

**ОПЕЧАТКА К № 10 ЗА 2000 г.**

В журнале "Изв. вузов. Радиофизика" № 10 за 2000 г. была сделана следующая опечатка:

стр. 861, выражение  $\Delta f_{e_i} = \Delta f_{e_i} - \Delta f_{e_{i-1}}$  следует заменить на  $\Delta f_{e_i} = f_{e_i} - f_{e_{i-1}}$ .

Содержание

- Куркин В. И., Носов В. Е., Матюшонок С. М., Литовкин Г. И., Иванов В. А., Шумаев В. В., Батухтин В. И., Егошин А. Б., Иванов Д. В., Колчев А. А., Рябова Н. В., Чернов А. Г., Урядов В. П., Понятов А. А., Розанов С. В., Поддельский Н. П., Поддельский И. Н. Особенности распространения кругосветных сигналов на трассах российской сети ЛЧМ-ионозондов в годы низкой и средней солнечной активности ..... 843
- Михайлов С. Я. Многозначность восстановления профилей плазменной частоты по заданной высотно-частотной характеристике и их различимость для наклонного распространения коротких радиоволн в изотропной ионосфере ..... 855
- Моисеев С. Н. Теоретическое описание вероятностей экранировок и отражений от слоя  $E_s$  ..... 873
- Заборонкова Т. М., Коган Л. П., Тамойкин В. В. К вопросу о распространении электромагнитных волн в полупространстве с криволинейной импедансной границей ..... 880
- Егорченков Р. А., Кравцов Ю. А. Описание дифракции супергауссовских пучков на основе комплексной геометрической оптики ..... 888
- Байкова А. Т. Метод Ньютона—Рафсона и устойчивость нелинейных информационных методов восстановления изображений ..... 895
- Власов С. Н., Копосова Е. В., Паршин В. В. Полная трансформация электромагнитной волны, падающей на гофрированную границу прозрачных диэлектриков, в проходящую волну  $(-1)$ -й гармоники ..... 908
- Артёменко С. Н., Августинович В. А., Юшков Ю. Г. Последовательная компрессия СВЧ импульсов в системе связанных резонаторов ..... 917
- Захарченко В. Д. Интегральный критерий узкополосности радиотехнических сигналов ..... 923
- Костылев В. И. Характеристики энергетического обнаружения квазидетерминированных радиосигналов ..... 926

УДК 550.388.2

## ОСОБЕННОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ КРУГОСВЕТНЫХ СИГНАЛОВ НА ТРАССАХ РОССИЙСКОЙ СЕТИ ЛЧМ-ИОНОЗОНДОВ В ГОДЫ НИЗКОЙ И СРЕДНЕЙ СОЛНЕЧНОЙ АКТИВНОСТИ

*В. И. Куркин*<sup>1</sup>, *В. Е. Носов*<sup>1</sup>, *С. М. Матюшонок*<sup>1</sup>, *Г. И. Литовкин*<sup>1</sup>, *В. А. Иванов*<sup>2</sup>,  
*В. В. Шумаев*<sup>2</sup>, *В. И. Батухтин*<sup>2</sup>, *А. Б. Егояшин*<sup>2</sup>, *Д. В. Иванов*<sup>2</sup>, *А. А. Колчев*<sup>2</sup>,  
*Н. В. Рябова*<sup>2</sup>, *А. Г. Чернов*<sup>2</sup>, *В. П. Урядов*<sup>3</sup>, *А. А. Понятов*<sup>3</sup>, *С. В. Розанов*<sup>4</sup>,  
*Н. П. Поддельский*<sup>4</sup>, *И. Н. Поддельский*<sup>4</sup>

Представлены результаты наблюдений кругосветных сигналов (КС) на российской сети ЛЧМ-ионозондов в 1997–1999 гг. Определены частотно-временные интервалы прохождения КС с наименьшим затуханием. Интерпретация экспериментальных данных проведена на основе численного моделирования характеристик КВ сигналов в рамках волноводного и геометрооптического подходов. Показано, что затухание сигналов на кругосветных трассах в значительной степени определяется состоянием низкоширотной ионосферы в африканском и азиатско-тихоокеанском долготных секторах. Обсуждаются возможности мониторинга крупномасштабных структур низкоширотной ионосферы в регионах, слабо оснащённых средствами диагностики, по характеристикам КС на базе российской сети ЛЧМ-ионозондов.

### ВВЕДЕНИЕ

Изучение кругосветных сигналов имеет длительную историю (см., например, [1–4] и цитируемую там литературу). Первые наблюдения сверхдальнего распространения показали, что для кругосветных сигналов характерны высокая стабильность времени распространения, малая частотная дисперсия, слабое затухание. В целом ряде случаев амплитуда сигналов, пришедших к приёмнику по большей части дуги большого круга, была больше амплитуды сигналов, пришедших в ту же точку приёма по меньшей её части. К настоящему времени накоплен большой объём экспериментальных данных о пространственно-временных, угловых и амплитудных характеристиках кругосветных сигналов (КС). Однако в большинстве случаев они проводились на фиксированных частотах и несинхронно. Передатчик зачастую находился на небольшом удалении от приёмника, что затрудняло интерпретацию результатов. Отсутствуют длинные ряды наблюдений КС, позволившие бы изучить взаимосвязь регистрации сигналов на сверхдлинных трассах с солнечной активностью и степенью возмущённости геомагнитного поля. Хотя качественные закономерности появления сигналов на кругосветных трассах можно считать установленными и предложен ряд механизмов распространения кругосветных сигналов [5], полностью проблему прогнозирования их характеристик к настоящему времени нельзя считать решённой.

В последние годы интерес к этим исследованиям возобновился в связи с возможностью глобальной диагностики ионосферы по данным наземного радиозондирования в КВ диапазоне [6–8]. Особое значение при этом имеет использование непрерывных сигналов, модулированных по частоте (ЛЧМ сигналов), позволяющих получать высококачественную информацию о частотных зависимостях регистрируемых характеристик. В России совместными усилиями МарГТУ, НИРФИ, ИСЗФ и ИКИР была создана сеть трасс зондирования ЛЧМ сигналами, которая позволяет проводить одновременные измерения кругосветных сигналов на трассах различной ориентации в диапазоне 4–30 МГц.

Кругосветные трассы пересекают зону низкоширотной ионосферы в различных часовых поясах, охватывая обширные области в африканском и азиатско-тихоокеанском долготных секторах. Эти ре-

гионы, слабо оснащённые наземными диагностическими средствами, интересны с точки зрения исследования особенностей явления экваториальной аномалии. Оно состоит в том, что в широтном ходе дневных значений критической частоты  $f_0 F_2$  слоя  $F_2$  ионосферы имеются два максимума (гребни аномалии) по обе стороны от магнитного экватора вместо одного на географическом экваторе, ожидаемого по простой теории Чепмена. Многолетние исследования этого явления (см, например, [9, 10]) выявили, что экваториальная аномалия представляет собой динамичное образование, испытывающее часовые, суточные, долготные и солнечно-циклические вариации. Регионы с аномальным распределением электронной концентрации характеризуются наличием широкого спектра неоднородностей, оказывающих существенное влияние на распространение сигналов различных диапазонов частот. Для КВ диапазона наиболее существенны крупномасштабные неоднородности, связанные с долготными вариациями электронной концентрации и асимметрией её распределения между земными полушариями, утолщение и расслоение  $F$ -области ионосферы вблизи экватора, а также явления полуденной и пред-рассветной депрессии электронной концентрации на экваторе [11–13]. Несовпадение географического и геомагнитного экваторов приводит к различным соотношениям между скоростями образования и переноса плазмы в различных долготных секторах, поэтому детальные исследования приэкваториальной ионосферы в американском и индийском долготных секторах с помощью стационарных установок (ионозондов, радара некогерентного рассеяния в Джикамарке и т. д.) не могут полностью прояснить ситуацию в других долготных секторах. С этой точки зрения представляется важным выяснение возможностей диагностики крупномасштабных структур низкоширотной ионосферы по характеристикам кругосветных сигналов с помощью российской сети ЛЧМ-ионозондов.

В данной работе представлены предварительные результаты экспериментальных исследований и интерпретации характеристик кругосветных сигналов, полученных на российской сети ЛЧМ-ионозондов в годы низкой и средней солнечной активности.

## 1. ОПИСАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ СЕТИ РАДИОТРАСС

Для проведения синхронных наблюдений кругосветных сигналов с использованием российской сети ЛЧМ-ионозондов были задействованы три передатчика (в Магадане, Хабаровске и Иркутске) и три приёмных пункта (в Иркутске, Йошкар-Оле и Нижнем Новгороде). Поскольку расстояние между Йошкар-Олой и Нижним Новгородом мало по сравнению с протяжённостью кругосветных трасс, то в дальнейшем результаты регистрации в этих двух пунктах используются совместно, как полученные в одной точке (Йошкар-Оле). Характеристики передающих антенн, мощность передатчиков, азимуты основного направления излучения, а также характеристики приёмных антенн для всех ионозондов приведены в табл. 1. Трассы прямых кругосветных сигналов (ПКС) имеют протяжённость от 42 250 км до 45 540 км. Отметим ряд особенностей кругосветных трасс российской сети ЛЧМ-ионозондов.

Трасса ПКС Хабаровск—Иркутск лежит в наиболее узком интервале широт (от  $-41^\circ$  до  $+41^\circ$  геомагнитной широты) и имеет минимальную протяжённость 42 250 км. В дальнейшем для удобства будем обозначать её трасса № 1. Наиболее сильно заходит в область субполярных широт (до  $58^\circ$  геомагнитной широты) кругосветная трасса Магадан—Йошкар-Ола протяжённостью 45 360 км (трасса № 4). Остальные три трассы имеют приблизительно одинаковый диапазон широт, достигая  $51^\circ$  геомагнитной широты. Пронумеруем их в порядке возрастания протяжённости: № 2 — трасса Магадан—Иркутск (42 960 км), № 3 — Иркутск—Йошкар-Ола (43 540 км), № 5 — Хабаровск—Йошкар-Ола (45 540 км).

Трасса № 2 имеет наименьший из рассматриваемых кругосветных радиотрасс участок, пролегающий по суше (около 24 %). Она пересекает азиатский континент по кратчайшему пути длиной около 10 300 км. Для трассы № 1 такой участок составляет около 36 % (примерно 15 200 км) и пересекает Евразию и Африку. Ещё большую длину (от 17 400 до 18 200 км) сухопутный участок имеет для осталь-

Таблица 1

## Параметры технических средств

Пункты приёма-передачи	Азимут излучения, град	Тип передающей антенны	Мощность излучения, Вт	Скорость изменения частоты, кГц/с	Тип приёмной антенны
Иркутск	301	V-образная	5 000	100	БС-2
Магадан	275	РГ	100	100	
Хабаровск	317	РГ	200	100	
Йошкар-Ола				100	горизонтальный широкополосный диполь

ных кругосветных радиотрасс российской сети ЛЧМ-ионозондов, занимая около 40 % их полной протяжённости. Эти различия имеют немаловажное значение для объяснения наблюдаемых особенностей характеристик ПКС, поскольку затухание КВ сигнала за счёт потерь энергии в подстилающей поверхности существенно выше для суши, чем для морской поверхности.

## 2. ЭКСПЕРИМЕНТ

В первом цикле экспериментов 2–5 декабря 1997 г. и 21–22 января 1998 г., характеризовавшемся низким уровнем солнечной активности (среднемесячный индекс  $F_{10,7}$  менялся в пределах  $90 \div 96$ ), наблюдения кругосветных сигналов проводились на трёх трассах (№ 2, № 3 и № 5). Три передатчика излучали круглосуточно по четыре сеанса каждый час в диапазоне частот от 6 до 30 МГц. На трассе Магадан—Иркутск ПКС регистрировались в интервале с 02:18 до 04:07 UT. Наименьшая наблюдаемая частота (ННЧ) и максимальная наблюдаемая частота (МНЧ) менялись в интервалах  $12,5 \div 17,0$  МГц и  $18,7 \div 22,3$  МГц соответственно. След был диффузный, шириной от приблизительно 500 до 600 мкс. Максимальный уровень сигнала и наибольший диапазон регистрируемых частот (от 14 до 23 МГц) приходились на 02:33 UT.

На трассе Иркутск—Йошкар-Ола кругосветные сигналы наблюдались с 06:52 до 08:56 UT в декабре и с 07:22 до 09:56 UT в январе. При этом ННЧ и МНЧ ПКС варьировались в интервалах  $16,5 \div 20,8$  МГц и  $21,0 \div 27,9$  МГц соответственно. Наибольший диапазон частот прохождения ПКС, примерно от 17 до 27 МГц, наблюдался около 08:00 UT. ПКС имели положительную дисперсию со средним значением  $\partial\tau/\partial f \simeq 60$  мкс/МГц. След был диффузный, общая ширина варьировалась от приблизительно 400 до 800 мкс. Иногда (например 03.12.97 в 07:22 UT) в сигнале выделялись две моды с межмодовой задержкой около 250 мкс. Амплитуды ПКС на  $30 \div 35$  дБ меньше амплитуды прямых сигналов (ПС) для декабря 1997 г. Следует отметить, что в январе распространение КВ сигналов имело место на фоне повышенной магнитной активности, и в целом амплитуды ПКС были меньше (примерно на  $5 \div 7$  дБ) по сравнению с декабрьскими данными.

Заметим, что в декабре 1997 г. на трассе Иркутск—Йошкар-Ола наряду с ПКС регистрировались сигналы обратного эхо, распространяющиеся по обратной трассе протяжённостью 36 400 км. Амплитуды ПКС и сигнала обратного эхо сравнимы между собой. При этом в ряде случаев, например 03.12.97 в 07:22 UT, наблюдался прогиб дистанционно-частотной характеристики сигнала обратного эхо в окрестности частоты  $f_k \sim 17$  МГц: на частотах  $f < f_k$  дисперсия отрицательная ( $\partial\tau/\partial f \simeq -133$  мкс/МГц), на частотах  $f > f_k$  дисперсия положительная ( $\partial\tau/\partial f \simeq 60$  мкс/МГц). Увеличение задержки при уменьшении частоты, по-видимому, имело место и на ионограммах ПКС, но уверенно выделить его не представлялось возможным из-за малого отношения сигнал/помеха.

На трассе Хабаровск—Йошкар-Ола ПКС регистрировались с 06:18 до 06:48 UT. ННЧ и МНЧ ПКС варьировались в интервалах  $16,5 \div 20,5$  МГц и  $21,6 \div 23,4$  МГц соответственно. ПКС имели положительную дисперсию  $\partial\tau/\partial f \simeq 50$  мкс/МГц и наблюдались либо в виде слабой диффузной моды (ширина следа  $\Delta\tau \simeq 300$  мкс), либо в виде двухмодового сигнала с межмодовой задержкой, равной приблизительно 700 мкс. Амплитуда ПКС была примерно на 33 дБ меньше амплитуды ПС.

Во втором цикле экспериментов в ноябре—декабре 1998 г. наблюдения кругосветных сигналов проводились на всех пяти трассах российской сети ЛЧМ-ионозондов. Указанный период характеризовался средним уровнем солнечной активности (среднемесячный индекс  $F_{10,7}$  менялся в пределах от 137 до 145). Это способствовало увеличению интервалов регистрации ПКС и ширины диапазона наблюдаемых частот. На трассе Магадан—Иркутск ПКС регистрировались в интервале с 02:32 до 04:36 UT в ноябре и с 01:02 до 05:21 UT в декабре. Наименьшая наблюдаемая частота и максимальная наблюдаемая частота на трассе № 2 менялись в интервалах  $14,0 \div 16,0$  МГц и  $20,0 \div 21,0$  МГц соответственно. На самой короткой трассе, Хабаровск—Иркутск, кругосветный сигнал регистрировался наибольший интервал времени — с 03:25 до 06:59 UT. Здесь же наблюдались наибольшие значения интервала ННЧ (от 15 до 20,5 МГц) и МНЧ (от 23,3 до 29,5 МГц). Максимальный уровень сигнала регистрировался в 05:55 UT. На трассе Иркутск—Йошкар-Ола кругосветные сигналы наблюдались с 07:22 до 08:56 UT в ноябре и с 01:02 до 05:21 UT в декабре. При этом ННЧ и МНЧ кругосветного сигнала изменялись в пределах  $16,5 \div 17,8$  МГц и  $26,5 \div 28,6$  МГц соответственно. Наибольший диапазон частот прохождения ПКС (от 16,5 до 28,6 МГц) наблюдался в 08:52 UT. На трассе Хабаровск—Йошкар-Ола ПКС регистрировались с 06:55 до 07:59 UT. ННЧ и МНЧ ПКС варьировались в интервалах  $9,7 \div 20,6$  МГц и  $24,8 \div 26,4$  МГц соответственно. Наилучшие условия для прохождения ПКС на трассе № 5 реализовались 26 ноября в 06:55 UT, когда кругосветный сигнал регистрировался в диапазоне от 9,7 до 26,4 МГц. Кругосветные сигналы на трассе Магадан—Йошкар-Ола, заходящей в субполярные широты, зарегистрированы не были.

Третий цикл синхронных наблюдений кругосветных сигналов приходился на декабрь 1999 г. и характеризовался ещё более высоким уровнем солнечной активности: среднемесячный индекс  $F_{10,7} = 163,6$ . По техническим причинам в этом цикле передающий пункт в Иркутске не работал, а приёмный пункт функционировал с 02:30 UT. Поэтому данные по прохождению ПКС на трассе № 3 отсутствуют, а регистрация на трассе № 2 осуществлялась с 02:32 до 04:36 UT. Наименьшие наблюдаемые частоты на трассе Магадан—Иркутск возросли примерно до  $14,5 \div 19,0$  МГц, а максимальные наблюдаемые частоты — до  $22,0 \div 28,8$  МГц. Наилучшие условия для прохождения ПКС на этой трассе реализовались 11 декабря в 03:17 UT, когда кругосветный сигнал регистрировался в диапазоне от 14,5 МГц до 28,8 МГц. Для трассы № 1 ПКС регистрировался с 03:10 до 07:45 UT. При этом ННЧ варьировалась от 17,6 до 22,3 МГц, а МНЧ уменьшилась по сравнению с декабрём 1998 года до  $25,0 \div 27,3$  МГц. Для самой длинной трассы № 5 интервал регистрации ПКС остался прежним (с 06:55 до 07:59 UT). Сохранился и существенный разброс от сеанса к сеансу ННЧ (от 14,3 до 22,9 МГц) и МНЧ (от 19,9 до 26,5 МГц).

### 3. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТА

Интервалы регистрации ПКС на российской сети ЛЧМ-ионозондов качественно согласуются с установленными ранее эмпирическими закономерностями о преимущественном распространении кругосветных сигналов вдоль оптимальных азимутов [3, 6], когда угол между трассой распространения и линией терминатора не превышает  $25 \div 30^\circ$ . В то же время ряд установленных закономерностей, например отсутствие ПКС на трассе Магадан—Йошкар-Ола, соотношение интервалов регистрации на различных трассах и зависимость их от уровня солнечной активности, требуют более детального количественного анализа. С этой целью для интерпретации полученных экспериментальных данных

проводилось численное моделирование характеристик прямых и прямых кругосветных сигналов (амплитуд, задержек и углов прихода ЛЧМ сигналов) как в рамках волноводного подхода [14], так и в лучевом приближении [15]. При этом учитывались основные технические характеристики приёмно-передающих устройств (параметры реальных приёмных и передающих антенн на всех пунктах, мощность излучения передатчиков) и особенности обработки непрерывного ЛЧМ сигнала методом сжатия по частоте.

В расчётах использовались современная версия международной справочной модели ионосферы IRI-95 [16] и глобальная модель электрических свойств земной поверхности [17]. В рамках метода нормальных волн поле излучения представлялось в виде разложения по собственным колебаниям квазислоистого волновода Земля—ионосфера. На большом удалении от передатчика характеристики импульсных сигналов определялись параметрами центральных волн в группах сфазированных пакетов волноводных мод. Используя методику [18], в соответствии с которой регистрируемые методом сжатия по частоте характеристики ЛЧМ сигналов могут быть рассчитаны на основе рассмотрения эквивалентного импульсного сигнала, амплитуда и форма регистрируемого импульса вычислялись прямым численным суммированием нормальных волн [19]. Для каждой трассы в выбранные моменты времени рассчитывались амплитудно-частотные характеристики ПКС и находились оптимальные рабочие частоты, для которых уровень сигнала был максимальным ( $A_{\max}$ ). На основе проведенных расчётов изучались суточные и сезонные вариации максимального уровня сигнала. Заметим, что расчётный уровень  $A_{\max}$  является завышенным по сравнению с экспериментальным, поскольку не учитывалось реальное затухание в фидерах и предполагалось идеальное согласование передающего устройства с антенной во всём диапазоне частот. В дальнейшем, с учётом сделанного замечания, для оценок будет использоваться пороговое значение сигнала, необходимое для регистрации (приблизительно 20 дБ над 1 мкВ).

Для первого цикла экспериментальных исследований моделирование характеристик кругосветных сигналов выявило следующее. Для каждой из трёх трасс (№ 2, № 3 и № 5) в условиях низкой солнечной активности выявлены интервалы времени, когда сигнал распространяется в волноводе Земля—ионосфера с наименьшим затуханием. Эти благоприятные интервалы минимальны для трасс Магадан—Иркутск (с 02:00 до 03:40 UT) и Хабаровск—Йошкар-Ола (с 06:00 до 07:30 UT). Для трассы Иркутск—Йошкар-Ола оптимальный интервал увеличивается (с 06:30 до 09:00 UT). На рис. 1 приведены расчётные временные зависимости  $A_{\max}$  в децибелах относительно порогового уровня (а) и максимальных применимых частот (МПЧ) прямых кругосветных сигналов (б) для указанных трасс в декабре 1997 года. Цифры, идентифицирующие кривые на рисунках, соответствуют принятым номерам радиотрасс. Здесь же показаны экспериментальные временные интервалы регистрации (рис. 1а) и

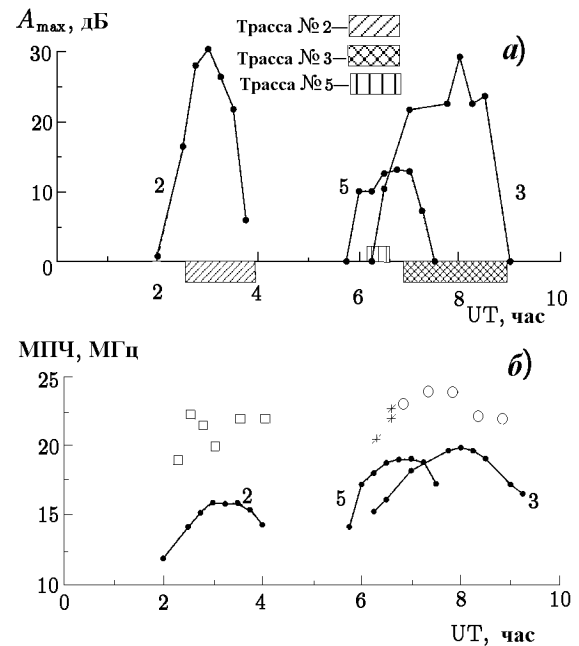


Рис. 1. Временные зависимости расчётных значений относительного уровня, экспериментальные интервалы регистрации (а), МПЧ и усреднённые МНЧ (б) прямых кругосветных сигналов на трассах № 2, № 3 и № 5 в первом цикле наблюдений. МНЧ для трассы № 2 отмечены символами  $\square$ , для трассы № 3 —  $\circ$ , для трассы № 5 — символами  $*$

усреднённые значения максимальных наблюдаемых частот (рис. 1б) ПКС на трассах российской сети ЛЧМ-ионозондов. Видно достаточно хорошее согласие результатов расчётов  $A_{\max}$  с экспериментальными интервалами регистрации для трасс № 2 и № 3. На трассе Хабаровск—Йошкар-Ола интервал регистрации ПКС несколько уже расчётного. Что касается частотного диапазона, то результаты моделирования здесь дают заниженные значения МПЧ и диапазона регистрируемых частот на 20 ÷ 40 %.

Сопоставление значений  $A_{\max}$ , рассчитанных для указанных трасс, с расчётами амплитуд прямых сигналов показало следующее. Для трассы № 3 величина  $A_{\max}$  приблизительно на 35 дБ ниже, чем амплитуда прямого сигнала в те же часы. На трассе № 5 максимальная амплитуда ПКС на оптимальной рабочей частоте приблизительно на 40 дБ ниже амплитуды прямого сигнала. Амплитудные измерения [20] дают для этих двух трасс соотношения ПС и ПКС соответственно 30 ÷ 35 дБ и примерно 33 дБ, что достаточно хорошо согласуется с результатами моделирования. Для трассы № 2 расчётное значение  $A_{\max}$  прямого кругосветного сигнала на 55 дБ ниже амплитуды прямого сигнала. Столь резкое различие объясняется не низким уровнем ПКС на этой трассе, а высоким уровнем прямого сигнала на однокачковой радиотрассе.

Для всех трасс в оптимальные интервалы продольные градиенты параметров ионосферы близки к минимальным для данного сезона, а минимальные значения критических частот  $F$ -слоя вдоль трасс достаточно высоки. Оптимальные интервалы соответствуют часам переходных периодов суток в приэкваториальных областях, пересекаемых радиотрассами. При этом в месте нахождения передатчиков ионосфера соответствует дневным зимним условиям. В качестве иллюстрации на рис. 2 приведены распределения критических частот  $F$ -слоя, рассчитанные по модели IRI-95 для декабря 1997 года вдоль анализируемых радиотрасс. Для каждой трассы выбраны три момента времени, соответствующие центру интервала регистрации ПКС и моментам, когда уровень сигнала становится ниже порогового. Для трассы Магадан—Иркутск в центре оптимального интервала (03:00 UT) трасса пересекает приэкваториальные широты в зоне африканского континента в утренние часы, когда явление экваториального «фонтана» ещё не развито. В тихоокеанском регионе трасса пересекает экваториальные широты в вечернее время, когда аналогичный эффект уже ослабевает. Относительно небольшие продольные градиенты критической частоты обуславливают распространение сигнала с минимальным числом отражений от ионосферы (от 12-ти до 14-ти) и малым поглощением. Для меньших часов характерно уменьшение критических частот на ночной части трассы в африканском регионе и резкое возрастание их в тихоокеанском регионе экваториальной аномалии. После 03:00 UT, наоборот, резко возрастают критические частоты в области экваториальной аномалии в африканском долготном секторе и наблюдается уменьшение их вблизи передатчика. Поскольку максимальные применимые частоты радиотрассы контролируются областью минимальных значений критической частоты  $F$ -слоя, а амплитуда сигнала — продольными градиентами  $f_0 F_2$ , то регистрация временного хода ПКС в широком диапазоне частот позволяет диагностировать как отличие ионосферы от модельной в ночной части трассы, так и степень развития экваториальной аномалии в африканском и тихоокеанском долготных секторах.

Аналогичными особенностями обладают и остальные сверхдлинные трассы российской сети ЛЧМ-ионозондов. При этом оптимальные интервалы регистрации ПКС сдвинуты друг относительно друга в соответствии с временем пересечения трассами приэкваториальных областей в переходные периоды суток. Ширина оптимального интервала зависит от угла между трассой и плоскостью магнитного экватора, а также от скорости изменения электронной концентрации в областях ионосферы вблизи магнитного экватора. Начало оптимального интервала связано со скоростью уменьшения интенсивности экваториального «фонтана» в тихоокеанской зоне и минимальными значениями критических частот  $f_0 F_2$  в африканском долготном секторе, а конец интервала — со скоростью возрастания интенсивности «фонтана» в зоне африканского континента и степенью уменьшения электронной концентрации в ионосфере тихоокеанского сектора. Как известно, пространственное распределение электронной кон-



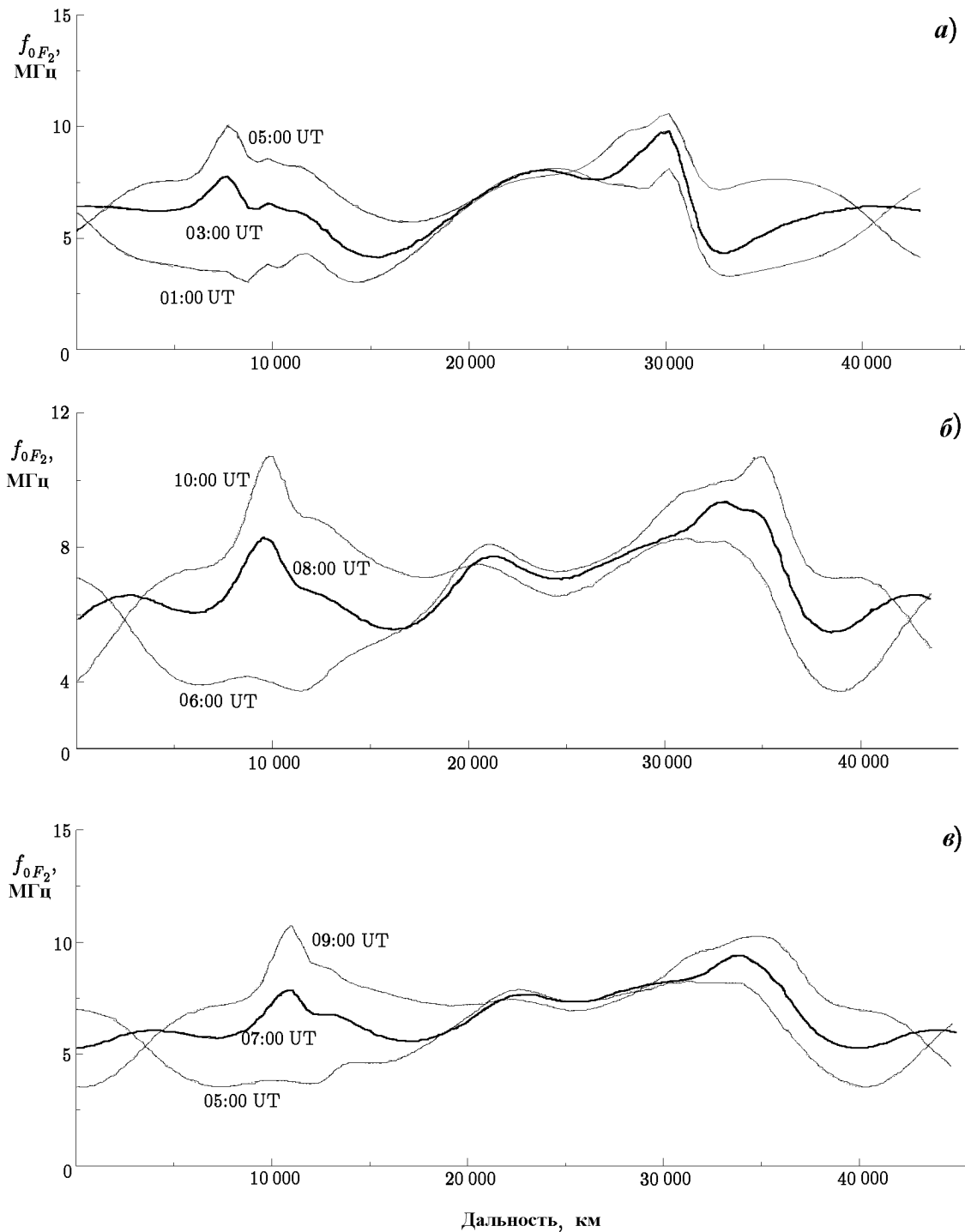


Рис. 2. Распределение критической частоты слоя  $F_2$  ионосферы вдоль трасс ПКС в декабре 1997 года: а) — Магадан—Иркутск; б) — Иркутск—Йошкар-Ола; в) — Хабаровск—Йошкар-Ола

центрации в этих регионах зависит от степени проявления экваториальной аномалии. Критическая частота  $F$ -слоя в области гребней аномалии, а также её ночные значения вблизи магнитного экватора могут значительно меняться ото дня ко дню. Медианная модель ионосферы не может отражать такие тонкие эффекты и, кроме того, в области минимальных значений пространственных распределений

$f_0 F_2$  аналитическое представление этой величины, как правило, имеет максимальные относительные погрешности.

На трассе Иркутск—Йошкар-Ола высокие значения  $A_{\max}$  обусловлены помимо благоприятных ионосферных условий большой мощностью иркутского передатчика по сравнению с передатчиками в других пунктах. По этой же причине диапазон регистрируемых частот также максимален для этой трассы и достигает 8 МГц в 08:00 UT. Для трассы Магадан—Иркутск важную роль играет относительная малость участка трассы, проходящего вдоль суши, т. к. поглощение за счёт потерь энергии в подстилающей поверхности существенно ниже для морской поверхности, чем для суши. Однако расчётный диапазон рабочих частот здесь довольно узок и резко уменьшается к краям оптимального интервала. Регистрация кругосветных сигналов на трассе Хабаровск—Йошкар-Ола возможна в самом узком интервале времени из трёх радиотрасс.

Для цикла экспериментов по кругосветному распространению ЛЧМ сигналов в ноябре—декабре 1998 года расчёты проводились для всех пяти радиотрасс. В качестве иллюстрации на рис. 3 приведены распределения критических частот  $F$ -слоя ионосферы вдоль анализируемых радиотрасс, рассчитанные для декабря 1998 года в интервалах, когда угол между соответствующей трассой и линией её терминатора близок к минимальному. С увеличением солнечной активности критические частоты  $F$ -слоя вдоль кругосветных трасс имеют тенденцию к возрастанию. Поэтому возрастают максимальные применимые частоты, частотные диапазоны и максимальные уровни регистрируемых сигналов на анализируемых трассах и интервалы регистрации ПКС. Несколько отличная ситуация имеет место на трассе № 2. Область минимальных значений критических частот  $F$ -слоя на этой трассе смещается к точке расположения приёмника, при этом  $f_0 F_2$  остаётся близкой к значениям, полученным в декабре 1997 года.

На рис. 4 приведены результаты расчётов временной зависимости  $A_{\max}$  и МПЧ прямых кругосветных сигналов на трассах Хабаровск—Иркутск (№ 1), Магадан—Иркутск (№ 2), Иркутск—Йошкар-Ола (№ 3) и Хабаровск—Йошкар-Ола (№ 5) для декабря 1998 года. Диапазон рабочих частот, для которых амплитуда  $A_{\max}$  превышала пороговый уровень, возрастает до 10 ÷ 12 МГц в середине соответствующего оптимального интервала приёма ПКС. Значения  $A_{\max}$  в эти часы увеличились приблизительно на 5 дБ для трассы № 5, на трассе Магадан—Иркутск это увеличение достигает 10 дБ. Объясняется это тем, что в интервале с 03:00 до 05:00 UT прогнозируемые продольные градиенты параметров ионосферы способствуют переходу эффективно возбуждённых нормальных волн в надземный волновод на участке трассы, пролегающем вдоль суши. В геометрооптической терминологии это соответствует распространению по рикошетирующим траекториям с минимальным числом отражений от ионосферы и земной поверхности, что благоприятствует распространению с малым затуханием\*. При этом максимальные применимые частоты ПКС на трассе № 2 мало отличаются от величин, полученных в декабре 1997 года. На трассе ПКС Магадан—Йошкар-Ола расчётная амплитуда сигнала ниже порогового уровня, хотя продольные градиенты критических частот  $F$ -слоя на этой трассе в рассматриваемые часы относительно невысоки. Тем не менее, согласно расчётам распространение ПКС на трассе № 4 возможно лишь скачками с большим числом отражений (более 18) от ионосферы, что приводит к сильному затуханию сигналов. Расчёты  $A_{\max}$  достаточно хорошо согласуются с экспериментальными данными по регистрации ПКС на трассах № 1 и № 2. Для трасс № 3 и № 5 ПКС регистрировались в более узких интервалах времени, чем прогнозировалось. Значительно лучшее по

\* О реализации волноводно-рикошетирующих мод при сверхдальнем распространении коротких волн, по-видимому, свидетельствуют также отмеченные выше особенности поведения дисперсионной характеристики сигнала обратного эхо на трассе Иркутск—Йошкар-Ола. Согласно расчётам [15] различная зависимость частотной дисперсии КС на частотах  $f < f_k$  и  $f > f_k$  может быть связана с различными механизмами распространения, когда на значительной части трассы реализуются условия для рефракционного возбуждения межслоевого канала  $FE$  и волноводного распространения низкочастотной ветви КС ( $f < f_k$ ).

сравнению с декабрём 1997 года совпадение для МПЧ и диапазона регистрируемых частот получено для второго цикла наблюдений. Погрешность расчёта МПЧ, как правило, не превышала 15 %, за исключением отдельных часов для трассы № 1, когда она возрастала до примерно 30 %.

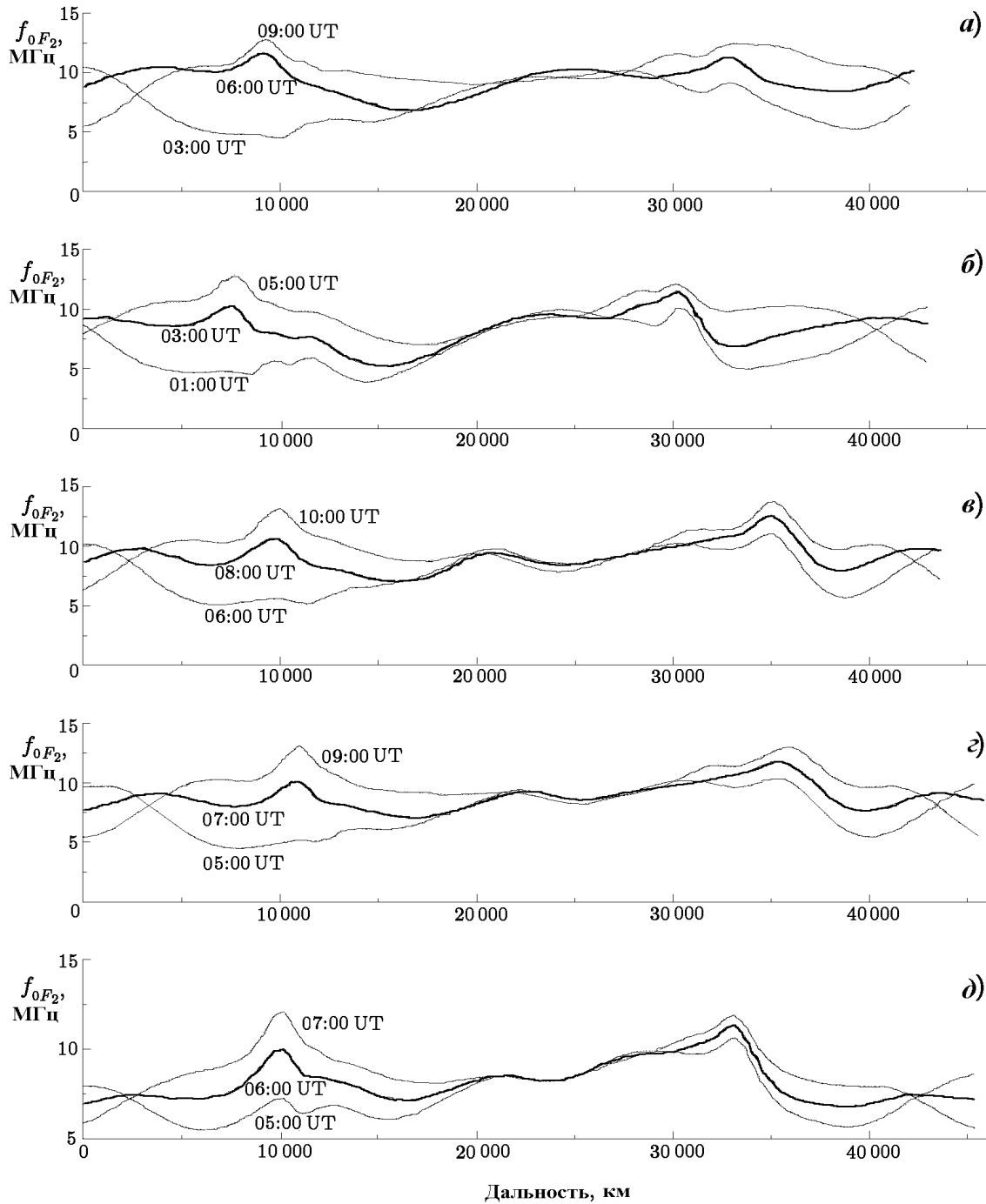


Рис. 3. Распределение критической частоты слоя  $F_2$  ионосферы вдоль трасс ПКС в декабре 1998 года: а) — Хабаровск—Иркутск; б) — Магадан—Иркутск; в) — Иркутск—Йошкар-Ола; г) — Хабаровск—Йошкар-Ола; д) — Магадан—Йошкар-Ола

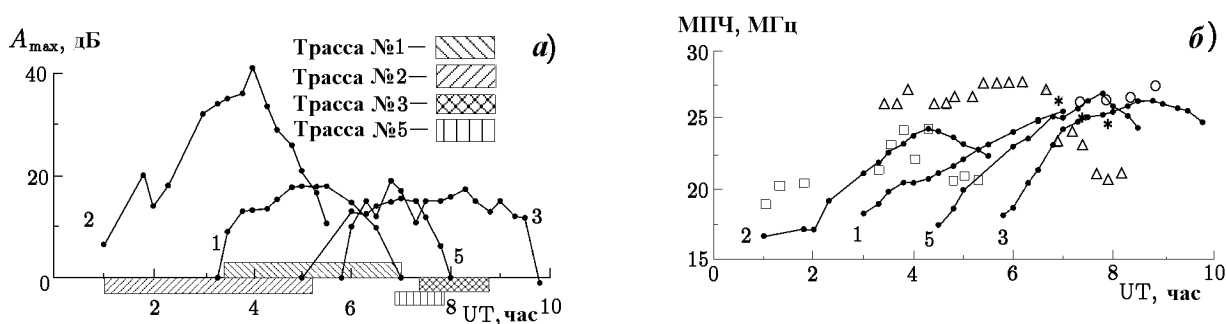


Рис. 4. Временные зависимости расчётных значений относительного уровня, экспериментальные интервалы регистрации (а), МПЧ и усреднённые МНЧ (б) прямых кругосветных сигналов на трассах № 1, № 2, № 3 и № 5 во втором цикле наблюдений. МНЧ для трассы № 1 отмечена символами  $\Delta$ , для трассы № 2 — символами  $\square$ , для трассы № 3 — символами  $\circ$ , для трассы № 5 — символами  $*$

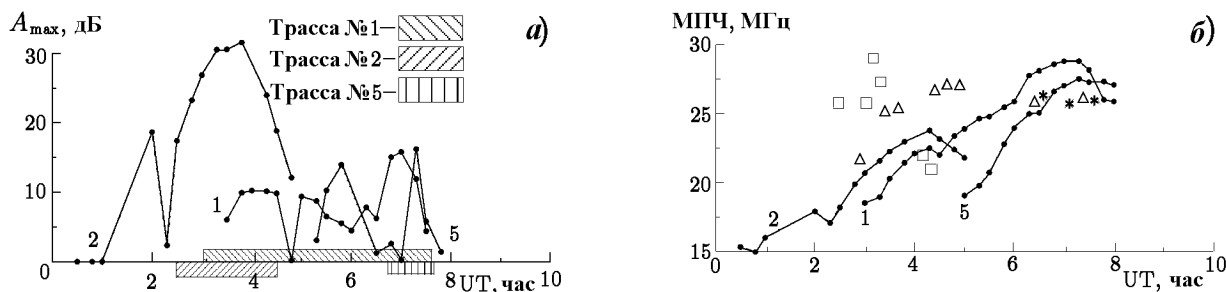


Рис. 5. Временные зависимости расчётных значений относительного уровня, экспериментальные интервалы регистрации (а), МПЧ и усреднённые МНЧ (б) прямых кругосветных сигналов на трассах № 1, № 2 и № 5 в декабре 1999 г. Обозначения МНЧ те же, что и на рис. 4

Характерно, что интервалы регистрации ПКС на российской сети ЛЧМ-ионозондов при средней солнечной активности становятся перекрывающимися. Как уже отмечалось выше, возрастание и убывание  $A_{\max}$  (а следовательно и границы интервалов регистрации ПКС) тесно связаны с динамикой низкоширотной ионосферы вблизи пересечения соответствующей трассой магнитного экватора. Это позволяет в перспективе разработать эффективную методику диагностики обширных областей низкоширотной ионосферы по данным синхронных наблюдений кругосветных сигналов.

При дальнейшем увеличении солнечной активности (декабрь 1999 г.) сохраняется тенденция к увеличению критических частот  $F$ -слоя на трассах. При этом темп роста частоты  $f_{0F_2}$  замедляется, особенно в областях её максимальных значений, что способствует уменьшению продольных градиентов параметров ионосферы. Результаты расчётов временных зависимостей величины  $A_{\max}$  в децибелах относительно порогового уровня (а) и максимальных применимых частот ПКС в мегагерцах (б) для трасс № 1, № 2 и № 5 для декабря 1999 года приведены на рис. 5. Обозначения кривых на рисунках, экспериментальных временных интервалов регистрации и усреднённых значений максимальных наблюдаемых частот ПКС на трассах российской сети ЛЧМ-ионозондов соответствуют ранее используемым. Видна стабилизация расчётного уровня ПКС (и даже некоторое его снижение для трассы № 2) и максимальных применимых частот по сравнению с декабрём 1998 года. Экспериментальные интервалы регистрации кругосветных сигналов с учётом замечаний, сделанных в предыдущем разделе, достаточно хорошо согласуются с расчётами. Резко возросла погрешность расчёта МПЧ на трассе Магадан—Иркутск, что свидетельствует о неадекватности усреднённых модельных представлений конкретной ситуации на трассе распространения.

### ВЫВОДЫ

Проведённые экспериментальные исследования по регистрации прямых кругосветных сигналов для российской сети ЛЧМ-ионозондов позволили получить богатый фактический материал. Анализ экспериментальных данных на основе численного моделирования амплитудно-частотных характеристик показал, что затухание сигналов на кругосветных трассах в значительной степени определяется состоянием низкоширотной ионосферы в зоне африканского континента и в азиатско-тихоокеанском долготном секторе. Расширение оптимальных интервалов распространения ПКС в ту или иную сторону может служить индикатором состояния низкоширотной ионосферы соответственно в одном из двух указанных выше регионов. Очень важно, что оптимальные интервалы для трасс ПКС российской сети ЛЧМ-ионозондов частично перекрываются и занимают достаточно большой сплошной промежуток времени. Поэтому российская сеть ЛЧМ-ионозондов представляет собой уникальный комплекс для исследования динамики экваториальной аномалии в двух обширных регионах, охватывающих по 7 часовых поясов, слабо оснащённых наземными средствами радиозондирования. Ряд экспериментально установленных особенностей характеристик ПКС, например регистрация в отдельные часы двухмодовых сигналов, сильно разнесённых по задержке, требуют дополнительных теоретических и экспериментальных исследований.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 98-02-16023, 00-15-98509).

### ЛИТЕРАТУРА

1. Fenwick R. B. // *Tech. Rep. Radio Sci. Lab. Stanford University*. 1963. № 71. 106 p.
2. Шлионский Ш. Г. Дальнее распространение радиоволн в ионосфере. — М.: Наука, 1979. — 152 с.
3. Голян С. Ф. // *Изв. вузов. Радиофизика*. 1975. Т. 18, № 9. С. 1370.
4. Гуревич А. В., Цедилина Е. Е. Сверхдальнее распространение коротких радиоволн. — М.: Наука, 1979. — 248 с.
5. Кравцов Ю. А., Тинин М. В., Черкашин Ю. Н. // *Геомagnetизм и аэрономия*. 1979. Т. 19, № 5. С. 769.
6. Uryadov V. P., Ryabova N. V., Ivanov V. A., Shumaev V. V. // *J. Atmos. Terr. Phys.* 1995. V. 57. P. 1261.
7. Пахотин В. А., Конюшенко С. М., Борисов И. А., Пахотина С. В. // *Геомagnetизм и аэрономия*. 1997. Т. 37, № 3. С. 146.
8. Куркин В. И., Пономарчук С. Н., Потехин А. П., Чистякова Л. В. // *Исследования по геомagnetизму, аэрономии и физике Солнца*. Иркутск: Наука, 1998. Вып. 109(1). С. 157.
9. Moffett R. J. // *Fundamentals of Cosmic Physics*. 1979. V. 4. P. 313.
10. *Физика и структура экваториальной ионосферы* / Под ред. М. Н. Фаткуллина — М.: Наука, 1981. — 176 с.
11. Васильев К. Н., Коломийцев О. П., Прутенский И. С. // *Геомagnetизм и аэрономия*. 1979. Т. 19, № 2. С. 227.
12. Balan N., Bailey G. J. // *J. Geophys. Res.* 1995. V. 100, № A11. P. 421.
13. Walker G. O. // *J. Atmos. Terr. Phys.* 1981. V. 43, № 8. P. 763.
14. Куркин В. И., Орлов И. И., Попов В. Н. Метод нормальных волн в проблеме коротковолновой радиосвязи. — М.: Наука, 1981. — 122 с.
15. Иванов В. А., Понятов А. А., Рябова Н. В. и др. // *Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн*. — М.: МФТИ, 1996. — С. 95.
16. Bilitza D. *The International Reference Ionosphere 1990: NSSDC/WDC-A-S Report of National Science Data Centre*. С. 90-22.

17. Пономарчук С. Н. // Исследования по геомагнетизму, аэрономии и физике Солнца. М.: Наука, 1984. Вып. 69. С. 42.
18. Ilyin N. V., Khakhipov V. V., Kurkin V. I., Nosov V. E., Orlov I. I., Ponomarchuk S. N. // Proc. IS-AR'96, Chiba, Japan, 1996. P. 689.
19. Алтынцева В. И., Ильин Н. В., Куркин В. И., Орлов А. И., Орлов И. И., Полех Н. М., Пономарчук С. Н., Хахинов В. В. // Техника средств связи. Серия СС. М.: Экос, 1987. Вып. 5. С. 28.
20. Иванов В. А., Шумаев В. В., Батухтин В. И. и др. // Исследования по геомагнетизму, аэрономии и физике Солнца. Иркутск: Изд-во СО РАН, 1998. Вып. 109 (1). С. 161.

<sup>1</sup> Институт солнечно-земной  
физики СО РАН, г. Иркутск

Поступила в редакцию  
3 августа 2000 г.

<sup>2</sup> Марийский государственный  
технический университет,  
г. Йошкар-Ола

<sup>3</sup> Научно-исследовательский  
радиофизический институт,  
г. Н.Новгород

<sup>4</sup> Институт космофизических  
исследований и распространения  
радиоволн ДВО РАН, п. Паратунка  
Камчатской обл.

**THE FEATURES OF ROUND-THE-WORLD SIGNAL PROPAGATION  
OVER THE PATHS OF THE RUSSIAN CHIRP-SOUNDER NETWORK  
DURING LOW AND MILD SOLAR ACTIVITY**

*V. I. Kurkin, V. E. Nosov, S. M. Matyushonok, G. I. Litovkin, V. A. Ivanov, V. V. Shumaev,  
V. I. Batukhtin, A. B. Egoshin, D. V. Ivanov, A. A. Kolchev, N. V. Ryabova, A. G. Chernov,  
V. P. Uryadov, A. A. Ponyatov, S. V. Rozanov, N. P. Poddel'sky, and I. N. Poddel'sky*

We present the results of observations of round-the-world (RTW) signals by the Russian chirp-sounder network in 1997–1999. The frequency–time intervals of the RTW propagation with the minimum attenuation are determined. Using numerical simulations of HF signals based on the waveguide and geometric-optical approaches, we perform the interpretation of the experimental data. It is shown that RTW-signal attenuation is mainly determined by the state of the low-latitude ionosphere in African and Asian-Pacific regions. The possibilities of monitoring the large-scale structures of the low-latitude ionosphere in regions poorly equipped with diagnostic tools using the RTW-signal characteristics of the Russian chirp-sounder network are discussed.

УДК 621.371; 550.388.2

## МНОГОЗНАЧНОСТЬ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПРОФИЛЕЙ ПЛАЗМЕННОЙ ЧАСТОТЫ ПО ЗАДАННОЙ ВЫСОТНО-ЧАСТОТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ И ИХ РАЗЛИЧИМОСТЬ ДЛЯ НАКЛОННОГО РАСПРОСТРАНЕНИЯ КОРОТКИХ РАДИОВОЛН В ИЗОТРОПНОЙ ИОНОСФЕРЕ

*С. Я. Михайлов*

В данной работе для сферически-симметричной изотропной ионосферы уточняется постановка задачи восстановления высотного распределения плазменной частоты по заданной высотно-частотной характеристике. Предлагается численный алгоритм решения задачи, корректно обрабатывающий области прикритических частот ионосферных слоёв. На этой основе исследуется различимость профилей плазменной частоты, удовлетворяющих заданной высотно-частотной характеристике, при анализе свойств КВ радиосигнала наклонного распространения.

### ВВЕДЕНИЕ

Целью данной работы является оценка различимости профилей плазменной частоты (ППЧ) из семейства, удовлетворяющего заданной высотно-частотной характеристике (ВЧХ), при анализе свойств КВ радиосигнала наклонного распространения. Эта оценка нужна, например, для объяснения неудачных численных экспериментов по моделированию наклонных ионограмм, которые были выполнены с привлечением моделей ионосферы, адаптируемых по данным вертикального зондирования. Такая оценка также необходима для выяснения возможности однозначного восстановления пространственного распределения плазменной частоты при совместном использовании данных вертикального и наклонного зондирования ионосферы.

Для восстановления профилей плазменной частоты по ВЧХ предполагалось воспользоваться известными методами уже признанных авторов. Однако при ознакомлении и попытке реализации на ЭВМ этих методов выяснилось, что они страдают одним существенным недостатком: в них отсутствует чёткое определение высоты максимума слоя. По этой причине возникает необходимость дробления (строго бесконечного дробления) шага по частоте при задании ВЧХ вблизи критической частоты [1], а высоты максимумов слоёв определяются по экстраполяционным формулам [1], что некорректно. Не решает проблемы и кусочно-параболическая аппроксимация высоты отражения, предложенная в [2]. Проще всего принять параболическую аппроксимацию квадрата плазменной частоты (электронной концентрации) вблизи максимума слоя, но её использование в указанных выше методах приводит к появлению расходящихся интегралов, определяющих истинную высоту отражения на критической частоте слоя. Причина этого заключается в неправильной постановке задачи восстановления ППЧ вблизи критической частоты, поскольку при постановке задачи используется выражение для задержки сигнала, вытекающее из метода геометрической оптики, который вблизи критической частоты не работает. Возникающее по этой причине множество экстраполяционных определений высоты максимума слоя широко представлено в [3].

В связи с вышеназванными обстоятельствами в данной работе уточняется постановка задачи восстановления профиля плазменной частоты по заданной ВЧХ, что позволяет найти корректное решение задачи на критических частотах слоёв. На этой основе разрабатывается алгоритм полного решения задачи в рамках сферически-симметричной изотропной модели ионосферы при отсутствии поглощения.

Разработанный алгоритм восстановления используется для исследования различимости ППЧ из семейства, удовлетворяющего заданной ВЧХ, при анализе свойств КВ сигнала наклонного распространения. Для уточнения постановки задачи восстановления ППЧ используются результаты исследования отражения радиоволн от многослойной изотропной ионосферы в областях прикритических частот на основе метода эталонного уравнения [4]. Расчёт характеристик КВ сигнала наклонного распространения выполняется на основе метода нормальных волн [5].

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

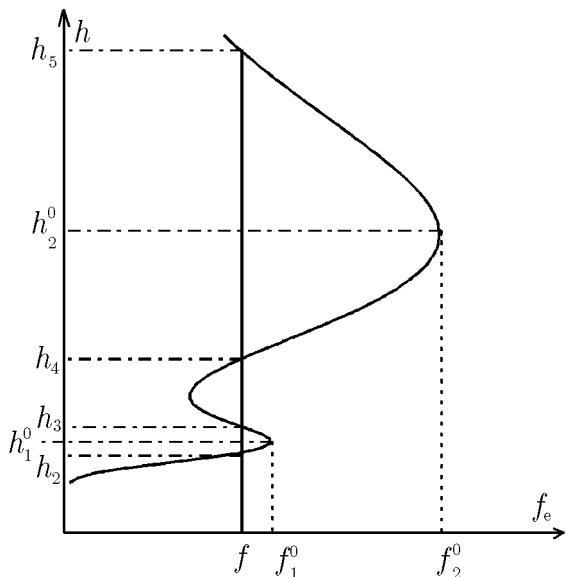


Рис. 1. Вертикальный профиль плазменной частоты

становятся комплексными, а при  $f > f_2^0$  комплексны и  $h_4, h_5$ . Согласно [4] половины пространственных набегов фазы модов, отражённых от первого  $P_E$  и второго  $P_F$  слоёв представляются в виде

$$\begin{aligned}
 P_E &= k \int_0^{\tilde{h}_2} \sqrt{\varepsilon} dh + \operatorname{Re}[\tilde{\Psi}_2(kb_1)], \\
 P_F &= k \int_0^{\tilde{h}_2} \sqrt{\varepsilon} dh + k \int_{\tilde{h}_3}^{\tilde{h}_4} \sqrt{\varepsilon} dh + 2 \operatorname{Re}[\tilde{\Psi}_1(kb_1)] + \operatorname{Re}[\tilde{\Psi}_2(kb_2)],
 \end{aligned} \quad (1)$$

где  $k$  — волновое число в вакууме, диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon = 1 - f_e^2(h)/f^2$ . Под знаком реальной части стоят функции следующих интегралов:

$$b_{1,2} = \frac{i}{\pi} \int_{h_{2,4}}^{h_{3,5}} \sqrt{\varepsilon} dh. \quad (2)$$

Пределы интегрирования  $\tilde{h}_2 = h_2, \tilde{h}_3 = h_3$  при  $b_1 \geq 0$  ( $f \leq f_1^0$ ) и  $\tilde{h}_2 = \tilde{h}_3 = \hat{h}_1$  при  $b_1 < 0$  ( $f > f_1^0$ );  $\tilde{h}_4 = h_4$  при  $b_2 \geq 0$  ( $f \leq f_2^0$ ) и  $\tilde{h}_4 = \hat{h}_2$  при  $b_2 < 0$  ( $f > f_2^0$ );  $\hat{h}_{1,2}$  являются решениями следующих урав-



нений:

$$\int_{h_{2,4}}^{h_{1,2}} \sqrt{\varepsilon} dh = \frac{1}{2} \int_{h_{2,4}}^{h_{3,5}} \sqrt{\varepsilon} dh.$$

Функции  $\tilde{\Psi}_2(kb_{1,2})$  и  $\tilde{\Psi}_1(kb_1)$  вычисляются по формулам

$$\tilde{\Psi}_1(kb_1) = \frac{1}{2i} \text{Ln}[T_i^0(kb_1)],$$

$$\tilde{\Psi}_2(kb_{1,2}) = \frac{1}{2i} \text{Ln}[V_i^0(kb_{1,2})],$$

где аргументами логарифмов являются коэффициенты отражения от максимума первого слоя  $V_i^0(kb_1)$ , коэффициент отражения от максимума второго слоя  $V_i^0(kb_2)$  и коэффициент прохождения максимума первого слоя  $T_i^0(kb_1)$ . Для  $T_i^0$  и  $V_i^0$  расчётные формулы имеют вид

$$T_i^0(kb_1) = ie^{-\pi kb_1} V_i^0(kb_1),$$

$$V_i^0(kb_{1,2}) = \begin{cases} e^{-\pi kb_{1,2}} V_i(kb_{1,2}), & b_{1,2} \leq 0; \\ V_i(kb_{1,2}), & b_{1,2} \geq 0, \end{cases}$$

$$V_i(kb_{1,2}) = \frac{\sqrt{2\pi} \exp[-i\pi/2 - ikb_{1,2} \text{Ln}(e^{-i\pi/2} kb_{1,2}/e)]}{(1 + e^{-2\pi kb_{1,2}}) \Gamma(1/2 - ikb_{1,2})},$$

где  $\Gamma(x)$  — гамма-функция. Половина фазы коэффициента прохождения максимума первого слоя  $\text{Re}[\tilde{\Psi}_1(kb_1)]$  существенно изменяется вблизи нуля при изменении  $kb_1$  от  $-1$  до  $1$ . Половина фаз коэффициентов отражения от максимумов первого и второго слоёв  $\text{Re}[\tilde{\Psi}_2(kb_{1,2})]$  существенно меняются вблизи значения  $-\pi/4$  при  $kb_{1,2} \in [-1, 1]$ . График  $\text{Re}[\tilde{\Psi}_2(kb_{1,2})]$  представлен на рис. 2, а  $\text{Re}[\tilde{\Psi}_1(kb_1)] = \text{Re}[\tilde{\Psi}_2(kb_1)] + \pi/4$ .

Воспользовавшись вблизи максимумов слоёв параболической аппроксимацией

$$f_e^2(h) = -a_{1,2}^0 (h - h_{1,2}^0)^2 + (f_{1,2}^0)^2, \quad a_{1,2}^0 = \left( \frac{2f_{1,2}^0}{l_{1,2}^0} \right)^2, \quad (3)$$

где  $l_{1,2}^0$  — толщина слоёв, для  $b_{1,2}$  на основании (2) можно получить следующие выражения:

$$b_{1,2} = \frac{(f_{1,2}^0)^2 - f^2}{2f \sqrt{a_{1,2}^0}}. \quad (4)$$

Из (4), приравнявая  $kb_{1,2}$  к единице, для полуинтервалов критических частот получаем оценку

$$\Delta f_{1,2}^0 = \frac{c}{\pi l_{1,2}^0} \approx 1 \text{ кГц}/l_{1,2}^0 [\text{сот. км}], \quad (5)$$

где  $c$  — скорость света. Это означает, что фазы коэффициентов отражения и прохождения максимумов слоёв существенно меняются лишь в интервалах частот  $f \in [f_{1,2}^0 - \Delta f_{1,2}^0, f_{1,2}^0 + \Delta f_{1,2}^0]$ . Для  $E$ -слоя

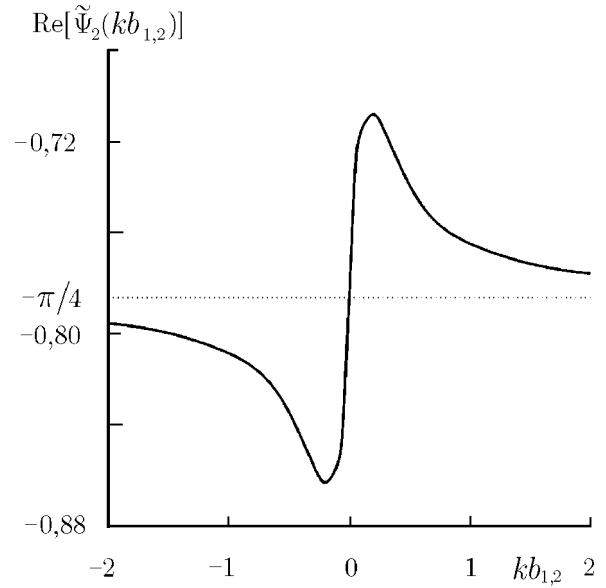


Рис. 2. Половина фаз коэффициентов отражения от максимумов первого и второго слоёв

$l_1^0 \approx 100$  км, для  $F$ -слоя  $l_2^0 \approx 300$  км, поэтому согласно (5)  $\Delta f_1^0 \approx 1$  кГц,  $\Delta f_2^0 \approx 333$  Гц. Хотя интервалы критических частот достаточно малы, изменения  $\text{Re}[\tilde{\Psi}_{1,2}]$  необходимо учитывать при постановке обратных задач.

Модуль коэффициента отражения от первого слоя  $|V_1^0(kb_1)|$  быстро убывает при  $f > f_1^0$  и уже при  $f = f_1^0 + \Delta f_1^0$  приближённо равен  $\exp(-\pi)$ . Поэтому мод, отражённый от первого слоя, можно считать обнаружимым при  $0 < f \leq f_1^0 + \Delta f_1^0$ .

Модуль коэффициента прохождения максимума первого слоя  $|T_1^0(kb_1)|$  при  $f = f_1^0 - \Delta f_1^0$  приближённо равен  $\exp(-\pi)$  и с увеличением частоты быстро растёт до единицы. Модуль коэффициента отражения от второго слоя  $|V_2^0(kb_2)|$  быстро убывает с увеличением  $f > f_2^0$  и при  $f = f_2^0 + \Delta f_2^0$  по порядку величины равен  $\exp(-\pi)$ . Поэтому мод, отражённый от второго слоя, следует учитывать в интервале частот  $f_1^0 - \Delta f_1^0 < f < f_2^0 + \Delta f_2^0$ .

Для действующих фазовых высот первого слоя  $h_\Phi^E = P_E/k$  и второго слоя  $h_\Phi^F = P_F/k$  с учётом вышесказанного можно записать следующие выражения:

$$h_\Phi^E = \int_0^{\tilde{h}_2} \sqrt{\varepsilon} dh + \frac{1}{k} \text{Re}[\tilde{\Psi}_2(kb_1)], \quad 0 < f \leq f_1^0 + \Delta f_1^0;$$

$$h_\Phi^F = \int_0^{\tilde{h}_2} \sqrt{\varepsilon} dh + \int_{\tilde{h}_3}^{\tilde{h}_4} \sqrt{\varepsilon} dh + \frac{2}{k} \text{Re}[\tilde{\Psi}_1(kb_1)] + \frac{1}{k} \text{Re}[\tilde{\Psi}_2(kb_2)], \quad f_1^0 - \Delta f_1^0 < f < f_2^0 + \Delta f_2^0. \quad (6)$$

При заданных частотных зависимостях  $h_\Phi^E(f)$  и  $h_\Phi^F(f)$  выражения (6) определяют интегральные уравнения относительно функции  $f_\varepsilon(h)$ . Здесь  $h_\Phi^E(f)$ ,  $h_\Phi^F(f)$  и, как выяснится ниже, их производные являются непрерывными функциями в указанных частотных интервалах.

Выражения для действующих групповых высот получим на основе общих формул: для первого слоя  $h_\Gamma^E = (2\pi)^{-1} c dP_E/df$ , для второго слоя  $h_\Gamma^F = (2\pi)^{-1} c dP_F/df$ . Используя (1), получим

$$h_\Gamma^E = \int_0^{\tilde{h}_2} \frac{dh}{\sqrt{\varepsilon}} + \text{Re}[\tilde{\Psi}'_2(kb_1)] \frac{d(fb_1)}{df},$$

$$h_\Gamma^F = \int_0^{\tilde{h}_2} \frac{dh}{\sqrt{\varepsilon}} + \int_{\tilde{h}_3}^{\tilde{h}_4} \frac{dh}{\sqrt{\varepsilon}} + 2 \text{Re}[\tilde{\Psi}'_1(kb_1)] \frac{d(fb_1)}{df} + \text{Re}[\tilde{\Psi}'_2(kb_2)] \frac{d(fb_2)}{df}, \quad (7)$$

где штрих обозначает производную по аргументу. Вне указанных выше интервалов критических частот  $\tilde{\Psi}'_{1,2}$  экспоненциально малы, и выражения (7) ничем не отличаются от вытекающих из метода геометрической оптики. В областях критических частот зависимости  $\text{Re}[\tilde{\Psi}'_{1,2}]$  имеют логарифмические особенности, как и входящие в (7) интегралы, поэтому здесь необходимо выполнять предельный переход.

Согласно [5] поведение  $\text{Re}[\tilde{\Psi}'_{1,2}]$  в интервалах критических частот определяется следующими приближёнными формулами:

$$\text{Re}[\tilde{\Psi}'_{1,2}(kb_{1,2})] \approx -\frac{1}{2} \text{Ln} |kb_{1,2}| + \text{Re}[J_2(0)], \quad |kb_{1,2}| \ll 1;$$

$$\text{Re}[J_2(0)] = \frac{\Gamma'(1/2)}{2\Gamma(1/2)} = -0,981\,755. \quad (8)$$

Приближение заключается в пренебрежении слабой зависимостью  $J_2$  от  $kb_{1,2}$ . При этом для плазменной частоты вблизи максимумов слоёв можно пользоваться параболической аппроксимацией (3). Тогда для  $b_{1,2}$  справедливы выражения (4), на основе которых получаем  $d(fb_{1,2})/df = -f/\sqrt{a_{1,2}^0}$ . С учётом этого выражения и (8) поправки в действующий групповой путь (7) в областях прикритических частот можно представить в виде

$$\operatorname{Re}[\tilde{\Psi}'_{1,2}(kb_{1,2})] \frac{d(fb_{1,2})}{df} = \frac{f}{\sqrt{a_{1,2}^0}} \operatorname{Ln} \frac{\chi_{1,2}}{2\delta h_{1,2}^0}, \quad (9)$$

где

$$\chi_{1,2} = \sqrt{|(f_{1,2}^0)^2 - f^2|/a_{1,2}^0}, \quad \delta h_{1,2}^0 = \frac{\sqrt{c}q_2}{2\sqrt{\pi}(a_{1,2}^0)^{1/4}}, \quad q_2 = \exp\{\operatorname{Re}[J_2(0)]\} = 0,374653.$$

Отсюда явно следует, что при  $f \rightarrow f_{1,2}^0$  поправки стремятся к  $-\infty$ , т. к.  $\chi_{1,2} \rightarrow 0$ .

С другой стороны, используя (3), нетрудно показать, что интегралы в (7) на критических частотах стремятся к  $+\infty$ . Вычисление  $h_{\Gamma}^E$  и  $h_{\Gamma}^F$  в областях прикритических частот можно выполнить путём выделения расходящихся частей интегралов в (7) вблизи высот максимумов слоёв, т. е. на высотах  $h \in \{[\tilde{h}_2 - \delta h_1, \tilde{h}_2]; [\tilde{h}_3, \tilde{h}_3 + \delta h_1, ]; [\tilde{h}_4 - \delta h_2, \tilde{h}_4]\}$ . Напомним здесь, что при  $f < f_{1,2}^0$   $\tilde{h}_2 = h_2$ ,  $\tilde{h}_3 = h_3$  и  $\tilde{h}_4 = h_4$ , а при  $f \in [f_{1,2}^0, f_{1,2}^0 + \Delta f_{1,2}^0]$ , соответственно,  $\tilde{h}_2 = \tilde{h}_3 = h_1^0$  и  $\tilde{h}_4 = h_2^0$ . Последнее следует из решения вышеприведённых уравнений для  $\tilde{h}_{1,2}$  с привлечением аппроксимации (3).

Для расходящихся частей интегралов в (7) при  $f \in [f_{1,2}^0 - \Delta f_{1,2}^0, f_{1,2}^0 + \Delta f_{1,2}^0]$  с учётом (3) нетрудно получить выражения

$$\int_{\tilde{h}_{2,4} - \delta h_{1,2}}^{\tilde{h}_{2,4}} \frac{dh}{\sqrt{\varepsilon}} = -\frac{f}{\sqrt{a_{1,2}^0}} \begin{cases} \operatorname{Ln} \frac{\chi_{1,2}}{\sqrt{2\chi_{1,2}\delta h_{1,2} + (\delta h_{1,2})^2 + \delta h_{1,2} + \chi_{1,2}}}, & f \leq f_{1,2}^0; \\ \operatorname{Ln} \frac{\chi_{1,2}}{\sqrt{\chi_{1,2}^2 + (\delta h_{1,2})^2 + \delta h_{1,2}}}, & f > f_{1,2}^0. \end{cases} \quad (10)$$

Для интеграла в пределах  $[\tilde{h}_3, \tilde{h}_3 + \delta h_1]$  справедливо выражение, стоящее в правой части (10) с индексами, равными единице. Величины  $\delta h_{1,2}$  можно изменять так, чтобы сумма (9) и (10) оказалась равной нулю. Из этого условия получаются следующие уравнения:

$$\begin{cases} \sqrt{2\chi_{1,2}\delta h_{1,2} + (\delta h_{1,2})^2 + \delta h_{1,2} + \chi_{1,2}} = 2\delta h_{1,2}^0, & f \leq f_{1,2}^0; \\ \sqrt{\chi_{1,2}^2 + (\delta h_{1,2})^2 + \delta h_{1,2}} = 2\delta h_{1,2}^0, & f > f_{1,2}^0. \end{cases}$$

Эти уравнения решаются путём несложных преобразований, и для  $\delta h_{1,2}$  получаем

$$\delta h_{1,2} = \begin{cases} \frac{(2\delta h_{1,2}^0 - \chi_{1,2})^2}{4\delta h_{1,2}^0}, & f \in [f_{1,2}^0 - \Delta f_{1,2}^0, f_{1,2}^0]; \\ \frac{4(\delta h_{1,2}^0)^2 - \chi_{1,2}^2}{4\delta h_{1,2}^0}, & f \in [f_{1,2}^0, f_{1,2}^0 + \Delta f_{1,2}^0]. \end{cases} \quad (11)$$

На основании (11) можно охарактеризовать поведение  $\delta h_{1,2}$  следующим образом:  $\delta h_{1,2}$  отличны от нуля в интервалах частот  $f \in [f_{1,2}^0 - \Delta f_{1,2}^0, f_{1,2}^0 + \Delta f_{1,2}^0]$ , а  $\Delta f_{1,2}$  определяются уравнениями  $2\delta h_{1,2}^0 - \chi_{1,2} = 0$ . Поэтому для  $\Delta f_{1,2}$  получаем выражения

$$\Delta f_{1,2} \approx \frac{2a_{1,2}^0(\delta h_{1,2}^0)^2}{f_{1,2}^0} = \frac{cq_2^2}{\pi l_{1,2}^0} \approx 0,1404 \text{ кГц}/l_{1,2}^0 [\text{сот. км}], \quad (12)$$

которые в  $q_2^2$  раз меньше полуинтервалов прикритических частот, определённых в (5), и приблизительно принимают значения  $\Delta f_1 \approx 140$  Гц и  $\Delta f_2 \approx 46$  Гц. На концах указанных частотных интервалов  $\delta h_{1,2} = 0$ . На критических частотах  $\delta h_{1,2}$  достигают максимумов, при этом

$$\delta h_{1,2} = \delta h_{1,2}^0 = q_2 \sqrt{\frac{cl_{1,2}^0}{8\pi f_{1,2}^0}} \approx q_2 \sqrt{\frac{l_{1,2} [\text{сот. км}]}{f_{1,2}^0 [\text{МГц}]} [\text{км}]}, \quad (13)$$

откуда получаем  $\delta h_1^0 \approx 150 \div 400$  м и  $\delta h_2^0 \approx 200 \div 400$  м. Приведённые оценки, вытекающие из (12) и (13), служат надёжным обоснованием правомерности применённой здесь параболической аппроксимации (3). Кроме того, эти оценки обосновывают правомерность аппроксимации (8), которая, как следует из (12), используется лишь на интервале  $|kb_{1,2}| < q_2^2 = 0,1404$ , не выходящем за интервал монотонного изменения  $\text{Re}[\tilde{\Psi}_2(kb_{1,2})]$  (см. рис. 2).

После определения  $\delta h_{1,2}$  (11) вычисление действующих групповых высот (7) сводится к следующему:

$$\begin{aligned} h_{\Gamma}^E(f) &= \int_0^{\tilde{h}_2 - \delta h_1} \frac{dh}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad 0 < f \leq f_1^0 + \Delta f_1^0; \\ h_{\Gamma}^F(f) &= \int_0^{\tilde{h}_2 - \delta h_1} \frac{dh}{\sqrt{\varepsilon}} + \int_{\tilde{h}_3 + \delta h_1}^{\tilde{h}_4 - \delta h_2} \frac{dh}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad f_1^0 - \Delta f_1^0 \leq f \leq f_2^0 + \Delta f_2^0, \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{h}_2 - \delta h_1 &= h_2, \quad f \leq f_1^0 - \Delta f_1; \\ \tilde{h}_3 + \delta h_1 &= h_3, \quad f \leq f_1^0 - \Delta f_1; \\ \tilde{h}_{2,3} \mp \delta h_1 &= \begin{cases} h_1^0 \mp \delta h_1 \mp \frac{\chi_1^2}{4\delta h_1^0}, & f_1^0 - \Delta f_1 < f \leq f_1^0; \\ h_1^0 \mp \delta h_1 \pm \frac{\chi_1^2}{4\delta h_1^0}, & f_1^0 < f \leq f_1^0 + \Delta f_1; \end{cases} \\ \tilde{h}_2 - \delta h_1 &= \tilde{h}_3 + \delta h_1 = h_1^0, \quad f > f_1^0 + \Delta f_1; \\ \tilde{h}_4 - \delta h_2 &= h_4, \quad f < f_2^0 - \Delta f_2; \\ \tilde{h}_4 - \delta h_2 &= \begin{cases} h_2^0 - \delta h_2 - \frac{\chi_2^2}{4\delta h_2^0}, & f_2^0 - \Delta f_2 < f \leq f_2^0; \\ h_2^0 - \delta h_2 + \frac{\chi_2^2}{4\delta h_2^0}, & f_2^0 \leq f < f_2^0 + \Delta f_2. \end{cases} \end{aligned}$$

Эти формулы полностью определяют алгоритм прямого вычисления  $h_{\Gamma}^E$  и  $h_{\Gamma}^F$  при заданном двухслойном профиле плазменной частоты. Их нетрудно обобщить на случай как однослойного, так и трёхслойного (и более сложного) ППЧ.

При постановке обратной задачи функции  $h_{\Gamma}^E(f)$  и  $h_{\Gamma}^F(f)$  являются заданными в указанных частотных интервалах и непрерывны вместе со своими первыми производными (в последнем нетрудно убедиться с помощью (9) и (10)). Выражения (7) и (14) определяют тогда различные формы записи интегральных уравнений для функции  $f_e(h)$  (при этом запись (7) более общая). Слияние функций  $h_{\Gamma}^E(f)$  и  $h_{\Gamma}^F(f)$  в единую функцию  $h_{\Gamma}(f)$  свидетельствует об отсутствии долины, а наличие максимума у  $h_{\Gamma}(f)$  говорит о наличии перегиба на ППЧ. Все эти условия необходимы при решении обратной задачи.

## 2. РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Обсудим различные способы решения обратной задачи. Первым способом является отыскание аналитического решения в виде квадратур. Вне областей критических частот это достигается сведением интегральных уравнений (6), (7) или (14) к уравнению Абеля, затем решение находится с помощью инверсии Абеля [6, 7]. В областях критических частот указанные интегральные уравнения не сводятся к уравнению Абеля, а отыскание непосредственно их аналитического решения наталкивается на существенные трудности. Вторым способом решения обсуждаемых интегральных уравнений являются численные методы. Точность этих методов определяется постулированием класса функций, в котором ищется решение  $f_e^2(h)$ . Разработанные на данный момент численные методы решения обратных задач в основном ищут  $f_e^2(h)$  в классе непрерывных функций. Эти методы обеспечивают удовлетворительную точность везде, кроме областей критических частот, где их точности явно недостаточно.

Ниже развивается метод численного решения интегральных уравнений (14) посредством модификации метода Джексона [8] ( $f_e^2(h)$  — непрерывная функция) с повышением точности в областях максимумов слоёв (критических частот) и долин, где  $f_e^2(h)$  принадлежит классу функций, непрерывных вместе со своей первой производной.

Пусть действующие групповые высоты  $h_\Gamma^E(f)$  и  $h_\Gamma^F(f)$  заданы на произвольной сетке частот  $f_n$ , где  $n = 1, 2, \dots, N_2$ , массивом значений  $h'_n$  с единственным ограничением: при  $n = N_1, N_1 + 1$   $f_{N_1} = f_{N_1+1} = f_1^0$ ,  $h'_{N_1} = h_\Gamma^E(f_1^0)$ ,  $h'_{N_1+1} = h_\Gamma^F(f_1^0)$  и при  $n = N_2$   $f_{N_2} = f_2^0$ ,  $h'_{N_2} = h_\Gamma^F(f_2^0)$ . Истинные высоты  $h(f_e)$  будем искать на сетке плазменных частот  $f_{e_i}$ , совпадающей с сеткой рабочих частот  $f_n$  ( $f_{e_i} = f_n$  при  $i = n$ ).

Предполагая, что ионосфера начинается с высоты  $h_0$  и на каждом интервале  $\Delta f_{e_i} = f_{e_i} - f_{e_{i-1}}$  производная  $dh/df_e = \Delta h_i / \Delta f_{e_i}$  постоянна, для значений  $f = f_n$ , где  $n = 1, 2, \dots, (N_1 - 1)$ , первый интеграл в (14) можно заменить суммой интегралов. Тогда приходим к системе уравнений

$$h'_n = h_0 + \sum_{i=1}^n I_{in}, \quad I_{in} = \Delta h_i M_{in},$$

$$M_{in} = \frac{1}{\Delta f_{e_i}} \int_{f_{e_{i-1}}}^{f_{e_i}} \frac{df_e}{\sqrt{1 - (f_e/f_n)^2}} = \frac{f_n}{\Delta f_{e_i}} \arcsin \left\{ \frac{f_{e_i}}{f_n} \sqrt{1 - \frac{f_{e_{i-1}}^2}{f_n^2}} - \frac{f_{e_{i-1}}}{f_n} \sqrt{1 - \frac{f_{e_i}^2}{f_n^2}} \right\}, \quad (15)$$

решение которой на указанном промежутке сетки частот можно записать в виде следующего алгоритма, составляющего суть метода Джексона:

$$h_n = h_0 + \sum_{i=1}^n \Delta h_i, \quad \Delta h_n = \Delta \tilde{h}'_n / M_{nn}, \quad \Delta \tilde{h}'_n = h'_n - h_0 - \sum_{i=1}^{n-1} I_{in}. \quad (16)$$

На первом шаге ( $n = 1$ )  $\Delta \tilde{h}'_1 = h'_1 - h_0$ ,  $M_{11} = \pi/2$  и  $\Delta h_1 = 2(h'_1 - h_0)/\pi$ . Пошаговое применение формул (16) определяет приращения истинной высоты и сами истинные высоты. При этом находится одно из семейства решений, пересчитывающим параметром которых является высота начала ионосферы  $h_0$ .

На участке интегрирования  $n = N_1$  аппроксимация  $f_e(h)$  линейной функцией неприемлема. Проще всего здесь принять параболическую аппроксимацию  $f_e^2(h)$  (3). Из условия сшивки параболы с решением на предыдущем шаге получим

$$a_1^0 = \frac{(f_1^0)^2 - f_{N_1-1}^2}{(h_{N_1-1} - h_1^0)^2} = \frac{f_{N_1}^2 - f_{N_1-1}^2}{(h_{N_1-1} - h_{N_1})^2}. \quad (17)$$

Последний элемент в сумме (15) будет теперь равен интегралу

$$I_{nn} = \int_{h_{N_1-1}}^{h_{N_1}-\delta h_1^0} \frac{dh}{\sqrt{\varepsilon}} = -\frac{f_{N_1}}{\sqrt{a_1^0}} \operatorname{Ln} \frac{\delta h_1^0}{h_{N_1} - h_{N_1-1}} = \frac{f_{N_1}}{\sqrt{a_1^0}} \operatorname{Ln} \frac{1}{Q (a_1^0)^{1/4}}, \quad (18)$$

$$Q = \frac{\sqrt{c} q_2}{2 \sqrt{\pi (f_{N_1}^2 - f_{N_1-1}^2)}},$$

который вычислен с учётом (17) и выражения для  $\delta h_1^0$  из (9). Новое уравнение системы (15) можно привести к трансцендентному виду

$$e^{-\alpha z} = Q \sqrt{z}, \quad z = \sqrt{a_1^0}, \quad \alpha = \frac{\Delta \tilde{h}'_{N_1}}{f_{N_1}}, \quad (19)$$

определяющему  $a_1^0$ . Приращение  $\Delta h_n = \Delta h_{N_1}$  тогда определится из (17), а высота максимума первого слоя продолжением суммы (16).

Решение уравнения (19) будем искать дифференциально-параметрическим методом [9]. Для этого положим, что  $z(t)$  является решением уравнения

$$e^{-\alpha z} = Q \sqrt{z} t. \quad (20)$$

При  $t = 1$  уравнения (20) и (19) совпадают, поэтому  $z(1)$  является одновременно решением (19). Дифференцируя (20) по  $t$  и заменяя в полученном выражении трансцендентную функцию алгебраической в соответствии с (20), решение уравнения (19) нетрудно свести к интегрированию следующей задачи Коши:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{-z}{(\alpha z + 1/2)t}, \quad z(t_0) = z_0, \quad t \in [1, t_0]; \quad t_0 = \frac{\sqrt{\alpha}}{Q \sqrt{j} e^j}, \quad z_0 = \frac{j}{\alpha}, \quad (21)$$

где  $j$  — наибольшее целое число, при котором  $t_0$  ещё больше единицы. Интегрирование (21) методом Рунге—Кутты позволяет найти решение уравнения (19) на разрядной сетке 7–8-ми десятичных значащих цифр с невязкой порядка  $10^{-6}$ .

При интегрировании на участке  $n = N_1 + 1$  необходимо аппроксимировать долину. Будем задавать её двумя сшитыми параболой:

$$\begin{aligned} f_e^2(h) &= -a_1 (h - h_1^0)^2 + (f_1^0)^2, & h_1^0 \leq h \leq h_c; \\ f_e^2(h) &= a_2 (h - h_d)^2 + f_d^2, & h_c \leq h \leq h_4, \end{aligned} \quad (22)$$

где  $f_d$ ,  $h_d$  — плазменная частота и высота дна долины,  $h_c$  — высота точки сшивки парабол. Сшивка функции  $f_e^2(h)$  и её первой производной в максимуме первого слоя в (22) уже выполнена. Асимметричность долины будем характеризовать отношением  $p = a_2/a_1$ . Из условия сшивки первых производных при  $h = h_c$  находим

$$h_c = \frac{p h_d + h_1^0}{1 + p} = \frac{p h_d + h_{N_1}}{1 + p}. \quad (23)$$

При  $p \rightarrow 0$ ,  $h_c \rightarrow h_1^0$  получаем симметричную долину, при  $p \rightarrow +\infty$ ,  $h_c \rightarrow h_d$  долина наиболее асимметрична. Использование (23) при сшивке зависимости  $f_e^2$  в точке  $h_c$  позволяет определить  $a_1$  следующим образом:

$$a_1 = \frac{(f_1^0)^2 - f_d^2}{(h_d - h_1^0)^2} \frac{1 + p}{p} = \frac{f_{N_1}^2 - f_d^2}{(h_d - h_{N_1})^2} \frac{1 + p}{p}. \quad (24)$$

С учётом (24) точка поворота  $h_4$  находится из второго уравнения (22) при условии  $f_e^2(h_4) = f_{N_1+1}^2$ :

$$h_{N_1+1} = h_4 = \frac{h_d - h_1^0}{\sqrt{1+p}} + h_d = \frac{h_d - h_{N_1}}{\sqrt{1+p}} + h_d. \quad (25)$$

Таким образом, если плазменную частоту дна долины  $f_d$  и асимметричность  $p$  считать заданными, то для полного определения долины необходимо найти параметр  $h_d$  или  $a_1$ . При  $n = N_1 + 1$  последний элемент суммы (15) в соответствии с (22) теперь равен сумме интегралов

$$I_{nn} = \int_{h_{N_1+\delta h_1^0}}^{h_c} \frac{dh}{\sqrt{\varepsilon}} + \int_{h_c}^{h_4} \frac{dh}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{f_{N_1}}{\sqrt{a_1}} \text{Ln} \frac{1}{Q_d (a_1)^{1/4}}, \quad (26)$$

$$Q_d = \frac{\sqrt{c} q_2 \sqrt{1+1/p}}{2 \sqrt{\pi(f_{N_1}^2 - f_d^2)} \exp[(\pi/2 + \arcsin(1/\sqrt{1+p})) / \sqrt{p}]},$$

где для преобразования правой части использовались (24) и выражение для  $\delta h_1^0$  из (9). Следовательно, как и на предыдущем шаге, последнее уравнение системы (15) приведётся к виду

$$e^{-\alpha_n z} = Q_d \sqrt{z}, \quad z = \sqrt{a_1}, \quad \alpha_n = \frac{\Delta \tilde{h}'_{N_1+1}}{f_{N_1}}, \quad \Delta \tilde{h}'_{N_1+1} = \Delta h'_n = h'_{N_1+1} - h'_{N_1}, \quad (27)$$

который полностью аналогичен (19). Решение (27) сводится к интегрированию задачи Коши (21) с заменой  $\alpha$  на  $\alpha_d$  и  $Q$  на  $Q_d$ . После нахождения  $z$  искомые параметры определяются следующим образом:  $a_1 = z^2$ ,  $a_2 = p a_1$ ,  $(h_d - h_{N_1})$  находится из (24),  $h_{N_1+1}$  — из (25).

Здесь необходимо отметить, что если при выходе из долины в точке  $h_4 = h_{N_1+1}$  требовать лишь непрерывность  $f_e^2(h)$ , то в области долины поставленной задаче удовлетворяет семейство решений с двумя пересчитываемыми параметрами  $f_d$  и  $p$ . Ниже будет показано, что требование непрерывности ещё и производной от  $f_e^2(h)$  при выходе из долины фиксирует асимметричность  $p$ , при этом семейство решений пересчитывается одним параметром.

Далее, при интегрировании на участках  $n = (N_1 + 2), \dots, (N_2 - 1)$ , снова становится приемлемой аппроксимация  $f_e(h)$  отрезками линейных функций, и для определения истинных высот можно следовать методу Джексона (16). При этом элементы суммы (15) на интервалах интегрирования, на которых принималась квадратичная аппроксимация  $f_e^2(h)$  (т. е. при  $i = N_1, N_1 + 1$ ), вычисляются по следующим формулам:

$$I_{N_1 n} = \frac{f_n}{\sqrt{a_1^0}} \text{Ln} \frac{\sqrt{f_{N_1}^2 - f_{N_1-1}^2} + \sqrt{f_n^2 - f_{N_1-1}^2}}{\sqrt{f_n^2 - f_{N_1}^2}},$$

$$I_{N_1+1 n} = \frac{f_n}{\sqrt{a_1}} \left\{ \text{Ln} \frac{\sqrt{p(f_{N_1}^2 - f_d^2)/(1+p)} + \sqrt{p(f_{N_1}^2 - f_d^2)/(1+p) + f_n^2 - f_{N_1}^2}}{\sqrt{f_n^2 - f_{N_1}^2}} + \right. \quad (28)$$

$$\left. + \frac{1}{p} \left( \arcsin \frac{\sqrt{f_{N_1+1}^2 - f_d^2}}{\sqrt{f_n^2 - f_d^2}} + \arcsin \frac{\sqrt{f_{N_1+1}^2 - f_d^2}}{\sqrt{(1+p)(f_n^2 - f_d^2)}} \right) \right\},$$

которые получаются с привлечением (3) и (22) путём вычисления интегралов в пределах  $[h_{N_1-1}, h_{N_1}]$  и  $[h_{N_1}, h_{N_1+1}]$  соответственно, поскольку вне области критических частот  $\delta h_1 = 0$ . Истинные высоты при  $i > N_1 + 1$  определяются в соответствии с (15) и (16).

На последнем шаге интегрирования ( $n = N_2$ ) необходимо применять для  $f_e^2(h)$  квадратичную аппроксимацию (3). Тогда коэффициент  $a_2^0$  вычисляется интегрированием задачи Коши (21), где  $\alpha = \Delta \tilde{h}'_{N_2} / f_{N_2}$ ,  $Q = \sqrt{c} q_2 / \left( 2 \sqrt{\pi(f_{N_2}^2 - f_{N_2-1}^2)} \right)$  и  $a_2^0 = z^2$ . Аналогично (17)  $\Delta h_{N_2} = h_{N_2} - h_{N_2-1} = \sqrt{f_{N_2}^2 - f_{N_2-1}^2} / z$ , и высота максимума второго слоя  $h_{N_2}$  определяется продолжением суммы (16). На этом, если не требовать непрерывности  $[f_e^2(h)]'_h$  в точке  $h = h_{N_1+1}$ , алгоритм решения обратной задачи заканчивается.

Может оказаться полезным в качестве параметра, пересчитывающего семейство решений выше максимума первого слоя, выбрать фазовую высоту долины  $\Delta h_\phi = h_\phi^F(f_1^0) - h_\phi^E(f_1^0)$ . Этот параметр заменяет пересчитывающий параметр  $f_d$ . Действительно, привлекая (22) и (6), получаем

$$\Delta h_\phi = \frac{f_{N_1}^2 - f_d^2}{2f_{N_1} \sqrt{a_1}} \left[ 1 + \frac{1}{\sqrt{p}} \left( \frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+p}} \right) \right].$$

Отсюда

$$f_{N_1}^2 - f_d^2 = \frac{2f_{N_1} \Delta h_\phi \sqrt{a_1}}{1 + \left( \frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+p}} \right) / \sqrt{p}}, \quad (29)$$

что даёт дополнительное уравнение на неизвестный коэффициент  $a_1$  и позволяет при решении обратной задачи освободиться от необходимости решения трансцендентного уравнения (27). Подставим (29) в (27) и после несложных преобразований придём к следующему результату:

$$z = \sqrt{a_1} = \frac{f_{N_1}}{\Delta h'_{N_1+1}} \operatorname{Ln} \frac{2 \sqrt{2\pi \Delta h_\phi f_{N_1} / c} \exp \left[ \frac{1}{\sqrt{p}} \left( \frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+p}} \right) \right]}{q_2 \sqrt{\left( 1 + \frac{1}{p} \right) \left[ 1 + \frac{1}{\sqrt{p}} \left( \frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+p}} \right) \right]}}. \quad (30)$$

Таким образом при заданных  $\Delta h_\phi$  и  $p$  определяется искомый коэффициент  $a_1$ , а высота выхода из долины находится из (24), (25).

Вышеизложенный алгоритм обладает одним существенным недостатком, который заключается в том, что при определённых заданных значениях  $f_d$  и  $p$  (или  $\Delta h_\phi$  и  $p$ ) после выхода из долины он допускает решения, неоднозначные по плазменной частоте, а это недопустимо по физическим соображениям. Указанный недостаток снимается требованием непрерывности производной  $[f_e^2(h)]'_h$  в точке  $h_4 = h_{N_1+1}$ . Для удовлетворения этого требования необходимо согласовать производные до и после выхода из долины. До выхода из долины, используя (22), получаем

$$PR = h'_{f_e^2} = \left( \frac{df_e^2}{dh} \right)^{-1} = \frac{1}{2a_2(h_4 - h_d)} = \frac{1}{2 \sqrt{pa_1} \sqrt{f_{N_1+1}^2 - f_d^2}}. \quad (31)$$

После выхода из долины ( $n = N_1 + 2$ ) с учётом (16) и (28) можно записать

$$PR_1 = h'_{f_e^2} = \frac{\Delta h_n}{\Delta f_n^2} = \frac{\Delta h_{N_1+2}}{f_{N_1+2}^2 - f_{N_1+1}^2} = \frac{\Delta \tilde{h}'_{N_1+2}}{M_{N_1+2} (f_{N_1+2}^2 - f_{N_1+1}^2)}. \quad (32)$$

Для согласования производных необходимо найти такое  $p$ , при котором  $PR_1 - PR = 0$ . Решение этого уравнения можно найти численно методом Ньютона [10], многократно повторяя этапы интегрирования  $n = N_1 + 1$  и  $n = N_1 + 2$ . Для этого в допустимом диапазоне изменения  $p \in [0,01; 100]$  асимметричность



задаётся последовательностью  $p_m = \exp(x_m)$ , где  $x_m = \text{Ln}(100) (2m/m_0 - 1)$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots, m_0$ ,  $m_0$  — фиксированное целое число, и повторяются этапы интегрирования  $n = N_1 + 1, n = N_1 + 2$  до тех пор, пока разность  $R_m = PR_1 - PR$  не изменит знак. Далее значения  $p$  изменяются в соответствии с методом Ньютона  $p_{m+1} = p_m \exp[-R_m(x_m - x_{m-1})/(R_m - R_{m-1})]$ , пока разность  $R_m$  не достигнет нуля с заданной точностью. После этого решение обратной задачи выполняется по изложенной выше схеме.

Информация о полученном решении после завершения работы данного алгоритма содержится в массивах  $h_n, f_n$ , где  $n = 0, 1, \dots, N_2$ , и коэффициентах аналитических функций (3), (22):  $a_1^0, h \in [h_{N_1-1}, h_{N_1}]$ ;  $a_1, h \in [h_{N_1}, h_c]$ ;  $a_2, f_d$  (или  $\Delta h_\phi$ ),  $h \in [h_c, h_{N_1+1}]$ ;  $a_2^0, h \in [h_{N_2-1}, h_{N_2}]$ . Для большинства приложений вывод информации можно осуществлять в виде последовательности чисел:  $h_n, f_n$  ( $n = 0, 1, \dots, N_1$ );  $h_m, f_m = f_e(h_m)$ , рассчитанных по формулам (22) в точках  $h_m = h_{N_1} + (h_{N_1+1} - h_{N_1})m/m_0$  ( $m = 1, 2, \dots, (m_0 - 1)$ ), и далее  $h_n, f_n$  ( $n = (N_1 + 1), \dots, N_2$ ).

Получающиеся таким образом решения пересчитываются двумя параметрами,  $h_0$  и  $f_d$  (или  $\Delta h_\phi$ ). Ниже будут исследоваться именно эти решения (непрерывные вместе с первой производной при выходе из долины). Сужение семейства решений в связи с неопределённостью высоты начала ионосферы может осуществляться заданием действующих групповых высот при как можно более низких частотах, где можно считать  $h_\Gamma \approx h_\phi \approx h_0$ . Поэтому основное внимание дальше уделяется исследованию решений, пересчитываемых параметром  $f_d$  (или  $\Delta h_\phi$ ).

### 3. РАЗЛИЧИМОСТЬ ПРОФИЛЕЙ ПЛАЗМЕННОЙ ЧАСТОТЫ

Представленный выше алгоритм реализован на ЭВМ IBM PC-486 на языке FORTRAN и проверен следующим образом. Первоначально профиль плазменной частоты задавался в виде суммы двух слоёв Чепмена:

$$f_e(h) = \sum_{i=1}^2 f_i^0 \exp \left[ 1 - \frac{h - h_i^0}{T_i} - \exp \left( -\frac{h - h_i^0}{T_i} \right) \right], \quad (33)$$

где  $f_1^0 = 2$  МГц,  $h_1^0 = 100$  км,  $T_1 = 20$  км,  $f_2^0 = 6$  МГц,  $h_2^0 = 300$  км,  $T_2 = 120$  км (сплошная кривая, рис. 3а), оцифровывался с шагом 5 км по высоте, и по этим данным рассчитывались частотные развёртки групповой (сплошная кривая, рис. 3б) и фазовой (кривая, помеченная кружочками, рис. 3в) высот по формулам (6), (14) на основе алгоритма [11]. Отметим, что при  $\gamma = 0$  фазовая высота  $h_\phi$  связана с адиабатическим инвариантом  $\tilde{I}$ , или фазовым путём, и номером нормальной волны  $n$  [11] соотношениями  $h_\phi = a\tilde{I}/2 = \pi n/k$ , где  $a$  — радиус Земли. В случае наклонного распространения радиосигнала параметры  $\tilde{I}$  и  $n$  связаны аналогичными соотношениями с вертикальной составляющей фазового пути.

Далее массивы групповых высот на равномерной сетке частот по 60 точек для каждого следа являлись входными данными для решения обратной задачи. Поскольку высота начала ионосферы и плазменная частота дна долины известны, то сначала восстанавливался исходный ППЧ. Результат восстановления показан кружками на рис. 3а, отличия от (33) не превышали 0,5%. После этого были восстановлены ППЧ с более глубокой и более мелкой долиной, обозначенные крестиками и ромбиками соответственно на рис. 3а. Затем ППЧ, полученные на равномерной сетке частот, пересчитывались на равномерную сетку высот, и снова выполнялся прямой расчёт частотных развёрток групповых и фазовых высот на основе алгоритма [11]. Результаты вычислений представлены на рис. 3б, в значками, соответствующими значкам, использованным для обозначения ППЧ. При этом различия действующих групповых высот не превышали 1% на всех частотах, кроме критических, где различия достигали 2%. Последнее может быть следствием ошибок, неизбежно приобретаемых на этапе пересчёта данных на

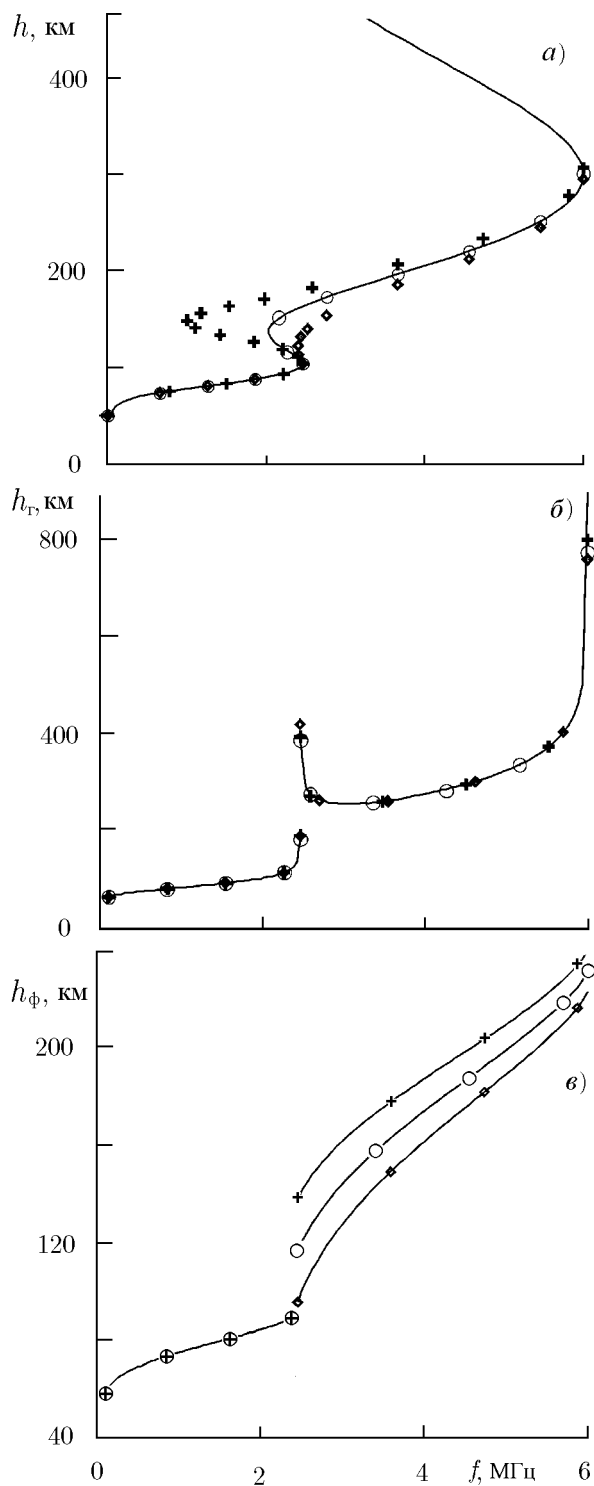


Рис. 3. Профили плазменной частоты (а), частотные развёртки групповых (б) и фазовых (в) высот

равномерную сетку по высоте. Отличия фазовых высот для исходного профиля и профиля, помеченного кружками, не превышали 0,5 %. Всё это свидетельствует о высокой надёжности алгоритма решения обратной задачи. Восстановленные ППЧ на рис. 3а принадлежат семейству профилей, удовлетворяющих одной ВЧХ (рис. 3б). Для выбора одного профиля из семейства необходимо привлекать дополнительную информацию. В качестве такой информации можно было бы воспользоваться частотными развёртками фазовых высот (рис. 3в), однако при вертикальном зондировании ионосферы абсолютное значение пространственного набега фазы неизмеримо. Поэтому необходимы другие критерии выбора единственного решения обратной задачи.

Поскольку не существует строгой модификации метода Смита [12] для случая сферически-слоистой ионосферы [13], следует ожидать, что ППЧ, удовлетворяющие одной высотно-частотной характеристике, различимы в характеристиках сигнала наклонного распространения (напомним, что метод Смита для плоскостройной среды решает задачу прямого пересчёта ВЧХ в характеристики сигнала наклонного распространения без восстановления ППЧ). Поэтому для однозначного решения диагностической задачи может оказаться полезным совместное использование данных вертикального и наклонного зондирования ионосферы.

С целью проверки такой возможности выполнен расчёт дальностных (при частоте сигнала  $f=12$  МГц) и частотных (на удалении  $D=2000$  км) развёрток основных характеристик сигнала для сферически-слоистой непоглощающей ионосферы, последовательно задаваемой профилями плазменной частоты, показанными на рис. 3а. Результаты вычислений для мода  $1F$  представлены на рис. 4, где  $\tilde{I}$  — адиабатический инвариант,  $\beta$  — угол прихода (выхода),  $\tilde{\tau} = \tau - D/c$ ,  $\tau$  — время распространения,  $E_\varphi$  — азимутальная компонента напряжённости электрического поля, возбуждаемого точечным вертикальным магнитным диполем (высота точек излучения и наблюдения равна 20 м). Сплошными кривыми представлены результаты вычислений для восстановленного исходного профиля, крестиками и ромбиками — для профилей, помеченных теми же значками на рис. 3а.

Из представленных на рис. 4 результатов следу-

ет, что задержки сигнала рис. 4*в*, *в'* одинаковы для всех трёх профилей семейства, приведённого на рис. 3*а*. В углах прихода  $\beta$  рис. 4*б*, *б'* профили семейства различимы, однако это различие очень слабое и не превышает  $0,5^\circ$ . При использовании этой информации для выбора единственного решения возникают весьма жёсткие требования к точности угломерных измерений, которые трудно удовлетворить практически. Слабая зависимость дистанционно-угловых или дистанционно-частотных характеристик от профиля семейства не проявляется и в амплитудах сигнала  $E_\varphi$  (рис. 4*г*, *г'*), хотя для вычисления  $E_\varphi$  используется производная от дистанционно-угловых характеристик. Единственная характеристика, существенно реагирующая на профиль семейства, — это  $\tilde{I}$  (рис. 4*а*, *а'*), или фазовый путь, однако при наклонном зондировании ионосферы невозможно измерить непосредственно абсолютное значение пространственного набега фазы сигнала. Поэтому и в данном случае вопрос о выборе единственного профиля из семейства остаётся открытым. С другой стороны, отсюда следует, что существующие модификации метода Смита для случая сферически-слоистой ионосферы можно заменить схемой вычисления, выполненной здесь, с восстановлением одного любого ППЧ из семейства.

Результаты, полученные для сферически-слоистой ионосферы, можно обобщить на случай трёхмерно-неоднородной среды. Основу для такого утверждения даёт адиабатическое приближение метода нормальных волн, согласно которому [14] на неоднородной трассе параметры сигнала определяются интегрированием по дальности трассы распространения (вдоль поверхности Земли) характеристик сигнала в волноводах сравнения при постоянном значении адиабатического инварианта. Следовательно, если в каждом волноводе сравнения нормированные характеристики сигнала сдвинуть по оси значений инварианта на одинаковую величину, то результат их интегрирования по дальности останется неизменным. Это означает, что существует семейство неоднородных сред, неразличимых или слабо различимых при наклонном зондировании ионосферы. С целью оценки различимости этих сред в основных характеристиках сигнала наклонного распространения выполнено следующее моделирование.

На продольно-неоднородной трассе протяжённостью 2000 км в пяти разрезах с шагом 500 км двухслойная ионосфера определялась суммой слоёв Чепмена (33) с параметрами, меняющимися вдоль трассы согласно табл. 1. Исходные ППЧ представлены сплошными кривыми слева на рис. 5. Частотные развёртки действующих групповой и фазовой высот, рассчитанных на основе [11] по этим ППЧ, представлены сплошными кривыми справа на рис. 5. Затем по ВЧХ в каждом разрезе были восстановлены ППЧ с увеличением фазовых высот долин  $\Delta h_\phi$  на одинаковую величину, равную 30 км, для всех разрезов. Восстановленные ППЧ показаны пунктиром слева на рис. 5. Действующие групповые и фазовые высоты, рассчитанные по этим профилям, показаны справа на рис. 5 крестиками и пунктирными кривыми соответственно. Таким образом, построены две среды, удовлетворяющие в каждом разрезе одинаковым ВЧХ.

Для оценки различимости этих сред на основе [11] был выполнен расчёт дальностных (при частоте сигнала 12 МГц) и частотных (на удалении 2000 км) развёрток основных характеристик отдельных модов распространения. Результаты представлены на рис. 6 с одним изменением в обозначениях параметров по сравнению с рис. 4:  $\beta_0$  — угол выхода,  $\beta$  — угол прихода. При этом кружочками показаны результаты вычислений для среды, определённой сплошными, а крестиками — пунктирными профилями на рис. 5. Исследуемыми являются характеристики модов  $F$ -канала.

Из представленных на рис. 6 результатов следует, что качественно различимость неоднородных сред осталась такой же, как и сферически-слоистых. Задержки  $F$ -модов  $\tilde{\tau}$  по-прежнему хорошо сов-

Таблица 1

$D$ , км	$f_1^0$ , МГц	$h_1^0$ , км	$T_1$ , км	$f_2^0$ , МГц	$h_2^0$ , км	$T_2$ , км
0	3,00	90,0	20	6,0	300	120
500	2,25	92,5	20	7,5	295	120
1000	2,00	95,0	20	8,0	290	120
1500	2,25	97,5	20	7,5	285	120
2000	3,00	100,0	20	6,0	280	120

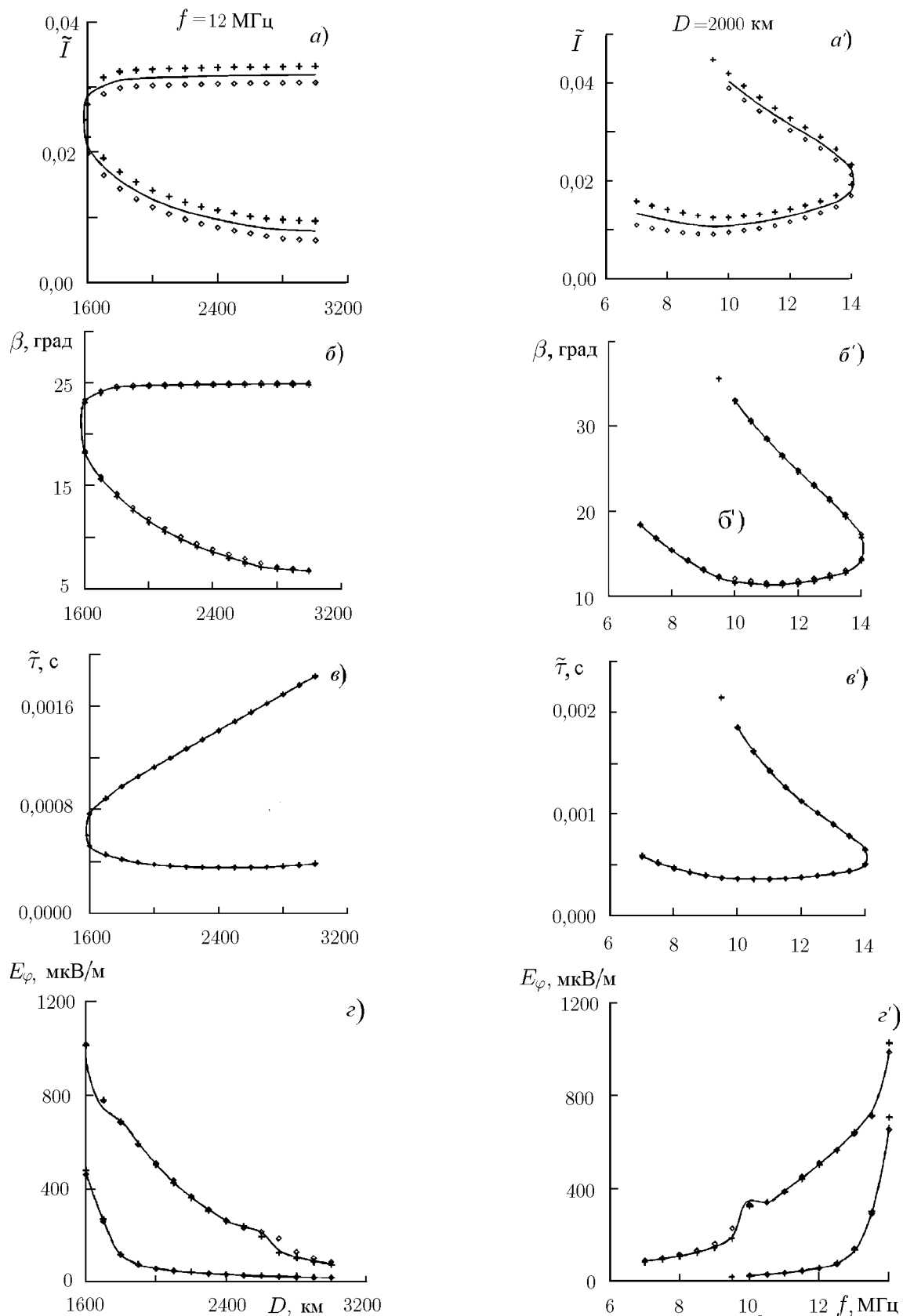


Рис. 4. Дальностные и частотные развёртки основных характеристик мода 1F на сферически-симметричной трассе

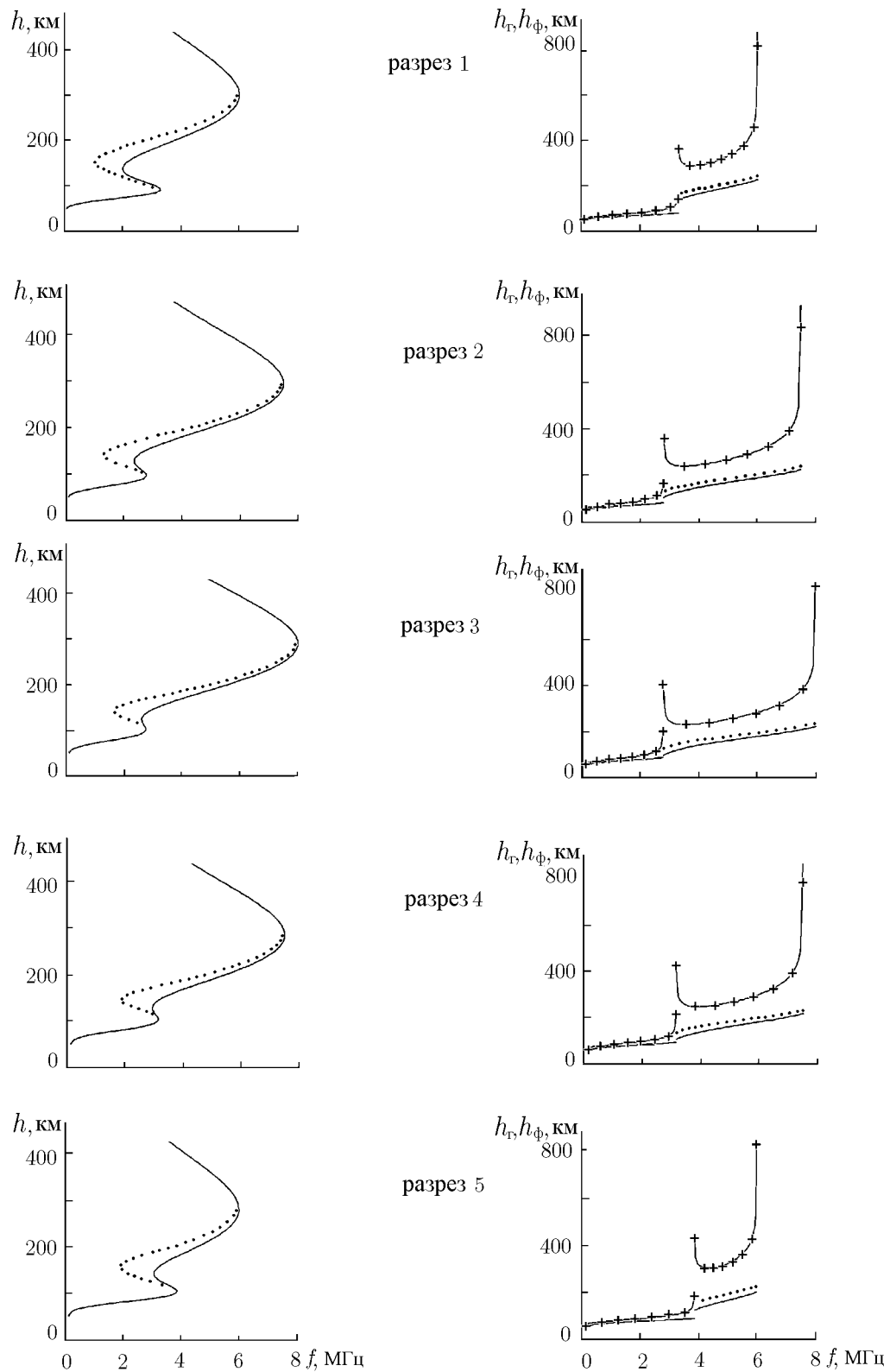


Рис. 5. ППЧ, групповые и фазовые высоты в разрезах продольно-неоднородной трассы

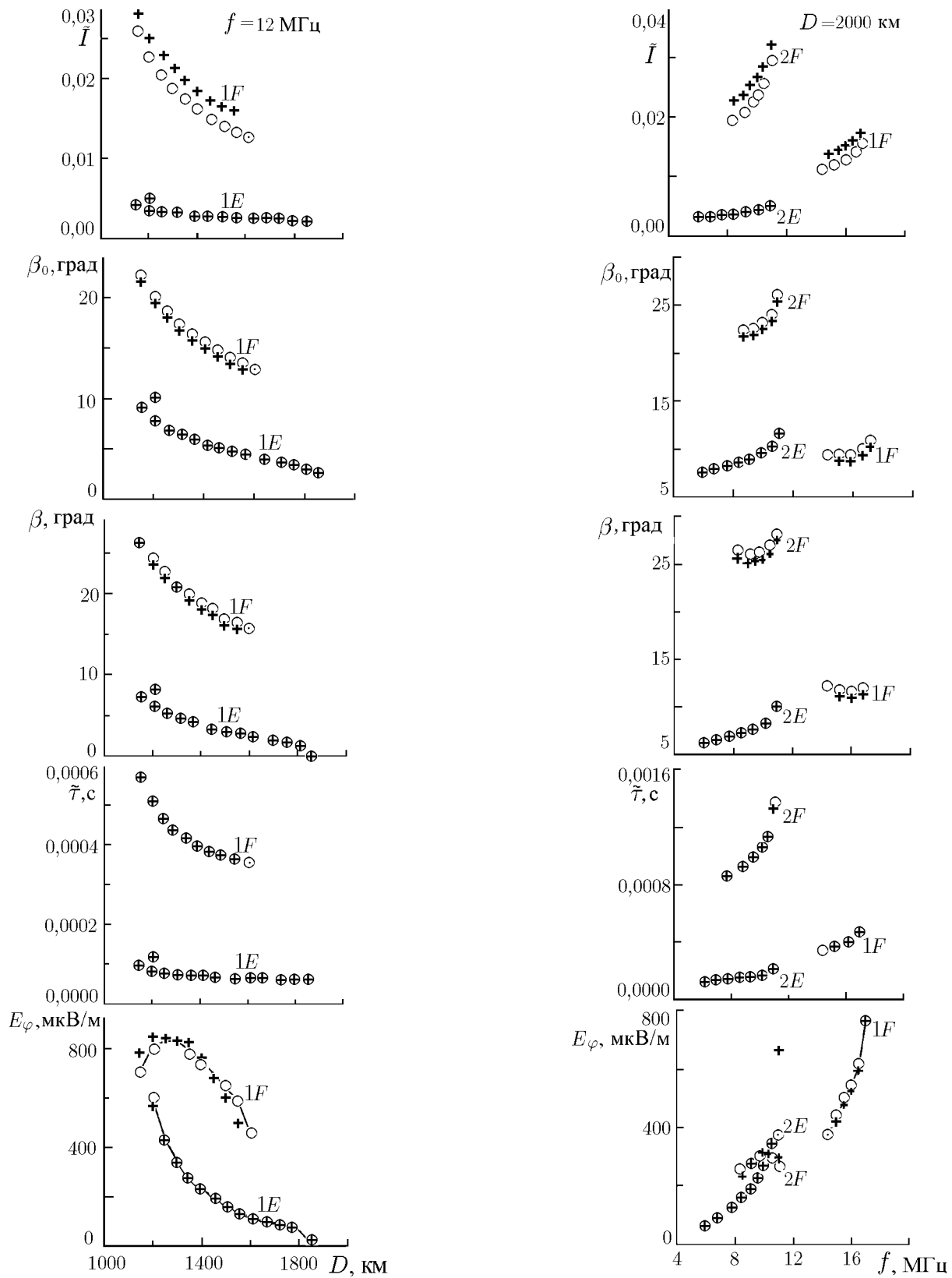


Рис.6. Дальностные и частотные развёртки основных характеристик на продольно-неоднородной трассе

падают в обеих средах. В углах выхода  $\beta_0$  и прихода  $\beta$  различимость продольно-неоднородных сред несколько улучшилась, но различие в углах всё же не превышает одного градуса. Вследствие этого увеличилось различие и в амплитудах сигнала  $E_\varphi$ . Это различие указывает на изменение фокусирующих свойств сред, ибо поглощение при расчётах не учитывалось. Хотя различимость неоднородных сред в параметрах  $\beta_0$ ,  $\beta$ ,  $\tilde{\tau}$ ,  $E_\varphi$  улучшилась, тем не менее она осталась слабой. Наиболее информативным параметром для выбора единственной среды из семейства остаётся  $\tilde{I}$ , или фазовый путь. В заключение отметим, что с учётом поглощения различимость сред в амплитудах сигнала существенно увеличится, но использование этого обстоятельства для диагностики среды усложнится решением задачи восстановления профиля частоты соударений. Эта отдельная тема исследования остаётся за рамками данной работы.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе полученных здесь результатов можно сделать следующие выводы. В изотропной двухслойной ионосфере одной ВЧХ удовлетворяет семейство ППЧ, пересчитываемых двумя параметрами,  $h_0$  и  $f_d$ . Первый пересчитывающий параметр  $h_0$  может принимать значения от нуля до  $h_1^E(f_1)$ , где  $f_1$  — самая низкая частота зондирования. Второй пересчитывающий параметр  $f_d$  может принимать значения от нуля до  $f_1^0 - \Delta f_1^0$ . При этом неопределённость высоты долины может достигать 100 км, а неопределённость высоты максимума второго слоя достигает 60 км, или 20 % от её среднего значения. В сферически-слоистой непоглощающей ионосфере профили плазменной частоты, образующие семейство вследствие указанной неопределённости, слабо различимы в параметрах  $\beta$ ,  $\tilde{\tau}$ ,  $E_\varphi$  сигнала наклонного распространения. В случае неоднородной непоглощающей ионосферы существует семейство сред, слабо различимых в параметрах  $\beta_0$ ,  $\beta$ ,  $\tilde{\tau}$ ,  $E_\varphi$  сигнала наклонного распространения. Это семейство сред пересчитывается изменением фазовых высот долин на одинаковую величину в каждом разрезе трассы распространения. Наиболее информативным параметром для выбора единственного ППЧ (или единственной среды на неоднородной трассе) является фазовый путь (или пространственный набег фазы), но он неизмерим при зондировании ионосферы. Слабая различимость ППЧ семейства в параметрах сигнала наклонного распространения  $\beta$ ,  $\tilde{\tau}$ ,  $E_\varphi$  является следствием сферичности ионосферы, т. к. в плоскостной среде в соответствии с методом Смита задача пересчёта ВЧХ в параметры  $\beta$ ,  $\tilde{\tau}$ ,  $E_\varphi$  решается без восстановления ППЧ.

Для уменьшения неоднозначности восстановления ППЧ, удовлетворяющих заданной ВЧХ, можно воспользоваться их различимостью в углах прихода сигнала наклонного распространения. Однако в этом случае необходимо выполнять измерения углов прихода с точностью до сотых долей градуса.

Использование для диагностики среды моделей ионосферы, адаптируемых согласованием с ВЧХ в наборе точек радиотрассы, может приводить к восстановлению сред, не принадлежащих к семейству слабо различимых в характеристиках сигнала наклонного распространения и не позволяющих достичь согласия с данными наклонного зондирования ионосферы. Удовлетворительные результаты в этом методе восстановления среды можно получить при адаптации моделей ионосферы одновременно к данным и вертикального, и наклонного зондирования.

Возможность однозначной фиксации долины с постулированием её формы появляется при учёте анизотропии ионосферы и восстановлении ППЧ по ВЧХ обыкновенной и необыкновенной магнито-ионных компонент сигнала [15, 16]. Однако необыкновенная компонента часто не регистрируется из-за её низкого уровня, и применение метода ограничивается необеспеченностью данными измерений.

В современных диагностических средствах ограниченность отдельных методов восстановления ППЧ компенсируется применением определённого сочетания различных методов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Бенце П., Шайко Й., Шатори Г. // Методы расчёта и исследования  $N(h)$ -профилей ионосферы. — М.: ИЗМИРАН, 1973. — Ч. 1. С. 37.
2. Гуляева Т. Л. // Методы расчёта и исследования  $N(h)$ -профилей ионосферы. — М.: ИЗМИРАН, 1973. — Ч. 1. С. 76.
3. Titheridge J. E. // Technical Report of RRC of Univ. Auckland № 78/1a. New Zealand, 1978. 104 p.
4. Михайлов С. Я. // Исследования по геомагнетизму, аэрономии и физике Солнца. — Изд-во СО РАН, 1998. — Вып. 109, ч. 1. С. 196.
5. Михайлов С. Я. Метод расчёта пространственно-частотного распределения характеристик КВ-сигнала в трёхмерно-неоднородной ионосфере, основанный на волноводном подходе: Дисс. .... канд. физ.-мат. наук. Иркутск, 1993. 293 с.
6. Днестровский Ю. Н., Костомаров Д. П. // Геомагнетизм и аэрономия. 1966. Т. 6, вып. 1. С. 138.
7. Иванов В. Б., Лапшин А. Н. // Радиофизика и электроника: проблемы науки и обучения. Мат. Рег. научной конф., посв. 100-летию изобр. радио. — Иркутск: ИСЗФ, 1995. — С. 114.
8. Jackson J. E. // J. Geophys. Res. 1956. V. 61. P. 107.
9. Модёнов В. П. // ДАН. 1987. Т. 296, № 3. С. 536.
10. Корн Г. и Корн Т. Справочник по математике. — М.: Наука, 1968. — 720 с.
11. Михайлов С. Я. // Исследования по геомагнетизму, аэрономии и физике Солнца. — М.: Наука, 1989. — Вып. 84. С. 177.
12. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. — М.: Наука, 1960. — 552 с.
13. Kobayashi T. // J. Rad. Res. Labs. 1961. V. 8, № 40. P. 395.
14. Михайлов С. Я., Потехин А. П. // Исследования по геомагнетизму, аэрономии и физике Солнца. — М.: Наука, 1987. — Вып. 77. С. 29.
15. Кутиев И. // Методы расчёта и исследования  $N(h)$ -профилей ионосферы. — М.: ИЗМИРАН, 1973. — Ч. 1. С. 12.
16. Данилкин Н. П., Мальцева О. А. Ионосферные радиоволны. — Изд-во Ростов. ун-та, 1977. 174 с.

Институт солнечно-земной физики  
СО РАН, г. Иркутск, Россия

Поступила в редакцию  
14 июня 2000 г.

**THE AMBIGUITY OF THE RECONSTRUCTION OF PLASMA-FREQUENCY PROFILES  
FROM A GIVEN HEIGHT-FREQUENCY CHARACTERISTIC AND THEIR DISTINGUISHING  
FOR OBLIQUE PROPAGATION OF HF RADIO WAVES IN AN ISOTROPIC IONOSPHERE**

*S. Ya. Mikhailov*

In this paper, we correct the formulation of a problem of reconstruction of the plasma-frequency height profile in a spherically symmetric isotropic ionosphere using a given height-frequency characteristic. A numerical algorithm is proposed for solving the problem, which processes correctly the region of near-critical frequencies of the ionospheric layers. On this basis, we study the possibility of distinguishing the plasma-frequency profiles, which satisfy a given height-frequency characteristic, using the analysis of the characteristics of oblique-propagation HF signals.



УДК 550.388.2

## ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ЭКРАНИРОВОК И ОТРАЖЕНИЙ ОТ СЛОЯ $E_s$

С. Н. Моисеев

Получены теоретические формулы для расчёта вероятностей экранировок, отражений радиосигнала и их отсутствия в течение временного интервала, не меньшего заданного, для среднеширотного спорадического слоя  $E$  ионосферы в зависимости от времени суток, несущей частоты и имеющейся априорной информации. Теоретические формулы сопоставлены с экспериментальными данными.

### ВВЕДЕНИЕ

Появление в нижней ионосфере на средних широтах интенсивных спорадических слоёв (слоёв  $E_s$ ) с повышенной электронной концентрацией приводит, с одной стороны, к возникновению в нижней ионосфере спорадического канала сверхдальнего распространения УКВ радиоволн, а с другой — к нарушениям радиосвязи через верхнюю ионосферу из-за её экранировки слоем  $E_s$ . При вероятностном описании ионосферных каналов связи возмущающее влияние слоя  $E_s$  наиболее естественным образом учитывается через вероятности экранировок, отсутствия экранировок, отражений и отсутствия отражений в течение заданного временного интервала для радиосигналов с известной несущей частотой.

Попытки теоретического описания перечисленных характеристик предпринимались в работах [1, 2]. В работе [1] расчётные формулы получены для временного интервала суток с 06:00 до 13:00 в предположении стационарности электронной концентрации слоя. Однако анализ экспериментальных данных показывает, что за это время происходит заметное изменение вероятностей экранировок и отражений, не учитываемое формулами работы [1]. К тому же открытым остаётся вопрос о получении расчётных формул для других временных участков. В работе [2] получены выражения для вероятностей экранировок и их отсутствия в течение временного интервала, не меньше заданного, в произвольное время суток. Однако из-за неудачного выбора в модели логарифмически нормального распределения, сильно (на порядки) занижающего вероятности появления больших выбросов электронной концентрации слоя  $E_s$  [3], формулы работы [2] дают только качественное описание, а количественное остаётся в целом не совсем удовлетворительным. Цель данной работы — на основе современных моделей частотных параметров слоя  $E_s$  получить теоретические формулы для вероятностей экранировок, отражений и их отсутствия в течение временного интервала, не меньше заданного, для сигнала известной частоты в произвольное время суток.

### 1. ВЫБОР МОДЕЛИ

Вероятности наличия и отсутствия экранировок вышележащих слоёв рассчитываются через частоту экранирования  $f_b(t)$ , а вероятности отражений от слоя  $E_s$  и их отсутствия — через предельную частоту  $f_o(t)$  слоя  $E_s$ . Частоты  $f_b(t)$  и  $f_o(t)$  (обозначим их  $f_{b,o}(t)$ ) связаны с максимальной электронной концентрацией  $N(t)$  слоя  $E_s$  следующим образом [4, 5]:

$$f_{b,o}(t) \sim N^{1/\alpha}(t),$$

где для  $f_b(t)$   $\alpha = 2$ , а для  $f_o(t)$   $2 \leq \alpha \leq 4$  [6]. В дальнейшем как для  $f_b(t)$ , так и для  $f_o(t)$  будем полагать  $\alpha = 2$ . Медиана и срединное отклонение случайного процесса  $N(t)$  зависят от времени суток из-за изменения зенитного угла Солнца и скорости ветра в течение суток на высотах образования слоя  $E_s$  [7]. Для адекватного и физического описания медианы  $N(t)$  достаточно четырёх гармоник ряда Фурье, а для срединного отклонения — двух. Поэтому центрированный и нормированный процесс  $N(t)$  можно представить в виде

$$n(t) = \frac{f_{b,o}^2(t) - m_{b,o}(t)}{b_{b,o}(t)}, \quad (1)$$

где  $m_{b,o}(t)$  и  $b_{b,o}(t)$  — медиана и срединное отклонение процессов  $f_{b,o}^2(t)$ , аппроксимированные отрезками ряда Фурье:

$$m_{b,o}(t) = a_0/2 + \sum_{i=1}^4 [a_i \cos(2\pi t/T) + b_i \sin(2\pi t/T)],$$

$$b_{b,o}(t) = A_0/2 + \sum_{i=1}^2 [A_i \cos(2\pi t/T) + B_i \sin(2\pi t/T)],$$

где  $T = 24$  ч — суточный период. При этом среднее за сутки отличие теоретической кривой  $m_{b,o}(t)$  от её выборочной оценки составляет не более 5 %, а для срединного отклонения  $b_{b,o}(t)$  — не более 4 %.

В работе [8] на основе физической теории образования слоя  $E_s$  — теории ветрового сдвига — было показано, что процесс  $n(t)$  является линейным марковским процессом Коши с нулевой медианой и единичным срединным отклонением, который описывается стохастическим дифференциальным уравнением вида

$$\frac{dn(t)}{dt} + \frac{n(t)}{\beta} = \xi(t),$$

где  $\xi(t)$  — процесс с независимыми в разные моменты времени значениями и одномерной функцией распределения Коши

$$F_\xi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}(\beta x), \quad -\infty < x < \infty.$$

На значения процесса  $n(t)$  следует наложить естественное физическое ограничение, связанное с запретом на появление значений  $N(t)$ , меньших фонового уровня [3]:

$$n(t) \geq n_E = \frac{f_E^2(t) - m_{b,o}(t)}{b_{b,o}(t)}, \quad (2)$$

где  $f_E$  — плазменная частота регулярного слоя  $E$  на высоте образования слоя  $E_s$ . Учесть ограничение (2) можно разными способами. В работах [3, 8] оно учитывалось путём усечения функции распределения. В этом случае одномерные функции распределения процессов  $f_{b,o}(t)$  будут иметь вид

$$F(x) = \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left( \frac{x^2 - \mu}{\lambda} \right) - p \right\} / (1 - p), \quad x \geq f_E,$$

где  $p = 1/2 + \operatorname{arctg}(n_E)/\pi$  — отсекаемая вероятность,  $\mu = m_{b,o}(t) - \lambda \operatorname{tg}(\pi p/2)$ ,  $\lambda = b_{b,o}(t) / [\operatorname{tg}(\pi(1+p)/4) - \operatorname{tg}(\pi p/2)]$ .

При усечении функции распределения не учитываются случайные флуктуации  $f_E$ . В работах [8, 9], исходя из теории ветрового сдвига, было показано, что небольшие флуктуации максимальной электронной концентрации  $N(t)$  слоя  $E_s$  вблизи фонового уровня описываются логарифмически нормальным законом распределения, а аномально большие — законом Коши. Поэтому одномерную функцию

распределения процессов  $f_{b,o}(t)$  с учётом ограничений (2) можно представить в следующем виде:

$$F(x; m, E) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left( \frac{x^2 - m}{E} \right), & x^2 \geq m; \\ \Phi \left( u_{0,75} \frac{2 \ln x - \ln m}{\ln(E/m + 1)} \right), & x^2 < m, \end{cases} \quad (3)$$

где

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp(-y^2/2) dy$$

— интеграл вероятностей,  $u_{0,75} = 0,67448 \dots$  — квантиль порядка 3/4 стандартного нормального распределения,  $m$  и  $E$  — параметры распределения. Для процессов  $f_{b,o}(t)$  параметры  $m = m_{b,o}(t)$ ,  $E = b_{b,o}(t)$ .

## 2. ВЕРОЯТНОСТИ ЭКРАНИРОВОК И ОТРАЖЕНИЙ

Обозначим  $f_t = f_b(t)$ . Вероятность экранировки с длительностью не менее  $\tau$  слоем  $E_s$  вышележащих слоёв ионосферы для сигнала с частотой  $f$  в момент времени  $t$  при условии, что в момент времени  $t - \Delta$  частота экранирования была известна ( $f_{t-\Delta} = z$ ,  $\Delta \geq 0$ ), запишется в следующем виде:

$$P_{\Xi}(z, t, f, \tau) = P \left\{ \sup_{t' \in [t, t+\tau]} f_{t'} > f \mid z \right\} = P \{f_t > f \mid z\} P \{T(z, t, f) \geq \tau\}, \quad (4)$$

где  $T(z, t, f)$  — случайная длительность превышения процессом  $f_t$  уровня  $f$ , отсчитываемая от момента времени  $t$ , при известном значении  $f_{t-\Delta} = z$ . Вероятность события  $f_t > f$  совпадает с вероятностью события  $n_t > \nu_t$ , где  $n_t = [f_b^2(t) - m_b(t)]/b_b(t)$ ,  $\nu_t = [f^2 - m_b(t)]/b_b(t)$ . Поэтому плотность вероятностей  $\omega_T(\tau')$  случайной величины  $T(z, t, f)$  можно найти из интегрального уравнения восстановления [10], справедливого для марковских процессов:

$$\int_0^{\tau} \omega_T(\tau') \omega[n_{t+\tau}, t + \tau \mid \nu_{t+\tau'}, t + \tau'] d\tau' = \int_{\nu_t}^{\infty} \omega[n_{t+\tau}, t + \tau \mid n_t, t] \omega[n_t, t \mid n_0, 0] dn_t, \quad (5)$$

где

$$\omega[n_{t+\tau}, t + \tau \mid n_t, t] = \frac{1 - \exp(-\tau/\beta)}{\pi [(1 - \exp(-\tau/\beta))^2 + (n_{t+\tau} - n_t \exp(-\tau/\beta))^2]}$$

— плотность вероятностей перехода марковского процесса Коши  $n_t$  [10] без ограничений (2). Формулы (4), (5) дают полное математическое решение задачи расчёта  $P_{\Xi}(z, t, f, \tau)$ . Однако они слишком сложны для практического применения, поэтому получим более простые приближённые формулы.

Простейшее приближение получается, если аппроксимировать непрерывный зависимый процесс  $\{f_{t'}, t' \in [t, t + \tau]\}$  эквивалентной ему независимой последовательностью  $\{f_t, f_{t+\beta}, \dots, f_{t+k\beta}; k = \operatorname{round}(\tau/\beta)\}$ , где  $\operatorname{round}(x)$  — округление  $x$  до ближайшего целого числа,  $\beta$  — интервал статистической зависимости процесса  $f_t$ . В этом приближении

$$P_{\Xi}(z, t, f, \tau) = P\{f_t > f \mid z\} \prod_{i=1}^k P\{f_{t+i\beta} > f\}, \quad \tau = k\beta. \quad (6)$$

Функция (6) ступенчатая по аргументу  $\tau$ . Более удобен непрерывный эквивалент (6):

$$P_{\Xi}(z, t, f, \tau) = P\{f_t > f | z\} \left( \frac{P\{f_t > f\}}{P\{f_{t+\tau} > f\}} \right)^{1/2} \exp \left\{ \beta \int_t^{t+\tau} \ln P\{f_{t'} > f\} dt' \right\}. \quad (7)$$

Формулы (6) и (7) совпадают в точках скачков  $\tau = i\beta$ , где  $i = 1, 2, \dots, k$ , функции (6) при линейном поведении подынтегральной функции в (7) между соседними скачками. Подынтегральная функция в (7) меняется достаточно медленно, что позволяет эффективно использовать численные методы интегрирования. Так, например, используя всего одну итерацию в известном методе Симпсона, получаем следующее приближение выражения (7):

$$P_{\Xi}(z, t, f, \tau) \approx P\{f_t > f | z\} P^{\frac{\tau}{6\beta} - \frac{1}{2}}\{f_t > f\} P^{\frac{2\tau}{3\beta}}\{f_{t+\tau/2} > f\} P^{\frac{\tau}{6\beta} + \frac{1}{2}}\{f_{t+\tau} > f\}. \quad (8)$$

Формула (8) хорошо соответствует (7), по крайней мере, при  $\tau < 12$  ч.

Вероятность отсутствия экранировки слоем  $E_s$  вышележащих слоёв ионосферы в течение временного интервала, не меньшего  $\tau$ , для сигнала с частотой  $f$  в момент времени  $t$  при условии, что в момент времени  $t - \Delta$  частота экранирования была известна ( $f_{t-\Delta} = z$ ,  $\Delta \geq 0$ ), запишется в следующем виде:

$$P_O(z, t, f, \tau) = P \left\{ \sup_{t' \in [t, t+\tau]} f_{t'} < f | z \right\} = P\{f_t < f | z\} P\{\bar{T}(z, t, f) \geq \tau\},$$

где  $\bar{T}(z, t, f)$  — случайная длительность отсутствия превышения уровня  $f$  процессом  $f_t$ , отсчитываемая от момента времени  $t$ , при известном значении  $f_{t-\Delta} = z$ . Плотность вероятностей  $\omega_{\bar{T}}(\tau')$  случайной величины  $\bar{T}(z, t, f)$  можно найти из уравнения восстановления [10]:

$$\int_0^{\tau} \omega_{\bar{T}}(\tau') \omega[n_{t+\tau}, t + \tau | \nu_{t+\tau'}, t + \tau'] d\tau' = \int_{-\infty}^{\nu_t} \omega[n_{t+\tau}, t + \tau | n_t, t] \omega[n_t, t | n_0, 0] dn_t.$$

Более простую приближённую формулу найдём с помощью рассуждений, аналогичных использованным при получении (7):

$$P_O(z, t, f, \tau) = P\{f_t < f | z\} \left( \frac{P\{f_t < f\}}{P\{f_{t+\tau} < f\}} \right)^{1/2} \exp \left\{ \beta \int_t^{t+\tau} \ln P\{f_{t'} < f\} dt' \right\}. \quad (9)$$

Выполняя одну итерацию в численном методе интегрирования Симпсона, получаем следующее приближение выражения (9), справедливое, по крайней мере, при  $\tau < 12$  ч:

$$P_O(z, t, f, \tau) \approx P\{f_t < f | z\} P^{\frac{\tau}{6\beta} - \frac{1}{2}}\{f_t < f\} P^{\frac{2\tau}{3\beta}}\{f_{t+\tau/2} < f\} P^{\frac{\tau}{6\beta} + \frac{1}{2}}\{f_{t+\tau} < f\}. \quad (10)$$

Обозначим теперь  $f_t = f_0(t)$ . В этом случае формулы (7), (8) будут описывать вероятность отражения от слоя  $E_s$  в течение временного интервала, не меньшего  $\tau$ , сигнала с частотой  $f$  в момент времени  $t$  при условии, что в момент времени  $t - \Delta$  предельная частота была известна ( $f_{t-\Delta} = z$ ), а формулы (9), (10) — вероятность отсутствия отражения от слоя  $E_s$  в течение временного интервала, не меньшего  $\tau$ , сигнала с частотой  $f$  в момент времени  $t$  при условии, что в момент времени  $t - \Delta$  предельная частота была известна ( $f_{t-\Delta} = z$ ).

Вероятности, входящие в (7)–(10), можно рассчитать по формулам

$$P\{f_t > f | z\} = 1 - P\{f_t < f | z\}, \quad P\{f_t > f\} = 1 - P\{f_t < f\}, \quad P\{f_t < f\} = F[f; m_{b,o}(t), b_{b,o}(t)], \\ P\{f_t < f | z\} = F[f; m_{b,o}(t) + \exp(-\Delta/\beta) \{z^2 - m_{b,o}(t - \Delta)\}, b_{b,o}(t) \{1 - \exp(-\Delta/\beta)\}].$$

Здесь индекс  $b$  относится к  $f_t = f_b(t)$ , а индекс  $o$  — к  $f_t = f_o(t)$ .

Формулы (7)–(10) достаточно полно учитывают возможную априорную информацию о частотах  $f_t$  до момента времени  $t$ . Поскольку  $n(t)$  — марковский процесс (процесс без последействия), то эта информация учитывается через ближайший к  $f_t$  известный отсчёт  $f_{t-\Delta} = z$ . Полное отсутствие априорной информации эквивалентно  $\Delta \rightarrow \infty$ . В этом случае безусловные вероятности  $P_{\Sigma}(t, f, \tau)$  и  $P_O(t, f, \tau)$  получаются из формул (7)–(10) очевидными заменами  $P\{f_t > f | z\} = P\{f_t > f\}$  и  $P\{f_t < f | z\} = P\{f_t < f\}$ .

### 3. СОПОСТАВЛЕНИЕ ФОРМУЛ С ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ

Для проверки точности соответствия полученных теоретических формул экспериментальным данным были использованы данные станций вертикального зондирования, расположенных в Москве (1976–1979 гг.), Киеве (1978–1979 гг.), Нижнем Новгороде (1979 г.) и Ростове-на-Дону (1978 г.), за июнь–июль. Оценки параметров моделей частот  $f_{b,o}(t)$ , значения которых даны в МГц, были следующими. Для  $f_b(t)$ :  $a_0 = 9,1$ ;  $a_1 = -7,2$ ;  $a_2 = -0,8$ ;  $a_3 = 0,62$ ;  $a_4 = 0,6$ ;  $b_1 = 0,78$ ;  $b_2 = -1,1$ ;  $b_3 = 0$ ;  $b_4 = 0,25$ ;  $A_0 = 2,4$ ;  $A_1 = -0,66$ ;  $A_2 = -0,53$ ;  $B_1 = -0,28$ ;  $B_2 = -1$ . Для  $f_o(t)$ :  $a_0 = 11$ ;  $a_1 = -7,3$ ;  $a_2 = -1,3$ ;  $a_3 = 0,36$ ;  $a_4 = 0,12$ ;  $b_1 = 0,26$ ;  $b_2 = -2,54$ ;  $b_3 = -0,2$ ;  $b_4 = 0,73$ ;  $A_0 = 5,5$ ;  $A_1 = 0,1$ ;  $A_2 = 0,04$ ;  $B_1 = -0,6$ ;  $B_2 = -1,8$ . Оценка  $\beta$  составила 96 мин.

Теоретические формулы показали хорошее согласие с экспериментальными данными. Для примера на рис. 1 кривыми 2–5 изображены теоретические безусловные вероятности экранировок, рассчитанные с помощью (7), в момент времени  $t = 12$  ч в зависимости от длительности экранировки  $\tau$  для частот 2; 3; 4 и 5 МГц соответственно. Здесь же квадратами, кружками, ромбиками и треугольниками нанесены соответствующие эмпирические вероятности, рассчитанные по данным ионосферных станций. Видно, что соответствие теоретических и эмпирических кривых достаточно хорошее.

Вероятности экранировок, отражений и их отсутствия сильно меняются в течение суток. Это иллюстрирует рис. 2, где изображены те же вероятности, что и на рис. 1, но в зависимости от времени суток  $t$  при  $\tau = 15$  мин. Из рисунка хорошо видно, что в разное время суток вероятности экранировок могут различаться на порядок.

На рис. 3 кривыми 2–5 изображены теоретические безусловные вероятности отсутствия экранировки, рассчитанные с помощью (9), в момент времени  $t = 22$  ч в зависимости от длительности экранировки  $\tau$  для частот 2; 3; 4 и 5 МГц соответственно. Здесь же квадратами, кружками, ромбиками и треугольниками нанесены соответствующие эмпирические вероятности. Из рисунка видно, что соответствие теоретических и эмпирических вероятностей вполне удовлетворительное.

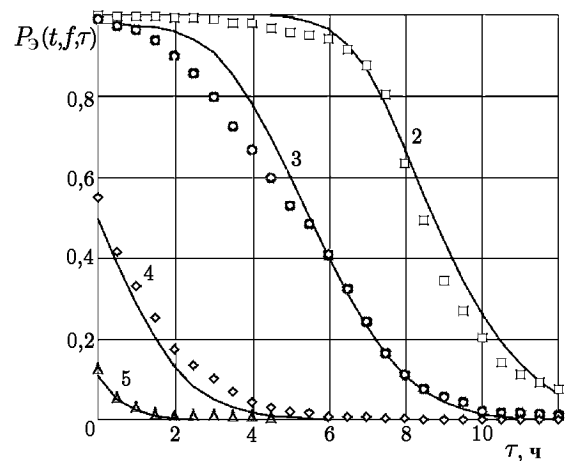


Рис. 1. Вероятности экранировок с длительностью не менее  $\tau$ : кривая 2 — для сигнала с частотой 2 МГц, кривая 3 — 3 МГц, кривая 4 — 4 МГц, кривая 5 — 5 МГц

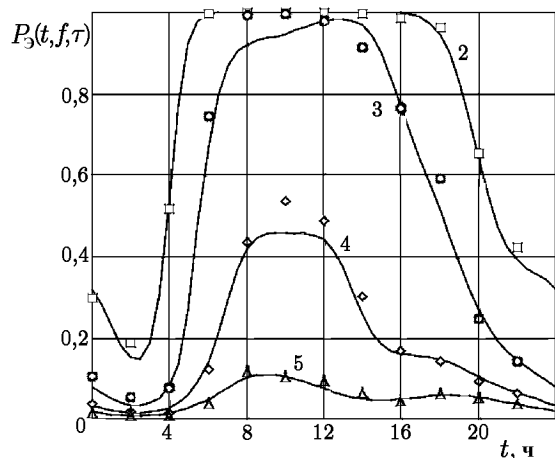


Рис. 2. Вероятности экранировок с длительностью не менее 15 мин в зависимости от времени суток: кривая 2 — для сигнала с частотой 2 МГц, кривая 3 — 3 МГц, кривая 4 — 4 МГц, кривая 5 — 5 МГц

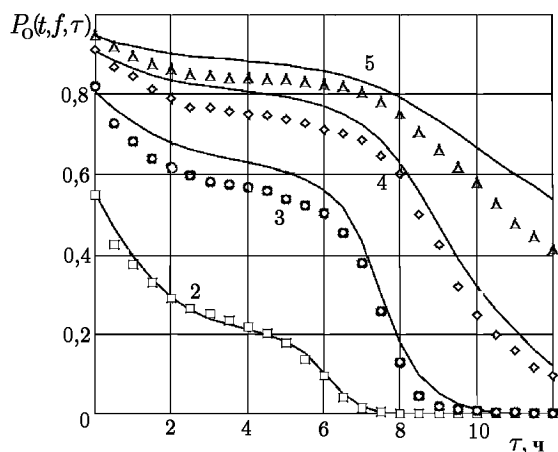


Рис. 3. Вероятности отсутствия экранировок с длительностью не менее  $\tau$ : кривая 2 — для сигнала с частотой 2 МГц, кривая 3 — 3 МГц, кривая 4 — 4 МГц, кривая 5 — 5 МГц

#### 4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Процессы  $f_{b,o}(t)$  довольно сложны для вероятностного описания. Характеристики  $P_{\mathcal{E}}(t, f, \tau)$  и  $P_{\mathcal{O}}(t, f, \tau)$  представляют собой, вообще говоря, многомерные функции распределения этих процессов. Тем не менее простейшие приближения (7)–(10) оказались, как видно из рис. 1–3, достаточно адекватными экспериментальным данным. Объясняется это не только степенью адекватности построенных моделей процессов  $f_{b,o}(t)$ , но и их следующими вероятностными особенностями. Применим к интегралу в выражении (9) теорему о среднем. Тогда, учитывая, что  $P\{f_t < f\} = P\{n_t < \nu_t\}$ , безусловную вероятность  $P_{\mathcal{O}}(t, f, \tau)$ , получаемую из (9) при  $\Delta \rightarrow \infty$ , можно записать при  $\nu_t = \nu_{t+\tau}$  в следующем виде:

$$P_{\mathcal{O}}(t, f, \tau) = P\{n_t < \nu_t\} \exp\{-\tau/\theta(t, f)\}, \quad (11)$$

где  $\theta(t, f) = -\beta^{-1} \ln P\{n_t < \nu_t\}$ ,  $t' \in [t, t + \tau]$ . В работе [11] показано, что максимум  $n_{\max}$  из  $m + 1$  линейно связанных случайных величин Коши в пределе при  $m \rightarrow \infty$  имеет распределение

$$P\{n_{\max} < \nu\} \rightarrow P\{n_t < \nu\} \exp\{-\alpha m\}. \quad (12)$$

При  $m = \tau/\beta$  и  $\alpha = \beta/\theta(t, f)$  формулы (11) и (12) совпадают. Следовательно, приближённые формулы (7)–(10) являются не только асимптотически точными при  $\tau \rightarrow 0$ , но их точность должна расти также при  $\tau/\beta \rightarrow \infty$ ,  $\nu_t \approx \nu_{t+\tau}$ . Рис. 1 и 3 подтверждают этот вывод.

В работе [12] была предложена эмпирическая формула для вероятности отражений от слоя  $E_s$  в течение временного интервала, не меньше заданного, которая совпадает с (11). Функция  $\theta(t, f)$  в [12] была названа коэффициентом устойчивости отражений от слоя  $E_s$  и подробно исследована. Отмечалось, что коэффициент устойчивости существенным образом зависит от частоты радиосигнала и от времени суток, но аналитического описания этой зависимости в силу её сложности предложено не было. Формулы (7) и (8), полученные в этой работе, позволяют рассчитать вероятности отражений для произвольных частот и времени суток без обращения к функции  $\theta(t, f)$ .

**5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

Полученные простые теоретические формулы позволяют рассчитывать для среднеширотного слоя  $E_s$  вероятности экранировок, отражений и их отсутствия в течение времени, не меньше заданного, в летние месяцы. Применение этих формул в другие сезоны года и для других широт требует учёта сезонной и широтной зависимости параметров моделей процессов  $f_{b,o}(t)$ .

**ЛИТЕРАТУРА**

1. Трифонов А. П., Костина З. А., Радченко Т. А // Геомагнетизм и аэрономия. 1984. Т. 24, № 5. С. 727.
2. Моисеев С. Н. // Геомагнетизм и аэрономия. 1995. Т. 35, № 2. С. 159.
3. Моисеев С. Н. // Изв. вузов. Радиофизика. 1998. Т. 41, № 4. С. 438.
4. Чавдаров С. С., Часовитин Ю. К., Чернышева С. П., Шефтель В. М. Среднеширотный спорадический слой  $E$  ионосферы. — М.: Наука, 1975. — 120 с.
5. Игнатъев Ю. А. // Геомагнетизм и аэрономия. 1978. Т. 18, № 4. С. 731.
6. Корсунова Л. П., Бакалдина В. Д. // Геомагнетизм и аэрономия. 1987. Т. 27, № 3. С. 497.
7. Моисеев С. Н. // Изв. вузов. Радиофизика. 1996. Т. 39, № 9. С. 1125.
8. Моисеев С. Н. // Геомагнетизм и аэрономия. 1997. Т. 37, № 3. С. 107.
9. Лукин А. Н., Моисеев С. Н. // Изв. вузов. Радиофизика. 1991. Т. 34, № 8. С. 872.
10. Тихонов В. И., Миронов М. А. Марковские процессы. — М.: Сов. радио, 1977. — 488 с.
11. Лидбеттер М., Линдгрэн Г., Ротсен Х. Экстремумы случайных последовательностей и процессов. — М.: Мир, 1989. — 392 с.
12. Чавдаров С. С., Часовитин Ю. К. // Ионосферные исследования. 1964. № 13. С. 24.

Воронежский госуниверситет,  
г. Воронеж, Россия

Поступила в редакцию  
3 марта 2000 г.

**THEORETICAL FORMULAS FOR SCREENING AND REFLECTION PROBABILITIES FOR THE  $E_s$ -LAYER**

*S. N. Moiseev*

Theoretical formulas of probability of screen, reflection and its absent with duration not the less the given for mid-latitude ionosphere sporadic  $E$ -layer as a function of time, carrier frequency and a priori information has been obtained. The theoretical formulas have been verified by experimental date.

УДК 533.951

## К ВОПРОСУ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ С КРИВОЛИНЕЙНОЙ ИМПЕДАНСНОЙ ГРАНИЦЕЙ

*Т. М. Заборонкова<sup>1</sup>, Л. П. Коган<sup>2</sup>, В. В. Тамойкин<sup>3</sup>*

Исследуется распространение электромагнитных волн в вакуумном полупространстве с одномерно искривлённой импедансной границей, профиль которой является плавным в масштабе длины волны. Предлагается метод, позволяющий получить решение данной задачи на основе решения более простой краевой задачи с той же геометрией границы, но с нулевым граничным условием Дирихле.

В данной работе рассматривается излучение вертикального электрического точечного диполя (ВЭД), расположенного в вакуумном полупространстве, ограниченном криволинейной импедансной поверхностью. Искривление считается одномерным и плавным в масштабе длины волны. Подобная задача рассматривалась в литературе, в частности в работах [1–4] и ряде других. Для её решения использовались приближённые подходы: метод малых возмущений, метод геометрической оптики, метод Кирхгофа.

Известно также, что найти решение для искомым потенциалов и компонент электромагнитного поля всегда оказывается существенно проще при наличии идеальных, т. е. нулевых, краевых условий 1-го рода на поверхности раздела, чем в случае импедансной границы с тем же самым профилем (см. [1–5]). В этой связи в статье предлагается метод, позволяющий перейти от вычисления поля в заданной области с конечным импедансом границы к исследованию более простой вспомогательной задачи о поле в полупространстве с границей той же формы, но с нулевыми граничными условиями типа Дирихле. Решение для поля ВЭД в полупространстве, ограниченном плоской импедансной поверхностью, найдено подобным образом в [2, 5]. В данной работе предложен аналогичный способ, позволяющий найти решение для поля ВЭД в полупространстве с плавно искривлённой импедансной границей. Рассмотрены два конкретных примера использования этого метода. Отметим также, что данный метод пригоден и в случае малых углов скольжения падающей волны.

Рассмотрим задачу о поле точечного ВЭД с дипольным моментом  $\mathbf{P}_0 = P_0 \mathbf{z}^0$ , расположенного в полупространстве, ограниченном одномерно искривлённой импедансной поверхностью. Уравнение границы раздела зададим в виде  $z = f(x)$  (см. рис. 1). При этом считаем выполненными неравенства  $\lambda \ll l$  и  $a \ll l$ , где  $a$  и  $l$  — соответственно вертикальный и горизонтальный масштабы неровностей границы,  $\lambda$  — длина волны.

Импеданс поверхности полагаем постоянным и равным  $\eta_0$ . Радиус-векторы источника и точки наблюдения обозначим как  $\mathbf{R}_0(0, 0, z_0)$  и  $\mathbf{R}(x, y, z)$ .

При выполнении указанных выше неравенств можно пренебречь деполяризацией и считать основной компонентой вектора Герца  $\mathbf{\Pi}$  его вертикальную составляющую:  $\mathbf{\Pi} = \Pi \mathbf{z}^0$  (см. [2]).

Функция  $\Pi$  удовлетворяет, как известно, следующей граничной задаче:

$$\Delta \Pi + k_0^2 \Pi = q, \quad (1)$$

$$\left. \frac{\partial \Pi}{\partial \nu} \right|_{z=f(x)} = -\gamma \Pi. \quad (2)$$

Здесь  $\Delta$  — оператор Лапласа в декартовой системе координат:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad (3)$$



источник  $q$  в правой части (1) записывается в виде  $q = -A\delta(x)\delta(z - z_0)\delta(y)$ , где  $A = P_0/(i\epsilon_0\omega)$ ,  $\omega$  — частота излучения ВЭД,  $\delta(t)$  — дельта-функция;  $k_0 = 2\pi/\lambda$ ,  $\partial/\partial\nu$  — производная по направлению нормали к границе,  $\gamma = ik_0\eta_0$ .

Для решения краевой задачи (1), (2) подействуем на правую и левую части уравнения (1) оператором

$$\hat{g} = \frac{\partial}{\partial s} + \gamma. \quad (4)$$

Здесь  $\partial/\partial s$  — производная по направлению вдоль касательной к кривой  $s(x, z)$ . На семейство кривых  $s$  будем налагать следующие требования:

1) Через каждую точку плоскости  $xz$  проходит только одна линия  $s$ .

2) В точках границы  $z = f(x)$  направление касательной к соответствующей кривой семейства  $s$  совпадает с направлением нормали  $\nu$ , вдоль которой ведётся дифференцирование в граничном условии (2) (см. рис. 1, на котором кривые  $s(x, z)$  изображены штриховыми линиями). Поэтому в точках криволинейной границы  $\partial/\partial s = \partial/\partial\nu$ .

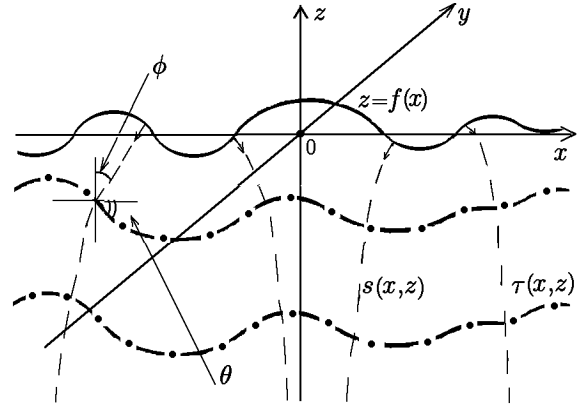


Рис. 1

Существует континуум семейств кривых  $s(x, z)$ , удовлетворяющих таким условиям. Для определённости выберем конкретное семейство  $s$  как совокупность кривых, которые переходят в прямые  $x_1 = \text{const}$  при конформном отображении  $\xi(u)$ , переводящем рассматриваемое криволинейное полупространство  $z \leq f(x)$  комплексной плоскости  $u = x + iz$  в область  $z_1 \leq 0$  плоскости  $\xi = x_1 + iz_1$ . При таком преобразовании линия  $z = f(x)$  переходит в прямую  $z_1 = 0$ .

Введём также в исходной плоскости  $xz$  семейство кривых  $\tau(x, z)$  такое, что образами соответствующих линий в плоскости  $\xi = x_1 + iz_1$  будут являться прямые  $z_1 = \text{const}$ . Из определения кривых  $s$  и свойств конформного преобразования следует, что:

1) Через каждую точку плоскости  $xz$  проходит одна кривая  $\tau$ .

2) В каждой точке плоскости  $xz$  кривые  $\tau$  и  $s$  взаимно перпендикулярны (кривые  $\tau(x, z)$  показаны штрих-пунктирными линиями на рис. 1).

Заметим, что  $s = \int_0^{z_1} n(x_1, z) dz$ ,  $\tau = \int_0^{x_1} n(x, z_1) dx$  (при вычислении  $s$  интегрирование проводится вдоль прямой  $x_1 = \text{const}$ , а при нахождении  $\tau$  — вдоль линии  $z_1 = \text{const}$ ),  $n = |du/d\xi|$  есть модуль производной обратного конформного отображения.

При переходе в исходной плоскости  $xz$  к новым переменным  $\tau, s$  можем записать:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial s^2} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} \left( \frac{\partial x}{\partial s} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial z} \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial z}{\partial s} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} \left( \frac{\partial z}{\partial s} \right)^2 + \frac{\partial \Pi}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + \frac{\partial \Pi}{\partial z} \frac{\partial^2 z}{\partial s^2},$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} \left( \frac{\partial x}{\partial \tau} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial z} \frac{\partial x}{\partial \tau} \frac{\partial z}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} \left( \frac{\partial z}{\partial \tau} \right)^2 + \frac{\partial \Pi}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial \tau^2} + \frac{\partial \Pi}{\partial z} \frac{\partial^2 z}{\partial \tau^2}.$$

С учётом введённых на рис. 1 обозначений очевидно, что в точке пересечения кривых  $s(x, z)$  и  $\tau(x, z)$  справедливы равенства

$$\frac{\partial x}{\partial \tau} = \cos \theta, \quad \frac{\partial x}{\partial s} = \sin \phi, \quad \frac{\partial z}{\partial \tau} = -\sin \theta, \quad \frac{\partial z}{\partial s} = \cos \phi. \quad (5)$$

Здесь  $\theta$  — угол между касательной к кривой  $\tau(x, z)$  и осью  $x$ , а  $\phi$  — между осью  $z$  и кривой  $s(x, z)$ . Очевидно, что при пересечении кривых  $s$  и  $\tau$  в точке  $(x, z)$  угол  $\theta$  совпадает с углом  $\phi$  в силу ортогональности двух рассматриваемых семейств кривых. Поэтому в каждой точке выполняются соотношения Даламбера—Эйлера:

$$\frac{\partial x}{\partial \tau} = \frac{\partial z}{\partial s}, \quad \frac{\partial x}{\partial s} = -\frac{\partial z}{\partial \tau}. \quad (6)$$

Вместе с тем необходимо отметить, что производная  $\partial/\partial s$  означает дифференцирование по направлению касательной к кривой  $s$  в точке с координатами  $(x, z)$ , в то время как  $\partial/\partial \tau$  — дифференцирование по направлению нормали к этой кривой в той же точке. Два данных направления дифференцирования всегда остаются взаимно перпендикулярными, но углы между ними и осями координат  $x, z$  в общем случае непрерывно изменяются. Это обстоятельство является отклонением от условий теоремы Даламбера—Эйлера. Поэтому, несмотря на выполнение условий (6), функции  $x(s, \tau)$  и  $z(s, \tau)$  нельзя считать гармоническими (см. [2]) в случае, когда поверхность границы не является идеально плоской.

С учётом вышесказанного

$$\Delta \Pi = \Delta_{\tau, s, y} \Pi - Q, \quad (7)$$

где

$$\Delta_{\tau, s, y} = \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad Q = \frac{\partial \Pi}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 x}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} \right) + \frac{\partial \Pi}{\partial z} \left( \frac{\partial^2 z}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} \right). \quad (8)$$

Оценим величину  $Q$ . Для этого более подробно рассмотрим свойства конформного преобразования  $\xi(u)$ . Отклонение  $f(x)$  от плоскости  $z = 0$ , границы рассматриваемого полупространства, может быть записано в виде суммы обратных косинус- и синус-преобразований Фурье:

$$z = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} T_c(\alpha) \cos(\alpha x) d\alpha + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} T_s(\alpha) \sin(\alpha x) d\alpha, \quad (9)$$

где  $T_c$  и  $T_s$  — соответственно косинус- и синус-трансформанты Фурье:

$$T_c = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} f(x) \cos(\alpha x) dx, \quad T_s = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} f(x) \sin(\alpha x) dx.$$

Покажем, что обратное конформное преобразование  $u(\xi)$  в случае малых углов  $\vartheta = \arctg f'(x) \lesssim a/l$  наклона границы области к плоскости  $z = 0$  может быть приближённо представлено в виде

$$u = \xi + \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} T_c(\alpha) \exp(-i\alpha \xi) d\alpha - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} T_s(\alpha) \exp(-i\alpha \xi) d\alpha. \quad (10)$$

Действительно, от координат  $x, z$  к координатам  $x_1, z_1$  можно перейти по следующим формулам:

$$z = z_1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} T_c(\alpha) \cos(\alpha x_1) \exp(\alpha z_1) d\alpha + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} T_s(\alpha) \sin(\alpha x_1) \exp(\alpha z_1) d\alpha, \quad (11)$$

$$x = x_1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} T_c(\alpha) \sin(\alpha x_1) \exp(\alpha z_1) d\alpha - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} T_s(\alpha) \cos(\alpha x_1) \exp(\alpha z_1) d\alpha. \quad (12)$$

Очевидно, что при  $z_1 = 0$  из формулы (11) получаем  $z = f(x_1)$  (см. (9)). Растяжение  $|du/d\xi|$  в любой точке рассматриваемой области не зависит от направления. Поэтому на расстояниях, малых по сравнению с масштабом  $l$ , смещение точек по координате  $x$  при преобразовании  $u(\xi)$  по порядку величины такое же, как и по координате  $z$ . В результате приходим к выводу, что при отображении точек границы  $z_1 = 0$  величина неточности (максимальная на границе области) составит

$$|f(x_1) - f(x(x_1, 0))| \lesssim |f(x_1) - f(x \pm a)| \lesssim a^2/l \ll a. \quad (13)$$

В силу теоремы о максимуме модуля аналитической функции эти утверждения верны и для внутренних точек области  $z_1 \leq 0$ . В итоге приходим к выводу, что при условии  $a^2/l \ll \lambda$  можно приближённо считать, что формула (11) является искомым преобразованием  $\xi(u)$ . (Заметим также, что при введённых ограничениях выражение (11) приводится к формуле (3) на стр. 360 работы [6], полученной для преобразования полуплоскости на область, близкую к полуплоскости.)

В выражении для функции  $Q$  (см. (8)) присутствуют производные от углов  $\theta$  и  $\phi$ :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \tau^2} = -\frac{\partial \theta}{\partial \tau} \sin \theta, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} = \frac{\partial \phi}{\partial s} \cos \phi; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial \tau^2} = -\frac{\partial \theta}{\partial \tau} \cos \theta, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} = -\frac{\partial \phi}{\partial s} \sin \phi. \quad (14)$$

Для оценки  $\partial\theta/\partial\tau$ ,  $\partial\theta/\partial s$  и  $\partial\phi/\partial\tau$ ,  $\partial\phi/\partial s$  необходимо знание производной  $u'(\xi)$ :

$$u'(\xi) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} T_c(\alpha) \alpha \exp(-i\alpha\xi) d\alpha + \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} T_s(\alpha) \alpha \exp(-i\alpha\xi) d\alpha.$$

Это связано с тем, что аргументом комплексной величины  $u'(\xi)$  является угол  $\phi$ , т. к.  $u'(\xi) = |u'(\xi)| \exp(i\phi)$ . При конформном преобразовании угол  $\phi$  определяет угол поворота малого элемента комплексной плоскости  $\xi$  в окрестности данной точки. При этом  $\phi$  задаёт поворот линии  $z_1 = \text{const}$ , а  $\theta$  — поворот линии  $x_1 = \text{const}$  при переходе от точки  $x_1 + iz_1$  плоскости  $\xi$  в точку  $x + iz$  плоскости  $u$ . В силу свойств конформного преобразования можно утверждать, что в каждой точке  $\phi = \theta$ . Последнее утверждение следует из свойств конформного отображения, согласно которым углы между кривыми при преобразовании сохраняются (см. [6]). Заметим, что производные углов  $\phi$  и  $\theta$  по  $s$  и  $\tau$  являются величинами одного порядка. Угол поворота  $\phi$  при конформном преобразовании есть гармоническая функция\*. Следовательно, при введённых ограничениях, согласно теореме о максимуме модуля гармонической функции, для углов  $\phi$  и  $\theta$  имеет место неравенство

$$\{\phi, \theta\} \lesssim a/l \ll 1. \quad (15)$$

Итак,

$$\phi = \theta = \arg[u'(\xi)] = \text{arctg} \left[ \frac{I_2}{1 + I_1} \right].$$

Здесь

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} T_c(\alpha) \alpha \cos(\alpha x_1) \exp(\alpha z_1) d\alpha + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} T_s(\alpha) \alpha \sin(\alpha x_1) \exp(\alpha z_1) d\alpha, \quad (16)$$

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} T_s(\alpha) \alpha \cos(\alpha x_1) \exp(\alpha z_1) d\alpha - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} T_c(\alpha) \alpha \sin(\alpha x_1) \exp(\alpha z_1) d\alpha. \quad (17)$$

\*Так как  $\phi = \text{Im} \ln[u'(\xi)]$ , а благодаря конформности отображения зависимость  $u'(\xi)$  является аналитической и не равной нулю функцией в рассматриваемой области.

Для оценки  $Q$  нам понадобятся также производные  $\partial I_1/\partial x_1$  и  $\partial I_1/\partial z_1$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial I_1}{\partial x_1} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} T_s(\alpha) \cos(\alpha x_1) \alpha^2 \exp(\alpha z_1) d\alpha - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} T_c(\alpha) \sin(\alpha x_1) \alpha^2 \exp(\alpha z_1) d\alpha, \\ \frac{\partial I_2}{\partial x_1} &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} T_c(\alpha) \cos(\alpha x_1) \alpha^2 \exp(\alpha z_1) d\alpha - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} T_s(\alpha) \sin(\alpha x_1) \alpha^2 \exp(\alpha z_1) d\alpha.\end{aligned}$$

По аналогии находятся и производные  $\partial I_{1,2}/\partial z_1$ .

Так как при введённых условиях искривление границы является плавным, то в подынтегральных выражениях в (16), (17) существенная область интегрирования (вне которой функции  $T_{c,s}$  можно считать пренебрежимо малыми) может быть определена как  $0 \leq \alpha \leq \alpha_{\max}$ , где  $\alpha_{\max}$  — верхняя граница существенного интервала при интегрировании по  $\alpha$ , причём  $\alpha_{\max} \ll k_0$  и  $\alpha_{\max} a \ll 1$ . Поэтому, исходя из свойств косинус- и синус-преобразований Фурье, получаем, что  $|I_{1,2}| \lesssim \alpha a \ll 1$ , а также что  $|\partial I_{1,2}/\partial x_1; \partial I_{1,2}/\partial z_1| \lesssim \alpha_{\max}^2 a$ . В итоге можем записать следующие неравенства для  $\phi$  и  $\theta$ :

$$\left| \frac{\partial \phi}{\partial \tau}, \frac{\partial \phi}{\partial s} \right| \simeq \left| \frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \frac{\partial \phi}{\partial z_1} \right| \lesssim \alpha_{\max}^2 a, \quad \left| \frac{\partial \theta}{\partial \tau}, \frac{\partial \theta}{\partial s} \right| \simeq \left| \frac{\partial \theta}{\partial x_1}, \frac{\partial \theta}{\partial z_1} \right| \lesssim \alpha_{\max}^2 a, \quad (18)$$

откуда следует, что левые части (14), присутствующие в выражении (8) для  $Q$ , много меньше  $k_0$ .

Полагая  $\partial \Pi/\partial x \simeq -ik_x \Pi$ ,  $\partial \Pi/\partial z \simeq -ik_z \Pi$ , где  $k_x$  и  $k_z$  — проекции волнового вектора  $k_0$  на оси соответственно  $x$  и  $z$  ( $k_{x,z} \leq k_0$ ), приходим к выводу, что входящая в уравнение (7) функция  $Q$  по модулю удовлетворяет соотношениям  $|Q| \simeq k_0 a \alpha_{\max}^2 |\Pi| \ll k_0^2 |\Pi|$ . Следовательно, пренебрегая  $Q$  как величиной более высокого порядка малости и действуя оператором  $\hat{g}$  на уравнение (1), можно приближённо записать  $\hat{g} \Delta_{\tau,s,y} = \Delta_{\tau,s,y} \hat{g}$ . После этого, вводя новую функцию  $G = \hat{g} \Pi$ , приходим вместо граничной задачи Неймана (1) и (2) для  $\Pi$  к краевой задаче Дирихле для  $G$ :

$$\Delta_{\tau,s,y} G(\tau, s, y) + k_0^2 G(\tau, s, y) = \hat{g} q, \quad (19)$$

$$G|_{z=f(x)} = 0. \quad (20)$$

Здесь учтено, что граничное условие (2) для искомой вертикальной компоненты  $\Pi$  потенциала Герца эквивалентно условию (20) для вспомогательной функции  $G$ .

Благодаря наличию нулевого граничного условия (20) типа Дирихле данная задача является более простой, чем исходная (см. (1) и (2)). Если её решение  $G(x, z)$  известно, то для  $\Pi$  легко может быть получено выражение в явной форме. Действительно,  $\Pi$  удовлетворяет линейному неоднородному дифференциальному уравнению первого порядка в частных производных

$$\frac{\partial \Pi}{\partial s} + \gamma \Pi = G, \quad (21)$$

решение которого ищется в виде

$$\Pi(\tau, s, y) = \exp(-\gamma s) \int_{+i\infty}^s G(\tau, s', y) \exp(\gamma s') ds' + \exp(-\gamma s) C(\tau, y). \quad (22)$$

Интегрирование в (22) проводится вдоль контура на плоскости комплексной переменной  $s' = \text{Re } s' + i \text{Im } s'$ ; путь интегрирования проходит из бесконечности параллельно мнимой оси до точки  $s' = s$ , расположенной на вещественной оси. Функция  $C(\tau, y)$  — некоторая неизвестная функция, не зависящая от координаты  $s$ . Будем искать её с помощью подстановки выражения (22) в уравнения (1) и

(2). При этом в (22) для обоих слагаемых в точках, расположенных на линии границы, тождественно выполняется граничное условие (2). Заметим также, что

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2} \left( \exp(-\gamma s) \int_{+i\infty}^s G(\tau, s', y) \exp(\gamma s') ds' \right) = \exp(-\gamma s) \int_{+i\infty}^s \frac{\partial^2 G(\tau, s', y)}{\partial s'^2} \exp(\gamma s') ds',$$

откуда получаем

$$(\Delta_{\tau, s, y} + k_0^2) \exp(-\gamma s) \int_{+i\infty}^s \exp(\gamma s') G(\tau, s', y) ds' = \exp(-\gamma s) \int_{+i\infty}^s \exp(\gamma s') (\Delta_{\tau, s', y} + k_0^2) G(\tau, s', y) ds'. \quad (23)$$

В результате на основе соотношений (22) и (23), а также с учётом формул (19) и (1) получаем, что для вертикальной компоненты  $\Pi$  вектора Герца справедливо следующее уравнение:

$$(\Delta_{\tau, s, y} + k_0^2) \Pi(\tau, s, y) = A\delta(x)\delta(z - z_0)\delta(y) + (\Delta_{\tau, s, y} + k_0^2) [\exp(-\gamma s)C(\tau, y)]. \quad (24)$$

Следовательно, можно утверждать, что при условии  $C = 0$  найденная функция  $\Pi$  удовлетворяет уравнению Гельмгольца вида (1) и граничному условию (2).

В итоге запишем соотношение для вертикальной компоненты  $\Pi$  вектора Герца:

$$\Pi(\tau, s, y) = \exp(-\gamma s) \int_{+i\infty}^s G(\tau, s', y) \exp(\gamma s') ds'. \quad (25)$$

Формула (25) является основным результатом данной работы. Она связывает искомую величину  $\Pi$  и функцию  $G(x, z, y)$ , являющуюся решением более простой, чем исходная, краевой задачи (19), (20) с нулевым граничным условием типа Дирихле.

С целью апробации предложенного метода рассмотрим известную задачу об отражении плоской электромагнитной волны от искривлённой импедансной границы  $z = f(x)$  (см. [2]). Импеданс граничной поверхности полагается равным  $\eta_0$ . Будем считать, что в окрестности любой точки  $\tilde{M}(x_1, f(x_1))$  поверхности границы выполняется условие применимости приближения Кирхгофа:

$$\cos \tilde{\theta} (k_0 R_c)^{1/3} \gg 1, \quad (26)$$

где  $R_c$  — радиус кривизны линии границы в этой точке,  $\tilde{\theta}$  — угол падения волны на данный локальный участок поверхности.

Для упрощения вычислений все выражения будем записывать в системе координат  $(\tilde{x}, \tilde{z})$ , изображённой на рис. 2. Здесь ось  $\tilde{x}$  проходит через точку  $\tilde{M}$  по касательной к кривой  $f(x)$ , а ось  $\tilde{z}$  — через ту же точку по нормали к кривой  $f(x)$  (для упрощения на рис. 2 не показана ось  $y$ , перпендикулярная к плоскости чертежа). Во введённых обозначениях нормированный на амплитуду вектор Герца, описывающий падающую волну, представляется в виде

$$\Pi^{(0)} \sim \exp[-i(\tilde{k}_x \tilde{x} + \tilde{k}_z \tilde{z})], \quad (27)$$

при этом  $\tilde{k}_x = k_x \cos \vartheta - k_z \sin \vartheta$ ,  $\tilde{k}_z = k_x \sin \vartheta + k_z \cos \vartheta$ ,  $\vartheta = \arctg[f'(x)]$ . Тогда в соответствии с проведёнными рассуждениями вспомогательная функция  $G_0$  определяется как

$$G_0(\tilde{x}, \tilde{z}) = \left( \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} + \gamma \right) \exp[-i(\tilde{k}_x \tilde{x} + \tilde{k}_z \tilde{z})]$$

. Отсюда несложно показать, что вместо дифференцирования  $\partial/\partial s$  в операторе  $\hat{g}$  можем записать производную  $\partial/\partial \tilde{z}$  по нормали к касательной плоскости, проходящей через данную точку  $\tilde{M}$ .

В результате полное выражение для вспомогательной функции  $G(\tilde{x}, \tilde{z})$ , с помощью которой вычисляется искомая вертикальная компонента  $\Pi$  вектора Герца, имеет вид

$$G(\tilde{x}, \tilde{z}) = G_0(\tilde{x}, \tilde{z}) - G_0(0, 0)e^{-i(\tilde{k}_x \tilde{x} - \tilde{k}_z \tilde{z})}. \quad (28)$$

Заменяя в формуле (25) переменную  $s$  на  $\tilde{z}$  и  $\tau$  на  $\tilde{x}$ , после ряда вычислений получаем

$$\Pi(\tilde{x}, \tilde{z}) = \Pi^{(0)} + V \exp[-i(\tilde{k}_x \tilde{x} - \tilde{k}_z \tilde{z})],$$

где

$$V = \frac{\tilde{k}_z - k_0 \eta_0}{\tilde{k}_z + k_0 \eta_0} \quad (29)$$

— коэффициент отражения от данного участка неоднородной границы. Подчеркнём, что волновое число  $\tilde{k}_z$  зависит от выбора локальной системы координат  $(\tilde{x}, \tilde{z})$ , своей для каждой точки искривлённой поверхности. Выражение (29) для коэффициента

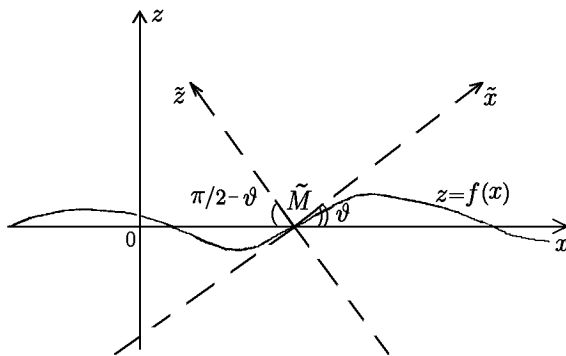


Рис. 2

та отражения действительно совпадает с полученным ранее в работе [2].

В виде примера использования предложенного метода рассмотрим задачу об отражении падающей волны от плавно искривлённой поверхности с ненулевым импедансом. Как известно, при падении плоской волны вида (27) на рассматриваемую одномерно неоднородную поверхность отражённое поле может быть найдено с использованием отражательных формул, приведённых, в частности, в работе [4] (см. выражения (12.1') и (12.1'') на стр. 115). При этом согласно условиям применимости отражательных формул (см. [4]) угол падения волны  $\tilde{\theta}$  должен удовлетворять соотношению

$$\operatorname{tg} \tilde{\theta} \ll \frac{1}{\eta_0 \sqrt{\lambda a m^2}}, \quad (30)$$

где  $m = 2\pi/l$  — характерное пространственное волновое число геометрического возмущения поверхности границы.

Согласно предложенному методу искомое поле находим с помощью вспомогательной функции  $G$ , удовлетворяющей нулевому граничному условию Дирихле, что соответствует отражению от металлизированной границы. В этом случае условие применимости отражательных формул запишется в виде

$$\sqrt{\cos \tilde{\theta}} \gg \frac{a m}{2\eta_0^{3/2}}. \quad (31)$$

Сравнивая неравенства (30) и (31), нетрудно увидеть, что при условии

$$a m \sqrt{\frac{a}{\lambda}} \sin \tilde{\theta} \lesssim \frac{\eta_0^4}{3} \quad (32)$$

ограничение (31) является существенно менее жёстким, чем (30). Это означает принципиальную возможность применения известных в литературе отражательных формул в более широком диапазоне углов падения, чем в рамках традиционной теории.

Наконец, ещё раз отметим, что предложенный приближённый метод фактически может рассматриваться как распространение развитого в работе [5] (см. также [2]) подхода к решению задачи об

излучении точечного источника над плоской импедансной поверхностью на случай одномерно искривлённой границы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобразования РФ (проект № 97–0–8.2–77) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 98–02–16973).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Фок В. А. Проблема дифракции и распространения электромагнитных волн. М.: Сов. радио, 1970.
2. Альперт Я. Л., Гинзбург В. Л., Фейнберг Е. Л. Распространение радиоволн. М.: ГИТТЛ, 1953. 884 с.
3. Басс Ф. Г., Фукс И. М. Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. — М.: Наука, 1972. — 424 с.
4. Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И. Геометрическая оптика неоднородных сред. М.: Наука, 1980. 304 с.
5. Малюжинец Г. Д. // ДАН. 1948. Т. 60. С. 367.
6. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Физматгиз, 1958. — 679 с.

- <sup>1</sup> Нижегородский государственный  
технический университет,  
<sup>2</sup> Научно-исследовательский  
радиофизический институт,  
<sup>3</sup> Нижегородский государственный  
архитектурно-строительный  
университет, г. Нижний Новгород,  
Россия

Поступила в редакцию  
24 апреля 2000 г.

#### ON THE PROPAGATION OF ELECTROMAGNETIC WAVES IN A HALFSpace WITH A CURVED IMPEDANCE BOUNDARY

*T. M. Zaboronkova, L. P. Kogan, and V. V. Tamoikin*

We study electromagnetic-wave propagation in an empty halfspace with an impedance boundary which is curved in one dimension and has a smooth profile compared to the wavelength. We propose a method that allows one to solve this problem using the solution of the simpler boundary-value problem with the same geometry of the boundary but zero Dirichlet boundary condition.

УДК 514:535:551.501.793

## ОПИСАНИЕ ДИФРАКЦИИ СУПЕРГАУССОВСКИХ ПУЧКОВ НА ОСНОВЕ КОМПЛЕКСНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ

*Р. А. Егорченков<sup>1</sup>, Ю. А. Кравцов<sup>1,2</sup>*

Метод комплексной геометрической оптики применён к описанию супергауссовских волновых пучков, т. е. пучков с профилем амплитуды волнового поля вида  $\exp[-x^4/(4a^4)]$ . Показано, что комплексная геометрическая оптика удовлетворительно описывает поле пучка вне основного лепестка диаграммы направленности, но неприменима непосредственно на оси пучка. Для компенсации этого недостатка предложено два способа: сопряжение бокового поля с полем на оси при помощи сплайнов и аппроксимация супергауссовского пучка суперпозицией небольшого числа (в данной работе трёх) гауссовских пучков.

### ВВЕДЕНИЕ

Как известно, комплексная геометрическая оптика (КГО) эффективно описывает дифракцию гауссовских пучков. Аналитически это было показано ещё в 1967 г. в работе [1] (см. также [2] и недавний обзор [3]). Эффективность же численных алгоритмов КГО для описания дифракции гауссовских пучков была продемонстрирована в нашей работе [4].

В данной работе КГО применена для определения дифракционного поля супергауссовских пучков, т. е. пучков с начальным профилем вида

$$u^0(\xi) = \exp(-\xi^4/4a^4), \quad (1)$$

где  $\xi$  — лучевая координата,  $a$  — параметр, характеризующий ширину пучка.

Аналитическое рассмотрение распространения и дифракции супергауссовского пучка в рамках КГО приведено в разделе 1. В разделе 2 проанализировано поле супергауссовского пучка в ближней зоне, а в разделе 3 — поле в дальней зоне. В разделе 4 проведено сравнение численных и аналитических результатов, полученных в рамках КГО, с точным решением для дальней зоны в однородной среде, и показано, что КГО даёт вполне удовлетворительные результаты вне основного лепестка диаграммы направленности, тогда как непосредственно на оси пучка комплексное геометрикооптическое решение расходится. Наконец, в разделах 5 и 6 предложены два эффективных способа устранения приосевой расходимости поля, вычисленного при помощи КГО: путём сшивания бокового поля супергауссовского пучка с приосевым полем гауссовского пучка и при помощи аппроксимации супергауссовского пучка суперпозицией трёх гауссовских пучков.

### 1. ПОЛЕ СУПЕРГАУССОВСКОГО ПУЧКА В ЛУЧЕВЫХ КООРДИНАТАХ

Рассмотрим распространение двумерного супергауссовского пучка в однородном пространстве в рамках КГО. Пусть начальное поле  $u^0(\xi)$  задано на линии

$$x = \xi, \quad y = 0, \quad (2)$$

где  $x$  и  $y$  — декартовы координаты. Представим поле пучка (1) в эйкональной форме:

$$u^0(\xi) = \exp[ik\psi^0(\xi)], \quad (3)$$



где  $\psi^0(\xi) = i\xi^4/(4ka^4)$  — комплексный начальный эйконал,  $k$  — волновое число. Компоненты начального «импульса» лучей  $\mathbf{p}^0 = (p^0, q^0)$  определяются тогда выражениями

$$p^0 = \partial\psi^0/\partial\xi = i\xi^3/ka^4, \quad q^0 = \sqrt{1 - (p^0)^2}. \quad (4)$$

В однородной среде ( $\varepsilon = 1$ ) лучевые уравнения имеют вид

$$dx/d\tau = p, \quad dy/d\tau = q, \quad dp/d\tau = 0, \quad dq/d\tau = 0. \quad (5)$$

Решая их с начальными условиями (2) и (4), получаем

$$x = \xi + i\xi^3\tau/ka^4, \quad y = \left(1 + \xi^6/k^2a^8\right)^{1/2}\tau. \quad (6)$$

Используя далее стандартные процедуры геометрической оптики, определения эйконала и амплитуды волнового поля, при помощи (6) находим для последнего следующее выражение:

$$u = [J(\xi, \tau)]^{-1/2} \exp[ik(\psi^0(\xi) + \tau)] = \left(\frac{k^2a^8 + \xi^6}{\xi^6 + ka^4(ka^4 + 3i\xi^2\tau)}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\xi^4}{4a^4} + ik\tau\right). \quad (7)$$

Здесь  $J = \partial(x, y)/\partial(\xi, \tau)$  — якобиан перехода от декартовых координат  $x, y$  к лучевым координатам  $\xi, \tau$ .

Чтобы определить волновое поле в заданной точке  $(x, y)$ , нужно из уравнений лучей (6) найти все комплексные лучи, попадающие в эту точку и удовлетворяющие правилам селекции комплексных лучей [3]. Волновое поле при этом будет определяться суммой

$$u_{\text{КГО}} = \sum_s u(\xi_s, \tau_s), \quad (8)$$

где индекс  $s$  нумерует все «физические» комплексные лучи. Основная трудность определения волнового поля по методу КГО состоит в нахождении полного набора комплексных лучей, приходящих в заданную вещественную точку  $(x, y)$ . Аналитическое решение этой задачи удаётся найти только в ближней ( $y \ll ka^2$ ) и в дальней ( $y \gg ka^2$ ) зонах. Эти решения будут рассмотрены ниже в разделах 2 и 3. Нахождение комплексных лучей, отвечающих произвольной точке  $(x, y)$ , и волновых полей можно осуществить численно, используя процедуры, предложенные в нашей работе [4].

## 2. БЛИЖНЕЕ ПОЛЕ

В ближней зоне ( $y \ll ka^2$ ) уравнениям (6) удовлетворяет решение  $\xi = x, \tau = y$ . Волновое поле в этом случае представляет собой прожекторный пучок

$$u(x, y) = u^0(x) \exp(iky) = \exp(-x^4/(4a^4) +iky). \quad (9)$$

Такой же результат даёт и традиционная (вещественная) геометрическая оптика. Отличие от традиционной геометрической оптики состоит лишь в том, что в рамках КГО амплитудная информация (информация о форме пучка) передаётся посредством комплексной фазы.

## 3. ВОЛНОВОЕ ПОЛЕ В ДАЛЬНОЙ ЗОНЕ

Лучевые уравнения (6) можно представить в виде

$$\frac{x - \xi}{y} = \frac{i\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}}, \quad \tau = \sqrt{(x - \xi)^2 + y^2}, \quad (10)$$

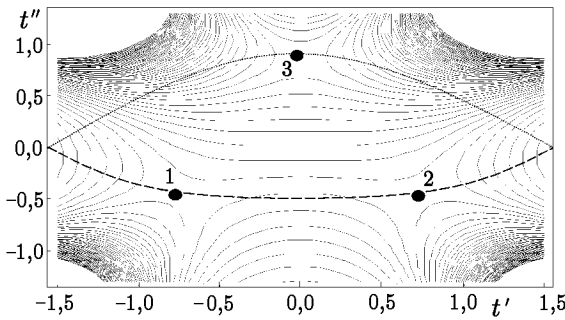


Рис. 1. Расположение трёх стационарных точек выхода луча  $t_s$ ,  $s = 1; 2; 3$ , на комплексной плоскости  $t = \xi/a = t' + it''$ . Точки 1 и 2 отвечают физическим лучам, а точка 3 — нефизическому лучу. Сплошными линиями показан рельеф модуля функции  $\exp(-t^4/4 - i\gamma t)$  при  $\gamma = 0,4\pi$ . Штриховой линией, проходящей через точки 1 и 2, показан перевальный путь интегрирования, обеспечивающий конечность интеграла (18). Интегрирование по пути, проходящему через точку 3, даёт бесконечно большое значение этого интеграла

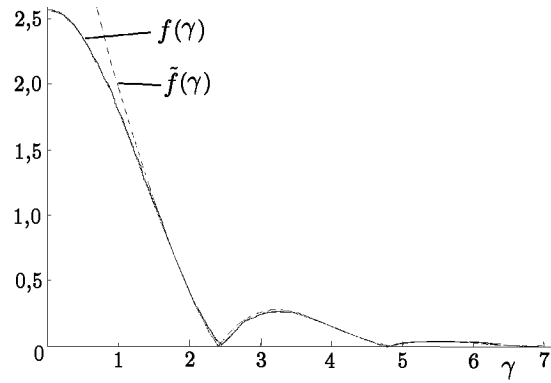


Рис. 2. Сравнение геометрооптической диаграммы  $\tilde{f}(\gamma)$  (пунктирная линия) с точной диаграммой  $f(\gamma)$  (сплошная линия). Результат плавного (квадратичного) сопряжения осевого поля  $f(0)$ , вычисленного на основе (22), с геометрооптической асимптотикой  $\tilde{f}(\gamma)$  при помощи квадратичного сплайна практически не отличается от точного решения  $f(\gamma)$

где  $\mu = \xi^3/(ka^4)$ . Нетрудно убедиться, что в дальней зоне ( $y \gg ka^2$ ) вблизи оси пучка ( $x \ll y$ ) параметр  $\mu$  мал по сравнению с единицей:  $|\mu| \ll 1$ , при этом  $|\xi| \ll x$ . В результате в дальней зоне первое из уравнений (10) принимает вид

$$i\xi^3/ka^4 = \alpha, \quad \alpha = x/y \ll 1, \tag{11a}$$

или

$$it^3 = \gamma, \tag{11б}$$

где  $t = \xi/a$ ,  $\gamma = ka\alpha$ .

Уравнение (11б) имеет три одинаковых по модулю корня

$$t_s = \gamma^{1/3} \exp(i\varphi_s), \quad s = 1; 2; 3; \quad \varphi_1 = -\pi/6, \quad \varphi_2 = -5\pi/6, \quad \varphi_3 = \pi/2. \tag{12}$$

Расположение этих корней на комплексной плоскости  $t = t' + it'' = \xi/a$  показано на рис. 1.

При  $|\xi| \ll x$  из второго уравнения (10) следует

$$\tau = (x^2 - 2x\xi + \xi^2 + y^2)^{1/2} \approx r - x\xi/r \approx r - \alpha\xi, \tag{13}$$

где  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  — расстояние от точки наблюдения  $(x, y)$  до центра первичного пучка (1). В результате в дальней зоне эйконал волны  $\psi(\xi, \tau) = \psi^0(\xi) + \tau = r + i\xi^4/(4ka^4) - \alpha\xi$  принимает одно из трёх значений:

$$\psi_1 = r - \frac{3}{4}\gamma^{1/3}\alpha a \exp\left(-\frac{i\pi}{6}\right), \quad \psi_2 = r - \frac{3}{4}\gamma^{1/3}\alpha a \exp\left(-\frac{5i\pi}{6}\right), \quad \psi_3 = r - \frac{3}{4}\gamma^{1/3}\alpha a \exp\left(\frac{i\pi}{2}\right). \tag{14}$$

Эйконал  $\psi_3$ , отвечающий третьему комплексному лучу, имеет отрицательную мнимую часть, в результате чего соответствующая компонента волнового поля экспоненциально растёт при удалении от

источника. Соответствующий «нефизический» луч мы исключаем из рассмотрения, опираясь на правила селекции комплексных лучей [1, 2]. Вычисляя амплитуды, отвечающие «физическим» комплексным лучам 1 и 2, для результирующего волнового поля получаем цилиндрическую волну:

$$u(\gamma) = \sqrt{-i/\lambda r} \exp(ikr) a \tilde{f}(\gamma), \quad r \gg ka^2, \quad (15)$$

где безразмерная (не нормированная) диаграмма направленности  $\tilde{f}(\gamma)$  даётся выражением

$$\tilde{f}(\gamma) = \sqrt{8\pi/3} \gamma^{-1/3} \cos(\sqrt{3} S(\gamma) - \pi/6) \exp[-S(\gamma)], \quad S(\gamma) = 3\gamma^{4/3}/8. \quad (16)$$

Множитель  $\exp[-S(\gamma)]$  определяет характер убывания поля по мере удаления от оси пучка. Ослабление поля супергауссовского пучка с ростом угла наблюдения  $\alpha$  происходит медленнее (как  $\exp[-3\gamma^{4/3}/8]$ ), чем для гауссовского пучка, для которого в дальней зоне поле убывает пропорционально  $\exp[-\gamma^2/2]$ .

График зависимости диаграммы  $|\tilde{f}(\gamma)|$  от безразмерного параметра  $\gamma = ka\alpha$  показан на рис. 2 пунктирной линией. При  $\gamma \gtrsim 1$ , т. е. вне основного лепестка, диаграмма осциллирует благодаря интерференции двух «физических» комплексных лучей. При приближении к оси пучка ( $\gamma \rightarrow 0$ ) фактор  $\tilde{f}(\gamma)$  расходится как  $\gamma^{-1/3}$ . Сравним эти результаты КГО с точным решением задачи дифракции супергауссовского пучка в дальней зоне.

#### 4. СРАВНЕНИЕ С ДИФРАКЦИОННОЙ ТЕОРИЕЙ

Дифракционное поле супергауссовского пучка в дальней зоне ( $y \gg ka^2$ ) даётся интегралом Кирхгофа:

$$u(x, y) = \sqrt{-i/\lambda r} \exp(ikr) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\xi^4/4a^4) \exp(-ik\alpha\xi) d\xi. \quad (17)$$

Этот интеграл можно представить также в виде

$$u(x, y) = \sqrt{-i/\lambda r} a \exp(ikr) f(\gamma),$$

где  $f(\gamma)$  — точная диаграмма направленности супергауссовского пучка:

$$f(\gamma) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-t^4/4 - i\gamma t) dt. \quad (18)$$

Интеграл (18) выражается через гипергеометрическую функцию  ${}_0F_2(b_1, b_2, z)$  и гамма-функцию  $\Gamma(z)$  [5]:

$$f(\gamma) = \frac{\pi}{\Gamma(3/4)} {}_0F_2(1/2, 3/4, \gamma^4/64) - \frac{\pi\gamma^2}{\Gamma(1/4)} {}_0F_2(5/4, 3/2, \gamma^4/64). \quad (19)$$

График зависимости модуля диаграммы  $|f(\gamma)|$  от углового параметра  $\gamma = ka\alpha$  показан на рис. 2 сплошной линией. Сравним геометрооптическую диаграмму  $\tilde{f}(\gamma)$  (пунктирная кривая на рис. 2) с точным решением  $f(\gamma)$  (сплошная кривая). Согласно рис. 2 КГО даёт удовлетворительные результаты вне основного лепестка диаграммы направленности, т. е. при  $\gamma \gtrsim 1$ : при  $\gamma = 1$  расхождение между точным значением  $f(1)$  и приближённым значением  $\tilde{f}(1)$  составляет 10 %, в первом боковом лепестке не превосходит 5 %, в во втором — уже меньше 1 %.

Легко убедиться, что геометрооптическая диаграмма  $\tilde{f}(\gamma)$  отвечает асимптотике точной диаграммы (18), вычисленной методом перевала. В самом деле, перевальные точки, отвечающие интегралу (18), подчиняются условию

$$\frac{d}{dt} \left( -\frac{t^4}{4} - i\gamma t \right) = -t^3 - i\gamma = 0 \quad (20)$$

и, следовательно, совпадают с геометрооптическими уравнениями (11) для точек выхода комплексных лучей  $\xi = at$ . Расположение перевальных точек на комплексной плоскости  $t$  показано на рис. 1 наряду с рельефом модуля подынтегральной функции  $|\exp(-t^4/4 - i\gamma t)|$ . Путь интегрирования в комплексной плоскости  $t$  должен проходить через точки  $t_1$  и  $t_2$ , в которых находятся локальные максимумы подынтегральной функции и которые отвечают физическим комплексным лучам. Третья стационарная точка  $t_3$  представляет собой локальный минимум. Интегрирование в окрестности точки  $t_3$  дало бы бесконечно большое значение поля. Этот пример служит дополнительным оправданием правил селекции нефизических комплексных лучей [1, 3], а сама задача в целом лишней раз иллюстрирует тесную связь между КГО и методом перевала.

Рассматриваемый пример интересен ещё и как иллюстрация условий применимости КГО. Согласно формуле (16) геометрооптическое решение расходится при  $\gamma = ka\alpha \rightarrow 0$ , т. е. на оси пучка. Нетрудно убедиться, что расходимость связана с нарушением условий применимости КГО, которые были сформулированы в работах [6] (см. также [2] и [7]), и сводится, в сущности, к условиям применимости метода перевала. Согласно [6, 7] для применимости КГО необходимо, чтобы эффективная длина перевального пути была мала по сравнению с расстоянием между точками перевала. В данном случае эффективная длина перевального пути в плоскости  $\xi = at$  оценивается как  $(\psi'')^{-1/2} l_{\text{eff}} \approx a\gamma^{-1/3}$ , а расстояние между точками перевала сравнимо с  $|\Delta\xi| = a|\Delta t| \approx a\gamma^{1/3}$ . Условие применимости  $l_{\text{eff}} \ll |\Delta\xi|$  в данном случае принимает вид  $\gamma^{-1/3} \ll \gamma^{1/3}$ , или

$$\gamma = ka\alpha \gg 1. \quad (21)$$

Это условие выполняется вне основного лепестка диаграммы направленности и нарушается при приближении к основному лепестку, где  $\gamma \lesssim 1$ .

Обращают на себя внимание осцилляции, порождаемые супергауссовским пучком в дальней зоне при  $\gamma > 1$ . В рамках КГО их можно связать с интерференцией двух комплексных лучей. Такие осцилляции у гауссовских пучков полностью отсутствуют.

#### 5. ПЕРВЫЙ СПОСОБ УСТРАНЕНИЯ РАСХОДИМОСТИ ПОЛЯ В ПРИОСЕВОЙ ОБЛАСТИ: СОПРЯЖЕНИЕ БОКОВОГО ПОЛЯ СУПЕРГАУССОВСКОГО ПУЧКА С ОСЕВЫМ ПОЛЕМ ГАУССОВСКОГО ПУЧКА

Расходимость поля в окрестности оси можно устранить одним из двух способов. Первый способ предполагает плавное сопряжение геометрооптической асимптотики поля  $\tilde{f}(\gamma)$ , которая справедлива при  $\gamma \gtrsim 1$ , с осевым значением поля супергауссовского пучка  $f(0)$ .

Как мы видели в разделах 3 и 4, осевое поле супергауссовского пучка в приближении КГО расходится. Тем не менее, осевое поле супергауссовского пучка  $f_{\text{SG}}(0)$  легко оценить, вычислив предварительно осевое поле гауссовского пучка  $f_{\text{G}}(0)$  и воспользовавшись соотношением

$$\frac{f_{\text{SG}}(0)}{f_{\text{G}}(0)} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\xi^4/(4a^4)\right] d\xi}{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\xi^2/(2a^2)\right] d\xi} = \frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma(1/4)} \approx 1,027, \quad (22)$$

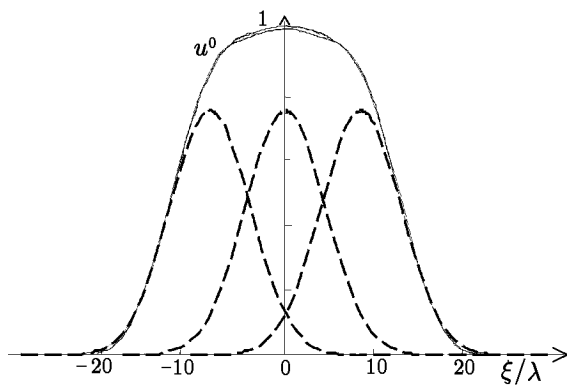


Рис. 3. Аппроксимация супергауссовского пучка суммой трёх гауссовских пучков

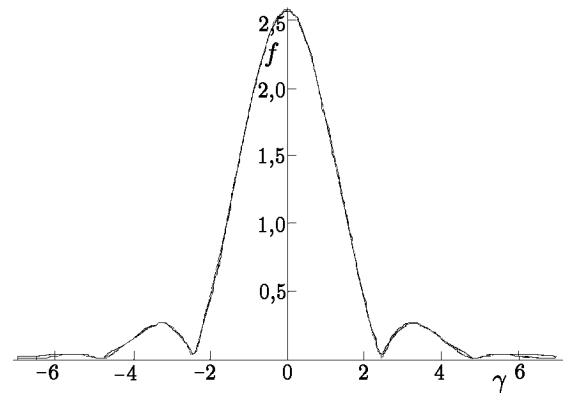


Рис. 4. Диаграмма направленности  $\tilde{f}(\gamma)$ , вычисленная по методу суммирования гауссовских пучков. Кривая  $\tilde{f}(\gamma)$  совпадает с точной диаграммой  $f(\gamma)$  с графической точностью

которое связывает осевые поля супергауссовского и гауссовского пучков в дальней зоне.

Поэтому можно предложить следующий рецепт вычисления поля супергауссовского пучка по методу КГО во всём диапазоне углов:

- 1) Вычислить боковое поле (при  $\gamma \gtrsim 1$ ) супергауссовского пучка по формуле (16).
- 2) Оценить осевое поле супергауссовского пучка по формуле (22).
- 3) Осуществить плавную сшивку осевого поля  $f_{SG}(0)$  с боковым полем  $\tilde{f}(\gamma)$  при  $\gamma \approx 1$ .

Пример сопряжения в точке  $\gamma = 2$ , осуществлённого квадратичным сплайном, показан на рис. 2. Результат сопряжения практически не отличается от точной кривой.

Приведённый алгоритм может быть пригоден и в случае неоднородной среды. Расчёты полей в этом случае следует проводить по численным схемам, предложенным в работе [4].

## 6. ВТОРОЙ СПОСОБ УСТРАНЕНИЯ РАСХОДИМОСТИ: АППРОКСИМАЦИЯ СУПЕРГАУССОВСКОГО ПУЧКА СУММОЙ ГАУССОВСКИХ ПУЧКОВ

Второй способ основан на аппроксимации супергауссовского пучка (1) набором гауссовских пучков, для которых КГО даёт точное дифракционное поле (в однородной среде). Иными словами, речь идёт об использовании широко известного метода суммирования гауссовских пучков [8,9] в сочетании с численной реализацией метода КГО.

На рис. 3 показан начальный супергауссовский пучок и его аппроксимация тремя гауссовскими пучками. Точность такой аппроксимации в центральной части супергауссовского пучка составляет 1 %.

Результат интерференции трёх гауссовских пучков показан на рис. 4. В пределах интервала  $\gamma \lesssim 5$  сумма полей трёх гауссовских пучков удовлетворительно (с графической точностью) совпадает с точным решением  $f(\gamma)$ . При  $\gamma > 5$  расхождение с точным решением увеличивается, т. к. убывание поля супергауссовского пучка с ростом  $\gamma$  происходит медленнее, чем у суперпозиции гауссовских пучков:  $\exp(-3\gamma^{4/3}/8)$  против  $\exp(-\gamma^2/2)$ . Отметим, что суперпозиция трёх гауссовских пучков обеспечивает только три осцилляции, тогда как супергауссовский пучок демонстрирует неограниченное (при  $\gamma \rightarrow \infty$ ) количество осцилляций, которые, однако, отвечают весьма низкому уровню излучения. Качество аппроксимации можно улучшить, увеличивая число гауссовских пучков.

### 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведённый анализ показал, что КГО удовлетворительно описывает поле супергауссовского пучка вне основного лепестка диаграммы направленности, тогда как в центре пучка геометрическое поле расходится. Для устранения указанного несоответствия предложены два эффективных метода. Первый метод основан на сопряжении центрального поля, оценённого при помощи гауссовского пучка, с боковыми лепестками, где КГО даёт удовлетворительные результаты. Второй способ заключается в представлении начального поля супергауссовского пучка в виде суперпозиции нескольких (в нашем случае трёх) гауссовских пучков и последующем вычислении поля каждого гауссовского пучка в отдельности. При этом поле супергауссовского пучка представляется результатом интерференции гауссовских пучков как в дальней, так и в ближней зонах. Предложенные способы вычисления поля супергауссовского пучка легко переносятся и на неоднородные среды.

Авторы признательны федеральной целевой программе «Интеграция» (грант № А-0030 (99)) за частичную поддержку работы.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Кравцов Ю. А. // Изв. вуз Радиофизика. 1967. Т. 10, № 9–10. С. 1283.
2. Keller J. B., Streifer W. // J. Opt. Soc. Am. 1971. V. 61, № 1. P. 40.
3. Kravtsov Yu. A., Forbes G. W., Asatryan A. A. // Progress in Optics. 1999. V. 39. P. 1.
4. Егорченков Р. А., Кравцов Ю. А. // Изв. вуз. Радиофизика. 2000. Т. 43, № 7. С. 630.
5. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Физматгиз, 1963.
6. Асатрян А. А., Кравцов Ю. А. // Изв. вуз. Радиофизика. 1988. Т. 31, № 9. С. 1053.
7. Kravtsov Yu. A. // Progress in Optics. 1988. V. 26. P. 227.
8. Попов М. М. // Wave Motion. 1982. V. 4. P. 85.
9. Babich V. M., Popov M. M. // Radiophys. Quantum Electron. 1989. V. 32. P. 1447.

<sup>1</sup> Институт космических исследований РАН, г. Москва, Россия.

Поступила в редакцию  
13 августа 2000 г.

<sup>2</sup> Центр космических исследований ПАН

### DESCRIPTION OF SUPER-GAUSSIAN BEAM DIFFRACTION USING THE COMPLEX GEOMETRICAL OPTICS

*R. A. Egorchenkov and Yu. A. Kravtsov*

We apply the method of complex geometrical optics to the description of super-Gaussian beams, i.e., the beams having wave-field amplitude profiles of the form  $\exp[-x^4/(4a^4)]$ . It is shown that the complex geometrical optics describes satisfactorily the beam field off the main lobe of its angular pattern while it cannot be used along the beam axis. We propose two ways to eliminate this drawback: spline matching of side and axis fields and approximation of a super-Gaussian beam by a superposition of a few (in this paper, three) Gaussian beams.

УДК 621.391:53.08

## МЕТОД НЬЮТОНА—РАФСОНА И УСТОЙЧИВОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ МЕТОДОВ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ

*А. Т. Байкова*

Рассматривается метод Ньютона—Рафсона как метод численной реализации нелинейных информационных методов восстановления изображений. Дается сравнение классического и обобщенного методов максимальной энтропии с точки зрения чувствительности к ошибкам во входных данных. Из сравнения спектральных чисел обусловленности матриц Якоби следует, что обобщенный метод обладает существенно более высокой устойчивостью к шумам по сравнению с традиционным, что хорошо согласуется с эмпирическими результатами. Для традиционного метода, в отличие от обобщенного, делается вывод о необходимости введения в минимизируемый функционал дополнительных регуляризирующих членов с целью повышения стабильности численных алгоритмов.

### ВВЕДЕНИЕ

Существуют два основных способа [1] численного решения задачи восстановления изображений с использованием принципа оптимизации какой-либо информационной меры.

Первый способ заключается в использовании прямых методов безусловной оптимизации двойственного функционала, получаемого в результате применения метода Лагранжа к задаче с ограничениями. В этом способе могут быть использованы различные численные методы поиска экстремума выпуклого функционала (мы используем метод покоординатного спуска).

Второй способ основан на решении системы нелинейных алгебраических уравнений, возникающих в результате подстановки решений, выраженных через двойственные переменные, в ограничения, вытекающие из данных.

Недостатком первого способа является низкое быстродействие, связанное с покоординатным характером поиска глобального экстремума функционала, недостатком второго — необходимость хранения и обращения матриц большого размера. В случае небольшого числа данных либо при использовании принципа факторизации двумерных алгоритмов на ряд одномерных [2] более предпочтительным может стать применение второго способа.

Как показано в работе [3], ошибки во входных данных могут приводить к существенным нелинейным искажениям изображений, восстанавливаемых такими нелинейными методами, как метод максимальной энтропии (ММЭ). Заметим, что здесь мы рассматриваем только вещественные неотрицательные распределения, характерные для некогерентных радиоисточников. Переход к обобщенным формам нелинейных методов, а в данном случае — к обобщенному методу максимальной энтропии (ОММЭ), позволяет значительно улучшить изображения. Причина этого кроется в том, что решение по ОММЭ, в отличие от ММЭ, принципиально ищется в пространстве комплексных, а не чисто вещественных неотрицательных распределений, что является более адекватным при наличии ошибок в данных. Этот факт был неоднократно подтвержден результатами численного моделирования и обработки реальных данных, полученных методом радиоинтерферометрии со сверхдлинной базой (РСДБ). При этом для численного нахождения экстремума двойственного функционала Лагранжа применялись методы прямой оптимизации с покоординатным спуском (подробный численный алгоритм приведен в [4]). Однако при расчетах указанным методом невозможно количественно оценить степень чувствительности методов восстановления к ошибкам в данных. Реализация же метода Ньютона—Рафсона,

представляющего собой повторяющийся процесс решения систем линейных уравнений, позволяет для получения требуемых оценок применить хорошо известные методы линейной алгебры [5], чему и посвящена данная работа.

### 1. ВЫВОД СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Запишем задачу восстановления изображения методом максимальной энтропии (ММЭ) в виде следующей задачи нелинейной оптимизации:

$$\max \left[ \sum_k \sum_l x_{kl} \ln \left( \frac{1}{ax_{kl}} \right) - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M \left[ (\eta_m^{\text{re}})^2 + (\eta_m^{\text{im}})^2 \right] / \sigma_m^2 \right], \quad (1)$$

$$\sum_k \sum_l x_{kl} a_{kl}^m - \eta_m^{\text{re}} = A_m, \quad (2)$$

$$\sum_k \sum_l x_{kl} b_{kl}^m - \eta_m^{\text{im}} = B_m, \quad (3)$$

$$x_{kl} \geq 0, \quad (4)$$

где  $\{x_{kl}\}$  — искомое двумерное распределение (изображение);  $a$  — положительное число, при  $a = 1$  имеем классическую энтропию, при  $a \neq 1$  — так называемую ассоциированную энтропию (“associated entropy”) [2] (при численной реализации ММЭ этот параметр используется для задания подходящего начального приближения);  $\eta_m^{\text{re}}$  и  $\eta_m^{\text{im}}$  — вещественная и мнимая части неизвестного комплексного шума, распределённого по нормальному закону с нулевым средним и дисперсией  $\sigma_m^2$ ;  $a_{kl}^m, b_{kl}^m$  — тригонометрические функции (косинусы и синусы), соответствующие дискретному преобразованию Фурье (ДПФ);  $A_m$  и  $B_m$  — вещественная и мнимая части измеренной функции видности источника;  $m = 1, \dots, M$ ;  $M$  — число измеренных отсчётов.

Как видно из (1), оптимизируемый функционал состоит из основного (энтропийного) и дополнительного функционалов. Последний представляет собой оценку расхождения восстановленного спектра с измеренной функцией видности по критерию  $\chi^2$ . Дополнительный функционал, как будет показано ниже, может рассматриваться в качестве регуляризирующего или стабилизирующего члена, необходимого для понижения чувствительности алгоритма к ошибкам во входных данных в случае плохо обусловленной задачи. Выражения (2) и (3) представляют собой линейные ограничения на неизвестные последовательности  $\{x_{kl}\}$ ,  $\{\eta_m^{\text{re}}\}$ ,  $\{\eta_m^{\text{im}}\}$ , вытекающие из измерений функции видности, которая формально представляет собой преобразование Фурье от распределения яркости источника плюс ошибки измерения. И, наконец, (4) — не что иное, как априорное ограничение на неотрицательность изображения.

Применяя хорошо известный метод Лагранжа по схеме, приведённой в [4], к оптимизационной задаче с ограничениями, получим следующее решение для неизвестных:

$$x_{kl} = \exp \left[ - \sum_{m=1}^M (\alpha_m a_{kl}^m + \beta_m b_{kl}^m) - 1 - \ln a \right], \quad (5)$$

$$\eta_m^{\text{re}} = \sigma_m^2 \alpha_m, \quad \eta_m^{\text{im}} = \sigma_m^2 \beta_m, \quad (6)$$

выраженное через множители Лагранжа ( $\{\alpha_m\}$  — при уравнениях (2) и  $\{\beta_m\}$  — при уравнениях (3)). Как видно из (5), условие (4) выполняется автоматически, что является особенностью решения для



энтропийного функционала. Подставляя решения (5), (6) в линейные ограничения (2) и (3), получим следующую систему нелинейных уравнений:

$$f_n(\mathbf{x}) = \sum_k \sum_l a_{kl}^n \exp \left[ - \sum_{m=1}^M (\alpha_m a_{kl}^m + \beta_m b_{kl}^m) - 1 - \ln a \right] - \sigma_n^2 \alpha_n - A_n = 0, \quad (7)$$

$$f_{n+M}(\mathbf{x}) = \sum_k \sum_l b_{kl}^n \exp \left[ - \sum_{m=1}^M (\alpha_m a_{kl}^m + \beta_m b_{kl}^m) - 1 - \ln a \right] - \sigma_n^2 \beta_n - B_n = 0, \quad (8)$$

где  $n = 1, \dots, M$ ,  $\mathbf{x} = \{x_{kl}\}$ .

Очевидно, что уравнения (7) соответствуют вещественной, а уравнения (8) — мнимой части измеренной функции видности. Таким образом, мы получили систему из  $2M$  нелинейных уравнений с  $2M$  неизвестными. Решив эту систему относительно множителей Лагранжа, легко получить искомое изображение, воспользовавшись выражением (5). Следующий раздел посвящён выводу численного алгоритма решения системы нелинейных уравнений (7)–(8).

## 2. МЕТОД НЬЮТОНА—РАФСОНА

Для вывода алгоритма решения системы уравнений (7)–(8) введём следующие обозначения:

$$\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_{2M}) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_M, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_M) \quad (9)$$

— вектор неизвестных,

$$\mathbf{f}(\mathbf{s}) = (f_1(\mathbf{s}), f_2(\mathbf{s}), \dots, f_{2M}(\mathbf{s})) \quad (10)$$

— вектор левых частей уравнений.

Метод Ньютона—Рафсона заключается в следующем. Пусть  $\mathbf{s}^{(k)}$  является  $k$ -м приближением решения системы. Найдём такое приращение  $\mathbf{z}$ , что  $\mathbf{f}(\mathbf{s}^{(k)} + \mathbf{z}) = 0$ . Ограничившись первыми двумя членами разложения  $\mathbf{f}(\mathbf{s}^{(k)} + \mathbf{z})$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $\mathbf{s}^{(k)}$ , получим следующую цепочку простейших преобразований:

$$\mathbf{f}(\mathbf{s}^{(k)}) + \mathbf{J}(\mathbf{s}^{(k)}) \mathbf{z} = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{J}(\mathbf{s}^{(k)}) \mathbf{z} = -\mathbf{f}(\mathbf{s}^{(k)}) \quad \rightarrow \quad \mathbf{z} = -\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{s}^{(k)}) \mathbf{f}(\mathbf{s}^{(k)}), \quad (11)$$

где  $\mathbf{J}$  — матрица Якоби размера  $2M \times 2M$  с элементами

$$j_{ml} = \frac{\partial f_m}{\partial s_l}. \quad (12)$$

Тогда новое,  $(k+1)$ -е приближение равно

$$\mathbf{s}^{(k+1)} = \mathbf{s}^{(k)} + \mathbf{z}, \quad k \leftarrow k + 1. \quad (13)$$

Очевидно, при  $k \rightarrow \infty$  приближённое решение  $\mathbf{s}^{(k)} \rightarrow \bar{\mathbf{s}}$ , где  $\bar{\mathbf{s}}$  — решение системы, т. е.  $\mathbf{f}(\bar{\mathbf{s}}) = 0$ .

Таким образом, метод Ньютона—Рафсона заключается в итеративном выполнении операций (11), (13) до тех пор, пока решение  $\mathbf{s}$  не перестанет изменяться.

Вычислим элементы матрицы Якоби (12), имея в виду (9) и (10). Получим для  $n = 1, \dots, M$ ;  $p = 1, \dots, M, n \neq p$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_n}{\partial \alpha_p} &= \sum_k \sum_l a_{kl}^n (-a_{kl}^p) \exp \left[ - \sum_{m=1}^M (\alpha_m a_{kl}^m + \beta_m b_{kl}^m) - 1 - \ln a \right], \\ \frac{\partial f_n}{\partial \alpha_n} &= \sum_k \sum_l a_{kl}^n (-a_{kl}^n) \exp \left[ - \sum_{m=1}^M (\alpha_m a_{kl}^m + \beta_m b_{kl}^m) - 1 - \ln a \right] - \sigma_n^2, \\ \frac{\partial f_n}{\partial \beta_p} &= \sum_k \sum_l a_{kl}^n (-b_{kl}^p) \exp \left[ - \sum_{m=1}^M (\alpha_m a_{kl}^m + \beta_m b_{kl}^m) - 1 - \ln a \right], \\ \frac{\partial f_{n+M}}{\partial \alpha_p} &= \sum_k \sum_l b_{kl}^n (-a_{kl}^p) \exp \left[ - \sum_{m=1}^M (\alpha_m a_{kl}^m + \beta_m b_{kl}^m) - 1 - \ln a \right], \\ \frac{\partial f_{n+M}}{\partial \beta_p} &= \sum_k \sum_l b_{kl}^n (-b_{kl}^p) \exp \left[ - \sum_{m=1}^M (\alpha_m a_{kl}^m + \beta_m b_{kl}^m) - 1 - \ln a \right], \\ \frac{\partial f_{n+M}}{\partial \beta_n} &= \sum_k \sum_l b_{kl}^n (-b_{kl}^n) \exp \left[ - \sum_{m=1}^M (\alpha_m a_{kl}^m + \beta_m b_{kl}^m) - 1 - \ln a \right] - \sigma_{n+M}^2.\end{aligned}$$

Имея в виду (5), перепишем последние выражения более компактно для  $n = 1, \dots, M$ ,  $p = 1, \dots, M, n \neq p$ :

$$\frac{\partial f_n}{\partial \alpha_p} = \sum_k \sum_l a_{kl}^n (-a_{kl}^p) x_{kl}, \quad (14)$$

$$\frac{\partial f_n}{\partial \alpha_n} = \sum_k \sum_l a_{kl}^n (-a_{kl}^n) x_{kl} - \sigma_n^2, \quad (15)$$

$$\frac{\partial f_n}{\partial \beta_p} = \sum_k \sum_l a_{kl}^n (-b_{kl}^p) x_{kl}, \quad (16)$$

$$\frac{\partial f_{n+M}}{\partial \alpha_p} = \sum_k \sum_l b_{kl}^n (-a_{kl}^p) x_{kl}, \quad (17)$$

$$\frac{\partial f_{n+M}}{\partial \beta_p} = \sum_k \sum_l b_{kl}^n (-b_{kl}^p) x_{kl}, \quad (18)$$

$$\frac{\partial f_{n+M}}{\partial \beta_n} = \sum_k \sum_l b_{kl}^n (-b_{kl}^n) x_{kl} - \sigma_{n+M}^2. \quad (19)$$

Представим матрицу Якоби  $\mathbf{J}$  в виде следующей блочной матрицы:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}^{(1)} & \mathbf{J}^{(2)} \\ \mathbf{J}^{(3)} & \mathbf{J}^{(4)} \end{pmatrix}, \quad (20)$$

где  $\mathbf{J}^{(1)}, \mathbf{J}^{(2)}, \mathbf{J}^{(3)}, \mathbf{J}^{(4)}$  — матрицы размера  $M \times M$ :

$$\mathbf{J}^{(1)} = \begin{pmatrix} \sum_k \sum_l a_{kl}^1 (-a_{kl}^1) x_{kl} - \sigma_1^2 & \dots & \sum_k \sum_l a_{kl}^1 (-a_{kl}^M) x_{kl} \\ \sum_k \sum_l a_{kl}^2 (-a_{kl}^1) x_{kl} & \dots & \sum_k \sum_l a_{kl}^2 (-a_{kl}^M) x_{kl} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_k \sum_l a_{kl}^M (-a_{kl}^1) x_{kl} & \dots & \sum_k \sum_l a_{kl}^M (-a_{kl}^M) x_{kl} - \sigma_M^2 \end{pmatrix}, \quad (21)$$

$$\mathbf{J}^{(2)} = \begin{pmatrix} \sum_k \sum_l a_{kl}^1 (-b_{kl}^1) x_{kl} & \dots & \sum_k \sum_l a_{kl}^1 (-b_{kl}^M) x_{kl} \\ \sum_k \sum_l a_{kl}^2 (-b_{kl}^1) x_{kl} & \dots & \sum_k \sum_l a_{kl}^2 (-b_{kl}^M) x_{kl} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_k \sum_l a_{kl}^M (-b_{kl}^1) x_{kl} & \dots & \sum_k \sum_l a_{kl}^M (-b_{kl}^M) x_{kl} \end{pmatrix}, \quad (22)$$

$$\mathbf{J}^{(3)} = \begin{pmatrix} \sum_k \sum_l b_{kl}^1 (-a_{kl}^1) x_{kl} & \dots & \sum_k \sum_l b_{kl}^1 (-a_{kl}^M) x_{kl} \\ \sum_k \sum_l b_{kl}^2 (-a_{kl}^1) x_{kl} & \dots & \sum_k \sum_l b_{kl}^2 (-a_{kl}^M) x_{kl} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_k \sum_l b_{kl}^M (-a_{kl}^1) x_{kl} & \dots & \sum_k \sum_l b_{kl}^M (-a_{kl}^M) x_{kl} \end{pmatrix}, \quad (23)$$

$$\mathbf{J}^{(4)} = \begin{pmatrix} \sum_k \sum_l b_{kl}^1 (-b_{kl}^1) x_{kl} - \sigma_1^2 & \dots & \sum_k \sum_l b_{kl}^1 (-b_{kl}^M) x_{kl} \\ \sum_k \sum_l b_{kl}^2 (-b_{kl}^1) x_{kl} & \dots & \sum_k \sum_l b_{kl}^2 (-b_{kl}^M) x_{kl} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_k \sum_l b_{kl}^M (-b_{kl}^1) x_{kl} & \dots & \sum_k \sum_l b_{kl}^M (-b_{kl}^M) x_{kl} - \sigma_M^2 \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Как видно из (21)–(24), элементы матрицы Якоби представляют собой суммы тригонометрических рядов последовательности  $\{x_{kl}\}$ . Диагональные элементы матрицы получаются вычитанием дисперсии  $\sigma_n^2$  ( $n = 1, \dots, M$ ) из соответствующего тригонометрического коэффициента. Очевидно, прямой расчёт матрицы Якоби по формулам (14)–(19) требует колоссальных вычислительных ресурсов, что делает метод Ньютона—Рафсона практически нереализуемым. К счастью, легко показать, что элементы матрицы Якоби можно получить простым комбинированием отсчётов ДПФ последовательности  $\{x_{kl}\}$ . Такой подход позволяет использовать алгоритм быстрого преобразования Фурье, что существенно экономит время выполнения каждой итерации.

Вспомним [4], что

$$a_{kl}^m = \cos[2\pi(ku(m) + lv(m))/N],$$

$$b_{kl}^m = -\sin[2\pi(ku(m) + lv(m))/N],$$

где  $N$  — размер преобразования Фурье;  $k, l$  — дискретные координаты отсчёта изображения  $\{x_{kl}\}$  в картинной плоскости ( $k = 0, \dots, N-1; l = 0, \dots, N-1$ );  $m$  — номер измеренного отсчёта функции видности ( $m = 1, \dots, M$ );  $u(m), v(m)$  — дискретные координаты  $m$ -го отсчёта функции видности на  $UV$ -плоскости пространственных частот изображения ( $u = 0, \dots, N-1, v = 0, \dots, N-1$ ).

Пусть  $F\{x_{kl}\} = \{X(p, q)\}$ , где  $p = 0, \dots, N-1, q = 0, \dots, N-1$ ,  $F$  — знак преобразования Фурье. Воспользовавшись тождествами

$$\cos \alpha \cos \beta + i \sin \alpha \cos \beta = (e^{i(\alpha+\beta)} + e^{i(\alpha-\beta)})/2,$$

$$\sin \alpha \sin \beta + i \cos \alpha \sin \beta = (-e^{-i(\alpha+\beta)} + e^{-i(\alpha-\beta)})/2,$$

где  $i = \sqrt{-1}$ , получим алгоритм вычисления матрицы Якоби (20).

Элементы матрицы  $\mathbf{J}^{(1)}$  при  $n \neq k$

$$j_{nk}^{(1)} = \Re(S_{nk}), \quad (25)$$

при  $n = k$

$$j_{nn}^{(1)} = \Re(S_{nn}) - \sigma_n^2; \quad (26)$$

элементы матрицы  $\mathbf{J}^{(2)}$

$$j_{nk}^{(2)} = \Im(S_{nk}^-); \quad (27)$$

элементы матрицы  $\mathbf{J}^{(3)}$

$$j_{nk}^{(3)} = \Im(S_{nk}); \quad (28)$$

элементы матрицы  $\mathbf{J}^{(4)}$  при  $n \neq k$

$$j_{nk}^{(4)} = \Re(S_{nk}^-), \quad (29)$$

при  $n = k$

$$j_{nn}^{(4)} = \Re(S_{nn}^-) - \sigma_n^2, \quad (30)$$

где  $\Re$  и  $\Im$  означают соответственно вещественную и мнимую часть числа;

$$S_{nk} = [X(n_1, k_1) + X(n_2, k_2)]/2, \quad (31)$$

$$S_{nk}^- = [-X^*(n_1, k_1) + X^*(n_2, k_2)]/2, \quad (32)$$

где  $X(n, k)$  —  $(n, k)$ -й отсчёт ДПФ последовательности  $\{x_{kl}\}$ ,  $*$  — знак комплексного сопряжения,

$$n_1 = [u(n) + u(k)] \bmod N, \quad k_1 = [v(n) + v(k)] \bmod N, \quad (33)$$

$$n_2 = [u(n) - u(k)] \bmod N, \quad k_2 = [v(n) - v(k)] \bmod N, \quad (34)$$

где функция  $r = t \bmod N$  равна остатку от деления целого числа  $t$  на целое число  $N$ , при этом  $r$  может принимать целые значения от 0 до  $N - 1$ .

Приведённая схема может быть применена для других информационных мер. Так, например, метод Ньютона—Рафсона был реализован также для метода минимума меры Реньи [6].

В следующем параграфе на примере ММЭ показано, как выражение (20) для матрицы Якоби видоизменяется в случае обобщения информационных методов для восстановления изображений в пространстве комплексных функций.

### 3. МЕТОД НЬЮТОНА—РАФСОНА ДЛЯ ОБОБЩЁННОГО ММЭ

Обобщённый метод максимальной энтропии (ОММЭ), предназначенный для восстановления изображений в пространстве комплексных функций, достаточно подробно изложен в работах [2, 4]. Здесь повторяются лишь те положения, которые необходимы для вычисления элементов матрицы Якоби.

Пусть искомая двумерная последовательность (изображение)  $\{r_{kl}\}$  имеет вид

$$r_{kl} = (x_{kl} - y_{kl}) + i(z_{kl} - v_{kl}), \quad (35)$$

где  $\{x_{kl}\}$  — положительная часть вещественной части изображения,  $\{y_{kl}\}$  — отрицательная часть вещественной части изображения,  $\{z_{kl}\}$  — положительная часть мнимой части изображения,  $\{v_{kl}\}$  — отрицательная часть мнимой части изображения, причём все эти подпоследовательности являются неотрицательными,  $l = 0, \dots, N - 1$ ;  $k = 0, \dots, N - 1$ .

В этом случае задача оптимального восстановления изображений, полученных методом РСДБ, имеет вид

$$\max \left[ \sum_k \sum_l x_{kl} \ln \left( \frac{1}{ax_{kl}} \right) + y_{kl} \ln \left( \frac{1}{ay_{kl}} \right) + z_{kl} \ln \left( \frac{1}{az_{kl}} \right) + v_{kl} \ln \left( \frac{1}{av_{kl}} \right) - \frac{1}{2} \sum_m [(\eta_m^{\text{re}})^2 + (\eta_m^{\text{im}})^2] / \sigma_m^2 \right], \quad (36)$$

$$\sum_k \sum_l (x_{kl} - y_{kl}) a_{kl}^m - (z_{kl} - v_{kl}) b_{kl}^m - \eta_m^{\text{re}} = A_m, \quad (37)$$

$$\sum_k \sum_l (x_{kl} - y_{kl}) b_{kl}^m + (z_{kl} - v_{kl}) a_{kl}^m - \eta_m^{\text{im}} = B_m, \quad (38)$$

$$x_{kl} \geq 0, \quad y_{kl} \geq 0, \quad z_{kl} \geq 0, \quad v_{kl} \geq 0. \quad (39)$$

Применение стандартного метода Лагранжа к задаче с ограничениями (36)–(39) приводит к решению, выраженному через двойственные переменные:

$$x_{kl} = \exp \left[ - \sum_{m=1}^M (\alpha_m a_{kl}^m + \beta_m b_{kl}^m) - 1 - \ln a \right], \quad (40)$$

$$y_{kl} = \exp \left[ \sum_{m=1}^M (\alpha_m a_{kl}^m + \beta_m b_{kl}^m) - 1 - \ln a \right], \quad (41)$$

$$z_{kl} = \exp \left[ \sum_{m=1}^M (\alpha_m b_{kl}^m - \beta_m a_{kl}^m) - 1 - \ln a \right], \quad (42)$$

$$v_{kl} = \exp \left[ - \sum_{m=1}^M (\alpha_m b_{kl}^m - \beta_m a_{kl}^m) - 1 - \ln a \right], \quad (43)$$

$$\eta_m^{\text{re}} = \sigma_m^2 \alpha_m, \quad \eta_m^{\text{im}} = \sigma_m^2 \beta_m. \quad (44)$$

В данном случае параметр  $a$  играет роль разделителя между положительной и отрицательной частями действительной и мнимой частей последовательности (35). Чем больше этот параметр, тем выше степень разделения и качество восстановления [2, 4].

Метод Ньютона—Рафсона и в случае ОММЭ имеет стандартный вид (11)–(12). Пользуясь приведёнными выше решениями (40)–(44) и методикой, изложенной в предыдущем разделе, получим следующее выражение для матрицы Якоби:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} -\mathbf{J}^{(1)}(\{\mathbf{x} + \mathbf{y}\}) - \mathbf{J}^{(4)}(\{\mathbf{z} + \mathbf{v}\}) & \dots & -\mathbf{J}^{(2)}(\{\mathbf{x} + \mathbf{y}\}) + \mathbf{J}^{(3)}(\{\mathbf{z} + \mathbf{v}\}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -\mathbf{J}^{(3)}(\{\mathbf{x} + \mathbf{y}\}) + \mathbf{J}^{(2)}(\{\mathbf{z} + \mathbf{v}\}) & \dots & -\mathbf{J}^{(4)}(\{\mathbf{x} + \mathbf{y}\}) - \mathbf{J}^{(1)}(\{\mathbf{z} + \mathbf{v}\}) \end{pmatrix}.$$

Здесь запись  $\mathbf{J}^{(n)}(\{t\})$ , где  $n = 1, \dots, 4$ , означает, что алгоритм (25)–(34) применяется по отношению к последовательности  $\{t\}$ . В данном случае  $\{\mathbf{x} + \mathbf{y}\} = \{x_{kl}\} + \{y_{kl}\}$ ,  $\{\mathbf{z} + \mathbf{v}\} = \{z_{kl}\} + \{v_{kl}\}$ .

#### 4. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Результаты моделирования метода Ньютона—Рафсона в сравнении с методом покоординатного спуска приведены на рис. 1, на котором *a* — модель трёхкомпонентного гауссового источника; *b* — диаграмма направленности системы формирования изображения («грязная» диаграмма); *v* — «грязное» нормированное изображение; *z* — ММЭ-изображение, восстановленное методом покоординатного спуска; *d* — ММЭ-изображение, восстановленное методом Ньютона—Рафсона; *e* — изображение по методу Реньи, восстановленное методом Ньютона—Рафсона; *ж* — ОММЭ-изображение, восстановленное методом покоординатного спуска; *з* — ОММЭ-изображение, восстановленное методом Ньютона—Рафсона; *и* — изображение, восстановленное методом «чистки» (CLEAN). Последнее изображение приведено для того, чтобы показать один из тех примеров заполнения *UV*-плоскости, когда нелинейные информационные методы дают более достоверный результат даже в случае простых источников, хорошо калиброванных данных и низком уровне шума.

В приведённых экспериментальных результатах отношение сигнал/шум составляет около 20. Отметим, что везде на рис. 1 *a–и* минимальному уровню контурной линии соответствует 1 % от максимальной яркости на карте.

Как видно, метод покоординатного спуска и метод Ньютона—Рафсона, как два различных численных метода реализации одного и того же метода восстановления, дают почти одинаковые результаты при незначительных шумах в данных. При этом решения, полученные классическими методами (ММЭ и Реньи рис. 1 *z, d, e*), очень близки между собой, но заметно отличаются от решений, полученных ОММЭ (рис. 1 *ж, з*). В свою очередь, ОММЭ-решения более близки к оригиналу, чем решения, полученные классическими методами. Причина этого расхождения будет обсуждаться в следующем разделе, посвящённом анализу чувствительности к шумам.

#### 5. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ МЕТОДОВ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

##### 5.1. Обусловленность матриц

В дальнейшем понадобятся следующие положения и оценки линейной алгебры [5].

1) Верхняя оценка возмущения.

Пусть дана исходная система линейных уравнений

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad (45)$$

где  $\mathbf{A}$  — квадратная матрица порядка  $n$  и  $\det \mathbf{A} \neq 0$ ,  $\mathbf{b}$  — вектор свободных членов.

Рассмотрим возмущённую систему

$$(\mathbf{A} + \delta\mathbf{A})\mathbf{y} = \mathbf{b} + \delta\mathbf{b}. \quad (46)$$

Допустим, что система (46) также имеет единственное решение. Оценка нормы возмущения решения, т. е.  $\|\delta\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$ , где  $\mathbf{y}$  — решение системы (46), а  $\mathbf{x}$  — решение (45), имеет вид

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \frac{c(\mathbf{A})}{1 - c(\mathbf{A}) \|\delta\mathbf{A}\|/\|\mathbf{A}\|} \left( \frac{\|\delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|} + \frac{\|\delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} \right), \quad (47)$$

где

$$c(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\mathbf{A}\|, \quad (48)$$

$c(\mathbf{A})$  — число обусловленности матрицы  $\mathbf{A}$  в рассматриваемой норме.

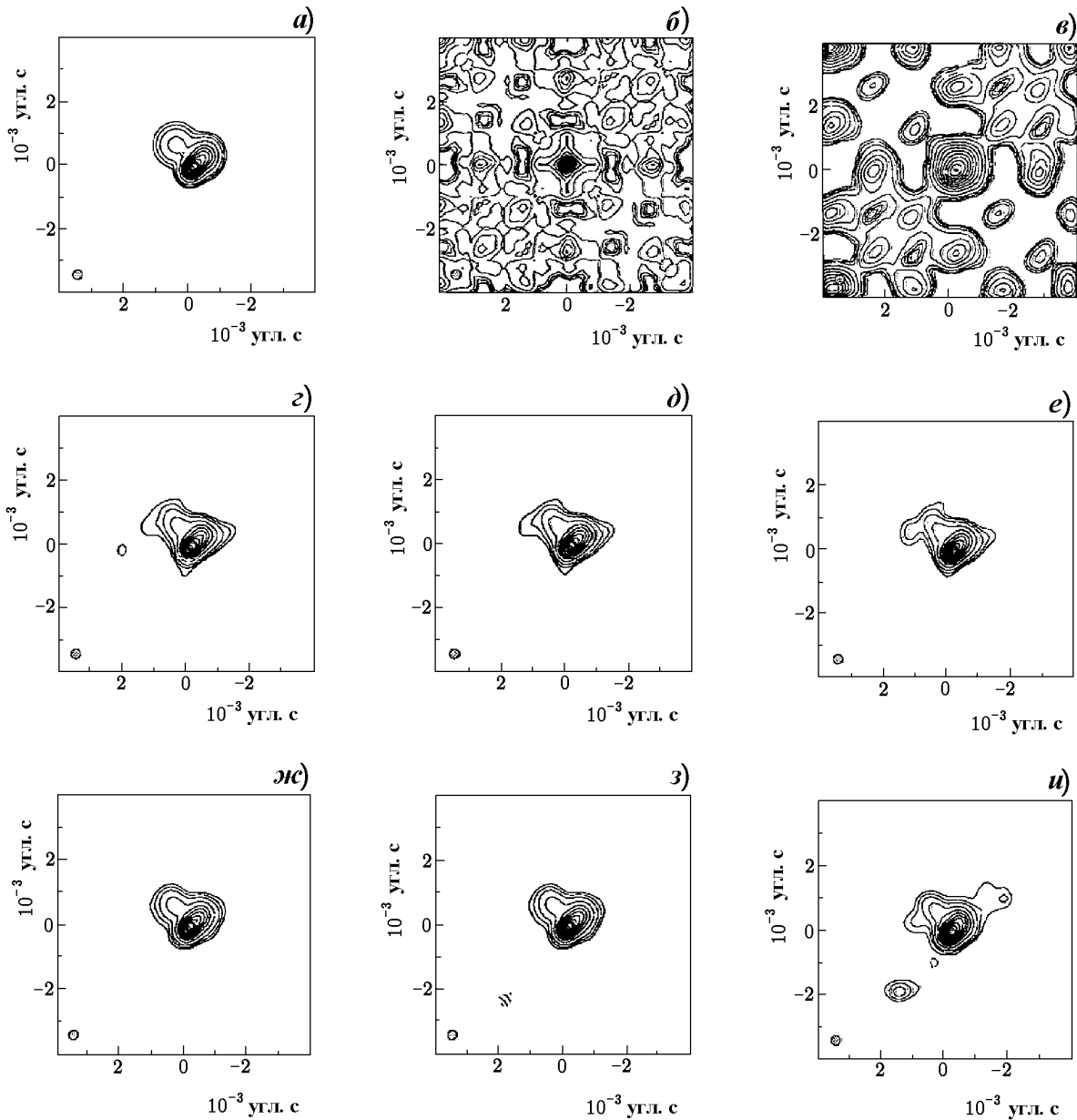


Рис. 1

Обозначая относительные возмущения матрицы  $\mathbf{A}$  и вектора свободных членов соответственно через  $\tilde{\alpha} = \|\delta\mathbf{A}\|/\|\mathbf{A}\|$  и  $\tilde{\beta} = \|\delta\mathbf{b}\|/\|\mathbf{b}\|$ , получим более компактное выражение для относительного возмущения решения  $\|\delta\mathbf{x}\|/\|\mathbf{x}\|$  системы (45):

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \frac{c(\mathbf{A})(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta})}{1 - c(\mathbf{A})\tilde{\alpha}}. \tag{49}$$

Отметим, что в правую часть выражения (49) входят только относительные возмущения  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{b}$ , матрица  $\mathbf{A}$  представлена только своим числом обусловленности, а вектор свободных членов  $\mathbf{b}$  не входит совсем.

2) Числа обусловленности.

Как следует из (49), чем больше число обусловленности, тем большее относительное возмущение решения возможно при таких же относительных возмущениях исходных данных. Число обусловленности определяется не только матрицей, но и выбором нормы.

Независимо от нормы выполняются соотношения

$$c(\mathbf{A}) = c(\mathbf{A}^{-1}),$$

$$c(\mathbf{AB}) \leq c(\mathbf{A})c(\mathbf{B}).$$

Пусть  $\tilde{\alpha}_1$  и  $\tilde{\alpha}_n$  — наибольшее и наименьшее сингулярные числа (см. ниже определение сингулярных чисел) матрицы  $\mathbf{A}$ . Согласно определению спектральная норма матрицы  $\|\mathbf{A}\| = \tilde{\alpha}_1$ , и, как можно показать [5],  $\|\mathbf{A}^{-1}\| = \tilde{\alpha}_n^{-1}$ . Поэтому число обусловленности в спектральной норме (спектральное число обусловленности) находится в соответствии с (48) по формуле

$$c(\mathbf{A}) = \frac{\tilde{\alpha}_1}{\tilde{\alpha}_n}. \quad (50)$$

3) Сингулярные числа.

Пусть  $A$  — линейное преобразование в евклидовом пространстве. Известно, что для него в евклидовом пространстве существует сопряжённое преобразование  $A^*$ . Если преобразование  $A$  в базисе  $\mathbf{e}$  имеет матрицу  $\mathbf{A}$ , то сопряжённое преобразование  $A^*$  в базисе  $\mathbf{b}$ , биортогональном базису  $\mathbf{e}$ , имеет транспонированную матрицу  $\mathbf{A}^T$ .

Собственными значениями  $\lambda$  матрицы  $\mathbf{A}$  являются корни характеристического многочлена  $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})$ , где  $\mathbf{E}$  — единичная матрица.

Числа  $\tilde{\alpha}_i = \sqrt{|\lambda_i|}$ , где  $\lambda_i$  — собственные значения преобразования  $A^*A$ ,  $A^*$  — преобразование, сопряжённое преобразованию  $A$ , называются сингулярными числами преобразования  $A$ , а также сингулярными числами матрицы этого преобразования.

## 5.2. Вычисление спектральных чисел обусловленности

В соответствии с (49) для оценки степени чувствительности метода Ньютона—Рафсона к шумам достаточно вычислить спектральные числа обусловленности матрицы Якоби. Система линейных уравнений, решаемых относительно  $\mathbf{z}^{(k)}$  на  $k$ -й итерации, имеет вид

$$\mathbf{J}(\mathbf{s}^{(k-1)}) \mathbf{z}^{(k)} + \mathbf{f}(\mathbf{s}^{(k-1)}) = 0, \quad (51)$$

причём

$$\mathbf{s}^{(k)} = \mathbf{s}^{(k-1)} + \mathbf{z}^{(k)},$$

где  $\mathbf{J}$  — матрица Якоби системы нелинейных уравнений, вытекающих из метода восстановления,  $\mathbf{s}^{(k)}$  —  $k$ -е приближение для вектора решений системы нелинейных уравнений.

Ясно, что от итерации к итерации матрица системы линейных уравнений (51) изменяется, следовательно, могут изменяться числа её обусловленности. Поэтому имеет смысл вычисление чисел обусловленности матрицы Якоби на различных итерациях с целью анализа чувствительности алгоритма восстановления к шумам на протяжении всего процесса обработки.

В соответствии с определениями и оценками, приведёнными выше, последовательность операций по вычислению спектрального числа обусловленности матрицы Якоби на  $k$ -й итерации является следующей.



1) Производится транспонирование матрицы Якоби. В результате получается новая матрица  $\mathbf{J}^T(\mathbf{s}^{(k-1)})$ , которая является сопряжённой матрице Якоби  $\mathbf{J}(\mathbf{s}^{(k-1)})$ .

2) Вычисляется матричное произведение

$$\mathbf{A}^{(k-1)} = \mathbf{J}(\mathbf{s}^{(k-1)}) \mathbf{J}^T(\mathbf{s}^{(k-1)}).$$

3) Вычисляются собственные значения  $\lambda_i$ , где  $i = 1, \dots, n$ , матрицы  $\mathbf{A}^{(k-1)}$ .

4) Вычисляются максимальное и минимальное числа сингулярности

$$\tilde{\alpha}_1 = \sqrt{\lambda_{\max}}, \quad \tilde{\alpha}_n = \sqrt{\lambda_{\min}}.$$

5) Вычисляется спектральное число обусловленности матрицы Якоби по формуле (50):

$$c[\mathbf{J}(\mathbf{s}^{(k-1)})] = \frac{\tilde{\alpha}_1}{\tilde{\alpha}_n}.$$

### 5.3. Сравнение чисел обусловленности для ММЭ и ОММЭ

Из сравнения результатов восстановления по ММЭ и ОММЭ даже при незначительном зашумлении данных (рис. 1г и ж, д и з) видно, что ОММЭ существенно менее чувствителен к шумам, чем ММЭ. Для количественного подтверждения этого факта вычислим спектральные числа обусловленности матриц Якоби ММЭ и ОММЭ для приведённого на рис. 1 примера в условиях задачи восстановления без шумов. Результаты приводятся в табл. 1.

Таблица 1

Числа обусловленности матриц Якоби ММЭ и ОММЭ

Номер итерации	1	10	20	40	60	100
ММЭ	$9,09 \cdot 10^5$	$1,54 \cdot 10^3$	$4,68 \cdot 10^2$	$1,49 \cdot 10^2$	$1,55 \cdot 10^2$	$1,68 \cdot 10^2$
ОММЭ	$1,48 \cdot 10^0$	$4,44 \cdot 10^0$	$9,28 \cdot 10^0$	$1,55 \cdot 10^1$	$1,95 \cdot 10^1$	$2,33 \cdot 10^1$

Как видно из таблицы, особенно на начальных итерациях спектральные числа обусловленности ММЭ очень велики и превышают числа обусловленности ОММЭ (при одинаковых начальных приближениях) на порядки величины. Именно на этих итерациях решение по ММЭ получает большие возмущения, обусловленные шумами в данных. В результате даже в случае незначительных ошибок в данных ММЭ даёт более заметные искажения, чем ОММЭ.

Как известно [1], чувствительность методов восстановления к ошибкам в данных можно понизить путём введения в оптимизируемый функционал дополнительных регуляризующих членов, так называемых стабилизаторов. Как показывает моделирование, в случае ММЭ таким образом можно существенно снизить спектральные числа обусловленности. В случае же ОММЭ введение дополнительных регуляризующих членов не оказывает столь сильного влияния. Следовательно, обобщённые информационные функционалы обладают более ярко выраженными стабилизирующими свойствами, чем традиционные.

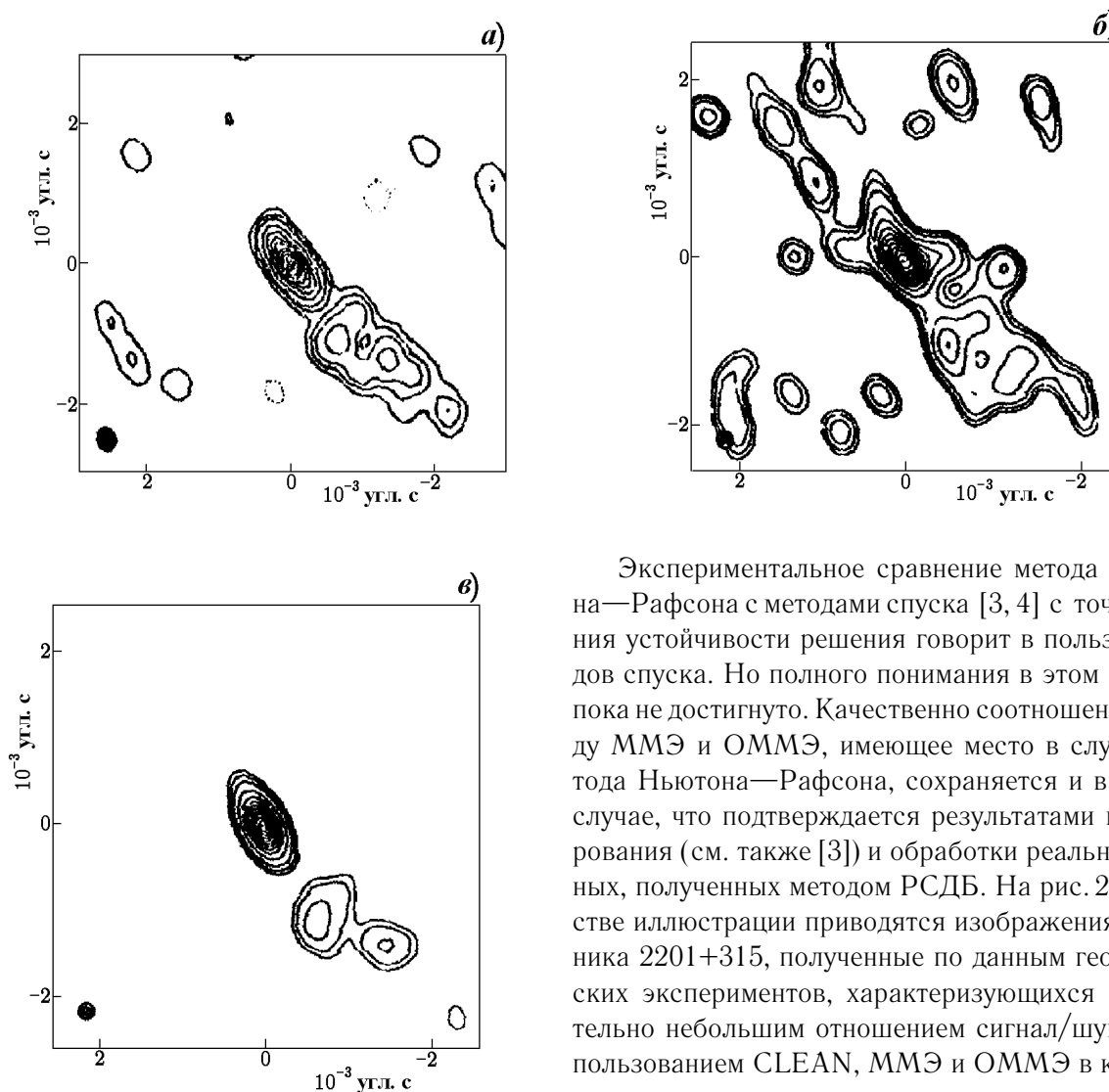


Рис. 2

Экспериментальное сравнение метода Ньютона—Рафсона с методами спуска [3, 4] с точки зрения устойчивости решения говорит в пользу методов спуска. Но полного понимания в этом вопросе пока не достигнуто. Качественно соотношение между ММЭ и ОММЭ, имеющее место в случае метода Ньютона—Рафсона, сохраняется и в данном случае, что подтверждается результатами моделирования (см. также [3]) и обработки реальных данных, полученных методом РСДБ. На рис. 2 в качестве иллюстрации приводятся изображения источника 2201+315, полученные по данным геодезических экспериментов, характеризующихся сравнительно небольшим отношением сигнал/шум, с использованием CLEAN, ММЭ и ОММЭ в качестве процедур деконволюции в цикле самокалибровки (*a* — изображение, полученное по методу «чистки» (CLEAN), *б* — по ММЭ, *в* — по ОММЭ). Сравнение приведённых изображений, полученных по

ММЭ и ОММЭ, говорит в пользу алгоритмов восстановления, основанных на ОММЭ, которые обеспечивают более качественное изображение.

## ВЫВОДЫ

Таким образом, в данной работе приведено подробное описание алгоритма метода Ньютона—Рафсона для нахождения экстремального решения нелинейного функционала с ограничениями применительно к задаче восстановления изображений, полученных методом РСДБ, с использованием нелинейных классических и обобщённых информационных методов типа ММЭ. Основное внимание уделено определению элементов матрицы Якоби системы нелинейных уравнений. Показано, что для их вычисления может быть применена процедура быстрого преобразования Фурье, благодаря чему достигается приемлемое быстродействие алгоритмов восстановления.

Показано, что устойчивость метода Ньютона—Рафсона принципиально повышается с переходом от традиционных нелинейных информационных методов к обобщённым, что позволяет существенно уменьшить уровень нелинейных искажений изображений при больших ошибках в данных. Этот вывод подтверждён сравнением спектральных чисел обусловленности соответствующих матриц Якоби.

Работа выполнена при частичной поддержке Миннауки по программе «Астрономия. Фундаментальные космические исследования» (грант № 2.1.1.3).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Василенко Г. И., Тараторин А. М. Восстановление изображений. — М.: Радио и связь, 1986.
2. Frieden B. R., Vajkova A. T. // Appl. Opt. 1994. V. 33. P. 219.
3. Байкова А. Т. // Изв. вуз. Радиофизика. 1995. Т. 38, № 12. С. 1267.
4. Байкова А. Т. // Сообщения ИПА РАН. 1993. № 58.
5. Беклемишев Д. В. Дополнительные главы линейной алгебры. — М.: Наука, 1983.
6. Frieden B. R., Vajkova A. T. // Appl. Opt. 1995. V. 34. P. 4086.

Институт прикладной астрономии  
РАН, г. Санкт-Петербург, Россия

Поступила в редакцию  
17 июля 2000 г.

#### NEWTON—RAPHSON METHOD AND STABILITY OF NONLINEAR INFORMATION METHODS OF IMAGE RECONSTRUCTION

*A. T. Vajkova*

We consider the use of the well-known Newton—Raphson method for numerical realization of nonlinear information methods of image reconstruction and compare the sensitivities of the classical and generalized maximum-entropy methods to input-data errors. It follows from the comparison of spectral condition values of the related Jakobi matrices that the generalized method is much more stable to noise as compared to the conventional one. This is in good agreement with empirical results. We also conclude that, in contrast to the generalized method, application of the conventional method requires the use of additional regularization terms in the functional to be minimized, which improve the stability of numerical algorithms.

УДК 537.874.2

## ПОЛНАЯ ТРАНСФОРМАЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ, ПАДАЮЩЕЙ НА ГОФРИРОВАННУЮ ГРАНИЦУ ПРОЗРАЧНЫХ ДИЭЛЕКТРИКОВ, В ПРОХОДЯЩУЮ ВОЛНУ (-1)-Й ГАРМОНИКИ

С. Н. Власов, Е. В. Копосова, В. В. Паршин

В работе изложены результаты теоретического и экспериментального исследования нового явления полной трансформации электромагнитной волны, падающей на гофрированную границу двух прозрачных диэлектриков из одного диэлектрика, в проходящую волну первой гармоники, распространяющуюся в другом диэлектрике. Теоретическое изучение основано на численном решении полных уравнений электромагнитного поля. Экспериментальное исследование проводится на тефлоновой призме с гофрированной поверхностью, помещённой в двухзеркальный резонатор.

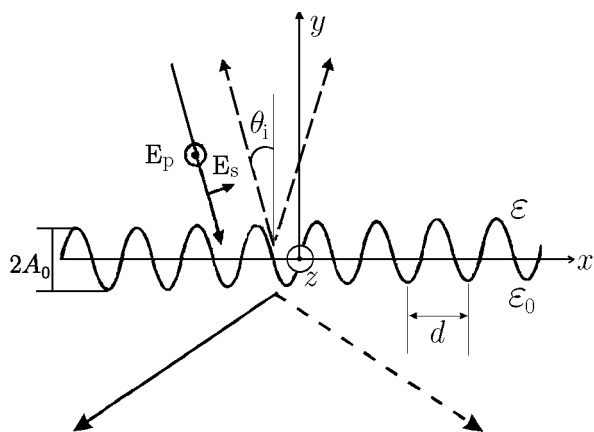


Рис. 1

Использование современной вычислительной техники позволяет подробно теоретически исследовать дифракцию электромагнитных волн на гофрированной границе прозрачных диэлектриков и предсказать условия существования ряда полезных эффектов, в частности просветления границы [1–3] и полного антизеркального отражения [4]. Просветление границы используется при создании окон вывода в мощных вакуумных электронных приборах в миллиметровом диапазоне длин волн. Полное антизеркальное отражение может найти применение при создании электропрочных дифракционных решёток [5] в оптическом диапазоне длин волн. В этом сообщении мы излагаем результаты теоретического и экспериментального исследования ещё одного

нового явления — эффективной трансформации на гофрированной границе двух диэлектриков электромагнитной волны, падающей со стороны одного из диэлектриков, в волну (-1)-й гармоники, распространяющуюся в другом диэлектрике. Теоретическое изучение основано на численном решении уравнений электромагнитного поля для гармонических процессов, зависящих от времени как  $\exp(i\omega t)$ , где  $\omega$  — круговая частота. В первой половине работы выписываются соответствующие интегральные уравнения, выведенные ранее в [4, 5], и приводятся результаты их численного решения. Во второй половине обсуждается метод измерения коэффициента трансформации с помощью резонатора с диэлектрической призмой, одна из граней которой гофрирована, и излагаются результаты эксперимента по наблюдению описываемого эффекта.

Рассмотрим гофрированную границу двух диэлектриков (рис. 1) с проницаемостями  $\varepsilon > \varepsilon_0$ . Пусть гофр с периодом  $d$  имеет высоту  $2A_0$  и описывается формулой

$$y(x) = A_0 \sin(2\pi x/d). \quad (1)$$

Ограничимся исследованием двумерного случая, в котором отсутствует зависимость полей от координаты  $z$ . В этих условиях можно по отдельности рассмотреть рассеяние ТЕ-волн, у которых вектор электрического поля параллелен гофру и перпендикулярен плоскости падения (р-поляризация),

и ТМ-волн, у которых вектор электрического поля перпендикулярен гофру и лежит в плоскости падения (s-поляризация).

Для описания ТЕ-волн удобно использовать  $E_z$ -компоненту электрического поля, направленную вдоль образующей гофра, а для описания ТМ-волн —  $H_z$ -компоненту магнитного поля. В обоих случаях (ТЕ- или ТМ-волн) эти компоненты мы обозначим через  $\Psi$ . Пусть из более плотной среды на гофрированную границу под углом  $\theta_j$  падает волна

$$\Psi^i(x, y) = e^i \exp(ik \sqrt{\varepsilon} \sin \theta_j x - ik \sqrt{\varepsilon} \cos \theta_j y) = \exp(ik_{0x} x - ik_{0y} y), \quad (2)$$

где  $k = \omega/c$ ,  $c$  — скорость света,  $e^i$  — амплитуда волны, которую можно считать равной единице. Введём вспомогательную, определённую на гофрированной границе функцию  $\Phi[x, y(x)]$ , связанную с полем  $\Psi$  соотношением

$$\begin{aligned} \int \left\{ G(x-x', y-y') \frac{\partial}{\partial n'} \Psi(x', y') - \Psi(x', y') \frac{\partial}{\partial n'} G(x-x', y-y') \right\} ds' = \\ = \int G(x-x', y-y') \Phi(x', y') ds'. \end{aligned} \quad (3)$$

Для этой функции может быть сформулировано интегральное уравнение [4]

$$\begin{aligned} \left\{ \int K(x-x', y-y') \Phi(x', y') ds' + \frac{\Psi^i(x, y)}{2} + \right. \\ \left. + \int \left[ \rho G^0(x-x', y-y') \frac{\partial}{\partial n'} \Psi^i(x', y') - \Psi^i(x', y') \frac{\partial}{\partial n'} G^0(x-x', y-y') \right] ds' \right\} \Big|_{y=y(x)} = 0, \quad (4) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} K(x-x', y-y') = \frac{1}{2} [G(x-x', y-y') + \rho G^0(x-x', y-y')] + \\ + \int \left[ \rho G^0(x-x'', y-y'') \frac{\partial}{\partial n''} G(x''-x', y''-y') - G(x''-x', y''-y') \frac{\partial}{\partial n''} G^0(x-x'', y-y'') \right] ds'' \end{aligned}$$

— ядро уравнения, а

$$\begin{aligned} G(x-x', y-y') = \frac{1}{2id} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k_{ym}} \exp[ik_{xm}(x-x') + ik_{ym}(y-y')], \\ G^0(x-x', y-y') = \frac{1}{2id} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k_{ym}^0} \exp[ik_{xm}^0(x-x') + ik_{ym}^0(y-y')] \end{aligned}$$

— двумерные функции Грина верхней и нижней сред (см. рис. 1) для решётки источников, расположенных с периодом  $d$  по координате  $x$  с разностью фаз между соседними элементами, равной  $k \sqrt{\varepsilon} d \sin \theta_j$  для верхней и  $k \sqrt{\varepsilon_0} d \sin \theta_j$  для нижней сред,

$$k_{xm} = k_{xm}^0 = k \sqrt{\varepsilon} \sin \theta_j + \frac{2\pi m}{d}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

$$k_{ym} = \begin{cases} \sqrt{k^2 \varepsilon - k_{xm}^2}, & k^2 \varepsilon > k_{xm}^2; \\ i \sqrt{k_{xm}^2 - k^2 \varepsilon}, & k_{xm}^2 > k^2 \varepsilon, \end{cases}$$

$$k_{ym}^0 = \begin{cases} \sqrt{k^2 \varepsilon_0 - k_{xm}^2}, & k^2 \varepsilon_0 > k_{xm}^2; \\ i \sqrt{k_{xm}^2 - k^2 \varepsilon_0}, & k_{xm}^2 > k^2 \varepsilon_0, \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial n'} = \frac{1}{\sqrt{1 + (dy'/dx')^2}} \left[ -\frac{dy'}{dx'} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial y'} \right]$$

— производная по нормали к границе диэлектриков. Интегрирование производится на периоде  $d$  вдоль кривой, описывающей форму гофра,  $ds' = dx' \sqrt{1 + (dy'/dx')^2}$ . Под перечёркнутым интегралом  $\int$  понимается интеграл в смысле главного значения, коэффициент  $\rho = 1$  для ТЕ-волн и  $\rho = \varepsilon_0/\varepsilon$  для ТМ-волн.

Используя (3), найдём, что поле  $\Psi$  в верхней и  $\Psi^0$  в нижней средах выражается через функцию  $\Phi(x, y)$  следующим образом:

$$\Psi(x, y) = \Psi^i(x, y) + \int G(x - x', y - y') \Phi(x', y') ds', \quad (5)$$

$$\Psi^0(x, y) = - \int \left\{ \rho F_1(x', y') G^0(x - x', y - y') - F_2(x', y') \frac{\partial}{\partial n'} G^0(x - x', y - y') \right\} ds', \quad (6)$$

где

$$F_1(x', y') = \frac{\partial}{\partial n'} \Psi^i(x', y') + \frac{\Phi(x', y')}{2} + \int \Phi(x'', y'') \frac{\partial}{\partial n'} G(x' - x'', y' - y'') ds'',$$

$$F_2(x', y') = \Psi^i(x', y') + \int G(x' - x'', y' - y'') \Phi(x'', y'') ds''.$$

Представим дифракционное поле обеих сред вне канавок гофра как суперпозицию плоских волн:

$$\Psi(x, y) = \sum_m R_m \exp(ik_{mx}x - ik_{my}y) \quad \text{при } y > A_0,$$

$$\Psi^0(x, y) = \sum_m T_m \exp(ik_{mx}x - ik_{my}^0 y) \quad \text{при } y < -A_0,$$

где комплексные амплитуды гармоник  $R_m$  в верхнем и  $T_m$  в нижнем полупространствах определяются как

$$R_m = \int \frac{\Phi(x', y')}{2idk_{my}} \exp(-ik_{my}y' - i2\pi mx'/d) ds', \quad (7)$$

$$T_m = - \int \left\{ \frac{\rho F_1(x', y')}{2idk_{my}^0} + \frac{F_2(x', y')}{2d \sqrt{1 + (dy'/dx')^2}} \left( -1 - \frac{k_{my}}{k_{my}^0} \frac{dy'}{dx'} \right) \right\} \exp(ik_{my}^0 y' - i2\pi mx'/d) ds'. \quad (8)$$

Коэффициенты передачи на каждой гармонике определяются выражениями

$$P_m = |R_m|^2 \frac{k_{my}}{k_{0y}}, \quad P_m^0 = |T_m|^2 \frac{k_{my}^0}{k_{0y}} \rho \quad (9)$$

для верхней и нижней сред соответственно.

Решение уравнения (4) производилось на основе представления неизвестной функции  $\Phi(x, y)$  в  $N$  точках на периоде  $d$ . Аналогичным образом представлялись свободный член и ядро уравнения. В результате получалась система из  $N$  линейных алгебраических уравнений, которая и решалась. Расчёт останавливался, если при увеличении  $N$  получаемые результаты не менялись в пределах заданной точности. Число точек  $N$  в зависимости от формы и амплитуды гофра при точности расчётов  $10^{-3} \div 10^{-4}$  колебалось приблизительно от 50 до 200.

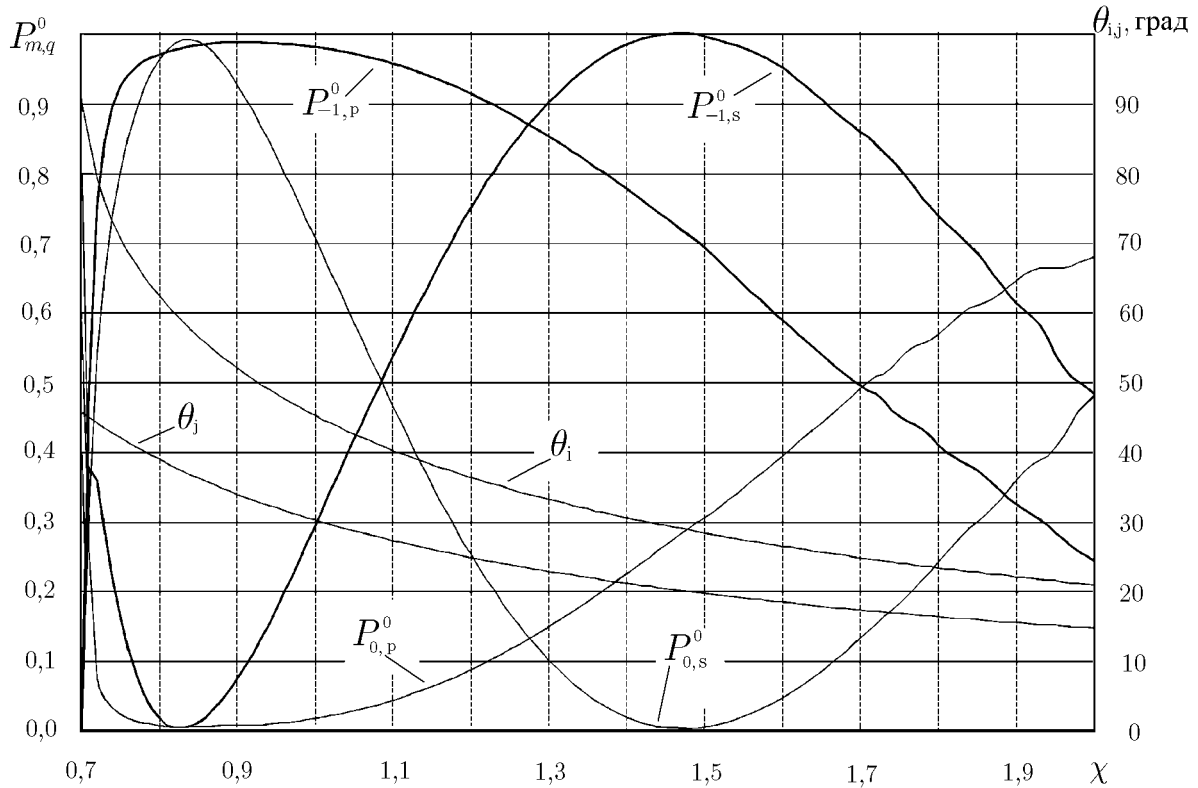


Рис. 2. Зависимость коэффициента трансформации волн разной поляризации в различные гармоники от параметра  $\chi = d\sqrt{\varepsilon}/\lambda$  при выполнении условий автоколлимации и  $A_0/d = 1,51$

Ниже приведены результаты численного решения уравнения (4) при наличии двух пространственных гармоник (0-й и (-1)-й) в верхнем диэлектрике и таких же гармоник в нижнем. Расширяя рамки классификации [6, 7], этот режим можно назвать четырёхволновым. Он реализуется при выполнении условий

$$k\sqrt{\varepsilon}\sin\theta_j - \frac{4\pi}{d} < -k, \quad (10)$$

$$k\sqrt{\varepsilon} + \frac{2\pi}{d} > k. \quad (11)$$

Целью наших исследований является выяснение условий, при которых имеет место достаточно высокая, близкая к полной трансформация падающей волны в проходящую волну (-1)-й гармоники. Оказывается, этот режим может быть осуществлён путём выбора глубины и периода гофра и, в частности, имеет место при автоколлимации падающей и отражённой волн (см. рис. 1), когда

$$k\sqrt{\varepsilon}\sin\theta_j = \frac{\pi}{d}. \quad (12)$$

В качестве примера рассмотрим рассеяние на гофрированной границе вакуума (диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon_0 = 1$ ) и тефлона (диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon = 2$ ). Для профиля (1) на рис. 2 приведены коэффициенты передачи  $P_{m,q}^0$  в 0-ю и (-1)-ю гармоники, распространяющиеся в вакууме, для s-поляризации (индекс  $q = s$ , кривые  $P_{0,s}^0$  и  $P_{-1,s}^0$ ) и p-поляризации (индекс  $q = p$ , кривые  $P_{0,p}^0$  и  $P_{-1,p}^0$ ) в зависимости от параметра  $\chi = d\sqrt{\varepsilon}/\lambda$  — отношения периода гофра к длине волны в диэлектрике при  $A_0/d = 1,51$ . Там же показаны углы падения  $\theta_j$  и преломления  $\theta_i$  волн нулевой гармоники, связанные между собой выражением  $\sin\theta_i = \sqrt{\varepsilon/\varepsilon_0}\sin\theta_j$  при выполнении условия (12). Из рисунка видно, что для s-поляризации максимальный коэффициент передачи близок к единице

с точностью расчёта (около  $10^{-3}$ ), в то время как для р-поляризации достигаемый коэффициент трансформации не превышает 0,985. Отметим, что полоса эффективной трансформации (приблизительно на уровне 0,8) у волн s-поляризации несколько уже. Рис. 3 иллюстрирует зависимость коэффициентов передачи  $P_{-1,q}^0$  на заданной частоте для  $d/\lambda = 1,56$  и  $d/\lambda = 1,47$  от угла падения; там же показаны углы преломления волн  $(-1)$ -й гармоники  $\theta_{i,-1}$ .

Для наблюдения изучаемого эффекта воспользуемся диэлектрической призмой, одна из граней которой гофрирована (рис. 4). Параметры призмы выберем так, чтобы (согласно проведённым расчётам) для волны s-поляризации коэффициент трансформации через гофрированную грань был близок к единице. Использование такой поляризации позволяет уменьшить влияние отражения от плоской грани призмы, выбрав угол призмы  $\varphi$  таким, чтобы волна, проходящая через призму, падала на плоскую грань под углом Брюстера  $\theta_{Br}$ . Материал призмы имеет потери, характеризуемые величиной  $\text{tg } \delta$ .

Для определения коэффициента трансформации на гофрированной грани призмы поместим её в открытый резонатор (см. рис. 4). Применение резонатора традиционно для определения коэффициентов отражения или коэффициентов передачи, близких к единице. Потери на трансформацию находятся по добротности возбуждаемого типа колебаний. Связь добротности одного из типов колебаний резонатора с параметрами призмы найдём, проведя теоретическое исследование характеристик мод такого резонатора.

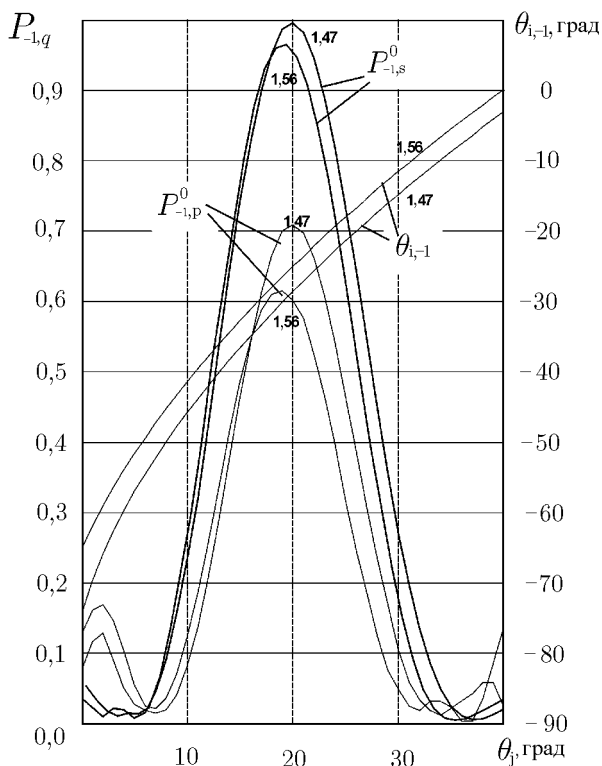


Рис. 3. Зависимость коэффициента трансформации волн разной поляризации в  $(-1)$ -ю гармонику от угла падения волны при  $d/\lambda = 1,47; 1,56$

плёнки связи будем отсчитывать от её центра.

Резонатор, показанный на рис. 4, образован металлическими зеркалами  $m_1$  и  $m_2$ . Одно из них ( $m_1$ ) является плоским, второе имеет радиус кривизны  $R_2$ . Предполагается, что омические коэффициенты отражения  $R_{ом} \sim -1$ . Внутри резонатора помещён элемент связи — «бесконечно тонкая» диэлектрическая плёнка  $pl$  с коэффициентом отражения  $iR$  и прозрачностью  $T$  по амплитуде. Мы будем рассматривать плёнку без потерь, а величины  $R$  и  $T$  считать действительными, так что справедливо равенство  $R^2 + T^2 = 1$ .

В каждой секции (между первым зеркалом и призмой, внутри призмы, между призмой и вторым зеркалом) резонатора электромагнитное поле можно представить в виде встречных волновых пучков. Эти пучки распространяются по некоторой ломаной  $ABCD$ , которую мы определим из условий изменения направления распространения волн при преломлении их на гофрированной и плоской гранях призмы и отражении от зеркал. Эту ломаную, состоящую из отрезка  $AB$  длиной  $L_1 + L_2$ , отрезка  $BC$  длиной  $L_d$  и отрезка  $CD$  длиной  $L_3$ , можно назвать центральным лучом моды резонатора. Мы обозначили расстояние вдоль центрального луча от второго зеркала до плёнки связи через  $L_2$ , расстояние от плёнки до гофрированной грани призмы через  $L_1$ , расстояние, проходимое лучом внутри диэлектрической призмы, через  $L_d$  и расстояние от гладкой грани призмы до плоского зеркала через  $L_3$ . Расстояние от



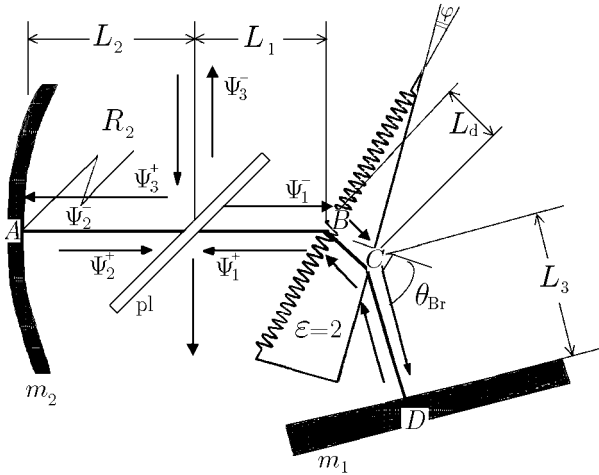


Рис. 4. Открытый резонатор с призмой

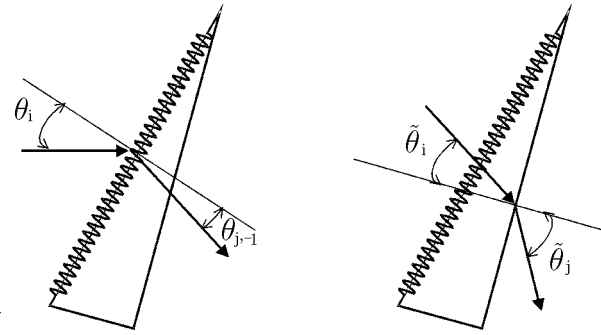


Рис. 5

Предположим, что существует мода резонатора с частотой, на которой имеет место полная трансформация волны в проходящую волну (в (-1)-ю гармонику). Найдём добротность этой моды. Из рис. 3 следует, что гофрированная поверхность действует на пучок электромагнитных волн как спектральная диафрагма. Характеристики последней определим из результатов численного анализа, представив коэффициент трансформации по амплитуде в виде

$$T^e(\bar{k}_x) \approx \exp\left(-\frac{\bar{k}_x^2}{2a^2} + i\beta\bar{k}_x\right), \tag{13}$$

где  $\bar{k}_x$  — проекция поперечного волнового вектора плоских волн, составляющих волновой пучок, на плоскость рис. 4,  $a$  — полуширина спектральной диафрагмы. В параксиальном приближении (при  $\bar{k}_x/k \ll 1$ ), как следует из рис. 3, для нашего случая  $a = 0,11 k \sqrt{\epsilon}$ , если  $\bar{k}_x$  относить к волнам внутри диэлектрика. Параметр  $\beta$  показывает, что при прохождении гофрированной поверхности пучок отклоняется от направления, определяемого по «кинематической» формуле (12). Это изменение направления распространения пучка может быть полностью скомпенсировано путём изменения в небольших пределах угла между плоскостью зеркала и гладкой гранью призмы. Такая подстройка имеется в используемом резонаторе, поэтому в дальнейшем мы будем считать  $\beta = 0$ .

При описании волновых пучков в резонаторе будем предполагать, что структура пучка электромагнитных волн в зависимости от поперечных координат описывается гауссовой функцией. Пусть на плёнку связи падает исходный волновой пучок со спектром амплитуд  $\Psi_3^+$ . Этот пучок осуществляет возбуждение резонатора. Из резонатора выходит волновой пучок со спектром  $\Psi_3^-$ . Обозначим через  $\Psi_{1,2}^-$  спектры пучков, распространяющихся от делительной пластины в сторону первого и второго зеркал резонатора соответственно, а через  $\Psi_{1,2}^+$  — спектры пучков, приходящих к пластине с этих направлений. Соотношения между пучками, имеющие место на плёнке связи, запишем в виде

$$\Psi_1^- = T\Psi_2^+, \tag{14}$$

$$\Psi_2^- = T\Psi_1^+ + iR\Psi_3^+, \tag{15}$$

$$\Psi_3^- = iR\Psi_2^+. \tag{16}$$

Введём операторы  $\hat{K}_1$  и  $\hat{K}_2$ , описывающие изменение спектра пучков  $\Psi_{1,2}^+$  при распространении внутри резонатора и отражении соответственно от первого и второго его зеркал

$$\Psi_1^+ = \hat{K}_1\Psi_1^-, \tag{17}$$

$$\Psi_2^+ = \hat{K}_2 \Psi_2^- \quad (18)$$

Оператор  $\hat{K}_1$  имеет вид

$$\hat{K}_1 = R_{\text{ом}} \exp \left[ -2ik(L_1 + \sqrt{\varepsilon} L_d + L_3) + \frac{ik_x^2}{k} L_x + \frac{ik_y^2}{k} L_y - \frac{k_x^2 \cos^2 \theta_1}{a^2 \cos^2 \theta_{j,-1}} - k \sqrt{\varepsilon} L_d \operatorname{tg} \delta \right], \quad (19)$$

где

$$L_x = L_1 + \frac{L_d \cos^2 \theta_1}{\sqrt{\varepsilon} \cos^2 \theta_{j,-1}} + \frac{L_3 \cos^2 \theta_1 \cos^2 \tilde{\theta}_j}{\cos^2 \theta_{j,-1} \cos^2 \tilde{\theta}_1}, \quad L_y = L_1 + \frac{L_d}{\sqrt{\varepsilon}} + L_3,$$

$k_x$  и  $k_y$  — проекции поперечного волнового вектора плоских волн, составляющих пучок, на плоскость рис. 4 и плоскость, перпендикулярную центральному лучу моды в пространстве между вторым зеркалом и призмой и плоскости рисунка;  $\cos \theta_1$ ,  $\cos \theta_{j,-1}$ ,  $\cos \tilde{\theta}_1$ ,  $\cos \tilde{\theta}_j$  — косинусы углов падения и преломления центрального луча моды на гофрированной и плоской гранях (см. рис. 5). В (19) учтено изменение составляющих волновых векторов при прохождении границ диэлектрика. Последнее слагаемое в показателе экспоненты в (19) описывает тепловые потери внутри диэлектрика. Оператор  $\hat{K}_2$  можно представить в виде

$$\hat{K}_2 = R_{\text{ом}} \exp \left( -2ikL_2 + i \frac{k_x^2 + k_y^2}{2k} L_2 \right) \hat{\Phi}^r(x, y) \hat{R}_2 \hat{\Phi}^d(k_x, k_y) \exp \left( i \frac{k_x^2 + k_y^2}{2k} L_2 \right), \quad (20)$$

где функция

$$\hat{R}_2 = \exp \left[ \frac{ik(x^2 + y^2)}{R_2} \right] \quad (21)$$

описывает преобразование фазового фронта пучка вторым зеркалом,  $\hat{\Phi}^d(k_x, k_y)$  и  $\hat{\Phi}^r(x, y)$  — операторы прямого и обратного двойного преобразования Фурье. В (21) положительное значение  $R_2$  соответствует вогнутому зеркалу. Записывая операторы  $\hat{K}_1$  и  $\hat{K}_2$  в виде (19) и (20), мы пренебрегаем «классическими» дифракционными потерями, возникающими вследствие ограниченности зеркал [8].

Из системы уравнений (14)–(21) следует интегральное соотношение

$$\Psi_3^- - T^2 \hat{K}_2 \hat{K}_1 \Psi_3^- = R^2 \hat{K}_2 \Psi_3^+ \quad (22)$$

для определения отражённого пучка — функции  $\Psi_3^-$ . Предположим для простоты, что возбуждение резонатора является одномодовым. Это значит, что функция  $F = \hat{K}_2 \Psi_3^+$  является собственной функцией оператора  $\hat{K}_2 \hat{K}_1$ , т. е. выполняется равенство

$$\Lambda_F F = \hat{K}_2 \hat{K}_1 F, \quad (23)$$

где  $\Lambda_F = |\Lambda_F| \exp(i\varphi_\lambda)$  — собственное значение оператора  $\hat{K}_2 \hat{K}_1$ ,  $\varphi_\lambda$  — его фаза. Представим фазу  $\varphi_\lambda$  в виде суммы:  $\varphi_\lambda = -2kL + \Delta\varphi$ . Одно из слагаемых порядка  $2kL$ , где  $L = L_2 + L_1 + \sqrt{\varepsilon} L_d + L_3$  — длина резонатора, сильно зависит от частоты, а слагаемое  $\Delta\varphi$  в квазиоптическом приближении от частоты почти не зависит. Для коэффициента отражения  $\rho_0$  по мощности от резонатора в этом случае имеем

$$\rho_0 = \frac{|R|^4}{1 + |T|^4 |\Lambda_F|^2 - 2|T|^2 |\Lambda_F| \cos(2kL - \Delta\varphi)}. \quad (24)$$

Коэффициент отражения имеет максимум на резонансной частоте, определяемой из условия

$$2kL - \Delta\varphi = 2\pi q, \quad (25)$$

где  $q$  — большое целое число. В нашем случае  $|T|^2 |\Lambda_F| \sim 1$ , и при слабой (по сравнению с зависимостью  $kL$ ) зависимости фазы  $\Delta\varphi$  от частоты можно ввести резонансную ширину по уровню убывания коэффициента отражения  $\rho_0$  в два раза:

$$\Delta k = \frac{\delta_0}{L \sqrt{1 - \delta_0}},$$

где

$$\delta_0 = 1 - |T|^2 |\Lambda_F| \quad (26)$$

характеризует потери в резонаторе. Потери определим по модулю собственного значения  $\Lambda_F$  уравнения (23), которое для колоколообразной (нижней «поперечной») собственной функции может быть выражено следующим образом:

$$\Lambda_F = R_{\text{ом}}^2 \frac{\exp[-2ik(L_2 + L_1 + \sqrt{\varepsilon}L_d + L_3) - k\sqrt{\varepsilon}L_d \operatorname{tg} \delta]}{\sqrt{g_x - i[f \pm \sqrt{(f + ig_x)^2 + 1}]} \sqrt{g_y - i\sqrt{1 - g_y^2}}}, \quad (27)$$

где

$$f = \frac{2k \cos^2 \theta_i}{R_2 a^2 \cos^2 \theta_{j,-1}}, \quad g_x = 1 - \frac{2(L_2 + L_x)}{R_2}, \quad g_y = 1 - \frac{2(L_2 + L_y)}{R_2}.$$

Дифракционные потери, возникающие вследствие конечности полосы пространственных частот (параметра  $a$ ), эффективно трансформируемых гофрированной границей, будут малы в резонаторе с параметрами

$$\{g_x, g_y\} \sim 1, \quad f \ll 1. \quad (28)$$

В этом случае перед корнем в (27) надо выбрать знак  $+$ . Из (26) и (27) следует, что потери при условии  $\delta_0 \ll 1$  можно представить в виде суммы омических потерь в зеркалах  $\delta_{\text{ом}} = 1 - |R_{\text{ом}}|^2$ , потерь на связь  $\delta_c = 1 - |T|^2$ , тепловых потерь в диэлектрике  $\delta_{\text{диэл}} = 1 - kL_d \sqrt{\varepsilon} \operatorname{tg} \delta$  и потерь, связанных с неполной трансформацией пучков на гофрированной границе  $\delta_{\text{диф}}$ . Последние могут быть определены по отличию модуля знаменателя в (27) от единицы:

$$\delta_{\text{диф}} \approx \frac{f}{2\sqrt{1 - g_x^2}}. \quad (29)$$

Экспериментально определение суммы омических потерь в зеркалах и потерь на связь производилось путём измерения полосы  $\Delta k$  в резонаторе той же длины без призмы с гофрированной гранью. Указанные потери при использовании полиэтиленовой плёнки связи толщиной 0,1 мм оказались приблизительно равны  $\delta_{\text{ом}} + \delta_c \approx 0,01$ . Диаметры зеркал были достаточно велики (120 мм), так что «классическими» дифракционными потерями, возникающими вследствие ограниченности зеркал, можно было пренебречь. Радиус кривизны  $R_2 = 1\,200$  мм, при этом выполняется условие (28), и теоретически потери, связанные с неполной трансформацией и определённые по (29), явились небольшой величиной:  $\delta_{\text{диф}} \approx 0,01$ . \* Измерения потерь в диэлектрике из той же партии по методике [9] показали, что для него  $\operatorname{tg} \delta = 0,000\,3$ .

В экспериментах мы использовали призму со следующими размерами: длина плоской грани 145 мм, толщина основания призмы вместе с гофрировкой 45 мм, толщина верхушки 12 мм. Параметры гофра,

\* Мы провели расчёт характеристик мод резонатора, учитывая зависимость коэффициента передачи, показанную на рис. 3, без аппроксимации её гауссовой кривой и принимая во внимание ограниченность зеркал резонатора. В интересной для нас области геометрических параметров резонатора результаты такого расчёта отличаются от полученных выше для величины  $1 - \delta_0$  на несколько процентов. Это показывает, что более точный расчёт, отличаясь большой трудоёмкостью, не вносит существенных поправок, поэтому подробности его мы не приводим.

выбранные в соответствии с расчётом для длины волны  $\lambda \approx 2$  мм, были следующие:  $A_0 = 3,14$  мм,  $d = 2,08$  мм. При таких параметрах гофрировки углы  $\theta_1 = 28,8^\circ$ ,  $\theta_{j,-1} = 19,9^\circ$ . Путь волнового пучка внутри призмы при этих размерах оказался равным  $L_d \approx 23$  мм, тепловые потери внутри диэлектрика  $\delta_{\text{диэл}} \approx 0,03$ . Угол призмы в результате неточности изготовления оказался равным  $\varphi \approx 11,2^\circ$  вместо расчётного  $\varphi \approx 15,4^\circ$ , так что углы  $\tilde{\theta}_j \approx 31,1^\circ$  и  $\tilde{\theta}_1 \approx 46,9^\circ$  оказались отличными от углов Брюстера  $\theta_j = 35,3^\circ$  и  $\theta_1 \approx 54,7^\circ$ . Из-за этого добавочные потери, вносимые в резонатор, составляли величину  $\delta_{\text{доб}} < 0,01$ . Длина резонатора определялась по разности частот мод с соседними индексами  $q$  в (25) и оказалась равной  $L \approx 320$  мм. Экспериментально определённые потери в резонаторе с призмой оказались равными  $\delta_0 \approx 0,25$ . Вычитая из этой величины потери на связь, омические потери в зеркалах и тепловые потери в диэлектрике, найдём, что потери трансформации составляют величину  $\delta_T \approx 0,20$ . Таким образом определённый коэффициент трансформации на гофрированной границе двух диэлектриков составляет приблизительно 0,8. Его отличие от теоретического значения, близкого к единице, вызвано, по-видимому, неточностями в изготовлении гофрированной поверхности.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 00-02-16423).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Рытов С. М. // ЖЭТФ. 1955. Т. 29, № 5(11). С. 605.
2. Petelin M. I., Kasperek W. // Int. J. Electron. 1991. V. 71, № 5. P. 871.
3. Власов С. Н., Копосова Е. В. // ЖТФ. 1993. Т. 63, № 7. С. 123.
4. Власов С. Н., Копосова Е. В. // Изв. вуз. Радиофизика. 1994. Т. 37, № 3. С. 351.
5. Власов С. Н., Копосова Е. В. // Изв. вуз. Радиофизика. 1998. Т. 41, № 6. С. 747.
6. Шестопалов В. П., Кириленко А. А., Масалов С. А., Сиренко Ю. К. Резонансное рассеяние волн. Т. 1. Дифракционные решётки. — Киев: Наукова думка, 1986.
7. Electromagnetic Theory of Grating / Ed. by R. Petit. — Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1980.
8. Вайнштейн Л. А. Открытые резонаторы и открытые волноводы. — М.: Сов. радио, 1966.
9. Власов С. Н., Копосова Е. В., Мазур А. Б., Паршин В. В. // Изв. вуз. Радиофизика. 1996. Т. 39, № 5. С. 615.

Институт прикладной физики РАН,  
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию  
29 июня 1999 г.

#### THE TOTAL TRANSFORMATION OF AN ELECTROMAGNETIC WAVE INCIDENT ON THE CORRUGATED BOUNDARY OF TRANSPARENT DIELECTRICS INTO A TRANSMITTED WAVE OF THE (-1)TH HARMONIC

*S. N. Vlasov, E. V. Kuposova, and V. V. Parshin*

In this paper, we describe the results of theoretical and experimental studies of a new phenomenon of the total transformation of an electromagnetic wave incident from a transparent dielectric on its corrugated boundary with another transparent dielectric into a first-harmonic wave propagating in the latter dielectric. The theoretical analysis is based on a numerical solution of total equations for electromagnetic field. The experimental analysis was performed using a teflon prism with corrugated surface located inside a two-mirror resonator.

УДК 621.37

## ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНАЯ КОМПРЕССИЯ СВЧ ИМПУЛЬСОВ В СИСТЕМЕ СВЯЗАННЫХ РЕЗОНАТОРОВ

*С. Н. Артёменко, В. А. Августинovich, Ю. Г. Юшков*

Представлен краткий анализ систем последовательной резонансной компрессии СВЧ импульсов. Приведены результаты исследования последовательной компрессии в системе связанных резонаторов с выводом энергии через интерференционные переключатели. В 3-сантиметровом диапазоне длин волн на двухступенчатой системе со сверхразмерным резонатором в первой ступени и одномодовым во второй экспериментально достигнут коэффициент усиления около 18 дБ при длительности выходных импульсов приблизительно 2,5 нс, пиковой мощности примерно 3 МВт и КПД 17 %.

### ВВЕДЕНИЕ

В [1] показана возможность повышения мощности СВЧ импульсов путём их последовательного сжатия в цепочке резонансных СВЧ компрессоров. При этом на трёхступенчатой последовательности одномодовых резонаторов 10-сантиметрового диапазона длин волн достигнут коэффициент усиления около 28 дБ при длительности формируемых импульсов приблизительно 0,3 нс, пиковой мощности примерно 630 МВт и КПД системы 7 %. Однако в отмеченной работе отсутствует анализ исследованной системы, не отмечаются особенности её схемы и ничего не говорится о других возможных системах последовательной компрессии. В то же время очевидно, что варианты подобных систем не исчерпываются исследованным в [1], их эффективность может быть различной и в различной степени зависеть от множества факторов, таких, например, как схема построения системы, характеристики каждой из ступеней компрессии, способ коммутации и т. п. Очевидными, например, представляются системы с соединением ступеней через отрезки волноводов произвольной длины и (или) с непосредственным соединением. При этом в ступенях могут быть использованы как одномодовые, так и многомодовые (сверхразмерные) резонаторы. Рабочие характеристики таких систем, несомненно, будут зависеть как от способов соединения ступеней, так и от типа используемых в них резонаторов.

В статье выполнен краткий анализ наиболее простых схем последовательной компрессии и изложены результаты экспериментального исследования перспективной, по мнению авторов, системы, представляющей собой цепочку связанных резонаторов со сверхразмерным резонатором в первой ступени и выводом энергии через интерференционные переключатели.

### 1. АНАЛИЗ СИСТЕМ

Рассмотрим четыре схемы последовательной компрессии. Первая из них основана на компрессии в одномодовых резонаторах с произвольной длиной соединительных трактов между ступенями и аналогична той, которая реализована в [1]. Вторая — такая же, как и первая, но со сверхразмерным резонатором в первой ступени, третья — с компрессией импульсов в системе связанных одномодовых резонаторов, четвёртая — с компрессией в системе связанных многомодовых резонаторов.

Принципиальное отличие схем с произвольным и непосредственным соединением ступеней состоит в отсутствии в последнем случае потерь на отражение при передаче энергии от одной ступени к другой.

Одномодовые резонаторы позволяют формировать СВЧ импульсы с прямоугольной огибающей и достаточно высоким усилением, но с относительно небольшим запасом энергии, тогда как многомодовые существенно повышают запас энергии в импульсах, но обеспечивают меньший коэффициент усиления и имеют экспоненциальный спад огибающей выходных сигналов.

Анализ проведём, используя метод матрицы рассеяния [2] и данные работ [3–7]. При этом рассмотрим только последовательности из двух резонаторов, т. к. результаты анализа таких последовательностей несложно обобщить и на большее количество резонаторов. Так, используя выбранный метод и результаты работы [3], нетрудно показать, что для первой схемы общий КПД системы  $\eta_0$  и общий коэффициент усиления  $M_0^2$  определяются следующими приближёнными соотношениями:

$$\eta_0 \approx 0,8\eta_1 \approx 0,8\tau_1/t, \quad M_0^2 \approx 0,8\eta_1 t/T_2 \approx 0,8\tau_1/T_2, \quad (1)$$

где  $\eta_1$  — КПД первой ступени,  $t$  и  $T_2$  — длительность входного и выходного импульсов соответственно,  $\tau_1$  — постоянная звучания резонатора первой ступени по мощности ( $t > (3 \div 5)\tau_1$ ). Из (1) следует, что, например, для одномодовых систем 3- и 10-сантиметрового диапазонов длин волн с  $t \sim 1$  и 3 мкс,  $\tau_1 \sim 180$  и 600 нс,  $T_2 \approx 2$  нс в идеальном случае КПД составит около 15 %, а коэффициент усиления приблизительно 18 и 23 дБ. Однако реальные их значения с учётом потерь в коммутаторах при выводе энергии [4] будут приблизительно вдвое ниже для КПД и на 2÷4 дБ ниже для коэффициента усиления.

При использовании в первой ступени сверхразмерного резонатора (вторая схема) КПД и коэффициент усиления определяются выражениями вида

$$\eta_0 \approx \eta_1\eta_2, \quad M_0^2 \approx \eta_1\eta_2 t/T_2. \quad (2)$$

где  $\eta_2$  — КПД второй ступени [5]. Из (2) следует, что общий КПД такой системы будет практически таким же, как и в первом варианте. Связано это с тем, что повышение КПД первой ступени в 3–4 раза за счёт использования в ней сверхразмерного резонатора практически полностью нейтрализуется низким КПД второй ступени из-за экспоненциального спада огибающей выходных сигналов сверхразмерного резонатора. В равной степени это относится и к коэффициенту усиления системы. Вместе с тем за счёт большого запаса энергии в выходном импульсе резонатора первой ступени второй вариант может существенно (приблизительно на порядок) превосходить первый.

По сравнению с рассмотренными выше более предпочтительными представляются схемы с компрессией СВЧ импульсов в цепочке связанных резонаторов. Действительно, используя результаты работ [6, 7], можно показать, что в этом случае для пары связанных одномодовых резонаторов КПД и коэффициент усиления будут определяться выражениями

$$\eta_0 \approx \eta_1 \approx \tau_1/t, \quad M_0^2 \approx \tau_1/T_2. \quad (3)$$

Отсюда следует, что КПД и коэффициент усиления в этом случае могут быть повышены примерно на 25 %. Повышение связано с устранением потерь на отражение от резонатора второй ступени благодаря колебательному режиму передачи энергии в системе связанных резонаторов. Вместе с тем относительно невысокое значение постоянной звучания резонатора первой ступени и в этом случае обеспечивает относительно низкие величины указанных характеристик всей системы. Возможный вариант последовательной компрессии в системе связанных одномодовых резонаторов экспериментально реализован в [7].

Наиболее эффективной представляется последовательная компрессия в четвёртой схеме, в которой в системе связанных резонаторов используются сверхразмерные резонаторы (как минимум — в первой ступени). Можно показать, что, например, для системы с многомодовым резонатором в первой ступени и одномодовым во второй КПД и коэффициент усиления будут определяться следующими приближёнными формулами:

$$\eta_0 \approx \eta_1, \quad M_0^2 \approx \eta_1 t/T_2. \quad (4)$$

При этом (т. к. для сверхразмерных резонаторов КПД обычно в 3–4 раза выше, чем для одномодовых, и коэффициент усиления пропорционален длительности входного импульса) общий КПД в 3- и 10-сантиметровом диапазонах длин волн для таких систем в идеале может достигать 50÷60 %, а коэффициент усиления — 23÷24 и 28÷29 дБ (при  $T_2 \approx 2$  нс). На практике вследствие потерь в коммутаторах при выводе эти значения будут соответственно в 2–3 раза и на 2÷4 дБ ниже. Вместе с тем они будут в 2–3 раза выше, чем в системе связанных одномодовых резонаторов. Использование сверхразмерного резонатора и во второй ступени при аналогичном значении суммарного КПД позволит получать дополнительное усиление относительно длинных наносекундных радиоимпульсов. При этом общий коэффициент усиления  $M_0^2$  будет определяться выражением

$$M_0^2 \approx M_1^2 T_1 / T_2, \quad (5)$$

где  $M_1^2$  — коэффициент усиления первой ступени,  $T_1$  и  $T_2$  — время двойного пробега волны вдоль резонаторов первой и второй ступеней соответственно ( $T_1 > T_2$ ). Увеличение общего коэффициента усиления при этом может быть обеспечено как использованием более короткого резонатора во второй ступени по сравнению с первой, так и возбуждением в резонаторе второй ступени типа волны с большей групповой скоростью.

## 2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Экспериментально исследовалась компрессия СВЧ импульсов в системе связанных резонаторов со сверхразмерным резонатором в первой ступени и одномодовым во второй. В первой ступени использовался медный резонатор диаметром 90 и длиной 210 мм. Резонатор работал на моде  $H_{01(12)}$ , где в скобках указан продольный индекс, на частоте 9,38 ГГц и имел собственную добротность порядка  $10^5$ . Одномодовый резонатор второй ступени был изготовлен из стандартного прямоугольного волновода с сечением  $23 \times 10$  мм длиной 230 мм и работал на моде  $H_{10(11)}$ ; его собственная добротность составляла примерно  $8 \cdot 10^3$ . Указанный резонатор является одномодовым в том смысле, что он работает на низшем типе волн. Вывод энергии осуществлялся через интерференционные переключатели на основе прямоугольных волноводных тройников с коммутацией в боковом плече. Коммутация осуществлялась в смеси газообразного аргона с воздухом при атмосферном давлении после одновременной подачи на коммутаторы импульсов высокого напряжения от одного источника. Система питалась от магнетронного генератора с выходной импульсной мощностью порядка 50 кВт и длительностью импульсов около 1 мкс.

Схема экспериментальной установки приведена на рис. 1, где 1 — магнетронный генератор, 2 — ферритовый вентиль, 3 — фазовращатели, 4 — направленные ответвители, 5 — герметизирующие окна, 6 — резонаторы, 7 — интерференционные переключатели, 8 — коммутаторы, 9 — детекторные головки, 10 — нагрузка.

Входное окно первого резонатора подбиралось из условия максимума эффективности накопления энергии в этом резонаторе, а выходное таким, чтобы длительность его выходного импульса была по возможности минимальной. Диаметр входного окна резонатора второй ступени служил переменным

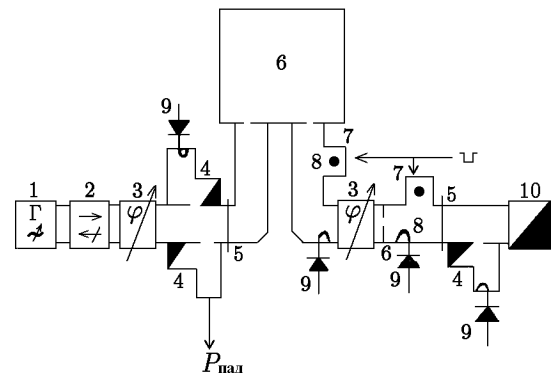


Рис. 1. Схема экспериментальной установки

параметром, оптимальное значение которого определялось экспериментально. При этом отслеживалась зависимость характера переходных процессов при передаче энергии от величины межрезонаторной связи при разной электрической длине волноводного тракта между резонаторами. Кроме того, отслеживалась зависимость амплитуды сигнала в резонаторе второй ступени от величины его входной связи. Настройка резонатора второй ступени на рабочую частоту осуществлялась путём подбора его длины такой, чтобы амплитуда поля в нём при передаче энергии была максимальной.

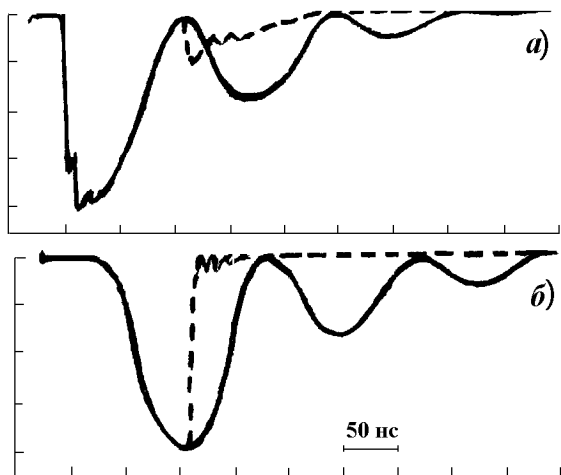


Рис. 2. Осциллограммы амплитуды поля в первом (а) и втором (б) резонаторах при передаче энергии в режиме биений без вывода энергии из второго резонатора (сплошные линии) и с выводом (штриховые линии)

На рис. 2 приведены типичные осциллограммы амплитуды поля в соединительном тракте (первом резонаторе) и во втором резонаторе при сильной связи между резонаторами и оптимальной настройке после включения процесса передачи энергии коммутатором первого компрессора (сплошные линии — без вывода энергии из второго резонатора, штриховые — с выводом). Под оптимальной настройкой понимается такая настройка, при которой в резонатор второй ступени передаётся максимум энергии, накопленной в первом резонаторе. Как видно из рис. 2, осциллограммы имеют характерный вид с биениями амплитуды поля. Период биений зависит от связи между резонаторами и в проведённых экспериментах изменяется от 300 нс при слабой связи до 50 нс при сильной. Максимум амплитуды биений достигался при связи, соответствовавшей периоду биений  $100 \div 150$  нс. При очень слабой и очень сильной связи биения отсутствуют, и процесс передачи энергии носит аperiодический характер. При передаче энергии без вывода последней из резонатора второй ступени колебания в системе

затухают с постоянной звучания в 2–3 раза меньшей, чем без передачи, что, очевидно, связано с появлением в момент передачи дополнительных потерь в системе (в коммутаторе первого резонатора).

Зависимость амплитуды поля во втором резонаторе от диаметра его входного окна представлена на рис. 3. Наличие максимума в зависимости связано с тем, что при очень слабой связи между резонаторами процесс передачи энергии неэффективен (аperiодический режим передачи энергии). Энергия в этом случае фактически остаётся в первом резонаторе, и амплитуда поля во втором резонаторе мала. По мере увеличения связи эффективность передачи растёт, и наступает момент, когда практически вся энергия первого резонатора (за вычетом потерь в его коммутаторе) передаётся во второй резонатор (периодический режим передачи энергии). Такой характер передачи имеет место в определённом диапазоне величины межрезонаторной связи. При очень сильной связи характер передачи опять меняется: эффект резонансного накопления энергии во втором резонаторе падает, и в нём наблюдается сигнал с амплитудой, близкой к амплитуде выходного сигнала первой ступени. Система начинает вести себя как единое целое: второй резонатор становится частью первого.

Отметим также, что биения с полной синусоидальной модуляцией отсутствуют в системе не только при слабой межрезонаторной связи, но и в случае сильной связи, когда имеет место существенное отличие частот резонаторов из-за ухода частоты резонатора первой ступени при выводе энергии. При незначительном отличии частот биения имеют место, но при этом период и глубина модуляции зависят от степени расстройки частот. Амплитуда поля в резонаторе второй ступени в этом случае существенно меньше максимальной.



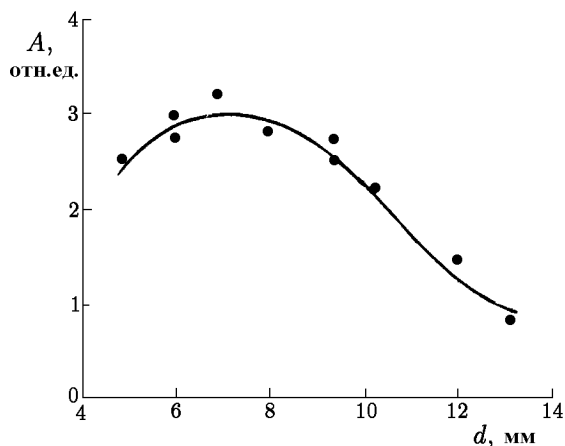


Рис. 3. Зависимость максимальной амплитуды  $A$  поля во втором резонаторе от диаметра  $d$  окна его входной связи

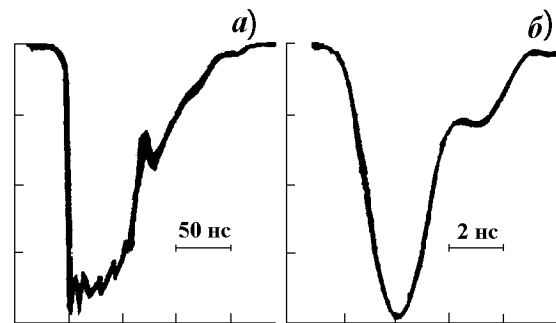


Рис. 4. Огибающие выходного сигнала первой ступени при согласованной нагрузке (а) и выходного сигнала системы связанных резонаторов (б)

Измеренный коэффициент усиления первой ступени при согласованной нагрузке равнялся 9 дБ при длительности выходного импульса 50 нс по уровню 0,5. Осциллограмма огибающей импульса на выходе резонатора первой ступени при согласованной нагрузке приведена на рис. 4а. Вторая ступень имела коэффициент усиления  $14 \div 15$  дБ при критической связи и  $12 \div 13$  дБ при оптимальной связи в системе связанных резонаторов. Коэффициент усиления при последовательной компрессии в системе связанных резонаторов равнялся приблизительно 18 дБ, а КПД составлял около 17 %. Длительность входного сигнала равнялась примерно 2,5 нс по уровню 0,5 и совпадала с расчётной. Пиковая мощность в импульсе достигала 3 МВт. Огибающая выходного сигнала системы представлена на рис. 4б. Превышение коэффициента усиления и КПД системы над коэффициентом усиления и КПД одиночного резонатора второй ступени составило приблизительно  $3 \div 4$  дБ (при возможном в 6 дБ). Причиной снижения коэффициента усиления и КПД системы являются потери в коммутаторах резонаторов при передаче и выводе энергии. Расчётный КПД системы равнялся приблизительно 56 %, а коэффициент усиления — 21 дБ.

Отметим также, что при работе с системой явно наблюдался эффект повышения электрической прочности резонатора второй ступени. Это проявлялось в том, что в случае работы резонатора второй ступени при критической связи непосредственно от магнетрона, когда его коэффициент усиления составлял  $14 \div 15$  дБ, в резонаторе наблюдались достаточно устойчивые СВЧ самопробои, тогда как при работе в системе связанных резонаторов с коэффициентом усиления около 18 дБ самопробои при адекватных (по заполняющей резонатор среде) условиях практически отсутствовали.

### 3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в работе показано, что последовательная компрессия СВЧ импульсов в цепочке связанных резонаторов со сверхразмерным резонатором в первой ступени более эффективна, чем в системе с произвольным соединением одномодовых резонаторов. Однако в любом случае при последовательной компрессии необходимо добиваться минимальных потерь в коммутаторах переключателей при передаче и выводе энергии.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Диденко А. Н., Новиков С. А., Разин С. В. и др. // ДАН СССР. 1991. Т. 321, № 3. С. 518.
2. Альтман Дж. Устройства СВЧ. — М.: Мир, 1968. — С. 488.
3. Бараев С. В., Коровин О. П. // ЖТФ. 1980. Т. 50, № 11. С. 2465.
4. Августинович В. А., Артёменко С. Н. // Изв. вузов. Радиофизика. 1993. Т. 36, № 9. С. 933.
5. Артёменко С. Н. // ЖТФ. 1996. Т. 66, № 10. С. 163.
6. Артёменко С. Н. // Изв. вузов. Радиофизика. 1987. Т. 30, № 10. С. 1289.
7. Иванников В. И., Черноусов Ю. Д., Шеболаев И. В. // ЖТФ. 1995. Т. 65, № 5. С. 194.

Научно-исследовательский  
институт ядерной физики при  
Томском политехническом  
университете,  
г. Томск, Россия

Поступила в редакцию  
26 мая 1998 г

## SUCCESSIVE COMPRESSION OF VHF PULSES IN THE COUPLED-RESONATOR SYSTEM

*S. N. Artemenko, V. A. Augustinovich, and Yu. G. Yushkov*

We present a brief analysis of systems for successive resonance compression of VHF pulses and the results of studying the resonance compression in a system of coupled resonators with the energy output via interference switches. In the 3-mm wavelength range, the power gain  $\sim 18$  dB was achieved experimentally for output pulses of a FWHM duration of about 2.5 ns, peak power  $\sim 3$  MW, and efficiency  $\sim 17\%$ . In this case, the two-stage compression system was used which comprised multi- and single-mode cavities were used at the first and second stages, respectively.

УДК 621.317.755

## ИНТЕГРАЛЬНЫЙ КРИТЕРИЙ УЗКОПОЛОСНОСТИ РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

В. Д. Захарченко

Предлагаются интегральные ограничения для оценки узкополосности в теории сигналов взамен локальных. Приводятся примеры, демонстрирующие преимущества предложенного критерия.

Электрические сигналы, используемые для передачи информации через пространство, обычно моделируются финитными функциями времени  $x(t)$ , спектр которых  $S_x(\omega)$  концентрируется в небольшой окрестности центральной частоты  $\omega_0$ . Это обусловлено неравномерностью частотных характеристик излучения антенных систем  $k(j\omega)$  и отражательной способности целей в радиолокации (см. рис. 1). Сигналы, спектр которых удовлетворяет условию  $\Delta\omega/\omega_0 \ll 1$ , называют узкополосными. В теоретической радиотехнике широко используется предложенная Д. Габором [1] математическая модель

$$x(t) = A(t) \cos[\omega_0 t + \Theta(t)] \quad (1)$$

— классический узкополосный сигнал, где  $A(t)$  и  $\Theta(t)$  — медленно изменяющиеся на масштабе  $1/\omega_0$  функции времени (амплитуда и фаза).

Для выполнения условия  $\Delta\omega \ll \omega_0$  в классической литературе [2] предлагаются локальные ограничения на  $A(t)$ ,  $\Theta(t)$  и  $\omega_0$ :

$$\begin{cases} \frac{1}{A} \left| \frac{dA}{dt} \right| \ll \frac{\omega_0}{2\pi}; \\ \left| \frac{d^2\Theta}{dt^2} \right| \ll \frac{\omega_0^2}{2\pi}, \end{cases} \quad (2)$$

которые, очевидно, невыполнимы во всех точках временной оси для многих используемых моделей радиосигналов (например для сигналов с амплитудной, частотной и фазовой манипуляцией).

Для формулировки интегрального критерия рассмотрим комплексную модель узкополосного сигнала  $x(t) = \dot{A}e^{j\omega_0 t}$ , где  $\dot{A}(t) = A(t)e^{j\Theta(t)}$  — комплексная огибающая, обладающую односторонним спектром, адекватным действительному сигналу при  $\omega > 0$ :

$$\dot{S}_x(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{A}(t) e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt = \dot{S}_A(\omega - \omega_0),$$

и оценим ширину его спектра, используя метод моментов [2]:

$$(\Delta\omega)^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} |S_A|^2 \omega^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} |S_A|^2 d\omega} \Rightarrow \frac{\|j\omega S_A\|^2}{\|S_A\|^2} = \frac{\|d\dot{A}/dt\|^2}{\|\dot{A}\|^2}, \quad (3)$$

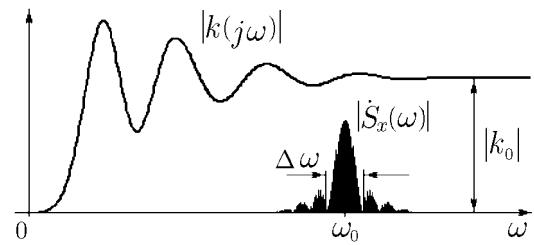


Рис. 1

где через  $\|f\|$  обозначены нормы соответствующих функций:

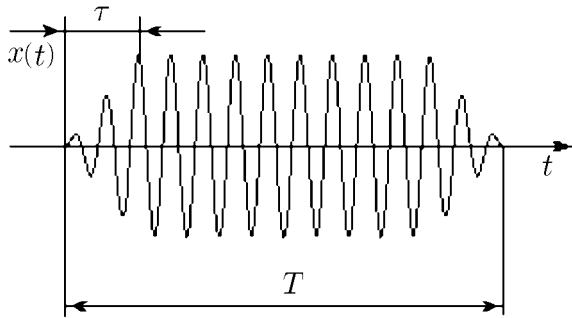


Рис. 2

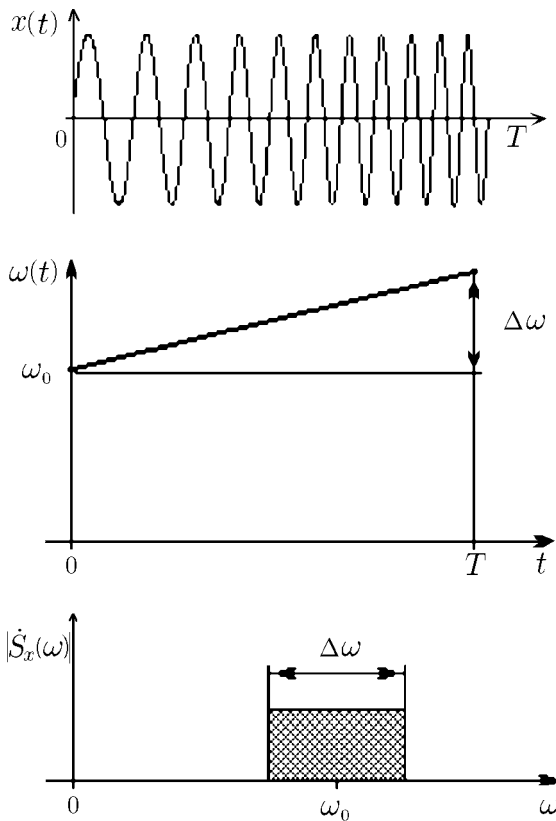


Рис. 3

$$\|f\| = \left[ \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \right]^{1/2}.$$

Оценка сверху норм в выражении (3) с учётом требования узкополосности  $\Delta\omega \ll \omega_0$  приводит к условию

$$\left\| \frac{dA}{dt} \right\| + \left\| A \frac{d\Theta}{dt} \right\| \ll \|A\| \omega_0. \quad (4)$$

Условие (4) лишено недостатков, присущих локальному критерию (2), поскольку в нём фигурируют не мгновенные значения  $A(t)$  и  $\Theta(t)$ , а усреднённые характеристики — нормы производных. Таким образом, это условие слабее, т. к. допускает отдельные (интегрируемые) скачки производных, без которых не обходятся модельные сигналы.

Отметим, что скорость изменения фазы участвует в расширении спектра только с амплитудным весом и узкополосность не нарушается, если в модели сигнала присутствуют участки с  $A \rightarrow 0$ ,  $d\Theta/dt \rightarrow \infty$ . Это позволяет снять ряд ограничений на финитность моделей частотной и фазовой модуляции при описании сложных сигналов.

Кроме того, критерий (4) весьма удобен для классификации видов модуляции радиосигнала (АМ или ЧМ, ФМ) по вкладу в левую часть неравенства (4).

**Пример 1.** Амплитудно-модулированный сигнал  $x(t) = A(t) \cos(\omega_0 t)$  (см. рис. 2.),  $T$  — длительность сигнала;  $\tau$  — длительность фронта ( $\tau \ll T$ ),

$$\frac{d\Theta}{dt} = 0, \quad \|A\|^2 = A_0^2 T, \quad \left\| \frac{dA}{dt} \right\|^2 = \frac{2A_0^2}{\tau}.$$

Заметим, что условие узкополосности  $\sqrt{2\tau/T}/\tau \ll \omega_0$ , полученное из (4), при большой длительности сигнала

значительно ослаблено по сравнению с условием (2)  $2\pi/\tau \ll \omega_0$ .

**Пример 2.** ЛЧМ сигнал с большой базой  $x(t) = A(t) \cos(\omega_0 t + \Delta\omega t^2/(2T))$  (см. рис. 3):  $\Delta\omega = 2\pi B/T$ ,  $T$  — длительность,  $B$  — база сигнала,

$$\frac{dA}{dt} = 0, \quad \|A\|^2 = A_0^2 T, \quad \left\| A \frac{d\Theta}{dt} \right\|^2 = A_0^2 (\Delta\omega)^2 \frac{T}{3}.$$

Амплитудный спектр сигнала асимптотически ( $B \gg 1$ ) имеет ширину  $\Delta\omega$ . Условие узкополосности в этом случае определяется непосредственно соотношением  $\Delta\omega \ll \omega_0$ . Применение критерия (4) приводит к достаточно близкому условию узкополосности  $\Delta\omega/\sqrt{3} \ll \omega_0$ , в то время как использование

критерия (2) приводит к неравенству  $\Delta\omega/\sqrt{B} \ll \omega_0$ , которое, очевидно, неверно для сигналов с большой базой ( $B > 100$ ), поскольку допускает девиацию частоты  $\Delta\omega$  ЛЧМ сигнала (и, соответственно, занимаемой полосы частот) соизмеримую и превышающую несущую частоту  $\omega_0$ , что противоречит условию узкополосности.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Gabor D. // J. IEE., Pt. III. 1946. V. 93. P. 429.
2. Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы. — М.: Сов. радио, 1986.

Волгоградский госуниверситет,  
г. Волгоград, Россия

Поступила в редакцию  
26 июля 1999 г.

#### AN INTEGRAL CRITERION OF THE NARROW-BANDEDNESS OF RADIOTECHNICAL SIGNALS

*V. D. Zakharchenko*

We propose integral, instead of local constraints for estimation of signal narrow-bandedness in the theory of signals. The examples presented demonstrate the advantages of the proposed criterion.

УДК 537.86:519.2

## ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО ОБНАРУЖЕНИЯ КВАЗИДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ РАДИОСИГНАЛОВ

*В. И. Костылев*

Определено распределение решающей статистики энергетического обнаружителя в случае приёма аддитивной смеси гауссовских квазидетерминированного сигнала и белого шума. Получены точные и приближённое выражения для вероятности правильного обнаружения.

Обнаружение радиосигналов на фоне шума является одной из важных задач статистической радиопрозрачности. Типовой обнаружитель состоит из каскадно соединённых приёмника и порогового устройства. Структура приёмника определяется имеющейся априорной информацией об обнаруживаемом сигнале и шуме: например, при обнаружении в белом шуме детерминированного сигнала известной формы оптимальным является корреляционный приёмник. Для обнаружения неизвестного детерминированного сигнала, когда оптимальный приёмник реализован быть не может, в [1] предложено использовать энергетический приёмник. В [1, 2] показано, что выходной сигнал энергетического приёмника имеет  $\chi^2$ -распределение, причём если на входе приёмника присутствует обнаруживаемый детерминированный сигнал, то это распределение нецентральное.

В теории радиофизических систем наряду с моделью детерминированного сигнала широко распространена модель квазидетерминированного сигнала

$$s(t) = \operatorname{Re} [AU(t) \exp[j(2\pi f_0 t + \varphi)]], \quad (1)$$

где  $A$  — случайная релеевская амплитуда,  $U(t)$  — нормированная детерминированная комплексная огибающая,  $f_0$  — несущая частота,  $\varphi$  — случайная равномерно распределённая начальная фаза. Оптимальным приёмником при обнаружении сигнала (1) на фоне белого шума является квадратурный корреляционный приёмник. Если же  $U(t)$  неизвестна и оптимальный приёмник реализован быть не может, то для обнаружения сигнала (1), как и для обнаружения детерминированного неизвестного сигнала [1], может быть использован энергетический приёмник. При этом распределение решающей статистики — выходного сигнала энергетического приёмника — может отличаться от  $\chi^2$ -распределения.

Цель статьи — определить характеристики энергетического обнаружения квазидетерминированного радиосигнала на фоне белого гауссовского шума.

Как и в классической работе [1], будем полагать, что несущая частота  $f_0$  и ширина спектра  $\Delta f$  обнаруживаемого сигнала и спектральная плотность мощности  $N_0$  шума известны. Обрабатываемый гауссовский сигнал

$$x(t) = \iota s(t) + n(t), \quad (2)$$

где  $\iota = 0; 1$ , представляет собой по гипотезе  $H_1$  смесь обнаруживаемого квазидетерминированного сигнала (1) и белого шума  $n(t)$ , а по гипотезе  $H_0$  — только белый шум  $n(t)$ . Входящий в (2) априори неизвестный бинарный параметр  $\iota$  способен принимать значения 0 или 1, совпадающие с индексом гипотезы.

Как и в [1, 2], будем полагать, что с целью ограничения средней мощности шума обрабатываемый сигнал (2) предварительно пропускается через полосовой фильтр с идеальной амплитудно-частотной

характеристикой

$$H(f) = \begin{cases} 2/\sqrt{N_0}, & |f - f_0| \leq \Delta f/2; \\ 0, & |f - f_0| > \Delta f/2. \end{cases} \quad (3)$$

С выхода фильтра на вход энергетического приёмника поступает узкополосный сигнал

$$y(t) = \text{Re}[Y(t) \exp(j2\pi f_0 t)], \quad (4)$$

где

$$Y(t) = \iota \frac{2A}{\sqrt{N_0}} U(t) \exp(j\varphi) + N(t) \quad (5)$$

— комплексная огибающая сигнала  $y(t)$ ,  $N(t)$  — комплексная огибающая гауссовского шума на выходе фильтра. Нетрудно убедиться, что  $\overline{N(t)} = 0$  и

$$\overline{N(t)N^*(t - \tau)} = 4 \frac{\sin(\pi \Delta f \tau)}{\pi \tau}, \quad (6)$$

где чертой сверху обозначено усреднение по ансамблю реализаций.

Назначение энергетического приёмника — сформировать на своём выходе напряжение (решающую статистику), равное энергии

$$E = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |Y(t)|^2 dt = \frac{1}{2 \Delta f} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |Y(m/\Delta f)|^2 \quad (7)$$

обрабатываемой реализации входного сигнала  $y(t)$ . Однако, поскольку бесконечно продолжительная обработка сигнала  $y(t)$  невозможна, на практике энергетический приёмник формирует решающую статистику  $\Xi$ , равную аппроксимации энергии (7) вида

$$E_1 = \frac{1}{2} \int_0^T |Y(t)|^2 dt \quad (8)$$

или

$$E_2 = \frac{1}{2 \Delta f} \sum_{m=0}^{T \Delta f} |Y(m/\Delta f)|^2, \quad (9)$$

где  $T$  — длительность обработки сигнала  $y(t)$  в энергетическом приёмнике, которую всегда можно выбрать такой, чтобы произведение  $T \Delta f$  было целым числом. Отметим, что хотя при конечном  $T$  величины  $E$ ,  $E_1$  и  $E_2$ , вообще говоря, различаются между собой, однако разница между ними нивелируется при  $T \rightarrow \infty$ .

Величины  $E_1$  и  $E_2$  суть две различные аппроксимации энергии  $E$  реализации сигнала  $y(t)$ , и каждая из них имеет самостоятельное значение. В большинстве теоретических работ при расчёте характеристик обнаружения явно или неявно предполагалось, что выходной сигнал энергетического приёмника совпадает с  $E_2$ ,\* т. е.

$$\Xi = \sum_{m=1}^M |Y_m|^2, \quad (10)$$

\*Только в этом случае по гипотезе  $H_0$  решающая статистика  $\Xi$  имеет в точности  $\chi^2$ -распределение.

где  $M = T \Delta f + 1$ ,  $Y_m = Y((m-1)/\Delta f)/\sqrt{2\Delta f}$  — комплексные гауссовские случайные величины, имеющие нулевые средние значения и корреляционную матрицу

$$\mathbf{K} = 2(\iota\mathbf{R} + \mathbf{I}) \quad (11)$$

размера  $M \times M$ ,  $\mathbf{R}$  — квадратная матрица размера  $M \times M$  с элементами

$$R_{lm} = \frac{\overline{A^2}}{N_0 \Delta f} U\left(\frac{l-1}{\Delta f}\right) U^*\left(\frac{m-1}{\Delta f}\right), \quad (12)$$

$m = 1, 2, \dots, M$ ,  $l = 1, 2, \dots, M$ ,  $\mathbf{I}$  — единичная матрица размера  $M \times M$ .

Характеристическую функцию  $\Theta(j\eta|H_l)$  суммы, стоящей в правой части (10), можно представить в виде

$$\Theta(j\eta|H_l) = \exp\left\{\int_0^{j\eta} \text{Tr} \mathbf{G}(\varepsilon) d\varepsilon\right\}, \quad (13)$$

где  $\text{Tr}$  означает след матрицы, а  $\mathbf{G}(\varepsilon)$  — квадратная матрица размера  $M \times M$ , определяемая матричным уравнением

$$\mathbf{G}(\varepsilon) - \varepsilon\mathbf{G}(\varepsilon)\mathbf{K} = \mathbf{K}. \quad (14)$$

Формулы, аналогичные (13) и (14), но не использующие матричную символику, выведены в [3].

Будем искать решение уравнения (14) в виде

$$\mathbf{G}(\varepsilon) = 2\mu[\mathbf{g}(\varepsilon) + \mathbf{I}], \quad (15)$$

структурно подобном (11), где  $\mu$  — неизвестный параметр,  $\mathbf{g}(\varepsilon)$  — неизвестная матрица размера  $M \times M$ . Подставляя (15) и (11) в (14), нетрудно определить неизвестный параметр

$$\mu = \frac{1}{1 - 2\varepsilon} \quad (16)$$

и получить матричное уравнение относительно  $\mathbf{g}(\varepsilon)$  в виде

$$(1 - 2\varepsilon)\mathbf{g}(\varepsilon) - 2\varepsilon\mathbf{g}(\varepsilon)\mathbf{R} = \iota\mathbf{R}. \quad (17)$$

Учитывая (12) и решая (17), можно получить формулу для элементов матрицы  $\mathbf{g}(\varepsilon)$  в виде

$$g_{lm}(\varepsilon) = \iota \frac{\overline{A^2} U\left(\frac{l-1}{\Delta f}\right) U^*\left(\frac{m-1}{\Delta f}\right)}{N_0 \Delta f [1 - 2\varepsilon(\iota Q + 1)]}, \quad (18)$$

где  $m = 1, 2, \dots, M$ ,  $l = 1, 2, \dots, M$ ,

$$Q = \alpha q \quad (19)$$

— эффективное отношение сигнал—шум,

$$\alpha = \frac{\sum_{m=0}^{T\Delta f} |U(m/\Delta f)|^2}{\sum_{i=-\infty}^{+\infty} |U(i/\Delta f)|^2} \quad (20)$$

— коэффициент использования энергии обнаруживаемого сигнала (1),

$$q = \frac{2}{N_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{s^2(t)} dt = \frac{\overline{A^2}}{N_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{|U(t)|^2} dt \quad (21)$$



— входное отношение сигнал—шум, равное удвоенному отношению средней энергии обнаруживаемого сигнала  $s(t)$  к спектральной плотности мощности шума  $n(t)$ .

В соответствии с (19), при заданном отношении сигнал—шум  $q$  эффективное отношение сигнал—шум  $Q$  существенно зависит от коэффициента использования энергии  $\alpha$ . Из определения (20) нетрудно убедиться, что значения  $\alpha$  лежат в интервале  $]0,1[$ . Правая граница указанного интервала достигается, например, если

$$U(t) = \frac{\sin[\pi(t-t_0)\Delta f]}{\pi(t-t_0)\Delta f}, \quad (22)$$

где временной сдвиг  $t_0$  сигнала способен принимать только дискретные значения  $0; 1/\Delta f; 2/\Delta f; \dots; T$ . Как нетрудно убедиться, обнаруживаемый сигнал  $s(t)$  имеет в этом случае равномерный амплитудно-частотный спектр и в этом смысле согласован с входным полосовым фильтром (см. (3)).

Из (18), (16) и (15) несложно получить формулу для элементов матрицы  $\mathbf{G}(\varepsilon)$  в виде

$$G_{lm}(\varepsilon) = \frac{2}{1-2\varepsilon} \left\{ \frac{A^2 U\left(\frac{l-1}{\Delta f}\right) U^*\left(\frac{m-1}{\Delta f}\right)}{N_0 \Delta f [1-2\varepsilon(\iota Q+1)]} + \delta_{lm} \right\}, \quad (23)$$

где  $m = 1, 2, \dots, M, l = 1, 2, \dots, M, \delta_{lm}$  — символ Кронекера. Отсюда

$$\text{Tr } \mathbf{G}(\varepsilon) = \sum_{m=1}^M G_{mm}(\varepsilon) = \frac{2}{1-2\varepsilon} \left[ \frac{\iota Q}{1-2\varepsilon(\iota Q+1)} + M \right]. \quad (24)$$

Правую часть (24) удобно представить в виде суммы простых дробей:

$$\text{Tr } \mathbf{G}(\varepsilon) = 2 \left[ \frac{\iota Q + 1}{1-2\varepsilon(\iota Q+1)} + \frac{T \Delta f}{1-2\varepsilon} \right], \quad (25)$$

что облегчает последующее интегрирование.

Подставляя (25) в (13), интегрируя и потенцируя, получим

$$\Theta(j\eta|H_l) = \begin{cases} [1-2j\eta(Q+1)]^{-1} (1-2j\eta)^{-T \Delta f}, & H_1; \\ (1-2j\eta)^{-T \Delta f-1}, & H_0. \end{cases} \quad (26)$$

Из (26) следует, что в случае энергетического обнаружения квазидетерминированного сигнала с релейской амплитудой и равномерно распределённой начальной фазой на фоне белого гауссовского шума решающая статистика имеет вид

$$\Xi = \begin{cases} e_{2(Q+1)} + \chi_{2T \Delta f}^2, & H_1; \\ \chi_{2(T \Delta f+1)}^2, & H_0, \end{cases} \quad (27)$$

где  $e_a$  — случайная величина, имеющая экспоненциальное (показательное) распределение с параметром  $a$ ,  $\chi_\nu^2$  — случайная величина, имеющая  $\chi^2$ -распределение с  $\nu$  степенями свободы. Таким образом, по гипотезе  $H_1$  решающая статистика распределена как сумма двух независимых случайных величин: экспоненциальной с параметром  $2(Q+1)$  и  $\chi^2$ -распределённой с  $2T \Delta f$  степенями свободы.

Представляя правую часть (26) в виде суммы простых дробей, можно получить

$$\Theta(j\eta|H_1) = \sum_{l=1}^2 \sum_{m=1}^{k_l} \alpha_{lm} \theta_\gamma(j\eta; \lambda_l, m), \quad (28)$$

где \*

$$\lambda_1 = 2(Q + 1), \quad \lambda_2 = 2; \quad k_1 = 1, \quad k_2 = T \Delta f; \quad (29)$$

$$\alpha_{11} = \left(\frac{Q+1}{Q}\right)^{T \Delta f}, \quad \alpha_{2m} = -\frac{1}{Q} \left(\frac{Q+1}{Q}\right)^{T \Delta f - m}, \quad m = 1, 2, \dots, T \Delta f; \\ \theta_\gamma(j\eta; a, b) = (1 - j\eta a)^{-b} \quad (30)$$

— характеристическая функция гамма-распределения с параметрами  $a$  и  $b$ . Таким образом, решающая статистика  $\Xi$  по гипотезе  $H_1$  имеет распределение, относящееся к классу гипергамма-распределений [4].

Как из (26), так и из (27) следует, что плотность вероятности решающей статистики  $\Xi$  можно найти как свёртку экспоненциальной

$$w_e(x; a) = 1(x) \frac{\exp(-x/a)}{a} \quad (31)$$

и  $\chi^2$ -распределённой

$$w_{\chi^2}(x; \nu) = 1(x) \frac{x^{\nu/2-1} \exp(-x/2)}{2^{\nu/2} \Gamma(\nu/2)} \quad (32)$$

плотностей вероятности. Здесь

$$1(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

— единичная ступенчатая функция,  $\Gamma(x)$  — гамма-функция [5],  $a$  — параметр экспоненциального распределения,  $\nu$  — число степеней свободы  $\chi^2$ -распределения. После несложных, но громоздких преобразований можно получить плотность вероятности решающей статистики (27) в виде

$$W(x|H_i) = \begin{cases} \frac{(Q+1)^{T \Delta f - 1}}{Q^{T \Delta f}} w_e(x; 2(Q+1)) P\left(T \Delta f, \frac{Qx}{2(Q+1)}\right), & H_1; \\ w_{\chi^2}(x; 2(T \Delta f + 1)), & H_0, \end{cases} \quad (33)$$

где  $P(a, b) = \gamma(a, b)/\Gamma(a)$  — нормированная неполная гамма-функция,  $\gamma(a, b)$  — неполная гамма-функция [5].

В пороговом устройстве решающая статистика  $\Xi$  сравнивается с некоторым уровнем  $h$ . Если  $\Xi \geq h$ , то выносится решение в пользу гипотезы  $H_1$ , в противном случае ( $\Xi < h$ ) — в пользу гипотезы  $H_0$ . Вероятности правильного обнаружения  $D = \Pr\{\Xi \geq h|H_1\}$  и ложной тревоги (ошибки первого рода)  $F = \Pr\{\Xi \geq h|H_0\}$  характеризуют эффективность работы обнаружителя. Интегрируя  $W(x|H_i)$  в пределах от  $h$  до  $\infty$  можно получить

$$D = 1 - P(T \Delta f, h/2) + \left(\frac{Q+1}{Q}\right)^{T \Delta f} \exp\left[-\frac{h}{2(Q+1)}\right] P\left(T \Delta f, \frac{Qh}{2(Q+1)}\right), \quad (34)$$

$$F = \Gamma(T \Delta f + 1, h/2)/\Gamma(T \Delta f + 1), \quad (35)$$

где  $\Gamma(a, b) = \Gamma(a) - \gamma(a, b)$  — дополнительная неполная гамма-функция [5]. С точностью до обозначений (35) совпадает с формулой вероятности ложной тревоги энергетического обнаружителя, приведённой в [6].

---

\*Параметры  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  равны собственным числам матрицы  $\mathbf{K}_{l=1}$ , а параметры  $k_1$  и  $k_2$  — кратностям собственных чисел  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ .

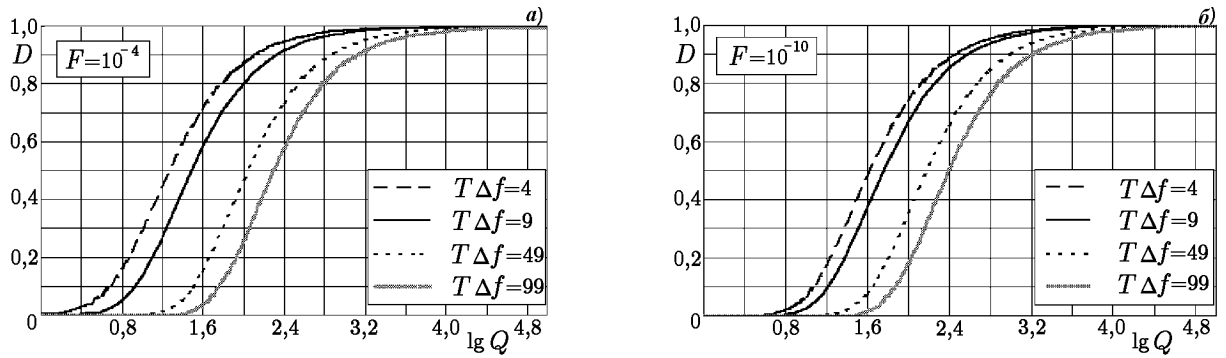


Рис. 1

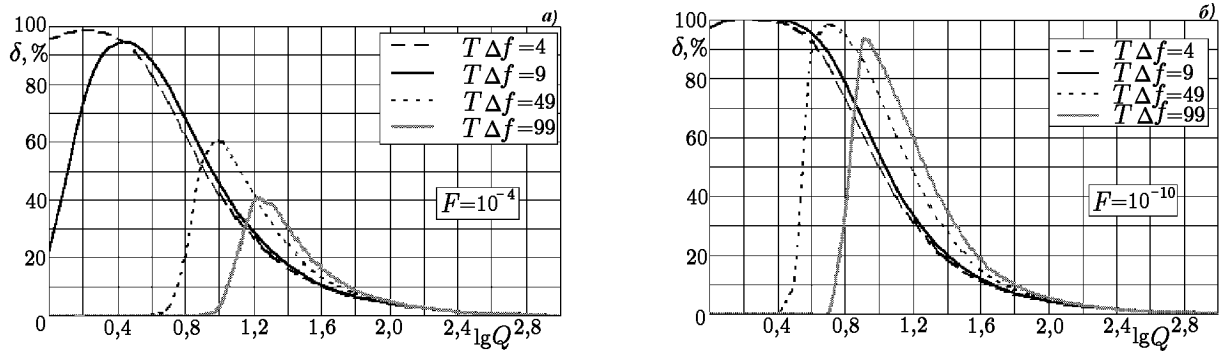


Рис. 2

Обозначим через  $L(\alpha, \beta)$  функцию, обратную по второму параметру к нормированной дополнительной неполной гамма-функции  $\Gamma(\alpha, b)/\Gamma(\alpha)$ , т. е.  $\Gamma(\alpha, L(\alpha, \beta))/\Gamma(\alpha) = \beta$ . Тогда из (35) следует

$$h = 2L(T \Delta f + 1, F). \tag{36}$$

В [7] приведены таблицы, фактически являющиеся таблицами функции  $L(\alpha, \beta)$  и позволяющие определять пороговый уровень  $h$ , необходимый для обеспечения заданной вероятности ложной тревоги  $F$  энергетического обнаружителя.

Дважды воспользовавшись формулой [5]

$$\gamma(a + 1, z) = a\gamma(a, z) - z^a \exp(-z) \tag{37}$$

и учитывая (35) и (36), выражение (34) можно преобразовать к виду

$$D = F + \left(\frac{Q + 1}{Q}\right)^{T \Delta f} \exp\left[-\frac{L(T \Delta f + 1, F)}{Q + 1}\right] P\left(T \Delta f + 1, \frac{QL(T \Delta f + 1, F)}{Q + 1}\right). \tag{38}$$

Формула (38) определяет зависимость вероятности правильного обнаружения от вероятности ложной тревоги. Такую зависимость принято называть характеристикой обнаружения.

На рис. 1 приведены графики зависимости вероятности правильного обнаружения  $D$  от эффективного отношения сигнал—шум  $Q$ , рассчитанные по формуле (38) для нескольких значений произведения  $T \Delta f$ ; рис. 1а соответствует случаю  $F = 10^{-4}$ , а рис. 1б — случаю  $F = 10^{-10}$ . Как видно из хода кривых, представляющие практический интерес значения вероятности правильного обнаружения достигаются при  $Q \gg 1$ . Учитывая это, выражение (38) можно упростить:

$$D \approx F + (1 - F) \exp\left[-\frac{L(T \Delta f + 1, F)}{Q}\right], \quad Q \gg 1. \tag{39}$$

На рис. 2 показана относительная погрешность  $\delta$  формулы (39) в зависимости от параметра  $Q$  для тех же значений  $T \Delta f$  и  $F$ , что и на рис. 1.

Таким образом, если на входе энергетического обнаружителя присутствует квазидетерминированный сигнал со случайной релейской амплитудой и равномерно распределённой начальной фазой в аддитивной смеси с белым гауссовским шумом, то решающая статистика имеет гипергамма-распределение с параметрами (29). Вероятность правильного обнаружения зависит от трёх параметров — вероятности ложной тревоги, эффективного отношения сигнал—шум и произведения длительности обработки на ширину спектра обнаруживаемого сигнала — и может быть рассчитана по формуле (38), а при достаточно большом эффективном отношении сигнал—шум — по более простой формуле (39).

При фиксированных значениях указанных трёх параметров максимальная на множестве квазидетерминированных сигналов с релейской амплитудой и равномерно распределённой начальной фазой вероятность правильного обнаружения достигается для сигнала, максимум которого приходится на начало или конец интервала времени обработки, а амплитудно-частотный спектр равномерен в пределах известной полосы частот. Отличие формы огибающей обнаруживаемого сигнала от (22) эквивалентно потерям в отношении сигнал—шум.

#### REFERENCES

1. Urkowitz H. // Proc. IEEE. 1967. V. 55, P. 523.
2. Park K. Y. // IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems. 1978. V. AES-14, № 2. P. 237.
3. Бакут П. А., Большаков И. А., Герасимов Б. М. и др. // Вопросы статистической теории радиолокации. Т. 1. / Под ред. Г. П. Тартаковского. — М.: Сов. радио, 1963.
4. Костылев В. И. // Вест. ВГУ. Сер. физика, математика. 2000. Вып. 1. С. 34.
5. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. — М.: Наука, 1979. — С. 80.
6. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Т. 2. — М.: Сов. радио, 1975.
7. Амиантов И. Н. Избранные вопросы статистической теории связи. — М.: Сов. радио, 1971.

Воронежский госуниверситет,  
г. Воронеж, Россия

Поступила в редакцию  
24 августа 1999 г.

#### CHARACTERISTICS OF ENERGY DETECTION OF QUASI-DETERMINISTIC SIGNALS

*V. I. Kostylev*

We determine the distribution of the output statistics of an energy detector in the case where a superposition of a Gaussian quasi-deterministic signal and a white noise is received. The rigorous and approximate formulas for the true-detection probability are found.