# министерство образования российской федерации

## Известия высших учебных заведений

# РАДИОФИЗИКА

# ежемесячный научно-технический журнал

Издаётся с апреля 1958 г.

Tom XLIII №9

Нижний Новгород

2000

# Содержание

Алимов В. А., Токарев Ю. В., Бужере ЖЛ., Кайзер М., Бойко Г. $\hat{\mathbf{H}}$ ., Выборнов Ф. И., Караштин А. Н., Комраков Г. П., Рахлин А. В. Наземные и космические исследования среднеширотного $F$ -spread	755
Дмитренко А. Г., Колчин В. А. Рассеяние электромагнитных волн на структурах из конечного числа трёхмерных идеально проводящих тел	766
Свищёв Ю.В. Поле вертикального магнитного диполя при наличии сферы с круговым отверстием	773
Касьянов Д. А. Цилиндрическая зонная линза	782
<b>Клочков Б. Н., Кузнецова Е. А.</b> Активные волновые процессы в схлопывающихся сосудах и эффекты транспорта	792
Двоешёрстов М. Ю., Чередник В. И., Чириманов А. П. Расчёт поверхностных акустических волн в кристаллах с применением процедуры глобальной оптимизации	801
<b>Дубков А. А., Малахов А. Н.</b> О стационарном неравновесном распределении плотности числа частиц, формируемом источниками и стоками	814
Репин О. Н., Саичев А. И. Дробный закон Пуассона	823
<b>Музычук О. В.</b> Аналитико-численное построение нестационарных вероятностных распределений для одного класса нелинейных стохастических систем	827
<b>Брауде С. Я., Мень А. В.</b> Письмо в редакцию «К статье В. А. Алимова и А. В. Рахлина «О некоторых особенностях декаметровой радиоастрономии»	835
Алимов В. А., Рахлин А. В. Ответ авторов на письмо С. Я. Брауде и А. В. Меня	837
К юбилею А. Г. Любиной	839

УДК 533.951, 537.868

# НАЗЕМНЫЕ И КОСМИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ СРЕДНЕШИРОТНОГО $F ext{-}\mathsf{SPREAD}$

В. А. Алимов  $^1$ , Ю. В. Токарев  $^1$ , Ж.-Л. Бужере  $^2$ , М. Кайзер  $^3$ , Г. Н. Бойко  $^1$ , Ф. И. Выборнов  $^1$ , А. Н. Караштин  $^1$ , Г. П. Комраков  $^1$ , А. В. Рахлин  $^1$ 

Приведены результаты первого космического эксперимента СУРА—WIND по изучению особенностей распространения коротких радиоволн при радиопросвечивании околоземной плазмы в условиях развитого среднеширотного F-spread. Обнаружен эффект экранировки сигнала на частоте  $4\,525\,$  кГіц, которая была на  $0,8\,$  МГц больше минимальной наблюдаемой частоты, определённой по ионограммам наземной станции вертикального зондирования для радиотрассы СУРА—WIND. Этот эффект объясняется влиянием на распространение коротких радиоволн крупномасштабных неоднородностей электронной концентрации ионосферы с характерными размерами в десятки километров, которые обусловливают появление в ионосфере областей с пониженным электронным содержанием, вытянутых вдоль магнитного поля Земли, перемежающихся областями с обычным плоскослоистым распределением электронной концентрации. Рассмотрен вопрос об особенностях частотных спектров флуктуаций интенсивности КВ излучения на космической радиотрассе СУРА—WIND в условиях развитого среднеширотного F-spread.

Явление F-spread, когда при импульсном зондировании ионосферы отражённый от F-области сигнал имеет значительно большую продолжительность, чем зондирующий импульс, известно более 50-ти лет. Изучению физики этого явления в ионосфере Земли посвящено много работ (см., например, [1] и цитированную там литературу). Особо следует отметить цикл экспериментальных работ по вертикальному зондированию (ВЗ) ионосферы КВ сигналами наземных радаров, выполненных в 60-80-х годах в Австралии под руководством Боумана [2]. До сих пор вопрос о природе этого уникального явления окончательно не решён, в основном из-за сложного характера распространения коротких радиоволн в ионосферной плазме.

В последние годы здесь был достигнут определённый прогресс. Так, например, в середине 90-х годов был выполнен цикл исследований флуктуационных явлений при распространении декаметровых—дециметровых радиоволн в среднеширотной ионосфере во время F-spread [3]. В ходе этих исследований было обнаружено аномальное явление увеличения многолучёвости КВ сигналов во время F-spread при использовании остронаправленной приёмной антенны. Этот эффект не может быть объяснён в рамках простой модели поверхностного рассеяния (отражения) коротких радиоволн квазипериодической волной возмущения электронной концентрации в верхней ионосфере, предложенной в [2]. Вместе с тем именно этот эффект фактически является первым прямым доказательством определяющей роли крупномасштабных неоднородностей ионосферы с размерами в десятки километров в формировании явления среднеширотного F-spread. И именно результаты экспериментальных исследований [3] стимулировали целенаправленные исследования влияния крупномасштабных неоднородностей ионосферы на распространение коротких радиоволн в условиях развитого среднеширотного F-spread.

Ниже мы приводим некоторые результаты исследований среднеширотного F-spread с помощью коротковолнового радиозондирования околоземной плазмы с использованием наземных и космических приёмопередающих средств.

### 1. О НАЗЕМНЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ F-SPREAD

Осенью 1999 г. на полигоне НИРФИ в г. Васильсурске Нижегородской области с использованием приёмного КВ комплекса стенда СУРА (Васильсурского декаметрового радиотелескопа ВДР-300 [4]) и панорамной наземной станции «Базис» КВ вертикального зондирования ионосферы проводились совместные комплексные натурные эксперименты по ВЗ ионосферы КВ сигналами с поверхности Земли и при радиопросвечивании ионосферной плазмы КВ сигналами внеземного дискретного радиоисточника в условиях F-spread.

В ходе эксперимента осуществлялся многочастотный (в диапазоне 4,5÷9 МГц) приём КВ радиоизлучения дискретного радиоисточника Кассиопея-А, который достигал максимума в ночное время суток. Для наблюдения излучения дискретного источника была использована схема широкополосного приёма с полосой частот, значительно превышающей характерную полосу частот станционных помех в КВ волноводе Земля—ионосфера, с последующим двойным медианным усреднением принимаемого сигнала по частоте и времени.

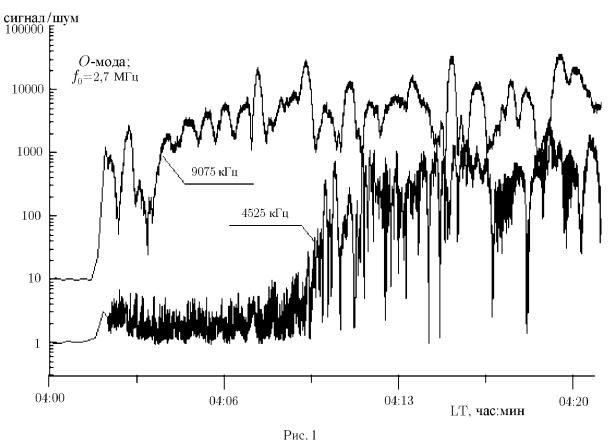
Однако необходимо отметить, что указанный способ выделения слабого узкополосного сигнала от удалённого дискретного источника на фоне сильных помех в KB диапазоне оказался достаточно эффективным лишь в области частот, заметно (в  $1,5\div 2$  раза) превышающих критическую частоту  $f_0$  слоя  $F_2$  ионосферы. В то же время при наблюдениях на частотах вблизи критической частоты ( $f\simeq 4,5\div 5,5$  МГц) помехи KB станций были настолько интенсивны и многочисленны, что помехи в полосе наблюдений  $\Delta f=10$  кГц являлись фактически равномерным белым шумом, и указанный выше метод выделения слабого сигнала на фоне сосредоточенных по частоте помех оказался неэффективным. По крайней мере, во время наших ночных наблюдений за сигналом Кассиопеи-A на частотах  $f\simeq 4,5\div 5,5$  МГц излучение дискретного источника не было обнаружено ни в одном из сеансов.

Таким образом, исследования среднеширотного F-spread с использованием синхронного B3 ионосферы KB сигналами с поверхности Земли с одновременным наземным приёмом KB сигналов внеземных дискретных радиоисточников на частотах вблизи критической частоты ионосферы оказались практически невозможными из-за высокого уровня помех KB станций в волноводе Земля—ионосфера. Поэтому была предложена модернизированная схема космического эксперимента по изучению явления F-spread.

### 2. СХЕМА КОСМИЧЕСКОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

В основе космического эксперимента лежат исследования распространения коротких радиоволн при радиопросвечивании ионосферы в условиях среднеширотного F-spread сигналами наземных KB передатчиков с приёмом их излучения на борту космического аппарата (KA), находящегося за пределами ионосферы. До последнего времени подобные прямые экспериментальные исследования в диапазоне коротких радиоволн были невозможны. И лишь после запуска в США на высокоэллиптическую орбиту KA HACA WIND такие исследования стали реальными [5]. Приём KB излучений на борту внечоносферного KA даёт энергетический выигрыш в отношении сигнал—помеха в десятки дБ, поскольку помехи от многочисленных KB станций существенно ослабляются при распространении (отражении) в земной ионосфере.

Наш эксперимент проводился в ночное время суток в ноябре 1999 г. Всего было проведено 8 сеансов облучения КА WIND КВ сигналами стенда СУРА. В качестве источников коротких радиоволн использовались два модуля стенда СУРА, которые работали одновременно в непрерывном режиме, как правило, на частотах  $f_1=4525$  кГц и  $f_2=9075$  кГц. Излучение велось во время прохождения КА WIND через диаграмму направленности стенда СУРА с угловыми размерами луча по уровню 3 дБ  $\vartheta_{0,5}\simeq 6^\circ$  на частоте 9075 кГц и  $\vartheta_{0,5}\simeq 12^\circ$  на частоте 4525 кГц. Длительность отдельного сеанса



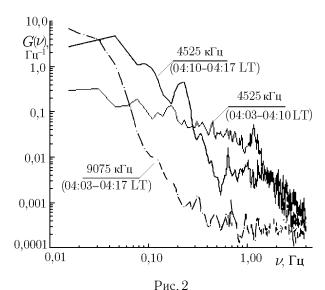
составляла от одного до полутора часов. Наклон диаграммы направленности антенн стенда СУРА в направлении на KA WIND, как правило, составлял приблизительно  $30\div40^\circ$  от зенита. Контроль за состоянием ионосферы в районе Васильсурска во время эксперимента осуществлялся в дежурном режиме с помощью ионозонда «Базис».

Удалённость KA WIND от Земли во время эксперимента составляла около  $30 \div 60~R_3$ , где  $R_3$  — радиус Земли. Во время сеансов облучения KA WIND сигналами стенда СУРА приёмное устройство KA WIND работало в двухмодовом режиме с быстрым (с постоянной 30~мc) опросом информации, поступающей от наземных передатчиков стенда СУРА, на частотах  $4\,525~\text{и}~9\,075~\text{к}$  Гц. Результаты измерений по каналам служебной связи с борта KA WIND передавались в центр управления.

## 3. РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ

Практически во всех сеансах во время эксперимента наблюдалось явление F-spread. Однако, как правило, частотное уширение на ионограммах наземной станции «Базис» не превышало нескольких сотен килогерц, и лишь в сеансе 19.11.99 наблюдался развитый F-spread с частотным уширением  $\Delta f \simeq 1$ МГц ионограммы наземной станции ВЗ вблизи критической частоты  $f_0$  слоя  $F_2$ .

На рис. 1 представлен пример амплитудных записей КВ сигналов стенда СУРА на борту КА WIND в сеансе 19.11.99. В это время КА находился на расстоянии  $R\simeq 58,4R_3$ , а наклон диаграммы направленности антенны стенда СУРА от зенита составлял  $\theta_{\rm W}\simeq 44^\circ$ . Критическая частота слоя  $F_2$  ионосферы по данным станции «Базис» составляла  $f_0\simeq 2,7$  МГц. Следует обратить внимание на то обстоятельство, что в начале сеанса интенсивность сигнала на частоте  $4\,525$  кГц хотя и превышала фоновый уровень в несколько раз, но была на два порядка меньше уровня сигнала в середине сеанса. Отметим, что восстановление уровня сигнала на частоте  $f_1=4\,525$  кГц происходит довольно резко.



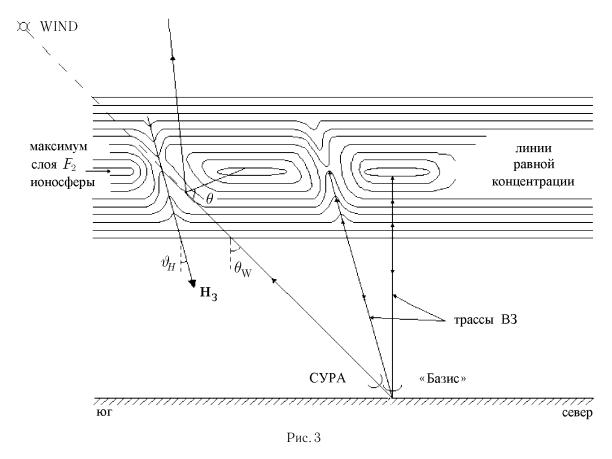
На рис. 2 приведены нормированные спектры  $G(\nu)$  флуктуаций интенсивности принимаемых на борту КА КВ сигналов на частотах  $4\,525$  и  $9\,075$  кГц в сеансе 19.11.99. Здесь следует отметить, что частотный спектр флуктуаций сигнала на частоте  $f_1=4\,525$  кГц в начале сеанса, когда прохождение сигнала было затруднено, по форме резко отличается от спектров флуктуаций сигналов на частотах  $4\,525$  и  $9\,075$  кГц в середине сеанса, когда они являют собой обычные спектры флуктуаций интенсивности коротких радиоволн при радиопросвечивании околоземной плазмы наземным КВ передатчиком с приёмом излучения на борту КА WIND [5, 6].

#### 4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ КОСМИЧЕСКОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Основным результатом выполненных исследований следует признать на первый взгляд парадоксальный эффект при распространении коротких радиоволн во время среднеширотного F-spread — экранировку сигнала на частоте  $4\,525$  кГц, которая была на 0.8 МГц больше минимальной наблюдаемой частоты (МНЧ), определяемой по ионограммам станции B3 «Базис» для радиотрассы CVPA— WIND с наклоном максимума диаграммы направленности излучения  $\theta_W \simeq 44^\circ$  (МНЧ  $\simeq f_0/\cos\theta_W \simeq 3.75$  МГц).

Эффект экранировки КВ сигнала на частоте выше стандартной МНЧ для данной радиотрассы может быть связан со специфическим неоднородным распределением электронной концентрации ионосферной плазмы в условиях среднеширотного F-spread, когда из-за влияния крупномасштабных неоднородностей электронной концентрации с характерными размерами в десятки километров возможно появление в ионосфере областей с пониженным электронным содержанием, вытянутых вдоль магнитного поля Земли  $\mathbf{H}_3$ . Эти неоднородные области, вообще говоря, должны перемежаться областями с обычным плоскослоистым распределением электронной концентрации. Тогда при вертикальном зондировании ионосферы такие неоднородности будут играть роль волноводов, которые дают развитую многолучёвость отражённых от ионосферы КВ сигналов, характерную для явления среднеширотного F-spread [3] (см. также [7—9]). А при радиопросвечивании ионосферы КВ сигналами эти же крупномасштабные неоднородности могут заметно повышать МНЧ для данной радиотрассы, если трасса ориентирована вдоль направления вытянутости этих неоднородностей, поскольку угол падения  $\vartheta$  излучения на неоднородность уже может быть больше  $\theta_{\mathrm{W}}$  (см. рис. 3).

В сеансе 19.11.99 этот угол составлял  $\vartheta \simeq \pi/2 - (\theta_W - \vartheta_H) \simeq 65^\circ (\pi/2 - \vartheta_H - \text{магнитное}$  наклонение на высоте ионосферы ( $z_{\text{u}} \simeq 300~\text{кm}$ ) над районом Васильсурска,  $\vartheta_H \simeq 19^\circ$ ), так что уточнённое значение МНЧ для радиотрассы СУРА—WIND составило 2,7/  $\cos \vartheta$  МГц  $\simeq 6,1$  МГц, что выше частоты  $4\,525~\text{к}$  Гц, но заметно ниже другой рабочей частоты,  $9\,075~\text{к}$  Гц. Поэтому во время космического эксперимента в условиях развитого F-spread могла наблюдаться экранировка KB сигнала на частоте  $f_1 = 4\,525~\text{к}$  Гц при приёме его на борту KA WIND, но практически никак не должно было проявляться влияние среднеширотного F-spread на принимаемом сигнале на частоте  $9\,075~\text{k}$  Гц. Причём смена неоднородных областей с пониженной электронной концентрацией в ионосфере на области с обычным плоскослоистым распределением электронной концентрации должно, естественно, приводить к довольно резкому понижению МНЧ (в нашем случае приблизительно с 6,1~M Гц до 3,75~M Гц) и, соответственно, к довольно резкому переходу от почти полной экранировки сигнала на борту KA до его обычного уровня, что и наблюдалось в нашем случае на частоте  $f_1 = 4\,525~\text{k}$  Гц.



Необходимо заметить, что экранировка КВ сигнала была неполной, поскольку протяжённость d неоднородной аномалии в распределении электронной концентрации ионосферы в плоскости, перпендикулярной лучу зрения вдоль магнитного поля Земли  $(d_1)$  и перпендикулярно ему  $(d_2)$ , по-видимому, не превышала нескольких десятков километров. К такому выводу можно прийти, если оценить ослабление интенсивности сигнала при его дифракции на ограниченном экране и сравнить полученное значение с измеренным в эксперименте ослаблением уровня сигнала (порядка  $20 \, \text{дБ}$ ).

Такую оценку несложно сделать, следуя, например, расчётам дифракционного ослабления интенсивности плоской волны ограниченным непрозрачным экраном с равномерным на масштабах  $d_1$  и  $d_2$  распределением освещённости вдоль двух направлений, перпендикулярных падающей волне. При это ослабление интенсивности принимаемого излучения с длиной волны  $\lambda$  на оси экрана в точке, удалённой от него на расстояние  $z_{\rm u}$ , равно (ср. [10, 11])

$$F_I \simeq 1 - 4 \prod_{i=1}^{2} \left[ C^2 \left( \sqrt{\frac{k}{2z_u}} d_i \right) + S^2 \left( \sqrt{\frac{k}{2z_u}} d_i \right) \right],$$
 (1)

где  $C(x),\,S(x)$  — интегралы Френеля [11],  $k=2\pi/\lambda$  — волновое число.

В условиях нашего эксперимента ( $F_I\simeq 10^{-2}$ ,  $\lambda=6\cdot 10^{-2}$  км,  $z_{\rm u}\simeq 400$  км — расстояние от точки наблюдения до экранирующего неоднородного слоя) равенство (1) может быть удовлетворено, когда  $d_{1,2}$  составляют несколько десятков километров.

Перейдём теперь к интерпретации результатов спектральных измерений флуктуаций интенсивности принятых на борту КА КВ сигналов в сеансе 19.11.99.

В середине сеанса, когда экранировка KA WIND отсутствовала, спектры амплитудных флуктуаций принимаемого излучения на частотах 4 525 и 9 075 кГц представляли собой обычные спектры флуктуа-

ций интенсивности коротких радиоволн при радиопросвечивании ионосферной и межпланетной плазмы сигналами наземного KB передатчика (ср. рис. 2 и [5,6]). Напомним, что в это время KA находился на расстоянии  $R\simeq 58,4R_3$  за пределами ударной волны солнечного ветра. Поэтому в спектре принимаемых KB сигналов на борту KA WIND наблюдалась высокочастотная спектральная аномалия, обусловленная мелкомасштабной турбулентностью солнечного ветра вблизи околоземной ударной волны [6].

Выражение для спектра флуктуаций интенсивности принимаемых КВ сигналов в этом случае несложно получить, следуя [11, 12], в предположении последовательной дифракции излучения на двух фазовых экранах, один из которых описывает флуктуации проходящего излучения в ионосфере, а другой — в межпланетной околоземной плазме. При этом мы будем интересоваться высокочастотными спектральными особенностями принимаемого излучения, когда фазовые возмущения, вносимые мелкомасштабными неоднородностями солнечного ветра и ионосферной плазмы, достаточно малы.

Действительно, в условиях нашего эксперимента характерные величины среднего квадрата набега фазы коротких радиоволн в ионосфере  $(\overline{s_1^2})$  и в межпланетной околоземной плазме  $(\overline{s_2^2})$ [3] равны

$$\overline{s_{1,2}^2} \simeq \frac{k^2}{2} \left(\frac{f_{0\,1,2}}{f}\right)^4 \overline{\left(\frac{\Delta N}{N}\right)_{1,2}^2} l_{0\,1,2} L_{1,2} \tag{2}$$

и на частоте  $f\simeq 4,5$  МГц составляют соответственно  $\overline{s_1^2}\simeq 10^{-1}$  и  $\overline{s_2^2}\simeq 5\cdot 10^{-3}$ .

При оценке величин  $\overline{s_{1,2}^2}$  были учтены следующие характерные параметры ионосферной и космической околоземной плазмы в конкретных условиях нашего эксперимента [3, 11]: внешний масштаб мелкомасштабной плазменной турбулентности ионосферы  $l_{01} \simeq 1$  км, космической околоземной плазмы  $l_{02} \simeq 3 \cdot 10^3$  км; характерная толщина неоднородных слоёв для ионосферной плазмы  $L_1 \simeq 50$  км, для мелкомасштабной турбулентности солнечного ветра в околоземном пространстве  $L_2 \simeq l_{02} \simeq 3 \cdot 10^3$  км; отношение плазменной и рабочей частот для ионосферы  $f_{01}/f \simeq 1$ , для космической плазмы  $f_{02}/f \simeq 3 \cdot 10^{-3}$ ; относительные флуктуации электронной концентрации в плазменных неоднородностях ионосферы  $\sqrt{(\Delta N/N)_1^2} \simeq 10^{-3}$ , в межпланетной околоземной плазме  $\sqrt{(\Delta N/N)_2^2} \simeq 3 \cdot 10^{-2}$ .

В предположении слабых фазовых флуктуаций волны в неоднородном слое  $(\overline{s^2}\ll 1)$  несложно получить общее выражение для спектра флуктуаций интенсивности  $W_I(\Omega)$  принимаемого излучения в точке, удалённой от неоднородного слоя (фазового экрана) на расстояние  $z=z_1z_2/(z_1+z_2)$  ( $z_{1,2}$  — расстояния до фазового экрана соответственно от излучателя и приёмника,  $\Omega=2\pi\nu$  — круговая частота,  $\nu$  — спектральная частота). Соответствующие выкладки довольно просты, поэтому мы приведём лишь конечный результат. А именно, если двумерный пространственный спектр флуктуаций фазы волны имеет вид [11]

$$\Gamma_S(\kappa_x, \kappa_y) = \frac{\Gamma(\alpha) l_0}{\pi \Gamma(\alpha - 1) \left[ 1 + (\kappa_x^2 + \kappa_y^2) l_0^2 \right]^{\alpha}},\tag{3}$$

где  $\alpha=p/2$  — показатель трёхмерного пространственного спектра флуктуаций электронной концентрации плазменных неоднородностей,  $\alpha>1$  (для колмогоровского спектра p=11/3 [11, 13]),  $l_0$  — внешний масштаб плазменной турбулентности,  $\Gamma(\alpha)$  — гамма-функция, то для результирующего одномерного спектра флуктуаций интенсивности принимаемого излучения справедливо следующее приближённое соотношение:

$$W_I(\Omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \Gamma_I(\tau) \cos(\Omega \tau) d\tau \simeq \begin{cases} W_I(\Omega_0), & \Omega \le \Omega_0; \\ W_I(\Omega_0) \left[ \frac{1 + \Omega_0^2 \tau_0^2}{1 + \Omega^2 \tau_0^2} \right]^{\alpha - 1/2}, & \Omega > \Omega_0, \end{cases}$$
(4)

где

$$W_I(\Omega_0) = \overline{I}^2 \frac{\overline{s^2}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\alpha - 1/2)}{\Gamma(\alpha - 1)} \frac{2\tau_0}{\left[1 + \Omega_0^2 \tau_0^2\right]^{\alpha - 1/2}}.$$
 (5)

Здесь  $\Gamma_I(\tau)=\overline{I(t)I(t+\tau)}-\overline{I}^2$  — автокорреляционная функция флуктуаций интенсивности принимаемого излучения,  $\overline{I}$  и  $\tau_0=l_0/V_{\rm H}$  — средняя интенсивность и характерный временной интервал флуктуаций принимаемого излучения,  $V_{\rm H}$  — скорость дрейфа неоднородностей в плазменном слое,  $\Omega_0=2\pi\nu_0$ ,  $\nu_0=\sqrt{2}\,\nu_{\rm dp}=\sqrt{2}\,V_{\rm H}/l_{\rm dp}$  — характерная частота, на которой происходит излом слабых амплитудных флуктуаций принимаемого сигнала [11],  $\nu_{\rm dp}$  — частота френелевских осцилляций принимаемого излучения, соответствующих пространственному масштабу неоднородностей  $l_{\rm dp}=2\pi\,\sqrt{z/k}\,[11]$ .

Для нормированного спектра с учётом соотношения (4) можно записать следующее выражение:

$$W_I^{\text{норм}}(\Omega) \simeq \begin{cases} 1, & \Omega \le \Omega_0; \\ (\Omega_0/\Omega)^{2\alpha - 1}, & \Omega > \Omega_0. \end{cases}$$
 (6)

Здесь учтено, что в условиях нашего эксперимента параметр  $\Omega_0 au_0 > 1$  как для ионосферной, так и межпланетной плазмы.

Несложно убедиться, что в приближении последовательной дифракции плоской волны на двух фазовых экранах (ионосферном и межпланетном) результирующий спектр флуктуаций интенсивности принимаемого излучения равен сумме соответствующих парциальных спектров, определяемых соотношениями (4), (5):

$$W_I(\Omega) \simeq W_{I_1}(\Omega) + W_{I_2}(\Omega). \tag{7}$$

При этом частотные, временные и др. параметры парциальных спектров  $(\overline{s_{1,2}^2}, \nu_{01,2}, \tau_{01,2}, \alpha_{1,2})$  определяются характеристиками соответствующих неоднородных плазменных объектов — ионосферной и межпланетной плазмы.

Сопоставляя результаты эксперимента (см. рис. 2) и теоретических предсказаний, вытекающих из соотношений (3)—(7), можно сделать следующий вывод. Во время эксперимента характерная частота, на которой происходит излом в амплитудном спектре межпланетных мерцаний на интересующей нас частоте  $f_1=4525$  кГц составляла  $\nu_0\simeq 0.8$  Гц, что соответствует скорости дрейфа солнечного ветра для неоднородностей межпланетной плазмы с масштабами  $l_{\rm dp}\simeq 200$  км (с учётом солнечной элонгации  $\varepsilon\simeq 135^\circ$  [6]),  $V_{\rm H}\simeq 200$  км/с. Наклон спектра быстрых флуктуаций излучения в межпланетной плазме составлял  $p_1\simeq 1.7$ , что соответствует трёхмерному спектру мелкомасштабных неоднородностей межпланетной плазмы вида (3) с показателем  $p\simeq 2.7$ .

В начале сеанса 19.11.99, когда наблюдалась сильная экранировка проходящего излучения, наблюдался и аномальный тип спектра флуктуаций интенсивности принимаемого излучения на частоте 4 525 кГц в области высоких спектральных частот (см. рис. 2).

С учётом указанных выше соотношений (4)—(6) и характерных параметров задачи можно утверждать, что вклад ионосферных неоднородностей в результирующий амплитудный спектр (7) принимаемого излучения в области высоких спектральных частот ( $\nu \gtrsim 1$  Гц) пренебрежимо мал (см. также рис. 2). Что же касается изменений в результирующем спектре, обусловленных влиянием неоднородностей межпланетной плазмы, то здесь необходимо отметить следующее.

В условиях слабых флуктуаций пространственная корреляционная функция флуктуаций интенсивности принимаемого излучения, как несложно показать, имеет вид (ср. [13])

$$\Gamma_I(\boldsymbol{\rho}) \simeq |\overline{E}|^2 \left[ \Gamma_{ee^*}(\boldsymbol{\rho}) + \Gamma_{e^*e}(\boldsymbol{\rho}) + \Gamma_{ee}(\boldsymbol{\rho}) + \Gamma_{e^*e^*}(\boldsymbol{\rho}) \right].$$
 (8)

Здесь  $\overline{E}$  — когерентная компонента принимаемого сигнала,  $\Gamma_{ee^*}(\rho)$ ,  $\Gamma_{e^*e}(\rho)$ ,  $\Gamma_{ee}(\rho)$  и  $\Gamma_{e^*e^*}(\rho)$  — соответствующие функции флуктуационных комплексных полей принимаемого излучения,  $\rho = \rho_1 - \rho_2$  —

расстояние между точками приёма в плоскости наблюдения ( $\rho = V\tau; V$  — скорость дрейфа дифракционной картины в плоскости наблюдения).

Выражения для функций корреляции флуктуаций комплексных полей принимаемого излучения в случае неравномерной освещённости ионосферного слоя (ограниченного экрана) можно, следуя [10], записать в следующем виде:

$$\Gamma_{ee^*}(0, \boldsymbol{\rho}) \simeq \left(\frac{k}{2\pi z_{\mathrm{u}}}\right)^2 \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\mathbf{r}_1 K(\mathbf{r}_1) K(\mathbf{r}_1 - \boldsymbol{\rho}') \exp\left[-i\frac{k}{z_{\mathrm{u}}} (\boldsymbol{\rho}' + \boldsymbol{\rho}) \mathbf{r}_1\right] \times \left(\sum_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}' \Gamma_{e_0 e_0^*}(\boldsymbol{\rho}') \exp\left[i\frac{k}{2z_{\mathrm{u}}} (\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\rho}')^2\right],\right)$$

$$\Gamma_{ee}(0, \boldsymbol{\rho}) \simeq -\left(\frac{k}{2\pi z_{\mathrm{u}}}\right)^2 \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\mathbf{r}_1 K(\mathbf{r}_1) K(\mathbf{r}_1 - \boldsymbol{\rho}') \exp\left[-i\frac{k}{z_{\mathrm{u}}} \left(\mathbf{r}_1 - \frac{\boldsymbol{\rho}'}{2}\right)^2\right] \times \left(10\right)$$

$$\times \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}' \Gamma_{e_0 e_0}(\boldsymbol{\rho}') \exp\left[i\frac{k}{4z_{\mathrm{u}}} (\boldsymbol{\rho}' - \boldsymbol{\rho})^2\right].$$

$$(10)$$

При выводе соотношений (9), (10) предполагалось, что флуктуационное поле волны на экране является статистически однородным случайным процессом с корреляционными функциями  $\Gamma_{e_0e_0^*}(\rho')$  и  $\Gamma_{e_0e_0}(\rho')$ , характеризующими флуктуационное поле излучения, прошедшего слой межпланетной плазмы. Соответствующие корреляционные функции полей принимаемого излучения вычисляются при симметричном разнесении точек наблюдения относительно начала координат ( $\rho_1 + \rho_2 = 0$ ). Функция  $K(\mathbf{r})$  равна нулю на ограниченном (с характерным масштабом d) непрозрачном экране, расположенном симметрично на оси z ( $\rho_1 = \rho_2 = 0$ ) в ионосфере на расстоянии  $z_{\mathrm{u}}$  от плоскости наблюдения. Во всей области значений  $\mathbf{r}$  вне этого экрана функция  $K(\mathbf{r})$  равна единице (ср. [10]). Такое распределение средней освещённости экрана является простейшим, однако приведённые ниже расчёты справедливы и для произвольных функций  $K(\mathbf{r})$ .

Из соотношений (9), (10) в случае мелкомасштабных (с характерным масштабом  $l_{\rm M}$ ) флуктуаций падающего на ограниченный ионосферный экран излучения, прошедшего слой межпланетной плазмы, при выполнении неравенств (ср. [10])  $l_{\rm M} \ll d$ ,  $dl_{\rm M} \ll z_{\rm u}/k$  и  $d^2 \gg z_{\rm u}/k$  легко получить следующее соотношение:

$$\Gamma_I(\boldsymbol{\rho}) \simeq |\overline{E}|^2 \left[ \Gamma_{e_0 e_0^*}(\boldsymbol{\rho}) + \Gamma_{e_0^* e_0}(\boldsymbol{\rho}) \right]. \tag{11}$$

Это равенство означает, что форма корреляционной функции флуктуаций интенсивности принимаемого излучения (и, соответственно, форма спектра амплитудных флуктуаций) не меняется в случае ограниченного ионосферного экрана, который не меняет статистику мелкомасштабных неоднородностей падающего на экран излучения (см. также [13]).

В нашем случае речь идёт о флуктуациях излучения, прошедшего слой межпланетной плазмы с характерным масштабом  $l_{\rm M}$ , меньшим характерного масштаба экранирующего неоднородного ионосферного слоя с размером d в несколько десятков километров. При этом, однако, в силу того, что точка наблюдения находится в зоне геометрической оптики относительно характерного масштаба d и происходит соответствующее ослабление когерентной компоненты падающей волны, индекс флуктуаций принимаемого излучения [3, 6]

$$S_4 = \frac{\Gamma_I(0)}{\overline{I}^2} \simeq \frac{\left[\Gamma_{e_0} e_0^*(0) + \Gamma_{e_0^* e_0}(0)\right]}{|\overline{E}|^2}$$
(12)

должен возрастать ровно во столько же раз, во сколько уменьшается интенсивность когерентной компоненты поля. Соответствующее увеличение спектральной плотности мелкомасштабных флуктуаций интенсивности излучения должно наблюдаться и в результирующем спектре принимаемого излучения.

Что же касается флуктуаций излучения, падающего на ограниченный экран с характерным масштабом  $l_{\rm k}$ , удовлетворяющим неравенствам  $l_{\rm k}\gg d$  и  $d^2\gg z_{\rm u}/k$ , то, используя общие выражения в соотношениях (4), (8)—(10), несложно убедиться, что в рамках простейшей модели ограниченного неоднородного экрана в ионосфере крупномасштабные флуктуации излучения, прошедшего слой неоднородной межпланетной плазмы, должны практически отсутствовать в спектре принимаемого сигнала. Но этот результат находится в противоречии с наблюдаемым эффектом усиления крупномасштабных (равно как и мелкомасштабных) флуктуаций принимаемого излучения при экранировке падающего на ионосферу флуктуирующего излучения в условиях развитого F-spread (см. рис. 2). Наиболее разумным объяснением этого кажущегося противоречия теории и эксперимента является следующее.

Развитый F-spread даёт не полную, а частичную экранировку проходящего излучения на трассе Земля—КА. Влияние ионосферы пренебрежимо мало в области высоких спектральных частот  $(\nu \gtrsim 1 \; \text{Гц})$ , но может, тем не менее, заметно уменьшить когерентную компоненту проходящего излучения из-за эффективного увеличения фазового пути волны в ионосфере при просачивании её через неоднородный слой, прежде всего, в силу интерференционного характера распространения радиоволн в ионосфере со сложным квазирегулярным распределением электронной концентрации в условиях развитого F-spread (см. выше). При этом спектральный состав просочившегося через неоднородный ионосферный слой излучения, ранее прошедшего слой межпланетной плазмы, практически не будет меняться. Но в силу заметного ослабления когерентной компоненты в результирующем спектре должно наблюдаться заметное увеличение индекса мерцаний, которые из режима слабых могут перейти в режим умеренных флуктуаций. При этом согласно численным расчётам, выполненным в работе [14] для одномерного спектра флуктуаций интенсивности, должно наблюдаться заметное увеличение амплитудных значений нормированного спектра и его частотное уширение с довольно резким, гауссовым спаданием в области частот, превышающих френелевскую частоту в результирующем спектре [14]. Именно такая ситуация наблюдалась во время эксперимента на трассе CУPA—WIND в условиях развитого F-spread в начале сеанса 19.11.99.

### 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе первого космического эксперимента по изучению особенностей распространения коротких радиоволн при радиопросвечивании околоземной плазмы в условиях развитого среднеширотного F-spread сигналами наземного KB стенда СУРА с приёмом его излучения на борту KA WIND обнаружена экранировка сигнала на частоте  $4\,525~\rm k\Gamma L$ , которая была на  $0.8~\rm M\Gamma L$  больше минимальной наблюдаемой частоты, определяемой по ионограммам станции B3 «Базис» для радиотрассы СУРА—WIND. Этот эффект, по-видимому, связан со специфическим неоднородным распределением электронной концентрации ионосферной плазмы в условиях развитого среднеширотного F-spread, когда из-за влияния крупномасштабных неоднородностей электронной концентрации с характерными размерами в десятки километров возможно появление в ионосфере областей с пониженным электронным содержанием, вытянутых вдоль магнитного поля Земли. Эти неоднородные области перемежаются областями с обычным плоскослоистым распределением электронной концентрации. При вертикальном зондировании ионосферы такие неоднородности будут играть роль волноводов, которые дают развитую многолучёвость отражённых от ионосферы KB сигналов, характерную для явления среднеширотного F-spread, а при радиопросвечивании ионосферы KB сигналами эти же крупномасштабные неоднородности могут заметно повышать MHY для данной радиотрассы.

Учитывая высокий энергетический потенциал космической радиолинии СУРА—WIND, в ближай-

шее время целесообразно продолжить подобные космические эксперименты с целью более детального изучения особенностей распространения KB сигналов в условиях развитого среднеширотного F-spread. Кроме того, необходимо развить численное моделирование распространения коротких радиоволн в ионосфере со специфическими крупномасштабными возмущениями электронной концентрации для адекватного отображения особенностей распространения KB сигналов во время сильного среднеширотного F-spread. Сравнительный анализ результатов таких космических экспериментов и численных расчётов, в конечном счёте, должен послужить основой для выяснения детальной структуры электронной концентрации ионосферной плазмы в условиях развитого среднеширотного F-spread.

Авторы выражают благодарность за финансовую поддержку РФФИ (гранты № 99–02–16052, 99-02–31002) и INTAS-CNES (№ 97–1450).

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1. Гершман Б. Н., Казимировский Э. С., Кокуров В. Д., Чернобровкина Н. А. Явление *F*-рассеяния в ионосфере. М.: Наука, 1984.
- 2. Bowman G. G. // J. Geomag. Geoelect. 1990. V. 42, № 2. P. 109.
- 3. Алимов В. А., Рахлин А. В., Выборнов Ф. И. // Изв. вуз. Радиофизика. 1997. Т. 40, № 11. С. 1323.
- 4. Токарев Ю. В. // Изв. вуз. Радиофизика. 1996. Т. 39, № 8. С. 945.
- 5. Токарев Ю. В., Алимов В. А. и др. // Изв. вуз. Радиофизика. 1999. Т. 42, № 8. С. 799.
- 6. Токарев Ю. В., Кайзер М. и др. // Астрон. вест. 2000. № 2. С. 1.
- 7. James H. G. // Radio Sci. 1995. V. 30, № 2. P. 445.
- 8. Ораевский В. Н. и др. // Геомаг. аэрон. 1995. V. 35, № 1. С. 21.
- 9. Егоров И. В. и др. // Тезисы докл. XYIII Всерос. конф. по распространению радиоволн. С.-П., 1996. С. 414.
- 10. Денисов Н. Г. // Геомаг. аэрон. 1964. V. 4, № 4. С. 675.
- 11. Гершман Б. Н., Ерухимов Л. М., Яшин Ю. Я. Волновые явления в ионосфере и космической плазме. М.: Наука, 1984.
- 12. Ерухимов Л. М., Урядов В. П. // Изв. вуз. Радиофизика. 1968. Т. 11, № 12. С. 1852.
- 13. Рытов С. М., Кравцов Ю. М., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. Ч . 2. М.: Наука, 1978.
- 14. Booker H. G., Majidiahi G. // J. Atm. Terr. Phys. 1981. V. 43, № 11. P. 1199.

г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию 18 апреля 2000 г.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Научно-исследовательский радиофизический институт,

 $<sup>^2</sup>$  Обсерватория Мюдон, Франция

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup> Годдардовский центр космических полётов НАСА, США

#### GROUND-BASED AND SPACE-BORNE STUDIES OF MIDLATITUDE F-SPREAD

V. A. Alimov<sup>1</sup>, Yu. V. Tokarev<sup>1</sup>, G.-L. Bougeret<sup>2</sup>, M. Kaiser<sup>3</sup>, G. N. Boiko<sup>1</sup>, F. I. Vybornov<sup>1</sup>, A. N. Karashtin<sup>1</sup>, G. P. Komrakov<sup>1</sup>, and A. V. Rakhlin<sup>1</sup>

We present the results of the first space-borne SURA-WIND experiment aimed at studying the features of short-radiowave propagation in the case of radio occultation of the near-Earth plasma in the presence of a developed midlatitude F-spread. We discover the effect of screening of a signal at frequency 4525 kHz that is 0.8 MHz higher than the minimum observed frequency for the SURA-WIND radio path determined using the ionograms obtained by the ground-based vertical-sounding station. The screening effect is explained by the effect of large-scale irregularities of the number density of ionospheric electrons of sizes about a few tens of kilometers, which lead to the appearance of electron-density depletion regions in the ionosphere stretched along the geomagnetic field. These depletion regions are separated by the ordinary plan-parallel distribution of the electron number density. The features of the frequency spectra of intensity fluctuations of the HF radiation over the SURA-WIND radio path in the presence of a developed midlatitude F-spread are considered.

УДК 537.874

# РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА СТРУКТУРАХ ИЗ КОНЕЧНОГО ЧИСЛА ТРЁХМЕРНЫХ ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩИХ ТЕЛ

А. Г. Дмитренко, В. А. Колчин

Методом дискретных источников получено решение задачи рассеяния электромагнитных волн на структурах, составленных из конечного числа трёхмерных идеально проводящих тел, ограниченных гладкими поверхностями произвольной формы. Кратко описаны возможности разработанного пакета прикладных программ для расчёта характеристик рассеянного поля и контроля точности полученного решения. Приведены некоторые результаты численных расчётов, направленных на изучение влияния расстояния между телами на величину электромагнитного взаимодействия.

#### **ВВЕДЕНИЕ**

Значительный интерес для исследователей представляет изучение рассеяния радиоволн совокупностью идеально проводящих тел, имеющих размеры, сравнимые с длиной волны, и расположенных друг от друга на расстояниях, меньших длины волны возбуждающего поля. Этот интерес обусловлен необходимостью решения ряда практически важных проблем, например проблемы электромагнитной совместимости, конструирования многоэлементных антенных систем и др.

Корректная постановка подобного рода проблем приводит к необходимости решения граничных задач теории рассеяния на системах трёхмерных взаимодействующих (в электромагнитном смысле) тел. Известно относительно небольшое число работ, посвящённых решению таких задач (см., например, [1—4]). При этом, как правило, рассеиватели, входящие в систему, являются либо сферами, либо телами вращения. Авторам статьи неизвестны работы, в которых были бы приведены конкретные численные результаты, характеризующие рассеяние электромагнитных волн на структурах, составленных из тел без осевой симметрии, которые к тому же имеют различную форму поверхности. Активно развиваемый в последние годы метод дискретных источников является перспективной основой для построения вычислительных алгоритмов решения подобного класса задач и количественного исследования характеристик рассеяния. В частности, накопленный одним из авторов статьи опыт использования метода дискретных источников для решения задач рассеяния на одиночных телах произвольной формы, расположенных в однородной среде [5—10], позволяет сделать соответствующие обобщения на случай системы взаимодействующих тел.

В данной работе численный метод решения задач электромагнитного рассеяния на одиночных идеально проводящих телах, предложенный в [5, 6], обобщён на случай системы взаимодействующих идеально проводящих тел, каждое из которых не является осесимметричным и имеет форму, отличную от формы других тел, входящих в систему. Даны математическая формулировка метода и краткое описание возможностей реализованной на его основе программы для расчёта компонент рассеянного поля и контроля точности полученного решения. Приведены некоторые результаты численных расчётов, касающиеся влияния расстояния между телами на величину электромагнитного взаимодействия.

### 1. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОД ЕЁ РЕШЕНИЯ

Геометрия задачи показана на рис. 1. Будем рассматривать стационарную (зависимость от времени выбрана в виде  $\exp(-i\omega t)$ ) задачу дифракции электромагнитного поля  $\{{\bf E}_0,{\bf H}_0\}$  на структуре, состоящей из Q непересекающихся идеально проводящих тел  $D_q$ , ограниченных поверхностями Ляпунова  $S_q$   $(q=1,2,\ldots,Q)$ , размещённой в однородной безграничной среде  $D_{\rm e}$  с диэлектрической и магнитной проницаемостями  $\varepsilon_{\rm e}$  и  $\mu_{\rm e}$ . Выберем декартовую систему координат (x,y,z) с центром, расположенным для определённости внутри рассеивателя с порядковым номером q=1. Требуется найти рассеянное поле  $\{{\bf E}_{\rm e},{\bf H}_{\rm e}\}$  в области  $D_{\rm e}$ .

Математическая постановка задачи имеет следующий вид:

$$[\nabla, \mathbf{E}_{\mathrm{e}}] = i\omega\mu_{\mathrm{e}}\mathbf{H}_{\mathrm{e}}, \quad [\nabla, \mathbf{H}_{\mathrm{e}}] = -i\omega\varepsilon_{\mathrm{e}}\mathbf{E}_{\mathrm{e}}$$
 (1)

в области  $D_{\rm e}$ ,

$$[\mathbf{n}_q, \mathbf{E}_e] = -[\mathbf{n}_q, \mathbf{E}_0] \tag{2}$$

на поверхностях  $S_q, q = 1, 2, \dots, Q$ ,

$$[\{\sqrt{\varepsilon_{e}} \mathbf{E}_{e}; \sqrt{\mu_{e}} \mathbf{H}_{e}\}, \mathbf{R}/R] + \{\sqrt{\mu_{e}} \mathbf{H}_{e}; -\sqrt{\varepsilon_{e}} \mathbf{E}_{e}\} = O(R^{-1})$$
(3)

при  $R \to \infty$ , где  $\mathbf{n}_q$  — единичный вектор нормали к поверхности  $S_q$ ,  $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

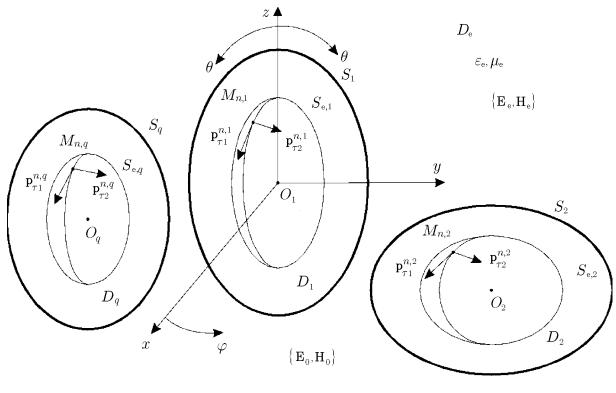


Рис. 1

Суть предлагаемого метода заключается в следующем. Введём внутри каждого из рассеивателей  $D_q$  (см. рис. 1) вспомогательную поверхность  $S_{\mathrm{e},q}=K_{\mathrm{e},q}S_q$ , подобную поверхности рассеивателя  $S_q$  в смысле гомотетии с центром в точке  $O_q$ . Если поверхность  $S_q$  является центральной, центр гомотетии выбирается совпадающим с центром поверхности. Коэффициенты гомотетии (подобия)  $K_{\mathrm{e},q}$ 

 $(q=1,2,\ldots,Q)$  характеризуют удаление вспомогательных поверхностей от поверхностей соответствующих тел, их значения лежат в интервале  $0 < K_{\mathrm{e},q} < 1$  (при  $K_{\mathrm{e},q} = 0$  вспомогательная поверхность стягивается в точку, при  $K_{\mathrm{e},q} = 1$  она совпадает с поверхностью соответствующего тела).

Выберем на каждой вспомогательной поверхности  $S_{\mathrm{e},q}$  конечную совокупность точек  $\{M_{n,q}\}_{n=1}^{N_q}$ . В каждой точке  $M_{n,q}$  разместим пару независимых вспомогательных элементарных электрических диполей с моментами  $\mathbf{p}_{\tau 1}^{n,q} = p_{\tau 1}^{n,q} \mathbf{e}_{\tau 1}^{n,q}$ ,  $\mathbf{p}_{\tau 2}^{n,q} = p_{\tau 2}^{n,q} \mathbf{e}_{\tau 2}^{n,q}$ , ориентированными вдоль единичных векторов  $\mathbf{e}_{\tau 1}^{n,q}$  и  $\mathbf{e}_{\tau 2}^{n,q}$ , выбранных в плоскости, касательной к  $S_{\mathrm{e},q}$  в точке  $M_{n,q}$ , и излучающих в однородную среду с параметрами  $\varepsilon_{\mathrm{e}}$ ,  $\mu_{\mathrm{e}}$ . Представим неизвестное рассеянное поле  $\{\mathbf{E}_{\mathrm{e}}, \mathbf{H}_{\mathrm{e}}\}$  в  $D_{\mathrm{e}}$  в виде суммы полей введённых вспомогательных диполей:

$$\mathbf{E}_{e}(M) = \frac{i\omega}{k_{e}^{2}} \sum_{q=1}^{Q} \sum_{n=1}^{N_{q}} [\nabla, [\nabla, \mathbf{\Pi}_{n,q}]],$$

$$\mathbf{H}_{e}(M) = \frac{1}{\mu_{e}} \sum_{q=1}^{Q} \sum_{n=1}^{N_{q}} [\nabla, \mathbf{\Pi}_{n,q}],$$

$$\mathbf{\Pi}_{n,q} = \Psi_{e}(M, M_{n,q}) \mathbf{p}_{\tau}^{n,q},$$

$$\mathbf{p}_{\tau}^{n,q} = p_{\tau 1}^{n,q} \mathbf{e}_{\tau 1}^{n,q} + p_{\tau 2}^{n,q} \mathbf{e}_{\tau 2}^{n,q}.$$
(4)

Здесь  $M \in D_{\mathrm{e}}$ ,  $\Psi_{\mathrm{e}}(M, M_{n,q}) = \exp(ik_{\mathrm{e}}R_{MM_{n,q}})/(4\pi R_{MM_{n,q}})$  — фундаментальное решение уравнения Гельмгольца для области  $D_{\mathrm{e}}$ ,  $k_{\mathrm{e}} = \omega \sqrt{\varepsilon_{\mathrm{e}}\mu_{\mathrm{e}}}$ ,  $R_{MM_{n,q}}$  — расстояние от точки  $M_{n,q}$  на  $S_q$  до точки M в  $D_{\mathrm{e}}$ ,  $p_{\tau 1}^{n,q}$  и  $p_{\tau 2}^{n,q}$  ( $q=1,2,\ldots,Q, n=1,2,\ldots,N_q$ ) — неизвестные комплексные постоянные (дипольные моменты),  $N_q$  — число диполей на вспомогательной поверхности  $S_{\mathrm{e},q}$ .

Поле (4) удовлетворяет уравнениям (1) и условиям излучения (3) в области  $D_{\rm e}$ . Для того, чтобы удовлетворить граничным условиям (2), необходимо соответствующим образом выбрать дипольные моменты  $p_{\tau 1}^{n,q}, p_{\tau 2}^{n,q}$ . Используем для этой цели метод коллокаций. Пусть  $M^j$  ( $j=1,2,\ldots,L_q$ ) — точки коллокации на поверхности  $S_q$ ,  $L_q$  — число точек коллокации на  $S_q$ . Тогда для определения неизвестных постоянных  $p_{\tau 1}^{n,q}, p_{\tau 2}^{n,q}$  получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$[\mathbf{n}_a^j, \mathbf{E}_{e,a}^j] = -[\mathbf{n}_a^j, \mathbf{E}_{0,a}^j],\tag{5}$$

где  $q=1,2,\ldots,Q,\,j=1,2,\ldots,L_q,\,\mathbf{n}_q^j,\,\mathbf{E}_{\mathrm{e},q}^j$  и  $\mathbf{E}_{0,q}^j$  — векторы нормали и электрические компоненты рассеянного (4) и возбуждающего полей в точке  $M^j$  на поверхности  $S_q$ . Решение системы (5) определяется путём минимизации функционала

$$\Phi = \sum_{q=1}^{Q} \sum_{j=1}^{L_q} \left| \left[ \mathbf{n}_q^j, (\mathbf{E}_{e,q}^j + \mathbf{E}_{0,q}^j) \right] \right|^2.$$
 (6)

Задача минимизации функционала (6) решается методом сопряжённых градиентов. После решения задачи минимизации (определения неизвестных дипольных моментов  $p_{\tau 1}^{n,q}, p_{\tau 2}^{n,q}$  ( $q=1,2,\ldots,Q,$   $n=1,2,\ldots,N_q$ )) необходимые характеристики рассеянного поля определяются из (4). В частности, для компонент рассеянного поля в дальней зоне имеем

$$E_{e,\theta}(M) = \sqrt{\frac{\mu_e}{\varepsilon_e}} H_{e,\varphi}(M) = \frac{\exp(ik_eR)}{k_eR} D_{\theta}(\theta,\varphi) + O(R^{-2}),$$

$$E_{e,\varphi}(M) = -\sqrt{\frac{\mu_e}{\varepsilon_e}} H_{e,\theta}(M) = \frac{\exp(ik_eR)}{k_eR} D_{\varphi}(\theta,\varphi) + O(R^{-2}),$$
(7)

где компоненты  $D_{\theta}(\theta,\varphi)$  и  $D_{\varphi}(\theta,\varphi)$  диаграммы рассеяния определяются выражениями

$$D_{\theta}(\theta,\varphi) = \sum_{q=1}^{Q} \sum_{n=1}^{N_{q}} G_{n,q}(\theta,\varphi) \left\{ (\cos\theta\cos\varphi\cos\alpha_{1}^{n,q} + \cos\theta\sin\varphi\cos\beta_{1}^{n,q} - \sin\theta\cos\gamma_{1}^{n,q}) p_{\tau 1}^{n,q} + \right. \\ \left. + (\cos\theta\cos\varphi\cos\alpha_{2}^{n,q} + \cos\theta\sin\varphi\cos\beta_{2}^{n,q} - \sin\theta\cos\gamma_{2}^{n,q}) p_{\tau 2}^{n,q} \right\},$$

$$D_{\varphi}(\theta,\varphi) = \sum_{q=1}^{Q} \sum_{n=1}^{N_{q}} G_{n,q}(\theta,\varphi) \left\{ (-\sin\varphi\cos\alpha_{1}^{n,q} + \cos\varphi\cos\beta_{1}^{n,q}) p_{\tau 1}^{n,q} + \right. \\ \left. + (-\sin\varphi\cos\alpha_{2}^{n,q} + \cos\varphi\cos\beta_{2}^{n,q}) p_{\tau 2}^{n,q} \right\},$$

$$G_{n,q}(\theta,\varphi) = \exp\left\{ -ik_{e} \left( \sin\theta\cos\varphi x_{n,q} + \sin\theta\sin\varphi y_{n,q} + \cos\theta z_{n,q} \right) \right\},$$

$$(8)$$

в которых  $\cos\alpha_1^{n,q},\cos\beta_1^{n,q},\cos\gamma_1^{n,q}$  и  $\cos\alpha_2^{n,q},\cos\beta_2^{n,q},\cos\gamma_2^{n,q}$  — направляющие косинусы единичных векторов  $\mathbf{e}_{\tau 1}^{n,q}$  и  $\mathbf{e}_{\tau 2}^{n,q},x_{n,q},y_{n,q},z_{n,q}$  — декартовы координаты точки  $M_{n,q},\theta$  и  $\varphi$  — угловые сферические координаты точки наблюдения M.

Контроль точности решения осуществляется путём вычисления относительного значения функционала (6) на сетке точек, представляющей собой совокупность точек коллокации и промежуточных к ним точек, выбираемых на поверхностях  $S_q$  всех тел, входящих в систему:

$$\Delta = (\Phi'/\Phi_0)^{1/2}, \quad \Phi_0 = \sum_{q=1}^{Q} \sum_{m=1}^{L'_q} \left| \left[ \mathbf{n}_q^m, \mathbf{E}_{0,q}^m \right] \right|^2, \tag{9}$$

где  $\Phi'$  — значение функционала (6) на указанной выше совокупности точек,  $\Phi_0$  — значение соответствующей нормы падающего поля на этой же совокупности точек,  $L_q'$  — число точек коллокации и промежуточных точек на рассеивателе с номером q.

Таким образом, построено некоторое решение граничной задачи (1)—(3). В соответствии с общей идеологией метода дискретных источников [11] для того, чтобы (4) действительно являлось приближённым решением граничной задачи (1)—(3), достаточно доказать полноту системы функций

$$\boldsymbol{\chi}_{nm}^q(M,M_{n,q}) = \left[\mathbf{n}, \left[\frac{i\omega}{k_{\rm e}^2}\nabla, \left[\nabla, \Psi_{\rm e}(M,M_{n,q})\mathbf{e}_{\tau m}^{n,q}\right]\right]\right],$$

где  $q=1,2,\ldots,Q,\,n=1,2,\ldots,m=1;2$ , в пространстве  $L_2^{\tau}(S_1)\times\ldots\times L_2^{\tau}(S_Q)$ , где  $L_2^{\tau}(S_q)$  — пространство векторных функций, лежащих в касательной к  $S_q$  плоскости, компоненты которых принадлежат  $L_2(S_q)$ . Основываясь на технике, развитой в [11] для одиночных идеально проводящих тел, нетрудно показать, что это имеет место, если вспомогательные поверхности  $S_{e,q}$  являются нерезонансными, а множества точек  $\{M_{n,q}\}_{n=1}^{N_q}$  — всюду плотными на соответствующих поверхностях  $S_{e,q}$ .

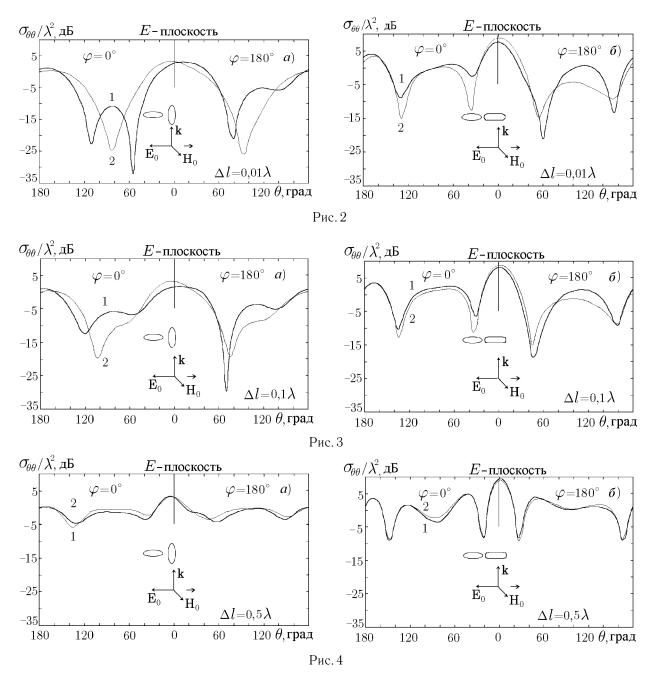
#### 2. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

На основе изложенного выше метода создана программа для расчёта компонент рассеянного поля и контроля точности полученного решения. Максимальное число тел, предусмотренное программой, равно пяти. Каждое из тел может быть либо трёхосным эллипсоидом, либо конечным цилиндром с эллиптическим поперечным сечением (с плоскими или скруглёнными торцами), либо параллелепипедом; все острые кромки и вершины предполагаются скруглёнными. Сочетание перечисленных выше геометрических форм в структуре может быть произвольным. Помимо типов геометрии рассеивателей, исходными данными программы являются координаты точек  $O_q$ , определяющие взаимное расположение

рассеивателей в структуре, характерные геометрические параметры (в длинах волн) выбранных типов рассеивателей, возбуждающее поле  $\{{\bf E}_0,{\bf H}_0\}$ , параметры подобия  $K_{{\rm e},q}$ , количество точек размещения диполей  $N_q$  и точек коллокации  $L_q$  для каждого из рассеивателей, образующих исследуемую структуру. Минимизация функционала (6) осуществляется методом сопряжённых градиентов; остановка итерационного процесса осуществляется при условии, что относительное изменение функционала на каждой из десяти последних итераций не превышает 0,001. При помощи данной программы выполнена серия вычислительных экспериментов, направленных как на выяснение влияния параметров метода на погрешность получаемого решения (на основе критерия невязки), так и на получение характеристик рассеяния для конкретных структур при различных расстояниях между образующими структуру телами. В частности, установлено, что оптимальные значения параметров  $K_{{\rm e},q}$ , определяющие положения вспомогательных поверхностей  $S_{{\rm e},q}$ , при которых обеспечиваются минимальные нормы невязки граничных условий (9), лежат в интервале  $0,4 \le K_{{\rm e},q} \le 0,7$ .

Некоторые результаты численных расчётов, характеризующие влияние расстояния между телами в структуре на её бистатические сечения рассеяния для структур двух типов, приведены на рис. 2-4. Структура первого типа, к которой относятся рис. 2a-4a, составлена из двух трёхосных эллипсоидов с центрами на оси x; центр первого эллипсоида (с порядковым номером q=1) совмещён с центром декартовой системы координат. Полуоси эллипсоидов  $k_e a, k_e b, k_e c$  ориентированы вдоль осей x, y, z и равны  $k_e a_1 = 2,0$ ;  $k_e b_1 = 1,5$ ;  $k_e c_1 = 1,0$  для первого эллипсоида и  $k_e a_2 = 1,0$ ;  $k_e b_2 = 1,5$ ;  $k_e c_2 = 2,0$ для второго эллипсоида. Структура второго типа, к которой относятся рис. 26-46, отличается тем, что в ней первый эллипсоид заменён на цилиндр с эллиптическим поперечным сечением и скруглёнными основаниями. Центр цилиндра также совмещён с центром декартовой системы координат, ось цилиндра направлена вдоль оси x, поперечные сечения цилиндра параллельны плоскости yz. Длина цилиндрической части  $k_e l_1 = 2,0$ , размеры полуосей поперечного сечения цилиндра  $k_e b_1 = 1,0$  (ориентирована вдоль оси y) и  $k_{\rm e}c_1=1,5$  (ориентирована вдоль оси z). Торцы цилиндра скруглёны половинками трёхосных эллипсоидов высотой  $k_{\rm e}h_1=1.5$ , так что полная длина цилиндра  $k_{\rm e}L_1=5.0$ . Структуры возбуждаются линейно поляризованной плоской волной, распространяющейся вдоль оси z, с вектором  $E_0$ , ориентированным вдоль оси x. Результаты представлены в E-плоскости (плоскости xz), состоящей из двух полусечений:  $\varphi = 0^\circ$  и  $\varphi = 180^\circ$ . Кривые 1 на рис. 2-4 представляют результат суперпозиции двух решений, одно из которых — решение задачи рассеяния на первом теле структуры при отсутствии второго тела, а второе — решение задачи рассеяния на втором теле структуры при отсутствии первого тела. Очевидно, что такой подход не учитывает электромагнитное взаимодействие рассеивателей в структуре. Кривые 2 — результат решения задачи рассеяния на двух телах предлагаемым методом в полной электродинамической постановке. Сравнение кривых 1 и 2 позволяет оценить влияние электромагнитного взаимодействия тел структуры на бистатические сечения рассеяния. Изменение расстояния между рассеивателями в структуре осуществлялось перемещением второго рассеивателя вдоль оси x. Представленный на рисунках параметр  $\Delta l$  — это наименьшее расстояние между точками поверхностей соседних рассеивателей, выраженное в длинах волн  $\lambda$  возбуждающего поля.

При получении обсуждаемых результатов параметры метода выбирались следующими. Коэффициент подобия  $K_{\mathrm{e},q}$  для каждого из тел структур обоих типов был выбран равным 0,5. Для эллипсоидов число  $N_q$  диполей на вспомогательных поверхностях было выбрано равным 121, число точек коллокации равным 242. В локальных системах координат с центрами в центрах эллипсоидов точки размещения диполей распределялись следующим образом. В каждом из одиннадцати полусечений  $\varphi = \mathrm{const}$ , отстоящих одно от другого на угловое расстояние  $\Delta \varphi = 32,7^\circ$ , равномерно по углу  $\theta$  выбрано одиннадцать точек размещения диполей. Для точек коллокации алгоритм их расположения по углу  $\theta$  выбран таким же, как для точек размещения диполей, но выбираются они как в полусечениях  $\varphi = \mathrm{const}$ , определённых для точек размещения диполей, так и посередине между ними. Для цилиндра число точек размещения диполей  $N_q$  выбрано равным 168, число точек коллокации равным 336. Алгоритм распо-



ложения диполей на вспомогательной поверхности, которая в этом случае представляет собой цилиндр со скруглёнными основаниями, выбран следующим. В каждом сечении  $x=\mathrm{const}$  на вспомогательной поверхности равномерно по азимутальному углу распределялось 14 точек размещения диполей; число сечений  $x=\mathrm{const}$  равно шести для цилиндрической части цилиндра и трём для каждого из скруглённых торцов. Точки коллокации располагались в тех же сечениях  $x=\mathrm{const}$ , что и точки размещения диполей, но число точек коллокации в каждом сечении выбиралось в два раза большим. При выбранных параметрах метода для структур обоих типов во всех рассмотренных случаях норма невязки граничных условий (9) не превышает 20%.

Как показывают рис. 2-4, при малых расстояниях между рассеивателями ( $\Delta l \leq 0.1\lambda$ ) влияние взаимодействия между рассеивателями на бистатические сечения рассеяния очень велико; оно приводит к качественному изменению диаграмм рассеяния. По мере увеличения расстояния между рассеивателями взаимодействие между ними постепенно уменьшается. При  $\Delta l \approx 0.5\lambda$  отличия в бистатических сечениях рассеяния, вычисленных с учётом и без учёта взаимодействия между рассеивателями, не превышает 2 дБ. Эти отличия обусловлены как влиянием взаимодействия между рассеивателями, так и погрешностью расчётов, которая при невязке граничных условий в 20 % имеет такой же порядок. Отсюда следует, что отличия в бистатических сечениях рассеяния, обусловленные собственно влиянием взаимодействия, на самом деле значительно меньше 2 дБ. Таким образом, если расстояние между телами в структуре  $\Delta l > 0.5\lambda$ , при расчёте энергетических характеристик рассеяния взаимодействием рассеивателей можно пренебречь. Если же расстояние между рассеивателями меньше  $0.5\lambda$ , корректный расчёт энергетических характеристик рассеянного поля требует учёта взаимодействия между телами.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1. Borghese F., Denti P., Saija R., Toscano G., Sindoni O. // Aerosol. Sci. Technol. 1984. V. 3, № 2b. P. 227.
- 2. Cooray M., Francis R., Ciric I. // IEEE Trans. Antennas Propag. 1989. V. 37, № 5. P. 608.
- 3. Zheng W., Shao H. // Radio Sci. 1991. V. 26, № 1. P. 191.
- 4. Ерёмин Ю. А., Орлов Н. В. // Радиотехника и электроника. 1994. Т. 39. № 5. С. 740.
- 5. Дмитренко А. Г., Мукомолов А. И. // Радиотехника и электроника. 1988. Т. 33, № 3. С. 449.
- 6. Дмитренко А. Г., Мукомолов А. И. // Радиотехника и электроника. 1990. Т. 35, № 2. С. 438.
- 7. Дмитренко А. Г., Мукомолов А. И. // Радиотехника и электроника. 1991. Т. 36, № 5. С. 1032.
- 8. Дмитренко А. Г., Мукомолов А. И. // Радиотехника и электроника. 1995. Т. 40, № 6. С. 875.
- 9. Дмитренко А. Г., Корогодов С. В. // Изв. вуз. Радиофизика. 1998. Т. 41. № 4. С. 495.
- 10. Дмитренко А. Г., Қорогодов С. В. // Радиотехника и электроника. 1998. Т. 43, № 12. С. 1463.
- 11. Ерёмин Ю. А., Свешников А. Г. Метод дискретных источников в задачах электромагнитной дифракции. М.: Изд-во МГУ, 1992. —182 с.

Томский госуниверситет, г. Томск, Россия

Поступила в редакцию 7 мая 2000 г.

# SCATTERING OF ELECTROMAGNETIC WAVES ON STRUCTURES COMPRISING A FINITE NUMBER OF THREE-DIMENSIONAL IDEAL CONDUCTORS

A. G. Dmitrenko and V. A. Kolchin

Using the method of discrete sources, we solve the problem on scattering of electromagnetic waves on structures formed by a finite number of three-dimensional ideal conductors bounded by smooth surfaces of arbitrary shapes. The capabilities of the developed software package to calculate the scattered-field characteristics and to control the accuracy of the obtained solution are briefly described. We present some results of numerical calculations aimed at analysis of the influence of the distances between the conductors on their electromagnetic interaction.

УДК 519.6:537.86

# ПОЛЕ ВЕРТИКАЛЬНОГО МАГНИТНОГО ДИПОЛЯ ПРИ НАЛИЧИИ СФЕРЫ С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ

Ю.В.Свищёв

Рассмотрена дифракция произвольной монохроматической электромагнитной волны на идеально проводящем бесконечно тонком сферическом экране с круговым отверстием. Исходная краевая задача сведена к системе линейных алгебраических уравнений второго рода вида (I+H)x=b, где  $x,b\in l_2$ , с компактным в  $l_2$  оператором H(I-e) единичный оператор в  $l_2$ ). Рассчитан спектр собственных частот (отвечающих аксиальносимметричным колебаниям магнитного типа) сферы с круговым отверстием. Исследовано влияние резонансных режимов (в частности междутиповой связи колебаний) рассматриваемой структуры на её рассеивающие свойства.

В работе [1] изложен метод и эффективный численный алгоритм решения задачи дифракции произвольной монохроматической электромагнитной волны на идеально проводящем и бесконечно тонком сферическом экране с круговым отверстием, а именно: построена процедура регуляризации, эквивалентно сводящая исходную краевую задачу к алгебраической системе уравнений второго рода вида  $(\mathbf{I}+\mathbf{H})x=b$ , где  $x,b\in l_2$ , с компактным в  $l_2$  оператором  $\mathbf{H}$  ( $\mathbf{I}$  — единичный оператор в  $l_2$ ). Алгоритм обладает высоким быстродействием и позволяет в широком частотном диапазоне проводить исследование резонансных и рассеивающих характеристик сферы с круговым отверстием.

В большинстве публикаций, относящихся к данной тематике (достаточно подробный обзор содержится в [1]), основное внимание уделяется именно решению задачи. Что касается детального анализа характеристик рассеяния, то этот вопрос переносился, как правило, на второй план. В силу этого ряд закономерностей рассеяния волн на рассматриваемой структуре, как оказалось, выявлен не был. Целью настоящей работы является попытка восполнить в какой-то степени этот пробел.

В работе исследуются аксиально-симметричные поля магнитного типа, возбуждаемые полем вертикального магнитного диполя. Соответствующая задача дифракции является частным случаем задачи, рассмотренной в [1]. Поэтому её решение в данной работе проводится в основном схематически.

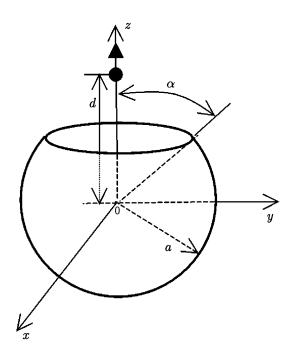
К числу основных результатов, полученных в работе и неизвестных ранее, следует отнести следующие. Во-первых, рассчитан спектр собственных частот сферы с круговым отверстием, соответствующих аксиально-симметричным колебаниям магнитного типа. Во-вторых, установлено, что в сфере с круговым отверстием имеет место эффект междутиповой связи колебаний. В-третьих, исследовано влияние резонансных режимов (в частности междутиповой связи колебаний) на рассеивающие свойства рассматриваемой структуры.

## 1. СВЕДЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ К АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим задачу дифракции электромагнитных волн, порождаемых вертикальным магнитным диполем, на идеально проводящем бесконечно тонком сферическом сегменте (сфере с круговым отверстием), совпадающем в сферической системе координат  $(r,\theta,\varphi)$  с множеством  $\{(r,\theta,\varphi): r=a,\theta\in\{\alpha,\pi],\varphi\in[0,2\pi]\}$  (см. рис. 1). Считаем, что диполь расположен на оси симметрии структуры; расстояние от начала координат до диполя равно d.

Вместо рассеянного поля ищем определяющие его потенциалы Дебая (о связи электромагнитного поля с его потенциалами Дебая см. [1]), которые должны удовлетворять уравнению Гельмгольца и

обеспечивать выполнение соответствующих граничных условий (равенство нулю тангенциальных составляющих электрического поля на поверхности экрана), условия излучения и условия конечности энергии поля в любой ограниченной области пространства. При рассматриваемом способе возбуждения рассеянное поле таково, что электрический потенциал Дебая равен нулю, а наличие для всех величин симметрии относительно оси z приводит и к осевой симметрии рассеянного поля.



Магнитный потенциал Дебая  $v^0$  поля вертикального магнитного диполя имеет известный вид [2] (электрический потенциал Дебая  $u^0$  равен нулю):

$$v^{0} = \frac{i |\mathbf{m}| k^{3}}{kr} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_{n} [2 (2n+1)]^{1/2}}{(kd)^{2}} \times \left\{ \begin{array}{l} \psi_{n}(kd) \xi_{n}(kr), & r > d \\ \xi_{n}(kd) \psi_{n}(kr), & r < d \end{array} \right\} \widehat{P}_{n}^{0}(\cos \theta), (1)$$

где  ${\bf m}$  — момент диполя,  $\psi_n(t)$  и  $\xi_n(t)$  — сферические функции Бесселя или Ханкеля в обозначениях Дебая [2],  $\widehat{P}_n^m(t)$  — ортонормированные присоединённые функции Лежандра [3];  $e_n=1$ , если диполь расположен выше начала координат, в противном случае  $e_n=(-1)^{n-1},\,k=2\pi/\lambda$  — волновое число. Здесь и далее опускаем временной множитель  $\exp(-i\omega t)$ .

В соответствии со стандартными рассуждениями метода частичных областей обозначаем потенциал Дебая  $v^{\rm s}$  рассеянного поля в областях  $r \leq a$ ,  $r \geq a$  соответственно как  $v^{\rm i}$ ,  $v^{\rm e}$  и ищем их в виде

Puc. 1
$$v^{i,e}(r,\theta,\varphi) = \frac{i|\mathbf{m}|k^3}{kr} \sum_{n=1}^{\infty} B_n^{i,e} z_n^{i,e}(kr) \widehat{P}_n^0(\cos\theta), \tag{2}$$

где  $z_n^{\rm i}(t)=\psi_n(t), z_n^{\rm e}(t)=\xi_n(t), B_n^{\rm i,e}$  — неизвестные коэффициенты. Определим новые неизвестные и заданные коэффициенты:

$$b_n = B_n^{i} [n (n+1)]^{1/2} [(2n+1) \xi_n(ka)]^{-1},$$

$$g_n = -\frac{i}{ka} [n (n+1)]^{1/2} \frac{e_n [2 (2n+1)]^{1/2}}{(kd)^2} \left\{ \begin{array}{l} \psi_n(kd) \xi_n(ka), & a > d \\ \xi_n(kd) \psi_n(ka), & a < d \end{array} \right\},$$

а также функции

$$\mu_n(z) = 1 - (i/z)(2n+1)\psi_n(z)\xi_n(z); \quad \mu_n(z) = O(z^2/n^2), \quad n \to \infty.$$
 (3)

Удовлетворяя теперь граничным условиям и условиям сопряжения на границе частичных областей, после замены переменной  $t = \cos \theta \ (t_0 = \cos \alpha)$  получим парные сумматорные уравнения относительно неизвестных  $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{b_n [1 - \mu_n(ka)] - g_n\} \widehat{P}_n^1(t) = 0, \quad t \in ]-1, t_0[;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n + 1/2) b_n \widehat{P}_n^1(t) = 0, \quad t \in ]t_0, 1[.$$
(4)

Кроме того, имеет место соотношение  $B_n^{\rm e}=B_n^{\rm i}\psi_n(ka)/\xi_n(ka)$ . Потребуем, чтобы последовательность неизвестных  $\{b_n\}_{n=1}^\infty$  принадлежала классу последовательностей

$$l_2(1) = \left\{ w \equiv \{w_n\}_{n=1}^{\infty} : \sum_{n=1}^{\infty} (n+1/2) |w_n|^2 < \infty \right\}.$$

Условие  $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \in l_2(1)$  является необходимым и достаточным для того, чтобы рассеянное поле имело конечную энергию в любой ограниченной области пространства (см. [1]).

Регуляризация уравнений (4) может быть проведена методом [4]. Не останавливаясь на достаточно очевидных деталях, сразу опишем результат соответствующей регуляризации. С этой целью определим вектор-столбцы

$$\widehat{b} = \left\{ (n+3/2)^{1/2} b_{n+1} \right\}_{n=0}^{\infty}, \quad \widehat{g} = \left\{ (n+3/2)^{1/2} g_{n+1} \right\}_{n=0}^{\infty}$$
(5)

и матричные операторы вида

$$M = \{-\delta_{sn}\mu_{n+1}(ka)\}_{s,n=0}^{\infty}, \quad \widetilde{Q} = \{Q_{sn}^{(3/2,1/2)}(t_0)\}_{s,n=0}^{\infty},$$

где функции  $Q_{sn}^{(\gamma,\beta)}(t)$  определены в [4] и для  $\gamma=3/2$ ,  $\beta=1/2$ , выражаются через тригонометрические функции  $\delta_{sn}$  — символ Кронекера. Тогда парные сумматорные уравнения (4) методом [4] сводятся к уравнению в  $l_2$  следующего вида:

$$[I + \widetilde{Q}M] \, \widehat{b} = \widetilde{Q}\widehat{g}. \tag{6}$$

Используя асимптотическое поведение функций  $\psi_n(t), \xi_n(t)$  при  $n \to \infty$ , в [1] показано, что  $\sum_{n=0}^{\infty} |\widehat{g}_n|^2 < \infty$ , если диполь не лежит на сферической поверхности r=a. Тогда, учитывая (5), получаем, что  $\widehat{b}, \widehat{g} \in l_2$ . Из (3) следует, что  $\lim_{n \to \infty} \mu_n(ka) = 0$ , откуда вытекает компактность диагонального оператора  $\mathbf{M}$ , а в силу ограниченности оператора  $\widetilde{\mathbf{Q}}$  — компактность оператора  $\widetilde{\mathbf{Q}}$ М. Таким образом, доказано, что уравнение (6) является уравнением второго рода в  $l_2$  вида  $(\mathbf{I} + \mathbf{H}) \widehat{b} = \widehat{g}$ , где  $\widehat{b}, \widehat{g} \in l_2$ , с компактным в  $l_2$  оператором  $\mathbf{H}$ .

Для такого уравнения справедлива альтернатива Фредгольма, из которой, в сочетании с единственностью решения исходной краевой задачи, следует однозначная разрешимость и существование решения как исходной задачи, так и уравнения (6). Имеет место также теорема об эквивалентности исходной краевой задачи и построенного уравнения (6).

#### 2. СПЕКТРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕЗАМКНУТОГО СФЕРИЧЕСКОГО ЭКРАНА

Из (1), (2) следует, что все электромагнитные поля, возбуждаемые вертикальным магнитным диполем, расположенным на оси симметрии структуры, являются полями магнитного типа ( $E_r=0$ ,  $H_r\neq 0$ ). Собственные колебания магнитного типа области, ограниченной идеально проводящим замкнутым сферическим экраном, описываются [5] магнитными потенциалами Дебая вида

$$v = \frac{\operatorname{const}}{kr} \psi_n(kr) \widehat{P}_n^m(\cos \theta) \left\{ \begin{array}{c} \cos(m\varphi) \\ \sin(m\varphi) \end{array} \right\}.$$

На идеально проводящем экране (при r=a) выполняются граничные условия равенства нулю тангенциальной составляющей электрического поля. Поэтому собственные частоты колебаний магнитного типа сферической области находятся из уравнения

$$\psi_n(ka) = 0. (7)$$

По определению [5] q-й корень уравнения (7) (для заданного n) даёт собственную частоту колебания  $H_{mnq}$  для соответствующей области.

Если спектральные свойства закрытого сферического резонатора описываются сравнительно просто, то для открытого сферического резонатора проблема полного описания спектральных характеристик соответствующей краевой задачи чрезвычайно сложна. В работах [6, 7] предложен метод исследования одно- и двумерных спектральных краевых задач для уравнения Гельмгольца, возникающих в теории дифракции электромагнитных и акустических волн на тонких экранах, где роль спектрального параметра, в частности, играет частота.

Для трёхмерных краевых задач для уравнений Максвелла и Гельмгольца может быть развита аналогичная теория. Естественной областью аналитического продолжения по параметру k функции Грина трёхмерных краевых задач дифракции является (в отличие от двумерных задач) комплексная плоскость  $\mathbb{C}^1$ . Описанная выше для k>0 постановка (осесимметричной) задачи дифракции сохраняется при  $k\in\mathbb{C}^1$  с тем отличием, что условие Зоммерфельда следует заменить на эквивалентное ему при k>0 требование, чтобы потенциал  $v^e$  в некоторой окрестности бесконечно удалённой точки допускал разложение в абсолютно сходящийся ряд вида

$$v^{e} = \frac{1}{kr} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \xi_n(kr) \widehat{P}_n^0(\cos \theta), \quad k \in \mathbb{C}^1,$$
(8)

где  $A_n$  — некоторые коэффициенты. Можно показать, что так поставленная краевая задача для  $k \in \mathbb{C}^1$  определяет аналитическое продолжение функции Грина исходной краевой задачи с условием (8) при  $ka \in \mathbb{C}^1$ , а те ka, для которых существуют нетривиальные решения однородной задачи, будем рассматривать как спектр собственных значений. Можно показать также, что этот спектр целиком лежит в нижней полуплоскости, дискретен, конечнократен и совпадает с полюсами аналитического продолжения функции Грина исходной краевой задачи. Спектр краевой задачи совпадает с множеством нулей функции  $F(z) = \det(\mathbf{I} + \mathbf{H}(z))$ ,  $\mathbf{H}(z) = \widetilde{\mathbf{Q}}\mathbf{M}, z = ka \in \mathbb{C}^1$ . Для определения корней F(z) с любой наперёд заданной точностью достаточно найти корни функции  $F_N(z)$ , определение которой совпадает с определением F(z) с тем отличием, что оператор-функция  $\mathbf{H}(z)$  заменяется достаточно близкой к ней конечномерной оператор-функцией  $\mathbf{H}_N(z)$ . Приведённые выводы допускают строгое обоснование, что является предметом отдельной публикации.

Всюду далее под спектром собственных колебаний незамкнутого сферического экрана будем понимать набор комплексных волновых чисел ka, обращающих в нуль бесконечный определитель системы линейных алгебраических уравнений (6), рассматриваемый как соответствующее дисперсионное уравнение. При  $\alpha \to 0$  эти собственные значения переходят в собственные значения закрытого резонатора, т. е. являются корнями уравнений (7). Поскольку при рассматриваемом способе возбуждения могут возбуждаться только колебания с азимутальным индексом m=0, эти собственные колебания переходят при  $\alpha \to 0$  в колебания вида  $H_{0na}$ .

Пусть теперь заданы какие-то целые положительные числа n и q. Если собственное в смысле данного выше определения колебание при  $\alpha \to 0$  непрерывно переходит в собственное колебание  $H_{0nq}$  закрытого резонатора, будем классифицировать это колебание и при  $\alpha > 0$  как колебание  $H_{0nq}$  (полезность такой классификации при достаточно больших  $\alpha$ , впрочем, весьма относительна, особенно в условиях обсуждаемого ниже взаимного влияния колебаний различных типов: в условиях междутиповой связи колебаний анализируется структура полей в резонаторе).

На рис. 2 приведены графики зависимостей реальной части собственных частот ka и логарифма добротности  $\lg Q \, (Q=-0.5\, \mathrm{Re}(ka)/\mathrm{Im}(ka))$  первых 15-ти собственных колебаний, имеющих тип  $H_{0nq}$ , от угла раскрыва отверстия  $\alpha$  (значения угла  $\alpha$  на рис. 2—4 приведены в градусах). Видно, что при относительно небольших значениях  $\alpha$  реальные части собственных частот колебаний  $H_{0nq}$  изменяются незначительно. По мере дальнейшего увеличения связи с внешним пространством реальные части

увеличиваются сначала медленно, а затем со всё возрастающей скоростью. Одновременно такой открытый резонатор быстро теряет свои резонансные свойства.

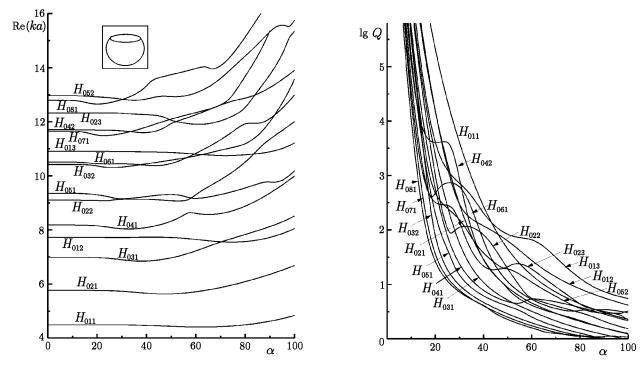


Рис. 2

Более добротными из рассматриваемых типов колебаний в значительном диапазоне изменения  $\alpha$  оказываются первые, основные типы колебаний  $H_{01q}$ . Следующие — высшие типы колебаний — менее добротны, причём с ростом n (при фиксированном q) добротность колебаний  $H_{0nq}$  падает. Объяснение этому явлению можно найти, проанализировав распределение плотности энергии в резонаторе, возбуждаемом полем вертикального магнитного диполя на частотах, равных реальным частям собственных частот. У колебаний  $H_{01q}$  максимум плотности энергии один, он расположен вблизи центра резонатора, тогда как у колебаний  $H_{0nq}$  с ростом индекса n>1 один из максимумов всё более смещается к отверстию. Таким образом, появляется возможность большего «высвечивания» энергии из отверстия по мере увеличения его размеров.

Отмеченное поведение спектральных кривых свойственно не для всех типов колебаний. Имеются диапазоны изменения  $\alpha$ , где добротность отдельных колебаний изменяется не столь простым образом, как это описано выше. Видно, например, что добротность колебания  $H_{061}$  имеет ярко выраженную зависимость от угла раскрыва  $\alpha$  (рис. 3). При увеличении  $\alpha$  от 0 до  $\alpha\approx 17^\circ$  добротность колебания  $H_{061}$  монотонно убывает; в интервале от  $\alpha\approx 17^\circ$  до  $\alpha\approx 25^\circ$  она возрастает, а затем вновь монотонно убывает. При этом зависимости реальных частей собственных частот колебаний  $H_{032}$  и  $H_{061}$  в диапазоне  $10^\circ < \alpha < 25^\circ$  аналогичны графику Вина для частот связи в двухсвязной системе [8], где параметр  $\alpha$  изменяет частоту настройки резонансной системы.

Рассмотрим теперь, что происходит со структурой колебаний  $H_{032}$  и  $H_{061}$ . На рис. 3 изображены изолинии плотности энергии W= const полей, возбуждаемых излучением вертикального магнитного диполя (d/a=1,5) на частотах, которые совпадают с реальной частью собственных частот  $\mathrm{Re}(ka)$  колебаний  $H_{032}$  и  $H_{061}$  при различных значениях  $\alpha$ . При  $\alpha=10^\circ$  возбуждаемые поля соответствуют колебаниям  $H_{032}$  и  $H_{061}$  замкнутого сферического резонатора. При  $\alpha=20^\circ$  они являются гибридными:

происходит своеобразное «перемешивание» колебаний  $H_{032}$  и  $H_{061}$ , при этом, как видно, происходит интенсивное излучение энергии из резонатора на частоте, соответствующей колебанию  $H_{032}$  в смысле данной выше классификации. Добротность же колебания  $H_{061}$  в этих условиях возрастает; максимум

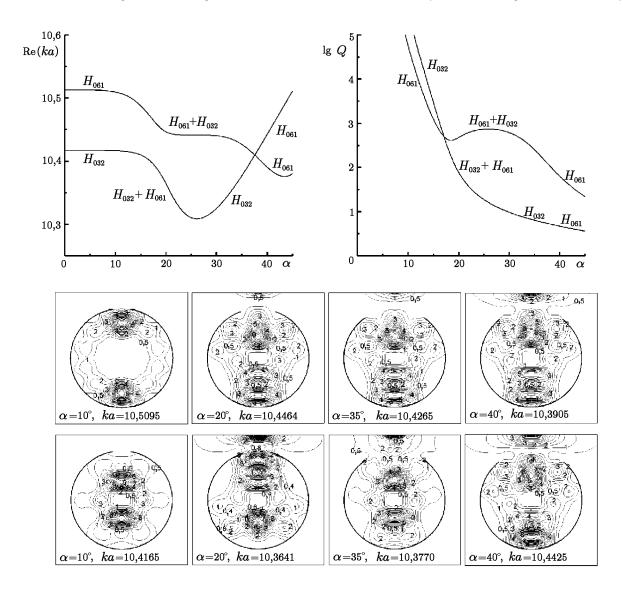


Рис. 3

плотности энергии, находящийся вблизи отверстия, сдвигается к центру резонатора. При дальнейшем увеличении угла  $\alpha$  гибридное колебание  $H_{061}+H_{032}$  переходит в колебание  $H_{061}$ , а гибридное колебание  $H_{032}+H_{061}$  сначала переходит в колебание  $H_{032}$  ( $\alpha\approx30^\circ$ ), а затем, приобретая энергию, видимо, у колебания  $H_{061}+H_{032}$ , также приобретает черты колебания  $H_{061}$ .

Таким образом, в рассматриваемом диапазоне изменения  $\alpha$  наблюдается интенсивное взаимодействие (междутиповая связь) между колебаниями  $H_{032}$  и  $H_{061}$ . Аналогичные закономерности характерны и для других пар колебаний (см. рис. 2). Подчеркнём, что физически корректное понятие связи собственных колебаний открытых резонаторов на основе принципиально новой математической модели содержится в работе [9]. Можно показать, что и для рассматриваемого в настоящей работе открытого резонатора описанные выше закономерности являются следствием существования изолированной

морсовской критической точки  $(b_0, w_0)$  определителя F(b, w) системы линейных алгебраических уравнений, зависящего от спектрального параметра b и неспектрального параметра w (см., например, [10]).

# 3. ВЛИЯНИЕ РЕЗОНАНСНЫХ РЕЖИМОВ СФЕРЫ С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ НА СОПРОТИВЛЕНИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ ВОЗБУЖДАЮЩЕГО ЕЁ ДИПОЛЯ

Влияние резонансов сферы с круговым отверстием на её рассеивающие свойства рассмотрим на основе анализа сопротивления излучения диполя. В соответствии с определением [2] нормированное сопротивление излучения диполя R вычисляется по формуле

$$R = \frac{3}{4 |\mathbf{m}|^2} \sum_{n=1}^{\infty} n (n+1) |B_n^{\mathbf{e}}|^2.$$

На рис. 4a (d/a=1,5) приведены графики зависимости R от частоты ka и угла  $\alpha$  раскрыва отверстия. Видно, что зависимость R от этих параметров носит ярко выраженный резонансный характер.

Если сделать допущение, что сфера с отверстием не обладает резонансными свойствами (т. е. в зависимости R от ka и  $\alpha$  отсутствуют ярко выраженные резонансные максимумы), то представленный график имел бы волнообразный характер. При этом расстояние между вершинами гребней волн при фиксированном  $\alpha$  (в зависимости R от a) составляет  $\lambda/2$ , где  $\lambda$  — длина волны, что имеет место в случае рассеяния волн на круглом диске. Однако сфера с отверстием является открытым резонатором, для которого выше (см. рис. 2) были приведены графики зависимостей собственных частот от угла раскрыва отверстия  $\alpha$  в диапазоне  $4 < \operatorname{Re}(ka) < 16$ . Сравнивая рис. 2 и 4, можно сделать вывод, что явно выраженные изменения R происходят в окрестности реальных частей собственных частот. При этом наблюдается определённая регулярность в распределении максимумов функции  $R \equiv R(ka, \alpha)$ .

Обратимся теперь к более детальному изучению поведения R в окрестности резонансных частот.

Во-первых, сопротивление излучения испытывает вблизи резонансов явление «двойного экстремума», оставаясь порядка единицы вне резонансов. Под явлением двойного экстремума понимается эффект наличия ярко выраженных максимума и минимума R в малой окрестности собственной частоты (рис.  $4\sigma$ ). Из результатов расчёта следует, что при переходе ka через значение соответствующей собственной частоты фаза рассеянного поля увеличивается на  $\pi$  (эффект переворота фазы). Увеличение фазы на  $\pi$  для высокодобротных резонансов происходит на столь малом интервале изменения ka, что можно считать на нём фазу источника постоянной. Полное поле на бесконечности (сумма поля источника и рассеянного поля) существенным образом зависит от соотношения фаз этих полей. Когда рассеянное поле плавно меняет фазу на  $\pi$ , оно может складываться с полем источника как в фазе, так и в противофазе. После интегрирования по всем направлениям (по бесконечно удалённой сферической поверхности) как раз и получается эффект двойного экстремума. То, что картина образования двойного экстремума R именно такова, можно показать аналитически при малых углах  $\alpha$ . Отметим, что эффект двойного экстремума наблюдается также в случаях рассеяния на незамкнутом сферическом экране плоской электромагнитной волны [11] и поля вертикального электрического диполя [12, 13].

Во-вторых, на поведение R существенное влияние оказывает наличие междутиповой связи колебаний. Обратимся к рис. 4a, где в увеличенном масштабе приведено распределение  $R(ka,\alpha)$  в окрестности реальных частей собственных частот, отвечающих колебаниям  $H_{061}$  и  $H_{032}$ . При малых значениях  $\alpha$  имеется два резонанса R. Далее эти резонансные пики сближаются и происходит изменение в поведении R, соответствующее поведению собственных частот и добротностей колебаний  $H_{061}$  и  $H_{032}$  (см. рис. 3), а именно: колебание  $H_{032}$  передаёт часть энергии колебанию  $H_{061}$ , что приводит к тому, что

амплитуда сопротивления излучения заметно увеличивается даже между гребнями R, достигая некоторого максимального значения. Затем происходит сближение резонансных всплесков R, отвечающих колебаниям  $H_{032}$  и  $H_{061}$ . Таким образом, наблюдаемое здесь распределение R имеет существенные отличия как от регулярного распределения, так и от распределения, отвечающего эффекту двойного экстремума. Следует добавить, что в этой ситуации имеется узкий частотный диапазон и достаточно

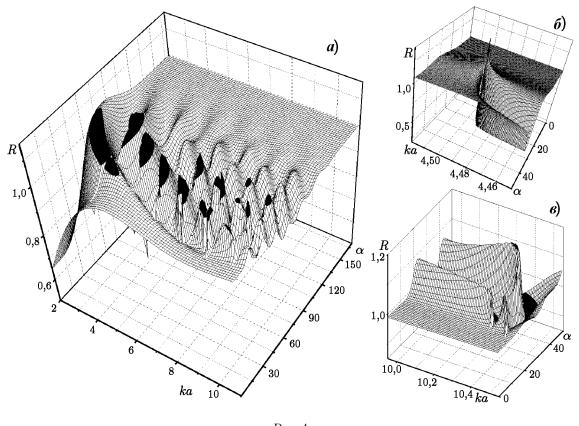


Рис. 4

широкий диапазон по углу  $\alpha$ , где R примерно сохраняет своё резонансное значение. Этот факт может быть учтён, например, при наличии погрешностей изготовления рассматриваемого в работе сферического резонатора.

В заключение отметим, что при внутреннем возбуждении (диполь расположен внутри резонатора) описанные выше закономерности также имеют место, но являются менее выраженными (по крайней мере, графически), что связано с тем, что в окрестности реальных частей собственных частот высокодобротных колебаний нормированное сопротивление излучения диполя R может на порядок и более превосходить значения R при внешнем возбуждении.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1. Свищёв Ю. В., Тучкин Ю. А. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1998. Т. 38, № 2. С. 262.
- 2. Иванов Е. А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техника,  $1968. 584 \, \mathrm{c}.$
- 3. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров: определения, теоремы, формулы. М.: Наука, 1984. 832 с.
- 4. Тучкин Ю. А., Шестопалов В. П. // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 4. С. 663.

- 5. Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны. М.: Советское радио, 1957. 582 с.
- 6. Кошпаренок В. Н., Мележик П. Н., Поединчук А. Е., Шестопалов В. П. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1985. Т. 25, № 4. С. 562.
- 7. Поединчук А. Е., Тучкин Ю. А., Шестопалов В. П. // ДАН СССР. 1987. Т. 295, № 6. С. 1358.
- 8. Мигулин В. В., Медведев В. И., Мустель Е. П. и др. Основы теории колебаний. М.: Наука,  $1978. 329 \,\mathrm{c}.$
- 9. Мележик П. Н., Поединчук А. Е., Тучкин Ю. А., Шестопалов В. П. // ДАН СССР. 1988. Т. 300, № 6. С. 1356.
- 10. Свищёв Ю. В., Тучкин Ю. А., Шестопалов В. П. // ДАН СССР. 1990. Т. 312, № 5. С. 1111.
- 11. Виноградов С. С. // Изв. вуз. Радиофизика. 1983. Т. 26, № 1. С. 91.
- 12. Тучкин Ю. А. Рассеяние электромагнитных волн на двух концентрических сферических сегментах: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Харьков: ХГУ, 1982.
- 13. Свищёв Ю.В. Метод полуобращения в теории дифракции волн на незамкнутых сферических экранах: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Харьков: ХГУ, 1989.

Институт радиофизики и электроники НАН Украины, г. Харьков, Украина

Поступила в редакцию 6 декабря 1999 г.

# THE FIELD OF A VERTICAL MAGNETIC DIPOLE IN THE PRESENCE OF A SPHERE WITH A CIRCULAR APERTURE

Yu. V. Svishchov

We consider diffraction of an arbitrary monochromatic electromagnetic wave on and ideal thin sphere with a circular aperture. The initial boundary-value problem is reduced to the system of linear algebraic equations (I + H)x = b, where  $x, b \in l_2$ , **H** is a compact operator. The spectra of natural frequencies of a sphere with a circular aperture, which correspond to axisymmetric oscillations of magnetic type, are calculated. The influence of the resonance regimes (in particularly,the transformation modes) of the structure considered on its scattering features is analyzed.

УДК 534.26

## ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ЗОННАЯ ЛИНЗА

### Д. А. Касьянов

В статье излагается теория зонной линзы на цилиндрической апертуре. Показано, что закон образования зон Френеля на расходящемся цилиндрическом фронте существенно отличается от плоского и сферического случаев. В широкой области параметров описана конфигурация поля, создаваемого цилиндрической зонной линзой. Экспериментально исследована дифракция вблизи фокуса рассматриваемой системы. Найдены и исследованы различные варианты цилиндрической зонной линзы.

В [1, 2] рассмотрен ряд вопросов, связанных с возможностью компенсации цилиндрической расходимости в ближнем поле квазилинейных антенн с помощью непрерывных фокусирующих фазовых распределений вдоль расходящейся цилиндрической апертуры.

Известно, что фокусировку можно создать и дискретным распределением фазы. Ярким примером тому являются хорошо исследованные зонные пластинки и линзы [3-5]. Известно также, что с точки зрения фокусирующих свойств зонные системы в принципе не могут конкурировать с системами с непрерывным распределением фазы. Так, в [4] показано, а в [6] экспериментально подтверждено, что в классической задаче при падении плоской волны на систему цилиндрических колец в случае, если они образуют зонную пластинку, в фокусе собирается в  $\pi^2$  раз меньше энергии, чем падает, а если кольца образуют линзу — в  $\pi^2/4$  раз меньше. Единственным достоинством зонных пластинок с точки зрения фокусирующих свойств может оказаться простота исполнения, особенно в случае излучающих систем. Действительно, создание квазинепрерывных фазовых распределений целесообразно только в приёмных антеннах, а в излучающих силовых антеннах этот путь наталкивается на часто непреодолимые сложности в создании линий задержки с устойчивыми параметрами, способных пропускать большие мощности, особенно если антенны предназначаются для работы в жёстких условиях (высокие давление и температура), например в скважинах или в морской гидроакустике на большой глубине. Таким образом, в определённых ситуациях дифракционный способ фокусирования может оказаться более пригодным по совокупности свойств, чем фазовый. Примером является скважинная акустика, где для компенсации цилиндрической расходимости идеальное применение могут найти цилиндрические зонные линзы [7, 8]. Если теория создания зонных структур на плоскости и на сфере достаточно хорошо разработана, то теории зонной линзы и пластинки на цилиндрической апертуре не существует.

Ниже построена теория зонных структур, созданных системой колец на расходящейся цилиндрической апертуре, и рассмотрены их возможности в плане компенсации цилиндрической расходимости поля.

В теории дифракции задача об излучении кольца или системы колец на цилиндре весьма популярна (см. [9—11] и др.), не говоря уже о задачах рассеяния на подобных структурах. Однако при всём многообразии подходов и постановок задач никто не интересовался ранее вопросом: какие структуры необходимо создать на цилиндрической апертуре, чтобы скомпенсировать цилиндрическую расходимость хотя бы в зоне дифракции Френеля. Интуитивно ясно, что такая структура есть цилиндрический аналог зонной линзы (пластинки), неясен лишь закон образования зонной линзы на цилиндрической апертуре. Теория плоской зонной линзы [4] при достаточно большом количестве зон Френеля для поля в фокальной области даёт решение в виде суммы плоской волны и полей, создаваемых краями зон Френеля. При построении теории цилиндрической зонной линзы также логично было бы прежде всего поинтересоваться, при каких условиях цилиндрически расходящаяся волна и поправка, возникающая из-за ограничения апертуры, находятся в фазе в некоторой точке пространства.

Рассмотрим задачу в следующей простой и наглядной постановке. На бесконечном цилиндрическом экране находится кольцевая область, где выполняются следующие граничные условия:

$$-\frac{\partial \psi}{\partial r}\Big|_{r=r_0} = \begin{cases} V_0, & -h \le z' \le h, \\ 0, & |z'| > h. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь  $\psi$  — потенциал колебательной скорости, удовлетворяющий уравнению Гельмгольца, (r,z) — цилиндрические координаты точки наблюдения, (r',z') — цилиндрические координаты точек источника,  $V_0$  — начальная колебательная скорость,  $r_0$  и h — начальный радиус и размер излучающей области по оси z.

Решение будем искать с помощью метода Рэлея, используя функцию Грина кольца (ФГК) вида

$$\Phi\Gamma K = \frac{\exp\left(-ikQ\sqrt{(r-r')^2 + (z-z')^2}\right)}{2\sqrt{(r-r')^2 + (z-z')^2}},$$
(2)

где  $Q=\sqrt[4]{1+\frac{4rr'}{(r-r')^2+(z-z')^2}}$ , полученную в [12] в предположении  $\frac{4rr'}{(r-r')^2+(z-z')^2}\ll 1$ . Сводя решение уравнения Гельмгольца к одному интегралу по z', получим

$$\psi = -\frac{V_0 r_0}{2} \int_{-h}^{h} \frac{\exp\left(-ikQ\sqrt{(r - r_0)^2 + (z - z')^2}\right)}{\sqrt{(r - r_0)^2 + (z - z')^2}} \,dz',\tag{3}$$

где k — волновое число.

Полагая kz'=0 под корнем четвёртой степени (точность от этого действия не изменяется), нетрудно получить, что интеграл в (3) представляет из себя сумму неполных цилиндрических функций Ханкеля второго рода нулевого порядка:

$$\psi = \frac{iV_0 r_0 \pi}{4} \left[ H_0^{(2)} \left( \operatorname{arcch} \sqrt{\left(\frac{h+z}{r-r_0}\right)^2 + 1}, k (r-r_0) Q \right) + H_0^{(2)} \left( \operatorname{arcch} \sqrt{\left(\frac{h-z}{r-r_0}\right)^2 + 1}, k (r-r_0) Q \right) \right].$$
(4)

Формула (4) получена лишь в предположении  $4rr_0\ll (r-r_0)^2+z^2$  и, вообще говоря, может быть основой для исследования поля излучения кольца на цилиндре. Функции типа  $H_0^{(2)}(\omega,z)$  исследованы в [13]. Производные  $\partial\psi/\partial r$  и  $\partial\psi/\partial z$ , необходимые для исследования поля скоростей, определяются с помощью рекуррентных соотношений для неполных цилиндрических функций и интегралов от них, которые получить достаточно просто: интегрируя по частям соответствующие обобщения интеграла в (3) или действуя по аналогии с получением рекуррентных соотношений для полных цилиндрических функций. В полученые соотношения войдут лишь неполные цилиндрические функции разных порядков, функции Струве, интегральные показательные и элементарные функции, т. е. задача численных расчётов серьёзно не усложнится.

Необходимо, правда, отметить некоторую противоречивость вывода формулы (4). Действительно, излучающую часть цилиндрической поверхности пришлось дополнить поверхностью, на которой потенциал и его нормальная производная обращаются в нуль. Но раз это так на конечном участке поверхности, то потенциал должен обращаться в нуль во всей рассматриваемой области (см., например, [14]).

Фактически, это означает, что с точки зрения строгой теории формула Грина неприменима для расчёта полей ограниченных излучателей. Таким образом, нельзя с достаточной степенью математической строгости заменить в (3) бесконечные пределы интегрирования на конечные. Однако основание это сделать всё-таки есть, при этом выражение останется весьма наглядным и будет иметь простой физический смысл — суммирование полей, излучаемых каждой точкой поверхности, колеблющейся со скоростью  $V_0$ . Кроме того, подобные основанные на ясном физическом смысле упрощения позволяют вычислять дифракционную структуру полей с достаточной для практики степенью точности (см., например, [3]). Более того, когда удаётся найти точное решение для поля, оно часто совпадает с решением, полученным при подобных упрощениях [3].

Попробуем, однако, преобразовать (4) к более наглядному и простому для анализа виду. Для этого воспользуемся асимптотикой для функции  $H_0^{(2)}(x,y)$ , полученной в [2] в предположении  $y \operatorname{ch} x \gg 1$ . В результате получим

$$\psi = iV_{0}r_{0}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\exp\left\{i\pi/4 - ik\left(r - r_{0}\right)Q\right\}}{\sqrt{k(r - r_{0})Q}} + \frac{(-1)^{3/2}V_{0}r_{0}}{2kQ} \times \left[\frac{\exp\left\{-ik\sqrt{(h + z)^{2} + (r - r_{0})^{2}}Q\right\}}{h + z} {}_{2}F_{0}\left(\frac{1}{2}; 1; \frac{i2\left(r - r_{0}\right)\sqrt{\left(\frac{h + z}{r - r_{0}}\right)^{2} + 1}}{k\left(h + z\right)^{2}Q}\right) + \frac{\exp\left\{-ik\sqrt{(h - z)^{2} + (r - r_{0})^{2}}Q\right\}}{h - z} {}_{2}F_{0}\left(\frac{1}{2}; 1; \frac{i2\left(r - r_{0}\right)\sqrt{\left(\frac{h - z}{r - r_{0}}\right)^{2} + 1}}{k\left(h - z\right)^{2}Q}\right)\right], \tag{5}$$

где  ${}_2F_0(\alpha;\beta;x)=\sum_{n=0}^\infty (\alpha)_n(\beta)_n\,x^n/n!$  — обобщённая гипергеометрическая функция,  $(\alpha)_n,(\beta)_n$  — символы Похгаммера.

Дальнейшее упрощение требует предположения

$$\frac{k(h \pm z)^2 Q}{2\sqrt{(h \pm z)^2 + (r - r_0)^2}} \gg 1,$$

которое легче всего выполнить в плоскости kz=0 при  $kh\gg 1$ , что не противоречит предыдущим предположениям. Ограничившись первыми двумя членами разложения функции  $_2F_0$ , получим, что при  $kz=0,\ 4rr_0\ll (r-r_0)^2+z^2,\ kh\gg 1$  потенциал  $\psi$  может быть представлен в виде

$$\psi = iV_0 r_0 \left[ \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\exp\left\{i\pi/4 - ik(r - r_0)Q\right\}}{\sqrt{k(r - r_0)Q}} - \frac{\exp\left\{-ikQ\sqrt{h^2 + (r - r_0)^2}\right\}}{khQ} \right].$$
 (6)

Теперь выберем на оси kr точку kr = kF и зададимся естественным вопросом: при каких условиях, налагаемых на h, основное поле (первый член в (6)) и концевая поправка (второй член в (6)) будут в этой точке в фазе либо в противофазе?

Условие оказывается таким:

$$h_n = \sqrt{\frac{(n\lambda/2 - \lambda/8)^2}{\sqrt{1 + 4r_0/F}} + \frac{(n - 1/4)\lambda F}{\sqrt[4]{1 + 4r_0/F}}},$$
(7)

где  $n=1,2,3,\ldots$ , при чётном n фазы первого и второго слагаемых в (6) равны (с точностью до  $2\pi$ ), при нечётном n фазы отличаются на  $\pi$ .

Напомним, что в плоском, классическом случае подобное (7) условие имеет иной вид:  $h_n = \sqrt{n\lambda F + (n\lambda/2)^2}$ .

Разница в определении  $h_n$ , т. е. размеров зон Френеля, возникла по следующей причине. Возьмём часть классической задачи: плоская волна падает на экран с отверстием, поле за экраном (конечно, в некотором приближении) представляет собой сумму плоской и сферической волн, у этих волн нет между собой сдвига фаз. В случае же кольца на цилиндре складываются сферические волны, описывающие ограниченность апертуры, и расходящаяся цилиндрическая волна, фаза которой сдвинута в асимптотическом пределе относительно сферических волн на  $\pi/4$ . Этот сдвиг и порождает в нашем случае уменьшение размера зон Френеля по сравнению с классическим.

Перейдём к задаче о зонной линзе. Пусть на бесконечном жёстком цилиндре радиуса  $r_0$  существует система колец, где выполняются следующие граничные условия:

$$-\frac{\partial \psi}{\partial r}\Big|_{r=r_0} = \begin{cases} 0, & |z| > h_{n+1}; \\ V_0, & z \in [-h_1; h_1], [h_2; h_3], [-h_3; -h_2], [h_4, h_5], [-h_5, -h_4], \dots; \\ -V_0, & z \in [h_1; h_2[,] - h_2; -h_1[,] h_3, h_4[,] - h_4, -h_3[, \dots] \end{cases}$$
(8)

Используя (5), нетрудно получить решение задачи с граничными условиями (8) в предположении  $k (h \pm z)^2 Q \gg 2 \sqrt{(h \pm z)^2 + (r - r_0)^2}$ :

$$\psi = iV_{0}r_{0} \left[ \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\exp\left\{ i\pi/4 - ik\left(r - r_{0}\right)Q\right\}}{\sqrt{k\left(r - r_{0}\right)Q}} - \left\{ \left( \frac{\exp\left\{ -ikQ\sqrt{(h_{1} + z)^{2} + (r - r_{0})^{2}}\right\}}{k(h_{1} + z)Q} + \frac{\exp\left\{ -ikQ\sqrt{(h_{1} - z)^{2} + (r - r_{0})^{2}}\right\}}{k\left(h_{1} - z\right)Q} \right\} + \dots + \left( -1\right)^{n-1} \left( \frac{\exp\left\{ -ikQ\sqrt{(h_{n} + z)^{2} + (r - r_{0})^{2}}\right\}}{k\left(h_{n} + z\right)Q} + \frac{\exp\left\{ -ikQ\sqrt{(h_{n} - z)^{2} + (r - r_{0})^{2}}\right\}}{k\left(h_{n} - z\right)Q} \right\} - \left( \frac{-1}{2} \left( \frac{\exp\left\{ -ikQ\sqrt{(h_{n+1} + z)^{2} + (r - r_{0})^{2}}\right\}}{k\left(h_{n+1} + z\right)Q} + \frac{\exp\left\{ -ikQ\sqrt{(h_{n+1} - z)^{2} + (r - r_{0})^{2}}\right\}}{k\left(h_{n+1} - z\right)Q} \right) \right]. (9)$$

По своей структуре выражение (9) похоже на решение, полученное  $\Gamma$ . Д. Малюжинцем для классической зонной линзы [4]: значительный вклад дают только концы зон Френеля.

Определим теперь точку kr = kF. Возьмём  $h_n$  в виде (7) и, пренебрегая членами порядка  $(r_0/F)^2$  и  $(\lambda/F)^2$ , получим следующее представление для потенциала  $\psi$  цилиндрической зонной линзы в точке kz = 0, kr = kF:

$$\psi = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{iV_0 r_0 \exp\left\{i\pi/4 - ikFQ_0\right\}}{\sqrt{kFQ_0}} \left[1 + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^n \left(m - 1/4\right)^{-1/2} + \frac{1}{\pi} \left(n + 3/4\right)^{-1/2}\right], \quad (10)$$

где  $Q_0 = \sqrt[4]{1 + 4r_0/F}$ . Для зонной пластинки также нетрудно получить, что

$$\psi = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{iV_0 r_0 \exp\left\{i\pi/4 - ikFQ_0\right\}}{\sqrt{kFQ_0}} \left[1 + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{n+1} \left(m - 1/4\right)^{-1/2}\right]. \tag{11}$$

Коэффициенты усиления по давлению в фокусах F зонных линзы и пластинки  $K_p^{\Pi,\Pi}=P_F/P_0$ , для n зон Френеля равны соответственно

$$K_p^{\Pi} = \sqrt{\frac{\pi}{2kFQ_0}} \left[ 1 + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{n} \left( m - 1/4 \right)^{-1/2} + \frac{1}{\pi} \left( n + 3/4 \right)^{-1/2} \right],$$

$$K_p^{\Pi} = \sqrt{\frac{\pi}{2kFQ_0}} \left[ 1 + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{n+1} \left( m - 1/4 \right)^{-1/2} \right].$$
(12)

Коэффициенты усиления по радиальной скорости  $v_r$  имеют вид

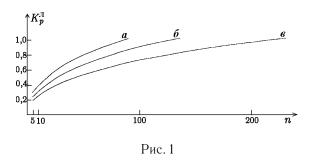
$$K_{v_r}^{\Pi} = \sqrt{\frac{\pi Q_0}{2kF}} \left\{ 1 + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{n} \left[ (m - 1/4) \left( 1 + \frac{2\pi (m - 1/4)}{kFQ_0} \right) \right]^{-1/2} + \frac{1}{\pi} \left[ (n + 3/4) \left( 1 + \frac{2\pi (n + 3/4)}{kFQ_0} \right) \right]^{-1/2} \right\},$$

$$K_{v_r}^{\Pi} = \sqrt{\frac{\pi Q_0}{2kF}} \left\{ 1 + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{n+1} \left[ (m - 1/4) \left( 1 + \frac{2\pi (m - 1/4)}{kFQ_0} \right) \right]^{-1/2} \right\}.$$
(13)

Переход от (9) к давлению и радиальной скорости осуществлялся по общеизвестным формулам. Коэффициент усиления плотности потока мощности, переносимой полем в направлении r через точку F, находится в данном случае перемножением  $K_p$  и  $K_{v_r}$ .

О числовых значениях коэффициентов усиления (12) и (13) можно говорить только при конечных n, т. к. ряды во всех выражениях для  $K_p$  и  $K_{v_r}$  сходятся достаточно плохо. Сумма  $\sum_{m=1}^n (m-1/4)^{-1/2}$  близка к известной функции, называемой неполной дзета-функцией Римана, которая табулирована.

Рассмотрим, к примеру, зонную линзу из десяти зон. Если  $kF \sim 600~(F/h_{10}$  при этом около 3), то  $K_p^{\rm JI} \approx 0.21$ ; при фазовом параболическом фокусировании [1], если апертура  $2a \sim 2h_{10},~K_p \approx 0.27$ ; если  $kF \sim 300~(F/h_{10}$  в этом случае немногим более 2), то  $K_p^{\rm JI} \approx 0.31$ , а  $K_p \approx 0.38$ .



В случае зонной линзы можно варьировать только один параметр: либо размеры зоны Френеля  $h_n$ , либо фокусное расстояние F, причём в той области переменных r и z, где верны выражения (5)—(9),  $F \gtrsim 2h_n$ . Если сформулировать адекватную задачу о фазовой фокусировке, то будет очевидно, что при условии  $F \gtrsim 2a$  (при этом  $K_p = \sqrt{\pi/2} \, a/F \, [1]$ )  $K_p \sim K_p^{\Pi}$ , т. е. зонная линза практически не уступает модели, когда фокусирование производится гладким параболическим распреде-

лением (однако в разы уступает модели фокусирования со сферическим начальным распределением фазы).

Теоретически можно поднять  $K_p^{\Pi}$  до 1 и более, увеличивая при этом количество зон Френеля, число которых возрастает до сотни (на рис. 1 представлена зависимость  $K_p^{\Pi}$  от числа зон n при разных kF:

 $kF=200,\ kr_0=1-a$ );  $kF=300,\ kr_0=1-b$ );  $kF=500,\ kr_0=1-b$ )). Однако это плохо реализуемо технически: реальны антенны из 10-15, максимум 20-ти зон Френеля с коэффициентами усиления  $K_p^{\Pi}$  не более  $0.5\div0.6$ . При  $n\le20$  коэффициенты усиления  $K_p^{\Pi}$  и  $K_{v_r}^{\Pi}$  с высокой точностью равны.

Структура поля между начальной апертурой и фокусом при использовании зонного принципа сложнее, чем в случае фазовой фокусировки. На рис. 2 представлен процесс формирования поля зонной линзы вдоль оси kr: a) — поле ограниченного цилиндра с размерами, равными одной зоне Френеля,  $\delta$ ) — поле 2-х зон Френеля,  $\delta$ ) — 3-х зон,  $\epsilon$ ) — 9-ти зон,  $\delta$ ) — 15-ти зон; все зависимости построены для kF=200,  $kr_0=1$ . Из представленных зависимостей видно, что участок, где происходит относительная компенсация цилиндрической расходимости дифракционной сходимостью, определяется, по существу, двумя—тремя зонами Френеля, а увеличение количества зон приводит к росту основного максимума и усложнению структуры поля в ближней зоне. Положение минимума поля (точки  $kr_{\min}$ ) не зависит от количества зон и слабо зависит от kF и  $kr_0$ ; положение максимума с увеличением количества зон стремится к kF. При достаточно большом количестве зон выполняется следующее неравенство:  $2,5 \le kF/(kr_{\min}) \le 2,7$ ; разброс в положении  $kr_{\min}$  связан со слабой зависимостью от kF. Таким образом, здесь, подобно [1], можно ввести коэффициент усиления K, равный отношению амплитуд давления в фокусе и в точке минимума поля. Сделаем это, например, для зонной линзы. Поведение поля в точке  $kr_{\min}$ , как это легко показать (см. (9)), в основном определяется первым слагаемым в (9), при этом коэффициенты усиления можно записать в виде

$$\tilde{K}_{p}^{\Pi} \sim \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ 1 + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{m-1/4}} + \frac{1}{\pi \sqrt{n+3/4}} \right\}, 
\tilde{K}_{v_{r}}^{\Pi} \sim \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ 1 + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{n} \left[ (m-1/4) \left( 1 + \frac{2\pi (m-1/4)}{kFQ_{0}} \right) \right]^{-1/2} + \frac{1}{\pi} \left[ (n+3/4) \left( 1 + \frac{2\pi (n+3/4)}{kFQ_{0}} \right) \right]^{-1/2} \right\}.$$
(14)

Эти коэффициенты усиления уже могут достигать порядка, что особенно важно для нелинейных приложений фокусировки цилиндрических расходящихся волн [15—17].

Поведение поля зонной линзы вдоль оси kz также разнообразнее, чем в случае гладких распределений, рассмотренных в [1]. В качестве примера на рис. З представлено поведение поля зонной линзы из 9-ти зон Френеля при kF=250,  $kr_0=3$  для различных kz.

Принципиальное различие законов распределения зон Френеля в классическом случае и в случае расходящегося цилиндрического фронта явилось достаточно неожиданным фактом, требующим, вообще говоря, экспериментального подтверждения.

Для проведения опытов был создан ряд цилиндрических протяжённых антенн. Антенны собирались из пьезокерамических (ЦТС-19) элементов с внешним и внутренним диаметрами соответственно 22 и 10 мм и высотой 4,8 мм, элементы изолировались друг от друга резиновыми прокладками. Апертура набиралась из 30—40 элементов. Элементы объединялись в группы (зоны) таким образом, чтобы выполнялось приближённое равенство  $h_n \approx \sqrt{(n-1/4)\,\lambda F}$ , где  $h_n$  — координата вдоль образующей цилиндра, соответствующая концу n-й зоны Френеля,  $\lambda$  — длина волны, F — расстояние до фокуса, которое выбиралось равным  $20\div30$  см. Элементы, объединённые в зоны, включались таким образом, чтобы формировалась зонная линза, т. е. соседние зоны запитывались в противофазе. Кроме того, были сделаны антенна, имитирующая простую цилиндрическую расходимость, и антенна с распределением зон по начальной апертуре, соответствующим плоскому или сферическому случаям, т. е.  $h_n \approx \sqrt{n\lambda F}$ .

Эксперименты проводились в воде, в ванне с высотой и диаметром 1 м с заглушёнными стенками, оснащённой координатным устройством, дающим точность перемещения порядка 0,1 мм по трём

осям. Измерения выполнялись миниатюрным плёночным гидрофоном с размерами  $1,5 \times 1,5 \times 0,1$  мм и чувствительностью около 0,1 мкВ/Па. При калибровке плёночного гидрофона методом взаимности (в качестве эталона использовался резонансный для экспериментальных антенн пьезокерамический элемент с заранее известной АЧХ; измерения проводились в однородном цилиндрически расходящемся поле) было установлено, что погрешность измерения поля этим гидрофоном в используемой полосе частот не превышает  $5 \cdot 10^{-3}$  мкВ/Па.

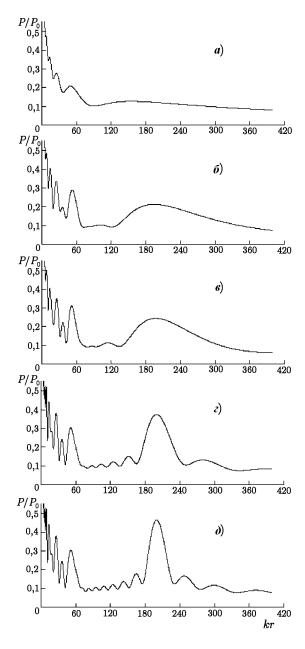


Рис. 2

На рис. 4, 5 представлены теоретические (a) и экспериментальные (b) зависимости (b) на рис. 4 будет сказано ниже) давления, создаваемого зонной линзой вдоль фокальной плоскости (kz=0) при  $kF=200, kr_0=3$  — рис. 4;  $kF=250, kr_0=3$  — рис. 5. Для экспериментов использовались зонные линзы с 9-ю зонами Френеля. Резонансная частота антенн была равна 238 кГц.

Из рис. 4, 5 видно, что теоретические и экспериментальные кривые особенно хорошо соответствуют друг другу в области главного максимума. Экспериментальный и теоретический (формула (12)) коэффициенты усиления исследуемого фазового фронта оказались равны:  $K_p^{\Pi} \approx 0.38$  в случае kF=200 и  $K_p^{\Pi} \approx 0.33$  в случае kF=250.

На рис. 6 показано, что теоретические кривые и экспериментальные точки соответствуют друг другу и в плоскостях  $kz \neq 0$ . Теоретические и экспериментальные зависимости построены для зонной линзы n=9, kF=200, f=238 к $\Gamma$ ц,  $kr_0=3$ .

На рис. 7, 8 представлены распределения полей соответственно в фокальной плоскости и вдоль образующей фокального цилиндра, созданные тремя антеннами, отличающимися лишь распределением фазы по начальной апертуре: a) — зонная линза, собранная по закону  $h_n \sim \sqrt{(n-1/4)\,\lambda F}$  (n=9, f=238 кГц, kF=200,  $kr_0=3$ );  $\delta$ ) — зонная линза, собранная по «плоскому» закону  $h_n \sim \sqrt{n\lambda F}$  (n=9, f=238 кГц, kF=200,  $kr_0=3$ );  $\delta$ ) — антенна с постоянным распределением фазы вдоль начальной апертуры, имитирующая простую цилиндрическую расходимость, с размером апертуры приблизительно  $2h_9$ , f=238 кГц,  $kr_0=3$ .

Изготовление зонной линзы обычным образом, т. е. непрерывное заполнение начальной апертуры элементами, объединёнными по определённому закону в зоны с противофазным включением, не исчерпывает технических возможностей, которые да-

ют формулы (9)—(11). Структура приближённого выражения для потенциала поля, создаваемого зонной линзой (9), такова, что вклад в поле дают только концы зон Френеля. Была сделана антенна, непосредственно следуя выражению (9), т. е. с не полностью заполненной апертурой. Технологи-

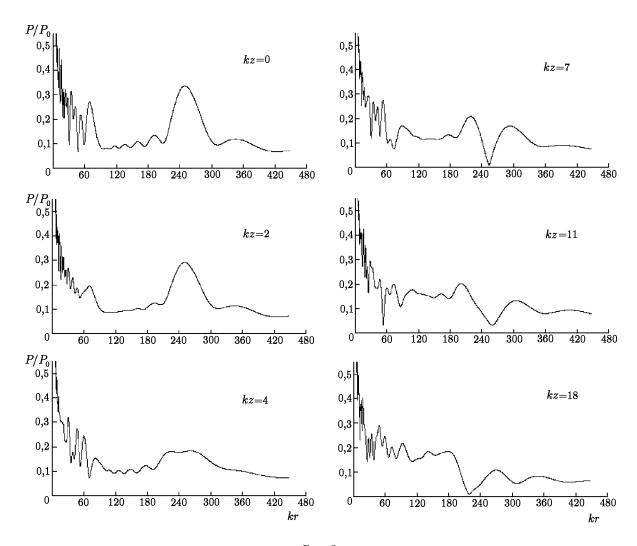


Рис. 3

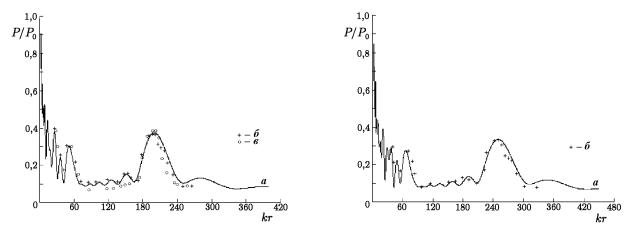
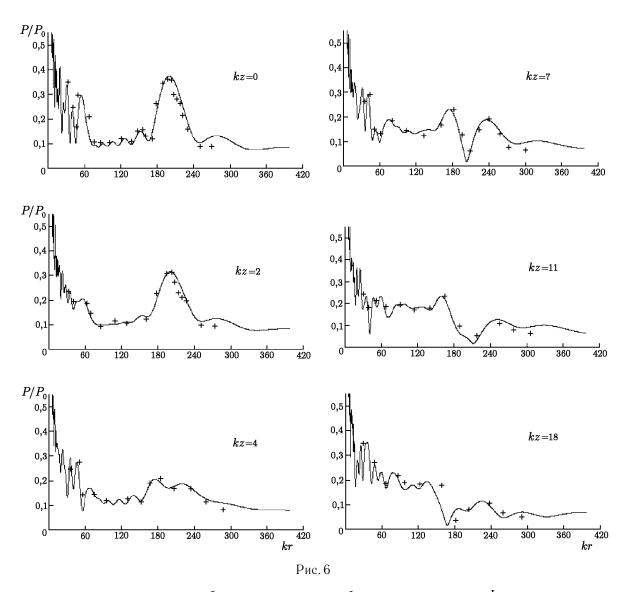


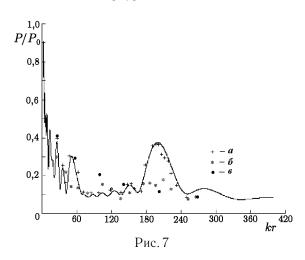
Рис. 4



чески это выглядело следующим образом: полностью собиралась первая зона Френеля, затем в точки  $h_n = \sqrt{(n-1/4)\,\lambda F}$  (для n>1), т. е. в границы зон, ставилось по одному керамическому элементу. Первая зона, элемент между второй и третьей зонами, четвёртой и пятой зонами и т. д. были в фазе, остальные — в противофазе. На рис. 4 представлены распределения полей, создаваемых антеннами с заполненной (6) и незаполненной (8) апертурами при прочих равных параметрах, т. е. при f=238 кГц,  $kF = 200, kr_0 = 3, 9$ -ти зон Френеля и одном и том же давлении  $P_0$  (давление измерялось в области первой зоны Френеля). Сравнивая зависимости  $\delta$ ) и  $\beta$ ) на рис. 4, можно сделать следующие выводы. По коэффициенту усиления антенна с неполностью заполненной апертурой ( $K_p^{\Pi} \approx 0{,}41$ ) не только не уступает, но даже превосходит антенну с заполненной апертурой ( $K_p^{\Pi} \approx 0.38$ ), хотя излучающих элементов в незаполненной апертуре на четверть меньше. Главный максимум у антенны с незаполненной апертурой несколько уже:  $7\lambda$  по уровню 0.5 против  $9\lambda$  у антенны с заполненной апертурой. Распределение поля между начальной апертурой и главным максимумом в случае незаполненной апертуры имеет более равномерный характер и меньшую амплитуду, чем в случае заполненной апертуры. Это обстоятельство существенно при использовании антенн, сделанных по рассмотренному принципу, в качестве скважинных для решения различных задач геотехнологии. В задачах воздействия необходим как можно больший уровень звукового давления в прискважинной зоне, поэтому желательно исполь-

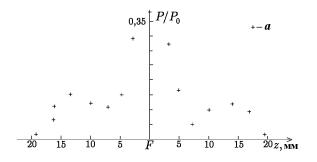
зовать антенны с полностью заполненной апертурой. Но есть задачи, когда необходима контрастность по полю, например при исследовании нелинейных параметров околоскважинного пространства [15—17], и здесь более эффективны антенны с неполностью заполненной апертурой.

Модельная антенна с неполностью заполненной апертурой была коммутируемой, т. е. существовала возможность изменить фазы включения элементов. Был проведён эксперимент с антенной с неполностью заполненной апертурой, у которой фаза первой зоны осталась такой же, как и в предыдущем эксперименте, а у всех элементов, стоящих между зонами, фазы были изменены на противоположные, причём количество элементов в первой зоне равнялось всему оставшемуся количеству элементов. Оказалось, что фокальная область данной антенны является тором с минимальной амплитудой поля в центре тора и с максимальной на краях, тор вытянут вдоль фокальной плоскости. Расстояние вдоль образующей фокального цилиндра между областя-



ми с минимальной и максимальной амплитудами не превышает  $\lambda$ . На рис. 9 представлены распределения амплитуды давления в трёх плоскостях: a) — в фокальной плоскости,  $\delta$ ) и s) — в плоскостях, секущих начальную апертуру и фокальный тор в областях максимальной амплитуды ( $n=9, kF=200, kr_0=3, f=238$  к $\Gamma$ ц).

В точке фокуса произошла взаимная компенсация полей от первой зоны Френеля и от остальных элементов, и область фазового синхронизма теперь представляет собой оболочку тора. Маловероятно, однако, что подобное распределение поля найдёт себе место в приложениях. Что касается вообще



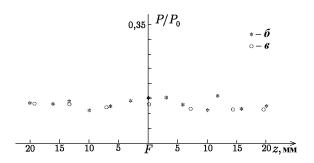
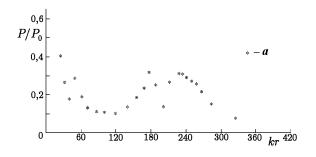


Рис. 8



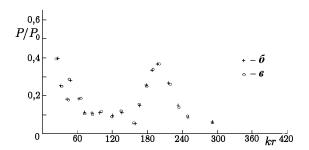


Рис. 9

цилиндрических зонных линз, то им, по всей видимости, нет альтернативы при решении задач акустической интенсификации различных скважинных геотехнологических процессов, особенно при воздействии на ближнюю зону коллектора добычных или закачных скважин.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 00-02-16156).

#### **ЛИТЕРАТУРА**

- 1. Қасьянов Д. А. // Акуст. ж. 1993. Т. 39, вып. 6. С. 1076.
- 2. Касьянов Д. А. // Акуст. ж. 1994. Т. 40, вып. 1. С. 76.
- 3. Қаневский И. Н. Фокусирование звуковых и ультразвуковых волн. М.: Наука, 1977. 336 с.
- 4. Малюжинец Г. Д. // ДАН СССР. 1946. Т. 54, № 5. С. 403.
- 5. Горелик Г. С. Қолебания и волны. M.: Физматгиз, 1959.  $572\,\mathrm{c}$ .
- 6. Карпачева А. А., Розенберг Л. Д., Тартаковский Б. Д. // ДАН СССР. 1947. Т. 57, № 3. С. 239.
- 7. Пат.№ 1817033. СССР. Устройство для возбуждения акустических волн в межскважинной среде / Касьянов Д. А., Шалашов Г. М.
- 8. Пат.№ 1819468. СССР. Устройство для возбуждения акустических волн в межскважинной среде / Касьянов Д. А., Шалашов Г. М.
- 9. Шендеров Е. Л. Излучение и рассеяние звука. Л.: Судостроение, 1989. 304 с.
- 10. Лепендин Л. П. Акустика. М.: Высшая школа, 1978. C. 448.
- 11. Васильев Е. Н. Возбуждение тел вращения. М.: Радио и связь, 1987. 272 с.
- 12. Касьянов Д. А. // Акуст. ж. 1993. Т. 39, вып. 5. С. 949.
- 13. Агрест М. М., Максимов М. З. Теория неполных цилиндрических функций и их приложения. М.: Атомиздат, 1965. С. 301.
- 14. Зоммерфельд А. Оптика. М.: Иностранная литература, 1953.
- 15. Пат. № 1804634. СССР. Способ нелинейного акустического каротажа / Қасьянов Д. А., Шалашов Г. М.
- 16. А.с.№ 1520461. Способ нелинейного акустического каротажа / Касьянов Д. А., Шалашов Г. М.; Опубл. 07.11.1989 БИ № 41.
- 17. А.с.№ 1608608. Способ нелинейного акустического каротажа / Касьянов Д. А., Шалашов Г. М.; Опубл. 23.11.1990 БИ № 43.

Научно-исследовательский радиофизический институт, г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию 17 мая 2000 г.

### CYLINDRICAL ZONE LENS

### D. A. Kas'yanov

This article presents the theory of a cylindrical zone lens. We show that the law describing Fresnel-zone formation on a divergent cylindrical front is drastically different from the plane and spherical cases. The field configuration of a cylindrical zone lens in a wide range of parameters field is described. Near-focus diffraction of the cylindrical zone lens is studied experimentally. Different versions of cylindrical zone lenses are found and analyzed.

УДК 532.542:539.37:612.18

# АКТИВНЫЕ ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В СХЛОПЫВАЮЩИХСЯ СОСУДАХ И ЭФФЕКТЫ ТРАНСПОРТА

Б. Н. Клочков, Е. А. Кузнецова

В работе рассматривается математическая модель сосуда с N-образной статической характеристикой давление—радиус. Благодаря наличию у характеристики падающего участка в системе сосуд—жидкость возможна длинноволновая неустойчивость автоволновой природы, вследствие чего на нелинейной стадии решение близко к стационарной волне сужения просвета сосуда, что подтверждается также численными расчётами. Получена оценка эффекта транспорта жидкости.

При изучении распределённых движений в кровеносных и лимфатических микрососудах важен учёт активных процессов в гладкомышечной стенке сосуда. Одним из проявлений активности является генерация гладкой мышцей напряжения, зависящего от радиуса сосуда и давления в нём, вследствие чего статическая характеристика давление—радиус сосуда может приобрести немонотонный характер [1]. Известны сосуды с S и N-образными статическими характеристиками, причём первый тип встречается у артериол радиусом  $10\div100$  мкм, второй возможен у вен и лимфатических сосудов радиусом  $100\div100$  мкм. Для сосудов S-типа характерна авторегуляция расхода [2], для них теоретически показана возможность распространения волн локального сужения (расширения) просвета, сопровождаемых ступенчатым изменением давления [3]. Сосуды N-типа могут обладать несколькими равновесными радиусами при фиксированной разности давлений внутри и вне сосуда, что указывает на возможность распространения в них автоволн перепада просвета сосуда [4].

Согласно физиологическим данным [5, 6] благодаря сокращениям гладких мышц стенок сосудов могут происходить дополнительные транспортные эффекты крови и лимфы. Активные механизмы транспорта особенно важны для переноса лимфы, т. к. в лимфатической системе отсутствует центральный насос, создающий градиент давления. Для сосудов S-типа расход может быть локализован в пределах автоволны, причём эффект автопрокачки небольшой. Для сосудов N-типа автоволны осуществляют значительную прокачку, направление которой определяется наличием клапанов.

Существуют работы, посвящённые математическому описанию сосуда N-типа [7, 8], причём модель допускает неэволюционность из-за раскачки мелкомасштабных возмущений. В настоящей работе рассматривается эволюционная математическая модель сосуда N-типа. При достаточно сильной активности гладкомышечных волокон, ведущей к образованию падающего участка на характеристике давление—радиус, в системе сосуд—жидкость возникает длинноволновая неустойчивость: равновесный радиус, лежащий на падающем участке, является неустойчивым. На нелинейной стадии решение близко к режиму стационарных волн перепада просвета сосуда, причём параметры автоволн соответствуют наблюдаемым в эксперименте [5, 6].

1. Математическая модель состоит из двух уравнений (для стенки и для жидкости). Гидродинамическая часть модели сводится к закону Пуазейля с учётом силы тяжести; в данной задаче типичные числа Рейнольдса меньше единицы, и течение можно рассматривать как чисто вязкое. Рассматривается осесимметричная задача; материал стенки сосуда считается вязкоупругим, вводится активное напряжение гладкомышечных волокон, зависящее от деформации; стенка и жидкость полагаются несжимаемыми.

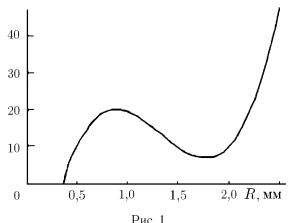
Основные уравнения имеют вид

$$\frac{\partial R}{\partial t} + \frac{\rho g R^2}{4\eta} \cos \theta \, \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{1}{16\eta R} \frac{\partial}{\partial x} \left( R^4 \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 0,\tag{1}$$

$$\frac{\Lambda}{h}\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{p - p_{\rm e}}{h} = \frac{4\mu \left(R - R_0\right)}{R_0^2} + \frac{4\mu_{\rm l}}{R_0^2}\frac{\partial R}{\partial t} + \frac{\gamma}{R} - \mu \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} - \mu_{\rm l}\frac{\partial^3 R}{\partial t \partial x^2}.$$
 (2)

Здесь p(x,t) — текущее внутрисосудистое давление,  $p_{
m e}$  — заданное давление вне сосуда; R(x,t) — текущий внутренний радиус,  $R_0$  и h — радиус недеформированного сосуда и толщина его стенки;  $\mu$  — модуль сдвига,  $\mu_1$  — динамический коэффициент вязкости материала стенки;  $\Lambda$  — характерное время релаксации материала стенки по напряжению;  $\eta$  — динамическая вязкость жидкости; ho — плотность жидкости; g — ускорение свободного падения; heta — угол между направлением силы тяжести и осью x, направленной вдоль сосуда; t — время. Активное напряжение  $\gamma$  появляется из-за наличия в стенке сосуда гладкомышечных волокон. Для сосудов S и N-типа  $\gamma$  будет зависеть от p и Rсоответственно. Существуют также сосуды, активное напряжение в которых зависит от касательного напряжения  $\sigma = -(R/2) \partial p/\partial x$  на стенке.

p- $p_{\mathbf{e}}$ , см вод. ст.



Исследуем сосуд с регуляцией N-типа. На рис. 1 изображена характерная для такого типа сосудов квазистатическая кривая трансмуральное давление-радиус, причём её можно аппроксимировать полиномом третьей степени  $\gamma/R = P^3(R) =$  $= A_1 + A_2 R + A_3 R^2 + A_4 R^3.$ 

Линеаризуем систему уравнений (1), (2) относительно состояния равновесия  $R = R_{\rm ct}, p = p_{\rm ct} =$  $=p_{\mathrm{e}}+P_{\mathrm{0}}$ , где  $P_{\mathrm{0}}=4\mu h\,(R_{\mathrm{cr}}-R_{\mathrm{0}})/R_{\mathrm{0}}^2+h\gamma(R_{\mathrm{cr}})/R_{\mathrm{cr}}$ — равновесное трансмуральное давление. Подставляя  $(p-p_{\rm ct},R-R_{\rm ct}) \sim \exp{(i\omega t - ikx)}$ , получим дисперсионное уравнение  $\Omega = O(\alpha) + iI(\alpha)$ , связывающее безразмерную частоту  $\Omega = \omega/\omega_0$ , где  $\omega_0 = 1/\Lambda$ , и безразмерное волновое число  $\alpha = kR_0$ :

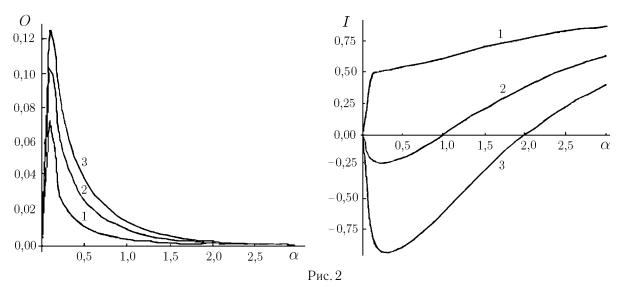
$$O_{\pm}(\alpha) = \frac{\alpha G \delta^2}{2\varkappa} \left( 1 \pm \frac{m_l \alpha^2 \delta^3 \left( 4 + \alpha^2 \right) - \varkappa}{2\varkappa \Delta} \right), \quad I_{\pm}(\alpha) = \frac{\varkappa + m_l \alpha^2 \delta^3 \left( 4 + \alpha^2 \right)}{2\varkappa} \pm \Delta,$$

где безразмерные параметры равны

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \left( \frac{\alpha^2 G^2 \delta^4}{\varkappa^2} \left( \frac{m_1 \alpha^2 \delta^3 \left( 4 + \alpha^2 \right) - \varkappa}{2\varkappa} \right)^2 + N^2 \right)^{1/2} - N \right)^{1/2},$$

$$N = \frac{\alpha^2 G^2 \delta^4 - \left( \varkappa + m_1 \alpha^2 \delta^3 \left( 4 + \alpha^2 \right) \right)^2}{4\varkappa^2} + \frac{\alpha^2 \delta^3 \left( 4m + Q + m\alpha^2 \right)}{\varkappa},$$

 $\varkappa = 16\eta\omega_0/P_0, G = 4\rho g R_0 \cos\theta/P_0, m = \mu h/(P_0 R_0), m_1 = \mu_1 \omega_0 h/(P_0 R_0), Q(R_{c\tau}) = (R_0 h/P_0) dP^3/dR,$  $\delta = R_{\rm cr}/R_0$ . На рис. 2 представлено семейство дисперсионных кривых неустойчивой ветви  $O_{-}(\alpha)$ ,  $I_{-}(lpha)$  в зависимости от параметра активности Q и параметра  $\delta$  (остальные параметры равны  $\varkappa=0.001;$  G=0.01; m=0.1;  $m_1=0.1)$ : кривая 1-Q=-0.2;  $\delta=1.9;$  кривая 2-Q=-0.5; $\delta = 2$ ; кривая 3 - Q = -0.8;  $\delta = 2.2$ . Если Q + 4m < 0 за счёт достаточно высокой активности гладкомышечных волокон, т. е. если стационарный радиус лежит на падающем участке статической характеристики, то всегда существует длинноволновый инкремент неустойчивости. Если стационарный радиус лежит на растущем участке характеристики, он всегда является устойчивым. Таким образом, при фиксированном трансмуральном давлении сосуд может иметь три стационарных радиуса, два из которых устойчивы, а один, лежащий на падающем участке характеристики, неустойчив. Следует отметить, что изменение безразмерного параметра силы тяжести G не изменяет область неустойчивости по  $\alpha$ .



2. Рассмотрим теперь нелинейный режим неустойчивости. Введём безразмерные переменные  $\tilde{x}=x/R_0,\,\tilde{r}=R/R_0,\,\tilde{p}=p/P_0,\,\tilde{p}_{\rm e}=p_{\rm e}/P_0,\,\tilde{t}=t/\Lambda=t\omega_0,\,$ а также параметры  $a_i=A_ihR_0^{i-1}/P_0,\,$ где i=1;2;3;4. В новых переменных система (1), (2) выглядит следующим образом:

$$\varkappa \frac{\partial \tilde{r}}{\partial \tilde{t}} + G\tilde{r}^2 \frac{\partial \tilde{r}}{\partial \tilde{x}} - \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left( \tilde{r}^4 \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} \right) = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{p} - \tilde{p}_{e} = 4m(\tilde{r} - 1) + 4m_{l}\frac{\partial \tilde{r}}{\partial \tilde{t}} + a_{1} + a_{2}\tilde{r} + a_{3}\tilde{r}^{2} + a_{4}\tilde{r}^{3} - m\frac{\partial^{2}\tilde{r}}{\partial \tilde{x}^{2}} - m_{l}\frac{\partial^{3}\tilde{r}}{\partial \tilde{x}^{2}\partial \tilde{t}}.$$
 (4)

Сделаем оценки параметров задачи для вен и лимфатических сосудов:  $\rho \sim 10^3$  кг/м³,  $R_0 \sim 10^{-3}$  м,  $\eta \sim (4\div5)\cdot 10^{-3}$  кг/(м·с); для вен  $P_0 \sim 2\cdot 10^3$  Н/м², модуль упругости Юнга материала стенки сосуда  $E \sim 4\cdot 10^4$  Н/м²,  $h/R_0 \sim 0.02\div0.04$ ; для лимфатических сосудов  $P_0 \sim 10^3$  Н/м²,  $E \sim (0.4\div2)\times 10^4$  Н/м²,  $h/R_0 \sim 0.1$ . Ткань сосудов считаем несжимаемой, тогда  $\mu = E/3$ ; кроме того,  $\mu_1/\mu \sim \Lambda$ , где  $\Lambda \sim 0.1\div0.5$  с. Тогда

$$\varkappa \sim 4 \cdot 10^{-4}, \quad G \sim 2 \cdot 10^{-2} \cos \theta; \quad m \sim m_l \sim 0.1 \div 0.3$$

для вен,

$$\varkappa \sim 10^{-3}, \quad G \sim 4 \cdot 10^{-2} \cos \theta; \quad m \sim m_{\rm l} \sim 0.1 \div 0.7$$

для лимфатических сосудов.

Решение задачи (3),(4) на отрезке  $[0;\tilde{L}]$  будем искать в виде ряда по степеням малого параметра  $\varkappa$ :

$$\tilde{r}(\tilde{x}, \tilde{t}) = r^{(0)}(\tilde{x}, \tilde{t}) + \varkappa r^{(1)}(\tilde{x}, \tilde{t}) + \varkappa^2 r^{(2)}(\tilde{x}, \tilde{t}) + \dots,$$
(5)

$$\tilde{p}(\tilde{x}, \tilde{t}) = p^{(0)}(\tilde{x}, \tilde{t}) + \varkappa p^{(1)}(\tilde{x}, \tilde{t}) + \varkappa^2 p^{(2)}(\tilde{x}, \tilde{t}) + \dots$$
(6)

Граничные условия запишем в виде

$$\tilde{p}(0,\tilde{t}) = \tilde{p}(\tilde{L},\tilde{t}) = \tilde{p}_e + 1, \quad \tilde{r}(0,\tilde{t}) = \rho_1, \quad \tilde{r}(\tilde{L},\tilde{t}) = \rho_3,$$

где  $\rho_1<\rho_2<\rho_3$  — действительные корни уравнения  $4m\left(\tilde{r}-1\right)+a_1+a_2\tilde{r}+a_3\tilde{r}^2+a_4\tilde{r}^3-\left(\tilde{p}-\tilde{p}_{\mathrm{e}}\right)=0$  при  $\tilde{p}=\tilde{p}_{\mathrm{e}}+1$ , причём  $\rho_1$  и  $\rho_3$  — устойчивые,  $\rho_2$  — неустойчивый стационарные радиусы.

Положим, кроме того, G = 0. Ограничимся первыми членами в разложении (5), (6), при этом фактически пренебрегаем некоторыми релаксационными процессами, которые являются существенными

на временах  $\tilde{t} \sim \varkappa$ . Таким образом, ищем установившееся решение на временах  $\tilde{t} \gg \varkappa$ . Подставляя (5), (6) в (3), получим

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left[ (r^{(0)})^4 \frac{\partial p^{(0)}}{\partial \tilde{x}} \right] = 0, \text{ r. e. } \frac{\partial p^{(0)}}{\partial \tilde{x}} = \frac{\mathrm{const}}{(r^{(0)})^4} \,.$$

Чтобы удовлетворить граничным условиям, необходимо положить константу равной нулю, откуда  $p^{(0)} = \tilde{p}_{\rm e} + 1$ . Аналогично из (4) имеем

$$p^{(0)} - \tilde{p}_{e} = 4m (r^{(0)} - 1) + 4m_{1} \frac{\partial r^{(0)}}{\partial \tilde{t}} + a_{1} + a_{2}r^{(0)} + a_{3}(r^{(0)})^{2} + a_{4}(r^{(0)})^{3} - m \frac{\partial^{2} r^{(0)}}{\partial \tilde{x}^{2}} - m_{1} \frac{\partial^{3} r^{(0)}}{\partial \tilde{t} \partial \tilde{x}^{2}}.$$

Если пренебречь третьей смешанной производной, то получим уравнение

$$\frac{\partial r^{(0)}}{\partial \tilde{t}} = \frac{m}{4m_1} \frac{\partial^2 r^{(0)}}{\partial \tilde{x}^2} - \frac{a_4}{4m_1} (r^{(0)} - \rho_1) (r^{(0)} - \rho_2) (r^{(0)} - \rho_3).$$
 (7)

Уравнение типа (7) рассматривалось, например, в [9], где показано, что оно имеет три устойчивых решения:  $r^{(0)}=\rho_1, r^{(0)}=\rho_3$  и неоднородное решение в виде стационарной волны. Аналитическое выражение для волны на интервале  $-\infty < \tilde{x} < \infty$  имеет вид

$$r^{(0)} = \frac{\rho_1 + \rho_3}{2} - \frac{\rho_3 - \rho_1}{2} \operatorname{th} \frac{\tilde{x} - a\tilde{t}}{l}, \tag{8}$$

где

$$l = \pm \frac{2\sqrt{2m}}{\sqrt{a_4}(\rho_3 - \rho_1)}, \quad a = \frac{la_4(\rho_3 - \rho_1)(\rho_3 + \rho_1 - 2\rho_2)}{16m_l}.$$

Если длина сосуда  $\tilde{L}$  много больше характерной ширины фронта l, то в нём может осуществляться режим, близкий к (8). Для оценки скорости a и ширины l фронта волны воспользуемся модельной характеристикой (см. рис. 1)

$$\tilde{p} - \tilde{p}_{e} = 0.8(\tilde{r} - 1) - 3.872 + 6.384\tilde{r} - 2.423\tilde{r}^{2} + 0.242\tilde{r}^{3},\tag{9}$$

для которой при  $\tilde{p}=\tilde{p}_{\rm e}+1$  значения  $\rho_1=1,25;\ \rho_2=3,75;\ \rho_3=5$  (считаем  $R_0=0,4$  мм,  $P_0=10$  см вод. ст.,  $\omega_0=10$  с $^{-1}$ ). Если взять  $m=0,2;\ m_{\rm l}=0,1,$  то получим  $|l|\sim0,7,\ |a|\sim0,5,$  что соответствует скорости распространения волны около 2 мм/с и ширине волны 0,3 мм. Таким образом, если  $L\sim1$  см, то условие  $\tilde{L}\gg l$  выполняется. Стационарные волны перепадного типа наблюдались в лимфатических сосудах, причём полученные выше значения a и l близки к наблюдаемым [5]. Если оценить расход жидкости, вызванный распространяющейся волной сжатия сосуда, как  $\pi\left(\rho_3^2-\rho_1^2\right)a,$  то характерная величина расхода будет порядка 0,02 мл/с, т. е. волна может осуществлять значительную прокачку.

3. На основе полных уравнений (3), (4) были проведены численные расчёты формы сосуда. Использовалась модельная характеристика (9), остальные параметры имели следующие значения:  $\varkappa=0{,}001$ ;  $G=0; m=0{,}2; m_1=0{,}1; \tilde{L}=50$ . Начальное условие задавалось в виде

$$\tilde{r}(\tilde{x},0) = \rho_1 + (\rho_3 - \rho_1)\,\tilde{x}/\tilde{L}, \quad \tilde{p}(\tilde{x},0) = \tilde{p}_e + 1$$

и задавались следующие граничные условия:

$$\frac{\partial \tilde{r}}{\partial \tilde{x}}(0,\tilde{t}) = \frac{\partial \tilde{r}}{\partial \tilde{x}}(\tilde{L},\tilde{t}) = 0, \quad \tilde{p}(0,\tilde{t}) = \tilde{p}(\tilde{L},\tilde{t}) = \tilde{p}_{\rm e} + 1.$$

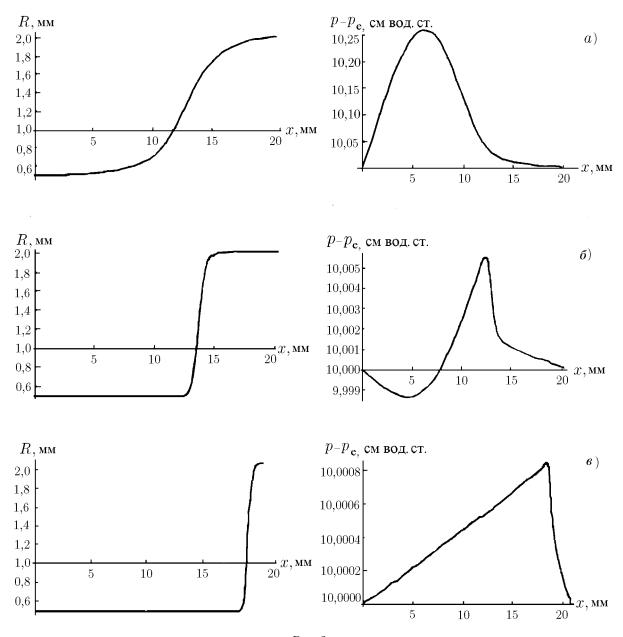
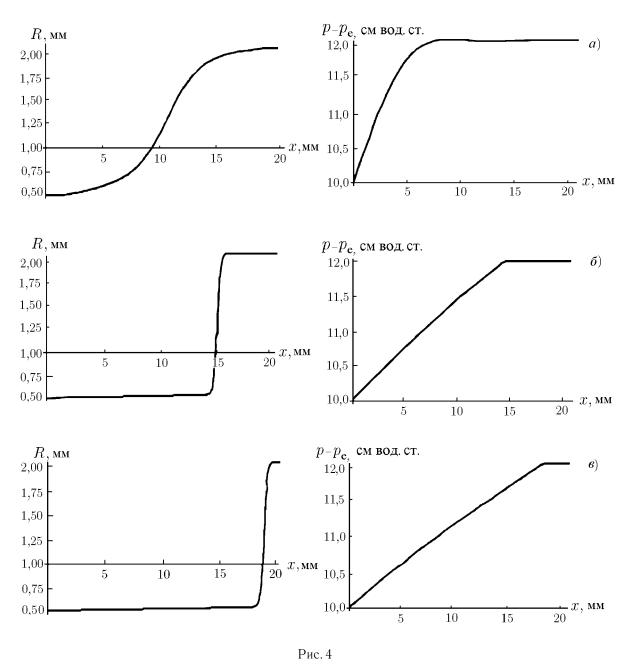


Рис. 3

Для согласования с граничными условиями начальное условие для радиуса задавалось сглаженным на концах. Результаты расчёта приведены на рис. З в размерных переменных  $R=R_0\tilde{r}, p-p_{\rm e}=P_0(\tilde{p}-\tilde{p}_{\rm e}),$   $x=R_0\tilde{x}$ . Графики построены для t=0.05 с (рис. 3a); 0,1 с (рис. 3b); 3 с (рис. 3b). На временах  $t\sim \Lambda \sim 0.1$  с решение выходит на режим, близкий к стационарной волне (8), причём скорость волны приблизительно равна 2 мм/с. После того, как фронт достигал границы x=L, отражение волны не происходило. Увеличение  $m_1$  или уменьшение m приводит, как и следовало ожидать, к увеличению времени выхода решения на режим стационарной волны и уменьшению её скорости.

Влияние силы тяжести представлено на рис. 4 и рис. 5. В первом случае направление силы тяжести совпадало с направлением движения волны, G=0.02;  $\varkappa=0.001$ ; m=0.2;  $m_1=0.1$ ;  $\tilde{L}=50$ . Графики построены для t=0.05 с (рис. 4a); 6.3 с (рис. 4b); 12.3 с (рис. 4b). Начальное и граничные условия для радиуса использовались те же, что и в предыдущем случае, для давления начальное и граничные



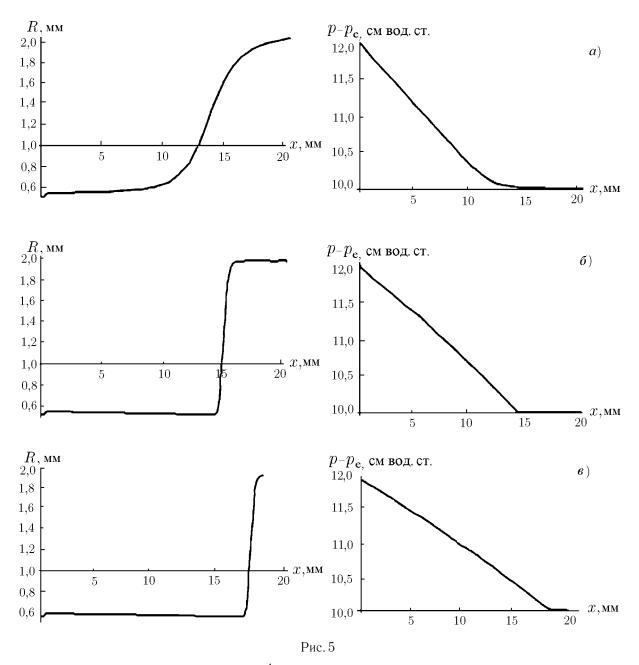
условия имели вид

$$\tilde{p}(\tilde{x},0) = \tilde{p}_{\mathrm{e}} + 1 + 0.2\tilde{x}/\tilde{L}, \quad \tilde{p}(0,\tilde{t}) = \tilde{p}_{\mathrm{e}} + 1, \quad \tilde{p}(\tilde{L},\tilde{t}) = \tilde{p}_{\mathrm{e}} + 1.2.$$

В данном случае скорость волны уменьшалась в три раза и составляла приблизительно 0.7 мм/с. Во втором случае направление силы тяжести противоположно направлению движения волны, при этом G=-0.02, остальные параметры те же, что и в предыдущем случае. Графики построены для t=0.05 с (рис. 5a); 0.4 с (рис. 5b); 2.6 с (рис. 5b). Начальное и граничные условия для радиуса не менялись, условия для давления задавались в виде

$$\tilde{p}(\tilde{x},0) = \tilde{p}_{\rm e} + 1.2 - 0.2\tilde{x}/\tilde{L}, \quad \tilde{p}(0,\tilde{t}) = \tilde{p}_{\rm e} + 1.2, \quad \tilde{p}(\tilde{L},\tilde{t}) = \tilde{p}_{\rm e} + 1.$$

В этом случае волна распространялась с прежней скоростью, примерно равной  $2 \, \text{мм/c}$ . В обоих случаях также не возникало отражённой волны. В отличие от сосуда S-типа отражение не происходит и при



других граничных условиях, например при фиксированных значениях радиуса на концах сосуда.

4. Известно, что основной структурной единицей в лимфатической системе является лимфангион — участок лимфатического сосуда, ограниченный клапанами. Лимфа, согласно физиологическим наблюдениям, благодаря ритмическим сокращениям лимфангиона выдавливается в соседний ему лимфангион и таким образом переносится вдоль сосуда, причём в течение одного сокращения лимфа выдавливается распространяющейся волной сжатия лимфангиона. Рассмотренная математическая модель является достаточно точным приближением, позволяющим описать возникновение и распространение этой волны, причём, как показывает численный анализ, волна способна распространяться и в случае действия силы тяжести. В принципе, возможно существование данного активного транспортного механизма и в венах, где он может осуществлять дополнительную прокачку крови, но здесь он в отличие от лимфатических сосудов не является основным.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 97-02-18612).

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1. Johnson P. C. // Circulat. Res. 1968. V. 22, №2. P. 199.
- 2. Burrow M. E., Johnson P. C. // Amer. J. Physiol. 1981. V. 241, № 6. P. H829.
- 3. Қлочков Б. Н., Рейман А. М., Степанянц Ю. А. // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 3. С. 94.
- 4. Клочков Б. Н. // Коллективная динамика возбуждений и структурообразование в биологических тканях. Нижний Новгород: ИПФАН СССР, 1988. С. 156.
- 5. Ohhashi T., Azuma T., Sakaguchi M. // Amer. J. Physiol. 1980. V. 239. P. H88.
- 6. Орлов Р. С., Борисов А. В., Борисова Р. П. Лимфатические сосуды. Л.: Наука, 1983. 254 с.
- 7. Регирер С. А., Руткевич И. М. // Изв. АН СССР. МЖГ. 1975. № 1. С. 45.
- 8. Руткевич И. М. // Изв. АН СССР. МЖГ. 1975. № 4. С. 88.
- 9. Васильев В. А., Романовский Ю. М., Яхно В. Г. Автоволновые процессы. М.: Наука, 1987. 240 с.

Институт прикладной физики РАН,

г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию 24 августа 1999 г.

### ACTIVE WAVE PROCESSES IN COLLAPSIING VESSELS AND TRANSPORT EFFECTS

B. N. Klochkov and E. A. Kuznetsova

We study the mathematical model of a vessel having an N-type static relationship between pressure and radius. Due to the presence of a descending part in this characteristics, long-wave instability of autowave nature may appear in the vessel—fluid system. As a result, the nonlinear-stage solution is similar to a stationary wave of the vessel-aperture collapse, the fact justified by the numerical analysis. The estimate of the fluid-transport effect is obtained.

УДК 534.113

### РАСЧЁТ ПОВЕРХНОСТНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН В КРИСТАЛЛАХ С ПРИМЕНЕНИЕМ ПРОЦЕДУРЫ ГЛОБАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

М.Ю. Двоешёрстов, В.И. Чередник, А.П. Чириманов

Применена процедура поиска глобального экстремума функции многих переменных для расчёта характеристик поверхностных акустических волн. Процедура используется для минимизации определителя граничных условий, для поиска оптимальных (с точки зрения характеристик акустической волны) ориентаций в пьезокристаллах, а также для нахождения псевдоповерхностных (вытекающих) акустических волн, существующих только вблизи определённых ориентаций.

### **ВВЕДЕНИЕ**

Устройства на поверхностных акустических волнах (ПАВ) находят широкое применение в современных мобильных средствах связи и в телевизионной технике. Эксплуатационные параметры таких устройств во многом определяются характеристиками распространяющейся по поверхности анизотропной пьезоэлектрической подложки поверхностной акустической волны. К этим характеристикам относятся фазовая скорость волны V, эффективный коэффициент электромеханической связи  $K^2$ , угол отклонения потока энергии от волновой нормали  $\Psi$ , коэффициент затухания в направлении распространения  $\delta$ , температурная стабильность, а также некоторые другие. Для расчёта характеристик ПАВ требуется решить систему уравнений, включающую в себя волновое уравнение, сформулированное для анизотропной пьезоэлектрической среды, и граничные условия на механически свободной поверхности. В общем случае эта система уравнений не может быть решена аналитически и требует привлечения численных методов.

В данной работе предпринята попытка применить метод поиска глобального экстремума функции многих переменных для решения указанной задачи. Метод многомерной глобальной оптимизации привлекается для расчёта фазовой скорости V и коэффициента затухания  $\delta$ , для поиска пространственных ориентаций, соответствующих оптимальным значениям характеристик ПАВ, и пространственных ориентаций, для которых существуют и могут быть обнаружены псевдоповерхностные акустические волны и высокоскоростные псевдоповерхностные акустические волны.

Применение процедуры глобальной многомерной оптимизации позволяет значительно ускорить решение этих проблем.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Общая задача о распространении ПАВ в пьезокристаллах требует решения системы связанных уравнений движения для упругой среды и уравнения Пуассона для трёх составляющих упругого смещения  $U_i$ , где i=1;2;3, и электрического потенциала  $\varphi$  в свободном от зарядов пьезодиэлектрике [1]. Потенциал  $\varphi$  в свободном пространстве удовлетворяет уравнению Лапласа  $\Delta \varphi = 0$ .

Решения этих уравнений представляют собой ПАВ, если механические смещения убывают с глубиной при удалении от поверхности кристалла и имеют плоский фронт, а электрический потенциал становится равным нулю на бесконечном расстоянии от поверхности.

Для некоторых срезов и направлений кристалла можно найти также решения, соответствующие псевдоповерхностным волнам, а также высокоскоростным псевдоповерхностным волнам [2–4]. Волновой вектор таких волн лежит в сагиттальной плоскости, но может быть не параллельным поверхности. Метод поиска таких волн в кристаллах основан на расчёте допустимых ориентаций для особых объёмных волн [2, 3], удовлетворяющих граничным условиям для поверхностных волн, соответствующим отсутствию напряжений на границе. В работе [3] показано, что в окрестности области существования особых объёмных волн в кристалле могут существовать псевдоповерхностные и высокоскоростные псевдоповерхностные волны. Таким образом, окрестности срезов и направлений, где существуют псевдоповерхностные волны с квазиобъёмной структурой, можно попытаться найти с помощью метода особых волн [3].

В общем случае три компоненты смещения  $U_i$  и электрический потенциал  $\varphi$  описываются линейной комбинацией парциальных волн в следующей форме

$$U_i = \sum_{m=1}^{4} A_m C_i^{(m)} \exp[jk \left(\beta^{(m)} X_3 + \alpha X_1 - Vt\right)], \tag{1}$$

$$\varphi = \sum_{m=1}^{4} A_m C_4^{(m)} \exp[jk \left(\beta^{(m)} X_3 + \alpha X_1 - Vt\right)], \tag{2}$$

где  $\beta^{(m)}$  — коэффициент затухания волны по оси  $X_3$ , совпадающей с внешней нормалью к поверхности кристалла,  $C_i^{(m)}$  (i=1;2;3) — амплитудные множители, V — фазовая скорость волны,  $k=2\pi/\lambda$  — волновое число,  $\lambda$  — длина волны,  $A_m$  — весовые коэффициенты, t — время,  $\alpha=1+\delta j$ ,  $\delta$  — коэффициент затухания по оси  $X_1$ , вдоль направления распространения волны, j — мнимая единица.

Для ПАВ амплитуды смещений на плоскости постоянной фазы зависят только от координаты  $X_3$ , поэтому коэффициент  $\alpha$  действительный, т. е.  $\delta=0$ . Для псевдоповерхностных и высокоскоростных псевдоповерхностных волн амплитуды смещений зависят также и от координаты  $X_1$ , поэтому коэффициент  $\alpha$  должен быть комплексной величиной ( $\delta>0$ , обычно измеряется в дБ/ $\lambda$ ).

Подставляя решения (1), (2) в систему связанных уравнений движения для упругой среды и уравнение Пуассона, получим систему характеристических уравнений для амплитуд смещений и потенциала, где в качестве параметров входит скорость волны V и коэффициент  $\alpha$ . Сшивая далее граничные условия (отсутствие напряжений на поверхности кристалла  $T_{3j}=0$  при  $X_3=0$ , непрерывность нормальной компоненты вектора электрической индукции  $D_3$  и непрерывность тангенциальной составляющей напряжённости электрического поля) на границе вакуум—полубесконечный пьезокристалл, можно получить комплексную функцию граничных условий  $F(V,\delta)$ , зависящую в общем случае от скорости V и коэффициента затухания  $\delta$ , нулевое значение которой даёт решения для поверхностных, псевдоповерхностных и высокоскоростных псевдоповерхностных акустических волн [1]:

$$F(V,\delta) = 0. (3)$$

За обозначением  $F(V, \delta)$  скрывается весьма громоздкая вычислительная процедура, решение уравнения (3) может быть получено только численными методами. Определив из уравнения (3) фазовую скорость волны V и коэффициент затухания  $\delta$ , можно затем вычислить все остальные характеристики волны.

В соответствии с уравнением (3) следует найти такие значения V и  $\delta$ , для которых одновременно обращаются в нуль действительная и мнимая части функции  $F(V,\delta)$ . Для решения уравнения (3) в данной работе применяется процедура поиска глобального экстремума функции многих переменных. Отыскивается глобальный экстремум (минимум) функции цели, представляющей собой квадрат абсолютной величины комплексной функции  $F(V,\delta)$ .

В зависимости от конкретных условий существует достаточно много различных разновидностей ПАВ. На сегодняшний день нет однозначной и общепринятой классификации всех этих разновидностей, даже терминология различными авторами применяется не совсем одинаковая (см., например, [2–4]). Приведём здесь лишь основные определения, которые можно считать общепринятыми, устоявшимися и соответствующими физическим свойствам волн:

- 1) поверхностные акустические волны (ПАВ) волны, вектор фазовой скорости которых параллелен поверхности. Коэффициент затухания  $\delta$  вдоль направления распространения  $X_1$  равен нулю. Функция граничных условий F(V) зависит только от одной переменной V, что значительно облегчает задачу решения уравнения (3);
- 2) псевдоповерхностные акустические волны. Вектор фазовой скорости в общем случае не параллелен поверхности. Скорость распространения выше, чем у ПАВ. Коэффициент затухания  $\delta$  вдоль направления распространения в общем случае отличен от нуля. Требуется отыскать нуль весьма сложной функции двух переменных  $|F(V,\delta)|^2$ ;
- 3) высокоскоростные псевдоповерхностные акустические волны. Отличаются ещё большей фазовой скоростью и ещё большей сложностью определителя граничных условий.

Волны первого типа (ПАВ) распространяются вдоль поверхности кристалла, при этом волновой вектор волны всегда параллелен оси  $X_1$ . Волны второго и третьего типа объединены тем обстоятельством, что они в общем случае распространяются под углом к поверхности. Поэтому они затухают вдоль направления распространения на поверхности ( $\delta > 0$ ). Энергия этих волн оттекает от поверхности вглубь вещества, поэтому волны второго и третьего типов объединены ещё одним общим для них названием — вытекающие волны (волны утечки).

Для решения задачи для ПАВ требуется минимизировать функцию одной переменной  $|F(V)|^2$ , для расчёта вытекающих волн необходимо минимизировать функцию двух переменных  $|F(V,\delta)|^2$ .

### 2. ПРОЦЕДУРА ПОИСКА ГЛОБАЛЬНОГО ЭКСТРЕМУМА ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

В данной работе применяется метод поиска глобального экстремума функции многих переменных, описанный в [5]. Метод представляет собой глобальный перебор значений функции цели в узлах детерминированной поисковой сетки в сочетании с локальным поиском из перспективных точек. Локальный поиск выполняется методом конфигураций Хука и Дживса с автоматическим подключением процедуры Муджеля в случае отказа метода конфигураций в овражных ситуациях [6].

Принцип работы алгоритма глобального поиска иллюстрирует рис. 1 для одномерной функции цели (на рис. 1 A — произвольная начальная точка,  $F(x_3)$  — глобальный экстремум (максимум)).

Исследуемая область [a,b] покрывается равномерной поисковой сеткой. Затем из произвольной точки A области производится локальный поиск, приводящий к локальному экстремуму (для определённости будем говорить о максимуме), в зону притяжения которого попадает точка A (на рис. 1 это максимум  $F(x_1)$ ). Положение точки  $x_1$  и величина  $F_1$  этого максимума запоминаются. Затем исследуемая область просматривается последовательным сканированием от точки a до точки b.

Значения функции цели F(x) в узлах поисковой сетки сравниваются со значением  $F_1$  в найденном локальном экстремуме. В случае обнаружения точки B, функция цели в которой  $F_B > F_1$ , из этой точки осуществляется локальный поиск, приводящий к новому, большему чем первый, локальному экстремуму  $F_2 = F(x_2)$ . Зафиксировав найденный экстремум, продолжаем сканирование области, сравнивая функцию цели в узлах поисковой сетки теперь уже с  $F_2$ . В случае обнаружения точки C, лучшей, в которой  $F_C > F_2$ , выполняем из этой точки локальный поиск, приводящий к очередному локальному экстремуму, и т. д. В результате после завершения перебора по всей области последний из найденных экстремумов (на рис. 1 это экстремум 3) будет глобальным в пределах разрешения, равного шагу поисковой сетки.

Аналогично может быть найден и глобальный минимум, если во всех операциях сравнения сменить знак отношения на противоположный (« < » на « > » и наоборот). Конкретная компьютерная программа составляется для поиска либо максимума, либо минимума. В случае необходимости найти максимум с помощью программы, настроенной на поиск минимума (или наоборот), просто меняют знак функции цели.

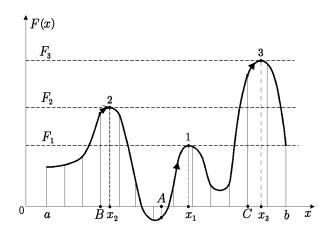


Рис. 1. Принцип действия алгоритма поиска глобального экстремума

Отличительная особенность рассматриваемого алгоритма — простота, что позволяет составить очень короткую программу для его реализации. Кроме того, алгоритм построен таким образом, что объём оперативной памяти компьютера, требуемый для работы алгоритма, незначителен для любого количества переменных и любой густоты поисковой сетки. Указанные отличительные особенности являются в данном случае весьма важными, если учесть, что вычисление функции цели представляет собой громоздкую процедуру, реализованную очень большой компьютерной программой.

Вместе с тем простота алгоритма не означает, что он уступает по своим характеристикам (время поиска, надёжность обнаружения) другим, более сложным, итерационным методам, таким, на-

пример, как метод генетического кода, использующим на каждой итерации информацию, полученную на предыдущих итерациях, для сужения области поиска. Хотя эти методы могут обходиться меньшим количеством точек, чем способы, применяющие перебор, приходится обрабатывать эти точки многократно по достаточно сложному алгоритму, также требующему времени. Здесь же перебор выполняется хотя и по большему количеству точек, но только один раз и без всякой дополнительной обработки. В результате время поиска получается одного порядка. Кроме того, обрабатываемые в итерационном процессе точки необходимо помнить, что приводит к проблемам с оперативной памятью, требуемый объём которой лавинообразно нарастает с увеличением количества переменных. В рассмотренном нами алгоритме эти проблемы отсутствуют.

Предлагаемый метод был проверен путём сопоставления его с одним из итерационных методов — методом Хилла [7], реализованным для оптимизации электронных приборов в работе [8]. Время поиска экстремума обоими методами при прочих равных условиях оказалось примерно одинаковым (предлагаемый метод работал даже несколько быстрее), в надёжности обнаружения также не оказалось заметной разницы. Существенных отличий было только два: программа, реализующая метод Хилла, была втрое больше, чем программа, реализующая данный метод, и требовала значительного объёма оперативной памяти, отнимая её у весьма громоздкой функции цели. Если количество переменных функции цели превышает 4—5, применение итерационных методов становится практически невозможным для сложных функций цели. Данный же метод может работать с несколькими сотнями переменных, при этом объём требуемой оперативной памяти будет оставаться незначительным при любой густоте поисковой сетки. Ограничение только одно — быстродействие компьютера.

В данной работе алгоритм расчёта реализован в среде визуального программирования «Borland C++Builder». Для синхронной графической визуализации результатов (если необходимо) использован пакет «Excel 97». Передача данных в «Excel» выполняется немедленно в процессе вычислений с помощью компонента «DdeClientConv», построение соответствующих графиков происходит автоматически.

## 3. РАСЧЁТ ХАРАКТЕРИСТИК ПОВЕРХНОСТНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН МЕТОДОМ ПОИСКА ГЛОБАЛЬНОГО ЭКСТРЕМУМА

Расчёт характеристик ПАВ и вытекающих волн выполняется для конкретного кристалла и заданной ориентации в пространстве кристалла. Конкретный кристалл определяется своими материальными константами, заданная ориентация определяется тремя углами Эйлера [1], характеризующими поворот осей координат задачи  $X_i$  относительно кристаллографических осей (обозначим их x,y,z), для которых таблично заданы материальные константы кристалла. Все компоненты тензоров материальных констант должны пересчитываться через углы Эйлера ( $\phi, \theta, \psi$ ) для каждой ориентации. Два первых угла Эйлера описывают ориентацию поверхности (срез кристалла), третий угол задаёт направление распространения волны вдоль этой поверхности. Первый угол  $\phi$  — это угол поворота против часовой стрелки вокруг оси z. После этого поворота ось z займёт некоторое промежуточное положение  $X_1$ . Второй угол  $\theta$  — это угол поворота против часовой стрелки вокруг оси  $X_1$ . После этого поворота ось z займёт новое окончательное положение  $X_3$ . Третий угол  $\psi$  — это угол поворота против часовой стрелки вокруг оси  $X_3$ .

Задача поиска нулей функции  $F(V,\delta)$  или F(V) (решение уравнения (3)) эквивалентна задаче поиска нулевых минимумов функции  $|F(V,\delta)|^2$  или  $|F(V)|^2$ , которая решается с помощью метода, изложенного в разделе 2. В результате минимизации функции  $|F(V)|^2$  для ПАВ определяется скорость волны, для вытекающих волн минимизируется функция  $|F(V,\delta)|^2$  и определяются скорость V и коэффициент затухания  $\delta$ . Эта процедура выполняется для открытой и металлизированной поверхностей, что позволяет затем определить эффективный коэффициент электромеханической связи [1]

$$K^2 = 2(V_0 - V_{\rm m})/V_0, \tag{4}$$

где  $V_0$  и  $V_{
m m}$  — скорости для открытой и металлизированной поверхностей.

Рассчитывая скорость в трёх соседних близких точках, отличающихся на небольшой третий угол Эйлера  $\psi$ , который определяет направление распространения волны в каком-либо срезе кристалла, можно определить угол отклонения потока энергии от волновой нормали:

$$\Psi = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial \psi}\right). \tag{5}$$

Это угол между направлением фазовой и групповой скорости волны, в общем случае не равный нулю из-за анизотропии кристалла.

Как известно [1], температурные коэффициенты скорости TCV и задержки TCD, характеризующие температурную стабильность волны для данной ориентации, определяются следующим образом:

$$TCV = \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial T}, \qquad TCD = \alpha_T - TCV,$$
 (6)

где  $\alpha_T$  — коэффициент линейного теплового расширения кристалла вдоль направления распространения волны, T — температура.

Следует отметить, что эффективность поиска минимума функции цели зависит от правильного выбора границ области поиска. Чем уже границы, тем быстрее и надёжнее можно обнаружить экстремум. Но если границы слишком узки, то решение может оказаться за их пределами и не будет найдено. Широкие границы поиска требуют большого количества узлов расчётной сетки для обнаружения узкого минимума и, следовательно, больших затрат компьютерного времени (но не памяти для применяемого метода). Выбор границ поиска осуществляется, исходя из некоторой вспомогательной информации, например из предварительно рассчитанных скоростей объёмных волн для данной ориентации. Например, известно, что скорость ПАВ должна быть меньше скорости медленной квазисдвиговой объёмной

волны, скорость псевдоповерхностной акустической волны должна лежать между скоростями медленной и быстрой квазисдвиговых объёмных волн, а скорость высокоскоростной псевдоповерхностной акустической волны должна быть близкой (иногда не очень) к скорости квазипродольной объёмной волны. Эта информация позволяет конкретизировать границы поиска. Но для большей надёжности всё же приходится найденные решения проверять, что можно сделать, построив график зависимости функции цели от своих аргументов вблизи найденного экстремума. Для ПАВ этот график — кривая, для вытекающих волн — поверхность. Для этих целей используется синхронная графическая визуализация результатов с помощью пакета «Excel», данные в который передаются немедленно после их получения в процессе работы проверяющей программы через буфер обмена (не используя файлы на диске) и автоматически изображаются графически в окне «Excel». В окрестностях правильного решения кривая имеет плавный минимум, приближающийся к нулю, а поверхность имеет приближающийся к нулю куполообразный плавный минимум. В произвольном случае функция цели в области поиска имеет несколько экстремумов. Особенно это справедливо для двумерной функции цели для вытекающих волн. Сложное поведение функции цели в области поиска обсуждается и демонстрируется также в [4]. Поиск минимума функции цели в этой работе выполнялся процедурой локальной минимизации, для чего приходилось предварительно изолировать минимум в узких границах для обеспечения унимодальности функции цели в области поиска.

Расчёт характеристик  $\Pi AB$  и вытекающих волн по изложенной выше методике был выполнен для большого количества различных ориентаций в кристаллах  $LiNbO_3$ ,  $LiTaO_3$ ,  $Li_2B_4O_7$ ,  $KNbO_3$ , PKN, LGS, LGN и в кристалле кварца. Результаты расчёта сравнивались с приведёнными в работах [4, 9]. Материальные константы были взяты из тех же источников, что указаны в этих работах. Сравнение показало совпадение всех значащих цифр (например четырёх значащих цифр после запятой для фазовой скорости, выраженной в  $\kappa m/c$ ) почти во всех случаях или отличие на одну—две единицы последней значащей цифры в некоторых отдельных случаях. Существование решения в виде  $\Pi AB$  для всех (или почти всех) ориентаций позволяет использовать процедуру глобальной оптимизации не только для расчёта характеристик волны, но и для поиска пространственных ориентаций, соответствующих оптимальному значению этих характеристик.

### 4. ПОИСК ОПТИМАЛЬНЫХ ОРИЕНТАЦИЙ ДЛЯ ПАВ

Основными характеристиками ПАВ, представляющими интерес с точки зрения конструирования конкретных устройств, являются фазовая скорость V, эффективный коэффициент электромеханической связи  $K^2$ , угол отклонения потока энергии от волновой нормали  $\Psi$ , температурная стабильность, характеризуемая температурным коэффициентом скорости TCV и температурным коэффициентом задержки TCD.

Температурные коэффициенты должны быть как можно меньше (в идеале равняться нулю), угол отклонения потока энергии от волновой нормали желательно иметь нулевой, т. к. в противном случае конструкция прибора усложняется из-за необходимости учёта отклонения потока энергии от направления фазовой скорости, эффективный коэффициент электромеханической связи в большинстве случаев (хотя и не всегда) предпочтительнее получить побольше, т. к. в этом случае меньше потери преобразования электрического сигнала в акустический. Фазовая скорость должна быть как можно больше для высокочастотных устройств и как можно меньше для линий задержки. Все указанные характеристики сильно зависят от свойств кристалла, а также от направления распространения акустической волны в нём.

Поиск пространственных ориентаций, соответствующих оптимальному значению какого-либо параметра или их линейной комбинации, может быть наиболее эффективно выполнен методом глобальной оптимизации. Требуется только, чтобы ПАВ существовали всюду в области поиска. С матема-

тической точки зрения это означает, что уравнение (3) должно иметь решение для любых ориентаций (любых углов Эйлера). Многочисленные расчёты ПАВ в различных кристаллах для различных ориентаций неизменно демонстрировали наличие такого решения для ПАВ, из чего был сделан вывод, что решения для ПАВ существуют для всех кристаллов и любых ориентаций. На сегодняшний момент эта точка зрения является общепринятой. Существуют даже теоремы существования и единственности ПАВ в кристаллах (см., например, [10]). Однако в недавней работе [11] приводятся результаты, демонстрирующие, что имеются области ориентаций в кристалле LGS, в которых решение для ПАВ не существует. В частности, согласно этим результатам решение не может быть получено в интервале углов Эйлера (0; 137,1÷152,7°; 0).

На рис. 2 показана зависимость фазовой скорости  $\Pi AB$  в кристалле LGS для открытой поверхности от второго угла Эйлера  $\theta$  для  $\phi=\psi=0$ , полученная с помощью нашей методики расчёта. Кривая полностью совпадает с такой же кривой, приведённой в [11], и также демонстрирует отсутствие решения в интервале углов  $137^\circ < \theta < 153^\circ$ . На этом же рисунке показана зависимость от угла  $\theta$  скорости медленной квазисдвиговой объёмной волны  $V_{\rm s1}$ . Из рис. 2 видно, что на границах интервала  $\theta\approx 137\div 153^\circ$  скорость  $\Pi AB$  сравнивается со скоростью объёмной волны. Известно (см., например, [1]), что скорость  $\Pi AB$  не может превышать скорость медленной квазисдвиговой объёмной волны (более того, она должна быть меньше). Когда угол  $\theta$  приближается к границе интервала  $\theta\approx 137\div 153^\circ$  (с любой стороны), скорость  $\Pi AB$  приближается к скорости объёмной волны, поверхностная волна вырождается в объёмную и внутри этого интервала  $\Pi AB$  не может существовать.

Изменение свойств поверхностной волны при приближении её скорости к скорости медленной квазисдвиговой объёмной волны можно продемонстрировать с помощью корней характеристического уравнения [1]. Если скорость ПАВ меньше, чем скорость медленной квазисдвиговой объёмной волны, то восемь корней характеристического уравнения образуют комплексно сопряжённые пары. В построении решения для ПАВ участвуют только те четыре корня  $\beta^{(m)}$  (см. выражения (1) и (2)), у которых мнимые части отрицательны, т. к. только эти парциальные моды удовлетворяют условию затухания волны вдоль координаты  $X_3$  вглубь кристалла. По мере увеличения скорости волны та пара корней, которая ответственна за первую квазисдвиговую моду, приближается к действительной оси, где

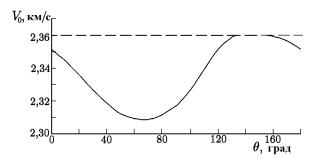


Рис. 2. Зависимость фазовой скорости поверхностной волны в кристалле LGS (сплошная линия) и фазовой скорости медленной квазисдвиговой объёмной волны (пунктир) от угла Эйлера  $\theta$  для углов  $\phi = \psi = 0$ 

и сливается при скорости, равной скорости медленной квазисдвиговой объёмной волны. Это означает, что мнимая часть соответствующего корня, принимавшего участие в построении решения, становится равной нулю, т. е. эта мода перестаёт быть затухающей, становится объёмной и вся волна, включающая эту моду, перестаёт быть поверхностной, вырождается в объёмную (хотя остальные три моды пока ещё остаются поверхностными). Обобщённая поверхностная волна (ОПАВ), имеющая все три компоненты механического смещения и потенциал, как линейная комбинация четырёх парциальных мод перестаёт существовать.

Динамика корней при изменении скорости волны описана в [2] в применении к кристаллу  $Li_2B_4O_7$ . Аналогичная динамика для кристалла LGS демонстрируется на рис. 3. На этом рисунке на комплексной плоскости показаны все восемь корней характеристического уравнения и те четыре из них, которые участвуют в построении решения для  $\Pi AB$ . На рис. 3 эти корни обведены кружками и все они находятся в нижней комплексной полуплоскости. Рис. 3a показывает значения корней, рассчитанные для

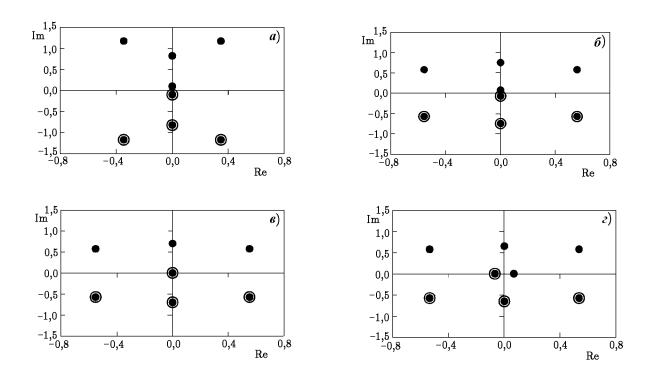
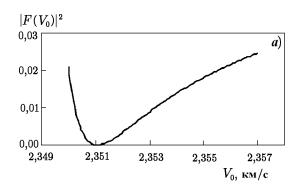


Рис. 3. Эволюция корней характеристического уравнения при изменении скорости поверхностной волны

ориентации  $(0;70^\circ;0)$  и соответствующей этой ориентации скорости  $V_0=2,308\,6$  км/с — вблизи минимума кривой скорости на рис. 2. Видно, что одна из пар корней расположена уже достаточно близко к действительной оси. Рис. 36 соответствует ориентации  $(0;120^\circ;0)$  и скорости  $V_0=2,351\,06$  км/с (согласно графику на рис. 2); пара корней подошла совсем близко к действительной оси. Рис. 36 соответствует ориентации  $(0;137^\circ;0)$  и скорости  $V_0=2,359\,4$  км/с (скорость медленной квазисдвиговой объёмной волны  $V_{\rm s1}=2,359\,45$  км/с для любого угла  $\theta$ , см. рис. 2). Корни одной из пар встретились на действительной оси, мнимые части равны нулю, затухание вдоль оси  $X_3$  вглубь кристалла равно нулю, волна перестала быть поверхностной. При дальнейшем увеличении скорости эта пара корней начинает расходиться в разные стороны по действительной оси (см. рис. 36, соответствующий  $V_0=2,37$  км.с), а к этой оси начинает приближаться другая пара, которая встретится при скорости, равной скорости быстрой квазисдвиговой объёмной волны. Третья пара корней встретится на действительной оси при скорости квазипродольной объёмной волны. Только четвёртая пара корней, ответственная за волну электрического потенциала, не будет приближаться к действительной оси.

Показанная на рис. З эволюция корней при увеличении скорости волны иллюстрирует тот факт, что ни при какой скорости, равной или превышающей  $V_{\rm s1}$ , не может быть построено классическое решение для ОПАВ, состоящее из четырёх парциальных мод, локализованных вблизи поверхности. В применении к нашему случаю это означает отсутствие решения в интервале  $137^{\circ} < \theta < 153^{\circ}$  при  $\phi = \psi = 0$ .

Рассмотрим теперь поведение функции цели  $|F(V)|^2$  в окрестности искомого решения. На рис. 4 показана зависимость функции цели от фазовой скорости  $V_0$  (открытая поверхность) для двух значений угла  $\theta$ , соответствующих графику на рис. 2. На рис. 4a построена зависимость для  $\theta=120^\circ$ . Имеется плавный почти нулевой минимум при  $V_0=2{,}351\,06$  км/с, определяемый описанной выше процедурой глобального поиска с любой заданной точностью. Аналогичная зависимость получается для любого другого значения  $\theta$  за пределами интервала, в котором отсутствует решение. На рис. 4b пока-



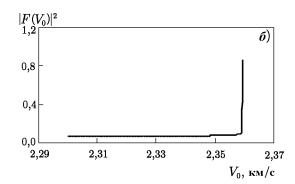


Рис. 4. Зависимость функции цели от фазовой скорости волны в кристалле LGS для двух значений угла  $\theta$  при  $\phi=\psi=0$ 

зана зависимость функции цели от скорости для  $\theta=145^\circ$ . Правая граница графика совмещена с  $V_{\rm s1}=2,359\,45$  км/с. Видно, что нигде график не приближается к оси, т. е. решение, удовлетворяющее граничным условиям, не существует. Аналогично выглядит зависимость функции цели для любой другой точки запретного интервала. Таким образом, в рассмотренном интервале углов Эйлера в кристалле LGS ОПАВ не существует.

В работе [11] приведены контурные карты с изолиниями фазовой скорости, построенными в координатах  $\theta$  и  $\psi$  по точкам, рассчитанным с интервалом в один градус, для четырёх значений угла  $\phi=0$ ; 10; 20 и 30°. На этих картах отмечены достаточно узкие зоны, в которых авторам работы [11] не удалось получить решение для ПАВ. В этой работе отмечено также, что решение не удаётся найти и для кварца в диапазоне (0;  $27.4 \div 36.4^\circ$ ; 0), что подтверждается нашими расчётами.

Отсутствие решений для ОПАВ не противоречит теоремам существования, приведённым в [10], согласно которым существование ПАВ гарантируется только для так называемых однородных граничных условий, в частности для металлизированной поверхности. В пьезокристалле со свободной поверхностью в направлении, отличном от специально выделенного (перпендикуляра к оси симметрии чётного порядка кристалла), ОПАВ, имеющая все три компоненты смещения и потенциал, может не существовать [10].

Эти обстоятельства следует учитывать при глобальном поиске по всем трём углам Эйлера в произвольных пределах. В процессе такого поиска можно попасть в область, в которой функция цели не существует. Все найденные решения необходимо проверять описанным в разделе 3 способом.

Глобальный поиск по всем трём углам Эйлера реализован в данной работе тем же методом, который был использован для решения уравнения (3) (см. раздел 2). В процессе расчёта функции цели приходится в каждой точке выполнять глобальную оптимизацию для решения уравнения (3) и расчётов по формулам (4)—(6).

Функция цели сформирована в виде линейной комбинации основных характеристик волны с индивидуальными весовыми (экспертными) коэффициентами, позволяющими варьировать вклад каждого слагаемого. Можно, например, занулить все весовые коэффициенты кроме коэффициента при  $K^2$  и найти ориентацию, соответствующую максимальному значению этой величины. Можно оставить в функции цели только коэффициент TCD и найти наиболее термостабильную ориентацию и т. п. С помощью весовых коэффициентов можно также выравнивать вклады слагаемых, сильно отличающихся по величине. Трудно рассчитывать, что существуют ориентации, для которых все характеристики одновременно принимают оптимальное значение. Более реально пытаться искать оптимум того параметра, который наиболее важен для данного конкретного применения, или некий компромисс между несколькими параметрами.

В качестве тестового примера для проверки возможностей программы поиска экстремума по углам Эйлера были использованы результаты расчёта ПАВ, приведённые в работе [9]. На рис. 5, заимство-

ванном из этой работы, изображены изолинии эффективного коэффициента электромеханической связи  $K^2$ , построенные для кристалла LGS (лангасит, La<sub>3</sub>Ga<sub>5</sub>SiO<sub>14</sub>) при углах Эйлера  $(0, \theta, \psi)$ .

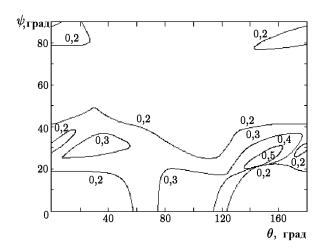


Рис. 5. Изолинии эффективного коэффициента электромеханической связи  $K^2$  (в процентах) для кристалла LGS в координатах  $\theta$  и  $\psi$  при  $\phi=0$  [9]

На рис. 5 хорошо видно несколько экстремумов, среди которых глобальным является расположенный в окрестности точки  $\theta\approx 150^\circ$ ,  $\psi\approx 25^\circ$ . В результате глобального поиска в области углов Эйлера, соответствующих рис. 5 (по первому углу Эйлера  $\phi$  был задан очень узкий интервал вблизи нуля), был получен следующий результат:  $\theta=147.5^\circ$ ,  $\psi=22.5^\circ$ , оптимальное значение  $K^2=0.522\,\%$  ( $V_0=2.758\,$  км/с,  $V_{\rm m}=2.750\,$ 8 км/с).

Таким образом, программа поиска глобального экстремума, работающая по описанному в разделе 2 алгоритму, позволяет находить ориентации в пространстве, соответствующие оптимальному значению как отдельных характеристик поверхностной акустической волны, так и их линейной комбинации. Программу можно применять для поиска оптимума по одному углу Эйлера, по двум и по всем трём углам сразу в любых пределах по каждому углу.

### 5. ПОИСК ВЫТЕКАЮЩИХ ВОЛН

Вытекающие волны, т. е. псевдоповерхностные и высокоскоростные псевдоповерхностные волны, существуют не для любых ориентаций, а только для отдельных ограниченных диапазонов углов Эйлера в каждом конкретном кристалле. Ширина диапазона по каждому углу может достигать десятков градусов, а может составлять и несколько градусов.

Поиск вытекающих волн в общем случае представляет собой весьма трудоёмкую и длительную работу. Поэтому в последнее время некоторые исследователи предприняли попытки найти универсальный критерий, позволяющий безошибочно и сравнительно быстро находить эти волны (см., например, [2—4]). Авторы работ [2—4] подошли к этой проблеме с разных сторон, но общей во всех случаях была одна идея: вытекающие поверхностные волны по некоторым своим характеристикам похожи на объёмные волны, распространяющиеся под небольшим углом к поверхности вглубь вещества. В частности, такая объёмная волна похожа на псевдоповерхностную тем, что она удовлетворяет граничным условиям на свободной поверхности, хотя в общем случае это не обязательно. Отсюда следует рекомендация: вытекающие волны нужно искать в окрестностях тех ориентаций, для которых объёмная волна (какая-нибудь из трёх) удовлетворяет граничным условиям свободной поверхности, т. е. уравнению (3). Объёмные волны, удовлетворяющие граничным условиям свободной поверхности, названы в [3] особыми волнами, а привлечение этих волн для поиска вытекающих волн — методом особых волн. Практические рекомендации по поиску вытекающих волн приводятся также в [2].

Метод особых волн хорошо вписывается в процедуру поиска глобального экстремума. Ориентация, соответствующая особой объёмной волне, может быть найдена минимизацией по трём углам Эйлера функции цели, представляющей собой определитель граничных условий в уравнении (3), но вычисляемый для скорости объёмной волны для каждой ориентации в области поиска. Коэффициент затухания  $\delta$  полагается при этом равным нулю или близким к нулю. Для каждой ориентации вычисляется

только одно значение функции цели для одного значения скорости объёмной волны. Поэтому глобальный поиск даже по трём углам Эйлера выполняется очень быстро и даёт ориентацию, для которой данная объёмная волна (одна из трёх — по выбору) является особой. В некоторых случаях вытекающая волна обнаруживается затем прямо при этой же ориентации. В других случаях при этой ориентации вытекающей волны нет, но она обнаруживается после небольшого дополнительного поиска вручную в окрестности этой ориентации (хотя и не всегда).

Для иллюстрации на рис. 6 изображён характерный вид функции цели, используемой при поиске решения для V и  $\delta$ , построенной для хорошо известного кристалла ниобата лития LiNbO<sub>3</sub> при углах Эйлера (0;  $-49^{\circ}$ ; 0).

Характеристики высокоскоростной псевдоповерхностной волны, существующей при этой ориентации, приведены в [4]. Из рис. 6 видно, что функцию цели для этой ориентации минимизирует и объёмная волна (при  $\delta \approx 0$  скорость около 4,75 км/с — быстрая квазисдвиговая волна), что позволяет эту ориентацию отыскивать, и высокоскоростная псевдоповерхностная волна ( $V_0=8,3144$  км/с,  $\delta=0,53$  дБ/ $\lambda$  [4]), которая может быть обнаружена после нахождения ориентации.

Мы не располагаем теоретическими обоснованиями, позволяющими утверждать, что между решениями, представляющими особую объёмную волну и вытекающую волну на рис. 6, существует причинно-следственная связь (это не является предметом рассмотрения данной статьи), но

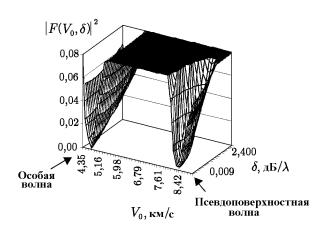


Рис. 6. Вид функции цели для кристалла LiNbO $_3$  при углах Эйлера (0;  $-49^\circ$ ; 0)

многочисленные расчёты, выполненные нами для различных кристаллов и различных ориентаций, показали, что почти во всех случаях в окрестности тех ориентаций, для которых существуют особые объёмные волны, обнаруживаются и вытекающие волны. Изображённая на рис. 6 ситуация — это не случайное совпадение, а характерный случай, приведённый для иллюстрации.

Таким образом, процедура поиска глобального экстремума позволяет отыскивать ориентации, в окрестности которых затем могут быть обнаружены вытекающие волны. Для примера приведём здесь характеристики некоторых высокоскоростных псевдоповерхностных волн, обнаруженных таким способом.

1) LiNbO<sub>3</sub> (ниобат лития), углы Эйлера (50°; 58°; 10°),  $V_{\rm m}=8{,}373\,6$  км/с,  $V_0=8{,}562\,1$  км/с,  $\delta_{\rm m}=1{,}43\,{\rm дБ}/\lambda$ ,  $\delta_0=0{,}15\,{\rm дБ}/\lambda$ ,  $K^2=4{,}4\,\%$ ,  $\Psi=8{,}78^\circ$ , TCD=82,2 · 10<sup>-6</sup>/°C.

Нормированные амплитуды механических смещений вдоль координат  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$  для металлизированной поверхности  $U_1=1$ ,  $U_2=0.071$ ,  $U_3=0.67$ , для открытой поверхности  $U_1=1$ ,  $U_2=0.12$ ,  $U_3=0.65$ . Амплитуды смещений вдоль координаты  $X_1$  являются преобладающими, т. е. данная волна является квазипродольной.

Скорости объёмных волн для указанных углов Эйлера равны 4,003 км/с, 4,711 км/с и 6,752 км/с. Кривая медленности самой быстрой объёмной волны в сагиттальной плоскости  $X_1X_3$  не имеет участков вогнутости, поэтому предельная скорость, определяемая перпендикулярной оси  $X_1$  касательной к кривой медленности, в данном случае совпадает со скоростью объёмной волны.

Корни характеристического уравнения, участвующие в построении данного решения (см. выражения (1) и (2)), равны  $\beta^{(1)}=0.026-1.01j,$   $\beta^{(2)}=0.74-0.031j,$   $\beta^{(3)}=-1.92+0.011j,$   $\beta^{(4)}=-1.56+0.02j$  для металлизированной поверхности и  $\beta^{(1)}=0.0017-1.01j,$   $\beta^{(2)}=0.78-0.0031j,$   $\beta^{(3)}=-1.97+0.0011j,$   $\beta^{(4)}=-1.61+0.0021j$  для открытой поверхности.

Первый и второй корни для обоих видов поверхности соответствуют двум парциальным модам, локализованным вблизи поверхности (отрицательные мнимые части), третий и четвёртый корни соответствуют нарастающим в глубину (положительные мнимые части) уходящим от поверхности (отрицательные действительные части) двум другим парциальным модам.

Таким образом, анализ амплитуд и корней подтверждает, что данное решение представляет собой высокоскоростную псевдоповерхностную квазипродольную волну в соответствии с классификацией, применяемой, например, в [2, 4, 12].

Аналогично для двух следующих решений:

2) KNbO<sub>3</sub> (ниобат калия), углы Эйлера (0; 90°; 78,3°),  $V_{\rm m}=6{,}312\,5$  км/с,  $V_{\rm 0}=7{,}653\,8$  км/с,  $\delta_{\rm m}=5{,}21\,{\rm дБ}/\lambda,\,\delta_0=5{,}33\,{\rm дБ}/\lambda,\,K^2=35{,}05\,\%,\,\Psi=1{,}87^\circ.$ 

Нормированные амплитуды механических смещений для металлизированной поверхности  $U_1=1$ ,  $U_2=0{,}074$ ,  $U_3=0{,}51$ , для открытой поверхности  $U_1=1$ ,  $U_2=0{,}036$ ,  $U_3=0{,}59$ .

Скорости объёмных волн 2,690 км/с, 4,029 км/с и 7,778 км/с. Кривая медленности самой быстрой объёмной волны имеет симметричную относительно оси  $X_1$  вогнутость, соответствующая предельная скорость равна 7,225 км/с.

Корни характеристического уравнения равны  $\beta^{(1)}=0.21-0.31j,$   $\beta^{(2)}=-0.066-0.23j,$   $\beta^{(3)}=-1.35+0.024j,$   $\beta^{(4)}=-1.25+0.034j$  для металлизированной поверхности и  $\beta^{(1)}=0.42-0.17j,$   $\beta^{(2)}=-0.057-0.14j,$   $\beta^{(3)}=-1.68+0.014j,$   $\beta^{(4)}=-1.57+0.025j$  для открытой поверхности.

3) La $_3$ Ga $_5$ SiO $_{14}$  (LGS, лангасит), углы Эйлера ( $60^\circ$ ;  $30^\circ$ ; 0),  $V_{\rm m}=5,6724$  км/с,  $V_0=5,6817$  км/с,  $\delta_{\rm m}=9,98$  дБ/ $\lambda$ ,  $\delta_0=9,85$  дБ/ $\lambda$ ,  $K^2=0,33\%$ ,  $\Psi=0$ , TCD =  $17,6\cdot 10^{-6}/^\circ$ C.

Нормированные амплитуды для металлизированной поверхности  $U_1=1, U_2=0.214, U_3=0.646,$  для открытой поверхности  $U_1=1, U_2=0.209, U_3=0.644.$ 

Скорости объёмных волн равны 2,359 км/с, 3,339 км/с и 5,758 км/с. Кривая медленности самой быстрой объёмной волны вогнутости не имеет.

Корни характеристического уравнения равны  $\beta^{(1)}=0.11-0.65j,\ \beta^{(2)}=0.32-0.36j,\ \beta^{(3)}=$   $=-2.01+0.014j,\ \beta^{(4)}=-1.38+0.089j$  для металлизированной поверхности и  $\beta^{(1)}=0.11-0.65j,\ \beta^{(2)}=0.32-0.35j,\ \beta^{(3)}=-2.01+0.014j,\ \beta^{(4)}=-1.38+0.088j$  для открытой поверхности.

Необходимо отметить, что непосредственный глобальный поиск вытекающих волн, описанный в разделе 4 для ПАВ, невозможен ввиду отсутствия функции цели для произвольной области поиска.

### 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен метод расчёта характеристик поверхностных акустических волн, основанный на применении процедуры поиска глобального экстремума функции многих переменных. Процедура глобального поиска используется в трёх конкретных применениях:

- 1) для минимизации определителя граничных условий и расчёта фазовой скорости волны V и коэффициента затухания  $\delta$  вдоль направления распространения;
- 2) для поиска ориентаций в пространстве, соответствующих оптимальным значениям параметров ПАВ ( $\delta=0$ , определитель граничных условий минимизируется только по одной переменной V);
- 3) для поиска пространственных ориентаций, в окрестностях которых могут быть обнаружены псевдоповерхностные и высокоскоростные псевдоповерхностные волны. Возможности метода проиллюстрированы примерами.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Олинер А. Поверхностные акустические волны. — М.: Мир, 1981.

- 2. Sato T., Abe H. // IEEE Trans. Ultrasonics., Ferroelectrics, and Frequency Control. 1998. V. 45, № 1. P. 136.
- 3. Naumenko N. F. // Proc. IEEE Ultrasonics Symposium. 1995. P. 273.
- 4. Pereira da Cunha M. // Proc. IEEE Ultrasonics Symposium. 1996. P. 97.
- 5. Чередник В. И. // Материалы II научной конф. ННГУ, 1977. Вып. 1. Деп. в ННГУ, № 3538—77. С. 273.
- 6. Уайлд Д. Дж. Методы поиска экстремума. М.: Наука, 1967.
- 7. Hill I. // IEEE Trans. 1969. V. SSC-S, № 1. P. 2
- 8. Голант М. Б., Елагин В. М., Малькова-Хаимова Н. Я., Победоносцев А. С. // Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ. 1973. Вып. 5. С. 24.
- 9. Pereira da Cunha M. // Proc. IEEE Ultrasonics Symposium. 1998. P. 283.
- 10. Балакирев М. К., Гилинский И. А. Волны в пьезокристаллах. Новосибирск: Наука, 1982.
- 11. Murota M., Shimizu Y. // Proc. IEEE Ultrasonics Symposium. 1998. P. 293.
- 12. Двоешёрстов М. Ю., Чириманов А. П. // Изв. вуз. Радиофизика. 1999. Т. 42, № 5. С. 485.

Нижегородский госуниверситет, г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию 6 апреля 1999 г.

### CALCULATION OF SURFACE ACOUSTIC WAVES IN CRYSTALS USING THE PROCEDURE OF GLOBAL OPTIMIZATION

M. Yu. Dvoesherstov, V. I. Cherednik, and A. P. Chirimanov

The characteristics of surface acoustic waves are calculated using the procedure of searching an extremum of a multi-variable function. This procedure is used to minimize the determinant of boundary conditions to search for optimal orientations (from the point of view of acoustic-wave characteristics) in piezocrystals and to find pseudo-surface (leaky) acousic waves existing only in the vicinity of specific orientations.

УДК 538.56:519.25

# О СТАЦИОНАРНОМ НЕРАВНОВЕСНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПЛОТНОСТИ ЧИСЛА ЧАСТИЦ, ФОРМИРУЕМОМ ИСТОЧНИКАМИ И СТОКАМИ

А. А. Дубков, А. Н. Малахов

Исследовано неоднородное диффузионное уравнение с заданным потенциальным профилем, с источником и стоком частиц. Обсуждена возможность формирования неравновесного, но стационарного состояния системы. Для постоянного во времени точечного источника получены общие формулы, определяющие неравновесные стационарные распределения плотности числа частиц в зависимости от вида потенциального профиля. Определено влияние источников и стоков на структуру потоков в диффузионной системе. Рассмотрен ряд примеров.

**1.** Рассмотрим известное уравнение Фоккера—Планка для плотности вероятности W(x,t) броуновских частиц, диффундирующих в заданном потенциальном профиле U(x):

$$\frac{\partial W(x,t)}{\partial t} = \frac{D}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x} W(x,t) \right] + \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2} \right\},\tag{1}$$

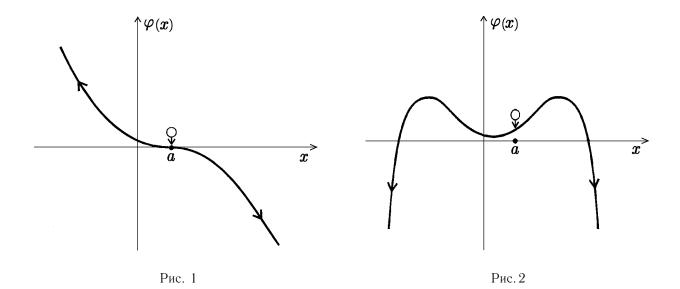
где D=2kT/h — интенсивность белого шума, h — эквивалентная вязкость, T — температура броуновских частиц, k — постоянная Больцмана,  $\varphi(x)=2U(x)/(hD)=U(x)/(kT)$  — безразмерный потенциальный профиль.

В силу начального условия  $W(x,0)=\delta(x-x_0)$  уравнение (1) удовлетворяет условию нормировки  $\int_{-\infty}^{+\infty}W(x,t)\,\mathrm{d}x=1$  и в зависимости от вида потенциального профиля (граничных условий) может описывать различные типы поведения броуновских частиц, которые в начальный момент времени были сосредоточены в точке  $x=x_0$ .

Если потенциальный профиль  $\varphi(x)$  достаточно быстро и неограниченно возрастает при  $x \to \pm \infty$ , в системе существует потенциальная яма, внутри которой со временем независимо от начального условия возникает равновесное стационарное броуновское движение, полностью определяемое потенциальным профилем  $\varphi(x)$ . Для такого броуновского движения находят корреляционные функции, спектры, времена установления и другие статистические характеристики (см., например, [1, 2]).

Если же потенциальный профиль  $\varphi(x)$  возрастает достаточно быстро до плюс бесконечности при  $x \to -\infty$  и спадает до минус бесконечности при  $x \to +\infty$  (рис. 1) либо спадает до минус бесконечности при  $x \to \pm \infty$  (рис. 2), то в системе могут быть только локальные потенциальные ямы, и все броуновские частицы независимо от начального состояния рано или поздно скатятся вниз по бесконечному потенциальному склону. В этом случае не существует ненулевых стационарных плотностей вероятности. Разумеется, представляет интерес отыскание времени жизни метастабильных или нестабильных состояний, но это уже другие задачи (см., например, [1]).

2. Пусть теперь в диффузионном уравнении имеется потенциальный профиль первого типа (рис. 1) с заданным источником, расположенным в точке x=a, и стоком, который обеспечивается бесконечным потенциальным склоном. В этом случае может возникнуть стационарное неравновесное распределение. Если, например, в уравнении имеется лишь источник, а стока нет, то возникает нестационарное бесконечное накапливание частиц, как это имеет место, например, в ситуации, рассмотренной в [3, c. 304]. Если же источника нет, а имеется только сток, то мы приходим к уже рассмотренному случаю нулевых распределений. Поэтому для существования ненулевых стационарных и в то же время неравновесных распределений необходим определённый баланс между источником и стоком, причём,



как очевидно, чем мощнее источник, тем интенсивнее должен быть сток, и наоборот. Заметим, что в такой ситуации о нормировке распределения, как и об уравнении  $\Phi$ оккера—Планка для плотности вероятности W(x,t), говорить уже не приходится.

По этой причине уравнение (1) мы заменим в общем случае неоднородным уравнением диффузии для плотности числа частиц, которые движутся в силовом поле  $\varphi(x)$  от источника к стоку (см. [3]):

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} = \frac{D}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x} \rho(x,t) \right] + \frac{\partial^2 \rho(x,t)}{\partial x^2} \right\} + s(x,t). \tag{2}$$

Здесь  $\rho(x,t)$  — плотность числа частиц (далее — просто плотность частиц), s(x,t) — функция источника (s(x,t)  $\Delta x$   $\Delta t$  — число частиц, рождающихся в интервале от x до  $x+\Delta x$  за промежуток времени от t до  $t+\Delta t$ ).

Есть ещё одна глубокая причина, по которой мы должны заменить уравнение (1) на уравнение (2) для системы с источником и стоком. Если источник отсутствует, то в системе со стоком, как уже упоминалось, плотность вероятности W(x,t) для всех броуновских частиц при любом начальном условии стремится к нулю. Это означает, что в системе через некоторое время (после процессов релаксации) не останется ни одной «старой» (броуновской) частицы, которую мы описывали уравнением (1). Если теперь включить источник согласно уравнению (2), то в анализируемую диффузионную систему войдут «новые» частицы источника, которые в соответствии с (2) после переходных процессов при условии стационарности плотности частиц  $\rho(x)$  будут находиться в балансном равновесии между источником и стоком. Эти новые частицы могут иметь различные характеристики, в том числе статистические, и представлять, например, случайный стационарный процесс, который, в свою очередь, будет определять искомые статистические характеристики стационарного неравновесного процесса  $\rho(x,t)$ , описываемого диффузионным уравнением (2).

3. В настоящей работе нас будут интересовать стационарные неравновесные распределения плотности частиц  $\rho(x)$  для достаточно простой и вместе с тем интересной ситуации, когда источник является локализованным в точке и имеет постоянную во времени интенсивность:  $s(x,t)=s\delta(x-a)$ , где s>0— число частиц, рождающихся в единицу времени в точке x=a. При этом уравнение движения имеет вид

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} = \frac{D}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x} \rho(x,t) \right] + \frac{\partial^2 \rho(x,t)}{\partial x^2} \right\} + s\delta(x-a). \tag{3}$$

Пусть задано начальное и два граничных условия. Поставим задачу нахождения стационарной неравновесной плотности частиц  $\rho(x,\infty)=\rho(x)$ , которая устанавливается при  $t\to\infty$  и не зависит от начального распределения  $\rho(x,0)$ .

Из (3) находим уравнение для  $\rho(x)$ :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left[ \frac{\mathrm{d}\rho(x)}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x} \rho(x) \right] + \frac{2s}{D} \delta(x - a) = 0. \tag{4}$$

Интегрируя это уравнение два раза, имеем

$$\rho(x) = c_2 e^{-\varphi(x)} + c_1 e^{-\varphi(x)} \int_{-\infty}^{x} e^{\varphi(u)} du - \frac{2s}{D} e^{-\varphi(x)} \int_{-\infty}^{x} e^{\varphi(u)} 1(u - a) du,$$
 (5)

где  $c_1$  и  $c_2$  — произвольные постоянные, которые необходимо определить из граничных условий.

Рассмотрим вначале потенциальный профиль, соответствующий рис. 1. Так, при  $x \to -\infty$  поток

$$G(x,t) \equiv -\frac{D}{2} \left[ \frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x} \rho(x,t) + \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial x} \right] \tag{6}$$

должен быть равен нулю:

$$\frac{\mathrm{d}\rho(x)}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x}\rho(x) = 0,$$

а при  $x \to +\infty$  должна быть равна нулю плотность  $\rho(x)$ . Определяя произвольные постоянные в (5) из этих граничных условий, находим

$$\rho(x) = \frac{2s}{D}e^{-\varphi(x)} \int_{x}^{+\infty} e^{\varphi(u)} 1(u-a) du,$$

ИЛИ

$$\rho(x) = \frac{2s}{D}e^{-\varphi(x)} \times \begin{cases} \int_{x}^{+\infty} e^{\varphi(u)} du, & x \ge a; \\ \int_{x}^{+\infty} e^{\varphi(u)} du, & x \le a. \end{cases}$$
 (7)

При этом, как видно из (6), (7), стационарный поток частиц

$$G(x) = s1(x - a), (8)$$

где 1(x-a) — единичная функция. Легко проверить из уравнения (3), что условие существования стационарной плотности

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x,t) \, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x) \, \mathrm{d}x = \text{const}$$

требует зависимости потока от x:

$$G(\infty) - G(-\infty) = s,$$

что и подтверждается формулой (8). Это обстоятельство связано с существованием источника в уравнении (3).

Обратим теперь внимание на условие  $\rho(x) \to 0$  при  $x \to +\infty$ . Это условие означает, что плотность частиц должна достаточно быстро стремиться к нулю при  $x \to +\infty$ , чтобы не возникала неинтегрируемость  $\rho(x)$  при  $x \to +\infty$ . В противном случае медленный спад  $\rho(x)$  (иначе говоря, слабый

сток в системе) не даст возможности получить стационарное значение для  $\rho(x)$ , если мы по-прежнему рассматриваем произвольную потенциальную функцию  $\varphi(x)$ , стремящуюся к минус бесконечности при  $x \to +\infty$ . Без этого условия (даже при слабом источнике) в системе, как уже упоминалось, происходит бесконечное накапливание частиц.

Таким образом, условие интегрируемости плотности  $\rho(x)$  на интервале  $[-\infty, +\infty]$  налагает довольно жёсткие ограничения на вид потенциала  $\varphi(x)$ . Из уравнения

$$\frac{\mathrm{d}\rho(x)}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x}\rho(x) + \frac{2s}{D}\mathbf{1}(x-a) = 0 \tag{9}$$

можно найти, что при  $x \to +\infty$  плотность частиц спадает как

$$\rho(x) \simeq -\frac{2s}{D\varphi'(x)} \,. \tag{10}$$

Поэтому для выполнения условия интегрируемости  $\rho(x)$  при  $x \to +\infty$  достаточно положить, чтобы потенциал спадал с ростом x не медленнее чем  $\varphi(x) \sim -x^2$ . Будем считать это условие выполненным. Нетрудно также показать из формулы (9), что при наличии фиксированного стока в точке x = L производная плотности частиц  $\rho'(L)$  всегда равна = -2s/D, т.е. не зависит от формы потенциала  $\varphi(x)$ .

4. Перейдём теперь к примерам потенциального профиля первого типа.

**Первый пример**. Пусть  $\varphi(x) = -\gamma x^3$ . Положим для простоты, что источник находится в точке x = a = 0. В этом случае согласно (7)

$$\rho(x) = \frac{2s}{D}e^{\gamma x^3} \times \begin{cases} \int_{x}^{+\infty} e^{-\gamma u^3} du, & x \ge 0; \\ \int_{0}^{+\infty} e^{-\gamma u^3} du, & x \le 0. \end{cases}$$
(11)

График такой стационарной и неравновесной плотности частиц изображён на рис. З вместе с координатой источника. Плотность частиц в начале координат равна

$$\rho(0) = \frac{2s\Gamma(1/3)}{3D\sqrt[3]{\gamma}},$$

где  $\Gamma(x)$  — гамма-функция. Асимптотическое значение плотности частиц при  $x \to +\infty$  в соответствии с (10) равно

$$\rho(x) \simeq \frac{2s}{3D \, \gamma x^2}.$$

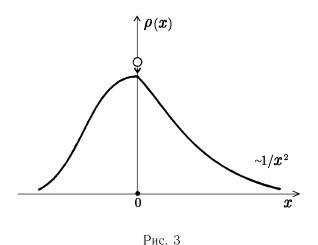
Поток, как и должно быть, равен нулю при x < 0 и s при x > 0. При этом интересно заметить, что сток не фиксирован, а распределён по координате тем плотнее, чем круче спадает потенциал с ростом x.

**5. Второй пример**. Рассмотрим теперь потенциальный профиль, который представлен отражающей стенкой в точке x=0 и поглощающей границей x=L, т. е. стоком в точке x=L. Другими словами,

$$\varphi(x) = \begin{cases} +\infty, & x \le 0; \\ 0, & 0 < x < L; \\ -\infty, & x > L. \end{cases}$$

Координата a источника находится в интервале 0 < a < L, граничные условия имеют вид

$$\rho'(0) = 0, \quad \rho(L) = 0.$$



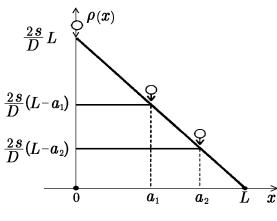


Рис. 4

На основании (7) находим

$$\rho(x) = \frac{2s}{D} \times \begin{cases} L - x, & a \le x \le L; \\ L - a, & 0 \le x \le a. \end{cases}$$
 (12)

Эта стационарная и неравновесная плотность частиц изображена на рис. 4 для любой координаты источника 0 < a < L.

Поток равен нулю для x < a, что хорошо видно для отражающей стенки, и равен s для  $a < x \le L$ , что очевидно для треугольной формы распределения. Вместе с этим следует заметить, что при  $a \to L$  плотность  $\rho(x)$  уменьшается и при a = L исчезает вовсе, поскольку при a = L источник сливается со стоком, и мы получаем нулевую плотность:  $\rho(x) \equiv 0$ . Это, разумеется, справедливо только для фиксированного стока.

С другой стороны, чем ближе координата источника a находится к началу координат, тем ближе форма распределения плотности частиц  $\rho(x)$  к треугольнику. Заметим, что в формуле (12) мы можем использовать граничное условие отражающей стенки  $\rho'(0) = 0$  только для координаты источника a > 0, которая может быть сколь угодно близкой к нулю, оставаясь, однако, при этом положительной.

**6. Третий пример**. Выберем теперь односторонний потенциальный профиль с распределённым стоком (рис. 5):

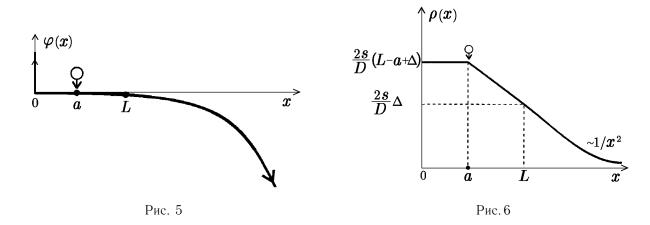
$$\varphi(x) = \begin{cases} +\infty, & x \le 0; \\ 0, & 0 < x \le L; \\ -\gamma (x - L)^3, & x > L. \end{cases}$$

Расчёт по формулам (7) даёт (см. рис. 6)

$$\rho(x) = \frac{2s}{D} \times \begin{cases} L - a + \Delta, & 0 \le x \le a; \\ L - x + \Delta, & a < x \le L; \\ e^{\gamma (x - L)^3} \int_{x - L}^{+\infty} e^{-\gamma u^3} du, & x - L > 0, \end{cases}$$

где  $\Delta = \Gamma(1/3)/(3\sqrt[3]{\gamma})$ . В этом примере, как и в первом, нет фиксированного стока, и плотность частиц  $\rho(x)$  уменьшается до нуля с ростом x. При этом «треугольник» плотности  $\rho(x)$ , как видно из рис. 6, плавно переходит при  $x \ge L$  в асимптотическое выражение  $\rho(x) \sim 1/\left[3\gamma\,(x-L)^2\right]$ .

7. Перейдём теперь к рассмотрению второго типа потенциального профиля (рис. 2), когда  $\varphi(x) \to -\infty$  при  $x \to \pm \infty$ . В этом случае имеются два стока, фиксированных или распределённых. Уравнение (4), как и формула (5), не изменяются, однако из-за новых граничных условий ( $\rho(x)=0$  при  $x=\pm \infty$ ) меняются значения произвольных постоянных  $c_1$  и  $c_2$ .



Нетрудно найти следующее общее выражение для плотности:

$$\rho(x) = \frac{2s}{D}e^{-\varphi(x)} \left[ C \int_{-\infty}^{x} e^{\varphi(u)} du - \int_{-\infty}^{x} e^{\varphi(u)} 1(u - a) du \right],$$

где введено обозначение

$$C = \int_{a}^{+\infty} e^{\varphi(u)} du / \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\varphi(u)} du < 1.$$

Для x > a

$$\rho(x) = \frac{2s}{D} (1 - C) e^{-\varphi(x)} \int_{x}^{+\infty} e^{\varphi(u)} du,$$
(13)

для  $x \leq a$ 

$$\rho(x) = \frac{2s}{D} C e^{-\varphi(x)} \int_{-\infty}^{x} e^{\varphi(u)} du.$$
 (14)

Нетрудно определить поток частиц в случае потенциального профиля второго типа:

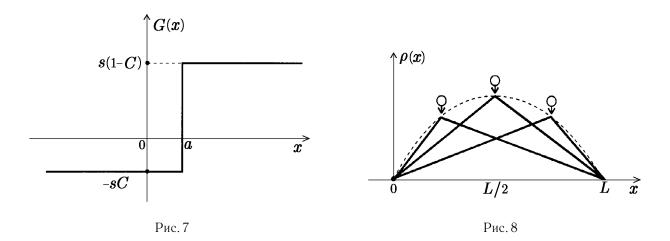
$$G(x) = -sC + s1(x - a), \tag{15}$$

который, как следует из (15), скачком изменяет свой знак: при x>a поток имеет положительное значение, а при x<a— отрицательное. Таким образом, направление потоков различается: для x>a поток направлен вправо по оси x, при x<a— влево. Другими словами, имеются два стока (фиксированные или распределённые), причём они могут быть разными по величине. Всё зависит от заданного потенциала второго типа, который мы также предполагаем спадающим при  $x\to\pm\infty$  достаточно быстро, и от координаты источника x=a (см. рис. 7 для a>0). Точке смены знака потока всегда соответствует координата источника.

Обратим внимание на тот факт, что при x > a плотность частиц в формуле (13) ровно в (1 - C) раз меньше соответствующей плотности в случае одного стока (см. (7)). Это связано с разделением потока на две части и, как следствие, с его уменьшением в (1 - C) раз за точкой расположения источника.

Для простейшего случая, когда потенциал является симметричным, так что  $\varphi(-x)=\varphi(x)$ , и при этом a=0, легко видеть, что C=1/2 и

$$\rho(x) = \frac{s}{D}e^{-\varphi(x)} \int_{x}^{+\infty} e^{\varphi(u)} du$$
 (16)



при  $x \ge 0$ . При x < 0 имеем соответственно

$$\rho(x) = \frac{s}{D} e^{-\varphi(x)} \int_{-\infty}^{x} e^{\varphi(u)} du,$$

и, следовательно,  $\rho(-x) = \rho(x)$ . В этом случае поток равен

$$G(x) = \begin{cases} s/2, & x > 0; \\ -s/2, & x < 0, \end{cases}$$

а точке «водораздела» потока соответствует a=x=0.

**8.** Рассмотрим **четвёртый пример**. Пусть на оси x в точках x=0, x=L имеются две поглощающие границы, а потенциал  $\varphi(x)$  между этими границами тождественно равен нулю. Тогда очевидно, что граничные условия для  $\rho(x)$  таковы:  $\rho(0)=\rho(L)=0$ . Пусть координата a источника расположена в интервале 0<a<L.

В этом случае, как нетрудно проверить, C = 1 - a/L, и мы получаем

$$\rho(x) = \frac{2s}{D} \times \begin{cases} a(1 - x/L), & x \ge a; \\ x(1 - a/L), & x \le a. \end{cases}$$
(17)

Плотность частиц  $\rho(x)$ , как и должно быть, при  $x\to 0$  и  $x\to L$  (где имеются поглощающие границы) стремится к нулю. Максимальное значение  $\rho(x)$ , равное s/(2D), достигается в точке источника a=L/2 при x=L/2:

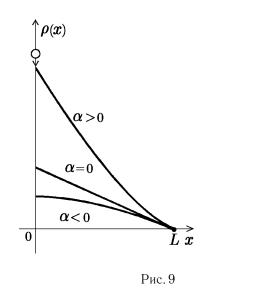
$$\rho(a) = \frac{2sa}{D} \left( 1 - \frac{a}{L} \right) = \frac{2s}{D} \left[ \frac{1}{4} - \left( \frac{1}{2} - \frac{a}{L} \right)^2 \right]. \tag{18}$$

Как следует из (18), точки максимума плотности  $\rho(x)$  лежат на параболе с вершиной в точке x=a=L/2 (см. рис. 8).

Рассматривая поток, нетрудно обнаружить, что

$$G(x) = \begin{cases} sa/L, & x > a; \\ -s(1-a/L), & x < a. \end{cases}$$

Отсюда следует, что если источник расположен вблизи правой точки стока  $a \approx L$ , то весь поток, практически равный s, сосредоточен в точке x = L, а вблизи x = 0 стока практически не существует.



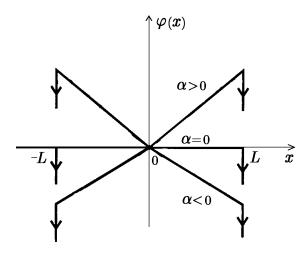


Рис. 10

И наоборот, при  $a\approx 0$  весь поток, равный -s, уходит в сток вблизи x=0, а в точке x=L стока практически нет. И лишь при a=L/2 мы имеем равные стоки в обе поглощающие границы, а поток, как и должно быть, равен +s/2 при x>L/2 и -s/2 при x<L/2.

**9.** Рассмотрим **пятый пример**. Возьмём симметричный потенциальный профиль  $\varphi(-x) = \varphi(x)$  с поглощающими границами x = -L и x = L. Выберем координату источника a = 0 и положим

$$\varphi(x) = \alpha |x|,$$

где коэффициент  $\alpha$  может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Не представляет никакого труда из (16) найти чётную плотность частиц для источника, расположенного в начале координат (для  $0 \le x \le L$ , см. рис. 9):

$$\rho(x) = \frac{s}{D\alpha} \left[ e^{\alpha (L-x)} - 1 \right]. \tag{19}$$

Как легко видеть,

$$\rho(0) = \frac{s}{D\alpha} \left[ e^{\alpha L} - 1 \right]$$

и, как и должно быть,  $\rho(L) = 0$ .

Заметим, что потенциальный профиль, изображённый на рис. 10, в случае  $\alpha>0$  представляет собой потенциальный барьер высоты  $\alpha L$ , который частицы источника должны преодолевать, чтобы попасть в точки стока  $x=\pm L$ . Поскольку интенсивность источника s фиксирована, то при высоком барьере  $\alpha L\gg 1$  плотность частиц должна быть достаточно большой для того, чтобы поток смог преодолеть этот барьер. Напротив, при малом потенциальном барьере  $\rho(x)$  будет уменьшаться, и, если положить  $\alpha=0$ , когда барьер отсутствует, получим треугольную форму распределения плотности  $\rho(x)=s\left(L-x\right)/D$ , которая из-за симметрии будет ровно вдвое меньше, чем для случая отражающей стенки. Полагая  $\alpha=-\gamma<0$ , мы получим дальнейшее уменьшение плотности частиц (при этом  $\rho(0)\simeq s/(D\gamma)$ ), необходимое для того, чтобы частицы источника попали в стоки, и выгнутую вверх форму плотности  $\rho(x)$ .

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 99-02-17544 и 00-15-96620), программы «Университеты России—фундаментальные исследования» (проекты № 99-28-74 и 99-28-43) и гранта КЦФЕ Минобразования РФ.

### ЛИТЕРАТУРА

- 1. Malakhov A. N. // Chaos. 1997. V. 7, № 3. P. 488.
- 2. Дубков А. А., Малахов А. Н., Саичев А. И. // Изв. вуз. Радиофизика. 2000. Т. 43, № 4. С. 369.
- 3. Зельдович Я. Б., Мышкис А. Д. Элементы математической физики. М.: Наука, 1973. 352 с.

Нижегородский госуниверситет, г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию 8 июня 2000 г.

### STATIONARY NONEQUILIBRIUM NUMBER-DENSITY DISTRIBUTION FORMED BY PARTICLE SOURCES AND SINKS

A. A. Dubkov and A. N. Malakhov

We analyze an inhomogeneous diffusion equation with given potential profile and particle source and sink. The possibilities of realizing a nonequilibrium but, at the same time, stationary state of the system are discussed. In the case of a constant emitter located in some point, we obtain general formulas describing nonequilibrium stationary distributions of particle number density as functions of the potential-profile shape. The influence of sources and sinks on the flow structure in a diffusion system is determined. A number of examples are considered.

УДК 519.213.2

### ДРОБНЫЙ ЗАКОН ПУАССОНА

О. Н. Репин, А. И. Саичев

Рассматривается пуассоновский процесс со случайной интенсивностью, распределение интервалов между скачками которого описывается уравнением с дробными производными. Получен явный вид распределения случайной интенсивности этого процесса и производящей функции числа скачков. Отмечено, что исследуемый дробный закон Пуассона может быть использован при статистическом описании хаотических процессов разной физической природы, демонстрирующих явление аномальной диффузии.

В последнее время в разных областях физики всё большее внимание уделяется процессам аномальной диффузии (см., например, [1-4]). Так называют процесс x(t), дисперсия которого с течением времени растёт по закону  $\sigma^2 \propto t^\gamma$ , где  $\gamma \neq 1$ . Для лучшего понимания природы и статистических свойств аномальной диффузии полезно исследовать модели случайных процессов, демонстрирующих подобное явление. Простейшим примером субдиффузионного ( $\gamma < 1$ ) процесса является скачкообразный процесс, равный нулю в момент t=0 и сумме случайного числа N(t) скачков в текущий момент времени t>0:

$$x(t) = \sum_{m=1}^{N(t)} h_m. {1}$$

Здесь  $\{h_1, h_2, \ldots, h_m, \ldots\}$  — последовательность статистически независимых случайных величин с одинаковой плотностью вероятностей w(h), а скачки совершаются в случайные моменты времени

$$t_n = \sum_{k=1}^n \tau_k,\tag{2}$$

где  $\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k, \dots\}$  — статистически независимые неотрицательные случайные величины с одинаковой плотностью вероятностей  $f(\tau)$ .

Наиболее распространённым примером распределения случайных интервалов между скачками служит закон Пуассона

$$f(\tau) = e^{-\tau},\tag{3}$$

Лаплас-образ которого имеет вид

$$\varphi(u) = \int_{0}^{\infty} f(\tau)e^{-u\tau}d\tau = \frac{1}{1+u}.$$
 (4)

Отличительной чертой закона Пуассона (3) является очень быстрое (экспоненциальное) стремление  $f(\tau)$  к нулю при  $\tau \to \infty$ , вследствие чего оказывается ограниченным математическое ожидание пуассоновского распределения. Это обеспечивает (при ограниченной дисперсии случайной величины скачков  $h_m$ ) классический закон диффузии  $\sigma^2 \propto t$  скачкообразного процесса (1) с пуассоновской статистикой времён скачков.

Можно ожидать, что дисперсия скачкообразного процесса (1) растёт с течением времени по субдиффузионному закону лишь в том случае, если распределение интервалов между скачками  $f(\tau)$  спадает к нулю при  $\tau \to \infty$  достаточно медленно, так что математическое ожидание интервала между

скачками оказывается равным бесконечности [3, 4]. Целью данной работы является детальный анализ одного родственного пуассоновскому распределения  $f(\tau)$ , математическое ожидание которого равно бесконечности.

Рассмотрим обобщение пуассоновского процесса, для которого преобразование Лапласа распределения интервала между скачками имеет вид

$$\varphi(u) = \frac{1}{1 + u^{\alpha}},\tag{5}$$

где  $0 < \alpha < 1$ , естественным образом обобщающее Лаплас-образ (4) классического закона Пуассона.

Так как функция 1/(1+z) вполне монотонна и  $z=u^{\alpha}$  положительна с вполне монотонной производной, то по критерию вполне монотонности [5]  $\varphi(u)$  (5) вполне монотонна и, следовательно, является преобразованием Лапласа некоторой плотности распределения.

Из уравнения  $\varphi(u)$   $(1+u^{\alpha})=1$ , применяя обратное преобразование Лапласа, получим уравнение для плотности распределения интервалов между скачками:

$$f(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{t} (t - \tau)^{\alpha - 1} f(\tau) d\tau = \frac{t^{\alpha - 1}}{\Gamma(\alpha)},$$
 (6)

где  $\Gamma(\alpha)$  — гамма-функция,  $t \ge 0$ . Используя метод последовательных приближений, нетрудно получить решение уравнения (6) в виде ряда:

$$f_{\alpha}(t) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{t^{\alpha m-1}}{\Gamma(\alpha m)}.$$
 (7)

Привлекая представление функции Миттаг—Лефлера в виде ряда [3]

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{\Gamma(\alpha m + 1)},$$

легко проверить, что

$$f_{\alpha}(t) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E_{\alpha}(-t^{\alpha}). \tag{8}$$

Подчеркнём, что уравнение (6) равносильно уравнению в дробных производных

$$\frac{\mathrm{d}^{\alpha} f}{\mathrm{d}t^{\alpha}} + f = \delta(t),\tag{9}$$

где

$$\frac{\mathrm{d}^{\alpha} f}{\mathrm{d}t^{\alpha}} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{0}^{t} \frac{f(\tau) \,\mathrm{d}\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}$$

— производная дробного порядка  $\alpha$  в смысле Лиувилля [6],  $\delta(t)$  — дельта-функция.

Назовём решение уравнения (9) дробным законом Пуассона. Используя представление функции Миттаг—Лефлера в виде контурного интеграла [7]

$$E_{\alpha}(-z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{t^{\alpha-1}e^{-t} dt}{t^{\alpha} + z},$$

представим функцию Миттаг—Лефлера в виде определённого интеграла:

$$E_{\alpha}(-z) = \frac{z\sin(\pi\alpha)}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}e^{-x} dx}{x^{2\alpha} + z^2 + 2zx^{\alpha}\cos(\pi\alpha)},$$
(10)

из которого вытекает следующее представление решения уравнения (9):

$$f_{\alpha}(t) = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{e^{-tx} dx}{x^{\alpha} + x^{-\alpha} + 2\cos(\pi\alpha)}.$$
 (11)

Записывая интеграл (11) в виде

$$f_{\alpha}(t) = \frac{t^{\alpha - 1} \sin(\pi \alpha)}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{x^{\alpha} e^{-x} dx}{x^{2\alpha} + t^{2\alpha} + 2x^{\alpha} t^{\alpha} \cos(\pi \alpha)}$$

и учитывая, что

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x^{\alpha} e^{-x} dx}{x^{2\alpha} + t^{2\alpha} + 2x^{\alpha} t^{\alpha} \cos(\pi \alpha)} \xrightarrow[t \to 0]{} \int_{0}^{\infty} x^{-\alpha} e^{-x} dx = \Gamma(1 - \alpha) = \frac{\pi}{\Gamma(\alpha) \sin(\pi \alpha)},$$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x^{\alpha} e^{-x} dx}{(x/t)^{2\alpha} + 1 + 2(x/t)^{\alpha} \cos(\pi \alpha)} \xrightarrow[t \to \infty]{} \int_{0}^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} dx = \Gamma(1 + \alpha),$$

найдём асимптотические выражения для  $f_{\alpha}(t)$ :

$$f_{\alpha}(t) \approx \begin{cases} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & t \to 0; \\ \frac{t^{-\alpha-1}}{\alpha\Gamma(1-\alpha)}, & t \to \infty. \end{cases}$$

Обозначив

$$p_{\alpha}(\xi) = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\xi \left(\xi^{\alpha} + \xi^{-\alpha} + 2\cos(\pi\alpha)\right)},$$
(12)

запишем дробный закон Пуассона в виде

$$f_{\alpha}(t) = \int_{0}^{\infty} \xi e^{-t\xi} p_{\alpha}(\xi) \,\mathrm{d}\xi. \tag{13}$$

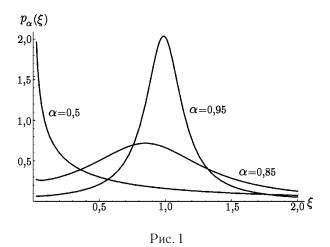
Представление (13) позволяет интерпретировать дробный закон Пуассона как распределение интервала между скачками пуассоновского процесса  $N_{\alpha}(t)$  со случайной мерой интенсивности  $\Lambda(t) = \Lambda(0,t) = \xi t$ , где  $\xi$  — неотрицательная случайная величина с плотностью распределения  $p_{\alpha}(t)$ .

Найдём производящую функцию  $\Phi(z,t)$  для числа скачков дробного пуассоновского процесса:

$$\Phi(z,t) = \mathrm{M}e^{-\xi t \, (1-z)} = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{e^{-xt \, (1-z)} \, \mathrm{d}x}{x \, (x^{\alpha} + x^{-\alpha} + 2\cos(\pi\alpha))}.$$

Используя представление функции Миттаг—Лефлера в виде

$$E_{\alpha}(-t^{\alpha}) = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{e^{-xt} dx}{x(x^{\alpha} + x^{-\alpha} + 2\cos(\pi\alpha))},$$



получим выражение для  $\Phi(z,t)$  через функцию Миттаг—Лефлера:

$$\Phi(z,t) = E_{\alpha}(-t^{\alpha}(1-z)^{\alpha}). \tag{14}$$

При  $\alpha \to 1$ , когда  $p_{\alpha}(\xi)$  слабо сходится к дельта-функции  $\delta(\xi-1)$ , правая часть (14) сходится к хорошо известной производящей функции числа скачков пуассоновского процесса. На рис. 1 изображены графики, иллюстрирующие зависимость  $p_{\alpha}(\xi)$  при разных  $\alpha$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1. Lecture Notes in Physics Levy Flights and Related Topic in Physics. / Ed. by M. F. Shlesinger, G. M. Zaslavsky, U. Frish. Berlin: Springer, 1994.
- 2. Klafter J., Shlesinger M. F., Zumofen G. // Physics Today. 1996. V. 49. P. 33.
- 3. Saichev A. I., Zaslavsky G. M. // Chaos. 1997. V. 7, № 4. P. 753.
- 4. Barkai E., Klafter J. // Phys. Rev. E. 1998. V. 57. P. 5237.
- 5. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и её приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984.
- 6. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.
- 7. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 3. М.: Наука, 1967.

Нижегородский госуниверситет, г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию 11 февраля 2000 г.

#### FRACTIONAL POISSON LAW

O. N. Repin and A. I. Saichev

We consider a Poissonian process with random intensity for which the distribution of intervals between jumps is described by an equation with fractional derivatives. The distribution of the random intensity of this process and the generating function of the jump number are obtained.

УДК 538.56:519.25

# АНАЛИТИКО-ЧИСЛЕННОЕ ПОСТРОЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВЕРОЯТНОСТНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

### О.В. Музычук

Предложен метод построения модельных нестационарных вероятностных распределений для нелинейных динамических систем, связанных со стохастическим уравнением Ферхюльста. Построение основано на численом решении дифференциальных уравнений релаксации для среднего значения и дисперсии. Замыкание цепочки моментных уравнений и построение плотности вероятностей осуществляется на базе точных аналитических соотношений для стационарных вероятностных характеристик, поэтому эти распределения имеют правильную стационарную асимптотику. Показана возможность численного контроля точности предложенной процедуры. В качестве примеров рассмотрена релаксация вероятностных характеристик амплитуды автогенератора и параметрического генератора с шумовой накачкой, построена эволюция вероятностного распределения амплитуды колебаний.

Статистический анализ нестационарных процессов в нелинейных системах, подверженных воздействию случайных сил, актуален для ряда теоретических и прикладных задач статистической радиофизики, нелинейной динамики, экологии (см. например, [1-3]). Математическим аппаратом исследования таких систем является теория марковских процессов и процессов диффузионного типа (см., например., [4-6]), но, как известно, аналитических решений нестационарных уравнений Фоккера—Планка (далее  $\Phi\Pi$ ) для искомых вероятностных распределений в нетривиальных случаях найти не удаётся. Альтернативным путём является моделирование соответствующих плотностей вероятностей на основании аналитических или численных решений дифференциальных уравнений релаксации моментов или кумулянтов. При этом в качестве модели обычно используется гауссова плотность вероятностей или распределения, построенные на наборе из нескольких первых кумулянтов [6].

В настоящей работе для стохастического уравнения Ферхюльста и ряда связанных с ним систем предлагается самосогласованная модель нестационарного вероятностного распределения, основанная на численном решении уравнений релаксации среднего значения и дисперсии. Замыкание цепочки уравнений релаксации моментов и построение самой плотности вероятностей осуществляется на основе точных аналитических соотношений для стационарных вероятностных характеристик, поэтому моделируемое распределение имеет правильную стационарную асимптотику. Показана возможность численного контроля точности такой процедуры.

На основании предложенной модели рассмотрена релаксация вероятностных характеристик амплитуды автогенератора с флуктуациями собственной частоты и параметрического генератора с шумовой накачкой. Установлены некоторые закономерности релаксации моментов интенсивности и вероятностного распределения амплитуды колебаний.

**1.** Рассмотрим стохастическое уравнение Ферхюльста, имеющее, как известно [3], широкий спектр приложений (на некоторых из них остановимся ниже):

$$T\dot{x} = [1 + \xi(t)]x - \gamma x^2. \tag{1}$$

В «экологической» терминологии здесь x(t) — численность изолированной популяции, T=1/a, a — среднее значение трофического коэффициента,  $\gamma$  — безразмерный коэффициент внутривидовой конкуренции. Случайный процесс  $\xi(t)$  положим для простоты гауссовым дельта-коррелированным шу-

MOM \*:

$$\langle \xi \rangle = 0, \quad \langle \xi(t)\xi(t-\tau) \rangle = D_{\xi}\delta(\tau).$$
 (2)

На основании (1), (2) стандартным образом приходим к уравнениям релаксации моментов:

$$n^{-1} \langle x^n(\theta) \rangle' = (1 + nD) \langle x^n(\theta) \rangle - \gamma \langle x^{n+1}(\theta) \rangle, \tag{3}$$

где  $n=1,2,\ldots; D=D_\xi/(2T)$  — эффективная спектральная мощность шума,  $\theta=t/T$  — безразмерное время (здесь и ниже штрих обозначает производную по  $\theta$ ). Уравнение  $\Phi\Pi$  для плотности вероятностей  $W_x(x;\theta)$  имеет вид

$$\frac{\partial W}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ -xW + Dx \frac{\partial}{\partial x} (xW) + \gamma x^2 W \right]. \tag{4}$$

Для стационарных значений моментов  $\langle x^n \rangle_{\mathrm{st}} = \langle x^n(\infty) \rangle$  очевидна рекуррентная формула

$$\langle x^{n+1} \rangle_{\rm st} = (1+nD) \langle x^n \rangle_{\rm st} / \gamma,$$
 (5)

где  $n = 1, 2, \dots$  В частности, для среднего и дисперсии имеем

$$\langle x \rangle_{\rm st} = 1/\gamma, \quad D_x = D \langle x \rangle_{\rm st}^2.$$
 (6)

Стационарное решение уравнения (4)  $w_x = W_x(x; \infty)$  хорошо известно [8]:

$$w_x = Cx^{1/D-1}e^{-\gamma x/D}, \quad x > 0.$$
 (7)

Заметим, что на основании выражений (6) его можно представить в виде

$$w_x(x) = Cx^{1/d_x - 1} e^{-x/(\langle x \rangle d_x)}, \quad C^{-1} = (\langle x \rangle d_x)^{1/d_x - 1} / \Gamma(1/d_x),$$
 (8a)

где  $d_x = D_x/\langle x \rangle^2$  — нормированная дисперсия,  $\Gamma(z)$  — гамма-функция. Отметим, что  $w_x(x)$  является  $\chi^2$ -распределением, его вид определяется средним значением и дисперсией. Заметим также, что при  $d_x > 1$  распределение имеет интегрируемую особенность в нуле.

В качестве модели нестационарного вероятностного распределения  $W_x(x;t)$  будем использовать выражение (8a) с «размороженными» параметрами  $\langle x(t) \rangle$  и  $d_x(t)$ , релаксацию которых можно найти численным образом, т. е. положим

$$W_x(x;t) = w_x[x;\langle x(t)\rangle, d_x(t)]. \tag{86}$$

Для замыкания цепочки моментных уравнений (3) используем рекуррентную формулу (5), которую с учётом (6) представим в виде

$$d_x(t) = D_x(t)/\langle x(t)\rangle^2, \quad \langle x^{n+1}(t)\rangle = \left(1 + nd_x(t)\right)\langle x(t)\rangle\langle x^n(t)\rangle. \tag{9}$$

Очевидно, что предлагаемая модель даёт правильную стационарную асимптотику как для моментов, так и для плотности вероятностей. Поскольку моменты распределения (8б)

$$\langle x^n(t)\rangle = \int_0^\infty x^n W_x(x;t) dt$$

828

 $<sup>^*</sup>$ Ряд вероятностных характеристик подобных систем можно найти не только в случае белого шума  $\xi(t)$  [7].

выражаются через гамма-функцию, обозначив для краткости  $1/d_x = u$ ,  $1/(\langle x \rangle d_x) = v$  и интегрируя, находим

$$\langle x^{n+1} \rangle / \langle x^n \rangle = \Gamma(u+n+1) / (v\Gamma(u+n)) = (1+nd_x) \langle x \rangle.$$

Таким образом, вероятностное распределение (8б) соответствует разложению (9); в этом смысле предложенная модель является самосогласованной.

На основании (3) и (9) имеем следующую систему уравнений релаксации среднего значения и нормированной дисперсии:

$$\langle x \rangle' = (1+D)\langle x \rangle - \gamma (1+d_x) \langle x \rangle^2,$$
  

$$d_x'/2 = (1+d_x) (D-\gamma \langle x \rangle d_x).$$
(10)

Для получения же замкнутой системы уравнений релаксации первых n моментов следует воспользоваться разложением (9) для момента  $\langle x^{n+1} \rangle$ . Начальные условия для системы (10) задаём в виде

$$\langle x(0)\rangle = \langle x\rangle_0, \quad d_x(0) = d_0 = D_0/\langle x\rangle_0^2,$$
 (11a)

где  $D_0$  — начальная дисперсия. Пользуясь асимптотикой гамма-функции, можно показать, что при  $t \to 0, D_x \to 0$  вероятностное распределение (8a) превращается в дельта-функцию:

$$W_x(x; t) \to \delta(x - \langle x \rangle_0).$$

Следовательно, данная модель допускает и детерминированные начальные условия

$$\langle x(0)\rangle = x_0, \quad \langle x^n(0)\rangle = x_0^n.$$
 (116)

**2.** Укажем на возможность численного контроля предлагаемой процедуры и построим попутно ещё одно модельное распределение. Заменой переменной y=1/x от уравнения Ферхюльста (1) придём к линейному стохастическому уравнению

$$T\dot{y} + [(1 + \xi(t)]y = \gamma.$$
 (12)

При этом релаксация моментов  $\langle y^n(t) \rangle$  (или обратных моментов  $\langle x^{-n}(t) \rangle$ ) описывается линейной системой уравнений

$$n^{-1} \langle y^n \rangle' + (1 - nD) \langle y^n \rangle = \gamma \langle y^{n-1} \rangle, \tag{13}$$

где  $n = 1, 2, \ldots$  Сделав соответствующую замену переменной в выражении (8a), получим модельное распределение для уравнения (12):

$$\tilde{W}_y(y;t) = \tilde{C}(t)y^{-1-1/d_x(t)} \exp\left[-\frac{1}{d_x(t)\langle x(t)\rangle y}\right],\tag{14}$$

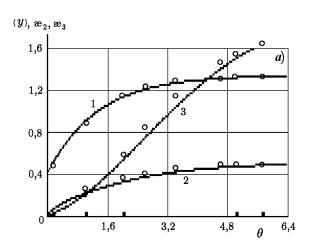
базирующееся на моментах уравнения Ферхюльста. На основании (14) можно найти нестационарные моменты  $\langle y^n(t) \rangle$  и, сравнивая их с точными выражениями, получаемыми из уравнений (13), контролировать адекватность модельной плотности вероятностей.

На основании стационарного распределения для уравнения (12)

$$w_y(y) = Cy^{-1-1/D} \exp\left[-\frac{\gamma}{Dy}\right], \quad y > 0, \tag{15}$$

можно построить и самосогласованную модельную плотность вероятностей вида

$$W_y(y;t) = C(t)y^{-3-1/d_y(t)} \exp\left[-\frac{(1+1/d_y(t))\langle y(t)\rangle}{y}\right],$$
(16)



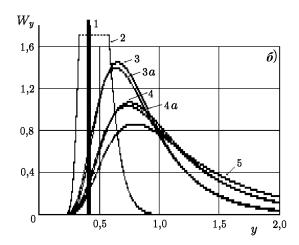


Рис. 1

основанную на моментах процесса y(t). Интегрируя выражение (16), легко проверить, что из него следует правильное стационарное разложение моментов, записанное в форме

$$\langle y^n \rangle = \frac{\gamma}{1 - nD} \langle y^{n-1} \rangle = \frac{1 + d_y}{1 - (n-2) d_y} \langle y \rangle \langle y^{n-1} \rangle, \tag{17}$$

где в последнем выражении  $n=2,3,\ldots$  Модельные распределения (14), (16) имеют правильную стационарную асимптотику (15), а интегрирование (16), естественно, приводит к точным результатам для среднего значения и дисперсии процесса y(t) в любой момент времени t.

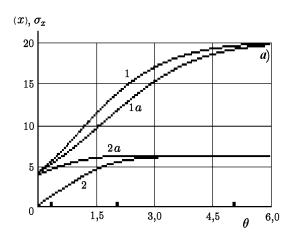
Релаксация вероятностных характеристик стохастического уравнения (12) показана на рис. 1. На рис. 1a приведена релаксация среднего  $\langle y(t) \rangle$  (кривая 1) и нормированных кумулянтов

$$\mathfrak{X}_2 = d_y, \quad \mathfrak{X}_3 = \langle y^3 \rangle / \langle y \rangle^3 - 3d_y - 1$$

(кривые 2 и 3 соответственно). Сплошные линии — решения точных уравнений (13); значки около кривых 1 и 2 — результаты интегрирования распределения (14), а около кривой 3 — значения  $æ_3$ , полученные из самосогласованного распределения (16) (соответствующие ему результаты для среднего и дисперсии совпадают с точными кривыми). Отметим, что хотя соответствующая графикам интенсивность шума D=0.25 является весьма большой (порог устойчивости 3-го кумулянта — D=1/3), результаты модельных распределений мало отличаются от точных. Наибольшее отличие имеется в переходной области. Как показывает численный анализ, при D<0.15 отклонения результатов, основанных на модельном распределении для уравнения Ферхюльста (14), не превышают 1 % для среднего значения и 5 % для дисперсии.

Рис. 16 показывает эволюцию модельных распределений. Здесь 1 — начальное дельта-распределение, кривые 2-5 — модельное распределение (16), а кривые 3a, 4a — (14). Номера кривых соответствуют моментам времени, показанным метками на рис. 1a. Последняя кривая неотличима от стационарного распределения (15). Отметим, что отличие моделей (14) и (16) заметно лишь в переходной области.

3. Релаксация вероятностных характеристик решения уравнения Ферхюльста, полученная на основании выражений (8б), (10) приведена на рис. 2. На рис. 2a показано установление среднего значения (кривые 1,1a) и среднеквадратичного отклонения (2,2a), а на рис. 2b — эволюция модельного распределения (8б). На обоих рисунках кривые, не имеющие индекса «a», соответствуют детерминированным начальным условиям (дельта-распределению при t=0), а кривые с индексом — начальному распределению  $w_0(x)$  вида (8a). При этом дисперсия взята весьма большой  $D_0=16$ , так что начальное распределение имеет особенность в нуле (кривая 1a на рис. 2b). Метки на оси времени на рис. 2a — мо-



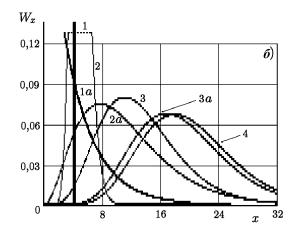


Рис. 2

менты, в которые строятся модельные распределения. Номера кривых растут с увеличением t, причём кривая 4 (она же 4a) совпадает со стационарной плотностью вероятностей (7). Соответствующие рис. 2a параметры таковы:  $\gamma=0.05; D=0.1; x_0=4$ .

Времена релаксации вероятностных характеристик обычно определяются по «равновеликому прямоугольнику», т. е. для некоторого процесса u(t) положим

 $\tilde{u}(t) = |u(t) - u(\infty)|, \quad \tau_u = \tilde{u}_{\text{max}}^{-1} \int_{0}^{\infty} \tilde{u}(t) \, \mathrm{d}t. \quad (18)$ 

Таблипа 1

$\gamma$	D = 0.1	D = 0.33	D = 1.0
0,02	3,5; 2,5	3,3; 2,3	3,1; 2,1
0,01	2,4; 1,5	2,2; 1,4	2,0; 1,2
0,50	1,3; 0,6	1,1; 0,5	0,7; 0,4

В табл. 1 приведены определённые таким образом времена релаксации  $\tau_{\langle x \rangle}$  (первый столбец) и дисперсии  $\tau_{D_x}$  (второй столбец). Отметим, что в отличие от системы (13) здесь дисперсия устанавливается быстрее среднего значения. Времена релаксации уменьшаются с ростом нелинейности  $\gamma$  и интенсивности шума D (зависимость от D тем заметнее, чем больше  $\gamma$ ).

4. Рассмотрим теперь стохастическое уравнение

$$\ddot{x} + 2h\left(\pm 1 + 2\gamma x^2\right)\dot{x} + \omega^2\left(1 + \xi(t)\right)x = 0,$$
(19)

описывающее параметрический генератор, возбуждаемый шумовой накачкой (здесь и далее этому соответствует верхний знак в формулах), или автогенератор с параметрическим шумом. Перейдя стандартной заменой переменных

$$x = A(t)\sin(\omega t + \varphi(t)), \quad \dot{x} = \omega A(t)\cos(\omega t + \varphi(t))$$

к амплитуде и фазе, используя аппарат диффузионного приближения и усреднение по периоду колебаний [1, 5, 9], придём к уравнению релаксации моментов интенсивности  $I=A^2$  (здесь и ниже безразмерное время  $\theta=ht$ ):

$$(2n)^{-1} \langle I^n \rangle' + [\pm 1 - \mu (n+1)/2] \langle I^n \rangle + \gamma/2 \langle I^{n+1} \rangle = 0, \tag{20}$$

где  $\mu = \omega^2 D_\xi/(4h)$  — эффективная спектральная мощность шума  $\xi(t)$ . Стационарное решение соответствующего уравнения  $\Phi\Pi$  имеет вид

$$w_I(I) = C_I I^{\mp 2/\mu} \exp(-\gamma I/\mu), \quad C_I = (\gamma/\mu)^{1\mp 2/\mu} / \Gamma(1 \mp 2/\mu).$$
 (21)

Как видно из (20), стационарные значения моментов таковы:

$$\langle I \rangle_{\rm st} = (\mu \mp 2)/\gamma, \quad \langle I^n \rangle_{\rm st} = (\mu n \mp 2) \langle I^{n-1} \rangle_{\rm st}/\gamma,$$
 (22)

где  $n=2,3,\ldots$  Заметив, что  $\mu/\gamma=D_I/\langle I \rangle$ , запишем их в виде

$$\langle I^{n+1} \rangle = (1 + nd_I) \langle I \rangle \langle I^n \rangle, \quad d_I = D_I / \langle I \rangle^2,$$
 (23)

аналогичном (9). Рекуррентную формулу (23) используем для замыкания цепочки уравнений (20) и построения модельной плотности вероятностей  $W_I(I;t)$ , как было сделано выше. Таким образом, нестационарное модельное распределение интенсивности колебаний системы (19) описывается уравнением (8б), в котором переменная x заменена на I и использованы соответствующие статистические средние. Релаксация средней интенсивности и нормированной дисперсии теперь определяется уравнениями

$$\langle I \rangle' = (\mp 2 + 2\mu) \langle I \rangle - \gamma (1 + d_I) \langle I \rangle^2,$$
  

$$d'_I/2 = (1 + d_I) (\mu - \gamma \langle x \rangle d_I).$$
(24)

Вероятностное распределение амплитуды колебаний находится из распределения интенсивности очевидным образом; для стационарной плотности вероятностей имеем

$$w_A(A) = CA^{1\mp 4\mu} \exp(-\gamma A^2/\mu), \quad C = 2C_I.$$
 (25)

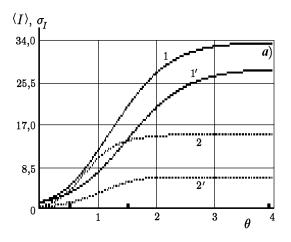
Заметим, что в случае параметрического генератора (верхний знак в показателе степени) последняя существует только при значительной мощности шума ( $\mu > 2$ ). Модельное вероятностное распределение амплитуды имеет вид

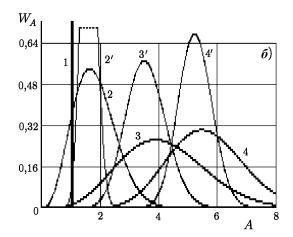
$$W_A(A;t) = C(t)A^{2/d_I(t)-1} \exp\left[-\frac{A^2}{\langle I(t)\rangle d_I(t)}\right]$$
 (26)

и является самосогласованным в указанном выше смысле.

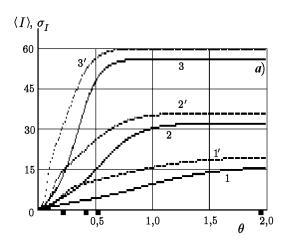
Релаксация вероятностных характеристик уравнения (19), полученная на основании формул данного раздела, показана на рис. З и 4. На первом из них приведена релаксация средней интенсивности и среднеквадратичного отклонения (рис. 3a) и эволюция соответствующего вероятностного распределения амплитуды автогенератора (рис. 36) при  $I_0=1$ ;  $\gamma=0.15$ . Кривые, помеченные штрихом, соответствуют интенсивности шума  $\mu=0.1$ , без штриха —  $\mu=0.5$ . Кривые 1 и 1' на рис.  $3a-\langle I(t)\rangle$ , 2 и 2' —  $\sigma_I(t)$ . Номера кривых на рис. 36 растут с ростом времени, соответствующие моменты времени указаны метками на рис. 3a. Кривые 4, 4' для  $\theta\approx 4$  неотличимы от стационарной плотности вероятностей (21).

Рис. 4 иллюстрирует установление вероятностных характеристик параметрического генератора (интенсивность шумовой накачки  $\mu$  здесь значительно выше). Кривые 1-3 на рис. 4a — средняя интенсивность, 1'-3' — среднеквадратичное отклонение. Кривые 1 и 1' соответствуют  $\mu=5$ ; 2 и 2' —  $\mu=10$ ; 3 и 3' —  $\mu=16$ . Рис.  $4\sigma$  показывает релаксацию вероятностного распределения амплитуды колебаний для случая наибольшей накачки. Здесь 1 — начальное дельта-распределение, кривые 2-5 — модельная плотность вероятностей (26) в моменты времени, отмеченные на рис. 4a. Кривая 5 совпадает со стационарным распределением (25). Заметим, что в процессе эволюции при малых t имеем распределение с особенностью в нуле (кривая 2), поскольку при этом  $\sigma_A(t)$  значительно превышает  $\langle A(t) \rangle$ . На рис. 4a хорошо видно уменьшение времени релаксации (времена  $\tau_{\langle I \rangle}$  и  $\tau_{D_I}$  здесь практически одинаковы) с ростом интенсивности шума  $\mu$  (что имеет место и для автогенератора). Как и в случае автогенератора, времена релаксации уменьшаются и с ростом нелинейности  $\gamma$ .









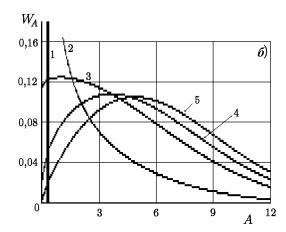


Рис. 4

Отметим в заключение, что аналогичным образом можно моделировать и некоторые другие нестационарные вероятностные распределения, однозначно определяемые средним значением и дисперсией. Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты № 99-02-17544, 00-15-96620.

#### **ЛИТЕРАТУРА**

- 1. Диментберг М. Ф. Нелинейные стохастические задачи механических колебаний. М.: Наука,  $1980.-368\,\mathrm{c}.$
- 2. Noise in Nonlinear Dynamical Systems / Ed. by F. Moss and P. V. E. McClintock. Cambridge: Cambridge University Press, 1989, Vols. 1–3.
- 3. Хорстхемке В., Лефевр Р. Индуцированные шумом переходы: теория и применение в физике, химии и биологии. М.: Мир, 1987. 397 с.
- 4. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и её приложения. М.: Мир, 1964. Т. 1, 2.
- 5. Кляцкин В. И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. М.: Наука, 1980. 336 с.
- 6. Малахов А. Н. Кумулянтный анализ негауссовых случайных процессов и их преобразований. М.: Сов. радио, 1978.

- 7. Музычук О. В. // Изв. вуз. ПНД. 1996. Т. 4, № 3. С. 18.
- 8. Диментберг М. Ф. // ПММ. 1983. Т. 47, вып. 4. С. 55.
- 9. Медведев С. Ю., Музычук О. В. // Изв. вуз. Радиофизика. 1981. Т. 24, № 1. С. 49.

Нижегородский архитектурностроительный университет, г. Нижний Новгород, Россия Поступила в редакцию 26 апреля 2000 г.

## ANALYTIC-NUMERICAL CONSTRUCTION OF NONSTATIONARY PROBABILITY DISTRIBUTIONS FOR ONE CLASS OF NONLINEAR STOCHASTIC SYSTEMS

O. V. Muzychuk

We propose a method for constructing nonstationary model probability distributions for nonlinear dynamical systems related to the Verhulst stochastic equation. The proposed procedure is based on the numerical solution of relaxation differential equations for the mean value and variance. The set of moment equations is made closed and the probability density is constructed on the basis of rigorous analytic relations for stationary probability characteristics. As a result, these distributions have correct stationary asymptotics. We demonstrate the possibility of numerical control of the accuracy of the proposed procedure. We consider the examples of the relaxation of amplitude probability characteristics of a autogenerator and parametric oscillator with a noise pump. The evolution of the amplitude probability distribution is determined.

# ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ «К СТАТЬЕ В. А. АЛИМОВА И А. В. РАХЛИНА «О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ ДЕКАМЕТРОВОЙ РАДИОАСТРОНОМИИ»

С. Я. Брауде, А. В. Мень

Глубокоуважаемый господин редактор!

1. Ознакомившись со статьёй В. А. Алимова и А. В. Рахлина «О некоторых особенностях декаметровой радиоастрономии», опубликованной в журнале «Радиофизика» (Т. 43, № 2, стр. 95–105) и посвящённой теоретическому учёту влияния ионосферы на приём сигналов космического радиоизлучения, читатель может прийти к выводу о невозможности проведения регулярных радиоастрономических измерений в декаметровом диапазоне длин волн с помощью инструментов, расположенных на поверхности Земли. Правда, кое-где в тексте авторы делают краткие оговорки, что иногда дело обстоит не совсем безнадёжно. В то же время в этом диапазоне в США, на Украине и в других странах велись и ведутся наблюдения космического декаметрового радиоизлучения по самым разным радиоастрономическим программам: измерению потоков радиоизлучения и координат, приёму сигналов пульсаров и солнечного радиоизлучения, радиоспектроскопии, радиоинтерферометрическим измерениям угловых размеров и моделей распределения радиояркости космических радиоисточников и т. д. Вывод, который может быть сделан из этих экспериментов, заключается в том, что в коротковолновой части декаметрового диапазона, на частотах  $\nu = 10 \div 30 \text{ M}$ Гц, а иногда и на более низких частотах (в основном в ночное время в осенне-зимний период, в годы, не совпадающие с периодом максимальной солнечной активности), регулярные радиоастрономические наблюдения возможны, несмотря на существенное влияние ионосферы Земли, из-за которой методика таких измерений должна быть принципиально иной, чем на более высоких частотах. В частности, обязательно должны использоваться статистические методы обработки данных. При этом с достаточной для практики точностью определяются абсолютные потоки радиоизлучения космических радиоисточников как средневзвешенные значения большого ансамбля данных. Например, в Радиоастрономическом институте Национальной академии наук Украины с помощью широкополосного радиотелескопа УТР-2 в течение многих лет ведётся регулярный обзор Северного неба на частотах 25; 20; 16,7; 14,7; 12,6 и 10 МГц с целью составления Граковского каталога координат и декаметровых спектров радиоисточников. В ходе этих наблюдений уже получена информация о нескольких тысячах разных объектов — радиогалактик, квазаров, неотождествлённых источников, остатков сверхновых звёзд и областей поглощения в космической среде. Хотя ошибки отдельных измерений могут составлять, как и указывают авторы статьи, многие десятки и даже сотни процентов, при достаточно большом объёме данных, исключая наиболее подверженные влиянию ионосферы, удаётся обеспечить приемлемую точность измерений (например, порядка  $10 \div 15~\%$  на частотах  $20 \div 25 \, \text{M}$ Гц при нескольких десятках измерений). При достаточном объёме измерений оказывается, что основная их погрешность связана не с дисперсией случайного разброса отсчётов из-за влияния ионосферы, а с систематическими ошибками из-за неточного знания параметров антенны, потерь в земле, погрешностей системы калибровки. С понижением частоты ( $\nu < 20 \div 30~{
m MFц}$ ) случайные ошибки изза влияния ионосферы, естественно, возрастают, и при  $\nu \le 8 \div 10~{\rm M}$ Гц становятся возможны лишь эпизодические измерения потоков излучения радиоисточников при наиболее благоприятной ситуации в ионосфере. Следует также подчеркнуть, что рекомендуемый в рассматриваемой статье в качестве единственного метод наиболее точного измерения потоков излучения путём выбора отдельных записей радиоисточников, минимально искажённых интенсивными мелкомасштабными неоднородностями ионосферы, как показывает эксперимент, неприемлем, т. к. как потоки, определённые по таким записям, оказываются существенно отличающимися от истинных из-за влияния крупномасштабных неоднородностей электронной концентрации в ионосфере. Критерием правильности таких измерений является то, что при достаточно точном определении потоков излучения на ряде дискретных частот в декаметровом диапазоне длин волн для большинства радиоисточников с синхротронным механизмом генерации спектральные индексы  $\alpha$  ( $S \sim \nu^{-\alpha}$ , где S — спектральная плотность излучения,  $\nu$  — частота), определённые в этом диапазоне, практически совпадают со спектральным индексом высокочастотных спектров. При этом экспериментальные данные, как правило, хорошо совпадают с экстраполированными от высоких частот к низким спектральными зависимостями космических радиоисточников — прямыми в системе координат  $\log S$ ,  $\log \nu$ .

- 2. Аналогично обстоит дело и с выводами авторов статьи о невозможности проведения в декаметровом диапазоне длин волн радиоинтерферометрических наблюдений. Не зная о таком заключении, мы в течение ряда лет проводим измерения угловых размеров космических радиоисточников и их моделей распределения радиояркости в декаметровом диапазоне радиоволн на частотах 25; 20 и 16,7 МГц с помощью системы УРАН, состоящей их четырёх широкополосных декаметровых радиоинтерферометров УРАН с базами 42,3; 152,3; 613,1 и 946,2 км с предельным угловым разрешением до 1 секунды дуги. В ходе этих наблюдений, несмотря на большие трудности, связанные с влиянием ионосферы и измерения, удалось определить в коротковолновой части декаметрового диапазона угловые размеры и структуру радиоизлучения целого ряда различных космических радиоисточников радиогалактик, квазаров, неотождествлённых объектов. Естественно, с понижением частоты при приближении её к критической частоте ионосферы трудности проведения таких наблюдений возрастают, и на частотах  $\nu < 10 \div 15$  МГц возможны лишь эпизодические измерения при очень длительном периоде наблюдений.
- 3. В заключение кратко остановимся на возможности измерения угловых размеров космических радиоисточников в декаметровом диапазоне длин волн методом мерцаний. Предложенный авторами статьи модифицированный метод мерцаний (МММ), заключающийся в выделении из спектра мерцаний высокочастотных составляющих, связанных в основном с мерцаниями интенсивности принимаемых сигналов из-за неоднородности межзвёздной и межпланетной плазмы, не вызывает возражений. Однако вызывает удивление тот факт, что авторы статьи почему-то не указали, что этот метод был предложен и реализован более 20 лет назад В. П. Бовкуном и И. Н. Жуком. Это тем более странно, что ссылки на работы В. П. Бовкуна и И. Н. Жука в статье имеются, однако приводятся только с целью их критики.

К письму приложен список из посвящённых обсуждаемым вопросам 44 статей, который имеется в редакции.

Радиоастрономический институт НАН Украины, г. Харьков, Украина

Поступила в редакцию 15 июня 2000 г.

#### ОТВЕТ АВТОРОВ НА ПИСЬМО С. Я. БРАУДЕ И А. В. МЕНЯ

В. А. Алимов, А. В. Рахлин

Глубокоуважаемый главный редактор!

Мы ознакомились с отзывом коллег из Радиоастрономического института НАН Украины на нашу статью «О некоторых особенностях декаметровой радиоастрономии». Нам, как и многим специалистам-радиофизикам, хорошо известны работы XИРЭ, а в последние годы РИ НАН Украины, в областивысокочастотной декаметровой радиоастрономии. На наш взгляд, они не нуждаются в рекламе. Но надо отдавать себе отчёт, что речь идёт именно о работах, посвящённых исследованию коротковолновой части декаметрового диапазона (f > 10 МГц), когда в подавляющем большинстве гео- и гелиофизических ситуаций влияние ионосферы на радиоастрономические измерения на средних широтах незначительно и достаточно простого усреднения измерений для получения достоверного результата. В таких ситуациях высокочастотная декаметровая радиоастрономия в принципиальном отношении мало чем отличается от радиоастрономических исследований в метровом диапазоне радиоволн.

Вместе с тем, в последние годы в радиоастрономических исследованиях стало уделяться повышенное внимание низкочастотной части декаметрового диапазона ( $f \lesssim 10 \ \mathrm{MFu}$ ). Здесь учёт влиянияионосферы становится уже принципиальным, поскольку на таких частотах вклад ионосферы в измеряемые характеристики при радиоастрономических наблюдениях даже на средних широтах можетбыть просто определяющим из-за сильного влияния развитой ионосферной турбулентности (с масштабами от нескольких десятков метров до десятков километров) и широкого спектра квазирегулярных крупномасштабных неоднородностей типа перемещающихся ионосферных воэмущений (с размерами в десятки и сотни километров). Причём, как показывает наш более чем 30-летний опыт работы в области исследования ионосферного распространения коротких радиоволн, в этих условиях, какправило, принимаемые сигналы имеют нестационарныи характер, когда простое усреднение результатов отдельных измерений позволяет получить среднестатистические характеристики принимаемыхсигналов, но с неконтролируемой точностью. Именно теоретическому анализу возможных путей решения основных задач радиоастрономии в низкочастотной части декаметрового диапазона радиоволни была посвящена наша работа. Это легко может установить любой внимательный читатель, поскольку в статье подробно указываются ионосферные условия, при которых проводятся те или иные теоретические расчёты (так, например, в статье неоднократно подчёркивается, что речь идёт о развитой турбулентной структуре среднеширотной ионосферы, о сильных фазовых флуктуациях коротких радиоволн в случайно-неоднородной ионосфере; все конкретные оценки статистических характеристик КВ сигналов, как указано на стр. 98, выполнены для частоты  $f=10~{
m M\Gamma}$ ц при отношении критической частоты слоя  $F_2$  ионосферы к рабочей частоте  $f_{\rm KD}/f = 0, 5$ ).

Что касается конкретных замечаний, высказанных в отзыве наших коллег, отметим следующее.

1. Рекомендуемый в статье метод наиболее точного измерения потоков излучения базируется натеоретическом анализе влияния всей совокупности ионосферных факторов, и прежде всего крупномасштабных неоднородностей ионосферы, на распространение коротких радиоволн в ионосфере (см. стр. 96—99), а не только мелкомасштабных неоднородностей, как отмечается в отзыве. Более того, в статье на стр. 99 есть прямое указание, почему нельзя получить точное определение потоков излучения в условиях сильного нестационарного влияния ионосферы на спектральные радиоастрономические измерения. И по этой причине становится очевидной некорректность предложения об экстраполяции экспериментально измеренных потоков излучения от высоких частот к низким в КВ диапазоне радиоволн. да и вообще, если, как отмечается в отзыве, «в декаметровом диапазоне длин волн для большинства радиоисточников с синхротронным механизмом генерации спектральные индексы определённые в этом диапазоне, практически совпадают со спектральным индексом высокочастотных спектров)), то

зачем проводить сами низкочастотные измерения? Предсказания теории не могут служить критерием истинности результатов экспериментальных измерений!

- 2.~B нашей статье, вопреки утверждению оппонентов, нет вывода о невозможности проведения в декаметровом диапазоне радиоинтерферометрических наблюдений. В ней аргументированно показано, что в условиях развитой турбулентности среднеширотной ионосферы угловое разрешение интерферометра на частоте 10~MГц (при  $f_{\rm kp}/f=0.5$ ) не превышает единиц градусов (см. стр. 100). А на стр. 103-104 ещё раз обращается внимание читателя на те условия сильной геофизической возмущённости среднеширотной ионосферы, когда такая ситуация реализуется, и особо подчёркивается, чтов обычных (невозмущённых) условиях среднеширотной ионосферы ограничение на работоспособность систем KB радиоинтерферометрии практически отсутствует. Это замечание тем более справедливо длявысокочастотной декаметровой радиоастрономии, о результатах которой и говорится в отзыве.
- 3. Наконец, предложенный нами модифицированный метод мерцаний (МММ) работает в условиях насыщенных ионосферных мерцаний, когда собственные частоты мерцаний коротких радиоволн в ионосфере и межпланетной плазме практически не отличаются. При этом выделение в спектре полезного сигнала, соответствующего дифракции излучения на слабых неоднородностях солнечного ветра, становится возможным лишь за счёт использования наземной остронаправленной КВ антенны, которая усредняет сильные мелкомасштабные флуктуации излучения ионосферного происхождения(см. стр. 103). Такая ситуация, как показано в статье, может реализоваться при низкочастотных декаметровых радиоастрономических наблюдениях на средних широтах. МММ расширяет функциональные возможности декаметровой радиоастрономии, поскольку позволяет проводить измерения угловых размеров дискретных источников в условиях сильных ионосферных флуктуаций принимаемого излучения, когда стандартные радиоастрономические методы измерений дают низкое угловое разрешение(см. стр. 100). В спокойных геофизических условиях на средних широтах для коротковолновой частидекаметрового диапазона, когда влияние ионосферы незначительно, спектры слабых мерцаний в ионосфере и межпланетной плазме изначально разнесены по частоте и речь идёт об общеизвестном методемерцаний в межпланетной плазме. Именно он и был реализован более 20 лет назад Бовкуном и Жуком при наблюдениях на частотах 16-25 МГц (см. цитированную литературу в статье).

Что же касается практической реализации MMM, то здесь требуется специальная методическаяпроработка эксперимента, поскольку наряду с необходимым условием насыщенных ионосферных мерцаний коротких радиоволн в ходе его должна быть осуществлена диагностика состояния неоднороднойструктуры ионосферы и межпланетной плазмы на современном уровне, в том числе с использованиемназемных КВ передающих центров и космических аппаратов типа NASA WIND. При этом предварительно должны быть проведены соответствующие целенаправленные экспериментальные исследования в области распространения коротких радиоволн в ионосфере и межпланетной плазме. В настоящеевремя такие исследования начаты в НИРФИ.

В заключение заметим, что, по некоторым данным, при измерениях в низкочастотной части диапазона коротких радиоволн применение диагностических, в том числе и активных, средств исследования околоземной плазмы будет, по-видимому, необходимым элементом перспективных наземных системдекаметровой радиоастрономии. При этом станут возможными уже не эпизодические, а регулярныерадиоастрономические измерения в низкочастотной части декаметрового диапазона, осуществляемые, что наиболее важно, с контролируемой точностью. Такие полуактивные радиоастрономические комплексы могут оказаться полезными и при радиоастрономических наблюдениях в высокочастотной части декаметрового диапазона.

Научно-исследовательский радиофизический институт, г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию 1 сентября 2000 г.

### К ЮБИЛЕЮ А.Г.ЛЮБИНОЙ

23 сентября 2000 года исполнилось 90 лет со для рождения профессора Александры Григорьевны Любиной, одного из первых преподавателей открытого в 1945 году первого в Советском Союзе радиофизического факультета ГГУ, первого заместителя декана этого факультета, много сделавшей для его становления.

А. Г. Любина родилась в 1910 году в Гомельской области. В 1927 году после окончания средней школы она поступила на физико-техническое отделение Московского государственного педагогического института им. Бубнова (2 МГУ). В те годы там работали выдающиеся учёные О.Ю. Шмидт, Г.С. Лансберг, И.Е. Тамм. Среди преподавателей был и А. А. Андронов.

После окончания института в 1931 году А. Г. Любина сначала поехала работать в г. Уфу, а в 1932 году приняла предложение А. А. Андронова переехать в Горьковский университет и с тех пор навсегда связала свою жизнь с кафедрой общей физики этого университета. В 1945 году А. Г. Любина защитила кандидатскую диссертацию. После открытия радиофака ГГУ она со свойственной ей энергией включилась в организацию учебной работы на этом факультете. Под руководством Г. С. Горелика и при её активном



участии был разработан оригинальный курс лекций по общей физике, выгодно отличавшийся от стандартных курсов того времени, созданы учебные лаборатории, разработан богатый цикл лекционных демонстраций. Педагог «от бога» и блестящий лектор, Александра Григорьевна обладала редким даром заинтересовать студентов темой лекции. Эти чёткие, эмоционально насыщенные лекции были всегда доходчивы и для не самых сильных студентов. Многим поколениям выпускников радиофака она привила любовь к физике. В том, что среди этих выпускников много людей, достигших выдающихся результатов в науке и технике, принесших мировую известность нижегородской радиофизической школе, есть большая личная заслуга Александры Григорьевны. Её учениками на педагогическом поприще являются и многие преподаватели вузов России.

Александру Григорьевну всегда отличали жизнелюбие, неравнодушие к людям, готовность помочь им в трудных ситуациях. Большое внимание она уделяла повышению качества школьного образования, при её активном участии в университете был организован и много лет успешно работал лекторий для учителей физики Нижнего Новгорода и области.

Многочисленные ученики и коллеги Александры Григорьевны сердечно поздравляют её с юбилейной датой и желают ей на долгие годы сохранить оптимизм, интерес к жизни, связи с университетом.