

# МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Известия высших учебных заведений

## РАДИОФИЗИКА

ежемесячный научно-технический журнал

Издаётся с апреля 1958 г.

Том XLIII № 11

Нижний Новгород

2000

### Содержание

- Есепкина Н. А., Зинченко И. И., Саенко И. И., Антюфеев А. В., Вдовин В. Ф., Елисеев А. И., Круглов С. К., Лапкин И. В., Мышенко В. В., Нестеров Н. С., Пирогов Л. Е., Шанин В. Н., Штанюк А. М., Шульга В. М. Спектральные наблюдения в 3-мм диапазоне длин волн на радиотелескопе РТ-22 КрАО с использованием акусто-оптического анализатора спектра ..... 935
- Афанасьев Н. Т., Грозов В. П., Носов В. Е., Тинин М. В. Структура ЛЧМ сигнала в случайно-неоднородном канале Земля—ионосфера ..... 942
- Козлов В. И., Муллаяров В. А., Васильев А. Е. Узкосекторная пеленгация источников шумового ОНЧ излучения ..... 954
- Терина Г. И. Эффект «последствия» в искусственно возмущённой ионосферной плазме ..... 958
- Моисеев С. Н. Время предсказуемости и порядок дифференциального уравнения для частоты экранирования и предельной частоты слоя  $E_s$  ..... 962
- Беляева Т. А., Бобров П. П., Щёткин И. М. Измерение влажности слабозасолённых почв методом активного зондирования шумовым сигналом метрового диапазона длин волн ..... 967
- Малыкин Г. Б., Позднякова В. И., Шерешевский И. А. Асимптотические характеристики эволюции степени поляризации немонахроматического излучения в одномодовых волоконных световодах со случайными кручениями осей линейного двулучепреломления. I. Предел степени поляризации при стремлении длины волокна к бесконечности ..... 976
- Ковалёв Н. Ф., Фильченков С. Е. Осесимметричные электрические волны периодических волноведущих систем, предназначенных для релятивистской СВЧ электроники ..... 989
- Бляхман Л. Г., Горшкова М. А., Нечаев В. Е. Насыщение одностороннего мультипактора в скрещенных полях ..... 1004
- Макаров С. В., Медведев С. Ю., Якимов А. В. Корреляция между интенсивностями спектральных компонент  $1/f$  шума ..... 1016

УДК 524.7

## СПЕКТРАЛЬНЫЕ НАБЛЮДЕНИЯ В 3-ММ ДИАПАЗОНЕ ДЛИН ВОЛН НА РАДИОТЕЛЕСКОПЕ РТ-22 КРАО С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АКУСТООПТИЧЕСКОГО АНАЛИЗАТОРА СПЕКТРА

*Н. А. Есепкина<sup>1</sup>, И. И. Зинченко<sup>2</sup>, И. И. Саенко<sup>1</sup>, А. В. Антюфеев<sup>3</sup>, В. Ф. Вдовин<sup>2</sup>,  
А. И. Елисеев<sup>2</sup>, С. К. Круглов<sup>1</sup>, И. В. Лапкин<sup>2</sup>, В. В. Мышенко<sup>3</sup>, Н. С. Нестеров<sup>4</sup>,  
Л. Е. Пирогов<sup>2</sup>, В. Н. Шанин<sup>2</sup>, А. М. Штанюк<sup>2</sup>, В. М. Шульга<sup>3</sup>*

В рамках многолетней программы исследований плотного межзвёздного газа на радиотелескопе РТ-22 КрАО в июле 1998 года проведён цикл наблюдений с помощью модернизированного аппаратного комплекса 3-мм диапазона длин волн. Для спектрального анализа принимаемого излучения впервые использовался акустический анализатор спектра, позволивший значительно расширить полосу исследуемых частот по сравнению с использовавшимся ранее фильтровым анализатором, а также упростить процедуру настройки цепей СИС-смесителя и преобразователей частоты сигнала. С помощью данного комплекса проведены наблюдения ряда областей звёздообразования, включая облака, связанные с яркими инфракрасными источниками и ультракомпактными зонами НП, а также облака с высокоскоростными потоками в линиях молекул  $\text{HCO}^+$ ,  $^{13}\text{CO}$ ,  $\text{HCN}$  и  $\text{CS}$ .

### ВВЕДЕНИЕ

Одним из основных требований к аппаратуре для спектральных радиоастрономических исследований наряду с обеспечением высокой чувствительности приёмника, высокого пространственного и спектрального разрешения является возможность работы в полосе частот, необходимой для анализа принимаемого излучения. Наблюдения показывают, что ширина межзвёздных молекулярных линий может изменяться от десятков килогерц (линии в ядрах тёмных облаков) до десятков мегагерц (линии в других галактиках). Для решения широкого класса задач по поиску и анализу излучения межзвёздного газа в различных линиях в большинстве галактических и внегалактических объектов следует использовать приёмники, обладающие одновременно широкой полосой и хорошим разрешением. Акустический спектроанализатор (АОС) является весьма широкополосным устройством и обладает при этом достаточно высоким спектральным разрешением, что позволяет исследовать с их помощью большинство радиоастрономических объектов, наблюдаемых в спектральных линиях. Эти факторы, а также отсутствие необходимости настройки отдельных каналов делают АОС более предпочтительными, чем традиционно использовавшиеся фильтровые анализаторы [1, 2].

В настоящей работе описывается модернизированный вариант аппаратного комплекса [3] для спектральных исследований плотного межзвёздного газа в 3-мм диапазоне длин волн. В качестве анализатора спектра в составе данного комплекса впервые использовался акустический анализатор, изготовленный в Санкт-Петербургском техническом университете, с полосой анализа 76 МГц, что значительно превышает полосу использовавшегося ранее фильтрового анализатора спектра. Использование АОС в данном диапазоне длин волн позволяет исследовать объекты, обладающие широкими спектральными линиями, включая объекты с высокоскоростными потоками газа, оболочки звёзд поздних спектральных классов, а также линии в других галактиках. Достаточно высокое спектральное разрешение позволяет использовать АОС и для исследования относительно узких линий в направлении плотных ядер молекулярных облаков, связанных с областями образования массивных звёзд. Наличие

широкой полосы анализа, в принципе, позволяет одновременно регистрировать несколько близко расположенных молекулярных линий в одном объекте, а также применять переключение частоты приёма для модуляции сигнала без модуляционных потерь в чувствительности.

### 1. ПРИМЕНЕНИЕ АКУСТООПТИЧЕСКОГО АНАЛИЗАТОРА СПЕКТРА В АППАРАТУРНОМ КОМПЛЕКСЕ НА РТ-22 КРАО

Акустооптический анализатор спектра использовался в составе спектрального аппаратного комплекса для радиоастрономических наблюдений в 3-мм диапазоне длин волн [3]. Структурная схема комплекса изображена на рис. 1.

СИС-структуры (основанные на переходах сверхпроводник—изолятор—сверхпроводник), использованные в качестве смесительного элемента в спектральном комплексе, были разработаны и изготовлены в ИРЭ РАН. Смеситель и предварительный усилитель промежуточной частоты охлаждались до 4,5 К при помощи микрокриогенной системы замкнутого цикла МСМР-575Н-1,2/4,5 производства АО «Сибкриотехника», модернизированной для работы в экспедиционных условиях. Шумовая температура приёмника (DSB) в диапазоне 85÷110 ГГц составила 100÷150 К. Тракт промежуточной частоты был разработан с учётом возможности работы приёмного комплекса как с фильтровым анализатором спектра (центральная частота 242 МГц), так и с АОС. Для этого был изготовлен новый широкополосный преобразователь на вторую промежуточную частоту, имеющий полосу 50÷280 МГц по уровню 3 дБ с неравномерностью внутри полосы менее 1,5 дБ.

АОС представляет собой оптоэлектронную систему, оптическая часть которой разработана по традиционной схеме акустооптического фурье-процессора с пространственным интегрированием [4] и включает источник когерентного света (He-Ne лазер), анаморфотную систему коллимации оптического пучка, акустооптический дефлектор на кристалле  $\text{TeO}_2$  (центральная частота 150 МГц, временная апертура 8 мкс, эффективность  $0,6 \text{ Вт}^{-1}$ ) и фурье-объектив. В выходной плоскости оптического процессора расположен многоэлементный линейный ПЗС-фотоприёмник (ФПЗС), содержащий 512 светочувствительных элементов размером  $26 \times 26$  мкм. Конструктивно оптический процессор выполнен в виде модуля, содержащего несколько отдельно настраиваемых оптико-механических узлов, расположенных на поверхности опорной плиты. Общие размеры оптического модуля составляют  $400 \times 250 \times 120$  мм.

Система сбора и обработки данных на базе персонального компьютера IBM PC и магистрально-модульной системы КАМАК, включающая электронные модули контроллера ФПЗС, преобразователя выходных сигналов фотоприёмника и цифровых многоканальных интеграторов, обеспечивает обработку выходных сигналов АОС и управление работой низкочастотной части приёмника.

Основными спектральными характеристиками АОС являются: зависимость спектральной чувствительности от частоты, ширина полосы анализа, центральные частоты настройки спектральных каналов (частотная шкала), форма частотной характеристики спектрального канала и её повторяемость от канала к каналу. Частотная характеристика всего тракта приёмного комплекса от входа СИС-смесителя до выхода АОС, полученная по излучению чёрного тела, показана на рис. 2. Полная полоса анализа составляет 76 МГц, а полоса каждого из 500 спектральных каналов — около 153 кГц. Некоторая периодическая неравномерность частотной характеристики, вызванная интерференцией света на защитном стекле ФПЗС, устраняется при амплитудной калибровке комплекса.

Для проведения спектральных измерений с помощью АОС необходимо определить (с требуемой точностью) частоты всех его спектральных каналов, что предполагает периодическую градуировку частотной шкалы АОС. Такие частотные калибровки проводятся после юстировок элементов оптического процессора, а также при его перемещениях. Пример одной из калибровок частотной шкалы АОС, проведённых при подготовке комплекса к спектральным наблюдениям и непосредственно между циклами наблюдений, приведён на рис. 3. На рис. 3а приведена аппроксимация измеренной зависимо-

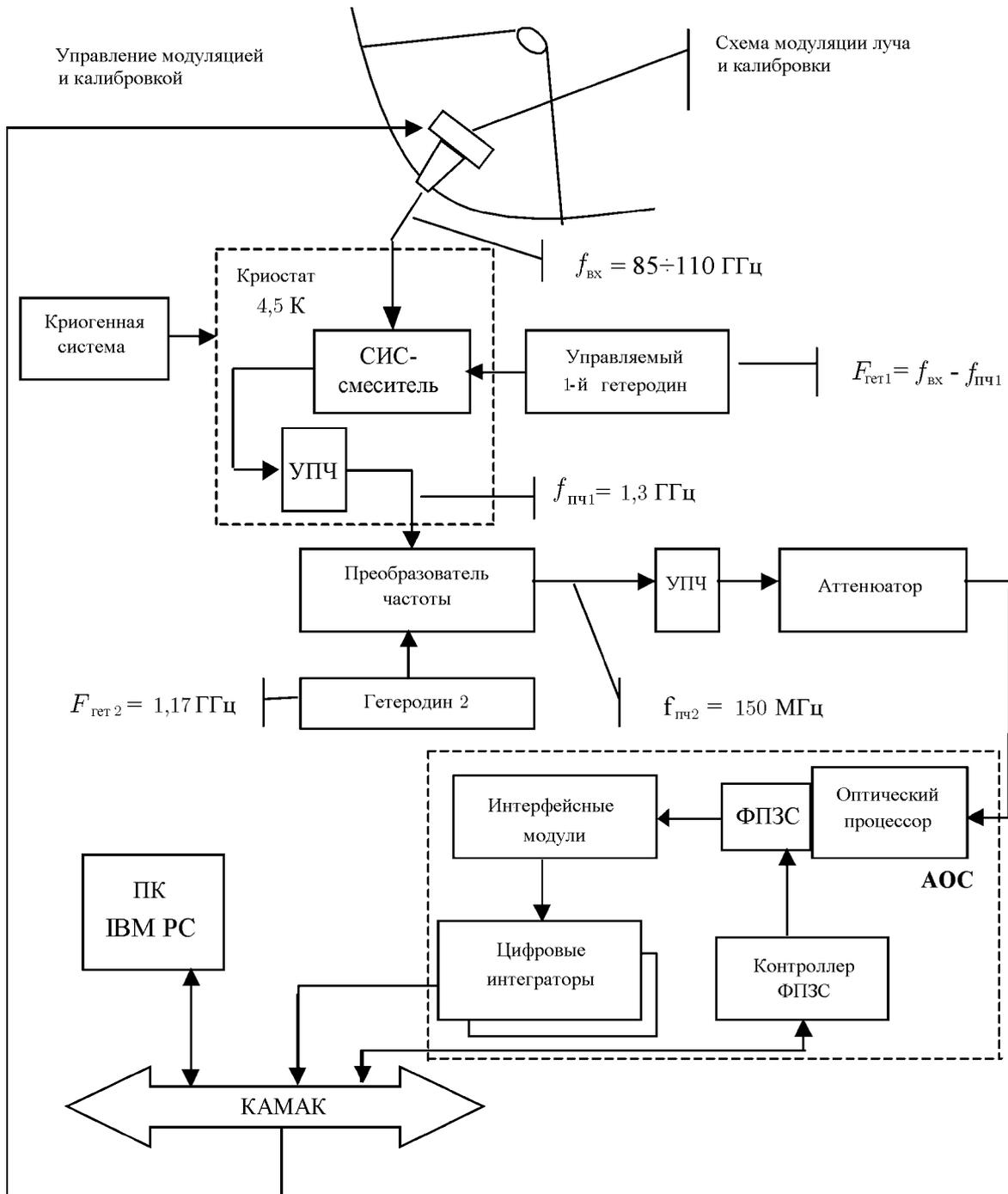


Рис. 1. Структурная схема спектрального аппаратного комплекса с АОС для радиоастрономических исследований в 3-мм диапазоне длин волн на РТ-22 КрАО

ти прямой, соединяющей две крайние точки шкалы. Небольшое отклонение частотной шкалы АОС от линейной аппроксимации, показанное в увеличенном масштабе на рис. 3б, имеет вид параболы, что, как известно [5], характерно для акустооптических анализаторов спектра, особенно с большой относительной шириной полосы анализа, и связано со сферичностью фокальной поверхности простых фурие-объективов, используемых в оптическом процессоре. Максимальная величина отклонения от линейности не превышает  $\pm 0,2\%$  от полосы анализа. Указанная нелинейность частотной при-

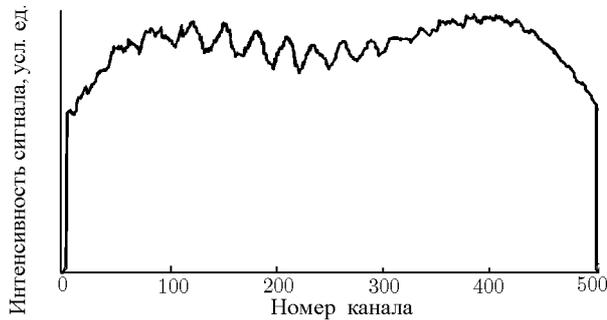


Рис. 2. Частотная характеристика комплекса от входа СИС-смесителя до выхода АОС, полученная по излучению чёрного тела

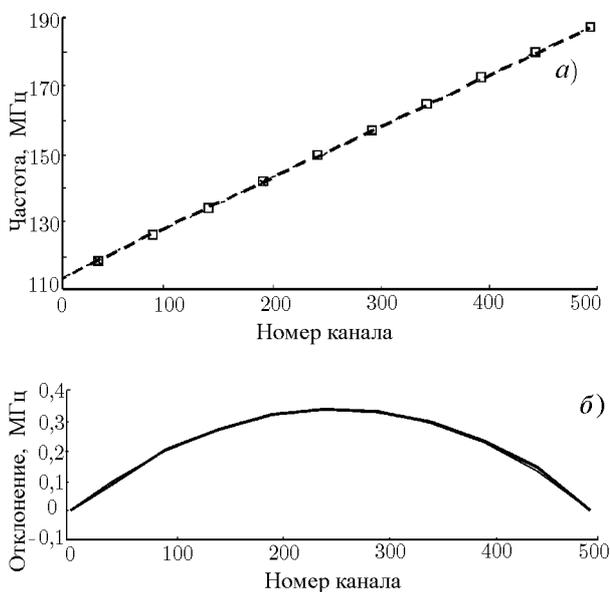


Рис. 3. Частотная градуировка АОС и её линейная аппроксимация (а); отклонение частотной градуировки от линейной аппроксимации (б)

водит и к вариации ширины полосы  $\delta f$  отдельного спектрального канала, однако наблюдаемое максимальное изменение  $\delta f$  составляет не более  $\pm 1,5\%$  от ширины полосы канала в пределах всей полосы анализа. Частотная характеристика канала АОС представляет собой одномерную свёртку аппаратной функции Фурье-процессора с апертурной характеристикой элемента фотоприёмника по соответствующей координате. В результате формируется функция со спадающими боковыми лепестками, уровень которых зависит от выбора параметров оптического процессора и определяет, главным образом, избирательность отдельных каналов АОС. Как показывают измерения, в нашем случае развязка между каналами, отстоящими друг от друга не менее чем на удвоенную ширину канала, не хуже 20 дБ.

Длительное накопление, необходимое при наблюдении слабых сигналов, предъявляет достаточно жёсткие требования к стабильности амплитудных и частотных характеристик АОС. Оценка долговременной амплитудной стабильности проводилась на основании результатов измерения зависимости спектроскопической дисперсии Аллана [6] от времени накопления. Кривая зависимости дисперсии Аллана собственных шумов АОС от времени накопления приведена на рис. 4. Полученное эффективное время накопления между амплитудными калибровками тракта составило не менее 300 с. Измерения долговременной стабильности частотной градуировки АОС позволили заключить, что в вариациях частотной шкалы при изменении окружающей температуры доминирует составляющая, не зависящая от номера частотного канала, т. е. частотная шкала сдвигается как целое, практически не меняя свою форму.

Таким образом, для периодической коррекции частотной градуировки достаточно измерять смещение частоты одного реперного гармонического сигнала относительно частотной шкалы АОС. Данные о положении такого сигнала, сформированного с помощью синтезатора частоты, записываются в отдельный файл, объём которого составляет около 1 % от объёма регистрируемой во время наблюдений информации о спектре исследуемых сигналов, и позволяют в дальнейшем вычислить поправки к частотной градуировке для каждого наблюдения. На рис. 5 изображена зависимость сдвига частотной шкалы от времени (в часах), прошедшего с момента начала цикла наблюдений. Вычисленные таким образом сдвиги частотной шкалы АОС за время более 100 часов не превысили  $\pm 17$  кГц ( $\pm 11\%$  от ширины полосы канала), что свидетельствует о достаточно хорошей термокомпенсации узлов конструкции оптического процессора. Учёт полученных поправок даёт возможность ещё в 5–6 раз уменьшить величину частотной нестабильности.

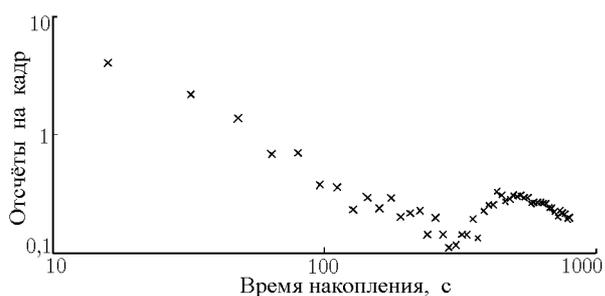


Рис. 4. Зависимость дисперсии Аллана от времени накопления для спектрального комплекса с АОС



Рис. 5. Изменение положения частотной шкалы АОС относительно частотного репера в течение цикла наблюдений

При подготовке комплекса к наблюдениям АОС использовался для визуального контроля за настройкой смесителя в режиме последовательного считывания всех каналов с последующей индикацией на экране осциллографа. Это позволило ускорить процесс настройки, причём широкая полоса анализа позволяла отслеживать неравномерность амплитудно-частотной характеристики приёмника по высокой частоте, включая потери преобразования СИС-смесителя. Это дало возможность объяснить неравномерность амплитудно-частотной характеристики приёмного тракта на некоторых частотах, на которых отклик сигнала по промежуточной частоте при определённых значениях напряжения смещения, уровня мощности гетеродина и положения короткозамыкающего плунжера приобретал резонансный вид.

## 2. СПЕКТРАЛЬНЫЕ НАБЛЮДЕНИЯ НА РТ-22

С помощью вышеописанного модернизированного аппаратного комплекса в июле 1998 г. на радиотелескопе РТ-22 КрАО были проведены наблюдения плотных ядер молекулярных облаков, связанных с различными фазами звёздообразования, в линиях  $J = 1-0$  молекул  $\text{HCO}^+$  (89 189 МГц),  $^{13}\text{CO}$  (110 201 МГц),  $\text{HCN}$  (88 632 МГц), а также  $J = 2-1$   $\text{CS}$  (97 981 МГц). Для проверки наведения РТ-22 наблюдались мазерные линии  $J = 2-1$  ( $\nu = 1$ )  $\text{SiO}$  (86 243 МГц), точечные источники непрерывного излучения и планеты. В зависимости от выбранной линии разрешение по скорости составляло  $0,4 \div 0,5$  км/с. Шумовая температура системы (включая атмосферу) в зените в хорошую погоду составляла около 200 К. Калибровка комплекса осуществлялась по собственному излучению атмосферы на высоте источника (метод «chopper-wheel»).

Наблюдения проводились в направлении плотных ядер молекулярных облаков, связанных с яркими источниками инфракрасного излучения и ультракомпактными зонами НП, представляющими собой окружённые плотным газом сформировавшиеся массивные звёзды на ранней стадии развития, часть из которых входила в обзоры в линиях  $J = 2-1$   $\text{CS}$  и  $J = 1-0$   $\text{HCN}$  [7, 8]. В ряде случаев исследовалось пространственное распределение излучения в различных молекулярных линиях. Молекулярные линии зарегистрированы в большинстве объектов. Примеры некоторых полученных спектров приведены на рис. 6. В плотном ядре молекулярного облака S76E впервые зарегистрирована двухкомпонентная структура линий  $J = 1-0$   $^{13}\text{CO}$ , свидетельствующая о наличии на луче зрения двух различных облаков, скорости которых отличаются приблизительно на 5 км/с, что предполагалось ранее в работе [9]. В ряде случаев впервые получены спектры с пространственным разрешением порядка  $40''$ , близким к разрешению большинства зарубежных радиотелескопов, работающих в данном диапазоне длин волн. Данные наблюдений планируется использовать совместно с данными, полученными на других

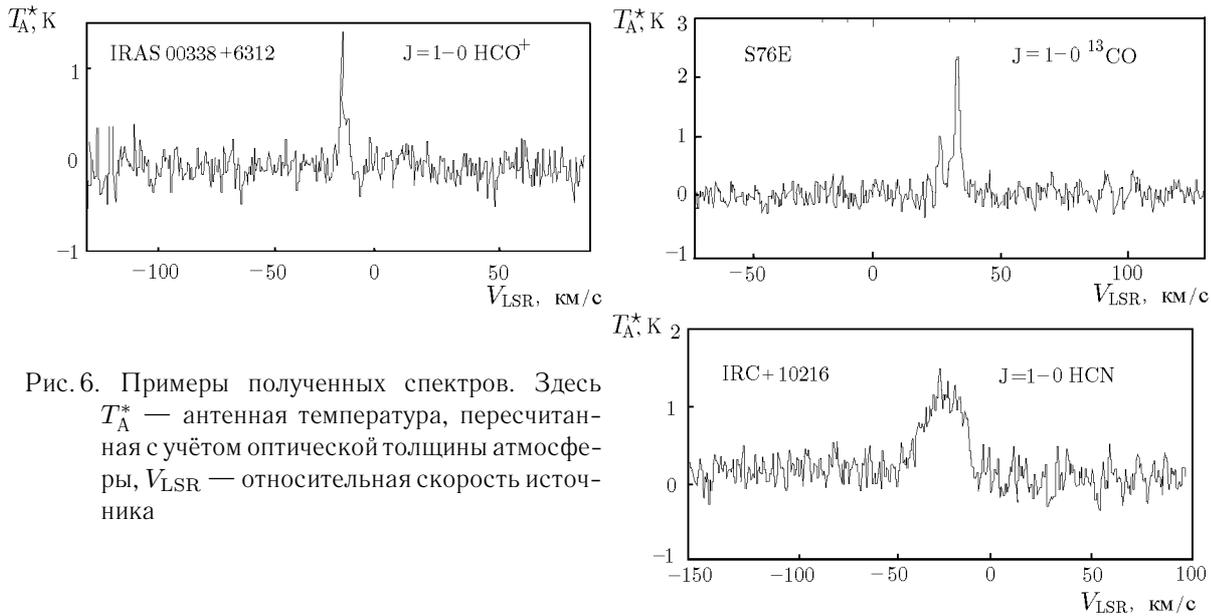


Рис. 6. Примеры полученных спектров. Здесь  $T_A^*$  — антенная температура, пересчитанная с учётом оптической толщины атмосферы,  $V_{LSR}$  — относительная скорость источника

инструментах, при статистическом анализе параметров молекулярных линий для определения условий возбуждения различных молекул в областях образования массивных звёзд, а также для исследования распределения молекулярного излучения в зависимости от галактоцентрического расстояния.

Был также проведён поиск молекулярного излучения от некоторых тёмных туманностей и высокоширотных облаков, а также от объектов с высокой динамической активностью (объекты с высокоскоростными потоками газа, объекты Хербига—Аро и оболочки углеродных звёзд).

### 3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе описан модернизированный вариант аппаратного комплекса для спектральных радиоастрономических наблюдений в 3-мм диапазоне длин волн на радиотелескопе РТ-22 КрАО. В качестве анализатора спектра в данном комплексе впервые использовался акустооптический спектроанализатор. Использование АОС с полосой анализа 76 МГц и разрешением 153 кГц позволяет исследовать объекты как с узкими, так и с широкими спектральными линиями, включая объекты с высокоскоростными потоками газа, оболочки звёзд поздних спектральных классов, а также линии в других галактиках. Проведены измерения характеристик АОС, в том числе долговременной стабильности частотной градуировки АОС, в условиях длительных наблюдений. Использование АОС позволило также измерить неравномерность амплитудно-частотной характеристики приёмника на высоких частотах. В июле 1998 г. при помощи данного комплекса был проведён цикл радиоастрономических наблюдений в линиях молекул  $\text{HCO}^+$ ,  $^{13}\text{CO}$ ,  $\text{HCN}$  и  $\text{CS}$ .

Авторы выражают благодарность сотрудникам группы управления РТ-22 Крымской астрофизической обсерватории за содействие в проведении наблюдений, а также сотрудникам АО «Сибкриотехника» Е. Д. Баранову и В. А. Орлову за помощь при проведении ремонтно-профилактических и модернизационных работ с микрокриогенной системой, обеспечивших безотказную работу комплекса в течение цикла наблюдений.

Данная работа поддерживалась Российским фондом фундаментальных исследований (проекты № 97-02-31011, 99-02-16556) и INTAS (проект № 93-2168-ext).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Есепкина Н. А., Рыжков Н. Ф., Прусс-Жуковский С. В. // Письма в Астрон. журн. 1984. Т. 10. С. 474.
2. Esepkina N., Lavrov A., Saenko I. // Turkish Journal of Physics. 1995. V. 19, № 10. P. 1205.
3. Зинченко И. И., Барышев А. М., Вдовин В. Ф. и др. // Письма в Астрон. журн. 1997. Т. 23. С. 145.
4. Turpin T. M. // IEEE Proc. 1981. V. 69. P. 79.
5. Malkamaki L., Mattila K., Raisanen A., Lehto A., Peltonen J. // Exp. Astron. 1991. V. 2, № 3. P. 149.
6. Schieder R., Tolls V., Winnewisser G. // Exp. Astron. 1989. № 1. P. 101.
7. Zinchenko I., Pirogov L., Toriseva M. // Astron. Astrophys. Suppl. Ser. 1998. V. 133. P. 337.
8. Pirogov L. // Astron. Astrophys. 1999. V. 348. P. 600.
9. Zinchenko I., Forstrom V., Mattila K. // Astron. Astrophys. 1993. V. 275. P. 9.

С.-Петербургский технический  
университет, г. С.-Петербург,  
Россия

Поступила в редакцию  
17 июля 2000 г.

<sup>2</sup> Институт прикладной физики  
РАН, г. Нижний Новгород, Россия  
<sup>3</sup> Радиоастрономический институт  
НАН Украины, г. Харьков, Украина  
<sup>4</sup> Крымская Астрофизическая  
обсерватория, пос. Кацивели,  
Украина

**SPECTROSCOPIC OBSERVATIONS IN THE 3-MM WAVELENGTH RANGE AT RT-22 CRAO USING  
ACOUSTO-OPTICAL SPECTRUM ANALYZER**

*N. A. Esepkina, I. I. Zinchenko, I. I. Saenko, A. V. Antyufeev, V. F. Vdovin, A. I. Eliseev, S. K. Kruglov,  
I. V. Lapkin, V. V. Myshenko, N. S. Nesterov, L. E. Pirogov, V. N. Shanin, A. M. Shtanyuk, and  
V. M. Shul'ga*

In the framework of a multi-year program of studying dense interstellar gas, we performed a new cycle of observations at RT-22 CrAO radiotelescope in July, 1998 using an improved hardware facility of 3-mm wavelength range. For the first time, an acousto-optical spectrometer (AOS) was used for spectral analysis of incoming radiation. The AOS bandwidth exceeds considerably that of the filterbank spectrum analyzer used before. The use of AOS simplifies the tuning of SIS-mixer circuits and frequency converters. Using this hardware facility, a number of star-formation regions including clouds associated with bright IR sources and ultracompact HII regions, as well as clouds with high-velocity outflows were observed in the molecular lines of HCO<sup>+</sup>, <sup>13</sup>CO, HCN, and CS.

УДК 621.371; 550.388.2

## СТРУКТУРА ЛЧМ СИГНАЛА В СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОМ КАНАЛЕ ЗЕМЛЯ—ИОНОСФЕРА

*Н. Т. Афанасьев<sup>1</sup>, В. П. Грозов<sup>2</sup>, В. Е. Носов<sup>2</sup>, М. В. Тинин<sup>1</sup>*

Проведён теоретический анализ структуры сигнала ЛЧМ-ионозонда для одно- и двухскачкового распространения в случайно-неоднородной ионосфере. Для двухскачкового распространения учтены волны, рассеянные на земной поверхности. Численное моделирование показало, что случайные ионосферные неоднородности и шероховатости земной поверхности играют значительную роль в формировании структуры сигнала. Результаты численного моделирования сопоставлены с экспериментальными данными, полученными при наклонном зондировании ионосферы.

### ВВЕДЕНИЕ

В последнее время в практике ионосферных исследований используются ЛЧМ-ионозонды, обладающие хорошей помехоустойчивостью, малым энергопотреблением и высокой разрешающей способностью [1–6].

Несмотря на широкое распространение ЛЧМ-ионозондов, структура ЛЧМ сигналов при распространении их в ионосферном канале с учётом параметров регистрирующих средств до сих пор недостаточно исследована. В основном анализировалась структура сигнала в отсутствие дисперсии в ионосфере или с учётом только дисперсии фазы при распространении в регулярной среде, что связано с отсутствием достаточно полного анализа структуры ЛЧМ сигнала в случайно-неоднородных средах с учётом фоновой рефракции [7–11].

Хорошо известно, что при наклонном зондировании ионосферы сигнал в пункте приёма формируется, с одной стороны, за счёт распространения волн непосредственно в ионосфере без промежуточных отражений от земной поверхности. С другой стороны, сигнал может распространяться путём последовательных отражений волн от стенок волновода Земля—ионосфера. Ниже мы рассмотрим обе возможности формирования непрерывного ЛЧМ сигнала. Однако во втором случае для простоты ограничимся анализом поведения сигнала при двухскачковом распространении.

### 1. СТРУКТУРА ОДНОСКАЧКОВОГО СИГНАЛА

ЛЧМ-ионозонд излучает непрерывный частотно-модулированный сигнал

$$V(t) = a_0(t) \exp[-i(\omega_a t + \dot{\omega} t^2/2)], \quad (1)$$

где  $\omega_a$  — начальная частота сигнала,  $\dot{\omega}$  — скорость изменения его частоты,  $a_0(t)$  равно единице на всём интервале существования сигнала  $V(t)$  и нулю за пределами этого интервала.

После прохождения сигнала через ионосферный канал на входе приёмника имеем

$$U(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} U_s(\omega, t) \exp(-i\omega t) d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} R(\omega, t) V_s(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega, \quad (2)$$

где  $U_s(\omega, t)$  — спектр принимаемого сигнала,  $V_s(\omega)$  — спектр излучённого сигнала,  $R(\omega, t)$  — коэффициент отражения от квазистационарной ионосферы.

Принимая во внимание принцип обработки сигнала в ЛЧМ-ионозонде, нетрудно показать, что сигнал на выходе зонда будет определяться следующим выражением [7–9, 12]:

$$S(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} V(t)U^*(t)W(t) \exp(i\Omega t) dt = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} V_s^*(\omega)R^*(\omega, t)V(t)W(t) \exp[it(\omega + \Omega)] dt d\omega, \quad (3)$$

где  $W(t)$  — взвешивающая функция, или функция, описывающая временное окно спектроанализатора, которую в дальнейшем для простоты будем аппроксимировать выражением

$$W(t) = \exp\left[-\frac{(t - t_0)^2}{2T^2}\right],$$

$T$  — длительность временного окна. Возводя (3) в квадрат и усредняя по ансамблю реализаций случайно-неоднородной среды, для среднего спектра мощности  $\langle |S(\Omega)|^2 \rangle$  можно получить

$$\begin{aligned} \langle |S(\Omega)|^2 \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^2} \iiint_{-\infty}^{+\infty} V_s^*(\omega_1)V_s^*(\omega_2)W^*(t_1)W^*(t_2)V^*(t_1)V(t_2) \times \\ &\times \exp[-it_1(\omega_1 + \Omega) + it_2(\omega_2 + \Omega)] \Gamma(\omega_1, \omega_2, t_1, t_2) dt_1 dt_2 d\omega_1 d\omega_2, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\Gamma(\omega_1, \omega_2, t_1, t_2) = \langle R^*(\omega_1, t_1)R(\omega_2, t_2) \rangle$  — функция частотной когерентности флуктуаций волнового поля в квазистационарной ионосфере.

На практике  $T$  порядка одной секунды, а скорость изменения частоты составляет 50–100 кГц/с. Поэтому мы можем считать, что на интервале  $T$  сигнал (1) узкополосный, а спектр его определяется как

$$V_s(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\dot{\omega}}} \exp\left[\frac{i(\omega - \omega_a)^2}{2\dot{\omega}} - i\frac{\pi \operatorname{sgn}(\dot{\omega})}{4}\right] \begin{cases} 1, & \omega_a < \omega < \omega_b; \\ 0, & \omega < \omega_a, \quad \omega > \omega_b, \end{cases} \quad (5)$$

где  $\omega_b = \omega_a + \dot{\omega}T$ . Вводя при вычислении (4) суммарно-разностные переменные

$$\omega_{1,2} = \omega \pm \Delta\omega/2, \quad t_{1,2} = t \pm \Delta t/2$$

и учитывая слабую зависимость  $\Gamma$  от  $t_1$  и  $t_2$ , получим

$$\langle |S(\Omega)|^2 \rangle = \frac{T\sqrt{\pi}}{(2\pi)^2\dot{\omega}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_r(\omega_0 - \omega - \Omega, (\omega - \omega_0)/\dot{\omega}, \omega) d\omega, \quad (6)$$

где  $\omega_0 = (\omega_a + \omega_b)/2$ ,

$$\begin{aligned} \varphi_r &= \frac{1}{\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(\omega, \Delta\omega, \Delta t) \exp\left[-\frac{(\Delta t)^2 \dot{\omega}^2 T^2}{4} \left(1 + \frac{1}{\dot{\omega}^2 T^4}\right) - \frac{T^2 (\Delta\omega)^2}{4} + \frac{T^2 \dot{\omega} \Delta t \Delta\omega}{2}\right] \times \\ &\times \exp\left[i \Delta t (\omega_0 - \omega - \Omega) + \frac{i \Delta\omega (\omega - \omega_0)}{\dot{\omega}}\right] d(\Delta\omega) d(\Delta t). \end{aligned} \quad (7)$$

Для функции частотной когерентности поля используем выражение, полученное в геометрооптическом приближении [13]:

$$\Gamma(\Delta\omega, \Delta t) \approx |A|^2 \exp\left[i(\Delta\omega\tau + \Delta t\omega_g) - (\Delta\omega)^2 \sigma_\tau^2/2\right], \quad (8)$$

где  $\tau(\omega_0)$  и  $\omega_g$  — время распространения и доплеровский сдвиг частоты геометрической волны в нестационарной ионосфере,  $A$  — амплитуда волны,  $\sigma_\tau^2$  — дисперсия времени распространения.

Заметим, что в работах [14, 15] для описания функции частотной когерентности поля с учётом дифракционных эффектов используется метод плавных возмущений. В нашей статье выражение (8) получено в условиях сильной дисперсии фазы волны, когда дифракционные эффекты вносят незначительный вклад во флуктуации поля, а основные свойства поля определяются эффектами крупномасштабных неоднородностей (с характерным размером  $l \gg R_\Phi$ , где  $R_\Phi$  — радиус первой зоны Френеля) [16].

Подставляя (8) в (7) и интегрируя (6), получаем

$$\langle |S(\Omega)|^2 \rangle = \frac{|A|^2 T}{2\pi F} \exp \left[ -\frac{(\Omega - \omega_g - \tau\dot{\omega})^2}{F^2} \right], \quad (9)$$

где

$$F = \sqrt{T^{-2} + 2\dot{\omega}^2 \sigma_\tau^2 + (\tau'\dot{\omega}^2 T)^2}$$

— ширина наблюдаемой на спектроанализаторе линии на частоте  $\Omega = \tau(\omega_0)\dot{\omega} + \omega_g$ ,  $\tau' = \partial\tau(\omega_0)/\partial\omega_0$ .

Как видно из формулы (9), разрешающая способность ЛЧМ-иозонда определяется тремя факторами: частотной полосой  $1/T$  окна спектроанализатора, случайными вариациями времени распространения  $\sigma_\tau^2$  и дисперсионными искажениями в ионосфере (третье слагаемое в подкоренном выражении для функции  $F$ ). Нетрудно заметить, что увеличением времени анализа  $T$  можно уменьшить роль первого фактора, однако вклад второго фактора остаётся прежним, а роль дисперсионных искажений возрастает. Обычно всё же роль дисперсионных искажений незначительна из-за малости  $\tau'$ .

На основе (9) было проведено численное моделирование спектра  $\langle |S(\Omega)|^2 \rangle$  ЛЧМ сигнала при однократном распространении на трассе протяжённостью  $D = 3000$  км. Статистические моменты характеристик траекторий распространения рассчитывались по методике, изложенной в [17]. В качестве модели регулярной ионосферы была выбрана экспоненциальная зависимость диэлектрической проницаемости от высоты

$$\varepsilon = 1 - \frac{f_k^2}{f^2} \exp \left[ -\left( \frac{z - z_m}{y_m} \right)^2 \right]. \quad (10)$$

В расчётах были выбраны типичные для слоя  $F_2$  параметры:  $z_m = 270$  км,  $y_m = 80$  км и  $f_k = 7$  МГц. На рис. 1 приведены результаты расчёта спектра ЛЧМ сигнала (длительность окна спектроанализатора здесь и далее составляла  $T = 1$  с) при однократном распространении с учётом дисперсионных искажений (рис. 1а) и искажений как за счёт дисперсии среды, так и вследствие влияния случайных ионосферных неоднородностей (рис. 1б). Расчёты проводились на частоте  $f = 16$  МГц (при отношении рабочей частоты к максимальной применимой  $f_{\text{МПЧ}}$ , равном 0,6) при скорости изменения частоты ЛЧМ сигнала 100 кГц/с. Неоднородности электронной концентрации характеризовались гауссовой корреляционной функцией диэлектрической проницаемости  $\psi_\varepsilon(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \nu \exp[-(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2/l^2]$ , где  $\nu$  и  $l$  — соответственно интенсивность и масштаб неоднородностей, описывающей зависимость флуктуаций электронной концентрации в точках с координатами  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$ . Как и следовало ожидать (см. формулу (9)), рассеяние радиоволн приводит к дополнительному по отношению к влиянию дисперсии ионосферы [8, 9] уширению спектра сигнала (здесь параметры неоднородностей выбирались равными  $\nu = 10^{-6}$ ,  $l = 1$  км). Анализ расчётов спектров  $\langle |S(\Omega)|^2 \rangle$  для других отношений  $f/f_{\text{МПЧ}}$  показал, что искажения спектра ЛЧМ сигнала определяются главным образом поведением радиусов частотной когерентности поля обеих мод. Последние, в свою очередь, при стремлении частоты зондирования к МПЧ в условиях

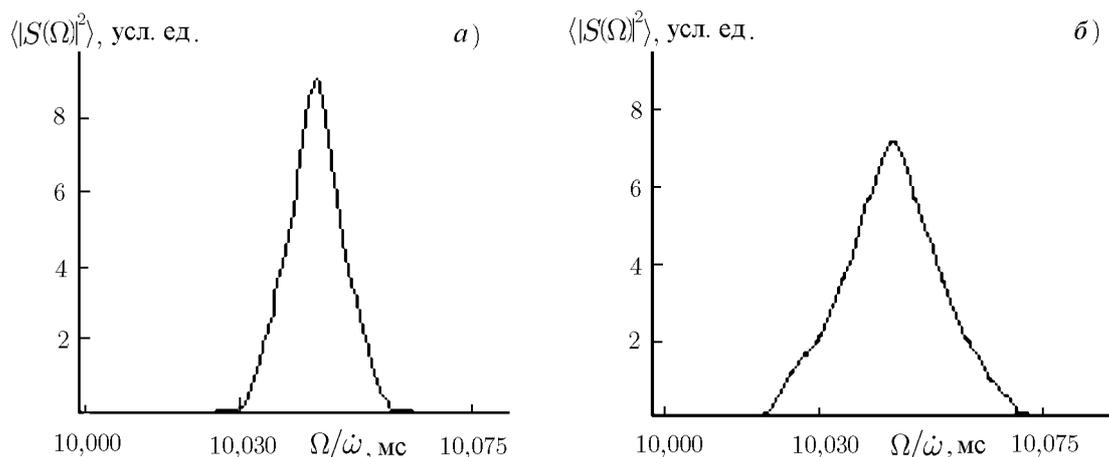


Рис. 1. Результаты численного моделирования спектра ЛЧМ сигнала при односкачковом распространении: *а* — с учётом только дисперсионных искажений, *б* — с учётом искажений как за счёт дисперсии среды, так и вследствие влияния случайных ионосферных неоднородностей

большой дисперсии фазы (интенсивные неоднородности) уменьшаются [18]. Таким образом, из теоретических расчётов следует, что ширина спектра ЛЧМ сигнала для обеих мод с приближением частоты зондирования к МПЧ имеет тенденцию к увеличению.

## 2. СТРУКТУРА ДВУХСКАЧКОВОГО СИГНАЛА

При двухскачковом распространении средний спектр мощности сигнала на выходе ЛЧМ-ионозонда также можно определить с помощью выражения (9). При этом будем предполагать, что волны зеркально отражаются от земной поверхности, а флуктуации траекторных характеристик есть аддитивная сумма флуктуаций этих характеристик на каждом скачке.

На рис. 2 представлены огибающие спектров ЛЧМ сигнала при двухскачковом распространении на выбранной трассе при тех же параметрах неоднородностей, что и на рис. 1. Здесь также заметно проявляется роль случайных неоднородностей (см. рис. 2б) в искажениях структуры сигнала. При этом ширина спектра сигнала больше, чем при односкачковом распространении, что связано с увеличением длины рассеивающего участка в ионосфере при двухскачковом распространении. Вместе с тем значительного (более 100 мкс) уширения спектра ЛЧМ сигнала при двухскачковом распространении, как это видно в ряде случаев на экспериментальных ионограммах наклонного зондирования [19], здесь не возникает. Такое несоответствие теоретических расчётов и результатов измерений требует анализа других причин, приводящих к столь существенным искажениям ЛЧМ сигнала.

Прежде всего, в проведённом выше моделировании структуры сигнала на двухскачковой трассе представляется недостаточно адекватным предположение о зеркальном отражении волн на границе Земля—ионосфера. При учёте реального рельефа земной поверхности следует принимать во внимание возможность дополнительного рассеяния ионосферных радиоволн [18, 20], а следовательно, можно ожидать изменений корреляционных свойств коротковолнового поля. Поэтому для более точного описания ЛЧМ сигнала при двухскачковом распространении, строго говоря, требуется знание функции частотной когерентности поля  $\Gamma(\omega_1, \omega_2, t_1, t_2)$  с учётом рассеяния на шероховатой поверхности Земли.

Обычно [16, 21] при решении задачи рассеяния волн на шероховатой поверхности рассматривают случай падения на эту поверхность регулярной плоской или сферической волны. Задача рассеяния на земной поверхности коротких радиоволн, отражённых от ионосферы, существенно сложнее,

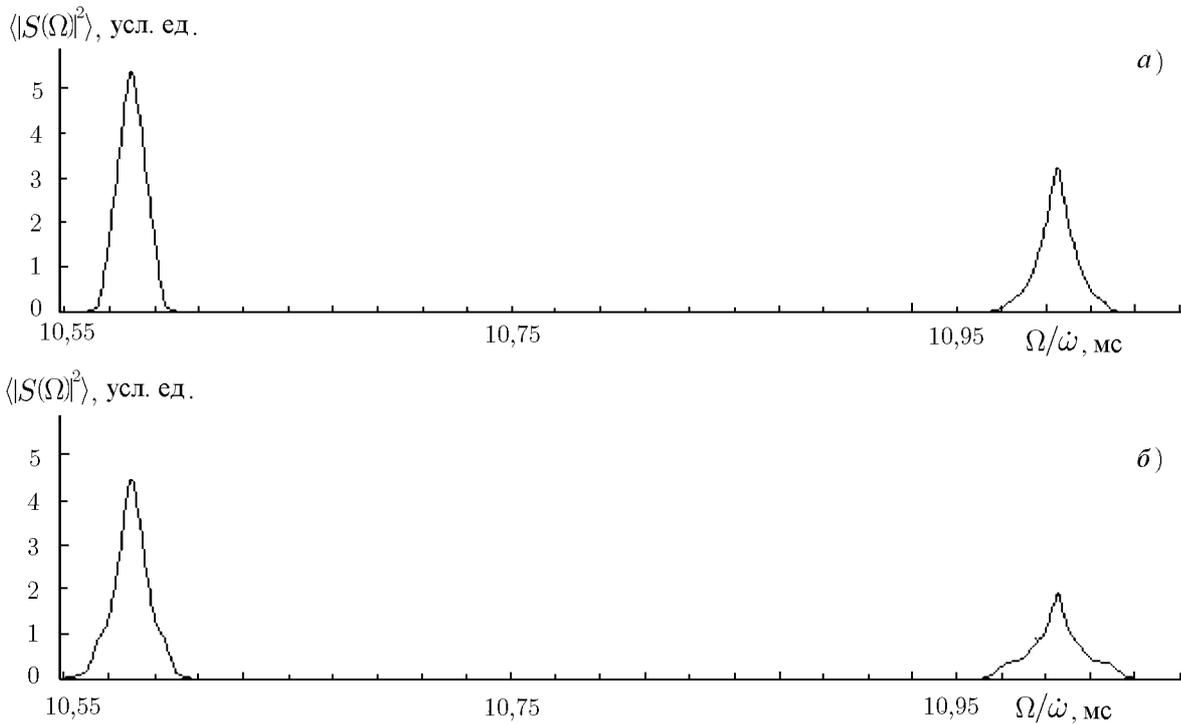


Рис. 2. Результаты численного моделирования спектров нижнего и верхнего лучей ЛЧМ сигнала при двухскачковом распространении: *а* — с учётом только дисперсионных искажений, *б* — с учётом искажений как за счёт дисперсии среды, так и вследствие влияния случайных ионосферных неоднородностей

т. к. структура падающей ионосферной радиоволны содержит в себе искажения, связанные с регулярной рефракцией и рассеянием волны в неоднородной ионосфере. Учитывая, что при многоскачковом распространении коротких радиоволн существенным является рассеяние на шероховатостях Земли вперёд, будем принимать во внимание главным образом крупномасштабные шероховатости. В рамках такого предположения расчёт рассеяния ионосферных радиоволн на земной поверхности можно проводить с помощью метода Кирхгофа [16].

В рамках метода Кирхгофа после рассеяния на Земле для волнового поля можно получить следующие выражения:

$$U = \int V_3(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial N} [U_0(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}', \mathbf{r})] dL, \tag{11}$$

где  $U_0(\mathbf{r}')$  — поле падающей волны,  $G(\mathbf{r}', \mathbf{r})$  — функция Грина,  $\mathbf{N}$  — нормаль к шероховатой поверхности  $L$ ;  $V_3(\mathbf{r}')$  — коэффициент отражения от Земли.

Для поля падающей волны и функции Грина будем использовать геометрическое приближение и для простоты рассмотрим задачу рассеяния на земной поверхности в двумерном случае (пренебрегая рассеянием в азимутальной плоскости). При этом координата  $x$  соответствует дальности вдоль невозмущённой (без шероховатостей) земной поверхности, а координата  $z$  — высоте, отсчитываемой от этой поверхности. В этом случае

$$U = - \int V_3 q_z A_0(x') A_G(x', x) \exp[i\Phi_0(x') + i\Phi_G(x', x) - iq_z \xi(x')] dx', \tag{12}$$

где  $A_0$  и  $\Phi_0$  — амплитуда и фаза падающей волны,  $A_G$  и  $\Phi_G$  — амплитуда и фаза функции Грина,  $q$  — волновой вектор рассеянного излучения на земной поверхности,  $\xi(x')$  — функция, характеризующая шероховатости земной поверхности.

Считая, что ионосферные неоднородности влияют главным образом на фазу волны и в меньшей степени на её амплитуду (в рамках лучевого приближения это вполне допустимо), флуктуациями амплитуды можно пренебречь. Тогда с помощью (12) можно получить выражение для функции частотной когерентности поля  $\Gamma(\omega_1, \omega_2, t_1, t_2)$ . Считая, что на пути луча в ионосфере встречается большое количество неоднородностей, т. е. выполняется гауссов закон распределения флуктуаций фазы, имеем

$$\begin{aligned} \Gamma(\omega_1, \omega_2, t_1, t_2) = & \iint V_3^2 q_z^2 |A_1(x_1) A_2(x_1, x)|^2 \exp \left[ i\Phi_1(x_1, \omega_1 t_1) + i\Phi_2(x_1, \omega_1 t_1, x) - \right. \\ & - i\Phi_1(x_2, \omega_2 t_2) - i\Phi_2(x_2, \omega_2 t_2) - \frac{i}{2} \left\langle [\tilde{\Phi}_1(x_1, \omega_1 t_1) + \tilde{\Phi}_2(x_1, \omega_1 t_1) - \tilde{\Phi}_1(x_2, \omega_2 t_2) - \right. \\ & \left. \left. - \tilde{\Phi}_2(x_2, \omega_2 t_2) - q_z(\omega_1)\xi(x_1) + q_z(\omega_2)\xi(x_2)]^2 \right\rangle \right] dx_1 dx_2, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $A_1$  и  $A_2$  — амплитуды поля на первом и втором скачках,  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  — фазы поля на первом и втором скачках. Вводя суммарно-разностные переменные  $x_1 - x_2 = \xi$ ,  $x_1 + x_2 = 2\eta$  и полагая  $\omega_2 = \omega_1 + \Delta\omega$ ,  $t_2 = t_1 + \Delta t$ , после интегрирования имеем

$$\Gamma(\omega_1, \omega_2, t_1, t_2) \approx \sqrt{2\pi} \int \sigma_p^{-1} V_3^2 q_z^2 |A_1(\eta) A_2(\eta)|^2 \exp\left(-\frac{q_x^2}{2\sigma_p^2}\right) M(\eta) d\eta, \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} M &= \exp[-i\tau' \Delta\omega - i\omega_g \Delta t - (\sigma_\tau' \Delta\omega)^2/2], \\ q_z &= -k \left( \sqrt{1 - S_1^2} + \sqrt{1 - S_2^2} \right), \quad q_x = -k(S_1 - S_2), \quad \tau' = \tau + \frac{q_x \psi_{x\tau}}{\sigma_p^2}, \end{aligned}$$

$S_1 = \sin \beta_{n1}$ ,  $S_2 = \sin \beta_{n2}$ ,  $k$  — волновое число,  $\beta_{n1}$  и  $\beta_{n2}$  — углы падения и отражения волн в месте рассеяния на земной поверхности,

$$\sigma_\tau'^2 = \sigma_\tau^2 - \frac{\psi_{x\tau}^2}{\sigma_p^2}, \quad \sigma_\tau^2 = \sigma_{\tau_1}^2 + \sigma_{\tau_2}^2 + \left( \frac{\partial q_z}{\partial \omega} \right)^2 \sigma_3^2,$$

$$\sigma_p^2 = \sigma_{\beta_1}^2 + \sigma_{\beta_2}^2 + q_z^2 \sigma_{3H}^2, \quad \psi_{x\tau} = \psi_{x\tau_1} + \psi_{x\tau_2},$$

$\sigma_{\tau_1}^2$  и  $\sigma_{\tau_2}^2$  — дисперсии времени распространения луча на первом и втором скачках,  $\sigma_{\beta_1}^2$  и  $\sigma_{\beta_2}^2$  — дисперсии углов прихода луча на первом и втором скачках,  $\psi_{x\tau_1}$  и  $\psi_{x\tau_2}$  — функции взаимной корреляции флуктуаций дальности и времени распространения лучей на скачках,  $\sigma_3^2 = \langle \xi^2 \rangle$  — дисперсия амплитуды неровностей земной поверхности,  $\sigma_{3H}^2 = \langle (\partial \xi / \partial \eta)^2 \rangle$ .

Подставляя (14) в (7) и интегрируя (6), для спектра ЛЧМ сигнала на двухскачковой трассе получаем выражение

$$|S(\Omega)|^2 = \frac{T}{\sqrt{2\pi}} \int (\sigma_p \Theta)^{-1} V_3^2 q_z^2 |A_1(\eta) A_2(\eta)|^2 \exp \left[ -\frac{q_x^2}{2\sigma_p^2} - \frac{(\Omega - \omega_g - \tau' \dot{\omega})^2}{\Theta^2} \right] d\eta, \quad (15)$$

где  $\Theta = \sqrt{T^{-2} + 2\dot{\omega}^2 \sigma_\tau'^2 + (\tau' \dot{\omega}^2 T)^2}$ .

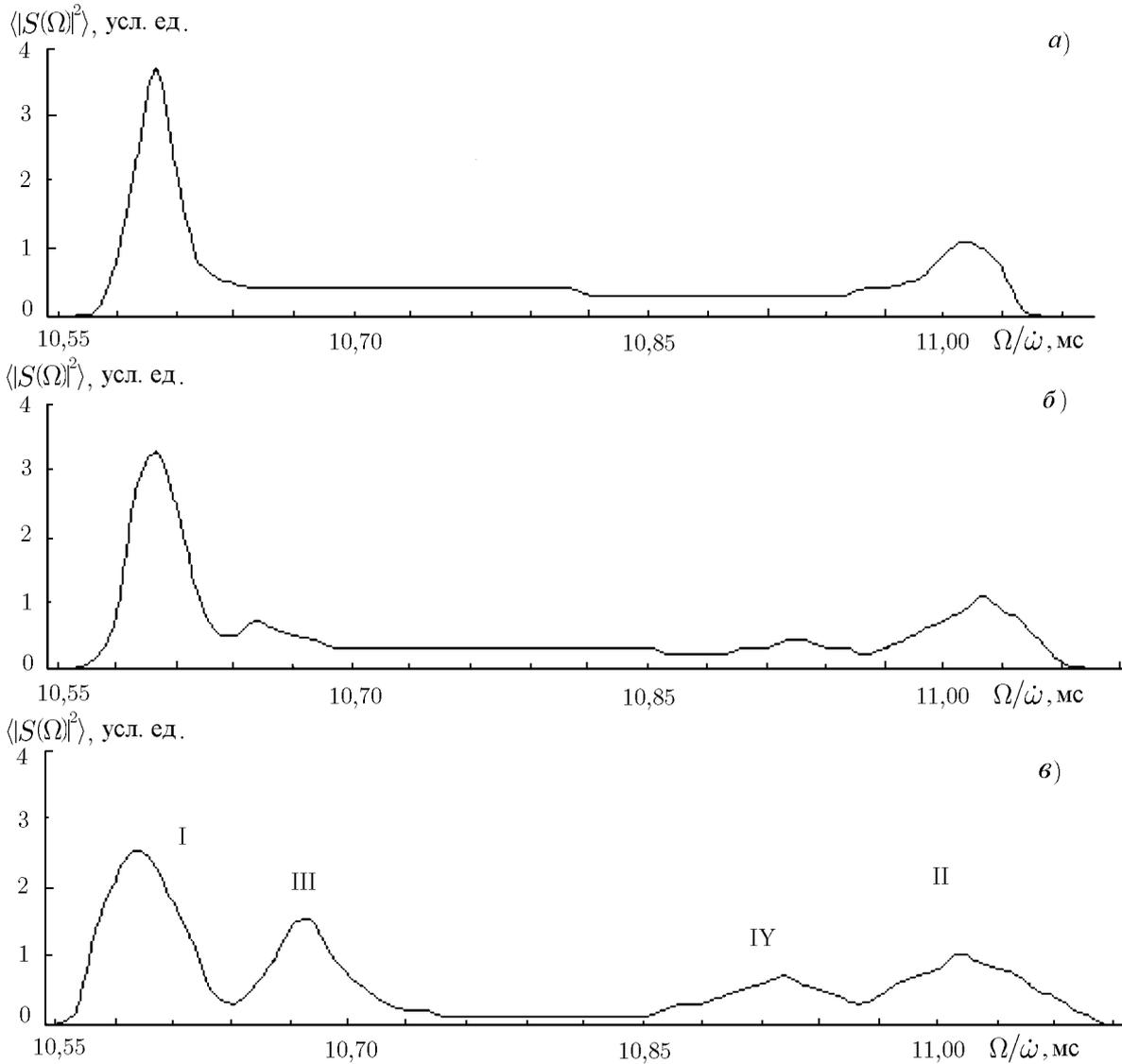


Рис. 3. Результаты численного моделирования структуры ЛЧМ сигнала при двухскачковом распространении с учётом искажений как за счёт дисперсии среды, так и вследствие влияния случайных ионосферных неоднородностей и шероховатостей Земли: *а* — для радиуса пространственной корреляции шероховатости земли  $p = 3$  км, *б* —  $p = 5$  км, *в* —  $p = 10$  км

Выражение (15) было использовано при численном моделировании искажений спектра сигнала для различных параметров ионосферных неоднородностей и шероховатостей земной поверхности. Неровности Земли описывались гауссовой корреляционной функцией с параметрами  $\mu$  и  $p$ , где  $\sqrt{\mu}$  — среднеквадратичное отклонение высоты,  $p$  — радиус пространственной корреляции шероховатостей земной поверхности. В качестве примера на рис.3 *а—в* представлены результаты расчётов среднего спектра мощности  $\langle |S(\Omega)|^2 \rangle$ , где параметры ионосферных неоднородностей выбраны прежними ( $\nu = 10^{-6}$ ,  $l = 1$  км),  $\mu = 10^{-2}$ , а масштаб  $p$  принимал значения 10,5 и 3 км. Нетрудно заметить, что за счёт рассеяния на неровностях Земли в спектре ЛЧМ сигнала появляется широкое временное плато (исчезающее при сглаживании шероховатостей). Динамика плато такова, что с увеличением масштаба неровностей земной поверхности в спектре ЛЧМ сигнала оно трансформируется в дополнительные моды (см. рис. 3б, в). Траекторный анализ показал, что такие моды соответствуют комбинированным

способам распространения радиоволн. После отражения от ионосферы группа нижних лучей первого скачка, рассеиваясь на неровностях Земли, далее распространяется верхним путём, т. е. преобразуется в группу верхних лучей второго скачка (мода III на рис. 3в). С другой стороны, группа верхних лучей первого скачка после рассеяния на Земле трансформируется в группу нижних лучей второго скачка (мода IV на рис. 3в). Поскольку энергия, переносимая нижними и верхними лучами, различна из-за большой расходимости верхних лучей, в спектре ЛЧМ сигнала комбинированная мода III энергетически более выражена и по временной задержке примыкает к основной моде I, соответствующей двухскачковому распространению нижним лучом. Комбинированная мода IV имеет временную задержку, близкую к основной моде II, отвечающей двухскачковому распространению верхним лучом. Заметим, что на многоскачковых трассах в результате многократного рассеяния волн в ионосфере и на шероховатостях Земли следует ожидать увеличения числа дополнительных комбинированных мод, не связанных напрямую с регулярной структурой ионосферы. Это обстоятельство, по-видимому, необходимо учитывать при решении задачи прогноза модового состава сигналов дальней радиосвязи.

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Для сравнения с результатами вышеприведённых теоретических расчётов были проанализированы экспериментальные данные ЛЧМ-зондирования на трассе Магадан—Иркутск. Длина трассы  $D = 3000$  км. Технические характеристики используемой аппаратуры приведены в [4], скорость изменения частоты составляла 100 кГц/с, длительность выборки (длительность временного окна)  $T = 1$  с. Для обработки были отобраны сеансы с типовой структурой ионограмм (см. рис. 4). Всего было отобрано 100 ионограмм, зарегистрированных в мае и октябре 1989 г., феврале 1994 г. и феврале 1995 г. Обработка проводилась в три этапа.

На первом этапе проводилась предварительная обработка и идентификация мод распространения [22]. На втором этапе в интерактивном режиме определялись максимально применимые частоты  $f_{\text{МПЧ}}$  соответствующих мод принимаемого сигнала. На третьем этапе определялась эквивалентная длительность спектра мощности  $\tau_{\text{ЭКВ}}$  в диапазоне частот  $(0,85 \div 1,00) f/f_{\text{МПЧ}}$  с шагом по частоте 94 кГц ( $\tau_{\text{ЭКВ}} = \delta\Omega/\dot{\omega}$ , где  $\delta\Omega$  — ширина огибающей спектра мощности на уровне 0,5 или 0,1). Заметим, что в случае отсутствия каких-либо искажений в ионосферном канале при выбранных параметрах обработки  $\tau_{\text{ЭКВ}} = 30$  мкс. Для односкачкового сигнала  $\tau_{\text{ЭКВ}}$  определялась в автоматическом режиме, для двухскачкового — в интерактивном режиме.

На рис. 5 представлены типичные спектры мощности для односкачкового (рис. 5а) и двухскачкового (рис. 5б) сигнала, при этом для двухскачкового сигнала характерно наличие плато (значительное увеличение  $\tau_{\text{ЭКВ}}$ , определённого по уровню 0,1), что согласуется с результатами численного моделирования, представленными выше (см. рис. 3). После определения нескольких  $\tau_{\text{ЭКВ},i}$  для каждого отношения  $f/f_{\text{МПЧ}}$ , вычисляется среднее значение  $\tau_{\text{ЭКВ}} = n^{-1} \sum_i \tau_{\text{ЭКВ},i}$ , где  $n$  — количество значений  $\tau_{\text{ЭКВ}}$ , полученных при одном и том же значении  $f/f_{\text{МПЧ}}$  ( $n_{\text{max}} = 100$  определяется количеством отобранных

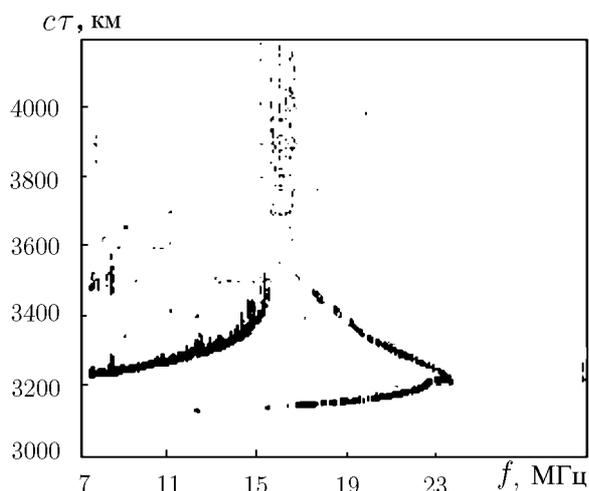


Рис. 4. Типичная ионограмма наклонного зондирования в спокойных ионосферных условиях на трассе Магадан—Иркутск (11:41:00 UT 15.02.89)

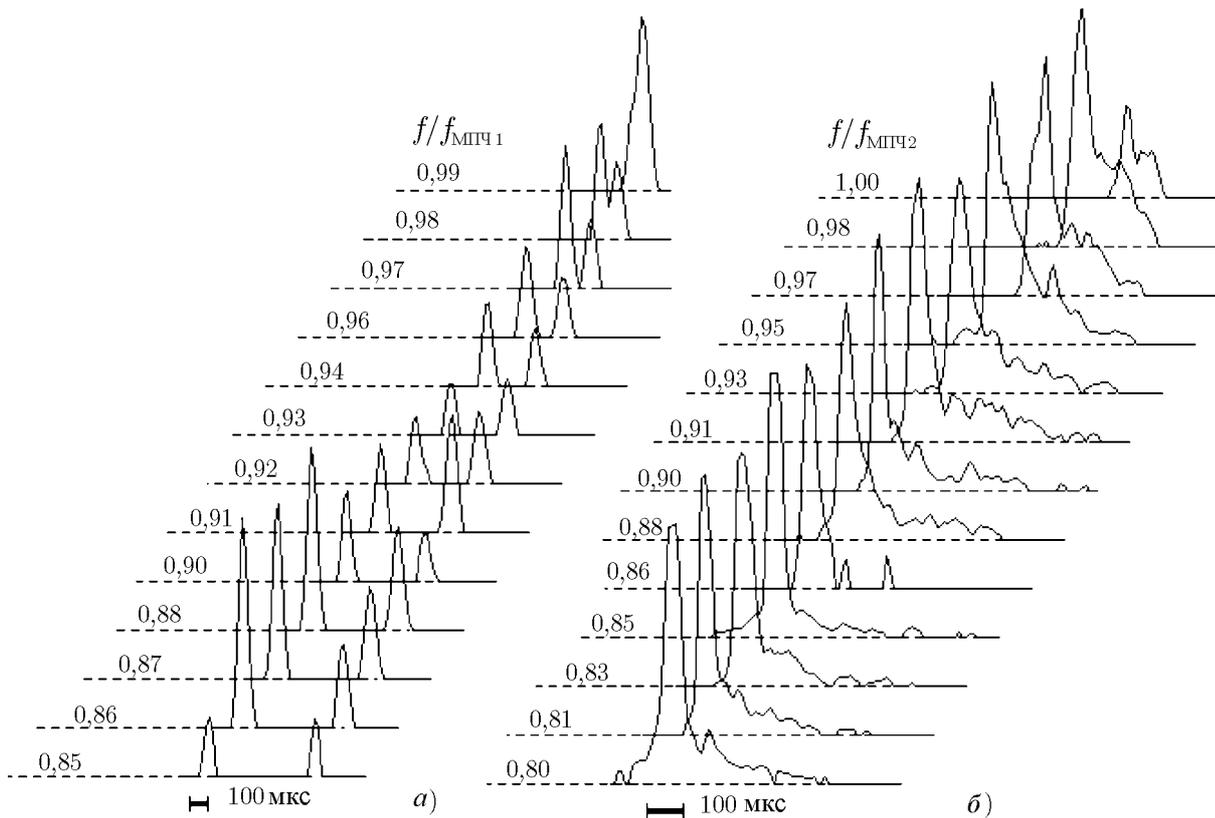


Рис. 5. Форма спектра мощности сигнала на выходе ЛЧМ-ионозонда в зависимости от отношения  $f/f_{\text{МПЧ}}$  для случая, представленного на рис. 4: *а* — форма спектра мощности односкачкового сигнала (слева — спектр мощности нижнего мода, справа — верхнего мода); *б* — форма спектра мощности двухскачкового сигнала

ионограмм). Результаты обработки приведены на рис. 6, 7.

Анализ полученных данных показывает, что для нижнего мода  $1F$  (см. рис. 6*а*) при возрастании рабочей частоты среднее значение  $\bar{\tau}_{\text{ЭКВ}}$  меняется от 32 до 39 мкс. Для верхнего мода  $1F$  (см. рис. 6*б*) с ростом рабочей частоты  $\bar{\tau}_{\text{ЭКВ}}$  меняется от 38 до 50 мкс. Характер поведения  $\bar{\tau}_{\text{ЭКВ}}$  для обеих мод соответствует изменению функции частотной когерентности в зависимости от частоты [13].

Для двухскачкового сигнала (см. рис. 7) наблюдается более значительное увеличение  $\bar{\tau}_{\text{ЭКВ}}$ , причём значение  $\bar{\tau}_{\text{ЭКВ}}$ , определённое по уровню 0,5, с ростом частоты меняется от 65 до 88 мкс, и скорость его увеличения несколько больше, чем для односкачкового сигнала. В диапазоне  $(0,98 \div 1) f/f_{\text{МПЧ}}$  происходит уменьшение  $\bar{\tau}_{\text{ЭКВ}}$ .

Изменение значения  $\bar{\tau}_{\text{ЭКВ}}$ , определённого по уровню 0,1, имеет более сложный характер, и в диапазоне частот  $(0,85 \div 1) f/f_{\text{МПЧ}}$  меняется от 213 до 150 мкс с ростом частоты (см. рис. 7*б*). Если рассматривать характер изменения  $\bar{\tau}_{\text{ЭКВ}}$  в более широком диапазоне, то наблюдается тенденция увеличения плато с ростом частоты, и с некоторого её значения уменьшение  $\bar{\tau}_{\text{ЭКВ}}$  при приближении к  $f_{\text{МПЧ}}$  (см. рис. 8).

В отдельных сеансах для двухскачкового сигнала в узком диапазоне частот наблюдается эффект возникновения дополнительной многолучёвости. Пример такой ситуации представлен на рис. 9. Этот эффект, отмеченный при численном моделировании (см. рис. 3) возможен в случае прохождения трассы через территорию, с гористым рельефом, что характерно для трассы Иркутск—Магадан.

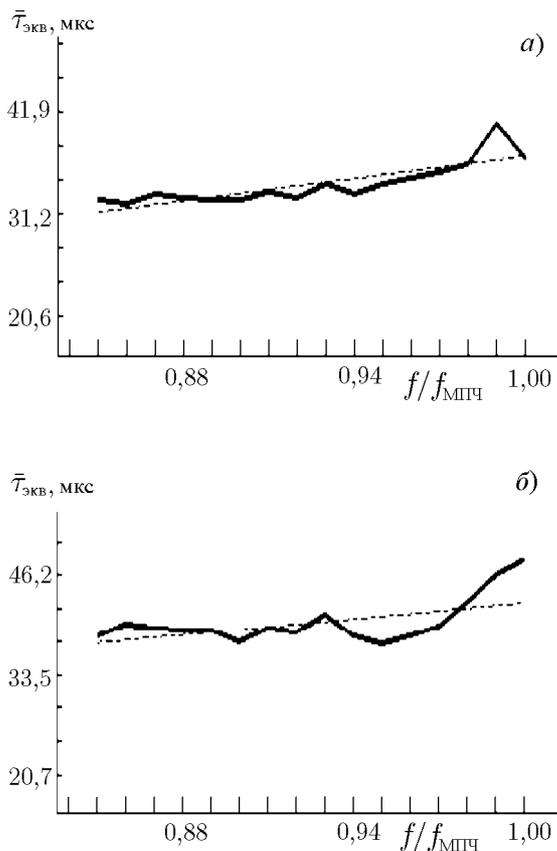


Рис. 6. Экспериментальная зависимость средней эквивалентной длительности  $\bar{\tau}_{\text{экв}}$  спектра мощности односкачкового сигнала по уровню 0,5 от отношения  $f/f_{\text{МПЧ}}$ , *а* —  $\bar{\tau}_{\text{экв}}$  для нижнего мода, *б* —  $\bar{\tau}_{\text{экв}}$  для верхнего мода. Пунктиром показана линейная аппроксимация экспериментальной зависимости

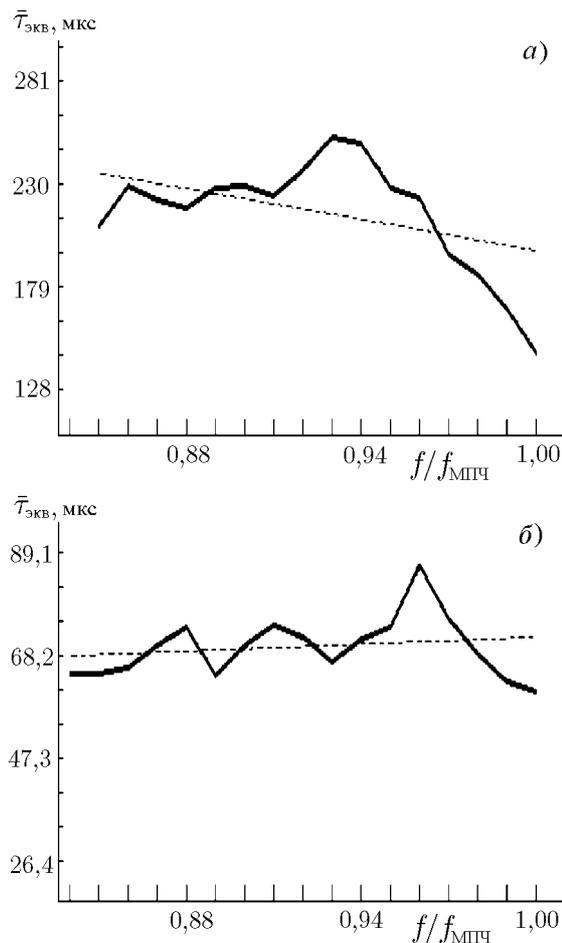
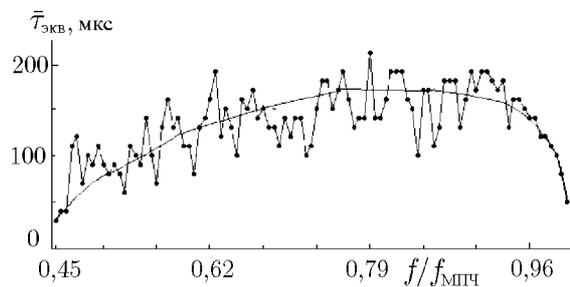


Рис. 7. Экспериментальная зависимость средней эквивалентной длительности спектра мощности двухскачкового сигнала от отношения  $f/f_{\text{МПЧ}}$ : *а* — длительность  $\bar{\tau}_{\text{экв}}$ , определённая по уровню 0,5, *б* — длительность  $\bar{\tau}_{\text{экв}}$ , определённая по уровню 0,1. Пунктиром показана линейная аппроксимация экспериментальной зависимости

Рис. 8. Экспериментальная зависимость средней эквивалентной длительности  $\bar{\tau}_{\text{экв}}$  спектра мощности двухскачкового сигнала от отношения  $f/f_{\text{МПЧ}}$  в широком диапазоне частот (05:03 UT 15.02.95)



## 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

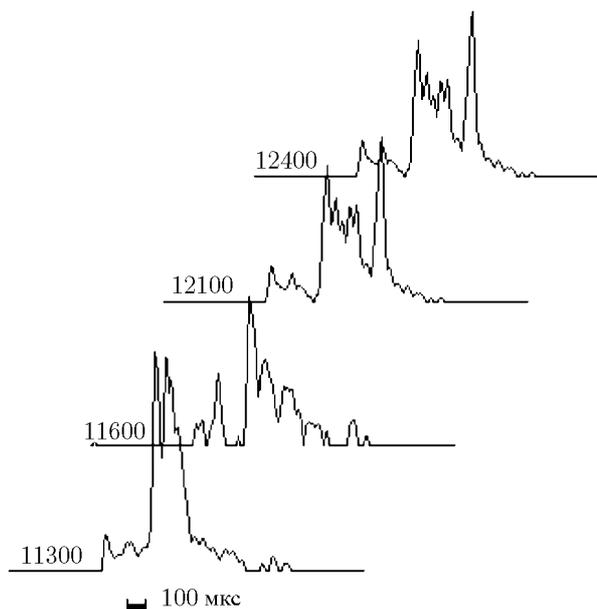


Рис. 9. Пример появления дополнительной многолучёвости в узком диапазоне частот. Слева от графиков приведена частота  $f$  в кГц

рования и экспериментальные данные показывают, что предложенная методика расчёта структуры выходных сигналов ЛЧМ-ионозондов качественно правильно воспроизводит ряд эффектов, обусловленных влиянием неоднородностей ионосферы и шероховатости земной поверхности, которые вносят основной вклад в изменение структуры сигнала. Для двухскачковых сигналов неровность земной поверхности играет определяющую роль. Влияние неоднородностей ионосферы и шероховатости земной поверхности значительно снижает реальную разрешающую способность ЛЧМ-ионозондов и должны учитываться при расчётах пропускной способности ионосферного канала связи.

Благодарим редактора за проделанную большую работу по улучшению качества статьи. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты Э 98-02-16023, 00-02-17780).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Barry G. H., Fenwick R. B. // AG ARD Conference Proceedings / Ed. by T. V. Jones. 1969. № 13. P. 487.
2. Иванов В. А., Фролов В. А., Шумаев В. В. // Изв. вуз. Радиофизика. 1986. Т. 29, Э 2. С. 235.
3. Earl, Ward B. D. // Radio Sci. 1987. V. 22, № 2. P. 275.
4. Brynko I. G., Galkin I. A., Grozov V. P. et al. // Adv. Space Res. 1988. V. 8, № 4. P. 121.
5. Paul L. C. A., Paul S. C. // Annali di Geofisica. 1994. V. 36, Э 2. P. 135.
6. Lynn // INAG -62, Sangary, 1998. P. 14.
7. Ilyin N. V., Khakhinov V. V., Kurkin V. I. et al. // Proceedings of ISAP'96, Chiba, Japan. V. 3. P. 689.
8. Lunborg B., Lungren M. // J. Atmos. Terr. Phys. 1992. V. 54, № 3—4. P. 311.
9. Филипп Н. Д., Блаунштейн Н. Ш., Ерухимов Л. М. и др. Современные методы исследования динамических процессов в ионосфере. — Кишинёв: Штинца, 1991. — 288 с.
10. Solous S. // Radio Science. 1989. V. 24, № 4. P. 585.
11. Барабашов Б. Г., Ветроградов Г. Г. // Изв. вуз. Северокавказский регион. Естественные науки. 1994. № 3. С. 39.
12. Гершман Б. Н., Ерухимов Л. М., Яшин Ю. Я. Волновые явления в ионосфере и космической плазме. — М.: Наука, 1984. — 392 с.
13. Афанасьев Н. Т., Грозов В. П., Красиков А. А. и др. // Исследования по геомагнетизму, аэронауке и физике Солнца. М.: Наука, 1983. Вып. 63. С. 180.
14. Gherm V. E., Zernov N. N., Lundborg B. // J. Atmos. Solar-Terr. Phys. 1997. V. 59, № 14. P. 1843.
15. Gherm V. E., Zernov N. N., Lundborg B., Vustberg A. // J. Atmos. Solar-Terr. Phys. 1997. V. 59, № 14. P. 1831.

16. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. Часть II. Случайные поля. — М.: Наука, 1978. — 464 с.
17. Афанасьев Н. Т., Грозов В. П., Носов В. Е., Тинин М. В. // Исследования по геомагнетизму, аэронауке и физике Солнца. М.: Наука, 1989. Вып. 84. С. 77.
18. Tinin M. V., Afanasiev N. T., Mikheev S. M., Pobedina A. P., Fridman O. V. // Radio Science. 1992. V. 27, № 2. P. 245.
19. Орлов И. И. // Научный отчёт по теме НИР Тазгун. Иркутск, 1989. Т. 3. 54 с.
20. Афанасьев Н. Т., Победина А. П., Тинин М. В. // Тез. докл. XIV Всесоюз. конф. по распространению радиоволн. Т. 4. Харьков, 1990. с. 1.
21. Басс Ф. Г., Фукс И. М. Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. — М.: Наука, 1978. — 264 с.
22. Grozov V. P., Kurkin V. I., Nosov V. I., Ponomarchuk S. N. // Proceedings of ISAP'96, Chiba, Japan. P. 693.

<sup>1</sup> Иркутский госуниверситет,  
НИИ прикладной физики,

<sup>2</sup> Институт солнечно-земной  
физики СО РАН, г. Иркутск,  
Россия

Поступила в редакцию  
10 октября 2000 г.

#### STRUCTURE OF A CHIRP SIGNAL IN THE EARTH-IONOSPHERE RANDOMLY-INHOMOGENEOUS CHANNEL

*N. T. Afanas'yev, V. P. Grozov, V. E. Nosov, and M. V. Tinin*

We analyze theoretically the structure of a chirp-ionosonde signal for the cases of one- and two-hop propagation in a randomly inhomogeneous ionosphere. For the two-hop propagation, the influence of an additional wave scattered from the rough ground is taken into account. Our numerical simulation showed that random ionospheric irregularities and ground roughnesses play a significant role in the formation of signal structure. Numerical-simulation results are compared with experimental data obtained for the oblique ionospheric sounding.

УДК 551.594.221

## УЗКОСЕКТОРНАЯ ПЕЛЕНГАЦИЯ ИСТОЧНИКОВ ШУМОВОГО ОНЧ ИЗЛУЧЕНИЯ

*В. И. Козлов, В. А. Муллаяров, А. Е. Васильев*

Представлена методика узкосекторной пеленгации источников низкочастотного шумового излучения. Кратко описана аппаратура, реализующая указанную методику. Приведены примеры измерений азимутальных углов прихода ОНЧ шумов в окрестности Якутска для нескольких моментов времени суток в марте 2000 г. В рассмотренном случае шумовое излучение приходило в основном из двух мировых грозовых центров. Примеры иллюстрируют возможность разделения локальных источников в глобальных приэкваториальных грозовых очагах (на расстоянии около 11 000 км от африканского грозового центра).

### ВВЕДЕНИЕ

Естественные радишумы в приземном волноводе создаются несколькими источниками [1]. Это, прежде всего, мировые очаги гроз и местные грозы. Некоторый вклад в высоких широтах вносят также ионосферно-магнитосферные источники. В этой связи возникает задача наблюдения отдельных источников. Задачу наблюдения направлений прихода свистящих атмосфериков и других естественных ОНЧ излучений, когда их амплитуда превышает фоновую составляющую, решают методами, в основе которых лежит восстановление трёх компонент волнового вектора излучения [2, 3, 4]. Для регистрации источников, расположенных в приземном волноводе, можно воспользоваться методами, не требующими узкополосных фильтров. Это пеленгаторы радиоимпульсов от грозовых разрядов — атмосфериков [5]. Задачу определения направления на отдельные источники радишумов, образующих флуктуационную составляющую, выполняют узкосекторные пеленгаторы.

Один из таких пеленгаторов был предложен В. Е. Кашпровским [6]. Используемая в нём антенная система состоит из двух вращающихся скрещенных рамок и штыревой антенны, имеющей круговую диаграмму направленности в азимутальной плоскости. Рамка имеет диаграмму направленности типа «восьмёрка». При сложении сигналов с одной из рамок и штыревой антенны получается диаграмма направленности (ДН) типа «кардиоида». Вычитая из кардиоиды усиленный сигнал со скрещенной рамки, получают узкий лепесток.

В работе [7] нами предложен метод получения узкого лепестка при электронном вращении рамок с использованием гониометров. Однако электронное вращение сопряжено с созданием узлов умножения с большим динамическим диапазоном, т. к. суточный диапазон изменения самого сигнала более 20 дБ. Поэтому нами предлагается метод получения узкого лепестка, реализованный программным путём, позволяющий использовать стандартные аналого-цифровые преобразователи (АЦП) с большим динамическим диапазоном.

### 1. АППАРАТУРА И МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЙ

Антенная система приёмного устройства состоит из двух многовитковых скрещенных рамочных антенн эффективной площадью по 360 м<sup>2</sup> и вертикальной электрической антенны с действующей высотой 3,5 м. Предварительные усилители (собственные шумы меньше 1 мкВ в полосе 10 кГц) с антеннами удалены на расстояние 400 м от регистратора. Для выравнивания чувствительностей и частотно-фазовых характеристик каналов приёма электрической и магнитной составляющих используется эквалайзер.

Сигналы с трёх антенн через оконечные усилители и линии задержки поступают на АЦП. В нашем случае это 12-ти разрядный АЦП L-205 (блок персонального компьютера) с частотой дискретизации 250 кГц. Так как запись с 3-х каналов идёт на один встроенный АЦП через коммутатор, то для выравнивания моментов регистрации используются линии задержки ЛЗТ-4. Таким образом, сигналы с трёх антенн записываются в память ЭВМ в виде трёх массивов.

Далее, аналогично [6], с помощью сложения массива сигнала от вертикальной электрической антенны, обладающей круговой ДН в азимутальной плоскости, с массивом сигналов одной из пары скрещенных рамочных антенн с ДН типа «восьмёрка», описываемой выражением  $kV \cos \varphi$ , получается сигнал, принимаемый системой антенн с кардиоидной ДН:  $V_k = kV (1 + \cos \varphi)$ , где  $k$  — коэффициент передачи каналов приёма,  $V = V_0 \sin \omega t$  — магнитная компонента принимаемого сигнала,  $\omega$  — его частота,  $\varphi$  — азимут прихода сигнала. Из значений  $|V_k|$  (линейное детектирование) вычитаем усиленный в  $m$  раз сигнал со второй рамки, также взятый по модулю,  $|mkV \sin \varphi|$ . Получается зависимость  $V_p = kV [1 + \cos \varphi - m |\sin \varphi|]$ , описывающая результирующую характеристику направленности. Сумма положительных значений полученного массива (однополупериодное детектирование) и даёт значение сигнала, выделенного с помощью узкосекторной ДН пеленгатора с шириной лепестка по азимуту  $115^\circ/m$ .

Для получения двух вращающихся ДН, развёрнутых друг относительно друга на  $90^\circ$ , использован математический приём разворота осей. Для каждого угла поворота осей  $\alpha$  по массивам сигналов с рамочных антенн в плоскости восток—запад  $H_{в-з}$  и север—юг  $H_{с-ю}$  вычисляются значения массивов  $H_{\parallel} = H_{в-з} \cos \alpha - H_{с-ю} \sin \alpha$  и  $H_{\perp} = H_{в-з} \sin \alpha - H_{с-ю} \cos \alpha$ , а по ним — сигнал узкосекторного пеленгатора с данного направления  $\alpha$ . Таким образом строится круговая диаграмма принимаемых сигналов.

Поскольку вычисления можно провести с требуемой точностью, то при приблизительно равных точностях измерений сигналов со всех трёх антенн и при  $m \geq 10$  погрешность приближённо равна  $m \Delta H$ , где  $\Delta H$  — погрешность измерения сигналов с рамки. Таким образом, с одной стороны, увеличение  $m$  ведёт к сужению лепестка приёмной диаграммы направленности, а с другой — к увеличению ошибки измерений.

Для углов, кратных  $\pi/4$ , погрешность возрастает в  $\sqrt{2}$  раз по сравнению с направлениями вдоль рамок. Ширина лепестка диаграммы направленности проверялась по наблюдению сигналов радиостанций, работающих в диапазоне  $11 \div 14$  кГц, и соответствует приведённой формуле.

## 2. РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ

Нами были проведены измерения радишумов естественного происхождения в диапазоне  $0,5 \div 10$  кГц в 25 км от Якутска осенью, зимой и весной 1998—1999 гг. в течение 5 дней каждого месяца. Использование персонального компьютера РС-486 с АЦП L-205 позволяет вести регистрацию один раз в минуту с длительностью массивов 0,256 с с расчётом круговой диаграммы через каждый градус. Полагалось  $m = 20$ , что соответствует ширине лепестка ДН  $14^\circ$ .

Анализ результатов позволил сделать вывод, что для Якутска выделяются в основном, за исключением летних месяцев, два направления прихода ОНЧ радишумов:  $260 \div 320^\circ$  с максимумом около  $00 \div 04$  LT и  $150 \div 210^\circ$  с максимумом около 17 LT. Кроме того, в отдельные дни весенне-осенних сезонов есть некий максимум с направлением прихода  $240^\circ$ , сравнимый с двумя основными. Эти три максимума соответствуют мировым очагам гроз в Юго-Восточной Азии и Африке, а также очагу на полуострове Индостан. Первые два источника соответствуют расположению источников радишумов в модели [8], полученной при исследованиях с помощью поворотной рамки для зимнего периода. Три источника соответствуют модели [9] для осенне-весеннего сезонов.

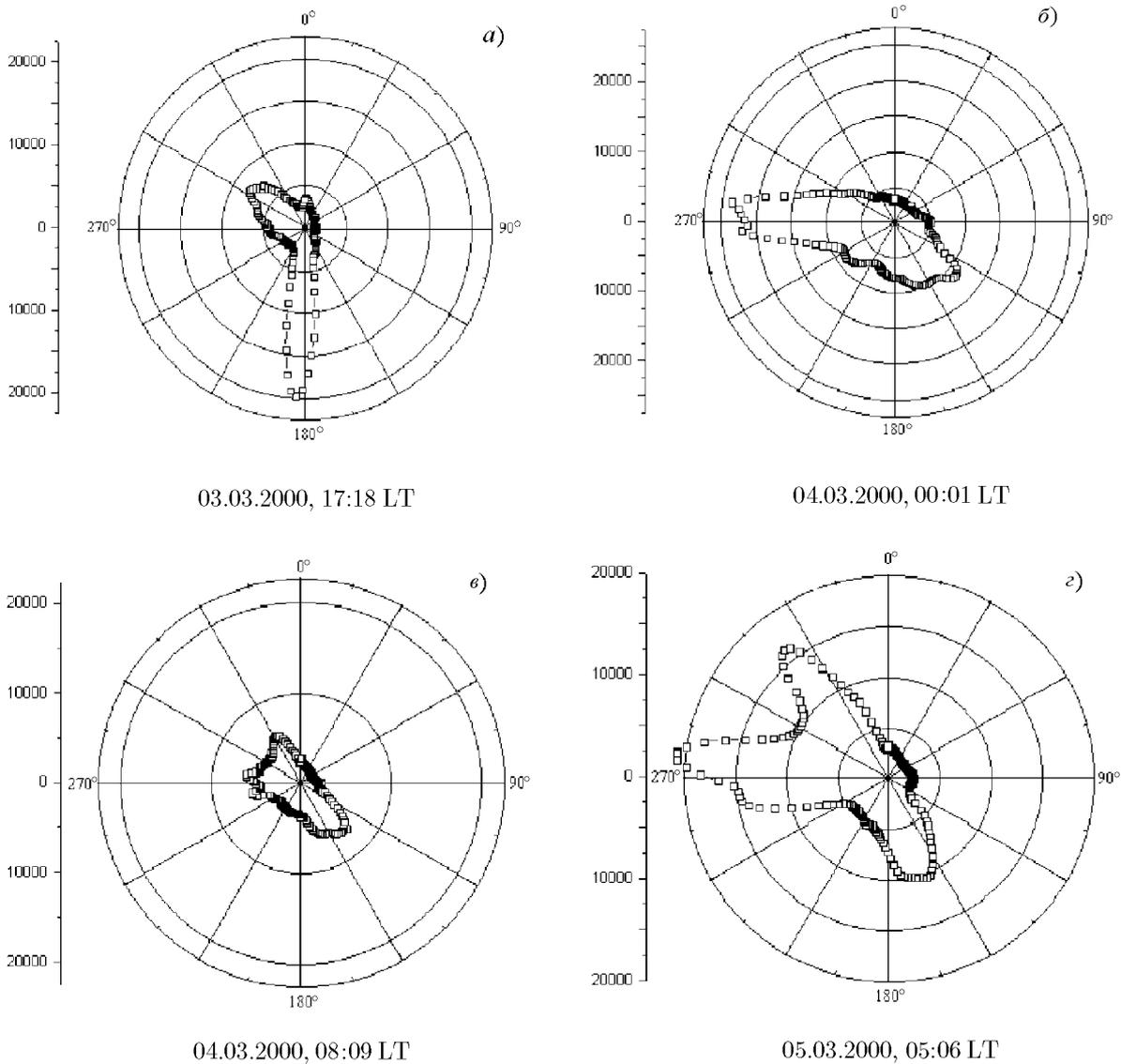


Рис. 1. Круговые диаграммы прихода радишумов 3–5 марта 2000 г., полученные в окрестности Якутска.  
На шкале слева показана интенсивность принимаемого сигнала в относительных единицах

На рис. 1 приведён пример регистрации усреднённых за час круговых диаграмм прихода ОНЧ радишумов для начала марта 2000 г., демонстрирующий достаточно узкую по направлению полосу прихода сигналов. В 17 часов LT максимума достигло излучение южного очага (рис. 1а), а в 00 LT — западного очага (рис. 1б), что соответствует приблизительно 15 UT. Здесь же при азимуте  $230^\circ$  видны достаточно мощные радишумы, приходящие с полуострова Индостан. На рис. 1в показан минимум прихода радишумов со всех направлений, наблюдаемый примерно в 08 LT. На рис. 1г приведён довольно характерный пример регистрации двух источников ОНЧ шума, приходящего с западного и северо-западного направлений (в максимуме сигналов), соответствующих очагам гроз в Западной и Восточной Африке. Данные сравнивались с данными спутниковой системы наблюдения за тропическими грозами в эти дни [10], показавшими хорошее соответствие с полученными результатами.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант «Арктика» № 98–05–03841).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ремизов Л. Т. Естественные радиопомехи. — М.: Наука, 1985. — С. 200.
2. Okada K., Iwai A., Hayakawa M. // Planet. Space Sci. 1977. V. 25, № 3. P. 233.
3. Ота К., Хаякава М. // Геомагнетизм и аэрономия. 1992. № 1. С. 34.
4. Дружин Г. И., Козлов В. И., Лаптев А. Д., Муллаяров В. А. // Геомагнетизм и аэрономия. 1997. № 4. С. 164.
5. Козлов В. И., Муллаяров В. А., Лаптев А. Д., Вальков С. П., Громов Б. Н. // ПТЭ. 1996. ЭЗ. С. 162.
6. Кашпровский В. Е. Определение местоположения гроз радиотехническими методами. — М.: Наука, 1966. — С. 94.
7. Вальков С. П., Козлов В. И. // ПТЭ. 1998. Э 4. С. 165.
8. Дружин Г. И., Шапаев В. И. // Геомагнетизм и аэрономия. 1988. Т. 26, Э1. С. 81.
9. Козлов В. И., Лаптев А. Д., Орлов В. А. // Проявление суббурь в геофизических явлениях. Якутск: ЯФ СО АН СССР, 1989. С. 129.
10. <http://www.thunder.msfc.nasa.gov/data/otdbrowse.html>.

Институт космических  
исследований и аэрономии  
СО РАН, г. Якутск, Россия

Поступила в редакцию  
10 июля 2000 г.

## NARROW-SECTOR PELENGATION OF VLF-NOISE EMISSION SOURCES

*V. I. Kozlov, V. A. Mullayarov, and A. E. Vasilyev*

We present a technique for narrow-sector pelengation of VHF-noise emission sources. Hardware realization of the technique is briefly described. The examples of measurements of azimuthal angles of VHF-noise arrival at Yakutsk location at different day times in March 2000 are given. In the case considered, noise emission was received mainly from two directions corresponding to the world thunderstorm centers. The examples illustrate well the possibility to resolve local sources in global near-equatorial thunderstorm centers at distances about 11000 km from the African thunderstorm center.

УДК 533.951

## ЭФФЕКТ «ПОСЛЕДЕЙСТВИЯ» В ИСКУССТВЕННО ВОЗМУЩЁННОЙ ИОНОСФЕРНОЙ ПЛАЗМЕ

Г. И. Терина

При зондировании искусственно возмущённой ионосферы радиоимпульсами обыкновенной поляризации был обнаружен рассеянный сигнал, который появлялся после выключения возмущающего передатчика. Рассмотрены различные типы временной зависимости этого сигнала, его высотные и частотные характеристики.

### ВВЕДЕНИЕ

При зондировании искусственной ионосферной турбулентности радиоимпульсами обыкновенной поляризации обычно наблюдались два типа рассеянных сигналов: «кавитонный» сигнал (КС) и «плазменный» сигнал (ПС) [1–3]. Эти сигналы появлялись, когда возмущающий передатчик включался, и исчезали с его выключением. В данной работе рассмотрен сигнал, который появлялся после выключения возмущающего передатчика — «плазменный сигнал последействия» (ПСПД) [2]. Представлены временные, пространственные и частотные характеристики наблюдаемого рассеянного сигнала.

### ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Экспериментальные данные были получены на нагревном стенде «Зимёнки» весной 1991 и зимой 1991–1992 гг. Нагревный передатчик работал на частотах 5,455; 5,75 и 5,828 МГц, излучая радиоволны обыкновенной поляризации с эффективной мощностью 10 МВт, и включался периодически на 20 с (либо на 1 мин) с паузой такой же длительности. Пробный передатчик работал в диапазоне частот 5,50÷5,68 МГц и излучал радиоимпульсы обыкновенной поляризации длительностью 50 мкс с частотой повторения 50 Гц, эффективная излучаемая мощность в импульсе составляла 100 МВт. Наблюдаемые рассеянные сигналы принимались на несущей частоте пробных радиоимпульсов.

Амплитуда рассеянных сигналов регистрировалась самописцем со скоростью 10 мм/с. Диагностическая аппаратура позволяла получать временную зависимость амплитуды принимаемых рассеянных сигналов одновременно с десяти действующих высот с шагом от 1 до 15 км. Иногда проводилась фоторегистрация высотно-амплитудной развёртки наблюдаемых рассеянных сигналов. На высотно-амплитудной развёртке плазменный сигнал последействия располагался на действующих высотах, превышающих высоту отражения основного сигнала пробного передатчика, занимая диапазон действующих высот  $\Delta h' = 500 \div 1\,000$  км.

Анализ записей амплитуды рассеянных сигналов обнаружил несколько типов временной зависимости ПСПД (см. рис. 1). На рис. 1б представлен наиболее типичный случай временной зависимости, когда амплитуда ПСПД постепенно увеличивалась с выключением нагревного передатчика, достигая своего максимального значения, а затем медленно уменьшалась. Тип временной зависимости, представленный на рис. 1а характерен для больших высот рассеяния ( $h' > 600$  км). На рис. 1в показан тип ПСПД (с малыми временами нарастания и релаксации), который чаще всего наблюдался при меньших частотах пробного передатчика ( $f_{\text{пр}} = 5,50$  и 5,55 МГц).

Время появления максимума амплитуды ПСПД изменялось от долей секунды до десятков секунд, немного уменьшаясь с высотой для диапазона высот рассеяния 300÷400 км и увеличиваясь для высот

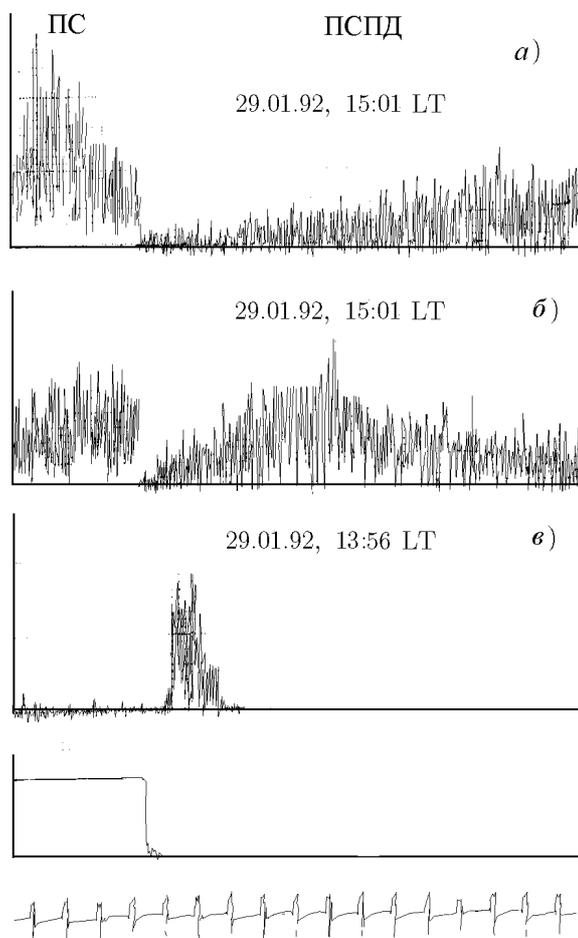


Рис. 1. Примеры различных типов временной зависимости ПСПД: *а* — действующая высота рассеяния  $h' = 835$  км, несущая частота пробных радиоимпульсов  $f_{\text{пр}} = 5,6$  МГц, частота излучения нагревного передатчика  $f_{\text{в}} = 5,455$  МГц; *б* —  $h' = 435$  км,  $f_{\text{пр}} = 5,6$  МГц,  $f_{\text{в}} = 5,455$  МГц; *в* —  $h' = 430$  км,  $f_{\text{пр}} = 5,55$  МГц,  $f_{\text{в}} = 5,75$  МГц. На нижней панели показан момент выключения возмущающего передатчика и секундные метки времени

дневных условий к ночным наблюдалось существенное увеличение времени релаксации ПСПД и диапазона действующих высот рассеяния.

Следует отметить, что ПСПД наблюдался нечасто, в основном в тех случаях, когда соответствующий ему плазменный сигнал имел флуктуации огибающей амплитуды (ПС типа II, либо Ia, см. [3]). В более ранних экспериментах, проведённых в 1980–1986 гг., ПСПД практически отсутствовал, а огибающая ПС не имела флуктуаций.

рассеяния, больших  $500 \div 600$  км. Время релаксации изменялось от нескольких секунд до десятков минут и значительно возросло с увеличением действующей высоты рассеяния.

Высотная зависимость максимальной амплитуды  $A_m$  ПСПД, времени её появления  $\tau_m$  и времени релаксации  $\tau_r$ , измеренного по уровню  $A_m/e$ , представлены на рис. 2. Значения  $A_m, \tau_m, \tau_r$  усреднялись для трёх следующих друг за другом записей временной зависимости с длительностью нагрева 20 с. Из рис. 2 можно видеть небольшое уменьшение времени нарастания и существенное увеличение времени релаксации ПСПД с увеличением действующей высоты рассеяния. Амплитуда имеет максимум на высоте 345 км, превышающей высоту отражения пробной радиоволны на 110 км. Такая амплитудно-высотная зависимость является наиболее типичной. Иногда наблюдались случаи, когда максимум амплитуды ПСПД, расположившись на действующих высотах  $300 \div 400$  км после выключения возмущающего передатчика, через несколько секунд перемещался на большие высоты ( $900 \div 1000$  км).

При увеличении частоты пробного передатчика наблюдалось увеличение амплитуды ПСПД и времени появления максимума. Зависимости максимальной амплитуды и времени её появления от частоты пробного передатчика для двух действующих высот рассеяния показаны на рис. 3.

Основные экспериментальные данные были получены нами для дневной ионосферы. Действующие высоты отражения пробных радиоимпульсов обычно составляли  $230 \div 250$  км, градиенты электронной концентрации в области отражения мощной и пробной радиоволн были большими, а критические частоты  $F$ -слоя ионосферы высокими (больше 10 МГц). При переходе от

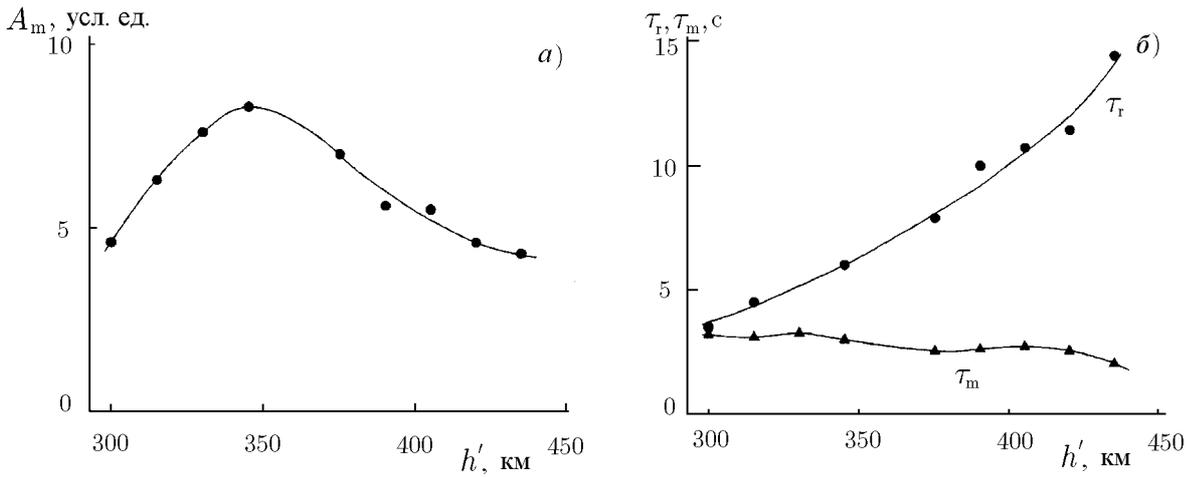


Рис. 2. Зависимости максимальной амплитуды  $A_m$  (а), времени её появления  $\tau_{\tau_m}$  и времени релаксации её появления  $\tau_{\tau_r}$  (б) ПСПД от действующей высоты рассеяния. Мощность нагревного передатчика  $P_B = 10$  МВт,  $f_B = 5,828$  МГц,  $f_{пр} = 5,6$  МГц; 22.01.92; 14:42–14:44 LT

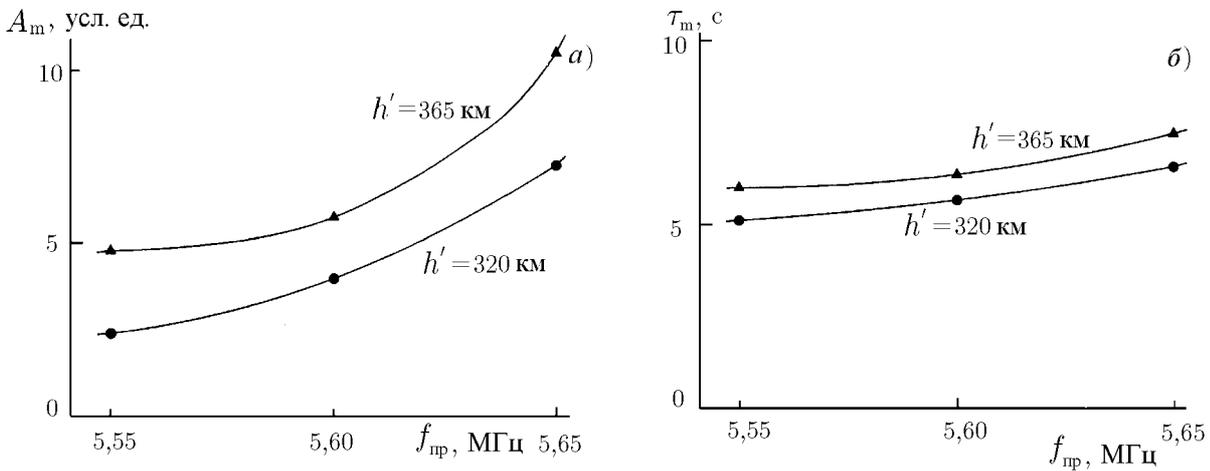


Рис. 3. Зависимости максимальной амплитуды  $A_m$  (а) и времени её появления  $\tau_{\tau_m}$  (б) от частоты пробного передатчика для двух действующих высот рассеяния. Мощность нагревного передатчика  $P_B = 10$  МВт,  $f_B = 5,455$  МГц; 22.01.92; 16:07–16:12 LT

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

Рассмотрены временные, пространственные и частотные характеристики плазменного сигнала последствий, возникающего после выключения возмущающего передатчика при зондировании искусственной ионосферной турбулентности радиоимпульсами обыкновенной поляризации.

Если рассеянные сигналы («плазменный» и «кавинтонный»), возникающие при включении нагрева, являются аналогами узкополосной (НС) и широкополосной (ВС) компонент соответственно [2] в стимулированном электромагнитном излучении (SEE) [4] или искусственном радиоизлучении ионосферы (ИРИ), то наблюдаемый ПСПД, по-видимому, является аналогом диагностического искусственного радиоизлучения ионосферы (ДИРИ) [5].

Используемый в работе метод зондирования искусственно возмущённой ионосферы короткими пробными радиоимпульсами даёт возможность изучить структуру наблюдаемого рассеянного сигнала, её пространственную и временную эволюцию.

Полученные характеристики ПСПД позволяют предполагать возбуждение искусственной ионосферной турбулентности в закритических областях ионосферной плазмы и проникновение туда пробных радиопульсов [6, 7]. Однако в теоретической интерпретации наблюдаемого рассеянного сигнала остаётся много нерешённых вопросов.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 99–02–16642) и Минобразованием РФ (грант № 97–0–5.3–113).

Автор выражает благодарность всем сотрудникам НИРФИ, обеспечившим работу передающей и приёмной аппаратуры на полигоне «Зимёнки», С. А. Дмитриеву и Л. М. Елхиной, принимавшим участие в проведении экспериментов, А. В. Кочетову, В. А. Миронову, Е. М. Громову и В. И. Таланову за полезные обсуждения, В. Н. Бубукиной за помощь в оформлении работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Terina G. I. // J. Atm. Terr. Phys. 1995. V. 57, № 3. P. 273.
2. Terina G. I. // Изв. вуз. Радиофизика. 1996. Т. 39, № 2. С. 203.
3. Дмитриев С. А., Терина Г. И., Тушенцова И. А. // Геомагнетизм и аэрономия. 1995. Т. 35, № 5. С. 223.
4. Leyser T. B., Thide B., etc. // Geoph. Res. 1993. V. 98, № A(10). P. 17597.
5. Фролов В. Л., Бойко Г. Н., Метелёв С. А., Сергеев Е. Н. // Изв. вуз. Радиофизика. 1994. Т. 37, № 7. С. 909.
6. Кочетов А. В., Миронов В. А. // Физика плазмы. 1990. Т. 16, вып. 8. С. 948.
7. Громов Е. М., Таланов В. И. // Изв. вуз. Радиофизика. 1993. Т. 36, № 7. С. 601.

Научно-исследовательский  
радиофизический институт,  
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию  
27 октября 1997 г.

#### AN «AFTER-EFFECT» IN ARTIFICIALLY DISTURBED IONOSPHERIC PLASMA

*G. I. Terina*

By sounding the artificially disturbed ionosphere with radio pulses of the ordinary polarization, we discover a scattered signal appeared after switching off the disturbing transmitter. We consider different types of time history of this signal, as well as its altitude and frequency characteristics.

УДК 550.388.2

## ВРЕМЯ ПРЕДСКАЗУЕМОСТИ И ПОРЯДОК ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ЧАСТОТЫ ЭКРАНИРОВАНИЯ И ПРЕДЕЛЬНОЙ ЧАСТОТЫ СЛОЯ $E_s$

С. Н. Моисеев

На основе частного и множественного корреляционных отношений рассчитано время предсказуемости и порядок стохастического дифференциального уравнения для частоты экранирования и предельной частоты среднеширотного спорадического слоя  $E$  ионосферы.

### ВВЕДЕНИЕ

Динамические процессы в среднеширотном спорадическом слое  $E$  (слое  $E_s$ ) ионосферы достаточно адекватно описываются теорией ветрового сдвига, основные положения которой неоднократно подтверждались прямыми ракетными измерениями [1, 2]. Согласно этой теории поведение во времени электронной концентрации слоя описывается дифференциальным уравнением параболического типа в частных производных. Приближённое стохастическое дифференциальное уравнение, описывающее максимальные значения электронной концентрации, было получено в [3] и оказалось нелинейным уравнением первого порядка, для которого в пренебрежении процессами ионизации и рекомбинации по сравнению с динамическими процессами был получен линейаризованный вариант. Таким образом удалось построить достаточно простые вероятностные модели максимальной электронной концентрации в слое  $E_s$  и связанных с ней параметров слоя — частоты экранирования  $f_b(t)$  и предельной частоты  $f_o(t)$ . Но поскольку эти модели были построены в результате многочисленных (хотя и обоснованных) приближений и упрощений, весьма желательной представляется прямая проверка ключевых характеристик модели по экспериментальным данным. В первую очередь к таким ключевым характеристикам следует отнести порядок дифференциального уравнения. Замена нелинейного уравнения линейным, как известно [4, 5], может существенно сократить время предсказуемости случайного процесса. Поэтому второй ключевой характеристикой модели случайного процесса является соотношение между его временем предсказуемости и интервалом корреляции, показывающее потери в точности прогнозирования при такой замене.

В данной работе по экспериментальным данным станций вертикального зондирования ионосферы будут оценены порядок дифференциального уравнения, описывающего процессы  $f_b(t)$  и  $f_o(t)$ , и их время предсказуемости при минимальных предположениях о вероятностной структуре данных.

### 1. ХАРАКТЕРИСТИКИ МНОЖЕСТВЕННОЙ И ЧАСТНОЙ СВЯЗИ

Рассмотрим временной ряд  $x_t$ , значения которого заданы в дискретные моменты времени  $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Оптимальный по минимуму среднего квадрата ошибки (СКО) прогноз этого ряда, определяемый с момента времени  $t$  на  $l$  шагов вперёд и опирающийся на  $p$  прошлых известных отсчётов  $\mathbf{x}_p = (x_t, x_{t-1}, \dots, x_{t-p+1})$ , имеет вид

$$\hat{x}_{t+l} = M_{x_{t+l}}(x_{t+l} | \mathbf{x}_p), \quad (1)$$

где  $M_x(x | \mathbf{y})$  — условное среднее значение  $x$  при фиксированном векторе  $\mathbf{y}$ . Функция  $f(\mathbf{x}_p) = M_{x_{t+l}}(x_{t+l} | \mathbf{x}_p)$  от  $p$  переменных  $\mathbf{x}_p$  называется  $p$ -мерной функцией регрессии [6] или предиктором (предсказателем) [7, 8].

Время предсказуемости временного ряда  $x_t$  естественно определить как такое максимальное упреждение  $l_{\max}$  прогноза  $\hat{x}_{t+l}$ , при котором дисперсия ошибки прогноза

$$\sigma_p^2(l) = M(\hat{x}_{t+l} - x_{t+l})^2 \quad (2)$$

ещё заметно меньше дисперсии  $\sigma^2$  ряда  $x_t$ . Усреднение в (2) ведётся по значениям  $x_{t+l}$  и  $\mathbf{x}_p$ , т. е.  $M(x) = M_{x_{t+l}\mathbf{x}_p}(x)$ . Рассчитать  $l_{\max}$  аналитически можно с помощью так называемого множественного корреляционного отношения  $\eta_p(l)$  [7, 8]:

$$\eta_p(l) = \sigma_f(l)/\sigma = \sqrt{1 - \sigma_p^2(l)/\sigma^2}, \quad (3)$$

где  $\sigma_f^2(l) = \sigma^2 - \sigma_p^2(l) = M_{\mathbf{x}_p} [f(\mathbf{x}_p) - M_{\mathbf{x}_{t+l}}(x_{t+l})]^2$  — дисперсия прогноза (дисперсия функции регрессии). Из формулы (3) видно, что множественное корреляционное отношение  $\eta_p(l)$  меняется в пределах  $0 \leq \eta_p(l) \leq 1$  и является мерой точности оптимального прогноза на  $l$  шагов вперёд: чем точнее прогноз (чем меньше  $\sigma_p^2(l)$ , или чем больше  $\sigma_f^2(l)$ ), тем больше  $\eta_p(l)$ . Однако традиционно множественное корреляционное отношение рассматривают как меру стохастической зависимости между отсчётом  $x_{t+l}$  и совокупностью отсчётов  $\mathbf{x}_p$  [6–8], т. к. для него справедливы следующие формулы:

$$\eta_p(l) = \sup_{\phi(\mathbf{x}_p)} |\rho[x_{t+l}, \phi(\mathbf{x}_p)]| = \rho(x_{t+l}, \hat{x}_{t+l}), \quad (4)$$

где  $\rho(x, y) = M_{xy} [(x - M_x x)(y - M_y y)] / (\sigma_x \sigma_y)$  — коэффициент корреляции между случайными величинами  $x$  и  $y$ , а супремум берётся по всем функциям  $\phi(\mathbf{x}_p)$ , для которых коэффициент корреляции  $\rho[x_{t+l}, \phi(\mathbf{x}_p)]$  определён. Супремум в (4) достигается в точке  $\phi(\mathbf{x}_p) \equiv f(\mathbf{x}_p)$  [7], т. е. оптимальный по минимуму СКО прогноз  $\hat{x}_{t+l} = f(\mathbf{x}_p)$  среди всех других возможных прогнозов  $x_{t+l}^* = \phi(\mathbf{x}_p)$  максимально коррелирует с прогнозируемым отсчётом  $x_{t+l}$ .

В работах [4, 5] предложено оценивать качество различных прогнозов характеристикой, названной степенью предсказуемости, которая представляет собой коэффициент корреляции между прогнозом и прогнозируемым значением  $x_{t+l}$ . Из (4) следует, что множественное корреляционное отношение является частным случаем степени предсказуемости, совпадая с ней при выборе оптимального по минимуму СКО прогноза, основанного на  $p$  предыдущих наблюдаемых отсчётах  $\mathbf{x}_p$ . Для любых других прогнозов  $x_{t+l}^* = \phi(\mathbf{x}_p)$ , использующих отсчёты  $\mathbf{x}_p$ , множественное корреляционное отношение, как это видно из (4), является мажорантой степени предсказуемости.

При монотонном спадании  $\eta_p(l)$  с ростом  $l$  время предсказуемости можно определить как такой интервал времени  $l_{\max}$ , в течение которого  $\eta_p(l)$  уменьшается в  $\lambda$  раз:

$$\eta_p(l_{\max}) = 1/\lambda. \quad (5)$$

Предположим, что временной ряд  $x_t$  описывается следующим нелинейным стохастическим разностным уравнением  $p$ -го порядка (аналогом стохастического дифференциального уравнения в непрерывном времени):

$$x_{t+1} = f(\mathbf{x}_p) + \xi_{t+1}, \quad (6)$$

где  $\xi_t$  — шум с независимыми в разные моменты времени отсчётами и нулевым средним значением. Если порядок уравнения  $p$  (порядок марковости ряда  $x_t$ ) в (6) неизвестен, то его можно оценить из

следующих соображений. Поскольку отсчёт  $x_{t+1}$  при фиксированных отсчётах  $\mathbf{x}_p$  не зависит от отсчётов  $x_{t-m}$ , где  $m \geq p$ , как это следует из (6), то при прогнозе на шаг вперёд ( $l = 1$ ) всегда справедливы неравенства

$$\eta_p(1) \geq \eta_{p'}(1), \quad \sigma_p^2(1) \leq \sigma_{p'}^2(1) \tag{7}$$

для произвольных  $p' = 0, 1, \dots$ . Равенство в (7) достигается при  $p' \geq p$ . При  $p' < p$  в подавляющем большинстве случаев неравенства (7) будут строгими, т. к. прогноз на шаг вперёд, использующий меньше  $p$  наблюдаемых отсчётов, будет менее точен по сравнению с оптимальным прогнозом  $\hat{x}_{t+1} = f(\mathbf{x}_p)$ , использующим более полную информацию. Основываясь на этих соображениях, в [7, 8] вводят так называемое частное корреляционное отношение как меру стохастической зависимости между отсчётами  $x_{t+1}$  и  $x_{t-k+1}$  при фиксированных промежуточных  $k - 1$  отсчётах  $x_t, x_{t-1}, \dots, x_{t-k+2}$ :

$$r(k) = \sqrt{1 - \sigma_k^2(1)/\sigma_{k-1}^2(1)} = \left[ \frac{\eta_k^2(1) - \eta_{k-1}^2(1)}{1 - \eta_{k-1}^2(1)} \right]^{1/2}, \tag{8}$$

где  $\sigma_0^2(1) = \sigma^2, \eta_0^2(1) = 0, r(0) = 1$ . Частное корреляционное отношение  $r(k)$  — очень удобная характеристика для оценки порядка стохастического нелинейного разностного уравнения, т. к. если  $p$  — истинный порядок уравнения (6), то  $r(p') = 0$  при  $p' > p$ . Таким образом, порядок нелинейного уравнения оценивается с помощью  $r(k)$  точно так же, как с помощью частной корреляционной функции (для которой  $r(k)$  является мажорантой) оценивается порядок линейных разностных уравнений авторегрессионного типа [9].

### 2. РАСЧЁТ ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ДАННЫМ

Для оценки порядка  $p$  разностного уравнения и времени предсказуемости  $l_{\max}$  использовались данные измерений  $f_b(t)$  и  $f_o(t)$ , полученные на станциях вертикального зондирования ионосферы, расположенных в Москве (1976–1979 гг.), Киеве (1978–1979 гг.), Нижнем Новгороде (1979 г.) и Ростове-на-Дону (1978 г.), в июне–июле. Все данные центрировались на среднее, которое является периодической функцией с периодом сутки [10]. В работе [11] показано, что после операции центрирования ряды  $f_b(t)$  и  $f_o(t)$  можно считать стационарными. Для анализа использовались выборки объёмом  $n = 8\,000$  отсчётов с временным дискретом 15 мин для  $f_b(t)$  и для  $f_o(t)$  с временным дискретом 1 час.

Из формул (3), (8) следует, что для оценки множественного и частного корреляционных отношений требуется оценить дисперсию ошибки  $\sigma_k^2(l)$  оптимального нелинейного прогноза  $\hat{x}_{t+l}$  или дисперсию самого прогноза  $\sigma_f^2(l)$ , использующего  $k$  наблюдаемых отсчётов  $x_t, x_{t-1}, \dots, x_{t-k+1}$  центрированных рядов  $f_b(t)$  и  $f_o(t)$ . Выборочная оценка прогноза  $\hat{x}_{t+l}$  производилась на основе поиска в выборке прошлых данных похожих наблюдаемых событий следующим образом. Для текущего вектора  $\mathbf{X}_0 = (x_t, x_{t-1}, \dots, x_{t-k+1})$ , на основе которого даётся прогноз наблюдаемого отсчёта  $x_{t+l}$ , в выборке ищется  $m$  векторов  $\mathbf{X}_i = (x_{t_i}, x_{t_i-1}, \dots, x_{t_i-k+1})$ , где  $i = 1, 2, \dots, m$ , той же размерности  $k$ , наиболее близких к текущему вектору  $\mathbf{X}_0$  в смысле расстояния  $d$ . Векторы  $\mathbf{X}_i$  в литературе по нелинейному анализу данных называются ближайшими соседями вектора  $\mathbf{X}_0$ . В качестве расстояния  $d$  можно взять, например, такое:  $d = \sum_{j=0}^{k-1} |x_{t-j} - x_{t_i-j}|$ . Выборочная оценка прогноза отсчёта  $x_{t+l}$  рассчитывается как выборочный аналог условного (при фиксированных значениях  $\mathbf{X}_0$ ) среднего:

$\hat{x}_{t+l} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_{t_i+l}$ . После того, как получено  $N$  прогнозов всевозможных значений ряда, выборочные оценки дисперсии ошибки прогноза и дисперсии самого прогноза рассчитываются обычным способом:  $\sigma_k^2(l) = \frac{1}{N} \sum_t (x_{t+l} - \hat{x}_{t+l})^2, \sigma_f^2(l) = \frac{1}{N} \sum_t (\hat{x}_{t+l} - \mu)^2, \mu = \frac{1}{N} \sum_t \hat{x}_{t+l}$ . Число похожих событий

$m$  зависит от объёма выборки  $n$  и выбирается из тех соображений, что чем оно меньше, тем больше дисперсия оценки, а чем оно больше, тем больше смещение оценки. Поэтому  $1 \ll m \ll n$ . Для используемого объёма выборки  $n = 8\,000$  выбиралось  $m = 20$ .

На рис. 1 квадратами, соединёнными для наглядности прямыми линиями, показана выборочная оценка частного корреляционного отношения  $r(k)$  для частоты экранирования  $f_b$  слоя  $E_s$ . Штриховой линией нанесён 95 % доверительный интервал нулевых значений. Кружками приведена оценка частной корреляционной функции. Из рисунка хорошо видно, что  $r(k)$  резко обрывается при  $k > 1$  до значений, близких к нулевым. Это означает, что процесс  $f_b(t)$  адекватно описывается стохастическим дифференциальным уравнением первого порядка ( $p = 1$ ), т. е.  $f_b(t)$  — марковский процесс. Этот эмпирический вывод совпадает с теоретическим выводом работы [3] о том, что из теории ветрового сдвига следует марковский характер поведения максимальной электронной концентрации слоя  $E_s$ . Марковское свойство, в частности, означает, что при известном отсчёте временного ряда в настоящий момент времени его будущее поведение не зависит от прошлого.

На рис. 2 квадратами, соединёнными прямыми линиями, приведена выборочная оценка множественного корреляционного отношения  $\eta_1(l)$  для частоты  $f_b$  слоя  $E_s$ . Штриховой линией показан 95 % доверительный интервал её нулевых значений. Кружками показана оценка нормированной автокорреляционной функции. Из рисунка следует, что время предсказуемости, соответствующее уровню 0,3 (в формуле (5) полагаем  $\lambda = 1/3$ ) примерно равно восьми шагам:  $l_{\max} = 8$ . Поскольку интервал  $\Delta$  между соседними отсчётами временного ряда  $f_b$  составлял при анализе 15 мин, это соответствует времени предсказуемости  $\tau_{\max} = l_{\max} \Delta = 2$  часа.

Из рис. 1 и 2 хорошо видно, что частное и множественное корреляционные отношения практически совпадают соответственно с частной корреляционной и автокорреляционной функциями. Следовательно, можно считать, что нелинейные связи между отсчётами частоты экранирования практически малы по сравнению с линейными, и ими можно пренебречь.

Для предельной частоты  $f_o(t)$  слоя  $E_s$  аналогичные рассмотренным выше зависимости выглядят практически так же, как и на рис. 1 и 2. Поэтому все выводы, сделанные для  $f_b(t)$ , будут также справедливы и для  $f_o(t)$ .

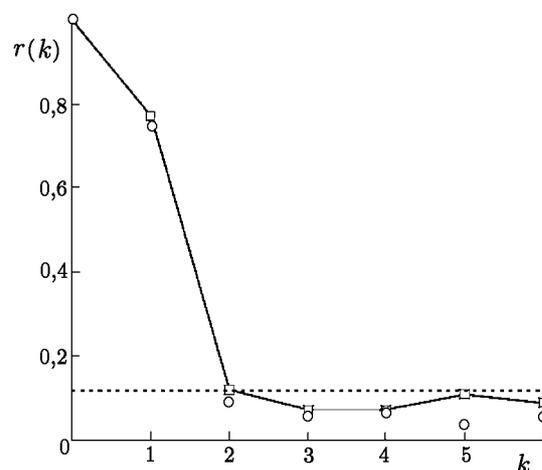


Рис. 1

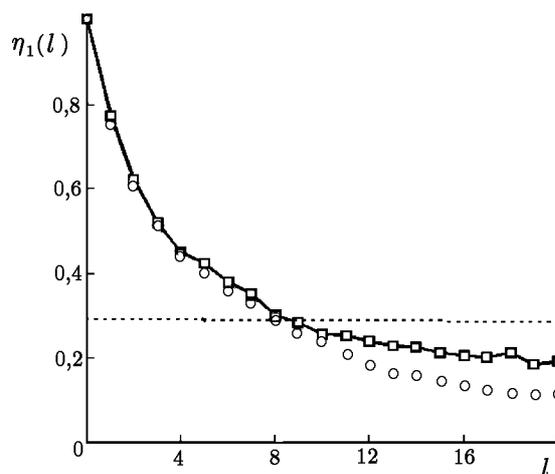


Рис. 2

**ВЫВОДЫ**

1. Частота экранирования и предельная частота среднеширотного слоя  $E_s$  ионосферы адекватно описываются стохастическими линейными дифференциальными уравнениями первого порядка.

2. Время предсказуемости частоты экранирования и предельной частоты совпадает с интервалом корреляции и составляет примерно 2 часа.

**ЛИТЕРАТУРА**

1. Гершман Б. Н., Игнатъев Ю. А., Каменецкая Г. Х. Механизмы образования ионосферного спорадического слоя  $E$  на разных широтах. — М.: Наука, 1976. — 107 с.
2. Чавдаров С. С., Часовитин Ю. К., Чернышёва С. П., Шефтель В. М. Среднеширотный спорадический слой  $E$  ионосферы. — М.: Наука, 1975. — 120 с.
3. Моисеев С. Н. // Геомагнетизм и аэрономия. 1997. Т. 37, № 3. С. 107.
4. Кравцов Ю. И. // УФН. 1989. Т. 158, вып. 1. С. 93.
5. Аносов О. Л., Бутковский О. Я., Кравцов Ю. А. // Радиотехника и электроника. 1995. Т. 40, № 12. С. 1886.
6. Айвазян С. А., Енюков И. С., Мешалкин Л. Д. Прикладная статистика. Исследование зависимостей. — М.: Финансы и статистика, 1985. — 488 с.
7. Ивченко Г. И., Медведев Ю. И. Математическая статистика. — М.: Высшая школа, 1984. — 248 с.
8. Моисеев С. Н. // Радиотехника и электроника. 1999. Т. 44, № 6. С. 715.
9. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов, прогноз и управление. Вып.1. — М.: Мир, 1974. — 406 с.
10. Моисеев С. Н. // Изв. вузов. Радиофизика. 1996. Т. 39, № 9. С. 1125.
11. Лукин А. Н., Моисеев С. Н. // Геомагнетизм и аэрономия. 1993. Т. 33, № 2. С. 77.

Воронежский госуниверситет,  
г. Воронеж, Россия

Поступила в редакцию  
27 апреля 2000 г.

**PREDICTABILITY TIME AND THE ORDER OF DIFFERENTIAL EQUATION FOR THE SCREENING FREQUENCY AND LIMITING FREQUENCY OF THE  $E_s$  LAYER**

*S. N. Moiseev*

On the basis of partial and multiple correlation relations, we calculate the time of predictability and the order of a stochastic differential equation for the screening frequency and limiting frequency of the midlatitude sporadic  $E_s$  layer in the ionosphere.

УДК 528.813+631.432.2

## ИЗМЕРЕНИЕ ВЛАЖНОСТИ СЛАБОЗАСОЛЁННЫХ ПОЧВ МЕТОДОМ АКТИВНОГО ЗОНДИРОВАНИЯ ШУМОВЫМ СИГНАЛОМ МЕТРОВОГО ДИАПАЗОНА ДЛИН ВОЛН

*Т. А. Беляева, П. П. Бобров, И. М. Щёткин*

Рассмотрены возможности применения широкополосного шумового сигнала для измерения влажности слабозасолённых почв в условиях близкого стояния грунтовых вод. Произведена оценка зависимости диэлектрической проницаемости почвы от степени засоления и длины волны зондирующего излучения в метровом диапазоне. Получено приближённое выражение для определения глубины зондирования и определены требования к полосе частот для ослабления влияния отражения от грунтовых вод. Приведены результаты экспериментального измерения зависимости коэффициента отражения слабозасолённых почв от влажности на частоте 300 МГц. Установлено, что коэффициент отражения хорошо коррелирует с влажностью почвы в приповерхностном слое толщиной 60 см. Показано, что применение длин волн  $\lambda_0 > 1 \div 1,5$  м для определения влажности почвы в условиях слабого засоления или при близком стоянии грунтовых вод нецелесообразно.

### ВВЕДЕНИЕ

В агрометеорологии, экологическом мониторинге необходима оперативная информация о влажности почвы в приповерхностном слое метровой толщины. В активной и пассивной локациях для этого чаще всего применяют электромагнитные волны сантиметрового и дециметрового диапазонов. При этом толщина зондируемого слоя по разным оценкам составляет от 0,1 до  $0,25\lambda_0$ , где  $\lambda_0$  — длина волны в вакууме [1–3]. Различия в оценках связаны с отсутствием однозначного определения этой величины. При определении влажности радиометрическим методом под глубиной зондирования понимают толщину слоя, в пределах которого средняя влажность хорошо коррелирует с коэффициентом излучения. При этом минимальная величина коэффициента корреляции выбирается каждым автором по своему усмотрению.

Значительно реже используют волны метрового и декаметрового диапазонов. В немногочисленных публикациях, в которых приводятся экспериментальные данные [4, 5], отмечается, что увеличение длины волны позволяет ослабить влияние поверхностных шероховатостей и неоднородности увлажнения поверхностных слоёв почвы на погрешность измерения влажности, но появляется другая причина погрешности — влияние отражения от грунтовых вод.

В почвенно-климатических условиях юга Западной Сибири, где значительная часть пахотных земель слабо засолена, а на орошаемых участках возможно близкое залегание грунтовых вод (часто засоленных), оперативное определение влажности почвы имеет важное значение в предотвращении развития переувлажнения и засоления. Основой дистанционного метода оценки засоления является зависимость мнимой части  $\epsilon''$  комплексной диэлектрической проницаемости  $\epsilon$  почвы от степени засоления. Эта зависимость усиливается с ростом длины волны, и уже на длинах волн дециметрового диапазона метод может давать приемлемую точность [6]. Для оценки засоления с помощью волн сантиметрового диапазона может быть использовано вызываемое засолением изменение почвенной структуры и водно-воздушного режима почвы [7].

Возможности зондирования в метровом диапазоне длин волн для дистанционного измерения влажности засоленных почв не исследованы. В данной работе рассматриваются вопросы выбора частотного

диапазона для обеспечения измерения влажности почв в слое толщиной до 1 м с учётом их естественного засоления.

### 1. ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ ПОЧВЫ В МЕТРОВом ДИАПАЗОНЕ ДЛИН ВОЛН

Для определения толщины зондируемого слоя в первую очередь необходимо определить зависимость диэлектрической проницаемости почвы от длины волны. К настоящему времени имеется достаточно полная информация о диэлектрической проницаемости  $\epsilon$  незасолённых почв в диапазоне частот 1÷40 ГГц. Значительно меньше имеется информации об этих свойствах в метровом и декаметровом диапазонах длин волн [8, 9], а для засоленных почв такая информация практически отсутствует. Засоление почвенного раствора оказывает в этих диапазонах сильное влияние на мнимую часть диэлектрической проницаемости  $\epsilon''$ . Отсутствие надёжных данных о диэлектрических характеристиках засоленных почв вызывает определённые трудности при моделировании частотной зависимости  $\epsilon$ . Для получения аппроксимационной зависимости комплексной диэлектрической проницаемости почвы от длины волны нами была выбрана рефракционная модель [10], которая с учётом диэлектрической проницаемости связанной воды имеет вид [11]

$$\sqrt{\epsilon} = \begin{cases} \sqrt{\epsilon_{\text{сух}}} + (\sqrt{\epsilon_{\text{с}}} - 1) W, & W \leq W_t; \\ \sqrt{\epsilon_{\text{сух}}} + (\sqrt{\epsilon_{\text{с}}} - 1) W_t + (\sqrt{\epsilon_{\text{в}}} - 1) (W - W_t), & W \geq W_t, \end{cases} \quad (1)$$

где  $W$  — объёмная влажность,  $W_t$  — влажность, соответствующая переходу от преобладающего влияния связанной воды к преобладающему влиянию свободной воды,  $\epsilon_{\text{с}}$ ,  $\epsilon_{\text{в}}$  и  $\epsilon_{\text{сух}}$  — комплексные диэлектрические проницаемости соответственно связанной воды, свободной воды и сухого грунта.

Диэлектрическая проницаемость свободной воды определяется по модели Дебая, в которую входят эмпирически определённые параметры, зависящие от температуры воды и концентрации солей [12]. О диэлектрической проницаемости связанной воды в литературе имеются лишь скудные сведения, полученные путём сравнения расчётных и экспериментальных данных. В [11] приводятся данные о диэлектрической проницаемости связанной воды в мелкозернистом песке ( $\epsilon_{\text{с}} = 27,2 - 2,3i$ ) на частоте 1 ГГц, а также о переходной влажности в суглинистых почвах ( $W_t = 0,05 \div 0,09$  г/см<sup>3</sup>). Согласно [13] в тяжёлом суглинке  $\epsilon'_{\text{с}} = 43,5$ . В [14] приводятся данные о том, что с увеличением длины волны переходная влажность  $W_t$  уменьшается, а  $\epsilon_{\text{с}}$  связанной воды приближается к  $\epsilon_{\text{в}}$  свободной воды. При этом частотная зависимость  $\epsilon_{\text{с}}$  совпадает с частотной зависимостью  $\epsilon_{\text{в}}$ . Согласно данным [11, 14] диэлектрическая проницаемость сухого грунта  $\epsilon'_{\text{сух}} = 2,5 \div 3,0$ ;  $\epsilon''_{\text{сух}} = 0,1 \div 0,12$ .

На основании этих данных возможна лишь оценка диэлектрических свойств почвы в зависимости от длины волны и степени засоления. При вычислении диэлектрической проницаемости по формуле (1) нами использовались следующие значения параметров:  $\epsilon_{\text{сух}} = 2,5 - 0,1i$ ;  $W_t = 0,07$  г/см<sup>3</sup>. Диэлектрическая проницаемость свободной воды  $\epsilon_{\text{в}}$  как функция длины волны и солёности рассчитывалась по модели Дебая. В метровом диапазоне длин волн действительная часть диэлектрической проницаемости  $\epsilon$  почвы почти не зависит от длины волны и слабо зависит от степени засоления. Гораздо более сильная зависимость от длины волны и солёности наблюдается для мнимой части диэлектрической проницаемости  $\epsilon''$ , обусловленной проводимостью почвенного раствора.

На рис. 1а приведены результаты расчётов  $\epsilon''$  для суглинистой почвы по рефракционной модели в зависимости от длины волны и содержания соли NaCl. Степень засоления  $S$  выражает процентное содержание сухой соли в сухой почве (сухой остаток). С целью согласования с экспериментальными данными, обозначенными на рисунке маркерами соответствующей формы, но больших размеров, мы выбирали при расчётах  $\epsilon''_{\text{с}} = 0,14\epsilon''_{\text{в}}$ . Результаты для длин волн 1 и 5 м взяты из [9] для незасолённых почв, а для длины волны 0,27 м для солёностей  $S = 0$  и  $S = 1,0\%$  — из [11]. Можно заметить, что модель даёт более значительный рост  $\epsilon''$  с ростом длины волны для засоленной почвы и удовлетвори-

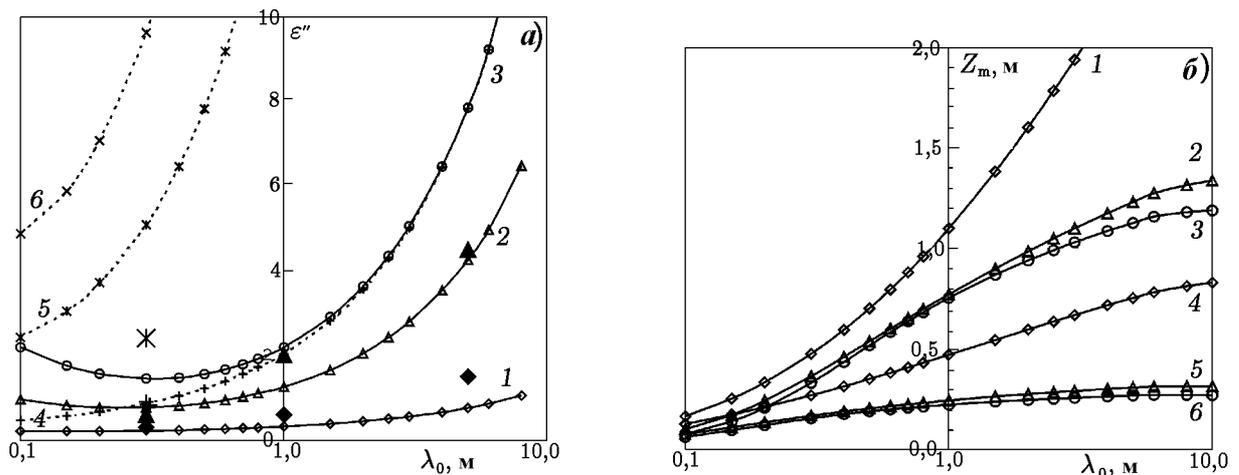


Рис. 1. Расчётные зависимости мнимой части диэлектрической проницаемости (а: кривые 1, 2, 3 — солёность  $S = 0,05\%$ , 4, 5, 6 —  $S = 1\%$ ; кривые 1, 4 — объёмная влажность  $W = 0,1 \text{ г/см}^3$ , 2, 5 —  $W = 0,25 \text{ г/см}^3$ , 3, 6 —  $W = 0,4 \text{ г/см}^3$ ) и глубины зондирования (б: кривые 1, 2, 3 — солёность  $S = 0,05\%$ , 4, 5, 6 —  $S = 0,25\%$ ; значения влажности те же, что и на рис. 1а) от длины волны

тельное согласие для случая слабого засоления (кривые 1, 2), поэтому при дальнейших расчётах мы использовали только данные, полученные для слабозасолённых почв.

## 2. ВЛИЯНИЕ ЗАСОЛЕНИЯ НА ГЛУБИНУ ЗОНДИРОВАНИЯ

При активном зондировании глубина зондирования может быть оценена через предельную глубину обнаружения сильно отражающего объекта, находящегося под слоем грунта. Для оценки этой величины воспользуемся моделью плоского однородного слоя, лежащего над сильно отражающей плоскостью (уровень стояния грунтовых вод, металлический лист). Коэффициент отражения по мощности от такой среды может быть найден с помощью хорошо известного соотношения [15]

$$R = \left| \frac{r_{0,1} + r_{1,2} \exp(-2ikZ)}{1 + r_{0,1}r_{1,2} \exp(-2ikZ)} \right|^2, \quad (2)$$

где  $r_{0,1}$  — френелевский коэффициент отражения на границе почва—воздух,  $r_{1,2}$  — коэффициент отражения на нижней границе слоя,  $k$  — волновое число,  $Z$  — толщина слоя.

При увеличении  $Z$  коэффициент отражения будет осциллировать, причём благодаря поглощению в почвенном слое огибающая максимумов будет спадать по экспоненциальному закону. Уравнение огибающей максимумов может быть получено из (2):

$$R_{\max} = \left( \frac{|r_{0,1}| + |r_{1,2}| \exp(-2\alpha Z)}{1 + |r_{0,1}r_{1,2}| \exp(-2\alpha Z)} \right)^2, \quad (3)$$

где  $\alpha$  — коэффициент поглощения. В случае малых потерь в грунте

$$|r_{0,1}| = \frac{n - 1}{n + 1}, \quad (4)$$

где  $n = \text{Re} \sqrt{\epsilon}$ .

Коэффициент отражения на нижней границе  $r_{1,2} \approx 1$ , а при достаточно большой толщине слоя  $|r_{0,1}| \exp(-2\alpha Z) \ll 1$ , поэтому выражение (3) может быть преобразовано к виду

$$R_{\max} \approx |r_{0,1}|^2 + 2(|r_{0,1}| - |r_{0,1}|^3) \exp(-2\alpha Z).$$

Предельная глубина обнаружения может быть определена по заданному различию между  $R_{\max}$  и коэффициентом отражения от однородного грунта  $R_H = |r_{0,1}|^2$ :

$$\Delta = R_{\max} - R_H \approx 2(|r_{0,1}| - |r_{0,1}|^3) \exp(-2\alpha Z). \quad (5)$$

Это различие должно быть больше суммы флуктуаций величин  $R_H$  и  $R_{\max}$ :

$$\Delta \geq \varkappa_1 \delta R_H + \varkappa_2 \delta R_{\max} + \Delta R_{\text{из}}, \quad (6)$$

где  $\delta R_H$  — стандартное отклонение коэффициента отражения от однородного грунта,  $\delta R_{\max}$  — стандартное отклонение коэффициента отражения от слоя грунта над отражающим объектом,  $\Delta R_{\text{из}}$  — флуктуационный порог чувствительности измерителя,  $x_1$  и  $x_2$  — коэффициенты порядка  $2 \div 3$ . Численный анализ показывает, что при толщине слоя, близкой к предельной глубине обнаружения, можно считать  $\delta R_{\max} = \delta R_H$ . Полагая, что  $\Delta R_{\text{из}} \ll \delta R_H$  и  $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 3$  получаем

$$\Delta = 6 \delta R_H. \quad (7)$$

Основной причиной флуктуаций коэффициента отражения являются естественные флуктуации влажности и плотности грунта. Если малое отклонение показателя преломления  $n$  во всей области облучаемого слоя составляет  $\delta n$ , то соответствующее отклонение коэффициента отражения составляет (в случае малых потерь в грунте)

$$\delta R_H = \frac{4(n-1)\delta n}{(n+1)^3}. \quad (8)$$

Подставляя (4) в (5), а затем (5) и (8) в (7) и принимая во внимание, что  $|r_{0,1}| \gg |r_{0,1}|^3$ , получаем выражение для предельной глубины обнаружения объекта:

$$Z_m = \frac{1}{2\alpha} \ln \frac{(n+1)^2}{12 \delta n}.$$

С учётом того, что  $\alpha = \pi \varepsilon'' / (n \lambda_0)$ , где  $\lambda_0$  — длина волны в вакууме, имеем

$$Z_m = \frac{n \lambda_0}{2\pi \varepsilon''} \ln \frac{(n+1)^2}{12 \delta n}. \quad (9)$$

Таким образом,  $Z_m$  превышает толщину скин-слоя в  $\ln[(n+1)^2 / (12 \delta n)]$  раз. Эта величина в значительной мере определяется действительной частью диэлектрической проницаемости среды. Расчёт показывает, что во влажном песке ( $W = 0,2$  г/см<sup>3</sup>) предельная глубина обнаружения на частоте 300 МГц примерно в 1,5 раза выше, чем суглинке такой же влажности. Это объясняется тем, что действительная часть диэлектрической проницаемости в суглинке ниже из-за того, что часть воды в нём находится в связанном состоянии.

Анализ достаточно большого числа данных о естественной влажности почв, измеренной в слоях толщиной 10 см до глубины 1 м, показывает, что вертикальная неоднородность показателя преломления в большинстве случаев характеризуется стандартным отклонением, равным  $0,2 \div 0,7$ . Выражение (9) справедливо для однородного в вертикальном направлении грунта, а величина  $\delta n$  характеризует

неоднородность в горизонтальном направлении, которая обычно меньше. В описываемом ниже эксперименте вблизи берега водоёма было получено значение  $\delta n = 0,1$ .

Результаты расчёта зависимости  $Z_m$  от длины волны и солёности почвы при подстановке в (9) значений диэлектрической проницаемости, полученных согласно (1), и стандартного отклонения показателя преломления  $\delta n = 0,1$  приведены на рис.1б. Видно, что даже при малом засолении и средней влажности почвы увеличение длины волны от 1 до 10 м приводит к росту  $Z_m$  менее чем в два раза (кривая 2), а при солёности  $S = 0,25\%$  — примерно в 1,2 раза (кривая 5).

Обсудим, как соотносятся предельная глубина обнаружения сильно отражающего объекта и глубина зондирования, определяемая как толщина слоя, в котором влажность коррелирует с коэффициентом отражения (или излучения). Для идеально однородных сред эти величины теоретически могут достигать больших значений, ограниченных лишь флуктуационной чувствительностью измерителей. Реальные грунты имеют значительную вертикальную неоднородность диэлектрических свойств, особенно в верхних слоях. При этом возрастает погрешность дистанционного определения влажности, которая при слабо выраженной неоднородности приводит к уменьшению глубины зондирования. Подобное уменьшение предельной глубины обнаружения объекта  $Z_m$  наблюдается при неоднородности диэлектрических свойств в горизонтальном направлении. Поэтому, по крайней мере, качественно величина  $Z_m$  может характеризовать глубину зондирования, если понимать под  $\delta n$  в (9) вертикальную неоднородность показателя преломления грунта.

### 3. О ВЫБОРЕ ДИАПАЗОНА И ПОЛОСЫ ЧАСТОТ ЗОНДИРУЮЩЕГО СИГНАЛА

При залегании грунтовых вод в пределах глубины обнаружения отражение от них зондирующего сигнала вызывает изменение коэффициента отражения по сравнению с отражением от однородной среды и приводит к увеличению погрешности определения влажности почвы. Для ослабления интерференции сигналов, отражённых от верхней и нижней границы почвенного слоя, целесообразно расширить полосу частот зондирующего сигнала.

В случае шумового сигнала с прямоугольным спектральным распределением взаимная корреляционная функция сигналов с оптической разностью хода  $\Delta d$  помимо своего уменьшения с ростом  $\Delta d$  испытывает осцилляции, причём первый нуль корреляционной функции достигается при условии [15]  $\Delta d = 2\pi/\Delta k$ , где  $\Delta k = k_2 - k_1$ , а  $k_2, k_1$  — волновые числа, соответствующие крайним длинам волн спектра. В применении к почвенному слою толщиной  $Z = \Delta d/2$  это условие имеет вид  $Z/\lambda = \lambda/(2\Delta\lambda)$ , где  $\lambda$  — средняя длина волны в среде,  $\Delta\lambda/\lambda$  — относительная полоса. Отсюда следует, в частности, что относительная полоса  $\Delta\lambda/\lambda = 0,5$  позволяет подавить интерференцию при толщине слоя  $Z/\lambda = 1$ .

Однако из-за того, что поглощение в почвенном слое сильно зависит от длины волны, в реальности будет происходить интерференция сигналов с различной формой частотного спектра. При прямоугольной форме спектра падающего сигнала спектр отражённого от нижнего слоя сигнала будет иметь форму криволинейной трапеции с более высокой амплитудой на нижней частотной границе.

На рис. 2 приведены расчётные значения коэффициента отражения от двухслойной среды почва—грунтовые воды в зависимости от относительной полосы частот шумового сигнала, полученные с помощью выражения (2). Падающий шумовой сигнал моделировался случайным набором гармоник с одинаковыми амплитудами и равномерно распределёнными в пределах полосы частотами, что эквивалентно прямоугольной форме полосы пропускания рефлектометра. Расчёт производился для тех значений  $Z$ , при которых для монохроматического сигнала при заданной диэлектрической проницаемости среды  $\varepsilon = 5,8 - 1,95i$  (для тяжёлого суглинка это соответствует объёмной влажности  $W \approx 0,2$  г/см<sup>3</sup>) наблюдались экстремальные значения коэффициента отражения.

Видно, что наибольшее ослабление интерференции наблюдается при относительной полосе частот  $\Delta\omega/\omega \approx 0,55$ , где  $\omega$  — средняя частота, если толщина слоя  $Z \geq 1,25\lambda$ .

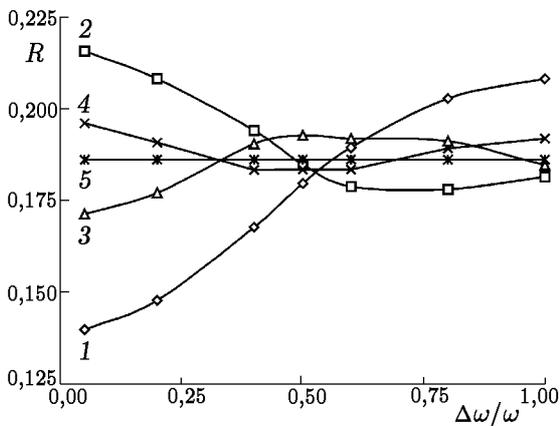


Рис. 2. Расчётные значения коэффициента отражения от почвы с грунтовыми водами в зависимости от относительной полосы частот зондирующего сигнала и уровня грунтовых вод (кривая 1 — глубина залегания грунтовых вод 0,31 м, 2 — 0,41 м, 3 — 0,51 м, 4 — 0,61 м, 5 — однородная среда). Диэлектрическая проницаемость почвы  $\epsilon = 5,8 - 1,95i$

Ещё одним оптимальным значением полосы частот является  $\Delta\omega/\omega = 0,3$ . При такой полосе наблюдается ослабление интерференции для глубин  $Z \geq 1,75\lambda$  (кривые 3 и 4 на рис. 2). Следует заметить, что при полосе  $\Delta\omega/\omega = 0,4$  ослабление интерференции меньше, чем при полосе 0,3, а при полосе 0,8 меньше, чем при полосе 0,55. Как указывалось выше, это объясняется свойствами корреляционной функции. Расчёты, проведённые для других значений диэлектрической проницаемости среды, дают такие же оптимальные полосы частот.

Полученные соотношения могут быть использованы для определения средней длины волны частотного спектра в задаче определения влажности при заданном уровне грунтовых вод. Например, при глубине залегания грунтовых вод 1 м и с учётом того, что минимальная измеряемая влажность равна  $0,1 \text{ г/см}^3$  ( $\epsilon' = 3,3$ ), для необходимого ослабления интерференции средняя длина волны в вакууме не должна превышать 1,45 м при полосе  $\Delta\omega/\omega = 0,55$ , а при  $\Delta\omega/\omega = 0,3$  необходимо выбирать  $\lambda_0 < 1 \text{ м}$ .

#### 4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТА

Описание рефлектометра — прибора для измерения коэффициента отражения — приведено в [16]. В качестве антенны на длине волны 1 м использовался отрезок волновода сечением  $750 \times 250 \text{ мм}$ , замкнутый с одной стороны и разомкнутый с другой. Разомкнутый конец волновода нагружен на четвертьволновый фланец для улучшения условий излучения. Открытым концом волновод ставился на почву. Электромагнитный сигнал, вырабатываемый генератором шума, усиливался транзисторным усилителем и через циркулятор (в некоторых моделях через направленный ответвитель) и модулятор поступал в антенну. Сигнал, отражённый от границы волновод—почва сравнивался с опорным сигналом, отражённым от внутренней нагрузки, и поступал на вход приёмной системы.

Как показали исследования [17], коэффициент отражения от выходного фланца волновода, размещённого на поверхности почвы, близок к расчётному коэффициенту отражения плоской электромагнитной волны от границы раздела почва—воздух. Калибровка рефлектометра осуществлялась по объектам с известным коэффициентом отражения плоской волны (металлический лист; слой воды глубиной более 2 м; небо). Измеренное значение коэффициента отражения от слоя воды толщиной 5 см на поверхности почвы с влажностью  $0,3 \text{ г/см}^3$  хорошо совпало с расчётным. Абсолютная погрешность коэффициента отражения не превышала  $\pm 0,03$ .

Исследование влияния уровня грунтовых вод на коэффициент отражения проводилось на пологом песчаном берегу пресного водоёма. При удалении от кромки водоёма глубина залегания грунтовых вод относительно поверхности грунта увеличивалась. При каждом измерении контролировалась глубина залегания грунтовых вод и влажность вышележащего грунта. Грунт характеризовался небольшими вариациями влажности по глубине и вдоль трассы измерений. Для измерений использовался рефлектометр с полосой пропускания шумового сигнала 30%. Влажность грунта, насыщенного водой (ни-

же уровня грунтовых вод), предполагалась равной  $0,45 \text{ г/см}^3$ , что соответствует данным о пористости песка. Увлажнённая кайма над уровнем грунтовых вод моделировалась двумя слоями песка: первый толщиной 1 см и влажностью  $0,3 \text{ г/см}^3$ , второй толщиной 2 см и влажностью  $0,4 \text{ г/см}^3$ . Измеренное значение влажности основного слоя песка составило  $(0,23 \pm 0,01) \text{ г/см}^3$ , соответствующие значения диэлектрической проницаемости равны  $\varepsilon' = 14,15 \pm 0,75$ ;  $\varepsilon'' = 2,45 \pm 0,10$ .

Моделированные и измеренные данные приведены на рис. 3. Сплошной линией показаны средние значения коэффициента отражения из массива данных, полученного при указанных выше вариациях проницаемости. Планки погрешностей определяют пределы вариаций коэффициента отражения. Видно, что расчётные данные хорошо совпадают с экспериментальными. Осцилляции коэффициента отражения исчезают при глубине залегания грунтовых вод более  $0,4 \text{ м}$ . При данном  $\varepsilon'$  это составляет  $1,5\lambda$ , что близко к значению, полученному из теоретических расчётов для выбранной полосы частот.

Экспериментальные измерения влажности почвы и коэффициента отражения при глубоком залегании грунтовых вод производились в Омской области и Алтайском крае в летние сезоны 1988–1990 гг. и 1998 г. Почвы представлены в основном слабо засоленными тяжёлыми суглинками с засолением  $S = 0,07 \div 0,13 \%$ . Целью исследования было определение зависимости коэффициента отражения  $R$  от влажности почвы и оценка глубины зондирования по корреляции коэффициента отражения с влажностью. Для получения достаточно широкого диапазона значений влажности проводились измерения коэффициента отражения почвы в естественном состоянии и после искусственного увлажнения.

Измерение влажности и плотности почвы производилось по стандартной методике в слоях толщиной 10 см до глубины 1 м. Влажность верхнего слоя контролировалась термостатно-весовым способом, а более глубоких слоёв — с помощью нейтронного влагомера ВНД-1. Зависимость коэффициента отражения на частоте 300 МГц (относительная полоса частот 50 %) для суглинистых почв от средней влажности в приповерхностном слое толщиной 80 см приведена на рис. 4.

С целью определения глубины зондирования был проведён корреляционный анализ полученных данных. Согласно данным, приведённым на рис. 1б, предельная глубина обнаружения объекта на длине волны 1 м при  $S = 0,05 \%$  и влажности  $W > 0,23 \text{ г/см}^3$  составляет около 75 см. Найденный коэффициент корреляции значений  $R$  с влажностью  $W$  в приповерхностном слое толщиной 60 см составляет около 0,75, и почти столько же — с влажностью в слое до 1 м. Сравнительно низкая корреляция  $R$  и  $W$  объясняется, по-видимому, неоднородным по глубине увлажнением почвы, имевшим место

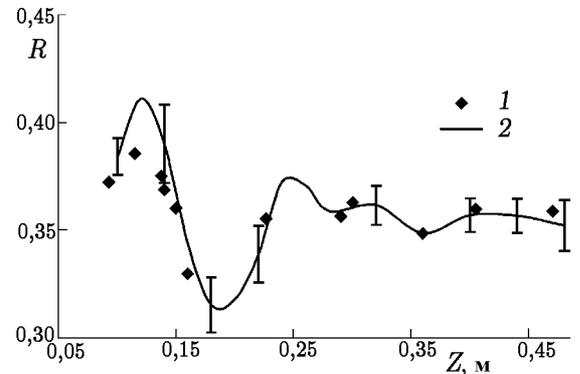


Рис. 3. Изменение коэффициента отражения от слоя песка в зависимости от глубины залегания грунтовых вод. Относительная полоса частот зондирующего сигнала  $\Delta\omega/\omega = 0,3$ . Принятое при расчётах значение диэлектрической проницаемости  $\varepsilon' = 14,15 \pm 0,75$ ;  $\varepsilon'' = 2,45 \pm 0,10$ . Планки погрешностей определяют расчётный диапазон флуктуаций  $R$ . Точки 1 — эксперимент, кривая 2 — теория

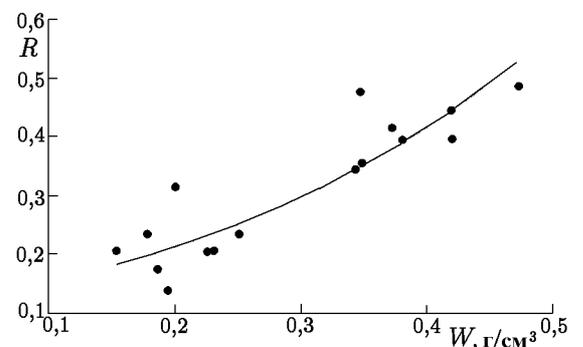


Рис. 4. Экспериментальные значения коэффициента отражения на частоте 300 МГц в зависимости от средней влажности в приповерхностном слое толщиной 80 см

в эксперименте.

Таким образом, в результате проведённых экспериментов показана возможность определения влагосодержания почвы при увлажнении, близком к однородному, путём измерения коэффициента отражения. При этом глубина зондирования по порядку величины совпадает с величиной  $Z_m$ , определяемой из соотношения (9).

Сравнение расчётных и экспериментальных данных показало, что определение влажности в приповерхностном слое толщиной 60 см производится со средней абсолютной погрешностью  $0,06 \text{ г/см}^3$ .

### ВЫВОДЫ

На основании теоретических и экспериментальных исследований установлено, что использование излучения с длиной волны  $\lambda_0 > 1 \div 1,5 \text{ м}$  для определения влажности в условиях слабого засоления и близком расположении грунтовых вод нецелесообразно по двум причинам. Во-первых, в слабо засоленных почвах из-за возрастания потерь глубина зондирования почти не растёт с увеличением длины волны. Во-вторых, при отсутствии засоления влияние отражения от уровня грунтовых вод может быть ослаблено выбором оптимальной относительной полосы частот зондирующего сигнала только при глубине залегания грунтовых вод более чем  $1,25\lambda$  (полоса частот 55%) и более чем  $1,75\lambda$  (полоса частот 30%). Это означает, что при уровне грунтовых вод 1 м средняя длина волны зондирующего излучения в вакууме не должна превышать 1,45 м при полосе  $\Delta\omega/\omega = 0,55$  и 1 м при  $\Delta\omega/\omega = 0,3$ .

Работа выполнена при поддержке Минобразованием РФ исследований в области фундаментального естествознания (проект 97-0-8.1-51)

### ЛИТЕРАТУРА

1. Шутко А. М. СВЧ-радиометрия водной поверхности и почвогрунтов. — М.: Наука, 1986. — 190 с.
2. Ulaby F. T., Moor R. K., Fung A. K. Microwave remote sensing system. Active and passive. V. 1-3. Washington: Artex Hanse, 1986.
3. Jackson T. J., O'Neil P. E., Swift C. T. // IEEE Trans. Geosci. Remote Sens. 1997. V. 35, № 5. P. 1210.
4. Афанасьев А. С., Белокудренко А. Н., Гарнакерьян А. А. и др. // Исследование Земли из космоса. 1990. № 1. С. 55.
5. Готов В. П. // Теория и техника радиолокации, радионавигации и связи в гражданской авиации. Рига: РИИГА, 1987. С. 55.
6. Реутов Е. А., Шутко А. М. // Исследование Земли из Космоса. 1990. № 3. С. 73.
7. Бобров П. П. // Исследование Земли из космоса. 1999. № 5. С. 77.
8. Лещанский Ю. И., Дробышев А. И. // Проблемы распространения и дифракции электромагнитных волн. — М.: МФТИ, 1995. — С. 4.
9. Лещанский Ю. И., Лебедев Г. Н., Шумилин В. Д. // Изв. вузов. Радиофизика. 1971. Т. 14, № 4. С. 562.
10. Shutko A. M., Reutov E. A. // IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing. 1982. V. 20, № 1. P. 29.
11. Миронов В. Л., Комаров С. А., Рычкова Н. В., Клещенко В. Н. // Исследование Земли из космоса. 1994. № 4. С. 18.
12. Stogrin A. // IEEE Trans. Microwave Theory Techn. 1971. V. 19, № 8. P. 733.
13. Schmugge T. J. // IEEE Trans. Geosci. Remote Sens. 1980. V. 18, № 4. P. 353.
14. Боярский Д. А., Тихонов В. В. // Радиотехника и электроника. 1998. Т. 43, № 4. С. 446.
15. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. — М.: Наука, 1970. — 856 с.
16. Bobrov P. P., Schetkin I. M. // Proc. IGARSS'96. Lincoln, Nebraska, USA. 1996. V. 4. P. 2192.

17. Parchomchik P., Wesley W., Wallender W. W., King R. J. // IEEE Trans. Geosci. Remote Sens. 1990. V.28, № 5. P. 873.

Омский педуниверситет,  
г. Омск, Россия

Поступила в редакцию  
18 апреля 2000 г.

**ACTIVE MEASUREMENTS OF MOISTURE IN POORLY-SALTED SOILS USING A P-BAND NOISE SIGNAL**

*T. A. Belyaeva, P. P. Bobrov, and I. M. Shchetkin*

We consider the possibilities of using a broadband noise signal to measure moisture of poorly-salted soils in the presence of ground water. We estimate the dependence of dielectric permeability of a soil in the *P*-band on the wavelength and salinity. We obtain an approximate expression for determination of the sensing depth and point out the requirements to the frequency band which allow for reducing the effect of reflection from ground water. The results of experimental measurement of the dependence of reflection coefficient of poorly-salted soils on the moisture at a frequency of 300 MHz are presented. It is found that the reflection coefficient correlates well with the soil moisture in a near-surface layer of a thickness about 60 cm. It is shown that under such conditions, the use of wavelengths exceeding 1–1.5 m for determination of the soil moisture is inexpedient.

УДК 535.2-4+535.854

## АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭВОЛЮЦИИ СТЕПЕНИ ПОЛЯРИЗАЦИИ НЕМОНОХРОМАТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ОДНОМОДОВЫХ ВОЛОКОННЫХ СВЕТОВОДАХ СО СЛУЧАЙНЫМИ КРУЧЕНИЯМИ ОСЕЙ ЛИНЕЙНОГО ДВУЛУЧЕПРЕЛОМЛЕНИЯ. I. ПРЕДЕЛ СТЕПЕНИ ПОЛЯРИЗАЦИИ ПРИ СТРЕМЛЕНИИ ДЛИНЫ ВОЛОКНА К БЕСКОНЕЧНОСТИ

*Г. Б. Малыкин*<sup>1</sup>, *В. И. Позднякова*<sup>2</sup>, *И. А. Шерешевский*<sup>2</sup>

Проблема нахождения предела среднего по ансамблю волокон значения степени поляризации излучения при стремлении длины волоконного световода к бесконечности сводится к задаче о распределениях (в том числе и совместных) случайных комплексных амплитуд  $\mathbf{E}(\lambda, z)$  электрического поля световой волны при различных длинах волн  $\lambda$  и стремлении длины волокна  $z$  к бесконечности. Доказано, что при  $z \rightarrow \infty$  распределение случайного комплексного вектора  $\mathbf{E}(\lambda, z)$  является равномерным на трёхмерной сфере. Доказано также, что случайные векторы  $\mathbf{E}(\lambda_1, z)$  и  $\mathbf{E}(\lambda_2, z)$  при  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  и  $z \rightarrow \infty$  независимы, и, следовательно, их совместное распределение полностью определяется распределением каждого из них. Полученный результат позволяет находить предельные средние значения различных величин, характеризующих излучение, прошедшее через волокно со случайными кручениями осей анизотропии. В частности, на основании этого результата показано, что среднее значение степени поляризации некогерентного излучения, прошедшего через волокно с такого рода случайными неоднородностями, стремится к нулю при стремлении длины волокна к бесконечности.

### ВВЕДЕНИЕ

Вопрос об оценке степени поляризации немонахроматического излучения при его распространении в одномодовых волоконных световодах (ОВС) возникает в связи с широким применением оптических волокон в различных перспективных областях. Наличие случайных неоднородностей в реальных волокнах приводит к возникновению связи ортогонально поляризованных мод, сопровождающейся перекачкой энергии из одной моды в другую. Это, в свою очередь, вызывает случайное изменение степени поляризации излучения, распространяющегося в световоде, и, как следствие, ряд нежелательных явлений в приборах и линиях связи, созданных на основе ОВС.

Степень поляризации немонахроматического излучения обуславливает поляризационную чувствительность интерферометрических волоконных датчиков различных физических параметров. В качестве примера можно указать волоконные кольцевые интерферометры (ВКИ) [1–8], волоконные интерферометры Маха—Цендера [9] и волоконные интерферометры Майкельсона [10], дрейф нуля интерференционного сигнала на выходе которых определяется степенью поляризации немонахроматического излучения. Таким образом, для целей волоконной интерферометрии выгодно иметь минимально возможную степень поляризации немонахроматического излучения на выходе ОВС. Отличие степени поляризации немонахроматического излучения от нуля приводит также к ряду нежелательных явлений в длинных линиях связи, созданных на основе ОВС [11–15].

Исследованию влияния случайной связи мод на степень поляризации немонахроматического излучения в ОВС посвящено много работ. В частности, в работах [16–20] на основании теоретических и численных расчётов был сделан вывод о том, что наличие случайных неоднородностей в ОВС при распространении немонахроматического излучения приводит к установлению на достаточно большой длине волокна некоторой ненулевой предельной степени поляризации.

В работе [16] было проведено экспериментальное исследование эволюции степени поляризации излучения со средней длиной волны  $\lambda_0 = 838$  нм в ОВС длиной 1,1 км с промежуточным линейным

двулучепреломлением ( $\Delta n = 6 \cdot 10^{-6}$  — разность показателей преломления для быстрой и медленной осей линейной анизотропии,  $h = 3,3 \cdot 10^{-2} \text{ м}^{-1}$ , где  $h$  — параметр сохранения поляризации в ОВС [21–23]). Исследование показало, что на длинах, значительно превышающих  $h^{-1}$ , степень поляризации излучения уменьшается по мере увеличения длины ОВС. Однако к какой величине стремится степень поляризации, к нулю или некоторой константе, утверждать невозможно. Кроме того, из результатов [16] можно сделать вывод, что на длинах ОВС, значительно превышающих  $h^{-1}$ , степень поляризации излучения практически не зависит от того, была на входе возбуждена одна собственная невозмущённая поляризационная мода или обе с равным весом. Известны также эксперименты по измерению степени поляризации в ОВС со слабым [18–20] и сильным [24] линейным двулучепреломлением, однако они проводились на весьма небольших длинах ОВС.

Аналитические расчёты степени поляризации излучения в ОВС проводились в рамках теории возмущений в работах [17, 18, 25]. Показано, что в ОВС с сильным линейным двулучепреломлением, для которых выполняется условие  $hl_{\text{деп}} \ll 1$ , в случае, когда на входе ОВС возбуждены обе невозмущённые поляризационные моды с равным весом и длина ОВС  $z$  удовлетворяет условию  $l_{\text{деп}} \ll z \ll h^{-1}$ , степень поляризации пропорциональна величине  $\sqrt{hl_{\text{деп}}}$  (здесь  $l_{\text{деп}}$  — длина деполяризации немонахроматического излучения в ОВС). Результаты [17, 18] были подтверждены численными расчётами в работах [19, 20], в которых применялись различные методы математического моделирования (в работе [20] проводилось моделирование случайных неоднородностей в ОВС, а в [19] моделировалась случайная фаза излучения, перешедшего из одной поляризационной моды в другую на длине ОВС, равной  $l_{\text{деп}}$ ). В силу ограниченности машинных ресурсов расчёты также проводились на весьма ограниченных длинах ОВС.

Настоящая работа посвящена исследованию поведения степени поляризации немонахроматического излучения, распространяющегося в ОВС со случайными неоднородностями, при неограниченном возрастании длины световода. Это исследование будет проведено в рамках математической модели случайных неоднородностей в ОВС, предложенной нами в [20]. Большинство теоретических работ, посвящённых исследованию степени поляризации, используют «общие», так называемые феноменологические, модели случайных неоднородностей, которые не учитывают физических механизмов возникновения этих неоднородностей. Кроме того, в этих работах исследования проводятся в рамках теории возмущений, что не позволяет рассматривать достаточно длинные волокна. В данной работе используется конкретная модель неоднородностей, предполагающая, что кручение осей анизотропии является математически правильно определённой случайной функцией длины волокна. Такая модель даёт возможность производить анализ распространения излучения в ОВС, не накладывая каких-либо ограничений на длину волокна. Необходимо заметить, что поскольку наша модель не противоречит общим представлениям о структуре случайных неоднородностей в ОВС, которые используются в других работах, полученные в рамках этой конкретной модели результаты должны оставаться справедливыми и в общем случае.

В соответствии с основными этапами решения поставленной проблемы работа разбита на несколько разделов. Первый раздел статьи посвящён математической постановке задачи. Показано, что проблема нахождения предела среднего по ансамблю волокон значения степени поляризации излучения сводится к задаче о распределениях (в том числе и совместных) случайных векторов  $\mathbf{E}(\lambda, z)$  комплексных амплитуд электрического поля световой волны при различных длинах волн  $\lambda$  и стремлении длины волокна  $z$  к бесконечности. Во втором разделе проведено исследование статистики векторов  $\mathbf{E}(\lambda, z)$  при  $z \rightarrow \infty$ . Доказано, что при  $z \rightarrow \infty$  распределение случайного комплексного вектора  $\mathbf{E}(\lambda, z)$  является равномерным на трёхмерной сфере, а совместное распределение векторов  $\mathbf{E}(\lambda_1, z)$  и  $\mathbf{E}(\lambda_2, z)$  полностью определяется распределением каждого из них, поскольку при  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  эти векторы независимы. На основании полученного в этом разделе результата в третьем разделе проводится вычисление предельного среднего значения квадрата степени поляризации немонахроматического излучения,

распространяющегося в ОВС со случайными неоднородностями. Показано, что предельное среднее значение квадрата степени поляризации, а следовательно и самой степени поляризации, равно нулю. В заключении обсуждены полученные результаты, а также проблема, возникающая при численном моделировании эволюции степени поляризации.

### 1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ В СВЕТОВОДЕ СО СЛУЧАЙНЫМ КРУЧЕНИЕМ ОСЕЙ АНИЗОТРОПИИ

Распространение световой волны в ОВС без потерь с переменным направлением осей анизотропии описывается следующим уравнением для вектора

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix},$$

составленного из двух ортогональных компонент комплексной амплитуды электрического поля световой волны длины  $\lambda$  [20, 26]:

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z} = \mathbf{X}_\lambda [\Theta(z)] \mathbf{E}, \quad \mathbf{X}_\lambda [\Theta(z)] = \begin{pmatrix} i\beta(\lambda)/2 & (1-g)\Theta(z) \\ -(1-g)\Theta(z) & -i\beta(\lambda)/2 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где  $\Theta(z)$  — кручение осей анизотропии,  $g$  — коэффициент фотоупругости материала, из которого изготовлено волокно,  $\beta(\lambda) = 2\pi \Delta n / \lambda$  — собственное (невозмущённое) линейное двулучепреломление,  $\Delta n$  — разность показателей преломления для медленной и быстрой осей анизотропии. Отметим, что это уравнение записано во вращающейся системе координат с осями, отслеживающими поворот осей линейного двулучепреломления.

В работе [20] была предложена модель случайных неоднородностей, согласно которой волокно разбивается на ряд отрезков случайной длины, причём кручение осей линейного двулучепреломления постоянно на каждом из таких отрезков, а его величина случайна и не зависит от кручения осей на других отрезках. Предполагается, что величина кручения  $\Theta$  равномерно распределена в некотором конечном интервале  $[-\Theta_{\max}, \Theta_{\max}]$ . Предполагается также, что длины самих случайных отрезков независимы между собой и распределены по экспоненциальному закону с плотностью  $p(l) = \gamma e^{-\gamma l}$ , где  $\gamma = 1/\langle l \rangle$  — параметр распределения, равный обратной средней длине отрезков.

Обозначим через  $N(z)$  такое минимальное количество случайных отрезков, что  $\sum_{k=1}^{N(z)} l_k > z$ , где  $l_k$  — длина  $k$ -го отрезка. Тогда в рамках нашей модели неоднородностей решение уравнения (1) в произвольной точке волокна  $z$  задаётся формулой

$$\mathbf{E}(\lambda, z) = \mathbf{U}(\lambda, z) \mathbf{E}_0(\lambda) = \mathbf{M}_\lambda \left( z - \sum_{k=1}^{N(z)-1} l_k, \Theta_{N(z)} \right) \mathbf{M}_\lambda (l_{N(z)-1}, \Theta_{N(z)-1}) \dots \mathbf{M}_\lambda (l_1, \Theta_1) \mathbf{E}_0(\lambda), \quad (2)$$

где  $\mathbf{M}_\lambda(l_k, \Theta_k) = \exp[l_k \mathbf{X}_\lambda(\Theta_k)]$  — матрица Джонса случайного отрезка длины  $l_k$  с постоянным в пределах этого отрезка изменением азимута осей линейного двулучепреломления  $\Theta_k$ :

$$\mathbf{M}_\lambda(l_k, \Theta_k) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{l_k \beta_k}{2}\right) + \frac{i\beta}{\beta_k} \sin\left(\frac{l_k \beta_k}{2}\right) & \frac{2c_k}{\beta_k} \sin\left(\frac{l_k \beta_k}{2}\right) \\ -\frac{2c_k}{\beta_k} \sin\left(\frac{l_k \beta_k}{2}\right) & \cos\left(\frac{l_k \beta_k}{2}\right) - \frac{i\beta}{\beta_k} \sin\left(\frac{l_k \beta_k}{2}\right) \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$c_k = (1 - g) \Theta_k$ ,  $\beta_k(\lambda) = \sqrt{\beta^2(\lambda) + 4c_k^2}$  — эллиптическое двулучепреломление,  $\mathbf{E}_0(\lambda)$  — комплексная амплитуда поля на входе волокна.

Пусть на вход волокна подаётся некогерентное излучение, характеризующееся функцией спектральной плотности  $B(\lambda) = \mathbf{E}_0^\dagger(\lambda) \mathbf{E}_0(\lambda)$ , где  $\dagger$  означает эрмитово сопряжение. В силу линейности уравнения (1) и отсутствия потерь в волокне полная энергия излучения, равная  $\int B(\lambda) d\lambda$ , сохраняется при распространении излучения в ОВС, и можно считать, что  $\int B(\lambda) d\lambda = 1$ . Обозначим через  $\mathbf{J}(z)$  матрицу когерентности излучения на выходе волокна длины  $z$ :

$$\mathbf{J}(z) = \int \mathbf{E}(\lambda, z) \mathbf{E}^\dagger(\lambda, z) d\lambda. \quad (4)$$

Тогда степень поляризации  $p$  некогерентного излучения как функция длины волокна  $z$  будет задаваться следующим выражением [27]:

$$p(z) = \sqrt{1 - \frac{4 \det \mathbf{J}(z)}{\text{tr}^2 \mathbf{J}(z)}}.$$

Наша задача — найти предел средней по ансамблю волокон степени поляризации  $\langle p(z) \rangle$  при стремлении длины волокна  $z$  к бесконечности. Таким образом, исследование степени поляризации света в волокне со случайным вращением осей анизотропии сводится к исследованию распределений (в том числе совместных) случайных векторов  $\mathbf{E}(\lambda, z)$  при различных  $\lambda$  и  $z \rightarrow \infty$ .

В следующих разделах мы вычислим предел  $\langle p^2(z) \rangle$  при  $z \rightarrow \infty$  и получим асимптотическое выражение для этой величины. Заметим, что в силу неотрицательности степени поляризации выполняется соотношение  $0 \leq \langle p \rangle^2 \leq \langle p^2 \rangle$ .

## 2. СТАТИСТИКА КОМПЛЕКСНЫХ АМПЛИТУД

Наряду со случайным вектором  $\mathbf{E}(\lambda, z)$ , описывающим комплексную амплитуду электрического поля световой волны длины  $\lambda$  в точке волокна  $z$  в соответствии с выражением (2), можно рассматривать случайный вектор  $\mathbf{E}_N(\lambda)$ , описывающий поле на выходе волокна, состоящего точно из  $N$  случайных отрезков. Естественно предположить, что при больших  $N$  статистика вектора  $\mathbf{E}_N(\lambda)$  близка к статистике вектора  $\mathbf{E}(\lambda, N/\gamma)$ , где  $1/\gamma$  — средняя длина отрезка волокна, на котором кручение осей анизотропии считается постоянным. Поэтому, в частности,  $\lim_{z \rightarrow \infty} \langle p^2(z) \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \langle p_N^2 \rangle$ , где  $p_N$  — степень поляризации излучения на выходе волокна, состоящего из  $N$  случайных отрезков. Строгое математическое доказательство этого предположения в рамках данной статьи не приводится, однако косвенным доказательством может служить численный эксперимент, описанный в нашей работе [28], который при больших длинах волокна подтверждает корректность замены волокна длины  $z$  волокном, состоящим из  $N = \gamma z$  случайных отрезков, при усреднении диагональных элементов матрицы когерентности  $\mathbf{J}$ . Переход от случайного вектора  $\mathbf{E}(\lambda, z)$  к случайному вектору  $\mathbf{E}_N(\lambda)$  существенно упрощает анализ статистических свойств и позволяет применить методы теории случайных групп.

Для вычисления среднего квадрата степени поляризации нам потребуются предельное распределение вектора  $\mathbf{E}_N(\lambda)$  при фиксированном  $\lambda$  и предельное совместное распределение векторов  $\mathbf{E}_N(\lambda_1)$  и  $\mathbf{E}_N(\lambda_2)$  при  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ .

Рассмотрим сначала вектор  $\mathbf{E}_N(\lambda)$  для одной длины световой волны  $\lambda$ . Вектор  $\mathbf{E}_N(\lambda)$  состоит из двух комплексных компонент, причём, как отмечено выше, в силу отсутствия потерь энергии квадрат модуля этого вектора не зависит от  $N$  и равен  $B(\lambda)$ . Таким образом, распределение вектора  $\mathbf{E}_N(\lambda)$  сосредоточено на трёхмерной сфере радиуса  $\sqrt{B(\lambda)}$ . Покажем, что предельное распределение вектора

$\mathbf{E}_N(\lambda)$  при  $N \rightarrow \infty$  является равномерным на трёхмерной сфере радиуса  $\sqrt{B(\lambda)}$ . Вектор  $\mathbf{E}_N$  задаётся формулой, подобной соотношению (2), где матричная функция  $\mathbf{U}(\lambda, z)$  заменяется матричной функцией

$$\mathbf{U}_N(\lambda) = \mathbf{M}_\lambda(l_N, \Theta_N)\mathbf{M}_\lambda(l_{N-1}, \Theta_{N-1}) \dots \mathbf{M}_\lambda(l_1, \Theta_1). \tag{5}$$

Нахождение предельного распределения вектора  $\mathbf{E}_N(\lambda) = \mathbf{U}_N(\lambda)\mathbf{E}_0(\lambda)$  при  $N \rightarrow \infty$  и произвольном начальном векторе  $\mathbf{E}_0(\lambda)$  эквивалентно нахождению предельного распределения самой матрицы  $\mathbf{U}_N(\lambda)$ . Воспользуемся следующим результатом, сформулированным в [29] (доказательство см., например, в [30]).

**Теорема 1.** Пусть  $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \dots, \mathbf{V}_N$  — набор независимых случайных элементов из некоторой компактной группы с заданным на этой группе распределением вероятностей. Тогда, если носитель вероятностной меры на группе не содержится ни в каком собственном (т. е. отличном от самой группы) замкнутом нормальном делителе, ни в классе смежности по такому делителю, то предельным распределением для матрицы  $\mathbf{V}^{(N)} = \mathbf{V}_N\mathbf{V}_{N-1} \dots \mathbf{V}_2\mathbf{V}_1$  при  $N \rightarrow \infty$  будет мера Хаара\* на этой группе.

Случайные матрицы  $\mathbf{M}_\lambda(l, \Theta)$ , заданные выражением (3), являются элементами группы  $SU(2)$  унитарных матриц второго порядка. Если мы покажем, что порождённая этими матрицами группа  $\mathcal{M} \subset SU(2)$  совпадает с  $SU(2)$ , то согласно теореме 1 предельным распределением случайной матрицы  $\mathbf{U}_N(\lambda)$ , заданной соотношением (5), при  $N \rightarrow \infty$  будет мера Хаара на группе  $SU(2)$ . Матрицы  $\mathbf{M}_\lambda$  зависят от двух независимых случайных параметров: длины отрезка волокна  $l$  и кручения осей анизотропии на этом отрезке  $\Theta$ . Таким образом, размерность  $\mathcal{M}$  не меньше двух. В то же время любой элемент  $\mathbf{G}$  группы  $SU(2)$  можно однозначно представить в виде

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где  $a$  и  $b$  — комплексные числа, связанные соотношением  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ , чертой сверху обозначено комплексное сопряжение. Следовательно, размерность группы  $SU(2)$  равняется трём. Группа  $\mathcal{M}$  является подгруппой группы  $SU(2)$ , значит, либо  $\dim \mathcal{M} = 2$ , либо  $\dim \mathcal{M} = 3$ . В последнем случае  $\mathcal{M} = SU(2)$ . Известно [31], что  $SU(2)$  не имеет подгрупп, размерность которых равнялась бы двум, что доказывает совпадение  $\mathcal{M}$  с  $SU(2)$ .

Итак, предельным распределением случайной матрицы  $\mathbf{U}_N(\lambda)$  при  $N \rightarrow \infty$  является мера Хаара на группе  $SU(2)$ , или, иными словами, предельное распределение вектора  $\mathbf{E}_N(\lambda) = \mathbf{U}_N(\lambda)\mathbf{E}_0(\lambda)$  равномерно на трёхмерной сфере радиуса  $\sqrt{B(\lambda)}$ .

Теперь перейдём к рассмотрению предельного совместного распределения случайных векторов  $\mathbf{E}_N(\lambda_1)$  и  $\mathbf{E}_N(\lambda_2)$  или, что эквивалентно, случайных матриц  $\mathbf{U}_N(\lambda_1)$  и  $\mathbf{U}_N(\lambda_2)$ . Докажем следующую теорему.

**Теорема 2.** Матрицы  $\mathbf{U}_N(\lambda_1)$  и  $\mathbf{U}_N(\lambda_2)$  независимы при  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  и  $N \rightarrow \infty$ , т. е. их предельным совместным распределением является мера Хаара на группе  $SU(2) \times SU(2)$ .

**Доказательство.** Пусть  $\mathcal{G}$  — некоторая подгруппа  $SU(2) \times SU(2)$ . Элементами этой подгруппы являются пары матриц  $(\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2)$ , где  $\mathbf{G}_{1,2} \in SU(2)$ . Обозначим через  $\pi_i$ , где  $i = 1, 2$ , такое гомоморфное отображение  $\mathcal{G}$  на группу  $SU(2)$ , что  $\pi_i[(\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2)] = \mathbf{G}_i$ . Тогда из теории полупростых компактных групп (см., например, [31]) вытекает справедливость следующих лемм.

**Лемма 1.** Все автоморфизмы группы  $SU(2)$  имеют вид  $\text{Aut}(\mathbf{G}) = \mathbf{H}f(\mathbf{G})\mathbf{H}^\dagger$ , где  $\mathbf{H}$  — некоторый фиксированный элемент из  $SU(2)$ , а  $f(\mathbf{G})$  равно либо  $\mathbf{G}$ , либо комплексно сопряжённой к ней матрице  $\bar{\mathbf{G}}$ .

\*Мера Хаара на компактной группе является естественным аналогом равномерного распределения на окружности.

**Лемма 2.** Если подгруппа  $\mathcal{G} \subset SU(2) \times SU(2)$  такова, что обе её проекции на группу  $SU(2)$  полные, т. е.  $\pi_{1,2}(\mathcal{G}) = SU(2)$ , то либо  $\mathcal{G}$  совпадает с  $SU(2) \times SU(2)$ , либо  $\mathcal{G} = \{(\mathbf{G}, \text{Aut}(\mathbf{G})), \mathbf{G} \in SU(2)\}$ , где  $\text{Aut}$  — некоторый автоморфизм группы  $SU(2)$ .

Рассмотрим в качестве  $\mathcal{G}$  группу, порождённую парами  $(\mathbf{M}_{\lambda_1}(l, \Theta), \mathbf{M}_{\lambda_2}(l, \Theta))$ . Тогда согласно теореме 1 предельным распределением пары матриц  $(\mathbf{U}_N(\lambda_1), \mathbf{U}_N(\lambda_2))$  при  $N \rightarrow \infty$  будет мера Хаара на группе  $\mathcal{G}$ . Покажем, что в нашем случае  $\mathcal{G}$  — это вся группа  $SU(2) \times SU(2)$ . Поскольку случайные матрицы  $\mathbf{M}_\lambda(l, \Theta)$  порождают всю группу  $SU(2)$ , то группа  $\mathcal{G}$  удовлетворяет условиям леммы 2. Если предположить, что  $\mathcal{G}$  отлична от  $SU(2) \times SU(2)$ , то это будет означать, что существует автоморфизм группы  $SU(2)$ , который устанавливает взаимно однозначное соответствие между первой и второй компонентами группы  $\mathcal{G}$ . В этом случае мера Хаара на  $\mathcal{G}$  является образом меры Хаара на  $SU(2)$  при естественном изоморфизме  $\mathbf{G} \rightarrow (\mathbf{G}, \text{Aut}(\mathbf{G}))$  групп  $SU(2)$  и  $\mathcal{G}$ . Согласно лемме 1 для того, чтобы найти этот автоморфизм, нужно найти такую матрицу  $\mathbf{H} \in SU(2)$ , что  $\mathbf{G}_2 = \mathbf{H}f(\mathbf{G}_1)\mathbf{H}^\dagger$  для любой пары  $(\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2) \in \mathcal{G}$ . Предположим, что  $f(\mathbf{G}_1) = \mathbf{G}_1$ , и рассмотрим среднее значение произведения  $\mathbf{G}_1 \mathbf{R} \mathbf{G}_2^\dagger$  для некоторой фиксированной комплексной матрицы  $\mathbf{R}$  размера  $2 \times 2$ :

$$\langle \mathbf{G}_1 \mathbf{R} \mathbf{G}_2^\dagger \rangle = \langle \mathbf{G}_1 \mathbf{R} \mathbf{H} \mathbf{G}_1^\dagger \mathbf{H}^\dagger \rangle = \left( \int_{SU(2)} \mathbf{G} \mathbf{R} \mathbf{H} \mathbf{G}^\dagger d\mathbf{G} \right) \mathbf{H}^\dagger.$$

Представим матрицу  $\mathbf{G} \in SU(2)$  в виде (6), где  $a = e^{i\varphi} \cos \vartheta$ ,  $b = e^{i\psi} \sin \vartheta$ ;  $\vartheta \in [0, \pi/2]$ ;  $\varphi, \psi \in [0, 2\pi]$ , и обозначим через  $r_{mn}$  компоненты матрицы  $\mathbf{R} \mathbf{H}$ . Тогда

$$\mathbf{G} \mathbf{R} \mathbf{H} \mathbf{G}^\dagger = \begin{pmatrix} a\bar{a}r_{11} + a\bar{b}r_{12} + \bar{a}b r_{21} + b\bar{b}r_{22} & -ab r_{11} + a^2 r_{12} - b^2 r_{21} + ab r_{22} \\ -\bar{a}\bar{b}r_{11} - \bar{b}^2 r_{12} + \bar{a}^2 r_{21} + \bar{a}\bar{b}r_{22} & b\bar{b}r_{11} - a\bar{b}r_{12} - \bar{a}b r_{21} + a\bar{a}r_{22} \end{pmatrix}.$$

Чтобы найти среднее значение интересующего нас выражения, необходимо вычислить

$$\langle a^{k_1} \bar{a}^{k_2} b^{k_3} \bar{b}^{k_4} \rangle = \langle (\cos \vartheta)^{k_1+k_2} (\sin \vartheta)^{k_3+k_4} e^{i(k_1-k_2)\varphi} e^{i(k_3-k_4)\psi} \rangle.$$

Инвариантная нормированная мера на  $SU(2)$  имеет вид  $d\mathbf{G} = (2\pi)^{-2} \sin(2\vartheta) d\vartheta d\varphi d\psi$ , так что

$$\langle a^{k_1} \bar{a}^{k_2} b^{k_3} \bar{b}^{k_4} \rangle = \begin{cases} 0, & k_1 \neq k_2 \text{ или } k_3 \neq k_4; \\ \frac{k_1! k_3!}{(k_1 + k_3 + 1)!}, & k_1 = k_2 \text{ и } k_3 = k_4. \end{cases} \quad (7)$$

Используя (7), получаем, что  $\langle \mathbf{G} \mathbf{R} \mathbf{H} \mathbf{G}^\dagger \rangle = (1/2) \text{tr}(\mathbf{R} \mathbf{H}) \mathbf{I}$ , где  $\mathbf{I}$  — единичная матрица. Следовательно,  $\langle \mathbf{G}_1 \mathbf{R} \mathbf{G}_2^\dagger \rangle = (1/2) \text{tr}(\mathbf{R} \mathbf{H}) \mathbf{H}^\dagger$ . Таким образом, мы показали, что если  $\mathbf{G}_2 = \mathbf{H} \mathbf{G}_1 \mathbf{H}^\dagger$ , то среднее значение произведения  $\mathbf{G}_1 \mathbf{R} \mathbf{G}_2^\dagger$  пропорционально матрице  $\mathbf{H}^\dagger$ , причём коэффициент этой пропорциональности отличен от нуля в силу произвольности матрицы  $\mathbf{R}$  и принадлежности матрицы  $\mathbf{H}$  к группе  $SU(2)$ .

Применим теперь для нахождения среднего значения произведения матриц  $\mathbf{G}_1 \mathbf{R} \mathbf{G}_2^\dagger$  другой подход. Рассмотрим линейное преобразование

$$\mathbf{S}(\mathbf{R}) = \mathbf{M}_{\lambda_1}(l, \Theta) \mathbf{R} \mathbf{M}_{\lambda_2}^\dagger(l, \Theta).$$

Тогда  $\langle \mathbf{U}_N(\lambda_1) \mathbf{R} \mathbf{U}_N^\dagger(\lambda_2) \rangle = \langle \mathbf{S} \rangle^N(\mathbf{R})$ , а  $\langle \mathbf{G}_1 \mathbf{R} \mathbf{G}_2^\dagger \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \langle \mathbf{S} \rangle^N(\mathbf{R})$ . Нетрудно видеть, что преобразование  $\mathbf{S}$  сохраняет скалярное произведение, которое в пространстве комплексных матриц задаётся

соотношением  $(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) = \text{tr}(\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2^\dagger)$ . Следовательно,  $\mathbf{S}$  — унитарное преобразование. Введём матричную функцию  $\mathbf{R}(l) = \mathbf{M}_{\lambda_1}(l, \Theta) \mathbf{R} \mathbf{M}_{\lambda_2}^\dagger(l, \Theta)$ . Учитывая, что  $\mathbf{M}_\lambda(l, \Theta) = \exp(l \mathbf{X}_\lambda(\Theta))$ , легко проверить, что функция  $\mathbf{R}(l)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d\mathbf{R}(l)}{dl} = \mathbf{X}_{\lambda_1}(\Theta) \mathbf{R}(l) + \mathbf{R}(l) \mathbf{X}_{\lambda_2}^\dagger(\Theta) = \mathbf{Y}(\Theta) \mathbf{R}(l)$$

с начальным условием  $\mathbf{R}(0) = \mathbf{R}$ . Это означает, что преобразование  $\mathbf{S}$  можно записать в виде  $\mathbf{S} = \exp(l \mathbf{Y}(\Theta))$ . Представляя матрицу  $\mathbf{R}$  в виде четырёхмерного комплексного вектора  $\mathbf{r}$ , составленного из её компонент, мы сможем найти матрицу линейного преобразования  $\langle \mathbf{S} \rangle$ , а также матрицу  $\langle \mathbf{S} \rangle$ , её собственные числа  $\mu_k$  и собственные векторы  $\boldsymbol{\varepsilon}_k$ . Разлагая вектор  $\mathbf{r}$  по собственным векторам матрицы  $\langle \mathbf{S} \rangle$ ,  $\mathbf{r} = \sum w_k \boldsymbol{\varepsilon}_k$ , мы получим, что  $\langle \mathbf{S} \rangle^N (\mathbf{R}) = \langle \mathbf{S} \rangle^N \mathbf{r} = \sum \mu_k^N w_k \boldsymbol{\varepsilon}_k$ . Для того чтобы показать, что предел  $\langle \mathbf{S}(\mathbf{R}) \rangle^N$  при  $N \rightarrow \infty$  существует, докажем следующую лемму.

**Лемма 3.** Все собственные числа матрицы, являющейся средней для случайных унитарных матриц, представимых в виде  $\exp(l \mathbf{Y}(\Theta))$ , по модулю не превосходят единицы, причём среди них нет отличных от единицы единичных по модулю собственных значений.

**Доказательство.** Действительно, поскольку  $\|\langle \mathbf{S} \rangle\| = \|\langle \exp(l \mathbf{Y}(\Theta)) \rangle\| \leq \|\langle \exp(l \mathbf{Y}(\Theta)) \rangle\| = 1$ , то все собственные значения матрицы  $\langle \mathbf{S} \rangle$  не превосходят по абсолютной величине единицы. Пусть теперь  $\mu$  — отличное от единицы собственное значение матрицы  $\langle \mathbf{S} \rangle$ , а  $\boldsymbol{\varepsilon}_\mu$  — соответствующий нормированный собственный вектор. Найдётся такое  $\Theta^* \in [-\Theta_{\max}, \Theta_{\max}]$ , что

$$\frac{d}{dl} \exp(l \mathbf{Y}(\Theta^*)) \boldsymbol{\varepsilon}_\mu \neq 0, \tag{8}$$

поскольку в противном случае для всех  $\Theta \in [-\Theta_{\max}, \Theta_{\max}]$

$$0 = \left\| \frac{d}{dl} \exp(l \mathbf{Y}(\Theta)) \boldsymbol{\varepsilon}_\mu \right\| = \|\exp(l \mathbf{Y}(\Theta)) \mathbf{Y}(\Theta) \boldsymbol{\varepsilon}_\mu\| = \|\mathbf{Y}(\Theta) \boldsymbol{\varepsilon}_\mu\|,$$

т. е.  $\mathbf{Y}(\Theta) \boldsymbol{\varepsilon}_\mu = 0$  и  $\mu = 1$  вопреки предположению. В силу непрерывности  $\mathbf{Y}(\Theta)$  соотношение (8) выполняется и в некоторой окрестности  $[\Theta^* - \delta\Theta, \Theta^* + \delta\Theta]$  точки  $\Theta^*$ . Имеются две возможности: либо вектор  $\boldsymbol{\varepsilon}_\mu$  является общим собственным вектором семейства  $\mathbf{Y}(\Theta)$ , где  $\Theta \in [-\Theta_{\max}, \Theta_{\max}]$ , либо существуют такие  $l^*$  и  $\Theta^*$ , что вектор  $\exp(l^* \mathbf{Y}(\Theta^*)) \boldsymbol{\varepsilon}_\mu$  неколлинеарен вектору  $\boldsymbol{\varepsilon}_\mu$ . Рассмотрим первый случай. Поскольку матрица  $\mathbf{S} = \exp(l \mathbf{Y}(\Theta))$  унитарна, то матрица  $\mathbf{Y}(\Theta)$  косоэрмитова, и, следовательно, все её собственные значения являются мнимыми. Обозначим через  $i\chi(\Theta)$ , где  $\chi(\Theta) \neq 0$ , собственное значение матрицы  $\mathbf{Y}(\Theta)$ , соответствующее собственному вектору  $\boldsymbol{\varepsilon}_\mu$ . Из условия  $\chi(\Theta^*) \neq 0$  и непрерывности  $\mathbf{Y}$  следует, что мы всегда можем так выбрать отрезок  $[\Theta^* - \delta\Theta, \Theta^* + \delta\Theta]$ , что для любого  $\Theta$  из этого отрезка будет выполняться неравенство  $|\chi(\Theta)| > |\chi(\Theta^*)|/2$ . Тогда

$$\begin{aligned} |\mu| &= |(\langle \mathbf{S} \rangle \boldsymbol{\varepsilon}_\mu, \boldsymbol{\varepsilon}_\mu)| = \left| \frac{\gamma}{2\Theta_{\max}} \int_{-\Theta_{\max}}^{\Theta_{\max}} d\Theta \int_0^\infty e^{l[-\gamma+i\chi(\Theta)]} dl \right| = \\ &= \left| \frac{\gamma}{2\Theta_{\max}} \int_{-\Theta_{\max}}^{\Theta_{\max}} \frac{d\Theta}{\gamma - i\chi(\Theta)} \right| \leq \frac{\gamma}{2\Theta_{\max}} \int_{-\Theta_{\max}}^{\Theta_{\max}} \frac{d\Theta}{\sqrt{\gamma^2 + \chi^2(\Theta)}} = \\ &= \frac{1}{2\Theta_{\max}} \left( \int_{-\Theta_{\max}}^{\Theta^* - \delta\Theta} \frac{\gamma d\Theta}{\sqrt{\gamma^2 + \chi^2(\Theta)}} + \int_{\Theta^* - \delta\Theta}^{\Theta^* + \delta\Theta} \frac{\gamma d\Theta}{\sqrt{\gamma^2 + \chi^2(\Theta)}} + \int_{\Theta^* + \delta\Theta}^{\Theta_{\max}} \frac{\gamma d\Theta}{\sqrt{\gamma^2 + \chi^2(\Theta)}} \right) \leq \\ &\leq 1 - \frac{\delta\Theta}{\Theta_{\max}} \left( 1 - \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + \chi^2(\Theta^*)/4}} \right) < 1, \end{aligned}$$

что и требовалось. Второй случай рассматривается примерно также. Так как согласно предположению вектор  $\exp(l^* \mathbf{Y}(\Theta^*)) \boldsymbol{\varepsilon}_\mu$  неколлинеарен вектору  $\boldsymbol{\varepsilon}_\mu$ , то  $|\langle \exp(l^* \mathbf{Y}(\Theta^*)) \boldsymbol{\varepsilon}_\mu, \boldsymbol{\varepsilon}_\mu \rangle| = 1 - 2\delta$  для некоторого  $\delta > 0$ . Тогда из непрерывности  $\mathbf{Y}$  следует, что  $|\langle \exp(l \mathbf{Y}(\Theta)) \boldsymbol{\varepsilon}_\mu, \boldsymbol{\varepsilon}_\mu \rangle| = 1 - \delta$  для всех  $l \in [l^* - \delta l, l^* + \delta l]$  и всех  $\Theta \in [\Theta^* - \delta\Theta, \Theta^* + \delta\Theta]$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} |\mu| &= |\langle \langle S \rangle \boldsymbol{\varepsilon}_\mu, \boldsymbol{\varepsilon}_\mu \rangle| = \left| \frac{\gamma}{2\Theta_{\max}} \int_{-\Theta_{\max}}^{\Theta_{\max}} d\Theta \int_0^\infty e^{-\gamma l} (\exp[l \mathbf{Y}(\Theta)] \boldsymbol{\varepsilon}_\mu, \boldsymbol{\varepsilon}_\mu) dl \right| \leq \\ &\leq 1 - \frac{\delta\Theta e^{-\gamma l^*}}{\Theta_{\max}} (e^{\gamma \delta l} - e^{-\gamma \delta l}) + \frac{\delta\Theta e^{-\gamma l^*}}{\Theta_{\max}} (e^{\gamma \delta l} - e^{-\gamma \delta l}) (1 - \delta) = \\ &= 1 - \frac{\delta\Theta e^{-\gamma l^*}}{\Theta_{\max}} (e^{\gamma \delta l} - e^{-\gamma \delta l}) \delta < 1. \end{aligned}$$

Лемма 3 доказана.

Из леммы 3 следует, что предел выражения  $\langle \mathbf{S} \rangle^N \mathbf{r} = \sum \mu_k^N w_k \boldsymbol{\varepsilon}_k$  при  $N \rightarrow \infty$  существует и равен либо нулю, если все  $\mu_k$  по модулю строго меньше единицы, либо линейной комбинации собственных векторов, соответствующих единичным собственным значениям матрицы  $\langle \mathbf{S} \rangle$ . Вычислив произведение  $\mathbf{M}_{\lambda_1}(l, \Theta) \mathbf{R} \mathbf{M}_{\lambda_2}^\dagger(l, \Theta)$ , где матрица  $\mathbf{M}_\lambda(l, \Theta)$  задаётся выражением (3), мы получим матрицу линейного преобразования  $\mathbf{S}(\mathbf{R})$ , элементы  $s_{mn}$  которой находятся по следующим формулам:

$$\begin{aligned} s_{11} &= \overline{s_{44}} = F_1(\lambda_1, \lambda_2) + F_2(\lambda_1, \lambda_2) + i (F_3(\lambda_1, \lambda_2) - F_3(\lambda_2, \lambda_1)), \\ s_{12} &= -s_{21} = \overline{s_{34}} = -\overline{s_{43}} = F_4(\lambda_1, \lambda_2) + i F_5(\lambda_1, \lambda_2), \\ s_{13} &= -s_{31} = \overline{s_{24}} = -\overline{s_{42}} = F_4(\lambda_2, \lambda_1) - i F_5(\lambda_2, \lambda_1), \\ s_{14} &= -s_{23} = -s_{32} = s_{41} = F_6(\lambda_1, \lambda_2), \\ s_{22} &= \overline{s_{33}} = F_1(\lambda_1, \lambda_2) - F_2(\lambda_1, \lambda_2) + i (F_3(\lambda_1, \lambda_2) + F_3(\lambda_2, \lambda_1)), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} F_1(\lambda_1, \lambda_2) &= \cos\left(\frac{l}{2} \sqrt{\beta_1^2 + 4c^2}\right) \cos\left(\frac{l}{2} \sqrt{\beta_2^2 + 4c^2}\right), \\ F_2(\lambda_1, \lambda_2) &= \frac{\beta_1 \beta_2}{\sqrt{(\beta_1^2 + 4c^2)(\beta_2^2 + 4c^2)}} \sin\left(\frac{l}{2} \sqrt{\beta_1^2 + 4c^2}\right) \sin\left(\frac{l}{2} \sqrt{\beta_2^2 + 4c^2}\right), \\ F_3(\lambda_1, \lambda_2) &= \frac{\beta_1}{\sqrt{\beta_1^2 + 4c^2}} \sin\left(\frac{l}{2} \sqrt{\beta_1^2 + 4c^2}\right) \cos\left(\frac{l}{2} \sqrt{\beta_2^2 + 4c^2}\right), \\ F_4(\lambda_1, \lambda_2) &= \frac{2c}{\sqrt{\beta_2^2 + 4c^2}} \cos\left(\frac{l}{2} \sqrt{\beta_1^2 + 4c^2}\right) \sin\left(\frac{l}{2} \sqrt{\beta_2^2 + 4c^2}\right), \\ F_5(\lambda_1, \lambda_2) &= \frac{2\beta_1 c}{\sqrt{(\beta_1^2 + 4c^2)(\beta_2^2 + 4c^2)}} \sin\left(\frac{l}{2} \sqrt{\beta_1^2 + 4c^2}\right) \sin\left(\frac{l}{2} \sqrt{\beta_2^2 + 4c^2}\right), \\ F_6(\lambda_1, \lambda_2) &= \frac{4c^2}{\sqrt{(\beta_1^2 + 4c^2)(\beta_2^2 + 4c^2)}} \sin\left(\frac{l}{2} \sqrt{\beta_1^2 + 4c^2}\right) \sin\left(\frac{l}{2} \sqrt{\beta_2^2 + 4c^2}\right) \end{aligned}$$

и  $\beta_{1,2} = 2\pi \Delta n / \lambda_{1,2}$ . Усредняя  $F_j(\lambda_1, \lambda_2)$  по  $l$  и  $\Theta$  (напомним, что  $c = (1 - g) \Theta$ ), получаем

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \begin{pmatrix} f_1(\lambda_1, \lambda_2) & 0 & 0 & f_2(\lambda_1, \lambda_2) \\ 0 & f_1(\lambda_1, -\lambda_2) & -f_2(\lambda_1, \lambda_2) & 0 \\ 0 & -f_2(\lambda_1, \lambda_2) & f_1(\lambda_1, -\lambda_2) & 0 \\ f_2(\lambda_1, \lambda_2) & 0 & 0 & f_1(\lambda_1, \lambda_2) \end{pmatrix},$$

где

$$f_1(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{16\gamma^4 - (\beta_1^2 - \beta_2^2)^2 + 16\gamma^2\beta_1\beta_2 + 4i\gamma(\beta_1 - \beta_2)(4\gamma^2 + (\beta_1 + \beta_2)^2)}{16\gamma^4 + 8\gamma^2(\beta_1^2 + \beta_2^2) + (\beta_1^2 - \beta_2^2)^2} A \right),$$

$$f_2(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{2} (1 - A),$$

$$A = \frac{\sqrt{16\gamma^4 + 8\gamma^2(\beta_1^2 + \beta_2^2) + (\beta_1^2 - \beta_2^2)^2}}{8\gamma(1 - g)\Theta_{\max}} \arctg \left( \frac{8\gamma(1 - g)\Theta_{\max}}{\sqrt{16\gamma^4 + 8\gamma^2(\beta_1^2 + \beta_2^2) + (\beta_1^2 - \beta_2^2)^2}} \right).$$

Блочная структура матрицы  $\langle \mathbf{S} \rangle$  позволяет аналитически найти все её собственные значения. Проведя необходимые вычисления, можно увидеть, что при  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  матрица  $\langle \mathbf{S} \rangle$  не имеет единичных собственных значений, и, следовательно,  $\langle \mathbf{G}_1 \mathbf{R} \mathbf{G}_2^\dagger \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \langle \mathbf{U}_N(\lambda_1) \mathbf{R} \mathbf{U}_N^\dagger(\lambda_2) \rangle = 0$ . Однако из предположения о том, что группа  $\mathcal{G}$ , порождённая парами матриц  $(\mathbf{M}_{\lambda_1}(l, \Theta), \mathbf{M}_{\lambda_2}(l, \Theta))$ , отлична от группы  $SU(2) \times SU(2)$ , и автоморфизм группы  $SU(2)$ , связывающий первую и вторую компоненту группы  $\mathcal{G}$ , имеет вид  $\mathbf{G}_2 = \mathbf{H} \mathbf{G}_1 \mathbf{H}^\dagger$ , мы получили, что это среднее не нуль. Таким образом, сделанное нами предположение привело нас к противоречию, следовательно, оно не верно. Проводя аналогичные рассуждения для случая  $\mathbf{G}_2 = \mathbf{H} \overline{\mathbf{G}}_1 \mathbf{H}^\dagger$ , можно показать, что и в этом случае мы получим противоречие, что означает совпадение группы  $\mathcal{G}$  с группой  $SU(2) \times SU(2)$ . Теорема 2 доказана.

Итак, совместным распределением матриц  $\mathbf{U}_\infty(\lambda_1)$  и  $\mathbf{U}_\infty(\lambda_2)$  является мера Хаара на группе  $SU(2) \times SU(2)$ , т. е. матрицы  $\mathbf{U}_\infty(\lambda_1)$  и  $\mathbf{U}_\infty(\lambda_2)$ , а значит и векторы  $\mathbf{E}_\infty(\lambda_1)$ ,  $\mathbf{E}_\infty(\lambda_2)$ , независимы для различных  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ .

### 3. ПРЕДЕЛЬНОЕ СРЕДНЕЕ ЗНАЧЕНИЕ КВАДРАТА СТЕПЕНИ ПОЛЯРИЗАЦИИ

Полученный в предыдущем разделе результат позволяет находить предельные средние значения величин, характеризующих излучение, прошедшее через волокно со случайными кручениями осей анизотропии. В частности, одним из следствий равномерности распределения вектора излучения  $\mathbf{E}_\infty(\lambda)$  на сфере и независимости векторов  $\mathbf{E}_\infty(\lambda_1)$  и  $\mathbf{E}_\infty(\lambda_2)$  для различных длин волн является равенство нулю предельного среднего значения квадрата степени поляризации. Покажем это.

Учитывая, что  $\mathbf{E}_N(\lambda) = \mathbf{U}_N(\lambda) \mathbf{E}_0(\lambda)$ , перепишем выражение (4) для матрицы когерентности излучения на выходе волокна, состоящего из  $N$  случайных отрезков, в виде

$$\mathbf{J}_N = \int \mathbf{U}_N(\lambda) \mathbf{E}_0(\lambda) \mathbf{E}_0^\dagger(\lambda) \mathbf{U}_N^\dagger(\lambda) d\lambda. \tag{9}$$

Поскольку след произведения двух матриц не зависит от порядка сомножителей, а матрица  $\mathbf{U}_N(\lambda)$  унитарна, из (9) получаем

$$\text{tr } \mathbf{J}_N = \int \text{tr} [\mathbf{E}_0^\dagger(\lambda) \mathbf{U}_N^\dagger(\lambda) \mathbf{U}_N(\lambda) \mathbf{E}_0(\lambda)] d\lambda = \int B(\lambda) d\lambda = 1. \tag{10}$$

Таким образом, след матрицы когерентности в любой точке волокна равен единице независимо от конкретной реализации неоднородностей в нём. Квадрат степени поляризации излучения на выходе волокна, состоящего из  $N$  случайных отрезков, задаётся формулой

$$p_N^2 = 1 - \frac{4 \det \mathbf{J}_N}{\text{tr}^2 \mathbf{J}_N}. \quad (11)$$

Поэтому, учитывая (10), для нахождения предела  $\langle p_N^2 \rangle$  при  $N \rightarrow \infty$  нам осталось вычислить среднее значение детерминанта матрицы  $\mathbf{J}_N$  при  $N \rightarrow \infty$ .

Пусть  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  – ортонормированный базис в пространстве двумерных комплексных векторов, тогда

$$\text{tr} \mathbf{J}_N = (\mathbf{J}_N \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) + (\mathbf{J}_N \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2), \quad (12)$$

$$\det \mathbf{J}_N = (\mathbf{J}_N \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) (\mathbf{J}_N \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) - |(\mathbf{J}_N \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1)|^2. \quad (13)$$

Очевидно, что для вычисления  $\langle \det \mathbf{J}_N \rangle$  нужно уметь находить  $\langle (\mathbf{J}_N \mathbf{s}, \mathbf{r}) (\mathbf{J}_N \mathbf{u}, \mathbf{v}) \rangle$  для произвольных векторов  $\mathbf{s}, \mathbf{r}, \mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$ . Рассмотрим билинейную форму

$$(\mathbf{J}_N \mathbf{s}, \mathbf{r}) = \int (\mathbf{s}, \mathbf{E}_N(\lambda)) \overline{(\mathbf{r}, \mathbf{E}_N(\lambda))} d\lambda$$

и найдём сначала её предельное среднее значение.

В силу равномерности распределения вектора  $\mathbf{E}_N(\lambda)$  на трёхмерной сфере радиуса  $\sqrt{B(\lambda)}$  при  $N \rightarrow \infty$  имеем

$$\langle (\mathbf{J}_\infty \mathbf{s}, \mathbf{r}) \rangle = \int B(\lambda) d\lambda \int_{S^3} (\mathbf{s}, \boldsymbol{\nu}) \overline{(\mathbf{r}, \boldsymbol{\nu})} d\boldsymbol{\nu} = \int_{S^3} (\mathbf{s}, \boldsymbol{\nu}) \overline{(\mathbf{r}, \boldsymbol{\nu})} d\boldsymbol{\nu} \equiv f(\mathbf{s}, \mathbf{r}),$$

где  $S^3$  — трёхмерная сфера единичного радиуса. Легко показать, что функция  $f$  инвариантна относительно произвольного поворота, задаваемого унитарной матрицей  $\mathbf{V}$ , т. е.  $f(\mathbf{V}\mathbf{s}, \mathbf{V}\mathbf{r}) = f(\mathbf{s}, \mathbf{r})$ , и, кроме того, она линейна по первому аргументу и антилинейна по второму. Покажем теперь, что  $f(\mathbf{s}, \mathbf{r}) = \alpha (\mathbf{s}, \mathbf{r})$ , где  $\alpha = \text{const}$ . Зафиксировав первый аргумент функции  $f$  и используя свойство линейности, получаем, что  $f(\mathbf{s}, \mathbf{r}) = (\mathbf{g}(\mathbf{s}), \mathbf{r})$ , где  $\mathbf{g}(\mathbf{s})$  — линейная функция своего аргумента, которая в конечномерном векторном пространстве представляется квадратной матрицей:  $\mathbf{g}(\mathbf{s}) = \mathbf{G}\mathbf{s}$ . Таким образом,  $f(\mathbf{s}, \mathbf{r}) = (\mathbf{G}\mathbf{s}, \mathbf{r})$ . Воспользовавшись инвариантностью функции  $f$  относительно поворота, имеем  $(\mathbf{G}\mathbf{V}\mathbf{s}, \mathbf{V}\mathbf{r}) = (\mathbf{V}^\dagger \mathbf{G}\mathbf{V}\mathbf{s}, \mathbf{r}) = (\mathbf{G}\mathbf{s}, \mathbf{r})$ , т. е.  $\mathbf{V}\mathbf{G} = \mathbf{G}\mathbf{V}$  для любой унитарной матрицы  $\mathbf{V}$ . В силу леммы Шура [31] все собственные числа матрицы  $\mathbf{G}$ , обладающей таким свойством, совпадают, т. е.  $\mathbf{G} = \alpha \mathbf{I}$ , где  $\mathbf{I}$  — единичная матрица.

Итак,  $\langle (\mathbf{J}_\infty \mathbf{s}, \mathbf{r}) \rangle = \alpha (\mathbf{s}, \mathbf{r})$ , где  $\alpha$  — некоторая константа. Чтобы найти эту константу, вычислим предельное среднее значение следа матрицы когерентности. Используя формулу (12), имеем  $\langle \text{tr} \mathbf{J}_\infty \rangle = 2\alpha$ , но, с другой стороны, в силу (10)  $\text{tr} \mathbf{J}_\infty = \text{tr} \mathbf{J}_0 = 1$ . Таким образом,  $\alpha = 1/2$ , а

$$\langle (\mathbf{J}_\infty \mathbf{s}, \mathbf{r}) \rangle = \frac{(\mathbf{s}, \mathbf{r})}{2}. \quad (14)$$

Из (14) следует, что  $\langle \mathbf{J}_\infty \rangle = \mathbf{I}/2$ . Это, в частности, означает, что предельные интенсивности собственных мод ОВС совпадают [28].

Теперь найдём  $\langle (\mathbf{J}_\infty \mathbf{s}, \mathbf{r}) (\mathbf{J}_\infty \mathbf{u}, \mathbf{v}) \rangle$ . Поскольку

$$(\mathbf{J}_N \mathbf{s}, \mathbf{r}) (\mathbf{J}_N \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \iint (\mathbf{s}, \mathbf{E}_N(\lambda_1)) \overline{(\mathbf{r}, \mathbf{E}_N(\lambda_1))} (\mathbf{u}, \mathbf{E}_N(\lambda_2)) \overline{(\mathbf{v}, \mathbf{E}_N(\lambda_2))} d\lambda_1 d\lambda_2,$$

то в силу независимости векторов  $\mathbf{E}_N(\lambda_1)$  и  $\mathbf{E}_N(\lambda_2)$  при  $N \rightarrow \infty$ , а также равномерности их предельных распределений имеем

$$\begin{aligned} \langle (\mathbf{J}_\infty \mathbf{s}, \mathbf{r}) (\mathbf{J}_\infty \mathbf{u}, \mathbf{v}) \rangle &= \iint B(\lambda_1) B(\lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2 \int_{S^3} \int_{S^3} (\mathbf{s}, \boldsymbol{\nu}) \overline{(\mathbf{r}, \boldsymbol{\nu})} (\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta}) \overline{(\mathbf{v}, \boldsymbol{\eta})} d\boldsymbol{\nu} d\boldsymbol{\eta} = \\ &= \left( \int B(\lambda) d\lambda \right)^2 \int_{S^3} (\mathbf{s}, \boldsymbol{\nu}) \overline{(\mathbf{r}, \boldsymbol{\nu})} d\boldsymbol{\nu} \int_{S^3} (\mathbf{u}, \boldsymbol{\nu}) \overline{(\mathbf{v}, \boldsymbol{\nu})} d\boldsymbol{\nu} = \frac{(\mathbf{s}, \mathbf{r}) (\mathbf{u}, \mathbf{v})}{4}. \end{aligned}$$

Применяя полученный результат к соотношению (13) и учитывая, что  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  — ортонормированные векторы, получаем, что  $\langle \det \mathbf{J}_\infty \rangle = 1/4$ . Таким образом, из (11) следует, что  $\langle p_\infty^2 \rangle = 0$ , а поскольку  $\langle p_\infty \rangle \leq \sqrt{\langle p_\infty^2 \rangle}$ , то и  $\langle p_\infty \rangle = 0$ .

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем основные результаты данной работы.

Доказано, что вектор комплексной амплитуды электрического поля монохроматической световой волны, прошедшей бесконечное волокно со случайным кручением осей анизотропии, имеет равномерное распределение на трёхмерной сфере, радиус которой равен интенсивности излучения на входе волокна.

Доказано также, что векторы комплексной амплитуды электрического поля световых волн с различными длинами попарно независимы на выходе бесконечного волокна со случайными неоднородностями.

Как следствие этого результата было получено, что предельная степень поляризации немонохроматического излучения при стремлении длины волокна к бесконечности равняется нулю.

Как отмечалось во введении, исследование эволюции степени поляризации немонохроматического излучения методом численного моделирования проводилось нами в работе [20]. Расчёты показали, что при длине волокна  $z \gg l_{\text{деп}}$  среднее значение степени поляризации выходит на постоянный, отличный от нулевого уровень, что противоречит выводам настоящей работы. Дело в том, что при численном моделировании невозможно задать непрерывное распределение спектра излучения, вследствие чего функция спектральной плотности  $B(\lambda)$  представляется в дискретном виде, а все интегралы заменяются суммами. Если проделать все те вычисления, которые проведены нами в третьем разделе этой работы, но для дискретной функции  $B(\lambda)$ , мы получим следующее выражение для предельного среднего значения квадрата степени поляризации:

$$\langle p_\infty^2 \rangle = \frac{\sum_\lambda (B(\lambda) \delta\lambda)^2}{\left( \sum_\lambda B(\lambda) \delta\lambda \right)^2},$$

где  $\delta\lambda$  — расстояние между соседними спектральными компонентами. Из этой формулы видно, что в случае излучения с дискретным спектром предельное среднее значение квадрата степени поляризации излучения отлично от нуля. Видно также, что если перейти теперь к непрерывному спектру, т. е. вычислить предел этого выражения при  $\delta\lambda \rightarrow 0$ , то мы снова получим  $\langle p_\infty^2 \rangle = 0$ .

В заключение заметим, что результат о равенстве нулю предельной степени поляризации излучения верен и в том случае, когда в волокне кроме случайного кручения имеет место и регулярное кручение осей анизотропии.

Авторы выражают благодарность Вл. В. Кочаровскому за полезные замечания и обсуждение результатов работы. Работа частично поддержана РФФИ (гранты № 00–15–96732 и 00–02–17344).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Малыкин Г. Б. // Изв. вузов. Радиофизика. 1992. Т. 35, № 2. С. 189.
2. Малыкин Г. Б. // Оптика и спектроскопия. 1993. Т. 75, вып. 6. С. 1314.
3. Burns W. K., Moeller R. P. // J. Lightwave Tech. 1984. V. 2, № 4. P. 430.
4. Козел С. М., Листвин В. Н., Шаталин С. В., Юшкайтис Р. В. // Оптика и спектроскопия. 1986. Т. 61, вып. 6. С. 1295.
5. Малыкин Г. Б. // Изв. вузов. Радиофизика. 1991. Т. 34, № 7. С. 817.
6. Малыкин Г. Б., Нефёдов И. М., Шерешевский И. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1994. Т. 37, № 11. С. 1473.
7. Малыкин Г. Б., Позднякова В. И. // Оптика и спектроскопия. 1998. Т. 84, № 1. С. 145.
8. Малыкин Г. Б., Позднякова В. И. // Оптика и спектроскопия. 1999. Т. 86, № 3. С. 513.
9. Kersey A. D., Marrone M. J., Dandridge A. // Opt. Lett. 1988. V. 13, № 10. P. 847.
10. Wanser K. H., Safar N. H. // Opt. Lett. 1987. V. 12, № 3. P. 217.
11. Poole C. D. // Opt. Lett. 1988. V. 13, № 8. P. 687.
12. Poole C. D., Bergano W. C., Wagner R. E., Schutle H. J. // J. Lightwave Tech. 1988. V. 6, № 7. P. 1185.
13. Poole C. D. // Opt. Lett. 1989. V. 14, № 10. P. 523.
14. Gisin N., Von der Wied J. P., Pellaux J. P. // J. Lightwave Tech. 1991. V. 9, № 7. P. 821.
15. Листвин В. Н., Потапов В. Т., Трещиков В. Н., Шаталин С. В. Обратная задача в поляризационной поляриметрии: Препринт ИРЭ РАН № 1 (622), Москва, 1998. 23 с.
16. Burns W. K., Moeller R. P., Chen C. L. // J. Lightwave Tech. 1983. V. 1, № 1. P. 44.
17. Залогин А. Н., Козел С. М., Листвин В. Н. // Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т. 29, № 2. С. 243.
18. Малыкин Г. Б. // Изв. вузов. Радиофизика. 1992. Т. 35, № 11–12. С. 993.
19. Малыкин Г. Б., Нефёдов И. М., Шерешевский И. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1994. Т. 37, № 10. С. 1311.
20. Малыкин Г. Б., Позднякова В. И., Шерешевский И. А. // Оптика и спектроскопия. 1997. Т. 83, № 5. С. 843.
21. Marcuse D. // Theory of dielectric optical waveguides. New York, London: Academic Press, 1974. — 257 p.
22. Kaminov I. P. // IEEE J. Quantum Electron. 1981. V. 17, № 1. P. 15.
23. Rashleigh S. C. // J. Lightwave Tech. 1983. V. 1, № 2. P. 312.
24. Moeller R. P., Burns W. K. // Electr. Lett. 1983. V. 19, № 5. P. 187.
25. Кочаровский В. В., Кочаровский Вл. В., Миронов Ю. М., Зайцев В. Ю. // Изв. РАН. Сер. физ. 1998. Т. 62, № 2. С. 362.
26. Monerie M., Jeunhomme L. // Optical and Quantum Electronics. 1980. V. 12, № 6. P. 449.
27. Mandel L., Wolf E. // Optical Coherence and Quantum Optics. Cambridge Univ. Press, 1995. — 1166 p.
28. Малыкин Г. Б., Позднякова В. И., Шерешевский И. А. // Оптика и спектроскопия. 2000. Т. 88, № 3. С. 477.
29. Хеннан Э. Представления групп и прикладная теория вероятностей. — М.: Мир, 1970. — 120 с. (Hannan E. J. Group representations and applied probability. — London: Methuen, 1965)
30. Гренандер У. Вероятности на алгебраических структурах. — М.: Мир, 1965. — 275 с. (Grenander U. Probabilities on algebraic structures. — New York, London, 1963)

31. Барут А., Рончка Р. Теория представлений групп и её приложения: В двух томах. — М.: Мир, 1980. (Barut A., Raczka R. Theory of group representations and applications. Warszawa: PWN — Polish Scientific Publishers, 1977)

<sup>1</sup> Институт прикладной физики  
РАН,

г. Нижний Новгород, Россия

<sup>2</sup> Институт физики микроструктур  
РАН, г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию  
30 августа 2000 г.

**ASYMPTOTIC CHARACTERISTICS OF THE EVOLUTION OF POLARIZATION OF A NONMONOCHROMATIC RADIATION IN SINGLE-MODE OPTICAL FIBERS WITH RANDOMLY TWISTED AXES OF LINEAR BIREFRINGENCE. I. LIMITING DEGREE OF POLARIZATION IN AN INFINITELY LONG FIBER**

*G. B. Malykin, V. I. Pozdnyakova, and I. A. Shereshevsky*

We reduce the problem on the limiting value, averaged over an optical-fiber ensemble, of the polarization degree of radiation in an infinitely long fiber to the problem on the distribution (in particular, mutual distribution) of random complex amplitudes  $\mathbf{E}(\lambda, z)$  of electric field of an optical wave at different wavelengths  $\lambda$  and the fiber length  $z$  tending to infinity. We prove that the random complex vector  $\mathbf{E}(\lambda, z)$  has a uniform distribution over a three-dimensional sphere if  $z \rightarrow \infty$ . Moreover, we prove that the random vectors  $\mathbf{E}(\lambda_1, z)$  and  $\mathbf{E}(\lambda_2, z)$  are independent at  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  and  $z \rightarrow \infty$ , and therefore their mutual distribution is entirely determined by the distributions of these two quantities. The result obtained allows one to find the limiting average values of various quantities describing radiation propagated through an optical fiber with randomly twisted axes of anisotropy. In particular, on the basis of this result, we show that the average degree of polarization of incoherent radiation propagated through a fiber with such random irregularities tends to zero as the optical-fiber length goes to infinity.

УДК 621.385.6+517.958

## ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВОЛНОВЕДУЩИХ СИСТЕМ, ПРЕДНАЗНАЧЕННЫХ ДЛЯ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ СВЧ ЭЛЕКТРОНИКИ

*Н. Ф. Ковалёв, С. Е. Фильченков*

Рассмотрено применение одномерных интегральных уравнений второго рода для расчёта осесимметричных волн в полых и открытых периодических волноведущих системах, обладающих осевой симметрией. Предложены методы распознавания собственного и дополнительного спектров задачи. Показано, что путём перехода к специально подобранной переменной интегрирования можно значительно расширить область применимости метода и, в частности, включить в неё волноводы с негладкими профилями стенок.

### ВВЕДЕНИЕ

В мощных импульсных СВЧ приборах на сильноточных релятивистских электронных пучках нашли применение волноводы с плавной периодической гофрировкой стенок и с поперечными размерами, допускающими распространение нескольких типов волн. Используются они и в качестве систем формирования волн со структурой поля, благоприятной для взаимодействия с движущимися электронами [1, 2], и как составные части волноводных брэгговских резонаторов [3], и в качестве преобразователей или рефлекторов-преобразователей волн. Плавность гофрировки и большие поперечные размеры необходимы для повышения высокочастотной электропрочности и обеспечения благоприятных условий транспортировки сильноточных электронных пучков большой мощности.

В настоящей статье рассмотрены только осесимметричные волны электрического типа, направляемые осесимметричными полым гофрированным волноводом, который частично был нами рассмотрен ранее [4, 5], ребристым стержнем и системой периодически расположенных коаксиальных колец (рис. 1). Всех их здесь объединяет единый метод расчёта (на наш взгляд, один из наиболее универсальных), основанный на использовании интегральных уравнений второго рода, которые без какой-либо дополнительной регуляризации непосредственно применимы к численным исследованиям. Необходимо отметить, что метод этот не нов и в том или ином виде широко используется в электродинамических расчётах [6] и в особенности при исследовании дифракции и рассеяния волн на объектах сложной формы [7].

### 1. ВЫВОД ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

В рассматриваемых случаях удобно исходить непосредственно из уравнений Максвелла в комплексной форме:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = -ik\mathbf{E}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = ik\mathbf{H}, \quad (1)$$

первое из которых здесь используется в качестве определения электрического поля  $\mathbf{E}$  через магнитное поле  $\mathbf{H}$ , а второе преобразуется к векторному уравнению Гельмгольца

$$\Delta \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = 0 \quad (2)$$

*Н. Ф. Ковалёв, С. Е. Фильченков*

989

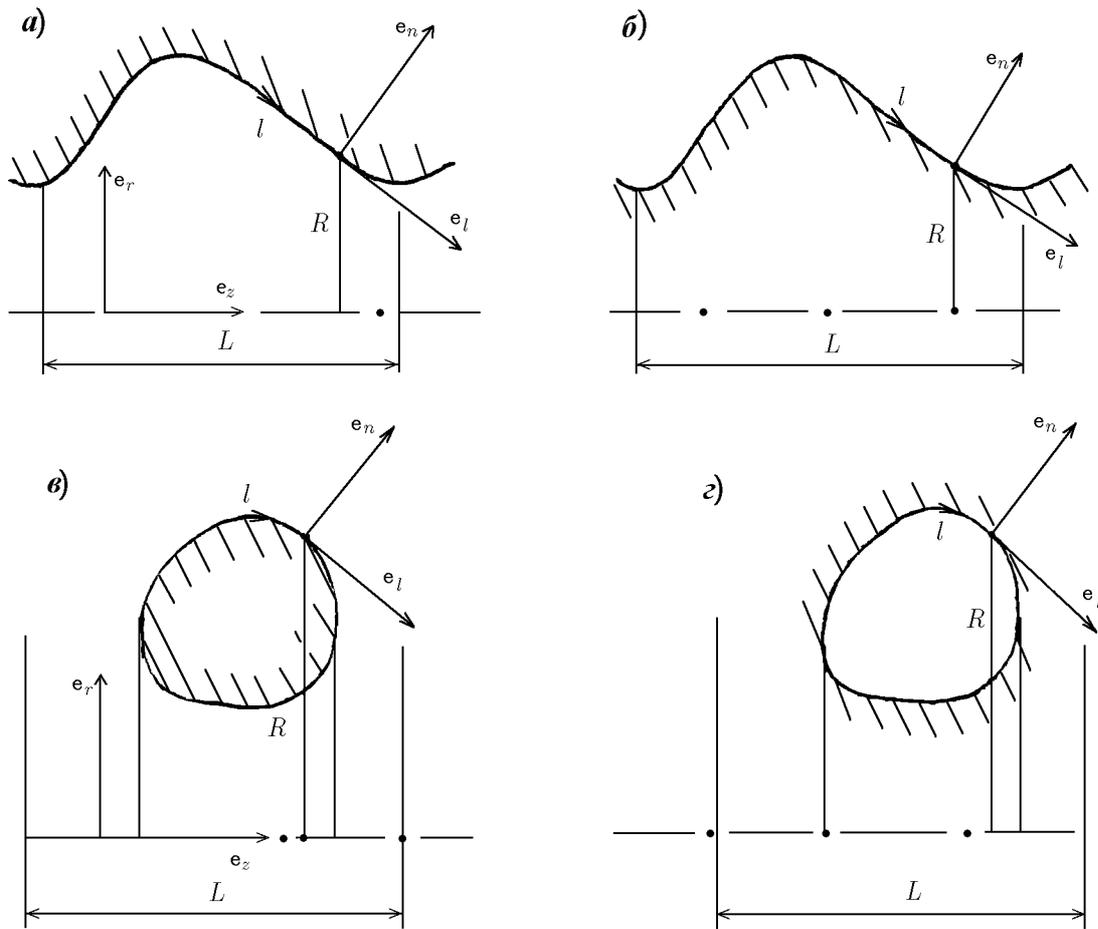


Рис. 1. Профили одной ячейки рассматриваемых волноведущих систем

с ограничивающим класс решений условием

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0. \tag{3}$$

Здесь принята зависимость от времени в виде  $\exp(-i\omega t)$ . Воспользуемся цилиндрической системой координат  $(r, \varphi, z)$  и разберём вывод уравнений на примере полого гофрированного волновода (рис. 1а), боковая поверхность которого задаётся параметрически:

$$r = R(l), \quad z = Z(l), \tag{4}$$

где  $l$  — длина дуги образующей. Введённые на рис. 1 системы ортов  $\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_l$  и  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$  предполагаются правыми.

Из (2) и (3) следует известный факт о делимости в осесимметричных системах ( $\partial R/\partial \varphi = 0$ ) осесимметричных волн на магнитные ( $H$ -волны) и электрические ( $E$ -волны), причём последние описываются только азимутальной составляющей магнитного поля

$$\mathbf{H} = \mathbf{e}_\varphi H(r, z), \tag{5}$$

которая согласно (2) определяется из решения скалярного уравнения

$$\Delta H - H/r^2 + k^2 H = 0, \tag{6}$$

дополненного граничными условиями

$$\partial H / \partial n + \frac{dz}{dl} H / r = 0 \quad (7)$$

на поверхности (4), считающейся здесь идеально проводящей.

Собственные волны периодической волноведущей системы, как обычно, определяются условиями Флоке

$$H(r, z + L) = H(r, z) \exp(ih_0 L), \quad (8)$$

где  $h_0$  — наименьшее по величине продольное волновое число, или постоянная распространения нулевой пространственной гармоники.

С целью перехода от задачи (6)–(8) к удобным для расчётов интегральным уравнениям здесь предполагается, что поле  $\mathbf{H}$  возбуждается фиктивными азимутальными магнитными токами, распределёнными по поверхности (4) с плотностью, пропорциональной  $\alpha(l)$ , и что оно существует и вне волновода, где подчиняется тому же уравнению (6). Эти предположения позволяют ввести «потенциал простого слоя» с помощью уравнения

$$\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial r} - \frac{H}{r^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} + k^2 H = -4\pi\alpha(l)\delta(n), \quad (9)$$

где  $\delta(n)$  — дельта-функция, в полосе

$$z_{\max} - z_{\min} = L, \quad (10)$$

на границах которой задано условие

$$H(z_{\max}) = H(z_{\min}) \exp(ih_0 L), \quad (11)$$

следующее из определения (8). В (9) применена локальная координатная сетка  $(l, n)$ , определяемая ортами  $\mathbf{e}_l$  и  $\mathbf{e}_n$ , в которой  $n = 0$  выбрано на поверхности (4).

Потенциал простого слоя непрерывен на поверхности (4):

$$H(l, +0) = H(l, -0), \quad (12)$$

а его нормальная производная претерпевает разрыв первого рода:

$$\left. \frac{\partial H}{\partial n} \right|_{n=+0} - \left. \frac{\partial H}{\partial n} \right|_{n=-0} = -4\pi\alpha. \quad (13)$$

Если разделить поле  $H$  на две части

$$H = H' + H'', \quad (14)$$

первая из которых ( $H'$ ) возбуждается источниками, расположенными на кольцевой полосе  $\bar{S}$  (см. рис. 2), описываемой неравенством

$$\bar{l} - \Delta < l < \bar{l} + \Delta, \quad (15)$$

а вторая  $H''$  — источниками с оставшейся части  $S_g$  поверхности (4), то для произвольной точки  $l = \bar{l}$  из уравнения (9) можно получить простые предельные соотношения

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \left\{ \left. \frac{\partial H''}{\partial n} \right|_{n=+0} + \left. \frac{\partial H''}{\partial n} \right|_{n=-0} - 2 \left. \frac{\partial H''}{\partial n} \right|_{n=0} \right\} = 0, \quad (16)$$

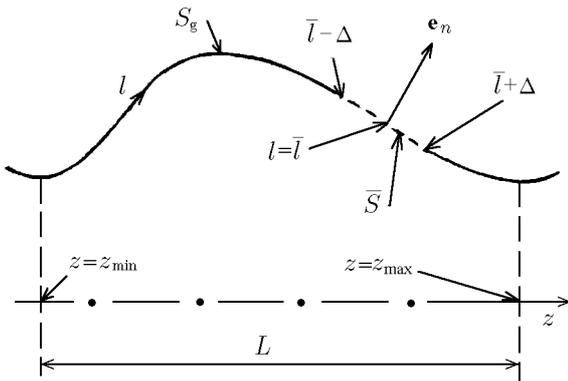
$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \left\{ \left. \frac{\partial H'}{\partial n} \right|_{n=+0} + \left. \frac{\partial H'}{\partial n} \right|_{n=-0} \right\} = 0$$

и, соответственно,

$$\frac{\partial H}{\partial n} \Big|_{n=+0} + \frac{\partial H}{\partial n} \Big|_{n=-0} = 2 \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\partial H''}{\partial n} \Big|_{n=0}. \tag{17}$$

При выводе (16) поверхность (4) считалась гладкой.

С учётом произвольности выбора точки  $\bar{l}$  путём вычитания из (14) полученного соотношения (17) и подстановки результата в граничное условие (7), применённое к внутренней стороне  $n = -0$  поверхности (4), выводится уравнение, определяющее распределение азимутального магнитного тока  $\alpha(l)$ :



$$2\pi\alpha + \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{\partial H''}{\partial n} + \frac{l}{R} \frac{dZ}{dl} H \right\} \Big|_{n=0} = 0. \tag{18}$$

Функционалы для потенциалов  $H''[\alpha]$  и  $H[\alpha]$ , определяемые уравнением (9) и условием (11), удобно представить в интегральном виде:

$$H(r, z) = \int_{L_l} \alpha(\bar{l}) G(r, z, \bar{l}) d\bar{l}, \tag{19}$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} H''(r, z) = \int_{L_l} \alpha(\bar{l}) G(r, z, \bar{l}) d\bar{l},$$

Рис. 2. Одна ячейка полого гофрированного волновода

где функция Грина  $G(r, z, \bar{l})$  является решением более простого уравнения

$$\Delta G - \frac{G}{r^2} + k^2 G = -\frac{4\pi}{L} \delta[r - R(\bar{l})] \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp[ih_m(z - Z(\bar{l}))], \tag{20}$$

$$h_m = h_0 + \frac{2\pi m}{L}. \tag{21}$$

Интеграл

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \int_{L_{l-2\Delta}} \dots d\bar{l} \equiv \int_{L_l} \dots d\bar{l} \tag{22}$$

понимается в смысле главного значения и берётся вдоль непрерывного участка  $L_l$  кривой (4), соответствующей одному периоду системы. В (20) учтён один из вариантов формулы суммирования Пуассона

$$\delta(z - Z) = \frac{1}{L} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp[ih_m(z - Z)], \tag{23}$$

где  $z, Z \in [z_{\min}, z_{\max}]$ . Для полного определения функции Грина необходимо ещё задать:

а) условие ограниченности потенциала  $H$  во внутренней области  $r < R$ , вытекающее из исходной задачи (6)–(8);

б) граничное условие на поверхности  $r = R_{\text{lim}} > R$ , причём выбор этого условия не влияет на результат решения внутренней задачи.

Спектральная задача (18)–(20) не эквивалентна исходной. Кроме искомым собственным числам для внутренней области, в качестве которых удобно выбрать одно из волновых чисел  $k$  или  $h_0$ , и соответствующих им собственных функций, решение (18)–(20) включает дополнительный спектр, соответствующий внешней однородной задаче на собственные значения для уравнения (9) и граничных условий

$$\left. \frac{\partial H}{\partial n} \right|_{n=+0} + \frac{1}{R} \left. \frac{dZ}{dl} H \right|_{n=0} = -4\pi\alpha,$$

или

$$E_l[\alpha] = 4\pi i k \alpha. \quad (24)$$

Решения дополнительной задачи (24), очевидно, уже зависят от выбора граничных условий на поверхности  $r = R_{\text{lim}}$  (см. выше), что позволяет сформулировать простой и универсальный критерий выделения решений исходной (внутренней) задачи: необходимо оставить только те решения, собственные числа (или функции) которых не зависят от изменений указанных граничных условий во внешней области.

С учётом этого критерия выбора задачи (6)–(8) и (18)–(20) становятся эквивалентными.

Если во внутренней задаче ограничиться классом решений с действительными собственными числами ( $\text{Im } k = 0$ ), т. е. в полосах прозрачности, то выбором граничного условия на поверхности  $r = R_{\text{lim}}$  спектр дополнительной внешней задачи (24) можно сместить в комплексную область, что также удобно использовать в качестве критерия выбора. Такая ситуация реализуется в рассматриваемой задаче о волнах в полом гофрированном волноводе с идеально проводящими стенками, если для функции Грина принять условия излучения при  $r \gg R_{\text{max}}$ , где  $R_{\text{max}}$  — максимальный радиус поверхности (4). Поле  $H$  и интегральное уравнение для поверхностного тока  $\alpha(l)$  в этом случае принимают вид

$$H(r, z) = \frac{2\pi^2 i}{L} \int_{L_i} \bar{\alpha} \bar{R} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[ \begin{array}{l} H_1^{(1)}(g_m r) J_1(g_m \bar{R}), \quad r > \bar{R} \\ H_1^{(1)}(g_m \bar{R}) J_1(g_m r), \quad r < \bar{R} \end{array} \right] \exp[ih_m(z - \bar{Z})] d\bar{l}, \quad (25)$$

$$\alpha(l) + \frac{\pi}{L} \int_{L_i} \bar{\alpha} \bar{R} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ h_m \frac{dR}{dl} \left[ \begin{array}{l} H_1^{(1)}(g_m R) J_1(g_m \bar{R}), \quad R > \bar{R} \\ H_1^{(1)}(g_m \bar{R}) J_1(g_m R), \quad R < \bar{R} \end{array} \right] + \right. \\ \left. + i g_m \frac{dZ}{dl} \left[ \begin{array}{l} H_0^{(1)}(g_m R) J_1(g_m \bar{R}), \quad R > \bar{R} \\ H_1^{(1)}(g_m \bar{R}) J_0(g_m R), \quad R < \bar{R} \end{array} \right] \right\} \exp[ih_m(Z - \bar{Z})] d\bar{l} = 0, \quad (26)$$

где  $\bar{R} = R(\bar{l})$ ,  $R = R(l)$ ,  $\bar{Z} = Z(\bar{l})$ ,  $Z = Z(l)$ ,  $\bar{\alpha} = \alpha(\bar{l})$ ,  $\alpha = \alpha(l)$ ;  $g_m = \sqrt{k^2 - h_m^2}$  при  $k^2 > h_m^2$ , и  $g_m = i\sqrt{h_m^2 - k^2}$  при  $k^2 < h_m^2$ ,  $H_q^{(1)}(g_m r)$ ,  $J_q(g_m r)$  — функции Ханкеля и Бесселя первого рода порядка  $q$ .

## 2. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ВОЛН РЕБРИСТОГО СТЕРЖНЯ И ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ КОАКСИАЛЬНЫХ КОЛЕЦ

Полые волноводы с плавной гофрировкой широко используются в качестве электродинамических систем в релятивистских СВЧ приборах черенковского типа и, в частности, в ЛБВ и ЛОВ [8, 9]. Однако незаслуженно забыты ребристые стержни (рис. 1б), обладающие более высокой электропрочностью и селективностью. Электродинамические системы такого типа весьма успешно применялись в первых релятивистских ЛБВ [10].

Высокими селективностью и высокочастотной электропрочностью обладают и волноводящие системы из изолированных коаксиальных колец (рис. 1в), которые, на наш взгляд, также перспективны для применения в приборах мощной релятивистской СВЧ электроники.

Формулировка внешней спектральной задачи в виде интегральных уравнений ничем не отличается от внутренней. Для ребристого стержня (рис. 1б) с поверхностью (4) остаются справедливы соотношения (19) и (20), а в уравнении (18) надо лишь заменить знак перед членом  $2\pi\alpha$ . В частном случае ограниченности полей дополнительной задачи (24) во внутренней области  $r < R$  становятся применимыми соотношение (25) и уравнение (26) с соответствующей заменой знака перед  $\alpha$ . Дополнительная внутренняя задача, следующая из уравнения (26), порождает бесконечный спектр собственных решений с действительными собственными числами. Для исключения дополнительных решений можно воспользоваться одним из сформулированных выше критериев. Однако в практических ситуациях существование дополнительного спектра не мешает численным исследованиям, так что можно использовать те же интегральные выражения в (25) и (26).

При исследовании волн в системе колец критерий выбора существенно упрощается. Для внешней задачи о медленных волнах непосредственно применимы выражения (25) и (26) с изменением знака перед  $\alpha$  и с соответствующей заменой формул (4) с целью описания колец. Очевидно, что собственные числа дополнительной задачи (24) не зависят от  $h_0$ , что и может служить критерием выбора.

Свойство

$$dk/dh_0 = 0 \quad (27)$$

дополнительного спектра можно также использовать для оценки (в том числе и оперативной) точности, достигаемой в численных расчётах.

Если знак перед  $\alpha$  сохранить, то уравнение (26) даёт решение задачи об осесимметричных резонансных колебаниях магнитного типа в торах с произвольным гладким сечением (рис. 1г). Необходимость в таких расчётах возникает при исследованиях преобразования волн и резонансных колебаний, возбуждающихся на отрезках изогнутых волноводов [11].

### 3. ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ И АЛГОРИТМ ПОИСКА РЕШЕНИЙ

При подготовке интегрального уравнения (26) к численным расчётам учитывались следующие обстоятельства.

Ядро уравнения (26) имеет особенность логарифмического типа

$$\ln[\operatorname{ch}(R - \bar{R}) - \cos(Z - \bar{Z})], \quad (28)$$

что следует из асимптотических представлений функций Бесселя и Ханкеля для больших мнимых аргументов. Разложение особенности (28) по обобщённым плоским волнам (в координатах  $(R - \bar{R}, Z - \bar{Z})$ ) позволило применить один из методов улучшения сходимости ряда ядра (26) и, соответственно, сократить объём вычислений.

Под интегралом в (26) можно перейти к новой переменной

$$l = l(\eta), \quad (29)$$

что позволяет корректно учесть особенности в распределении  $\alpha(l)$ , возникающие вблизи изолированных точек нарушения гладкости образующей (4) (например, во внутренних угловых точках полого волновода, см. рис. 1а). Уравнение (26) при преобразовании (29) трансформируется к виду

$$\begin{aligned} \beta(\eta) + \frac{\pi}{L} \int_{\eta l}^{\bar{\beta} \bar{R}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ h_m \frac{dR}{d\eta} \left[ \begin{array}{l} H_1^{(1)}(g_m R) J_1(g_m \bar{R}), \quad R > \bar{R} \\ H_1^{(1)}(g_m \bar{R}) J_1(g_m R), \quad R < \bar{R} \end{array} \right] + \right. \\ \left. + i g_m \frac{dZ}{d\eta} \left[ \begin{array}{l} H_0^{(1)}(g_m R) J_1(g_m \bar{R}), \quad R > \bar{R} \\ H_1^{(1)}(g_m \bar{R}) J_0(g_m R), \quad R < \bar{R} \end{array} \right] \right\} \exp[ih_m(Z - \bar{Z})] d\eta = 0, \quad (30) \end{aligned}$$

$$\beta(\eta) = \alpha[l(\eta)] \frac{dl}{d\eta}, \quad (31)$$

подобному (26), и, следовательно, технически процедура перехода к переменной  $\eta$  сводится к изменению распределения узлов сетки в описании профиля (4). Как видно из (30) и (31), подбором якобиана можно полностью скомпенсировать особенности функции  $\alpha(l)$  и, соответственно, значительно расширить класс волноведущих систем, описываемых этим уравнением.

С целью минимизации числа независимых параметров в программах для решения уравнения (30) вводилась нормировка на постоянную периодической структуры  $\bar{h}$ , т. е. период  $L$  полагался равным  $2\pi$ .

Сформулированная задача на собственные значения интегрального уравнения решалась методом Галёркина с использованием тригонометрических функций в качестве базового ряда. В результате интегральное уравнение (30) приводилось к системе линейных однородных алгебраических уравнений относительно коэффициентов Фурье искомой функции  $\beta$ .

В процессе решения вычисляется определитель матрицы системы как комплекснозначная функция действительного аргумента  $k$ . Значения  $k$ , при которых определитель обращается в нуль, соответствуют собственным числам искомой и дополнительной задачи.

Точность, достигаемая в численных расчётах, определяется выбором размера матрицы и согласованным с ним учитываемым количеством гармоник Фурье функции  $\beta$ . Контролировалась точность следующими способами:

- 1) по минимальной величине модуля определителя матрицы системы;
- 2) по скорости спадания гармоник Фурье функции  $\beta$ ;
- 3) по степени выполнения закона сохранения энергии;

4) по отклонению функции  $k(h_0)$  от постоянной величины во внутренней задаче о периодически расположенных кольцах (см. табл. 1).

В конкретных расчётах абсолютная точность порядка  $10^{-5}$  для низкочастотных волн достигалась с использованием 32-х точек — узлов описания профиля (4) (или 32-х гармоник Фурье), при этом время расчёта одной точки дисперсионной кривой на компьютере с процессором Pentium-III 500 не превышала  $1 \div 2$  с.

Таблица 1

$h_0/\bar{h}$	$(k/\bar{h})_{\text{lim}}$
0,0	0,895061
0,1	0,895078
0,2	0,895075
0,3	0,895082
0,4	0,895093
0,5	0,895106

#### 4. ДИСПЕРСИОННЫЕ ЗАВИСИМОСТИ ВОЛН В ПОЛОСАХ ПРОПУСКАНИЯ

При численном исследовании распространения волн в полосах пропускания, где действительным частотам соответствуют действительные постоянные распространения, в качестве собственных чисел удобно использовать частоту или пропорциональное ей волновое число  $k$ , а постоянную распространения  $h_0$  нулевой пространственной гармоники считать независимым параметром. В соответствии с этим выбором под дисперсионной зависимостью здесь понимается многозначная функция

$$k = k(h_0), \quad (32)$$

принимаяющая действительные значения на отдельных ветках, соответствующих полосам пропускания собственных волн.

Кривые (32) периодичны с периодом  $\bar{h} \equiv 2\pi/L$  и симметричны относительно оси  $h_0 = 0$ , что позволяет ограничить исследование уравнения (26) полосой

$$0 \leq h_0 \leq \bar{h}/2. \quad (33)$$

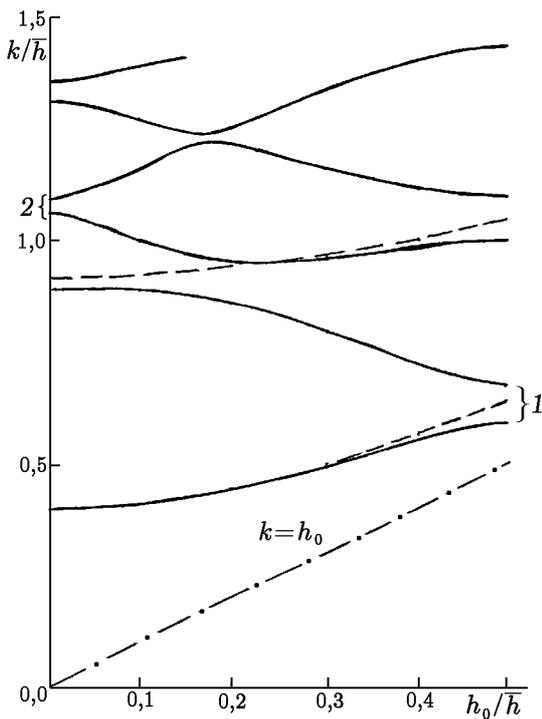


Рис. 3. Дисперсионные зависимости волн полого волновода с синусоидальной гофрировкой (34) при  $R_0\bar{h} = 6, R_1\bar{h} = 0,5$ ; пунктирными кривыми изображены дисперсионные зависимости волн регулярного круглого волновода диаметром  $2R_0\bar{h} = 6$

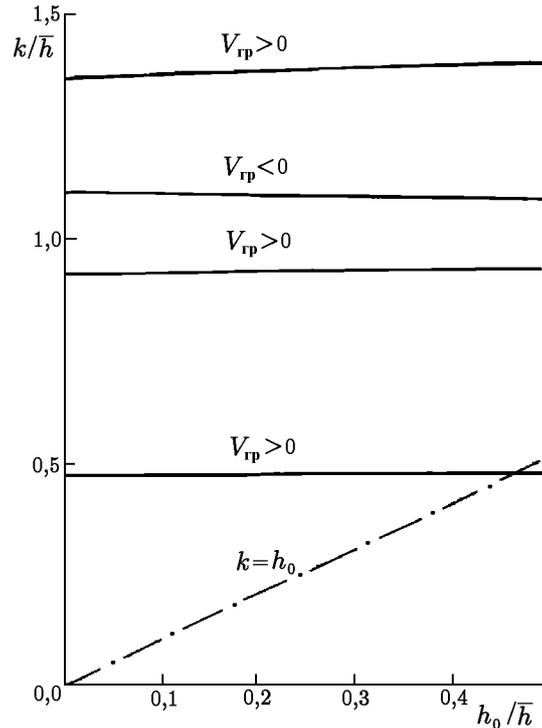


Рис. 4. Дисперсионные зависимости волн полого волновода с синусоидальной гофрировкой стенок (34) при  $R_0\bar{h} = 4, R_1\bar{h} = 2,5$ ;  $V_{гр}$  — групповая скорость волны

С целью иллюстрации возможностей метода расчёта, основанного на интегральном уравнении (26), в данном разделе приведено несколько расчётных дисперсионных зависимостей для волн волноводящих систем, показанных на рис. 1. Представленные результаты не претендуют, естественно, ни на полноту, ни на законченность.

На рис. 3 и 4 приведены несколько низкочастотных веток дисперсионных зависимостей собственных волн полого волновода с синусоидальным профилем стенок

$$R(z) = R_0 + R_1 \cos(\bar{h}z) \tag{34}$$

для случаев малой (рис. 3) и глубокой (рис. 4) гофрировок. С целью удобства сравнения максимальные диаметры  $2R_{max} = 2(R_0 + R_1)$  выбраны одинаковыми. В случае малой гофрировки реализуются узкие полосы запирания, а в случае глубокой — узкие полосы пропускания и, соответственно, малые величины групповых скоростей  $V_{гр}$ . Внешне это две разные системы кривых, так что представляет интерес рассмотреть переход от одной картины (рис. 3) к другой (рис. 4) путём увеличения амплитуды гофрировки  $R_1$ . Эволюция нижней ветки очевидна, а для двух следующих ветвей на рис. 5 приведён последовательный ряд дисперсионных кривых при увеличивающейся глубине гофрировки с  $R_1\bar{h} = 0,5$  до  $R_1\bar{h} = 4,5$ , причём для наглядности фиксированный средний диаметр по сравнению с рис. 3 и 4 увеличен до  $R_0\bar{h} = 10$ . Как видно из представленной серии зависимостей, при увеличении  $R_1$  ветки, начиная с нижней, последовательно одна за другой трансформируются из кривых со знакопеременной производной, т. е. знакопеременной групповой скоростью  $V_{гр}$ , в монотонно растущие зависимости.

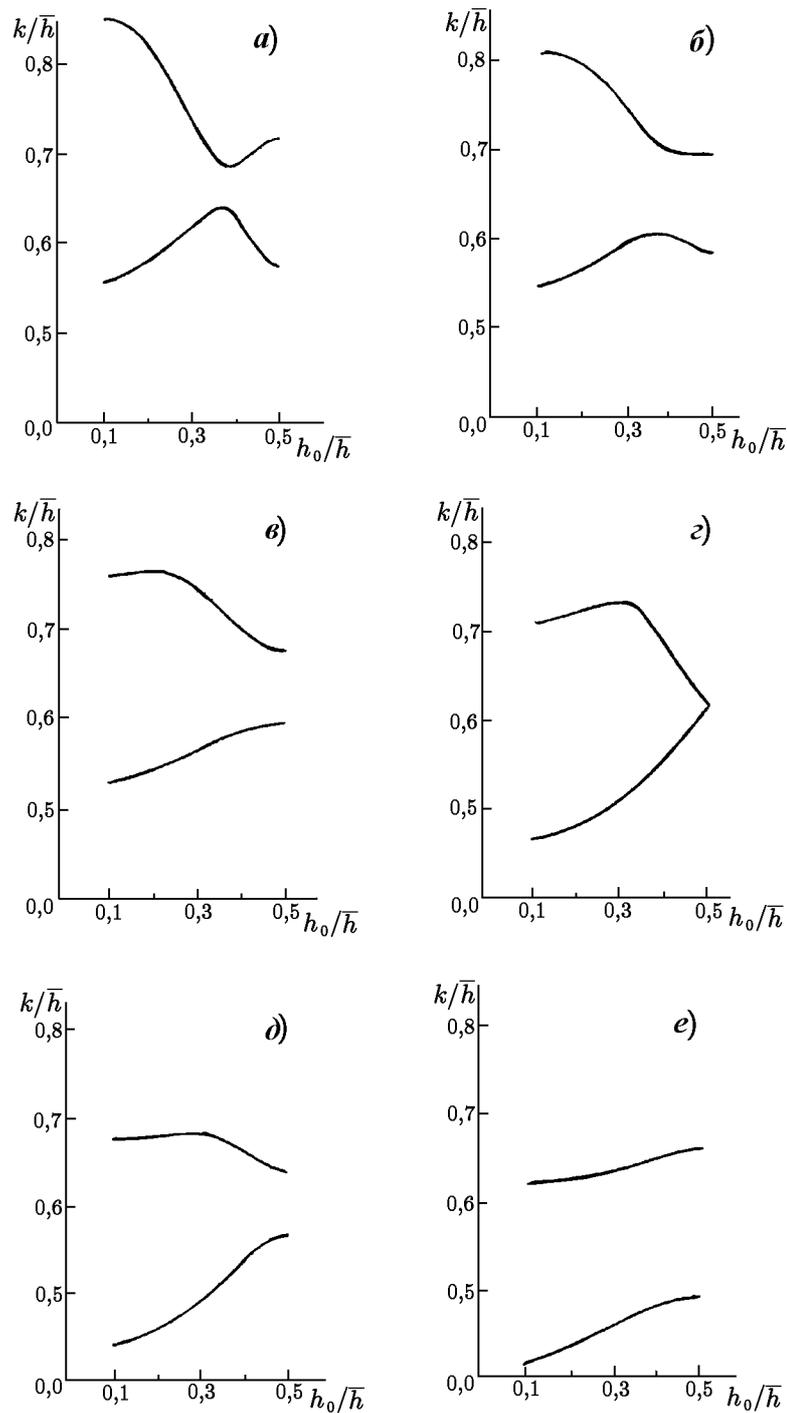


Рис. 5. Последовательность дисперсионных кривых для волн полого волновода с синусоидальной гофрировкой (34) в случае  $R_0 \bar{h} = 10$  при разной глубине гофрировки: а) —  $R_1 \bar{h} = 0,5$ ; б) —  $R_1 \bar{h} = 1$ ; в) —  $R_1 \bar{h} = 1,5$ ; г) —  $R_1 \bar{h} = 2,785$ ; д) —  $R_1 \bar{h} = 3,5$ ; е) —  $R_1 \bar{h} = 4,5$

Обращает на себя внимание случай возникновения уединённого вырожденного состояния при  $R_1 \bar{h} = 2,785$  и  $h_0/\bar{h} = 0,5$ , которое в принципе может быть использовано при разработках высокоселективных резонаторов.

Следует отметить аналитические свойства кривых на рис. 3 и 4, вытекающие из аналитических свойств определителя матрицы интегрального уравнения (26). Для иллюстрации этого обстоятельства на рис. 6 показаны границы полос запираения первого (1) и второго (2) порядков в зависимости от глубины гофрировки  $R_1$  для полого волновода с  $R_0\bar{h} = 6$ . Кривые, как видно, вполне соответствуют границам зон неустойчивости уравнения Матье. Аналитичность кривых позволяет приближённо установить свойства волн в полосах запираения или, по крайней мере, вблизи их границ.

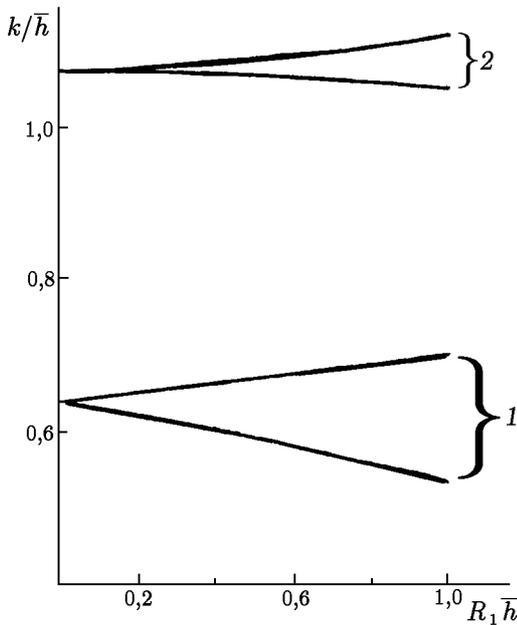


Рис. 6. Границы полос запираения первого (1) и второго (2) порядков, отмеченные этими же знаками на рис. 3;  $R_0\bar{h} = 6$

Одно из важнейших преимуществ открытых волноведущих систем связано с их высокими селективными свойствами. Для ребристого стержня (рис. 1б) с синусоидальным профилем (34) это хорошо видно из рис. 7. Низкочастотная медленная волна в таких волноводах существует при произвольных  $h_0$  и, соответственно, при любой глубине гофрировки, а существование следующей (второй) волны возможно только при достаточно больших  $R_1$ . В примере, приведённом на рис. 7б, граница возникновения второй волны определяется условием  $R_1\bar{h} = 3,474$ .

Дисперсионные кривые второй медленной волны (и всех последующих более высокочастотных волн) заканчиваются на «световой» линии  $k = h_0$ , когда фазовая скорость волны сравнивается со скоростью света ( $V_\phi = c$ ). При меньших  $\text{Re } h_0$  волна становится вытекающей, т. е. распространение сопровождается потерями на излучение. Переход от медленных волн к вытекающим не является аналитическим, и, следовательно, аналитическое продолжение дисперсионных кривых медленных волн за световую линию невозможно.

В волноведущих системах из коаксиальных колец (рис. 1в) с круглым сечением проводников нет медленных волн первого типа, кривая дисперсии которых начинается из точки  $k = 0, h_0 = 0$ . Волны же второго типа существуют только в определённой области параметров, граница которой приведена на рис. 8. На рис. 9 для иллюстрации приведена одна из возможных дисперсионных зависимостей.

Примечательно, что волновод из коаксиальных колец не поддерживает распространение волн в квазистатической области  $|h_0| \ll 0,5\bar{h}$ . Подобный факт, в частности, следует из работы [12].

В случае системы колец (рис. 1г) из внутренней задачи находятся критические частоты и распределение полей магнитных волн в изогнутых волноводах и торах. Для иллюстрации на рис. 10 приведены кривые критических частот дипольных волн  $H_{11}$  с разными поляризациями в круглом изогнутом волноводе. Как видно, частота одной из волн при большой кривизне изгиба существенно меньше критической частоты дипольной волны в регулярном волноводе. Это обстоятельство может приводить к резонансным отражениям от изогнутых участков, если не принимать мер по коррекции формы поперечного сечения волновода.

Решение внутренней задачи для колец позволяет также проверить и оценить точность принятого вычислительного алгоритма, поскольку критическая частота любой из рассчитываемых волн не должна зависеть от выбора постоянной распространения  $h_0$ . В табл. 1 приведены результаты расчёта кри-

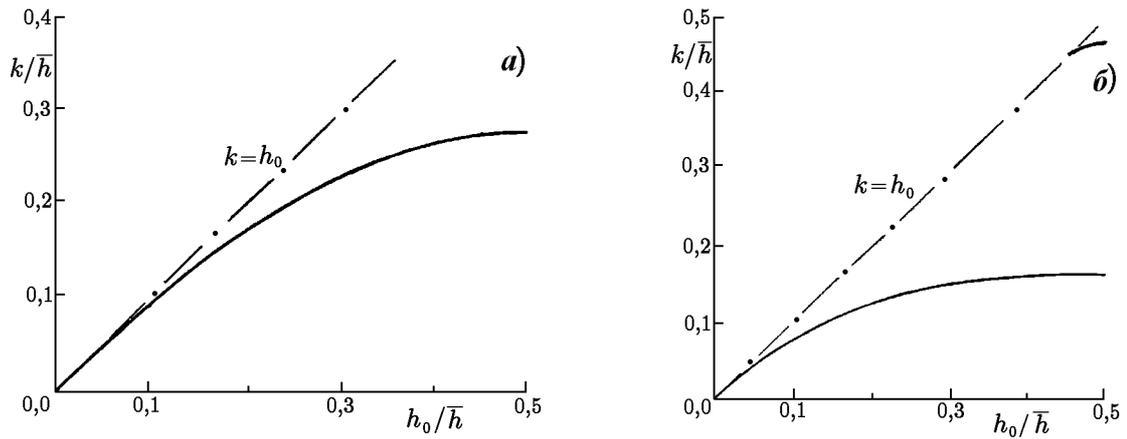


Рис. 7. Дисперсионные зависимости медленных волн ребристого стержня с синусоидальным профилем: а) —  $R_0 \bar{h} = 4, R_1 \bar{h} = 2$ ; б) —  $R_0 \bar{h} = 6, R_1 \bar{h} = 4$

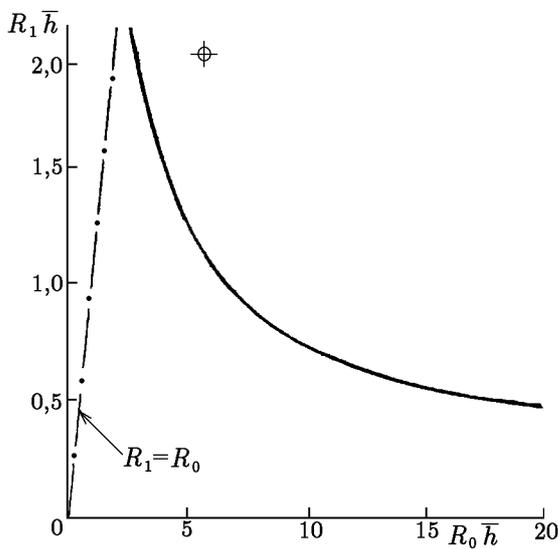


Рис. 8. Граница области существования медленных волн волноведущей системы из колец с круглым сечением проводников;  $R_0$  — радиус осей проводников,  $R_1$  — радиус их сечений; выше штрих-пунктирной линии ось волновода пересекает поверхность колец. Отмечена точка области, для которой приведена дисперсионная кривая на рис. 9

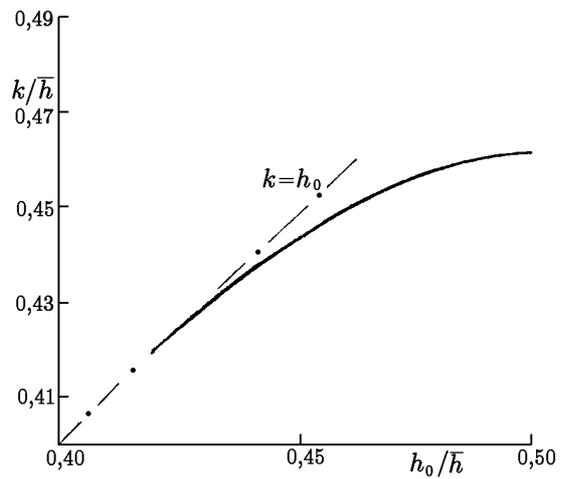


Рис. 9. Дисперсионная зависимость медленной волны волноведущей системы из колец круглого сечения; радиус оси кольца  $R_0 \bar{h} = 6$ , радиус сечения  $R_1 \bar{h} = 2$

тических частот для одной из дипольных волн  $H_{11}$  в круглом волноводе радиуса  $R_1 \bar{h} = 2$ , изогнутом по дуге с радиусом  $R_0 \bar{h} = 3$ . Как следует из таблицы, достигаемая точность расчётов превышает  $10^{-4}$ , скорость же счёта одного варианта при этом не превышает нескольких секунд.

5. ПОЛЯ СОБСТВЕННЫХ ВОЛН

В результате решения интегрального уравнения (26) находятся как частоты волн при заданных постоянных распространения  $h_0$ , так и фиктивный магнитный ток  $\alpha(l)$  на поверхности (4). Всё это в конечном итоге позволяет вычислить по формулам (25) и (5) распределение магнитного поля  $\mathbf{H}$  и, согласно (1), электрического поля  $\mathbf{E}$  во всём рабочем объёме исследуемого волновода. Структура формулы (25) весьма проста и физична: в областях  $r < R_{\min}$  и/или  $r > R_{\max}$  она представляет разложение поля по пространственным гармоникам. В области  $r < R_{\min}$

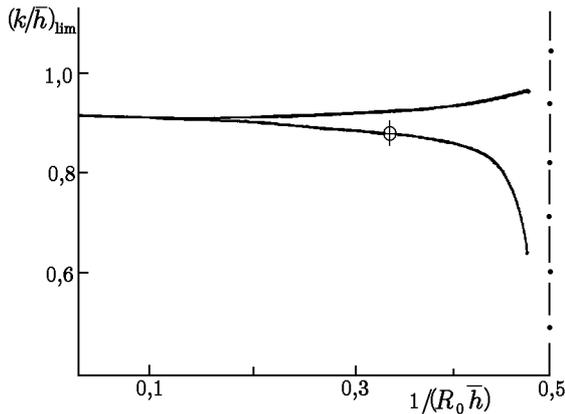


Рис. 10. Критические частоты дипольных волн  $H_{11}$  в круглом изогнутом волноводе радиуса  $R_1 \bar{h} = 2$  в зависимости от кривизны изгиба  $R_0 \bar{h}$ ; нижняя кривая соответствует волне с поляризацией, параллельной плоскости, содержащей ось волновода, а верхняя кривая — волне с перпендикулярной оси волновода поляризацией. Отмечена точка, для которой составлена табл. 1

$$H(r, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m J_1(g_m r) \exp(ih_m z), \quad (35)$$

$$A_m = \frac{2\pi^2 i}{L} \int_{L_l} \bar{\alpha} \bar{R} H_1^{(1)}(g_m \bar{R}) \exp(-ih_m \bar{Z}) d\bar{l}; \quad (36)$$

в области  $r > R_{\max}$

$$H(r, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m H_1^{(1)}(g_m r) \exp(ih_m z), \quad (37)$$

$$B_m = \frac{2\pi^2 i}{L} \int_{L_l} \bar{\alpha} \bar{R} J_1(g_m \bar{R}) \exp(-ih_m \bar{Z}) d\bar{l}. \quad (38)$$

Поток мощности  $P$ , переносимый волной, проще вычисляется в сечении, где минимален радиус гофра ( $R = R_{\min}$ ). Для краткости дальнейшие соотношения выписаны применительно к полому гофрированному волноводу (рис. 1а):

$$P = \frac{c}{4k} \operatorname{Re} \left[ -i \int_0^{R_{\min}} \frac{\partial H}{\partial z} H^* r dr \right], \quad (39)$$

где поле  $H$  определяется рядом (35), который допустимо дифференцировать почленно.

На поток мощности  $P$  удобно нормировать все полевые величины. В частности, сопротивление связи  $R_{\text{res}}$ , используемое в приборах черенковского типа, определяется формулой

$$R_{\text{res}} \equiv \frac{|E_{z,m}(r)|^2}{2h_m^2 P} = \frac{\left| \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r H_m) \right|^2}{2h_m^2 k^2 P}, \quad (40)$$

где  $H_m$  — магнитное поле  $m$ -й пространственной гармоники (35).

Для приборов релятивистской СВЧ электроники важнейшей характеристикой электродинамических систем является высокочастотная электропрочность, которая определяется через нормальную составляющую электрического поля на стенках волновода ( $|E_n| \equiv |\mathbf{Ee}_n|$ ) и протекающий по ним поверхностный ток

$$\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_n] H \Big|_{n=0}. \quad (41)$$

Последний пропорционален магнитному полю  $H$  на стенках волновода  $n = 0$ , а электрическое поле на стенках вычисляется по формуле

$$\mathbf{Ee}_n = -\frac{i}{k} \left\{ \frac{dz}{dl} \frac{\partial H}{\partial z} + \frac{dR}{dl} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rH) \right] \right\} \Big|_{n=0}. \quad (42)$$

При вычислении поля  $H$  и его производных для (41) и (42) из интегралов типа (25) нужно, как и выше, брать главные значения (22).

На основе точных решений (26) можно получить ряд практически важных приближённых результатов. Например, декремент затухания собственных волн  $\text{Im } h_0$  в волноводе из металла с конечной проводимостью  $\sigma = \text{const}$ , когда применимы граничные условия Леонтовича,

$$L \text{Im } h_0 = \frac{c}{16P} \sqrt{\frac{\omega}{2\pi\sigma}} \int_L |H|^2 \bar{R} d\bar{l}. \quad (43)$$

Во-вторых, можно оценить комплексный коэффициент отражения  $\Gamma$  от полубесконечного волновода с неглубокой и плавной гофрировкой, состыкованного в сечении  $z = z_0$  с регулярным круглым волноводом диаметром  $2R(z_0)$

$$\Gamma(z_0) = -\frac{\int_0^{R(z_0)} \left[ \frac{\partial H}{\partial z} - ihH \right] J_1(gr) r dr}{\int_0^{R(z_0)} \left[ \frac{\partial H}{\partial z} + ihH \right] J_1(gr) r dr}. \quad (44)$$

Здесь предполагается, что в регулярном волноводе возможно распространение только волны  $E_{01}$ , так что

$$g = 2,405/R(z_0), \quad h = \sqrt{k^2 - g^2}.$$

Соотношение (25) и интегральное уравнение (26) путём незначительного изменения ядра можно обобщить на гофрированные волноводы с внутренним коаксиальным стержнем диаметром  $2R_{st} < 2R_{\min}$ , электродинамические свойства которого удобно задать через коэффициенты отражения по электрическому полю  $\Gamma_m$  для каждой пространственной гармоники. В частности, (26) принимает вид

$$\begin{aligned} & \alpha(l) + \frac{\pi}{2L} \int_L \bar{\alpha} \bar{R} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp[ih_m(Z - \bar{Z})] \times \\ & \times \left\{ h_m \frac{dR}{dl} \left[ \begin{array}{l} H_1^{(1)}(g_m R) \left\{ H_1^{(2)}(g_m \bar{R}) + \Gamma_m \frac{H_0^{(2)}(g_m R_{st})}{H_0^{(1)}(g_m R_{st})} H_1^{(1)}(g_m \bar{R}) \right\}, \quad R > \bar{R} \\ H_1^{(1)}(g_m \bar{R}) \left\{ H_1^{(2)}(g_m R) + \Gamma_m \frac{H_0^{(2)}(g_m R_{st})}{H_0^{(1)}(g_m R_{st})} H_1^{(1)}(g_m R) \right\}, \quad R < \bar{R} \end{array} \right] + \right. \\ & \left. + ig_m \frac{dZ}{dl} \left[ \begin{array}{l} H_0^{(1)}(g_m R) \left\{ H_1^{(2)}(g_m \bar{R}) + \Gamma_m \frac{H_0^{(2)}(g_m R_{st})}{H_0^{(1)}(g_m R_{st})} H_1^{(1)}(g_m \bar{R}) \right\}, \quad R > \bar{R} \\ H_1^{(1)}(g_m \bar{R}) \left\{ H_0^{(2)}(g_m R) + \Gamma_m \frac{H_0^{(2)}(g_m R_{st})}{H_0^{(1)}(g_m R_{st})} H_1^{(1)}(g_m R) \right\}, \quad R < \bar{R} \end{array} \right] \right\} d\bar{l} = 0. \quad (45) \end{aligned}$$

В частности, для идеально поглощающего стержня  $\Gamma_m = 0$ , для пустого волновода (рассмотренного выше)  $\Gamma_m = H_0^{(1)}(g_m R_{st})/H_0^{(2)}(g_m R_{st})$ , для идеально проводящего металлического стержня  $\Gamma_m = -1$ .

Последний вариант — металлический стержень — удобно использовать для исследования квазистатических полей электронных пучков, направляемых через гофрированные волноводы. С этой весьма важной проблемой связано одно из основных ограничений выходных характеристик СВЧ приборов.

Уравнение (45) хорошо приспособлено и для решения внешней задачи о волнах ребристых стержней. При этом в качестве переменного параметра, влияющего на спектр дополнительной задачи, можно взять  $\Gamma_0$ , а все остальные коэффициенты отражения  $\Gamma_m$  положить, например, равными нулю.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе весьма кратко рассмотрены периодические волноведущие системы (рис. 1), распространяющиеся собственные волны которых допускают описание с помощью одномерных интегральных уравнений второго рода с ядром, имеющим логарифмическую особенность. Класс таких волноводов может быть существенно расширен, и возможные направления обобщения обозначены в разделах 3 и 5 (уравнение (45)). Несмотря на простоту этих обобщений, здесь возникает ряд вопросов, часть из которых связана с ограничением классов последовательностей  $\Gamma_m$  и с определением критериев выбора для них. В стороне осталась и важная проблема, связанная с описанием комплексных волн, т. е. затухающих и нарастающих вдоль оси волновода. Причём это могут быть и неустойчивые волны, поскольку некоторые из последовательностей  $\Gamma_m$  приводят к несамосопряжённым задачам, одной из которых может быть электронный пучок в гофрированном волноводе на линейной стадии развития процессов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 98–02–17024) и гранта «Физика микроволн», прект 4, и была доложена на семинаре научной школы М. И. Петелина «Релятивистская высокочастотная электроника».

## ЛИТЕРАТУРА

1. Релятивистская высокочастотная электроника. — Горький: ИПФ АН СССР, 1979. — 298 с.
2. Кулагин И. С., Милославский П. Ю., Новожилова Ю. В. и др. // Зарубежная радиоэлектроника. 1986. № 12, вып. 4. С. 3.
3. А.с. № 720591. Резонатор / Ковалёв Н. Ф., Петелин М. И., Резников М. Г. Заявл. 1979 г.; Опубл. 1980 г. Бюл. № 9.
4. Ковалёв Н. Ф., Фильченков С. Е., Юнаковский А. Д. Электродинамические системы релятивистских карсинотронов: Препринт ИПФ АН СССР № 268. — Горький, 1990. — 32 с.
5. Белов В. Е., Родыгин Л. В., Фильченков С. Е., Юнаковский А. Д. // Изв. вузов. Радиофизика. 1988. Т. 21, № 2. С. 180.
6. Ильинский А. С., Кравцов В. В., Свешников А. Г. Математические модели электродинамики. — М.: Высшая школа, 1991. — 224 с.
7. Шестопалов В. П., Литвиненко Л. Н., Масалов С. А., Сологуб В. Г. Дифракция волн на решётках. — Харьков: Харьковский университет, 1973. — 287 с.
8. Балакирев В. А., Карбушев Н. И., Островский А. О., Ткач Ю. В. Теория черенковских усилителей и генераторов на релятивистских пучках. — Киев: Наукова думка, 1993. — 207 с.
9. Бугаев С. П., Канавец В. И., Кошелёв В. И., Черепенин В. А. Релятивистские многоволновые СВЧ-генераторы. — Новосибирск: Наука, 1991. — 296 с.
10. Nation J. A. // Appl. Phys. Lett. 1970. V. 17, № 11. P. 491.
11. Каценеленбаум Б. З. Теория нерегулярных волноводов с медленно меняющимися параметрами. — М.: Изд-во АН СССР, 1961. — 216 с.
12. Вайнштейн Л. А. // Электроника больших мощностей. — М.: Изд-во АН СССР, 1963. № 2. С. 26.

Институт прикладной физики РАН,  
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию  
19 июля 2000 г.

**AXISYMMETRIC ELECTRIC WAVES OF PERIODIC WAVEGUIDE SYSTEMS FOR RELATIVISTIC MICROWAVE  
ELECTRONICS**

*N. F. Kovalev and S. E. Filchenkov*

We consider the application of one-dimensional integral equations of the second kind for calculation of axisymmetric  $E$ -waves in hollow and open periodic axisymmetric waveguide systems. The methods to discriminate between the fundamental and additional spectra of the problem are proposed. It is shown that the application domain of this method can be extended considerably. In particular, a special transformation of the integration variable allows one to include waveguides with nonsmooth wall profiles into the application domain of the method.

УДК 537.521.7; 621.385.6

## НАСЫЩЕНИЕ ОДНОСТОРОННЕГО МУЛЬТИПАКТОРА В СКРЕЩЕННЫХ ПОЛЯХ

*Л. Г. Бляхман, М. А. Горшкова, В. Е. Нечаев*

Представлен анализ механизма насыщения вакуумного резонансного СВЧ разряда (мультипактора) для систем с магнитостатическим полем, обеспечивающим возврат электронов к металлической поверхности с вторично-эмиссионным размножением электронов. Дано существенное уточнение предложенной ранее модели стационарного состояния разряда: учтено взаимодействие насыщенных электронных сгустков вблизи поверхности на конечных интервалах времени бомбардировки поверхности электронами разряда. Найдено, что кулоновская дефокусировка электронных сгустков превышает СВЧ фокусировку (к резонансной фазе) настолько, что воспроизведение сгустков на поверхности происходит с необходимым отсевом избытка вторичных электронов. Определены главные характеристики разряда (условия существования, собственные поля и фазовые положения резонансных сгустков электронов) в зависимости от магнитостатического поля и коэффициента вторичной эмиссии. Результаты сопоставлены с данными известных экспериментов. Объяснены причины некоторых различий, связанных с особенностями как условий наблюдения, так и принятой теоретической модели.

Вторично-эмиссионный резонансный СВЧ разряд (ВЭРР), или мультипактор [1, 2], является инициатором пробоев внутри различных вакуумных СВЧ устройств большой мощности [2–4]. В случаях, когда магнитостатическое поле  $\mathbf{H}_0$  параллельно металлической поверхности (такие ситуации имеют место во многих электронных приборах), может развиваться разряд, примыкающий к поверхности с вторично-эмиссионным размножением электронов. Разряд поддерживается в виде резонансных с СВЧ полем сгустков электронов, возвращению которых к поверхности способствует поле  $\mathbf{H}_0$ . Среди исследований такого разряда [4–8] анализу насыщенного режима посвящены работы [4, 7], где для объяснения стабилизации сгустков был предложен механизм фазовой отсечки избыточных электронов при их размножении у поверхности (коэффициенте вторичной эмиссии  $\sigma > 1$ ). Соответствующие расчёты выполнялись в грубых приближениях, в частности, не было учтено кулоновское взаимодействие двух сгустков — «нового» (зарождающегося на поверхности) и «старого» (осаждающегося) — в интервале их сосуществования. Это не позволило, в частности, получить результаты для режимов, близких к границе устойчивости резонансной фазы, с приближением к которой интервал фаз инжекции сгустка расширяется. В настоящей работе для анализа разряда на стадии насыщения (когда эффекты СВЧ фокусировки и кулоновской дефокусировки электронного сгустка обеспечивают его воспроизведение у поверхности за счёт вторичной эмиссии) применён метод, подобный изложенному в [9] для разряда, удерживаемого у поверхности тормозящим электростатическим полем. В случае ВЭРР с магнитостатическим удержанием заряды и поля сгустков [4, 7] существенно больше (в заданном СВЧ поле) и могут сильнее влиять на характеристики разряда.

1. Движение электронов с зарядом  $-e$  и массой  $m$  в плоской модели разряда с СВЧ полем  $\mathbf{E} = -E_1 \mathbf{x}_0 \sin \omega t$  и магнитостатическим полем  $\mathbf{H}_0 = H_0 \mathbf{z}_0$  ( $y, z$  — циклические координаты) описывается уравнениями:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{e}{m} E_1 \sin(\omega t) - \Omega \frac{dy}{dt}, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = \Omega \frac{dx}{dt}, \quad (1)$$

где  $\Omega = eH_0/(mc)$  — циклотронная частота. Средняя начальная энергия вторичных электронов (между  $2 \div 4$  эВ по данным [5, 10–12]) существенно меньше характерных энергий движения в разряде. Пренебрегая поэтому скоростями эмиссии на поверхности  $x = 0$ , движение можно представить в виде следующей суперпозиции вынужденных и собственных (циклотронных) колебаний:

$$x = \frac{a}{1 - \nu^2} \left[ \cos T_0 \frac{\sin(\nu\tau)}{\nu} + \sin T_0 \cos(\nu\tau) - \sin T \right], \quad (2)$$

$$\dot{x} = \frac{a}{1 - \nu^2} [\cos T_0 \cos(\nu\tau) - \sin T_0 \nu \sin(\nu\tau) - \cos T], \quad \dot{y} = \nu x, \tag{3}$$

где  $T = \omega t$ ,  $T_0 = \omega t_0$  и  $\tau = T - T_0$  — соответственно безразмерные время, момент вылета и время пролёта,  $\nu = \Omega/\omega$  — отношение циклотронной и рабочей частот,  $a = eE_1/(m\omega^2)$  — пространственный масштаб осцилляций; точкой обозначена производная по  $T$ .

2. На начальной стадии, пока мало кулоновское взаимодействие электронов, разряд проходит лавинную стадию, если коэффициент вторичной эмиссии  $\sigma > 1$ . Лавина создаётся резонансными электронами, время пролёта которых (до момента возвращения к поверхности  $x = 0$ ) кратно периоду СВЧ поля:  $\tau = 2\pi k$ , где  $k$  — кратность резонанса, или номер зоны разряда. Для резонансной фазы  $T_{0r}$  из (2) следует

$$T_{0r} = \arctg \frac{1}{\nu \operatorname{tg}(\pi\nu k)}. \tag{4}$$

Типичная траектория резонансного электрона показана пунктиром на рис. 1 между границами насыщенного сгустка (сплошные линии). Известно [4, 5, 7], что в пренебрежении начальной скоростью электронов резонансные движения в зонах разряда могут возникать только в области циклотронных частот, меньших половины рабочей частоты, когда

$$\nu \leq \nu_{\max} = \frac{1}{2k}. \tag{5}$$

Согласно (3), (4) бомбардировка поверхности электронами происходит по нормали к поверхности со скоростью  $\dot{x}_b = -2a \times \cos T_{0r}/(1 - \nu^2)$ . Из условия  $\sin T_{0r} > 0$ , необходимого для начального ускорения и инжекции электронов в разряд, определяется диапазон допустимых в разряде начальных фаз:  $T_{0r} \in [0, \pi/2]$ . Однако не все эти фазы устойчивы. Электроны, соседние с резонансными, могут сближаться за полный цикл движения от инжекции до оседания (группирование, или СВЧ фокусировка), или расходиться (дефокусировка). В последнем случае электроны, репродуцируемые на последующих циклах, удаляются от резонансной фазы  $T_{0r}$ .

Движение электронов вблизи резонанса происходит без обгонов, т. к.

$$\frac{\partial x}{\partial T_0} = -\frac{a}{\nu} \sin T_0 \sin(\nu\tau) < 0, \tag{6}$$

согласно (2) и следующему из (5) условию  $\nu\tau < \pi$ . Таким образом, вылетевшие позже электроны всё время находятся ниже электронов, вылетевших до них, и, следовательно, позже вылетевшие электроны возвращаются к поверхности раньше. Из (2) также следует связь моментов вылета  $T_0$  и бомбардировки  $T_b$ :

$$\cos T_0 \frac{\sin[\nu(T_b - T_0)]}{\nu} + \sin T_0 \cos[\nu(T_b - T_0)] - \sin T_b = 0. \tag{7}$$

Можно ввести фактор фокусировки  $b = -dT_b/dT_0$ , который согласно (7), (4) вблизи резонанса ( $T_b - T_0 = 2\pi k$ ) равен

$$b = (-dT_b/dT_0)_{T_0=T_{0r}} = \frac{(1 - \nu^2)}{\nu^2} \cos^2(\pi k\nu) \geq 0. \tag{8}$$

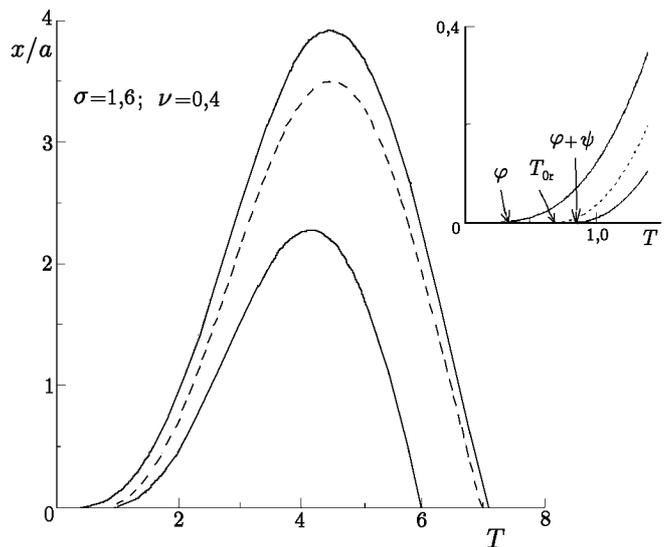


Рис. 1

Для самой устойчивой фазы  $T_{0r} = 0$  (когда  $\nu = 1/(2k)$ ) имеет место идеальная фокусировка:  $b = 0$ . С уменьшением  $\nu$  (магнитного поля при заданной частоте) фаза  $T_{0r}$  нарастает, а фокусировка ухудшается. Она исчезает на границе устойчивости резонансной фазы, когда  $b = 1$ , при соответствующих величинах  $\nu_{st}$ , вычисляемых из (8), при этом  $T_{0r}^{st} \approx 50^\circ$  согласно (4). Определённые таким образом границы зон приведены в табл. 1. Видно, что разряд может развиваться только при небольших значениях параметра  $\nu$  (малом отношении циклотронной и рабочей частот). Эти граничные значения также уменьшаются с ростом номера зоны, сами зоны быстро сужаются, а между ними существуют значительные интервалы по параметру  $\nu$ .

Т а б л и ц а 1

Номер зоны $k$	1	2	3
Верхняя граница зоны: $b = 0, \nu_{max} = (\Omega/\omega)_{max}$	0,500	0,250	0,167
Граница устойчивости: $b = 1, \nu_{st} = (\Omega/\omega)_{st}$	0,369	0,216	0,151
Нижняя граница зоны (8) для $\sigma = 2$ : $b = 2, \nu_{min} = (\Omega/\omega)_{min}$	0,333	0,203	0,145

3. Если коэффициент вторичной эмиссии  $\sigma > 1$ , то разряд может развиваться и при некоторой СВЧ дефокусировке  $b > 1$  (неустойчивой фазе  $T_{0r}$ ), когда размножение электронов при взаимодействии сгустка с поверхностью превышает их потерю из-за разлёта. Поэтому нижнюю границу зоны  $\nu_{min}$  можно оценить из соотношения (8) при  $b = \sigma$ . С учётом

такой допустимой дефокусировки зоны возникновения разряда несколько расширяются (см. последнюю строку в табл. 1 для  $\sigma = 2$ ). Границы зон в режиме насыщения будут рассчитаны ниже. Однако уже из такого рассмотрения ясно, что заряд формируемых сгустков должен быстро убывать с ростом номера зоны  $k$  при заданном СВЧ поле, поскольку силы притяжения сгустка к поверхности (поле, создаваемое каждым микрослоем сгустка, сосредоточено между ним и поверхностью) должны составлять лишь небольшую часть от силы, действующей со стороны магнитостатического поля и пропорциональной  $k^{-1}$ .

Согласно (3), (4) скорость бомбардировки поверхности вблизи резонанса равна

$$V_b = \frac{-2eE_1 \cos T_{0r}}{m\omega(1 - \nu^2)}. \tag{9}$$

Диапазон энергий бомбардировки, в котором  $\sigma > 1$ , составляет примерно от 50 до 2500 эВ при нормальном падении электронов [2, 10] (эти границы слабо зависят от вида металла, для сплавов диапазон шире). Отсюда можно указать диапазон амплитуды СВЧ поля в разряде:

$$23 \text{ кВ} < \frac{\lambda E_1 \cos T_{0r}}{1 - \nu^2} < 165 \text{ кВ}, \tag{10}$$

где  $\lambda$  — длина волны. Отношение скорости бомбардировки к скорости света находится в диапазоне  $|V_b|/c = 0,014 \div 0,1$ ; масштаб осцилляций  $a \approx |V_b|/(2\omega) = |V_b| \lambda/(4\pi c)$ , т. е.  $a \leq 0,01\lambda$ . Поэтому можно использовать плоскую модель разряда, когда радиус кривизны поверхности порядка  $0,1\lambda$  и больше.

4. Согласно (6) движение плоских электронных слоёв происходит без обгонов уже на ранней стадии разряда. Кулоновские силы в развивающемся разряде также противодействуют сближению слоёв. Поэтому в насыщенном режиме можно принять ламинарную модель сгустка. В [4, 7] приближённо считалось, что верхний электрон (дальний от поверхности и первый по моменту инжекции, см. рис. 1) всё время движется только под влиянием внешних полей, т. к. суммарное поле зарядов (включая наведённые) над сгустком близко к нулю, если другие поверхности далеки в масштабе осцилляций  $a \leq 0,01\lambda$  (см. выше). Нижний же электрон (ближайший к поверхности и последний по моменту инжекции, см. рис. 1) всё время находится под воздействием поля всего сгустка  $E_b$ , составляющего небольшую часть от амплитуды СВЧ поля:  $q = E_b/E_1 < 1$ .

Достаточно определить движение только этих крайних электронов сгустка, чтобы установить его основные параметры: начальную фазу инжекции  $\varphi$  (верхнего электрона), конечную фазу инжекции  $\varphi + \psi$  (нижнего электрона) и нормированное поле сгустка  $q$ . При этом предполагается лишь то, что оседание заряда и эмиссия происходят квазиравномерно, чтобы выделить момент отсечки избытка электронов. Для узких по фазе инжекции сгустков такое допущение вполне оправдано ввиду квазиоднородности бомбардировки (9) и фокусирующего действия СВЧ поля (8). Неточность возрастает с ростом фазовой ширины сгустка в режимах слабой СВЧ фокусировки. Для этих режимов линейную интерполяцию токов бомбардировки и эмиссии в интервале сосуществования сгустков надо рассматривать как упрощающее расчёт допущение.

В [4, 7] игнорировался эффект торможения медленно поднимающихся от поверхности электронов вторичной эмиссии полем быстро падающего сверху сгустка (в сравнении с действием СВЧ поля и в предположении малости интервала сосуществования сгустков). Между тем вблизи границы неустойчивости ширина сгустка  $\psi$  может достигать нескольких десятков градусов (с ростом  $\sigma$  она также увеличивается). Поэтому учёт торможения вторичных электронов полем находящегося выше падающего сгустка может заметно повлиять на рассчитываемые характеристики разряда (обратное воздействие медленно поднимающегося сгустка на находящиеся выше и быстро падающие электроны пренебрежимо мало). Например, для случая мультипактора в тормозящем электростатическом поле соответствующий расчёт выявил в [9] заметные поправки при  $\sigma \approx 2$ . Для мультипактора в магнитостатическом поле указанный эффект может проявляться значительно сильнее (и будет учтён ниже в расчётах) ввиду большей плотности сгустков (параметра  $q$ ) в таком разряде.

Для нахождения трёх искомых параметров сгустка  $\varphi$ ,  $\psi$  и  $q$  к двум уравнениям движения крайних электронов сгустка нужно добавить ещё условие отсечки. Оно следует из требования попадания в разряд электронов вторичной эмиссии на интервале  $T_0 \in [\varphi, \varphi + \psi]$ , когда ускорение СВЧ полем превышает торможение полем сгустков у поверхности. При равномерной эмиссии сгустка тормозящее поле на поверхности от восходящего сгустка нарастает пропорционально  $q(T_0 - \varphi)/\psi$  в указанном интервале  $T_0$  [7, 9]. Для эмиссии с  $\sigma > 1$  воспроизведение сгустка возможно только при условии отсева избытка электронов. Поэтому фазовая ширина падающего на поверхность сгустка должна быть  $\sigma\psi$ , чтобы часть его электронов попадала на поверхность в области фаз, где полное поле препятствует инжекции в разряд вновь эмитируемых вторичных электронов [7, 9]. Поскольку сгустки зарождаются в областях небольших фаз  $T_0$ , где СВЧ поле быстро нарастает, то отсев вторичных электронов возможен только в интервале фаз  $T_0 \in [\varphi + \psi - \sigma\psi, \varphi]$ , предшествующем инжекции восходящего сгустка (см. рис. 1). При этом поле падающего сгустка  $E_{b\downarrow}$  убывает как

$$E_{b\downarrow} = qE_1 \frac{\varphi + \psi - T_0}{\sigma\psi}, \quad (11)$$

и в момент начала инжекции восходящего сгустка  $T_0 = \varphi$  оно составляет  $qE_1/\sigma$ , т. е. редуцировано в  $\sigma$  раз. Поэтому условие смены торможения ускорением для эмитированных электронов в момент  $T_0 = \varphi$  можно представить в виде

$$\sin \varphi = q/\sigma. \quad (12)$$

Такая модель с односторонней отсечкой избытка электронов справедлива, когда ускоряющее внешнее поле превышает тормозящее поле сгустков до конца бомбардировки и инжекции, т. е.  $\sin(\varphi + \psi) \geq q$ , что выполняется в практически интересных случаях.

5. Движение верхнего электрона  $x_1(T)$  от разрядной поверхности с момента его вылета  $T_0 = \varphi$  и до момента исчезновения падающего потока  $T = \varphi + \psi$  (в интервале сосуществования сгустков) в условиях равномерной бомбардировки (11) подчиняется уравнению

$$\ddot{x}_1 + \nu^2 x_1 = a \left[ \sin T - \frac{q}{\sigma} \left( 1 - \frac{T - \varphi}{\psi} \right) \right]. \quad (13)$$

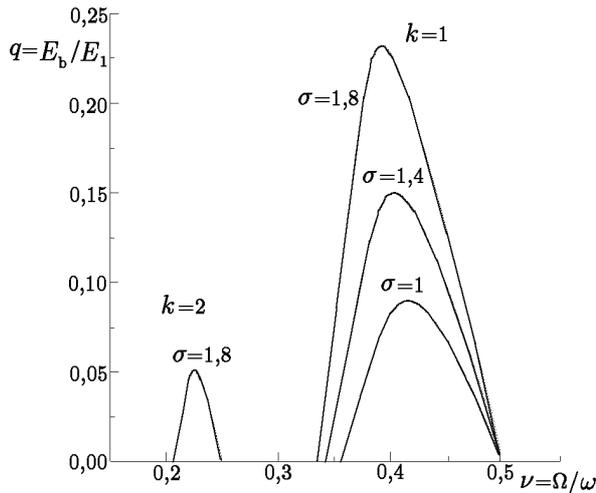


Рис. 2

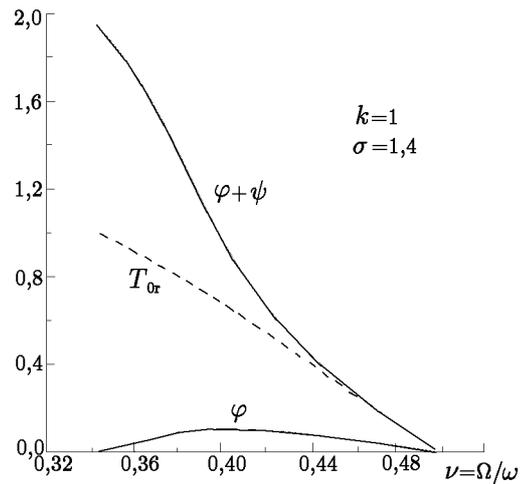


Рис. 3

С момента  $T = \varphi + \psi$  движение этого электрона происходит под действием только внешних полей вплоть до попадания на поверхность в момент  $T_b = (2\pi k + \varphi + \psi)$ . Соответственно, на первом интервале решение (13) даёт траекторию

$$\frac{x_1}{a} = \frac{\cos \varphi \sin(\nu\tau_1)/\nu + \sin \varphi \cos(\nu\tau_1) - \sin T}{1 - \nu^2} - \frac{q}{\sigma\nu^2} \left[ \left(1 - \frac{\tau_1}{\psi}\right) + \frac{\sin(\nu\tau_1)}{\nu\psi} - \cos(\nu\tau_1) \right], \quad (14)$$

где  $\tau_1 = T - \varphi$ . Для второго (основного) интервала, где  $\tau_1$  изменяется от  $\psi$  до  $(2\pi k + \psi)$ , в результате сшивки решений в момент  $\tau_1 = \psi$  получается

$$\frac{x_1}{a} = \frac{\cos \varphi \sin(\nu\tau_1)/\nu + \sin \varphi \cos(\nu\tau_1) - \sin T}{1 - \nu^2} - \frac{q}{\sigma\nu^2} \left[ \frac{\sin(\nu\tau_1) - \sin(\nu\tau_1 - \nu\psi)}{\nu\psi} - \cos(\nu\tau_1) \right]. \quad (15)$$

В (14), (15) члены с  $q$  обусловлены воздействием падающего сгустка на восходящий сгусток в интервале их сосуществования. Эта поправка убывает с уменьшением заряда сгустка  $q$  к краям зоны разряда ( $\nu_{\min}, \nu_{\max}$ ), так что она максимальна внутри зоны (несколько ближе к её левому краю  $\nu_{\min}$ ).

Для нижнего электрона, перемещающегося под действием внешних полей и поля всего сгустка на всём интервале от  $T_0 = (\varphi + \psi)$  до  $T_b = (2\pi k + \varphi + \psi - \sigma\psi)$ , получается траектория

$$\frac{x_2}{a} = \frac{\cos(\varphi + \psi) \sin(\nu\tau_2)/\nu + \sin(\varphi + \psi) \cos(\nu\tau_2) - \sin T}{1 - \nu^2} - \frac{q}{\nu^2} [1 - \cos(\nu\tau_2)], \quad (16)$$

где пролётное время  $\tau_2 = T - \varphi + \psi$  изменяется от 0 до  $2\pi k - \sigma\psi$ . Согласно условию попадания на поверхность

$$x_1(\tau_1 = 2\pi k + \psi) = 0, \quad x_2(\tau_2 = 2\pi k - \sigma\psi) = 0 \quad (17)$$

из (15), (16) с учётом (12) получается система из трёх уравнений, которая определяет фазовые границы и поле резонансного сгустка (параметры  $\varphi, \psi, q$ ) при заданных магнитном поле и вторичной эмиссии (параметры  $\nu, \sigma$ ). Вблизи верхней границы зоны разряда (см. табл. 1), где фокусировка близка к идеальной, поле сгустка должно быть мало из-за малости внешнего поля:  $E_b \equiv qE_1 = \sigma E_1 \sin \varphi \rightarrow 0$  (см. (12)). С приближением к нижней границе зоны поле сгустка также должно убывать, но по причине исчезновения СВЧ фокусировки. Расчёт зависимостей  $q(\nu)$  при заданных коэффициентах вторичной эмиссии  $\sigma$  подтверждает сказанное (см. рис. 2). Из этих характеристик находятся поле насыщенного сгустка  $E_b = q(\nu)E_1$  и плотность электронов в нём (на  $1 \text{ см}^2$ )

$$N_s = qE_1/4\pi e; \quad N_s[\text{см}^{-2}] = 5,52 \cdot 10^8 qE_1[\text{кВ/см}]. \quad (18)$$

Из рис. 2 следует, что заряд сгустка быстро увеличивается с ростом коэффициента  $\sigma$  — факт, установленный и в экспериментах [6]. Предложенная модель сгустка с фазовой отсечкой части вторичных электронов объясняет этот важный эффект. Наибольший заряд сгустка достигается вблизи  $\nu \approx 0,42$ , что также согласуется с наблюдениями разрядных токов [6]. Фазовые границы насыщенного сгустка (см. рис. 3) расширяются по мере снижения фокусировки СВЧ полем (с уменьшением  $\nu$ ), постепенно расходясь от резонансной фазы  $T_{0r}$  на начальной стадии. Разрядные токи быстро ослабевают с ростом номера зоны  $k$ , соответственно падает роль разрядов с большими пролётными временами (при малом торможении магнитоэстатическим полем, см. табл. 1 и рис. 2).

Рассчитанные траектории крайних электронов сгустка для типичного варианта  $\sigma = 1,6$ ;  $\nu = 0,4$  показаны на рис. 1 в сравнении с траекторией резонансного электрона (пунктир). Вначале электроны ускоряются медленно и достигают максимального удаления от поверхности заметно позже полупериода движения, а затем, постепенно ускоряясь к поверхности, падают на неё со скоростью (9), которая примерно вдвое больше средней. При этом кулоновская дефокусировка приводит к расширению сгустка в  $\sigma$  раз (по длительности) за цикл движения. Поля разрядных сгустков в зоне  $k = 1$  могут достигать значительной величины — до 15÷20 % от амплитуды СВЧ поля при типичных для металлов значениях  $\sigma$  (рис. 2). Такие сгустки по величине собственного поля в 2–3 раза превосходят сгустки в мультитакторе с электростатическим удержанием у поверхности [9].

**6.** Полученные характеристики надо сравнить с результатами наблюдений. Известные экспериментальные данные содержатся в работе [6], в которой изучался мультитактор в поле  $\mathbf{H}_0$ , перпендикулярном узкой стенке прямоугольного волновода (мода  $H_{01}$ , длина волны  $\lambda \simeq 3$  см). В качестве основного измерительного элемента использовался токовый зонд в бомбардируемой широкой стенке волновода. Частью этой стенки служили сменные металлические и сплавные пластины-мишени. При этом металлические мишени (медь, вольфрам) имели коэффициент вторичной эмиссии (рис. 1 в [6]), нараставший с увеличением энергии бомбардировки всего лишь на 10÷20 % от  $\sigma = 1$  (при пороговом СВЧ поле) в использованном диапазоне полей  $E_1$ .

Измеренные пороговые СВЧ поля (на рис. 4, 5 в [6]) нарастают с убыванием магнитного поля, незначительно отличаясь от теоретических. Наименьшая пороговая напряжённость СВЧ поля наблюдалась при  $\nu = 0,5$ :  $E_1^{\min} \simeq 6,5$  кВ/см (для меди и вольфрама). Расчёт из приближённого неравенства (10) даёт  $E_1^{\min} \simeq 5,8$  кВ/см. Если же совместить расчётное значение с измеренным, увеличив ориентировочную пороговую энергию бомбардировки на 10 %, то вся расчётная кривая для пороговой напряжённости  $E_1^{\min}(\nu)$  точно следует эксперименту, находясь между очень близкими кривыми для меди и вольфрама (рис. 5 в [6]).

Плотность тока  $j(\nu)$ , измеренная зондом в медной стенке, воспроизведена на рис. 4 по данным [6] для двух значений СВЧ поля, немного бóльших порогового ( $E_1^{\min} \simeq 6,5$  кВ/см). Общий вид этих зависимостей хорошо объясняется развитой здесь теорией (см. рис. 2). Однако края зоны в эксперименте несколько смещены в сторону бóльших значений  $\nu$ , хотя это различие быстро убывает с ростом СВЧ поля (от 8,5 до 11,2 кВ/см; при бóльших СВЧ полях данных в [6] нет). Согласно (10) пороговое СВЧ поле для  $\nu \leq 0,42$  выше максимального в эксперименте ( $E_1 = 11,2$  кВ/см), поэтому левая приграничная часть зоны разряда и не могла быть обнаружена («срыв» зависимостей на рис. 4 при  $\nu \leq 0,42$ ).

Измеренная зондом плотность тока примерно на порядок меньше теоретической величины

$$j = eN_s c / \lambda \quad (19)$$

для насыщенного разряда с плотностью электронов  $N_s$  (18). Последнее обстоятельство, а также наблюдавшийся переход через максимум тока с ростом СВЧ поля (рис. 4 в [6]) определённо свидетельствуют, что режим полного насыщения в волноводе не достигался. Разряд усиливался вдоль волновода на конечной длине бомбардируемой мишени в стенке волновода в процессе дрейфа электронов в скрещенных полях. Резонансные электроны перемещаются за каждый период на расстояние

$$\Delta y = \frac{2eE_1 \cos T_{0r}}{m\omega^2\nu(1-\nu^2)} = \frac{2|V_b|}{\Omega}, \tag{20}$$

как следует из (2), (3) и (9). Такое смещение электронов вдоль волновода за каждый период составляет  $\Delta y \approx 0,06$  см при  $E_1 \approx 11,2$  кВ/см, а для насыщения разряда требуется несколько десятков циклов размножения [7, 9]. В эксперименте имело место «уменьшение числа циклов размножения на исследуемой поверхности» (так отмечено авторами [6]) из-за конечной длины мишени, из-за чего и не удалось, по всей видимости, исследовать разряд в сильных СВЧ полях, достаточных для наблюдения разряда в левой части зоны (где  $\nu < 0,42$ ). Теория же строится для практически важных ситуаций, когда интенсивность разряда не зависит от координаты дрейфа (например, в системах с аксиальной симметрией и осевым магнитным полем), где время развития разряда не ограничено длиной участка размножения электронов на поверхности.

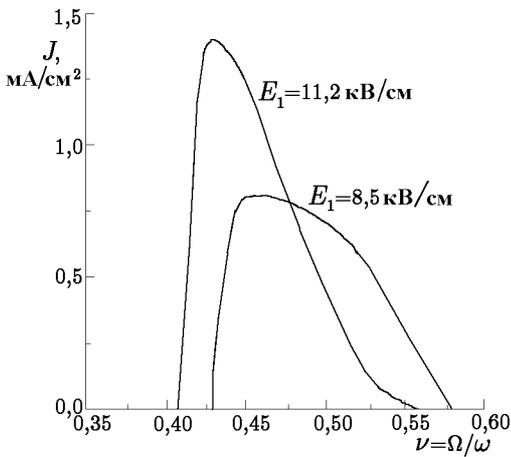


Рис. 4

Можно ещё отметить, что с приближением к нижней границе зоны на динамику разряда может повлиять отклонение от идеализации равномерной бомбардировки и эмиссии электронов из-за значительного расширения сгустков (рис. 3). В этих режимах уточнённый анализ должен основываться на более детальной модели группирования электронов (возможно, с учётом и кинетической дефокусировки).

Наблюдаемое возникновение разряда при  $\nu > 0,5$  (запрещённое принятой моделью разряда) следует объяснять, как уже отмечалось в [5–7], влиянием разброса начальных скоростей эмитируемых электронов. Ряд общих положений о кинетическом разбросе в теории мультипактора содержится в [8]\* (включая критерий группировки электронов вблизи невозмущённой разбросом устойчивой фазы), но

эти положения не объясняют особенностей наблюдаемых характеристик [5, 6, 10].

7. Для анализа влияния разброса начальных скоростей электронов на характеристики мультипактора можно обратиться к оценочным расчётам. Эмиссионная скорость  $V_0$  обуславливает небольшую добавку к смещению каждого электрона (2) в виде

$$\Delta x = \frac{V_{0x}}{\omega\nu} \sin(\nu\tau) - \frac{V_{0y}}{\omega\nu} [1 - \cos(\nu\tau)] = \frac{a}{\nu} \{ \delta_x \sin(\nu\tau) - \delta_y [1 - \cos(\nu\tau)] \}. \tag{21}$$

Здесь и далее используются отношения составляющих начальной скорости к «средней» скорости  $\omega a$  (см. (П.10) в Приложении)

$$\delta_{x,y} = (V_0)_{x,y} / \omega a. \tag{22}$$

Эти величины убывают с ростом СВЧ поля (параметра  $a$ ), а наиболее вероятные их значения заметно меньше единицы согласно (П.11) уже при пороговом СВЧ поле (10).

Кинетический разброс можно оценить из дисперсии моментов бомбардировки по среднему квадратичному отклонению от средней фазы электронов за время пролёта. Распределение электронов вторичной эмиссии по скоростям близко к максвелловскому с наиболее вероятной энергией в потоке  $W_m \approx 3$  эВ, а по углу  $\theta$  от нормали (т. е.  $V_{0x} = V_0 \cos \theta$ ) оно близко к «косинусоидальному» (см. Приложение, где приведены средние составляющих скорости, средние их квадратов и разброса (П.10)).

\* В [8] представлены актуальные результаты по теории двухстороннего мультипактора в скрещенных полях, но приведённый материал по одностороннему мультипактору выглядит в основной своей части вторичным из-за отсутствия библиографических ссылок и комментариев полученных ранее результатов.

Резонанс с учётом начальных скоростей предполагает наличие средней фазы поля  $\overline{T_0}$ , в окрестности которой располагаются фазы эмитируемых электронов. С ростом СВЧ поля эта фаза стремится к известной (4):  $\overline{T_0} \rightarrow T_{0r}$  при  $\delta_{x,y} \rightarrow 0$ . Можно определить  $\overline{T_0}$  как фазу электрона с усреднённой начальной скоростью (П.10) и временем пролёта  $\tau = 2\pi$  и рассчитать среднюю фазу из условия такого резонанса с учётом (21):

$$\overline{T_0} = \operatorname{arctg} \frac{1}{\nu \operatorname{tg}(\pi\nu)} + \operatorname{arcsin} \frac{\overline{\delta_x}(1 - \nu^2) \operatorname{ctg}(\pi\nu)}{\sqrt{\nu^2 + \operatorname{ctg}^2(\pi\nu)}}. \quad (23)$$

Параметр начальной скорости  $\overline{\delta_x}$  определяется согласно (П.11). Средние фазы  $\overline{T_0}$  (в сравнении с  $T_{0r}$ ) приведены в табл. 2 как для параметров цитируемого эксперимента [6] ( $E_1 = 8,5$  кВ/см,  $\lambda = 3$  см, см. рис. 4), так и для много большего поля  $E_1 = 40$  кВ/см в пределах условий возникновения разряда (10).

Вблизи границ зоны, где заряд сгустка и кулоновская дефокусировка невелики, кинетический разброс может заметно повлиять на образование сгустков: сместить несколько вверх по  $\nu$  нижнюю границу зоны (в сторону более интенсивной СВЧ фокусировки), а также сместить верхнюю границу выше  $\nu = 0,5$  (за счёт попадания в разряд электронов в тормозящей начальной фазе  $T_0 < 0$ ). Эти эффекты ослабевают по мере нарастания СВЧ поля.

Оценить кинетическую дефокусировку можно по разбросу времени пролёта электронов, эмитированных в средней фазе (23). Для этого достаточно в первом приближении по параметру  $\delta < 1$  взять отношение разброса по координате  $x$  (21) за время  $\tau \simeq 2\pi$  к средней скорости бомбардировки (9) с учётом (П.11) (см. табл. 2):

$$\psi_k = \sqrt{\Delta T_b^2 - (\Delta T_b)^2} \simeq \frac{(1 - \nu^2) \sin(\pi\nu)}{\nu \cos \overline{T_0}} \sqrt{(\overline{\delta_x^2} - (\overline{\delta_x})^2) \cos^2(\pi\nu) + \overline{\delta_y^2} \sin^2(\pi\nu)}. \quad (24)$$

Хотя величина кинетического разброса  $\psi_k$  убывает с ростом  $\nu$  внутри зоны, отношение  $\psi_k$  к определённой выше ширине сгустка  $\psi$  (см. рис. 3) при этом увеличивается. Вблизи края «идеальной» зоны (см. рис. 2), где кулоновские поля ослабевают, особенности реальных характеристик разряда можно объяснить только с учётом кинетического разброса.

Таблица 2

$\nu$	0,38	0,43	0,47	0,500	0,52	0,54	0,56	0,58	0,60
$T_{0r}$	0,805	0,479	0,198	0,000	-0,120	-0,230	-0,328	-0,417	-0,496
$\overline{T_0}, E_1 = 40$ кВ/см	0,859	0,512	0,212	0,000	-0,128	-0,244	-0,347	-0,440	-0,523
$\psi_k, E_1 = 40$ кВ/см	0,164	0,130	0,105	0,092	0,087	0,082	0,078	0,075	0,072
$\overline{T_0}, E_1 = 8,5$ кВ/см	1,060	0,633	0,261	0,000	-0,156	-0,296	-0,419	-0,526	-0,621
$\psi_k, E_1 = 8,5$ кВ/см	1,254	0,631	0,493	0,434	0,410	0,394	0,381	0,370	0,359

При пороговых СВЧ полях, когда коэффициент размножения электронов близок к единице, разряд может развиваться только без существенной потери частиц на каждом цикле — почти все эмитированные электроны не должны возвращаться к поверхности на начальных участках траектории. Возврату к поверхности способствуют тормозящие СВЧ поля в окрестности средней фазы при  $\nu > 0,5$ , а также сила, действующая со стороны магнитного поля на электроны с начальными скоростями  $V_{0x} > 0$ . Поэтому следует рассмотреть движение электронов с разными начальными скоростями на небольшом интервале времени после вылета. Из (2), (21) для времён пролёта  $\tau \leq 1$  следует

$$\frac{x}{a} \simeq \cos T_0 \frac{\tau^3}{6} + (\sin T_0 - \nu \delta_y) \frac{\tau^2}{2} + \delta_x \tau \geq 0. \quad (25)$$

Вначале удаление от поверхности определяется эмиссионной скоростью (параметр  $\delta_x$ ). Затем движение может замедлиться при начальных фазах  $T_0 < 0$  и даже может быть направлено в сторону поверхности под действием отмеченных выше сил (член с  $\tau^2$ ). Но поскольку с ростом  $\tau$  электроны переходят из области замедления в область ускорения через  $T = 0$ , то при достаточно быстром изменении поля они могут не отсестаться на поверхности, а инжектироваться в разряд (член с  $\tau^3$ ). Согласно (25) в развивающемся разряде удерживается часть электронов, у которых начальная фаза не слишком отрицательна:

$$\sin T_0 \geq \nu \delta_y - \sqrt{\frac{8}{3} \delta_x \cos T_0}. \quad (26)$$

Можно лишь приближённо использовать понятие критической фазы [5], определяемой по моменту вылета «граничного электрона», т. к. отсев различных электронов из разряда сильно зависит от их индивидуальных скоростей эмиссии и фазы вылета. Некоторую роль может сыграть и кулоновское поле, дающее в правой части (26) небольшую добавку порядка  $q(\nu)$  при насыщении. Наличие составляющих скоростей  $\delta_y > 0$  также способствует отсеvu.

Чтобы проиллюстрировать сказанное и объяснить возможные отличия реальных характеристик, приведём простейшие оценки. Попадание в разряд электрона со средней фазой (23) и средней эмиссионной скоростью является обязательным. Такие электроны даже при больших полях  $E_1 = 40$  кВ/см могут инжектироваться в разряд вплоть до  $\overline{T_0} = -0,458$  согласно (26), т. е. при  $\nu \leq 0,59$  (см. табл. 2). Однако для развития разряда этого недостаточно. В разряд должны попадать почти все эмитированные электроны (коэффициент вторичной эмиссии  $\sigma$  обычно немного больше единицы). Выполнить суммирование по электронам с разными фазами и скоростями весьма трудно. Можно ограничиться рассмотрением электронов с меньшими шансами на попадание в разряд (26), выбрав для этого всё же довольно представительную группу со скоростями, отличными от средних на величину разброса:  $\delta_x = \overline{\delta_x} - \sqrt{D\delta_x}$ ;  $\delta_y = \sqrt{D\delta_y}$  (см. (П.10), (П.11)). При больших полях  $E_1 = 40$  кВ/см такие электроны попадают в разряд, если  $T_0 \geq -0,29$ , а при  $E_1 = 8,5$  кВ/см — если  $T_0 \geq -0,47$ . Естественно, если бы все эти электроны эмитировались близко к средней фазе  $\overline{T_0}$ , это означало бы перемещение верхней части зоны от  $\nu \leq 0,54$  до  $\nu \leq 0,57$  с ослаблением поля. Кинетический разброс (24) может несколько скорректировать такую картину, т. к. электроны, вылетевшие позднее  $\overline{T_0}$ , легче инжектируются в разряд, а более ранние — труднее. Однако приведённые здесь оценки уже хорошо согласуются с данными эксперимента (см. рис. 4).

8. Расчёт рассеиваемой при бомбардировке мощности, исходя из скорости удара (9), числа электронов (18) и частоты следования сгустков, даёт по аналогии с [4, 7] десятки и даже сотни киловатт на  $1 \text{ см}^2$  поверхности для  $\lambda = 3$  см. Такой разряд инициирует пробойные механизмы с нарастанием плотных плазменных образований (за сотни и даже десятки наносекунд) по сценарию, намеченному в [4] и приближённо рассчитанному в [3]. Время развития мультипактора может быть оценено как в [7, 9] и составляет несколько десятков периодов СВЧ поля при обычных для металлов коэффициентах вторичной эмиссии  $\sigma = 1,2 \div 1,5$ .

Полученные результаты вскрывают основные процессы в одностороннем мультипакторе в скрещенных полях и позволяют находить характеристики разряда в конкретных ситуациях.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 98–02–17665.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Для анализа воздействия кинетического разброса вторичных электронов на разряд желательно ввести систему оценок статистических параметров эмиссии в удобной форме (в известной литературе такая система не обнаруживается). Согласно [10–12] распределение вторичных электронов близко к максвелловскому с наиболее вероятной энергией в потоке  $W_m \approx 2 \div 4$  эВ. Применяемый метод измерений с задержкой электронов в тормозящем поле даёт функцию распределения потока вторичных

электронов, которой соответствует максвелловское описание (см. ниже) с наиболее вероятной энергией  $W_m \equiv eU_m = k_B T_e$ , где  $k_B$  — постоянная Больцмана,  $T_e$  — эффективная температура). Также известно, что в отличие от термоэлектронной эмиссии, обладающей равновероятным разлётом по направлениям, распределение вторичных электронов по углу отклонения от нормали  $\theta$  носит «косинусоидальный» характер: регистрируемый поток внутри апертуры анализатора (фиксированного телесного угла) пропорционален  $\cos \theta$  (при не очень больших углах бомбардировки первичными электронами).

Для равновероятного по направлениям движения функцию распределения Максвелла в сферической системе координат можно представить в виде [13]:

$$\frac{dN(u, \varphi, \theta)}{N} = \frac{u^2}{\pi^{3/2}} \exp(-u^2) \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \, du, \quad (\text{П.1})$$

где

$$u = V_0 \sqrt{\frac{m}{2k_B T_e}}, \quad u_x = u \cos \theta, \quad u_y = u \sin \theta \cos \varphi, \quad u_z = u \sin \theta \sin \varphi. \quad (\text{П.2})$$

Интегральное по полярному и азимутальному углам распределение принимает вид

$$\frac{1}{N} \frac{dN}{du} = \frac{4u^2}{\pi^{1/2}} \exp(-u^2). \quad (\text{П.3})$$

В случае разлёта частиц в полупространство через эмитирующую плоскость следует ввести в функцию (П.1) соответствующий множитель  $g(\theta)$  с такой нормировкой, чтобы выполнялось соотношение (П.3) для интегрального по углам распределения:

$$\frac{dN(u, \varphi, \theta)}{N} = \frac{g(\theta)u^2}{\pi^{3/2}} \exp(-u^2) \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \, du. \quad (\text{П.4})$$

Так, статистические параметры термоэмиссии получаются при введении

$$g(\theta) = \begin{cases} 2, & 0 \leq \theta < \pi/2; \\ 0, & \pi/2 \leq \theta \leq \pi. \end{cases} \quad (\text{П.5})$$

Например,  $\overline{V_{0x}} = \sqrt{2k_B T_e / \pi m} = \overline{V_0} / 2$ . В случае вторичной эмиссии можно ввести множитель, обеспечивающий «косинусоидальную» зависимость элементов потока от угла их наклона:

$$g(\theta) = \begin{cases} 4 \cos \theta, & 0 \leq \theta < \pi/2; \\ 0, & \pi/2 \leq \theta \leq \pi, \end{cases} \quad (\text{П.6})$$

так что для электронов вторичной эмиссии в полусфере их разлёта имеет место распределение

$$\frac{dN(u, \varphi, \theta)}{N} = \frac{4u^2}{\pi^{3/2}} \exp(-u^2) \sin \theta \cos \theta \, d\theta \, d\varphi \, du. \quad (\text{П.7})$$

Отсюда для оценки основных статистических параметров анизотропного потока вторичных электронов, включая дисперсию начальных скоростей  $D(V_0)_{x,y}$  и их разброс  $\sqrt{D(V_0)_{x,y}}$ , получаются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \overline{u_x} &= \frac{4}{3\sqrt{\pi}}, \quad \overline{u_y} = \overline{u_z} = 0, \quad \overline{u_x^2} = \frac{3}{4}, \quad \overline{u_y^2} = \overline{u_z^2} = \frac{3}{8}; \\ \overline{V_{0x}} &= \sqrt{\frac{32k_B T_e}{9\pi m}} = 1,064 \sqrt{\frac{k_B T_e}{m}}, \quad \sqrt{\overline{V_{0x}^2}} = \sqrt{\frac{3k_B T_e}{2m}} = 1,225 \sqrt{\frac{k_B T_e}{m}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{DV_{0x}} &= \sqrt{V_{0x}^2 - (\overline{V_{0x}})^2} = 0,607 \sqrt{\frac{k_B T_e}{m}}; \\ \overline{V_{0y}} &= 0, \quad \sqrt{DV_{0y}} = \sqrt{V_{0y}^2} = \sqrt{\frac{3k_B T_e}{4m}} = 0,866 \sqrt{\frac{k_B T_e}{m}}.\end{aligned}\quad (\text{П.8})$$

В задачах электроники чаще используют несколько иной способ усреднения — не по концентрации, а по потоку эмитированных электронов:  $dJ = u_x dN = u \cos \theta dN$ . При этом для равновероятной по направлению (термоэлектронной) эмиссии получается средняя скорость  $\overline{V_x} = \sqrt{\pi k_B T_e / m}$ , которая в  $4/\pi$  раз больше, чем при усреднении по концентрации. Другие характеристики также немного уточняются. Нормированная функция распределения вторичных электронов по плотности эмиссионного тока имеет несколько другой по сравнению с (П.4) вид:

$$\frac{dJ(u, \varphi, \theta)}{J} = \frac{3}{\pi} u^3 \cos^2 \theta \exp(-u^2) \sin \theta d\theta d\varphi du, \quad (\text{П.9})$$

а статистические параметры становятся следующими:

$$\begin{aligned}\overline{u_x} &= \frac{9\sqrt{\pi}}{16}, \quad \overline{u_y} = \overline{u_z} = 0, \quad \overline{u_x^2} = \frac{6}{5}, \quad \overline{u_y^2} = \overline{u_z^2} = \frac{2}{5}; \\ \overline{V_{0x}} &= \sqrt{\frac{81\pi k_B T_e}{144m}} = 1,329 \sqrt{\frac{k_B T_e}{m}}, \quad \sqrt{V_{0x}^2} = \sqrt{\frac{12k_B T_e}{5m}} = 1,549 \sqrt{\frac{k_B T_e}{m}}, \\ \sqrt{DV_{0x}} &= \sqrt{V_{0x}^2 - (\overline{V_{0x}})^2} = 0,796 \sqrt{\frac{k_B T_e}{m}}; \\ \overline{V_{0y}} &= 0, \quad \sqrt{DV_{0y}} = \sqrt{V_{0y}^2} = \sqrt{\frac{4k_B T_e}{5m}} = 0,894 \sqrt{\frac{k_B T_e}{m}}.\end{aligned}\quad (\text{П.10})$$

Отсюда статистические параметры для введённых в (22) безразмерных величин  $\delta_{x,y} = V_{x,y}/(\omega a)$  выражаются через потенциал  $U_m$ , длину волны и напряжённость СВЧ поля и численные коэффициенты  $\alpha_{x,y}$  порядка единицы:

$$\delta_{x,y} = \frac{V_{x,y}}{\omega a} = \frac{\alpha_{x,y}}{\omega a} \sqrt{\frac{k_B T_e}{m}} = \alpha_{x,y} \frac{2\pi}{\lambda E_1} \sqrt{\frac{mc^2}{e}} U_m \approx \alpha_{x,y} \frac{7,8}{\lambda E_1 [\text{кВ}]}. \quad (\text{П.11})$$

Интегральное распределение потока по скоростям и по энергии  $W = mV_0^2/2 = u^2 k_B T_e$  имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{dJ}{J} &= 2u^3 \exp(-u^2) du = \frac{W}{(k_B T_e)^2} \exp\left(-\frac{W}{k_B T_e}\right) dW; \\ W_m &= k_B T_e, \quad \overline{W} = 2k_B T_e, \quad \sqrt{\overline{W^2}} = \sqrt{6} k_B T_e, \quad \sqrt{DW} = \sqrt{2} k_B T_e.\end{aligned}\quad (\text{П.12})$$

По данным измерений наиболее вероятной энергии  $W_m \equiv eU_m = k_B T_e$ , согласно [10–12], соответствует  $eU_m = 2 \div 4$  эВ, так что скорость  $\sqrt{k_B T_e / m} = (6 \div 8,5) \cdot 10^7$  см/с. Для оценочного расчёта необходимых в анализе величин  $\delta_{x,y}$  из (П.11) выбрано среднее значение  $U_m = 3$  В.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Сливков И. Н. Процессы при высоком напряжении в вакууме. М.: Энергоатомиздат, 1986. 256 с.
2. Vaughan J. R. M. // IEEE Trans. on Electr. Dev. 1988. V. 35, № 7. P. 1172.
3. Kovalev N. F., Nechaev V. E., Petelin M. I., Zaitsev N. I. // IEEE Trans. Plasma Sci. 1998. V. 36, No 3. P. 246.
4. Александров А. Ф., Бляхман Л. Г., Галузо С. Ю., Нечаев В. Е. // Релятивистская высокочастотная электроника: Сб. научн. тр. Горький: ИПФ АН СССР, 1983. Вып. 3. С. 219.
5. Gaddy O. L., Holshauser D. F. // Proc. IEEE. 1963. V. 51, № 1. P. 192.
6. Ганичев Д. А., Филатов В. А., Фридрихов С. А. // Радиотехника и электроника. 1972. Т. 17, № 8. С. 1639.
7. Бляхман Л. Г., Нечаев В. Е. // ЖТФ. 1984. Т. 54, № 11. С. 2163.
8. Riyopoulos S., Chernin D., Dialetis D. // Phys. Plasmas. 1995. V. 2, № 8. P. 3194.
9. Горшкова М. А., Нечаев В. Е. // Изв. вузов. Радиофизика. 1999. Т. 42, № 11. С. 1097.
10. Брюнинг Г. Физика и применение вторично-электронной эмиссии. — М.: Сов. радио, 1958.
11. Физическая энциклопедия. — М.: Сов. энциклопедия, 1988. — Т. 1. С. 355.
12. Радиофизическая электроника /Под ред. Н. А. Капцова. — М.: Изд. МГУ, 1960. С. 148.
13. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. — М.: Наука, 1964.

Институт прикладной физики РАН,  
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию  
11 июля 2000 г.

## SATURATION OF ONE-SIDED MULTIPACTOR IN CROSSED FIELDS

*L. G. Blyakhman, M. A. Gorshkova, and V. E. Nechaev*

We present the analysis of the saturation mechanism of a vacuum resonance RF discharge (multipactor) for systems in which a magnetostatic field returns electrons to the metal surface with secondary-emission multiplying. The steady-state model suggested earlier is improved essentially. In particular, we account for the near-surface interaction of saturated electron bunches during a limited time of discharge-electron impact. It is found that the Coulomb defocusing of the electron bunches dominates over their RF focusing (toward the resonant phase of the field) to such an extent that bunch reproduction with necessary cut-off of the superfluous secondary electrons takes place on the surface. Basic characteristics of the discharge, such as its existence conditions and proper fields and phase boundaries of the resonance electron bunches, are determined as functions of the magnetostatic field and secondary-emission yield. The results are discussed in comparison with the data of known experiments. The reasons of some differences related to both the observation conditions and the used analytical model are explained.

УДК 621.391.822

## КОРРЕЛЯЦИЯ МЕЖДУ ИНТЕНСИВНОСТЯМИ СПЕКТРАЛЬНЫХ КОМПОНЕНТ $1/f$ ШУМА

*С. В. Макаров, С. Ю. Медведев, А. В. Якимов*

Анализируется оценка коэффициента корреляции между интенсивностями шума на выходах двух полосовых фильтров как параметр, позволяющий получить дополнительную информацию о природе  $1/f$  шума. Для экспериментальной оценки коэффициента корреляции между отсчетами интенсивностей шума вычисляется доверительный интервал. Приводятся и обсуждаются данные для шумов в плёнках GaAs, а также для численной модели  $1/f$  шума, представляющего собой суперпозицию телеграфных случайных процессов.

### ВВЕДЕНИЕ

Цель работы — поиск инструмента для выяснения природы  $1/f$  шума в проводящих материалах. Из методов, предназначенных для изучения природы фликкерных шумов (см., например, [1]), выбраны измерение интенсивности шума на выходе полосового фильтра и измерение коэффициента корреляции между интенсивностями шума на выходах двух полосовых фильтров. С помощью этих методов, ранее использованных Вейсманом [1], проверяется «нулевая гипотеза», т. е. гауссовость и стационарность исследуемого шума.

В работе [2] представлены результаты анализа погрешности измерения интенсивности фильтрованного фликкерного ( $1/f$ ) шума, которые показывают, что в плёнках GaAs и в других обследованных источниках такой шум не является стационарным гауссовым. Если допустить, что справедлива модель, связывающая фликкерный шум с точечными дефектами в образце [3, 4], то при небольшом количестве дефектов такой шум вполне может быть негауссовым. Изменение эффективного числа дефектов, а также их диффузия внутри образца могут привести к нестационарности шума. Таким образом, изучение статистических характеристик фликкерного шума может дать дополнительную информацию о механизме его возникновения.

В настоящей работе исследуется корреляция между интенсивностями спектральных компонент шума как один из возможных параметров, позволяющих получить дополнительную информацию о природе  $1/f$  шума в проводящих материалах. При проведении эксперимента используются два полосовых фильтра с неперекрывающимися частотными характеристиками. Поскольку экспериментальная оценка коэффициента корреляции является случайной величиной, то в работе [1] эмпирическим путём определяется доверительный интервал для указанной оценки с уровнем значимости 66 %.

Таким образом, в [1] используются оценки доверительного интервала, найденные на основе полученных экспериментальных оценок коэффициента корреляции, тогда как данные об истинной величине доверительного интервала отсутствуют. Это обстоятельство делает невозможным однозначную трактовку полученных результатов.

В работе [5] приводится выражение для требуемого доверительного интервала, полученное с использованием (как выяснилось позднее) неоправданно грубых упрощений.

В настоящей работе для указанной оценки вычисляется доверительный интервал с уровнем значимости 95 %. Если исследуемый шум стационарный гауссовый (выполняется нулевая гипотеза), то коэффициент корреляции между интенсивностями шума на выходах полосовых фильтров равен нулю. В этом случае экспериментальные оценки коэффициента корреляции рассеяны в окрестности

нуля, и примерно 95 % данных находится в области, ограниченной доверительным интервалом. Если же большая часть оценок находится вне интервала либо все оценки находятся внутри доверительного интервала, то исследуемый шум следует считать негауссовым и/или нестационарным.

### 1. ОЦЕНКА КОЭФФИЦИЕНТА КОРРЕЛЯЦИИ

Рассмотрим коэффициент корреляции между флуктуирующими интенсивностями шума, пропущенного через два полосовых фильтра с неперекрывающимися частотными характеристиками.

Исследуемый шум  $\xi(t)$ , обладающий нулевым статистическим средним  $\langle \xi(t) \rangle = 0$ , подаётся на входы двух полосовых фильтров, имеющих полосы пропускания  $\Delta f_1$  и  $\Delta f_2$ . Обозначим процессы на выходах полосовых фильтров как  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$ . Теоретический коэффициент корреляции  $R$  между интенсивностями процессов на выходах фильтров определяется следующим соотношением:

$$R(t) = \frac{\langle y_1(t) y_2(t) \rangle - \langle y_1(t) \rangle \langle y_2(t) \rangle}{\sqrt{(\langle y_1^2(t) \rangle - \langle y_1(t) \rangle^2) (\langle y_2^2(t) \rangle - \langle y_2(t) \rangle^2)}}. \quad (1)$$

Здесь  $y_{1,2}(t) = x_{1,2}^2(t)$  — текущие интенсивности процессов на выходах полосовых фильтров, угловыми скобками обозначено усреднение по ансамблю реализаций.

В эксперименте используется цифровая обработка сигналов. Кроме того, усреднение по ансамблю реализаций заменяется усреднением по времени. Поэтому оценка коэффициента корреляции происходит следующим образом.

Отрезок исследуемого шума, имеющий длительность  $T$ , подвергается быстрому преобразованию Фурье (БПФ). Например, для получения частотного разрешения  $df = 0,2$  Гц необходима длительность  $T = 1/df = 5$  с. Для получения  $N$  отсчётов обрабатываемая реализация должна иметь длину  $t = TN$ .

Полосовая фильтрация и вычисление оценок интенсивностей осуществляется путём суммирования интенсивностей компонент быстрого преобразования Фурье исследуемого шума, частоты которых попадают в требуемый диапазон шириной  $\Delta f_1$  или  $\Delta f_2$ . Обозначим отсчёты, соответствующие интенсивностям шумов на выходах первого и второго фильтров, как  $y_1(k)$  и  $y_2(k)$ . Для упрощения дальнейшего анализа пренебрежём дискретизацией шума, приняв, что значения отсчётов  $y_{1,2}(k)$  вычисляются путём интегрирования по периоду БПФ:

$$y_{1,2}(k) = \frac{1}{T} \int_{(k-1)T}^{kT} x_{1,2}^2(t') dt', \quad (2)$$

где  $k = 1, \dots, N$ .

Оценка  $\rho$  коэффициента корреляции имеет вид

$$\rho(n) = \frac{K(n) - P_1(n)P_2(n)}{\sqrt{W_1(n)W_2(n)}}. \quad (3)$$

Здесь

$$K(n) = \frac{1}{nm} \sum_{i=1}^n \sum_{k=(i-1)m+1}^{im} y_1(k)y_2(k) \quad (4)$$

— оценка корреляции между отсчётами интенсивностей шума на выходах фильтров,  $n = 1, \dots, N/m$  — текущий номер отсчёта,  $m$  — число промежуточных пар отсчётов интенсивности шума на выходах фильтров, используемых при каждой последующей оценке коэффициента корреляции.

Через  $P_1(n)$  и  $P_2(n)$  в (3) обозначены оценки средних интенсивностей шума на выходах фильтров:

$$P_j(n) = \frac{1}{nm} \sum_{i=1}^n \sum_{k=(i-1)m+1}^{im} y_j(k) = \frac{1}{nm} \sum_{k=1}^{nm} y_j(k), \quad (5)$$

$W_1(n)$  и  $W_2(n)$  — оценки дисперсии отсчётов интенсивностей шума:

$$W_j(n) = \frac{1}{nm} \sum_{i=1}^n \sum_{k=(i-1)m+1}^{im} [y_j^2(k) - P_j^2(n)], \quad (6)$$

где  $j = 1, 2$ .

Таким образом,  $\rho(n)$  является случайной функцией номера отсчёта  $n$ . Из выражений (4)–(6) видно, что для получения нового  $(n+1)$ -го отсчёта оценки (3) используется предыдущий отсчёт с номером  $n$  и новое промежуточное усреднение по  $m$  парам новых отсчётов интенсивностей (2). В частности, для оценок средних интенсивностей шума (5) имеет место рекуррентное соотношение

$$P_j(n+1) = \frac{1}{1+1/n} P_j(n) + \frac{1}{(n+1)m} \sum_{k=nm+1}^{(n+1)m} y_j(k), \quad (7)$$

где  $j = 1, 2$ .

При измерениях производится накопление отсчётов оценок коэффициента корреляции (3). Чем выше текущий номер оценки (3), тем выше ожидаемая точность указанной оценки.

Если шум стационарный гауссовый, то коэффициент корреляции (1) равен нулю, а его оценка (3) рассеяна в окрестности нуля. Следовательно, для интерпретации экспериментальных результатов необходимо вычисление доверительного интервала.

## 2. ДОВЕРИТЕЛЬНЫЙ ИНТЕРВАЛ

Найдём полуширину  $\Delta R$  доверительного интервала для оценки коэффициента корреляции (3) в приближении стационарного гауссового входного шума (приближение нулевой гипотезы).

Если выбран уровень значимости 95 %, то полуширина доверительного интервала равна удвоенному стандарту оценки коэффициента корреляции:  $\Delta R = 2\sigma_\rho$  [6]. Следовательно, необходимо найти дисперсию оценки (3).

Можно показать, что в числителе указанной оценки стоит величина, среднее значение которой равно нулю. Поэтому учёт случайности знаменателя даёт эффект второго порядка малости при  $nm \gg 1$ . Это означает, что статистическое среднее дроби в правой части (3) можно заменить отношением статистических средних числителя и знаменателя. В этом случае  $\langle \rho \rangle = 0$ , т. е. оценка (3) является несмещённой. Дисперсия оценки коэффициента корреляции представляет собой среднее от квадрата указанной оценки:  $\sigma_\rho^2 = \langle \rho^2 \rangle$ .

Проанализируем оценки средних интенсивностей (5) и их дисперсий (6). Можно показать, что оценка средних интенсивностей  $P_{1,2}(n)$  не смещена:

$$\langle P_j(n) \rangle = \sigma_{x_j}^2, \quad (8)$$

где  $\sigma_{x_j}^2$  — дисперсии процессов на выходах фильтров,  $j = 1, 2$ .

Оценка дисперсии имеет смещение, обусловленное тем, что вместо истинного среднего  $\sigma_{x_j}^2$  в (6) используется оценка  $P_j(n)$ :

$$\langle W_j(n) \rangle = \langle y_j^2 \rangle - \sigma_{x_j}^4 \left( 1 + \frac{1}{nm} \right) = \sigma_{y_j}^2 - \frac{\sigma_{x_j}^4}{nm}, \quad (9)$$

где  $\sigma_{yj}^2$  — дисперсии отсчётов интенсивностей шума на выходах фильтров,  $j = 1, 2$ .

Поскольку частотные характеристики фильтров не перекрываются, то некоррелируемость отсчётов (2) означает их статистическую независимость. В этом случае, если число обрабатываемых отсчётов  $nm$  намного превышает единицу, то флуктуациями оценок (5) и (6) в выражении (3), а также смещением оценки (6) можно пренебречь и использовать их статистические средние.

Учитывая приведённые выше результаты анализа оценок (5) и (6), найдём дисперсию оценки  $\rho$  коэффициента корреляции  $R$ :

$$\langle \rho^2 \rangle = \frac{\sigma_\beta^2}{\sigma_{y1}^2 \sigma_{y2}^2}. \quad (10)$$

Здесь  $\sigma_\beta^2 = \langle \beta^2 \rangle$  — дисперсия оценки ковариации

$$\beta(n) = \frac{1}{nm} \sum_{k=1}^{nm} y_1(k)y_2(k) - \sigma_{x1}^2 \sigma_{x2}^2 \quad (11)$$

между отсчётами интенсивностей шума на выходах фильтров.

Найдём дисперсию оценки  $\beta(n)$ . Учтём, что отсчёты интенсивностей (2) статистически независимы друг от друга. В результате получим

$$\sigma_\beta^2 = \frac{\sigma_{y1}^2 \sigma_{y2}^2}{nm}. \quad (12)$$

Подставляя выражение (12) в (10), найдём дисперсию оценки (3) и, следовательно, полуширину доверительного интервала с уровнем значимости 95 %:

$$\Delta R^2 = (2\sigma_\rho)^2 = \frac{4}{nm}, \quad n = 1, \dots, N/m. \quad (13)$$

Из соотношения (13) видно, что полуширина  $\Delta R$  доверительного интервала не зависит от параметров полосовых фильтров и определяется только числом используемых отсчётов  $nm$ . Аналогичное соотношение получено в [7] для оценки коэффициента корреляции между двумя статистически независимыми последовательностями чисел одинаковой длины, имеющих нормальное распределение.

Полученный результат не является неожиданным. Действительно, учитывая результаты анализа оценок (5) и (6), представим оценку (3) в следующем виде:

$$\rho(n) = \frac{1}{nm} \sum_{k=1}^{nm} q_1(k)q_2(k), \quad (14)$$

где

$$q_j(k) = \frac{y_j(k) - \sigma_{xj}^2}{\sqrt{\sigma_{yj}^2}} \quad (15)$$

— центрированные нормированные отсчёты интенсивностей шума на выходах фильтров, обладающие нулевым средним и единичной дисперсией:  $\langle q_j(k) \rangle = 0$ ,  $\sigma_{qj}^2 = 1$ ;  $j = 1, 2$ .

В приближении гауссового шума отсчёты (15) статистически независимы друг от друга. Если используется единичный отсчёт интенсивностей шума на выходах фильтров ( $n = 1$ ,  $m = 1$ ), то дисперсия оценки (14) представляет собой произведение дисперсий отсчётов (15), которые равны единице:

$$\langle \rho^2 \rangle = \sigma_{q1}^2 \sigma_{q2}^2 = 1. \quad (16)$$

Если же обрабатывается  $nm$  отсчётов, то дисперсия оценки (14) уменьшается в  $nm$  раз [8], что нашло своё отражение в (13).

Аналогичный вид имеет выражение для погрешности  $\varepsilon_P$  измерения интенсивности шума на выходе полосового фильтра, полученное в приближении нулевой гипотезы [2]:

$$\varepsilon_P^2 = \frac{1}{t \Delta f_x}. \quad (17)$$

Здесь  $t$  — длительность обрабатываемой реализации исследуемого шума,  $\Delta f_x$  — эффективная ширина спектра фильтрованного шума. В случае входного белого шума эффективная ширина спектра  $\Delta f_x$  совпадает с полосой пропускания фильтра  $\Delta f$ . Знаменатель в (17) представляет собой число обрабатываемых некоррелируемых отсчётов интенсивности шума на выходе полосового фильтра.

Особенность измерения интенсивности фильтрованного шума состоит в том, что при заданной длительности  $t$  обрабатываемой реализации точность измерений повышается только при увеличении полосы пропускания фильтра. С другой стороны, параметры фильтров не влияют на точность измерения коэффициента корреляции (1).

В случае измерения коэффициента корреляции между интенсивностями шума на выходах полосовых фильтров точность измерения можно повысить при фиксированной длительности  $t$ , применяя БПФ к возможно более коротким по длительности отрезкам шума. При этом необходимо учитывать, что чем короче длительность  $T$  отрезка исследуемого шума, подвергаемого БПФ, тем ниже частотное разрешение  $df = 1/T$ .

### 3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В работе [1] приводятся результаты измерений коэффициента корреляции между интенсивностями шума на выходах двух однооктавных полосовых фильтров для шумов различных резисторов. Использовались следующие источники низкочастотного шума: кремниевый резистор с подложкой из сапфира (SOS), висмутовый и ниобиевый резисторы, а также два углеродных резистора с сопротивлением 47 кОм и 100 кОм.

Результаты измерений представлены в виде нормированных ковариационных матриц. При обработке использовалось 1 024-точечное БПФ. Вычисление ковариационной матрицы осуществлялось путём обработки спектрограмм. Для вычисления отдельного элемента ковариационной матрицы выполнялось 100 преобразований для шума углеродного резистора с сопротивлением 100 кОм, в остальных случаях выполнялось 1 000 преобразований. Таким образом, полуширина (13) доверительного интервала составляла 20 % для углеродного резистора с сопротивлением 100 кОм и примерно 6,3 % для остальных резисторов.

Частотные диапазоны, в которых проводился анализ, охватывали как область теплового шума, так и область, в которой доминирует  $1/f$  шум [1]. Анализируя представленные ковариационные матрицы, можно обнаружить, что для углеродного резистора с сопротивлением 100 кОм практически все данные находятся вне области, ограниченной доверительным интервалом. Для остальных источников низкочастотного шума большая часть данных находится внутри этой области.

В работе [1] указывается, что углеродный резистор с сопротивлением 100 кОм имеет явно негауссовый шум, тогда как шумы остальных источников имеют гауссовую статистику. Однако шум углеродного резистора с сопротивлением 100 кОм мог быть нестационарным. Таким образом, для углеродного резистора с сопротивлением 100 кОм нулевая гипотеза не выполняется, тогда как для остальных источников низкочастотного шума, рассмотренных в [1], нулевая гипотеза выполняется.

В настоящей работе исследовалась корреляция между интенсивностями спектральных компонент низкочастотного шума эпитаксиальных плёнок  $n$ -GaAs, изготовленных в Эйнховенском технологическом университете (Нидерланды) [9]. Кроме того, исследовалась численная модель  $1/f$  шума [2].

В рамках гипотезы, связывающей возникновение  $1/f$  шума с наличием дефектов в твёрдом теле, существует модель, согласно которой каждый дефект формирует двухуровневую систему, т. е. имеет два метастабильных состояния [4]. Фликкерный шум создаётся ансамблем двухуровневых систем, имеющих широкое распределение средних времён пребывания в своих состояниях, и представляет собой суперпозицию телеграфных случайных процессов. Поэтому на основании модели двухуровневых систем здесь исследуется численная модель стационарного  $1/f$  шума, представляющего собой суперпозицию 1 024 телеграфных псевдослучайных процессов [2].

Измерения выполнялись с помощью специальной системы цифрового анализа сигналов [10]. Шум сначала записывался на жёсткий диск IBM PC. Длина записи ограничивалась только свободным местом на диске. Контролировались осциллограмма шума, его плотность вероятности и спектр, корреляция между интенсивностями шума на выходах полосовых фильтров, а также погрешность измерения интенсивности фильтрованного шума (см. [2]).

Для получения спектра использовалось 2 048-точечное БПФ. Спектр  $S(f)$  суперпозиции телеграфных процессов, моделирующей стационарный  $1/f$  шум, представлен на рис. 1 (линия 1). Во всей полосе частот, в которой производился анализ, наблюдается близкая к  $1/f$  зависимость. В свою очередь, спектр шума в эпитаксиальных плёнках (рис. 1, линия 2) имел  $1/f$  тип на частотах ниже 20 Гц и плато, обусловленное тепловым шумом плёнки (линия 3), на более высоких частотах.

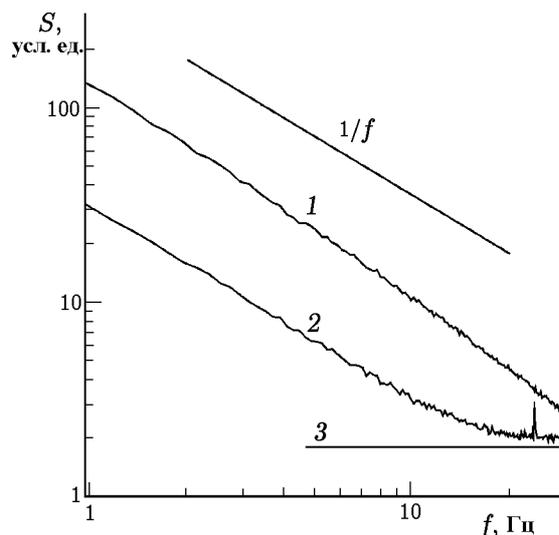


Рис. 1

Перейдём к анализу корреляции между интенсивностями шума на выходах полосовых фильтров. Из соотношения (13) следует, что уменьшения дисперсии оценки коэффициента корреляции (3) можно добиться только за счёт увеличения числа отсчётов  $N = nm$ . Для этого необходимо увеличение длины реализации  $t$  либо уменьшение длительности  $T$  отрезка шума, к которому применяется БПФ. Поэтому при анализе коэффициента корреляции между отсчётами интенсивностей шума в плёнках GaAs, а также суперпозиции псевдослучайных телеграфных процессов использовалось «укороченное» 256-точечное БПФ.

На рис. 2 и 3 представлены результаты анализа шума эпитаксиальных плёнок GaAs, полученные по 22-м реализациям. Длина одной реализации составляет около 410 с. По оси абсцисс отложен текущий номер отсчёта  $n$ . Использовалось  $m = 4$  промежуточных отсчётов. Ось ординат представляет оценки коэффициента корреляции. Две сплошные симметричные линии ограничивают доверительный интервал, внутрь которого должны попадать отсчёты для стационарного гауссового шума.

В первом случае (рис. 2) полосы пропускания фильтров составляют [64; 67,2] Гц и [70,4; 78,4] Гц, т. е. находятся в области теплового шума. Из рисунка видно, что большая часть данных находится внутри области, ограниченной доверительным интервалом. Этот результат свидетельствует о том, что тепловой шум плёнки можно считать стационарным гауссовым, а экспериментальную методику правильной.

Во втором случае (рис. 3) полосы пропускания фильтров составляют [1,6; 4,8] Гц и [8; 16] Гц, т. е. находятся в области, где доминирует  $1/f$  шум. При этом полосы пропускания имеют такую же вели-

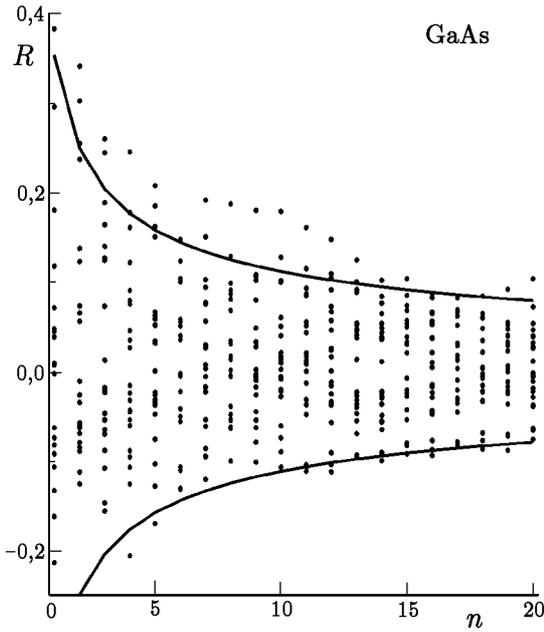


Рис. 2

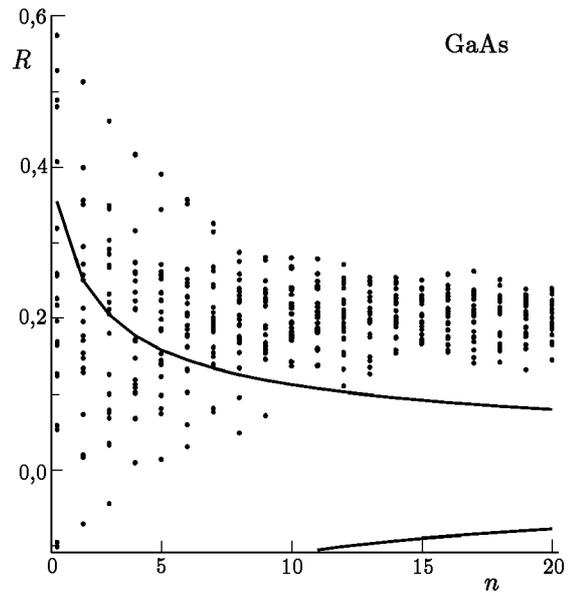


Рис. 3

чину, как в первом случае. Здесь бóльшая часть данных находится вне области, ограниченной доверительным интервалом. Оценка коэффициента корреляции имеет явную тенденцию к положительным значениям, что может быть обусловлено нестационарностью или негауссовостью исследуемого шума.

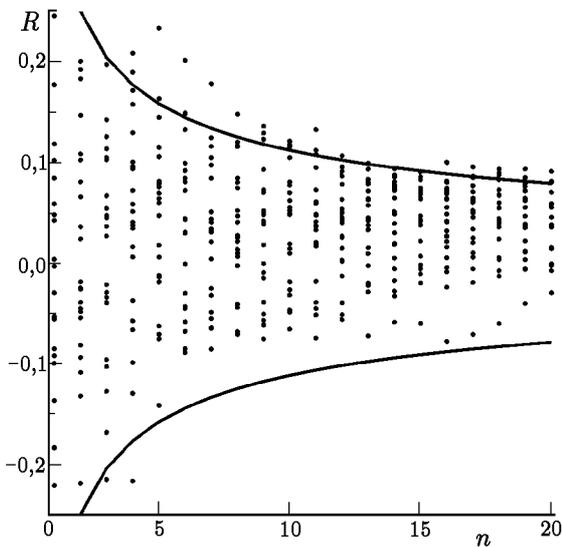


Рис. 4

На рис. 4 представлены результаты анализа суперпозиции псевдослучайных телеграфных процессов, моделирующей стационарный  $1/f$  шум. Полосы пропускания фильтров выбирались такими же, как для рис. 3. Здесь примерно 95 % данных находится внутри области, ограниченной доверительным интервалом, что означает выполнение нулевой гипотезы для исследованной модели  $1/f$  шума. Однако анализ погрешности измерения интенсивности такого шума на выходе полосового фильтра позволил выявить его существенную негауссовость [2].

Таким образом, оценка коэффициента корреляции менее чувствительна к негауссовости, чем оценка погрешности измерения интенсивности фильтрованного шума. Тенденция оценки коэффициента корреляции к положительным значениям представляет собой особенность, присущую низкочастотному шуму в плёнках GaAs, которая, по-видимому, указывает на его нестационарность.

**ВЫВОДЫ**

1. Проанализирован метод исследования негауссовости шума, основанный на анализе корреляции между интенсивностями его спектральных компонент. В приближении стационарного гауссова шума

найдена полуширина доверительного интервала для экспериментальной оценки коэффициента корреляции между отсчётами интенсивностей шума на выходах двух полосовых фильтров с неперекрывающимися частотными характеристиками.

2. С целью повышения точности для такого метода целесообразно использовать «укороченные» БПФ. Показано, что рассмотренный метод менее чувствителен к негауссовости, чем метод анализа погрешности измерения интенсивности фильтрованного шума.

3. Исследованы фликкерные шумы плёнок GaAs. Обнаружена тенденция оценки коэффициента корреляции к положительным значениям, которая может быть обусловлена нестационарностью исследуемых шумов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 00–15–96620) и отделения науки НАТО, программа «Наука для мира» (грант SfP-973799 Semiconductors, <http://www.rf.unn.runnet.ru/NATO/index.html>).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Restle P. J., Weissman M. B., Black R. D. // J. Appl. Phys. 1983. V. 54, № 10. P. 5844.
2. Макаров С. В., Медведев С. Ю., Якимов А. В., Феррантэ Г., Мичели В., Принчипато Ф. // Изв. вузов. Радиофизика. 1999. Т. 42, № 3. С. 278.
3. Коган Ш. М. // УФН. 1985. Т. 145, № 2. С. 285.
4. Oglov V. B., Yakimov A. V. // Physica B. 1990. V. 162. P. 13.
5. Медведев С. Ю., Якимов А. В. // Вестник Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского. Материалы, процессы и технология электронной техники. — Н. Новгород: ННГУ, 1994. — С. 127.
6. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. — М.: Физматлит, 1962.
7. Крамер Г. Математические методы статистики. — М.: Мир, 1975.
8. Новицкий П. В., Заграф И. А. Оценка погрешности результатов измерений. — Л.: Энергоатомиздат, 1991.
9. Chen X. Y., Aninkevičius V. // Proc. 7th Vilnius Conf. Fluctuation Phenomena in Physical Systems. Vilnius University Press, 1994. P. 260.
10. Medvedev S. Yu., Pashev A. G., Yakimov A. V. // Proc. 7th Vilnius Conf. Fluctuation Phenomena in Physical Systems. Vilnius University Press, 1994. P. 350.

Нижегородский госуниверситет,  
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию  
6 сентября 2000 г.

#### CORRELATION BETWEEN THE INTENSITIES OF SPECTRAL COMPONENTS OF $1/f$ NOISE

*S. V. Makarov, S. Yu. Medvedev, and A. V. Yakimov*

We analyze the estimate for the correlation factor between noise intensities at the outputs of two band-pass filters as a parameter that allows one to get an additional information on the nature of the  $1/f$  noise. The confidence interval is calculated for the experimental evaluation of the correlation factor between read-outs of noise intensities. We present and discuss the data on the noise in GaAs films and also for the numerical model of the  $1/f$  noise as a superposition of telegraph random processes.

*S. V. Makarov, S. Yu. Medvedev, A. V. Yakimov*

1023