МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Известия высших учебных заведений

РАДИОФИЗИКА

ежемесячный научно-технический журнал

Издается с апреля 1958 г.

Том XLIII № 1 Нижний Новгород 2000

Содержание

УДК 550.388.2

МНОГОКРАТНОЕ УСКОРЕНИЕ ЭЛЕКТРОНОВ ИОНОСФЕРНОЙ ПЛАЗМЫ В ПРИБЛИЖЕНИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ПОТЕРЬ ЭНЕРГИИ ПРИ СОУДАРЕНИЯХ

В. В. Васьков

Процесс многократного ускорения электронов ионосферной плазмы в активных экспериментах связан с возвратом ускоренных частиц в узкую зону плазменной турбулентности, возбуждаемой мощной радиоволной, в результате упругих столкновений с нейтральными частицами. Этот эффект зависит от величины и характера энергетических потерь ускоренных электронов при столкновениях с другими частицами плазмы. В работе сформулирована система уравнений, позволяющая описать процесс многократного ускорения в приближении непрерывных потерь энергии с учётом столкновений ускоренных частиц с тепловыми электронами. Эти столкновения становятся определяющими в области малых энергий, в которой происходит первичное ускорение электронов невозмущённой ионосферной плазмы. Найдены асимптотические решения полученной системы уравнений в модельном случае степенной зависимости частоты соударений от энергии электрона. Полученные решения позволяют заключить, что эффект многократного ускорения электронов в F-слое ионосферы может приводить к образованию медленно убывающего хвоста у функции распределения ускоренных частиц в области больших энергий (порядка нескольких десятков эВ).

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что в области отражения мощной радиоволны от слабонеоднородной ионосферы происходит интенсивное возбуждение высокочастотных колебаний плазмы, которое сопровождается ускорением электронов. Ускоренные электроны вызывают наблюдаемые в экспериментах эффекты искусственного свечения [1, 2] и дополнительной ионизации [3, 4] ионосферной плазмы, а также приводят к усилению плазменных шумов в области максимума ионосферного слоя F_2 [5, 6]. Высокоэнергичные электроны, ускоренные до энергий порядка 25 эВ, зарегистрированы в ракетных экспериментах [7]. Возбуждение волн и ускорение электронов происходят в узком слое, расположенном в окрестности плазменного резонанса $\omega_{\mathrm{pe}} = \omega_0$, совпадающего с уровнем отражения обыкновенной радиоволны, либо вблизи уровня ее верхнегибридного резонанса $\omega_{\mathrm{pe}}^2 = \omega_0^2 - \omega_{B\mathrm{e}}^2$, где $\omega_{\mathrm{pe}} = \sqrt{4\pi e^2 N/m_{\mathrm{e}}}$ — плазменная частота электронов, зависящая от их концентрации N, ω_0 — частота радиоволны, $\omega_{B\mathrm{e}} = eB/(m_{\mathrm{e}}c)$ — гирочастота электронов в геомагнитном поле $\mathbf{B}$, e и m_{e} — соответственно элементарный заряд и масса электрона, c — скорость света.

Толщина турбулентного слоя плазмы, как правило, оказывается меньше длины свободного пробега ускоренных частиц. Поэтому процесс ускорения электронов внутри слоя носит бесстолкновительный характер. Пересекая ускоряющий слой, электрон набирает энергию и продолжает двигаться дальше. Важно, однако, что под влиянием упругих соударений с нейтральными частицами плазмы (частота таких соударений значительно превышает частоту неупругих соударений) электрон изменяет направление своего движения и приобретает возможность вновь пересечь ускоряющий слой. В результате процесс ускорения электронов становится многократным, что существенно увеличивает набираемую ими энергию. Эффект многократного ускорения электронов в экспериментах по воздействию мощным радиоизлучением на F-слой ионосферы исследовался в работах [8–10]. В работе [8] и в основной части работы [9] рассмотрен случай одномерной плазменной турбулентности, в которой электрическое поле плазменных колебаний направлено (поляризовано) ортогонально к слою. Влияние магнитного поля Земли на движение электронов не учитывалось. Такой случай может реализоваться вблизи уровня отражения мощной радиоволны $\omega_{\rm pe} = \omega_0$ в начальный период воздействия. По мере развития вытянутых вдоль магнитного поля мелкомасштабных неоднородностей искусственного происхождения область возбуждения плазменной турбулентности перемещается в окрестность верхнегибридного резонанса (ВГР) мощной радиоволны. Коротковолновые плазменные колебания образуются здесь в результате рассеяния радиоволны на вытянутых вдоль магнитного поля искусственных неоднородностях. Эти колебания поляризованы почти ортогонально геомагнитному полю и поэтому приводят к ускорению электронов в ортогональном полю $\mathbf{B}$ направлении. Соответствующие изменения в общих уравнениях, необходимые для описания многократного ускорения электронов в области ВГР, изложены в Приложении [9].

Ускорение электронов в турбулентном слое плазмы описывается в рамках квазилинейной теории, учитывающей процесс диффузии электронов в пространстве скоростей в результате резонансного взаимодействия с плазменными колебаниями. В Приложении [9] использовалось упрощенное выражение для квазилинейного коэффициента диффузии, соответствующее изотропной плазме. Такое упрощение может служить хорошим приближением в высокочастотном случае $\omega_0 \gg \omega_{B\rm e}$ вдали от электронных гирогармоник, когда влиянием слабого магнитного поля на взаимодействие плазменных волн с резонансными частицами можно пренебречь. Строгое выражение для коэффициента квазилинейной диффузии электронов в замагниченной плазме использовалось в [10] при анализе экспериментов [3] по дополнительной ионизации ионосферы в окрестности кратных электронных гирогармоник $\omega_0 \simeq n\omega_{B\rm e}$ (последний случай рассматривался также в [11]).

Другой механизм ускорения электронов ионосферной плазмы был предложен в [12, 13]. Этот механизм связан с турбулентным удержанием электронов в области ускорения в результате рассеяния на плазменных волнах в случае трехмерного распределения последних в пространстве волновых векторов. Предполагается, что изотропизация спектра происходит в результате различных нелинейных процессов на развитой стадии ионосферных возмущений. В [12, 13] рассмотрен наиболее простой случай изотропного спектра при постоянном значении волнового числа плазменных колебаний. Развитию и обобщению этого подхода посвящены работы [14, 15].

В данной статье мы будем следовать идеологии работ [8, 9], поскольку согласно [16] в окрестности электронных гирогармоник перекачка плазменных волн по спектру волновых чисел не меняет ортогональную магнитному полю поляризацию этих волн и не препятствует свободному разлету ускоренных электронов вдоль геомагнитного поля. Недостаток сформулированного в [8–10] подхода связан с использованием приближения полных потерь энергии при описании неупругих соударений ускоренных электронов с нейтральными частицами плазмы (в этом приближении предполагается, что при каждом неупругом столкновении электрон практически полностью теряет свою энергию). Согласно [17] более адекватным является приближение непрерывных потерь энергии, позволяющее описать стокновения ускоренных частиц с тепловыми электронами плазмы. Взаимодействие с ними оказывается особенно важным в области малых (близких к тепловой) энергий, в которой начинается процесс ускорения электронов фоновой плазмы. В настоящей работе сформулированы уравнения, описывающие многократное ускорение электронов в области ВГР мощной радиоволны в приближении непрерывных энергетических потерь. Получены частные решения этих уравнений при степенном изменении частоты упругих и неупругих столкновений ускоренных частиц в зависимости от их энергии.

1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Сформулируем основные уравнения, описывающие процесс многократного ускорения электронов в слабонеоднородной по вертикали z ионосфере. Координату z будем отсчитывать от уровня верхнегибридного резонанса $\omega_{\mathrm{pe}}^2 = \omega_0^2 - \omega_{B\mathrm{e}}^2$ мощной радиоволны, в окрестности которого возбуждаются плазменные волны. Эффект многократного ускорения возникает в условиях, когда направление скорости электронов $\mathbf{v}$ в результате столкновений с нейтральными частицами изменяется значительно быстрее, чем их энергия $\epsilon = mv^2/2$:

$$\delta = 1/\left(\nu\,\Delta t_\epsilon\right) \ll 1, \tag{1}$$

где ν — эффективная частота передачи импульса при упругих соударениях ускоренных электронов с другими частицами плазмы, Δt_ϵ — характерное время изменения энергии электронов. Условие (1) хорошо выполняется в слабоионизированной ионосферной плазме в области достаточно больших энергий $\epsilon \gtrsim 1$ эВ (см. ниже (26) и рис. 1). В рассматриваемом случае функция распределения ускоренных электронов $F(\mathbf{v})$ быстро изотропизуется по направлению скорости.* Поэтому на расстоянии $|z| > v/\nu$ от ускоряющего слоя ее можно представить в виде суммы основной сферически-симметричной части $F_0(\epsilon)$ и малой добавки $\mathbf{F}_1\mathbf{v}/v$, описывающей потоки частиц [18]:

$$F(\mathbf{v}) = F_0(\epsilon) + \frac{\mathbf{v}}{v}\mathbf{F}_1(\epsilon), \qquad F_1 \sim \sqrt{\delta}\,F_0. \tag{2}$$

Распространение и релаксация электронов, ускоренных в узком слое турбулентной плазмы, описывается в этом случае уравнениями (см. [8] и Приложение [9])

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_0}{\partial t} + \frac{v}{3}\frac{\partial F_{1z}}{\partial z} &= S_0(F_0) + Q(\epsilon)\delta(z), \\ F_{1z} &= -\frac{v}{\nu}\cos^2\alpha\frac{\partial F_0}{\partial z}\,, \end{aligned} \tag{3}$$

где α — угол между магнитным полем $\mathbf{B}$ и вертикалью z ($\sin\alpha \gg \nu/\omega_{B\mathrm{e}}$), $S_0(F_0)$ — интеграл столкновений для изотропной функции распределения, приведенный ниже (см. (23)), $\delta(z)$ — дельта-функция Дирака, $Q(\epsilon)$ — источник ускоренных электронов, образующихся в узком слое турбулентной плазмы в плоскости $z = 0$. Величина $Q(\epsilon)$ по смыслу определения равна нормированному на 4π потоку ускоренных электронов, образующихся в указанном слое:

$$Q\left(\epsilon\right) = \frac{1}{4\pi}\int \Delta F(\mathbf{v}) v_z\,\mathrm{d}\Omega, \tag{4}$$

где ΔF — изменение функции распределения $F(\mathbf{v})$ при переходе через ускоряющий слой в направлении положительных z, v_z — проекция скорости на ось z, ортогональную к слою. Интегрирование производится по направлениям скорости $\mathbf{v}$.

Возмущение ΔF функции распределения в ускоряющем слое определяется с помощью квазилинейной теории [19] из уравнения переноса для полной функции распределения электронов $f(v_\parallel, v_\perp)$, в котором учитывается диффузия электронов в пространстве скоростей в результате резонансного взаимодействия с плазменными волнами. В дрейфовом приближении это уравнение принимает вид [10]

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_\parallel\frac{\partial f}{\partial r_\parallel} = \frac{\partial}{\partial \epsilon_\perp}\left(D_\perp(v_\parallel, v_\perp, z)\frac{\partial f}{\partial \epsilon_\perp}\right), \tag{5}$$

* Изотропизация распределения ускоренных электронов по направлению скорости может нарушаться на больших высотах, где столкновения с нейтральными частицами малы и поток ускоренных электронов легко проникает в плазмосферу (см. ниже формулу (27) и ее обсуждение). Случай сильно анизотропного распределения частиц при ускорении электронов поперек магнитного поля рассматривается в [14, 15].

где $\epsilon_\perp = mv_\perp^2/2$. Индексами $\|$, $\perp$ здесь и далее помечены соответственно параллельная и ортогональная магнитному полю $\mathbf{B}$ компоненты соответствующих векторов (в частности координата $r_\|$ отсчитывается вдоль поля $\mathbf{B}$), $D_\perp$ — коэффициент поперечной диффузии электронов [19] (см. ниже (10), (17)). Принято, что ускорение электронов происходит в узком слое турбулентной плазмы толщины $\Delta z < v/\nu$, внутри которого столкновениями электронов можно пренебречь (в то же время поперечные размеры этого слоя считаются большими в сравнении с ларморовским радиусом ускоренных частиц $v_\perp/\omega_{B\mathrm{e}}$). Предполагается также, что плазменные колебания в ускоряющем слое поляризованы почти ортогонально магнитному полю ($k_\| \ll k_\perp$, где $\mathbf{k}$ — волновой вектор колебаний) и поэтому изменяют в основном ортогональную полю $\mathbf{B}$ компоненту $v_\perp$ скорости электрона $\mathbf{v}$ (в рассмотренных ниже случаях это условие выполняется).

Интегрируя стационарное уравнение (5) вдоль силовых линий магнитного поля по толщине слоя, в случае малых возмущений ΔF получаем

$$\Delta F = \frac{1}{v_\| \cos\alpha}\,\frac{\partial}{\partial \epsilon_\perp}\left[\int \mathrm{d}z\, D_\perp(v_\|, v_\perp, z)\,\frac{\mathrm{d}f_0(\epsilon)}{\mathrm{d}\epsilon}\bigg|_{z=0}\right], \tag{6}$$

где $f_0(\epsilon) = f^{(0)}(\epsilon) + F_0(\epsilon)$. В правой части (6) учтена лишь основная, изотропная часть полной функции распределения электронов $f = f^{(0)} + F$, где $f^{(0)}(\epsilon)$ — невозмущенное значение этой функции в отсутствие ускоренных частиц.* Подставляя выражение (6) в (4) и учитывая, что $v_z = v_\| \cos\alpha + v_\perp \sin\alpha \cos\psi$, где ψ — азимутальный угол, находим

$$Q(\epsilon) = \frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}\Omega\, \frac{\partial}{\partial \epsilon_\perp}\left\{\left[\int D_\perp\, \mathrm{d}z\right] \frac{\mathrm{d}f_0(\epsilon)}{\mathrm{d}\epsilon}\bigg|_{z=0}\right\}, \tag{7}$$

откуда после интегрирования по углам получаем

$$Q(\epsilon) = \frac{1}{v}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\left[G(\epsilon)\,\frac{\mathrm{d}f_0(\epsilon)}{\mathrm{d}\epsilon}\bigg|_{z=0}\right], \tag{8}$$

$$G(\epsilon) = \frac{v}{2}\int\limits_{-1}^{+1} \mathrm{d}\mu \int \mathrm{d}z\, D_\perp(\epsilon, \mu, z), \qquad \mu = v_\|/v. \tag{9}$$

Здесь мы воспользовались соотношением $\partial/\partial\epsilon_\perp = \partial/\partial\epsilon + (\mu/2\epsilon)\partial/\partial\mu$ и граничным условием $D_\perp(\mu \to \pm 1) \to 0$.

Выражения (8), (9) определяют источник ускоренных электронов $Q(\epsilon)$ через коэффициент диффузии $D_\perp$ в уравнении (5). Величина $D_\perp$, в свою очередь, зависит от спектра коротковолновых плазменных колебаний внутри ускоряющего слоя по частоте ω и волновому вектору $\mathbf{k}$. В наиболее важном случае, когда частота плазменных волн близка к частоте электронной гирогармоники $\omega \simeq n\omega_{B\mathrm{e}}$, коэффициент $D_\perp$ записывается в виде (см. [19, 10])

$$D_\perp = 2\pi\,(en\,\omega_{B\mathrm{e}})^2 \int \mathrm{d}\omega\, \mathrm{d}^3k\, J_n^2\!\left(\frac{k_\perp v_\perp}{\omega_{B\mathrm{e}}}\right) \left\langle |\varphi(z)|^2 \right\rangle_{\omega,\mathbf{k}} \delta(\omega - n\omega_{B\mathrm{e}} - k_\| v_\|), \tag{10}$$

* Условие применимости использованного приближения $\Delta F < f_0$ можно записать в виде

$$\int_0^1 \langle \Delta\epsilon_\perp^2 \rangle\, \mu\, \mathrm{d}\mu\,/\epsilon^2 = \frac{m_\mathrm{e} G(\epsilon)}{\epsilon^3 \cos\alpha} < 1.$$

Здесь $\langle \Delta\epsilon_\perp^2 \rangle = 2\int D_\perp \mathrm{d}\,z\,/(|v_\||\cos\alpha)$ — усредненное по быстрым осцилляциям среднеквадратичное приращение энергии электрона при однократном пересечении ускоряющего слоя, угловая переменная $\mu = v_\|/v$ характеризует направление движения электрона, а коэффициент $G(\epsilon)$ зависит от спектра плазменных волн (см. ниже (9), (14)). Приведенное неравенство ограничивает величину коэффициента $G(\epsilon)$ в основных уравнениях (30), (32).

где $J_n(k)$ — функция Бесселя первого рода порядка n, $k^2\langle|\varphi(z)|^2\rangle_{\omega,\mathbf{k}}$ — спектральная плотность флуктуаций электрического поля плазменных колебаний с потенциалом φ, зависящая от координаты z внутри слоя. Интегрирование проводится по области $\omega > 0$. В отличие от [10] в этом выражении учтено слабое размытие спектра плазменных волн по частоте ($\omega \simeq \omega_0$) в результате различных нелинейных процессов. Примем во внимание, что в случае слабой турбулентности частота ω и компоненты $k_\|$, $k_\perp$ волнового вектора плазменных колебаний в каждой точке пространства связаны линейным дисперсионным соотношением

$$\varepsilon'(\omega, k_\|, k_\perp) = 0, \tag{11}$$

где $\varepsilon'(\omega, \mathbf{k})$ — действительная часть продольной диэлектрической проницаемости плазмы $\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon' + i\varepsilon''$. В рассматриваемом случае частота ω мало отличается от ω_0, а сами колебания вследствие механизма их генерации поляризованы почти ортогонально магнитному полю ($k_\| \ll k_\perp$) и обладают изотропным спектром по направлению $\mathbf{k}_\perp$. В этих условиях в качестве независимых переменных удобно выбрать частоту ω и ортогональную магнитному полю компоненту $k_\perp$ волнового вектора плазменных колебаний, полагая

$$\left\langle|\varphi|^2\right\rangle_{\omega,\mathbf{k}} = \left\langle|\varphi|^2\right\rangle_{\omega,k_\perp} \delta\left(k_\| - k_\|^{(0)}\right), \tag{12}$$

где величина $k_\|^{(0)} = k_\|^{(0)}(\omega, k_\perp)$ определяется из дисперсионного уравнения (11) (ниже индекс “0"для простоты опущен). Соотношения (9)–(11) позволяют выразить источник $Q(\epsilon)$ через спектральную плотность энергии возбуждаемых плазменных колебаний

$$W_{\omega,k_\perp}(z) = \omega\frac{\partial\varepsilon'}{\partial\omega}\frac{k^2}{4\pi}\left\langle|\varphi(z)|^2\right\rangle_{\omega,k_\perp}, \tag{13}$$

которая рассчитывается в теории взаимодействия мощной радиоволны с ионосферной плазмой (см., например, [16]).

Выражение для коэффициента $G(\epsilon)$ из (9), (10) в случае (12) после интегрирования по μ принимает вид

$$G(\epsilon) = 2\pi\,(en\,\omega_{B\mathrm{e}})^2 \int \mathrm{d}z \int \mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}^2k_\perp \frac{1}{|k_\||} J_n^2\left(\frac{k_\perp}{\omega_{B\mathrm{e}}}\sqrt{v^2 - \widetilde{v}_\|^2}\right)\left\langle|\varphi(z)|^2\right\rangle_{\omega,k_\perp} \theta(v^2 - \widetilde{v}_\|^2), \tag{14}$$

где

$$\widetilde{v}_\| = (\omega - n\omega_{B\mathrm{e}})/k_\|, \qquad \theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Здесь учтено, что каждой паре независимых переменных $(\omega, k_\perp)$ соответствуют два или более значения $k_\|$, отличающиеся знаком, т. е. направлением распространения волны вдоль магнитного поля. Плотность энергии $W_{\omega,k_\perp}$ плазменных волн с разным знаком $k_\|$ считается одинаковой. Согласно (14) в области малых энергий

$$n^2\omega_{B\mathrm{e}}^2/k_\perp^2 > v^2 \tag{15}$$

при $v^2 \gg \widetilde{v}_\|^2$ коэффициент $G(\epsilon)$ в источнике $Q(\epsilon)$ степенным образом растет с увеличением ϵ [10]:

$$\begin{aligned} G(\epsilon) &= G_1\,\epsilon^n, \\ G_1 &= 2\pi\frac{(en\,\omega_{B\mathrm{e}})^2}{(n!)^2}\frac{1}{(2m_\mathrm{e}\omega_{B\mathrm{e}}^2)^n}\int \mathrm{d}z \int \mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}^2k_\perp \frac{k_\perp^{2n}}{|k_\||}\left\langle|\varphi(z)|^2\right\rangle_{\omega,k_\perp}. \end{aligned} \tag{16}$$

Это означает, что ускорение высокоэнергичных электронов становится более интенсивным. Напротив, в области больших энергий $v^2 > n^2\omega_{B\mathrm{e}}^2/k_\perp^2$ коэффициент $G(\epsilon)$ убывает пропорционально $1/\sqrt{\epsilon}$, т. е. эффективность ускорения электронов уменьшается с ростом ϵ.

Вдали от электронных гирогармоник в пределе слабого магнитного поля $\mathbf{B}$ его влиянием на взаимодействие плазменных волн с резонансными частицами можно пренебречь. В этом случае коэффициент диффузии электронов в пространстве скоростей при когерентном возбуждении плазменных волн на частоте ω_0 можно записать в форме (ср. (10))

$$D_\perp = 2\pi\,(e\omega_0)^2 \int \mathrm{d}^3k \left\langle |\varphi\,(z)|^2 \right\rangle_{k_\parallel,k_\perp} \delta(\omega_0 - \mathbf{k}_\perp \mathbf{v}_\perp), \tag{17}$$

где в аргументе дельта-функции при $k_\parallel \ll k_\perp$ опущено слагаемое $-k_\parallel v_\parallel$ (выражение (17) было использовано в Приложении [9]).

Отметим, что источник ускоренных электронов (8) должен удовлетворять двум общим соотношениям. Первое из них означает, что полное число частиц в результате ускорения не меняется. Это условие эквивалентно равенству

$$\int Q(\epsilon)\,\mathrm{d}^3v = 0, \tag{18}$$

которое непосредственно следует из определения (8). Второе соотношение является следствием сохранения энергии при взаимодействии электронов с плазменными колебаниями в квазилинейной теории. Оно означает, что полный поток энергии ускоренных электронов

$$S_\mathrm{e} = \int \epsilon\, Q(\epsilon)\,\mathrm{d}^3v \equiv -\int \mathrm{d}^3v\, \frac{1}{v}\, G\,(\epsilon)\, \left.\frac{\partial f_0\,(\epsilon)}{\partial \epsilon}\right|_{z=0} \tag{19}$$

равен потоку энергии плазменных волн

$$S_W = \int \mathrm{d}z \int 4\gamma_\mathrm{e} W_{\omega,k_\perp} \mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}^2k_\perp\,, \tag{20}$$

расходуемой на их ускорение. Здесь $W_{\omega,k_\perp}$ — спектральная плотность энергии (13) плазменных колебаний с частотой ω и поперечной компонентой волнового вектора $k_\perp$, γ_e — декремент бесстолкновительного поглощения этих колебаний, равный

$$\gamma_\mathrm{e} = \varepsilon''_\mathrm{e} \Big/ \frac{\partial \varepsilon'}{\partial \omega}\,, \tag{21}$$

$\varepsilon''_\mathrm{e}(\omega,\mathbf{k})$ — мнимая часть продольной диэлектрической проницаемости плазмы, связанная с циклотронным и черенковским поглощением волн при взаимодействии с резонансными частицами. Используя определения (9), (13) и (21), нетрудно убедиться, что равенство $S_\mathrm{e} = S_W$ эквивалентно соотношению

$$-\int \mathrm{d}^3v\, D_\perp \left.\frac{\partial f_0(\epsilon)}{\partial \epsilon}\right|_{z=0} = \int \mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}^3k\, 2\varepsilon''_\mathrm{e}(\omega,\mathbf{k}) \frac{\omega}{4\pi} k^2 \left\langle |\varphi\,(z)|^2 \right\rangle_{\omega,\mathbf{k}}, \tag{22}$$

которое выполняется в условиях, когда процесс диффузии электронов в пространстве скоростей происходит в основном в ортогональном полю $\mathbf{B}$ направлении.

Действительно, мнимая часть $\varepsilon''_\mathrm{e}(\omega,\mathbf{k})$, описывающая бесстолкновительное поглощение плазменной волны в окрестности электронной гирогармоники, имеет вид [19]

$$\varepsilon''_\mathrm{e}\,(\omega,\mathbf{k}) = -\frac{(2\pi e)^2}{k^2}\omega \int \mathrm{d}^3v\, J_n^2\!\left(\frac{k_\perp v_\perp}{\omega_{B\mathrm{e}}}\right)\, \delta(\omega - n\omega_{B\mathrm{e}} - k_\parallel v_\parallel) \frac{\partial f_0(\epsilon)}{\partial \epsilon}\,,$$

а в приближении изотропной плазмы равна

$$\varepsilon''_\mathrm{e}(\omega,\mathbf{k}) = -\frac{(2\pi e)^2}{k^2}\omega \int \mathrm{d}^3v\, \delta(\omega - \mathbf{k}\,\mathbf{v}) \frac{\partial f_0\,(\epsilon)}{\partial \epsilon}\,.$$

Нетрудно убедиться, что эти формулы согласуются с выражениями (10), (17) для коэффициента поперечной диффузии электронов $D_\perp$ соответственно при $\omega \simeq n\omega_{Be}$ и в пределе слабого магнитного поля при $k_\| \ll k_\perp$.

2. ПРИБЛИЖЕНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ПОТЕРЬ ЭНЕРГИИ

Интенсивность многократного ускорения зависит от величины и характера энергетических потерь сверхтепловых электронов с энергией $\epsilon \gg T_e$ в результате столкновений (здесь $T_e = 0{,}1 \div 0{,}2$ эВ — температура тепловых электронов ионосферной плазмы). Этот процесс описывается интегралом столкновений $S_0(F_0)$ в правой части уравнения (3). Будем пользоваться далее приближением непрерывных потерь [17], справедливым в случае, когда изменение энергии ускоренного электрона в результате одного соударения (как упругого, так и неупругого) с другими частицами можно считать малым. Как уже отмечалось, это приближение позволяет учесть влияние столкновений ускоренных частиц с тепловыми электронами, которое становится определяющим в области сравнительно малых энергий $\epsilon < 8$ эВ (см. ниже рис. 1.) В рассматриваемом приближении интеграл столкновений $S_0(F_0)$ записывается в дифференциальной форме (ниже используются обозначения [20]):

$$S_0\,(F_0) = \frac{v}{\epsilon}\,\frac{\partial}{\partial \epsilon}(\epsilon M F_0), \tag{23}$$

где

$$M = s_e\, N_e + \Delta M, \qquad \Delta M = \sum_m s_m\, N_m, \tag{24}$$
$$s_e = \kappa/\epsilon, \quad \kappa = 2\pi e^4 \ln\Lambda \approx 2{,}6 \cdot 10^{-12}\ \text{см}^2 \cdot \text{эВ}^2.$$

Здесь слагаемое $s_e N_e$ учитывает энергетические потери при кулоновских столкновениях сверхтепловых электронов с тепловыми, а слагаемое ΔM — при столкновениях с нейтральными частицами; $\ln\Lambda$ — кулоновский логарифм, N_e — концентрация тепловых электронов, N_m — концентрация нейтральных частиц сорта m, s_m — сечение торможения для столкновений электрона с нейтральной частицей данного сорта, равное сумме произведений полного сечения для различных неупругих процессов на величину поглощаемой энергии [17]. В аналогичной форме записывается также эффективная частота передачи импульса при соударениях:

$$\nu = L, \tag{25}$$

где

$$L = \sigma_e N_e + \Delta L, \quad \Delta L = \sum_m \sigma_m N_m, \quad \sigma_e = \kappa/\epsilon^2,$$

σ_m, σ_e — транспортное сечение рассеяния для упругих столкновений высокоэнергичного электрона соответственно с нейтральной частицей сорта m и с заряженными частицами (ионами и тепловыми электронами). Величина параметра δ, характеризующего скорость изменения энергии по сравнению со скоростью передачи импульса, в рассматриваемом случае определяется выражением

$$\delta \simeq M\,/(L\epsilon). \tag{26}$$

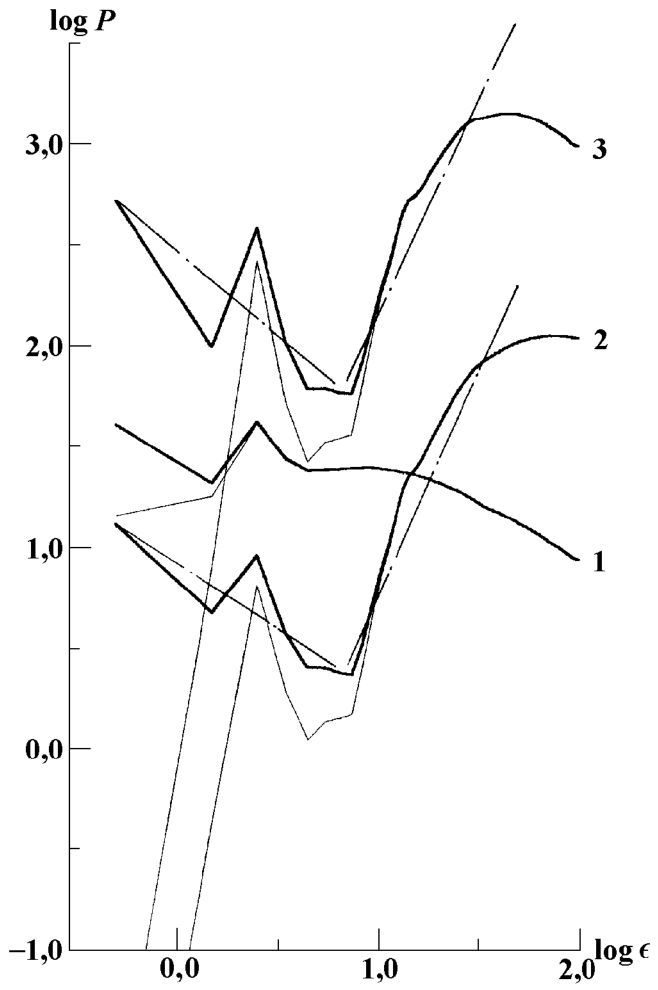

Рис. 1. Зависимость коэффициентов L, M и произведения LM от энергии электрона ϵ в эВ: 1 — $P = L \cdot 10^7\,см^2$; 2 — $P = M \cdot 10^7\,см^2\cdot$ эВ; 3 — $P = LM \cdot 10^{14}\,см^4\cdot$ эВ. Тонкими линиями показаны значения ΔL, ΔM и $\Delta L\,\Delta M$, определенные без учета соударений электронов с заряженными частицами в тех же единицах, что и основные величины

Поведение коэффициентов M и L (выражения (24), (25)) в зависимости от энергии электрона ϵ в условиях, типичных для F-слоя ионосферы, показано на рис. 1 при $N_e = 5{\cdot}10^5\,см^{-3}$. Тонкими линиями на рисунке представлены соответствующие значения ΔM и ΔL, описывающие столкновения электронов с нейтральными частицами молекулярного азота (с концентрацией $N_{N_2} = 1{,}1 \cdot 10^9\,см^{-3}$) и атомарного кислорода (с концентрацией $N_O = 1{,}3{\cdot}10^9\,см^{-3}$). Данные о сечениях s_m, σ_m для $m = N_2$ и $m = O$ взяты из модели ионосферно-плазменного взаимодействия ИЗМИРАН [21, 22] и усреднены по интервалу энергий 1 эВ, начиная с $\epsilon = 0$. Поэтому все величины приведены с шагом $\Delta\epsilon = 1$ эВ, т. е. при $\epsilon = 0{,}5$; 1,5; 2,5 эВ и т. д. вплоть до $\epsilon = 99{,}5$ эВ. Видно, что коэффициент $M(\epsilon)$, описывающий энергетические потери, имеет характерный минимум в области энергий $\epsilon = 4{\div}8$ эВ. С уменьшением ϵ этот коэффициент возрастает в основном за счет соударений сверхтеплового электрона с тепловыми электронами (в области $\epsilon < 8$ эВ эти соударения определяют энергетические потери сверхтепловых электронов). Узкий максимум $M(\epsilon)$ при $\epsilon = 2{,}5$ эВ связан с хорошо известным эффектом возбуждения колебательных уровней молекулярного азота в интервале энергий $\epsilon = 1{,}5{\div}3$ эВ. В области $\epsilon > 8$ эВ вплоть до энергий $\epsilon \simeq 75$ эВ энергетические потери электрона быстро нарастают вследствие неупругих столкновений с нейтральными частицами молекулярного азота и атомарного кислорода. Столкновения с тепловыми электронами играют здесь относительно малую роль.

Коэффициент $L(\epsilon)$, описывающий скорость передачи импульса, в основном плавно убывает с ростом ϵ после сравнительно небольших осцилляций в области $\epsilon < 9$ эВ. Важная особенность передачи импульса заключается в том, что в слабоионизированной ионосферной плазме она происходит в основном за счет упругих столкновений сверхтепловых электронов с нейтральными частицами: $\sum\limits_m \sigma_m N_m \gg \sigma_e N_e$, $L \simeq \Delta L$ (см. рис. 1). Кулоновское рассеяние на ионах и тепловых электронах оказывается существенным лишь в области сравнительно малых энергий $\epsilon \leq 1$ эВ. Этот факт обеспечивает малость параметра δ (26) в основном интервале энергий (в области $\epsilon < 1$ эВ, где кулоновские столкновения становятся важными, параметр δ приближается к единице и условия применимости использованного приближения ухудшаются).

Проведенное обсуждение позволяет обосновать использованные приближения. Переходя к решению уравнений (3) с интервалом столкновений (23), рассмотрим стационарную задачу ($\partial F_0/\partial t = 0$) и будем считать, что характерный масштаб релаксации ускоренных электронов

$$L_\epsilon = \cos\alpha \Big/ \left(L\sqrt{3\delta}\right) = \cos\alpha\sqrt{\frac{\epsilon}{3ML}} \qquad (27)$$

мал по сравнению с масштабом изменения концентрации N_m и N_e в F-слое ионосферы (это условие выполняется в ионосферной плазме на высотах менее 300 км). В указанных условиях неоднородностью ионосферы и потоком ускоренных электронов, уходящих в плазмосферу, можно пренебречь. Выполняя в этом случае преобразование Фурье по координате z и решая дифференциальное уравнение для трансформанты Фурье $F_{0q}(\epsilon) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F_0(\epsilon, z)e^{-iqz}\,\mathrm{d}z$ с граничным условием убывания $F_{0q}(\epsilon)$ при $\epsilon \to \infty$, получаем

$$F_{0q}(\epsilon) = \frac{m_\mathrm{e}}{4\pi\epsilon M}\int\limits_\epsilon^\infty \mathrm{d}\widetilde{\epsilon}\,\widetilde{Q}(\widetilde{\epsilon})\exp\left\{-q^2 R(\epsilon,\widetilde{\epsilon})\right\}, \qquad (28)$$

где введены обозначения (см. (8))

$$R(\epsilon,\widetilde{\epsilon}) = \frac{\cos^2\alpha}{3}\int\limits_\epsilon^{\widetilde{\epsilon}} \frac{\mathrm{d}\epsilon_1}{M(\epsilon_1)L(\epsilon_1)}, \qquad (29)$$

$$\widetilde{Q}(\epsilon) = vQ(\epsilon) \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\left[G(\epsilon)\frac{\mathrm{d}f_0(\epsilon)}{\mathrm{d}\epsilon}\bigg|_{z=0}\right]. \qquad (30)$$

Здесь, как и ранее, $f_0(\epsilon) = f^{(0)}(\epsilon) + F_0(\epsilon)$ — изотропная часть полной функции распределения электронов. Совершая в (28) обратное преобразование Фурье, находим искомую функцию распределения ускоренных частиц $F_0(\epsilon, z)$ при заданном источнике $\widetilde{Q}(\epsilon)$:

$$F_0(\epsilon, z) = \frac{m_\mathrm{e}}{4\sqrt{\pi}\,\epsilon M}\int\limits_\epsilon^\infty \mathrm{d}\widetilde{\epsilon}\,\frac{\widetilde{Q}\,(\widetilde{\epsilon})}{\sqrt{R(\epsilon,\widetilde{\epsilon})}}\exp\left\{\frac{-z^2}{4R(\epsilon,\widetilde{\epsilon})}\right\}. \qquad (31)$$

Переходя далее в (31) к пределу $z \to 0$, получаем уравнение для функции $F_0(\epsilon, z=0)$, которая входит в определение источника ускоренных электронов $\widetilde{Q}(\epsilon)$ (30):

$$F_0(\epsilon)|_{z=0} = \frac{m_\mathrm{e}}{4\sqrt{\pi}\,\epsilon M}\int\limits_\epsilon^\infty \frac{\mathrm{d}\widetilde{\epsilon}}{\sqrt{R(\epsilon,\widetilde{\epsilon})}}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\widetilde{\epsilon}}\left[G(\widetilde{\epsilon})\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\widetilde{\epsilon}}\left(F_0(\widetilde{\epsilon}) + f^0(\widetilde{\epsilon})\right)\Big|_{z=0}\right]. \qquad (32)$$

Это уравнение позволяет рассчитать функцию $F_0(\epsilon)$ вблизи ускоряющего слоя $z = 0$ по заданному распределению электронов $f^{(0)}(\epsilon)$ в невозмущенной плазме и спектру плазменных волн (внутри слоя), от которого зависит коэффициент $G(\epsilon)$ (см. (12)–(14) и (9), (17)). Релаксация ускоренных электронов с удалением от ускоряющего слоя рассчитывается по формулам (29)–(31) путем вычисления квадратуры. Пользуясь этими выражениями, нетрудно убедиться, в частности, что производная $\partial F_0/\partial z$ при $z \to 0$ совпадает с величиной

$$\frac{\partial F_0(\epsilon, z)}{\partial z}\bigg|_{z\to 0} = -\frac{z}{|z|}\,\frac{3m_\mathrm{e}L}{4\epsilon\,\cos^2\alpha}\,\widetilde{Q}\,(\epsilon), \qquad (33)$$

следующей непосредственно из уравнения (3).

3. МОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ

Покажем, что уравнения (29)–(32) для функции распределения ускоренных частиц имеют асимптотические решения в окрестности кратных электронных гирогармоник в модельном случае степенной зависимости коэффициентов L и M от энергии электрона ϵ:

$$ML \sim \epsilon^{\beta}, \quad M \sim \epsilon^{\beta_1}. \tag{34}$$

Кривые $M(\epsilon)$ и $M(\epsilon)L(\epsilon)$ в двойном логарифмическом масштабе приведены на рис. 1. Степенная аппроксимация этих величин на соответствующих участках показана штрих-пунктирными прямыми. Наиболее протяженным и важным является интервал энергий $\epsilon = 7 \div 45$ эВ, на котором показатели β, $\beta_1 \approx 2$. В области $\epsilon = 0{,}5 \div 7$ эВ, где коэффициенты ML и M возрастают с уменьшением ϵ, показатели β, β_1 становятся отрицательными: $\beta \simeq -0{,}8$; $\beta_1 \simeq -0{,}6$. Коэффициент $G(\epsilon)$ будем также описывать степенной функцией (16): $G(\epsilon) = G_1\epsilon^n$. Такое приближение справедливо в случае, когда частота плазменных колебаний близка к электронной гирогармонике с номером n при соблюдении условия (15) (в ионосферных экспериментах при $\omega_{Be} \simeq 8{,}35 \cdot 10^6$ с$^{-1}$ это условие выполняется во всем интервале энергий $\epsilon \leq 45$ эВ для плазменных колебаний с волновыми числами $k_\perp < 0{,}02\, n$ см$^{-1}$).

В указанных условиях при

$$\Delta = n - 5/2 + \beta/2 - \beta_1 > 0 \tag{35}$$

убывающие с ростом ϵ решения уравнений (29)–(31) в области $f^{(0)}(\epsilon) \ll F_0(\epsilon)$ можно искать в виде

$$F_0(\epsilon, z) = \epsilon^{1-n} \left[C_0 + C_1\epsilon^{-\Delta} + C_2\epsilon^{-2\Delta} + \ldots\right], \tag{36}$$

где коэффициенты $C_i(\epsilon, z)$ при $z = 0$ не зависят от энергии электрона ϵ. Действительно, используя явное выражение для коэффициента R (29) в условиях (34)

$$R(\epsilon, \widetilde{\epsilon}) = \frac{\cos^2\alpha}{3} \frac{\epsilon}{ML} \frac{(\widetilde{\epsilon}/\epsilon)^{1-\beta} - 1}{1 - \beta} \tag{37}$$

и подставляя (36), (37) в (30), (31), получаем для первого, основного члена разложения (36)

$$C_0(\epsilon, z) = C_1(z = 0) K\Delta(\Delta + n - 1)\, I(\Delta, \beta, z), \tag{38}$$

где коэффициент K не зависит от энергии ϵ:

$$K = \epsilon^{-\Delta} \frac{m_e}{4\sqrt{\pi}\cos\alpha} \sqrt{\frac{3L\epsilon}{M}} \frac{G}{\epsilon^3}\,, \tag{39}$$

а интеграл $I(\beta, \Delta, z)$ равен

$$I(\beta, \Delta, z) = \int\limits_1^\infty \mathrm{d}t \left[\frac{1-\beta}{t^{1-\beta} - 1}\right]^{1/2} t^{-1-\Delta} \exp\left\{-\frac{\widetilde{z}^2}{4} \frac{1-\beta}{t^{1-\beta} - 1}\right\}, \qquad \widetilde{z} = \frac{z}{\cos\alpha} \sqrt{\frac{3ML}{\epsilon}}\,. \tag{40}$$

Здесь $\widetilde{z}$ — отнесенная к характерному масштабу (27) релаксации ускоренных электронов координата z. Полагая в (38) $z = 0$, находим величину $C_1(z = 0)$, входящую в определение $F_0(\epsilon, z = 0)$ и $C_0(\epsilon, z)$:

$$C_1(z = 0) = C_0(z = 0) \Big\{K\Delta\ (\Delta + n - 1)\, I_0(\Delta, \beta)\Big\}^{-1}, \tag{41}$$

где интеграл I_0 определяется выражением (40) при $\widetilde{z}=0$:

$$I_0(\beta,\Delta)=\sqrt{\pi}\times\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{\beta-1}}\,\Gamma\Big(\dfrac{\Delta}{\beta-1}\Big)\Big/\Gamma\Big(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\Delta}{\beta-1}\Big), & \beta>1,\\ 1\Big/\sqrt{\Delta}, & \beta=1,\\ \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta}}\,\Gamma\Big(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\Delta}{1-\beta}\Big)\Big/\Gamma\Big(1+\dfrac{\Delta}{1-\beta}\Big), & \beta<1.\end{cases}\tag{42}$$

Здесь $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера. В результате для $C_0(\epsilon,z)$ получаем с точностью до производной константы $C_0(z=0)$:

$$C_0(\epsilon,z)=C_0(z=0)\,I(\beta,\Delta,z)\,/I_0(\beta,\Delta).\tag{43}$$

Аналогичным образом находятся и остальные коэффициенты $C_i(z)$ для $i=1,2,3,\ldots$ (при этом параметр Δ в выражениях типа (38), (41) следует заменить соответственно на 2Δ, 3Δ и т. д.). Отметим, что первый, основной член разложения (36) при $z=0$ совпадает с асимптотикой $F_0(\epsilon)$ в приближении полных энергетических потерь [10] в окрестности гирогармоник с номером $n\geq 4$. Такое совпадение является следствием того, что степенная функция $F_0(\epsilon)\sim\epsilon^{1-n}$ обращает в ноль источник ускоренных электронов (30) в рассматриваемом приближении $G(\epsilon)\sim\epsilon^n$ (этот факт позволяет искать функцию распределения $F_0(\epsilon,z=0)$ в виде ряда по степеням $\epsilon^{-\Delta}$ при $\Delta>0$). Отметим также, что в пределе $\Delta\to 0$ решение (32) однородного уравнения в рассматриваемых условиях является степенной функцией ϵ: $F_0(\epsilon,z=0)=C_0\epsilon^{-\sigma}$, в которой показатель σ находится из уравнения (38) в случае $z=0$ при замене $C_1\to C_0,\ \Delta\to(\sigma-n+1)$:

$$K\sigma(\sigma-n+1)I_0(\beta,\Delta=\sigma-n+1)=1.\tag{44}$$

Аналогичная замена $\Delta\to(\sigma-n+1)$ производится также в выражении (43) при вычислении зависимости $C_0(\epsilon,z)$ (такой предельный случай соответствует степенному спектру ускоренных электронов, возникающему в приближении полных энергетических потерь в окрестности третьей электронной гирогармоники, см. [10]).

Рассмотрим теперь релаксацию функции распределения ускоренных частиц при удалении от ускоряющего слоя. Она описывается коэффициентами $C_i(\epsilon,z)$ в разложении (36) функции $F_0(\epsilon,z)$ по убывающим степеням ϵ, где коэффициент $C_0(\epsilon,z)$ соответствует главной, основной части разложения. Согласно (43) его зависимость от координаты z описывается интегралом (40), поведение которого аналогично (42) существенно зависит от знака показателя $(1-\beta)$, определяющего асимптотику коэффициента $R(\epsilon,\widetilde{\epsilon})$ (37) в области больших $\widetilde{\epsilon}$. Из рис. 1 следует, что в интервале энергий $\epsilon\simeq 7\div 45$ эВ величина $\beta>1$. Интегрирование (40) в этом случае дает

$$I(\beta>1,\,\Delta,\,z)=\frac{1}{\sqrt{\beta-1}\,\eta^{1/4}}\,e^{-\eta/2}\,\Gamma\Big(\frac{\Delta}{\beta-1}\Big)\,W_{\lambda,1/4}(\eta),\tag{45}$$

где

$$\lambda=\frac{1}{4}-\frac{\Delta}{\beta-1}\,,\qquad \eta=\frac{1}{4}\,\widetilde{z}^2\,|\beta-1|\equiv\frac{z^2}{4}\,\frac{3ML}{\epsilon\cos^2\alpha}\,|\beta-1|\,,$$

$W_{\lambda,\mu}(\eta)$ — функция Уиттекера [23]. При анализе поведения $I(\beta,\Delta,z)$ в случае малых $\eta\sim z^2$ удобно воспользоваться представлением функции Уиттекера через сумму двух вырожденных гипергеометрических функций $\Phi(\alpha,\gamma,\eta)$ (при соответствующем выборе параметров α,γ), каждая из которых разлагается в ряд по степеням η. В результате получаем

$$I(\beta>1,\Delta,\eta)=\frac{1}{\sqrt{\beta-1}}\,e^{-\eta}\left\{\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\Big(\frac{\Delta}{\beta-1}\Big)}{\Gamma\Big(\frac{1}{2}+\frac{\Delta}{\beta-1}\Big)}\,\Phi\Big(\frac{\Delta}{\beta-1},\frac{1}{2},\eta\Big)-2\sqrt{\pi\,\eta}\,\Phi\Big(\frac{1}{2}+\frac{\Delta}{\beta-1}\,,\frac{3}{2}\,,\eta\Big)\right\},\tag{46}$$

где
$$\Phi(\alpha,\gamma,\eta) = 1 + \frac{\alpha}{\gamma}\frac{\eta}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{\eta^2}{2!} + \ldots$$
Согласно (45) в пределе $\eta \gg 1$ справедлива асимптотика (см. (42), (43))
$$C_0(\epsilon,z) \simeq \frac{C_0(z=0)}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{\Delta}{\beta-1}\right)e^{-\eta}\eta^{-\frac{\Delta}{\beta-1}}, \quad \beta > 1. \tag{47}$$
Отсюда следует, что в случае $\beta > 1$ функция распределения ускоренных электронов экспоненциально убывает с удалением от ускоряющего слоя с характерным масштабом $z \sim L_\epsilon\sqrt{\beta-1}$.

Отметим, что при $\beta < 1$ интеграл (40) по-прежнему выражается через функцию Уиттекера:
$$I(\beta<1,\Delta,\eta) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta}\,\eta^{1/4}}\,e^{\eta/2}\,\Gamma\biggl(\frac{1}{2}+\frac{\Delta}{1-\beta}\biggr)W_{\lambda,1/4}(\eta),$$
где
$$\lambda = -\frac{1}{4} - \frac{\Delta}{1-\beta}\,,$$
при прежнем определении параметра η из (45), а его асимптотика в области $\eta \gg 1$ дает
$$C_0(\epsilon,z) \simeq \frac{C_0(z=0)}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma\biggl(1+\frac{\Delta}{1-\beta}\biggr)\eta^{-\frac{1}{2}-\frac{\Delta}{1-\beta}}, \quad \beta < 1. \tag{48}$$
Видно, что в этом случае скорость убывания функции распределения с увеличением $|z|$ существенно замедляется — величина $F_0(z)$ уменьшается по степенному закону. Заметим также, что при $\beta = 1$ коэффициент $C_0(\epsilon,z)$ равен
$$C_0(\epsilon,z) = C_0(z=0)\exp\left\{-\frac{|z|}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{3ML}{\epsilon}\,\Delta}\right\}. \tag{49}$$

Это выражение занимает промежуточное положение между асимптотиками (47), (48). Проведенный анализ показывает, что эффект многократного ускорения электронов ионосферной плазмы в приближении непрерывных потерь энергии при соударениях может приводить к образованию хвоста у функции распределения ускоренных частиц в области достаточно больших энергий $\epsilon = 10\div 40$ эВ, убывающего с ростом ϵ по степенному закону. Релаксация функции распределения с удалением от ускоряющего слоя существенно зависит от величины и поведения коэффициентов $M(\epsilon)$ и $L(\epsilon)$, характеризующих скорость (или эффективную частоту) энергетических потерь и передачи импульса при столкновениях высокоэнергичных электронов с другими частицами плазмы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулирована система уравнений (31), (32), описывающих эффект многократного ускорения электронов ионосферной плазмы вблизи уровня верхнегибридного резонанса мощной радиоволны в приближении (23) непрерывных потерь энергии при столкновениях высокоэнергичных электронов с другими частицами плазмы. Используемое приближение является наиболее адекватным при описании неупругих соударений электронов с нейтральными частицами и позволяет описать взаимодействие ускоренных частиц с тепловыми электронами. Последний процесс играет определяющую роль в области энергий $\epsilon < 8$ эВ, в которой начинается процесс ускорения электронов невозмущенной плазмы.

Показано, что малые размеры турбулентного слоя плазмы, в котором происходит ускорение электронов, позволяют разделить пространственные и энергетические переменные исследуемой задачи. В результате функция распределения электронов вблизи ускоряющего слоя рассчитывается отдельно, путем решения уравнения (32), по заданному спектру плазменных колебаний, возбуждаемых мощной радиоволной внутри слоя. Релаксация электронов в пространстве при удалении от ускоряющего слоя рассчитывается далее путем вычисления квадратуры (31).

Найдены асимптотические решения сформулированных уравнений в случае степенной зависимости сечений упругих и неупругих столкновений электрона от его энергии ϵ. Показано, что в результате многократного ускорения у функции распределения электронов может образовываться медленно убывающий хвост в области энергий порядка нескольких десятков эВ.

Автор благодарен Павлову А. В. за предоставление в численном виде данных о сечениях соударений сверхтепловых электронов с нейтральными частицами.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 97–02–17809).

ЛИТЕРАТУРА

1. Haslett J. G., Megill L. R. // Radio Sci. 1974. V. 9, № 11. P. 1005.
2. Berhardt P. A., Scales W. A., Grach S. M. et al. // Geophys. Res. Lett. 1991. V. 18, № 8. P. 1477.
3. Белякова В. Н., Березин И. В., Васьков В. В. и др. // Геомагнетизм и аэрономия. 1991. Т. 31, № 3. С. 466.
4. Grach S. M., Komrakov G. P., Yurischev M. A. et al. // Phys. Rev. Lett. 1997. V. 78, № 5. P. 883.
5. Carlson H. C., Wickwar V. B., Martas G. P. // J. Atm. Terr. Phys. 1982. V. 44, № 12. P. 1089.
6. Fejer J. A., Gonzales C. A., Ierkis H. M. et al. // J. Atm. Terr. Phys. 1985. V. 47, № 12. P. 1165.
7. Rose G., Grandal R., Neske E. et al. // J. Geophys. Res. 1985. V. A90, № 3. C. 2851.
8. Васьков В. В., Гуревич А. В., Димант Я. С. // ЖЭТФ. 1983. Т. 84, вып. 2. С. 536.
9. Gurevich A. V., Dimant Ya. S., Milikh G. M., Vas'kov V. V. // J. Atm. Terr. Phys. 1985. V. 47, № 11. P. 1057.
10. Васьков В. В., Иванов-Холодный Г. С. // Геомагнетизм и аэрономия. 1991. Т. 31, № 6. С. 1049.
11. Dimant Ya. S., Gurevich A. V., Zylin K. P. // J. Atm. Terr. Phys. 1992. V. 54. P. 425.
12. Грач С. М., Митяков Н. А., Трахтенгерц В. Ю. // Изв. вуз. Радиофизика. 1984. Т. 27, № 9. С. 1096.
13. Грач С. М., Митяков Н. А., Трахтенгерц В. Ю. // Физика плазмы. 1986. Т. 12, вып. 6. С. 693.
14. Grach S. M.// V-th Suzdal URSI Symposium on the Modification of Ionosphere ISSMI'98, Book of Abstracts. Suzdal, August 26–29, 1998. P. 5.
15. Грач С. М.// Изв. вуз. Радиофизика. 1999. Т. 42, № 7. С. 651.
16. Васьков В. В., Пулинец С. А., Рябова Н. А. Циклотронное поглощение плазменных колебаний, возбуждаемых мощной радиоволной в окрестности кратных электронных гирогармоник. Препринт ИЗМИРАН № 4 (1114). Москва, 1998; Геомагнетизм и аэрономия. 1999. Т. 39, № 4. С. 44.
17. Кринберг И. А. Кинетика электронов в ионосфере и плазмосфере Земли. — М.: Наука, 1978.
18. Гуревич А. В., Шварцбург В. Б. Нелинейная теория распространения радиоволн в ионосфере. — М.: Наука, 1973.
19. Ахиезер А. И., Ахиезер И. А., Половин Р. В. и др. Электродинамика плазмы. — М.: Наука, 1974.
20. Кринберг И. А., Тащилин А. В. Ионосфера и плазмосфера. — М.: Наука, 1984.
21. Pavlov A. V. // Ann. Geophys. 1997. V. 15, № 8. P. 984.
22. Pavlov A. V. // Ann. Geophys. 1998. V. 16, № 5. P. 589.
23. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1963.

Институт земного магнетизма,
ионосферы и распространения
радиоволн РАН, г. Троицк
Московской обл., Россия

Поступила в редакцию
24 августа 1999 г.

MULTIPLE ACCELERATION OF IONOSPHERIC ELECTRONS IN THE APPROXIMATION OF CONTINUOUS ENERGY LOSSES DUE TO COLLISIONS

V. V. Vas'kov

Multiple acceleration of electrons during the active experiments in the ionosphere is related to their returning to the thin layer of the turbulent plasma, created by the powerful radio wave, due to elastic collisions with neutral particles. This effect depends on the magnitude and type of the collisional energy losses by electrons. In this paper, we formulate the system of equations which allows one to describe the process of multiple electron acceleration taking into account collisions of the accelerated particles with thermal electrons and assuming that collisional energy losses are continuous. The above-mentioned collisions become important at small energies where the primary electron acceleration takes place. We obtained the asymptotic solutions of the formulated equations using the model power-law dependence of the collision frequency on electron energy. These solutions show that the effect of multiple acceleration of electrons in the ionospheric F-layer can lead to formation of a slowly-varying high-energy “tail"in the distribution of the accelerated particles at energies of about tens electron-volts.

УДК 621.371

ФЛУКТУАЦИИ КВ ПОЛЯ В ОКРЕСТНОСТИ МАКСИМАЛЬНО ПРИМЕНИМОЙ ЧАСТОТЫ (ГРАНИЦЫ МЁРТВОЙ ЗОНЫ)

М. В. Тинин, Н. Т. Афанасьев, А. В. Кулижский

Посвящается памяти
Льва Михайловича Ерухимова

В работе для описания распространения волн в случайно-неоднородной среде с регулярной рефракцией используются смешанные интегральные представления для двухточечного пропагатора. Сочетание идей методов Маслова и интерференционного интеграла позволило получить результаты, обобщающие метод плавных возмущений на случай плавно неоднородного фона. Кроме того, предлагаемый подход, согласующийся с методом фазового экрана и описывающий как слабые, так и сильные флуктуации интенсивности, обобщает метод фазового экрана на протяжённые среды с регулярно-неоднородным фоном. С помощью предложенного метода проводится численное моделирование средней интенсивности поля и индекса мерцаний в окрестности границы зоны тени при наклонном ионосферном распространении коротких радиоволн.

ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что на распространение коротких радиоволн существенное влияние оказывают случайные ионосферные неоднородности. Присутствие этих неоднородностей на пути распространения радиоволны приводит к сильным флуктуациям амплитуды, уширению углового и доплеровского спектров и искажению формы сигнала, проникновению радиоволн в область каустической тени (выше максимально применимой частоты), замыванию усиления поля на максимально применимой частоте и т. п.

Для описания распространения радиоволн в случайно-неоднородной ионосфере широко используется метод фазового экрана [1–3], в котором распространение плоской радиоволны до выхода из ионосферы описывается в геометрооптическом приближении, а затем с помощью интеграла Кирхгофа рассчитывается поле на земной поверхности с учетом сильных флуктуаций и дифракционных эффектов. Широко используемый при трансионосферном распространении радиоволн на высоких частотах, такой подход оказывается неудобным при учете регулярной рефракции, например, при наклонном распространении КВ радиоволн. Геометрооптическое приближение, хорошо описывающее влияние регулярной рефракции, становится неприемлемым при необходимости учета дифракционных эффектов, в окрестности регулярных и случайных каустик. Поэтому ряд исследований (см., например, [4–7]) был посвящен использованию в статистических задачах обобщений геометрической оптики, позволяющих описывать поле в окрестности каустик. Эти подходы основаны на разложении поля на плоские волны в окрестности источника или точки наблюдения. Волны, по которым ведется разложение, часто называют парциальными. Если пренебречь флуктуациями амплитуд парциальных волн, можно получить интегральные представления для поля, удобные для расчета статистических характеристик волн в случайно неоднородной ионосфере. Однако, как показывает анализ [8], пренебрежение флуктуациями амплитуд парциальных волн не всегда корректно.

В работе [8] предлагается использовать комбинированный подход к анализу не самого поля, а его произведения на комплексно сопряженное поле с другими точками излучения и наблюдения — так называемого двухточечного пропагатора [9]. Смешанное Фурье-преобразование по суммарным координатам точек излучения и разностным координатам точек наблюдения позволило получить асимптотическое интегральное представление, в котором парциальные волны, по крайней мере в первом приближении, не содержат флуктуаций амплитуд. Полученные интегральные представления для статистических моментов переходят в результаты метода плавных возмущений и метода фазового экрана в областях их применимости.

Аналогичные результаты могут быть получены в приближении параболического уравнения при использовании метода двухмасштабных разложений [10]. Однако в подходе работы [8] используется сочетание идей методов Маслова и интерференционного интеграла, которые не нуждаются в параболическом приближении. Поэтому в настоящей работе мы, как и в работе [8], используя смешанные интегральные представления для двухточечного пропагатора, получаем интегральные представления для статистических моментов поля в среде с регулярной рефракцией, обобщающие результаты метода фазового экрана и метода плавных возмущений на наклонное распространение КВ радиоволн.

В первом разделе выводится асимптотическое интегральное представление для двухточечного пропагатора. Во втором разделе с помощью этого смешанного интегрального представления получено интегральное представление для второго статистического момента поля ионосферной радиоволны. Исследуется поведение средней интенсивности поля короткой радиоволны в окрестности границы зоны тени. В третьем разделе получено интегральное представление индекса мерцаний ионосферной радиоволны. Показан переход полученного выражения в результаты метода плавных возмущений, исследуется поведение индекса мерцаний в окрестности границы теневой зоны.

1. ДВУХТОЧЕЧНЫЙ ПРОПАГАТОР И ЕГО АСИМПТОТИЧЕСКОЕ СМЕШАННОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

Для упрощения анализа асимптотических подходов ограничимся здесь рассмотрением скалярной двумерной задачи. Поле $U(\vec{r},\vec{r}_{\rm s})$ гармонического (с временной зависимостью $e^{-i\omega t}$) точечного источника, расположенного в точке $\vec{r}=\vec{r}_s$ в плавно неоднородной среде, описывается уравнением

$$\Delta U(\vec{r},\vec{r}_{\rm s}) + k^2\epsilon(\vec{r})U(\vec{r},\vec{r}_{\rm s}) = \delta(\vec{r}-\vec{r}_{\rm s}) \tag{1}$$

с условием излучения на бесконечности. В (1) $\vec{r}=\{x,z\}$, $\vec{r}_{\rm s}=\{x_{\rm s},z_{\rm s}\}$, $k=\omega/c$ — волновое число в свободном пространстве, ω — рабочая частота точечного источника, $\delta(\vec{r})$ — дельта-функция, c — скорость света в вакууме.

Положим, что диэлектрическая проницаемость ионосферы $\epsilon(\vec{r})$ может быть представлена как

$$\epsilon(\vec{r}) = \bar{\epsilon}(z) + \tilde{\epsilon}(\vec{r}), \tag{2}$$

где $\bar{\epsilon}(z)$ — детерминированная (средняя) составляющая диэлектрической проницаемости плоскослоистой ионосферы, $\tilde{\epsilon}(\vec{r})$ — случайная добавка, причем

$$|\tilde{\epsilon}(\vec{r})| \ll \bar{\epsilon}(z). \tag{3}$$

Располагая функцией Грина — решением уравнения для точечного источника, называемым одноточечным пропагатором, нетрудно найти поле для произвольного протяженного источника.

В теории распространения волн в случайных средах для описания структуры случайного поля широко используются статистические моменты, и обычно наиболее важными являются четные. При определении этих статистических моментов роль функции Грина играет двухточечный пропагатор [9]

$$g = g(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_{{\rm s}_1},\vec{r}_{{\rm s}_2}) = U(x_1,z_1,x_{{\rm s}_1},z_{{\rm s}_1})U^*(x_2,z_2,x_{{\rm s}_2},z_{{\rm s}_2}). \tag{4}$$

В дальнейшем будем полагать $z_{s_1} = z_{s_2} = z_s$, $z_1 = z_2 = z$.

Применяя обычную процедуру [11], нетрудно найти геометрооптическое приближение для решения уравнения (1). Подставляя это приближение в (4), получаем геометрооптическое приближение для двухточечного пропагатора:

$$g = \frac{1}{8\pi} A(s_1, s_2) \sqrt{\left| \frac{\partial s_1}{\partial x_1} \frac{\partial s_2}{\partial x_2} \right|} \exp\left\{ ik(\Phi_1 - \Phi_2) \right\}, \tag{5}$$

где

$$\Phi_n = \int\limits_{z_\mathrm{s}}^{z} \sqrt{\epsilon(x_n(z'), z')} \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}z'} \right)^2} \,\mathrm{d}z', \quad n = 1, 2, \tag{6}$$

$$A(s_1, s_2) = \frac{1}{\sqrt{(1 - s_1^2)\,(1 - s_2^2)}}, \tag{7}$$

$$s_n = \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_n}, \tag{8}$$

$x_n(z')$ — решения уравнений

$$\frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}z'} = \frac{s_n}{\sqrt{\epsilon(x_n, z') - s_n^2}}, \tag{9}$$

$$\frac{\mathrm{d}s_n}{\mathrm{d}z'} = \frac{1}{2\sqrt{\epsilon(x_n, z') - s_n^2}} \, \frac{\partial \epsilon(x_n, z')}{\partial x_n}. \tag{10}$$

Траекторная задача (9)–(10) здесь решается с граничными условиями

$$x_n(z')|_{z'=z_\mathrm{s}} = x_{\mathrm{s}_n}, \quad x_n(z')|_{z'=z} = x_n. \tag{11}$$

Как известно, геометрооптическое приближение неприменимо на каустике, где

$$\left[\frac{\partial s_n(z_\mathrm{s})}{\partial x_n} \right]^{-1} = 0. \tag{12}$$

В отсутствие неоднородностей пересечение каустики с земной поверхностью определяет границу, разделяющую освещенную зону и зону каустической тени. При фиксированном положении приемника и передатчика частота радиоволн, при которой приемник находится на границе зоны тени, называется максимально применимой частотой (МПЧ). На частотах, превышающих МПЧ, распространение радиоволн имеет место благодаря либо дифракционным эффектам, либо рассеянию на случайных неоднородностях. В освещенной зоне (т. е. в области, где в отсутствие неоднородностей не выполняется условие (12) и возможно геометрооптическое описание поля) наличие случайных неоднородностей может привести к выполнению (12), т. е. к появлению случайных каустик. Эти каустики, как известно [12], ответственны за сильные флуктуации радиоволн. Таким образом, для адекватного описания распространения радиоволн в случайно-неоднородной ионосфере необходим метод, учитывающий как регулярные, так и случайные каустики.

В качестве асимптотических методов, описывающих волновое поле в окрестности каустики, можно взять метод Маслова [13] или метод интерференционного интеграла [14, 15]. В обоих этих методах асимптотическое интегральное представление получается в результате Фурье-преобразования либо по начальной координате (в интерференционном интеграле), либо по точке наблюдения (в методе Маслова). Обычно решения в виде Фурье-преобразования подставляются в волновое уравнение (1), а полученное уравнение для Фурье-образа решается в геометрооптическом приближении. Можно, однако, воспользоваться другим, более простым методом [13], основанным на том, что соотношения между различными асимптотическими интегральными представлениями могут быть найдены с помощью метода стационарной фазы. В этом подходе Фурье-образы соответствующих интегральных представлений получаются путем применения метода стационарной фазы к интегралу Фурье от выражения для поля, полученного в геометрооптическом приближении. Здесь мы применим такой подход при выводе смешанного интегрального представления для двухточечного пропагатора в случайно-неоднородной среде с плоскослоистым фоном, которое имеет вид

$$g = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} g_2(s_-, s_+, x_{s_-}, x_+) \exp\left\{ik\left[s_+ x_- - s_- x_{s_+}\right]\right\} \mathrm{d}s_+ \mathrm{d}s_-, \tag{13}$$

где

$$g_2 = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x_{s_+}, x_{s_-}, x_+, x_-, z, z_s) \exp\left\{ik\left[s_+ x_- - s_- x_{s_+}\right]\right\} \mathrm{d}x_{s_+} \mathrm{d}x_-. \tag{14}$$

В (13), (14) введены новые независимые переменные

$$x_+ = (x_1 + x_2)/2, \qquad x_{s_+} = (x_{s_1} + x_{s_2})/2, \qquad x_- = x_1 - x_2, \qquad x_{s_-} = x_{s_1} - x_{s_2}. \tag{15}$$

Чтобы получить асимптотику Фурье-образа, подставим в (14) вместо пропагатора его геометрооптическое приближение (5):

$$\begin{aligned} g_2 \;&=\; \frac{1}{8\pi} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} A(s_1, s_2) \sqrt{\left|\frac{\partial s_1}{\partial x_+} \frac{\partial s_2}{\partial x_+}\right|} \exp\Biggl\{ik\Biggl[\Phi_1(x_+ + 0{,}5x_-, x_{s_+} + 0{,}5x_{s_-}) - \\ &- \Phi_2(x_+ - 0{,}5x_-, x_{s_+} - 0{,}5x_{s_-}) - s_+ x_- + s_- x_{s+}\Biggr]\Biggr\} \mathrm{d}x_- \mathrm{d}x_{s_+}. \end{aligned} \tag{16}$$

Вычислим двукратный интеграл (16) методом стационарной фазы и подставим результат вычисления в (13):

$$\begin{aligned} g \;&\approx\; (4\pi)^{-2} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} A(s_+, s_-) \exp\Biggl\{ik\Biggl[s_-(\bar{x}_+(z_s) - x_{s+}) - s_+(\bar{x}_-(z) - x_-) + \\ &+ \bar{\Phi}_1 - \bar{\Phi}_2 + \tilde{\Phi}_1 - \tilde{\Phi}_2\Biggr]\Biggr\} \mathrm{d}s_- \mathrm{d}s_+. \end{aligned} \tag{17}$$

Здесь

$$\begin{aligned} A^{-2}(s_+, s_-) \;&=\; \left[1 - \left(s_+ + \frac{s_-}{2}\right)^2\right] \left[1 - \left(s_+ - \frac{s_-}{2}\right)^2\right] \left(1 - \frac{1}{4} \frac{\partial^2(\tilde{\Phi}_1 - \tilde{\Phi}_2)}{\partial x_+^2} \frac{\partial^2(\bar{\Phi}_1 - \bar{\Phi}_2)}{\partial s_+^2}\right) \approx \\ &\approx\; \left[1 - \left(s_+ + \frac{s_-}{2}\right)^2\right] \left[1 - \left(s_+ - \frac{s_-}{2}\right)^2\right] \end{aligned} \tag{18}$$

и с учетом (3) использована теория возмущений для вычисления Φ_n:

$$\Phi_n = \bar{\Phi}_n + \tilde{\Phi}_n, \tag{19}$$

где

$$\bar{\Phi}_n = \int\limits_{z_s}^{z} \sqrt{\bar{\epsilon}(\bar{x}(z'), z')} \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}\bar{x}_n}{\mathrm{d}z'}\right)^2} \mathrm{d}z', \tag{20}$$

$$\tilde{\Phi}_n = \frac{1}{2}\int\limits_{z_{\rm s}}^{z} \frac{\tilde{\epsilon}(\bar{x}_n(z'),z')}{\sqrt{\bar{\epsilon}(\bar{x}(z'),z')}} \sqrt{1+\left(\frac{{\rm d}\bar{x}_n}{{\rm d}z'}\right)^2}\,{\rm d}z'. \tag{21}$$

Интегрирование в (20), (21) выполняется вдоль невозмущенных лучей, то есть решений $\{\bar{x}_n(z'),\bar{s}_n(z')\}$ системы (9), (10) при $\epsilon=\bar{\epsilon}$, удовлетворяющих смешанным граничным условиям

$$\frac{1}{2}\left[\bar{x}_1(z')+\bar{x}_2(z')\right]|_{z'=z} \equiv \bar{x}_+(z)=x_+, \tag{22}$$

$$\frac{1}{2}\left[\bar{s}_1(z')+\bar{s}_2(z')\right]|_{z'=z} \equiv \bar{s}_+(z)=s_+, \tag{23}$$

$$\left[\bar{x}_1(z')-\bar{x}_2(z')\right]|_{z'=z_{\rm s}} \equiv x_-(z_{\rm s})=x_{{\rm s}_-}, \tag{24}$$

$$\left[\bar{s}_1(z')-\bar{s}_2(z')\right]|_{z'=z_{\rm s}} \equiv s_-(z_{\rm s})=s_-. \tag{25}$$

Обратим внимание на то, что при учете приближения (18) подынтегральное выражение в (17) не содержит флуктуаций амплитуд парциальных волн (вне показателя экспоненты) в рассматриваемом здесь первом приближении теории возмущений. Это говорит о том, что область применимости выражения (17) в статистических задачах шире области применимости результатов метода интерференционного интеграла и метода Маслова. Приближение (18) обосновано при малых s_-, т. е. при малоугловом рассеянии. Кроме того, оно справедливо при малых значениях $\partial^2\bar{\Phi}_n/\partial^2 s_+^2 \equiv \bar{x}'(s)$, что имеет место в исследуемом здесь случае распространения радиоволн в окрестности МПЧ.

При анализе распространения волн через случайно-неоднородный слой с однородным фоном ($\bar{\epsilon}=1$), что отвечает трансионосферному распространению радиоволн на высоких частотах, выражение (17) переходит в следующее:

$$\begin{aligned} g \;=\; & (4\pi)^{-2}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\Biggl\{ik\Biggl[s_-(x_+-x_{{\rm s}_+})+s_+(x_--x_{{\rm s}_-})-s_-s_+(z-z_{\rm s})+ \\ & +0{,}5\int\limits_{z_{\rm s}}^{z}[\tilde{\epsilon}(x_++s_+(z'-z_{\rm s})+[s_-(z'-z_{\rm s})+x_{{\rm s}_-}]/2,z')- \\ & -\tilde{\epsilon}(x_++s_+(z'-z_{\rm s})-[s_-(z'-z_{\rm s})+x_{{\rm s}_-}]/2,z')]{\rm d}z'\Biggr]\Biggr\}{\rm d}s_-{\rm d}s_+. \end{aligned} \tag{26}$$

В работе [8] показано, что это выражение согласуется с методом плавных возмущений и методом фазового экрана. Поэтому можно ожидать, что (17) является обобщением этих методов на случай неоднородного фона. Используем полученное асимптотическое интегральное представление (17) в расчетах статистических моментов поля ионосферной радиоволны.

2. СРЕДНЯЯ ИНТЕНСИВНОСТЬ ИОНОСФЕРНОЙ РАДИОВОЛНЫ

При выводе формулы для средней интенсивности мы полагаем в (17) $x_{s_1} = x_{s_2}$, $x_1 = x_2$ и усредняем полученное выражение с учетом гауссовой статистики фаз парциальных волн:

$$\langle I \rangle \equiv \left\langle |U|^2 \right\rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g_{\mathrm{p}}(s_+)\,\mathrm{d}s_+, \tag{27}$$

где “угловой"спектр $g_{\mathrm{p}}(s_+)$ определяется выражением

$$\begin{aligned} g_{\mathrm{p}}(s_+) \;&=\; (4\pi)^{-2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} A\left(s_+, s_-\right) \exp\Bigl\{ ik \left[\bar{\Phi}_1 - \bar{\Phi}_2 + s_-(\bar{x}_+(z_{\mathrm{s}}) - x_{\mathrm{s}_+}) - s_+ \bar{x}_-(z)\right] - \\ &- 0{,}5k^2 \left\langle \left[\tilde{\Phi}_1 - \tilde{\Phi}_2\right]^2 \right\rangle \Bigr\} \mathrm{d}s_-. \end{aligned} \tag{28}$$

Область, существенная для интегрирования в (28), при одномодовом распространении лежит в окрестности $s_- = 0$. Учитывая это, можно на высоких частотах (больших k) вычислить (28) асимптотически:

$$g_{\mathrm{p}}(s_+) = \frac{2\pi}{kl_{\mathrm{c}}} A_0 \,\mathrm{Ai}\left(\frac{\bar{x}(s_+) - x_{\mathrm{s}_+}}{l_{\mathrm{c}}} + \frac{\sigma_{x_{\mathrm{s}}}^4}{4l_c^4}\right) \exp\left\{\frac{\sigma_{x_{\mathrm{s}}}^2}{2l_{\mathrm{c}}^2}\left(\frac{\bar{x}(s_+) - x_{s_+}}{l_{\mathrm{c}}} + \frac{\sigma_{x_{\mathrm{s}}}^4}{6l_{\mathrm{c}}^4}\right)\right\}. \tag{29}$$

Здесь $\mathrm{Ai}(x)$ — функция Эйри, $A_0 = A(s_+, 0)$,

$$\sigma_{x_{\mathrm{s}}}^2 = -\frac{1}{4}\int\limits_{z_{\mathrm{s}}}^{z} \frac{\bar{\Psi}_\epsilon''\left(x^{(1)}(\eta), \eta\right)}{\bar{\epsilon}(\eta)} \left[\frac{\partial x^{(1)}(\eta)}{\partial s_+} - \frac{\partial x^{(1)}(z)}{\partial s_+}\right]^2 \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}x^{(1)}}{\mathrm{d}\eta}\right)^2}\mathrm{d}\eta, \tag{30}$$

$$\bar{\Psi}_\epsilon''(x, \eta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \phi_\epsilon(\chi_\perp, 0, x, \eta)\chi_\perp^2\,\mathrm{d}\chi_\perp, \tag{31}$$

$\phi_\epsilon(\chi_\perp, \chi_\|, x, \eta)$ — спектр квазиоднородного случайного поля флуктуаций диэлектрической проницаемости $\tilde{\epsilon}(\rho_\perp, \rho_\|)$ в локальных лучевых координатах $\rho_\|, \rho_\perp$, построенных соответственно вдоль и поперек луча $x^{(1)}(\eta)$, выходящего из точки $x^{(1)}(z_{\mathrm{s}}) = x_{\mathrm{s}_1} = x_{\mathrm{s}_2}$ с начальным “импульсом"$s^{(1)}(z_{\mathrm{s}}) = s_+$.

$$l_{\mathrm{c}}^3 = \frac{1}{8k^2}\frac{\partial^2 \bar{x}_{\mathrm{s}_+}}{\partial s_+^2}(s_+). \tag{32}$$

Когда в области, существенной для интегрирования (27), дисперсия лучей превышает квадрат ширины прикаустической зоны, т. е.

$$\sigma_{x_{\mathrm{s}}}^2 \gg l_{\mathrm{c}}^2(s_+), \tag{33}$$

выражение (29) упрощается:

$$g_{\mathrm{p}}(s_+) = \frac{\sqrt{2\pi}\,A_0}{k\,\sqrt{\sigma_{x_{\mathrm{s}}}^2}} \exp\left\{-\frac{(\bar{x}_{\mathrm{s}}(s_+) - x_{\mathrm{s}})^2}{2\sigma_{x_{\mathrm{s}}}^2}\right\}. \tag{34}$$

Аналогичное выражение получалось ранее методом интерференционного интеграла [4, 6]. Различие заключается в определении величины $\sigma_{x_{\mathrm{s}}}^2$. Результаты работ [4, 6] могут быть получены из (27), (34), если в квадратной скобке подынтегрального выражения в (30) мы отбросим второе слагаемое. Заметим, что на каустике это слагаемое равно нулю, отсюда — согласие результатов исследований статистических характеристик ионосферных радиоволн в окрестности МПЧ методом интерференционного интеграла [4, 6] с результатами, полученными в настоящей работе.

На рис. 1 приведены результаты численного моделирования относительных изменений средней интенсивности ионосферной радиоволны в зависимости от дальности D для различных параметров случайных неоднородностей. В качестве модели регулярной диэлектрической проницаемости ионосферы здесь использована ее экспоненциальная зависимость от высоты z [6]. Параметры слоя при этом составляли: высота максимума электронной концентрации $z_{\mathrm{m}} = 300$ км, полутолщина $y_{\mathrm{m}} = 100$ км, критическая частота $f_{\mathrm{c}} = 7$ МГц. Расчеты проведены для рабочей частоты $f = 17$ МГц. Сплошная кривая на рис. 1 соответствует случаю слабых флуктуаций, когда параметры неоднородностей (для простоты здесь использована гауссова модель спектра неоднородностей с радиусом корреляции l и дисперсией σ_ϵ^2) составляли $l = 1$ км, $\sigma_\epsilon^2 = 10^{-7}$. Пунктирная кривая отвечает случаю сильных флуктуаций ($l = 1$ км, $\sigma_\epsilon^2 = 10^{-6}$). Нетрудно заметить, что по сравнению со слабым рассеянием, когда характерны осцилляции поля, связанные с интерференцией лучей вблизи каустики, в условиях сильного рассеяния отмечается более гладкое поведение интенсивности поля, а в области тени она значительно возрастает. При этом учет флуктуаций амплитуд парциальных волн не вносит существенных искажений в известную картину поведения средней интенсивности поля в окрестности каустики, рассчитанную в приближении интерференционного интеграла [4, 6].

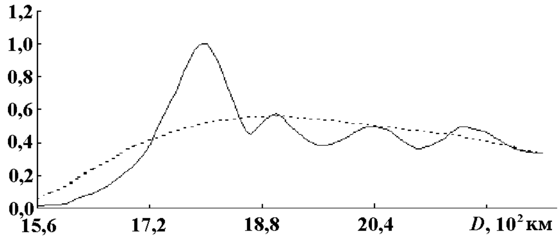

Рис. 1

3. ФЛУКТУАЦИИ ИНТЕНСИВНОСТИ ИОНОСФЕРНЫХ РАДИОВОЛН

Флуктуации интенсивности обычно описываются индексом мерцаний (относительной дисперсией интенсивности)

$$\beta^2 = \frac{\langle |U|^4 \rangle}{(\langle |U|^2 \rangle)^2} - 1. \tag{35}$$

Здесь помимо средней интенсивности $\langle |U|^2 \rangle$, исследованной выше, необходимо знать средний квадрат интенсивности $\langle |U|^4 \rangle$. Для его определения возведем в квадрат (17) и, полагая $x_{\mathrm{s}-} = x_- = 0$, усредним:

$$\begin{aligned} \Big\langle |U|^4 \Big\rangle \;\; = \;\; & (4\pi)^{-4} \iiiint\limits_{-\infty}^{+\infty} A(s_{1+}, s_{1-}) A(s_{2+}, s_{2-}) \exp\Bigg\{ ik \Big[s_{1-} (\bar{x}_+(z_{\mathrm{s}}, s_{1+}, s_{1-}) - x_{\mathrm{s}}) + \\ & + s_{2-} (\bar{x}_+(z_{\mathrm{s}}, s_{2+}, s_{2-}) - x_{\mathrm{s}}) - s_{1+} \bar{x}_-(z, s_{1+}, s_{1-}) - s_{2+} \bar{x}_-(z, s_{2+}, s_{2-}) + \\ & + \bar{\Phi}_1(s_{1+}, s_{1-}) - \bar{\Phi}_2(s_{1+}, s_{1-}) + \bar{\Phi}_1(s_{2+}, s_{2-}) - \bar{\Phi}_2(s_{2+}, s_{2-}) \Big] - \\ & - 0{,}5 k^2 B(s_{1+}, s_{1-}, s_{2+}, s_{2-}) \Bigg\} \mathrm{d}s_{1+} \mathrm{d}s_{1-} \mathrm{d}s_{2+} \mathrm{d}s_{2-}, \end{aligned} \tag{36}$$

где

$$B(s_{1+}, s_{1-}, s_{2+}, s_{2-}) = \left\langle \left[\tilde{\Phi}_1(s_{1+}, s_{1-}) - \tilde{\Phi}_2(s_{1+}, s_{1-}) + \tilde{\Phi}_1(s_{2+}, s_{2-}) - \tilde{\Phi}_2(s_{2+}, s_{2-}) \right]^2 \right\rangle. \tag{37}$$

Используя (36), (37), исследуем индекс мерцаний (35) при слабых и сильных флуктуациях фазы.

В режиме слабых флуктуаций в подынтегральном выражении (37) заменим $\exp\{-k^2B/2\}$ на $1 - k^2B/2$ и подставим в (36). Слагаемые полученной суммы четырехкратных интегралов вычисляются с помощью метода стационарной фазы и его обобщений. В результате получаем асимптотическое выражение для индекса мерцаний, которое в освещенной области имеет вид

$$\beta^2 = k^2\pi \int\limits_{z_\mathrm{s}}^{z} \frac{d\eta}{\sqrt{\bar\epsilon(\eta)}\,\sqrt{\bar\epsilon(\eta)-s_\mathrm{c}^2}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \phi_\epsilon(\chi_\perp, 0, \bar x(\eta, s_\mathrm{c}), \eta) \left[1 - \cos\left(\chi_\perp^2 \Lambda(\eta, s_\mathrm{c})/k\right)\right] \mathrm{d}\chi_\perp, \tag{38}$$

где

$$\Lambda(\eta, s) = \frac{\partial x^{(0)}(\eta, s)}{\partial s} \frac{\partial x^{(1)}(\eta, s)}{\partial s} \left[\frac{\partial x^{(0)}(z, s)}{\partial s}\right]^{-1} \left[1 + \left(\frac{\mathrm{d}x^{(0)}(\eta, s)}{\mathrm{d}\eta}\right)^2\right]^{-1}, \tag{39}$$

s_c — определяется из условия “пристрелки"траектории

$$x^{(1)}(z_\mathrm{s}, s_\mathrm{c}) = x_\mathrm{s}. \tag{40}$$

В формуле (39) используются две невозмущенные траектории: $x^{(0)}(\eta, s)$, выходящая из излучателя, и $x^{(1)}(\eta, s)$, приходящая в точку наблюдения. Нетрудно убедиться, что для плоской волны ($z_\mathrm{s} \to -\infty$) в среде с однородным фоном ($\bar\epsilon \equiv 1$) выражение (38) переходит в известные результаты метода плавных возмущений.

При большой дисперсии фазы аналогично работам [16, 17] вычислим (37) асимптотически методом [18] и получим

$$\left\langle |U|^4 \right\rangle \approx \frac{8}{k}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} A_0^2(s) \exp\left\{-\frac{(\bar x_\mathrm{s}(s) - x_\mathrm{s})^2}{2\sigma_{x_\mathrm{s}}^2}\right\} R(s)\, \mathrm{d}s, \tag{41}$$

где

$$\begin{aligned} R(s) \;&=\; \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{b_1(s)b_2(s)}{p(s)}\Bigg\{\ln p(s) \exp\left(-\alpha^2(s)\right) - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty \ln z \exp\left(-z^2\right) \cos\left(2\alpha(s)z\right) \mathrm{d}z \,- \\ &- \int\limits_0^\infty \ln u \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left[\sqrt{\Psi_1(u,s)} \exp\left(-\alpha^2 \Psi_1(u,s)\right) + \right. \\ &\left. + \sqrt{\Psi_2(u,s)} \exp\left(-\alpha^2 \Psi_2(u,s)\right)\right] \mathrm{d}u\Bigg\}, \end{aligned} \tag{42}$$

$$\begin{aligned} b_{1,2}^2 \;&=\; -2\int\limits_{z_\mathrm{s}}^{z} \frac{\mathrm{d}\eta}{\bar\epsilon(\eta)} \bar\Psi_\epsilon''(0,\eta) \left(\frac{\partial x^{(0,1)}(\eta,s)}{\partial s}\right)^2 \left[1 + \left(\frac{\mathrm{d}x^{(1)}}{\mathrm{d}\eta}\right)^2\right]^{-1/2} \times \\ &\times \left\{\int\limits_{z_\mathrm{s}}^{z} \frac{d\eta}{\bar\epsilon(\eta)} \bar\Psi_\epsilon''''(0,\eta) \left(\frac{\partial x^{(0,1)}}{\partial s}\right)^4 \left[1 + \left(\frac{\mathrm{d}x^{(1)}}{\mathrm{d}\eta}\right)^2\right]^{-3/2}\right\}^{-1}, \end{aligned} \tag{43}$$

$$p^2(s) = \frac{k^2 b_1^2 b_1^2}{8} \int\limits_{z_\mathrm{s}}^{z} \frac{\mathrm{d}\eta}{\bar\epsilon(\eta)} \bar\Psi_\epsilon''''(0,\eta) \left(\frac{\partial x^{(0)}(\eta,s)}{\partial s}\frac{\partial x^{(1)}(\eta,s)}{\partial s}\right)^2 \left[1 + \left(\frac{\mathrm{d}x^{(1)}}{\mathrm{d}\eta}\right)^2\right]^{-3/2}, \tag{44}$$

$$\alpha^2(s) = \frac{k^2 b_1^2 b_2^2}{p^2(s)} \left(\frac{\partial x^{(1)}(z_\mathrm{s}, s)}{\partial s} \right)^2, \tag{45}$$

$$\Psi_{1,2}^{-1}(u,s) = \frac{k^2 b_{1,2}^2}{p^2 u^2} \int\limits_{z_\mathrm{s}}^{z} \frac{\mathrm{d}\eta}{\bar{\epsilon}(\eta)} \left[-\bar{\Psi}_\epsilon''(0,\eta) + \bar{\Psi}_\epsilon''(b_2 u, \eta) \right]^{-1} \left[1 + \left(\frac{\mathrm{d}x^{(1)}}{\mathrm{d}\eta} \right)^2 \right]^{-1/2} \left(\frac{\mathrm{d}x^{(1,2)}}{\mathrm{d}s} \right)^{-2}, \tag{46}$$

$$\bar{\Psi}_\epsilon''''(x,\eta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \phi_\epsilon(\chi_\perp, 0, x, \eta) \chi_\perp^4 \, \mathrm{d}\chi_\perp. \tag{47}$$

Используя в (35) выражения (41), (42) и (27), (28), можно вычислить индекс мерцаний ионосферной радиоволны в окрестности, ниже и выше МПЧ. В освещенной области (ниже МПЧ) выражения (41) и (27) вычислим с помощью метода перевала и получим следующее выражение для индекса мерцаний:

$$\begin{aligned} \beta^2 = {} & \frac{2\alpha(s_\mathrm{c})}{\sqrt{\pi}} \ln p(s_\mathrm{c}) \exp\left\{ -\alpha^2(s_\mathrm{c}) \right\} - \frac{4\alpha(s_\mathrm{c})}{\pi} \int\limits_0^\infty \ln z \exp\Bigl(-z^2 \Bigr) \cos\Bigl(2\alpha(s_\mathrm{c}) z \Bigr) \, \mathrm{d}z - \\ & - \frac{2\alpha(s_\mathrm{c})}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\infty \ln u \, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} \left[\sqrt{\Psi_1(u, s_\mathrm{s})} \exp\Bigl(-\alpha^2(s_\mathrm{s}) \Psi_1(u, s_\mathrm{c}) \Bigr) + \right. \\ & \left. + \sqrt{\Psi_2(u, s_\mathrm{s})} \exp\Bigl(-\alpha^2(s_\mathrm{s}) \Psi_2(u, s_\mathrm{c}) \Bigr) \right] \mathrm{d}u - 1, \end{aligned} \tag{48}$$

где s_c — решение уравнения (40).

На рис. 2 приведены результаты численного моделирования индекса мерцаний для следующих ионосферных условий: $z_\mathrm{m} = 300$ км, $y_\mathrm{m} = 100$ км, $f_\mathrm{c} = 7$ МГц. Расчеты проведены для рабочей частоты $f = 17$ МГц. Параметры неоднородностей были выбраны следующие: $l = 1$ км, $\sigma_\epsilon^2 = 10^{-6}$. Пунктирной линией на графиках изображена зависимость дисперсии интенсивности верхнего луча от дальности при односкачковом распространении, а сплошной линией — дисперсия интенсивности для нижнего луча. Характерной особенностью обеих кривых является то, что индекс мерцаний как верхнего луча,так и нижнего луча близок к насыщению вблизи МПЧ, вдали же от МПЧ дисперсия интенсивности верхнего луча также стремится к единице, тогда как для нижнего луча она монотонно убывает. Такое поведение объясняется геометрией трассы распространения радиоволн и моделью ионосферных неоднородностей, в которой предполагалось, что интенсивность неоднородностей пропорциональна концентрации электронов в фоновой ионосфере.

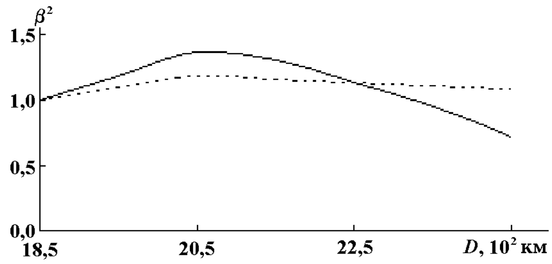

Рис. 2

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой статье мы показали эффективность применения смешанного интегрального представления при решении задач ионосферного распространения коротких радиоволн. Для простоты изложения здесь мы ограничились двумерной задачей. Обобщение рассмотренного подхода на трехмерную задачу почти очевидно, хотя и более громоздко.

Интересно отметить, что приведенные здесь результаты исследования статистических характеристик ионосферных радиоволн хорошо согласуются с полученными ранее [4, 6, 16, 17] методом интерференционного интеграла, который в задаче с однородным фоном плохо согласуется [8] как с методом фазового экрана, так и с методом плавных возмущений. Это, по-видимому, связано с уменьшением относительной роли френелевских дифракционных эффектов при большой дисперсии фазы и со специфической структурой лучевого поля в окрестности регулярной каустики, которой нет в задаче о фазовом экране.

Так как результаты предлагаемого подхода в среде с однородным фоном переходят в результаты метода фазового экрана и метода плавных возмущений, можно рассматривать этот подход как обобщение упомянутых методов на задачи с неоднородным фоном, позволяющий, в частности, исследовать различные эффекты случайных ионосферных неоднородностей в окрестности МПЧ. Приведенные результаты численного моделирования были получены для гауссового спектра неоднородностей. Однако согласие нашего подхода с методом фазового экрана говорит о возможности исследования и других видов неоднородностей, в том числе и турбулентных, при условии, что занимаемый ими объем лежит достаточно далеко от источника и приемника, что довольно часто имеет место при ионосферном распространении коротких радиоволн.

Нужно, однако, заметить, что численное моделирование с использованием общих выражений вида (27), (28) или (36), (37) в общем случае сталкивается со сложной задачей интегрирования быстроосциллирующих функций. Поэтому целесообразно использовать различные асимптотики полученных выражений (например (27)–(34), (41)–(48)). Наши результаты численного моделирования были здесь ограничены случаем гауссового спектра неоднородностей и большой дисперсии фазы, т. е. при выполнении условия (33). В дальнейшем предполагается проведение исследования поведения КВ поля и в других ситуациях.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант РФФИ № 97–02–16903).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гершман Б. Н., Ерухимов Л. М., Яшин Ю. Я. Волновые явления в ионосфере и космической плазме. — М.: Наука, 1984.
2. Альбер Я. И., Ерухимов Л. М., Рыжов Ю. А., Урядов В. П. // Изв. вуз. Радиофизика. 1968. Т. 11, № 9. С. 1371.
3. Алимов В. А., Рахлин А. В. // Изв. вуз. Радиофизика. 1996. Т. 39, № 9. С. 1114.
4. Тинин М. В. // Изв. вуз. Радиофизика. 1983. Т. 26, № 1. С. 36.
5. Пермитин Г. В., Фрайман А. А. // Известия вузов. Радиофизика. 1969. Т. 12, № 12. С. 1836.
6. Tinin M. V. et al. // Radio Sci. 1992. V. 27, № 1. P. 245.
7. Зернов Н. Н. // Радиотехника и электроника. 1994. Т. 39, № 2. С. 241.
8. Tinin M. V. // Waves in Random Media. 1998. V. 8, № 4. P. 329.
9. Mazar R. // J. Opt. Soc. Am. 1990. V. A7, № 1. P. 34.
10. Mazar R., Gozani J., Tur M. // J. Opt. Soc. Am. 1985. V. A2. P. 2152.
11. Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И. Геометрическая оптика неоднородных сред. — М.: Наука, 1980.

12. Кравцов Ю. А. // ЖЭТФ. 1968. Т. 55, вып. 3(9). С. 798.
13. Кравцов Ю. А. // Акуст. журн. 1968. Т. 14, № 1. С. 1.
14. Орлов Ю. И. // Труды МЭИ. 1972. Вып. 119. С. 82.
15. Авдеев В. Б. и др. // Изв. вуз. Радиофизика. 1988. Т. 31, № 11. С. 1279.
16. Tinin M. V., Kulizhsky A. V. // Waves in Random Media. 1994. V. 4, № 1. P. 83.
17. Kulizhsky A. V., Tinin M. V. // Waves in Random Media. 1994. V. 4, № 2. P. 149.
18. Якушкин И. Г. // Изв. вуз. Радиофизика. 1974. Т. 17, № 9. С. 1350.

Научно-исследовательский
институт прикладной физики,
Иркутский государственный
университет, Россия

Поступила в редакцию
26 апреля 1999 г.

FLUCTUATIONS OF VHF FIELD IN THE VICINITY OF THE MAXIMUM USABLE FREQUENCY (SHADOW-ZONE BOUNDARY)

M. V. Tinin, N. T. Afanasiev, and A. V. Kulizhsky

We apply the mixed integral representation of a two-point propagator to describe propagation of waves in randomly irregular medium with background refraction. Combining the ideas of the Maslov method and the interference integral method we obtain the results that generalize the Rytov method to the case of smoothly inhomogeneous background. Moreover, the proposed approach, which describes both weak and strong fluctuations, accords with the phase screen method and generalize this method to the case of extended media with regularly inhomogeneous background. Using the proposed method, we perform numerical simulations of the average intensity and scintillation index near the shadow-zone boundary in the case of oblique ionospheric propagation of VHF radio waves.

УДК 533.951

О ПЕРЕНОСЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ПОД УГЛОМ К ВНЕШНЕМУ МАГНИТНОМУ ПОЛЮ В СТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ ПЛАЗМЕ С КРУПНОМАСШТАБНЫМИ СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

В. Г. Гавриленко, С. С. Петров, А. А. Семериков, А. В. Сорокин

Методом численного решения уравнения переноса излучения, а также путём статистического моделирования Монте-Карло исследуется угловой спектр нормальной электромагнитной волны, распространяющейся под углом к внешнему магнитному полю в хаотической плазме с соударениями. Обнаружено, что в случае распространения волны под углом к внешнему магнитному полю анизотропия поглощения приводит к ряду специфических эффектов, названных в статье аномальным ростом флуктуаций.

ВВЕДЕНИЕ

Из литературы, в том числе из монографий [1, 2], известно, что в хаотически неоднородных средах флуктуации параметров распространяющихся волн зависят не только от рассеивающих, но и от поглощающих свойств среды.

При этом влияние диссипации может быть неоднозначным: наряду с “классическим"случаем, когда поглощение ослабляет пространственные гармоники волны, рассеянные под большими углами, и тем самым ослабляет ее флуктуации [1–3], возможен и другой случай, когда диссипация вызывает более быстрый рост мощности рассеянной компоненты поля относительно нерассеянной и аномальное (по сравнению с аналогичной средой без диссипации) нарастание флуктуаций.

В работах авторов [4–7] было показано, что необходимым условием аномального роста флуктуаций в среде с крупномасштабными неоднородностями является асимметрия задачи, одной из причин которой может быть наклонное освещение границы среды, когда прошедшие в нее волны являются неоднородными [4–6]. Другая ситуация, способная породить аномальный рост флуктуаций, возникает при асимметрии затухания рассеянных волн, обусловленной анизотропией мнимой части комплексного показателя преломления. Практически интересным примером такой ситуации является турбулентная столкновительная плазма, помещенная во внешнее магнитное поле, под углом к которому распространяется электромагнитная волна.

Параметры углового распределения рассеянного излучения в последнем случае рассматривались аналитически в малоугловом приближении [7], лишь качественно отражающем суть явления, и методом моментов [8], позволяющим при определенных условиях приближенно разомкнуть бесконечную систему связанных уравнений для моментов углового распределения и численно решить некоторые из них. Однако ввиду приближенного и фрагментарного характера обоих этих подходов целостной картины формирования углового спектра волны, распространяющейся под углом к внешнему магнитному полю в хаотической плавнонеоднородной столкновительной плазме, до сих пор не создано.

Численному исследованию одного из вариантов этой задачи и посвящена настоящая статья.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОД РЕШЕНИЯ

1. Будем интересоваться переносом излучения одной из нормальных волн в полупространстве $z > 0$, занятом столкновительной плазмой, находящейся во внешнем магнитном поле (рис. 1). В исходной плоскости $z = 0$ волновой вектор электромагнитного излучения направлен вдоль оси z. Выберем систему координат таким образом, чтобы вектор напряженности внешнего магнитного поля $\vec{H}_0$ лежал в плоскости yz, при этом α_0 — угол между вектором $\vec{H}_0$ и осью z. Хаотические неоднородности плазмы полагаем крупномасштабными, статистически однородными и изотропными, так что показатель рассеяния плазмы σ и ее индикатриса рассеяния $\chi(\gamma)$ постоянны всюду в интересующей нас области $z > 0$, причем индикатриса нормирована следующим образом [1]:

$$\oint \chi(\vec{s}\,\vec{s}\,')\,\mathrm{d}\Omega(\vec{s}\,') = 4\pi, \tag{1}$$

где $\vec{s} = (s_x, s_y, s_z)$ и $\vec{s}\,' = (s'_x, s'_y, s'_z)$ — единичные векторы, $\mathrm{d}\Omega(\vec{s}\,')$ — телесный угол в направлении $\vec{s}\,'$.

Пользуясь условием плавности неоднородностей, описываем распространение отдельной нормальной волны уравнением переноса излучения без учета хаотической деполяризации и взаимодействия нормальных волн [9]:

$$s_z \frac{\partial I(z,\vec{s})}{\partial z} + \varepsilon(\vec{s}) I(z,\vec{s}) = \frac{\sigma}{4\pi} \oint I(z,\vec{s}\,')\chi(\vec{s}\,\vec{s}\,')\,\mathrm{d}\Omega(\vec{s}\,'). \tag{2}$$

Здесь $I(z,\vec{s})$ — лучевая интенсивность нормальной волны, $\varepsilon(\vec{s}) = \sigma + \kappa(\vec{s})$, $\kappa(\vec{s})$ — показатель поглощения плазмы [1, 9], зависящий от направления.

Предполагая, что в условиях плавности неоднородностей обратное рассеяние (рассеянные волны с $s_z < 0$) остается слабым, ограничимся в правой части уравнения (2) интегрированием по "передней полусфере"$s_z > 0$. Тогда уравнение переноса (2) вместе с начальным условием

$$I(0,\vec{s}) = I_0 \delta(s_x)\delta(s_y), \tag{3}$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция, образуют эволюционную задачу.

Для ее численного решения мысленно разобьем хаотически неоднородную плазму на элементарные слои, перпендикулярные к оси z, толщина Δz которых значительно меньше длины экстинкции в плазме: $\sigma\,\Delta z \ll 1$ Интегрируя по z уравнение (2) в пределах одного элементарного слоя, получаем:

$$\begin{gathered} I(z,\vec{s}) = I(z-\Delta z,\vec{s}) \exp\left(-\frac{\varepsilon(\vec{s})\,\Delta z}{s_z}\right) + \\ + \frac{\sigma}{4\pi s_z} \int\limits_{z-\Delta z}^{z} \mathrm{d}z' \exp\left(-\frac{\varepsilon(\vec{s})\,(z-z')}{s_z}\right) \int \mathrm{d}\Omega(\vec{s}\,')\,\chi(\vec{s}\,\vec{s}\,')\,I(z',\vec{s}\,'). \end{gathered} \tag{4}$$

Согласно (4) интенсивность $I(z,\vec{s})$ излучения на выходе из слоя толщины Δz представляет собой сумму интенсивности $I(z-\Delta z,\vec{s})$ падающего на слой излучения, ослабленного поглощением и рассеянием, и добавки к нему — интенсивности рассеянного в слое поля. Поскольку уменьшение толщины слоя Δz уменьшает и величину этой добавки, при $z \to 0$ вычислять интегральный член в (4) можно без ее учета, полагая в нем приближенно

$$I(z',\vec{s}\,') \approx I(z-\Delta z,\vec{s}\,') = \exp\left(-\frac{\varepsilon(\vec{s}\,')\,(z'-(z-\Delta z))}{s'_z}\right).$$

После взятия интеграла по z' вместо интегрального уравнения (4) получаем рекуррентное соотношение между интенсивностями излучения $I_n(\vec{s})$ на выходе из n-го элементарного слоя и $I_{n-1}(\vec{s})$ на входе в него:

$$\begin{aligned} &I_n(\vec{s}) = I_{n-1}(\vec{s}) \exp\left(-\frac{\varepsilon(\vec{s})\,\Delta z}{s_z}\right) + \\ &+\frac{\sigma}{4\pi} \int \mathrm{d}\Omega(\vec{s}\,')\chi(\vec{s}\,\vec{s}\,')\,I_{n-1}(\vec{s}\,') \frac{s'_z[\exp(-\varepsilon(\vec{s}\,')\Delta z/s'_z) - \exp(-\varepsilon(\vec{s})\,\Delta z/s_z)]}{\varepsilon(\vec{s})s'_z - \varepsilon(\vec{s}\,')s_z}, \\ &I_0(\vec{s}) = I_0\delta(s_x)\,\delta(s_y). \end{aligned} \tag{5}$$

Соотношение (5) представляет собой рекуррентный алгоритм расчета лучевой интенсивности нормальной волны в хаотической плазме, пригодный для компьютерной реализации. Очевидно, последовательный расчет эволюции поля в каждом элементарном слое позволяет вычислить угловой спектр излучения после прохождения им трассы длиной $z = N\Delta z$:

$$I(z, \vec{s}) \equiv I_N(\vec{s}).$$

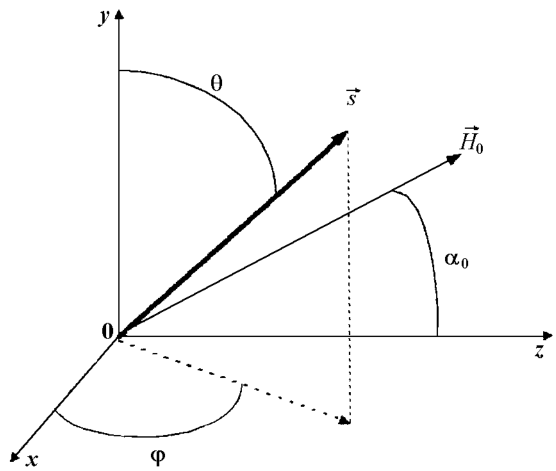

Рис. 1

Для дальнейшего анализа удобно перейти к безразмерным переменным

$$\Lambda(\vec{s}) = \frac{\sigma}{\varepsilon(\vec{s})} \tag{6}$$

аналогу известной в гидрооптике вероятности выживания фотона [1], а также к нормированной на длину экстинкции толщине элементарного слоя

$$\eta = \sigma\,\Delta z. \tag{7}$$

Вместо декартовых координат вектора волновой нормали $\vec{s}$ введем полярный θ и азимутальный φ углы этого вектора. Полярную ось совместим с осью y (рис. 1), тогда θ — угол между ней и вектором $\vec{s}$, причем $0 \le \theta \le \pi$. Азимутом φ будем считать угол между осью x и проекцией вектора $\vec{s}$ на плоскость xz. Волны, рассеянные вперед, отвечают азимутальным углам волновой нормали $0 \le \varphi \le \pi$. Наконец, перейдем от полярного угла θ к его косинусу: $\mu = \cos\theta$, так что $s_x = \sqrt{1-\mu^2}\cos\varphi$, $s_y = \mu$, $s_z = \sqrt{1-\mu^2}\sin\varphi$. С учетом всех этих преобразований рекуррентная формула расчета лучевой интенсивности нормальной волны в безразмерных параметрах приобретает вид

$$\begin{aligned} I_n(\mu,\varphi) &= I_{n-1}(\mu,\varphi)\exp\left(-\frac{\eta}{s_z\Lambda}\right) + \\ &+\frac{1}{4\pi s_z}\int\limits_{-1}^{1} \mathrm{d}\mu' \int\limits_{0}^{\pi} \mathrm{d}\varphi'\,\chi(\gamma)\,I_{n-1}(\mu',\varphi') \frac{\left[\exp\left(-\frac{\eta}{s'_z\Lambda'}\right) - \exp\left(-\frac{\eta}{s_z\Lambda}\right)\right]}{\left(\frac{1}{s_z\Lambda} - \frac{1}{s'_z\Lambda'}\right)}, \\ I_0(\mu,\varphi) &= I_0\delta(\mu)\delta(\varphi - \frac{\pi}{2}), \end{aligned} \tag{8}$$

где

$$s'_z = \sqrt{1-\mu'^2}\sin\varphi', \quad \Lambda = \Lambda(\mu,\varphi), \quad \Lambda' = \Lambda(\mu',\varphi'),$$

γ — угол между векторами $\vec{s}$ и $\vec{s}\,'$, вычисляемый из соотношения

$$\cos\gamma = \mu\mu' + \sqrt{1-\mu^2}\,\sqrt{1-\mu'^2}\cos(\varphi - \varphi'), \tag{9}$$

а индикатриса рассеяния нормирована следующим образом (в пренебрежении обратным рассеянием):

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-1}^{1} \mathrm{d}\mu \int\limits_{0}^{\pi} \mathrm{d}\varphi\,\chi\Big[\arccos\Big(\sqrt{1-\mu^2}\sin\varphi\Big)\Big] = 1. \tag{10}$$

Для компьютерного расчета лучевой интенсивности нужно определить конкретный вид функции $\Lambda(\mu, \varphi)$, определяемый зависимостью показателя поглощения нормальной волны от направления ее распространения в столкновительной статистически однородной плазме, и индикатрисы рассеяния $\chi(\gamma)$ на хаотических неоднородностях.

Известно [10], что в общем случае в плазме при учете соударений и наличии внешнего магнитного поля дисперсионное уравнение имеет достаточно сложный вид. В статье [8] приближенный расчет моментов углового распределения проводился для нескольких характерных для высокочастотных волн в плазме частных случаев. Имея в виду, что целью настоящей работы является исследование эволюции углового распределения мощности поля в рассеивающей среде с анизотропным поглощением, ограничимся далее простейшим (в смысле зависимости от направления) случаем сильного магнитного поля (в литературе такую плазму иногда называют замагниченной).

При этом из общего выражения для комплексного показателя преломления нормальных волн, распространяющихся под углом α к магнитному полю $\vec{H}_0$, приведенного в [10], можно вычислить показатель поглощения $\kappa(\vec{s})$ обыкновенной волны (у которой вектор электрического поля лежит в плоскости, образованной магнитным полем и волновым вектором) и соответствующую ему величину обратной вероятности выживания фотона:

$$\frac{1}{\Lambda(\vec{s})} = 1 + \frac{\nu}{\sigma c}\frac{V\sin^2\alpha}{\sqrt{1-V}\,(1-V\cos^2\alpha)^{3/2}}\,. \tag{11}$$

В этом выражении $V = \omega_{\rm p}^2/\omega^2$, $\nu_{\text{эфф}}$ и $\omega_{\rm p}$ — соответственно эффективная частота соударений электронов с нейтральными частицами и плазменная частота электронов, ω — частота распространяющейся волны, c — скорость света. Выражение (11) справедливо, если $\omega \ll \omega_H$, где ω_H — гирочастота электронов, и

$$\nu_{\text{эфф}} \ll \omega\,(1 - V\cos^2\alpha).$$

Угол α между волновым вектором $\vec{s}$ и магнитным полем $\vec{H}_0$, фигурирующий в соотношении (11), легко вычисляется:

$$\cos\alpha = \mu\sin\alpha_0 + \sqrt{1-\mu^2}\,\sin\varphi\cos\alpha_0. \tag{12}$$

Рассеивающие свойства хаотической плазмы будем задавать гауссовой индикатрисой

$$\chi(\gamma) = C\exp\left(-\frac{\gamma^2}{2\gamma_0^2}\right), \tag{13}$$

где C — нормировочный коэффициент, вычисляемый из условия (10).

Как известно, одномасштабная модель неоднородностей, описываемых индикатрисой (13), имеет ограниченное сходство с реальной плазменной турбулентностью. Однако ввиду сложности зависимости статистических характеристик излучения от различных значимых для рассматриваемой задачи факторов выяснение специфики формирования углового распределения поля в анизотропно поглощающей среде в настоящей статье проведено в рамках этой простейшей одномасштабной модели.

2. В целях проверки адекватности и точности результатов наряду с численным решением уравнения переноса было проведено также альтернативное исследование углового спектра нормальной волны путем статистического моделирования ее распространения методом Монте-Карло. При этом случайным образом моделировались длина свободного пробега фотона между двумя последовательными актами рассеяния, имитирующая экстинкцию поля в случайной среде, и хаотическое изменение направления движения фотона при каждом рассеянии, описываемое функцией распределения вида (13), имитирующей индикатрису рассеяния. Между актами рассеяния учитывалось анизотропное затухание фотонов в плазме, уменьшающее их интенсивность (“вес") [11] с показателем поглощения $\kappa(\vec{s})$, отвечающим формуле (11).

На фиксированных расстояниях от источника путем накопления статистики зарегистрированных фотонов и последующей дискретизации строилась функция распределения их суммарной интенсивности по углам прихода, имитирующая угловое распределение поля.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ

Рассмотрим формирование углового распределения мощности поля на примере рассеяния нормальной волны в плазме с индикатрисой рассеяния вида (13), ширина которой $\gamma_0^2 = 0{,}003$. Пусть угол наклона магнитного поля $\alpha_0 = 15°$, а входящая в (11) величина $V = 0{,}7$.*

Наиболее интересные явления, вызванные поглощением в плазме, проявляются в переходном режиме [1], когда угловое распределение излучения претерпевает интенсивную перестройку своей структуры. Составить представление об указанных явлениях помогают следующие рисунки.

На графиках рис. 2 и 3 показаны серии зависимостей $I(\theta,\varphi)|_{\varphi=\pi/2}$, нормированных к одинаковому уровню в максимуме, для $\sigma z = 3$; 4; 5 и 12 в плоскости yz, образованной вектором магнитного поля и нормалью к границе среды, позволяющие проследить основные черты эволюции углового распределения. Расчет массивов $I(\theta,\varphi)$ проводился на эквидистантной сетке с 96 узлами по каждой из переменных μ и φ, оптическая толщина элементарного слоя была принята равной $\eta = 0{,}02$. Рис. 2 и 3 построены для плазмы с различными поглощающими свойствами: для кривых на рис. 2 параметр $\nu_{\text{эфф}}/(\sigma c) = 5$, для кривых на рис. 3 поглощение значительно более слабое: $\nu_{\text{эфф}}/(\sigma c) = 0{,}5$ (условно будем называть такую плазму бесстолкновительной).

Полную зависимость от двух переменных углового распределения волны, прошедшей сквозь слой плазмы оптической толщины $\sigma z = 3$, иллюстрируют зависимости изолинии $I(\theta,\varphi)$ на рис. 4а и 4б, построенные соответственно для случаев сильного и слабого поглощения в плазме (значения параметра $\nu_{\text{эфф}}/(\sigma c)$ соответствуют выбранным на рис. 2 и 3). Изолинии отмечают уровни углового распределения мощности с 2-процентным интервалом от его максимального значения (внешняя линия — 2-процентный уровень яркости, следующая — 4-процентный и т. д.).

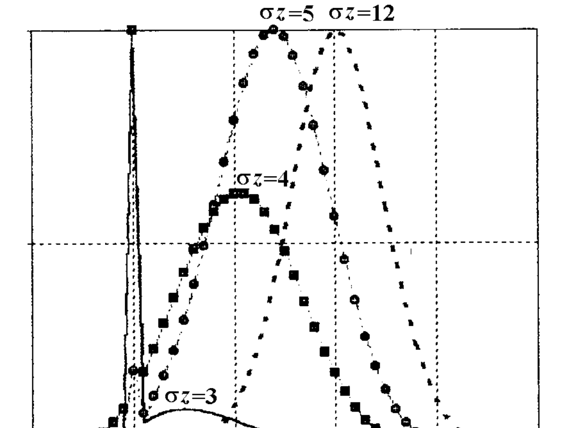

Рис. 2

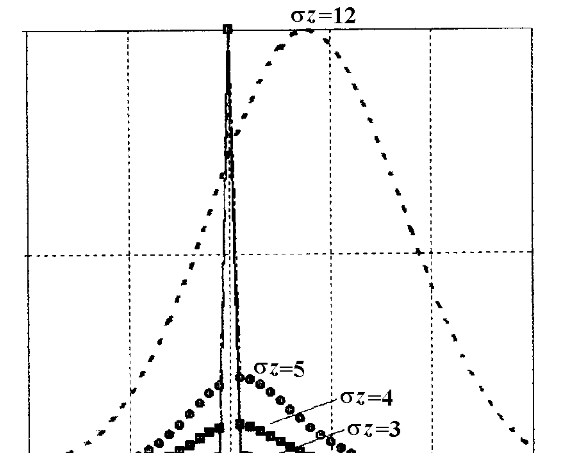

Рис. 3

* Данные значения параметров выбраны такими же, как и в работе [8], для сравнения описываемых ниже результатов полного решения задачи переноса излучения с приближенным малоугловым расчетом моментов углового спектра [8].

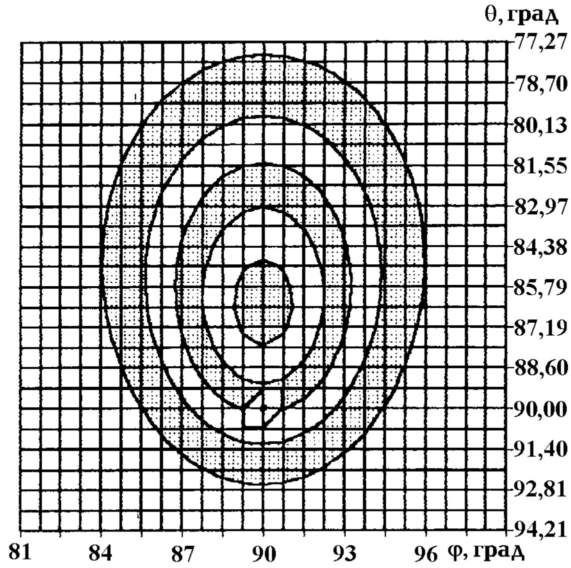

Рис. 4а

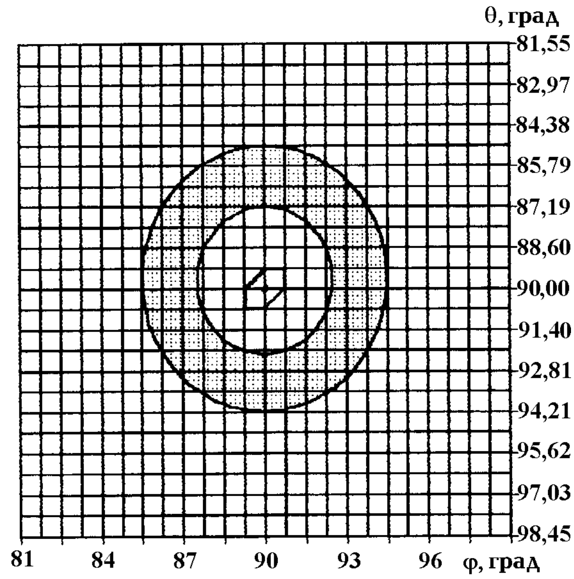

Рис. 4б

В целях более точного количественного анализа углового распределения мощности волны на рис. 5 показана эволюция некоторых усредненных характеристик указанного распределения. Сплошные линии на этом рисунке относятся к плазме с соударениями ($\nu_{\text{эфф}}/(\sigma c) = 5$), а пунктирные — к бесстолкновительной плазме ($\nu_{\text{эфф}}/(\sigma c) = 0{,}5$).

Ширина углового распределения в поперечной к магнитному полю плоскости xz может характеризоваться среднеквадратическим значением x-проекции единичного вектора

$$\langle s_x^2 \rangle = \frac{\int\limits_{-1}^{1} \mathrm{d}\mu \int\limits_{0}^{\pi} \mathrm{d}\varphi \, (s_x(\mu,\varphi))^2 \, I(z,\mu,\varphi)}{\int\limits_{-1}^{1} \mathrm{d}\mu \int\limits_{0}^{\pi} \mathrm{d}\varphi \, I(z,\mu,\varphi)} \,. \tag{14}$$

Его зависимости от расстояния нормированного на длину экстинкции σz изображены на рис. 5 жирными линиями 1 и 3 без маркеров (масштаб по вертикальной оси увеличен в 1000 раз).

В плоскости yz ввиду сдвига максимума углового спектра волны его моменты удобно выражать в следящем базисе. Пусть оси y' и z' нового, следящего базиса поворачиваются вместе с угловым распределением, причем ось z' ориентирована вдоль его “центра тяжести"(последний легко находится по рассчитанной зависимости $I(\mu,\varphi)$; пусть $\alpha_{\max}$ — угол между направлением центра тяжести распределения и осью z). Тогда моменты n-го порядка углового спектра в плоскости yz могут быть рассчитаны по формуле

$$\langle s_y'^n \rangle = \frac{\int\limits_{-1}^{1} \mathrm{d}\mu \int\limits_{0}^{\pi} \mathrm{d}\varphi \, (s_y'(\mu,\varphi))^n \, I(z,\mu,\varphi)}{\int\limits_{-1}^{1} \mathrm{d}\mu \int\limits_{0}^{\pi} \mathrm{d}\varphi \, I(z,\mu,\varphi)} \,, \tag{15}$$

где $s_y' = s_y \cos\alpha_{\max} - s_z \sin\alpha_{\max}$ — компонента единичного вектора в новом базисе.

Ввиду пренебрежимо малой величины первого момента $\langle s'_y \rangle \approx 0$ ширину углового спектра в плоскости yz характеризует средний квадрат $\langle s'^2_y \rangle$, а асимметрию углового спектра — третий момент $\langle s'^3_y \rangle$. Зависимости $\langle s'^2_y \rangle$ от оптической толщины пройденной трассы отражены на рис. 5 жирными линиями 2 и 4, отмеченными квадратными маркерами; масштаб по вертикали тот же, что и для кривых 1 и 3. Тонкая линия 5 относится к третьему моменту $\langle s'^3_y \rangle$ в плазме с соударениями, причем масштаб по оси ординат увеличен по сравнению с реальным в 100 000 раз.

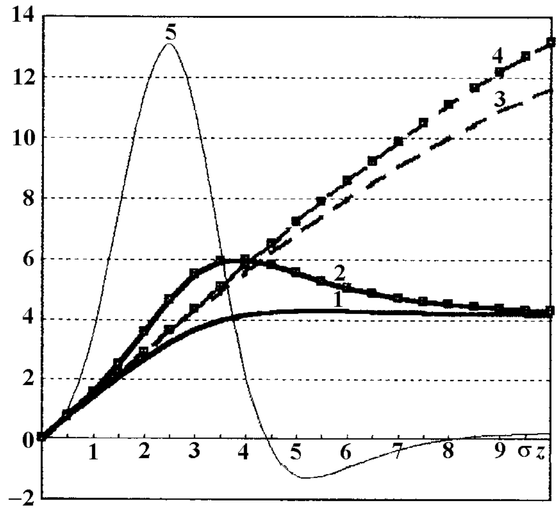

Рис. 5

На рис. 2 и 3 острый пик угловых распределений при $\theta = 90^\circ$ соответствует нерассеянной (регулярной) компоненте поля. Многократное рассеяние в условиях асимметричного затухания, имеющего минимум в направлении магнитного поля ($\theta = 75^\circ$, $\varphi = 90^\circ$), приводит к диффузии углового спектра и его развороту в этом направлении.

Анализируя рис. 2—5, можно сделать вывод о том, что до некоторого пройденного волной расстояния, в рассматриваемом случае приблизительно равного $\sigma z \approx 3$, поглощение в известном смысле интенсифицирует процесс рассеяния. Указанный эффект мы будем ниже кратко называть аномальным ростом (АР), а диапазон расстояний от источника, на которых он наблюдается, — областью АР. Отметим тесно связанные между собой последствия этого интересного явления:

1. Усиление рассеянного поля относительно нерассеянного, очевидное из сравнения рис. 2 и 3 (точнее, усиление имеет место для энергий рассеянной и нерассеянной компонент). Так, после прохождения слоя толщиной $\sigma z = 5$ в плазме с соударениями (рис. 2) нерассеянных фотонов практически не остается, тогда как в бесстолкновительной плазме (рис. 3) нерассеянная компонента еще вполне заметна.

2. Более быстрая диффузия углового распределения мощности волны в поглощающей среде. Сравнение кривых 2 и 4 на рис. 5 показывает, что в интервале пройденных волной расстояний $1 \leq \sigma z \leq 3$ угловой спектр в плоскости yz расплывается быстрее в плазме с более частыми соударениями.

Заметим, что оба эти проявления АР были аналитически предсказаны в [7] в малоугловом приближении (разумеется, лишь качественно).

3. Значительная и быстро растущая асимметрия углового распределения в поглощающей среде. Резкий подъем кривой 5 на рис. 5 в указанном интервале расстояний связан с тем, что угловой спектр более энергично диффундирует в область положительных s'_y, т. е. в сторону направления магнитного поля. Это вполне подтверждает и явно асимметричная форма зависимости $I(\theta,\varphi)|_{\varphi=\pi/2}$ при $\sigma z = 3$ на рис. 2, более полого спадающая в сторону меньших углов, и асимметричная вытянутость на этой глубине изолиний углового распределения $I(\theta,\varphi)$, приведенных на рис. 4.

При удлинении трассы, пройденной волной, перечисленные хаотизирующие эффекты поглощающей среды, как видно из рисунков, быстро сходят на нет. Уже при $\sigma z > 4$ практически пропадает нерассеянное поле, угловое распределение мощности в плоскости yz начинает сужаться (ширина его проходит через максимум — это также тесно связанное с АР явление), стремясь к своей асимптотической форме, асимметрия его меняет знак и постепенно исчезает.

В поперечной к магнитному полю плоскости xz наблюдается иная картина: поглощение в плазме при любых расстояниях от источника ограничивает диффузию углового спектра (ср. кривые 1 и 3 на рис. 5). Из-за различного воздействия поглощения в перпендикулярных плоскостях yz и xz угловое распределение в области АР получается вытянутым в плоскости, содержащей вектор магнитного поля и нормаль к границе плазмы, что и показывают изолинии на рис. 4. В пределе — глубинном режиме — вытянутость исчезает ($\langle s_y'^2\rangle \to \langle s_x^2\rangle$ на рис. 5). Подчеркнем ранее не отмечавшийся эффект немонотонного роста ширины углового спектра в перпендикулярной к магнитному полю плоскости XZ в плазме с соударениями: ширина достигает максимума при некоторой толщине слоя хаотической среды и затем уменьшается до своего глубинного значения. Хотя на рис. 5 это явление едва заметно, расчеты показывают, что при определенных параметрах задачи (например при большем угле наклона магнитного поля) оно оказывается достаточно существенным.

Рис. 6–7 иллюстрируют сопоставление результатов двух описанных в разделе 1 методов расчета углового распределения волны в столкновительной плазме ($\nu_{\text{эфф}}/(\sigma c) = 5$) с указанными выше параметрами. На рис. 6 сплошная линия показывает зависимость $I(\theta,\varphi)|_{\varphi=\pi/2}$ при $\sigma z = 4$, рассчитанную на основе уравнения переноса (8), а пунктирная линия — на основе метода Монте-Карло. Очевидно удовлетворительное совпадение результатов обоих методов расчета. Некоторое завышение нерассеянного поля в методе статистического моделирования относительно результатов решения уравнения переноса, по-видимому, происходит из-за того, что в ходе дискретизации накопленной статистики углов прихода в процедуре Монте-Карло в состав нерассеянного поля неизбежно попадают также фотоны, рассеянные на малые углы (меньшие шага дискретизации).

На рис. 7 сравниваются моменты углового распределения $\langle s_y'^2\rangle$ (линии 1 и 3) и $\langle s_y'^3\rangle$ (линии 2 и 4) в плоскости магнитного поля yz, причем сплошные линии изображают зависимости этих моментов от расстояния σz, найденные из решения уравнения переноса, а пунктирные — из метода статистического моделирования. Масштаб вертикальной оси для вторых и третьих моментов выбран тем же, что и на рис. 5. В отношении второго момента углового спектра $\langle s_y'^2\rangle$, как видно из рис. 7, оба метода дают близкие результаты. Что касается третьего момента, то здесь имеет место лишь качественное согласие результатов решения уравнения переноса и метода Монте-Карло. Заметное расхождение расчетов $\langle s_y'^3\rangle$ можно объяснить тем, что асимметрия спектра — гораздо более тонкая характеристика, чем его ширина. Кроме того, будучи пропорциональной кубическому корню из $\langle s_y'^3\rangle$, асимметрия углового распределения, рассчитанная альтернативными способами, будет различаться гораздо меньше, чем величина третьего момента. В целом можно говорить о хорошем соответствии результатов двух методов расчета, и сложно отдать предпочтение какому-либо из них.

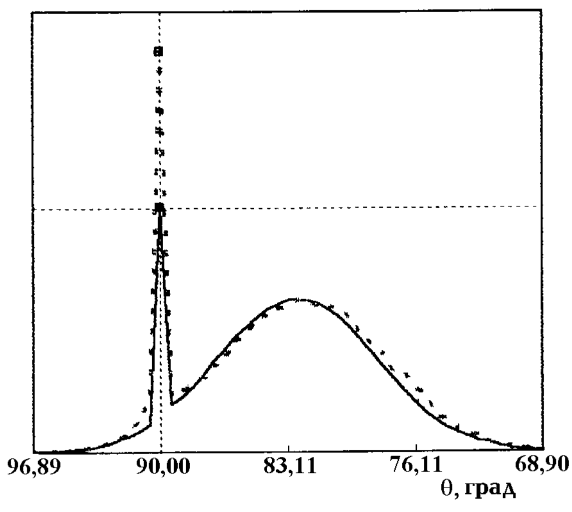

Рис. 6

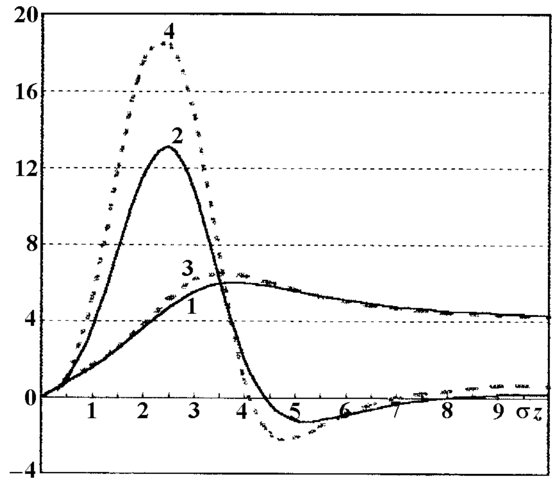

Рис. 7

Основные закономерности переноса излучения, как показывает численное исследование, качественно сохраняются и при небольшом варьировании условий распространения волны. При увеличении угла наклона магнитного поля явления, о которых шла речь выше, становятся гораздо контрастнее.

Угловое распределение в плоскости магнитного поля диффундирует в области АР значительно быстрее и с большей асимметрией, однако протяженность этой области несколько сокращается. Более резким оказывается и последующее сужение углового спектра (при $\alpha_0 = 22^\circ$ второй момент $\langle s_y'^2 \rangle$ уменьшается в глубинном режиме более чем в два раза по отношению к своему максимальному значению). Асимптотическое (глубинное) угловое распределение волны, как это и должно быть [1], получается аксиально симметричным относительно направления магнитного поля независимо от угла его наклона.

В плазме с более узкой индикатрисой рассеяния все описанные эффекты проявляются на бо́льших расстояниях от источника. Аналогичным образом сказывается на результатах и ослабление поглощения в среде (точнее, уменьшение параметра $\nu_{\text{эфф}}/(\sigma c)$). В обоих случаях асимметрия углового распределения поля проявляется в меньшей степени.

Важно отметить, что при произвольной комбинации параметров задачи наблюдается жесткая корреляция трех отмеченных выше особенностей эффекта АР.

Описанное выше исследование эволюции углового распределения мощности поля в общих чертах подтверждает расчеты его моментов [8], полученные значительно более ограниченным по своим возможностям методом. В отличие от [8] анализ, приведенный в настоящей статье, позволяет детально проследить и понять процесс формирования углового спектра излучения.

Согласно уравнению (8) каждый элементарный слой преобразует падающее на него поле с лучевой интенсивностью $I_{n-1}(\mu, \varphi)$ двояким образом: во-первых, искажает угловое распределение интенсивности и смещает его “центр тяжести"вследствие анизотропного поглощения; во-вторых, рассеивает падающее поле. Эти два эффекта входят в (8) аддитивно и выражаются двумя соответствующими слагаемыми. Составляя ряд по кратности рассеяния элементарными слоями, можно показать, что ширина углового распределения будет расти за счет диффузии в сторону магнитного поля более быстро (по сравнению со средой без поглощения) до тех пор, пока остается достаточно существенной нерассеянная компонента поля. При дальнейшем удалении от источника угловое распределение мощности излучения сужается вследствие приближения к направлению магнитного поля, вблизи которого ослабляется не только само поглощение волны, но и асимметрия его зависимости от угла α. Результаты решения уравнения переноса при различных условиях распространения волны вполне подтверждают эти качественные рассуждения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе впервые последовательно рассмотрена задача об угловом распределении поля в анизотропно поглощающей среде с крупномасштабными неоднородностями. Проведенный анализ позволил выяснить и понять, при каких условиях и параметрах распространения волны проявляется эффект усиления флуктуаций вследствие анизотропного поглощения (названный выше аномальным ростом). В предшествующих работах различными приближенными методами этот эффект был обнаружен и исследован лишь качественно. Установлено, что два альтернативных метода решения задачи переноса излучения — метод прямого решения уравнения переноса и метод статистического моделирования — имеют приблизительно сходные вычислительные возможности в смысле быстродействия и точности получаемых результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Оптика океана. Т. 1. / Под ред. Монина А. С. — М.: Наука, 1983.
2. Долин Л. С., Левин И. М. Справочник по теории подводного видения. — Л.: Гидрометеоиздат, 1991.
3. Ремизович В. С., Шехмаметьев Ш. А. // Изв. вуз. Радиофизика. 1990. Т. 33, № 2. С. 202.
4. Гавриленко В. Г., Тамойкин В. В. // Изв. вуз. Радиофизика. 1980. Т. 23, № 6. С. 739.

5. Гавриленко В. Г., Петров С. С. // Изв. вуз. Радиофизика. 1985. Т. 28, № 11. С. 1408.
6. Gavrilenko V. G., Petrov S. S. // Waves in Random Media. 1992. V. 2. P. 273.
7. Гавриленко В. Г., Петров С. С. // Тезисы докладов IV Всесоюзной конференции по взаимодействию электромагнитных излучений с плазмой. — Ташкент, 1985. — С. 21.
8. Аистов А. В., Гавриленко В. Г. // Физика плазмы. 1996. Т. 22, № 8. С. 712.
9. Долгинов А. З., Гнедин Ю. А., Силантьев Н. А. Распространение и поляризация излучения в космической среде. — М.: Наука, 1979.
10. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. — М.: Наука, 1967.
11. Ермаков С. М., Михайлов Г. А. Статистическое моделирование. — М.: Наука, 1982.

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, г. Н. Новгород, Россия

Поступила в редакцию 15 апреля 1999 г.

ON THE RADIATIVE TRANSFER AT A FINITE ANGLE TO EXTERNAL MAGNETIC FIELD IN COLLISIONAL PLASMA WITH LARGE-SCALE IRREGULARITIES

V. G. Gavrilenko, S. S. Petrov, A. A. Semerikov, and A. V. Sorokin

Using Monte-Carlo simulations or numerical solution of radiation transfer equation in random collisional plasma, we analyze angular spectrum of a normal electromagnetic wave propagating at a finite angle to external magnetic field. It was found that anisotropy of absorption in the case of oblique wave propagation with respect to the external magnetic field leads to some specific effects which we call the anomalous growth of fluctuations.

УДК 538.69; 533.951.8

ОСОБЕННОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ПРОВОДЯЩЕЙ МАГНИТНОЙ СРЕДЕ

В. Л. Фалько, С. И. Ханкина, В. М. Яковенко

Исследованы геликон-спиновые волны (гибридные поляритоны) в ферромагнитной проводящей среде в сильном постоянном магнитном поле, определены области их существования. Показано, что пространственная дисперсия тензора проводности приводит к бесстолкновительному затуханию этих волн, если они распространяются под углом к магнитному полю. В отсутствие бесстолкновительного затухания (волна распространяется вдоль магнитного поля) определены условия усиления гибридных поляритонов в постоянном электрическом поле.

1. Одной из проблем современной физики твердого тела и ее многочисленных технических приложений является исследование электродинамических свойств различных магнитоупорядоченных сред: ферритов, антиферромагнетиков, магнитных полупроводников и т. д. [1, 2]. В макроскопической электродинамике проводящие магнитные материалы принято рассматривать как плазменную среду, в которой проявляются эффекты, связанные с коллективными свойствами электронного газа и с колебаниями магнитного момента. Характерные частоты этих колебаний, вообще говоря, находятся в разных диапазонах. По этой причине можно раздельно рассматривать электростатические (плазмоны) и магнитостатические (магноны) колебания. Внешнее постоянное магнитное поле существенным образом изменяет свойства электрической и магнитной подсистем твердого тела, при этом в сильном магнитном поле могут выполняться условия для их взаимодействия, когда характерные частоты электростатических и магнитостатических колебаний оказываются близкими друг к другу. В частности, в ряде работ теоретически и экспериментально исследовались условия возникновения и особенности распространения связанных геликон-спиновых волн [3]. Однако недостаточно исследованы области существования этих волн и различные механизмы их затухания. Между тем, электроны проводимости являются одним из важнейших источников диссипации колебаний, т. к. диссипативная часть тензора проводимости дает вклад в затухание связанной волны (недиссипативная часть, холловская проводимость, определяет спектр геликонов в некомпенсированных металлах и полупроводниках).

Диссипативная проводимость обусловлена двумя различными по своей природе механизмами [4]. Один из них, релаксационный, определяется эффективной частотой столкновений электронов с рассеивателями, другой, бесстолкновительный, возникает в условиях, когда в проводящей среде существенна пространственная дисперсия диэлектрической проницаемости, и связан с преобразованием энергии электромагнитного поля в энергию поступательного движения носителей заряда.

Малость диссипативной части тензора проводимости по сравнению с холловской проводимостью обеспечивает относительно слабое затухание геликонов. Отметим, что бесстолкновительное затухание зависит от угла между вектором внешнего магнитного поля $\mathbf{H}_0$ и направлением распространения волны и исчезает при $\mathbf{k} \parallel \mathbf{H}_0$, где $\mathbf{k}$ — волновой вектор.

В настоящем сообщении исследуются области существования и бесстолкновительный механизм затухания связанных геликон-спиновых волн (гибридных поляритонов).

2. Теоретическое исследование магнитных колебаний и волн в проводящих средах основывается на совместном решении уравнений Максвелла, уравнений движения магнитного момента $\mathbf{M}$ и кинетического уравнения для электронов проводимости. Характер решений и особенности физических явлений определяются соотношениями между размерами системы, глубиной проникновения электромагнитного поля в среду (или длиной волны) и длиной свободного пробега электронов проводимости. Нас интересуют эффекты, связанные с существованием слабозатухающих волн, когда среда обладает аномальной прозрачностью и ее можно считать безграничной. Использование плазменной модели ферромагнитного проводника означает, что необходимо учесть, вообще говоря, временную и пространственную дисперсии тензоров электропроводности $\sigma_{ik}(\omega, \mathbf{k})$ и магнитной проницаемости $\mu_{ik}(\omega, \mathbf{k})$, где ω — частота волны. Все переменные величины в рассматриваемой системе уравнений будем считать пропорциональными $\exp(i\mathbf{kr} - i\omega t)$.

Рассмотрим предельный случай, когда длина электромагнитной волны велика по сравнению с ларморовским радиусом R электрона в магнитном поле:

$$kR \ll 1, \qquad \Omega \gg \{\omega, \nu\}, \tag{1}$$

где Ω — электронная циклотронная частота, ν — частота столкновений электронов с рассеивателями. При этом предполагаем пространственную неоднородность вдоль вектора $\mathbf{H}_0$ достаточно сильной, так что

$$k_z v \gg |\nu - i\omega|, \tag{2}$$

где v — характерная скорость электрона в направлении $\mathbf{H}_0$. Система координат выбрана следующим образом: ось z параллельна вектору $\mathbf{H}_0$, вектор $\mathbf{k}$ расположен в плоскости $x = 0$, образуя угол θ с осью z. В такой системе координат бесстолкновительный механизм диссипации дает вклад только в компоненту $\sigma_{xx}(\omega, \mathbf{k})$ тензора проводимости [4]. В проводнике с двумя типами носителей заряда компоненты σ_{ik}, определяющие спектр и затухание волны, имеют вид

$$\sigma_{xy} = -\sigma_{yx} = -\frac{nec}{H_0}, \quad \sigma_{yy} = \frac{nec}{H_0}\,\frac{\nu - i\omega}{\Omega}, \quad \sigma_{xx} = \sigma_{yy} + a\frac{nec}{H_0}k_z R \operatorname{tg}^2\theta. \tag{3}$$

Здесь e — абсолютная величина заряда электрона, c — скорость света, $n = n_\mathrm{e} - n_\mathrm{h}$, n_e и n_h — концентрации электронов и дырок; константа a определяется статистикой электронного газа:

$$\begin{aligned} &a = 3\pi/8 && \text{для статистики Ферми,} \\ &a = (3/2)\sqrt{\pi/2} && \text{для максвелловского распределения.} \end{aligned} \tag{4}$$

Если пренебречь пространственной дисперсией магнитной проницаемости μ_{ik} и направить поле $\mathbf{H}_0$ вдоль оси магнитной анизотропии среды, элементы тензора $\mu_{ik}(\omega)$ можно представить в виде [5]

$$\mu_{xx} = \mu_{yy} = \mu = 1 + \frac{\omega_\mathrm{g}\omega_\mathrm{m} - i\omega\gamma}{\omega_\mathrm{g}^2 - \left(\omega + i\dfrac{\omega_\mathrm{g}}{\omega_\mathrm{m}}\gamma\right)^2}\,, \quad \mu_{xy} = -\mu_{yx} = i\frac{\omega\omega_\mathrm{m}}{\omega_\mathrm{g}^2 - \left(\omega + i\dfrac{\omega_\mathrm{g}}{\omega_\mathrm{m}}\gamma\right)^2}\,, \tag{5}$$

$$\mu_{zz} = 1, \quad \omega_\mathrm{g} = gH_\mathrm{eff}, \qquad \omega_\mathrm{m} = 4\pi g M,$$

где g — магнитомеханическое отношение, $H_\mathrm{eff} = H_0 + \beta M$, β — константа анизотропии, $\gamma = 4\pi/\tau$, τ — время релаксации магнитного момента. Как показано в работе [6], пренебрежение пространственной дисперсией магнитной проницаемости (5) справедливо в широких интервалах по частоте и величине магнитного поля, что допускает различные предположения о величине k.

Известно, что в сильном магнитном поле (1) в проводящей среде с тензором проводимости вида (3) и скалярной величиной магнитной проницаемости $\mu = 1$ распространяются геликоны с законом дисперсии [4]

$$\omega_\mathrm{h}(k) = \frac{k^2c^2\Omega}{\omega_0^2}|\cos\theta|\left(1 - i\frac{a}{2}kR\sin^2\theta\right), \tag{6}$$

записанным с учетом только бесстолкновительного затухания. Здесь $\omega_0^2 = 4\pi e^2|n|/m$ — плазменная частота, m — эффективная масса электрона. В магнитной непроводящей среде с заданным тензором магнитной проницаемости (5) и скалярной величиной диэлектрической проницаемости $\varepsilon = \mathrm{const}$ существуют магнитные волны — магноны, частота и затухание которых описывается формулой [5]

$$\omega_{\mathrm{s}} = \left[\omega_{\mathrm{g}}(\omega_{\mathrm{g}} + \omega_{\mathrm{m}} \sin^2\theta)\right]^{1/2} - i\gamma\left(\frac{\omega_{\mathrm{g}}}{\omega_{\mathrm{m}}} + \frac{1}{2}\sin^2\theta\right). \tag{7}$$

В магнитной проводящей среде взаимодействие геликонов и магнонов приводит к возникновению колебаний нового типа (гибридных поляритонов), область существования и характер распространения которых значительно отличается от “чистых"(невзаимодействующих) мод. Дальнейшее исследование относится к электромагнитной волне, у которой, как и у геликона, компонента поля E_z равна нулю, а остальные компоненты электрического поля и все составляющие магнитного поля отличны от нуля.

3. Рассмотрим случай, когда волна распространяется вдоль магнитного поля ($\mathbf{k} \parallel \mathbf{H}_0$), при этом бесстолкновительный механизм диссипации отсутствует (см. (3)). Из полной системы уравнений получим, что в проводящей магнитной среде существуют гибридные волны с циркулярной поляризацией, которые описываются следующими дисперсионными уравнениями:

$$k_1^2(\omega) = i\frac{4\pi\omega}{c^2}(\sigma_{xx} - i\sigma_{xy})(\mu - i\mu_{xy}), \qquad E_x - iE_y = 0; \tag{8}$$

$$k_2^2(\omega) = i\frac{4\pi\omega}{c^2}(\sigma_{xx} + i\sigma_{xy})(\mu + i\mu_{xy}), \qquad E_x + iE_y = 0. \tag{9}$$

Подставляя в (8), (9) компоненты тензоров σ_{ik} (3) и μ_{ik} (5), получим

$$k_1^2(\omega) = \frac{4\pi\omega}{c}\frac{|n|e}{H_0}\left(-\mathrm{sign}\, n + i\frac{\nu}{\Omega}\right)\frac{(\omega_{\mathrm{g}} - \omega)(\omega_{\mathrm{g}} + \omega_{\mathrm{m}} - \omega) + i\gamma\omega + \gamma^2 A(\omega)}{(\omega_{\mathrm{g}} - \omega)^2 + \gamma^2 B(\omega)}, \tag{10}$$

где A и B — безразмерные положительные функции частоты:

$$A(\omega) = \frac{2\omega^2\omega_{\mathrm{g}}^2}{\omega_{\mathrm{m}}^2(\omega_{\mathrm{g}} + \omega)^2}\left(1 + \frac{\omega_{\mathrm{m}}}{\omega_{\mathrm{g}}} + \frac{\omega_{\mathrm{g}}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{\mathrm{m}}(\omega_{\mathrm{g}} + \omega)}{2\omega^2}\right), \qquad B(\omega) = \frac{2\omega_{\mathrm{g}}^2(\omega_{\mathrm{g}}^2 + \omega^2)}{\omega_{\mathrm{m}}^2(\omega_{\mathrm{g}} + \omega)^2},$$

$$k_2^2(\omega) = \frac{4\pi\omega}{c}\frac{|n|e}{H_0}\left(\mathrm{sign}\, n + i\frac{\nu}{\Omega}\right)\left(\frac{\omega_{\mathrm{g}} + \omega_{\mathrm{m}} + \omega}{\omega_{\mathrm{g}} + \omega} + i\frac{\gamma\omega}{(\omega_{\mathrm{g}} + \omega)^2}\right). \tag{11}$$

Область существования этих волн зависит от типа ферромагнитного полупроводника. В электронных полупроводниках ($n_{\mathrm{e}} > n_{\mathrm{h}}$) волна (10) с поляризацией $E_x = iE_y$ существует в частотной полосе

$$\omega_{\mathrm{g}} < \omega < \omega_{\mathrm{g}} + \omega_{\mathrm{m}} \tag{12}$$

только при аномальной дисперсии, т. е. когда $\mathrm{Re}\, k_1 < 0$. (Из условия затухания волны при $z \to \infty$ следует, что $\mathrm{Im}\, k_1(\omega)$ должна быть положительной. Из уравнения (10) видно, что в области частот (12) $\mathrm{Im}\, k_1 > 0$ только при выполнении условия $\mathrm{Re}\, k_1 < 0$.) Волна с законом дисперсии (11) и поляризацией $E_x = -iE_y$ распространяется при любых частотах. Отметим, что в немагнитных полупроводниках электронного типа существует только один вид геликона (6) с поляризацией $E_x = -iE_y$.

В дырочных ферромагнитных полупроводниках ($n_{\mathrm{h}} > n_{\mathrm{e}}$) волна (10) распространяется при

$$\omega < \omega_{\mathrm{g}} \qquad \omega > \omega_{\mathrm{g}} + \omega_{\mathrm{m}}, \tag{13}$$

а полоса (12) является для нее запрещенной. Волна с законом дисперсии (11) в таких полупроводниках не существует. В немагнитных полупроводниках дырочного типа распространяется геликон (6) с поляризацией $E_x = iE_y$.

Область существования и характер распространения волн (10), (11) можно изменить, если поместить ферромагнетик в постоянное электрическое поле $\mathbf{E}_0(0,0,E_{0z})$ и создать дрейф носителей тока вдоль положительного направления оси z со скоростью v_0 [7]. В этом случае компоненты тензора проводимости принимают вид

$$\sigma_{xy} = -\sigma_{yx} = -\frac{nec}{H_0}\,\frac{\omega - kv_0}{\omega}\,, \qquad \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{nec}{H_0}\,\frac{\nu - i\omega}{\Omega}\,\frac{\omega - kv_0}{\omega}\,, \tag{14}$$

а дисперсионные соотношения $k_1^2(\omega)$ и $k_2^2(\omega)$ получаются соответственно из (10) и (11) умножением на величину $(\omega - kv_0)/\omega$.

Рассмотрим случай, когда скорость дрейфа v_0 больше фазовой скорости гибридных волн ($v_0 > \omega/k$). В отличие от случая $v_0 < \omega/k$, когда справедлив приведенный выше анализ (см. (12), (13)), в электронном полупроводнике волна (10) распространяется при частотах, удовлетворяющих неравенствам (13) (вне полосы частот (12)), при этом возможно ее усиление дрейфом электронов. Действительно, мнимая часть волнового вектора равна

$$\mathrm{Im}\,k_1(\omega) = \frac{2\pi|n|e}{cH_0}\left(v_0 - \frac{\omega}{\mathrm{Re}\,k_1}\right)\frac{\omega A(\omega)\gamma - \nu\,(\omega_{\mathrm{g}} - \omega)\,(\omega_{\mathrm{g}} + \omega_{\mathrm{m}} - \omega)/\Omega}{(\omega_{\mathrm{g}} - \omega)^2 + \gamma^2 B(\omega)} \equiv \mathrm{Im}\,k_{1\gamma} - \mathrm{Im}\,k_{1\nu} \tag{15}$$

и с точностью до членов порядка $\nu\gamma^2$ состоит из двух слагаемых с разными знаками, которые связаны с эффектами диссипации магнитной (первое слагаемое) и электронной (второе слагаемое) подсистем. Условие $\mathrm{Im}\,k_{1\nu} > \mathrm{Im}\,k_{1\gamma}$ является условием усиления гибридной волны (10). В таком полупроводнике волна с законом дисперсии (11) не распространяется, если $v_0 > \omega/k$.

В дырочном ферромагнитном полупроводнике в случае $v_0 > \omega/k$ волна (10) существует в частотной полосе (12), которая является запрещенной полосой при малой скорости дрейфа ($v_0 < \omega/k$) или его отсутствии. Усиление волны (10) возникает при выполнении неравенства $|\mathrm{Im}\,k_{1\gamma}| > |\mathrm{Im}\,k_{1\nu}|$. Волна (11) существует при любых частотах ω при наличии дрейфа со скоростью $v_0 > \omega/k$. Мнимая часть волнового вектора $k_2(\omega)$ имеет вид

$$\mathrm{Im}\,k_2 = \frac{2\pi|n|e}{cH_0}\left(v_0 - \frac{\omega}{\mathrm{Re}\,k_2}\right)\left[\gamma\,\frac{\omega}{(\omega_{\mathrm{g}} + \omega)^2} - \frac{\nu}{\Omega}\,\frac{\omega_{\mathrm{g}} + \omega_{\mathrm{m}} + \omega}{\omega_{\mathrm{g}} + \omega}\right] \equiv \mathrm{Im}\,k_{2\gamma} - \mathrm{Im}\,k_{2\nu}. \tag{16}$$

Очевидно, что при условии $\mathrm{Im}\,k_{2\nu} > \mathrm{Im}\,k_{2\gamma}$ возможно усиление этой волны.

Полученные выше области частот, в которых существуют гибридные поляритоны в случае $k \parallel \mathbf{H}_0$, приведены в табл. 1 и 2.

Таблица 1

$n < 0$				
Поляризация	Интервал частот	$kv_0 < \omega$	$kv_0 > \omega$	
$k_1^2(E_x = iE_y)$ (геликон)	$0 \le \omega \le \omega_{\mathrm{g}}$	$(\mathrm{Re}\,k_1)^2 > 0$	$(\mathrm{Re}\,k_1)^2 < 0$ (нет волны)	
	$\omega_{\mathrm{g}} < \omega < \omega_{\mathrm{g}} + \omega_{\mathrm{m}}$	$(\mathrm{Re}\,k_1)^2 < 0$ (нет волны)	$(\mathrm{Re}\,k_1)^2 > 0$	
			усиление	затухание
			$\mathrm{Im}\,k_{1\nu} < \mathrm{Im}\,k_{1\gamma}$	$\mathrm{Im}\,k_{1\nu} > \mathrm{Im}\,k_{1\gamma}$
	$\omega_{\mathrm{g}} + \omega_{\mathrm{m}} < \omega \ll \Omega$	$(\mathrm{Re}\,k_1)^2 > 0$	$(\mathrm{Re}\,k_1)^2 < 0$ (нет волны)	
$k_2^2(E_x = -iE_y)$ (нет геликона)	$0 \le \omega \ll \Omega$	$(\mathrm{Re}\,k_2)^2 < 0$ (нет волны)	$(\mathrm{Re}\,k_2)^2 > 0$	
			усиление	затухание
			$\mathrm{Im}\,k_{2\nu} < \mathrm{Im}\,k_{2\gamma}$	$\mathrm{Im}\,k_{2\nu} > \mathrm{Im}\,k_{2\gamma}$

Таблица 2

<table>
<tr><td colspan="5">$n > 0$</td></tr>
<tr><td>Поляризация</td><td>Интервал частот</td><td>$kv_0 < \omega$</td><td colspan="2">$kv_0 > \omega$</td></tr>
<tr><td rowspan="7">$k_1^2(E_x = iE_y)$
(нет геликона)</td><td rowspan="3">$0 \le \omega \le \omega_{\rm g}$</td><td rowspan="3">$(\mathrm{Re}\, k_1)^2 < 0$
(нет волны)</td><td colspan="2">$(\mathrm{Re}\, k_1)^2 > 0$</td></tr>
<tr><td>усиление</td><td>затухание</td></tr>
<tr><td>$\mathrm{Im}\, k_{1\nu} > \mathrm{Im}\, k_{1\gamma}$</td><td>$\mathrm{Im}\, k_{1\nu} < \mathrm{Im}\, k_{1\gamma}$</td></tr>
<tr><td>$\omega_{\rm g} < \omega < \omega_{\rm g} + \omega_{\rm m}$</td><td>$(\mathrm{Re}\, k_1)^2 > 0$
полоса прозрачности,
если $\mathrm{Re}\, k_1 < 0$</td><td colspan="2">$(\mathrm{Re}\, k_1)^2 < 0$
(нет волны)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$\omega_{\rm g} + \omega_{\rm m} < \omega \ll \Omega$</td><td rowspan="3">$(\mathrm{Re}\, k_1)^2 < 0$
(нет волны)</td><td colspan="2">$(\mathrm{Re}\, k_1)^2 > 0$</td></tr>
<tr><td>усиление</td><td>затухание</td></tr>
<tr><td>$\mathrm{Im}\, k_{1\nu} > \mathrm{Im}\, k_{1\gamma}$</td><td>$\mathrm{Im}\, k_{1\nu} < \mathrm{Im}\, k_{1\gamma}$</td></tr>
<tr><td>$k_2^2(E_x = -iE_y)$
(геликон)</td><td>$0 \le \omega \ll \Omega$</td><td>$(\mathrm{Re}\, k_2)^2 > 0$</td><td colspan="2">$(\mathrm{Re}\, k_2)^2 < 0$ (нет волны)</td></tr>
</table>

4. Этот раздел посвящен исследованию бесстолкновительного механизма затухания собственных колебаний проводящей магнитной среды — гибридных поляритонов ($0 < \theta < \pi/2$). Скорее всего, этот механизм является существенным в ферромагнитных металлах [8] и узкощелевых полумагнитных полупроводниках [9] при температурах, близких к температуре жидкого гелия.

Дисперсионное уравнение связанных волн запишем в виде, позволяющем оценить константу связи электронной и магнитной подсистем:

$$(\varsigma^2 - 1)\left(\varsigma^2 - \frac{\omega_{\rm s}^2}{\omega_{\rm h}^2(k)}\right) = F(\varsigma), \tag{17}$$

$$F(\varsigma) = \frac{\omega_{\rm m}}{\omega_{\rm h}(k)}\varsigma^2 (2\,|\cos\theta| + \frac{\omega_{\rm m} + 2\omega_{\rm g}\cos^2(\theta/2)}{\omega_{\rm h}(k)}) - iakR\sin^2\theta\left[\varsigma^2 - \frac{\omega_{\rm g}\,(\omega_{\rm g} + \omega_{\rm m})}{\omega_{\rm h}^2(k)}\right]\varsigma,$$

где введена безразмерная переменная $\varsigma = \omega/\omega_{\rm h}(k)$ и опущены диссипативные члены, обусловленные процессами релаксации электронной и магнитной подсистем. Правая часть уравнения (17) описывает связь геликона и магнона и состоит из слагаемых, которые различным образом зависят от параметров среды. Значение $\mathrm{Re}\, F(\varsigma)$ пропорционально отношению $\omega_{\rm m}/\omega_{\rm h}(k)$, которое определяется величиной и направлением волнового вектора $\mathbf{k}$ и может быть не малым. Поэтому следует ожидать, что взаимодействие волн приведет к перенормировке частот геликонов и магнонов. Мнимая часть $F(\varsigma)$ обуславливает затухание волн и содержит малый множитель $kR \ll 1$. Решение уравнения (17) ищем как функцию $k(\omega)$ и $\omega(k)$ методом последовательных приближений по малому параметру kR. В первом приближении (17) является биквадратным уравнением относительно и k, и ω. Его решения соответствуют двум гибридным поляритонам с различными поляризациями.

Сначала определим область существования этих волн, решая биквадратное уравнение относительно $k(\omega)$:

$$k_{1,2}^2(\omega) = \frac{4\pi\omega}{c}\,\frac{|n|e}{H_0}\left[\,|\cos\theta|\,(\omega_{\rm s}^2 - \omega^2)\right]^{-1} \times \tag{18}$$

$$\times\left\{\mathrm{sign}\, n\,\omega\omega_{\rm m}\,|\cos\theta| \pm \left(\omega^2\omega_{\rm m}^2\cos^2\theta + (\omega_{\rm s}^2 - \omega^2)\,\left[(\omega_{\rm g} + \omega_{\rm m})^2 - \omega^2\right]\right)^{1/2}\right\}.$$

В отсутствие затухания при $\theta \ne 0$ частота $\omega = \omega_{\rm s}$ является особой точкой выражения (18) при любом знаке n. Волна с законом дисперсии $k_1(\omega)$ существует в области частот

$$0 \le \omega < \omega_{\rm s}, \tag{19}$$

а волна с законом дисперсии $k_2(\omega)$ распространяется при

$$\omega \geq \omega_{\rm g} + \omega_{\rm m}. \tag{20}$$

Следовательно, в результате взаимодействия электронной и магнитной подсистем выделяется полоса $\omega_{\rm s} < \omega < \omega_{\rm g} + \omega_{\rm m}$ непропускания волн, что отличает рассматриваемый ферромагнитный полупроводник от немагнитной проводящей среды и ферродиэлектрика.

Частота и бесстолкновительное затухание гибридных поляритонов

$$\omega_{1,2}(k,\theta) = \omega_{\rm h}\,(k,\theta)\,[\mathrm{Re}\,\varsigma_{1,2}(k,\theta) + i\mathrm{Im}\,\varsigma_{1,2}(k,\theta)] \tag{21}$$

описываются выражениями

$$(\mathrm{Re}\,\varsigma_{1,2})^2 = \frac{1}{2}\left\{1 + 2\,\mathrm{sign}\,n|\cos\theta|\frac{\omega_{\rm m}}{\omega_{\rm h}(k)} + \frac{(\omega_{\rm m}+\omega_{\rm g})^2}{\omega_{\rm h}^2(k)} \pm\right. \tag{22}$$

$$\left.\pm\left[\left(1 + 2\,\mathrm{sign}\,n|\cos\theta|\frac{\omega_{\rm m}}{\omega_{\rm h}(k)} + \frac{(\omega_{\rm m}+\omega_{\rm g})^2}{\omega_{\rm h}^2(k)}\right)^2 - 4\,\frac{\omega_{\rm s}^2}{\omega_{\rm h}^2(k)}\right]^{1/2}\right\},$$

$$\mathrm{Im}\,\varsigma_{1,2} = -kR\frac{a}{2}\sin^2\theta\,\frac{\varsigma_{1,2}^2 - \omega_{\rm g}\,(\omega_{\rm g}+\omega_{\rm m})/\omega_{\rm h}^2}{|\varsigma_1^2 - \varsigma_2^2|}\,. \tag{23}$$

Индекс “1"относится к волне, которая находится в полосе (19), а индекс “2"соответствует волне, распространяющейся в частотной области (20).

Исследуем выражения (22) и (23), полагая отношение $\omega_{\rm s}/\omega_{\rm h}(k)$ больше или меньше единицы. Это соответствует значениям волнового числа k, меньшим или большим величины k_0, где k_0 определяется условием равенства частот геликона и магнона: $\omega_{\rm h}(k_0) = \omega_{\rm s}$ [3]. Рассмотрим дырочный полупроводник $(n < 0)$. При $k \ll k_0$ получим следующие соотношения для каждой из волн:

$$\omega_1(k) = \frac{\omega_{\rm h}(k)}{\tilde\omega_{\rm s}}\left\{\omega_{\rm s} - i\frac{a}{2}kR\omega_{\rm g}\sin^2\theta\right\}, \tag{24}$$

$$\omega_2(k) = \tilde\omega_{\rm s} - i\frac{a}{2}\,kR\,\frac{\omega_{\rm m}\omega_{\rm h}(k)}{\tilde\omega_{\rm s}}\sin^2\theta, \tag{25}$$

$$\tilde\omega_{\rm s} = \omega_{\rm m} + \omega_{\rm g}. \tag{26}$$

Из выражений (24)–(26) видно, что взаимодействие электронной и магнитной подсистем оказывает существенное влияние на формирование обоих видов колебаний. В плоскости действительных переменных ω и k функция $\omega_1(k)$ находится ниже спектра геликона (6) $(\omega_1(k) < \omega_{\rm h}(k))$, ее зависимость от волнового числа k такая же, как у геликона, а зависимость от постоянного магнитного поля имеет более сложный вид.

В области больших k $(k_0 \ll k \ll k_{\rm lim},\quad k_{\rm lim} \sim 1/R)$, когда $\omega_{\rm h}(k) \gg \omega_{\rm s}$, параметр связи в уравнении (17) является малой величиной: $\omega_{\rm m}/\omega_{\rm h} \ll 1$. Тогда для спектров $\omega_1(k)$ и $\omega_2(k)$ получим

$$\omega_1(k) = \omega_{\rm s} - \frac{\omega_{\rm m}}{\omega_{\rm h}(k)}\left\{2\omega_{\rm s}\,|\cos\theta| + i\frac{a}{8}kR\omega_{\rm g}\sin^2 2\theta\right\}, \tag{27}$$

$$\omega_2(k) = \omega_{\rm h}(k)\left\{1 + |\cos\theta|\left[\frac{\omega_{\rm m}}{\omega_{\rm h}(k)} - \frac{\omega_{\rm h}(k)}{\Omega}\,(1 + \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}^2\,\theta)\right] - i\frac{a}{2}kR\sin^2\theta\right\}. \tag{28}$$

Из (27), (28) следует, что в главном приближении волна $\omega_1(k)$ является магнитной волной, а волна $\omega_2(k)$ переходит в электромагнитную.

Таким образом, в некомпенсированной ($n_\mathrm{e} \neq n_\mathrm{h}$) проводящей магнитной среде при малых ($\omega \ll \omega_\mathrm{s}$) и больших ($\omega \gg \omega_\mathrm{s}$) частотах спектр гибридных поляритонов приближается к спектру геликона, а при частотах $\omega \sim \omega_\mathrm{s}$ — к спектру магнона. Бесстолкновительное затухание волны типа геликона (24), (28) значительно больше затухания колебаний магнонного типа (25), (27).

В двухкомпонентной среде с равными концентрациями электронов и дырок ($n_\mathrm{e} = n_\mathrm{h} = n_0$) взаимодействие магнитной подсистемы с носителями заряда приводит к бесстолкновительному затуханию магнонов, если выполнены условия (1) и (2). При этом спектр магнона описывается формулой

$$\omega(k) = \omega_\mathrm{s} - i\frac{2\pi e n_0}{kcH_0} a\,(R_\mathrm{e} + R_\mathrm{h}) \sin^2\theta\, |\cos\theta|\, \omega_\mathrm{g}\omega_\mathrm{m}, \tag{29}$$

где R_e и R_h — циклотронные радиусы электронов и дырок.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гуревич А. Г., Мелков Г. А. Магнитные колебания и волны. — М.: Наука, 1994.
2. Каганов М. И., Пустыльник Н. Б., Шалаева Т. И. // УФН. 1997. Т. 167, № 2. С. 191.
3. Бланк А. Я., Каганов М. И. // УФН. 1967. Т. 92, № 4. С. 583.
4. Канер Э. А., Скобов В. Г. // ЖЭТФ. 1964. Т. 45, № 3. С. 610.
5. Ахиезер А. И., Барьяхтар В. Г., Пелетминский С. В. Спиновые волны. — М.: Наука, 1967.
6. Каганов М. И., Шалаева Т. И. // ЖЭТФ. 1989. Т. 95, № 5. С. 1913.
7. Ахиезер А. И., Барьяхтар В. Г., Пелетминский С. В. // ЖЭТФ. 1963. Т. 45, № 2. С. 339.
8. Силин В. П., Солонцов А. З. // ЖЭТФ. 1975. Т. 69, № 6(12). С. 2141.
9. Ляпилин И. И., Цидильковский И. М. // УФН. 1985. Т. 146, вып. 1. С. 35.

Институт радиофизики и
электроники НАН Украины,
г. Харьков, Украина

Поступила в редакцию
22 марта 1999 г.

FEATURES OF ELECTROMAGNETIC WAVE PROPAGATION IN CONDUCTING MAGNETIC MEDIUM

V. L. Fal'ko, S. I. Khankina, and V. M. Yakovenko

We study helicon—spin waves (hybrid polaritons) in ferromagnetic conducting medium in strong constant magnetic field. The existence conditions for these waves are determined. We show that spatial dispersion results in collisionless damping of these waves propagating at nonzero angle to the magnetic field. The conditions of amplification of the hybrid polaritons in constant electric field are determined in the case where these waves propagate along the magnetic field.

УДК 621.396:621.391.82

ВЛИЯНИЕ МНОГОЛУЧЕВОСТИ НА ЭФФЕКТИВНОСТЬ КОМПЕНСАЦИИ ПОМЕХ В АДАПТИВНЫХ АНТЕННЫХ СИСТЕМАХ КВ ДИАПАЗОНА

С. А. Метелёв

В работе рассмотрены характеристики сигналов в многолучевых каналах связи коротковолнового диапазона, влияющие на эффективность их пространственно-временной обработки. Приводятся результаты экспериментальных измерений эффективности компенсации радиопомех с частотной манипуляцией в контролируемых условиях. На основе полученных данных для различных характеристик канала распространения помехового излучения проведён анализ причин, снижающих степень компенсации таких помех. Показано, что основной причиной является многолучёвость радиоканала, приводящая к селективным замираниям по частоте и по пространству и к некоррелированным искажениям формы сигнала, принимаемого на разнесённых антеннах.

ВВЕДЕНИЕ

В адаптивных антенных системах для борьбы с помехами применяется пространственная обработка сигналов с разнесенных в пространстве или по поляризации антенн, обеспечивающая компенсацию помех путем адаптивного линейного взвешенного суммирования антенных колебаний [1]. При этом предполагается, во-первых, разный фазовый сдвиг колебаний сигнала и помехи в разнесенных антеннах или (и) отличия отношений амплитуд сигнала и помехи (проявление пространственного или поляризационного разноса их источников) и, во-вторых, коррелированность колебаний помехи, принятых на разных антенных элементах.

Только при выполнении этих двух условий открывается возможность применения алгоритмов обработки, использующих разные критерии и дополнительную априорную информацию о сигнале или помехе. При этом достаточно большой выигрыш по помехозащищенности достигается уже при использовании малоэлементных адаптивных антенных систем (ААС) ($2\div3$ антенны) [2, 3], что открывает широкие возможности применения ААС на подвижных объектах связи [4]. Компенсатор помех для разных диапазонов длин волн представляет из себя цифровое устройство, в котором происходит вычисление весовых коэффициентов по некоторому алгоритму и адаптивное суммирование антенных колебаний. В процессе обработки формируется либо выходное колебание, представляющее собой очищенный от помех полезный сигнал, либо несколько выходных колебаний, один из которых представляет собой полезный сигнал, а другие — помехи [2].

Такие устройства были построены и испытаны в нескольких диапазонах длин волн и на различных радиотрассах [3, 5, 6] и показали существенное повышение качества радиосвязи при работе в радиоканалах с высоким уровнем преднамеренных или случайных помех. Вместе с тем, было обнаружено, что в ряде случаев эффективность компенсации помех резко падает, что говорит о неполной адекватности используемых алгоритмов обработки реальным условиям радиоприема. Данная работа посвящена изучению особенностей поведения характеристик КВ сигналов, оказывающих основное влияние на их пространственную обработку в адаптивных антенных системах.

Проведенные в данной работе эксперименты соответствовали случаю одного сигнала, поэтому их результаты говорят о свойствах помехи в отсутствие сигнала и возможности ее подавления в результате адаптивного вычитания (компенсации). Одновременно с этим полученные данные дают информацию о свойствах полезного сигнала в отсутствие помехи и о возможностях когерентного адаптивного сложения сигнальных колебаний с разнесенных антенн.

1. ХАРАКТЕРИСТИКИ МНОГОЛУЧЕВЫХ СИГНАЛОВ

Хорошо известно, что нестационарность и многолучевость КВ канала приводит к замираниям и межсимвольной интерференции сигнала, снижающим качество приема даже в безпомеховой обстановке (при больших уровнях сигнала). Пространственно-временная обработка сигналов (ПВОС) в таком канале также сталкивается с определенными сложностями, приводящими иногда к снижению эффективности ПВОС. Поэтому для синтеза алгоритмов пространственной обработки необходимо провести анализ дестабилизирующих факторов канала распространения и изучить предельные характеристики компенсаторов помех.

Для экспериментальной оценки предельного коэффициента подавления помех методами ПВОС удобно использовать алгоритм квадратурного автокомпенсатора (АК) [7] для 2-х элементной ААС, являющийся простейшим компенсатором помех с одним весовым коэффициентом. В том случае, когда уровень помехи намного превышает уровень сигнала, данный алгоритм близок к оптимальному по критерию максимума отношения сигнал/(помеха+шум) (ОСПШ). Адаптивный весовой коэффициент вычисляется через коэффициент ковариации колебаний, принимаемых на двух антеннах, разнесенных в пространстве или по поляризации. Поэтому коэффициент подавления АК полностью определяется степенью когерентности радиоволны и может служить измерителем коэффициента ковариации, одновременно показывая предельно достижимый коэффициент подавления радиосигналов корреляционными алгоритмами ПВОС.

Проведенные ранее экспериментальные исследования статистических характеристик потенциальных возможностей ПВОС в КВ канале [8] свидетельствуют о том, что помехи типа амплитудной модуляции (помехи от связных и вещательных радиостанций с амплитудной модуляцией (АМ)) корреляционный компенсатор режектирует на 30÷40 дБ (канал близок к идеальному), в ряде же случаев степень подавления не превосходит 12÷14 дБ (нестационарный канал). Среднее значение коэффициента подавления АМ помех в КВ диапазоне составляет 21 дБ со стандартным отклонением 6 дБ. Такие характеристики были получены для сигналов, близких к монохроматическим (фильтр основной селекции приемников имел полосу пропускания 0,2 кГц и срезал практически все частотные составляющие амплитудной модуляции вещательных станций). Аналогичные характеристики, измеренные для сигналов (помех) с частотной манипуляцией типа ЧТ-500, получились на 9 дБ хуже (среднее подавление — 12 дБ). В [2] проведен анализ полученных результатов и показано, что причинами уменьшения эффективности компенсаторов помех являются:

1) нестационарность канала распространения, которая приводит к необходимости применения корреляторов с конечным временем усреднения (при этом можно говорить лишь об асимптотически оптимальных алгоритмах ПВОС);

2) снижение когерентности радиоволн в многолучевых каналах.

Последнее приводит к декорреляции помехового (и сигнального) колебания на антенных элементах и, следовательно, к неполной его компенсации методом линейного суммирования. Наиболее ярко это проявляется для сигналов частотной телеграфии. Для экспериментального изучения этого вопроса были построены два схожих измерительных комплекса. Один из них располагался в Нижнем Новгороде, другой — на полигоне “Ветлужский"(170 км на северо-восток). Приемные антенны (вертикальные 3-х метровые несимметричные вибраторы) были разнесены на расстояние 30 м и подключались к входам 2-х приемников SMV-11 (на полигоне “Ветлужский"использовались Р-160), имеющих общие гетеродины. Обработка сигналов производилась по алгоритму АК на промежуточной частоте после фильтров основной селекции с полосой пропускания 1,7 кГц (на полигоне “Ветлужский-— 1,2 кГц). Автокомпенсатор в данных экспериментах был реализован на плате цифровой обработки сигналов (ЦОС) DSP25AD (производство InSys, Москва), установленной в персональном компьютере. Связь платы ЦОС с компьютером осуществлялась через шину РС, что обеспечивало доступ к ресурсам компьютера для визуализации и регистрации поступаемой информации. Одновременно с измерением коэффициента подавления осуществлялся контроль и регистрация параметров входных сигналов с двух разнесенных антенн.

1.1. Селективные замирания по частоте

В первой серии экспериментов (осень 1996 г., "Ветлужский") проводилось исследование параметров принимаемых сигналов от большого числа различных связных радиостанций. На рис. 1 в качестве примера приведены динамические спектры сигнала ЧТ-500 с несущей частотой $f = 6{,}87$ МГц, принятого на две разнесенные антенны (рис. 1,), поведение во времени амплитуды сигнала отжатия (рис. 1,) и амплитуды сигнала нажатия (рис. 1,). Для построения динамических спектров применялось 512-точечное быстрое преобразование Фурье (БФР) с прямоугольным окном без перекрытия. Частота дискретизации (взятия квадратурных выборок) здесь (и далее) составляла 2 кГц. Интенсивность спектральных компонент пропорциональна яркости на графике динамического спектра. Динамику амплитуд во времени представляют спектральные составляющие сигнала в полосе 4 Гц на частотах нажатия (отстройка от несущей $F = 250$ Гц) и отжатия (отстройка $F = -250$ Гц).

На динамических спектрах рис. 1 видно, что спектральные составляющие сигналов нажатия и отжатия флуктуируют, причем эти флуктуации сдвинуты во времени. Наиболее отчетливо это проявляется в поведении амплитуд: сравнение осциллограмм и , и показывает противофазность флуктуаций амплитуд сигналов нажатия и отжатия для каждой антенны. Эти флуктуации называются селективными замираниями по частоте. Степень некоррелированности этих замираний зависит от частотного разноса $2F$ и уменьшается при сближении спектральных компонент сигнала. Последнее хорошо видно из рис. 2, на котором приведены те же, что и на рис. 1, динамические характеристики сигнала со сплошным спектром с несущей частотой 6,83 МГц (по-видимому это сигнал радиолинии с последовательным модемом), ограниченным полосой пропускания приемников 0,3 кГц. На динамических спектрах отчетливо видны наклонные полосы минимумов и максимумов, которые демонстрируют, что спектральные компоненты испытывают одни и те же замирания, но сдвиг замираний по времени пропорционален разносу частот.

Отметим, что селективные замирания по частоте наблюдаются и при разносе частот 200 Гц (рис. 2), что неоднократно наблюдалось нами в проведенных экспериментах с сигналами типа ЧТ-200, хотя вероятность их появления ниже, чем для сигналов типа ЧТ-500.

Из сравнения графиков и , и на рис. 1, 2 можно сделать вывод о том, что флуктуации амплитуд на двух антеннах ведут себя идентичным образом, т. е. замирания уровней этих сигналов на разнесенных в пространстве антеннах в данном случае коррелированы. Однако так происходит не всегда, в ряде случаев кроме селективных замираний по частоте наблюдаются селективные замирания по пространству.

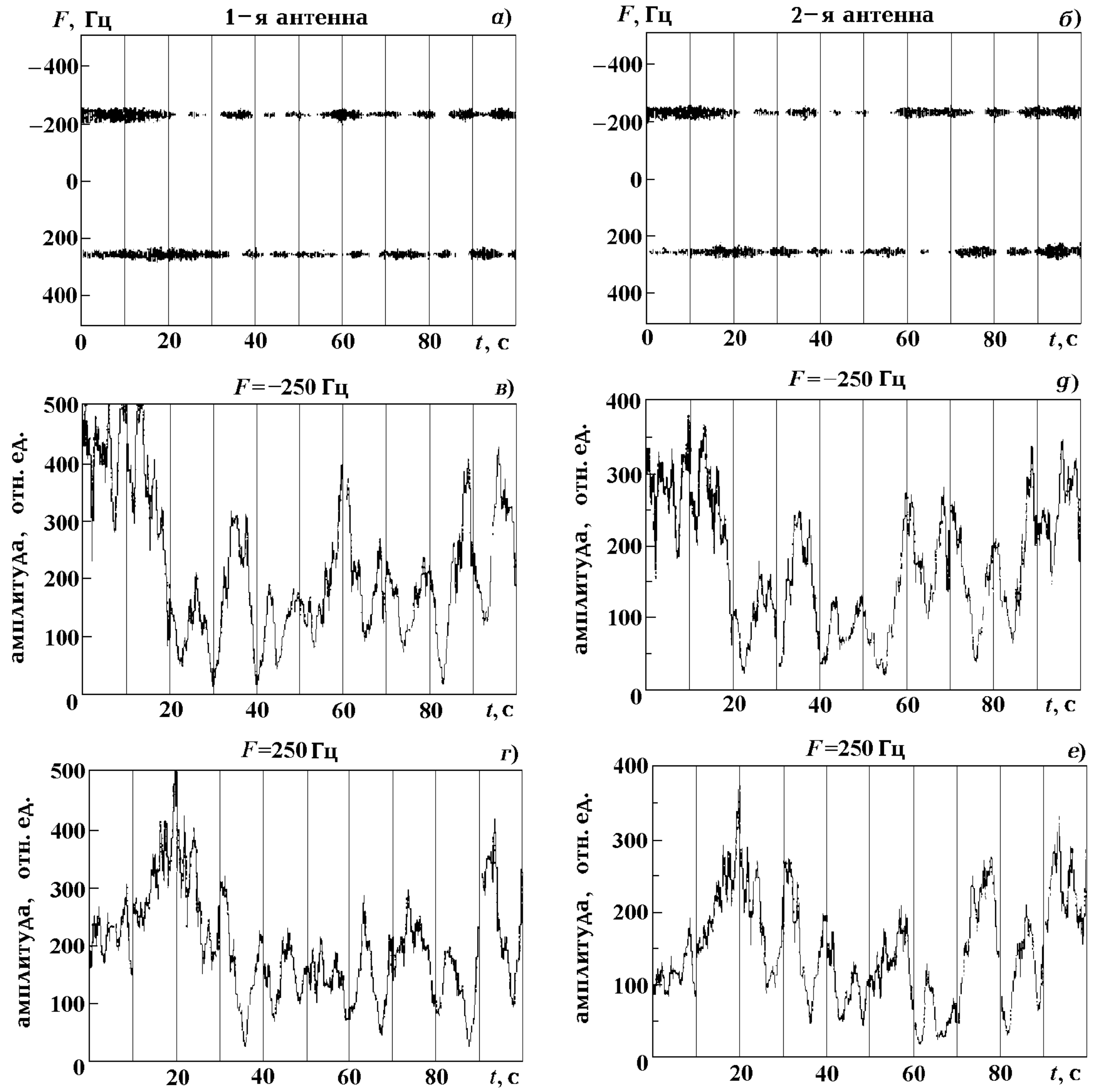

Рис. 1. Селективные замирания по частоте сигнала ЧТ-500 с несущей частотой $f = 6{,}87$ МГц (“Ветлужский", 12:25 MSK, 17.09.96). Динамические спектры сигнала на 2-х антеннах (,), флуктуации амплитуд сигналов отжатия и нажатия на 1-й антенне (,) и на 2-й антенне (,)

1.2. Селективные замирания по пространству

С целью уточнения модели КВ канала и его основных характеристик, определяющих качество пространственной обработки, в 1997—1998 гг. были проведены измерения в контролируемых условиях. Для этого была организована радиотрасса протяженностью 1100 км (Ахтубинск—Нижний Новгород), на одном из концов которой радиопередатчик с мощностью 1 кВт излучал с помощью антенны типа наклонный луч сигнал с псевдослучайной последовательностью со скоростью 300 бод в режиме ЧТ-500 (50 бод в режиме ЧТ-200). Это излучение рассматривалось в качестве помехи. Несущая частота излучаемого сигнала (помехи) изменялась от сеанса к сеансу от 4 до 20 МГц согласно следующей программе: 8 мин — излучение; 2 мин — пауза с перестройкой на новую частоту. На другом конце трассы проводились измерения параметров принимаемого сигнала (амплитуд спектров и разности фаз колебаний, принятых двумя антеннами), а также коэффициента подавления и параметров выходного сигнала автокомпенсатора.

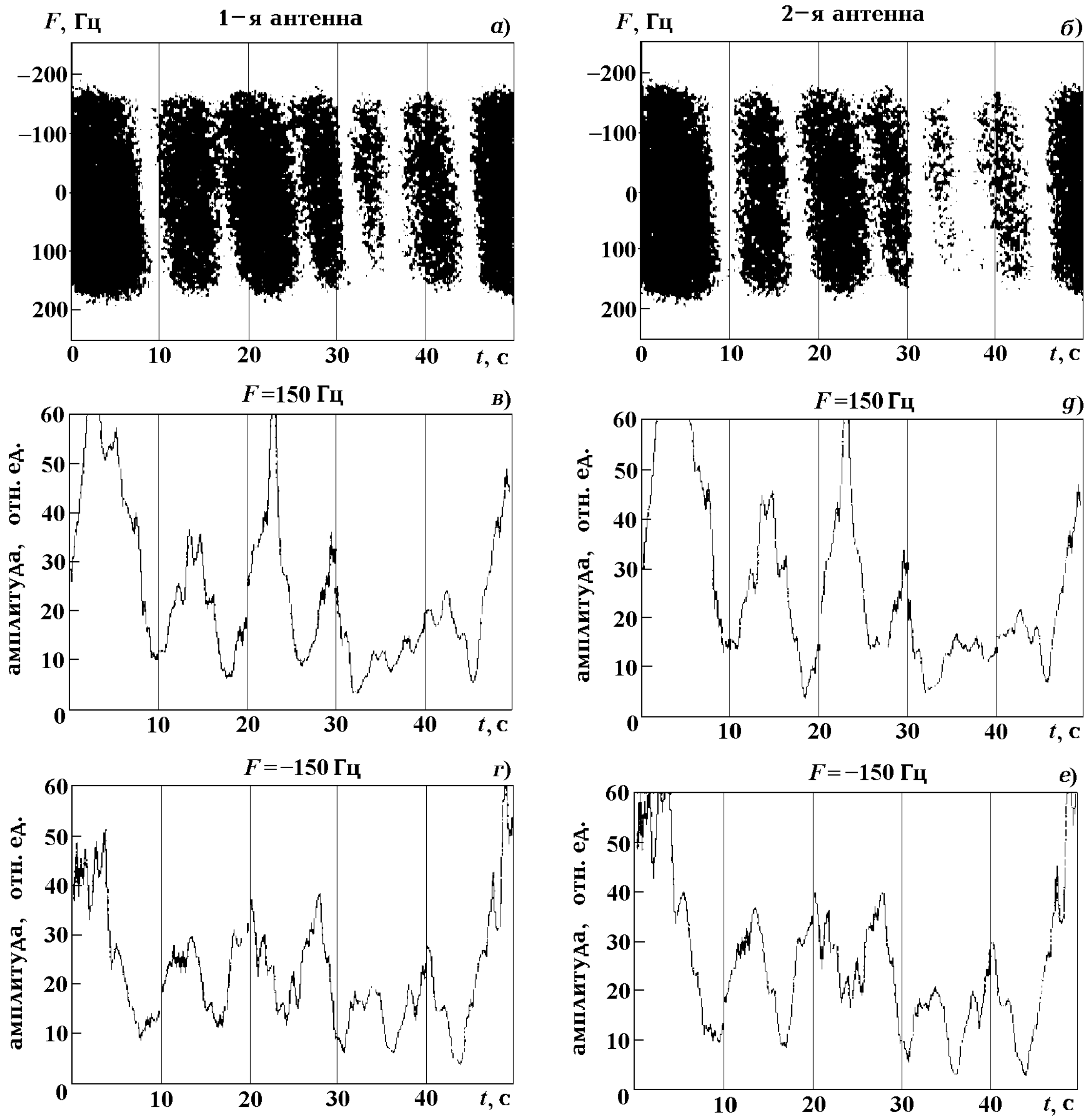

Рис. 2. Селективные замирания по частоте сигнала со сплошным спектром с несущей частотой f = 6,832 МГц (“Ветлужский", 12:32 MSK, 17.09.96). Динамические спектры сигнала на 2-х антеннах (,), флуктуации спектральных компонент сигнала с отстройкой 150 Гц и −150 Гц на 1-й антенне (,) и на 2-й антенне (,)

На рис. 3 приведены динамические характеристики сигнала типа ЧТ-500 с несущей частотой 5,7 МГц со скоростью телеграфирования 300 бод. Панели — аналогичны соответствующим графикам на рис. 2, полученным в результате 128-точечного БПФ, при этом частотное разрешение составляло 16 Гц. На графиках , построены отношения амплитуды сигнала нажатия к амплитуде сигнала отжатия: $k_1 = A_1(250\ \text{Гц})/A_1(-250\ \text{Гц})$ для первой антенны и $k_2 = A_2(250\ \text{Гц})/A_2(-250\ \text{Гц})$ для второй антенны. В случае общих замираний коэффициенты k_1, k_2 имели бы постоянное значение. Селективные по частоте замирания приводят к флуктуациям данных параметров во времени, что и показано на рис. 3, . В отличие от рис. 1, 2 замирания сигналов на разнесенных в пространстве антеннах на каждой частоте ведут себя некоррелированным образом, что является проявлением селективных замираний по пространству. На рис. 3, показано поведение во времени отношений амплитуды сигнала нажатия на первой антенне к амплитуде нажатия на второй антенне $m_1 = A_2(250\ \text{Гц})/A_1(250\ \text{Гц})$ и аналогичная

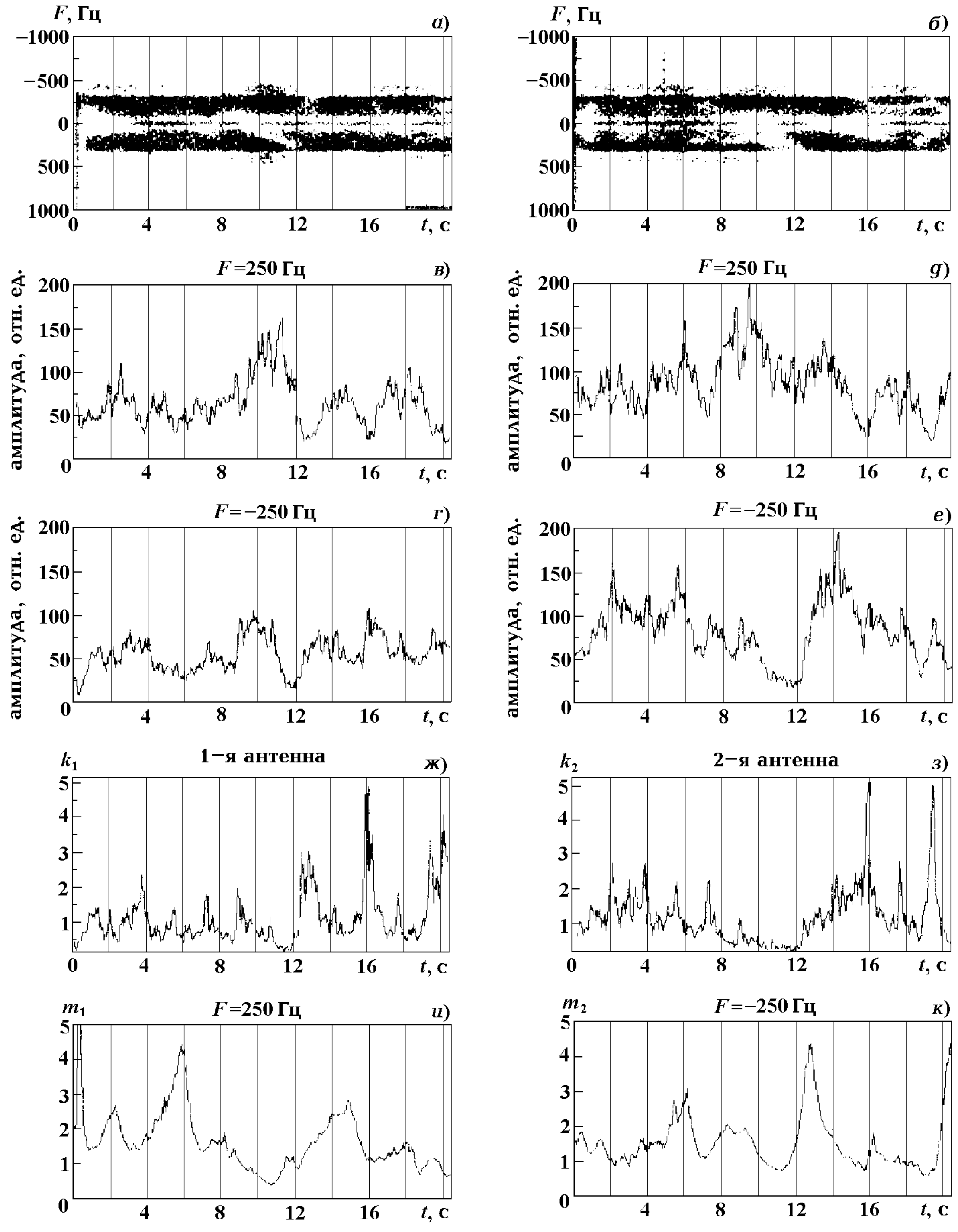

Рис. 3. Флуктуации сигнала ЧТ-500 с несущей частотой $f = 5{,}7$ МГц (“Ветлужский", 08:31 MSK, 16.10.97). Динамические спектры сигнала на 2-х антеннах (,), флуктуации амплитуд сигналов отжатия и нажатия на 1-й антенне (,) и на 2-й антенне (,), отношения амплитуд сигналов нажатия и отжатия на 1-й антенне () и на 2-й антенне (), отношения амплитуд сигналов нажатия () и отжатия () на двух антеннах

характеристика для сигнала отжатия $m_2 = A_2(-250\ \text{Гц})/A_1(-250\ \text{Гц})$.

Флуктуации параметров m_1 и m_2 являются количественной мерой селективных замираний по пространству.

Из приведенных графиков видно, что в общем случае КВ сигналы могут испытывать как общие замирания (все спектральные составляющие флуктуируют во времени синхронно), так и селективные по частоте замирания, появление которых тем более вероятно, чем шире полоса сигнала. Кроме этого при разносе приемных антенн возможны селективные замирания по пространству, приводящие к неодновременному пропаданию сигнала на разнесенных антеннах.

1.3. Модели радиоканалов с селективными замираниями

Замирания сигналов КВ диапазона вызваны многолучевостью радиоволны и зависимостью характеристик канала от частоты сигнала. При этом можно выделить многолучевость, обусловленную ионосферными неоднородностями в области отражения радиоволны, приводящими к возникновению "шероховатого зеркала", меняющегося во времени. Такой тип многолучевости приводит к общим замираниям сигнала, коэффициент передачи такого канала не зависит от частоты сигнала, и соотношения между амплитудами и фазами составляющих сигнала не изменяются [9, 10]. Другой тип многолучевости обусловлен магнитоактивностью ионосферной плазмы, вызывающей расщепление радиоволны на обыкновенную и необыкновенную волны, каждая из которых распространяется по своему каналу, при этом каналы имеют разные коэффициенты передачи. Интерференция этих волн в точке приема является причиной возникновения медленных с периодом несколько минут замираний сигнала [10], которые также относятся к классу общих замираний.

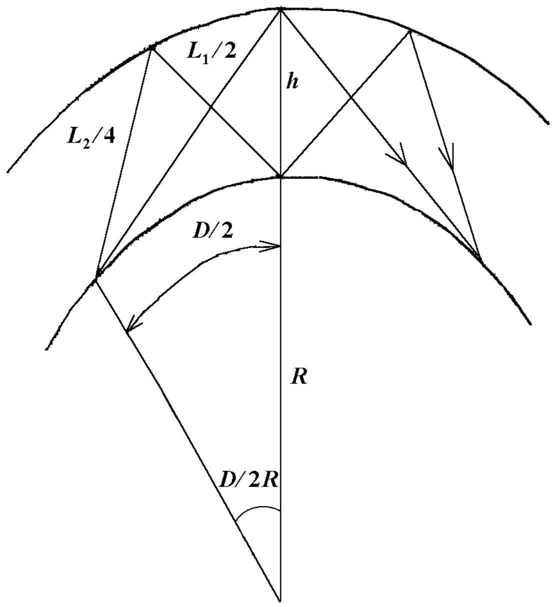

Рис. 4. Геометрия двухлучевой трассы

Для объяснения селективных замираний привлекается модель многоскачкового канала распространения, в котором принимаемый сигнал является суммой нескольких сигналов, испытавших разное число отражений от одной или разных областей ионосферы. Рассмотрим простейший случай, когда в точку приема приходят $1F$ и $2F$ однократно и двукратно отраженные от F-области ионосферы лучи (рис. 4). Эти два луча будут иметь разность хода, равную $L = L_2 - L_1$, где

$$L_1 = 2\sqrt{R^2 + (R+h)^2 - 2R(R+h)\cos(D/(2R))}$$

$$L_2 = 4\sqrt{R^2 + (R+h)^2 - 2R(R+h)\cos(D/(4R))},$$

где R — радиус Земли, h — действующая высота отражения, D — длина трассы.

Появившаяся разность фаз между двумя лучами $\Delta\varphi = 2\pi Lf/c$, где c — скорость света, в зависимости от ее величины приведет либо к увеличению суммарного сигнала, либо к его уменьшению. Поскольку $\Delta\varphi$ зависит от частоты сигнала, то вследствие небольшого различия частот сигналов нажатия $f_{\text{н}}$ и отжатия $f_{\text{о}}$ между ними возникнет отличие разности фаз:

$$\Delta = \Delta\varphi(f_{\text{н}}) - \Delta\varphi(f_{\text{о}}) = 2\pi L\Delta f/c = 2\pi\Delta f\tau_{\text{з}},$$

где $\tau_з$ — время задержки луча $2F$ относительно луча $1F$, $\Delta f = 2F = f_н - f_о$.

Таким образом, сложение двух лучей сигнала отжатия и двух лучей сигнала нажатия будет происходить с разными фазовыми соотношениями, что и приводит к разным уровням суммарных сигналов — амплитуда сигнала в точке приема нажатия будет отличаться от амплитуды сигнала отжатия. Изменение разности хода со временем (либо из-за вертикального движения отражающего зеркала, либо из-за горизонтального дрейфа ионосферных неоднородностей) приводит к флуктуациям разности фаз для каждой из компонент сигнала, т. е. к замираниям, которые могут происходить селективным образом.

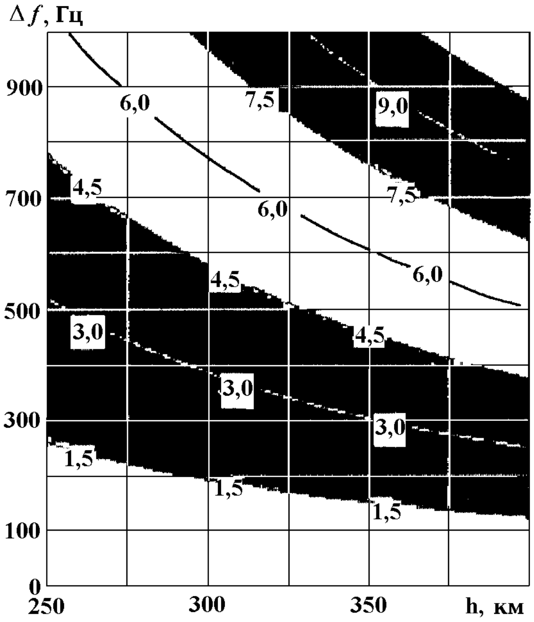

Рис. 5. Изолинии отличия Δ разности фаз двух лучей сигналов нажатия и отжатия (в радианах) для двухскачковой модели трассы длиной 1100 км

Из рис. 1 и 2, на которых приведены данные, полученные в близкие интервалы времени около полудня, следует, что период замираний составляет 9 с. Нетрудно оценить необходимую скорость вертикального движения отражающего зеркала, соответствующую такому периоду замираний. За период замирания разность хода L должна измениться на длину волны. Легко показать (взяв производную $\mathrm{d}L/\mathrm{d}h$), что для трассы порядка 1000 км приращение высоты отражения приблизительно равно приращению разности хода, т. е. за время 9 с происходит изменение высоты отражения (и L) на 43 м. Это соответствует вертикальной скорости F-области ионосферы 4,5 м/с, направленной вверх (об этом говорит наклон полос на динамических спектрах), что близко к типичным ионосферным параметрам (10 м/с).

Величина Δ для заданной длины трассы D зависит от двух параметров: высоты отражения h и разности частот Δf. Зависимость $\Delta(h, \Delta f)$ для двухскачковой трассы Ахтубинск — Нижний Новгород приведена на рис. 5, на котором изображены изолинии разности фаз сигнала нажатия относительно разности фаз сигнала отжатия (которую можно считать равной нулю) в радианах. Зоны противофазного сложения скачков сигнала нажатия отмечены темным фоном.

Из рис. 5 можно сделать вывод о том, что при высоте отражения $h = 250$ км (которая примерно соответствовала условиям эксперимента) для сигнала ЧТ-500 в то время, когда сложение скачков сигнала нажатия происходит синфазно, скачки сигнала отжатия складываются почти в противофазе, что и обусловливало селективность замираний по частоте, приведенных на рис. 3. Сигнал ЧТ-200 также способен испытывать селективные замирания, но для данной высоты отражения коэффициент k(200 Гц) имеет меньшую величину по сравнению с аналогичным коэффициентом для сигнала ЧТ-500 k(500 Гц). Увеличение высоты отражения до 350÷400 км должно приводить к возрастанию коэффициента k(200 Гц).

Из анализа зависимости $\Delta(h, D, \Delta f)$ следует, что вероятность появления селективных замираний при заданном частотном разносе Δf в модели двух скачков $1F$, $2F$ падает при увеличении длины трассы, и, например, для трассы длиной 3000 км селективные замирания сигнала ЧТ-200 маловероятны.

Селективные замирания по пространству также находят свое объяснение в рамках многолучевой модели. Подробный анализ причин возникновения таких замираний сделан в нашей предыдущей работе [8], в которой показано, что за счет пространственного или поляризационного разноса антенн возникает разный набег фазы для разных лучей (скачков), приводящий к некоррелированным флуктуациям сигнала на разнесенных антеннах.

Таким образом, селективные замирания по частоте и по пространству обусловлены многолучевостью каналов распространения сигналов, не являются экзотическими явлениями для типовых каналов КВ радиосвязи и находят свое объяснение в простейшей (двухскачковой) модели. Исходя из сделанного анализа, можно ожидать уменьшения селективных замираний вблизи оптимальной рабочей частоты (ОРЧ) трассы в условиях односкачкового радиоканала.

1.4. Искажение формы сигнала (межсимвольная интерференция)

Кроме изменений уровня сигнала (общих или селективных замираний), имеющих характерные времена, значительно превышающие длительность элементарной посылки (бита), многолучевость приводит к искажениям формы принимаемых элементарных посылок. Задержка между лучами приводит к наложению предыдущего бита на последующий, что приводит к возникновению межсимвольной интерференции, порождающей ошибки приема и ограничивающей скорость передачи информации.

Рассмотрим это явление подробнее на основе экспериментальных данных. Результаты измерений для одного из сеансов наблюдений сигнала на частоте 5,7 МГц приведены на рис. 6. Рис. 6 разбит на четыре блока, осциллограммы и спектры сигналов в которых соответствуют указанным в нижней части каждого блока моментам времени t 8-ми минутного сеанса излучения. На панелях 1 и 2 каждого из четырех блоков показаны осциллограммы амплитуд сигнала в относительных единицах, принятого на две разнесенные антенны, на панелях 5 и 6 — частотные спектры этих колебаний. Временная развертка осциллограмм $T = 64$ мс, диапазон частот спектров составлял ± 1 кГц относительно несущей частоты.

На указанных графиках рис. 6 наблюдаются следующие особенности:

1) Вместо постоянного уровня амплитуды продетектированного сигнала с частотной манипуляцией принятый сигнал промодулирован по амплитуде, уровни нажатия и отжатия различаются — наблюдаются селективные замирания по частоте.

2) В начале каждого элемента сигнала существует интервал времени порядка $1 \div 2$ мс, в течение которого уровень амплитуды отличается от уровня, соответствующего основному времени посылки. Это явление обусловлено многолучевостью КВ канала и задержкой между лучами данного бита. Кроме того, на форму огибающей данного бита накладываются задержанные копии предыдущего бита (это явление и называется межсимвольной интерференцией). Сложение нескольких лучей в зависимости от их фаз приводит к ступенчатому возрастанию (блок I) или уменьшению (блоки II, III, IV на рис. 6) амплитуды суммарного колебания. Число таких ступенек определяется числом интенсивных лучей, а длительность ступенек — задержкой между ними. Для краткости для обозначения этого интервала с неустановившейся амплитудой ниже будем использовать термин “интервал многолучевости"(имея в виду, что многолучевость на самом деле имеет место на всей длительности элементарной посылки).

3) Кроме селективности по частоте наблюдается селективность по пространству: поведение во времени амплитуд сигналов с разнесенных антенн различно, что видно из сравнения панелей 1 и 2 на всех блоках. Во-первых, селективные частотные замирания могут быть в противофазе на разнесенных антеннах, во-вторых, сложение лучей может происходить с разными фазовыми соотношениями (блок III).

4) Разность фаз (в градусах) между антенными колебаниями приведена на панели 3 в виде осциллограммы и на панели 8 в виде гистограммы, построенной по тому же интервалу $T = 64$ мс. Максимумы гистограммы отражают наиболее вероятные значения разности фаз для данного интервала. Из рис. 6 видно, что разности фаз сигналов нажатия и отжатия в общем случае не совпадают, что также является проявлением селективности по частоте и по пространству. Кроме того, разность фаз на интервале многолучевости отличается от ее значения на остальной длительности посылки.

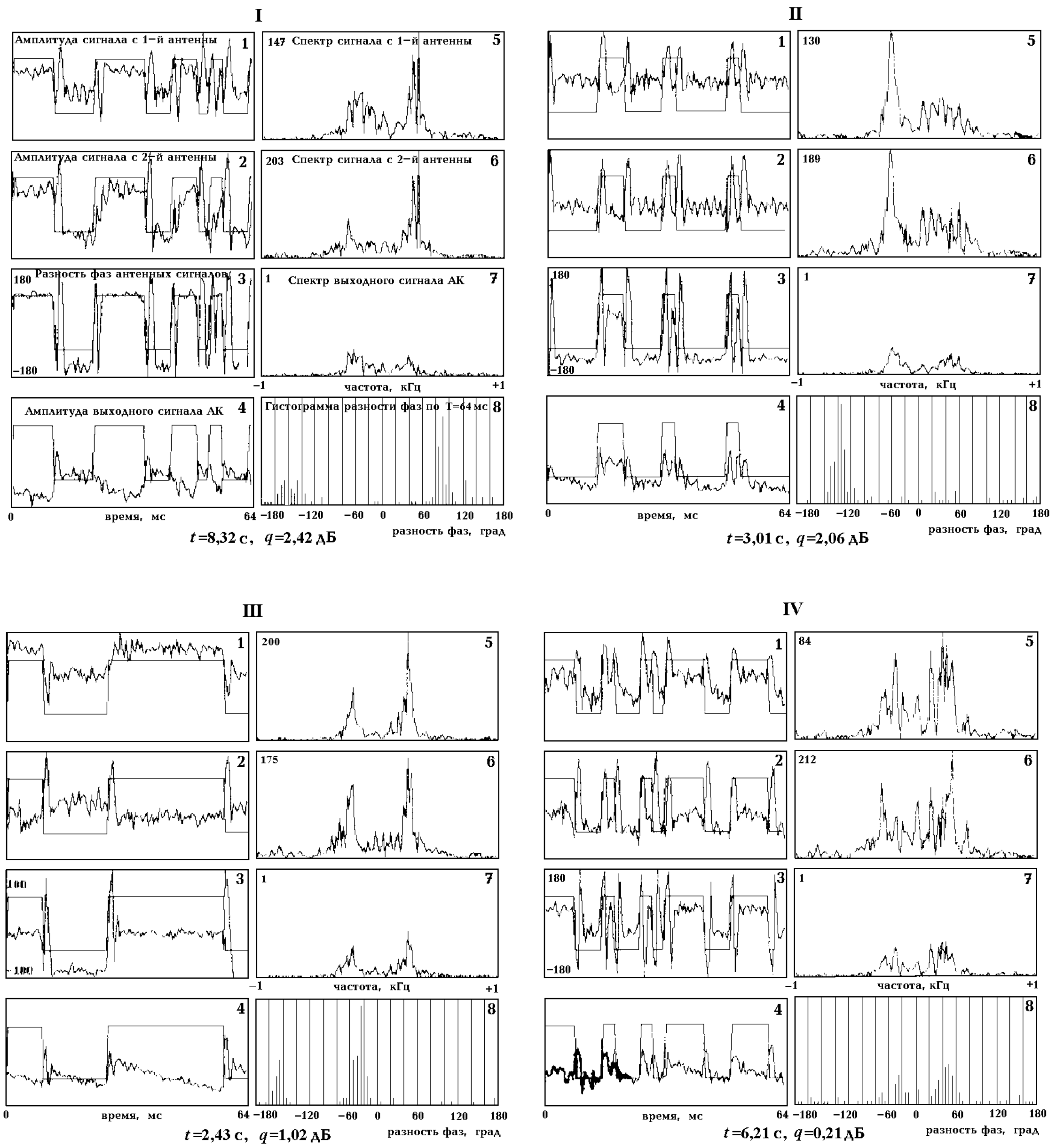

Рис. 6. Осциллограммы и спектры сигналов с разнесенных антенн. Трасса Ахтубинск—Нижний Новгород, сигнал ЧТ-500, 300 бод, несущая частота 5,7 МГц, 08:31 MSK, 16.10.97

2. ВЛИЯНИЕ МНОГОЛУЧЕВОСТИ НА ПРОСТРАНСТВЕННУЮ ОБРАБОТКУ СИГНАЛОВ

Рассмотренные выше факторы приводят к падению корреляции помехового сигнала с разнесенных антенн и к снижению коэффициента подавления q такой помехи. Поведение во времени амплитуды и спектра выходного сигнала АК приведены на панелях 4 и 7 рис. 6. Видно, что АК непрерывно находится в состоянии подстройки и не может скомпенсировать ни нажатие, ни отжатие помехи, т. к. во-первых, весовые коэффициенты для этих двух компонентов различны, во-вторых, на интервале многолучевости указанные коэффициенты также должны принимать другие значения.

Заданная инерционность АК (время усреднения корреляторов $\tau_{и} = 200$ мс) не позволяет осуществить быструю перестройку весовых коэффициентов, что приводит к значительному уменьшению коэффициента подавления. Данное утверждение необходимо пояснить.

Как уже сказано выше, АК является близким к оптимальному компенсатором помех только при большом превышении уровня помехи над уровнем сигнала. Если при этом пренебречь некоррелированными в ветвях разнесения шумами приемной аппаратуры, можно выбрать время $\tau_{и}$ усреднения в корреляторах равным одному или нескольким отсчетам дискретизированных входных процессов и тем самым скомпенсировать всю помеху, испытывающую селективные замирания и искажения на интервале многолучевости (весовой коэффициент будет успевать отслеживать амплитудно-фазовые изменения на длительности бита).

Однако предположение о превышении уровня помехи над уровнем сигнала в замирающих каналах связи не оправдывается, и алгоритм АК работать не будет. Работоспособные алгоритмы ПВОС (например [2]) должны декоррелировать колебания помехи и полезного сигнала, что в случае имитационной помехи требует усреднения на длительности нескольких бит (не менее 10 бит). Именно поэтому селективные замирания и межсимвольная интерференция будут оказывать сильное дестабилизирующее влияние на вычисление необходимых весовых коэффициентов.

Поскольку оптимальные весовые коэффициенты корреляционных алгоритмов ПВОС [1, 2] являются функциями коэффициентов корреляции антенных колебаний, квадратурный автокомпенсатор, вес которого зависит от одного такого коэффициента, является удобным инструментом для оценки эффективности более сложных процедур обработки.

Проведенные нами эксперименты на контролируемой трассе Ахтубинск—Нижний Новгород позволили детально разобраться во влиянии многолучевости канала на характеристики помехи с модуляцией типа ЧТ и степень его подавления корреляционными методами. На рис. 7 в трех вертикальных блоках для трех различных несущих частот сигнала из Ахтубинска приведены следующие характеристики:

1) лучевые траектории, рассчитанные по разработанной программе, использующей данные ионосферного зондирования (ионозонд расположен в п. Васильсурск). Критическая частота F-слоя ионосферы составляла 7,5÷8 МГц, высота максимума F-слоя — 250 км. Начало координат (0 км) — Ахтубинск, 1100 км — Нижний Новгород;

2) осциллограммы амплитуды сигналов с первой (а) и второй (б) антенн и разность фаз между сигналами (в) для фрагмента сеанса измерения длительностью 64 мс аналогично рис. 6;

3) изменение во времени гистограммы разности фаз антенных колебаний. Каждое вертикальное сечение на панелях 3 соответствует распределению разности фаз на 64-х миллисекундных интервалах, которые следовали друг за другом в течение 20,5 секунд. Максимальная яркость соответствует наиболее вероятной разности фаз в данный момент времени. Данное представление аналогично динамическому спектру сигналов. Двузначные гистограммы соответствуют различной разности фаз сигналов нажатия и отжатия;

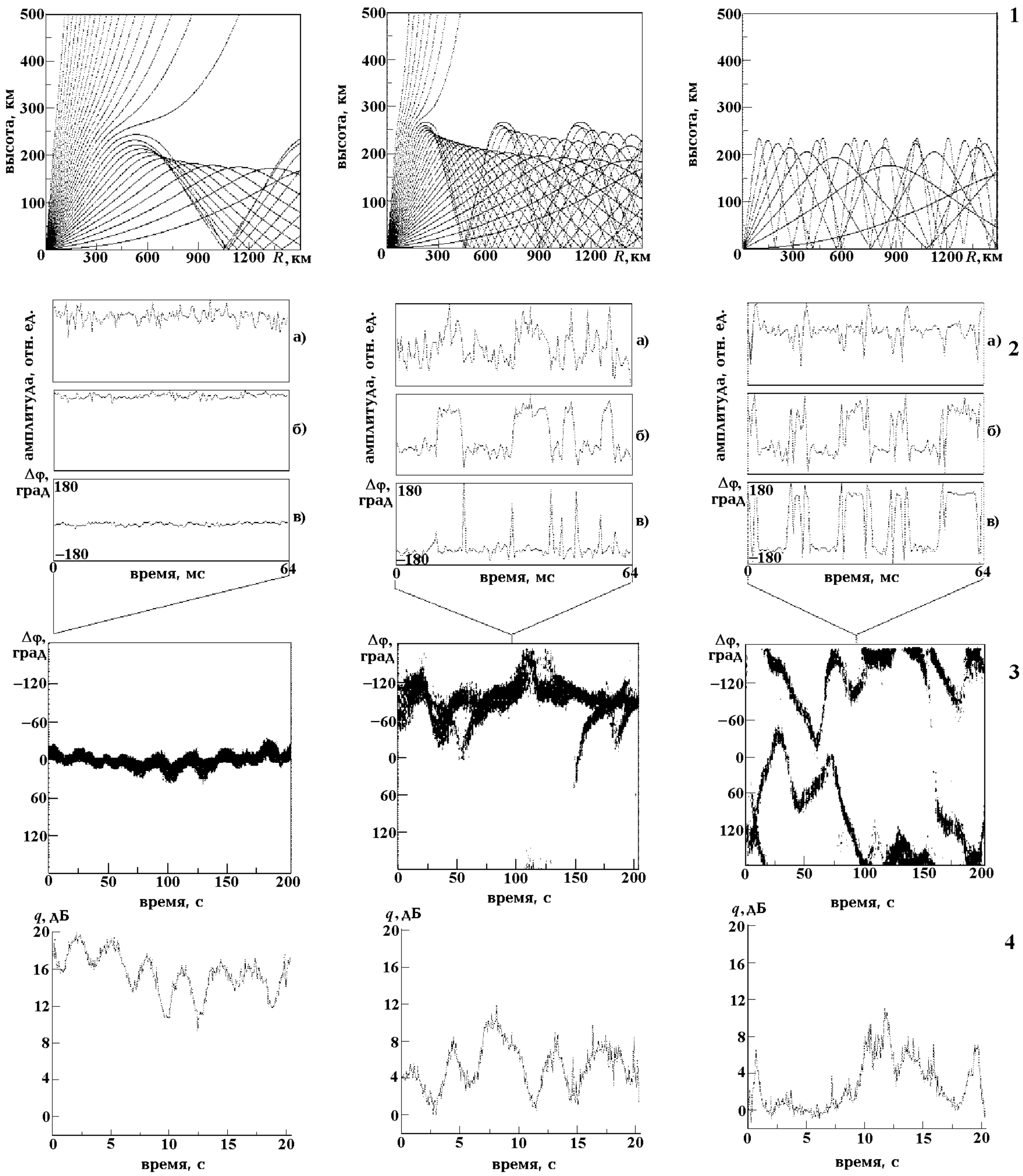

Рис. 7. Изменение условий распространения, параметров принимаемых сигналов и эффективности компенсации помех в зависимости от несущей частоты f на основе измерений, проведенных 16.10.97. Первому вертикальному блоку соответствуют измерения, выполненные в 11:00 MSK при $f = 13{,}2$ МГц, второму — в 11:30 MSK при $f = 8{,}2$ МГц, третьему — в 08:30 MSK при $f = 5{,}7$ МГц

4) поведение во времени коэффициента подавления помехи автокомпенсатором на данном интервале измерения. Кривая получена путем усреднения коэффициента подавления по интервалу 64 мс.

Динамичекие спектры и характеристики амплитудных замираний для третьего сеанса с $f = 5{,}7$ МГц приведены на рис. 3.

Из приведенных графиков следует, что усиление многолучевости канала распространения, происходящее при удалении от оптимальной рабочей частоты, которая в данный период времени была близка к 13÷14 МГц, приводит к падению коррелированности антенных напряжений и к значительному снижению коэффициента подавления.

Зависимость коэффициента подавления q от степени искажения формы сигнала на интервале многолучевости проанализирована в [8], где показано, что для двухлучевого сигнала с отношением времени задержки к длительности бита 0,3÷0,5 для данной трассы средний коэффициент подавления $q_{ср}$ не превышает 10 дБ. Анализ такого двухлучевого случая, приведенного на рис. 7, показывает, что провалы в зависимости q от времени возникают в моменты селективного расщепления разности фаз сигналов нажатия и отжатия, но и в отсутствие такого расщепления максимум этого коэффициента не превышает 10 дБ. Последнее и объясняется влиянием интервала многолучевости на снижение коэффициента подавления.

ВЫВОДЫ

Эффективность подавления помех в многолучевых каналах ограничивается набором следующих дестабилизирующих факторов:

1) Нестационарность канала распространения, проявляющаяся в общих замираниях, ограничивает время усреднения в корреляторах $\tau_и \le 200$ мс, что приводит к неточному вычислению весовых коэффициентов и проникновению нескомпенсированных остатков помехи на выходы компенсатора. Но даже такое маленькое время усреднения иногда вызывает динамические ошибки слежения в каналах с сильной нестационарностью.

2) Селективные замирания по частоте приводят к тому, что вектор весовых коэффициентов, найденный путем усреднения сигналов нажатия и отжатия, не обеспечивает полной компенсации этих сигналов. На языке диаграммы направленности ААС эта проблема связана с формированием нуля одновременно в двух направлениях углов прихода, что невозможно для 2-х антенной системы.

3) Задержка между лучами и межсимвольная интерференция приводят к снижению коррелированности антенных напряжений и не позволяет полностью скомпенсировать помеху.

Данные проблемы являются общими для всех многолучевых каналов распространения и должны быть присущи не только КВ диапазону, но и УКВ диапазону. УКВ канал в лесной зоне, в условиях города, изрезанного рельефа местности или переотражений от земли для летательного аппарата становится многолучевым каналом с подобными специфическими особенностями поведения сигналов, обрабатываемых в ААС.

Разрабатываемые алгоритмы ПВОС в случае многолучевых каналов распространения для достижения приемлемого качества адаптивной обработки должны учитывать отмеченные выше особенности.

В заключение автор хочет выразить свою признательность Брянцеву В. Ф. и Валову В. А. за помощь в организации экспериментальных радиотрасс.

ЛИТЕРАТУРА

1. Монзинго Р. А., Миллер Т. У. Адаптивные антенные решетки. Введение в теорию / Пер. с англ. — М.: Радио и связь, 1986. — 448 с.
2. Метелев С. А., Шишкин Ю. В. // Изв. вуз. Радиофизика. 1997. Т. 40, № 3. С. 378.
3. Метелев С. А., Лисов А. А. // Изв. вуз. Радиофизика. 1997. Т. 40, № 4. С. 517.
4. Белоусов Е. Л., Волков В. П., Метелев С. А. // IV Междунар. науч.-техн. конф. “Радиолокация, навигация и связь", 26—28 мая 1998 г., г. Воронеж. Тр. конф. Т. 1. С. 506.
5. Артамонов М. В., Волков В. П., Кабаев Д. В., Метелев С. А., Сидоров Н. М., Чащина Н. А., Штейн Е. Р. // IV Междунар. науч.-техн. конф. “Радиолокация, навигация и связь", 26—28 мая 1998 г., г. Воронеж. Тр. конф. Т. 3. С. 1415.

6. Брянцев В. Ф., Валов В. А., Ковалев В. А., Метелев С. А. // IV Междун. науч.-техн. конф. "Радиолокация, навигация и связь", 26–28 мая 1998 г., г. Воронеж. Тр. конф. Т. 1. С. 487.
7. Адаптивная компенсация помех в каналах связи / Под ред. Ю. И. Лосева — М.: Радио и связь, 1988. — 208 с.
8. Метелев С. А., Шишкин Ю. В., Лисов А. А. // Изв. вуз. Радиофизика. 1998. Т. 41, № 3. С. 403.
9. Финк Л. М. Теория передачи дискретных сообщений. — М.: Сов. радио, 1970. — 728 с.
10. Хмельницкий Е. А. Оценка реальной помехозащищенности приема сигналов в КВ диапазоне. — М.: Связь, 1975. — 232 с.

Государственное унитарное
предприятие НПП "Полет",
г. Н. Новгород, Россия

Поступила в редакцию
5 марта 1999 г.

MULTIPATH EFFECTS ON THE EFFICIENCY OF INTERFERENCE COMPENSATION IN VHF ADAPTIVE ANTENNA SYSTEMS

S. A. Metelev

We consider signal characterisics in multipath VHF communication channels, which affect the efficiency of spatio-temporal processing of these signals. We present the results of experimental measurements of the efficiency of compensation of interference with frequency-shift modulation under controlled conditions. Using the obtained data on various characteristics of the interference propagation channel, we analyze the factors that decrease the degree of compensation of such interference. Since the considered radio channel is multipath, there are selective frequency and spatial fading, as well as uncorrelated distortions of the shape of signal received by split antennas. We show that these multipath effects are the main factors that decrease the efficiency of the interference compensation.

УДК 537.862: 530.182

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ В ЦИФРОВОЙ РЕКУРСИВНОЙ СИСТЕМЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА С НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ НАСЫЩЕНИЯ

Ю. А. Брюханов

Исследованы периодические свободные колебания в системе второго порядка в области параметров, лежащей ниже треугольника устойчивости. Нелинейные процессы приведены к линейным одномерным отображениям. Определены причины изменения периодов движения и получены формулы для их расчёта.

ВВЕДЕНИЕ

Богатство свободных периодических движений в рекурсивной системе второго порядка, сумматор которой имеет характеристику с насыщением, впервые экспериментально обнаружено авторами работы [1]. Это открыло широкие возможности применения системы для генерации периодических сигналов, что и обусловило актуальность изучения колебаний в такой системе.

Особенно широкий спектр периодов движений в системе существует в области параметров, лежащей ниже треугольника устойчивости. На бифуркационной диаграмме здесь имеются и “арочные"области, и “сосисочные"структуры. В работах [2–5] приведены новые результаты экспериментальных исследований, а также получены выражения для некоторых бифуркационных границ устойчивых периодических движений.

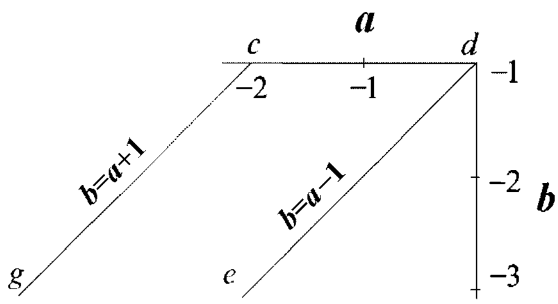

Рис. 1. Область параметров системы

Целью настоящей работы является расширение круга аналитически описываемых периодических колебаний, установление их новых закономерностей, а также бифуркационных границ для изображенной на рис. 1 области $gcde$ параметров a, b системы.

Свободные колебания рекурсивной системы второго порядка с нелинейностью насыщения без учета эффектов квантования описываются разностным уравнением

$$x(n+2) = f[ax(n+1) + bx(n)],$$

где n — номер итерации,

$$f(\varphi) = \begin{cases} \varphi, & |\varphi| < 1, \\ \mathrm{sgn}\varphi, & \varphi \geq 1. \end{cases}$$

Это уравнение сводится к эквивалентному двумерному отображению

$$\begin{pmatrix} x(n+1) \\ y(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(n) \\ f[bx(n) + ay(n)] \end{pmatrix}$$

на плоскости xy. Пары последовательных итераций $(x(n), y(n))$ отображения определяют точки траектории движения системы на фазовой плоскости xy. Учитывая вид нелинейности, разобьем плоскость состояний на три области: D_{-1}, D_0 и D_{+1}, характеризующиеся соответственно уравнениями движения

$$x(n+2) = -1, \qquad x(n+2) = ax(n+1) + bx(n), \qquad x(n+2) = 1.$$

Границы между областями D_{-1} и D_0, D_0 и D_{+1} представляют собой прямые MN, PG, описываемые соответственно уравнениями

$$y = -\frac{b}{a}x - \frac{1}{a}, \quad y = -\frac{b}{a}x + \frac{1}{a}.$$

Разбиение фазовой плоскости на области, соответствующее выбранной области параметров, показано на рис. 2. Здесь же изображен квадрат $A(1,1)\,B(1,-1)\,C(-1,-1)\,D(-1,1)$, имеющий особое значение в связи с данным видом нелинейности. Прямая MN пересекает стороны квадрата в точках $X_1(x_1,1)$, $Y_1(1,y_1)$, где

$$x_1 = -\frac{a+1}{b}, \quad y_1 = -\frac{b+1}{a}. \tag{1}$$

Координаты точек X_2 и Y_2 пересечения прямой PG с квадратом отличаются от соответствующих координат в (1) только знаками.

1. АНАЛИЗ ДВИЖЕНИЙ

Рассмотрение удобно начать при $a = -2$. Известно, что при этом значении a и $b \geq -3$ в системе существует устойчивое колебание с периодом $T = 4$, характеризующееся последовательностью отображений

$$\ldots \to D \to A \to B \to C \to \ldots$$

При незначительном увеличении b по сравнению с $b = -3$ последовательность отображений при старте из точки D на первоначальном этапе имеет вид

$$D \to AY_1 \to BX_2 \to CY_2 \to DX_1 \to AY_1 \to \ldots$$

Здесь количество итераций N в области D_0 равно нулю. С увеличением b число N возрастает. Это число может быть определено следующим образом. Если, стартуя из точки D, изображающая точка на $(N{+}1)$-й итерации попадает в область D_{-1} (что характерно для четного N) или в область D_{+1} (при нечетном N), то соответственно выполняются соотношения

$$y(N+1) \geq -\frac{b}{a}\,x(N+1) - \frac{1}{a} \tag{2}$$

или

$$y(N+1) \leq \frac{b}{a}\,x(N+1) + \frac{1}{a}. \tag{3}$$

Движение системы в области D_0 характеризуется зависимостью [6]

$$x(n) = C_1 q_1^n + C_2 q_2^n, \tag{4}$$

где

$$C_1 = \frac{x(0)q_2 - y(0)}{q_2 - q_1}, \quad C_2 = \frac{y(0) - x(0)q_1}{q_2 - q_1},$$

$q_{1,2}$ — корни характеристического уравнения,

$$q_{1,2} = \frac{a \pm j\sqrt{-a^2 - 4b}}{2},$$

j — мнимая единица. С учетом (4) формулы (2) и (3) при произвольном N приводятся к виду

$$\left| C_1 q_1^{N+1}\left(q_1 + \frac{b}{a}\right) + C_2 q_2^{N+1}\left(q_2 + \frac{b}{a}\right) \right| \geq -\frac{1}{a}.$$

Из этого выражения по заданным a и b можно находить N. Наименьшее значение b, при котором условия (2) и (3) выполняются, находится из равенства

$$\left|C_1 q_1^N \left(q_1 + \frac{b}{a}\right) + C_2 q_2^N \left(q_2 + \frac{b}{a}\right)\right| = -\frac{1}{a}\,. \tag{5}$$

При четном N изображающая точка, стартуя с отрезка DX_1 (исключая точку X_1), на $(N{+}2)$-м шаге оказывается на стороне BC, на $(N{+}3)$-м шаге — на стороне DA и т. д. Положение ее на этих сторонах можно выразить одномерным отображением

$$x_1(m+1) = \tilde{A}_1 x_1(m) + A_2(-1)^m, \tag{6}$$

где $\tilde{A}_1 = (q_2 q_1^{N+2} - q_1 q_2^{N+2})/(q_2 - q_1)$, $A_2 = (q_2^{N+2} - q_1^{N+2})/(q_2 - q_1)$, $m = n/(N+2)$. Решение уравнения (6) имеет вид

$$x_1(m) = z_1 \tilde{A}_1^m - a_1(-1)^m, \tag{7}$$

где $z_1 = x_1(0) + a_1$, $a_1 = A_2/(\tilde{A}_1 + 1)$. Процесс (7) прекращается, если при четном m выполняется условие $x_1(m) \geq x_1$ (при этом $T = 2[(N+2)m + 1]$), а при нечетном m — условие $x_1(m) \leq x_2$ (при этом $T = (N+2)\,m + 1$). В общем случае этот процесс прекращается, если

$$z_1 A_1^m - a_1 = x_1,$$

где $A_1{=}-\tilde{A}_1$. Из этого условия по заданным a, b и N находится величина $m = m_N$. Период T в общем случае определяется выражением

$$T = \frac{1}{2}\Big[(N+2)\,m + 1\Big]\Big[3 + (-1)^m\Big]. \tag{8}$$

В рамках одного значения N изменения величины T происходят при значениях b, соответствующих в общем случае $m \in \{m_{N-1}, m_{N-2}, \ldots, 1\}$, получаемых из равенства

$$z_1 A_1^m - a_1 = x_1. \tag{9}$$

Это позволяет определить величину T и соответствующий ей диапазон значений b (начиная от найденного из (5)) в пределах одного значения N.

При нечетном N движение существенно отличается от рассмотренного выше. Например, при старте из точки D и $N = 1$ последовательность отображений на первоначальном этапе имеет вид

$$\begin{aligned} D \to \text{шестиугольник}\, DX_1Y_1BX_2Y_2 \to \text{треугольник}\, X_2CY_2 \to \\ \to DX_1 \to \text{шестиугольник}\, DX_1Y_1BX_2Y_2 \to \ldots \end{aligned}$$

Следовательно, изображающая точка, начиная движение с отрезка DX_1 (исключая точку X_1), на $(N{+}2)$-м шаге опять оказывается на стороне DA и т. д. Положение ее на этой стороне можно выразить одномерным отображением

$$x_1(m+1) = \tilde{A}_1 x_1(m) + A_2.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$x_1(m) = z_2 \tilde{A}_1^m - a_2, \tag{10}$$

где $z_2 = x_1(0) + a_2$, $a_2 = A_2/(\tilde{A}_1 - 1)$. Процесс (10) прекращается, если

$$x_1(m) \geq x_1. \tag{11}$$

Заметим, что в случае нечетного N величина T всегда четная. Из условия (11) по заданным a, b и N находится велчина $m = m_N$, при которой процесс прекращается. Величина T и соответствующие ей значения b в пределах одного значения N по аналогии с (9) находятся из равенства

$$x_1(m) = x_1. \tag{12}$$

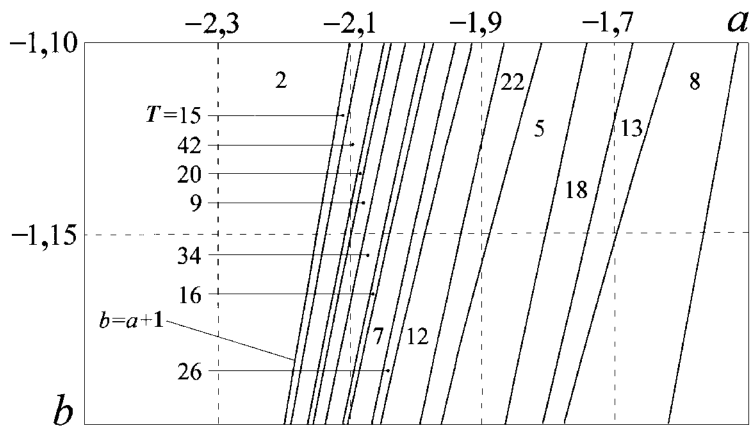

Рис. 3. Фрагмент бифуркационного портрета

Величины N, m, T и граничные значения b, заданные с точностью до двух знаков после запятой, при $a = -2$ приведены в табл. 1. На рис. 3. изображен фрагмент вычисленного по формулам (5), (9), (12) бифуркационного портрета для области параметров $\{(a, b) : a \in [-2{,}3; -1{,}5], b \in [1{,}2; -1{,}1]\}$ при условии, что значения b для $a = -2$ задаются с вышеуказанной точностью. Приведенные на рис. 3 числа соответствуют значению T в каждой из областей.

Экспериментально установлено, что найденные выше закономерности нарушаются, когда в процессе движения величина N не остается постоянной, что имеет место при $a = -2$, $b = \{-2{,}49; -2{,}48; -2{,}47; -2{,}46; -2{,}45; -2{,}44; -2{,}43; -2{,}42; -1{,}57; -1{,}55; -1{,}31\}$. Например, при $b = -2{,}49$ величина N принимает значения 0, 1, 0. В результате имеем $T = 16$. Факт изменения N в процессе движения весьма существенно осложняет анализ динамики и требует особого рассмотрения: закономерности зависят от четности N.

При четном N увеличению его на единицу при старте с отрезка DX_1 (исключая точку X_1) соответствует условие

$$y(N+1) < -\frac{b}{a}\,x(N+1) - \frac{1}{a}\,.$$

Используя (4), получим

$$B_1 x(0) - B_2 < -\frac{1}{a}\,,$$

где $B_1 = 2\mathrm{Re}(q_2 f_1 q_1^{N+1})$, $B_2 = 2\mathrm{Re}(f_1 q_1^{N+1})$, $f_1 = (q_1{+}b/a)/(q_2 - q_1)$. Это позволяет определить отрезок (x_1, x_1), где $x_1 = (B_2 - a^{-1})/B_1$, при старте с которого происходит увеличение N. Соответствующий отрезок (x_2, x_2), где $x_2 = -x_1$, имеется и на стороне BC. Для выявления факта изменения величины N следует при заданных a и b из равенства (9) найти $m = m_1$, а из неравенства

$$z_1 A_1^m - a_1 > x_1 \tag{13}$$

найти $m = \tilde{m}_1$. Если $m \geq \tilde{m}_1$, то величина N в процессе движения не меняется, а T находится из (8). Иначе N увеличивается на единицу и становится нечетным.

В случае нечетного N увеличению его на единицу при тех же стартовых условиях соответствует критерий

$$y(N+1) > -\frac{b}{a}x(N+1) + \frac{1}{a}.$$

Это позволяет определить отрезок $(x_{\text{п}3}, x_{\text{гр}1})$, где $x_3 = (B_2 + a^{-1})/B_1$, при старте с которого происходит увеличение N. Условию (13) в данном случае соответствует неравенство

$$z_2 \tilde{A}_1^m - a_2 > x_3.$$

При старте с отрезка BX_2 (исключая точку X_2) соответствующий отрезок (x_4, x_2), где $x_4 = -x_3$, имеется и на стороне BC.

Рассмотрим второй этап движения (с увеличенным на единицу значением N). В зависимости от четности $\tilde{m}_1$ стартовая точка движения может располагаться на сторонах DA или BC.

Если N — четное, то на втором этапе оно становится нечетным. При этом следует иметь ввиду, что при старте со стороны BC (точнее, с отрезка BX_2, исключая точку X_2) движение системы описывается функцией

$$x_1(m) = z_3 \tilde{A}_1^m + a_2,$$

где $z_3 = x_1(0) - a_2$. В общем случае произвольного $\tilde{m}_1$ имеем

$$x_1(m) = (-1)^{\tilde{m}_1}\{(-|x(\tilde{m}_1)| + a_2)\tilde{A}_1^m - a_2\}.$$

Величина $m = \tilde{m}_2$ с этим (увеличенным на единицу) значением N определяется условием

$$(-1)^{\tilde{m}_1} x_1(\tilde{m}_2) \le x_3.$$

При нечетном N точка старта второго этапа независимо от четности $\tilde{m}_1$ находится на отрезке DX_1, а движение характеризуется функцией (7), где $x_1(0) = x(\tilde{m}_1)$. Величина $m = \tilde{m}_2$ находится из условия

$$(-1)^{\tilde{m}_2} x_1(\tilde{m}_2) \le x_1.$$

Таблица 1

Параметр $-b$	Число итераций N в области D_0	Приведенное число итераций m	Период T
1,01	24	1	27
1,02	16	1	19
1,03	12	1	15
1,04	10	1	13
1,05	9	2	46
1,06	8	2	42
1,07	7	1	20
1,08	6	1	9
1,09	6	2	34
1,11	5	1	16
1,14	4	1	7
1,15	4	2	26
1,20	3	1	12
1,22	3	2	22
1,30	2	1	5
1,34	2	2	18
1,35	2	3	13
1,54	1	1	8
1,63	1	2	14
1,65	1	3	20
1,66	1	4	26
2,41	0	1	3
2,83	0	2	10
2,94	0	3	7
2,98	0	4	18
2,99	0	5	11

Далее следует процесс с исходным значением N и анализ повторяется. В общем случае алгоритм нахождения периода T имеет следующий вид. Обозначим через i номер этапа, i=1, 2, 3, ...

При четном N и нечетных значениях i находятся m_i из условия

$$(-1)^{k+m_i} x_1(m_i) \ge x_1,$$

где $k = \sum\limits_{j=0}^{i-1} m_j \left[1 - (-1)^j/2\right]$, $m_0 = 0$,

$$x_1(m) = (-1)^{k+m}\left\{(-|x_1(\tilde{m}_{i-1})| + a_{1i})A_{1i}^m - a_{1i}\right\}, \tag{14}$$

$$a_{1i} = \frac{A_{2i}}{\tilde{A}_{1i} + 1}, \quad A_{2i} = \frac{q_2^{N_i+2} - q_1^{N_i+2}}{q_2 - q_1},$$

$$A_{1i}=\frac{q_2q_1^{N_i+2}-q_1q_2^{N_i+2}}{q_2-q_1}\,,\quad N_i=N+\frac{1}{2}\Big[1+(-1)^i\Big],\quad A_{1i}=-\tilde{A}_{1i}\,,$$

а также $\tilde{m}_i$ из условия

$$(-1)^{k+\tilde{m}_i}x_1(\tilde{m}_i)>x_1.$$

При четных значениях i находятся $\tilde{m}_i$ из условия

$$(-1)^k x_1(\tilde{m}_i)\le x_3,$$

где

$$x_1(m)=(-1)^k\Big\{\left(-|x_1(\tilde{m}_{i-1})|+a_{2i}\right)\tilde{A}_{1i}^m-a_{2i}\Big\}\,, \tag{15}$$

$a_{2i}{=}A_{2i}/(\tilde{A}_{1i}-1)$. Процесс прекращается, когда при нечетном i выполняется

$$m_i\le\tilde{m}_i. \tag{16}$$

При этом период T вычисляется по формуле

$$T=\frac{1}{2}\,T_i\Big[3+(-1)^{k+m_i}\Big],$$

где $T_i=\sum\limits_{j=0}^{i-1}(N_j+2)\,\tilde{m}_j+(N+2)\,m_i+1$.

При нечетных N и i находятся m_i из условия

$$(-1)^s x_1(m_i)\ge x_1,$$

где $s=\sum\limits_{j=0}^{i-1}\tilde{m}_j\,[1+(-1)^j]/2$, а также $\tilde{m}_i$ из условия

$$(-1)^s x_1(\tilde{m}_i)>x_3.$$

Здесь функция $x_1(m)$ описывается выражением (15), в котором вместо k необходимо подставить величину s. При четных i находятся $\tilde{m}_i$ из условия

$$(-1)^{s+\tilde{m}_i}x_1(\tilde{m}_i)\le x_1,$$

где $x_1(m)$ определяется из выражения (14) с заменой в нем k на s. И здесь процесс прекращается, когда при нечетном i выполняется условие (16). При этом период T вычисляется по формуле

$$T=\frac{1}{2}\,T_i\Big[3+(-1)^s\Big].$$

С помощью этого алгоритма при $a=-2$; $b=-1{,}31$; $x(0)=-1$; $y(0)=1$ вычислены $N=2$, $\tilde{m}_1=1$, $\tilde{m}_2=4$, $m_3=1$, $T=58$, что подтверждается экспериментом.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье исследованы периодические движения в рекурсивной системе с нелинейностью насыщения и параметрами в одной из областей, лежащих ниже треугольника устойчивости. Найдены линейные одномерные отображения, позволяющие рассчитывать периоды движения и определять причины их изменения. Результаты могут использоваться при разработке цифровых генераторов сигналов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99–02–17939).

ЛИТЕРАТУРА

1. Galias Z., Ogorzalek M. J. // IEEE Trans. Circuits and Systems. 1990. V. 37, № 8. P. 1068.
2. Ogorzalek M. J. // Int. J. Bifurcation and Chaos. 1992. V. 2, № 1. P. 11.
3. Брюханов Ю. А., Глызин С. Д., Рахманова Н. К. Динамические свойства разностной модели цифрового фильтра с кусочно-линейной характеристикой типа насыщения: Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша РАН № 91. — М., 1993.
4. Брюханов Ю. А., Глызин С. Д., Рахманова Н. К. Динамика цифрового фильтра с кусочно-линейной характеристикой типа насыщения. Аналитическое исследование: Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша РАН № 17. — М., 1994.
5. Брюханов Ю. А., Глызин С. Д. // Изв. вуз. Прикл. нелин. дин. 1995. Т. 3, № 4. С. 53.
6. Брюханов Ю. А. // Радиотехника. 1996. № 5. С. 46.

Ярославский государственый
университет, г. Ярославль, Россия

Поступила в редакцию
3 августа 1998 г.

PERIODIC MOTIONS OF DIGITAL RECURSIVE SECOND-ORDER SYSTEM WITH SATURATION NONLINEARITY

Yu. A. Bryukhanov

We analyze periodic free oscillations in a second-order system with parameters below the stability triangle. Nonlinear processes are reduced to linear one-dimensional maps. We determine origins of changes of periods of motions and obtain formulas for calculation of these periods.

УДК 519.2, 621.372

ЛИНЕЙНОЕ ПРЕДСКАЗАНИЕ НА ОСНОВЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ НА СОБСТВЕННЫЕ ЧИСЛА АВТОКОРРЕЛЯЦИОННОЙ МАТРИЦЫ

С. А. Минеев, О. А. Морозов, А. А. Плеханов, Е. А. Солдатов

Для решения одной из распространённых задач обработки данных — прогнозирования поведения сигналов или процессов — предлагается отличный от традиционных способ определения коэффициентов предсказания, основанный на решении задачи определения собственных чисел автокорреляционной матрицы процесса. Предлагаемый метод отличается определёнными положительными свойствами, в частности, корни характеристического полинома, сформированного на основе коэффициентов предсказания, лежат на единичной окружности.

Линейное предсказание является одной из распространенных задач в различных областях прикладной науки, связанных с необходимостью прогнозирования поведения сигналов или процессов на основе ограниченного набора имеющихся данных. В общем виде схема линейного предсказания записывается в следующей форме:

$$\sum_{j=1}^{N} c_j x_{i-j} = x_i + u_i, \tag{1}$$

где N — порядок модели, x_i — отсчеты предсказываемого процесса, u_i — ошибка предсказания.

Традиционный способ определения вектора коэффициентов $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_N)$ основан на том, что ошибку предсказания полагают некоррелированной последовательностью, т. е.

$$\langle u_i u_{i-k} \rangle = \begin{cases} \sigma^2, & k = 0, \\ 0, & k \neq 0, \end{cases}$$

где σ^2 — дисперсия шума.

Условие некоррелированности сводит задачу линейного предсказания к решению системы уравнений относительно компонент вектора $\mathbf{c}$, аналогичных уравнениям Юла—Уолкера для авторегрессионного процесса [1—4]. Таким образом, коэффициенты предсказания оказываются совпадающими с коэффициентами авторегрессии.

Другой способ определения вектора $\mathbf{c}$ состоит в минимизации ошибки предсказания методом наименьших квадратов, т. е. в достижении минимального значения величины

$$\sum_{i=0}^{M-N} u_i^2,$$

где M — количество отсчетов временного ряда. Условие минимума среднеквадратичного рассогласования приводит к следующей системе уравнений:

$$\begin{bmatrix} R_0 & R_1 & \ldots & R_N \\ R_1 & R_0 & \ldots & R_{N-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ R_N & R_{N-1} & \ldots & R_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ c_1 \\ \ldots \\ c_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{bmatrix},$$

где R_i — отсчеты корреляционной функции сигнала (процесса).

Определение коэффициентов прогноза вторым способом дает более высокую точность, но при этом ошибка предсказания оказывается коррелированной последовательностью.

Представляется целесообразным использовать метод минимизации ошибки предсказания для определения коэффициентов линейного прогноза другим способом, отличающимся от традиционной схемы определенными положительными свойствами.

Выражение (1) может быть представлено в следующем виде:

$$\sum_{j=0}^{N} c_j x_{i-j} = u_i, \tag{2}$$

где $c_0 = -1$.

Предлагается отказаться от ограничения в виде $c_0 = -1$. Для того чтобы минимизация среднеквадратичного рассогласования не приводила к тривиальному решению, введем ограничение в виде фиксированной длины вектора $\mathbf{c}$. В этом случае справедливы следующие соотношения:

$$\sum_{i=0}^{M-N} \left(\sum_{j=0}^{N} c_j x_{i-j} \right)^2 \to \min, \quad \sum_{j=0}^{N} c_j^2 = 1. \tag{3}$$

Как будет показано в дальнейшем, решение, полученное с использованием такого ограничения, обладает определенными положительными свойствами по сравнению с традиционным вариантом.

Выражение (3) может быть переписано в следующем виде:

$$\sum_{i=0}^{M-N} \left(\sum_{m=0}^{N} \sum_{n=0}^{N} c_m c_n x_{i-m} x_{i-n} \right) \to \min, \quad \sum_{j=0}^{N} c_j^2 = 1. \tag{4}$$

Сменим в (4) порядок суммирования и введем обозначение

$$G_{mn} = \sum_{i=0}^{M-N} x_{i-m} x_{i-n}. \tag{5}$$

Решение задачи минимизации при введенном выше ограничении на длину вектора коэффициентов линейного прогноза методом множителей Лагранжа приводит к соотношениям

$$\left\{ \sum_{m=0}^{N} \sum_{n=0}^{N} G_{nm} c_m c_n - \lambda \sum_{i=0}^{N} c_i^2 \to \mathrm{opt} \right\} \Rightarrow \sum_{n=0}^{N} G_{nm} c_n = 2\lambda c_m. \tag{6}$$

Таким образом, решением этой задачи является собственный вектор матрицы G. Покажем, что решение задачи минимизации среднеквадратичного рассогласования (3) эквивалентно решению задачи (6), где в качестве вектора коэффициентов предсказания следует взять собственный вектор, соответствующий минимальному собственному значению $\lambda_{\min}$.

С учетом введенного обозначения (5) выражение (3) можно представить в следующем виде

$$\Phi(\mathbf{c}) = \sum_{m=0}^{N} \sum_{n=0}^{N} G_{mn} c_m c_n \to \min, \qquad \sum_{n=0}^{N} c_n^2 = 1.$$

Выясним, когда функционал $\Phi(\mathbf{c})$ с учетом ограничения на длину вектора $\mathbf{c}$ примет наименьшее значение:

$$\Phi(\mathbf{c}) = \sum_{m=0}^{N} \sum_{n=0}^{N} G_{mn} c_m c_n = \sum_{m=0}^{N} c_m \sum_{n=0}^{N} G_{mn} c_n = \sum_{m=0}^{N} c_m \lambda c_m = \lambda \sum_{m=0}^{N} c_m^2 = \lambda.$$

Таким образом, минимум функционала $\Phi(\mathbf{c})$ достигается, если в качестве решения взять собственный вектор, соответствующий минимальному собственному значению $\lambda_{\min}$.

При $M \to \infty$ имеем $G_{mn} \approx R_{mn}$, где R — автокорреляционная матрица. Тогда справедливо соотношение

$$R\,\mathbf{c} = \sigma^2_{\min}\,\mathbf{c},$$

где введено обозначение $2\lambda_{\min} = \sigma^2_{\min}$. Таким образом, вычисление коэффициентов предсказания сводится к решению задачи на собственные числа автокорреляционной матрицы.

Схема линейного прогноза имеет вид

$$x_i = \sum_{j=0}^{N} a_j x_{i-j} + u_i, \tag{7}$$

где $a_j = -c_j/c_0$.

Очевидно, что вектор $\mathbf{a} = (1, -a_1, -a_2, \ldots, -a_N)$ является собственным вектором матрицы R, соответствующим минимальному собственному значению. Это приводит к тому, что коэффициенты a_k имеют важное свойство, которое отсутствует у коэффициентов предсказания, вычисленных другими способами: корни характеристического полинома, сформированного на основе коэффициентов a_k, лежат на единичной окружности. Это обстоятельство дает возможность более эффективного прогнозирования на большее количество шагов вперед по сравнению с другими методами. Более высокая точность предсказания у предлагаемого подхода объясняется тем, что традиционные методы линейного прогнозирования содержат тенденции к подавлению интенсивности предсказываемого процесса в случае существования корней внутри единичной окружности либо, наоборот, тенденцию повышения его интенсивности в случае существования корней вне единичной окружности. Эти тенденции тем сильнее, чем на большее число шагов осуществляется прогноз, что может довольно быстро привести к сильному возрастанию ошибки предсказания.

Предлагаемый способ лишен этого недостатка. Он основан на минимизации среднеквадратичного рассогласования между исходными и предсказанными данными. В этом смысле он может быть отнесен к методам оптимального прогнозирования [5].

Описанный выше способ вычисления коэффициентов предсказания был применен для предсказания отсчётов сигнала и подавления некоррелированных помех. Для вычисления вектора коэффициентов предсказания был использован метод сингулярного разложения теплицевой матрицы, составленной из отсчетов автокорреляционной функции сигнала. Порядок модели определялся на основе предварительного анализа собственных чисел корреляционной матрицы большой размерности и соответствовал номеру первого сингулярного числа из шумового подпространства, характеризующегося скачкообразным уменьшением величины сингулярных чисел.

Результаты работы представленного выше алгоритма сравнивались с традиционным методом предсказания на основе авторегрессионной модели с вычислением коэффициентов предсказания путем решения системы уравнений Юла—Уолкера. Модельный сигнал представлял собой сумму четырех синусоид с относительными частотами (в интервале Найквиста) 0,15; 0,18; 0,3 и 0,4 и относительными амплитудами соответственно 1; 1; 0,5 и 0,5 и аддитивного белого шума (соотношение сигнал/шум +10 дБ). Длина реализации временного ряда составляла 512 отсчетов.

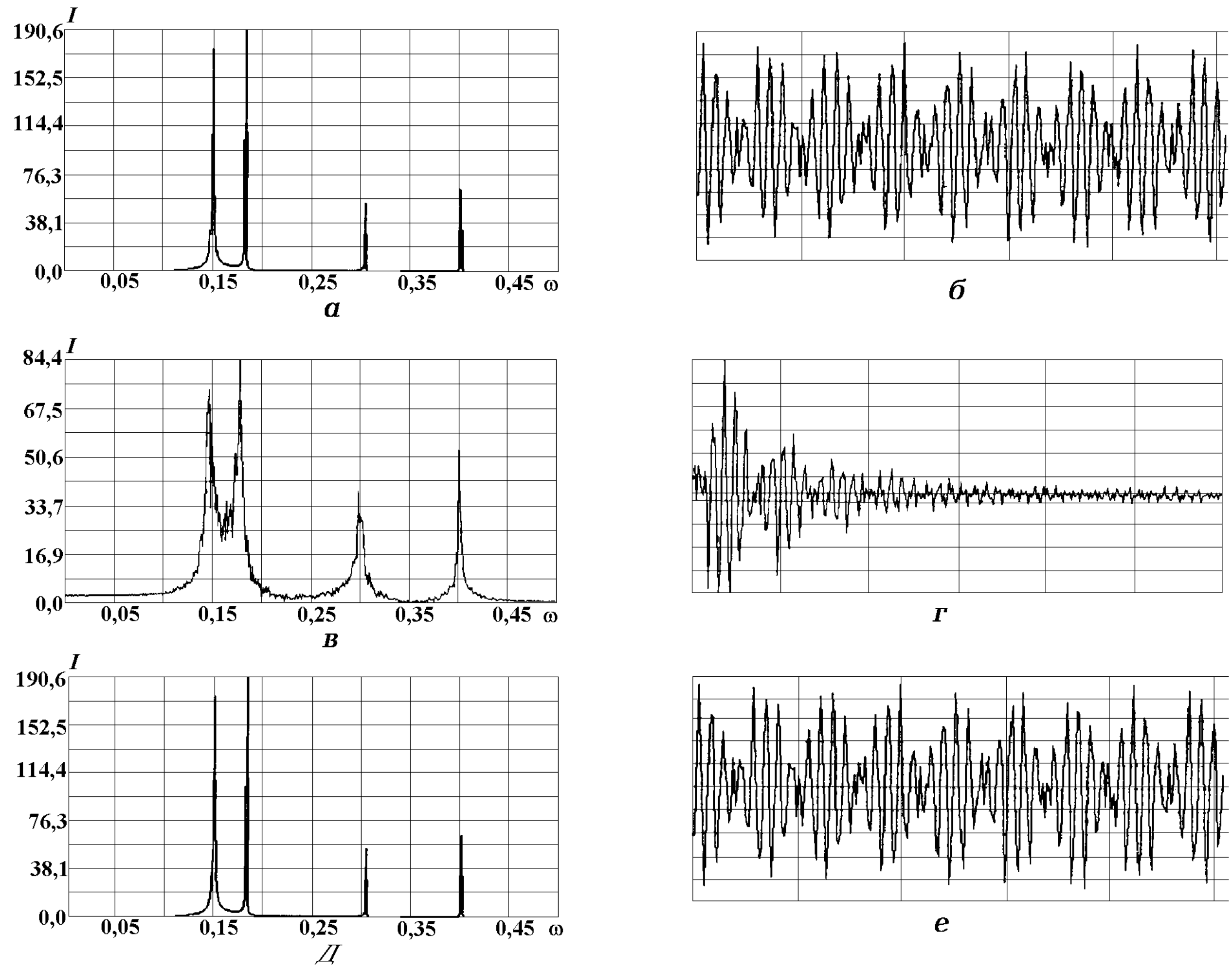

Рис. 1

На рис. 1 представлено сравнение результатов восстановления модельного сигнала (*а* — спектр, *б* — реализация) методом авторегрессии (*в, г*) и предложенным методом (*д, е*). Порядок модели N в обоих случаях равен девяти, что соответствует теоретическому порядку для заданного количества синусоид. В обоих случаях на основе анализа автокорреляционной матрицы сигнала определялись коэффициенты предсказания и по первым 9-ти отсчетам исходного ряда прогнозировались остальные отсчеты (общим числом 512). Спектральная оценка представляет собой модуль I преобразования Фурье временного ряда и приведена для демонстрации сохранения спектральных характеристик предсказываемых сигналов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Марпл С. Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. — М.: Мир, 1990. — 584 с.
2. Pisarenko V. F. // Geophys J. R. Astr. Soc. 1972. V. 28.
3. Pisarenko V.F. // Geophys J. R. Astr. Soc. 1973. V. 33.
4. Макхол Д. // ТИИЭР. 1975. Т. 63, № 4. С. 20.
5. Гренандер У., Сеге Г. Теплицевы формы и их приложения. — М.: Изд-во иностр. лит., 1961.

Научно-исследовательский
физико-технический институт
Нижегородского госуниверситета
им. Н. И. Лобачевского,
г. Н. Новгород, Россия

Поступила в редакцию
11 марта 1999 г.

LINEAR PREDICTION BASED ON THE SOLUTION OF EIGENVALUE PROBLEM FOR AUTOCORRELATION MATRIX

S. A. Mineev, O. A. Morozov, A. A. Plekhanov, and E. A. Soldatov

To solve the problem on prediction of signal or process behavior, which occurs quite often in data processing, we propose a method for determination of the prediction coefficients. The proposed method is based on the solution of eigenvalue problem for the autocorrelation matrix of the process. It has some advantages as compared to the known conventional methods. In particular, the roots of the characteristic polinomial composed using the prediction coefficients are located on the unit circle.

УДК 535.41

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ФОТООТСЧЕТОВ ПРИ РЕГИСТРАЦИИ КОГЕРЕНТНОГО СИГНАЛА НА ФОНЕ ШУМА ДЕТЕКТОРОМ С ПЕРЕМЕННОЙ ЭФФЕКТИВНОСТЬЮ

А. С. Мазманишвили

Рассмотрена задача о распределении отсчётов оптического фотодетектора, поглощающего когерентное поле излучения $\beta(t)$ на фоне шума $\alpha(t)$, обладающего свойствами нормального марковского процесса. Известная формула Манделя, описывающая вероятность $P(n)$ зарегистрировать n отсчётов за интервал наблюдения $(0,T)$, распространена на случай детектора с зависящей от времени квантовой эффективностью $\epsilon(t)$. Проанализировано влияние эффективности $\epsilon(t)$ на распределение отсчётов $P(n)$, проведено сравнение со случаем $\epsilon(t)\equiv 1$.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Обязательным элементом оптических систем передачи информации является приемник — фотодетектор. Действие оптического излучения на фоточувствительную поверхность детектора приводит к появлению свободных электронов, которые после преобразования регистрируются в виде импульсов-отсчетов. В режиме счета импульсов на выходе детектора формируется информационный поток фотоотсчетов. В силу квантовой природы статистика фотоотсчетов даже когерентного носителя информации — оптического поля излучения — является пуассоновской.

Флуктуации числа фотоэлектрических отсчетов содержат информацию о состоянии поля излучения. При описании результатов опытов по распределению фотоотсчетов оптическими детекторами пользуются ставшей уже классической формулой Манделя. Эта формула для распределения $P(n)$ числа n фотоотсчетов (фотоэлектронов) на интервале регистрации $(0,T)$ имеет вид [1, 2]

$$P(n) = \left\langle \frac{1}{n!}\,\Omega^n \exp(-\Omega) \right\rangle. \tag{1}$$

В общем случае в этой формуле Ω — поглощенная энергия поля,

$$\Omega = \int\limits_0^T \epsilon(t)\,|\alpha(t)+\beta(t)|^2\,\mathrm{d}t, \tag{2}$$

$\beta(t)$ — комплексная амплитуда когерентной компоненты излучения, $\alpha(t)$ — комплексная амплитуда случайной компоненты излучения (шума), $\epsilon(t)$ — квантовая чувствительность (эффективность) фотодетектора. Поскольку регистрируется излучение со случайными свойствами, в (1) необходимо выполнить усреднение по ансамблю всех возможных значений поглощенной детектором энергии Ω оптического поля излучения, реализующимся на рассматриваемом временном интервале $(0,T)$, или по всем возможным реализациям на интервале $(0,T)$ случайной амплитуды $\alpha(t)$ шумовой компоненты поля излучения, т. е. вычислить интеграл в пространстве, образованном функциями $\{\alpha(t)\}$. В (1) операция усреднения обозначена угловыми скобками. Другими словами, если $p(\Omega)$ — плотность распределения случайной величины Ω, то

$$P(n) = \int\limits_0^\infty \frac{1}{n!}\,\Omega^n \exp(-\Omega)\,p(\Omega)\,\mathrm{d}\Omega. \tag{3}$$

Таким образом, в общем случае распределение отсчетов $P(n)$ описывается взвешенным распределением Пуассона, т. е. операция усреднения по ансамблю приводит, вообще говоря, к отклонению $P(n)$ от распределения Пуассона.

Большинство практически распространенных выражений относятся к случаю $\epsilon(t) \equiv \mathrm{const}$. Между тем, если $\epsilon(t) \not\equiv \mathrm{const}$, то конкретный вид $p(\Omega)$, а с ней и $P(n)$, изменится. Конструкция формулы Манделя позволяет рассмотреть общий случай, когда $\epsilon(t) \not\equiv \mathrm{const}$.

Закон распределения отсчетов оптического гауссового шума при регистрации детектором с постоянной квантовой эффективностью был приведен в работе [3], а закон распределения отсчетов когерентного оптического сигнала на фоне гауссового шума при регистрации детектором с постоянной квантовой эффективностью впервые был приведен в [4].

Целью настоящей работы является получение общей формулы для распределения фотоотсчетов детектором с квантовой эффективностью $\epsilon(t)$, произвольным физически реализуемым образом зависящей от текущего времени. При этом примем, что оптическое поле излучения представляет собой аддитивную суперпозицию когерентного излучения с заданной комплексной амплитудой $\beta(t)$ и гауссового шума — случайной компоненты $\alpha(t)$, которая обладает свойствами нормального марковского комплекснозначного стохастического процесса с интенсивностью σ и шириной спектральной линии ν. Такой процесс (процесс Орнштейна—Уленбека [5, 6]) описывается уравнением

$$\dot{\alpha}(t) = \nu\alpha(t) + u(t), \qquad \alpha(0) = \alpha_0, \tag{4}$$

с порождающим процессом $u(t)$ типа белого шума. Статистические свойства такого процесса характеризуются равновесной и переходной плотностями распределения вида

$$w(\alpha_0, 0) = \frac{1}{\pi\sigma} \exp\left(-\frac{|\alpha_0|^2}{\sigma}\right), \tag{5а}$$

$$w(\alpha, t \,|\, \alpha_0, 0) = \frac{1}{\pi\,[1-\exp(-2\nu t)]\,\sigma} \exp\left(-\frac{|\alpha - \exp(-\nu t)\alpha_0|^2}{[1-\exp(-2\nu t)]\,\sigma}\right), \tag{5б}$$

и в каждый момент времени его первые безусловные моменты

$$\langle \alpha(t) \rangle = 0, \qquad \langle |\alpha(t)|^2 \rangle = \sigma. \tag{6}$$

Относительно функции $\beta(t)$ примем, что она квадратично интегрируемая.

2. ПРОИЗВОДЯЩАЯ ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФОТООТСЧЕТОВ

В задачах теории связи свойства распределения фотоотсчетов $P(n)$ удобно описывать посредством производящей функции (ПФ) [1, 2]. Для распределения (3) ПФ имеет вид

$$Q_{\alpha+\beta}(\lambda, T) = \langle \exp(-\lambda\Omega) \rangle = \int\limits_0^\infty \exp(-\lambda\Omega)\, p(\Omega)\, \mathrm{d}\Omega. \tag{7}$$

Если известна функция $Q_{\alpha+\beta}(\lambda, T)$, то

$$P(n) = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\lambda^n} Q_{\alpha+\beta}(\lambda, T)\bigg|_{\lambda=1}, \tag{8а}$$

или

$$P(n)=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{\mathrm{d}z}{(z-\lambda)^{n+1}}\,Q_{\alpha+\beta}(z,T)\bigg|_{\lambda=1}. \tag{8б}$$

Таким образом, формально описание статистики отсчетов в терминах ПФ сводится к вычислению следующего континуального интеграла:

$$Q_{\alpha+\beta}(\lambda,T)=\int\mathrm{d}^2\alpha_0\,w(\alpha_0)\int\mathrm{d}^2\alpha_{_T}\,\Psi_\lambda(\alpha_0,0;\alpha_{_T},T), \tag{9}$$

где

$$\Psi_\lambda(\alpha_0,0;\alpha_{_T},T)=\left\langle\alpha_0,0\left|\exp\left\{-\lambda\int\limits_0^T\epsilon(t)\,|\alpha(t)+\beta(t)|^2\,\mathrm{d}t\right\}\right|\alpha_{_T},T\right\rangle$$

— условная амплитуда перехода из состояния $\langle\alpha_0,0|$ в состояние $|\alpha_{_T},T\rangle$, усредненная по всем реализующимся за интервал регистрации $(0,T)$ траекториям процесса $\alpha(t)$.

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДЯЩЕЙ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФОТООТСЧЕТОВ

Поскольку процесс $\alpha(t)$ является гауссовым, для нахождения среднего (9) воспользуемся методом Карунена—Лоэва [1]. С этой целью введем обозначение для скалярного произведения двух функций $f(t)$ и $\varphi(t)$

$$(f,\varphi)=\int\limits_0^T f(t)\,\varphi^*(t)\,\mathrm{d}t, \tag{10}$$

тогда континуальное среднее (7) примет вид

$$Q_{\alpha+\beta}(\lambda,T)=\left\langle\exp\left[-\lambda\Big((\alpha+\beta),\epsilon\,(\alpha+\beta)\Big)\right]\right\rangle. \tag{11}$$

Запишем безусловное среднее (9) с помощью континуального преобразования Фурье:

$$Q_{\alpha+\beta}(\lambda,T)=\int D^2f(t)\left\langle\exp\Big\{-\int\limits_0^T|f(t)|^2\,\mathrm{d}t+2\sqrt{-\lambda}\;\mathrm{Re}(A+B)-\lambda\int\limits_0^T\epsilon(t)\,|\beta(t)|^2\,\mathrm{d}t\Big\}\right\rangle, \tag{12}$$

где с помощью “дифференциала" $D^2f(t)$ обозначено интегрирование в пространстве, образованном множеством функций $\{f(t)\}$,

$$A=\int\limits_0^T\sqrt{\epsilon(t)}\,f(t)\,\alpha^*(t)\,\mathrm{d}t,\qquad B=\int\limits_0^T\sqrt{\epsilon(t)}\,f(t)\,\beta^*(t)\,\mathrm{d}t.$$

В силу гауссовости $\alpha(t)$ величина A также является гауссовой с $\langle A\rangle=0$ и

$$\langle|A|^2\rangle=\sigma\int\limits_0^T\int\limits_0^T\sqrt{\epsilon(t)\,\epsilon(t')}\,\exp(-\nu\,|t-t'|)\,f(t)f^*(t')\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}t'. \tag{13}$$

Поэтому (E — единичный оператор)

$$Q_{\alpha+\beta}(\lambda,T)=\int D^2f(t)\,\exp\left[-(f,(E+\lambda K)f)-2\mathrm{i}\sqrt{\lambda}\,\mathrm{Re}(f,\sqrt{\epsilon}\beta)-\lambda(\beta,\epsilon\beta)\right], \tag{14}$$

где корреляционный оператор имеет вид

$$K(t,t') = \sigma\sqrt{\epsilon(t)\,\epsilon(t')}\exp(-\nu\,|t-t'|). \tag{15}$$

Вычисляя континуальный интеграл (14), найдем

$$Q_{\alpha+\beta}(\lambda,T) = \frac{1}{\det(E+\lambda K)}\exp\left[-\lambda\left(\sqrt{\epsilon}\beta,(E+\lambda K)^{-1}\sqrt{\epsilon}\beta\right)\right]. \tag{16}$$

Выражение (16) для ПФ удобно записать в факторизованном представлении

$$Q_{\alpha+\beta}(\lambda,T) = Q_\alpha(\lambda,T)\,Q_\beta(\lambda,T)\,Q_{\alpha\beta}(\lambda,T), \tag{17}$$

где

$$Q_\alpha(\lambda,T) = \frac{1}{\det(E+\lambda K)} \tag{17а}$$

— множитель ПФ, связанный с наличием шума $\alpha(t)$,

$$Q_\beta(\lambda,T) = \exp\left\{-\lambda(\beta,\epsilon\beta)\right\} = \exp\left\{-\lambda\int\limits_0^T \epsilon(t)\,|\beta(t)|^2\,\mathrm{d}t\right\} \tag{17б}$$

— множитель ПФ, связанный с наличием сигнала $\beta(t)$,

$$Q_{\alpha\beta}(\lambda,T) = \exp\left\{-\lambda\left(\sqrt{\epsilon}\beta,\ (E+\lambda K)^{-1}\sqrt{\epsilon}\beta\right)+\lambda(\beta,\epsilon\beta)\right\} \tag{17в}$$

— множитель ПФ, обусловленный интерференцией сигнала и шума.

В Приложении 1 показано, что

$$Q_\alpha(\lambda,T) = \frac{2\nu\,(r_0+r_T)\exp(\nu T)}{(r_0+\nu)\,(r_T+\nu)\exp\left(R_{0,T}\right)-(r_0-\nu)\,(r_T-\nu)\exp\left(-R_{0,T}\right)}, \tag{18а}$$

где $r_0 = \sqrt{\nu^2+2\lambda\sigma\nu\epsilon(0)}$, $r_T = \sqrt{\nu^2+2\lambda\sigma\nu\epsilon(T)}$, $R_{0,T} = \int\limits_0^T\sqrt{\nu^2+2\lambda\sigma\nu\epsilon(t)}\,\mathrm{d}t$.

В Приложении 2 в результате решения интегрального уравнения показано, что

$$\begin{gathered}\ln Q_{\alpha\beta}(\lambda,T) = 2\lambda^2\nu\sigma\int\limits_0^T\mathrm{d}t\int\limits_0^t\mathrm{d}\tau\,\epsilon(t)\epsilon(\tau)r^{-1}(\tau)\,\mathrm{ch}\,R_{\tau,t}\,\mathrm{Re}\left[\beta(t)\beta^*(\tau)\right]+\\ +2\lambda^2\nu\sigma\left[(\nu r_0+\nu r_T)\ \mathrm{ch}\,R_{0,T}+(r_0r_T+\nu^2)\ \mathrm{sh}\,R_{0,T}\right]^{-1}\int\limits_0^T\mathrm{d}t\int\limits_0^T\mathrm{d}\tau\,\epsilon(t)\epsilon(\tau)r^{-1}(\tau)\times\\ \times\left[r_0\,\mathrm{ch}R_{0,t}+\nu\,\mathrm{sh}R_{0,t}\right]\left[r_\tau\,\mathrm{ch}\,R_{\tau,T}+\nu\,\mathrm{sh}\,R_{\tau,T}\right]\mathrm{Re}\left[\beta(t)\beta^*(\tau)\right],\end{gathered} \tag{18б}$$

где $r_t\equiv r(t) = \sqrt{\nu^2+2\lambda\nu\sigma\epsilon(t)}$, $R_{\tau,t} = \int\limits_\tau^t\sqrt{\nu^2+2\lambda\sigma\nu\epsilon(t')}\,\mathrm{d}t'$.

Формулы (17)–(18) образуют основной результат настоящей работы. В частном случае постоянной во времени квантовой эффективности фотодетектора, когда $\epsilon(t) \equiv 1$, найденное выражение переходит в известное (см., например, [3, 6]):

$$Q_\alpha(\lambda,T)\Big|_{\epsilon=1} = \frac{4\nu r\exp(\nu T)}{(r+\nu)^2\exp(rT) - (r-\nu)^2\exp(-rT)}\,, \tag{19}$$

где $r = \sqrt{\nu^2 + 2\lambda\sigma\nu}$, аналогично [3, 7]

$$Q_{\alpha+\beta}(\lambda,T)\Big|_{\epsilon=1} = 4\nu r\exp(\nu T)\left[(r+\nu)^2 e^{rT} - (r-\nu)^2 e^{-rT}\right]^{-1} \times \tag{20}$$

$$\times\exp\Bigg\{-\lambda\int\limits_0^T |\beta(t)|^2\,\mathrm{d}t - \lambda^2\sigma(\nu/r)\int\limits_0^T \mathrm{d}t\int\limits_0^t \mathrm{d}\tau\left[e^{r(t-\tau)} - e^{-r(t-\tau)}\right]\mathrm{Re}\,[\beta(t)\beta^*(\tau)] +$$

$$+\lambda^2\sigma(\nu/r)\left[(r+\nu)^2 e^{rT} - (r-\nu)^2 e^{-rT}\right]^{-1}\int\limits_0^T \mathrm{d}t\left[(r+\nu)e^{rt} + (r-\nu)e^{-rt}\right]\times$$

$$\times\int\limits_0^T \mathrm{d}\tau\left[(r+\nu)e^{r(T-\tau)} + (r-\nu)e^{-r(T-\tau)}\right]\mathrm{Re}\,[\beta(t)\beta^*(\tau)]\Bigg\}.$$

Плотность распределения $p(\Omega)$ значений случайной поглощенной фотодетектором энергии Ω может быть согласно (7) найдена из (17)–(18) с помощью обратного преобразования Лапласа.

4. СВОЙСТВА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФОТООТСЧЕТОВ ПРИ РЕГИСТРАЦИИ ДЕТЕКТОРОМ С ПЕРЕМЕННОЙ КВАНТОВОЙ ЭФФЕКТИВНОСТЬЮ

Выражения (17)–(18) справедливы при любой физически реализуемой зависимости квантовой эффективности $\epsilon(t)$ фотодетектора от времени. Произведению парциальных ПФ Q_α, Q_β и $Q_{\alpha\beta}$ отвечает свертка соответствующих им парциальных вероятностей отсчетов $P_\alpha(n)$, $P_\beta(n)$ и $P_{\alpha\beta}(n)$. Для полной вероятности $P_{\alpha+\beta}(n)$ зарегистрировать n отсчетов при детектировании в течение временного интервала $(0,T)$ суперпозиции когерентного и шумового излучений получим

$$P_{\alpha+\beta}(n) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{k} P_\alpha(n-k)\,P_\beta(k-m)\,P_{\alpha\beta}(m), \tag{21}$$

при этом каждая из парциальных амплитуд вероятностей $P_\alpha(n)$, $P_\beta(n)$ и $P_{\alpha\beta}(n)$ находится с помощью интеграла Коши (8б) с подстановкой в него соответственно Q_α, Q_β и $Q_{\alpha\beta}$. Из (17)–(18) можно получить, что среднее число фотоотсчетов $\alpha(t)+\beta(t)$ равно

$$\langle n\rangle_{\alpha+\beta} = -\,Q'_{\alpha+\beta}(\lambda,T)\Big|_{\lambda=0} = \int\limits_0^T \epsilon(t)\left(\sigma + |\beta(t)|^2\right)\mathrm{d}t \equiv \langle n\rangle_\alpha + \langle n\rangle_\beta, \tag{22}$$

т. е. сумме средних чисел отсчетов компонент суперпозиции. В (22) штрих обозначает производную по λ.

Второй факториальный момент числа фотоотсчетов равен

$$\langle n\,(n-1)\rangle_{\alpha+\beta} = \Big[Q''_\alpha(\lambda,T) + 2\,Q'_\alpha(\lambda,T)\,Q'_\beta(\lambda,T) + Q''_\beta(\lambda,T) + Q''_{\alpha\beta}(\lambda,T)\Big]\Big|_{\lambda=0}. \tag{23}$$

Дисперсия $\Delta_\beta^2 = \langle n^2\rangle_\beta - \langle n\rangle_\beta^2$ числа фотоотсчетов когерентной компоненты излучения $\beta(t)$ тождественно равна $\langle n\rangle_\beta$, поскольку $P_\beta(n)$ описывается распределением Пуассона.

Дисперсия $\Delta_\alpha^2 = \langle n^2\rangle_\alpha - \langle n\rangle_\alpha^2$ некогерентной компоненты излучения $\alpha(t)$ равна

$$\Delta_\alpha^2 = \langle n\rangle_\alpha + \left(\sigma^2/\nu\right)\left(\int\limits_0^T \epsilon^2(t)\,\mathrm{d}t - \epsilon(0)\epsilon(T)\,\frac{1-e^{-2\nu T}}{2\nu}\right). \tag{24}$$

Отсюда следует выражение для дисперсии числа фотоотсчетов полного поля излучения:

$$\Delta_{\alpha+\beta}^2 = \Delta_\alpha^2 + \Delta_\beta^2 + 2\sigma\int\limits_0^T \mathrm{d}t\,\epsilon(t)\int\limits_0^t \mathrm{d}\tau\,\epsilon(\tau)\,e^{\nu(t-\tau)}\,\mathrm{Re}\,[\beta(t)\beta^*(\tau)] -$$
$$- 2\sigma\int\limits_0^T \mathrm{d}t\,\epsilon(t)\int\limits_0^t \mathrm{d}\tau\,\epsilon(\tau)\left[e^{\nu(t-\tau)} + e^{-\nu(t-\tau)}\right]\mathrm{Re}\,[\beta(t)\beta^*(\tau)]\,, \tag{25}$$

т. е. благодаря наличию когерентной компоненты в поле излучения общая дисперсия числа фотоотсчетов увеличивается.

В формулах для среднего числа фотоотсчетов (22) и дисперсии (25) зависимость от квантовой эффективности $\epsilon(t)$ как от функции текущего времени указана явно. Отметим, что в приведенных выражениях для моментов помимо функции $\epsilon(t)$ присутствуют ее значения $\epsilon(0)$ и $\epsilon(T)$, отвечающие границам интервала регистрации.

Величина $\delta = (\langle n^2\rangle - \langle n\rangle^2 - \langle n\rangle)\,\langle n\rangle^{-2}$ (параметр группировки фотоотсчетов [2, 5]) в случае идеального распределения Пуассона тождественно равна нулю, поэтому ее удобно рассматривать как индикатор близости реального распределения к идеальному случаю. Рассмотрим простой пример для квантовой эффективности $\epsilon(t)$ вида

$$\epsilon(t) = 1 - t/(t + T_\mathrm{d}) \tag{26}$$

с некоторой постоянной T_d фотокатода детектора, используемого для регистрации лишь шумовой компоненты $\alpha(t)$ поля излучения. Такая зависимость отклоняется от идеальной тем меньше, чем больше параметр T_d. После интегрирования в (П2.9) и (25) при $\beta(t) = 0$ получим

$$\begin{gathered} r_0 = \nu\sqrt{1+2\lambda\sigma T_\mathrm{c}}, \qquad r_T = \nu\sqrt{1+2\lambda\sigma T_\mathrm{c}/(1+T/T_\mathrm{d})}, \\ R_{0,T} = (T_\mathrm{d}/T_\mathrm{c})\left[\sqrt{(1+T/T_\mathrm{d})^2 + 2\lambda\sigma T_\mathrm{c}\,(1+T/T_\mathrm{d})} - \sqrt{1+2\lambda\sigma T_\mathrm{c}}\right] + \\ + 2\lambda\sigma T_\mathrm{c}\left[\ln\left(\sqrt{1+T/T_\mathrm{d}} + \sqrt{1+T/T_\mathrm{d}+2\lambda\sigma T_\mathrm{c}}\right) - \ln\left(1+\sqrt{1+2\lambda\sigma T_\mathrm{c}}\right)\right]. \end{gathered} \tag{27}$$

Здесь $T_\mathrm{c} = \nu^{-1}$ — время корреляции шумовой компоненты излучения.

На рис. 1–3 показаны семейства распределений $P_\alpha(n)$ для различных значений параметров σ, T, ν и величины T_d. Параметр группировки при этом составляет

$$\delta = \delta_\infty\,(1+T/T_\mathrm{d})^{-1}\,, \tag{28}$$

где δ_∞ — значение параметра группировки в случае $T_\mathrm{d} \to \infty$, когда временные характеристики детектора не проявляются. Случай $(1 + T/T_\mathrm{d})^{-1} \ll 1$ отвечает, по существу, детектированию поля излучения за малый интервал T_d, при этом реализуются лишь состояния $\alpha(t)$ близкие к начальному α_0 и, таким образом, эффективно регистрируется поле в квазикогерентном состоянии. Поэтому на выходе фотодетектора с малой длительностью T_d квантовой эффективности будет зарегистрирован поток отсчетов, в котором явление их группировки окажется заниженным тем сильней, чем меньше T_d. В случае идеального фотодетектора на формирование статистики отсчетов влиял согласно (24) параметр $\eta_1 = \nu T = T/T_\mathrm{c}$. Детектор с неидеальным фотокатодом изменяет статистическую картину тем сильней, чем меньше величина T_d. Включение в рассмотрение дополнительного параметра $\eta_2 = T/T_\mathrm{d}$ нарушает автомодельность распределения $P(n)$.

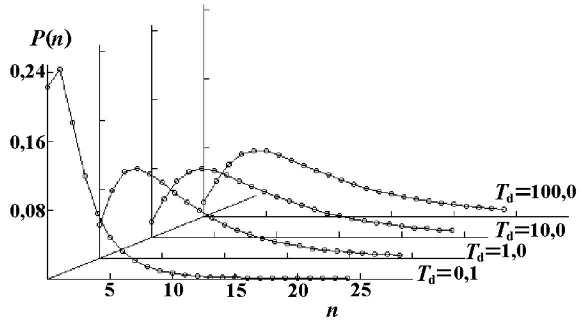

Рис. 1. Распределение отсчетов оптического фотодетектора с квантовой эффективностью (26) при $\sigma = 10$, $T = 1$, $\nu = 1$ для различных постоянных T_d фотокатода

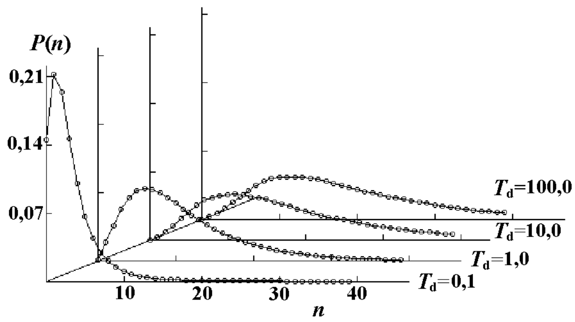

Рис. 2. То же, что на рис. 1, при $\sigma = 10, T = 2, \nu = 1$

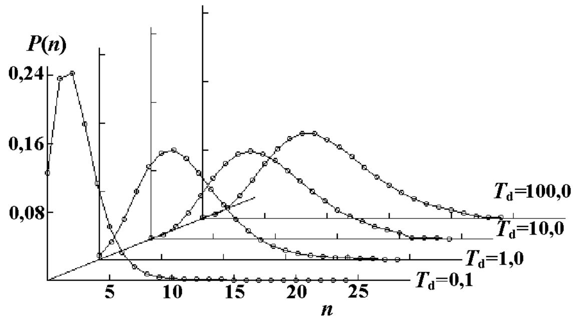

Рис. 3. То же, что на рис. 1, при $\sigma = 10$, $T = 1$, $\nu = 10$

ВЫВОДЫ

В работе рассмотрена задача о распределении отсчетов оптического фотодетектора с переменной квантовой эффективностью, регистрирующего поле излучения, состоящее из когерентной и некогерентной компоненты. При этом предполагалось, что некогерентная компонента обладает свойствами нормального марковского процесса. Известная формула Манделя, описывающая вероятность $P(n)$ зарегистрировать n отсчетов за интервал наблюдения $(0, T)$, распространена на случай детектора с квантовой эффективностью $\epsilon(t)$, зависящей от времени. Найденное выражение для производящей функции $Q_{\alpha+\beta}(\lambda, T)$ распределения фотоотсчетов аддитивного поля излучения $\alpha(t) + \beta(t)$ позволило проанализировать влияние временных характеристик детектора на свойства распределения $P_{\alpha+\beta}(n)$. Изучено влияние двух временных масштабов, $T_\mathrm{c} = \nu^{-1}$ (шумовой компоненты регистрируемого поля) и T_d (детектора), на формирование распределения фотоотсчетов поля излучения за интервал регистрации T. Развитый в работе подход для нахождения производящей функции распределения фотоотсчетов (17)–(18) возможно реализовать при решении других задач [8, 9] квантовой оптики и информационной техники, в которых необходимо учитывать временные свойства приемных регистрирующих устройств.

В заключение благодарю академика Ахиезера А. И. за поддержку работы.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

НАХОЖДЕНИЕ ПРОИЗВОДЯЩЕЙ ФУНКЦИИ $Q_\alpha(\lambda, T)$

Для нахождения определителя вида (17а) воспользуемся алгоритмом Карунена—Лоэва [6, 7]. Этот алгоритм включает вычисление набора характеристических чисел λ_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, интегрального оператора с соответствующим корреляционным ядром $K(t,\tau)$, отвечающим нормальному марковскому процессу:

$$f(t) = \lambda \int\limits_0^T K(t,\tau) f(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \qquad (\text{П}1.1)$$

В рамках этого метода необходимо найти дисперсионное уравнение, определяющее набор полюсов функции $Q_\alpha(\lambda, T)$, связанных с набором собственных чисел интегрального оператора.

Детерминант Фредгольма $D(\lambda)$ ядра $K(t,\tau)$ выражается через характеристические числа в виде разложения Адамара

$$D(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \lambda/\lambda_n), \qquad (\text{П}1.2)$$

что дает для производящей функции

$$Q_\alpha(\lambda, T) = \frac{D(0)}{D(-\lambda)}\,. \qquad (\text{П}1.3)$$

Из уравнения (П1.1) следуют его аналог, записанный в дифференциальной форме,

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\, f(t) = r^2(t) f(t), \qquad r^2(t) = \nu^2 - 2\lambda\sigma\nu\epsilon(t), \qquad (\text{П}1.4)$$

а также краевые условия, которым подчиняется собственная функция $f(t)$,

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, f(t) - \nu f(t)\right)\Bigg|_{t=0} = 0, \qquad \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, f(t) + \nu f(t)\right)\Bigg|_{t=T} = 0. \qquad (\text{П}1.5)$$

С целью построить искомое дисперсионное уравнение перейдем в конечномерное пространство размерности N, в котором заменим уравнение (П1.4) его разностным аналогом. В этом пространстве построим дисперсионное уравнение, после чего перейдем к пределу $N \to \infty$. Такой подход часто используется при вычислении безусловных континуальных средних по различным мерам [7, 10—12].

В конечномерном пространстве разобьем интервал $(0, T)$ на N подынтервалов длиной $\Delta = T/N$ каждый и заменим функцию $r(t)$ на ее кусочно-постоянный аналог такой, что на каждом n-м участке $r(t) = r_n = r(n\Delta)$. Теперь рассмотрим вместо (П1.4) последовательность систем уравнений

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{pmatrix} f_n(t) \\ g_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & r_n \\ r_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_n(t) \\ g_n(t) \end{pmatrix}, \qquad n = 1, 2, \ldots, N, \qquad (\text{П}1.6)$$

с начальными условиями $f_1(0) = f_0$ и $g_1(0) = g_0$.

Решение уравнения (П1.6) на n-м участке имеет вид

$$\begin{pmatrix} f_n(t) \\ g_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,(S_{n-1} + r_n t) & \mathrm{sh}\,(S_{n-1} + r_n t) \\ \mathrm{sh}\,(S_{n-1} + r_n t) & \mathrm{ch}\,(S_{n-1} + r_n t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ g_0 \end{pmatrix}, \qquad (\text{П}1.7)$$

где $S_{n-1} = \Delta \sum\limits_{k=1}^{n-1} r_k$ и $(n-1)\,\Delta \le t \le n\Delta$.

Представим теперь решение уравнения (П1.6) в виде

$$f_n(t) \;=\; A_{(N)} \exp\left(S_{n-1} + r_n t\right) + B_{(N)} \exp\left(-S_{n-1} - r_n t\right), \tag{П1.8}$$

где $A_{(N)}$ и $B_{(N)}$ — постоянные интегрирования.

Дисперсионное уравнение можно получить, если потребовать для решения (П1.8) выполнения условий (П1.5). Рассматривая (П1.5) как однородную систему из двух линейных алгебраических уравнений относительно $A_{(N)}$ и $B_{(N)}$, потребуем существования у нее нетривиального решения. Это и дает дисперсионное уравнение вида

$$(r_0 + \nu)\,(r_N + \nu) \exp\left(S_N\right) - (r_0 - \nu)\,(r_N - \nu) \exp\left(-S_N\right) \;=\; 0. \tag{П1.9}$$

В пределе $N \to \infty$ получим выражение для детерминанта Фредгольма

$$D(\lambda) \equiv (g_0 + \nu)\,(g_{_T} + \nu) \exp(G) - (g_0 - \nu)\,(g_{_T} - \nu) \exp(-G) = 0, \tag{П1.10}$$

где $g_0 = \sqrt{\nu^2 - 2\lambda\sigma\nu\epsilon(0)}$, $\quad g_{_T} = \sqrt{\nu^2 - 2\lambda\sigma\nu\epsilon(T)}$, $\quad G = \int\limits_0^T \sqrt{\nu^2 - 2\lambda\sigma\nu\epsilon(t)}\,\mathrm{d}t$.

Учитывая условие (П1.3), из найденного определителя Фредгольма (П1.10) получаем искомое выражение (18) основной части работы. Отметим, что предельный переход $N \to \infty$ возможно осуществлять, начиная с выражения (П1.8).

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

НАХОЖДЕНИЕ ПРОИЗВОДЯЩЕЙ ФУНКЦИИ $Q_{\alpha\beta}(\lambda, T)$

При рассмотрении скалярного произведения $(\sqrt{\epsilon}\beta, (E + \lambda K)^{-1}\sqrt{\epsilon}\beta)$ необходимо найти значение функции $s = (E + \lambda K)^{-1}\sqrt{\epsilon}\beta$, т. е. решить интегральное уравнение

$$s(t) + \lambda\sigma \int\limits_0^T \sqrt{\epsilon(t)\,\epsilon(\tau)} \exp\left(-\nu|t - \tau\,|\right) s(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \sqrt{\epsilon(t)}\,\beta(t). \tag{П2.1}$$

С помощью замены $\varphi(t) = s(t) \Big/ \sqrt{\epsilon(t)}$ получим интегральное уравнение относительно функции $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) + \lambda\sigma \int\limits_0^T \epsilon(\tau) \exp(-\nu\,|t - \tau|)\varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \beta(t). \tag{П2.2}$$

Введем вспомогательные функции

$$p(t) = \int\limits_0^t \epsilon(\tau) \exp(-\nu\,|t - \tau|)\varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \qquad q(t) = \int\limits_t^T \epsilon(\tau) \exp(-\nu\,|t - \tau|)\varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \tag{П2.3}$$

тогда $\varphi(t) + \lambda\sigma(p(t) + q(t)) = \beta(t)$. Для введенных функций (П2.3) следует система дифференциальных уравнений (явная зависимость от времени t опущена)

$$\dot{p} = -(\nu + \Lambda)\,p - \Lambda q + \epsilon\beta, \qquad \dot{q} = \Lambda p + (\nu + \Lambda)\,q - \epsilon\beta, \tag{П2.4}$$

где $\Lambda = \Lambda(t) = \lambda\sigma\epsilon(t)$, с краевыми условиями $p(0) = 0$ и $q(T) = 0$.

Для пары дополнительных функций $u = p + q$ и $v = p - q$ из (П2.4) получим

$$\dot{u} = -\nu v, \qquad \dot{v} = -(\nu + 2\Lambda)\, u - 2\epsilon\beta, \tag{П2.5}$$

откуда

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\, u = r^2(t) u - 2\nu\epsilon(t)\beta(t), \qquad r^2(t) = \nu^2 + 2\lambda\nu\sigma\epsilon(t). \tag{П2.6}$$

Уравнение (П2.6) отличается от его аналога (П1.4) только наличием члена $-2\nu\epsilon(t)\beta(t)$, поэтому для анализа уравнения применим тот же подход, что и в Приложении 1. А именно перейдем в конечномерное пространство размерности N, в котором заменим уравнение (П1.4) его конечномерным разностным аналогом. В этом пространстве построим дисперсионное уравнение, после чего для получения $\varphi(t)$ перейдем к пределу $N \to \infty$.

Для получения формального (конечномерного) решения уравнения (П2.6) разобьем интервал $(0, T)$ на N частей длиной $\Delta = T/N$ каждый и заменим функции $r(t)$, $\epsilon(t)$ и $\beta(t)$ на их кусочно-постоянные аналоги такие, что на каждом n-м участке $r(t) = r_n = r(n\Delta)$, $\epsilon(t) = \epsilon_n = \epsilon(n\Delta)$ и $\beta(t) = \beta_n = \beta(n\Delta)$. Теперь рассмотрим вместо (П2.6) последовательность систем уравнений

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{pmatrix} u_n(t) \\ \dot{u}_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & r_n \\ r_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n(t) \\ \dot{u}_n(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2\nu\epsilon_n\beta_n \end{pmatrix}, \tag{П2.7}$$

где $n = 1, 2, \ldots, N$, с начальными условиями $u_n(0) = u_{n,0}$ и $\dot{u}_n(0) = \dot{u}_{n,0}$.

Формальное решение уравнения (П2.7) на n-м участке имеет вид

$$\begin{gathered} \begin{pmatrix} u_n(t) \\ \dot{u}_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,(S_{n-1} + r_n t) & \mathrm{sh}\,(S_{n-1} + r_n t) \\ \mathrm{sh}\,(S_{n-1} + r_n t) & \mathrm{ch}\,(S_{n-1} + r_n t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ \dot{u}_0 \end{pmatrix} - \\ - \sum_{m=1}^{n-1} \int\limits_{(m-1)\,\Delta}^{m\Delta} \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,(S_m + r_m\tau) & \mathrm{sh}\,(S_m + r_m\tau) \\ \mathrm{sh}\,(S_m + r_m\tau) & \mathrm{ch}\,(S_m + r_m\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2\nu\epsilon_m\beta_m/r_m \end{pmatrix} \mathrm{d}\tau - \\ - \int\limits_{n\Delta}^{t} \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,(S_{n-1} + r_n\tau) & \mathrm{sh}\,(S_{n-1} + r_n\tau) \\ \mathrm{sh}\,(S_{n-1} + r_n\tau) & \mathrm{ch}\,(S_{n-1} + r_n\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2\nu\epsilon_n\beta_n/r_n \end{pmatrix} \mathrm{d}\tau, \end{gathered} \tag{П2.8}$$

где $S_{n-1} = \Delta \sum\limits_{k=1}^{n-1} r_k$ и $(n-1)\,\Delta \le t \le n\Delta$.

Введем обозначения

$$r_t \equiv r(t) = \sqrt{\nu^2 + 2\lambda\nu\sigma\epsilon(t)} \qquad \text{и} \qquad R_{\tau,t} = \int\limits_{\tau}^{t} r(t')\,\mathrm{d}t'. \tag{П2.9}$$

Дисперсионное уравнение, построенное на основании (П1.7) и (П1.5), определяет набор собственных чисел и собственных функций интегрального оператора в пространстве размерности N. В предельном переходе $N \to \infty$ получим выражение для решения интегрального уравнения. Так же, как и в Приложении 1, из структуры (П2.8) вытекает, что переход к пределу $N \to \infty$ возможно осуществить непосредственно в решении (П2.8). Переходя к пределу $N \to \infty$, запишем формальное решение (П2.8) уравнения (П2.6) на всем интервале $0 \le t \le T$ в виде

$$\begin{aligned} u(t) &= C_1 \exp(R_{0,t}) + C_2 \exp(-R_{0,t}) - 2\nu \int\limits_0^t \operatorname{sh}(R_{\tau,t})\, \epsilon(\tau) r^{-1}(\tau)\beta(\tau)\, \mathrm{d}\tau, \\ \dot u(t) &= C_1 r(t) \exp(R_{0,t}) - C_2 r(t) \exp(-R_{0,t}) - 2\nu \int\limits_0^t \operatorname{ch}(R_{\tau,t})\, \epsilon(\tau)\beta(\tau)\, \mathrm{d}\tau, \end{aligned} \tag{П2.10}$$

где C_1 и C_2 — некоторые константы. Поскольку $v(t) = -\nu^{-1}\dot u(t)$, то

$$\begin{aligned} p(t) = {} & \frac{1}{2\nu} C_1(\nu - r_t)\exp(R_{0,t}) + \frac{1}{2\nu} C_2(\nu + r_t)\exp(-R_{0,t}) + \\ & + \int\limits_0^t \epsilon(\tau)\beta(\tau)\Big[\operatorname{ch}(R_{\tau,t}) - (\nu/r_\tau)\operatorname{sh}(R_{\tau,t})\Big]\,\mathrm{d}\tau, \end{aligned} \tag{П2.11a}$$

$$\begin{aligned} q(t) = {} & \frac{1}{2\nu} C_1(\nu + r_t)\exp(R_{0,t}) + \frac{1}{2\nu} C_2(\nu - r_t)\exp(-R_{0,t}) - \\ & - \int\limits_0^t \epsilon(\tau)\beta(\tau)\Big[\operatorname{ch}(R_{\tau,t}) + (\nu/r_\tau)\operatorname{sh}(R_{\tau,t})\Big]\,\mathrm{d}\tau. \end{aligned} \tag{П2.11б}$$

Из первого краевого условия $p(0) = 0$ следует, что $C_2 = C_1\,(r_0 - \nu)\,/\,(r_0 + \nu)$. Далее, из второго краевого условия $q(T) = 0$ вытекает $C_1 = \nu\,(r_0 + \nu)\, J_T / D_T$, где

$$\begin{aligned} J_T &= \int\limits_0^T \epsilon(\tau)\beta(\tau) r^{-1}(\tau)\Big[(r_\tau + \nu)\exp(R_{\tau,T}) + (r_\tau - \nu)\exp(-R_{\tau,T})\Big]\mathrm{d}\tau, \\ D_T &= (r_0 + \nu)\,(r_T + \nu)\exp(R_{0,T}) - (r_0 - \nu)\,(r_T - \nu)\exp(-R_{0,T})\,. \end{aligned} \tag{П2.12}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} u(t) = {} & -\nu \int\limits_0^t \epsilon(\tau)\beta(\tau) r^{-1}(\tau)\Big[\exp(R_{\tau,T}) - \exp(-R_{\tau,T})\Big]\,\mathrm{d}\tau + \\ & + (\nu J_T/D_T)\,\Big[(r_0 + \nu)\exp(R_{0,t}) + (r_0 - \nu)\exp(-R_{0,t})\Big]. \end{aligned} \tag{П2.13}$$

Объединяя (П2.10) и (П2.13), с учетом замены $\varphi(t) = s(t) \Big/ \sqrt{\epsilon(t)}$ получаем выражение для решения $s(t)$ интегрального уравнения (П2.1):

$$\begin{aligned} s(t) \;=\; & \sqrt{\epsilon(t)}\beta(t) \;+\; 2\lambda\sigma\nu\,\sqrt{\epsilon(t)} \int\limits_0^t \epsilon(\tau)\beta(\tau) r^{-1}(\tau)\operatorname{sh}(R_{\tau,T})\;\mathrm{d}\tau - \\ & - 2\lambda\sigma\nu\sqrt{\epsilon(t)}\,\Big[(r_0 + \nu)\,(r_T + \nu)\exp(R_{0,T}) \;-\; (r_0 - \nu)\,(r_T - \nu)\exp(-R_{0,T})\Big]^{-1} \times \\ & \times\Big[(r_0 + \nu)\exp(R_{0,t}) + (r_0 - \nu)\exp(-R_{0,t})\Big] \int\limits_0^T \epsilon(\tau)\beta(\tau) r^{-1}(\tau)\operatorname{sh}(R_{\tau,T})\;\mathrm{d}\tau. \end{aligned} \tag{П2.14}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольф Э., Мандель Л. // УФН. 1966. Т. 88, № 4. С. 619.
2. Peřina J. Quantum Statistics of Linear and Nonlinear Optical Phenomena. — Dordrecht: Kluwer, 1991. — P. 412.
3. Bedard G. // Phys. Rev. 1966. V. 151, № 4. P. 1038.
4. Ласкин Н. В., Мазманишвили А. С. // Украинский физический журнал. 1983. Т. 28, № 12. С. 1871.
5. Тихонов В. И., Миронов М. А. Марковские процессы. — М.: Сов. радио, 1977. — 488 с.
6. Хелстром К. Квантовая теория проверки гипотез и оценивания. — М.: Мир, 1979. — 342 с.
7. Мазманишвили А. С. Континуальное интегрирование как метод решения физических задач. — Киев: Наук. думка, 1987. — 224 с.
8. Мазманишвили А. С. // Изв. вуз. Радиофизика. 1998. Т. 41, № 8. С. 999.
9. Мазманишвили А. С., Шереметьев А. Г. // Радиотехника и электроника. 1989. Т. 34, № 12. С. 2613.
10. Ласкин Н. В., Насонов Н. Н., Мазманишвили А. С., Шульга Н. Ф. // ЖЭТФ. 1985. Т. 88, № 3(9). С. 763.
11. Cameron R. H., Martin W. T. // Bull. Amer. Math. Soc. 1945. V. 51, № 2. P. 73.
12. Ковальчик И. М., Янович Л. А. Обобщенный винеровский интеграл и некоторые его приложения. — Минск: Наука и техника, 1989. — 221 с.

Харьковский государственный
политехнический университет,
г. Харьков, Украина

Поступила в редакцию
16 апреля 1999 г.

PHOTOCOUNT DISTRIBUTION FROM COHERENT SIGNAL ON NOISE BACKGROUND REGISTERED BY A DETECTOR WITH VARIABLE EFFICIENCY

A. S. Mazmanishvili

We consider a problem of photocount distribution of optical photodetector which registers a coherent radiation field $\beta(t)$ on the background of normal Markovian noise $\alpha(t)$. We generalize the well-known Mandel formula describing probability $P(n)$ to detect n photocounts during time interval $(0,T)$ to the case where quantum efficiency $\epsilon(t)$ of the detector depends on time. The influence of variable efficiency $\epsilon(t)$ on photocount distribution $P(n)$ is analyzed. The results are compared to the case where $\epsilon(t) \equiv 1$.

УДК 621.396.67

ВЛИЯНИЕ ФЛУКТУАЦИЙ ВЕСОВЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ НА ХАРАКТЕРИСТИКИ АДАПТИВНЫХ АНТЕННЫХ РЕШЁТОК

А. А. Мальцев, С. В. Зимина

Теоретически исследуется влияние флуктуаций весовых коэффициентов на характеристики адаптивных антенных решёток (ААР) с градиентными алгоритмами настройки в предположении, что полезный сигнал и помеха имеют различные времена корреляции. Получены выражения для корреляционной функции и спектральной плотности мощности выходного сигнала ААР, вид средней диаграммы направленности (ДН), а также выражение для корреляционной матрицы флуктуаций весовых коэффициентов. Показано, что флуктуации весовых коэффициентов приводят к искажениям полезного сигнала и уменьшению его мощности на выходе по сравнению с мощностью в отсутствие флуктуаций. В частотной области этот эффект “перекомпенсации"приводит к провалу спектра выходного сигнала антенной решётки в диапазоне действия мощной помехи. В качестве примера проведены расчёты спектральной плотности мощности выходного сигнала для ААР с однократными линейными ограничениями, построены графики флуктуационной ДН и дисперсии флуктуаций весовых коэффициентов в зависимости от угла прихода помехи.

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что флуктуации регулируемых весовых коэффициентов определяют предельную точность настройки адаптивных антенных решеток (ААР), а значит, и качество выделения полезного сигнала из смеси с шумом. Статистический анализ работы адаптивных систем с учетом флуктуаций весовых коэффициентов проводился в сравнительно небольшом числе публикаций [1–9], в которых был выявлен ряд интересных эффектов. Так, в работе [2] для дискретного градиентного алгоритма настройки при условии независимости отсчетов входного сигнала было показано, что флуктуации весового вектора приводят к появлению избыточной ошибки на выходе адаптивной системы. Вывод об увеличении мощности выходного шума был сделан и в работах [1, 3], в которых проводился теоретический анализ ААР с непрерывными градиентными алгоритмами настройки. В ряде последующих работ был обнаружен эффект подавления полезного сигнала на выходе адаптивной системы при наличии квазигармонических мощных помех, так называемый эффект “перекомпенсации-[4–6]. Этот эффект был выявлен и при статистическом анализе адаптивной антенной решетки с алгоритмом непосредственного обращения выборочной ковариационной матрицы [7]. Статистические характеристики различных адаптивных антенных решеток с учетом флуктуаций весовых коэффициентов исследовались и в ряде прикладных задач [8, 9].

Более тщательные исследования работы адаптивных систем с непрерывными и дискретными алгоритмами настройки позволили получить ряд точных результатов, показывающих, что анализ таких систем должен проводиться с обязательным учетом негауссовской статистической зависимости вектора весовых коэффициентов и вектора входных сигналов [10–12]. Именно эта зависимость оказывает основное влияние на степень подавления помех и искажение полезного сигнала.

На основе работ [10–12] в настоящей статье проводится статистический анализ влияния флуктуаций весовых коэффициентов на основные характеристики ААР с непрерывными градиентными алгоритмами настройки.

1. ВЛИЯНИЕ ФЛУКТУАЦИЙ ВЕСОВЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ НА ПОЛЕЗНЫЙ СИГНАЛ НА ВЫХОДЕ СИСТЕМЫ

Настройка вектора весовых коэффициентов $\vec{W}$ антенных решеток с градиентным алгоритмом настройки с ограничениями на ДН описывается N-мерным векторным уравнением [13]

$$\tau_{\rm H}\frac{{\rm d}\vec{W}}{{\rm d}t}+\vec{W}+\gamma\mathbf{P}\vec{V}^{*}(t)\vec{V}^{\rm T}(t)\vec{W}=\vec{W}_{q}, \tag{1}$$

где $\vec{V}(t)=\vec{S}(t)+\vec{X}(t)$ — вектор входных сигналов ($\langle\vec{V}(t)\rangle=0$), состоящий из суммы векторов полезного сигнала $\vec{S}(t)$ и помех $\vec{X}(t)$, индексы * и $^{\rm T}$ обозначают соответственно операции комплексного сопряжения и транспонирования, $\tau_{\rm H}$ — время релаксации системы, γ — коэффициент усиления в цепи корреляционной обратной связи, $\vec{W}_q$ — вектор комплексных весовых коэффициентов, соответствующий требуемой характеристике адаптивной системы при отсутствии внешних помех.

Матричный проекционный оператор $\mathbf{P}$ имеет вид

$$\mathbf{P}=\mathbf{I}-\mathbf{C}\,(\mathbf{C}^{+}\mathbf{C})^{-1}\,\mathbf{C}^{+}, \tag{2}$$

где $\mathbf{I}$ — единичная матрица размерности $N\times N$ (N — число элементов ААР), и осуществляет проекцию оценки градиента выходной мощности адаптивной системы (по вектору весовых коэффициентов $\vec{W}$) на гиперплоскость (в подпространство) ограничений

$$\mathbf{C}^{+}\vec{W}=\vec{H}, \tag{3}$$

где $\vec{H}$ — вектор фиксированных коэффициентов усиления в заданных направлениях, $\mathbf{C}\equiv[\vec{C}_1,\ldots,\vec{C}_L]$ — матрица ограничений размерности $N\times L$, столбцами которой являются линейно независимые векторы ограничений $\vec{C}_\ell$ (L — число вводимых ограничений).

Для более детального изучения влияния флуктуаций весовых коэффициентов на полезный сигнал $\vec{S}(t)$ положим, что корреляционная функция помех $\mathbf{R}_{xx}(t,t')$ задается формулой

$$\mathbf{R}_{xx}(t,t+\tau)\equiv\left\langle\vec{X}^{*}(t)\vec{X}^{\rm T}(t+\tau)\right\rangle=\mathbf{R}_{xx}\exp\left\{-\frac{|\tau|}{\tau_x}\right\}, \tag{4}$$

где угловые скобки означают усреднение по статистическому ансамблю, а корреляционная функция полезного сигнала $\mathbf{R}_{ss}(t,t')$ выражением

$$\mathbf{R}_{ss}(t,t+\tau)\equiv\left\langle\vec{S}^{*}(t)\vec{S}^{\rm T}(t+\tau)\right\rangle=\mathbf{R}_{ss}\exp\left\{-\frac{|\tau|}{\tau_s}\right\}, \tag{5}$$

где $\mathbf{R}_{xx}$ и $\mathbf{R}_{ss}$ — пространственные части корреляционных функций соответственно помех и полезного сигнала, τ_x и τ_s — времена корреляции помех и полезного сигнала.

Для анализа уравнения (1) введем следующие обозначения:

$$\vec{W}(t)\equiv\langle\vec{W}\rangle+\tilde{\vec{W}}(t),\quad \mathbf{M}_{xx}(t)\equiv\mathbf{R}_{xx}+\tilde{\mathbf{\Phi}}(t), \tag{6}$$

где весовой вектор $\vec{W}$ и стохастическая матрица $\mathbf{M}_{xx}\equiv\vec{X}^{*}(t)\vec{X}^{\rm T}(t)$ представлены в виде сумм их средних значений $\langle\vec{W}\rangle$, $\mathbf{R}_{xx}$ и флуктуационных составляющих $\tilde{\vec{W}}(t)$, $\tilde{\mathbf{\Phi}}(t)$.

Будем считать, что вектор-фазор (вектор волнового фронта) принимаемого полезного сигнала $\vec{S}(t)$ принадлежит подпространству векторов ограничений, т. е. может быть представлен в виде линейной комбинации векторов $\vec{C}_\ell$. В этом случае можно показать, что будут выполняться следующие равенства [11]:

$$\begin{gathered}
\mathbf{P}\vec{S}^*(t) \equiv \vec{0}, \qquad \mathbf{P}\mathbf{R}_{ss}\mathbf{P} = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{P}\left(\mathbf{R}_{xx} + \mathbf{R}_{ss}\right)\mathbf{P} = \mathbf{P}\mathbf{R}_{xx}\mathbf{P}, \\
\left\langle \vec{\tilde{W}}^+(t)\left[\mathbf{R}_{xx}(t,t') + \mathbf{R}_{ss}(t,t')\right]\vec{\tilde{W}}(t')\right\rangle = \left\langle \vec{\tilde{W}}^+(t)\mathbf{R}_{xx}\vec{\tilde{W}}(t')\right\rangle \exp\left\{-\frac{|t'-t|}{\tau_x}\right\}, \\
\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{P}\left[\mathbf{R}_{xx}(t,t') + \mathbf{R}_{ss}(t,t')\right]\mathbf{P}\mathbf{Q} = \mathbf{\Lambda}\exp\left\{-\frac{|t-t'|}{\tau_x}\right\},
\end{gathered} \tag{7}$$

где $\mathbf{\Lambda}$ — диагональная матрица, на диагонали которой находятся собственные значения корреляционной матрицы помех $\mathbf{R}_{xx}$, $\mathbf{Q}$ — унитарная матрица, диагонализирующая эрмитовскую матрицу $\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx}\mathbf{P}$ (переводящая ее в $\mathbf{Q}$-представление).

Выражение для корреляционной функции $K_Z(t,t')$ выходного сигнала $Z(t) = \vec{V}^{\mathrm{T}}(t)\vec{W}(t)$ адаптивной антенной решетки может быть записано в виде

$$\begin{aligned}
&K_Z(t,t') \equiv \langle Z^*(t)Z(t')\rangle = K_{Z_0}(t,t') + \\
&+ \left\langle \vec{\tilde{W}}^+(t)\vec{X}^*(t)\vec{X}^{\mathrm{T}}(t')\vec{\tilde{W}}(t')\right\rangle + \vec{æ}_W^+(t',t)\vec{W}_{\mathrm{st}} + \vec{W}_{\mathrm{st}}^+\vec{æ}_W(t,t').
\end{aligned} \tag{8}$$

Здесь $K_{Z_0}(t,t')$ — корреляционная функция выходного сигнала антенной решетки без учета флуктуаций настраиваемых весовых коэффициентов, $\vec{W}_{\mathrm{st}} = \langle\vec{W}\rangle_{\mathrm{st}}$ — стационарное среднее значение вектора весовых коэффициентов, $\vec{æ}_W(t,t') = \langle\vec{\tilde{W}}\tilde{\mathbf{\Phi}}\rangle$ — вектор кумулянтных функций третьего порядка, учитывающих статистическую зависимость флуктуаций весовых коэффициентов $\vec{\tilde{W}}$ и входных сигналов $\vec{X}(t)$.

Вычисление смешанных моментов, входящих в (8), проведем методом последовательных приближений, подробно описанным в работе [10], учитывая только слагаемые, определяемые первым, борновским приближением. Обозначая $\alpha = \tau_x/\tau_{\mathrm{H}}$, в результате получим следующее выражение для корреляционной функции выходного сигнала:

$$\begin{aligned}
&K_Z(\tau) = e^{-\frac{|\tau|}{\tau_x}}\,\vec{W}_{\mathrm{st}}^+\mathbf{R}_{xx}\vec{W}_{\mathrm{st}} + e^{-\frac{|\tau|}{\tau_s}}\,\vec{W}_{\mathrm{st}}^+\mathbf{R}_{ss}\vec{W}_{\mathrm{st}} + \\
&+e^{-\frac{|\tau|}{\tau_x}}\,\mathrm{Sp}(\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx})\left[\frac{\alpha\gamma}{2}\vec{W}_{\mathrm{st}}^+\mathbf{R}_{xx}\vec{W}_{\mathrm{st}} + \frac{\tau_x\tau_s\gamma}{\tau_{\mathrm{H}}(\tau_x+\tau_s)}\vec{W}_{\mathrm{st}}^+\mathbf{R}_{ss}\vec{W}_{\mathrm{st}}\right] - \\
&-\alpha\gamma\,\mathrm{Sp}(\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx})\left(\left[1+\frac{|\tau|}{\tau_x}\right]\mathrm{e}^{-\frac{|\tau|}{\tau_x}}\,\vec{W}_{\mathrm{st}}^+\mathbf{R}_{xx}\vec{W}_{\mathrm{st}} + \right.\\
&\left.+\frac{2\tau_s}{\tau_x^2-\tau_s^2}\left[\tau_x e^{-\frac{|\tau|}{\tau_x}} - \tau_s e^{-\frac{|\tau|}{\tau_s}}\right]\vec{W}_{\mathrm{st}}^+\mathbf{R}_{ss}\vec{W}_{\mathrm{st}}\right),
\end{aligned} \tag{9}$$

где $\tau = t' - t$. При выводе формулы (9) учтены выражения (7), а также условие, налагаемое на γ для хорошего подавления помехи:

$$\gamma\lambda_{\min} \gg 1, \tag{10}$$

где $\lambda_{\min}$ — наименьшее собственное число матрицы помех R_{xx}.

Несложно увидеть, что в выражении (9) первые два слагаемых соответствуют невозмущенным корреляционным функциям помехи и полезного сигнала на выходе ААР, третье слагаемое представляет собой положительную добавку из-за паразитной модуляции помехи флуктуирующими весовыми коэффициентами, а последнее слагаемое отвечает за эффект "перекомпенсации".

Для наглядности проанализируем выражение (9) в случае воздействия на ААР мощной узкополосной (по сравнению с сигналом) помехи. В этом случае $\tau_x \gg \tau_s$ и формулу (9) для корреляционной функции выходного сигнала можно несколько упростить и записать в виде

$$K_Z(\tau) = e^{-\frac{|\tau|}{\tau_x}} \left(1 - \frac{\alpha\gamma}{2}\left[1 + \frac{2\,|\tau|}{\tau_x}\right] \mathrm{Sp}(\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx})\right) \vec{W}_{\mathrm{st}}^{+} \mathbf{R}_{xx} \vec{W}_{\mathrm{st}} + \\ + \left(e^{-\frac{|\tau|}{\tau_s}} - \alpha_s\gamma\,\mathrm{Sp}(\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx})\, e^{-\frac{|\tau|}{\tau_x}}\right) \vec{W}_{\mathrm{st}}^{+} \mathbf{R}_{ss} \vec{W}_{\mathrm{st}}, \qquad (11)$$

где $\alpha_s = \tau_s/\tau_{\mathrm{H}}$. Первое слагаемое в этом выражении соответствует помеховому сигналу и по виду совпадает с формулой

$$K_Z(\tau) \approx \langle |Z|^2 \rangle_0\, e^{-\frac{|\tau|}{\tau_x}} \left(1 - \frac{\alpha\gamma}{2}\left[1 + 2\frac{|\tau|}{\tau_x}\right] \mathrm{Sp}(\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx})\right), \qquad (12)$$

где $\langle |Z|^2 \rangle_0$ — мощность выходного сигнала ААР без учета флуктуаций весовых коэффициентов, полученной без учета специфики временных и пространственных характеристик (5), (7) полезного сигнала. Второе слагаемое дает корреляционную функцию полезного сигнала на выходе ААР

$$K_s(\tau) = \left(e^{-\frac{|\tau|}{\tau_s}} - \alpha_s\gamma\,\mathrm{Sp}(\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx})\, e^{-\frac{|\tau|}{\tau_x}}\right) \vec{W}_{\mathrm{st}}^{+} \mathbf{R}_{ss} \vec{W}_{\mathrm{st}}, \qquad (13)$$

которой соответствует следующая спектральная плотность мощности, зависящая от частоты Ω:

$$S_s(\Omega) = \left(\frac{2\tau_s}{1 + \Omega^2\tau_s^2} - \frac{2\tau_s\alpha\gamma\,\mathrm{Sp}(\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx})}{1 + \Omega^2\tau_x^2}\right) \vec{W}_{\mathrm{st}}^{+} \mathbf{R}_{ss} \vec{W}_{\mathrm{st}}. \qquad (14)$$

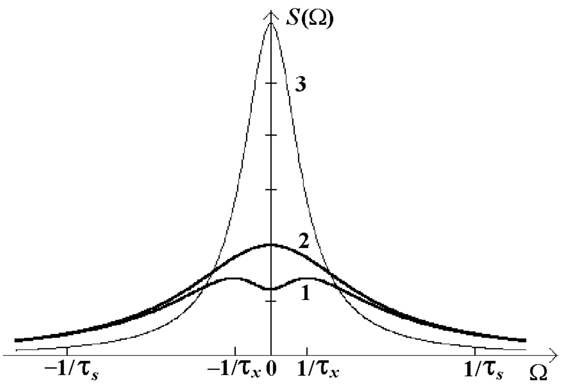

Рис. 1. Искажения спектра полезного сигнала на выходе ААР с ограничениями из-за эффекта “перекомпенсации": 1 — спектр полезного сигнала на выходе; 2 — спектр полезного сигнала на входе; 3 — спектр помехи на входе

Качественно искажения спектра полезного сигнала на выходе ААР с ограничениями на ДН показаны на рис. 1. Из выражений (13), (14) и приведенных графиков видно, что эффект “перекомпенсации"приводит к появлению провала в спектре полезного сигнала на частотах действия мощных помех. Заметим, что именно такой характер искажений спектра полезного сигнала наблюдался экспериментально в работах [4, 5].

В практически наиболее интересном случае, когда векторы-фазоры помех не попадают в “защищенное"ограничениями подпространство векторов $\vec{C}_\ell$ (например когда источники помех находятся вне главного лепестка ДН антенной решетки), помеха достаточно хорошо подавляется уже при пространственной обработке, и остаточная мощность помехи на выходе ААР оказывается много меньше мощности полезного сигнала:

$$\vec{W}_{\mathrm{st}}^{+} \mathbf{R}_{xx} \vec{W}_{\mathrm{st}} \ll \vec{W}_{\mathrm{st}}^{+} \mathbf{R}_{ss} \vec{W}_{\mathrm{st}}. \qquad (15)$$

При этом первое слагаемое в (11) существенно меньше второго, и “перекомпенсация"сказывается в основном только на полезном сигнале. Таким образом, “перекомпенсация"обычно является вредным явлением, приводящим к снижению эффективности обработки сигналов в ААР.

В адаптивных системах активного гашения случайных волновых полей эффект “перекомпенсации"имеет и полезное применение для гашения узкополосных полей с помощью гармонических опорных сигналов. В таких задачах, как правило, нет полезного сигнала и требуется полное подавление поля [14].

2. ВЛИЯНИЕ ФЛУКТУАЦИЙ ВЕСОВЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ НА СРЕДНЮЮ ДИАГРАММУ НАПРАВЛЕННОСТИ

Во-первых, сделаем ряд замечаний, которые необходимо иметь в виду при обсуждении и возможной экспериментальной проверке полученных в этом разделе результатов. Прежде всего, подчеркнем, что задача нахождения или измерения средней ДН ААР корректна, если пробный сигнал имеет настолько малую мощность, что не влияет на значения весовых коэффициентов (т. е. можно пренебречь реакцией ААР на пробный сигнал). В противном случае антенная решетка будет адаптироваться к пробному сигналу (как к внешней помехе) и результат измерений будет зависеть от мощности и временных характеристик самого пробного сигнала.

На наш взгляд, наиболее удобным способом измерения средней ДН ААР с учетом флуктуаций весового вектора является копирование текущих значений весовых коэффициентов ААР в другой вспомогательной антенной решетке (с той же геометрией, но без контура управления) и непосредственное измерение ДН этой вспомогательной решетки. Хотя, безусловно, возможны и другие способы исключения пробного сигнала из контура управления ААР.

Итак, предположим, что пробный сигнал $\vec{S}_k = \vec{S}(\vec{k})$, где $\vec{k}$ — волновой вектор, не оказывает влияния на весовые коэффициенты. Тогда средняя по мощности ДН ААР в установившемся режиме работы запишется в виде

$$g_{\text{cp}}(\vec{k}) = \left\langle |\vec{S}_k^{\text{T}} \vec{W}(t)|^2 \right\rangle = g_0(\vec{k}) + g_{\tilde{W}}(\vec{k}), \tag{16}$$

где $g_0(\vec{k}) = \vec{W}_{\text{st}}^{+} \vec{S}_k^{*} \vec{S}_k^{\text{T}} \vec{W}_{\text{st}}$ — ДН ААР без учета флуктуаций весовых коэффициентов,

$$g_{\tilde{W}}(\vec{k}) = \vec{S}_k^{\text{T}} \left\langle \vec{\tilde{W}}(t) \vec{\tilde{W}}^{+}(t) \right\rangle \vec{S}_k^{*} = \vec{S}_k^{t} \mathbf{K}_{\tilde{W}}^{*} \vec{S}_k^{*} \geq 0 \tag{17}$$

— дополнительный член в ДН, обусловленный увеличением входной мощности пробного сигнала из-за его модуляции флуктуациями весовых коэффициентов. Подставляя в (17) выражение для корреляционной матрицы флуктуаций весовых коэффициентов

$$\mathbf{K}_{\tilde{W}} = \frac{\alpha\gamma}{2} \langle |Z|^2 \rangle_0 \, \mathbf{P}^{*} \tag{18}$$

и используя свойства проекционной матрицы $\mathbf{P}$ [11]:

$$\mathbf{P}^{+} = \mathbf{P}, \qquad \mathbf{P}^2 = \mathbf{P}, \tag{19}$$

получим

$$g_{\tilde{W}}(\vec{k}) = \frac{\alpha\gamma}{2} \langle |Z|^2 \rangle_0 \vec{S}_k \mathbf{P} \, \vec{S}_k^{*} = \frac{\alpha\gamma}{2} \langle |Z|^2 \rangle_0 \, |\mathbf{P} \vec{S}_k^{*}|^2. \tag{20}$$

Из (20) видно, что флуктуационная ДН в общем случае не является изотропной. Ее форма определяется модулем проекции $\mathbf{P}\vec{S}_k^{*}$ вектора-фазора пробного сигнала на подпространство ограничений, а величина прямо пропорциональна остаточной мощности $\langle |Z|^2 \rangle_0$ сигнала на выходе системы.

Если пробный сигнал $\vec{S}_k^{*} = \vec{S}^{*}(\vec{k})$ попадает в подпространство полезного сигнала, т. е. его можно представить в виде линейной комбинации векторов $\vec{C}_\ell$ с коэффициентами a_ℓ:

$$\vec{S}_k^{*} = a_1 \vec{C}_1 + \ldots + a_L \vec{C}_L, \tag{21}$$

то несложно показать, что в этих “защищенных"ограничениями направлениях флуктуационная ДН будет равна нулю. Это свойство $g_{\tilde{W}}(\vec{k})$ связано с тем, что флуктуации весовых коэффициентов происходят только в подпространстве ограничений [10, 11]

$$\vec{\tilde{W}}(t) \equiv \mathbf{P}\vec{\tilde{W}}(t), \quad \mathbf{D}\vec{\tilde{W}}(t) \equiv \vec{0} \tag{22}$$

и поэтому не возмущают ДН ААР в направлениях полезного сигнала. Здесь $\mathbf{D}$ — проекционная матрица, осуществляющая проекцию векторов на подпространство, дополнительное к подпространству ограничений.

Для адаптивных систем без ограничений (адаптивных антенных решеток, работающих по критерию максимизации отношения сигнал/шум и по критерию минимизации среднего квадрата ошибки [10–12] и являющихся частным случаем рассматриваемой здесь антенной решетки), используя (20), а также конкретные выражения для проекционной матрицы $\mathbf{P}$, матрицы ограничений $\mathbf{C}$, векторов входных сигналов $\vec{X}$, весовых коэффициентов $\vec{W}$ и других величин, найдем

$$g_{\tilde{W}}(\vec{k}) = \frac{\alpha\gamma}{2}\,\langle|Z|^2\rangle_0\,N. \tag{23}$$

Таким образом, в системах без ограничений флуктуационная ДН $g_{\tilde{W}}(\vec{k})$ является изотропной и по виду совпадает с шумовой ДН, возникающей из-за быстрых независимых флуктуаций параметров входных элементов ААР [15].

Следует, однако, обратить внимание на принципиальное отличие этих результатов. Флуктуации весовых коэффициентов, появляющиеся из-за действия мощных внешних помех, статистически взаимосвязаны с ними и приводят к дополнительному отслеживанию помех (по амплитуде, частоте, и, следовательно, по углу). Вследствие этого мощность помех на выходе ААР оказывается даже меньше, чем в отсутствие флуктуаций (эффект “перекомпенсации"). При этом кажущееся размывание нулей ДН ААР (появление $g_{\tilde{W}}(\vec{k}) \geq 0$ в (16)) происходит лишь по отношению к пробному сигналу, не оказывающему влияния на флуктуации весовых коэффициентов и статистически с ними не связанным. Из-за быстрых независимых флуктуаций параметров входных элементов происходит действительное размывание нулей ДН (по отношению как к пробному сигналу, так и к внешним помехам), приводящее к увеличению остаточной мощности помех на выходе системы [15].

3. ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛИНЕЙНОЙ ААР С ОДНОКРАТНЫМ ОГРАНИЧЕНИЕМ НА ДН ПРИ ДЕЙСТВИИ ОДНОЙ ВНЕШНЕЙ ПОМЕХИ

В качестве примера рассмотрим N-элементную линейную эквидистантную ААР с однократным ограничением на ДН. Положим, что полезный сигнал приходит с направления, нормального к оси решетки. В этом случае $L = 1$, матрица ограничений $\mathbf{C}$ будет состоять из одного вектора-столбца [13]

$$\mathbf{C} = \vec{C}_1 = \vec{S}^* = [1, 1, \ldots, 1]^{\mathrm{T}} \tag{24}$$

и ограничения можно записать в виде равенства

$$\vec{C}_1^{+}\vec{W} = \vec{S}^{\mathrm{T}}\vec{W} = \sum_{n=1}^{N} W_n = 1, \tag{25}$$

где $N \geq 2$.

Подставляя (24) в общее выражение (2) найдем явный вид проекционной матрицы:

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} - \frac{1}{N}\vec{C}_1\vec{C}_1^+ = \frac{N-1}{N}\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{N-1} & \dots & -\frac{1}{N-1} \\ -\frac{1}{N-1} & 1 & \dots & -\frac{1}{N-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{1}{N-1} & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}. \tag{26}$$

При действии на систему одной внешней помехи типа плоской волны, приходящей с направления θ_1, корреляционная матрица входных сигналов $\mathbf{R}_{xx}$ может быть представлена в виде

$$\mathbf{R}_{xx} = \eta_0^2\,(\mathbf{I} + \nu_1\vec{S}_1^*\vec{S}_1^{\mathrm{T}}), \tag{27}$$

где η_0^2 — аддитивная мощность собственного шума ААР, ν_1 — относительная мощность помехи, $\vec{S}_1$ — вектор-фазор помехи.

Стационарное среднее значение вектора весовых коэффициентов с учетом флуктуаций найдем, подставляя (6) в (1) и используя (24), (27):

$$\vec{W}_{\mathrm{st}} = \frac{(1+\nu_1' N)\,\vec{S}^* - \nu_1' N f(U_1)\vec{S}_1^*}{N\,(1+\nu_1' N\,[1-|f(U_1)|^2])}\,, \tag{28}$$

где $\nu_1' = \nu_1\gamma'\eta_0^2/(1+\gamma'\eta_0^2)$, $\gamma' = \gamma\,[1-\alpha\gamma\,\mathrm{Sp}(\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx})/2]$, $f(U_1)$ — нормированная диаграмма направленности равноамплитудной антенной решетки (в зависимости от угла θ_1 прихода помехи, $U_1 = \pi\sin(\theta_1)$), сфазированной на нормально падающую волну.

В этой формуле с помощью скалярного множителя $\gamma'\eta_0^2/(1+\gamma'\eta_0^2)$ учитывается смещение среднего значения $\vec{W}_{\mathrm{st}}$ из-за неидеальности интегрирующих фильтров в цепи обратной связи (конечности коэффициента усиления γ) и флуктуаций весовых коэффициентов. При выполнении условия (10) обеими этими поправками, очевидно, можно пренебречь. Для простоты будем всюду ниже полагать, что условие (10) выполнено.

Суммарная мощность сигнала на выходе ААР без учета флуктуаций весовых коэффициентов для рассматриваемого примера будет равна

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{out}} &= \langle |Z|^2\rangle_0 = \eta_0^2\nu_s|\vec{S}^{\mathrm{T}}\vec{W}_{\mathrm{st}}|^2 + \vec{W}_{\mathrm{st}}^+\mathbf{R}_{xx}\vec{W}_{\mathrm{st}} = \\ &= P_s + \frac{\eta_0^2\,(1+\nu_1 N)}{N\,(1+\nu_1 N\,[1-|f(U_1)|^2])}, \end{aligned} \tag{29}$$

где $P_s = \eta_0^2\nu_s$ — мощность полезного сигнала, ν_s — относительная мощность полезного сигнала. Подставляя выражения (26) и (29) в (18), легко получить и явное выражение для корреляционной матрицы $\mathbf{K}_{\tilde{W}}$:

$$\mathbf{K}_{\tilde{W}} = \left\langle \vec{\tilde{W}}^*\vec{\tilde{W}}^{\mathrm{T}}\right\rangle = \frac{\alpha\gamma}{2}\,\langle |Z|^2\rangle_0\,\frac{N-1}{N}\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{N-1} & \dots & -\frac{1}{N-1} \\ -\frac{1}{N-1} & 1 & \dots & -\frac{1}{N-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{1}{N-1} & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}. \tag{30}$$

Из (30) следует, что весовые коэффициенты имеют отрицательный коэффициент взаимной корреляции $r = -1/(N-1)$, который не зависит от действующих на систему помех, и одинаковые дисперсии

$$\sigma_W^2 = \frac{\alpha\gamma}{2}\,\langle |Z|^2\rangle_0\,\frac{N-1}{N}\,, \tag{31}$$

зависимость которых от синуса угла прихода помехи θ_1 повторяет (29) и показана на рис. 2. Полуширина главного лепестка невозмущенной ДН решетки для всех приводимых здесь и ниже графиков равна

$U = 0{,}1\,\pi$, что соответствует 20-ти элементной линейной антенной решетке с расстоянием между элементами, равными половине длины волны. Из рисунка видно, что флуктуации весовых коэффициентов резко возрастают, когда направление прихода помехи приближается к направлению ограничений ($\theta_1 \approx 0$). При всех остальных углах прихода помехи дисперсия флуктуаций весовых коэффициентов близка к минимальному уровню $(\sigma_W^2)_{\min}$. Это объясняется тем фактом, что σ_W^2 пропорциональна величине выходной мощности ААР $\langle |Z|^2\rangle_0$ (см. (29), (31)), которая принимает максимальное значение, когда помеха поступает с направления ограничений и ее подавления не происходит. Максимальный и минимальный уровни флуктуаций определяются выражениями

$$\begin{aligned}(\sigma_W^2)_{\max} &= \frac{\alpha\gamma}{2}\frac{N-1}{N}\eta_0^2\left(\nu_s+\nu_1+\frac{1}{N}\right),\\ (\sigma_W^2)_{\min} &= \frac{\alpha\gamma}{2}\frac{N-1}{N}\eta_0^2\left(\nu_s+\frac{1}{N}\right).\end{aligned}$$

Как следует из (11), относительная величина “перекомпенсации"и помехи, и полезного сигнала определяется суммарной эффективной мощностью входных сигналов, пропорциональной $\gamma\,\mathrm{Sp}(\mathbf{PR}_{xx})$. Используя (26) и (27), несложно найти

$$\mathrm{Sp}(\mathbf{PR}_{xx}) = \eta_0^2\left(N-1+\nu_1 N\left[1-|f(U_1)|^2\right]\right). \qquad (32)$$

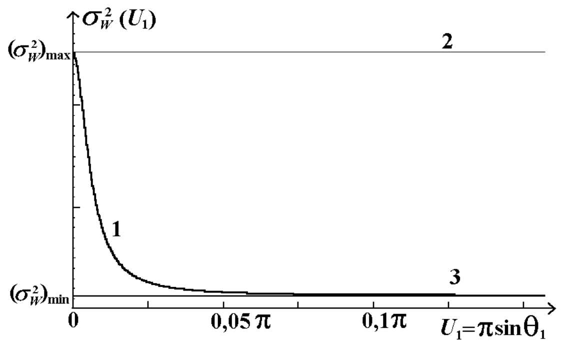

Рис. 2. Зависимость дисперсии σ_W^2 весовых коэффициентов в ААР с однократными линейными ограничениями на ДН от угла прихода помехи ($\eta_0^2 = 1$, $\nu_s = 0{,}5$, $\nu_1 = 10$): 1 — график зависимости дисперсии весовых коэффициентов от угла прихода помехи; 2 — максимальный уровень флуктуаций весовых коэффициентов; 3 — минимальный уровень флуктуаций весовых коэффициентов

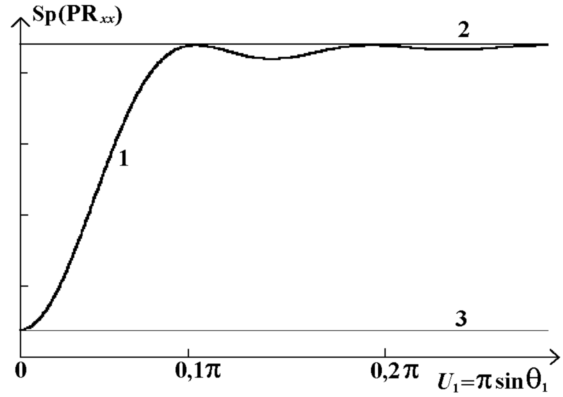

Рис. 3. Зависимость эффективной мощности входных сигналов $\mathrm{Sp}(\mathbf{PR}_{xx})$ в ААР с однократными ограничениями от угла прихода помехи: 1 — график зависимости эффективной мощности от угла прихода помехи; 2 — максимальный уровень эффективной мощности $\mathrm{Sp}(\mathbf{PR}_{xx})_{\max} = \eta_0^2(N-1+\nu_1 N)$; 3 — минимальный уровень эффективной мощности $\mathrm{Sp}(\mathbf{PR}_{xx})_{\min} = \eta_0^2\,(N-1)$

Изменение этой величины от угла прихода помехи приведено на рис. 3. Сравнение зависимостей (11), (13), (31) и (32) (см. рис. 2 и 3) показывает, что эффект "перекомпенсации"сказывается сильнее (в $\nu_1 N$ раз) при действии внешней помехи вне "защищенного"главного лепестка ДН, хотя сама помеха при этом подавляется хорошо и флуктуации весов относительно малы. Как уже отмечалось ранее (см. замечание в конце п. 1), в этом случае "перекомпенсация"практически уменьшает и искажает только полезный сигнал.

Вид флуктуационной ДН для ААР с однократными ограничениями найдем, подставив (26) в (20):

$$g_{\tilde W}(U) = \frac{\alpha\gamma}{2}\langle |Z|^2\rangle_0 N\left[1 - |f(U)|^2\right]. \quad (33)$$

На рис. 4 приведена $g_{\tilde W}(U)$. Как видно из рисунка, $g_{\tilde W}(U)$ не является изотропной (в направлении полезного сигнала она равна нулю) и достигает максимального значения вне главного лепестка невозмущенной ДН (при $|U| \geq 0{,}1\,\pi$). Форма $g_{\tilde W}(U)$ определяется видом проекционной матрицы $\mathbf{P}$ и не зависит от действующих помех, а величина ее прямо пропорциональна σ^2_W и поэтому зависит от угла θ_1 прихода помехи (при фиксированном ν) аналогично (29), (31) (см. рис. 2 и 4).

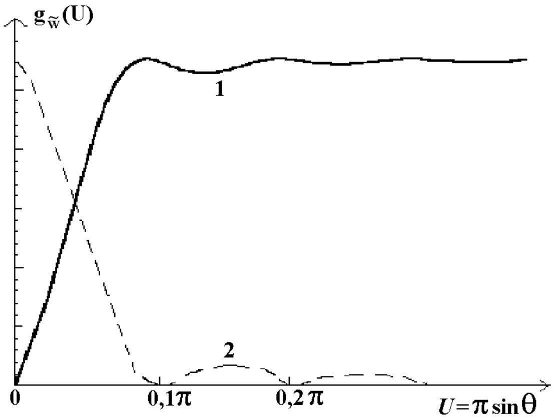

Рис. 4. Качественное сравнение флуктуационной и невозмущенной диаграмм направленности ААР с однократными ограничениями: 1 — флуктуационная диаграмма направленности; 2 — форма невозмущенной диаграммы направленности (в существенно меньшем масштабе)

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 97–02–16525, 96–15–96718) и INTAS (грант 96–2352).

ЛИТЕРАТУРА

1. Brennan L. E., Pugh E. L., Reed I. S. // IEEE Trans. 1971. V. AES-7, № 2. P. 254.
2. Уидроу Б. и др. // ТИИЭР. 1976. Т. 64, № 8. С. 37.
3. Фединин В. В. // Радиотехника и электроника. 1982. Т. 27, № 8. С. 1548.
4. Widrow B. et al. // IEEE Trans. 1982. V. AP-30, № 3. P. 469.
5. Su Y. L., Shan T. J., Widrow B. // IEEE Trans. 1986. V. AP-34, № 3. P. 347.
6. Уидроу Б., Стирнз С. Адаптивная обработка сигналов. — М.: Радио и связь, 1989. — 440 с.
7. Krolik J. L., Swingler D. N. // IEEE Trans. 1994. V. AP-42, № 2. P. 445.
8. Yu S. J., Lee J. H. // IEEE Trans. 1996. V. AP-44, № 5. P. 665.
9. Bevan D. D. N., Ermolayev V. T., Flaksman A. G. // IEE Proc., Radar, Sonar and Navigation. 1998. V. 145, № 1.
10. Игнатенко С. В., Мальцев А. А. // Изв. вуз. Радиофизика. 1994. Т. 37, № 12. С. 1532.
11. Мальцев А. А., Зимина С. В. // Изв. вуз. Радиофизика. 1999. Т. 42, № 9. С. 914.
12. Мальцев А. А., Зимина С. В. // Изв. вуз. Радиофизика. 1999. Т. 42, № 10. С. 1013.
13. Монзинго Р. А., Миллер Т. У. Адаптивные антенные решетки. / Пер. с англ.; Под ред. В. А. Лексаченко. — М.: Радио и связь, 1986.

14. Королев И. А., Мальцев А. А., Черепенников В. В. // Изв. вуз. Радиофизика. 1987. Т. 31, № 9. С. 1141.
15. Мальцев А. А. // Изв. вуз. Радиофизика. 1987. Т. 31, № 8. С. 1013.

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, г. Н. Новгород, Россия

Поступила в редакцию 20 августа 1999 г.

INFLUENCE OF WEIGHT-COEFFICIENT FLUCTUATIONS ON CHARACTERISTICS OF ADAPTIVE ANTENNA ARRAYS

A. A. Mal'tsev and S. V. Zimina

We analyze theoretically the influence of weight-coefficient fluctuations on characteristics of adaptive antenna arrays (AAA) with gradient algorithms under the assumption that useful signal and interference have different correlation times. We obtain the formulas for correlation function and spectral power density of the AAA output signal, find the average angular pattern (AP), and derive expression for the correlation matrix of weight-coefficient fluctuations. It is shown that weight-coefficient fluctuations distort useful signal and decrease its power at the output as compared to the case where there are no fluctuations. This "overcompensation" effect is seen in the frequency range as the depression of the output-signal spectrum of the antenna array in the frequency band where a powerful interference exists. As an example, we calculate spectral power density of the output signal of AAA with single linear restrictions and present the plots of fluctuation AP and dispersion of weight-coefficient fluctuations versus the angle of interference arrival.