

Содержание

Бархатов Н. А., Беллюстин Н. С., Левитин А. Е., Сахаров С. Ю. Сравнение эффективности предсказания индекса геомагнитной активности D_{st} искусственными нейронными сетями	385
Троицкий А. В., Ошарин А. М. Поляризация теплового микроволнового излучения облачной атмосферы	395
Зверев В. А. Временное разрешение в радио-, сейсмо- и акустической локации	406
Чернов Ю. А. Статистические характеристики освещённых участков случайной поверхности	413
Кутищев С. Н., Михайлов Г. Д., Преображенский А. П. Моделирование рассеяния электромагнитных волн на полостях эллиптического поперечного сечения	426
Кошелев В. И., Сарычев В. Т., Шипилов С. Э. Использование соотношения Крамерса-Кронига для оценки импульсных характеристик сверхширокополосных систем	433
Глявин М. Ю., Запевалов В. Е., Куфтин А. Н., Лучинин А. Г. Экспериментальное исследование спектрального состава выходного излучения гиротрона с отражением части выходного сигнала	440
Двошерстов М. Ю., Петров С. Г., Чередник В. И., Чириманов А. П. Трансформация мод поверхностных акустических волн в кристаллах KNbO_3 и PKN с сильной пьезосвязью	445
Браже Р. А., Мефтахутдинов Р. М. Волноводное распространение внутренних электрогидродинамических волн в гетеропереходах	452
Грибова Е. З., Жукова И. С., Саичев А. И., Войчинский В. А. Относительная молекулярная диффузия	456
Музычук О. В. Релаксация вероятностных характеристик броуновского движения нелинейного осциллятора	468
Памяти В. Н. Красильникова	479

УДК 51-73:550.385.4

СРАВНЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПРЕДСКАЗАНИЯ ИНДЕКСА ГЕОМАГНИТНОЙ АКТИВНОСТИ D_{st} ИСКУССТВЕННЫМИ НЕЙРОННЫМИ СЕТЯМИ

Н. А. Бархатов, Н. С. Беллюстин, А. Е. Левитин, С. Ю. Сахаров

Методом искусственных нейронных сетей (ИНС) рассмотрены вопросы прогнозирования динамики геомагнитного индекса D_{st} по параметрам плазмы и магнитного поля в солнечном ветре на основе данных спутниковой системы OMNI. На примере этой задачи проведено сравнение модификаций нейронной сети обратного распространения ошибки: классической сети и сети с обратной связью. Рассмотрен вопрос об эффективности обратной связи в скрытом слое искусственной нейронной сети Элмана, которая за счёт временной задержки обеспечивает наличие динамической памяти ИНС. Исследована роль линии задержки во входном слое ИНС. Показано, что применение обратной связи в скрытом слое ИНС и линии задержки во входном слое существенно улучшают точность предсказания. Обратная связь в скрытом слое и линия задержки во входном слое отражают временную задержку в рассматриваемой физической задаче. Применение здесь порогов в функциях активации не влияет на эффективность работы ИНС. Выявлены параметры солнечного ветра, оказывающие наибольшее влияние на формирование геомагнитных бурь. Исследован вопрос о влиянии количества нейронов скрытого слоя на качество прогноза глобальных возмущений наземного магнитного поля. Отмечено, что сети обратного распространения ошибки после соответствующей настройки и обучения позволяют достаточно эффективно прогнозировать параметры явлений типа магнитных бурь за несколько часов до наступления масштабного магнитосферного события.

ВВЕДЕНИЕ

Важной проблемой солнечно-земной физики является разработка методов дистанционной волновой диагностики параметров околоземной среды и прогнозирования различных проявлений взаимодействия замагниченного солнечного ветра с геомагнитосферой [1, 2]. Высокая практическая ценность таких методов обусловлена возможностью наблюдения за параметрами околоземного пространства с помощью спутников и наземных измерительных станций.

Большинство методов волновой диагностики основано на совершенствовании физических моделей, описывающих перенос солнечным ветром ультранизкочастотных волн от коронарных источников, распространение этих волн в неоднородной среде, их проникновение в земную магнитосферу, взаимодействие волн различных типов и другие волновые явления [3]. Основой является модель земного магнитного поля и магнитосферного кольцевого тока как функций изменяющихся параметров межпланетной среды и магнитного поля космической плазмы [4]. При этом учитывается, что волновые возмущения и условия их распространения в космическом пространстве тесно связаны с ключевыми процессами в плазме и содержат важную информацию о ее состоянии. Таким образом, прогнозирование реакции геомагнитного поля на воздействие возмущений солнечного ветра осуществляется путем совершенствования такой «физической модели» с использованием многочисленных экспериментальных данных наземных и космических измерений. Такие алгоритмы позволяют в целом успешно находить реакцию магнитосферы и предсказывать геомагнитную активность, особенно в сочетании с методами линейного статистического корреляционного анализа, такими как кратная регрессия, оптическая корреляция и кросскорреляционный анализ [5]. Известно, что начальная и главная фаза магнитных бурь довольно сильно коррелируют с параметрами солнечного ветра. Однако при более внимательном рассмотрении оказывается, что успехи «физических моделей» для геофизического прогнозирования носят локальный характер. Это связано с тем, что полная физическая картина сложна, имеет много факторов и параметров — в этих условиях усложнение модели не приводит к улучшению прогноза.

В связи с этим в последнее время возрастает интерес к прогнозированию последствий воздействия изменяющегося солнечного ветра на геомагнитное поле и к диагностике околоземной среды с использованием искусственных нейронных сетей (ИНС) [6], которые сочетают корреляционную обработку с нелинейным преобразованием сигнала [7]. Такие системы обучаются по экспериментальным данным без построения физических моделей. Имеющийся опыт их использования в разных приложениях показал, что они эффективны именно для систем, у которых физическая модель либо вообще отсутствует, либо неоправданно сложна. В применении к ультранизкочастотным процессам в околоземном пространстве нейронные сети должны помочь в прогнозировании наземных электромагнитных возмущений по спутниковым данным и в восстановлении картины магнитосферных процессов по измерениям на поверхности Земли. Основная задача состоит в своевременном предсказании глобальных геомагнитных возмущений.

Данная работа посвящена прогнозированию на один час вперед геомагнитных бурь (ГБ) по динамике параметров плазмы и магнитного поля солнечного ветра. Уверенность в успехе использования ИНС для прогнозирования геомагнитных бурь дает, прежде всего, непосредственная связь измеряемого индекса геомагнитной активности D_{st} с изменением общей физической картины околоземного магнитного поля и плазмы. Фактически, речь идет о прогнозировании наземных последствий порывов солнечного ветра, следствием которых является запитка радиационных поясов Земли. Это вызывает усиление магнитосферного кольцевого тока, приводящее к общему понижению уровня напряженности геомагнитного поля, характеризуемого индексом D_{st} . Время, за которое происходит развитие такого процесса, не превышает одного часа. Поскольку задача прогнозирования наземных значений индекса D_{st} содержит физическую временную задержку, используемая ИНС будет более эффективна при наличии обратной связи, обеспечивающей эту временную задержку. Такую связь можно обеспечить петлей Элмана [8].

На примере вышеприведенной геомагнитной задачи проводится сравнение различных модификаций нейросетевой парадигмы обратного распространения ошибки. В работе сопоставляются эффективность работы различных модификаций ИНС с обратным распространением ошибки при предсказании индекса D_{st} . В этом отношении наше исследование дополняет работу [6] скандинавской группы ученых по использованию ИНС для геомагнитного прогнозирования. Нами было проведено сравнительное исследование эффективности работы двух ИНС с обратным распространением ошибки: рекуррентной сети Элмана и классической сети с обратным распространением ошибки. Особенностью работы является и то, что экстраполяция используемых данных спутниковой системы OMNI, способная оказать влияние на чистоту численного эксперимента и тем самым снизить возможности ИНС, нами не проводилась.

1. ОСОБЕННОСТИ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЙ ПОДГОТОВКИ ДАННЫХ

Для анализа работы ИНС были использованы параметры плазмы и межпланетного магнитного поля (модуль вектора ММП B , компоненты магнитного поля B_x , B_y , B_z в системе GSE, скорость V солнечного ветра, плотность ρ плазмы солнечного ветра и температура T плазмы) с часовым усреднением, взятые из данных спутниковой системы OMNI, полученных в 1978–1994 гг., а также значения индекса D_{st} .

Данные представляют собой временную зависимость параметров на протяжении 1005 часов, состоящую из интервалов, 50÷90 % длительности которых составляют ГБ ($|D_{st}| > 20$ нТл). Причина, по которой были взяты не непрерывные последовательности данных, являются частые сбои в работе спутниковой системы. Интервалы выбирались таким образом, чтобы интересующие нас ГБ всегда начинались и заканчивались в одном интервале. Выбранные интервалы соединялись в последовательность, сшиваясь участками, соответствующими магнитоспокойным периодам и не представля-

ющими непосредственного интереса для предсказания. Это было сделано, чтобы «не вводить ИНС в заблуждение» внезапными скачками параметров, которые не имеют под собой физической основы и не должны проявляться в предсказании. Продолжительность каждого интервала выбиралась не менее 48 часов, такое время приблизительно соответствует минимальной продолжительности ГБ. В отличие от работы [6] при формировании ряда данных не использовалась экстраполяция, с помощью которой восполнялось отсутствие спутниковых данных вследствие технических сбоев. По нашему мнению, такая экстраполяция приводит к потере информации о производных по времени от входных данных. Однако такая информация важна для ИНС, поэтому проведенное в нашей работе исследование можно считать более приближенным к реальной ситуации. Обучение ИНС приходится проводить на ряде данных меньшей длины, однако это лучше, чем обучение на большем ряде данных, содержащем большое число экстраполированных участков.

После формирования последовательностей данных была произведена их нормировка в отрезок $[-1, 1]$ для сети Элмана и в отрезок $[0, 1]$ для классической сети, как этого требует их конструкция. Нормировка производилась делением на модуль максимального значения параметра.

2. АЛГОРИТМ КЛАССИЧЕСКОЙ СЕТИ С ОБРАТНЫМ РАСПРОСТРАНЕНИЕМ ОШИБКИ

Алгоритм обучения ИНС с обратным распространением ошибки регулирует весовые связи между нейронами и их пороги в соответствии с рассогласованием между вычисляемыми и желаемыми значениями выходных величин с помощью правила градиентного снижения [9]. Вычисляется квадратичное отклонение выходных значений нейронной сети от желаемых значений как функция весов и порогов. На основании частной производной по весу или порогу от квадратичного отклонения вычисляется приращение веса или порога. Подстройка весов и порогов сначала производится для выходного слоя, затем последовательно для каждого скрытого слоя. Последними подстраиваются веса и пороги между входным и первым скрытым слоем. В данной работе используется модель ИНС с одним скрытым слоем. Конструкция классической нейронной сети с обратным распространением ошибки приведена на рис. 1.

Реализация классической ИНС предполагает:

1) задание с датчика случайных чисел всех весов и порогов:

$$w_{jk} = r, \quad k = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, p; \quad \Theta_j = r, \quad j = 1, 2, \dots, p;$$

$$W_{ij} = r, \quad j = 1, 2, \dots, p; \quad i = 1, 2, \dots, q; \quad \Gamma_i = r, \quad i = 1, 2, \dots, q,$$

где W_{ij} — вес связи между j -й скрытой величиной и i -й выходной величиной, Θ_j — порог j -й скрытой величины, w_{jk} — вес связи между k -й входной величиной и j -й скрытой величиной, Γ_i — порог i -й выходной величины, r — случайное число из отрезка $[-1, +1]$;

2. для каждого набора входных величин $a_k = a_k^\mu$, $k = 1, 2, \dots, n$; $\mu = 1, 2, \dots, N$, где n — число входных величин, N — число примеров в обучающем ряде, вычисление

а) значений скрытой величины:

$$b_j = S \left(\sum_{k=1}^n a_k w_{jk} + \Theta_j \right), \quad j = 1, 2, \dots, p,$$

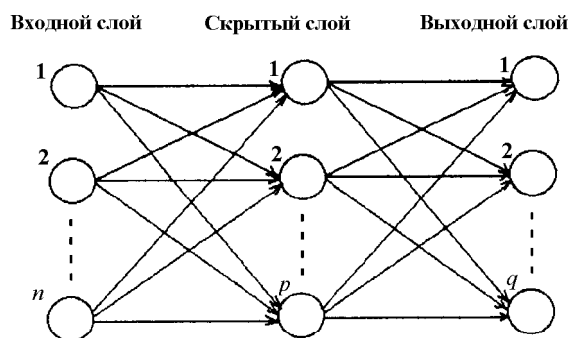


Рис. 1

где p — число скрытых величин, а $S(x) = (1 + e^{-x})^{-1}$ — логистическая сигмоидная пороговая функция;
 б) значения выходной величины:

$$c_i = S\left(\sum_{j=1}^p b_j W_{ij} + \Gamma_i\right), \quad i = 1, 2, \dots, q,$$

где q — число выходных величин;

в) рассогласования между вычисленными и желаемыми выходными величинами (ошибки):

$$d_i = c_i (1 - c_i) (T_i^\mu - c_i), \quad i = 1, 2, \dots, q, \quad (1)$$

где d_i — ошибка выходной величины i , T_i^μ — желаемое значение выходной величины i для μ -го элемента обучающей последовательности;

г) ошибки для каждой скрытой величины:

$$e_j = b_j (1 - b_j) \sum_{i=1}^q W_{ij} d_i, \quad j = 1, 2, \dots, p; \quad (2)$$

д) приращения весов и порогов:

$$\begin{aligned} \Delta W_{ij} &= \alpha b_j d_i, & \Delta \Gamma_i &= \alpha d_i, & \Delta w_{jk} &= \beta a_k e_j, & \Delta \Theta_j &= \beta e_j, \\ j &= 1, 2, \dots, p; & k &= 1, 2, \dots, n; & i &= 1, 2, \dots, q. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь α и β — постоянные, которые определяются экспериментально исходя из критерия максимальной скорости и минимальной ошибки обучения.

3) повторение шага 2 до тех пор, пока ошибка d_i не примет достаточно малое (для решаемой задачи) значение или пока обучение не завершится, т. е. ошибка перестанет уменьшаться для всех $i = 1, 2, \dots, q$ и $\mu = 1, 2, \dots, N$.

3. ЭЛМАНОВСКАЯ РЕКУРРЕНТНАЯ ИНС

Поскольку задача прогнозирования наземных значений индекса D_{st} содержит физическую временную задержку, лучше использовать ИНС с обратной связью, обеспечивающей временную задержку. Такую связь можно обеспечить петлёй Элмана [8]. Элмановская ИНС является рекуррентной ИНС с обратными связями, выходящими из скрытого слоя. Конструкция рекуррентной нейронной сети с петлёй обратной связи Элмана приведена на рис. 2. В этом случае входной слой состоит из двух частей: действительных входных величин и контекстных величин. Посредством обратной связи на каждую контекстную величину происходит передача значения только одной скрытой величины, эти значения не испытывают преобразований при передаче. Следовательно, число скрытых величин такое же, как и число контекстных. Контекстные величины выступают как копии активаций скрытых величин предыдущего временного шага. Поэтому сеть может интегрировать временную информацию, обращаясь к своему предыдущему состоянию. Это является нелинейной памятью сети. Веса обратных связей зафиксированы на единице и не подвергаются модернизации. Изменению подлежат только прямые связи. Сеть обучается с использованием модифицированной версии обычного алгоритма градиентного снижения с адаптивной обучающей схемой. Ниже дано описание этого алгоритма.

В качестве функции активации в скрытом слое в работе [8] было предложено использовать гиперболический тангенс, а в выходном слое — линейную функцию. Гиперболический тангенс часто применяется в нейронных сетях. Он является непрерывно возрастающей функцией во всем интервале $[-1, +1]$ и имеет непрерывные производные во всей области определения.

Для каждого набора входных величин μ выход скрытой величины вычисляется по формуле

$$b_j^\mu = \text{th} \left(\sum_{k=1}^n w_{jk} a_k^\mu + \sum_{k=n+1}^{n+p} w_{jk} b_{k-p}^{\mu-1} \right),$$

где a_k^μ — k -й элемент μ -го набора входной последовательности, $b_j^{\mu-1}$ — выход j -й скрытой величины в отклик на $(\mu-1)$ -й набор входной последовательности, w_{jk} — вес связи между k -й входной величиной, включая контекстные величины, и j -й скрытой величины.

Поскольку в выходном слое используется линейная функция активации, то выходная величина выражается следующим образом:

$$c_i^\mu = \sum_{j=1}^p W_{ij} b_j^\mu, \quad i = 1, \dots, q.$$

Будем под g и h понимать порядковые номера нейронов в соседних слоях. Тогда во время обучения на итерационном шаге t веса, связывающие нейроны g и h , модифицируются в соответствии с выражением

$$\Delta w_{gh}^m(t) = -(1 - \xi) \eta \frac{\partial E}{\partial w_{gh}^m} + \xi \Delta w_{gh}^m(t-1), \quad (4)$$

где η и ξ — соответственно обучающий уровень и мгновенный параметр, m — номер слоя в элмановской сети. Здесь $m = 2$ соответствует выходному слою, $m = 1$ — скрытому слою. Функция рассогласования E (мера ошибки) определяется согласно выражению

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q \sum_{\mu=1}^N (T_i^\mu - c_i^\mu)^2, \quad (5)$$

где T_i^μ и c_i^μ — желаемое и фактическое значение выходной величины i , передающейся от μ -го входного примера, N — число примеров во входных данных. Выражение (4) является правилом градиентного снижения с инерционной составляющей $\xi \Delta w_{gh}^m(t-1)$. Правило (4) и выражение (5) для функции рассогласования дают изменение веса связи между скрытым и выходным слоями:

$$\Delta W_{ij}(t) = (1 - \xi) \eta \sum_{\mu=1}^N \delta_i^\mu b_j^\mu + \xi \Delta W_{ij}(t-1), \quad \delta_i^\mu = T_i^\mu - c_i^\mu, \quad i = 1, 2, \dots, q, \quad (6)$$

и изменение веса связи между входным и скрытым слоями:

$$\begin{aligned} \Delta w_{jk}(t) &= (1 - \xi) \eta \sum_{\mu=1}^N \epsilon_j^\mu a_k^\mu + \xi \Delta w_{jk}(t-1), \quad k = 1, 2, \dots, n; \\ \Delta w_{jk}(t) &= (1 - \xi) \eta \sum_{\mu=1}^N \epsilon_j^\mu b_{k-n}^{\mu-1} + \xi \Delta w_{jk}(t-1), \quad k = n+1, \dots, n+p; \\ \epsilon_j^\mu &= (1 - (b_j^\mu)^2) \sum_{i=1}^q W_{ij} \delta_i^\mu, \quad j = 1, 2, \dots, p. \end{aligned} \quad (7)$$

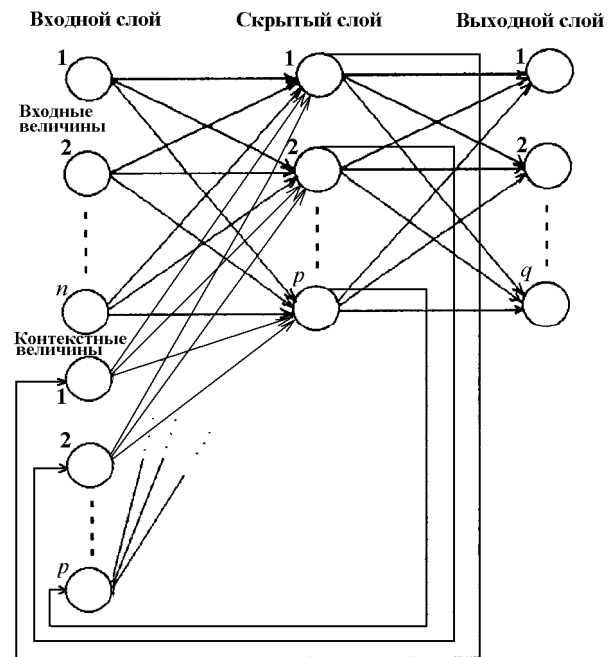


Рис. 2

Обучающий уровень ($0 < \eta < 1$) и мгновенный параметр ($0 < \xi < 1$) регулируются во время обучения автоматически. Это регулирование осуществляется с помощью выражения

$$\Delta\eta = \begin{cases} +s\eta, & \Delta E < 0; \\ -u\eta, & \Delta E > 0; \\ 0, & \Delta E = 0, \end{cases}$$

где ΔE — изменение ошибки за один шаг, u и s — положительные постоянные, которые подбираются эмпирически.

Реализация элмановской ИНС требует определения четырех обучающих параметров: η , ξ , s , u . Их оптимальные величины находятся эмпирически и обеспечивают достаточно малую ошибку после обучения при максимальной скорости сходимости. Входные данные преобразуются в действительные входные величины (но не в контекстные величины во входном слое). В начале обучения выход каждой контекстной величины приравнивается к нулю или к малой постоянной. Далее он всегда равен активации передающей скрытой величины на последнем временном шаге, пока обучение не заканчивается. Так как существует обратная связь скрытых и контекстных величин, элмановские ИНС имеют внутреннюю краткосрочную память, даже если каждый входной параметр берётся только как величина в настоящий момент, т. е. без временной линии задержки во входном слое. Временная линия задержки реализуется путем включения во входные величины параметров солнечного ветра из временного окна, размер которого и является длиной линии задержки, кратной одному часу. В этом случае ИНС имеет более сложную память, которая является суммой «внутренней» и «внешней» памяти. Таким образом, элмановскую сеть можно рассматривать как динамическую сеть с циклической связью между скрытыми и контекстными величинами.

Основные отличия в конструкции сети Элмана от классической сети с обратным распространением ошибки следующие:

- 1) в первой присутствует петля обратной связи между скрытым и входным слоем;
- 2) в скрытом и выходном слое классической сети с обратным распространением ошибки используется одна и та же функция активации — логистическая сигмоидная пороговая функция $S(x)$, тогда как в сети Элмана используется гиперболический тангенс в скрытом слое и линейная функция в выходном слое.
- 3) в сети Элмана не используются пороги в функциях активации;
- 4) процесс обучения сети Элмана отличен от процесса обучения классической сети с обратным распространением ошибки. При обучении сети Элмана подстройка весов производилась на основе суммарной ошибки по всему числу примеров, т. е. вычислялось рассогласование между выходными и целевыми величинами для каждого примера во входной последовательности (см. (4), (5)). Затем все эти рассогласования суммировались, и на основе этой суммы вычислялись приращения к весам (6), (7). В случае классической сети для каждого примера входной последовательности вычислялось рассогласование между выходными и желаемыми величинами и на основе каждого такого рассогласования вычислялось приращение к весу (1)–(3). Для сети Элмана изменение веса определяется произведением числа примеров в обучающей последовательности на рассогласование и на величину обучающего уровня, а для классической сети — произведением рассогласования на обучающий уровень.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ СОПОСТАВЛЕНИЯ СЕТЕЙ

Для исследования работы ИНС в целях предсказания индекса D_{st} были созданы компьютерные программы, реализующие нейронные сети с необходимой конструкцией и параметрами. Они позволяют изменять количество нейронов и значения обучающих параметров, включать и отключать обратную

связь. Сервис программ позволяет следить за изменениями ошибки и распределением весов в процессе обучения, которые отображаются в виде графиков на мониторе компьютера.

Обучение ИНС проводилось на временном ряде данных продолжительностью 899 часов, содержащем ежечасно усреднённые параметры солнечного ветра и значения D_{st} . Проверка функционирования ИНС проводилась на интервале продолжительностью 107 часов, с 03:00 UT 7 января 1979 года по 13:00 UT 11 января 1979 года, содержащем магнитную бурю.

Результат прогнозирования на 1 час вперёд отражен на рис. 3, где сплошная линия — измеренные значения индекса D_{st} , точечная — линия-прогноз, полученная с помощью обученной ИНС Элмана (входные параметры: B , B_z , V , ρ ; число скрытых нейронов 4, линия задержки во входном слое 4 часа).

В качестве объективной характеристики качества прогноза ИНС может использоваться эффективность предсказания, определенная в [6] как

$$PE = 1 - \frac{\sum_{\mu=1}^N (T_1^\mu - c_1^\mu)^2}{\sum_{\mu=1}^N (T_1^\mu - \langle T_1^\mu \rangle_\mu)^2}.$$

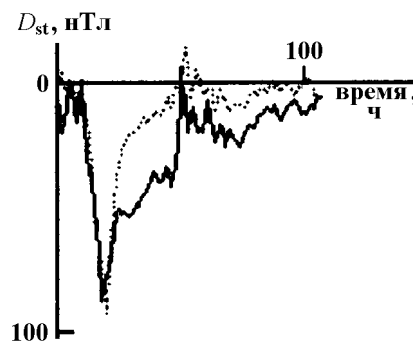


Рис. 3

Проведенные исследования показали, что увеличение числа нейронов в скрытом слое в среднем приводит к улучшению общей способности всех изучаемых ИНС к предсказанию. Так, увеличение числа нейронов (в дальнейшем эффективность предсказания PE везде вычислялась на обучающем ряде как результат обучения ИНС) в скрытом слое с 1 до 4 приводит к увеличению PE с 66 до 83 % для сети Элмана и с 55 до 70 % для классической сети с обратным распространением ошибки. Естественно, длительность обучения, обусловленная вычислительным процессом, возрастает.

В процессе исследования была изучена роль петли обратной связи Элмана в ИНС. Замечено, что после обучения с одним скрытым нейроном вес обратной связи контекстной величины увеличивается по модулю почти до 1, даже если в начале обучения он был нулевым или близким к нулю. Это свидетельствует о ключевом вкладе обратной связи в процесс предсказания. Действительно, при отключении обратной связи PE падает с 76 до 29 %, т. е. приблизительно в 2 раза. На рис. 4, 5 представлены результаты восстановления обучающих последовательностей в случае четырех скрытых величин соответственно для сети с обратной связью и сети без обратной связи. Здесь сплошная линия — измеренные значения индекса D_{st} , точечная — восстановленные с помощью ИНС значения.

Исследована роль линии задержки во входном слое ИНС. Так, при отсутствии линии задержки для сети Элмана с 4 нейронами в скрытом слое PE равно 80 %, а с линией задержки длиной 4 часа — 83 %. Для классической сети, в которой отсутствует обратная связь, применение линии задержки приводит к увеличению PE с 46 до 70 %. Такое улучшение говорит о том, что для предсказания индекса D_{st} требуется информация не только о параметрах околоземной среды, но и о динамике этих параметров.

Таким образом, ИНС с обратной связью имеет динамическую память, содержащую сведения о производной по времени от входных параметров. По причине того, что в классических сетях с обратным распространением ошибки отсутствует обратная связь, использование данной нейросетевой парадигмы имеет смысл только в случае применения линии задержки во входном слое. Линия задержки в этом случае играет роль краткосрочной памяти. Использование этой сети без линии задержки даёт приблизительно тот же результат, что и рекуррентная сеть Элмана без петли обратной связи.

Применение линии задержки в сети Элмана незначительно улучшает точность предсказания. Это говорит о том, что линия задержки во входном слое и обратная связь в скрытом слое в данной задаче выполняют в чем-то схожие функции и их совместное применение несущественно сказывается на эффективности работы ИНС. Очевидно, что обратная связь в скрытом слое и линия задержки во входном

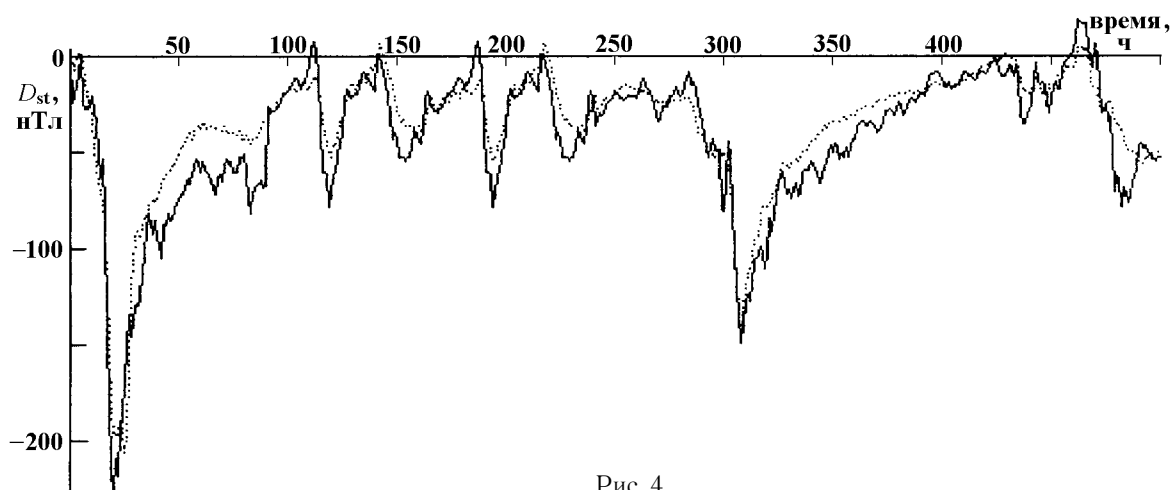


Рис. 4

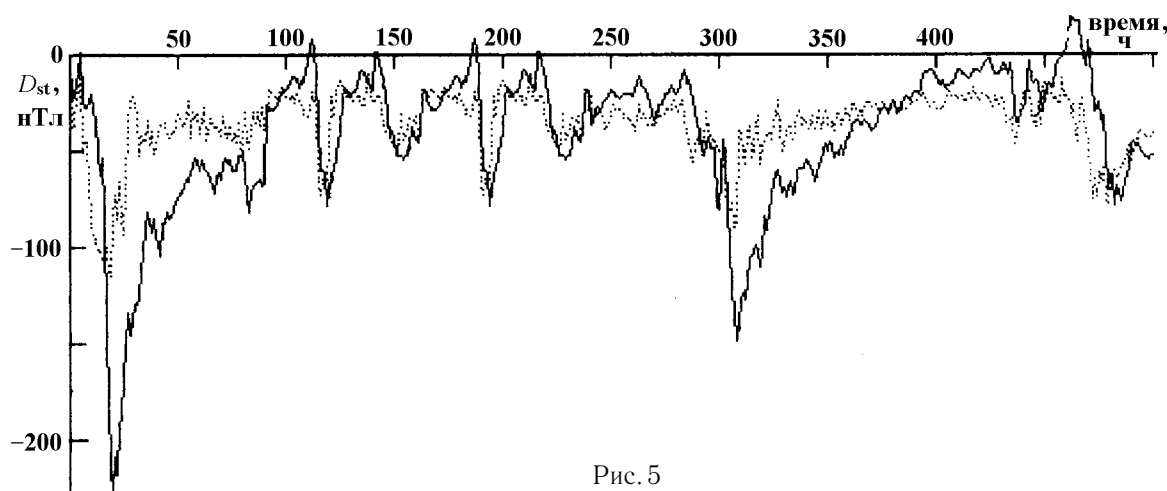


Рис. 5

слое играют такую значительную роль, поскольку имеет место временная задержка в рассматриваемой физической задаче.

Применение порогов в функциях активации не оказывает влияния на эффективность функционирования ИНС в данной физической задаче. Это видно из того, что PE не меняется, если не использовать пороги в функции активации.

Использование ИНС позволяет определить параметры околоземной среды, которые оказывают наибольшее влияние на формирование геомагнитных бурь. Такими параметрами являются компонента B_z ММП, модуль B ММП, скорость плазмы V и ее плотность ρ . Добавление к ним параметров, которые с физической точки зрения не должны оказывать влияние на формирование геомагнитной бури, не влияет на точность предсказания. Наоборот, изъятие из указанного набора любого параметра сильно уменьшает точность предсказания. Так, например, изъятие из входных параметров компонента B_z ММП приводит к уменьшению PE в 3 раза.

5. ВЫВОДЫ

В данной работе методами ИНС рассмотрены вопросы прогнозирования динамики геомагнитного индекса D_{st} по параметрам плазмы и ММП в солнечном ветре. Для этого было проведено построение и программирование трехслойных ИНС с обратным распространением ошибки: классической сети и сети с петлёй Элмана. Созданные программы предусматривают возможности изменения количества

входных параметров и нейронов, изменения обучающих параметров. Программы предусматривают вычисление ошибки прогноза, графическое представление выходных данных (прогнозируемого результата) и позволяют проводить графическое сопоставление экспериментальных и прогнозируемых данных.

Для анализа работы ИНС были использованы усредненные на часовом интервале параметры плазмы и ММП, взятые из данных спутниковой системы OMNI, полученные в 1978–1994 гг., а также значения индекса D_{st} .

Проведено исследование влияния на эффективность работы ИНС количества нейронов скрытого слоя, количества нейронов входного слоя, наличия и отсутствия обратной связи между скрытым и входным слоями, наличия линии задержки во входном слое и её длины.

1. Установлена зависимость ошибки обучения от числа нейронов в скрытом слое. Отмечено, что при увеличении числа нейронов ошибка уменьшается, а скорость обучения увеличивается. Увеличение количества нейронов скрытого слоя значительно увеличивает эффективность предсказания: увеличение их числа с 1 до 4 приводит к изменению эффективности предсказания индекса D_{st} с 66 до 83 % для сети Элмана и с 56 до 70 % для классической сети. При дальнейшем росте числа нейронов в вычислительном эксперименте до восьми ошибка продолжает уменьшаться, но не так быстро.

2. Исследована роль обучающего уровня, определяющего изменение весов в процессе обучения, при достижении минимума ошибки обучения и максимума скорости сходимости. Вычислительные эксперименты не позволяют однозначно выбрать оптимальное значение этого параметра. Обнаружены режимы, когда после длительного процесса обучения с уменьшением ошибки неожиданно начинается ее резкий рост с хаотизацией ИНС. Такие эффекты в сложных системах, и в частности в ИНС, уже хорошо известны, но регулярных методов борьбы с этими явлениями пока нет.

3. Простейший вариант динамической памяти ИНС в виде петли обратной связи Элмана между слоями нейронной сети приводит к значительному улучшению способности сети к предсказанию геомагнитных бурь. Этот вариант нейронной сети оказался более эффективным, что обусловлено существованием физической временной задержки в поставленной задаче.

4. Исследовано влияние линии задержки во входном слое. Применение линии задержки во входном слое сети Элмана приводит к незначительному увеличению PE , в то время как применение ее в классической сети существенно улучшает точность предсказания. Показано, что обратная связь в скрытом слое и линия задержки во входном слое отражают временную задержку в рассматриваемой физической задаче.

5. Применение порогов в функциях активации ИНС не оказывает влияние на эффективность функционирования ИНС в данной физической задаче.

6. Оптимальный прогноз индекса D_{st} на 1 час вперед получен при работе сети Элмана с использованием четырех параметров солнечного ветра: B , B_z , V , ρ .

Таким образом, на примере рассмотренной задачи проведено сравнение работы ИНС двух модификаций нейросетевой парадигмы обратного распространения ошибки. Показано, что ИНС с обратным распространением ошибки после соответствующей настройки и обучения позволяют достаточно эффективно осуществлять часовой прогноз динамики глобальных геомагнитных возмущений по параметрам околоземной плазмы, получаемым с находящихся в солнечном ветре космических аппаратов.

Выражаем благодарность Я. И. Фельдштейну за интерес к работе и полезные обсуждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 00–05–64689) и научной программы «Университеты России, 2000».

ЛИТЕРАТУРА

1. Нишида А. Геомагнитный диагноз магнитосферы. — М.: Мир, 1980. — 300 с.
2. Гульельми А. В. МГД-волны в околоземной плазме. — М.: Наука, 1979. — 139 с.

3. Бархатов Н. А., Беллюстин Н. С. // Геомагнетизм и аэрономия. 1995. Т. 35. С. 22.
4. Feldstein Y. I. // Space Sci. Rev. 1992. V. 59. P. 83.
5. Baker D. N., Klimas A. J., McPherron R. L., Buchner J. // Geophys. Res. Lett. 1990. V. 17. P. 41.
6. Wu J.-G., Lundstedt H. // J. Geophys. Res. 1997. V. 102, № A7. P. 14255.
7. Wasserman Ph. P. Neural computing. Theory and Practice. New York: van Nostrand, 1990.
8. Elman J. L. // Cognitive Sci. 1990. V. 14. P. 179.
9. Simpson P. K. A review of artificial neural systems. II. Paradigm application and implementation. San Diego. 137 p.

Нижегородский государственный
педагогический университет,
г. Н. Новгород, Россия

Поступила в редакцию
1 октября 1999 г.

**COMPARISON OF ARTIFICIAL NEURAL NETWORK EFFICIENCY
FOR PREDICTING THE GEOMAGNETIC ACTIVITY INDEX D_{st}**

N. A. Barkhatov, N. S. Belliustin, A. E. Levitin, and S. Yu. Sakharov

Using the method of artificial neural networks (ANNs), we consider the problem on the prediction of dynamics of the geomagnetic D_{st} index using the data obtained by the OMNI satellite system on the dynamics of plasma parameters and interplanetary magnetic field in the solar wind. We compare the modifications of neural network backpropagation paradigm, such as classical network and feedback network, using the example of this problem. We analyze the feedback efficiency in a hidden layer of the Elman ANN, which, by virtue of a time delay, provides the dynamic memory of the ANN. The role of the delay line in the ANN input layer is studied. We show that application of feedback connection in the hidden layer of the ANN and the delay line in the input layer improves significantly the prediction accuracy. The feedback connection in the hidden layer and the delay line in the input layer simulate the time delay relevant to the considered physical problem. The use of thresholds in the activation functions does not influence the ANN efficiency. We determine the solar-wind parameters which have the strongest effect on the formation of geomagnetic storms. The problem on the influence of the neuron number in the hidden on the quality of the prognosis of global disturbances of near-the-Earth magnetic field is studied. It was pointed out that, with appropriate set-up and training, backpropagation networks allow one to predict quite efficiently the magnetic storm parameters a few hours before a large-scale magnetospheric event.

УДК 621.371.24

ПОЛЯРИЗАЦИЯ ТЕПЛОВОГО МИКРОВОЛНОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ОБЛАЧНОЙ АТМОСФЕРЫ

А. В. Троицкий, А. М. Ошарин

Приведены результаты экспериментальных исследований поляризации микроволнового излучения облачной атмосферы, свидетельствующие о наличии значительных поляризационных контрастов в излучении зимне-весенних облаков. Дана интерпретация наблюдательных данных на основе модели переноса излучения в облаках смешанного типа, содержащих кристаллические частицы и переохлаждённую мелкокапельную воду.

ВВЕДЕНИЕ

Общепринятым считается, что тепловое микроволновое излучение атмосферы, в том числе и при наличии облачности без осадков, является неполяризованным [1–3]. На этом предположении основана интерпретация всех микроволновых измерений как собственного излучения атмосферы, так и излучения космических источников, прошедшего через нее. Теоретические и экспериментальные исследования свидетельствуют, что микроволновое излучение жидкокапельных облаков, где средний размер частиц составляет величину порядка 10 мкм, действительно не поляризовано. Поляризация же микроволнового излучения облаков связывается только с наличием крупных капель дождя и их возможной несферичностью. При этом возможное влияние кристаллической фазы на перенос микроволнового излучения в облаках считается несущественным и не рассматривается. Такое положение обосновывается прежде всего тем фактом, что ослабление в кристаллических облаках примерно на три порядка меньше, чем в жидкокапельных (например на длине волны 3 мм это отношение составляет приблизительно $6 \cdot 10^{-4}$ [2]), а интегральная водность кристаллической фазы еще на порядок меньше жидкокапельной [4]. Эти факты, однако, не позволяют еще утверждать, что влияние кристаллической фазы облаков на перенос микроволнового излучения является несущественным. Необходимо отметить, что в микроволновом диапазоне, где параметр дифракции одиночной кристаллической частицы близок к единице, рассеяние может играть значительную роль, особенно в коротковолновой части миллиметрового диапазона, когда размеры кристаллов становятся соизмеримы с длиной волны излучения.

В настоящей работе приведены результаты экспериментальных исследований поляризации микроволнового излучения облачной атмосферы, свидетельствующие, вопреки устоявшемуся мнению, о наличии значительной поляризации излучения зимне-весенних облаков. Дана интерпретация наблюдательных данных на основе модели переноса излучения в облаках смешанного типа, содержащих помимо кристаллических частиц еще и переохлажденную мелкокапельную воду.

1. АППАРАТУРА И МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЙ

Исследование собственного микроволнового излучения облачной атмосферы проводилось с помощью модуляционного радиометра на длине волны $\lambda = 3$ мм, который принимал радиоизлучение атмосферы параллельно на двух ортогональных поляризациях, вертикальной и горизонтальной, и измерял соответствующую разность яркостных температур. Прием осуществлялся конической рупорной антенной с шириной диаграммы направленности на уровне половинной мощности, равной 4° . Флуктуационная чувствительность радиометра по обоим каналам составила 0,2 К при времени интегрирования

А. В. Троицкий, А. М. Ошарин

395

сигнала 1 с. Развязка между поляризационными каналами была не хуже 15 дБ. Полные коэффициенты передачи обоих каналов от антенны до регистрирующего устройства — ПЭВМ — выравнивались с точностью не хуже 0,5 % и контролировались по двум источникам неполяризованного излучения — ясной атмосфере и черному телу, находящемуся в дальней зоне антенны на расстоянии $D = 0,8$ м перпендикулярно электрической оси рупора при температуре окружающего воздуха T_0 . По этим же источникам осуществлялась и калибровка обоих каналов радиометра T_{α}^{α} ($\alpha = v, h$ соответственно для вертикальной и горизонтальной поляризаций) и их разности, или поляризационного контраста, $\Delta T_{\alpha} = T_{\alpha}^v - T_{\alpha}^h$ в масштабах яркостных температур. Яркостная температура ясной атмосферы рассчитывалась по данным аэрологического зондирования. Измерения яркостной температуры облачной атмосферы проводились на фиксированных зенитных углах $\theta = 40; 60$ и 70° . Регистрировалось излучение атмосферы при прохождении облачности через диаграмму направленности антенны. В качестве опорного уровня нулевого поляризационного контраста $\Delta T_{\alpha} = 0$ бралось радиоизлучение ясной атмосферы или излучение черного тела в дальней зоне. Так как измерение поляризационного контраста имеет свою специфику, остановимся на этом несколько подробнее.

Антенная температура T_a^{α} на входе радиометра связана с измеряемой яркостной температурой T_{α}^{α} известным соотношением [5]

$$T_a^{\alpha} = \eta^{\alpha} (1 - \beta^{\alpha}) T_{\alpha}^{\alpha} + \eta^{\alpha} \beta^{\alpha} T_{\phi}^{\alpha} + \eta^{\alpha} (1 - \beta^{\alpha}) T_0, \quad (1)$$

где β^{α} — коэффициент рассеяния антенны, η^{α} — КПД антенны, T_{ϕ}^{α} — яркостная температура фона на соответствующей поляризации. Регистрируя последовательно антенную температуру черного тела в дальней зоне $T_{a, \text{чт}}^{\alpha}$, ясной атмосферы $T_{a, \text{атм}}^{\alpha}$ и исследуемой облачной атмосферы T_a^{α} на вертикальной и горизонтальной поляризациях, не меняя при этом геометрии измерений и учитывая линейную зависимость между антенной температурой T_a^{α} на входе радиометра и амплитудой регистрируемого выходного сигнала $U^{\alpha} = a^{\alpha} T_a^{\alpha} + b^{\alpha}$, или $T_a^{\alpha} = m^{\alpha} U^{\alpha} + l^{\alpha}$, получаем следующие соотношения:

$$\frac{T_{a, \text{чт}}^{\alpha} - T_{a, \text{атм}}^{\alpha}}{T_{a, \text{атм}}^{\alpha} - T_a^{\alpha}} = \frac{T_{\text{я, чт}}^{\alpha} - T_{\text{я, атм}}^{\alpha}}{T_{\text{я, атм}}^{\alpha} - T_{\text{я}}^{\alpha}} = \frac{U_{\text{чт}}^{\alpha} - U_{\text{атм}}^{\alpha}}{U_{\text{атм}}^{\alpha} - U^{\alpha}}. \quad (2)$$

Из (2) имеем

$$T_{\text{я}}^{\alpha} = T_{\text{я, атм}}^{\alpha} - \frac{T_{\text{я, чт}}^{\alpha} - T_{\text{я, атм}}^{\alpha}}{U_{\text{чт}}^{\alpha} - U_{\text{атм}}^{\alpha}} (U_{\text{атм}}^{\alpha} - U^{\alpha}), \quad (3)$$

где $\frac{T_{\text{я, чт}}^{\alpha} - T_{\text{я, атм}}^{\alpha}}{U_{\text{чт}}^{\alpha} - U_{\text{атм}}^{\alpha}} = K^{\alpha}$ — коэффициенты передачи каналов радиометра, которые, как указывалось выше, одинаковы: $K^v = K^h = K$. Из (3) имеем выражение для измеряемого поляризационного контраста:

$$\Delta T_{\text{я}} = T_{\text{я}}^v - T_{\text{я}}^h = K[(U^v - U^h) - (U_{\text{атм}}^v - U_{\text{атм}}^h)]. \quad (4)$$

Абсолютная точность измерений яркостной температуры на обеих поляризациях составляет около 2 К. Точность же измерения поляризационного контраста $\Delta T_{\text{я}} = T_{\text{я}}^v - T_{\text{я}}^h$ оценивается как 0,4 К. Это значение обусловлено в основном флуктуационной ошибкой, т. к. систематическая ошибка калибровки при разностных измерениях практически полностью устраняется. При обработке и интерпретации измерений применялась компьютерная фильтрация сигнала с постоянной времени 20 с.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ И ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА

Исследования поляризации теплового микроволнового излучения облачной атмосферы проводились на длине волны $\lambda = 3$ мм с января по июль 1999 г. в Нижнем Новгороде. В этих измерениях была

обнаружена значительная поляризация излучения зимне-весенних облаков практически всех типов, наблюдаемых в это время года на этой геошироте [6]. Типичные примеры записи радиоизлучения зимней атмосферы на вертикальной (кривая v) и горизонтальной (кривая h) поляризациях, а также их разность (кривая $v - h$) приведены на рис. 1, 2. Начало и конец каждой временной реализации соответствуют неполяризованному излучению ясной атмосферы, т. е. нулевому уровню поляризационного

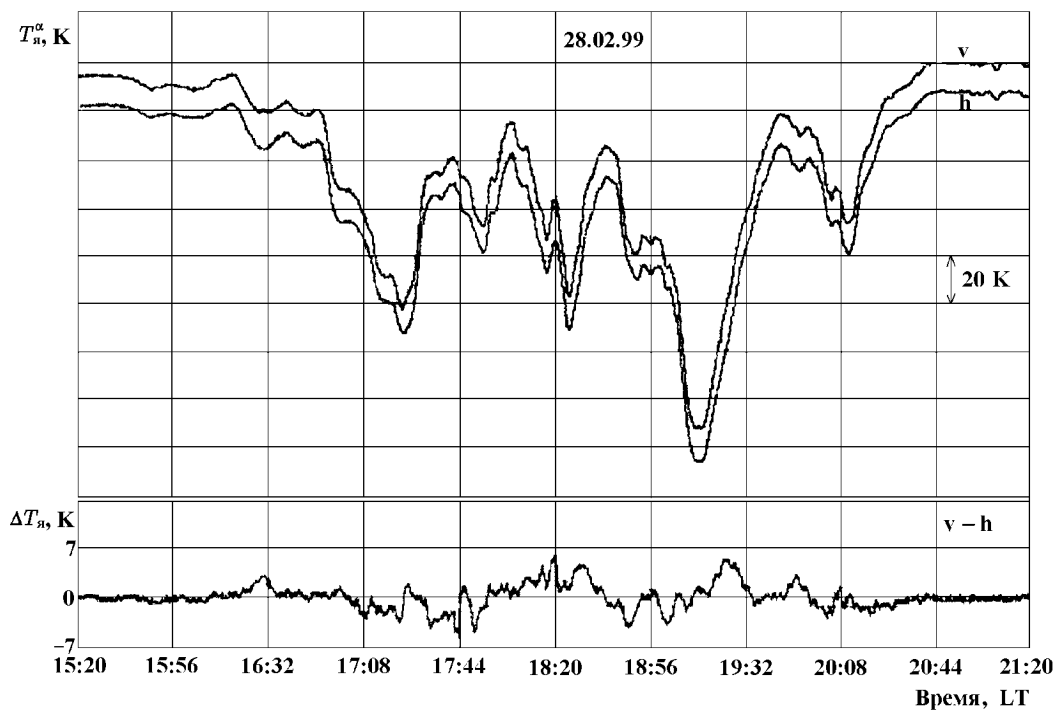


Рис. 1

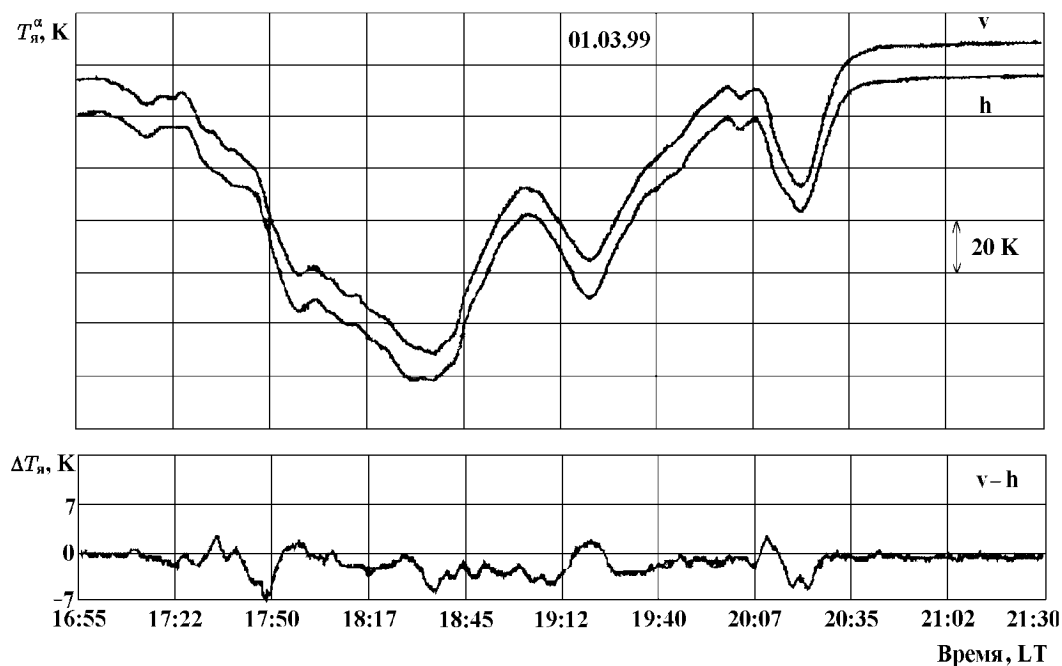


Рис. 2

контраста. Для зимне-весенней атмосферы при $\theta = 70^\circ$ поляризационный контраст радиоизлучения как отдельных облаков, так и облачных систем $|\Delta T_{\text{я}}| \leq 1$ К наблюдается практически всегда (в более чем 80 % случаев) при температуре приземного воздуха $T_0 \leq 7^\circ \text{C}$. При этом за весь цикл наблюдений приземная температура T_0 изменялась от -16 до $+29^\circ \text{C}$. Средняя величина поляризационного контраста при $\theta = 70^\circ$ составляет $|\Delta T_{\text{я}}| \approx 3$ К и носит нерегулярный характер: наблюдается поляризационный контраст обоих знаков. С уменьшением зенитного угла наблюдения с 70 до 40° поляризационный контраст уменьшается примерно в два раза. Максимальная величина наблюдаемого поляризационного контраста достигала $|\Delta T_{\text{я}}| \approx 9$ К (см. пример на рис. 3). В летних облаках поляризационный эффект наблюдался в единичных случаях при развитой конвективной облачности большой вертикальной протяженности и по модулю не превосходил 2 К.

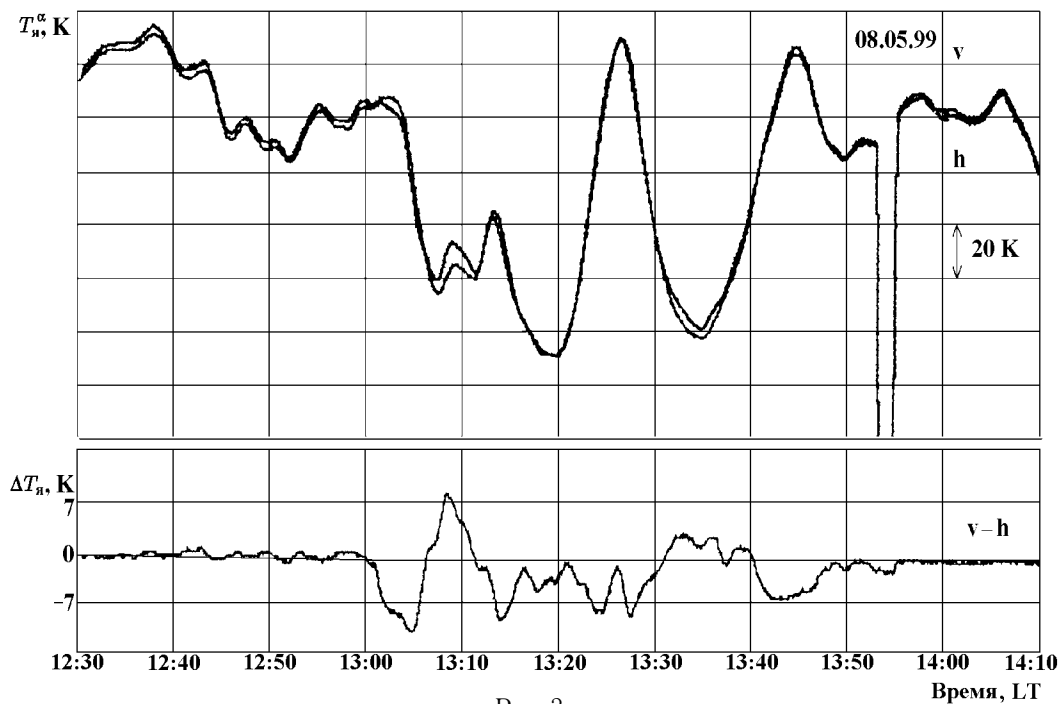


Рис. 3

Результаты измерений показывают, что поляризационный контраст не коррелировал с интегральной водностью переохлаждённой воды в облаках, которая определялась из радиометрических измерений абсолютной яркостной температуры $T_{\text{я}}^{\alpha}$ на длине волны $\lambda = 3$ мм, зависящей в основном от интегральной водности. Кроме этого, некоторые, даже мощные по водности, облака вообще не дают поляризационного эффекта (см. рис. 3). Это свидетельствует, с одной стороны, о том, что радиоизлучение жидкокапельных облаков действительно не поляризовано, а с другой — что поляризация микроволнового излучения, скорее всего, обусловлена кристаллическими ледяными частицами облаков смешанной фазы. Заметим, что средняя интегральная водность облаков в зимне-весенней серии экспериментов составила приблизительно $0,1 \div 0,2 \text{ кг/м}^2$. При средней толщине облачности около $1 \div 2$ км это соответствует значению удельной водности примерно $0,1 \text{ г/м}^3$.

Поляризацию радиоизлучения вследствие эффектов рассеяния могут давать как сферические частицы [7], так и ориентированные плоские (дендриты, шестигранные пластинки и т. д.) или продолговатые (столбики, иглы и т. д.) ледяные кристаллы. Ориентация плоских кристаллов в горизонтальной плоскости может происходить под действием гравитации и конвективных движений воздуха [4, 8]. Кристаллы продолговатой формы могут также ориентироваться вдоль электрического поля, которое в облачной атмосфере имеет сравнимые по величине вертикальную и горизонтальную составляющие [4].

Косвенным подтверждением сказанного служит тот экспериментальный факт, что максимальные значения поляризационных контрастов наблюдались обычно в конвективных облачных системах, где напряжённость электрического поля достигает нескольких десятков кВ/м [8], тогда как для ясной атмосферы эта цифра гораздо меньше и составляет десятки В/м. Электрическое поле большой величины способствует не только ориентации ледяных кристаллов, но и существенному ускорению процессов их образования и роста [9]. Значительная поляризация радиоизлучения, наблюдаемая в конвективных облачных системах, локализована, как правило, непосредственно перед зоной осадков или сразу после нее. Как показано в работе [10] и подтверждается в данном эксперименте, примерно в этих же областях сосредоточено большое количество переохлажденной мелкокапельной воды. В самих же зонах осадков в виде снега наблюдалась минимальная, не превышающая 1,5 К, поляризация радиоизлучения, хотя размеры снежинок в снегопаде достигали нескольких миллиметров. Отсюда следует вывод, что в снегопадах ориентация кристаллов практически отсутствует.

Необходимо также сказать несколько слов о размерах зон поляризованного радиоизлучения. Выполненные исследования показывают, что характерный временной период наблюдаемых поляризационных контрастов составляет приблизительно $5 \div 6$ мин. Если предположить, что ориентация кристаллов в этих зонах сохраняется в течение хотя бы 10 мин, т. е. выполняется гипотеза замороженной турбулентности Тейлора, то с учетом средней скорости переноса облаков приблизительно 20 км/час получим характерный линейный размер зон, равный нескольким сотням метров. Заметим, что это значение совпадает с горизонтальными размерами зон неоднородностей электрического поля [8], а также с горизонтальным масштабом конвективно-динамической моды в спектре турбулентности пограничного слоя атмосферы [11, 12].

3. ТЕОРИЯ

Рассмотрим векторное уравнение переноса излучения в плоско-параллельном слое, содержащем частицы сложной формы [7]:

$$\cos \theta \frac{d\mathbf{I}(\theta, \phi, z)}{dz} = -\hat{k}_{\text{осл}}(\theta, \phi) \mathbf{I}(\theta, \phi, z) + \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^\pi d\theta' \sin \theta' \hat{P}(\theta, \phi; \theta', \phi') \mathbf{I}(\theta', \phi', z) + \mathbf{J}(\theta, \phi, z). \quad (5)$$

Здесь $0 \leq \theta \leq \pi$ и $0 \leq \phi \leq 2\pi$ — зенитный и азимутальный углы, задающие направление распространения излучения в среде, $\mathbf{I}(\theta, \phi, z) = (I_v, I_h, U, V)^T$ — четырехкомпонентный вектор модифицированных параметров Стокса, $\hat{k}_{\text{осл}}$ — матрица ослабления излучения частицами и атмосферой, $\hat{P}(\theta, \phi; \theta', \phi')$ — фазовая матрица, описывающая вклад однократного рассеяния на частицах элементарного объема среды из направления (θ', ϕ') в направление (θ, ϕ) , $\mathbf{J}(\theta, \phi, z)$ — вектор источника собственного теплового электромагнитного излучения частиц и окружающей среды. Для несферических частиц матрица ослабления в общем случае недиагональная, и все четыре составляющих вектора Стокса отличны от нуля. Выражения для перечисленных составляющих уравнения переноса (5) приведены в Приложении. Граничные условия задачи можно записать следующим образом. На верхней границе облака $z = z_2$ ($0 \leq \theta \leq \pi/2$)

$$I_\alpha(\pi - \theta, \phi, z_2) = \frac{k_B}{\lambda^2} \{T_{\text{я,атм}}(\pi - \theta, z_2) + T_{\text{я,}\odot}(\pi - \theta, \phi, z_2)\}, \quad (6)$$

где k_B — постоянная Больцмана, λ — длина волны принимаемого излучения, $T_{\text{я,атм}}(\pi - \theta, z_2)$ и $T_{\text{я,}\odot}(\pi - \theta, \phi, z_2) = T_\odot \delta(\cos \theta - \cos \theta_\odot) \delta(\phi - \phi_\odot)$ — соответственно угловое распределение яркостной температуры нисходящего излучения атмосферы и Солнца, $\alpha = v, h$. Ни излучение атмосферы, ни излучение Солнца в микроволновом диапазоне не являются поляризованными. Заметим также, что

излучение атмосферы в отличие от солнечного не зависит от азимутального угла ϕ . Предположим теперь, что подстилающая поверхность является чернотельной. Такое допущение, во-первых, предпочтительнее использования френелевского приближения для случая сильно шероховатой поверхности, каковой является земля на $\lambda = 3$ мм, и во-вторых, позволяет считать все внешнее излучение, падающее на облачный слой как снизу, так и сверху, неполяризованным, а все поляризационные характеристики излучения облаков относить на счет рассеивающих свойств частиц, находящихся внутри облачного слоя. С учётом сказанного, на нижней границе облака имеем:

$$I_{\alpha}(\theta, z_1) = \frac{k_B}{\lambda^2} \{T_{\text{пов}} \exp(-k_{\text{атм}} z_1 \sec \theta) + T_{\text{эфф}} (1 - \exp(-k_{\text{атм}} z_1 \sec \theta))\}, \quad (7)$$

где $k_{\text{атм}}$ — средний коэффициент поглощения атмосферных газов в подоблачном слое, $T_{\text{пов}}$ — температура поверхности Земли, $T_{\text{эфф}}$ — эффективная температура атмосферы в подоблачном слое. Компоненты U и V вектора интенсивности излучения в (6) и (7) равны нулю.

Все написанное выше представляет собой постановку задачи моделирования излучения облака, содержащего случайным образом распределённые и статистически не связанные друг с другом частицы. Поскольку в большинстве случаев мы наблюдаем облака смешанного типа, в которых помимо кристаллов присутствует еще и значительное количество мелкокапельной влаги [4], усреднение величин, входящих в (5), должно выполняться с учетом этого обстоятельства. Согласно данным наблюдений [13] максимальные размеры ледяных частиц в облаках могут достигать $1 \div 2$ мм, а поскольку лед практически не поглощает излучение с длиной волны $\lambda = 3$ мм, среднее альbedo кристаллической фазы по мере увеличения характерного размера частиц очень быстро становится сравнимым с единицей.

В реальной ситуации альbedo, характеризующее смешанные облака, будет значительно меньше альbedo, относящегося исключительно к фракции кристаллических частиц. Продemonстрируем это на численном примере. Воспользуемся функцией вида

$$n(D) = AD^a \exp(-BD^b), \quad (8)$$

где A , B , a и b — некоторые постоянные для описания распределения облачных частиц по размерам. Под величиной D будем понимать максимальный размер частиц той или иной формы (в случае мелкокапельной фракции D соответствует диаметру капли). Параметры a и b задаются исходя из эмпирических кривых распределений облачных частиц по размерам, а постоянные A и B выражаются через них и через такие наглядные величины, характеризующие распределение, как удельная водность w (в случае кристаллической фазы эту величину обычно называют ледностью) и так называемый модальный размер d_m — величину, при которой функция (8) принимает максимальное значение [7].

На рис. 4 приведена зависимость альbedo единицы объема облачной среды ϖ_{α} с ледностью $w_l = 0,05$ г/м³ при однократном рассеянии от величины модального размера горизонтально ориентированных пластинчатых кристаллов для различной водности w_v (кривая 1 — вакуум, 2 — $w_v = 0,01$ г/м³, 3 — $w_v = 0,05$ г/м³) при наблюдении в зенит. Эта зависимость получена двумя способами: на основе численного метода взаимодействующих диполей [14], позволяющего описывать рассеивающие свойства частиц сложной формы в резонансной области (сплошные кривые) и с использованием аналитических формул [15] рэлеевского приближения (штриховые кривые). Отношение величины малой d и

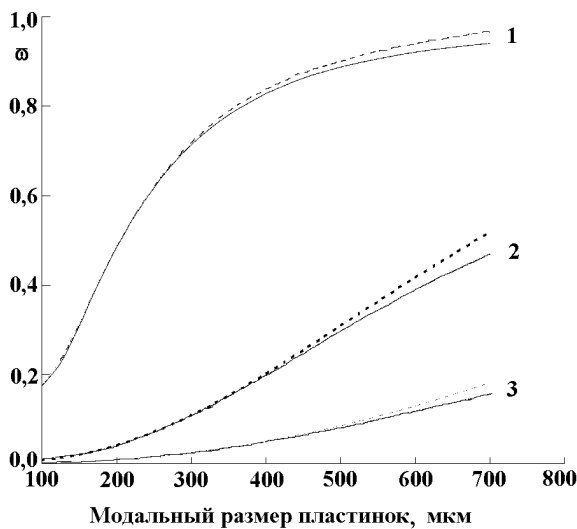


Рис. 4

большой D осей сплюснутых сфероидов задавалось исходя из соотношения [13] $d = 2,02D^{0,449}$, характерного для пластинчатых кристаллов, параметры распределения капель выбраны равными $a = 2$, $b = 1$, $d_m = 10$ мкм. По мере заполнения облака жидкокапельной фракцией среднее альбедо облачной среды падает, что вполне объяснимо, поскольку характерные размеры почти всех капель соответствуют режиму рэлеевского рассеяния, где доминирующую роль играет поглощение. Заметим, что водность облака влияет также и на среднее альбедо, рассчитанное двумя способами: чем больше водность, тем шире диапазон характерных размеров кристаллов, в котором можно пользоваться приближением Рэлея без ущерба для точности вычислений (указанное наблюдение будет использовано ниже при вычислении поляризационного контраста в рэлеевском приближении). Малые значения альбедо ϖ_α , обусловленные значительным поглощением в облачных каплях, позволяют избежать численного решения уравнения переноса (5) и ограничиться аналитическим решением в первом порядке теории многократного рассеяния, которое можно получить методом последовательных итераций. Предполагая наличие азимутальной симметрии в пространственной ориентации ледяных сфероидов, можно получить достаточно простое выражение для компонент яркостной температуры нисходящего излучения облака на его нижней границе (без учета влияния Солнца):

$$\begin{aligned}
 T_\alpha^\alpha(\pi - \theta, z_1) = & T_{\alpha, \text{атм}}(\pi - \theta, z_2) \exp(-k_{\text{осл}}^\alpha(\pi - \theta) \Delta z \sec \theta) + \\
 & + T(1 - \exp(-k_{\text{осл}}^\alpha(\pi - \theta) \Delta z \sec \theta) (1 - \varpi_\alpha^2(\pi - \theta)) + \\
 & + \sec \theta \sum_{\beta=v, h} \int_0^{\pi/2} d\theta' \sin \theta' \left\{ Q_{\alpha\beta}(\pi - \theta, \theta') [\tilde{T}_\alpha(\theta', z_1) - T k_{\text{пог}}^\beta(\theta') / k_{\text{осл}}^\beta(\theta')] \times \right. \\
 & \times \frac{1 - \exp(-(k_{\text{осл}}^\alpha(\pi - \theta) \sec \theta + k_{\text{осл}}^\beta(\theta') \sec \theta') \Delta z)}{k_{\text{осл}}^\alpha(\pi - \theta) \sec \theta + k_{\text{осл}}^\beta(\theta') \sec \theta'} + \\
 & + Q_{\alpha\beta}(\pi - \theta, \pi - \theta') [T_{\alpha, \text{атм}}(\pi - \theta', z_2) - T k_{\text{пог}}^\beta(\pi - \theta') / k_{\text{осл}}^\beta(\pi - \theta')] \times \\
 & \times \left. \frac{1 - \exp(-(k_{\text{осл}}^\beta(\pi - \theta') \sec \theta' - k_{\text{осл}}^\alpha(\pi - \theta) \sec \theta) \Delta z)}{k_{\text{осл}}^\beta(\pi - \theta') \sec \theta' - k_{\text{осл}}^\alpha(\pi - \theta) \sec \theta} \exp(-k_{\text{осл}}^\alpha(\pi - \theta) \Delta z \sec \theta) \right\}. \quad (9)
 \end{aligned}$$

Здесь $Q_{\alpha\beta}$ — соответствующие компоненты усредненной по азимутальному углу фазовой матрицы облачных частиц, $k_{\text{осл}}^v(\theta)$ и $k_{\text{осл}}^h(\theta)$ — первый и второй диагональные элементы матрицы ослабления в условиях азимутальной симметрии, $k_{\text{пог}}^\alpha(\theta)$ — соответствующая компонента вектора коэффициента поглощения внутри облака (см. Приложение), $\tilde{T}_\alpha(\theta, z_1)$ — яркостная температура восходящего излучения подоблачного слоя (см. (7)), T — термодинамическая температура облачных частиц, $\Delta z = z_2 - z_1$ — толщина облачного слоя. Компоненты измеряемой яркостной температуры на поверхности Земли ($z = 0$)

$$T_\alpha^\alpha(\pi - \theta, 0) = T_\alpha^\alpha(\pi - \theta, z_1) \exp(-k_{\text{атм}} z_1 \sec \theta) + T_{\text{эфф}} (1 - \exp(-k_{\text{атм}} z_1 \sec \theta)). \quad (10)$$

На рис. 5 и 6 представлена угловая зависимость поляризационного контраста $\Delta T_\alpha = T_\alpha^v - T_\alpha^h$, обусловленного облаком смешанного типа толщиной 2 км, нижняя граница которого расположена на высоте 1 км над поверхностью Земли. Водность облака полагалась равной характерному значению $w_b = 0,05$ г/м³, которое обычно встречалось во время наблюдений. Рис. 5 соответствует фракции горизонтально ориентированных пластинок с параметрами распределения по размерам $a = 5$, $b = 1$, $d_m = 500$ мкм, рис. 6 — вертикально ориентированным иглам с параметрами распределения $a = 5$, $b = 1$, $d_m = 700$ мкм. Выбор $a = 5$ отвечает достаточно узкому распределению кристаллов по размерам. Связь между длиной игл D и их диаметром d задавалась в виде [13] $d = 1,099D^{0,611}$. Кривая 1 на рис. 5, 6 соответствует ледности $w_l = 0,05$ г/м³, кривая 2 — $w_l = 0,1$ г/м³, кривая 3 — $w_l =$

$= 0,2 \text{ г/м}^3$. Заметим, что если первое значение ледности согласно [16] можно считать типичным, то значения $0,1 \text{ г/м}^3$ и $0,2 \text{ г/м}^3$, которые встречаются лишь примерно в 12 % случаев, являются, скорее, аномальными.

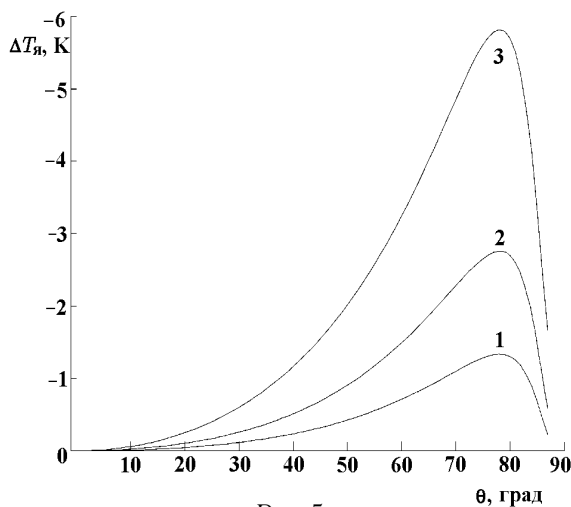


Рис. 5

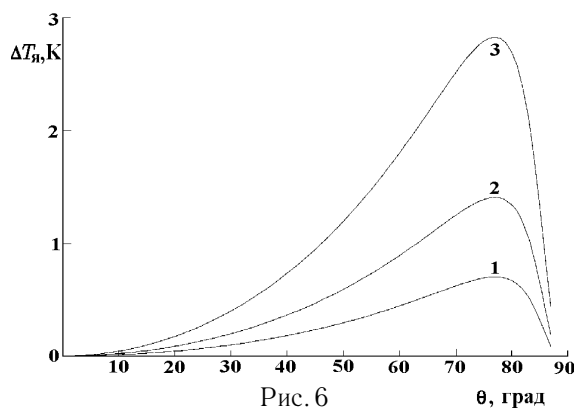


Рис. 6

На всех кривых существует характерный завал, связанный с почернением облачной атмосферы на больших зенитных углах наблюдения, когда полная толщина атмосферы близка к единице. Для зимних условий диапазон таких оптимальных углов лежит в интервале $70 \div 80^\circ$ в зависимости от водозапаса облаков. Рост доли кристаллической фракции внутри облака увеличивает поляризационный контраст на всех углах, причем на углах наблюдения, близких к оптимальному, это увеличение наиболее значительно. Нетрудно видеть, что наблюдаемые в эксперименте поляризационные контрасты $|\Delta T_{\text{я}}| \leq 3 \text{ K}$ можно объяснить в рамках рассмотренной модели, не прибегая к значениям ледности, выходящим за пределы реально существующих. Поляризационные же контрасты большей величины следует отнести к редким случаям, которые могут реализоваться, по-видимому, лишь при больших размерах кристаллов. Все эти выводы, разумеется, относятся лишь к той модели, которая была принята нами в расчетах. Исследование облаков с малой водностью и, в частности, чисто кристаллических облаков, а также распределений, содержащих кристаллы большого размера, в рамках рассмотренной модели корректно провести невозможно. Такой анализ требует общего подхода к решению уравнения переноса (5) без оглядки на величину среднего альбеда облачной среды и характерный размер кристаллов и может быть проведен на основе численного решения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Экспериментально обнаруженную поляризацию теплового микроволнового излучения облачной атмосферы со средней величиной поляризационного контраста $|\Delta T_{\text{я}}| \leq 3 \text{ K}$ можно объяснить эффектами рассеяния излучения на ориентированных в конвективных потоках и электрических полях ледяных кристаллах плоской или продолговатой формы. Удовлетворительная интерпретация экспериментальных данных может быть получена на основе модели переноса микроволнового излучения в смешанных облаках, содержащих помимо кристаллических частиц также мелкокапельную фракцию переохлажденной воды. Замечая, что усредненное по распределениям частиц обеих фракций альбеда остается малым даже несмотря на значительный размер ледяных кристаллов, можно воспользоваться аналитическим решением уравнения переноса излучения (5), полученным в первом порядке теории многократного рассеяния.

Корректная интерпретация случаев аномально больших поляризационных контрастов, тем не менее, требует учета эффектов многократного рассеяния излучения на ледяных кристаллах произвольной

формы без всякой привязки к среднему альбедо среды и дифракционному параметру частиц и может быть дана на основе численного решения векторного уравнения переноса (5), например, методом дискретных ординат [7].

ПРИЛОЖЕНИЕ

Элементы матрицы ослабления и фазовой матрицы полностью определяются комплексными амплитудами рассеяния $f_{\alpha\beta}(\theta, \phi; \theta', \phi')$, образующими матрицу 2×2 . Матрица ослабления выражается через элементы матрицы комплексных амплитуд рассеяния вперед следующим образом [15]:

$$\hat{k}_{\text{осл}}(\theta, \phi) = \lambda n_0 \begin{pmatrix} 2 \operatorname{Im}\langle f_{\text{vv}} \rangle & 0 & \operatorname{Im}\langle f_{\text{vh}} \rangle & -\operatorname{Re}\langle f_{\text{vh}} \rangle \\ 0 & 2 \operatorname{Im}\langle f_{\text{hh}} \rangle & \operatorname{Im}\langle f_{\text{hv}} \rangle & \operatorname{Re}\langle f_{\text{hv}} \rangle \\ 2 \operatorname{Im}\langle f_{\text{hv}} \rangle & 2 \operatorname{Im}\langle f_{\text{vh}} \rangle & \operatorname{Im}\langle f_{\text{vv}} + f_{\text{hh}} \rangle & \operatorname{Re}\langle f_{\text{vv}} - f_{\text{hh}} \rangle \\ 2 \operatorname{Re}\langle f_{\text{hv}} \rangle & -2 \operatorname{Re}\langle f_{\text{vh}} \rangle & \operatorname{Re}\langle f_{\text{hh}} - f_{\text{vv}} \rangle & \operatorname{Im}\langle f_{\text{vv}} + f_{\text{hh}} \rangle \end{pmatrix}. \quad (\text{П.1})$$

Здесь $f_{\alpha\beta} = f_{\alpha\beta}(\theta, \phi; \theta', \phi')$, n_0 — концентрация частиц, а угловые скобки обозначают статистическое усреднение по ориентации и распределению частиц по размерам. Фазовая матрица выражается через билинейные комбинации элементов матрицы комплексных амплитуд $f_{\alpha\beta}(\theta, \phi; \theta', \phi')$, описывающих рассеяние волны с поляризацией β и направлением (θ', ϕ') в поляризацию α и направление (θ, ϕ) :

$$\begin{aligned} \hat{P}(\theta, \phi; \theta', \phi') = \\ = n_0 \begin{pmatrix} \langle |f_{\text{vv}}|^2 \rangle & \langle |f_{\text{vh}}|^2 \rangle & \operatorname{Re}\langle f_{\text{vv}} f_{\text{vh}}^* \rangle & -\operatorname{Im}\langle f_{\text{vv}} f_{\text{vh}}^* \rangle \\ \langle |f_{\text{hv}}|^2 \rangle & \langle |f_{\text{hh}}|^2 \rangle & \operatorname{Re}\langle f_{\text{hv}} f_{\text{hh}}^* \rangle & -\operatorname{Im}\langle f_{\text{hv}} f_{\text{hh}}^* \rangle \\ 2 \operatorname{Re}\langle f_{\text{vv}} f_{\text{hv}}^* \rangle & 2 \operatorname{Re}\langle f_{\text{vh}} f_{\text{hh}}^* \rangle & \operatorname{Re}\langle f_{\text{vv}} f_{\text{hh}}^* + f_{\text{vh}} f_{\text{hv}}^* \rangle & -\operatorname{Im}\langle f_{\text{vv}} f_{\text{hh}}^* - f_{\text{vh}} f_{\text{hv}}^* \rangle \\ 2 \operatorname{Im}\langle f_{\text{vv}} f_{\text{hv}}^* \rangle & 2 \operatorname{Im}\langle f_{\text{vh}} f_{\text{hh}}^* \rangle & \operatorname{Re}\langle f_{\text{vv}} f_{\text{hh}}^* + f_{\text{vh}} f_{\text{hv}}^* \rangle & \operatorname{Re}\langle f_{\text{vv}} f_{\text{hh}}^* - f_{\text{vh}} f_{\text{hv}}^* \rangle \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{П.2})$$

Элементы вектора источника собственного теплового излучения частиц имеют вид $\mathbf{J}(\theta, \phi, z) = k_B \lambda^{-2} \times \times \mathbf{k}_{\text{пог}}(\theta, \phi) T(z)$, где $\mathbf{k}_{\text{пог}}(\theta, \phi) = (k_{\text{пог1}}(\theta, \phi), k_{\text{пог2}}(\theta, \phi), k_{\text{пог3}}(\theta, \phi), k_{\text{пог4}}(\theta, \phi))^T$ — вектор поглощения в направлении рассеяния (θ, ϕ) , компоненты которого выражаются через элементы матрицы ослабления и фазовой матрицы:

$$k_{\text{пог1}}(\theta, \phi) = k_{\text{осл11}}(\theta, \phi) - \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^\pi d\theta' \sin \theta' [P_{11}(\theta', \phi'; \theta, \phi) + P_{21}(\theta', \phi'; \theta, \phi)], \quad (\text{П.3})$$

$$k_{\text{пог2}}(\theta, \phi) = k_{\text{осл22}}(\theta, \phi) - \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^\pi d\theta' \sin \theta' [P_{12}(\theta', \phi'; \theta, \phi) + P_{22}(\theta', \phi'; \theta, \phi)], \quad (\text{П.4})$$

$$k_{\text{пог3}}(\theta, \phi) = 2 \left\{ k_{\text{осл13}}(\theta, \phi) + k_{\text{осл23}}(\theta, \phi) - \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^\pi d\theta' \sin \theta' [P_{13}(\theta', \phi'; \theta, \phi) + P_{23}(\theta', \phi'; \theta, \phi)] \right\}, \quad (\text{П.5})$$

$$k_{\text{пог4}}(\theta, \phi) = -2 \left\{ k_{\text{осл14}}(\theta, \phi) + k_{\text{осл24}}(\theta, \phi) - \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^\pi d\theta' \sin \theta' [P_{14}(\theta', \phi'; \theta, \phi) + P_{24}(\theta', \phi'; \theta, \phi)] \right\}. \quad (\text{П.6})$$

Формула (9) для компонент яркостной температуры нисходящего излучения облака была получена в предположении, что облачная среда с частицами является статистически азимутально симметричной. Это означает, что для перекрёстных компонент амплитудной матрицы рассеяния выполняется следующее соотношение: $\langle f_{\text{hv}}(\theta, \phi; \theta, \phi) \rangle = \langle f_{\text{vh}}(\theta, \phi; \theta, \phi) \rangle = 0$. В условиях азимутальной симметрии третья и четвёртая компоненты вектора Стокса равны нулю ($U = V = 0$), а оставшиеся две (I_v и I_h) не зависят от азимутального угла ϕ . Последнее обстоятельство позволяет аналитически выполнить интегрирование по углу ϕ' под знаком интеграла в (5) и перейти к двухкомпонентному уравнению переноса излучения [7], где вместо 4×4 матрицы $\hat{P}(\theta, \phi; \theta', \phi')$ фигурирует левая верхняя 2×2 подматрица

матрицы $\hat{Q}(\theta, \theta') = \int_0^{2\pi} d\phi' \hat{P}(\theta, \phi; \theta', \phi')$, вместо матрицы ослабления общего вида (П.1) — матрица $\text{diag}(k_{\text{осл}}^v(\theta), k_{\text{осл}}^h(\theta))$, где $k_{\text{осл}}^v(\theta) = 4\lambda n_0 \text{Im}\langle f_{vv} \rangle$ и $k_{\text{осл}}^h(\theta) = 4\lambda n_0 \text{Im}\langle f_{hh} \rangle$, а вместо 4-х компонентного вектора поглощения $k_{\text{пог}}(\theta, \phi)$ — вектор поглощения с компонентами:

$$k_{\text{пог}}^v(\theta) = k_{\text{осл}}^v(\theta) - \int_0^\pi d\theta' \sin \theta' [Q_{vv}(\theta', \theta) + Q_{hv}(\theta', \theta)], \quad (\text{П.7})$$

$$k_{\text{пог}}^h(\theta) = k_{\text{осл}}^h(\theta) - \int_0^\pi d\theta' \sin \theta' [Q_{vh}(\theta', \theta) + Q_{hh}(\theta', \theta)]. \quad (\text{П.8})$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 00-02-16037).

ЛИТЕРАТУРА

1. Башаринов А. Е., Гурвич А. С., Егоров С. Т. Радиоизлучение Земли как планеты. — М.: Наука, 1974.
2. Степаненко В. Д., Шукин Г. Г., Бобылев Л. П., Матросов С. Ю. Радиотеплолокация в метеорологии. — Л.: Гидрометеиздат, 1987.
3. Atmospheric Remote Sensing by Microwave Radiometry / Ed. by Michail A. Jansen. J. Wiley Sons. Inc., 1993.
4. Облака и облачная атмосфера: Справочник. — Л.: Гидрометеиздат, 1989.
5. Цетлин Н. М. Методы измерения характеристик антенн СВЧ. — М.: Радио и связь, 1985.
6. Троицкий А. В., Ошарин А. М. // Тезисы симпозиума «Атмосферная радиация», С.-Петербург, 1999.
7. Tsang L., Kong J. A., Shin R. T. Theory of microwave remote sensing. — NY.: Wiley, 1985.
8. Мучник В. М. Физика грозы. — Гидрометеиздат, 1974.
9. Growther A. G., Saunders C. P. R. // Meteor. Soc. Japan. 1973. V. 51, № 5. P. 318.
10. Колдаев А. В., Мельничук Ю. В., Ошарин А. М., Троицкий А. В. // Изв. вуз. Радиофизика. 1999. Т. 42, № 6. С. 528.
11. Троицкий А. В. // Изв. вуз. Радиофизика. 1993. Т. 36, № 5. С. 459.
12. Бызова Н. Л., Иванов В. Н., Гаргер Е. И. Турбулентность в пограничном слое атмосферы. — Л.: Гидрометеиздат, 1989.
13. Auer A. H., Veal D. L. // J. Atmos. Sci. 1970. V. 27, № 6. P. 422.
14. Ошарин А. М. // Изв. вуз. Радиофизика. 1998. Т. 41, № 4. С. 446.
15. Tsang L., Ding K.-H. // IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing. 1991. V. 29, № 2. P. 242.
16. Матвеев Л. Т. Курс общей метеорологии. Физика атмосферы. — Л.: Гидрометеиздат, 1984.

Научно-исследовательский
радиофизический институт,
г. Н. Новгород, Россия

Поступила в редакцию
14 октября 1999 г.

POLARIZATION OF THERMAL MICROWAVE RADIATION OF THE CLOUDY ATMOSPHERE*A. V. Troitsky and A. M. Osharin*

We present the results of the experimental studies of the microwave radiation of the cloudy atmosphere indicating the presence of significant polarization contrasts in the radiation of the winter-spring clouds. The interpretation of the experimental data is made on the basis of a model of microwave radiation transfer in mixed-type clouds consisting of crystals and supercooled water drops.

УДК 621.3/.535.2

ВРЕМЕННОЕ РАЗРЕШЕНИЕ В РАДИО-, СЕЙСМО- И АКУСТИЧЕСКОЙ ЛОКАЦИИ **В. А. Зверев*

Рассмотрена возможность использования в целях локации монохроматического зондирующего сигнала, модулированного по амплитуде медленно изменяющейся функцией. Показано, что такой зондирующий сигнал при традиционной обработке должен рассматриваться как узкополосный, не обеспечивающий высокого временного разрешения, а при иной, тоже известной обработке этот зондирующий сигнал позволяет получить более высокое разрешение, соответствующее всей ширине его спектра. При этом отношение сигнала к шуму определяется максимумом зондирующего сигнала, а разрешение определяется шириной спектра, взятой на уровне его минимума. Обсуждены спектральный и кепстральный методы получения высокого временного разрешения. Проведено сопоставление рассмотренных методов получения высокого временного разрешения при локации с методами формирования изображений монохроматическим волновым полем.

ВВЕДЕНИЕ

На заре развития радиолокации в качестве зондирующего сигнала использовался прямоугольный импульс с монохроматическим заполнением. Разрешающая способность локатора по времени тогда определялась длительностью импульса: чем короче импульс, тем выше разрешающая способность. В дальнейшем начался следующий этап развития локации, когда разрешение отраженных сигналов во времени стало получаться существенно меньшим длительности импульса. Для того, чтобы увеличить разрешение, зондирующий сигнал модулировался внутри импульса по частоте, что расширяло его спектр, тем самым увеличивая временное разрешение. Интервал временного разрешения лоцируемых сигналов равен обратной ширине спектра зондирующего импульса [1]. Это справедливо как для импульса с монохроматическим заполнением, который для расширения полосы должен быть достаточно коротким, так и для импульса с широкополосным заполнением.

Универсальное соотношение между интервалом временного разрешения $\Delta\tau$ и шириной спектра зондирующего сигнала $\Delta\omega$ имеет следующий простой вид [1]:

$$\Delta\tau = 2\pi/\Delta\omega. \quad (1)$$

Соотношение (1) следует непосредственно из математического определения спектра на основе преобразования Фурье и поэтому нерушимо. В рамках этого соотношения возможна еще одна модификация зондирующего сигнала. Речь идёт о сигнале, имеющем вид затухающего синусоидального сигнала (ЗСС). Типичным примером ЗСС является отклик колебательного контура на импульсное воздействие. ЗСС справедливо считается узкополосным, так как медленная по сравнению с периодом высокой частоты модуляция амплитуды слабо расширяет его спектр. Если не иметь в виду специальную математическую обработку ЗСС, а ограничиться только теми видами обработки, которые применяются для сигналов с монохроматическим или широкополосным заполнением, то под шириной спектра такого сигнала $\Delta\omega$ в формуле (1) следует понимать эффективную ширину спектра по уровню 3 дБ. Эта ширина определяется скоростью уменьшения уровня сигнала и при достаточно медленном спаде высокого временного разрешения не обещает.

* Доклад на научном семинаре радиофизического факультета Нижегородского государственного университета 04.11.99.

Полная ширина спектра ЗСС по его самому низкому уровню теоретически бесконечна, а практически определяется той частотой, с которой этот сигнал проквантован при вводе в вычислительное устройство. Среди хорошо известных методов выделения сигналов существуют такие, для которых в соотношение (1) входит не эффективная ширина спектра зондирующего сигнала, а его полная ширина. В результате применения этих методов может быть получено высокое разрешение при использовании зондирующего сигнала, считающегося узкополосным. Ниже рассматриваются и сравниваются между собой два способа обработки принимаемого локационного сигнала, для которых в соотношении (1) работает полная ширина спектра зондирующего сигнала.

1. ОБРАБОТКА СИГНАЛА ДЕЛЕНИЕМ СПЕКТРОВ (ДС)

Чтобы привязать известные методы обработки сигналов к задаче обработки локационных сигналов, введем ряд определений. Условимся зондирующий сигнал лоатора считать откликом некоторого фильтра на импульсное воздействие. Пусть вид зондирующего сигнала будет $h(t)$. Спектр сигнала $h(t)$ является частотной характеристикой фильтра $z(\omega)$. Идеальный сигнал лоатора является откликом на бесконечно узкий δ -импульс. Этот сигнал будем считать сигналом $x(t)$ на входе фильтра. Его спектр будет $C_x(\omega)$. Принимаемый лоатором сигнал является откликом отражателей на зондирующий импульс. Этот сигнал мы будем считать откликом фильтра $y(t)$ на входной сигнал $x(t)$. Спектр этого отклика будет $C_y(\omega)$. Между спектрами входного и выходного сигналов фильтра существует следующее известное соотношение:

$$C_y(\omega) = C_x(\omega)z(\omega). \quad (2)$$

В соотношении (2) известны $C_y(\omega)$ и $z(\omega)$, т. к. известны форма зондирующего сигнала и результат зондирования. На основе двух известных функций можно определить третью — спектр входного сигнала. По спектру входного сигнала можно восстановить сам входной сигнал. Формула восстановления входного сигнала выглядит так:

$$x(t) = \Phi^{-1} \left(\frac{C_y(\omega)}{z(\omega)} \right), \quad (3)$$

где $\Phi^{-1}(f(\omega))$ означает обратное преобразование Фурье от функции $f(\omega)$.

На рис. 1 представлен результат математического моделирования, выполненного по формуле (3). Вдоль горизонтальной оси отложено время в единицах квантования, по вертикали отложены для $x(t)$ — его уровень в дБ, а для $y(t)$ — линейная шкала. В качестве зондирующего сигнала была взята экспоненциально затухающая косинусоида — отклик резонансного контура на импульсное воздействие. На рисунке вверху показан сигнал $y(t)$, являющийся откликом лоатора. Ниже показан сигнал $x(t)$, являющийся результатом обработки по формуле (3) сигнала $y(t)$. Сигнал $x(t)$ был смоделирован несколькими импульсами, различающимися положением во времени и амплитудой. На рис. 1 как положения импульсов, так и их амплитуды получились в точности такими, какими были заданы при численном расчёте. Длительность импульсов составляла один интервал квантования, что эквивалентно δ -импульсу. На этом же рисунке виден широкополосный шум, добавленный к сигналу $y(t)$. Уровень добавленного шума составлял -60 дБ к максимуму сигнала $y(t)$. Такое же соотношение (как видно из рис. 1) получилось и после обработки сигнала. Получается, что энергетика сигнала, влияющая на отношение сигнала к шуму, определяется величиной максимального уровня зондирующего сигнала, а разрешение во времени — шириной спектра на минимальном его уровне! Сохранение отношения сигнала к шуму для сигнала $x(t)$ таким, каким оно было установлено для сигнала $y(t)$ не является удивительным. Дело в том, что в процессе обработки как сигнал, так и шум делятся на одну и ту же функцию. В силу этого соотношение между сигналом и шумом остаётся для сигнала $x(t)$ таким же, каким оно было задано для сигнала $y(t)$.

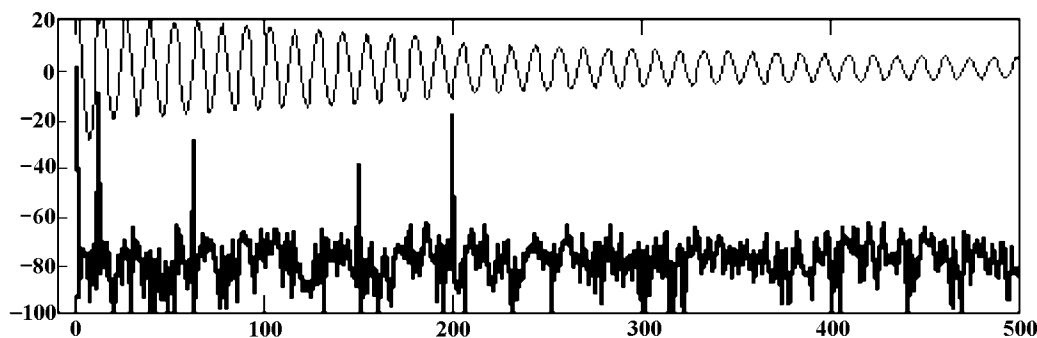


Рис. 1.

Покажем, что зондирующий сигнал в виде ЗСС является действительно узкополосным сигналом при существующих традиционных способах обработки принятого сигнала [1]. Будем это доказывать от противного. Пусть ЗСС в силу того, что он модулирован по амплитуде, является широкополосным сигналом. Основанием для такого допущения является то, что спектр ЗСС не обращается в нуль ни в одной точке всего рассматриваемого спектрального интервала. Обработаем его так, как принято обрабатывать широкополосные сигналы [1], а именно путём определения взаимной корреляции зондирующего и принятого сигналов по формуле

$$W(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)h(t - \tau) dt. \quad (4)$$

На рис. 2 изображён результат обработки сигнала по формуле (4) в том случае, когда в качестве зондирующего сигнала использовался шумоподобный сигнал, имеющий равномерный спектр в пределах всего используемого спектрального интервала. Вдоль горизонтальной оси отложено время τ в единицах квантования. По вертикали отложен уровень сигнала в дБ. На этом рисунке чётко видны два импульса, соответствующие положению моделируемых отражателей сигнала, при этом шум не добавлялся: внизу видна не шумовая дорожка, а боковые лепестки, получающиеся при корреляционной обработке сигналов [1]. На рис. 3 изображён результат точно такой же обработки точно так же модели-

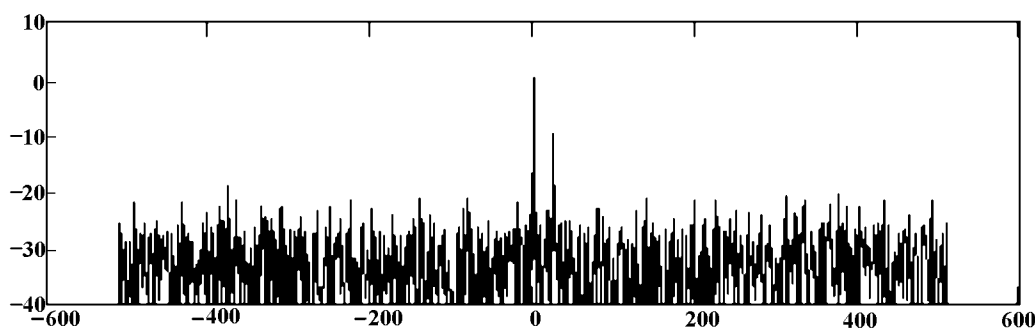


Рис. 2.

рованных сигналов, но с одним существенным изменением. В качестве зондирующего сигнала использовался ЗСС. Как видно из сравнения рис. 2 и 3, зондирование ЗСС не даёт тех результатов, которые следует ожидать при корреляционной обработке действительно широкополосного сигнала. Следовательно, для традиционной корреляционной обработки ЗСС должен рассматриваться как узкополосный сигнал. На рис. 4 приведён результат обработки тех же сигналов по формуле (3) (обозначения осей соответствуют рис. 1). Здесь ЗСС, безусловно, является широкополосным сигналом.

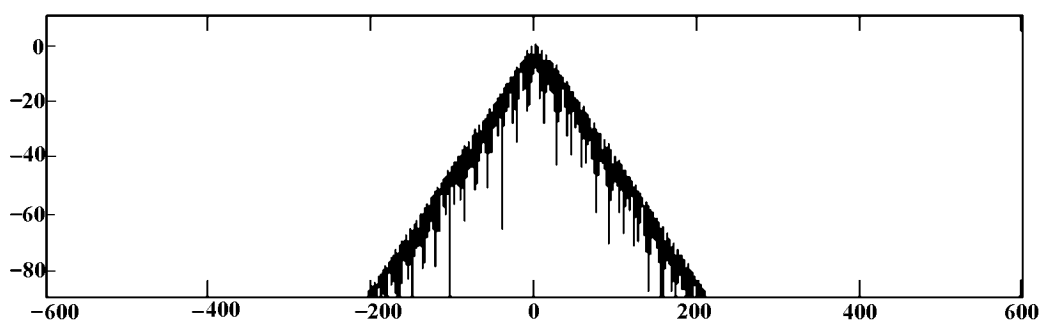


Рис. 3.

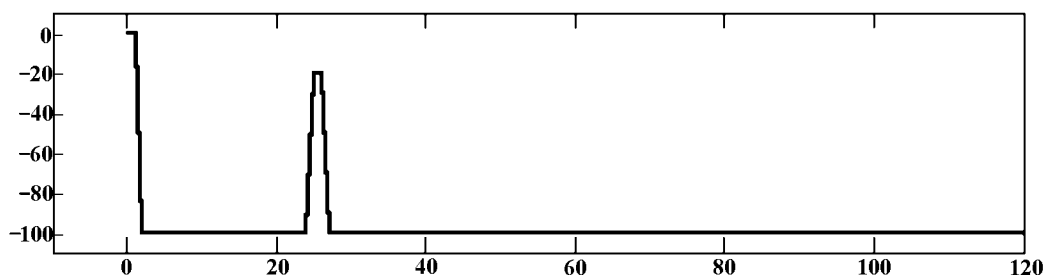


Рис. 4.

2. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРОЦЕДУРЫ КЕПСТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА ДЛЯ ЛОКАЦИИ С ПОМОЩЬЮ ЗСС

Соотношение (2) можно использовать иначе, не прибегая к операции деления спектра на спектр. Как принято поступать при комплексном кепстральном анализе [2], прологарифмируем (3). При этом получим:

$$\ln(C_y(\omega)) = \ln(C_x(\omega)) + \ln(z(\omega)). \quad (5)$$

Используемый в (5) логарифм от комплексной функции S означает следующую операцию [2]:

$$\ln S = \ln |S| + i \arg S. \quad (6)$$

Далее при кепстральном анализе полагается использовать различия в спектрах (кепстрах) двух слагаемых (5) с целью их разделения путём фильтрации [2]. В нашем случае разными спектрами (кепстрами) должны обладать логарифмы спектров отклика и принятого сигнала локатора. Это можно обеспечить специальными приёмами. Основным из них является выбор такого значения аргумента в функции (6), которое обеспечивает постоянное нахождение на одном листе этой многолистной многозначной периодической функции [2]. Для этого надо в моменты достижения этой функцией границ соответствующего лепестка добавлять к ней (или убавлять от неё) постоянное слагаемое 2π . Эта операция позволяет сделать спектры (кепстры) максимально низкочастотными. Однако этого ещё недостаточно для того, чтобы кепстры разделились по частоте. Для этого достаточно применить следующий приём. Надо перед логарифмированием принятого сигнала его задержать, дополнив нулями, и прибавить зондирующий сигнал такой амплитуды, чтобы его максимальное значение превышало бы максимум принятого задержанного сигнала. В результате такой операции кепстр сигнала смещается вверх по частоте на величину задержки, а по своей форме кепстр становится идентичным сигналу $x(t)$.

Сдвиг кепстра по частоте объясняется свойством преобразования Фурье превращать сдвиг функции в смещение её частоты. Кепстр приобретает вид сигнала $x(t)$ в результате добавления к задержанному сигналу достаточно интенсивного зондирующего сигнала $h(t)$. При этом аргумент суммарного сигнала становится близким к аргументу $h(t)$, изменяясь относительно него с частотой сигнала $x(t)$.

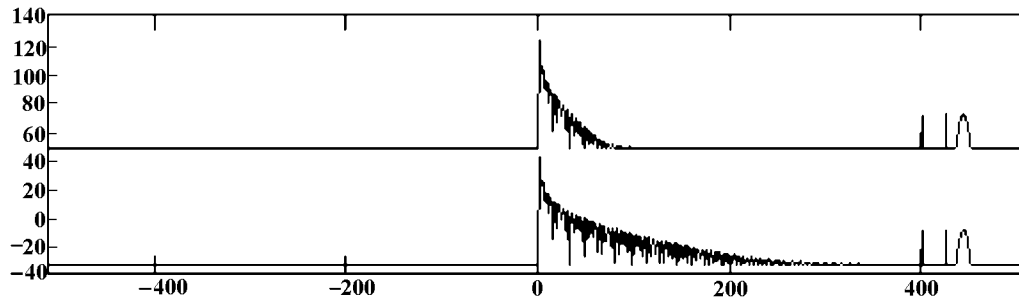


Рис. 5.

В результате кепстр суммы сигналов имеет вид, показанный на рис. 5. На этом рисунке показаны один под другим два кепстра, отличающиеся скоростью убывания амплитуды зондирующего сигнала со временем. Вдоль горизонтальной оси отложена частота (сачтота) с нулём в центре рисунка. По вертикали отложен уровень кепстра в дБ. Кепстр, имеющий более быстрый спад зондирующего сигнала, увеличен на 80 дБ. Низкочастотная часть кепстра содержит кепстр зондирующего сигнала, который в силу того, что аргумент превращён в однолиственную функцию, максимально узок. Выше по частоте (сачтоте), начиная с частоты (сачтоты), соответствующей задержке сигнала, виден кепстр входного сигнала, представляющего спектр от его спектра, равный $x(t)$. Кепстр входного сигнала отделяется от кепстра зондирующего сигнала фильтром. После этого каждый кепстр может быть подвергнут обратным преобразованиям (спектральному и потенцированию). Результат такого восстановления локационного сигнала приведён на рис. 6 (обозначения осей соответствуют рис. 1.) На нём изображён также модуль зондирующего сигнала в логарифмическом масштабе в дБ.

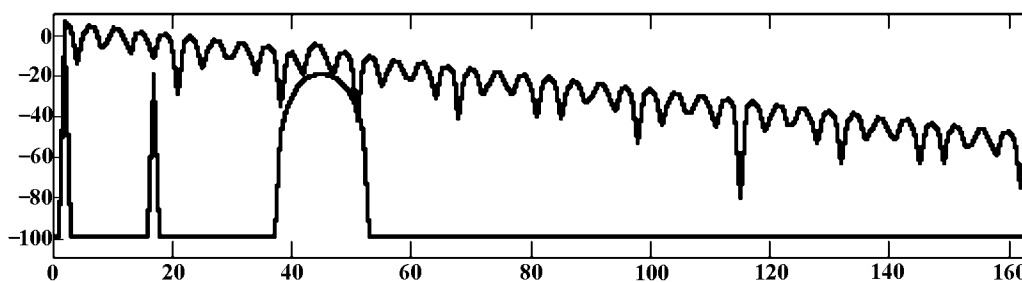


Рис. 6.

Полученный таким образом результат не отличается от результата, полученного путём деления спектров, ни по виду сигнала, ни по отношению сигнала к шуму. Отличие заключается только в самой процедуре получения исходного локационного отклика. Принципиальным отличием использованных процедур является то, что процедура ДС требует для своего осуществления отдельного канала, содержащего функцию $h(t)$ или её спектр. Кепстральная процедура основана на фильтрации. Её применение не требует отдельного канала для зондирующего сигнала. Его следует только добавить к задержанному сигналу ради изменения формы кепстра сигнала. В принципе, возможна такая ситуация, когда достаточно сильный зондирующий сигнал присутствует среди принятых отражённых сигналов, отличаясь от

них временем прихода, достаточным для отделения его кепстра от кепстра других отражённых сигналов. Для процедуры ДС этого недостаточно.

3. СВЯЗЬ ОПЕРАЦИИ ДЕЛЕНИЯ СПЕКТРОВ С ФОРМИРОВАНИЕМ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Существует весьма близкая аналогия между рассмотренным способом нахождения исходного локационного сигнала и теми преобразованиями полей, которые осуществляются при формировании изображений [3, 4]. Для описания изображения в монохроматическом волновом поле мы воспользуемся так называемой комплексной амплитудой волнового поля $p(x, y, z)$ [3, 4]. Здесь x, y, z — декартовы координаты точек пространства, модуль $p(x, y, z)$ является амплитудой волнового поля, а её аргумент — фазой. Если эту функцию задать на плоскости $z = 0$, то дальнейшее распространение поля вдоль оси z при $z > 0$ можно описать с помощью процесса фильтрации следующим образом [3, 4]:

$$G_z(u_1, u_2) = G_0(u_1, u_2)\zeta_z(u_1, u_2), \quad (7)$$

где u_1, u_2 — пространственные частоты, соответствующие координатам x, y ; $G_z(u_1, u_2)$ — фурье-спектр комплексной амплитуды в плоскости $z = \text{const}$; $G_0(u_1, u_2)$ — фурье-спектр комплексной амплитуды в плоскости $z = 0$, а $\zeta(u_1, u_2)$ — так называемая частотная характеристика свободного пространства, равная [3, 4]:

$$\zeta_z(u_1, u_2) = \exp \left\{ iz \sqrt{(2\pi/\lambda)^2 - u_1^2 - u_2^2} \right\}. \quad (8)$$

Здесь λ — длина волны. Формула (7) полностью эквивалентна соотношению (2). В силу этого она может быть использована для нахождения одного поля по известному другому. Это облегчается тем, что частотная характеристика свободного пространства, определяемая (8), известна. Примеры применения алгоритма (3) для нахождения волновых полей приведены в [3–5].

Особенностью, отличающей задачу распространения волн от локационной, является не только то, что частотная характеристика свободного пространства является заданной функцией и всегда известна, а и вид (8) этой функции: модуль её равен единице для всех распространяющихся волн, и её спектр расширяется за счёт фазы. В ЗСС дело обстоит как раз наоборот. В этом сигнале фаза практически постоянна (изменение фазы во всём спектре укладывается в интервал 2π), а спектр расширяется за счёт изменения амплитуды. Поэтому ЗСС для традиционной локации является узкополосным сигналом. Для определения функции $x(t)$ нельзя использовать традиционный алгоритм свёртки (4). При отыскании распределений комплексных амплитуд (изображений [3]) применимы оба алгоритма, как (4), так и (3). Поэтому для описания распространения волн в свободном пространстве (все наиболее интересные случаи преобразования изображений могут быть сведены к этому [3, 4]) можно применять метод, основанный на соотношении (4), с таким же успехом, как и метод, основанный на соотношении (3). Следствием этого является существование двух различных трактовок получения радиоизображений с помощью синтезируемой апертуры. Подход, основанный на соотношении (4), ближе радиоспециалистам и весьма широко распространён [6]. В работах [3, 4] (и по-видимому только там) изложен подход к формированию радиоизображений с помощью апертурного синтеза на основе соотношения (3), который должен быть ближе оптикам.

Автор благодарен А. В. Гапонову-Грехову и В. И. Таланову за обсуждение материала, изложенного в этой статье на уровне зарождения идеи. Автор глубоко признателен Ю. М. Заславскому и А. М. Рейману за предоставленные экспериментальные данные, позволившие убедиться, что выполненное в статье математическое моделирование соответствует реальным условиям эксперимента в сейсмо- и ультразвуковой локации. Автор благодарен также Н. С. Степанову, А. Н. Малахову и другим участникам семинара, принявшим участие в дискуссии. Работа поддержана РФФИ (проекты № 00–15–96741 и 99–02–16401).

ЛИТЕРАТУРА

1. Современная радиолокация: Пер. с англ. / Под редакцией Ю. Б. Кобзарева. — М.: Сов. радио., 1969.
2. Oppenheim A. V., Schafer R. W., Stockham T. G. // IEEE Trans. Audio and Electroacoustics. 1968. V. AU-16, № 3.
3. Зверев В. А. Радиооптика. — М.: Сов. радио, 1975.
4. Зверев В. А. Физические основы формирования изображений волновыми полями. — Н. Новгород: ИПФ РАН, 1998. — 252 с.
5. Зверев В. А., Славинский М. М. // Акустический журнал. 1997. Т. 43, № 1. С. 67.
6. Leith E. N. // Proc. IEEE. 1971. V. 59, № 9. P. 1305.

Институт прикладной физики РАН,
г. Н. Новгород, Россия

Поступила в редакцию
17 ноября 1999 г.

TEMPORAL RESOLUTION IN RADIO, SEISMIC, AND ACOUSTIC DETECTION AND RANGING

V. A. Zverev

We consider the possibility of using a monochromatic signal modulated in amplitude by a slowly varying function for detection and ranging purposes. It is shown that in the framework of traditional processing techniques, such a sounding signal should be treated as narrow-band which cannot provide high temporal resolution. At the same time, processing of such a signal by another well-known technique allows one to achieve better temporal resolution corresponding to the total width of the signal spectrum. In the latter case, the signal-to-noise ratio is determined by the maximum of the sounding signal, while the resolution is determined by the spectrum width measured at the level of its minimum. The considered methods for obtaining high temporal resolution in detection and ranging are compared to the methods of image formation using a monochromatic wave field.

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОСВЕЩЁННЫХ УЧАСТКОВ СЛУЧАЙНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Ю. А. Чернов

Рассматриваются изменения в статистических характеристиках, вызванные затенениями при наклонном освещении случайной поверхности. Показано, что появление затенений и разрывов высот освещённой части вызывает искажение её функции распределения высот и обострение автокорреляционной функции видимой части поверхности. В пределе эта функция стремится к экспоненциальной при произвольной автокорреляционной функции исходной реальной поверхности.

ВВЕДЕНИЕ

В ряде задач, связанных с рассеянием волн на случайной поверхности, требуется учёт самозатенений её отдельных элементов, возникающих при наклонном облучении.

Этот вопрос исследовался во многих работах, достаточно полное их обобщение приведено в [1]. Однако в известных результатах выражения для мощности рассеянного излучения в приближении геометрической оптики получены с рядом существенных упрощений, что, в частности, проявилось в отсутствии в них частотной зависимости. Для её сохранения требуется более полный анализ рассеяния с использованием как обычно рассматриваемых распределений высот и наклонов поверхности [1–3], так и автокорреляционной функции видимой части поверхности, образованной совокупностью освещённых участков. Если при наличии затенений рассматривать только освещённые участки, то статистические характеристики, соответствующие этой части поверхности, по сравнению с исходными деформируются: симметричные распределения становятся несимметричными, а автокорреляционная функция заостряется, так как поверхность претерпевает разрывы освещённости.

Известные работы по рассеянию оканчивались неразрешимыми противоречиями из-за использования фиксированных (заданных) статистических характеристик, относящихся к рассматриваемой физической поверхности. Несмотря на блестящие математические находки в статьях последних двух десятилетий, неприятие экспоненциальной функции корреляции не позволило существенно продвинуть теоретические изыскания к сближению расчётных результатов с экспериментальными. Путь сближения теоретических результатов с реально наблюдаемыми — уточнение характеристик поверхности, ответственных за формирование поля рассеяния.

Учёт затенений и связанных с ним разрывом освещённости является наиболее существенным отличием предпринятого исследования от выполненных ранее.

Ниже приводится один из возможных вариантов получения поправки к первоначальному распределению высот поверхности и функции автокорреляции с приемлемой для практики точностью. Получены и оценены также другие статистические параметры, характеризующие освещённую часть поверхности (в рассматриваемой модели неосвещённая часть поверхности участия в создании поля рассеяния практически не принимает). Анализ относится к стационарной поверхности, обладающей средней плоскостью, конечной дисперсией высот и функцией автокорреляции.

1. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ЗАТЕНЁННЫХ УЧАСТКОВ

Исходную поверхность будем считать нормальной, с нормальным распределением наклонов. Начальную часть анализа сформулируем так, как она изложена в [4]. Воспользуемся полученным в [4] выражением для вероятности $S(\xi_0, p_0, q_0, \alpha, \tau)$ того, что точка поверхности с производными p_0 и q_0 по направлениям осей x и y на высоте ξ_0 от средней плоскости, облучаемая под углом α к средней плоскости, не будет затенена другим элементом поверхности на интервале τ по оси y в сторону источника, т. е. участок, свободный от затеняющего препятствия, будет не меньше τ (рис. 1):

$$S(\tau, \xi_0) = S(0) \exp \left\{ - \int_0^\tau g(t) dt \right\}, \quad (1)$$

где

$$g(\tau) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\mu}{\sigma} \frac{\Lambda(\mu) \exp[-(\xi_0 + \mu\tau)^2/(2\sigma^2)]}{2 - \operatorname{erf}[(\xi_0 + \mu\tau)/(\sqrt{2}\sigma)]}, \quad (2)$$

$$\Lambda(\mu) = \frac{1}{2} \left[\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sigma_\alpha}{\mu} \exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma_\alpha^2}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{\mu}{\sqrt{2}\sigma_\alpha}\right) \right], \quad (3)$$

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Здесь $S(0)$ равно единице, если $q_0 < \operatorname{tg} \alpha$, и нулю, если это не так, т. е. $S(0) = \theta(\mu - q_0)$; $\mu = \operatorname{tg} \alpha$, $\theta(x)$ — функция единичного скачка, σ и σ_α — стандартные отклонения высоты и наклона поверхности.

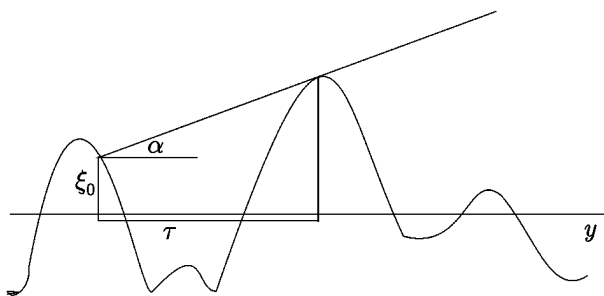


Рис. 1

Величина $S(\tau, \xi_0)$ как функция τ изменяется в пределах от нуля до единицы, поэтому, дифференцируя $S(\tau, \xi_0)$ по τ , можно получить плотность распределения τ для заданного уровня ξ_0 . Усредняя затем полученное распределение по τ , ξ_0 , p_0 и q_0 , получим среднее значение $\tau_{\text{ср}}$, необходимое, как будет видно ниже, для уточнения автокорреляционной функции поверхности с разрывами освещённости. Отметим, что усреднение по p_0 даёт множитель, равный единице, а усреднение по q_0 даёт множитель

$$G(\mu) = 1 - 0,5 \operatorname{erfc}(\mu/(\sqrt{2}\sigma_\alpha)) = F(\mu/\sigma_\alpha),$$

где $F(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$.

После интегрирования в (1) с учётом (2), (3) получим

$$S(\tau, \xi_0) = G(\mu) \left[\frac{F(\xi_0/\sigma)}{F((\xi_0 + \mu\tau)/\sigma)} \right]^\Lambda. \quad (4)$$

Если проинтегрировать (4) по ξ_0 и τ , то получим, как и в [4], вероятность S облучения элементов поверхности:

$$S = \frac{1 - \operatorname{erfc}(\mu/(\sqrt{2}\sigma_\alpha))/2}{\Lambda + 1} = \frac{F(\mu/\sigma_\alpha)}{\Lambda + 1}. \quad (5)$$

Отметим, что, как и следует из физических соображений, S не зависит от σ и при уменьшении угла α стремится к нулю.

Для дальнейших расчётов необходимо вычислить распределение вероятностей $W(\tau, \xi_0)$ длин затенённых участков, опирающихся на точки поверхности с высотой ξ_0 . Предварительно из (4) получим вероятность незатенения этих лучей на длине τ :

$$S_1(\tau, \xi_0) = S(\tau, \xi_0)/G(\mu).$$

Как видно из этого выражения, вероятность $S_1(\tau, \xi_0)$ даже при $\tau \rightarrow \infty$ не достигает единицы и в таком виде не может рассматриваться как распределение вероятностей. При этом недостающая до единицы доля вероятности приходится на множество тех лучей, которые не испытывают затенений, т. е. для которых $\tau = 0$. Чтобы получить интегральное распределение вероятностей $W(\tau, \xi_0)$ длин затенённых интервалов для лучей, опирающихся на несамозатеняющие точки, выражение $S_1(\tau, \xi_0)$ должно быть дополнено этой недостающей долей вероятности, после чего можно записать

$$W(\tau, \xi_0) = 1 - \{S_1(\tau, \xi_0) + [1 - S_1(\infty, \xi_0)] \theta(\tau)\}.$$

$W(\tau, \xi_0)$ есть вероятность того, что затенение произойдёт на интервале, равном или меньшем τ . Последнее слагаемое в соответствии с выражением для $G(\mu)$ определяет вероятность не быть затенённым для луча, дошедшего до точки ξ_0 . Соответствующая $W(\tau, \xi_0)$ плотность распределения имеет вид

$$w(\tau, \xi_0) = \frac{dW(\tau, \xi_0)}{d\tau} = \frac{\Lambda F^\Lambda (\xi_0/\sigma)}{F^{\Lambda+1} ((\xi_0 + \mu\tau)/\sigma)} \frac{\mu}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp\left(-\frac{(\xi_0 + \mu\tau)^2}{2\sigma^2}\right) + [1 - S_1(\infty, \xi_0)] \delta(\tau),$$

где $\delta(\tau)$ — дельта-функция, откуда при усреднении по всем ξ_0 можем получить среднюю протяжённость затенённого участка

$$\begin{aligned} \tau_{\text{ср}} = & \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\xi_0^2}{2\sigma^2}\right) \int_0^\infty \left\{ \frac{\Lambda F^\Lambda (\xi_0/\sigma)}{F^{\Lambda+1} ((\xi_0 + \mu\tau)/\sigma)} \frac{\mu}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp\left(-\frac{(\xi_0 + \mu\tau)^2}{2\sigma^2}\right) + \right. \\ & \left. + [1 - S_1(\infty, \xi_0)] \delta(\tau) \right\} \tau d\tau. \end{aligned}$$

Сделаем замену переменных: $\xi_0/\sigma = x$, $\mu\tau/\sigma = y$, $\mu d\tau/\sigma = dy$. Тогда выражение для $\tau_{\text{ср}}$ принимает вид

$$\tau_{\text{ср}} = \frac{\Lambda\sigma}{\pi\mu} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-x^2} [\operatorname{erfc}(-x/\sqrt{2})]^\Lambda \int_0^\infty [\operatorname{erfc}\{(x+y)/\sqrt{2}\}]^{-(\Lambda+1)} e^{-xy-y^2/2} y dy.$$

Из полученного выражения видно, что двойной интеграл представляет собой функцию одной переменной Λ . Его расчёт приводит к аппроксимирующей формуле, отличающейся от точного решения в диапазоне Λ от 0 до 11 не более чем на десятые доли процента. С учётом аппроксимации получим

$$\tau_{\text{ср}} = \frac{\sigma}{\pi\mu} \Lambda \exp\left[-17,8849 + 16,3421 (1 + 2\Lambda)^{-1/2} - 95,6614 (1 + 2\Lambda)^{-1/3} + 98,2524 (1 + 2\Lambda)^{-1/4}\right]. \quad (6)$$

Выражение (6) можно представить в виде

$$\tau_{\text{ср}} = \frac{\sigma}{\pi\mu} U(\Lambda). \quad (7)$$

Функция $U(\Lambda)$ имеет вид, показанный на рис. 2.

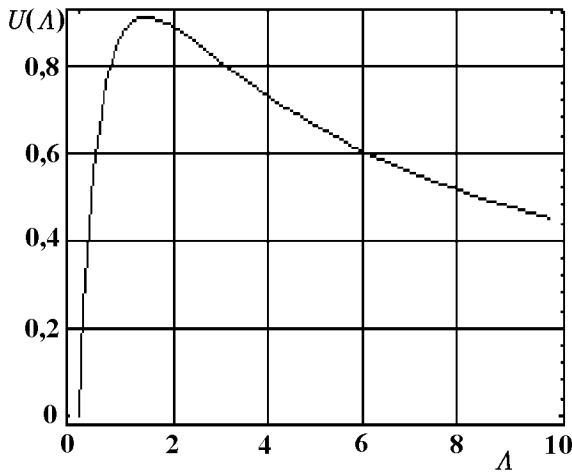


Рис. 2

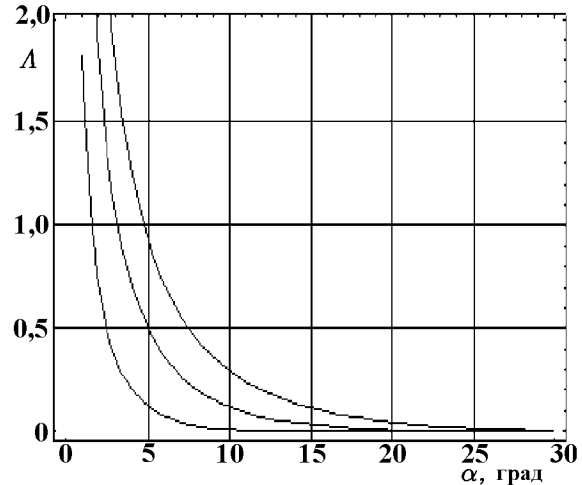


Рис. 3

Зависимость Λ от угла облучения α для значений $\sigma_\alpha = 0,1; 0,2$ и $0,3$ показана на рис. 3. Кривая с меньшими значениями Λ относится к большему значению σ_α . Например, при $\sigma_\alpha = 0,2$ углу $\alpha = 1^\circ$ соответствует $\Lambda = 4,09$ (на графике не показана).

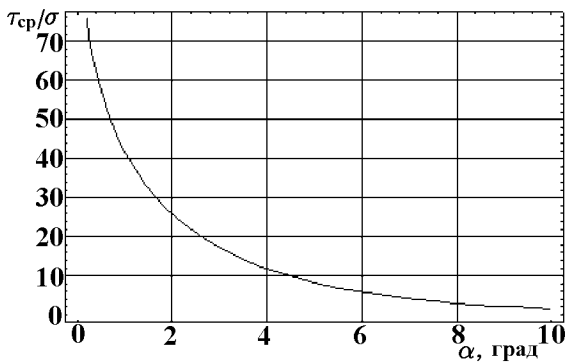


Рис. 4

Проанализировать поведение $\tau_{\text{ср}}$ в зависимости от угла α можно на примере обычной поверхности со средними параметрами, при $\sigma_\alpha = 0,2$. Стандартное отклонение высот σ перенесём в левую часть (7). Рассчитанная для этого случая по (7) зависимость $\tau_{\text{ср}}/\sigma$ от угла α в интервале от $0,2$ до 10° показана на рис. 4.

Из рисунка видно, что протяжённость затенённых участков резко возрастает с уменьшением угла облучения, превосходя в десятки раз величину проекции среднего наклонного элемента поверхности на среднюю плоскость, приблизительно оцениваемую как $1,4 \sigma / \sigma_\alpha$.

2. ПАРАМЕТРЫ ВИДИМОЙ ЧАСТИ ПОВЕРХНОСТИ

Определим теперь среднюю высоту и дисперсию видимой части поверхности. Индекс 0 у ξ_0 далее будем опускать. Вычислим интегральное распределение вероятностей высоты освещённых точек. Последнее включает два сомножителя. Первый — это исходное распределение $F(\xi/\sigma)$ при отсутствии затенений. Второй представляет собой вероятность $Q(\xi, \mu) = S(\infty, \xi)/G(\mu)$ незатенения точки на высоте ξ , рассчитанную для всех точек за исключением тех, которые уже учтены множителем $G(\mu)$, отражающим начальное уменьшение доли освещённых точек только за счёт самозатенений. Величина $Q(\xi, \mu)$ при $\xi \rightarrow \infty$ стремится к единице, при $\xi \rightarrow -\infty$ стремится к нулю. Теперь новое интегральное распределение $P_c(\xi)$ и плотность распределения $w_c(\xi)$ высот освещённых точек поверхности с учётом (4) могут быть записаны в виде

$$P_c(\xi) = F(\xi/\sigma) Q(\xi, \mu) = [F(\xi/\sigma)]^{\Lambda+1},$$

$$w_c(\xi) = \frac{dP_c(\xi)}{d\xi} = (\Lambda + 1) [F(\xi/\sigma)]^\Lambda w(\xi),$$
(8)

где

$$w(\xi) = \frac{dF(\xi/\sigma)}{d\xi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}\right).$$

Среднее значение $\langle \xi_c \rangle$ и дисперсия σ_c^2 могут быть вычислены путём интегрирования выражений $\xi w_c(\xi)$ и $(\xi - \langle \xi_c \rangle)^2 w_c(\xi)$ в бесконечных пределах. Однако функциональная зависимость среднего значения и дисперсии видимой части поверхности от параметров исходной поверхности или условий задачи может быть получена только приближённо. Сделаем замену $x = \xi/\sigma$ и запишем среднее значение в виде

$$\langle \xi_c \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi w_c(\xi) d\xi = \frac{(\Lambda + 1)\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x [F(x)]^\Lambda e^{-x^2/2} dx. \quad (9)$$

Интеграл в этой формуле, так же как и выше в выражении для τ_{cp} , является функцией одной переменной Λ и может быть оценён численно. В широком диапазоне Λ , от $\Lambda = 0$ (освещение сверху) до $\Lambda = 10$ (угол $\alpha \ll 1^\circ$) результаты численных расчётов могут быть аппроксимированы формулой, коэффициенты в которой подобраны по методу наименьших квадратов:

$$\langle \xi_c \rangle / \sigma = -3,35 + 5,735 (\Lambda + 1)^{1/3} - 2,36 (\Lambda + 1)^{1/2}. \quad (10)$$

Соответствие этой формулы вычисленным точным значениям (точки) показано на рис. 5.

Расчёты по формуле (10) с учётом значения Λ как функции угла подъёма α для значения $\sigma_\alpha = 0,2$ приведены на рис. 6.

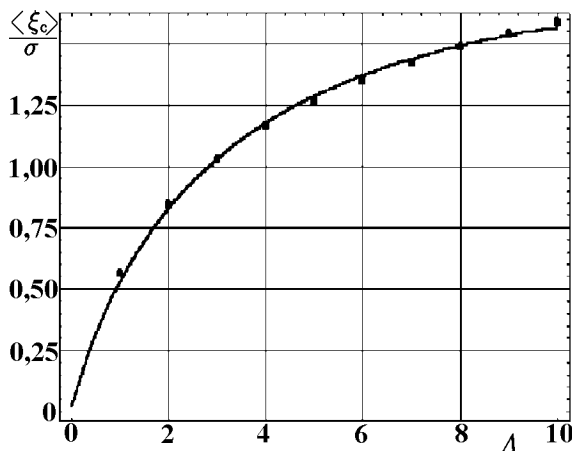


Рис. 5

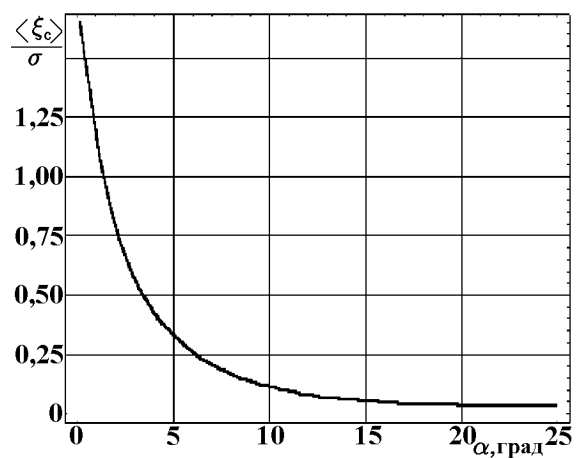


Рис. 6

Численные расчёты по выражению (9) не позволяют проследить ход $\langle \xi_c \rangle$ в зависимости от α при приближении к скользящему падению ($\alpha \rightarrow 0$). Сделаем предельные оценки.

Скользящее падение характеризуется большими величинами Λ , при которых зависимость $[F(x)]^\Lambda$ приближается по виду к ступенчатой функции $\theta(x)$. При этом интегрирование в (9) можно приближённо проводить в пределах от x_0 до ∞ , где x_0 будем искать как решение трансцендентного уравнения $[F(x_0)]^\Lambda \approx 0,2 \div 0,5$. Выбор численного значения в правой части здесь несколько произволен. Интеграл в (9) теперь примет вид

$$z = \int_{x_0}^{\infty} x e^{-x^2/2} dx = e^{-x_0^2/2}. \quad (11)$$

Для оценки x_0 отметим, что при больших Λ значение x_0 также будет большим, так что можно воспользоваться асимптотическим выражением $F(x_0) \approx 0,5 + 0,5 \left(1 - \sqrt{2/\pi} \exp(-x_0^2/2)/x_0\right)$. Приравняв это выражение для конкретности $0,5^{1/\Lambda}$, после двух итераций получим x_0 в виде

$$x_0 = \sqrt{-2 \ln z}, \quad (12)$$

где

$$z = \sqrt{2\pi} \left(1 - 0,5^{1/\Lambda}\right) \sqrt{-2 \ln \left[\sqrt{2\pi} \left(1 - 0,5^{1/\Lambda}\right) \sqrt{-2 \ln \left[\sqrt{2\pi} \left(1 - 0,5^{1/\Lambda}\right) \right]} \right]}.$$

Записывая затем $0,5^{1/\Lambda} = (1 - 0,5)^{1/\Lambda}$ в виде ряда

$$1 - \frac{0,5}{\Lambda} + \frac{(\Lambda^{-1} - 1)}{\Lambda 2!} 0,5^2 - \frac{(\Lambda^{-1} - 1)(\Lambda^{-1} - 2)}{\Lambda 3!} 0,5^3 + \dots,$$

можно видеть, что при $\Lambda \rightarrow \infty$ он стремится к $1 + (\ln 0,5)/\Lambda$. Подставляя это выражение в формулу (12) вместо $0,5^{1/\Lambda}$, получим

$$z = \sqrt{2\pi} \frac{0,693}{\Lambda} \sqrt{-2 \ln \left[\sqrt{2\pi} \frac{0,693}{\Lambda} \sqrt{-2 \ln \left[\sqrt{2\pi} \frac{0,693}{\Lambda} \right]} \right]}. \quad (13)$$

Заменим выражением (13) интеграл в (9) и устремим Λ к бесконечности, тогда среднее значение $\langle \xi_c \rangle$ принимает вид

$$\langle \xi_c \rangle \Big|_{\substack{\Lambda \rightarrow \infty \\ \sigma = 1}} \approx 0,693 \sqrt{2 \ln \frac{\Lambda}{0,693 \sqrt{2\pi} \sqrt{2 \ln(\Lambda/(0,693 \sqrt{2\pi}))}}}. \quad (14)$$

Из (14) видно, что среднее значение высоты освещённой части поверхности при увеличении Λ асимптотически стремится к бесконечности, но весьма медленно, приблизительно как корень из логарифма Λ . Последняя, при большой её величине, согласно (3) обратно пропорциональна углу падения α . Но при принятых упрощениях (замене интеграла в (9) на (11) и некоторого произвола в оценке x_0) абсолютная точность полученного выражения невелика (например при $\Lambda = 10$ из (14) получим $\langle \xi_c \rangle \approx 1,04$ вместо точного значения 1,58). Если при вычислении x_0 в (11) приравнять $[F(x_0)]^\Lambda$ не 0,5, а, например, 0,3, то достигается почти полное согласие решений ($\langle \xi_c \rangle \approx 1,48$ вместо 1,58).

Аналогично вычисляется и дисперсия видимой части поверхности $\sigma_c^2 = M_c 2 - \langle \xi_c \rangle^2$. Второй начальный момент $M_c 2$ имеет вид

$$M_c 2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 w_c(\xi) d\xi = \frac{(\Lambda + 1) \sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 [F(x)]^\Lambda e^{-x^2/2} dx. \quad (15)$$

Выражение $\sigma_c^2 = M_c 2 - \langle \xi_c \rangle^2$ после численного интегрирования может быть для Λ от 0 до 10 заменено формулой

$$\sigma_c^2 = \sigma^2 [0,3486 + 2,058 (\Lambda + 1)^{-1/2} - 1,408 (\Lambda + 1)^{-1/3}]. \quad (16)$$

Сопоставление расчётов по этой формуле и численных расчётов для 10 точек по выражениям (9) и (15) приведено на рис. 7.

Асимптотика для дисперсии была прослежена путём численных расчётов при Λ от 10 до 300, что соответствует для выбранной поверхности ($\sigma_\alpha = 0,2$) углам α приблизительно от 0,5 до 0,015°.

В этом интервале уменьшение дисперсии происходит медленнее, чем $\lg(1/\Lambda)$, и достаточно хорошо следует зависимости

$$\sigma_c^2|_{\Lambda>10} \propto \sigma^2 [0,373 - 0,064 \lg \Lambda]^{2/3}.$$

Распределение наклонов (производной) q для видимой части поверхности также существенно изменяется. При вертикальном облучении сохраняется нормальное распределение $F(q/\sigma_\alpha)$. При облучении под углом α доля всех несамозатенённых точек, производные в которых ограничены сверху величиной $\mu = \tg \alpha$, будет $F(\mu/\sigma_\alpha)$. Но для видимых точек эта доля уменьшается пропорционально отношению $S(\mu)/F(\mu/\sigma_\alpha)$, поэтому распределение (учитывая, что оно должно быть нормировано к единице) принимает вид обычного усечённого нормального закона

$$P(q/\sigma_\alpha) = F(q/\sigma_\alpha)/F(\mu/\sigma_\alpha),$$

где $q \leq \mu$. Плотность распределения для q получим в виде

$$w(q) = \frac{dP(q/\sigma_\alpha)}{dq} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_\alpha} \frac{\exp(-q^2/2\sigma_\alpha^2)}{F(\mu/\sigma_\alpha)},$$

где $q \leq \mu$. Среднее значение $m_{qc} = \langle q_c/\sigma_\alpha \rangle$ и дисперсия $\sigma_{qc}^2 = \sigma_{\alpha c}^2/\sigma_\alpha^2$ наклонов видимой части поверхности в долях σ_α и σ_α^2 соответственно, найденные по обычным правилам, равны ($\langle q_c \rangle$ и $\sigma_{\alpha c}^2$ — ненормированные среднее значение и дисперсия):

$$m_{qc} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\exp(-\mu^2/(2\sigma_\alpha^2))}{F(\mu/\sigma_\alpha)}, \quad \sigma_{qc}^2 = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\exp(-\mu^2/(2\sigma_\alpha^2))}{F(\mu/\sigma_\alpha)} - \frac{\exp(-\mu^2/(2\sigma_\alpha^2))}{2\pi [F(\mu/\sigma_\alpha)]^2}.$$

Эти функции приведены на рис. 8 и 9.

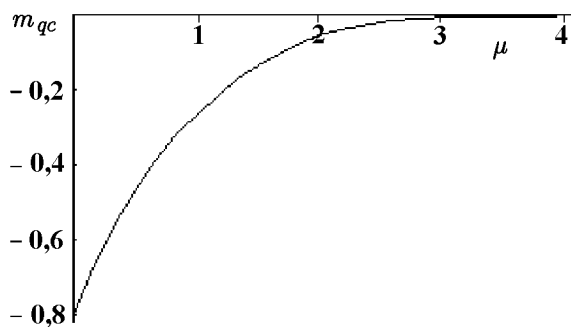


Рис. 8

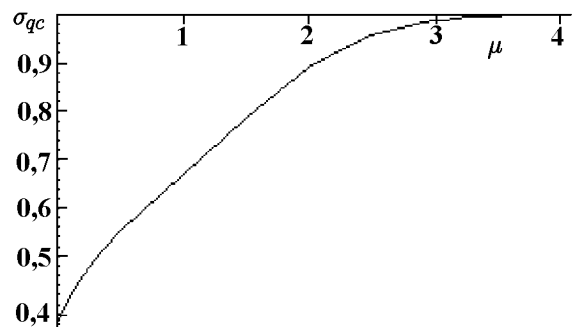


Рис. 9

Несколько иной подход к выводу плотности распределения наклонов применён в [5].

3. АВТОКОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ ОСВЕЩЁННОЙ ЧАСТИ ПОВЕРХНОСТИ

Рассмотрим изменения в автокорреляционной функции поверхности, вызванные появлением разрывов в освещённой части. Участки лучей, касающихся поверхности в одной точке, расположенные над её затенёнными частями, не переизлучают (граница света и тени), они как бы не существуют. Так как затенённые области на поверхности расположены случайно, то произвольный случайный профиль поверхности оказывается промодулированным импульсной функцией, также случайной, с единичной амплитудой там, где поверхность освещена, и сколь угодно большим по модулю отрицательным значением там, где имеется затенение. Это означает, что в местах затенений вместо поверхности вводится провал с глубиной $A_{\text{пр}} \gg \sigma$. В результате профиль поверхности $h(y)$ с затенениями представляется произведением двух функций:

$$h(y) = f(y)H(y),$$

где $f(y)$ — профиль поверхности без затенений, $H(y)$ — импульсная случайная функция.

Автокорреляционная функция $B_c(t)$ частично освещённого профиля находится по общим правилам с учётом того, что функции $f(y)$ и $H(y)$ в силу случайного положения освещённых и затенённых участков можно считать практически независимыми. Поэтому можем написать:

$$B_c(t) = \overline{f(y)H(y)f(y+t)H(y+t)} = \overline{f(y)f(y+t)} \overline{H(y)H(y+t)} = B(t)N(t), \quad (17)$$

где $B(t)$ и $N(t)$ — автокорреляционные функции поверхности и прерывающей её импульсной последовательности соответственно.

Эта модель достаточно точно отражает коэффициент автокорреляции, так как с точки зрения наблюдателя для корреляционных свойств видимой части поверхности безразлично, чем вызвано отсутствие отражённого сигнала от затенённой части поверхности — свойствами самой поверхности при её наличии или её провалом в соответствии с импульсной функцией $H(y)$, т. е. физическим отсутствием поверхности в данном месте. Но для оценки дисперсии видимой части поверхности эта модель непригодна, так как в соответствии с ней дисперсия формируется в том числе и провалами поверхности, которые наблюдателю не видны, находясь ниже его луча зрения. Дисперсия высот видимой части поверхности оценена выше и даётся формулой (16), поэтому воспользуемся моделью (17) только для оценки коэффициента автокорреляции. Так как $B(t)$ — заданная функция, то вычислению подлежит только сомножитель $N(t)$.

Примем, что на случайной поверхности распределение протяжённостей как теневых, так и освещённых интервалов близко к экспоненциальному. Средняя длина затенённых интервалов равна $\tau_{\text{ср}}$, а средняя длина освещённых интервалов может быть найдена с учётом того, что среднее число и теневых, и освещённых участков равно $\lambda = (1 - S)/\tau_{\text{ср}}$. Отсюда следует, что средняя длина освещённых участков

$$\tau_{\text{ср}}^* = S/\lambda. \quad (18)$$

Автокорреляционная функция случайной импульсной последовательности $H(t)$ со свойствами, определёнными выше, в общем виде получена в [6, п. 6.3]. Конкретно для нашего случая и в наших обозначениях эта функция имеет вид

$$\begin{aligned} N(t) &= A_{\text{пр}}^2 \tau_{\text{ср}}^* \tau_{\text{ср}} (\tau_{\text{ср}} + \tau_{\text{ср}}^*)^{-2} \exp[-|t|(\tau_{\text{ср}} + \tau_{\text{ср}}^*)/(\tau_{\text{ср}}^* \tau_{\text{ср}})] = \\ &= A_{\text{пр}}^2 S (1 - S) \exp[-|t|/(S\tau_{\text{ср}})] + S^2. \end{aligned}$$

Учитывая, что функция $B(t) = \sigma^2 R(t)$, где $R(t)$ — коэффициент автокорреляции, то, поделив $B(t)N(t)$ на $B(0)N(0)$, получим коэффициент автокорреляции освещённой части поверхности $R_c(t)$ в виде

$$R_c(t) = R(t) \{ (1 - S) \exp[-|t|/(S\tau_{\text{ср}})] + S \} = R(t)\nu(t), \quad (19)$$

где

$$\nu(t) = (1 - S) \exp[-|t|/(S\tau_{\text{cp}})] + S. \quad (20)$$

При этом функцию автокорреляции с учётом новой величины дисперсии получим в виде

$$B_c(t) = \sigma_c^2 R(t) \nu(t), \quad (21)$$

где дисперсия рассчитывается по выражению (16).

С другой стороны, учитывая (20), $B_c(t)$ можно представить в виде суммы:

$$B_c(t) = \sigma_c^2 S R(t) + \sigma_c^2 (1 - S) R(t) \exp[-|t|/(S\tau_{\text{cp}})],$$

в которой первое слагаемое, пропорциональное S , целиком сохраняет исходную функцию $R(t)$, а второе — «теневое» — в любом случае привносит экспоненциальные свойства. Такая функция автокорреляции, состоящая из двух существенно различных частей, физически объяснимых и позволяющих получить количественные оценки, в значительной мере оправдывает интуитивную идею применения двухмасштабной модели поверхности [7].

Рассмотрим влияние множителя $\nu(t)$ на коэффициент корреляции на конкретном примере.

Во многих случаях автокорреляционную функцию исходной поверхности $B(t)$ принято описывать, в частности, гауссовой кривой, имеющей нулевую производную при $t = 0$:

$$B(t) = \sigma^2 R(t) = \sigma^2 \exp(-t^2/m^2), \quad (22)$$

для которой $\sigma_\alpha = \sqrt{2} \sigma/m$. Здесь m — характерный горизонтальный размер неровностей. Коэффициент автокорреляции $R_c(t)$ частично освещённой поверхности при заданных параметрах σ , m и α зависит только от двух безразмерных параметров:

$$\beta = \mu/\sigma_\alpha = \mu m/(\sqrt{2} \sigma), \quad t' = t/m,$$

что следует из структуры входящих в $R_c(t)$ составляющих S и τ_{cp} .

В соответствии с (20) и (22) можем записать

$$R_c(t') = R(t') \nu(t') = \exp(-t'^2) \{S(\beta) + [1 - S(\beta)] \exp[-|t'|/(S(\beta)\tau'_{\text{cp}})]\}, \quad (23)$$

где

$$\tau'_{\text{cp}} = \tau_{\text{cp}}/m = \tau_{\text{cp}} \sigma_\alpha/(\sqrt{2} \sigma).$$

На рис. 10 построены зависимости $R(t')$ (верхняя кривая) и $R_c(t')$ (23) для нескольких значений β , соответствующих углам возвышения $\alpha = 1; 2; 5; 10$ и 15° (нижняя кривая соответствует $\alpha = 1^\circ$). В расчётах использована функция автокорреляции $B(t)$ для умеренно холмистой земной поверхности со значением $m/\sigma = 7$, $\sigma_\alpha = 0,2$.

Из рис. 10 видно, что наличие экспоненциального множителя в $\nu(t)$ приводит к тому, что любая автокорреляционная функция для видимой части поверхности, даже такая гладкая, как гауссова, при наклонном облучении становится в начальной части (вблизи $\tau = 0$) острой и обладает не равной нулю производной в точке $\tau = 0$.

Отметим некоторые подробности. Величина производной функции автокорреляции (21) в нуле как функция угла α имеет немонотонный ход:

$$\frac{dB_c(t)}{dt} = \frac{d\nu(t)}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{\sigma_c^2(\alpha) [1 - S(\alpha)]}{S(\alpha) \tau_{\text{cp}}(\alpha)}.$$

При увеличении и уменьшении угла α производная увеличивается по сравнению с некоторым наименьшим значением. Это связано с тем, что в обоих случаях либо освещённые, либо затенённые промежутки становятся короткими, вероятность их существования резко падает и существенное снижение корреляции происходит уже на малом интервале t , что и приводит в этих случаях к более крутому наклону кривых $B_c(t)$ или $\nu(t)$ при t , близком к нулю. Это можно видеть из рис. 11, где показаны кривые $\nu(t')$ для $\alpha = 0,3; 1; 2; 5; 10$ и 15° . Нижняя кривая соответствует $\alpha = 0,3^\circ$, верхняя — $\alpha = 15^\circ$.

Вместе с тем, из рис. 10, 11 видно, что при увеличении угла облучения, т. е. при уменьшении вероятности затенения, коэффициент $\nu(t')$, хотя и сохраняет конечную производную в нуле, постепенно теряет свою роль, приближаясь к единице для всех t' , и функция $R_c(t')$ переходит в $R(t')$ (в верхнюю кривую на рис. 10).

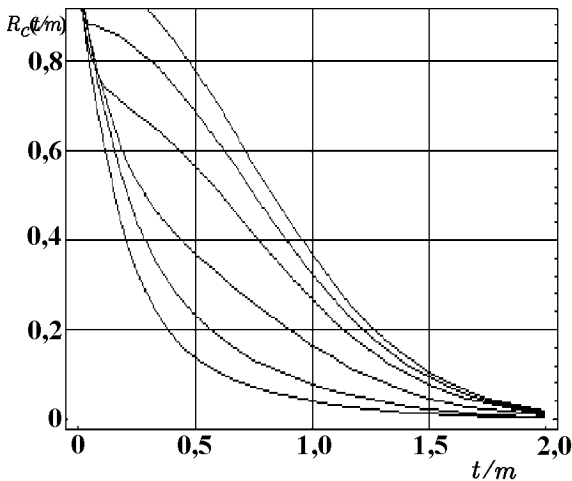


Рис. 10

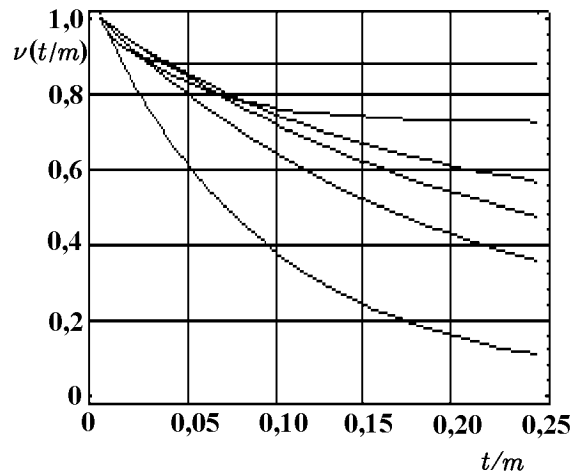


Рис. 11

4. СЛУЧАЙ ПРОСТРАНСТВЕННО РАЗНЕСЁННЫХ ТОЧЕК ИЗЛУЧЕНИЯ И НАБЛЮДЕНИЯ

Рассмотрим случай, когда пункты излучения и наблюдения находятся по разные стороны вертикальной плоскости, проходящей через область рассеяния. Введём два угла подъёма: α_1 (направление на пункт передачи) и α_2 (направление на пункт приёма), которым соответствуют величины μ_1 и μ_2 (рис. 12). При этом формула вероятности одновременной видимости элементов поверхности с двух пунктов будет представлять собой произведение вероятностей незатенения элемента поверхности с каждой из сторон. Поэтому в соответствии с (1) вместо $S(\tau)$ будет $S(\tau_1)S(\tau_2)$, а $g(\tau)$ соответственно заменится на сумму $g(\tau_1) + g(\tau_2)$. Вместо (4) теперь будет

$$S(\tau_1, \tau_2, \xi_0) = G(\mu_1)G(\mu_2) \left[\frac{F(\xi_0/\sigma)}{F(\xi_0 + \mu_1\tau_1)/\sigma} \right]^{\Lambda_1} \left[\frac{F(\xi_0/\sigma)}{F(\xi_0 + \mu_2\tau_2)/\sigma} \right]^{\Lambda_2}. \quad (24)$$

Следуя процедуре вывода выражения (8) и следующих за ним, вместо Λ получим $\Lambda_d = \Lambda_1 + \Lambda_2$, где Λ_1 и Λ_2 рассчитываются с помощью выражения (3) с заменой μ соответственно на $\mu_1(\alpha_1)$ и $\mu_2(\alpha_2)$. Средняя высота и дисперсия освещённой части поверхности $\langle \xi_d \rangle$ и σ_d^2 рассчитываются по формулам (9) или (10), а также (15) и (16) с заменой Λ на Λ_d . Расчётные формулы для них имеют вид

$$\begin{aligned} \langle \xi_d \rangle / \sigma &= -3,35 + 5,735 (\Lambda_d + 1)^{1/3} - 2,36 (\Lambda_d + 1)^{1/2}, \\ \sigma_d^2 &= \sigma^2 \left[0,3486 + 2,058 (\Lambda_d + 1)^{-1/2} - 1,408 (\Lambda_d + 1)^{-1/3} \right]. \end{aligned}$$

Выражение для S_d с учётом (24) после таких же, как и ранее, вычислений приобретает вид

$$S_d = \frac{F(\mu_1/\sigma_\alpha)F(\mu_2/\sigma_\alpha)}{\Lambda_1 + \Lambda_2 + 1}.$$

В частности, при нормальном падении и наблюдении, когда $\mu_1 = \mu_2 = \infty$, получаем $\Lambda_1 = \Lambda_2 = 0$ и $S_d = 1$.

Вычисление $\langle \tau_d \rangle$ (длины непрерывного участка, любая точка которого не видна хотя бы с одного конца трассы) приводит к сумме $\tau_{1cp} + \tau_{2cp}$, так как теперь при интегрировании выражения для τ_{cp} под знак интеграла вместо τ везде входит сумма $\tau_1 + \tau_2$ (это следует из вычислений, начиная с (1); учитывается также, что точка встречи ξ_0 является общей и статистически τ_1, τ_2 практически независимы).

С учётом новых параметров и обозначений можем записать:

$$\begin{aligned} \tau_{1,2cp} &= \frac{\sigma}{\pi\mu_{1,2}} \Lambda_{1,2} \exp \left[-17,8849 + 16,3421 (1 + 2\Lambda_{1,2})^{-1/2} - \right. \\ &\quad \left. - 95,6614 (1 + 2\Lambda_{1,2})^{1/3} + 98,2524 (1 + 2\Lambda_{1,2})^{-1/4} \right], \\ \langle \tau_d \rangle &= \tau_{1cp} + \tau_{2cp}, \\ \nu_d(t) &= (1 - S_d) \exp \left(-\frac{|t|}{S_d \langle \tau_d \rangle} \right) + S_d. \end{aligned} \quad (25)$$

В этих условиях функция и коэффициент автокорреляции частично освещённой поверхности $B_d(\tau)$ и $R_d(t)$ равны

$$B_d(t) = \sigma_d^2 R(t) \nu_d(t), \quad R_d(t) = R(t) \nu_d(t).$$

Аналогичным путём могут быть получены и характеристики наклонов видимой одновременно с двух сторон части поверхности. Вместо $P(q/\sigma_\alpha)$ интегральное распределение нормированных наклонов $P_d(q/\sigma_\alpha)$ и плотность распределения $w_d(q)$ для q получим в виде

$$P_d(q/\sigma_\alpha) = \frac{F(q/\sigma_\alpha)}{F(\mu_1/\sigma_\alpha) - F(-\mu_2/\sigma_\alpha)}, \quad w_d(q) = \frac{dP_d(q/\sigma_\alpha)}{dq} = \frac{(\sqrt{2\pi}\sigma_\alpha^2)^{-1} \exp(-q^2/(2\sigma_\alpha^2))}{F(\mu_1/\sigma_\alpha) - F(-\mu_2/\sigma_\alpha)},$$

где $-\mu_2 \leq q \leq \mu_1$.

Нормированные среднее значение m_d и дисперсию σ_d^2 в долях соответственно σ_α и σ_α^2 получим по обычным правилам:

$$\begin{aligned} m_d &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\exp(-\mu_2^2/(2\sigma_\alpha^2)) - \exp(-\mu_1^2/(2\sigma_\alpha^2))}{F(\mu_1/\sigma_\alpha) - F(-\mu_2/\sigma_\alpha)}, \\ \sigma_d^2 &= 1 - \frac{\mu_1 \exp[-\mu_1^2/(2\sigma_\alpha^2)] - \mu_2 \exp[-\mu_2^2/(2\sigma_\alpha^2)]}{\sqrt{2\pi}\sigma_\alpha [F(\mu_1/\sigma_\alpha) - F(-\mu_2/\sigma_\alpha)]} - \frac{[\exp[-\mu_1^2/(2\sigma_\alpha^2)] - \exp[-\mu_2^2/(2\sigma_\alpha^2)]]^2}{2\pi [F(\mu_1/\sigma_\alpha) - F(-\mu_2/\sigma_\alpha)]^2}. \end{aligned}$$

На рис. 13 показаны примеры расчётов $R_d(t')$, проведённые с использованием функции автокорреляции поверхности (22) для случая зеркального отражения ($\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$). Углы подъёма приняты равными 1; 2; 5; 10 и 15°. Верхняя кривая — функция $R(t')$ из (22), нижняя кривая — $R_d(t')$ для $\alpha = 1^\circ$. Вместо τ_{dcp} используется нормированная величина $\tau'_{dcp} = \tau_{dcp}/m$; $\sigma_\alpha = 0,2$. На рис. 14 приведены

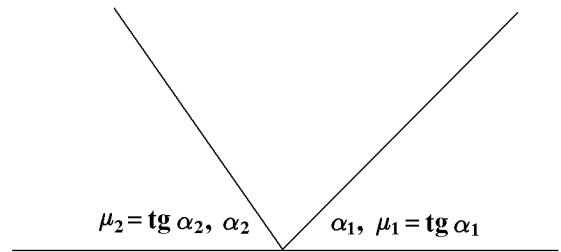


Рис. 12

кривые $R_d(t')$ при тех же параметрах, что и выше, для условий, когда угол подъёма $\alpha_1 = 5^\circ$, а угол наблюдения α_2 составляет 1; 2; 5; 10 и 15° .

На рис. 13 и 14 хорошо видны изменения, которые происходят с коэффициентом автокорреляции поверхности при различных углах облучения и наблюдения, если учитывать возникающие затенённые участки.

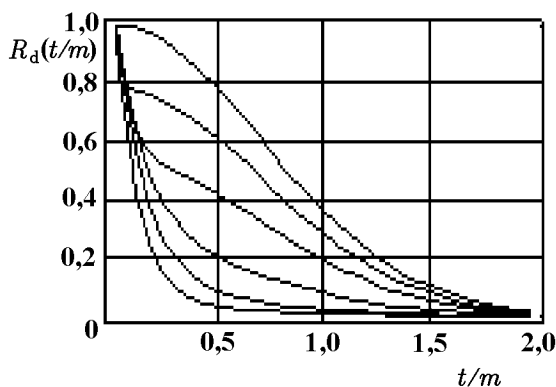


Рис. 13

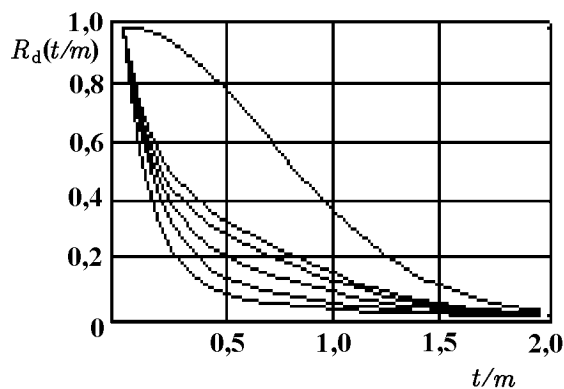


Рис. 14

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение отметим следующее.

При рассеянии волн отражённое поле формируется видимой одновременно с двух сторон частью поверхности. Анализ показал, что при учёте разрывов освещённости реально участвующая в отражении волн часть поверхности имеет отличные от исходных статистические характеристики. Повышается средняя высота и снижается дисперсия элементов видимой части поверхности, так как в первую очередь из участия в рассеянии исключаются низко расположенные области. Коэффициент автокорреляции приобретает конечную производную в нулевой точке, что обусловлено наличием разрывов в облучении поверхности, и при возрастании доли затенённой поверхности всё более приближается к экспоненте. Важно отметить, что начальная часть автокорреляционной функции приобретает экспоненциальный характер всегда, когда возникают затенения, независимо от формы коэффициента корреляции реальной поверхности. Одновременно необходимо учитывать и модифицированное значение дисперсии, изменяющееся с изменением геометрии задачи. При изучении рассеяния волн можно ожидать, что эти явления в значительной мере будут предопределять сближение результатов, получаемых при анализе рассеяния на поверхностях с различными статистическими характеристиками.

ЛИТЕРАТУРА

1. Басс Ф. Г., Фукс И. М. Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. — М.: Наука, 1972. — 424 с.
2. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. Ч. II. — М.: Наука, 1978. — 464 с.
3. Яковлев О. И. Космическая радиофизика. — М.: Научная книга, 1998. — 432 с.
4. Smith B. G. // JGR. 1967. V. 72, № 16. P. 4059.
5. Saunders P. M. // JGR. 1967. V. 72, № 18. P. 4643.
6. Горяинов В. Т., Журавлёв А. Г., Тихонов В. И. Примеры и задачи по статистической радиотехнике / Под ред. проф. В. И. Тихонова. — М.: Советское радио, 1970. — 600 с.

7. Курьянов Б. Ф. // Акуст. ж. 1962. V. 8, № 3. Р. 325.

Научно-исследовательский
институт радио, г. Москва, Россия

Поступила в редакцию
29 октября 1999 г.

STATISTICAL PROPERTIES OF THE ILLUMINATED PARTS OF A RANDOM SURFACE

Yu. A. Chernov

We consider the modifications in statistical characteristics caused by shadowing in the case of an oblique illumination of a random surface. It is shown that the emergence of shadowing and height ruptures of the illuminated part of the surface result in distortions of its height distribution function and peaking of the autocorrelation function of the visible part of the surface. This function tends to an exponential one for any autocorrelation function of an initial actual surface.

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАССЕЯНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ПОЛОСТЯХ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

С. Н. Кутищев, Г. Д. Михайлов, А. П. Преображенский

На основе модального метода разработана методика расчёта эффективной площади рассеяния (ЭПР) идеально проводящей полости эллиптического поперечного сечения с нанесённым на заднюю стенку радиопоглощающим покрытием (РПП) постоянной толщины. Для случая E -поляризации падающей плоской электромагнитной волны численно рассчитаны угловые зависимости моностатической ЭПР полости эллиптического поперечного сечения как содержащей, так и не содержащей РПП. Проведено сравнение результатов расчётов с полученными экспериментальными данными.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время активно проводятся работы по созданию методов математического моделирования рассеяния электромагнитных волн на полостях различной формы и поперечного сечения [1]. Актуальность данной проблемы обусловлена необходимостью определения характеристик вторичного электромагнитного излучения (эффективной площади рассеяния (ЭПР) и др.) полостей, входящих в состав современных объектов техники.

Расчёт ЭПР трёхмерных идеально проводящих полостей сложной формы произвольного поперечного сечения, содержащих радиопоглощающее покрытие (РПП), является сложной электродинамической задачей, для которой не существует универсального метода решения. Применяемые в настоящее время методы [1] позволяют рассчитывать электродинамические характеристики рассеяния электромагнитных волн только на полостях некоторых классов, характеризующихся определёнными размерами, формой, видом поперечного сечения и способом размещения РПП.

На практике встречаются полости, протяжённые в определённом направлении и имеющие вдоль этого направления однородное поперечное сечение [1]. Для расчёта ЭПР рассматриваемого класса полостей прямоугольного и круглого поперечного сечения применялся модальный метод [1, 2]. Ввиду того, что в состав современных объектов техники входят полости эллиптического поперечного сечения, представляет практический и теоретический интерес разработать на основе модального метода способ расчёта ЭПР полостей эллиптического поперечного сечения.

Цель работы — разработка на основе модального метода методики расчёта ЭПР идеально проводящей полости эллиптического поперечного сечения, содержащей на задней стенке РПП постоянной толщины.

1. МЕТОДИКА РАСЧЁТА

Рассмотрим полость эллиптического поперечного сечения с размером полуосей a и b и длиной L (рис. 1). Пусть на апертуру полости падает плоская электромагнитная волна (множитель $\exp(j\omega t)$ далее опустим)

$$\mathbf{E}^i = (\theta_0 I_\theta + \varphi_0 I_\varphi) \exp(j\mathbf{k}^i \mathbf{r}), \quad (1)$$

где $\mathbf{k}^i = k[(\mathbf{x}_0 \cos \varphi^i + \mathbf{y}_0 \sin \varphi^i) \sin \theta^i + \mathbf{z}_0 \cos \theta^i]$ — волновой вектор падающей волны, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число в свободном пространстве, I_θ и I_φ — амплитуды, соответствующие E - и H -поляризациям падающей плоской электромагнитной волны, $\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0$ — единичные векторы, направленные вдоль соответствующих осей, θ_0 и φ_0 — орты угловых переменных в сферической системе координат.

Основанная на модальном методе методика расчёта ЭПР полости эллиптического поперечного сечения состоит из следующих основных этапов.

1. Тангенциальные составляющие возбуждаемого падающей волной (1) электрического и магнитного полей на апертуре полости ($z = 0$) представляются в виде разложений по модам эллиптического волновода [3] с соответствующими модальными коэффициентами [1, 2]. При этом модальные коэффициенты G_{mn}, D_{mn} относятся к ТЕ-модам (поперечно-электрические волны), а модальные коэффициенты $\bar{G}_{mn}, \bar{D}_{mn}$ — к ТМ-модам (поперечно-магнитные волны). Кроме того, модальные коэффициенты $G_{mn}, \bar{G}_{mn}$ соответствуют выходящим (распространяющимся в направлении $+z$) из полости модам, а $D_{mn}, \bar{D}_{mn}$ — входящим (распространяющимся в направлении $-z$) в полость модам (рис. 1).

В зависимости от условий возбуждения поперечно-магнитные и поперечно-электрические волны в полости эллиптического поперечного сечения дополнительно разделяются на чётные и нечётные [3]. Чётность или нечётность волны устанавливается относительно большей полуоси эллипса поперечного сечения полости. Если при изменении знака координаты η эллиптической системы координат вблизи нуля (относительно большей оси эллипса) продольные составляющие E_z, H_z не меняют знак, то волна называется чётной, в противном случае — нечётной. (Координаты ξ, η эллиптической системы координат связаны с координатами x, y прямоугольной системы координат следующими соотношениями: $x = h \operatorname{ch} \xi \cos \eta, y = h \operatorname{sh} \xi \sin \eta$, где h — фокальная полуось [3].)

Тангенциальные составляющие полей на апертуре полости в случае чётных волн выражаются через моды эллиптического волновода следующим образом:

$$\begin{aligned} {}_c\mathbf{E}_{\text{tan}}(z \rightarrow -0) &= \boldsymbol{\xi} \sum_m \sum_n [(G_{mn} + D_{mn}) \frac{\beta_{mn}}{k^2 l_1} {}_c\text{Ce}'_m(\xi, cq_{mn}) {}_cC_m(\eta, cq_{mn}) + \\ &+ (\bar{G}_{mn} - \bar{D}_{mn}) \frac{\beta_{mn}}{k^2 l_1} {}_c\text{Ce}'_m(\xi, cq_{mn}) {}_cC_m(\eta, cq_{mn})] + \\ &+ \boldsymbol{\eta} \sum_m \sum_n [(G_{mn} + D_{mn}) \frac{\beta_{mn}}{k^2 l_2} {}_c\text{Ce}_m(\xi, cq_{mn}) {}_cC'_m(\eta, cq_{mn}) + \\ &+ (\bar{G}_{mn} - \bar{D}_{mn}) \frac{\beta_{mn}}{k^2 l_2} {}_c\text{Ce}_m(\xi, cq_{mn}) {}_cC'_m(\eta, cq_{mn})], \\ {}_c\mathbf{H}_{\text{tan}}(z \rightarrow -0) &= \boldsymbol{\xi} \sum_m \sum_n [(G_{mn} - D_{mn}) \frac{\omega \varepsilon_0}{k^2 l_2} {}_c\text{Ce}_m(\xi, cq_{mn}) {}_cC'_m(\eta, cq_{mn}) + \\ &+ (\bar{G}_{mn} + \bar{D}_{mn}) \frac{\omega \varepsilon_0}{k^2 l_2} {}_c\text{Ce}_m(\xi, cq_{mn}) {}_cC'_m(\eta, cq_{mn})] + \\ &+ \boldsymbol{\eta} \sum_m \sum_n [(G_{mn} - D_{mn}) \frac{\omega \varepsilon_0}{k^2 l_1} {}_c\text{Ce}'_m(\xi, cq_{mn}) {}_cC_m(\eta, cq_{mn}) + \\ &+ (\bar{G}_{mn} + \bar{D}_{mn}) \frac{\omega \varepsilon_0}{k^2 l_1} {}_c\text{Ce}'_m(\xi, cq_{mn}) {}_cC_m(\eta, cq_{mn})], \end{aligned} \quad (2)$$

где ε_0 — электрическая постоянная, cq_{mn} — n -й корень чётной модифицированной периодической функции Матье порядка m ; $\beta_{mn} = \sqrt{(2\pi/\lambda)^2 - 4cq_{mn}/h^2}$ — постоянная распространения электромагнитной волны внутри полости эллиптического поперечного сечения, $l_1 = l_2 = h(\operatorname{ch}(2\xi) - \cos(2\eta))/\sqrt{2}$ — коэффициенты Ламэ эллиптической системы координат, $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}$ — единичные векторы вдоль осей эллиптической системы координат.

В формулах (2) индексом c обозначена чётная волна; m — порядок модифицированной функции Матье или её первой производной, n — номер корня модифицированной функции Матье порядка m

или корня её первой производной, $cC_m(\eta, cq_{mn})$ и $cC'_m(\eta, cq_{mn})$ — чётная периодическая обыкновенная функция Матье целого порядка с действительными собственными значениями cq_{mn} и её первая производная [4], $cCe_m(\xi, cq_{mn})$ и $cCe'_m(\xi, cq_{mn})$ — чётная модифицированная периодическая функция Матье порядка m и её первая производная. В общем случае численный расчёт функций Матье достаточно сложен и может осуществляться с высокой точностью лишь для функций малых порядков. Расчёт чётных c и нечётных s функций Матье осуществляется по следующим формулам:

$$\begin{aligned} cC_{2m+p}(z, q) &= \sum_n A_{2n+p}^{2m+p} \cos[(2n+p)z], \\ sC_{2m+p}(z, q) &= \sum_n A_{2n+p}^{2m+p} \sin[(2n+p)z], \end{aligned} \quad (3)$$

Г

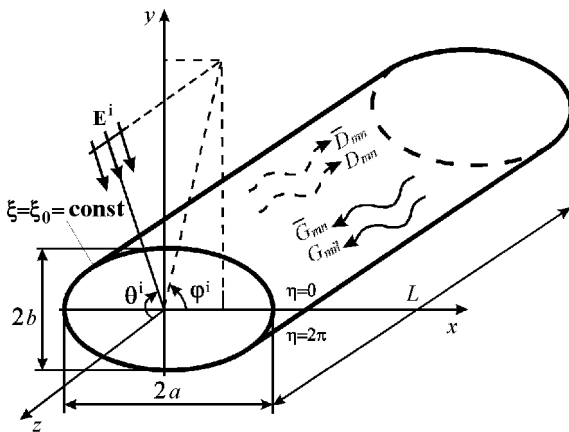


Рис. 1

Коэффициенты A_{2n+p}^{2m+p} , входящие в выражения (3) для функций Матье, вычисляются по рекуррентным формулам $A_{2n+p}^{2m+p} = F(A_{2n+p-1}^{2m+p}, q, \nu)$ [4], в которые входит параметр q и собственные значения ν уравнения Матье [4]. Для определения собственных значений уравнения Матье решается трансцендентное уравнение $f(\nu, q) = 0$ при заданном q [4]. При малом значении параметра q (когда форма эллипса близка к окружности) расчёт функций Матье осуществляется через ряд по параметру q [5].

2. Модальные коэффициенты D_{mn} и $\bar{D}_{mn}$, соответствующие входящим в полость модам, рассчитываются по следующей формуле, получен-

ной в [2] с использованием теоремы взаимности [6]:

$$\begin{bmatrix} D_{mn} \\ \bar{D}_{mn} \end{bmatrix} = \left(\frac{2\pi}{jk} \right) \frac{1}{W_0 Q_{mn}} \begin{bmatrix} M_{mn}(\theta^i, \varphi^i) & N_{mn}(\theta^i, \varphi^i) \\ -M_{mn}(\theta^i, \varphi^i) & \bar{N}_{mn}(\theta^i, \varphi^i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_\theta \\ I_\varphi \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Здесь W_0 — импеданс свободного пространства, Q_{mn} — комплексная мощность, переносимая ТЕ- или ТМ-модами. В случае полости с эллиптическим поперечным сечением мощность Q_{mn} определяется следующим образом [3]:

$$Q_{mn} = \frac{1}{2} \int_0^{\xi_0} \int_0^{2\pi} (E_\xi H_\eta - E_\eta H_\xi) d\eta d\xi, \quad (5)$$

где интегрирование проводится по поперечному сечению полости (см. рис. 1).

Коэффициенты $N_{mn}(\theta^i, \varphi^i)$, $\bar{N}_{mn}(\theta^i, \varphi^i)$, $M_{mn}(\theta^i, \varphi^i)$, $\bar{M}_{mn}(\theta^i, \varphi^i)$ определяются следующим образом [7]:

$$\begin{aligned} M_{mn}(\theta, \varphi) &= \frac{jk}{4\pi} \left[1 + \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{\beta_{mn}}{\omega \mu_0} \cos \theta \right] \left[(U_x)_{mn} \cos \varphi + (U_y)_{mn} \sin \varphi \right], \\ \bar{M}_{mn}(\theta, \varphi) &= \frac{jk}{4\pi} \left[1 + \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{\omega \varepsilon_0}{\beta_{mn}} \cos \theta \right] \left[(U_x)_{mn} \cos \varphi + (U_y)_{mn} \sin \varphi \right], \\ N_{mn}(\theta, \varphi) &= \frac{jk}{4\pi} \left[\cos \theta + \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{\beta_{mn}}{\omega \mu_0} \cos \theta \right] \left[(U_x)_{mn} \sin \varphi - (U_y)_{mn} \cos \varphi \right], \\ \bar{N}_{mn}(\theta, \varphi) &= \frac{jk}{4\pi} \left[\cos \theta + \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{\omega \varepsilon_0}{\beta_{mn}} \cos \theta \right] \left[(U_x)_{mn} \sin \varphi - (U_y)_{mn} \cos \varphi \right], \end{aligned} \quad (6)$$

где $(U_{x,y})_{mn} = \int_S (E_{x,y})_{mn} \exp[jk(x \sin \theta \cos \varphi + y \sin \theta \sin \varphi)] dS$ [7], $(E_x)_{mn}$ и $(E_y)_{mn}$ — тангенциальные составляющие mn -й моды электрического поля на апертуре полости.

Тангенциальные составляющие электрического поля в эллиптической и прямоугольной системах координат связаны следующими соотношениями [8]:

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = [\Psi] \begin{bmatrix} E_\xi \\ E_\eta \end{bmatrix}, \quad (7)$$

где

$$[\Psi] = \frac{(\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta)^{1/2}}{\operatorname{ch}^2 \xi \sin^2 \eta + \operatorname{sh}^2 \xi \cos^2 \eta} \begin{bmatrix} \operatorname{sh} \xi \cos \eta & -\operatorname{ch} \xi \sin \eta \\ -\operatorname{ch} \xi \sin \eta & \operatorname{sh} \xi \cos \eta \end{bmatrix}.$$

3. Модальные коэффициенты G_{mn} , $\bar{G}_{mn}$, соответствующие выходящим из полости модам, определяются с использованием известного выражения для обобщённой матрицы рассеяния R_{mn} [2, 6] полости (в данном случае волноводной полости эллиптического поперечного сечения). На апертуре полости (при $z = 0$) входящие и выходящие моды связаны известными соотношениями [1]

$$\begin{bmatrix} G_{mn} \\ \bar{G}_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{mn} & 0 \\ 0 & \bar{R}_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{mn} \\ \bar{D}_{mn} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Коэффициенты матрицы в (8) при нанесении на заднюю стенку полости радиопоглощающего материала постоянной толщины имеют следующий вид: $R_{mn}, \bar{R}_{mn} = \pm \exp(-2j(\beta_{mn}L_0 + \beta_{mn}^{(1)}L_1))$ [1, 6], где L_0 — длина участка полости без радиопоглощающего материала, L_1 — толщина радиопоглощающего материала, $\beta_{mn} = \sqrt{(2\pi/\lambda)^2 - 4c q_{mn}/h^2}$, $\beta_{mn}^{(1)} = \sqrt{(2\pi/\lambda)^2 \varepsilon_r \mu_r - 4c q_{mn}/h^2}$, ε_r и μ_r — относительная диэлектрическая и магнитная проницаемости радиопоглощающего материала.

4. Вторичное поле рассеяния полости эллиптического поперечного сечения, обусловленное выходящими из апертуры модами, рассчитывается с использованием теоремы взаимности [6] в рамках приближения Стрэттона—Чу [2]. Выходящие из полости моды связаны с рассеянным электромагнитным полем $\mathbf{E}^s$ следующими соотношениями:

$$\mathbf{E}^s = \frac{\exp(-jkr)}{r} (\hat{\theta} F_\theta + \hat{\varphi} F_\varphi), \quad (9)$$

где $kr \rightarrow \infty$,

$$\begin{bmatrix} F_\theta \\ F_\varphi \end{bmatrix} = \sum_m \sum_n \begin{bmatrix} M_{mn}(\theta^i, \varphi^i) & \bar{M}_{mn}(\theta^i, \varphi^i) \\ N_{mn}(\theta^i, \varphi^i) & \bar{N}_{mn}(\theta^i, \varphi^i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{mn} \\ \bar{G}_{mn} \end{bmatrix}.$$

Таким образом, рассеянное электромагнитное поле связано с падающей плоской электромагнитной волной следующими соотношениями:

$$\mathbf{E}^s = \frac{\exp(-jkr)}{r} (\hat{\theta}_0 S_\theta + \hat{\varphi}_0 S_\varphi), \quad (10)$$

где $kr \rightarrow \infty$,

$$\begin{bmatrix} S_\theta \\ S_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{\theta\theta} & S_{\theta\varphi} \\ S_{\varphi\theta} & S_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_\theta \\ I_\varphi \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Входящие в (11) матричные элементы вычисляются следующим образом:

$$S_{\theta\theta} = \left(\frac{2\pi}{jk}\right) \sum_m \sum_n \frac{1}{W_0 Q_{mn}} [R_{mn} M_{mn}(\theta, \varphi) M_{mn}(\theta^i, \varphi^i) - \bar{R}_{mn} \bar{M}_{mn}(\theta, \varphi) \bar{M}_{mn}(\theta^i, \varphi^i)],$$

$$\begin{aligned}
S_{\theta\varphi} &= \left(\frac{2\pi}{jk}\right) \sum_m \sum_n \frac{1}{W_0 Q_{mn}} [R_{mn} M_{mn}(\theta, \varphi) N_{mn}(\theta^i, \varphi^i) - \bar{R}_{mn} \bar{M}_{mn}(\theta, \varphi) \bar{N}_{mn}(\theta^i, \varphi^i)], \\
S_{\varphi\theta} &= \left(\frac{2\pi}{jk}\right) \sum_m \sum_n \frac{1}{W_0 Q_{mn}} [R_{mn} N_{mn}(\theta, \varphi) M_{mn}(\theta^i, \varphi^i) - \bar{R}_{mn} \bar{N}_{mn}(\theta, \varphi) \bar{M}_{mn}(\theta^i, \varphi^i)], \\
S_{\varphi\varphi} &= \left(\frac{2\pi}{jk}\right) \sum_m \sum_n \frac{1}{W_0 Q_{mn}} [R_{mn} N_{mn}(\theta, \varphi) N_{mn}(\theta^i, \varphi^i) + \bar{R}_{mn} \bar{N}_{mn}(\theta, \varphi) \bar{N}_{mn}(\theta^i, \varphi^i)]. \quad (12)
\end{aligned}$$

В (12) для коэффициентов N_{mn} , $\bar{N}_{mn}$, M_{mn} , $\bar{M}_{mn}$ суммирование для чётных волн проводится по индексам $m = 0, 1, 2, \dots$; $n = 1, 2, 3, \dots$, а для нечётных волн — по индексам $m, n = 1, 2, 3, \dots$.

При определении $\theta\theta$ -компоненты бистатистической ЭПР расчёт проводится по следующей формуле:

$$\sigma_{\theta\theta} = 4\pi |S_{\theta\theta}|^2. \quad (13)$$

Аналогичные выражения записываются для других компонент ЭПР полости. Полагая в формулах (12) $(\theta, \varphi) = (\theta^i, \varphi^i)$, можно определить моностатическую ЭПР полости.

Расчёт ЭПР полости на основе вышеизложенной методики проводится без учёта дифракции электромагнитных волн на краях полости и её внешней поверхности, что приводит к ухудшению точности расчёта ЭПР полости с увеличением угла наблюдения [1, 9]. Отметим, что в работе [10] дифракцию электромагнитных волн на краях апертуры полости учитывают, используя метод краевых волн [11].

2. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЁТОВ

На основе вышеизложенной методики был разработан алгоритм численного решения рассматриваемой электродинамической задачи и написана программа для её решения на персональной ЭВМ.

Методика применялась для расчёта угловых зависимостей моностатической ЭПР полости (рис. 1) с размерами $L = 30\lambda$, $a = 1,5\lambda$, $b = 1,0\lambda$, где λ — длина падающей плоской электромагнитной волны. Выбор размеров полости определялся с учётом результатов работы [2], где было установлено, что модальный метод может применяться для расчёта ЭПР полостей круглого поперечного сечения с размерами апертуры, превышающими примерно 2λ .

На рис. 2 представлены результаты численного расчёта (кривая 1) и измерений (кривая 2) зависимости моностатической ЭПР рассматриваемой полости от угла падения θ E -поляризованной плоской электромагнитной волны для угла наблюдения $\varphi = 0$ (см. (1)). Различие теоретических и экспериментальных данных в интервалах углов наблюдения $0^\circ < \theta < 25^\circ$ и $25^\circ < \theta < 55^\circ$ не превышает соответственно 3 и 5 дБ. Для углов наблюдения $\theta > 55^\circ$ совпадение теоретических и экспериментальных данных ухудшается, что объясняется неучётом в рамках используемой методики эффектов дифракции электромагнитных волн на краях полости и её внешней поверхности.

Отметим, что в рассматриваемой полости распространяются 43 волноводные моды, при этом основной вклад в рассеянное поле вносят моды ${}_cE_{01}$, ${}_sH_{11}$, характеризующиеся модальными углами соответственно $15,7$ и $20,9^\circ$ [10].

Рассматриваемая методика применялась также для вычисления ЭПР полости эллиптического поперечного сечения (рис. 1, $L = 30\lambda$, $a = 1,5\lambda$, $b = 1,0\lambda$), содержащей на задней идеально проводящей стенке РПП постоянной толщины d . На рис. 3 приведены угловые зависимости ЭПР полости с РПП в случае E -поляризации падающей плоской волны. Кривая 1 на рис. 3 (аналогичная кривой 1 на рис. 2) соответствует случаю рассеяния плоской электромагнитной волны на идеально проводящей полости ($\varphi = 0$). Кривая 2 на рис. 3 представляет угловую зависимость ЭПР полости с расположенным на её задней стенке РПП марки Eccosorb LS-D80 [1] ($d = 0,025\lambda$; $\varepsilon_r = 14 - 18,2j$; $\mu_r = 1$). Кривая 3 на рис. 3 соответствует случаю рассеяния плоской электромагнитной волны на полости, содержащей на

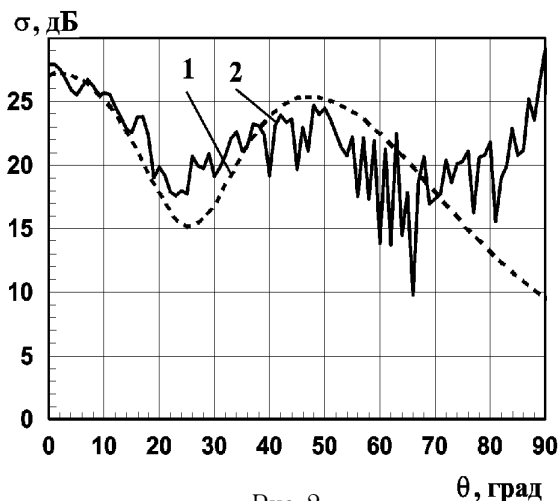


Рис. 2

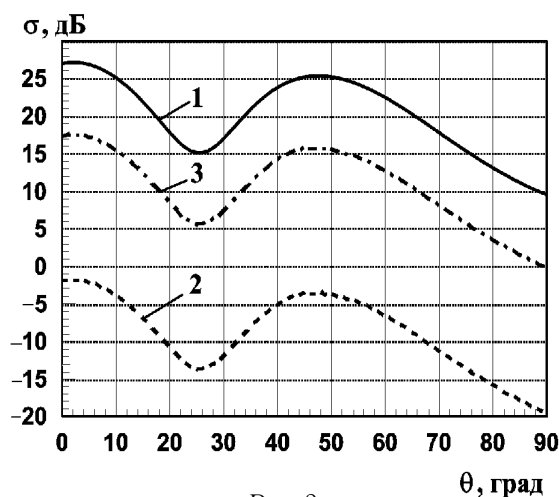


Рис. 3

задней стенке РПП со следующими параметрами [2]: $d = 0,025\lambda$; $\varepsilon_r = 11 - 4,75j$; $\mu_r = 1$. Уменьшение ЭПР для первого РПП составило 28 дБ, а для второго — 9 дБ.

В работе исследовалась зависимость ЭПР полости от точности вычисления корней модифицированных функций Матье и их производных. При изменении корней модифицированных функций Матье или значения их производных на 1; 5; 10; 15 и 20 % изменение ЭПР полости не превышало соответственно 3; 17; 24; 37 и 51 %.

Следует отметить, что с увеличением характерных размеров апертуры полости вычисление рассеянного поля усложняется, так как возрастают требования к точности численного расчёта функций Матье высоких порядков [5].

Из вышеизложенного следует, что предложенная методика может применяться для расчёта ЭПР металлических полостей простой формы с эллиптическим поперечным сечением, содержащих на задней стенке РПП постоянной толщины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кутищев С. Н., Михайлов Г. Д., Преображенский А. П. // Зарубежная радиоэлектроника. Успехи современной радиоэлектроники. 1998. № 10. С. 26.
2. Ling H., Lee S. W., Chou R. C. // IEEE Trans. 1989. V. AP-37, № 5. P. 648.
3. Альховский Э. А., Головченко Г. С., Ильинский А. С. Гибкие волноводы в технике СВЧ. — М.: Радио и связь, 1986. — 128 с.
4. Мак-Лахлан Н. В. Теория и приложения функций Матье. — М.: Иностранная литература, 1953. — 475 с.
5. Справочник по специальным функциям. / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган — М.: Наука, 1979. — 832 с.
6. Сазонов Д. М., Гридин А. Н., Мишустин Б. А. Устройства СВЧ. — М.: Высш. школа, 1981. — 295 с.
7. Фельд Я. Антенны сантиметровых волн. Т. 2. — М.: Сов. радио, 1948. — 260 с.
8. Анго А. Математика для радио- и электроинженеров. — М.: Наука, 1967. — 780 с.
9. Михайлов Г. Д., Кутищев С. Н., Гайворонская С. А. // Изв. вуз. Радиоэлектроника. 1999. Т. 42, № 3. С. 3.
10. Altintas A., Pathak P. H., Liang M. C. // IEEE Trans. 1988. V. AP-36, № 1. P. 84.
11. Уфимцев П. Я. Метод краевых волн физической теории дифракции. — М.: Сов. радио, 1962. — 244 с.

12. Lee C. S., Lee S. W. // IEEE Trans. 1987. V. AP-35, № 4. P. 391.

Воронежский государственный
университет, г. Воронеж, Россия

Поступила в редакцию
15 октября 1999 г.

MODELING OF ELECTROMAGNETIC WAVE SCATTERING ON CAVITIES OF ELLIPTIC CROSS SECTION

S. N. Kutishchev, G. D. Mikhailov, and A. P. Preobrazhensky

Basing on the mode method, we develop a technique for calculation of the effective scattering area (ESA) of an ideal conducting cavity of elliptic cross section with the back wall covered by a radio absorbing coating (RAC) of a constant thickness. In the case where the incident electromagnetic wave is E -polarized, we calculate numerically the angular dependences of monostatic ESAs of cavities of elliptic cross sections with or without RAC. The results of calculations are compared to the obtained experimental data.

УДК 621.391.244

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СООТНОШЕНИЯ КРАМЕРСА–КРОНИГА ДЛЯ ОЦЕНКИ ИМПУЛЬСНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СВЕРХШИРОКОПОЛОСНЫХ СИСТЕМ

В. И. Кошелев, В. Т. Сарычев, С. Э. Шипилов

Для оценки импульсных характеристик сверхширокополосных систем предлагается новый подход, основанный на приведении их комплексных спектров к форме, удовлетворяющей принципу причинности. Данный подход апробируется на полученных экспериментальных данных об искажении формы импульсов при передаче их при помощи отрезков коаксиальных кабелей. Проводится его сравнение со стандартными методами оценки импульсных характеристик. Полученные результаты показывают преимущества предлагаемого подхода.

ВВЕДЕНИЕ

Трансформация сигналов линейными системами полностью определяется импульсными характеристиками таких систем. Этим, собственно, и обусловлена актуальность задачи их оценки. Существует два способа оценки импульсных характеристик. Один из них основан на непосредственном решении системы линейных уравнений, соответствующих операции свёртки импульсной характеристики $h(t)$ с входным сигналом $X(t)$:

$$Y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)X(t - \tau) d\tau. \quad (1)$$

Другой использует известное спектральное соотношение, соответствующее операции свёртки:

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega), \quad (2)$$

где $H(\omega)$ — передаточная функция.

Трудности, возникающие при оценке импульсных характеристик в любом из этих подходов, обусловлены одними и теми же причинами: наличием шума в выходном сигнале $Y(t)$ и неполнотой информации. Операция свёртки в форме (1) или (2) предполагает известными значения непрерывных сигналов или их спектров на всей вещественной оси аргумента. Ни в одном из экспериментов это условие не выполняется.

В данной работе рассматривается спектральный способ оценки импульсных характеристик. Наличие шумов в выходном сигнале приводит к появлению ошибок в оценках передаточных функций $H(\omega)$. Особенно большими эти ошибки становятся в окрестности нулей комплексных спектров входного сигнала. Для уменьшения такого рода ошибок применяются различные виды регуляризации [1, 2].

Ограниченность объёма исходной информации является причиной ошибок в оценках спектров $Y(\omega)$ и $X(\omega)$. Задача оценки непрерывного комплексного спектра по ограниченному набору данных является некорректной. Снятие некорректности может быть осуществлено путём использования дополнительного критерия, позволяющего из множества допустимых оценок комплексного спектра выбрать единственную. В работе [3], например, в качестве такого критерия предлагается использовать принцип максимума энтропии.

Конечность частоты дискретизации сигналов приводит к ограниченности полосы частот, в пределах которой могут быть оценены их спектры. В свою очередь ограниченность полосы частот приводит к нарушению принципа причинности, которое проявляется в появлении предвестников в оценках

импульсных характеристик, восстановленных по передаточным функциям в ограниченной полосе частот. Основная цель предлагаемой работы — устранение ошибок в оценках импульсных характеристик, обусловленных конечностью частоты дискретизации сигналов.

1. ОЦЕНКА ИМПУЛЬСНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК И ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ

Чтобы оценка импульсных характеристик не содержала предвестников, соответствующий ей комплексный спектр передаточной функции $H(\omega)$ должен аппроксимироваться аналитической функцией, реальная и мнимая части которой связаны дисперсионным соотношением. В физике для описания комплексной диэлектрической восприимчивости среды используется дисперсионное соотношение Крамерса—Кронига [4, 5]. Это соотношение можно применить для оценки передаточной функции $H(\omega)$. Для этого сначала следует записать эту функцию в экспоненциальном виде:

$$H(\omega) = \exp\{-[\beta(\omega) + i\varphi(\omega)]\}. \quad (3)$$

Согласно соотношению Крамерса—Кронига фаза в этом выражении может быть определена следующим интегралом:

$$\varphi(\omega) = \omega\tau + \frac{2\omega}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\beta(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega', \quad (4)$$

где $\beta(\omega)$ — коэффициент экстинкции, определяемый по модулю передаточной характеристики: $\beta(\omega) = -\ln(|Y(\omega)|/|X(\omega)|)$, τ — задержка выходного импульса $Y(t)$ относительно $X(t)$.

Таким образом, чтобы оценить комплексную передаточную функцию $H(\omega)$, необходимо предварительно оценить коэффициент экстинкции на всей вещественной оси частот. Спектр вещественных сигналов в соответствии с теоремой Котельникова может быть оценён лишь в полосе частот, ширина которой равна половине частоты дискретизации сигнала. Кроме того, необходимо учесть, что наличие нулей в спектре входного импульса приводит к большим погрешностям при оценке передаточной функции $H(\omega)$ путём непосредственного деления комплексного спектра $Y(\omega)$ на спектр $X(\omega)$. Использование регуляризации позволяет уменьшить такие ошибки. При этом выражение для $H(\omega)$ принимает вид [1]

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)X^*(\omega)}{X(\omega)X^*(\omega) + \alpha}, \quad (5)$$

где $X^*(\omega)$ — комплексно сопряжённый спектр, α — параметр регуляризации. Выбор параметра регуляризации проводится исходя из априорной информации об уровне шумов спектров импульсов $X(\omega)$ и $Y(\omega)$ либо итерационными методами при отсутствии такой информации. Данный подход даёт хорошие оценки спектра $H(\omega)$ в тех частотных областях, где выполняется неравенство $|Y(\omega)/X(\omega)| < 1$. В других частотных областях, где значения спектров $X(\omega)$ и $Y(\omega)$ сравнимы с уровнем шумов измерений, введение регуляризации будет давать близкие к нулю значения $H(\omega)$. Таким образом, если полоса частот входного импульса $X(\omega)$ не перекрывает полосу частот исследуемой пассивной системы, применение метода регуляризации будет давать импульсную характеристику, изобилующую лишними деталями в виде временных флуктуаций, при этом её форма может существенно отличаться от формы истинной импульсной характеристики системы.

Другой подход основан на экстраполяции амплитудного спектра $|H(\omega)|$ в частотные области, не перекрывающиеся спектром входного импульса. Вид экстраполирующей функции выбирается на основе априорной информации об исследуемой системе. При выборе вида этой функции следует учитывать, что операция свёртки (1) допускает единственное решение, если модуль передаточной функции $|H(\omega)|$

убывает на бесконечности как ω^{-2} или быстрее [2]. Параметры экстраполирующей функции выбираются так, чтобы минимизировать среднеквадратичную невязку Φ между измеренными отсчётами выходного сигнала Y_j и модельными значениями $\langle Y_j \rangle$, полученными обратным фурье-преобразованием передаточной функции:

$$\Phi = \sum_{j=1}^N \| Y_j - \langle Y_j \rangle \| . \quad (6)$$

2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА И МЕТОДИКИ ИЗМЕРЕНИЙ

На рис. 1 представлена схема экспериментальной установки, на которой были получены временные реализации сверхширокополосных импульсов. В ходе эксперимента с помощью генератора задающих импульсов Г5–54, блока управления генератором сверхширокополосных импульсов и самого генератора сверхширокополосных импульсов формировались монополярный и биполярный импульсы напряжения длительностью соответственно 1 нс и 2 нс (см. рис. 2), которые подавались на исследуемую систему (отрезок кабеля). Для ослабления амплитуды входного импульса, а также для уменьшения возможных переотражений от концов кабеля за счёт неидеального согласования использовались аттенюаторы. Импульс после прохождения через исследуемую систему регистрировался осциллографом С8–13 со стробоскопическими блоками развёртки Я40–2700 и усилителем Я40–1700, который запускался от синхроимпульса блока управления. Данные, полученные с помощью цифровой фотокамеры с разрешением 640×480 пикселей, переносились на ЭВМ и оцифровывались. В эксперименте использовались два различных кабеля с волновым сопротивлением 50 Ом: кабель Э 1 (РК 50–4–11, длина 8 м) и кабель Э 2 (РК 50–2–11, длина 20 м).

Для регистрации импульсов напряжения непосредственно на выходе генератора использовался короткий отрезок кабеля, дающий минимальные искажения входного импульса. Такая реализация принималась за $X(t)$. С помощью специальной программы изображение, полученное цифровой фотокамерой, преобразовывалось в амплитудно-временные отсчёты импульса.

Спектры импульсов $X(t)$ и $Y(t)$ вычислялись двумя независимыми методами. Первый — стандартный подход с использованием процедуры быстрого преобразования Фурье (БПФ). Второй подход, основанный на методе максимума энтропии и обладающий высокой разрешающей способностью, давал близкие результаты в сравнении со стандартным методом БПФ в области частот, где сосре-

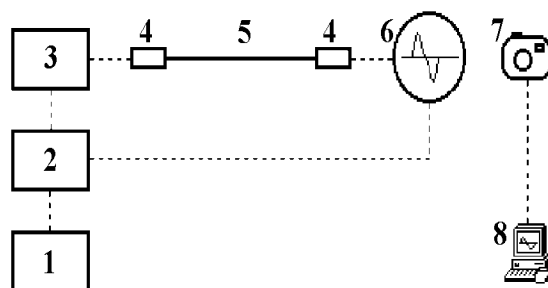


Рис. 1. Схема экспериментальной установки: 1 — генератор задающих импульсов, 2 — блок управления генератором сверхширокополосных импульсов, 3 — генератор сверхширокополосных импульсов, 4 — аттенюаторы, 5 — отрезок кабеля, 6 — осциллограф, 7 — цифровая фотокамера, 8 — ЭВМ

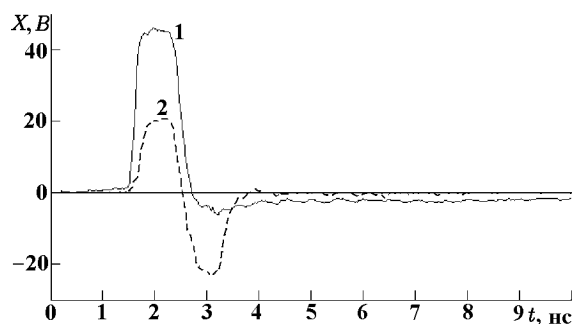


Рис. 2. Монополярный (1) и биполярный (2) импульсы на выходе генератора

доточена основная энергия входного импульса. Таким образом, было показано, что данные сигналы не имеют тонкой спектральной структуры, и для оценки их спектров достаточно использовать стандартные методы.

Экспериментальные данные во временной области, включающие 640 отсчётов, дополнялись нулями до 5096 отсчётов. Дополнение нулями необходимо для получения спектров с высоким уровнем детальности. С использованием операции БПФ были получены спектры монополярного и биполярного импульсов. Абсолютные значения спектров монополярных импульсов от генератора $|X(\omega)|$ и после прохождения через кабель Э 1 и кабель Э 2 приведены на рис. 3. Для импульсов биполярной формы указанные спектры имеют существенное отличие только в области низких частот, где они близки к нулю.

Отказ от использования регуляризации может привести к превышению единичного уровня амплитудных спектров импульсных характеристик там, где $|X(\omega)|$ и $|Y(\omega)|$ сравнимы с уровнем шумов измерений. Восстановленные при этом импульсные характеристики имеют сильно изрезанный основной лепесток и сравнимый с основным уровень паразитных флуктуаций. На рис. 4 представлены результаты расчётов амплитудных спектров импульсных характеристик с использованием регуляризации ($\alpha = 0,1$).

Как видно из рис. 4, введение регуляризации в большинстве случаев устраняет «нефизичность» поведения амплитудных спектров импульсных характеристик, т. е. превышение амплитудным спектром единичного уровня. В то же время регуляризация приводит к появлению сильного затухания $|H(\omega)|$ в области высоких частот. Восстановленный при этом вид импульсных характеристик для двух кабелей с использованием монополярного импульса представлен на рис. 5. Для биполярных импульсов возникает сложность оценки амплитудных спектров импульсных характеристик в области низких частот, где уровень амплитудных спектров импульсов сравним с уровнем шумов измерений. Эта ошибка оказывает существенное влияние на форму восстановленной импульсной характеристики.

В проводимом эксперименте не было никаких оснований считать наличие сильных вариаций амплитудных спектров импульсных характеристик объективной реальностью. Их появление объясняется заметным влиянием шумов в области частот, где уровень амплитудного спектра входного импульса был низким. Для устранения влияния вариаций амплитудного спектра импульсных характеристик в таких областях частот их оценка проводилась с помощью модельной функции, определяемой выражением

$$|H(\omega)| = \frac{|Y(\omega)|}{|X(\omega)|} = \frac{d}{\omega^2 + g}. \quad (7)$$

Коэффициенты d и g этой модели оценивались путём минимизации квадратичной невязки с экспериментальными значениями отношения $|Y/X|$ в частотных областях, где уровень амплитудного спектра

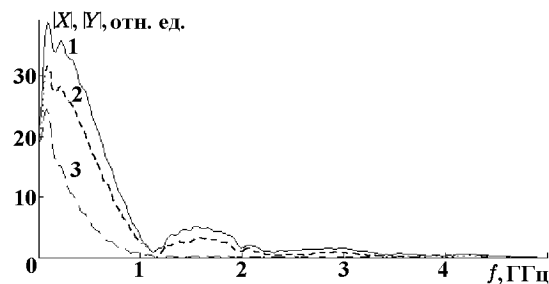


Рис. 3. Спектры монополярных импульсов от генератора (1) и после прохождения через отрезки кабеля Э 1 (2) и кабеля Э 2 (3)

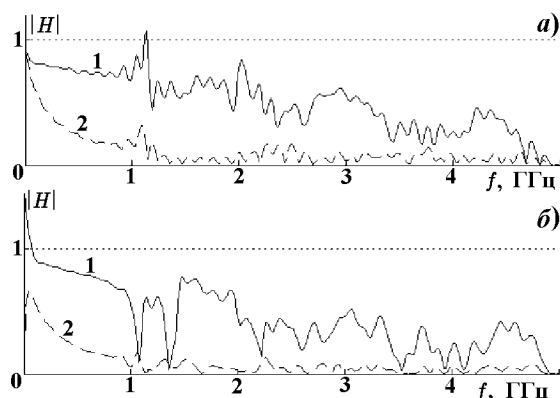


Рис. 4. Спектры импульсных характеристик кабеля Э 1 (1) и кабеля Э 2 (2), полученные для монополярного (а) и биполярного (б) импульсов с использованием регуляризации

превышал уровень шумов измерений. Для используемых в эксперименте кабелей данная модель хорошо согласовалась с их паспортными значениями по затуханию [6].

При расчёте фазы $H(\omega)$ с помощью выражения (4) использовались данные амплитудных спектров импульсных характеристик в полосе частот от 0 до 5 ГГц, полученные с использованием регуляризации ($\alpha = 0,1$) и вычисленные по модели (7). В последнем случае использование модели ограничивалось теми областями частот, где уровни амплитудных спектров $|X(\omega)|$ и $|Y(\omega)|$ были сравнимы с уровнем шумов измерений. В других частотных областях значения $|H(\omega)|$ рассчитывались по экспериментальным данным. Полученные результаты восстановленных импульсных характеристик для кабеля Э 1 с использованием импульсов монополярной формы приведены на рис. 6.

Полученные результаты показали, что при использовании регуляризации оценки импульсных характеристик изобилуют лишними деталями в виде паразитных флуктуаций. Существует несколько причин их появления. Определяющей среди них является недостаточная ширина спектра входного импульса по сравнению с полосой спектра импульсной характеристики. Кроме того, параметр регуляризации не может корректировать фазовые искажения, вызванные шумами измерений. Экстраполяция $|H(\omega)|$ модельной функцией (7) наряду с расчётом фазы с помощью соотношения Крамерса—Кронига позволяют искусственно расширить частотную область зондирующего и принятых импульсов. Так, для монополярного импульса, как видно из рис. 3, основная энергия сосредоточена в полосе частот до 1 ГГц, и эта область менее всего подвержена влиянию шума. Для биполярного импульса исключение составляет область низких частот ($f < 0,1$ ГГц), где уровень амплитудных спектров $|X(\omega)|$, $|Y(\omega)|$ сравним с уровнем шумов. Использование экстраполяции позволяет оценить затухание в частотной области $f > 1$ ГГц, а для биполярного импульса — и в области низких частот. При этом у импульсных характеристик существенно снижается уровень предвестников, передний фронт становится более крутым, исчезают паразитные флуктуации.

Как видно из рис. 6, использование соотношения Крамерса—Кронига в данном случае не избавляет от предвестников. Причина этого в том, что указанное соотношение предполагает аналитичность амплитудного спектра $|H(\omega)|$. В данном случае функция $|H(\omega)|$ не являлась аналитической, поскольку полагалась тождественно равной нулю при $f > 5$ ГГц. Аналитичность амплитудного спектра может быть восстановлена путём непрерывного продолжения измеренных или рассчитанных значений $|H(\omega)|$ в область более высоких частот.

Сравнение импульсных характеристик h_1 и h_2 , полученных при использовании соответственно монополярного и биполярного импульсов, показывает их близкое сходство. На рис. 7 приведены данные для кабеля Э 2. Основные различия вызваны ошибкой определения затухания в области низких частот при экстраполяции спектра h_2 и влиянием шумов измерений при определении затухания $|H(\omega)|$.

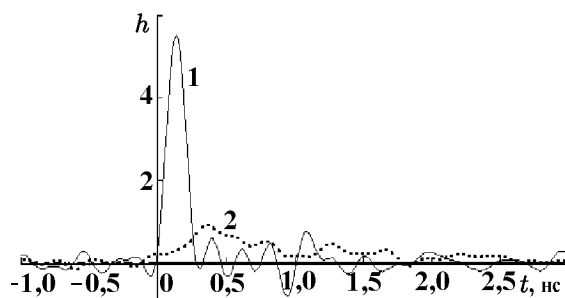


Рис. 5. Импульсные характеристики кабелей Э 1 (1) и Э 2 (2), полученные с использованием регуляризации

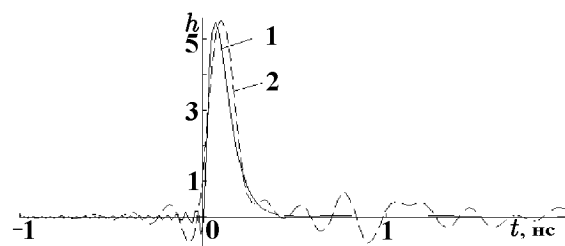


Рис. 6. Форма импульсных характеристик, восстановленных при расчёте фазы с помощью соотношения Крамерса—Кронига: с использованием экстраполяции амплитудного спектра (1) и с использованием регуляризации (2)

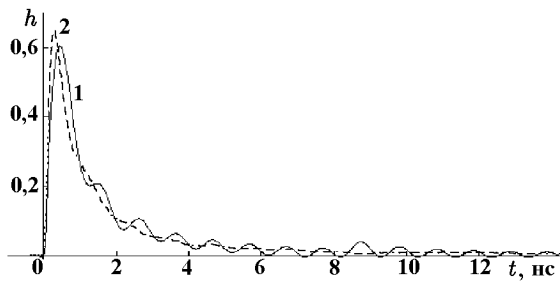


Рис. 7. Форма импульсных характеристик, полученных при использовании монополярного (1) и биполярного (2) импульсов

в окрестности первого бокового лепестка. При этом погрешность восстановления монополярных и биполярных импульсов $Y(t)$ по $X(t)$ с использованием h_1 и h_2 не превышала 1 %.

Полученные данные показывают, что при зондировании системы различными по форме и спектральному составу импульсами предложенный подход даёт близкие по форме импульсные характеристики. Кроме того, найденные импульсные характеристики позволяют восстанавливать сигналы с более широкой спектральной полосой по сравнению с импульсом, используемым для получения импульсной характеристики.

3. СРАВНЕНИЕ ОЦЕНОК ИМПУЛЬСНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДЛЯ ДВУХ МОДЕЛЕЙ ФАЗОВЫХ СПЕКТРОВ

Представленные выше оценки импульсных характеристик имеет смысл сравнить с известными результатами [6], где достаточно полно описаны алгоритмы расчёта импульсных характеристик коаксиальных кабелей по значениям их электродинамических характеристик. Спектр $H(\omega)$ определялся согласно выражению (3), где

$$\beta(\omega) = b\omega^{1/2} + a\omega^{3/2}/(1 + m\omega). \quad (8)$$

Фаза в [6] вычисляется согласно следующему выражению:

$$\varphi(\omega) = \omega\tau + b\omega^{1/2} + [b\omega^{1/2} - a\omega^{3/2}/(1 + m\omega)]/(a\omega k). \quad (9)$$

Коэффициенты a , b и m определяются электродинамическими параметрами кабеля. В схеме эксперимента канал связи помимо кабеля содержал аттенюаторы и переходники. Для такого канала невозможно найти по справочникам значения электродинамических параметров в полосе частот несколько ГГц. Поэтому коэффициенты a и b находились численно путём минимизации среднеквадратичной невязки между экспериментально измеренным затуханием и теоретической моделью (3), (8), (9). Величина $m = 2 \cdot 10^{-11}$ с/рад и связана с диэлектрическими потерями в кабеле, коэффициент $k = 1/3 \cdot 10^9$.

На рис. 8 приведены зависимости затухания передаточной функции и фазы для кабеля Э 2, полученные согласно выражениям (8) и (9). Здесь же приведён фазовый спектр, полученный с помощью соотношения Крамерса—Кронига (4). При расчёте $\varphi(\omega)$ в обоих случаях принималось $\tau = 0$.

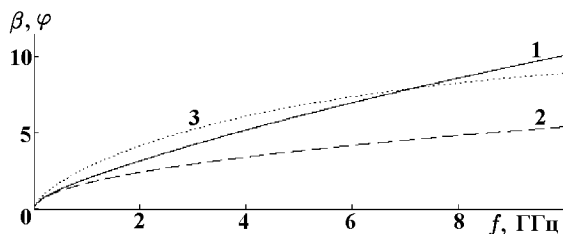


Рис. 8. Зависимости затухания (кривая 1) и фазы (кривая 2) от частоты, вычисленные согласно выражениям (8) и (9) и фазовый спектр (кривая 3), вычисленный по модели (4)

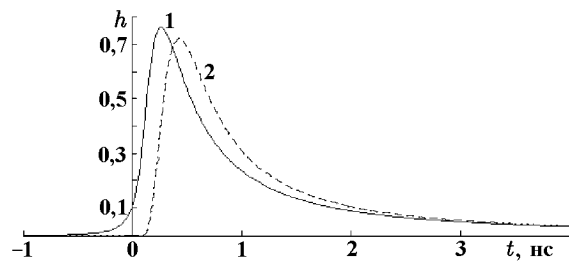


Рис. 9. Импульсные характеристики, вычисленные при одинаковых затуханиях $\beta(\omega)$ с использованием фазового спектра (9) (кривая 1) и модели (4) (кривая 2)

На рис. 9 приведены импульсные характеристики, соответствующие полученным комплексным спектрам. Согласно рис. 9 вычисление фазы по выражению (9) приводит к нарушению принципа причинности, проявляющемуся в появлении предвестника у импульсной характеристики.

ВЫВОДЫ

Для получения импульсной характеристики линейной системы рекомендуется использовать экспериментальные измерения только для оценки её амплитудного спектра. Фазовый спектр следует вычислять по данным амплитудного спектра, используя соотношение Крамерса—Кронига. Подобная процедура позволяет избежать появления предвестников импульсной характеристики и паразитных флуктуаций, вызванных ошибками в оценке фазовых спектров.

Если полоса частот зондирующего импульса уже полосы исследуемого канала пропускания, то вид импульсной характеристики будет содержать предвестники и иметь более пологий передний фронт. Применение экстраполяции амплитудного спектра импульсной характеристики на основе априорной информации об исследуемой системе позволяет уменьшить уровень паразитных временных лепестков.

Авторы благодарят Плиско В. В. за помощь в проведении эксперимента.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г. Численные методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1990. — 232 с.
2. Верлань А. Ф., Сизиков В. С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы и программы. Справочное пособие. — Киев: Наукова Думка, 1986. — 544 с.
3. Сарычев В. Т. // Изв. вуз. Радиофизика. 1997. Т. 40, Э 7. С. 925.
4. Нуссенцвейг Х. М. Причинность и дисперсионные соотношения. — М.: Мир, 1976. — 462 с.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. — М.: Наука, 1982. — 620 с.
6. Глебович Г. В., Ковалёв И. П. Широкополосные линии передачи импульсных сигналов. — М.: Сов. радио, 1973. — 224 с.

Институт сильноточной
электроники СО РАН,
г. Томск, Россия

Поступила в редакцию
13 октября 1999 г.

USING THE KRAMERS—KRONIG RELATION FOR ESTIMATION OF PULSED RESPONSES OF ULTRAWIDEBAND SYSTEMS

V. I. Koshelev, V. T. Sarychev, and S. E. Shipilov

To estimate the pulsed responses of ultrawideband systems, we propose a new approach based on the reduction of their complex spectra to the form satisfying the causality principle. This approach is tested on the obtained experimental data concerning distortions of pulses upon their transmitting via coaxial cable segments. The proposed approach is compared to the standard methods of estimating the pulsed responses. The obtained results show the advantages of the proposed approach.

УДК 621.371.24

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРАЛЬНОГО СОСТАВА ВЫХОДНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ГИРОТРОНА С ОТРАЖЕНИЕМ ЧАСТИ ВЫХОДНОГО СИГНАЛА

М. Ю. Глявин, В. Е. Запезалов, А. Н. Куфтин, А. Г. Лучинин

Приведены экспериментальные результаты влияния отражения СВЧ излучения от диэлектрического окна на частотные характеристики выходного сигнала технологического гиротрона. Показано, что при наличии отражений ширина спектра увеличивается в несколько раз.

ВВЕДЕНИЕ

Мощные генераторы когерентного электромагнитного излучения миллиметрового диапазона длин волн — гиротроны — всё более широко применяются для решения ряда технологических задач, в частности, для объёмного нагрева и спекания керамических материалов [1, 2]. Гиротроны этого класса имеют прямой вывод СВЧ мощности на рабочей моде, т. е. в них отсутствует квазиоптическая развязка между пространством взаимодействия и окном. При этом отражённый сигнал попадает непосредственно в резонатор, изменяя условия взаимодействия электронного пучка с высокочастотным полем. Традиционные гиротроны, являясь в принципе, многомодовыми приборами, в подавляющем большинстве случаев работают в режиме одномодовой генерации, что обеспечивается как методами электронной и электродинамической селекции, так и конкуренцией взаимодействующих мод. Выходное излучение при этом имеет достаточно узкий частотный спектр. Однако при вводе такого излучения в микроволновую печь — «камеру» — в рабочем объёме образуется интерференционная картина. Обрабатываемый объект в данном случае попадает как в узлы, так и в пучности стоячей волны, что приводит к неоднородному нагреву и, как следствие, к ухудшению физико-механических свойств образца. Для получения более однородной структуры высокочастотного поля в камере обычно используются стенки со сложным профилем или дополнительные устройства, изменяющие угол ввода СВЧ излучения. Для этой же цели могут быть использованы и широкополосные сигналы, получаемые в автомодуляционных или стохастических режимах генерации. В данной работе описываются результаты экспериментального исследования частотного спектра выходного излучения технологического гиротрона, в котором изменение режима генерации осуществлялось за счёт отражения части сигнала при рассогласовании выходного окна.

ОПИСАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Основные параметры исследуемого гиротрона представлены в табл. 1. Конструктивно гиротрон выполнен металлокерамическим, отпаянным [3]. Для поддержания необходимого вакуума применён встроенный электроразрядный насос, работающий в магнитном поле системы соленоидов гиротронного стенда («теплый» соленоид). Магнетронно-инжекторная пушка (МИП) позволяет формировать нужный электронный поток и имеет срок службы в режиме накала не менее 1 000 часов. Пушка выполнена с применением высокотемпературных эмиссионных материалов, стойких к электрическим пробоям. Данная МИП рассчитана на работу в широком интервале рабочих напряжений гиротрона (15÷30 кВ). Система охлаждения разработана с учётом номинальной нагрузки на коллектор до 80 кВт.

Таблица 1

Основные параметры исследуемого гиротрона

Основной тип колебаний (на второй гармонике циклотронной частоты)	TE ₀₂
Рабочая частота, ГГц	30
Выходная мощность, кВт	10
Ускоряющее напряжение, кВ	25
Ток пучка, А	2
Магнитное поле, Т	0,57
КПД, %	30

Таблица 2

Основные параметры системы вывода СВЧ мощности

Материал	BN
Расчётная рабочая частота, ГГц	30
Толщина окна, мм	2,4
Диаметр окна, равный диаметру выходного волновода, мм	40
Показатель преломления $n = \sqrt{\epsilon}$	2,16
Тангенс угла потерь, $\text{tg } \delta$	$3 \cdot 10^{-5}$
Теплопроводность, Вт/(м · К)	45

Окно гиротрона изготовлено из диска нитрида бора заданной толщины. Этот материал обладает малыми СВЧ потерями и высокой теплопроводностью. Минимальное отражение волны в простейших однодисковых окнах обеспечивается подбором толщины окна d исходя из равенства оптической разности хода целому числу полуволн для основного (расчётного) типа колебаний:

$$d = \frac{m\lambda}{2\sqrt{\epsilon - \sin^2 \theta_B}}, \quad (1)$$

где θ_B — угол Бриллюэна падающей волны, ϵ — диэлектрическая проницаемость пластины [4], $m = 1, 2, 3, \dots$. При переходе на другой тип колебаний коэффициент отражения увеличивается из-за изменения длины волны генерации λ и дисперсии диэлектрической проницаемости. В соответствующих расчётах диэлектрическая проницаемость считалась действительной величиной, поскольку для характерного тангенса угла потерь для нитрида бора $\text{tg } \delta = \text{Im } \epsilon / \text{Re } \epsilon \approx 10^{-5} \div 10^{-4}$ мнимая часть ϵ не оказывает существенного влияния на отражение волны от окна. Основные параметры диэлектрического окна сведены в табл. 2. В простейшей модели, когда отсутствует трансформация рабочей моды в другие типы колебаний, коэффициент отражения R от плоской пластины, расположенной в поперечном сечении волновода, описывается известной формулой (см., например, [5])

$$|R|^2 = R_p = \frac{(1 - \gamma)^2 \sin^2 \chi}{4\gamma \cos^2 \chi + (1 + \gamma)^2 \sin^2 \chi}, \quad (2)$$

где $\chi = 2\pi d \lambda^{-1} \sqrt{\epsilon - \sin^2 \theta_B}$ — набег фазы на толщине пластины, R_p — отражательная способность (коэффициент отражения по мощности),

$$\gamma = \begin{cases} \frac{\epsilon - \sin^2 \theta_B}{\cos^2 \theta_B} & \text{для TE-волн;} \\ \frac{\epsilon^2 \cos^2 \theta_B}{1 - \sin^2 \theta_B} & \text{для TM-волн.} \end{cases} \quad (3)$$

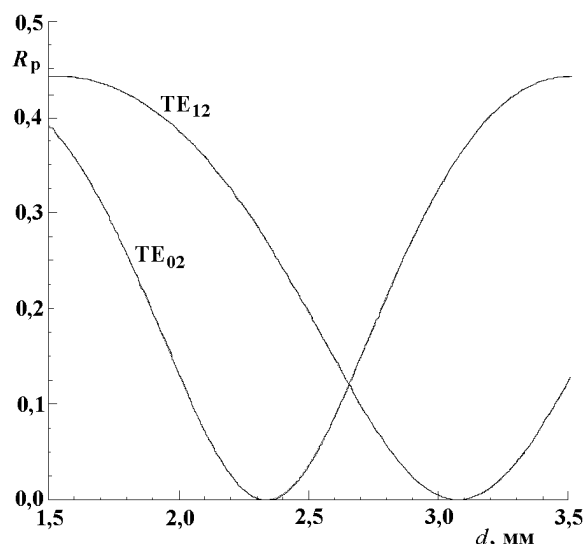


Рис. 1. Зависимость коэффициента отражения по мощности R_p от толщины окна для мод TE_{02} и TE_{12} круглого волновода

Зависимость коэффициентов отражения от толщины окна для основной рабочей моды TE_{02} и эффективно возбуждающейся при небольшом изменении магнитного поля моды TE_{12} приведена на рис. 1.

Оценка влияния отражённого сигнала на режим генерации может быть выполнена в приближении фиксированной продольной структуры высокочастотного поля по методике, описанной в [6]. Для исследования спектрального состава сигнала вычисляется соответствующая спектральная функция

$$F(\Omega) = \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} F(\tau) \exp(i\Psi) \exp(-i\Omega\tau) d\tau \quad (4)$$

при $\tau_{\min}$, соответствующем моменту окончания переходного процесса, и $\tau_{\max}$, соответствующем максимальному времени расчёта установившегося режима генерации. Как показано в [6, 7], при малых коэффициентах отражения $|R| \leq 0,1$ в гиротроне устанавливается режим колебаний с постоянной амплитудой, а с ростом коэффициента отражения происходит переход сначала к автомодуляционным, а потом и к стохастическим режимам колебаний. Эти переходы сопровождаются обогащением спектра выходного излучения.

Экспериментально влияние отражений исследовалось следующим образом. При помощи стандартного СВЧ спектр-анализатора СЧ-60 регистрировался частотный спектр выходного излучения моды TE_{02} с основной частотой 30 ГГц в номинальном режиме, т. е. при работе с согласованным окном. Затем перестройкой магнитного поля возбуждалась генерация моды TE_{12} с частотой 23 ГГц на относительно невысоком (несколько кВт) уровне выходной мощности, что позволяло получить достаточно точную величину отражённого сигнала и в то же время избежать перегрева окна и высокочастотных пробоев в лампе. Из рис. 1 видно, что для моды TE_{12} при работе с несогласованным окном ($d = 2,4$ мм) коэффициент отражения составляет $R \approx 0,5$. После измерения спектра в этом режиме (т. е. с несогласованным окном), при сохранении напряжения и тока электронного пучка, а также величины магнитного поля, на окно устанавливалась согласующая VN пластина толщиной 0,68 мм. Эта пластина минимизировала отражение моды TE_{12} (рис. 1). Плотное прилегание пластин обеспечивалось предварительной шлифовкой соответствующих поверхностей окна и пластины. Результаты спектральных измерений для всех исследованных режимов приведены на рис. 2.

Для первых двух режимов (рис. 2а и 2б), соответствующих работе с согласованными окнами, абсолютная ширина спектра выходного излучения составляет $1 \div 1,5$ МГц. Довольно значительная для

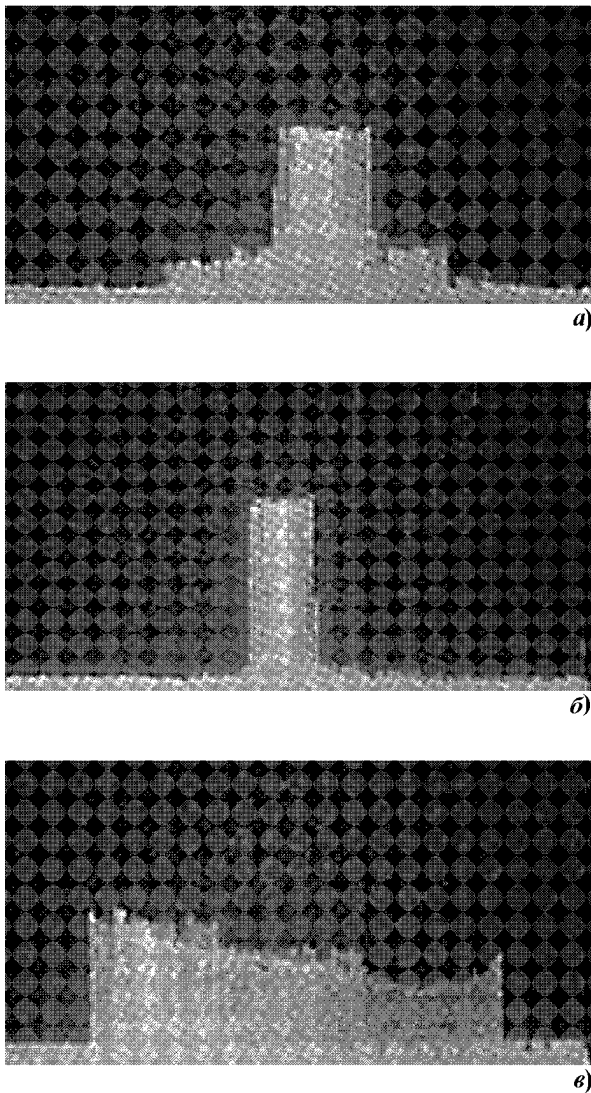


Рис. 2. Спектр выходного излучения технологического гиротрона без отражения излучения от окна (согласованное окно) для мод TE_{02} (а), TE_{12} (б) и для моды TE_{12} с отражением части излучения от выходного окна (в)

Для первых двух режимов (рис. 2а и 2б), соответствующих работе с согласованными окнами, абсолютная ширина спектра выходного излучения составляет $1 \div 1,5$ МГц. Довольно значительная для

гиротронов относительная ширина спектра (около $5 \cdot 10^{-5}$) в этих режимах объясняется, по-видимому, флуктуациями параметров источников питания, имевших место из-за недостаточной стабилизации при работе на высоких уровнях потребляемой мощности. Несколько бо́льшая ширина спектра для моды TE_{02} связана, вероятно, с наличием небольшого отражённого сигнала из-за недостаточного согласования толщины окна и более высоким уровнем выходной мощности. Можно видеть, что при рас-согласовании окна спектр выходного излучения моды TE_{12} уширился примерно на порядок и составил около 10 МГц, имея при этом достаточно равномерную спектральную плотность мощности. Данное обстоятельство может иметь положительный эффект для объёмного нагрева и спекания керамики в микроволновой печи, поскольку может обеспечить достаточное размытие интерференционной картины в области нагрева и, следовательно, более равномерное прогревание образца по сравнению с нагревом узкополосным излучением. Наблюдаемое уширение спектра соответствует теоретическим результатам [6, 7] и свидетельствует о корректности использованных методов расчёта.

ВЫВОДЫ

Полученные результаты демонстрируют существенное влияние отражений СВЧ излучения на спектральный состав выходного излучения гиротрона. По мере увеличения отражённого сигнала происходит обогащение спектра выходного излучения с достаточно равномерной спектральной плотностью мощности. Проведённые эксперименты подтвердили правильность модели, используемой для теоретических оценок. Результаты исследования позволяют оценить возможность создания мощных источников шумового излучения, предназначенных для использования в технологических установках для однородного высокочастотного нагрева материалов.

Авторы благодарны Н. С. Гинзбургу и М. И. Петелину за проявленный интерес к работе, многочисленные ценные замечания и стимулирующие дискуссии, а также В. Л. Братману за помощь при написании статьи.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант Э 00–02–16412).

ЛИТЕРАТУРА

1. Bykov Yu., Goldenberg A., Flyagin V. // Mat. Res. Soc. Symp. Proc., V. 169. P. 41.
2. Gaponov-Grekhhov A. V., Granatstein V. L. Applications of High Power Microwaves.// Boston, London: Artech House Microwave Library, 1994.
3. Flyagin V., Kuftin A., Lygin V., Luchinin A., Malygin O., Manuilov V., Tsimring Sh., Zapevalov V. // Proc. 3 Int. Workshop on Strong Microwaves in plasmas, N. Novgorod, 1997. V. 2. P. 711.
4. Thumm M. // Int J. Infrared and Millimeter Waves. 1998. V. 19, № 1. P. 3.
5. Годжаев Н. М. Оптика. — М.: Высшая школа, 1977. — 432 с.
6. Глявин М. Ю., Запевалов В. Е. // Изв. вузов. Радиофизика. 1998. Т. 41, № 10. С. 1348.
7. Гинзбург Н. С., Глявин М. Ю., Завольский Н. А., Запевалов В. Е., Моисеев М. А., Новожилова Ю. В. // Письма в ЖТФ. 1998. Т. 24, № 11. С. 53.

Институт прикладной физики РАН,
ЗАО НПП "ГИКОМ",
г. Н. Новгород, Россия

Поступила в редакцию
7 июля 1999 г.

**EXPERIMENTAL STUDY OF SPECTRUM OF THE OUTPUT RADIATION OF A GYROTRON
WITH PARTIAL REFLECTION OF THE OUTPUT SIGNAL**

M. Yu. Glyavin, V. E. Zapevalov, A. N. Kuftin, and A. G. Luchinin

We present the experimental results on the effect of reflection of the VHF radiation from dielectric window on frequency characteristics of the output signal of a technological gyrotron. It is shown that the spectrum width increases several times due to the effect of reflections.

УДК 534.113

ТРАНСФОРМАЦИЯ МОД ПОВЕРХНОСТНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН В КРИСТАЛЛАХ KNbO_3 И РКН С СИЛЬНОЙ ПЬЕЗОСВЯЗЬЮ

М. Ю. Двоешерстов, С. Г. Петров, В. И. Чередник, А. П. Чириманов

Рассмотрен процесс трансформации обобщённой поверхностной акустической волны (ОПАВ) в волну Гуляева—Блюстейна (Г—Б) или в рэлеевскую волну соответственно в yx -срезе и $90-yx$ -срезе кристаллов KNbO_3 ромбической и РКН орторомбической сингонии при незначительном отклонении волнового вектора волны от направления оси чистой моды. Проведён численный анализ характеристик ОПАВ, волны Г—Б, а также рэлеевской волны в кристаллах KNbO_3 и РКН с сильной пьезоэлектрической связью. Показано, что в области yx -среза этих кристаллов ОПАВ имеет преимущественно поперечную компоненту механического смещения. При этом коэффициент электромеханической связи имеет рекордно большую величину. Проанализирована зависимость распределения механических смещений и электрического потенциала волны вглубь кристалла от расстояния от поверхности подложки на открытой и металлизированной поверхностях, а также рассмотрена зависимость скорости ОПАВ в данных кристаллах при изменении толщины металлической плёнки.

ВВЕДЕНИЕ

Как известно [1], в пьезокристаллах KNbO_3 и РКН, обладающих соответственно ромбической и орторомбической сингонией в y -срезе в направлении оси x распространяется волна Гуляева—Блюстейна (Г—Б), а $90-yx$ -срезе — чисто рэлеевская волна. Интерес к изучению характеристик поверхностных акустических волн в данных кристаллах вызван тем обстоятельством, что эти кристаллы имеют очень высокий коэффициент электромеханической связи. Как известно [1, 2], коэффициент электромеханической связи k^2 в кристаллах KNbO_3 и РКН имеет очень большую величину, почти в десять раз большую, чем в широко известном кристалле ниобата лития LiNbO_3 yz -среза. Кроме того, обычно скорость волны Г—Б гораздо выше, чем скорость поверхностной волны Рэлея [3]. Фазовая скорость волны Г—Б близка к скорости медленной сдвиговой объёмной волны, что может позволить использовать данный тип волны в более высокочастотных устройствах, основанных на поверхностных акустических волнах (ПАВ). В силу кристаллографической симметрии направления фазовой и групповой скоростей у волны Г—Б и у чисто рэлеевской волны всегда совпадают, поэтому сдвиг фаз между фазовой и групповой скоростями равен нулю, что существенно в ряде приложений.

В произвольно выбранном направлении пьезокристалла, как правило, может распространяться обобщённая поверхностная акустическая волна (ОПАВ), имеющая все три компоненты механического смещения U_1 , U_2 , U_3 и сопровождающий их электрический потенциал φ .

Зависимость фазовой скорости ОПАВ от направления распространения волны в каком-либо срезе пьезокристалла обычно имеет экстремумы. Некоторые из этих экстремумов обусловлены случайным сочетанием значений упругих, пьезоэлектрических и диэлектрических констант пьезокристалла в данном направлении. Наличие других экстремумов на кривой фазовой скорости обусловлено одной только кристаллографической симметрией [3]. Именно в этом случае в пьезокристалле может распространяться так называемая «чистая мода» ПАВ, имеющая только либо механические смещения U_1 , U_3 и потенциал φ (рэлеевская волна), либо смещение U_2 и потенциал φ (волна Гуляева—Блюстейна). При этом вектор потока энергии всегда параллелен волновому вектору волны.

При наличии тонкого изотропного металлического слоя (например из алюминия) конечной толщины H ОПАВ может иметь различный характер зависимости фазовой скорости от параметра H/λ ,

где λ — длина волны. Причём, если скорость $V_t^{\text{сл}}$ объёмной волны сдвига в материале верхнего слоя больше скорости $V_t^{\text{подл}}$ волны сдвига в кристаллической подложке, то существует только одна поверхностная волна с действительным значением волнового вектора K . Если скорость волны сдвига в слое меньше скорости волны сдвига в подложке, то может существовать целый ряд независимых ОПАВ в слоистой структуре [3].

В данной работе приводятся результаты численного расчёта характеристик ОПАВ, а также волн Г—Б и Рэлея в направлениях чистой моды в следующих пьезокристаллах: ниобат калия KNbO_3 ромбической сингонии (mm2 класс симметрии) и освинцованный ниобат калия $\text{Pb}_2\text{KNb}_5\text{O}_{15}$ (сокращённо РКН) орторомбической сингонии (C222 класс симметрии). Рассмотрен процесс трансформации волны Г—Б и рэлеевской волны в обобщённую поверхностную акустическую волну при незначительном отклонении волнового вектора от направления оси чистой моды. Также рассмотрены характеристики ОПАВ, распространяющейся в системе изотропный металлический слой конечной толщины — анизотропная пьезокристаллическая подложка KNbO_3 , РКН.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Как обычно [2], в качестве рабочей выберем декартову систему координат, в которой ось x_1 направлена вдоль вектора фазовой скорости волны, ось x_3 — нормаль к поверхности пьезокристалла.

Известно [3], что если саггитальная плоскость x_1x_3 перпендикулярна оси двухкратного вращения кристалла вокруг какой-либо из кристаллографических осей x, y, z , то ось x_1 совпадает с направлением распространения чистой моды (мода Гуляева—Блюстейна), имеющей только одну чисто сдвиговую компоненту механического смещения U_2 и сопровождающий электрический потенциал φ . При этом в данном направлении независимо может распространяться и чисто механическая волна, имеющая смещения U_1 и U_3 .

Если саггитальная плоскость представляет собой плоскость зеркальной симметрии кристалла, то ось x_1 совпадает с направлением распространения чистой моды [3], имеющей только две компоненты механического смещения U_1 и U_3 и сопровождающий их потенциал φ (мода Рэлея).

При преобразовании тензоров упругих C_{ijkl} , пьезоэлектрических e_{ijk} и диэлектрических ε_{ik} констант пьезокристалла из стандартной кристаллографической системы координат x, y, z в рабочую систему координат x_1, x_2, x_3 при помощи углов Эйлера f_1, f_2, f_3 в случае распространения волны Г—Б следующие упругие и пьезоэлектрические константы должны обращаться в нуль [4]:

$$\begin{aligned} C_{1123} = C_{1112} = C_{3323} = C_{3312} = C_{2313} = C_{1312} = 0, \\ e_{111} = e_{133} = e_{113} = e_{311} = e_{333} = e_{313} = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

При этом система уравнений [3], описывающая распространение волны в кристалле, имеет нетривиальное вырожденное двухпарциальное решение (мода Г—Б) в виде

$$\begin{aligned} U_2 &= \sum_{m=1}^2 A_m C_2^{(m)} \exp[jK(\beta^{(m)}x_3 + x_1 - Vt)], \\ \varphi &= \sum_{m=1}^2 A_m C_4^{(m)} \exp[jK(\beta^{(m)}x_3 + x_1 - Vt)], \end{aligned} \quad (2)$$

где $\beta^{(m)}$ — комплексный коэффициент затухания волны, который описывает убывание амплитуды вдоль направления оси x_3 , $C_2^{(m)}$ и $C_4^{(m)}$ — амплитудные множители, A_m — весовые коэффициенты, V — фазовая скорость волны, $K = 2\pi/\lambda$ — волновой вектор, t — время.

Если саггитальная плоскость x_1x_3 представляет собой плоскость зеркальной симметрии кристалла, следующие значения упругих и пьезоэлектрических констант в рабочей системе координат должны обращаться в нуль [4]:

$$\begin{aligned} C_{1123} = C_{1112} = C_{3323} = C_{3312} = C_{2313} = C_{1312} = 0, \\ e_{123} = e_{112} = e_{323} = e_{312} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

В случае распространения чисто рэлеевской волны, имеющей две компоненты механического смещения U_1 и U_3 и электрический потенциал φ , решения могут быть записаны в следующем виде [3]:

$$\begin{aligned} U_1 &= \sum_{m=1}^3 A_m C_1^{(m)} \exp[jK(\beta^{(m)}x_3 + x_1 - Vt)], \\ U_3 &= \sum_{m=1}^3 A_m C_3^{(m)} \exp[jK(\beta^{(m)}x_3 + x_1 - Vt)], \\ \varphi &= \sum_{m=1}^3 A_m C_4^{(m)} \exp[jK(\beta^{(m)}x_3 + x_1 - Vt)]. \end{aligned} \quad (4)$$

При этом глубина проникновения смещений и потенциала волны Рэлея вглубь кристалла составляет всего несколько длин волн.

В случае невыполнения вышеперечисленных условий симметрии в пьезокристалле распространяется обобщённая поверхностная волна (ОПАВ), имеющая все три компоненты механического смещения U_1, U_2, U_3 и электрический потенциал φ .

Используя при этом граничные условия (тензор механических напряжений T_{3i} , где $i = 1, 2, 3$, на поверхности кристалла должен быть равен нулю, а электрический потенциал непрерывен на границе раздела $x_3 = 0$), по известной методике [3, 4] можно рассчитать основные характеристики волны Г—Б: фазовую скорость V , коэффициент электромеханической связи k^2 , амплитуду волны U_i и электрический потенциал φ .

Анализируя характеристики волны Г—Б, можно увидеть, что в отличие от ОПАВ глубина проникновения механического смещения U_2 и потенциала φ вглубь кристалла (вдоль оси x_3) весьма высока и составляет сотни длин волн. Кроме того, фазовая скорость волны Г—Б близка к скорости $V_{t1}^{\text{подл}}$ медленной сдвиговой объёмной волны в подложке.

2. ТРАНСФОРМАЦИЯ ОПАВ В ВОЛНУ Г—Б И В ВОЛНУ РЭЛЕЯ В КРИСТАЛЛАХ KNbO_3 , РКН

Как известно [5], для углов Эйлера $(0; 132,75^\circ; 90^\circ)$, $(0; -54,7^\circ; 90^\circ)$, $(0; 125,15^\circ; 90^\circ)$ для хорошо известного пьезокристалла кварца SiO_2 выполняется условие (1), поэтому в этих направлениях распространяется волна Г—Б имеющая только одну сдвиговую компоненту смещения U_2 и сопровождающий потенциал φ .

Для углов Эйлера $(0; 90^\circ; 180^\circ m)$, где $m = 0, 1, 2, \dots$, в кристаллах KNbO_3 и РКН также выполняется условие (1), что говорит о возможности распространения волны Г—Б в этом направлении, а для углов Эйлера $(0; 180^\circ; 180^\circ m)$ выполняется условие (3), что говорит о возможности распространения чисто рэлеевской волны в этом направлении (третий угол Эйлера f_3 определяет направление распространения волны). Значения материальных констант для кристалла KNbO_3 были взяты из работы [6]. В табл. 1 приведены значения упругих C_{ij} , пьезоэлектрических e_{ij} , диэлектрических ε_{ij} констант, а также плотности ρ кристалла KNbO_3 .

Таблица 1
Материальные константы
для пьезокристалла KNbO_3

(10^{11}Н/м^2)	(Кл/м^2)	
$C_{11} = 2,26$	$e_{31} = 2,46$	$\varepsilon_{11}/\varepsilon_0 = 37$
$C_{12} = 0,96$	$e_{32} = -1,1$	$\varepsilon_{22}/\varepsilon_0 = 780$
$C_{13} = 0,68$	$e_{33} = 4,4$	$\varepsilon_{33}/\varepsilon_0 = 24$
$C_{22} = 2,7$	$e_{15} = 5,16$	
$C_{23} = 1,01$	$e_{24} = 11,7$	
$C_{33} = 1,86$		
$C_{44} = 0,25$		
$C_{55} = 0,743$		
$C_{66} = 0,995$		
$\rho = 4,63 \text{ г/см}^3$		

ра $(0; 90,05^\circ; 0)$. При этом фазовая скорость волны на открытой поверхности $V = 3,918 \text{ км/с}$, а на металлизированной $V_m = 2,889 \text{ км/с}$. Представляет интерес анализ процесса трансформации чисто сдвиговой волны Г—Б, имеющей только одну поперечную компоненту смещения U_2 и потенциал φ , в ОПАВ, имеющую все три компоненты смещения U_1, U_2, U_3 и сопровождающий их потенциал, при отклонении направления распространения волны от оси чистой моды на один градус. На рис. 3, 4

На рис. 1 показаны рассчитанные значения фазовой скорости волны V на открытой и металлизированной поверхностях и коэффициента электромеханической связи $k^2 = 2(V - V_m)/V$ [3] в направлении оси x_1 в поворнутом y -срезе кристалла KNbO_3 (углы Эйлера $(0; f2; 0)$) в зависимости от второго угла Эйлера $f2$, а на рис. 2 — значения фазовой скорости и K^2 в y -срезе (углы Эйлера $(0; 90^\circ; f3)$) в зависимости от третьего угла Эйлера $f3$. Здесь V_m — фазовая скорость волны на металлизированной поверхности. Как видно из рис. 1 и 2, ОПАВ имеет максимальный коэффициент электромеханической связи $k^2 \approx 0,524$ при направлении распространения, близком к направлению чистой моды $(0; 90^\circ; 0)$, при углах Эйлера

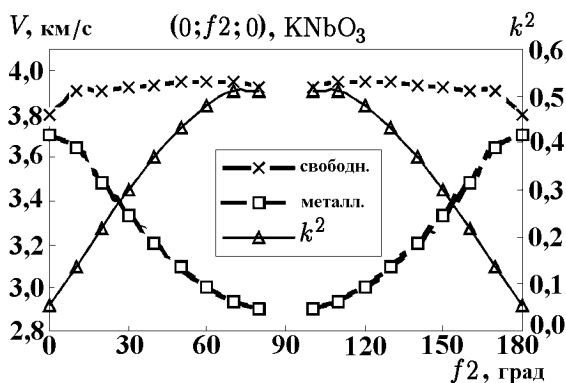


Рис. 1

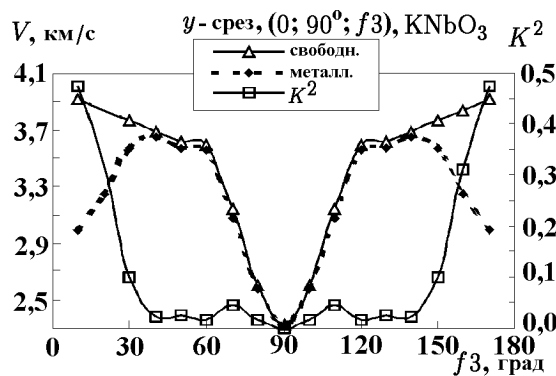


Рис. 2

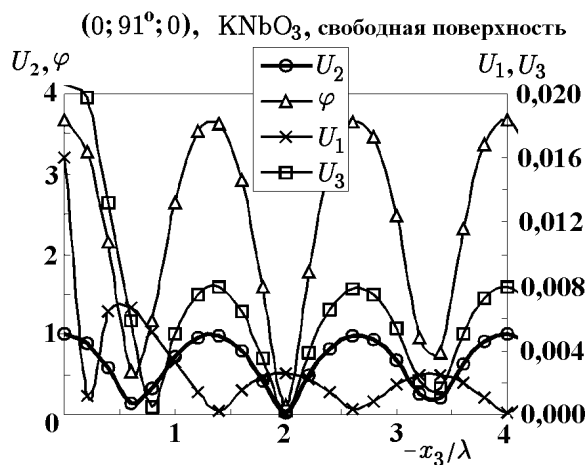


Рис. 3

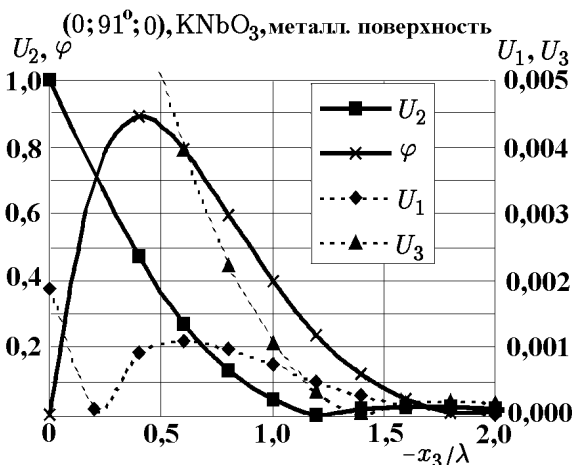


Рис. 4

показаны нормализованные амплитуды смещений и потенциала ОПАВ в направлении x_1 в поворнутом y -срезе кристалла (углы Эйлера $(0; 91^\circ; 0)$) в зависимости от соотношения $-x_3/\lambda$ на открытой и металлизированной поверхностях кристалла KNbO_3 . Как видно из рис. 3, на открытой поверхности сдвиговая компонента смещения U_2 преобладает над смещениями U_1 , U_3 и, осциллируя, очень медленно уменьшаются с ростом x_3 (вглубь кристалла). Таким образом, в данном направлении мы имеем практически волну Г—Б, имеющую только поперечную компоненту смещения и потенциал. На металлизированной поверхности (рис. 4) сдвиговая компонента смещения U_2 также преобладают над смещениями U_1 и U_3 , но как и потенциал φ , уменьшается вглубь кристалла экспоненциально уже на нескольких длинах волн (существенно спадая уже при $-x_3/\lambda = 2$). Данный факт говорит о том, что металлизация поверхности кристалла KNbO_3 очень резко меняет свойства волны, которая хотя и имеет преимущественно сдвиговую компоненту смещения U_2 и потенциал φ , но при металлизации поверхности ($\varphi = 0$ при $x_3 = 0$) прижимается к поверхности, т. е. имеет тот же характер, что и обыкновенная классическая поверхностная акустическая волна (ПАВ).

На рис. 5 показаны нормализованные амплитуды смещений и потенциала ОПАВ в направлении оси x_1 в поворнутом на 90° y -срезе кристалла (углы Эйлера $(0; 180^\circ; 0)$) в зависимости от соотношения $-x_3/\lambda$ на открытой поверхности кристалла KNbO_3 . Как видно из рис. 5, в данном направлении распространяется чисто рэлеевская волна, имеющая две компоненты механического смещения U_1 , U_3 и потенциал φ . Механические компоненты смещения и потенциал уменьшаются вглубь кристалла экспоненциально с характерным масштабом в несколько длин волн. Значения материальных констант в кристаллографической системе координат для кристалла $\text{Pb}_2\text{KNb}_5\text{O}_{15}$ (РКН), приведённые в табл. 2, были взяты из работы [7].

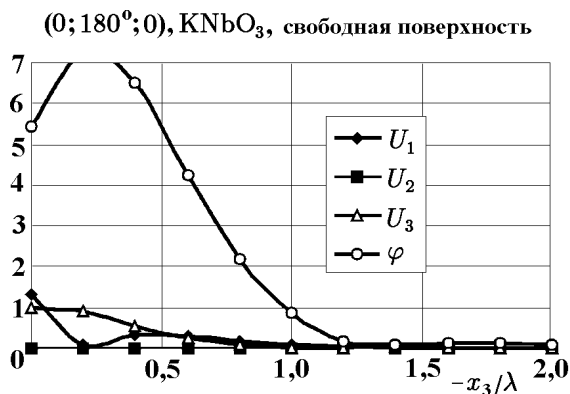


Рис. 5

Таблица 2
Материальные константы кристалла РКН

(10^{11}Н/м^2)	(Кл/м^2)	
$C_{11} = 1,66$	$e_{31} = 0,4$	$\varepsilon_{11}/\varepsilon_0 = 810$
$C_{12} = 0,37$	$e_{32} = 1,4$	$\varepsilon_{22}/\varepsilon_0 = 680$
$C_{13} = 0,45$	$e_{33} = 6,9$	$\varepsilon_{33}/\varepsilon_0 = 81$
$C_{22} = 1,61$	$e_{15} = 14$	
$C_{23} = 0,41$	$e_{24} = 15$	
$C_{33} = 1,24$		
$C_{44} = 0,31$		
$C_{55} = 0,3$		
$C_{66} = 0,63$		
$\rho = 6,144 \text{ г/см}^3$		

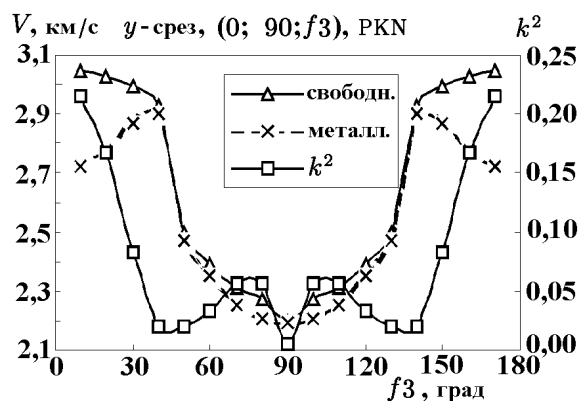


Рис. 6

На рис. 6 показаны значения фазовой скорости волны V на открытой и металлизированной поверхностях и коэффициента электромеханической связи k^2 в y -срезе кристалла РКН (углы Эйлера $(0; 90^\circ; f_3)$) в зависимости от третьего угла Эйлера f_3 . Как видно из рис. 6, максимальный коэффициент электромеханической связи ОПАВ в кристалле РКН $k^2 \approx 0,23$ достигается вблизи направления чистой моды Г—Б $(0; 90^\circ; 0,05^\circ)$. При этом фазовая скорость на открытой поверхности $V = 3,05$ км/с, а на металлизированной поверхности $V_m = 2,69$ км/с (скорости объёмных волн при этом $V_{t1} = 3,055$ км/с;

$V_{t2} = 3,202$ км/с; $V_L = 5,198$ км/с). Заметим, что в отличие от кристалла KNbO_3 в кристалле PKN в данном направлении фазовая скорость волны Г—Б близка к скорости медленной объёмной сдвиговой волны. Напротив, при угле $f3 = 90^\circ$ коэффициент электромеханической связи k^2 равен нулю.

На рис. 7 показаны распределения механического смещения U_2 и потенциала φ для волны Г—Б в yx -срезе (углы Эйлера $(0; 90^\circ; 0)$) в кристаллах KNbO_3 и PKN в зависимости от расстояния от поверхности кристалла на открытой поверхности. Как видно из рисунка, волна Г—Б очень глубоко проникает в кристалл (сдвиговая компонента смещения U_2 и потенциал φ стремятся к нулю только на расстояниях в несколько сотен длин волн, при $-x_3/\lambda > 250$). Заметим, что в кристалле PKN зависимость поперечного смещения и потенциала волны Г—Б от расстояния от поверхности кристалла (вдоль оси x_3) более плавная, чем в кристалле KNbO_3 . Это связано с тем, что волна Г—Б в кристалле PKN по сравнению с KNbO_3 гораздо ближе по скорости и структуре к медленной объёмной сдвиговой волне V_{t1} .

На рис. 8, 9 показаны типичные зависимости смещений U_1, U_2, U_3 и потенциала φ от соотношения $-x_3/\lambda$ в кристалле PKN для углов Эйлера $(0; 91^\circ; 0)$. Как видно из приведённых кривых (см. рис. 8), на открытой поверхности при повороте 2-го угла Эйлера всего на один градус наблюдается резкое изменение структуры волны: волна Г—Б (углы Эйлера $(0; 90^\circ; 0)$) трансформируется практически в чисто рэлеевскую моду. Напротив, на металлизированной поверхности (рис. 9) при углах Эйлера $(0; 91^\circ; 0)$ существует сдвиговая компонента смещения U_2 и потенциал φ . Заметим, что в отличие от кристалла KNbO_3 в кристалле PKN при отклонении направления распространения волны от оси чистой моды Г—Б всего на один градус волна как на открытой, так и на металлизированной поверхностях имеет структуру обычной ПАВ (механические компоненты смещения и потенциал уменьшаются в направлении оси x_3 экспоненциально с характерным масштабом в несколько длин волн).

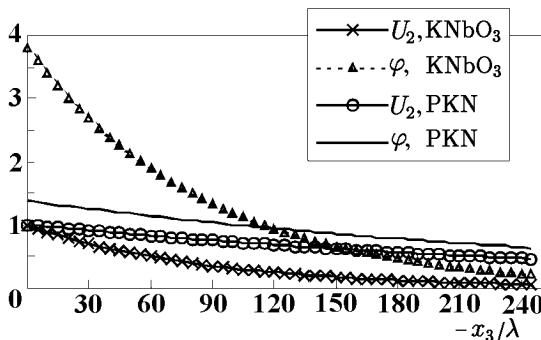


Рис. 7

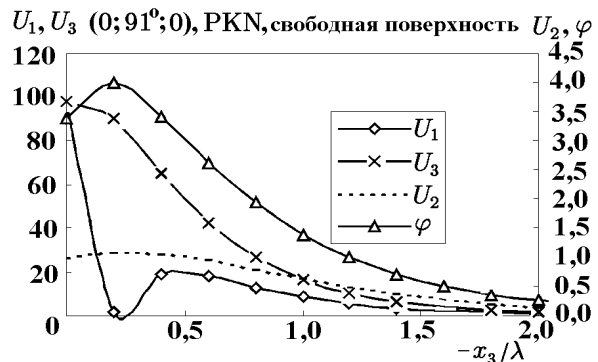


Рис. 8

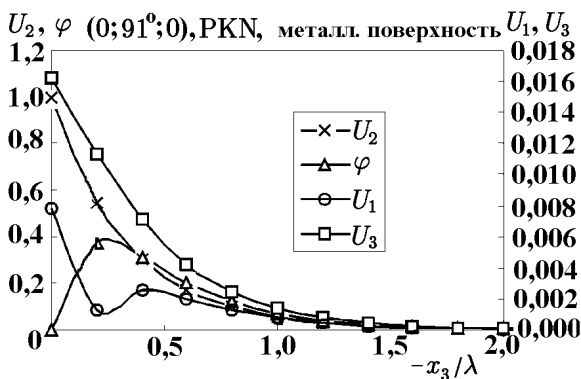


Рис. 9

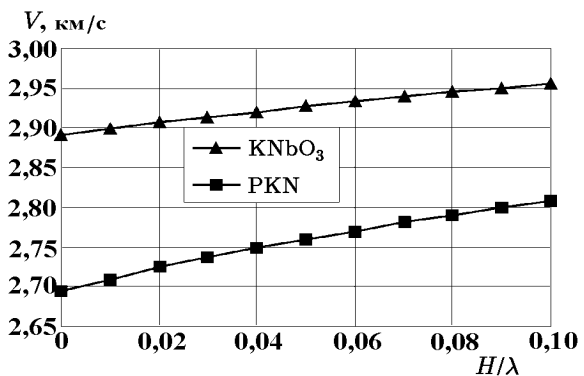


Рис. 10

На рис. 10 показаны зависимости фазовой скорости V волны от соотношения H/λ , где H — толщина алюминиевой плёнки, в кристаллах KNbO_3 и PKN для ориентации $(0; 91^\circ; 0)$. Как видно из

рис. 10, фазовая скорость ОПАВ возрастает при увеличении толщины металлической плёнки. Это связано с тем, что скорость объёмной сдвиговой волны у алюминиевой плёнки ($V_t^{cl} = 3,24$ км/с) больше скорости ОПАВ в подложке ($V_m = 2,89$ км/с для KNbO_3 и $V_m = 2,69$ км/с для PKN).

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Волна Г—Б в пьезокристаллах KNbO_3 и PKN существует для углов Эйлера $(0; 90^\circ; 180^\circ m)$, где $m = 0, 1, 2, \dots$, а в направлениях $(0; 180^\circ; 180^\circ m)$ распространяется чисто рэлеевская волна. При этом в области yx -среза ОПАВ имеет очень большой коэффициент электромеханической связи ($k^2 \approx 0,524$ для KNbO_3 и $k^2 \approx 0,23$ для PKN) и нулевой сдвиг фаз между фазовой и групповой скоростями. Рассмотрен процесс трансформации обобщённой поверхностной акустической волны (ОПАВ) в моду Гуляева—Блюстейна (Г—Б) или в чисто рэлеевскую волну соответственно в yx -срезе и 90 - yx -срезе кристаллов KNbO_3 и PKN при незначительном отклонении направления распространения волны от оси чистой моды. Показано, что на открытой и металлизированной поверхности кристалла изменение амплитуды механических смещений и сопровождающего потенциала в зависимости от расстояния от поверхности имеют разный характер. Вблизи направления чистой моды $(0; 91^\circ; 0)$ при металлизации поверхности кристалла волна значительно прижимается к поверхности. Кроме того, при увеличении толщины алюминиевой плёнки на поверхности кристаллов KNbO_3 и PKN изменение скорости ОПАВ имеет практически линейный характер в области небольших значений H ($0 < H/\lambda < 0,1$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Yamanouchi K., Odagawa H. // Electron. Lett. 1997. V. 33. P. 193.
2. Двоешерстов М. Ю., Чириманов А. П. // Изв. вуз. Радиофизика. 1999. Т. 42, Э 5. С. 485.
3. Олинер А. Поверхностные акустические волны. — М.: Мир, 1981.
4. Чередник В. И. // Материалы II научной конференции ННГУ, вып. 1. Э 3538-77 деп. 1977. С. 273.
5. Pereira do Cunha M. P. // IEEE Ultrasonics Symposium. 1996. P. 96.
6. Zgonik M., Gunter P. // J. Appl. Phys. 1993. V. 74, Э 2. P. 1287.
7. Ren-ying Sun, Shi-ji Fan. // IEEE International Frequency Control Symposium. 1996. P. 113.

Нижегородский государственный
университет
им. Н. И. Лобачевского,
г. Н. Новгород, Россия

Поступила в редакцию
15 ноября 1999 г.

TRANSFORMATION OF SAW MODES IN THE STRONG PIEZOELECTRIC CRYSTALS KNbO_3 AND PKN

M. Yu. Dvoesherstov, S. G. Petrov, V. I. Cherednik, and A. P. Chirimanov

We consider transformation of a generalized surface acoustic wave (GSAW) into Bleustein—Gulyaev (B—G) or pure Rayleigh wave, respectively, in the yx - and 90 - yx -cuts of the rhombic KNbO_3 and orthorhombic PKN crystals. The transformation occurs if the wave vector deviates slightly from the axis direction of the pure mode. We analyze numerically the characteristics of GSAW, B—G wave, and pure Rayleigh wave in strong piezoelectric crystals KNbO_3 and PKN . It is shown that the mechanical displacement in the GSAW is predominantly transverse in the region of the yx -cut of these crystals, and the electromechanical

coupling coefficient reaches a record large value. We analyze the dependence of mechanical displacements and electrical potential of GSAW in a crystal on the distance from the substrate surface in the cases of open and metallized surface. The dependence of the GSAW speed in the considered crystals on the metal-film thickness is also considered.

УДК 621.382:532.59

ВОЛНОВОДНОЕ РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВНУТРЕННИХ ЭЛЕКТРОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ВОЛН В ГЕТЕРОПЕРЕХОДАХ

Р. А. Браже, Р. М. Мефтахутдинов

Исследовано распространение внутренних электродинамических волн, предсказанных ранее для примесных полупроводников с градиентом концентрации свободных носителей заряда, в изотипном гетеропереходе $n - n^+$ -типа.

Ранее [1] одним из авторов была теоретически предсказана и обоснована численными расчётами возможность существования в примесном полупроводнике с градиентом концентрации свободных носителей заряда, обусловленном наличием внешнего постоянного электрического поля, так называемых внутренних электрогидродинамических волн (ВЭГДВ). Здесь мы исследуем возможность распространения таких волн в изотипных гетеропереходах. При этом роль рабочего электрического поля выполняет контактное поле перехода. В силу его стратификации в переходе возникает волноводный режим распространения ВЭГДВ.

Изложенная в [1] теория ВЭГДВ остаётся справедливой для изотипных переходов, например $n - n^+$ -типа, если для простоты ограничиться случаем, когда эффективная масса свободных носителей заряда в контактирующих полупроводниках будет приблизительно одинакова: $m_1^* \approx m_2^* = m^*$. Это позволяет избежать осложнений, связанных с необходимостью сшиваия решения задачи на границе раздела сред, и рассматривать электронный газ в переходе как одну и ту же непрерывно стратифицированную по плотности $m^*n(y)$ квазижидкость (координата y перпендикулярна границе раздела).

Дисперсионное уравнение коротких ВЭГДВ имеет вид

$$\omega = N_e \cos \theta, \quad (1)$$

где ω — частота волны, N_e — электронная частота Брента–Вяйсяля, определяемая выражением

$$N_e = \frac{eE_0}{m^*c_s^2} \sqrt{\kappa - 1}, \quad (2)$$

θ — угол между направлением распространения ВЭГДВ и его проекцией на границу раздела сред.

Здесь e — элементарный заряд, c_s — скорость электронного звука:

$$c_s = \sqrt{\kappa \frac{k_B T}{m^*}}, \quad (3)$$

κ — показатель политропы (для быстропеременных процессов его можно положить равным показателю адиабаты электронного газа $\gamma = 5/3$), k_B — постоянная Больцмана, T — температура полупроводника.

Напряжённость невозмущённого контактного электрического поля в приближении плавного симметричного перехода [2] описывается параболической зависимостью (рис. 1):

$$|E_0| = \begin{cases} \frac{e(n_{02} - n_{01})}{2\epsilon\epsilon_0 d} \left(\frac{d^2}{4} - y^2 \right), & |y| \leq d/2; \\ 0, & |y| > d/2, \end{cases} \quad (4)$$

где n_{01} и n_{02} — концентрации свободных носителей заряда в контактирующих полупроводниках вдали от перехода, ε_0 — электрическая постоянная, ε — относительная диэлектрическая проницаемость среды (полагаемая приблизительно одинаковой в обоих полупроводниках), d — толщина перехода:

$$d = \left(\frac{12\varepsilon\varepsilon_0 U_c}{e(n_{02} - n_{01})} \right)^{1/3},$$

$$U_c = \frac{k_B T}{e} \ln \frac{n_{02}}{n_{01}}.$$

В реальном гетеропереходе профиль кривой невозмущённой концентрации носителей $n_0(y)$ пологий, ближе к экспоненциальной зависимости (штрихпунктирная линия на рис. 1), а распределение напряжённости электрического поля $E_0(y)$ имеет «хвосты», выходящие за пределы, ограниченные формулой (4). Тем не менее, для оценочных расчётов параметров перехода вполне можно пользоваться вышеуказанным выражением.

Кроме того, при достаточно медленной зависимости свойств среды от координат можно воспользоваться приближением геометрической оптики, анализируя распространение плоских ВЭГДВ под углом θ (см. (1)) к границе раздела сред и вводя представление об электрогидродинамическом луче, направленном перпендикулярно фронту ВЭГДВ. Уравнение траектории луча получим из соотношения

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}}{\cos \theta} = \frac{\sqrt{1 - (\omega/N_e)^2}}{\omega/N_e},$$

из которого следует

$$x = \int_0^y \frac{\omega/N_e}{\sqrt{1 - (\omega/N_e)^2}} dy. \quad (5)$$

Используя (2)–(4), представим N_e в виде

$$N_e = \frac{4}{d^2} N_{em} \left(\frac{d^2}{4} - y^2 \right),$$

$$N_{em} = \frac{de^2(n_{02} - n_{01})}{8\varepsilon\varepsilon_0} \left(\frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{m^*}{k_B T} \right)^{1/2}. \quad (6)$$

Тогда интеграл (5) сводится к нормальному эллиптическому интегралу первого рода

$$x = \int_0^y \frac{1}{\sqrt{G(y)}} dy, \quad (7)$$

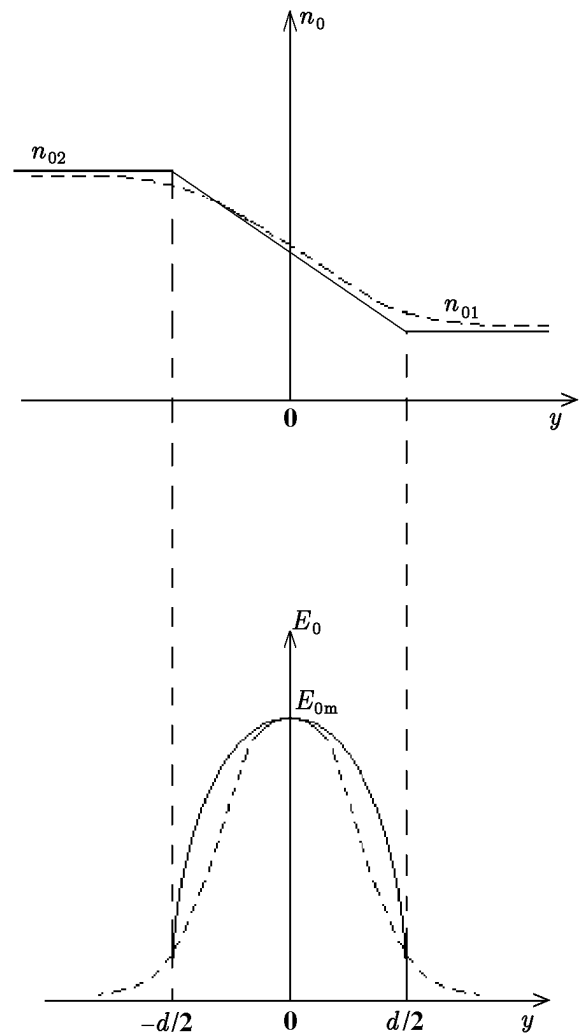


Рис. 1. Распределение концентрации свободных электронов (вверху) и напряжённости электрического поля (внизу) в рассматриваемом гетеропереходе

в котором $G(y) = a_0 y^4 + a_1 y^3 + a_2 y^2 + a_3 y + a_4$,

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = -\frac{d^2}{2}, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = \frac{d^4}{16} \left[1 - \left(\frac{\omega}{N_{\text{em}}} \right)^2 \right].$$

Четыре действительных корня уравнения $G(y) = 0$ ($\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4$) имеют вид

$$\alpha_1 = \frac{d}{2} \sqrt{1 + \frac{\omega}{N_{\text{em}}}}, \quad \alpha_2 = \frac{d}{2} \sqrt{1 - \frac{\omega}{N_{\text{em}}}},$$

$$\alpha_3 = -\frac{d}{2} \sqrt{1 - \frac{\omega}{N_{\text{em}}}}, \quad \alpha_4 = -\frac{d}{2} \sqrt{1 + \frac{\omega}{N_{\text{em}}}},$$

где N_{em} находится из (6). Максимальное отклонение луча от границы раздела сред соответствует равенству $N_e = \omega$ и определяется выражением

$$y_m = \frac{d}{2} \sqrt{1 - \frac{\omega}{N_{\text{em}}}}, \quad (8)$$

так что $\alpha_3 \leq y \leq \alpha_2$. Тогда стандартная процедура приведения (7) к нормальной форме Лежандра [3] даёт

$$x = \frac{d}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{\omega}{N_{\text{em}}}} - \sqrt{1 - \frac{\omega}{N_{\text{em}}}} \right) F(\varphi, k), \quad (9)$$

где $F(\varphi, k) = \int_0^\varphi d\phi / \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}$ — нормальный неполный эллиптический интеграл Лежандра первого рода, причём

$$k^2 = \frac{2}{1 + [1 - (\omega/N_{\text{em}})^2]^{-1/2}}.$$

При $y = y_m$ верхний предел интегрирования $\varphi = \pi/2$, и $F(\varphi, k)$ обращается в полный эллиптический интеграл Лежандра первого рода $K(k)$.

Выражая из (9) y через обращение $F(\varphi, k)$, получаем уравнение траектории луча:

$$y = y_m \operatorname{sn} u, \quad u = \frac{x}{d} \frac{\sqrt{1 + \omega/N_{\text{em}}} + \sqrt{1 - \omega/N_{\text{em}}}}{\omega/N_{\text{em}}}, \quad (10)$$

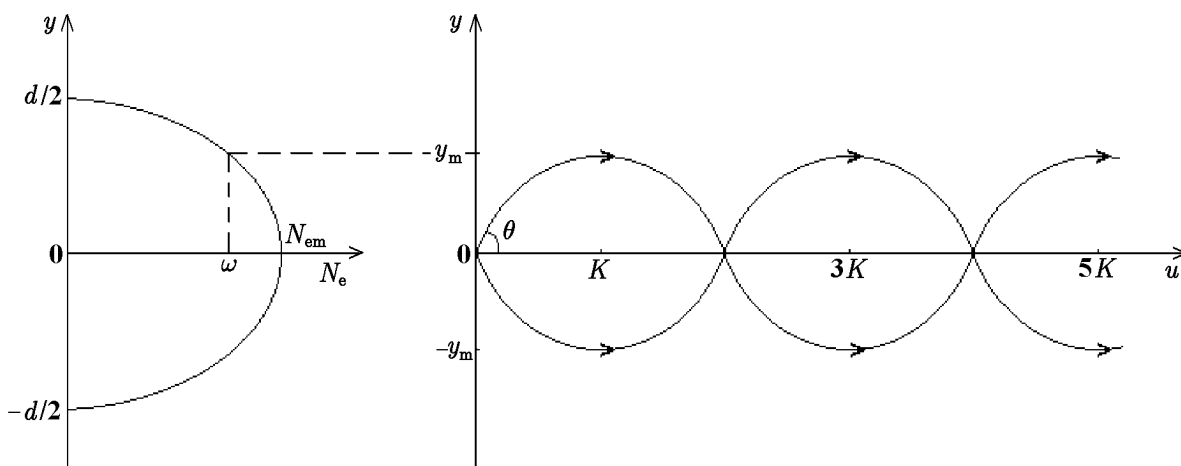


Рис. 2

где $\operatorname{sn} u$ — эллиптическая функция Якоби (синус амплитуды u), а y_m определяется выражением (8). Предсказываемая (10) фокусировка лучей в образующемся электрогидродинамическом волноводе показана на рис. 2. Отсюда следует, что для входного сигнала частоты $\omega \leq N_{\text{em}}$ длина ВЭГДВ в волноводе

$$\Lambda = 2K(k)d \left(\sqrt{1 + \omega/N_{\text{em}}} - \sqrt{1 - \omega/N_{\text{em}}} \right). \quad (11)$$

При $\omega = N_{\text{em}}$ $y_m = 0$, и луч распространяется вдоль границы раздела полупроводников.

Поскольку нижний предел частоты сигнала определяется частотой максвелловской релаксации проводимости [1], то ЭГДВ в рассматриваемом гетеропереходе никогда не доходят до границ перехода, и привлекать граничные условия для решения задачи не требуется.

Работа поддержана грантом РФФИ (проект № 98–02–03313) и ФЦП «Интеграция» (код проекта К–0179).

ЛИТЕРАТУРА

1. Браже Р. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1997. Т. 40, № 3. С. 370.
2. Орешкин П. Т. Физика полупроводников и диэлектриков. — М.: Высш. шк., 1977. — 448 с.
3. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М.: Наука, 1973. — 832 с.

Ульяновский государственный
технический университет,
г. Ульяновск, Россия

Поступила в редакцию
21 апреля 1999 г.

WAVEGUIDE PROPAGATION OF INTERNAL ELECTROHYDRODYNAMIC WAVES IN HETEROJUNCTIONS

R. A. Brazhe and R. M. Meftakhutdinov

We analyze propagation of the internal electrohydrodynamic waves, predicted for impurity semiconductors with a gradient of charge-carrier density, in the case of an isotypic $n - n^+$ heterojunction.

ОТНОСИТЕЛЬНАЯ МОЛЕКУЛЯРНАЯ ДИФФУЗИЯ

Е. З. Грибова¹, И. С. Жукова¹, А. И. Саичев¹, В. А. Войчинский²

Аналитически и численно изучено движение частиц пассивной плавучей примеси, подверженной молекулярным столкновениям, в случайном поле скорости. В рамках одномерной модели исследованы эффекты относительной молекулярной диффузии и тесно связанные с ними флуктуации плотности сгустка частиц, первоначально находившихся в одном физически бесконечно малом объёме.

ВВЕДЕНИЕ

Исследование статистических свойств плотности пассивной примеси в турбулентной среде привлекает внимание многих исследователей [1–5]. Полная статистика (например, все n -точечные пространственно-временные моментные функции) содержит всю информацию о динамической системе. Однако на практике удастся исследовать лишь некоторые простейшие статистические характеристики (как правило только среднее и дисперсию). Кроме того, известно [6, 7], что при усреднении тонкая структура реализаций поля плотности исчезает. Выявить ее удастся лишь на основе анализа вероятностных свойств поля плотности. При этом обнаруживается кластеризация плавучей примеси (см., например, [6] и приведенную там библиографию, а также [8, 9]), когда в областях низкой плотности примеси возникают компактные образования повышенной плотности. Заметим, что эффекты, родственные этому, достаточно хорошо известны. Например, можно указать эффект локализации волн в хаотически слоистых средах [10], образование каустической структуры волнового поля при распространении волн в случайно-неоднородных средах [11–14], возникновение крупномасштабной структуры распределения вещества во Вселенной, которое широко обсуждалось в астрофизической литературе [15–18].

Применительно к поведению плавучей примеси на поверхности жидкости кластеризация в поле случайных скоростей изучалась в [4, 6, 7], однако молекулярная диффузия при этом не учитывалась. Здесь мы рассмотрим движение частиц пассивной примеси, подверженной молекулярным столкновениям, в случайном поле скорости. Нашей задачей будет установление связи между вероятностным описанием и реализациями вспомогательного случайного процесса, учитывающего расстояния между частицами.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для простоты обсудим одномерный случай. Наглядной моделью в этом случае является сгусток плавучих частиц на поверхности турбулентной жидкости в канале. Будем считать канал настолько узким, что можно пренебречь движением и диффузией поперёк него. При этом поля скорости жидкости $v(x, t)$ и плотности примеси $\rho(x, t)$ зависят от единственной (продольной) координаты x и времени t . Для описания случайного поля скорости используем известную [19, 20] аппроксимацию дельта-коррелированным во времени гауссовым статистически однородным полем:

$$\langle v(x, t)v(x + s, t + \tau) \rangle = 2A(s)\delta(\tau). \quad (1)$$

Здесь и далее угловые скобки означают усреднение по ансамблю реализаций случайного поля скорости, $\delta(\tau)$ — дельта-функция, $A(s)$ — дисперсия поля скорости.

Координата X частицы примеси в любой момент времени зависит от параметра — начальной координаты ξ , что будем отмечать вертикальной чертой: $X(t|\xi)$ (сама координата ξ является лагранжевой координатой частицы). Микроскопическая плотность сгустка частиц, расположенных в начальный момент в физически бесконечно малом объеме с общей лагранжевой координатой ξ , выражается через координаты X_i частиц:

$$\tilde{\rho}(x, t) = \sum_i m_i \delta(X_i(t|\xi) - x), \quad (2)$$

где m_i — массы частиц. Отсюда видно, что, интересуясь статистикой плотности, мы должны исследовать статистику координат частиц.

Уравнение движения частицы имеет вид

$$\frac{dX}{dt} = v(X, t) + \alpha(t). \quad (3)$$

Здесь $\alpha(t)$ — белый шум с корреляционной функцией

$$\langle \alpha(t)\alpha(t') \rangle = 2\mu\delta(t - t'), \quad (4)$$

учитывающий влияние межмолекулярных столкновений. Разложим координату $X_i(t|\xi)$ на две составляющие, «гидродинамическую» и «молекулярную»:

$$X_i(t|\xi) = X_0(t|\xi) + z_i(t|\xi). \quad (5)$$

Слагаемые в (5) имеют следующий смысл: $X_0(t|\xi)$ — координата некоторой идеализированной частицы, не подверженной молекулярным столкновениям и движущейся вместе с окружающим потоком. Слагаемое $z_i(t|\xi)$ описывает закономерности взаимного расположения реальной и идеальной частиц, т. е. отвечает за эффект относительной молекулярной диффузии. Для наглядности его можно трактовать как расстояние в текущий момент времени t между реальной и идеальной частицами. Из (3) и (5) видно, что $z(t|\xi)$ удовлетворяет стохастическому уравнению

$$\frac{dz}{dt} = v(X_0 + z, t) - v(X_0, t) + \alpha(t), \quad (6)$$

причем из физического смысла разбиения (5) очевидно следует начальное условие

$$z(t = 0|\xi) = 0. \quad (7)$$

Здесь $z(t|\xi)$ — координата произвольной i -й частицы, индекс i для краткости опущен. Поскольку среднее всех $z_i(t|\xi)$ тождественно равно нулю, гидродинамическую координату $X_0(t|\xi)$ можно еще трактовать как центр масс сгустка, а $z_i(t|\xi)$ — расстояние от частицы до центра масс. Таким образом, в системе координат, начало которой помещено в центр масс сгустка, статистические свойства плотности частиц определяются статистикой случайного процесса $z_i(t|\xi)$. Поэтому наша задача сводится к статистическому анализу решений уравнения (6).

Предположим, что поле скорости достаточно гладкое в пространстве и имеет характерный масштаб l_v . Тогда, как видно из (7), всегда можно указать начальный интервал времени, в течение которого $z \ll l_v$. На таких временах уравнение (6) можно линеаризовать относительно z и исследовать статистические свойства линеаризованного уравнения

$$\frac{dz}{dt} = u(X_0, t)z + \alpha(t). \quad (8)$$

В (8) входит одномерная дивергенция поля скорости

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} v(x, t). \quad (9)$$

Как будет видно далее, именно статистические свойства поля дивергенции принципиально важны при анализе поведения сгустка частиц примеси в хаотически движущемся окружающем потоке.

2. АНАЛИЗ И РЕШЕНИЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Вначале обсудим качественно характерные особенности стохастического уравнения (8). Первое слагаемое в правой части отвечает за эффекты, связанные с хаотическим движением окружающей среды, а второе — за молекулярную диффузию. В случае спокойной воды, когда гидродинамическое поле скорости окружающей среды $v(x, t)$, а значит и $u(x, t)$, тождественно равны нулю, решением уравнения (8) будет винеровский процесс, моделирующий классическое броуновское движение примеси в неподвижной среде. В частности, если коэффициент молекулярной диффузии $\mu = 0$, то задача Коши (7), (8) имеет тривиальное решение $z(t) = 0$. Это означает, что близкие частицы, «вмороженные» в неподвижную сплошную среду, всегда остаются рядом.

Для анализа другого предельного случая (когда молекулярная диффузия отсутствует) существенно, что слагаемое, учитывающее гидродинамическую турбулентность, пропорционально z . Поэтому на начальном этапе (при малых расстояниях между частицами) гидродинамическая компонента остается коррелированной: две первоначально близкие частицы способны блуждать в турбулентном потоке, оставаясь достаточно близкими.

В общем же случае (при одновременном действии турбулентной и молекулярной диффузии) вначале примесь участвует главным образом в броуновском движении, которое приводит к расплыванию сгустка, а затем становится существенным влияние турбулентности.

Перейдем теперь к более детальному количественному анализу. Из предположения (1) о свойствах поля скорости следует, что поле $u(t) = u(X(t|\xi), t)$ вдоль траектории центра масс сгустка является гауссовым дельта-коррелированным процессом. Обратим внимание на тот факт, что $u(X(t|\xi), t)$ — случайная функция случайного аргумента, в силу чего свойства ее отличаются от свойств случайного поля $u(x, t)$. На языке гидромеханики $u(x, t)$ — поле скорости в точке с фиксированной эйлеровой координатой x , а $u(X(t|\xi), t)$ — то же самое поле в точке с фиксированной лагранжевой координатой. Оказывается, что эти поля обладают разной — эйлеровой и лагранжевой — статистикой. Так, в фиксированной точке с координатой x среднее $\langle u(x, t) \rangle = 0$. Нам же для дальнейшего необходимо знать среднее $\langle u(t) \rangle$. Опуская для краткости лагранжеву координату ξ , запишем искомое среднее в виде

$$\langle u(X, t) \rangle = \langle u(X_0 + \Delta X_0, t) \rangle.$$

Раскладывая в ряд Тейлора в окрестности X_0 , получаем

$$\langle u(X, t) \rangle = \left\langle \Delta X_0 \frac{\partial u}{\partial x} \right\rangle.$$

Подставим сюда u из определения (9), а также учтем (1) и (3). В результате имеем

$$\langle u(t) \rangle = -B, \quad (10)$$

где

$$B = - \left. \frac{d^2 A(s)}{ds^2} \right|_{s=0}.$$

Заметим сразу, что именно вычисленное среднее (10) играет принципиальную роль в тех характерных особенностях поведения расстояния между центром масс сгустка и частицами, которые будут установлены в дальнейшем.

Кроме среднего $\langle u(t) \rangle$, нам понадобится корреляционная функция флуктуационной части процесса $u(t)$: $\beta(t) = u(t) - \langle u(t) \rangle$. Она равна

$$\langle \beta(t)\beta(t+\tau) \rangle = 2B\delta(\tau). \quad (11)$$

Отсюда следует, что при статистическом анализе относительной молекулярной диффузии можно заменить уравнение (8) стохастически эквивалентным уравнением

$$\frac{dz}{dt} + Bz = \beta(t)z + \alpha(t), \quad z(t=0) = 0. \quad (12)$$

Соответствующее уравнение для функции Грина $J(t', t)$ имеет вид

$$\frac{dJ}{dt} + BJ = \beta(t)J + \delta(t - t'). \quad (13)$$

Решение (13)

$$J(t', t) = \exp[-B(t - t') + \eta(t', t)]$$

выражается через

$$\eta(t', t) = \int_{t'}^t \beta(t'') dt''$$

— винеровский процесс с дисперсией $\langle \eta^2(t', t) \rangle = 2B|t - t'|$.

Запишем с помощью найденной функции Грина решение уравнения (12):

$$z(t) = \int_0^t \alpha(t') J(t', t) dt'. \quad (14)$$

Укажем важный для понимания дальнейшего геометрический смысл функции $J(t', t)$. Для этого заметим, что последнее слагаемое в правой части (13) можно отбросить, вводя взамен начальное условие

$$J(t', t = t') = 1.$$

Отсюда видно, что функция $J(t', t)$ выражает степень сжатия среды в окрестности центра масс сгустка с начального момента t' до момента наблюдения t . Соответственно, интеграл (14) означает, что смещение частицы относительно центра масс равно сумме элементарных смещений под действием молекулярных столкновений. При этом вклад в смещение от элементарного толчка, имевшего место в момент t' , входит с весом $J(t', t)$ — степенью сжатия (растяжения) среды с момента t' до текущего момента t . В макроскопически неподвижной среде, где $J(t', t) \equiv 1$, интеграл (14) вырождается в стандартный винеровский процесс

$$z_0(t) = \int_0^t \alpha(t') dt',$$

описывающий классическое броуновское движение частицы примеси вокруг неподвижного центра масс. Фактор $J(t', t)$ учитывает влияние гидродинамических движений сплошной среды на относительную молекулярную диффузию. Он может, в принципе, как увеличить, так и уменьшить отклонения частицы от центра масс сгустка.

3. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Чтобы лучше понять характер случайного процесса $z(t)$, перейдем к численному моделированию решения уравнения (12). Прежде всего заметим, что в задаче есть характерный параметр

$$l = \sqrt{\mu/B}, \quad (15)$$

количественно учитывающий конкуренцию влияния молекулярных столкновений и гидродинамических движений окружающей среды.

Для удобства моделирования с учетом определения (15) заменим белые шумы $\alpha(t)$, $\beta(t)$ импульсными процессами

$$\alpha(t) = \frac{l}{\Delta} \sum_{n=0}^{\infty} a_n f\left(\frac{t-n}{\Delta} + \theta\right), \quad \beta(t) = \frac{1}{\Delta} \sum_{n=0}^{\infty} b_n g\left(\frac{t-n}{\Delta} + \kappa\right). \quad (16)$$

Здесь $f(x)$ и $g(x)$ — нормированные на единицу ($\int f(x) dx = \int g(x) dx = 1$) финитные функции, тождественно равные нулю вне отрезка $x \in [0, 1]$, а θ и κ — случайные величины, равномерно распределенные на том же отрезке. Кроме того, в (16) входят последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, безразмерные элементы которых статистически взаимно независимы и имеют одинаковые вероятностные распределения с нулевым средним. Другими словами, $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ представляют собой импульсные процессы с неперекрывающимися импульсами и корреляционными функциями

$$\langle \alpha(t) \alpha(t') \rangle = \frac{l^2}{\Delta^2} \langle a^2 \rangle \tilde{M}\left(\frac{t-t'}{\Delta}\right), \quad \langle \beta(t) \beta(t') \rangle = \frac{1}{\Delta^2} \langle b^2 \rangle \tilde{B}\left(\frac{t-t'}{\Delta}\right),$$

где

$$\tilde{M}(s) = \int f(x) f(x+s) dx, \quad \tilde{B}(s) = \int g(x) g(x+s) dx.$$

При стремлении Δ к нулю импульсные процессы (16) успешно моделируют белые шумы (4) и (11) с коэффициентами диффузии

$$\mu = \frac{l^2}{2\Delta} \langle a^2 \rangle, \quad B = \frac{1}{2\Delta} \langle b^2 \rangle.$$

Отсюда, используя определение (15), имеем

$$\langle a^2 \rangle = \langle b^2 \rangle = 2\epsilon, \quad \epsilon = B\Delta.$$

Здесь введен безразмерный параметр ϵ , равный величине шага Δ , измеренного в безразмерном времени $\tau = Bt$.

При численном моделировании решения уравнения (12) положим

$$f(x) = g(x) = \delta(x)$$

и проинтегрируем уравнение (12) в интервале $t \in [0, \Delta]$ с начальным условием $z(t=0) = z_0$. В итоге получим

$$z(\epsilon) = z_0 \exp(-\epsilon + b_0) + l a_0 j, \quad (17)$$

где

$$j = \exp[\epsilon(\theta - 1)] \times \begin{cases} 1, & \theta \geq \kappa; \\ \exp(b_0), & \theta < \kappa. \end{cases}$$

На основе (17) построим итерационную процедуру решения уравнения (12) в дискретные моменты времени $\tau_n = n\epsilon$, положив для определенности $\kappa = 1$:

$$z(0) = 0, \quad z(\tau_n) = \exp(-\epsilon + b_n) [z(\tau_{n-1}) + l a_n \exp(\epsilon \theta)].$$

Поскольку уравнение (12) линейно, то, не ограничивая общности, положим в дальнейшем $l = 1$.

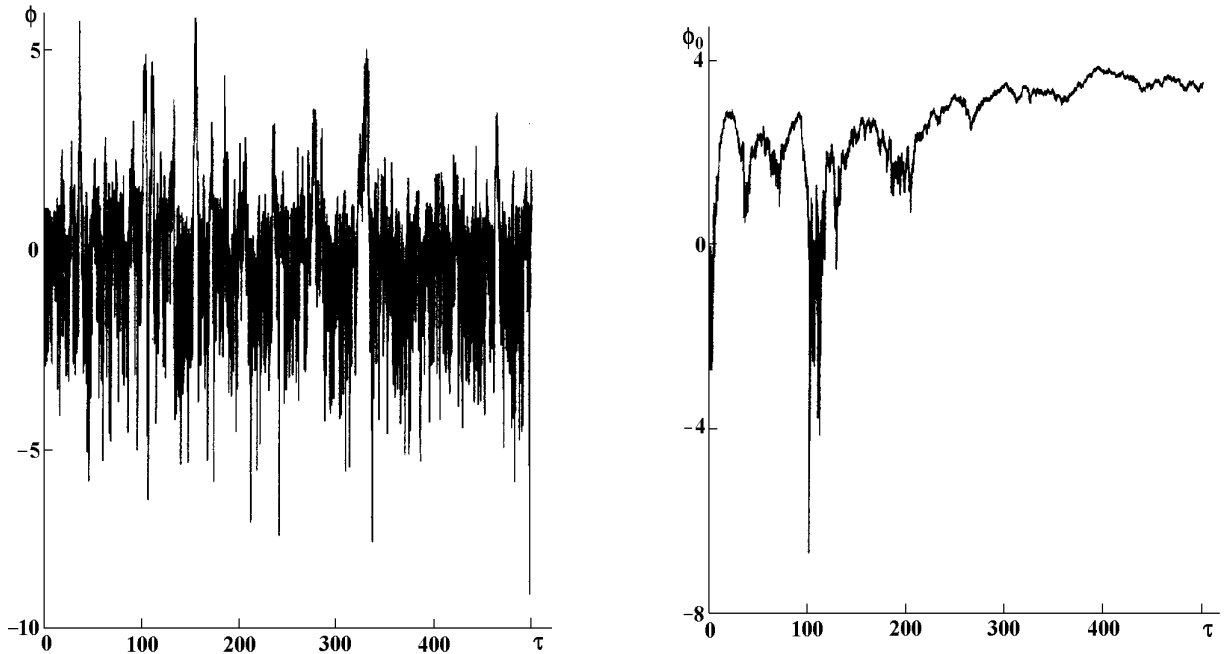


Рис. 1

Будем измерять расстояние между частицей и центром масс в логарифмическом масштабе, т. е. перейдем к вспомогательному процессу

$$\phi(t) = \ln(|z(t)|/l). \quad (18)$$

На рис. 1а приведен график реализации процесса $\phi(\tau)$, построенной с шагом $\epsilon = 0,01$ на интервале $\tau \in [0, 500]$, а на рис. 1б показан для сравнения график реализации процесса

$$\phi_0(\tau) = \ln(|z_0(\tau)|/l) \quad (19)$$

— логарифмического расстояния между частицей и центром масс при чисто броуновском движении на том же интервале. Первый график хорошо иллюстрирует симметричность реализации относительно $\phi = 0$ ($\langle \phi(\tau) \rangle = 0$) и стационарный характер реализаций $\phi(\tau)$, что соответствует «привязке» частиц сгустка к его центру масс.

Рис. 2 иллюстрирует поведение дисперсии $\sigma_\phi^2 = \langle \phi^2(\tau) \rangle$. График полностью подтверждает выводы, сделанные при качественном анализе уравнения (8). Видно, что на начальном этапе дисперсия резко

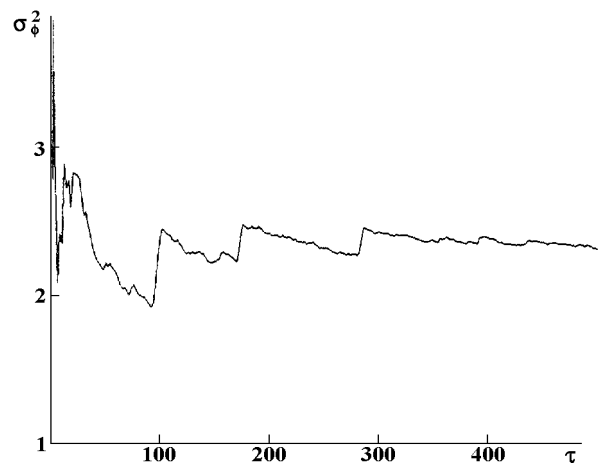


Рис. 2

возрастает от нуля до 3,9, что связано с упомянутым броуновским расплыванием сгустка, а затем под действием хаотических движений окружающей среды наступает стабилизация.

Пользуясь стационарностью процесса $\phi(t)$, нетрудно с помощью его реализации (рис. 1а) получить также гистограмму $w(\phi)$. Из приведенного на рис. 3а графика хорошо видно, что гистограмма $w(\phi)$ симметрична относительно нуля и имеет характерную полуширину порядка единицы. На рис. 3б показано стационарное вероятностное распределение $W_s(\phi)$, а рис. 3в позволяет сравнить $w(\phi)$ и $W_s(\phi)$, причем для большей наглядности на этом рисунке построена функция $-W_s(\phi)$.

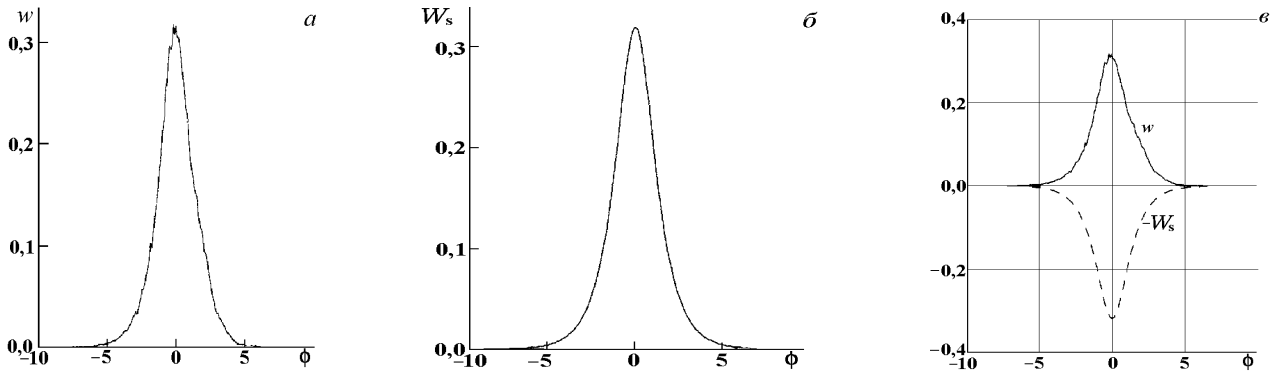


Рис. 3

4. ВЕРОЯТНОСТНОЕ ОПИСАНИЕ

Рассмотрим более подробно результаты моделирования, т. е. стационарность процесса $\phi(t)$ и свойства гистограммы $w(\phi)$. Для этого перейдем к вероятностному распределению

$$W(z, t) = \langle \delta[z(t|\xi) - z] \rangle$$

взаимного расположения частицы и центра масс сгустка. Как следует из (12) с учетом (4) и (11), плотность вероятностей $W(z, t)$ удовлетворяет уравнению Фоккера—Планка

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + B \frac{\partial^2}{\partial z^2} (z^2 W), \quad W(z, t = 0) = \delta(z). \quad (20)$$

Последнее имеет в качестве стационарного решения известное распределение Коши

$$W_s(z) = \frac{l}{\pi} \frac{1}{z^2 + l^2}. \quad (21)$$

Заметим прежде всего, что поскольку известно точное стационарное решение уравнения (20), то его можно использовать для оценки времени установления стационарного характера процесса $\phi(t)$. С этой целью будем численно решать уравнение (20) и сравнивать получаемую при этом плотность вероятности $W(z, t)$ с распределением (21). Результаты решения с шагом по безразмерному времени τ , равным $2,5 \cdot 10^{-5}$, в различные моменты времени приведены на рис. 4. Там же для сравнения построено распределение (21) (штриховая линия). Видно, что уже при $\tau = 0,465$ результат численного решения практически не отличается от стационарного распределения Коши. Именно малость времени установления по сравнению с интервалом, на котором построена реализация процесса $\phi(\tau)$, позволяет считать этот процесс стационарным практически на всем интервале.

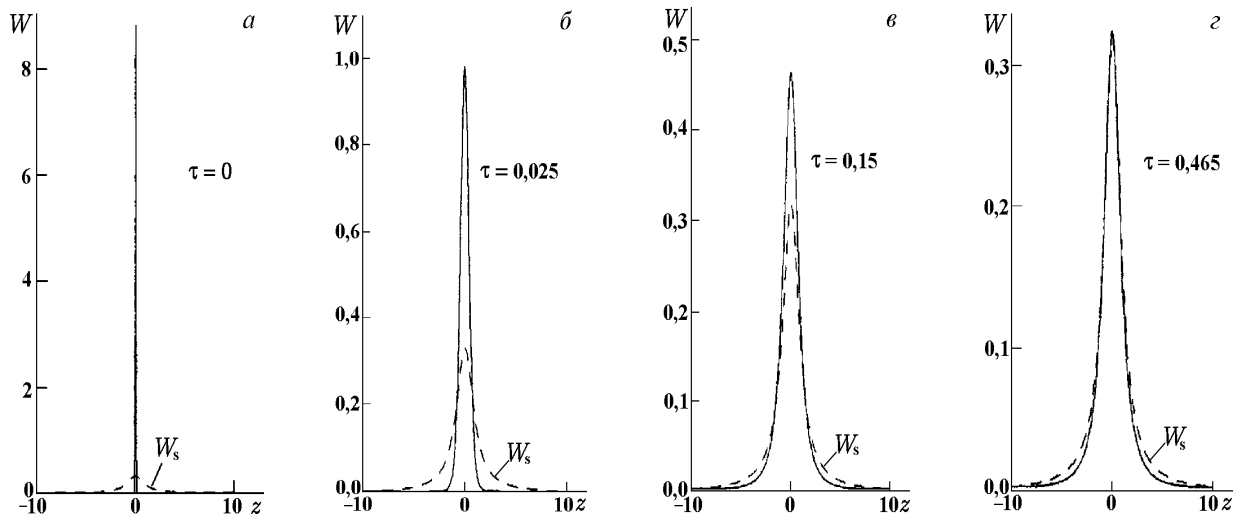


Рис. 4

Выражение (21) показывает, что наиболее вероятные отклонения частицы от центра масс сгустка в конечном итоге сосредотачиваются в интервале с введенным ранее характерным масштабом l . Образу говоря, в вероятностном смысле частица не убегает от центра масс, а хаотически колеблется вокруг него с характерной амплитудой колебаний порядка l . Этому же соответствует и уже отмеченная симметричность процесса $\phi(t)$ относительно нуля. Если масштаб стационарных колебаний удовлетворяет неравенству

$$l \ll l_v,$$

то исходное уравнение (6) для взаимного расположения частиц и центра масс сгустка практически на всех временах можно заменить линеаризованным стохастическим уравнением (8).

Сказанное означает, что по сравнению со случаем макроскопически неподвижной среды хаотические движения сплошной среды качественно меняют характер поведения во времени взаимного расположения частиц и центра масс. Если в неподвижной среде частица хаотически отклоняется от неподвижного центра масс по классическому закону броуновского движения с дисперсией

$$\langle z_0^2(t) \rangle = 2\mu t, \quad (22)$$

то в хаотически движущейся сплошной среде частицы сгустка как бы «привязаны» к центру масс, колеблясь в окрестности последнего с характерной амплитудой порядка l . Подчеркнем, однако, что упомянутая привязка очень слаба в том смысле, что средний квадрат расстояния между центром масс сгустка и отдельными частицами растет, в отличие от (22), не по линейному, а по экспоненциальному закону

$$\langle z^2(t) \rangle = l^2 (e^{2Bt} - 1)$$

и с течением времени стремится к бесконечности. Другим проявлением слабости привязки является медленное, пропорциональное z^{-2} , убывание стационарного вероятностного распределения (21) при $z \rightarrow \infty$.

Тем не менее, из (18) и (21) следует, что логарифмическое расстояние $\phi(t)$ обладает симметричным стационарным распределением

$$W_s(\phi) = \frac{1}{\pi \operatorname{ch} \phi}, \quad (23)$$

экспоненциально быстро убывающим с ростом ϕ . Отметим практически полное совпадение гистограммы $w(\phi)$ с вероятностным распределением (23) (см. рис. 3б и 3в).

Наличие стационарной плотности вероятностей (23) означает, что процесс $\phi(t)$ стационарен в общепринятом смысле: все его моменты при $t \rightarrow \infty$ оказываются ограниченными. В частности, средний квадрат логарифмического расстояния равен

$$\langle \phi^2 \rangle_s = \pi^2/4.$$

В то же время среднее логарифмического расстояния (19) при чисто броуновском движении растет с течением времени по логарифмическому закону:

$$\langle \phi_0(t) \rangle = [\ln(\tau) + \gamma]/2. \quad (24)$$

Здесь использовано введенное ранее безразмерное время τ и постоянная Эйлера $\gamma \approx 0,577$. Приравняв стандарт процесса $\phi(t)$ $\sigma = \pi/2$ к среднему (24), получим оценку характерного времени τ^* , при превышении которого эффекты локализации должны становиться заметными по сравнению с обычной диффузией:

$$\tau^* \sim \exp(\pi - \gamma) = 13. \quad (25)$$

Заметим, однако, что из сравнения графиков реализаций (рис. 1а и б) видно, что оценка (25) характерного времени, начиная с которого $\phi(t)$ становится меньше $\phi_0(t)$ (что как раз и соответствует локализации сгустка), явно сильно занижена, что связано с чрезвычайно медленным — логарифмическим — характером роста среднего логарифма (24) винеровского процесса. В самом деле, если принять за безразмерное время τ^* , на котором очевидно проявляется превышение $\phi_0(t)$ над $\phi(t)$, время, начиная с которого среднее (24) превышает стандарт процесса $\phi(t)$ в 5 раз, то для τ^* получим значение $\tau^* \simeq 3,7 \cdot 10^6 \gg 500$.

5. СТАТИСТИКА ПЛОТНОСТИ ПАССИВНОЙ ПРИМЕСИ

Исследованные выше флуктуации расстояния между частицами и центром масс сгустка тесным образом связаны с флуктуациями плотности пассивной примеси. Поэтому далее подробно изучим вероятностные свойства флуктуаций плотности. Для этого вернемся к выражению (2) для микроскопической плотности сгустка. Учитывая, что $X_0(t|\xi)$ можно трактовать как центр масс сгустка, перейдем в систему отсчета

$$y = x - X_0(t|\xi)$$

с началом в центре масс, хаотически движущуюся вместе со сгустком. В данной системе отсчета микроскопическая плотность сгустка описывается выражением

$$\tilde{\rho}(y, t) = \sum_i m_i \delta(z_i(t|\xi) - y). \quad (26)$$

Заметим, что наблюдатель, пользующийся макроскопическими измерительными приборами, измеряет макроскопическую плотность пассивной примеси

$$\rho(x, t) = \overline{\tilde{\rho}(x, t)}.$$

Здесь черта сверху означает усреднение по хаотическим молекулярным столкновениям. При случайных движениях сплошной среды $\rho(x, t)$ — случайное поле, статистические характеристики которого определяются усреднением по ансамблю случайного поля скорости $v(x, t)$.

Итак, для того, чтобы найти, например, среднюю макроскопическую плотность пассивной примеси, необходимо произвести усреднение сразу по двум ансамблям: молекулярных столкновений и гидродинамических движений сплошной среды. Само усреднение осуществляется в два приема: вначале по ансамблю $\alpha_i(t)$, а затем по ансамблю случайного гидродинамического поля скорости. При этом на первом этапе мы получаем случайное макроскопическое поле плотности пассивной примеси, которое затем можно использовать для анализа вероятностных свойств плотности примеси.

Применительно к стохастическому уравнению (12) на первом этапе усреднения считаем $\alpha(t)$ случайным процессом, в то время как $\beta(t)$ — детерминированный процесс. В результате на данном этапе получаем из (14), что $z(t)$ — гауссов случайный процесс с нулевым средним и дисперсией

$$g(t) = \overline{z^2(t)} = 2\mu \int_0^t J^2(t', t) dt'. \quad (27)$$

Усредняя далее (26) по статистике гауссовых процессов $z_i(t)$, приходим к макроскопической плотности сгустка пассивной примеси в системе координат, начало которой помещено в центр масс сгустка:

$$\rho(y, t) = \frac{m}{\sqrt{2\pi g(t)}} \exp\left(-\frac{y^2}{2g(t)}\right). \quad (28)$$

Здесь m — полная масса частиц сгустка: $m = \sum_i m_i$. Таким образом, в рассматриваемом приближении сгусток имеет гауссову форму с флуктуирующей эффективной шириной, статистические свойства которой описываются случайным процессом $g(t)$. Полученное выражение (28) полезно еще и тем, что позволяет исследовать не только среднюю плотность примеси, но и некоторые вероятностные свойства сгустка, например, флуктуации максимальной плотности

$$R(t) = \rho(0, t) = \frac{m}{\sqrt{2\pi g(t)}}. \quad (29)$$

Как видно из (28) и (29), статистические свойства плотности примеси определяются статистикой случайного процесса $g(t)$. Для анализа последнего заметим, что из (12), (14) и (27) следует, что сам процесс $g(t)$ удовлетворяет стохастическому уравнению

$$\frac{1}{2} \frac{dg}{dt} + Bg = \beta(t)g + \mu.$$

Отсюда получаем, что плотность вероятности

$$F(g, t) = \langle \delta[g(t) - g] \rangle$$

подчиняется уравнению Фоккера—Планка

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} + 2l^2 \frac{\partial F}{\partial g} = 2 \frac{\partial^2}{\partial g^2} (g^2 F), \quad F(g, \tau = 0) = \delta(g).$$

При $\tau \rightarrow \infty$ его решение стремится к стационарному распределению

$$F_s(g) = \frac{l^2}{g^2} \exp\left(-\frac{l^2}{g}\right). \quad (30)$$

Усреднение макроскопической плотности (28) с помощью распределения (30) дает выражение для средней плотности сгустка

$$\langle \rho(y) \rangle_s = m \frac{l}{\pi} \frac{1}{y^2 + l^2},$$

из которого видно, что средний профиль плотности достаточно хорошо локализован на оси y .

Обсудим физический механизм существования стационарного распределения (30) случайной ширины сгустка и эффекта стохастической локализации сгустка. Как видно из (27), средний квадрат эффективной ширины сгустка примеси пропорционален интегралу от $J^2(t', t)$ и, следовательно, повторяет свойства этого процесса. Что же касается самого процесса $J(t', t)$, удовлетворяющего хорошо изученному [21, 22] уравнению (13), то, как и любой перемежающийся (intermittency) процесс, он обладает внешне противоречивыми свойствами. Его моменты экспоненциально растут с течением времени [4, 9], что обусловлено наличием громадных выбросов в некоторых реализациях. В то же время с вероятностью единица реализации процесса $J^2(t', t)$ экспоненциально спадают к нулю с ростом t , и его наиболее вероятные отклонения сосредотачиваются в окрестности нуля [9]. Математически это подтверждается наличием экспоненциально спадающих к нулю мажорантных кривых [6, 8, 21, 23]

$$M(t) = M_0 \exp(-rBt), \quad M_0 > 1, \quad 0 < r < 1,$$

ниже которых с вероятностью $p = 1 - M_0^{r-1}$ лежат реализации процесса $J^2(t', t)$. Именно это последнее свойство реализаций процесса $J^2(t', t)$ обеспечивает описанный эффект локализации сгустка, при котором хаотическое движение среды в среднем не ускоряет разбегание частиц, а прижимает их друг к другу. Причина тому — асимметрия хаотических сжатий (при $u < 0$) и растяжений (при $u > 0$) сгустков частиц примеси. Полученное ранее равенство (10) показывает, что сгусток чаще сжимается, чем растягивается, что и порождает эффект локализации. Иными словами, молекулярная диффузия стремится раскидать частицы, однако преимущественное хаотическое сжатие частиц в случайно движущейся сжимаемой среде нейтрализует броуновское расталкивание, порождая локализацию.

Работа выполнена при поддержке МЦФПИН (проект № 99–2–09), а также INTAS (грант № 11134).

ЛИТЕРАТУРА

1. Csanady G. T. Turbulent Diffusion in the Environment. — Boston: Reidel, 1973.
2. Careta A., Sagues F., Ramirez-Piscina L., Sancho J. M. // J. Stat. Phys. 1993. V. 71, № 1/2. P. 235.
3. Crisanti A., Vulpiani A. // J. Stat. Phys. 1993. V. 70, № 1/2. P. 197.
4. Жукова И. С., Саичев А. И. // ПММ. 1997. Т. 61, вып. 5. С. 788.
5. Кляцкин В. И. // УФН. 1994. Т. 164, № 5. С. 531.
6. Кляцкин В. И., Саичев А. И. // ЖЭТФ. Т. 111, вып. 4. С. 1297.
7. Кляцкин В. И., Гурарий Д. // УФН. 1999. Т. 169, № 2. С. 171.
8. Saichev A. I., Woyczynski W. A. // Stochastic Models in Geosystems. The IMA volumes in mathematics and its applications. 1996. V. 85. P. 359.
9. Saichev A. I., Zhukova I. S. // Lecture Notes in Physics. 1998. V. 511. P. 353.
10. Klyatskin V. I. // Progress in Optics. 1994. V. 33. P. 1.
11. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. Ч. 2. — М.: Наука, 1978.
12. Кравцов Ю. А. // ЖЭТФ. 1968. Т. 55, № 3. С. 798.
13. Zwillinger D. I., White B. S. // Wave Motion (North-Holland). 1985. V. 7. P. 207.
14. Martin J. M., Flatte S. M. // Appl. Opt. 1988. V. 27, № 11. P. 2111.
15. Shandarin S. F., Zeldovich Ya. B. // Rev. Modern Phys. 1989. V. 61. P. 185.
16. Гурбатов С. Н., Малахов А. Н., Саичев А. И. Нелинейные случайные волны в средах без дисперсии. — М.: Наука, 1990.
17. Weinberg D. Y., Gunn J. E. // MNRAS. 1990. V. 247. P. 260.

18. Shandarin S. F., Sathyaprakash B. S. // *Astrophys. J.* 1996. V. 467. P. 125.
19. Kraichnan R. H. // *Phys. Fluids.* 1968. V. 11. P. 945.
20. Kraichnan R. H. // *Phys. Rev. Lett.* 1994. V. 72. P. 1016.
21. Зельдович Я. Б., Молчанов С. А., Рузмайкин А. А., Соколов Д. Д. // *УФН.* 1987. Т. 152. С. 3.
22. Frisch U. *Turbulence.* — Cambridge: Cambridge University Press, 1995.
23. Кляцкин В. И., Саичев А. И. // *УФН.* 1992. Т. 162, № 3. С. 161.

¹ Нижегородский государственный
университет

им. Н. И. Лобачевского,
г. Н. Новгород, Россия;

² Western Reserve University,
Cleveland

Поступила в редакцию
28 октября 1999 г.

RELATIVE MOLECULAR DIFFUSION

E. Z. Gribova, I. S. Zhukova, A. I. Saichev, and W. A. Woyczynski

We study both analytically and numerically the motion of a passive floating admixture in a random velocity field taking molecular collisions into account. Using the one-dimensional model, we analyze the closely related effects of relative molecular diffusion and fluctuations of density of particles located initially in the same physically infinitesimal volume.

УДК 538.56÷519.25

РЕЛАКСАЦИЯ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

О. В. Муzychук

Рассмотрен осциллятор с нелинейной жёсткостью и нелинейным демпфированием, находящийся под воздействием гауссовой дельта-коррелированной случайной силы, который трактуется как броуновская частица в соответствующем потенциальном профиле. Использован аналитико-численный метод анализа, основанный на решении разомкнутой определённым образом цепочки дифференциальных уравнений для статистических моментов. Для случая нелинейной жёсткости выяснена зависимость времени релаксации средних значений и дисперсий координат и скоростей частиц от параметров системы и интенсивности шума. Для системы с нелинейной вязкостью аналогичным образом исследована релаксация вероятностных характеристик амплитуды колебаний. В обоих случаях на основании релаксации моментов строится эволюция (гауссового или рэлеевского) вероятностного распределения.

ВВЕДЕНИЕ

Изучение нестационарных процессов в нелинейных системах, подверженных воздействиям случайных сил, в частности исследование релаксации вероятностных характеристик броуновского движения, актуально для ряда теоретических и прикладных задач статистической радиофизики, радиоэлектроники, физической химии (см., например, [1, 2]). Соответствующим математическим аппаратом является теория марковских процессов и процессов диффузионного типа (см., например, [3–5]), но, как известно, аналитического решения нестационарных уравнений Фоккера—Планка (ФП) в нетривиальных случаях не существует. Отметим работу [6], в которой получены аналитические результаты для времени релаксации плотности вероятностей координаты броуновской частицы в ряде потенциальных профилей. Однако в ней, как и в абсолютном большинстве работ по нестационарному броуновскому движению, рассматриваются вероятностные характеристики безынерционных частиц, движение которых описывается стохастическим уравнением Ланжевена 1-го порядка.

Довольно очевидно, что релаксация реальных (инерционных) частиц имеет свои особенности, связанные с осцилляторным характером переходных процессов. Ясно также, что исследовать статистическую динамику инерционных броуновских частиц возможно лишь комбинируя аналитические и численные методы анализа. В рамках такого подхода ниже исследуется релаксация основных вероятностных характеристик стохастического осциллятора, обладающего нелинейной жёсткостью и нелинейным демпфированием, который можно трактовать как броуновскую частицу в соответствующем потенциальном профиле в среде с нелинейной вязкостью.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЕ В ЛИНЕЙНОМ СЛУЧАЕ

1. Рассмотрим нелинейный осциллятор с аддитивным шумом, описываемый уравнением

$$\ddot{x} + 2hG(x)\dot{x} + \Omega^2 F(x) = \Omega^2 \xi(t), \quad (1)$$

которое будем трактовать как уравнение Ланжевена для броуновской частицы в потенциальном профиле $\Phi(x)$, где

$$F(x) = x[1 + f(x)] = d\Phi/dx, \quad G(x) = 1 + g(x). \quad (2)$$

Здесь $f(x)$ — безразмерная нелинейная жёсткость, $g(x)$ — безразмерная нелинейная вязкость. В линейном случае, очевидно,

$$\Omega^2 = k/m, \quad 2h = \nu/m, \quad \omega^2 = \Omega^2 - h^2,$$

где m — масса частицы, k — жёсткость, ν — коэффициент вязкого трения, ω — частота собственных колебаний. Ниже мы ограничимся рассмотрением нелинейностей вида

$$f(x) = \beta x^2, \quad g(x) = \gamma x^2, \quad (3)$$

хотя используемый метод анализа применим и для нелинейных характеристик в виде полинома невысокого порядка.

Случайную силу $\xi(t)$, обусловленную в случае броуновского движения тепловыми флуктуациями, полагаем гауссовым дельта-коррелированным процессом:

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi(t) \xi(t + \tau) \rangle = D_\xi \delta(\tau). \quad (4)$$

Основной интерес представляет релаксация вероятностного распределения координат частиц или хотя бы релаксация среднего значения и дисперсии.

2. Чисто аналитические результаты для решения нестационарного уравнения ФП возможны лишь в линейном случае, с которого и начнём рассмотрение. Поскольку при этом существует решение стохастического уравнения (1) в форме

$$x(t) = x_1(t) + s(t), \quad (5)$$

где $x_1(t)$ — собственное решение, определяемое начальными условиями $x_0 = x(0)$, $v_0 = \dot{x}(0)$, а $s(t)$ — вынужденное, являющееся функционалом случайной силы $\xi(t)$, нестационарную плотность вероятностей координат можно найти на основании равенства

$$W_x(x; t) = \langle \delta[x - x(t)] \rangle_{x_0, v_0, s}. \quad (6)$$

Усреднение дельта-функции в (6) выполняется, в общем случае, по заданному вероятностному распределению начальных условий $W_0(x_0, v_0)$ и распределению величины $s(t)$. Для гауссова шума $\xi(t)$ вероятностное распределение процесса $s(t)$ также будет нормальным с нулевым средним и дисперсией $D_s(t) = \langle s^2(t) \rangle$.

Если имеем нормальное начальное распределение $W_0(x_0, v_0)$ или детерминированные начальные условия, т. е.

$$W_0(x_0, v_0) = \delta(x_0 - x_{00}) \delta(v_0 - v_{00}), \quad (7)$$

то двумерная нестационарная плотность вероятностей координат и скоростей также будет гауссовой:

$$W(x, v; t) = \frac{1}{2\pi \sqrt{D_x D_v - B_{xv}^2}} \exp \left[-\frac{D_v (x - \langle x \rangle)^2 - 2B_{xv} (x - \langle x \rangle) (v - \langle v \rangle) + D_x (v - \langle v \rangle)^2}{2(D_x D_v - B_{xv}^2)} \right], \quad (8)$$

где $D_x(t)$, $D_v(t)$ — дисперсии координат и скоростей, $B_{xv}(t) = \langle xv \rangle - \langle x \rangle \langle v \rangle$ — их ковариационная функция. В частности, если начальные условия для скорости нулевые, а для координаты — гауссовы

$$W_0(x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_0}} \exp \left[-\frac{(x_0 - \langle x_0 \rangle)^2}{2D_0} \right] \quad (9)$$

или детерминированные, на основании (4)–(9) приходим к нестационарному гауссовому распределению координат

$$W_x(x; t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_x(t)}} \exp \left[-\frac{(x - \langle x(t) \rangle)^2}{2D_x(t)} \right], \quad (10)$$

где релаксация среднего значения и дисперсии (в осцилляторном режиме, при $\Omega > h$) описывается выражением

$$\langle x(t) \rangle = \langle x_0 \rangle e^{-ht} \left(\cos \omega t + \frac{\delta_1}{a} \sin \omega t \right), \quad (11a)$$

$$D_x(t) = D_0 (\langle x(t) \rangle / \langle x_0 \rangle)^2 + D_s(t), \quad (11b)$$

$$D_s(t) = D \left[1 - a^{-2} e^{-2ht} (1 + a\delta_1 \sin 2\omega t - \delta_1^2 \cos 2\omega t) \right].$$

Здесь

$$\delta_1 = h/\Omega = 1/(2Q), \quad a^2 = 1 - \delta_1^2, \quad \omega = a\Omega,$$

Q — добротность линейного осциллятора. Безразмерный параметр

$$D = \Omega Q D_\xi / 2 \quad (12)$$

имеет смысл эффективной мощности случайной силы $\xi(t)$ и, как видно из (11б), является стационарным значением дисперсии координат. Нетрудно также записать соответствующие выражения для апериодического режима. В случае детерминированных начальных условий (7) в формуле (11б) следует положить $D_0 = 0$.

РЕЛАКСАЦИЯ МОМЕНТОВ И МОДЕЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1. Обратимся теперь к нелинейной задаче. Стохастическое уравнение (1) запишем в виде

$$\begin{aligned} \Omega^{-1} \dot{x} &= y, \\ \Omega^{-1} \dot{y} &= -\tilde{\delta} (1 + g(x)) y - F(x) + \xi(t), \end{aligned} \quad (13)$$

где y — безразмерная скорость частиц, $\tilde{\delta} = 2\delta_1 = 1/Q$. Стандартным образом можно получить уравнение ФП для двумерной плотности вероятностей марковской совокупности $\{x, y\}$; для стационарного вероятностного распределения $W(x, y; \infty) = w(x, y)$ оно имеет вид

$$y \frac{\partial w}{\partial x} - \tilde{\delta} (1 + g(x)) \frac{\partial(yw)}{\partial y} - F(x) \frac{\partial w}{\partial y} = \tilde{\delta} D \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \quad (14)$$

В общем случае аналитическое решение даже этого стационарного уравнения отсутствует, но хорошо известно, что для среды с линейной вязкостью ($g(x) = 0$) оно представляет собой произведение больцмановского распределения координат частиц и гауссова распределения их скоростей:

$$w(x, y) = w_x(x)w_y(y) = C \exp \left[- \left(y^2 / (2D) + \int F(x) dx / D \right) \right], \quad (15)$$

где параметр D определяется выражением (12).

На основании (13), учитывая (2)–(4), запишем систему уравнений релаксации совместных моментов координат и скоростей частиц. Обозначив для краткости

$$\langle k; m \rangle = \langle x^k(t) y^m(t) \rangle,$$

имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} \langle k; m \rangle' &= -\langle k+1; m-1 \rangle - \tilde{\delta} \langle k; m \rangle + \frac{k}{m} \langle k-1; m+1 \rangle - \\ &- \beta \langle k+3; m-1 \rangle - \tilde{\delta} \gamma \langle k+2; m \rangle + \tilde{\delta} D (m-1) \langle k; m-2 \rangle. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь и ниже штрих означает производную по безразмерному времени $\theta = \Omega t$. В силу нелинейностей, связанных с коэффициентами β и γ , в системе (16) низшие моменты зацепляются за высшие.

Как известно [7, 8], зацепление моментов в подобных системах можно свести к «трёхчленному взаимодействию», а стационарные значения записать в форме матричных цепных дробей. В случае линейной вязкости, как следует из (15), стационарные совместные моменты размыкаются:

$$\langle x^k y^m \rangle = \langle x^k \rangle \langle y^m \rangle, \quad (17a)$$

причём для моментов скоростей имеем гауссово разложение

$$\langle y^{2n+1} \rangle = 0, \quad \langle y^{2n+2} \rangle = (2n+1) D \langle y^{2n} \rangle, \quad (17б)$$

где $n = 0, 1, \dots$. Для стационарных моментов координат из (16) получается независимая цепочка алгебраических уравнений

$$\langle x^{2n} \rangle + \beta \langle x^{2n+2} \rangle = (2n-1) D \langle x^{2n-2} \rangle, \quad (17в)$$

решение которой имеет вид непрерывной дроби

$$\langle x^{2n} \rangle = \frac{(2n-1) D \langle x^{2n-2} \rangle}{1 + \frac{(2n+1) \beta D}{1 + \frac{(2n+3) \beta D}{\dots}}}, \quad (18a)$$

где $n = 1, 2, \dots$, сходящейся при любых значениях параметра βD .

На основании стационарной плотности вероятностей $w_x(x)$ находится и аналитическое выражение для стационарных моментов координат:

$$\langle x^{2n} \rangle = \left(\frac{2D}{\beta} \right)^{n/2} \frac{\Gamma(n+1/2)}{\sqrt{\pi}} \frac{D_{-(n+1/2)}(z)}{D_{-1/2}(z)}, \quad z = \frac{1}{\sqrt{2\beta D}}, \quad (18б)$$

где $\Gamma(u)$ — гамма-функция, $D_{-m}(z)$ — функция параболического цилиндра [9]. Для численной процедуры удобнее, однако, использовать разложение (18a) либо численное интегрирование стационарного распределения (15).

2. Рассмотрим теперь релаксацию моментов, описываемую цепочкой дифференциальных уравнений (16). Используем аналитико-численный метод анализа, предложенный в работе [10]. Так как моменты с чётной суммой индексов $k+m=2n$ (ниже — чётные) и с нечётной суммой релаксируют независимо, естественно рассматривать соответствующие системы отдельно. Для отыскания чётных моментов введём следующие моментные векторы:

$$\mathbf{X}_1 = (\langle 2; 0 \rangle, \langle 1; 1 \rangle, \langle 0; 2 \rangle), \quad \dots, \quad \mathbf{X}_n = (\langle 2n; 0 \rangle, \langle 2n-1; 1 \rangle, \dots, \langle 0; 2n \rangle), \quad \dots, \quad (19)$$

где $n = 1, 2, \dots$, размерность которых равна $2n+1$. Для отыскания нечётных моментов (релаксирующих к нулю) введём векторы

$$\mathbf{X}_1^1 = (\langle 1; 0 \rangle, \langle 0; 1 \rangle), \quad \dots, \quad \mathbf{X}_n^1 = (\langle 2n-1; 0 \rangle, \langle 2n-2; 1 \rangle, \dots, \langle 0; 2n-1 \rangle), \quad \dots, \quad (20)$$

размерность которых равна $2n$. Нетрудно видеть, что для моментных векторов (19), (20) имеем систему трёхчленного взаимодействия вида

$$\mathbf{X}_n' = A_n \mathbf{X}_n + B_n \mathbf{X}_{n+1} + C_n \mathbf{X}_{n-1}, \quad (21)$$

где $n = 1, 2, \dots$; A_n, B_n, C_n — квазидиагональные матрицы, элементы которых можно найти на основании (16).

Для замыкания таких систем дифференциальных уравнений на N -м шаге можно просто опустить вектор $\mathbf{X}_{N+1}$ и численным образом решать оставшуюся замкнутую систему из $N(2n + 3)$ уравнений — назовём её системой N -го приближения (первое приближение при этом соответствует линейной системе). Основанием для данной процедуры является то, что компоненты высших моментных векторов влияют на низшие посредством более высоких степеней нелинейных параметров β и γ . Заметим, что при небольших номерах приближений предпочтительнее не просто опустить компоненты вектора $\mathbf{X}_{N+1}$, а использовать для них, например, гауссово разложение по низшим моментам, что можно назвать N -м гауссовым приближением. При этом первое гауссово приближение и есть «классическое» гауссово [11], широко используемое при анализе нелинейных систем.

3. Для компьютерной реализации указанной процедуры стандартными программными средствами удобнее перейти к одномерным массивам для используемых переменных. Это можно сделать следующим образом. Заметив, что в системе для чётных моментов порядковый номер «чистых» моментов координат $\langle x^{2n} \rangle$ равен n^2 , определим двумерный индекс $j = j(n, m)$ выражением

$$j(n, 0) = n^2, \quad j(n, m) = n^2 + m. \quad (22)$$

Обозначив теперь

$$Z_{j(n,m)} = \langle x^{2n-m} y^m \rangle, \quad (23)$$

придём от (16) к одномерному массиву уравнений вида

$$\begin{aligned} Z'_{j(n,m)} = & -mZ_{j(n,m-1)} - 2mZ_{j(n,m)} + (2n-m)Z_{j(n,m+1)} + \\ & + m(m-1)\tilde{\delta}DZ_{j(n-1,m-2)} - m\beta Z_{j(n+1,m-1)} - m\tilde{\delta}\gamma Z_{j(n+1,m)}, \end{aligned} \quad (24)$$

где n пробегает значения от 1 до N (N — номер приближения), а m при фиксированном n — от 0 до $2n$. Программная реализация алгоритма (22)–(24) элементарна. Аналогичным образом можно перейти к одномерному массиву и для нечётных моментов.

Начальные условия на моменты координат будем считать детерминированными, соответствующими начальному дельта-распределению частиц (7):

$$\langle x \rangle_0 = x_0, \quad \langle x^k \rangle_0 = x_0^k, \quad (25a)$$

либо гауссовыми, соответствующими начальному распределению (9):

$$\langle x \rangle_0 = x_0, \quad \langle x^{k+1} \rangle_0 = x_0 \langle x^k \rangle_0 + kD_0 \langle x^{k-1} \rangle_0, \quad (25b)$$

где $k = 1, 2, \dots$. Начальные значения координат и скоростей частиц положим для простоты статистически независимыми, а начальные скорости — нулевыми.

Получаемые таким путём численные результаты для релаксации моментов координат будем использовать для моделирования эволюции одномерного вероятностного распределения $W_x(x; t)$. В качестве основной модели возьмём гауссову плотность вероятностей (10), хотя, в принципе, таким образом можно строить и высшие модельные приближения, основанные на нескольких отличных от нуля кумулянтах распределения (например эксцессное [11]). На основании релаксации совместных моментов можно моделировать и эволюцию совместного распределения (8).

4. Основной характеристикой переходных процессов является время релаксации τ . Ниже будем использовать для него два определения: первое — по «равновеликому прямоугольнику» [6], второе —

по относительной величине отличия от стационарного значения. Поскольку в общем случае речь идёт о некотором осцилляторном процессе $u(t)$, определим эти времена следующим образом. Пусть

$$\tilde{u}(t) = |u(t) - u(t_\infty)|,$$

тогда

$$\tau_u = \frac{1}{\tilde{u}_{\max}} \int_0^{t_\infty} \tilde{u}(t) dt, \quad (26a)$$

где t_∞ формально равно бесконечности, а для численной процедуры — время, когда отличие $u(t)$ от установившегося значения пренебрежимо мало, $\tilde{u}_{\max}$ — максимум $\tilde{u}(t)$. Другим определением времени релаксации можно считать величину τ_u^ε , если для всех $t > \tau_u^\varepsilon$ выполняется условие

$$\tilde{u}(t)/\tilde{u}(t_\infty) < \varepsilon \quad (26b)$$

(выполнение последнего неравенства в численной процедуре должно проверяться от t_∞ в сторону меньших времён).

5. Влияние факторов нелинейной жёсткости и нелинейной вязкости на вероятностные характеристики системы целесообразно рассматривать по отдельности, поэтому положим пока $\gamma = 0$. При этом контроль расчётной процедуры будем осуществлять путём сравнения установившихся значений моментов координат с определёнными выше точными значениями, принимая также во внимание разложения (17) для моментов скоростей и совместных моментов.

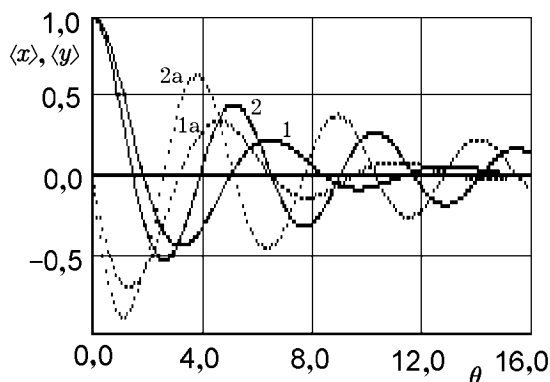


Рис. 1а. Релаксация средних значений при $Q = 2$

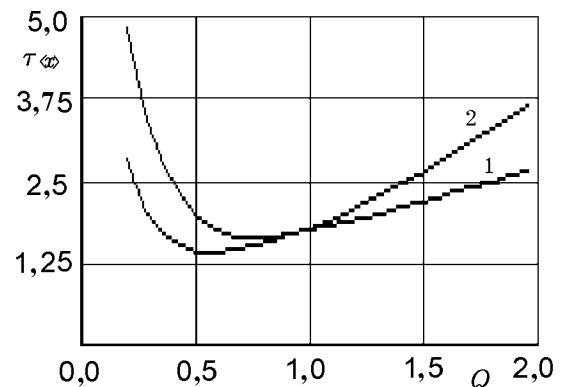


Рис. 1б. Зависимость времени релаксации среднего значения от добротности

Обсудим теперь основные результаты численного решения уравнений релаксации моментов для системы с нелинейной жёсткостью. На рис. 1 показана релаксация средних значений $\langle x(t) \rangle$, $\langle y(t) \rangle$ и зависимость времени релаксации среднего значения координат от добротности Q при интенсивности шума $D = 0,5$ и детерминированных начальных условиях $x_0 = 1$, $y_0 = 0$. Кривые 1 и 2 соответствуют релаксации координат, 1а и 2а — скоростей. Кривые 1, 1а построены для линейной системы ($\beta = 0$), 2 и 2а — для случая $\beta = 0,5$. На рис. 1а хорошо заметно увеличение частоты и амплитуды колебаний с ростом нелинейности β , обусловленное нелинейной жёсткостью системы.

Как видно из рис. 1б, зависимость времени релаксации среднего значения от добротности немонотонна; минимум примерно соответствует границе осцилляторного и апериодического режимов. Увеличение времени релаксации с ростом Q (т. е. с уменьшением вязкости) в осцилляторном режиме очевидно; увеличение же его с ростом вязкости в апериодическом режиме связано с замедлением движения частиц. Этот факт не является нелинейным эффектом, но наличие нелинейности его подчёркивает. Заметим также, что в апериодическом режиме с ростом β время релаксации уменьшается (см. также

табл. 1), а в осцилляторном — возрастает (нелинейная жёсткость увеличивает эффективную добротность).

На рис. 2 показано установление дисперсий координат и скоростей и зависимость соответствующих времён релаксации от добротности. Заметна существенная разница времени установления дисперсии координат и скоростей в аperiodическом режиме (кривые 2 и 2а). Из рис. 2б видно, что в отличие от дисперсии координат и релаксации средних значений время релаксации дисперсии скоростей не имеет минимума. В среде с большой вязкостью дисперсия скоростей устанавливается очень быстро.

В табл. 1 приведена численная информация о зависимости времён релаксации τ и τ^ε от параметров β и Q . Приведённые в табл. 1 значения получены при интенсивности шума $D = 0,5$ и гауссовых (25б) начальных условиях с $x_0 = 0,75$ и $D_0 = 0,1$; $\varepsilon = 0,1$. Из табл. 1 видно, что в осцилляторном режиме $\tau^\varepsilon > \tau$, что вполне естественно при малом ε . Времена релаксации дисперсии слабее зависят

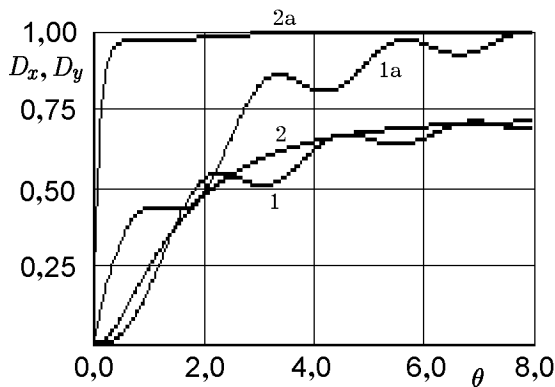


Рис. 2а. Релаксация дисперсий. Кривые 1 и 2 соответствуют дисперсии координат, 1а и 2а — дисперсии скоростей. Кривые 1 и 1а построены для $Q = 2,4$, кривые 2 и 2а — для $Q = 0,2$

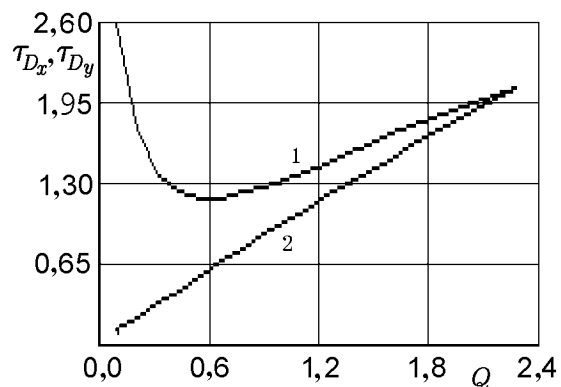


Рис. 2б. Зависимость времени релаксации дисперсии координат (кривая 1) и скоростей (кривая 2) от добротности

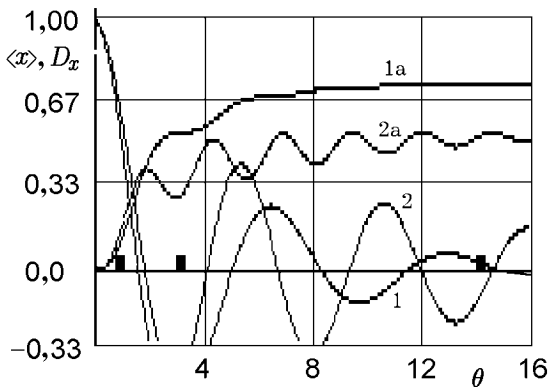


Рис. 3а. Релаксация среднего значения и дисперсии координат при $Q = 2,4$; $D = 0,75$. Кривые 1 и 2 соответствуют релаксации $\langle x(t) \rangle$, 1а и 2а — $D_x(t)$ для линейной (кривые 1, 1а) и нелинейной (кривые 2, 2а) системы

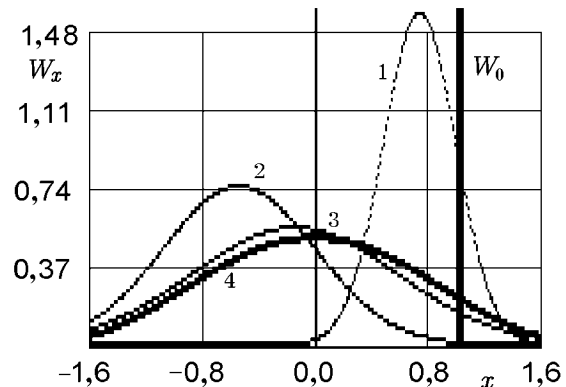


Рис. 3б. Установление модельного вероятностного распределения координат для случая нелинейной системы; W_0 — начальное дельта-распределение, кривые 1–3 эволюция модельного распределения, 4 — стационарное бoльцмановское распределение

от нелинейности, чем соответствующие времена релаксации средних значений.

На рис. 3а и 3б показана релаксация $\langle x(t) \rangle$ и $D_x(t)$ для линейной ($\beta = 0$) и нелинейной системы ($\beta = 0,3$) и установление модельного вероятностного распределения координат для последнего случая. Отметки на оси θ показывают моменты времени, в которые строится модельное распределение $W_x(x; t)$. Характер релаксации распределения — колебательный, а отличие установившейся плотности вероятностей от больцмановского распределения (15) весьма незначительное.

Отличие установившихся дисперсий D_x и D_y от соответствующих контрольных значений, получаемых интегрированием стационарного распределения, для всех приведённых выше результатов не превышало 5 %.

Таблица 1

β	Q	$\tau_{\langle x \rangle}$	$\tau_{\langle x \rangle}^{\varepsilon}$	$\tau_{\langle y \rangle}$	$\tau_{\langle y \rangle}^{\varepsilon}$	τ_{D_x}	$\tau_{D_x}^{\varepsilon}$
0,00	2	2,8	7,7	3,6	9,0	2,5	5,0
0,25	2	3,2	11,4	4,3	12,9	2,6	6,5
0,50	2	5,1	22,9	6,9	26,2	3,8	13,1
0,00	0,25	4,1	8,8	4,6	9,6	2,4	4,8
0,25	0,25	2,9	6,0	3,7	7,2	1,5	2,9
0,50	0,25	2,2	4,4	3,2	5,7	1,3	1,8

РЕЛАКСАЦИЯ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК АМПЛИТУДЫ В СРЕДЕ С НЕЛИНЕЙНОЙ ВЯЗКОСТЬЮ

1. Хотя изложенным выше методом можно исследовать и влияние нелинейной вязкости на релаксацию броуновских частиц, в случае осцилляторного режима целесообразно перейти к вероятностным характеристикам амплитуды, усреднённым по периоду колебаний. Как известно (см., например, [12]), такой приём существенно упрощает анализ. Положив в исходной системе (1), (2)

$$f(x) = 0, \quad g(x) = \gamma x^2,$$

стандартным образом придём к уравнению ФП для вероятностного распределения амплитуды колебаний $W_A(A; t)$:

$$\frac{\partial W_A}{\partial \theta_1} = \frac{\partial}{\partial A} \left[AW \left(1 + \frac{\gamma A^2}{4} \right) + D \left(\frac{\partial W_A}{\partial A} - \frac{W_A}{A} \right) \right]. \quad (27)$$

Здесь и ниже безразмерное время $\theta_1 = ht$. В линейном случае ($\gamma = 0$) решением уравнения (27) является распределение Рэлея

$$W_A(A; \theta_1) = \frac{2A}{\langle I(\theta_1) \rangle} \exp \left(\frac{-A^2}{\langle I(\theta_1) \rangle} \right), \quad (28)$$

где

$$\langle I(\theta_1) \rangle = \langle A^2(\theta_1) \rangle = I_0 \exp(-2\theta_1) + 2D$$

— средняя интенсивность колебаний. Для нелинейной системы решение уравнения (27) неизвестно, а стационарная плотность вероятностей амплитуды имеет вид

$$w_A(A) = W_A(A; \infty) = CA \exp \left[-A^2 (1 + \gamma A^2/8)/(2D) \right], \quad (29)$$

где

$$C = \sqrt{\frac{\gamma}{\pi D}} [1 + \operatorname{erfc}(4D/\gamma)]^{-1}, \quad \operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-x^2) dx.$$

Цепочка уравнений релаксации моментов интенсивности записывается как

$$\langle I^n \rangle' = 2n (-\langle I^n \rangle - \frac{\gamma}{4} \langle I^{n+1} \rangle + 2nD \langle I^{n-1} \rangle), \quad (30)$$

где $n = 1, 2, \dots$, а рекуррентная формула для стационарных моментов имеет вид непрерывной дроби

$$\langle I^n \rangle = \frac{2nD \langle I^{n-1} \rangle}{1 + \frac{(n+1)\sigma}{1 + \frac{(n+2)\sigma}{\dots}}}, \quad (31a)$$

где $\sigma = \gamma D/2$. Дробь (31a), как и (18a), сходится при любых значениях параметра σ . Приведём и соответствующее аналитическое выражение:

$$\langle I^n \rangle = (8D/\gamma)^{n/2} n! D_{-(n+1)}(2/\sqrt{\gamma D}) D_{-1}(2/\sqrt{\gamma D}). \quad (31b)$$

2. Изложенным выше методом находится численное решение для релаксации моментов интенсивности колебаний. Поскольку мы имеем дело с одномерной цепочкой уравнений (30), задача существенно упростилась. Теперь все моментные векторы имеют вид $\mathbf{X}_n = (\langle I^n \rangle; \langle I^{n+1} \rangle)$, и система N -го приближения для средней интенсивности состоит всего из $2N$ уравнений. Начальное вероятностное распределение амплитуды $W_0(A)$ естественно считать рэлеевским; при этом начальные условия таковы:

$$\langle I \rangle_0 = I_0, \quad \langle I^n \rangle_0 = n I_0 \langle I^{n-1} \rangle_0, \quad (32)$$

где $n = 2, 3, \dots$. В качестве модельной плотности вероятностей возьмём нестационарное рэлеевское распределение (28) с найденной численным образом средней интенсивностью $\langle I(t) \rangle$.

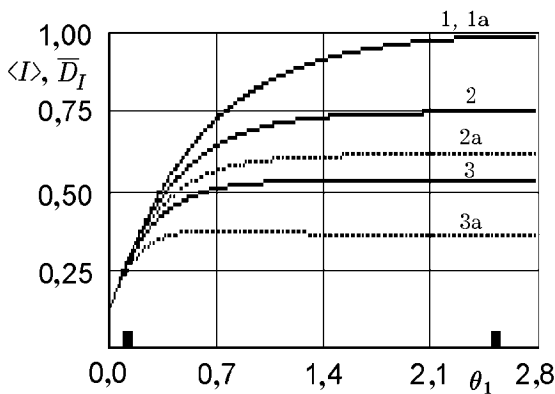


Рис. 4а. Релаксация среднего значения и нормированной дисперсии амплитуды при рэлеевском начальном распределении с $I_0 = 0,1$; $D = 0,5$. Кривые 1–3 — средняя интенсивность для $\gamma = 0$; 1; 4 соответственно

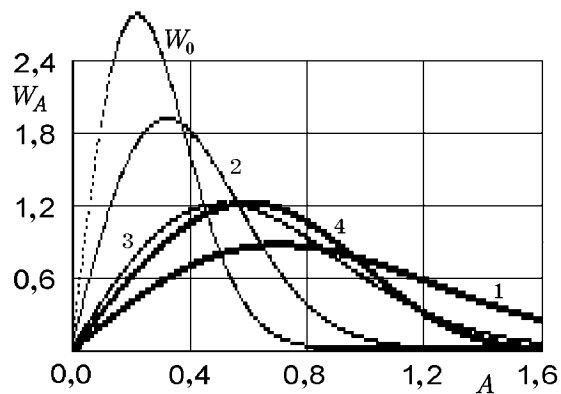


Рис. 4б. Релаксация модельного вероятностного распределения амплитуды при $\gamma = 4$; W_0 — начальное распределение, 1 — стационарное распределение для линейной системы, кривые 2 и 3 — модельное распределение в указанные на рис. 4а моменты времени, 4 — истинное стационарное распределение (29)

На рис. 4а показана релаксация средней интенсивности (кривые 1–3) и нормированной дисперсии интенсивности $\bar{D}_I = \langle I^2 \rangle / \langle I \rangle - \langle I \rangle$ (кривые 1а–3а) при различных значениях нелинейности. Кривые 1 и 1а совпадают, так как при $\gamma = 0$ имеем рэлеевское распределение, при этом $\langle I^2 \rangle = 2\langle I \rangle^2$. С ростом γ уменьшается как средняя интенсивность колебаний частиц, так и её дисперсия; уменьшаются и соответствующие времена релаксации. Время релаксации дисперсии в нелинейном случае несколько

меньше. Соответствующие числовые данные приведены в табл. 2, где $\langle I \rangle$ и $\bar{D}_I$ — стационарные значения, а $\langle I \rangle_c$ и $\bar{D}_{Ic}$ — контрольные точные.

Рис. 4б показывает релаксацию модельного вероятностного распределения амплитуды при $\gamma = 4$. Мы видим, что при весьма большой нелинейности установившееся релеевское распределение незначительно отличается от истинного (кривые 3 и 4).

В заключение следует сказать несколько слов об условиях применимости использованной вычислительной процедуры. Необходимым, но, вообще говоря, не достаточным условием является сходимостъ соответствующих непрерывных дробей для стационарных значений моментов. Матричные цепные дроби для стационарных значений системы (16) сходятся при условии $\beta QD < 1$ [7]. Одномерная же дробь (31а) сходится всегда, и для вероятностных характеристик амплитуды использованный метод работает при любых разумных значениях нелинейности γ и интенсивности шума D .

Автор признателен участникам семинара научной школы профессора А. Н. Малахова за обсуждение и полезные замечания. Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты № 99-02-17544, 00-15-96620.

Таблица 2

γ	$\langle I \rangle$	$\langle I \rangle_c$	$\bar{D}_I$	$\bar{D}_{Ic}$	$\tau_{\langle I \rangle}$	τ_{D_I}
0	0,996	1,000	0,996	1,000	0,59	0,59
1	0,746	0,746	0,612	0,612	0,40	0,32
2	0,640	0,639	0,487	0,491	0,33	0,24
4	0,530	0,525	0,358	0,379	0,27	0,16

ЛИТЕРАТУРА

1. Хорстхемке В., Лефевр Р. Индуцированные шумом переходы: теория и применение в физике, химии и биологии. — М.: Мир, 1987.
2. Климонтвич Ю. Л. // УФН. 1994. Т. 164, № 8. С. 811.
3. Стратонович Р. Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. — М.: Сов. радио, 1961.
4. Кляцкин В. И. Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами. — М.: Наука, 1975.
5. Кляцкин В. И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. — М.: Наука, 1980.
6. Malakhov A. N. // Chaos. 1997. V. 7(3). P. 488.
7. Муzychuk O. B. // Изв. вузов. Радиофизика. 1989. Т. 32, № 2. С. 169.
8. Муzychuk O. B. // ПММ. 1991. Т. 55, вып. 4. С. 620.
9. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Физматгиз, 1962.
10. Муzychuk O. B. // Изв. вузов. Радиофизика. 1999. Т. 42 № 9. С. 922.
11. Малахов А. Н. Кумулянтный анализ негауссовых случайных процессов и их преобразований. — М.: Сов. радио, 1978.
12. Диментберг М. Ф. Нелинейные стохастические задачи механических колебаний. — М.: Наука, 1980.

Нижегородский архитектурно-
строительный университет,
г. Н. Новгород, Россия

Поступила в редакцию
14 января 2000 г.

**RELAXATION OF STATISTICAL CHARACTERISTICS OF THE BROWNIAN MOTION
OF A NONLINEAR OSCILLATOR**

O. V. Muzychuk

We consider an oscillator with nonlinear elasticity and nonlinear damping under the action of a Gaussian delta-correlated random force. Such an oscillator is treated as a Brownian particle in the corresponding potential profile. The problem is analyzed using the analytic-numerical method based on solving the chain of differential equations for the statistical moments, which is broken in a certain way. In the case of a nonlinear elasticity, we find the dependence of the relaxation times of the mean values and variances of both the coordinates and velocities on the system parameters and the noise power. Relaxation of the statistical characteristics of the amplitude is studied in a similar way for the system with a nonlinear damping. In these two cases, the evolution of a Gaussian or Rayleigh probability distributions is described on the basis of the moment relaxation.

ПАМЯТИ В. Н. КРАСИЛЬНИКОВА

4 мая 2000 года отечественная радиопизика и высшая школа понесли невосполнимую утрату. Ушёл из жизни известный учёный, профессор Санкт-Петербургского университета ВЛАДИМИР НИКОЛАЕВИЧ КРАСИЛЬНИКОВ.

Владимир Николаевич родился 4 апреля 1932 года в Ленинграде. Закончив в 1955 году физический факультет ЛГУ, он поступает в аспирантуру, а после её окончания становится преподавателем кафедры радиопизики. В начале 60-х он создаёт лабораторию, которой руководит все последующие годы. Его кандидатская диссертация (1959 г.) была посвящена теории нестационарных процессов в тонких вибраторах, а на несколько последующих лет главной темой его научной работы становятся акустические проблемы.

В те же годы в сфере интересов В. Н. Красильникова оказывается электродинамика нестационарных сред. Под его руководством были исследованы проблемы генерации электромагнитного излучения потоками гамма-квантов, разработан эффективный аппарат анализа процессов дифракции на нестационарных объектах, а также проведён большой комплекс прикладных работ, важных для укрепления обороноспособности страны. Многие из этих результатов вошли в его докторскую диссертацию (1971 г.) и в монографию “Параметрические волновые явления в классической электродинамике”. В 70-е–90-е годы им и его учениками были выполнены также циклы работ в области электродинамики движущихся сред, теории экранирования импульсных электромагнитных полей, теории образования и эволюции циклонических вихрей в атмосфере.

С 1981 по 1993 годы В. Н. Красильников был проректором по научной работе Санкт-Петербургского университета. Владимир Николаевич был великолепным лектором, умевшим ясно и увлекательно излагать научные результаты перед любой аудиторией, от школьников до профессионалов. Широта его эрудиции проявилась и в разнообразии читавшихся им лекционных курсов, включая лекции о распространении звука в океане, по теории антенн и нелинейных колебаний и волн.

Характерным для него было стремление помочь талантливым людям, независимо от области их деятельности. Так, в 80-е годы он оказал активную поддержку известному историку Л. Н. Гумилёву (а тогда это требовало большого гражданского мужества).

Более тридцати лет Владимир Николаевич был активным членом редколлегии журнала “Известия вузов. Радиофизика” и фактически осуществлял связь между Нижегородской и Санкт-Петербургской радиофизическими школами.

Не ограничивая свою жизнь профессиональными проблемами, он писал стихи и был тонким ценителем классической музыки, увлекался спортом и прекрасно играл в шахматы. Владимир Николаевич был очень доброжелательным, скромным и обаятельным человеком. В любом коллективе, где ему приходилось работать, он был центром притяжения, пользовался любовью и уважением. Память о Владимире Николаевиче Красильникове навсегда сохранят все, кто его знал.

