МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Известия высших учебных заведений

РАДИОФИЗИКА

ежемесячный научно-технический журнал

Издаётся с апреля 1958 г.

Том XLIII №6 Нижний Новгород 2000

Содержание

УДК 525.23

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ПОЛЯ И ТОКИ В МОДЕЛИ ПЛАНЕТАРНОГО ГЕНЕРАТОРА. I. ПЛАВНАЯ НЕОДНОРОДНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СКОРОСТИ ВРАЩЕНИЯ ПЛАЗМЕННОЙ ОБОЛОЧКИ

А. О. Солдаткин, Ю. В. Чугунов

Изучена роль дифференциальности вращения плазменной оболочки при генерации электрических полей и токов в модели планетарного генератора. Представлены решения модельной задачи о неоднородном вращении плазменной оболочки совместно с намагниченной планетой в двух случаях: когда оболочка имеет постоянную проводимость и когда хорошо проводящая оболочка содержит атмосферный промежуток — узкий слой с низкой проводимостью. Анализ полученных решений позволил выявить ряд особенностей поведения подобных систем, в том числе зависимость распределений плотности тока, электрического поля и возникающего пространственного заряда от характера дифференциальности вращения плазменной оболочки и параметров атмосферного промежутка. Показано, что генерация тока проводимости происходит в областях с “вынужденной” (неуниполярной) дифференциальностью вращения плазмосферы; в случае сильной вынужденной дифференциальности электрическое поле становится существенно отличным от униполярного $\mathbf{E}_B = -[\mathbf{v}, \mathbf{B}]/c$; в областях с униполярным вращением электрическое поле порядка $\mathbf{E}_B$. В рамках рассматриваемой модели вычислена величина объёмного и поверхностного заряда, падение напряжения на атмосферном промежутке как функция полярного угла, сделаны оценки полного тока, циркулирующего в плазмосфере, и тока, протекающего через планету.

ВВЕДЕНИЕ

В связи с исследованием магнитосфер планет представляет интерес рассмотрение модельных электродинамических задач, в постановке которых отражены основные особенности формирования плазмосфер и генерации электрических полей и токов. Происходящие в магнитосфере процессы отличаются большим разнообразием и сложностью. Это связано с наличием проводящей среды — плазмы с неоднородным распределением плотности и анизотропией проводимости, на которую действуют силы вязкости, силы, обусловленные градиентом давления, и электромагнитные силы вследствие генерации квазистационарных токов, электрических и магнитных полей. В общем случае такие системы описываются электродинамическими и гидродинамическими уравнениями, в рамках которых необходимо искать самосогласованные решения для поля скоростей, распределения электрических полей и токов и возмущения магнитного поля. Однако для исследования характерных усреднённых течений во внутренней магнитосфере, заполненной холодной плазмой, можно использовать электродинамический подход, так как на расстояниях порядка нескольких радиусов планеты основную роль играют электромагнитные силы и силы вязкости. В то же время известно, что в плазмосфере планет существуют достаточно тонкие слои с плохой проводимостью (в земных условиях это атмосфера). На этих участках плазмосферы может происходить значительное падение напряжения, что в земных условиях способно оказать значительное влияние на атмосферное электричество.

Традиционная модель, объясняющая эффекты атмосферного электричества, была сформулирована много лет назад Вильсоном [1]. Согласно этой модели первопричиной атмосферного электричества служит грозовая активность на низких широтах. Сравнительно недавно в работах [2–5] было обращено внимание на существование альтернативного (дополнительного) источника атмосферного электричества — планетарного электрического генератора, обусловленного нетвердотельным характером вращения плазменной оболочки планеты. В данной работе в качестве модели реальной структуры плазмосферы рассматривается электродинамическая задача о вращении планеты, обладающей дипольным магнитным полем, совместно с дифференциально вращающейся плазменной оболочкой. Представлены решения нескольких модельных задач, которые проясняют роль дифференциальности вращения в проблеме генерации электрических полей и токов в плазмосфере.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ, ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ИСХОДНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим планету в виде твердотельно вращающегося проводящего шара. Магнитное поле планеты будем считать дипольным, а ось диполя параллельной оси вращения планеты. Большим преимуществом при этом является симметрия исходной структуры; кроме того, для большинства планет Солнечной системы угол между осью магнитного диполя и направлением угловой скорости достаточно мал [6]. В этом случае в сферической системе координат (r, Θ, φ) магнитное поле равно

$$B_r = \frac{2M\cos\Theta}{r^3}\,, \qquad B_\Theta = \frac{M\sin\Theta}{r^3}\,,$$

где M — дипольный магнитный момент планеты, r — расстояние от центра планеты, Θ — полярный угол, отсчитываемый от оси вращения. Плазменная оболочка, вращающаяся совместно с планетой, характеризуется угловой скоростью вращения $\omega(r,\Theta)$.

Будем искать стационарные решения соответствующей азимутально симметричной электродинамической задачи. Электростатический потенциал φ в окружающей планету области запишем в следующем виде [2]:

$$\varphi(r,\Theta) = \frac{M\omega(r,\Theta)\sin^2\Theta}{cr} + \Psi(r,\Theta), \tag{1}$$

где первое слагаемое представляет собой обобщённый потенциал униполярной индукции тела, вращающегося в магнитном поле с угловой скоростью $\omega(r,\Theta)$, $\Psi(r,\Theta)$ — пока произвольная функция. Электрическое поле определяется выражением

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi(r,\Theta). \tag{2}$$

Закон Ома и уравнение непрерывности определяют плотность тока $\mathbf{j}$ [7]:

$$\mathbf{j} = \hat\Sigma(r,\Theta)\Big(\mathbf{E} + [\mathbf{v},\mathbf{B}]/c\Big) + \rho\mathbf{v}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{j} = 0.$$

Здесь $\hat\Sigma(r,\Theta)$ — тензор проводимости среды, ρ — плотность объёмного заряда ($\Delta\varphi = -4\pi\rho$). Скорость $\mathbf{v}$ определяется локальной угловой скоростью вращения ω. Замечая, что в осесимметричном случае $\operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0$, получаем следующее уравнение [8]:

$$\operatorname{div}\hat\Sigma(r,\Theta)\Big(\mathbf{E} + [\mathbf{v},\mathbf{B}]/c\Big) = 0. \tag{3}$$

Считая для простоты тензор $\hat\Sigma$ изотропным и однородным, из (3) имеем

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = -\operatorname{div}[\mathbf{v},\mathbf{B}]/c. \tag{4}$$

В аксиально симметричном случае можно найти точные решения уравнений (2) и (4), которые описывают распределения электрических полей, токов и зарядов во вращающейся плазменной оболочке с однородной и изотропной проводимостью [2].

Представим ω в виде суммы функций ω_1 и $\tilde\omega$ таким образом, чтобы для $\tilde\omega$ выполнялись условия униполярности. Решение для униполярного течения есть

$$\tilde\omega = \tilde\omega(L), \qquad L = r\sin^{-2}\Theta, \tag{5}$$

где $\tilde{\omega}$ — произвольная функция.

Для ω_1, которое мы будем называть “вынужденным” течением, из уравнений для электрического поля (2) и (4) с учётом (5) получаем

$$\sin^2\Theta \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \omega_1}{\partial r}\right) + \frac{1}{r\sin\Theta}\frac{\partial}{\partial\Theta}\left(\sin^3\Theta\frac{\partial\omega_1}{\partial\Theta}\right) = 0. \tag{6}$$

Представляя функцию ω_1 в виде $\omega_1 = H(r)\Phi(\Theta)$, в уравнении (6) можно разделить переменные. Соответствующие выражения для функций $H(r)$ и $\Phi(\Theta)$ приведены в работе [2].

Из всех решений уравнения (6) для нас представляют интерес только решения, не имеющие особенностей:

$$H(r) = \tilde{C}_1 r^{\sqrt{\alpha}} + \tilde{C}_2 r^{-\sqrt{\alpha}}, \quad \alpha = (l-1)\,(l+2); \tag{7}$$

$$\Phi(\cos\Theta) = C_1\frac{\mathrm{d}P_l(\cos\Theta)}{\mathrm{d}(\cos\Theta)}\,, \tag{8}$$

где $l > 2$ — целое число, P_l — полиномы Лежандра первого рода, константы C_1 и $\tilde{C}_{1,2}$ определяются граничными условиями задачи.

Окончательно для потенциала $\varphi(r,\Theta)$ имеем [2]

$$\varphi(r,\Theta) = \frac{M\omega_1(r,\Theta)}{cRL} - \frac{M}{cR}\int\frac{\tilde{\omega}}{L^2}\,\mathrm{d}L. \tag{9}$$

Уравнение (4) при этом удовлетворяется автоматически.

Заметим, что при рассмотрении плазмосферы, состоящей из набора сферических слоёв с резко различными свойствами, рассмотренное выше униполярное решение необходимо дополнить распределением электрического потенциала, связанного с накоплением заряда на границах раздела. При этом дополнительный потенциал (отвечающий уравнению $\Delta\varphi(r,\Theta) = 0$), который будем называть свободным решением, находится методами электростатики [9] путём сшивания решения на границах раздела с использованием условий непрерывности потенциала и нормальной компоненты плотности тока.

2. ОДНОСЛОЙНАЯ МОДЕЛЬ ПЛАЗМЕННОЙ ОБОЛОЧКИ С ОДНОРОДНОЙ ПРОВОДИМОСТЬЮ

В качестве простейшей модели структуры околопланетной плазмосферы рассмотрим дифференциально вращающуюся бесконечную оболочку с постоянной проводимостью σ_p. Пусть планета вращается твердотельно с угловой скоростью ω_0 и имеет постоянную проводимость σ_0 и радиус R. Угловая скорость вращения плазменной оболочки $\omega_\mathrm{p}(r,\Theta)$ предполагается заданной. Согласно вышесказанному для решения задачи необходимо представить функцию $\omega_\mathrm{p}(r,\Theta)$ в виде суперпозиции униполярного течения $\tilde{\omega}_\mathrm{p}(L)$ и функций $\omega_1(r,\Theta)$.

Зададим течение $\omega_\mathrm{p}(r,\Theta)$ следующим образом. Из набора решений уравнения (6) ограничимся для дальнейшего анализа функцией, отвечающей $l = 3$: решение с $l = 3$ не содержит особенностей, имеет простой вид и удовлетворяет естественному условию чётности по полярному углу Θ, которое следует из симметрии задачи. Таким образом,

$$\omega_1 = \left(\tilde{C}_1 r^{\sqrt{10}} + \tilde{C}_2 r^{-\sqrt{10}}\right)\frac{\mathrm{d}P_3(\cos\Theta)}{\mathrm{d}(\cos\Theta)}\,.$$

В реальности распределение поля скоростей вблизи поверхности планеты в значительной степени должно определяться силами вязкости [2], поэтому естественно считать, что $\omega_\mathrm{p}(r,\Theta)$ должна удовлетворять граничному условию

$$\omega_\mathrm{p}(R,\Theta) = \omega_0, \tag{10}$$

которое означает, что проскальзывание между планетой и плазменной оболочкой отсутствует. На больших высотах также будем считать течение твердотельным:

$$\omega_{\mathrm{p}}(r \to \infty, \Theta) = \Omega_0. \tag{11}$$

Комбинируя вынужденное течение $\omega_1(r,\Theta)$ и униполярное течение $\tilde{\omega}_{\mathrm{p}}(L)$ с учётом граничных условий (10) и (11), получаем распределение угловой скорости плазменной оболочки в виде

$$\omega_{\mathrm{p}}(r,\Theta) = \Omega_0 + (\omega_0 - \Omega_0)\left[\left(\frac{R}{r}\right)^{\sqrt{10}}\left(1 - \frac{5}{4}\sin^2\Theta\right) + \frac{5R}{4r}\sin^2\Theta\right]. \tag{12}$$

Заметим, что можно предполагать произвольное соотношение между угловыми скоростями Ω_0 и ω_0, т. к. экспериментальные данные свидетельствуют о том, что в плазменных оболочках Земли и других планет возможно суперврвращение, т. е. движение верхних слоёв плазмосферы с большей скоростью по сравнению с нижними (см., например, [10]). Профили $\omega_{\mathrm{p}}(r,\Theta)$ для разных случаев отношения угловых скоростей ω_0 и Ω_0 представлены на рис. 1.

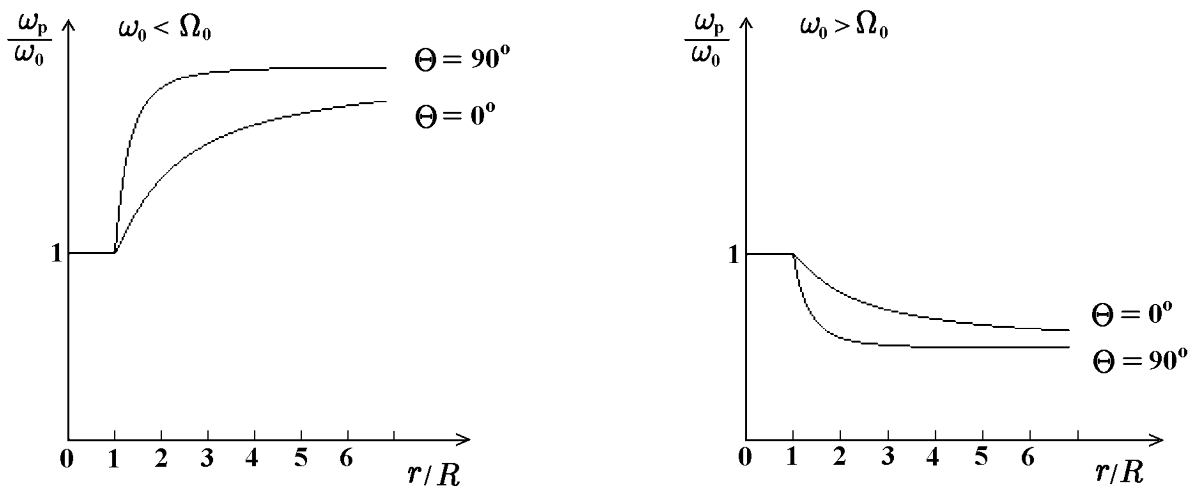


Рис. 1. Рассматриваемые течения $\omega_{\mathrm{p}}(r,\Theta)$

В соответствии с распределением $\omega_{\mathrm{p}}(r,\Theta)$ ищем решение для потенциала:

$$\varphi^{(r<R)} = \frac{M\omega_0}{cr}\sin^2\Theta + A_0 + A_2P_2r^2 + A_4P_4r^4,$$

$$\varphi^{(r>R)} = \frac{M\omega_{\mathrm{p}}(r,\Theta)}{cr}\sin^2\Theta - \frac{5M\,(\omega_0 - \Omega_0)\,R}{8cr^2}\sin^4\Theta + \frac{B_0}{r} + \frac{B_2P_2}{r^3} + \frac{B_4P_4}{r^5}.$$

Потенциал определяет электрические поля и токи проводимости*. Коэффициенты A_0, A_2, A_4, B_0, B_2, B_4 находим из условий непрерывности потенциала и нормальной компоненты плотности тока на границе $r = R$.

Для удобства записи обозначим отношение проводимостей как

$$b = \sigma_0/\sigma_{\mathrm{p}}$$

* Отметим, что помимо токов проводимости существует ещё и конвективный ток $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$, который обусловлен перемещением заряда вследствие вращения плазменной оболочки. Этот ток создаёт дополнительное полоидальное магнитное поле, относительно слабое ввиду малости конвективных токов по сравнению с токами проводимости.

и введём численные коэффициенты

$$k_{20}=\frac{10-2\sqrt{10}}{7\,(3+2b)}\,,\quad k_{40}=\frac{2\sqrt{10}-5}{7\,(5+4b)}\,,\quad k_{2\mathrm{p}}=-\frac{20b+6\sqrt{10}}{21\,(3+2b)}\,,\quad k_{4\mathrm{p}}=\frac{2\sqrt{10}+4b}{7\,(5+4b)}\,.$$

С учётом этих обозначений запишем окончательные выражения для потенциала, плотности тока и объёмного заряда внутри планеты, $r<R$:

$$\begin{aligned}
\varphi &= \frac{M\omega_0}{cr}\sin^2\Theta+\frac{M\,(\omega_0-\Omega_0)}{cR}\left(-\frac{1}{3}+k_{20}P_2\frac{r^2}{R^2}+k_{40}P_4\frac{r^4}{R^4}\right),\\
j_r &= -\sigma_0\frac{M\,(\omega_0-\Omega_0)}{cR^2}\left(2k_{20}P_2\frac{r}{R}+4k_{40}P_4\frac{r^3}{R^3}\right),\\
j_\Theta &= \sigma_0\frac{M\,(\omega_0-\Omega_0)}{cR^2}\sin\Theta\cos\Theta\left(3k_{20}\frac{r}{R}+k_{40}\frac{r^3}{R^3}\left(10-\frac{35}{2}\sin^2\Theta\right)\right),\qquad \rho_0=-\frac{M\omega_0}{\pi cr^3}P_2,
\end{aligned}$$

и в плазмосфере, $r>R$:

$$\begin{aligned}
\varphi &= \frac{M\omega_\mathrm{p}(r,\Theta)}{cr}\sin^2\Theta-\frac{5M\,(\omega_0-\Omega_0)\,R}{8cr^2}\sin^4\Theta+\frac{M\,(\omega_0-\Omega_0)}{cR}\left(k_{2\mathrm{p}}P_2\frac{R^3}{r^3}+k_{4\mathrm{p}}P_4\frac{R^5}{r^5}\right),\\
j_r &= \sigma_\mathrm{p}\frac{M\,(\omega_0-\Omega_0)}{cR^2}\left(3k_{2\mathrm{p}}P_2\frac{R^4}{r^4}+5k_{4\mathrm{p}}P_4\frac{R^6}{r^6}+\frac{2\sqrt{10}R^{\sqrt{10}+2}}{7r^{\sqrt{10}+2}}\,(P_2-P_4)\right),\\
j_\Theta &= \sigma_\mathrm{p}\frac{M\,(\omega_0-\Omega_0)}{cR^2}\sin\Theta\cos\Theta\left(3k_{2\mathrm{p}}\frac{R^4}{r^4}+k_{4\mathrm{p}}\frac{R^6}{r^6}\left(10-\frac{35}{2}\sin^2\Theta\right)+\frac{5R^{\sqrt{10}+2}}{2r^{\sqrt{10}+2}}\sin^2\Theta\right),\\
\rho_0 &= -\frac{M\,(\omega_0-\Omega_0)}{4\pi cR^3}\frac{R^4}{r^4}\left\{\frac{2}{3}+\frac{40}{21}P_2-\frac{18}{7}P_4+\right.\\
&\quad\left.+\left(\frac{2\sqrt{10}+8}{7}P_2+\frac{20-2\sqrt{10}}{7}P_4\right)\frac{R^{\sqrt{10}-1}}{r^{\sqrt{10}-1}}\right\}-\frac{M\Omega_0}{\pi cr^3}P_2.
\end{aligned}$$

Дополним эти результаты выражением для плотности поверхностного заряда на границе $r=R$:

$$\rho_\mathrm{s}=\frac{1-b}{28\pi}\frac{M\,(\omega_0-\Omega_0)}{cR^2}\left(\frac{20-4\sqrt{10}}{3+2b}P_2+\frac{8\sqrt{10}-20}{5+4b}P_4\right). \tag{13}$$

Заряд на поверхности планеты возникает из-за различия свойств среды по разные стороны от границы раздела: различие проводимостей планеты и плазмосферы обусловливает вклад в поверхностный заряд от свободного решения, а наличие скачка производной угловой скорости вращения приводит к разрыву униполярной части E_r. Отметим, что знак ρ_s определяется знаком выражения $\omega_0-\Omega_0$. При $\omega_0<\Omega_0$ (суперврращение) полярные области будут заряжены положительно, а экваториальная область — отрицательно, т. к. мы предполагаем, что магнитный момент $\mathbf{M}$ и угловая скорость вращения планеты $\boldsymbol{\omega}_0$ противоположно направлены. Плотность поверхностного заряда при $b\ll 1$ на полюсе и экваторе (см. рис. 2)

$$\rho_\mathrm{s}^\mathrm{P}\approx 0{,}5\frac{M\,(\omega_0-\Omega_0)}{4\pi cR^2}\,,\qquad \rho_\mathrm{s}^\mathrm{E}\approx -0{,}12\frac{M\,(\omega_0-\Omega_0)}{4\pi cR^2}\,.$$

Суммарный заряд верхней полусферы, как и всей поверхности планеты, равен нулю. Соответствующая найденному решению картина силовых линий электрического поля представлена на рис. 3, структура линий тока показана на рис. 4. Здесь и далее будем называть областью генерации ту область плазменной оболочки, где потенциал существенно отличается от второго слагаемого в (9), т. к. токи проводимости порождают только неуниполярную часть потенциала (первое слагаемое в (9)) и свободное решение. Таким образом, ясно, что область генерации совпадает с областью вынужденной (неуниполярной) дифференциальности течения.

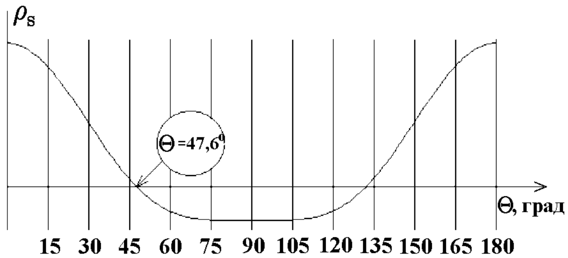


Рис. 2. Нормированная плотность поверхностного заряда на границе $r = R$ в случае $\mathbf{M} \uparrow\downarrow \boldsymbol{\omega}_0$, $b \ll 1$, $\omega_0 < \Omega_0$

Вне области генерации течение $\omega_{\rm p}(r,\Theta) = \tilde{\omega}_{\rm p}(L)$, при этом электрическое поле

$$\mathbf{E} \approx \mathbf{E}_B = -[\mathbf{v},\mathbf{B}]/c. \qquad (14)$$

Условие (14) соответствует обращению в нуль тока проводимости.

В данной модели дифференциальность течения задаётся параметром $s = \Omega_0/\omega_0$. Случай $s = 1$ соответствует твердотельному вращению, а дифференциальность течения тем больше, чем больше отличие s от 1.

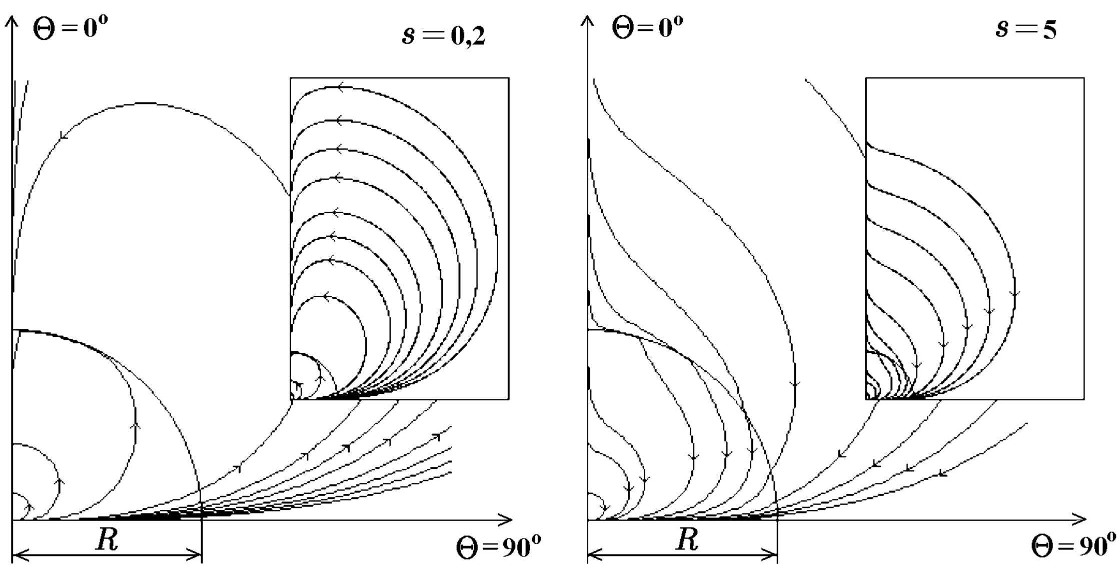


Рис. 3. Силовые линии электрического поля; $b = 0{,}001$, $\mathbf{M} \uparrow\uparrow \boldsymbol{\omega}_0$

Легко видеть следующие закономерности поведения данной системы. В рассматриваемом течении (12) вынужденная дифференциальность существует вплоть до высот порядка нескольких радиусов планеты, поэтому область генерации простирается на значительную высоту. Это проявляется в том, что токовые петли замыкаются на больших высотах (см. рис. 4). При этом структура электрического поля сильно зависит от параметра s (см. рис. 3). В первую очередь, отличие случаев $s < 1$ и $s > 1$ состоит в том, что при суперврaщении направление силовых линий при $\mathbf{M} \uparrow\uparrow \boldsymbol{\omega}_0$ в целом совпадает с направлением вращения часовой стрелки, а при $s < 1$ — наоборот. Можно заметить, что с ростом $|s-1|$ густота силовых линий поля в области генерации растёт. Это означает, что более быстро вращающаяся плазмосфера, а точнее среда с бóльшими градиентами $\omega_1(r,\Theta)$, генерирует более сильные электрические поля и, следовательно, бóльшие токи. Отметим, что в области малых углов Θ топология решений при $s < 1$ и $s > 1$ различается и вне области генерации благодаря тому, что при $\Theta \approx 0$ униполярное решение, пропорциональное $\sin\Theta$, стремится к нулю. Имеется выраженное сгущение силовых линий при

$\Theta \approx 0$ и $\Theta \approx \pi/2$, при этом поле является почти радиальным; это приводит к формированию близкого к радиальному тока в этих интервалах углов при $r > R$ (см. рис. 4). На рис. 3 хорошо виден скачок E_r на границе $r = R$, который тем больше, чем больше s и меньше b (и что согласуется с выражением для плотности поверхностного заряда (13)).

Характерными особенностями токовой структуры являются наличие интенсивного тока вдоль поверхности $r = R$, из которого лишь малая часть ответвляется внутрь планеты. Отметим, что топология линий тока не зависит от параметра s, что легко понять из аналитических выражений для j_r и j_Θ, от Ω_0 зависит лишь значение плотности тока (в том числе и направление его протекания:

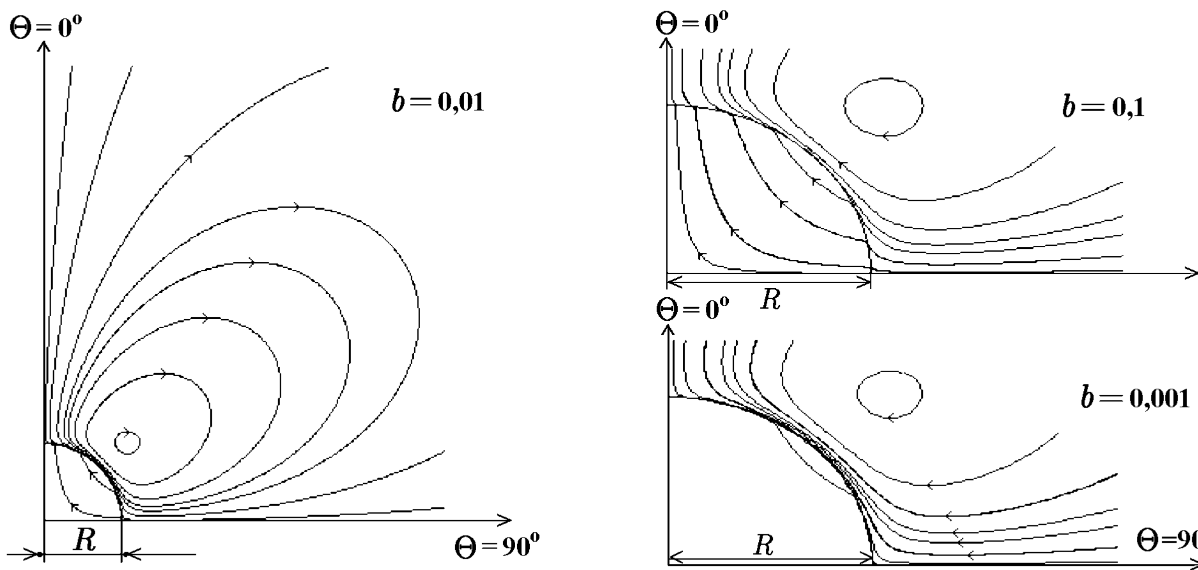


Рис. 4. Линии тока проводимости. Направление тока соответствует случаю $\mathbf{M} \uparrow\uparrow \boldsymbol{\omega}_0$, $s > 1$

при $\mathbf{M} \uparrow\uparrow \boldsymbol{\omega}_0$ в случае супервращения полярная составляющая тока в верхней полусфере положительна, а при $s < 1$ — отрицательна; при $s = 1$ ток проводимости равен нулю). В то же время токовая структура внутри планеты и в области генерации существенно зависит от отношения проводимостей b.

Существует характерный угол

$$\Theta^* \approx 47{,}6^\circ, \tag{15}$$

который при $b \ll 1$ не зависит от параметров задачи; на этой кошироте токовая петля касается поверхности планеты. Этот угол отвечает смене знака поверхностного заряда (см. рис. 2).

Вычислим ток, ответвляющийся в верхнюю половину планеты. Для $b \ll 1$ получим:

$$I_0 = 0{,}064 \cdot 2\pi \frac{M\,(\omega_0 - \Omega_0)}{c} \sigma_0. \tag{16}$$

При $b \ll 1$ ток в планете очень мал, причём линии тока, попадающие внутрь планеты, в этом случае приходят к поверхности $r = R$ при очень малых углах Θ. В предположении $b \ll 1$ вычислим суммарный ток, проходящий через сечение $r \in [R; 1{,}1R]$, $\Theta = \Theta^*$:

$$I_\Theta = 0{,}014 \cdot 2\pi \frac{M(\omega_0 - \Omega_0)}{c} \sigma_{\text{p}}. \tag{17}$$

Выражение (17) оценивает суммарный ток в приповерхностном слое плазмосферы; ясно, что при $b \ll 1$ $I_0 \ll I_\Theta$; в этом случае I_Θ является также оценкой полного тока, циркулирующего в плазмосфере.

На рис. 5 построены распределения объёмного заряда ρ при $M < 0$; меньшая плотность заряда соответствует бóльшей плотности точек. Напомним, что объёмный заряд обусловлен униполярным потенциалом, т. к. для свободного решения $\Delta\varphi = 0$. Суммарный заряд можно разложить на составляющие:

1) заряд, обусловленный вторым слагаемым в правой части (9), спадающий как $1/r^3$; вне области генерации положительный заряд сосредоточен в полярной области, а отрицательный — в экваториальной;

2) заряд, обусловленный первым слагаемым в правой части (9); он существенен только вблизи поверхности планеты, в области генерации, и проявляется как локальное перераспределение заряда

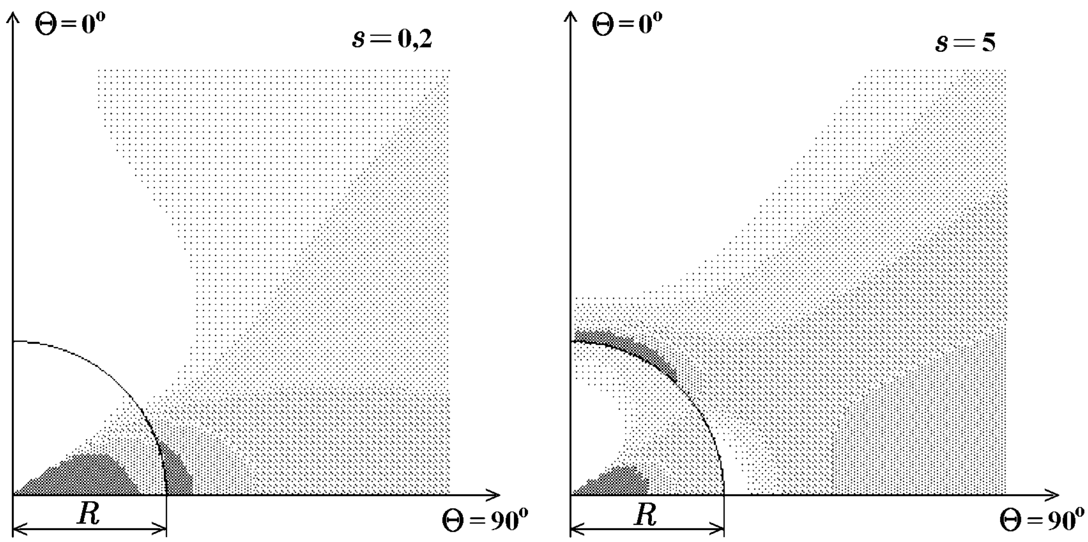


Рис. 5. Распределение объёмного заряда, $\mathbf{M} \uparrow\downarrow \boldsymbol{\omega}_0$

на глобальном фоне, обусловленном невынужденным потенциалом. В случае суперврашения вблизи поверхности планеты в полярной области образуется отрицательный заряд, а в экваториальной — положительный; при $s < 1$ перераспределение происходит наоборот. Величина дополнительного заряда, генерируемого вблизи поверхности, растёт пропорционально $|s - 1|$.

Суммарный заряд системы равен нулю.

3. ДВУХСЛОЙНАЯ МОДЕЛЬ ПЛАЗМОСФЕРЫ С ОДНОРОДНОЙ ПРОВОДИМОСТЬЮ В КАЖДОМ СЛОЕ

В рассмотренной выше однослойной модели плазменная оболочка считалась однородно проводящей. Однако плазмосферы реальных планет устроены более сложно. В частности, известно, что проводимость плазмосферы Земли, оставаясь изотропной, экспоненциально растёт до высот порядка 100 км, а затем становится анизотропной и после резкого изменения меняется незначительно вплоть до высот порядка 250 км [11].

В этом разделе мы учтём неоднородность проводимости в виде двух слоев: слоя толщины $\hat{h}$ с проводимостью $\sigma_{\rm a} = \mathrm{const}$, вращающегося твердотельно совместно с планетой (атмосферы), и дифференциально вращающегося бесконечного плазмосферного слоя с проводимостью $\sigma_{\rm p} = \mathrm{const}$, расположенного выше атмосферы. Граница раздела слоёв должна быть сферической вследствие того, что проводимость не зависит от полярного угла. Как и раньше, будем считать, что планета вращается твердотельно с угловой скоростью ω_0 и имеет постоянную проводимость σ_0 и радиус R.

Для удобства введём безразмерное расстояние x таким образом, чтобы радиус планеты равнялся единице: $x = r/R$. Кроме этого, введём безразмерные коэффициенты $h = \hat{h}/R$, $R_{\rm a} = 1+h$, $g_0 = \sigma_{\rm a}/\sigma_0$, $g_{\rm p} = \sigma_{\rm a}/\sigma_{\rm p}$.

Распределение скорости в атмосфере реальной планеты должно определяться в основном вязким трением, поэтому положим, что атмосфера твердотельно вращается вместе с планетой, т. е. в атмосферном промежутке

$$\omega_{\rm a}(r,\Theta) = \omega_0.$$

Течение $\omega_{\rm a}(r,\Theta)$ при $x > 1+h$ зададим в таком же виде, как и в предыдущем разделе, т. е. при $x > 1+h$ справедлива формула (12) с заменой R/r на $R_{\rm a}/x$. Поставленная задача отличается от рассмотренной выше однослойной модели только наличием атмосферы. Таким образом, сопоставив две модели, можно будет определить характер влияния атмосферы на процессы генерации тока. Рассматриваемая задача имеет точное решение, которое может быть найдено описанным выше способом. Однако вид выражений для полей и токов достаточно сложен. Введём следующие упрощающие предположения, позволяющие записать результаты аналитических вычислений в обозримом виде:

1) атмосфера является достаточно тонкой и обладает малой проводимостью:

$$h \ll 1, \quad g_0 \ll 1, \quad g_{\rm p} \ll 1; \tag{18}$$

2) проводимость плазмосферы много больше проводимости планеты:

$$g_{\rm p} \ll g_0; \tag{19}$$

3) отношение толщины атмосферы и радиуса планеты много больше отношения соответствующих проводимостей:

$$g_0 \ll h. \tag{20}$$

Если рассматривать плазменную оболочку Земли в рамках двухслойной модели, то условия (18)–(20) можно считать следующими из экспериментальных данных. Условие (20) имеет, кроме этого, ещё одно обоснование. При анализе результатов численного расчёта мы увидим, что при $g_0 \geq h$ поведение двухслойной системы мало отличается от поведения соответствующей однослойной системы с параметром $b = g_0/g_{\rm p} = \sigma_0/\sigma_{\rm p}$. Поэтому, для исследования особенностей, связанных с атмосферным слоем, необходимо, чтобы условие (20) было выполнено.

Объединим (18–20) в одно условие:

$$g_{\rm p} \ll g_0 \ll h \ll 1. \tag{21}$$

Для удобства записи введём численные коэффициенты

$$A_2 = \frac{10-2\sqrt{10}}{42}\,\frac{g_0 R_{\rm a}^2}{h}\,, \quad A_4 = \frac{2\sqrt{10}-5}{140}\,\frac{g_0 R_{\rm a}^4}{h}\,, \quad B_2 = \frac{10-2\sqrt{10}}{105}\,\frac{R_{\rm a}^2}{h}\,,$$
$$B_4 = \frac{2\sqrt{10}-5}{315}\,\frac{R_{\rm a}^4}{h}\,, \quad D_2 = -\frac{2\sqrt{10}}{21}\,R_{\rm a}^2\,, \quad D_4 = \frac{2\sqrt{10}}{35}\,R_{\rm a}^4\,.$$

С учётом этих обозначений приведём выражения для потенциала и компонент плотности тока в планете, атмосфере и плазмосфере при условии (21): при $x < 1$ (внутри планеты)

$$\begin{aligned}
\varphi &= \frac{M\omega_0}{cxR}\sin^2\Theta + \frac{M\,(\omega_0-\Omega_0)}{cR}\left(-\frac{1}{3} + A_2P_2x^2 + A_4P_4x^4\right),\\
j_r &= -\sigma_0\frac{M\,(\omega_0-\Omega_0)}{cR^2}\left(2A_2P_2x + 4A_4P_4x^3\right),\\
j_\Theta &= \sigma_0\frac{M\,(\omega_0-\Omega_0)}{cR^2}\sin\Theta\cos\Theta\left(3A_2x + A_4x^3\left(10 - \frac{35}{2}\sin^2\Theta\right)\right);
\end{aligned}$$

при $1 < x < R_{\rm a}$ (атмосфера)

$$\begin{aligned}
\varphi &= \frac{M\,\omega_0}{cxR}\sin^2\Theta + \frac{M(\omega_0-\Omega_0)}{cR}\left(-\frac{1}{3} + B_2P_2\left(x^2 - \frac{1}{x^3}\right) + B_4P_4\left(x^4 - \frac{1}{x^5}\right)\right),\\
j_r &= -\sigma_{\rm a}\frac{M\,(\omega_0-\Omega_0)}{cR^2}\left(B_2P_2\left(2x - \frac{3}{x^4}\right) + B_4P_4\left(4x^3 - \frac{5}{x^6}\right)\right),\\
j_\Theta &= \sigma_{\rm a}\frac{M\,(\omega_0-\Omega_0)}{cR^2}\sin\Theta\cos\Theta\left(3B_2\left(x - \frac{1}{x^4}\right) + B_4\left(x^3 - \frac{1}{x^6}\right)\left(10 - \frac{35}{2}\sin^2\Theta\right)\right);
\end{aligned}$$

при $x > R_{\rm a}$ (плазмосфера)

$$\begin{aligned}
\varphi &= \frac{M\omega_{\rm p}(r,\Theta)}{cxR}\sin^2\Theta - \frac{5M\,(\omega_0-\Omega_0)\,R_{\rm a}}{8cx^2R}\sin^4\Theta + \frac{M\,(\omega_0-\Omega_0)}{cR}\left(\frac{D_2P_2}{x^3} + \frac{D_4P_4}{x^5}\right),\\
j_r &= \sigma_{\rm p}\frac{M\,(\omega_0-\Omega_0)}{cR_{\rm a}^2R^2}\left(\frac{3D_2P_2}{x^4} + \frac{5D_4P_4}{x^6} + \frac{2\sqrt{10}R_{\rm a}^{\sqrt{10}+2}}{7x^{\sqrt{10}+2}}\,(P_2-P_4)\right),\\
j_\Theta &= \sigma_{\rm p}\frac{M\,(\omega_0-\Omega_0)}{cR_{\rm a}^2R^2}\sin\Theta\cos\Theta\left(\frac{3D_2}{x^4} + \frac{D_4}{x^6}\left(10 - \frac{35}{2}\sin^2\Theta\right) + \frac{5R_{\rm a}^{\sqrt{10}+2}}{2x^{\sqrt{10}+2}}\sin^2\Theta\right).
\end{aligned}$$

Нет необходимости выписывать выражения для объёмного заряда, т. к. он определяется только униполярной частью потенциала. Последняя выглядит так же, как в однослойной задаче, только роль границы твердотельно вращающейся планеты (по отношению к униполярному потенциалу) теперь играет поверхность $x = R_{\rm a}$. Поэтому формулы для объёмного заряда имеют такой же вид с заменой R на $R_{\rm a}$.

Дополним эти результаты выражениями для поверхностного заряда на границах $x = 1$ и $x = R_{\rm a}$:

$$\rho_{\rm s}^{(1)} = -\frac{1-g_0}{4\pi h}\frac{M\,(\omega_0-\Omega_0)}{cR^2}\left\{\left(D_2 + \frac{10}{21}R_{\rm a}^2\right)P_2 + \left(D_4 - \frac{R_{\rm a}^4}{7}\right)P_4\right\},$$

$$\rho_{\rm s}^{(R_{\rm a})} = \frac{1-2h}{4\pi h}\frac{M\,(\omega_0-\Omega_0)}{cR^2}\left\{\left(D_2 + \frac{10}{21}R_{\rm a}^2\right)P_2 + \left(D_4 - \frac{R_{\rm a}^4}{7}\right)P_4 + \frac{4\sqrt{10}\,h^2}{7}\,(P_2-P_4)\right\}.$$

Поверхностный заряд возникает из-за различия свойств среды по разные стороны от границы. На границе $x = 1$ заряд обусловлен целиком различием проводимости планеты и атмосферы, на границе $x = R_{\rm a}$ заряд возникает не только из-за скачка проводимости, но и из-за разрыва производной ω, который она терпит при $x = R_{\rm a}$.

Заметим, что $\rho_{\rm s}^{(1)} \approx -\rho_{\rm s}^{(R_{\rm a})}$, причём суммарный заряд

$$\rho_{\rm s}^{(1)} + \rho_{\rm s}^{(R_{\rm a})} \qquad (22)$$

оказывается порядка поверхностного заряда в однослойной модели (выражение (13)). В то же время в однослойном случае на поверхности планеты образуется заряд, по модулю много меньший, чем отдельно взятые заряды $\rho_{\rm s}^{(1)}$ и $\rho_{\rm s}^{(R_{\rm a})}$ (в силу $h \ll 1$).

Результат численного расчёта в случае $g_0 \ll h$ приведён на рис. 6.

Отметим, что при уменьшении h до значений, близких к g_0, нужно учитывать члены порядка g_0/h, которые были опущены при получении приведённых выше формул. Поэтому в пределе $h \to 0$ суммарный заряд (22) совпадает с выражением для поверхностного заряда в однослойном случае.

Поверхностный заряд $\rho_\mathrm{s}^{(R_\mathrm{a})}$ на верхней границе атмосферы обращается в нуль при $\Theta = \Theta_\mathrm{p}$. Этот угол соответствует точке касания токовой петли верхней границы атмосферы; на нижней границе соответствующий угол $\Theta = \Theta_0$. В приближении (21) эти характерные углы равны и не зависят от параметров задачи:

$$\Theta_\mathrm{p} \approx \Theta_0 = 51{,}1^\circ. \tag{23}$$

Заметим, что углы (23) мало отличаются от аналогичного угла (15), отвечающего однослойной задаче. Тем не менее, отличие $\Theta_\mathrm{p} - \Theta^*$ и $\Theta_0 - \Theta^*$ от нуля принципиально, оно говорит о качественном различии моделей при $g_0 \ll h$. Если не учитывать условие (20), то Θ_p и Θ_0 будут зависеть от h и при $h \to 0$ переходить в Θ^*.

Проведём сопоставление однослойной и двухслойной структур с точки зрения распределений электрического поля и тока проводимости.

Прежде всего заметим, что область генерации (область вынужденной дифференциальности течения) в данной модели практически такая же, как и в однослойном случае. Поэтому картина электрических полей и токов на больших расстояниях от центра планеты соответствует однослойной модели.

Так же, как и в однослойном случае, структура линий тока не зависит от параметра s, который определяет лишь значение плотности тока. Картина силовых линий меняется при изменении s, в частности, с ростом $|s-1|$ увеличивается густота силовых линий в области генерации, что соответствует увеличению поля и более интенсивной генерации тока. Отметим выраженное сгущение силовых линий при $\Theta \approx 0$ и $\Theta \approx \pi/2$; при этом поле является почти радиальным, что приводит к формированию почти радиального тока в окрестности этих углов при $x > R_\mathrm{a}$.

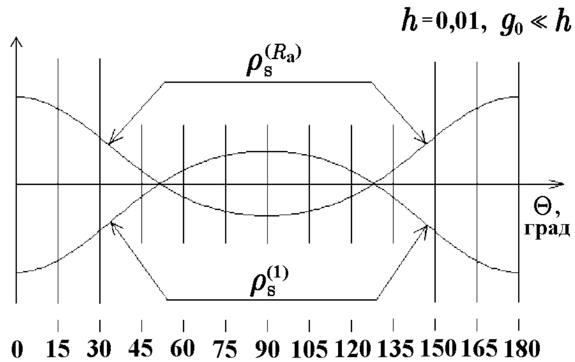


Рис. 6. Нормированная плотность поверхностного заряда, $g_\mathrm{p} \ll g_0$; $s > 1$, $\mathbf{M} \uparrow\downarrow \boldsymbol{\omega}_0$

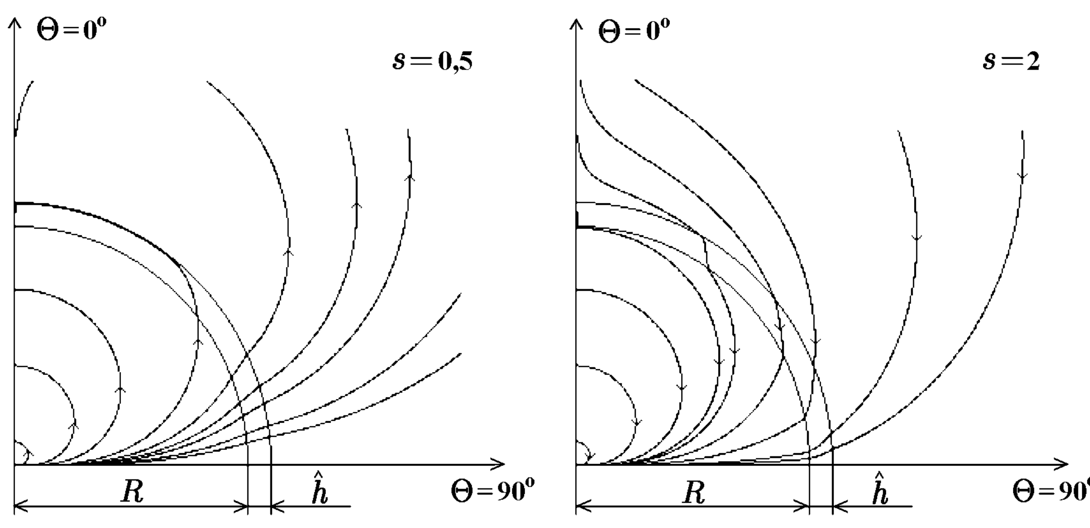


Рис. 7. Силовые линии электрического поля; $g_0 = 0{,}001$; $g_\mathrm{p} = 0{,}0001$; $h = 0{,}1$; $\mathbf{M} \uparrow\uparrow \boldsymbol{\omega}_0$

На рис. 7 и 8 представлены картины полей и токов внутри планеты, в атмосфере и в приграничной области плазмосферы. Хорошо заметны отличия от соответствующих структур однослойной системы, приведённых на рис. 3 и 4.

Наличие атмосферного слоя приводит к значительному уменьшению тока внутри планеты. На картинах линий тока это проявляется в том, что в случае достаточно толстого атмосферного промежутка (в смысле (20)), даже если $g_0 = g_\mathrm{p}$, абсолютное большинство линий тока не попадает в планету. Важно, что токовая структура и значение суммарного тока в области планеты в отличие от однослойной системы определяются не проводимостью планеты, а в основном проводимостью атмосферного промежутка. Малое значение σ_a приводит к возникновению значительного поверхностного заряда на границах раздела и к отсутствию широтной составляющей тока в атмосфере.

Приведём выражения для суммарного тока, втекающего в атмосферу через верхнюю границу:

$$I_{R_\mathrm{a}} \approx 0{,}033 \cdot 2\pi \frac{(R+\hat{h})^2}{R\hat{h}} \, \frac{M\,(\omega_0 - \Omega_0)}{c} \sigma_\mathrm{a}, \tag{24}$$

и суммарного тока, протекающего через планету:

$$I_0 \approx 0{,}033 \cdot 2\pi \frac{R}{\hat{h}} \, \frac{M\,(\omega_0 - \Omega_0)}{c} \sigma_\mathrm{a}. \tag{25}$$

Ток, протекающий в атмосфере, можно найти как разность выражений (24) и (25):

$$I_\mathrm{A} = I_{R_\mathrm{a}} - I_0 \approx 0{,}067 \cdot 2\pi \frac{M\,(\omega_0 - \Omega_0)}{c} \sigma_\mathrm{a}. \tag{26}$$

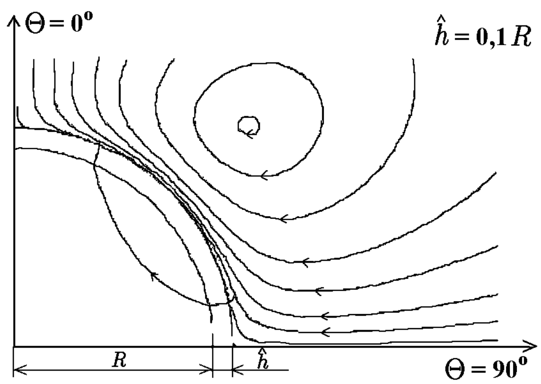


Рис. 8. Линии тока проводимости; $g_0 = 0{,}001$; $g_\mathrm{p} = 0{,}0001$; $h = 0{,}01$. Направление тока соответствует случаю $\mathbf{M} \uparrow\uparrow \boldsymbol{\omega}_0$, $s > 1$

Выражение (26) с точностью до замены σ_a на σ_0 совпадает с выражением (16) для суммарного тока, ответвляющегося в верхнюю половину планеты в однослойном случае. Это не случайное совпадение. Формула (16) получена в предположении $b \ll 1$, а в этом случае линии тока, пересекающие поверхность планеты, распространяются в основном в приграничном слое, что и приводит к одинаковому виду соотношений (16) и (26). Кроме того, вычислим суммарный ток, протекающий в приграничном слое как интеграл от j_Θ по поверхности $r \in [R_\mathrm{a}; 1{,}1R_\mathrm{a}]$, $\Theta = \Theta_\mathrm{p}$:

$$I_\Theta \approx 0{,}014 \cdot 2\pi \frac{M\,(\omega_0 - \Omega_0)}{c} \sigma_\mathrm{p}. \tag{27}$$

Заметим, что эта формула совпадает с соответствующим выражением (17), что является следствием выбора одинаковых плазмосферных течений.

Выражения (24)–(27) получены в предположении (21). Из сравнения формул (24) и (25) с (27) с учётом условия $g_\mathrm{p} \ll h$ следует, что лишь малая часть циркулирующего в системе тока проникает в планету, поэтому значение I_Θ в этом случае может служить оценкой суммарного тока в системе.

Наличие стационарного тока в поглощающей среде предполагает существование некоторой электродвижущей силы. В данной задаче ток создаёт распределённая ЭДС, обусловленная вынужденной дифференциальностью вращения плазмосферы в магнитном поле планеты.

Из-за малости проводимости атмосферы основная часть напряжения в цепи приложена к атмосферному промежутку. Фактически, атмосферный промежуток представляет собой сферический конденсатор, включённый в глобальную цепь таким образом, что заряд на его обкладках и разность потенциалов зависят от полярного угла (см. рис. 6). Такое распределение заряда обеспечивается сторонней ЭДС. В силу тонкости слоя ёмкость этого конденсатора велика, что и объясняет большие по сравнению с однослойным случаем значения поверхностного заряда на границах; малая проводимость атмосферы, заполняющей конденсатор, приводит к приближённому равенству $\rho_{\rm s}^{(1)}(\Theta) \approx -\rho_{\rm s}^{(R_{\rm a})}(\Theta)$. Таким образом, в предположении (21) напряжение $\delta\varphi$, приложенное к атмосферному промежутку, при каждом Θ можно вычислить по формуле для плоского конденсатора, образованного границами раздела, с зарядом на обкладках $\rho_{\rm s}^{(R_{\rm a})}(\Theta)$. Вычисление $\delta\varphi$ в зависимости от полярного угла с помощью полученных формул для потенциала приводит к тому же результату:

$$\delta\varphi = \frac{10 - 2\sqrt{10}}{21}\,\frac{M\,(\omega_0 - \Omega_0)}{cR}(P_2 + 0{,}216P_4). \tag{28}$$

Разность потенциалов (28) обращается в нуль при $\Theta = 51{,}1^\circ$. Этот угол совпадает с углом Θ_0, при котором обращается в нуль радиальная компонента атмосферного тока. Максимальное значение $\delta\varphi$ достигается на полюсе: $\varphi_{\max} = 2M\,(\omega_0 - \Omega_0)/(7cR)$.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе были рассмотрены осесимметричные стационарные электродинамические задачи о вращении планеты, обладающей дипольным магнитным полем, совместно с дифференциально вращающейся плазменной оболочкой. На основе рассмотрения однослойной и двухслойной моделей плазмосферы выявлены следующие особенности поведения подобных электродинамических систем:

1) в областях униполярного вращения поведение системы определяет невынужденная униполярная часть потенциала, при этом электрическое поле $\mathbf{E} \approx -\mathbf{E}_B = [\mathbf{v}, \mathbf{B}]/c$, ток проводимости приблизительно равен нулю, объёмный заряд $\rho \approx -M\omega P_2/(\pi c r^3)$;

2) генерация тока проводимости происходит в областях с вынужденной (неуниполярной) дифференциальностью вращения плазмосферы; в случае сильной вынужденной дифференциальности электрическое поле становится существенно отличным от $\mathbf{E}_B$;

3) характерными особенностями токовых структур являются наличие интенсивного тока вдоль верхней границы атмосферы или поверхности планеты в однослойном случае (при этом лишь малая часть тока (при $\sigma_0 \ll \sigma_{\rm p}$) ответвляется внутрь) и почти радиального тока при $\Theta \approx 0$ (на полюсе) и $\Theta \approx \pi/2$ (на экваторе). Существует характерный угол Θ^*, не зависящий в принятых приближениях от параметров задачи, при котором токовая петля касается поверхности планеты;

4) в области генерации происходит значительное перераспределение объёмного заряда на фоне униполярного заряда $\rho = -M\omega P_2/(\pi c r^3)$;

5) значение суммарного тока, втекающего через поверхность планеты, определяется, в первую очередь, проводимостью атмосферы вследствие того, что выходное напряжение планетарного генератора приложено главным образом к атмосферному промежутку как к участку глобального электрического контура с наибольшим сопротивлением;

6) на границах атмосферы возникает значительный поверхностный заряд. Фактически, атмосферный промежуток представляет собой сферический конденсатор, включенный в глобальную цепь таким образом, что заряд на его обкладках и разность потенциалов между ними зависят от полярного угла.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект № 99–02–17745.

ЛИТЕРАТУРА

1. Wilson C. T. R. // Philos. Trans. 1920. V. A221. P. 73.
2. Малов Д. Е., Чугунов Ю. В. // Изв. вуз. Радиофизика. 1997. Т. 40, № 1–2. С. 232.
3. Беспалов П. А., Чугунов Ю. В. // Изв. вуз. Радиофизика. 1997. Т. 40, № 1–2. С. 138.

4. Bespalov P. A., Chugunov Yu. V., Davydenko S. S. // J. Atm. Terr. Phys. 1996. V. 16, № 2. P. 69.
5. Bespalov P. A., Chugunov Yu. V., Davydenko S. S. // J. Atm. Electricity. 1996. V. 58, № 5. P. 605.
6. Акасофу С. И., Чепмен С. Солнечно-земная физика. — М.: Мир, 1975.
7. Гершман Б. Н. Динамика ионосферной плазмы. — М.: Наука, 1974. — 256 с.
8. Тамм И. Е. Основы теории электричества. — М.: Наука, 1989.
9. Jackson J. D. Classical electrodynamics. — N. Y.: J. Wiley.
10. Kundt W. // Planet. Space Sci. 1983. V. 31, № 11. P. 1339.
11. Volland H. // Physica Spictra. 1987. V. 58, № T18. P. 289.

Институт прикладной физики РАН,
г. Н. Новгород, Россия

Поступила в редакцию
15 декабря 1999 г.

**ELECTRIC FIELDS AND CURRENTS IN A MODEL OF A PLANETARY GENERATOR.
I. SMOOTH INHOMOGENEITY OF ANGULAR-ROTATION VELOCITY OF PLASMA ENVELOPE**

A. O. Soldatkin and Yu. V. Chugunov

We study the role of nonuniform rotation of a plasma envelope in the generation of electric fields and currents within the framework of the planetary-generator model. Solutions of a model problem on inhomogeneous rotation of a plasma envelope together with a magnetized planet are presented. Two cases are considered: the envelope of constant conductivity and the well-conducting envelope with an atmospheric gap (a narrow layer with low conductivity). An analysis of the solutions allows us to reveal several features of such systems, in particular, the dependence of the current-density, electric-field, and space-charge distributions on the nature of nonuniform rotation of the plasma envelope and parameters of the atmospheric gap. We show that the current is generated in volumes where the nonuniform rotation of the plasmasphere is "driven" (i.e., nonunipolar). In the case of strongly driven nonuniformity, the electric field becomes drastically different from the unipolar field $\mathbf{E}_B = -[\mathbf{v}, \mathbf{B}]/c$, while it is close to $\mathbf{E}_B$ in the regions where the rotation is unipolar. The space and surface charges and the voltage on the atmospheric gap are calculated as functions of the polar angle. The total current circulating in the plasmasphere and the current flowing in the planet are estimated.

UDC 533.951, 537.868

STUDY OF LARGE-SCALE IRREGULARITIES GENERATED IN THE IONOSPHERIC F-REGION BY HIGH-POWER HF WAVES

V. L. Frolov,[1] *V. V. Chugurin,*[1] *G. P. Komrakov,*[1] *N. A. Mityakov,*[1] *E. N. Myasnikov,*[1] *V. O. Rapoport,*[1] *E. N. Sergeev,*[1] *V. P. Uryadov,*[1] *F. I. Vybornov,*[1] *V. A. Ivanov,*[2] *V. V. Shumaev,*[2] *A. M. Nasyrov,*[3] *I. A. Nasyrov,*[3] *K. M. Groves* [4]

Experimental studies of the features of artificial ionospheric turbulence was performed at the "Sura" heating facility in August 1998 using numerous diagnostic tools, such as scintillation, chirp-sounding, backscattering, and stimulated electromagnetic emission (SEE) measurements, as well as sounding a HF-disturbed volume (DV) by probing waves. It has been found that generation of strong artificial large-scale irregularities (ALSIs), which manifest themselves through the F-spread on ionograms, scintillations of the satellite signal propagated through the DV, and amplitude fluctuations of the probing wave sounding the DV, is observed not only for an overdense heating, at $f_0 \leq f_{0F_2}$, but also at higher frequencies $f_0 > f_{0F_2} \geq f_{\rm uh}$ (here f_0 is the pump-wave frequency, f_{0F_2} is the critical frequency of the F_2-layer for O-mode electromagnetic wave, and $f_{\rm uh}$ is the plasma frequency at the upper-hybrid resonance height). This means that transfer of the pump-wave energy in the plasma due to the development of thermal parametric (resonance) instability, rather than thermal self-focusing instability, plays the key role in the ALSI generation in the case where the O-mode HF wave is used for the overdense heating. This conclusion is also confirmed by the fact that the ALSI generation is suppressed in the gyroharmonic frequency range, which is similar to the well-studied quenching of the downshifted maximum (DM) in SEE spectra. In this paper, we discuss new ALSI features revealed by the measurements, as well as the limits by which one can control the ALSI spectrum using complex pumping schemes.

INTRODUCTION

Ionospheric modification by high-power HF radio waves has already been studied during for almost 30 years. The basic experimental data obtained in the measurements have been summarized in several special issues of journals [1–6] and in many other papers cited extensively in these issues. The experiments performed have shown that a powerful wave and plasma interact via a number of mechanisms. These can be realized in the case of the overdense heating, in which different types of instabilities develop and, consequently, artificial ionospheric turbulence (AIT) is excited. (The overdense heating refers to the case where the pump-wave frequency is less than the critical frequency of the ionospheric F_2-layer). The AIT is mainly induced in an ionospheric layer located in the vicinity of the pump-wave reflection height and can be divided into: (1) the low-frequency AIT (large-scale irregularities and small-scale field-aligned irregularities or striations, ion-acoustic and low-hybrid waves, and variations in the electron and ion plasma temperatures as well as in the electron plasma density) and (2) the high-frequency AIT (Langmuir, upper-hybrid, and Bernstein waves).

In this paper, we focus on an analysis of the features of artificial large-scale irregularities (ALSIs) of the electron density of scales $l_\perp > \lambda_0 \simeq 30 - 50$ m, excited due to heating of the ionospheric F-layer by powerful HF waves. Here $l_\perp$ is the irregularity scale perpendicular to the geomagnetic-field direction and λ_0 is the wavelength of the pump wave. Generation of ALSIs is one of the major discoveries in early experiments using the Platteville heating facility [7]. ALSIs manifest themselves through the appearance of HF-induced F-spread in ionograms, in scintillations of the satellite's beacons and radio-star signals passed through the disturbed volume (DV), and in amplitude and phase fluctuations of radio waves sounding the DV. Experimental results regarding to ALSI features have been published in many papers (see, for example, [7–21]).

The performed experiments have provided data on the ALSI spectral characteristics, temporal evolution of the irregularities and diurnal variations of their features, spreading of the large-scale perturbations along the geomagnetic field, and their horizontal movement due to ionospheric plasma drifts. Notice that the experiments referred above have been performed for the most part with an ordinary wave for pumping and under overdense heating condition where the pump frequency is lower than the ionosphere penetration frequency.

It is generally accepted that the ALSIs are caused by the thermal self-focusing instability (see, for example, [19,22–25]).

Despite the numerous investigations performed, there are a number of yet unsolved problems concerning ALSI generation and evolution, such as:

(1) What is the reason for the ALSI generation at altitudes below 200 km where the thermal self-focusing instability cannot be developed?

(2) What is the mechanism resulting in the ALSI generation at altitudes higher than the F_2-peak layer for the overdense heating?

(3) What role is played by the mutual influence of the ALSI and striations in forming the artificial turbulence spectrum?

(4) Why are striations often located inside large-scale plasma density depletions (see, e.g., [26,27])?

Indubitably, the answers to these questions have to lead to a new concept of the ALSI generation. It is of great practical importance for the understanding of not only artificial turbulence features but the generation mechanisms of the natural turbulence, as well.

In this paper, we study, first of all, the correlation between ALSI evolution and generation of striations, which are developed due to the growth of thermal parametric (resonance) instability [19,28–30]. In additional, we briefly consider preliminary results concerning variations in the ALSI features in the case where the pump-wave frequency is close to a gyroharmonic frequency or the square amplitude modulation of the pump wave is used. The paper is organized as follows. In Sec. 1, we overview the experimental layout and give a brief description of the diagnostic equipment used in our measurements. The experimental results are presented in Sec. 2. Discussion of basic new features observed in the experiments and concluding remarks are given in Sec. 3.

1. EXPERIMENTAL LAYOUT

The measurements discussed below were performed at the "Sura" heating facility located near Vasil'sursk (geographic coordinates 56.13° N, 46.1° E; index 1 in Fig. 1) at about 110 km to the east from Nizhny Novgorod, Russia. The experiments were performed on August 17–22 during both the day- (T = 06:00–10:00 LT, LT=UT+4$^{\mathrm{h}}$) and nighttime (T = 22:00–01:00 LT) under quiet geomagnetic conditions, when the 3-hour planetary index of magnetic activity K_{p} was of about 1–2 for the majority of measurements. The HF heater was operated in the frequency range 4.3–5.8 MHz at the right-circular (O-mode) polarization. In the frequency range used, the maximum effective radiated power (ERP) P_{eff} was 80–150 MW, larger values corresponding to higher f_0. The following techniques were used to diagnose the AIT: (1) scintillation measurements using satellite's beacons; (2) ionosonde measurements; (3) oblique chirp-sounding of the DV; (4) sounding of the DV by X-mode probing waves; (5) phase space-apart measurements of radio waves scattered in the DV from artificial field-aligned irregularities, and (6) stimulated electromagnetic emission (SEE) measurements. A schematic view of the experimental layout is shown in Fig. 1.

The satellite signal receiving system (index 2 in Fig. 1) is used to receive the 250-MHz beacon's signals from quasi-stationary polar satellites. The system is located near Kazan' (geographic coordinates, 55.8° N, 48.3° E), so that the propagation path to a satellite crosses the heater beam in the F-region. After amplification and downshifting to a lower frequency of about 1 kHz, the signal is recorded on a tape. Later on, this record is processed and analyzed. The spectral power of scintillations is calculated using the FFT technique. Moreover, satellite measurements allow one to study the growth and decay of electron-density irregularities of scales $l_\perp \simeq (0.03 - 1.2)$ km.

The oblique chirp-sounding technique is used to study the modification of the ionospheric plasma-density profile and the features of the F-spread, both induced by HF waves above the “Sura"facility, as well as to control the natural ionospheric conditions. The path Yoshkar-Ola (TX, index 3 in Fig. 1) —“Sura”— Nizhny Novgorod (RX, index 4 in Fig. 1) has a length of 234 km. The Sura facility is located 30 km to the south of its middle point. During the measurements, one ionogram in the frequency range from 2.7 to 11.6 MHz was obtained in every two minutes. It should be noted that the oblique chirp-sounding technique allows one to obtain information on different AIT features, such as 1) the characteristics of both large- and small-scale artificial irregularities [31], 2) the formation of large-scale structures in the ionospheric disturbed volume and the properties of travelling ionospheric disturbances manifesting themselves during ionosphere modification [32], and 3) the features of artificial field-aligned scattering of the HF waves by striations [33]. In addition, the chirp-sounding technique yields information on the natural ionospheric conditions. Note also that routine monitoring of the critical frequency f_{0F_2} of the F_2-layer, as well as natural and artificial levels of the ionospheric disturbances, was performed by ionosonde located in the vicinity of the “Sura"facility (index 5 in Fig. 1) and operated in the 15-min mode.

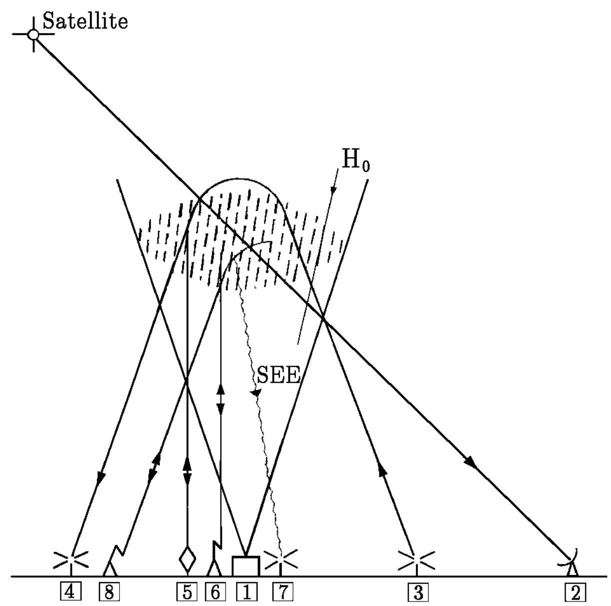


Fig. 1. Experimental geometry and the measurement techniques: the “Sura"facility located in Vasil’sursk, near Nizhny Novgorod, Russia (index 1); the satellite signal receiving system located near Kazan’, $\sim$ 250 km to the east from Vasil’sursk (index 2); the oblique chirp-sounding technique in which a transmitter (index 3) in Yoshkar-Ola, $\sim$ 120 km to the east from Vasil’sursk, and a receiving station (index 4) in Nizhny Novgorod, $\sim$ 110 km to the west from Vasil’sursk, were used; the ionosonde (index 5), probing-wave technique (index 6), and the stimulated electromagnetic emission technique (index 7) deployed near the Sura facility; and HF monostatic radar system deployed in Zimenki, $\sim$ 110 km to the west from Vasil’sursk (index 8).

The probing wave technique (index 6 in Fig. 1) is used for sounding of the DV by low-power X-mode probing waves radiated in the pulsed mode. The use of the X-mode waves in the measurements allows one to avoid the anomalous absorption inherent to the O-mode waves (see, e.g., [8,13,34]). Sounding of the DV by X-mode waves makes it possible to study the temporal evolution of 100–200-m irregularities. This is made by measuring X-waves attenuation related to the scattering from these irregularities [35]. Moreover, HF-induced variations in the sky signal of the probing wave yields an information on ALSI temporal evolution. It is important to note that an X-mode probing wave of frequency approximately 600 – 700 kHz higher than that of the O-mode pump wave was used in the measurements. Such a choice allowed us to account for the difference in propagation of magnetoionic modes, so that their reflection levels are approximately the same.

The stimulated electromagnetic emission (SEE) technique (index 7 in Fig. 1) allows one to study the SEE spectral characteristics and temporal evolution of different emission components [36]. Using the SEE technique, we can study the temporal evolution of both the high-frequency AIT [37,38] and meter-scale striations [34,39]. Based on the fact that the downshifted maximum (DM) in SEE spectra is not developed if the pump wave frequency is very close to a gyroharmonic frequency, we can identify, with a precision of a few kHz, the gyroresonance condition when $f_0 \cong nf_{\rm ce}$, where $f_{\rm ce} \simeq 1.34$ MHz is the electron cyclotron frequency in the F-layer above the "Sura"facility and n is the harmonic mode number which is equal to 4 in our measurements [40]. This method has been employed to study the ALSI features in the gyroharmonic frequency range.

The HF monostatic radar system (index 8 in Fig. 1) is located in Zimenki near Nizhny Novgorod, $\sim$ 110 km to the west from the "Sura"facility. It consists of a HF pulse transmitter and a three-channel signal receiving system with three spaced antennas equipped by digital systems for registration of amplitudes and phases of the received signals. The system can be used for studying the following processes: (1) the artificial field-aligned scattering from irregularities with scale lengths $l_\perp \simeq 20 - 100$ m, (2) both regular and turbulent motions in the DV, and (3) the appearance of large-scale structures in the DV.

Together with the tools presented above, the bistatic HF radar including the Ukraine UTR - 2 radio telescope used as the receiver [41] was employed in the measurements aimed at studying the features of field-aligned scattering of HF waves from small-scale irregularities. However, the analysis of these experimental data is beyond the scope of this paper.

Combined employment of the techniques available allows one to carry out a detailed study of the features of both high- and low-frequency AIT and reveal their mutual influence. Below we present some results obtained by means of these technical systems.

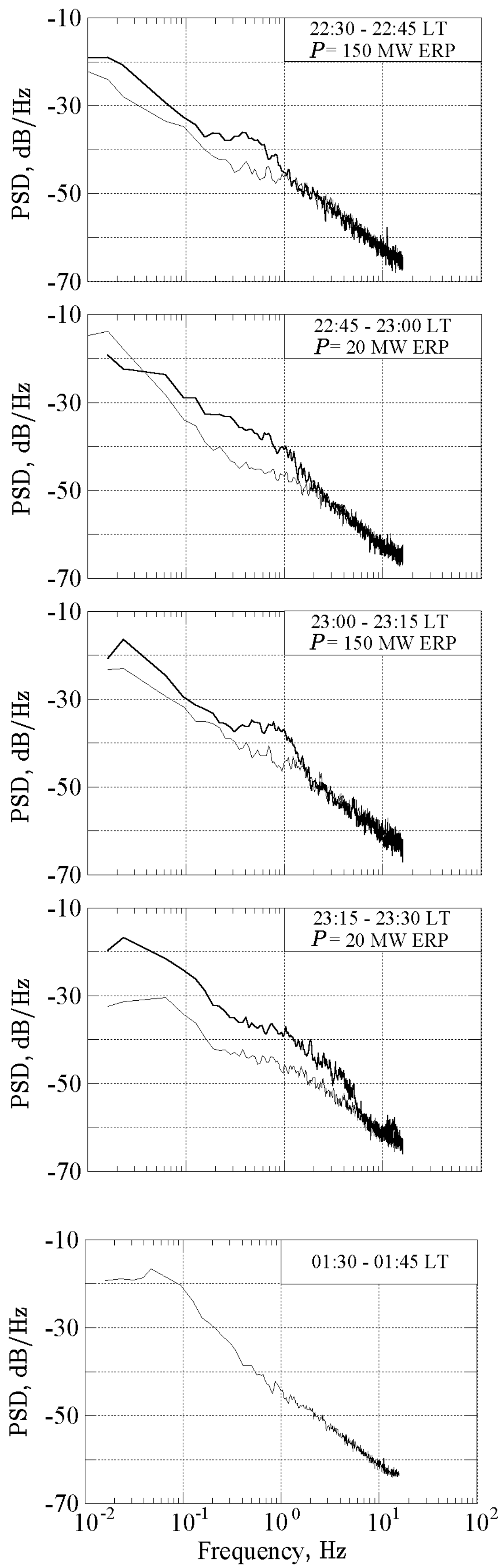
2. OBSERVATIONS

2.1. Measurements of 250 MHz satellite signal scintillations

For scintillation measurements, we used 250-MHz signals from beacons of quasi-stationary polar satellites. Figure 2 (left column) illustrates the power-density spectra (PDS) of signal scintillations for 4 successive heating cycles corresponding to four upper panels. During these measurements, the pump wave at frequency $f_0 = 5828$ kHz was radiated in the following mode: the on-state lasting 7 min was followed by an off-state of 8-min duration. During the cycles started at 22:30 and 23:00 LT, all three transmitters connected to a subantenna array radiated coherently and formed a pencil-type beam with a width of about 8°. In this case, the effective radiated power was about 150 MW ERP. During the cycles starting at 22:45 and 23:15 LT, only one transmitter with its antenna array was used for pumping with $P \simeq 20$ MW ERP. In this case, the beam has a knife-type diagram of width $8° \times 26°$ elongated in the N—S direction.

Two spectra are represented in each panel, the more intense one (bold line) obtained within a few minutes after the pump-wave switch-on under steady-state conditions for the HF-induced turbulence. The second spectrum (thin line) was obtained within 3 min after the switch-off of the pump when the ALSI decayed significantly. In both cases, time intervals of about 3 min have been chosen for the spectral analysis of the signal scintillations. It should be noted that high-frequency variations of the received signal were smoothed using a low-frequency filter with the cut-off frequency of $\sim$ 5 Hz, and then the signal was put to the AD converter. For comparison, a power spectrum of satellite-signal scintillations due to night-time natural irregularities is shown in the lowest panel. One can conclude that this spectrum has a power-law form with a magnitude of the spectral index $s \simeq -2.4$ in a frequency range 0.1 to 1 Hz.

If the component of the irregularity drift velocity perpendicular to the line of sight is known, frequency scales in the spectra can be converted to scale lengths of the irregularities. In the absence of the spaced measurements, this velocity component can be estimated taking into account the low-frequency saturation scale of the power spectrum, which is due to the Fresnel filtering effect [42]: $V_{\rm dr} \simeq 2 l_{\rm Fr} \nu_0 \simeq 30 - 70$ m/s (here $\nu_0 \simeq (0.02 - 0.05)$ Hz is the saturation frequency for the measurements represented in Fig. 2, $l_{\rm Fr} = \sqrt{\lambda z} \simeq 700$ m is the Fresnel scale length, $\lambda = c/f = 1.2$ m is the satellite-signal wavelength, and $z \simeq$ 350 km is the inclined distance from receiving site to the disturbed volume). Note that in our measurements



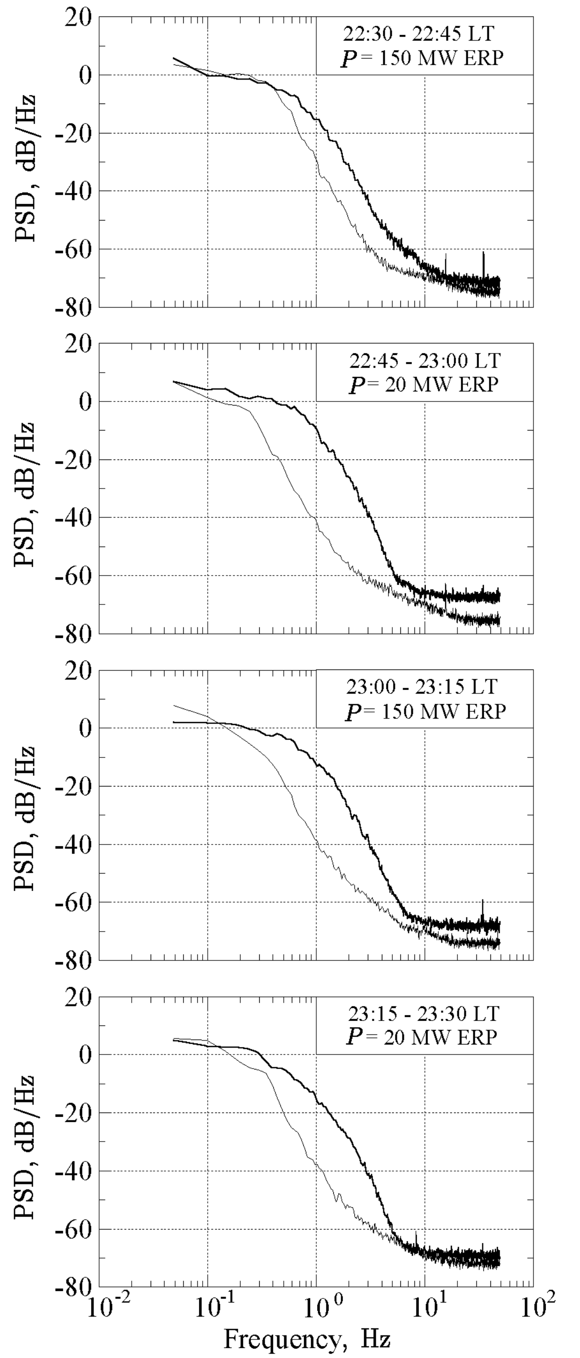


Fig. 2. A sequence of power spectra of both satellite-signal scintillations at $f = 250$ MHz (left column, four upper panels) and X-mode diagnostic wave fluctuations at frequency $f_x = 6533$ kHz (right column) obtained on August 19, 1998 when the pump wave was radiated in the “7-min on, 8-min off"mode at frequency $f_0 = 5828$ kHz. The pump power was the following: $P = 150$ MW ERP for $T_{\rm on}$=22:30 and 23:00 LT and $P = 20$ MW ERP for $T_{\rm on}$=22:45 and 23:15 LT. The lowest panel in the left column shows the power spectrum of natural scintillations of the satellite signal obtained under night-time conditions on August 20, 1998 between T=01:30 and 01:45 LT

the minimum scale length of irregularities that can be distinguished in the spectra, is $l_{\rm min} = V_{\rm dr}/\nu_{\rm max} \simeq (20-30)$ m for $\nu_{\rm max} \simeq 2$ Hz.

It is clearly seen from the data presented in Fig. 2 that a pronounced spectral maximum appears at a frequency $\nu_{\rm max} \simeq 0.4$ and 0.7 Hz during the heating cycles started at 22:30 and 23:00 LT, respectively, when the full power of 150 MW ERP was used for pumping. The values of ν_0 for these cycles were about 0.02 Hz (or $V_{\rm dr} \simeq 30$ m/s). Hence, this spectral maximum can be attributed to artificial irregularities of scale lengths $l_\perp \simeq 50-70$ m, the size being very close to the wavelength $\lambda_0 = 51.5$ m of the powerful wave. Note that the existence of such a maximum in the AIT spectrum was reported earlier in [35,17] in which it was assumed to be directly related to the development of the thermal parametric (resonance) instability. Such a well-pronounced spectral peak is absent if a lower pump power of 20 MW ERP is used for the ionosphere modification, although the thermal instability remains well-developed and manifests itself in SEE generation. The latter may indicate that the thermal parametric (resonance) instability does not entirely determine the generation of strong ALSIs with $l_\perp \simeq 50-100$ m.

Using satellite observations, we can also determine typical growth (τ_1) and decay (τ_2) times for irregularities of different scale lengths. It has been found that, under night-time conditions, $\tau_1 \simeq 15-30$ s and $\tau_2 \simeq 15-20$ s for ALSIs with $l_\perp \simeq 50-100$ m, while $\tau_1 \simeq 40-90$ s and $\tau_2 \simeq 120-240$ s for larger irregularities with $l_\perp \simeq 0.6-1.2$ km. It is clear from these data that the ALSIs are not fully decayed during the 3-min heater-off period after which the FFT processing of the received signal starts to be carried out, and their residual level can exert an appreciable influence on scintillation power spectra obtained during the pause in pumping. Based on the obtained data we can conclude that the off period of 10 min and longer has to be used for measurements of the night ionosphere to insure a truly “cold start” for the ongoing pump cycle. In the measurements presented in Fig. 2, such an influence is most pronounced in the last cycle (T=23:15 LT) when ALSIs do not decay completely during the 8-min off period and the ionograms show the existence of the F-spread here (see Fig. 4e).

2.2. The X-mode anomalous attenuation

It is well known that O-mode probing waves sounding the disturbed volume at frequencies close to the O-mode pump-wave frequency undergo strong anomalous absorption [8,13,43], which results from the scattering of electromagnetic waves into electrostatic (upper-hybrid) waves at small-scale field-aligned irregularities (striations). Scattering of such a type is forbidden for X-mode electromagnetic waves due to their reflection in the ionosphere below the plasma resonance regions [19]. However, their scattering at artificial irregularities is also possible without such a mode conversion. The phenomenon of X-wave scattering from HF-induced irregularities was first studied experimentally in [35]. It has been pointed out that the scattering is determined by irregularities of scale lengths $l_\perp \simeq 100-200$ m and results in the X-mode anomalous attenuation, whose magnitude can amount to $5-6$ dB depending on the probing-wave frequency and pump power. Quite naturally, the analogous scattering is also observed for O-mode probing waves, which can be easily distinguished if their frequencies are well above the pump-wave frequency, which is outside the anomalous-absorption frequency range [44].

Figure 3 illustrates the effect of anomalous attenuation of the X-mode. In these measurements, the O-mode pump wave is radiated in the “7-min on, 8-min off"mode at frequency $f_0 = 5828$ kHz with $P = 20$ MW ERP. Sounding of the disturbed volume was carried out using an X-mode probing wave radiated at frequency $f_x = 6533$ kHz in the pulse mode with a pulse duration of 100 μs and repetition period of 20 ms, so reflection heights for the pump and diagnostic waves were closely spaced. A gradual decrease in X-wave amplitude was observed during time $\tau_1 \simeq 40-50$ s after the start of the pumping. It should be noted that the value of τ_1 for higher pump power $P \simeq 150$ MW ERP is shorter and amounts to 20–30 s. If the pump is switched off, the X-wave amplitude reaches again its unperturbed value for about 40 s. The

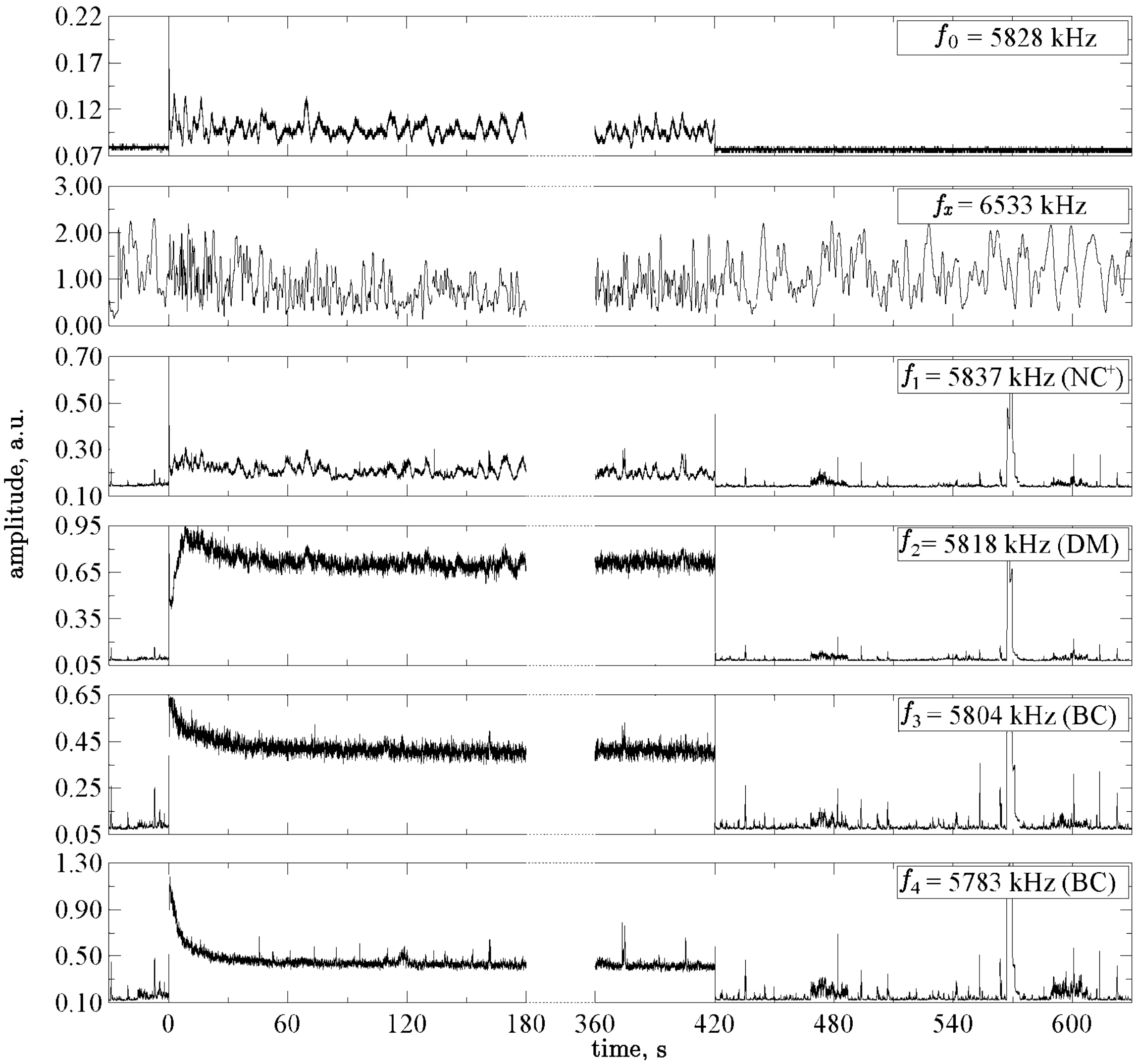


Fig. 3. An oscillogram illustrating the effect of the X-mode anomalous attenuation for the probing wave at frequency $f_x = 6533$ kHz (second panel from the top). The pump wave of power $P = 20$ MW ERP at frequency $f_0 = 5828$ kHz was radiated in the “7-min on, 8-min off"mode. The specified heating cycle was initiated at T=22:45 LT on August 19, 1998 (see the top panel). The four lower panels represent the behavior of the SEE at four frequencies $f_1 = 5837$ kHz ($\Delta f = +9$ kHz, the NC$^+$ (narrow continuum) frequency range), $f_2 = 5818$ kHz ($\Delta f = -10$ kHz, the DM (downshifted maximum) frequency range), $f_3 = 5804$ kHz ($\Delta f = -24$ kHz, the BC (broad continuum) frequency range), and $f_4 = 5783$ kHz ($\Delta f = -45$ kHz, the BC frequency range)

value of $\tau_2 \simeq 30 - 60$ s is typical for the night ionosphere, but it is somewhat shorter, of about 20–30 s, in the day ionosphere.

Figure 3 clearly shows the development of strong and fast amplitude fluctuations of the X-mode probing wave reflected from the ionosphere. The relaxation time of these fluctuations depends on their period $\tau_{\rm fl}$ and grows with this period from about 1–2 min for $\tau_{\rm fl} \simeq 2 - 4$ s up to ≥ 3 min for $\tau_{\rm fl} > 4$ s. Taking into account the results of the satellite measurements presented in Subsec. 3.1, we can conclude that these fluctuations appear as a result of the generation of ALSIs with scale lengths from $l_\perp \simeq 0.1$ km to ≥ 1 km.

The right column in Fig. 2 shows the spectral characteristics of these fluctuations measured on August 19, 1998 between 22:15 and 23:30 LT using the the same pump cycles as for the satellite measurements

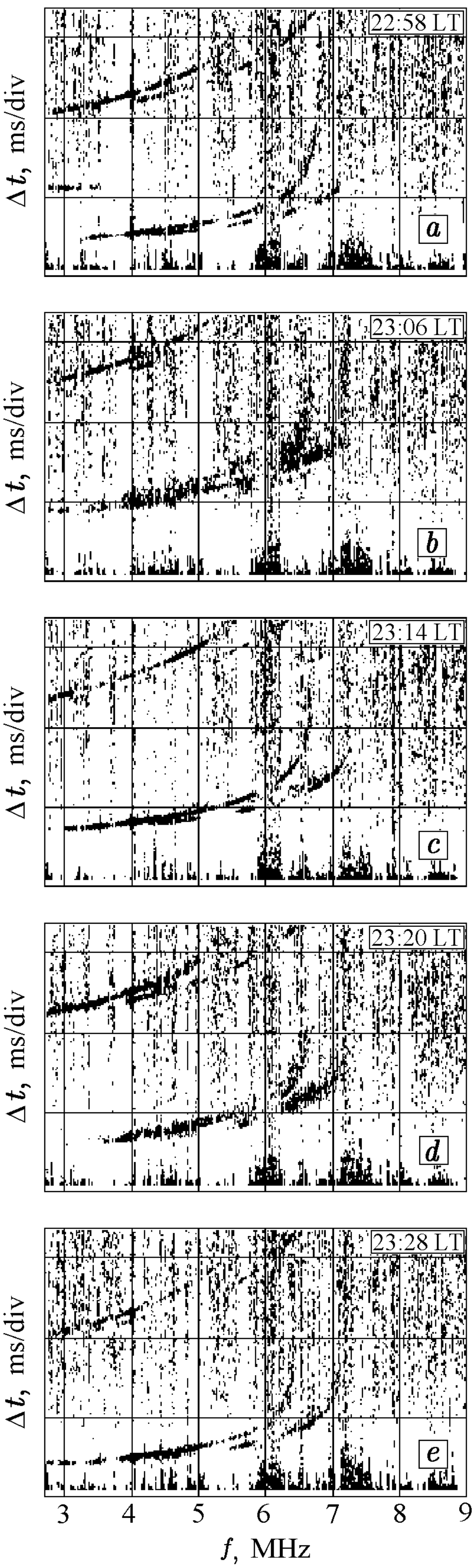


Fig. 4. A sequence of chirp-sounding ionograms obtained on August 19, 1998 between T=22:56 and T=23:30 LT, which shows the development of the F-spread. The pump waves of powers $P = 150$ MW ERP (panel b) and $P = 20$ MW ERP (panel d) at frequency $f_0 = 5828$ kHz were radiated in the "7-min on, 8-min off"mode. The heating cycle was initiated at T=23:00 LT. The other panels (a, c, and e) demonstrate ionograms for heater-off periods.

displayed in the left column of this figure. It is seen here that, independently of the pump power, PSD values of the X-wave fluctuation spectra at frequencies $\sim 0.5 - 3$ Hz, obtained when the pump wave is switched on (thick lines), are about $20 - 30$ dB greater than the corresponding PSD values of the natural-fluctuation spectra calculated in the pauses of the pumping (thin lines). This gives an evidence for a significant growth in the ALSI intensity in the range $l_\perp \geq 50-200$ m of irregularity scales, which also takes place in the HF-modified ionosphere if $P \leq 20$ MW ERP (the energy flux at an altitude of 250 km is ≤ 0.05 mW/m^2). This conclusion is in a good agreement with earlier results [17]. The fact that such strong irregularities are not observed at $P = 20$ MW ERP in the satellite measurements can be explained if the satellite—receiver path lies off the central part of the disturbed volume.

It follows from the data presented in Fig. 3 that the X-mode attenuation develops in a time that is a factor of 2 to 3 longer than the intensity overshoot for the DM and BC emission components. With allowance for the dependence of irregularity-development time on $l_\perp$ (see Subsec. 3.4), we can arrive at the conclusion that the overshoot in intensity for these SEE components should determine the development of decameter irregularities with $l_\perp \simeq 20 - 40$ m.

2.3. Chirp-sounding measurements

Using the wide-band chirp-sounding technique with high-frequency resolution, one can study some ALSI features, as well. The measurements presented here were performed at the path Yoshkar-Ola (TX)—"Sura"—Nizhny Novgorod (RX) of length 234 km, the Sura facility being located about 30 km to the south from its midpoint. The chirp-sounder radiated in the 2 min operation mode in a frequency range $2.7 - 11.7$ MHz with a sweep rate of 149 kHz/s. For such an operation mode, the ionograms were measured every two minutes.

Figure 4a shows a sequence of ionograms for measurements performed on August 19, 1998 between T=22:56 and 23:30 LT. These ionograms correspond to the same time interval as the satellite measurements shown in Fig. 2. Here the pump wave was radiated at $f_0 = 5828$ kHz alternately with $P = 150$ MW and 20 MW ERP in the "7-min on, 8-min off"mode. We can see that after the switching on of the pump wave with $P = 150$ MW ERP (T=23:00 — 23:07 LT) strong F-spread is developed for $\sim 2-4$ min, covering in the frequency range from 3 to 7 MHz both O and X traces for the $1F_2$ propagation mode. The F-spread decays about 3 min after the pump switch-off. These times are typical for night conditions. During daytime, the HF-produced F-spread decays in a time not longer than $1-2$ min. Figure 4 shows also the appearance of the F-spread during the heating with $P = 20$ MW ERP (T=23:15—23:22 LT); however, its development time is ~ 5 min and the intensity is much less than in the previous case for $P = 150$ MW ERP. It should be noted also that a weak residual F-spread was observed up to the end of the 8-min heating pause (see panel e) after the heating cycle T=22:15—22:22 LT.

2.4. Times of ALSI development and relaxation

The experimental data discussed above allow one to determine the dependence of the typical time τ_1 of ALSI development on the irregularity scale length $l_\perp$ over the wide scale-length range $l_\perp \simeq 3$ m $-$ 1.2 km. Satellite observations (see Subsec. 3.1) reveal that typical development and relaxation times for ALSIs with $l_\perp \simeq 50-100$ m are $\tau_1 \simeq 15-30$ s and $\tau_2 \simeq 15-20$ s, respectively, while the latter values are equal to $\tau_1 \simeq 40-90$ s and $\tau_2 \simeq 120-240$ s if $l_\perp \simeq 0.6-1.2$ km. Taking into account the anomalous-attenuation measurements for the X-mode probing wave (see Subsec. 3.2), we can conclude that ALSIs with $l_\perp \simeq 100-200$ m grow during the typical time $\tau_1 \simeq 20-30$ s and decay during the typical time $\tau_2 \simeq 20-30$ s. Finally, SEE measurements yield the typical time $\sim 3-5$ s of DM development, which, according to [34], corresponds to the growth time for 3—5-m striations. The combined dependence of τ_1 on $l_\perp$ is plotted in Fig. 5. It can be fitted by a power law: $\tau_1 \propto l_\perp^\alpha$, where the index $\alpha \simeq 0.5$. According to the obtained experimental data, the dependence of τ_2 on $l_\perp$ in a scale range from about 50—100 m to about 1 km can also be fitted by a power-law: $\tau_2 \propto l_\perp^\beta$, where $\beta \simeq 0.9$. Note that the data considered here have been obtained under night-time conditions. The results concerning the temporal evolution of ALSIs are in good agreement with earlier experiments [17,34,44]. Since the development and relaxation times for F-spread are $\sim 1-3$ min (see Subsec. 3.3), we can conclude that ALSIs with scale lengths of $l_\perp \geq 1$ km have to play an important role for its formation.

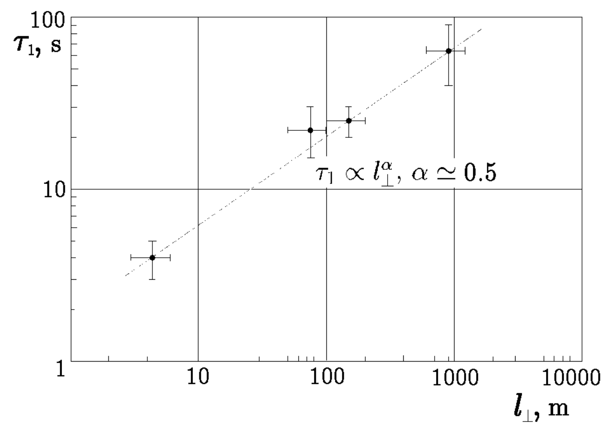


Fig. 5. Averaged dependence of the typical ALSI development time τ_1 on irregularity scale length $l_\perp$ perpendicular to the geomagnetic-field direction. The data were obtained under night-time conditions in measurements of: (i) SEE (for $l_\perp \simeq 3-6$ m), (ii) X-mode attenuation (for $l_\perp \simeq 100-200$ m), and (iii) satellite-signal scintillations (for $l_\perp \simeq 50-100$ m and $\simeq 0.6-1,2$ km)

2.5. Underdense and overdense heating

In this subsection, we study the ALSI features in the case where the irregularities are generated by a HF powerful wave under the conditions of underdense ($f_0 > f_{0F_2}$) or overdense heating ($f_0 < f_{0F_2}$). During these measurements, the relationship between f_0 and f_{0F_2} was changed to the opposite (at a constant

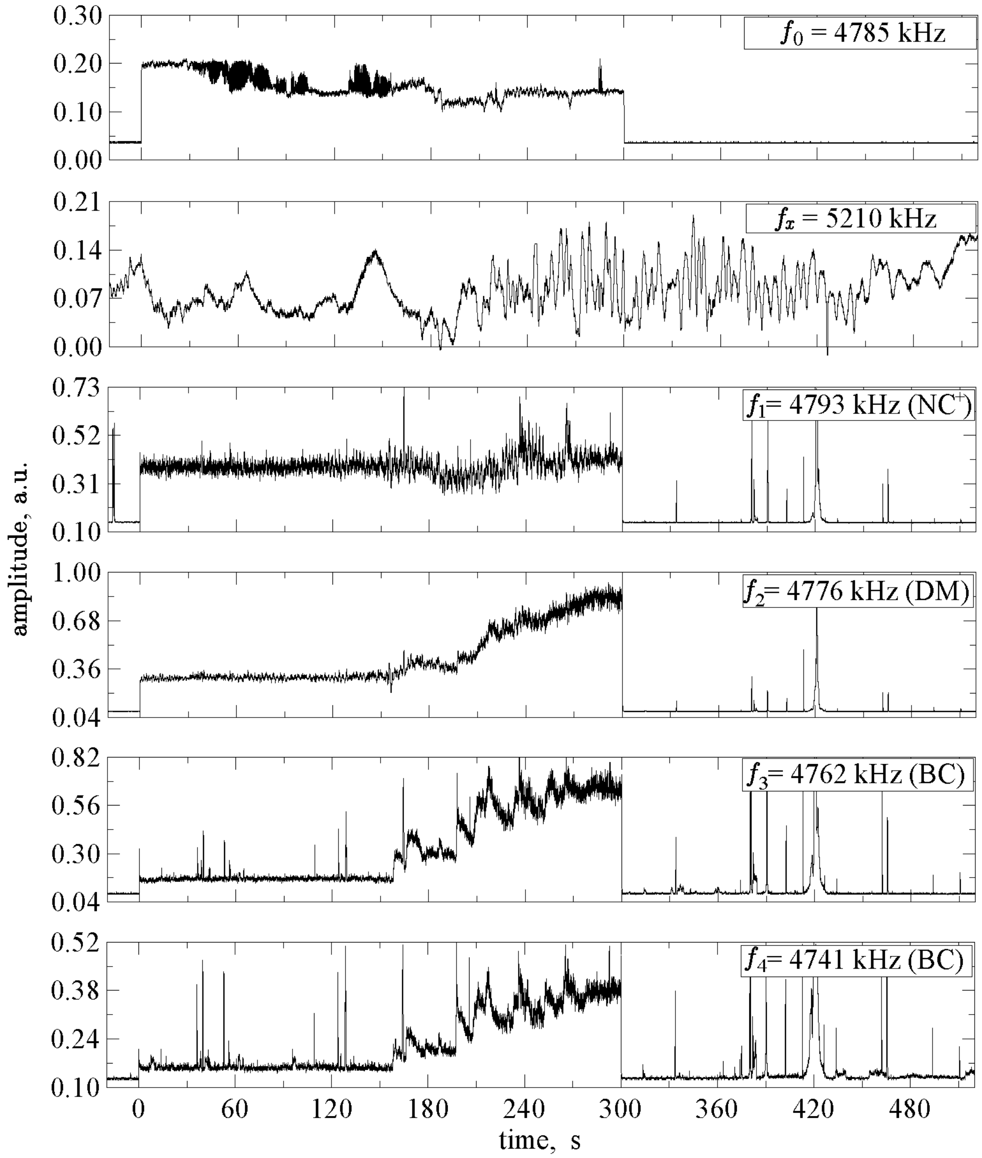


Fig. 6. The oscillograms of an X-mode probing wave at $f_x = 5210$ kHz and SEE at four frequencies $f_1 = 4793$ kHz ($\Delta f = +8$ kHz, NC$^+$ frequency range), $f_2 = 4776$ kHz ($\Delta f = -9$ kHz, DM frequency range), $f_3 = 4762$ kHz ($\Delta f = -23$ kHz, BC frequency range), and $f_4 = 4741$ kHz ($\Delta f = -44$ kHz, BC frequency range) demonstrating the occurrence of SEE at $t = 160$ s (T =07:12:40 LT). In this case, the plasma frequency at the height of the upper-hybrid resonance becomes lower than f_{0F_2} due to the natural increase in the F$_2$ critical frequency during sunrise. The pump wave of power $P = 120$ MW ERP was radiated at frequency $f_0 = 4785$ kHz in “5-min on, 5-min off"mode starting at T=07:10 LT on August 20, 1998

pump-wave frequency) in a few minutes during sunrise in the morning (sunset in the evening) due to the natural increase (decrease) in the F_2 critical frequency. The time of this variation was determined using SEE with allowance for the following. (1) The DM develops even if f_0 is 100–200 kHz higher than f_{0F_2} [45], i.e., if $f_{\rm uh} \leq f_{0F_2}$. This indicates that the DM is generated in the vicinity of the height of the upper-hybrid resonance where the plasma frequency is $f_{\rm uh} = \sqrt{f_0^2 - f_{\rm ce}^2}$. (2) The narrow continuum (NC) is generated in the vicinity of the pump-wave reflection level only if $f_0 < f_{0F_2}$ [39].

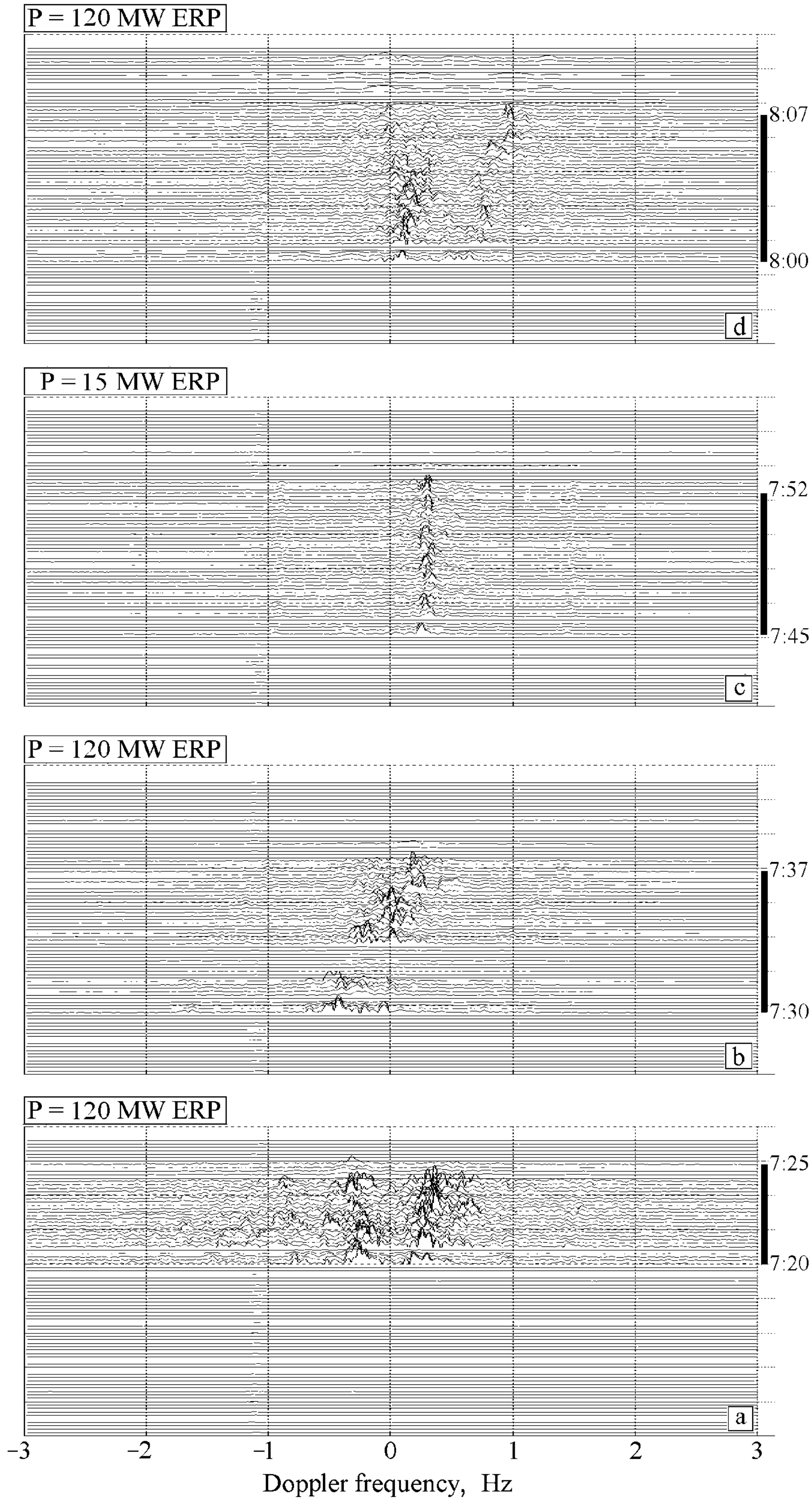


Fig. 7. Doppler spectra of the pump-wave signal of frequency $f_0 = 4785$ kHz reflected from the ionosphere and recorded by the monostatic HF radar in Zimenki on August 20, 1998. The heating cycles were initiated at T=07:20, 07:30, 07:45 and 08:00 LT. The pumping mode was “5-min on, 5-min off"before T=07:30 LT and “7-min on, 8-min off"after that. The pump power was equal to $P = 120$ MW ERP for the cycles starting at T=07:20, 07:30, and 08:00 LT and $P = 15$ MW ERP for the cycle starting at T=07:45 LT

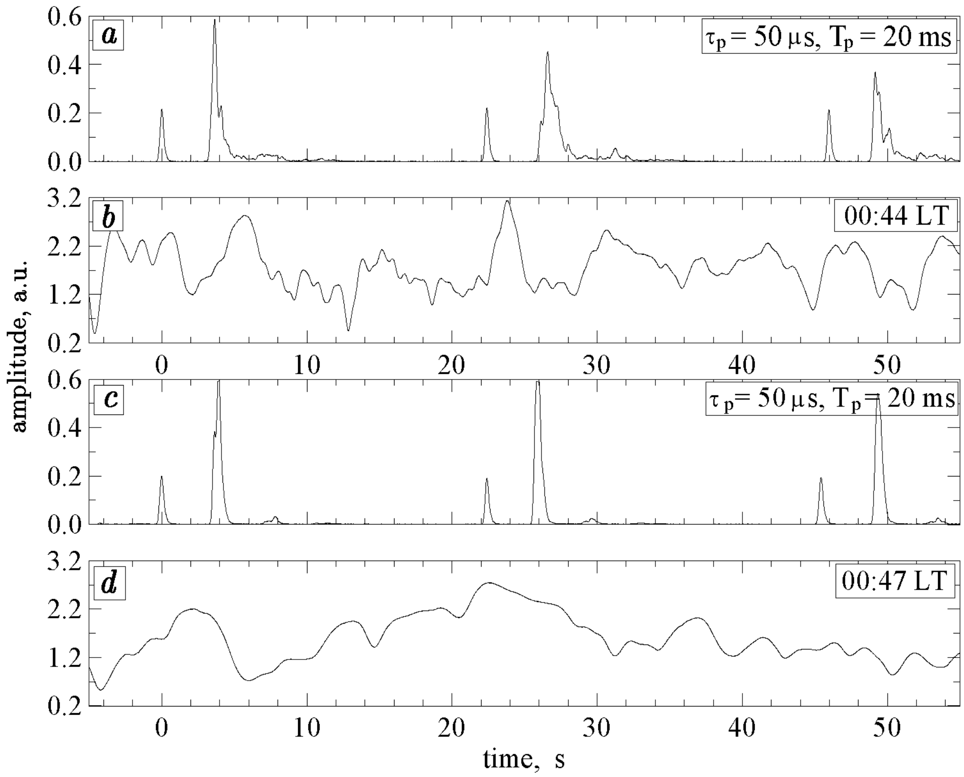


Fig. 8. The oscillograms of the X-mode probing-wave signals at frequency $f_x = 5710$ kHz for the fully underdense heating ($f_{\rm uh} > f_{0F_2}$) recorded by the peak detector using both "moving" time window (panels (a) and (c)) and the time window "fixed" for the first reflection of the probing wave (panels b and d). The first, second, third, etc. pulses in panels (a) and (c) are, respectively, signals for the ground wave, the first, second, etc. reflections of the pulse probing wave from the ionosphere. In this cycle the pump wave is radiated at frequency $f_0 = 5828$ kHz with pump power $P = 150$ MW ERP in the "5min on, 5-min off"mode starting at T=00:40 LT. August 20, 1998

Our measurements show that a significant enhancement of the ALSI generation is observed with the appearance of the DM and BC (broad continuum) in SEE spectra even if $f_0 > f_{0F_2}$ and $f_{0F_2} \geq f_{\rm uh}$. This can be clearly seen in Fig. 6. In this case, where the pump wave at $f_0 = 4785$ kHz is switched on at T = 07:10:00 LT (which corresponds to $t = 0$ in this figure), the generation of the DM ($f_2 = 4776$ kHz) and BC ($f_{3,4} = 4762$ and 4741 kHz) is distinguished against the transmitter noise level only starting with T= 07:12:40 LT. Within ~ 15 s after that, amplitude fluctuations of the X-mode probing wave ($f_x = 5210$ kHz) appear, which result from the ALSI generation. The intensity and frequency of these fluctuations increase with the SEE intensity or with enhancement of the development of thermal parametric instability. The fact that these effects are related to ALSIs is justified by the value of the relaxation time of these fluctuations, which is about 3 min. The SEE measurements represented in Fig. 6 show also that early growth in both the DM and especially BC has a triggering character.

The measurements discussed above were accompanied by sounding of the disturbed volume by the HF monostatic backscatter radar located in Zimenki, the receiving part of which was used for studying the spectral characteristics of pump-wave signals reflected from the ionosphere or scattered in the disturbed volume from the HF-induced turbulence. In the experiments reported here, the Sura facility was operated at $f_0 = 4785$ kHz in a "5-min on, 5-min off"mode till T=07:30 LT and "7-min on, 8-min off"mode after

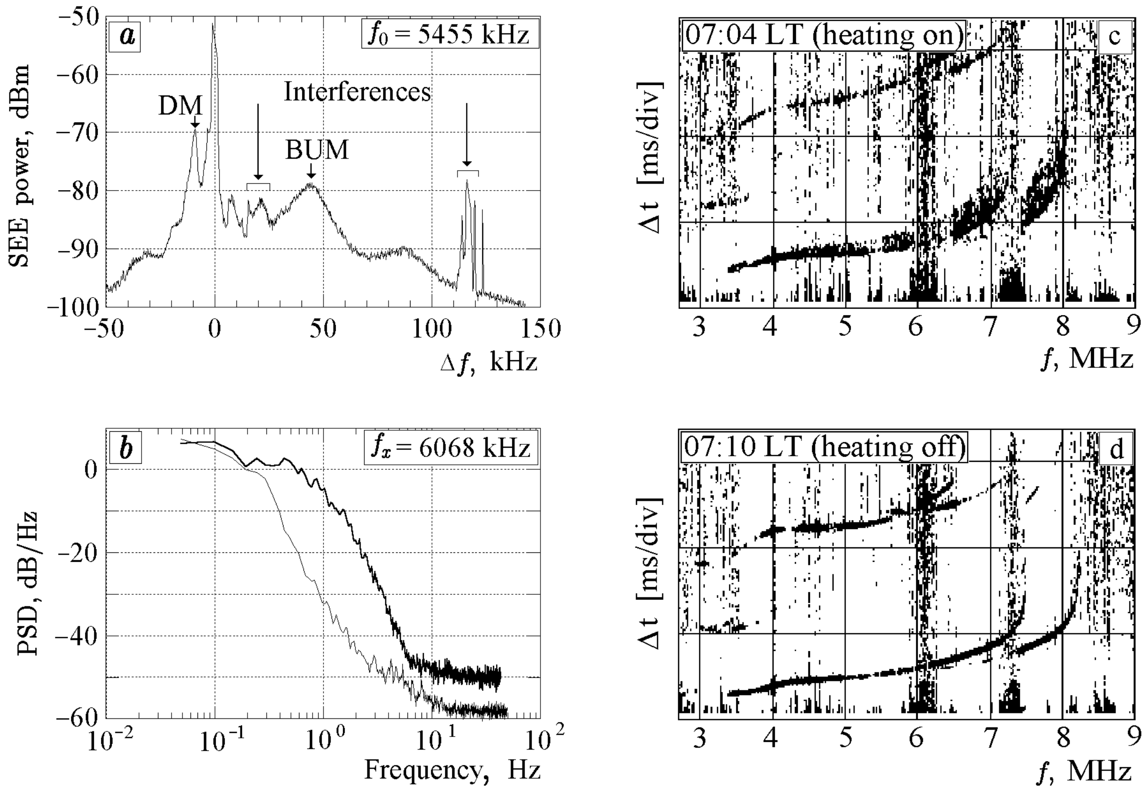


Fig. 9. The steady-state SEE spectrum (panel a), power spectra of the fluctuations of X-mode probing wave observed when the pump is switched on (bold line) and off (thin line) (panel b), and chirp-sounding ionograms recorded when the pump wave is switched on (panel c) and off (panel d). The measurements were performed on August 18, 1998 between 07:00 and 07:15 LT at pump power $P = 150$ MW ERP and pump frequency $f_0 = 5455$ kHz, which is slightly above the fourth electron-cyclotron harmonic frequency. The pump wave is radiated in the "7-min on, 8-min off"mode starting at 07:00 LT

that. The pump power was equal to $P = 120$ MW ERP during all the cycles excluding the cycle from 07:45 to 07:52 LT for which it was equal of 15 MW ERP. The results of spectral analysis of the received signals in the vicinity of the pump frequency, performed for the time interval between T=07:20 and 08:15 LT, are displayed in Fig. 7.

For the heating cycle performed from 07:10 to 07:15 LT, when the condition $f_{\rm uh} > f_{0F_2}$ changes to the opposite, $f_{\rm uh} < f_{0F_2}$, at T=07:12:40 and the generation of both the SEE and ALSI starts to be observed (see Fig. 6), no artificially-produced signals at the pump frequency were observed by the HF radar. According to the SEE measurements, the values of f_0 and f_{0F_2} were close to each other during a heating cycle lasting from 07:20 to 07:25 LT. In this case, wide Doppler spectra of signals in the frequency range from ~ -3 Hz to $\sim +2$ Hz near the carrier occurs during the pumping. These spectra exhibit two main peaks at frequency shifts $\pm(0.2-0.4)$ Hz. During the heating cycles 07:30 – 07:37 and 08:00 – 08:07 LT when $f_0 > f_{0F_2}$, rather wide Doppler spectra are detected again. However, no pronounced double-peak structure was clearly seen during the cycle 07:30–07:37 LT, contrary to others cycles. The Doppler spectra have quite a different form for the heating cycle 07:45–07:52 LT for which the pump power is only equal to 15 MW ERP. In this case, narrow Doppler spectra with a single maximum are observed, which is related to the first reflection of the pump wave from the ionosphere. The data presented demonstrate that if the pump

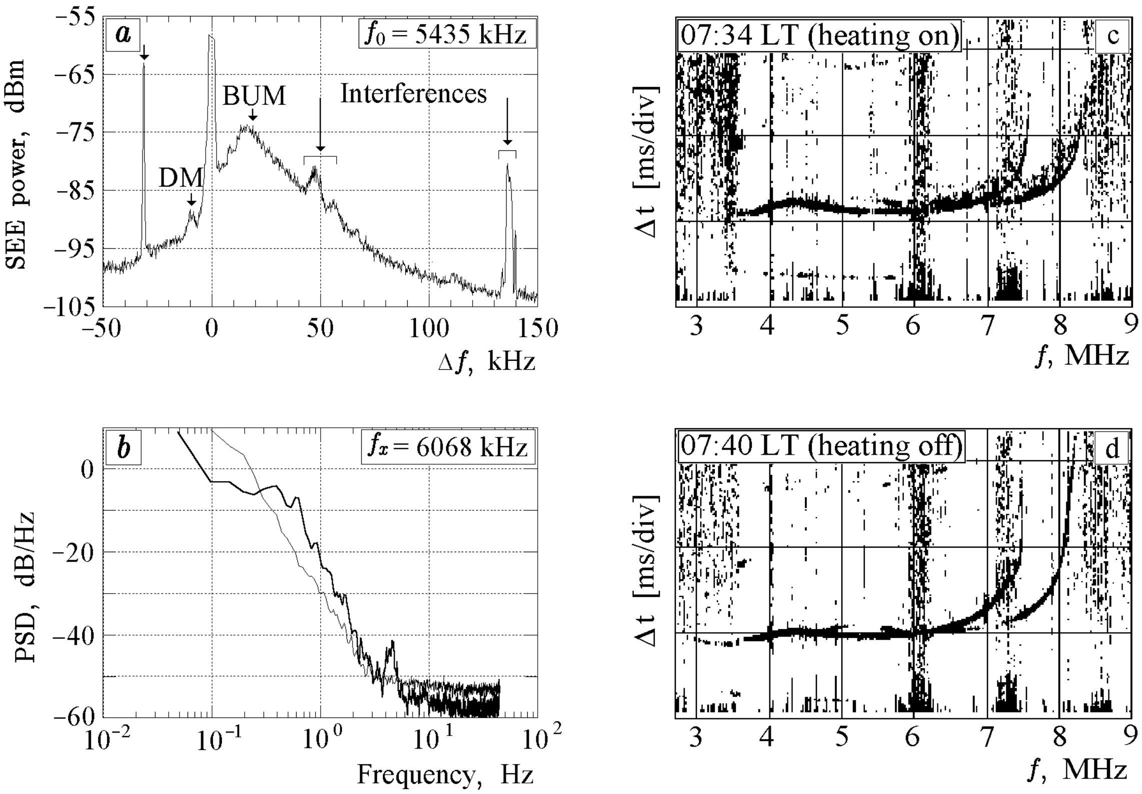


Fig. 10. The steady-state SEE spectrum (panel a), power spectra of X-mode probing wave fluctuations observed when the pump wave is switched on (bold line) and off (thin line) (panel b), and chirp-sounding ionograms recorded when the pump wave is switched on (panel c) and off (panel d). The measurements were performed on August 18, 1998 between 07:30 and 07:45 LT at pump power $P = 150$ MW ERP at pump frequency $f_0 = 5435$ kHz, which is very close to the frequency of the fourth electron-cyclotron harmonic. The pump wave is radiated in the “7-min on, 8-min off"mode starting at 07:30 LT

power exceeds 20 MW ERP, strong large-scale turbulence is developed under the overdense heating condition, which leads to a significant modification of HF-wave propagation in the disturbed volume. It is clear that the HF radar can be used for studying the fine structure of the disturbed volume. However, a detailed analysis of results obtained here is beyond the scope of this paper.

We performed also the analysis of the ALSI generation in the case where the ionospheric conditions are changed from the overdense to underdense heating at night and found the following. (1) As in the previous case, the generation of strong ALSIs is observed up to $f_{0F_2} \simeq f_{\rm uh}$. (2) The spread on ionograms is distinctly weaker if $f_0 > f_{0F_2} > f_{\rm uh}$, compared to the case where $f_0 < f_{0F_2}$. Moreover, in comparison with the daytime conditions, a weak but quite pronounced modification of the upper ionosphere was also observed at night when $f_{0F_2} < f_{\rm uh}$. We call such a condition fully underdense heating. It is illustrated in Fig. 8 in which probing-wave pulse signals were recorded in two different ways: (1) using a peak detector with a “fixed” time window (panels b and d), we registered amplitude variations of the probing-wave signal only upon its first reflection and (2) using a peak detector with a “moving” time window, which means that the clock time for the peak detector is slightly different from the clock time for a probing wave transmitter (panels a and c), we registered the full probing wave signal structure. In the latter case, the first, second, third, etc. pulses, respectively, correspond to the ground wave, the first, second, etc. reflections from the

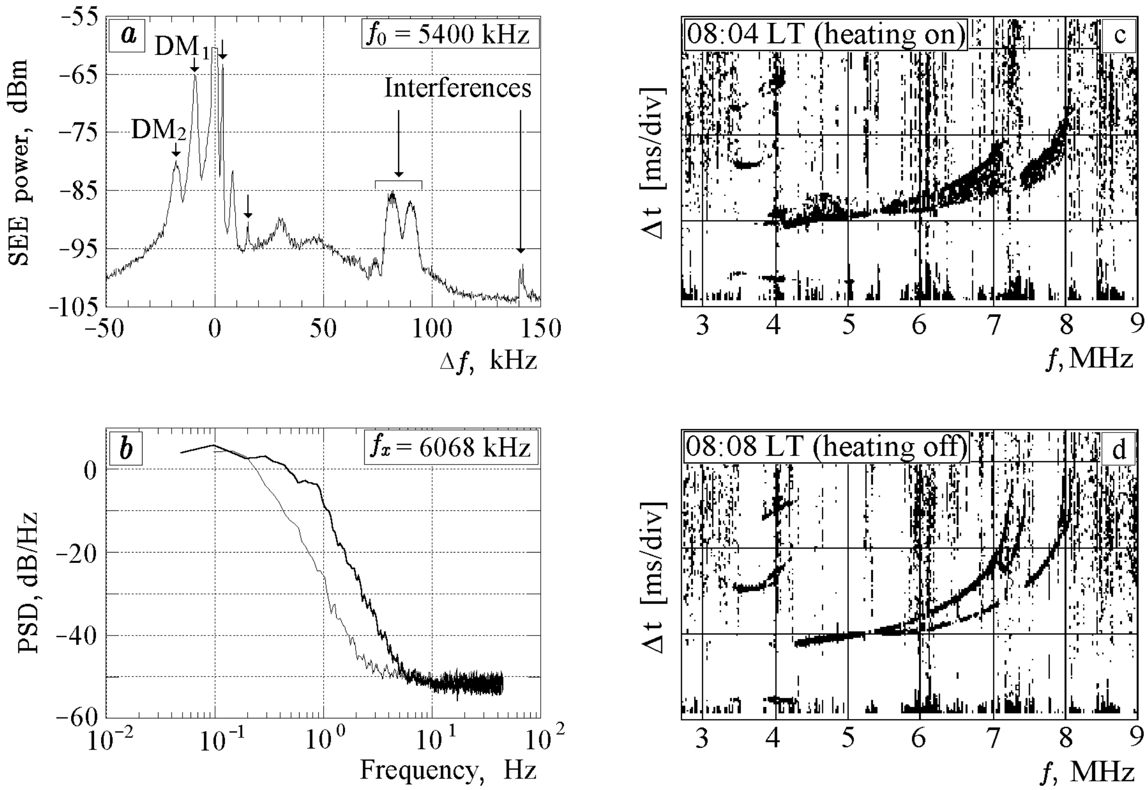


Fig. 11. The steady-state SEE spectrum (panel a), power spectra for X-mode probing wave fluctuations observed when the pump wave is switched on (bold line) and off (thin line) (panel b), and chirp-sounding ionograms recorded when the pump wave is switched on (panel c) and off (panel d). The measurements have been performed on August 18, 1998 between 08:00 and 08:15 LT at pump power $P = 150$ MW ERP at pump frequency $f_0 = 5400$ kHz, which is slightly below the forth harmonic of the electron-cyclotron frequency. The pump wave is radiated in the "7-min on, 8-min off"mode starting at 08:00 LT

ionosphere. During the heater-on period, the shape of the probing-wave pulse reflected from the ionosphere (panel a) shows the appearance of multi-ray propagation. On the contrary, almost one-ray propagation is observed in the heater-off case (panel c). Such a multi-ray propagation tends to increase faster amplitude variations of the probing wave reflected from the ionosphere, which is reliably detected on the oscillogram (see panels b and d).

It should be noted that the results obtained for the fully underdense heating are somewhat different from those presented in [46]. In particular, we observed ionospheric-plasma modification at night even under quiet ionospheric conditions.

2.6. Gyroresonance heating

Study of the AIT features in the case where the pump frequency f_0 is close to the fourth harmonic of the electron-cyclotron frequency $4f_{ce}$ was performed on August 18, 1998 between 07:00 and 10:00 LT. In these measurements, the pump wave was radiated in the "7-min on, 8-min off"mode beginning in 0 min 0 s of an hour, and the pump frequency was changed from cycle to cycle by 10–20 kHz steps near $4f_{ce}$. The effect of quenching of the DM in SEE spectra in a frequency band of $\sim$ 5 kHz [40,47] was used to determine the gyroresonance condition. In Figs. 9–11, three groups of experimental data are represented: (1) $f_0 = 5455$ kHz exceeds $4f_{\rm ce}$ (Fig. 9), (2) $f_0 = 5435$ kHz is very close to $4f_{\rm ce}$ (Fig. 10), and (3) $f_0 = 5400$ kHz is lower than $4f_{\rm ce}$ (Fig. 11). Each of the data sets includes SEE spectra (panel a), power spectra of amplitude fluctuations of the X-mode probing wave (panel b) obtained when the pump wave is switched on (bold line) and off (thin line), and chirp-sounding ionograms obtained during the pump-on (panel c) and pump-off periods (panel d).

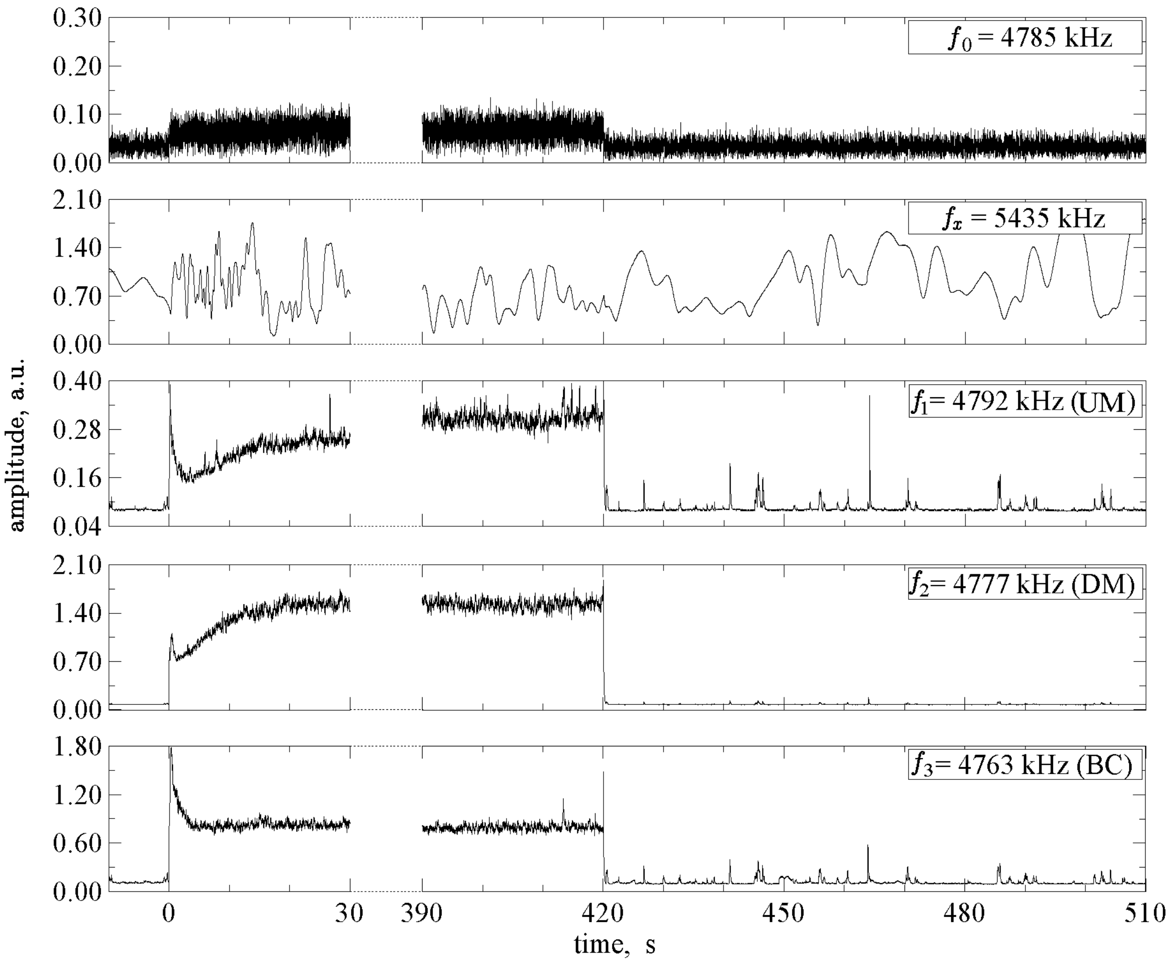


Fig. 12. An example of the QPAO on the X-mode probing wave ($f_x = 5435$ kHz) in the case where the pump-wave frequency is equal to $f_0 = 4785$ kHz ($P = 120$ MW ERP). The pump wave is radiated in the “7-min on, 8-min off"mode starting at 23:45 LT on August 21, 1998. The behavior of the SEE at frequencies $f_1 = 4792$ kHz ($\Delta f = +7$ kHz, upshifted maximum (UM) frequency range), $f_2 = 4777$ kHz ($\Delta f = -8$ kHz, DM frequency range), and $f_3 = 4763$ kHz ($\Delta f = -22$ kHz, BC frequency range) is shown in the three lower panels

The SEE spectrum for $f_0 = 5455$ kHz (Fig. 9, panel a) shows a well-developed BUM (broad upshifted maximum) with the BUM peak frequency at frequency shift $\Delta f \simeq +45$ kHz relative to the pump-wave frequency and a rather strong DM at $\Delta f \simeq -10$ kHz with $I_{\rm DM} \simeq -70$ dBm (dBm is intensity in dB reckoned from the level of 1 mW). According to [48], we can conclude that the pump-wave frequency is approximately 40–50 kHz higher than the fourth gyroharmonic frequency. The chirp-sounding ionogram (panel c) shows the development of a rather strong F-spread. Its growth and decay times for this heating cycle are about 2 and 1 min, respectively. If the pump wave is switched, one can see the strong (10 − 25 dB) enhancement at frequencies $\sim 0.4 - 4$ Hz in the power spectrum of the amplitude fluctuations of X-mode probing wave at $f_x = 6068$ kHz (panel b), which corresponds to ALSIs with $l_\perp \simeq 50 - 200$ m (see Subsec. 3.2).

Figure 10 demonstrates the AIT features for $f_0 = 5435$ kHz, which is very close to $4f_{\rm ce}$. In this case, there is an evidence for a strong suppression of the DM generation ($I_{\rm DM} \simeq -89$ dBm) and the existence of the BUM with its peak frequency at the frequency shift $\Delta f \simeq +17$ kHz [48]. In this case, the ionogram (panel c) shows the development of a considerably weaker F-spread compared to the previous case, as well as moderate (about 10 dB less) enhancement of power spectra of amplitude fluctuations of the X-mode probing wave. It is necessary to note that the HF-induced anomalous attenuation of the X-mode probing wave sounding the disturbed volume is not observed here, whereas it is well developed in two other cases where $f_0 > 4f_{\rm ce}$ or $f_0 < 4f_{\rm ce}$.

Figure 11 demonstrates the AIT features for $f_0 = 5400$ kHz, which is $20 - 25$ kHz lower than $4f_{\rm ce}$. In this case, there is evidence for the presence of a double DM ($\rm DM_1$ and $\rm DM_2$) with $I_{\rm DM_1} \simeq -66$ dBm and absence of a BC (broad continuum) in the SEE spectrum [36]. Here the ionogram (panel c) shows again the appearance of the strong F-spread, which is developed 2–4 min after the start of pumping and decays in $\sim$ 2 min after switching off the pump. The power spectra of the X-mode probing wave show some enhancement of the amplitude fluctuations compared to the case where $f_0 \simeq 4f_{\rm ce}$; however, this enhancement is not as strong as for $f_0 = 5455$ kHz.

The presented data show that if the pump frequency coincides with the gyroharmonic frequency ($f_0 \simeq 4f_{\rm ce}$ in our case), in addition to the suppression of the small-scale striations, a significant attenuation of the ALSI generation is observed, being manifested in: (1) diminution of the F-spread intensity, (2) disappearance of the anomalous attenuation of X-mode probing waves, and (3) weakening of the HF-induced fluctuations of the X-mode wave amplitude in the frequency range $F_{\rm fl} \simeq 0.4 - 4$ Hz. This indicates the influence of the striations on the generation of strong ALSI in the $l_\perp \simeq 50 - 200$ m scale range. Based on the data obtained, it should be specially noticed that the kilometer-scale irregularities, which are responsible for the appearance of the F-spread (see Subsec. 2.4), exhibit a suppression of their intensity, which is weaker than that for irregularities of scales $l_\perp \simeq 50 - 200$ m. The disappearance of faster fluctuations of the probing wave amplitude is circumstantial evidence in support of this. It can be considered as further proof of the fact that the strong ALSI with $l_\perp \simeq 100$ m and kilometer-scale irregularities are produced due to different generation mechanisms.

In addition, some experimental data have shown that there is an asymmetry in the dependence of ALSI features on the pump frequency relatively to the gyroharmonic frequency as it was earlier found in [49,50]. However, new detailed experiments are needed to make more definite conclusions.

2.7. Ionosphere modification using the square modulation of pump-wave intensity

Earlier experiments have shown that the use of a square intensity modulation of the pump wave results in suppression of the generation of decameter striations at the modifier modulation frequency $F_{\rm mod} \simeq 0.1 - 0.5$ Hz [12,51]. To study the influence of modulated heating on the ALSI features, we used transmissions with different pulse repetition periods from $T = 20$ s to 100 ms for two values of $Q = T/\tau_{\rm p}$: $Q = 2$ (e.g., 10-s on, 10-s off) and $Q = 4$ (e.g., 5-s on, 15-s off). Here $\tau_{\rm p}$ is the pump-pulse duration.

The experiments performed have shown that, as the modulation frequency increases, the retardation of the ALSI development and a decrease of their intensity at $Q = 2$, and, conversely, an increase of efficiency of the ALSI generation at $Q = 4$, are observed. Taking into account these results and the fact that the typical growth time for ALSIs is about a few tens of seconds (see Subsec. 3.5), we conclude that an interpulse period longer than a few of seconds is enough for noticeable accumulation of the perturbations responsible for the ALSI generation. It has also been found that stronger suppression of 100–200-m scale irregularities compared to that of kilometer-scale ones is observed by square intensity modulation of the pump wave. The performed measurements have shown some opportunities to control ALSI spectral characteristics by virtue of complex timing of pump-wave operation.

It should be emphasized that the observations presented here represent only an initial effort aimed at deeper understanding of the ALSI generation. It is clear now that more experimental work is needed to complete these studies.

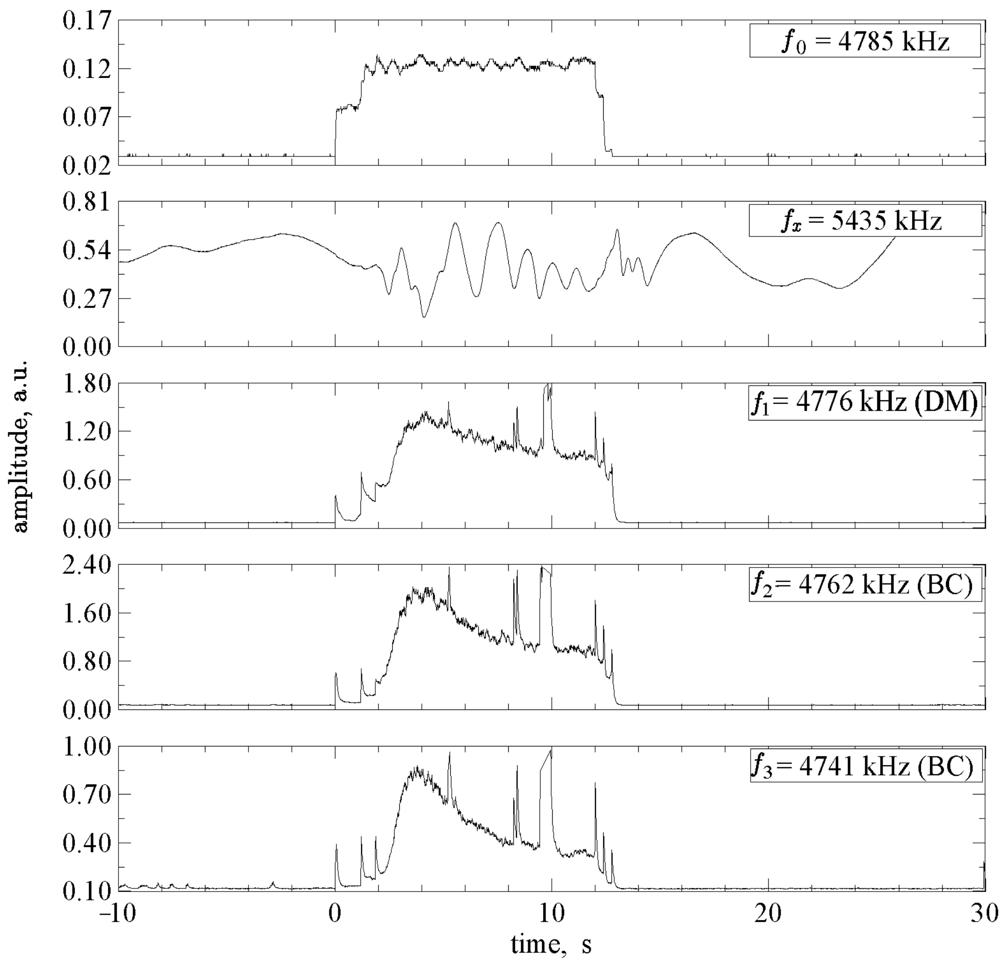


Fig. 13. An example of the QPAO on the X-mode probing wave ($f_x = 5435$ kHz) for pump-wave frequency equal to $f_0 = 4785$ kHz ($P = 120$ MW ERP). The pump wave is switched on for 10 s at 20:08:48 LT on August 20, 1998 after a long pause in pumping. The behavior of the SEE at frequencies $f_1 = 4776$ kHz ($\Delta f = -7$ kHz, DM frequency range), $f_2 = 4763$ kHz, and 4741 kHz ($\Delta f = -22$ kHz and 44 kHz, respectively, BC frequency range) is shown in the three lower panels

2.8. Features of artificial low-frequency quasi-periodic amplitude oscillations of X-mode probing waves reflected from the ionosphere

In addition to the anomalous attenuation of the X-mode probing waves and HF-induced random variations of its amplitude related to the ALSI generation, the features of which have been considered above, the

X-wave reflected from the disturbed ionosphere shows the generation of low-frequency quasi-periodic amplitude oscillations (QPAO) with beat frequency of $F_{\rm b} \simeq 0.5$–3 Hz. An example of the QPAO is represented in Fig. 12 for two time intervals including the start ($t = 0$ s) and end ($t = 420$ s) of pumping at frequency $f_0 = 4785$ kHz with $P = 120$ MW ERP. Sounding of the disturbed volume by the X-mode probing wave is carried out in this heating cycle at $f_x = 5435$ kHz (the second oscillogram from the top). Moreover, the SEE behavior at frequencies $f_1 = 4792$ kHz ($\Delta f = +7$ kHz, upshifted maximum (UM) frequency range), $f_2 = 4777$ kHz ($\Delta f = -8$ kHz, DM frequency range), and $f_3 = 4763$ kHz ($\Delta f = -22$ kHz, BC frequency range) is also shown in this figure (the three lower oscillograms). For the data presented in Fig. 12, it has been found that QPAO begin to be detected within ~ 250 ms after switching on the pump, and their frequency reaches its maximum $F_{\rm b} \simeq 2$ Hz after $\sim 5-7$ s of pumping at the stage of DM intensity growth, whereas $F_{\rm b} \simeq 0.4$ Hz at the end of the 7-min heating cycle. It is noteworthy that the QPAO are almost absent (not more than one oscillation is observed) after the pump-off period. The QPAO generation at a rather short pumping time for the unsaturated AIT, when the ALSI is not yet produced, is shown in Fig. 13 in which it is clearly seen that the QPAO relaxation may last for half a second.

Summing up our basic experimental findings, we may shortly formulate the following QPAO empirical model:

1) QPAOs begin to be detected within $\sim 0.07-1$ s after switching on the pump depending on time of day, pump power, sounding frequency f_x, and the relation between f_0 and f_{0F_2}. It has been found that their generation is observed even if $f_0 > f_{0F_2}$ and $f_{\rm uh} < f_{0F_2}$, so that the upper-hybrid resonance is excited in the ionospheric plasma. In this case, however, the QPAO may appear with a delay time of a few seconds. Generation of the QPAO was not observed if $f_{\rm uh} > f_{0F_2}$. Under optimal conditions, when $f_x \simeq f_0 + 0.7$ MHz and the reflection levels for the O-mode pump wave and X-mode probing wave are closely located, the QPAO is accompanied by a growth in the DM and suppression of the ponderomotive part of the NC emission component. It is important that the QPAO generation is also observed if the X-mode probing wave is reflected far below the upper-hybrid resonance level for the pump wave.

2) QPAOs are most pronounced if pumping lasts for a few to tens of seconds. As a rule, their amplitude decreases with the development of the X-mode anomalous attenuation and appearance of the strong X-wave amplitude fluctuations due to the ALSI generation. We have to note that the HF-induced fluctuations may significantly mask the residual level of the QPAO under steady-state conditions for the AIT development, which can be exhibited against the background of the fluctuations as a temporal occurrence of quasi-periodic oscillations at frequencies $F_{\rm b} \leq 1$ Hz.

3) For high-power heating under night conditions and for $f_x \simeq f_0 + 0.7$ MHz, the beat frequency reaches the maximum $F_{\rm b} \simeq 3$ Hz practically after switching on the pump; it drops by a factor of two or more simultaneously with the development of the X-mode anomalous attenuation. During daytime or at low pump power ($P \leq 20$ MW ERP), the amplitude and frequency of the beats may increase after switching on the pump for a few to tens of seconds up to the maximum values, and then they decrease again. The frequency $F_{\rm b}$ decreases significantly (for instance, from 2–3 to $0.5-0.3$ Hz) if the ionospheric conditions are changed from the overdense to underdense heating but $f_{\rm uh} < f_{0F_2}$.

4) After the end of a long-time heating under the optimum condition when $f_x \simeq f_0 + 0.7$ MHz, the QPAO, if they can be distinguished against the background of the artificial fluctuations of the probing wave amplitude, are observed, as a rule, for no longer than 1–2 s (see Fig. 12). As a rule, the process of their relaxation is seen more clearly for a short-time pumping when the ALSI are not yet developed (see Fig. 13). In this case, however, their relaxation time is of about $350-500$ ms only.

Note that similar QPAOs have previously been observed in [44,52–55]. Nevertheless, a plausible explanation of this phenomenon is still absent. In explaining the QPAO features, we have to take into account their basic characteristics which are as follows:

a) A mechanism that is suggested for their generation must be related to the HF-induced upper-hybrid turbulence since there is a direct correlation between QPAO and SEE features, including their generation for the underdense heating. It excludes the influence of the standing-wave pump structure (the Airy function structure) on the formation of QPAO, as it was assumed in [53].

b) We must also exclude, for the QPAO generation, the commonly considered resonance interactions of electromagnetic waves with plasma since the oscillations are produced for probing waves of both O- and X-polarization.

c) Since the probing wave frequency range, in which the generation of the QPAO is observed, is about 1 MHz, they are also produced outside the plasma-resonance region located in a layer between the heights of pump-wave reflection and upper-hybrid resonance. This excludes also the possible influence of plasma-profile modification due to ponderomotive and thermal plasma expulsion from regions with a strong upper-hybrid plasma-wave turbulence.

d) The very short relaxation time excludes the direct influence of HF-induced large-scale variations of both the plasma-density profile and electron temperature on the QPAO generation mechanism. Moreover, it has been pointed out that the generation of the ALSI leads to their suppression.

e) Since the pulse-mode radiation for the probing wave was used in our measurements and its amplitude for the first reflection was only recorded using the time-window system, the beats are not due to superposition of the sky and ground waves or multiple reflections, as is often assumed for CW waves.

This brief consideration makes it clear that more theoretical and experimental work is needed in order to gain an insight into the mechanism of QPAO generation. Undoubtedly, such a work is of crucial importance for understanding the AIT features as a whole.

4. SUMMARY AND CONCLUSIONS

We have presented experimental data regarding the ALSI features obtained by means of different diagnostic tools, such as scintillation, chirp-sounding, backscatter, and SEE measurements. The basic results may be summarized as follows:

1. It has been found that strong ALSI can be excited even for the underdense heating if the plasma frequency at the upper-hybrid resonance height, $f_{\rm uh}$, is lower than the F_2-layer critical frequency (in other words, the upper-hybrid waves can be excited in the ionosphere by O-mode pumping). This indicates that small-scale irregularities (striations) are of great importance for the generation of such large-scale irregularities. For fully underdense heating (when $f_{\rm uh} > f_{0F_2}$) under quiet ionospheric conditions, no modification in the day ionosphere was observed, whereas pronounced ALSIs are generated at night. In contrast to the previous case, we shall classify them as weak ALSIs. It is clear that the striations are inherent to the mechanism of their generation.

2. Several mechanisms of strong ALSI generation have been resolved based on the experimental data. According to studies performed earlier [11,15,16], ALSIs with $l_\perp \simeq 300 - 600$ m are produced in the vicinity of the pump-wave reflection level due to the development of thermal self-focusing instability. It is most likely that larger irregularities with $l_\perp \geq 1$ km result from the amplification of natural irregularities due to ionospheric plasma heating, as was assumed in [16]. Another mechanism is responsible for the excitation of the irregularities in a rather narrow scale range $l_\perp \simeq 50 - 200$ m. It has a higher threshold than in previous cases. Most probably, these irregularities are HF-produced due to large-scale nonlinear structuring in the ionospheric F-region [56] for which the striations play a crucial role. That is why these irregularities are not effectively generated when the pump frequency is close to the gyroharmonic frequency and the striations are strongly suppressed. Due to their features, these irregularities may be classified as artificial intermediate-scale irregularities.

3. The first studies of ALSI features were performed in the case where the square intensity modulation of the pump is used. We found that pulse heating leads to stronger suppression of 100–200-m scale irregularities than of kilometer-scale ones. There exists additional evidence for two mechanisms of ALSI generation. The performed measurements have shown some new opportunities to control the ALSI spectral characteristics using complex timing for pump-wave operation. However, new measurements are needed before we can establish the key parameters determining such a control.
4. It is shown that the combined use of satellite, SEE, and X-mode anomalous-attenuation measurements allows one to study AIT temporal evolution in a wide scale length range from a few meters to a few kilometers.
5. New, more detailed analysis of the artificial low-frequency quasi-periodic amplitude oscillations (QPAOs) of X-mode probing waves reflected from the ionosphere have been performed. In spite of the large body of data available, up to now no adequate theoretical interpretation of this phenomenon has been presented. We note here the following key problems. On the one hand, a mechanism of QPAO generation has to include the HF-induced upper hybrid turbulence whereas, on the other hand, we have to exclude the resonance interactions of the electromagnetic wave with the plasma at the stage of their generation since the oscillations are produced for waves of both O- and X-polarization not only in the vicinity of the resonance layer but also rather far from it. It is not yet understood why process leading to QPAO generation in a wide altitude range both below and above the pump-wave reflection level has so short a decay time. Clarification of the nature of this process is very important for understanding AIT features as a whole, since such usually observed strong variations of plasma characteristics in a wide height range must exert a strong influence on other wave–plasma interactions. We also remind the reader that the nature of rapid quasi-periodical oscillations, observed in the pump-wave signal reflected from the ionosphere for pumping durations 0.02 to 0.5–3 s [34,44,53,54] at the stage before the development of thermal parametric (resonance) instability, remains to be solved.

Our observations represent new efforts aimed at examining the coupling between a HF pump wave and a plasma with respect to the ALSI generation. Summing up the results of the performed measurements, it is clear that, in addition to the thermal self-focusing instability studied in great detail before, other nonlinear processes and phenomena related to ALSI generation have to be involved to explain the available experimental data. To elaborate and improve the empirical ALSI model, we plan to perform a comparative study of their features in the case where both O- and X-mode pump waves are used for modification of the ionospheric F-region. Measurements using X-mode pumping give us new opportunities to study the peculiarities of ALSI generation, when resonance wave–plasma interactions in the vicinity of the pump-wave reflection level are forbidden, and to separate more comprehensively different mechanisms in the case of O-mode pumping. It is also necessary to carry out new measurements focused on the analysis of the dependence of ALSI features on the pump power, as well as to determine in more detail the ALSI characteristics in the case where the pulse mode for pump-wave radiation is used. New, interesting results are yet to be obtained in these fields of study.

We gratefully acknowledge technical support from the staff of the “Sura"heating facility. This work was supported by the EOARD contract F61708-96-W0322 and the Russian Foundation for Basic Research (project Nos. 98-02-16023, 98-05-64509, 99-02-16479, and 99-02-17525).

REFERENCES

1. J. Geophys. Res. 1970. V. 75. P. 6402–6452.
2. Radio Sci. 1974. V. 9. P. 881–1090.

3. J. Atmos. Terr. Phys. 1982. V. 44. P. 1009–1171.
4. J. Atmos. Terr. Phys. 1985. V. 47. P. 1151–1330.
5. Radio Sci. 1990. V. 25. P. 1251–1422.
6. J. Atmos. Solar–Terr. Phys. 1997. V. 59. P. 2251–2488.
7. Utlaut W.F., Violett E.J., Paul A.K. // J. Geophys. Res. 1970. V. 75. P. 6429.
8. Allen E.M., Thome G.D., and Rao P.B. // Radio Sci. 1974. V. 9. P. 905.
9. Bakhmet'eva N.V., Bubukina V.N., Ignat'ev Yu.A., Bochkarev G.S., Eremenko V.A., Kol'tsov V.V., Krasheninnikov I.V., Cherkashin Yu.N., // J. Atmos. Solar–Terr. Phys. 1997. V. 59. P. 2257.
10. Basu S., Basu Sun., Ganguly S., Gordon W.E. // J. Geophys. Res. 1983. V.88A. P. 9217.
11. Basu S., Costa E., Livingston R.C., Groves K.M., Carlson H.C., Chaturvedi P.K., Stubbe P. // J. Geophys. Res. 1997. V. 102A. P. 7469.
12. Belenov A.F., Bubnov V.A., Erukhimov L.M., Kiselev Yu.V., Komrakov G.P., Mityakova E.E., Rubtsov L.N., Uryadov V.P., Frolov V.L., Chugunov Yu.V., Yukhmatov B.V. // Radiophys. Quant. Electron. 1977. V. 20. P. 1240.
13. Belikovich V.V., Benediktov E.A., Getmantsev G.G., Erukhimov L.M., Zuikov N.A., Komrakov G.P., Korobkov Yu.S., Mityakov N.A., Rapoport V.O., Trakhtengertz V.Yu., Frolov V.L. // Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Radiofiz. 1975. V. 18. P. 516.
14. Bochkarev G.S. // J. Atmos. Solar–Terr. Phys. 1997. V. 59. P. 2295.
15. Bowhill S.A. // Radio Sci. 1974. V. 9. P. 975.
16. Erukhimov L.M., Mityakova E.E., Myasnikov E.N., Polyakov S.V., Rakhlin A.V., Sinel'nikov V.M. // Radiophys. Quant. Electron. 1977. V. 20. P. 1246.
17. Erukhimov L.M., Metelev S.A., Myasnikov E.N., Mityakov N.A., Frolov V.L. // Radiophys. Quant. Electron. 1987. V. 30. P. 156.
18. Frey, A., Duncan L.M. // Geophys. Res. Lett. 1984. V. 11. P. 677.
19. Gurevich A.V. Nonlinear Phenomena in the ionosphere. – New-York: Springer-Verlag, 1978. P. 283.
20. Rodrigues P., Kennedy E.J. Keskinen M.J., Siefring C.L., Basu Sa., McCarrick M., Preston J., Engebretson M., Kaiser M.L., Desch M.D., Goetz K., Bougeret J.-L., Manning R. // Geophys. Res. Lett. 1998. V. 25. P. 257.
21. Utlaut W.F., Violette E.J. // Radio Sci. 1974. V. 9. P. 895.
22. Guzdar P.N., Chaturvedy P.K., Papadopolous K., Keskinin M., Ossakow S.L. // J. Geophys. Res. 1996. V. 101. P. 2453.
23. Litvak A.G. // Radiophys. Quant. Electron. 1968. V. 11. P. 814.
24. Perkins F.W. Valeo E.J. // Phys. Rev. Lett.1974. V. 32. P. 1234.
25. Perkins F.W., Goldman M.V. // Geophys. Res.1981. V. 86. P. 600.
26. Fukao S., Kelley M.C., Shirakawa T., Takami T., Yamamoto M., Tsuda T., Kato S. // J. Geophys. Res. 1991. V. 96A. P. 3725.
27. Kelley M.C., Arce T.L., Salovey J., Sulzer M., Armstrong W.T., Carter M., Duncan L. // J. Geophys. Res. 1995. V. 100A. P. 17367.
28. Das A.C., Fejer J.A. // J. Geophys. Res. 1979. V. 84. P. 6701.
29. Grach S.M., Karashtin A.N., Mityakov N.A., Rapoport V.O., Trakhtengets V.Yu. // Radiophys. Quant. Electron. 1977. V. 20. P. 1254.
30. Gurevich A.V., Lukyanov V.A., Zybin K.P. // Phys. Lett. A. 1995. V. 206. P. 247.
31. Erukhimov L.M., Ivanov V.A., Mityakov N.A., Uryadov V.P., Frolov V.A., Shumaev V.V. // Radiophys. Quant. Electron. 1987. V. 30. P. 775.
32. Uryadov V.P., Ponyatov A.A., Ivanov V.A., Ivanov D.V., Shumaev V.V., Chernov A.G., Cherkashin Yu.N. // in: Vth International Suzdal URSI Symposium on the Modification of the Ionosphere (ISSMI'98). Book of Abstracts. 1998. P.57.

33. Uryadov V.P., Ryabova N.V., Ivanov V.A., Shumaev V.V. // J. Atmos. Terr. Phys. 1995. V. 57. P. 1263.
34. Frolov V.L., Erukhimov L.M., Metelev S.A., Sergeev E.N. // J. Atmos. Solar—Terr. Phys. 1997. V. 59. P. 2317.
35. Erukhimov L.M., Komrakov G.P., Frolov V.L. // Geomagn. Aéron. 1980. V. 20. P. 1112.
36. Leyser T.B., Thidé B., Waldenvik M., Goodman S., Frolov V.L., Grach S.M., Karashtin A.N., Komrakov G.P., Kotik D.S. // J. Geophys. Res. 1993. V. 98A. P. 17597.
37. Sergeev E.N., Frolov V.L., Komrakov G.P., Thidé B. // J. Atmos. Solar-Terr. Phys. 1997. V. 59. P.2383.
38. Sergeev E.N., Frolov V.L., Boiko G.N., Komrakov G.P. // Radiophys. Quant. Electron. 1998. V. 41. P. 313.
39. Frolov V.L., Komrakov G.P., Sergeev E.N., Thidé B., Waldenvik M., Veszelei E. // Radiophys. Quant. Electron. 1997. V. 40. P. 731.
40. Leyser T.B., Thidé B., Waldenvik M., Veszelei E., Frolov V.L., Grach S.M., Komrakov G.P. // J. Geophys. Res. 1994. V. 99A. P. 19555.
41. Yampolski Yu.M., Beley V.S., Kascheev S.B., Koloskov A.V., Somov V.G., Hysell D.L., Isham B., Kelley M.C. // J. Geophys. Res. 1977. V. 102A. P. 7461.
42. Tatarskii V.I. National Technical Information Service.— Springfield. 1971.
43. Cohen R., Whitehead J.D. // J. Geophys. Res. 1970. V. 75. P. 6439.
44. Frolov V.L. Sc. D. Thesis. N.Novgorod: NIRFI, 1996.
45. Leyser T.B., Thidé B., Derblom H., Hedberg Å., Lundborg B., Stubbe P., Kopka H. // J. Geophys. Res. 1990. V. 95A. P. 17233.
46. Tokarev Yu.V., Kaiser M.L., Rodrigues P., Alimov V.A., Belov Yu.V., Boiko G.N., Komrakov G.P., Murav'eva N.B., Rakhlin A.V. // Radiophys. Quant. Electron. 1999. V. 42. P. XXX.
47. Stubbe P., Stocker A.J., Honary F., Robinson T.R., Jones T.B. // J. Geophys. Res. 1994. V. 99A. P. 6233.
48. Frolov V.L., Erukhimov L.M., Kagan L.M., Komrakov G.P., Sergeev E.N., Stubbe P. // Phys. Rev. Lett. 1998. V. 81. P. 1630.
49. Grach S.M., Komrakov G.P., Yurishchev M.A., Thidé B., Leyser T.B., Carozzi T. // Phys. Rev. Lett. 1997. V. 78. P. 883.
50. Robinson T.R., Honary F., Stocker A.J., Jones T.B., Stubbe P. // J. Atmos. Terr. Phys. 1996. V. 58A. P. 385.
51. Gurevich A.V., Migulin V.V. // J. Atmos. Terr. Phys. 1982. V. 44. P. 1982.
52. Boiko G.N., Zyuzin V.A., Komrakov G.P., Leonov A.M., Ryzhov V.A., Solynin V.A., Tokarev Yu.V. // Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Radiofiz. 1985. V. 28. P. 656.
53. Boiko G.N., Erukhimov L.M., Frolov V.L. // Radiophys. Quant. Electron. 1991. V. 34. P. 18.
54. Fejer J.A., Kopka H. // J. Geophys. Res. 1981. V. 86A. P. 5746.
55. Frolov V.L., Kagan L.M., Sergeev E.N., Komrakov G.P., Bernhardt P.A., Goldstein J.A., Wagner L.S., Selcher C.A., Stubbe P. // J. Geophys. Res. // 1999. V. 104A. P. 12695.
56. Gurevich A.V., Hagfors T., Carlson H., Karashtin A., Zybin K. // Phys. Lett. A. 1998. V. 239. P. 385.

[1] Radiophysical Research Institute, Nizhny Novgorod, Russia
[2] Mari Polytechnical Institute, Yoshkar-Ola, Russia
[3] Kazan State University, Kazan, Russia
[4] Air Force Research Laboratory, Hanscom, USA

Received
November 22, 1999

УДК 621.371:526.2+551.526+528.811+551.501

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ АТМОСФЕРНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ НА ФОРМИРОВАНИЕ ТЕРМИЧЕСКОЙ ПЛЁНКИ В ПОВЕРХНОСТНОМ СЛОЕ ВОДЫ И ДИНАМИКУ ТЕПЛООБМЕНА ВОДА—ВОЗДУХ ПО ИЗМЕРЕНИЯМ ТЕПЛОВОГО РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ

К. П. Гайкович

На основе радиометрических измерений теплового радиоизлучения водной среды на длинах волн 2,3 и 5 мм выполнены исследования динамики тепло- и массопереноса через границу раздела вода—воздух, связанной с турбулентностью воздуха. Восстановлена динамика температурного профиля в воде, а также теплового потока через границу раздела сред. Определены составляющие потока тепла, связанные с испарением и теплопроводностью, и скорость испарения с единицы поверхности. Исследованы вариации толщины вязкого подслоя в воздухе, связанные с турбулентностью. Вычислены статистические характеристики вариаций температуры водной поверхности. Установлено, что в условиях измерений эти вариации существенно превосходили турбулентные флуктуации температуры воздуха.

ВВЕДЕНИЕ

В ряде работ [1—6] развита теория радиотеплового зондирования сред, основанная на совместном решении уравнений теплопроводности и переноса теплового радиоизлучения. Полученные соотношения позволяют по одноволновым измерениям динамики яркостной температуры теплового радиоизлучения полупространства в фиксированном направлении определять эволюцию профиля температуры в среде и теплового потока через границу полупространства. Эти соотношения были успешно применены в исследованиях теплового режима грунта по излучению в сантиметровом диапазоне длин волн и пограничного слоя атмосферы по динамике излучения в центре линии поглощения кислорода, на длине волны 5 мм [5, 6].

Исследования возможностей радиометрии водной среды проводились вначале многоволновыми методами в лабораторных условиях. В частности, был восстановлен стационарный глубинный температурный профиль водной среды [3, 7], а также определена динамика профиля при прохождении внутренних волн [8]. В этих работах профиль температуры восстанавливался из решения некорректного интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода для яркостной температуры методом Тихонова. В принципе, аналогичный подход мог быть применён и для исследования динамики температурного режима, возникающей при нестационарных граничных условиях, однако упомянутый выше одноволновый метод с точки зрения решения задачи является корректным, а с точки зрения калибровки и компактности антенны и радиометрической системы не только кардинально более простым, но и имеющим хорошие перспективы применения в натурных условиях. Поэтому в [9, 10] на основе радиометрических измерений временной зависимости теплового радиоизлучения водной среды на длине волны 5 мм выполнены лабораторные исследования возможностей радиометрического контроля динамики тепло- и массопереноса через границу раздела вода—воздух. При этом были получены следующие результаты. Восстановлена динамика температурного профиля в воде и в воздухе, а также динамика теплового потока через границу раздела сред, связанная с искусственной турбулизацией воздуха над поверхностью воды. Разделены составляющие потока тепла, связанные с испарением и теплообменом, и определена скорость испарения с единицы поверхности. Получено уравнение для определения толщины вязкого подслоя в воздухе по величине теплового потока и восстановлена динамика толщины этого слоя в условиях эксперимента. Точность восстановления профиля температуры, определённая путём сравнения с результатами прямых измерений, составила 0,07 K. Исследовано влияние конвекции (развитие термиков в охлаждаемом поверхностном слое) и турбулентности водной среды на динамику теплового излучения и на точность интерпретации этой динамики.

Актуальность исследований теплового режима поверхностного слоя воды с толщиной несколько сантиметров связана с тем обстоятельством, что температурный градиент в этом слое определяет теплообмен между океаном и атмосферой, а применение контактных методов, особенно для измерений динамики быстропротекающих процессов, затруднено и приводит к возмущению параметров измеряемой среды [11].

Разработанный в [9, 10] подход был реализован и в экспериментах на открытом воздухе, где динамика теплообмена и формирование термической плёнки в воде определялись естественной турбулентностью атмосферного воздуха [12]. Результаты, полученные на основе анализа данных этих измерений на длинах волн 2,3 и 5 мм, и составляют содержание данной работы.

Отметим также исследования влияния термической плёнки на радиометрические измерения на длине волны 5 мм в лабораторных [13] и морских [14] условиях. В работе [13], как и в наших работах [9, 10], наблюдалась динамика яркостной температуры воды, но в небольшой кювете и при охлаждении в контакте с окружающим воздухом, температура которого была существенно более низкой, чем у воды (на $5 \div 10$ K).

1. РАДИОМЕТРИЧЕСКИЕ ИЗМЕРЕНИЯ

Измерения излучения водной среды [12] проводились на установке, состоящей из кюветы с водой размером $2\times1{,}5\times0{,}2$ м, радиометров на длинах волн 2,3 и 5 мм и контактных датчиков температуры воды. Номинальная чувствительность радиометров составляла 0,01 K при постоянной времени 1 с, но с учётом температурных флуктуаций фона реальное значение чувствительности составляло $0{,}03 \div 0{,}05$ K. Ширина диаграммы направленности рупорно-скалярных антенн, расположенных на высоте 1 м над поверхностью воды, составляла около 5°, т. е. пятно диаграммы направленности на водной поверхности имело диаметр около 10 см. Размер кюветы обеспечивал требуемую горизонтальную однородность на масштабе диаметра пятна диаграммы направленности и малость толщины вязкого подслоя по сравнению с размерами системы. Последнее условие необходимо, чтобы пренебречь горизонтальным переносом тепла и водяного пара через края кюветы по сравнению с вертикальной диффузией в подслое. Калибровка измерений яркостной температуры $T_{\rm b}$ проводилась по самой измеряемой водной среде при двух различающихся примерно на 10 K температурах (однородное распределение температуры в кювете достигается перемешиванием). Постоянство и однородность температуры фонового излучения, а также её близость к яркостной температуре воды обеспечивались измерениями под отражающим экраном, что приводит к практически полной компенсации коэффициента отражения R от водной поверхности, а способ калибровки, когда эталонная яркостная температура полагается равной температуре воды, реализует условие $R = 0$ [9, 10]. Это позволяло при измерениях достигнуть точности привязки $T_{\rm b}$ к показаниям термометра, сравнимой с флуктуационной чувствительностью радиометра.

Толщина скин-слоя формирования теплового радиоизлучения на длине волны 5 мм составляет около 0,15 мм, а на длине волны 2,3 мм — около 0,1 мм. При резких градиентах температуры, наблюдающихся в термических плёнках, отличие яркостной температуры от поверхностной достигает 0,3 K, что является достаточно большой величиной по сравнению с реализованной чувствительностью измерений и не позволяет при интерпретации считать яркостную температуру равной поверхностной. Измерения на длине волны 5 мм существенно лучше подходят для радиометрии водной среды, поскольку эта длина волны расположена в самом центре сильной полосы поглощения молекулы кислорода, где яркостная температура фонового атмосферного излучения близка к температуре окружающего воздуха. Толщина слоя формирования фонового излучения атмосферы составляет около 250 м, её вариации не превосходят величины температурных флуктуаций. На длине волны 2,3 мм на фоновое излучение и его вариации существенное влияние могут оказывать облака. Требования к калибровке и условиям измерений в этом случае существенно жёстче, поэтому длина волны 2,3 мм использовалась лишь в части экспериментов, главным образом для сравнения с результатами измерений на длине волны 5 мм. Все измерения выполнялись в безоблачную погоду.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИНАМИКИ ТЕПЛООБМЕНА ВОДЫ И ВОЗДУХА ПОД ВЛИЯНИЕМ АТМОСФЕРНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Цель работы состояла в исследовании динамики теплового режима поверхностного слоя воды, возникающей под влиянием естественной турбулентности воздуха над её поверхностью. В исходном состоянии вода в кювете находилась в относительно устойчивом тепловом равновесии с атмосферой, которое формировалось солнечным нагревом, балансом излучённого и поглощённого теплового излучения, испарением и теплопроводностью. Далее в воде путём перемешивания создавалось однородное распределение температуры, солнечное излучение экранировалось и наблюдался процесс охлаждения воды в процессе испарения и теплообмена с воздухом под определяющим влиянием турбулентных вариаций скорости обдува поверхности (экранировка практически исключает процесс лучистого теплообмена при малой разнице температур воды и экрана). Такая ситуация в известной степени аналогична процессу охлаждения воды в стоячем водоёме, который связан с появлением облачности.

При вариациях скорости турбулентного движения воздуха сильно флуктуирует толщина вязкого подслоя над водной поверхностью. Здесь вязкий подслой понимается в гидродинамическом, а не в статистическом смысле, т. е. считается, что турбулентность непрерывно меняет толщину этого слоя. В вязком подслое реализуется ламинарное течение, а перенос тепла и водяного пара, являющегося малой примесью, осуществляется через механизм молекулярной диффузии (при статистическом подходе полагают, что коэффициент турбулентной диффузии уменьшается внутри вязкого подслоя до значения коэффициента молекулярной диффузии у поверхности). Перенос в вязком подслое определяется градиентами температуры и концентрации водяного пара между водной поверхностью и верхней границей вязкого подслоя. Выше этой границы реализуется режим турбулентной диффузии, коэффициент которой много больше коэффициента диффузии в вязком подслое. Это позволяет считать, что весь перепад температуры и концентрации водяного пара от значений этих величин у водной поверхности до их значений в окружающем воздухе осуществляется именно в вязком подслое. Таким образом, модель воздушной среды над поверхностью воды является двухслойной.

Ясно, что поскольку размер пятна диаграммы направленности превышает внутренний масштаб турбулентности, а время интегрирования больше, чем период наиболее быстрых флуктуаций, влияние временного и пространственного спектров атмосферной турбулентности будет ограничено со стороны высоких частот. Тем не менее, результаты лабораторных исследований [9, 10], основанные на сравнении восстановленной динамики температуры с данными прямых измерений, показывают, что такой подход позволяет описывать процесс теплообмена с большой степенью точности. Это связано с тем, что инерционность процесса прогрева водной среды сглаживает влияние быстрых флуктуаций, период которых меньше, чем время интегрирования.

Сильные вариации градиента концентрации водяного пара в вязком подслое, пропорциональные вариациям толщины последнего вследствие турбулентности воздуха, приводят к вариациям потока водяного пара (испарения), а следовательно, и к соответствующим вариациям потока тепла, связанного с испарением. То же самое можно сказать и о градиенте температуры в вязком подслое, вариациями которого обусловлена динамика компоненты потока тепла, связанной с теплопроводностью. Результатом является быстрое охлаждение поверхностного слоя водной среды, соответствующая этому охлаждению динамика яркостной температуры теплового радиоизлучения регистрируется чувствительными радиометрами. Последующий анализ позволяет восстановить детали тепло- и массообмена через границу раздела воздух—вода.

Измеренная временная зависимость радиояркостной температуры $T_{\rm b}(t)$ использовалась для восстановления подповерхностного профиля температуры $T(z,t)$ в полупространстве $z<0$ с однородной температуропроводностью a^2 и коэффициентом γ поглощения теплового излучения из соотношения, полученного путём совместного решения уравнений теплопроводности и переноса излучения [4—6]:

$$T(z,t) = \int\limits_{-\infty}^{t} T_{\rm b}(\tau)\,(-z)\exp\left[-\frac{z^2}{4a^2\,(t-\tau)}\right]\frac{{\rm d}\tau}{\sqrt{4\pi a^2\,(t-\tau)^3}} + \\ + \frac{1}{\gamma a}\int\limits_{-\infty}^{t} T_{\rm b}'(\tau)\exp\left[-\frac{z^2}{4a^2\,(t-\tau)}\right]\frac{{\rm d}\tau}{\sqrt{\pi\,(t-\tau)}}\,. \qquad (1)$$

Интеграл во втором слагаемом (1) для $z<0$ можно взять по частям:

$$T(z,t) = \int\limits_{-\infty}^{t} T_{\rm b}(\tau)\exp\left[-\frac{z^2}{4a^2\,(t-\tau)}\right]\left[\frac{1}{\gamma}\left(\frac{z^2}{2a^2\,(t-\tau)}-1\right)-z\right]\frac{{\rm d}\tau}{\sqrt{4\pi a^2\,(t-\tau)^3}}\,. \qquad (2)$$

Для температуры поверхности $z=0$, для которой выражение (2) несправедливо, имеет место формула

$$T_0(t) = T_{\rm b}(t) + \frac{1}{\gamma a}\int\limits_{-\infty}^{t} T_{\rm b}'\frac{{\rm d}\tau}{\sqrt{\pi\,(t-\tau)}} = T_{\rm b}(t) + \frac{1}{2\gamma a}\int\limits_{-\infty}^{t}[T_{\rm b}(t)-T_{\rm b}(\tau)]\frac{{\rm d}\tau}{\sqrt{\pi\,(t-\tau)^3}}\,. \qquad (3)$$

Тепловой поток через границу раздела сред определяется производной по времени от яркостной температуры [4—6]:

$$J(t) = -\frac{k}{a^2\gamma}\left[T_{\rm b}'(t) + \gamma a\int\limits_{-\infty}^{t} T_{\rm b}'(\tau)\frac{{\rm d}\tau}{\sqrt{\pi\,(t-\tau)}}\right], \qquad (4)$$

где k — коэффициент теплопроводности.

Поток тепла $J(t)$ в рамках рассматриваемой модели можно представить в виде суммы потока за счёт испарения и потока, связанного с молекулярной теплопроводностью в вязком подслое:

$$J(t) = J_q(t) + J_T(t) = -r\rho D_q\left.\frac{{\rm d}q}{{\rm d}z}\right|_{z=0} - k\left.\frac{{\rm d}T}{{\rm d}z}\right|_{z=0} = -r\rho D_q\frac{q_{\rm a}-q(0)}{d} - \rho c_p a^2\frac{T_{\rm a}-T(0)}{d}\,, \qquad (5)$$

где q — концентрация (удельная влажность) водяного пара, который является в данном случае малой примесью, r — удельная теплота парообразования, ρ — плотность воздуха, D_q — коэффициент диффузии водяного пара, c_p — удельная теплоёмкость воздуха при постоянном давлении, d — толщина вязкого подслоя, $q_{\rm a}$ и $T_{\rm a}$ — концентрация и температура в турбулентном слое воздуха выше вязкого подслоя. Плотность воздуха $\rho = P/(R_{\rm a}T)$, где P — давление, $R_{\rm a}$ — газовая постоянная воздуха.

Оценки показывают, что установление линейных профилей температуры и концентрации водяного пара в вязком подслое толщиной 2 мм происходит за характерное время около 0,2 с, что позволяет считать градиенты температуры и концентрации в этом слое постоянными. Согласно теории испарения концентрация водяного пара у поверхности воды $q(0)$ при наличии оттока отличается от насыщенной концентрации q_s, определяющейся температурой на границе раздела сред, но может быть выражена через насыщенную концентрацию. Таким образом, все параметры (5) определяются только динамикой температуры водной поверхности. В [9, 10] показано, что (5) сводится к квадратному уравнению относительно толщины вязкого подслоя. При этом оба корня уравнения имеют физический смысл, но в условиях обычной атмосферы реализуется случай, который соответствует наибольшему из них.

Следует заметить, что адекватность описанного метода основана на применимости уравнения теплопроводности, использованного при выводе исходных соотношений. В [9, 10] исследовано влияние конвекции и турбулентности в водной среде на динамику теплового излучения и интерпретацию измерений. В частности, при сильном испарении с поверхности в холодной плёнке через некоторое время достигается критическое число Релея, определяющее устойчивость её температурной стратификации, после чего развивается конвективное движение — опускается термик. В описанных экспериментах в условиях слабой турбулентности число Релея, непрерывно контролируемое по восстановленному температурному профилю, не превышало критического значения, и конвекция не развивалась.

На рис. 1 представлен пример измеренной динамики яркостной температуры на длине волны 5 мм вместе с восстановленными по этой динамике зависимостями температуры водной среды на различных глубинах. Более подробно результат восстановления температуры можно видеть на рис. 2.

Условия измерений соответствовали солнечной безоблачной погоде со слабым ветром, который временами спадал до штиля. Во время измерений, результаты которых приведены на рис. 1 и 2, ветер менялся следующим образом: от 0 до 50 с — скорость ветра была почти постоянна и составляла 5÷7 м/с; от 50 до 90 с ветер стих до полного штиля; от 90 до 160 с — очень слабый ветер со скоростью 0÷3 м/с; от 160 до 190 с ветер стих до полного штиля; от 190 до 200 с — скорость ветра 5÷7 м/с; от 200 до 250 с — слабый ветер со скоростью около 3 м/с.

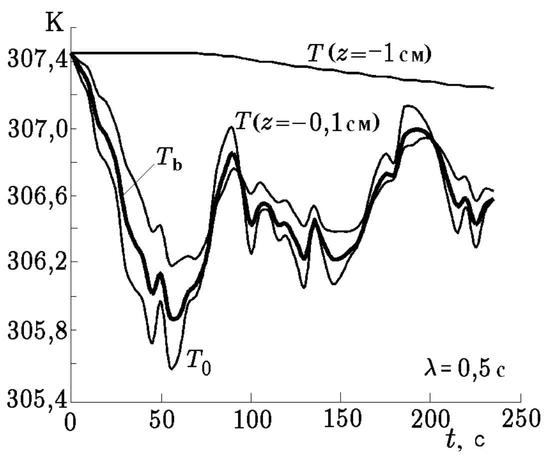


Рис. 1. Динамика яркостной температуры T_b на длине волны 5 мм и восстановленные по этой динамике зависимости температуры водной среды у поверхности из формулы (3) и на глубинах 1 мм и 1 см из формулы (2)

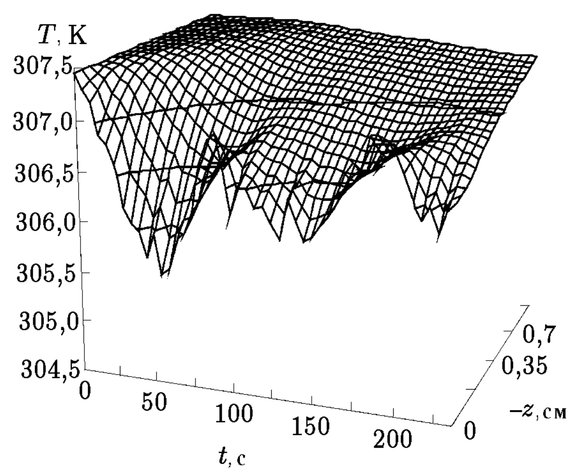


Рис. 2. Динамика температурного профиля холодной термической плёнки, восстановленная по измеренной динамике яркостной температуры (см. рис. 1)

На рис. 1 и 2 видно, как резкие изменения температуры на поверхности воды с возрастающим запаздыванием передаются в более глубокие слои, где они постепенно сглаживаются и переходят в плавное понижение температуры. Соответствующая динамика потока тепла через границу раздела вода—воздух, определённая из (4), показана на рис. 3.

Эти результаты показывают, что тепловой поток испытывает очень быстрые и сильные вариации. Из (5) можно определить динамику толщины вязкого подслоя, после чего можно вычислить компоненты полного теплового потока, связанные с испарением и теплообменом. Эти компоненты также показаны на рис. 3. Видно, что влияние процесса испарения является определяющим. В течение первых 60 с поток J достигал значений, полученных в лабораторных экспериментах с использованием обдува поверхности вентилятором [9, 10], но потом уровень турбулентности воздуха резко снизился и градиент температуры в образующейся плёнке оказался недостаточным для превышения критического числа Релея и развития конвективного термика.

Получить оценку точности представленного метода восстановления динамики теплового потока можно на основе численного моделирования. Из (4) видно, что метод нечувствителен к абсолютным погрешностям измерения яркостных температур. Если предположить, что случайный шум не коррелирован на времени интегрирования, то для реализованной чувствительности (0,03 K) средняя погрешность определения теплового потока составляет около 15 %. Максимальные наблюдаемые в эксперименте значения потока соответствуют перепаду температур около 0,7 K в плёнке толщиной 1 мм (при линейном профиле), что является весьма реалистичной оценкой с точки зрения известных параметров термических плёнок [11]. Данные, представленные на рис. 3, согласуются и с результатами измерений среднего потока тепла, которые определялись по остыванию воды в кювете [13]. Отсутствие альтернативного способа измерений быстрых вариаций теплового потока составляет важное достоинство развитого метода, но затрудняет подтверждение полученных здесь результатов независимыми измерениями. В литературе (см., например, [13]) высказывались предложения оценивать тепловой поток по разности яркостных температур водной среды, измеренных на двух различных частотах (например, на 60 ГГц и в ИК диапазоне). Следует отметить, что помимо погрешностей, связанных с нелинейностью профиля температуры, такой метод будет весьма чувствителен к точности согласования измерений в различных каналах. Так, при рассогласовании в 0,1 K, что следует считать весьма труднодостижимым уровнем при учёте всех факторов, погрешность определения теплового потока составит около 300 Вт/м^2 .

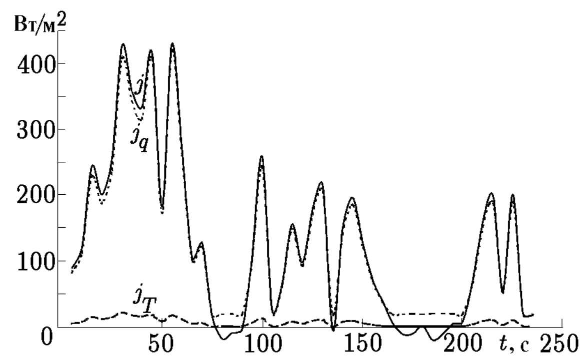


Рис. 3. Динамика теплового потока и двух его компонент, определённая по динамике яркостной температуры (см. рис. 1)

Переход значения теплового потока через нуль на 75-й и после 150-й секунды не может быть объяснён в рамках рассматриваемой модели, поскольку обе компоненты полного потока всё время положительны (воздух холоднее воды приблизительно на 3 K). Области отрицательных значений потока могут быть связаны с неточностью модели, в которой пренебрегается инерцией установления линейных профилей температуры и концентрации водяного пара, в случаях, когда толщина вязкого подслоя существенно возрастает. На рис. 4 представлена восстановленная из выражения (5) динамика толщины вязкого подслоя.

Вариации толщины вязкого подслоя полностью определяют процессы тепло- и массоообмена в рассматриваемых условиях. При этом скорость турбулентного обдува поверхности, от которой зависит толщина подслоя, является реальным регулирующим фактором. В условиях слабого ветра, чередующегося с полным штилем, толщина вязкого подслоя оказалась в целом больше, чем в условиях лабораторного эксперимента [9, 10], где при обдуве поверхности вентилятором она составляла около 2 мм. Значения, превышающие 4 мм, которые соответствуют периодам стихания ветра, на рис. 4 не показаны, поскольку, как уже отмечалось, в этом случае уже нельзя пренебрегать при анализе временем установления линейного профиля в вязком подслое.

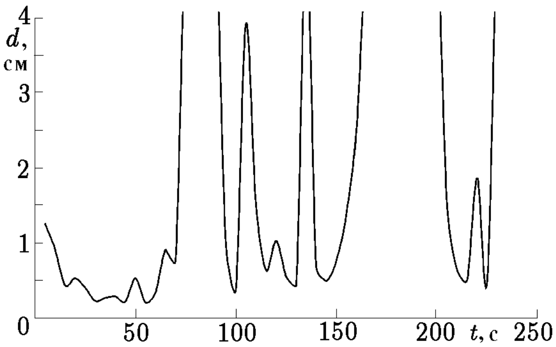


Рис. 4. Вариации толщины вязкого подслоя в воздухе, определённые по динамике яркостной температуры (см. рис. 1)

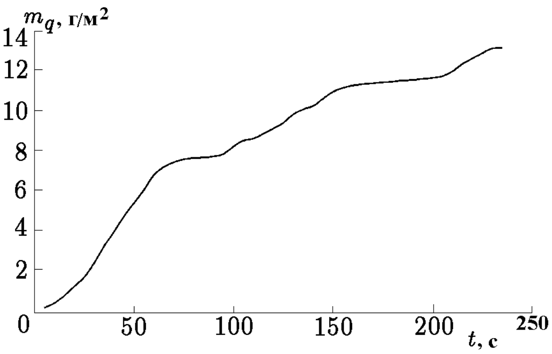


Рис. 5. Испарение с единицы площади под действием атмосферной турбулентности

Интегрируя компоненту потока тепла, связанную с испарением, и нормируя её на удельную теплоту парообразования [9, 10], легко определить динамику испарения с единицы площади:

$$m_q(t) = \frac{1}{r} \int\limits_0^t J_q(t')\,\mathrm{d}t'. \tag{6}$$

Соответствующие результаты представлены на рис. 5.

3. СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ НА ДВУХ ДЛИНАХ ВОЛН

Измерения на длине волны 2,3 мм, как уже отмечалось, выполнялись главным образом для сравнения с результатами, полученными на длине волны 5 мм. На рис. 6 представлена динамика яркостных температур на длинах волн 2,3 и 5 мм на коротком временном интервале, а также результаты восстановления динамики температуры поверхности и температуры на глубине 1 мм по данным на каждой из длин волн.

Из рис. 6 можно видеть, что разница восстановленных зависимостей температуры укладывается в рамки ошибки восстановления, определённой в [9, 10]. Погрешность восстановления поверхностной температуры не была раньше определена ни экспериментально (из-за трудностей прямых измерений, с которыми можно было бы сопоставить результаты восстановления), ни теоретически, поскольку в формулу восстановления поверхностной температуры (3) входит производная по экспериментальным данным. Так что представленные на рис. 6 зависимости позволяют получить разумную оценку такой погрешности, которая составляет $0{,}1 \div 0{,}2$ К.

Измерения на двух длинах волн представляют и самостоятельный интерес. Дело в том, что в [15, 16] получена формула, связывающая динамику яркостных температур $T_{\mathrm{b}1}$ и $T_{\mathrm{b}2}$ теплового излучения среды на двух различных длинах волн λ_1 и λ_2:

$$T_{\mathrm{b}2}(t) = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} T_{\mathrm{b}1}(t) + \int\limits_{-\infty}^{t} T_{\mathrm{b}1}(\tau) \left(1 - \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right) \gamma_2 a \left[\frac{1}{\sqrt{\pi\,(t-\tau)}} - \gamma_2 a\, e^{(\gamma_2 a)^2 (t-\tau)}\,\mathrm{erfc}(\gamma_2 a \sqrt{t-\tau})\right] \mathrm{d}\tau, \tag{7}$$

где γ_1 и γ_2 — коэффициенты поглощения излучения на каждой из длин волн. На рис. 7 представлены данные измерений динамики яркостных температур при $\lambda_1 = 2{,}3$ мм и $\lambda_2 = 5$ мм и результаты их взаимного вычисления по формуле (7).

Видно, что результаты вычисления динамики яркостной температуры на длине волны 2,3 мм по данным измерений на длине волны 5 мм и наоборот вполне удовлетворительно согласуются между собой.

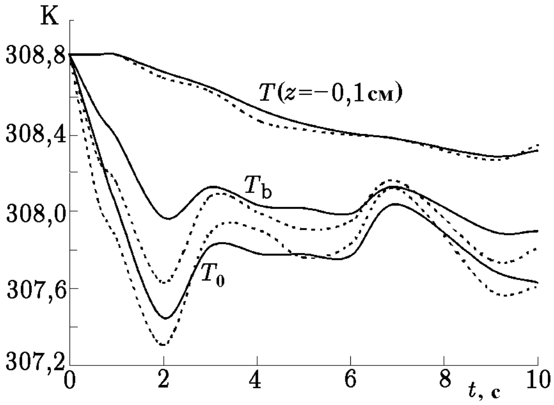


Рис. 6. Динамика яркостных температур, измеренных на длинах волн 2,3 мм (штриховая линия) и 5 мм (сплошная линия), и результаты восстановления динамики температуры поверхности и температуры на глубине 1 мм по данным на каждой из длин волн

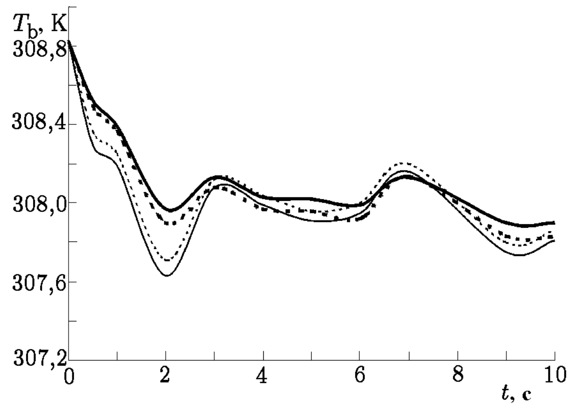


Рис. 7. Измерения динамики яркостных температур, измеренных на длинах волн 2,3 и 5 мм (жирная и тонкая сплошные линии соответственно) и результаты их совместного вычисления по формуле (7): жирная штриховая линия соответствует вычислению T_{b2} через T_{b1}, тонкая штриховая линия — вычислению T_{b1} через T_{b2}

4. СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ВАРИАЦИЙ ТЕМПЕРАТУРЫ ВОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Интерес представляет исследование статистических свойств вариаций температуры водной поверхности. На рис. 8 приведены результаты расчёта коэффициента автокорреляции $R_T(\tau)$.

На рис. 9 построен квадратный корень из структурной функции температуры водной поверхности, нормированный на величину среднеквадратичных вариаций $\sigma_T = 0{,}44$ K. Если использовать модель "замороженной турбулентности" Тейлора, то временну́ю корреляционную функцию на рис. 8 и временну́ю структурную функцию на рис. 9 можно рассматривать как соответствующие пространственные функции с аргументом $\rho = V\tau$, где V — средняя скорость ветра в приземном слое. Время затухания корреляционных связей на рис. 8 примерно соответствует времени переноса внешнего масштаба турбулентности (порядка 100 м) со средней скоростью ветра (около 5 м/с).

Результаты показывают, что среднеквадратичная разность температуры водной поверхности, измеренной в два момента времени, возрастает с ростом интервала между этими моментами. При $\tau > 25$ с она становится больше 1 K, что существенно превышает уровень флуктуаций температуры воздуха, величина которых за такое же время составляла около 0,05 K (по данным измерений флуктуаций собственного теплового излучения атмосферы радиометром на длине волны 5 мм). Очевидно, что этот эффект связан с определяющим влиянием вариаций скорости испарения на вариации температуры водной поверхности по сравнению с влиянием теплообмена между водой и воздухом за счёт теплопроводности.

Интересно отметить, что характерное время корреляции вариаций температуры водной поверхности примерно совпадает с временем установления холодной термической плёнки в турбулизованной водной среде (около 10 с), определённом в эксперименте [9, 10]. Отсюда можно сделать вывод, что при наличии волнения или течения, турбулизующих поверхностный слой воды, холодная термическая плёнка в близких к наблюдавшимся в эксперименте условиях под влиянием атмосферной турбулентности должна испытывать быстрые и сильные вариации, которые приводят и к соответствующей пространственной неоднородности структуры плёнки. Вариации зависят от влажности воздуха и разности температур воды и воздуха. Так, вариации должны уменьшаться, когда влажность воздуха над водной поверхностью приближается к насыщенной, а температура — к температуре воды.

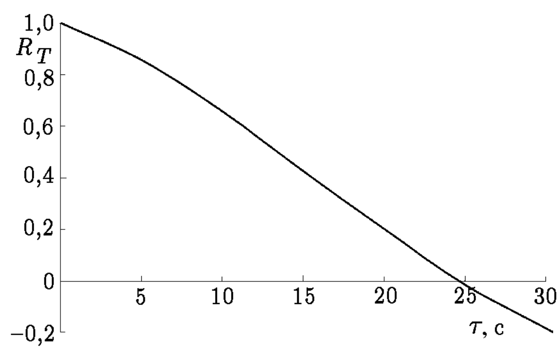


Рис. 8. Коэффициент автокорреляции вариаций температуры водной поверхности

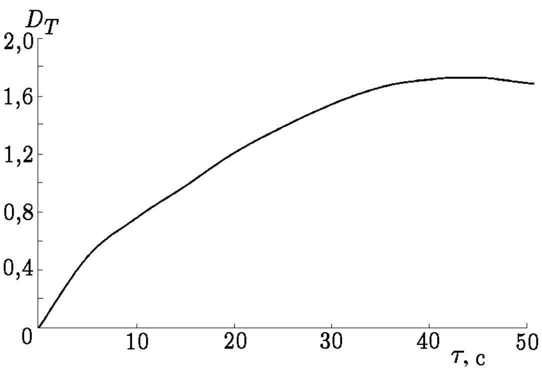


Рис. 9. Квадратный корень из структурной функции температуры водной поверхности, нормированный на дисперсию: $D_T = \sqrt{\langle [T_0(t+\tau) - T_0(t)]^2 \rangle} / \sigma_T$

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основной результат работы состоит в том, что впервые удалось получить новую физическую информацию о процессах тепло- и массообмена между водной поверхностью и атмосферой по динамике теплового радиоизлучения. Восстановлена динамика профиля температуры в поверхностном слое воды под влиянием атмосферной турбулентности в условиях слабого ветрового обдува, приводящего к образованию холодной термической плёнки за время порядка 10 с. Восстановлены быстрые вариации теплового потока через границу раздела сред и его основных составляющих, связанных с процессами испарения и теплопроводности. Анализ изменения толщины вязкого подслоя под влиянием ветра показал, что она подвержена резким вариациям. Последнее определяет её регулирующую роль в процессе теплообмена, поскольку составляющие потоков теплоты и испаряющегося водяного пара обратно пропорциональны толщине подслоя. Исследованы статистические характеристики (коэффициент корреляции и структурная функция) температуры водной поверхности. Установлено, что в условиях эксперимента вариации поверхностной температуры воды на порядок превосходили флуктуации температуры окружающего воздуха.

Результаты показали применимость радиометрического метода для исследования динамики теплообмена атмосферы с водной поверхностью, что даёт возможность получить ценную физическую информацию о протекании этого процесса в различных природных условиях (в пресной и солёной воде; при различных соотношениях температуры воды и воздуха, а также при различной влажности воздуха). Особый интерес представляет исследование пространственной структуры процесса теплообмена, в частности, пространственной изменчивости толщины вязкого подслоя. По-видимому, можно ожидать резких изменений толщины вязкого подслоя на масштабах в десятки метров, а возможно и на меньших масштабах. Это свидетельствует о сильной неоднородности потоков тепла и водяного пара в атмосферу с водной поверхности, которые, в свою очередь, должны оказывать влияние на процессы атмосферной турбулентности и конвекции.

Аналогичные исследования динамики теплового излучения других типов подстилающей поверхности также могут дать интересные результаты о специфике их теплообмена с атмосферой.

Автор благодарен А. В. Троицкому за помощь в проведении экспериментов.
Работа была выполнена при поддержке РФФИ, грант № 96–02–16514.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гайкович К. П., Резник А. Н. // Изв. вуз. Радиофизика. 1989. Т. 33, № 11. С. 1343.
2. Гайкович К. П. // Исследование Земли из космоса. 1990. № 6. С. 71.
3. Gaikovich K. P., Reznik A. N., Troitskii R. V. // 11 th Annual Int. Symp. Geosci. Remote Sensing (IGARSS-91), Helsinki, Finland, 1991. V. 3. P. 1195.
4. Гайкович К. П. // Изв. вуз. Радиофизика. 1993. Т. 36, № 1. С. 16.
5. Гайкович К. П. // Изв. вуз. Радиофизика. 1993. Т. 36, № 10. С. 912.
6. Gaikovich K. P. // IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing. 1994. V. 32, № 4. P. 885.
7. Гайкович К. П. и др. // Изв. АН СССР, ФАО. 1987. Т. 23, № 7. С. 761.
8. Гайкович К. П., Резник А. Н., Троицкий Р. В. // Изв. вуз. Радиофизика, 1993. Т. 36, № 3–4. С. 216.
9. Гайкович К. П., Троицкий Р. В. // Изв. вуз. Радиофизика. 1997. Т. 40, № 3. С. 351.
10. Gaikovich K. P., Troitsky R. V. // IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing. 1998. V. 36, № 1. P. 341.
11. Фёдоров К. Н., Гинзбург А. И. Приповерхностный слой океана. — Л.: Гидрометеоиздат, 1988. — 304 с.
12. Gaikovich K. P., Troitsky R. V. // Proc. Third Int. Kharkov Symp. “Physics and Engineering of Millimeter and Submillimeter Waves” MSMW’98 (Kharkov, Ukraine, Sept. 15–17, 1998). Kharkov: Inst. Radiophys. Electronics. V. 2. P. 509.
13. Трохимовский Ю. Г. и др. // Исследование Земли из космоса. 1998. № 5. С. 3.
14. Trokhimovski Yu. G. et al. // IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing. 1998. V. 36, № 1. P. 3.
15. Gaikovich K. P. // IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing. 1996. V. 34, № 2. P. 582.
16. Гайкович К. П. // Изв. вуз. Радиофизика. 1996. Т. 39, № 4. С. 399.

Институт физики
микроструктур РАН,
г. Н. Новгород, Россия

Поступила в редакцию
16 декабря 1999 г.

USING MEASUREMENTS OF THERMAL RADIO EMISSION TO STUDY THE INFLUENCE OF THE ATMOSPHERIC TURBULENCE ON THE FORMATION OF THE THERMAL FILM IN NEAR–SURFACE WATER LAYER AND THE DYNAMICS OF AIR–WATER HEAT EXCHANGE

K. P. Gaikovich

On the basis of laboratory measurements of radiobrightness evolution of water at wavelengths 2.3 and 5 mm, the dynamics of temperature profile and heat flux through water—air interface related to the atmosphere turbulence have been determined. Two components of the heat flux related to evaporation and to thermal conductivity have been retrieved which made possible to determine the evaporation rate and the viscosity sublayer depth. Statistical parameters of the water surface temperature variations have been calculated. It was obtained that the temperature variations on the water surface were much larger than the air temperature variations.

УДК 533.951

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ВОЛНОВОДЕ С РАДИАЛЬНО СИММЕТРИЧНОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ ВЫСОТЫ ВЕРХНЕЙ СТЕНКИ

Л. П. Коган

Исследовано влияние плавного в масштабе длины волны радиально симметричного возмущения высоты плоского волновода на поле вертикального электрического диполя, помещённого в волновод. Найдено аналитическое выражение для потенциала Герца при расположении диполя и точки наблюдения на неискривлённой стенке волновода.

В работе рассматривается трёхмерная задача о возбуждении и распространении электромагнитных волн в плоском вакуумном волноводе с искривлённой стенкой. Предполагается, что длина волны, излучаемой источником в свободном пространстве, меньше горизонтального масштаба искривления стенки волновода, но больше удвоенной высоты волновода в отсутствие возмущения. При изучении влияния таких неоднородностей на электромагнитные поля, создаваемые помещёнными внутрь указанного волноводного канала дипольными источниками, представляет интерес получение результата в компактной аналитической форме, поскольку это не только упрощает вычисление амплитуды и фазы сигнала в точке приёма, но и позволяет оценить параметры возмущения верхней стенки.

Отметим, что непосредственное использование геометрооптического приближения для решения подобных задач возможно только в случае, когда выполняется условие малости характерного масштаба области, существенной для отражения волны от искривлённой стенки, по сравнению с горизонтальным размером всей возмущённой зоны. Это означает, что вместе с требованием плавности возмущения в масштабе длины волны (нормированной на 2π) налагается весьма существенное ограничение на величину угла падения волны на возмущённый участок стенки волновода.

Чтобы избежать такого ограничения, в статье предлагается применить метод конформных преобразований для отображения трёхмерных объектов. В результате использования данного подхода в преобразованной системе координат происходит выпрямление неровной границы. Одновременно в уравнении Гельмгольца, записанном в новых переменных, возникает эффективный неоднородный коэффициент преломления, свойства которого определяются видом исходного возмущения границы. При этом сохраняется свойство плавности изменения пространственной неоднородности коэффициента преломления в масштабе длины волны. В силу того, что высота волновода оказывается много меньше, чем вертикальный масштаб изменения данного коэффициента преломления, можно пренебречь зависимостью свойств среды внутри преобразованного волновода от высоты. С учётом принятых условий это означает, что для применимости геометрооптического приближения теперь достаточно только условия плавности возмущения среды внутри волновода (с таким же горизонтальным масштабом, что и у неоднородности высоты границы в исходных координатах) в масштабе нормированной длины волны.

Ранее, в работе [1] конформные отображения использовались для определения поля в волноводе со скачкообразной неоднородностью импеданса нижней стенки, при наличии криволинейной границы между областями с различными импедансами. В работе [2] тем же методом было найдено решение задачи об излучении точечного вертикального электрического диполя (ВЭД), помещённого в волновод с плавной в масштабе длины волны радиально симметричной неоднородностью высоты. В [2] вычисления проводились при условии, что источник и точка наблюдения находятся в зоне Фраунгофера по отношению к искривлённому участку верхней границы волновода. Точка наблюдения предполагалась удалённой от центра неоднородности на расстояние порядка нескольких горизонтальных масштабов области искривления, благодаря чему правомерно было искать решение в борновском приближении. Вместе с тем при вычислении поля непосредственно в области искривления необходимы другие, более точные методы расчёта. Поэтому в данной работе, помимо использования (как и в [2]) метода конформных отображений, в преобразованной системе координат применяется метод геометрической оптики.

Рассмотрим плоский волновод с идеальными границами. Будем считать, что длина волны λ, излучаемой в свободном пространстве источником в виде ВЭД, такова, что в волноводе высотой h будет распространяться только низшая мода.

Пусть в точке $\mathbf{R}_0$ с координатами (r_0, π, z_0) в цилиндрической системе координат (см. рис. 1) расположен ВЭД с дипольным моментом p_0, а радиус-вектор точки наблюдения с координатами (r, ϕ, z) обозначим как $\mathbf{R}$. Высота границы задаётся уравнением $z = h - f(r)$. Здесь $h = \text{const}$, а функция f описывает искривление границы волновода. При этом полагаем, что выполняются соотношения

$$l \gtrsim \lambda > 2h \gg a, \tag{1}$$

где l и a — соответственно характерный горизонтальный масштаб и амплитуда функции $f(r)$. Далее будем исходить из того, что выполняется неравенство $r_0 \gg l$ (т. е. источник находится вдали от области неоднородности). Отметим, что точка наблюдения может находиться непосредственно под искривлённым участком границы. Уточняя введённые ограничения, будем считать, что имеет место неравенство $k_0 l \gg 1$, где $k_0 = 2\pi/\lambda$, являющееся необходимым условием применимости геометрооптического приближения.

Однако, как уже отмечалось, не станем требовать выполнения принципа локальности, при котором возможно непосредственное применение приближения касательной плоскости. Иными словами, считаем, что величина $(k_0 R_\text{c})^{1/3} \cos\tilde{\theta}$, где R_c — радиус кривизны линии границы, а $\tilde{\theta}$ — угол падения волны на локальный участок поверхности, может быть меньше или порядка единицы.

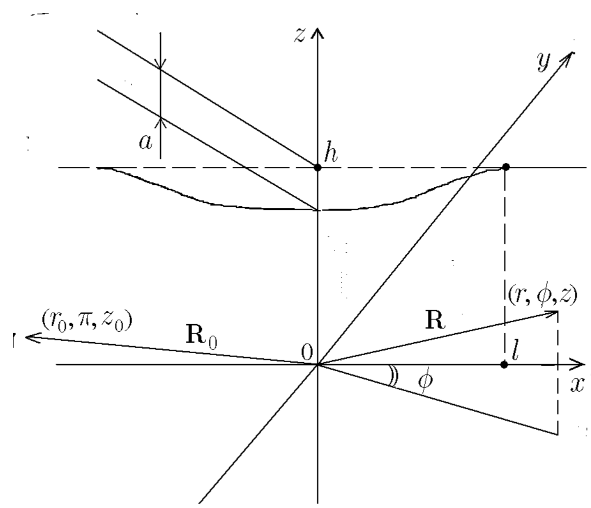


Рис. 1

В дальнейшем будем полагать, что источник и точка наблюдения находятся на нижней стенке волновода, в силу чего в аргументах векторов $\mathbf{R}_0$ и $\mathbf{R}$ высоты z_0 и z равны нулю. В плоском волноводе при заданных условиях невозмущённый потенциал Герца запишется как $\Pi_0(\mathbf{R}_0, \mathbf{R}) \approx A H_0^{(2)}(k_0\rho)$. Здесь $A = \dfrac{p_0}{4\pi i\, \varepsilon_0 \omega h}$, $\rho = \sqrt{r_0^2 + r^2 - 2\, r_0 r \cos\phi}$ — расстояние от источника до точки наблюдения, $H_0^{(2)}(k_0\rho)$ — функция Ханкеля второго рода нулевого порядка, ε_0 — электрическая постоянная, ω — частота излучения. Вначале предположим, что $\phi = 0$, т. е. горизонтальная проекция центра неоднородности приходится непосредственно на прямую, соединяющую ВЭД и точку наблюдения.

При заданных ограничениях можем утверждать, что основной компонентой вектора Герца $\mathbf{\Pi}$ является вертикальная составляющая: $\mathbf{\Pi} = \Pi \mathbf{z}^0$ (см. [3]), для которой выполняется уравнение Гельмгольца

$$\Delta\Pi + k_0^2 \Pi = q \tag{2}$$

с граничными условиями

$$\frac{\partial \Pi}{\partial z} = 0 \Big|_{z=h-f(r)}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial z} = 0\Big|_{z=0}. \qquad (4)$$

Здесь $q = p_0\delta(\mathbf{R}_0, \mathbf{R}/(4\pi i\varepsilon_0\omega)$, $\delta(\mathbf{R}_0, \mathbf{R})$ — трёхмерная дельта-функция от координат источника и точки наблюдения; оператор Лапласа в цилиндрической системе координат записывается в виде

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

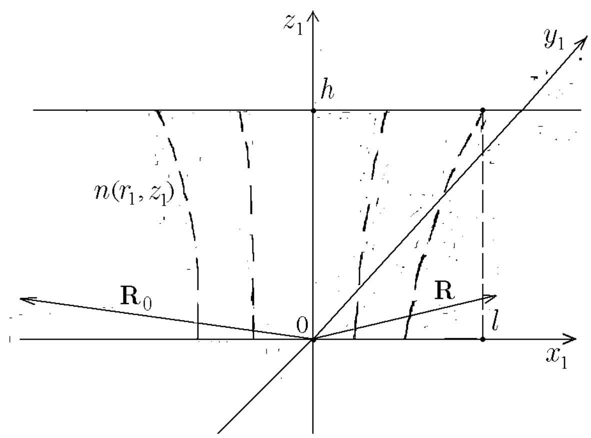


Рис. 2

При этом слагаемое $r^{-2}\,\partial^2\Pi/\partial\phi^2$ в рассматриваемом случае оказывается существенно меньшим по сравнению с другими слагаемыми в левой части уравнения (2).

Для упрощения задачи применим, как и в работе [2], конформное преобразование вида $\xi = \xi(u)$, $u = r + iz$, $\xi = r_1 + iz_1$, при котором в любой плоскости $\phi = \mathrm{const}$ искривлённая верхняя стенка $z = h - f(r)$ переходит в регулярную границу волновода, уравнение которой в новых координатах записывается очевидным образом: $z_1 = h$ (см. рис. 2).

В результате граничные условия Неймана (3) и (4) останутся без изменения, а уравнение Гельмгольца (2) с учётом введённых условий преобразуется в соотношение

$$\frac{\partial^2\tilde\Pi}{\partial r_1^2} + \frac{\partial^2\tilde\Pi}{\partial z_1^2} + \frac{n}{r_1}\frac{\partial\tilde\Pi}{\partial r_1} + \frac{n^2}{r^2(r_1, z_1)}\frac{\partial^2\tilde\Pi}{\partial\phi^2} + k_0^2 n^2\tilde\Pi = qn^2. \qquad (5)$$

Здесь $\tilde\Pi = \Pi(r(r_1, z_1), \phi, z(r_1, z_1))$, $n = |\mathrm{d}u/\mathrm{d}\xi|$. При записи третьего слагаемого в (5) учтено, что в силу свойств конформного отображения $\partial/\partial r = n^{-1}\,\partial/\partial r_1$. Кроме того, при введённых ограничениях правомерно представление $r = \int_0^{r_1} n(r_1', z_1)\,\mathrm{d}r_1'$. Последнее равенство запишем в виде $r = n_w r_1$, где n_w — среднее (в смысле теоремы о среднем) значение $n(r_1)$ на отрезке интегрирования. Также отметим, что $\partial\Pi/\partial r_1 \approx -i\,k_0\Pi$. Далее, поскольку введено условие $l \ll r_0$, то, как нетрудно показать, величина $n^2 r^{-2}(r_1, z_1)\,\partial^2\tilde\Pi/\partial\phi^2$ мала по сравнению с другими слагаемыми в уравнении (5). Поэтому можем считать $r^{-2}(r_1, z_1) \approx r_1^{-2}$.

Используя указанные приближения, получаем следующее соотношение:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r_1^2} + \frac{1}{r_1}\frac{\partial}{\partial r_1} + \frac{1}{r_1^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_1^2}\right]\tilde\Pi + k_0^2 n_g^2\tilde\Pi = qn^2. \qquad (6)$$

Здесь $n_g = n(r_1, z_1)g(r_1, z_1)$, где $g = \sqrt{1 + \dfrac{i}{k_0 r_1}\left[\dfrac{1}{n(r_1, z_1)n_w} - \dfrac{1}{n^2(r_1, z_1)}\right]}$. Неоднородность коэффициента преломления n_g в соотношении (6) радиально симметрична, поскольку n_g не зависит от азимутального угла ϕ.

Согласно работе [4] при выполнении условий (1) конформное преобразование $\xi(u)$, переводящее исходный волновод с искривлённой верхней стенкой в волновод постоянной высоты h, запишется как

$$\xi = u + \frac{1}{2h}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{th}\left[\frac{\pi\,(u-t)}{2h}\right]\mathrm{d}t,$$

а обратное отображение — в виде

$$u = \xi - \frac{1}{2h} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \, \mathrm{th}\left[\frac{\pi\,(\xi - t)}{2h}\right] \mathrm{d}t,$$

причём

$$|u'(\xi)| = |n(r_1, z_1)| = 1 - \frac{\pi}{4h^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, ch^{-2}\left[\frac{\pi(t-\xi)}{2h}\right] \mathrm{d}t\,.$$

Если выполняется неравенство $\exp(-\pi l/(2h) \ll 1$ и при этом высота z_1 точки наблюдения достаточно мала, так что $\mathrm{Im}\,\xi = z_1 \ll h$, то

$$n(r_1, z_1) \approx n(r_1, 0) \approx 1 - f(r_1)/h\,.$$

Для больших z_1 эффективный коэффициент преломления может быть записан в виде $n(r_1, h) \approx \approx 1 - f(r_1)/h + hf''(r_1)/3$. Отсюда следует, что при $0 \le z_1 \le h$ максимум изменения коэффициента преломления $n(r_1, z_1)$ в пределах всего волновода составляет около $ah/(3l^2) \ll a/h \ll 1$ (поскольку максимум и минимум модуля регулярной функции достигаются на границах любой области, не превышающей зону аналитичности). Пренебрежение такой величиной приводит при вычислениях к ошибке $\delta\psi$ в фазовой зависимости полученного решения, малой по сравнению с единицей: $\delta\psi \simeq 4\pi ah/(3\lambda l) \lesssim 2a/l \ll 1$ (здесь учтено, что эффективный горизонтальный диаметр неоднородности составляет около $2l$). Поэтому можно полагать, что происходит падение цилиндрической волны на цилиндрическую неоднородность с коэффициентом преломления $n_g(r_1, z_{1\,\mathrm{eff}})$, зависящим только от радиуса r_1. Здесь параметр $z_{1\,\mathrm{eff}}$ — эффективное значение высоты z_1. Если $\sqrt{\lambda D} \le h/2$, где $D = |x - x^{\text{н}}|$, то $z_{1\,\mathrm{eff}}$ определяется как высота середины френелевского объёма: $z_{1\,\mathrm{eff}} = \sqrt{\lambda D}/2$. Если же $\sqrt{\lambda D} > h/2$, то $z_{1\,\mathrm{eff}}$ равно половине высоты волновода: $z_{1\,\mathrm{eff}} = h/2$. Здесь $x = x^{\text{н}}$ — плоскость начальных условий.

В таком случае при заданных ограничениях решение для поля в точке наблюдения не изменится, если пренебречь существованием стенок волновода и считать, что происходит падение волны $\sqrt{2/(\pi k_0 \rho(r_1))}\exp(-ik_0\rho(r_1) + i\pi/4)$ в свободном пространстве на неоднородность $n_g(r_1, z_{1\,\mathrm{eff}})$ коэффициента преломления, заданную на бесконечном интервале $-\infty < z_1 < +\infty$. (Так как поле падающей главной моды вне неоднородности не зависит от z_1, то, пренебрегая зависимостью от z_1 в выражении для n_g, в итоге получаем, что $\partial\tilde{\Pi}/\partial z_1 = 0$ во всём преобразованном волноводе, в том числе при $z_1 = 0$, $z_1 = h$. Следовательно, граничные условия выполняются автоматически.) Поэтому, несмотря на условие $\lambda > 2h$, здесь можно использовать понятие “луч” и применять весь аппарат метода геометрической оптики.

Как легко видеть,траектория распространения луча проходит через ось симметрии неоднородности, совпадающую с вертикальной осью z_1. Следовательно, при вычислении потенциала Герца для проходящего по такой траектории луча можно ограничиться трассовым приближением. Так как геометрический центр френелевского объёма лежит в плоскости $y = 0$ (или, что одно и то же, в плоскости $y_1 = 0$), то при вычислении потенциала Герца можем заменить r на x и r_1 на x_1. Отметим, что прицельный параметр для данного луча равен нулю. В итоге согласно [5] модуль потенциала Герца в точке наблюдения определяется как произведение амплитуды падающей волны $\sqrt{2/(\pi k_0\,(x - x_0))}$, где $x_0 = -r_0$, в отсутствие неоднородности на дополнительный фактор расходимости $1/\sqrt{n_g(x_1, z_{1\,eff})}$.

Зададим плоскость начальных условий, в которой поле падающей волны ещё не испытывает влияния неоднородности, как $x_1^{\text{н}} = -2l$. Здесь x_1 — ось абсцисс в декартовой системе координат (x_1, y_1, z_1), причём $x_1 = r\,\cos\phi$, $y_1 = r\,\sin\phi$. В силу условия $|x_0| = r_0 \gg l$ при вычислении поля в точке наблюдения падающую волну вне области неоднородности можно считать локально плоской, обладающей фазовым множителем вида $\exp(-ik_0\,(x-x_0)+i\pi/4) = \exp(-ik_0\,(x^{\text{н}}-x_0)+i\pi/4)\exp(-ik_0\,(x-x^{\text{н}}))$ и медленно меняющейся амплитудой $\sqrt{2/(\pi k_0\,(x-x_0))}$.

Перейдём к вычислению фазового множителя. Траектория рассматриваемого центрального луча в переменных (x_1, y_1, z_1) проходит при $y_1 = 0$ от точки $M(x_{\text{н}}, 0, z)$ до точки $M(x_1, 0, z_1)$, преобразующейся при обратном переходе к координатам (x, y, z) в $M(x, 0, z)$. Поэтому фазовый множитель при введённых ограничениях запишется в виде $\exp(-ik_0(x_{\text{н}}-x_0))\exp\left(-ik_0\displaystyle\int_{x_{\text{н}}}^{x_1} n(x_1', z_{1\,\text{eff}})\,\mathrm{d}x_1' + i\pi/4\right)$. Отметим также, что найденный результат изменится на малую по сравнению с a/l величину, если заменить $n_g(x_1, z_{1\,\text{eff}})$ на $n_g(x_1, 0)$. В итоге получаем

$$\tilde{\Pi} \approx \frac{\sqrt{2}\,A\exp(-ik_0(x-x_0)+i\pi/4)}{\sqrt{\pi}k_0\,(x-x_0)\,n_g(r_1, z_{1\,\text{eff}})} \approx \Pi_0(\mathbf{R}_0, \mathbf{R})\frac{1}{\sqrt{n_g(r_1, 0)}}\,, \tag{7}$$

где Π_0 — потенциал Герца в невозмущённом волноводе.

Оценим сомножитель g, входящий в выражение для n_g. Исходя из соотношений $a \ll l$, $k_0 l \gg 1$, получаем, что если $r_1 \gtrsim l$, то $1-|g| \simeq a\lambda/(lr_1)$. В этом случае модуль разности $|1-g| \simeq a/(4k_0 rh)$ по порядку величины много меньше отношения a/h, определяющего отличие от единицы второго сомножителя в правой части последнего приближённого равенства в (7). Если же $r_1 \ll l$, то $|1-g| \simeq a/(k_0 lh)$ также заведомо много меньше a/h. В итоге приходим к выводу, что при введённых ограничениях всегда можем полагать $g = 1$ и $n_g = n$. Таким образом,

$$\tilde{\Pi} \approx \Pi_0(\mathbf{R}_0, \mathbf{R})\frac{1}{\sqrt{n(r_1, 0)}}\,. \tag{8}$$

Очевидно, что в этом выражении сомножитель $1/\sqrt{n(r_1, 0)}$ характеризует ослабление амплитуды поля вследствие искривления верхней стенки волновода.

Далее рассмотрим задачу при конкретном профиле искривления верхней границы волновода, полагая, что

$$f(r) = a\,\exp\left(-\frac{r^2}{2l^2}\right). \tag{9}$$

В силу плавности возмущения будем пренебрегать различием между $f(r_1)$ и $f(r)$. В этом случае $f(r_1) \approx a\,\exp(-r_1^2/(2l^2))$. Ошибка, возникающая вследствие такого приближения, при вычислении n не превысит величину $a^2/(lh) \ll a/h$. Тогда на малых по сравнению с h высотах модуль $|n(r_1, z_1)| \approx 1-(a/h)\exp(-r_1^2/(2l^2))$. В то же время вблизи верхней стенки согласно [4] $n(r_1, z_1) \approx$ $\approx 1 - \dfrac{a}{h}\exp\left(-\dfrac{r_1^2}{2l^2}\right)\left(1-\dfrac{h^2}{3l^2}+\dfrac{h^2r_1^2}{3l^4}\right)$.

В результате искомый вектор Герца запишется в исходных координатах как произведение решения Π_0 для невозмущённого случая на функцию ослабления:

$$\Pi \approx \Pi_0(\mathbf{R}_0, \mathbf{R})\left(1+\frac{a}{2h}\exp\left(-\frac{r^2}{2l^2}\right)\right). \tag{10}$$

До сих пор предполагалось, что центр неоднородности проецируется на прямую, соединяющую источник и точку наблюдения. Если это не так и указанная проекция попадает в точку, удалённую от начала координат на расстояние d в перпендикулярном к трассе направлении, то с учётом плавности искривления верхней границы в масштабе длины волны приближённо получим

$$\Pi \approx \Pi_0(\mathbf{R}_0, \mathbf{R}) \left[1 + \frac{a}{2h} \exp\left(-\frac{r^2 + d^2}{2l^2}\right)\right].$$

Отсюда следует, что влияние возмущения также экспоненциально убывает при удалении центра горизонтальной проекции области неоднородности от траектории распространения луча.

Также отметим, что проведённые рассуждения сохраняют истинность при переходе от радиального возмущения $f(r)$ высоты волновода к искривлению вида $f(x)$, когда исключается зависимость прогиба верхней стенки от координаты y. В этом случае результат будет также записан в виде (10) с заменой переменной r на x.

Далее применим полученные результаты для оценки поля ВЭД, помещённого в плоский волновод Земля—ионосфера с искривлённой верхней стенкой, на которой выполняется граничное условие (3). Будем считать, что регулярное значение h высоты волновода равно 70 км, в то время как функция $f(r)$, определяющая форму прогиба, задаётся формулой (9) с $l = 200$ км. Кроме того, полагаем, что длина волны λ, излучаемая указанным ВЭД в свободном пространстве, равна 150 км, а горизонтальное удаление r_0 диполя от центра неоднородности составляет 1 000 км. (Отметим, что при указанных значениях параметров задачи применение плоской модели волноводного канала является правомерным.) Тогда для возможных значений амплитуды прогиба $a = 10 \div 20$ км коэффициент усиления амплитуды поля в области прогиба может доходить до $1{,}1 \div 1{,}2$. При расположении точки наблюдения на нижней стенке вне горизонтальной проекции области искривления её влияние при принятых соотношениях параметров экспоненциально быстро убывает.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коган Л. П. // Изв. вуз. Радиофизика. 1998. Т. 41, № 3. С. 567.
2. Заборонкова Т. М., Коган Л. П. // Труды конференции “Распространение и дифракция электромагнитных волн в неоднородных средах”, Москва, 1992. С. 181.
3. Альперт Я. Л., Гинзбург В. Л., Фейнберг Е. Л. Распространение радиоволн. — М.: ГИТТЛ, 1953. — 884 с.
4. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Физматгиз. — 679 с.
5. Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И. Геометрическая оптика неоднородных сред. — М.: Наука, 1980. — 304 с.

Научно-исследовательский
радиофизический институт,
г. Н. Новгород, Россия

Поступила в редакцию
31 декабря 1999 г.

ELECTROMAGNETIC WAVE PROPAGATION IN A WAVEGUIDE WITH RADIALLY SYMMETRIC HEIGHT IRREGULARITY OF THE UPPER WALL

L. P. Kogan

УДК 535.36

РАДИОЛОКАЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ОБРАТНОГО РАССЕЯНИЯ РАДИОВОЛН

О. И. Бернгардт, А. П. Потехин

В работе изложен метод получения связи между однократно рассеянным сигналом и фурье-спектром флуктуаций диэлектрической проницаемости среды с учётом того, что рассеивающий объём определяется диаграммой направленности антенны и не является малым. С помощью этого метода получено радиолокационное уравнение, связывающее временной фурье-спектр рассеянного сигнала с пространственно-временным спектром флуктуаций диэлектрической проницаемости. Также получено статистическое радиолокационное уравнение, связывающее среднестатистическую спектральную мощность рассеянного сигнала со спектральной плотностью флуктуаций диэлектрической проницаемости без общепринятого приближения малости радиуса пространственной корреляции неоднородностей по сравнению с радиусом Френеля.

ВВЕДЕНИЕ

В основе различных способов диагностики ионосферы (метода некогерентного рассеяния радиоволн [1], рассеяния на искусственных неоднородностях [2]), атмосферы (мезосферно-стратосферно-тропосферного зондирования [3], лидарной диагностики атмосферы [4]) и других сред лежит метод обратного рассеяния радиоволн на флуктуациях диэлектрической проницаемости среды. Основу этих методик составляет радиолокационное (радарное, лидарное) уравнение, которое связывает среднюю спектральную мощность рассеянного сигнала со статистической характеристикой флуктуаций диэлектрической проницаемости среды — их спектральной плотностью [1, 3-5].

Стандартным методом построения статистического радиолокационного уравнения является усреднение спектральной мощности (или корреляционной функции принятого сигнала) с использованием двух приближений. Первое из них, приближение однократного рассеяния, применимо в случае, когда флуктуации диэлектрической проницаемости малы, а рассеянное поле значительно слабее падающего. Второе приближение — приближение малости радиуса пространственной корреляции неоднородностей по сравнению с радиусом Френеля.

Задача однократного рассеяния электромагнитной волны достаточно хорошо изучена, когда приёмник и передатчик находятся в дальней зоне рассеивателя, т.е. его размеры меньше радиуса Френеля. В этом случае можно получить простую линейную связь между рассеянным сигналом и пространственным фурье-спектром неоднородностей без статистического усреднения [6, 7]. Однако при дистанционной диагностике протяженных сред размер рассеивающего объёма определяется пересечением диаграмм направленности антенн. Это не позволяет использовать приближение малости зондируемого объёма [6] для получения радиолокационного уравнения, связывающего рассеянный сигнал с пространственно-временным спектром флуктуаций диэлектрической проницаемости. Поэтому при получении статистического радиолокационного уравнения используется усреднение мощности принятого сигнала и приближение малости радиуса пространственной корреляции, что позволяет обобщить результаты решения классической задачи рассеяния волны на одной малой неоднородности на задачу рассеяния от набора некоррелирующих малых неоднородностей [5, 6, 8].

В работе получено радиолокационное уравнение, связывающее временной спектр рассеянного сигнала с пространственно-временным спектром флуктуаций диэлектрической проницаемости для случая однопозиционного зондирования. Данное выражение получено без традиционного предположения о малости размеров зондируемого объёма и, по сути, описывает рассеяние на протяжённом рассеивателе. Рассмотрена селективность рассеяния по волновым векторам, обобщающая условие Вульфа—Брэгга.

В работе получено статистическое радиолокационное уравнение для случая однопозиционного зондирования, связывающее среднюю мощность рассеянного сигнала со спектральной плотностью флуктуаций диэлектрической проницаемости без общепринятого приближения малости радиуса пространственной корреляции неоднородностей. Полученное уравнение имеет более широкую область применимости, чем известное уравнение [5, 6], полученное в предположении малости радиуса пространственной корреляции по сравнению с радиусом Френеля.

1. ИСХОДНОЕ УРАВНЕНИЕ

Рассмотрим однопозиционное зондирование в рамках приближения однократного рассеяния. В качестве исходного примем известное для этого случая выражение для комплексной огибающей принятого сигнала [1, 5, 6] (с точностью до несущественных для дальнейшего рассмотрения множителей):

$$u(t) = \int H(t,r) g(\mathbf{e}_r) \epsilon(t - r/c, \mathbf{r}) e^{i2k_0 r}\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\mathbf{e}_r, \tag{1}$$

где $\mathbf{e}_r = \mathbf{r}/r$, $H(t,r) = o(t)a(t-2r/c)$ — весовая функция, $o(t)$ и $a(t)$ — соответственно временное окно приёма и комплексная огибающая излучаемого сигнала, причём окно и сигнал узкополосны и имеют полосы $\{\Delta\Omega_o, \Delta\Omega_a\} \ll \omega_0, \omega_0$ — несущая частота, $k_0 = \omega_0/c$, $g(\mathbf{e}_r) = f_\mathrm{i}(\mathbf{e}_r) f_\mathrm{s}(\mathbf{e}_r) \mathbf{l}_\mathrm{s}\,[\mathbf{e}_r, [\mathbf{e}_r, \mathbf{l}_\mathrm{i}]]$ — диаграммный множитель, где $f_\mathrm{i}(\mathbf{e}_r)$, $f_\mathrm{s}(\mathbf{e}_r)$ — диаграммы направленности антенны на передачу и приём, $\mathbf{l}_\mathrm{i}$, $\mathbf{l}_\mathrm{s}$ — их поляризационные множители, $\epsilon(t,\mathbf{r})$ — флуктуации диэлектрической проницаемости, c — скорость света. Выражение (1) получено в предположении, что рассеивающий объём находится в дальней зоне приёмно-передающей антенны, на расстоянии $R \gg D^2/\lambda_0$, где D — характерные размеры антенны, λ_0 — длина волны излучаемого сигнала. Геометрия задачи рассеяния при однопозиционном зондировании приведена на рис. 1*а*; антенна расположена в начале координатной системы.

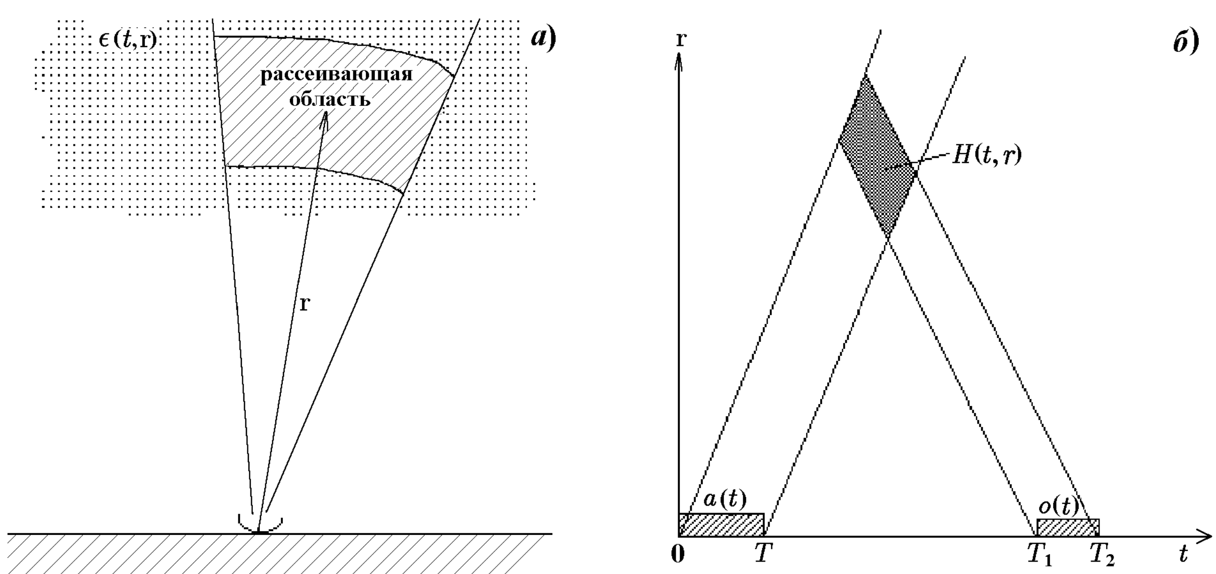


Рис. 1. Геометрия эксперимента по обратному рассеянию

Сигнал также проходит фильтрацию при приёме, которую мы не будем записывать в явном виде в (1), но учтём далее при переходе к спектральному представлению.

Уравнение (1) определяет связь между принимаемым сигналом и флуктуациями среды и, по сути, в задаче зондирования является уравнением радиолокации для сигналов, а не для обычно рассматриваемых мощностных характеристик. Ядро H и диаграммный множитель g определяются параметрами излучающей и приёмной систем. Ядро H при этом определяет диапазон флуктуаций ϵ по времени и расстоянию, дающий вклад в рассеянный сигнал. При однопозиционной постановке эксперимента зондирование ведётся финитным сигналом $a(t), t \in [0, T]$, и принятый сигнал анализируется в финитном временном окне $o(t), t \in [T_1, T_2]$, причём $T_1 > T$. Следовательно, ядро H обладает финитным носителем по пространственной и временной переменной, положение которого в координатах дальность—время приведено на рис. 1*б*. Диаграммный множитель g определяет область направлений излучения и приёма рассеянного сигнала.

2. СВЯЗЬ РАССЕЯННОГО СИГНАЛА С ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ФУРЬЕ-СПЕКТРОМ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ

В данном разделе представлен разработанный нами метод получения связи спектра рассеянного сигнала с пространственным спектром флуктуаций диэлектрической проницаемости среды. Задача получения подобной связи для случая малых рассеивателей рассмотрена в [7, 8], в данной работе получена подобная связь без ограничения на размер зондируемого объекта. В основе метода лежит переход от задачи рассеяния на пространственных неоднородностях к рассеянию на отдельных пространственных фурье-гармониках этих неоднородностей. Их вклады вычисляются методом стационарной фазы и суммируются.

В рамках борновского приближения основным физическим механизмом формирования сигнала является рассеяние на определённых пространственных фурье-гармониках ϵ. Поэтому удобно сразу выделить связь рассеянного сигнала со спектральными характеристиками среды:

$$u(t) = \int H(t, r)\epsilon(t - r/c, \mathbf{k})e^{i2k_0 r} I(\mathbf{k}, r)\frac{\mathrm{d}\mathbf{k}\,\mathrm{d}r}{(2\pi)^3}\,, \tag{2}$$

где выделен интеграл по единичной сфере

$$I(\mathbf{k}, r) = \int g(\mathbf{e}_r)e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}\,\mathrm{d}\mathbf{e}_r. \tag{3}$$

Интеграл (3) пропорционален амплитуде сигнала, рассеянного на отдельной пространственной гармонике, и содержит быстро осциллирующую функцию. Согласно [5, 7, 8] предположим, что основным механизмом является брэгговское рассеяние и наибольший вклад в рассеянный сигнал дают пространственные гармоники флуктуации среды с модулем волнового вектора порядка удвоенного модуля волнового вектора падающей волны. Расстояния, с которых приходит сигнал, определяются ядром H и находятся в дальней зоне антенны. Поэтому произведение волнового числа на расстояние является большим параметром и даёт возможность вычислить данный интеграл методом стационарной фазы [9], условия применимости которого мы обсудим позже.

Подынтегральное выражение в (3) имеет две стационарные точки, интегрирование в окрестности которых вносит основной вклад в интеграл. Они определяются уравнением

$$\mathbf{e}_r = \pm\mathbf{e}_k, \tag{4}$$

где $\mathbf{e}_k = \mathbf{k}/k$, и в первом приближении интеграл (3) равен сумме вкладов от стационарных точек:

$$I(\mathbf{k}, r) = 2\pi i\, V(k, r)[g(-\mathbf{e}_k)e^{-ikr} - g(\mathbf{e}_k)e^{ikr}], \tag{5}$$

где

$$V(k,r) = 1/(kr). \tag{6}$$

Величина V имеет смысл углового размера “синфазной” области, дающей основной вклад в амплитуду рассеяния на пространственной гармонике (3). Таким образом, основной вклад в интеграл (3) дают синфазные области пространственных гармонических решёток, имеющие вид трубок, вытянутых вдоль направления волнового вектора. Направление на эти области определяется условием параллельности луча зрения и волнового вектора (4), а их угловая ширина определяется (6). Угловой размер синфазной области соответствует поперечному пространственному размеру $R_{\mathrm{F}} = \sqrt{\lambda r}$ — радиусу Френеля.

Рассеянный сигнал является суперпозицией вкладов отдельных пространственных гармоник. Подставляя (5) в (2) и переходя к частотному представлению по всем переменным, получаем радиолокационное уравнение, связывающее спектр принятого сигнала (после прохождения фильтра $h(\omega)$ в приёмном устройстве) со спектром неоднородностей среды:

$$u(\omega) = h(\omega) \int H_k(\omega - \nu, k - 2k_0 - \nu/c)\epsilon(\nu, \mathbf{k}) g(-\mathbf{e}_k) \frac{\mathrm{d}\mathbf{k}\,\mathrm{d}\nu}{(2\pi)^2\, k}, \tag{7}$$

где

$$H_k(\omega, k) = \int \frac{H(t,r)}{r} e^{i(\omega t - kr)}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}r. \tag{8}$$

В (7) опущено второе слагаемое, которое имеет такой же вид, как и первое, но с $H_k(\omega - \nu, -k - 2k_0 - \nu/c)$. Так как функция $H_k(\omega,k)$ узкополосна по k (см. ниже), аргумент $-k-2k_0-\nu/c$ лежит далеко за пределами её полосы, и вторым слагаемым можно пренебречь. Поскольку ядро $H(t,r)$ финитно по обоим аргументам и тождественно равно нулю при $r=0$, то выражение (8) не имеет особенностей.

Полученное радиолокационное уравнение (7) применимо, когда экспоненциальный множитель в интеграле (3) меняется значительно быстрее, чем множители вне экспоненты [9, 10]. Это равносильно условию малого изменения диаграммы направленности антенны на углах порядка размера синфазной области (6). В рассматриваемом случае указанное условие записывается в виде $\sqrt{\lambda/r} \ll \lambda/D$, совпадающем с условием дальней зоны антенны:

$$D^2/\lambda \ll r. \tag{9}$$

Поскольку это условие ограничивает применимость исходного выражения (1) для рассеянного сигнала, то (7) является спектральным представлением (1) без дополнительных ограничений на область применимости.

Рассмотрим более детально свойства полученного радиолокационного уравнения (7). Это выражение устанавливает линейную связь между спектром рассеянного сигнала и пространственным спектром флуктуаций диэлектрической проницаемости среды. Из него явно видны селективные свойства рассеяния, определяющие область пространственно-временных фурье-гармоник, дающих основной вклад в рассеяние.

Диаграммный множитель $g(-\mathbf{e}_k)$ определяет селективность процесса рассеяния по направлениям волновых векторов пространственного спектра флуктуаций. Согласно (7) наибольший вклад в рассеянный сигнал вносят пространственные гармоники среды с направлениями, определяемыми зеркальным отражением диаграммы направленности антенны в область волновых векторов, что обобщает известное условие зеркальности рассеяния [11, т. 2, стр. 203]. Действительно, в (1) входит множитель $g(\mathbf{e}_r)$, определяющий створ направлений, в которых лежат неоднородности рассеивающего объёма. В (7) входит множитель $g(-\mathbf{e}_k)$, определяющий створ направлений волновых векторов, дающих вклад в рассеяние, и эта функция есть зеркальное отражение $g(\mathbf{e}_r)$.

Ядро (8) определяет селективность процесса рассеяния по волновым числам и частотам и зависит только от формы зондирующего импульса, приёмного окна и фильтра. Можно показать, что при узкополосных спектрах зондирующего импульса и приёмного окна эффективное ядро также будет узкополосно по обоим аргументам: его ширина по частоте по порядку величины будет равна $\Delta\Omega_H \approx \approx \Delta\Omega_a + \Delta\Omega_o$, а по волновому числу примерно $\Delta k_H \approx \Delta\Omega_H/c$. Необходимо заметить, что обычно принятый сигнал анализируют в некоторой сравнительно узкой полосе частот $\Delta\Omega_h$, определяемой фильтром $h(\omega)$. Таким образом, ядро (8) совместно с $h(\omega)$ выделяет узкую область волновых чисел среды, участвующих в рассеянии. Она сосредоточена вблизи удвоенного волнового числа зондирующего сигнала $2k_0$, что соответствует условию Вульфа—Брэгга [5], а ширина этой области определяется шириной спектра передаточной функции $\Delta\Omega_h$ и спектрами зондирующего сигнала и приёмного окна:

$$\Delta k = \Delta k_H + \Delta\Omega_h/c. \tag{10}$$

Наличие фильтрации $h(\omega)$ совместно с узкополосностью эффективного ядра по частоте приводит к селекции колебаний $\epsilon(\nu, \mathbf{k})$ в области частот шириной $\Delta\Omega = \mathrm{c}\Delta k$.

Данные свойства являются обобщением условия Вульфа—Брэгга на случай дистанционной диагностики нестационарных неоднородных сред с учётом формы зондирующего сигнала, приёмного окна и фильтрации.

Селективность процесса рассеяния в области волновых чисел (т. е. выделение фурье-гармоник неоднородностей, дающих основной вклад в принятый сигнал) для сигналов в случае малых размеров рассеивателя хорошо известна [7, 8]: вклад в рассеянный сигнал даёт единственная пространственная гармоника спектра флуктуаций с удвоенным волновым числом зондирующей волны.

В рассматриваемой нами задаче рассеяния на произвольных неоднородностях показано, что основной вклад в рассеянный сигнал даёт уже не одна пространственная гармоника, а целый набор таких гармоник. Волновые векторы гармоник этого пакета лежат в створе направлений, определяемом отражением диаграммы направленности антенны, а их абсолютные значения сосредоточены в узкой области вблизи удвоенного волнового числа зондирующей волны. Размеры этой области определяются суммой полос спектров зондирующего сигнала, временно́го окна приёма и приёмного фильтра.

Полученное радиолокационное уравнение (7) может быть использовано для анализа рассеянных сигналов, а не только их статистических характеристик.

3. СТАТИСТИЧЕСКОЕ РАДИОЛОКАЦИОННОЕ УРАВНЕНИЕ

В данном разделе получено радиолокационное уравнение для произвольных радиусов пространственной корреляции неоднородностей и рассмотрены условия его применимости.

Используя исходное уравнение (1), построим выражение для среднестатистической спектральной мощности рассеянного сигнала (с точностью до постоянных множителей):

$$\overline{|u(\omega)|^2} = \int W(r,\tau,r-R) g(\mathbf{e}_r) g^*(\mathbf{e}_R) \Phi(\tau-(r-R)/c, \mathbf{r}, \mathbf{r}-\mathbf{R}) e^{i\omega\tau} e^{i2k_0\,(r-R)} \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}\,\mathrm{d}\mathbf{R}\,\mathrm{d}\tau}{r^2R^2}\,, \tag{11}$$

где $\mathbf{e}_R = \mathbf{R}/R$, $W(r,\tau,\rho) = \displaystyle\int o(t)a(t-2r/c)o^*(t-\tau)a^*(t-\tau-2\,(r-\rho)/c)\,\mathrm{d}t$ — весовая функция, зависящая лишь от формы сигнала и приёмного окна, $\Phi(\tau,\mathbf{r},\boldsymbol{\rho}) = \overline{\epsilon(t,\mathbf{r})\epsilon^*(t-\tau,\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho})}$ — стационарная корреляционная функция флуктуаций диэлектрической проницаемости, $\boldsymbol{\rho}$ — корреляционный радиус, τ — время корреляции [11].

Применим к выражению (11) изложенную в предыдущем разделе методику, для чего перейдём к спектральному представлению подынтегральных функций по разностным аргументам:

$$\overline{|u(\omega)|^2} = \int W(r,\omega-\nu,r-R)g(\mathbf{e}_r)g^*(\mathbf{e}_R)\Phi(\nu,\mathbf{r},\mathbf{k})e^{i\nu\,(r-R)/c}e^{i\mathbf{k}\,(\mathbf{r}-\mathbf{R})}e^{i2k_0\,(r-R)}\,\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}\,\mathrm{d}\mathbf{R}\,\mathrm{d}\mathbf{k}\,\mathrm{d}\nu}{(2\pi)^4\,r^2R^2}\,. \quad (12)$$

Видно, что интеграл (12) можно вычислить методом стационарной фазы по $\mathbf{e}_R$, как это было сделано в предыдущем разделе. По $\mathbf{e}_r$ интеграл можно также вычислить этим методом в предположении, что спектральная плотность флуктуаций диэлектрической проницаемости $\Phi(\nu,\mathbf{r},\mathbf{k})$ (пространственно-временной спектр их корреляционной функции) слабо меняется по $\mathbf{r}$. Критерии слабой изменчивости мы приведём позже. Таким образом, интегрируя по $\mathbf{e}_R$ и $\mathbf{e}_r$ методом стационарной фазы, получаем:

$$\overline{|u(\omega)|^2} = -\int \frac{W(r,\omega-\nu,r-R)}{rR}\,|g(-\mathbf{e}_k)|^2 \times \\ \times\,\Phi(\nu,-\mathbf{e}_k r,\mathbf{k})e^{i\nu\,(r-R)/c}e^{i\,(2k_0-k)\,(r-R)}\,\mathrm{d}k\,\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_k}{2\pi}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}R\,\frac{\mathrm{d}\nu}{2\pi}\,. \quad (13)$$

Чтобы упростить выражение (13), сделаем замену переменных $\rho = r - R$, введём обозначение

$$W_2(r,\omega,\rho) = \frac{W(r,\omega,\rho)}{r\,(r-\rho)} \quad (14)$$

и перейдём к его спектральному представлению. Переход к спектрам не представляет трудностей, поскольку в области, где W отличен от нуля, знаменатель (14) не обращается в нуль (это следует из рассмотренных ранее свойств ядра $H(t,r)$). В результате получаем статистическое радиолокационное уравнение, связывающее среднюю спектральную мощность рассеянного сигнала со спектральной плотностью флуктуаций диэлектрической проницаемости без стандартных [5] ограничений на радиус пространственной корреляции неоднородностей (с учётом фильтрации):

$$\overline{|u(\omega)|^2} = -|h(\omega)|^2\int W_2(r,\omega-\nu,k-2k_0-\nu/c)\,|g(-\mathbf{e}_k)|^2\,\Phi(\nu,-\mathbf{e}_k r,\mathbf{k})\,\mathrm{d}k\,\mathrm{d}\mathbf{e}_k\,\mathrm{d}r\frac{\mathrm{d}\nu}{(2\pi)^2}\,. \quad (15)$$

Проанализируем полученное радиолокационное уравнение.

Область применимости полученного выражения (15), помимо ограничений, указанных в предыдущем разделе, ограничивается средами, для которых спектральная плотность флуктуаций слабо меняется при изменении направления радиуса-вектора $\mathbf{r}$ на угол порядка $\sqrt{\lambda/r}$. Это соответствует тому, что среднестатистические свойства среды слабо меняются в пространстве на расстояниях порядка радиуса Френеля.

Селективные свойства рассеяния явно выделены в полученном радиолокационном уравнении. Диаграммный множитель g определяет селекцию как направлений волновых векторов, так и пространственных направлений, связанных условием (4). Действительно, в выражении (15) мы всегда можем произвести замену переменных $\mathbf{e}_r = -\mathbf{e}_k$, приводящую выражение (15) к другой форме записи, в которой явно выделена селекция по пространству:

$$\overline{|u(\omega)|^2} = |h(\omega)|^2\int W_2(r,\omega-\nu,k-2k_0-\nu/c)\,|g(\mathbf{e}_r)|^2\,\Phi(\nu,\mathbf{r},-\mathbf{e}_r k)\frac{\mathrm{d}k\,\mathrm{d}\mathbf{r}\,\mathrm{d}\nu}{(2\pi)^2\,r^2}\,. \quad (16)$$

Произведение функции $W_2(r,\omega,k)$, которая зависит от формы зондирующего сигнала и приёмного окна, и $|h(\omega)|^2$ определяет селективные свойства рассеяния по волновым числам, расстояниям и частотам. Ширина W_2 по r определяет область дальностей от радара, формирующих рассеянный сигнал. Ширина W_2 по k (совместно с фильтром $h(\omega)$) определяет область волновых чисел спектральной плотности флуктуаций, дающих основной вклад в рассеяние. Эта область сосредоточена вблизи удвоенного волнового числа зондирующей волны, что соответствует условию Вульфа—Брэгга. Ширина этой области по порядку величины описывается выражением (10).

4. ОБСУЖДЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РАДИОЛОКАЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим отличия полученного нами радиолокационного уравнения от обычно применяемого уравнения радиолокации [5]. Для упрощения анализа будем рассматривать рассеяние в среде со стационарными неоднородностями $\Phi(\nu, \mathbf{r}, \mathbf{k}) = \delta(\nu)\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{k})$. В этом случае полученное нами радиолокационное уравнение приводится к следующему виду:

$$\overline{|u(\omega)|^2} = \int W_2(r, \omega, k - 2k_0)\Phi(\mathbf{r}, -\mathbf{e}_r k)\,|g(\mathbf{e}_r)|^2\,\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}\,\mathrm{d}k}{2\pi r^2}\,. \qquad (17)$$

Стандартное радиолокационное уравнение при этом имеет вид [5, 6]

$$\overline{|u(\omega)|^2} = \int W_3(r, \omega)\Phi(r, -2\mathbf{e}_r k_0)\,|g(\mathbf{e}_r)|^2\,\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{r^2}\,, \qquad (18)$$

где $W_3(r,\omega) = r^{-2}\int o(t)a(t - 2r/c)o^*(t-\tau)a^*(t-\tau-2r/c)e^{i\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t$.

Из полученного радиолокационного уравнения (17) следует, что вклад в рассеянный сигнал дают не только пространственные гармоники с волновым числом $2k_0$ (как следует из (18)), а пакеты таких гармоник с волновыми числами k вблизи $2k_0$: $|k - 2k_0| < \Delta k$. Ширина этой области определяется функцией $W_2(r, \omega, k)$ и равна $\Delta k = (\Delta\Omega_h + \Delta\Omega_a + \Delta\Omega_o)/c$.

Таким образом, из полученного радиолокационного уравнения следует, что сменой частоты зондирующего сигнала ω_0 можно измерить пространственный спектр стационарных флуктуаций диэлектрической проницаемости с разрешением по волновым числам не выше $\Delta k = (\Delta\Omega_h + \Delta\Omega_a + \Delta\Omega_o)/c$. Из стандартного же радиолокационного уравнения следует, что измерение пространственного спектра возможно с любым разрешением по волновому числу.

Из сравнения также следует, что наибольшие отличия между стандартным и полученным нами радиолокационным уравнением проявляются при наличии резких изменений спектральной плотности флуктуаций в зависимости от волнового числа. Для плавных зависимостей (например при степенном спектре $\Phi \sim k^n$ с $n \sim 1$) и узкополосных зондирующих сигналах различие между (18) и (17) несущественно.

Рассмотрим пример, когда спектральная плотность флуктуаций резко меняется в зависимости от волнового числа. Пусть пространственный спектр флуктуаций состоит из единственного узкого пика при $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1$, а частотный спектр флуктуаций диэлектрической проницаемости широк по сравнению с шириной $W_2(\omega)$. Физически это означает, что флуктуации неоднородностей имеют большой радиус пространственной корреляции, при этом стандартное радиолокационное уравнение неприменимо [1, 5, 6, 8]. Для качественных оценок можно принять $\Phi(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{k}) = \Phi_0(\omega)\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)$.

Полученное нами радиолокационное уравнение (15) в этом случае принимает вид (с учётом того, что полоса спектра $\Phi_0(\omega)$ значительно шире, чем полоса $W_2(\omega)$)

$$\overline{|u(\omega)|^2} \approx \frac{1}{2\pi k_1^2}\Phi_0((k_1 - 2k_0)\,c/2)W_4(\omega, k_1 - 2k_0)\,|g(-\mathbf{e}_{k_1})|^2, \qquad (19)$$

где для достаточно коротких (по сравнению с r_0/c, где r_0 — расстояние до середины рассеивающего объёма) сигнала и приёмного окна $W_4(\omega, k) \approx \int |o(\omega - \nu - kc/2)|^2\,|a(\nu)|^2\,\mathrm{d}\nu/r_0^2 = F(\omega - kc/2)/r_0^2$.

Из этого выражения и (19) видно, что максимум спектральной мощности (19) будет расположен в окрестности точки $\omega = (k_1/2 - k_0)\, c$, а его ширина будет определяться полосой спектра приёмного окна и зондирующего сигнала.

Таким образом, частотный спектр принятого сигнала оказывается у́же частотного спектра спектральной плотности и определяется исключительно формой зондирующего сигнала и приёмного окна. При этом частотное смещение спектра будет пропорционально разнице модулей волновых векторов k_0 и $k_1/2$. Данное сужение спектра принятого сигнала по сравнению со спектром колебаний среды и зависимость частотного сдвига от частоты зондирования в случае рассеяния на отдельной гармонической решётке не описывается стандартным радиолокационным уравнением [1, 5, 6, 8]. Экспериментально подобный эффект наблюдается при радиоакустическом зондировании атмосферы [12], когда рассеяние происходит на квазимонохроматической акустической волне [13].

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе изложен метод получения связи рассеянного сигнала со спектральными характеристиками среды, суть которого состоит в переходе к рассмотрению рассеяния на пространственных гармониках среды и применению метода стационарной фазы для вычисления вкладов отдельных гармоник.

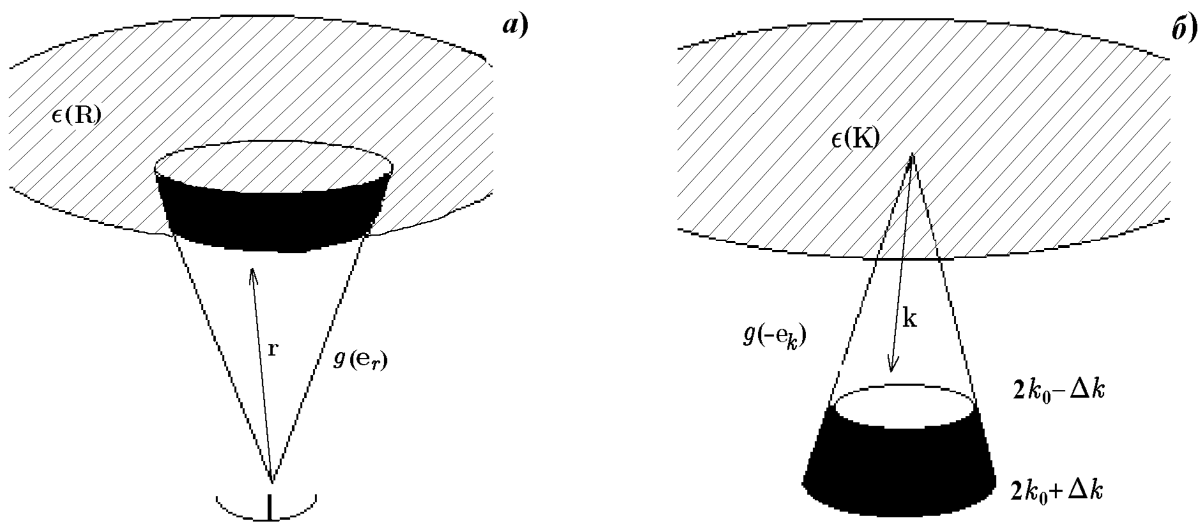


Рис. 2. Геометрическая интерпретация рассеяния

На основе предложенного метода получено радиолокационное уравнение (7), связывающее фурье-спектр рассеянного сигнала и пространственно-временной фурье-спектр флуктуаций диэлектрической проницаемости в случае, когда рассеиватель занимает большой объём. Показано, что основной вклад в рассеяние дают пакеты пространственных гармоник ϵ с волновыми числами порядка $2k_0 \pm \Delta k$, где Δk определяется (10). Створ направлений волновых векторов определяется зеркальным отражением диаграммы направленности антенны. Геометрическая интерпретация рассеяния приведена на рис. 2. Область применимости полученного выражения совпадает с областью применимости исходного выражения в пространственно-временной записи (1), т. е. полученное выражение (7) является аналогом (1) в спектральной области. Полученное радиолокационное уравнение является обобщением формул для малых рассеивателей [7, 8] на рассеиватели произвольных размеров. В задачах диагностики сред уравнение (7) может быть использовано для анализа непосредственно сигналов рассеяния, а не только их статистических характеристик.

В работе также получено статистическое радиолокационное уравнение (15) без традиционного ограничения на малость радиуса пространственной корреляции неоднородностей по сравнению с радиусом Френеля [2–6]. Уравнение справедливо для сред, среднестатистические параметры которых слабо меняются на расстояниях порядка радиуса Френеля, а радиус корреляции произволен. Данное ограничение чаще всего выполняется при зондировании реальных сред, поскольку среднестатистические параметры среды (сечение рассеяния, скорость дрейфа и т. д.) обычно плавно меняются на масштабе порядка радиуса Френеля. Продемонстрированы отличия полученного радиолокационного уравнения от обычно применяемого.

ЛИТЕРАТУРА

1. Суни А. Л., Терещенко В. Д., Терещенко Е. Д., Худукон Б. З. Некогерентное рассеяние радиоволн в высокоширотной ионосфере. Апатиты: — АН СССР, 1989. — 182 с.
2. Виленский И. М., Израйлева Н. И., Капельзон А. А., Плоткин В. В.,Фрейман М. Е. Искусственные квазипериодические неоднородности в нижней ионосфере. — Н.: Наука, 1987. — 188 с.
3. Woodman R. F. Scattering of EM waves from dielectric density fluctuations: Hanbook for MAP. 1989. V. 30. P. 143.
4. Зуев В. Е., Белов В. В., Веретенников В. В. Теория систем в оптике дисперсных сред. Томск, 1997. — 402 с.
5. Татарский В. И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. — М.: Наука, 1967. — 548 с.
6. Исимару А. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. — М.: Мир, 1981.
7. Ньютон Р. Теория рассеяния волн и частиц. — М.: Мир, 1969. — 607 с.
8. Г. ван де Хюлст. Рассеяние света малыми частицами. — М.: ИЛ, 1961. — 536 с.
9. Федорюк М. В. Асимптотика: интегралы и ряды. — М.: Наука, 1987. — 544 с.
10. Анютин А. П., Боровиков В. А. Равномерные асимптотики интегралов от быстроосциллирующих функций с особенностями внеэкспоненциального множителя: Препринт № 42 (414). М. Институт радиотехники и электроники АН СССР. 1984. 52 с.
11. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. — М.: Наука, 1978.
12. Налбандян О. Г. // Изв. АН СССР. ФАО. 1976. Т. 12, № 7. С. 772.
13. Кон А. И., Татарский В. И. // Изв. АН СССР. ФАО. 1980. Т. 16, № 3. С. 219.

Институт солнечно-земной физики
СО РАН, г. Иркутск, Россия

Поступила в редакцию
17 ноября 1999 г.

RADAR EQUATIONS IN THE RADIO WAVE BACKSCATTERING PROBLEM

O. I. Berngardt and A. P. Potekhin

We present a method for finding the relation between the singly scattered signal and the Fourier spectrum of dielectric permittivity fluctuations of the medium with regard to the scattering volume which is controlled by the antenna pattern and is not small. Using this method, we found a radar equation which relates the temporal Fourier spectrum of the scattered signal and the spatio-temporal spectrum of permittivity fluctuations. We also obtained a statistical radar equation to relate the statistically average spectral power of the scattered signal and the spectral density of permitivity fluctuations without the conventional assumption that the spatial correlation radius of irregularities is small compared with the Fresnel radius.

УДК 621.396.67

РАССЕЯНИЕ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА РЕШЁТКЕ НЕЛИНЕЙНЫХ НАГРУЗОК НА ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕМ ЭКРАНЕ, ПОКРЫТОМ СЛОЕМ ДИЭЛЕКТРИКА

Д. В. Семенихина

Методом интегральных уравнений решена задача рассеяния плоской волны решёткой нелинейных нагрузок на экране, покрытом слоем однородного диэлектрика. Численно исследовано влияние параметров покрытия на коэффициенты отражения решётки на основной частоте и третьей гармонике падающей волны.

ВВЕДЕНИЕ

Проблемы электромагнитной совместимости радиоэлектронных средств углубляются с широким внедрением в практику антенн с нелинейными нагрузками (АНН). Нелинейные эффекты в антеннах могут порождаться, во-первых, нелинейными элементами, функционально входящими в состав антенны (например в антеннах-выпрямителях [1], антеннах с умножением частоты, смесительных антеннах, активных фазированных антенных решётках [2]). Во-вторых, нелинейные антенные эффекты могут быть обусловлены конструкцией антенны (большим числом клепаных или сварных соединений) [3] или неблагоприятным режимом работы активных элементов в антенне [1]. При проектировании АНН как многочастотного излучателя основной является задача уменьшения паразитного нелинейного рассеяния и, вместе с тем, повышения её энергетических характеристик в режиме излучения на основной и кратных частотах.

Таким образом, актуальным является поиск путей уменьшения паразитного нелинейного рассеяния на частотах гармоник. Рассмотрим решение этой проблемы для рассеивателя в виде простой периодической двумерной решётки.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим однопериодическую решётку нелинейных нагрузок, представляющих собой узкие нелинейные щели, расположенные на идеально проводящей плоскости (рассматриваем двумерную задачу, все параметры которой не зависят от координаты x). Решётка является периодической по y с периодом d, на каждом периоде имеется M нелинейных нагрузок шириной Δy_m, где $m = 1, \ldots, M$. Зададим вольт-амперную характеристику (ВАХ) нелинейной нагрузки в виде [4] $i^{\text{э}} = \sum_{\nu=1}^{P} (a_\nu u^\nu + b_\nu \, \mathrm{d}u^\nu/\mathrm{d}t)$, где P — степень полинома, $i^{\text{э}}$ и u — ток через нагрузку и приложенное к ней напряжение, a_ν и b_ν — коэффициенты, определяемые электрофизическими свойствами нагрузки. Плоскость покрыта слоем однородного диэлектрика толщиной b (рис. 1). Решётка возбуждается плоской H-поляризованной волной частоты ω, падающей под углом θ из области V_1 на структуру.

Так как исследуемая структура содержит элементы с нелинейными свойствами, спектр рассеянного электромагнитного поля будет содержать составляющие на частотах высших гармоник. Определим поле в областях V_1 и V_2 на частотах $n\omega$. Для этого применим интегральные соотношения для полей [5] в областях V_1 и V_2. В качестве вспомогательных выберем электромагнитные поля (ЭМП) $\mathbf{E}_n^{\text{м},1}$, $\mathbf{H}_n^{\text{м},1}$; $\mathbf{E}_n^{\text{м},2}$, $\mathbf{H}_n^{\text{м},2}$, возбуждаемые нитью синфазного магнитного тока, параллельной оси x и расположенной

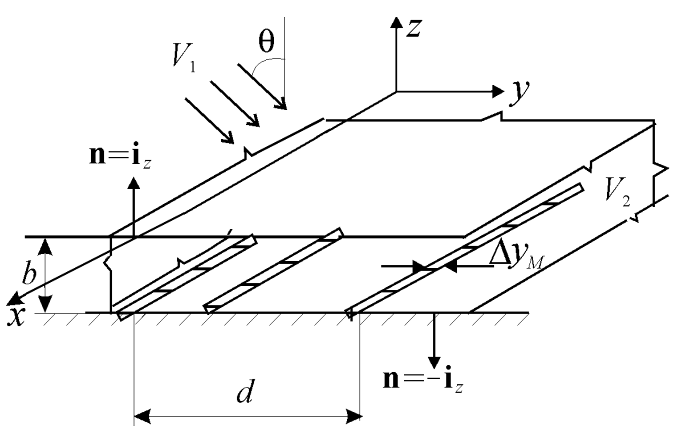


Рис. 1.

в точке $p(y,z)$ соответственно области V_1 и V_2; $\mathbf{E}_n^{\text{м},1}$, $\mathbf{H}_n^{\text{м},1}$ — поле, удовлетворяющее граничному условию (ГУ) $E_{ny}^{\text{м},1}=0$ при $z=0$ (на границе раздела областей V_1 и V_2); $\mathbf{E}_n^{\text{м},2}$, $\mathbf{H}_n^{\text{м},2}$ — поле, удовлетворяющее ГУ $E_{ny}^{\text{м},2}=0$ при $z=0;-b$ ($z=-b$ — плоскость экрана), т. е. это поле в бесконечном плоскопараллельном волноводе. Учтём, что направления вспомогательных токов совпадают с ортом $\mathbf{i}_x$, и поместим точку наблюдения $p(y,z)$ на поверхности $z=\pm 0$ (перемещая её из области V_1 в область V_2). В этом случае для соответствующих областей получим

$$H_{nx}^{(1)}(p)=\int\limits_{S_{j1}}(\mathbf{j}_n^{\text{э,ст}}\mathbf{E}_n^{\text{м},1}-\mathbf{j}_n^{\text{м,ст}}\mathbf{H}_n^{\text{м},1})\,\mathrm{d}S'+\int\limits_{y'}J_{nx}^{\text{м},1}H_{nx}^{\text{м},1}(z'=0)\,\mathrm{d}y', \tag{1}$$

$$H_{nx}^{(2)}(p)=\int\limits_{y'}J_{nx}^{\text{м},2}H_{nx}^{\text{м},2}(z'=0)\,\mathrm{d}y'+\int\limits_{y'}J_{nx}^{\text{м}}H_{nx}^{\text{м},2}(z'=-b)\,\mathrm{d}y', \tag{2}$$

где $\mathbf{j}_n^{\text{э,м,ст}}$ — плотности электрического и магнитного токов сторонних источников, возбуждающих плоскую волну; $J_{nx}^{\text{м},1,2}$ — плотности магнитных токов, текущих по поверхностям $z=\pm 0$, S_{j1} — сечение объёма источников плоскостью (yz). В выражении (2) нужно учесть, что магнитные поверхностные токи $J_{nx}^{\text{м}}$ при $z'=-b$ существуют только в пределах нелинейных нагрузок. Поскольку при $z=0$ выполняются ГУ $H_{nx}^{(1)}(p)=H_{nx}^{(2)}(p)$, то приравнивая (1) и (2) при $z=0$ и учитывая, что $J_{nx}^{\text{м},1}=-J_{nx}^{\text{м},2}$ (т. к. нормали направлены в противоположные стороны), получим

$$\int\limits_{y'}J_{n12x}^{\text{м}}\left(H_{nx}^{\text{м},1}(z'=0)+H_{nx}^{\text{м},2}(z'=0)\right)\mathrm{d}y'-\int\limits_{y'}J_{nx}^{\text{м}}H_{nx}^{\text{м},2}(z'=-b)\,\mathrm{d}y'=\int\limits_{S_{j1}}(\mathbf{j}_{n1}^{\text{э,ст}}\mathbf{E}_n^{\text{м},1}-\mathbf{j}_{n1}^{\text{м,ст}}\mathbf{H}_n^{\text{м},1})\,\mathrm{d}S', \tag{3}$$

где $J_{n12x}^{\text{м}}=J_{nx}^{\text{м},1}=-J_{nx}^{\text{м},2}$.

Второе слагаемое в левой части (3) можно записать как $\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty}\int_{y_m-\Delta y/2}^{y_m+\Delta y/2}J_{nmx}^{\text{м}}H_{nx}^{\text{м},2}\,\mathrm{d}y'$, где y_m — координата середины m-й нагрузки. С учётом того, что параметры системы не зависят от координаты x, ГУ на каждой m-й нелинейной нагрузке имеют вид [6]

$$J_{nmy}^{\text{э}}=\Delta y_m\,A_{nm}J_{nmx}^{\text{м}}+\Delta y_m^2\,B_{nm}\sum_{s=-\infty}^{\infty}J_{smx}^{\text{м}}J_{(n-s)mx}^{\text{м}}+\Delta y_m^3\,C_{nm}\sum_{q=-\infty}^{\infty}J_{(n-q)mx}^{\text{м}}\sum_{s=-\infty}^{\infty}J_{(q-s)mx}^{\text{м}}J_{smx}^{\text{м}}, \tag{4}$$

где $A_n=a_1+in\omega b_1$, $B_n=a_2+in\omega b_2$, $C_n=a_3+in\omega b_3$. Помещая точку наблюдения в выражении (2) на поверхность каждой нелинейной нагрузки и применяя ГУ (4), получим нелинейные интегральные уравнения вида

$$\Delta y_m\, A_{nm} J^{\text{м}}_{nmx} + \Delta y_m^2\, B_{nm} \sum_{s=-\infty}^{\infty} J^{\text{м}}_{smx} J^{\text{м}}_{(n-s)mx} + \Delta y_m^3\, C_{nm} \sum_{q=-\infty}^{\infty} J^{\text{м}}_{(n-q)mx} \sum_{s=-\infty}^{\infty} J^{\text{м}}_{(q-s)mx} J^{\text{м}}_{smx} =$$

$$= -\int\limits_{y'} J^{\text{м}}_{n12x} H^{\text{м},2}_{nx}\, \mathrm{d}y' + \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \int\limits_{y_\mu-\Delta y_\mu/2}^{y_\mu+\Delta y_\mu/2} J^{\text{м}}_{n\mu x} H^{\text{м},2}_{nx}\, \mathrm{d}y', \tag{5}$$

где $m = 1, 2, \ldots.$

Уравнения (3) и (5) представляют собой бесконечную систему нелинейных интегральных уравнений (СНИУ) данной задачи.

2. ПРИМЕНЕНИЕ УСЛОВИЯ ПЕРИОДИЧНОСТИ

Поскольку все параметры рассматриваемой задачи инвариантны по отношению к сдвигу на целое число периодов по y, решение задачи, очевидно, можно свести к анализу одного периода решётки. Применим условия периодичности (токи на N-м периоде можно представить как $J^{\text{м}}_{nx}(y - Nd) = \dot{J}^{\text{м}}_{nx} \exp[-iNt_n^1]$; $\dot{J}^{\text{м}}_{nx}$ — ток на нулевом периоде, $t_n^1 = k_{n1} d \sin\theta = n k_1 d \sin\theta$ — параметр Флоке) и формулу суммирования Пуассона [7]. Например, первое слагаемое в левой части (3) преобразуется к виду

$$\int\limits_0^d \dot{J}^{\text{м}}_{n12x}(\tilde{y}') \left(\frac{k_{n1}}{iW_{n1} d} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left[-i\left(\dfrac{2\pi l - t_n^1}{d}\right)(y' - y_b)\right]}{\gamma_{n1l}} + \right.$$

$$\left. + \frac{k_{n2}}{iW_{n2} d} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left[-i\left(\dfrac{2\pi l - t_n^1}{d}\right)(y' - y_b)\right]}{\gamma_{n2l}} \right) \mathrm{d}y',$$

где y_b — координата вспомогательного тока, точка означает, что ток берётся на нулевом периоде решётки, тильда — что интегрирование ведётся по координатам нулевого периода (в дальнейшем эти знаки опускаем); $k_{1,2}$ и $W_{1,2}$ — постоянные распространения и характеристические сопротивления в областях $V_{1,2}$; $\gamma_{n1,2l} = \sqrt{(2\pi l - t_n^1)^2/d^2 - k_{n1,2}^2}$. Остальные поверхностные интегралы преобразуются аналогично.

В случае падения плоской волны с амплитудой магнитного поля H_0 можно показать, что $\int_{S_{j1}} j_x^{\text{м,ст}}(y') H^{\text{м},1}_{nx}\, \mathrm{d}S' = 2H_0 \exp[-ik_1 y \sin\theta]$.

Таким образом, решение задачи можно свести к анализу одного периода решётки.

Рассмотрим решение СНИУ (3), (5) методом моментов. В качестве базисных функций для неизвестных токов выберем кусочно-постоянные функции, причём ток на нелинейной нагрузке будем считать постоянным в пределах этой нагрузки ($\Delta y_m < \lambda/30$, где λ — длина волны), а на поверхности $z = 0$ примем

$$J^{\text{м}}_{n12x}(y) = \begin{cases} J^{\text{м}}_{n12x}(y_\eta) = J^{\text{м}}_{n12x\eta}, & y \in y_\eta \pm \Delta y_\eta/2; \\ 0, & y \notin y_\eta \pm \Delta y_\eta/2, \end{cases} \tag{6}$$

где $\Delta y_\eta = \Delta y \le \lambda/30$; y_η — середина η-го участка разбиения.

В качестве пробных выберем δ-функции. Тогда СНИУ (3), (5) сводится к системе нелинейных алгебраических уравнений (СНАУ) вида

$$\begin{cases} \sum\limits_{\upsilon=1}^{N} J^{\text{м}}_{n12\upsilon x}\rho^{00}_{n\upsilon\eta} - \sum\limits_{\mu=1}^{M} J^{\text{м}}_{n\mu x}\rho^{-b0}_{n\mu\eta} = F^{1}_{n\eta}, \\ \Delta y_m\, A_{nm} J^{\text{м}}_{nmx} + \Delta y_m^2\, B_{nm} \sum\limits_{s=-\infty}^{\infty} J^{\text{м}}_{smx} J^{\text{м}}_{(n-s)mx} + \Delta y_m^3\, C_{nm} \sum\limits_{q=-\infty}^{\infty} J^{\text{м}}_{(n-q)mx} \times \\ \times \sum\limits_{s=-\infty}^{\infty} J^{\text{м}}_{(q-s)mx} J^{\text{м}}_{smx} - \sum\limits_{\mu=1}^{M} J^{\text{м}}_{n\mu x}\rho^{-b-b}_{n\mu m} + \sum\limits_{\upsilon=1}^{N} J^{\text{м}}_{n12\upsilon x}\rho^{0-b}_{n\upsilon m} = 0, \end{cases} \tag{7}$$

где $\eta = 1, 2, \ldots, N$, $m = 1, 2, \ldots, M$. Коэффициенты СНАУ имеют вид

$$\rho^{00}_{n\upsilon\eta} = \frac{k_{n1}\,\Delta y_\upsilon}{iW_{n1}d} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\Lambda_{nl}^2 - k_{n1}^2}} + \frac{k_{n2}}{2k_{n1}} \frac{\operatorname{cth}(\gamma_{n2l}b)}{\gamma_{n2l}} \right\} \operatorname{sinc}(\Lambda_{nl}\,\Delta y_\upsilon/2) \exp[-i\Lambda_{nl}\,(y_\upsilon - y_n)],$$

$$\rho^{-b0}_{n\mu\eta} = \frac{k_{n2}\,\Delta y_\mu}{i2W_{n2}d} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma_{n2l}\operatorname{sh}(\gamma_{n2l}b)} \operatorname{sinc}(\Lambda_{nl}\,\Delta y_\mu/2) \exp[-i\Lambda_{nl}\,(y_\mu - y_\eta)],$$

$$\rho^{-b-b}_{n\mu m} = \frac{k_{n2}\,\Delta y_\mu}{i2W_{n2}d} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{cth}(\gamma_{n2l}b)}{\gamma_{n2l}} \operatorname{sinc}(\Lambda_{nl}\Delta y_\mu/2) \exp[-i\Lambda_{nl}\,(y_\mu - y_m)],$$

$$\rho^{0-b}_{n\upsilon m} = \frac{k_{n2}\,\Delta y_\upsilon}{i2W_{n2}d} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma_{n2l}\operatorname{sh}(\gamma_{n2l}b)} \operatorname{sinc}(\Lambda_{nl}\,\Delta y_\upsilon/2) \exp[-i\Lambda_{nl}\,(y_\upsilon - y_m)],$$

$$F^{1}_{n\eta} = -\int\limits_{S_{j1}} \mathbf{j}^{\text{м,ст}}_{n1} \mathbf{H}^{\text{м},1}_{n}\, \mathrm{d}S' = -(\delta_{\eta,1} + \delta_{\eta,-1})\, H_0 \exp[-ik_{n1} y_\eta \sin\theta],$$

где $\Lambda_{nl} = (2\pi l - t^1_n)/d$, $\operatorname{sinc}(x) = \sin x/x$; $\delta_{n,\pm1}$ — символ Кронекера.

3. КОЭФФИЦИЕНТЫ ОТРАЖЕНИЯ

Рассмотрим коэффициенты отражения ЭМП при падении плоской волны на решётку нелинейных нагрузок, расположенных на покрытом слоем диэлектрика идеально проводящем плоском экране. Для этого определим рассеянное поле в области V_1 из леммы Лоренца для рассеянных полей [5]. Выберем в качестве вспомогательного поле, возбуждаемое нитью магнитного тока в верхнем полупространстве с идеально проводящей границей. Тогда рассеянное поле определим как

$$H^{\text{s}}_{nx}(p) = \int\limits_{y'} H^{\text{м},1}_{nx} E^{\text{п}}_{ny}\,\mathrm{d}y' + \int\limits_{y'} J^{\text{м}}_{n12x} H^{\text{м},1}_{nx}\,\mathrm{d}y',$$

где $\mathbf{E}^{\text{п}}_{n}$ — комплексная амплитуда электрического поля, падающего на структуру, $J^{\text{м}}_{n12x}$ — поверхностные токи, текущие при $z = 0$; значения этих токов на периоде решётки считаем известными в виде функций (6) с амплитудами, вычисленными при решении СНАУ (7).

Определим коэффициенты отражения структуры при $y = 0$, $z = 0$ на основной частоте для нулевой моды Флоке как $R^0_1 = (H_0 + H^{\text{s}}_{n0x})/H_0$, а на частоте n-й гармоники для l-й распространяющейся пространственной гармоники Флоке как $R^l_n = H^{\text{s}}_{nlx}/H_0$. Тогда получим

$$R^0_1 = 1 - \frac{1}{W_1 d H_0 \cos\theta} \sum_{\eta=1}^{N} J^{\text{м}}_{n12\eta x}\,\Delta y_\eta \operatorname{sinc}(k_1 \sin\theta\,\Delta y_\eta/2) \exp[i\Lambda_{n0}(y_\eta)],$$

$$R_n^l = \frac{k_{n1}}{iW_{n1}dH_0} \sum_{\eta=1}^{N} J^{\text{м}}_{n12\eta x}\, \Delta y_\eta \,\mathrm{sinc}(\Lambda_{nl}\, \Delta y_\eta/2) \exp[i\Lambda_{nl}(y_\eta)].$$

4. ХАРАКТЕРИСТИКИ РАССЕЯНИЯ

Для одноэлементной решётки нелинейных нагрузок ($M = 1$), имеющих параметры ВАХ $a_1 = 0{,}0183$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0{,}00375$ и расположенных на идеально проводящей плоскости, покрытой слоем диэлектрика с $\mu = 1$, проанализируем зависимости коэффициентов отражения решётки $|R_1^0|$, $|R_3^0|$ от угла θ падения волны, диэлектрической проницаемости ε, проводимости $\sigma^{э}$ и толщины b диэлектрического покрытия.

Зависимости модулей коэффициентов отражения нулевой моды Флоке от угла падения волны при $\varepsilon = 1; 2{,}56; 4{,}5$ при $\sigma^{э} = 0; 0{,}1$; $b/\lambda = 1/15$ и $d/\lambda = 0{,}15$ показаны на рис. 2, 3. Наличие диэлектрического слоя без потерь, покрывающего решётку, приводит к увеличению коэффициента отражения нулевой моды на основной частоте в широком угловом секторе, причём это увеличение и этот угловой сектор тем больше, чем выше ε. При $\varepsilon = 4{,}5$ такая структура отражает на основной частоте практически как идеально проводящий экран (рис. 2*а*, 3*а*), поскольку коэффициент отражения стремится к 1. Одновременно уменьшается коэффициент отражения на частоте гармоники (рис. 2*б*, 3*б*), более существенно — при бóльших ε; в некоторых угловых секторах его снижение составляет около 20 дБ. Наименьшие значения $|R_3^0|$ имеет при скользящих углах падения на решётку, причём как для решётки с покрытием, так и без него (в этом случае $|R_3^0|$ на сотни децибел меньше, чем при нормальном падении волны). Нелинейные свойства нагрузок при $\theta > 80°$ можно практически не учитывать.

Таким образом, при углах падения $\theta > 80°$ рассматриваемая структура имеет отражательные свойства идеально проводящей плоскости.

Минимумы $|R_3^0|$ соответствуют углам падения θ, при которых наблюдается максимальное поглощение поля в слое диэлектрика на соответствующей частоте. Поскольку при $d/\lambda = 0{,}15$ высшие моды отсутствуют при любых θ, потери энергии на частоте гармоники обусловлены колебаниями, возникающими в диэлектрическом слое. Это следует из графиков $|R_3^0(\theta)|$, показанных на рис. 2*б*, 3*б* и рассчитанных при различных значениях проводимости слоя $\sigma^{э} = 0{,}01$. Учёт потерь приводит к сглаживанию экстремумов, а при больших потерях ($\sigma^{э} > 0{,}1$) экстремумы полностью исчезают (из сравнения рис. 2*б* и 3*б* видно, что при $\varepsilon = 2{,}56$ для $\theta \approx 66°$ $|R_3^0(\theta)|_{\sigma^{э}=0{,}1}/|R_3^0(\theta)|_{\sigma^{э}=0} = 20$ дБ. В то же время наличие потерь может значительно уменьшить коэффициент отражения решётки на основной частоте

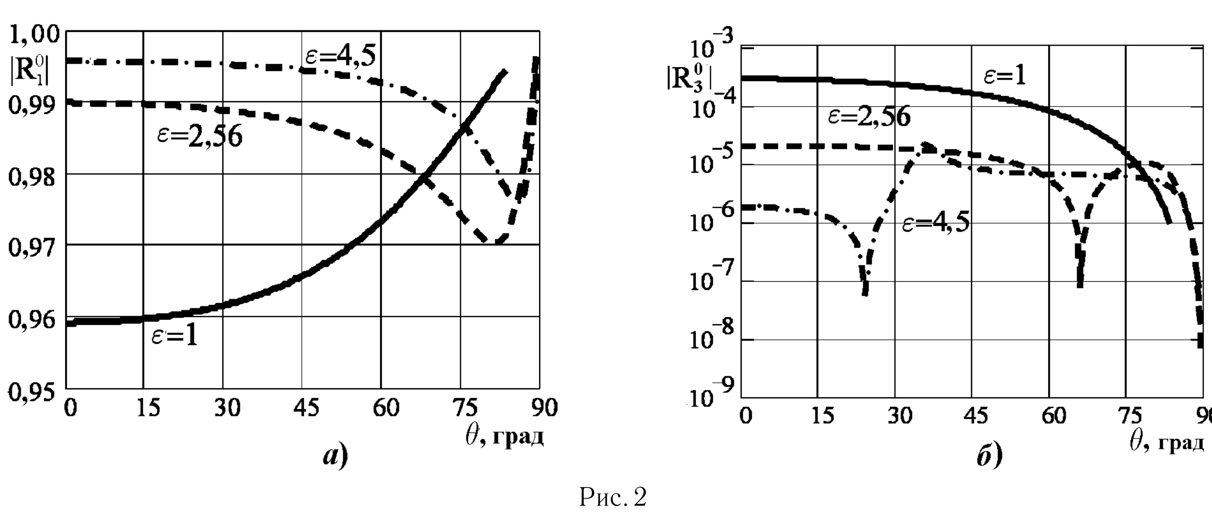


Рис. 2

(см. рис. 2*a*, 3*a*), и при меньших ε это снижение более значительно. Например, при $\varepsilon = 2{,}56$ для $\theta \approx 81°$ $|R_1^0(\theta)|_{\sigma^э=0{,}1}/|R_1^0(\theta)|_{\sigma^э=0} = -2{,}4$ дБ.

Как следует из ранее изученных свойств нелинейных нагрузок [4], при увеличении амплитуды падающего поля H_0 и коэффициента a_3 ВАХ коэффициент отражения на основной частоте остаётся неизменным, а на частоте гармоники существенно растёт, что позволяет получить сравнимый по величине уровень $|R_1^0|$ и $|R_3^0|$ при указанных θ.

Рассмотрим теперь зависимости коэффициентов отражения от ε при отношении $b/\lambda = 0{,}1$; $0{,}233$, показанные на рис. 4. Как следует из анализа графиков $|R_1^0(\varepsilon)|$ на рис. 4*a* и условий, при которых возникают чётные поверхностные H-волны на диэлектрическом слое [8], значения ε, при которых графики $|R_1^0(\varepsilon)|$ имеют особенности (изгибы или экстремумы), соответствуют таким b/λ, при которых возникают очередные чётные H-волны, переносящие энергию вдоль слоя диэлектрика. Наиболее чётко снижение коэффициента отражения видно при $b/\lambda = 0{,}1$, $\varepsilon \approx 6{,}67$ (чётная волна с номером $N = 0$), а также $b/\lambda = 0{,}233$, $\varepsilon \approx 2$ и $\varepsilon \approx 11{,}7$ (волны с $N = 0$ и $N = 1$).

На частоте третьей гармоники с увеличением b/λ поверхностные волны возникают при меньших ε, (при тем меньших ε, чем больше b/λ), в результате наблюдается существенное уменьшение $|R_3^0|$ по сравнению с решёткой без слоя за счёт того, что часть энергии переносится вдоль слоя (рис. 4*б*). Например, при $b/\lambda = 0{,}233$ значения ε, при которых возникают волны с $N = 0$ и $N = 1$, соответствуют

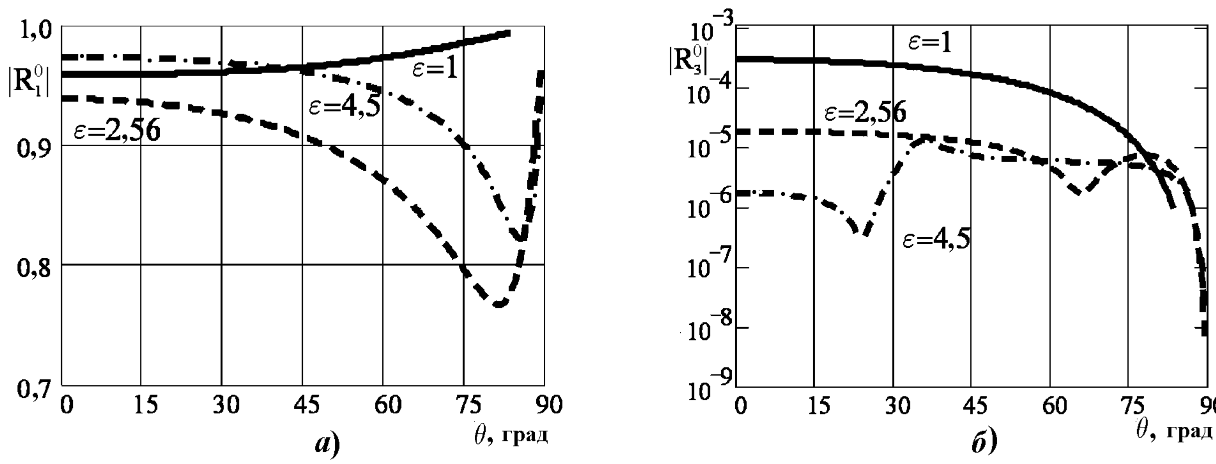


Рис. 3

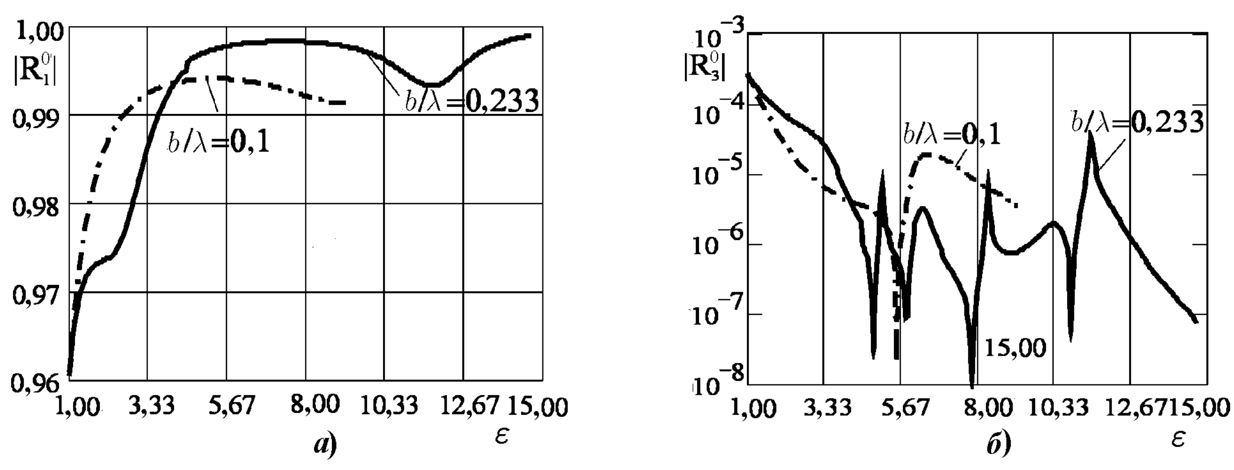


Рис. 4

плавному уменьшению $|R_3^0|$, а ε для волн с $N = 2; 3; 4$ — минимумам $|R_3^0|$. В то же время для тех ε, при которых $|R_1^0|$ снижается, происходит перераспределение энергии на частоту гармоники, что приводит к появлению экстремумов функции $|R_3^0(\varepsilon)|$. Однако значения $|R_3^0|$ в точках экстремумов не превышают их величин для решётки без покрытия ($\varepsilon = 1$).

Таким образом, для любых ε при любой толщине диэлектрика покрытие уменьшает отражение решётки на частоте гармоники почти при всех углах падения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шифрин Я. С. // Успехи современной радиоэлектроники. 1997. № 4. С. 33.
2. Шифрин Я. С., Лучанинов А. И., Посохов А. С. // Радиотехника и электроника. 1994. Т. 39, № 7. С. 1095.
3. Хайга В. // ТИИЭР. 1975. Т. 62, № 2. С. 67.
4. Петров Б. М., Семенихина Д. В., Панычев А. И. Эффект нелинейного рассеяния (монография). — Таганрог: ТРТУ, 1997.
5. Марков Г. Т., Чаплин А. Ф. Возбуждение электромагнитных волн. — М.: Радио и связь, 1983.
6. Семенихина Д. В. // Рассеяние электромагнитных волн. Таганрог, 1991. Вып. 8. С. 14.
7. Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. — М.: Иностр. литература, 1958.
8. Фельд Я. Н., Бененсон Л. С. Антенно-фидерные устройства. Ч. 2. — Изд-во ВВИА, 1959.

Таганрогский радиотехнический
университет, г. Таганрог, Россия

Поступила в редакцию
16 июля 1999 г.

SCATTERING OF A PLANE WAVE BY A NONLINEAR LOAD ARRAY ON A PERFECTLY CONDUCTING SHIELD COVERED BY A DIELECTRIC LAYER

D. V. Semenikhina

The problem of plane wave scattering by a nonlinear load array on a perfectly conducting shield covered by a homogeneous dielectric layer is solved by the method of integral equations. The influence of the coating parameters on the array reflectivity at the fundamental and third harmonic of the incident wave are studied numerically.

УДК 621.372.832

ИССЛЕДОВАНИЕ СОБСТВЕННЫХ ВОЛН КОМПЛАНАРНОЙ ЛИНИИ ПЕРЕДАЧИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА ЧАСТИЧНОГО ОБРАЩЕНИЯ ОПЕРАТОРА

А. С. Арефьев, В. В. Коликов, В. А. Неганов

Представлена процедура частичного обращения сингулярного интеграла Коши и интеграла с логарифмической особенностью, определённых на конечной совокупности ограниченных интервалов. На основе данной процедуры построена электродинамическая модель экранированной компланарной линии передачи. Приведены результаты расчёта спектральных характеристик и распределений поля собственных волн структуры, а также данные по сходимости приближённого решения.

ВВЕДЕНИЕ

Большое количество задач прикладной электродинамики может быть сформулировано в терминах векторных сингулярных интегральных уравнений первого рода, определённых на разрывных областях. Таковы, например, задачи о собственных волнах связанных щелевых и связанных полосковых линий передачи, задачи дифракции электромагнитных волн на диафрагмах в прямоугольном волноводе, имеющих несколько щелей, исследование дифракции плоских электромагнитных волн на частично металлизированном бесконечном диэлектрическом цилиндре и т. д. В каждом из перечисленных случаев элементы ядра интегрального оператора представляют собой бесконечные ряды. Поэтому применение к соответствующему уравнению проекционной схемы или какого-либо иного метода приближённого решения требует усечения рядов в ядре. Последнее означает замену сингулярного ядра ограниченной функцией. Но, как известно [1], решение интегрального уравнения первого рода с ограниченным ядром представляет собой некорректно поставленную задачу. В результате приближённое решение обретает неустойчивость и проявляет относительную сходимость [2].

Эффективный путь преодоления указанных трудностей заключается в частичном обращении исходного интегрального оператора и переходе к уравнению второго рода. С использованием данной методики было исследовано большое количество электродинамических структур [3, 4]. Однако до настоящего времени исследовались лишь те задачи, которые порождали сингулярные интегралы, определённые на непрерывных областях. Снять данное ограничение является целью настоящей работы.

1. ЧАСТИЧНОЕ ОБРАЩЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ

Пусть V — конечная совокупность непересекающихся ограниченных интервалов на множестве действительных чисел:

$$V = \bigcup_{m=1}^{L} V_m, \tag{1}$$

где

$$\begin{aligned} V_m &= [v_{m1}, v_{m2}], \qquad m = 1, 2, \ldots, L; \\ v_{m2} &< v_{(m+1)1}, \qquad m = 1, 2, \ldots, L-1. \end{aligned} \tag{2}$$

Будем предполагать также, что область V располагается внутри интервала $[-1,1]$. Определим на V системы функций

$$T_i^{(m)}(v)=\begin{cases} T_i(a_m+b_m v), & v\in V_m;\\ 0, & v\in V\backslash V_m;\end{cases}$$

$$U_i^{(m)}(v)=\begin{cases} U_i(a_m+b_m v), & v\in V_m;\\ 0, & v\in V\backslash V_m,\end{cases}$$

где $i=0,1,\ldots;\, m=1,2,\ldots,L;\, T_i$ и U_i — многочлены Чебышёва первого и второго рода, величины a_m и b_m подобраны таким образом, чтобы линейная замена переменных $v=(x-a_m)/b_m$ переводила интервал V_m в единичную окрестность нуля $[-1,1]$:

$$a_m=-\frac{v_{m2}+v_{m1}}{v_{m2}-v_{m1}}\,,\qquad b_m=\frac{2}{v_{m2}-v_{m1}}\,.$$

Системы функций $T_i^{(m)}$ и $U_i^{(m)}$ ортогональны на V с весами $1/Q(v)$ и $Q(v)$, где

$$Q(v)=\begin{cases} \sqrt{1-(a_1+b_1v)^2}, & v\in V_1;\\ \vdots & \\ \sqrt{1-(a_L+b_Lv)^2}, & v\in V_L,\end{cases}$$

и полны в пространствах функций, квадратично интегрируемых на V, с соответствующими весам мерами. Эти факты следуют из соответствующих свойств многочленов T_i и U_i на интервале $[-1,1]$.

Рассмотрим сингулярный интеграл Коши

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_V \frac{\varphi(v')}{v'-v}\,\mathrm{d}v'=f(v), \tag{3}$$

где $v\in V$. Выделим в ядре интеграла сингулярную $K^{[\mathrm{s}]}$ и регулярную $K^{[\mathrm{r}]}$ части:

$$(v'-v)^{-1}=K^{[\mathrm{s}]}(v',v)+K^{[\mathrm{r}]}(v',v),$$

положив

$$K^{[\mathrm{s}]}(v',v)=\begin{cases} (v'-v)^{-1}, & (v',v)\in\bigcup\limits_{m=1}^{L}V_m^2;\\ 0, & (v',v)\in V^2\backslash\bigcup\limits_{m=1}^{L}V_m^2,\end{cases}$$

где $V^2=V\times V$ и $V_m^2=V_m\times V_m$ — произведения соответствующих множеств, $m=1,2,\ldots,L$. При этом интеграл (3) примет вид

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_V K^{[s]}(v',v)\varphi(v')\,\mathrm{d}v'=-\frac{1}{\pi}\int\limits_V K^{[r]}(v',v)\varphi(v')\,\mathrm{d}v'+f(v). \tag{4}$$

Представим произведение φQ в виде ряда

$$\varphi(v)=\frac{1}{Q(v)}\sum_{m=1}^{L}\sum_{i=0}^{\infty}\varphi_i^{(m)}T_i^{(m)}(v) \tag{5}$$

и воспользуемся проекционной схемой, умножая (4) на $U_{j-1}^{(m)}(v)Q(v)$, где $m = 1, 2, \ldots, L$; $j = 1, 2, \ldots$, и интегрируя полученное равенство на множестве V. С учётом разложения

$$K^{[\mathrm{s}]}(v', v) = 2\sum_{m=1}^{L} b_m \sum_{n=1}^{\infty} T_n^{(m)}(v') U_{n-1}^{(m)}(v)$$

выражение (4) преобразуется в систему равенств

$$\frac{\pi}{2b_m}\varphi_j^{(m)} = -\frac{1}{\pi}\int\limits_V U_{j-1}^{(m)}(v)Q(v)\left[\int\limits_V K^{[r]}(v', v)\varphi(v')\,\mathrm{d}v'\right]\mathrm{d}v + \int\limits_V U_{j-1}^{(m)}(v)Q(v)f(v)\,\mathrm{d}v, \qquad (6)$$

где $m = 1, 2, \ldots, L$; $j = 1, 2, \ldots$. Подстановка в (5) выражений для коэффициентов $\varphi_i^{(m)}$ из (6) приводит к следующему интегральному соотношению:

$$\varphi(v) = \frac{1}{Q(v)}\sum_{m=1}^{L}\varphi_0^{(m)}T_0^{(m)}(v) + \frac{1}{\pi Q(v)}\left[\frac{1}{\pi}\int\limits_V K^{[\mathrm{s}]}(v', v)Q(v')\left(\int\limits_V K^{[r]}(u, v')\varphi(u)\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}v' - \right.$$
$$\left. - \int\limits_V K^{[s]}(v', v)Q(v')f(v')\,\mathrm{d}v'\right], \qquad (7)$$

где $v \in V$. Двойной интеграл в (7) удобно привести к виду

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_V K^{[\mathrm{s}]}(v', v)Q(v')\left[\int\limits_V K^{[\mathrm{r}]}(u, v')\varphi(u)\,\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}v' =$$
$$= \sum_{m=1}^{L} T_0^{(m)}(v)\sum_{\substack{k=1,\\ k\neq m}}^{L}\left[\pi\frac{b_m}{b_k}\varphi_0^{(k)} - \mathrm{sign}(k-m)\int\limits_{V_k}\frac{\sqrt{(a_m + b_m v')^2 - 1}}{v' - v}\varphi(v')\,\mathrm{d}v'\right].$$

Таким образом, приходим к формуле частичного обращения интеграла (3):

$$\varphi(v) = \frac{1}{\pi Q(v)}\left[\sum_{m=1}^{L} T_0^{(m)}(v)\left(\pi b_m\sum_{k=1}^{L}\frac{\varphi_0^{(k)}}{b_k} - \int\limits_V \mathrm{sign}(v'-v)\sqrt{(a_m + b_m v')^2 - 1}\,K^{[\mathrm{r}]}(v', v)\varphi(v')\,\mathrm{d}v'\right) - \right.$$
$$\left. - \int\limits_V Q(v')K^{[\mathrm{s}]}(v', v)f(v')\,\mathrm{d}v'\right], \quad (8)$$

где $v \in V$. Для интеграла с логарифмической особенностью

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_V \ln\left|v' - v\right|\psi\left(v'\right)\mathrm{d}v' = g(v), \qquad (9)$$

где $v \in V$, аналогичным образом может быть получена следующая формула частичного обращения:

$$
\begin{aligned}
\psi(v) = \frac{1}{\pi Q(v)} \Bigg[\sum_{m=1}^{L} T_0^{(m)}(v) \Bigg(\frac{-b_m^2}{\ln(2b_m)} \int\limits_V T_0^{(m)}(v') g(v') \frac{\mathrm{d}v'}{Q(v')} + \\
+ \frac{b_m}{\ln(2b_m)} \int\limits_V \left(1 - T_0^{(m)}(v')\right) \ln\left(|a_m + b_m v'| + \sqrt{(a_m + b_m v')^2 - 1}\right) \psi(v')\,\mathrm{d}v' - \\
- \int\limits_V \mathrm{sign}(v' - v) \sqrt{(a_m + b_m v')^2 - 1}\, K^{[\mathrm{r}]}(v', v) \psi(v')\,\mathrm{d}v' \Bigg) + \int\limits_V Q(v') K^{[\mathrm{s}]}(v', v) g'(v')\,\mathrm{d}v' \Bigg].
\end{aligned} \tag{10}
$$

Проекционный алгоритм решения интегральных уравнений второго рода, получаемых при помощи (8), (10), также удобно развивать на основе базиса $T_i^{(m)}$.

Следует отметить, что в [5] приведена формула полного обращения интеграла (3). Однако её использование при решении электродинамических задач оказывается затруднительным. Дело в том, что множитель $1/Q(v)$, присутствующий в (8) и учитывающий особенности неизвестной функции на границах интервалов V_m, является одновременно весом для базиса $T_i^{(m)}$. Кроме того, неопределённые постоянные $\varphi_0^{(k)}$ в (8) являются коэффициентами Фурье в разложении (5), что существенно облегчает их оценку. Что касается соответствующих элементов формулы обращения, описанной в [5], то они подобными свойствами не обладают.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КОМПЛАНАРНОЙ ЛИНИИ ПЕРЕДАЧИ

Применим предложенную процедуру частичного обращения интегралов к расчёту компланарной линии передачи (КЛП), поперечное сечение которой представлено на рис. 1. На поверхность диэлектрической подложки (область 2) нанесены три идеально проводящие бесконечно тонкие полоски. Структура помещена в прямоугольный металлический экран, потери в котором также учитываться не будут. При этом не станем ограничивать рассмотрение условием зеркальной симметрии поперечного сечения линии передачи.

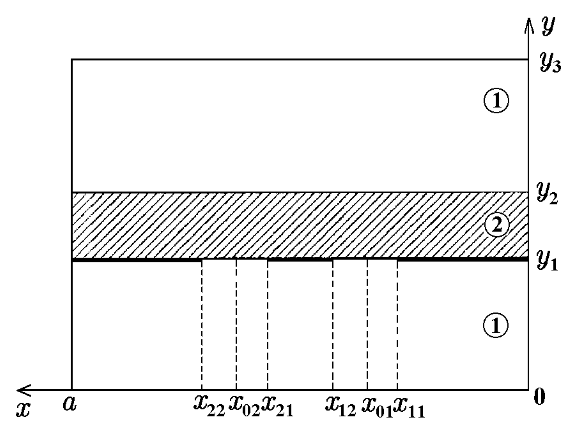


Рис. 1.

Сингулярное интегральное уравнение первого рода записывается для КЛП следующим образом:

$$
\int\limits_X \hat{G}(x', x) \mathbf{e}(x')\,\mathrm{d}x' = 0, \tag{11}
$$

где $x \in X$. Областью определения (11) является поверхность щелей:

$$
X = \bigcup_{m=1}^{2} [x_{m1}, x_{m2}].
$$

Неизвестный вектор $\mathbf{e}(x)$ содержит касательные составляющие напряжённости электрического поля на щелях:

$$
e_1(x) = E_z'(x, y_1) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} E_z(x, y_1), \quad e_2(x) = E_x(x, y_1).
$$

Элементы ядра в (11) определяются следующим образом:

$$G_{i1}(x',x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}Y_{ni1}\cos(\beta_n x')\zeta_{in}(x),$$
$$G_{i2}\left(x',x\right) = -\frac{1}{a}\left[Y_{022}\delta_{i2} + 2\sum_{n=1}^{\infty}Y_{ni2}\cos(\beta_n x')\zeta_{in}(x)\right], \qquad (12)$$

где $i = 1; 2$,

$$\beta_n = \frac{\pi n}{a}, \qquad \zeta_{in}(x) = \begin{cases} \sin(\beta_n x), & i = 1; \\ \cos(\beta_n x), & i = 2, \end{cases}$$

$n = 1, 2, \ldots$; δ_{ij} — символ Кронекера, Y_{nij} – элементы тензора адмитансов поверхности частичной металлизации, связывающие коэффициенты Фурье в разложении компонент плотности тока J_{zn}, J_{xn} и касательных составляющих напряжённости электрического поля E_{zn}, E_{xn} в плоскости $y = y_1$ по системе тригонометрических функций, определяемой размером экрана:

$$J_{x0} = -Y_{022}E_{x0},$$
$$\begin{pmatrix} J_{zn} \\ J_{xn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{n11} & Y_{n12} \\ Y_{n21} & Y_{n22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_{zn} \\ -E_{xn} \end{pmatrix}.$$

Величины Y_{nij} определяются частотой волны, размерами и физическими параметрами диэлектрических слоёв 1–3 (рис. 1) и удовлетворяют следующим предельным соотношениям [3]:

$$\lim_{n\to\infty} Y_{n11}/n = t_1, \qquad \lim_{n\to\infty} nY_{n22} = t_3,$$
$$\lim_{n\to\infty} Y_{n12} = \lim_{n\to\infty} Y_{n21} = t_2, \qquad (13)$$

где t_1, t_2 и t_3 — некоторые константы. Построение уравнения (11) для КЛП проводится аналогично выводу интегрального уравнения первого рода для волноводно-щелевой линии передачи [3], поэтому подробно на этом останавливаться здесь не имеет смысла.

Замена адмитансов Y_{nij} в (12) их асимптотическими выражениями в соответствии с (13) позволяет выделить сингулярные части элементов ядра уравнения (11):

$$G_{1\left\{ {1 \atop 2} \right\}}(x',x) \sim G^{[s]}_{1\left\{ {1 \atop 2} \right\}}(x',x) = \left\{ \begin{matrix} t_1/\pi \\ -t_2/a \end{matrix} \right\} \frac{\sin(\beta_1 x)}{\cos(\beta_1 x') - \cos(\beta_1 x)},$$
$$G_{2\left\{ {1 \atop 2} \right\}}(x',x) \sim G^{[s]}_{2\left\{ {1 \atop 2} \right\}}(x',x) = \left\{ \begin{matrix} -t_2/\pi \\ t_3/a \end{matrix} \right\} \ln\left|2\left(\cos(\beta_1 x') - \cos(\beta_1 x)\right)\right|$$

при $x \to x'$. Разлагая теперь функцию $\hat{G}(x',x)$ на сингулярную и регулярную части

$$\hat{G}(x',x) = \hat{G}^{[s]}(x',x) + \hat{G}^{[r]}(x',x)$$

и производя замену переменных

$$v = \cos(\beta_1 x), \quad v' = \cos(\beta_1 x'),$$

ориентированную на использование ортогональных многочленов, приводим уравнение (11) к следующему виду:

$$\int\limits_V \hat{P}^{[s]}(v',v)(\hat{t}\tilde{\mathbf{e}}(v'))\,\mathrm{d}v' = \int\limits_V \hat{P}^{[r]}(v',v)\tilde{\mathbf{e}}(v')\,\mathrm{d}v', \qquad (14)$$

где $v \in V$. Здесь

$$\begin{aligned}
&\hat{P}^{[s]}(v',v) = \frac{1}{\pi}\begin{pmatrix} (v'-v)^{-1} & 0 \\ 0 & \ln|v'-v| \end{pmatrix}, \qquad \hat{t} = \begin{pmatrix} t_1 & t_2 \\ t_2 & t_3 \end{pmatrix}, \\
&P^{[r]}_{1\left\{{1 \atop 2}\right\}}(v',v) = -\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\begin{matrix} n^{-1}Y_{n11} - t_1 \\ Y_{n12} - t_2 \end{matrix}\right\} T_n(v')U_{n-1}(v), \\
&P^{[r]}_{2\left\{{1 \atop 2}\right\}}(v',v) = \frac{1}{\pi}\left[\left\{\begin{matrix} -t_2\ln 2 \\ Y_{022} - t_3\ln 2 \end{matrix}\right\} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left\{\begin{matrix} Y_{n21} - t_2 \\ nY_{n22} - t_3 \end{matrix}\right\} T_n(v')T_n(v)\right].
\end{aligned} \tag{15}$$

Компоненты вектора $\tilde{\mathbf{e}}$ задаются соотношениями

$$\tilde{e}_1(v) = \frac{a}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}E'_z\Big(\frac{a}{\pi}\arccos v, y_1\Big), \quad \tilde{e}_2(v) = \frac{-1}{\sqrt{1-v^2}}E_x\Big(\frac{a}{\pi}\arccos v, y_1\Big).$$

Для области определения уравнения (14) использованы обозначения (1), (2) при $L = 2$, где

$$v_{m1} = \cos(\beta_1 x_{(3-m)2}), \quad v_{m2} = \cos(\beta_1 x_{(3-m)1}).$$

Далее на основании интегральных преобразований (3), (8) и (9), (10) производится частичное обращение сингулярного оператора, действующего на вектор $\hat{t}\tilde{\mathbf{e}}(v)$ в левой части (14). Получаемое в результате интегральное уравнение второго рода решается проекционным методом на основе разложения элементов вектора $\tilde{\mathbf{e}}(v)$ по системе функций $T_i^{(m)}$:

$$\tilde{e}_j(v) = \frac{1}{Q(v)}\sum_{m=1}^{2}\sum_{i=2-j}^{N_m} e_{ji}^{(m)} T_i^{(m)}(v), \tag{16}$$

где $j = 1; 2$. При этом в рядах (15) сохраняются слагаемые с индексом n, не превышающим некоторого целого положительного числа M. Нами реализован равномерный процесс построения приближённого решения, когда для представления поля на каждой из щелей использовалось одинаковое количество базисных функций:

$$N_1 = N_2 = N.$$

3. АНАЛИЗ ЧИСЛЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Описанный выше алгоритм был использован при исследовании постоянных распространения собственных волн КЛП со следующими параметрами: диэлектрические и магнитные проницаемости сред заполнения $\varepsilon^{(1)} = \varepsilon^{(3)} = 1$, $\varepsilon^{(2)} = 9{,}35$, $\mu^{(1)} = \mu^{(2)} = \mu^{(3)} = 1$; размеры диэлектрических слоёв $y_1/a = (y_3 - y_2)/a = 0{,}225$, $(y_2 - y_1)/a = 0{,}05$; размеры щелей $d_1/a = 0{,}05$, $d_2/a = 0{,}2$, где $d_i = x_{i2} - x_{i1}$, $i = 1; 2$; координата центра второй щели $x_{02}/a = 0{,}5$.

На рис. 2 представлены дисперсионные характеристики собственных мод КЛП. Здесь γ — постоянные распространения, определяемые в результате решения краевой задачи, $k = \omega/c$ — волновое число, ω — частота волны. Координата центра первой щели $x_{01}/a = 0{,}35$. Количество базисных функций в представлениях (16) и число слагаемых, учитываемых в рядах (15), равны соответственно $N = 3$, $M = 15$. При этом абсолютная погрешность определения замедлений γ/k в пределах графика не превышала 0,005. Моды, описываемые кривыми 1 и 2, уместно называть щелевыми. Они будут распространяться в линии передачи и при отсутствии экрана. Первую и вторую моды можно приближённо считать синфазной и противофазной соответственно, исходя в определении фазности из значений продольной компоненты E_z напряжённости электрического поля на щелях.

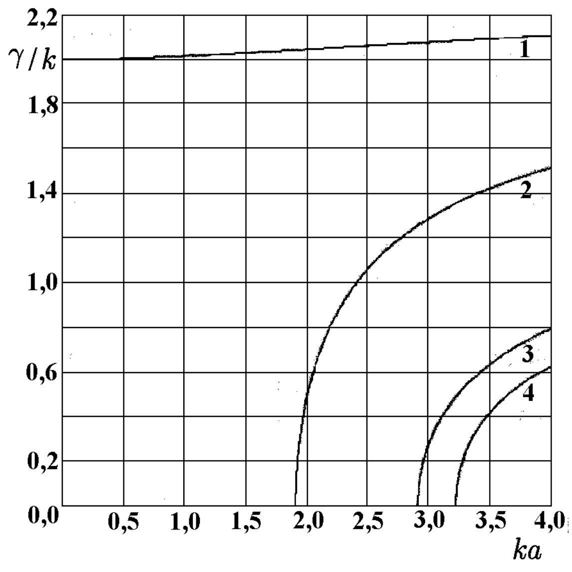


Рис. 2

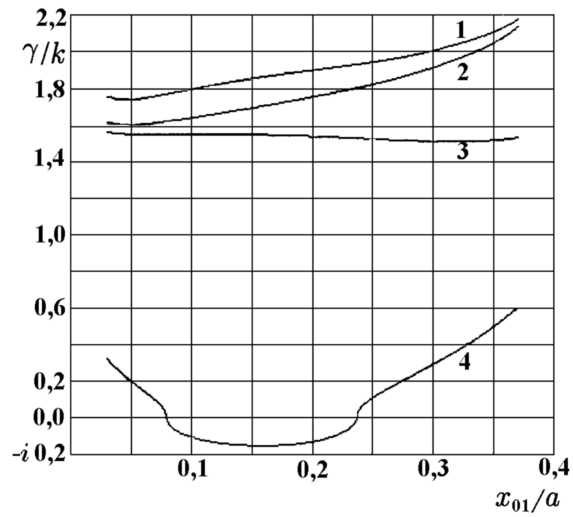


Рис. 3

Моды, описываемые кривыми 3 и 4, являются экранными. В рассмотренном частотном диапазоне ($3 < ka < 4$) третьей моде соответствует LM_{11}-волна прямоугольного волновода (ПВ) с двухслойным диэлектрическим заполнением, образованного частичными областями 2, 3 (рис. 1) в случае полной металлизации их внешних границ. Замедление идеальной LM_{11}-волны при $ka = 4$ составляет $\gamma/k = 0{,}7832$, её критическое волновое число $k_{\text{кр}}a = 2{,}8550$. Определение продольных магнитных (LM) волн частично заполненных волноводов приведено в [6]. Четвёртая мода КЛП в пределах рисунка является квази-H_{10}-волной ПВ, образованного частичной областью 1. В случае $ka = 4$ идеальная H_{10}-волна имеет замедление $\gamma/k = 0{,}6190$, отсечка данной волны наблюдается при $k_{\text{кр}}a = \pi$. В других частотных диапазонах упомянутые модели мод потребуют пересмотра.

На рис. 3 приведена зависимость замедлений первой и второй мод КЛП от координаты центра первой щели. Кривые с нечётными номерами соответствуют значению волнового числа $ka = 4$, кривые с чётными номерами — значению $ka = 2$. Добиться абсолютной ошибки определения замедлений, не превышающей 0,005, в данном случае удалось при $N = 2$, $M = 25$.

С уменьшением размера центральной полоски ($x_{01}/a \to 0{,}375-0$) замедление основной моды КЛП (кривые 1, 2), вне зависимости от расчётной частоты, приближается к $\gamma/k = \sqrt{(\varepsilon^{(1)} + \varepsilon^{(2)})/2} = 2{,}2749$, соответствующему волне, распространяющейся вдоль бесконечно тонкой проводящей нити, расположенной на границе двух диэлектрических сред. В случае зеркальной симметрии поперечного сечения КЛП противофазной моде соответствует электрическая стенка, проходящая через середину центральной полоски. Поэтому вторая мода, описываемая кривыми 3, 4, фактически не ощущает нить тока. Такое заключение подтверждается сравнением её замедления при $x_{01}/a \to 0{,}375 - 0$ с соответствующим параметром волноводно-щелевой линии передачи (ВЩЛП), границы щели которой имеют координаты $x_1 = x_{21} - d_1$, $x_2 = x_{22}$. При $ka = 2$ замедление основной волны ВЩЛП $\gamma/k = 0{,}6202$, при $ka = 4$ величина $\gamma/k = 1{,}5334$. Эти значения получены на основе алгоритма, изложенного в [3].

Убывание замедления второй моды КЛП с уменьшением параметра x_{01} от значения $0{,}375a = x_{21} - d_1/2$ можно рассматривать как возмущение основной волны ВЩЛП при возникновении на щели проводящей полоски. Такого же рода возмущение, но только второй противофазной волны трёх связанных щелевых линий передачи с размером горизонтальной стенки экрана, равным $2a$, наблюдается при увеличении x_{01} от значения $0{,}025a = d_1/2$. В результате кривые 3 и 4 имеют минимумы. Благодаря этому в случае $ka = 2$ вторая мода КЛП даже становится нераспространяющейся ($\mathrm{Re}\,\gamma = 0$) при некоторых положениях первой щели. На большей расчётной частоте ($ka = 4$) каждому из упомянутых возмущений соответствует свой собственный минимум характеристики (кривая 3). Первый из таких экстремумов располагается в точке $x_{01}/a = 0{,}068$. Его не удаётся наблюдать на рисунке визуально. Аналогичное объяснение можно дать немонотонности кривых 1, 2 в области малых значений координаты первой щели. Данные, приведённые в табл. 1, иллюстрируют сходимость решения при изменении количества слагаемых M, учитываемых в рядах (15). Приближённые значения замедления основной моды КЛП приведены для двух существенно различающихся частот. Результаты расчёта спектрального параметра второй моды соответствуют двум различным значениям координаты центра первой щели. При $ka = 2$ в точке $x_{01}/a = 0{,}24$ наблюдается быстрый рост замедления волны 2 (кривая 4, рис. 3). Однако заметного ухудшения сходимости при этом не происходит (см. табл. 1).

Табл. 2 содержит информацию о сходимости метода частичного обращения оператора по параметру N, обозначающему число слагаемых в представлении неизвестных функций. При этом в рядах (15) учтено $M = 400$ слагаемых. Как показывают более подробные исследования, на данного рода сходимость практически не влияет изменение параметра M, означающее уточнение ядра интегрального уравнения второго рода. Аналогично, сходимость по M мало чувствительна к изменению параметра N. В этом смысле сходимость приближённого решения можно считать равномерной.

Таблица 1

M	γ/k, $N = 7$			
	1-ая мода, $x_{01}/a = 0{,}37$		2-ая мода, $ka = 2$	
	$ka = 2$	$ka = 4$	$x_{01}/a = 0{,}24$	$x_{01}/a = 0{,}37$
10	2,13641009	2,17380331	0,07068532	0,59300249
25	2,13125191	2,17149774	0,04318773	0,59178738
50	2,13130440	2,17173993	0,04361884	0,59182372
100	2,13132599	2,17183079	0,04374927	0,59182865
200	2,13132864	2,17184197	0,04376113	0,59182933
300	2,13132875	2,17184243	0,04376266	0,59182940
400	2,13132876	2,17184248	0,04376298	0,59182942

Таблица 2

N	γ/k, $M = 400$			
	1-ая мода, $x_{01}/a = 0{,}37$		2-ая мода, $ka = 2$	
	$ka = 2$	$ka = 4$	$x_{01}/a = 0{,}24$	$x_{01}/a = 0{,}37$
1	2,103480	2,148553	0,139432	0,635543
2	2,131226	2,172144	0,043852	0,594071
3	2,131787	2,172503	0,043773	0,592431
4	2,131396	2,171970	0,043769	0,591994
5	2,1313149	2,1718447	0,043767	0,591866
6	2,131315	2,171833	0,043763	0,591840

На рис. 4 и 5 представлены распределения нормальной составляющей напряжённости электрического поля в плоскости $y = y_1$, содержащей полоски, для первой и второй мод КЛП. Расчёт проводился для частичной области 1 в пределах изменения координаты $0{,}25 < x < 0{,}65$. При этом $ka = 1{,}7$; $d_1/a = 0{,}05$; $d_2/a = 0{,}1$; $x_{01}/a = 0{,}4$; $x_{02}/a = 0{,}5$; $N = 2$; $M = 800$, геометрические и физические параметры диэлектрических слоёв прежние. Как следует из графиков, на рёбрах полосок компонента E_y обращается в бесконечность. Это обстоятельство, наряду с необходимостью использования в представлениях поля тригонометрического базиса, делает заметными колебания гармоник на фоне истинного распределения поля и вынуждает учитывать достаточно большое количество слагаемых в ядре интегрального уравнения второго рода. Отметим также, что в области щелей значения компоненты E_y малы, что свидетельствует о горизонтальной ориентации силовых линий электрического поля вблизи неметаллизированной части границы диэлектрических слоёв 1 и 2.

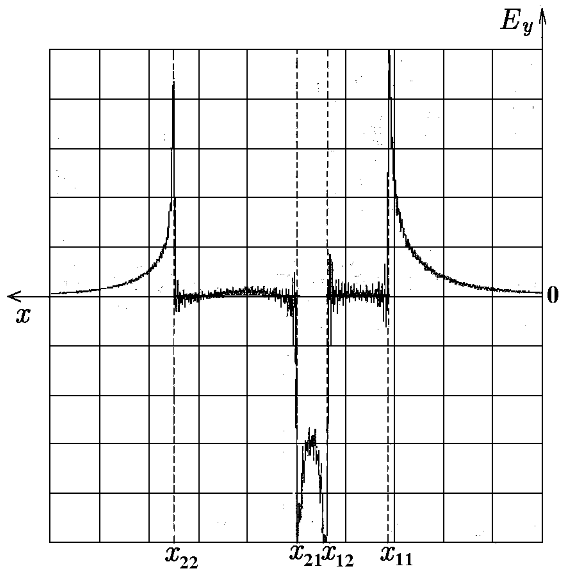


Рис. 4

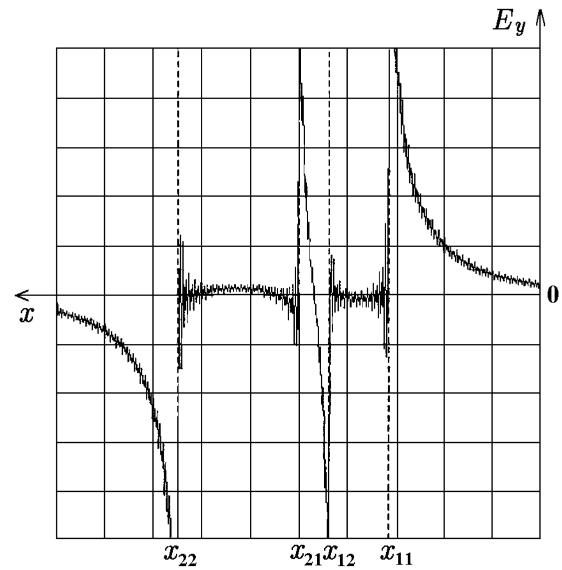


Рис. 5

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленные в работе процедуры частичного обращения сингулярного интеграла Коши и интеграла с логарифмической особенностью, определённых на разрывных областях, позволили построить электродинамическую модель компланарной линии передачи, обладающую хорошей сходимостью и находящуюся в согласии с тестовыми расчётами [7]. Развитый подход очевидным образом может быть обобщён на случай любого конечного числа связанных щелевых линий передачи, расположенных в одной плоскости внутри прямоугольного экрана. Данная методика без каких-либо существенных изменений может быть применена также к анализу собственных мод связанных полосковых линий передачи. Только для полосковых структур вместо адмитансного интегрального уравнения (11) удобно использовать импедансное уравнение, в котором в качестве неизвестных функций задействованы компоненты плотности поверхностного тока на полосках. При этом формулы частичного обращения (8), (10) не изменятся.

ЛИТЕРАТУРА

1. Верлань А. Ф., Сизиков В. С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. — Киев: Наукова думка, 1986. — 542 с.
2. Митра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов: Пер. с англ. / Под ред. Г. В. Воскресенского. — М.: Мир, 1974. — 328 с.
3. Неганов В. А., Нефёдов Е. И., Яровой Г. П. Полосково-щелевые структуры сверх- и крайневысоких частот. — М.: Наука, 1996. — 304 с.
4. Арефьев А. С., Неганов В. А., Нефёдов Е. И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1998. Т. 41, № 4. С. 507.
5. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. — М.: Наука, 1977. — 640 с.
6. Егоров Ю. В. Частично заполненные прямоугольные волноводы. — М.: Сов. радио, 1967. — 216 с.
7. Никольский В. В., Дружинин А. В. // Радиотехника и электроника. 1977. Т. 22, № 11. С. 2284.

Поволжская государственная
академия телекоммуникаций и
информатики, г. Самара, Россия

Поступила в редакцию
26 ноября 1999 г.

STUDY OF THE EIGENWAVES OF A COPLANAR TRANSMISSION LINE USING THE METHOD OF PARTIAL OPERATOR INVERSION

A. S. Arefyev, V. V. Kolikov, and V. A. Neganov

We propose a partial inversion procedure for the Cauchy singular integral and the integral with a logarithmic singularity determined on a finite set of bounded intervals. On the basis of this procedure, we constructed an electrodynamic model of a shielded coplanar transmission line (CTL). The results of calculation of the spectral characteristics and eigenwave field distributions of this structure are presented and the data on convergence of the approximate solution are given.

УДК 535.41

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ КВАДРАТИЧНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ, ОПРЕДЕЛЁННЫЕ НА МАРКОВСКОМ НОРМАЛЬНОМ ДВУМЕРНОМ ПОЛЕ, И ИХ СТАТИСТИКА

А. С. Мазманишвили

Рассмотрена задача о распределении интегрального квадратичного функционала, определённого на марковском нормальном двумерном стационарном случайном поле. Получена производящая функция распределения случайных значений функционала и приближённое выражение для его плотности распределения вероятностей. Проанализировано влияние параметров двумерного поля на статистические свойства распределения рассматриваемого функционала. Предложено обобщение решения на случай стационарного нормального марковского многомерного поля.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Двумерные случайные поля давно стали предметом изучения и применяются в самых различных областях [1–3]. Из всего многообразия возможных вариантов и моделей двумерных случайных полей чаще всего, пожалуй, используется вещественное нормальное марковское двумерное поле (НМД поле) $\mathrm{H}(x,y)$ [4–6] (если отсутствуют дополнительные априорные факторы), поскольку оно является удобным объектом для анализа.

В настоящей работе рассматривается интегральный квадратичный функционал $J[\mathrm{H}]$, основанный на вещественном нормальном марковском двумерном поле $\mathrm{H}(x,y)$. Это понятие естественно возникает при исследовании вероятностей в различных физических задачах. Например, в квантовой оптике, статистической радиофизике и теории принятия решений [7–9] приходится рассматривать распределения вероятностей случайных значений квадратичных функционалов

$$J[\mathrm{H}] = \int_0^a\int_0^b h^2(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \tag{1}$$

где $h(x,y)$ — реализация гауссовского двумерного поля $\mathrm{H}(x,y)$ в прямоугольной области $\{x\in[0,a];\ y\in[0,b]\}$, где x и y — декартовы координаты. Важным в прикладном отношении является пример вещественного случайного НМД поля, любые ортогональные сечения которого являются стационарным процессом Орнштейна—Уленбека (ОУ-процессом), который в физической литературе иногда называют нормальным марковским процессом [1, 6]. Для интегральных квадратичных функционалов вида (1), основанных на ОУ-процессе, имеется детальный аппарат [7, 8], описывающий их статистические свойства. Для случая НМД поля аналогичные результаты отсутствуют.

Определящим свойством рассматриваемого стационарного НМД поля является его коррелятор

$$\begin{gathered} K_{\mathrm{XY}} = K_{\mathrm{XY}}(x,y;x',y') = \mathbf{E}_{\mathrm{H}}[\mathrm{H}(x,y)\mathrm{H}(x',y')] = pq\sigma_{\mathrm{H}}, \\ p=\exp(-\nu\,|x-x'|), \qquad q=\exp(-\mu\,|y-y'|), \end{gathered} \tag{2}$$

где $\sigma_{\mathrm{H}} = \mathbf{E}_{\mathrm{H}}[\mathrm{H}^2(x,y)]$ — интенсивность поля, ν и μ — декременты затухания поля вдоль осей x и y соответственно.

В работе [4] построены марковские переходные плотности распределения вероятностей для винеровского случайного поля. Обобщением известных конструкций — переходных плотностей вероятностей для нормального марковского ОУ-процесса — может служить следующая переходная плотность распределения вероятностей для НМД поля

$$f_{\text{Н}}(h(x,y)\,|\,h(x',y),h(x,y'),h(x',y')) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\,(1-p^2)\,(1-q^2)\,\sigma_{\text{Н}}}}\,\exp\left\{-\frac{[h(x,y)-ph(x',y)-qh(x,y')+pqh(x',y')]^2}{2\,(1-p^2)\,(1-q^2)\,\sigma_{\text{Н}}}\right\}. \tag{3а}$$

Полагая $x'\to-\infty$ или $y'\to-\infty$, получим граничные переходные плотности распределения вероятностей

$$f_{\text{Н}}(h(x,y)\,|\,h(x',y)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\,(1-p^2)\,\sigma_{\text{Н}}}}\exp\left\{-\frac{[h(x,y)-ph(x',y)]^2}{2\,(1-p^2)\,\sigma_{\text{Н}}}\right\},$$
$$f_{\text{Н}}(h(x,y)|h(x,y')) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-q^2)\,\sigma_{\text{Н}}}}\exp\left\{-\frac{[h(x,y)-qh(x,y')]^2}{2\,(1-q^2)\,\sigma_{\text{Н}}}\right\}, \tag{3б}$$

которые служат переходными плотностями для парциальных ОУ-процессов, а при $x'\to-\infty$ и $y'\to-\infty$ получим вершинную плотность распределения вероятностей равновесного вида

$$f_{\text{Н}}(h(x,y)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\text{Н}}}}\exp\left\{-\frac{h^2(x,y)}{2\sigma_{\text{Н}}}\right\} \tag{3в}$$

для случайной величины — реализации НМД поля в точке с координатами (x,y). Из соотношений (3) очевидно следует коррелятор (2).

2. УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ АМПЛИТУДЫ НМД ПОЛЯ

Динамику случайного поля $\text{Н}(x,y)$ в прямоугольнике $\{x\in[0,a];\,y\in[0,b]\}$ с вершиной в точке $(0,0)$ можно описать с помощью уравнения, обобщающего уравнение Ланжевена на случай ОУ-процесса:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+\nu\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}+\mu\right)h(x,y) = \sqrt{\sigma_{\text{Н}}}\,u(x,y), \tag{4}$$

где $u(x,y)$ — случайное поле, обладающее свойствами гауссового двумерного белого шума с единичной интенсивностью.

В качестве граничных условий для уравнения (4) используем два нормальных стохастических процесса, которые описываются уравнениями Ланжевена

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+\nu\right)h(x,0) = \sqrt{\sigma_{\text{Н}}}\,u(x,0), \qquad \left(\frac{\partial}{\partial y}+\mu\right)h(0,y) = \sqrt{\sigma_{\text{Н}}}\,u(0,y) \tag{5а}$$

и реализуются вдоль осей x и y соответственно. Начальным условием для этих процессов будут вершинные значения случайной величины:

$$h(0,0) = \sqrt{\sigma_{\text{Н}}}\,u(0,0). \tag{5б}$$

Решение уравнения (4) с условиями (5) следующее:

$$h(x,0) = h(0,0)\exp(-\nu x) + \sqrt{\sigma_{\text{Н}}}\int\limits_0^x \exp[-\nu\,(x-x')]u(x',0)\,\mathrm{d}x', \tag{6а}$$

$$h(0,y) = h(0,0)\exp(-\mu y) + \sqrt{\sigma_{\text{н}}}\int\limits_0^y \exp[-\mu(y-y')]\,u(0,y')\,\mathrm{d}y', \tag{6б}$$

$$\begin{gathered} h(x,y) = h(0,0)\exp(-\nu x - \mu y) + \\ + \sqrt{2\nu\sigma_{\text{н}}}\exp(-\mu y)\int\limits_0^x \exp[-\nu\,(x-x')]u(x',0)\,\mathrm{d}x' + \\ + \sqrt{2\mu\sigma_{\text{н}}}\exp(-\nu x)\int\limits_0^y \exp[-\mu\,(y-y')]u(0,y')\,\mathrm{d}y' + \\ + \sqrt{4\nu\mu\sigma_{\text{н}}}\int\limits_0^x\int\limits_0^y \exp[-\nu\,(x-x') - \mu\,(y-y')]u(x',y')\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y'. \end{gathered} \tag{6в}$$

Из (6) видно, что марковское свойство выполняется вдоль осей x и y.

В [2, 3] построены алгоритмы фильтрации на фоне шумов, имеющих свойства нормальных марковских полей.

Пользуясь известными для случая ОУ-процесса правилами [6] дискретизации в узлах прямоугольной решётки и перенормировки порождающего поля $u(x,y)$, можно на основе решения (6) построить численный алгоритм генерации НМД поля. Этот иерархический алгоритм генерации отсчётов случайного нормального стационарного марковского поля на сетке узлов в прямоугольной области плоскости удобно описать следующими четырьмя шагами:

1) Генерация отсчёта в вершине:

$$h_{0,0} = \sqrt{\sigma_{\text{н}}}\,u_{0,0}. \tag{7а}$$

2) Генерация отсчётов процесса вдоль границы прямоугольника, лежащей на оси x ($j > 0$):

$$h_{j+1,0} = p h_{j,0} + \sqrt{(1-p^2)\,\sigma_{\text{н}}}\,u_{j+1,0}. \tag{7б}$$

3) Генерация отсчётов процесса вдоль границы прямоугольника, лежащей на оси y ($k > 0$):

$$h_{0,k+1} = q h_{0,k} + \sqrt{(1-q^2)\,\sigma_{\text{н}}}\,u_{0,k+1}. \tag{7в}$$

4) Последовательное (слева направо и послойно) заполнение отсчётами внутренних узлов прямоугольника ($j > 0$, $k > 0$):

$$h_{j+1,k+1} = p h_{j,k+1} + q h_{j+1,k} - pq h_{j,k} + \sqrt{(1-p^2)\,(1-q^2)\,\sigma_{\text{н}}}\,u_{j+1,k+1}. \tag{7г}$$

В выражениях (7) $p = \exp(-\nu\Delta_x)$, $q = \exp(-\mu\Delta_y)$, где ν и μ — парциальные декременты, а Δ_x и Δ_y — шаги решётки по осям x и y соответственно.

Отметим, что при выбранных Δ_x, Δ_y (т. е. при заданном количестве шагов $N_x = a/\Delta_x$, $N_y = b/\Delta_y$) интенсивность в числовом алгоритме необходимо перенормировать так, чтобы энергия НМД поля, приходящаяся на единицу площади, совпадала с заданной при любом числе шагов.

Таким образом, алгоритм (7) генерации отсчётов случайного поля в прямоугольнике на плоскости является стационарным.

Для отсчёта в любом узле (j,k) из (7) можно получить

$$\langle h_{j,k}\rangle = 0, \qquad \langle h_{j,k}^2\rangle = \sigma_{\text{н}} = \mathrm{const}, \tag{8}$$

если с помощью (7б–7г) последовательно понижать значения индекса j, затем индекса k, и, наконец, с помощью (7а) найти безусловное равновесное среднее.

На рис. 1 приведены три реализации случайного НМД поля, отличающиеся только значением декремента μ. На рисунке хорошо видна динамика формирования флуктуаций НМД поля по обеим координатам.

Аналогично можно построить иерархические алгоритмы генерации отсчётов нормального марковского поля третьего и более высоких порядков.

3. ПРОИЗВОДЯЩАЯ ФУНКЦИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО КВАДРАТИЧНОГО ФУНКЦИОНАЛА

При изучении таких объектов, как, например, пространственное изображение на заданном прямоугольнике, одним из основных вопросов теории оценивания является информация о распределении случайных значений η функционала $J[\mathrm{H}]$. В силу положительной определённости и аддитивности двумерного интеграла (1) на прямоугольнике $\{x \in [0,a]; y \in [0,b]\}$ удобно описывать свойства функционала $J[\mathrm{H}]$ с помощью производящей функции в виде следующего математического ожидания:

$$Q_{\mathrm{XY}}(\lambda) = \mathbf{E}_{\mathrm{H}}[\exp(-\lambda J[\mathrm{H}])] = \mathbf{E}_{\mathrm{H}}\left[\exp\left(-\lambda \int\limits_0^a \mathrm{d}x \int\limits_0^b \mathrm{d}y\, h^2(x,y)\right)\right], \tag{9}$$

где λ — произвольный параметр.

Искомая производящая функция может быть представлена в виде абсолютно сходящегося произведения [7]

$$Q_{\mathrm{XY}}(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty}\prod_{m=1}^{\infty}\left(1 + \frac{\lambda}{\lambda_{x,n}\lambda_{y,m}}\right)^{-1/2}, \tag{10}$$

где $\{\lambda_{\mathrm{X}}\}$ и $\{\lambda_{\mathrm{Y}}\}$ — наборы собственных чисел парциальных корреляторов K_{X} и K_{Y}, которые связаны с решениями интегральных уравнений

$$\varphi_{\mathrm{X}}(x) = \lambda_{\mathrm{X}}(K_{\mathrm{X}}, \varphi_{\mathrm{X}}(x)) = \lambda_{\mathrm{X}}\sigma_{\mathrm{H}} \int\limits_0^a \exp(-\nu\,|x - x'|)\varphi_{\mathrm{X}}(x')\,\mathrm{d}x', \tag{11а}$$

$$\varphi_{\mathrm{Y}}(y) = \lambda_{\mathrm{Y}}(K_{\mathrm{Y}}, \varphi_{\mathrm{Y}}(y)) = \lambda_{\mathrm{Y}}\sigma_{\mathrm{H}} \int\limits_0^b \exp(-\mu\,|y - y'|)\varphi_{\mathrm{Y}}(y')\,\mathrm{d}y', \tag{11б}$$

относящихся к границам прямоугольника.

В рассматриваемом случае вещественного НМД поля выражения для парциальных производящих функций $Q_{\mathrm{X}}(\lambda)$ и $Q_{\mathrm{Y}}(\lambda)$ известны [7, 8]:

$$Q_{\mathrm{X}}(\lambda) = \left[\frac{4\nu r_{\mathrm{X}}\exp(\nu a)}{(r_{\mathrm{X}} + \nu)^2\exp(r_{\mathrm{X}}a) - (r_{\mathrm{X}} - \nu)^2\exp(-r_{\mathrm{X}}a)}\right]^{1/2}, \tag{12а}$$

$$Q_{\mathrm{Y}}(\lambda) = \left[\frac{4\mu r_{\mathrm{Y}}\exp(\mu b)}{(r_{\mathrm{Y}} + \mu)^2\exp(r_{\mathrm{Y}}b) - (r_{\mathrm{Y}} - \mu)^2\exp(-r_{\mathrm{Y}}b)}\right]^{1/2}, \tag{12б}$$

где

$$r_{\mathrm{X}} = r_{\mathrm{X}}(\lambda) = \sqrt{\nu^2 + 2\lambda\nu\sigma_{\mathrm{H}}}, \quad r_{\mathrm{Y}} = r_{\mathrm{Y}}(\lambda) = \sqrt{\mu^2 + 2\lambda\mu\sigma_{\mathrm{H}}}. \tag{12в}$$

Простые нули знаменателей приведённых парциальных производящих функций $Q_{\rm X}(\lambda)$ и $Q_{\rm Y}(\lambda)$ суть отрицательно определённые наборы чисел $\lambda_{x,n}$ и $\lambda_{y,m}$, где $n, m = 1, \ldots, \infty$. На основании этих наборов (точнее, задающего их правила) необходимо построить формулу для искомой производящей функции. Другими словами, необходимо свернуть произведение (10) и получить конструктивное аналитическое выражение для $Q_{\rm XY}(\lambda)$, не требующее нахождения конкретных значений наборов $\{\lambda_{\rm X}\}$ и $\{\lambda_{\rm Y}\}$.

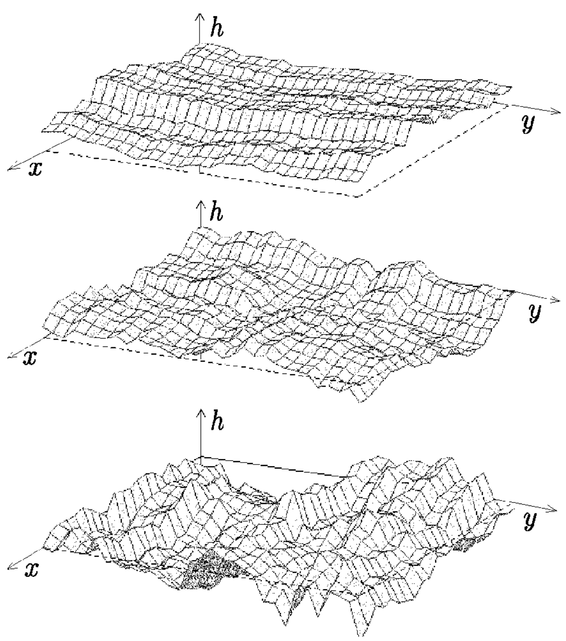


Рис. 1. Три реализации $h(x,y)$ случайного НМД поля $\mathrm{H}(x,y)$ при $\sigma_{\rm н} = 1$; $a = 1$; $b = 1$; $\nu = 1$; $\mu = 0{,}1$ (вверху), $\mu = 1$ (посредине), $\mu = 10$ (внизу); общее число пространственных узлов решётки одинаковое

Основным аналитическим результатом настоящей работы является следующее представление для производящей функции $Q_{\rm XY}(\lambda)$ функционала (1):

$$Q_{\rm XY}(\lambda) = \\ = \exp\left\{-\frac{1}{(2\pi\, i)^2}\int\limits_C \mathrm{d}x \int\limits_C \mathrm{d}y \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln Q_{\rm X}(x)\right] \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\ln Q_{\rm Y}(y)\right] \ln\left(1 + \frac{\lambda\,\langle\eta\rangle_{\rm XY}}{xy\,\langle\eta\rangle_x\langle\eta\rangle_y}\right)\right\}, \quad (13)$$

где функции $Q_{\rm X}(x)$, $Q_{\rm Y}(y)$ определяются выражениями (12), $\langle\eta\rangle_{\rm XY} = ab\sigma_{\rm н}$ — среднее значение функционала (1), $\langle\eta\rangle_x = a\sigma_{\rm н}$ и $\langle\eta\rangle_y = b\sigma_{\rm н}$ — парциальные математические ожидания, C — контур интегрирования в комплексной плоскости, проходящий через мнимую ось с обходом точки $(0,0)$ слева полуокружностью достаточно малого радиуса.

Плотность распределения вероятностей $f_J(\eta)$ случайных значений η функционала $J[\mathrm{H}]$ определяется, таким образом, на основании обратного преобразования Лапласа от функции $Q_{\rm XY}(\lambda)$. Такое преобразование для функций (12) или (13) возможно выполнить лишь численно, поэтому эта процедура будет реализована тем успешнее, чем точнее имеющаяся аналитическая информация о трансформанте $Q_{\rm XY}(\lambda)$.

4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДЯЩЕЙ ФУНКЦИИ ИНТЕГРАЛЬНОГО КВАДРАТИЧНОГО ФУНКЦИОНАЛА

Схему доказательства результата (13) построим, основываясь на известном каноническом разложении Карунена—Лоэва [6, 7] по набору собственных функций $\{\varphi_{\rm XY}(x,y)\}$, удовлетворяющих интегральному уравнению типа (11), но с ядром $K_{\rm XY}$:

$$\varphi_{\rm XY}(x,y) = \lambda_{\rm XY}(K_{\rm XY}, \varphi_{\rm XY}(x,y)) = \lambda_{\rm XY}\sigma_{\rm н}\int\limits_0^a\int\limits_0^b \exp(-\nu\,|x-x'| - \mu\,|y-y'|)\varphi_{\rm XY}(x',y')\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y', \quad (14)$$

которым соответствует набор собственных чисел $\{\lambda_{\rm XY}\}$. Интегральному уравнению (14) можно поставить в соответствие его дифференциальный аналог

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \nu^2\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \mu^2\right)\varphi_{\rm XY}(x,y) = 4\lambda_{\rm XY}\nu\mu\sigma_{\rm н}\varphi_{\rm XY}(x,y), \quad (15)$$

набор граничных условий для которого вытекает из (14) благодаря наличию в ядре модулей разности аргументов. Из факторизации ядра K_{XY} и коммутации дифференциальных операторов в (15) следует факторизация собственной функции на её парциальные сомножители: $\varphi_{\mathrm{XY}}(x,y) = \varphi_{\mathrm{X}}(x)\varphi_{\mathrm{Y}}(y)$. Поэтому спектр $\{\lambda_{\mathrm{XY}}\}$ является прямым произведением спектров $\{\lambda_{\mathrm{X}}\}$ и $\{\lambda_{\mathrm{Y}}\}$, а уравнение (14) эквивалентно уравнению

$$\varphi_{\mathrm{X}}(x)\varphi_{\mathrm{Y}}(y) = \lambda_{\mathrm{X}}(K_{\mathrm{X}},\varphi_{\mathrm{X}}(x))\cdot\lambda_{\mathrm{Y}}(K_{\mathrm{Y}},\varphi_{\mathrm{Y}}(y)) =$$
$$= \lambda_{\mathrm{X}}\sigma_{\mathrm{H}}\int\limits_0^a \exp(-\nu\,|x-x'|)\varphi_{\mathrm{X}}(x')\,\mathrm{d}x'\cdot\lambda_{\mathrm{Y}}\sigma_{\mathrm{H}}\int\limits_0^b \exp(-\mu\,|y-y'|)\varphi_{\mathrm{Y}}(y')\,\mathrm{d}y'. \qquad (16)$$

Заметим, что для произвольной аналитической функции $\psi(z)$, которая обладает счётным набором простых отрицательных нулей $\{z_k\}$ имеет абсолютно сходящееся факторизационное представление Адамара с нулевым показателем роста [13] вида $\psi(z) = \prod_{k=1}^{\infty}(1 - z/z_k)^{-1}$, справедливо

$$\ln\psi(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \mathrm{d}z\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\ln\psi(z)\right]\ln(1-\lambda/z)^{-1}. \qquad (17)$$

Например, для парциальной x-й компоненты

$$\ln Q_{\mathrm{X}}(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \mathrm{d}x\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln Q_{\mathrm{X}}(x)\right]\ln(1-\lambda/x)^{-1}. \qquad (18)$$

Тогда, применяя равенство (17) для $\varphi_{\mathrm{X}}(x)$ и $\varphi_{\mathrm{Y}}(y)$, получим искомое соотношение (13), которое после перенормировки запишем в окончательном виде:

$$Q_{\mathrm{XY}}(\lambda) = \exp\left\{-\frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_C \mathrm{d}x\int\limits_C \mathrm{d}y\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln Q_{\mathrm{X}}(x)\right]\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\ln Q_{\mathrm{Y}}(y)\right]\ln\left(1+\frac{\lambda}{xy\sigma_{\mathrm{H}}}\right)\right\}. \qquad (19)$$

Таким образом, информация о поведении функционала $J[\mathrm{H}]$ (1) на границах прямоугольной области для стационарного НМД поля достаточна для определения его статистики внутри этой области.

На основании производящей функции (19) можно найти выражения для моментов случайной величины $J[\mathrm{H}]$. В результате вычисления первой и второй производных по λ от функции (19) в точке $\lambda = 0$ и определения парциальных кумулянтов определим первый момент

$$\mathbf{E}_{\mathrm{H}}(J[H]) = ab\sigma_{\mathrm{H}} \equiv \langle\eta\rangle \qquad (20а)$$

и второй момент

$$\mathbf{E}_{\mathrm{H}}(J^2[H]) = \left(1 + \frac{[-1+2\nu a+\exp(-2\nu a)]\,[-1+2\mu b+\exp(-2\mu b)]}{4\nu^2\mu^2a^2b^2}\right)\langle\eta\rangle^2, \qquad (20б)$$

откуда следует дисперсия функционала (1):

$$\mathbf{E}_{\mathrm{H}}(J^2[H]) - \mathbf{E}^2_{\mathrm{H}}(J[H]) = \frac{[-1+2\nu a+\exp(-2\nu a)]\,[-1+2\mu b+\exp(-2\mu b)]}{4\nu^2\mu^2a^2b^2}\langle\eta\rangle^2. \qquad (20в)$$

5. ОЦЕНКА ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО КВАДРАТИЧНОГО ФУНКЦИОНАЛА

Прежде чем осуществить обратное преобразование Лапласа для нахождения плотности распределения вероятностей $f_J(\eta)$ случайных значений функционала $J[\mathrm{H}]$, воспользуемся процедурой комплексификации (см., например, [10, 11]). Рассмотрим комплекснозначное НМД поле, реальная и мнимая части которого образованы из вещественных, независимых и статистически эквивалентных НМД полей $h_{\mathrm{Re}}(x,y)$ и $h_{\mathrm{Im}}(x,y)$, которые, в свою очередь, эквивалентны НМД полю $h(x,y)$. Тогда функция $Q^2_{\mathrm{XY}}(\lambda)$ является производящей функцией интегрального квадратичного (по модулю) функционала вида (1), записанного рассматриваемого комплекснозначного НМД поля. В силу независимости его компонент плотность распределения факторизуется на плотности распределения функционалов, отвечающих соответственно реальной и мнимой частям, а в силу эквивалентности эти плотности совпадают. Если в результате обращения преобразования Лапласа будет найдена формула для плотности распределения в комплекснозначном случае, то после перенормировки математического ожидания она и послужит выражением для искомой плотности распределения вероятностей $f_J(\eta)$.

В приложении получено приближённое выражение (П.11) для производящей функции $Q^2_{\mathrm{XY}}(\lambda)$. Пользуясь процедурой комплексификации, перейдём сразу к нахождению плотности распределения вероятностей $f_J(\eta)$ случайных значений функционала $J[\mathrm{H}]$, выражение для которой записывается в терминах обратного преобразования Лапласа от $Q^2_{\mathrm{XY}}(\lambda)$:

$$f_J(\eta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \exp\left(\lambda\eta-\xi+\xi\sqrt{1+2\lambda\langle\eta\rangle/\xi}\right)\mathrm{d}\lambda, \tag{21}$$

где параметр ξ определяется формулой (П.8).

В контурном интеграле (21) перейдём от переменной интегрирования λ к переменной $\rho = \sqrt{1+2\lambda\langle\eta\rangle/\xi}$. Благодаря отсутствию особых точек контур интегрирования C остаётся контуром Бромвича, что позволяет преобразовать (21) к виду

$$f_J(\eta)=\frac{\langle\eta\rangle}{2\pi i\,\xi}\int\limits_C \exp\left(\frac{(\rho^2-1)\langle\eta\rangle}{2\xi}\eta+\xi-\xi\rho\right)\rho\,\mathrm{d}\rho. \tag{22}$$

Формируя в показателе экспоненты полный квадрат относительно ρ и пользуясь при интегрировании методом перевала, найдём значение интеграла (22):

$$f_J(\eta)=\sqrt{\frac{\xi\langle\eta\rangle}{2\pi\eta^3}}\exp\left[-\frac{\xi}{2}\left(\sqrt{\frac{\langle\eta\rangle}{\eta}}-\sqrt{\frac{\eta}{\langle\eta\rangle}}\right)^2\right], \tag{23}$$

где $0\le\eta\le\infty$.

Можно непосредственно убедиться (подстановками $\eta_1=\eta/\langle\eta\rangle$, $\eta_2=\eta_1^2$, $\eta_3=1/\eta_2$ и $\eta_4=\eta_3+1/\eta_3$), что интеграл по η от (23) в области определения тождественно равен 1. Таким образом, функция (23) обладает свойствами плотности распределения вероятностей. Далее, аналитическое вычисление интегралов показывает, что первый момент равен $\langle\eta\rangle$, а второй $\langle\eta^2\rangle=\langle\eta\rangle^2(1+\xi^{-1})$, поэтому дисперсия распределения (23) составляет $\langle\eta^2\rangle-\langle\eta\rangle^2=\langle\eta\rangle^2/\xi$.

Найденная приближённая формула (23) для плотности распределения вероятностей $f_J(\eta)$ случайных значений η описывает вклад флуктуаций НМД поля по обеим координатам в формирование случайной величины — функционала $J[\mathrm{H}]$.

Перечислим общие свойства найденного решения. Анализ выражения (23) проведём, опираясь на аппарат квадратичных интегральных функционалов, изложенный в пособии [12]. Из теории подобных функционалов, основанных на решениях стохастических дифференциальных уравнений, вытекает:

1) все нули производящей функции (13) — простые;

2) плотность распределения $f_J(\eta)$ во флуктуационной области ($\eta \ll \langle\eta\rangle$) спадает быстрее любого полинома и тождественно равна нулю при $\eta = 0$;

3) плотность распределения $f_J(\eta)$ в периферийной области ($\eta \gg \langle\eta\rangle$) имеет экспоненциальную асимптотику с декрементом $\xi/(2\langle\eta\rangle)$;

4) плотность распределения $f_J(\eta)$ имеет один максимум и две точки перегиба;

5) формула для автосвёртки плотности $f_J(\eta)$ также имеет вид (23).

Перечисленное позволяет говорить о лагерровском свойстве [14] найденной плотности распределения.

На рис. 2 приведено семейство нормированных плотностей распределения вероятностей $f_J(\eta)$, рассчитанных согласно (23) для пяти значений параметра ξ. Ход приведённых зависимостей подтверждает указанное лагерровское свойство.

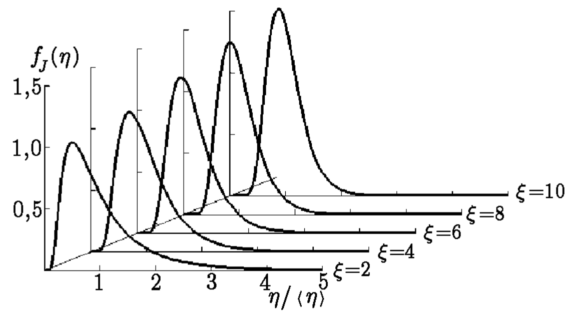


Рис. 2. Плотность распределения вероятностей $f_J(\eta)$ для различных значений параметра ξ

6. НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ

Результат (13) допускает разнообразные обобщения, в частности, его можно распространить с двумерного на многомерный случай. Например, в трёхмерном случае, полагая, что согласно (13) для параллелепипеда $\{x \in [0,a]; y \in [0,b]; z \in [0,c]\}$ на трёх декартовых осях парциальные производящие функции $Q_{\rm X}(x)$, $Q_{\rm Y}(y)$ и $Q_{\rm Z}(z)$ заданы, найдём

$$Q_{\rm XYZ}(\lambda) = \mathbf{E}_{\rm H}\left[\exp\left(-\lambda\int\limits_0^a {\rm d}x\int\limits_0^b {\rm d}y\int\limits_0^c {\rm d}z\, h^2(x,y,z)\right)\right] = \exp\left\{-\frac{1}{(2\pi i)^3}\times\right.$$
$$\left.\times\int\limits_C {\rm d}x\int\limits_C {\rm d}y\int\limits_C {\rm d}z\left[\frac{\rm d}{{\rm d}x}\ln Q_{\rm X}(x)\right]\left[\frac{\rm d}{{\rm d}y}\ln Q_{\rm Y}(y)\right]\left[\frac{\rm d}{{\rm d}z}\ln Q_{\rm Z}(z)\right]\ln\left(1-\frac{\lambda}{xyz\sigma_{\rm H}^2}\right)\right\}. \tag{24}$$

Здесь $\sigma_{\rm H}$ — средняя интенсивность трёхмерного поля.

Подобно (24) можно строить производящие функции для нормальных марковских полей высших размерностей.

Внутренняя иерархическая вложенность и самосогласованность, присущая нормальным марковским полям, позволяет связать производящие функции в порядке, отличном от (24), а именно выразить $Q_{\rm XYZ}(\lambda)$ через $Q_{\rm XY}(\lambda)$, $Q_{\rm XZ}(\lambda)$ и $Q_{\rm YZ}(\lambda)$. Подобное разнообразие представлений увеличивается с ростом пространственной размерности поля.

В приложении предложена гипотеза о воспроизводимости производящих функций, описывающих функционалы нормальных марковских полей различных порядков. В этой связи можно выдвинуть следующую гипотезу об устойчивости: плотности распределения значений интегральных квадратичных функционалов вида (1), рассчитанные для марковских полей различных порядков имеют вид (23).

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрено случайное стационарное НМД поле, изучены его статистические свойства и свойства определённого на нём интегрального квадратичного функционала. Найденные решения относятся, по терминологии теории оценивания, к случаю регистрации только шумовой компоненты. Дальнейшим шагом в этом направлении является включение в функционал наблюдения $J[\mathrm{H}]$ сигнальной компоненты с детерминированными свойствами. Рассмотрение такого более общего случая даст возможность аналитически описать синтез оптимальных приёмников, регистрирующих вещественные двумерные сигналы на фоне вещественного двумерного нормального марковского шума. Аналогично производящей функции $Q_{\mathrm{X}}(\lambda)$ (12), отвечающей одномерному полю (стационарному процессу), выражения типа (13) или (23) могут быть использованы при обработке и интерпретации данных о двумерных и трёхмерных объектах — случайными стационарными нормальными марковскими полями.

В заключение благодарю академика А. И. Ахиезера за обсуждение и поддержку работы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

НАХОЖДЕНИЕ ПРОИЗВОДЯЩЕЙ ФУНКЦИИ $Q_{\mathrm{XY}}(\lambda)$

Рассмотрим выражение (19) для производящей функции. С целью избежать трудностей, связанных с наличием радикалов, запишем $Q_{\mathrm{XY}}(\lambda)$ в комплексифицированном виде:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\ln Q^2_{\mathrm{XY}}(\lambda) = -\frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_C \mathrm{d}x \int\limits_C \mathrm{d}y \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln Q^2_{\mathrm{X}}(x)\right]\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\ln Q^2_{\mathrm{Y}}(y)\right](xy\sigma_{\mathrm{H}}+\lambda)^{-1}. \qquad (\Pi.1)$$

Раскладывая последний множитель в ряд и группируя слагаемые, запишем

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\ln Q^2_{\mathrm{XY}}(\lambda) = -\frac{1}{(2\pi i)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\lambda^n}{\sigma_{\mathrm{H}}^{n+1}}\int\limits_C \frac{\mathrm{d}x}{x^{n+1}}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln Q^2_{\mathrm{X}}(x)\right]\int\limits_C \frac{\mathrm{d}y}{y^{n+1}}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\ln Q^2_{\mathrm{Y}}(y)\right]. \qquad (\Pi.2)$$

Согласно интегральной теореме Коши, выражение (П.2) можно после интегрирования переписать в виде

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\ln Q^2_{\mathrm{XY}}(\lambda) = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^n}{n!\,n!\,\sigma_{\mathrm{H}}^{n+1}}\left[\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}\ln Q^2_{\mathrm{X}}(x)\right]\left[\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}y^{n+1}}\ln Q^2_{\mathrm{Y}}(y)\right]\Bigg|_{x=y=0}, \qquad (\Pi.3)$$

т. е. искомая производящая функция выражается через кумулянты [9] парциальных производящих функций.

Выполним теперь в (П.3) два действия. Во-первых, в записи для парциальных производящих функций (12) ограничимся старшими (экспоненциальными) членами:

$$Q^2_{\mathrm{X}}(x) \approx \exp\left(a\nu - a\sqrt{\nu^2+2x\nu\sigma_{\mathrm{H}}}\right), \quad Q^2_{\mathrm{Y}}(y) \approx \exp\left(b\mu - b\sqrt{\mu^2+2y\mu\sigma_{\mathrm{H}}}\right). \qquad (\Pi.4)$$

Такое приближение отвечает случаю, когда $\nu a \gg 1$ и $\mu b \gg 1$. Во-вторых, перейдём к переменным $u = x\sigma_{\mathrm{H}}/\nu$ и $v = y\sigma_{\mathrm{H}}/\mu$. Тогда получим

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\ln Q^2_{\mathrm{XY}}(\lambda) = -ab\sigma_{\mathrm{H}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\lambda\sigma_{\mathrm{H}})^n}{n!\,n!\,(\nu\mu)^n}\left(\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}u^{n+1}}\sqrt{1+2u}\right)\left(\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}v^{n+1}}\sqrt{1+2v}\right)\Bigg|_{u=v=0}. \qquad (\Pi.5)$$

Введём обозначения

$$\xi = a\nu b\mu, \quad \langle\eta\rangle = ab\sigma_{\text{н}}, \tag{П.6}$$

с помощью которых сосредоточим параметры флуктуации, отвечающие каждой из осей, и продифференцируем (П.5) один раз по u и один раз по v:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\ln Q_{\text{XY}}^2(\lambda) = -\langle\eta\rangle \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda\langle\eta\rangle/\xi)^n}{n!\,n!} \left(\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}u^n}\frac{1}{\sqrt{1+2u}}\right)\left(\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}v^n}\frac{1}{\sqrt{1+2v}}\right)\Bigg|_{u=v=0}. \tag{П.7}$$

Как следует из раздела 5, параметр ξ определяет величину дисперсии функционала (1), выражение для которой даётся выражением (20в). Поэтому с целью улучшить приближение (П.4) далее под этим параметром будем понимать величину

$$\xi = \frac{2\nu^2a^2}{-1+2\nu a+\exp(-2\nu a)}\,\frac{2\mu^2b^2}{-1+2\mu b+\exp(-2\mu b)}\,, \tag{П.8}$$

связанную с правильным значением дисперсии $\mathbf{E}_{\text{н}}(J^2[H]) - \mathbf{E}_{\text{н}}^2(J[H])$ уже для любых значений νa и μb.

Теперь в (П.7) для дробей-радикалов используем интегральное представление, возьмём все производные и просуммируем по n с применением степенного разложения для функции Бесселя, после чего получим выражение

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\ln Q_{\text{XY}}^2(\lambda) = -\frac{\langle\eta\rangle}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}t_1\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}t_2\exp\left(-t_1^2-t_2^2\right)J_0\Big(4t_1t_2\sqrt{\lambda\langle\eta\rangle/\xi}\Big)\,. \tag{П.9}$$

Из (П.9) уже видно взаимодействие флуктуаций НМД поля по обеим координатам. Переходя к полярным координатам $t_1 = \rho\sin\varphi$ и $t_2 = \rho\cos\varphi$, найдём в результате интегрирования по радиусу ρ

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\ln Q_{\text{XY}}^2(\lambda) = -\frac{\langle\eta\rangle}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\left[1+(4\lambda\langle\eta\rangle/\xi)\sin^2(2\varphi)\right]^{-1/2}. \tag{П.10}$$

Это выражение сводится к эллиптическим интегралам. С целью получить производящую функцию $Q_{\text{XY}}(\lambda)$, достаточно пригодную для обратного преобразования Лапласа, далее используем ещё одно приближение: в (П.10) заменим функцию $\sin^2(2\varphi)$ на её среднее значение на интервале $[0,2\pi]$. Тогда окончательно находим

$$Q_{\text{XY}}^2(\lambda) = \exp\Big(\xi - \xi\sqrt{1+2\lambda\langle\eta\rangle/\xi}\Big). \tag{П.11}$$

Отметим, что найденное выражение (П.11) по структуре совпадает со своим парциальным аналогом (П.4). В этой связи можно высказать гипотезу о том, что производящие функции квадратичных функционалов для нормальных марковских полей высших размерностей имеют аналогичный вид.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рытов С. М. Введение в статистическую радиофизику. — М.: Наука, 1966. — 404 с.
2. Habibi A. // Proc. IEEE. 1972. V. 60, № 7. P. 878.
3. Прикладная теория случайных процессов и полей / Под ред. К. К. Васильева и В. А. Омельченко. Ульяновск: УлГТУ, 1995. — 255 с.

4. Ковальчик И. М., Янович Л. А. Обобщённый винеровский интеграл и некоторые его приложения. — Минск: Наука и техника, 1989. — 221 с.
5. Коренной А. В., Егоров С. А. // Радиотехника. 1998. № 1. С. 43.
6. Тихонов В. И., Миронов М. А. Марковские процессы. — М.: Советское радио, 1977. — 488 с.
7. Хелстром К. Квантовая теория проверки гипотез и оценивания. — М.: Мир, 1979. — 342 с.
8. Мазманишвили А. С. Континуальное интегрирование как метод решения физических задач. — К.: Наукова думка, 1987. — 224 с.
9. Малахов А. Н. Кумулянтный анализ случайных негауссовских процессов и их преобразований. — М.: Сов. радио, 1978. — 370 с.
10. Вирченко Ю. П., Мазманишвили А. С. // Изв. вуз. Радиофизика. 1996. Т. 39, № 7. С. 916.
11. Ласкин Н. В., Насонов Н. Н., Мазманишвили А. С., Шульга Н. Ф. // ЖЭТФ. 1985. Т. 88, № 3(9). С. 763.
12. Вирченко Ю. П., Костенко Ю. Т., Мазманишвили А. С. Вероятностные модели случайных процессов и функционалов в прикладных задачах. — К.: УМК ВО, 1992. — 96 с.
13. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Ч. I. — М.: Наука, 1973. — 294 с.
14. Galuza A. A., Mazmanishvili A. S. // Int. Conf. on Math. Methods in Electromagmetic Theory, Kharkov, Ukraine, 1998. P. 429.

Харьковский государственный
политехнический университет,
г. Харьков, Украина

Поступила в редакцию
8 октября 1999 г.

INTEGRAL QUADRATIC FUNCTIONALS DEFINED IN A NORMAL MARKOV TWO-DIMENSIONAL FIELD AND THEIR STATISTICS

A. S. Mazmanishvili

We consider the problem of distribution of an integral quadratic functional defined in a stationary two-dimensional random normal Markov field. The generating function of the functional random-value distribution is found and an approximate expression for the probability density distribution is obtained. The effect of the parameters of the two-dimensional field on the statistical properties of the functional distribution is analyzed. A generalization of the solution to the case of a multidimensional stationary normal Markov field is proposed.