

С о д е р ж а н и е

Бархатов Н. А., Беллюстин Н. С., Левитин А. Е., Сахаров С. Ю. О трансформации магнитосферных альвеновских возмущений в медленные магнитозвуковые при отражении от магнитосопряжённых областей ионосферы	285
Коган Л. П. О методе виртуальных источников в волноводе Земля-ионосфера с неоднородностью высоты верхней стенки	296
Гайкович К. П., Черняева М. Б. Определение атмосферной рефракции при измерениях с различными трассами луча	304
Васьков В. В. Влияние пространственной дисперсии на взаимодействие коротковолновых колебаний с мелкомасштабными неоднородностями плазмы	310
Кузьмичёв И. К. Согласование квазиоптических открытых резонаторов с волноводной линией передачи	325
Неганов В. А., Матвеев И. В. Новый метод расчёта тонкого электрического вибратора	335
Содин Л. Г., Копилов Л. Е. Системы апертурного синтеза с полным покрытием гексагональной области в u, v -плоскости	345
Шабанов Д. В. Преобразование флуктуаций излучения оптического низкокогерентного источника в двухплечевом интерферометре	350
Жукова И. С., Кошелев В. Н., Саичев А. И. Эволюция сгустков плавучей примеси на поверхности турбулентной жидкости	357
Моисеев С. Н. Заполнение пропусков в марковских симметричных устойчивых временных рядах	365
Дубков А. А., Малахов А. Н., Саичев А. И. Время корреляции и структура функции корреляции нелинейного равновесного броуновского движения в потенциальных ямах произвольной формы	369

УДК 550.38;533.951

О ТРАНСФОРМАЦИИ МАГНИТОСФЕРНЫХ АЛЬВЕНОВСКИХ ВОЗМУЩЕНИЙ В МЕДЛЕННЫЕ МАГНИТОЗВУКОВЫЕ ПРИ ОТРАЖЕНИИ ОТ МАГНИТОСОПРЯЖЁННЫХ ОБЛАСТЕЙ ИОНОСФЕРЫ

Н. А. Бархатов, Н. С. Беллюстин, А. Е. Левитин, С. Ю. Сахаров

В работе проведено численное и аналитическое исследование магнитогидродинамических явлений в рамках одномерной модели магнитосферы, ограниченной сопряжёнными отражающими поверхностями. Рассмотрена специфика нелинейной трансформации альвеновской волны в медленную магнитозвуковую при распространении вдоль магнитного поля \mathbf{B}_0 . Подробно проанализированы эффекты, происходящие при отражении альвеновской нелинейной магнитосферной волны от магнитосопряжённых областей ионосферы. Показано, что в случае нелинейной альвеновской волны и низкой температуры плазмы эффект сводится к выметанию плазмы из областей вблизи отражающих границ.

Численные результаты, демонстрирующие динамику возникновения медленного магнитного звука и выметание плазмы при отражении мощной альвеновской волны от ионосферы, качественно согласуются с аналитическими оценками.

В холодной плазме эффект выметания становится значительным и требует численного исследования, даже если исходная альвеновская волна является линейной. В связи с этим выявлена ключевая роль отношения альвеновской скорости к скорости звука для величины возникающего возмущения плотности.

ВВЕДЕНИЕ

Наблюдения низкочастотных колебаний на спутниках дают основание утверждать, что источники многих типов геомагнитных возмущений располагаются в магнитосфере. Среди этих возмущений имеют место как стоячие, так и бегущие волны. Изменение магнитосферных параметров сказывается на характере колебательных режимов. В связи с этим результаты регистрации геомагнитных возмущений являются диагностическим инструментом для анализа структуры и динамики магнитосферной плазмы [1, 2]. При этом большое внимание уделяется вопросам генерации колебаний: возбуждению магнитосферных резонансов и бегущих волн локальными источниками [3]. Однако даже при известных источниках геомагнитных колебаний можно получить новые важные особенности волновых явлений и параметров околоземной плазмы, изучая распространение таких возмущений. Анализ эволюции низкочастотных волн при их распространении внутри магнитосферы позволяет в ряде случаев предложить альтернативное объяснение характерных особенностей регистрируемых геомагнитных возмущений. Предпринятая в настоящей работе попытка исследования магнитогидродинамических явлений в магнитосфере Земли вызвана стремлением внести вклад в объяснение периодического повторения структуры и изменения частоты геомагнитных возмущений. Важным представляется также выяснение природы резких колебаний плотности плазмы, регистрируемых в околоземном пространстве. Последнее относится как к плазме земной магнитосферы и солнечного ветра, так и к другим случаям, когда плазму можно принять "почти холодной", т. е. когда скорость звуковых волн много меньше скорости волн других типов.

Известно, что в среде с постоянной альвеновской скоростью и прямолинейными силовыми линиями магнитного поля электрический диполь, ориентированный перпендикулярно к магнитному полю, возбуждает в основном магнитное возмущение с поперечными компонентами, направляемое этим полем [4]. В данной работе изучаются закономерности распространения подобного заданного нелинейного поперечного магнитного импульса от локального магнитосферного источника. Рассмотрение про-

водится в одномерной модели магнитосферы, ограниченной сопряжёнными отражающими поверхностями. При распространении вдоль магнитного поля \mathbf{B}_0 имеет место вырождение: поперечный импульс распадается на два бегущих в противоположных направлениях возмущения, каждое из которых представляет собой неразличимые в этих условиях альвеновское и быстрое магнитозвуковое (БМЗ) возмущения, и на два также разбегающихся медленных магнитозвуковых (ММЗ) возмущения. В дальнейшем для простоты первые два возмущения будем называть быстрыми альвеновскими.

Кроме того, в работе подробно проанализированы эффекты, происходящие при отражении альвеновской нелинейной магнитосферной волны от сопряжённых областей ионосферы. Это, прежде всего, нелинейная трансформация сформировавшегося альвеновского импульса в ММЗ волну.

Заметим, что принимаемое в нашем нелинейном исследовании разбиение возмущений на нормальные волны (в магнитной гидродинамике — на альвеновские, БМЗ и ММЗ волны) условно, поскольку линейная терминология в случаях достаточно сильной нелинейности не может адекватно описывать динамику волн. Нелинейные режимы распространения магнитогиродинамических (МГД) волн плохо поддаются аналитическим методам анализа [5], поэтому для описания их эволюции целесообразно использовать современные средства компьютерного моделирования [6, 7], что и делалось в настоящей работе наряду с аналитическими оценками.

Для решения поставленной задачи была реализована компьютерная программа, позволяющая исследовать эволюцию одномерных нелинейных МГД волн методами вычислительного эксперимента в диалоговом режиме. Созданная программа анализирует выбранную модель и представляет динамику волн в виде фильма. При этом параметры движущейся замагниченной плазмы, используемые в программе, предполагались соответствующими условиям магнитосферной среды. В программе предусмотрена использованная нами возможность выделения сформировавшегося возмущения того или другого типа, переноса его в среду с теми же параметрами и граничными условиями и дальнейшее рассмотрение его эволюции как отдельного объекта.

1. УРАВНЕНИЯ ОДНОМЕРНОЙ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ. АНАЛИТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ

Известно [8], что линейные МГД волны, фазовые скорости которых значительно различаются, обычно слабо взаимодействуют между собой: при рассеянии на неоднородностях или отражении от границ доля трансформируемой энергии обычно пропорциональна отношению минимальной и максимальной из скоростей этих волн. На первый взгляд кажется очевидным, что учёт членов более высокого порядка не должен качественно изменить ситуацию. Однако проведённые нами оценки показывают, что это не так: возможны ситуации, когда учёт обычно игнорируемых квадратичных членов приводит к эффектам, превосходящим эффекты линейного приближения и имеющим практическое значение для волновых явлений в околоземной плазме.

Здесь для простоты рассматривается случай продольного распространения МГД волн, когда свойства альвеновских и БМЗ волн полностью совпадают и можно говорить о волнах двух типов — быстрой (альвеновской или БМЗ, в рамках рассматриваемого МГД приближения это просто вопрос терминологии) и медленной магнитозвуковой (ММЗ). Это приближение позволяет увидеть суть процесса в наиболее прозрачной форме, сделать несложные оценки и понять основной механизм возникновения резких колебаний плотности холодной плазмы. Кроме того, известно, что продольно распространяющиеся волны в космической плазме играют особую роль из-за условий распространения [9].

Эволюция нелинейного возмущения поперечной компоненты магнитного поля при продольном распространении в рамках одномерной модели магнитосферы, ограниченной сопряжёнными отражающими поверхностями, рассматривалась на основе системы МГД уравнений [10], в которой одна из поля-

ризации поперечных волн отсутствует ($B_y = 0, V_y = 0$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial V_z}{\partial z} + V_z \frac{\partial \rho}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{B_z}{4\pi\rho} \frac{\partial B_x}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} + \frac{B_x}{4\pi\rho} \frac{\partial B_x}{\partial z} + \frac{V_s^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial B_x}{\partial t} - B_z \frac{\partial V_x}{\partial z} + V_z \frac{\partial B_x}{\partial z} + B_x \frac{\partial V_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь параметр V_s — скорость звука — выбирается соответствующим условиям в магнитосфере Земли. Система координат определена таким образом, что магнитное поле \mathbf{B} , скорость \mathbf{V} и плотность ρ среды изменяются вдоль оси z . В соответствии с уравнением $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ компонента магнитного поля $B_z = B_0$ является постоянной ($B_0 = \text{const}$).

Строго говоря, система уравнений (1) применима, если длина свободного пробега частиц сорта α меньше всех характерных длин, встречающихся в задаче, а эффективные частоты столкновений ν_α больше всех характерных частот: частоты волны ($\nu_\alpha \gg \omega$) и гирочастоты ($\nu_\alpha \gg \gg \omega_{B\alpha}$). Однако результаты магнитной гидродинамики бывают справедливы и тогда, когда эти неравенства не выполнены. Это возможно, например, в случае так называемой холодной плазмы для процессов, в которых характерная скорость волновых процессов значительно больше тепловых скоростей частиц. Так, систему уравнений (1) можно применять для изучения низкочастотных волн в условиях плазмы солнечного ветра и магнитосферной плазмы. В настоящей работе численное моделирование проводилось для силовой линии, принадлежащей магнитной оболочке с параметром Мак-Илвейна $L \approx 5$, и при средних значениях магнитного поля $B_0 = 500$ нТл, плотности плазмы $\rho_0 = 4 \cdot 10^{-21}$ г/см⁻³.

Система уравнений (1) была реализована в виде программы и использовалась для численного моделирования динамики МГД процессов. Именно численное моделирование позволило увидеть процесс образования значительных возмущений плотности и привело к необходимости адекватной аналитической оценки обнаруженных эффектов. В свою очередь, соответствие результатов численных расчётов аналитическим будет свидетельствовать о достоверности всей полученной ниже пространственно-временной динамики геомагнитных возмущений.

Проведём последовательное разложение решения системы (1) по малому параметру. Будем предполагать, что к нулевому приближению относятся внешнее магнитное поле \mathbf{B}_0 и плотность плазмы ρ_0 , а начальное возмущение поперечного магнитного поля имеет только компоненту

$$B_x = b \exp\left(-\frac{z^2}{a^2}\right). \quad (2)$$

Поскольку $b \ll B_0$ малым параметром задачи будем считать $\epsilon = b/B_0 \ll 1$ — относительное возмущение магнитного поля в волне. Ищем решение системы (1) в виде

$$\begin{aligned} B_x &= \epsilon B_{1x} + \epsilon^2 B_{2x} + \dots, \\ V_x &= \epsilon V_{1x} + \epsilon^2 V_{2x} + \dots, \\ V_z &= \epsilon V_{1z} + \epsilon^2 V_{2z} + \dots, \\ \rho &= \rho_0 + \epsilon \rho_1 + \epsilon^2 \rho_2 + \dots \end{aligned} \quad (3)$$

Приравнивая члены первого порядка малости, получим известную систему уравнений для двух независимых волн, альвеновской (быстрой) и ММЗ (медленной):

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_{1x}}{\partial t} &= B_0 \frac{\partial V_{1x}}{\partial z}, & \frac{\partial V_{1x}}{\partial t} &= \frac{B_0}{4\pi\rho_0} \frac{\partial B_{1x}}{\partial z}, \\ \frac{\partial V_{1z}}{\partial t} &= -\frac{V_s^2}{\rho_0} \frac{\partial \rho_1}{\partial z}, & \frac{\partial \rho_1}{\partial t} &= -\rho_0 \frac{\partial V_{1z}}{\partial z}. \end{aligned} \quad (4)$$

Пусть в первом приближении есть только быстрая волна, которая возбуждается начальным возмущением (2), а звуковая волна отсутствует. Тогда решение системы уравнений (4) имеет вид двух симметрично разбегающихся альвеновских волн:

$$B_{1x}(z, t) = \frac{b}{2} \exp\left[-\frac{(z - V_a t)^2}{a^2}\right] + \frac{b}{2} \exp\left[-\frac{(z + V_a t)^2}{a^2}\right], \quad (5)$$

где $V_a = B_0/(4\pi\rho_0)$ — альвеновская скорость.

Во втором приближении возникает ММЗ волна ($V_{1z}, \rho_1 = 0; V_{2z}, \rho_2 \neq 0$) из-за квадратичных возмущений продольной компоненты скорости в альвеновской волне. Приравнивая члены при второй степени ϵ , получим систему уравнений второго приближения для медленной волны:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{2z}}{\partial t} &= -\frac{V_s^2}{\rho_0} \frac{\partial \rho_2}{\partial z} + \frac{B_{1x}}{4\pi\rho} \frac{\partial B_{1x}}{\partial z}, \\ \frac{\partial \rho_2}{\partial t} &= -\rho_0 \frac{\partial V_{2z}}{\partial z}, \end{aligned} \quad (6)$$

которую можно свести к одному уравнению для квадратичного возмущения плотности:

$$\frac{\partial^2 \rho_2}{\partial t^2} - V_s^2 \frac{\partial^2 \rho_2}{\partial z^2} = \rho_0 \frac{V_a^2}{B_0^2} \left[\left(\frac{\partial B_{1x}}{\partial z} \right)^2 + B_x \frac{\partial^2 B_{1x}}{\partial z^2} \right]. \quad (7)$$

Для внешнего возмущения в виде (2) и решения системы уравнений (4) первого приближения решение уравнения (7) может быть найдено точно в виде комбинаций специальных функций. Отметим, что для качественных оценок и выводов удобнее использовать численное решение, которое является реально более точным. Из уравнения (7) непосредственно видно, что для амплитуды относительных колебаний плотности в ММЗ волне выполняется соотношение

$$\frac{\rho_2}{\rho_0} \sim \left(\frac{V_a}{V_s} \right)^2 \left(\frac{b}{B_0} \right)^2. \quad (8)$$

Как и следовало ожидать, относительное изменение плотности ρ_2/ρ_0 в ММЗ волне пропорционально квадрату относительного изменения магнитного поля $\epsilon^2 = (b/B_0)^2$. Поскольку ρ_2/ρ_0 пропорционально квадрату малого параметра ϵ , в линейном приближении ρ_2 игнорируется. Существенно, что ρ_2/ρ_0 пропорционально также параметру $(V_a/V_s)^2$, который не рассматривался здесь как параметр разложения, но в “почти холодной” космической плазме очень велик — настолько, что отношение (8) может быть даже больше единицы. При этом разложение (3), строго говоря, теряет смысл.

Оценка (8) полезна и для описания эффектов рассеяния быстрой волны в медленную на резких скачках плотности среды и при отражении альвеновской волны от “жесткой стенки”. Она показывает, что наряду с другими механизмами перераспределения плотности плазмы в области ионосферы (см., например, [11]) существенную роль может играть формирование ММЗ при отражении мощной альвеновской магнитосферной волны. В этом можно убедиться, записывая точное решение уравнения (7) или проводя численное решение исходной системы нелинейных МГД уравнений (1).

Таким образом, видно, что небольшие по амплитуде колебания магнитного поля могут вызвать большие возмущения плотности в "почти холодной" плазме, в которой скорость звука существенно меньше альвеновской скорости. При этом ММЗ волна может оказаться существенно нелинейной.

2. КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ ВДОЛЬ ГЕОМАГНИТНОЙ ЛИНИИ

В настоящем разделе представлены результаты численного анализа эволюции поперечного МГД возмущения гауссовой формы, возникшего в окрестности геомагнитного экватора. В отдельном разделе, приведённом ниже, рассмотрено влияние изменения пространственного и временного шага вычислений на устойчивость численного счёта. Начальное возмущение B_x магнитного поля во всех рассматриваемых случаях направлено перпендикулярно к геомагнитной линии \mathbf{B}_0 , т. е. имеет квазиальвеновскую поляризацию. Таким образом, волновые векторы волн, образующихся в результате эволюции, направлены вдоль оси z . Все приведённые рисунки представляют зависимости компоненты возмущения от координаты z . На представленных трёхмерных рисунках показана эволюция возмущений со временем в некотором временном интервале.

Численный эксперимент по моделированию изучаемой волновой динамики предполагает использование соответствующих граничных условий на концах геомагнитной силовой линии, т. е. в магнитосопряжённых точках. Принято, что магнитосопряжённые точки находятся в областях с бесконечной проводимостью. Пренебрегая атмосферным зазором, можно считать ионосферу также и "жёсткой стенкой". В результате граничные условия запишутся в виде

$$V_x = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial B_x}{\partial z} = 0.$$

Ниже рассмотрено влияние величины отношения альвеновской и звуковой скоростей $g = V_a/V_s$ и степени нелинейности $p = B_x/B_0$ заданного возмущения на процесс трансформации альвеновской волны в ММЗ волну при её распространении между магнитосопряжёнными областями ионосферы и при отражении от последних. Расстояние между точками отражения вдоль силовой линии, отвечающей магнитной оболочке с $L = 5$, равно $8 \cdot 10^9$ см. В численных расчётах именно этому расстоянию отвечает на рисунках вся ось z . Для средних параметров среды время переноса альвеновского возмущения вдоль силовой линии между магнитосопряжёнными областями ионосферы порядка 80 с.

Первый численный анализ касается изучения зависимости амплитуды возникающего ММЗ возмущения от параметра g в условиях слабой нелинейности ($p = 0,2$) заданного начального возмущения гауссовой формы (рис. 1а). На рис. 1б представлена начальная пространственно-временная динамика трансформации заданного возмущения поперечной компоненты магнитного поля для $g = 5$ на временном интервале $\Delta t = 0 \div 10$ с. На рис. 2а, б отражена начальная пространственно-временная динамика трансформации того же возмущения, что и на рис. 1,

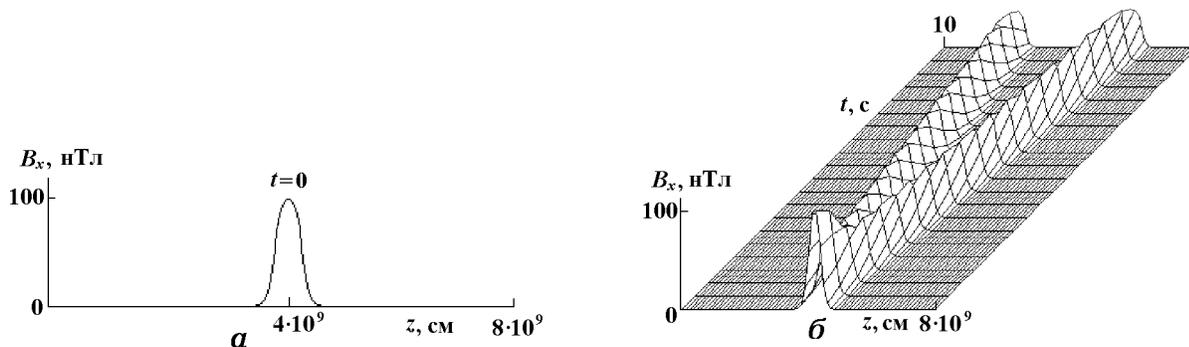


Рис. 1

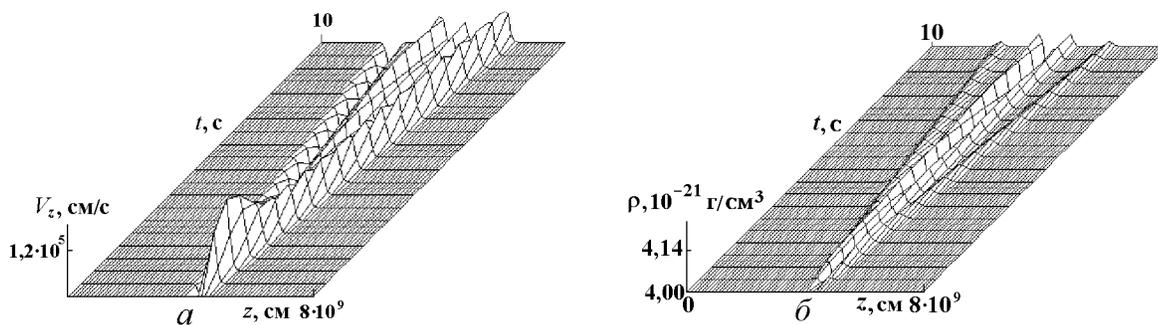


Рис. 2. Начальная пространственно-временная динамика трансформации заданного возмущения поперечной компоненты магнитного поля в возмущения продольной компоненты скорости (а) и плотности среды (б), отражающая выделение ММЗ и быстрой альвеновской волн. Параметры возмущения те же, что и на рис. 1

в возмущения продольной компоненты скорости и плотности среды. Видно, что при эволюции начального возмущения происходит выделение ММЗ и быстрой альвеновской волн. Сопоставление рис. 3а, б, полученных в более поздние времена соответственно для $g = 5$ и $g = 15$, свидетельствует о значительном росте амплитуд ММЗ волн с уменьшением температуры магнитосферной плазмы. Полученный эффект, естественно, оказался не столь сильным по сравнению с аналитической оценкой (8). Неполное совпадение численных расчётов с аналитическими обусловлено наличием множителя, зависящего от конкретной (в данном случае гауссовой) формы заданного импульса.

Второй численный анализ посвящён изучению зависимости амплитуды возникающего ММЗ возмущения от параметра нелинейности p в условиях достаточно большой скорости звука ($g = 5$). При этом сопоставляются результаты расчётов при $p = 0,2$ (см. рис. 3а) и при $p = 0,4$ (см. рис. 4а) для одного момента времени. Нетрудно видеть, что численные расчёты подтверждают аналитические оценки (8), т. е. сильную зависимость амплитуды ММЗ волны от квадрата параметра нелинейности. На рис. 4б показана дальнейшая эволюция начального возмущения, развалившегося на быстрое альвеновское и ММЗ возмущения. Альвеновское возмущение здесь уже отразилось от ионосферы, что привело к выметанию ионосферной плазмы (возникла новая ММЗ волна). Эволюция рассматриваемых волн приводит к образованию у них структурированного переднего ударного фронта и к осцилляциям на заднем краю возмущений. Эти явления отмечены в результате численного анализа независимого распространения альвеновской (быстрой) и ММЗ волн и представлены на рис. 5а, б.

Третья группа численных расчётов проведена для исследования трансформации быстрого

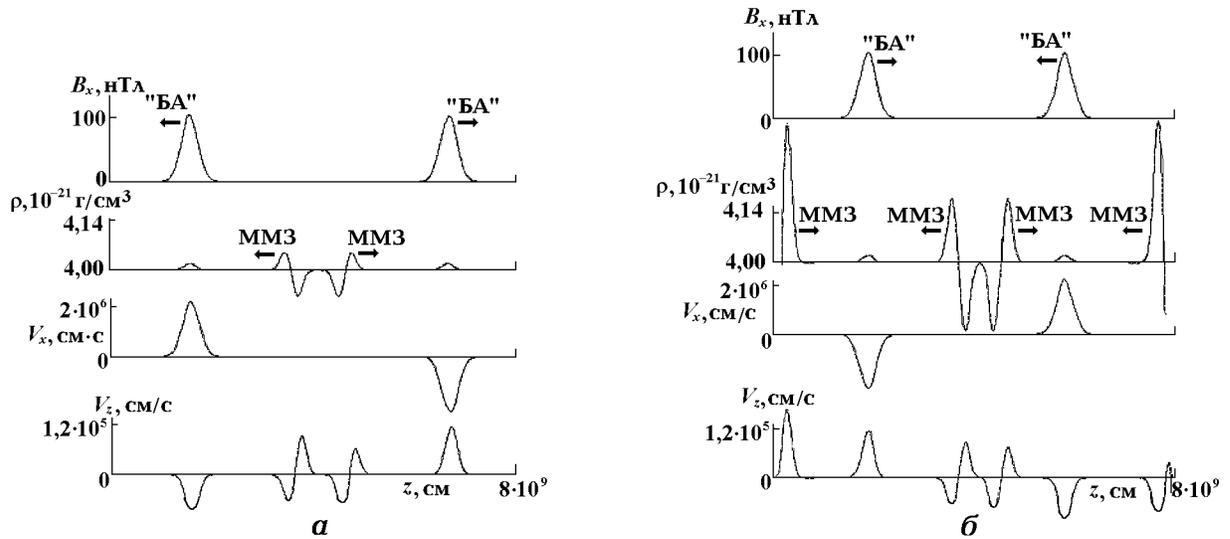


Рис. 3. Значительный рост амплитуд ММЗ волн с уменьшением температуры магнитосферной плазмы отражён сопоставлением результатов расчётов при $g = 5$ в момент времени $t = 14$ с (а) и при $g = 15$ в момент времени $t = 33$ с (б). Через "БА" обозначена быстрая волна, включающая БМЗ и альвеновскую волны

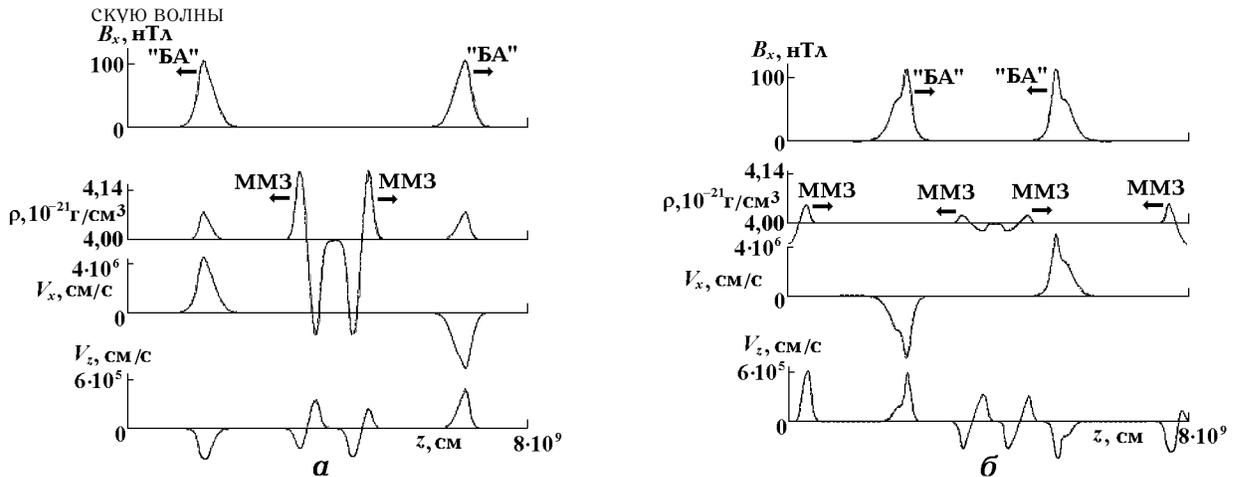


Рис. 4. Возникновение ММЗ волны в условиях достаточно большой скорости звука ($g = 5$) и умеренной нелинейности $p = 0,4$ для $t = 14$ с (а). Дальнейшая эволюция ($t = 35$ с) начального возмущения, развалившегося на быстрое альвеновское и ММЗ (б). Видно выметание плазмы из окрестностей ионосферы (возникновение новой ММЗ волны) вследствие отражения альвеновской волны

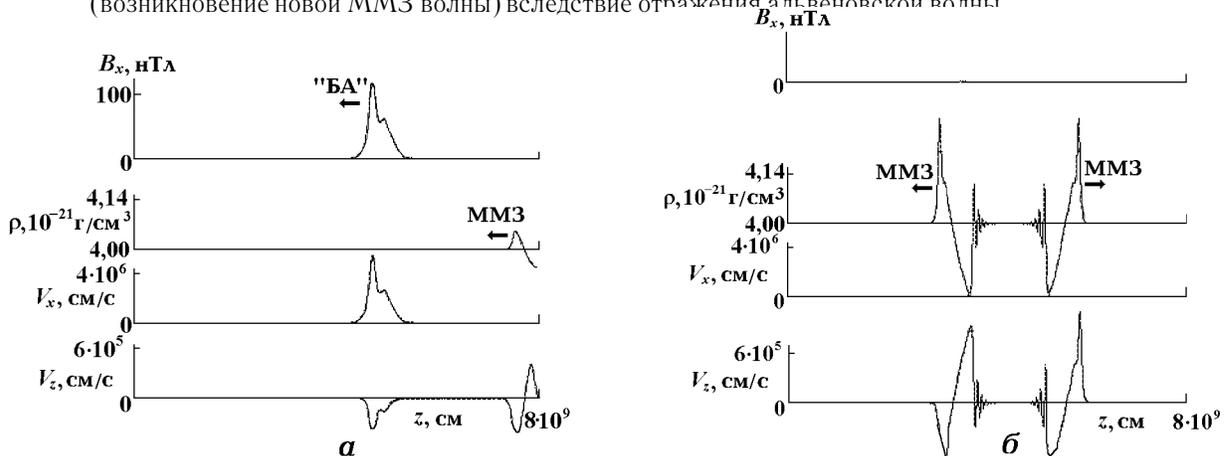


Рис. 5. Образование структурированных передних ударных фронтов и осцилляций на заднем фронте возмущений. Независимый расчёт распространения быстрой (а) и ММЗ волн (б) соответственно для $t = 40$ и 69 с

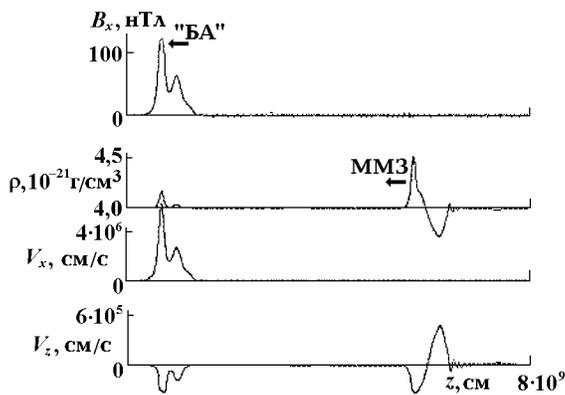


Рис. 6. Формирование отходящей от ионосферы ММЗ волны с резким передним фронтом и осцилляциями на заднем фронте как следствие столкновения быстрой волны с ионосферой в условиях умеренной нелинейности ($p = 0,4$) и значительной скорости звука ($g = 4$) для момента времени $t = 50$ с

ММЗ возмущений в одной из магнитосопряжённых областей ионосферы, т. е. при столкновении с жёсткой стенкой, в условиях средней величины параметра нелинейности ($p = 0,4$) и значительной скорости звука ($g = 4$). Предварительно выделенная быстрая волна отражается от ионосферы, выметает вблизи неё плазму и уходит в сторону магнитосопряжённой точки. ММЗ волна, существующая вначале как возмущение плазмы вблизи ионосферы, затем, ввиду значительной скорости звука трансформируется в отходящую волну с резким передним фронтом и осцилляциями на заднем фронте. Этот случай представлен рис. 6. Здесь БМЗ возмущение уже почти достигло магнитосопряжённой (левой) области, в то время как ММЗ возмущение только отошло от правой.

В условиях значительной нелинейности ($p = 0,7$) и при $g = 4$ становится заметной характерная эволюция быстрой волны, падающей на ионосферу. На рис. 7а, б приведены результаты

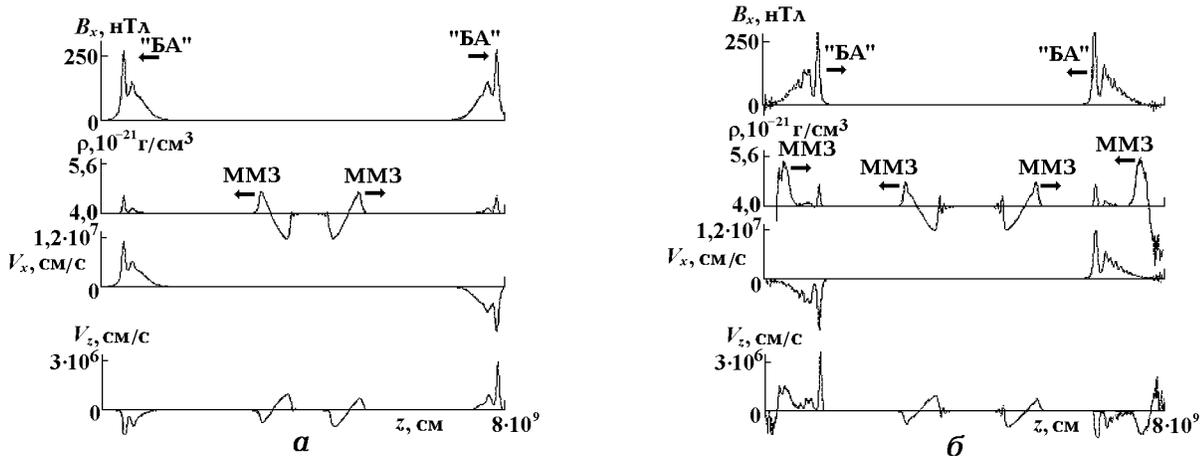


Рис. 7. Эволюция быстрой волны, падающей на ионосферу, в условиях значительной нелинейности ($p = 0,7$) и при $g = 4$. Приведены результаты расчёта для $t = 19$ с, до момента столкновения (а), и для $t = 27$ с, после столкновения (б). Осцилляции заднего склона альвеновского возмущения являются результатом модуляции его структурой переднего фронта в процессе отражения

расчёта для этой волны до и после столкновения. Легко видеть осцилляцию заднего склона альвеновского возмущения, возникшую в результате модуляции его структурой переднего фронта в процессе отражения. Эта модуляция является характерной особенностью отражения волны, что следует из сопоставления этого результата (рис. 7б) с рис. 8, полученным при тех же параметрах среды и в тот же момент времени, но для периодических граничных условий (поэтому волна появилась на рис. 8 с левой стороны).

С помощью специальной дополнительной программы для случая, представленного на рис. 7, были рассчитаны вариации изучаемых параметров среды и магнитного поля со временем

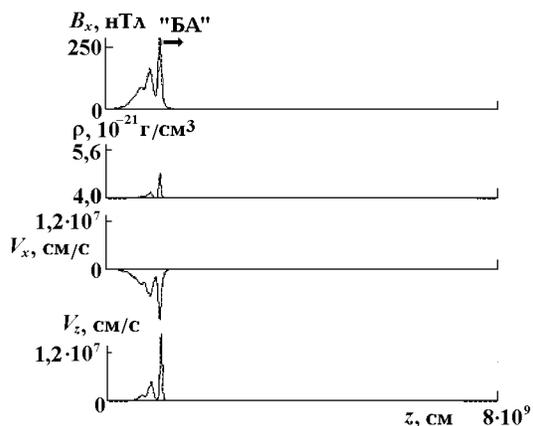


Рис. 8. Расчёт эволюции быстрой волны при тех же параметрах среды и в тот же момент времени, что и на рис. 7, но для периодических граничных условий (волна появилась с левой стороны)

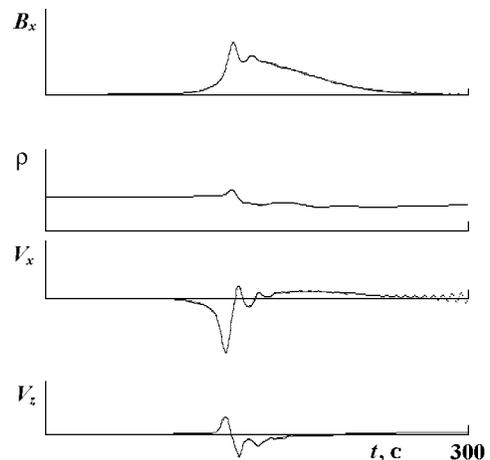


Рис. 9. Качественная временная зависимость амплитуд возмущений изучаемых параметров среды и магнитного поля в отражающей ионосферной области для событий, представленных на рис. 7

в отражающей области. Они изображены на рис. 9. Именно эти возмущения должны регистрироваться на земной поверхности при изучении рассмотренных процессов. Имея магнитозвуковую природу, т. е. изотропный характер распространения, они могут попеременно приниматься в магнитосопрежжённых областях ионосферы достаточно далеко от оснований анализируемых магнитных силовых линий. Следовательно, рассмотренный процесс распада возмущения поперечной компоненты магнитного поля в альвеновские импульсы и в медленные магнитозвуковые возмущения при распространении вдоль геомагнитного поля с учётом отражений от резких скачков параметров в магнитосопрежжённых областях ионосферы имеет отношение к интерпретации свойств широкого класса геомагнитных возмущений.

3. ВОПРОСЫ УСТОЙЧИВОСТИ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЁТОВ

Численное решение системы МГД уравнений (1) требует исследования вопросов вычислительной устойчивости и достоверности решений. При этом базовым соображением является гипотеза, что существует некоторое решение уравнений с непрерывными переменными, которое является пределом численного счёта при уменьшении временного и пространственного шагов интегрирования. Для практических целей многократное дробление шагов интегрирования требует долговременных расчётов, поэтому полезно сформулировать полуэмпирические принципы и подходы, позволяющие проводить реальные вычислительные эксперименты. Поскольку общей теории вычислительной устойчивости пока нет, речь идёт только о систематизации фактов, полученных в ходе вычислительных экспериментов.

В ходе численного счёта возникают неустойчивости решения, обусловленные накоплением ошибок счёта и приводящие к колебаниям с нарастающей амплитудой. Такие неустойчивости условно можно разделить на два класса: 1) неустойчивости, связанные с сильно неоднородной структурой волны в зоне резкого изменения значений переменных. Эти неустойчивости обычно подавляются уменьшением временного шага; 2) "вспыхивающая" неустойчивость внезапно возникает там, где нет резких перепадов переменных. Она чаще всего эффективно подавляется уменьшением пространственного шага.

Достоверность и надёжность проведённых численных расчётов удостоверялась тем, что при контрольном уменьшении временного и пространственного шагов интегрирования результат вычислений

оставался стабильным. Тогда предполагалось, что он соответствует решению уравнений в непрерывных переменных. Устойчивость полученных решений по отношению к изменениям параметров уравнений проверялась на предмет отсутствия качественного изменения решений при малом изменении параметров.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

Аналитическим и численным методами изучен распад возмущения поперечной компоненты магнитного поля гауссовой формы в альвеновские импульсы и в медленные магнитозвуковые возмущения. Рассмотрены эффекты, возникающие при распространении альвеновских возмущений вдоль геомагнитного поля и отражении их от резких скачков параметров, имеющих место в магнитосопрежженных областях ионосферы. Проведено изучение амплитуды и формы ММЗ импульсов, возникающих вследствие заданного возмущения поперечной компоненты магнитного поля и отражения сформировавшейся быстрой альвеновской волны от границы ионосферы. Анализ полученных оценок и динамических картин переноса заданного возмущения вдоль геомагнитного поля в магнитосферной плазме позволил сформулировать следующие результаты.

1) Проведено сравнение случая зеркального отражения МГД возмущений от ионосферы со случаем периодических граничных условий для подобных возмущений и аналогичных параметров среды на предмет выявления влияния зеркальных отражений на изменение формы нелинейной альвеновской волны. Выделены эффекты качественного изменения формы импульса ударной волны при отражении, в частности, появления осцилляций в хвостовой части ударного импульса, когда его головная часть уже имела осцилляции. Это особенно заметно при сильной нелинейности.

2) Изучено выметание плазмы от границы ионосферы при отражении интенсивного быстрого (альвеновского) возмущения. Фактически речь идет о формировании отраженной медленной волны, но если звуковая скорость очень мала, то формирующийся импульс отраженной ММЗ волны просто не успевает отойти от отражающей границы. При этом плотность плазмы вблизи границы резко уменьшается. Возникшее возмущение плотности со временем релаксирует. Здесь происходит трансформация быстрого возмущения в ММЗ волну вблизи границы ионосферы.

3) Исследование эволюции ММЗ волны при уменьшении скорости звука свидетельствует о замедлении трансформации возмущения плотности в две ММЗ волны. При этом быстрее формируется ударный фронт ММЗ импульса и на его заднем фронте появляются осцилляции.

4) Проанализирована зависимость возмущения плотности в возникающих ММЗ волнах от отношения V_a/V_s и от степени нелинейности исходного возмущения. Полученные численные результаты подтвердили соответствующие аналитические оценки.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 00-05-64689) и INTAS—CNES (проект № 97-1450).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гульельми А. В. МГД-волны в околоземной плазме. — М.: Наука, 1979. — 139 с.
2. Пудовкин М. И., Распопов О. М., Клейменова Н. Г. Возмущения электромагнитного поля Земли. Ч. II. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1976. — 270 с.
3. Ваньян Л. Л., Абрамов Л. А., Альперович Л. С. и др. Геомагнитные пульсации. — М.: Наука, 1973. — 93 с.
4. Беллюстин Н. С., Докучаев В. П. // Изв. вуз. Радиофизика. 1973. Т. 16, № 10. С. 1467.
5. Cohen R. H., Kulsrud R. M. // Phys. Fluids. 1974. V. 17, № 12. P. 2215.
6. Бархатов Н. А., Беллюстин Н. С. // Изв. вуз. Радиофизика. 1996. Т. 34, № 5. С. 579.

7. Морозов А. И., Савельев В. В. // Физика плазмы. 1996. Т. 22. С. 318.
8. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. — М.: Наука, 1967. 684 с.
9. Tu С.-Y., Marsch E., Rosenbauer H. // J. Res. Lett. 1990. V. 17. P. 283.
10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. — М.: Наука, 1986. — 733 с.
11. Гульельми А. В., Похотелов О. А., Фейгин Ф. З. // Изв. вуз. Радиофизика. 1996. Т. 34, № 4. С. 464.

Нижегородский государственный
педагогический университет,
г. Н. Новгород, Россия

Поступила в редакцию
20 августа 1999 г.

TRANSFORMATION OF MAGNETOSPHERIC ALFVEN DISTURBANCES INTO SLOW MAGNETOSONIC ONES DUE TO REFLECTION FROM MAGNETICALLY CONJUGATE IONOSPHERIC REGIONS

N. A. Barkhatov, N. S. Belliustin, A. E. Levitin, and S. Yu. Sakharov

In this paper, we study both numerically and analytically the magnetohydrodynamic phenomena using a one-dimensional model of the magnetosphere between magnetically conjugate reflecting surfaces. The features of the nonlinear transformation of an Alfvén wave propagating along the magnetic field B_0 into slow magnetosonic wave are considered. We analyze in detail the effects arising due to reflection of the magnetospheric nonlinear Alfvén wave from the magnetically conjugate ionospheric regions. In the case of a strong Alfvén wave and low temperature, the effect is reduced to sweeping of the plasma from the areas near the reflecting boundaries.

The numerical results demonstrating the dynamics of appearance of the slow magnetic sound and the sweeping of the plasma due to reflection of a powerful Alfvén wave from the ionosphere show qualitative agreement with the analytical estimates.

In a "cold" plasma, the sweeping effect becomes significant and should be analyzed numerically even if the initial Alfvén wave is linear. In this respect, the amplitude of the density disturbance is shown to be strongly dependent on the ratio of the Alfvén velocity to the speed of sound.

УДК 533.951

О МЕТОДЕ ВИРТУАЛЬНЫХ ИСТОЧНИКОВ В ВОЛНОВОДЕ ЗЕМЛЯ–ИОНОСФЕРА С НЕОДНОРОДНОСТЬЮ ВЫСОТЫ ВЕРХНЕЙ СТЕНКИ

Л. П. Коган

Рассматривается влияние плавного в масштабе длины волны искривления верхней стенки плоского волновода Земля—ионосфера на распространение электромагнитных волн, излучаемых дипольным источником. В силу одномерности возмущения высоты удаётся построить размещённую в безграничной среде систему виртуальных источников, создаваемое которыми общее поле равно полю дипольного источника в исходном волноводе. Найден эффективный неоднородный коэффициент преломления такой среды. Произведена оценка числа отражений, при котором возможно использование принципа Кирхгофа.

Одним из эффективных методов оценки полей заданных излучателей в волноводе Земля—ионосфера является метод виртуальных источников, в соответствии с которым плоский волноводный канал с размещённым внутри вертикальным электрическим диполем (ВЭД) заменяется бесконечной системой одинаковых ВЭД, располагающихся в свободном пространстве через равные интервалы на одной и той же вертикальной прямой. При этом поле, создаваемое в точке наблюдения каждым излучателем с порядковым номером L , совпадает с L -кратно отражённым от стенок волновода полем "истинного" источника. На основе такого подхода в работах [1–3] для возбуждённого поля найдено решение в виде лучевого представления или разложения по собственным модам. Наряду с этим в работе [4] показано, что в СДВ диапазоне при протяжённости трассы вплоть до приблизительно 10^3 км в рамках лучевого метода достаточно учитывать лишь несколько первых отражений от границ волновода, что существенно упрощает расчёт электромагнитных полей в указанном случае. Остаётся неисследованным вопрос о правомерности использования метода виртуальных источников в случае криволинейных стенок волновода, когда не существует симметрии относительно плоскостей верхней и нижней границ, позволяющей при отсутствии возмущений высоты обеспечить последовательное выполнение краевых условий путём размещения дополнительных сторонних токов в области вне волноводного канала. Для

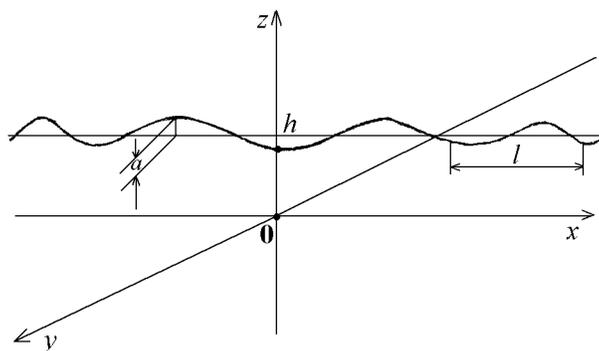


Рис. 1

оценок влияния такого искривления, а также для построения системы виртуальных излучателей необходимо вначале преобразовать волновод, выпрямив его стенки, к плоскому волноводу. После этого появляется возможность определения неоднородного коэффициента преломления эффективной среды, в которой можно разместить указанные излучатели.

Рассмотрим волновод Земля—ионосфера с металлизированными стенками, изображённый на рис. 1. Пусть нижняя стенка является гладкой и в декартовой системе координат задаётся как $z = 0$, а высота верхней границы определяется соотношением

$z = h + f(x)$. Полагаем, что в начале системы координат $\mathbf{R}_0 = (0, 0, 0)$ расположен точечный ВЭД с дипольным моментом p_0 , поле которого принимается в точке наблюдения $\mathbf{R} = (x, 0, 0)$. Также будем считать, что выполняются соотношения $a \lesssim \lambda \ll h \lesssim l$, где λ — длина волны излучения источника в свободном пространстве, a и l — соответственно амплитуда и характерный горизонтальный масштаб изменения функции f , описывающей отклонение высоты волновода от постоянного значения h .

В силу принятого условия о плавности искривления верхней границы в масштабе длины волны можем пренебречь деполяризацией (см. [3]). Тогда при расположении точки наблюдения вблизи плоскости $y = 0$, при $y/x \ll 1$, можем считать, что магнитное поле, как и в невозмущённом волноводе, представлено единственной горизонтальной компонентой H_y (зная H_y , можно легко определить и другие составляющие электромагнитного поля). Данная компонента удовлетворяет системе уравнений

$$\Delta H_y + k_0^2 H_y = P_0 \delta(y),$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial \nu} = 0 \Big|_{z=h+f(x)}, \quad \frac{\partial H_y}{\partial z} = 0 \Big|_{z=0}.$$

Здесь $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$, $P_0 = ip_0 \delta'(x) \delta(z)/\omega$, а $\delta(x)$ — дельта-функция, $k_0 = 2\pi/\lambda$, ω — частота излучения, $\partial H_y/\partial \nu$ — производная по направлению нормали к верхней стенке.

Для упрощения задачи применим конформное отображение $\xi = \xi(\tilde{u})$, где $\tilde{u} = x + iz$, $\xi = x_1 + iz_1$, которое переводит область $0 \leq z \leq h + f(x)$ комплексной плоскости \tilde{u} на полосу $0 \leq z_1 \leq h$ комплексной плоскости ξ .

Теперь стенка становится регулярной с постоянной высотой $z_1 = h = \text{const}$, а граничная задача преобразуется следующим образом:

$$\Delta_t \tilde{H}_y + n^2(x_1, z_1) \frac{\partial^2 \tilde{H}_y}{\partial y^2} + k_0^2 n^2(x_1, z_1) \tilde{H}_y = P_0 \delta(y) n^2(x_1, z_1),$$

$$\frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial z_1} = 0 \Big|_{z_1=h}, \quad \frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial z_1} = 0 \Big|_{z_1=0}.$$

В данном случае $\tilde{H}_y = H_y(x(x_1, z_1), y, z(x_1, z_1))$, $n = |d\tilde{u}/d\xi|$, $\Delta_t = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial z_1^2$.

Используем для источника фурье-представление: $P_0 \delta(y) = (2\pi)^{-1/2} P_0 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-imy} dm$. Тогда для фурье-образа $\tilde{H}_{y,m}(x, z) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{H}_y e^{imy} dy$ выполняется система уравнений

$$\Delta_t \tilde{H}_{y,m} + k_m^2 n^2(x_1, z_1) \tilde{H}_{y,m} = P_1 \delta'(x) \delta(z), \quad (1)$$

$$\frac{\partial \tilde{H}_{y,m}}{\partial z_1} = 0 \Big|_{z_1=h}, \quad \frac{\partial \tilde{H}_{y,m}}{\partial z_1} = 0 \Big|_{z_1=0}. \quad (2)$$

Здесь $k_m = \sqrt{k_0^2 - m^2}$ — модуль компоненты волнового вектора, перпендикулярной оси y , $\mathbf{k} = u\mathbf{x}^0 + v\mathbf{z}^0 + m\mathbf{y}^0$, $P_1 = P_0 n^2(x_1, z_1)/\sqrt{2\pi}$; \mathbf{x}^0 , \mathbf{y}^0 , \mathbf{z}^0 — единичные векторы, направленные вдоль соответствующих осей.

Таким образом, получаем задачу о распространении электромагнитных волн в волноводе высоты h с идеальными границами и неоднородным заполнением, характеризуемым коэффициентом преломления $n(x_1, z_1)$, плавно изменяющимся в масштабе длины волны. На высоте верхней стенки $z_1 = h$ для искомого поля $\tilde{H}_{y,m}$ должно выполняться граничное условие Неймана (2). Но очевидно, что при поиске решения в приближении однократного отражения от верхней стенки её воздействие можно заменить расположенным в точке $(0, 0, 2h)$ источником

в виде ВЭД с тем же дипольным моментом p_0 , если среда в области $h \leq z_1 \leq 2h$ обладает “зеркальным” коэффициентом преломления $n(x_1, 2h - z_1)$, см. рис. 2. При этом производная от $H_{y,m}$ по нормали к плоскости границы при $z_1 = h$ равна нулю в силу симметрии задачи. Вследствие этого выполняется условие (2). Аналогичным образом последовательно повторяя рассуждения, проведённые в работе [2] для волновода с однородным заполнением (поочерёдно удовлетворяя граничным условиям на верхней и нижней стенках), нетрудно прийти к выводу, что и при многократном отражении от заданных идеальных границ волновода поле в точке наблюдения будет совпадать с полем совокупности точечных источников, размещённых в безграничной неоднородной среде на высотах $z = 0, \pm 2h, \pm 4h, \dots$. На рис. 2 показано поведение коэффициента преломления $\mathcal{N}(x_1, z_1)$ такой безграничной среды. Функция $\mathcal{N}(x_1, z_1) = n(x_1, z_1)$ при $0 \leq z_1 \leq h$, в то же время $\mathcal{N}(x_1, z_1) = n(x_1, 2h - z_1)$ при $h \leq z_1 \leq 2h$, т. е. \mathcal{N} в рассматриваемом диапазоне высот является зеркально-симметричной функцией относительно плоскости $z_1 = h$. Кроме того, коэффициент преломления $\mathcal{N}(x_1, z_1)$ периодичен по вертикальной переменной z_1 с периодом $2h$: $\mathcal{N}(x_1, z_1 + 2Mh) = \mathcal{N}(x_1, z_1)$, где $M = 0, 1, \dots$. Отметим, что сама функция \mathcal{N} непрерывно зависит от координат x_1 и z_1 , в то время как её производная $\partial \mathcal{N} / \partial z_1$ претерпевает разрыв первого рода при $z_1 = Mh$. На линии каждого такого скачка производной происходит частичное отражение волны, падающей от любого из виртуальных источников.

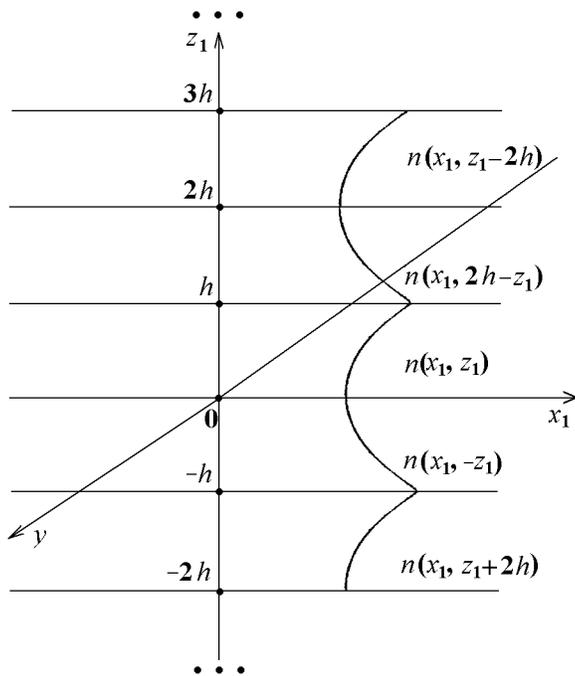


Рис. 2

h одной плоской волны вида $\tilde{\mathcal{H}}_y^i \sim e^{-iux(x_1, z_1)} \times e^{-ivz(x_1, z_1)}$. В цилиндрической системе координат $u = k_m \sin \theta$, $v = k_m \cos \theta$, где θ — угол падения. Заметим, что и в исходной, и в преобразованной системах координат угол θ падения волны на данный локальный участок границы один и тот же в силу свойств конформного преобразования.

На участке границы $z_1 = h$ вблизи произвольной точки $\mathcal{M}(x^*(x_1, h), z^*(x_1, h))$ для падающей $\tilde{\mathcal{H}}_y^i$, отражённой $\tilde{\mathcal{H}}_y^r$ и прошедшей $\tilde{\mathcal{H}}_y^t$ волн должны выполняться следующие граничные условия:

$$\tilde{\mathcal{H}}_y^i + \tilde{\mathcal{H}}_y^r = \tilde{\mathcal{H}}_y^t, \quad \left. \frac{\partial}{\partial z_1} (\tilde{\mathcal{H}}_y^i + \tilde{\mathcal{H}}_y^r) \right|_{z_1=h-0} = \left. \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}_y^t}{\partial z_1} \right|_{z_1=h+0}. \quad (4)$$

В качестве иллюстрации рассмотрим однократное отражение поля указанного ВЭД от такого рода “слабой границы” (см. [5–7]). Учёт только одного отражения правомерен при исследовании поля на расстоянии не более нескольких высот волновода от источника (см. [4]).

Поле цилиндрической волны $\tilde{H}_{y,m,1}^i$ (где третий индекс внизу означает, что соответствующая компонента поля возникла вследствие излучения нитевидного источника, проходящего через точку $(0, 0)$ плоскости $y = 0$), падающей снизу на плоскость $z_1 = h$ скачка производной коэффициента преломления, запишем в виде разложения (в исходных координатах (x, z)) по совокупности плоских волн:

$$\tilde{H}_{y,m,1}^i = \frac{P_1}{2(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{iv} \exp(-iux(x_1, z_1) - ivz(x_1, z_1)) du, \quad (3)$$

где $v = \sqrt{k_m^2 - u^2}$.

Вначале рассмотрим падение на плоскость $z_1 =$

Будем считать угол θ близким к нулю, так что выполняется условие локальности

$$\cos \theta > \left(\frac{\pi}{k_0 R_c} \right)^{1/3} \gtrsim \left(\frac{2\pi^2 \lambda a}{l^2} \right)^{1/3}, \quad (5)$$

при котором возможно применение отражательных формул (см. [5]). Величина R_c в формуле (5) — радиус кривизны поверхности в данной точке верхней стенки исходного волновода. Следовательно, величина θ существенно меньше $\pi/2$. Поля рассматриваемых волн в области высот $0 \leq z_1 \leq h$ запишем, с учётом принятых ограничений, в приближении геометрической оптики следующим образом (см. также работу [6]):

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}}_{y,m,1}^i(x(x_1, z_1), z(x_1, z_1)) &= \exp(-i(ux + vz)), \\ \tilde{\mathcal{H}}_{y,m,1}^r(x(x_1, z_1), z(x_1, z_1)) &= \mathcal{A}\rho \sqrt{\tilde{n}^*/\tilde{n}} \exp(-iu_1(x - x^*) - iv_1(z - z^*)), \\ \tilde{\mathcal{H}}_{y,m,1}^t(x(x_1, z_1), z(x_1, z_1)) &= \mathcal{A}\tau \sqrt{\tilde{n}_h^*/\tilde{n}_h} \exp(-iu_1(x - x^*) + iv_1(z - z^*)). \end{aligned}$$

Здесь ρ и τ — соответственно коэффициенты отражения и прохождения волны, $\mathcal{A} = e^{-i(u x^* + v z^*)}$, $u_1 = k_m \sin(\theta + 2\phi^*)$, $v_1 = k_m \cos(\theta + 2\phi^*)$, $\phi^*(x_1, h)$ — угол поворота в точке линии границы при конформном преобразовании $\xi(\tilde{u})$, $x^* = x^*(x_1, h)$, $z^* = z^*(x_1, h)$, $\tilde{n} = n(x_1, z_1) \cos(\phi(x_1, z_1))$, $\phi(x_1, z_1)$ — угол поворота в данной точке плоскости $\tilde{u} = x + iz$, $\tilde{n}^* = \tilde{n}_h^* = n(x_1, h) \cos(\phi(x_1, h))$, $\tilde{n}_h = n(x_1, 2h - z_1) \cos(\phi(x_1, 2h - z_1))$. Величина $n_h = n(x_1, 2h - z_1)$ есть “зеркально отражённый” относительно плоскости $z_1 = h$ эффективный коэффициент преломления в области высот $h \leq z_1 \leq 2h$.

В данном случае исходим, как обычно, из равенства углов падения и отражения, но в отличие от метода Кирхгофа здесь не предполагаем равенство амплитуд падающей и отражённой волн на верхней стенке $z_1 = h$ рассматриваемого волновода с идеальными границами.

Подставляя вышеприведённые выражения для y -компоненты магнитных полей в (4), находим неизвестные коэффициенты ρ и τ :

$$\rho = \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \gamma}, \quad \tau = \frac{\beta - \alpha}{\beta - \gamma}, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha &= \left(u \frac{\partial x(x_1, z_1)}{\partial z_1} + v \frac{\partial z(x_1, z_1)}{\partial z_1} \right) \Big|_{z_1=h-0} = k_m n \cos(\theta + \phi^*), \\ \beta &= \left(u_1 \frac{\partial x(x_1, z_1)}{\partial z_1} - v_1 \frac{\partial z(x_1, z_1)}{\partial z_1} - \frac{i\tilde{n}'(z_1)}{2\tilde{n}} \right) \Big|_{z_1=h-0} = -k_m n \cos(\theta + \phi^*) - \frac{i\tilde{n}'(z_1)}{2\tilde{n}} \Big|_{z_1=h-0}, \\ \gamma &= \left(u \frac{\partial x(x_1, z_1)}{\partial z_1} + v \frac{\partial z(x_1, z_1)}{\partial z_1} - \frac{i\tilde{n}'_h(z_1)}{2\tilde{n}_h} \right) \Big|_{z_1=h-0} = k_m n \cos(\theta + \phi^*) + \frac{i\tilde{n}'(z_1)}{2\tilde{n}} \Big|_{z_1=h-0}. \end{aligned}$$

В результате подстановки найденных величин α , β , γ в выражение (6) можем записать

$$\rho = \frac{-i \ln'(\tilde{n}(x_1, z_1))}{4k_m n(x_1, h) \cos(\theta + \phi^*)} \Big|_{z_1=h-0}, \quad \tau = 1 + \rho. \quad (7)$$

В данном случае $\ln'(\tilde{n}(z_1)) = \partial \ln(\tilde{n}(x_1, z_1)) / \partial z_1$. При получении формулы (7) учитывалось, что $\partial x(x_1, z_1) / \partial z_1 = -n(x_1, z_1) \sin(\phi(x_1, z_1))$, $\partial z(x_1, z_1) / \partial z_1 = n(x_1, z_1) \cos(\phi(x_1, z_1))$.

Для того, чтобы выразить компоненты электромагнитного поля в волноводе через исходные параметры задачи, вычислим указанные в формуле (7) эффективный коэффициент преломления $n(x_1, z_1) = |\tilde{d}\tilde{u}/d\xi|$ и его производную по переменной z_1 как функции от параметров искривления границы. Зададим возмущение $f(x)$ верхней стенки в виде

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} T_c(\alpha) \cos(\alpha x) d\alpha + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} T_s(\alpha) \sin(\alpha x) d\alpha,$$

где T_c и T_s — соответственно косинус- и синус-трансформанты Фурье:

$$T_c = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x) \cos(\alpha x) dx, \quad T_s = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x) \sin(\alpha x) dx.$$

В дальнейшем будем полагать функцию $f(x)$ квазипериодической. Определим существенный интервал интегрирования по α в виде $\alpha_{\min} \leq \alpha \leq \alpha_{\max}$. Здесь α_{\min} и α_{\max} — соответственно нижняя и верхняя границы интервала, интегрирование по которому даёт основной вклад при вычислении функции $f(x)$, задающей искривление границы:

$$f(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} T_c(\alpha) \cos(\alpha x) d\alpha + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} T_s(\alpha) \sin(\alpha x) d\alpha.$$

Это выражение является приближённым, поскольку содержит интегрирование только по существенному интервалу. Из условия квазипериодичности $f(x)$ следует, что выполняются неравенства $\alpha_{\max} - \alpha_{\min} = \delta \ll \alpha_{\min, \max} \ll k_0$. Введём величину $M = (\alpha_{\max} + \alpha_{\min})/2$ (суть координату середины указанного интервала), которую при принятых ограничениях можем считать эффективным пространственным волновым числом искривления границы: $M \sim 2\pi/l$. Также будем полагать, что выполняется соотношение $\exp(-\alpha_{\min}h) \ll 1$. Это означает, что сверху характерный горизонтальный масштаб l ограничен неравенством $l \lesssim 2\pi h$, которое выполняется в большинстве реально встречающихся случаев. Тогда обратное конформное отображение $\tilde{u}(\xi)$ (с учётом малости углов наклона) можем приближённо записать в форме

$$\tilde{u} = \xi + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} T_c(\alpha) e^{-i\alpha(\xi - ih)} d\alpha - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} T_s(\alpha) e^{-i\alpha(\xi - ih)} d\alpha.$$

Для упрощения задачи приближённо считаем, что $f(x) \approx f(x_1)$. Из теории вариационных принципов конформных отображений следует, что данное предположение геометрически эквивалентно отбрасыванию возмущений высоты волновода порядка $a^2\alpha_{\max} \ll a$.

Выражения $z(x_1, z_1)$ и $x(x_1, z_1)$ для преобразований координат можем выразить в виде

$$z = z_1 + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} T_c(\alpha) \cos(\alpha x_1) e^{\alpha(z_1 - h)} d\alpha + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} T_s(\alpha) \sin(\alpha x_1) e^{\alpha(z_1 - h)} d\alpha, \quad (8)$$

$$x = x_1 + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} T_c(\alpha) \sin(\alpha x_1) e^{\alpha(z_1 - h)} d\alpha - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} T_s(\alpha) \cos(\alpha x_1) e^{\alpha(z_1 - h)} d\alpha. \quad (9)$$

Согласно [8] величина $n(x_1, z_1)$ определяется как $n = \sqrt{(\partial z/\partial x_1)^2 + (\partial x/\partial x_1)^2}$. Поэтому, дифференцируя формулы (8) и (9) по переменной x_1 , можно записать (с учётом введённых ограничений),

что $n(x_1, h) \sim \sqrt{1 + 2Mf(x_1)} \sim 1$. Также на основании работы [8] можно показать, что $\partial n(x_1, z_1)/\partial z_1|_{z_1=h} \sim -f''(x_1)$.

Теперь, отбрасывая в (6) слагаемые высшего по сравнению с a/l порядка малости, получаем

$$\rho \sim \frac{if''(x)}{4k_m \cos(\theta + \phi^*)}, \quad \tau = 1 + \rho. \quad (10)$$

Повторяя проведённые рассуждения для верхней среды ($h \leq z_1 \leq 2h$), приходим к выводу о том, что для компонент $\tilde{\mathcal{H}}_{y,m,2}^i$, $\tilde{\mathcal{H}}_{y,m,2}^r$ и $\tilde{\mathcal{H}}_{y,m,2}^t$ (третий нижний индекс здесь означает, что указанные поля возбуждаются виртуальным источником, расположенным в точке $(0, 2h)$ комплексной плоскости ξ) при $z_1 = h$ также выполняются соотношения наподобие (4):

$$\tilde{\mathcal{H}}_{y,m,2}^i + \tilde{\mathcal{H}}_{y,m,2}^r = \tilde{\mathcal{H}}_{y,m,2}^t, \quad \left. \frac{\partial}{\partial z_1} (\tilde{\mathcal{H}}_{y,m,2}^i + \tilde{\mathcal{H}}_{y,m,2}^r) \right|_{z_1=h+0} = \left. \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}_{y,m,2}^t}{\partial z_1} \right|_{z_1=h-0}.$$

Отметим, что математические выражения для коэффициентов отражения и прохождения волн те же самые, что и для нижнего слоя $0 \leq z_1 \leq h$ (при замене $n(x_1, z_1)$ на $n(x_1, 2h - z_1)$, а также точки дифференцирования по переменной z_1 : $z_1 = h - 0 \rightarrow z_1 = h + 0$). Поэтому при однократном отражении полное магнитное поле на уровне верхней стенки будет равно сумме полей $\tilde{\mathcal{H}}_{y,m,1}^i$, $\tilde{\mathcal{H}}_{y,m,1}^r$ и $\tilde{\mathcal{H}}_{y,m,2}^t$. Таким образом, суммарное поле $\tilde{\mathcal{H}}_{y,m}^s$, возникающее в приближении однократного отражения плоской волны от данного локального участка искривлённой верхней стенки волновода, будет представлять собой суперпозицию двух волн. Первая из них является волной, излучённой ВЭД в точке $(0, 0)$ на комплексной плоскости ξ и затем отразившейся от скачка производной коэффициента преломления в плоскости $z_1 = h$, а вторая — волной, излучённой виртуальным ВЭД в точке $(0, 2h)$ и прошедшей сквозь указанную плоскость “слабой границы”. При этом $\tilde{\mathcal{H}}_{y,m}^s = \tilde{\mathcal{H}}_{y,m,1}^r + \tilde{\mathcal{H}}_{y,m,2}^t$:

$$\tilde{\mathcal{H}}_{y,m}^s(x(x_1, z_1), z(x_1, z_1)) = (\rho(x_1, h) + \tau(x_1, h)) \exp(-iu_1(x - x^*) + iv_1(z - z^*)) \sqrt{\tilde{n}^*/\tilde{n}(x_1, z_1)}. \quad (11)$$

Здесь параметры u_1 , v_1 , ρ и τ зависят от направленной вдоль оси y компоненты $m\mathbf{y}^0$ волнового вектора $\mathbf{k} = u\mathbf{x}^0 + v\mathbf{z}^0 + m\mathbf{y}^0$.

Если $m = 0$, то траектория соответствующего отражённого луча в исходной плоскости переменных (x, z) будет проходить вдоль прямой $z = (x^* - x) \operatorname{ctg}(\theta + 2\phi^*) + z^*$. Напомним, что $z^* = h + f(x^*)$, $\phi^* = \operatorname{arctg}(f'(x))|_{x=x^*}$.

Далее, интегрируя вначале по переменной u , а затем по поперечному волновому числу m , получаем

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{y,m}^s(x(x_1, z_1), z(x_1, z_1)) &= \frac{P_1}{2(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{iv} \exp(-iu_1(x - x^*) + iv_1(z - z^*)) \times \\ &\quad \times (\rho(x_1, h) + \tau(x_1, h)) \sqrt{\tilde{n}^*/\tilde{n}} du, \end{aligned} \quad (12)$$

откуда

$$\begin{aligned} \tilde{H}_y^s(x(x_1, z_1), y, z(x_1, z_1)) &= \frac{P_1}{2(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{H}_{y,m}^s e^{-imy} dm = \frac{P_1}{2(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathcal{A}}{iv} \times \\ &\quad \times \exp(-iu_1(x - x^*) + iv_1(z - z^*)) (\rho(x_1, h) + \tau(x_1, h)) \sqrt{\tilde{n}^*/\tilde{n}} e^{-imy} dm du. \end{aligned}$$

Найденный результат можно записать в более простой форме, если в исходных координатах (x, y, z) приближённо заменить падающую цилиндрическую волну вблизи данного локального участка границы плоской волной:

$$H_{y,m,1}^i = H_0^{(2)}(k_m R(x, z)) \sim \frac{P_1}{4\pi} \sin \theta \sqrt{\frac{2}{\pi k_m \sqrt{x^2 + h^2}}} e^{i\pi/4 - i(ux + vz)},$$

где $u = k_m \sin \theta$, $v = k_m \cos \theta$, $\theta = \arctg(x/h)$, $H_0^{(2)}(x)$ — функция Ханкеля 2-го рода нулевого порядка. Это возможно сделать с учётом того, что в существенной для интегрирования по переменной m области можно полагать $k_m \sim k_0$, благодаря чему аргумент функции $H_0^{(2)}(k_m R(x, z))$ является большой величиной.

Тогда по аналогии с предыдущими вычислениями придём к выводу, что

$$\tilde{H}_{y,m}^s = \frac{P_1}{4\pi} \sin \theta \sqrt{\frac{2}{\pi k_m R(x, 2h)}} e^{i\pi/4 - ik_m R(x, 2h)} (\rho + \tau) \sqrt{\frac{\tilde{n}^*}{\tilde{n}}} \exp(-iu_1(x - x^*) + iv_1(z - z^*)).$$

После обратного фурье-преобразования получим следующее выражение для y -компоненты магнитного поля в точке наблюдения:

$$\begin{aligned} \tilde{H}_y^s &= \frac{P_1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{H}_{y,m}^s e^{-imy} dm = \frac{P_1}{4\pi} \frac{e^{ik_0 R(x, 2h)}}{R(x, 2h)} (\rho_0 + \tau_0) \sqrt{\frac{\tilde{n}^*}{\tilde{n}}} \times \\ &\times \exp(-ik_0 \sin(\theta + \phi^*)(x - x^*) - ik_0 \cos(\theta + \phi^*)(z - z^*)) \sin \theta. \end{aligned} \quad (13)$$

В формуле (13) величины $\rho_0(x(x_1, z_1), z(x_1, h))$ и $\tau_0(x(x_1, h), z(x_1, h))$ могут быть найдены с помощью соотношения (7), при $m = 0$.

Итак, можно сделать следующие выводы.

Искривление идеальной границы волновода приводит к отклонению коэффициента отражения от единицы. При введённых ограничениях, как следует из полученных выражений (10) и (13), такое отклонение по модулю есть величина порядка $f''(x)/(2k_0) \lesssim \lambda\pi/l^2$. Данная поправка является чисто мнимой величиной и учитывает конечную кривизну поверхности границы на локальном участке отражения. Очевидно, что в случае однократного отражения при $a \ll l$, $M \ll k_0$ и не слишком больших углах падения θ правомерно считать $\rho \ll 1$. Поэтому эффективный коэффициент отражения $\rho_{\text{eff}} \sim 1$, что равносильно условию применимости приближения Кирхгофа. Вместе с тем, при учёте N отражений для использования этого приближения необходимо налагать ограничение

$$N \lambda\pi/l^2 \ll 1.$$

Кроме того, следует отметить, что эффективный коэффициент отражения ρ_{eff} равен единице там, где $f''(x) = 0$, т. е. в тех точках, где радиус кривизны искривлённой стенки равен бесконечности.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ (код проекта № 97-0-8.2-77).

ЛИТЕРАТУРА

1. Альперт Я. Л., Гинзбург В. Л., Фейнберг Е. Л. Распространение радиоволн. — М.: ГИТТЛ, 1953. — 884 с.
2. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. — М.: Изд-во АН СССР, 1957.
3. Альперт Я. Л. О распространении электромагнитных волн низкой частоты над земной поверхностью. — М.: Изд-во АН СССР, 1955. — 112 с.

4. Альперт Я. Л., Забавина И. Н., Капустина О. В., Флигель Д. С. // Геомагнетизм и аэрономия. 1972. Т. 12, № 6. С. 1020.
5. Кравцов Ю. Л., Орлов Ю. И. Геометрическая оптика неоднородных сред. — М.: Наука, 1980. — 304 с.
6. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. — М.: Физматлит., 1960. — 552 с.
7. Заборонкова Т. М., Коган Л. П., Тамойкин В. В. // Труды XIX Всероссийской научн. конф. "Распространение радиоволн". Казань: Изд.-во Хэтер, 1999. С. 385.
8. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1973. 736 с.

Научно-исследовательский
радиофизический институт,
г. Н. Новгород, Россия

Поступила в редакцию
20 сентября 1999 г.

THE METHOD OF VIRTUAL SOURCES IN THE EARTH–IONOSPHERE WAVEGUIDE WITH INHOMOGENEOUS HEIGHT OF THE UPPER BOUNDARY

L. P. Kogan

We consider the influence of a gradual distortion of the upper boundary of the Earth–ionosphere waveguide on the propagation of electromagnetic waves radiated by a dipole source. Since the height disturbance is one-dimensional, we were able to find the system of virtual sources in boundless medium, which excite the total field equal to the field of the dipole source in the considered waveguide. We estimate the number of reflections at which the Kirhhoff principle can be used.

УДК 525.73;520.16;551.521.32:629.78

ОПРЕДЕЛЕНИЕ АТМОСФЕРНОЙ РЕФРАКЦИИ ПРИ ИЗМЕРЕНИЯХ С РАЗЛИЧНЫМИ ТРАССАМИ ЛУЧА

К. П. Гайкович, М. Б. Черняева

Получены интегральные соотношения, связывающие между собой рефракцию, измеренную с земной поверхности при положительных углах места (астрономическая рефракция), рефракцию, измеренную со спутника при отрицательных углах места на просвет (лимбовая рефракция), а также рефракцию, измеренную методом погружения, когда источник или приёмник излучения изменяет своё положение в атмосфере.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время большое внимание уделяется возможностям дистанционного зондирования атмосферы — восстановлению высотного профиля показателя преломления и других параметров атмосферы по измеренным характеристикам излучения космических источников. Разработаны методы восстановления профиля показателя преломления в различных геометрических схемах приёма излучения: по лимбовым измерениям рефракции со спутников [1–22], по назем-

ным измерениям астрономической рефракции [23–30] и по измерениям рефракции методом погружения [31, 32]. Некоторые из перечисленных задач являются некорректными, и для их решения необходимо привлечение дополнительной априорной информации о виде решения. Интерес представляет сравнение данных, полученных в различных схемах измерений, поскольку современные навигационные системы позволяют проводить одновременные измерения на самых различных трассах. При этом каждая из схем измерений обладает своими преимуществами и недостатками. Так, при лимбовых измерениях, обладающих хорошей разрешающей способностью по высоте (геоцентрическому расстоянию), рефракция формируется на масштабе порядка 1 000 км в горизонтальном направлении. Наземные измерения имеют плохое разрешение по высоте, зато лучше привязаны к месту измерений. Измерения методом погружения могут дать хорошую разрешающую способность как в вертикальном, так и в горизонтальном направлениях. Каждый из этих методов измерений связан со сво-

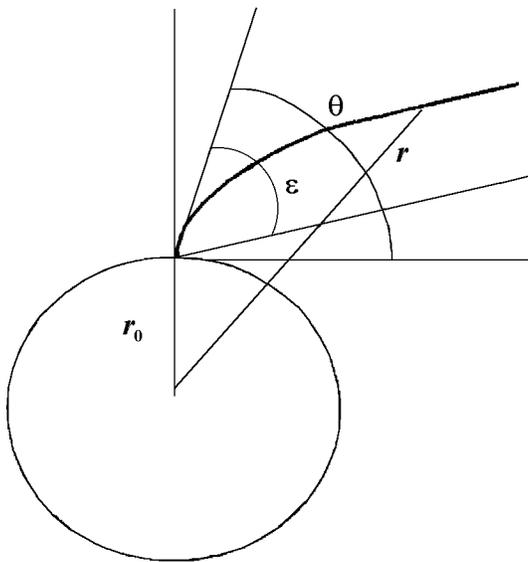


Рис. 1

ими специфическими погрешностями. В частности, различается вклад в измерения рефракции горизонтальных неоднородностей показателя преломления, который должен рассматриваться как ошибка измерений при восстановлении высотных профилей в рамках сферически симметричной модели атмосферы.

Для правильного сравнения результатов рефрактометрических методов необходимо знать, с какой точностью согласуются измерения рефракции для различных трасс. Целью данной работы является-

ся вывод соотношений, связывающих значения рефракции в различных схемах измерения и позволяющих пересчитывать их друг в друга, учитывая выявляемые при этом расхождения при использовании рефрактометрических данных для дистанционной диагностики высотных распределений атмосферных параметров.

1. ИСХОДНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Для достижения сформулированных выше целей используются исходные интегральные соотношения для угла рефракции, измеряемого на соответствующих трассах, и формулы их обращения относительно высотного профиля индекса рефракции, полученные при решении обратных задач.

1.1. Обратная задача астрономической рефракции

В качестве исходного используется интегральное уравнение типа Фредгольма 1-го рода для угла астрономической рефракции ε в зависимости от угла места прихода луча θ :

$$\varepsilon(p_\theta) = -10^{-6} p_\theta \int_{p_0}^{p_{\max}} \frac{dN(p)}{dp} \frac{dp}{\sqrt{p^2 - p_\theta^2}}, \quad (1)$$

где $p = n(r)r$, n — показатель преломления атмосферы, $r = r_0 + h$ — геоцентрическое расстояние, h — высота над земной поверхностью, $p_0 = n(r_0)r_0$, r_0 — радиус Земли, $p_\theta = n(r_0)r_0 \cos \theta$, $N = 10^6 (n - 1)$ — индекс рефракции. Профиль $N(p)$ пересчитывается в профиль $N(h)$ с помощью соотношения

$$h = p/[1 + 10^{-6}N(p)] - r_0.$$

Геометрическая схема измерений представлена на рис. 1.

Если же интеграл в исходном соотношении (1) для астрономической рефракции взять по частям, т. е. свести к виду

$$\tilde{\varepsilon}(p_\theta) = \int_{p_0}^{p_{\max}} N(p) \frac{pp_\theta dp}{(p^2 - p_\theta^2)^{3/2}}, \quad (2)$$

где

$$\tilde{\varepsilon}(p_\theta) = -10^6 \varepsilon(p_\theta) + p_\theta \frac{N(p_0)}{\sqrt{p_0^2 - p_\theta^2}}, \quad (3)$$

то выделенным оказывается приземное значение индекса рефракции $N_0 = N(p_0)$.

Формулу обращения для обратной задачи восстановления высотного профиля индекса рефракции из решения интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода (2) невозможно получить в явном виде. Известно, что такая задача является некорректной, и для её решения используются различные методы регуляризации [23–30].

1.2. Обратная задача рефракции для случая лимбовых измерений

При лимбовой схеме, когда измерения зависимости рефракции от геоцентрического расстояния точки перигея луча осуществляются на просвет, исходным для анализа является интегральное уравнение типа Абеля

$$\varepsilon_L(p_h) = 2 \cdot 10^{-6} p_h \int_{p_h}^{p_{\max}} \frac{dN(p)}{dp} \frac{dp}{\sqrt{p^2 - p_h^2}}, \quad (4)$$

где $p_h = n(r_h)r_h$, $r_h = r_0 + h$ — геоцентрическое расстояние точки перигея луча, h — высота точки перигея луча над земной поверхностью. Уравнение (4) является корректным в случае, когда зависимость рефракции от прицельного параметра p_h известна на всём интервале восстановления профиля индекса рефракции, и имеет точное решение для профиля индекса рефракции в виде обратного преобразования Абеля [1–22]:

$$N(p) = 10^6 \int_p^{p_{\max}} \varepsilon_L(p_h) \frac{dp_h}{\pi \sqrt{p_h^2 - p^2}}. \quad (5)$$

Геометрическая схема лимбовых измерений представлена на рис. 2.

1.3. Обратная задача рефракции при измерениях методом погружения

Обратная задача рефракции при измерениях методом погружения (когда приёмник или передатчик меняет своё положение в исследуемой атмосфере и измеряется зависимость рефракции от их высоты) сводится к восстановлению профиля индекса рефракции из уравнения [31–32]

$$\varepsilon(p_h) = -10^{-6} \int_{p_h}^{p_{\max}} \frac{dN(p)}{dp} \frac{p_0 \cos \theta dp}{\sqrt{p^2 - p_0^2 \cos^2 \theta(p_h)}}, \quad (6)$$

где $p > p_h$. Это уравнение имеет формулу обращения для случая постоянной величины угла места прихода луча θ [31]:

$$N(p) = -10^6 \int_p^{p_{\max}} \frac{d\varepsilon(p_h)}{dp_h} \frac{\sqrt{p_h^2 - p_0^2 \cos^2 \theta(p_h)}}{p_0 \cos \theta} dp_h. \quad (7)$$

Геометрическая схема измерений методом погружения представлена на рис. 3.

2. СВЯЗЬ УГЛОВ РЕФРАКЦИИ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ СХЕМАХ ИЗМЕРЕНИЯ

Рассмотрим задачу определения взаимосвязи астрономической рефракции и рефракции, полученной при лимбовых измерениях. Чтобы найти такую взаимосвязь, необходимо воспользоваться выражениями (1) и (5). Если подставить предварительно проинтегрированный по частям профиль индекса рефракции (5)

$$N(p) = -\frac{10^6}{\pi} \int_p^{p_{\max}} \frac{d\varepsilon(p_h)}{dp_h} \operatorname{arch} \frac{p_h}{p} dp_h$$

в уравнение для астрономической рефракции (1) и поменять порядок интегрирования, получается выражение

$$\varepsilon(p_\theta) = -\frac{p_\theta}{2\pi} \int_{p_0}^{p_{\max}} \frac{d\varepsilon(p_h)}{dp_h} p_h dp_h \int_{p_0}^{p_h} \frac{dp}{p \sqrt{p_h^2 - p^2} \sqrt{p^2 - p_\theta^2}},$$

в котором внутренний интеграл может быть вычислен в явном виде. В результате получается искомое соотношение, связывающее астрономическую рефракцию ε и рефракцию для случая лимбовых измерений ε_L :

$$\varepsilon(p_\theta) = -\frac{1}{2\pi} \int_{p_0}^{p_{\max}} \frac{d\varepsilon_L(p_h)}{dp_h} \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{(p_h^2 + p_\theta^2) p_0^2 - 2p_h^2 p_\theta^2}{p_0^2 (p_h^2 - p_\theta^2)} \right) dp_h. \quad (8)$$

После интегрирования по частям (8) можно переписать в виде

$$\varepsilon(p_\theta) = \frac{p_\theta}{\pi} \int_{p_0}^{p_{\max}} \varepsilon_L(p_h) \sqrt{\frac{p_0^2 - p_\theta^2}{p_h^2 - p_0^2} \frac{dp_h}{p_h^2 - p_\theta^2}}, \quad (9)$$

где $p_0 \leq p_h \leq p_{\max}$.

В частности, в предельном случае $\theta = 0$ выражение (9) сводится к естественному соотношению

$$\varepsilon(p_\theta | \theta = 0) = \varepsilon(p_0) = \frac{\varepsilon_L(p_0)}{2}. \quad (10)$$

В случае, когда вместо исходного уравнения (1) для астрономической рефракции рассматривается проинтегрированное по частям уравнение (2), в которое подставляется высотный профиль индекса рефракции (5), можно получить формулу связи астрономической и лимбовой рефракции, в которой выделено слагаемое, определяемое приземным значением индекса рефракции:

$$\varepsilon(p_\theta) = 10^{-6} \left(p_\theta \frac{N(p_0)}{\sqrt{p_0^2 - p_\theta^2}} - \frac{10^6 p_\theta}{\pi} \int_{p_0}^{p_{\max}} \varepsilon_L(p_h) \sqrt{\frac{p_h^2 - p_0^2}{p_0^2 - p_\theta^2} \frac{dp_h}{p_h^2 - p_\theta^2}} \right). \quad (11)$$

Из полученных уравнений (9) и (11) видно, что задача определения астрономической рефракции при наземных измерениях по данным лимбовой рефрактометрии является корректной, тогда как обратная задача определения лимбовой рефракции по данным угломестных измерений астрономической рефракции является некорректной и сводится к решению интегрального уравнения типа Фредгольма 1-го рода.

Рассмотрим далее задачу определения взаимосвязи рефракции при её измерении методом погружения и при лимбовых измерениях. Для того чтобы получить искомое уравнение, связывающее углы рефракции ε и ε_L , воспользуемся профилем индекса рефракции из формулы обращения (7), подставив который в уравнение (4) для лимбовых измерений, имеем

$$\varepsilon_L(p_h) = 2p_h \int_{p_h}^{p_{\max}} \frac{d\varepsilon(p)}{dp} \frac{\sqrt{p^2 - p_0^2 \cos^2 \theta}}{p_0 \cos \theta} \frac{dp}{\sqrt{p^2 - p_h^2}}. \quad (12)$$

Уравнение (12) позволяет определять лимбовую рефракцию по измерениям рефракции при погружении в атмосферу источника или приёмника излучения. Однако следует отметить, что эта задача является некорректной, поскольку содержит производную по экспериментальным данным, что требует применения методов регуляризации при обращении уравнения. Здесь существенно, что невозможно избавиться от производной в интеграле (12) путём интегрирования по частям. Обратная задача определения рефракции методом погружения по лимбовым измерениям рефракции сводится, как легко видеть, к уравнению (9), но записанному для некоторой произвольной высоты внутри атмосферы. Такая задача, как отмечалось выше, является корректной.

Аналогичные соотношения, в принципе, могут быть получены и для взаимосвязи других характеристик излучения и поглощения атмосферы, измеряемых в различных геометриях.

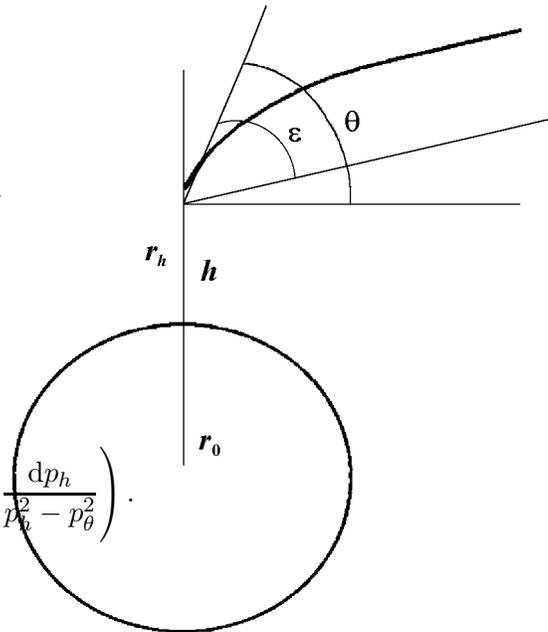


Рис. 3

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрены задачи определения взаимосвязи рефракции при различных геометрических схемах измерения: при наземных измерениях под положительными углами места (астрономическая рефракция), при измерениях под отрицательными углами места (лимбовая рефракция) и при измерениях рефракции методом погружения. Получены соответствующие уравнения, связывающие астрономическую и лимбовую рефракции, а также лимбовую рефракцию с рефракцией методом погружения. Установленные соотношения могут быть использованы для сравнения данных рефракции, полученных в различных схемах измерений, а также для их взаимного пересчёта. В дальнейшем аналогичные соотношения могут быть получены и для других параметров излучения и поглощения атмосферы.

Работа выполнена при поддержке Минобразования России, грант № 97-0-8.1-27.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kliore A. J., Gain D. L., Levy G. S., Eshelman V. R. // *Astronaut. and aeronaut.* 1965. № Т-7. P. 72.
2. Lions J. R., Sweetnam D. L., Eshleman V. R. et al. // *J. Geophys. Res.* 1987. V. 92, № 13. P. 14 987.
3. Fjeldbo G., Eshleman V. R. // *Radio Sci.* 1969. V. 4, № 10. P. 879.
4. Kliore A. J., Fjeldbo G., Seidel B. // *Radio Sci.* 1970. V. 5, № 2. P. 373.
5. Kliore A. J., Patel J. R., Seidel B. et al. // *J. Geophys. Res.* 1980. V. 85, № A-11. P. 5857.
6. Lindal G. F., Sweetnam D. L., Eshleman V. R. // *Astron. J.* 1985. V. 90, № 6. P. 1136.
7. Lindal G. F., Lions J. R., Sweetnam D. L. et al. // *J. Geophys. Res.* 1987. V. 92, № A-13. P. 14 987.
8. Lindal G. F., Lions J. R., Sweetnam D. L. et al. // *J. Geophys. Res.* 1990. V. 95, № 10. P. 1733.
9. Колосов М. А., Яковлев О. И., Круглов Ю. М. и др. // *Радиотехника и электроника.* 1972. Т. 17, № 12. С. 2483.
10. Гречко Г. М., Гурвич А. С., Романенко Ю. В., Савченко С. А., Соколовский С. В. // *ДАН СССР.* 1979. № 4. С. 828.
11. Соколовский С. В. // *Изв. АН СССР. Сер. ФАО.* 1981. Т. 17, № 6. С. 574.
12. Гурвич А. С., Кан В., Попов Л. И., Рюмин В. В., Савченко С. А. // *Изв. АН СССР. Сер. ФАО.* 1982. Т. 18, № 1. С. 3.
13. Гайкович К. П., Наумов А. П. // *Исследование Земли из космоса.* 1983. № 4. С. 25.
14. Гайкович К. П. // *Изв. АН СССР. Сер. ФАО.* 1984. Т. 20, № 8. С. 675.
15. Соколовский С. В. // *Изв. АН СССР. Сер. ФАО.* 1986. Т. 22, № 8. С. 890.
16. Волков А. А., Гречко Г. М., Гурвич А. С. и др. // *Изв. АН СССР. Сер. ФАО.* 1987. Т. 23, № 11. С. 1228.
17. Гречко Г. М., Гурвич А. С., Казбанов В. А. и др. // *Труды ГОИ.* 1989. Т. 71, вып. 205. — 121 с.
18. Бесчастнов С. П., Гречко Г. М., Гурвич А. С. и др. // *Изв. АН СССР. Сер. ФАО.* 1984. Т. 20, № 4. С. 231.
19. Горбунов М. Е. // *Изв. АН СССР. Сер. ФАО.* 1994. Т. 30, № 6. С. 776.
20. Гайкович К. П., Гурвич А. С., Наумов А. П. // *Изв. АН СССР. Сер. ФАО.* 1983. Т. 19, № 7. С. 675.
21. Бесчастнов С. П., Гречко Г. М., Гурвич А. С. и др. // *Изв. АН СССР. Сер. ФАО.* 1984. Т. 20, № 2. С. 231.
22. Загоруйко С. В., Кан В. // *Радиотехника и электроника.* 1984. Т. 29, № 5. С. 95.
23. Павельев А. Г. // *Радиотехника и электроника.* 1980. Т. 25, № 12. С. 2504.
24. Павельев А. Г. // *Радиотехника и электроника.* 1982. Т. 27, № 5. С. 1037.
25. Колосов М. А., Павельев А. Г. // *Радиотехника и электроника.* 1982. Т. 27, № 12. С. 2310.
26. Павельев А. Г. // *Журн. вычислит. матем. и матем. физики.* 1985. Т. 25, № 3. С. 392.
27. Гайкович К. П., Сумин М. И. // *Изв. АН СССР. Сер. ФАО.* 1986. Т. 22, № 9. С. 917.

28. Василенко Н. А., Гайкович К. П., Сумин М. И. // Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1986. Т. 22, № 10. С. 1026.
29. Василенко Н. А., Гайкович К. П., Сумин М. И. // ДАН СССР. 1986. Т. 290, № 6. С. 1332.
30. Василенко Н. А., Гайкович К. П., Черняева М. Б. // Изв. вуз. Радиофизика. 1997. Т. 40, № 6. С. 682.
31. Гайкович К. П., Хачева Г. Ю. // Оптика атмосферы и океана. 1997. Т. 10, № 1. С. 69.
32. Gaikovich K. P., Khacheva G. Yu. // Conf. Proc. of 7th: Int. Crimean Conf. "Microwave and Telecommunication Technology"(Crimea, Ukraine, Sevastopol, Sept. 15–18, 1997). Sevastopol: Weber Co., 1997. P. 681.

Институт физики
микроструктур РАН,
г. Н. Новгород, Россия

Поступила в редакцию
13 июля 1999 г.

MEASUREMENTS OF THE ATMOSPHERIC REFRACTION USING DIFFERENT RAY PATHS

K. P. Gaikovich and M. B. Chernyaeva

We obtain the integral expressions relating the values of the astronomical refraction measured from the ground at a positive elevation angle, the limb refraction measured from a satellite using occultation technique at negative elevation angles, and the refraction measured by the immersion method in which a source or a receiver change their locations in the atmosphere.

УДК 550.388.2

ВЛИЯНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ДИСПЕРСИИ НА ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ КОРОТКОВОЛНОВЫХ КОЛЕБАНИЙ С МЕЛКОМАСШТАБНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ ПЛАЗМЫ

В. В. Васьков

В статистическом приближении случайных фаз получены уравнения, описывающие взаимодействие коротковолновых колебаний с неоднородностями замагниченной плазмы с учётом тепловых эффектов пространственной дисперсии. Показано, что влияние дисперсии в среде со случайными неоднородностями приводит к появлению дополнительного энергообмена волны с электронами плазмы, не связанного с резонансными частотами и столкновениями. Этот энергообмен может стать значительным в случае не очень вытянутых неоднородностей, когда дисперсионные эффекты при взаимодействии волн с неоднородностями превышают диссипативные. Подробно рассмотрен характерный для ионосферы случай сильно вытянутых вдоль геомагнитного поля неоднородностей и поляризованных почти ортогонально магнитному полю плазменных колебаний. Получено уравнение, описывающее дифференциальную перекачку энергии плазменных колебаний в пространстве волновых чисел в результате многократного рассеяния волн на неоднородностях с учётом влияния пространственной дисперсии на процесс рассеяния. Обсуждается приложение полученных результатов для интерпретации ионосферных экспериментов.

ВВЕДЕНИЕ

Воздействие мощной радиоволны на ионосферу приводит к возбуждению коротковолновых колебаний плазмы в области отражения радиоволны. Характер происходящих при этом нелинейных процессов существенно зависит от перераспределения возбуждаемых волн по спектру на развитой стадии ионосферной турбулентности. Важным механизмом такого перераспределения является диффузия плазменных колебаний в пространстве волновых векторов в результате многократного рассеяния на мелкомасштабных неоднородностях искусственного происхождения, которые также образуются в области отражения мощной радиоволны. Этот процесс был рассмотрен в [1] в статистическом приближении с учётом сильной вытянутости искусственных неоднородностей вдоль силовых линий геомагнитного поля \mathbf{B} (продольные размеры неоднородности превышают характерный масштаб затухания плазменных волн; случай слабого затухания плазменных волн рассматривался в [2]). Согласно [1] рассеяние плазменных волн в этих условиях происходит с нарушением распадных условий пространственного (фазового) синхронизма между Фурье-гармоникой возмущения электронной концентрации и взаимодействующими волнами в результате расплывания соответствующей дельта-функции под влиянием диссипации. Недостаток развитого подхода заключается в том, что входящая в теорию "сторонняя" плотность зарядов, связанная с поляризацией неоднородностей полем плазменных колебаний, вычислялась в [1, 2] в приближении холодной плазмы без учёта тепловых эффектов пространственной дисперсии, которые становятся существенными для коротковолновых колебаний плазмы. Тепловые эффекты оказываются особенно важными на частотах ниже кратных электронных гирогармоник, когда влияние пространственной дисперсии приводит к образованию в фазовом пространстве добавочной области с большими волновыми векторами и сильным циклотронным поглощением [3, 4].

Настоящая работа посвящена описанию взаимодействия коротковолновых колебаний замагниченной плазмы с мелкомасштабными неоднородностями с учётом эффектов пространственной дисперсии. В разделе 1 в аналогичном [1, 2] приближении случайных фаз потенциальных плазменных волн

приводится вывод общих уравнений, описывающих указанное взаимодействие. Показано, что влияние пространственной дисперсии в среде со случайными неоднородностями может приводить не только к рассеянию, но и к появлению нерезонансного (не связанного с резонансными частицами) энергообмена плазменных волн с электронами. В разделе 2 рассматривается случай рассеяния коротковолновых плазменных колебаний, поляризованных почти ортогонально магнитному полю \mathbf{B} , на сильно вытянутых вдоль \mathbf{B} неоднородностях (такие условия реализуются в ионосферных экспериментах). Получено аналогичное [1] уравнение диффузионного типа, описывающее дифференциальную перекачку плазменных волн по спектру с учётом влияния пространственной дисперсии на процесс рассеяния. В разделе 3 кратко обсуждаются полученные результаты. В Приложении в бесстолкновительном приближении получено явное выражение для коэффициентов поляризации неоднородностей, использованных в разделах 1, 2. В рамках квазилинейного приближения сформулировано уравнение для усреднённой функции распределения электронов в среде со случайными неоднородностями.

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим взаимодействие высокочастотных потенциальных колебаний замагниченной плазмы со случайными неоднородностями. В рамках теории возмущений это взаимодействие описывается неоднородным уравнением Пуассона для гармоник потенциала $\varphi_{\omega, \mathbf{k}}$, в правой части которого стоит сторонняя плотность зарядов $\rho_{\omega, \mathbf{k}}^{(\text{pol})}$, связанная с поляризацией неоднородностей в поле плазменных волн:

$$k^2 \varepsilon(\omega, \mathbf{k}) \varphi_{\omega, \mathbf{k}} = 4\pi \rho_{\omega, \mathbf{k}}^{(\text{pol})}. \quad (1)$$

Здесь ω , \mathbf{k} — частота и волновой вектор плазменной волны, $\varepsilon(\omega, \mathbf{k})$ — продольная диэлектрическая проницаемость однородной фоновой плазмы с функцией распределения электронов по скоростям $f^{(0)}(\mathbf{v})$. Будем рассматривать достаточно коротковолновые колебания, для которых становятся существенными эффекты пространственной дисперсии, связанные с тепловым движением частиц. Неоднородности плазмы в этом случае следует описывать в рамках кинетической теории с помощью возмущений $\delta f^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ полной функции распределения

$$f_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = f^{(0)}(\mathbf{v}) + \delta f^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{v}), \quad (2)$$

зависящих от механизма генерации неоднородностей. Ниже в приближении случайных фаз будут использоваться нормированные фурье-гармоники возмущений $\tilde{f}_{\mathbf{a}}(\mathbf{v})$, удовлетворяющие условию $\int d^3v \tilde{f}_{\mathbf{a}}(\mathbf{v}) = 1$ и связанные с гармониками $\delta f_{\mathbf{a}}^{(0)}(\mathbf{v})$ линейным соотношением

$$\delta f_{\mathbf{a}}^{(0)}(\mathbf{v}) = \delta N_{\mathbf{a}} \tilde{f}_{\mathbf{a}}(\mathbf{v}). \quad (3)$$

Здесь \mathbf{a} — волновой вектор преобразования Фурье по пространственным координатам (неоднородности плазмы считаются квазистационарными), $\delta N_{\mathbf{a}}$ — коэффициент, равный амплитуде гармоники неоднородностей электронной концентрации $N = N_0 + \delta N$, $N_0 = \int d^3v f^{(0)}(\mathbf{v})$ — её невозмущённое значение. Плотность поляризационных зарядов в принятых обозначениях записывается в виде

$$4\pi \rho_{\omega, \mathbf{k}}^{(\text{pol})} = \int d^3\mathbf{a} \mu(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{k} - \mathbf{a}) \delta N_{\mathbf{a}} \varphi_{\omega, \mathbf{k} - \mathbf{a}}, \quad (4)$$

$$\mu(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{k}') = -k_i \delta \tilde{\varepsilon}_{ij}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{a}) k'_j, \quad \mathbf{a} = \mathbf{k} - \mathbf{k}', \quad (5)$$

где $\delta \tilde{\varepsilon}_{ij}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{a})$ — вклад электронов в компоненты тензора диэлектрической проницаемости, определяемые с помощью обычных выражений [5, 6] при замене в последних невозмущённой функции распределения электронов $f^{(0)}(\mathbf{v})$ на гармонику $\tilde{f}_{\mathbf{a}}(\mathbf{v})$, которая по размерности совпадает с нормированной функцией $f^{(0)}(\mathbf{v})/N_0$, но в общем случае не равна ей (линеаризованный интеграл столкновений

электронов остаётся прежним). Выражения для коэффициента $\mu(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{k}')$ в бесстолкновительном приближении приведены в Приложении для произвольной функции $f_{\mathbf{ae}}(\mathbf{v})$. Подробно рассмотрен случай максвелловской плазмы при тепловом механизме генерации неоднородностей (см. (П.7)–(П.10)).

Перейдём к статистическому приближению случайных фаз [2, 5, 7], в котором спектральные компоненты потенциала $\varphi_{\omega, \mathbf{k}}$ и возмущения концентрации $\delta N_{\mathbf{ae}}$, входящего коэффициентом пропорциональности в определение гармоники $\delta f_{\mathbf{ae}}^{(0)}(\mathbf{v})$ (3), считаются дельта-коррелированными:

$$\langle \varphi_{\omega', \mathbf{k}'}^* \varphi_{\omega, \mathbf{k}} \rangle = \langle |\varphi|^2 \rangle_{\omega, \mathbf{k}} \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \delta(\omega' - \omega), \quad \langle \delta N_{\mathbf{ae}'}^* \delta N_{\mathbf{ae}} \rangle = \langle |\delta N|^2 \rangle_{\mathbf{ae}} \delta(\mathbf{ae}' - \mathbf{ae}). \quad (6)$$

Здесь $\langle |\varphi|^2 \rangle_{\omega, \mathbf{k}}$, $\langle |\delta N|^2 \rangle_{\mathbf{ae}}$ — спектральные плотности потенциала φ плазменных колебаний и возмущения концентрации δN , $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака, угловыми скобками обозначено усреднение по фазам соответствующих спектральных компонент. Это приближение можно считать оправданным в рассматриваемом случае достаточно малых возмущений функции распределения $\delta f^{(0)}(\mathbf{v})$ в мелко-масштабных неоднородностях, когда их влияние на распространение плазменных колебаний можно описывать в рамках теории возмущений.* Как уже отмечалось в [1], дополнительным основанием для использования статистического приближения в условиях ионосферных экспериментов является случайный характер начального распределения “затравочных” неоднородностей и плазменных шумов, которые усиливаются под действием мощной радиоволны.

Следуя [5, 7], умножим (1) на $2\varphi_{\omega', \mathbf{k}'}^*$ и усредним результат по случайным фазам. Входящий в правую часть этого выражения тройной коррелятор $\langle \varphi_{\omega', \mathbf{k}'}^* \delta N_{\mathbf{ae}} \varphi_{\omega, \mathbf{k} - \mathbf{ae}} \rangle$ в рамках теории возмущений с помощью (1), (4) выражается через произведение парных корреляционных функций (6).** В результате получаем уравнение

$$2k^2 [\varepsilon'(\omega, \mathbf{k}) + i\varepsilon''(\omega, \mathbf{k})] \langle |\varphi|^2 \rangle_{\omega, \mathbf{k}} = \tilde{R}_{\omega, \mathbf{k}}^{(\text{pol})} \equiv 2 \int d^3 \mathbf{ae} d^3 \mathbf{k}' \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k} + \mathbf{ae}) \langle |\delta N|^2 \rangle_{\mathbf{ae}} \times \\ \times \left\{ \frac{|\mu(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{k}')|^2}{k^2 \varepsilon^*(\omega, \mathbf{k})} \langle |\varphi|^2 \rangle_{\omega, \mathbf{k}'} + \frac{\mu(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{k}') \mu(\omega, \mathbf{k}', \mathbf{k})}{k'^2 \varepsilon(\omega, \mathbf{k}')} \langle |\varphi|^2 \rangle_{\omega, \mathbf{k}} \right\}, \quad (7)$$

в левой части которого выделены действительная и мнимая часть диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon' + i\varepsilon''$. Звёздочкой помечена операция комплексного сопряжения: $\varepsilon^* = \varepsilon' - i\varepsilon''$. Уравнение (7) определяет поведение корреляционной функции $\langle |\varphi|^2 \rangle_{\omega, \mathbf{k}}$ с точностью до членов второго порядка малости по возмущениям плазмы. Действительная часть этого уравнения описывает малое изменение частоты (или волнового вектора) плазменных колебаний в результате взаимодействия с неоднородностями, а мнимая часть — дополнительное затухание (изменение энергии) плазменных волн, связанное с рассматриваемым процессом (последнее может быть не малым по сравнению со слабым поглощением волн в однородной среде). Пренебрежём далее малым изменением дисперсионных свойств плазменных волн, полагая $\text{Re} \tilde{R}_{\omega, \mathbf{k}}^{(\text{pol})} = 0$. В этом приближении частота ω и волновой вектор \mathbf{k} плазменных

* Отметим, что эта теория не описывает динамического процесса захвата коротковолновых колебаний в объёме мелко-масштабных неоднородностей плазмы, который рассматривался в [8]. Физическим условием отсутствия захвата является слабость эффектов, связанных с возмущениями плотности, по сравнению с дисперсионными эффектами распространения плазменных волн. Соответствующие ограничения на величину возмущений концентрации и размеры неоднородностей для условий ионосферных экспериментов приведены в [8].

** При вычислении тройного коррелятора гармоника потенциала $\varphi_{\omega, \mathbf{k}}$ разлагается в ряд по малому параметру, характеризующему величину возмущений в мелко-масштабных неоднородностях плазмы: $\varphi_{\omega, \mathbf{k}} = \varphi_{\omega, \mathbf{k}}^{(0)} + \varphi_{\omega, \mathbf{k}}^{(1)} + \dots$. Функция нулевого приближения $\varphi_{\omega, \mathbf{k}}^{(0)}$ обращает тройной коррелятор в нуль. Первое приближение $\varphi_{\omega, \mathbf{k}}^{(1)}$, учитывающее взаимодействие плазменных волн с неоднородностями, находится из уравнения (1) при подстановке в его правую часть (4) нулевого приближения $\varphi_{\omega, \mathbf{k}}^{(0)}$. Учёт $\varphi_{\omega, \mathbf{k}}^{(1)}$ позволяет выразить искомый коррелятор во втором порядке теории возмущений через корреляционную функцию $\langle |\varphi^{(0)}| \rangle_{\omega, \mathbf{k}}$, которая в рассматриваемом приближении может быть заменена на $\langle |\varphi| \rangle_{\omega, \mathbf{k}}$ (функции $\varphi_{\omega, \mathbf{k}}^{(0)}$, $\varphi_{\omega, \mathbf{k}}^{(1)}$ не коррелируют друг с другом, но каждая из них удовлетворяет первому соотношению (6)).

колебаний удовлетворяют дисперсионному уравнению в отсутствие неоднородностей:

$$\varepsilon'(\omega, \mathbf{k}) \equiv \varepsilon'(\omega, k_{\parallel}^2, k_{\perp}^2) = 0. \quad (8)$$

Индексами \parallel, \perp здесь и далее помечены параллельные и ортогональные магнитному полю \mathbf{B} компоненты соответствующих векторов. В рассматриваемом ниже случае спектр плазменных волн и спектр вытянутых вдоль \mathbf{B} неоднородностей можно считать аксиально симметричным в плоскости, ортогональной магнитному полю: корреляционные функции $\langle |\varphi|^2 \rangle_{\omega, \mathbf{k}}$, $\langle |\delta N|^2 \rangle_{\mathbf{a}}$ и гармоника $\tilde{f}_{\mathbf{a}}(\mathbf{v})$ не зависят от направления волновых векторов \mathbf{k}_{\perp} , $\mathbf{a}_{\perp} \perp \mathbf{B}$. При этом в качестве независимых переменных удобно выбрать частоту ω и компоненту k_{\perp} волнового вектора плазменных колебаний, полагая

$$\langle |\varphi|^2 \rangle_{\omega, \mathbf{k}} = \langle |\varphi|^2 \rangle_{\omega, k_{\perp}} \delta(k_{\parallel} - k_{\parallel}^{(0)}), \quad (9)$$

где продольная компонента $k_{\parallel}^{(0)} = k_{\parallel}^{(0)}(\omega, k_{\perp})$ определяется из уравнения (8) (индекс “0” для простоты далее опущен). Следует иметь в виду, что каждой паре независимых переменных (ω, k_{\perp}) соответствуют два (или более) значения k_{\parallel} , отличающихся величиной и направлением групповой скорости $V_{\parallel} = \partial\omega/\partial k_{\parallel}$ плазменной волны вдоль магнитного поля. Поэтому в интегралах по d^2k_{\perp} от спектра плазменных волн предполагается суммирование по всем значениям $k_{\parallel}(\omega, k_{\perp})$. Введём далее спектральную плотность энергии плазменных волн

$$W_{\omega, \mathbf{k}_{\perp}} = \frac{\omega}{4\pi} \frac{\partial \varepsilon'}{\partial \omega} k^2 \langle |\varphi|^2 \rangle_{\omega, \mathbf{k}_{\perp}} \quad (10)$$

и их линейный декремент поглощения

$$\gamma_{\omega, k_{\perp}} = \varepsilon''(\omega, \mathbf{k}) \left/ \frac{\partial \varepsilon'(\omega, \mathbf{k})}{\partial \omega} \right. \quad (11)$$

Для получения уравнения для $W_{\omega, k_{\perp}}$ подставим (9)–(11) в (7) и проинтегрируем уравнение (7) по dk_{\parallel} , полагая, как и ранее, $\text{Re} \tilde{R}_{\omega, \mathbf{k}}^{(\text{pol})} = 0$. В результате получаем

$$2\gamma_{\omega, k_{\perp}} W_{\omega, k_{\perp}} = R_{\omega, k_{\perp}}^{(\text{pol})} + q_{\omega, k_{\perp}}, \quad (12)$$

$$R_{\omega, k_{\perp}}^{(\text{pol})} = \frac{\omega}{4\pi} \int \text{Im} \tilde{R}_{\omega, \mathbf{k}}^{(\text{pol})} dk_{\parallel} = 2 \int d^3 \mathbf{a} d^2 k_{1\perp} \delta(\mathbf{k}_{1\perp} - \mathbf{k}_{\perp} + \mathbf{a}_{\perp}) \langle |\delta N|^2 \rangle_{\mathbf{a}} \times \\ \times \text{Im} \left\{ \frac{|\mu(\omega, \mathbf{k}_1 + \mathbf{a}, \mathbf{k}_1)|^2}{k_1^2 (\mathbf{k}_1 + \mathbf{a})^2 \varepsilon^*(\omega, \mathbf{k}_1 + \mathbf{a}) \partial \varepsilon_1' / \partial \omega} W_{\omega, k_{1\perp}} + \frac{\mu(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{k} - \mathbf{a}) \mu(\omega, \mathbf{k} - \mathbf{a}, \mathbf{k})}{k^2 (\mathbf{k} - \mathbf{a})^2 \varepsilon(\omega, \mathbf{k} - \mathbf{a}) \partial \varepsilon' / \partial \omega} W_{\omega, k_{\perp}} \right\}. \quad (13)$$

Здесь использованы сокращённые обозначения

$$\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon'' = \varepsilon(\omega, \mathbf{k}), \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_1' + i\varepsilon_1'' = \varepsilon(\omega, \mathbf{k}_1), \quad k_{\parallel} = k_{\parallel}(\omega, k_{\perp}), \quad k_{1\parallel} = k_{1\parallel}(\omega, k_{1\perp}), \quad (14)$$

продольные компоненты волновых векторов $k_{\parallel}(\omega, k_{\perp})$, $k_{1\parallel}(\omega, k_{1\perp})$ находятся из дисперсионных уравнений $\varepsilon' = 0$, $\varepsilon_1' = 0$ соответственно. В правую часть (12) добавлен источник $q_{\omega, k_{\perp}}$, связанный с возбуждением плазменных волн в результате поляризации неоднородностей в поле мощной радиоволны, а также с перераспределением волн по спектру вследствие индуцированного рассеяния на ионах (см. [1–4]). Полученное уравнение соответствует стационарному во времени t и однородному в пространстве распределению плазменных волн. В условиях ионосферы при учёте слабой неоднородности

спектра $W_{\omega, k_{\perp}}$ и параметров фоновой (усреднённой по мелкомасштабным неоднородностям) плазмы вдоль вертикальной оси z уравнение (12) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} W_{\omega, k_{\perp}} + \frac{\partial}{\partial z} (V_z W_{\omega, k_{\perp}}) + 2\gamma_{\omega, k_{\perp}} W_{\omega, k_{\perp}} = R_{\omega, k_{\perp}}^{(\text{pol})} + q_{\omega, k_{\perp}}, \quad (15)$$

где $V_z = -(\partial \varepsilon' / \partial k_z) / (\partial \varepsilon' / \partial \omega) \equiv \partial \omega / \partial k_z$ — групповая скорость плазменной волны вдоль оси z . Принято, что изменением k_{\perp} при смещении волны вдоль этой оси можно пренебречь (такое приближение становится строгим в случае вертикального магнитного поля).

Взаимодействие плазменных волн с неоднородностями описывается источником $R_{\omega, k_{\perp}}^{(\text{pol})}$ в правой части (15). Первое слагаемое в скобках в подынтегральном выражении для $R_{\omega, k_{\perp}}^{(\text{pol})}$ (13) описывает возбуждение волны $W_{\omega, k_{\perp}}$ за счёт рассеяния на неоднородностях плазменных колебаний с другим значением волнового вектора, а второе — уменьшение (изменение) энергии данной волны в результате рассматриваемого взаимодействия. Выражение (13) получено с учётом влияния слабой диссипации ($\varepsilon'' \neq 0$) на рассеяние плазменных волн (см. [1] *). Это влияние становится существенным в случае сильно вытянутых неоднородностей, продольные размеры которых превышают характерный масштаб затухания плазменных волн:

$$\varkappa_{\parallel} \partial \varepsilon' / \partial k_{\parallel} \ll \varepsilon''. \quad (16)$$

Согласно [1] это влияние приводит к расплыванию дельта-функций от диэлектрической проницаемости $\varepsilon'(\omega, \mathbf{k}')$ (с аргументами $\mathbf{k}' = \mathbf{k}_{\perp} + \boldsymbol{\varkappa} \equiv \mathbf{k}_{\perp} + (\mathbf{k}_{1\parallel} + \boldsymbol{\varkappa}_{\parallel})$ и $\mathbf{k}' = \mathbf{k} - \boldsymbol{\varkappa} \equiv \mathbf{k}_{1\perp} + (\mathbf{k}_{\parallel} - \boldsymbol{\varkappa}_{\parallel})$)

$$\delta(\varepsilon'(\omega, \mathbf{k}')) = \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon''^2(\omega, \mathbf{k}')}{\varepsilon'^2(\omega, \mathbf{k}') + \varepsilon''^2(\omega, \mathbf{k}')} \quad \text{при} \quad \varepsilon''(\omega, \mathbf{k}') \rightarrow 0, \quad (17)$$

которые возникают под интегралом (13) в пределе слабой диссипации $\varepsilon'' \ll \varkappa_{\parallel} \partial \varepsilon' / \partial k_{\parallel}$, и, как следствие, к нарушению условия фазового синхронизма $k_{\parallel} = k_{1\parallel} + \varkappa_{\parallel}$ в процессе рассеяния. ** Кроме того, в поляризационном источнике (13) учитывается влияние тепловых эффектов пространственной дисперсии на величину поляризационных коэффициентов μ (5), которое не рассматривалось в [1] (дисперсия приводит к зависимости тензора $\delta \tilde{\varepsilon}_{ij}(\omega, \mathbf{k}, \boldsymbol{\varkappa})$ в выражении (5) от волнового вектора \mathbf{k}). В приближении холодной бесстолкновительной плазмы имеем

$$\mu(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{k}') = \frac{k_{\parallel} k'_{\parallel}}{N_{\text{PR}}} + \frac{1}{N_{\text{UHR}}} \left\{ (\mathbf{k}_{\perp} \mathbf{k}'_{\perp}) - i \frac{\omega_{Be}}{\omega} [\mathbf{k}_{\perp} \mathbf{k}'_{\perp}] \mathbf{h} \right\}, \quad (18)$$

$$N_{\text{PR}} = m \omega^2 / (4\pi e^2), \quad N_{\text{UHR}} = m (\omega^2 - \omega_{Be}^2) / (4\pi e^2), \quad \mathbf{h} = \mathbf{B} / B,$$

где $\omega_{Be} = eB / (mc)$ — гирочастота электронов в геомагнитном поле \mathbf{B} . В этом приближении источник (13) совпадает с аналогичным выражением [1] при разложении диэлектрической проницаемости $\varepsilon'(\omega, \mathbf{k}')$ вблизи нуля по малому приращению $\Delta k_{\parallel} = k_{1\parallel} - k_{\parallel} + \varkappa_{\parallel}$:

$$\varepsilon'(\omega, \mathbf{k}_{\perp} + \boldsymbol{\varkappa}) \simeq (\partial \varepsilon' / \partial k_{\parallel}) \Delta k_{\parallel}, \quad \varepsilon'(\omega, \mathbf{k} - \boldsymbol{\varkappa}) \simeq -(\partial \varepsilon_1' / \partial k_{1\parallel}) \Delta k_{\parallel} \quad (19)$$

* В [1] используется несколько иной подход к описанию взаимодействия плазменных волн с неоднородностями, приводящий к тем же результатам: вычисление фурье-гармоник электрического поля \mathbf{E} плазменных волн и усреднение по фазе производятся в плоскости, ортогональной оси z (вдоль которой меняются параметры невозмущённой плазмы), при динамическом описании изменения $\mathbf{E}(z)$ вдоль этой оси. Определению (9) соответствует случай, когда магнитное поле параллельно оси z .

** Необходимость учитывать расплывание дельта-функции связана с тем, что рассеяние плазменных волн в условиях фазового синхронизма при $\varkappa_{\parallel} = 0$ может изменять только направление (но не величину) ортогональной полю \mathbf{B} компоненты их волнового вектора \mathbf{k}_{\perp} . Поэтому в случае аксиально симметричного спектра $W_{\omega, k_{\perp}}$ такое взаимодействие исчезает. Математически это проявляется в том, что при $\varkappa_{\parallel} \rightarrow 0$, $k_{1\perp} = k_{\perp}$ подынтегральное выражение (13) обращается в нуль (см. ниже формулу (27) и её обсуждение).

и замене $k_{1\parallel} + \mathfrak{a}_{\parallel} \rightarrow k_{\parallel}$; $k_{\parallel} - \mathfrak{a}_{\parallel} \rightarrow k_{1\parallel}$ во всех остальных функциях подынтегрального выражения (13) (рассматривается случай, когда волне \mathbf{B} параллельно оси z). Здесь важно, что в приближении холодной плазмы поляризационный коэффициент обладает свойством перестановочной симметрии:

$$\mu(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{k}') = \mu^*(\omega, \mathbf{k}', \mathbf{k}), \quad (20)$$

при котором взаимодействие плазменных волн с неоднородностями сводится к их рассеянию на неоднородностях без изменения полной энергии плазменных волн ($\int R_{\omega, k_{\perp}}^{(\text{pol})} d^2 k_{\perp} = 0$). Влияние пространственной дисперсии приводит к нарушению симметрии (20); соударения электронов также нарушают перестановочную симметрию коэффициентов μ , однако приводят лишь к относительно малым диссипативным поправкам и могут не учитываться (см. сноску). При учёте дисперсии поляризационный источник (13) можно представить в виде суммы двух слагаемых*:

$$R_{\omega, k_{\perp}}^{(\text{pol})} = R_{\omega, k_{\perp}}^{(\text{scat})} - 2 \Delta\gamma_{\omega, k_{\perp}} W_{\omega, k_{\perp}}, \quad (21)$$

$$R_{\omega, k_{\perp}}^{(\text{scat})} = 2 \int d^3 \mathfrak{a} d^2 k_{1\perp} \delta(\mathbf{k}_{1\perp} - \mathbf{k}_{\perp} + \mathfrak{a}_{\perp}) \langle |\delta N|^2 \rangle_{\mathfrak{a}} \times \\ \times \left\{ \frac{|\mu(\omega, \mathbf{k}_1 + \mathfrak{a}, \mathbf{k}_1)|^2 \varepsilon''(\omega, \mathbf{k}_1 + \mathfrak{a})}{k_1^2 (\mathbf{k}_1 + \mathfrak{a})^2 |\varepsilon(\omega, \mathbf{k}_1 + \mathfrak{a})|^2 \partial \varepsilon' / \partial \omega} W_{\omega, k_{1\perp}} - \frac{|\mu(\omega, \mathbf{k} - \mathfrak{a}, \mathbf{k})|^2 \varepsilon''(\omega, \mathbf{k} - \mathfrak{a})}{k^2 (\mathbf{k} - \mathfrak{a})^2 |\varepsilon(\omega, \mathbf{k} - \mathfrak{a})|^2 \partial \varepsilon' / \partial \omega} W_{\omega, k_{\perp}} \right\}, \quad (22)$$

$$\Delta\gamma_{\omega, k_{\perp}} = \int \frac{d^3 \mathfrak{a} \langle |\delta N|^2 \rangle_{\mathfrak{a}} \varepsilon''(\omega, \mathbf{k} - \mathfrak{a})}{k^2 (\mathbf{k} - \mathfrak{a})^2 |\varepsilon(\omega, \mathbf{k} - \mathfrak{a})|^2 \partial \varepsilon' / \partial \omega} \times \\ \times \text{Re} \{ \mu(\omega, \mathbf{k} - \mathfrak{a}, \mathbf{k}) [\mu(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{k} - \mathfrak{a}) - \mu^*(\omega, \mathbf{k} - \mathfrak{a}, \mathbf{k})] \}. \quad (23)$$

Первое из них $R_{\omega, k_{\perp}}^{(\text{scat})}$ по-прежнему описывает рассеяние плазменных волн и удовлетворяет условию сохранения полной энергии плазменных колебаний в процессе рассеяния (подынтегральное выражение (22) меняет знак при замене $\mathbf{k}_{\perp} \rightarrow \mathbf{k}_{1\perp}$, $\mathbf{k}_{1\perp} \rightarrow \mathbf{k}_{\perp}$, $\mathfrak{a}_{\perp} \rightarrow -\mathfrak{a}_{\perp}$):

$$\int d^2 k_{\perp} R_{\omega, k_{\perp}}^{(\text{scat})} = 0. \quad (24)$$

Второе слагаемое описывает дополнительное поглощение (либо увеличение) энергии плазменных колебаний с декрементом $\Delta\gamma_{\omega, k_{\perp}}$ в результате взаимодействия волны с неоднородностями. Эта энергия передаётся электронам фоновой плазмы либо (при $\Delta\gamma_{\omega, k_{\perp}} < 0$) отбирается у них. Соответствующее уравнение квазилинейной теории для усреднённой функции распределения электронов $f^{(0)}(\mathbf{v})$ приведено в Приложении (см. (П.11)–(П.13)). Полная плотность потока энергии, передаваемой электронам вследствие указанного взаимодействия,

$$Q^{(\text{pol})} = \int d\omega d^2 k_{\perp} 2 \Delta\gamma_{\omega, k_{\perp}} W_{\omega, k_{\perp}} \quad (25)$$

равна работе, совершаемой электрическим полем плазменных волн над “сторонним” током $\mathbf{j}^{(\text{pol})}$, возникающим в результате поляризации неоднородностей:

$$Q^{(\text{pol})} = -\langle (\nabla \varphi) \mathbf{j}^{(\text{pol})} \rangle \equiv -\langle \varphi \partial \rho^{(\text{pol})} / \partial t \rangle. \quad (26)$$

* Под интегралом (23) опущено слагаемое, пропорциональное мнимой части выражения, заключённого в фигурные скобки. Опущенное слагаемое описывает влияние слабых диссипативных процессов на величину $\Delta\gamma_{\omega, k_{\perp}}$ и приводит к поправке, малой по сравнению с инкрементом (11), пропорциональной параметру $\langle |\delta N|^2 \rangle / N_0^2 \ll 1$ (см. ниже (27), (28)).

Здесь учтено, что поляризационный ток связан с плотностью зарядов $\rho^{(\text{pol})}$ (4) уравнением непрерывности $\partial\rho^{(\text{pol})}/\partial t + \text{div } \mathbf{j}^{(\text{pol})} = 0$. Угловыми скобками, как и ранее, обозначено усреднение по фазам соответствующих спектральных компонент.

Проанализируем полученные выражения. Примем во внимание, что в замагниченной ионосферной плазме поляризационный коэффициент μ (5) можно представить в виде

$$\mu(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{k}') = \mu_1(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{k}') + ib\mu_2(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{k}'), \quad (27)$$

$$b = [\mathbf{k}_\perp \mathbf{k}'_\perp] \mathbf{h} / k_\perp k'_\perp,$$

где комплексные коэффициенты $\mu_{1,2} = \mu'_{1,2} + i\mu''_{1,2}$ зависят от k_\perp, k'_\perp и $(\mathbf{k}_\perp \mathbf{k}'_\perp)$, т. е. от скалярного произведения $(\mathbf{k}_\perp \mathbf{a}_\perp)$ при $\mathbf{a}_\perp = \mathbf{k}_\perp - \mathbf{k}'_\perp$. Поэтому в рассматриваемом случае аксиально симметричного спектра неоднородностей перекрестные слагаемые, пропорциональные $i\mu_1\mu_2$, в подынтегральных выражениях (22), (23) обращаются в нуль. Учтём также, что мнимые части коэффициентов $\mu_{1,2}$ возникают в результате слабых диссипативных процессов, связанных с влиянием резонансных частиц и соударений. * Будем пренебрегать этим влиянием, полагая

$$\mu''_{1,2}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{k}') \rightarrow 0. \quad (28)$$

Как уже отмечалось, учёт диссипативных процессов в определении $\Delta\gamma_{\omega, k_\perp}$ приводит к поправкам, малым по сравнению с декрементом γ_{ω, k_\perp} (11) (см. сноску на с. 6). Более того, в случае узкого по переменной k_\parallel спектра неоднородностей (см. условие (16)), когда выражения (22), (23) существенно зависят от декремента γ_{ω, k_\perp} , сама величина $\Delta\gamma_{\omega, k_\perp}$ также должна быть малой:

$$|\Delta\gamma_{\omega, k_\perp}| \ll \gamma_{\omega, k_\perp}. \quad (29)$$

Это означает, что влияние неоднородностей на энергообмен между электронами и плазменными волнами при условии (16) должно быть слабым. Однако в противоположном (16) случае не очень вытянутых неоднородностей (т. е. слабой диссипации плазменных волн) ограничение (29) отсутствует. При вычислении интегралов (22), (23) в этом случае можно использовать определение дельта-функции (17). ** При этом выражение для $\Delta\gamma_{\omega, k_\perp}$ принимает вид (см. (27), (28))

$$\Delta\gamma_{\omega, k_\perp} = \pi \int d^3\mathbf{a} d^2k_{1\perp} \langle |\delta N|^2 \rangle_{\mathbf{a}} \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k} + \mathbf{a}) \frac{B_1 + b^2 B_2}{k^2 k_1^2 \left| \partial\varepsilon'_1 / \partial k_{1\parallel} \right| \partial\varepsilon' / \partial \omega},$$

$$B_i = \mu'_i(\omega, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}) [\mu'_i(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{k}_1) - \mu'_i(\omega, \mathbf{k}_1, \mathbf{k})], \quad i = 1; 2, \quad (30)$$

$$b^2 = 1 - (\mathbf{k}_\perp \mathbf{k}_{1\perp})^2 / k_\perp^2 k_{1\perp}^2 = \left(\mathbf{a}_\perp^2 / k_{1\perp}^2 \right) \sin^2 \psi,$$

где, как и ранее, $\varepsilon_1 = \varepsilon(\omega, \mathbf{k}_1)$, $k_{1\parallel} = k_{1\parallel}(\omega, k_{1\perp})$, ψ — угол между векторами \mathbf{k}_\perp и \mathbf{a}_\perp . В приближении холодной плазмы (18), (20) правая часть этого выражения обращается в нуль. Однако, как уже отмечалось, в результате тепловых эффектов пространственной дисперсии перестановочная симметрия поляризационных коэффициентов $\mu'_{1,2}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{k}')$ нарушается (см. (П.4), (П.5)). Отсюда следует, что влияние пространственной дисперсии в среде со случайными неоднородностями может приводить к появлению нерезонансного (не связанного с резонансными частицами и соударениями) энергообмена между электронами и плазменными колебаниями, который в случае не очень вытянутых неоднородностей не ограничивается условием (29) и может быть значительным. Механизм такого энергообмена

* Здесь принято, что функция $\tilde{f}_{\mathbf{a}}(\mathbf{v})$ в (3) является действительной.

** При условии $\mathbf{a}_\parallel \partial\varepsilon' / \partial k_\parallel \gg \varepsilon''$ выражения (22), (23) не зависят от процедуры интегрирования (7) по dk_\parallel , использованной при получении (13).

может быть связан со сбоем фазы между плазменной волной и нерезонансными электронами (совершающими колебательное движение в поле этой волны), который происходит при взаимодействии с неоднородностями в приближении случайных фаз на характерном масштабе неоднородностей $1/\alpha$ (в отсутствие сбоя фазы нерезонансный электрон и электрическое поле плазменной волны колеблются в противофазе, вследствие чего волна не изменяет энергию нерезонансных частиц). Естественно, что такое взаимодействие происходит при учёте теплового движения электронов (т. е. при наличии пространственной дисперсии плазменных волн) в случае достаточно мелкомасштабных неоднородностей. Эти свойства нерезонансного обмена энергией между электронами и плазменными волнами находятся в полном соответствии с выражением (30) для дополнительного декремента.

2. ВЫТЯНУТЫЕ НЕОДНОРОДНОСТИ. ДИФФУЗИОННОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

В условиях ионосферных экспериментов искусственные неоднородности плазмы сильно вытянуты вдоль магнитного поля \mathbf{B} , а групповая скорость V_{\parallel} возбуждаемых плазменных волн мала. Условие (16) при этом хорошо выполняется. Это позволяет перейти к пределу $\alpha_{\parallel} \rightarrow 0$ в выражениях $(k_{1\parallel} + \alpha_{\parallel})$, $(k_{\parallel} - \alpha_{\parallel})$, входящих в формулы (22), (23):

$$k_{1\parallel} + \alpha_{\parallel} \simeq k_{1\parallel}, \quad k_{\parallel} - \alpha_{\parallel} \simeq k_{\parallel}, \quad (31)$$

при сохранении величины α_{\parallel} в аргументах спектральной функции $\langle |\delta N|^2 \rangle_{\alpha}$ и гармоники $\tilde{f}_{\alpha}(\mathbf{v})$, от которой зависят коэффициенты $\mu(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{k}')$ в указанных формулах. Будем учитывать также, что длина волны возбуждаемых колебаний в результате перекачки волн по спектру оказывается значительно меньше поперечных размеров неоднородностей:

$$\alpha_{\perp}/k_{\perp} \ll 1. \quad (32)$$

При этом в процессе одного акта рассеяния волновой вектор плазменной волны меняется мало. В этом случае при описании многократного рассеяния можно разложить входящие в (22) величины и функции в ряд по малому приращению

$$\Delta k_{\perp}^2 = k_{1\perp}^2 - k_{\perp}^2 = -2k_{\perp}\alpha_{\perp} \cos \psi + \alpha_{\perp}^2 \ll k_{\perp}^2 \quad (33)$$

и преобразовать выражение (22) для источника $R_{\omega, k_{\perp}}^{(\text{scat})}$ к дифференциальной форме, соответствующей диффузионному приближению [1]. Будем рассматривать случай достаточно сильной дисперсии плазменных волн, когда изменение диэлектрической проницаемости $\varepsilon'(\omega, \mathbf{k})$ в результате одного акта рассеяния превышает диссипативное слагаемое ε'' :

$$\beta = \varepsilon'' / \left(\frac{\partial \varepsilon'}{\partial k_{\perp}} \alpha_{\perp} \right) \ll 1. \quad (34)$$

В условиях (31)–(34) разложение диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\omega, \mathbf{k} - \alpha)$ и заменяющего дельта-функцию множителя $|\varepsilon(\omega, \mathbf{k} - \alpha)|^{-2}$ во втором слагаемом (22) принимает вид

$$\begin{aligned} \varepsilon'(\omega, \mathbf{k} - \alpha) &= \frac{\partial \varepsilon'}{\partial k_{\perp}^2} \Delta k_{\perp}^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varepsilon'}{\partial (k_{\perp}^2)^2} (\Delta k_{\perp}^2)^2, & \varepsilon''(\omega, \mathbf{k} - \alpha) &= \varepsilon'' + \frac{\partial \varepsilon''}{\partial k_{\perp}^2} \Delta k_{\perp}^2, \\ |\varepsilon(\omega, \mathbf{k} - \alpha)|^{-2} &= |\Delta \varepsilon|^{-2} \left[1 - \frac{\partial \varepsilon'}{\partial k_{\perp}^2} \frac{\partial^2 \varepsilon'}{\partial (k_{\perp}^2)^2} \frac{(\Delta k_{\perp}^2)^3}{|\Delta \varepsilon|^2} \right], & |\Delta \varepsilon|^2 &= \left(\frac{\partial \varepsilon'}{\partial k_{\perp}^2} \Delta k_{\perp}^2 \right)^2 + \varepsilon''^2, \quad (35) \\ & & \varepsilon &= \varepsilon(\omega, \mathbf{k}). \end{aligned}$$

Разложение соответствующих величин в первом слагаемом (22) записывается в аналогичной форме:

$$\begin{aligned} \varepsilon'(\omega, \mathbf{k}_1 + \mathbf{a}) &= \frac{\partial \varepsilon'_1}{\partial k_{1\perp}^2} (-\Delta k_{\perp}^2) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varepsilon'_1}{\partial (k_{1\perp}^2)^2} (\Delta k_{\perp}^2)^2, & \varepsilon''(\omega, \mathbf{k}_1 + \mathbf{a}) &= \varepsilon''_1 + \frac{\partial \varepsilon''_1}{\partial k_{1\perp}^2} (-\Delta k_{\perp}^2), \\ |\varepsilon(\omega, \mathbf{k}_1 + \mathbf{a})|^{-2} &= |\Delta \varepsilon_1|^{-2} \left[1 - \frac{\partial \varepsilon'_1}{\partial k_{1\perp}^2} \frac{\partial^2 \varepsilon'_1}{\partial (k_{1\perp}^2)^2} \frac{(-\Delta k_{\perp}^2)^3}{|\Delta \varepsilon_1|^2} \right], & |\Delta \varepsilon_1|^2 &= \left(\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial k_{1\perp}^2} \Delta k_{\perp}^2 \right)^2 + \varepsilon_1''^2, \\ & & \varepsilon_1 &= \varepsilon(\omega, \mathbf{k}_1). \end{aligned} \quad (36)$$

Приступая к преобразованию поляризационного коэффициента, будем учитывать, что при выполнении условия (32) достаточно сохранить лишь первое слагаемое μ_1 в общем выражении для μ (27). Учтём также, что плазменные волны, возбуждаемые в экспериментах по нагреву ионосферы, поляризованы почти ортогонально магнитному полю. Это позволяет разложить коэффициенты $\mu(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{k}')$ в первом и втором слагаемых (22) с учётом (31) в ряд по степеням $k_{1\parallel}^2$ и k_{\parallel}^2 соответственно. Основной, нулевой член этого разложения имеет вид (см. (5)):

$$\begin{aligned} \mu_1(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{k}') / (k k') &\simeq - \frac{(\mathbf{k}_{\perp} \mathbf{k}'_{\perp})}{k_{\perp} k'_{\perp}} \delta \tilde{\varepsilon}_{\perp}(\omega, k_{\perp}, \mathbf{a}), & \mathbf{a} &= \mathbf{k} - \mathbf{k}', \\ \delta \tilde{\varepsilon}_{\perp}(\omega, k_{\perp}, \mathbf{a}) &= k_{\perp i} \delta \tilde{\varepsilon}_{ij}(\omega, \mathbf{k}_{\perp}, \mathbf{a}) k_{\perp j} / k_{\perp}^2. \end{aligned} \quad (37)$$

В бесстолкновительной плазме величина $\delta \tilde{\varepsilon}_{\perp}$ определяется выражением (см. (П.4), (П.5))

$$\delta \tilde{\varepsilon}_{\perp}(\omega, k_{\perp}, \mathbf{a}) = \frac{4\pi e^2}{m k_{\perp}^2} \int d^3 v \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{n \omega_{Be} J_n^2(k_{\perp} v_{\perp} / \omega_{Be})}{\omega - n \omega_{Be}} \frac{\partial \tilde{f}_{\mathbf{a}}(v_{\parallel}, v_{\perp})}{\partial (v_{\perp}^2 / 2)}, \quad (38)$$

где $J_n(x)$ — функция Бесселя n -го порядка. Ниже мы получим формулы диффузионного приближения, используя выражения (37) для сомножителей типа $\mu(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{k}') / (k k')$ под интегралом (22). Последующие члены разложения этих сомножителей по степеням k_{\parallel}^2 (либо $k_{1\parallel}^2$) могут быть учтены аналогично, в рамках излагаемой методики.

Используя (35)–(37), нетрудно разложить правую часть источника $R_{\omega, k_{\perp}}^{(\text{scat})}$ (22) по малому приращению Δk_{\perp}^2 . В условиях (31)–(34) это разложение приводится к виду

$$\begin{aligned} R_{\omega, k_{\perp}}^{(\text{scat})} &= 2 \int d^3 \mathbf{a} \langle |\delta N|^2 \rangle_{\mathbf{a}} \sum_{i=1}^3 \Phi_i(\omega, k_{\perp}), \\ \Phi_i(\omega, k_{\perp}) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\psi \left[F_i + \frac{\Delta k_{\perp}^2}{2} \frac{dF_i}{dk_{\perp}^2} \right] \left[\Delta k_{\perp}^2 \frac{dG_i}{dk_{\perp}^2} + \frac{(\Delta k_{\perp}^2)^2}{2} \frac{d^2 G_i}{d(k_{\perp}^2)^2} \right], \end{aligned} \quad (39)$$

где

$$\begin{aligned} F_1 &= (\delta \tilde{\varepsilon}_{\perp})^4, & G_1 &= \gamma_{\omega, k_{\perp}} W_{\omega, k_{\perp}} (\delta \tilde{\varepsilon}_{\perp})^{-2} |\Delta \varepsilon|^{-2}, \\ F_2 &= 2 (\delta \tilde{\varepsilon}_{\perp})^2 \left(\frac{\partial^2 \varepsilon'}{\partial (k_{\perp}^2)^2} \right) \left(\frac{\partial \varepsilon'}{\partial k_{\perp}^2} \right) \frac{(\Delta k_{\perp}^2)^2}{|\Delta \varepsilon|^4} \gamma_{\omega, k_{\perp}} W_{\omega, k_{\perp}}, & G_2 &= k_{\perp}^2, \\ F_3 &= -2 (\delta \tilde{\varepsilon}_{\perp})^2 \frac{1}{\varepsilon''} \frac{\partial \varepsilon''}{\partial k_{\perp}^2} \frac{1}{|\Delta \varepsilon|^2} \gamma_{\omega, k_{\perp}} W_{\omega, k_{\perp}}, & G_3 &= k_{\perp}^2. \end{aligned} \quad (40)$$

Здесь $\delta\tilde{\varepsilon}_\perp = \delta\tilde{\varepsilon}_\perp(\omega, k_\perp, \mathbf{a})$, а величина $|\Delta\varepsilon|^2$ определена в (35). Дифференцирование функций F_i производится при постоянном значении Δk_\perp^2 (33). В рассматриваемых условиях нечётными по Δk_\perp^2 слагаемыми в подынтегральном выражении (39) можно пренебречь, тогда как чётные степени Δk_\perp^2 в числителе и знаменателе подынтегральных функций взаимно сокращаются (в этом нетрудно убедиться путём непосредственного вычисления интегралов по угловой переменной ψ , входящих в определение функций Φ_i (39)). В результате интегральное выражение (22) для источника $R_{\omega, k_\perp}^{(\text{scat})}$, описывающего многократное рассеяние плазменных волн на неоднородностях, записывается в дифференциальной форме:

$$R_{\omega, k_\perp}^{(\text{scat})} = -\frac{\partial}{\partial k_\perp^2} P_{\omega, k_\perp}, \quad (41)$$

где P_{ω, k_\perp} — плотность потока энергии плазменных волн в фазовом пространстве волновых чисел, равная

$$P_{\omega, k_\perp} = -\int d^3\mathbf{a} \langle |\delta N|^2 \rangle_{\mathbf{a}} (\delta\tilde{\varepsilon}_\perp)^2 \left\{ (\delta\tilde{\varepsilon}_\perp)^2 \frac{d}{dk_\perp^2} \left[\frac{\gamma_{\omega, k_\perp} W_{\omega, k_\perp}}{(\delta\varepsilon_\perp)^2 (\partial\varepsilon'/\partial k_\perp^2)^2} \right] - \right. \\ \left. - \gamma_{\omega, k_\perp} W_{\omega, k_\perp} \frac{\partial}{\partial k_\perp^2} \left(\frac{\partial\varepsilon'}{\partial k_\perp^2} \right)^{-2} - \gamma_{\omega, k_\perp} W_{\omega, k_\perp} \left(\frac{\partial\varepsilon'}{\partial k_\perp^2} \right)^{-2} \frac{2}{\varepsilon''} \frac{\partial\varepsilon''}{\partial k_\perp^2} \right\}. \quad (42)$$

Здесь величина $\delta\tilde{\varepsilon}_\perp$ (37), (38) в общем случае зависит от \mathbf{a} . Первое, второе и третье слагаемые в фигурных скобках (42) соответствуют функциям Φ_i с номерами $i = 1, 2, 3$ в выражении (39). После несложных преобразований правая часть (42) приводится к виду*

$$P_{\omega, k_\perp} = -\frac{1}{2} \int d^3\mathbf{a} \langle |\delta N|^2 \rangle_{\mathbf{a}} \left(\frac{\delta\tilde{\varepsilon}_\perp}{\partial\varepsilon'/\partial k_\perp^2} \right)^2 \times \\ \times \left[\frac{\partial}{\partial k_\perp^2} (2\gamma_{\omega, k_\perp} W_{\omega, k_\perp}) - 2\gamma_{\omega, k_\perp} W_{\omega, k_\perp} \frac{\partial}{\partial k_\perp^2} \ln \left(\frac{\varepsilon'' \delta\tilde{\varepsilon}_\perp}{\partial\varepsilon'/\partial k_\perp^2} \right)^2 \right]. \quad (43)$$

Выражение (43) определяет поток энергии P_{ω, k_\perp} с точностью до членов второго порядка малости по параметру (32) в пределе $\beta \rightarrow 0$. Случай произвольных значений параметра β (34) рассматривался в [3]. Если зависимостью $\delta\tilde{\varepsilon}_\perp$ от \mathbf{a} можно пренебречь, то поток энергии также не зависит от спектра неоднородностей и пропорционален среднеквадратичному возмущению концентрации

$$\langle |\delta N|^2 \rangle = \int d^3\mathbf{a} \langle |\delta N|^2 \rangle_{\mathbf{a}}. \quad (44)$$

Такой случай реализуется, в частности, в приближении холодной плазмы (18) при

$$\delta\tilde{\varepsilon}_\perp = -1/N_{\text{UHR}}, \quad (45)$$

где N_{UHR} — концентрация электронов в области верхнегибридного резонанса для плазменных колебаний с частотой ω . Отметим, что формула (42) получена при учёте разложения диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\omega, \mathbf{k}')$ вплоть до первого и второго порядков по Δk_\perp^2 для $\varepsilon''(\omega, \mathbf{k}')$ и $\varepsilon'(\omega, \mathbf{k}')$ соответственно (ср. (35), (36) и разложение (19) с учётом $(\partial\varepsilon'/\partial k_\parallel) \Delta k_\parallel = -(\partial\varepsilon'/\partial k_\perp^2) \Delta k_\perp^2$, использованное в [1]). Указанное уточнение приводит к некоторому расхождению формул (42)–(45) с результатами [1]. Однако при плавном изменении входящих в (43) параметров эти расхождения можно считать малыми.

* Это выражение было получено в [3] в пределе (45), т. е. без учёта влияния пространственной дисперсии на коэффициент поляризации неоднородностей.

Уравнения переноса (12), (15), (21) с источником $R_{\omega, k_{\perp}}^{(\text{scat})}$ в дифференциальной форме (41) должны быть дополнены граничными условиями в точках слияния двух ветвей плазменных колебаний, имеющих различное значение продольной компоненты $k_{\parallel}(\omega, k_{\perp})$ их волнового вектора \mathbf{k} (см. формулу (9) и её обсуждение):

$$W_{\omega, k_{\perp}}^{(1)} = W_{\omega, k_{\perp}}^{(2)}, \quad P_{\omega, k_{\perp}}^{(1)} = -P_{\omega, k_{\perp}}^{(2)} \quad \text{при} \quad \partial \varepsilon' / \partial k_{\parallel} = 0. \quad (46)$$

Эти условия обеспечивают непрерывный переход плазменных колебаний с ветви 1 на ветвь 2 в точке слияния двух корней дисперсионного уравнения (8). В заключение заметим, что при условии (32) выражение (23) для дополнительного декремента $\Delta\gamma_{\omega, k_{\perp}}$ при достаточно плавном изменении входящих в него параметров также может быть приведено к дифференциальной форме. В том же приближении, что и ранее, получаем

$$\Delta\gamma_{\omega, k_{\perp}} = -\frac{1}{2}\gamma_{\omega, k_{\perp}} \int d^3\mathbf{x} \langle |\delta N|^2 \rangle_{\mathbf{x}} \frac{1}{\varepsilon''^2 \delta \tilde{\varepsilon}_{\perp}} \frac{\partial}{\partial k_{\perp}^2} \left[\left(\frac{\varepsilon'' \delta \tilde{\varepsilon}_{\perp}}{\partial \varepsilon' / \partial k_{\perp}^2} \right)^2 \frac{\partial}{\partial k_{\perp}^2} \delta \tilde{\varepsilon}_{\perp} \right]. \quad (47)$$

Видно, что в рассматриваемом случае (16), (31) отношение $\Delta\gamma_{\omega, k_{\perp}} / \gamma_{\omega, k_{\perp}}$ оказывается малым, порядка $\langle |\delta N|^2 \rangle / N_0^2 \ll 1$, в соответствии с наложенным ранее условием (29).

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В приближении случайных фаз сформулированы уравнения, описывающие взаимодействие коротковолновых колебаний с мелкомасштабными неоднородностями плазмы с учётом тепловых эффектов пространственной дисперсии. Показано, что влияние дисперсии приводит к появлению поправки $\Delta\gamma_{\omega, k_{\perp}}$ к декременту поглощения плазменной волны, которая описывает дополнительный, не связанный со столкновениями и резонансными частицами обмен энергией между волной и электронами плазмы, возникающий при взаимодействии с неоднородностями. Дополнительный энергообмен может оказаться значительным в противоположном (16) случае не очень вытянутых неоднородностей, когда влиянием диссипации на их взаимодействие с плазменными колебаниями можно пренебречь (см. (30)). Такие условия могут реализоваться, по-видимому, в E -слое ионосферы.

При воздействии мощной радиоволны на F -слой ионосферы реализуется случай сильно вытянутых вдоль поля \mathbf{V} неоднородностей и плазменных колебаний, поляризованных почти ортогонально магнитному полю. Для указанных условий получено дифференциальное выражение (43) для потока энергии плазменных колебаний в пространстве волновых чисел, возникающего в результате многократного рассеяния волн на неоднородностях, поперечные размеры которых превышают длину волны плазменных колебаний. Это выражение является непосредственным обобщением результатов [1] на случай сильной пространственной дисперсии. Влияние дисперсии учитывается в нём с помощью коэффициента (38), зависящего от поперечного волнового числа плазменных колебаний. Соответствующее уравнение переноса позволяет описать диффузию плазменных волн по спектру в процессе многократного рассеяния.

Используя полученные выражения, можно оценить связанное с рассеянием уширение спектра плазменных колебаний в добавочной области фазового пространства с большими поперечными волновыми числами k_{\perp} (порядка обратного ларморовского радиуса электронов ρ_{Be}), которая образуется под влиянием пространственной дисперсии на частотах меньших кратных электронных гирогармоник (см. [3, 4]). Учитывая, что производная $\partial \varepsilon' / \partial k_{\perp}^2 \sim \rho_{Be}^2$, а коэффициент $\delta \tilde{\varepsilon}_{\perp} \sim 1/N_{\text{UHR}}$, получаем $\Delta k_{\perp}^2 \sim \rho_{Be}^{-2} \langle |\delta N|^2 \rangle^{1/2} / N_{\text{UHR}}$, где среднеквадратичное возмущение электронной концентрации в мелкомасштабных неоднородностях в условиях обсуждаемых экспериментов $\langle |\delta N|^2 \rangle \sim 10^{-4} N_{\text{UHR}}^2$. Такое уширение оказывается достаточным для увеличения циклотронного поглощения плазменных волн в

окрестности кратных электронных гирогармоник. Строгий расчёт усиления циклотронного поглощения в указанных условиях выходит за рамки данной работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 00–02–17054).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Найдём коэффициент поляризации неоднородностей (5) в бесстолкновительной плазме. Возмущение функции распределения электронов $\delta f(\mathbf{v})$, создаваемое плазменными колебаниями, равно сумме двух слагаемых:

$$\delta f(\mathbf{v}) = \delta f^{(1)}(\mathbf{v}) + \delta f^{(\text{pol})}(\mathbf{v}), \quad (\text{П.1})$$

первое из которых соответствует распространению волн в однородной среде, а второе связано с поляризацией неоднородностей (3) полем плазменных волн. Это слагаемое можно представить в виде

$$\delta f^{(\text{pol})}(\mathbf{v}) = \int d\omega d^3k d^3\mathbf{a} e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}} \delta \tilde{f}(\mathbf{v}; \omega, \mathbf{k}, \mathbf{k} - \mathbf{a}, \mathbf{a}) \delta N_{\mathbf{a}} \varphi_{\omega, \mathbf{k} - \mathbf{a}}, \quad (\text{П.2})$$

где функция $\delta \tilde{f}(\mathbf{v}; \omega, \mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{a})$ удовлетворяет линеаризованному кинетическому уравнению

$$(-i\omega + i\mathbf{k}\mathbf{v}) \delta \tilde{f} - \omega_{Be} [\mathbf{v}\mathbf{h}] \frac{\partial \delta \tilde{f}}{\partial \mathbf{v}} = -i \frac{e}{m} \mathbf{k}' \frac{\partial \tilde{f}_{\mathbf{a}}(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}}, \quad (\text{П.3})$$

правая часть которого зависит от нормированной функции распределения электронов в неоднородностях $\tilde{f}_{\mathbf{a}}(\mathbf{v})$, определённой в (3). Решение уравнения (П.3) имеет вид

$$\begin{aligned} \delta \tilde{f}(\mathbf{v}; \omega, \mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{a}) &= \frac{e}{m} e^{-ia \sin \theta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{in\theta}}{\omega + i\nu - k_{\parallel} v_{\parallel} - n\omega_{Be}} L_n(\mathbf{v}; \omega, \mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{a}), \\ L_n(\mathbf{v}; \omega, \mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{a}) &= n\omega_{Be} \frac{(\mathbf{k}_{\perp} \mathbf{k}'_{\perp})}{k_{\perp}^2} J_n(a) \frac{\partial \tilde{f}_{\mathbf{a}}(\mathbf{v})}{\partial (v_{\perp}^2/2)} + \\ &+ k'_{\parallel} J_n(a) \frac{\partial \tilde{f}_{\mathbf{a}}(\mathbf{v})}{\partial v_{\parallel}} - i\omega_{Be} \frac{[\mathbf{k}_{\perp} \mathbf{k}'_{\perp}] \mathbf{h}}{k_{\perp}^2} a J'_n(a) \frac{\partial \tilde{f}_{\mathbf{a}}(\mathbf{v})}{\partial (v_{\perp}^2/2)}, \\ a &= \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_{Be}}, \quad \omega_{Be} = \frac{eB}{mc}, \quad \mathbf{h} = \mathbf{B}/B, \quad \nu \rightarrow +0. \end{aligned} \quad (\text{П.4})$$

Здесь θ — угол между векторами \mathbf{v}_{\perp} и \mathbf{k}_{\perp} , $J_n(a)$ — функция Бесселя n -го порядка, $J'_n(a) = dJ_n(a)/da$. Согласно определению (4) поляризационный коэффициент (5) равен

$$\begin{aligned} \mu(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{k}') &= -4\pi e \int d^3v \delta \tilde{f}(\mathbf{v}; \omega, \mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{a} = \mathbf{k} - \mathbf{k}') = \\ &= -\frac{4\pi e^2}{m} \int d^3v \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{J_n(a) L_n(\mathbf{v}; \omega, \mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{a} = \mathbf{k} - \mathbf{k}')}{\omega + i\nu - k_{\parallel} v_{\parallel} - n\omega_{Be}}. \end{aligned} \quad (\text{П.5})$$

Выражение (П.5) согласуется с (27): коэффициенту μ_1 в (27) соответствуют первые два слагаемых в определении L_n (П.4), а коэффициенту μ_2 — третье слагаемое. Видно также, что появление мнимых частей у коэффициентов $\mu_{1,2}$ связано с влиянием резонансных частиц, удовлетворяющих условию $\omega -$

$k_{\parallel}v_{\parallel} - n\omega_{Be} = 0$. В случае $\{k_{\parallel}, k'_{\parallel}\} \rightarrow 0$ выражение (П.5) приводится к виду (37), (38), а в пределе $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}'$ равно

$$\mu(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{k}) = -\delta\tilde{\varepsilon}(\omega, \mathbf{k}) k^2, \quad (\text{П.6})$$

где $\delta\tilde{\varepsilon}(\omega, \mathbf{k})$ — вклад электронов в продольную диэлектрическую проницаемость плазмы с невозмущённой функцией распределения электронов $\tilde{f}_{\mathbf{a}\mathbf{e}}(\mathbf{v})$ (при $\mathbf{a}\mathbf{e} = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$). В случае максвелловского распределения электронов в неоднородностях (с температурой T_e), при

$$\tilde{f}_{\mathbf{a}\mathbf{e}}(\mathbf{v}) = \tilde{f}^{(M)}(\mathbf{v}) \equiv \left(\frac{m}{2\pi T_e}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2T_e}\right), \quad (\text{П.7})$$

вычисление интеграла (П.5) даёт

$$\begin{aligned} \mu^{(M)}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{k}') &= -\frac{4\pi e^2}{T_e} \left\{ \frac{k_{\parallel}k'_{\parallel}}{k_{\parallel}^2} + i\sqrt{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} w(z_n) \times \right. \\ &\times \left[\left(\frac{k_{\parallel}k'_{\parallel}}{k_{\parallel}^2} z_n + \frac{(\mathbf{k}_{\perp}\mathbf{k}'_{\perp})}{k_{\perp}^2} \frac{n\omega_{Be}}{\omega} z_0 \right) A_n(x) - i \frac{[\mathbf{k}_{\perp}\mathbf{k}'_{\perp}]_{\mathbf{h}}}{k_{\perp}^2} \frac{\omega_{Be}}{\omega} z_0 x A'_n(x) \right] \Big\}, \quad (\text{П.8}) \\ w(z) &= e^{-z^2} \left[1 + \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{t^2} dt \right], \quad z_n = \frac{\omega - n\omega_{Be}}{|k_{\parallel}| \sqrt{2T_e/m}}, \\ A_n(x) &= e^{-x} I_n(x), \quad x = k_{\perp}^2 T_e / (m \omega_{Be}^2). \end{aligned}$$

Здесь $w(z)$ — функция Крампа [5], $I_n(x)$ — функция Бесселя n -го порядка от мнимого аргумента, $A'_n(x) = dA_n(x)/dx$.

Для стационарных неоднородностей теплового происхождения гармоники возмущения концентрации электронов $\delta N_{\mathbf{a}\mathbf{e}}$ пропорциональны соответствующему возмущению температуры $\delta T_{e\mathbf{a}\mathbf{e}}$:

$$(\delta T_{e\mathbf{a}\mathbf{e}}/T_e)/(\delta N_{\mathbf{a}\mathbf{e}}/N_0) = \eta(\mathbf{a}\mathbf{e}), \quad (\text{П.9})$$

где коэффициент $\eta(\mathbf{a}\mathbf{e})$ зависит от параметров плазмы. При условии (П.9) справедливы выражения

$$\tilde{f}_{\mathbf{a}\mathbf{e}}(\mathbf{v}) = \left(1 + \eta T_e \frac{\partial}{\partial T_e}\right) \tilde{f}^{(M)}(\mathbf{v}), \quad \mu(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{k}') = \left(1 + \eta T_e \frac{\partial}{\partial T_e}\right) \mu^{(M)}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{k}'). \quad (\text{П.10})$$

Полученные выражения легко обобщаются на случай изменения δN и δT_e во времени.

Квазилинейная теория. Получим уравнение, описывающее обратное влияние плазменных волн на функцию распределения электронов фоновой плазмы $f^{(0)}(\mathbf{v})$ из (2). В квазилинейном приближении имеем

$$\frac{\partial f^{(0)}(v_{\parallel}, v_{\perp})}{\partial t} = D + \Delta D, \quad (\text{П.11})$$

где

$$D = \frac{e}{2\pi m} \int_0^{2\pi} d\phi \left\langle (-\nabla\phi) \frac{\partial \delta f^{(1)}(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \right\rangle, \quad \Delta D = \frac{e}{2\pi m} \int_0^{2\pi} d\phi \left\langle (-\nabla\phi) \frac{\partial \delta f^{(\text{pol})}(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \right\rangle.$$

Здесь ϕ — азимутальный угол, характеризующий направление вектора \mathbf{v}_{\perp} . Первое слагаемое в правой части (П.11) соответствует квазилинейной теории в однородной среде [5]. В используемых обозначениях

$$D = 2\pi \left(\frac{e}{m}\right)^2 \int d\omega d^3k \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{U}_n J_n^2(a) \langle |\varphi|^2 \rangle_{\omega, \mathbf{k}} \delta(\omega - k_{\parallel}v_{\parallel} - n\omega_{Be}) \hat{U}_n f^{(0)}(v_{\parallel}, v_{\perp}), \quad (\text{П.12})$$

$$\hat{U}_n = n\omega_{Be} \frac{\partial}{\partial(v_{\perp}^2/2)} + k_{\parallel} \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}},$$

где интегрирование производится по области $\omega > 0$. Второе слагаемое ΔD учитывает поляризацию неоднородностей полем плазменных колебаний. Используя (П.2), (П.4) и вычисляя входящие в определение ΔD тройные корреляторы с помощью (1), получаем искомое выражение

$$\begin{aligned} \Delta D = & i \left(\frac{e}{m} \right)^2 \int d\omega d^3k d^3k' d^3\mathbf{a} \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k} + \mathbf{a}) \langle |\delta N|^2 \rangle_{\mathbf{a}} \times \\ & \times \left[\frac{\mu^*(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{k}')}{k^2 \varepsilon^*(\omega, \mathbf{k})} \langle |\varphi|^2 \rangle_{\omega, \mathbf{k}'} + \frac{\mu(\omega, \mathbf{k}', \mathbf{k})}{k'^2 \varepsilon(\omega, \mathbf{k}')} \langle |\varphi|^2 \rangle_{\omega, \mathbf{k}} \right] \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{U}_n \frac{J_n(a) L_n(\mathbf{v}; \omega, \mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{a})}{\omega + i\nu - k_{\parallel} v_{\parallel} - n\omega_{Be}} + \text{к.с.}, \end{aligned} \quad (\text{П.13})$$

где функция L_n определена в (П.4). Входящие в (П.12), (П.13) корреляционные функции $\langle |\varphi|^2 \rangle_{\omega, \mathbf{k}}$ с учётом (9) выражаются через спектральную плотность энергии плазменных волн (10). Уравнения (П.11)–(П.13) совместно с (15), (21)–(23) образуют полную систему, описывающую взаимодействие плазменных волн с электронами в среде со случайными неоднородностями. Используя выражение [5]

$$\varepsilon''(\omega, \mathbf{k}) = -\frac{4\pi^2 e^2}{m} \int d^3v \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n^2(a) \delta(\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - n\omega_{Be}) \hat{U}_n f^{(0)}(\mathbf{v})$$

и тождество

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dv_{\parallel} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(a) L_n(\mathbf{v}; \omega, \mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{a}) = 0,$$

можно убедиться, что эта система обеспечивает сохранение суммарной энергии волн и частиц в процессе их взаимодействия (см. (25), (26)).

ЛИТЕРАТУРА

1. Грач С. М., Караштин А. Н., Митяков Н. А. и др. // Физика плазмы. 1978. Т. 4, вып. 6. С. 1330.
2. Митяков Н. А., Рапорт В. О., Трахтенгерц В. Ю. // Изв. вуз. Радиофизика. 1975. Т. 18, № 9. С. 1273.
3. Васьков В. В., Пулинец С. А., Рябова Н. А. Циклотронное поглощение плазменных колебаний, возбуждаемых мощной радиоволной в окрестности кратных электронных giroгармоник: Препринт № 4 (1114) ИЗМИРАН. — М., 1998.
4. Васьков В. В., Пулинец С. А., Рябова Н. А. // Геомагнетизм и аэрономия. 1999. Т. 39, № 4. С. 44.
5. Ахиезер А. И., Ахиезер И. А., Половин Р. В. и др. Электродинамика плазмы. — М.: Наука, 1974.
6. Гинзбург В. Л., Рухадзе А. А. Волны в магнитоактивной плазме. — М.: Наука, 1970.
7. Кадомцев Б. Б. // Вопросы теории плазмы. — М.: Атомиздат, 1964. — Вып. 4. С. 188.
8. Васьков В. В., Гуревич А. В. // Геомагнетизм и аэрономия. 1983. Т. 23, № 6. С. 901.

Институт земного магнетизма,
ионосферы и распространения
радиоволн РАН, г. Троицк,
Московская обл., Россия

Поступила в редакцию
12 октября 1999 г.

THE EFFECT OF SPATIAL DISPERSION ON THE INTERACTION OF SHORT-WAVELENGTH OSCILLATIONS WITH SMALL-SCALE PLASMA IRREGULARITIES*V. V. Vas'kov*

Using the statistical random-phase approximation, we derive equations describing the interaction of short-wavelength oscillations with irregularities of a magnetized plasma taking into account the thermal effects of spatial dispersion. It is shown that an additional energy exchange between the wave and the plasma electrons, which is not related to resonance particles and collisions, occurs in a medium with random irregularities due to the effect of spatial dispersion. This energy exchange can be significant if the scales of the irregularities along the magnetic field are not very large, so that the dispersion effects in the interaction of a wave with irregularities are greater than the dissipative ones. We consider in detail the case, typical for the ionosphere, where the irregularities are field-aligned and the plasma oscillations are polarized almost perpendicular to the magnetic field. An equation describing the differential redistribution of plasma-oscillation energy in the wavenumber space due to multiple scattering by the irregularities was obtained taking into account the influence of spatial dispersion on the scattering process. We discuss application of the results obtained to the interpretation of some ionospheric experiments.

УДК 621.372.413:621.372.8

СОГЛАСОВАНИЕ КВАЗИОПТИЧЕСКИХ ОТКРЫТЫХ РЕЗОНАТОРОВ С ВОЛНОВОДНОЙ ЛИНИЕЙ ПЕРЕДАЧИ

И. К. Кузьмичёв

Рассмотрен полусимметричный открытый резонатор (ОР), включённый в волноводную линию передачи, в котором возбуждается первый высший тип колебаний. Показано, что, выбирая правильным образом размеры элемента связи, можно получить высокую эффективность возбуждения исследуемого колебания в силу согласования структуры возбуждающего и рабочего полей.

Проанализировано поведение резонансных коэффициентов отражения и передачи, а также нагруженной добротности ОР в зависимости от параметров одномерных Е-поляризованных дифракционных решёток, располагаемых в раскрыве элемента связи, абсолютные размеры которого составляют несколько длин волн. Вычисления проведены с учётом резонансных потерь и потерь на возбуждение. Отличие расчёта от эксперимента не превышает 13 %, что позволяет, изменяя параметры дифракционных решёток в раскрыве элемента связи, создавать открытые резонансные системы с наперёд заданными свойствами.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время открытые резонаторы (ОР) находят широкое применение в технике научного эксперимента в миллиметровом диапазоне длин волн [1]. Наиболее часто ОР используются в составе волноводного тракта СВЧ и возбуждаются с помощью сосредоточенных элементов связи (щель или отверстие) [2, 3]. Особенностью такого способа возбуждения является появление сопутствующего излучения во внешнее пространство [4], которое не только должно влиять на связь резонатора с волноводной линией передачи, но и приводить к дополнительным потерям для такой резонансной системы. Учитывая, что в ряде практических случаев используются ОР в оболочках [1, 5], это излучение будет приводить к сгущению спектра за счёт возбуждения дополнительных типов колебаний в таких системах [6]. Кроме того, один из недостатков такой связи состоит в сложности создания ОР с наперёд заданными свойствами. Поэтому при использовании ОР в составе волноводной линии передачи целесообразно применять апертурный способ возбуждения резонатора [7], который обладает существенными преимуществами по сравнению с сосредоточенным способом, так как обеспечивает значительно более высокую эффективность возбуждения рабочего типа колебаний и селекцию спектра резонатора в силу согласования структуры возбуждающего E_v и рабочего E_p полей. Однако при создании различных устройств, основным элементом конструкции которых является ОР с апертурным способом возбуждения, необходимо решать ряд практических задач. К таким задачам можно отнести следующие. Во-первых, необходимо разработать конструкцию ОР с апертурным элементом связи, выполненным на сферическом зеркале резонатора. Во-вторых, для каждого конкретного случая применения ОР должен быть выбран коэффициент связи, который определяется параметрами одномерной Е-поляризованной решётки в раскрыве рупорного излучателя.

Поэтому целью данной работы является изучение особенностей построения ОР с апертурной связью, обладающего наперёд заданными свойствами.

1. СОГЛАСОВАНИЕ ПО ПОЛЮ

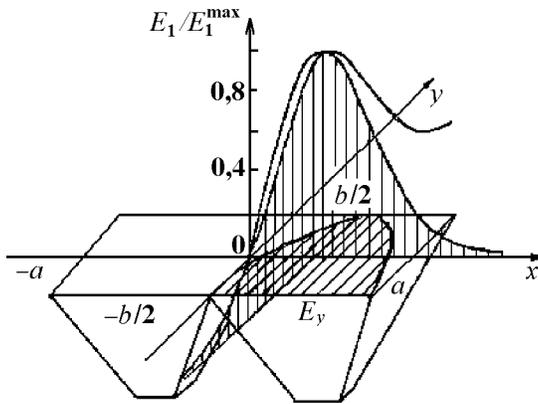


Рис. 1. Расположение возбуждающего элемента связи с сечением $a \times b$ на плоском зеркале ОР и эпюры распределения возбуждающего и рабочего полей бротности резонансной системы. В противном случае целесообразно использовать полусимметричный ОР, в котором возбуждается первый высший тип колебаний TE_{10q} (в функциях Гаусса—Эрмита), распределение поля которого на зеркале резонатора имеет вид двух “пятен”, расположенных симметрично относительно плоскости, проходящей через центр зеркала. При этом через одно пятно резонатор можно возбуждать, а через второе — выводить из него сигнал.

Оценим эффективность возбуждения типа колебаний TE_{10q} в полусимметричном ОР с помощью прямоугольного волновода с сечением $a \times b$ (см. рис. 1). В предположении, что волновод является одномодовым с единственной распространяющейся волной типа H_{10} , компонента \dot{E}_y последней в декартовой системе координат имеет вид [9]

$$\dot{E}_y = j \frac{\omega \mu_a a}{\pi} H_{0z} \sin \frac{\pi x}{a}, \quad (1)$$

где $\omega = 2\pi f$ — круговая частота, μ_a — абсолютная магнитная проницаемость, a — длина широкой стороны волновода, H_{0z} — амплитуда продольной составляющей магнитного поля. Здесь и далее опущен множитель $\exp\{-j\beta z\}$, описывающий изменение \dot{E}_y вдоль оси z .

Считаем, что апертуры зеркал ОР бесконечны, тогда распределение поля первого высшего типа колебаний в таком резонаторе в плоскости $z = 0$ описывается выражением [10]

$$E_1(x, y) = A \frac{\sqrt{2} x}{w_0} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w_0^2}\right), \quad (2)$$

где A — амплитудный множитель, w_0 — радиус пятна поля на плоском зеркале ОР (в плоскости $z = 0$) для низшего типа колебаний TE_{00q} .

Как известно из теории зеркальных антенн [11], для получения высокого коэффициента использования площади раскрыва (КИП) необходимо обеспечить согласование полей в фокальной плоскости рефлектора и в раскрыве облучателя. Поэтому в нашем случае можно использовать функционал [11],

При построении резонансных систем проходного типа с апертурными элементами связи целесообразно использовать полусимметричный ОР. Это связано с тем, что выполнить такой элемент связи на плоском зеркале резонатора не представляет больших трудностей. В то же время реализация элемента связи, геометрические размеры которого составляют несколько длин волн, на сферическом отражателе ОР представляет довольно сложную задачу. Поэтому в качестве одного из возможных вариантов решения этой проблемы было предложено заменить сферическое зеркало с радиусом кривизны D на систему плоский отражатель—плоско-

выпуклая диэлектрическая линза с фокусным расстоянием $F = D$ [8]. Однако это приемлемо в том случае, когда не предъявляются высокие требования к до-

бротности резонансной системы. В противном случае целесообразно использовать полусимметричный ОР, в котором возбуждается первый высший тип колебаний TE_{10q} (в функциях Гаусса—Эрмита), распределение поля которого на зеркале резонатора имеет вид двух “пятен”, расположенных симметрично относительно плоскости, проходящей через центр зеркала. При этом через одно пятно резонатор можно возбуждать, а через второе — выводить из него сигнал.

Оценим эффективность возбуждения типа колебаний TE_{10q} в полусимметричном ОР с помощью прямоугольного волновода с сечением $a \times b$ (см. рис. 1). В предположении, что волновод является одномодовым с единственной распространяющейся волной типа H_{10} , компонента \dot{E}_y последней в декартовой системе координат имеет вид [9]

$$\dot{E}_y = j \frac{\omega \mu_a a}{\pi} H_{0z} \sin \frac{\pi x}{a}, \quad (1)$$

где $\omega = 2\pi f$ — круговая частота, μ_a — абсолютная магнитная проницаемость, a — длина широкой стороны волновода, H_{0z} — амплитуда продольной составляющей магнитного поля. Здесь и далее опущен множитель $\exp\{-j\beta z\}$, описывающий изменение \dot{E}_y вдоль оси z .

Считаем, что апертуры зеркал ОР бесконечны, тогда распределение поля первого высшего типа колебаний в таком резонаторе в плоскости $z = 0$ описывается выражением [10]

$$E_1(x, y) = A \frac{\sqrt{2} x}{w_0} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w_0^2}\right), \quad (2)$$

где A — амплитудный множитель, w_0 — радиус пятна поля на плоском зеркале ОР (в плоскости $z = 0$) для низшего типа колебаний TE_{00q} .

Как известно из теории зеркальных антенн [11], для получения высокого коэффициента использования площади раскрыва (КИП) необходимо обеспечить согласование полей в фокальной плоскости рефлектора и в раскрыве облучателя. Поэтому в нашем случае можно использовать функционал [11],

который описывает эффективность возбуждения исследуемого типа колебаний в ОР

$$\eta = \frac{\left| \int_S E_v E_p^* dS \right|^2}{\int_S |E_v|^2 dS \int_S |E_p|^2 dS}, \quad (3)$$

где E_v и E_p — структуры возбуждающего и рабочего полей, которые определяются выражениями (1) и (2), а интегрирование ведётся по бесконечной плоскости вблизи одного из зеркал. Значок * обозначает функцию, комплексно сопряжённую данной. Этот функционал, по сути дела, показывает, какая доля мощности одной волны (возбуждающей) переходит в другую (рабочую).

С учётом (1)–(3) эффективность возбуждения η колебаний TEM_{10q} в ОР с помощью прямоугольного волновода сечением $a \times b$ определяется выражением

$$\eta = \frac{\pi^3}{4\tilde{a}^3\tilde{b}} \Phi^2\left(\frac{\tilde{b}}{2}\right) \exp\left\{-2\left(\frac{\pi}{2\tilde{a}}\right)^2\right\} \left[2 + (W(g) + W^*(g)) \exp\left\{\left(\frac{\pi}{2\tilde{a}}\right)^2 - \tilde{a}^2\right\}\right]^2, \quad (4)$$

где $\Phi(\tilde{b}/2)$ — интеграл вероятности, $W(g)$ — интеграл вероятности комплексного аргумента, $g = \pi/(2\tilde{a}) + j\tilde{a}$, $\tilde{a} = a/w_0$, $\tilde{b} = b/w_0$.

Результаты расчёта представлены на рис. 2, где приведены линии постоянного уровня η в зависимости от нормированных размеров элемента связи. Как видно из рисунка, правильный выбор размеров отверстия связи позволяет увеличить эффективность возбуждения колебания TEM_{10q} в ОР. Максимальная величина $\eta = 0,433$ достигается при нормированных размерах элемента связи $\tilde{a} = 1,668$ и $\tilde{b} = 1,980$. При этом необходимо отметить, что в случае возбуждения рассматриваемого колебания через два пятна поля при оптимальных размерах двух запитывающих элементов связи эффективность возбуждения колебания TEM_{10q} в ОР возрастёт до значения $\eta = 0,866$. Это лишь немного меньше, чем эффективность возбуждения колебания TEM_{00q} , которая равна 0,880 [7]. Если же размеры рупорного излучателя выбрать из условий $1,518 \leq \tilde{a} \leq 1,823$ и $1,678 \leq \tilde{b} \leq 2,324$, то эффективность возбуждения исследуемого колебания уменьшится несущественно и составит 0,425.

Для проведения экспериментальных исследований нами был изготовлен полусимметричный ОР четырёхмиллиметрового диапазона длин волн (см. рис. 3). Апертуры обоих зеркал равны 38 мм, радиус кривизны сферического отражателя $D = 39$ мм, абсолютные размеры возбуждающего элемента связи $a = 6,9$ мм, $b = 9,6$ мм. Длина такого рупорного излучателя составляет 85 мм и выбирается из условия получения равномерного распределения фазы в его раскрыве (фазовая ошибка в раскрыве меньше 10°). Эффективность возбуждения моды TEM_{1015} в резонаторе данной геометрии, вычисленная по формуле (4) с учётом выражений [10]

$$\omega = \frac{\pi c}{L} \left(15 + \frac{1}{\pi} \arccos \sqrt{1 - L/D}\right), \quad (5)$$

$$w_0^2 = \frac{2}{k} D \sqrt{(L/D)(1 - L/D)}, \quad (6)$$

определяющих резонансное расстояние L между зеркалами и радиус w_0 пятна поля на плоском зеркале ОР для колебания TEM_{0015} , составила 0,426. Здесь c — скорость света в вакууме, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, λ — длина волны в свободном пространстве. Поскольку абсолютные размеры отверстия связи составляют несколько длин волн, необходимо разделить функции возбуждения и регулировки связи ОР с волноводным трактом. Для этих целей можно использовать

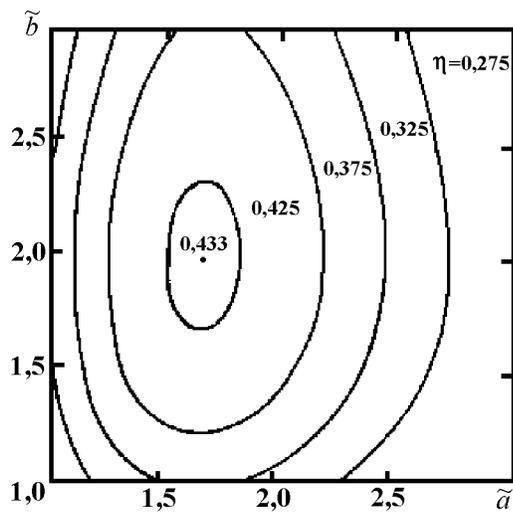


Рис. 2. Эффективность возбуждения колебаний TEM_{10q} в зависимости от нормированных размеров возбуждающего элемента связи

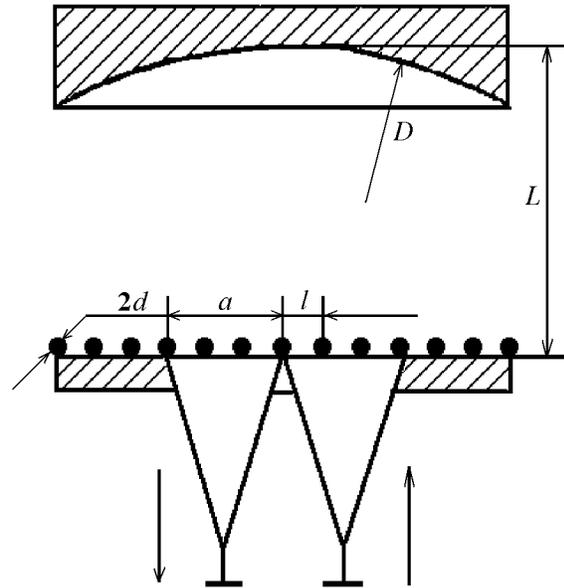


Рис. 3. Исследуемый открытый резонатор

одномерные E -поляризованные дифракционные решётки с высоким значением коэффициента отражения [12], которые располагаются перед раскрытием апертурного элемента связи (см. рис. 3). В этом случае, правильно выбирая связь ОР с подводящим волноводным трактом, можно обеспечить при прочих равных условиях не только меньшие потери возбуждения резонатора, но также значительно улучшить его избирательные свойства.

2. СОГЛАСОВАНИЕ ПО СВЯЗИ

Определим коэффициенты отражения и передачи ОР. Для этого используем известный метод суммирования парциальных коэффициентов отражения и передачи такой электродинамической системы [9, 13]. Поскольку решение задачи будем искать в приближении плоских волн, а рабочий тип колебаний ОР представляет собой квазиоптический пучок, то для ответа на вопрос о правомерности такого рассмотрения необходимо определить систематическую погрешность, связанную с аппроксимацией поля квазиоптического пучка плоской волной. Как показано в работе [14], эта погрешность, обусловленная неплоским характером поля квазиоптического пучка, полностью определяется потерями на преобразование энергии в другие типы волн резонансной системы (потери на несогласованное возбуждение). Численное интегрирование распределений полей для рассмотренного в предыдущем разделе типа колебаний TEM_{1015} по методике, описанной в работе [15], позволило установить, что величина этих потерь не превышает 12 %. Это говорит о допустимости решения задачи в приближении плоских волн.

Опуская промежуточные выкладки, запишем в окончательном виде выражения, определяющие резонансные коэффициенты отражения и передачи ОР, измеренные за сферическим зеркалом резонатора для рассмотренного в предыдущем разделе типа колебаний

$$R = r_1 \frac{t_1^2 r_2 S_B S_p^2}{1 - r_1 r_2 S_p^2}, \quad (7)$$

$$T = \frac{t_1 t_2 S_B S_p^2}{1 - r_1 r_2 S_p^2}, \quad (8)$$

где $r_{1,2}$ и $t_{1,2}$ — модули коэффициентов отражения и передачи входного (индекс 1) и выходного (индекс 2) зеркал резонатора, S_B и S_P — коэффициенты передачи по полю за проход волны от одного зеркала до другого, которые определяются потерями на возбуждение $\alpha_B = P_B/P_{\text{рез}} = 1 - \eta(S_B = \exp(-\alpha_B/2))$ и резонансными потерями $\alpha_P = \alpha_d + \alpha_{\text{ом}} = (P_d + P_{\text{ом}})/P_{\text{рез}} = (S_P = \exp(-\alpha_P/2))$. Здесь P_B — потери мощности, которые в общем случае складываются из потерь, связанных с излучением мощности за кромки одного из зеркал резонатора, и потерь мощности на несогласованное возбуждение исследуемого колебания в ОР по причине несоответствия полей E_B и E_P . Поскольку мы рассматриваем ОР с бесконечными апертурами зеркал, то P_B определяется потерями мощности на несогласованное возбуждение. P_d и $P_{\text{ом}}$ — мощности соответственно дифракционных и омических потерь, $P_{\text{рез}}$ — мощность, поступившая в ОР через элемент связи в момент резонанса.

Сначала рассмотрим зависимость коэффициента отражения R , определяемого выражением (7), от величины резонансных потерь α_P в предположении равенства коэффициентов отражения и передачи входного и выходного зеркал ОР, т. е. при $r_1 = r_2 = r$ и $t_1 = t_2 = t$. Эти зависимости приведены на рис. 4 для проволочных E -поляризованных решёток, помещаемых в раскрытие апертурного элемента связи, периоды l которых равны 0,4 мм (кривые 1, 2); 0,6 мм (кривая 3); 0,78 мм (кривая 4); 1,0 мм (кривая 5) и 1,2 мм (кривая 6). Здесь необходимо отметить, что все рассматриваемые проволочные решётки намотаны на круглом каркасе диаметром 60 мм вольфрамовым проводом толщиной $2d = 0,02$ мм. Вычисления модуля коэффициента отражения $|r|$ исследуемых решёток производятся по формуле [16]

$$|r| = \frac{1 - k^2 l_0 l_2}{\sqrt{(1 + k^2 l_0^2)(1 + k^2 l_2^2)}}, \quad (9)$$

где $l_0 = (l/\pi) \ln(l/(2\pi d))$, $l_2 = \pi d^2/l$. Для нахождения модуля коэффициента передачи проволочных решёток используем известное соотношение [12]

$$|r|^2 + |t|^2 = 1. \quad (10)$$

Кривые на рис. 4 построены для двух значений потерь на возбуждение: $S_B = 0,751$ ($\eta = 0,426$, кривые 1, 3÷6), что соответствует запитке резонатора через один апертурный элемент связи, и $S_B = 0,929$ ($\eta = 0,852$, кривая 2), что равносильно возбуждению ОР с помощью двух апертурных элементов связи. Общее поведение расчётных зависимостей R при уменьшении резонансных потерь хорошо согласуется с поведением экспериментально измеренного коэффициента отражения ОР при уменьшении расстояния между отражателями L/D [17], что эквивалентно уменьшению α_P . Как видно из рис. 4, для получения более низкого значения коэффициента отражения R необходимо либо увеличивать эффективность возбуждения рабочего типа колебаний, либо использовать более редкие проволочные решётки, что равносильно увеличению коэффициента передачи t . Это обусловлено тем, что в случае малых резонансных потерь определяющее влияние на коэффициент отражения резонатора оказывают потери на связь.

На рис. 5 приведены зависимости R от коэффициента передачи решёток t при различных потерях на возбуждение и резонансных потерях. По мере уменьшения потерь на возбуждение от $S_B = 0,751$ (кривая 2) до $S_B = 1$ (кривая 4, потери на возбуждение отсутствуют) при фиксированном значении t удаётся получить более низкое значение R . Кривой 3 соответствует $S_B = 0,929$; все три зависимости построены при $\alpha_P = 2,796 \cdot 10^{-2}$. При увеличении резонансных потерь

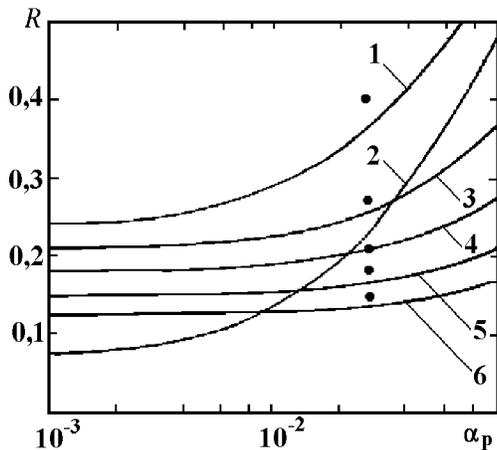


Рис. 4. Зависимости коэффициента отражения ОР с апертурной связью от величин резонансных потерь для различных решёток и потерь на возбуждение

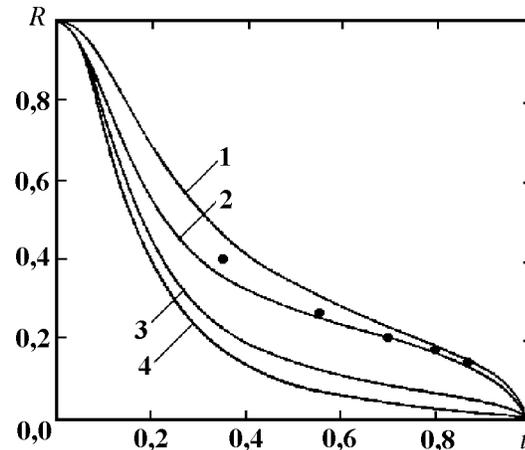


Рис. 5. Поведение коэффициента отражения ОР при изменении прозрачности решёток и потерь на возбуждение

($\alpha_p = 6 \cdot 10^{-2}$) коэффициент отражения от резонатора возрастает (кривая 1, $S_B = 0,751$). При этом необходимо отметить, что получить согласованный режим ($R = 0$) в случае проходного резонатора за счёт изменения параметров проволочных E -поляризованных решёток в раскрытие апертурного элемента связи невозможно, так как случай $R = 0$ соответствует $t = 1$ (см. рис. 5), т. е. фактическому отсутствию решётки. Аналогичным образом нельзя получить пересвязанный режим ($R < 0$) в случае проходного резонатора.

Теперь рассмотрим зависимость резонансного коэффициента передачи T , определяемого выражением (8), от величины потерь α_p при тех же самых предположениях, при которых мы анализировали поведение резонансного коэффициента отражения R . Эти зависимости приведены на рис. 6 для различных проволочных E -поляризованных решёток, периоды l которых равны 0,4 мм (кривые 1, 2); 0,6 мм (кривая 3); 0,78 мм (кривая 4); 1,0 мм (кривая 5) и 1,2 мм (кривая 6). Кривые построены для двух значений потерь на возбуждение $S_B = 0,751$ (кривые 1, 3÷6) и $S_B = 0,929$ (кривая 2). Как видно из рис. 6, в случае слабой связи ($l = 0,4$ мм) и при наличии потерь на возбуждение, соответствующих запитке резонатора через два элемента связи (кривая 2), коэффициент передачи резко падает при резонансных потерях $\alpha_p > 5 \cdot 10^{-3}$. Увеличение потерь на возбуждение (кривая 1) приводит к ещё большему снижению резонансного коэффициента передачи T . Поэтому для получения малых потерь передачи при использовании густых решёток необходимо уменьшать резонансные потери α_p за счёт применения зеркал с большой апертурой и хорошим качеством обработки поверхности, а также использовать апертурную связь, которая позволяет ещё более снизить потери передачи за счёт уменьшения потерь на возбуждение. Уменьшить потери передачи можно также увеличением периода решётки, поскольку в случае малых резонансных потерь значение T меняется слабо. Например, для решётки с периодом $l = 0,78$ мм (кривая 4) это имеет место вплоть до $\alpha_p = 2 \cdot 10^{-2}$. В общем же случае выбор того или иного способа увеличения T всецело определяется тем, для каких целей используется ОР.

На рис. 7 представлены зависимости резонансного коэффициента передачи T от коэффициента передачи решёток t , построенные для различных резонансных потерь (кривая 1 соответствует $\alpha_p = 6 \cdot 10^{-2}$, а кривые 2–4 — $\alpha_p = 2,796 \cdot 10^{-2}$) и потерь на возбуждение (кривые 1, 2 соответствуют $S_B = 0,751$, кривая 3 — $S_B = 0,929$, а кривая 4 — $S_B = 1,0$). Как видно, в случае густых решёток с ростом резонансных потерь α_p коэффициент передачи резонатора падает. Поэтому для получения прежнего значения T необходимо увеличивать коэффициент

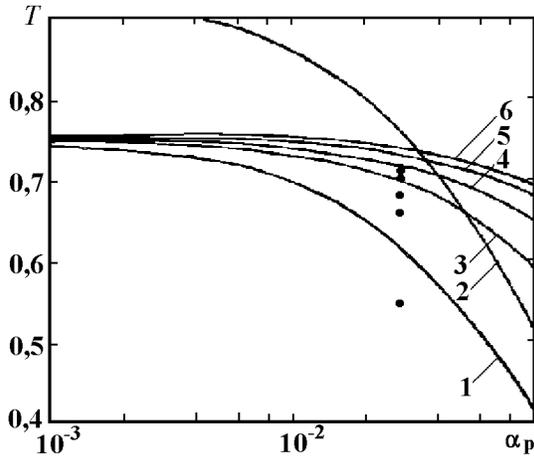


Рис. 6. Зависимости коэффициента передачи ОР от величины резонансных потерь для различных решёток и нескольких значений S_b

передачи решёток t (кривые 1, 2). В то же время с уменьшением потерь на возбуждение растёт резонансный коэффициент передачи (кривые 2–4).

Представляет также интерес анализ зависимости нагруженной добротности резонатора Q_n от коэффициента передачи решёток t . Для этого, опуская промежуточные выкладки, сразу выпишем выражение, определяющее нагруженную добротность резонатора:

$$Q_n = \frac{2kL \sqrt{r_1 r_2} S_p}{1 - r_1 r_2 S_p^2}. \quad (11)$$

Зависимости величины $Q_n/(kL)$ от коэффициента передачи решёток в предположении, что $r_1 = r_2 = r$ и $t_1 = t_2 = t$, приведены на рис. 8 для двух значений резонансных потерь: $\alpha_p = 2,796 \cdot 10^{-2}$ (кривая 1) и $\alpha_p = 6 \cdot 10^{-2}$ (кривая 2). При малых значениях t отличие нагруженной добротности ОР, возникающее при изменении резонансных потерь, проявляется намного сильнее. Это связано с тем, что при использовании густых решёток (случай слабой связи) нагруженная добротность ОР в основном определяется собственной добротностью Q_0 резонатора, которая, в свою очередь, всецело зависит от резонансных потерь. Но с увеличением t величина Q_n будет определяться внешней добротностью резонатора $Q_{вн}$, при этом изменение резонансных потерь практически не будет сказываться на значении Q_n .

В ряде практических случаев [18] важное значение приобретает такой параметр резонатора, как произведение резонансного коэффициента передачи T на величину нагруженной добротности Q_n . На рис. 9 представлены зависимости параметра $V = TQ_n/(kL)$, который в дальнейшем будем называть показателем эффективности ОР, от изменения коэффициента передачи решёток t для двух значений резонансных потерь: $\alpha_p = 2,796 \cdot 10^{-2}$ (кривые 1–3) и $\alpha_p = 6 \cdot 10^{-2}$ (кривые 4–6). Зависимости на рис. 9 построены при различных потерях на возбуждение ($S_b = 1$ — кривые 1, 4; $S_b = 0,929$ — кривые 2, 5; $S_b = 0,751$ — кривые 3, 6). Как видно, увеличение потерь на возбуждение приводит к уменьшению абсолютного значения V , в то время как при росте резонансных потерь максимум V смещается в сторону больших значений коэффициента передачи решёток t и уменьшается по величине (например при увеличении α_p от $2,796 \cdot 10^{-2}$ до $6 \cdot 10^{-2}$ параметр V уменьшается в 2,148 раза при $S_b = 1$). При этом при $\alpha_p = 2,796 \cdot 10^{-2}$ максимальному значению V соответствует $t = 0,166$, а при $\alpha_p = 6 \cdot 10^{-2}$ — $t = 0,241$. Таким образом,

для

увеличения

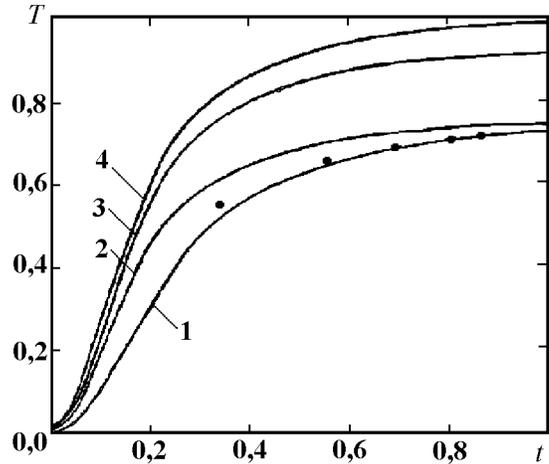


Рис. 7. Изменение коэффициента передачи резонатора в зависимости от прозрачности решёток и потерь на возбуждение

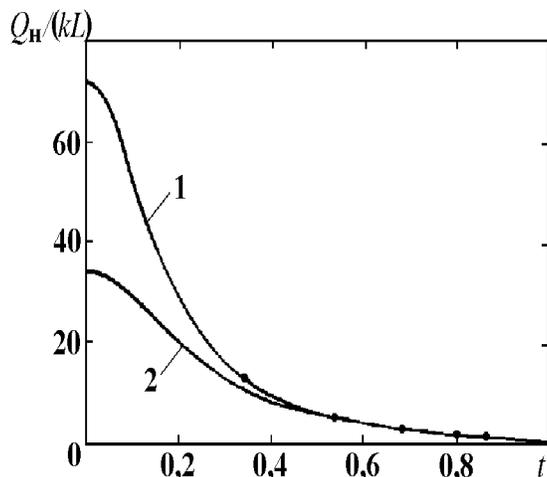


Рис. 8. Поведение нагруженной добротности ОР при изменении коэффициента передачи решётки

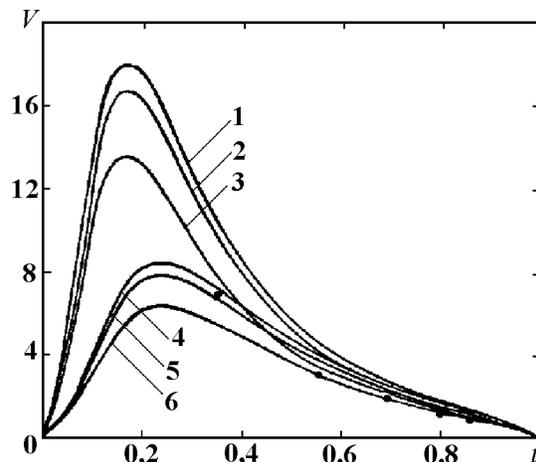


Рис. 9. Параметр эффективности ОР в зависимости от коэффициента передачи решётки

показателя эффективности ОР необходимо помимо апертурного способа возбуждения резонатора использовать густые решётки и зеркала с хорошим качеством обработки поверхности и большой апертурой.

С целью экспериментальной проверки выполненных расчётов нами было проведено исследование проходного полусимметричного ОР с апертурными элементами связи с размерами $6,9 \times 9,6$ мм, в раскрывах которых помещались E -поляризованные проволочные решётки различного периода l . Измерения проводились в четырёхмиллиметровом диапазоне длин волн для колебаний TEM_{1015} ($L/D = 0,812$; $l = 0,78$ мм). Параметры ОР приведены в разделе 1, а блок-схема экспериментальной установки подробно описана в работе [19]. Отличие состоит лишь в том, что оба элемента связи, представляющие собой рупорные антенны, расположены на плоском зеркале резонатора (см. рис. 3). При этом развязка между элементами связи составляла не больше -30 дБ.

Сначала в раскрывах апертурных элементов связи располагались проволочные решётки с периодом $l = 0,4$ мм; $0,6$ мм; $0,78$ мм; $1,0$ мм и $1,2$ мм, после чего для исследуемого типа колебаний TEM_{1015} измерялись коэффициенты отражения R и передачи T . Результаты измерений сведены в табл. 1. После этого для решётки с периодом $l = 0,78$ мм с помощью выражений (9)

Таблица 1

$l, \text{мм}$	R	T	Q_H
0,4	0,407	0,546	632
0,6	0,273	0,661	226
0,78	0,209	0,680	149
1,0	0,183	0,700	90
1,2	0,152	0,712	62

и (10) определялись коэффициенты отражения r и передачи t , а из выражения (7), зная коэффициент отражения $R_{\text{изм}} = 0,209$, находился коэффициент передачи S_p^2 , который оказался равным $0,972$ ($\alpha_p = 2,796 \cdot 10^{-2}$). Мы считаем, что S_p^2 остаётся неизменным, так как форма резонатора фиксирована. Поэтому при анализе коэффициентов отражения и передачи ОР в качестве одного из значений резонансных потерь использовалось $\alpha_p = 2,796 \cdot 10^{-2}$ ($S_p^2 = 0,972$). Здесь необходимо отметить, что эффективность возбуждения η колебаний TEM_{1015} в ОР, вычисленная по формуле (4) с учётом экспериментально измеренных L/D и w_0 для колебаний TEM_{0015} , оказалась равной $0,425$. Таким образом, при оценке эффективности возбуждения колебаний в резонаторе с достаточной для практических целей точностью можно пользоваться выражениями, определяющими резонансное расстояние между зеркалами ОР и размеры пятен полей на отражателях.

Измеренные коэффициенты отражения $R_{\text{изм}}$ и передачи $T_{\text{изм}}$ приведены в виде экспериментальных точек на зависимостях, представленных на рис. 4–7. Как видно, отличие расчётных и экспериментальных данных не превышает 13 %, что, с одной стороны, обусловлено решением задачи в приближении

плоских волн. С другой стороны, часть той мощности, которая перехватывается противоположащим зеркалом резонатора и в общем случае не участвует в возбуждении исследуемого колебания, после ряда переотражений поступает в приёмный и передающий тракты, приводя к изменению значений $R_{\text{изм}}$ и $T_{\text{изм}}$. Наиболее существенно это будет сказываться в случае редких проволочных решёток, располагаемых в раскрывах апертурных элементов связи и имеющих высокий коэффициент передачи t . Этим, по-видимому, и можно объяснить довольно высокие значения T для ряда решёток при заданной эффективности возбуждения колебания ТЕМ_{1015} , равной 0,426.

Нагруженные добротности ОР, в котором возбуждается колебание типа ТЕМ_{1015} при различных проволочных решётках в раскрывах апертурных элементов связи, измерялись по полуширине резонансной кривой [10]. Результаты измерений представлены в табл. 1, а в виде экспериментальных точек — на рис. 8, 9. Отличие расчётов и эксперимента не превышает 10 %, что говорит о возможности использовать выражение (11) для оценки величины нагруженной добротности ОР с апертурными элементами связи.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, проведённые исследования позволяют сделать ряд важных практических выводов:

- 1) Выбирая правильным образом размеры апертурных элементов связи, можно обеспечить высокую эффективность возбуждения первого высшего типа колебаний в ОР.
- 2) Используя высшие типы колебаний резонатора, можно создавать ОР проходного типа с апертурной связью.
- 3) Соответствующим образом выбирая параметры (период и коэффициент заполнения) одномерных E -поляризованных дифракционных решёток, располагаемых в раскрывах апертурных элементов связи, можно создавать ОР с любыми наперёд заданными коэффициентами резонансного отражения R и передачи T .
- 4) Предложено использовать для оценки качества ОР параметр эффективности V , представляющий собой произведение резонансного коэффициента передачи T на величину нагруженной добротности резонатора Q_n . При этом для каждой конкретной геометрии ОР этот параметр имеет оптимум, что особенно важно при практическом применении резонатора.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шестопапов В. П. Физические основы миллиметровой и субмиллиметровой техники: Т. 2. — Киев: Наукова думка, 1985. — Т. 2. 256 с.
2. Епишин В. А. // Квантовая электроника. 1978. Т. 5, № 6. С. 1263.
3. Шестопапов В. П. Дифракционная электроника. — Харьков: Вища школа, 1976. — 232 с.
4. Вайнштейн Л. А. Открытые резонаторы и открытые волноводы. — М.: Сов. радио, 1966. — 476 с.
5. Вертий А. А., Карнаухов И. М., Шестопапов В. П. Поляризация атомных ядер миллиметровыми волнами. — Киев: Наукова думка, 1990. — 232 с.
6. Вертий А. А., Деркач В. Н., Попенко Н. А., Шестопапов В. П. // Укр. физ. журнал. 1978. Т. 23, № 10. С. 1666.
7. Кузьмичёв И. К., Хлопов Г. И. // Квазиоптическая техника мм и субмм диапазонов волн. — Харьков: ИРЭ АН УССР, 1989. — С. 149.
8. Кузьмичёв И. К. // Распространение радиоволн в миллиметровом и субмиллиметровом диапазонах. — Харьков: ИРЭ НАН Украины, 1995. — С. 121.
9. Вольман В. И., Пименов Ю. В. Техническая электродинамика / Под ред. Г. З. Айзенберга. — М.: Связь, 1971. — 488 с.

10. Техника субмиллиметровых волн / Под ред. проф. В. А. Валитова. — М.: Сов. радио, 1969. — 480 с.
11. Хансен Р. К. Сканирующие антенные системы: В 2-х т.: Пер. с англ. / Под ред. Г. Т. Маркова, А. Ф. Чаплина. — М.: Сов. радио, 1966. — Т. 1. — 536 с.
12. Шестопалов В. П., Кириленко А. А., Масалов С. А., Сиренко Ю. К. Резонансное рассеяние волн: В 2-х т. — Киев: Наукова думка, 1986. — Т. 1. — 232 с.
13. Звелто О. Принципы лазеров: Пер. с англ. / Под ред. Т. А. Шмаонова. — М.: Мир, 1990. — 558 с.
14. Хлопов Г. И. // Радиотехника. — Харьков: Харьк. ун-т, 1972. — Вып. 21. С. 150.
15. Веремей В. В., Костенко А. А., Кузьмичёв И. К., Поединчук А. Е., Хлопов Г. И. // Радиотехнические системы миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов волн. — Харьков: ИРЭ АН УССР, 1991. — С. 110.
16. Вайнштейн Л. А. // Электроника больших мощностей. — М.: Наука, 1963. — Вып. 2. С. 26.
17. Андросов В. П., Кузьмичёв И. К. // Препринт № 354 ИРЭ АН УССР. — Харьков, 1987.
18. Костенко А. А., Кузьмичёв И. К., Хлопов Г. И. // Применение радиоволн миллиметровых и субмиллиметровых диапазонов. — Харьков: ИРЭ АН УССР, 1990. — С. 61.
19. Кузьмичёв И. К., Шестопалов В. П. // Доп. НАН України, 1996. Вып. 12. С. 90.

Институт радиоп физики и
электроники НАН Украины,
г. Харьков, Украина

Поступила в редакцию
1 марта 1999 г.

MATCHING OF OPEN QUASIOPTICAL RESONATORS WITH WAVEGUIDE FEEDS

I. K. Kuz'michev

We consider a semi-symmetrical open resonator (OR) connected to a waveguide in which the first higher mode is excited. It is shown that the structures of the exciting and working fields can be matched and thus high efficiency of excitation of the considered mode can be achieved if the coupler sizes are chosen properly.

We analyze the behavior of the resonance coefficients of reflection and transmission as well as the loaded Q -factor of the OR as the functions of the parameters of the one-dimensional, E -polarized diffraction gratings placed in the coupling aperture. The calculations have been made with account of the resonance and excitation losses. The numerical results differ from the experimental data by no more than 13%. This allows one to construct open resonance systems with the required characteristics by changing the parameters of the diffraction gratings in the coupler aperture.

УДК 538.574.2

НОВЫЙ МЕТОД РАСЧЁТА ТОНКОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ВИБРАТОРА

В. А. Неганов, И. В. Матвеев

В статье рассматривается нетрадиционный с точки зрения антенных задач подход к анализу тонкого электрического вибратора. В основе рассмотрения лежат непосредственно уравнения Максвелла, записанные в цилиндрической системе координат, что позволяет свести задачу не к интегродифференциальному, а к интегральному уравнению. Другая особенность рассмотрения связана с использованием математического аппарата теории сингулярных интегральных уравнений (СИУ), развитого для полосково-щелевых структур сверх- и крайне высоких частот. Задача сведена к решению СИУ относительно производной по продольной координате от плотности поверхностного тока на вибраторе. Результаты численного анализа показали быструю сходимость данного метода и достаточную простоту расчётов.

ВВЕДЕНИЕ

Тонкие электрические вибраторы получили самое широкое распространение. Они применяются как в качестве самостоятельных антенн, так и в виде элементов сложных антенных систем. Расчёт тонкого электрического вибратора основан, как правило, на решении интегрального уравнения для распределения поверхностного тока на вибраторе. К настоящему времени известны интегродифференциальные уравнения Поклингтона и Харрингтона, а также интегральное уравнение Халлена [1–3].

Наиболее часто интегральные уравнения решают методом моментов [1–3]. По существу, он сводится к преобразованию указанных уравнений в систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с N неизвестными. Эти неизвестные обычно представляют собой коэффициенты разложения распределения тока по некоторой подходящей системе базисных функций. В зависимости от того, какие выбраны базисные и весовые функции, существует достаточно большое разнообразие конкретных реализаций метода интегральных уравнений. К числу таких реализаций можно отнести метод Галёркина, сшивание в дискретных точках, согласование реакций и т. д. Основным недостатком этих подходов следует считать, на наш взгляд, то, что при решении указанных выше интегральных уравнений исходные сингулярные ядра, записанные в неявной форме, заменяются на регулярные (фредгольмовские). В результате получаются интегральные уравнения первого рода с фредгольмовскими ядрами, нахождение решений которых является некорректно поставленной задачей [4]. В результате остаётся открытым вопрос проверки истинности решения и установления его адекватности рассматриваемой физической задаче.

Эминовым С. И. было проведено подробное исследование сходимости численных решений для различных базисных функций. При этом не было выявлено существенного преимущества одних систем базисных функций перед другими. Им был введён новый класс базисных функций, названных собственными функциями интегродифференциального оператора [5]. Однако использование подобных функций сильно усложняет алгоритм численного решения.

В данной статье рассматривается нетрадиционный с точки зрения антенных задач подход к анализу тонкого электрического вибратора (рис. 1). В основе рассмотрения лежат непосредственно уравнения Максвелла, записанные в цилиндрической системе координат. Другая особенность рассмотрения связана с использованием математического аппарата теории сингулярных интегральных уравнений (СИУ), развитого для полосково-щелевых структур сверх- и крайне высоких частот [6, 7]. В ре-

зультате было получено СИУ относительно производной по продольной координате от плотности поверхностного тока на вибраторе (плотности поверхностного заряда). Наиболее близкие подходы для излучающих систем, состоящих из ленточных проводников, были развиты в [8–10], где получены похожие уравнения.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ПЕРВОГО РОДА

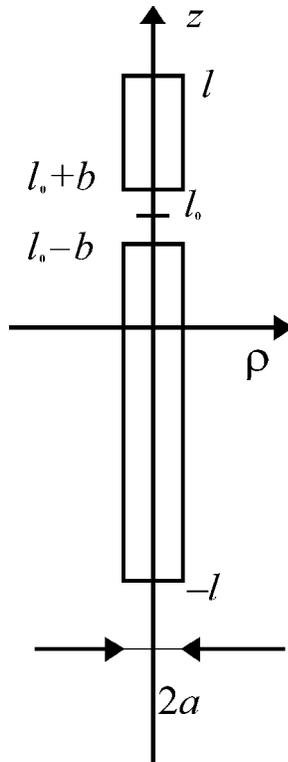


Рис. 1

Рассмотрим тонкий проводник длины $2l$ и радиуса a , возбуждаемый в точке разрыва l_0 генератором высокочастотных колебаний (рис. 1). Под воздействием ЭДС генератора в вибраторе возникают продольные электрические токи, которые распределяются по его поверхности таким образом, что создаваемое ими электромагнитное поле удовлетворяет уравнениям Максвелла, граничным условиям на поверхности проводника и условию излучения на бесконечности. Из-за осевой симметрии вибратора и малости радиуса a ($a \ll \lambda$, где λ — длина волны высокочастотного излучения вибратора) можно считать, что на боковой поверхности вибратора (см. рис. 1) имеют место только продольная составляющая поверхностной плотности электрического тока η_z^e . При выводе СИУ используется общепринятая модель тонкого вибратора ($a \ll \lambda$) [1–3], согласно которой поверхностная плотность электрического тока η_z^e вместе с эквивалентной поверхностной плотностью магнитного тока η_z^m в зазоре заменяются продольной поверхностной электрической плотностью тока $\eta_z(z)$ на поверхности цилиндра радиуса a . Этот ток считается непрерывным в области зазора и обращается в нуль на концах вибратора. Торцевые токи не учитываются. Составляющая E_z вектора электрического поля, создаваемая нитью тока, на поверхности цилиндра $\rho = a$ ($z \in [-l, l]$) обращается в нуль всюду, кроме области зазора ($z \in [l_0 - b; l_0 + b]$), где она приравнивается стороннему полю $E^{ct}(z)$.

В рамках принятой физической модели будем рассматривать излучение вибратора, не зависящее от азимутального угла φ . Исходной для получения СИУ является однородная система уравнений Максвелла, записанная в цилиндрической системе координат (ρ, φ, z) . В предположении отсутствия вариации поля по координате φ указанная система уравнений распадается на две независимые системы относительно составляющих E_ρ, E_z, H_φ и E_φ, H_ρ, H_z . Очевидно, что при рассмотрении поля излучения вибратора необходимо исходить из системы, описывающей поведение составляющих E_ρ, E_z и H_φ . Из уравнений Максвелла при отсутствии вариации поля по координате φ следуют формулы (временная зависимость в виде $e^{i\omega t}$)

$$E_\rho = -\frac{1}{i\omega\epsilon_0\epsilon} \frac{\partial H_\varphi}{\partial z}, \quad E_z = \frac{1}{i\omega\epsilon_0\epsilon} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho H_\varphi) \right] \quad (1)$$

и волновое уравнение для азимутальной составляющей H_φ вектора магнитного поля:

$$\frac{\partial^2 H_\varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial H_\varphi}{\partial \rho} \right) + \left(\gamma^2 - \frac{1}{\rho^2} \right) H_\varphi = 0, \quad (2)$$

где $\gamma^2 = k^2 \epsilon \mu$, $k = \omega/c$ — волновое число, ϵ и μ — относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды, ϵ_0 — диэлектрическая проницаемость вакуума, c — скорость света в вакууме.

Рассмотрим решение волнового уравнения (2) для цилиндрической области $\rho > a$ (см. рис. 1), не содержащей источников. Представляя функцию H_φ по координате z в виде интеграла Фурье

$$H_\varphi(\rho, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(\rho, h) e^{-ihz} dh, \quad (3)$$

перепишем соотношение (2) для Фурье-амплитуды R :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial R}{\partial \rho} \right) + \left(\gamma^2 - h^2 - \frac{1}{\rho^2} \right) R = 0. \quad (4)$$

Из теории функций Бесселя с учётом свойств функций Ханкеля и условия излучения на бесконечности решение уравнения Бесселя (4) можно записать следующим образом:

$$R(\rho, h) = A(h) H_1^{(2)} \left(-i\rho \sqrt{h^2 - \gamma^2} \right), \quad (5)$$

где $H_1^{(2)} \left(-i\rho \sqrt{h^2 - \gamma^2} \right)$ — функция Ханкеля второго рода первого порядка, $A(h)$ — неизвестный множитель. Таким образом,

$$H_\varphi(\rho, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(h) H_1^{(2)} \left(-i\rho \sqrt{h^2 - \gamma^2} \right) e^{-ihz} dh, \quad (6)$$

и из второго соотношения из формул (1) следует

$$i\omega \varepsilon_0 \varepsilon E_z(\rho, z) = -i \int_{-\infty}^{+\infty} A(h) \sqrt{h^2 - \gamma^2} H_0^{(2)} \left(-i\rho \sqrt{h^2 - \gamma^2} \right) e^{-ihz} dh, \quad (7)$$

где $H_0^{(2)}$ — функция Ханкеля второго рода нулевого порядка.

Обратимся к граничным условиям при $\rho = a$ (на поверхности вибратора). Они имеют вид

$$H_\varphi = \begin{cases} \eta_z, & z \in [-l, l]; \\ 0, & z \notin [-l, l], \end{cases} \quad (8)$$

$$E_z = \begin{cases} E^{\text{ст}}(z), & z \in [l_0 - b, l_0 + b]; \\ 0, & z \notin [l_0 - b, l_0 + b], \end{cases} \quad (9)$$

где η_z — неизвестная пока поверхностная плотность тока, $E^{\text{ст}}$ — заданное стороннее поле в щели вибратора.

Для определения неизвестного коэффициента $A(h)$ воспользуемся граничным условием (8) при $z \in [-l, l]$:

$$\eta_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(h) H_1^{(2)} \left(-ia \sqrt{h^2 - \gamma^2} \right) e^{-ihz} dh, \quad (10)$$

откуда с учётом свойств интеграла Фурье и граничного условия (8) следует, что

$$A(h) = \frac{1}{2\pi H_1^{(2)} \left(-ia \sqrt{h^2 - \gamma^2} \right)} \int_{-l}^l \eta_z(z') e^{ihz'} dz'. \quad (11)$$

Подставляя выражение (11) в соотношение (7) при $\rho = a$, нетрудно получить интегральное уравнение для определения функции $\eta_z(z \in [-l, l])$:

$$i\omega\varepsilon_0\varepsilon E^{\text{CT}}(z) = \int_{-l}^l \eta_z(z') G_1(z', z) dz', \quad (12)$$

где

$$G_1(z', z) = -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{\gamma^2 - h^2} H_0^{(2)}(-ia\sqrt{h^2 - \gamma^2}) e^{ih(z'-z)}}{H_1^{(2)}(-ia\sqrt{h^2 - \gamma^2})} dh. \quad (13)$$

Заметим, что соотношение (12) с ядром (13) является неоднородным интегральным уравнением первого рода. Ниже подробно исследуем поведение ядра $G_1(z', z)$.

2. СИНГУЛЯРНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ

Очевидно, что при $|h| \rightarrow \infty$ подынтегральная функция в ядре $G_1(z', z)$ возрастает как $|h|$ и интеграл в (13) является расходящимся. Для устранения расходимости в ядре (13) перейдём в интегральном уравнении (12) от функции $\eta_z(z)$ к её производной $\eta'_z = \partial\eta_z/\partial z$. Так как на концах вибратора поверхностная плотность тока η_z обращается в нуль ($\eta_z(-l) = \eta_z(l) = 0$), то можно записать соотношение

$$\int_{-l}^l \eta_z(z') e^{ihz'} dz' = \frac{i}{h} \int_{-l}^l \eta'_z(z') e^{ihz'} dz', \quad (14)$$

которое следует из формулы интегрирования по частям.

С учётом соотношения (14) интегральное уравнение (12) переписывается следующим образом:

$$i\omega\varepsilon_0\varepsilon E^{\text{CT}}(z) = \int_{-l}^l \eta'_z(z') G(z', z) dz', \quad (15)$$

где

$$G(z', z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{h^2 - \gamma^2} H_0^{(2)}(-ia\sqrt{h^2 - \gamma^2}) e^{ih(z'-z)}}{hH_1^{(2)}(-ia\sqrt{h^2 - \gamma^2})} dh. \quad (16)$$

Рассмотрим более подробно поведение ядра $G(z', z)$. С этой целью перепишем выражение для него в более удобном виде:

$$G(z', z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(h) e^{ih(z'-z)} dh, \quad (17)$$

где

$$g(h) = \frac{\sqrt{h^2 - \gamma^2} H_0^{(2)}(-ia\sqrt{h^2 - \gamma^2})}{hH_1^{(2)}(-ia\sqrt{h^2 - \gamma^2})}.$$

Определим асимптотическое поведение функции $g(h)$ при $|h| \rightarrow \infty$. С учётом того, что для достаточно больших h функция $\sqrt{h^2 - \gamma^2} \rightarrow |h|$, воспользуемся формулой для мнимого аргумента функций Ханкеля [11]:

$$H_\nu^{(2)}(-ix) = \frac{2i}{\pi} \exp(i\nu\pi/2) K_\nu(x), \quad (18)$$

где $K_\nu(x)$ — модифицированная функция Ханкеля ν -го порядка, $\nu = 0; 1$.

Так как при $x \rightarrow \infty$ $K_0(x) \rightarrow \sqrt{\pi/(2x)} e^{-x}$, $K_1(x) \rightarrow \sqrt{\pi/(2x)} e^{-x}$ [11], то

$$\lim_{|h| \rightarrow \infty} g(h) = -i|h|/h. \quad (19)$$

Рассмотрим теперь соответствующее асимптотическое ядро

$$G_\infty(z', z) = -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|h|}{h} e^{ih(z'-z)} dh. \quad (20)$$

С учётом известного соотношения [12]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ih(z'-z)} \operatorname{sgn} h dh = \frac{2i}{z' - z}, \quad (21)$$

где

$$\operatorname{sgn} h = \begin{cases} 1, & h > 0; \\ -1, & h < 0, \end{cases}$$

получим

$$G_\infty(z', z) = \frac{1}{\pi(z' - z)}. \quad (22)$$

Таким образом, ядро $G(z', z)$ в интегральном уравнении (15) в неявном виде содержит сингулярность типа Коши (22), поэтому уравнение (15) является сингулярным.

Выделим сингулярность в уравнении (15). С этой целью в подынтегральном выражении (16) для ядра $G(z', z)$ прибавим и вычтем слагаемое $\operatorname{sgn} h e^{ih(z'-z)}$. В результате несложных преобразований нетрудно записать следующее СИУ:

$$i\omega\varepsilon_0\varepsilon E^{\text{ст}}(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-l}^l \frac{\eta'_z(z')}{z' - z} dz' + \int_{-l}^l \eta'_z(z') K(z', z) dz', \quad (23)$$

где

$$K(z', z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta g(h) e^{ih(z'-z)} dh, \quad (24)$$

$$\Delta g(h) = \frac{\sqrt{h^2 - \gamma^2} H_0^{(2)}(-ia\sqrt{h^2 - \gamma^2})}{hH_1^{(2)}(-ia\sqrt{h^2 - \gamma^2})} + i \operatorname{sgn} h.$$

Соотношение (23) является СИУ первого рода относительно неизвестной производной по продольной координате от плотности поверхностного тока на вибраторе, т. е. фактически относительно плотности поверхностного заряда. СИУ (23) является новым интегральным уравнением теории тонкой цилиндрической вибраторной антенны.

3. РЕШЕНИЕ СИУ. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для решения СИУ (23) перейдём к новым безразмерным переменным τ и τ' с помощью соотношений $z = l\tau$, $z' = l\tau'$ и перепишем уравнение (23) в виде

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{J(\tau')}{\tau' - \tau} d\tau' = i\omega\varepsilon_0\varepsilon E^{\text{ст}}(\tau) - l \int_{-1}^1 J(\tau')K(\tau', \tau) d\tau' \equiv F(\tau), \quad (25)$$

где $J(\tau') = \eta'_z(l\tau')$,

$$K(\tau', \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta g(h) e^{ilh(\tau' - \tau)} dh. \quad (26)$$

Используя известные представления экспоненты в виде рядов по полиномам Чебышева [13]:

$$e^{ihl\tau'} = 2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^m J_m(hl) T_m(\tau')}{1 + \delta_{m,0}}, \quad e^{-ihl\tau} = \frac{2}{hl} \sum_{n=1}^{\infty} i^{n+1} n J_n(hl) U_{n-1}(\tau),$$

где $J_n(hl)$ — функции Бесселя первого рода, $T_m(\tau')$ и $U_n(\tau)$ — полиномы Чебышева первого и второго рода, $\delta_{m,0}$ — символ Кронекера, преобразуем ядро $K(\tau', \tau)$ к следующему виду:

$$K(\tau', \tau) = \frac{2i}{\pi l} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{n,m} T_m(\tau') U_{n-1}(\tau), \quad (27)$$

где

$$\alpha_{n,m} = \frac{i^{n+m} n}{1 + \delta_{m,0}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{J_n(hl) J_m(hl) \Delta g(h)}{h} dh.$$

Для решения СИУ (25) воспользуемся формулой обращения интеграла Коши [6]:

$$J(\tau) = \frac{1}{\pi \sqrt{1 - \tau^2}} \left[a_0 \pi - \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1 - \tau'^2}}{\tau' - \tau} F(\tau') d\tau' \right], \quad (28)$$

где a_0 — неизвестная постоянная, которая определяется из условия обращения в нуль поверхностной плотности тока η_z на концах вибратора ($\eta_z(-l) = \eta_z(l) = 0$). В соответствии с этими граничными условиями

$$\int_{-1}^1 J(\tau) d\tau = 0. \quad (29)$$

Соотношение (29) есть условие равенства нулю полного электрического заряда вибратора.

С учётом (25), (27) и (28) нетрудно записать следующее неоднородное интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода:

$$J(\tau) + \int_{-1}^1 J(\tau') G_2(\tau, \tau') d\tau' = f(\tau) + \frac{a_0}{\sqrt{1 - \tau^2}}, \quad (30)$$

где

$$G_2(\tau, \tau') = -\frac{2i}{\pi \sqrt{1 - \tau^2}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{n,m} T_n(\tau) T_m(\tau'), \quad f(\tau) = -\frac{i\omega\varepsilon_0\varepsilon}{\pi \sqrt{1 - \tau^2}} \int_{(l_0-b)/l}^{(l_0+b)/l} \frac{\sqrt{1 - \tau'^2}}{\tau' - \tau} E^{\text{ст}}(\tau') d\tau'.$$

Нетрудно показать, что коэффициенты $\alpha_{n,m}$ в (30) быстро убывают с ростом n и m . Поэтому суммирование по обоим индексам можно ограничить некоторым числом N . При этом соотношение (30) становится интегральным уравнением Фредгольма 2-го рода с вырожденным ядром. Решение (30) будем искать в виде

$$J(\tau) = \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} \left[a_0 - \frac{i\omega\varepsilon_0\varepsilon}{\pi} \int_{(l_0-b)/l}^{(l_0+b)/l} \frac{\sqrt{1-\tau'^2}}{\tau' - \tau} E^{\text{CT}}(\tau') d\tau' + \sum_{k=1}^N A_k T_k(\tau) \right], \quad (31)$$

где A_k — неизвестные постоянные, $k = 1, 2, \dots, N$.

После подстановки (31) в уравнение (30), получим систему линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов A_k :

$$A_k = \frac{2i}{\pi} \sum_{m=1}^N \alpha_{k,m} \left[a_0 \pi \delta_{0,m} - \frac{i\omega\varepsilon_0\varepsilon E^{\text{CT}}}{\pi} I_m + \frac{\pi}{2} A_m \right], \quad (32)$$

где $k = 1, 2, \dots, N$,

$$I_m = \int_{-1}^1 \int_{(l_0-b)/l}^{(l_0+b)/l} \frac{\sqrt{1-\tau'^2}}{\tau' - \tau} d\tau' \frac{T_m(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} d\tau.$$

Заметим, что при записи системы (32) мы предположили постоянство стороннего поля $E^{\text{CT}}(z)$ в зазоре: $E^{\text{CT}}(z) = \text{const}$ при $z \in [l_0 - b; l_0 + b]$. После вычисления коэффициентов A_k и подстановки их в формулу (31) вычисляем поверхностную плотность тока:

$$\eta_z(\tau) = \int_{-1}^{\tau} J(\tau') d\tau'.$$

Предложенным методом была рассчитана поверхностная плотность тока. На рис. 2–5 приведены характерные графики распределения действительной $\text{Re} \eta_z$ и мнимой $\text{Im} \eta_z$ составляющих плотности тока на вибраторе (выбрана нормировка $\omega\varepsilon_0\varepsilon E^{\text{CT}} = a/\lambda$). На рис. 2 приведены графики при $l_0 = 0$ для $l/\lambda = 1/4$, $a/\lambda = 1/400$, $b/l = 1/100$. На рис. 3 и 4 приведены графики соответственно при $l_0 = 0$ и $l_0 = 0,5$ для $l/\lambda = 1$, $a/\lambda = 1/400$, $b/l = 1/100$. На рис. 5 приведены графики при $l_0 = 0$ для $l/\lambda = 1/2$, $a/\lambda = 1/40$, $b/l = 1/100$. Результаты расчётов показали хорошее согласие с результатами работы [13]. В табл. 1 приведены данные по внутренней схо-

Таблица 1

N	$\tau = -0,75$	$\tau = -0,5$	$\tau = -0,25$	$\tau = 0$
4	22,56/13,9	1,22/0,76	15,46/9,68	20,2/13,63
6	1,16/5,56	1,18/6,35	0,2/1,16	0,82/5,02
8	1,22/2,6	0,49/1,16	0,036/0,096	0,55/1,66
10	0,03/0,16	0,053/0,29	0,21/1,3	0,2/1,43
12	0,25/0,97	0,2/0,81	0,11/0,5	0,16/0,89
14	0,04/0,28	0,073/0,53	0,11/0,91	0,065/0,63
16	0,16/0,91	0,02/0,12	0,032/0,21	0,071/0,57
18	0,049/0,45	0,058/0,58	0,028/0,3	0,025/0,34
20	0,028/0,29	0,015/0,17	0,009/0,12	0,028/0,22

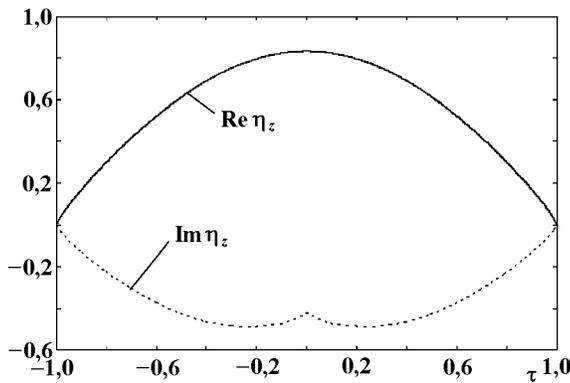


Рис. 2

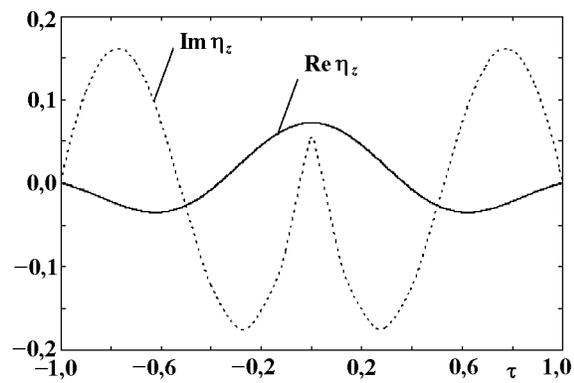


Рис. 3

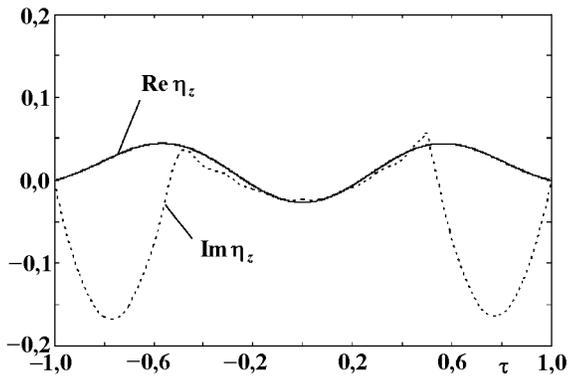


Рис. 4

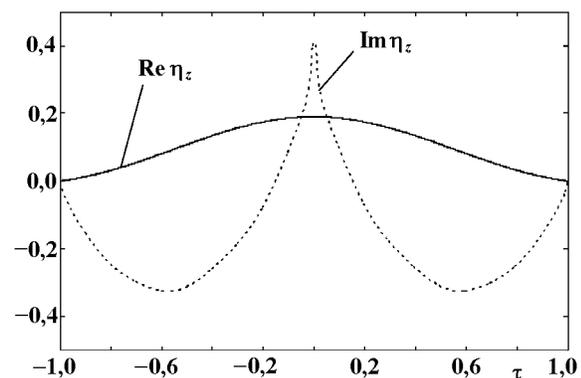


Рис. 5

димости метода для параметров вибратора, использованных при построении кривых на рис. 2. В числителе приведены в процентах значения выражения $|\text{Re}[\eta_z^{(N)}(\tau) - \eta_z^{(N-2)}(\tau)]/\text{Re}[\eta_z^{(N-2)}(\tau)]|$, а в знаменателе — выражения для $|\text{Im}[\eta_z^{(N)}(\tau) - \eta_z^{(N-2)}(\tau)]/\text{Im}[\eta_z^{(N-2)}(\tau)]|$, где $\eta_z^{(N)}(\tau)$ — значение η_z в точке τ при учёте в решении (31) N неизвестных постоянных A_k ($k = 1, \dots, N$). Из табл. 1 видно, что данный метод обладает достаточно быстрой сходимостью. В частности, для достижения относительных погрешностей менее 1,5 % достаточно ограничиться $N = 12$ слагаемыми.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, предложенный подход, базирующийся на математическом аппарате теории СИУ, позволил получить новое интегральное уравнение теории тонкого электрического вибратора относительно производной по продольной координате от плотности поверхностного тока на вибраторе. Отказ от использования векторного потенциала при анализе тонкого электрического вибратора не является принципиальным. Предложенным методом, представляя векторный потенциал в виде интеграла Фурье по координате z , можно преобразовать уравнения Поклингтона, Харрингтона и Халлена в соответствующие СИУ.

Основные преимущества предложенного метода расчёта распределения тока по сравнению с другими известными методами связаны с возможностью математически корректного решения СИУ. Для

сравнения, применение численных методов (например метода моментов) непосредственно к уравнениям Поклингтона, Харрингтона или Халлена с заменой сингулярного ядра на регулярное (как это делается в научной литературе) приводит к решению интегрального уравнения Фредгольма первого рода, поиск решения которого является некорректно поставленной задачей. В результате остаётся открытым очень важный вопрос проверки истинности решения и установления его адекватности рассматриваемой задаче. Непосредственное применение численных методов к вышеуказанным интегральным уравнениям приводит к плохой сходимости (особенно это касается мнимой части плотности поверхностного тока), к появлению относительной сходимости [6, 7]. Предложенный метод расчёта распределения поверхностной плотности тока позволил существенно улучшить сходимость решения и устранить явление относительной сходимости. Предложенный в статье подход, базирующийся на математическом аппарате СИУ, позволяет [6, 7], в принципе, получить оценки погрешностей полученных решений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вычислительные методы в электродинамике / Под ред. Р. Митры. — М.: Мир, 1977. — 486 с.
2. Сазонов Д. М. Антенны и устройства СВЧ. — М.: Высшая школа, 1988. — 432 с.
3. Антенно-фидерные устройства и распространение радиоволн. / Г. А. Ерохин, О. В. Чернышёв, Н. Д. Козырев, В. Г. Кочержевский; под ред. Г. А. Ерохина. — М.: Радио и связь, 1996. — 352 с.
4. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1986. — 288 с.
5. Эминов С. И. Теория интегрального уравнения тонкого вибратора // Радиотехника и электроника. 1993. Т. 38, вып. 12. С. 2160.
6. Неганов В. А., Нефёдов Е. И., Яровой Г. П. Полосково-щелевые структуры сверх- и крайне высоких частот. — М.: Наука, 1996. — 304 с.
7. Неганов В. А., Нефёдов Е. И., Яровой Г. П. Современные методы проектирования линий передачи и резонаторов сверх- и крайне высоких частот. — М.: Педагогика-Пресс, 1998. — 328 с.
8. Butler C. M., Wilton D. R. // IEEE Trans. Antennas Propagat. 1980. V. AP-28, № 1. P. 42.
9. Butler C. M. // IEEE Trans. Antennas Propagat. 1984. V. AP-32, № 3. P. 226.
10. Заборонкова Т. М., Кудрин А. В., Петров Е. Ю. // Изв. вуз. Радиофизика. 1998. Т. 41, № 3. С. 358.
11. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стигана. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1979. — 832 с.
12. Гахов Ф. Д., Черский Ю. И. Уравнения типа свёртки. — М.: Наука, 1978. — 296 с.
13. Математический анализ. Функции, пределы, ряды, цепные дроби / Под ред. Л. А. Люстерника, А. Р. Янпольского. — М.: Физматлит, 1961. — 440 с.
14. Эминов С. И. Метод собственных функций сингулярных операторов в теории дифракции применительно к электродинамическому анализу вибраторных и щелевых антенн: Автореф. дис. соиск. уч. ст. д. ф.-м. н. — Новгород, 1995. — 43 с.

Поволжская государственная
Академия телекоммуникаций и
информатики, г. Самара, Россия

Поступила в редакцию
15 июля 1999 г.

A NEW CALCULATION METHOD FOR THIN ELECTRIC DIPOLE

V. A. Neganov and I. V. Matveyev

V. A. Неганов, И. В. Матвеев

In this paper, we consider an approach to the analysis of a thin electric dipole, which is nontraditional for the antenna problems. The approach is directly based on the Maxwell equations written in cylindrical coordinates. This allows one to reduce the problem to a pure integral equation instead of integro-differential one. The other feature of our consideration is the use of the theory of singular integral equations (SIE) developed previously for the microwave and EHF strip-hole lines. The problem is reduced to the SIE with respect to the derivative of the density of surface current along the dipole over the longitudinal coordinate. The results of numerical analysis demonstrated fast convergence of this method and sufficient simplicity of calculations.

УДК 520.274

СИСТЕМЫ АПЕРТУРНОГО СИНТЕЗА С ПОЛНЫМ ПОКРЫТИЕМ ГЕКСАГОНАЛЬНОЙ ОБЛАСТИ В U, V -ПЛОСКОСТИ

Л. Г. Седин¹, Л. Е. Копилович²

Предложены и исследованы системы апертурного синтеза с размещением чувствительных элементов, обеспечивающим полное эквидистантное (регулярное) покрытие гексагональной области пространственных частот. Показаны преимущества таких конфигураций по сравнению с покрывающими квадратную область в u, v -плоскости: уменьшение числа элементов и симметрия синтезированного луча (при заданных разрешающей способности и поле зрения).

В работе рассмотрены некоторые схемы размещения элементов систем апертурного синтеза для радиоинтерферометров, обеспечивающие полное регулярное покрытие u, v -плоскости и позволяющие синтезировать максимально симметричный луч. В большинстве известных систем используется такое размещение элементов (антенн), которое обеспечивает полное покрытие квадратной u, v -области. К таким системам относятся, например, кресты Миллса, радиотелескопы ДКР-1000, УТР-2 и ряд других. При этом разрешение (ширина синтезированного луча) получается различным в разных его сечениях, что свидетельствует об определённой избыточности числа используемых элементов. Поскольку гексагональными ячейками можно полностью покрыть плоскость, представляет явный интерес поиск соответствующих конфигураций, обеспечивающих покрытие конечной гексагональной области пространственных частот. Как будет показано, такие конфигурации существуют и имеют преимущество перед известными.

Рассмотрим правильный гексагон с длиной стороны $r + 1$, пять сторон которого заполнены элементами, размещёнными эквидистантно с интервалом d . На рис. 1 вверху изображена такая конфигурация при $r = 3$, а внизу — покрытие u, v -плоскости, т. е. множество векторных расстояний между элементами (баз). Так как для пространственного спектра справедливо соотношение $S(u, v) = S^*(-u, -v)$, на рис. 1 показана половина u, v плоскости.

Показанная конфигурация обеспечивает решение поставленной задачи при любом $r \geq 2$. Это можно доказать, введя косоугольную систему координат с осями вдоль диагоналей гексагона и с началом в его центре. Выписывая выражения для векторных расстояний между элементами, можно убедиться, что базы полностью покрывают гексагональную область радиуса $2r$ в u, v -плоскости. Можно привести менее строгое, но наглядное доказательство: если заполнить элементами весь периметр гексагона, то получим не только полное, но двукратное покрытие указанной u, v -области, а устранение элементов с какой-либо из сторон не устраним ни одной базы, лишь нарушит двукратность. Но и при этом система остаётся избыточной (как и любая полная): некоторые базы повторяются от 2-х до $2r$ раз. Ниже будет дана количественная оценка избыточности (выражение (7)). Число элементов такой системы (назовём её гексагональной, по виду покрываемой ею области в u, v -плоскости) равно

$$k = 5r + 1, \quad (1)$$

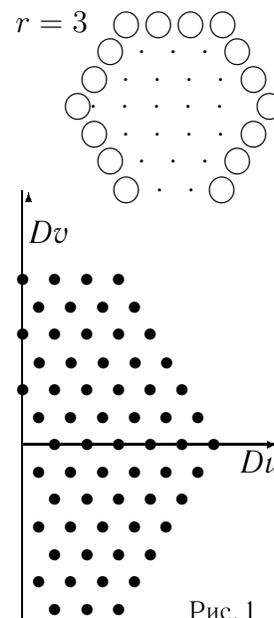


Рис. 1

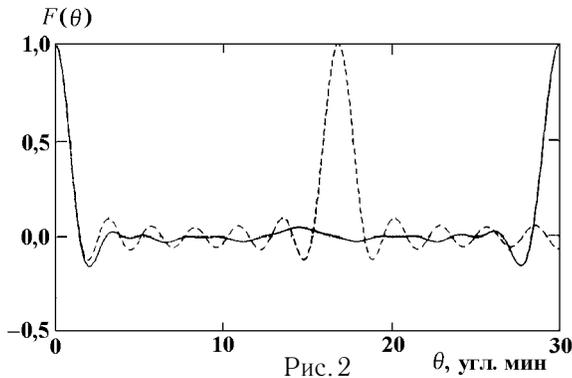


Рис. 2

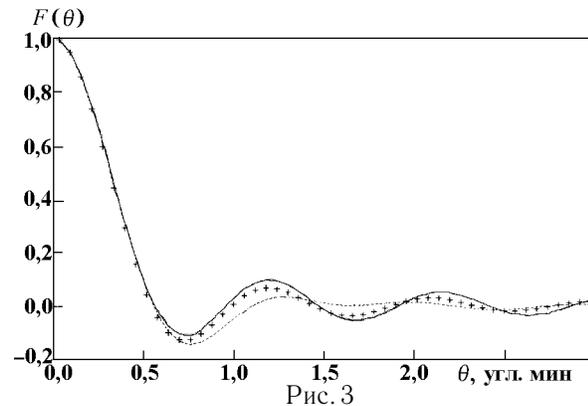


Рис. 3

а поперечники гексагональной u, v -области равны

$$D_{\max} = 4rd, \quad D_{\min} = 2\sqrt{3}rd. \quad (2)$$

Полное число точек в половине этой области (баз) составляет

$$M = 3r(2r + 1), \quad (3)$$

а периодичность их повторения, определяющая поле зрения (из-за формирования больших дифракционных лучей), лежит в пределах от $d/2$ до $d\sqrt{3}/2$. Именно последняя величина ограничивает поле зрения системы. Форма синтезированного луча описывается выражением

$$F(l, m) = \sum_{n=1}^M \cos\{(2\pi/\lambda)[lDu(n) + mDv(n)]\}, \quad (4)$$

где λ — длина волны, $l = \sin\theta \sin\phi$, $m = \sin\theta \cos\phi$, θ — угол с нормалью к плоскости интерферометра, ϕ — азимутальный угол, Du и Dv — проекции баз на оси пространственных частот u и v . На рис. 2 приведены формы синтезированных лучей для системы с $r = 3$, $d/\lambda = 640$ для наибольшего ($\phi = 0$, сплошная линия) и наименьшего ($\phi = 30^\circ$, пунктирная линия) полей зрения.

Видно, что небольшие отличия имеются в области боковых лепестков. В пределах полупериода луч практически совпадает с фурье-преобразованием функции, равной единице на гексагоне и нулю в остальной части u, v -плоскости. Обозначив $a = 2rd$ (длина стороны гексагона в u, v -плоскости), $\xi = a\pi l/\lambda$, $\eta = a\pi m/\lambda$, получим следующее выражение для формы синтезированного луча:

$$F(\xi, \eta) = (\xi \cos \xi \cos(\sqrt{3}\eta) - \sqrt{3}\eta \sin \xi \sin(\sqrt{3}\eta) - \xi \cos(2\xi))/[12\xi(\xi^2 - 3\eta^2)]. \quad (5)$$

На рис. 3 показаны лучи для таких же, как и на рис. 2, сечений $\phi = 0$ и $\phi = 30^\circ$. Там же крестиками изображён луч для сплошной круглой апертуры со “средним” радиусом $R_{\text{ср}} = (1 + \sqrt{3}/2)rd$,

$$F_0(\xi) = J_1(2R_{\text{ср}}\xi)/(R_{\text{ср}}\xi), \quad (6)$$

где J_1 — функция Бесселя первого порядка. Видно, что форма луча во всех трёх случаях практически совпадает. Отличия наблюдаются только в боковых лепестках, а луч круглой апертуры близок к лучам гексагонального интерферометра.

Выше была рассмотрена простейшая, но не самая эффективная конфигурация гексагональной системы апертурного синтеза, когда все элементы расположены на периметре гексагона. Если часть элементов перенести во внутреннюю область, их число может быть сокращено по сравнению с выражением (1). На рис. 4 показаны варианты структур для $2 \leq r \leq 7$, в которых элементы занимают три несмежных стороны гексагона, а несколько находятся внутри него.

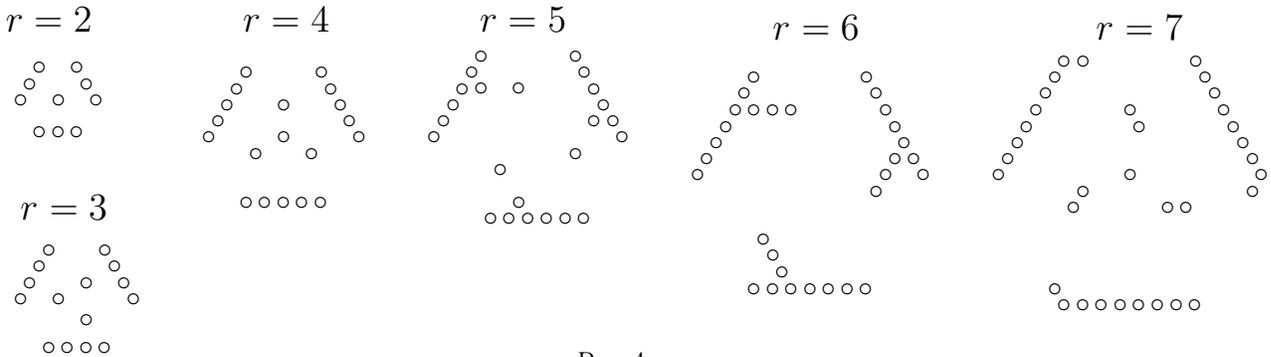


Рис. 4

Эффективность конфигурации системы удобно оценивать параметром α , равным отношению числа баз (выражение (3)) к максимально возможному $M_0 = k(k-1)/2$. Для системы, показанной на рис. 1, $M_0 = 2,5r(5r+1)$ и

$$\alpha = M/M_0 = 0,48 [1 + 0,3/r + O(r^{-2})]. \tag{7}$$

Значения α для неё лежат в пределах от 0,545 ($r = 2$) до 0,48 ($r \rightarrow \infty$). Для систем, показанных на рис. 4, α принимает бóльшие значения. Так, при $r = 2$ $\alpha \simeq 0,667$, при $r = 4$ $\alpha \simeq 0,632$, при $r = 7$ $\alpha \simeq 0,538$.

Оценим теперь преимущества гексагональной структуры по сравнению с покрывающей квадратную u, v -область. В качестве последней естественно взять П-образную систему, эквивалентную Т-образной [1]. Такая система изображена на рис. 5 (вверху) вместе с покрываемой ею u, v -областью (внизу). Для обеспечения одинаковой с гексагональной системой разрешающей способности при одинаковых полях зрения П-система должна на каждой из трёх сторон содержать $s = 2r + 1$ элементов при расстояниях между соседними элементами $d\sqrt{3}/2$ (здесь r и d — параметры гексагональной системы, эквивалентной П-системе). Тогда полное число элементов П-системы составит

$$k_{\text{п}} = 3s - 2 = 6r + 1, \tag{8}$$

а полное число баз

$$M_{\text{п}} = 2s(s-1) = 4r(2r+1). \tag{9}$$

Сравнение выражений (8) и (1) показывает, во сколько раз гексагональная система, приведённая на рис. 1, экономичнее П-системы:

$$k_{\text{п}}/k = 1,2 [1 - 1/(30r) + O(r^{-2})], \tag{10}$$

причём эффективность последней $\alpha_{\text{п}} \simeq 0,444 \times (1 + 1/(30r))$.

Если использовать конфигурации, представленные на рис. 4, эффективность гексагональной системы будет ещё выше. Например, при $r = 3$, $k = 15$, $k_{\text{п}} = 19$ и $k_{\text{п}}/k \simeq 1,32$.

Как показано в [2], более эффективные системы апертурного синтеза, покрывающие квадратную u, v -область, образуются путём перемножения линейных разностных базисов (см. также [3]). Схема самой экономичной из таких структур, содержащей 16 элементов, изображена на рис. 6. Однако и она уступает по эффективности гексагональной, состоящей из 15-ти элементов.

Возникает естественный вопрос: существуют ли системы с более высокой степенью симметрии, чем у гексагональных, обеспечивающие регулярное (эквидистантное) размещение точек

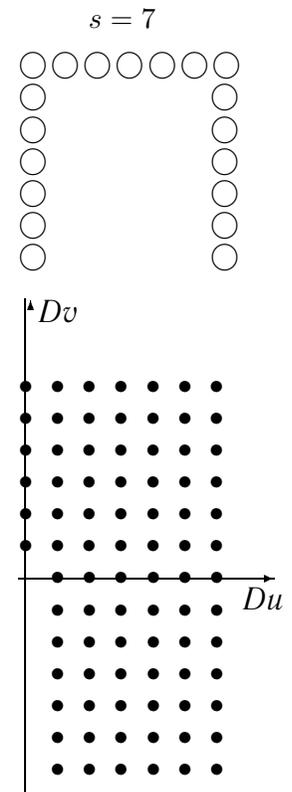


Рис. 5

в u, v -плоскости? Ответ на этот вопрос отрицателен. Как известно [4], при числе сторон многоугольника, большем шести, покрыть плоскость (без перекрытий) невозможно. При этом точки в u, v -плоскости располагаются на неодинаковых расстояниях друг от друга. Проиллюстрируем это на примере октагона, когда элементы размещены на 7-ми из 8-ми его сторон. На рис. 7 слева показано размещение элементов, а справа — пространственный спектр для 15-элементного октагона. В этом случае u, v -область — правильный октагон, число баз $M = 54$, но базы внутри него располагаются не вполне регулярно. К чему ведёт такая нерегулярность, свидетельствует рис. 8. На этом рисунке показаны штриховой линией синтезированные лучи для октагонального интерферометра (рис. 7) и сплошной линией — эквивалентного по разрешающей способности гексагонального с $r = 3, k = 15, M = 63$ (рис. 4).

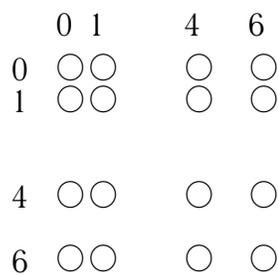


Рис. 6

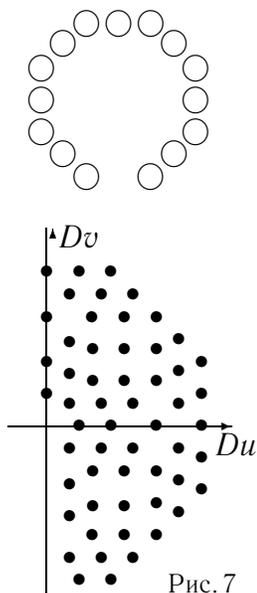


Рис. 7

Видно, что октагональная конфигурация, обеспечивая одинаковое разрешение с гексагональной, имеет меньшее число баз и поэтому несколько меньшее поле зрения из-за больших боковых лепестков при $\phi = 34; 55$ и 79° . Этот пример демонстрирует, к чему ведёт нерегулярность покрытия u, v -области, даже если эта нерегулярность невелика. Всё же иногда октагональная конфигурация может быть полезной.

Е. Кето [5] исследовал возможность построения систем апертурного синтеза на основе использования весьма экзотичных структур, предлагая размещать антенны неэквидистантно на периметре так называемого треугольника Рело. При этом он добивался наиболее равномерного расположения точек в круговой u, v -области. Как свидетельствуют расчёты формы синтезированного луча для приведённых в работе [4] конфигураций, все они дают большие боковые лепестки, причём на более близких угловых разнесениях от главного, чем для эквивалентных по числу элементов гексагональных, и, следовательно, их использование ведёт к заметному уменьшению поля зрения. В заключение рассмотрим вопрос о числе перемножителей (корреляторов), необходимом для формирования луча интерферометра. Т- и П-конфигурации уникальны: они позволяют обходиться одним перемножителем. Если просуммировать отдельно сигналы с элементов на горизонтальной и вертикальной линиях Т-системы и перемножить два суммарных сигнала, то образуется интерференционный “карандашный” луч. Другие конфигурации требуют большего количества перемножителей, но существенно меньшего, чем число баз. В интерферометре, измеряющем M пространственных гармоник, число перемножителей может быть сделано близким к числу элементов $k \ll M$. Например, для 10-элементной системы, показанной на рис. 4, при $r = 2, M = 30$ достаточно 5-ти перемножителей.

Таким образом, из приведённого следует, что существуют симметричные гексагональные конфигурации систем апертурного синтеза, более экономичные, чем известные.

Выражаем благодарность за частичную финансовую поддержку фонду INTAS (гранты № 94–4010 и № 97–1964).

ЛИТЕРАТУРА

1. Bracewell R. N. // IRE Trans. on Antenn. Propag. 1961. V. AP-9. P. 9.
2. Копилович Л. Е. // Радиотехника и электроника. 1988. Т. 29. С. 1918.
3. Kopilovich L. E., Sodin L. G. // Astron. Astrophys. Suppl. Ser. 1996. V. 116. P. 177.
4. Вендик О. Г. Антенны с немеханическим движением луча. 1965. — М.: Сов. радио. — 232 с.
5. Keto E. // Astrophys. J. 1997. V. 475. P. 843.

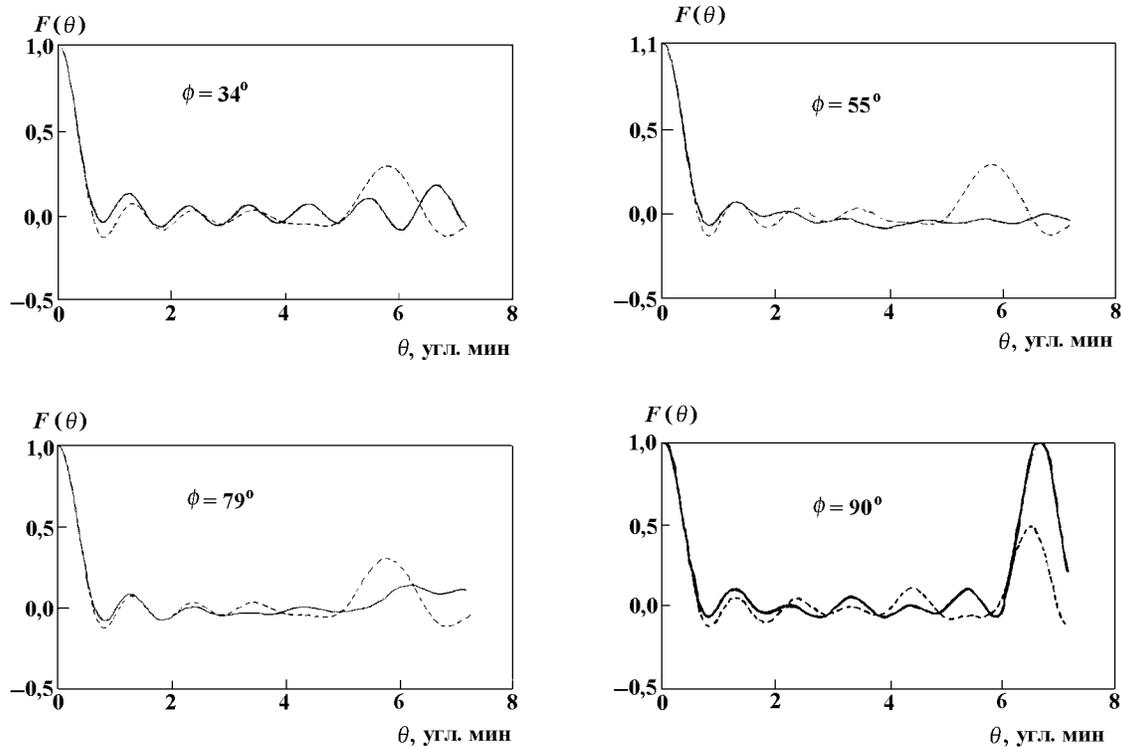


Рис. 8

¹ Радиоастрономический институт
НАН Украины, г. Харьков,
Украина;

² Институт радиофизики и
электроники НАН Украины,
г. Харьков, Украина

Поступила в редакцию
18 мая 1999 г.

APERTURE SYNTHESIS SYSTEMS WITH COMPLETE COVERING OF A HEXAGONAL DOMAIN IN THE U, V -PLANE

L. G. Sodin and L. E. Kopilovich

We propose and analyze aperture synthesis systems in which the arrangement of the sensitive elements ensure complete equidistant (regular) coverage of a hexagonal spatial-frequency domain. Such configurations are shown to have the following advantages in comparison with those covering a square domain in the u, v -plane: the number of the elements is reduced and the synthesized beam is symmetric at given resolution and field of view.

УДК 621.373;519.2

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФЛУКТУАЦИЙ ИЗЛУЧЕНИЯ ОПТИЧЕСКОГО НИЗКОКОГЕРЕНТНОГО ИСТОЧНИКА В ДВУХПЛЕЧЕВОМ ИНТЕРФЕРОМЕТРЕ

Д. В. Шабанов

Рассмотрены флуктуации излучения низкокогерентного оптического источника, прошедшего через двухплечевой интерферометр и преобразованного квадратичным детектором. Излучение на выходе источника считается стационарным гауссовским узкополосным случайным процессом. Флуктуационный процесс на выходе квадратичного детектора представлен как сумма шумов интенсивности и шумов интерференционной части. Рассчитаны соотношения между спектральными мощностями этих компонент, степень их взаимной корреляции при различных временах задержки между плечами интерферометра. Теоретически показано и экспериментально подтверждено, что даже при задержке между плечами интерферометра, превышающей время корреляции процесса на выходе источника, флуктуации интерференционной части имеют отличную от нуля мощность.

Низкокогерентные суперлюминесцентные источники оптического излучения в последнее время получили широкое применение ввиду их специфических свойств. В отличие от лазеров они имеют существенно большую (на несколько порядков) ширину спектра излучения и иную, гауссовскую статистику излучения, определяемую тем, что эти источники работают фактически в режиме оптического усилителя и не имеют порога генерации. В связи с большой шириной спектра (типичные полосы — 20÷40 нм) их излучение имеет очень малую длину пространственной корреляции (20÷40 мкм), что используется, например, в оптической когерентной томографии [1] для получения высокого продольного пространственного разрешения. При использовании источников такого типа существенны естественные флуктуации, возникающие в процессе квадратичного детектирования [2] при фотоприёме и связанные с биениями оптических спектральных компонент. Флуктуации интенсивности излучения в источниках с гауссовской статистикой рассматривались в работах [3–5]. Однако в некоторых приложениях (волоконная гироскопия, оптическая томография и др.) полезный сигнал формируется в результате интерференции двух оптических лучей, поэтому на предельную чувствительность таких схем влияют не только флуктуации интенсивности, но и флуктуации фазы, которые проявляются в интерференционной части сигнала. Вклад флуктуаций интерференционной части в полный шум на выходе интерферометра после квадратичного детектирования для низкокогерентных источников, насколько нам известно, во внимание не принимался и в литературе не рассматривался. Цель данной работы — исследовать флуктуации сигнала суперлюминесцентного источника излучения на выходе двухплечевого интерферометра после фотодетектирования в зависимости от разности длин плеч интерферометра и определить влияние шумов интерференционной части на полный шумовой сигнал, установить степень корреляции флуктуаций составных частей при формировании полного шумового интерференционного сигнала.

Рассмотрена модель излучения суперлюминесцентного источника в виде узкополосного стационарного процесса с гауссовской статистикой. Согласно [3] такой процесс можно записать как гармонический сигнал с хаотической модуляцией амплитуды и фазы:

$$U(t) = A(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)], \quad (1)$$

где $A(t)$ и $\varphi(t)$ — медленно меняющиеся случайные амплитуда и фаза процесса, ω_0 — центральная частота спектра процесса. В этой модели, как показано в [3], флуктуации амплитуды имеют статистику Релея, флуктуации фазы имеют гауссовскую статистику, дисперсия флуктуаций фазы носит диффузионный характер, т. е. неограниченно возрастает со временем.

Рассмотрим интерференционный сигнал на выходе квадратичного детектора:

$$S_{\text{out}}(t) = [U(t) + U(t + T)]^2 = U^2(t) + U^2(t + T) + 2U(t)U(t + T), \quad (2a)$$

где $U(t)$ и $U(t + T)$ — поле источника узкополосного гауссовского стационарного излучения в моменты времени t и $t + T$, T — задержка по времени между плечами интерферометра. Следует отметить, что реально фотодетектор является фильтром низких частот, поэтому гармоники на удвоенной оптической частоте, теоретически присутствующие в выражении (2а), на его выходе будут отсутствовать. Таким образом, выражение (2а) в соответствии с (1) можно переписать и по-другому:

$$S_{\text{out}}(t) = A^2(t)/2 + A^2(t + T)/2 + A(t)A(t + T) \cos[\omega_0 T + \varphi(t) - \varphi(t + T)]. \quad (2б)$$

Первые два слагаемых в выражениях (2) определяют шумы интенсивности. Но в третьем слагаемом при расстройке интерферометра (при $T \neq 0$), как видно, проявляются и фазовые флуктуации, имеющие свои отличительные особенности.

По определению спектр мощности стационарного эргодического процесса $S(t)$ определяется через автокорреляционную функцию $R_S(\tau)$ выражением

$$F(\omega) = \int_0^{\infty} R_S(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau, \quad (3)$$

где $R_S(\tau) = \overline{S(t)S(t + \tau)}$, черта сверху означает усреднение по времени. Таким образом, нам нужно знать $R_S(\tau)$.

Известно, что если процесс гауссовский, то его высшие моменты определяются через моменты первого и второго порядка. Соответствующее выражение получено в [6] и для нашего случая имеет вид

$$\overline{U(t_1)U(t_2)U(t_3)U(t_4)} = R(t_1 - t_2)R(t_3 - t_4) + R(t_1 - t_3)R(t_2 - t_4) + R(t_1 - t_4)R(t_2 - t_3), \quad (4)$$

где $R(\tau)$ — автокорреляционная функция исходного узкополосного процесса $U(t)$.

Используя выражения (3) и (4), можно вычислить спектр мощности компонент интерференционного сигнала стационарного гауссовского процесса с известной автокорреляционной функцией, преобразованного квадратичным детектором, при любом времени задержки T .

Выведем выражения для автокорреляционных функций компонент интерференционного сигнала на выходе квадратичного детектора. Запишем формулу для автокорреляционной функции интерференционного сигнала $S_{\text{out}}(t)$ (2), используя выражение (4):

$$\begin{aligned} R_S(\tau) &= \overline{S_{\text{out}}(t)S_{\text{out}}(t + \tau)} = \overline{(U^2(t) + U^2(t + T) + 2U(t)U(t + T)) \times} \\ &\quad \times [U^2(t + \tau) + U^2(t + \tau + T) + 2U(t + \tau)U(t + \tau + T)] = \\ &= R_1(\tau) + R_2(\tau, T) + R_3(\tau, T) + R_4(\tau, T) + 2[R_5(\tau, T) + R_6(\tau, T) + \\ &\quad + R_7(\tau, T) + R_8(\tau, T)] + 4R_9(\tau, T), \end{aligned} \quad (5a)$$

где

$$\begin{aligned}
 R_1(\tau) &= \overline{U^2(t)U^2(t+\tau)} = R^2(0) + 2R^2(\tau), \\
 R_2(\tau, T) &= \overline{U^2(t)U^2(t+\tau+T)} = R^2(0) + 2R^2(\tau+T), \\
 R_3(\tau, T) &= \overline{U^2(t+T)U^2(t+\tau)} = R^2(0) + 2R^2(\tau-T), \\
 R_4(\tau, T) &= \overline{U^2(t+T)U^2(t+\tau+T)} = R^2(0) + 2R^2(\tau), \\
 R_5(\tau, T) &= \overline{U^2(t)U(t+\tau)U(t+\tau+T)} = R(0)R(T) + 2R(\tau)R(\tau+T), \\
 R_6(\tau, T) &= \overline{U^2(t+T)U(t+\tau)U(t+\tau+T)} = R(0)R(T) + 2R(\tau)R(\tau-T), \\
 R_7(\tau, T) &= \overline{U^2(t+\tau)U(t)U(t+T)} = R(0)R(T) + 2R(\tau)R(\tau-T), \\
 R_8(\tau, T) &= \overline{U^2(t+\tau+T)U(t)U(t+T)} = R(0)R(T) + 2R(\tau)R(\tau+T), \\
 R_9(\tau, T) &= \overline{U(t)U(t+T)U(t+\tau)U(t+T+\tau)} = R^2(T) + R^2(\tau) + R(T+\tau)R(T-\tau).
 \end{aligned} \tag{5б}$$

Автокорреляционную функцию полного интерференционного сигнала $R_S(\tau)$ согласно (5а) можно представить в виде суммы трёх групп слагаемых:

$$R_{SI}(\tau) = R_1(\tau) + R_2(\tau, T) + R_3(\tau, T) + R_4(\tau, T), \tag{6а}$$

$$R_{SII}(\tau) = 4R_9(\tau, T), \tag{6}$$

$$R_{SIII}(\tau) = 2[R_5(\tau, T) + R_6(\tau, T) + R_7(\tau, T) + R_8(\tau, T)]. \tag{6в}$$

Первая группа — это автокорреляционная функция суммы интенсивностей:

$$R_{SI}(\tau) = \overline{[U^2(t) + U^2(t+T)][U^2(t+\tau) + U^2(t+T+\tau)]}. \tag{7а}$$

Вторая группа — автокорреляционная функция фазовой части интерференционного сигнала:

$$R_{SII}(\tau) = 4\overline{U(t)U(t+T)U(t+\tau)U(t+T+\tau)}. \tag{7}$$

Третья группа определяет взаимную корреляцию между вышеобозначенными частями интерференционного сигнала (2):

$$R_{SIII}(\tau) = 8[R(0)R(T) + R(\tau)R(T+\tau) + R(\tau)R(T-\tau)]. \tag{7в}$$

Если расстройка превышает ширину $\tau_{\text{кор}}$ автокорреляционной функции, так что становятся справедливыми условия

$$T > \tau_{\text{кор}}, \quad T + \tau > \tau_{\text{кор}}, \quad T - \tau > \tau_{\text{кор}}, \tag{8}$$

сомножители $R(T)$, $R(T+\tau)$, $R(T-\tau)$ и, соответственно, выражение (7в) устремляются к нулю. В этом случае спектр мощности всего сигнала (2) становится равным сумме спектров мощности отдельных его компонент (суммы интенсивностей $U^2(t) + U^2(t+T)$ и интерференционной части $2U(t)U(t+T)$), что говорит о полном отсутствии корреляции между ними.

Для получения более наглядного представления о спектральных свойствах интерференционного сигнала в целом и соотношении его отдельных частей рассмотрим пример стационарного гауссовского узкополосного случайного процесса с гауссовской же формой спектра. Нормированная автокорреляционная функция такого сигнала имеет вид

$$R(\tau) = \exp\{-\tau^2/\tau_{\text{кор}}^2\} \cos(\omega_0\tau). \tag{9}$$

Зависимость (9) представлена на рис. 1. По оси ординат здесь отложено условное время — отношение аргумента автокорреляционной функции ко времени корреляции процесса $\tau_{\text{кор}}$. Отношение средней частоты процесса к ширине его спектра определяется произведением $\omega_0\tau_{\text{кор}}$ и в нашем случае равно 20.

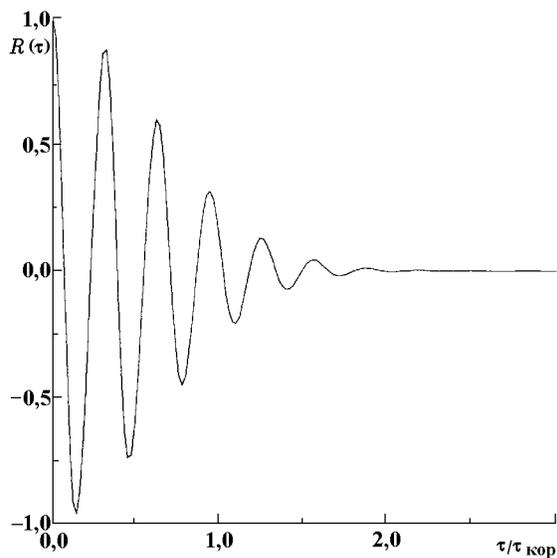


Рис. 1. Нормированная автокорреляционная функция стационарного гауссовского узкополосного случайного процесса с гауссовской формой спектра

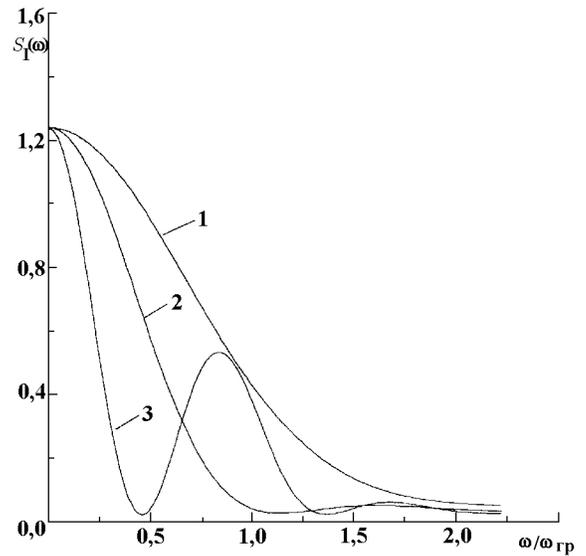


Рис. 2. Спектры мощности $S_T(\omega)$ суммы интенсивностей в зависимости от отношения частоты к $\omega_{гр}$ при различных временах задержки

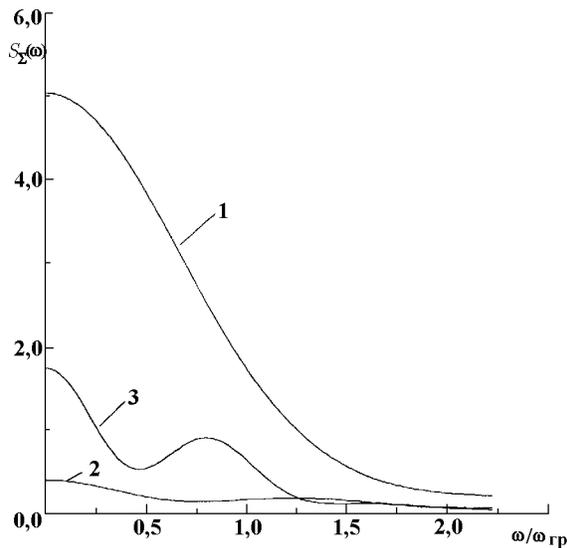


Рис. 3. Спектры мощности $S_\Sigma(\omega)$ всего процесса на выходе детектора в зависимости от отношения частоты к $\omega_{гр}$ при тех же временах задержки, что и на рис. 2

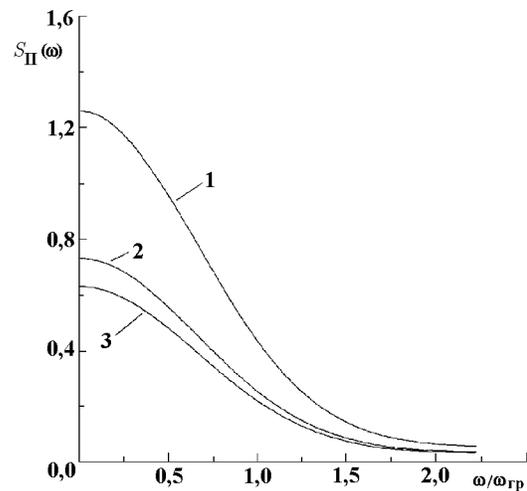


Рис. 4. Спектры мощности $S_\Pi(\omega)$ фазовой части процесса на выходе детектора в зависимости от отношения частоты к $\omega_{гр}$ при тех же временах задержки, что и на рис. 2

На рис. 2–4 представлены спектры мощности различных компонент интерференционного сигнала (2), рассчитанные с помощью выражений (5)–(7). Обозначения на графиках соотносятся с параметрами реального сигнала следующим образом. Граничная частота $\omega_{гр}$ соответствует ширине спектра процесса, а площадь под кривой равна мощности соответствующего процесса на выходе квадратичного детектора. На рис. 2 представлены спектры мощности суммы интенсивностей в зависимости от отношения частоты к $\omega_{гр}$ при различных временах задержки (кривая 1 соответствует времени задержки $T = 0$,

кривая 2 — времени задержки $T = 0,8\tau_{\text{кор}}$, кривая 3 — времени задержки $T = 2\tau_{\text{кор}}$). Как видно, при увеличении времени задержки спектральная плотность мощности на низких по сравнению с шириной $\omega_{\text{гр}}$ спектра источниках частотах остаётся постоянной, но на сравнимых с $\omega_{\text{гр}}$ частотах начинается модуляция формы спектра, шаг которой по частоте обратно пропорционален времени задержки. Этот эффект модуляции формы спектра хорошо известен и рассмотрен, например, в [4]. Он объясняется тем, что здесь имеет место сложение двух идентичных, но сдвинутых относительно друг друга по времени процессов, в результате чего их спектральные составляющие интерферируют друг с другом. Другими словами, если известно, что процесс $S(t)$ имеет спектр мощности $F(\omega)$, определяемый через фурье-преобразование его автокорреляционной функцией $K(\tau)$, то спектр мощности процесса $S(t) + S(t + T)$ будет определяться следующим образом. Автокорреляционная функция будет иметь вид

$$\overline{[S(t) + S(t + T)][S(t + \tau) + S(t + \tau + T)]} = 2K(\tau) + K(\tau - T) + K(\tau + T), \quad (10)$$

а искомый спектр будет определяться её фурье-преобразованием:

$$2F(\omega) + F(\omega)e^{i\omega T} + F(\omega)e^{-i\omega T} = 2F(\omega)[1 + \cos(\omega T)]. \quad (11)$$

Выражение (11) и объясняет эффект модуляции формы спектра.

На рис. 3 и 4 представлены соответственно спектры мощности всего процесса и фазовой его части на выходе детектора в том же масштабе и для тех же значений времени задержки, что и на рис. 2. Видно, что при нулевой задержке флуктуации суммы интенсивностей и фазовой компоненты равны по мощности и полностью скоррелированы — амплитуда всего процесса есть сумма амплитуд его отдельных (и равных друг другу) компонент, а его мощность в четыре раза больше мощности каждой из компонент (на рис. 2 и 4 значения спектра при нулевой частоте для кривой 1 равны 1,25, а на рис. 3 при тех же условиях, но уже для всего процесса $S_{\Sigma}(0) = 5$). Если время задержки превышает ширину функции автокорреляции, мощность фазовой части уменьшается вдвое, а корреляция с первой частью, как показано выше и как видно из графиков на рис. 2–4 (кривая 3), полностью исчезает — мощность суммарного процесса равна сумме мощностей этих компонент.

На рис. 5 отражена корреляция между отдельными частями интерференционного сигнала. Здесь показана зависимость мощности шума, или квадрата дисперсии полного интерференционного сигнала (2), $\Sigma^2 = R_S(0) - \overline{S_{\text{вых}}^2(t)}$, от времени задержки T .

Для проверки проведённых расчётов нами были проведены предварительные эксперименты. На базе интерферометра Маха—Цандера был создан коррелометр для раздельного измерения флуктуаций интенсивности и фазы низкокогерентных источников излучения (рис. 6). В эксперименте был использован суперлюминесцентный источник излучения с длиной волны 0,83 мкм и шириной спектра излучения 30 нм, что соответствует пространственной ширине функции автокорреляции 20 мкм. В интерферометре предусмотрено изменение длины одного из плеч за счёт введения регулируемой задержки. Оптические сигналы с двух выходов интерферометра поступают на отдельные фотоприёмники. Формируемые ими фототоки отличаются знаком входящей в эти токи интерференционной части $2U(t)U(t + T)$. Сигналы с фотоприёмников поступают на отдельные каналы усилителя, на выходе которого есть возможность получения суммы или разности выходных сигналов этих каналов. Это позволяет при сложении сигналов с двух фотоприёмников наблюдать только сумму интенсивностей, при вычитании — только фазовую часть интерференционного сигнала. Измерения шумов проводились при выходе времени задержки за

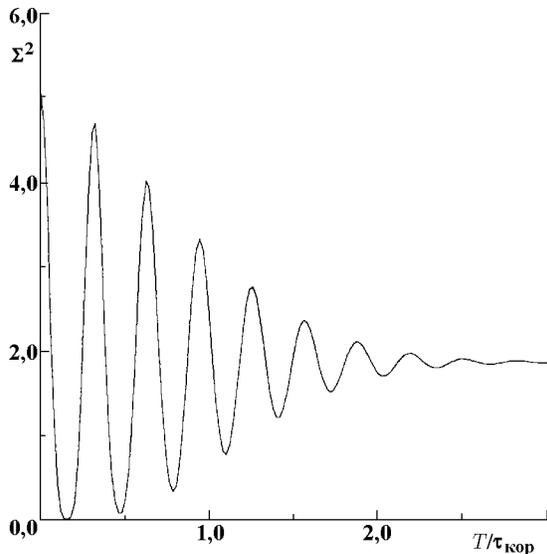


Рис. 5. Зависимость мощности шума, или квадрата дисперсии Σ^2 полного интерференционного сигнала, от времени задержки T

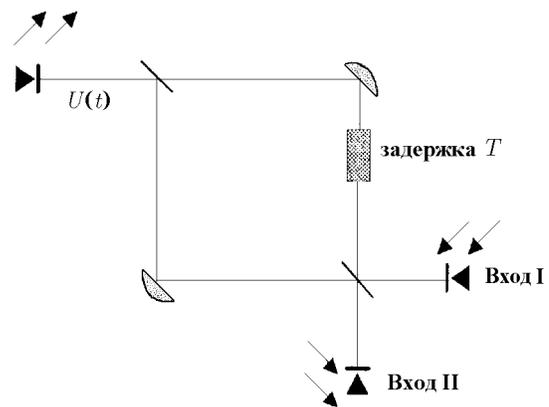


Рис. 6. Экспериментальная установка на базе интерферометра Маха—Цандера. На вход I интерферометра подаётся сигнал $U^2(t) + U^2(t+T) + 2U(t)U(t+T)$, а на вход II — сигнал $U^2(t) + U^2(t+T) - 2U(t)U(t+T)$

пределы интерферограммы. Вследствие того, что реальные коэффициенты пропускания и отражения диэлектрических зеркал, используемых в эксперименте, отличались от точного значения 50 % и чувствительности фотоприёмников не были идентичными, было необходимо корректировать коэффициент усиления одного из каналов. В противном случае при получении разности сигналов на выходе каналов на выход усилителя поступала бы интерференционная часть с добавкой флуктуаций интенсивности. Корректировка усиления с целью компенсации флуктуаций интенсивности проводилась следующим образом: включалась модуляция источника по амплитуде (с частотой, на которой проводились затем измерения спектральной мощности флуктуаций), усилитель переводился в режим “разность”, а усиление одного из каналов настраивалось так, чтобы на выходе исчезла связанная с суммой интенсивностей регулярная компонента на частоте модуляции источника. В оставшейся же интерференционной части эта регулярная компонента пропорциональна автокорреляционной функции исходного процесса $U(t)$ и в случае, когда время задержки превышает ширину функции автокорреляции, отсутствует. При такой настройке усилителя на его выходе остаются только шумы интерференционной части сигнала.

Была проведена серия опытов по четыре измерения в каждой: измерение спектральной мощности сигнала в каждом из каналов в отдельности, затем — суммы выходных сигналов каналов (шумов суммы интенсивностей) и

разности выходных сигналов каналов (шумов фазовой компоненты). Каждая серия отличалась частотой, на которой снимались показания (от 50 кГц до 150 кГц), и задержкой между плечами интерферометра (от 50 мкм до 1 мм). При этих же параметрах были измерены дробовые шумы излучения. Разность длин плеч интерферометра составляла около 1 мм. Дробовые шумы измерялись с помощью источника с очень широким спектром — обычной лампой накаливания — посредством установления яркости, при которой постоянные токи фотоприёмников совпадали с измеренными в опыте. В табл. 1 представлены конкретные значения (в относительных единицах), полученные в ходе эксперимента.

Таблица 1

	50 кГц		100 кГц		150 кГц	
	Сигнал	Дроб.	Сигнал	Дроб.	Сигнал	Дроб.
I канал	3,55	0,95	3,4	0,8	3,3	1,1
II канал	3,7	1,18	3,7	1,23	3,85	1,35
Разность	5,4	2,2	5,2	2,2	5,4	2,4
Сумма	8,7	2,3	8,9	2,4	8,7	2,6

В результате опыта было установлено следующее:

1) отношения измеренных спектральных плотностей мощности фазовых компонент к соответствующим им спектральным плотностям мощности сумм интенсивностей варьировались около значения 0,6 с разбросом значений в 20 %;

2) обработка данных эксперимента с учётом измеренных коэффициентов отражения и пропускания используемых в установке зеркал показала отсутствие корреляции между компонентами интерференционного сигнала.

Таким образом, проведённые исследования позволяют сделать вывод, что хотя в случае, когда время задержки превышает ширину функции автокорреляции, информация, которую несёт фазовая компонента $2U(t)U(t + T)$ и которая определяется её средним, равным $2R(T)$, исчезает, но шумы этой компоненты не исчезают, а выходят на стационарное значение, по мощности в два раза меньшее значения при нулевой расстройке. Следует также отметить, что при интерференции сигналов от двух независимых источников спектр мощности их суммы на выходе квадратичного детектора будет отличаться от суммы спектров мощности каждого из них в отдельности, преобразованных квадратичными детекторами, т. к. появятся дополнительные шумы, связанные с флуктуациями фазовой компоненты интерференционного сигнала на выходе квадратичного детектора.

В заключение хотелось бы выразить благодарность И. А. Андроновой и В. М. Геликонову за постановку задачи и помощь в проведении эксперимента.

ЛИТЕРАТУРА

1. Геликонов В. М., Геликонов Г. В., Гладкова Н. Д. и др. // Письма в ЖЭТФ. 1995. Т. 61, вып. 2. С. 149
2. Берштейн И. Л. // ЖТФ. 1941. Т. 11, вып. 4.
3. Бунимович В. И. // ЖТФ. 1949. Т. 19, вып. 11.
4. Алексеев Э. И., Базаров Е. Н., Израелян В. Г., Кухта А. В. // Квантовая электроника. 1987. Т. 14, № 1.
5. Abbas G. L., Chan V. W. S., Yee T. K. // Optics Letters. 1983. V.8, № 8.
6. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника. — М.: Радио и связь, 1982.

Институт прикладной физики РАН,
г. Н. Новгород, Россия

Поступила в редакцию
14 июня 1999 г.

TRANSFORMATION OF RADIATION FLUCTUATIONS OF A LOW-COHERENCY SOURCE IN A TWO-ARM INTERFEROMETER

D. V. Shabanov

We consider fluctuations of radiation of a low-coherency source, which passed through a two-arm interferometer and transformed by a quadratic detector. The outgoing radiation of the source is assumed to be a stationary Gaussian narrow-band random process. The fluctuation process at the quadratic-detector output is presented as the sum of the intensity noise and the interference-component noise. We calculate the relationships between the spectral densities of these components and the degree of their correlation at different delays between the interferometer arms. We show theoretically and confirm experimentally that the power of the interference-component fluctuations are nonzero even if the delay between the interferometer arms exceeds the correlation time of the process at the source output.

ЭВОЛЮЦИЯ СГУСТКОВ ПЛАВУЧЕЙ ПРИМЕСИ НА ПОВЕРХНОСТИ ТУРБУЛЕНТНОЙ ЖИДКОСТИ

И. С. Жукова, В. Н. Кошелев, А. И. Саичев

В связи с задачами физики атмосферы и океана исследовано поведение сгустка плавучей примеси в двумерной турбулентной среде. Получено асимптотическое (при малом коэффициенте молекулярной диффузии) решение уравнения для плотности сгустка плавучей примеси при заданном поле скорости на поверхности жидкости. Проанализирована временная эволюция формы и координат сгустка.

ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что если в покоящуюся жидкость поместить сгусток пассивной примеси, то со временем вследствие броуновского движения сгусток монотонно расплывётся. Закон движения частиц примеси становится гораздо сложнее, если жидкость сама хаотически движется, а частицы, увлекаемые потоками жидкости, совершают дополнительные гидродинамические движения. При этом может возникнуть на первый взгляд неожиданный эффект стабилизации сгустка, родственной известному эффекту локализации волн в случайных слоистых средах (см., например, [1]). Некоторые количественные и качественные аспекты подобных эффектов обсуждались ранее в работах [2, 3]. Эффект стабилизации сгустков пассивной примеси в одномерном случае довольно подробно изучен в работах [4, 5]. В данной работе делается попытка исследовать эффекты эволюции сгустков в двумерной турбулентной среде. Физическим примером таких сред может служить движение плавучей примеси на хаотически движущейся взволнованной поверхности океана.

Настоящая статья построена следующим образом. В первой части статьи приведена постановка задачи и исходные уравнения. Во второй части находится асимптотическое (при малом коэффициенте молекулярной диффузии) решение уравнения для плотности сгустка плавучей примеси при заданном поле скорости на поверхности жидкости. Полученное решение используется в третьей части для анализа временной эволюции формы и координат сгустка.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Пусть начальная плотность сгустка пассивной примеси на поверхности покоящейся жидкости равна $\rho_0(\mathbf{x})$, где радиус-вектор \mathbf{x} лежит в плоскости поверхности жидкости. Тогда зависимость плотности $\rho(\mathbf{x}, t)$ от координат и времени будет описываться уравнением

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \mu \Delta \rho, \quad \rho(\mathbf{x}, t = 0) = \rho_0(\mathbf{x}),$$

где Δ — двумерный лапласиан, а μ — коэффициент молекулярной диффузии. Так, если все частицы вначале (при $t = 0$) находились в физически бесконечно малом объёме, то

$$\rho_0(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x}), \tag{1}$$

где $\delta(\mathbf{x})$ — дельта-функция, а поле плотности меняется по закону

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi S(t)} \exp\left(-\frac{x^2}{2S(t)}\right).$$

Здесь $S(t) = 2\mu t$ — линейно растущая со временем эффективная площадь, занятая сгустком диффундирующих частиц. Она связана с максимумом плотности сгустка соотношением

$$S(t) = \frac{1}{2\pi \max \rho(\mathbf{x}, t)}. \quad (2)$$

Ниже мы воспользуемся равенством (2) в качестве определения эффективной площади сгустка частиц, первоначально сосредоточенных в одной точке.

Обычно, например на поверхности океана, диффузия плавучей примеси сопровождается её движением вместе с жидкостью. Пренебрегая влиянием вертикальных движений, будем считать, что частицы движутся под воздействием двумерного поля скорости $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ — проекции скорости жидкости на плоскость поверхности жидкости [1]. Тогда плотность примеси описывается уравнением

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla) \rho + u(\mathbf{x}, t) \rho = \mu \Delta \rho, \quad (3)$$

где скалярное поле

$$u(\mathbf{x}, t) = (\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t))$$

— дивергенция двумерного поля скорости $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ горизонтальных движений поверхности. Подчеркнём, что даже в несжимаемой жидкости $u(\mathbf{x}, t) \neq 0$. Физически это означает, что поверхность несжимаемой жидкости ведёт себя как двумерная сжимаемая среда.

Для анализа совместного влияния молекулярной диффузии и случайных движений жидкости на сгустки плавучих частиц будем считать поле скорости $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ гауссовым с корреляционным тензором

$$\langle v_i(\mathbf{x}, t) v_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t + \tau) \rangle = \left\{ G(r) \delta_{ij} + \left[\delta_{ij} - \frac{r_i r_j}{r^2} \right] \frac{r}{2} \frac{dG(r)}{dr} \right\} \delta(\tau), \quad (4)$$

где $G(r)$ — корреляционная функция продольных компонент трёхмерного статистически изотропного поля скорости несжимаемой жидкости, δ_{ij} — символ Кронекера. Угловые скобки, использованные в (4), означают усреднение по случайному полю $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$.

2. УЧЁТ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ДИФФУЗИИ И ДВИЖЕНИЯ СРЕДЫ

Будем искать решение уравнения (3) в виде

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \overline{\tilde{\rho}(\mathbf{x}, t)}, \quad (5)$$

где $\tilde{\rho}(\mathbf{x}, t)$ подчиняется стохастическому уравнению первого порядка

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + (\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla) \tilde{\rho} + u(\mathbf{x}, t) \tilde{\rho} = (\boldsymbol{\xi}(t) \cdot \nabla) \rho, \quad (6)$$

где $\boldsymbol{\xi}(t)$ — векторный белый шум с диагональным корреляционным тензором

$$\overline{\xi_i(t) \xi_j(t + \tau)} = 2\mu \delta_{ij} \delta(\tau). \quad (7)$$

С физической точки зрения белый шум $\xi(t)$ описывает хаотические столкновения частиц примеси с молекулами окружающей среды, порождающие броуновское движение частиц примеси и эффекты молекулярной диффузии. Черта в формулах (5) и (7) означает усреднение по вспомогательному процессу $\xi(t)$.

Как известно, решение уравнения (6) имеет вид (см., например, [3])

$$\tilde{\rho}(\mathbf{x}, t) = \int \rho_0(\mathbf{y}) \delta(\tilde{\mathbf{X}}(\mathbf{y}, t) - \mathbf{x}) d\mathbf{y}, \quad (8)$$

где $\tilde{\mathbf{X}}(\mathbf{y}, t)$ — решение уравнения

$$\frac{d\tilde{\mathbf{X}}}{dt} = \mathbf{v}(\tilde{\mathbf{X}}, t) + \xi(t), \quad \tilde{\mathbf{X}}(\mathbf{y}, t=0) = \mathbf{y}.$$

Разобьём $\tilde{\mathbf{X}}(\mathbf{y}, t)$ на две части:

$$\tilde{\mathbf{X}}(\mathbf{y}, t) = \mathbf{X}(\mathbf{y}, t) + \mathbf{z}(\mathbf{y}, t), \quad (9)$$

где $\mathbf{X}(\mathbf{y}, t)$ описывает движение частицы примеси в пренебрежении молекулярной диффузией:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X}(\mathbf{y}, t=0) = \mathbf{y},$$

а $\mathbf{z}(\mathbf{y}, t)$ учитывает броуновское движение частицы и подчиняется уравнению

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{X} + \mathbf{z}, t) - \mathbf{v}(\mathbf{X}, t) + \xi(t), \quad \mathbf{z}(\mathbf{y}, t=0) = 0. \quad (10)$$

Пусть l_v — характерный масштаб поля $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ и выполнено неравенство $z \ll l_v$. Тогда уравнение (10) можно заменить линейным уравнением

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = (\mathbf{z} \cdot \nabla) \mathbf{v}(\mathbf{X}, t) + \xi(t), \quad \mathbf{z}(\mathbf{y}, t=0) = 0,$$

решение которого имеет вид

$$\mathbf{z}(\mathbf{y}, t) = \int_0^t \xi_l(t') \mathbf{J}_l(\mathbf{y}, t', t) dt', \quad (11)$$

где векторы $\mathbf{J}_l(\mathbf{y}, t', t)$ с компонентами $\{J_{l1}, J_{l2}\}$, $l = 1; 2$, подчиняются задаче Коши

$$\frac{d\mathbf{J}_l}{dt} = (\mathbf{J}_l \cdot \nabla) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{J}_l(\mathbf{y}, t', t = t') = \mathbf{e}_l. \quad (12)$$

Здесь \mathbf{e}_l — единичный вектор оси x_l . Из (11) видно, что $\mathbf{z}(\mathbf{y}, t)$ образует двумерный гауссовый процесс с нулевыми средними и корреляционной матрицей

$$\overline{z_\alpha(\mathbf{y}, t) z_\beta(\mathbf{y}, t)} = S_{\alpha\beta}(\mathbf{y}, t) \quad (13)$$

с компонентами

$$S_{\alpha\beta}(\mathbf{y}, t) = 2\mu \int_0^t J_{l\alpha}(\mathbf{y}, t', t) J_{l\beta}(\mathbf{y}, t', t) dt'. \quad (14)$$

Из формул (12), (14) следует, что компоненты (14) удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned}\frac{dS_{11}}{dt} &= 2\mu + 2S_{11}u_{11} + 2S_{12}u_{12}, & S_{11}(\mathbf{y}, t=0) &= 0, \\ \frac{dS_{22}}{dt} &= 2\mu + 2S_{22}u_{22} + 2S_{12}u_{21}, & S_{22}(\mathbf{y}, t=0) &= 0, \\ \frac{dS_{12}}{dt} &= S_{12}(u_{11} + u_{22}) + S_{11}u_{21} + S_{22}u_{12}, & S_{12}(\mathbf{y}, t=0) &= 0,\end{aligned}\quad (15)$$

где использованы обозначения $u_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, t) = \partial v_{\alpha} / \partial x_{\beta}$.

Подставив (9) в (8) и усреднив по гауссовой статистике $\mathbf{z}(\mathbf{y}, t)$, придём к следующему асимптотическому (при малом коэффициенте молекулярной диффузии μ) выражению для плотности примеси с учётом молекулярной диффузии:

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \int \rho_0(\mathbf{y}) R(\mathbf{x} - \mathbf{X}(\mathbf{y}, t), \mathbf{y}, t) d\mathbf{y},$$

где

$$R(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \frac{1}{2\pi \sqrt{I(\mathbf{y}, t)}} \exp \left\{ -\frac{S_{22}(\mathbf{y}, t)x_1^2 + S_{11}(\mathbf{y}, t)x_2^2 - 2S_{12}(\mathbf{y}, t)x_1x_2}{2I(\mathbf{y}, t)} \right\} \quad (16)$$

учитывает влияние молекулярной диффузии на плотность примеси,

$$I(\mathbf{y}, t) = S_{11}(\mathbf{y}, t)S_{22}(\mathbf{y}, t) - S_{12}^2(\mathbf{y}, t).$$

Для дальнейшего изложения нам понадобится знание взаимных корреляций компонент тензора $u_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, t)$. Для этого разложим функцию $G(r)$ в (4) в ряд Тейлора:

$$G(r) = G - Dr^2/2, \quad (17)$$

и перепишем сам тензор в виде

$$\langle v_i(\mathbf{x}, t) v_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t + \tau) \rangle = K_{ij}(\mathbf{r}) \delta(\tau),$$

где

$$K_{ii}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2r} \frac{d}{dr} (r^2 G(r)) - \frac{r_i^2}{2r} \frac{dG(r)}{dr}, \quad K_{12}(\mathbf{r}) = K_{21}(\mathbf{r}) = -\frac{r_1 r_2}{2r} \frac{dG(r)}{dr},$$

откуда с учётом (17) получаем

$$K_{11} = G - D(r_2^2 + r_1^2/2), \quad K_{22} = G - D(r_1^2 + r_2^2/2), \quad K_{12} = K_{21} = Dr_1 r_2 / 2.$$

Отсюда следуют выражения для корреляционных функций компонент тензора $u_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, t)$:

$$\langle u_{11}(\mathbf{x}, t) u_{11}(\mathbf{x}, t + \tau) \rangle = -\frac{\partial^2}{\partial r_1^2} K_{11}(\mathbf{r}) \Big|_{r=0} \delta(\tau) = \langle u_{22}(\mathbf{x}, t) u_{22}(\mathbf{x}, t + \tau) \rangle = D \delta(\tau),$$

$$\langle u_{12}(\mathbf{x}, t) u_{12}(\mathbf{x}, t + \tau) \rangle = -\frac{\partial^2}{\partial r_2^2} K_{11}(\mathbf{r}) \Big|_{r=0} \delta(\tau) = \langle u_{21}(\mathbf{x}, t) u_{21}(\mathbf{x}, t + \tau) \rangle = 2D \delta(\tau),$$

$$\langle u_{11}(\mathbf{x}, t) u_{22}(\mathbf{x}, t + \tau) \rangle = \langle u_{22}(\mathbf{x}, t) u_{11}(\mathbf{x}, t + \tau) \rangle = -\frac{\partial^2}{\partial r_1 \partial r_2} K_{12}(\mathbf{r}) \Big|_{r=0} \delta(\tau) = -\frac{D}{2} \delta(\tau),$$

$$\langle u_{12}(\mathbf{x}, t) u_{21}(\mathbf{x}, t + \tau) \rangle = \langle u_{21}(\mathbf{x}, t) u_{12}(\mathbf{x}, t + \tau) \rangle = - \left. \frac{\partial^2}{\partial r_1 \partial r_2} K_{12}(\mathbf{r}) \right|_{r=0} \delta(\tau) = -\frac{D}{2} \delta(\tau),$$

$$\langle u_{11}(\mathbf{x}, t) u_{12}(\mathbf{x}, t + \tau) \rangle = \langle u_{11}(\mathbf{x}, t) u_{21}(\mathbf{x}, t + \tau) \rangle = 0,$$

$$\langle u_{22}(\mathbf{x}, t) u_{12}(\mathbf{x}, t + \tau) \rangle = \langle u_{22}(\mathbf{x}, t) u_{21}(\mathbf{x}, t + \tau) \rangle = 0.$$

3. ЭВОЛЮЦИЯ СГУСТКА ПАССИВНОЙ ПРИМЕСИ

Детально обсудим временную эволюцию сгустка частиц, находящихся в точке $\mathbf{x} = 0$ в момент времени $t = 0$. Иными словами, будем считать, что начальная плотность примеси определяется выражением (1). При этом $\rho(\mathbf{x}, t) = R(\mathbf{x} - \mathbf{X}(t), t)$. Здесь и ниже использованы следующие обозначения:

$$R(\mathbf{x}, t) = R(\mathbf{x}, \mathbf{y} = 0, t) = \frac{1}{2\pi \sqrt{I(t)}} \exp \left\{ -\frac{S_{22}(t)x_1^2 + S_{11}(t)x_2^2 - 2S_{12}(t)x_1x_2}{2I(t)} \right\},$$

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}(\mathbf{y} = 0, t), \quad I(t) = I(\mathbf{y} = 0, t),$$

$$S_{11}(t) = S_{11}(\mathbf{y} = 0, t), \quad S_{22}(t) = S_{22}(\mathbf{y} = 0, t), \quad S_{12}(t) = S_{12}(\mathbf{y} = 0, t).$$

Таким образом, $\mathbf{X}(t)$ описывает диффузию сгустка примеси, а $R(\mathbf{x}, t)$ — его форму, т. е. эффекты дисперсии. Опишем эти функции, введя вспомогательные величины

$$Q = (S_{11} + S_{22})/2, \quad P = (S_{11} - S_{22})/2, \quad B = S_{12}, \quad I = Q^2 - P^2 - B^2. \quad (18)$$

Найдём уравнения, которым удовлетворяют величины (18). Из (15) имеем

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} &= 2\mu + Q(u_{11} + u_{22}) + P(u_{11} - u_{22}) + B(u_{12} + u_{21}), & Q(t=0) &= 0, \\ \frac{dP}{dt} &= P(u_{11} + u_{22}) + Q(u_{11} - u_{22}) + B(u_{12} - u_{21}), & P(t=0) &= 0, \\ \frac{dB}{dt} &= B(u_{11} + u_{22}) + Q(u_{12} + u_{21}) - P(u_{12} - u_{21}), & B(t=0) &= 0, \\ \frac{dI}{dt} &= 4\mu Q + 2I(u_{11} + u_{22}), & I(t=0) &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Система уравнений (19) переопределена, так как исходная система (15) содержит всего три уравнения. Однако это обстоятельство позволяет вывести замкнутое уравнение для вероятностного распределения f всего лишь двух процессов, $I(t)$ и $Q(t)$:

$$f(i, q; t) = \langle \delta(I(t) - i) \delta(Q(t) - q) \rangle. \quad (20)$$

Заметим, что из всех вспомогательных величин (18) именно величины I и Q имеют наиболее наглядный геометрический смысл. А именно, как видно из (16), I равно квадрату эффективной площади сгустка, а Q количественно описывает асимметрию его формы. Заметим также, что уравнения (19) записаны вдоль характеристик $\mathbf{X}(t)$. Поэтому в отличие от эйлеровых средних средние полей, вообще говоря, не равны нулю:

$$\langle u_{11}(\mathbf{X}(t), t) \rangle = \langle u_{22}(\mathbf{X}(t), t) \rangle = -D/4, \quad \langle u_{12}(\mathbf{X}(t), t) \rangle = \langle u_{21}(\mathbf{X}(t), t) \rangle = 0.$$

Перепишем уравнения (19) в более удобной форме. Для этого введём вспомогательные независимые процессы

$$u_{11} + u_{22} = \zeta(t) - D/2, \quad u_{11} - u_{22} = \eta(t), \quad u_{12} + u_{21} = \alpha(t), \quad u_{12} - u_{21} = \beta(t),$$

которые можно считать гауссовыми с корреляционными функциями

$$\begin{aligned} \langle \zeta(t)\zeta(t+\tau) \rangle &= D\delta(\tau), & \langle \eta(t)\eta(t+\tau) \rangle &= 3D\delta(\tau), \\ \langle \alpha(t)\alpha(t+\tau) \rangle &= 3D\delta(\tau), & \langle \beta(t)\beta(t+\tau) \rangle &= 5D\delta(\tau). \end{aligned}$$

При этом уравнения (19) примут вид

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= 4\mu Q - DI + 2\zeta I, & \frac{dQ}{dt} &= 2\mu - DQ/2 + \zeta Q + \eta P + \alpha B, \\ \frac{dP}{dt} &= -DP/2 + \zeta P + \eta Q + \beta B, & \frac{dB}{dt} &= -DB/2 + \zeta B + \alpha Q - \beta P. \end{aligned}$$

Выведем уравнение для вероятностного распределения величин $I(t)$ и $Q(t)$. Для этого возьмём произвольную функцию $\varphi(I(t), Q(t))$. Её среднее подчиняется уравнению

$$\begin{aligned} \frac{d\langle \varphi \rangle}{dt} - 4\mu \left\langle Q \frac{\partial \varphi}{\partial I} \right\rangle - 2\mu \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial Q} \right\rangle + D \left\langle I \frac{\partial \varphi}{\partial I} \right\rangle + \frac{D}{2} \left\langle Q \frac{\partial \varphi}{\partial Q} \right\rangle = \\ = 2 \left\langle \zeta I \frac{\partial \varphi}{\partial I} \right\rangle + \left\langle \zeta Q \frac{\partial \varphi}{\partial Q} \right\rangle + \left\langle \eta P \frac{\partial \varphi}{\partial Q} \right\rangle + \left\langle \alpha B \frac{\partial \varphi}{\partial Q} \right\rangle. \end{aligned} \quad (21)$$

Выпишем выражения для средних в правой части (21):

$$\begin{aligned} 2 \left\langle \zeta I \frac{\partial \varphi}{\partial I} \right\rangle &= 2D \left\langle I \frac{\partial}{\partial I} \left(I \frac{\partial \varphi}{\partial I} \right) \right\rangle + D \left\langle IQ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial I \partial Q} \right\rangle, \\ \left\langle \zeta Q \frac{\partial \varphi}{\partial Q} \right\rangle &= \frac{D}{2} \left\langle Q \frac{\partial}{\partial Q} \left(Q \frac{\partial \varphi}{\partial Q} \right) \right\rangle + D \left\langle IQ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial I \partial Q} \right\rangle, \\ \left\langle \eta P \frac{\partial \varphi}{\partial Q} \right\rangle &= \frac{3D}{2} \left\langle P^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Q^2} \right\rangle + \frac{3D}{2} \left\langle Q \frac{\partial \varphi}{\partial Q} \right\rangle, \\ \left\langle \alpha B \frac{\partial \varphi}{\partial Q} \right\rangle &= \frac{3D}{2} \left\langle B^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Q^2} \right\rangle + \frac{3D}{2} \left\langle Q \frac{\partial \varphi}{\partial Q} \right\rangle. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в (21) и используя произвольность функции φ , найдём уравнение для распределения (20):

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \tau} + 2\gamma q \frac{\partial f}{\partial i} + \gamma \frac{\partial f}{\partial q} - 2 \frac{\partial}{\partial i} (if) + 2 \frac{\partial}{\partial q} (qf) = \\ = 4 \frac{\partial}{\partial i} \left(i \frac{\partial}{\partial i} (if) \right) + 4 \frac{\partial}{\partial q} \left(q \frac{\partial}{\partial q} (qf) \right) + 4 \frac{\partial}{\partial i} \left(i \frac{\partial}{\partial q} (qf) \right) - 3i \frac{\partial^2 f}{\partial q^2}, \end{aligned} \quad (22)$$

$$f(i, q; \tau = 0) = \delta(i)\delta(q).$$

Здесь использованы безразмерное время $\tau = Dt/2$ и параметр диффузии $\gamma = 4\mu/D$.

Статистическая и динамическая интерпретация следствий этого уравнения позволяет понять влияние на поведение сгустка плавучих частиц конкурентного действия молекулярной диффузии и хаотического движения поверхности жидкости. Из (22) легко получить выражения для моментов величин I

и Q . Так, в частности, их средние величины удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned}\frac{d\langle I \rangle}{dt} &= 4\mu\langle Q \rangle + D\langle I \rangle, & \langle I(t=0) \rangle &= 0, \\ \frac{d\langle Q \rangle}{dt} &= 2\mu + 3D\langle Q \rangle, & \langle Q(t=0) \rangle &= 0,\end{aligned}$$

решение которой

$$\langle I(t) \rangle = \frac{4\mu^2}{3D^2} (e^{3Dt} - 3e^{Dt} + 2), \quad \langle Q(t) \rangle = \frac{2\mu}{3D} (e^{3Dt} - 1) \quad (23)$$

имеет наглядную физическую интерпретацию: на малых временах, пока $Dt \ll 1$, влияние молекулярной диффузии на ширину сгустка преобладает, средние величины (23), описывающие ширину и координаты сгустка, растут по классическому линейному закону:

$$\langle I(t) \rangle \simeq 4\mu^2 t / D, \quad \langle Q(t) \rangle \simeq 2\mu t. \quad (24)$$

Позднее начинают сказываться сжатия и растяжения, обусловленные хаотическими движениями среды. В итоге величины (23) начинают расти быстрее, а на временах $Dt \gg 1$ линейный закон роста (24) сменяется экспоненциальным:

$$\langle I(t) \rangle \simeq \frac{4\mu^2}{3D^2} e^{3Dt}, \quad \langle Q(t) \rangle = \frac{2\mu}{3D} e^{3Dt}.$$

Подчеркнём, однако, что выводы о поведении сгустка плавучих частиц, основанные на анализе среднего квадрата и других моментных функций величины (11), могут неадекватно отражать истинное поведение сгустка с течением времени (см., например, [1]). Более аккуратный анализ должен основываться на обсуждении вероятностных свойств ширины и формы сгустка. К сожалению, аналитическое и численное обсуждение вероятностных свойств решения уравнения (22) оказывается чрезвычайно сложным. Поэтому вероятностные свойства сгустков на поверхности хаотически движущейся жидкости заслуживают отдельного обсуждения, которое мы надеемся провести в последующих публикациях.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 97–02–16521), программ “Ведущие научные школы России” (проект № 96–15–96722) и “Университеты России — фундаментальные исследования” (проект № 3878), INTAS (грант № 11134).

ЛИТЕРАТУРА

1. Кляцкин В. И., Саичев А. И. // УФН. 1992. Т. 162. С. 161.
2. Кляцкин В. И., Саичев А. И. // ЖЭТФ. 1997. Т. 111. С. 1297.
3. Saichev A. I., Woyczynski W. A. Stochastic Models in Geosystems, IMA volumes. V. 85. — NY: Springer-Verlag, 1996. — P. 359.
4. Saichev A. I., Zhukova I. S. Lecture Notes in Physics. V. 511. — NY: Springer-Verlag, 1998. P. 353.
5. Жукова И. С., Саичев А. И. Локализация сгустков плавучих частиц в канале с турбулентной жидкостью // ПММ. (в печати).

Нижегородский государственный
университет
им. Н. И. Лобачевского,
г. Н. Новгород, Россия

Поступила в редакцию
16 июля 1999 г.

EVOLUTION OF PASSIVE TRACER CLUSTERS ON THE SURFACE OF A TURBULENT LIQUID*I. S. Zhukova, V. N. Koshelev, and A. I. Saichev*

We study the behavior of a passive tracer clusters in a two-dimensional turbulent medium, the problem related to physics of the atmosphere and ocean. We obtain an asymptotic solution of the equation for the cluster density, which is valid at small coefficient of molecular diffusion. Temporal evolution of the cluster shape and coordinates is analyzed.

УДК 519.246.8

ЗАПОЛНЕНИЕ ПРОПУСКОВ В МАРКОВСКИХ СИММЕТРИЧНЫХ УСТОЙЧИВЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДАХ

С. Н. Моисеев

Предложены оптимальные алгоритмы заполнения пропусков в марковских симметричных устойчивых временных рядах. Рассмотрены случаи, когда механизм порождения пропусков либо не зависит от значений ряда, либо является случайным цензурированием снизу. Заполнение не искажает вероятностных свойств рядов.

ВВЕДЕНИЕ

Существенное влияние на распространение радиоволн УКВ диапазона через ионосферу оказывает спорадический слой E (слой E_s), для которого характерна аномально большая электронная концентрация. Его появление приводит к нарушению УКВ радиосвязи через верхнюю ионосферу и одновременно к образованию спорадического канала сверхдальнего распространения ультракоротких радиоволн через нижнюю ионосферу. При прогнозировании ионосферного распространения радиоволн влияние слоя E_s учитывают с помощью анализа и прогноза его максимальной электронной концентрации, однозначно связанной с частотой экранирования слоя. Частоту экранирования измеряют круглосуточно на станциях вертикального зондирования. Однако данные измерений на этих станциях содержат многочисленные пропуски, вызванные техническими перерывами, ограниченным диапазоном измерительных приборов и экранировкой нижележащим регулярным слоем E зондирующего сигнала, отражённого от слоя E_s . Доля пропусков в данных летом составляет 10÷15 %, а зимой доходит до 60 %, что существенно затрудняет их обработку. Одним из способов преодоления этой трудности является предварительное заполнение пропусков с дальнейшей работой с полной выборкой данных [1–3]. Как правило, пропуски в выборке заполняют средними значениями, что существенно искажает вероятностные свойства данных и может привести к ошибочным статистическим выводам. В работе [4] была построена модель максимальной электронной концентрации слоя E_s , которая является частным случаем марковского симметричного устойчивого процесса.

В настоящей работе предлагаются оптимальные алгоритмы заполнения пропусков в марковских симметричных устойчивых временных рядах, не искажающие их вероятностных свойств.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Марковский симметричный устойчивый временной ряд y_t , $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, описывается авторегрессионным уравнением первого порядка

$$y_t - \phi y_{t-1} = a_t, \quad (1)$$

где $\phi \in (-1, 1)$, a_t — независимые одинаково распределённые симметричные устойчивые случайные величины с нулевой медианой и характеристической функцией

$$\theta(u) = \exp(-b |u|^\alpha),$$

где $b > 0$, $\alpha \in (0, 2]$. Гауссовские марковские процессы получаются из (1) как частный случай при $\alpha = 2$, линейные марковские процессы Коши — при $\alpha = 1$. Процесс y_t аналогично гауссовским процессам обладает свойством инвариантности к линейным преобразованиям: произвольный линейный функционал от y_t есть симметричная устойчивая случайная величина.

Пусть из n отсчётов $\mathbf{y} = \|y_1, \dots, y_n\|$ выборки временного ряда y_t наблюдаются n_{obs} отсчётов \mathbf{y}_{obs} , а $n_{\text{mis}} = n - n_{\text{obs}}$ отсчётов \mathbf{y}_{mis} отсутствуют. Вначале предположим, что механизм порождения пропусков не зависит от значений ряда y_t . Необходимо заполнить пропуски такими значениями $\mathbf{y}_{\text{mis}}^*$, чтобы вероятностные свойства ряда y_t были искажены в минимальной степени.

2. ОПТИМАЛЬНОЕ ЗАПОЛНЕНИЕ

Нарушение вероятностных свойств ряда в результате заполнения пропусков будем характеризовать функционалом потерь

$$C(W, p) = |W(\mathbf{y}) - p(\mathbf{y}_{\text{mis}}|\mathbf{y}_{\text{obs}})W(\mathbf{y}_{\text{obs}})|, \quad (2)$$

где $W(\mathbf{y})$ — n -мерная плотность вероятностей выборки \mathbf{y} , $W(\mathbf{y}_{\text{obs}})$ — n_{obs} -мерная плотность вероятностей наблюдаемых отсчётов \mathbf{y}_{obs} , $p(\mathbf{y}_{\text{mis}}|\mathbf{y}_{\text{obs}})$ — условная плотность вероятностей значений $\mathbf{y}_{\text{mis}}^*$, которыми будут заполняться пропуски, при фиксированных значениях \mathbf{y}_{obs} . Усредняя потери (2), получаем выражение для среднего риска

$$R(p) = \int_S |W(\mathbf{y}) - p(\mathbf{y}_{\text{mis}}|\mathbf{y}_{\text{obs}})W(\mathbf{y}_{\text{obs}})|W(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad (3)$$

где $S = \{\mathbf{y} : W(\mathbf{y}) > 0\}$ — носитель плотности $W(\mathbf{y})$. Особенностью среднего риска (3) является то, что он представляет собой нелинейный функционал относительно функции $p(\mathbf{y}_{\text{mis}}|\mathbf{y}_{\text{obs}})$. Согласно теории статистических решений [5] оптимальное правило заполнения пропусков определяется выбором такой функции $p(\mathbf{y}_{\text{mis}}|\mathbf{y}_{\text{obs}})$, которая минимизирует средний риск (3). В простейшем случае, когда вероятностная модель временного ряда y_t полностью известна, минимум функционала (3) достигается в точке

$$p(\mathbf{y}_{\text{mis}}|\mathbf{y}_{\text{obs}}) = W(\mathbf{y}_{\text{mis}}|\mathbf{y}_{\text{obs}}). \quad (4)$$

Из (4) следует, что оптимальное правило заполнения является рандомизированным. Иными словами, пропуски заполняются случайно выбранными значениями из распределения (4). Заметим, что приведённый здесь достаточно общий подход к задаче заполнения пропусков даёт возможность оценить потери от неоптимального заполнения и построить квазиоптимальные адаптивные алгоритмы заполнения при наличии априорной неопределённости [5].

Предположим, что один из пропусков имеет место в момент времени $t = k$. Тогда, используя представление

$$p(\mathbf{y}_{\text{mis}}|\mathbf{y}_{\text{obs}}) = p(y_k|\mathbf{y}_{\text{obs}})p(\mathbf{y}_{\text{mis}-k}|y_k, \mathbf{y}_{\text{obs}}),$$

где $\mathbf{y}_{\text{mis}-k}$ — вектор пропущенных отсчётов ряда y_t за исключением отсчёта y_k , легко показать, что минимум среднего риска (3) достигается в двух точках:

$$p(y_k|\mathbf{y}_{\text{obs}}) = W(y_k|\mathbf{y}_{\text{obs}}) \quad \text{и} \quad p(\mathbf{y}_{\text{mis}-k}|\mathbf{y}_{\text{obs}}) = W(\mathbf{y}_{\text{mis}-k}|\mathbf{y}_{\text{obs}}).$$

Из этого следуют два практически важных вывода. Во-первых, совместное заполнение пропусков \mathbf{y}_{mis} сводится к последовательному: сначала заполняется пропуск y_k в момент $t = k$ значением y_k^* , которое случайным образом выбирается (моделируется) из распределения $p(y_k|\mathbf{y}_{\text{obs}})$; далее отсчёт y_k^* считается известным ($y_k^* \in \{\mathbf{y}_{\text{obs}}\}$) и заполняется следующий пропуск из множества $\{\mathbf{y}_{\text{mis}-k}\}$. Во-вторых,

последовательность заполнения пропусков и расположение текущего заполняемого отсчёта относительно отсчётов y_{obs} являются произвольными и никак не влияют на качество заполнения.

3. ЗАПОЛНЕНИЕ В МАРКОВСКИХ УСТОЙЧИВЫХ РЯДАХ

Марковское свойство временного ряда y_t означает, что для любых $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ справедливо следующее соотношение для условных плотностей вероятностей ряда:

$$W(y_{t_n}|y_{t_{n-1}}, \dots, y_{t_1}) = W(y_{t_n}|y_{t_{n-1}}). \quad (5)$$

Легко показать, что если временной ряд марковский при движении из прошлого в будущее, он будет марковским и при обратном движении, то есть наряду с (5) справедливо соотношение

$$W(y_{t_1}|y_{t_2}, \dots, y_{t_n}) = W(y_{t_1}|y_{t_2}). \quad (6)$$

Рассмотрим алгоритм заполнения пропуска в момент $t = k$. Пусть ближайший справа к пропуску y_k наблюдаемый отсчёт ряда — y_{k+l} , а ближайший слева — y_{k-m} . Тогда из (5) и (6) следует

$$W(y_k|y_{\text{obs}}) = W(y_k|y_{k+l}, y_{k-m}). \quad (7)$$

В свою очередь, используя марковское свойство ряда y_t плотность $W(y_k|y_{k+l}, y_{k-m})$ можно представить в виде

$$W(y_k|y_{k+l}, y_{k-m}) = \frac{W(y_{k+l}|y_k)W(y_k|y_{k-m})}{W(y_{k+l}|y_{k-m})}. \quad (8)$$

Все условные плотности, входящие в правую часть (8), есть плотности вероятностей симметричных устойчивых случайных величин, которые можно записать единой формулой

$$W(y_{k+i}|y_{k-j}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \exp(-\lambda x^\alpha) \cos[(y_{k+i} - \beta)x] dx, \quad (9)$$

где $\lambda = b(1 - |\phi|^{\alpha(i+j)})/(1 - \phi^2)$, $\beta = \phi^{i+j}y_{k-j}$; $i, j \geq 0$. Несмотря на то, что плотности $W(y_{k+i}|y_{k-j})$ — симметричные устойчивые, плотности $W(y_{k-i}|y_{k+j})$ при $i, j > 0$ будут симметричными устойчивыми только для гауссовских временных рядов ($\alpha = 2$). Поэтому наиболее просто плотность вероятностей (8) выглядит для гауссовского ряда (1): она является гауссовской плотностью вероятностей со средним

$$\mu = [\phi^l(1 - \phi^{2k})y_{k+l} + \phi^k(1 - \phi^{2l})y_{k-m}]/(1 - \phi^{2k+2l})$$

и дисперсией

$$\sigma^2 = [2b(1 - \phi^{2l})(1 - \phi^{2k})]/[(1 - \phi^2)(1 - \phi^{2k+2l})].$$

Оптимальное правило заполнения пропусков в выборке марковского симметричного устойчивого временного ряда y_t выглядит следующим образом. Пропуск y_k в момент времени $t = k$ заполняется значением y_k^* , которое моделируется как случайная величина с плотностью (8) по известным правилам [6]. Далее отсчёт y_k исключается из множества пропущенных отсчётов $\{y_{\text{mis}}\}$, а отсчёт y_k^* добавляется к множеству наблюдаемых отсчётов $y_k^* \in \{y_{\text{obs}}\}$, после чего заполняется следующий пропуск и т.д. Искажения вероятностных свойств ряда y_t при таком заполнении не происходит.

До этого предполагалось, что механизм порождения пропусков не зависит от значений ряда y_t . Однако для параметров слоя E_s , измеряемых на ионосферных станциях, более характерна модель порождения пропусков в виде случайного цензурирования снизу, когда в выборке ряда y_t отсутствуют все

отсчёты, которые удовлетворяют неравенству $y_t < c_t$, где c_t — отсчёты случайной цензуры. Для электронной концентрации слоя E_s , возникшего выше регулярного слоя E ионосферы, цензура c_t представляет собой максимальную плазменную частоту слоя E , который в данном случае экранирует слой E_s . В ночное время цензура c_t может определяться уровнем поглощения зондирующего сигнала. Оптимальное правило заполнения пропусков в случае случайного цензурирования изменится. Наиболее просто случайное цензурирование учитывается в следующем алгоритме [3]. Пропуск y_k заполняется случайной величиной y_k^* из распределения (8) только в том случае, если $y_k^* < c_k$. В противном случае случайная величина y_k^* моделируется заново, пока не выполнится условие $y_k^* < c_k$. Если значение случайной цензуры c_k неизвестно, то оно моделируется на основе известной для c_t модели в паре с y_k^* каждый раз заново. При таком заполнении вероятностные свойства ряда y_t не будут нарушены.

ВЫВОДЫ

Предложенные оптимальные алгоритмы заполнения пропусков в марковских симметричных устойчивых временных рядах позволяют более корректно вести статистическую обработку выборок из таких рядов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Литтл Р. Дж., Рубин Д. Б. Статистический анализ данных с пропусками. — М.: Финансы и статистика, 1991. — 336 с.
2. Моисеев С. Н. // Геомагнетизм и аэрономия. 1997. Т. 37, № 4. С. 63.
3. Моисеев С. Н. // Автометрия. 1998. № 1. С. 61.
4. Моисеев С. Н. // Геомагнетизм и аэрономия. 1997. Т. 37, № 3. С. 107.
5. Репин В. Г., Тартаковский Г. П. Статистический синтез при априорной неопределённости и адаптация информационных систем. — М.: Сов. радио, 1977. — 432 с.
6. Быков В. В. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике. — М.: Сов. радио, 1971. — 328 с.

Воронежский государственный
университет, г. Воронеж, Россия

Поступила в редакцию
29 июня 1999 г.

COMPLETING THE MISSES IN MARKOV SYMMETRICAL STABLE TIME SERIES

S. N. Moiseev

The optimal algorithms of completing the misses in Markov symmetrical stable time series are proposed. We consider the cases where the mechanism of miss generation is either independent of the series values or random censored from below. The completing does not distort the probability properties of the series.

УДК 538.56:519.25

ВРЕМЯ КОРРЕЛЯЦИИ И СТРУКТУРА ФУНКЦИИ КОРРЕЛЯЦИИ НЕЛИНЕЙНОГО РАВНОВЕСНОГО БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ В ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ЯМАХ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

А. А. Дубков, А. Н. Малахов, А. И. Саичев

Получена точная квадратурная формула для времени корреляции стационарного броуновского движения в потенциальных ямах произвольной формы. Для степенных потенциальных профилей проведено исследование зависимости времени корреляции от интенсивности воздействующего шума, а для бистабильных ям — от высоты потенциального барьера. Проанализированы также некоторые спектральные характеристики установившегося движения и найдены коэффициенты разложения корреляционной функции в ряд Тейлора.

ВВЕДЕНИЕ

Необходимость знания свойств функции корреляции (в том числе и времени корреляции) равновесного броуновского движения, протекающего при заданной температуре в той или иной потенциальной яме, возникает в различных проблемах теории нелинейного броуновского движения (см., например, [1]), а также при анализе статистических характеристик шумов, подверженных нелинейному преобразованию (см., например, [2]).

Броуновское движение в потенциальных полях представляет собой марковский процесс, а его вероятностные характеристики описываются уравнением Фоккера—Планка (УФП). Для нахождения функции корреляции необходимо знать нестационарные решения УФП в соответствующем потенциальном профиле, отыскание которых является чрезвычайно трудной задачей.

В то же время существует подход, позволяющий находить точные значения различных временных характеристик нелинейного броуновского движения в произвольных потенциальных профилях [3] без обращения к нестационарному решению УФП. На основе этого подхода в настоящей статье находятся точные значения времени корреляции стационарного равновесного броуновского движения в потенциальных ямах произвольной формы. Анализируется зависимость времени корреляции от интенсивности воздействующего шума, т. е. от температуры термостата. Обсуждаются характерные примеры.

МЕТОД РЕШЕНИЯ. ОБЩИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1. Исследуем одномерное броуновское движение частиц в потенциальном поле $\Phi(x)$ в режиме сильного затухания (большой вязкости), описываемое уравнением Ланжевена

$$\dot{x} = -\Phi'(x)/h + \xi(t), \quad (1)$$

где $x(t)$ — координата броуновской частицы. Здесь и далее точкой и штрихом обозначаются обыкновенные производные соответственно по времени и по координате. Кроме того, в (1) входит белый шум $\xi(t)$, описывающий тепловые флуктуации с нулевым средним и функцией корреляции

$$\langle \xi(t)\xi(t+\tau) \rangle = D\delta(\tau), \quad D = 2kT/h.$$

Здесь h — эквивалентная вязкость, T — температура, k — постоянная Больцмана, $\delta(\tau)$ — дельта-функция. Известно, что плотность вероятности $W(x, t)$ диффундирующих частиц описывается уравнением Фоккера—Планка

$$\frac{\partial W(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial G(x, t)}{\partial x} = \frac{1}{B} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [\varphi'(x) W(x, t)] + \frac{\partial^2 W(x, t)}{\partial x^2} \right\}, \quad (2)$$

где $B = 2/D$, $G(x, t)$ есть поток вероятности, $\varphi(x) = 2\Phi(x)/(hD) = \Phi(x)/(kT)$ — безразмерный потенциальный профиль. Напомним также другую общепринятую форму записи уравнения Фоккера—Планка:

$$\frac{\partial W(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [K_1(x)W(x, t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [K_2(x)W(x, t)],$$

где $K_1(x)$ и $K_2(x)$ — так называемые кинетические коэффициенты. В нашем случае

$$K_1(x) = -\Phi'(x)/h = -D\varphi'(x)/2, \quad K_2(x) = D.$$

Установившееся броуновское движение обладает стационарной плотностью вероятности $W(x) = W(x, \infty)$, которая, как следует из уравнения (2), равна

$$W(x) = Ae^{-\varphi(x)}, \quad A = 1 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varphi(x)} dx. \quad (3)$$

Коэффициент нормировки A не равен нулю, если потенциальный профиль $\varphi(x)$, описывающий потенциальную яму, достаточно быстро возрастает при $x \rightarrow \pm\infty$, что мы и будем полагать выполненным.

2. В установившемся режиме $x(t)$ является стационарным марковским процессом, обладающим функцией корреляции

$$K[\tau] = \langle x(t)x(t+\tau) \rangle = \iint_{-\infty}^{+\infty} x_0 x W(x_0, x; \tau) dx_0 dx, \quad (4)$$

где $W(x_0, x; \tau)$ — двумерная плотность вероятности.

Наша задача состоит в нахождении времени корреляции τ_k броуновского движения в зависимости от заданного потенциального профиля $\varphi(x)$, в котором это движение осуществляется.

3. Будем решать поставленную задачу методом, изложенным в [3] применительно к отысканию характерных времён эволюции нестационарного броуновского движения.

Функция корреляции $K[\tau]$ меняется от $K[0] = \langle x^2 \rangle$ до $K[\infty] = \langle x \rangle^2$, т. е. изменяется на величину дисперсии $\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$. Определим время корреляции как

$$\tau_k = \frac{1}{\sigma^2} \int_0^{\infty} [K[\tau] - \langle x \rangle^2] d\tau, \quad (5)$$

т. е. как ширину равновеликого по площади прямоугольника (см. рис. 1). Заметим, что данное определение времени корреляции легитимно, если функция корреляции при своём изменении с ростом τ остаётся выше значения $\langle x \rangle^2$ и достаточно быстро затухает, так что интеграл (5) сходится.

Если исследовать общий случай стационарного марковского процесса $x(t)$ (а броуновское движение в указанных потенциальных ямах таковым и является), то с помощью разложения Баррета—Лэмпарда [4] для плотности вероятности переходов нетрудно показать, что корреляционная функция стационарного марковского процесса представима в виде

$$K[\tau] = \langle x \rangle^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 e^{-\lambda_n \tau},$$

где α_n — некоторые вещественные коэффициенты, а собственные числа λ_n являются действительными, простыми и положительными. Отсюда, прежде всего, следует, что корреляционная функция всюду строго положительна и остаётся выше значения $\langle x \rangle^2$. Во-вторых, нетрудно показать, что интеграл (5) ограничен, т. к. сходятся ряды, входящие в выражение для времени корреляции

$$\tau_k = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2}{\lambda_n}}{\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2}$$

в силу конечности дисперсии и того, что при больших n

$$\frac{\alpha_n^2}{\lambda_n} \sim \frac{\alpha_n^2}{n^2}.$$

Таким образом, определение (5) времени корреляции является законным.

Двумерная плотность вероятности стационарного марковского процесса $x(t)$ представима в виде $W(x_0, x; \tau) = W(x_0)W(x_0|x, \tau)$, где $W(x_0|x, \tau)$ — плотность вероятности переходов марковского процесса от значения x_0 в момент t к значению x в момент $t + \tau$. Как известно, плотность вероятности переходов марковского процесса удовлетворяет уравнению (2) с начальным условием $W(x_0|x, 0) = \delta(x - x_0)$.

Введём преобразование Лапласа ($\text{Re } s \geq 0$)

$$\hat{K}[s] = \int_0^{\infty} K[\tau] e^{-s\tau} d\tau, \quad (6)$$

$$Y(x, x_0, s) = \int_0^{\infty} W(x_0|x, \tau) e^{-s\tau} d\tau. \quad (7)$$

Нетрудно показать, что $Y(x, x_0, s)$ подчиняется обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка

$$Y'' + (\varphi' Y)' - sBY = -B\delta(x - x_0). \quad (8)$$

Согласно (4), (6), (7) лаплас-образ функции корреляции может быть записан в виде

$$\hat{K}[s] = \int_{-\infty}^{+\infty} x_0 W(x_0) dx_0 \int_{-\infty}^{+\infty} x Y(x, x_0, s) dx. \quad (9)$$

С другой стороны, время корреляции (5) после преобразования Лапласа равно

$$\tau_k = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s\hat{K}[s] - \langle x \rangle^2}{s\sigma^2}. \quad (10)$$

Если бы нам была известна функция $Y(x, x_0, s)$, являющаяся решением уравнения (8) с учётом граничных условий равенства нулю потока вероятности при $x = \pm\infty$, то можно было бы без труда определить из (9) функцию $\hat{K}[s]$, время корреляции (10) и даже саму функцию корреляции $K[\tau]$ с помощью

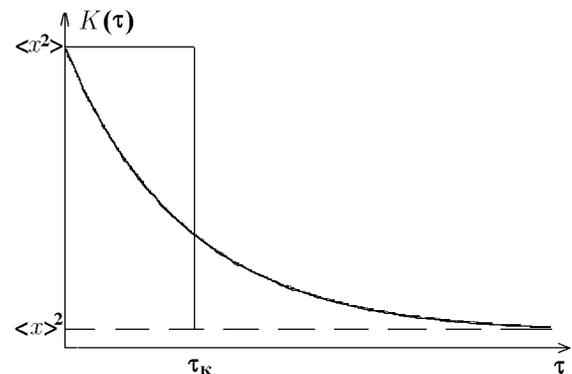


Рис. 1. Время корреляции определяется как ширина прямоугольника с высотой, равной дисперсии процесса, и площадью, равной площади под графиком корреляционной функции над $\langle x \rangle^2$

обратного преобразования Лапласа. Однако для произвольного потенциального профиля $\varphi(x)$ аналитическое решение уравнения (8) найти невозможно. Оно известно лишь для некоторых простейших потенциальных профилей, например кусочно-линейных [5] и кусочно-параболических [6].

Обратим далее внимание на то, что согласно (10) для нахождения времени корреляции нет необходимости отыскивать $Y(x, x_0, s)$, а достаточно найти $s\hat{K}[s]$ и, следовательно, $sY(x, x_0, s)$ лишь для малых s . Запишем

$$sY(x, x_0, s) = Z_0(x, x_0) + sZ_1(x, x_0) + s^2Z_2(x, x_0) + \dots \quad (11)$$

Заметим, что согласно предельным теоремам теории преобразования Лапласа [7]

$$\lim_{s \rightarrow 0} sY(x, x_0, s) = Z_0(x, x_0) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} W(x_0|x, \tau) = W(x). \quad (12)$$

Подставив (11) с учётом (9), (12) в (10), получим

$$\tau_k = \frac{1}{\sigma^2} \int_{-\infty}^{+\infty} x_0 W(x_0) dx_0 \int_{-\infty}^{+\infty} x Z_1(x, x_0) dx. \quad (13)$$

4. Из (11) и (8) легко найти последовательность уравнений для функций $Z_k(x, x_0)$, которые без труда решаются даже для произвольного потенциального профиля $\varphi(x)$. Так, для $Z_1(x, x_0)$ уравнение имеет следующий вид:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{dZ_1}{dx} + \varphi' Z_1 \right) = BW(x) - B\delta(x - x_0).$$

Решая его с учётом граничных условий (см. подробнее в [3]), находим

$$Z_1(x, x_0) = Be^{-\varphi(x)} \left[M(x, x_0) - A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varphi(v)} M(v, x_0) dv \right], \quad (14)$$

где

$$M(x, x_0) = \int_{-\infty}^x e^{+\varphi(u)} [F(u) - 1(u - x_0)] du,$$

$$F(x) = A \int_{-\infty}^x e^{-\varphi(u)} du = \int_{-\infty}^x W(u) du,$$

и $1(x)$ — единичная функция. Подставив эти выражения в (13) и изменив порядок интегрирования, после несложных, но громоздких преобразований получим следующую формулу для времени корреляции броуновского движения в произвольной потенциальной яме, описываемой безразмерным потенциальным профилем $\varphi(x)$:

$$\tau_k = \frac{B}{A\sigma^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\varphi(u)} [H(u) - \langle x \rangle F(u)]^2 du, \quad (15)$$

где

$$H(x) = \int_{-\infty}^x uW(u) du, \quad \langle x \rangle = H(\infty), \quad \sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (u - \langle u \rangle)^2 W(u) du,$$

а $W(x)$ задаётся равенством (3).

Если потенциальная яма симметрична, так что $\langle x \rangle = 0$, $\varphi(-x) = \varphi(x)$, то формулу (15) можно преобразовать и получить более простое выражение для времени корреляции:

$$\tau_k = \frac{2 \int_0^\infty e^{\varphi(u)} \left[\int_u^\infty x e^{-\varphi(x)} dx \right]^2 du}{D \int_0^\infty x^2 e^{-\varphi(x)} dx}. \quad (16)$$

ПРИМЕРЫ МОНОСТАБИЛЬНЫХ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ЯМ

1. Ограничимся для определённости симметричным степенным потенциальным профилем $\Phi(x) = c|x|^\alpha$, где $c > 0$, $\alpha > 0$. При этом в дальнейших выкладках удобно использовать физически наглядные характерный масштаб L и характерное время θ :

$$L = \left(\frac{hD}{2c} \right)^{1/\alpha}, \quad \theta = \frac{2L^2}{D} = 2 \left(\frac{h}{2c} \right)^{2/\alpha} D^{(2/\alpha)-1}. \quad (17)$$

Заметим, что характерный масштаб L имеет простой геометрический смысл: при $|x| = L$ стационарная плотность вероятности (3) при любых конечных α уменьшается в e раз от своего максимального значения.

В обсуждаемом случае безразмерный потенциальный профиль записывается в виде $\varphi(x) = |x|^\alpha/L^\alpha$, а коэффициент нормировки стационарного распределения (3) равен

$$A = \frac{\alpha}{2\Gamma(1/\alpha)} \frac{1}{L},$$

где $\Gamma(z)$ — гамма-функция.

Из (16) находим следующее значение времени корреляции стационарного броуновского движения в степенной потенциальной яме:

$$\tau_k = \frac{\alpha R(\alpha)}{\Gamma(3/\alpha)} \theta, \quad (18)$$

где

$$R(\alpha) = \int_0^\infty e^{z^\alpha} \left[\int_z^\infty y e^{-y^\alpha} dy \right]^2 dz. \quad (19)$$

Заметим при этом, что дисперсия стационарного распределения броуновского движения в степенной потенциальной яме равна

$$\sigma^2 = \frac{\Gamma(3/\alpha)}{\Gamma(1/\alpha)} L^2. \quad (20)$$

2. Обсудим полученный результат прежде всего с позиции зависимости времени корреляции от интенсивности воздействующего шума D или, что то же самое, от температуры, поскольку $D = 2kT/h$. Из формул (17), (18) следует, что время корреляции не будет зависеть от интенсивности шума лишь при $\alpha = 2$, чему соответствует параболический профиль потенциальной ямы $\Phi(x) \sim x^2$ и линейность уравнения Ланжевена (1), т. е. линейность динамической системы, для которой это обстоятельство является тривиальным.

Если $\alpha > 2$, то потенциальная яма считается “жесткой” и тем более жесткой, чем больше α . В этом случае согласно (17), (18) время корреляции убывает с ростом интенсивности шума: $\tau_k \sim D^{(2/\alpha)-1}$.

При $\alpha \gg 2$ время корреляции обратно пропорционально интенсивности шума, а потенциальная яма приближается к прямоугольной (прямоугольная форма потенциальной ямы достигается в пределе при $\alpha \rightarrow \infty$).

Если $\alpha < 2$, чему соответствует “мягкая” потенциальная яма, время корреляции броуновского движения возрастает с ростом интенсивности шума тем сильнее, чем ближе к нулю положительный показатель α .

Таким образом, параболический профиль потенциальной ямы служит границей между качественно различными характерными зависимостями времени корреляции от температуры.

Указанные зависимости времени корреляции от D при $\alpha \neq 2$ свидетельствуют о негауссовости броуновского движения вследствие нелинейности исходной динамической системы. Качественно различная зависимость времени корреляции от интенсивности шума может быть интерпретирована следующим образом. В жёстких потенциальных ямах ($\alpha > 2$) с ростом D стационарное распределение (3) уширяется медленнее, т. к. его дисперсия согласно (17), (20) растёт пропорционально $D^{2/\alpha}$. В итоге рост D ведёт к убыстрению движения броуновских частиц, что и уменьшает их время корреляции. Напротив, в мягких потенциальных ямах ($\alpha < 2$) с увеличением D дисперсия стационарного распределения согласно (17), (20) растёт быстрее, распределение стационарной плотности вероятности становится более широким, а броуновские частицы начинают двигаться в такой яме более медленно, что и увеличивает время корреляции их движения.

Заметим, что аналогичная ситуация отмечена и для времени релаксации начального дельта-образного вероятностного распределения $W(x, 0) = \delta(x)$ к равновесному стационарному распределению $W(x)$ в симметричных потенциальных ямах [8, § 15.6].

3. Обсудим конкретные примеры степенного профиля. Начнём с мягкой потенциальной ямы с V-образным профилем $\Phi(x) = c|x|$. В этом случае $\alpha = 1$ и согласно (17)–(20) $R(1) = 5$, $\sigma^2 = 2L^2 = h^2 D^2 / (2c^2)$,

$$\tau_k = \frac{5}{2}\theta = \frac{5}{4} \frac{h^2 D}{c^2}. \quad (21)$$

Заметим, что этот же результат для V-образной потенциальной ямы был получен ранее другим методом в работе [9].

4. Для линейной системы, описываемой параболическим потенциальным профилем $\Phi(x) = cx^2$, уравнение Ланжевена сводится к

$$\dot{x} = -\frac{2c}{h}x + \xi(t).$$

Из (17)–(20) при $\alpha = 2$ следует, что $R(2) = \sqrt{\pi}/8$, $\sigma^2 = L^2/2 = hD/(4c)$, а

$$\tau_k = \frac{\theta}{2} = \frac{h}{2c}. \quad (22)$$

5. Рассмотрим теперь случай жёсткой потенциальной ямы — параболической ямы четвёртого порядка $\Phi(x) = cx^4$, которой соответствует нелинейное уравнение Ланжевена (1)

$$\dot{x} = -\frac{4c}{h}x^3 + \xi(t).$$

Учитывая, что при $\alpha = 4$

$$R(4) = \frac{\pi}{16} \int_0^\infty e^{z^4} [\operatorname{erfc}(z^2)]^2 dz = 0,11,$$

из (17)–(20) находим

$$\tau_k = \frac{8 \cdot 0,11}{\Gamma(3/4)} \sqrt{\frac{h}{2cD}} = 0,36 \theta, \quad \sigma^2 = \frac{\Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)} \sqrt{\frac{hD}{2c}} = 0,338 L^2. \quad (23)$$

6. Предельно жёсткий потенциальный профиль соответствует прямоугольной потенциальной яме: $\varphi(x) = 0$ для $x \in [-L, L]$ и $\varphi(x) = \infty$ для $x \notin [-L, L]$. В этом случае $W(x) = 1/(2L)$ внутри ямы и $W(x) = 0$ вне её, дисперсия $\sigma^2 = L^2/3$. Непосредственно из формулы (16) нетрудно найти

$$\tau_k = \frac{2}{5} \theta = \frac{4L^2}{5D}. \quad (24)$$

Заметим, что тот же результат можно получить и из (17), (18), устремив $\alpha \rightarrow \infty$. При этом следует принять во внимание, что при $\alpha \rightarrow \infty$ $3\Gamma(3/\alpha)/\alpha \rightarrow 1$, $R(\alpha) \rightarrow 2/15$, а результат (24) фактически справедлив при $\alpha \gg 1$.

7. Для трапецевидной ямы с потенциальным профилем

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0, & |x| < L; \\ c(|x| - L), & |x| > L \end{cases}$$

расчёт по формуле (16) даёт:

$$\tau_k = \frac{h^2 D}{10c^2} \frac{75 + 75\gamma + 45\gamma^2 + 25\gamma^3 + 10\gamma^4 + 2\gamma^5}{6 + 6\gamma + 3\gamma^2 + \gamma^3},$$

где $\gamma = 2cL/(hD)$. Заметим, что в предельных случаях $c \rightarrow \infty$ (прямоугольная яма) и $L \rightarrow 0$ (V-образный профиль) данный результат стыкуется соответственно с выражениями (24) и (21).

ПРИМЕРЫ БИСТАБИЛЬНЫХ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ЯМ

1. Рассмотрим простейшую симметричную прямоугольную бистабильную потенциальную яму, изображённую на рис. 2. Потенциальный барьер, разделяющий стабильные состояния, равен Φ_0 . На основании (16) нетрудно найти время корреляции броуновского движения в таком бистабильном профиле:

$$\tau_k = \frac{\theta}{80} \frac{135e^\beta + 8e^{-\beta} + 113}{7 + e^{-\beta}}, \quad (24a)$$

где $\beta = 2\Phi_0/(hD)$ — безразмерная высота потенциального барьера.

Если потенциальный барьер мал, так что $\beta \ll 1$, то из (24a) следует

$$\tau_k \simeq \frac{2}{5} \theta (1 + 0,62\beta). \quad (24б)$$

При $\beta \rightarrow 0$ это время корреляции, как и должно быть, переходит в (24).

Если потенциальный барьер велик, так что $e^\beta \gg 1$, то во времени корреляции появляется, как и следовало ожидать, фактор Крамерса e^β :

$$\tau_k \simeq 0,24 \theta e^\beta. \quad (24в)$$

При этом τ_k становится достаточно большим, что связано с редкими переходами броуновских частиц из одного стабильного состояния потенциальной ямы в другое. Таким образом, броуновская частица

с координатой $x(t)$ довольно медленно переходит, например, из области $[-L, -L/2]$ через нуль (ибо $\langle x \rangle = 0$) в область $[L/2, L]$, в то время как внутри этих областей броуновские частицы движутся быстрее, с временем корреляции, равным согласно (24)

$$\tau_k = \frac{4(L/4)^2}{5D} = \frac{1}{20} \frac{L^2}{D} = \frac{1}{40} \theta.$$

При этом температурная зависимость времени корреляции имеет вид:

$$\tau_k \sim \frac{1}{kT} \exp\left(\frac{\Phi_0}{kT}\right).$$

Заметим, что в этом случае дисперсия равна

$$\langle x^2 \rangle = \sigma^2 = \frac{1}{12} L^2 \frac{7 + e^{-\beta}}{1 + e^{-\beta}},$$

откуда при $e^\beta \gg 1$ имеем

$$\sigma^2 = \frac{7}{12} L^2.$$

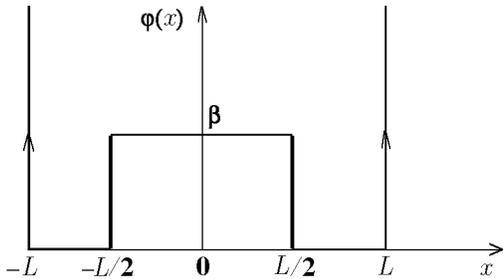


Рис. 2. Прямоугольная бистабильная потенциальная яма

2. Рассмотрим другой вид симметричной бистабильной потенциальной ямы, изображённой на рис. 3.

Для такого потенциального профиля из (16) находим время корреляции

$$\tau_k = \frac{\theta}{\beta^2} \frac{(\beta - 1)^2 e^\beta + (-\beta^3 + 3\beta^2 - 4\beta + 4) - 5e^{-\beta}}{(\beta^2 - 2\beta + 2) - 2e^{-\beta}},$$

где β — безразмерная высота потенциального барьера имеет прежнее значение $\beta = 2\Phi_0/(hD)$.

Для малого потенциального барьера ($\beta \ll 1$)

$$\tau_k = \frac{2}{5} \theta \left(1 + \frac{19}{48} \beta\right).$$

Для высокого потенциального барьера ($e^\beta \gg 1$)

$$\tau_k = \theta \frac{e^\beta}{\beta^2},$$

так что множитель Крамерса, как и должно быть, появляется опять, однако температурная зависимость времени корреляции будет теперь иной:

$$\tau_k \sim kT \exp\left(\frac{\Phi_0}{kT}\right).$$

3. Таким образом, функция корреляции броуновского движения в бистабильных потенциальных ямах с высоким потенциальным барьером имеет два существенно различных временных масштаба, отличающихся примерно в e^β раз.

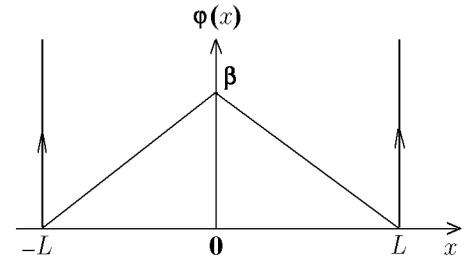


Рис. 3. Треугольная бистабильная потенциальная яма

СТРУКТУРА КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ И СПЕКТРА БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ В ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЯМЕ

1. Нетрудно видеть, что знание времени корреляции случайного стационарного процесса и его дисперсии позволяет получить определённую информацию о спектре мощности $S(\omega)$ этого процесса. Ограничимся для простоты случаем $\langle x \rangle = 0$. Из известных соотношений Винера—Хинчина

$$S(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} K[\tau] \cos(\omega\tau) d\tau, \quad K[\tau] = 2 \int_0^{\infty} S(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega$$

легко найти, имея в виду (5), что непрерывная часть спектра на нулевой частоте равна

$$S(0) = \frac{\sigma^2 \tau_k}{\pi} \quad (25)$$

и является конечной величиной. Определяя полосу спектра как

$$\Omega = \frac{1}{S(0)} \int_0^{\infty} S(\omega) d\omega,$$

с другой стороны, находим, что

$$\Omega = \frac{\pi}{2\tau_k}. \quad (26)$$

Таким образом, знание τ_k и σ^2 даёт информацию о спектре на нулевой частоте и полосе спектра.

Обращаясь к симметричной степенной потенциальной яме с потенциалом $\Phi(x) = c|x|^\alpha$, на основании (17), (18) и (20) находим значения $S(0)$ и Ω :

$$S(0) = \frac{2\alpha R(\alpha)}{\pi \Gamma(1/\alpha)} \left(\frac{h}{2c}\right)^{4/\alpha} D^{(4/\alpha)-1}, \quad (27)$$

$$\Omega = \frac{\pi \Gamma(3/\alpha)}{4\alpha R(\alpha)} \left(\frac{2c}{h}\right)^{2/\alpha} \frac{1}{D^{(2/\alpha)-1}}. \quad (28)$$

2. Обратимся к обсуждаемым конкретным примерам. Для мягкой потенциальной ямы ($\alpha = 1$)

$$S(0) = \frac{5}{8\pi} \left(\frac{h}{c}\right)^4 D^3, \quad \Omega = \frac{2\pi}{5} \left(\frac{c}{h}\right)^2 \frac{1}{D}.$$

Спектр в нуле сильно возрастает с ростом интенсивности флуктуаций, а полоса спектра сужается.

Для линейного случая ($\alpha = 2$)

$$S(0) = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{h}{c}\right)^2 D, \quad \Omega = \pi \frac{c}{h}.$$

Спектр, как и должно быть, возрастает пропорционально D , а полоса определяется лишь параметрами системы и не меняется.

Для жёсткой потенциальной ямы ($\alpha = 4$)

$$S(0) = \frac{2R(4)h}{3\pi c}, \quad \Omega = \frac{\pi\Gamma(3/4)}{8R(4)} \sqrt{\frac{cD}{2h}}.$$

Спектр мощности в нуле постоянен, а полоса слабо возрастает с ростом D .

Для прямоугольной потенциальной ямы

$$S(0) = \frac{4}{15\pi} \frac{L^4}{D}, \quad \Omega = \frac{5\pi}{8} \frac{D}{L^2}.$$

Спектр в нуле падает с ростом D , а полоса растёт. Меняя ширину потенциальной ямы $2L$, обнаружим, что чем шире яма, тем узкополоснее спектр, и наоборот. В очень узкой потенциальной яме спектр становится весьма широкополосным, а время корреляции, естественно, очень мало (сравни с (24)).

3. Поставим теперь вопрос о разложении неизвестной нам функции корреляции $K[\tau]$, определённой формулой (4), по степеням τ (для $\tau \geq 0$):

$$K[\tau] = \langle x^2 \rangle + a_1\tau + a_2 \frac{\tau^2}{2!} + a_3 \frac{\tau^3}{3!} + \dots \quad (29)$$

Покажем, что коэффициенты этого разложения выражаются через кинетические коэффициенты сноса $K_1(x)$ и диффузии $K_2(x)$ уравнения Фоккера—Планка. Для уравнения Ланжевена (1)

$$K_1(x) = -\Phi'(x)/h, \quad K_2(x) = D.$$

Известно, что уравнение для корреляционной функции марковского процесса имеет вид [8, § 10.7, формула (10.7.8)]

$$\dot{K}[\tau] = \langle x K_1(x_\tau) \rangle,$$

где $x = x(t)$, $x_\tau = x(t + \tau)$, усреднение выполняется по двумерной плотности вероятности $W(x, x_\tau; \tau)$. Отсюда легко записать коэффициенты a_n как соответствующие производные, вычисленные при $\tau \rightarrow +0$:

$$a_n = K^{(n)}[\tau] \Big|_{\tau \rightarrow +0}.$$

Так, для первого коэффициента a_1 имеем

$$a_1 = \dot{K}[\tau] \Big|_{\tau \rightarrow +0} = \langle x K_1(x) \rangle.$$

Заметим, что здесь усреднение выполняется уже по одномерной стационарной плотности вероятности $W(x)$. Если воспользоваться уравнением для эволюции моментов марковского процесса и учесть их постоянство у стационарного марковского процесса [8, § 10.6, формула (10.6.3)], то, к примеру, нетрудно получить

$$\frac{d\langle x^2 \rangle}{dt} = 2\langle x K_1(x) \rangle + \langle K_2(x) \rangle = 2\langle x K_1(x) \rangle + D = 0, \quad (30)$$

что сразу приводит к соотношению $\langle xK_1(x) \rangle = -D/2$. Таким образом, для броуновского движения в любой потенциальной яме первый коэффициент разложения всегда равен $-D/2$.

Высшие коэффициенты a_k можно искать аналогичным образом, однако проще их получить из известного разложения (при $\tau > 0$)

$$K[\tau] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle x (\hat{L}^+)^n x \rangle \tau^n,$$

воспользовавшись свойством симметрии оператора \hat{L}^+ , состоящим в том, что для любых достаточно гладких функций f и g справедливо соотношение

$$\langle f \hat{L}^+ g \rangle = \langle g \hat{L}^+ f \rangle, \quad (31)$$

а также равенством

$$\langle \hat{L}^+ f \rangle = 0,$$

аналогичным (30) и имеющим место для стационарного марковского процесса. Здесь \hat{L}^+ — сопряжённый оператор уравнения Фоккера—Планка, который в нашем случае имеет вид

$$\hat{L}^+ = K_1(z) \frac{\partial}{\partial z} + \frac{D}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (32)$$

В итоге можно, например, получить выражения для трёх последующих коэффициентов a_k :

$$a_2 = \langle K_1^2(x) \rangle, \quad a_3 = -\frac{D}{2} \langle [K_1'(x)]^2 \rangle, \quad a_4 = \frac{D^2}{4} \langle (K_1''(x))^2 \rangle - \frac{D}{2} \langle (K_1'(x))^3 \rangle. \quad (33)$$

4. Формулы (33) позволяют найти a_2 , a_3 и a_4 для любой степенной потенциальной ямы при конечном α . Полагая $\Phi(x) = c|x|^\alpha$, можно получить

$$a_2 = \frac{L^2}{\theta^2} \begin{cases} \alpha^2 \Gamma(2 - 1/\alpha) / \Gamma(1/\alpha), & \alpha > 1/2; \\ \infty, & \alpha \leq 1/2, \end{cases} \quad (34a)$$

$$a_3 = -\frac{L^2}{\theta^3} \begin{cases} \alpha^2 (\alpha - 1)^2 \Gamma(2 - 3/\alpha) / \Gamma(1/\alpha), & \alpha > 3/2; \\ \infty, & \alpha \leq 3/2, \end{cases} \quad (34b)$$

$$a_4 = \frac{L^2}{\theta^4} \begin{cases} \alpha^2 (\alpha - 1)^2 (3\alpha^2 - 11\alpha + 9) \Gamma(2 - 5/\alpha) / \Gamma(1/\alpha), & \alpha > 5/2, \alpha = 2; \\ \infty, & \alpha \leq 5/2, \alpha \neq 2. \end{cases} \quad (34b)$$

Обратим внимание, что коэффициенты a_2 , a_3 и a_4 ограничены не при любых положительных α . Например, коэффициент a_2 обращается в бесконечность при $\alpha \leq 1/2$, а коэффициент a_3 — при $\alpha \leq 3/2$. Наиболее интересна в этом смысле ситуация с коэффициентом a_4 , который равен бесконечности при любых $\alpha \leq 5/2$ за исключением точки аналитичности $\alpha = 2$, где вторая производная 1-го кинетического коэффициента тождественно равна нулю и соответствующее среднее (33),

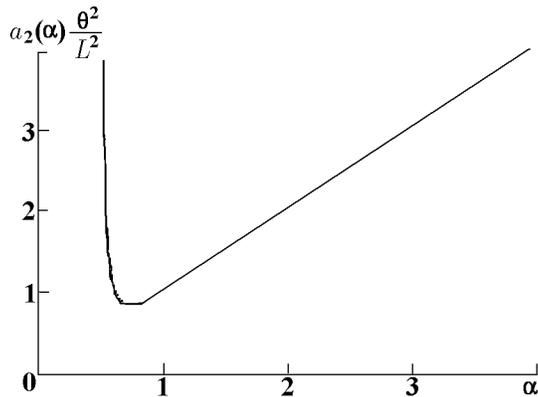


Рис. 4. Зависимость коэффициента a_2 разложения в ряд Тейлора функции корреляции броуновского движения в степенной потенциальной яме. Видно, что a_2 стремится к бесконечности как при $\alpha \rightarrow \infty$, так и при $\alpha \rightarrow +1/2$

определяющее коэффициент a_4 , оказывается ограниченным. Иллюстрирующий сказанное график обезразмеренного коэффициента a_2 в зависимости от α изображён на рис. 4.

5. Выпишем первые четыре коэффициента разложения в ряд Тейлора функции корреляции броуновского движения для рассмотренных выше конкретных примеров потенциальных ям. Для мягкой потенциальной ямы ($\alpha = 1$), $\langle x^2 \rangle = 2L^2$:

$$a_1 = -\frac{D}{2}, \quad a_2 = \frac{1}{4} \left(\frac{2c}{h} \right)^2, \quad a_3 = -\infty, \quad a_4 = +\infty.$$

В линейном случае ($\alpha = 2$), $\langle x^2 \rangle = L^2/2$:

$$a_1 = -\frac{D}{2}, \quad a_2 = \frac{D}{2} \left(\frac{2c}{h} \right),$$

$$a_3 = -\frac{D}{2} \left(\frac{2c}{h} \right)^2, \quad a_4 = \frac{D}{2} \left(\frac{2c}{h} \right)^3.$$

Легко сообразить, что в данном случае без труда могут быть определены все коэффициенты a_k , поскольку корреляционная функция для линейной системы хорошо известна:

$$K[\tau] = \langle x^2 \rangle \exp\left(-\frac{2c}{h} |\tau|\right). \quad (35)$$

Для жёсткой потенциальной ямы ($\alpha = 4$), $\langle x^2 \rangle = \frac{\Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)} \sqrt{\frac{hD}{2c}} = 0,338 L^2$:

$$a_1 = -\frac{D}{2}, \quad a_2 = \frac{3\Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)} \sqrt{\frac{2c}{h}} D \sqrt{D}, \quad a_3 = -\frac{9}{2} \left(\frac{2c}{h} \right) D^2,$$

$$a_4 = \frac{117\Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)} \left(\frac{2c}{h} \right)^{3/2} D^{5/2}.$$

Для сверхжёсткой потенциальной ямы ($\alpha \gg 1$), $\langle x^2 \rangle \simeq L^2/3$:

$$a_1 = -\frac{D}{2}, \quad a_2 = \frac{\alpha}{4} \frac{D^2}{L^2}, \quad a_3 = -\frac{\alpha^3}{8} \frac{D^3}{L^4}, \quad a_4 = \frac{3\alpha^5}{16} \frac{D^4}{L^6}.$$

Для прямоугольной потенциальной ямы ($\alpha \rightarrow \infty$), $\langle x^2 \rangle = L^3/3$:

$$a_1 = -\frac{D}{2}, \quad a_2 \rightarrow +\infty, \quad a_3 \rightarrow -\infty, \quad a_4 \rightarrow +\infty.$$

Обратим внимание на случаи мягкой ($\alpha = 1$) и прямоугольной ($\alpha \rightarrow \infty$) потенциальных ям, для которых высшие коэффициенты разложения a_k обращаются в бесконечность. Это связано с тем, что функции корреляции броуновского движения в таких ямах (а они, заметим, являются кусочно-линейными) не аналитичны. Подобные случаи заслуживают отдельного рассмотрения и обсуждения, которое будет проведено в другом месте.

6. Обратимся теперь к структуре спектра броуновского движения в потенциальной яме. Мы уже знаем, что спектр на нулевой частоте ограничен и равен (25). Легко получить характер асимптотики спектра при $\omega \rightarrow \infty$. Известно (см., например, [10], Приложение I), что разложению корреляционной функции (29) соответствует разложение спектра $S(\omega)$ по степеням $1/\omega^{2n}$:

$$S(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} K[\tau] \cos(\omega\tau) d\tau = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{K^{(2n-1)}[+0]}{\omega^{2n}}. \quad (36)$$

Поскольку во всех разобранных выше случаях (при постоянном коэффициенте диффузии $K_2 = D = \text{const}$) $a_1 = -D/2$, из (36) следует, что главная асимптотика спектра при $\omega \rightarrow \infty$ имеет вид

$$S(\omega) \sim \frac{D}{2\pi\omega^2} \quad (37)$$

вне зависимости от формы потенциальной ямы.

Этот же результат может быть получен ещё проще, непосредственно из уравнения Ланжевена (1). Поскольку при $\omega \rightarrow \infty$ производная $\dot{x}(t)$ сколь угодно велика, то уравнение (1) на масштабах, существенно меньших характерных времён установления средних и вероятностных характеристик, может быть заменено на уравнение винеровского процесса $\dot{x}(t) = \xi(t)$, из которого сразу же следует (37) с учётом того, что спектр белого шума $S_{\xi}(\omega) = D/(2\pi)$.

7. Заметим в заключение, что все полученные результаты относительно структуры функции корреляции и структуры спектра, по существу, справедливы для любого стационарного марковского процесса с кинетическими коэффициентами $K_1(x)$ и D . Действительно, по заданному $K_1(x)$ всегда можно восстановить потенциальный профиль $\Phi(x)$, положив $\Phi(0) = 0$. Поэтому, во-первых, любой диффузионный стационарный марковский процесс с постоянным вторым кинетическим коэффициентом можно считать описанием броуновского движения в некоторой потенциальной яме. Во-вторых, у любого стационарного марковского процесса структура корреляционной функции имеет вид

$$K[\tau] = \langle x^2 \rangle - \frac{D}{2} |\tau| + \dots,$$

она остаётся выше $\langle x^2 \rangle$ и интегрируема. У любого такого стационарного марковского процесса спектр в нуле конечен, а его асимптотика при $\omega \rightarrow \infty$ определяется формулой (37).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 99-02-17544, 00-02-16167, 00-15-96619, 00-15-96620), программы "Университеты России — фундаментальные исследования" (проекты № 99-28-43 и 99-28-74), гранта КЦФЕ (Минобразования РФ), INTAS (грант № 11134), а также при поддержке Международного Центра — Фонда перспективных исследований в Нижнем Новгороде (грант № 99-2-09).

ЛИТЕРАТУРА

1. Климонтвич Ю. Л. // УФН. 1994. Т. 164, № 8. С. 811.
2. Cangehy T. K., Dienes J. K. // J. Appl. Phys. 1961. V. 32, № 11. P. 2476.
3. Malakhov A. N. // Chaos. 1997. V. 7, № 3. P. 488.
4. Хелстром К. В. // Теория связи. — М.: Связь, 1972.
5. Агудов Н. В., Малахов А. Н. // Изв. вуз. Радиофизика. 1993. Т. 36, № 2. С. 148.
6. Malakhov A. N., Pankratov A. L. // Physica A. 1996. V. 229, № 1. P. 109.
7. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. — М.: Наука, 1970.

8. Малахов А. Н. Кумулянтный анализ случайных негауссовских процессов и их преобразований. — М.: Сов. радио, 1978.
9. Саичев А. И. // Изв. вуз. Радиофизика. 1974. Т. 17, № 6. С. 864.
10. Малахов А. Н. Флуктуации в автоколебательных системах. — М.: Наука, 1968.

Нижегородский государственный
университет
им. Н. И. Лобачевского,
г. Н. Новгород, Россия

Поступила в редакцию
29 июля 1999 г.

**CORRELATION TIME AND STRUCTURE OF THE CORRELATION FUNCTION OF A NONLINEAR EQUILIBRIUM
BROWNIAN MOTION IN POTENTIAL WELLS OF ARBITRARY PROFILES**

A. A. Dubkov, A. N. Malakhov, and A. I. Saichev

We obtain the exact formula for the correlation time of a stationary Brownian motion in potential wells of arbitrary profiles. We analyze the dependence of the correlation time on the intensity of driving noise for power-law potential profiles and on the height of a potential barrier for bistable profiles. We also study some spectral characteristics of an equilibrium motion and find the coefficients of the Taylor power series of the correlation function.