходят с сохранением квазимпульса вдоль гетерограницы. Наиболее интенсивно они происходят в тех областях по k , где Г- и X_z-подзоны пересекаются или максимально сближаются (в отсутствие пересечений). Действительно, Г- и X_z-подзонам соответствуют два типа электронных волн. В точках пересечения Г-Х_z-зон выполняется условие синхронизма этих волн (совпадают частоты и волновые векторы), что необходимо для их эффективного взаимодействия. Если пересечение отсутствует, то условию синхронизма удовлетворить нельзя, но в месте наибольшего сближения подзон его нарушение минимально возможное.

Рассмотрим пару взаимодействующих Г- и X_z-подзон (рис. 7б). Волновую функцию электрона можно искать в виде суммы двух волновых функций: $\Psi = C_{\Gamma}\Psi_{\Gamma} + C_X\Psi_X$, где $\Psi_{\Gamma,X}$ — волновые функции в соответствующей подзоне. Решение стационарного уравнения Шредингера с использованием гамильтониана (2) в отсутствие электрического поля имеет вид

$$C_{\Gamma}^{\pm}(k) = \frac{V}{\sqrt{[\epsilon_{\pm}(k) - \epsilon_{\Gamma}(k)]^2 + V^2}}, \quad C_X^{\pm} = \frac{E_{\pm}(k) - \epsilon_{\Gamma}(k)}{\sqrt{[\epsilon_{\pm}(k) - \epsilon_{\Gamma}(k)]^2 + V^2}}, \quad (3)$$

где $\epsilon_{\Gamma}(k)$ и $\epsilon_X(k)$ — зависимости энергии от волнового числа k в Г- и Х-подзонах, $\epsilon_{\pm}(k)$ — зависимости энергии от квазиволнового вектора в новых подзонах, получившихся из Г- и Х-подзон в результате их взаимодействия:

$$\epsilon_{\pm}(k) = \frac{\epsilon_{\Gamma}(k) + \epsilon_X(k)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\epsilon_{\Gamma}(k) - \epsilon_X(k)}{2}\right)^2 + V^2}, \quad (4)$$

$V = \alpha\Psi_{\Gamma}(0)\Psi_X(0)$ — эффективная энергия взаимодействия Г- и Х-долин, $\Psi_{\Gamma,X}(0)$ — значения соответствующих волновых функций на гетерогранице.

Из (4) видно, что взаимодействие приводит к снятию вырождения электронного спектра в точке пересечения Г- и Х-подзон. В этом месте появляется щель шириной $2V$.

Прежде чем находить вероятность бесфононного Г-Х-перехода в электрическом поле произвольной величины, обсудим два предельных случая. В слабых электрических полях движение электрона носит адиабатический характер — такое движение происходит целиком внутри одной из подзон с энергиями $\epsilon_{\pm}(k)$. В этом случае вероятность бесфононного Г-Х-перехода при движении в электрическом поле точки взаимодействия уровней равна единице (рис. 7б). В сильных электрических полях Г-Х-взаимодействие слабо влияет на движение электрона, поскольку малое время прохождения в электрическом поле той области k -пространства, где Г-Х-взаимодействие эффективно. В этом случае электрон как бы «не замечает» Г-Х-взаимодействия и двигается в поле по невозмущённым взаимодействием подзонам, так что вероятность бесфононного Г-Х-перехода мала.

Найдём вероятность бесфононного Г-Х-перехода в электрическом поле при изменении волнового вектора электрона вдоль электрического поля от k_0 до k_1 . В электрическом поле к гамильтониану (2) надо добавить энергию взаимодействия с электрическим полем $H_E = e(\mathbf{E}, \mathbf{x})$, где \mathbf{x} — вектор вдоль слоёв структуры. В k -представлении стационарное уравнение Шредингера сводится к системе уравнений для $C_{\Gamma, X}$:

$$\begin{aligned} \epsilon_{\Gamma}(\mathbf{k})C_{\Gamma}(\mathbf{k}, t) - iF \frac{\partial}{\partial k_1} C_{\Gamma}(\mathbf{k}, t) + VC_X(\mathbf{k}, t) = 0, \\ VC_{\Gamma}(\mathbf{k}, t) + \epsilon_X(\mathbf{k})C_X(\mathbf{k}, t) - iF \frac{\partial}{\partial k_1} C_X(\mathbf{k}, t) = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

$F = eE$ — сила, действующая на электрон в электрическом поле $\mathbf{E} = \{E, 0\}$, $\mathbf{k} = \{k_1, k_2\}$. Решение (5) удобно искать в виде (ср. [8])

$$C_j(k_1, k_2, t) = a_j(k_1, k_2) \exp \left\{ -\frac{i}{F} \int_0^{k_1} \epsilon_j(k'_1, k_2) dk'_1 \right\}, \quad (6)$$

где k_2 — компонента волнового вектора, перпендикулярная электрическому полю. Квадрат модуля $a_j(k_1, k_2)$ равен вероятности нахождения электрона в j -й зоне при компоненте его волнового вектора вдоль $\mathbf{F} = e\mathbf{E}$, равной k_1 . Уравнения для a_j имеют вид

$$\begin{aligned} -i \frac{\partial}{\partial k_1} a_{\Gamma}(\mathbf{k}) + \frac{V}{F} \exp \left\{ \frac{i}{F} \int_0^{k_1} [\epsilon_{\Gamma}(k'_1, k_2) - \epsilon_X(k'_1, k_2)] dk'_1 \right\} a_X(\mathbf{k}) = 0, \\ \frac{V}{F} \exp \left\{ -\frac{i}{F} \int_0^{k_1} [\epsilon_{\Gamma}(k'_1, k_2) - \epsilon_X(k'_1, k_2)] dk'_1 \right\} a_{\Gamma}(\mathbf{k}) - i \frac{\partial}{\partial k_1} a_X(\mathbf{k}) = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Если в (6) ввести вместо k_1 новую переменную $\eta = k_1 L_{FK}$, где $L_{FK} = [\hbar^2/(2mF)]^{1/3}$, $m = m_{\Gamma} m_X / (m_{\Gamma} - m_X)$, m_{Γ} и m_X — массы электрона в Г- и X_z -долинах соответственно, то уравнения (7) принимают вид

$$\begin{aligned} -i \frac{\partial}{\partial \eta} a_{\Gamma}(\eta, k_2) + \frac{V}{V_{FK}} \exp \left\{ i \left(\frac{\eta^3}{3} - \eta \frac{\Delta_{X\Gamma}(k_2)}{V_{FK}} \right) \right\} a_X(\eta, k_2) = 0, \\ -i \frac{\partial}{\partial \eta} a_X(\eta, k_2) + \frac{V}{V_{FK}} \exp \left\{ -i \left(\frac{\eta^3}{3} - \eta \frac{\Delta_{X\Gamma}(k_2)}{V_{FK}} \right) \right\} a_{\Gamma}(\eta, k_2) = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\Delta_{X\Gamma}(k_2) = \epsilon_X(0, k_2) - \epsilon_{\Gamma}(0, k_2)$, $V_{FK} = [\hbar^2 F^2 / (2m)]^{1/3}$ — энергия Франца—Келдыша. В электрическом поле характерная длина, на которой происходят бесфононные переходы, равна L_{FK} , а изменение кинетической энергии на этой длине равно V_{FK} . Если $V_{FK} \ll V$, то поле можно считать слабым, и вероятность Х-Г-перехода близка к единице, как было отмечено выше. В сильном поле область, в

которой наиболее интенсивно происходят бесфононные переходы в k -пространстве, имеет размер по оси k_1 порядка L_{FK}^{-1} (т. е. порядка единицы по η). Этот размер увеличивается с ростом электрического поля пропорционально $F^{1/3}$. Из (8) видно, что с ростом электрического поля эффективное взаимодействие Γ - и X -подзон уменьшается, поэтому следует ожидать, что вероятность бесфононных переходов должна падать с ростом электрического поля. Кроме того, ясно, что зависимость вероятности бесфононного перехода от k_2 определяется зависимостью $\Delta_{X\Gamma}(k_2)$.

В сильных электрических полях вероятность бесфононных переходов $D = C_{\Gamma}^2(k_1)/C_X^2(k_0)$ при изменении продольной компоненты волнового вектора от k_0 до k_1 мала и может быть вычислена с помощью теории возмущений:

$$D(k_0, k_1, k_2) = \frac{V}{F^2} \left| \int_{k_0}^{k_1} d\tilde{k}_1 \exp \left\{ \frac{i}{F} \int_0^{\tilde{k}_1} dk''_1 [\varepsilon_{\Gamma}(k''_1, k_2) - \varepsilon_X(k''_1, k_2)] \right\} \right|^2. \quad (9)$$

Используя (9), находим вероятность бесфононного перехода при изменении продольного волнового числа от $-\infty$ до $+\infty$:

$$D_0(k_2) = D(-\infty, +\infty, k_2) = \left(\frac{2\pi V}{V_{\text{FK}}} \right)^2 \text{Ai} \left(-\frac{\Delta_{X\Gamma}(k_2)}{V_{\text{FK}}} \right), \quad (10)$$

где $\text{Ai}(x) = \pi^{-1} \int_0^{\infty} \cos(t^3/3 + xt) dt$ — функция Эйри [18]. Из (10) видно, что для тех k_2 , при которых $\Delta_{X\Gamma} > 0$ и, следовательно, имеются точки пересечения Γ - и X -подзон, D_0 — осциллирующая функция от $\Delta_{X\Gamma}$: это результат интерференции переходов от двух точек пересечения. Если точки пересечения отсутствуют ($\Delta_{X\Gamma} < 0$), то D_0 — монотонно убывающая функция от $|\Delta_{X\Gamma}|$.

Если точки пересечения Γ - и X -подзон достаточно сильно разнесены, так что происходит рассеяние частицы при движении между ними, необходимо отдельно рассматривать вероятность перехода при прохождении одной точки пересечения. В этом случае интеграл в (9) можно вычислить методом стационарной фазы⁵:

$$D(k_2) = \frac{2\pi V^2 m}{\hbar^2 F k_c(k_2)}, \quad (11)$$

где $k_c(k_2)$ — компонента k_1 волнового вектора, соответствующая пересечению подзон. Отметим, что выражение (10) справедливо при $D \ll 1$, т. е. неприменимо для малых k_c .

В качестве примера найдём вероятности бесфононных переходов между второй (Γ_2) и первой (X_{z1}) подзонами в гетероструктуре, состоящей из чередующихся слоёв GaAs (толщиной 85 Å) и AlAs (толщиной 17 Å) (в [14–16] рассматривалась возможность создания лазера на межподзонах переходах в близкой по параметрам структуре). На рис. 8 приведено расположение краёв подзон размерного квантования для этой структуры и зависимости энергий в Γ_1 - $, \Gamma_2$ - и X_{z1} -подзонах от волнового вектора.

⁵ В работе [14] в аналогичном выражении содержится ошибка.

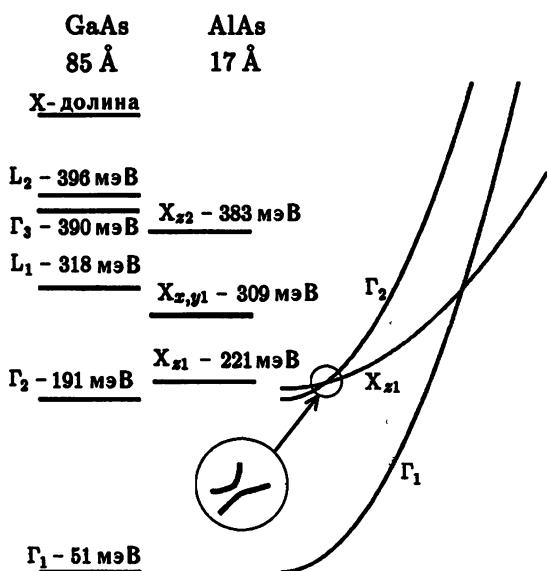


Рис. 8. Положение краёв подзон размерного квантования электронов в периодической гетероструктуре GaAs/AlAs. Буквы обозначают долины, цифры — номера подзон. Энергия отсчитывается от дна Γ -долины в GaAs. Буквами X_x , X_y обозначены две X -долины, смещённые относительно центра зоны Бриллюэна в направлениях [100] и [010] соответственно. В правой части рисунка показаны зависимости энергии электрона от волнового вектора для Γ_1 -, Γ_2 - и X_{z1} -подзон; показана также энергетическая схема структуры и область взаимодействия Γ_2 - и X_{z1} -подзон.

Эффективные массы электронов в подзонах X_{z1} и Γ_2 равны $m_z = 0,6m_0$ и $m_\Gamma = 0,067m_0$ соответственно, где m_0 — масса свободного электрона. Расчёт волновых функций в структуре даёт эффективную энергию V взаимодействия Γ_2 - и X_{z1} -подзон, равную 0,9 мэВ. Сравнивая эту величину с V_{FK} , находим электрическое поле $E = E_c \approx 1$ кВ/см, при котором $V_{FK} = V$. При $E \gg E_c$ взаимодействие подзон должно быть мало.

На рис. 9 приведены зависимости вероятности бесфононного перехода между Γ_2 - и X_{z1} -подзонами от компоненты волнового вектора вдоль электрического поля для рассматриваемой гетероструктуры. Компонента волнового вектора, перпендикулярная электрическому полю, полагалась равной нулю. Точки пересечения подзон соответствуют $k \approx \pm 2,9 \cdot 10^6$ см⁻¹. Начальная продольная компонента волнового вектора полагалась равной $-\infty$. На вставке приведены аналогичные зависимости при начальном значении волнового вектора, равном нулю. Видно, что в соответствии с приведёнными выше рассуждениями размер области, в которой эффективно происходят бесфононные переходы, увеличивается с ростом электрического поля.

На рис. 10 приведены зависимости вероятности бесфононного перехода от величины электрического поля при изменении продольного волнового числа от $k_0 = -\infty$, 0 до $k_1 = \infty$ (при $k_2 = 0$), полученные из решения (8) (кривые 1, 2) и из (10) и (11) (кривые 3, 4). Из рисунка видно, что (10), (11) хорошо описывают вероятность бесфононных переходов для полей $E > 2$ кВ/см. Таким образом,

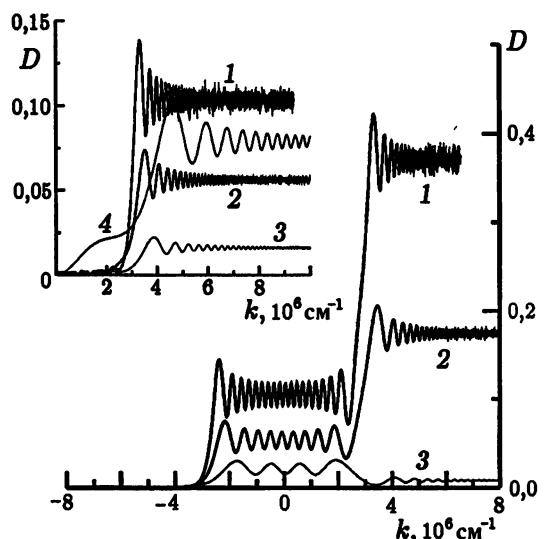


Рис. 9. Зависимости вероятности бесфононного перехода $D(-\infty, k, k_2 = 0)$ и $D(0, k, k_2 = 0)$ (на вставке) из Γ_2 в X_{z1} от волнового вектора вдоль электрического поля для гетероструктуры GaAs/AlAs, спектр которой приведён на рис. 8 ($\Delta_{xg} = 30$ мэВ). Цифрам 1, 2, 3, 4 соответствует поле $E = 1; 2; 5$ и 15 кВ/см. Вероятность перехода для $E = 15$ кВ/см увеличена в 10 раз

метод возмущений хорошо описывает вероятность Г-Х-перехода в полях, больших порога эффекта Ганна ($E \approx 3$ кВ/см), актуальных для рассматриваемых в [14–16] лазеров на горячих электронах. На вставке изображены зависимости вероятности бесфононного перехода от расстояния между подзонами $\Delta_{\text{ХГ}} = \Delta_{\text{ХГ}}(k_2 = 0) - \hbar^2 k_2^2 / (2m)$ для электрического поля $E = 2$ кВ/см. Видно резкое уменьшение вероятности в области $\Delta_{\text{ХГ}} < 0$, когда отсутствует пересечение подзон.

3. ДИПОЛЬНЫЕ Г-Х-ПЕРЕХОДЫ

Как отмечалось выше, чрезвычайно важным эффектом для оптических явлений в полупроводниковых гетероструктурах является возникновение прямого оптического бесфононного перехода между

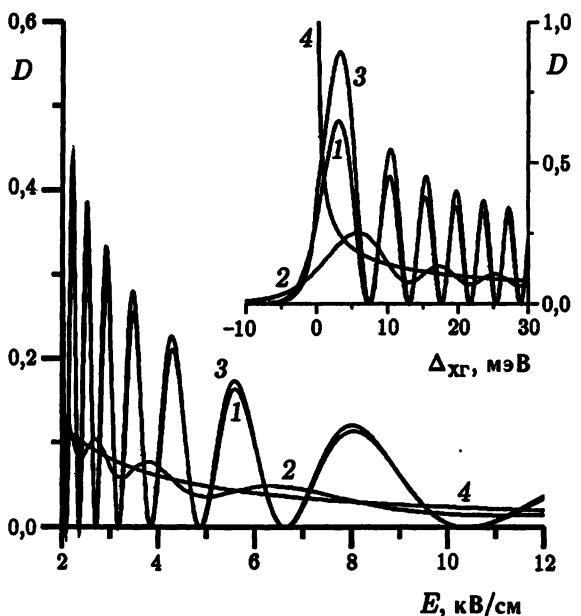


Рис. 10. Зависимость вероятности бесфононного перехода из Γ_2 в X_{z1} при изменении продольного волнового числа от $k_0 = -\infty$ до $k_1 = \infty$ (линия 1) и от $k_0 = 0$ до $k_1 = \infty$ (линия 2) от величины электрического поля. Компонента волнового вектора электрона, перпендикулярная полю, равна нулю. Линия 3 получена с помощью выражения (9), а линия 4 — с помощью (10). На вставке изображены зависимости вероятности бесфононных переходов от $\Delta_{\text{ХГ}}$ в поле $E = 2$ кВ/см

X_z - и Γ -долинами из-за трансформации волн де-Бройля этих долин на гетерогранице. Как и в случае рассмотренного выше прямого перехода (трансформации) волн де-Бройля этих долин, на вероятность этого перехода существенно влияет величина электрического поля. Найдём вероятность дипольного оптического перехода электрона из X_{z1} -подзоны в Γ_1 -подзону под воздействием слабого переменного электрического поля $E_1 \exp(iwt)$, направленного вдоль оси z , при наличии сильного постоянного электрического поля E , параллельного плоскости квантовых ям и направленного вдоль оси z . Такой переход, как отмечалось выше, не существует при отсутствии Г-Х-взаимодействия, т. к. z -компоненты переменного электрического поля вызывают переходы лишь между подзonenами Γ -долины. При наличии же такого взаимодействия (из-за присутствия гетерограницы) в X_z -подзонах возникает примесь Г-состояний, и Г-Х-переход оказывается возможным. Будем предполагать, что постоянное электрическое поле достаточно сильное, так что для расчёта трансформации волн X_z - и Γ -долин можно воспользоваться методом возмущений. Окончательный расчёт вероятности дипольного поглощения при Г-Х-переходах будет произведен для рассматриваемой выше гетероструктуры.

Для нахождения вероятности дипольного перехода рассмотрим нестационарное уравнение Шрёдингера при наличии переменного поля $E_1 \exp(iwt)$, которое приводит к появлению в гамильтониане системы слагаемого, ответственного за дипольные пе-

реходы между состояниями подзон Γ -долины. Будем учитывать только три подзоны: X_{z1} , Γ_1 и Γ_2 , причём взаимодействием подзон X_{z1} и Γ_1 пренебрежём. Трёхкомпонентная волновая функция системы может быть записана в виде

$$\Psi(k, t) = \{\Psi_{\Gamma 1}, \Psi_{\Gamma 2}, \Psi_X\},$$

где $\Psi_J(z)$ — компонента волновой функции в J -подзоне.

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ электрон был помещён в X_{z1} -подзону с компонентой k_0 волнового вектора вдоль постоянного электрического поля. Решение нестационарного уравнения Шредингера в постоянном \mathbf{E} и переменном $\mathbf{E}_1 \exp(i\omega t)$ электрических полях будем искать в виде

$$\Psi(k, t) = \{a_{\Gamma 1}(k_2, t)\Psi_{\Gamma 1}^0, a_{\Gamma 2}(k_2, t)\Psi_{\Gamma 2}^0, a_X(k_2, t)\Psi_X^0\}, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} \Psi_X^0(r, t) &= \Phi_X(z)\delta\left(k_1 - k_0 - \frac{Ft}{\hbar}\right) \exp\left(-\frac{i}{F} \int_0^{k_0+Ft/\hbar} \varepsilon_X(\hat{k}_1, k_2) d\hat{k}_1\right), \\ \Psi_{\Gamma 1,2}^0(r, t) &= \Phi_{\Gamma 1,2}(z)\delta\left(k_1 - k_0 - \frac{Ft}{\hbar}\right) \exp\left(-\frac{i}{F} \int_0^{k_0+Ft/\hbar} \varepsilon_{\Gamma 1,2}(\hat{k}_1, k_2) d\hat{k}_1\right) \end{aligned} \quad (13)$$

— волновые функции в подзонах в отсутствие переменного поля, $\Phi_J(z)$ — компонента волновой функции в J -подзоне, определяющая зависимость волновых функций в подзонах от z , $\delta(x)$ — дельта-функция. Взаимодействием X_{z1} - и Γ_1 -подзон будем пренебречь, поскольку оно существенно слабее взаимодействия X_{z1} - и Γ_2 -подзон. Тогда, исключая из уравнения Шредингера компоненты $\Phi_{\Gamma 1}(z)$ и $\Phi_{\Gamma 2}(z)$, получим следующее уравнение для $a_{\Gamma 1}(t)$:

$$i\hbar \frac{d}{dt} a_{\Gamma 1}(k_2, t) = -eE_1 \exp(i\omega t) z_{12} a_{\Gamma 2}(k_2, t) \exp\left\{\frac{i}{F} \int_0^{k_0+Ft/\hbar} [\varepsilon_{\Gamma 1}(\hat{k}_1, k_2) - \varepsilon_{\Gamma 2}(\hat{k}_1, k_2)] d\hat{k}_1\right\}, \quad (14)$$

где $z_{12} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{\Gamma 1}^*(z) z \Phi_{\Gamma 2}(z) dz$ — матричный элемент координаты z между Γ_1 - и Γ_2 -подзонами. Учитывая по теории возмущений взаимодействие X_{z1} - и Γ_2 -подзон с учётом того, что $a_X = 1$, $a_{\Gamma 1} = a_{\Gamma 2} = 0$ при $t = 0$, находим

$$a_{\Gamma 2}(k_2, t) = \frac{V}{iF} \int_{k_0}^{k_0+Ft/\hbar} \exp\left(\frac{ig(k, k_2)}{F}\right) dk, \quad g(k, k_2) = \int_0^k [\varepsilon_{\Gamma 2}(\tilde{k}_1, k_2) - \varepsilon_{X 1}(\tilde{k}_1, k_2)] d\tilde{k}_1. \quad (15)$$

Интегрируя (14) с использованием (15) и учитывая, что $\varepsilon_{\Gamma 2}(k_1, k_2) - \varepsilon_{\Gamma 2}(k_1, k_2) = \Delta = \text{const}$, находим

$$a_{\Gamma 1}(k_2, t) = \frac{eE_1 z_{12}}{\hbar} \frac{V}{F} \int_0^t dx \exp(i\varpi x) \int_{k_0}^{k_0+Ft/\hbar} \exp\left(\frac{ig(k, k_2)}{F}\right) dk, \quad \varpi = \omega - \Delta/\hbar. \quad (16)$$

Интегрируя (16) по частям, получаем следующее выражение для $a_{\Gamma 1}(k_2, t)$:

$$\begin{aligned} a_{\Gamma 1}(k_2, t) &= \frac{eE_1 V z_{12} \exp(-i\hbar\varpi k_0/F)}{iF\hbar\varpi} \left[\exp\left\{\frac{i}{F}\varpi(\hbar k_0 + Ft)\right\} \times \right. \\ &\quad \times \left. \int_{k_0}^{k_0+Ft/\hbar} \exp\left\{\frac{ig(k, k_2)}{F}\right\} dk - \int_{k_0}^{k_0+Ft/\hbar} \exp\left\{\frac{i}{F}[\hbar\varpi k + g(k, k_2)]\right\} dk \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

Используя (17), квадрат модуля $a_{\Gamma 1}(k_2, t)$ можно записать в виде трёх слагаемых:

$$|a_{\Gamma 1}(k_2, t)|^2 = A(k_2, t) + B(k_2, t) + C(k_2, t), \quad (18)$$

где

$$A(k_2, t) = \frac{|eE_1 z_{12} V|^2}{F^2 (\hbar\omega)^2} \left\{ [R_1(k_2, t) - R_2(k_2, t, \omega)]^2 + [I_1(k_2, t) - I_2(k_2, t, \omega)]^2 \right\}, \quad (19)$$

$$B(k_2, t) = \frac{4 |eE_1 z_{12} V|^2}{F^2 (\hbar\omega)^2} [R_1(k_2, t)R_2(k_2, t) + I_1(k_2, t)I_2(k_2, t)] \sin^2 \left[\frac{\hbar\omega (k_0 + Ft/\hbar)}{2F} \right], \quad (20)$$

$$C(k_2, t) = \frac{2 |eE_1 z_{12} V|^2}{F^2 (\hbar\omega)^2} [I_1(k_2, t)R_2(k_2, t) - I_2(k_2, t)R_1(k_2, t)] \sin \left[\frac{\hbar\omega (k_0 + Ft/\hbar)}{F} \right], \quad (21)$$

$$R_1(k_2, t) = \operatorname{Re} \left(\int_{k_0}^{k_0 + Ft/\hbar} \exp \left[\frac{i g(k, k_2)}{F} \right] dk \right), \quad I_1(k_2, t) = \operatorname{Im} \left(\int_{k_0}^{k_0 + Ft/\hbar} \exp \left[\frac{i g(k, k_2)}{F} \right] dk \right), \quad (22a)$$

$$R_2(k_2, t) = \operatorname{Re} \left(\int_{k_0}^{k_0 + Ft/\hbar} \exp \left[\frac{i}{F} [\hbar\omega k + g(k, k_2)] \right] dk \right), \quad (22b)$$

$$I_2(k_2, t) = \operatorname{Im} \left(\int_{k_0}^{k_0 + Ft/\hbar} \exp \left[\frac{i}{F} [\hbar\omega k + g(k, k_2)] \right] dk \right). \quad (22c)$$

При стремлении t к бесконечности слагаемое $B(k_2, t)$ пропорционально $t\delta(\hbar\omega - \Delta)$. Действительно, воспользовавшись равенством [20]

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin^2(\alpha t)}{\pi t \alpha^2} = \delta(\alpha), \quad (23)$$

$B(k_2, t)$ можно переписать в виде

$$B(k_2, t) \approx \frac{2\pi (eE_1 z_{12})^2 D(k_0, \infty, k_2)}{\hbar} t\delta(\hbar\omega - \Delta), \quad (24)$$

где $D(k_0, \infty, k_2)$ — вероятность бесфононного перехода при изменении продольного волнового числа от $k_1 = k_0$ до $k_1 = \infty$, которая определяется из (9). Очевидно, что это слагаемое описывает дипольные переходы электронов, оказавшихся в Γ_2 -подзоне в результате бесфононных переходов.

Нетрудно показать, что при стремлении t к бесконечности $C(k_2, t)$ также пропорционально $\delta(\hbar\omega - \Delta)$. Для этого воспользуемся равенством

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin(\alpha t)}{\pi t \alpha} = \delta(\alpha). \quad (25)$$

Тогда $C(k_2, t)$ можно представить в виде

$$C(k_2, t) = \frac{2\pi (eE_1 z_{12} V)^2}{F^2} G(k_2) \delta(\hbar\omega - \Delta), \quad (26)$$

$$G(k_2) = \int_{k_0}^{\infty} \int_{k_0}^{\infty} x \cos \left[\frac{g(x, k_2) + g(y, k_2)}{F} \right] dx dy. \quad (27)$$

Наиболее просто найти вероятность дипольного перехода, когда k_0 отрицательно и велико по модулю. В этом случае основной вклад в интегралы (22) дают области максимального сближения Γ_2 - и

X_{z1} -подзон, и поэтому в качестве нижнего предела интегрирования можно взять $-\infty$. Интеграл (27) при таком k_0 обращается в нуль, следовательно, $C(k_2, t) = 0$, и в вероятности перехода (18) остаётся только два слагаемых: A и B . Выражение для $A(k_2, \infty)$ можно записать в следующем виде:

$$A(k_2, \infty) = \left(\frac{2\pi e E_1 |z_{12}| V}{\hbar \omega V_{FK}} \right)^2 \left\{ \text{Ai} \left(\frac{\hbar^2 k_2^2}{2mV_{FK}} - \frac{\Delta x_1 \Gamma_2}{V_{FK}} \right) - \text{Ai} \left(\frac{\hbar^2 k_2^2}{2mV_{FK}} + \frac{\hbar \omega - \Delta x_1 \Gamma_2}{V_{FK}} \right) \right\}^2. \quad (28)$$

Отметим, что зависимость A от ω имеет максимум в V_{FK}/\hbar -окрестности частоты $\omega = \Delta/\hbar$. Появление этого нерезонансного слагаемого связано с особенностями динамики электрона при прохождении им областей, где существует эффективное Г-Х-взаимодействие. Именно эти области дают основной вклад в интегралы (22).

Важно подчеркнуть, что вероятность перехода B пропорциональна времени, поэтому соответствующий коэффициент поглощения может быть вычислен в рамках «золотого правила». Указанное слагаемое пропорционально вероятности оптического перехода $\Gamma_2 - \Gamma_1$ для электрона, претерпевшего прямой переход $X_{z1} - \Gamma_2$. В конкретной ситуации этот вклад входит в вероятность перехода $\Gamma_2 - \Gamma_1$, пропорциональную населённости уровня Γ_2 , обусловленной разнообразными процессами в системе. Входящее в (18) слагаемое A не зависит от времени: это есть вероятность оптического перехода при пересечении электроном области эффективного Г-Х-взаимодействия. Поглощаемая мощность, обусловленная такими переходами, пропорциональна произведению вероятности A перехода на поток электронов в импульсном пространстве, который пропорционален электрическому полю. В результате поглощение опять становится пропорциональным времени (ср. с расчётом поглощения в эффекте Франца—Кельдыша [7]), и мы получаем следующее выражение для поглощаемой мощности при $\hbar \omega \neq \Delta$ в системе из N квантовых ям в пренебрежении размытием уровней за счёт столкновений:

$$P(\omega) = \frac{L_1 L_2 F N \omega}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(k_2) A(k_2, \infty) dk_2, \quad (29)$$

где L_1, L_2 — размеры системы в плоскости вдоль осей x_1 и x_2 , $f(k_2)$ — разность вероятностей (чисел) заполнения состояний Γ_1 и X_{z1} . Пусть излучение распространяется вдоль оси x_2 , тогда мощность падающей на структуру волны можно записать в виде

$$I(\omega) = \frac{L_1 L_3 n c E_1^2}{2\pi}, \quad (30)$$

где L_3 — размер системы вдоль оси z , n — показатель преломления, c — скорость света. Используя (29) и (30) можно найти коэффициент поглощения:

$$\mu(\omega) = \frac{4P(\omega)}{I(\omega)L_2} = \frac{32\pi e^2 |z_{12}|^2 V^2 \omega m}{dnc (\hbar \omega - \Delta)^2 \hbar^2} \int_0^{\infty} \left\{ \text{Ai} \left(x^2 - \frac{\Delta x_1 \Gamma_2}{V_{FK}} \right) - \text{Ai} \left(x^2 - \frac{\Delta x_1 \Gamma_2 - \hbar \omega + \Delta}{V_{FK}} \right) \right\}^2 f(k_2) dx, \quad (31)$$

где $d = L_3/N$ — период структуры в направлении z . При получении (31) было учтено спиновое вырождение состояний электронов и возможность перехода из слоя AlAs в два соседних слоя GaAs.

На рис. 11 приведена зависимость $\mu(\omega)$ для периодической гетероструктуры AlAs/GaAs, содержащей слои GaAs толщиной 87 Å и AlAs толщиной 17 Å, при различной величине электрического поля. При вычислениях было положено $f(k_2) = 1$. Из рис. 11 видно, что с ростом электрического поля

происходит расширение спектра $\alpha(\omega)$ в окрестности частоты $\omega = \Delta/\hbar$ с одновременным уменьшением его амплитуды. Причина расширения спектра состоит в увеличении энергетического интервала Г-Х-взаимодействия (V_{FK}) с ростом электрического поля, уменьшение амплитуды связано с одновременным ослаблением этого взаимодействия. Поскольку нерезонансные переходы происходят главным образом в областях пространства квазимпульсов, где Г-Х-взаимодействие эффективно, то и $f(k_2)$ следует брать в этих областях.

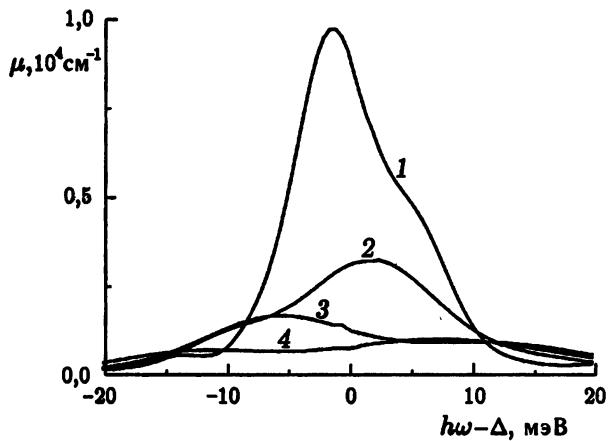


Рис. 11. Зависимость коэффициента поглощения от частоты в периодической гетероструктуре GaAs/AlAs, спектр которой представлен на рис. 8, при разных значениях электрического поля, вычисленная по формуле (31) с $f(k_2) = 1$. Кривые 1–4 соответствуют полю $E = 5; 9; 12$ и 15 кВ/см

эффекте Франца—Келдыша при межзонном поглощении света [7].

В отсутствие постоянного поля вероятность дипольного перехода из состояний Γ_1 в состояния с энергиями $\epsilon_{\pm}(k)$ вычисляется обычным образом. Приведём выражения для матричных элементов перехода:

$$|z_{\Gamma_1, \pm}(k)|^2 = \frac{|z_{12}|^2}{1 + [\epsilon_{\pm}(k) - \epsilon_{\Gamma_2}(k)]^2/V^2}. \quad (32)$$

Из (32) видно, что характерный масштаб убывания $|z_{\Gamma_1, \pm}|^2$ по мере отклонения энергии перехода от Δ (т. е. ϵ_{\pm} от $\epsilon_{\Gamma_2} - \epsilon_{\Gamma_1}$) равен V . Для рассмотренной структуры эта величина заметно меньше энергии размытия уровней, которая составляет $1 \div 10$ мэВ, и уширение линии перехода за счёт Г-Х-взаимодействия в отсутствие электрического поля слабо изменит форму линии. Напротив, энергия V_{FK} в достаточно сильных полях может быть сравнимой или даже превосходить энергию размытия уровней, поэтому форма линии поглощения зависит от величины электрического поля. Отметим, что зависимость поглощения от электрического поля имеет место, как отмечалось выше, в

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе мы параллельно обсудили линейное взаимодействие волн в плазме и волн де-Бройля в кристаллических твёрдых телах и в полупроводниковых гетероструктурах. Продемонстрировано, что в гетероструктурах электрическое поле может быть тем механизмом, который определяет взаимную трансформацию мод де-Бройля (межмодовое туннелирование). Причём технически учёт влияния электрического поля в этих задачах оказывается более простым, чем учёт неоднородности среды в задачах физики плазмы. Это связано прежде всего с тем, что учёт электрического поля приводит к связанным дифференциальным уравнениям первого порядка, тогда как в плазме мы имеем связанные уравнения второго порядка. С другой стороны, следует подчеркнуть, что с точки зрения тех проблем, из которых возникла рассматриваемая здесь задача взаимодействия Г- и Х-подзон в гетероструктурах GaAs/AlAs с квантовыми ямами, влияние электрического поля на междолинные переходы является существенным (и в ряде случаев основным) для процессов, определяющих состояние электронной системы в электрическом поле: как показывают расчёты [14–16], в подобных структурах вероятность прямого Г-Х-перехода в электрическом поле может быть сравнима и даже больше, чем вероятность, связанная с рассеянием на фононах. Наконец, в целом нам представляется, что проведённое

обсуждение и рассмотренный пример Г-Х-перехода в электрическом поле не только демонстрируют общность явления линейной трансформации волн вообще, но показывают специфику и изменение аспектов анализа при рассмотрении таких эффектов в современной физике твёрдого тела по сравнению с аналогичными задачами физики плазмы.

Авторы благодарят Е. В. Демидова за сотрудничество и В. В. Кочаровского за замечания, способствовавшие улучшению текста статьи.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99–02–17873), МНТП «Физика твёрдотельных наноструктур» (проект № 98–02–1098) и «Физика Микроволн» (проект № 3.17), Международного центра–фонда перспективных исследований в Нижнем Новгороде (проект № 99–2–11) и ИНТАС (грант № 99–0996).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. М.: Наука, 1967.
2. Железняков В. В., Кочаровский В. В., Кочаровский Вл. В. // УФН. 1983. Т. 141, № 2. С. 257.
3. Железняков В. В. Излучение в астрофизической плазме. М.: Янус-К, 1997.
4. Алфёров Ж. И. // ФТП. 1998. Т. 32, № 1. С. 3.
5. Займан Дж. Принципы теории твёрдого тела. М.: Мир, 1974.
6. Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1981.
7. Ансельм А. И. Введение в теорию полупроводников. М.: Наука, 1978.
8. Алёшкин В. Я., Романов Ю. А. // ЖЭТФ. 1984. Т. 87. С. 1857.
9. Старикив Е. В., Шикторов П. Н. // Плазма и неустойчивости в полупроводниках (7 Всесоюзный симпозиум, 28–30 сентября 1989, Паланга): Тезисы докладов. Вильнюс, 1989, Ч. II, С. 213.
10. Грибников З. С., Райчев О. Э. // ЖЭТФ. 1989. Т. 96. С. 996.
11. Gribnikov Z. S., Hess K., Kozinovsky G. A. // J. Appl. Phys. 1995. V. 77, No. 4. P. 1337.
12. Faist J., Capasso F., Sivco D. L., Hutchinson A. L., Cho A. Y. // Science. 1994. V. 264. P. 553.
13. Gauthier-Lafaye O., Julien F. H., Cabaret S., Lourtioz J.-M. // Appl. Phys. Lett. 1999. V. 74. P. 1537.
14. Алёшкин В. Я., Андронов А. А. // Письма в ЖЭТФ. 1998. Т. 68, № 1. С. 73.
15. Алёшкин В. Я., Андронов А. А., Демидов Е. В. // Изв. АН. Сер. физическая. 2000. Т. 63, № 2. С. 243.
16. Aleshkin V. Ya., Andronov A. A., Demidov E. V. // Material Science Forum. 1999. V. 297–298. P. 221.
17. Liu H. C. // Appl. Phys. Lett. 1987. V. 51. P. 1019.
18. Грибников З. С., Райчев О. Э. // ФТП. 1989. Т. 23. С. 2171.
19. Fu Y., Willander M., Ivchenko E. I., Kiselev A. A. // Phys. Rev. B. 1993. V. 42, No. 20. P. 13 498.
20. Ландау Л. Д., Либниц Е. М. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Наука, 1989.
21. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовича и И. Стиган. М.: Наука, 1979.

Институт физики микроструктур РАН,
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию
9 февраля 2001 г.

**LINEAR INTERACTION (TRANSFORMATION) OF DE-BROGLIE WAVES OF THE Γ - AND X-VALLEYS AND
INTRABAND OPTICAL TRANSITIONS IN GaAs/AlAs QUANTUM WELL HETEROSTRUCTURES IN A LATERAL
ELECTRIC FIELD**

V. Ya. Aleshkin and A. A. Andronov

We discuss linear interaction of the de-Broglie waves of different electron valleys in heterostructures in which an electric field is applied along the heterointerfaces. The probabilities of phononless and dipole optical transitions between states of the Γ - and X-subbands in GaAs/AlAs quantum-well heterostructures with a high electric field are calculated. It is shown that the electric field has a strong effect on the probabilities of the phononless and direct optical dipole Γ -X-electron transitions. Moreover, a lateral electric field changes the spectrum of the intersubband Γ -X light absorption, i.e., there is the intersubband analogue of the Franz-Keldysh effect. The considered linear transformation of de-Broglie waves is compared to the well-known cases of the linear wave interaction in a magnetized plasma, the Zener breakdown, and the Franz-Keldysh effect in bulk solids.