

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Известия высших учебных заведений

РАДИОФИЗИКА

ежемесячный научно-технический журнал

Издаётся с апреля 1958 г.

Том XLIII № 7

Нижний Новгород

2000

Содержание

Железняков В. В., Корягин С. А. Излучение синхротронного мазера в режиме насыщения.....	575
Солдаткин А. О., Чугунов Ю. В. Электрические поля и токи в модели планетарного генератора. II. Резкий перепад скорости вращения плазменной оболочки.....	595
Плеухов А. Н. , Бочкарёв В. В. , Кацевман М. М. , Петрова И. Р. , Теплов В. Ю. Спектральная обработка сигналов наклонного зондирования ионосферы с помощью параметрических методов.....	607
Соловьёв О. В. Деполяризация электромагнитного поля в локально неоднородном приземном волноводном канале.....	617
Егорченков Р. А., Кравцов Ю. А. Численная реализация метода комплексной геометрической оптики.....	630
Кон А. И. К теории распространения коротких световых импульсов в турбулентной среде.....	638
В. П. Якубов, Д. В. Лосев, А. И. Мальцев Диагностика нелинейностей по возмущениям рассеянного поля.....	645
Зверев В. А., Павленко А. А. Об алгоритме численного логарифмирования комплексной функции с минимальной шириной спектра логарифма.....	652
Арабаджи В. В. Циклический волновой затвор.....	657
Орлов И. Я., Цветков В. Е. Адаптивная оценка параметров импульсного процесса на фоне узкополосного шума методом пороговых статистик.....	665

ИЗЛУЧЕНИЕ СИНХРОТРОННОГО МАЗЕРА В РЕЖИМЕ НАСЫЩЕНИЯ

В. В. Железняков, С. А. Корягин

Методом коэффициентов Эйнштейна проведён вывод квазилинейного кинетического уравнения для релятивистских электронов с учётом синхротронного излучения частиц. Обсуждается влияние слабой радиационной диффузии электронов по питч-углу на эволюцию их распределения. Исследуется решение квазилинейного кинетического уравнения для электронов и уравнения переноса излучения в стационарном плазменном слое достаточно большой толщины, в котором действует мазерный механизм усиления синхротронного излучения. Для поддержания инверсии населённостей в распределении электронов и обеспечения стационарного уровня излучения предполагается, что в системе действует сторонний механизм ускорения частиц, эффективность которого степенным образом зависит от энергии электронов. Найдены спектры излучения синхротронного мазера в указанных условиях, когда уровень выходящего из слоя излучения определяется только характером стороннего ускорения.

ВВЕДЕНИЕ

Известно (см., например, [1], с. 404), что в системе релятивистских электронов с изотропным распределением $f(\mathbf{p})$ по импульсам \mathbf{p} коэффициент поглощения синхротронного излучения

$$\mu_j(\omega, \alpha) = \frac{8\pi^3 c}{\omega^2} \int_0^\infty dp f(p) \frac{\partial}{\partial p} (p^2 P_{\omega j})|_{\theta=\alpha} \quad (1)$$

выражается через мощность $P_{\omega j}(\omega, p, \theta)$ синхротронного излучения отдельного электрона на частоте ω . * При этом коэффициент (1) определяется электронами, у которых питч-угол θ совпадает с направлением излучения α , поскольку синхротронное излучение частицы обладает высокой направленностью. Из выражения (1) видно, что для отрицательной реабсорбции $\mu_j < 0$ (мазерного эффекта) величина $p^2 P_{\omega j}$ должна уменьшаться с ростом энергии электрона (хотя бы в некотором интервале энергий). В вакууме $p^2 P_{\omega j}$ всегда растёт с увеличением p , поэтому в вакууме нельзя обеспечить усиление синхротронного излучения при любом выборе изотропного распределения электронов [2, 3] (см. также [1], с. 405).

В плазме с показателем преломления $n_j \approx 1 - \omega_L^2/(2\omega^2) < 1$ при $1 - n_j \ll 1$ происходит экспоненциальное уменьшение (депрессия) синхротронного излучения на частоте ω для электронов с импульсами $p \gtrsim mc\omega^2\omega_B \sin\theta/\omega_L^3$ [4–6]:

$$P_{\omega j} \propto \exp[-2p\omega_L^3/(3mc\omega^2\omega_B \sin\theta)].$$

Здесь ω_B — нерелятивистская циклотронная частота электронов, ω_L — ленгмюровская частота окружающей плазмы, m — масса покоя электрона, c — скорость света в вакууме. Благодаря этому отрицательная реабсорбция синхротронного излучения может реализоваться в случае специальных распределений $f(p)$ [7, 8]. Последние должны обеспечивать достаточно большой вклад в интеграл (1) энергичных электронов из интервала импульсов с отрицательной производной $\partial(p^2 P_{\omega j})/\partial p$.

* В астрофизической литературе часто используется распределение $N(E)$ частиц по энергии $E = pc$ в единичном телесном угле направлений импульса \mathbf{p} . Распределение $N(E)$ выражается через $f(p)$ следующим образом: $N(E) = \int p^2 f(p)/c|_{p=E/c}$. Величина $4\pi \int_0^\infty N(E) dE$ равна концентрации частиц.

Следует отметить, что для анизотропных распределений усиление синхротронного излучения реализуется не только в среде, но и в вакууме [9–11]. Однако для достаточно плавных распределений коэффициент усиления, связанный с анизотропией, обычно много меньше коэффициента усиления, определяемого неоднородностью распределения по энергии (если выполняются условия для депрессии излучения).

Мазерный механизм усиления синхротронного излучения может привлекаться для объяснения высокого уровня радиоизлучения некоторых астрофизических источников в условиях, когда обычный (некогерентный) механизм излучения сильно ограничивает уровень выходящего из источника излучения за счёт реабсорбции на низких частотах. Возможная роль мазерного усиления синхротронного излучения в астрофизических условиях рассматривалась в работах [8, 12]. В статье [13] исследовалось дополнительное усиление излучения линий H_2O и OH активных ядер галактик, которое возможно проходит через области с отрицательной реабсорбцией синхротронного излучения.

В статье [14] (см. также [13]) исследовался спектр синхротронного излучения для ряда модельных функций распределения электронов, имеющих максимум при некоторой энергии и обеспечивающих отрицательную реабсорбцию синхротронного излучения. Оказалось, что частотный спектр излучения протяжённого синхротронного мазера имеет характерную особенность в виде двух максимумов. Высокочастотный максимум связан с реабсорбцией синхротронного излучения (как и в источниках с некогерентным механизмом излучения); мазерное усиление приходится на более низкие частоты и обуславливает возникновение второго максимума. Два максимума наблюдались в спектре микроволнового излучения квазара 3C147 [15], а также в интенсивном всплеске радиоизлучения солнечного ветра 25–27 марта 1991 года [16]. Не исключено, что эти источники служат примером космических синхротронных мазеров.

Использование модельных распределений электронов позволяет достаточно просто выявить качественные особенности спектра излучения синхротронного мазера. Однако для детального расчёта спектров необходимо учитывать обратное влияние излучения на распределение частиц. Соответствующее квазилинейное кинетическое уравнение, которое учитывает магнитотормозное излучение частиц с произвольной энергией, впервые было получено методом коэффициентов Эйнштейна в работе [17] (см. также [18]). Вывод данного уравнения в классическом приближении (без использования представлений о квантах излучения) проведён в статье [19]. Работами [20–22] началось исследование воздействия синхротронного излучения на типичные для астрофизических условий распределения электронов (в отсутствие мазерного эффекта). Качественный анализ влияния синхротронного излучения на степенные распределения частиц был проведён в [20]. Затем методом коэффициентов Эйнштейна (независимо от работ [17, 19]) было получено квазилинейное уравнение для изотропной функции распределения релятивистских электронов в вакууме [22] (см. также [21, 23]), после чего была решена самосогласованная задача о распространении излучения в оптически толстом слое [22].

Что касается проблем, связанных с работой синхротронных мазеров, то в статье [24] был выполнен численный расчёт квазилинейной релаксации системы релятивистских электронов в холодной плазме под действием излучения с узким частотным спектром. Приближённое аналитическое решение задачи о квазилинейной релаксации было проведено в работе [13], где начальное распределение электронов бралось в виде дельта-функция $f(p) \propto \delta(p - p_0)$, а начальная интенсивность полагалась достаточно низкой. Согласно [13] в спектре излучения формируется достаточно узкий пик вблизи частоты, где коэффициент усиления начального дельта-распределения имеет максимум. На начальном этапе энергия излучения увеличивается, но затем останавливается на фиксированном уровне из-за насыщения усиления. В то же время распределение электронов трансформируется в плато (однородное распределение по импульсам с резким уменьшением концентрации выше некоторой энергии). На стадии насыщения плато сохраняется, при этом его верхний край непрерывно перемещается в сторону больших энергий из-за радиационной диффузии электронов. Следует отметить, что эти результаты противоречат усло-

вию сохранения суммарной энергии излучения и частиц: энергия электронов в расплывающемся плато неограниченно увеличивается, тогда как энергия излучения останавливается на некотором уровне. Причиной указанного противоречия послужило то обстоятельство, что в уравнении переноса использовался точный коэффициент поглощения, который даёт экспоненциально малый уровень поглощения излучения электронами плато. В то же время в кинетическое уравнение подставлялся приближённый коэффициент радиационной диффузии в виде степенной функции, что в общем случае недостаточно корректно. В результате поглощение излучения электронами, описываемое кинетическим уравнением, оказалось существенно больше, чем то же поглощение, представленное в уравнении переноса.

Полученное в [13] решение справедливо только на начальном этапе развития синхротронной неустойчивости. Вследствие сохранения энергии верхняя граница плато не может подняться выше энергии $E_u = 4E_i/3$, где E_i — энергия электронов в начальном дельта-распределении. Коэффициент поглощения для такого плато положителен на всех частотах. На частоте, в окрестности которой в соответствии с решением [13] сконцентрировано излучение, реабсорбция всего в 1,8 раза меньше, чем усиление для начального распределения. Поэтому электроны практически полностью поглощают высвеченное излучение за то же характерное время, что и время развития синхротронной неустойчивости. * Из такого результата естественно сделать вывод, что для поддержания эффективного синхротронного усиления на больших временах требуется постоянно действующий дополнительный механизм ускорения электронов.

В нашей статье рассматривается мазерное усиление синхротронного излучения в стационарном источнике — плазменном слое, состоящем из холодной изотропной плазмы с примесью релятивистских электронов. Для компенсации потерь энергии системы релятивистских электронов вследствие синхротронного излучения вводится дополнительный (сторонний) механизм ускорения электронов. Источник предполагается столь протяжённым, что в нём устанавливается достаточно высокий уровень излучения, при котором распределение электронов близко к плато. В этом случае спектр выходящего излучения определяется лишь характером стороннего ускорения и не зависит от интенсивности падающего на слой излучения.

В первом разделе статьи приводится вывод методом коэффициентов Эйнштейна квазилинейного кинетического уравнения для релятивистских электронов с учётом синхротронных процессов. На основе этого уравнения обсуждается влияние слабой диффузии релятивистских электронов по pitch-углу на эволюцию распределения $f(\mathbf{p})$. Во втором разделе исследовано усиление синхротронного излучения, когда электроны ускоряются некоторым сторонним источником и это ускорение в области низких энергий превалирует над торможением частиц из-за спонтанного излучения. В третьем разделе обсуждаются возможные спектры излучения синхротронного мазера, работающего в режиме насыщения.

1. КВАЗИЛИНЕЙНОЕ КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

Найдём квазилинейный дифференциальный оператор

$$\hat{I} = -\operatorname{div}_{\mathbf{p}} \mathbf{F}, \quad (2)$$

который описывает в кинетическом уравнении изменение функции распределения релятивистских электронов $f(\mathbf{p})$ из-за синхротронного излучения. Оператор (2) зависит от плотности потока частиц \mathbf{F} в пространстве импульсов \mathbf{p} .

Для нахождения \mathbf{F} воспользуемся методом коэффициентов Эйнштейна. Пусть электрон обладает импульсом $p_{\parallel i}$ вдоль магнитного поля, а квадрат его поперечного импульса равен $p_{\perp i}^2$. Если электрон

* К сожалению, в работе [24], где использовались точные коэффициенты диффузии и реабсорбции, не проводились численные расчёты на достаточно больших временах, когда в системе формируется ярко выраженное плато и, как мы полагаем, усиление излучения сменяется поглощением.

совершает переход через s уровней Ландау и излучает фотон в телесном угле $d\Omega$ вблизи направления Ω , то он переходит в состояние с параметрами

$$p_{\parallel f} = p_{\parallel i} - \hbar \frac{\omega_{sj}}{c} n_j \cos \alpha, \quad p_{\perp f}^2 = p_{\perp i}^2 - 2s\hbar\omega_B m,$$

где частота фотона $\omega_{sj} = s\omega_B \sqrt{1 - \beta^2}/(1 - \beta n_j \cos \theta \cos \alpha)$, $n_j(\omega, \Omega)$ — показатель преломления j -й нормальной моды, $j = 1$ соответствует необыкновенной моде, а $j = 2$ — обыкновенной, $\beta = v/c$ — отношение скорости электрона v к скорости света c , α — угол между направлением излучения Ω и магнитным полем \mathbf{B} , θ — питч-угол электрона, $\omega_B > 0$ — нерелятивистская электронная гирочастота, m — масса покоя электрона, \hbar — постоянная Планка. Указанный переход происходит с вероятностью

$$\frac{dw_{sj}^\downarrow}{dt} = (n_{\text{ph}j} + 1) P_{sj} d\Omega / (\hbar\omega_{sj}) \quad (3)$$

в единицу времени, где $P_{sj}(\Omega; \mathbf{p})$ — мощность излучения электрона в единичный телесный угол на s -й гармонике в j -ю моду, $n_{\text{ph}j}(\omega, \Omega) = 8\pi^3 |\cos \vartheta_j| c^2 I_j / (\hbar\omega^3 n_j^2)$ — число фотонов в j -й моде, $I_j(\omega, \Omega)$ и ϑ_j — интенсивность и угол между фазовой и групповой скоростями излучения в j -й моде. Вероятность (3) включает в себя как вероятность индуцированного перехода вниз, которая пропорциональна $n_{\text{ph}j}$, так и вероятность спонтанного излучения. Переходу из состояния $(p_{\parallel i}, p_{\perp i})$ в состояние $(p_{\parallel f}, p_{\perp f})$ соответствует обратный переход с вероятностью $dw_{sj}^\uparrow/dt = n_{\text{ph}j} P_{sj} d\Omega / (\hbar\omega_{sj})$, при котором поглощается фотон с теми же параметрами Ω , j и ω_{sj} .

Для нахождения плотности потока частиц \mathbf{F} в некоторой точке $\mathbf{p} = p_{\parallel} \mathbf{p}_{\parallel}^\circ + p_{\perp} \mathbf{p}_{\perp}^\circ$ пространства импульсов, где $\mathbf{p}_{\parallel}^\circ$ и \mathbf{p}_{\perp}° — соответствующие единичные векторы, рассмотрим движение частиц через небольшую площадку $d\mathbf{S}$ (см. рис. 1), которая включает точку \mathbf{p} . При фиксированных s , j и Ω данную площадку пересекают частицы, совершающие переходы между такими состояниями $(p_{\parallel i}, p_{\perp i})$ и $(p_{\parallel f}, p_{\perp f})$, для которых состояние $(p_{\parallel i}, p_{\perp i})$ лежит в области $G_{sj}(\Omega; \mathbf{p})$. Область G_{sj} представляет объём, который создала бы площадка $d\mathbf{S}$ при её параллельном смещении на вектор

$$d\mathbf{p}_{sj} = \hbar \left(\frac{n_j \omega_{sj}}{c} \cos \alpha \mathbf{p}_{\parallel}^\circ + \frac{s\omega_B m}{p_{\perp}} \mathbf{p}_{\perp}^\circ \right).$$

Вектор $d\mathbf{p}_{sj}$ равен разности импульсов $(p_{\parallel i}, p_{\perp i})$ и $(p_{\parallel f}, p_{\perp f})$. Полный поток частиц через площадку $d\mathbf{S}$ находится суммированием и интегрированием по параметрам s , j и Ω , определяющим область G_{sj} , с учётом вероятностей dw_{sj}^\downarrow/dt и dw_{sj}^\uparrow/dt . При этом разность населённостей $f(p_{\parallel i}, p_{\perp i}) - f(p_{\parallel f}, p_{\perp f})$ представляется приближённо как $(d\mathbf{p}_{sj}, \partial f / \partial \mathbf{p})$:

$$\begin{aligned} (\mathbf{F}, d\mathbf{S}) &= - \sum_{j=1}^2 \sum_{s=1}^{\infty} \oint d\Omega \frac{P_{sj}}{\hbar\omega_{sj}} \left[f(\mathbf{p}) + n_{\text{ph}j} \left(d\mathbf{p}_{sj}, \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \right) \right] (d\mathbf{p}_{sj}, d\mathbf{S}) = \\ &= - \sum_{j=1}^2 \sum_{s=1}^{\infty} \oint d\Omega \frac{P_{sj}}{c} \left[f(\mathbf{p}) + \frac{8\pi^3 |\cos \vartheta_j| c I_j(\omega_{sj}, \Omega)}{\omega_{sj}^2 n_j^2} \left(\mathbf{l}_{sj}, \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \right) \right] (\mathbf{l}_{sj}, d\mathbf{S}). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь

$$\mathbf{l}_{sj} = \frac{c d\mathbf{p}_{sj}}{\hbar\omega_{sj}} = n_j \cos \alpha \mathbf{p}_{\parallel}^\circ + \frac{s\omega_B m c}{\omega_{sj} p_{\perp}} \mathbf{p}_{\perp}^\circ = \frac{c}{v} \mathbf{p}^\circ + \frac{(c/v) \cos \theta - n_j \cos \alpha}{\sin \theta} \boldsymbol{\theta}^\circ, \quad (5)$$

\mathbf{p}° и $\boldsymbol{\theta}^\circ$ — единичные векторы в направлении \mathbf{p} и $[\mathbf{p}, [\mathbf{p}, \mathbf{B}]]$. Из равенства (4) следует, что искомая плотность потока

$$\mathbf{F} = - \sum_{j=1}^2 \sum_{s=1}^{\infty} \oint d\Omega \mathbf{l}_{sj} \frac{P_{sj}}{c} \left[f(\mathbf{p}) + \frac{8\pi^3 |\cos \vartheta_j| c I_j(\omega_{sj}, \Omega)}{\omega_{sj}^2 n_j^2} \left(\mathbf{l}_{sj}, \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \right) \right]. \quad (6)$$

Выражение (6) справедливо для магнитотормозного излучения частиц с произвольной энергией и зависит от конкретного вида излучательной способности P_{sj} . * Выражение для P_{sj} в холодной магнитоактивной плазме получено в работе [25, 26] (см. также [1], с. 250). Для синхротронного излучения на частотах ω , много бóльших ω_L и ω_B , где показатель преломления нормальных волн $n_j \approx 1 - \omega_L^2/(2\omega^2)$ можно считать изотропным, а волны близкими к поперечным,

$$P_{sj} \approx \frac{e^2 \omega_{sj}^2}{6\pi^3 c (1 + K_j^2) \sin^4 \theta} \left[\Psi_*^2 K_{2/3} \left(\frac{\omega_{sj} \Gamma \Psi_*^3}{3\omega_B \sin \theta} \right) + K_j \Psi \Psi_* K_{1/3} \left(\frac{\omega_{sj} \Gamma \Psi_*^3}{3\omega_B \sin \theta} \right) \right]^2. \quad (7)$$

Здесь угол $\Psi = \theta - \alpha$, $\Psi_* = \sqrt{\Psi^2 + \Gamma^{-2} + \omega_L^2/\omega_{sj}^2}$, $\Gamma = \sqrt{1 + p^2/(mc)^2} \approx p/(mc)$ — лоренц-фактор,

$$K_1 \approx \frac{2(\pi/2 - \alpha)}{\omega_B/\omega + \sqrt{\omega_B^2/\omega^2 + 4(\pi/2 - \alpha)^2}}, \quad K_2 \approx \frac{2(\pi/2 - \alpha)}{\omega_B/\omega - \sqrt{\omega_B^2/\omega^2 + 4(\pi/2 - \alpha)^2}} \quad (8)$$

— коэффициенты поляризации волн [10], равные отношению амплитуд электрического поля в направлениях $[\mathbf{k}, [\mathbf{k}, \mathbf{B}]]$ и $[\mathbf{k}, \mathbf{B}]$ ($K_j > 0$ соответствует правой поляризации, $K_j < 0$ — левой), $K_{1/3}$ и $K_{2/3}$ — функции Макдональда. Формула (7) получается из точного выражения для P_{sj} [25, 26], если представить в нём функции Бесселя и их производные в виде асимптотического разложения Лангера через функции Макдональда (см. [27], ф. 9.3.35, 9.3.43.).

Заметим, что в выражении (7) точные аргументы функций Макдональда в разложении Лангера заменены главными по Ψ членами. Последняя замена обуславливает относительную точность формулы (7), которая имеет порядок Ψ , тогда как разложение Лангера обладает более высокой точностью: порядка Ψ^4 для функций Бесселя и Ψ^2 для их производных. Анализируя (7), нетрудно убедиться, что излучение электронов с лоренц-фактором $\Gamma \lesssim \omega_L/(\omega_B \sin \theta)$ экспоненциально мало на всех частотах, поскольку для них аргумент функций Макдональда больше единицы для всех углов α и частот ω_{sj} . Электроны с лоренц-фактором $\Gamma \gtrsim \omega_L/(\omega_B \sin \theta)$ эффективно взаимодействуют с излучением на частотах

$$\omega_L^{3/2} \Gamma^{1/2} / (\omega_B \sin \theta)^{1/2} \lesssim \omega \lesssim \omega_B \Gamma^2 \sin \theta,$$

при этом ширина диаграммы направленности

$$\Psi_{\max} = [\omega_B \sin \theta / (\omega \Gamma)]^{1/3} \ll 1$$

увеличивается при понижении частоты от $1/\Gamma$ до $[\omega_B \sin \theta / (\Gamma \omega_L)]^{1/2}$.

Поскольку синхротронное излучение сосредоточено в малом телесном угле вдоль скорости электрона, импульс частицы изменяется в основном по модулю и в меньшей степени по направлению. В результате электроны диффундируют преимущественно в направлении импульса. Такая направленность диффузии позволяет использовать для слабоанизотропных распределений приближённый диффузионный оператор, который не учитывает диффузию по

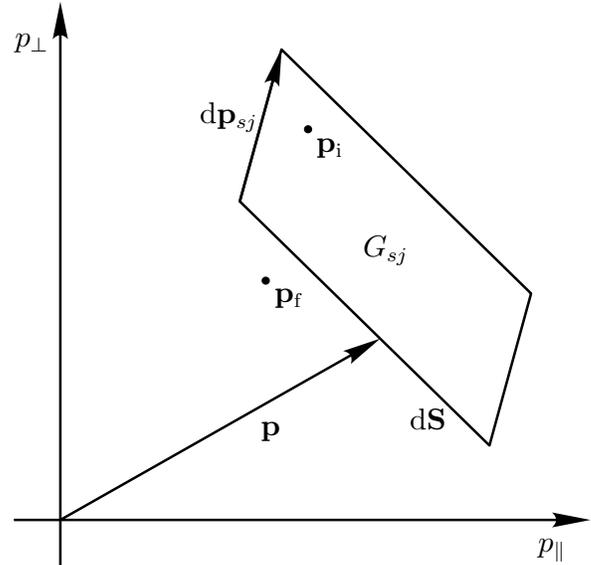


Рис. 1. Схема для расчёта плотности потока частиц \mathbf{F} . Вектор \mathbf{p} расположен в плоскости чертежа, площадка $d\mathbf{S}$ ориентирована перпендикулярно плоскости рисунка. Точка $\mathbf{p}_i = (p_{\parallel i}, p_{\perp i})$ обозначает некоторое начальное состояние электрона в объёме G_{sj} , а точка $\mathbf{p}_f = (p_{\parallel f}, p_{\perp f})$ — соответствующее конечное состояние

* Выражение (6) совпадает с соответствующей величиной в работе [17].

питч-углу. Кроме того, интенсивность излучения в астрофизических условиях обычно мало изменяется на интервале частот $\Delta\omega_s = \omega_B/(\Gamma \sin^2 \theta)$ между соседними гармониками синхротронного излучения. Последнее обстоятельство позволяет заменить в выражении (6) суммирование по гармоникам s на интегрирование по частоте. В результате приближённая плотность потока электронов равна

$$\mathbf{F}_p = -\mathbf{p}^\circ \sum_{j=1}^2 \int_0^\infty d\omega \frac{P_{\omega j}}{c} \left(f(\mathbf{p}) + \frac{8\pi^3 c \langle I_j(\omega, \alpha = \theta, \phi) \rangle_\phi}{\omega^2} \frac{\partial f}{\partial p} \right), \quad (9)$$

и квазилинейный оператор диффузии (2) приобретает вид

$$\hat{I} = \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} \left[p^2 \int_0^\infty d\omega \sum_{j=1}^2 \frac{P_{\omega j}}{c} \left(f(\mathbf{p}) + \frac{8\pi^3 c \langle I_j(\omega, \alpha = \theta, \phi) \rangle_\phi}{\omega^2} \frac{\partial f}{\partial p} \right) \right]. \quad (10)$$

Здесь $P_{\omega j}(\omega, \mathbf{p}) = \oint d\Omega P_{sj}(\Omega; \mathbf{p}) / \Delta\omega_s \Big|_{s=\frac{\omega p \sin^2 \theta}{\omega_B m c}}$ — спектральная мощность излучения электрона во все направления, $\langle I_j(\omega, \alpha, \phi) \rangle_\phi = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} d\phi I_j(\omega, \alpha, \phi)$ — средняя по азимуту ϕ интенсивность излучения в j -й моде.

Точное выражение (6) для диффузионного потока даёт возможность оценить порядок слагаемых, которыми пренебрегается в приближённом выражении (9). Данные слагаемые имеют порядок Ψ_{\max} . * Они связаны с изменением поляризации излучения отдельного электрона в пределах диаграммы направленности его излучения. Так, электрон взаимодействует с правополяризованным излучением более эффективно при $\alpha < \theta$, чем при $\alpha > \theta$ (взаимодействие с левополяризованным излучением более эффективно при $\alpha > \theta$, чем при $\alpha < \theta$). Поэтому, если падающее на электрон излучение поляризовано, направление среднего изменения импульса электрона отлично от \mathbf{p}° и имеет компоненту вдоль θ° . Это приводит к диффузионному потоку по питч-углу при $\partial f / \partial p \neq 0$, а также к появлению дополнительного потока вдоль \mathbf{p}° при $\partial f / \partial \theta \neq 0$. Указанные эффекты отсутствуют (точнее, имеют меньший порядок по Ψ_{\max}), если излучение неполяризовано или нормальные волны линейно поляризованы. В случае, когда излучение не является изотропным, в приближённом коэффициенте диффузии по энергии возникает поправка, которая пропорциональна $\partial(I_1 - I_2) / \partial \alpha$ и имеет тот же порядок Ψ_{\max} .

Все отмеченные поправки в приближённом операторе диффузии соответствуют определённым отличиям между коэффициентами поглощения для изотропной и слабоанизотропной функций распределения, которые проанализированы в работе [11]. Важно отметить, что указанные поправки в кинетическом уравнении и в коэффициенте поглощения имеют противоположный знак для разных мод. Это обуславливает отличие поглощения излучения разных мод и в конечном итоге определяет поляризацию выходящего из источника излучения.

Следует отметить, что, зная диффузионный оператор (2), (6), нетрудно найти инкремент нормальных волн (который был получен в [28] методом коэффициентов Эйнштейна без обращения к кинетическому уравнению). Действительно, возьмём интенсивность излучения $I_j = I_0 \delta(\omega - \omega_0) \delta(\Omega - \Omega_0)$ в плоской волне в виде дельта-функций по частоте и направлению. Тогда потери энергии электронов в единицу времени при индуцированных переходах вверх и вниз между уровнями Ландау, вызванных

* Формально они возникают при свёртке по Ω нечётной по Ψ компоненты излучательной способности P_{sj} (7), которая пропорциональна $K_{1/3} K_{2/3} K_j / (1 + K_j^2)^2$, с нечётной компонентой $-\Psi \theta^\circ$ вектора $\mathbf{l}_{sj} \approx \mathbf{p}^\circ - \Psi \theta^\circ$ (5) либо со слагаемым $-\Psi \partial I_j / \partial \alpha$, если интенсивность $I_j(\alpha)$ представить рядом Тейлора $I_j \approx I_j(\alpha = \theta) - \Psi \partial I_j / \partial \alpha |_{\alpha=\theta}$.

фотонами j -й моды,

$$\begin{aligned} \frac{dW_j^{\text{ind}}}{dt} &= - \int d\mathbf{p} E(p) \operatorname{div}_{\mathbf{p}} \left[\sum_{s=1}^{\infty} \oint d\Omega \mathbf{l}_{sj} P_{sj} \frac{8\pi^3 |\cos \vartheta_j| I_j(\omega_{sj}, \Omega)}{\omega_{sj}^2 n_j^2} \left(\mathbf{l}_{sj}, \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \right) \right] = \\ &= I_0 \int d\mathbf{p} \sum_{s=1}^{\infty} P_{sj} \frac{8\pi^3 |\cos \vartheta_j| c}{\omega_{sj}^2 n_j^2} \left(\mathbf{l}_{sj}, \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \right) \delta(\omega_{sj}(\mathbf{p}; \Omega) - \omega_0) \Big|_{\Omega=\Omega_0}. \end{aligned}$$

В последнем выражении учтено, что производная $\partial E/\partial \mathbf{p}$ равна скорости электрона \mathbf{v} и $(\mathbf{v}, \mathbf{l}_{sj}) = c$, $E = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2}$ — энергия частицы. Мощность dW_j^{ind}/dt , отнесённая к энергии излучения $I_0/v_{\text{gr}j}$, где $v_{\text{gr}j}$ — групповая скорость j -й нормальной волны, составит удвоенный инкремент нарастания амплитуды волны во времени на частоте ω_0 :*

$$2\gamma_j = \int d\mathbf{p} \sum_{s=1}^{\infty} P_{sj} \frac{8\pi^3 |\cos \vartheta_j| v_{\text{gr}j} c}{\omega_{sj}^2 n_j^2} \left(\mathbf{l}_{sj}, \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \right) \delta(\omega_{sj}(\mathbf{p}; \Omega) - \omega_0) \Big|_{\Omega=\Omega_0}.$$

2. РЕЖИМ НАСЫЩЕНИЯ СИНХРОТРОННОГО МАЗЕРА

Рассмотрим однородный плоскопараллельный плазменный слой, который помещён в однородное магнитное поле, направленное вдоль нормали \mathbf{z}° к слою. В системе присутствует примесь релятивистских электронов, функция распределения $f(p, \theta, z, t)$ которых в случае $\omega \gg \{\omega_L, \omega_B\}$ удовлетворяет кинетическому уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \cos \theta \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} \left[p^2 \int_0^{\infty} d\omega \frac{P_{\omega}}{c} \left(f + \frac{4\pi^3 c I(\alpha=\theta)}{\omega^2} \frac{\partial f}{\partial p} \right) \right] - \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} (p^2 a_{\text{acc}} f). \quad (11)$$

В правой части уравнения (11) первое слагаемое представляет диффузионный оператор (10), в котором поляризация нормальных волн полагается круговой ($K_1 = \pm 1$, $K_2 = \mp 1$). Приближение круговой поляризации справедливо в широкой области углов α за исключением узкого интервала направлений $|\alpha - \pi/2| \lesssim \omega_B/\omega$ вдоль плоскости слоя (см. (8)). В этом приближении излучательные способности $P_{\omega 1}$ и $P_{\omega 2}$ равны, что позволяет использовать в (11) суммарную мощность излучения ([1], с. 400)

$$P_{\omega} = P_{\omega 1} + P_{\omega 2} = \frac{e^2 \omega}{\sqrt{3} \pi c} \left(\frac{m^2 c^2}{p^2} + \frac{\omega_L^2}{\omega^2} \right) \int_{\omega/\omega'_c}^{\infty} dx K_{5/3}(x),$$

в две моды и суммарную интенсивность $I = I_1 + I_2$ в обеих модах. Здесь

$$\omega'_c = \frac{3p^2}{2m^2 c^2} \omega_B \sin \theta \left(1 + \frac{\omega_L^2 p^2}{\omega^2 m^2 c^2} \right)^{-3/2}.$$

Второе слагаемое в правой части (11) моделирует воздействие некоторого стороннего ускоряющего механизма на распределение электронов. Предполагается, что данный механизм обеспечивает регулярное ускорение электронов $dp/dt = a_{\text{acc}}(p)$ и не изменяет питч-угол частиц (ср. [13]).

* В работе [28] был пропущен множитель $\partial[\omega(1 - n_j \beta \cos \alpha \cos \theta)]/\partial \omega \approx \sin^2 \alpha$ в знаменателе выражения для P_{sj} .

Эволюция интенсивности излучения $I(\omega, \alpha, z, t)$ описывается уравнением переноса

$$c^{-1} \frac{\partial I}{\partial t} + \cos \alpha \frac{\partial I}{\partial z} = \int_0^{\infty} dp p^2 P_{\omega} \left(f(\theta = \alpha) + \frac{4\pi^3 c I}{\omega^2} \frac{\partial f}{\partial p} \Big|_{\theta = \alpha} \right), \quad (12)$$

где часть интеграла с функцией распределения $f(\theta = \alpha)$ представляет излучательную способность η в две моды, а часть с производной $\partial f / \partial p$ — произведение коэффициента поглощения $\mu = \mu_1 = \mu_2$ на интенсивность излучения со знаком минус (ср. (1)).

В левых частях уравнений (11) и (12) скорость электронов $v \approx c [1 - m^2 c^2 / (2p^2)]$ и групповая скорость излучения $v_{\text{gr}} \approx c [1 - \omega_L^2 / (2\omega^2)]$ полагаются равными скорости света c . Такое приближение оправдано тем, что при прохождении некоторой пространственной неоднородности длиной L_{inh} (в распределении электронов или излучения) взаимодействующие фотоны и электроны смещаются относительно друг друга (вдоль нормали к слою) на малое расстояние $L_{\text{rel}} = L_{\text{inh}} c^{-1} |v - v_{\text{gr}}| \cos \theta \ll L_{\text{inh}}$.* Приближение равенства скоростей позволяет выделить группы электронов и фотонов с одинаковыми параметрами θ и α , которые находились в одной точке в начальный момент времени или в один и тот же момент времени влетели в слой. Каждая такая группа эволюционирует независимо от других частиц.

Уравнения (11) и (12) для разных углов $\alpha = \theta$ приводятся к одинаковой безразмерной форме

$$\frac{\partial f_{\varepsilon}}{\partial \tau} + \frac{\partial f_{\varepsilon}}{\partial \zeta} = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left[\int_0^{\infty} d\nu \nu^{1/3} \varepsilon^{4/3} W(\nu, \varepsilon) \left(f_{\varepsilon} + \frac{I_{\nu}}{\nu^2} \frac{\partial f_{\varepsilon}}{\partial \varepsilon} \right) \right] - \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (\varepsilon^2 a_{\text{acc} \varepsilon} f_{\varepsilon}), \quad (13)$$

$$\frac{\partial I_{\nu}}{\partial \tau} + \frac{\partial I_{\nu}}{\partial \zeta} = \int_0^{\infty} d\varepsilon \nu^{1/3} \varepsilon^{4/3} W(\nu, \varepsilon) \left(f_{\varepsilon} + \frac{I_{\nu}}{\nu^2} \frac{\partial f_{\varepsilon}}{\partial \varepsilon} \right), \quad (14)$$

$$W(\nu, \varepsilon) = W \left(\frac{(\nu^2 + \varepsilon^2)^{3/2}}{\nu^2 \varepsilon^2} \right) = \frac{\nu^2 + \varepsilon^2}{\nu^{4/3} \varepsilon^{4/3}} \int_{(\nu^2 + \varepsilon^2)^{3/2} / (\nu^2 \varepsilon^2)}^{\infty} dx K_{5/3}(x), \quad (15)$$

в которой нет численных коэффициентов. В уравнениях (13), (14) используются переменные $\varepsilon = p/p_u$ для импульса (и энергии), $\nu = \omega/\omega_u$ для частоты, а также безразмерные переменные времени $\tau = t/t_u$ и длины $\zeta = z/z_u$, где

$$p_u(\theta) = 2\omega_L m c / (3\omega_B \sin \theta), \quad \omega_u(\theta) = 2\omega_L^2 / (3\omega_B \sin \theta), \\ t_u(\theta) = 2\pi m c^3 / (\sqrt{3} e^2 \omega_L \omega_B \sin \theta), \quad z_u(\theta) = c t_u \cos \theta = 2\pi m c^4 \text{ctg} \theta / (\sqrt{3} e^2 \omega_L \omega_B).$$

О смысле этих переменных можно сказать следующее. Импульс $\varepsilon = 1$ разделяет электроны на две группы. Электроны с импульсами $\varepsilon \gtrsim 1$ эффективно взаимодействуют с излучением на частотах $\sqrt{\varepsilon} \lesssim \nu \lesssim \varepsilon^2$, где весовая функция $W(\nu, \varepsilon) \approx 2,15$ является постоянной, тогда как электроны с импульсами $\varepsilon \lesssim 1$ экспоненциально слабо взаимодействуют с излучением на любой частоте. Так, максимальное значение $W_{\text{max}}(\varepsilon) \approx 1,47 \varepsilon^{-1/6} \exp(-2,60/\varepsilon)$ функции $W(\nu, \varepsilon)$ по всем частотам ν при $\varepsilon \lesssim 1$ экспоненциально мало. Аналогично частота $\nu = 1$ разделяет диапазон $\nu \lesssim 1$, где коэффициент поглощения и излучения любого электрона экспоненциально мал, и диапазон $\nu \gtrsim 1$, фотоны которого

* Необходимо отметить ещё одно обстоятельство. Мы уже пренебрегли тем фактом, что электроны взаимодействуют с излучением в некотором интервале углов $\theta - \Psi_{\text{max}} \lesssim \alpha \lesssim \theta + \Psi_{\text{max}}$. Разброс групповых скоростей фотонов $\Delta v_{\text{gr} z} = c \Psi_{\text{max}} \sin \theta$ в проекции на нормаль \mathbf{z}° к слою в этом интервале углов α намного больше, чем отличие $|v - v_{\text{gr}}| \cos \theta \lesssim c \Psi_{\text{max}}^2 \cos \theta$ скорости электрона от скорости фотона с $\alpha = \theta$.

эффективно взаимодействуют с электронами с импульсами $\sqrt{\nu} \lesssim \varepsilon \lesssim \nu^2$. Время t_u соответствует характерному времени спонтанного синхротронного высвечивания энергии электрона с импульсом $\varepsilon = 1$, $|z_u|$ — расстояние, которое проходит тот же электрон за время высвечивания. Необходимо подчеркнуть, что нормировочная длина z_u зависит от питч-угла θ . Поэтому одной и той же координате z (например, вершине слоя) соответствуют разные ζ для электронов с разными питч-углами. Кроме этого, поскольку величина ζ отсчитывается в направлении движения электрона (или фотона), при увеличении z координата ζ увеличивается для электронов с $\cos \theta > 0$ и уменьшается для частиц с $\cos \theta < 0$.

Безразмерная интенсивность излучения $I_\nu = I/I_u$ нормирована на $I_u(\theta) = 2m\omega_L^5/(27\pi^3\omega_B^3 \sin^3 \theta)$. При $I_\nu = 1$ характерное время радиационной диффузии электрона с импульсом $\varepsilon = 1$ на величину того же импульса ε равно времени спонтанного синхротронного высвечивания $\tau \sim 1$. Иными словами, при $I_\nu = 1$ становится сравнимым влияние индуцированных и спонтанных процессов на динамику электрона с $\varepsilon = 1$. Безразмерная функция распределения электронов $f_\varepsilon = f/f_u$ нормирована на $f_u = \omega_L^3/(4\pi^3 m^3 c^6)$. В результате спонтанного высвечивания электроны с импульсами $0 \lesssim \varepsilon \lesssim 1$ и функцией распределения $f_\varepsilon \sim 1$ обеспечили бы на частотах $\nu \sim 1$ интенсивность $I_\nu \sim 1$. Следует отметить, что величина $f_\varepsilon \varepsilon^2 d\varepsilon$ не совпадает с числом частиц в интервале импульсов от ε до $\varepsilon + d\varepsilon$ при единичном телесном угле направлений импульсов. Вместе с тем величины $I_\nu d\nu$ и $\varepsilon^3 f_\varepsilon d\varepsilon$ имеют одинаковые коэффициенты пропорциональности соответственно с энергией излучения $c^{-1} I d\omega$ в интервале частот $d\omega = \omega_u d\nu$ и с энергией электронов $cp^3 f dp$ в интервале импульсов $dp = p_u d\varepsilon$.

В соответствии со сделанными замечаниями проведём анализ стационарных решений системы (13), (14) в достаточно толстом слое, когда выходящее (без отражения на границах слоя) излучение уже не зависит от интенсивности падающего на слой излучения (которое может вообще отсутствовать) и определяется только зависимостью ускорения $a_{acc\varepsilon}$ от импульса ε . В отношении ускорения $a_{acc\varepsilon}$ предполагаем, что оно превалирует над потерями $a_{sp\varepsilon} = 8\pi\varepsilon^2/(9\sqrt{3}) \approx 1,61\varepsilon^2$ из-за спонтанного излучения при $\varepsilon < \varepsilon_{eq}$ и становится меньше $a_{sp\varepsilon}$ при $\varepsilon > \varepsilon_{eq}$. Для эффективного мазерного усиления импульс ε_{eq} должен находиться в области $\varepsilon \gg 1$. Здесь следует отметить, что спектр излучения слоя конечной толщины L (размерной) в направлении α совпадает со спектром восходящего излучения на луче $\zeta > 0$ при $\zeta = L_\zeta \equiv L/|z_u|$. Поэтому в дальнейшем рассмотрим распространение излучения в области $\zeta > 0$, полагая, что излучение входит в плазменный слой при $\zeta = 0$.

У основания слоя (около точки $\zeta = 0$) происходит формирование функции распределения электронов и перераспределение энергии между электронами и излучением вследствие синхротронной неустойчивости. Этот переходный процесс квазилинейной релаксации зависит от частотного спектра падающего излучения и распределения релятивистских электронов на границе слоя $\zeta = 0$. По мере продвижения вдоль луча переходные процессы заканчиваются, производная $\partial f_\varepsilon/\partial\zeta$ в кинетическом уравнении (13) резко уменьшается, и эволюция распределения электронов начинает определяться конкурентным действием радиационной диффузии, стороннего ускорения и торможения из-за спонтанного излучения. В этой области распределение электронов описывается квазиоднородным уравнением

$$\int_0^\infty d\nu \nu^{1/3} \varepsilon^{-2/3} W(\nu, \varepsilon) \left(f_\varepsilon + \frac{I_\nu}{\nu^2} \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial \varepsilon} \right) - a_{acc\varepsilon} f_\varepsilon = 0, \quad (16)$$

которое получается из кинетического уравнения (13) в пренебрежении производной $\partial f_\varepsilon/\partial\zeta$ в его левой части по сравнению со слагаемыми в правой части уравнения. *

* Справедливость квазиоднородного приближения ($\partial f_\varepsilon/\partial\zeta = 0$) будет обсуждаться ниже в этом разделе.

Решение уравнения (16) находится элементарно:

$$f_\varepsilon = f_{\text{eq}}(\zeta) \exp[d(\varepsilon, \zeta)], \quad d(\varepsilon, \zeta) = \int_{\varepsilon_{\text{eq}}}^{\varepsilon} d\varepsilon \frac{(a_{\text{acc}\varepsilon} - a_{\text{sp}\varepsilon})}{\int_0^\infty d\nu \varepsilon^{-2/3} \nu^{-5/3} W(\nu, \varepsilon) I_\nu(\nu, \zeta)}, \quad (17)$$

где величина f_{eq} определяется из условия сохранения полного числа частиц n_ε :

$$f_{\text{eq}}(\zeta) = n_\varepsilon / \left(\int_0^\infty d\varepsilon \varepsilon^2 \exp[d(\varepsilon, \zeta)] \right).$$

Важно, что распределение (17) имеет положительный наклон $\partial f_\varepsilon / \partial \varepsilon > 0$ в области $\varepsilon < \varepsilon_{\text{eq}}$. Данный наклон обеспечивает отрицательную реабсорбцию (усиление) излучения в диапазоне $\nu \lesssim \sqrt{\varepsilon_{\text{eq}}}$, поскольку на этих частотах экспоненциально мало взаимодействие излучения с частицами, обладающими импульсами $\varepsilon \gtrsim \varepsilon_{\text{eq}}$, для которых $\partial f_\varepsilon / \partial \varepsilon < 0$.

Вследствие отрицательной реабсорбции интенсивность излучения непрерывно растёт с увеличением ζ . Вклад радиационной диффузии в формирование функции распределения увеличивается, и на больших расстояниях (которые оцениваются ниже) распределение (17) приобретает близкую к плато форму (квазиплато). Распределение электронов на квазиплато при $\varepsilon \lesssim \varepsilon_{\text{eq}}$ описывается следующим приближённым выражением:

$$f_\varepsilon = f_{\text{eq}}(\zeta) [1 + d(\varepsilon, \zeta)], \quad (18)$$

где f_{eq} представляет высоту квазиплато, а $d \ll 1$ — его малый наклон.

Квазиплато окончательно формируется при таких ζ , для которых характерный пространственный масштаб $\zeta_{\text{dif}}(\varepsilon)$ по радиационной диффузии становится меньше характерного масштаба $\zeta_{\text{acc}}(\varepsilon)$ по ускорению электрона с импульсом ε . Здесь

$$\zeta_{\text{dif}}(\varepsilon) = \varepsilon^2 / \left(\int_0^\infty d\nu \nu^{-5/3} \varepsilon^{-2/3} W(\nu, \varepsilon) I_\nu \right) \sim \varepsilon^3 / I_\nu(\nu = \sqrt{\varepsilon}) \quad (19)$$

— расстояние, которое пролетает электрон с импульсом $\varepsilon \lesssim \varepsilon_{\text{eq}}$ за время радиационной диффузии на величину своего импульса, а

$$\zeta_{\text{acc}}(\varepsilon) = \varepsilon / a_{\text{acc}\varepsilon}(\varepsilon) \quad (20)$$

— расстояние, на котором происходит ускорение покоящегося электрона до импульса порядка ε . Требуемое условие $\zeta_{\text{dif}} \ll \zeta_{\text{acc}}$ существования квазиплато достигается при интенсивности излучения

$$I_\nu(\nu = \sqrt{\varepsilon}) \gg \varepsilon^2 a_{\text{acc}\varepsilon}(\varepsilon). \quad (21)$$

Распределение (18) медленно изменяется в пространстве, поскольку интенсивность излучения — параметр решения (18) — растёт вследствие постоянного поступления энергии в систему при ускорении электронов. Усиление на частоте ν обуславливается электронами с импульсами $\varepsilon \sim \nu^2$. Характерное расстояние

$$\zeta_I(\varepsilon) = \frac{(\nu I_\nu)|_{\nu=\sqrt{\varepsilon}}}{a_{\text{acc}\varepsilon} f_{\text{eq}} \varepsilon^3}, \quad (22)$$

на котором изменяется наклон квазиплато в точке ε и интенсивность излучения на частотах $\nu \sim \sqrt{\varepsilon}$, оценивается из условия баланса скорости увеличения энергии излучения $\nu I_\nu / \zeta_I$ на этих частотах и темпа $dW_\varepsilon / d\zeta \sim a_{\text{acc}\varepsilon} f_{\text{eq}} \varepsilon^3$ ускорения частиц с импульсами порядка ε .

Для справедливости квазиоднородного приближения (16) при условии (21) сформировавшегося квазиплато расстояние ζ_I (22) должно превышать характерный масштаб ζ_{acc} (20). Последний является наибольшим из масштабов (19) и (20) и характеризует величину слагаемых в (16) и правой части

уравнения (13). Требование $\zeta_I \gg \zeta_{\text{acc}}$ при условии $\zeta_{\text{acc}} \gg \zeta_{\text{dif}}$ (21) реализуется при интенсивности излучения

$$I_\nu(\nu = \sqrt{\varepsilon}) \gg I_{\text{qp}} = \max \left[f_{\text{eq}} \varepsilon^{7/2}, \varepsilon^2 a_{\text{acc}} \varepsilon \right]. \quad (23)$$

Эта интенсивность достигается при длине трассы

$$L_\zeta \gg L_{\text{sat}} \equiv \max \left[\varepsilon_{\text{eq}}^{-1}, (\sqrt{\varepsilon_{\text{eq}}} f_{\text{eq}})^{-1} \right] \sim \zeta_I(\varepsilon = \varepsilon_{\text{eq}}; I_\nu = I_{\text{qp}}), \quad (24)$$

на которой заведомо происходит рост излучения до величины I_{qp} за счёт ускорения электронов.

Интересно отметить, что если $f_{\text{eq}} \lesssim \sqrt{\varepsilon_{\text{eq}}}$ (расстояние ускорения электронов $\zeta_{\text{acc}}(\varepsilon_{\text{eq}}) \sim \varepsilon_{\text{eq}}^{-1}$ меньше длины $|\mu_\delta^{-1}| \sim 1/(\sqrt{\varepsilon_{\text{eq}}} f_{\text{eq}})$ развития синхротронной неустойчивости), то в соответствии с (23) энергия излучения (порядка $(\nu I_\nu)|_{\nu=\sqrt{\varepsilon_{\text{eq}}}}$ в диапазоне усиления становится много больше энергии электронов (порядка $\varepsilon_{\text{eq}}^4 f_{\text{eq}}$), которые обеспечивают усиление синхротронного излучения.

3. ЧАСТОТНЫЙ СПЕКТР СИНХРОТРОННОГО МАЗЕРА

Вообще говоря, для широкополосного синхротронного усиления могут реализоваться качественно разные формы спектров. В случае, если усиление имеет максимум на некоторой частоте, излучение усиливается преимущественно около этой частоты. Однако рост интенсивности излучения увеличивает скорость диффузии по энергии тех частиц, которые дают основной вклад в коэффициент усиления, и, следовательно, уменьшает коэффициент усиления в максимуме. Таким образом, этот процесс ведёт к выравниванию коэффициента усиления по частоте.

Вид частотного спектра в режиме насыщения, очевидно, определяется в основном зависимостью ускорения электронов $a_{\text{acc}} \varepsilon$ от их энергии. В этом разделе мы рассмотрим специальный случай, когда эта зависимость описывается степенным законом:

$$a_{\text{acc}} \varepsilon = a_0 \varepsilon^\delta \approx \frac{8\pi}{9\sqrt{3}} \varepsilon_{\text{eq}}^2 (\varepsilon/\varepsilon_{\text{eq}})^\delta, \quad \delta < 2. \quad (25)$$

Как мы убедимся, в этом случае в системе формируется спектр излучения, форма которого не меняется с удалением ζ от точки входа излучения в слой:

$$I_\nu(\nu, \zeta) = V(\nu) Z(\zeta). \quad (26)$$

В дальнейшем функцию $V(\nu)$ будем называть формой частотного спектра, а функцию $Z(\zeta)$ — его амплитудой. Для спектра (26) величина $I_\nu^{-1} \partial I_\nu / \partial \zeta$ не зависит от частоты ν . Без учёта спонтанного излучения это соответствует постоянному по частоте коэффициенту усиления.

Спектр (26), разумеется, не может сформироваться во всём диапазоне частот. Для электронов, обеспечивающих усиление, стороннее ускорение $a_{\text{acc}} \varepsilon$ превышает торможение $a_{\text{sp}} \varepsilon$ из-за спонтанного излучения. Если вместе с тем уровень излучения в области отрицательной реабсорбции (т. е. на низких частотах) достаточно высок (см. (23)), то спонтанным излучением можно пренебречь как в кинетическом уравнении, так и в уравнении переноса. Для спектра в форме (26) и аппроксимации распределения электронов (18) уравнение переноса (14) распадается на два уравнения:

$$\frac{dZ}{d\zeta} = f_{\text{eq}}(\zeta), \quad (27)$$

$$\int_0^\infty d\varepsilon \frac{\varepsilon^{4/3} \nu^{-5/3} W(\nu, \varepsilon) a_{\text{acc}} \varepsilon(\varepsilon)}{\int_0^\infty d\nu' \varepsilon^{-2/3} \nu'^{-5/3} W(\nu', \varepsilon) V(\nu')} = 1. \quad (28)$$

Условие (28) означает независимость коэффициента поглощения от частоты ν и устанавливает связь между $a_{\text{acc}\varepsilon}(\varepsilon)$ и формой $V(\nu)$ спектра (26). Поскольку отрицательная величина коэффициента поглощения на произвольной частоте ν определяется энергичными электронами с импульсами $\varepsilon \sim \nu^2$, используем в (28) приближённое выражение

$$W(\nu, \varepsilon) \approx \frac{\varepsilon^{2/3}}{\nu^{4/3}} \int_{\varepsilon/\nu^2}^{\infty} dx K_{5/3}(x) \quad (29)$$

для весовой функции (15). Введя новые переменные $\xi = \varepsilon/\nu^2$ и $v = (\nu')^{-2}\varepsilon$ вместо ε и ν' , перепишем уравнение (28) в виде

$$2 \int_0^{\infty} d\xi \frac{\xi^3 \int_{\xi}^{\infty} dx K_{5/3}(x)}{\int_0^{\infty} dv \left[\frac{V(\nu \sqrt{\xi/v})}{\nu^5 a_{\text{acc}\varepsilon}(\nu^2 \xi)} \right] \int_v^{\infty} dx K_{5/3}(x)} = 1. \quad (30)$$

В левой части равенства (30) все функции являются положительными величинами. Поэтому равенство (30) выполняется для всех частот ν , если выражение $V(\nu \sqrt{\xi/v})/(\nu^5 a_{\text{acc}\varepsilon}(\nu^2 \xi))$ в квадратных скобках не зависит от ν . Это справедливо только для степенной зависимости $a_{\text{acc}\varepsilon} = a_0 \varepsilon^{\delta}$ (25), когда форма частотного спектра также степенная:

$$V = V_0 \nu^{\alpha}, \quad \alpha = 2\delta + 5, \quad (31)$$

где

$$V_0 = 2a_0 \frac{\int_0^{\infty} d\xi \xi^{1/2} \int_{\xi}^{\infty} dx K_{5/3}(x)}{\int_0^{\infty} d\xi \xi^{-\delta-5/2} \int_{\xi}^{\infty} dx K_{5/3}(x)} = \varepsilon_{\text{eq}}^{2-\delta} \frac{2^{7+\delta} (-2\delta-3) \pi \Gamma(\frac{25}{12}) \Gamma(\frac{5}{12})}{3^{7/2} \Gamma(\frac{7-6\delta}{12}) \Gamma(\frac{-13-6\delta}{12})}, \quad (32)$$

$\Gamma(x)$ — гамма-функция. * Спектр (31), (32) вместе со спектром на высоких частотах (в области положительной реабсорбции) схематически представлен на рис. 2а.

Подставляя найденный спектр (31), (32) в выражение (18) для функции распределения, можно убедиться, что на квазиplate

$$f = f_{\text{eq}}(\zeta) \left(1 - \frac{3\Gamma^{-1}(\frac{25}{12}) \Gamma^{-1}(\frac{5}{12})}{Z(\zeta) \sqrt{2\varepsilon}} \right). \quad (33)$$

Формула (33) представляет сумму двух функций, одна из которых равна константе (не зависит от ε), а другая пропорциональна $\varepsilon^{-1/2}$. Только такие функции обеспечивают постоянный коэффициент поглощения во всём диапазоне частот: для $f = \text{const}$ коэффициент $\mu = 0$, а для $f \propto \varepsilon^{-1/2}$ коэффициент $\mu = \text{const} \neq 0$ (ср. [1], с. 411).

Поясним полученную зависимость индекса частотного спектра $\alpha = 2\delta + 5$ в (31) от показателя δ ускорения. На частотах порядка ν излучение усиливается электронами с импульсами $\varepsilon \propto \nu^2$. В стационарном режиме мощность излучения

$$\frac{dW_{\text{rad}}}{d\zeta} \sim -\mu\nu I_{\nu} \propto \nu^{\alpha+1} \quad (34)$$

* О вычислении интегралов вида $\int_0^{\infty} x^y K_{5/3}(x) dx$ см. [27], ф. 11.4.22.

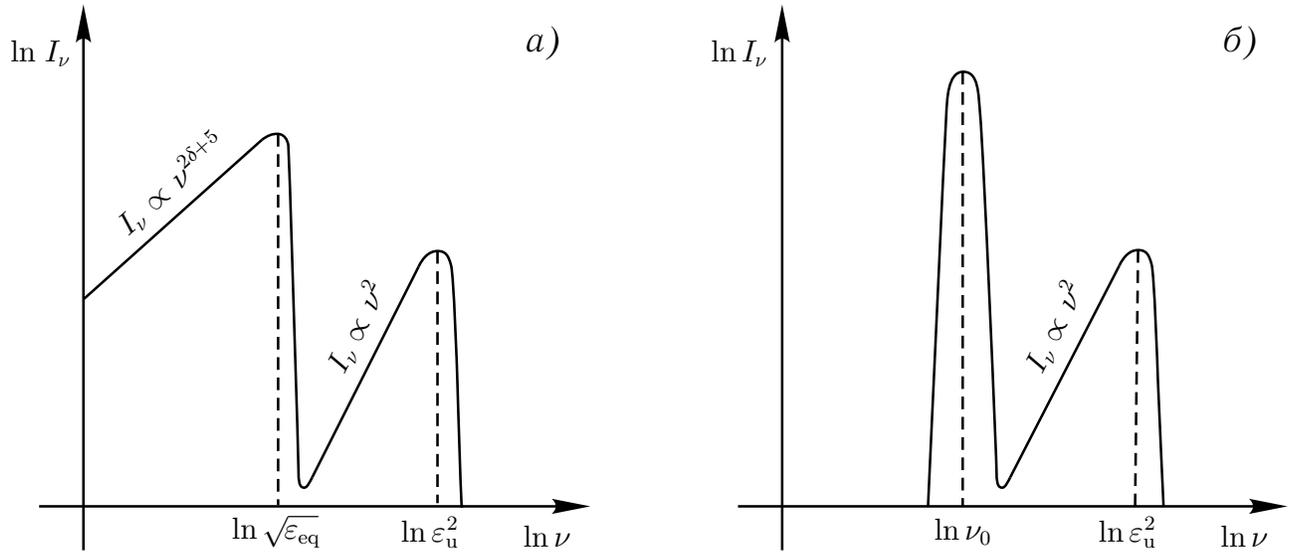


Рис. 2. Схематическое представление частотного спектра I_ν излучения синхротронного мазера. На частотах $\nu \lesssim \sqrt{\epsilon_{\text{eq}}}$, где реабсорбция отрицательна, спектр имеет степенную форму (31) в случае $\delta < -13/6$ (а) и узкий максимум при $\delta > -13/6$ (б). На частотах $\epsilon_u^{1/2} \lesssim \nu \lesssim \epsilon_u^2$, где поглощение положительно, $I_\nu \sim \epsilon_u \nu^2$. На более высоких частотах $\nu > \epsilon_u^2$ уровень излучения определяется экспоненциально малым спонтанным излучением. Здесь ϵ_u — характерная ширина распределения электронов, которая обуславливается излучением вне диапазона усиления (см. далее раздел 3)

в этом диапазоне должна совпадать по порядку величины с энергией

$$\frac{dW_e}{d\zeta} \sim a_{\text{acc}} \epsilon f_{\text{eq}} \epsilon^3 \Big|_{\epsilon=\nu^2} \propto \nu^{2\delta+6}, \quad (35)$$

подводимой к соответствующим электронам за счёт ускорения. Сравнивая (34) и (35), легко видеть, что для энергетического баланса требуется $\alpha = 2\delta + 5$.

Фактор V_0 (32) уменьшается с увеличением показателя δ и обращается в нуль при $\delta = -13/6$ и соответствующем ему $\alpha = 2/3$, когда гамма-функция $\Gamma[(-13 - 6\delta)/12]$ в знаменателе (32) становится бесконечно большой. Обращение в нуль фактора V_0 , а вместе с ним и интенсивности излучения, связано с тем, что с увеличением δ (и, соответственно, индекса α) излучение на высоких частотах $\sqrt{\epsilon} \ll \nu \lesssim \epsilon^2$ вносит всё больший вклад в скорость диффузии электрона с импульсом ϵ . В результате требуемый наклон квазиplate (33) поддерживается при меньшей интенсивности излучения.

Следует отметить, что рассматриваемые значения $\delta < -13/6$ попадают в область $\delta < -2$. В отсутствие излучения ускорение $a_{\text{acc}} \epsilon \propto \epsilon^{-\delta}$ (25) при $\delta < -2$ создаёт бесконечно большой поток частиц $a_{\text{acc}} \epsilon f_\epsilon \epsilon^2$ на единичный телесный угол в пространстве импульсов при $\epsilon \rightarrow 0$, если квазиplate $f_\epsilon \approx \text{const}$ сохраняется вплоть до $\epsilon = 0$. В стационарном случае для приближённого распределения электронов (33) и поддерживающего его излучения со спектром (31) указанный поток компенсируется диффузионным потоком частиц, обусловленным излучением. Вместе с тем ясно, что распределение электронов (33) заведомо нарушается при $\epsilon \lesssim 1$, где вес $W(\nu, \epsilon)$ и соответственно коэффициент радиационной диффузии становятся экспоненциально малыми. Поэтому в области $\epsilon \lesssim 1$ необходимо использовать точное квазистационарное распределение частиц (17). Функция распределения (17) резко уменьшается при $\epsilon \lesssim 1$, и для неё поток частиц $a_{\text{acc}} \epsilon f_\epsilon \epsilon^2$ стремится к нулю при $\epsilon \rightarrow 0$.

Обратим также внимание, что при $\delta < -3$ сторонний источник ускорения совершает бесконечно большую работу $\int_0^{\epsilon_{\text{eq}}} d\epsilon a_{\text{acc}} \epsilon f_\epsilon \epsilon^2$ над электронами plate. В этом случае индекс приближённого спек-

тра (31) $\alpha < -1$ и энергия излучения в диапазоне усиления также оказывается бесконечно большой. Данные расходимости по-прежнему связаны с приближённым характером распределения электронов (33) и спектра излучения (31). Точный коэффициент усиления и излучательная способность становятся экспоненциально малыми в диапазоне частот $\nu \lesssim 1$, поэтому реальный спектр имеет завал на частотах $\nu \lesssim 1$ и энергия излучения остаётся конечной.

Без учёта спонтанных процессов при $\delta > -13/6$ также возможно формирование спектра вида (26). В этом случае усиление на частоте ν по-прежнему определяется электронами с импульсами $\varepsilon \sim \nu^2$. Однако наклон функции распределения для тех же импульсов ε обусловлен взаимодействием электронов с излучением существенно более высоких частот $\nu \sim \varepsilon^2$. Для аналитического расчёта спектра (26) при $\delta > -13/6$ весовую функцию $W(\nu, \varepsilon)$ (15) в коэффициенте радиационной диффузии (в знаменателях формул (17) и (28)) можно приближённо положить равной

$$W(\nu, \varepsilon) \approx \frac{\nu^{2/3}}{\varepsilon^{4/3}} \int_{\nu/\varepsilon^2}^{\infty} dx K_{5/3}(x). \quad (36)$$

При такой аппроксимации корректно учитывается определяющее влияние излучения высоких частот на диффузию электронов. Вместе с тем в коэффициенте поглощения (в числителе формулы (28)) следует по-прежнему использовать аппроксимацию (29) для $W(\nu, \varepsilon)$. Проводя далее аналогичные случаю $\delta < -13/6$ вычисления, находим, что частотный спектр имеет форму

$$V(\nu) = V_0 \nu^\alpha, \quad \alpha = (2\delta + 7)/4 \quad (37)$$

$$V_0 = a_0 \frac{\int_0^\infty d\xi \xi^{1/2} \int_\xi^\infty dx K_{5/3}(x)}{\int_0^\infty d\xi \xi^{(2\delta+3)/4} \int_\xi^\infty dx K_{5/3}(x)} = \varepsilon_{\text{eq}}^{2-\delta} \frac{2^{(7-2\delta)/4} (2\delta + 7) \pi \Gamma(\frac{25}{12}) \Gamma(\frac{5}{12})}{3^{7/2} \Gamma(\frac{6\delta+53}{24}) \Gamma(\frac{6\delta+13}{24})}. \quad (38)$$

Распределение электронов на квазиplate по-прежнему описывается выражением (33).

Однако такой подход к анализу спектра при $\delta > -13/6$ недостаточно корректен, и фактически в этом случае реализуется другой вариант относительно узкого частотного спектра (см. рис. 2б), когда коэффициент усиления имеет максимум на некоторой частоте. Дело в том, что для справедливости решения (37), (38) существенно, чтобы распределение электронов с импульсами ε поддерживалось излучением, на которое эти электроны влияют слабо: излучение обуславливают более энергичные электроны с импульсами $\varepsilon' \sim \varepsilon^4$. Поэтому изменения в спектре на некоторой частоте ν из-за неучтённых выше спонтанных процессов способны значительно повлиять на форму низкочастотного спектра.

Реальный спектр имеет завал на частотах $\nu \gtrsim \sqrt{\varepsilon_{\text{eq}}}$, где поглощение становится положительным. В то же время следует ожидать, что при $\delta > -13/6$ спектр излучения в диапазоне $\nu \lesssim \sqrt{\varepsilon_{\text{eq}}}$ растёт быстрее, чем $\nu^{2/3}$ (поскольку индекс α и в (31), и в (37) равен $2/3$ при $\delta = -13/6$ и растёт с увеличением показателя δ). Тогда завал на частотах $\nu \gtrsim \sqrt{\varepsilon_{\text{eq}}}$ существенно уменьшает (по сравнению со спектром (37)) коэффициент радиационной диффузии

$$D = 2^{2/3} \Gamma(2/3) \varepsilon_{\text{eq}}^{-2/3} \int_0^\infty d\nu \nu^{-5/3} I_\nu$$

в широком интервале импульсов $\varepsilon_{\text{eq}}^{1/4} \lesssim \varepsilon \lesssim \varepsilon_{\text{eq}}$. В результате наклон функции распределения $\partial f_\varepsilon / \partial \varepsilon \approx \approx a_{\text{acc}} \varepsilon f_{\text{eq}} / D \propto \varepsilon^{\delta+2/3}$ эффективно увеличивается по сравнению с $\partial f_\varepsilon / \partial \varepsilon \propto \varepsilon^{-3/2}$ в (33). Коэффици-

ент усиления

$$-\mu = \nu^{-5/3} \int_0^{\infty} d\varepsilon \varepsilon^{4/3} W(\nu, \varepsilon) \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial \varepsilon} = \frac{3a_0 f_{\text{eq}} \nu^{2\delta+13/3} \Gamma\left(\frac{3\delta+19}{6}\right) \Gamma\left(\frac{3\delta+9}{6}\right)}{2^{-\delta-2} (3\delta+11) \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \int_0^{\infty} d\nu \nu^{-5/3} I_\nu} \quad (39)$$

на частотах $\varepsilon_{\text{eq}}^{1/8} \lesssim \nu \lesssim \varepsilon_{\text{eq}}^{1/2}$ растёт с увеличением частоты, что указывает на наличие максимума усиления на некоторой частоте $\nu_0 \lesssim \sqrt{\varepsilon_{\text{eq}}}$.

Существование максимума усиления приводит к тому, что растущая с увеличением ζ энергия излучения концентрируется в окрестности этой частоты. В свою очередь, увеличение интенсивности излучения медленно смещает частоту ν_0 вниз по спектру. Действительно, возьмём узкий спектр излучения $I_\nu = I_0(\zeta)\delta(\nu - \nu_0)$ и устремим $I_0 \rightarrow \infty$. Тогда квазистационарная функция распределения (17) имеет вид квазиплато:

$$f_\varepsilon \approx f_{\text{eq}} \times \begin{cases} 1 + I_0^{-1} \nu_0^{5/3} \int_{\varepsilon_{\text{eq}}}^{\varepsilon} d\varepsilon \frac{a_{\text{acc}} \varepsilon - a_{\text{sp}} \varepsilon}{\varepsilon^{-2/3} W(\nu_0, \varepsilon)} & \text{при } \varepsilon \lesssim \varepsilon_\downarrow; \\ \exp\left(-\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a_{\text{sp}} \varepsilon(\varepsilon_\downarrow) - a_{\text{acc}} \varepsilon(\varepsilon_\downarrow)}{\nu_0^{-5} I_0 \exp(-\varepsilon/\nu_0^2)}\right) & \text{при } \varepsilon \gtrsim \varepsilon_\downarrow, \end{cases}$$

которое обрывается при

$$\varepsilon_\downarrow = \nu_0^2 \ln\left(\frac{\nu_0^{-5} I_0}{a_{\text{sp}} \varepsilon(\varepsilon_\downarrow) - a_{\text{acc}} \varepsilon(\varepsilon_\downarrow)}\right).$$

Характерная ширина обрыва квазиплато имеет порядок ν_0^2 . * Коэффициент поглощения на частоте ν_0

$$\mu(\nu_0) = I_0^{-1} \int_0^{\infty} d\varepsilon \varepsilon^2 f_\varepsilon (a_{\text{sp}} \varepsilon - a_{\text{acc}} \varepsilon) \approx f_{\text{eq}} I_0^{-1} \int_0^{\varepsilon_\downarrow(I_0)} d\varepsilon \varepsilon^2 (a_{\text{sp}} \varepsilon - a_{\text{acc}} \varepsilon) \quad (40)$$

принимает нулевое значение и затем становится положительным при достаточно большой энергии излучения, когда уже область $\varepsilon_{\text{eq}} < \varepsilon < \varepsilon_\downarrow$ даёт основной вклад в интеграл (40). В свою очередь, на низких частотах $\nu \ll \nu_0$ коэффициент поглощения описывается формулой (39): он отрицателен и увеличивается по абсолютной величине с ростом ν . Следовательно, коэффициент усиления по-прежнему имеет максимум, но на более низкой частоте. Наличие спонтанного излучения приведёт к росту интенсивности на новой частоте, соответствующей максимуму коэффициента усиления, и максимум в спектре излучения переместится на эту частоту. Точный расчёт изменения частоты максимума и характерной ширины спектра в зависимости от ζ требует специального исследования.

Обсудим теперь излучение электронов в области высоких частот $\nu \gg \sqrt{\varepsilon_{\text{eq}}}$, где коэффициент поглощения положителен, и влияние этого излучения на спектр в диапазоне усиления. Взаимодействие электронов с излучением на частотах $\nu \gg \sqrt{\varepsilon_{\text{eq}}}$ приводит к диффузии частиц в область импульсов $\varepsilon > \varepsilon_{\text{eq}}$. И в случае $\delta < -13/6$, и в случае $\delta > -13/6$ данный процесс уменьшает концентрацию частиц в интервале импульсов $\varepsilon < \varepsilon_{\text{eq}}$ и, следовательно, понижает усиление излучения в диапазоне $\nu \lesssim \sqrt{\varepsilon_{\text{eq}}}$. Кроме этого, диффузия уменьшает по модулю отрицательный наклон $\partial f_\varepsilon / \partial \varepsilon < 0$ функции распределения у верхнего края квазиплато $\varepsilon > \varepsilon_{\text{eq}}$. Это уменьшение ослабляет эффект частичного поглощения

* Точка обрыва ε_\downarrow должна находиться выше ε_{eq} , т. к. иначе функция распределения представляла бы дельта-функцию вблизи ε_{eq} . Поэтому требуемая для поддержания плато энергия излучения I_0 экспоненциально увеличивается при уменьшении частоты максимума $\nu_0 < \sqrt{\varepsilon_{\text{eq}}}$.

излучения в диапазоне усиления, обусловленный электронами на верхнем крае квазиплато. В итоге диффузионный процесс может предотвратить смещение вниз по частоте характерного максимума в спектре излучения при $\delta > -13/6$.

Далее мы более подробно рассмотрим только случай $\delta < -13/6$. Радиационная диффузия электронов в область $\varepsilon \gtrsim \varepsilon_{\text{eq}}$ достаточно мала и не существенна для усиления излучения, пока характерная яркостная температура излучения $T_\nu = I_\nu/\nu^2$ в диапазоне $\sqrt{\varepsilon_{\text{eq}}} \lesssim \nu \lesssim \varepsilon_{\text{eq}}^2$ меньше характерного импульса ε_{eq} электронов квазиплато. В этом случае электроны остаются локализованными в области импульсов $\varepsilon \lesssim \varepsilon_{\text{eq}}$, и высота квазиплато $f_{\text{eq}}(\zeta)$ слабо зависит от ζ . Тогда в соответствии с уравнением (27) интенсивность выходящего из слоя излучения на частотах $\nu \lesssim \sqrt{\varepsilon_{\text{eq}}}$ линейно растёт с увеличением ζ . Линейный рост интенсивности реализуется на расстояниях

$$\zeta \lesssim L_{\text{th}} = \mu^{-1}(\nu = \varepsilon_{\text{eq}}^2) \sim \varepsilon_{\text{eq}}^5/n_\varepsilon, \quad (41)$$

где оптическая толщина $\zeta\mu(\nu = \varepsilon_{\text{eq}}^2)$ на частотах $\nu \sim \varepsilon_{\text{eq}}^2$ меньше единицы. При этом начальная яркостная температура излучения у основания слоя должна быть меньше ε_{eq} . Толщина L_{th} в (41) превышает максимальную длину L_{sat} (24) установления режима насыщения, если концентрация электронов

$$n_\varepsilon \lesssim \varepsilon_{\text{eq}}^6. \quad (42)$$

Неравенство (42) означает, что энергия электронов квазиплато (порядка $n_\varepsilon\varepsilon_{\text{eq}}$) должна быть меньше энергии $\varepsilon_{\text{eq}}^7$ равновесного излучения ($I_\nu \propto \nu^2$) с температурой $T_\nu = \varepsilon_{\text{eq}}$ в диапазоне частот $\nu \lesssim \varepsilon_{\text{eq}}^2$. Именно при условии (42) существует участок слоя $L_{\text{sat}} \lesssim \zeta \lesssim L_{\text{th}}$, где справедливо решение $Z \approx f_{\text{eq}}\zeta$ уравнения (27). Следует обратить внимание, что на участке $L_{\text{sat}} \lesssim \zeta \lesssim L_{\text{th}}$ энергия излучения в диапазоне усиления $\nu \lesssim \sqrt{\varepsilon_{\text{eq}}}$

$$W_{\text{lf}} \sim \nu Z(\zeta)V(\nu)|_{\nu=\sqrt{\varepsilon_{\text{eq}}}} \sim f_{\text{eq}}\varepsilon_{\text{eq}}^5\zeta \quad (43)$$

(см. (31), (32)) растёт примерно такими же темпами, что и энергия в диапазоне $\nu \gg \sqrt{\varepsilon_{\text{eq}}}$

$$W_{\text{hf}} \sim n_\varepsilon a_{\text{sp}}(\varepsilon_{\text{eq}})\zeta \sim f_{\text{eq}}\varepsilon_{\text{eq}}^5\zeta. \quad (44)$$

Это объясняется тем, что изменение энергии излучения (44) в диапазоне $\nu \gg \sqrt{\varepsilon_{\text{eq}}}$ определяется спонтанным излучением электронов, а изменение энергии (43) в интервале $\nu \lesssim \sqrt{\varepsilon_{\text{eq}}}$ задаётся превышением стороннего ускорения электронов над радиационными потерями из-за спонтанного излучения. Для электронов с характерными для квазиплато импульсами $\varepsilon \sim \varepsilon_{\text{eq}}$ стороннее ускорение и радиационные потери имеют одинаковый порядок величины (эти величины совпадают при $\varepsilon = \varepsilon_{\text{eq}}$ по определению ε_{eq} , см. выше).

На больших расстояниях $\zeta > L_{\text{th}}$ яркостная температура излучения в диапазоне $\sqrt{\varepsilon_{\text{eq}}} \lesssim \nu \lesssim \varepsilon_{\text{eq}}^2$ превышает ε_{eq} . В результате радиационной диффузии характерная ширина ε_u распределения электронов здесь становится много большей ε_{eq} . Оценим изменение высоты квазиплато $f_{\text{eq}}(\zeta) \sim n_\varepsilon/\varepsilon_u^3(\zeta)$ с увеличением ζ , которая входит в уравнение (27) и определяет $dZ/d\zeta$. Для этого предположим, что все частицы сосредоточены в ограниченной области энергий $\varepsilon \lesssim \varepsilon_u$ (т. е. при $\varepsilon \gtrsim \varepsilon_u$ концентрация частиц быстро уменьшается с увеличением энергии, например, экспоненциально). Тогда в диапазоне $\varepsilon_u^{1/2} \lesssim \nu \lesssim \varepsilon_u^2$ коэффициент поглощения

$$\mu = -2^{2/3}\Gamma(2/3)\nu^{-5/3} \int_0^\infty d\varepsilon \varepsilon^{4/3} \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial \varepsilon} = \frac{2^{8/3}\Gamma(2/3)}{3\nu^{5/3}} \int_0^\infty d\varepsilon \varepsilon^{1/3} f_\varepsilon \quad (45)$$

и излучательная способность

$$\eta = 2^{2/3} \Gamma(2/3) \nu^{1/3} \int_0^{\infty} d\varepsilon \varepsilon^{4/3} f_{\varepsilon} \quad (46)$$

определяются двумя моментами $\int_0^{\infty} d\varepsilon \varepsilon^{1/3} f_{\varepsilon}$, $\int_0^{\infty} d\varepsilon \varepsilon^{4/3} f_{\varepsilon}$ функции распределения, при этом частотный профиль $\mu \propto \nu^{-5/3}$ и $\eta \propto \nu^{1/3}$ вообще не зависит от f_{ε} . В соответствии с (45), (46) на расстояниях $\zeta > L_{\text{th}}$ в диапазоне $\varepsilon_{\text{u}}^{1/2} \lesssim \nu \lesssim \varepsilon_{\text{u}}^2$ устанавливается растущая с частотой интенсивность (см. рис. 2)

$$I_{\nu} = \eta/\mu = \nu^2 \left(3 \int_0^{\infty} d\varepsilon \varepsilon^{4/3} f_{\varepsilon} \right) / \left(4 \int_0^{\infty} d\varepsilon \varepsilon^{1/3} f_{\varepsilon} \right) \sim \varepsilon_{\text{u}} \nu^2.$$

На более высоких частотах $\nu \gtrsim \varepsilon_{\text{u}}^2$ коэффициент поглощения экспоненциально уменьшается и слой просветляется. Интенсивность излучения на частотах $\nu \gtrsim \varepsilon_{\text{u}}^2$ определяется экспоненциально малым спонтанным излучением и поэтому достаточно мала. Таким образом, энергия излучения W_{hf} вне диапазона усиления сосредоточена на частотах $\nu \lesssim \varepsilon_{\text{u}}^2$ и оценивается как

$$W_{\text{hf}} \sim \nu I_{\nu} |_{\nu \sim \varepsilon_{\text{u}}^2} \sim \varepsilon_{\text{u}}^7. \quad (47)$$

Изменение параметра ε_{u} оценим из условия, что энергия излучения (47) и энергия электронов

$$W_{\text{e}} \sim n_{\varepsilon} \varepsilon_{\text{u}} \quad (48)$$

увеличиваются за счёт стороннего ускорения электронов с импульсами $\varepsilon \gtrsim \varepsilon_{\text{eq}}$:

$$\frac{d}{d\zeta} (W_{\text{hf}} + W_{\text{e}}) \sim (\varepsilon_{\text{u}}^6 + n_{\varepsilon}) \frac{d\varepsilon_{\text{u}}}{d\zeta} \sim \int_{\varepsilon_{\text{eq}}}^{\infty} a_{\text{acc}} \varepsilon \varepsilon^2 f_{\varepsilon} d\varepsilon \sim n_{\varepsilon} \varepsilon_{\text{eq}}^2 (\varepsilon_{\text{u}}/\varepsilon_{\text{eq}})^{\delta}. \quad (49)$$

Из соотношения (49) следует

$$\frac{\varepsilon_{\text{u}}}{\varepsilon_{\text{eq}}} \sim \begin{cases} (\zeta \varepsilon_{\text{eq}})^{1/(1-\delta)} & \text{при } \zeta \lesssim L_{\infty}; \\ (\zeta n_{\varepsilon} \varepsilon_{\text{eq}}^{-5})^{1/(7-\delta)} & \text{при } \zeta \gtrsim L_{\infty}, \end{cases}$$

где $L_{\infty} = \varepsilon_{\text{eq}}^{-1} (n_{\varepsilon}/\varepsilon_{\text{eq}}^6)^{(1-\delta)/6}$. Подставляя искомую высоту квазиplate

$$f_{\text{eq}} \sim \frac{n_{\varepsilon}}{\varepsilon_{\text{u}}^3} \sim \frac{n_{\varepsilon}}{\varepsilon_{\text{eq}}^3} \times \begin{cases} (\zeta \varepsilon_{\text{eq}})^{-3/(1-\delta)} & \text{при } \zeta \lesssim L_{\infty}; \\ (\zeta n_{\varepsilon} \varepsilon_{\text{eq}}^{-5})^{-3/(7-\delta)} & \text{при } \zeta \gtrsim L_{\infty} \end{cases} \quad (50)$$

в уравнение (27) для амплитуды Z спектра (26), находим, что

$$Z(\zeta) \sim \varepsilon_{\text{eq}}^2 \times \begin{cases} (n_{\varepsilon}/\varepsilon_{\text{eq}}^6) (\zeta \varepsilon_{\text{eq}})^{-(\delta+2)/(1-\delta)} & \text{при } \zeta \lesssim L_{\infty}; \\ (\zeta n_{\varepsilon} \varepsilon_{\text{eq}}^{-5})^{(4-\delta)/(7-\delta)} & \text{при } \zeta \gtrsim L_{\infty}. \end{cases} \quad (51)$$

Заметим, что на интервале $\zeta \lesssim L_{\infty}$ энергия электронов W_{e} (48) больше энергии W_{hf} (47), так что лишь малая доля работы стороннего ускорения трансформируется в энергию излучения в диапазоне $\sqrt{\varepsilon_{\text{eq}}} \lesssim \nu \lesssim \varepsilon_{\text{u}}^2$. Граница L_{∞} находится выше длины насыщения L_{sat} (24) и длины L_{th} (41), если

$$n_{\varepsilon} \gtrsim \varepsilon_{\text{eq}}^6. \quad (52)$$

Только тогда реализуется участок слоя, в котором амплитуда Z описывается верхней строкой формулы (51). На этом участке энергия излучения (47) в диапазоне частот с положительной реабсорбцией $W_{\text{hf}} \sim \varepsilon_{\text{u}}^7 \propto \zeta^{7/(1-\delta)}$ увеличивается быстрее, чем энергия излучения $W_{\text{lf}} \propto \zeta^{-(\delta+2)/(1-\delta)}$ в диапазоне с отрицательной реабсорбцией.

Неравенство (52) противоположно условию (42). Это означает, что выше точки $\zeta = L_{\text{sat}}$ реализуется либо участок $L_{\text{sat}} \lesssim \zeta \lesssim L_{\text{th}}$, где амплитуда $Z(\zeta)$ растёт линейно, либо участок $L_{\text{sat}} \lesssim \zeta \lesssim L_{\infty}$, где амплитуда $Z(\zeta)$ описывается верхней строкой формулы (51). Выше данных интервалов, где $\zeta \gtrsim \max[L_{\text{th}}, L_{\infty}]$, энергия излучения W_{hf} (47) становится больше энергии электронов W_e (48). На таких расстояниях работа стороннего ускорения в основном трансформируется в энергию излучения и в меньшей степени расходуется на увеличение энергии электронов. В этой области энергия излучения в диапазоне с положительной реабсорбцией также увеличивается быстрее, чем энергия излучения в диапазоне с отрицательной реабсорбцией.

Таким образом, диффузия частиц в область энергий $\varepsilon \gtrsim \varepsilon_{\text{eq}}$ существенно уменьшает темп роста интенсивности в диапазоне усиления. Если при $f_{\text{eq}} = \text{const}$ величина $Z(\zeta) \propto \zeta$, то при учёте диффузии $Z(\zeta)$ увеличивается всего лишь как $\zeta^{37/55} \approx \zeta^{0,67}$ при максимальном $\delta = -13/6$, когда ещё реализуется спектр вида (26).

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Установлено, что спектр излучения синхротронного мазера в режиме насыщения принимает две характерные формы в зависимости от распределения эффективности ускорения электронов $a_{\text{acc}\varepsilon}$ по импульсам ε . Если ускорение описывается степенной функцией $a_{\text{acc}\varepsilon} = a_0\varepsilon^{\delta}$ с показателем $\delta < -13/6$, то форма частотного спектра $V(\nu)$ также степенная (31) и не зависит от толщины слоя L : $I_{\nu} \propto \nu^{2\delta+5}$. Вместе с тем уровень излучения (амплитуда Z в спектре (26) и интенсивность I_{ν} выходящего излучения) меняются вместе с L по закону $I_{\nu} \propto L^{(4-\delta)/(7-\delta)}$. Рост интенсивности при этом существенно зависит от радиационной диффузии частиц в область высоких энергий, где торможение электронов из-за спонтанного излучения превышает стороннее ускорение.

Если ускорение $a_{\text{acc}\varepsilon}$ достаточно медленно спадает или начинает расти с увеличением энергии электронов ($\delta > -13/6$), то с увеличением толщины слоя характерная ширина спектра уменьшается, а частота максимума в спектре смещается в сторону низких частот. Такой случай реализуется, например, при ускорении электронов ударными волнами, когда $\delta = 1$ [29, 30].

Для применимости полученных результатов, с одной стороны, требуется достаточно высокая интенсивность излучения (23). С другой стороны, энергия излучения не должна превышать энергию магнитного поля, поскольку в противном случае следует учесть влияние обратного комптоновского рассеяния на кинетику электронов и формирование спектра излучения (которым выше пренебрегалось). Если характерное время ускорения электронов сторонним источником меньше времени развития синхротронной неустойчивости, то энергия излучения в режиме насыщения всегда превышает кинетическую энергию усиливающих электронов. В этом случае энергия релятивистских электронов в источнике должна быть существенно меньше энергии магнитного поля.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 99-02-18244) и Совета по государственной поддержке ведущих научных школ (проект № 00-15-96674). Работа одного из авторов (С. А. Корягина) поддержана также комиссией РАН по работе с молодёжью (проект «Взаимодействие мощного электромагнитного и нейтринного излучения с плазмой в сверхсильных магнитных и гравитационных полях компактных космических объектов: белых карликов, нейтронных звёзд и чёрных дыр»). При выполнении работы мы неоднократно обращались к библиографическим материалам Астрофизической базы данных НАСА (адрес в Интернете <http://cdsads.u-strasb.fr>).

ЛИТЕРАТУРА

1. Железняков В. В. Излучение в астрофизической плазме. М.: Янус-К, 1997. 528 с.
2. Bekefi G., Hirshfield J. L., Brown S. C. // Phys. Rev. 1961. V. 122. P. 1037.
3. Wild J. P., Smerd S. F., Weiss A. A. // Ann. Rev. Astron. Astrophys. 1963. V. 1. P. 291.
4. Цытович В. Н. // Вест. МГУ. Сер. физ.-мат. и естеств. наук. 1951. № 11. С. 27.
5. Разин В. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1960. Т. 3, № 4. С. 584.
6. Гинзбург В. Л., Сыроватский С. И. // УФН. 1966. Т. 87. С. 65.
7. Железняков В. В. // ЖЭТФ. 1966. Т. 51, № 2. С. 570.
8. McCray R. // Science. 1966. V. 154, № 3754. P. 1320.
9. Железняков В. В., Суворов Е. В. // ЖЭТФ. 1968. Т. 54, № 2. С. 627.
10. Zheleznyakov V. V., Suvorov E. V. // Astrophys. Space Sci. 1972. V. 15, № 1. P. 24.
11. Сазонов В. Н., Цытович В. Н. // Изв. вузов. Радиофизика. 1968. Т. 11, № 9. С. 1287.
12. Железняков В. В. // Астрон. журн. 1967. Т. 44, № 1. С. 42.
13. Crusius-Wätzel A. R. // Astrophys. J. 1991. V. 368, № 2. P. 390.
14. Zheleznyakov V. V., Thejappa G., Koryagin S. A., Stone R. G. // Geophys. monogr. 119. Radio astronomy at long wavelengths. Washington: AGU, 2000. P. 57.
15. Braude S. Ya., Sokolov K. P., Sharykin N. K., Zakharenko S. M. // Astrophys. Space Sci. 1995. V. 226. P. 245.
16. Reiner M. J., Stone R. G., Fainberg J. // Geophys. Res. Lett. 1992. V. 19. P. 1275.
17. Ахизер А. Н., Алексин В. Ф., Барьяхтар В. Г., Пелетминский С. В. // ЖЭТФ. 1962. Т. 42, № 2. С. 552.
18. Трахтенгерц В. Ю. // Основы физики плазмы: В 2-х т. Т. 2 / Под ред. А. А. Галеева и Р. Судана. М.: Энергоатомиздат, 1984. С. 498.
19. Kennel C. F., Engelman F. // Phys. Fluids. 1966. V. 9, № 12. P. 2377.
20. Rees M. J. // MNRAS. 1967. V. 136, № 3. P. 279.
21. Melrose D. B. // Astrophys. Space Sci. 1968. V. 2. P. 171.
22. McCray R. // Astrophys. J. 1969. V. 156, № 1. P. 329.
23. Бекефи Дж. Радиационные процессы в плазме. М.: Мир, 1971. § 4.
24. Богомолов Я. Л., Братман В. Л., Гинзбург Н. С. // Физика плазмы. 1987. Т. 13, № 11. С. 1399.
25. Эйдман В. Я. // ЖЭТФ. 1958. Т. 34. С. 131.
26. Эйдман В. Я. // ЖЭТФ. 1959. Т. 36, № 4. С. 1335.
27. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979. 832 с.
28. Андронов А. А., Железняков В. В., Петелин М. И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1964. Т. 7, № 2. С. 251.
29. Druy L. O'S. // Rep. Prog. Phys. 1983. V. 46, № 8. P. 973.
30. Лонгейр М. Астрофизика высоких энергий. М.: Мир, 1983. § 24.4.

Институт прикладной физики РАН,
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию
18 мая 2000 г.

SYNCHROTRON MASER EMISSION IN THE SATURATED REGIME*V. V. Zheleznyakov and S. A. Koryagin*

Using the method of Einstein coefficients, we derive a quasi-linear kinetic equation for relativistic electrons, in which synchrotron emission of the particles is taken into account. We discuss the evolution of the electron distribution taking into account the effect of weak radiative diffusion of the particles over pitch angles. We analyze a solution of the quasi-linear kinetic equation for electrons and the radiation transfer equation in a stationary thick plasma layer in which maser amplification of the synchrotron radiation takes place. In this case, we assume that population inversion in the electron distribution and, thus, stationary synchrotron emission are provided due to an external (nonsynchrotron) acceleration mechanism. The efficiency of this acceleration mechanism is supposed to have a power-law dependence of the electron energy. Under these conditions, we find the spectra of synchrotron maser emission, which are entirely determined by the external acceleration.

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ПОЛЯ И ТОКИ В МОДЕЛИ ПЛАНЕТАРНОГО ГЕНЕРАТОРА. II. РЕЗКИЙ ПЕРЕПАД СКОРОСТИ ВРАЩЕНИЯ ПЛАЗМЕННОЙ ОБОЛОЧКИ

А. О. Солдаткин, Ю. В. Чугунов

Исследованы электрические поля и токи в модели планетарного генератора при дифференциальном вращении неоднородно проводящей плазменной оболочки совместно с намагниченной планетой. Угловая скорость вращения ω_p и профиль проводимости в нижних слоях оболочки задаются с учётом экспериментальных данных, а течение в верхних слоях варьируется таким образом, что на определённой высоте h_2 возникает резкий перепад (разрыв) угловой скорости: $\omega_p(h_2 - 0, \Theta) = \omega_0 + \gamma_2 \sin^2 \Theta$, $\omega_p(h_2 + 0, \Theta) = W_6 + \gamma_3 \sin^2 \Theta$, профиль которого при фиксированных ω_0 и γ_2 определяется параметрами W_6 и γ_3 . Показано, что плоскость параметров γ_3, W_6 разделена на области, при переходе через границы которых происходят бифуркации токовой структуры: изменение числа токовых петель или их взаимного расположения. Топология линий тока, в том числе во внутренних слоях плазменной оболочки и в самой планете, существенно зависит от параметров W_6 и γ_3 . Установлено, что на плоскости параметров есть единственная точка, соответствующая которой система характеризуется отсутствием тока во внешней области; эта точка расположена на пересечении границ, разделяющих плоскость параметров на области с разной топологией токовой системы.

Из решения задачи следует, что области резкой неоднородности скорости вращения плазменной оболочки играют значительную роль при генерации тока в плазмосфере. Для установления топологии токовой системы планеты в модели планетарного генератора необходимы данные о её внешнем плазмосферном течении во всём интервале полярных углов.

ВВЕДЕНИЕ

В связи с исследованием магнитосфер планет представляет интерес рассмотрение модельных электродинамических задач, в постановке которых отражены основные особенности формирования плазмосфер и генерации электрических полей и токов. Происходящие в магнитосфере процессы отличаются большим разнообразием и сложностью. Однако для исследования характерных усреднённых течений во внутренней магнитосфере, заполненной холодной плазмой, оказывается возможным использовать электродинамический подход, т. к. на расстояниях порядка нескольких радиусов планеты основную роль играют электромагнитные силы и силы вязкости.

Сравнительно недавно в работах [1–4] было обращено внимание на существование источника атмосферного электричества — планетарного электрического генератора, связанного с нетвердотельным вращением плазменной оболочки планеты.

В предыдущей части работы были рассмотрены две модельные задачи, в которых плазмосферное течение плавно изменялось в широком интервале высот; было доказано, что генерация тока в исследуемых структурах обусловлена дифференциальностью вращения плазменной оболочки, причём вклад в ток вносит только «вынужденная» часть течения [5]. Следует отметить, что скорость вращения плазменной оболочки планеты при определённых условиях может быть резко неоднородной. Ясно, что при этом течение является существенно неуниполярным, а эквивалентная ЭДС униполярной индукции оказывается сильно локализованной. В данной части работы исследовано поведение системы в случае, когда профиль течения содержит разрыв в предположении, что он в определённом смысле соответствует резкому перепаду скорости вращения плазменной оболочки на некоторой высоте. Показано, что топология возникающей структуры токов существенно зависит от параметров разрыва.

1. ТРЁХСЛОЙНАЯ МОДЕЛЬ ПЛАЗМОСФЕРЫ С НЕОДНОРОДНОЙ ПРОВОДИМОСТЬЮ

В качестве исходных данных для построения модели возьмём результаты измерений скорости вращения и проводимости плазменной оболочки Земли. По измерениям торможения спутников установлено [6], что в достаточно широком интервале широтных углов в приповерхностном слое толщиной до 100 км скорость вращения плазмосферы совпадает с угловой скоростью Земли W_E , а на высотах от 100 до 300 км линейно растёт, достигая в максимуме $1,4W_E$; изменение скорости течения на высотах $h > 300$ км исследовано менее подробно, однако известно, что при $h = 300 \div 350$ км скорость резко падает (рис. 1). Проводимость плазмосферы, оставаясь изотропной, экспоненциально растёт до высот порядка 100 км, а затем после резкого скачка становится анизотропной и дальше меняется незначительно вплоть до высот порядка 250 км [7].

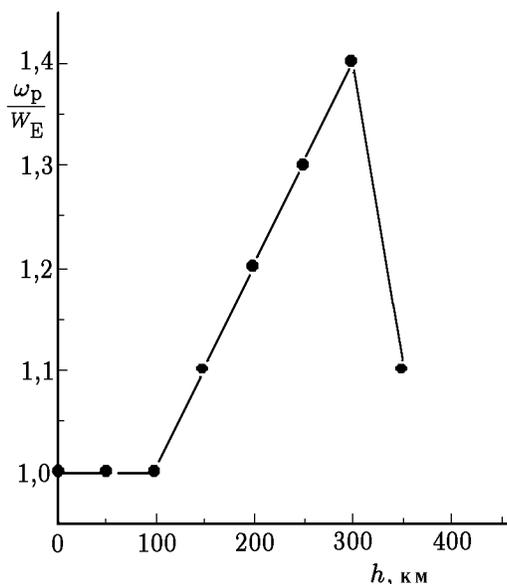


Рис. 1. Высотный профиль скорости вращения плазменной оболочки Земли

Известно [2, 4], что неоднородность проводимости вращающейся оболочки играет значительную роль при генерации тока. Поэтому для адекватного описания необходимо учитывать как дифференциальность вращения, так и неоднородность проводимости плазмосферы. Реализовать плазмосферное течение, в какой-то степени соответствующее экспериментальным данным, удаётся в рамках следующей трёхслойной модели. Будем считать, что планета, имеющая постоянную проводимость σ_0 и радиус R , вращается твердотельно с угловой скоростью ω_0 . Магнитное поле планеты совпадает с полем расположенного в центре планеты точечного диполя с магнитным моментом \mathbf{M} , направленным вдоль оси вращения. В сферической системе координат (r, Θ, ϕ) это поле имеет вид

$$B_r = \frac{2M \cos \Theta}{r^3}, \quad B_\Theta = \frac{M \sin \Theta}{r^3}. \quad (1)$$

Сферические границы раздела слоёв проходят на высотах h_1 и h_2 , $h_1 < h_2$. Проводимость плазменной оболочки экспоненциально растёт в интервале высот от 0 до h_2 (т. е. при $R < r \leq R + h_2$):

$$\sigma(r) = \sigma_0 \exp\left(\frac{r - R}{H}\right),$$

а при $r > R + h_2$ остаётся постоянной:

$$\sigma(r) = \sigma_0 \exp\left(\frac{h_2}{H}\right),$$

где H — приведённая высота.

Будем считать, что выполняются условия тонкости первого и второго слоёв:

$$\{h_1, h_2\} \ll R, \quad (2)$$

и малости приведённой высоты:

$$H \ll \{h_1, h_2\}. \quad (3)$$

В земных условиях $R \approx 6400$ км, $h_2 \approx 300$ км, $h_1 \approx 100$ км, $H \approx 6$ км, т. е. условия (2) и (3) хорошо выполняются.

В реальности распределение поля скоростей вблизи поверхности планеты в значительной степени должно определяться силами вязкости [1], поэтому положим, что первый слой плазменной оболочки — атмосфера — твердотельно вращается вместе с планетой:

$$\omega_p(r, \Theta) = \omega_0, \quad R < r \leq R + h_1.$$

Во втором слое, в области $R + h_1 < r \leq R + h_2$, где степень ионизации уже значительна, а вязкость менее существенна, течение необходимо задавать исходя, насколько это возможно, из экспериментальных данных. При этом, как следует из [5], для построения поля скоростей нужно прежде всего определить собственные функции $\omega_1(r, \Theta)$, соответствующие случаю неоднородной проводимости. В результате разделения переменных $\omega_1 = H(r)\Phi(\Theta)$ в уравнении (6) из [5] широтная часть $\omega_1(r, \Theta)$ в силу того, что σ не зависит от Θ , будет иметь прежний вид (8) из [5], а для радиальной части получится уравнение

$$r^2 H'' + (r + r^2 \sigma' / \sigma) H' - \alpha H = 0. \quad (4)$$

Для дальнейшего анализа из набора решений (8) из [5] ограничимся функцией, отвечающей $\alpha = 10$. Решения уравнения (4) при $\alpha = 10$ имеют вид

$$H_1(r) = \exp\left(\frac{R-r}{H}\right) \left\{ \frac{H}{r} + 9\left(\frac{H}{r}\right)^2 + 27\left(\frac{H}{r}\right)^3 + 9\left(\frac{H}{r}\right)^4 + \dots \right\}, \quad (5)$$

$$H_2(r) = 1 - 10\left(\frac{H}{r}\right) + 45\left(\frac{H}{r}\right)^2 - 90\left(\frac{H}{r}\right)^3 + 22,5\left(\frac{H}{r}\right)^4 + \dots$$

Решения $H_1(r)$ и $H_2(r)$ мы будем использовать при $R < r \leq R + h_2$, поэтому, учитывая условия (2) и (3), можно использовать приближённые выражения для $H_1(r)$ и $H_2(r)$, оставив несколько первых членов рядов.

Функция $\omega_p(r, \Theta)$ имеет два слагаемых. Запишем «вынужденную» часть течения (см. [5]) в следующей форме:

$$\omega_1 = \omega_0(W_1 H_1 + W_2 H_2) \frac{dP_3(\cos \Theta)}{d(\cos \Theta)},$$

где $P_k(\cos \Theta)$ — полином Лежандра первого рода k -го порядка. Азимутальная часть ω_1 содержит слагаемые, пропорциональные $\sin \Theta$ и $\sin^2 \Theta$, поэтому, чтобы удовлетворить естественному условию

$$\omega_p(R + h_1, \Theta) = \omega_0, \quad (6)$$

необходимо выбрать униполярное течение в виде

$$\tilde{\omega}(L) = \omega_0 \left(W_3 + \frac{W_4}{L} \right), \quad L = \frac{r}{R \sin^2 \Theta}.$$

Таким образом,

$$\omega_p(r, \Theta) = \omega_0 \left[(W_1 H_1 + W_2 H_2) (1 - 5 \sin^2 \Theta / 4) + W_3 + \frac{W_4 R}{r} \sin^2 \Theta \right],$$

где $R < r < R + h_2$. Коэффициенты W_1, W_2, W_3, W_4 определяются из условия (6) и граничного условия на $\omega_p(r, \Theta)$ при $r = R + h_2$, которое возьмём в виде

$$\omega_p(R + h_2 - 0, \Theta) = \omega_0 (1 + \gamma_2 \sin^2 \Theta), \quad \gamma_2 > 0. \quad (7)$$

Заметим, что условие (7) соответствует нашим представлениям о возможной структуре течения: оно обеспечивает рост скорости вращения оболочки при увеличении угла Θ . Величины W_1, W_2, W_3, W_4 легко определить из условий (6) и (7):

$$W_1 = \frac{4\gamma_2 (R + h_2) \{H_2(h_2) - H_2(h_1)\}}{5 (h_2 - h_1) \{H_1(h_1)H_2(h_2) - H_1(h_2)H_2(h_1)\}}, \quad W_3 = 1 + \frac{4\gamma_2 (R + h_2)}{5 (h_2 - h_1)},$$

$$W_2 = \frac{4\gamma_2 (R + h_2) \{H_1(h_2) - H_1(h_1)\}}{5 (h_2 - h_1) \{H_1(h_1)H_2(h_2) - H_1(h_2)H_2(h_1)\}}, \quad W_4 = -\frac{\gamma_2 (R + h_1) (R + h_2)}{R (h_2 - h_1)}.$$

В области $r > R + h_2$ зададим течение чисто униполярным:

$$\omega_p(r, \Theta) = \omega_0 \left(W_6 + \frac{\gamma_3 (R + h_2)}{r} \sin^2 \Theta \right),$$

при этом выполняется граничное условие

$$\omega_p(R + h_2 + 0, \Theta) = \omega_0 (W_6 + \gamma_3 \sin^2 \Theta), \quad \gamma_3 > 0. \quad (8)$$

Ясно, что при $W_6 \neq 1$ и $\gamma_2 \neq \gamma_3$ на границе $r = R + h_2$ построенное течение будет иметь разрыв. Можно считать, что разрыв в некоторой степени соответствует резкому изменению скорости вращения плазменной оболочки на данной высоте.

Характерный вид модельного течения при условиях (2) и (3) представлен на рис. 2. Он определяется тремя параметрами: W_6, γ_2 и γ_3 . Варьируя параметры W_6 и γ_3 , можно получать различные зависимости $\omega_p(r, \Theta)$ в области $r > R + h_2$, не меняя структуры течения на меньших высотах.

Обратим внимание на наличие сложной структуры течения при $r \geq R + h_1$. При каждом Θ скорость вращения нарастает или убывает при изменении высоты на величину порядка H , затем происходит плавный рост ω_p . Функция $H_1(r)$ определяет зависимость ω_p от высоты при $R + h_1 < r < R + h_1 + H$; при $r > R + h_1 + H$ функция $H_1(r)$ близка к нулю, и скорость вращения определяют слагаемые $\omega_0 W_2 H_2 [1 - (5 \sin^2 \Theta)/4]$ и униполярная часть течения.

В рассматриваемой модели имеется три границы раздела, на которых, вообще говоря, происходит накопление заряда. Обусловленный им дополнительный потенциал называют свободным решением. Необходимо определить вид свободного решения из уравнения

$$\operatorname{div}(\sigma(r)\mathbf{E}) = -\operatorname{div}(\sigma(r) \nabla \varphi(r, \Theta)) = 0. \quad (9)$$

Широтная зависимость потенциала $\varphi(r, \Theta)$ представляет собой полиномы Лежандра, а радиальная зависимость $V(r)$ является решением уравнения

$$r^2 V'' + (2r + r^2 \sigma' / \sigma) V' - \beta V = 0, \quad (10)$$

где β — положительная константа разделения.

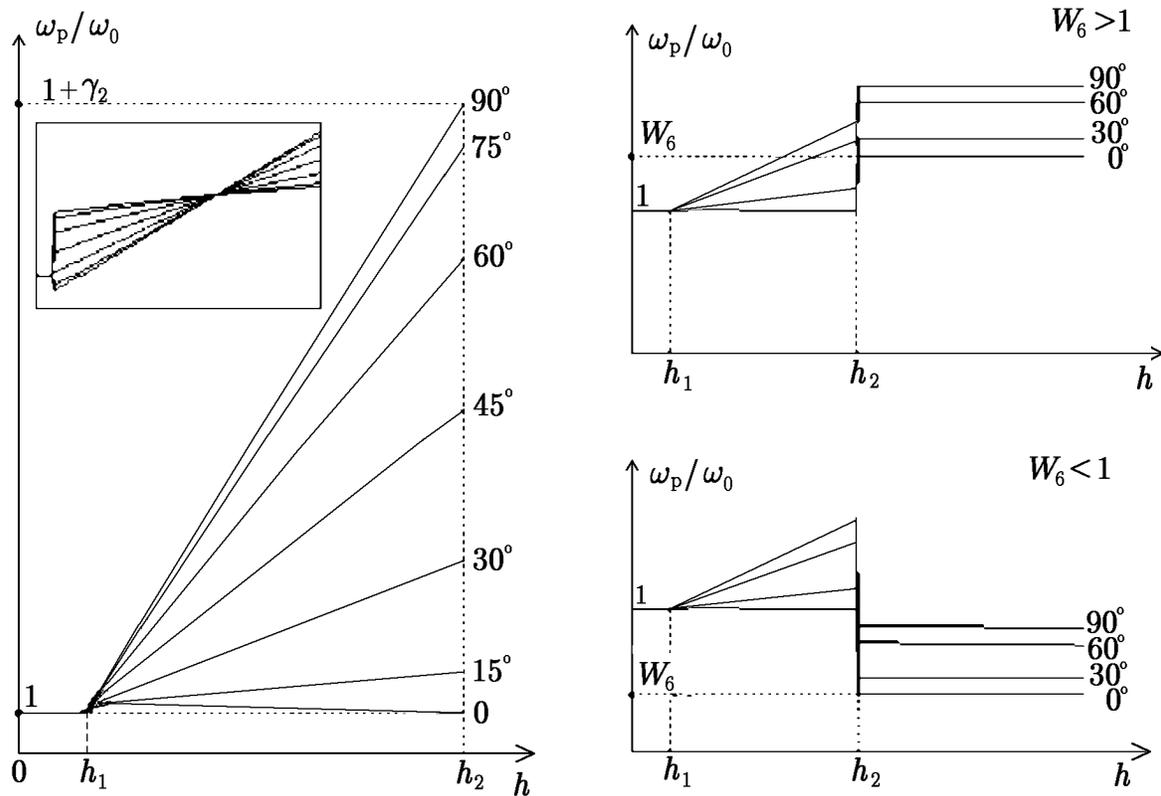


Рис. 2. Характерный вид модельного течения при $H \ll \{h_1, h_2\}$ и $\{h_1, h_2\} \ll R$.
Справа на графиках показаны соответствующие значения угла Θ

В силу того, что зависимость $\omega_1(r, \Theta)$ от Θ выбирается такой же, как в ранее рассмотренных задачах, в разложении униполярного потенциала по полиномам Лежандра по-прежнему будут присутствовать слагаемые, пропорциональные P_0, P_2 и P_4 . Ясно, что в стационарной задаче для построения свободного решения нужно взять такие решения уравнения (9): $P_0, r^2 P_2, r^4 P_4$ — для области планеты (т. к. проводимость планеты однородна); $P_0, U P_2, V P_4$ — для первого и второго слоёв, где U, V — решения уравнения (10) при $\beta = 6, \beta = 20$ соответственно; $r^{-3} P_2, r^{-5} P_4$ — для третьего слоя, где проводимость вновь становится постоянной.

Уравнение (10) в случае экспоненциальной зависимости $\sigma(r)$ при $\beta = 6$ и $\beta = 20$ решается точно:

$$U_1(r) = \exp\left(\frac{R-r}{H}\right) \left\{ \left(\frac{H}{r}\right)^2 + 4 \left(\frac{H}{r}\right)^3 \right\}, \quad U_2(r) = 1 - \frac{6H}{r} + 18 \left(\frac{H}{r}\right)^2 - 24 \left(\frac{H}{r}\right)^3;$$

$$V_1(r) = \exp\left(\frac{R-r}{H}\right) \left\{ \left(\frac{H}{r}\right)^2 + 18 \left(\frac{H}{r}\right)^3 + 126 \left(\frac{H}{r}\right)^4 + 336 \left(\frac{H}{r}\right)^5 \right\},$$

$$V_2(r) = 1 - \frac{20H}{r} + 200 \left(\frac{H}{r}\right)^2 - 1200 \left(\frac{H}{r}\right)^3 + 4200 \left(\frac{H}{r}\right)^4 - 6720 \left(\frac{H}{r}\right)^5.$$

Отметим аналогию этих решений с выражением (5).

Запишем выражения для электрического потенциала в различных слоях:

$$\varphi^{(r < R)} = \frac{M\omega_0}{cr} \sin^2 \Theta + A_0 + A_2 P_2 r^2 + A_4 P_4 r^4,$$

$$\begin{aligned} \varphi^{(R < r < R+h_1)} &= \frac{M\omega_0}{cr} \sin^2 \Theta + C_0 + [B_2 U_1(r) + C_2 U_2(r)] P_2 + [B_4 V_1(r) + C_4 V_2(r)] P_4, \\ \varphi^{(R+h_1 < r < R+h_2)} &= \frac{M\omega_0}{cr} \sin^2 \Theta \left\{ [W_1 H_1(r) + W_2 H_2(r)] \left(1 - \frac{5 \sin^2 \Theta}{4} \right) + W_3 + \frac{W_4 R}{r} \sin^2 \Theta \right\} - \\ &\quad - \frac{M\omega_0 W_4 R}{2cr^2} \sin^4 \Theta + E_0 + [D_2 U_1(r) + E_2 U_2(r)] P_2 + [D_4 V_1(r) + E_4 V_2(r)] P_4, \\ \varphi^{(r > R+h_2)} &= \frac{M\omega_0}{cr} \sin^2 \Theta \left\{ W_6 + \frac{\gamma_3 (R+h_2)}{r} \sin^2 \Theta \right\} - \frac{M\omega_0 \gamma_3 (R+h_2)}{2cr^2} \sin^4 \Theta + \frac{F_2 P_2}{r^3} + \frac{F_4 P_4}{r^5}. \end{aligned}$$

Плотность тока проводимости определяется из известных формул

$$J_r = \sigma(r) (\mathbf{E} + [\mathbf{V}, \mathbf{B}]/c)_r, \quad J_\Theta = \sigma(r) (\mathbf{E} + [\mathbf{V}, \mathbf{B}]/c)_\Theta, \quad (11)$$

где \mathbf{V} — линейная скорость вращения. Коэффициенты $A_0, A_2, A_4, B_2, B_4, C_0, C_2, C_4, D_2, D_4, E_0, E_2, E_4, F_2, F_4$ можно найти из условий непрерывности потенциала и нормальной составляющей плотности тока на границах $r = R, r = R + h_1, r = R + h_2$.

Аналитическое исследование решения затруднено из-за сложной зависимости вышеперечисленных коэффициентов от параметров задачи. Даже при выполнении условий (2) и (3) не удаётся существенно упростить выражения для полей и токов в области $R+h_1 < r < R+h_2$. Однако на основе полученных точных аналитических выражений вид токовых структур можно определить путём численного моделирования. Наиболее существенными параметрами для анализа рассматриваемой системы оказываются W_6 и γ_3 . Выбор соответствующих земным условиям значений $h_1/R = 0,016; h_2/R = 0,047; H/R = 0,00094; \gamma_2 = 0,4$ фиксирует вид течения при $r < R+h_2$ и профиль проводимости. Изменяя W_6 и γ_3 , можно задавать движение самого верхнего слоя плазмосферы, не меняя вида течения в нижних слоях. Таким образом, можно по-разному задавать профиль разрыва $\omega_p(r, \Theta)$.

При условиях (2) и (3) удалось произвести классификацию возможных топологически неэквивалентных токовых систем. Прежде всего отметим, что точки, в которых $J_r = 0$ и $J_\Theta = 0$, так называемые центры токовых петель, не могут располагаться в областях униполярного течения с однородной проводимостью плазмы, т. е., центры петель при любых значениях параметров лежат в слое $R < r < R+h_2$. С другой стороны, оказалось, что на границе раздела $r = R+h_2$ в зависимости от параметров задачи могут быть только одна или две точки, в которых $J_r = 0$, соответствующие касанию токовой петлёй границы раздела слоёв. То же можно сказать и о границе $r = R$. Таким образом, о структуре токовой системы можно судить по числу нулей J_r на границах $r = R+h_2$ и $r = R$.

Выражения для радиальной компоненты плотности тока имеют вид $J_r = -\sigma_0(2A_2 P_2 + 4A_4 P_4)$ при $r = R$ и $J_r = \sigma_0 \exp(h_2/H)(3F_2 P_2 R^4/(R+h_2)^4 + 5F_4 P_4 R^6/(R+h_2)^6)$ при $r = R+h_2$. Условие $J_r = 0$ при $r = R$ и при $r = R+h_2$ приводит к уравнению вида $kP_2 + P_4 = 0$, где $k = A_2/(2A_4)$ или $k = 3F_2(R+h_2)^2/(5F_4)$ соответственно, которое определяет углы касания. Если $-1 \leq k \leq 3/4$, уравнение имеет два корня, при остальных k корень один. * На плоскости параметров γ_3, W_6 условие $k = \text{const}$ соответствует прямой; таким образом, указанная плоскость разбивается четырьмя прямыми на области (рис. 3): прямые (a) и (b) выделяют область, где $-1 \leq 3F_2(R+h_2)^2/(5F_4) \leq 3/4$, (c) и (d) — где $-1 \leq A_2/(2A_4) \leq 3/4$; уравнения прямых указаны на рисунке. Области, характеризующиеся наличием двух нулей J_r на соответствующей границе, отмечены на рисунке штриховкой.

* При $k = -1$ уравнение $kP_2 + P_4 = 0$ имеет не зависящие от параметров решения $\Theta = \arcsin \sqrt{0,8} \approx 64,3^\circ$ и $\Theta = 0^\circ$; при $k = 3/4$ углы касания $\Theta = \arcsin \sqrt{0,4} \approx 43^\circ$ и $\Theta = 90^\circ$

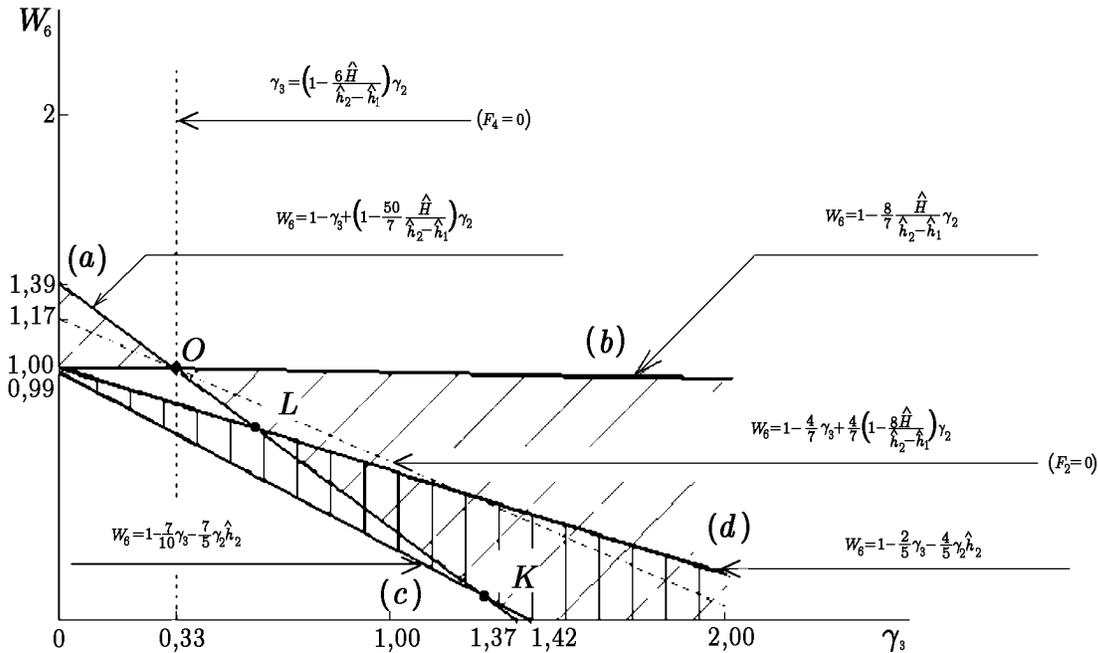


Рис. 3. Плоскость параметров, разделённая на области топологически эквивалентных токовых систем ($\hat{h}_1 = h_1/R = 0,016$; $\hat{h}_2 = h_2/R = 0,047$; $\hat{H} = H/R = 0,00094$; $\gamma_2 = 0,4$)

Возможные топологически неэквивалентные токовые структуры изображены на рис. 4. * Каждой области плоскости параметров γ_3, W_6 соответствует своя топология. Рассмотрим, например, область 3 плоскости параметров. Она характеризуется наличием двух нулей J_r на границе $r = R + h_2$ и одного нуля J_r на границе $r = R$. Ноль J_r отвечает касанию токовой петлёй соответствующей границы. В соответствии с этим токовая структура имеет вид двух петель, одна из которых (расположенная в экваториальной области) не проникает в область планеты. При переходе от области 3 к области 1 происходит бифуркация: «внешняя» петля в экваториальной области исчезает. Каждой бифуркации, т. е. переходу через границу раздела областей на плоскости параметров, соответствует изменение числа нулей J_r либо на границе $r = R$, либо на границе $r = R + h_2$. В рассмотренном случае на границе $r = R + h_2$ вместо двух остаётся один ноль J_r .

Другим примером бифуркации может служить переход из области 4 в область 5. Топологическая структура токовой системы, отвечающая области 4, состоит из двух петель, причём петля в полярной области не проникает в планету. При переходе число нулей J_r при $r = R$ увеличивается на единицу, что соответствует проникновению высокоширотной петли в область планеты.

При рассмотрении задачи о плазмосфере с однородной проводимостью было показано, что генерация тока проводимости происходит вследствие вынужденной дифференциальности вращения плазменной оболочки [5], при этом плазмосферное течение было выбрано таким образом, что производная $\partial\omega_p/\partial r$ имела один знак, т. е. во всём интервале углов происходило либо супервращение (движение верхних слоёв плазмосферы с большей угловой скоростью по сравнению с нижними), либо замедление вращения. При этом токовая структура представляла собой одиночную петлю, направление тока в которой определялось скоростью вращения плазмосферы: при $\mathbf{M} \uparrow \uparrow \omega_0$ в случае супервращения полярная составляющая тока в верхней полусфере при $r \gg R$ положительна, а при замедлении — отрицательна.

* Соответствующие рис. 4 и 5 значения параметров h_1, h_2, H выбраны из соображений наглядности; эти рисунки иллюстрируют топологию решения, в этом смысле они соответствуют рис. 3

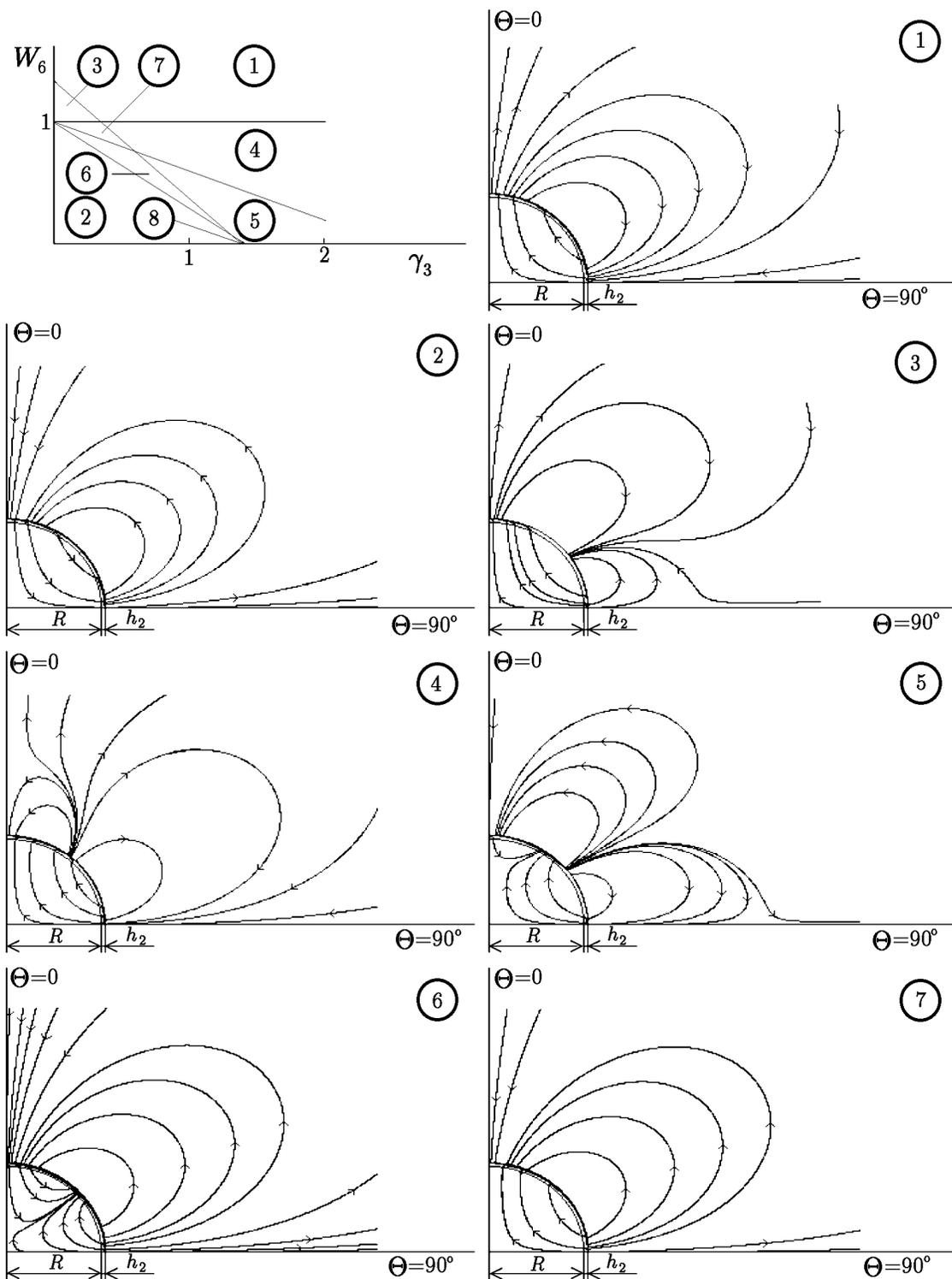


Рис. 4. Возможные токовые структуры ($h_1/R = 0,008$; $h_2/R = 0,055$; $H/R = 0,0047$; $\gamma_2 = 0,4$).
 Направление тока соответствует случаю $\mathbf{M} \uparrow \omega_0$

В этом свете легко указать причину бифуркаций токовой структуры в рассматриваемой модели при изменении параметров течения в области $r > R + h_2$. Важной особенностью построенного распределе-

ния скорости вращения плазменной оболочки является наличие разрыва $\omega_p(r, \Theta)$ при $r = R + h_2$, который проявляет себя как сосредоточенная ЭДС на этой границе (напомним, что при $r > R + h_2$ течение униполярно, и ЭДС равна нулю). Из вида граничных условий (7) и (8) следует, что при определённых значениях параметров γ_3 и W_6 может оказаться, что оболочка выше точки разрыва вращается быстрее при одних углах Θ и медленнее при других. Например, при $\gamma_3 = 1,65$; $W_6 = 0,1$ (область 5 плоскости параметров) в полярной области имеет место замедление, а в экваториальной — супервращение. При этом с точки зрения ЭДС, ответственной за генерацию тока, полярная и экваториальная области в отдельности оказываются топологически эквивалентными рассмотренной ранее плазменной структуре с производной $\partial\omega_p/\partial r$ одного знака. В соответствии с этим в плазмосфере образуются две токовые петли, направления тока в которых противоположны (см. рис. 5).

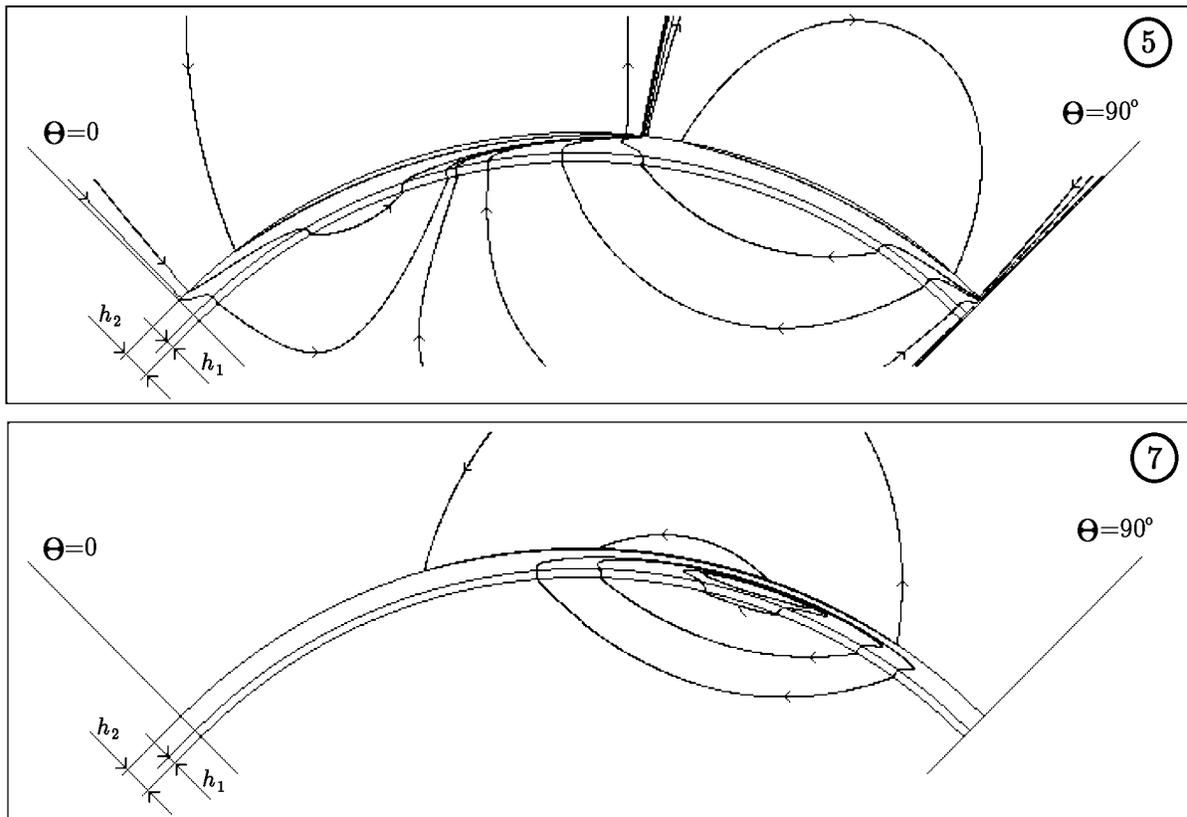


Рис. 5. Структура токов вблизи поверхности планеты ($h_1/R = 0,016$; $h_2/R = 0,055$; $H/R = 0,0047$; $\gamma_2 = 0,4$). Направление тока соответствует случаю $\mathbf{M} \uparrow \uparrow \omega_0$

Следует отметить, что при $R + h_1 < r < R + h_2$ течение не является униполярным. Наличие ЭДС в этой области усложняет задачу. Однако легко видеть, что влияние распределённой ЭДС по сравнению с сосредоточенной ЭДС, связанной с разрывом течения при $r = R + h_2$, мало. С точки зрения раздела плоскости параметров γ_3, W_6 на области (см. рис. 3) это влияние проявляется в зависимости уравнений границ областей от параметров h_1, h_2 и H . В силу условий (2) и (3) это влияние мало. При всех допустимых значениях параметров в слое $R + h_1 < r < R + h_2$ преобладает супервращение (см. рис. 2), вследствие чего поправки к выражениям для границ областей на плоскости параметров γ_3, W_6 , связанные с распределённой ЭДС, меньше нуля.

Обратим внимание на следующую важную особенность поведения рассматриваемой системы: структура тока внутри планеты и в атмосфере определяется параметрами γ_3 и W_6 плазменной течения на больших высотах. Рассмотрим границу (с) (см. рис. 3). При переходе из области б плоскости

параметров в область 2 (см. рис. 5) происходит бифуркация: токовая структура в планете существенно меняется. В то же время уравнение границы (с) с точностью до малых поправок не содержит параметров h_1 , h_2 , H и γ_2 .

Таким образом, бифуркации токовой структуры связаны в основном с изменением распределения сосредоточенной ЭДС на границе $r = R + h_2$. Отметим, что если физический смысл границ (а) и (b) очевиден *, то наглядно интерпретировать положение границ (с) и (d) не удаётся.

Можно сказать, что в соответствии с видом сосредоточенной ЭДС (и, в меньшей степени, распределённой ЭДС) плазменная оболочка разделяется на области с преобладанием действия ЭДС того или иного знака. Изменению конфигурации этих областей соответствует бифуркация структуры тока. Рис. 5 иллюстрирует это на примере токовых структур, отвечающих областям 5 и 7 плоскости параметров (см. рис. 3). В обоих случаях токовая система содержит две петли тока. Заметим, что границы раздела плазменной оболочки на области характеризуются сгущением линий тока, что связано в основном с экспоненциальным ходом проводимости.

Выше были рассмотрены некоторые бифуркации, которые происходили при переходе через границу областей; при этом бифуркационный параметр — число нулей J_r на границах раздела. Такие бифуркации можно назвать бифуркациями ко-размерности 1. Отметим, что на плоскости параметров γ_3 , W_6 есть точки, при переходе через которые количество нулей J_r изменяется и на границе $r = R + h_2$, и на границе $r = R$, т. е., происходит бифуркация ко-размерности 2. Они образуются при пересечении границ (а) и (d) — точка L , (а) и (с) — точка K . Третья особая точка на плоскости параметров ** образуется пересечением границ (а) и (b). Легко видеть, что она соответствует непрерывности течения $\omega_p(r, \Theta)$ при $r = R + h_2$, если не учитывать малые в силу соотношения (3) поправки порядка $H/(h_2 - h_1)$. Переход через эту точку, обозначенную буквой O , не приводит к бифуркации с точки зрения числа нулей J_r ; в то же время структура тока при этом существенно меняется. Если топологии, соответствующие областям 3 и 4, отличаются только направлением тока, то области 1 и 7 не эквивалентны даже с точки зрения числа токовых петель: токовая структура, отвечающая области 7, состоит из двух петель, внешней и внутренней, с противоположными направлениями тока (см. рис. 5).

Заметим, что на прямых (а) и (b) величина $k = 3F_2(R + h_2)^2/(5F_4)$ равна $3/4$ и -1 соответственно. Значит, в точке O , через которую проходят обе прямые, коэффициенты F_2 и F_4 должны обращаться в нуль. На плоскости параметров γ_3 , W_6 условия $F_2 = 0$ и $F_4 = 0$ соответствуют прямым, на рис. 3 они отмечены пунктиром. Таким образом, на плоскости параметров существует единственная точка, которой соответствуют нулевые коэффициенты F_2 и F_4 .

Из выражения для потенциала $\varphi^{(r > R + h_2)}$ и формулы (11) с учётом выражения (1) следует, что случай $F_2 = 0$, $F_4 = 0$ соответствует нулевому току в области $r > R + h_2$. Таким образом, соответствующая точке O токовая структура такова, что при $r > R + h_2$ ток равен нулю. Уже отмечалось, что точка O близка к точке $\gamma_3 = \gamma_2$, $W_6 = 1$, соответствующей непрерывному при $r = R + h_2$ течению $\omega_p(r, \Theta)$, но не совпадает с ней. Разрыв $\omega_p(r, \Theta)$, отвечающий точке O , очевидно, устроен таким образом, что возникающая сосредоточенная ЭДС полностью компенсирует ЭДС, распределённую в слое $R + h_1 < r < R + h_2$.

Вопрос о значениях параметров, при которых ток во внешней области плазмосферы равен нулю, важен по следующей причине. Как уже отмечалось, проводимость плазменных оболочек реальных планет на больших высотах становится анизотропной, вследствие чего электродинамика таких систем

Если отвлечься от малых поправок, уравнения прямых (а) и (b) есть $W_6 = 1 + \gamma_2 - \gamma_3$ и $W_6 = 1$ соответственно. При таких соотношениях параметров с учётом (7) и (8) $\omega_p(r, \Theta)$ непрерывна на границе $r = R + h_2$ при $\Theta = \pi/2$ и $\Theta = 0$. Таким образом, на плоскости параметров эти прямые выделяют область, которой отвечает такая структура разрыва $\omega_p(r, \Theta)$, что существует угол Θ^ , при котором на границе $r = R + h_2$ течение непрерывно, т. е., происходит супервращение при одних полярных углах и замедление при других.

**Другие особые точки могут образовываться при пересечении границ (b), (d) и (с); т. к. для их анализа необходим учёт членов порядка h_1/R , h_2/R , H/R , эти точки исключены из рассмотрения. В масштабе рис. 3 они неразличимы.

существенно усложняется. В то же время, если ток на больших высотах мал, анизотропия проводимости в этой области, очевидно, не должна существенно влиять на распределение тока в нижележащих слоях. В этом свете то обстоятельство, что вне зависимости от величины проводимости при $r > R + h_2$ при любых допустимых значениях параметров h_1 , h_2 , H и γ_2 точка O существует, может оказаться важным при рассмотрении плазмосфер с анизотропной проводимостью.

В заключение рассмотрим, каким областям плоскости параметров в рамках данной модели может соответствовать течение плазмосферы Земли. Принимая во внимание экспериментальные данные рис. 1 и считая их отвечающими экваториальной области ($\Theta \approx \pi/2$), можно заключить, что соответствующие эксперименту значения параметров γ_3 и W_6 таковы, что $W_6 + \gamma_3 = 1,1$. На плоскости параметров γ_3 , W_6 эта прямая проходит через области 3, 7, 6, и 2. Каждая из областей характеризуется своей топологией токовой структуры, причём эти топологии принципиально различны (см. рис. 4). Таким образом, имеющихся данных о профиле $\omega_p(r, \Theta)$ недостаточно для идентификации топологии токовой системы. Для проведения такой идентификации необходима дополнительная информация о плазмосферном течении в полярных областях.

2. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе была рассмотрена азимутально симметричная стационарная электродинамическая задача о вращении планеты, обладающей дипольным магнитным полем, совместно с дифференциально вращающейся неоднородно проводящей плазменной оболочкой. Скорость вращения и профиль проводимости в нижних слоях оболочки были заданы с учётом экспериментальных данных, а униполярное течение в верхних слоях варьировалось таким образом, что на определённой высоте возникал разрыв $\omega_p(r, \Theta)$. Такая электродинамическая система обладает следующими особенностями:

1) Топология токовой системы зависит в основном от структуры разрыва течения при $r = R + h_2$; плоскость параметров, задающих внешнее течение, разбивается четырьмя прямыми на области, при переходе через границы которых происходит бифуркация ко-размерности 1 (бифуркационный параметр — число нулей J_r на границах раздела).

2) Изменение параметров внешнего течения может приводить к изменению топологии линий тока во внутренних слоях плазменной оболочки и в планете.

3) На плоскости параметров есть единственная точка, отвечающая которой система характеризуется отсутствием тока во внешней области; эта точка расположена на пересечении границ, разделяющих плоскость параметров на области с различной топологией токовой системы.

4) На плоскости параметров есть точки, переход через которые приводит к бифуркации ко-размерности 2.

Таким образом, представляется вероятным, что области сильной неоднородности скорости вращения плазменной оболочки играют значительную роль при генерации тока в плазмосфере; для установления топологии токовой системы планеты в рассматриваемой модели планетарного генератора необходимы данные о её внешнем плазмосферном течении во всём интервале полярных углов.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проекты № 99-02-17745 и 98-02-16236).

ЛИТЕРАТУРА

1. Малов Д. Е., Чугунов Ю. В. // Изв. вуз. Радиофизика. 1997. Т. 40, № 1–2. С. 232.
2. Беспалов П. А., Чугунов Ю. В. // Изв. вуз. Радиофизика. 1997. Т. 40, № 1–2. С. 138.
3. Bepalov P. A., Chugunov Yu. V., Davydenko S. S. // J. Atm. Terr. Phys. 1996. V. 16, № 2. P. 69.
4. Bepalov P. A., Chugunov Yu. V., Davydenko S. S. // J. Atm. Terr. Phys. 1996. V. 58, № 5. P. 605.
5. Солдаткин А. О., Чугунов Ю. В. // Изв. вуз. Радиофизика. 2000. Т. 43, № 6 (в печати).
6. Аллен К. У. // Астрофизические величины. — М.: ИЛ, 1960.
7. Volland H. // Physica Spictra. 1987. V. 58, № T18. P. 289.

Институт прикладной физики РАН,
г. Н. Новгород, Россия

Поступила в редакцию
19 января 2000 г.

**ELECTRIC FIELDS AND CURRENTS IN THE PLANETARY ELECTRIC GENERATOR MODEL.
II. SHARP INHOMOGENEITY OF ANGULAR VELOCITY OF THE PLASMA ENVELOPE**

A. O. Soldatkin, Yu. V. Chugunov

In the framework of the planetary-generator model, we study electric fields and currents in a nonuniformly rotating plasma envelope with inhomogeneous conductivity surrounding a magnetized rotating planet. The angular velocity ω_p of the plasma envelope and the conductivity profile in its lower layers are taken in accordance with the experimental data, while the flow in the upper layers is modified in such a way that a sharp angular-velocity gradient (discontinuity) occurs at some altitude h_2 : $\omega_p(h_2 - 0, \Theta) = \omega_0 + \gamma_2 \sin^2 \Theta$, $\omega_p(h_2 + 0, \Theta) = W_6 + \gamma_3 \sin^2 \Theta$. If the parameters ω_0 and γ_2 are fixed, the profile of this discontinuity is determined by W_6 and γ_3 . It is shown that the parameter plane (γ_3, W_6) consists of certain regions, and the bifurcations of current structure, such as variations in the number of current loops or their configuration, occurs upon crossing the boundaries of these regions. The topology of the current lines in the plasma envelope and inside the planet is strongly dependent on the parameters γ_3 and W_6 . It was found that the unique point, corresponding to a system in which no current flows in the external region of the envelope, exists on the plane (γ_3, W_6) . This point is located at the intersection of the boundaries separating the parameters-plane regions corresponding to topology of the current system.

Solution of the problem reveals that the plasma-envelope regions with strong inhomogeneity of the angular velocity play the considerable role in the generation of plasmasphere currents. The planetary-generator model allows one to reconstruct the topology of current system of a planet only if the data on its upper-plasmasphere flows are known at any polar angle.

УДК 551.501.815

СПЕКТРАЛЬНАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ НАКЛОННОГО ЗОНДИРОВАНИЯ ИОНОСФЕРЫ С ПОМОЩЬЮ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

А. Н. Плеухов, В. В. Бочкарёв, М. М. Кацевман, И. Р. Петрова, В. Ю. Теплов

В статье проводится сравнение эффективности некоторых параметрических методов спектрального оценивания применительно к задаче анализа сигналов зондирования ионосферы с использованием модельных расчётов и реальных рядов данных. Описано применение метода Куликова для спектральной обработки. Показана эффективность применения указанного метода для определения модового состава ионосферного сигнала. Предложен критерий выбора порядка модели для этого метода.

ВВЕДЕНИЕ

Важную информацию о динамических процессах в ионосфере можно получить, используя спектральную обработку сигналов наклонного зондирования. Известно, что ионосферный сигнал является существенно нестационарным. Поэтому применение классических методов спектрального анализа, разрешающая способность которых ограничена величиной $1/T$, где T — время наблюдения, не всегда даёт удовлетворительные результаты. В случаях, когда необходима более высокая разрешающая способность, используются параметрические методы спектрального оценивания.

В настоящей работе рассматривается применение параметрического метода Н. К. Куликова, который известен в литературе как метод разложения по функциям с гибкой структурой, к задаче анализа спектра сигналов наклонного зондирования ионосферы.

Теория описываемого метода изложена, например, в [1]. Он был создан для анализа дифференциальных уравнений, впоследствии применялся для анализа экономических данных, в задачах прогнозирования [2], для обработки сигналов ядерного магнитного резонанса [3]. По основной идее он близок к авторегрессионным методам, особенно к методу Прони.

Полученные результаты сопоставляются с оценками, полученными с помощью других методов спектральной обработки. Для данной задачи наиболее важными требованиями, предъявляемыми к методу спектрального оценивания, являются не только статистическая устойчивость оценки спектральной плотности мощности, но и точность определения таких параметров, важных для физической интерпретации полученных спектров, как частоты, времена затухания и комплексные амплитуды составляющих сигнала. Для сравнения были выбраны следующие методы: из классических — метод Бартлетта с окном Кайзера, из авторегрессионных — метод Берга и модифицированный ковариационный метод, а также метод Прони.

1. МЕТОД Н. К. КУЛИКОВА И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К ЗАДАЧЕ СПЕКТРАЛЬНОГО ОЦЕНИВАНИЯ

В основе рассматриваемого метода лежит модельное предположение, что исследуемый сигнал удовлетворяет некоторому линейному обыкновенному дифференциальному уравнению. Такое предположение является достаточно реалистичным для широкого класса физических процессов, в том числе нестационарных. Сигнал такого типа вблизи некоторой точки x_0 может быть приближённо описан решением базисного линейного обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами: $y^{(r)} + a_1 y^{(r-1)} + \dots + a_r y = 0$. Связь между сигналом и его приближённым представлением

описывается с помощью предложенной Н. К. Куликовым обобщённой формулы представления функции одного аргумента [1]:

$$y(x) = y(x_0) + \sum_{j=1}^r y^{(j)}(x_0) \frac{\delta_j(x - x_0)}{D} + R(x), \quad (1)$$

где

$$R(x) = \int_{x_0}^x \int_{x_0}^t \eta(\tau) \frac{\Delta_n(t - \tau)}{D} d\tau dt,$$

$$\delta_j(\xi) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \lambda_r \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{j-1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \lambda_r^{j-1} \\ \varphi_1(\xi) & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \varphi_r(\xi) \\ \lambda_1^j & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \lambda_r^j \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{r-1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \lambda_r^{r-1} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_n(\xi) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \dots & \dots & \lambda_r \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{r-1} & \dots & \dots & \dots & \lambda_r^{r-1} \\ \exp(\lambda_1 \xi) & \dots & \dots & \dots & \exp(\lambda_r \xi) \end{vmatrix}, \quad D = \begin{vmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \dots & \lambda_r \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{r-1} & \dots & \dots & \lambda_r^{r-1} \end{vmatrix},$$

λ_i — корни базисного уравнения $\lambda^r + a_1 \lambda^{r-1} + \dots + a_r = 0$,

$$\varphi_i(\xi) = \frac{\exp(\lambda_i \xi) - 1}{\lambda_i},$$

а функция $\eta(t)$ определяется выражением $\eta(t) = y^{(r+1)} + a_1 y^{(r)} + \dots + a_r y'$.

Начальная аппроксимация сигнала решением базисного уравнения может быть затем уточнена последовательными приближениями по формуле (1). Обобщённая формула Н. К. Куликова позволяет также контролировать точность найденной аппроксимации. Очевидно, что точность аппроксимации и скорость сходимости итераций зависят от подбора параметров базисного уравнения.

Для выбора оптимальных значений параметров базисного уравнения предложен следующий приём [2]: обе части уравнения интегрируются r раз, в результате чего получаем выражение

$$y + a_1 \hat{I}_{x_0} y + \dots + a_r \hat{I}_{x_0}^r y = C_0 + C_1 (x - x_0) + \dots + C_{r-1} (x - x_0)^{r-1}, \quad (2)$$

где \hat{I}_{x_0} — оператор интегрирования:

$$\hat{I}_{x_0} f = \int_{x_0}^x f(t) dt.$$

Для сигнала, представляющего собой сумму синусоид, параметры a_i определяют частоты гармоник, а по C_i находим соответствующие амплитуды. Записывая вышеприведённое выражение в каждой точке, получаем для a_i, C_i переопределённую систему линейных уравнений, которую можно разрешить методом наименьших квадратов.

Для полного определения вычислительной схемы необходимо также правило выбора опорной точки, от которой ведётся интегрирование. Оптимальным является выбор её в области с наилучшим отношением сигнал/шум. Если же это отношение примерно одинаково в интервале наблюдения, то выбор опорной точки в середине интервала даст оценку с наименьшей дисперсией.

Таким образом, мы получаем модельное представление и аппроксимацию сигнала. По известной модели спектральная плотность мощности находится так же, как и методом Прони (см., например, [4]).

Отметим следующие основные преимущества данной процедуры по сравнению с процедурой Прони. Во-первых, гибкость основной аппроксимационной формулы. Как показано в [1], данная аппроксимация включает в себя как частные случаи (при соответствующем выборе коэффициентов базисного уравнения) ряд Фурье, полигармоническую и полиномиальную аппроксимации, а также их комбинации. Во-вторых, поскольку в выражении (2) стоят интегралы от исходного ряда, относительная погрешность коэффициентов системы уравнений меньше, чем в других методах, т. е. производится своего рода предварительное сглаживание. В третьих, гибкость вычислительной схемы, в которой возможно применение различных квадратурных формул в зависимости от особенностей конкретной задачи, использование промежуточной аппроксимации другого порядка и т. п. В частности, в отличие от метода Прони и большинства других параметрических методов можно применять указанную процедуру для обработки рядов данных с пропусками. В-четвёртых, поскольку амплитуды и частоты определяются из одной системы уравнений, облегчается учёт априорной информации об исследуемом сигнале.

Кроме того, важным достоинством является меньшая по сравнению с другими параметрическими методами вероятность появления ложных максимумов. Этот факт, проявляющийся при модельных расчётах, качественно можно объяснить тем, что при определении амплитуд и частот из одной системы уравнений для определения амплитуд используется информация не только о локальном квадратичном отклонении решения, но и о поведении аппроксимирующей функции на всём интервале.

Определение амплитуд и частот составляющих сигнала из одной системы уравнений имеет и свою отрицательную сторону: при большом порядке r модели это приводит к увеличению дисперсии оценки амплитуд (особенно для быстро затухающих либо быстро возрастающих процессов релаксационного типа), т. к. ранг определяющей системы линейных уравнений вдвое больше. С тем, чтобы избежать этого недостатка, в моделях большого порядка возможно раздельное определение амплитуд и частот. В этом случае сначала получаем a_i, C_i , по которым определяем частоты составляющих, а также строим «ленту допустимых решений», т. е., диапазон возможных значений процесса как функцию времени [1]. После этого можно выбрать комплексные амплитуды составляющих так, чтобы синтезированный сигнал не выходил за пределы ленты допустимых решений. Также эффективен подбор амплитуд минимизацией следующего функционала:

$$\int \left\{ (y(x) - f(x, \mathbf{A}))^2 + \epsilon \left(\frac{2f(x, \mathbf{A}) - G(x) - g(x)}{G(x) - g(x)} \right)^2 \right\} dx,$$

где $g(x)$ и $G(x)$ — соответственно верхняя и нижняя оценки процесса, ϵ — константа, подбираемая для данного класса зависимостей, $f(x, \mathbf{A})$ — аппроксимирующая зависимость, куда искомый вектор амплитуд \mathbf{A} входит линейно. При этом для больших порядков модели получаются оценки с меньшей дисперсией, чем в случае одновременного определения амплитуд и частот. В то же время при определении амплитуд по-прежнему учитывается информация о поведении сигнала на всём интервале, поэтому количество ложных максимумов также меньше, чем для других линейных параметрических методов.

Ясно, что эффективность параметрической спектральной оценки существенно зависит от того, насколько оправдано применение исходного модельного предположения к исследуемому типу сигналов. Для метода Куликова используется модель сигнала в виде некоторой функции, зависящей от набора неизвестных параметров. В большинстве случаев (кроме случаев, когда базисное уравнение имеет

кратные корни) это будет сумма синусоидальных компонент с неизвестными частотами, амплитудами, фазами и временами затухания. Статистически это соответствует представлению о сигнале как о квазидетерминированном случайном процессе.

В случаях, когда сигнал не может быть адекватно описан с помощью модели квазидетерминированного процесса (т. е. в случаях, когда нерегулярные вариации фаз составляющих за время наблюдения велики), описанная процедура не позволяет получить хорошую спектральную оценку. Возможен, однако, следующий подход: получив оценку автокорреляционной последовательности сигнала, строим её модель по методу Куликова, после чего преобразованием Фурье находим оценку спектральной плотности мощности. Это позволяет расширить область применимости метода.

2. ВЫБОР ПОРЯДКА МОДЕЛИ

Известно, что качество спектральной оценки с использованием параметрических методов существенно зависит от критерия, по которому производится выбор порядка модели. Легко убедиться на модельных расчётах, что при использовании критерия минимума квадратичного отклонения получение хорошей аппроксимации исходной реализации ещё не гарантирует получения точной оценки параметров составляющих сигнала. Гораздо лучшие результаты даёт использование критериев, соответствующих некоторым дополнительным предположениям о сигнале, которые могут быть сделаны с большой степенью вероятности.

Во-первых, можно ожидать, что часть сигнала, обусловленная рассеянием на мелкомасштабных неоднородностях, а также шумовая составляющая представляют собой стационарный случайный процесс. Во-вторых, если известны физические условия распространения: геометрия рассеивающих областей, уровень поглощения и т. д., можно строить предположения о законе распределения сигнала. Наиболее вероятными законами распределения амплитуды сигнала будут, в зависимости от величины поглощения, релеевский и логнормальный.

Мы использовали для выбора порядка модели два критерия, соответствующие вышеприведённым предположениям об ионосферном сигнале. В первом случае принимается то значение r , при котором минимальна величина, характеризующая отклонение закона распределения остаточного сигнала (т. е. сигнала, полученного из исходного вычитанием компонент, соответствующих предполагаемым параметрам модели) от предполагаемого. Для имевшихся в нашем распоряжении данных — это нормальный закон для реализаций, полученных в дневное время, и логнормальный — в ночное.

По другому критерию принимается значение порядка r , при котором минимально значение функционала, характеризующего нестационарность остаточного сигнала. Были использованы тест стационарности по R/S -отношению [5], а также недавно предложенный тест, использующий всплеск-преобразование [6].

Использованные критерии оказались достаточно эффективны: количество ложных максимумов в итоговой спектральной оценке значительно снижается. Основная часть приводимых расчётов выполнена с использованием всплескового теста стационарности для остаточного сигнала.

3. ЭФФЕКТИВНОСТЬ МЕТОДОВ СПЕКТРАЛЬНОГО ОЦЕНИВАНИЯ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ЗАДАЧЕ НАХОЖДЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ СОСТАВЛЯЮЩИХ НА ФОНЕ БЕЛОГО ШУМА

Наиболее важными характеристиками методов спектрального оценивания для анализа ионосферных сигналов являются разрешающая способность и тесно связанная с ней дисперсия оценки частоты составляющих, а также вероятности правильного определения спектральных составляющих и появления ложных максимумов. Сравнение разрешающей способности и вероятности правильного определения всех спектральных составляющих на фоне аддитивного белого шума для различных методов

оценивания проводилось на модели. Генерировались двух- и трёхкомпонентные последовательности (256 точек, частоты составляющих $f_0(1 - \varepsilon/2)$ и $f_0(1 + \varepsilon/2)$ для двух- и $f_0(1 - \varepsilon)$, f_0 и $f_0(1 + \varepsilon)$ для трёхкомпонентной модели; центральная частота $f_0 = 0,02/\Delta$). Результаты моделирования (зависимость порогового уровня шума, при котором достигается устойчивое, с вероятностью 0,9, выделение всех компонент, от относительной разности частот) приведены на рис. 1а и 1б. Средние квадратические отклонения (СКО) оценки частот приведены на рис. 2а и 2б соответственно для двух- и трёхкомпонентных моделей (при $\Delta = 0,05$ с; $N = 256$; $f_0 = 0,4$ Гц; $\varepsilon = 0,1$). Видно, что в случае, когда шум не является пренебрежимо малым, метод Куликова даёт лучшее разрешение. Превосходство метода Куликова над методом Прони особенно очевидно на последнем графике, т. е. его достоинства более ярко проявляются при анализе сигналов со сложным спектральным составом.

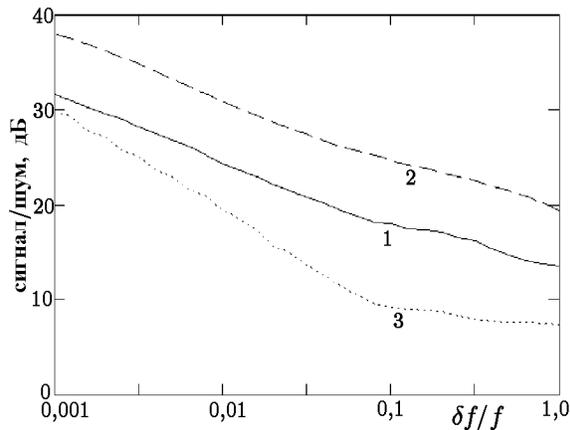


Рис. 1а. Зависимость порогового отношения сигнал/шум, при котором обеспечивается надёжное (с вероятностью 0,9) разделение всех компонент, от относительной разности частот (в логарифмическом масштабе); двухкомпонентный модельный сигнал. Кривая 1 — метод Прони, 2 — авторегрессионный метод, 3 — метод Куликова

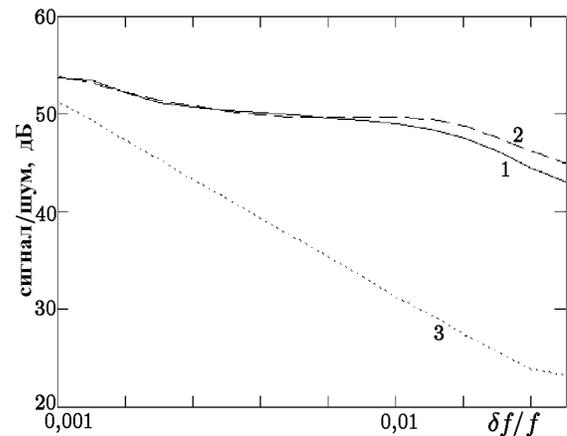


Рис. 1б. Зависимость порогового отношения сигнал/шум, при котором обеспечивается надёжное (с вероятностью 0,9) разделение всех компонент от относительной разности частот (в логарифмическом масштабе); трёхкомпонентный модельный сигнал. Кривая 1 — метод Прони, 2 — авторегрессионный метод, 3 — метод Куликова

4. ХАРАКТЕРИСТИКА ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ДАННЫХ

Сравнение методов спектрального оценивания проводилось с использованием данных, полученных на трассе Москва—Казань с помощью измерительного комплекса «Спектр» Казанского университета. В качестве зондирующих использовались сигналы радиостанции точного времени РВМ одновременно на частотах 5; 10; 15 МГц. Спектр принимаемого сигнала переносился в низкочастотную область с последующим аналого-цифровым преобразованием в полосе 20 Гц, с периодом 50 мс. Длина когерентной реализации составляла 256 точек, что обеспечивает разрешающую способность 0,078 Гц при использовании классических методов фурье-спектроскопии. Для улучшения отношения сигнал/шум методом некогерентного накопления производилась запись серии из 8-ми последовательных реализаций. Встроенный алгоритм обработки предполагает выполнение быстрого преобразования Фурье с окном Кайзера с последующим некогерентным сложением спектров, полученных на каждой реализации серии. По сути это соответствует спектральному оцениванию по методу Бартлетта. Эти расчёты использовались для сопоставления с оценками, получаемыми параметрическими методами.

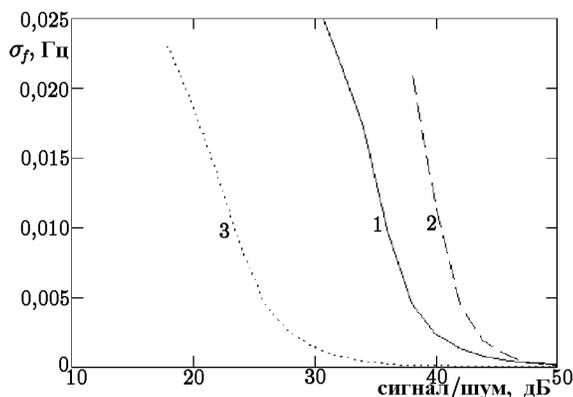


Рис. 2а. Зависимость СКО σ_f оценки частот составляющих от отношения сигнал/шум; двухкомпонентный модельный сигнал. Кривая 1 — метод Прони, 2 — авторегрессионный метод, 3 — метод Куликова

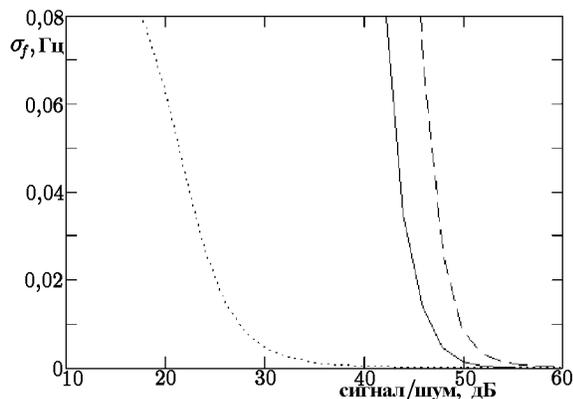


Рис. 2б. Зависимость СКО σ_f оценки частот составляющих от отношения сигнал/шум; трёхкомпонентный модельный сигнал. Кривая 1 — метод Прони, 2 — авторегрессионный метод, 3 — метод Куликова

Трасса Москва—Казань является среднеширотной короткой трассой с возможностью распространения радиоволн коротковолнового диапазона по разным траекториям, т. е. сигнал в точке приёма, как правило, является многомодовым. Само наличие и энергетические параметры различных мод распространения зависят от времени суток, сезона, солнечной активности и т. д. Как правило, при работе на частотах ниже максимально применимой (МПЧ) присутствуют моды односкачкового распространения, отражённые от ионосферных слоёв E , $F1$ или $F2$ (моды $1E$, $1F1$, $1F2$). В ночные часы из-за уменьшения фоновой электронной концентрации существенно возрастает роль метеорных отражений. Довольно часто встречаются также случаи отражения от спорадического слоя E (E_s), моды второго скачка распространения при наличии сильно возмущённой ионосферы ($2E$, $2F2$), и мод возвратно-наклонного зондирования. При работе на частотах ниже МПЧ сигнал является рассеянным, а его энергетика и спектральные искажения определяются параметрами турбулентности и ветровым режимом на высотах ионосферы. Таким образом, сигнал на выбранной трассе, как правило, представляет собой сложную интерференционную картину отражённых и рассеянных компонентов, что является типичным для подобных трасс в коротковолновом диапазоне при работе на частотах, сопоставимых с максимально применимой частотой трассы, и задача выделения составляющих с близко расположенными спектральными максимумами является важной при исследовании динамических процессов в ионосфере.

5. ЭФФЕКТИВНОСТЬ СПЕКТРАЛЬНОГО ОЦЕНИВАНИЯ ИОНОСФЕРНЫХ СИГНАЛОВ РАЗЛИЧНЫМИ МЕТОДАМИ

В связи с нестационарностью ионосферного сигнала добиться повышения разрешающей способности просто увеличением длины реализации можно лишь в весьма ограниченных пределах. На практике мы встречаемся чаще всего с ситуацией, когда доплеровский сдвиг компонент изменяется со временем. Возможность применения того или иного параметрического метода в таких условиях связана с соотношением между временем наблюдения, достигаемой при этом разрешающей способностью и скоростью дрейфа частот составляющих. Метод, обеспечивающий более высокое разрешение при той же длине выборки, лучше подходит для анализа таких сигналов.

В случае применения метода Куликова есть, однако, и другая возможность. Как показано в [1], существует достаточно широкий класс дифференциальных уравнений с коэффициентами, зависящими от времени, точное решение которых может быть представлено формулой (1) с конечным числом

итераций. Это существенно расширяет класс допустимых моделей, позволяет использовать модели нестационарных процессов. В этом случае, однако, связь параметров модели со спектральной плотностью мощности будет более сложной. Возможность использования моделей нестационарных процессов является важным преимуществом описываемого метода для применений, связанных с анализом ионосферных сигналов.

Качество получаемых оценок параметров составляющих реального сигнала можно проверить следующим образом. Выделив основные составляющие сигнала и определив их параметры, сгенерируем серию реализаций. Каждая реализация представляет собой сумму составляющих с теми же частотами, амплитудами и случайными фазами и стационарного шумового процесса, спектр которого совпадает с классической спектральной оценкой остаточного сигнала. Обработав полученные серии реализаций различными методами, можно судить об эффективности и статистической устойчивости получаемых с их помощью оценок для данного типа сигналов.

Результаты проведённых таким образом расчётов качественно различаются для реализаций, полученных в дневное и ночное время. Для первых, как правило, частота излучения $f_{\text{изл}} < f_{\text{МПЧ}}$, т. е. доминирующими являются мощные когерентные составляющие, соответствующие сигналу, отразившемуся от ионосферных слоёв либо крупномасштабных неоднородностей. При невыполнении указанного условия принятый сигнал представляет собой сложную интерференционную картину, созданную рассеянием на многих мелкомасштабных неоднородностях различной природы с преобладанием метеорной составляющей в ночные и утренние часы (3 ÷ 7 LT) и турбулентной составляющей в дневные часы [7]. Поскольку в первом случае сигнал хорошо описывается моделью квазидетерминированного процесса, можно ожидать, что для дневных реализаций более эффективными будут методы Прони и Куликова, а для ночных — авторегрессионные методы, что и подтверждается модельными расчётами. В последнем случае удовлетворительный результат получается также оценкой методом Куликова по автокорреляционной функции.

Таблица 1

	Модифицированный ковариационный метод	Метод Прони	Метод Куликова
Процент двухкомпонентных реализаций	57	49	71
Воспроизводимость результата для двухкомпонентных реализаций, %	65	66	84
Процент трёхкомпонентных реализаций	6	5	22
Воспроизводимость результата для трёхкомпонентных реализаций, %	39	37	73

Общую количественную характеристику эффективности оценки дать трудно, т. к. результаты существенно различаются, прежде всего в зависимости от числа спектральных составляющих и разности частот между ними. Практически для всех дневных реализаций метод Куликова обеспечивает значительно лучшую воспроизводимость оценки по сравнению со всеми рассматриваемыми методами. Некоторые количественные данные приводятся в табл. 1. Приводится процент реализаций, в которых различные методы определяют наличие близких двойных и тройных групп составляющих. В данном случае под близкими понимаются составляющие, разность частот которых меньше предельной разрешающей способности классических методов, равной обратной длине реализации $1/T$ (в нашем случае 0,078 Гц). Также приведены результаты моделирования для этих реализаций — воспроизводимость (в %) спектральной оценки на серии сгенерированных спектрально-эквивалентных реализаций.

Приведённые в табл. 1 результаты также подтверждают вывод, сделанный на основании модельных расчётов, о преимуществе метода Куликова при анализе сигналов со сложным составом. Видно, что при данных условиях только этот метод обеспечивает уверенное разделение трёх спектрально близких компонент.

К обработке было привлечено 432 реализации (в статистике для двухкомпонентных реализаций учтены также реализации с тремя и более компонентами). Погрешность приведённых величин не превышает $3 \div 4\%$.

6. ПРИМЕР АНАЛИЗА СЕРИИ РЕАЛИЗАЦИЙ

В качестве характерного примера возьмём серию реализаций, полученную 30 декабря 1989 года в 15:00 LT. Выбор обусловлен тем, что в данном случае в спектре удаётся выявить три близко расположенные компоненты, что даёт возможность сопоставить результаты оценивания разными методами в наиболее сложной для анализа ситуации. На рис. 3а приведены оценки спектральной плотности мощности (СПМ), полученные методами Куликова и Прони, а также оценка, полученная встроенным алгоритмом обработки. Метод Куликова позволяет установить сложную структуру спектрального максимума, неразрешаемую другими методами. Оптимальный порядок модели оказывается равным 7. Четыре максимума обнаруживаются на семи из восьми реализаций в серии при их раздельной обработке, что позволяет в данном случае с очень большой степенью уверенности утверждать, что эта структура отражает некоторый физический процесс, а не является следствием ошибки метода обработки. Такой результат подтверждается также следующим образом: если удалить третий максимум на частоте 0,079 Гц, определяемый менее уверенно, и выполнив по известным частотам оценки амплитуд, рассчитать значения функционалов, характеризующих качество оценки, то получим, что по всем трём используемым критериям показатели станут существенно хуже.

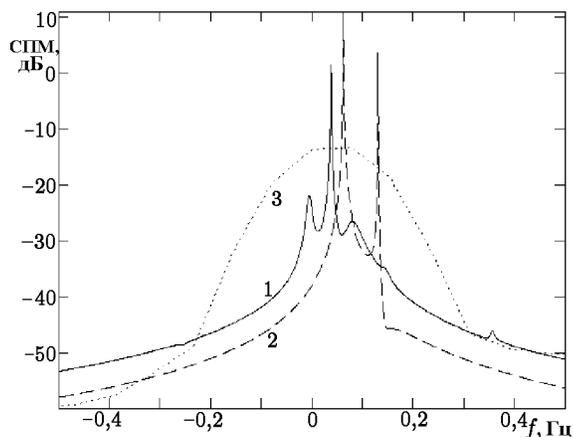


Рис. 3а. Оценки спектральной плотности для серии реализаций, полученных 30 декабря 1989 года в 15:00 LT. Кривая 1 — метод Куликова, 2 — метод Прони, 3 — метод Бартлетта

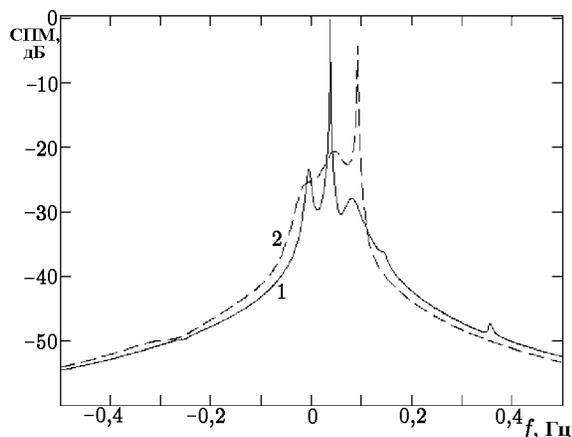


Рис. 3б. Оценки спектральной плотности для серии реализаций, полученных 30 декабря 1989 года в 15:00 LT. Кривая 1 — оценка с помощью метода Куликова по исходной реализации, 2 — по автокорреляционной последовательности

Сопоставим это с результатами оценки по корреляционной функции (рис. 3б). В этом случае амплитуда третьего максимума значительно больше, чем при оценке непосредственно по исходным вре-

менным рядам. Привлекая также данные о спектральных оценках, полученных на отдельных реализациях серии, видим, что компоненты на частотах $-0,006$ Гц и $0,037$ Гц хорошо описываются моделью квазидетерминированного процесса, третья же компонента в большей степени напоминает спектральную составляющую авторегрессионного процесса — это колебание со скачкообразно изменяющимися амплитудой и фазой.

При моделировании реализаций с такими спектральными свойствами выясняется, что ни один из других методов не позволяет выявить сложную структуру центрального максимума. Авторегрессионные методы достаточно точно определяют положение третьей компоненты, однако две другие составляющие сливаются в один максимум с частотой, изменяющейся в пределах $0 \div 0,05$ Гц. Метод Прони также находит не более двух компонент. Метод Куликова в большинстве случаев ($71 \pm 5\%$) находит все три компоненты, при этом среднеквадратическое отклонение оценки частот составляет не более $0,01$ Гц. Ложные максимумы в диапазоне $-0,01 \div 0,1$ Гц появляются не больше чем в $4 \pm 2\%$ случаев.

7. ВЫВОДЫ

Таким образом, в случаях, когда модель квазидетерминированного процесса хорошо описывает сигнал, метод Н. К. Куликова является наилучшим из перечисленных параметрических методов спектрального оценивания и существенно превосходит их по большинству параметров (прежде всего по разрешающей способности на коротких реализациях, воспроизводимости спектральной оценки при наличии значительного шума, наименьшей вероятности появления ложных максимумов).

Хорошим примером такого сигнала является сигнал наклонного зондирования ионосферы в случае, когда основной вклад в энергетику вносят крупномасштабные неоднородности электронной концентрации ионосферы. Это делает метод Куликова наилучшим из рассмотренных методов применительно к задаче разделения мод распространения, а также для эффективного разделения отражённой и рассеянной компонент сигнала. Для сигнала, сформированного рассеянием на мелкомасштабных неоднородностях, эффективность указанного метода близка к эффективности модифицированного ковариационного метода.

Достоинства рассматриваемого метода ярко проявляются при анализе сигналов со сложным спектральным составом, особенно при наличии более двух спектрально близких составляющих. Важнейшим достоинством метода Куликова является также повышенная разрешающая способность при ограниченной длине реализации, что делает предпочтительным его применение в случаях, когда наблюдается дрейф частот составляющих сигнала и становится невозможным повышение разрешающей способности за счёт увеличения времени когерентного накопления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Куликов Н. К., Багаутдинов Г. Н. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Решение дифференциальных уравнений на основе функций с гибкой структурой. — Алма-Ата: 1973. — 132 с.
2. Саркисян С. А., Голованов Л. В. Прогнозирование развития больших систем. — М.: Статистика, 1975. — 192 с.
3. Теплов В. Ю., Бочкарёв В. В. // Структура и динамика молекулярных систем. — Йошкар-Ола, Москва: 1998. С. 28.
4. Марпл-мл. С. Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. — М.: Мир, 1990. — 584 с.
5. Федер Е. Фракталы. — М.: Мир, 1991.
6. von Sachs R., Neumann M. H. A wavelet based test for stationarity. Preprint AGTM Kaiserslautern 182, 1998.

7. Бойков В. И., Казакова Т. В., Карпов А. В., Кацевман М. М. // Геомагнетизм и аэрономия. 1990. Т. 30, № 2.

Казанский государственный
университет, г. Казань, Россия

Поступила в редакцию
17 ноября 1999 г.

SPECTRAL PROCESSING OF OBLIQUE IONOSPHERIC SOUNDING SIGNALS USING PARAMETRIC METHODS

A. N. Pleukhov, V. V. Bochkarov, M. M. Katsevman, I. R. Petrova, and V. Yu. Teplov

In this article, we compare the efficiency of some parametric methods of spectrum evaluation as applied to the problem of analysis of ionospheric-sounding signals using model calculation and real-data series realization. The application of the Kulikov method of spectral processing is described. The efficiency of this method for determination of the mode structure of ionospheric signal is demonstrated. The selection criterion for the model order is proposed for this method.

ДЕПОЛЯРИЗАЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ЛОКАЛЬНО НЕОДНОРОДНОМ ПРИЗЕМНОМ ВОЛНОВОДНОМ КАНАЛЕ

О. В. Соловьёв

Работа посвящена дальнейшему развитию численно-аналитического метода решения трёхмерных задач теории распространения радиоволн. Рассмотрена векторная задача о поле вертикального электрического диполя в плоском волноводе Земля—ионосфера с локальной крупномасштабной неоднородностью на анизотропной ионосферной стенке. Учитывается возможность опускания (подъёма) локальной области верхней стенки волновода относительно уровня регулярной ионосферы. Компоненты полей на граничных поверхностях подчиняются импедансным условиям Леонтовича. Задача сводится к системе двумерных интегральных уравнений, учитывающих перевозбуждение и деполяризацию поля, рассеянного на нерегулярности. Путём асимптотического интегрирования по поперечной к трассе распространения координате эта система преобразуется в систему одномерных интегральных уравнений. Указанная система решается в диагональном приближении численно путём, сочетающим в себе прямое обращение интегрального оператора типа Вольтерра и последовательные приближения. Предлагаемый метод позволяет уменьшить требуемое для решения задачи машинное время, он пригоден для исследования как малых, так и крупномасштабных неоднородностей. Получены оценки ТЕ-компонент поля, не возбуждаемых рассматриваемым источником и возникающих только за счёт рассеяния поля на трёхмерной неоднородности, нарушающей геометрическую регулярность ионосферной стенки волновода.

ВВЕДЕНИЕ

Данная работа продолжает цикл исследований, посвящённых разработке математического аппарата для решения проблемы распространения радиоволн в околоземном волноводном канале с учётом трёхмерных локальных электрических и геометрических нерегулярностей нижней ионосферы и земной поверхности. Она является развитием статьи [1], продолжая рассмотренный в ней метод решения векторной локально неоднородной задачи распространения радиоволн на случай более сложной модели трёхмерной крупномасштабной неоднородности одной из стенок волноводного канала. Исследованная в данной работе ионосферная неоднородность учитывает возможность опускания (подъёма) локальной области верхней, обладающей анизотропной проводимостью стенки волновода относительно уровня h регулярной ионосферы. Основная цель данного исследования — предложить способ расчёта эффектов, связанных с опусканием ионосферной неоднородности в полость волновода или с образованием дополнительной полости в окрестности стенки волновода, и оценить эти эффекты на конкретных примерах.

Как было продемонстрировано в [1] (и ранее в [2]), учитывать влияние трёхмерных локальных неоднородностей приземного волновода необходимо как при исследовании волноводного распространения радиоволн, так и при расчёте поля земной волны над реальной земной поверхностью. Если кратко описать круг природных явлений, приводящих к нарушению однородности параметров ионосферной плазмы, т. е. ведущих к образованию локальных неоднородностей нижней ионосферы, то необходимо отметить возмущения, обязанные своим происхождением терминатору, землетрясениям [3, 4], магнитным бурям, образованию спорадического E -слоя, высыпаниям электронов и протонов из радиационных поясов. Размеры таких неоднородностей в горизонтальной плоскости могут быть от десятков до тысяч километров в диаметре. Обе полярные области ионосферы могут рассматриваться как локальные трёхмерные неоднородности на длинных трассах распространения радиоволн. Помимо возмуще-

ний естественного характера возможно появление локальных ионосферных неоднородностей, являющихся следствием деятельности человека. Причём такую деятельность можно подразделить на два вида. Во-первых, это события, для которых модификация параметров ионосферы оказывается побочным результатом. К таким можно отнести запуски космических аппаратов [5], промышленные взрывы [6], воздействие мощных наземных источников электромагнитного поля [7]. Во-вторых, это преднамеренное искусственное возмущение плазменной среды в рамках стремительно развивающегося в настоящее время научного направления в исследованиях околоземной среды так называемыми активными методами. Размеры рукотворных локальных неоднородностей уступают размерам естественных неоднородностей, но в конечном счёте любой размер важен в сравнении с двумя величинами: либо с длиной волны распространяющегося излучения, либо с длиной трассы распространения.

Локальные неоднородности на земной стенке волновода — это неоднородности «островного» и «полуостровного» типа. Их ограниченность в направлении, поперечном к трассе распространения, может существенно влиять как на амплитуду, так и на фазу распространяющегося над такими объектами сигнала, особенно в случае, когда трасса проходит вблизи касательной к границе неоднородности [2]. Возможность описать земные неоднородности скалярным (изотропным) импедансом делает их учёт более простым, чем учёт влияния анизотропных ионосферных неоднородностей.

Радиоволны СДВ диапазона особенно чувствительны к изменениям концентрации и частоты соударений электронов в самой нижней части ионосферы, в слое D (на высотах ниже 100 км). В прежние годы исследования задач теории распространения волн этого диапазона в волноводном канале Земля—ионосфера стимулировались в первую очередь интересами развития СДВ и ДВ радионавигации. В настоящий момент на первый план выходят геофизические приложения, изучение поведения ионосферы и магнитосферы Земли путём наблюдения за СДВ и СНЧ радиоизлучением как искусственного, так и естественного происхождения, изучение влияния на ионосферу грозовой активности (рассеяние радиоволн СДВ диапазона от спрайтов [8–11]). Это направление получило название СДВ/СНЧ дистанционного зондирования ионосферы и магнитосферы. Достаточно подробный перечень работ, посвящённых моделированию воздействия на приземное распространение радиоволн трёхмерных ионосферных неоднородностей либо анализу распространения земной волны с учётом трёхмерных нерегулярностей электрических свойств подстилающей поверхности, был приведён нами в [1]. Поэтому, не повторяясь, отметим лишь работы [12–15], появившиеся в последнее время и посвящённые моделированию возмущения амплитуды и фазы регистрируемых СДВ сигналов, называемого эффектом Тримпи. Авторы указанных работ рассчитывают влияние ионосферной неоднородности на основную поляризацию распространяющегося в околоземном пространстве СДВ поля либо в рамках борновского приближения (теория однократного рассеяния), либо в двумерном варианте, используя прямой численный расчёт в рамках метода конечных элементов. Оба эти метода, как отмечают и сами авторы, лучше работают для малых отражающих объёмов.

Разрабатываемый нами метод применим как для больших (в масштабах длины волны или длины трассы распространения), так и для произвольно малых (в смысле геометрических размеров) неоднородностей. Условие его применимости — это достаточная удалённость возмущения от источника поля либо от точки наблюдения ($kr_0 \gg 1$, где r_0 — расстояние от приёмника или источника до ближайшей точки неоднородной области, k — волновое число в вакууме). Задача распространения радиоволн рассматривается в рамках импедансной модели волноводного канала Земля—ионосфера, параметры которой рассчитываются [16] по высотным профилям электронной концентрации $N_e(r, \varphi; z)$ и эффективной частоты соударений электронов $\nu_e(r, \varphi; z)$ для регулярной и возмущённой ионосферы. То, что отражательные характеристики ионосферы (во всяком случае в СДВ и ДВ диапазонах) могут быть описаны с помощью импеданса, отнесённого к некоторому вполне конкретному уровню над поверхностью Земли, было показано неоднократно (см., например, [17]). Работоспособность неоднородной импедансной модели была проверена путём сопоставления с результатами эксперимента в [18].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Как и в работе [1], чтобы не усложнять изложение, ограничимся плоской моделью призматического волновода. Переход к сферической модели может быть осуществлён с помощью формул, приведённых в [19], которые были использованы в расчётах (для скалярного случая), представленных в [2]. Учтём возможность опускания (подъёма) локальной области верхней стенки волновода относительно уровня h регулярной ионосферы путём введения вертикального профиля у модельной неоднородности. Для этого рассмотрим неоднородность цилиндрической формы с образующей, параллельной нормали к стенкам волноводного канала, и параллельными основаниями, одно из которых совпадает с плоскостью стенки волновода. Геометрия задачи представлена на рис. 1. Боковую поверхность цилиндрического возмущения будем обозначать S_1 , а поверхность основания цилиндра — S_p . Ограничений на форму и размеры поперечного сечения такой цилиндрической неоднородности не будет.

Будем исследовать электромагнитное поле, возбуждаемое вертикальным электрическим диполем в области $D \in \mathbb{R}^3$, ограниченной поверхностями S_e , S_1 и S^* . Пространство в области D обладает свойствами вакуума. В цилиндрической системе координат (r, φ, z) с осью z , проходящей через источник, поверхность S_e определяется уравнением $z = 0$, поверхность S_1 есть часть поверхности $z = h$ с вырезанной областью, которая является основанием цилиндрической неоднородности S^* . Наряду с цилиндрической системой координат (r, φ, z) будем также использовать связанную с ней декартову систему (x, y, z) . Электрический диполь с полным дипольным моментом P_0 располагается в точке с координатами $(0, 0, z_t)$. Компоненты электромагнитного поля \mathbf{E} и \mathbf{H} , гармонически зависящие от времени как $\exp(-i\omega t)$, удовлетворяют внутри D системе уравнений Максвелла. Граничные условия для \mathbf{E} и \mathbf{H} на стенках волновода — импедансного типа:

$$\mathbf{E}_{tg} = Z_0 \hat{\delta} [\mathbf{H}_{tg}, \mathbf{n}], \quad Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}, \quad \hat{\delta} = \begin{pmatrix} \delta^{(e)} & 0 \\ 0 & \delta^{(m)} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

В формуле (1) \mathbf{E}_{tg} и \mathbf{H}_{tg} — касательные к поверхностям стенок волновода и поверхности неоднородности компоненты электрического и магнитного полей, \mathbf{n} обозначает нормаль к стенкам волновода и поверхности неоднородности, внешнюю по отношению к волноводному объёму D , ε_0 и μ_0 — диэлектрическая и магнитная проницаемости вакуума. Поверхностные импедансы стенок волновода задаются следующим образом. На нижней стенке волновода (поверхность Земли) $\delta^{(e)} = \delta^{(m)} = \delta_e = \text{const}$, а на

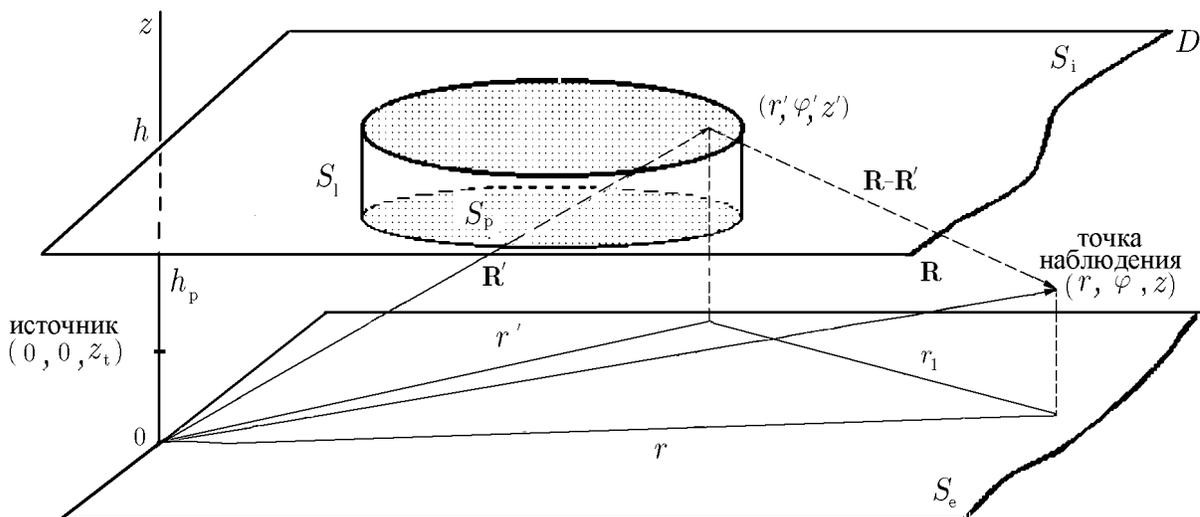


Рис. 1. Геометрия задачи

верхней (ионосферной) стенке, деформированной неоднородностью,

$$\hat{\delta} = \hat{\delta}_i = \begin{pmatrix} \delta_i^{(e)}(r, \varphi, z) & 0 \\ 0 & \delta_i^{(m)}(r, \varphi, z) \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Таким образом, импеданс ионосферной стенки волновода принимается в виде тензора второго ранга, причём переход к скалярному импедансу в данном случае недопустим, т. к. в рассматриваемой полосе частот (СДВ и ДВ диапазоны до частот порядка 100 кГц) взаимодействие ионосферной плазмы с ТМ- и ТЕ-компонентами электромагнитного поля существенно различно. Например, в диапазоне СДВ диагональные элементы тензора $\hat{\delta}_i$ подчиняются соотношению $\delta_i^{(e)} \sim 1/\delta_i^{(m)}$. Учёт тензорного характера взаимодействия компонент электромагнитного поля на поверхности неоднородности не позволяет рассмотреть в качестве модели неоднородности случай произвольной гладкой поверхности S^* . Это связано с тем, что не удаётся записать в обозримом виде пригодные для дальнейшего использования соотношения, которым должны подчиняться составляющие векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} на произвольной поверхности $z = f(r, \varphi)$, удовлетворяющие импедансному граничному условию (1).

Необходимо сделать небольшое отступление по поводу используемой цилиндрической системы координат. Она является наиболее естественной для анализа задач о поле точечного источника. Именно для этой системы координат можно считать, что тензор поверхностного импеданса ионосферы будет иметь простейший вид (2). Преобразование компонент тензора $\hat{\delta}_i$ из системы координат (r, φ, z) в систему координат (e_1, e_2, e_3) , в которой орт \mathbf{e}_3 направлен по нормали к поверхности S^* , а орты \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 лежат в касательной плоскости, проведённой к S^* в данной точке, приводит к результату, дальнейшее использование которого выглядит бесперспективным.

Однако и упрощённая модель в виде цилиндра (рис. 1) требует пояснений. Тензор (2) импеданса ионосферы как функцию пространственных координат определим следующим образом: $\hat{\delta}_i(r, \varphi, z) = \hat{\delta}_{i0}$ для $z = h$, $(r, \varphi) \in S_{i0}$; $\hat{\delta}_i(r, \varphi, z) = \hat{\delta}_{i\gamma}$ для $z = h$, $(r, \varphi) \in S_\gamma$, и $\hat{\delta}_i(r, \varphi, z) = \hat{\delta}_p$ для $(r, \varphi, z) \in S^*$, где S_{i0} обозначает невозмущённую часть поверхности S_i , а поверхность S_γ есть достаточно узкая промежуточная область между S_{i0} и S^* . Поверхность S_γ располагается в плоскости верхней стенки волновода ($z = h$), в её пределах импеданс изменяется от $\hat{\delta}_{i0}$ (на внешней границе) до $\hat{\delta}_p$ (на внутренней границе). Эта область содержит линейный контур γ_i , по которому будет проходить граница между S_{i0} и S^* в пределе $d \rightarrow 0$, где d есть максимальная ширина области S_γ . После выделения переходной области S_γ необходимо обратить внимание на области контактов боковой поверхности цилиндра S_1 с поверхностью S_γ , лежащей на уровне регулярной ионосферы, и поверхностью основания цилиндра S_p ($z = h_p$), в которых некоторые компоненты электрического \mathbf{E} и магнитного \mathbf{H} полей могут иметь особенности. Чтобы избежать появления особенности в области, где нормаль к поверхности неоднородности меняет скачком своё направление, всю поверхность локальной неоднородности S^* будем считать состоящей из четырёх частей: $S^* = S_{\gamma 1} \cup S_1 \cup S_{1p} \cup S_p$. Поверхность $S_{\gamma 1}$ представляет собой переходную область (допустим, часть поверхности тора, если цилиндр, моделирующий неоднородность, оказывается круговым), по которой осуществляется гладкий контакт поверхности $z = h$ и S_1 . При переходе точки наблюдения с плоскости $z = h$ на поверхность S_1 вдоль $S_{\gamma 1}$ направление нормали \mathbf{n} скачком не испытывает. Поверхность S_1 есть боковая поверхность цилиндра с образующей, параллельной оси z . Электрические свойства этой поверхности описываются независимым от координат импедансом $\hat{\delta}_p$. Поверхность S_{1p} представляет собой переходную область (четверть поверхности тора в случае неоднородности в виде кругового цилиндра), по которой осуществляется гладкий контакт поверхности S_1 и основания цилиндрической неоднородности S_p , лежащей в плоскости $z = h_p$. Вдоль этой поверхности нормаль \mathbf{n} без скачков меняет своё направление с $\mathbf{n} = n_r \mathbf{e}_r + n_\varphi \mathbf{e}_\varphi$ на $\mathbf{n} = \mathbf{e}_z$. Электрические свойства этой поверхности описываются независимым от координат импедансом $\hat{\delta}_p$. Таким образом, вся возмущённая область $S_\gamma \cup S^*$ представляет собой гладкую поверхность с непрерывной нормалью.

Электрические свойства этой поверхности описываются тензорным импедансом $\hat{\delta}_p$, постоянным везде, за исключением достаточно узкой области S_γ , лежащей в плоскости $z = h$ в районе контакта спокойной и возмущённой частей ионосферной стенки волновода.

На этом постановку векторной задачи распространения радиоволн в плоской модели волноводного канала Земля—ионосфера, возмущённого выпуклой трёхмерной крупномасштабной ионосферной неоднородностью, можно считать законченной.

2. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Решение задачи начинается с преобразования дифференциальных уравнений Максвелла с граничными условиями вида (1) в интегральные соотношения. Используя тот факт, что волноводная область D является пространственно однородной средой, дифференциальные уравнения первого порядка преобразуются в уравнения второго порядка для векторов поля, и к ним применяется векторный аналог теоремы Грина. В результате можно получить известные формулы [20], выражающие векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} во внутренних точках какого-либо объёма V (в данном случае это волноводная область D) через их значения на поверхности $S = S_e \cup S_i \cup S^*$, ограничивающей этот объём:

$$\mathbf{E}(\mathbf{R}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \left\{ i\omega\mu_0 \Phi \mathbf{j} + \frac{\text{div} \mathbf{j}}{i\omega\varepsilon_0} \text{grad} \Phi \right\} dV' - \frac{1}{4\pi} \iint_S \{ i\omega\mu_0 [\mathbf{n}', \mathbf{H}] \Phi + [[\mathbf{n}', \mathbf{E}], \text{grad} \Phi] + (\mathbf{n}', \mathbf{E}) \text{grad} \Phi \} dS', \quad (3)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{R}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V [\mathbf{j}, \text{grad} \Phi] dV' - \frac{1}{4\pi} \iint_S \{ -i\omega\varepsilon_0 [\mathbf{n}', \mathbf{E}] \Phi + [[\mathbf{n}', \mathbf{H}], \text{grad} \Phi] + (\mathbf{n}', \mathbf{H}) \text{grad} \Phi \} dS'. \quad (4)$$

В формулах (3) и (4) $\mathbf{j} = -i\omega P_0(0, 0, z_t) \mathbf{e}_z$ обозначает сторонний ток, \mathbf{R} — радиус-вектор точки наблюдения, $\mathbf{R} \notin S$; штрихованные переменные принадлежат поверхности интегрирования; $\Phi = \Phi(|\mathbf{R} - \mathbf{R}'|)$ — функция Грина, аргумент которой

$$|\mathbf{R} - \mathbf{R}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} = \sqrt{r_1^2 + (z - z')^2}$$

— расстояние от элемента (x', y', z') до точки (x, y, z) , $r_1 = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\varphi - \varphi')}$. Как показано в [1], специфика векторной задачи требует использования двухкомпонентной функции Грина, две составляющие которой $W^{(e)}(\mathbf{R}, \mathbf{R}')$ и $W^{(m)}(\mathbf{R}, \mathbf{R}')$ являются решениями следующих задач:

$$\begin{aligned} \Delta W^{(e)} + k^2 W^{(e)} &= -2\pi\delta(x - x', y - y', z - z'), \\ \frac{\partial W^{(e)}}{\partial z} &= -ik\delta_e W^{(e)} \quad \text{для } z = 0, \quad \frac{\partial W^{(e)}}{\partial z} = ik\delta_{i0}^{(e)} W^{(e)} \quad \text{для } z = h; \\ \Delta W^{(m)} + k^2 W^{(m)} &= -2\pi\delta(x - x', y - y', z - z'), \\ \frac{\partial W^{(m)}}{\partial z} &= -\frac{ik}{\delta_e} W^{(m)} \quad \text{для } z = 0, \quad \frac{\partial W^{(m)}}{\partial z} = \frac{ik}{\delta_{i0}^{(m)}} W^{(m)} \quad \text{для } z = h, \end{aligned}$$

т. е. определяются вертикальными компонентами электрического и магнитного векторов Герца регулярной волноводной задачи. В последних формулах $\delta(x, y, z)$ обозначает δ -функцию. Функция $W^{(e)}$

используется в уравнениях для ТМ-составляющих поля, $W^{(m)}$ — в уравнениях для ТЕ-составляющих. В этом случае слагаемые, определяемые в (3) и (4) объёмными интегралами, могут быть сосчитаны и будут равны $\mathbf{E}^0(\mathbf{R}) = E_r^0(\mathbf{R})\mathbf{e}_r + E_z^0(\mathbf{R})\mathbf{e}_z$ в формуле (3) и $\mathbf{H}^0(\mathbf{R}) = H_\varphi^0(\mathbf{R})\mathbf{e}_\varphi$ в формуле (4). Составляющие векторов $\mathbf{E}^0(\mathbf{R})$ и $\mathbf{H}^0(\mathbf{R})$ есть составляющие поля рассматриваемого источника (вертикального электрического диполя) в регулярном волноводном канале, образованном плоскостями $z = 0$ и $z = h$ со свойствами, совпадающими со свойствами поверхностей S_e и S_{i0} :

$$E_r^0 = \frac{P_0}{2\pi\epsilon_0} \frac{\partial^2 W^{(e)}(\mathbf{R})}{\partial r \partial z}, \quad E_z^0 = \frac{P_0}{2\pi\epsilon_0} \left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) W^{(e)}(\mathbf{R}), \quad H_\varphi^0 = \frac{i\omega P_0}{2\pi} \frac{\partial W^{(e)}(\mathbf{R})}{\partial r}.$$

Обратимся к слагаемым, описываемым в (3) и (4) поверхностными интегралами, и рассмотрим по отдельности вклад каждой из частей поверхности S , ограничивающей волноводный объём D . При этом будем считать, что точка наблюдения $\mathbf{R} \notin S$, т. е. лежит внутри волноводного объёма. Начнём с поверхностей S_e и S_{i0} . Как было показано в [21], за счёт соответствующего выбора функции Грина для некоторых компонент векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} интегралы по поверхностям S_e и S_{i0} могут обратиться в нуль.

Перейдём на поверхность $S_\gamma \cup S^*$, нарушающую регулярность волноводного канала. Для её частей S_γ (лежит в плоскости $z = h$) и S_p (лежит в плоскости $z = h_p$) применимы все результаты, полученные в [1], в том числе выражения для нормальных производных компонент полей (формулы (2) в [1]), поскольку для этих поверхностей граничные условия (1) в покомпонентной записи выглядят совсем просто:

$$\left. \begin{aligned} E_r &= Z_0 \delta_i^{(e)}(r, \varphi) H_\varphi, \\ E_\varphi &= -Z_0 \delta_i^{(m)}(r, \varphi) H_r \end{aligned} \right|_{(r, \varphi) \in S_\gamma, S_p}.$$

Для поверхности S_γ , которую мы считаем достаточно узкой (ширина не более d) и содержащей внутри себя линейный контур γ_i , по которому будет проходить граница между S_{i0} и $S_{\gamma 1}$ в пределе $d \rightarrow 0$, можно повторить процедуру преобразования поверхностного интеграла в линейный (вдоль контура γ_i) в пределе $d \rightarrow 0$ [1]. Отметим, что в случае, когда точка наблюдения оказывается на контуре γ_i ($\mathbf{R} \in \gamma_i$), линейные интегралы надо понимать в смысле главного значения (V. P.).

Рассмотрим поверхности $S_{\gamma 1}$ и S_{1p} . Обе эти поверхности можно представить как соответствующие части поверхности, образующейся при движении четверти окружности радиуса, допустим, ρ^* вдоль направляющей цилиндрической поверхности S_1 , при котором плоскость этой окружности не пересекается образующей цилиндра и содержит нормаль к поверхности S_1 . Если бы цилиндр, которым мы моделируем неоднородность, был круговым, то $S_{\gamma 1}$ и S_{1p} были бы четвертями тора. Для оценки вклада этих поверхностей в результирующее поле в точке наблюдения \mathbf{R} ($\mathbf{R} \notin S$), находящейся внутри волновода, необходимо оценить соответствующие интегралы из формул (3) и (4) по поверхностям $S_{\gamma 1}$ и S_{1p} . Подынтегральные функции в этих интегралах — это составляющие векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} поля вертикального электрического диполя на $S_{\gamma 1}$ и S_{1p} , т. е. в точках, достаточно удалённых от источника. Значит, эти функции можно считать ограниченными. Также в подынтегральные функции входят функция Грина и её нормальная производная, которые являются функциями расстояния от элемента поверхности до точки наблюдения. В том случае, когда точка наблюдения \mathbf{R} не лежит на рассматриваемых поверхностях, а сами эти поверхности могут считаться гладкими, эти функции также конечны. Остаётся элемент поверхности, который в данном случае пропорционален радиусу ρ^* , и при $\rho^* \rightarrow 0$ вклад в полное поле в точке наблюдения от поверхностей $S_{\gamma 1}$ и S_{1p} также будет стремиться к нулю. Поэтому влиянием поверхностей $S_{\gamma 1}$ и S_{1p} мы будем пренебрегать.

Поверхность S_1 — боковая поверхность цилиндрической неоднородности. Нормаль к этой поверхности имеет только две составляющие, вдоль координат r и φ : $\mathbf{n} = n_r \mathbf{e}_r + n_\varphi \mathbf{e}_\varphi$. Это позволяет полу-

чить достаточно простые выражения для граничного условия (1) в координатной записи:

$$\left. \begin{aligned} E_z &= Z_0 \delta_p^{(e)} (H_r n_\varphi - H_\varphi n_r), \\ E_r n_\varphi - E_\varphi n_r &= -Z_0 \delta_p^{(m)} H_z \end{aligned} \right|_{(r,\varphi) \in S_1}. \quad (5)$$

Используя условия (5), подынтегральные функции из (3) и (4) в интегралах по S_1 можно соответствующим образом преобразовать. Последней остаётся поверхность S_p , вклад которой в решение мы предполагаем основным. Будем рассчитывать этот вклад путём обращения интегрального оператора задачи.

Таким образом, рассматриваемая задача определения компонент электромагнитного поля точечного источника в волноводном канале с модельной неоднородностью S^* может быть сведена к следующей системе интегральных соотношений, равносильной исходной системе дифференциальных уравнений Максвелла с граничными условиями (1):

$$\begin{aligned} E_\varphi(\mathbf{R}) &= \frac{ik}{2\pi} \iint_{S_p} \left(\frac{1}{\delta_p^{(m)}} - \frac{\partial W^{(m)}(\mathbf{R}, \mathbf{R}')}{W^{(m)}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') ik \partial z'} \right) W^{(m)}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') E_\varphi(\mathbf{R}') dS' + \\ &+ \frac{ik}{2\pi} \iint_{S_1} \left[W^{(m)}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') n'_r Z_0 H_z(\mathbf{R}') - \frac{\partial W^{(m)}(\mathbf{R}, \mathbf{R}')}{ik \partial n'} E_\varphi(\mathbf{R}') + \right. \\ &+ n'_\varphi \left(E_r(\mathbf{R}') \frac{\partial W^{(m)}(\mathbf{R}, \mathbf{R}')}{ik \partial r'} + E_z(\mathbf{R}') \frac{\partial W^{(m)}(\mathbf{R}, \mathbf{R}')}{ik \partial z'} \right) - n'_r E_r(\mathbf{R}') \frac{\partial W^{(m)}(\mathbf{R}, \mathbf{R}')}{ik r' \partial \varphi'} \left. \right] dS' - \\ &- \frac{1}{2\pi} \iint_{S_e} W^{(m)}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') \frac{\partial E_z(\mathbf{R}')}{r' \partial \varphi'} dS' + \frac{1}{2\pi} \iint_{S_{i0} \cup S_p} W^{(m)}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') \frac{\partial E_z(\mathbf{R}')}{r' \partial \varphi'} dS', \quad (6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_z(\mathbf{R}) &= E_z^0(\mathbf{R}) + \frac{ik}{2\pi} \iint_{S_p} \left(\delta_p^{(e)} - \frac{\partial W^{(e)}(\mathbf{R}, \mathbf{R}')}{W^{(e)}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') ik \partial z'} \right) W^{(e)}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') E_z(\mathbf{R}') dS' - \\ &- \frac{ik}{2\pi} \iint_{S_1} \left[W^{(e)}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') Z_0 (n'_r H_\varphi(\mathbf{R}') - n'_\varphi H_r(\mathbf{R}')) + \frac{\partial W^{(e)}(\mathbf{R}, \mathbf{R}')}{ik \partial n'} E_z(\mathbf{R}') + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial W^{(e)}(\mathbf{R}, \mathbf{R}')}{ik \partial z'} (n'_r E_r(\mathbf{R}') + n'_\varphi E_\varphi(\mathbf{R}')) \right] dS' + \frac{1}{2\pi} \iint_{\gamma_i} W^{(e)}(\mathbf{R}, l') \times \\ &\times \left[-Z_0 (\delta_p^{(e)} - \delta_{i0}^{(e)}) H_\varphi(l') A(l') + \frac{\delta_p^{(e)} + \delta_{i0}^{(e)}}{2} \left(\frac{1}{\delta_p^{(m)}} - \frac{1}{\delta_{i0}^{(m)}} \right) E_\varphi(l') \right] \frac{dl'}{\sqrt{1 + A^2(l')}} + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{1 + A^2(\mathbf{R})}} \left\{ -Z_0 H_\varphi(\mathbf{R}) A(\mathbf{R}) (\delta_p^{(e)} - \delta_{i0}^{(e)}) + E_\varphi(\mathbf{R}) \frac{\delta_p^{(e)} + \delta_{i0}^{(e)}}{2} \left(\frac{1}{\delta_p^{(m)}} - \frac{1}{\delta_{i0}^{(m)}} \right) \right\} \Big|_{\mathbf{R} \in \gamma_i} + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \iint_{S_{i0} \cup S_p} W^{(e)}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') \left(-1 + \frac{\delta_i^{(e)}}{\delta_i^{(m)}} \right) \frac{\partial E_\varphi(\mathbf{R}')}{r' \partial \varphi'} dS', \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_\varphi(\mathbf{R}) = & H_\varphi^0(\mathbf{R}) + \frac{ik}{2\pi} \iint_{S_p} \left(\delta_p^{(e)} - \frac{\partial W^{(e)}(\mathbf{R}, \mathbf{R}')}{W^{(e)}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') ik \partial z'} \right) W^{(e)}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') H_\varphi(\mathbf{R}') dS' - \\
& - \frac{ik}{2\pi} \iint_{S_1} \left[W^{(e)}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') n'_r \frac{E_z(\mathbf{R}')}{Z_0} + \frac{\partial W^{(e)}(\mathbf{R}, \mathbf{R}')}{ik \partial n'} H_\varphi(\mathbf{R}') - \right. \\
& - n'_\varphi \left(H_r(\mathbf{R}') \frac{\partial W^{(e)}(\mathbf{R}, \mathbf{R}')}{ik \partial r'} + H_z(\mathbf{R}') \frac{\partial W^{(e)}(\mathbf{R}, \mathbf{R}')}{ik \partial z'} \right) + n'_r H_r(\mathbf{R}') \frac{\partial W^{(e)}(\mathbf{R}, \mathbf{R}')}{ik r' \partial \varphi'} \left. \right] dS' - \\
& - \frac{1}{2\pi} \iint_{S_e} W^{(e)}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') \frac{\partial H_z(\mathbf{R}')}{r' \partial \varphi'} dS' + \frac{1}{2\pi} \iint_{S_{i0} \cup S_p} W^{(e)}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') \frac{\partial H_z(\mathbf{R}')}{r' \partial \varphi'} dS', \quad (8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_z(\mathbf{R}) = & \frac{ik}{2\pi} \iint_{S_p} \left(\frac{1}{\delta_p^{(m)}} - \frac{\partial W^{(m)}(\mathbf{R}, \mathbf{R}')}{W^{(m)}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') ik \partial z'} \right) W^{(m)}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') H_z(\mathbf{R}') dS' - \\
& - \frac{ik}{2\pi} \iint_{S_1} \left[-W^{(m)}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') \frac{(n'_r E_\varphi(\mathbf{R}') - n'_\varphi E_r(\mathbf{R}'))}{Z_0} + \frac{\partial W^{(m)}(\mathbf{R}, \mathbf{R}')}{ik \partial n'} H_z(\mathbf{R}') + \right. \\
& + \left. \frac{\partial W^{(m)}(\mathbf{R}, \mathbf{R}')}{ik \partial z'} (n'_r H_r(\mathbf{R}') + n'_\varphi H_\varphi(\mathbf{R}')) \right] dS' + \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_i} W^{(m)}(\mathbf{R}, l') \times \\
& \times \left[\frac{1}{Z_0} \left(\frac{1}{\delta_p^{(m)}} - \frac{1}{\delta_{i0}^{(m)}} \right) E_\varphi(l') A(l') + \frac{1/\delta_p^{(m)} + 1/\delta_{i0}^{(m)}}{2} (\delta_p^{(e)} - \delta_{i0}^{(e)}) H_\varphi(l') \right] \frac{dl'}{\sqrt{1 + A^2(l')}} + \\
& + \frac{1}{\sqrt{1 + A^2(\mathbf{R})}} \left\{ \frac{E_\varphi(\mathbf{R})}{Z_0} A(\mathbf{R}) \left(\frac{1}{\delta_p^{(m)}} - \frac{1}{\delta_{i0}^{(m)}} \right) + H_\varphi(\mathbf{R}) \frac{1/\delta_p^{(m)} + 1/\delta_{i0}^{(m)}}{2} (\delta_p^{(e)} - \delta_{i0}^{(e)}) \right\} \Big|_{\mathbf{R} \in \gamma_i} + \\
& + \frac{1}{2\pi} \iint_{S_{i0} \cup S_p} W^{(m)}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') \left(-1 + \frac{\delta_i^{(e)}}{\delta_i^{(m)}} \right) \frac{\partial H_\varphi(\mathbf{R}')}{r' \partial \varphi'} dS'. \quad (9)
\end{aligned}$$

В формулах (6)–(9) $A = r (\partial r / \partial \varphi)^{-1}$, где $r = r(\varphi)$ есть уравнение кривой, описывающей контур γ_i . Уточним также, что $\frac{\partial W}{\partial \mathbf{n}} = (\text{grad } W, \mathbf{n}) = n_r \frac{\partial W}{\partial r} + n_\varphi \frac{\partial W}{r \partial \varphi} + n_z \frac{\partial W}{\partial z}$.

Уравнения (6)–(9) представляют собой систему интегральных соотношений, т. к. при её получении предполагалось, что точка наблюдения находится внутри волновода, причём $\mathbf{R} \notin S_p, S_1$. В результате предельного перехода точки наблюдения на поверхность неоднородности $S_p \cup S_1$ в правых частях уравнений (6)–(9) возникнут дополнительные слагаемые, равные соответственно $E_\varphi(\mathbf{R})/2$, $E_z(\mathbf{R})/2$, $H_\varphi(\mathbf{R})/2$ и $H_z(\mathbf{R})/2$, обязанные своим появлением скачку нормальной производной функции Грина.

Решать полученную систему уравнений будем в предположении, что основной вклад в решение дают слагаемые, в которых искомая функция стоит под знаком интеграла по S_p — поверхности основания цилиндрической неоднородности. Такое предположение основывается на результатах [22], где было показано (для аналогичной по форме, но малой неоднородности), что вклад боковой поверхности S_1 в возмущение поля не превышает 20 % вклада опустившегося (поднявшегося) основания цилиндрической неоднородности. Тогда, оставляя члены с интегралами от искомых функций по S_p в системе

уравнений без изменения, влияние остальных слагаемых учтём, подставив на место искомого компонент электромагнитного поля и их азимутальных производных в подынтегральных функциях интегралов по S_e , S_{i0} , γ_i , S_1 и S_p значения этих функций в регулярном волноводном канале:

$$\begin{aligned} E_r(\mathbf{R}') &\rightarrow E_r^0(\mathbf{R}'), & E_\varphi(\mathbf{R}') &\rightarrow E_\varphi^0(\mathbf{R}') = 0, & E_z(\mathbf{R}') &\rightarrow E_z^0(\mathbf{R}'), \\ H_r(\mathbf{R}') &\rightarrow H_r^0(\mathbf{R}') = 0, & H_\varphi(\mathbf{R}') &\rightarrow H_\varphi^0(\mathbf{R}'), & H_z(\mathbf{R}') &\rightarrow H_z^0(\mathbf{R}') = 0. \end{aligned}$$

Тем самым производится диагонализация матричного интегрального оператора задачи, в результате которой мы получаем систему независимых уравнений. Выпишем только два из них, для компонент магнитного поля H_φ (первичная компонента, возбуждаемая рассматриваемым источником и в регулярном волноводе) и H_z (вторичная компонента, возникающая за счёт рассеяния электромагнитного поля на трёхмерной неоднородности):

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{l} H_\varphi(\mathbf{R}) \text{ при } \mathbf{R} \notin S_p, S_1 \\ \frac{H_\varphi(\mathbf{R})}{2} \text{ при } \mathbf{R} \in S_p, S_1 \end{array} \right) &= H_\varphi^0(\mathbf{R}) + \\ &+ \frac{ik}{2\pi} \iint_{S_p} \left(\delta_p^{(e)} - \frac{\partial W^{(e)}(\mathbf{R}, \mathbf{R}')}{W^{(e)}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') ik \partial z'} \right) W^{(e)}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') H_\varphi(\mathbf{R}') dS' - \\ &- \frac{ik}{2\pi} \iint_{S_1} \left[W^{(e)}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') n'_r \frac{E_z^0(\mathbf{R}')}{Z_0} + \frac{\partial W^{(e)}(\mathbf{R}, \mathbf{R}')}{ik \partial n'} H_\varphi^0(\mathbf{R}') \right] dS', \quad (10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{l} H_z(\mathbf{R}) \text{ при } \mathbf{R} \notin S_p, S_1 \\ \frac{H_z(\mathbf{R})}{2} \text{ при } \mathbf{R} \in S_p, S_1 \end{array} \right) &= \frac{ik}{2\pi} \iint_{S_p} \left(\frac{1}{\delta_p^{(m)}} - \frac{\partial W^{(m)}(\mathbf{R}, \mathbf{R}')}{W^{(m)}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') ik \partial z'} \right) W^{(m)}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') H_z(\mathbf{R}') dS' - \\ &- \frac{ik}{2\pi} \iint_{S_1} n'_\varphi \left[W^{(m)}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') \frac{E_r^0(\mathbf{R}')}{Z_0} + \frac{\partial W^{(m)}(\mathbf{R}, \mathbf{R}')}{ik \partial z'} H_\varphi^0(\mathbf{R}') \right] dS' + \\ &+ \frac{(1/\delta_p^{(m)} + 1/\delta_{i0}^{(m)})}{4\pi} \left(\delta_p^{(e)} - \delta_{i0}^{(e)} \right) \left\{ \int_{\gamma_i} W^{(m)}(\mathbf{R}, l') H_\varphi^0(l') \frac{dl'}{\sqrt{1+A^2(l')}} + \frac{2\pi H_\varphi^0(\mathbf{R})}{\sqrt{1+A^2(l')}} \Big|_{\mathbf{R} \in \gamma_i} \right\}. \quad (11) \end{aligned}$$

Уравнения (10) и (11) отличаются от аналогичных [1], найденных для случая неоднородности, лежащей в плоскости ионосферной стенки волновода. Во-первых, тем, что имеют дополнительные слагаемые в правых частях, которые представляют собой интегралы от известных функций по боковой поверхности S_1 неоднородности. Эти дополнительные слагаемые изменяют свободные члены рассматриваемых уравнений. Во-вторых, учёт вертикального профиля неоднородности (подъёма или опускания её относительно уровня регулярной ионосферы) изменяет и ядра интегральных уравнений. Однако при этом они остаются того же типа, что и рассмотренные в [1], и для их решения может быть применён развитый нами численно-аналитический метод [19]. Вкратце, суть метода состоит в следующем. От уравнений для компонент поля необходимо перейти к уравнениям для функций ослабления, выделяя в искомого функциях и функциях Грина быстро осциллирующие множители, описывающие поле диполя над идеально проводящей плоскостью. Подынтегральные выражения в интегралах по S_p в уравнениях для функций ослабления записываются в эллиптической системе координат (u, v) , которая вводится по формулам

$$r' = (\operatorname{ch} u + \cos v)r/2 \quad r_1 = (\operatorname{ch} u - \cos v)r/2, \quad dS' = r_1 r' du dv, \quad -\infty < u < \infty, \quad 0 \leq v \leq \pi.$$

В подынтегральных функциях возникает множитель вида $\exp[ikr(\chi u - 1)]$, который для случая $kr \gg 1$ (расстояние от источника или от приёмника до ближайшей точки неоднородной области составляет много длин волн) может считаться быстро осциллирующим по u (поперёк трассы распространения волны) на фоне остальных сомножителей, определяемых функциями ослабления искомого компонента поля. Это позволяет для вычисления интегралов по u воспользоваться методом стационарной фазы. Для того чтобы не потерять информацию о поперечной структуре неоднородности, вычисления необходимо производить с точностью до членов порядка $O((kr)^{-1})$, отбрасывая только члены следующего порядка малости $O((kr)^{-3/2})$. В результате поверхностные интегральные уравнения преобразуются в уравнения с линейными интегралами вдоль граничного контура γ_i основания цилиндрической неоднородности S_p . Для решения последнего уравнения используется численно-аналитический метод полуобращения [23], сочетающий в себе процедуру прямого обращения доминирующей части интегрального оператора задачи, являющейся оператором Вольтерра, и процесс итераций — обращение остающейся части интегрального оператора посредством последовательных приближений. Основные преимущества описанного метода — это, во-первых, отсутствие ограничений на размеры области неоднородности и, во-вторых, существенное ускорение процесса вычислений.

3. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В качестве примера приведём результаты численного моделирования эффекта деполяризации поля вертикального электрического диполя в нерегулярном волноводном канале Земля—ионосфера при локальном опускании ионосферной стенки волновода. Частота излучения диполя $f = 16,8$ кГц. Источник располагается на Земле, точка наблюдения находится на высоте $z = 8,93$ км (приблизительно $0,5\lambda$, $\lambda = 2\pi/k$ — длина волны) над её поверхностью. Параметры модельного волновода следующие: импеданс земной стенки, определяемый значением проводимости $\sigma = 4$ См/м, есть $\delta_e = (0,3416 - 0,3416i) \cdot 10^{-3}$, высота и импеданс регулярной части ионосферной стенки волновода, определённые по дневным профилям электронной концентрации $N_e(z)$ и эффективной частоты соударений электронов $\nu_e(z)$ спокойной ионосферы [24], равны $h = 59,3$ км, $\delta_{i0}^{(e)} = (0,3578 + 0,1768i)$, $\delta_{i0}^{(m)} = (2,3170 - 1,5024i)$. Компоненты тензорного импеданса, описывающего неоднородность, были приняты равными $\delta_p^{(e)} = 0$, $\delta_p^{(m)} = (1 - 0,5i) \cdot 10^3$. Форма поперечного сечения цилиндрической неоднородности, или форма основания S_p цилиндра, считалась эллиптической: $[(x - x_p)/a_p]^2 + [(y - y_p)/b_p]^2 \leq 1$; размеры большой a_p и малой b_p полуосей, как и глубина опускания неоднородности в полость волновода (S_p лежит в плоскости $z = h_p$) варьировались. Положение неоднородности относительно трассы определялось координатами (x_p, y_p) центра эллипса. Рассчитывались амплитуда и фаза функций ослабления W_{H_φ} и W_{H_z} компонент поля $H_\varphi(\mathbf{R}) = -\frac{k^2 P_0 \exp(ikr)}{2\pi\epsilon_0 Z_0 r} W_{H_\varphi}(\mathbf{R})$ (первичная компонента) и $H_z(\mathbf{R}) = \frac{k^2 P_0 \exp(ikr)}{2\pi\epsilon_0 Z_0 r} W_{H_z}(\mathbf{R})$ (вторичная компонента) на трассе $0 < x \leq 2000$ км, $y = 0$ при различных положениях неоднородности S^* относительно трассы распространения радиоволн. Результаты представлены в виде графиков и трёхмерного рисунка на рис. 2–4.

На рис. 2 в сравнении с функцией ослабления в регулярном волноводном канале приводятся амплитуды функции W_{H_φ} ослабления компоненты поля H_φ вдоль трассы, над которой располагается неоднородность с параметрами $a_p = 200$ км, $b_p = 100$ км. Возмущённые кривые соответствуют $x_p = 600$ км, $y_p = 0$ и значениям $h_p = h$ и $h_p = (h - 21)$ км (приблизительно $2,18\lambda$). Отметим, что $y_p = 0$ соответствует ситуации, когда S_p симметрична относительно линии трассы, её ось (ось эллипса) совпадает с проекцией линии трассы на S_i , и основание неоднородности максимально возможно закрывает первые зоны Френеля. Из рис. 2 видно, что одна и та же неоднородность, характеризуемая импедансом $\hat{\delta}_p$, положением (x_p, y_p) относительно источника и точки наблюдения, формой и размерами в горизонтальной

плоскости, но опустившаяся на высоту $h - h_p$ в полость волновода, совершенно иначе деформирует дифракционную картину поля точечного источника по сравнению со случаем, когда вертикальный профиль неоднородности не учитывается [1].

Поведение вдоль трассы $|W_{H_z}|$ — амплитуды функции ослабления компоненты поля H_z — представлено на рис. 3. Для прежних значений $x_p = 600$ км, $a_p = 200$ км, $b_p = 100$ км, но $y_p = 89,285$ км для сравнения приведены кривые, отвечающие различной глубине опускания неоднородности в полость волновода: $h_p = h$ и $h_p = (h - 21)$ км. Неоднородность, опустившаяся в полость волновода, возбуждает ТЕ-компоненту поля значительно сильнее, чем неоднородность, характеризующаяся только изменением электрических свойств на поверхности, не нарушающей геометрию ионосферной стенки волновода [1].

На рис. 4 представлена поверхность $|W_{H_z}(R, y_p)|$ в области $0 < R \leq 2000$ км, $0 \leq y_p \leq 100$ км, рассчитанная при следующих параметрах возмущения: $x_p = 600$ км, $a_p = 200$ км, $b_p = 100$ км, $h_p = (h - 21)$ км. Сравнение её с полученной в случае $h_p = h$ (рис. 5 в [1]) показывает, что, с одной сто-

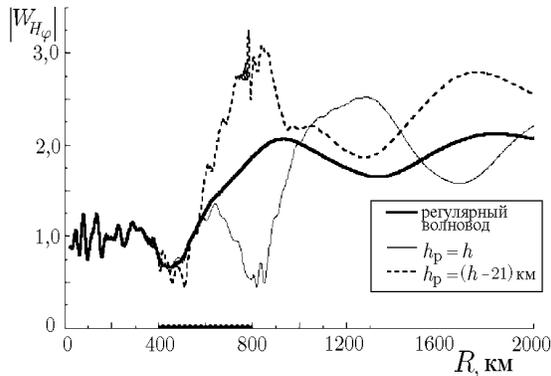


Рис. 2. Функция ослабления основной компоненты поля при различных вертикальных размерах неоднородности

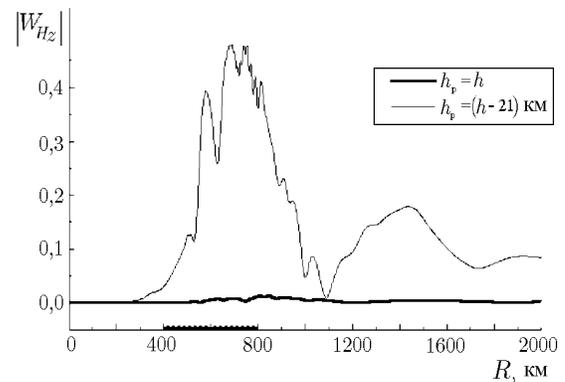


Рис. 3. Функция ослабления вторичной компоненты поля при различных вертикальных размерах неоднородности

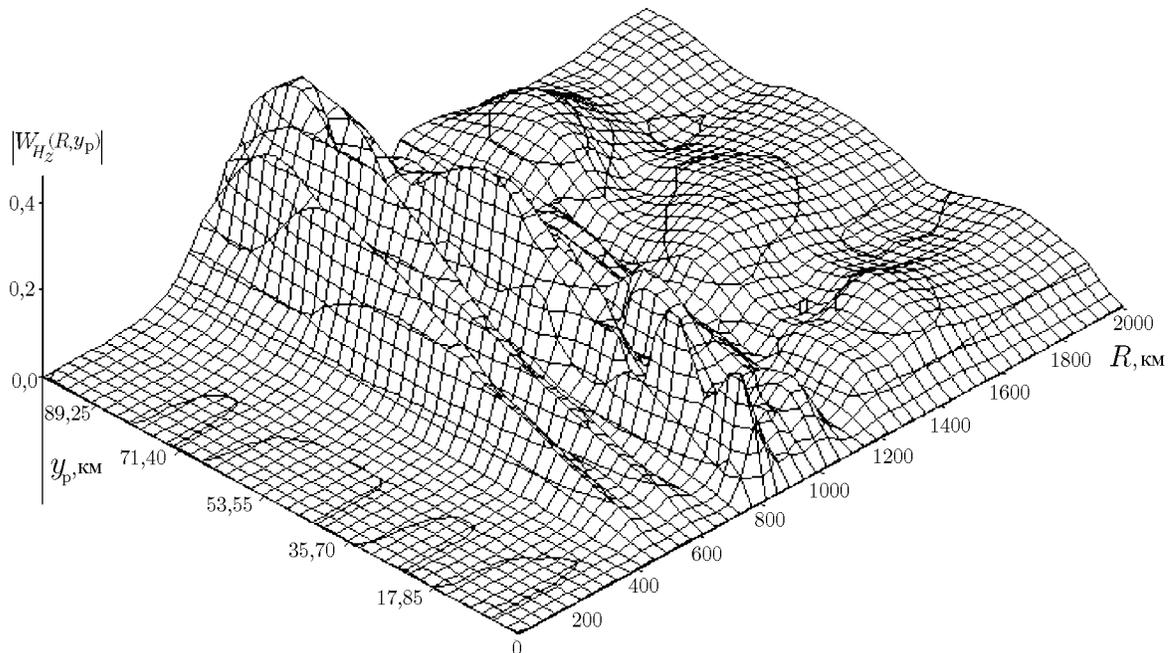


Рис. 4

роны, имеется несомненное сходство формы этих поверхностей (расположение и форма холмов и впадин), а с другой — видно, что значения $|W_{H_z}(R, y_p)|$ для случая неоднородности, опустившейся в волновод, более чем на порядок превосходят значения $|W_{H_z}(R, y_p)|$ в случае неоднородности, остающейся в плоскости ионосферной стенки волновода.

Анализ полученных численных результатов показывает, что учёт вертикального профиля неоднородности значительно расширяет диапазон возможных значений амплитуды вторичной компоненты поля, возникающей за счёт рассеяния электромагнитного излучения на такой трёхмерной локальной неоднородности. Амплитуда первичной компоненты поля может превосходить амплитуду вторичной компоненты уже не на два порядка (как было в случае неоднородности, лежащим в плоскости ионосферной стенки волновода [1]), а только в несколько раз.

ЛИТЕРАТУРА

1. Соловьёв О. В. // Изв. вуз. Радиофизика. 1999. Т. 42, № 5. С. 418.
2. Soloviev O. V., Agarov V. V. // Radio Sci. 1997. V. 32, № 2. P. 515.
3. Molchanov O. A., Hayakawa M. // J. Geophys. Res. 1998. V. 103, № A8. P. 17 489.
4. Rodger C. J., Clilverd M. A., Thomson N. R. // Radio Sci. 1999. V. 34, № 5. P. 1177.
5. Благовещенская Н. Ф., Выставной В. М. и др. // Геомагнетизм и аэрономия. 1990. Т. 30, №3. С. 512.
6. Fitzgerald T. J., Carlos R. C. // Radio Sci. 1997. V. 32, № 1. P. 169.
7. Pashin A. B., Belova E. G., Lyatsky W. B. // J. Atmos. Terr. Phys. 1995. V. 57, № 2. P. 245.
8. Rodger C. J., Wait J. R., Dowden R. L. // J. Atmos. Sol.-Terr. Phys. 1998. V. 60, № 7–9. P. 755.
9. Rodger C. J., Wait J. R., Dowden R. L. // J. Atmos. Sol.-Terr. Phys. 1998. V. 60, № 7–9. P. 765.
10. Rodger C. J., Thomson N. R., Wait J. R. // Radio Sci. 1999. V. 34, № 4. P. 913.
11. Rodger C. J., Nunn D. // Radio Sci. 1999. V. 34, № 4. P. 923.
12. Nunn D. // J. Atmos. Sol.-Terr. Phys. 1997. V. 59, № 5. P. 537.
13. Baba K., Nunn D., Hayakawa M. // Geophys. Res. Lett. 1998. V. 25, № 24. P. 4453.
14. Nunn D., Baba K., Hayakawa M. // J. Atmos. Sol.-Terr. Phys. 1998. V. 60, № 15. P. 1497.
15. Clilverd M. A., Yeo R. F., Nunn D., Smith A. J. // J. Geophys. Res. 1999. V. 104, № A9. P. 19 881.
16. Соловьёв О. В. // Изв. вуз. Радиофизика. 1985. Т. 28, № 10. С. 1236.
17. Кириллов В. В. // Проблемы дифракции и распространения волн: Межвуз. сб. — Л.: ЛГУ, 1979. Вып. 17. С. 57.
18. Соловьёв О. В. // Изв. вуз. Радиофизика. 1988. Т. 31, № 2. С. 240.
19. Соловьёв О. В. // Изв. вуз. Радиофизика. 1990. Т. 33, № 9. С. 1078.
20. Стрэттон Дж. А. Теория электромагнетизма. — М.; Л.: Гостехиздат, 1948.
21. Соловьёв О. В. // Изв. вуз. Радиофизика. 1995. Т. 38, № 8. С. 785.
22. Соловьёв О. В. // Изв. вуз. Радиофизика. 1991. Т. 34, № 8. С. 908.
23. Соловьёв О. В., Агапов В. В. // Изв. вуз. Радиофизика. 1995. Т. 38, № 12. С. 1312.
24. Иткина М. А., Котик Д. С., Кротова З. Н. и др. // Препринт НИРФИ № 162. — Горький, 1983.

Санкт-Петербургский
государственный университет,
г. С.-Петербург, Россия

Поступила в редакцию
3 марта 2000 г.

**DEPOLARIZATION OF THE ELECTROMAGNETIC FIELD IN A LOCALLY INHOMOGENEOUS
EARTH – IONOSPHERE WAVEGUIDE***O. V. Soloviev*

This paper presents a further development of the analytical-numerical method for the solution of three-dimensional problems of subionospheric radio wave propagation. We consider a vector problem of electromagnetic field of vertical electric dipole in a flat model of Earth—ionosphere waveguide with a protruding (recessed) large-scale anisotropic lower ionosphere disturbance. The field components on the boundary surfaces obey the Leontovitch impedance boundary conditions. The problem is reduced to the system of surface integral equations taking into account re-excitation and depolarization of the field scattered from the irregularity. Using the asymptotic (with respect to the parameter $kr \gg 1$) integration along the direction perpendicular to the ray path, we transform this system to the system of one-dimensional contour integral equations. The system is solved numerically in the diagonal approximation. The method of solution combines direct inversion of the Volterra integral operator and subsequent iterations. The proposed original numerical algorithm reduces the computer time necessary to solve the problem. The developed procedure enables to study of both small and comparatively large irregularities. We obtain estimates of the TE field components, that are not excited by the considered source and originate only due to field scattering from the three-dimensional inhomogeneity, that disturbs geometrical regularity of ionospheric waveguide wall.

УДК 514:535:551.501.793

ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА КОМПЛЕКСНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ

Р. А. Егорченков¹, Ю. А. Кравцов²

Предлагается численная схема расчёта волнового поля на основе комплексного обобщения метода геометрической оптики. Основное преимущество комплексного метода заключается в возможности учёта дифракционных эффектов с использованием только обыкновенных дифференциальных уравнений геометрической оптики, что позволяет существенно сократить объём и, следовательно, время вычислений. Эффективность предложенного алгоритма иллюстрируется двумя численными примерами (поле плоской волны за каустикой в линейном слое и поле гауссовского пучка в однородной среде), допускающими сравнение с известными аналитическими решениями.

ВВЕДЕНИЕ

Попытки построения комплексных решений лучевых уравнений предпринимались ещё с 30-х годов, но комплексное обобщение как самостоятельная ветвь геометрической оптики сформировалось значительно позднее, около 30 лет назад (см. обзоры [1, 2]). Комплексная геометрическая оптика частично учитывает дифракционные эффекты, хотя и оперирует только с лучевыми понятиями. Примерами дифракционных эффектов, описываемых комплексной геометрической оптикой, служат проникновение поля в область каустической тени и дифракционное уширение гауссовских пучков.

Попытки аналитически найти комплексные решения уравнений геометрической оптики приводят к успеху лишь для весьма ограниченного круга задач [1, 2]. Поэтому представляется целесообразной разработка численных методов решения уравнений комплексной геометрической оптики. Этой проблеме и посвящена данная статья.

Как известно, численные алгоритмы расчёта полей, основанные на полной волновой теории, требуют весьма больших объёмов вычислений. Применение лучевого метода во многих практически важных случаях (в частности в плавно неоднородных средах) существенно сокращает объём вычислений (см. сборник статей [3] и монографию [4]), однако известные к настоящему времени численные алгоритмы оперируют только с действительными лучами.

В данной работе предлагается численная процедура построения комплексных решений уравнений геометрической оптики (разделы 1 и 2). Эффективность процедуры иллюстрируется двумя примерами, допускающими сравнение с аналитическими результатами: проникновением поля за простую каустик (раздел 3) и дифракционным уширением гауссовского пучка в однородной среде (раздел 4).

1. ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ КОМПЛЕКСНЫХ ЛУЧЕЙ

Рассмотрим двумерную задачу построения комплексных лучей. Пусть начальная поверхность, которую покидают лучи, задана параметрическими уравнениями

$$x = x^0(\xi), \quad y = y^0(\xi), \quad (1)$$

а начальный эйконал и амплитуда поля на этой поверхности равны

$$\psi = \psi^0(\xi), \quad A = A^0(\xi). \quad (2)$$

Предполагается, что волна распространяется в среде с известной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = \varepsilon(x, y)$. Задача состоит в нахождении лучевого поля $A \exp(ik\psi)$ в заданной точке плоскости xy при заданном начальном поле $u^0 = A^0 \exp(ik\psi^0)$. Здесь $k = \omega/c$ — волновое число в вакууме. В рамках комплексной геометрической оптики допускается определённый произвол в выделении начальной комплексной фазы ψ^0 , поскольку к ψ^0 всегда можно отнести и $\ln A^0$. Из рассмотрения некоторых задач можно сделать вывод, что к комплексной фазе ψ^0 целесообразно относить ту часть $\ln A^0$, которая соответствует неоднородным волнам, т. е. волнам с экспоненциальным профилем амплитуды. В частности, удовлетворительное описание дифракционных эффектов в рамках комплексной геометрической оптики достигается в случае гауссовских пучков вида $u^0 = A^0 \exp(-x^2/(2a^2))$, для которых $\psi^0 = i\xi^2/(2ka^2)$ (см. раздел 4). Формулировка универсальных или оптимальных рецептов разделения первичного поля u^0 на амплитудную и фазовую части на данном этапе исследований представляется нам несколько преждевременной.

Обозначая через p и q компоненты «импульса» $\mathbf{p} = \nabla\psi$, запишем лучевые уравнения в гамильтоновой форме [4]:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= p, & \frac{dp}{d\tau} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}, \\ \frac{dy}{d\tau} &= q, & \frac{dq}{d\tau} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y}. \end{aligned} \quad (3)$$

Уравнения (3) дополним начальными условиями

$$\begin{aligned} x^0 &\equiv x(\tau = 0) = x^0(\xi), & p^0 &\equiv p(\tau = 0) = p^0(\xi), \\ y^0 &\equiv y(\tau = 0) = y^0(\xi), & q^0 &\equiv q(\tau = 0) = q^0(\xi), \end{aligned} \quad (4)$$

где $p^0(\xi)$ и $q^0(\xi)$ определяются из соотношений

$$p^0 \frac{\partial x^0}{\partial \xi} + q^0 \frac{\partial y^0}{\partial \xi} = \frac{\partial \psi^0}{\partial \xi}, \quad (p^0)^2 + (q^0)^2 = \varepsilon(x^0(\xi), y^0(\xi)).$$

Предлагаемый ниже численный алгоритм нахождения комплексных лучей формально напоминает методику построения вещественных лучей [3, 4], но оперирует с комплексными лучевыми параметрами ξ и τ , комплексными точками выхода $x^0(\xi)$, $y^0(\xi)$ и комплексными эйконалами. Для построения комплексных лучей придадим параметру τ малое, но конечное приращение $\Delta\tau$ и используем для решения системы лучевых уравнений (3) итерационный процесс Эйлера. На n -ом шаге итерационного процесса для функций x^n , y^n , p^n и q^n на сетке по τ получим

$$\begin{aligned} x^{n+1} &= x^n + p^n \Delta\tau, & p^{n+1} &= p^n + \frac{\Delta\tau}{2} \frac{\partial \varepsilon(x^n, y^n)}{\partial x}, \\ y^{n+1} &= y^n + q^n \Delta\tau, & q^{n+1} &= q^n + \frac{\Delta\tau}{2} \frac{\partial \varepsilon(x^n, y^n)}{\partial y}, \end{aligned} \quad (5)$$

Предполагается, что функция $\varepsilon(x(\tau), y(\tau))$ аналитична в рассматриваемой части комплексной плоскости $\tau'\tau''$, где τ' и τ'' — соответственно действительная и мнимая части лучевого параметра τ [5]. Интегрирование производится вдоль прямой на этой плоскости, изображённой на рис. 1, а в качестве элементарного интервала $\Delta\tau$ берётся значение $\Delta\tau = \tau/N$, где N — общее число шагов, выбираемое

из условия достижения необходимой точности. Точность решения лучевых уравнений можно повысить, используя вместо метода Эйлера более точный метод Рунге—Кутта.

Траектория $X(\xi, \tau)$, $Y(\xi, \tau)$, определяемая из (5), начинается в произвольной комплексной точке выхода $(x^0(\xi), y^0(\xi))$ при $\tau = 0$ и заканчивается в комплексной точке $(x' + ix'', y' + iy'') \equiv \equiv (X(\xi, \tau), Y(\xi, \tau))$. Для того, чтобы вычислить поле в заданной вещественной точке $(x = x', y = y')$, нужно решить систему уравнений

$$X(\xi, \tau) = x, \quad Y(\xi, \tau) = y \quad (6)$$

относительно ξ и τ . Для её решения можно воспользоваться той или иной комплексной процедурой нацеливания («пристрелки») лучей. Следуя одному из вариантов процедуры, зададимся предварительными пристрелочными значениями τ_0 («длина» луча) и ξ_0 (параметр, характеризующий точку выхода луча), которые в общем случае комплексны.

Будем искать параметры лучей, попадающих в действительную точку (x, y) , используя итерационный процесс Ньютона [6] для системы уравнений (6)

$$\begin{pmatrix} \xi_{\alpha+1} \\ \tau_{\alpha+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_{\alpha} \\ \tau_{\alpha} \end{pmatrix} - D^{-1}(\xi_{\alpha}, \tau_{\alpha}) \begin{pmatrix} X(\xi_{\alpha}, \tau_{\alpha}) - x \\ Y(\xi_{\alpha}, \tau_{\alpha}) - y \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где через

$$D(\xi, \tau) = \begin{pmatrix} \frac{\partial X(\xi, \tau)}{\partial \xi} & \frac{\partial X(\xi, \tau)}{\partial \tau} \\ \frac{\partial Y(\xi, \tau)}{\partial \xi} & \frac{\partial Y(\xi, \tau)}{\partial \tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial X(\xi, \tau)}{\partial \xi} & P(\xi, \tau) \\ \frac{\partial Y(\xi, \tau)}{\partial \xi} & Q(\xi, \tau) \end{pmatrix} \quad (8)$$

обозначена матрица Якоби вектор-функции $\begin{pmatrix} X(\xi, \tau) - x \\ Y(\xi, \tau) - y \end{pmatrix}$, совпадающая с матрицей Якоби для лучевых комплекснозначных функций $X(\xi, \tau)$ и $Y(\xi, \tau)$ комплексных аргументов. Эти функции вместе с импульсами $P(\xi, \tau)$ и $Q(\xi, \tau)$ вычисляются путём численного решения лучевых уравнений (3) с начальными условиями (4) посредством итерационного процесса Эйлера (5). Итерационный процесс (7) следует закончить, когда комплексные решения $X(\xi_{\alpha}, \tau_{\alpha})$, $Y(\xi_{\alpha}, \tau_{\alpha})$ приблизятся к заданной вещественной точке (x, y) настолько, что

$$\left| \begin{pmatrix} X(\xi_{\alpha}, \tau_{\alpha}) - x \\ Y(\xi_{\alpha}, \tau_{\alpha}) - y \end{pmatrix} \right| < \Delta\rho, \quad (9)$$

где $\Delta\rho$ — требуемая абсолютная точность пристрелки. Таким образом, начиная со значения (ξ_0, τ_0) , для заданной точки пространства (x, y) мы получаем последовательность комплексных лучей с параметрами $(\xi_{\alpha}, \tau_{\alpha})$, сходящуюся к искомому комплексному лучу, приходящему в эту точку.

Из имеющихся комплексных аналитических решений лучевых уравнений [1, 2] известно, что в заданную точку может прийти одновременно несколько комплексных лучей. В этой связи возникает проблема поиска всех комплексных лучей, пришедших в данную точку. Очевидный приём нахождения полного набора комплексных лучей состоит в переборе множества пристрелочных приближений. Возможно и применение более сложных приёмов: градиентного метода, метода «отжига», вариационного подхода и др. Кроме того, иногда выделяются задачи, исходные данные которых незначительно отличаются от исходных данных другой, более простой («опорной») задачи, которая допускает аналитическое решение в рамках комплексной геометрической оптики. В этом случае искомое число комплексных лучей и предварительные пристрелочные параметры к ним (ξ_0, τ_0) можно позаимствовать из «опорной» задачи.

Важное отличие описанного выше комплексного численного алгоритма от алгоритма построения вещественных лучей связано с тем, что комплексный луч пересекает вещественное подпространство $\{(x', y')\}$ комплексного пространства $\{(x' + ix'', y' + iy'')\}$ только в одной точке, так что при изменении ξ и τ мы вынуждены переходить на новый луч. Поэтому при каждом вычислении значений $X(\xi_\alpha, \tau_\alpha)$ и $Y(\xi_\alpha, \tau_\alpha)$ в процессе (7) необходимо заново повторять весь цикл решения лучевых уравнений (5). Между тем в случае вещественных лучей при изменении τ мы остаёмся на одном и том же луче, что позволяет провести однократное табулирование решения для определённой точки выхода ξ .

Укажем полезную модификацию численного алгоритма, которая в некоторых относительно простых случаях облегчает нахождение полного набора комплексных лучей. Это случаи, когда проницаемость $\varepsilon(x, y)$ допускает аналитическое решение уравнений (3), но уравнения (6) относительно ξ и τ аналитически не разрешимы. В этом случае уравнения (6) допускают численное нахождение всех корней ξ и τ средствами символьной математики. Например, если уравнения (6) содержат только радикалы, возведением в степень им можно придать полиномиальную форму, численно найти все корни полиномов и затем, подставляя их в исходные уравнения, избавиться от лишних корней.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ АМПЛИТУДЫ И ФАЗЫ. РЕЗУЛЬТИРУЮЩЕЕ ВОЛНОВОЕ ПОЛЕ

Если луч, пришедший в заданную точку (x, y) , найден, т. е. найдены параметры луча ξ и τ , проходящего через эту точку, то амплитуду и эйконал волны можно вычислить по обычным формулам геометрической оптики [4]:

$$A = \frac{A^0(\xi)}{\sqrt{\det D(\xi, \tau) / \det D(\xi, 0)}}, \quad (10)$$

$$\psi = \psi^0(\xi) + \int_0^\tau \varepsilon(X(\xi, \tau), Y(\xi, \tau)) d\tau. \quad (11)$$

Вычисление эйконала можно включить в итерационный процесс, добавив к системе уравнений (6) выражение $\psi^{n+1} = \psi^n + \varepsilon(x^n, y^n) \Delta\tau$, тем самым сразу проводя численное интегрирование (11) по прямой на комплексной плоскости $\tau'\tau''$, изображённой на рис. 1.

Комплексные лучи, которым отвечает экспоненциально большой вклад в результирующее поле, необходимо отбрасывать в силу правил селекции «нефизических» комплексных лучей [1, 2]. Условие нефизичности найденного луча является неравенство $\text{Re}(i\psi) > 0$, или $\text{Im}(\psi) < 0$, обеспечивающее экспоненциальный рост множителя $\exp(ik\psi)$. Результирующее поле определяется суммой всех «физических» комплексных лучей, приходящих в точку наблюдения (x, y) :

$$u = \sum_{s=1}^S A_s e^{ik\psi_s}. \quad (12)$$

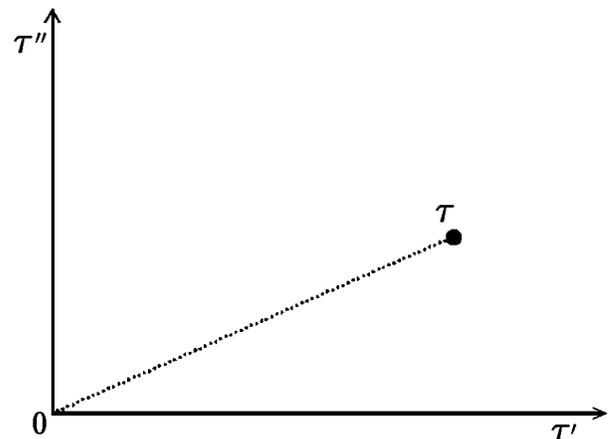


Рис. 1. Путь интегрирования лучевых уравнений на комплексной плоскости $\tau'\tau''$. Интегрирование проводится каждый раз, когда требуется вычислить значения функций $X(\xi, \tau)$ и $Y(\xi, \tau)$

Правила селекции нефизических лучей в областях каустической тени обычно обосновывают путём сравнения геометрического решения с более общим равномерно-асимптотическим решением [1, 2, 7]: нефизические лучи отбрасываются, если равномерная асимптотика не содержит нарастающих слагаемых. Равномерная асимптотика подтверждает наличие экспоненциально нарастающих слагаемых разве что в области туннелирования под потенциальным барьером. При достаточно большой ширине барьера вклад экспоненциально растущих полей становится пренебрежимо малым, так что правила селекции нефизических лучей де факто распространяются и на подбарьерные поля.

3. ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЕ ОСЛАБЛЕНИЕ ПОЛЯ В ОБЛАСТИ КАУСТИЧЕСКОЙ ТЕНИ

В качестве первого примера рассмотрим задачу о падении плоской волны на линейный слой, т. е. на слой, диэлектрическая проницаемость которого линейно убывает с ростом y :

$$\varepsilon(y) = 1 - ay. \quad (13)$$

Начальный эйконал $\psi^0 = n^0 \xi \sin \theta$, отвечающий плоской волне, зададим на прямой $x^0 = \xi$, $y^0 = 0$. Здесь $n^0 = \sqrt{\varepsilon(x^0(\xi), y^0(\xi))}$, θ — угол падения плоской волны. В этом случае $p^0 = n^0 \sin \theta$, $q^0 = n^0 \cos \theta$.

Аналитическое решение данной задачи в области света представляет собой сумму двух интерферирующих слагаемых, тогда как в области тени (за каустикой) решение содержит только одно экспоненциально убывающее слагаемое [1], являющееся асимптотикой точного решения волновой задачи

$$u_{\text{точн}} = 2 \sqrt{\pi \cos \theta} \left(\frac{k}{a}\right)^{1/6} \text{Ai} \left[(k^2 a)^{1/3} \left(y - \frac{\cos^2 \theta}{a} \right) \right], \quad (14)$$

выражающегося через функцию Эйри $\text{Ai}(z)$ (см., например, [8]).

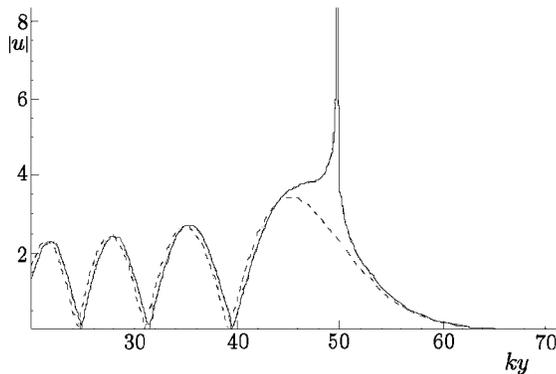


Рис. 2. Модуль волнового поля в случае падения плоской волны под углом $\theta = \pi/4$ на слой с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 1 - y/(100\lambda)$, где λ — длина волны в вакууме.

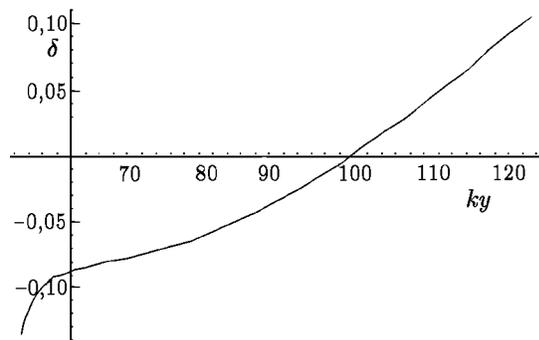


Рис. 3. Погрешность численного решения задачи о падении плоской волны на линейный слой относительно точного решения

Численный алгоритм обеспечивает хорошее согласие с аналитическим решением (14) всюду, за исключением узкой области в окрестности каустики $ay = \cos^2 \theta$, где лучевое решение расходится. На рис. 2 показаны результаты численного расчёта зависимости модуля волнового поля $|u|$ от вертикальной координаты y при $a = 0,01k/(2\pi)$; $\theta = \pi/4$. Пунктирная кривая соответствует точному аналитическому решению (14), сплошная — численному расчёту по методу комплексной геометрической оптики.

В области тени (за каустикой) экспоненциально нарастающее решение, соответствующее нефизическому комплексному лучу, отброшено, тогда как другое слагаемое, отвечающее экспоненциально затухающему полю, описывается численным алгоритмом с хорошей точностью. Это можно увидеть из рис. 3, где показана зависимость относительной погрешности $\delta = (|u_{\text{точн}}| - |u_{\text{числ}}|)/|u_{\text{точн}}|$ от координаты y . В достаточно широком диапазоне y невязка δ не превышает 5 % при двухстах итерациях по схеме Эйлера. Рост относительной невязки при больших y неизбежен и связан с экспоненциальным ослаблением самого поля.

4. ДИФРАКЦИЯ ГАУССОВСКОГО ПУЧКА В ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Пусть на начальной поверхности $x^0 = \xi$, $y^0 = 0$ первичное поле имеет форму гауссовского пучка

$$u^0 = \exp\left(-\frac{\xi^2}{2a^2}\right), \quad (15)$$

которому отвечает комплексный начальный эйконал $\psi^0 = i\xi^2/(2ka^2)$. В данном случае $p^0 = i\xi/(ka^2)$, $q^0 = \sqrt{1 - (p^0)^2}$.

Задача нахождения поля гауссовского пучка с помощью комплексных лучей была аналитически решена в работе [1] (для случая $|\xi| \ll ka^2$), а также в ряде последующих работ, указанных в обзоре [2]. Здесь излагаются результаты численного решения этой задачи.

При численных расчётах поля гауссова пучка принято, что начальная ширина пучка составляет $a = 10\lambda$, где λ — длина волны в вакууме. В данном случае в силу однородности среды численное решение лучевых уравнений фактически совпадает с их аналитическим решением:

$$x = \xi + \frac{i\xi\tau}{a^2k}, \quad y = \tau \left(1 + \frac{\xi^2}{a^4k^2}\right)^{1/2}. \quad (16)$$

Обращение же уравнений (16), т. е. нахождение параметров ξ и τ , приводит к весьма громоздким аналитическим выражениям.

В данном случае в каждую точку с координатами (x, y) попадают два комплексных луча, их легко определить численно по упомянутому в конце раздела 1 модифицированному алгоритму. Один из этих лучей является нефизическим, т. е. даёт экспоненциально нарастающее поле. Поле же, связанное с «физическим» лучом, описывает дифракцию пучка при распространении его вдоль оси y . На рис. 4 показаны графики зависимости абсолютной величины волнового поля $|u|$ от поперечной к оси пучка координаты x на расстояниях $y = 100\lambda$ и $y = 1000\lambda$ от начальной плоскости $y = 0$.

Численное решение, представленное на рис. 4, с графической точностью совпадает с аналитическим решением параболического уравнения с начальным условием (15)

$$u(x, y) = \left(1 + \frac{iy}{ka^2}\right)^{-1/2} \exp\left[iky - \frac{x^2}{2a^2} \left(1 + \frac{iy}{ka^2}\right)^{-1}\right], \quad (17)$$

так что численный алгоритм нахождения поля по комплексному методу геометрической оптики адекватно описывает дифракционное расплывание гауссовского пучка.

На рис. 5 показана зависимость относительной невязки $\delta = (|u_{\text{числ}}| - |u|)/|u_{\text{числ}}|$ между численным решением по комплексному методу геометрической оптики и решением по методу параболического уравнения от поперечной к оси пучка координаты x на расстоянии $y = 1000\lambda$ от начальной плоскости $y = 0$. Как и следовало ожидать, существенные отклонения появляются лишь на расстояниях,

заметно превышающих текущую ширину пучка, т. е. в области экспоненциальной малости поля, где нет необходимости в большой точности вычислений. Действительно, при отклонении $x = 60\lambda$ от оси пучка поле ослабевает примерно в 160 раз по сравнению с центром пучка, тогда как численное решение по методу комплексной геометрической оптики отличается от дифракционного решения (17) не более чем на 0,4 %.

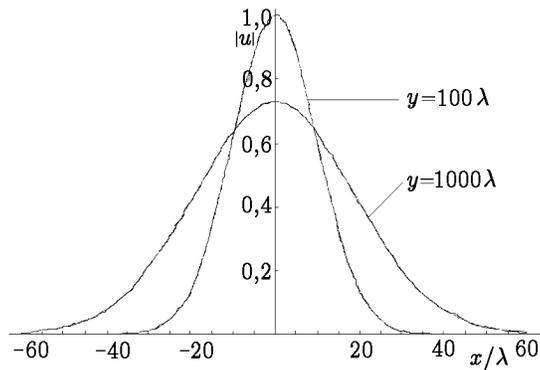


Рис. 4. Волновое поле в поперечном сечении гауссовского пучка в однородной среде на расстояниях $y = 100\lambda$ и $y = 1000\lambda$ от начальной плоскости $y = 0$. Начальная ширина гауссовского пучка 10λ . Вычисления по комплексному методу геометрической оптики совпадают с точным решением параболического уравнения с графической точностью

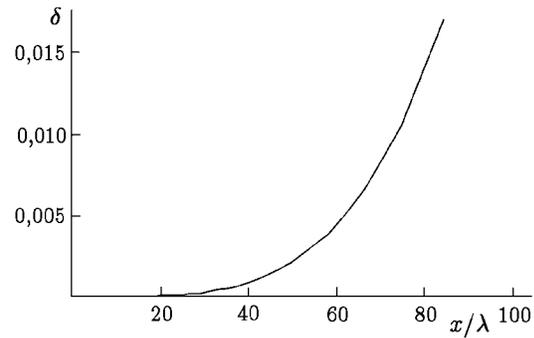


Рис. 5. Относительная разность между полем, рассчитанным по численному алгоритму, и точным решением (17) параболического уравнения. Погрешностью численной схемы здесь можно пренебречь, так как в силу однородности среды численное решение лучевых уравнений совпадает с аналитическим, а погрешность пристрелки сравнима с машинной точностью

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Оценивая достоинства и недостатки описанного алгоритма, отметим прежде всего, что комплексный метод геометрической оптики основан на решении обыкновенных дифференциальных уравнений. Поэтому численная схема, предоставляемая комплексным лучевым методом, обеспечивает существенно меньший объем вычислений, чем решение полной дифракционной задачи, которая оперирует с уравнениями в частных производных.

Другое достоинство состоит в способности метода рассчитывать волновые поля в произвольно (но плавно) неоднородных средах, не допускающих разделения переменных.

Основная трудность численной схемы комплексной геометрической оптики заключается в необходимости нахождения полного набора комплексных лучей, формирующих поле. Во многих случаях эту проблему удаётся решить, если использовать опорные задачи и прибегать к описанной в конце раздела 1 модификации численного алгоритма.

Численной схеме, основанной на методе геометрической оптики, присущ, разумеется, недостаток самого геометрикооптического подхода, который неприменим в непосредственной окрестности каустик (см. раздел 3, рис. 3). Этот недостаток, однако, можно устранить путём применения в численной схеме метода эталонных функций и/или метода Маслова, которые также могут опираться на комплексные решения лучевых уравнений [9, 2].

В заключение авторы выражают благодарность Ю. Н. Черкашину, М. Борнатичи (M. Bognatici) и Э. Поли (E. Poli) за стимулирующие дискуссии. Кроме того, один из авторов (Ю. А. Кравцов) благода-

рит РФФИ (проект 98–02–16217) и ФЦП «Интеграция» (проект А–0030/99) за частичную поддержку данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кравцов Ю. А. // Изв. вуз. Радиофизика. 1967. Т. 10, № 9–10. С. 1283.
2. Kravtsov Yu. A., Forbes G. W., Asatryan A. A. // Progress in Optics. 1999. V. 39. P. 1.
3. Лучевое приближение и вопросы распространения радиоволн. — М.: Наука, 1971.
4. Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И. Геометрическая оптика неоднородных сред. — М.: Наука, 1980.
5. Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1977.
6. Федоренко Р. П. Введение в вычислительную физику. — М.: МФТИ, 1994.
7. Kravtsov Yu. A., Orlov Yu. I. Caustics, Catastrophes and Wave Fields. — Berlin, Heidelberg: Springer Verlag, 1998.
8. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. — М.: Наука, 1973.
9. Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И. // УФН. 1983. Т. 141, № 4. С. 591.

¹ Московский педагогический
государственный университет и
Орский
гуманитарно-технологический
институт (филиал Оренбургского
государственного университета, ²
Институт космических
исследований РАН, Центр
космических исследований ПАН

Поступила в редакцию
19 ноября 1999 г.

NUMERICAL REALIZATION OF THE COMPLEX GEOMETRIC OPTICS METHOD

R. A. Egorchenkov and Yu. A. Kravtsov

A numerical method for calculation of a wave field on the basis of the complex geometric optics is proposed. The main advantage of the complex geometric optics method is the possibility to take into account the diffraction effects using only ordinary differential ray equations of geometric optics. This allows one to considerably reduce computation time. The efficiency of the proposed algorithm is illustrated by two numerical examples: the field of a plane wave in a linear layer and Gaussian-beam field in an homogeneous media. Using these examples, we show a good agreement with the known analytical solutions.

К ТЕОРИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ КОРОТКИХ СВЕТОВЫХ ИМПУЛЬСОВ В ТУРБУЛЕНТНОЙ СРЕДЕ

А. И. Кон

Рассмотрена задача о распространении световых импульсов в турбулентной среде. В рамках использованного приближённого подхода получена формула для средней интенсивности импульсного сигнала, на основании которой можно оценить временную задержку импульса и его уширение. Выявлены характерные временные масштабы, определяющие трансформацию светового импульса в турбулентной среде, с помощью качественного рассмотрения объяснён их физический смысл. Проведены количественные оценки, показывающие, что рассмотренные эффекты в земной атмосфере могут оказаться существенными только для очень коротких пикосекундных импульсов.

При распространении импульсных сигналов в турбулентной среде даже в отсутствие дисперсии происходит трансформация волнового поля, приводящая в первую очередь к групповому запаздыванию (временной задержке) и уширению импульсов (увеличению их длительности). Точное решение этой задачи не найдено, и в литературе используются различные приближённые методы (см., например, [1–4]). Однако большинство из них, будучи достаточно сложными, не дают даже ответ на вопрос, какие физические параметры являются в данной задаче определяющими. Это связано с тем, что обычно используются или численные методы, или асимптотические приближения, не дающие универсальных аналитических зависимостей.

Отдавая себе отчёт в некоторой ограниченности такого подхода, в данной работе оценку группового запаздывания и уширения импульсных сигналов мы будем производить по средней интенсивности, используя метод плавных возмущений (МПВ) применительно к распространению импульса гауссовской формы. Представляется, что МПВ достаточен для описания во всём практическом диапазоне изменения параметров, поскольку, как будет видно из дальнейшего, главную роль в нашем случае играют фазовые флуктуации, как известно, хорошо описываемые МПВ [5].

Стоит проявлять некоторую осторожность при физической интерпретации при использовании удобных для расчётов гауссовских импульсов, имеющих бесконечные «хвосты». Строго говоря, необходимо рассматривать реальную задачу с шумами, а началом (и, соответственно, концом) импульса считать момент пересечения уровня шумов. Однако если ставить целью не получение точного количественного решения для конкретной формы импульса, а лишь выяснение основных физических закономерностей и характерных масштабов задачи, то, соблюдая известную осторожность в предельных переходах, можно ограничиться указанной выше идеализированной постановкой.

1. Пусть электромагнитный импульс с плоским фазовым фронтом распространяется вдоль оси z в турбулентной среде. Представим поле $U(z, t)$ на оси в виде разложения по монохроматическим гармоникам $\hat{U}(z, \omega)$:

$$U(z, t) = \int \hat{U}(z, \omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (1)$$

Выразим $\hat{U}(z, \omega)$, как это обычно делается в МПВ, через поле $\hat{U}_0(z, \omega)$ в однородной среде и комплексную фазу Ψ [5]:

$$\hat{U}(z, \omega) = \hat{U}_0(z, \omega) \exp\{\Psi(z, \omega)\}, \quad (2a)$$

$$\Psi(z, \omega) = \chi(z, \omega) + iS(z, \omega), \quad (2б)$$

где χ и S — флуктуации логарифма амплитуды (уровня) и фазы монохроматической волны на частоте ω .

Оценим трансформацию импульса в статистически однородной турбулентной среде в момент времени t по средней интенсивности, определяемой как

$$\langle I(z, t) \rangle = \langle U(z, t)U^*(z, t) \rangle, \quad (3)$$

где угловые скобки означают усреднение по ансамблю реализаций. Используя (1) и (2), для $\langle I(z, t) \rangle$ получим

$$\langle I(z, t) \rangle = \int d\omega_1 \int d\omega_2 \hat{U}_0(z, \omega_1) \hat{U}_0^*(z, \omega_2) e^{-i(\omega_1 - \omega_2)t} \Gamma_2(z, \omega_1, \omega_2), \quad (4)$$

где введена частотно-разнесённая функция когерентности второго порядка в турбулентной среде, определяемая формулой

$$\Gamma_2(z, \omega_1, \omega_2) = \langle \exp\{\Psi(z, \omega_1) + \Psi^*(z, \omega_2)\} \rangle. \quad (5)$$

Наша задача свелась, таким образом, к отысканию функции Γ_2 .

2. Будем считать, что комплексная фаза

$$\Psi(z, \omega_i) \equiv \Psi_i = \chi_i + iS_i$$

распределена нормально и, кроме того, воспользуемся соотношениями, вытекающими из второго приближения МПВ [6]:

$$\langle \chi_i \rangle = -\langle \chi_i^2 \rangle, \quad \langle S_i \rangle = -\langle \chi_i S_i \rangle. \quad (6)$$

Имея в виду известный результат для гауссовской характеристической функции

$$\langle \exp(\zeta) \rangle = \exp\left\{ \langle \zeta \rangle + (\langle \zeta^2 \rangle - \langle \zeta \rangle^2)/2 \right\} \quad (7)$$

и используя (2б) и (6), получим

$$\Gamma_2(z, \omega_1, \omega_2) = \exp\{-D_{\psi\psi^*}(\omega_1, \omega_2)/2 + i\theta(\omega_1, \omega_2)\}. \quad (8)$$

Здесь структурная функция комплексной фазы

$$D_{\psi\psi^*}(\omega_1, \omega_2) = \langle |\Psi_1 - \Psi_2|^2 \rangle, \quad (9)$$

а мнимая добавка в экспоненте

$$\theta(\omega_1, \omega_2) = \langle \chi_1 S_2 \rangle - \langle \chi_2 S_1 \rangle. \quad (10)$$

Чтобы отыскать $D_{\psi\psi^*}$ и θ , воспользуемся приведённым в [5] выражением для комплексной фазы плоской волны с волновым числом $k = \omega/c$, где c — скорость света в вакууме:

$$\Psi(z, \omega) = \frac{ik}{2} \int_0^z dz' \int d^2\kappa \exp\left\{ \frac{\kappa^2(z - z')}{2ik} \right\} g_\varepsilon(z', \kappa). \quad (11)$$

Входящий сюда стохастический спектр g_ε связан с флуктуациями диэлектрической проницаемости ε в плоскости $z = \text{const}$:

$$\varepsilon(z, \rho) = \int e^{-i\kappa\rho} g_\varepsilon(z, \rho) d^2\kappa,$$

и имеет следующие статистические свойства:

$$\langle g_\varepsilon(z_1, \kappa_1) g_\varepsilon^*(z_2, \kappa_2) \rangle = 2\pi \delta(z_1 - z_2) \delta(\kappa_1 - \kappa_2) \Phi_\varepsilon(z_1, \kappa_1), \quad (12)$$

где δ — дельта-функция, а $\Phi_\varepsilon(z_1, \boldsymbol{\kappa})$ — трёхмерный спектр пульсаций ε .

Для структурной функции (9), используя (11) и (12), после простых интегрирований получим

$$D_{\psi\psi^*} = \frac{\pi}{2} (k_1^2 + k_2^2) \int_0^z dz' \int d^2\kappa \Phi_\varepsilon(z', \boldsymbol{\kappa}) - k_1 k_2 \int_0^z dz' \int d^2\kappa \cos\left(\frac{\kappa^2 z' (k_1 - k_2)}{k_1 k_2}\right) \Phi_\varepsilon(z', \boldsymbol{\kappa}). \quad (13)$$

Если турбулентность статистически однородна, то Φ_ε не зависит от z' , и (13) преобразуется к виду

$$D_{\psi\psi^*} = \frac{\pi z}{2} \int \Phi_\varepsilon(\boldsymbol{\kappa}) \left[k_1^2 + k_2^2 - 2k_1 k_2 \frac{k_1 k_2}{\kappa^2 (k_1 - k_2) z} \sin \frac{\kappa^2 (k_1 - k_2) z}{k_1 k_2} \right] d^2\kappa. \quad (14)$$

Здесь удобно ввести переменные

$$\Delta k = k_1 - k_2, \quad \bar{k} = (k_1 + k_2)/2 \quad (15)$$

(для частот это соответствует переходу к $\bar{\omega} = c\bar{k}$, $\Delta\omega = c\Delta k$). В этих обозначениях формуле (14) можно придать следующий вид:

$$D_{\psi\psi^*} = \frac{\pi z}{2} \int \Phi_\varepsilon(\boldsymbol{\kappa}) \left\{ 2\bar{k}^2 [1 - F(\kappa)] + (\Delta k)^2 [1 + F(\kappa)]/2 \right\} d^2\kappa, \quad (16)$$

где введена функция

$$F(\kappa) = \frac{\bar{k}^2 - (\Delta k)^2/4}{\kappa^2 z \Delta k} \sin \frac{\kappa^2 z \Delta k}{\bar{k}^2 - (\Delta k)^2/4}.$$

Можно предположить, что вклад второго слагаемого в фигурных скобках (16) мал, т. к. мало отношение

$$\frac{\Delta k}{\bar{k}} \sim \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \sim \frac{1}{\omega_0 \tau_0} \ll 1, \quad (17)$$

где ω_0 — несущая частота, τ_0 — длительность импульса. Тем не менее, мы произведём оценку вклада этого слагаемого, т. к. функция $F(\kappa)$ входит в (16) с противоположными знаками, что может привести к различному влиянию низкочастотных компонент спектра турбулентности.

Для функции (10) аналогично (16) можно получить

$$\theta = \frac{\pi (\bar{k}^2 - (\Delta k)^2/4)^2}{\Delta k} \int \frac{\Phi_\varepsilon(\boldsymbol{\kappa})}{\kappa^2} \left[1 - \cos \frac{\kappa^2 z \Delta k}{2 (\bar{k}^2 - (\Delta k)^2/4)} \right] d^2\kappa. \quad (18)$$

При конкретных расчётах $D_{\psi\psi^*}$ и θ воспользуемся модификацией [5] обуховского спектра турбулентности

$$\Phi_\varepsilon(\boldsymbol{\kappa}) = A_0 C_\varepsilon^2 \kappa^{-11/3} \left[1 - \exp\left(-\kappa^2/\kappa_0^2\right) \right], \quad (19)$$

где $A_0 = 0,033$; C_ε^2 — структурная постоянная флуктуаций ε ; $\kappa_0 = 2\pi/L_0$ — минимальное волновое число, соответствующее внешнему масштабу турбулентности L_0 . Подставляя (19) в (16) и (18) и вычисляя интегралы, нетрудно получить с точностью до членов порядка $(\Delta\omega/\omega_0)^2$ следующее выражение для частотно-разнесённой функции когерентности:

$$\begin{aligned} \Gamma_2(z, \bar{\omega}, \Delta\omega) = & \quad (20) \\ = \exp \left\{ -b_1 C_\varepsilon^2 \bar{\omega}^{1/3} (\Delta\omega)^{5/6} c^{-7/6} z^{11/6} - b_2 C_\varepsilon^2 (\Delta\omega)^2 c^{-2} z \kappa_0^{-5/3} - i b_3 C_\varepsilon^2 \bar{\omega}^{1/3} (\Delta\omega)^{5/6} c^{-7/6} z^{11/6} \right\}, \end{aligned}$$

где численные константы $b_1 = (18/55)A_0\pi^2\Gamma(1/6)\sin(\pi/12) \approx 0,15$; $b_2 = (3/5)A_0\pi^2\Gamma(1/6) \approx 1,1$; $b_3 = (9 \cdot 2^{1/6}/55)A_0\pi^2\Gamma(1/6)\cos(\pi/12) \approx 0,32$. Отношение первого члена в экспоненте (20) имеет

порядок $(\omega_0\tau_0)^{7/6}(\kappa_0^2 z/k)^{5/6}$. Так как $\omega_0\tau_0 \gg 1$, то первый член обычно является главным, но следует иметь в виду, что при $\sqrt{\lambda z} \ll L_0$, где $\lambda = 2\pi/k$ — длина волны излучения, ситуация может быть и обратной.

Если вспомнить, что полоса когерентности $\Delta\omega_c$ определяется как характерный масштаб убывания модуля комплексной степени когерентности

$$\gamma(\omega_1, \omega_2) = \frac{\Gamma(\omega_1, \omega_2)}{\sqrt{\Gamma(\omega_1, \omega_1)\Gamma(\omega_2, \omega_2)}}$$

по разностному аргументу $\Delta\omega$, то мнимый член в экспоненте (20) не влияет на $\Delta\omega_c$, но, как будет понятно из дальнейшего, оказывает влияние на временную задержку импульса.

3. Вернёмся теперь к расчёту средней интенсивности импульса. Для определённости сразу зададим его исходную форму в следующем простом виде:

$$U_0(z, t) = U_0 \exp \left\{ -\frac{(t - z/c)^2}{2\tau_0^2} - i\omega_0(t - z/c) \right\}. \quad (21)$$

Для фурье-образа в этом случае имеем

$$\hat{U}_0(z, \omega) = \frac{U_0\tau_0}{\sqrt{2\pi}} \exp\{i\omega z/c - (\omega - \omega_0)^2\tau_0^2/2\}. \quad (22)$$

Подставляя (22) и (20) в (4), получим

$$\langle I(z, t) \rangle = \frac{U_0^2\tau_0^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\bar{\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} d(\Delta\omega) \exp\{-(\bar{\omega} - \omega_0)^2\tau_0^2 - (\Delta\omega)^2\tau_0^2/4 - i\Delta\omega(t - z/c) - (b_1 + ib_3)C_\varepsilon^2\bar{\omega}^{1/3}(\Delta\omega)^{5/6}c^{-7/6}z^{11/6} - b_2C_\varepsilon^2(\Delta\omega)^2c^{-2}z\kappa_0^{-5/3}\}. \quad (23)$$

Введём новые переменные интегрирования $x = \Delta\omega\tau_0$, $y = \bar{\omega}/\omega_0$, и выражение для средней интенсивности примет вид

$$\langle I(z, t) \rangle = \frac{U_0^2\omega_0\tau_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp \left\{ -\omega_0^2\tau_0^2(1-y)^2 - \frac{x^2}{4} - ix\frac{t-z/c}{\tau_0} - \left(\frac{\tau_\perp x}{\tau_0}\right)^{5/6} y^{1/3} - \left(\frac{\tau_\parallel x}{\tau_0}\right)^2 - i\frac{b_3}{b_1} \left(\frac{\tau_\perp x}{\tau_0}\right)^{5/6} y^{1/3} \right\}. \quad (24)$$

Здесь введены два характерных временных масштаба

$$\tau_\perp = (b_1C_\varepsilon^2\omega_0^{1/3}c^{-7/6}z^{11/6})^{6/5}, \quad (25)$$

$$\tau_\parallel = (b_2C_\varepsilon^2zc^{-2}\kappa_0^{-5/3})^{1/2}. \quad (26)$$

Именно соотношение этих масштабов с исходной длительностью импульса τ_0 определяет в конечном итоге временную трансформацию импульсов в турбулентной среде.

Заметим, что характерное время τ_\parallel , записанное, правда, в несколько иной форме, было получено в ряде работ (см., например, [2]), а существование τ_\perp ранее не обсуждалось. Физический смысл этих масштабов будет пояснён ниже.

Если импульс достаточно узкополосный ($\omega_0\tau_0 \gg 1$), то одно интегрирование в (24) можно приближённо выполнить, после чего выражение для средней интенсивности принимает вид

$$\langle I(z, t) \rangle \approx \frac{U_0^2}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -\frac{x^2}{4} - ix \frac{t - z/c}{\tau_0} - \left(\frac{\tau_{\perp} x}{\tau_0} \right)^{5/6} - \left(\frac{\tau_{\parallel} x}{\tau_0} \right)^2 - i \frac{b_3}{b_1} \left(\frac{\tau_{\perp} x}{\tau_0} \right)^{5/6} \right\} dx. \quad (27)$$

Как следует из (27), пока τ_0 удовлетворяет неравенствам

$$(\tau_{\parallel}/\tau_0)^2 \ll 1, \quad (\tau_{\perp}/\tau_0)^{5/6} \ll 1, \quad (28)$$

временное запаздывание импульса и его уширение имеют вид малых поправок к невозмущённому сигналу.

Если, учитывая близость $x^{5/6}$ к x , заменить для приближённой оценки, как это делается в ряде работ (см., например, [7]) $x^{5/6}$ на x , то мнимая часть показателя экспоненты (27) будет вносить вклад только в групповое запаздывание импульса, которое оказывается порядка $\Delta t \sim z/c + \tau_{\perp}$. Это утверждение трудно доказать в общем виде, однако из (27) видно, что при $\tau_{\perp} \ll \tau_0$ временная задержка импульса стремится к нулю.

Если неравенства (28) не выполняются или справедливо лишь одно из них, то конкретный результат может быть получен численным интегрированием (27).

4. Для прояснения физического смысла характерных времён τ_{\parallel} и τ_{\perp} получим их из наглядных физических соображений.

Как видно из (26), время τ_{\parallel} зависит от κ_0 и, стало быть, связано с влиянием самых крупных неоднородностей, с размерами порядка L_0 . В самом деле, время запаздывания из-за прохождения одной такой неоднородности

$$\Delta t \sim \frac{L_0}{c} \delta n,$$

средний квадрат которого

$$\langle (\Delta t)^2 \rangle \sim \frac{L_0^2}{c^2} \langle (\delta n)^2 \rangle.$$

Так как число таких неоднородностей на трассе длиной z приблизительно составляет z/L_0 , то суммарное среднеквадратическое запаздывание будет порядка

$$\langle (\Delta t)^2 \rangle_{\text{полн}} \sim \frac{L_0^2 z}{c^2} \langle (\delta n)^2 \rangle. \quad (29)$$

Согласно закону Обухова, для самых крупных неоднородностей

$$\langle (\delta n)^2 \rangle \sim C_n^2 L_0^{2/3}, \quad (30)$$

где $C_n^2 = C_\varepsilon^2/4$. Подставляя (30) в (29), получаем для характерного масштаба τ_{\parallel} , обусловленного продольным удлинением лучей, оценку

$$\tau_{\parallel} \sim \sqrt{\langle (\Delta t)^2 \rangle_{\text{полн}}} \sim C_n^2 z^{-1/2} c^{-1} L_0^{5/6},$$

что качественно совпадает с (26).

Помимо продольного удлинения, соответствующее влияние должно оказывать и поперечное смещение лучей, приводящее к дополнительным фазовым набегам. Оценим его.

Из простых геометрических соображений видно, что при малом поперечном смещении $\delta\rho$ луча на пути z дополнительный набег $\delta z \sim (\delta\rho)^2/z$. В то же время для неоднородностей масштаба l известно [6], что

$$\langle \delta\rho^2 \rangle \sim C_n^2 z^3 l^{-1/3}. \quad (31)$$

В нашем случае роль масштаба l играет поперечный радиус когерентности ρ_c в волне, т. к. лучи, проходящие извне его, уже не интерферируют. Вспоминая, что [5]

$$\rho_c \sim (C_n^2 k^2 z)^{-3/5},$$

имеем

$$\langle (\delta\rho)^2 \rangle \sim (C_n^2 z^{8/3} k^{1/3})^{6/5}. \quad (32)$$

Для вариации фазового пути δz получаем

$$\delta z \sim (C_n^2 z^{11/6} k^{1/3})^{6/5},$$

следовательно, для времени задержки с учётом $k \approx \omega_0/c$ имеем

$$\delta t \sim \delta z/c \sim (C_n^2 \omega_0^{1/3} c^{-7/6} z^{11/6})^{6/5},$$

что совпадает с характерным временем (25).

5. В заключение произведём оценку характерных масштабов τ_{\parallel} и τ_{\perp} в земной атмосфере. Для трассы $z \sim 10$ км, структурной постоянной $C_n^2 \sim 10^{-14}$ см^{-2/3} и при длине волны $\lambda = 0,63$ мкм получается $\tau_{\perp} \sim 3 \cdot 10^{-13}$ с.

Для оценки времени τ_{\parallel} зададимся высотой луча $H \sim 10$ м над поверхностью земли ($L_0 \sim H$), при этом для тех же z и C_n^2 получим $\tau_{\parallel} \sim 6,5 \cdot 10^{-14}$ с, т. е. близко к величине τ_{\perp} . Отсюда можно сделать практический вывод, что временной трансформации в атмосфере подвергаются только очень короткие импульсы. Существенным этот эффект может оказаться только для импульсов с пикосекундной длительностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ерухимов Л. М., Зарницына И. Г., Корш П. И. // Изв. вуз. Радиофизика. 1973. Т. 16, № 4.
2. Исимару А. Распространение и рассеяние света в случайно-неоднородных средах. Т. 2. — М.: Мир, 1978.
3. Yeh R. S. // IEEE Trans. 1976. V. 12.
4. Liu C. H., Yeh K. C. // JOSA. 1977. V. 67, № 9.
5. Гурвич А. С., Кон А. И., Миронов В. Л., Хмелевцов С. С. Лазерное излучение в турбулентной атмосфере. — М.: Наука, 1976.
6. Татарский В. И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. — М.: Наука, 1967.
7. Миронов В. Л. Распространение лазерного пучка в турбулентной атмосфере. — Новосибирск.: Наука, 1981.

Институт физики атмосферы
им. А. М. Обухова, г. Москва,
Россия

Поступила в редакцию
6 сентября 1999 г.

ON THE THEORY OF SHORT LIGHT PULSE PROPAGATION IN A TURBULENT MEDIUM*A. I. Kon*

We consider a problem on light-pulse propagation in a turbulent medium. In the framework of the adopted approximation, we obtain a formula for the mean intensity of a pulsed signal. Using this formula, one can estimate the time delay and broadening of a signal. We point out the characteristic temporal scales which determine transformation of a light pulse in a turbulent medium. Physical meaning of these times is clarified by qualitative analysis. We present quantitative estimates for the Earth's atmosphere and show that the effects considered can be pronounced only for very short picosecond pulses.

УДК 621.396.96

ДИАГНОСТИКА НЕЛИНЕЙНОСТЕЙ ПО ВОЗМУЩЕНИЯМ РАССЕЯННОГО ПОЛЯ

В. П. Якубов, Д. В. Лосев, А. И. Мальцев

Сформулировано интегральное уравнение для нахождения поля в произвольной нелинейной среде. В частном случае локализованной нелинейности уравнение эффективно решается с помощью итерационного метода. На этой основе показана возможность решения обратной задачи восстановления вольт-амперных характеристик нелинейностей произвольного типа по возмущениям рассеянного ими поля.

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время в ряде вопросов физики и техники на передний план выдвинулся новый класс задач, связанных с нелинейными явлениями при распространении волн в неоднородных средах. Такие задачи возникли в связи с развитием систем генерации, передачи и обработки сверхширокополосного и высокоомощного излучения и использованием этого излучения в радиолокации и дистанционном зондировании [1]. Дело в том, что при взаимодействии высокоомощного излучения с практически любой средой становятся существенными нелинейные эффекты. Вследствие этого рассеянное такой средой излучение будет иметь в своём составе дополнительные спектральные составляющие, которые необходимо учитывать. Существуют также некоторые практически важные среды, которые проявляют нелинейные свойства и при достаточно малой напряжённости поля. Среди них особое значение для исследования имеют биологические ткани. В частности, было установлено [2], что на низких частотах вольт-амперная характеристика клеточной мембраны очень похожа на характеристики диодов на $p-n$ переходах. Определение нелинейных свойств биологических тканей открывает возможности для более ранней и точной диагностики самых различных заболеваний.

Несмотря на перспективность таких задач, существующие методы анализа рассеяния электромагнитного поля в нелинейной среде развиты слабо и в основном ограничиваются случаями вибраторных антенн с нелинейной нагрузкой [2–4] или случаем нелинейного контакта двух бесконечных полуплоскостей [5]. При этом используются приближённые методы, основанные на расчёте характеристик поля вблизи выделенных гармоник на основе применения теории возмущений. Общим недостатком таких методов является то, что они не позволяют наглядно проследить изменение характеристик рассеянного сигнала в зависимости от параметров апертуры и нелинейной нагрузки. Для определения полного спектрального состава рассеянного излучения необходимо более точно описать процессы в нелинейной среде. Для этого необходимо исходить из общей электродинамической постановки задачи.

В данной работе на основе развития известных аналитических и численных методов предлагается описание рассеянного в нелинейной среде поля в рамках скалярной электродинамической теории. Полученное интегральное уравнение учитывает как пространственные, так и временные изменения исходного сигнала при прохождении через нелинейную среду. Решение рассматривается для достаточно произвольной формы падающей волны и допускает эффективное использование для диагностики вида нелинейности. Показаны условия, при которых полученное уравнение переходит к представлению, используемому в методе эквивалентных схем. В такой постановке задача в научной литературе ранее не ставилась.

1. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ПОЛЯ, РАССЕЯННОГО НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДОЙ

Запишем материальные уравнения для нелинейной среды. Для простоты магнитные свойства среды учитывать не будем, считая магнитную проницаемость μ_0 постоянной. Если среда не изменяет со временем своих свойств, то материальные уравнения для векторов электрической индукции и плотности тока в спектральной области принимают вид [6]

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) = [\varepsilon_0(\omega) + \varepsilon_1(\mathbf{r}, \omega)] \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega), \quad \mathbf{j}(\mathbf{r}, \omega) = [\sigma_0(\omega) + \sigma_1(\mathbf{r}, \omega)] \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega).$$

Здесь $\varepsilon_0(\omega)$ и $\sigma_0(\omega)$ — абсолютная диэлектрическая проницаемость и удельная проводимость фоновой среды, которая предполагается линейной и однородной. Вторые слагаемые в квадратных скобках для диэлектрической проницаемости и удельной проводимости связаны с нелинейными возмущениями фоновой среды и зависят от напряжённости поля \mathbf{E} :

$$\varepsilon_1(\mathbf{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon_1(\mathbf{r}, t, \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)) e^{i\omega t} dt, \quad \sigma_1(\mathbf{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_1(\mathbf{r}, t, \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)) e^{i\omega t} dt. \quad (1)$$

В этой постановке задача определения некоторой компоненты полного электрического поля сводится к решению неоднородного интегрального уравнения Фредгольма первого рода:

$$E(\mathbf{r}, \omega) = E_0(\mathbf{r}, \omega) + i\omega\mu_0 \int [-i\omega\varepsilon_1(\mathbf{r}', \omega) + \sigma_1(\mathbf{r}', \omega)] E(\mathbf{r}', \omega) G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^3r', \quad (2)$$

где $G(r) = \exp(i\kappa|\mathbf{r}|)/(4\pi|\mathbf{r}|)$ — функция Грина, $\kappa = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0(\omega)}$ — волновое число для фоновой среды. Поле $E_0(\mathbf{r}, \omega)$ представляет собой напряжённость поля первичной волны, а интеграл в правой части (2) описывает рассеянное нелинейными неоднородностями поле. Уравнение (2) записано в скалярном представлении и известно в литературе как уравнение Липпмана—Швингера. Оно получается из дифференциального уравнения Гельмгольца при использовании метода функций Грина.

Важно подчеркнуть, что уравнение (2) представляет собой нелинейное интегральное уравнение. Нелинейность проявляется через зависимость электрофизических параметров среды от напряжённости поля.

2. СПЕКТРАЛЬНЫЙ СОСТАВ ПОЛЯ, РАССЕЯННОГО СОСРЕДОТОЧЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

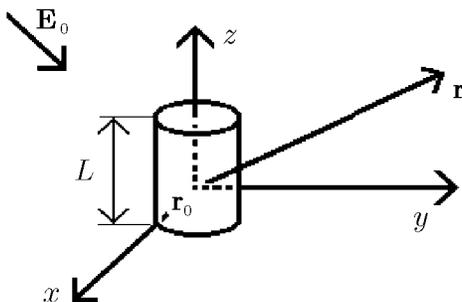


Рис. 1

Исследуем полученную зависимость для случая, когда неоднородность изолирована и сосредоточена в некоторой точке пространства \mathbf{r}_0 . Для определённости будем считать, что форма неоднородности аппроксимируется цилиндром длиной L и радиусом a (рис. 1).

Согласно (2) рассеянное неоднородностью поле и его спектр определяются полным полем $E(\mathbf{r}_0, \omega)$ в точке расположения неоднородности. Нахождение поля $E(\mathbf{r}_0, \omega)$ составляет так называемую внутреннюю электродинамическую задачу. Для его определения совместим точку наблюдения с центром неоднородности. Оценим интеграл в уравнении (2) в предположении, что характерные размеры неоднородности ма-

лы ($\{a, L\} \ll \lambda$), для чего разложим экспоненциальный член в ряд по степеням малости показателя. В этом случае для внутренней задачи можно записать

$$E(\mathbf{r}_0, \omega) = E_0(\mathbf{r}_0, \omega) + i\omega\mu_0 [-i\omega\varepsilon_1(\mathbf{r}_0, \omega) + \sigma_1(\mathbf{r}_0, \omega)] E(\mathbf{r}_0, \omega) \frac{a^2}{2} \left\{ \operatorname{arsh} \left(\frac{L}{2a} \right) + ik \frac{L}{2} \right\}. \quad (3)$$

Эта оценка получена в предположении, что поле сосредоточено вблизи поверхности неоднородности. Вид этой функции зависит также от формы аппроксимации неоднородности.

Уравнению (3) можно придать вид, допускающий простую физическую интерпретацию. Для этого умножим обе части уравнения (3) на L , тогда получим

$$u(\omega) = \frac{u_0(\omega) - I(\omega)Z(\omega)}{1 - i\omega C(\omega)Z(\omega)}. \quad (4)$$

Здесь введены обозначения, имеющие следующий физический смысл: $u_0(\omega) = E_0(\mathbf{r}_0, \omega)L$ — электродвижущая сила (ЭДС), наведённая падающим излучением на неоднородности, $u(\omega) = E(\mathbf{r}_0, \omega)L$ и $I(\omega) = \pi a^2 \sigma_1(\mathbf{r}_0, \omega) E(\mathbf{r}_0, \omega)$ — падение напряжения и ток проводимости, наведённые на нелинейном элементе, $C(\omega) = \varepsilon_1(\mathbf{r}_0, \omega) \pi a^2 / L$ — эквивалентная ёмкость нелинейного элемента. Кроме того,

$$Z(\omega) = \frac{(\kappa L)^2}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} - \frac{i\omega\mu_0 L}{4\pi} \operatorname{arsh} \left(\frac{L}{2a} \right)$$

— комплексное входное сопротивление, зависящее от геометрических размеров объекта. Реальная часть $Z(\omega)$ с точностью до постоянного множителя совпадает с сопротивлением излучения элементарного вибратора, а мнимая часть соответствует реактивной части входного сопротивления в электродинамике излучающих систем. В случае $L \gg a$ мнимая часть $Z(\omega)$ соответствует индуктивному сопротивлению тонкого провода [7]. Уравнению (4) соответствует эквивалентная схема, изображённая на рис. 2. Здесь $Z_{\text{н}}$ — эквивалентное сопротивление нелинейного элемента, падение напряжения на котором и ток через который описываются уравнением (4). Такой эквивалентной схемой обычно пользуются в нелинейной радиолокации при описании рассеяния волн нелинейными устройствами [2], а также при анализе реакции вибратора, нагруженного на нелинейность типа нелинейный контакт или диод. В отличие от традиционного подхода уравнение (4) получено нами не из феноменологических соображений, а на основе асимптотического анализа точных волновых представлений.

В общем случае нелинейные свойства среды учтены в уравнении (4) через ток $I(\omega)$ и ёмкость $C(\omega)$. Такое представление вида нелинейности элемента через его вольт-амперную и вольт-фарадную характеристики во временном представлении является общепринятым для практических расчётов [2]. Однако при размерах неоднородности $a \ll L$ нелинейностью ёмкости можно пренебречь.

С учётом сказанного ясно, что простое по форме уравнение (4) на самом деле является неоднородным нелинейным интегральным уравнением. При произвольном виде вольт-амперной характеристики $I = I(u)$ аналитического решения этого уравнения получить не удастся. Известны попытки решения этого уравнения методом малых возмущений для слабых нелинейностей. Таким путём оценивалась, например, эффективная поверхность рассеяния нелинейности на гармониках падающего излучения в задачах нелинейной радиолокации [2]. В более общем случае для нахождения решения обычно используется разложение в ряд Вольтерра или численные итерационные методы.

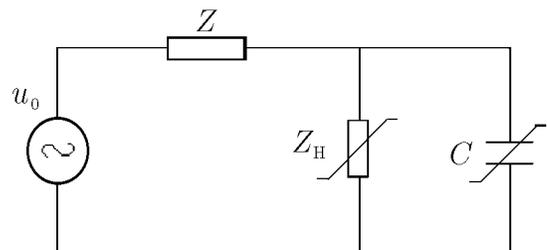


Рис. 2

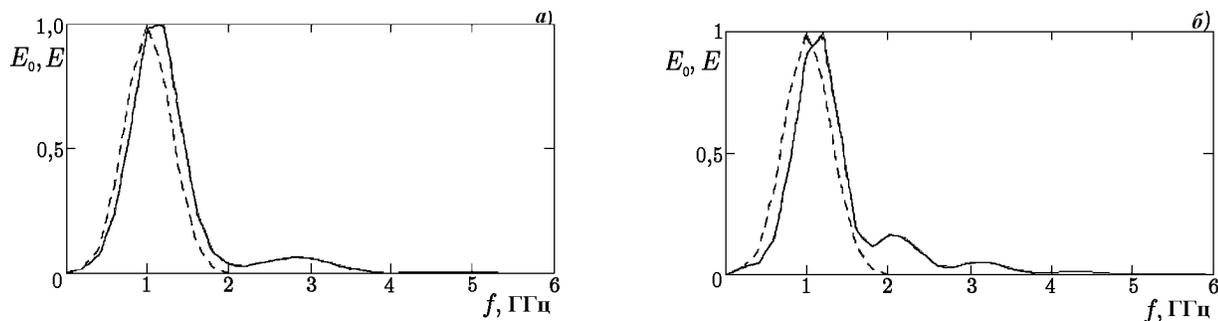


Рис. 3

Заметим, что уравнение (4) в общем случае не может быть сведено к явному уравнению для неизвестной функции u как функции от входной переменной u_0 ни во временном, ни в частотном представлении. Дело в том, что спектральные изменения результирующего тока и напряжения обусловлены многократным нелинейным преобразованием сигналов во временном представлении. Для анализа этих изменений необходимо совместное использование частотного и временного представлений.

Рассеянное нелинейностью поле полностью определяется полем на ней, что и составляет внешнюю электродинамическую задачу. Согласно (2) поле, рассеянное элементарной неоднородностью, в дальней зоне (при $|\kappa(r - r_0)| \gg 1$) можно определить по формуле

$$E_1(\omega, \mathbf{r}) \approx -i\mu_0\omega I_\Sigma(\omega) LG(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0),$$

где $I_\Sigma(\omega) = I(\omega) - i\omega C(\omega)u(\omega)$. С учётом векторного характера электромагнитного излучения рассеянное поле можно определить по формуле, имеющей место для элементарного электрического вибратора [8]:

$$E_\theta(\omega, \mathbf{r}) \approx -i\mu_0\omega I_\Sigma(\omega) LG(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \sin \theta, \quad H_\phi(\omega, \mathbf{r}) \approx E_\theta/W_0. \quad (5)$$

Здесь E_θ, H_ϕ — составляющие электрического и магнитного поля в сферической системе координат, $W_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$ — волновое сопротивление фоновой среды, θ — угол между осью цилиндра и направлением на точку наблюдения.

Для решения уравнения (4) использовался метод последовательных приближений. Электромагнитная волна, падающая на нелинейный элемент, была представлена в виде:

$$E(t) = E_0 e^{-\alpha t^2} \cos(\omega_0 t),$$

где E_0 и ω_0 — амплитуда и центральная частота падающего излучения. Такое представление позволяет выбором параметра α моделировать как узкополосные, так и широкополосные сигналы.

Результаты исследования влияния нелинейности при рассеянии широкополосного излучения представлены на рис. 3. Здесь показаны нормированные спектры амплитуд падающей волны (штриховая линия) и волны, рассеянной нелинейным элементом (сплошная линия). На рис. 3а рассмотрен случай нелинейности с вольт-амперной характеристикой $I = \gamma u + \beta u^3$, соответствующей туннельному контакту [2], где $\gamma = 18,3$ мА/В, а $\beta = 3,7$ мА/В³. На рис. 3б приведены соответствующие характеристики для нелинейности, описывающей мембрану биологической клетки аксона кальмара [2] $I = I_0 (\exp(u/u_1) - 1)$, где $I_0 = 35$ мА, $u_1 = 4,4$ мВ. Видно, что при взаимодействии излучения с нелинейной средой происходит образование в спектре рассеянного излучения дополнительных спектральных компонент.

При использовании импульсного излучения, характеризующегося широкой полосой частот, возможно существенное сужение импульса при распространении излучения в нелинейной среде. Это открывает большие перспективы для создания систем генерации сверхкоротких импульсов. В то же время при высокомоном излучении, начинающем находить применение в современной технике, становятся значительными нелинейные эффекты при взаимодействии излучения со средой, которые нельзя

не учитывать. Таким образом, встаёт задача определения нелинейных свойств различных сред для точного нахождения поля в точке приёма. В связи с этим назрела необходимость решения задач диагностики нелинейных сред.

3. ВОССТАНОВЛЕНИЕ ВИДА НЕЛИНЕЙНОСТИ ПО РАССЕЯННОМУ ПОЛЮ

При решении обратной задачи необходимо отыскивать характеристики среды на основе данных прямой задачи. Восстановление характеристик среды включает в себя нахождение пространственных координат неоднородности и определение её нелинейных свойств. Для определения этих характеристик неоднородности необходимо использовать пространственно-временные характеристики падающего и рассеянного полей. Эта многомерная обратная задача в общем случае не может быть решена, поэтому целесообразно разделить её на задачи определения пространственного положения неоднородности и определения её вольт-амперной характеристики. Задача первого типа является задачей томографии и может быть решена, например, одним из наработанных методов [9, 10]. В дальнейшем мы будем рассматривать задачу второго типа по определению вида нелинейности.

На основе измеренной на поверхности исследуемого объекта напряжённости рассеянного поля определим полный ток на вибраторе на основе (5). Амплитуда полного тока при этом равна

$$I_{\Sigma}(\omega) = \frac{E_{\theta}(\omega, \mathbf{r})}{-i\mu_0\omega LG(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \sin \theta}. \quad (6)$$

Для восстановления вольт-амперной характеристики определим ток I , протекающий через нелинейный элемент, и приложенное к элементу напряжение u . Они находятся в результате решения системы уравнений Кирхгофа и представляются в виде

$$I = I_{\Sigma} + i\omega C u, \quad u = u_0 - Z(\omega)I_{\Sigma},$$

где u_0 определяется по данным падающего поля из соотношения $u_0 = LE$. Вольт-амперная характеристика восстанавливается в виде зависимости тока от напряжения в различные моменты времени, которая получается при использовании обратного преобразования Фурье.

Рассмотренный метод восстановления характеристики нелинейного элемента на основе сравнения спектров падающего и рассеянного излучения был реализован численно. В качестве исходных данных использовались данные прямой задачи. На практике вместо этих данных должны быть использованы результаты эксперимента.

Как видно из формулы (6), при определении тока по данным рассеянного поля при частотах, стремящихся к нулю, задача имеет особенность. Для устранения этой особенности в программе введён малый параметр, подобный параметру регуляризации Тихонова [11]. Влияние этого параметра существенно на низкочастотном участке спектра, где напряжённость рассеянного поля близка к нулю (так как излучённое поле не имеет постоянной составляющей), но вследствие шумов измерений (а при численном моделировании — округления) возникает деление конечного числа на нуль. Таким образом устраняется потенциальная неустойчивость обратной задачи.

Численное моделирование обратной задачи показало, что при воздействии на среду слабым полем восстанавливается только линейный участок характеристики. При более высокой напряжённости поля возникает возможность более существенного проявления нелинейности. Результаты восстановления вида нелинейности изображены на рис. 4. При этом сплошной линией изображена исходная вольт-амперная характеристика нелинейного элемента, на которую нанесены значения, восстановленные в результате решения обратной задачи. На рис. 4а изображена нелинейная характеристика туннельного контакта с кубической нелинейностью. На рис. 4б представлены аналогичные результаты для экспоненциальной нелинейности.

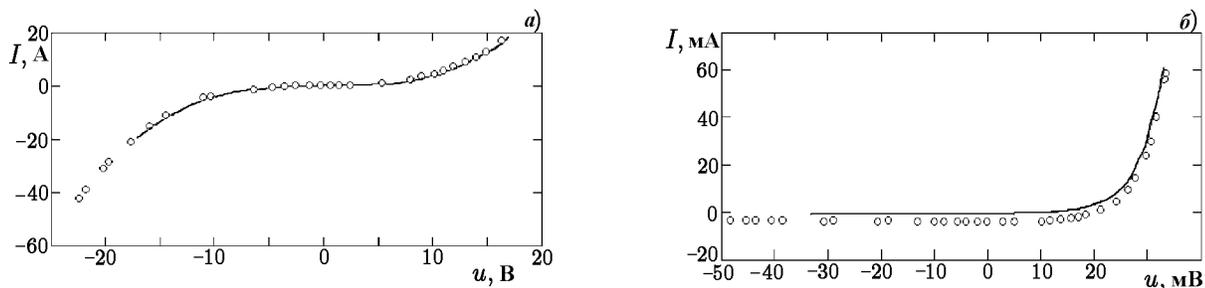


Рис. 4

Важно отметить, что полное восстановление вида нелинейности требует достаточно большого диапазона изменения используемых токов и напряжений. При использовании постоянных или квазигармонических сигналов это способно привести нелинейный элемент к разрушению. При использовании же сверширокополосного излучения с малой длительностью (меньше 1 нс) разрушения не будет, поскольку интегральная энергетика импульса остаётся меньше уровня разрушения. Даже при большом пиковом напряжении, приложенном к нелинейному элементу в течение короткого промежутка времени, общая энергия (доза) поглощаемого излучения остаётся относительно малой. Для наступления необратимых процессов важен именно энергетический предел, и он существует как для электронных приборов [12], так и для биологических тканей [13].

Из результатов, представленных на рис. 4, видно, что восстановленный профиль имеет форму, в точности повторяющую заданную, но обладает систематическим смещением. Причина этого состоит в том, что излучаемое поле не содержит в себе постоянной составляющей. Таким образом, при прямом использовании предложенного алгоритма восстановление возможно только с точностью до некоторой константы. Константу смещения можно восстановить, используя в качестве дополнительного нормировочного соотношения тот факт, что при нулевом напряжении ($u(t) = 0$) ток, наведённый на нелинейном элементе, тоже должен быть равен нулю ($I(t) = 0$). Это соотношение равнозначно условию пассивности нелинейного элемента. Таким образом, по рассеянному полю может быть восстановлен достаточно произвольный вид вольт-амперной характеристики нелинейного элемента.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе сформулировано интегральное уравнение для определения рассеянного поля в произвольной нелинейной среде. В случае линейной среды с локализованной в ней нелинейностью уравнение сводится к виду, совпадающему по форме с уравнениями, используемыми в методе эквивалентных схем в электродинамике излучающих систем. Совместное использование пространственно-временных представлений для тока и напряжения, наведённых на нелинейном элементе, при итерационном решении полученного уравнения позволяет проанализировать спектральный состав рассеянного поля. Установлено существенное, но различное для разных видов нелинейностей расширение спектра.

Обратная задача восстановления вольт-амперной характеристики нелинейного элемента по измерениям рассеянного поля сводится к простому обращению полученных уравнений. Искомая вольт-амперная зависимость находится при этом с точностью до константы, связанной с отсутствием в рассеянном поле составляющих на нулевой частоте. Эта константа восстанавливается из условия нормировки, соответствующего требованию пассивности нелинейности.

Результаты работы позволяют подойти к решению проблемы бесконтактной диагностики нелинейных свойств неоднородных сред различной природы, в том числе биологических тканей и искусственных радиоматериалов.

Работа подготовлена при поддержке РФФИ № 00–02–17913.

ЛИТЕРАТУРА

1. Иммореев И. Я. // Вестник МГТУ. Сер. Приборостроение. 1998, № 4. С. 25.
2. Нелинейные электромагнитные волны / Под ред. П. Усленги. — М.: Мир, 1983. — 312 с.
3. Штейншлейгер В. Б. // УФН. 1984. Т. 142. С. 131.
4. Кузнецов А. С., Кутин Г. И. // Зарубежная радиоэлектроника. 1986. № 4. С. 41.
5. Семёнов В. С., Парватов Г. Н., Попов А. А., Рябцев А. П. // Дефектоскопия. 1999, № 9. С. 85.
6. Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П. Теория волн. — М.: Наука, 1979. — 384 с.
7. Мейнке Х., Гундлах Ф. Радиотехнический справочник. М.—Л.: Гос. энергет. изд-во, 1960. — 416 с.
8. Марков Г. Т., Чаплин А. Ф. Возбуждение электромагнитных волн. М.—Л.: Энергия, 1967. — 376 с.
9. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я., Тимонов А. А. Математические задачи компьютерной томографии. — М.: Наука, 1987. — 160 с.
10. Якубов В. П., Лосев Д. В. // Оптика атмосферы и океана. 1996. Т. 9, № 10. С. 1367.
11. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1986. — 287 с.
12. Белобородов П. Ю., Толбанов О. П., Хлудков С. С. // Физика и техника полупроводников. 1988. Т. 22, вып. 4. С. 755.
13. Gandhi Om P. // Proc. IEEE. 1980. V. 68, № 1. P. 24.

Томский государственный
университет, г. Томск, Россия

Поступила в редакцию
25 февраля 2000 г.

DIAGNOSTICS OF NONLINEARITIES USING SCATTERED FIELD DISTURBANCES

V. P. Yakubov, D. V. Losev, and A. I. Maltsev

We formulated an integral equation for finding the field in an arbitrary nonlinear medium. In the case of a localized nonlinearity, this equation is effectively solved using the iteration technique. It is shown that the inverse problem of recovering current-voltage characteristics of arbitrary nonlinearities by scattered field disturbances can be solved on this basis.

УДК 534.222

ОБ АЛГОРИТМЕ ЧИСЛЕННОГО ЛОГАРИФИМИРОВАНИЯ КОМПЛЕКСНОЙ ФУНКЦИИ С МИНИМАЛЬНОЙ ШИРИНОЙ СПЕКТРА ЛОГАРИФМА

В. А. Зверев, А. А. Павленко

При решении задач акустики часто возникает необходимость вычисления логарифма комплексных функций. В большинстве случаев необходимо, чтобы ширина спектра логарифма при этом оставалась минимальной. В статье приведён метод численного логарифмирования комплексной функции с сохранением минимальной ширины спектра. Рассмотрено условие применимости метода в виде ограниченности спектра функции. Доказана достаточность этого условия.

Решение ряда задач акустики приводит к необходимости логарифмирования комплексных функций. Классическим примером такого рода задач является комплексный кепструм [1]. С помощью этого математического приёма можно определить форму гибкой акустической антенны [2] и даже устранить искажения, связанные с изменением формы этой антенны [3]. Во всех этих случаях логарифм комплексной функции, представляющий собой многолистную функцию, должен быть взят так, чтобы ширина его спектра оставалась минимальной. Здесь предлагается удобный для практики алгоритм решения этой задачи и доказывается его достаточность при соблюдении одного необходимого условия. Это условие налагается на частоту квантования сигнала во времени: она должна быть достаточно высокой, чтобы логарифмируемый сигнал мог рассматриваться как сигнал с ограниченным спектром.

Логарифм комплексной функции $F(x)$ определяется как

$$\log [F(x)] = \log |F(x)| + i \arg [F(x)]. \quad (1)$$

Аргумент функции в (1) можно найти путём следующего преобразования:

$$\arg [F(x)] = \begin{cases} \operatorname{arctg} \left\{ \frac{\operatorname{Im} [F(x)]}{\operatorname{Re} [F(x)]} \right\} & \text{при } \operatorname{Re} [F(x)] \geq 0; \\ \operatorname{arctg} \left\{ \frac{\operatorname{Im} [F(x)]}{\operatorname{Re} [F(x)]} \right\} + \pi & \text{при } \operatorname{Re} [F(x)] < 0, \operatorname{Im} [F(x)] \geq 0; \\ \operatorname{arctg} \left\{ \frac{\operatorname{Im} [F(x)]}{\operatorname{Re} [F(x)]} \right\} - \pi & \text{при } \operatorname{Re} [F(x)] < 0, \operatorname{Im} [F(x)] < 0. \end{cases} \quad (2)$$

Формула (2) позволяет определить фазу функции с точностью до π . Найденная таким образом фаза через каждые π будет испытывать скачок на 2π . В результате таких скачков спектр фазы сильно расширится. Нашей задачей является такое определение аргумента функции, при котором его спектр будет занимать минимальный интервал. Наименьшая ширина спектра достигается, если исключить скачки аргумента, дав ему возможность принимать значения, намного превышающие π [1].

Решение поставленной задачи покажем на конкретном примере. Возьмём функцию, определённую в дискретных точках x_k , $k = 1, \dots, L$, вида

$$F(x_k) = \exp [iu(x_k)], \quad (3)$$

где

$$u(x_k) = 24 \left[\sin \left(\frac{2\pi}{L} ka \right) + 0,6 \sin \left(\frac{2\pi}{L} kb \right) \right]. \quad (4)$$

Примем $a = 8$, а значения b будем варьировать. Нашей задачей является найти аргумент функции (3). Если для этой цели использовать формулу (2), значения аргумента будут лежать в пределах $\pm\pi$. В силу того, что выражение (4), являющееся аргументом (3), существенно превосходит π , полученные таким способом значения аргумента, будут содержать многочисленные скачки, которые существенно изменят и расширят его спектр. Чтобы избежать этого, воспользуемся следующим приёмом.

Применим формулу (2) для определения фазы следующего сигнала:

$$S(x_k) = F(x_k)\overline{F(x_{k+1})}, \quad (5)$$

где черта сверху означает комплексное сопряжение. Аргументом (5) является разность аргументов функции (3), взятых через одну дискретную точку отсчёта. Эта разность в силу непрерывности значений аргумента будет стремиться к нулю при увеличении числа дискретных точек на рассматриваемом интервале изменения функции. В силу этого при достаточно большом числе дискретных отсчётов L аргумент функции (5) не будет превосходить π , вследствие чего скачков фазы не будет. В то же время, определив аргумент (5), мы можем определить и искомый аргумент функции $F(x_k)$ для всех дискретных значений. Для этого следует сложить аргументы функции (5) для точек рассматриваемого интервала, не превосходящих значения переменной в (3):

$$\Psi(x_k) = \sum_{m=1}^k \arg [S(x_m)]. \quad (6)$$

Операция (6), не приводя к дополнительным скачкам фазы, позволяет аргументу существенно превышать 2π . Однако скачки фазы могут появиться на предыдущем этапе при определении аргумента функции (5). От этих скачков, если они есть, нельзя избавиться путём уменьшения интервала, на котором определяется (4), так как этот интервал и так уже является наименьшим — интервалом между соседними дискретными отсчётами аргумента функции.

Насколько высказанное опасение серьёзно, можно видеть на рис. 1. На нём показаны результаты применения вышеописанной процедуры к сигналу (3) при различных значениях параметров. По горизонтали отложены значения k , по вертикали — в единицах 2π , отмеченных горизонтальными линиями, отложены функции (4) (сплошная линия), (5) (пунктирная линия), разность значений (4) и (5) (штриховая линия) и прямая линия, показывающая нулевое значение. На рис. 1а функции (4) и (5) полностью совпадают. Это показывает, что аргумент (3) вычисляется нашим методом правильно, хотя он намного превышает 2π . Никаких скачков фазы в этом случае нет. Однако стоит немного изменить значение всего одного параметра b с 22 до 23, как вся эта гармония нарушается. Об этом свидетельствует рис. 1б. На рис. 1в, построенном при $b = 30$, изменения ещё более существенны. Однако дело не в значении параметра b . Об этом свидетельствует рис. 1г, построенный при $b = 30$, на котором функции (4) и (5) совпадают не хуже, чем на рис. 1а. Дело в том, что на рис. 1г изменён ещё один, самый существенный параметр — частота квантования функции (3). На рис. 1а—б частота квантования вдвое ниже, чем на рис. 1г.

Прояснить ситуацию можно с помощью рис. 2 и рис. 3. На рис. 2 показан спектр функции (3) при высокой частоте квантования, соответствующей рис. 1г. По горизонтали отложена частота в единицах частоты квантования. Нулевая частота расположена посередине. Каждая частота на этом рисунке представлена двумя точками спектра, одна из которых соответствует положительному аргументу, а вторая — такому же аргументу, но отрицательному. Масштаб по вертикали линейный. Спектр показан сплошной линией. Пунктиром показан прямоугольник, по которому определяется ширина спектра. Этот прямоугольник получен следующим образом: значения спектра, лежащие ниже определённого уровня (штриховая линия), заменялись нулями, а остальные — единицами. На рис. 3 показана ширина спектра функции (3) в зависимости от параметра b , значения которого отложены по горизонтали.

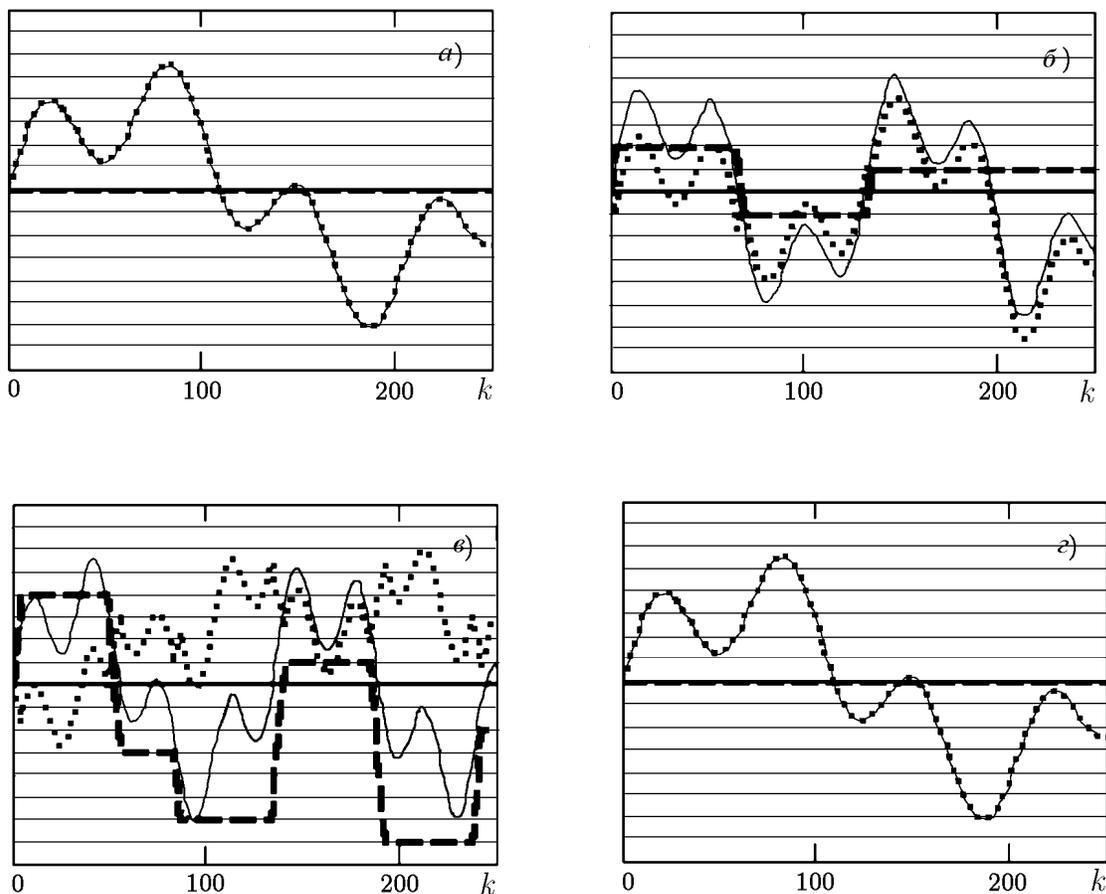


Рис. 1

Ширина спектра показана в виде отношения ширины изображённого пунктиром на рис. 2 прямоугольника, измеряемой количеством точек, к 1 024 — числу точек спектрального разложения функции (3), использованного при построении рис. 1.

Итак, мы убедились, что параметр b функции (3) связан с шириной её спектра. Приведённый нами способ определения аргумента в виде непрерывной функции не работает тогда, когда ширина спектра функции превышает некоторую границу. Эта граница составляет 1 024 точки спектра при общем их числе 2 048. Согласно теореме отсчётов [4] непрерывная

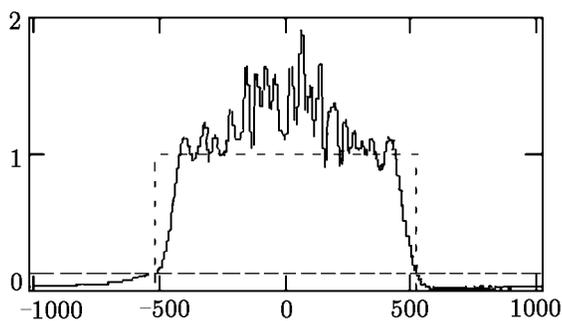


Рис. 2

функция может быть представлена набором дискретных значений аргумента только в том случае, если спектр этой функции ограничен, а точки отсчёта расположены с интервалом T , удовлетворяющим условию

$$T \leq \frac{1}{2\Delta f}, \quad (7)$$

где Δf — ширина частотного спектра. Из условия (7) вытекает, что функция, спектр которой занимает $2\Delta f > 2048$ точки, нельзя в силу теоремы отсчётов — [4] правильно представить 1 024 значениями. Если же мы попытаемся это сделать, получим ошибки. Такими ошибками в представлении функции (3)

дискретным набором точек объясняются результаты, показанные на рис. 1б и 1в. На рис. 1г число точек отсчёта увеличено в 2 раза, вследствие чего на этом

Чтобы доказать, что приведённый нами алгоритм отыскания аргумента в виде плавной функции работоспособен, необходимо показать, что он не приводит к появлению скачков при определении аргумента функции (5) по формуле (2) при условии (7). В самом деле, мы рассматриваем только те функции, которые без ошибок представлены дискретными значениями. Если для всех таких функций алгоритм не даёт скачков, то этого вполне достаточно. Все такие функции можно представить в виде следующего разложения в ряд Котельникова:

$$F(x) = \sum_k F(x_k) \frac{\sin [\Delta f \pi (x - x_k)]}{x - x_k}. \quad (8)$$

Здесь $F(x_k)$ — значение функции $F(x)$, которая может быть комплексной, в дискретных точках отсчёта.

Нам требуется доказать, что аргумент (или фаза этой функции) не может изменяться не более чем на π .

Доказательство обоснуем на следующих соображениях. Выделим ситуации, в которых изменение фазы оказывается наибольшим, рассмотрим их отдельно и покажем, что даже в этих случаях фаза на интервале в один отсчёт изменяется не более чем на π . Таких ситуаций всего две. Обе они реализуются, когда вектор, изображающий рассматриваемое колебание на комплексной плоскости, поворачивается на большой угол за время T , определяемое (7). Рост фазы будет непрерывным и будет происходить с постоянной скоростью, если спектр сигнала содержит всего одну частоту. Фаза гармонического сигнала изменяется пропорционально интервалу времени по формуле

$$\Delta\varphi = \omega t. \quad (9)$$

Подставив в (9) самую высокую частоту диапазона $2\pi \Delta f$, а в качестве интервала t выбрав расстояние между двумя точками отсчёта T из (7), получим, что изменение фазы в этом случае не может превышать π . В общем случае сложного спектра рост фазы будет происходить медленнее, однако в этом случае возможны скачки фазы. Такой случай возникает, когда несколько колебаний, интерферируя между собой, обращают рассматриваемую функцию по модулю в нуль на рассматриваемом интервале. Переход через нуль сопровождается изменением фазы колебания на π . Однако переходов через нуль с сохранением знака производной на интервале T не может быть более одного. Это является следствием того, что функция, представленная рядом (8), не может в промежутках между точками отсчёта изменять знак производной более одного раза. При обращении функций, формирующих (8), в нуль на интервале длиной T их производная изменяет знак только один раз. Действительно, чтобы это утверждение не выполнялось, необходимо, чтобы интервал T превосходил период функции $\sin [\Delta f \pi (x - x_k)]$, стоящей в числителе дроби в (8), но в силу условия (7) это не так. После суммирования мы получим функцию, обращающуюся в нуль не более чем один раз с сохранением при переходе через нуль знака производной. В силу этого фаза рассматриваемой функции в пределах одного интервала T не может иметь приращения, превышающего π .

Таким образом, рассмотренный нами способ логарифмирования комплексной функции применим во всех тех случаях, когда логарифмируемая функция представлена значениями, взятыми в дискретных точках.

Работа поддержана грантами РФФИ (проекты № 96–15–96603, 99–02–16401 и 97–02–17555).

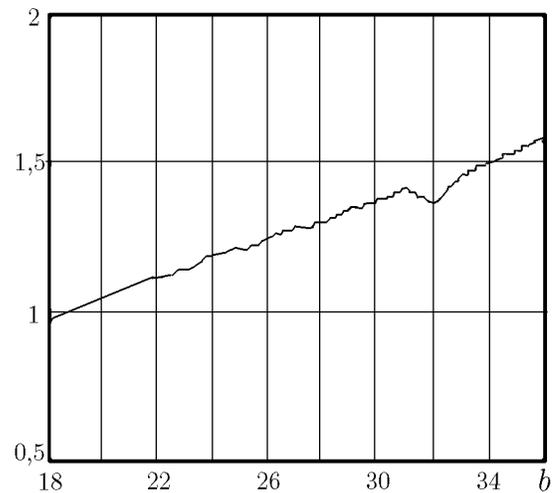


Рис. 3

ЛИТЕРАТУРА

1. Oppenheim A. V., Schafer R. W., Stockham T. G. // IEEE Trans. Audio and Electroacoustics. 1968. V. AU16, № 3.
2. Зверев В. А. // Акуст. журн. 1996. Т. 42, № 2. С. 220.
3. Зверев В. А., Павленко А. А. Формирование направленности гибкой акустической антенны // Акуст. журн. (напр. в печать).
4. Котельников В. А. // Материалы к I Всесоюзному съезду по вопросам технической реконструкции дела связи и слаботочной промышленности — М.: Управление связи РККА, 1933.

Институт прикладной физики РАН,
г. Н. Новгород, Россия

Поступила в редакцию
16 марта 2000 г.

NUMERICAL CALCULATION OF LOGARITHM OF A COMPLEX FUNCTION WITH THE MINIMUM WIDTH OF THE LOGARITHM SPECTRUM

V. A. Zverev and A. A. Pavlenko

Solution of acoustics problems often requires calculation of logarithms of complex functions. In the majority of cases, the width of the logarithm spectrum should remain minimum. In this paper, we present a numerical method for calculation of complex-function algorithm, in which the spectrum width remains minimum. We consider the condition of finite spectrum of a function as the validity condition of the method. We prove that this condition is sufficient.

ЦИКЛИЧЕСКИЙ ВОЛНОВОЙ ЗАТВОР

В. В. Арабаджи

Разработана и экспериментально исследована активная система для гашения поверхностных гравитационных волн в жидкости, основанная на принципе циклического волнового затвора (ЦВЗ). Толщина гасящей системы составляла порядка 0,1 длины сейшевой волны, но в соответствии с принципом ЦВЗ может быть и много меньше последней. Использование высокого пространственно-временного разрешения при управлении параметрами волноведущей среды в активной зоне ЦВЗ и её непрозрачность для высокочастотных волн позволяют обойтись без измерения волнового поля и генерации гасящей волны.

ВВЕДЕНИЕ

Традиционный подход [1] к задаче активного гашения волн включает в себя измерение волнового поля, идентификацию (на основе измерений либо априорных данных) полной пространственно-временной структуры гасимой волны и краевой задачи, а также генерацию гасящей волны, т. е. волны, инвертированной по отношению к гасимой. Кроме того, в настоящее время являются общепринятыми следующие представления о проблеме активного гашения волн:

1) Гасящая система может быть эффективна, лишь имея полную информацию о краевой задаче, включая функции Грина и информацию о гасимых волнах (разделение поля на падающее и отражённое, спектральные оценки и т. д.). Это суждение основано на классической схеме гасящей системы: датчик—линейная обработка—исполнительное устройство. Современная система активного гашения волн на базе адаптивных алгоритмов [2] с решёткой датчиков, матрицей адаптивных линейных процессоров с корреляционными обратными связями и решёткой исполнительных устройств позволяет учитывать и обновлять информацию о параметрах краевой задачи в реальном времени. В стационарном состоянии (близком к оптимальному) такая адаптивная гасящая система сводится к некоторой комбинации линейных электрических цепей с постоянными параметрами. Традиционные методы адаптации представляют собой корреляционную настройку либо комплексных амплитуд (для квазимонохроматических задач, когда амплитуда и фаза имеют самостоятельное значение и могут настраиваться отдельно), либо весовых коэффициентов многоотводных линий задержки (для широкополосных задач). Одним из распространённых самоограничений является оперирование комплексными амплитудами исполнительных устройств на частоте гасимой волны. Это вызвано традиционным использованием гидроакустической пьезокерамики на резонансных частотах. Однако в некоторых работах по гашению звука [3] влияние собственных временных масштабов пьезокерамики эффективно подавляется обратной связью. Ранее подобный режим применялся в пьезокерамических устройствах для автоматической юстировки лазерных зеркал при наличии медленных вибраций.

2) Любая задача активного гашения волн может быть решена при наличии:

а) достаточного количества узлов идентификации (например весовых коэффициентов [2]) краевой задачи;

б) достаточной разрядности цифрового представления измеренных значений волновых полей;

в) достаточной скорости вычислений;

г) достаточной точности физических измерений волнового поля и исполнительных устройств.

Однако идентификация краевой задачи (или функций Грина) сводится к оценке не менее чем $n_r \times n_t$ чисел, где $n_r = (2L_{PR}/r_{WD})^2$ — число пространственных узлов идентификации, $n_t = \tau_G/\tau_{WD}$ — число временных узлов идентификации, L_{PR} — характерный линейный масштаб трёхмерного защищаемого объекта, r_{WD} — характерный минимальный пространственный масштаб гасимой волны, τ_{WD} — характерный минимальный временной масштаб гасимой волны ($r_{WD} = c\tau_{WD}$, c — скорость волны), τ_G — длительность функции Грина, обусловленная либо конечными волновыми размерами краевой задачи, либо многократными отражениями, либо волновой дисперсией (последнее справедливо, например, для волн от камня, брошенного в глубокий водоём). При некоторой максимальной достижимой конечной точности измерительных, вычислительных и исполнительных устройств относительная среднеквадратичная ошибка $\delta \sim \sqrt{n_r^2 n_t \tau_{WD} / \tau_{aver}}$ задания результирующей амплитуды гасящей волны может быть уменьшена только за счёт увеличения времени τ_{aver} оценки (т. е. усреднения во времени тестовых сигналов) идентификационных узлов. Однако дрейф параметров краевой задачи (т. е. дрейф истинных величин параметров в узлах идентификации) может оказаться больше, чем как бы достигнутая за счёт увеличения τ_{aver} кажущаяся малая погрешность оценки параметров, полученная в предположении их постоянства во времени. Это обстоятельство делает процедуру идентификации всё более неэффективной по мере роста n_t, n_r .

Данная работа посвящена исследованию возможностей построения активных гасящих систем с пространственно-временной модуляцией параметров, способных быстро реагировать на изменения

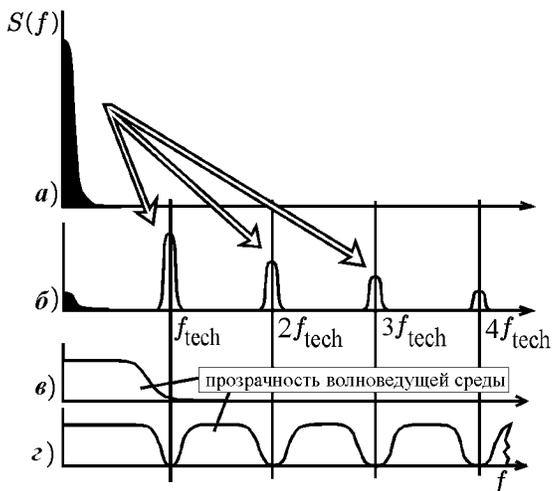


Рис. 1. Преобразование спектральной плотности мощности падающей волны в ЦВЗ

волнового поля, не требующих знания структуры гасимой волны, не чувствительных к краевым условиям вне активной системы, не налагающих ограничений на размеры защищаемых объектов и работающих при минимуме априорной информации о волноведущей среде. Конкретно, на примере поверхностных гравитационных волн в жидкости, рассматривается вопрос о том, как обеспечить гашение отражённой волны (с минимальными пространственным r_{WD} и временным τ_{WD} масштабами) в одномерной краевой задаче, управляя параметрами среды или граничных условий в некотором активном слое $x \in [0, L]$ толщиной $L \ll r_{WD}$ с неограниченным пространственным ($r_C \rightarrow 0$) и временным ($\tau_C \rightarrow 0$) разрешением. Основной целью операций управления параметрами, описываемых далее, является преобразование низкочастотной гасимой волны (рис. 1а) в высокочастотные волны (рис. 1б) диапазона так называемых «технологических частот» $f \sim n f_{tech} \gg 1/\tau_{WD}$, где $n = 1, 2, \dots$. Тогда отражённой волны в исходном диапазоне частот не возникает, если, как предполагается, волноведущая среда является прозрачной на низких частотах $f \sim 1/\tau_{WD}$ гасимых волн и непрозрачной (поглощающей) на технологических частотах. Высокочастотное поглощение полагается естественным свойством волноведущей среды (рис. 1в), характеризуемой фактором затухания, пропорциональным $\exp(-\gamma t)$ (где, например, $\gamma = \alpha f^\beta$; α, β — положительные постоянные), но может быть обеспечено и внедрёнными в управляемый слой $[0, L]$ малогабаритными резонансными поглотителями (рис. 1г). Сечение поглощения последних на технологических частотах имеет порядок $\sigma_A \sim c/(f_{tech} n)$, а сечение рассеяния может быть сколь угодно мало (порядка их геометрических размеров) на низкой частоте падающей волны. По существу, в данной работе экспериментально подтверждаются возможности гашения волн путём дробления краевой задачи и по пространственной координате, и по времени (модуляция коэффициентов отражения в эшелоне стенок, составляющих циклический волновой затвор, раздел 1).

В качестве приложения указанного модуляционного подхода выбрана задача гашения поверхностных гравитационных волн в лабораторных бассейнах. Она особенно актуальна при гашении низших бассейновых мод (сейш), которые помимо максимального периода имеют ещё и максимальную добротность. Применение пассивных методов, по необходимости использующих поглощающие слои с толщиной больше или порядка длины волны, в данном случае значительно сократило бы рабочий объём бассейна. Традиционные активные методы были бы эффективны лишь в задачах с квазимонохроматическим возбуждением бассейна, когда время настройки системы многократно превышает время переходных процессов. Как известно, фактор вязкого затухания поверхностных гравитационных волн пропорционален 4-й степени их частоты f ($\gamma = 32\pi^4 f^4 \nu / g^2$, где ν — кинематическая вязкость воды, g — ускорение свободного падения), что также повышает привлекательность модуляционных подходов, основанных на преобразовании частоты. Рассматриваемые далее гравитационные поверхностные волны в жидкости обладают значительной волновой дисперсией. Очевидно, однако, что последняя несущественна при достаточно высокой технологической частоте f_{tech} , когда главным фактором является высокочастотное затухание. Действительно, отношение времени τ_{dis} дисперсионной расфазировки на π двух соседних спектральных компонентов, кратных f_{tech} , ко времени τ_{vis} вязкого затухания в ϵ раз равняется $\tau_{\text{dis}}/\tau_{\text{vis}} \sim 16\pi^4 \nu f_{\text{tech}}^3 / (3g^{-2})$ и может быть сделано больше единицы. В этом случае при достаточно большой частоте модуляции влияние дисперсии несущественно.

1. ЦИКЛИЧЕСКИЙ ВОЛНОВОЙ ЗАТВОР

В [4] описана активная гасящая система на базе модуляции жёсткости управляемой стенки. Такой подход с балансной (биполярной) модуляцией коэффициента отражения ($\Gamma = \pm 1$) не сокращает рабочий объём бассейна и обеспечивает практически мгновенную реакцию на падающую волну. Однако недостатками данной системы являются:

- 1) специальные меры по обеспечению мягкого состояния управляемой стенки (электропривод, датчик волнового смещения);
- 2) специальные меры по обеспечению герметичности свободного воздушного пространства за управляемой стенкой (гофрированная плёнка, минимизирующая сопротивление движению управляемой стенки без трения о стенки лотка);
- 3) специальные меры по обеспечению гидростатического равновесия управляемой стенки (резиновый трос — компенсатор гидростатического давления, достаточная прочность (толщина) управляемой стенки);
- 4) принципиальная невозможность полного согласования плоской управляемой стенки с распределением горизонтальных скоростей частиц в произвольной падающей волне;
- 5) принципиальная неэффективность данного подхода в трёхмерных задачах для тел с конечными волновыми размерами, не превышающими r_{WD} .

Учитывая сказанное, рассмотрим полубалансный метод гашения отражений, в котором коммутация коэффициента отражения перегородок, установленных по ходу падающей волны, происходит между значениями $\Gamma = 0$ и $|\Gamma| = 1$. Этот подход можно применять к трёхмерным задачам, и в нём отсутствуют гидростатические проблемы, поскольку нет вертикальной линии раздела жидкость—воздух.

До сих пор неявно предполагалось, что отражённая волна уже образовалась (пусть на другой частоте) и её теперь нужно как-то подавить или поглотить. Возможна, однако, ситуация, когда отражённая волна вообще не возникает, поскольку падающая волна не успевает вступить в контакт с защищаемой поверхностью, убегающей от неё со скоростью $V > c$, где c — скорость распространения падающей волны. Для реализации этой идеи необходим технологический посредник — циклический волновой затвор (ЦВЗ) [5–7], позволяющий совместить указанное условие убегания и условие неподвижности защищаемой поверхности (стенки бассейна). С этой целью по ходу падающей волны экви-

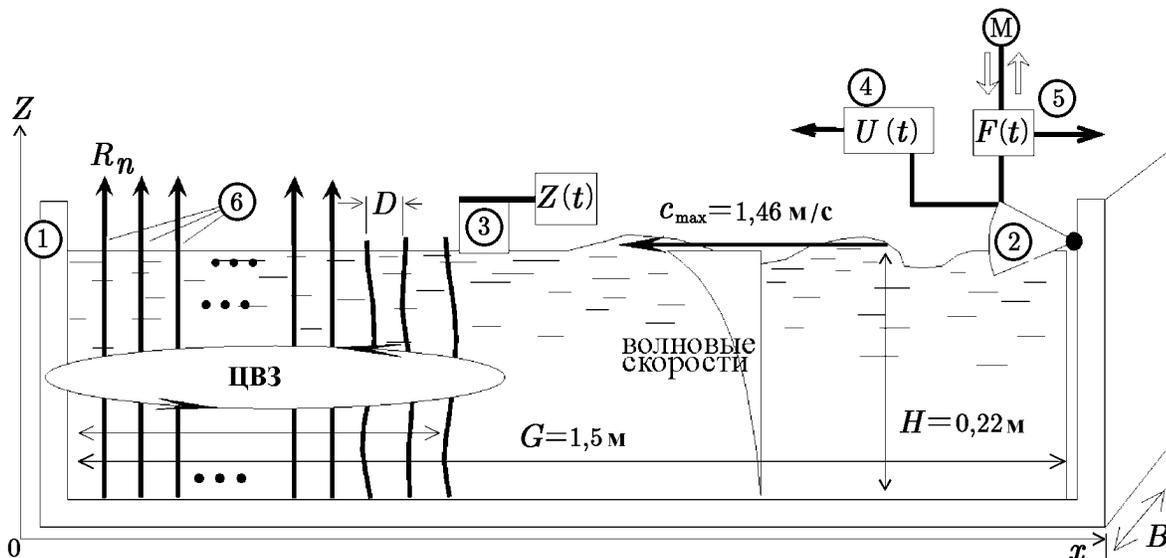


Рис. 2. Схема экспериментальной установки для исследования циклического волнового затвора ; число плёнок $N = 10$, $L = 0,3$ м, $V = 1,5$ м/с

дистантно (с периодом D) расположим эшелон плёнок 6 (рис. 2), параллельных её фронту, и специальное устройство для управления их натяжением. Вертикальная ненапрянутая плёнка представляет собой прозрачную стенку ($\Gamma = 0$), вертикальная натянутая плёнка — непрозрачную стенку ($|\Gamma| = 1$). В некоторый начальный момент все плёнки одновременно натягиваются (становятся непрозрачными) и, начиная с ближайшей к падающей волне плёнки, поочерёдно расслабляются (становятся прозрачными). Таким образом, от падающей волны убегает волна расслабления плёнок, причём скорость V этой волны больше, чем максимальная скорость c_{\max} распространения волновых возмущений в лотке (с учётом волновой дисперсии). По достижении волной расслабления самого глубокого слоя ЦВЗ (т. е. плёнки, ближайшей к стенке бассейна) все плёнки одновременно натягиваются. Далее процесс повторяется периодически с частотой f_B .

Две соседние плёнки в натянутом состоянии образуют так называемый виртуальный резонатор (ВР), минимальная собственная частота которого обратно пропорциональна его размеру D , т. е. достаточно велика. Для таких колебаний жидкости принципиальным становится вязкое затухание гравитационных поверхностных волн. При быстром натяжении двух соседних плёнок текущее распределение волнового поля между ними преобразуется в начальные условия дальнейших колебаний жидкости в ВР. Затухание этих колебаний за время, много меньше периода модуляции $1/f_B$, обеспечивает эффективное подавление отражений. Предельный коэффициент отражения $|\Gamma| \approx 1/N$, где N — число плёнок в ЦВЗ, на частоте падающей волны обусловлен передней плёнкой ЦВЗ, которая не может не отражать падающую волну в начале каждого периода $T_B = 1/f_B$ в течение интервала времени $T = D/V$; при этом учитывается, что в остальных резонаторах волны успевают затухнуть. Отражение от стенки, с которой падающая волна не успевает столкнуться, не возникает [8].

С внутренней стороны пространственного скачка натяжения волна расслаблений плёнок также не может вызвать какого-либо излучения, поскольку операция расслабления не связана с совершением механической работы. На протяжении каждого цикла происходит только смена натянутого состояния плёнок на расслабленное состояние, но не наоборот, а следовательно, отсутствует «сверхсветовая» волна натяжения плёнок, которая могла бы создать собственное излучение ЦВЗ [8]. Излучение возникает только в момент одновременного натяжения всех плёнок, однако оно является высокочастотным и не даёт вклада в отражение на частоте падающей волны.

Натянутые плёнки представляют собой стенки ВР. Время τ_C распрямления плёнок представляет

одновременно характерный масштаб её высокочастотных горизонтальных осцилляций, соответствующих в основном низшей моде колебаний натянутой плёнки ($\tau_C \ll T$); τ_C определяется силой натяжения каждой плёнки $|R_n|$. Желательно использовать наибольшее натяжение $|R_n|$, допускаемое устройством натяжения и прочностью плёнки. При этом одновременно достигаются две цели — максимальная изоляция ВР друг от друга и максимальное поглощение жидкостью энергии колебаний плёнок (см. ниже). Заметим, что собственные частоты натянутой плёнки находятся за пределами чувствительности поплавкового датчика 3 колебаний поверхности жидкости (см. рис. 2). Плёнка в натянутом состоянии становится эквивалентна натянутой струне, а её форма перед натяжением преобразуется в начальные условия колебаний струны. Оба конца такой струны закреплены, и эта краевая задача не имеет нулевой собственной частоты, в том числе и в случае струны с неоднородными параметрами (в частности с неоднородным распределением массы). Минимальная собственная частота $f_F \sim 1/\tau_C$ колебаний натянутой плёнки многократно превосходит частоту падающей волны: $f_F \gg 1/\tau_{WD}$, а также низшую собственную частоту виртуального резонатора: $f_F \gg f_{VR} = \sqrt{g/(\pi D)}$. Поэтому колебания натянутой плёнки не дают вклада в отражение на частоте падающих волн. Минимальное время $T = D/V$ в натянутом состоянии находится передняя плёнка ЦВЗ, но и этого времени достаточно для $n_F \sim T/\tau_C > 3$ (см. ниже) колебаний её низшей моды. Плёнки, колеблющиеся при натяжении, по отношению к виртуальным резонаторам представляют собой источник, возбуждающий колебания жидкости в ВР. В конечном счёте работа по натяжению плёнок переходит в тепловую энергию жидкости, в основном благодаря вязкой высокочастотной диссипации.

Основу экспериментальной установки составляет лоток 1 длиной $G = 1,5$ м, шириной $B = 0,1$ м, заполненный водой глубиной $H = 0,22$ м (см. рис. 2). В правой части лотка расположен поплавок волнопродуктор 2, соединённый с электроприводом М и оборудованный датчиком 4 скорости и датчиком 5 силы действия жидкости. Вблизи переднего края ЦВЗ расположен поплавок датчик 3 вертикального смещения $Z(t)$ поверхности жидкости. Исследованный ЦВЗ представляет собой эшелон из $N = 10$ гибких лёгких нерастяжимых лавсановых плёнок 6, расположенных с периодом $D = 0,03$ м, которые занимают участок длиной $L = ND = 0,3$ м, т. е. порядка 0,1 от длины волны низшей моды лотка.

Выбранную модель ЦВЗ определяют следующие параметры: $T = 0,02$ с — тактовый интервал смены состояний соседних плёнок; $V = D/T = 1,5$ м/с — скорость убегания скачка расслабления плёнок; $A_{x,z} \sim 10^{-2}$ м — характерные амплитуды смещения частиц в падающей волне по x и z соответственно; $\tau_{WD} \sim 2,5$ с — временной масштаб падающей (например сейшевой) волны; период ЦВЗ $T_B = (N - 1)T \sim 0,18$ с, частота ЦВЗ $f_B = 1/T_B \sim 5,5$ Гц; максимальная относительная вертикальная амплитуда смещения частиц в высокочастотных волнах при замыкании ВР $A_{HF}/D \sim \sim 4A_x H D^{-2} T_B \tau_{WD}^{-1} = 0,4$.

Далее, учитывая кинематическую вязкость $\nu = 10^{-6}$ м²/с, коэффициент поверхностного натяжения воды $\chi = 7,30 \cdot 10^{-2}$ Н/м при 20°С, плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м³, ускорение свободного падения $g = 9,8$ м/с², характерный капиллярный масштаб $\varepsilon = \sqrt{2\chi/(\rho g)} = 3,86 \cdot 10^{-3}$ м, показатель высокочастотного затухания порядка $\exp(-\gamma t)$ (где $\gamma = \alpha f^4$, $\alpha = 32\pi^4 \nu/g^2$), максимальную скорость распространения волнового возмущения $c_{\max} = \sqrt{gH} = 1,46$ м/с (приближение мелкой воды), сформулируем условия эффективности рассматриваемой модели ЦВЗ:

1) доступная в данном эксперименте сила натяжения плёнки $|R_n| = 50$ Н определила время её распрямления $\tau_C \approx (BH^2 A_x \rho / |R_n|)^{1/2} = 0,0067$ с;

2) малое отражение от «прозрачной» ненапрянутой плёнки обеспечивается лёгкостью и гибкостью плёнок;

3) малая прозрачность «непрозрачного» состояния определяется достаточно большой силой натяжения плёнок. Наиболее важно натяжение для передних 4–5 плёнок, где максимальна начальная амплитуда релаксирующих волн. Колебания в каждом ВР должны затухать независимо от остальных ВР;

4) малое протекание жидкости между соседними ВР, или её постоянный объём в ВР, на временном масштабе τ_{WD} : $h/B < 0,016$ ($h \sim 10^{-3}$ м — зазор между плёнкой и стенками лотка). Выполнение этого условия гарантирует отсутствие нулевых собственных частот в каждом ВР;

5) толщина пограничного слоя много меньше расстояния между плёнками: $D^{1/2}H^{-1/4}A_z^{1/2} = 2,52 \cdot 10^{-2} \text{ м}^{3/4} \gg 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ м}^{3/4}$, т. е. нет «ползущего» течения между плёнками;

6) осцилляторный характер затухания колебаний на низшей моде ВР. Для этого показатель естественного затухания в волноведущей среде должен быть меньше низшей собственной частоты колебаний f_{VR} в ВР. В противоположном предельном случае большой показатель затухания означал бы «замораживание» колебаний на технологических частотах, отсутствие работы поля и, соответственно, поглощения: $\gamma < f_{VR}, D > 2^{5/3} \nu^{2/3} g^{1/3} = 4,7 \cdot 10^{-5}$ м;

7) эффективное поглощение на частоте f_F колебаний натянутой плёнки: $\exp[\gamma(f_F)L/V] \gg 1$;

8) малость капиллярных эффектов для низшей моды ВР: $\{D, A_{x,z}\} \gg \varepsilon = 3,86 \cdot 10^{-3}$ м;

9) отсутствие перехлёстов — продольное смещение частиц в волне должно быть меньше, чем расстояние между плёнками: $A_x T / (\tau_{WD} D) = 1,3 \cdot 10^{-2} < 1$.

Работу Q_F , совершаемую при быстром натяжении и распрямлении плёнки (сокращении её длины на $\Delta z \sim \sim 16A_x^2/H$) за время $\tau_C \sim 0,0067$ с, можно грубо оценить как $Q_F \sim |R_n| \Delta z \approx 2BH\rho A_x^3 / (3\tau_C^2) \approx 3,6 \cdot 10^{-3}$ Дж. Эта работа значительно больше, чем поступающая за время τ_C энергия падающей волны $Q_{WD} \sim \rho g B A_z \tau_C \tau_{WD} / (8\pi) \approx 2,8 \cdot 10^{-2}$ Дж, и переходит в тепловую энергию благодаря вязкому затуханию колебаний плёнки.

Различие в осциллограммах затухания колебаний датчика 3, вызванных импульсным возбуждением волнопродуктора 2 при отключённом ЦВЗ (рис. 3а) и при включённом ЦВЗ (рис. 3б), подтверждает достаточно эффективное подавление отражений циклическим волновым затвором (с коэффициентом отражения ЦВЗ $|\Gamma| \sim 0,2$).

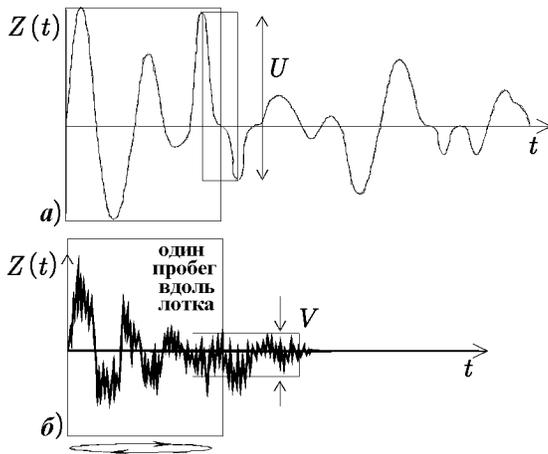


Рис. 3. Затухание колебаний $Z(t)$ после импульсного возбуждения без гашения (а) и при включении ЦВЗ (б)

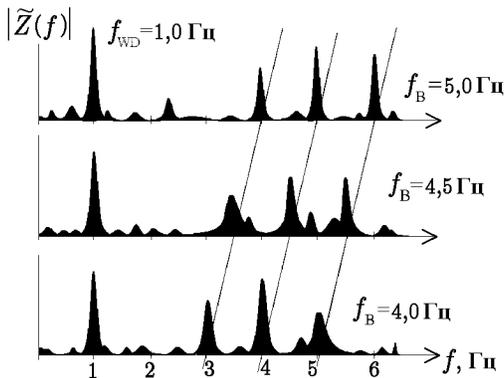


Рис. 4. Спектры $|\tilde{Z}(f)|$ вертикальных отклонений $Z(t)$ поверхности жидкости при частоте падающей волны $f_{WD} = 1,0$ Гц и частотах ЦВЗ $f_B = 4,0; 4,5; 5,0$ Гц

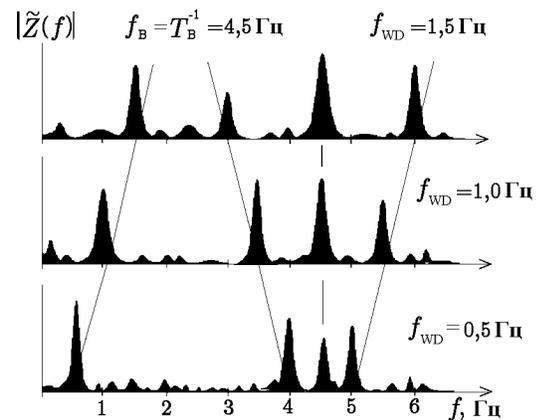


Рис. 5. Спектры $|\tilde{Z}(f)|$ вертикальных отклонений $Z(t)$ поверхности жидкости при частотах падающей волны $f_{WD} = 0,5; 1,0; 1,5$ Гц и частоте ЦВЗ $f_B = 4,5$ Гц

Полученные в эксперименте спектры $|\tilde{Z}(f)|$ вертикальных колебаний $Z(t)$ поверхности жидкости вблизи передней границы ЦВЗ при различных частотах модуляции f_B и падающей волны f_{WD} показаны на рис. 4, 5 с указанием на комбинационные частоты, характерные для процесса модуляции параметров. Спектральная составляющая на частоте ЦВЗ обусловлена отражением от периодически возникающей передней стенки, которая неизбежно сталкивается с падающей волной.

На рис. 6 изображена эволюция импедансной траектории волнопродуктора $F(t)$, $U(t)$, где $F(t)$ — сигнал датчика 5 силы действия жидкости, $U(t)$ — сигнал датчика 4 её скорости. При отключённом ЦВЗ и нерезонансном возбуждении волнопродуктора 2 траектория имела квазиэллиптический вид. Включение ЦВЗ приводит к вырождению траектории $F(t)$, $U(t)$ в линейную, что свидетельствует об уменьшении добротности лотка 1 как резонатора.

Отметим следующие практические преимущества ЦВЗ по сравнению с системой гашения, исследованной в [4]:

1) в ЦВЗ не требуется создавать (в том числе с помощью электроприводов и волновых датчиков) «мягкую» границу, что в принципе исключает традиционную для активных систем проблему самовозбуждения;

2) в отличие от шарнирно закреплённой управляемой стенки свободная плёнка ЦВЗ согласована с произвольным вертикальным распределением горизонтальной скорости частиц в падающей волне;

3) если плёнки достаточно гибкие и лёгкие, то тот же ЦВЗ эффективен и при гашении внутренних гравитационных волн в жидкости;

4) ЦВЗ может быть применён в трёхмерных краевых задачах в виде параметрического покрытия. Покрытие представляет собой трёхмерную пенообразную структуру, полости которой (ВР) разделены стенками управляемой прозрачности. При этом поверхность, разделяющая области прозрачных (наружная сторона) и непрозрачных (внутренняя сторона) стенок, движется аналогично описанной выше волне расслаблений плёнок.

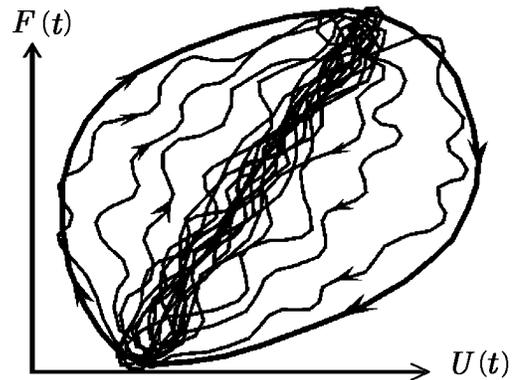


Рис. 6. Влияние ЦВЗ на импедансную диаграмму волнопродуктора 2

2. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе исследован альтернативный подход к задаче активного гашения отражённых волн, основанный на модуляции параметров волноведущей среды в тонком слое по ходу падающей волны и осуществляемый без измерения волновых полей.

Ключевой операцией в рассмотренном подходе является преобразование низкочастотной падающей (или отражённой) волны в высокочастотные волны, для которых волноведущая среда является поглощающей (непрозрачной).

Разработана структура циклического волнового затвора (ЦВЗ) как технологического посредника между защищаемой поверхностью (стенкой бассейна) и падающей волной. Благодаря ЦВЗ падающая волна воспринимает реальную неподвижную стенку как убегающую со скоростью большей, чем скорость волны, и поэтому стенка не создаёт отражений в диапазоне частот падающей волны.

Рассмотренная система основана на локальном принципе действия и фактически воспринимает падающую волну как некоторое постоянное во времени поле. Поэтому так важны вопросы гидростатики, в частности постоянство объёма жидкости в виртуальном резонаторе. Полученное решение не сводится к традиционной для известных активных методов комбинации цепей с постоянными параметрами

и обеспечивает гашение в отсутствие какой-либо информации о длине или периоде гасимой волны. При этом толщина активного поглощающего слоя может быть много меньше длины падающей волны. Опираясь на результаты, полученные в экспериментах с гравитационными поверхностными волнами в жидкости, можно развивать приложения принципа ЦВЗ к волнам другой физической природы, в частности к звуковым или электромагнитным волнам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Активные методы гашения звуковых полей (на основе поверхностей Гойгенса). ЦНИИ «Румб», 1982.
2. Widrow B., Mc.Cool J. M. // IEEE Trans. on AP. 1976. V. AP-24, № 5. P. 615.
3. Howart T. R., Varadan V. K., Bao X., Varadan V. V. // J. Acoust. Soc. Am. 1992. V. 91, № 2. P. 823.
4. Арабаджи В. В. // ФАО. 1992. Т. 28, вып. 12. С. 1205.
5. Arabadzhi V. V. // J. Low Frequency Noise, Vibration and Active Control. 1997. V. 16, № 2. P. 89.
6. Arabadzhi V. V. // Proceedings of 10th International Conference on Adaptive Structures and Technologies (ICAST'99), October 11–13, 1999, Paris, France. P. 626.
7. Арабаджи В. В. Циклический волновой затвор: Препринт ИПФ РАН № 497. — Н. Новгород, 1999.
8. Островский Л. А., Соломин Б. А. // Изв. вуз. Радиофизика. 1967. Т. 10, № 12. С. 1731.

Институт прикладной физики РАН,
г. Н. Новгород, Россия

Поступила в редакцию
13 января 2000 г.

CYCLIC WAVE GATE

V. V. Arabadzhy

We designed, and studied experimentally, an active system for quenching surface gravity waves in a liquid. This system is based on the cyclic wave gate (CWG) principle. The thickness of the quenching system was about one-tenth of the length of the seich wave but can also be much smaller than that in accordance with the CWG principle. The use of a high spatio-temporal resolution for parameter control of the waveguiding medium in the active region of the CWG and the opacity of this medium for high-frequency waves make it unnecessary to measure the wave field and generate a quenching wave.

УДК 621.391

АДАПТИВНАЯ ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ ИМПУЛЬСНОГО ПРОЦЕССА НА ФОНЕ УЗКОПОЛОСНОГО ШУМА МЕТОДОМ ПОРОГОВЫХ СТАТИСТИК

И. Я. Орлов¹, В. Е. Цветков²

В работе решается задача определения неизвестных информационных параметров процесса, имеющего непрерывную и импульсную компоненты. Предлагается модификация метода максимального правдоподобия (ММП), основанная на пороговых статистиках с адаптивным порогом. Сравниваются свойства определителя информационных параметров процесса с непрерывной и импульсной компонентой, основанного на ММП, на пороговых статистиках без адаптивного и с адаптивным порогом. Производится синтез квазиоптимального приёмного устройства, производящего оценку указанных параметров.

В данной работе рассматривается процесс, имеющий импульсную и непрерывную компоненты, без введения терминов помеха и сигнал, т. к. на практике импульсная компонента в одних случаях является сигналом (телеметрия), а в других — помехой (радиометрия).

Известный классический подход к оценке параметров импульсного сигнала на фоне шумов [1] основан на методе максимального правдоподобия. Такой подход приводит к измерителю, структура которого не учитывает динамики изменения параметров импульсного сигнала и шумового процесса. Более того, стандартная ситуация одновременного воздействия импульсных сигналов и шума на типовую узкополосную измерительную систему требует оптимизации последетекторной обработки смеси сигнала и шума [2].

Рассмотрение данной задачи представляет интерес как для измерения параметров импульсного процесса на фоне шума, так и для оценки мешающего воздействия импульсных помех в супергетеродинных приёмниках (например в радиометрии) по методу Международного комитета по радиопомехам (CISPR).

Как следует из центральной предельной теоремы, широкополосный процесс имеет тенденцию к нормализации при прохождении узкополосной линейной системы, а релеевское распределение описывает последетекторную функцию плотности вероятности нормально распределённого процесса. Сигнально-помеховую ситуацию, когда случайный процесс имеет непрерывную и импульсную компоненты, в [3] предложено описывать распределением, представляющим собой суперпозицию двух распределений с определёнными весами. Используя данный подход, проведём оценку параметров процесса с непрерывной и импульсной компонентами.

Итак, пусть имеется выборка x_1, \dots, x_N из огибающей $x(t)$ смеси непрерывного и импульсного сигналов, причём $x_i = x(t_i)$, $i = 1, \dots, N$, принадлежащая распределению

$$f(x_i, x_1, x_2, D, g) = (1 - g) \left[\frac{x_i \exp\left(-\frac{(x_i - x_1)^2}{2D^2}\right)}{K(D, x_1)} \right] + g \left[\frac{x_i \exp\left(-\frac{(x_i - x_2)^2}{2D^2}\right)}{K(D, x_2)} \right],$$

$$K(D, x) = D^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2D^2}\right) + \sqrt{2\pi} Dx/2 + x \int_0^x \exp\left(-\frac{y^2}{2D^2}\right) dy.$$

Здесь $f(x_i, x_1, x_2, D, g)$ — суперпозиция аппроксимации распределения Релея—Райса, хорошо описывающая последетекторное распределение сигнала; D^2 — параметр, характеризующий дисперсию

непрерывной и импульсной компонент; x_1, x_2 характеризуют среднюю амплитуду непрерывной и импульсной компонент процесса; g — вероятность существования импульсной компоненты в момент t_i или скважность импульсного процесса; $x_1, x_2, D > 0$.

В соответствии с методом максимального правдоподобия для оценки параметров случайных процессов [1] записываем функционал правдоподобия

$$L(x_1, \dots, x_N, x_1, x_2, d, g) = \prod_{i=1}^N f(x_i, x_1, x_2, D, g)$$

и находим максимум десятичного логарифма функционала правдоподобия по параметрам g, x_1, x_2 . Рассмотрим случай, когда $x_1/D < 1/3, x_2/D > 3$. Тогда коэффициент калибровки

$$K(D, x_1) \approx D^2 + \sqrt{2\pi} Dx_1/2, \quad K(D, x_2) \approx \sqrt{2\pi} Dx_2.$$

После проведения преобразований получаем систему уравнений (1) для оптимальной оценки параметров x_1, x_2, g методом максимального правдоподобия:

$$\sum_{i=1}^N \left\{ \left[\frac{x_i \exp\left(-\frac{(x_i-x_2^*)^2}{2D^2}\right)}{\sqrt{2\pi} Dx_2^*} - \frac{x_i \exp\left(-\frac{(x_i-x_1^*)^2}{2D^2}\right)}{D^2 + \sqrt{2\pi} Dx_1^*/2} \right] / f(x_i, x_1^*, x_2^*, D, g^*) \right\} = 0, \quad (1a)$$

$$\sum_{i=1}^N \left\{ \left[\frac{\sqrt{2\pi} D/2}{D^2 + \sqrt{2\pi} Dx_1^*/2} + \frac{x_1^* - x_i}{D^2} \right] \frac{x_i \exp\left(-\frac{(x_i-x_1^*)^2}{2D^2}\right)}{D^2 + \sqrt{2\pi} Dx_1^*/2} / f(x_i, x_1^*, x_2^*, D, g^*) \right\} = 0, \quad (1б)$$

$$\sum_{i=1}^N \left\{ \left[\sqrt{2\pi}/D + \frac{x_2^* - x_i}{D^2} \right] \frac{x_i \exp\left(-\frac{(x_i-x_2^*)^2}{2D^2}\right)}{\sqrt{2\pi} Dx_2^*} / f(x_i, x_1^*, x_2^*, D, g^*) \right\} = 0. \quad (1в)$$

Здесь x_1^*, x_2^*, g^* — оценки параметров x_1, x_2, g . Обозначим в (1а), (1б), (1в) выражения под знаком суммы функционалами $F_j(x_i, x_1, x_2, D, g)$, где $j = 1, 2, 3$ (в дальнейшем — $F_j(x_i)$). Зависимость $F_j(x_i)$ для уравнения (1а) при различных параметрах D приведена на рис. 1. Как показывают численные оценки, остальные функционалы ведут себя аналогично.

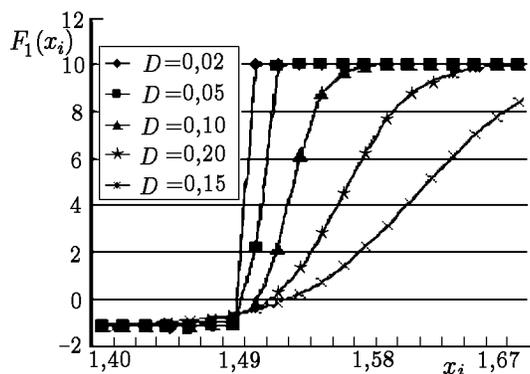


Рис. 1. Зависимость $F_1(x_i)$ при $x_1 = 1; x_2 = 2; g = 0,1$

Как видно из рис. 1, при малой дисперсии D ($D = 0,02; 0,05$; большое отношение сигнал/шум) функционалы приобретают явный пороговый характер. Причём уравнение (1а) для оценки g^* предписывает замену x_i величиной $1/(g-1)$ для случая $x_i < X^*$ и величиной $1/g$ для $x_i > X^*$, где X^* — пороговое значение.

Нахождение оценки средней амплитуды непрерывного и импульсного процессов x_1^* и x_2^* в случае малых дисперсий D сводится к отбрасыванию значений x_i , расположенных соответственно ниже или выше порога X^* и определению математического ожидания выборки x_i . Исследование поведения функционалов системы (1), преобразующих

выборочные значения x_i , показало, что для малых дисперсий D порог можно приблизительно представить как $X^* \approx (x_1 + x_2)/2$.

Оптимальный по ММП измеритель параметров процесса может быть построен по схеме, приведённой на рис. 2. Он состоит из трёх каналов, в каждом из которых происходит нелинейное преобразование выборочного значения процесса функционалами $F_j(x_i, x_1, x_2, D, g)$, где $j = 1; 2; 3$. Последующий сумматор или фильтр низкой частоты производит усреднение преобразованных значений выборки процесса. Решающий блок производит управление параметрами преобразования для удовлетворения уравнений (1) и определяет оценки информационных параметров x_1^*, x_2^*, g^* .

Показанные выше пороговые свойства функционалов F_j позволяют использовать пороговые статистики для нахождения оценок параметров g^*, x_1^* и x_2^* . Под пороговыми статистиками будем понимать процедуру обработки выборочных значений процесса, при которой обрабатываются только значения, лежащие выше или ниже некоторого порога X^* . Такая обработка реализуется с меньшими аппаратными или вычислительными затратами, чем метод максимального правдоподобия. Ниже приведена система уравнений для оценки параметров процесса, использующая пороговые статистики:

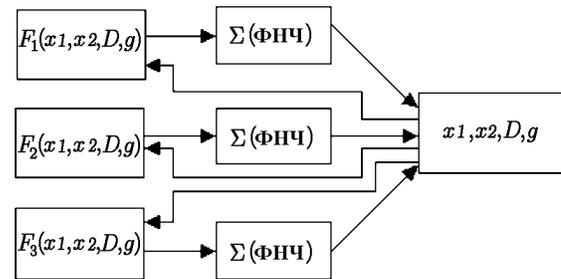


Рис. 2.

$$\int_0^{x^*} \frac{f(x, x_1, x_2, D, g) dx}{1 - g^*} - \int_{x^*}^{\infty} \frac{f(x, x_1, x_2, D, g) dx}{g^*} = 0, \quad (2a)$$

$$\int_0^{x^*} \left(\frac{\sqrt{2\pi} D/2}{D^2 + \sqrt{2\pi} D x_1^*/2} + \frac{x_1^* - x}{D^2} \right) f(x, x_1, x_2, D, g) dx = 0, \quad (2б)$$

$$\int_{x^*}^{\infty} \left(\sqrt{2\pi}/D + \frac{x_2^* - x}{D^2} \right) f(x, x_1, x_2, D, g) dx = 0. \quad (2в)$$

После преобразований системы (2) получим уравнения для определения характера пороговой функции X^* и параметров процесса:

$$\frac{g^*}{1 - g^*} = \int_{x^*}^{\infty} f(x, x_1, x_2, D, g) dx \bigg/ \int_0^{x^*} f(x, x_1, x_2, D, g) dx, \quad (3a)$$

$$\frac{\sqrt{2\pi} D^3/2}{(D^2 + \sqrt{2\pi} D x_1/2)} + x_1 = \int_0^{x^*} x f(x, x_1, x_2, D, g) dx \bigg/ \int_0^{x^*} f(x, x_1, x_2, D, g) dx, \quad (3б)$$

$$\sqrt{2\pi} D + x_2 = \int_{x^*}^{\infty} x f(x, x_1, x_2, D, g) dx \bigg/ \int_{x^*}^{\infty} f(x, x_1, x_2, D, g) dx. \quad (3в)$$

С целью расширения границ применимости метода пороговых статистик для случая малых значений $(x_2 - x_1)/D$, решая уравнение (3a) численными методами, можно определить вид функции $X^* = f(D, g)$. При этом нами предполагались априорно известными параметры x_1, x_2, D и налагалось условие $g^* = g$.

Практически такой подход означает необходимость использования обучающей выборки для определения адаптивного порога $X^* = X_A$, когда в какой-то момент времени известны параметры случайного процесса. Данное достаточно жёсткое ограничение для определения $X_A = f(D, g)$ можно преодолеть путём исследования свойств статистик экстремальных значений. С этой целью выборка x_i разбивается на интервалы, содержащие по n значений, и в каждом интервале выбирается максимум X_n [4]. В нашем случае функция распределения максимумов имеет вид

$$f_m(X_n, n) = n \left(\int_0^{X_n} f(x, x_1, x_2, D, g) dx \right)^{n-1} f(x, x_1, x_2, D, g),$$

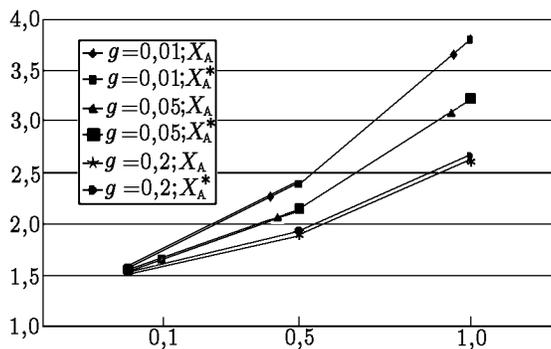


Рис. 3.

где $0 \leq X_n < \infty$, $x \leq X_n$. Расчёты показали, что X_A , x_1^* , x_2^* могут быть выражены через математическое ожидание статистики экстремальных значений.

Вид функций $X_A = f(D, g)$ для ММП и X_A^* — математического ожидания статистики максимумов (при $n \approx 6/g$) для различных g показан на рис. 3. Видно хорошее совпадение графиков $X_A = f(D, g)$ и X_A^* .

Аналогичное исследование уравнений (3б) и (3в) позволило получить соотношения для определения x_1^* и x_2^* . В результате можно записать систему уравнений для определения информационных параметров случайного процесса через пороговые статистики и адаптивный порог X_A^* :

$$\frac{g^*}{1 - g^*} = \int_{X_A^*}^{\infty} f(x, x_1, x_2, D, g) dx \Big/ \int_0^{X_A^*} f(x, x_1, x_2, D, g) dx, \quad (4a)$$

$$X_A^* = (x_2^* + x_1^*)/2, \quad (4б)$$

$$x_2^* = \int_0^{\infty} x f_m(X_n, n \approx 6/g) dx, \quad (4в)$$

$$x_1^* = \int_0^{\infty} x f(x, x_1, x_2, D, g) dx. \quad (4г)$$

В правой части уравнений (4) находятся вероятностные характеристики процесса, а в левой — параметры g^* , x_1^* , x_2^* . Считается, что $x_1/D > 3$; $x_2/x_1 > 3$.

Таким образом, анализ уравнений (1) ММП позволяет построить систему уравнений для оценки параметров импульсного процесса, основанную на более простых в реализации пороговых статистиках, а применение адаптивного порога сохраняет точность оценки параметров. Исследование свойств статистик максимумов случайного процесса позволяет определить адаптивный порог для системы пороговых статистик.

Рассмотрим применение алгоритма, основанного на пороговых статистиках, для оценки эффективности реальных измерительных приёмников, используемых в методике Международного комитета по

радиопомехам (CISPR) для оценки мешающего воздействия импульсных помех на системы связи. По методике CISPR в соответствии с международными стандартами в измерительных приёмниках реализуется специальная процедура «взвешивания» импульсного процесса, включающая в себя нахождение некоторой функции от его амплитуды и скважности [5]. Типовая схема устройства, называемого квазипиковым детектором (приёмник ESVP фирмы «Rode/Shwartz»), реализующая функцию взвешивания импульсных помех, показана на рис. 4. Здесь 1 — управляемый ключ, 2 — буфер-усилитель, 3 — фильтр низкой частоты с определённой по ГОСТу постоянной времени и критическим демпфированием, 4 — компаратор, осуществляющий сравнение входного и выходного сигналов и управляющий ключом 1, R_3 — сопротивление, определяющее совместно с ёмкостью C время заряда, R_p — сопротивление, определяющее совместно с C время разряда. Время заряда и разряда определены согласно ГОСТу [5].

В первом приближении можно считать результат воздействия квазипикового детектора на импульсные процессы аналогичным воздействию статистики максимумов с нахождением оценки математического ожидания.

Исследование математического ожидания статистики экстремальных значений

$$Xn^* = \int_0^{\infty} x f_m(Xn, n) dx$$

показывает, что с увеличением дисперсии D и с уменьшением скважности импульсного процесса g при фиксированных значениях $x1$ и $x2$ отношение сигнал/шум резко уменьшается, что приводит к малой чувствительности и сужению динамического диапазона. При этом введение в тракт промежуточной частоты или огибающей дополнительного усиления в детектор не приводит к увеличению отношения сигнал/шум.

Преодоление указанных недостатков возможно, если произвести синтез взвешивающего фильтра, используя результаты исследования систем (3), (4), с учётом требований CISPR.

Уравнение (4а) показывает, что в приёмнике должен быть канал измерения отношения вероятностей того, что выборочное значение x_i находится ниже или выше X_A^* — адаптивного порога. Реализация возможна либо определением отношения числа выборочных значений, лежащих выше порога X_A^* , к числу значений, лежащих ниже порога, либо отношением интервала времени, когда $x(t) > X_A^*$, к интервалу, в течение которого $x(t) < X_A^*$.

Уравнение (4в) для определения $x2^*$ реализуется путём использования пикового детектора.

Уравнение (4б) для определения X_A^* диктует необходимость вычисления среднего между $x2^*$ и $x1^*$.

Уравнение (4г) для определения $x1^*$ реализуется путём использования фильтра низких частот (интегратора).

Необходимо отметить, что техническое решение, приведённое в [6], фактически является реализацией алгоритма (4). В [6] предложен квазипиковый детектор, содержащий два канала (рис. 5): канал пикового детектора, позволяющий измерять пиковое значение амплитуды импульса ($x2$) с сохранением высокого отношения сигнал/шум для одиночных импульсов, и канал, проводящий измерение (в соответствии с требованиями CISPR) временных характеристик импульсного сигнала с использованием адаптивного порога, отслеживающего изменение шумов непрерывной компоненты.

В канале временных характеристик происходит формирование последовательности импульсов с фиксированной амплитудой и временными характеристиками, идентичными принимаемому импульсному процессу. Эта последовательность затем поступает на стандартный квазипиковый детектор для осуществления взвешивания импульсного процесса в соответствии с требованиями CISPR.

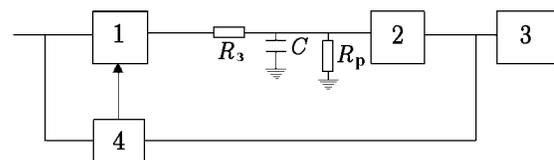


Рис. 4.

Выходной сигнал приведённого на рис. 5 устройства, реализующего алгоритм (4), определяется аналоговым перемножением выходов обоих каналов, причём в случае одиночных импульсов есть возможность ввести усиление в канал определения временных характеристик, не усиливая шумы приёмного тракта.

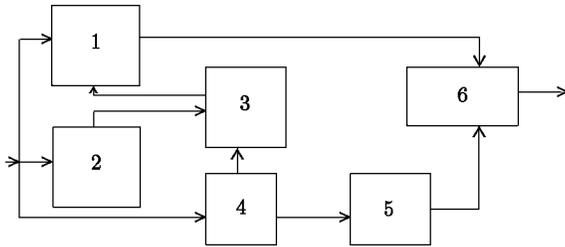


Рис. 5. Схема двухканального детектора [6]: 1 — пиковый детектор, 2 — ФНЧ, 3 — блок формирования адаптивного порога, 4 — канал формирования временных характеристик, 5 — квазипиковый детектор, 6 — перемножитель

Таблица 1

g	$K_0(g)$	$K(g)$ (CISPR)	$20 \lg(K_0/K)$, дБ
0,03	700 000	31,2	87
0,003	70 000	6,04	81
0,0003	7 000	1,47	74

Синтезированная на основе метода пороговых статистик структура квазиоптимального измерителя информационных параметров при применении в области измерения помех по методу CISPR даёт выигрыш в отношении сигнал/шум не ниже 30 дБ по сравнению с традиционными измерительными приёмниками.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гуткин Л. С. Теория оптимальных методов радиоприёма при флуктуационных помехах. — М.: Сов. Радио, 1972.
2. Теория обнаружения сигналов. / Под ред. П. А. Бакут. — М.: Радио и связь, 1984.
3. Лихтер Я. И. // Радиотехника и электроника. 1956. Т. 1, № 10. С. 1295.
4. Горбачёв А. А., Колданов А. П., Цветков В. Е. // Радиотехника и электроника. 1983. Т. 28, № 10. С. 1945.
5. ГОСТ 11001–80.
6. Приёмник для измерения радиопомех: А.с. № 95111668/09 / Ежов В. А., Цветков В. Е.

¹ Нижегородский университет,
² Департамент образования и науки
администрации Нижегородской
области, г. Н. Новгород

Поступила в редакцию
11 ноября 1999 г.

**ADAPTIVE ESTIMATION OF PARAMETERS OF A PULSED PROCESS AGAINST NARROW-BAND NOISE
BACKGROUND USING THE METHOD OF THRESHOLD STATISTICS**

I. Ya. Orlov and V. E. Tsvetkov

In work dares a problem of determination of unknown information parameters of process, having unceasing and pulsed components, is offered modification of method of maximum probability (ММР) on the base of threshold statistician with the adaptive threshold. Compared characteristics of finders of information parameters of process with unceasing and pulsed component, based on ММР, on threshold statisticians without adaptive and with the adaptive threshold. Produced syntheses of quasi- optimum receiving device, producing evaluation of interesting parameters.